



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE  
HIDALGO

---

INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

**Contribución del P-box al momento  
anómalo magnético del muón en una  
interacción de contacto**

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

**Maestro en Ciencias en el área de Física**

PRESENTA:

**Axel Ahiezer Ortiz Villaseñor**

DIRECTOR DE TESIS:

**Dr. Juan Carlos Arteaga Velázquez**

CODIRECTOR DE TESIS:

**Dr. Adnan Bashir**



Morelia, Michoacán, México.

Febrero 2025

*A mis padres.*

### **Agradecimientos**

Quiero agradecer a mis padres por los valores que me inculcaron con los cuales estoy seguro de poder alcanzar mis metas. Agradezco a Gustavo Paredes quien fue pieza clave en todo este trabajo, siempre tuvo la mejor disposición para compartir su valioso conocimiento, el cual fue indispensable para realizar este trabajo. También me gustaría agradecerle al Dr. Ángel Miramontes por su ayuda para la realización de este trabajo. Finalmente quiero agradecer profundamente a mi asesor el Dr. Adnan Bashir por todo el apoyo y conocimientos que me ha brindado a quien personalmente admiro y estimo bastante.

**Resumen.**

En este trabajo hemos calculado los observables físicos de los mesones pseudoescalares en el modelo de interacción de contacto tales como su masa y factores de forma elásticos el cual es fundamental para entender la estructura interna de los hadrones. Posteriormente se calculo el factor de forma de transición  $\gamma\gamma^* \rightarrow \pi^0$ . Después calculamos los factores de forma elásticos para la primera excitación radial del pión y del kaón, nuestros resultados muestran un correcto comportamiento cualitativo comparado con los resultados que se obtienen con estudios realizados con modelos mas refinados. Finalmente, calculamos la contribución del **P**-box “Hadronic Light by Light ” del pión y del kaón para el estado base así como para la primera excitación radial utilizando el modelo interacción de contacto.

**Palabras clave:** Mesón, Quark, Propagador, Pión, Pseudoescalar.

**Asbtract.**

In this work we have calculated the physical observables of pseudoscalar mesons, such as their mass and elastic form factor which is fundamental for understanding the internal structure of hadrons , within a contact interaction model. Subsequently we have calculated the transition form factor  $\gamma\gamma^* \rightarrow \pi^0$ . Following this, we determined the elastic form factors for the first radial excitations of the pion and kaon. Our results show a correct qualitative behavior compared to the results obtained with studies carried out with more refined models. Finally, we calculate the contribution of the **P**-box “Hadronic Light by Light ” for both the ground state and the first radial excitation of the pion and kaon using the contact interaction model..

**Key Words:** Meson, Quark, Feynman, Pion, Pseudoescalar.

# CONTENIDO

---

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. ¿De que esta conformado el Universo?	1
1.2. Los Hadrones	4
1.3. Simetría de Isospín	5
1.4. Pión	6
1.5. Grupo Unitario Especial $SU(3)$	7
1.6. Modelo de Quarks	8
1.7. Cromodinámica Cuántica	10
1.8. Lagrangiano de QCD	11
1.9. Reglas de Feynman	13
1.10. Simetría Quiral y su Rompimiento	16
<b>2. Interacción de Contacto</b>	<b>18</b>
2.1. Ecuaciones de Schwinger-Dyson	18
2.2. Ecuación de Bethe-Salpeter	22
2.3. Modelo Interacción de Contacto	24

2.4. Ecuación de GAP . . . . .	26
2.5. Identidad Vector-Axial de WT . . . . .	30
2.6. Corolario de la Identidad Vector Axial de Ward- Takahashi . . . . .	33
2.7. Amplitudes de la BSE para mesones pseudoescalares . . . . .	39
2.8. Relaciones de Goldberger-Triemann . . . . .	42
2.9. Normalización Canónica para los mesones pseudoescalares . . . . .	45
2.10. Constantes de Decaimiento . . . . .	51
2.11. Factores de Forma . . . . .	55
<b>3. Factor de Forma Elástico para mesones Pseudoescalares</b>	<b>57</b>
3.1. Vértice quark-fotón vestido . . . . .	57
3.2. Factor de forma elástico para mesones pseudoescalares . . . . .	58
<b>4. Factor de Forma de Transición</b>	<b>68</b>
4.1. Factor de forma de transición $\gamma^* \gamma \rightarrow \pi^0$ . . . . .	69
<b>5. Factores de Forma Elástico y de Transición del Primer Estado Excitado</b>	<b>74</b>
5.1. Primer estado excitado . . . . .	74
5.1.1. Amplitudes de la BSE para la primera excitación radial para mesones pseudoescalares . . . . .	79
5.1.2. Constante de normalización canónica para la primera excitación radial . . . . .	80
5.1.3. Factor de Forma elástico para la primera excitación radial para los mesones pseudoescalares . . . . .	81
5.1.4. Factor de forma de transición $\gamma^* \gamma \rightarrow \pi^{0*}$ . . . . .	85

---

6. Contribución del P-box al momento anómalo magnético del muón	87
7. Conclusiones y comentarios finales	92
A. Apéndice	94
A.1. Convención Euclidiana . . . . .	94
B. Gammas	96
C. Trazas	97
D. Hermiticidad	98
E. Notación Slash de Feynman	99
F. Parametrización de Feynman	100
G. Nuevas Funciones del Kernel para la formula maestra	103
H. Representación de los parámetros de Feynman de la caja del pión	106
REFERENCIAS	108

---

# Capítulo 1

## Introducción

---

### SECCIÓN 1.1

#### ¿De que esta conformado el Universo?

La investigación realizada en la física de partículas en la actualidad tiene como objetivo dar respuesta a esta ambiciosa pregunta. Desde la antigüedad se ha tratado de dar una respuesta a esta pregunta, Anaxímenes de Mileto fue uno de los primeros en proponer una respuesta, en ella proponía que toda la materia podía ser descrita a partir de 4 elementos: aire, tierra, agua y fuego. No obstante, esta propuesta no resultó correcta. Mucho tiempo después, Mendeléyev logró clasificar todos los elementos hasta entonces conocidos en la famosa tabla periódica. A pesar del hecho de que esta propuesta estaba de acuerdo con los hechos experimentales, la idea de que al nivel más fundamental la materia estuviese dada por más de 100 elementos era bastante complicada, a pesar de que el modelo de la estructura fundamental de Anaxímenes era erróneo era conceptualmente superior debido a su simplicidad y a sus pocos elementos que lo conformaban. El aumento de estos elementos en el modelo de Mendeléyev y una organización sistemática evidente sugería fuertemente la existencia de una subestructura más simple la cual conformara toda la materia. Hoy en día, sabemos que en efecto, los elementos de la tabla periódica están conformados a un nivel más fundamental por electrones, protones y neutrones. Se llegó a estos resultados gracias a los experimentos de J.J Thompson a finales del siglo XIX sobre el comportamiento de los rayos



catódicos [2], [3], el experimento de la laminilla de oro de E. Rutherford [4] y los experimentos utilizando parafina de J. Chadwick [5] a principios del siglo XX. Sin embargo, el neutrón y el protón no estaban solos, resultan ser solo las partículas mas ligeras de un enorme grupo llamados bariones, de igual manera surgieron una gran cantidad de nuevas partículas llamadas mesones que de manera colectiva son llamados hadrones. El aumento de partículas que en ese momento se denominaban como “elementales” sugería la posible existencia de una nueva subestructura tal como sucedió con la tabla de Mendeleev. Teniendo cada una de estas partículas diferentes propiedades físicas tales como la masa, carga eléctrica, espín, extrañeza, encanto, belleza, numero bariónico, numero leptónico, isospin, hipercarga, tiempo de vida y modos de decaimiento, surgiendo de esta manera la necesidad de encontrar un nuevo sistema de clasificación. Gracias al trabajo de grandes científicos como S. Glashow [6], S. Weinberg [7], A. Salam [8], M. Gell-Mann [9] entre muchos otros, es que se han establecido los fundamentos teóricos de lo que hoy en día conocemos como el modelo estándar (SM) de partículas elementales, el cual es capaz de describir 3 de las 4 interacciones fundamentales que se dan en la naturaleza (fuerte, electromagnética y débil) en términos de lo que hasta hoy en día se cree que son los constituyentes mas fundamentales de la materia: los quarks y los leptones, donde el 98 % de toda la materia del universo visible esta formada por electrones, quarks  $u$  y quarks  $d$ . Estos constituyentes son fermiones de espín  $1/2$ , los cuales interactúan mediante el intercambio de bosones norma, los cuales tienen espín 1, todos ellos se muestran en la figura {6.1} (en esta figura también se incluye el bosón de Higgs [11], descubierto en 2012, que es el responsable de otorgar masa a estas partículas fundamentales). En física de partículas, hay cuatro interacciones fundamentales, la



Figura 1.1: Partículas que conforman el modelo estándar.

fuerte, la débil, la electromagnética y la gravitatoria. Los bosones de norma, los cuales son los mediadores de la interacción son los siguientes, para la interacción fuerte son los gluones, para la interacción débil son los bosones  $W^{\pm}$  y el bosón  $Z$ ; mientras que para la electromagnética, es el fotón. Cabe recalcar que la magnitud de la fuerza gravitacional es tan pequeña en comparación de las demás que, a escalas subatómicas puede despreciarse.

Cada uno de los elementos que conforman al modelo estándar tiene asociado su corres-

pondiente antipartícula la cual tiene la misma masa pero todos sus números cuánticos estan con el signo contrario. Los leptones tienen la misma carga eléctrica pero su masa es diferente, cada leptón tiene su propio neutrino asociado y pueden interactuar a través de fuerzas débiles y electromagnéticas. Los neutrinos solo están presentes en las interacciones débiles y no tienen carga eléctrica. Finalmente los quarks pueden interactuar a través de las fuerza fuerte, electromagnética y débil. Existen 6 diferentes tipos de quarks, cada uno de estos se les denomina con un sabor diferente. Una característica bastante interesante acerca de los quarks y gluones es que nunca se han podido observar de manera aislada, debido a una propiedad que se le conoce como confinamiento. Los quarks siempre se encuentran confinados en grupos los cuales conforman a los hadrones. Los bariones están conformados de tres quarks y los mesones están conformados por un quark y un anti-quark. Esta clasificación es conocida como el modelo de quarks, el cual ganó notoriedad al lograr predecir la existencia del barión  $\Omega^-$ . Sin embargo, este modelo comenzó a mostrar inconsistencias serias, por ejemplo, el barión  $\Delta^{++}$ , el cual esta conformado por tres quarks  $u$ , tiene espín  $3/2$ , lo cual nos obliga a combinar tres fermiones idénticos en un estado completamente simétrico  $uuu$  para que concuerde con las características de  $\Delta^{++}$ , pero este estado no es valido ya que viola el principio de exclusión de Pauli. Para solucionar este problema, se introdujo el numero cuántico llamado “color”, de manera que los quarks pudiesen distinguirse entre ellos y de esta manera no se violara el principio de exclusión de Pauli. Hay tres colores distintos: rojo ( $R$ ), azul ( $B$ ) y verde ( $G$ ) (y sus respectivos anti-colores), con esto se soluciona el problema de  $\Delta^{++}$  pero esto podría hacer surgir otro ya que por ejemplo para el caso del protón podríamos tener varios tipos diferentes de protones del tipo  $u_R u_G d_B$ ,  $u_R u_G d_G$ ,  $u_B u_R d_R$ , etc pero sabemos que solo hay estado para el protón, entonces se tiene que introducir este numero cuántico sin alterar la cantidad de estados para las partículas, esto se soluciona al asegurar que todas las partículas observables son “incolores” ó “blancas”. El color blanco se obtiene al combinar los tres colores:  $R$ ,  $G$  y  $B$  (anti-colores:  $\bar{R}$ ,  $\bar{G}$ ,  $\bar{B}$ ) en el caso del barión o al combinar un color con su respectivo anti-color para el caso del mesón, es decir que los hadrones deben ser invariantes bajo el intercambio de colores. Esta simetría ante permutaciones de color es una simetría exacta y se representa mediante el grupo  $SU_C(3)$ , donde el subíndice  $C$  hace referencia a que se trata de una simetría de color. Las simetrías desempeñan un papel fundamental en la física ya que a cada simetría se le asocia una ley de conservación. Cuando aplicamos un grupo de transformaciones a una función de onda la cual describe un estado y el lagrangiano correspondiente no cambia, entonces decimos que tenemos una simetría.

## SECCIÓN 1.2

## Los Hadrones

Toda la materia se constituye a partir de seis quarks, seis leptones ( y sus respectivas anti-partículas) y los bosones de Gauge pero cerca del 98 % del universo visible esta conformado a partir de solo tres de ellos: electrones, quarks  $u$  y quarks  $d$ , el resto de la materia es inestable. Toda la materia se constituye a partir de los átomos, un átomo esta conformado por un núcleo en el cual se concentra la mayoría de la masa y esta rodeado por una nube de electrones. El núcleo esta conformado de protones y neutrones (nucleones) unidos a través de la interacción fuerte, el numero atómico del átomo esta dado por el numero de protones, además el numero de neutrones es bastante similar al de los protones. Tanto los protones como los neutrones están compuestos por tres quarks ligeros; los protones están compuestos por dos quarks  $u$  y un  $d$  y el neutrón de un  $u$  y dos  $d$ . Los quarks pueden formar dos tipos de estructuras, los bariones y mesones que conjuntamente son llamados hadrones; los bariones están constituidos por tres quarks  $qqq$ , los anti-bariones están constituidos por tres anti-quarks  $\bar{q}\bar{q}\bar{q}$ , los mesones están constituidos por un quark y un anti-quark  $q\bar{q}$  por lo que un anti-mesón es un mesón. Para la descripción de partículas microscópicas se usan los siguientes números cuánticos:

- **Número Leptónico:** El estudio de las desintegraciones  $\mu$  y  $\tau$  ha llevado a introducir los números cuánticos, llamados números leptónicos que se conservan en las interacciones débiles.
- **Número Bariónico:** El número bariónico fue introducido para poder explicar la estabilidad del protón, al cual se le otorgó el número bariónico  $B = 1$  y al protón asi como a todos los demas bariones que decaen en el y  $B = -1$  a sus respectivas antipartículas. Al resto de partículas se les otorgó  $B = 0$ .
- **Extrañeza:** El número cuántico de la extrañeza, lo introdujo Murray Gell-Mann y Kazuhiko Nishijima para poder explicar como ciertas partículas (las cuales contienen al menos un quark strange  $s$ ) tenían un tiempo de vida mucho mas largo de lo que se esperaría al tener masas tan grandes. Las partículas que poseen extrañeza decaen débilmente donde se viola la conservación de extrañeza mientras que cuando esta se conserva decaen mediante las interacciones fuertes y electromagnéticas.
- **Isospín:** Es un número cuántico propuesto por Heisenberg.

