UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

Instituto de Física y Matemáticas

Tesis

Cálculo del corrimiento al rojo/azul de fotones emitidos por partículas masivas en órbitas geodésicas con excentricidad general que orbitan alrededor de un objeto compacto, estático, simétricamente esférico y cargado

Para obtener el grado de Maestría en el Área de la Física

Autor:
Ulises Bruno Lozano

Asesor:
Dr. Ulises Nucamendi Gómez

Co-Asesor:
Dr. Ricardo Becerril Bárcenas

ENERO 2025
Morelia, Michoacán, México

Agradecimientos...

ברוך אתה יהוה אלהינו מלך העולם שהכל נהיה בדברו

Gracias a *Adonai nuestro Elohim* por Todo lo que ha Formado y ha Creado con su Palabra. Tanto la Luz como la Oscuridad, la Paz y la Guerra, pues su Perfección abarca y constituye la Unidad Absoluta de Todas las Cosas.

Gracias a mi madre Reyna Lozano Carrizales y a mi esposa Nancy Cuenca Ayala, por acompañarme y fortalecerme.

Gracias a mis asesores Ulises Nucamendi Gómez y Ricardo Becerril Bárcenas por su guía y por sus enseñanzas.

Gracias a los profesores que me compartieron sus conocimientos y sabiduría durante el desarrollo de este trabajo: Pablo Genaro Martínez Torres, Juan Carlos Arteaga Velázquez, Thomas Zannias y Adnan Bashir.

Gracias a mi alma mater UMSNH por su generosa y nutritiva enseñanza que ha sido una de las columnas en mi formación como ser humano y al IFM por hospedarme en su seno y permitirme profundizar en mis estudios.

Gracias al CONAHCYT por confiar en mí y darme la oportunidad de desarrollarme como un ser humano más completo, capaz de retribuir y de contribuir con una mejor sociedad en mi pais.

יראת יהוה ראשית דעת חכמה מוסד אוילים בזו

Proverbios 1:7

Índice general

1. Introducción **2**

2. Formalismo Matemático **5**
2.1. Caracterización de las Órbitas 5
2.2. Caracterización de las Órbitas de los Fotones 12
2.3. Corrimiento al Rojo/Azul 13
2.4. Dependencia del ángulo φ como función de χ 15
2.5. Corrimiento total y cosmológico 16

3. Resultados **17**
3.1. Condiciones 17
3.2. Consideraciones 17
3.3. Gráficas 18

4. Conclusiones **24**

A. Algoritmo 2D **25**

B. Algoritmo 3D **27**

Bibliografía **29**

.

Resumen

En esta tesis, se expresa el corrimiento al rojo/azul $z_{\pm}$ de los fotones emitidos por partículas que se mueven en trayectorias geodésicas con excentricidad general e entorno a un objeto compacto, en función de la masa del mismo, su carga y el semi eje mayor de la órbita analizada. Se parametrizan dichas órbitas por medio del llamado semi lactus rectum P y un parámetro angular χ. Esto permite desarrollar una descripción puramente geométrica en el marco de la Relatividad General del corrimiento $z_{\pm}$ causado por el objeto Central.

Se grafican los resultados utilizando como base los datos observados para el objeto candidato a agujero negro en el centro de la Vía Láctea, $Sgt.A*$, y dos de las estrellas que lo orbitan ($S1$ y $S14$), tomándolos como si se encontraran en el plano ecuatorial. Además, se observa el efecto esperado para una supuesta órbita circular.

Abstract

In this thesis, the red/blue shift $z_{\pm}$ of the photons emitted by particles moving in geodesic trajectories with general eccentricity e around a compact object is expressed as a function of its mass, its charge and the semi major axis of the analyzed orbit. These orbits are parameterized by means of the so-called semi lactus rectum P and an angular parameter χ. This allows us to develop a purely geometric description within the framework of General Relativity of the shift $z_{\pm}$ caused by the Central object.

The results are plotted using as a basis the data observed for the black hole candidate object in the center of the Milky Way, $Sgt.A*$, and two of the stars that orbit it ($S1$ and $S14$), taking them as if they were in the equatorial plane. Furthermore, the effect expected for a supposed circular orbit is observed.

Palabras clave: Sgt. A*, corrimiento al rojo, Reissner Nordstrom, masa, agujeros negros

Capítulo 1

Introducción

El pesaje del Corazón, Papiro de Ani. [1]

‹‹ El Universo es una Geometría Viviente ››

Kepler

En el estudio del cosmos se han desarrollado diversas técnicas [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8] para calcular órbitas, diámetros, distancias, masas, edades e incluso la composición de los objetos que nos acompañan en esta hermosa vastedad aparentemente infinita que llamamos Universo. Aunque la Relatividad General de Einstein fundamentó la estructura matemática del

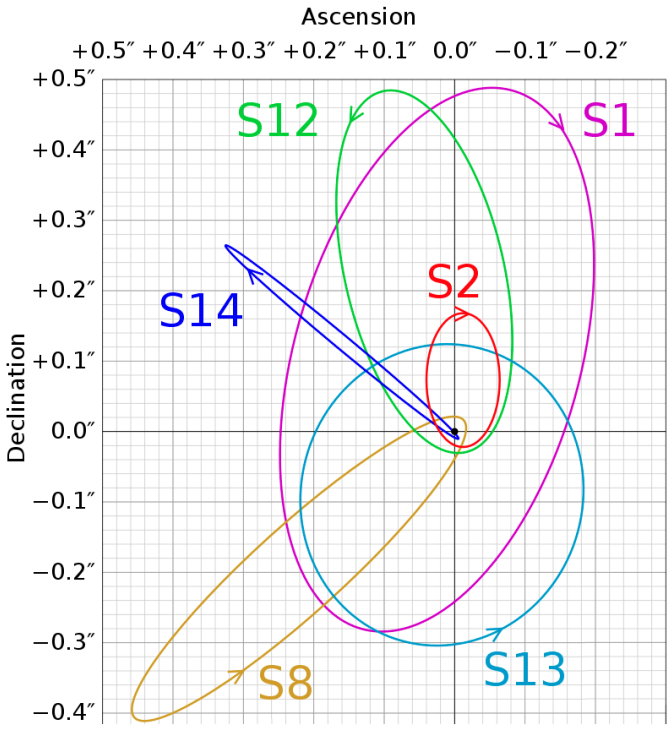
espacio-tiempo desde hace ya más de un siglo, debido a las *enormes* magnitudes que se presentan en el Universo, ha sido más práctico, aunque no más preciso, utilizar aproximaciones y ajustes post-Newtonianos y estadísticos en la mayoría de las descripciones de los objetos astronómicos.

Sin embargo, el formalismo desarrollado por Alfredo Herrera Aguilar y Ulises Nucamendi Gómez [9] es estrictamente relativista y es capaz de predecir la masa de agujeros negros a partir del corrimiento de la luz emitida por las estrellas (o cuásares) que los orbitan. Esto es posible debido a que, describiendo la órbita de una partícula masiva y compacta en torno a cierto objeto, en términos de la métrica del mismo, es posible también describir la frecuencia que tendrán los fotones emitidos por dicha partícula, en términos de la trayectoria geodésica que seguirán. Así pues, la masa del objeto central es descrita en términos puramente geométricos a través de su propia métrica y del corrimiento de la frecuencia de los fotones al momento de ser emitidos (rojo si es emitido al alejarse de nosotros o azul al acercarse). El efecto de la expansión del universo es incluido en este corrimiento cinemático en la sección 2.5.

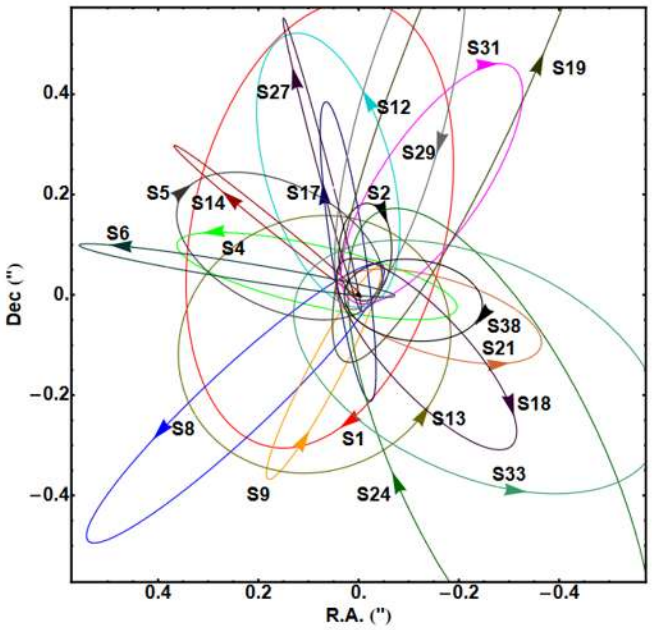
A lo largo de los años, Nucamendi et al. [10], [11], [12], [13] han trabajado con diversas métricas que describen agujeros negros, desde Schwarzchild, Reissner-Nordstrom, naturalmente Kerr e incluso con la llamada métrica de Bonnor, entre otros, acotando los valores posibles de sus masas y sus corrimientos. En dichos trabajos, las órbitas de las partículas masivas han sido tomadas como *circulares*, lo cual permitía omitir el término de la velocidad radial. En la presente tesis, se aplicará el mismo formalismo a una métrica de Reissner-Nordstrom, *pero* tomando en cuenta órbitas con *excentricidad* distinta a cero.

La principal motivación de esto subyace en el hecho de que varias de las órbitas de estrellas en torno al objeto Sagitario A* en el centro de nuestra galaxia, medidas a lo largo de las últimas décadas, son en su mayoría elípticas con excentricidades cercanas a la unidad [14], [15], [16], lo cual indica que se deben esperar excentricidades no nulas para una descripción más completa de este fenómeno.

Naturalmente, el objetivo a largo plazo es describir de manera precisa el comportamiento de objetos cada vez más *realistas*, lo cual incrementa la complejidad de los cálculos en gran manera. Por ejemplo, para describir el corrimiento de la luz emitida por estrellas alrededor del objeto de Kerr, el momento angular no se conservará, y eso se manifestará como un término mucho más intrincado que los aquí tratados. Sin embargo, este humilde paso en el formalismo Herrera-Nucamendi, *de órbitas circulares a órbitas con excentricidad*, es necesario en dicho camino.



(a) Orbitas de seis de las estrellas que orbitan Sgt. A* [16], [17]



(b) Una visión de las orbitas de más estrellas entorno a Sgt. A* [14]

Capítulo 2

Formalismo Matemático

Se emplearán coordenadas (r, t, θ, φ) en un espacio-tiempo esféricamente simétrico, no-rotante, con carga y estático, con una métrica en función del radio r. Se utilizará la convención de signatura $(-, +, +, +)$.

Se omitirá la torsión del espacio-tiempo, y, por lo tanto, los símbolos de Christoffel poseen simetría en los índices inferiores, de tal manera que $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\mu}_{\beta\alpha}$. Por otro lado, al no rotar, la métrica es puramente diagonal, es decir, $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} = 0$ para $\nu \neq \mu$. La notación $g^{\mu\nu}$ representa las componentes del tensor métrico contravariante, obtenidas de la matriz inversa de $g_{\mu\nu}$. También se asume la notación $x^{\mu} = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (r, t, \theta, \varphi)$ para las coordenadas.

Se utilizarán unidades geometrizadas; es decir, en las que la velocidad de la luz en el vacío, c, la permitividad del vacío, ϵ_0, y la constante gravitacional, G, son iguales a la unidad $c = G = \epsilon_0 = 1$. En unidades geométricas, cada intervalo de tiempo se interpreta como la distancia recorrida por la luz durante ese intervalo de tiempo dado, es decir, un segundo luz es igual a 299792458 m., por lo que el tiempo tiene las unidades de longitud. Esto es consistente con la noción de que, en la teoría de la relatividad general, el tiempo y el espacio son dimensiones similares, al formar parte de una variedad cuatridimensional. Además, las cantidades conservadas que se utilizaran, por ejemplo, la energía, serán definidas por unidad de masa de la partícula de prueba m, es decir $E = \dfrac{\tilde{E}}{m}$.