## SECCIÓN 1.3

## Simetría de Isospín

Gracias a los experimentos de Ernest Rutherford [4] se descubrió que la carga de los átomos estaba concentrada en algo que se conocería como núcleo en el cual se encuentra la mayor parte de la masa del átomo. Hasta los años 30 se pensaba que los átomos solo estaban constituidos por protones y electrones pero comenzaron a surgir problemas ya que se sabía que el helio  $He$  era cuatro veces mas pesado que el hidrógeno  $H$  cuando en teoría debería de ser dos veces mas pesado, ¿por que sucedía esto? Los experimentos de Chadwick [5] junto a otros científicos llevaron al descubrimiento de los neutrones y precisamente los neutrones eran los que aportaban esa masa a los átomos. Los neutrones y protones se encuentran dentro del núcleo de los átomos y tienen una masa casi idéntica. Heisenberg propuso en 1932 [62] que el neutrón y el protón son manifestaciones del mismo estado llamado nucleón, tal como sucede en el caso del electrón y el espín, esto se propuso ya que la fuerza de interacción fuerte entre cualquier par de nucleones es la misma, sin importar si interactúan como protones o neutrones, además de que los neutrones y protones salvo la carga son muy similares en todos los demás aspectos. A esta simetría se le llama simetría de isospín, se trata de una simetría aproximada pues sabemos que el protón y el neutrón no tienen la misma masa por lo que solo se puede utilizar bajo condiciones específicas. La propuesta de Heisenberg era la siguiente:

$$\begin{aligned} |p\rangle &= \left| \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle \\ |n\rangle &= \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \end{aligned} \quad (1.1)$$

donde  $n$  es asociado al neutrón y  $p$  al protón, a esto se le conoce como doblete de isospín. La estructura de grupo de los generadores de isospín  $T_i$  satisface el álgebra de Lie  $SU(2)$ :

$$[T_i, T_j] = i\epsilon_{ijk}T_k \quad (1.2)$$

donde  $n$  y  $p$  forman un doblete que cumple con lo siguiente:

$$\begin{aligned} T_3|p\rangle &= \frac{1}{2}|p\rangle, & T_3|n\rangle &= -\frac{1}{2}|n\rangle, \\ T_+|n\rangle &= |p\rangle, & T_-|p\rangle &= |n\rangle \end{aligned} \quad (1.3)$$

Sea  $H_s$  un hamiltoniano, entonces dado que isospín es una simetría de interacciones fuertes, se cumple que:

$$[T_i, H_s] = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.4)$$

Gell-Mann y Nishijima observaron la existencia de una relaci3n entre todos estos n3meros cu3nticos:

$$Q = T_3 + \frac{B + S}{2} \equiv T_3 + \frac{Y}{2} \quad (1.5)$$

donde Y es el numero cu3ntico llamado hipercarga definido como  $Y = B + S$ .

#### SECCI3N 1.4

### Pi3n

En 1949, Hideki Yukawa [63] gan3 el Premio Nobel de F3sica por predecir la existencia del pi3n. En esta tesis nos enfocaremos en el estudio del pi3n, es el mes3n mas ligero y es frecuentemente utilizado para predecir el alcance m3ximo de la interacci3n fuerte. El pi3n neutro decae en un electr3n positr3n y en rayos gamma por la interacci3n electromagn3tica a una escala de tiempo de aproximadamente  $10^{-16}$  segundos, es decir:

$$\begin{aligned} \pi^0 &\Rightarrow e^- + e^+ + \gamma \\ \pi^{+/-} &\Rightarrow \mu^{+/-} + \nu \end{aligned} \quad (1.6)$$

Los piones positivo y negativo tienen una vida media de aproximadamente  $2.6 \times 10^{-8}$  segundos y decaen en un mu3n y un neutrino mu3nico.

Part3cula	S3mbolo	Anti-part3cula	Quarks	Masa ( $MeV/c^2$ )	Spin
Pion positivo	$\pi^+$	$\pi^-$	$u\bar{d}$	139.6	0
Pion negativo	$\pi^-$	$\pi^+$	$\bar{u}d$	139.6	0
Pion neutro	$\pi^0$	$\pi^0$	$(u\bar{u} + d\bar{d})/\sqrt{2}$	135.0	0

Tabla 1.1: Caracter3sticas del Pi3n

**SECCIÓN 1.5****Grupo Unitario Especial  $SU(3)$** 

$SU(N)$  es el grupo de las matrices unitarias  $N \times N$  con determinante igual a 1, en donde:

$$\begin{aligned} G^\dagger G &= GG^\dagger = 1 \\ \det(G) &= 1 \end{aligned} \quad (1.7)$$

Una matriz unitaria puede ser escrita en términos de una matriz hermitiana  $H$  como  $e^{iH}$ . De la identidad:  $\det(e^A) = e^{Tr(A)}$  se sigue que la  $Tr(H) = 0$ . Sabemos que para las matrices de  $N \times N$  existen  $N^2 - 1$  matrices hermitianas con traza nula por lo que el grupo de simetría  $SU(3)$  tiene 8 generadores, estos corresponden a 8 gluones, los cuales pueden escribirse como:

$$t_a = \frac{1}{2}\lambda_a \quad (1.8)$$

donde  $a = 1, 2, \dots, 8$  y las matrices  $\lambda_a$  son las matrices de Gell-Mann las cuales son matrices hermitianas de  $3 \times 3$  de traza nula y están dadas por:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.9)$$

Los generadores cumplen la siguiente relación:

$$[t_a, t_b] = if_{abc}t_c \quad (1.10)$$

donde  $f_{abc}$  son las constantes de estructura del grupo; éstas son antisimétricas ante el intercambio entre cualesquiera de dos de sus índices  $a$ ,  $b$  ó  $c$ .

## SECCIÓN 1.6

## Modelo de Quarks

El Mendelev de la física de partículas fue Murray Gell-Mann quien introdujo un octete que llamo “The eightfold way” en 1961 [9], “The eightfold way” organizó a los bariones y mesones en bonitos patrones geométricos, de acuerdo a su carga eléctrica y extrañeza. Los ocho bariones mas ligeros encajan en un arreglo hexagonal con dos

Quark	Espín	B	Q	$I_3$	S	Y
u	1/2	1/3	2/3	1/2	0	1/3
d	1/2	1/3	-1/3	-1/2	0	1/3
s	1/2	1/3	-1/3	0	-1	-2/3

Tabla 1.2: Números cuánticos de los quarks

partículas en el centro, este grupo es conocido como el octete de bariones {1.2}, la carga esta dada en unidades de carga del protón: Los ocho mesones mas ligeros encajan de

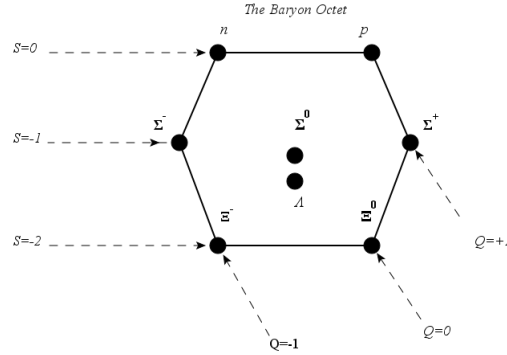


Figura 1.2: Octete de los bariones más ligeros.

manera similar en un patrón hexagonal {1.3}, formando así el octete de mesones (pseudo-escalares): “The eightfold way” no solo forma figuras hexagonales, también se dan patrones triangulares por ejemplo el cual incorpora los 10 bariones mas pesados {1.4}, llamado el decuplete de bariones: El modelo de Gell-Mann además de presentar estos patrones geométricos tan bonitos demostró su efectividad ya que llegó a predecir la existencia de  $\Omega^-$  que fue descubierta experimentalmente en 1964 tal como el modelo lo había predicho, gracias a este acierto el modelo ganó bastante popularidad, ya nadie dudaba de su efectividad, siendo este un gran avance en la física de partículas. Dejando de lado el éxito de este modelo, aun quedaba la pregunta ¿Por qué los hadrones encajaban en patrones geométricos tan curiosos? En 1964 Gell-Mann y Zweig propusieron

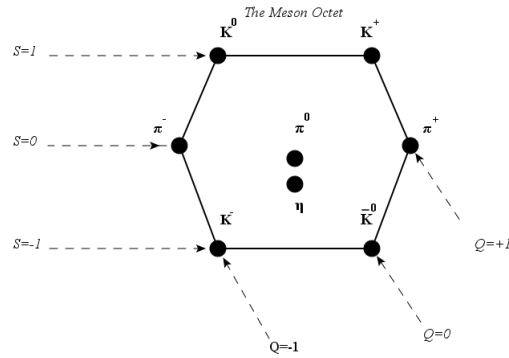


Figura 1.3: Octete de mesones más ligeros.

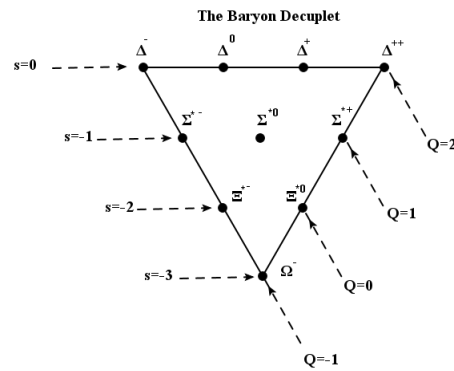


Figura 1.4: Decuplete de bariones

de manera independiente que todos los hadrones están compuestos de constituyentes aún mas elementales, a los cuales Gell-Mann llamó quarks, los quarks venían dados en tres diferentes versiones (sabores) como se muestra en la tabla (1.2), formando a su vez un patrón geométrico {1.5}: Sus respectivos anti-quarks también tienen un patrón

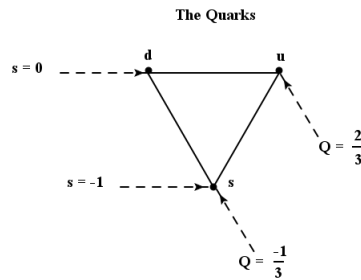


Figura 1.5: Quarks de Gell-Mann

geométrico {1.6}: Se podría decir que los dos grandes aciertos del modelo de quarks son los siguiente:

- 1. Todos los bariones están compuestos de tres quarks (y todos los anti-bariones



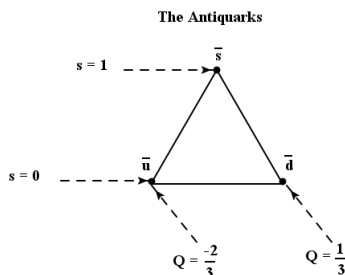


Figura 1.6: Anti-quarks de Gell-Mann

de tres anti-quarks).

- 2. Todos los mesones están compuestos de un quark y un anti-quark.

Pero aunque el modelo de quarks tuvo un comienzo brillante se encontró con dos problemas, el primero es que nunca se había podido observar un quark aislado y que tenía discrepancias con el principio de Pauli además de que experimentos posteriores demostrarían la existencia de tres nuevos quarks mas pesados llamados charm  $c$ , top  $t$  y bottom  $b$ . Hoy en día no hay ninguna duda sobre la existencia de los quarks.

## SECCIÓN 1.7

### Cromodinámica Cuántica

Las teorías cuánticas de campos son una rama de la física que combinan los principios de la mecánica cuántica con los postulados de la relatividad especial. Su principal aplicación se encuentra en la física de altas energías, en donde se utiliza para estudiar partículas subatómicas y sus interacciones. La electrodinámica cuántica (QED) es una de las teorías cuántica de campos (QFT) mas famosas ya que describe los fenómenos en los que intervienen partículas cargadas electricamente que interactúan mediante de la fuerza electromagnética. Esta fue la primera teoría cuántica de campos exitosa incorporando conceptos como la creación y aniquilación de partículas. Desarrollada principalmente en la decada de 1930, Richard Feynman fue uno de los principales contribuyentes a la creación de esta, por esto y numerosas razones se le otorgo el premio Nobel de Física en 1965.

La cromodinámica cuántica (QCD) es la teoría cuántica de campos que describe las interacciones fuertes, es decir las interacciones que se dan entre partículas con color,

al ser también una QFT su estructura es bastante similar a la de QED pero con una diferencia importante; el grupo de norma no es abeliano,

QCD es una teoría de norma que tiene dos regímenes el perturbativo y el no perturbativo, actualmente es la teoría que nos ayuda a entender la estructura interna de los hadrones en términos de quarks y gluones de manera mas completa. QCD tiene dos propiedades recalcales:

- **Libertad Asintótica:** Esto se traduce a que a extremadamente energías, los quarks y gluones interactúan de manera muy débil, es decir que a medida que se aumenta la escala de energía las interacciones se vuelven cada vez mas débiles. QCD predice este comportamiento, el cual fue descubierto por David Politzer, Frank Wilczek y David Gross. Por este hallazgo recibieron el Premio Nobel de Física en 2004 [15]. Gracias a este descubrimiento, la comunidad científica puede hacer predicciones mas precisas utilizando la técnica de teoría de perturbaciones.
- **Confinamiento:** Los objetos de color como los quarks y gluones no son estados que se hayan podido observar en la naturaleza por si solos, pues todos los estados físicos corresponden a estados incoloros. Dado que los gluones pueden interactuar entre si, estos forman un campo de color, el cual impide que los quarks se separen. El potencial entre los quarks aumenta con la distancia, lo que implica que se necesitaría una cantidad infinita de energía para poder separarlos, la veracidad de este descubrimiento radica en que explica por que no hemos sido capaces de observar quarks y gluones libres.

## SECCIÓN 1.8

### Lagrangiano de QCD

Dentro de las teorías cuánticas de campos, existen las teorías de gauge, las cuales se basan en el principio de invarianza de gauge. Este principio establece que las interacciones entre partículas fundamentales surgen como consecuencia de exigir que el lagrangiano del sistema sea invariante bajo un grupo de simetría local. El modelo estándar se basa en las teorías de norma,  $SU_C(3)$  es la simetría de norma de QCD.

Al exigir invarianza de gauge bajo el grupo  $SU_C(3)$  en el lagrangiano que describe a los quarks, se obtiene como resultado la interacción entre ellos. Ya que los quarks son

fermiones de espín 1/2, estos se describen mediante el lagrangiano de Dirac:

$$\mathcal{L}_{Dirac}(x) = \bar{\psi}_q^j(x)(i\cancel{\partial} - m_j)\psi_q^j(x) \quad (1.11)$$

donde  $\cancel{\partial} \equiv \gamma^\mu \partial_\mu$  y  $m_j$  representa la masa de los quarks. Los quarks se describen mediante el campo fermiónico  $\bar{\psi}_q^j(x)$ , donde  $q$  el índice de color y  $j$  el índice de sabor (se asume una suma sobre índices repetidos). Para que existan interacciones entre los quarks, es necesario exigir que el lagrangiano sea invariante bajo el conjunto de transformaciones de gauge asociadas al grupo  $SU_C(3)$ . Para los campos fermiónicos, la transformación de norma esta dada por:

$$\begin{aligned} \psi_q(x) &\rightarrow \psi'_q(x) = U\psi_q(x) \\ \bar{\psi}_q(x) &\rightarrow \bar{\psi}'_q(x) = \bar{\psi}_q(x)U^\dagger \end{aligned} \quad (1.12)$$

donde  $U$  es una matriz unitaria arbitraria de  $3 \times 3$ . De manera general  $U$  puede escribirse como:

$$U = e^{ig_s \alpha_a(x)t^a} \quad (1.13)$$

donde  $g_s$  es la constante de acoplamiento fuerte, los 8 elementos  $\alpha_a(x)$  (donde  $a = 1, \dots, 8$ ) son funciones escalares y cada una de las 8 matrices  $t^a$  son los generadores del grupo  $SU_C(3)$ , las cuales satisfacen la relación (1.10). El lagrangiano de Dirac no es invariante bajo la transformación de norma (1.12), ya que obtenemos:

$$\mathcal{L}_{Dirac}(x) \rightarrow \mathcal{L}(x) = \mathcal{L}_{Dirac} + \bar{\psi}(x)U^\dagger i\gamma^\mu (\partial_\mu U)\psi(x) \quad (1.14)$$

Donde por simplicidad, hemos omitido los índices de color y sabor para el campo fermiónico  $\psi$ . Para poder garantizar la invarianza de gauge del lagrangiano, es necesario cambiar la derivada parcial  $\partial_\mu$  por una derivada covariante  $D_\mu$ , la cual esta dada por:

$$D_\mu = \partial_\mu + ig_s t^a G_\mu^a \quad (1.15)$$

siendo  $G_\mu^a$  campos vectoriales de espín 1, cuya transformación de norma es:

$$G_\mu^a \rightarrow G_\mu^{a'} = G_\mu^a - \partial_\mu \alpha^a(x) - g_s f^{abc} \alpha^b(x) G_\mu^c(x) \quad (1.16)$$

Tomando todos estos cambios en cuenta, el lagrangiano de Dirac queda de la siguiente manera:

$$\mathcal{L}_{Dirac} \rightarrow \mathcal{L}_I(x) \equiv \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi(x) = \mathcal{L}_{Dirac} - g_s \bar{\psi}(x)\gamma^\mu t^a \psi(x) G_\mu^a \quad (1.17)$$

Para poder identificar los campos  $G_\mu^a$  como partículas físicas (en este caso, los gluones), es necesario que el lagrangiano incluya tanto los términos de energía cinética como de energía potencial. Por lo tanto, debemos introducir un termino correspondiente a la energía cinética de la siguiente forma:

$$\mathcal{L}_I(x) \rightarrow \mathcal{L}_{QCD}(x) \equiv \mathcal{L}_I(x) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} \quad (1.18)$$

donde  $F_{\mu\nu}^a$  es el tensor de energía momento de los gluones, el cual esta dado por:

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a - g_s f^{abc} G_\mu^b G_\nu^c \quad (1.19)$$

donde el ultimo término de la expresión anterior es el responsable de que los bosones de gauge interactúen entre si, una característica distintiva de las teorías no-abelianas, es decir, aquellas descritas por un grupo de simetría no conmutativo. Finalmente, el lagrangiano de QCD esta dado por:

$$\mathcal{L}_{QCD}(x) = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) - g_s \bar{\psi}(x)\gamma^\mu t^a \psi(x) G_\mu^a - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} \quad (1.20)$$

Es importante recalcar que, para poder cuantizar la teoría es necesario introducir en el lagrangiano el termino de fijación de norma. Además, de que también se deben incluir a los llamados campos fantasmas para garantizar la unitariedad de la teoría.

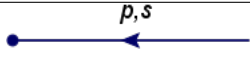
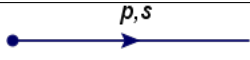
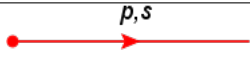
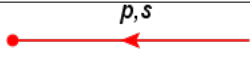
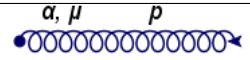
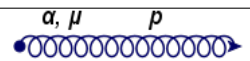
## SECCIÓN 1.9

### Reglas de Feynman

En la física de partículas, es común enfrentarse a cálculos extremadamente complejos que, en muchos casos, no pueden resolverse de manera exacta. Por ello, se recurre a la teoría de perturbaciones, donde se utilizan las reglas de Feynman, las cuales se pueden deducir a partir del formalismo de la integral de camino. Los diagramas de Feynman son representaciones gráficas de las trayectorias de las partículas en procesos de colisión, los cuales deben su nombre a Richard Feynman quien los introdujo por primera vez en 1948 [64]. Gracias a estos diagramas, el problema de calcular secciones eficaces de dispersión se simplifica a la suma de amplitudes de todos los estados intermedios posibles.

Las reglas de Feynman para QCD son las siguientes:

- **Lineas Externas:**

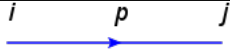
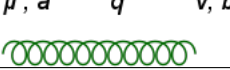
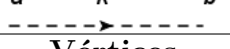
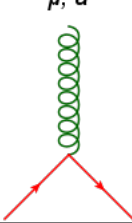
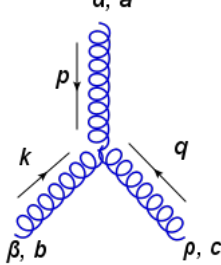
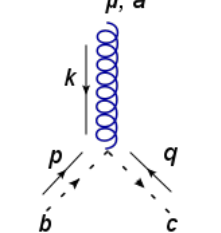
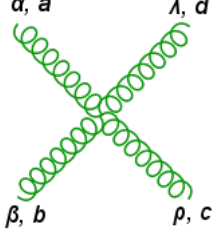
Quark Entrante		$u(p, s)$
Quark Saliente		$\bar{u}(p, s)$
Anti-quark Entrante		$\bar{v}(p, s)$
Anti-quark Saliente		$v(p, s)$
Gluón Entrante		$\epsilon_\mu^\alpha(p)$
Gluón Saliente		$\epsilon_\mu^{a*}(p)$

donde  $u$  y  $v$  son espinores de Dirac para el fermión y anti-fermión respectivamente donde  $s$  es el espín y  $p$  el momento, los cuales son soluciones de la ecuación de Dirac,  $\epsilon_\mu^{a*}(p)$  representa la polarización de los gluones donde  $\alpha$  es un índice de color y  $\mu$  un índice de Lorentz.

- **Propagadores:** Un propagador es una partícula que se está desplazando entre dos puntos del espacio-tiempo, se le asocia a una función de Green de 2 puntos que representa la amplitud de probabilidad de propagación de una partícula entre dos puntos. En la cromodinámica cuántica hay tres tipos de propagadores; para quarks, gluones y fantasmas.
- **Vértices:** Los vértices representan dos o más partículas interactuando, a diferencia de QED en QCD se permiten los vértices entre dos o más gluones ya que estos pueden interactuar entre ellos.

en donde las letras griegas son índices de Lorentz, las letras  $a, b, c$  y  $d$  son índices de color y las letras  $k, p$  y  $q$  denotan el cuadrimomento de la partícula,  $\xi$  es el término de fijación de norma en el lagrangiano de QCD, cabe recalcar que estas expresiones son a nivel de árbol.

- **Conservación de energía y momento:** En cada vértice debe haber conservación de momentos para asegurar esto se le asocia una delta de Dirac. Para un vértice donde se involucran  $(m + n)$ :  $(2\pi)^4 \delta^4(q_1 + \dots + q_m - p_1 - \dots - p_n)$  donde los momentos  $q_i$  están asociados a los momentos entrantes y los momentos  $p_i$  son los momentos salientes.
- **Integración de momentos internos:** Debemos tomar en cuenta todas las posibles configuraciones en las que un proceso puede ocurrir, es por eso que para cada momento interno  $q$ , escribimos el factor  $d^4q/(2\pi)^4$  e integramos sobre todo el espacio.

	<b>Propagadores</b>	
<b>Quark</b>		$iS_0(p) = \delta_{ij} \frac{i}{\not{p} - m}$
<b>Gluón</b>		$i\delta^{ab}\Delta_0^{\mu\nu}(q) = -i\frac{\delta^{ab}}{q^2} \left[ g^{\mu\nu} + (\xi - 1) \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right]$
<b>Fantasma</b>		$i\delta^{ab}G_0(k^2) = i\frac{\delta^{ab}}{k^2}$
	<b>Vértices</b>	
<b>Quark-Gluón</b>		$-ig_s T^a \gamma^\mu$
<b>3-Gluones</b>		$-ig_s f^{abc} [g^{\alpha\beta}(k-p)^\rho + g^{\beta\rho}(p-q)^\alpha + g^{\rho\alpha}(q-k)^\beta]$
<b>Fantasma-Gluón</b>		$g_s f^{abc} q^\mu$
<b>4-Gluones</b>		$-ig_s^2 [f^{abe} f^{cde} (g^{\alpha\rho} g^{\beta\lambda} - g^{\alpha\lambda} g^{\beta\rho}) +$ $f^{ace} f^{bde} (g^{\alpha\beta} g^{\rho\lambda} - g^{\alpha\lambda} g^{\rho\beta}) + f^{ade} f^{bce} (g^{\alpha\beta} g^{\lambda\rho} - g^{\alpha\rho} g^{\lambda\beta})]$

## SECCIÓN 1.10

## Simetría Quiral y su Rompimiento

La simetría quiral de QCD es un caso limite en el que las masas corriente de los quarks pueden despreciarse. Sabemos que dichas masas no son cero, sin embargo, si consideramos que las masas corriente de los quarks  $u$ ,  $d$  y  $s$  son mucho mas pequeñas que las masas de los hadrones, entonces estas pueden ser despreciadas, con todo esto en cuenta, sabemos que se trata de una simetría aproximada de QCD. Esta simetría es asociada a la corriente vector axial, la cual se rompe de manera espontanea, a esto se le conoce rompimiento de simetría espontaneo, una consecuencia importante de esta ruptura de simetría es la existencia de un bosón sin masa llamado bosón de Goldstone [65], el pión es el bosón de Goldstone para QCD, si se tratara de una simetría perfecta el pión no tendría masa pero como sabemos no es el caso, esto sucede justamente por que se trata de una simetría aproximada. De la mecánica clásica sabemos que las simetrías del lagrangiano implica una conservación de corriente. Como ejemplo, a partir de la corriente de Noether. Tomemos el lagrangiano de dos sabores de fermiones sin masa, cuyos resultados pueden aplicarse directamente en QCD. Entonces, consideramos el lagrangiano de Dirac para  $m = 0$ :

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}_j \not{\partial} \psi_j \quad (1.21)$$

donde el subíndice  $j$  denota los sabores  $u$ ,  $d$ . Consideremos la siguiente transformación:

$$\psi_j \rightarrow e^{-i\frac{\vec{\tau} \cdot \theta}{2}} \psi_j \simeq \left(1 - i\frac{\vec{\tau} \cdot \theta}{2}\right) \psi_j \quad (1.22)$$

donde  $\vec{\tau}$  son las matrices de Pauli para el isospín. El campo conjugado se transforma de la siguiente manera:

$$\bar{\psi}_j \rightarrow \bar{\psi}_j e^{i\frac{\vec{\tau} \cdot \theta}{2}} \simeq \bar{\psi}_j \left(1 + i\frac{\vec{\tau} \cdot \theta}{2}\right) \quad (1.23)$$

De esta manera podemos ver que el lagrangiano (1.21) es invariante bajo estas transformaciones.

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}_j \not{\partial} \psi_j \rightarrow \mathcal{L}' = i\bar{\psi}_j \not{\partial} \psi_j - i\theta \cdot \left(i\bar{\psi}_j \not{\partial} \frac{\vec{\tau}}{2} \psi_j - i\bar{\psi}_j \frac{\vec{\tau}}{2} \not{\partial} \psi_j\right) = i\bar{\psi}_j \not{\partial} \psi_j \quad (1.24)$$

de donde obtenemos que la corriente conservada asociada es:

$$V_\mu^a = \bar{\psi}_j \gamma_\mu \frac{\tau^a}{2} \psi_j \quad (1.25)$$

esta corriente es conocida como corriente vectorial. Ahora, consideremos la siguiente transformación:

$$\psi_j \rightarrow e^{-i\gamma_5 \frac{\vec{\tau} \cdot \theta}{2}} \psi_j \simeq \left(1 - i\gamma_5 \frac{\vec{\tau} \cdot \theta}{2}\right) \psi_j \quad (1.26)$$

Entonces, el campo conjugado se transforma de la siguiente manera:

$$\bar{\psi}_j \rightarrow \bar{\psi}_j e^{i\gamma_5 \frac{\tau}{2} \cdot \theta} \simeq \bar{\psi}_j \left(1 - i\gamma_5 \frac{\tau}{2} \cdot \theta\right) \quad (1.27)$$

donde hemos utilizado las relaciones de conmutación de la matrices gamma, en particular  $\gamma_0\gamma_5 = -\gamma_5\gamma_0$ . De aquí, podemos observar que el lagrangiano (1.21) también permanece invariante bajo esta transformación.

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}_j \not{\partial} \psi_j \rightarrow \mathcal{L}' = i\bar{\psi}_j \not{\partial} \psi_j - i\theta \cdot \left( i\bar{\psi}_j \partial^\mu \gamma_\mu \gamma_5 \frac{\tau}{2} \psi_j - i\bar{\psi}_j \gamma_5 \frac{\tau}{2} \partial^\mu \gamma_\mu \psi_j \right) = i\bar{\psi}_j \not{\partial} \psi_j \quad (1.28)$$

vemos que el segundo termino se cancela por anticonmutación de  $\gamma_\mu$  y  $\gamma_5$ . La corriente asociada será entonces:

$$A_\mu^a = \bar{\psi}_j \gamma_\mu \gamma_5 \frac{\tau}{2} \psi_j \quad (1.29)$$

dicha corriente es conocida como corriente vectorial axial. De aqui vemos que el lagrangiano para dos fermiones sin masa en QCD permanece invariante bajo ambas transformaciones, las cuales conforman la llamada simetría quiral. Por otro lado, si introducimos el termino de masa en el lagrangiano:

$$\delta\mathcal{L} = -m\bar{\psi}_j \psi_j \quad (1.30)$$

podemos ver que este termino será invariante bajo la primera transformación pero no bajo la segunda, ya que para este término se transforma de la siguiente manera:

$$\delta\mathcal{L} = -m\bar{\psi}_j \psi_j \rightarrow -m\bar{\psi}_j \psi_j + 2im\theta \left( \bar{\psi}_j \frac{\tau}{2} \gamma_5 \psi_j \right) \quad (1.31)$$

Es por esta razón que se observa una generación dinámica de masa a medida que la escala de energía disminuye, pasando del régimen perturbativo al no-perturbativo.



---

# Capítulo 2

## Interacción de Contacto

---

### SECCIÓN 2.1

#### Ecuaciones de Schwinger-Dyson

Las ecuaciones de Schwinger-Dyson (SD), son llamadas así en honor a Julian Schwinger y Freeman Dyson [16], [17], son un conjunto de ecuaciones integrales acopladas que relacionan a las funciones de Green y las teorías cuánticas de campos, comúnmente se les llama como las ecuaciones de Euler-Lagrange de las teorías cuánticas de campos ya que son las ecuaciones de movimiento correspondientes a las funciones de Green, una vez que se conocen todas sus funciones de Green la teoría de campos se considera resuelta. Estas ecuaciones son de suma importancia ya que a través de ellas podemos estudiar el rompimiento dinámico de simetría quiral, es decir, la generación de masa de los fermiones en las QFTs. Estas ecuaciones pueden derivarse de manera formal a partir del formalismo de las integrales de camino de Feynman. El método más utilizado para truncar estas ecuaciones es utilizando teoría de perturbaciones, recordando que esto es válido solo en un cierto régimen donde la constante de acoplamiento  $\alpha_s \ll 1$ . Por lo que es necesario utilizar otro método de truncación para el régimen no perturbativo, a partir de los cálculos no perturbativos se puede obtener información muy valiosa la cual en ocasiones se pierde utilizando cálculos perturbativos como la generación dinámica de masas y el confinamiento. En nuestro caso estamos especialmente interesados en la

generación dinámica de masas, pues es bien sabido que el 99 % de la masa de la materia tiene un origen dinámico. Ahora bien, revisemos como los propagadores del fermión y el fotón se modifican debido a las autointeracciones. Aunque la derivación de las SDE no depende del valor de la constante de acoplamiento  $\alpha_s$  como ya se ha señalado, resulta mas intuitivo deducirlas por argumentos perturbativos. De esta manera, podemos expresar el propagador del quark completo como una serie infinita de correcciones al propagador desnudo, como se muestra a continuación {2.1} donde la interacción es mediada por fotones.