2.1. Caracterización de las Órbitas

La métrica de Reissner-Nordstrom [18] es una generalización de la solución de Schwarzschild, que describe el campo gravitatorio de un cuerpo esféricamente simétrico, estático y sin rotación, pero que añade una carga q:

$$ds^2 = g_{tt}(r)dt^2 + g_{rr}(r)dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + sen^2\theta d\varphi^2\right) \tag{2.1}$$

donde los coeficientes son:

$$\begin{aligned} g_{tt}(r) = & -\left[1 - \frac{2M}{r} + \frac{q^2}{r^2}\right] \\ g_{rr}(r) = & \left[1 - \frac{2M}{r} + \frac{q^2}{r^2}\right]^{-1} \end{aligned} \tag{2.2}$$

Un campo vectorial de Killing deja invariante al tensor métrico. Esto significa que la derivada de Lie del tensor métrico con respecto a dicho campo, se anula. Así pues, los vectores de Killing son herramientas útiles porque se pueden usar para definir cantidades conservativas.

El producto de un vector de Killing de tipo tiempo con el momento de una partícula se interpreta como la energía conservada de la misma. Esto se debe a que tal producto se transporta en paralelo a lo largo de la trayectoria geodésica de la partícula.

El cuadrado de la norma del vector de Killing *tipo tiempo* $\epsilon = \dfrac{\partial}{\partial t}$ debe de, por definición, ser negativa, i.e. $\epsilon_\mu \epsilon^\mu < 0$. Dado a que dicho producto es igual a $\epsilon_\mu \epsilon^\mu = g_{\mu\nu}\epsilon^\mu \epsilon^\nu = g_{tt}$, esta condición se cumple solamente si:

$$\left[1 - \frac{2M}{r} + \frac{q^2}{r^2}\right] > 0 \tag{2.3}$$

Es decir:

$$r^2 - 2Mr + q^2 > 0 \tag{2.4}$$

Siempre que la masa sea mayor a la carga ($M > q$), esta condición genera dos Horizontes:

$$R_\pm = M \pm \sqrt{M^2 - q^2} \tag{2.5}$$

El horizonte interior es llamado *horizonte de Cauchy* [19], cuyas propiedades son extraordinarias y van más allá [20], [21] de los alcances de esta tesis; mientras que el horizonte exterior es simplemente llamado *horizonte de eventos*, que se define como la región del Espacio-Tiempo en donde la coordenada temporal se vuelve infinitamente dilatada, lo que significa que para un observador externo, los relojes de un objeto que cruza dicha región se ralentizan indefinidamente.

Una vez que un objeto o partícula cruza el horizonte de eventos desde el exterior hacia el interior, inevitablemente se dirige hacia el centro del agujero negro, conocido como la singularidad.

En ambos horizontes, la norma del vector de Killing es nula ($\epsilon_\mu \epsilon^\mu|_{r_\pm} = 0$). Naturalmente, únicamente nos interesa la región $r > R_+$.

El momento lineal de una partícula con masa m es $P^\mu = m\ U^\mu$ donde U^μ es su campo de velocidades. Proyectándolo en el campo vectorial de Killing ϵ_μ obtenemos:

$$P^\mu \epsilon_\mu = g_{\mu\nu} P^\mu \epsilon^\mu = g_{tt} P^t \epsilon^t = g_{tt} P^t = -m\ U^t \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{q^2}{r^2}\right) \tag{2.6}$$

Que definimos como la Energía de la partícula:

$$-\tilde{E} = P^\mu \epsilon_\mu \tag{2.7}$$

Esto nos permite obtener la componente temporal de la Velocidad en términos de cantidades conocidas:

$$U^t = \frac{E}{\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{q^2}{r^2}\right)} \tag{2.8}$$

Donde se expresa la cantidad de Energía por unidad de masa como $E = \dfrac{\tilde{E}}{m}$.

La simetría esférica del espacio-tiempo considerado, genera tres campos vectoriales de Killing de rotación adicionales $\mathcal{L}_i$, donde $i = x, y, z$ indica el eje en coordenadas cartesianas en torno al cual se realiza la rotación espacial.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_x &= -\cos\varphi\ \frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\ sen\varphi\ \frac{\partial}{\partial\varphi} \\ \mathcal{L}_y &= \ \ \operatorname{sen}\varphi\ \frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\ \cos\varphi\ \frac{\partial}{\partial\varphi} \\ \mathcal{L}_z &= \frac{\partial}{\partial\varphi} \end{aligned} \tag{2.9}$$

Proyectando el momento lineal de la partícula en el campo vectorial de Killing $\mathcal{L}_z$, esta cantidad también se conserva y la llamamos $\tilde{L_z}$, identificándola como un momento angular en la dirección z:

$$\tilde{L_z} = P^\mu \mathcal{L}_{z\mu} = g_{\mu\nu} P^\mu \mathcal{L}_z^\nu = g_{\varphi\varphi} P^\varphi = g_{\varphi\varphi}\ m\ U^\varphi \tag{2.10}$$

Lo cual permite obtener otra componente de la velocidad de la partícula en términos de cantidades conocidas:

$$U^{\varphi} = \frac{L_z}{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \tag{2.11}$$

Donde también el momento angular por unidad de masa se define como $L_z = \dfrac{\tilde{L_z}}{m}$.

Haciendo las correspondientes proyecciones del momento de la partícula en $\tilde{\mathcal{L}_x}$ y $\tilde{\mathcal{L}_y}$, obtenemos las cantidades L_x y L_y:

$$\begin{aligned} \tilde{L_x} &= P^{\mu}\mathcal{L}_{x\mu} = g_{\mu\nu}P^{\mu}\mathcal{L}_x^{\nu} = g_{\theta\theta}P^{\theta}\left(-\cos\theta\right) + g_{\varphi\varphi}P^{\varphi}\left(\cot\theta \operatorname{sen}\varphi\right) \\ \tilde{L_y} &= P^{\mu}\mathcal{L}_{y\mu} = g_{\mu\nu}P^{\mu}\mathcal{L}_y^{\nu} = g_{\theta\theta}P^{\theta}\left(\ \operatorname{sen}\theta\right) + g_{\varphi\varphi}P^{\varphi}\left(\cot\theta\cos\varphi\right) \end{aligned} \tag{2.12}$$

Es decir:

$$\begin{aligned} \tilde{L_x} &= -r^2\cos\theta P^{\theta} + r^2\operatorname{sen}^2\theta\cot\theta\operatorname{sen}\varphi P^{\varphi} \\ \tilde{L_y} &= \ \ r^2\operatorname{sen}\theta P^{\theta} + r^2\operatorname{sen}^2\theta\cot\theta\cos\varphi\ P^{\varphi} \end{aligned} \tag{2.13}$$

Definiendo el cuadrado de la cantidad de momento angular total $\tilde{L^2}$ como:

$$\tilde{L}^2 = \tilde{L_x^2} + \tilde{L_y^2} + \tilde{L_z^2} \tag{2.14}$$

O en términos de los momentos por unidad de masa $L_i = \dfrac{\tilde{L_i}}{m}$:

$$L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 \tag{2.15}$$

Obtenemos, utilizando (2.13):

$$L^2 = r^4\left[(P^{\theta})^2 + \operatorname{sen}^2\theta\ (P^{\varphi})^2\right] \tag{2.16}$$

Usando el momento lineal P^{φ} de (2.10) en términos del momento angular L_z, podemos expresar la velocidad polar U^{θ} como:

$$U^{\theta} = \pm\frac{\sqrt{L^2\operatorname{sen}^2\theta - L_z^2}}{r^2\operatorname{sen}\theta} \tag{2.17}$$

Para calcular la componente radial de la velocidad de la partícula que orbita al objeto de Reissner-Nordstrom, podemos utilizar la Condición de Normalización del momento lineal. Esta condición nos indica que $P_{\mu}P^{\mu} = -m^2c^2$ o en unidades geometrizadas $P_{\mu}P^{\mu} = -m^2$. Esta cantidad es una invariante relativista:

$$P^{\mu}P_{\mu} = -m^2c^2 = m^2U^{\mu}U_{\mu} \tag{2.18}$$

Entonces, en términos de la métrica y usando unidades geometrizadas:

$$U^\mu U_\mu = g_{\mu\nu}U^\mu U^\nu = g_{tt}(U^t)^2 + g_{rr}(U^r)^2 + g_{\theta\theta}(U^\theta)^2 + g_{\varphi\varphi}(U^\varphi)^2 = -1 \tag{2.19}$$

Despejando U^r y utilizando las velocidades obtenidas en (2.8), (2.11) y (2.17), así como los coeficientes de la métrica, obtenemos:

$$U^r = \pm\sqrt{E^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{q^2}{r^2}\right)\left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right)} \tag{2.20}$$

Para el caso particular de la métrica de Reissner Nordstrom, el momento angular se conserva y por ello elegimos describir el movimiento de la partícula en un plano ecuatorial con θ constante, es decir, $U^\theta = 0$. Para describir una órbita acotada de la partícula masiva en torno a dicho objeto, se utilizará un radio mínimo r_- (Pericentro) y un radio máximo r_+(Apocentro).

Para caracterizar estas posiciones se utilizarán las expresiones:

$$\begin{aligned} r_- &= \frac{P}{1+e} \\ r_+ &= \frac{P}{1-e} \end{aligned} \tag{2.21}$$

donde e es la excentricidad de la órbita y P es el semi lactus rectum, el cual se define como *«la mitad de la cuerda a través de un foco paralelo a la directriz de una sección cónica»*[22].

Definiendo por conveniencia a la energía por unidad de masa como $E = \sqrt{1 + 2\mathcal{E}}$ y un potencial efectivo $\mathcal{V}(r)$ dado por:

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2}\left[\frac{L^2}{r^2}\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{q^2}{r^2}\right) - \frac{2M}{r} + \frac{q^2}{r^2}\right] \tag{2.22}$$

Es posible reescribir la velocidad radial (2.20) como:

$$(U^r)^2 = 2(\mathcal{E} - \mathcal{V}) \tag{2.23}$$

Esta forma se asemeja a la energía de una partícula ficticia moviéndose en una dimensión espacial, en términos de su velocidad cinética y un potencial.

Tanto en el pericentro r_- como en el apocentro r_+, la velocidad radial se anula, puesto que son los puntos de retorno de la órbita (i.e. $U^r|_{r_-,r_+} = 0$):

$$(U^r)^2\big|_{r_-,r_+} = 2\mathcal{E} + \frac{2M}{r} - \frac{(L^2+q^2)}{r^2} + \frac{2ML^2}{r^3} - \frac{q^2L^2}{r^4}\bigg|_{r_-,r_+} = 0 \tag{2.24}$$

Sean r_0, r_1, r_- y r_+ las raíces de dicha ecuación y sea k una constante proporcional. Podemos expresar entonces el polinomio (2.24) como:

$$k\left[\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_-}\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_+}\right)\right] = 0 \tag{2.25}$$

Y desarrollándolo:

$$\begin{aligned} k\Bigg[&\frac{1}{r^4} - \frac{1}{r^3}\left(\frac{1}{r_-}+\frac{1}{r_+}+\frac{1}{r_0}+\frac{1}{r_1}\right) + \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{r_-r_+} + \left(\frac{1}{r_0}+\frac{1}{r_1}\right)\left(\frac{1}{r_-}+\frac{1}{r_+}\right) + \frac{1}{r_0r_1}\right) \\ &- \frac{1}{r}\left(\frac{1}{r_-r_+}\left(\frac{1}{r_0}+\frac{1}{r_1}\right) + \frac{1}{r_0r_1}\left(\frac{1}{r_-}+\frac{1}{r_+}\right)\right) + \frac{1}{r_0r_1r_-r_+}\Bigg] = 0 \end{aligned} \tag{2.26}$$

Entonces podemos igualar los coeficientes de (2.24) y (2.26), obteniendo cinco ecuaciones:

$$\begin{aligned} k &= -q^2L^2 \\ 2ML^2 &= -k\left(\frac{1}{r_-}+\frac{1}{r_+}+\frac{1}{r_0}+\frac{1}{r_1}\right) \\ L^2+q^2 &= -k\left(\frac{1}{r_-r_+} + \left(\frac{1}{r_0}+\frac{1}{r_1}\right)\left(\frac{1}{r_-}+\frac{1}{r_+}\right) + \frac{1}{r_0r_1}\right) \\ 2M &= -k\left(\frac{1}{r_-r_+}\left(\frac{1}{r_0}+\frac{1}{r_1}\right) + \frac{1}{r_0r_1}\left(\frac{1}{r_-}+\frac{1}{r_+}\right)\right) \\ 2\mathcal{E} &= \frac{k}{r_0r_1r_-r_+} \end{aligned} \tag{2.27}$$

Sustituyendo (2.21) en dichas expresiones, obtenemos el momento angular, la masa del objeto central y la energía en términos de la excentricidad y el parámetro P:

$$L^2 = \frac{P^2(MP-q^2)}{P^2-(MP-q^2)(3+e^2)-(1-e^2)q^2} \tag{2.28}$$

$$\mathcal{E} = -\left(\frac{1-e^2}{2P^2}\right)\left(MP - \frac{P^2(1-e^2)(MP-q^2)^2}{P^2-(MP-q^2)(3+e^2)-(1-e^2)q^2}\right) \tag{2.29}$$

$$M = \frac{L^2\left[P^2+2q^2(1+e^2)\right]+q^2P^2}{P[P^2+L^2(3+e^2)]} \tag{2.30}$$

Sustituyendo la masa (2.30) en el potencial efectivo (2.22) y desarrollando la velocidad radial (2.23) se obtiene:

$$\begin{aligned}\frac{(U^r)^2}{2} = L^2\Bigg[&-\frac{q^2}{2r^4}+\frac{M}{r^3}-\frac{1}{2r^2}+\frac{1}{r}\left(\frac{2q^2(1+e^2)}{P^3}-\frac{M(3+e^2)}{P^2}+\frac{1}{P}\right)\\&+\frac{q^2}{2P^4}(e^4+2e^2-3)+(1-e^2)\left(\frac{2M}{P^3}-\frac{1}{2P^2}\right)\Bigg]\\&-q^2\left(\frac{1}{2r^2}-\frac{1}{rP}+\frac{(1-e^2)}{2P^2}\right)\end{aligned} \tag{2.31}$$

Ahora que el apocentro y el pericentro están en términos del Semi lactus Rectum P y la excentricidad e, es posible parametrizar el recorrido de la partícula masiva en términos de un parámetro angular $\chi \in [0, 2\pi)$ como:

$$r(\chi) = \frac{P}{1+e\cos\chi} \tag{2.32}$$

Entonces, la velocidad radial es:

$$\begin{aligned}\frac{(U^r)^2}{2} = \frac{L^2}{2P^3}\Bigg[&e^2\,\mathrm{sen}^2\,\chi\,(P-2M(3+e\cos\chi))\\&+\frac{q^2e^2}{P}\left(e^2(1-\cos^4\chi)+\mathrm{sen}^2\,\chi(6+4e\cos\chi)\right)\Bigg]+\frac{q^2e^2\,\mathrm{sen}^2\,\chi}{2P^2}\end{aligned} \tag{2.33}$$

Sustituyendo el momento angular L^2 de la expresión (2.28), obtenemos finalmente las velocidades parametrizadas; la temporal de (2.8), la velocidad azimutal de (2.11) y la radial de (2.33):

$$(U^t)^2 = \frac{P^4+2P^2q^2(1+e^2)+q^4(1-e^2)^2+4MP\left[(1-e^2)(MP-q^2)-P^2\right]}{P^2\left[P^2-(MP-q^2)(3+e^2)-(1-e^2)q^2\right]\left[1-\frac{2M}{P}(1+e\cos\chi)+\frac{q^2}{P^2}(1+e\cos\chi)^2\right]^2} \tag{2.34}$$

$$(U^\varphi)^2 = \frac{(MP-q^2)(1+e\cos\chi)^4}{P^2\left[P^2-(MP-q^2)(3+e^2)-(1-e^2)q^2\right]} \tag{2.35}$$

$$(U^r)^2 = \frac{MP - q^2}{P^2\left[P^2 - (MP - q^2)(3 + e^2) - (1 - e^2)q^2\right]}\left[P^2e^2 sen^2\chi\left(1 - \frac{2M}{P}(3 + e\cos\chi)\right)\right.$$
$$\left. + q^2e^2\left(e^2(1 - \cos^4\chi) + \text{sen}^2\,\chi(6 + 4e\cos\chi)\right)\right] + \frac{q^2e^2\,\text{sen}^2\,\chi}{P^2} \tag{2.36}$$

Recordando una vez más que se ha elegido $U^\theta = 0$ por conservación del momento angular total, i.e., el movimiento de la partícula se da en un plano que elegimos ecuatorial.

2.2. Caracterización de las Órbitas de los Fotones

Los fotones siguen órbitas geodésicas nulas, acordes a la ecuación $K^\mu K_\mu = 0$. Además, tomaremos el caso de que los fotones medidos fueron emitidos paralelos al plano ecuatorial de la órbita de la partícula masiva, por lo cual $\theta = \frac{\pi}{2}$ y en consecuencia también el momento polar del fotón será cero $K^\theta = 0$:

$$K^\mu K_\mu = g_{tt}(K^t)^2 + g_{rr}(K^r)^2 + g_{\varphi\varphi}(K^\varphi)^2 = 0 \tag{2.37}$$

Siguiendo un procedimiento similar al de las partículas masivas, podemos proyectar el vector de Killing tipo tiempo $\epsilon^\mu = (1, 0, 0, 0)$ con el momento de los fotones para obtener una cantidad conservada que identificamos como su energía E_γ :

$$\epsilon_\mu K^\mu = g_{tt}\epsilon^t K^t = g_{tt}K^t = -K^t\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{q^2}{r^2}\right) = -E_\gamma \tag{2.38}$$

Y el vector de Killing rotacional $\mathcal{L}_z^\mu = (0, 0, 0, 1)$ para obtener otra cantidad conservada que identificamos como el momento angular L_γ :

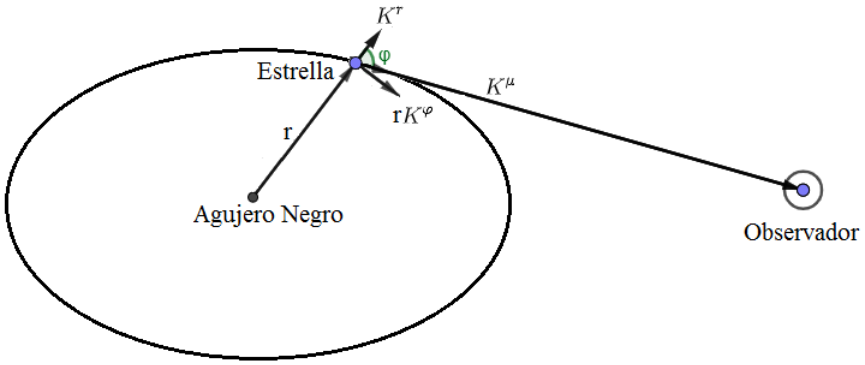
$$\mathcal{L}_{z\mu}K^\mu = g_{\varphi\varphi}\mathcal{L}_z^\varphi K^\varphi = g_{\varphi\varphi}K^\varphi = r^2K^\varphi = L_\gamma \tag{2.39}$$

Así, si despejamos la parte radial del momento de los fotones de la ecuación (2.37) y la expresamos en términos de estas cantidades conservadas, se obtiene:

$$(K^r)^2 = \frac{-g_{tt}(K^t)^2 - g_{\varphi\varphi}(K^\varphi)^2}{g_{rr}} = E_\gamma^2 - \frac{L_\gamma^2}{r^2}\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{q^2}{r^2}\right) \tag{2.40}$$

Usando las relaciones trigonométricas:

$$\begin{aligned} rK^\varphi &= Ksen\varphi \\ K^r &= Kcos\varphi \\ K^2 &= (K^r)^2 + (K^\varphi)^2 \end{aligned} \tag{2.41}$$



Se tiene la expresión adicional:

$$K^2 = E_\gamma^2 - \frac{L_\gamma^2}{r^2}\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{q^2}{r^2}\right) + \frac{L_\gamma^2}{r^2} \tag{2.42}$$

Mientras que (2.40) se vuelve:

$$K^2\cos^2\varphi = E_\gamma^2 - \frac{L_\gamma^2}{r^2}\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{q^2}{r^2}\right) = \cos^2\varphi\left[E_\gamma^2 - \frac{L_\gamma^2}{r^2}\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{q^2}{r^2}\right) + \frac{L_\gamma^2}{r^2}\right] \tag{2.43}$$

Ahora es posible definir el llamado parámetro de impacto aparente, como la razón del momento angular en la dirección z y la energía del fotón, $b_\gamma \equiv \dfrac{L_\gamma}{E_\gamma}$ [23].

Dividiendo (2.43) por el cuadrado de la energía del fotón:

$$1 - \frac{b_\gamma^2}{r^2}\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{q^2}{r^2}\right) = \cos^2\varphi\left[1 - \frac{b_\gamma^2}{r^2}\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{q^2}{r^2}\right) + \frac{b_\gamma^2}{r^2}\right] \tag{2.44}$$

de donde b_γ es:

$$b_\gamma = \pm\frac{r^2\,\mathrm{sen}\,\varphi}{\sqrt{r^2 + (q^2 - 2Mr)\,\mathrm{sen}^2\,\varphi}} \tag{2.45}$$

b_γ en términos de los parámetros de la órbita P y e, (2.32), es:

$$b_\gamma = \pm\frac{\left(\dfrac{P}{1 + e\cos\chi}\right)\mathrm{sen}\,\varphi}{\sqrt{1 + \mathrm{sen}^2\,\varphi\left[-\dfrac{2M}{P}\left(1 + e\cos\chi\right) + \dfrac{q^2}{P^2}\left(1 + e\cos\chi\right)^2\right]}} \tag{2.46}$$

2.3. Corrimiento al Rojo/Azul

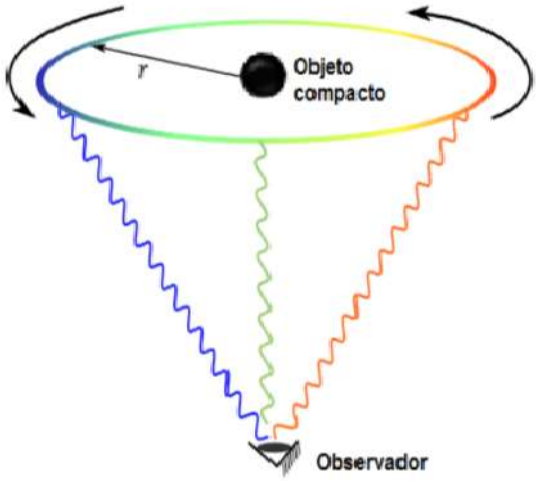
El corrimiento al rojo/azul se define como la razón de la frecuencia de los fotones emitida entre la detectada. En el plano ecuatorial tenemos:

$$1+z_{\pm}=\frac{\omega_e}{\omega_d}=\frac{-k_\mu U^\mu|_e}{-k_\mu U^\mu|_d}=\frac{\left(E_\gamma U^t-L_\gamma U^\varphi-g_{rr}U^rK^r\right)|_e}{\left(E_\gamma U^t-L_\gamma U^\varphi-g_{rr}U^rK^r\right)|_d} \tag{2.47}$$

Por conservación de la energía, $E_\gamma|_e=E_\gamma|_d$. Dividiendo tanto el numerador como el denominador por dicha cantidad, y usando la definición del parámetro de impacto aparente:

$$1+z_{\pm}=\frac{\left(U^t-b_\gamma U^\varphi-g_{rr}U^r\dfrac{K^r}{E_\gamma}\right)|_e}{\left(U^t-b_\gamma U^\varphi-g_{rr}U^r\dfrac{K^r}{E_\gamma}\right)_d} \tag{2.48}$$

El signo positivo/negativo del corrimiento es determinado si la fuente de emisión se aleja/acerca, el signo será positivo/negativo y se dice que el corrimiento será al rojo/azul.