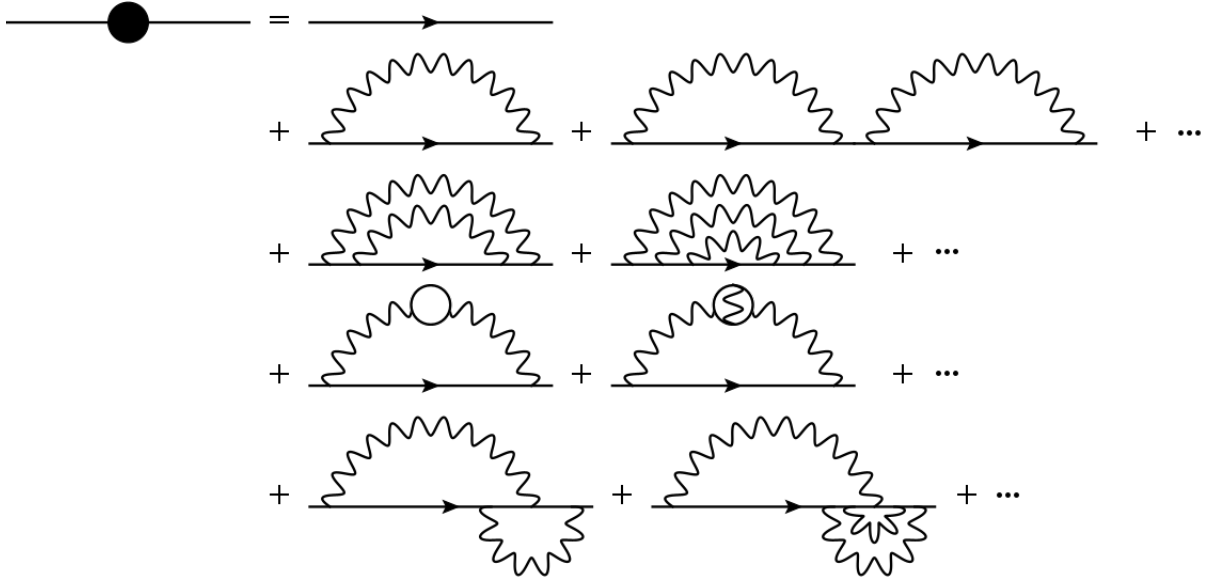


Figura 2.1: Propagador completo.

En 1949, Freeman Dyson al darse cuenta de que existía un cierto patrón en las correcciones del propagador desnudo, las cuales agrupo en cuatro diferentes tipos:

- Correcciones al propagador fermiónico.
- Correcciones al propagador del fotón.
- Correcciones al vértice.
- Re-correcciones, las cuales son todas las posibles combinaciones diferentes de estas correcciones.

El proceso de autointeracciones genera 3 series infinitas de correcciones. Las correcciones al propagador fermiónico están representadas por {2.2}. Hemos utilizado un circulo relleno sobre el propagador fermiónico representando de esta forma la suma de todas

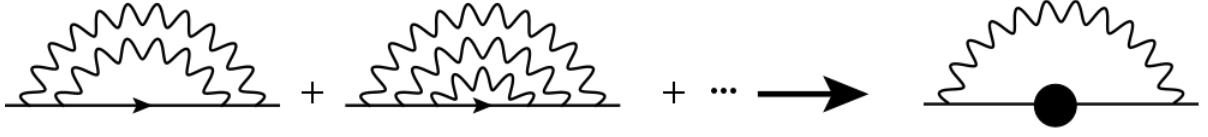


Figura 2.2: Correcciones al propagador fermiónico.

las interacciones que pueden afectar al fermión durante su propagación. Lo mismo ocurre para el propagador completo del fotón y el vértice completo del fermión, que también poseen dichos círculos rellenos, a diferencia de los propagadores desnudos que no lo tienen. Las correcciones al propagador del fotón están representadas por {2.3}.



Figura 2.3: Correcciones al propagador del fotón.

Las correcciones al vértice están representadas por {2.4}.

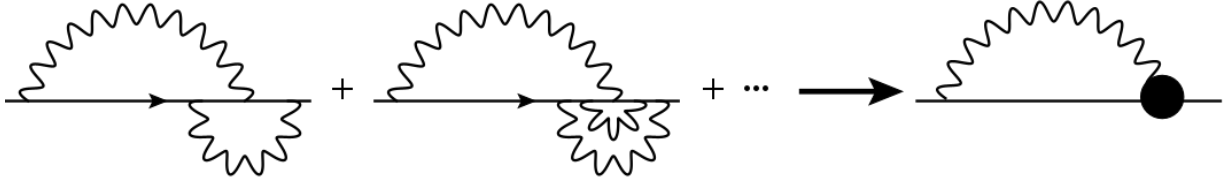


Figura 2.4: Correcciones al vértice.

Y las re-correcciones están representadas por {2.5}.

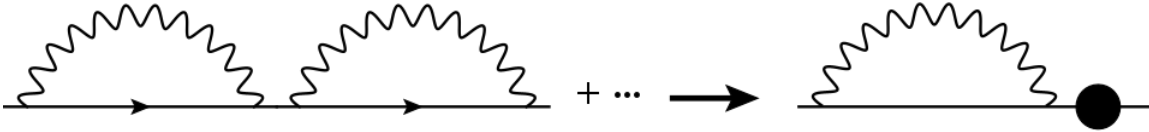


Figura 2.5: Re-correcciones de todas las correcciones.

Las series anterior mencionadas se pueden representar de una forma mas compacta, como se muestra en {2.6}.

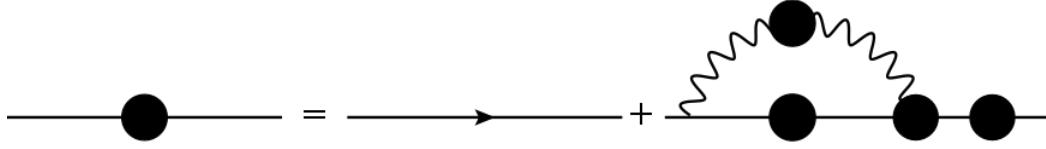


Figura 2.6: Primera simplificación de la serie perturbativa de {2.1}.

En {2.6} es importante notar que el ultimo término en las correcciones corresponde a las re-correcciones. Expandiendo este ultimo término tenemos una ecuación como en {2.7}.

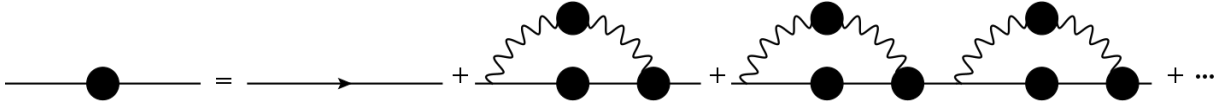
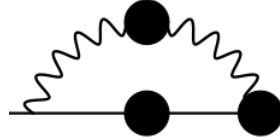


Figura 2.7: Expansión de la figura {2.6}.

Ahora bien, representamos a la autoenergía  $\Sigma(p)$  como {2.8}. Entonces la ecuación

Figura 2.8: Diagrama correspondiente a la autoenergía  $\Sigma(p)$ .

correspondiente al diagrama {2.7} esta dada por la ecuación (2.1) donde hemos definido  $S(p)$  como el propagador del quark vestido y a  $S_0(p)$  como el propagador del quark a nivel de árbol.

$$\begin{aligned}
 S(p) &= S_0(p) + S_0(p)\Sigma(p)S_0(p) + S_0(p)\Sigma(p)S_0(p)\Sigma(p)S_0(p) + \dots \\
 &= S_0(p) + S_0(p)\Sigma(p) \underbrace{[S_0(p) + S_0(p)\Sigma(p)S_0(p) + \dots]}_{S(p)} \\
 &= S_0(p) + S_0(p)\Sigma(p)S(p)
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Esta es la representación diagramática de la ecuación de Schwinger Dyson (SDE) para el propagador del quark en QED, donde  $S_0(p) = \frac{1}{\not{p} - m}$  y  $\Sigma(p)$  representa la autoenergía. Multiplicando (2.1) por la izquierda con  $S_0^{-1}(p)$  y posteriormente con  $S^{-1}(p)$  por la derecha obtenemos:

$$\begin{aligned}
 S_0^{-1}(p)S(p) &= S_0^{-1}(p)S_0(p) + S_0^{-1}(p)S_0(p)\Sigma(p)S(p) \\
 S_0^{-1}(p)S(p) &= \mathbf{1} + \Sigma(p)S(p) \\
 S_0^{-1}(p)S(p)S^{-1}(p) &= S^{-1}(p) + \Sigma(p)S(p)S^{-1}(p) \\
 S_0^{-1}(p) &= S^{-1}(p) + \Sigma(p) \\
 S^{-1}(p) &= S_0^{-1}(p) - \Sigma(p)
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

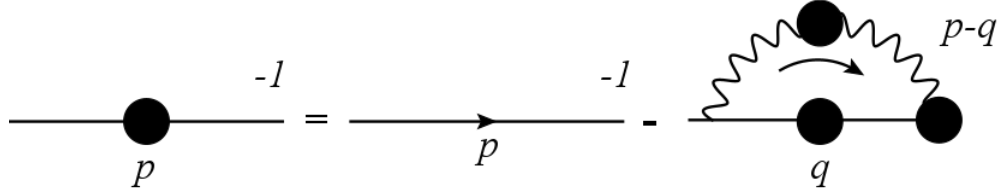


Figura 2.9: Representación diagramática de la ecuación de Schwinger-Dyson para un quark en QED.

Esta última ecuación se representa de manera diagramática como en {2.9}.

De manera análoga podemos extender esta idea a QCD. Entonces la ecuación de Schwinger-Dyson para el quark en QCD está representada diagramáticamente por {2.10}.

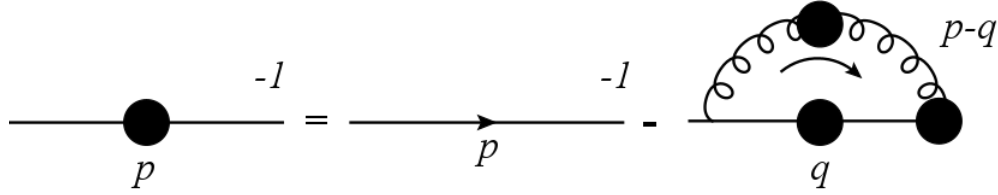


Figura 2.10: Representación diagramática de la ecuación de Schwinger-Dyson para un quark en QCD.

## SECCIÓN 2.2

### Ecuación de Bethe-Salpeter

Los estados ligados mas simples en QCD son los mesones y estos están compuestos por un quark y un antiquark. La ecuación de Bethe-Salpeter (BSE) [66], nombrada así en honor a Hans Albrecht Bethe [68] y Edwin Ernest Salpeter [67] describe los estados ligados de un sistema de dos partículas en un formalismo covariante relativista y se trata de una expresión no perturbativa que depende del propagador del quark y el kernel  $\bar{q}q$ .

Entonces, para estudiar al pion como un estado conformado por quarks requerimos la ecuación de Bethe-Salpeter (Figura {2.11}), la cual está dada por:

$$\Gamma_H(k; P) = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} S_{f_1}(q_+) \Gamma_H(q; P) S_{\bar{f}_2}(q_-) \mathcal{K}(q; k, P) \quad (2.3)$$

donde  $\Gamma_H$  es la amplitud de Bethe-Salpeter para mesones pseudoescalares y  $\mathcal{K}$  es el kernel de la BSE, el cual describe la interacción del quark y el antiquark, el subíndice  $f_1$  representa un quark con sabor  $f_1$  y  $\bar{f}_2$  un antiquark de sabor  $f_2$ .  $\Gamma_H(k; P)$  puede determinarse de manera separada de la BSE una vez que  $\mathcal{K}$  sea especificado. Además,  $q_+ = q + \eta P$  y  $q_- = q - (1 - \eta)P$  son los momentos del quark y antiquark respectivamente,  $\eta \in [0, 1]$  es la fracción de momento total que comparten el quark y el antiquark, nosotros usaremos  $\eta = 1$ ,  $k$  es el momento relativo y  $P$  es el momento total, tal que,  $P^2 = -m_H^2$  donde  $m_H$  es la masa del mesón.

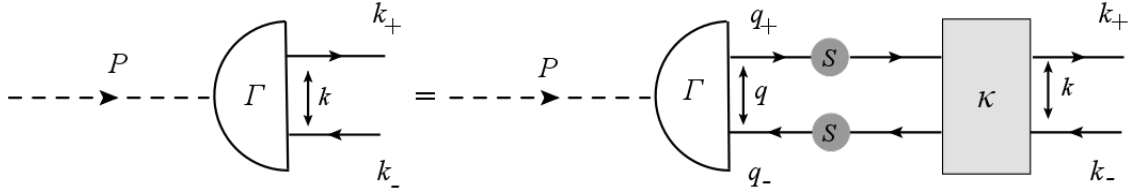


Figura 2.11: Representación diagramática de la ecuación de Bethe-Salpeter en donde  $q_+ = k_+$  y  $q_- = k_-$  y además por conservación de momento  $q_+ + q_- = P$ .

La amplitud de Bethe-Salpeter para cualquier partícula pseudoescalar, incluyendo el pión, esta dada por:

$$\Gamma_H^j(k, P) = \tau^j \gamma_5 [iE_H(k; P) + \gamma \cdot P F_H(k; P) + (\gamma \cdot k)(k \cdot P)G_H(k; P) + \sigma_{\mu\nu} k_\mu P_\nu H_H(k; P)] = \tau^j \Gamma_H(k, P) \quad (2.4)$$

Por lo tanto:

$$\Gamma_H(k, P) = \gamma_5 [iE_H(k; P) + \gamma \cdot P F_H(k; P) + (\gamma \cdot k)(k \cdot P)G_H(k; P) + \sigma_{\mu\nu} k_\mu P_\nu H_H(k; P)] \quad (2.5)$$

donde  $\tau_{j=1,2,3}^j$  son las matrices de Pauli,  $k$  y  $P$  es el momento relativo y el momento total del par quark-antiquark respectivamente. Donde las amplitudes invariantes  $E, F, G$  y  $H$  son funciones escalares de Lorentz de  $k^2$  y  $k \cdot P$ . El vértice axial esta dado por:

$$\Gamma_{5\mu}^j = \frac{\tau^j}{2} \gamma_5 [\gamma_\mu F_R(k; P) + (\gamma \cdot k)k_\mu G_R(k; P) - \sigma_{\mu\nu} k_\nu H_R(k; P)] + \tilde{\Gamma}_{5\mu}^j(k; P) + \frac{f_\pi P_\mu}{P^2 + m_\pi^2} \Gamma_{5\pi}^j(k; P) \quad (2.6)$$

## SECCIÓN 2.3

## Modelo Interacción de Contacto

En el regimen de bajas energías en la QCD no se puede recurrir a la teoria de perturbaciones por lo que debemos utilizar metodos no perturbativos tales como las teorías efectivas o modelos. En las teorías efectivas se busca simplificar las interacciones de tal forma que no se pierda demasiada información, es decir, que conserve las características claves de QCD a bajas energías. Un modelo bastante popular es el modelo Nambu Jona-Lasinio (NJL), el cual debe su nombre a Yoichiro Nambu y Giovanni Jona-Lasinio. El cual fue propuesto en el año 1961 cuando Y. Nambu y Jona-Lasinio publicaron el trabajo titulado “Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity” [19]. Poco antes, Nambu y Chou habían sugerido la existencia de un limite en el cual el pión es un bosón de Goldstone (sin masa), asociado con la ruptura espontanea de simetría quiral. En el trabajo de 1961, Nambu y Jona-Lasino comenzaron a partir de un lagrangiano de dos nucleones (que en ese momento eran los constituyentes fundamentales de la materia) sin masa y que preservan la simetría quiral. La ruptura espontanea de esta simetría da lugar a una masa finita, lo que a su vez genera bosones de Goldstone los cuales posteriormente serían identificados con el pión. En esa época la QCD aún no había sido propuesta. Cuando la QCD se formuló a mediados de los años 70, el modelo NJL comenzó a perder popularidad, debido a que era un modelo no renormalizable. No obstante, trabajar con QCD a bajas energías resultó realmente complicado por lo que en los años 80’s surgió la idea de reinterpretar el modelo NJL, ahora interpretándolo como un modelo para un sistema de quarks interactuantes, suponiendo que los grados de libertad de los gluones pueden dejarse afuera de las interacciones, lo que da lugar a interacciones efectivas entre los quarks. Este modelo nos brinda la oportunidad de estudiar la ruptura espontanea de simetría quiral y sus manifestaciones físicas que se ven reflejadas en los hadrones, como la generación dinámica de masas de los quarks, la aparición de un condensado de quarks y el papel de los piones como bosones de Goldstone de una manera mucho mas sencilla. De esta forma capturando características clave de la teoría. En el modelo interacción de contacto (CI) no se utiliza el propagador del gluón completo (2.7), se considera al propagador del gluón como una constante en el gauge de Landau. Dado que el momento del gluón no interviene en la ecuación ya que el diagrama de Feynman asociado a una dispersión ( $q\bar{q}$ ) no aparece el gluón que intercambian y simplemente se obtiene un diagrama de cuatro puntas que corresponden a los quarks entrantes y salientes (es decir que 4 fermiones van a un punto), esta es la aproximación mas radical de este modelo. Sin embargo, sabemos que el propagador del gluón si se comporta casi como una constante en el sector infrarrojo, al menos en gauge de Landau como podemos ver en la figura {2.7}. Es por esta razón que en el gauge de Landau es una buena aproximación para todos los observables que