Representación de la partícula masiva orbitando un objeto compacto. [12]

Podemos considerar que el detector se encuentra a una distancia d enorme del emisor, por lo cual la velocidad $U^\mu|_d\to(1,0,0,0)$ i.e.:

$$\lim_{d\to\infty}\left(U^t-b_\gamma U^\varphi-g_{rr}U^r\frac{K^r}{E_\gamma}\right)_d=1 \tag{2.49}$$

De esta manera se tiene que el corrimiento es:

$$1+z_{\pm}=\left(U^t-b_\gamma U^\varphi-g_{rr}U^r\frac{K^r}{E_\gamma}\right)|_e \tag{2.50}$$

El término $\dfrac{K^r}{E_\gamma}$ puede obtenerse de (2.40) con (2.32) y de (2.46):

$$\frac{K^r}{E_\gamma}=\frac{\cos\varphi}{\sqrt{1+sen^2\varphi\left(-\dfrac{2M}{P}(1+e\cos\chi)+\dfrac{q^2}{P^2}(1+e\cos\chi)^2\right)}} \tag{2.51}$$

Substituyendo esta expresión junto con las velocidades de la partícula masiva (2.34), (2.35) y (2.36), así como el parámetro de impacto (2.46) en el corrimiento al rojo/azul (2.50), se tiene:

$$1+z_{\pm}=\sqrt{\frac{P^4+2\left(1+e^2\right)P^2q^2+\left(1-e^2\right)^2q^4+4MP\left[-P^2+\left(1-e^2\right)\left(MP-q^2\right)\right]}{P^2\left(P^2-\left(1-e^2\right)q^2-\left(3+e^2\right)\left(MP-q^2\right)\right)\left(1-\frac{2M(1+e\cos\chi)}{P}+\frac{q^2(1+e\cos\chi)^2}{P^2}\right)^2}}$$
$$-\frac{P\sqrt{\frac{\left(MP-q^2\right)(1+e\cos\chi)^4}{P^2\left(P^2-\left(1-e^2\right)q^2-\left(3+e^2\right)\left(MP-q^2\right)\right)}}\operatorname{sen}\varphi}{(1+e\cos\chi)\sqrt{1+\left(-\frac{2M(1+e\cos\chi)}{P}+\frac{q^2(1+e\cos\chi)^2}{P^2}\right)\operatorname{sen}^2\varphi}}\mp\left(\cos\varphi\left[\left[\frac{e^2q^2\operatorname{sen}^2\chi}{P^2}+\left[(MP-q^2)\right.\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.\left.\left[e^2P^2\left(1-\frac{2M(3+e\cos\chi)}{P}\right)\operatorname{sen}^2\chi+e^2q^2(6+4e\cos\chi)\left(e^2((1-\cos^4\chi)+\operatorname{sen}^2\chi)\right)\right)\right]\right/$$
$$\left.\left.\left[P^2\left(P^2-(1-e^2)q^2-(3+e^2)(MP-q^2)\right)\right]\right]^{1/2}\right)\Bigg/$$
$$\left[\left(1-\frac{2M(1+e\cos\chi)}{P}+\frac{q^2(1+e\cos\chi)^2}{P^2}\right)\sqrt{1+\left(-\frac{2M(1+e\cos\chi)}{P}+\frac{q^2(1+e\cos\chi)^2}{P^2}\right)\operatorname{sen}^2\varphi}\right] \tag{2.52}$$

Es necesario notar que el signo $\pm$ del corrimiento está intrínsecamente relacionado con el cambio de signo de la velocidad radial (2.36), la cual es positiva en el dominio $[-\pi,0]$ y negativa en el dominio $[0,\pi]$. La velocidad radial U_r depende del ángulo χ debido a la parametrización (2.32).

2.4. Dependencia del ángulo φ como función de χ

El parámetro χ ayuda a rastrear la posición de la partícula masiva a lo largo de su órbita a través de la expresión (2.32). Lo que significa que el ángulo φ en la expresión del corrimiento al rojo/azul (2.52) depende de dicho parámetro también. Para encontrar tal relación, es posible partir de analizar el cambio de φ respecto a χ.

$$\frac{d\varphi}{d\chi}=\frac{d\varphi}{dr}\frac{dr}{d\chi}=\frac{\frac{d\varphi}{d\tau}}{\frac{dr}{d\tau}}\frac{dr}{d\chi}=\frac{U^{\varphi}}{U^r}\frac{dr}{d\chi} \tag{2.53}$$

donde:

$$\frac{dr}{d\chi}=\frac{d}{d\chi}\left[\frac{P}{1+e\cos\chi}\right]=\frac{Pe\operatorname{sen}\chi}{(1+e\cos\chi)^2} \tag{2.54}$$

Y usando las ecuaciones parametrizadas de las velocidades (2.36) y (2.35), obtenemos:

$$\frac{d\varphi}{d\chi} = \left[-\frac{(MP-q^2)(1+e\cos\chi)^4}{P^2\left[P^2-(MP-q^2)(3+e^2)-(1-e^2)q^2\right]} \right]^{1/2} \left\{ \frac{MP-q^2}{P^2\left[P^2-(MP-q^2)(3+e^2)-(1-e^2)q^2\right]} \left[P^2e^2\,\mathrm{sen}^2\,\chi\left(1-\frac{2M}{P}(3+e\cos\chi)\right) + q^2e^2\left(e^2(1-\cos^4\chi)+\mathrm{sen}^2\,\chi(6+4e\cos\chi)\right)\right] + \frac{q^2e^2\,\mathrm{sen}^2\,\chi}{P^2}\right\}^{-1/2} \left[\frac{Pe\,\mathrm{sen}\,\chi}{(1+e\cos\chi)^2}\right] \tag{2.55}$$

2.5. Corrimiento total y cosmológico

Sea w_e la frecuencia de la luz al momento de ser emitida por una estrella en órbita de un objeto central. Sea ${w_o}^{cosm}$ la frecuencia medida por un observador lejano debido a la expansión del Universo. Entonces, sea z_T la medida del corrimiento total de la frecuencia, acorde a la expresión:

$$z_T = \frac{w_e}{{w_o}^{cosm}} - 1 \tag{2.56}$$

Que podemos escribir como:

$$z_T + 1 = \frac{w_e}{w_o}\frac{w_o}{w_o^{cosm}} \tag{2.57}$$

Pero tenemos que $w_o = w_e^{cosm}$, donde w_o es la frecuencia medida por un observador lejano y w_e^{cosm} es la frecuencia de la luz afectada por la expansión del universo en el momento de ser emitida.

Entonces tenemos:

$$z_T + 1 = \frac{w_e}{w_o}\frac{w_e^{cosm}}{w_o^{cosm}} = (1+z)(1+z^{cosm}) \tag{2.58}$$

Donde $z^{cosm} = \dfrac{w_e^{cosm}}{w_o^{cosm}}$ es el corrimiento cosmológico y $z = \dfrac{w_e}{w_o}$ el encontrado acorde al formalismo Herrera-Nucamendi. Al desperjar $1+z$ obtenemos la correspondiente ecuación a (2.52).

$$1 + z = \frac{1+z_T}{1+z^{cosm}} \tag{2.59}$$

Capítulo 3

Resultados

3.1. Condiciones

Es necesario recordar algunas de las restricciones que se encontraron en el desarrollo del formalismo Nucamendi-Herrera. La primera recae en la métrica misma, acorde a (2.4), para un radio $r > R_+$, es decir, fuera del horizonte de eventos, en términos de la parametrización de r que se hizo en función de χ, se tiene que cumplir que:

$$1 - \frac{2M}{P}(1 + e\cos\chi) + \frac{q^2}{P^2}(1 + e\cos\chi)^2 > 0 \tag{3.1}$$

Mientras que del denominador de la expresión para las velocidades de la partícula masiva (2.34, 2.35 y 2.36) y del corrimiento mismo (2.52), surge una condición adicional:

$$P^2 - (MP - q^2)(3 + e^2) - (1 - e^2)q^2 \neq 0 \tag{3.2}$$

3.2. Consideraciones

Para visualizar los resultados obtenidos, se usaron dos algoritmos en Mathematica [24], el primero para ver el perfil 2D del corrimiento al rojo/azul z vs. el ángulo φ, y el segundo para ver una franja 3D del corrimiento z vs. el angulo φ vs. masas/cargas proporcionales a la masa del objeto central, utilizando como *base* la excentricidad reportada de dos estrellas que orbitan entorno a $Sgt.A*$, $e_{S1} = 0.556$ y $e_{S14} = 0.9761$ las cuales corresponden a $S1$ y $S14$, respectivamente, y sus semi ejes mayores, $a_{S1} = 7.3673 \times 10^{14} m$ y $a_{S14} = 3.545 \times 10^{14} m$ [25] (a través de la relación con el semi lactus rectum $P = a(1 - e^2)$ [22], para este cálculo se tomó la distancia desde la Tierra hacia $SgtA*$, $R_0 = 8277 \pm 9pc$ [26], para utilizarla en la fórmula siguiente, la cual permite transformar el parámetro α, dado en arcosegundos [25], a metros: $a_{Sb} = R_0 \operatorname{sen}\alpha \approx R_0\alpha$ donde, $[\alpha] = rad$, $\alpha \lll 1$ y $b = 1, 14$).

Aunque las estrellas $S1$ y $S14$ se encuentran en un plano orbital con una inclinación de $119.14° \pm 0.21°$ y $100.59° \pm 0.87°$, respectivamente, con relación al plano del cielo (el plano perpendicular a la línea de visión desde la Tierra hacia el centro de la Vía Láctea), *considerando como si dichas estrellas se encontraran en un plano ecuatorial respecto del plano del cielo ($i = 90°$)*, se usó la masa de $Sgt.A*$, de aproximadamente $M = 8.5447 \times 10^{36} kg$ [26] y una carga $q = 3 \times 10^{8} C$, que corresponde a un límite *observacional* superior para $Sgt.A*$ calculada por Zaja et al. en 2018 [27][28]. Para obtener los resultados en 3D se utilizaron la masa de $Sgt.A*$ como la Unidad (radio gravitacional) y las respectivas proporciones de la carga y el semi eje mayor.

Para realizar las correspondientes transformaciones del S.I. de unidades a las unidades Geometrizadas, se utilizaron los siguientes factores de conversión [29][30]:

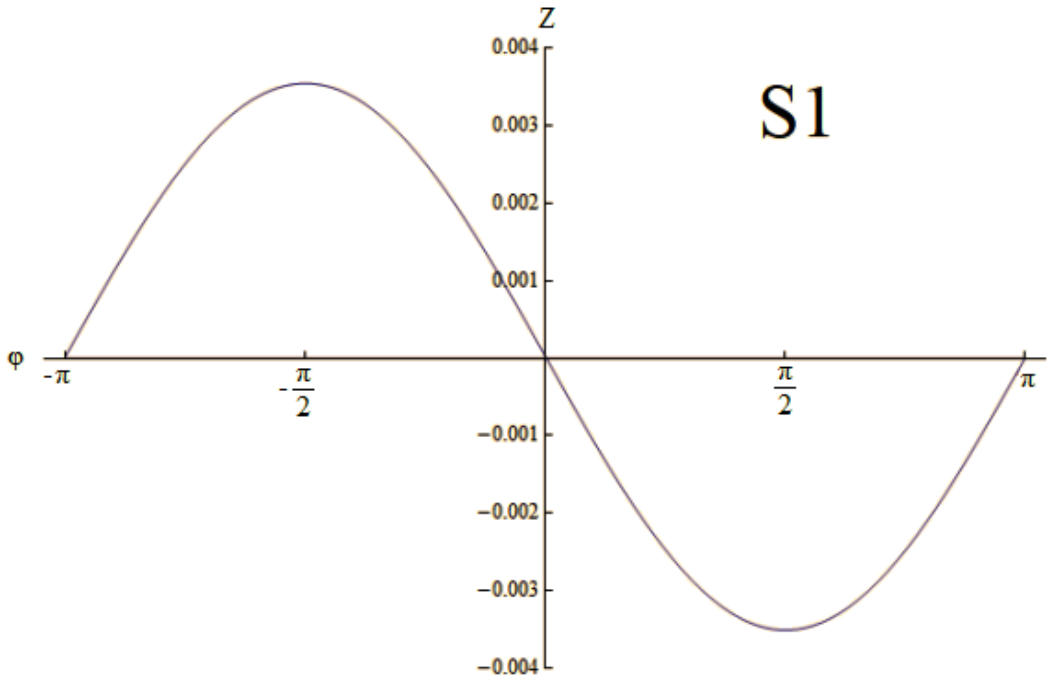
$$\begin{aligned} 1C &= \frac{G^{1/2}}{\epsilon_0^{1/2} c^2} m = 3.0548 \times 10^{-17} m \\ 1kg &= \frac{G}{c^2} m = 7.4262 \times 10^{-28} m \end{aligned} \tag{3.3}$$

De esta manera, tenemos que la masa de $Sgt.A*$ es $8.5447 \times 10^{36} kg = 6.3455 \times 10^{9} m = 4.297 \times 10^{6} M_{\odot}$ (donde $M_{\odot}$ denota Masas Solares), mientras que la cota superior para la carga es de $q = 3 \times 10^{8} C = 9.1644 \times 10^{-9} m$. Tambien se mostrará el corrimiento z para una órbita circular, i.e. $e = 0$, con un semi eje mayor $a_0 = 5.45615 \times 10^{14} m$, intermedio a los de $S1$ y $S14$.

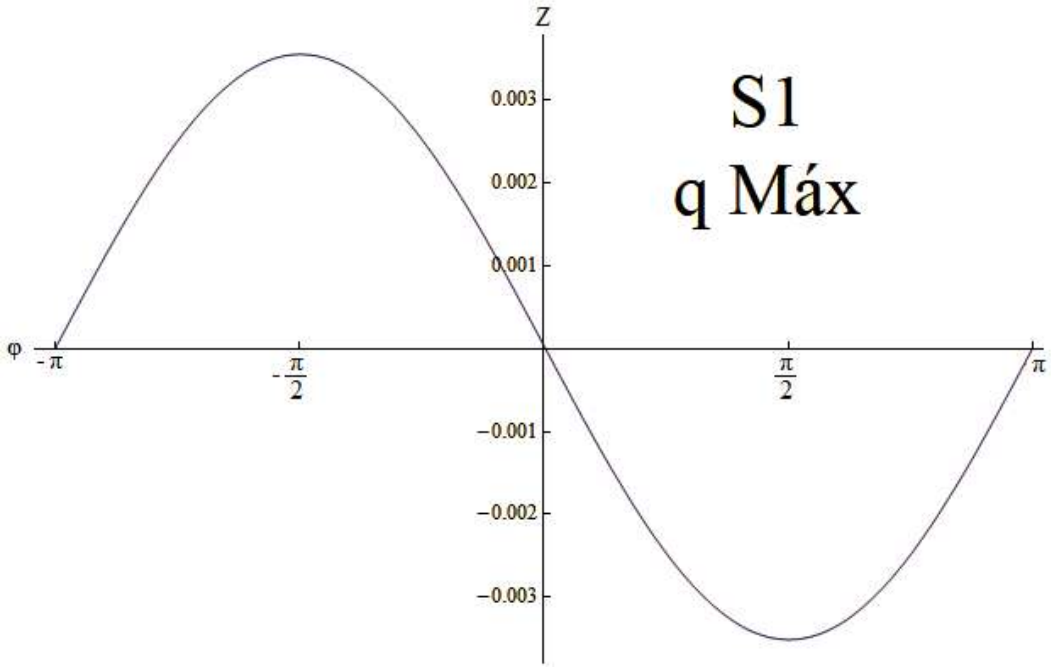
Cabe resaltar que debido a la enorme diferencia de órdenes de magnitud entre la carga y el semi lactus rectum, por (2.55), se puede tomar el ángulo $\varphi = \chi$. Es decir, $P \gg M$ y $P \gg q$, por lo cual $lim \frac{d\varphi}{d\chi} = 1$.

3.3. Gráficas

$S1$: Con una excentricidad $e = 0.556$ y un semi eje mayor de $a_{S1} = 7.3673 \times 10^{14} m$, usando la masa de $Sgt.A*$, $M = 8.5447 \times 10^{36} kg$ y su carga estimada, $q = 9.1644 \times 10^{-9} m$, se obtiene que el máximo corrimiento al rojo es de $z_+ = 0.00355165$ y el mínimo corrimiento al azul de $z_- = -0.00351039$. Debido a que la carga q es mucho menor al semi lactus rectum P, sus efectos son minimos. Para observar esto, se graficó el corrimiento para S1 con una carga $q = 0$. La diferencia entre el máximo corrimiento al rojo obtenido con la carga $q = 1.4442 \times 10^{-18} m$ y con $q = 0$, es de 10^{-59}, es decir, prácticamente cero.



Akiyama et al. [31] y Sushant G. Ghosh junto a Misba Afrin [32] han obtenido un límite teórico máximo para $Sgt.A*$ modelado como un agujero negro de Reissner-Nordstrom, estimando qué $q \leq 0.84M$. Utilizando dicha carga, se obtuvo la siguiente gráfica:

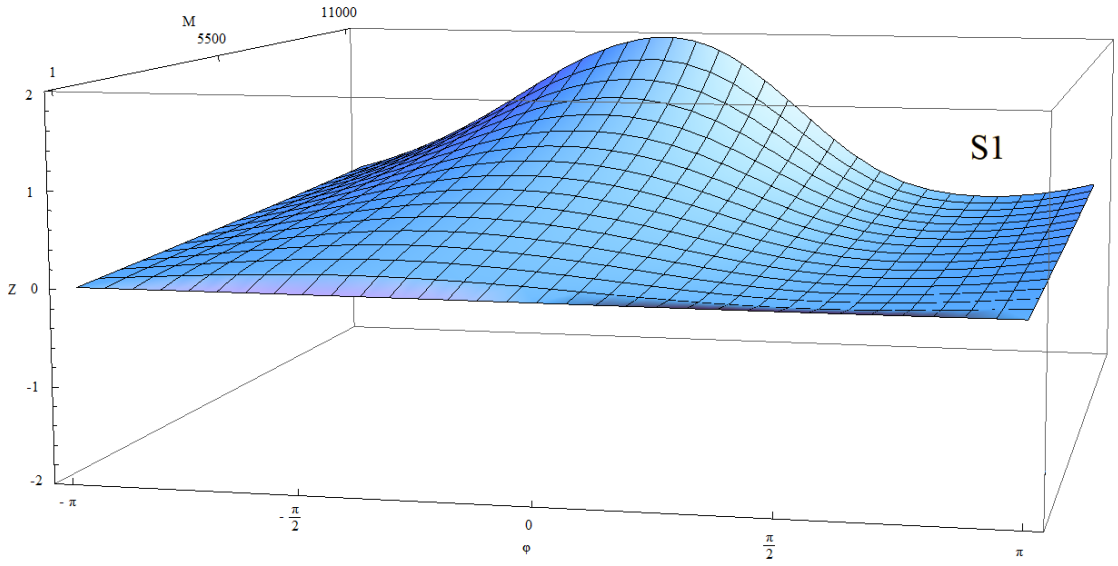


La diferencia entre el corrimiento al rojo/azul obtenido con la carga $q_{max} = 0.84M = 5.3302 \times 10^9 m$ y el obtenido con $q = 1.4442 \times 10^{-18} m$, es de $|z_{+q_{max}} - z_{+q}| = 1.56754628214 \times 10^{-8}$ y $|z_{-q_{max}} - z_{-q}| = 1.538829441129 \times 10^{-8}$.

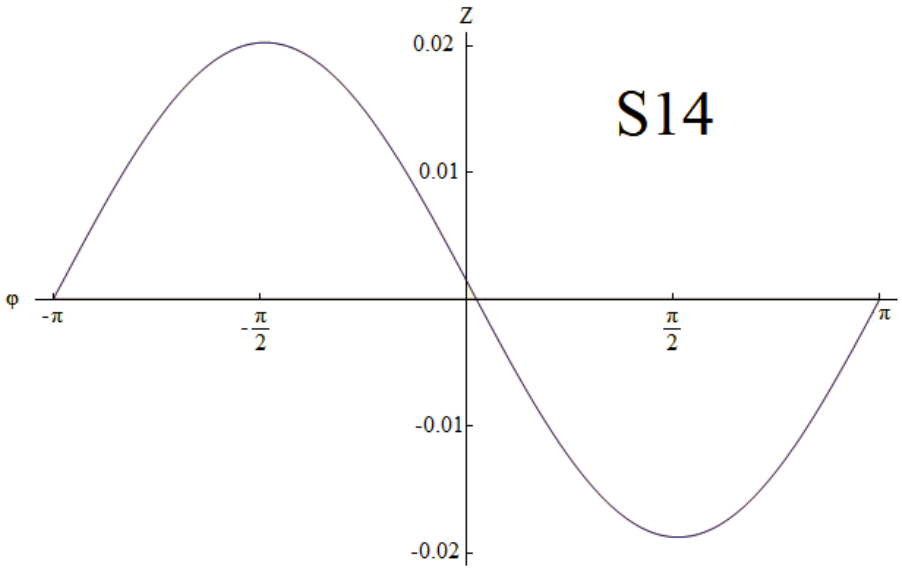
Podemos observar los efectos de masas mucho mayores a la masa de $Sgt.A*$. Esto es parti-

cularmente interesante, pues, por ejemplo, el agujero negro TON 618 posee una masa estimada de 16500 veces la masa de $Sgt.A*$ [33] [34]. Aun así, el algoritmo se comporta bien solo con masas hasta 11000 veces la masa de $Sgt.A*$. El corrimiento al rojo máximo en esta gráfica es $z_+ = 1.98087$ y el mínimo corrimiento al azul es de $z_- = -0.00255132$.

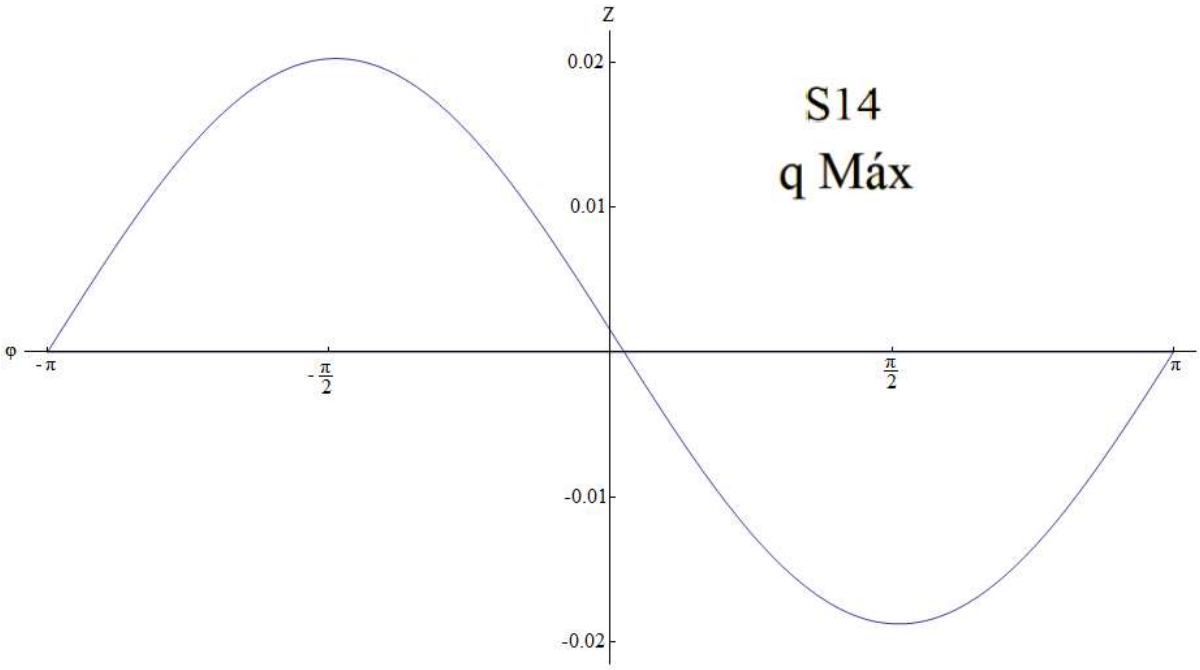
La asimetría observada para masas cada vez mayores puede deberse a que, para el mismo semi lactus rectum, la luz tiende a ser absorbida (corrimiento al rojo) de manera invariable por el objeto central.