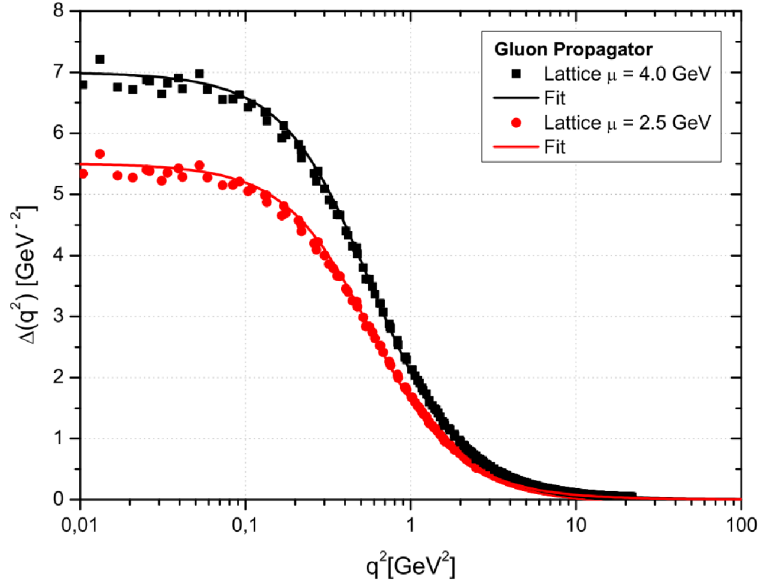


Figura 2.12: Propagador del Gluon [35].

solo dependen de la física en el infrarrojo.

$$g^2 D_{\mu\nu}(k) = g^2 \left[ g_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right] \frac{1}{k^2} \rightarrow \frac{4\pi\alpha_{IR}}{m_g^2} \delta_{\mu\nu} \equiv \delta_{\mu\nu} \frac{1}{m_G^2} = 4\pi\delta_{\mu\nu} \hat{\alpha}_{IR} \quad (2.7)$$

Por lo que definimos:

$$m_G^2 = \frac{m_g^2}{4\pi\alpha_{IR}} = \frac{1}{4\pi\hat{\alpha}_{IR}} \quad (2.8)$$

- $m_g$  es la escala de masa generada dinámicamente en QCD [29, 74], para el sector ligero de partículas  $m_g = 500 \text{ MeVs}$ .
- $\alpha_{IR}$  es el parámetro que determina la fuerza de interacción en el infrarrojo [30, 75], para el sector ligero de partículas  $\alpha_{IR} = 1.14$ .

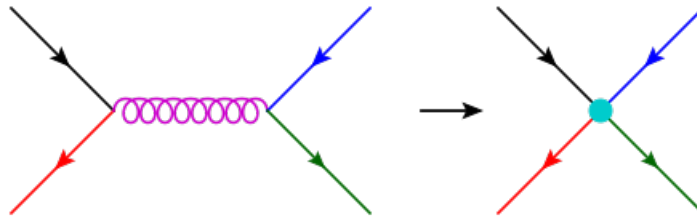


Figura 2.13: Propagador completo.



El vértice del quark-gluón se toma al nivel mas bajo, es decir que no existen interacciones, esto es equivalente a tomar el vértice desnudo en lugar del completo:

$$\Gamma_\nu^a(p, q; \mu) \rightarrow \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\nu \quad (2.9)$$

Nuevamente esta aproximación del vértice es la mas adecuada en el gauge del Landau ya que este gauge es el menos sensible a las diferencias entre el vértice quark-gluón completo y el desnudo. Este modelo tipo NJL es una interacción de contacto en el espacio de configuraciones. Por lo que la amplitud de Bethe-Salpeter (BSA) para un estado quark-antiquark no puede depender del momento relativo, entonces, para el modelo interacción de contacto tenemos que:

$$\Gamma_H(P) = \gamma_5 \left[ iE_H(P) + \frac{\gamma \cdot P}{2M_R} F_H(P) \right] \quad (2.10)$$

donde hemos extraído una  $M_R$  (es la masa reducida) por razones dimensionales. La BSA puede obtenerse a partir de la BSE. Al nivel mas bajo, el kernel  $\mathcal{K}$  esta dado por:

$$\mathcal{K} = \frac{-1}{m_G^2} \left[ \sum_a \frac{\lambda^a \lambda^a}{4} \right] \gamma_\mu \gamma_\nu \delta_{\mu\nu} \quad (2.11)$$

Sustituyendo en la BSE y siendo cuidadosos con el orden la multiplicación de matrices obtenemos:

$$\Gamma_H(k, P) = -\frac{4}{3m_G^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \gamma_\mu S_{f_1}(q + P) \Gamma_H(P) S_{\bar{f}_2}(q) \gamma_\mu \quad (2.12)$$

## SECCIÓN 2.4

### Ecuación de GAP

Las ecuaciones de Dyson-Schwinger para el propagador del quark en el espacio euclideo están dadas por:

$$S^{-1}(p) = Z_2(i\gamma \cdot p + m) + \Sigma(p) \quad (2.13)$$

donde  $Z_2 = Z_2(\mu^2, \Lambda^2)$  es la constante de de la función de onda del quark la cual depende del punto de renormalización  $\mu^2$ , la masa de escala de regularización  $\Lambda^2$  y el parámetro de gauge.

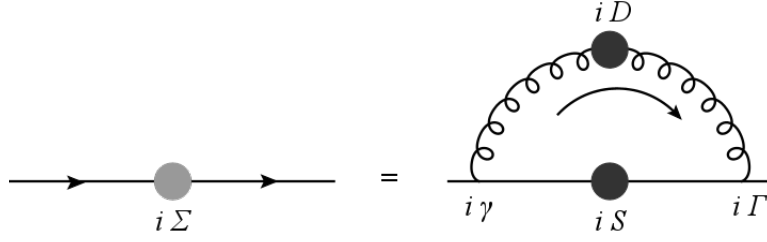


Figura 2.14: La ecuación de Schwinger-Dyson para la energía propia del quark.

Ademas,

$$\Sigma(p) = Z_1 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} g^2 D_{\mu\nu}(p-q) \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\mu S(q) \Gamma_\nu^a(q, p) \quad (2.14)$$

Donde  $D_{\mu\nu}(k)$  es el propagador del gluon vestido,  $\Gamma_\nu(q, p)$  es el vértice quark-gluon vestido y  $Z_1(\mu^2, \Lambda^2)$  es la constante de renormalización del vértice quark-gluon. En su forma mas general el propagador del quark esta dada por:

$$\begin{aligned} S(p) &= -i\gamma \cdot p \sigma_V(p^2) + \sigma_S(p^2) \\ S(p) &= \frac{Z(p^2)}{i\gamma \cdot p + M(p^2)} \\ S(p) &= \frac{1}{i\gamma \cdot p A(p^2) + B(p^2)} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Por lo que:

$$\begin{aligned} S(p) &= \frac{Z(p^2)}{i\gamma \cdot p + M(p^2)} \left( \frac{-i\gamma \cdot p + M(p^2)}{-i\gamma \cdot p + M(p^2)} \right) = \frac{Z(p^2)(i\gamma \cdot p + M(p^2))}{(\gamma \cdot p)^2 + M^2(p^2)} \\ &= \frac{-iZ(p^2)\not{p} + M(p^2)Z(p^2)}{p^2 + M^2(p^2)} = -i\not{p}\sigma_V(p^2) + \sigma_S(p^2) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Donde hemos utilizado el hecho de que  $\not{p}^2 = p^2$ .

Lo cual implica que:

$$\sigma_S(p^2) = \frac{Z(p^2)M(p^2)}{p^2 + M^2(p^2)} \quad (2.17)$$

Para resolver las ecuaciones (2.13) y (2.14), hacemos un simple ansatz:

$$\begin{aligned} g^2 D_{\mu\nu}(p-q) &= \delta_{\mu\nu} \frac{1}{m_G^2} \\ \Gamma_\nu^a(p, q) &= \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\nu \end{aligned} \quad (2.18)$$

Observemos lo siguiente:

- $m_G$  es una escala de masa del gluon. Puede ser asociada con el comportamiento infrarrojo del propagador del gluon.

- El parámetro  $\tilde{\Lambda}$  sirve como corte, entonces el modelo definido es no renormalizable. Por lo tanto la escala de regularización  $\tilde{\Lambda}$  juega un papel dinámico.
- Todas las cantidades calculadas dependen de  $\tilde{\Lambda}$ , por lo tanto podemos escoger un conjunto de constantes de renormalización igual a 1. Entonces  $Z_1 = Z_2 = 1$ . Esto es parte de la definición del modelo. Regularizamos el modelo interacción de contacto pero no lo renormalizamos.

Usando el hecho de que  $\Sigma_a \lambda^a \lambda^a = \frac{16}{3}I$ , la ecuación de GAP puede escribirse como:

$$\begin{aligned} S^{-1}(p) &= (i\gamma \cdot p + m) + \frac{4}{3m_G^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \gamma_\mu S(q) \gamma_\mu \\ S^{-1}(p) &= (i\gamma \cdot p + m) + \frac{1}{3m_G^2 \pi^2} \int_q^\Lambda \gamma_\mu S(q) \gamma_\mu \end{aligned} \quad (2.19)$$

Donde hemos cambiado la notación  $\tilde{\Lambda} \rightarrow \Lambda$ ,  $\int_q^\Lambda = \int \frac{d^4 q}{(4\pi^2)}$  que representa una regularización invariante translacional. Ahora sustituimos la ec.(2.15) en la ec.(2.19):

$$\begin{aligned} S(p) &= \frac{Z(p^2)}{i\gamma \cdot p + M(p^2)} \Rightarrow S^{-1}(p) = \frac{i\gamma \cdot p + M(p^2)}{Z(p^2)} \\ &= (i\gamma \cdot p + m) + \frac{1}{3m_G^2 \pi^2} \int_q^\Lambda \gamma_\mu S(q) \gamma_\mu = (i\gamma \cdot p + m) + \frac{1}{3m_G^2 \pi^2} \int_q^\Lambda \gamma_\mu \frac{Z(q^2)}{i\gamma \cdot q + M(q^2)} \gamma_\mu \\ &= (i\gamma \cdot p + m) + \frac{1}{3m_G^2 \pi^2} \int_q^\Lambda \gamma_\mu \frac{Z(q^2)}{i\gamma \cdot q + M(q^2)} \left( \frac{i\gamma \cdot q + M(q^2)}{i\gamma \cdot q + M(q^2)} \right) \gamma_\mu \end{aligned} \quad (2.20)$$

Para encontrar el valor de  $Z(p^2)$  multipliquemos esta última ecuación por  $\gamma \cdot p$  y calculemos su traza.

$$\begin{aligned} i \frac{Tr[(\gamma \cdot p)^2]}{Z(p^2)} + m \frac{Tr[\gamma \cdot p]}{Z(p^2)} &= i Tr[(\gamma \cdot p)^2] + m Tr[\gamma \cdot p] \\ &+ \frac{1}{3\pi^2 m_G^2} \int_q^\Lambda \frac{i Z(q^2) Tr[\gamma \cdot p \gamma_\mu \gamma \cdot q \gamma_\mu] + M(q^2) Z(q^2) Tr[\gamma \cdot p \gamma_\mu \gamma_\mu]}{-q^2 + M^2(q^2)} \end{aligned} \quad (2.21)$$

Donde hemos utilizado el hecho de que la traza de un producto de números impares de matrices de Dirac es 0 y que el primer término en la integral es antisimétrico en  $q$  por lo que la integral es cero. Entonces obtenemos:

$$\frac{i4p^2}{Z(p^2)} = i4p^2 \Rightarrow \frac{1}{Z(p^2)} = 1 \Rightarrow Z(p^2) = 1 \quad (2.22)$$

Ahora bien, para encontrar  $M(p^2)$  tomemos la traza de la ec.(2.20):

$$\begin{aligned}
iTr[\cancel{\gamma \cdot p}] + M(p^2)Tr[I] &= iTr[\cancel{\gamma \cdot p}] + mTr[I] \\
+ \frac{1}{3\pi m_G^2} \int_q^\Lambda \frac{-iTr[\cancel{\gamma_\mu \gamma \cdot q \gamma_\mu}] + M(q^2)Tr[\gamma_\mu \gamma_\mu]}{-q^2 + M^2(q^2)} \\
\Rightarrow M(p^2) &= m + \frac{1}{3\pi m_G^2} \int_q^\Lambda \frac{M(q^2)}{-q^2 + M^2(q^2)}
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Entonces obtenemos que:

$$M(p^2) = m + \frac{1}{3\pi m_G^2} \int_q^\Lambda \frac{M(q^2)}{-q^2 + M^2(q^2)} \tag{2.24}$$

Por otro lado, sabemos que  $d^4q = dq q^3 \sin^2\theta d\theta \sin\phi d\phi d\psi$ , donde  $\theta, \phi \in [0, \pi]$  y  $\psi \in [0, 2\pi]$ . Por lo que la integral no depende de los ángulos, por lo tanto:

$$d^4q = dq^3 \underbrace{\int_0^\pi \sin^2\theta d\theta}_{\pi/2} \underbrace{\int_0^\pi \sin\phi d\phi}_2 \underbrace{\int_0^{2\pi} d\psi}_{2\pi} = dq^2 q^2 \pi^2 \tag{2.25}$$

Haciendo el cambio  $q^2 \rightarrow s$  y notemos que  $M(p) = M$  es una solución de la ecuación de GAP:

$$M = m + \frac{M}{3\pi^2 m_G^2} \int_0^\infty ds \frac{s}{s + M^2} \tag{2.26}$$

Ahora, dado que esta integral es divergente, es necesario que utilicemos un esquema de regularización para poderla calcular. Usaremos el esquema de regularización de tiempo propio [36]:

$$\int_a^b dx e^{-x(s+M)} = \frac{e^{-a(s+M)} - e^{-b(s+M)}}{M + s} \tag{2.27}$$

Usando este hecho obtenemos que:

$$\frac{1}{s + M^2} = \int_0^\infty d\tau e^{-\tau(s+M^2)} \rightarrow \int_{\tau_{uv}^2}^{\tau_{ir}^2} d\tau e^{-\tau(s+M^2)} = \frac{Z(s)}{s + M^2} \tag{2.28}$$

donde  $\tau_{ir}, \tau_{uv}$  son los reguladores infrarrojo y ultravioleta respectivamente,

$$Z(s) = e^{-\tau_{uv}^2(s+M^2)} - e^{-\tau_{ir}^2(s+M^2)} \tag{2.29}$$

Sustituyendo la ec.(2.28) en la ec.(2.26) obtenemos:

$$M = m + \frac{M}{3\pi^2 m_G^2} \int_0^\infty ds \frac{s}{s + M^2} \left[ e^{-\tau_{uv}^2(s+M^2)} - e^{-\tau_{ir}^2(s+M^2)} \right] \tag{2.30}$$