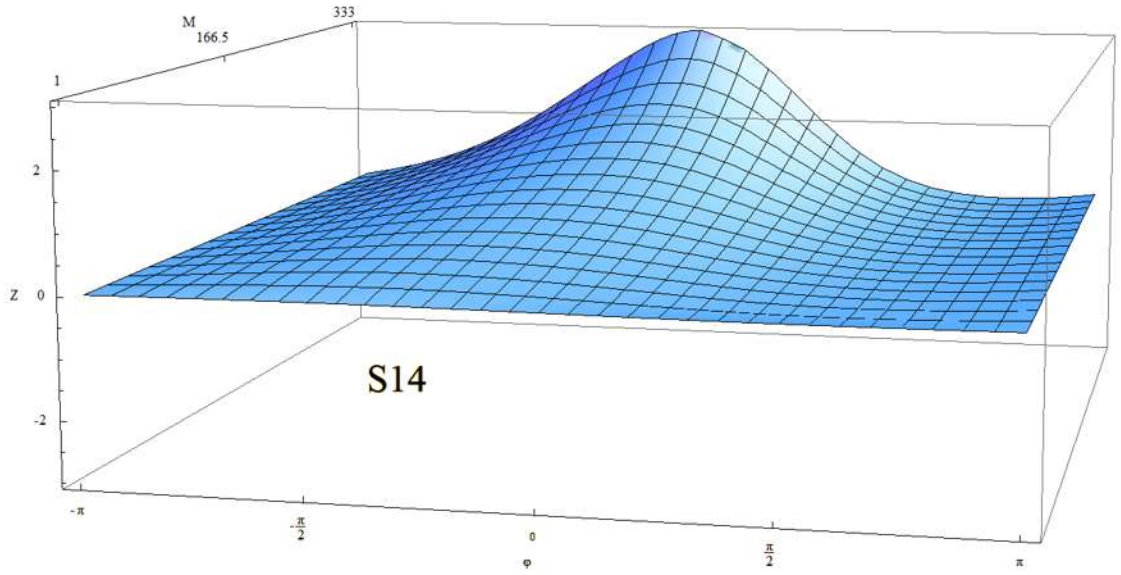
$S14$: Con una excentricidad $e = 0.9761$ y un semi eje mayor de $a_{S14} = 3.545 \times 10^{14} m$, usando la masa de $Sgt.A*$, $M = 8.5447 \times 10^{36} kg$ y su carga estimada, $q = 9.1644 \times 10^{-9} m$, se obtiene que el máximo corrimiento al rojo es de $z_+ = 0.0202542$ y el mínimo corrimiento al azul de $z_- = -0.0187539$. Con los mismos datos, pero usando una carga nula, la diferencia entre los corrimientos es del orden de 3.469×10^{-18}.



Modificando la carga según el mayor límite teórico ($q = 0.84M = 5.3302 \times 10^9 m$), se obtiene una diferencia con el corrimiento calculado usando la carga máxima estimada según las observaciones ($q = 1.4442 \times 10^{-18} m$), de $|z_{+qmax} - z_{+q}| = 2.8169 \times 10^{-6}$ y $|z_{-qmax} - z_{-q}| = 2.4199 \times 10^{-6}$.

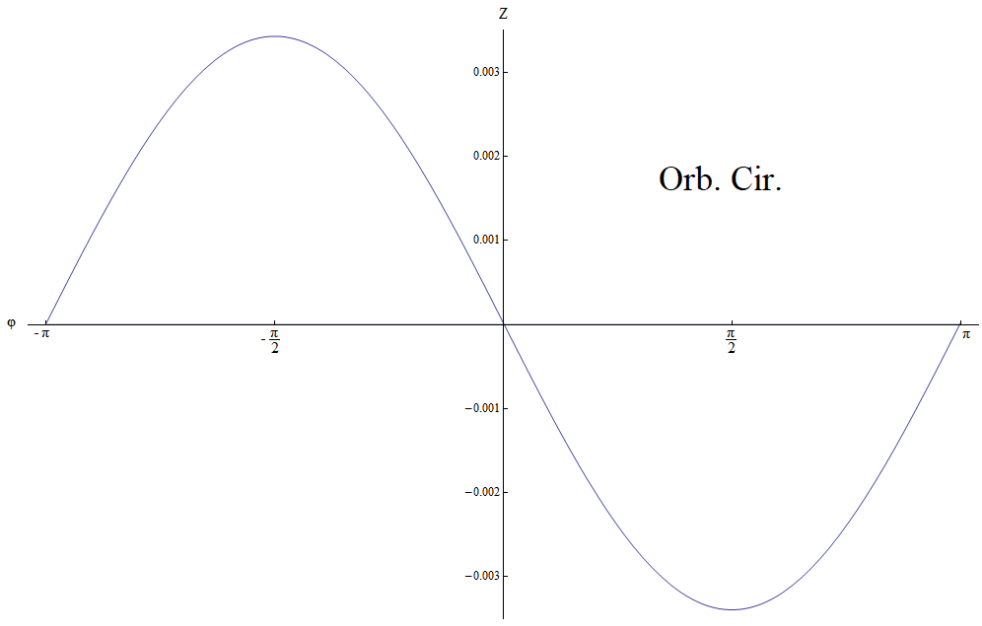


El algoritmo se comporta bien solamente para una variación de 333 veces la masa de $Sgt.A*$. Esto en parte se debe a que la órbita de S14 se encuentra dos órdenes de magnitud más cercana al objeto central que la órbita de S1.

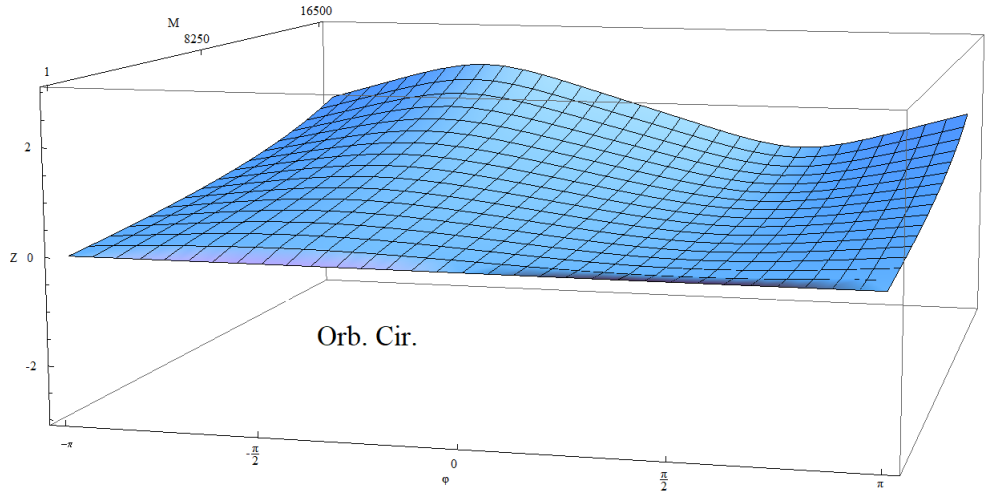


Vemos una asimetría semejante a la presentada en el caso de S1, pero se observa un corrimiento al rojo significativamente mayor. El máximo corrimiento al rojo es de $z_+ = 3.07719$ mientras que el mínimo corrimiento al azul es $z_- = -0.110253$

Órbita Circular: Finalmente, para analizar el corrimiento al rojo/azul presentando en una órbita circular (el tipo de órbitas analizados anteriormente por Nucamendi et al.), i.e. con $e = 0$, y usando un semi eje mayor $a = 5.45615 \times 10^{14} m$, se obtiene un corrimiento máximo al rojo de $z_+ = 0.00342782$ y un corrimiento mínimo al azul de $z_- = -0.00339293$.



De nuevo, usando la carga $q = 0.84M = 5.3302 \times 10^9 m$, se obtiene una diferencia con el corrimiento calculado usando la carga estimada $q = 1.4442 \times 10^{-18} m$, de $|z_{+qmax} - z_{+q}| = 1.40889 \times 10^{-6}$ y $|z_{-qmax} - z_{-q}| = 1.38980 \times 10^{-6}$.



El algoritmo se comporta bien para masas increíblemente mayores (hasta 30000 veces la masa de $Sgt.A*$), sin embargo, dado que TON 618 es el mayor agujero negro supermasivo que se ha encontrado hasta el momento, se utilizó su masa estimada como referencia para una cota superior, obteniendo como resultado un corrimiento al rojo máximo de $Z_+ = 2.21343$ y un corrimiento al azul mínimo de $Z_- = -0.0883726$.

Capítulo 4

Conclusiones

Los resultados obtenidos son acordes a la idealización de $Sgt.A*$ como un objeto descrito por la métrica de Reissner Nordstrom. No hemos analizado la estabilidad de las órbitas, por lo cual no hemos añadido las condiciones que emanan de ello, por lo cual los corrimientos al rojo/azul son generales, i.e. pueden no reflejar situaciones físicas concebibles (ya que es posible que existan cotas para la masa del objeto central en relación con el semi eje mayor de las órbitas, a partir de las cuales las partículas masivas terminen siendo invariablemente absorbidas o expulsadas por el objeto compacto). Sería un trabajo muy útil obtener dichas cotas al refinar los resultados obtenidos en esta tesis.

También es muy interesante pensar en los efectos de la rotación en una métrica más general, aunque es un trabajo significativamente mayor. Y aun así, esto no bastaría para una descripción total y realista, pues con base en lo observado por Habibi et al. [35], las observaciones astronómicas presentan una serie de irregularidades causadas por el Disco de Acreción de materia entorno a $Sgt.A*$, que solamente pueden ajustarse añadiendo términos atmosféricos a través de hidrodinámica relativista. En otras palabras, es necesario añadir mayor *realismo* a la métrica utilizada, pero el formalismo demuestra ir indudablemente por buen camino en dicha búsqueda.

Apéndice A

Algoritmo 2D

Algoritmo para z vs. φ basándose en los datos para $S1/S14$ y una masa máxima ajustada manualmente a base de prueba y error, pero congruente con las condiciones obtenidas en la sección 3.2. Las funciones Y1, Y2 y Y3 corresponden a la velocidad Temporal (2.34), Azimutal (2.35) y Radial (2.36), respectivamente. Y4 corresponde a la razón del momento radial del fotón y su energía (2.51), mientras que b1 es la expresión del parámetro de impacto (2.46) y finalmente b2 es simplemente la componente radial de la métrica (2.2).

Estos son los datos que se utilizaron. Todos están en proporción a la masa de Sgta. A* como Unidad:

1 Masa de Sgt. A* $= 8.26 \times 10^{36} kg = 6137180000m = 4153947.507\odot$
$e = 0.556$ Excentricidad S1
$e = 0.9761$ Excentricidad S14
$e = 0$ Excentricidad Orb. Cir.
$M = 1$ Radio Gravitacional de SGT A*
$q = 1.4442 * 10^{-18}$ Carga Gravitacional de SGT A*
$P = (116102.75) * (1 - e^2)$ Semi lactus rectum Gravitacional S1
$P = (55866.3611) * (1 - e^2)$ Semi lactus rectum Gravitacional S14
$P = (85984.55598) * (1 - e^2)$ Semi lactus rectum Gravitacional Orb. ir.

$\boldsymbol{e = 0.556}$

$\boldsymbol{q = 1.4442 * 10\text{^}(-18)}$

$\boldsymbol{P = (116102.75) * (1 - e\text{^}2)}$

$\boldsymbol{M = 1}$

```
Y1[x_] = Sqrt[((P^4) + 2 * (P^2) * (q^2) * (1 + e^2) + (q^4)((1 - e^2)^2) + 4 * M * P * ((1 - e^2)
*(M * P - q^2) - P^2))/((P^2) * ((P^2) - (M * P - q^2) * (3 + e^2) - (1 - e^2) * (q^2))
*(1 - (2 * M/P) * (1 + e * Cos[x]) + ((q^2)/(P^2)) * (1 + e * Cos[x])^2)^2)]

Y2[x_] = Sqrt[((M * P - q^2) * (1 + eCos[x])^4))
/((P^2) * ((P^2) - (M * P - q^2) * (3 + e^2) - (1 - e^2) * q^2))]

Y3[x_] = Sqrt[((M * P - q^2)/((P^2) * ((P^2) - (M * P - q^2) * (3 + e^2)
-(1 - e^2) * q^2))) * ((P^2) * (e^2) * (Sin[x]^2) * (1 - (2 * M/P)
*(3 + e * Cos[x])) + (q^2) * (e^2) * ((e^2) * (1 - Cos[x]^4)
+(Sin[x])^2) * (6 + 4 * e * Cos[x])) + ((q^2) * (e^2) * ((Sin[x])^2)/P^2)]

Y4[x_] = Cos[x]/Sqrt[1 + (Sin[x]^2) * (-(2 * M/P) * (1 + e * Cos[x])
+((q^2)/(P^2)) * (1 + e * Cos[x])^2)]

B1[x_] = (((P)/(1 + e * Cos[x])) * Sin[x])/(Sqrt[1 + (Sin[x]^2) * (-(2 * M/P) * (1 + e * Cos[x])
+((q^2)/(P^2)) * (1 + e * Cos[x])^2)])

R[x_] = P/(1 + e * Cos[x])

B2[x_] = 1/(1 - (2 * M/R[x]) + ((q^2)/(R[x]^2)))

Show[Plot[0, {x, -Pi, Pi}, Ticks → {{-Pi, -Pi/2, 0, Pi/2, Pi, 3Pi/2, 2Pi, 5Pi/2},
{-0.005, -0.01, 0, 0.01, 0.005}}, TicksStyle → Directive[13],
PlotRange → 0.01], Plot[-1 + (Y1[x] - B1[x] * Y2[x] - B2[x] * Y3[x] * Y4[x]), {x, -Pi, 0}],
Plot[-1 + (Y1[x] - B1[x] * Y2[x] + B2[x] * Y3[x] * Y4[x]), {x, 0, Pi}]]
```