Haciendo el cambio de variable  $s' = s + M^2$ :

$$\begin{aligned} \int_{M^2}^{\infty} ds \frac{(s' - M^2)}{s'} \left[ e^{-\tau_{uv}^2 s'} - e^{-\tau_{ir}^2 s'} \right] &= \int_{M^2}^{\infty} ds' \left[ e^{-\tau_{uv}^2 s'} - e^{-\tau_{ir}^2 s'} \right] \\ &- M^2 \int_{M^2}^{\infty} \frac{ds'}{s'} e^{s' \tau_{uv}} + M^2 \int_{M^2}^{\infty} \frac{ds'}{s'} e^{s' \tau_{ir}} \end{aligned} \quad (2.31)$$

Haciendo el cambio de variable  $s' \tau_{uv}^2 = t$  y  $s' \tau_{ir}^2 = t$  donde es requerido, obtenemos:

$$\frac{1}{\tau_{uv}^2} \int_{M^2 \tau_{uv}^2}^{\infty} dt e^{-t} - \frac{1}{\tau_{ir}^2} \int_{M^2 \tau_{ir}^2}^{\infty} dt e^{-t} - M^2 \int_{M^2 \tau_{uv}^2}^{\infty} dt t^{-1} e^{-t} - M^2 \int_{M^2 \tau_{ir}^2}^{\infty} dt t^{-1} e^{-t} \quad (2.32)$$

Haciendo la integración por partes en las dos primeras integrales y ademas recordando que:

$$\Gamma(\alpha, y) = \int_y^{\infty} dt t^{\alpha-1} e^{-t} \quad (2.33)$$

Denotando estas integrales como  $\mathcal{C}(M^2; \tau_{ir}^2, \tau_{uv}^2)$  obtenemos:

$$\mathcal{C}(M^2; \tau_{ir}^2, \tau_{uv}^2) = M^2 \Gamma(0, M^2 \tau_{uv}^2) - M^2 \Gamma(0, M^2 \tau_{ir}^2) - \frac{1}{\tau_{ir}^2} e^{-M^2 \tau_{ir}^2} - \frac{1}{\tau_{uv}^2} e^{-M^2 \tau_{uv}^2} \quad (2.34)$$

Con integración parcial del primer termino de la ec.(2.34) podemos escribirla como:

$$\mathcal{C}(M^2; \tau_{ir}^2, \tau_{uv}^2) = M^2 \Gamma(-1, M^2 \tau_{uv}^2) - M^2 \Gamma(0, M^2 \tau_{ir}^2) - \frac{1}{\tau_{ir}^2} e^{-M^2 \tau_{ir}^2} \quad (2.35)$$

De una forma mas compacta podemos escribirlo como:

$$\mathcal{C}(M^2; \tau_{ir}^2, \tau_{uv}^2) = M^2 \Gamma(-1, M^2 \tau_{uv}^2) - M^2 \Gamma(-1, M^2 \tau_{ir}^2) \quad (2.36)$$

Entonces, ahora podemos escribir:

$$M = m + \frac{M}{3\pi^2 m_G^2} \mathcal{C}(M^2; \tau_{ir}^2, \tau_{uv}^2) \quad (2.37)$$

Notemos que M resulta una constante. En este trabajo utilizaremos los parámetros [83] de la tabla (2.1).

En la tabla se presentan los valores de las masas obtenidas utilizando (2.37).

## SECCIÓN 2.5

### Identidad Vector-Axial de WT

Para poder solucionar las ecuaciones de Schwinger-Dyson para el propagador del quark y el vértice quark-gluón debemos truncarlas introduciendo un esquema de truncación.

Quarks	$Z_H$	$\Lambda_{UV}[GeV]$	$\alpha_{IR}$	$\hat{\alpha}_{IR}$
$u, d, s$	1	0.905	1.14	4.56
$c, d, s$	3.034	1.322	0.376	1.50
$c$	13.122	2.305	0.087	0.35
$b, u$	11.273	3.222	0.101	0.41
$b, s$	17.537	3.574	0.065	0.26
$b, c$	30.537	3.886	0.037	0.15
$b$	129.513	7.159	0.009	0.035

Tabla 2.1: Regulador ultravioleta en  $[GeV]$  así como la constante de acoplamiento adimensional para diferentes combinaciones de quarks.  $\alpha_{IR} = \alpha_{IRL}/Z_H$  con  $\alpha_{IRL} = 1.14$ , extraído de un ajuste de datos, como se explica en [76],  $\hat{\alpha}_{IR} = \alpha_{IR}/m_g^2$ . Los parámetros fijos son la masa del gluón  $m_g = 500 MeV$  [29] y  $\Lambda_{IR} = 0.24 GeV$ .

$m_u = 0.007$	$m_s = 0.17$	$m_c = 1.08$	$m_b = 3.92$
$M_u = 0.367$	$M_s = 0.53$	$M_c = 1.52$	$M_b = 4.75$

Tabla 2.2: Las masas ( $m_u, \dots$ ) son las masas corrientes de los quarks y las masas ( $M_u, \dots$ ) son las masas dinámicas de los quarks.

Las ecuaciones deben ser truncadas cuidando que se preserve la simetría quiral. Esto puede expresarse mediante la identidad vector-axial de Ward-Takahashi, la cual asegura que los piones son bosones de Goldstone. La truncación mas sencilla que satisface este criterio es la truncación arcoiris donde el vértice quark-gluón se reemplaza con el vértice a nivel de árbol. La constante de decaimiento  $f_\pi$  y la constante de renormalización canónica son proporcionales en el limite quiral sí y solo sí, la identidad vector-axial de Ward- Takahashi se satisface, es decir, sí:

$$P_\mu \Gamma_{5\mu}(q_+, q) = S^{-1}(q_+) i\gamma_5 + i\gamma_5 S^{-1}(q) \quad (2.38)$$

Verifiquemos que esta identidad se satisface en el modelo de interacción de contacto. Primero, veamos la ecuación de SD del vértice y calculemos el kernel  $\mathcal{K}$  de este diagrama. Por lo que obtenemos la siguiente ecuación:

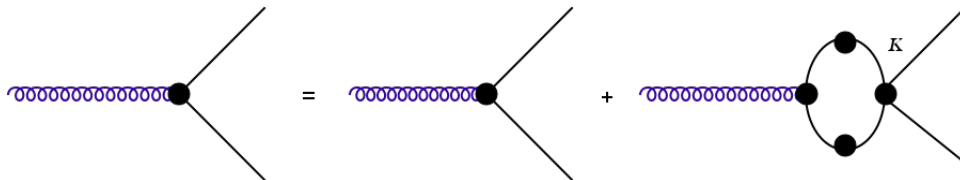


Figura 2.15: Vértice de la SDE.

En la aproximación Rainbow ladder esto se transforma en lo siguiente:

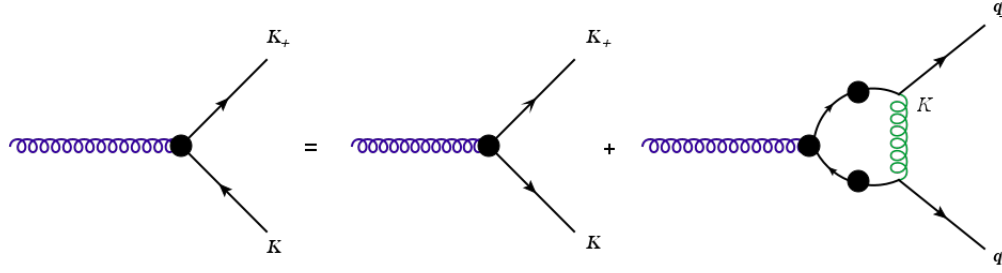


Figura 2.16: Vértice de la SDE usando la aproximación Rainbow-Ladder.

$$\mathcal{K} = \frac{-1}{m_G^2} \left[ \sum_a \frac{\lambda^a \lambda^a}{4} \right] \gamma_\alpha \gamma_\beta \delta_{\alpha\beta} = \frac{-1}{m_G^2} \left( \frac{1}{4} \right) \left( \frac{16}{3} \right) \gamma_\alpha \gamma_\alpha \quad (2.39)$$

Entonces la BSE para un mesón se escribe la siguiente forma:

$$\Gamma_H(P) = \frac{-4}{3} \frac{1}{m_G^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \gamma_\mu S_{f_1}(q+P) \Gamma_H S_{\bar{f}_2}(q) \gamma_\mu \quad (2.40)$$

Donde hemos utilizado el ansatz para el propagador del gluón y del vértice. Ahora bien, el vértice axial  $\Gamma_{5\mu}(k_+, k)$  satisface su propia SDE:

$$\begin{aligned} \Gamma_{5\mu}(k_+, k) &= \gamma_5 \gamma_\mu + \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \mathcal{K} \chi_{5\mu}(q_+, q) = - \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{m_G^2} \delta_{\mu\nu} \left[ \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\mu \right] \left[ \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\nu \right] \chi_{5\mu}(q_+, q) \\ &+ \gamma_5 \gamma_\mu = \gamma_5 \gamma_\mu - \frac{4}{3} \frac{1}{m_G^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \gamma_\mu \chi_{5\mu}(q_+, q) \gamma_\mu = \frac{-1}{3\pi^2 m_G^2} \int_q^\Lambda \gamma_\mu S_{f_1}(q_+) \Gamma_{5\mu}(q_+, q) S_{\bar{f}_2}(q) \gamma_\mu \\ &+ \gamma_5 \gamma_\mu \end{aligned} \quad (2.41)$$

Multiplicando por  $P_\mu$ :

$$P_\mu \Gamma_{5\mu}(k_+, k) = \gamma_5 \gamma \cdot P - \frac{1}{3\pi^2 m_G^2} \int_q^\Lambda \gamma_\alpha S_{f_1}(q_+) P_\mu \Gamma_{5\mu}(q_+, q) S_{\bar{f}_2}(q) \gamma_\alpha \quad (2.42)$$

Ahora, sustituyendo la ecuación (2.38) en esta ultima expresión obtenemos:

$$\begin{aligned} P_\mu \Gamma_{5\mu}(k_+, k) - \gamma_5 \gamma \cdot P &= -\frac{1}{3\pi^2 m_G^2} \int_q^\Lambda \gamma_\alpha S(q_+) [S^{-1}(q_+) i\gamma_5 + i\gamma_5 S^{-1}(q)] S(q) \gamma_\alpha \\ &= -\frac{1}{3\pi^2 m_G^2} \left[ \int_q^\Lambda \gamma_\alpha S(q_+) S^{-1}(q_+) i\gamma_5 S(q) \gamma_\alpha + \int_q^\Lambda \gamma_\alpha S(q_+) i\gamma_5 S^{-1}(q) S(q) \gamma_\alpha \right] \\ &= -\frac{1}{3\pi^2 m_G^2} \left[ \int_q^\Lambda \gamma_\alpha i\gamma_5 S(q) \gamma_\alpha + \int_q^\Lambda \gamma_\alpha S(q_+) i\gamma_5 \gamma_\alpha \right] \\ &= -\frac{1}{3\pi^2 m_G^2} \int_q^\Lambda i\gamma_\alpha \gamma_5 S(q) \gamma_\alpha - \frac{1}{3\pi^2 m_G^2} \int_q^\Lambda \gamma_\alpha S(q_+) i\gamma_5 \gamma_\alpha \\ &= \frac{i\gamma_5}{3\pi^2 m_G^2} \int_q^\Lambda \gamma_\alpha S(q) \gamma_\alpha + \frac{1}{3\pi^2 m_G^2} \int_q^\Lambda \gamma_\alpha S(q_+) \gamma_\alpha i\gamma_5 \end{aligned} \quad (2.43)$$

Utilizando la ecuación (2.19) en el limite quiral ( $m = 0$ ):

$$\frac{1}{3\pi^2 m_G^2} \int_q^\Lambda \gamma_\mu S(q) \gamma_\mu = S^{-1}(p) - i\gamma \cdot p \quad (2.44)$$

Por lo que podemos escribir:

$$\begin{aligned} P_\mu \Gamma_{5\mu}(k_+, k) &= \gamma_5 \gamma \cdot P + i\gamma_5 [S^{-1}(k) - i\gamma \cdot k] + [S^{-1}(k) - i\gamma \cdot k] i\gamma_5 \\ P_\mu \Gamma_{5\mu}(k_+, k) &= \gamma_5 \gamma \cdot P + S^{-1}(k) i\gamma_5 + i\gamma_5 S^{-1}(k) \end{aligned} \quad (2.45)$$

La cual es equivalente a la siguiente expresión:

$$P_\mu \Gamma_{5\mu}(q_+, q) = \gamma_5 \gamma \cdot P + S^{-1}(q) i\gamma_5 + i\gamma_5 S^{-1}(q) \quad (2.46)$$

Por lo que la identidad de Ward-Takahashi (2.38) se satisface únicamente si  $P = 0$ . Notemos que  $P^2 = 0$  no necesariamente implica  $P = 0$ . En la teoría de Poincaré, la condición  $P = 0$  es imposible. Sin embargo,  $P = 0$  implica  $P^2 = 0$ , lo cual garantiza un pión sin masa. Esto puede suceder en el limite quiral.