Apéndice B

Algoritmo 3D

Algoritmo para z vs. φ vs. M usando los datos para $S1/S14$ y una franja de masas desde 1 (el radio gravitacional) hasta una masa máxima ajustada manualmente a base de prueba y error, pero congruentes con las condiciones obtenidas en la sección 3.2. Las funciones Y1, Y2 y Y3 corresponden a la velocidad Temporal (2.34), Azimutal (2.35) y Radial (2.36), respectivamente. Y4 corresponde a la razón del momento radial del fotón y su energía (2.51), mientras que b1 es la expresión del parámetro de impacto (2.46) y finalmente b2 es simplemente la componente radial de la métrica (2.2).

$$e = 0.556$$

$$q = 1.4442 * 10\text{^}(-18)$$

$$P = (116102.75) * (1 - e\text{^}2)$$

$$\text{Y1[x_, m_]} = \text{Sqrt}[((P\text{^}4) + 2 * (P\text{^}2) * (q\text{^}2) * (1 + e\text{^}2) + (q\text{^}4)((1 - e\text{^}2)\text{^}2)$$
$$+4 * m * P * ((1 - e\text{^}2) * (m * P - q\text{^}2) - P\text{^}2))/((P\text{^}2) * ((P\text{^}2)$$
$$-(m * P - q\text{^}2) * (3 + e\text{^}2) - (1 - e\text{^}2) * (q\text{^}2)) * (1 - (2 * m/P) * (1 + e * \text{Cos}[x])$$
$$+((q\text{^}2)/(P\text{^}2)) * ((1 + e * \text{Cos}[x])\text{^}2))\text{^}2)]$$

$$\text{Y2[x_, m_]} = \text{Sqrt}[((m * P - q\text{^}2) * (1 + e * \text{Cos}[x])\text{^}4))/((P\text{^}2) * ((P\text{^}2)$$
$$-(m * P - q\text{^}2) * (3 + e\text{^}2) - (1 - e\text{^}2) * q\text{^}2))]$$

$$\text{Y3[x_, m_]} = \text{Sqrt}[((m * P - q\text{^}2)/((P\text{^}2) * ((P\text{^}2) - (m * P - q\text{^}2) * (3 + e\text{^}2) - (1 - e\text{^}2) * q\text{^}2)))$$
$$*((P\text{^}2) * (e\text{^}2) * (\text{Sin}[x]\text{^}2) * (1 - (2 * m/P) * (3 + e * \text{Cos}[x])) + (q\text{^}2) * (e\text{^}2) * ((e\text{^}2)$$
$$*(1 - \text{Cos}[x]\text{^}4) + (\text{Sin}[x])\text{^}2) * (6 + 4 * e * \text{Cos}[x])) + ((q\text{^}2) * (e\text{^}2) *((\text{Sin}[x])\text{^}2)/P\text{^}2)]$$

```
Y4[x_, m_] = Cos[x]/Sqrt[1 + (Sin[x]^2) * (-(2 * m/P) * (1 + e * Cos[x])
+((q^2)/(P^2)) * (1 + e * Cos[x])^2)]

B1[x_, m_] = (((P)/(1 + e * Cos[x])) * Sin[x])/(Sqrt[1 + (Sin[x]^2)
*(-(2 * m/P) * (1 + e * Cos[x]) + ((q^2)/(P^2)) * (1 + e * Cos[x])^2)])

R[x_] = P/(1 + e * Cos[x])

B2[x_, m_] = 1/(1 - (2 * m/R[x]) + ((q^2)/(R[x]^2)))

Show[Plot3D[-100000000, {x, -Pi, Pi}, {m, 1, 1000}, TicksStyle → Directive[13],
Ticks → {{-Pi, -Pi/2, 0, Pi/2, Pi, 3Pi/2, 2Pi, 5Pi/2}, {1, 500, 1000}}, PlotRange → 1],
Plot3D[(-1 + (Y1[x, m] - B1[x, m] * Y2[x, m] - B2[x, m] * Y3[x, m] * Y4[x, m])), {x, -Pi, 0}, {m, 1, 1000},
Ticks → {{-Pi, -Pi/2, 0, Pi/2, Pi, 3Pi/2, 2Pi, 5Pi/2}, {0}}, PlotRange → 1],
Plot3D[(-1 + (Y1[x, m] - B1[x, m] * Y2[x, m] + B2[x, m] * Y3[x, m] * Y4[x, m])), {x, 0, Pi}, {m, 1, 1000},
Ticks → {{-Pi, -Pi/2, 0, Pi/2, Pi, 3Pi/2, 2Pi, 5Pi/2}, {}}, PlotRange → 1]]
```

Dado que la velocidad radial (2.36) cambia de signo entre $-\pi$ y π, se requiere graficar la función z en el dominio $[-\pi, 0]$ y de nuevo en el dominio $[0, \pi]$. Para mostrar ambas gráficas juntas, fue necesario graficar una función extra que tenga como dominio $[-\pi, \pi]$, para que dicha función no interfiera con el corrimiento, se eligió una función constante bastante alejada del origen (-10×10^7).

Bibliografía

[1] Papyrus of Ani. The weighing of the heart. https://joyofmuseums.com/most-popular/egyptian-art/book-of-the-dead/, 1250 BCE. Consultado el 23/07/2023.

[2] Ejnar Hertzsprung. Über die Sterne der Unterabteilungen c und ac nach der Spektralklassifikation von Antonia C. Maury. *Astronomische Nachrichten*, 179:373, January 1909. Consultado el 14/06/2023.

[3] Charles W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler. *Gravitation*. W. H. Freeman, San Francisco, 1973.

[4] Roger Penrose. *The Road to Reality : A Complete Guide to the Laws of the Universe*. Random House, London, 2005.

[5] Ejnar Hertzsprung and Henry Norris Russell. *Hertzsprung-Russell diagram*. https://www.oxfordreference.com/view/10.1093/oi/authority.20110803095933483, 1913.

[6] Carroll Bradley W. and Ostlie Dale A. *An Introduction to Modern Astrophysics 2nd edición*. https://wps.pearsoned.com/aw_carroll_ostlie_astro_2e/, 2017.

[7] B. Czerny and Marek Nikolajuk. Mass of black holes: The state of the art. *Memorie della Societa Astronomica Italiana, Supplementi - Journal of the Italian Astronomical Society, Supplement*, 81, 10 2009.

[8] Martin Gaskell. Accurate black hole mass measurements for thermal agns and the origin of the correlations between black hole mass and bulge properties. 2011.

[9] Alfredo Herrera-Aguilar and Ulises Nucamendi. Kerr black hole parameters in terms of the redshift/blueshift of photons emitted by geodesic particles. *Phys. Rev. D*, 92:045024, Aug 2015.

[10] Ricardo Becerril, Susana Valdez-Alvarado, and Ulises Nucamendi. Obtaining mass parameters of compact objects from redshifts and blueshifts emitted by geodesic particles around them. *Physical Review D*, 94, Dec 2016.

[11] Ulises Nucamendi, Alfredo Herrera-Aguilar, Raúl Lizardo-Castro, and Omar López-Cruz. Toward the gravitational redshift detection in ngc 4258 and the estimation of its black hole mass-to-distance ratio. *The Astrophysical Journal Letters*, 917:L14, aug 2021.

[12] Ricardo Becerril, Susana Valdez-Alvarado, Ulises Nucamendi, Pankaj Sheoran, and J. M. Dávila. Mass parameter and the bounds on redshifts and blueshifts of photons emitted from geodesic particle orbiting in the vicinity of regular black holes. *Physical Review D*, 103, Apr 2021.

[13] Pritam Banerjee, Alfredo Herrera-Aguilar, Mehrab Momennia, and Ulises Nucamendi. Mass and spin of kerr black holes in terms of observational quantities: The dragging effect on the redshift. *Phys. Rev. D*, 105:124037, Jun 2022.

[14] S. Gillessen, F. Eisenhauer, S. Trippe, T. Alexander, R. Genzel, F. Martins, and T. Ott. MONITORING STELLAR ORBITS AROUND THE MASSIVE BLACK HOLE IN THE GALACTIC CENTER. *The Astrophysical Journal*, 692:1075–1109, feb 2009.

[15] Frank Eisenhauer, Roberto Abuter, Klaus Bickert, Fabio Biancat-Marchet, Henri Bonnet, Joar Brynnel, Ralf D. Conzelmann, Bernard Delabre, Robert Donaldson, Jacopo Farinato, Enrico Fedrigo, Reinhard Genzel, Norbert N. Hubin, Christof Iserlohe, Markus E. Kasper, Markus Kissler-Patig, Guy J. Monnet, Claudia Roehrle, Juergen Schreiber, Stefan Stroebele, Matthias Tecza, Niranjan A. Thatte, and Harald Weisz. SINFONI - integral field spectroscopy at 50 milli-arcsecond resolution with the ESO VLT. In Masanori Iye and Alan F. M. Moorwood, editors, *SPIE Proceedings*. SPIE, mar 2003.

[16] F. Eisenhauer, R. Genzel, T. Alexander, R. Abuter, T. Paumard, T. Ott, A. Gilbert, S. Gillessen, M. Horrobin, S. Trippe, H. Bonnet, C. Dumas, N. Hubin, A. Kaufer, M. Kissler-Patig, G. Monnet, S. Strobele, T. Szeifert, A. Eckart, R. Schodel, and S. Zucker. SINFONI in the galactic center: Young stars and infrared flares in the central light-month. *The Astrophysical Journal*, 628:246–259, jul 2005.

[17] Reynolds CS. Astrophysics: bringing black holes into focus. *Nature*, 455(455):37–40, sep 2008.

[18] H. Reissner. Über die Eigengravitation des elektrischen Feldes nach der Einsteinschen Theorie, January 1916.

[19] S. Chandrasekhar and J. B. Hartle. On crossing the cauchy horizon of a reissner-nordstrom black-hole. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 384:301–315, 1982.

[20] Paul M. Chesler, Ramesh Narayan, and Erik Curiel. Singularities in reissner-nordstrom black holes, 2019.

[21] Stefan Hollands, Robert M Wald, and Jochen Zahn. Quantum instability of the cauchy horizon in reissner–nordström–desitter spacetime. *Classical and Quantum Gravity*, 37:115009, may 2020.

[22] M. Coxeter H., S. *Introduction to Geometry 2nd edition.* Wiley, New York, 1969.

[23] G. S. Bisnovatyi-Kogan and O. Yu. Tsupko. Gravitational lensing in plasmic medium. *Space Research Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia, National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute)*, 2015.

[24] Wolfram Research, Inc. Mathematica, Version 8.0, 2010. Champaign, IL, 2010.

[25] S. Gillessen, P. M. Plewa, F. Eisenhauer, R. Sari, I. Waisberg, M. Habibi, O. Pfuhl, E. George, J. Dexter, S. von Fellenberg, T. Ott, and R. Genzel. An update on monitoring stellar orbits in the galactic center. *The Astrophysical Journal*, 837:30, feb 2017.

[26] N. Aimar P. Amaro Seoane A. Amorim M. Bauböck J. P. Berger H. Bonnet G. Bourdarot W. Brandner V. Cardoso Y. Clénet R. Davies P. T. de Zeeuw J. Dexter A. Drescher A. Eckart F. Eisenhauer H. Feuchtgruber G. Finger N. M. Förster Schreiber A. Foschi P. Garcia F. Gao Z. Gelles E. Gendron R. Genzel S. Gillessen M. Hartl X. Haubois F. Haussmann G. Heißel T. Henning S. Hippler M. Horrobin L. Jochum L. Jocou A. Kaufer P. Kervella S. Lacour V. Lapeyrère J.-B. Le Bouquin P. Léna D. Lutz F. Mang N. More T. Ott T. Paumard K. Perraut G. Perrin O. Pfuhl S. Rabien D. C. Ribeiro M. Sadun Bordoni S. Scheithauer J. Shangguan T. Shimizu J. Stadler O. Straub C. Straubmeier E. Sturm L. J. Tacconi F. Vincent S. von Fellenberg F. Widmann M. Wielgus E. Wieprecht E. Wiezorrek GRAVITY Collaboration, R. Abuter and J. Woillez. Polarimetry and astrometry of nir flares as event horizon scale dynamical probes for the mass of sgr a*. *AA 677 L10 (2023)*, 2023.

[27] Michal Zajač ek, Arman Tursunov, Andreas Eckart, and Silke Britzen. On the charge of the galactic centre black hole. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 480:4408–4423, aug 2018.

[28] Marios Karouzos. Charge in the hole. *Nature Astronomy*, 2018.

[29] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler. *Gravitation.* 1973.

[30] Robert M. Wald. *General Relativity.* The University od Chicago Press, 1984.

[31] Event Horizon Telescope Collaboration, Kazunori Akiyama, Antxon Alberdi, Walter Alef, Juan Carlos Algaba, Richard Anantua, Keiichi Asada, Rebecca Azulay, Uwe Bach, Anne-Kathrin Baczko, David Ball, Mislav Baloković, John Barrett, Michi Bauböck, Bradford A.

Benson, Dan Bintley, Lindy Blackburn, Raymond Blundell, Katherine L. Bouman, Geoffrey C. Bower, Hope Boyce, Michael Bremer, Christiaan D. Brinkerink, Roger Brissenden, Silke Britzen, Avery E. Broderick, Dominique Broguiere, Thomas Bronzwaer, Sandra Bustamante, Do-Young Byun, John E. Carlstrom, Chiara Ceccobello, Andrew Chael, Chi kwan Chan, Koushik Chatterjee, Shami Chatterjee, Ming-Tang Chen, Yongjun Chen, Xiaopeng Cheng, Ilje Cho, Pierre Christian, Nicholas S. Conroy, John E. Conway, James M. Cordes, Thomas M. Crawford, Geoffrey B. Crew, Alejandro Cruz-Osorio, Yuzhu Cui, Jordy Davelaar, Mariafelicia De Laurentis, Roger Deane, Jessica Dempsey, Gregory Desvignes, Jason Dexter, Vedant Dhruv, Sheperd S. Doeleman, Sean Dougal, Sergio A. Dzib, Ralph P. Eatough, Razieh Emami, Heino Falcke, Joseph Farah, Vincent L. Fish, Ed Fomalont, H. Alyson Ford, Raquel Fraga-Encinas, William T. Freeman, Per Friberg, Christian M. Fromm, Antonio Fuentes, Peter Galison, Charles F. Gammie, Roberto García, Olivier Gentaz, Boris Georgiev, Ciriaco Goddi, Roman Gold, Arturo I. Gómez-Ruiz, José L. Gómez, Minfeng Gu, Mark Gurwell, Kazuhiro Hada, Daryl Haggard, Kari Haworth, Michael H. Hecht, Ronald Hesper, Dirk Heumann, Luis C. Ho, Paul Ho, Mareki Honma, Chih-Wei L. Huang, Lei Huang, David H. Hughes, Shiro Ikeda, C. M. Violette Impellizzeri, Makoto Inoue, Sara Issaoun, David J. James, Buell T. Jannuzi, Michael Janssen, Britton Jeter, Wu Jiang, Alejandra Jiménez-Rosales, Michael D. Johnson, Svetlana Jorstad, Abhishek V. Joshi, Taehyun Jung, Mansour Karami, Ramesh Karuppusamy, Tomohisa Kawashima, Garrett K. Keating, Mark Kettenis, Dong-Jin Kim, Jae-Young Kim, Jongsoo Kim, Junhan Kim, Motoki Kino, Jun Yi Koay, Prashant Kocherlakota, Yutaro Kofuji, Patrick M. Koch, Shoko Koyama, Carsten Kramer, Michael Kramer, Thomas P. Krichbaum, Cheng-Yu Kuo, Noemi La Bella, Tod R. Lauer, Daeyoung Lee, Sang-Sung Lee, Po Kin Leung, Aviad Levis, Zhiyuan Li, Rocco Lico, Greg Lindahl, Michael Lindqvist, Mikhail Lisakov, Jun Liu, Kuo Liu, Elisabetta Liuzzo, Wen-Ping Lo, Andrei P. Lobanov, Laurent Loinard, Colin J. Lonsdale, Ru-Sen Lu, Jirong Mao, Nicola Marchili, Sera Markoff, Daniel P. Marrone, Alan P. Marscher, Iván Martí-Vidal, Satoki Matsushita, Lynn D. Matthews, Lia Medeiros, Karl M. Menten, Daniel Michalik, Izumi Mizuno, Yosuke Mizuno, James M. Moran, Kotaro Moriyama, Monika Moscibrodzka, Cornelia Müller, Alejandro Mus, Gibwa Musoke, Ioannis Myserlis, Andrew Nadolski, Hiroshi Nagai, Neil M. Nagar, Masanori Nakamura, Ramesh Narayan, Gopal Narayanan, Iniyan Natarajan, Antonios Nathanail, Santiago Navarro Fuentes, Joey Neilsen, Roberto Neri, Chunchong Ni, Aristeidis Noutsos, Michael A. Nowak, Junghwan Oh, Hiroki Okino, Héctor Olivares, Gisela N. Ortiz-León, Tomoaki Oyama, Feryal Özel, Daniel C. M. Palumbo, Georgios Filippos Paraschos, Jongho Park, Harriet Parsons, Nimesh Patel, Ue-Li Pen, Dominic W. Pesce, Vincent Piétu, Richard Plambeck, Aleksandar PopStefanija, Oliver Porth, Felix M. Pötzl, Ben Prather, Jorge A. Preciado-López, Dimitrios Psaltis, Hung-

Yi Pu, Venkatessh Ramakrishnan, Ramprasad Rao, Mark G. Rawlings, Alexander W. Raymond, Luciano Rezzolla, Angelo Ricarte, Bart Ripperda, Freek Roelofs, Alan Rogers, Eduardo Ros, Cristina Romero-Cañizales, Arash Roshanineshat, Helge Rottmann, Alan L. Roy, Ignacio Ruiz, Chet Ruszczyk, Kazi L. J. Rygl, Salvador Sánchez, David Sánchez-Argüelles, Miguel Sánchez-Portal, Mahito Sasada, Kaushik Satapathy, Tuomas Savolainen, F. Peter Schloerb, Jonathan Schonfeld, Karl-Friedrich Schuster, Lijing Shao, Zhiqiang Shen, Des Small, Bong Won Sohn, Jason SooHoo, Kamal Souccar, He Sun, Fumie Tazaki, Alexandra J. Tetarenko, Paul Tiede, Remo P. J. Tilanus, Michael Titus, Pablo Torne, Efthalia Traianou, Tyler Trent, Sascha Trippe, Matthew Turk, Ilse van Bemmel, Huib Jan van Langevelde, Daniel R. van Rossum, Jesse Vos, Jan Wagner, Derek Ward-Thompson, John Wardle, Jonathan Weintroub, Norbert Wex, Robert Wharton, Maciek Wielgus, Kaj Wiik, Gunther Witzel, Michael F. Wondrak, George N. Wong, Qingwen Wu, Paul Yamaguchi, Doosoo Yoon, André Young, Ken Young, Ziri Younsi, Feng Yuan, Ye-Fei Yuan, J. Anton Zensus, Shuo Zhang, Guang-Yao Zhao, and Shan-Shan Zhao. First sagittarius a* event horizon telescope results. vi. testing the black hole metric. *The Astrophysical Journal Letters*, 930(2):L17, may 2022.

[32] Sushant G. Ghosh and Misba Afrin. An upper limit on the charge of the black hole sgr a* from eht observations. *The Astrophysical Journal*, 944(2):174, February 2023.

[33] O. Shemmer, H. Netzer, R. Maiolino, E. Oliva, S. Croom, E. Corbett, and L. di Fabrizio. Near-infrared spectroscopy of high-redshift active galactic nuclei. i. a metallicity-accretion rate relationship. *The Astrophysical Journal*, 614(2):547, oct 2004.

[34] J. W. Moffat. Supermassive black hole accretion and growth, 2020.

[35] M. Habibi, S. Gillessen, F. Martins, F. Eisenhauer, P. M. Plewa, O. Pfuhl, E. George, J. Dexter, I. Waisberg, T. Ott, S. von Fellenberg, M. Bauböck, A. Jimenez-Rosales, and R. Genzel. Twelve years of spectroscopic monitoring in the galactic center: The closest look at s-stars near the black hole. *The Astrophysical Journal*, 847:120, sep 2017.

Ulises Bruno Lozano

Cálculo del corrimiento al rojo azul de fotones emitidos por partículas masivas en órbitas geodésica

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Detalles del documento

Identificador de la entrega
trn:oid:::3117:425000291

Fecha de entrega
30 ene 2025, 12:26 p.m. GMT-6

Fecha de descarga
30 ene 2025, 12:31 p.m. GMT-6

Nombre de archivo
Cálculo del corrimiento al rojoazul de fotones emitidos por partículas masivas en órbitas geodési....pdf

Tamaño de archivo
1.4 MB

36 Páginas

8,766 Palabras

40,324 Caracteres

24% Similitud general

El total combinado de todas las coincidencias, incluidas las fuentes superpuestas, para ca...

Fuentes principales

24% Fuentes de Internet
18% Publicaciones
0% Trabajos entregados (trabajos del estudiante)

Marcas de integridad

N.º de alerta de integridad para revisión

Caracteres reemplazados
137 caracteres sospechosos en N.º de páginas
Las letras son intercambiadas por caracteres similares de otro alfabeto.

Los algoritmos de nuestro sistema analizan un documento en profundidad para buscar inconsistencias que permitirían distinguirlo de una entrega normal. Si advertimos algo extraño, lo marcamos como una alerta para que pueda revisarlo.

Una marca de alerta no es necesariamente un indicador de problemas. Sin embargo, recomendamos que preste atención y la revise.

Formato de Declaración de Originalidad y Uso de Inteligencia Artificial

Coordinación General de Estudios de Posgrado
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

A quien corresponda,

Por este medio, quien abajo firma, bajo protesta de decir verdad, declara lo siguiente:

- Que presenta para revisión de originalidad el manuscrito cuyos detalles se especifican abajo.
- Que todas las fuentes consultadas para la elaboración del manuscrito están debidamente identificadas dentro del cuerpo del texto, e incluidas en la lista de referencias.
- Que, en caso de haber usado un sistema de inteligencia artificial, en cualquier etapa del desarrollo de su trabajo, lo ha especificado en la tabla que se encuentra en este documento.
- Que conoce la normativa de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, en particular los Incisos IX y XII del artículo 85, y los artículos 88 y 101 del Estatuto Universitario de la UMSNH, además del transitorio tercero del Reglamento General para los Estudios de Posgrado de la UMSNH.

Datos del manuscrito que se presenta a revisión		
Programa educativo	Maestría en Ciencias en el Área de la Física	
Título del trabajo	Parámetro de masa de objetos compactos en términos de los corrimientos al rojo y al azul de los fotones emitidos por partículas que orbitan alrededor de ellos	
	Nombre	**Correo electrónico**
Autor/es	Ulises Bruno Lozano	1609957h@umich.mx
Director	Ulises Nucamendi Gómez	ulises.nucamendi@umich.mx
Codirector	Ricardo Becerril Barcenas	ricardo.becerril@umich.mx
Coordinador del programa	Umberto Cotti Gollini	mae.ciencias.fisica@umich.mx

Uso de Inteligencia Artificial		
Rubro	**Uso (sí/no)**	**Descripción**
Asistencia en la redacción	No	
Traducción al español	No	
Traducción a otra lengua	Sí	Algunos términos en el abstract.

Escaneado con CamScanner

Formato de Declaración de Originalidad y Uso de Inteligencia Artificial

Coordinación General de Estudios de Posgrado
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Uso de Inteligencia Artificial		
Rubro	**Uso (sí/no)**	**Descripción**
Revisión y corrección de estilo	No	
Análisis de datos	No	
Búsqueda y organización de información	Sí	Algunos detalles sobre relatividad general y datos actualizados sobre agujeros negros.
Formateo de las referencias bibliográficas	No	
Generación de contenido multimedia	No	
Otro		

Datos del solicitante	
Nombre y firma	Ulises Bruno Lozano
Lugar y fecha	Morelia, Michoacán, México, a 30 de enero del 2025

Escaneado con CamScanner