## SECCIÓN 2.6

### Corolario de la Identidad Vector Axial de Ward-Takahashi

Existen consecuencias bastante interesantes que surgen de la identidad Vector Axial de WT, partamos de la ecuación:

$$P_\mu \Gamma_{5\mu}(k_+, k) = \gamma_5 \gamma \cdot P + \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \mathcal{K} P_\mu \chi_{5\mu}(q, P) \quad (2.47)$$



En la aproximación Rainbow-Ladder y en el modelo interacción de contacto tenemos:

$$\begin{aligned}
P_\mu \Gamma_{5\mu}(k_+, k) &= \gamma_5 \gamma \cdot P - \frac{4}{3m_G^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \gamma_\mu S(q_+) P_\mu \Gamma_{5\mu}(q_+, q) S(q) \gamma_\mu \\
&= \gamma_5 \gamma \cdot P - \frac{1}{3\pi^2 m_G^2} \int_q^\Lambda \gamma_\mu S(q_+) P_\mu \Gamma_{5\mu}(q_+, q) S(q) \gamma_\mu \\
&= \gamma_5 \gamma \cdot P - \frac{1}{3\pi^2 m_G^2} \int_q^\Lambda \gamma_\mu S(q_+) [S^{-1}(q_+) i\gamma_5 + i\gamma_5 S^{-1}(q)] S(q) \gamma_\mu \\
&= \gamma_5 \gamma \cdot P - \frac{1}{3\pi^2 m_G^2} \int_q^\Lambda \gamma_\mu [i\gamma_5 S(q) + iS(q_+) \gamma_5] \gamma_\mu \\
&= \gamma_5 \gamma \cdot P - \frac{1}{3\pi^2 m_G^2} \int_q^\Lambda [i\gamma_\mu \gamma_5 S(q) \gamma_\mu + i\gamma_\mu S(q_+) \gamma_5 \gamma_\mu] \\
&= \gamma_5 \gamma \cdot P + \frac{i}{3\pi^2 m_G^2} \int_q^\Lambda [\gamma_5 \gamma_\mu S(q) \gamma_\mu + \gamma_\mu S(q_+) \gamma_\mu \gamma_5] \\
&= \gamma_5 \gamma \cdot P + \frac{i}{3\pi^2 m_G^2} \int_q^\Lambda \gamma_5 \gamma_\mu (-i\gamma \cdot q + M) \sigma_V \gamma_\mu + \gamma_\mu (-i\gamma \cdot q_+ + M) \sigma_V^+ \gamma_\mu \gamma_5 \\
&= \gamma_5 \gamma \cdot P + \frac{i}{3\pi^2 m_G^2} \int_q^\Lambda \gamma_5 \gamma_\mu (-i\gamma \cdot q + M) \sigma_V \gamma_\mu + \gamma_5 (-\gamma_\mu) (i\gamma \cdot q_+ + M) \sigma_V^+ (-\gamma_\mu) \\
&= \gamma_5 \gamma \cdot P + \frac{i}{3\pi^2 m_G^2} \int_q^\Lambda \gamma_5 \gamma_\mu (-i\gamma \cdot q + M) \sigma_V \gamma_\mu + \gamma_5 \gamma_\mu (i\gamma \cdot q_+ + M) \sigma_V^+ \gamma_\mu
\end{aligned} \tag{2.48}$$

Ahora separemos las partes con  $M$  y  $\sigma_V$ :

$$\begin{aligned}
P_\mu \Gamma_{5\mu}(k_+, k) &= \gamma_5 \gamma \cdot P + \frac{i}{3\pi^2 m_G^2} \int_q^\Lambda \gamma_5 \gamma_\mu [-i\gamma \cdot q \sigma_V + M \sigma_V + i\gamma \cdot q_+ \sigma_V^+ + M \sigma_V^+] \gamma_\mu \\
&= \gamma_5 \gamma \cdot P + \frac{i}{3\pi^2 m_G^2} \int_q^\Lambda \gamma_5 \gamma_\mu i\gamma \cdot (q_+ \sigma_V^+ - q \sigma_V) \gamma_\mu + \gamma_5 \gamma_\mu M (\sigma_V + \sigma_V^+) \gamma_\mu \\
&= \gamma_5 \gamma \cdot P + \frac{1}{3\pi^2 m_G^2} \int_q^\Lambda \gamma_\mu \gamma_5 \gamma \cdot (q_+ \sigma_V^+ - q \sigma_V) \gamma_\mu + \frac{1}{3\pi^2 m_G^2} \int_q^\Lambda i\gamma_5 \gamma_\mu M (\sigma_V + \sigma_V^+) \gamma_\mu
\end{aligned} \tag{2.49}$$

Por otro lado, tenemos que:  $P_\mu \Gamma_{5\mu}(q_+, q) = S^{-1}(q_+) i\gamma_5 + i\gamma_5 S^{-1}(q)$  y sabemos que:  $S^{-1}(P) = i\gamma \cdot P + M$ , entonces:

$$\begin{aligned}
P_\mu \Gamma_{5\mu}(k_+, k) &= (i\gamma \cdot q_+ + M) i\gamma_5 + i\gamma_5 (i\gamma \cdot q + M) = i\gamma_5 (-i\gamma \cdot q_+ + M) + i\gamma_5 (i\gamma \cdot q + M) \\
&= i\gamma_5 i\gamma \cdot (q - q_+) + i\gamma_5 (M + M) = \gamma_5 \gamma \cdot (q_+ - q) + 2i\gamma_5 M
\end{aligned} \tag{2.50}$$

Comparando las ecuaciones (2.49) y (2.50), para la parte de  $i\gamma_5$  tenemos:

$$\begin{aligned}
 2M &= \frac{1}{3\pi^2 m_G^2} \int_q^\Lambda \gamma_\mu M (\sigma_V + \sigma_V^+) \gamma_\mu \\
 \Rightarrow M &= \frac{2M}{3\pi^2 m_G^2} \int_q^\Lambda \sigma_V + \sigma_V^+ = \frac{2M}{3\pi^2 m_G^2} \int_q^\Lambda \frac{1}{q_+^2 + M^2} + \frac{1}{q^2 + M^2} \\
 &= \frac{2M}{3\pi^2 m_G^2} \int_q^\Lambda \frac{q_+^2 + M^2 + q^2 + M^2}{(q_+^2 + M^2)(q^2 + M^2)} = \frac{2M}{3\pi^2 m_G^2} \int_q^\Lambda \frac{q^2 + \cancel{P^2} + \cancel{2q \cdot P} + 2M^2 + q^2}{(q_+^2 + M^2)(q^2 + M^2)} \\
 &= \frac{4M}{3\pi^2 m_G^2} \int_q^\Lambda \frac{q^2 + M^2}{(q_+^2 + M^2)(q^2 + M^2)}
 \end{aligned} \tag{2.51}$$

Donde se ha utilizado el hecho de integrandos antisimétricos son cero y que estamos en el limite quiral. Ahora bien, utilizando la parametrización de Feynman para dos denominadores obtenemos:

$$M = \frac{4M}{3\pi^2 m_G^2} \int_0^1 \int_q^\Lambda dx \frac{q'^2 + \cancel{x^2 P^2} - \cancel{2xq' \cdot P} + M^2}{(q'^2 + M^2)^2} \tag{2.52}$$

donde  $q' = q + xP$ .

$$M = \frac{4M}{3\pi^2 m_G^2} \int_q^\Lambda \frac{q^2 + M^2}{(q^2 + M^2)^2} = \frac{4M}{3\pi^2 m_G^2} \int_q^\Lambda \frac{1}{(q^2 + M^2)} \tag{2.53}$$

La cual es justamente la ecuación de GAP en el limite quiral. Por otro lado, para la parte de  $\gamma_5 \gamma \cdot$  tenemos que:

$$q_+ - q = P_\mu + \frac{1}{3\pi^2 m_G^2} \int_q^\Lambda \gamma_\mu (q_+ \sigma_V^+ - q \sigma_V) \gamma_\mu \tag{2.54}$$

Multiplicando por  $P_\mu$  y recordando que estamos en el limite quiral:

$$\begin{aligned}
 q_+ \cdot P - q \cdot P &= P^2 + \frac{1}{3\pi^2 m_G^2} \int_q^\Lambda \gamma_\mu (q_+ \cdot P \sigma_V^+ - q \cdot P \sigma_V) \gamma_\mu \\
 \Rightarrow \cancel{q \cdot P} + \cancel{P^2} - \cancel{q \cdot P} &= \cancel{P^2} + \frac{1}{3\pi^2 m_G^2} \int_q^\Lambda \gamma_\mu (q_+ \cdot P \sigma_V^+ - q \cdot P \sigma_V) \gamma_\mu \\
 \Rightarrow 0 &= \frac{1}{3\pi^2 m_G^2} \int_q^\Lambda \gamma_\mu (q_+ \cdot P \sigma_V^+ - q \cdot P \sigma_V) \gamma_\mu \\
 \Rightarrow \frac{1}{3\pi^2 m_G^2} \int_q^\Lambda q_+ \cdot P \sigma_V^+ - q \cdot P \sigma_V &= 0 \\
 \Rightarrow \int_q^\Lambda \frac{q_+ \cdot P}{q_+^2 + M^2} - \frac{q \cdot P}{q^2 + M^2} &= 0 \\
 \Rightarrow \int_q^\Lambda \frac{(q_+ \cdot P)(q^2 + M^2) - (q \cdot P)(q_+^2 + M^2)}{(q_+^2 + M^2)(q^2 + M^2)} &= 0
 \end{aligned} \tag{2.55}$$

Utilizando la parametrización de Feynman sabemos que:

$$\frac{1}{(q_+^2 + M^2)(q^2 + M^2)} = \int_0^1 \frac{dx}{(q'^2 + M^2)^2} \quad ; q' = q + xP \quad (2.56)$$

Y el numerador de la integral cambia de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} (P \cdot q_+)(q^2 + M^2) - (q \cdot P)(q_+^2 + M^2) &= (P \cdot (q + P))(q^2 + M^2) \\ &- (q \cdot P)((q + P)^2 + M^2) = (P \cdot q + P^2)(q^2 + M^2) - (P \cdot q)(q^2 + P^2 + 2q \cdot P + M^2) \\ &= (P \cdot q)(q^2 + M^2 - q^2 - P^2 - 2q \cdot P) + P^2(q^2 + M^2) = P^2(q^2 + M^2) \\ &- (P \cdot q)(P^2 + 2(P \cdot q)) = (P \cdot (q' - xP))(-P^2 - 2(q' - xP) \cdot P) + P^2((q' - xP)^2 + M^2) \\ &= (P \cdot q' - xP^2)(-P^2 - 2q' \cdot P + 2xP^2) + P^2(q'^2 + x^2P^2 - 2xq' \cdot P + M^2) \\ &= P^2(q'^2 + x^2P^2 - 2xq' \cdot P + M^2 - P^2 - 2q' \cdot P + 2xP^2) + P^2(q'^2 + x^2P^2 - 2xq' \cdot P + M^2) \\ &+ (q' \cdot P)(-2q' \cdot P) \end{aligned}$$

Esto ya que son términos antisimétricos.

$$= P^2(q'^2 + x^2P^2 + M^2 + xP^2 - 2x^2P^2) - 2(q' \cdot P)^2$$

Esto ya que estamos en el límite quirral.

$$= P^2(q'^2 + M^2) - 2(q' \cdot P)^2 \quad (2.57)$$

Y sabemos que:

$$\int_q^\Lambda \frac{(P \cdot q)^2}{(q^2 + s)^n} = \frac{1}{4} \int_q^\Lambda \frac{P^2 q^2}{(q^2 + s)^n} \quad (2.58)$$

Entonces la ecuación (2.57) obtiene la siguiente forma:

$$P^2(q'^2 + m^2) - \frac{1}{2}P^2q'^2 = P^2 \left( \frac{1}{2}q'^2 + M^2 \right) \quad (2.59)$$

Por lo que la ecuación (2.55) queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_{q'}^\Lambda \frac{P^2 \left( \frac{1}{2}q'^2 + M^2 \right)}{(q'^2 + M^2)^2} &= 0 \\ \int_q^\Lambda \frac{\frac{1}{2}q^2 + M^2}{(q^2 + M^2)^2} &= 0 \end{aligned} \quad (2.60)$$

Las ecuaciones (2.53) y (2.60) definen el esquema de regularización que se debe utilizar si se quiere satisfacer la identidad Vector Axial de WT, ademas, nos indica que la identidad Axial Vector de WT se satisface si y solo si el modelo esta regularizado de tal forma que no existan divergencias cuadráticas o logarítmicas.

Recordemos que:

$$\int_0^\infty ds \frac{s}{s + M^2} = \mathcal{C}(M; \tau_{ir}^2, \tau_{uv}^2) \quad (2.61)$$

Por otro lado, sabemos que:

$$\frac{M^2}{(s + M^2)^2} = -M^2 \frac{d}{dM^2} \frac{1}{s + M^2} \quad (2.62)$$

Por lo tanto, inferimos que:

$$\mathcal{C}_1(M^2; \tau_{ir}, \tau_{uv}) \equiv -M^2 \frac{d}{dM^2} \mathcal{C}(M^2; \tau_{ir}, \tau_{uv}) = \int_0^\infty ds \frac{sM^2}{(s + M^2)^2} \quad (2.63)$$

Para hacer esto, usemos:

$$\frac{1}{x^n} \rightarrow \frac{1}{(n-1)!} \int_{\tau_{uv}^2}^{\tau_{ir}^2} d\tau \tau^{n-1} e^{-\tau x} \quad (2.64)$$

Entonces:

$$\frac{1}{x^2} \rightarrow \int_{\tau_{uv}^2}^{\tau_{ir}^2} d\tau \tau e^{-\tau x} \quad (2.65)$$

Usando integración por partes:

$$\left[ \frac{-x}{a} e^{-ax} + \frac{1}{a} \int e^{-ax} dx \right] \Big|_{\tau_{uv}^2}^{\tau_{ir}^2} = \left[ \frac{-x}{a} e^{-ax} - \frac{1}{a^2} e^{-ax} \right] \Big|_{\tau_{uv}^2}^{\tau_{ir}^2} \quad (2.66)$$

En este caso  $a = M^2 + s$ , entonces:

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{-x}{M^2 + s} e^{-(M^2+s)x} + \frac{1}{(M^2 + s)^2} e^{-(M^2+s)x} \right] \Big|_{\tau_{uv}^2}^{\tau_{ir}^2} \\ &= \frac{1}{(M^2 + s)^2} \left[ e^{-(M^2+s)\tau_{uv}^2} [\tau_{uv}^2 (M^2 + s) + 1] - e^{-(M^2+s)\tau_{ir}^2} [\tau_{ir}^2 (M^2 + s) + 1] \right] \end{aligned} \quad (2.67)$$

Entonces:

$$\mathcal{C}_1(M; \tau_{ir}^2, \tau_{uv}^2) = M^2 \int_0^\infty ds s \frac{e^{-(M^2+s)\tau_{uv}^2} [\tau_{uv}^2 (M^2 + s) + 1] - e^{-(M^2+s)\tau_{ir}^2} [\tau_{ir}^2 (M^2 + s) + 1]}{(M^2 + s)^2} \quad (2.68)$$

Haciendo el cambio de variable  $s' = M^2 + s$ :

$$\begin{aligned} & \int_{M^2}^\infty \left( \frac{1}{s'} - \frac{M^2}{s'^2} \right) \left[ e^{-s'\tau_{uv}^2} \tau_{uv}^2 s' + e^{-s'\tau_{uv}^2} - e^{-s'\tau_{ir}^2} \tau_{ir}^2 s' - e^{-s'\tau_{ir}^2} \right] ds' \\ &= \int_{M^2}^\infty ds' e^{-s'\tau_{uv}^2} \tau_{uv}^2 + \int_{M^2}^\infty \frac{ds'}{s'} e^{-s'\tau_{uv}^2} - \int_{M^2}^\infty ds' e^{-s'\tau_{ir}^2} \tau_{ir}^2 - \int_{M^2}^\infty \frac{ds'}{s'} e^{-s'\tau_{ir}^2} \\ &- M^2 \int_{M^2}^\infty \frac{ds'}{s'} e^{-s'\tau_{uv}^2} \tau_{uv}^2 - M^2 \int_{M^2}^\infty \frac{ds'}{s'^2} e^{-s'\tau_{uv}^2} + M^2 \int_{M^2}^\infty \frac{ds'}{s'} e^{-s'\tau_{ir}^2} \tau_{ir}^2 + M^2 \int_{M^2}^\infty \frac{ds'}{s'^2} e^{-s'\tau_{ir}^2} \end{aligned} \quad (2.69)$$

Haciendo el cambio de variable  $s'\tau_{uv}^2 = t$   $s'\tau_{ir}^2 = t$  donde es requerido obtenemos:

$$\begin{aligned}
 &= \int_{M^2\tau_{uv}^2}^{\infty} dt e^{-t} + \int_{M^2\tau_{uv}^2}^{\infty} dt t^{-1} e^{-t} - \int_{M^2\tau_{ir}^2}^{\infty} dt e^{-t} - \int_{M^2\tau_{ir}^2}^{\infty} dt t^{-1} e^{-t} - M^2\tau_{uv}^2 \int_{M^2\tau_{uv}^2}^{\infty} dt t^{-1} e^{-t} \\
 &- M^2\tau_{uv}^2 \int_{M^2\tau_{uv}^2}^{\infty} dt t^{-2} e^{-t} + M^2\tau_{ir}^2 \int_{M^2\tau_{uv}^2}^{\infty} dt t^{-1} e^{-t} + M^2\tau_{ir}^2 \int_{M^2\tau_{uv}^2}^{\infty} dt t^{-2} e^{-t}
 \end{aligned} \tag{2.70}$$

Y sabemos que:

$$\begin{aligned}
 \int_{M^2\tau_{uv}^2}^{\infty} dt e^{-t} &= -e^{-M^2\tau_{uv}^2} \\
 \int_{M^2\tau_{uv}^2}^{\infty} dt t^{-1} e^{-t} &= \Gamma(0, M^2\tau_{uv}^2) \\
 \int_{M^2\tau_{uv}^2}^{\infty} dt t^{-2} e^{-t} &= \Gamma(-1, M^2\tau_{uv}^2)
 \end{aligned} \tag{2.71}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{C}_1(M; \tau_{uv}^2, \tau_{ir}^2) &= M^2[(1 - M^2\tau_{uv}^2)\Gamma(0, M^2\tau_{uv}^2) - (1 - M^2\tau_{ir}^2)\Gamma(0, M^2\tau_{ir}^2) + e^{-M^2\tau_{ir}^2} \\
 &- e^{-M^2\tau_{uv}^2} - M^2\tau_{uv}^2\Gamma(-1, M^2\tau_{uv}^2) + M^2\tau_{ir}^2\Gamma(-1, M^2\tau_{ir}^2)]
 \end{aligned} \tag{2.72}$$

Ahora bien, veamos que la ecuación (2.60) se puede desarrollar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_q^{\Lambda} \frac{\frac{1}{2}q^2 + M^2}{(q^2 + M^2)^2} = \int_q^{\Lambda} \frac{\frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{2}M^2 + \frac{1}{2}M^2}{(q^2 + M^2)^2} \\
 &\Rightarrow \frac{1}{2} \int_q^{\Lambda} \frac{q^2 + M^2}{(q^2 + M^2)^2} + \frac{1}{2} \int_q^{\Lambda} \frac{M^2}{(q^2 + M^2)^2} = 0 \\
 &\Rightarrow \int_q^{\Lambda} \frac{1}{q^2 + M^2} + \int_q^{\Lambda} \frac{M^2}{(q^2 + M^2)^2} = 0 \\
 &\Rightarrow \frac{\pi^2}{4\pi^2} \int_0^{\infty} dq^2 \frac{q^2}{q^2 + M^2} + \frac{\pi^2}{4\pi^2} \int_0^{\infty} dq^2 \frac{M^2 q^2}{(q^2 + M^2)^2} = 0 \quad q^2 \rightarrow s, dq^2 \rightarrow ds \\
 &\Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{s ds}{s + M^2} + \int_0^{\infty} \frac{s ds M^2}{(s + M^2)^2} = 0 \\
 &\Rightarrow \mathcal{C}(M; \tau_{uv}^2, \tau_{ir}^2) + \mathcal{C}_1(M; \tau_{uv}^2, \tau_{ir}^2) = 0
 \end{aligned} \tag{2.73}$$

## SECCIÓN 2.7

## Amplitudes de la BSE para mesones pseudoescalares

Tenemos que para cualquier canal la ecuación de Bethe-Salpeter en el modelo interacción de contacto esta dada por:

$$K_H(M_H)\Gamma_H(M_H) = \lambda_H(M_H)\Gamma_H(M_H) \quad (2.74)$$

donde  $K_H$  es una matriz de  $2 \times 2$ , la masa del estado ligado  $M_{q\bar{q}}$  sera tal que  $\lambda_H(P^2 = -M_H^2) = 1$ ,  $P$  es el momento total del mesón. Por lo que observamos que la ecuación (2.74) se trata de una eigenecuación, es decir, una ecuación de valores propios para el vector  $\Gamma_H(M_H) = (E_H(M_H), F_H(M_H))^T$ , la cual tiene solución para  $P^2 = -M_H^2$ . Una vez que obtengamos estos elementos de la eigenecuación de BS debemos resolverla para el valor propio  $\lambda_H = 1$ . Los elementos de la matriz  $K_H$  los podemos escribir de la siguiente manera:

$$\mathcal{K}_H^{ij}(P) = -\frac{4}{3m_G^2} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{\text{Tr}[\psi_H^i(P)\gamma_\mu S_{f_1}(q_+)\phi_H^j(P)S_{\bar{f}_2}(q_-)\gamma_\mu]}{(q_+^2 + M_{f_1}^2)(q_-^2 + M_{\bar{f}_2}^2)} \quad (2.75)$$

Ahora bien, utilizando la parametrización de Feynman:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(q_+^2 + M_{f_1}^2)(q_-^2 + M_{\bar{f}_2}^2)} &= \int_0^1 \frac{dx}{[(q_+^2 + M_{f_1}^2)x + (1-x)(q_-^2 + M_{\bar{f}_2}^2)]^2} \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{[(q^2 + 2(q \cdot P) + P^2 + M_{f_1}^2)x + (1-x)(q^2 + M_{\bar{f}_2}^2)]^2} \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{[(q + xP)^2 + xM_{f_1}^2 + M_{\bar{f}_2}^2(1-x) + x(1-x)P^2]^2} = \int_0^1 \frac{dx}{[q'^2 + \mu^2]^2} \end{aligned} \quad (2.76)$$

donde hemos realizado el cambio de variable  $q' = q + xP$  y  $\mu^2 = xM_{f_1}^2 + M_{\bar{f}_2}^2(1-x) + x(1-x)P^2$ , Entonces:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_H^{ij}(P) &= \frac{-4}{3m_G^2} \int_0^1 dx \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{\text{Tr}[\psi_H^i(P)\gamma_\mu S_{f_1}(q_+)\phi_H^j(P)S_{\bar{f}_2}(q_-)\gamma_\mu]_{q=q'-xP}}{(q'^2 + \mu^2)^2} \\ &= \frac{-4}{3m_G^2} \int_0^1 dx \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{\mathcal{K}^{ij}}{(q'^2 + \mu^2)^2} \end{aligned} \quad (2.77)$$

donde  $\psi_H^i$  y  $\phi_H^j$  son proyectores covariantes de Dirac. Los proyectores  $\phi_H^j$  son los factores que multiplican a  $E(P)$  y  $F(P)$  en la BSA, es decir:

$$\Gamma(P) = \underbrace{\gamma_5 i}_{\phi^1} E(P) + \underbrace{\frac{\gamma_5 \gamma \cdot P}{2M_R}}_{\phi^2} F(P) \quad (2.78)$$

Por otro lado, los proyectores  $\psi_H^i$  se seleccionan de tal forma que cumplan con las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\psi^1(P)\Gamma(P)] &= E(P) \\ \text{Tr}[\psi^2(P)\Gamma(P)] &= F(P) \\ \text{Tr}[\psi^1(P)\phi^1(P)] &= 1 \\ \text{Tr}[\psi^2(P)\phi^2(P)] &= 1 \end{aligned} \quad (2.79)$$

Entonces, tenemos que  $\psi_H^1(P) = \frac{-i}{4}\gamma_5$  y  $\psi_H^2(P) = \frac{-M_R}{2P^2}\gamma_5\gamma \cdot P$ . Por lo que:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^{11} &= \text{Tr} \left[ \frac{-i}{4}\gamma_5\gamma_\mu(-i\gamma \cdot q_+ + M_{f_1})(i\gamma_5)(-i\gamma \cdot q + M_{\bar{f}_2})\gamma_\mu \right] \\ &= -4(q^2 + P \cdot q + M_{f_1}M_{\bar{f}_2}) = -4(M_{f_1}M_{\bar{f}_2} + P \cdot (q - xP) + (q - xP)^2) \end{aligned} \quad (2.80)$$

Desarrollando y recordando que los términos de la forma  $(P \cdot q)^{2n+1}$  son cero, obtenemos:

$$\mathcal{K}^{11} = -4(M_{f_1}M_{\bar{f}_2} - xP^2 + q'^2 + x^2P^2) \quad (2.81)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_H^{11}(P) &= \frac{16}{3m_G^2} \int_0^1 dx \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{M_{f_1}M_{\bar{f}_2} - xP^2 + q^2 + x^2P^2}{(q^2 + \mu^2)^2} \\ &= \frac{16}{3m_G^2} \int_0^1 dx \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{M_{f_1}M_{\bar{f}_2} - xP^2 + q^2 + x^2P^2 + \mu^2 - \mu^2}{(q^2 + \mu^2)^2} \\ &= \frac{1}{3\pi^2 m_G^2} \int_0^1 dx \int q^2 dq^2 \left[ \frac{M_{f_1}M_{\bar{f}_2} - x(1-x)P^2 - \mu^2}{(q^2 + \mu^2)^2} + \frac{q^2 + \mu^2}{(q^2 + \mu^2)^2} \right] \\ &= \frac{1}{3\pi^2 m_G^2} \int_0^1 dx \left[ (M_{f_1}M_{\bar{f}_2} - x(1-x)P^2 - \mu^2) \frac{\mathcal{C}_1(\mu^2, \tau_{ir}, \tau_{uv})}{\mu^2} + \mathcal{C}(\mu^2, \tau_{ir}, \tau_{uv}) \right] \end{aligned} \quad (2.82)$$

De manera análoga calculemos los elementos de la matriz restantes:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^{12} &= \text{Tr} \left[ \frac{-i}{4}\gamma_5\gamma_\mu(-i\gamma \cdot q_+ + M_{f_1}) \left( \frac{\gamma_5\gamma \cdot P}{2M_R} \right) (-i\gamma \cdot q + M_{\bar{f}_2})\gamma_\mu \right] \\ &= \frac{2}{M_R} [(M_{f_1} - M_{\bar{f}_2})(P \cdot q) - M_{\bar{f}_2}P^2] = \frac{2}{M_R} [(M_{f_1} - M_{\bar{f}_2})(P \cdot (q' - xP)) - M_{\bar{f}_2}P^2] \\ &= \frac{-2P^2}{M_R} [M_{f_1}x + (1-x)M_{\bar{f}_2}] \end{aligned} \quad (2.83)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_H^{12}(P) &= \frac{4}{3m_G^2} \left( \frac{1}{16\pi^2} \right) \left( \frac{2P^2}{M_R} \right) \int_0^1 dx \int q^2 dq^2 \frac{M_{f_1}x + (1-x)M_{\bar{f}_2}}{(q^2 + \mu^2)^2} \\ &= \frac{1}{3\pi^2 m_G^2} \frac{P^2}{2M_R} \int_0^1 dx [M_{f_1}x + (1-x)M_{\bar{f}_2}] \frac{\mathcal{C}_1(\mu^2, \tau_{ir}, \tau_{uv})}{\mu^2} \end{aligned} \quad (2.84)$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned}\mathcal{K}^{21} &= Tr \left[ - \left( \frac{M_R}{2P^2} \gamma_5 \gamma \cdot P \right) \gamma_\mu (-i\gamma \cdot q_+ + M_{f_1}) (i\gamma_5) (-i\gamma \cdot q + M_{\bar{f}_2}) \gamma_\mu \right] = -\frac{4M_R}{P^2} M_{f_1} P^2 \\ &\quad - \frac{4M_R}{P^2} [M_{\bar{f}_2} (P \cdot q) - M_{f_1} (P \cdot q)] = -\frac{4M_R}{P^2} [M_{\bar{f}_2} (P \cdot (q' - xP)) - M_{f_1} (P \cdot (q' - xP))] \\ &\quad - \frac{4M_R}{P^2} M_{f_1} P^2 = -4M_R [(1-x)M_{\bar{f}_2} + xM_{f_1}] \end{aligned} \quad (2.85)$$

Entonces, obtenemos que:

$$\mathcal{K}_H^{21}(P) = \frac{M_R}{3\pi^2 m_G^2} \int_0^1 dx [(1-x)M_{\bar{f}_2} + xM_{f_1}] \frac{\mathcal{C}_1(\mu^2, \tau_{ir}, \tau_{uv})}{\mu^2} \quad (2.86)$$

Finalmente:

$$\begin{aligned}\mathcal{K}^{22} &= Tr \left[ - \left( \frac{M_R}{2P^2} \gamma_5 \gamma \cdot P \right) \gamma_\mu (-i\gamma \cdot q_+ + M_{f_1}) \left( \frac{\gamma_5 \gamma \cdot P}{2M_R} \right) (-i\gamma \cdot q + M_{\bar{f}_2}) \gamma_\mu \right] \\ &= \frac{2}{P^2} [2(P \cdot q)^2 + P^2((P \cdot q) - q^2 + M_{f_1} M_{\bar{f}_2})] = 2 \left[ \frac{-1}{2} q'^2 + x^2 P^2 + M_{f_1} M_{\bar{f}_2} - P^2 x \right] \\ &\quad + 2(\mu^2 - \mu'^2) \end{aligned} \quad (2.87)$$

Entonces:

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_H^{22}(P) &= -\frac{1}{3m_G^2 \pi^2} \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int q^2 dq^2 \left[ -\frac{\frac{1}{2}q'^2 + \mu^2}{(q'^2 + \mu^2)^2} + \frac{\mu^2 - x(1-x)P^2 + M_{f_1} M_{\bar{f}_2}}{(q'^2 + \mu^2)^2} \right] \\ &= -\frac{1}{3\pi^2 m_G^2} \frac{1}{2} \int_0^1 dx [\mu^2 - x(1-x)P^2 + M_{f_1} M_{\bar{f}_2}] \frac{\mathcal{C}_1(\mu^2, \tau_{ir}, \tau_{uv})}{\mu^2} \\ &= -\frac{1}{3\pi^2 m_G^2} \frac{1}{2} \int_0^1 dx [M_{f_1} M_{\bar{f}_2} + xM_{f_1}^2 + M_{\bar{f}_2}^2 (1-x)] \frac{\mathcal{C}_1(\mu^2, \tau_{ir}, \tau_{uv})}{\mu^2} \end{aligned} \quad (2.88)$$

Resumiendo, tenemos los siguientes resultados:

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_H^{11}(P) &= \frac{1}{3\pi^2 m_G^2} \int_0^1 dx \left[ (M_{f_1} M_{\bar{f}_2} - x(1-x)P^2 - \mu^2) \frac{\mathcal{C}_1(\mu^2, \tau_{ir}, \tau_{uv})}{\mu^2} + \mathcal{C}(\mu^2, \tau_{ir}, \tau_{uv}) \right] \\ &= \frac{\mathcal{K}_{PS}^{EE}}{3\pi^2 m_G^2} \\ \mathcal{K}_H^{12}(P) &= \frac{1}{3\pi^2 m_G^2} \frac{P^2}{2M_R} \int_0^1 dx [M_{f_1} x + (1-x)M_{\bar{f}_2}] \frac{\mathcal{C}_1(\mu^2, \tau_{ir}, \tau_{uv})}{\mu^2} = \frac{\mathcal{K}_{PS}^{EF}}{3\pi^2 m_G^2} \\ \mathcal{K}_H^{21}(P) &= \frac{M_R}{3\pi^2 m_G^2} \int_0^1 dx [(1-x)M_{\bar{f}_2} + xM_{f_1}] \frac{\mathcal{C}_1(\mu^2, \tau_{ir}, \tau_{uv})}{\mu^2} = \frac{\mathcal{K}_{PS}^{FE}}{3\pi^2 m_G^2} \\ \mathcal{K}_H^{22}(P) &= -\frac{1}{3\pi^2 m_G^2} \frac{1}{2} \int_0^1 dx [M_{f_1} M_{\bar{f}_2} + xM_{f_1}^2 + M_{\bar{f}_2}^2 (1-x)] \frac{\mathcal{C}_1(\mu^2, \tau_{ir}, \tau_{uv})}{\mu^2} = \frac{\mathcal{K}_{PS}^{FF}}{3\pi^2 m_G^2} \end{aligned} \quad (2.89)$$



Entonces la ecuación (2.74) queda de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} E_{PS}(P) \\ F_{PS}(P) \end{pmatrix} = \frac{4\hat{\alpha}_{IR}}{3\pi} \begin{pmatrix} \mathcal{K}_{PS}^{EE} & \mathcal{K}_{PS}^{EF} \\ \mathcal{K}_{PS}^{FE} & \mathcal{K}_{PS}^{FF} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{PS}(P) \\ F_{PS}(P) \end{pmatrix} \quad (2.90)$$

Donde:

$$\frac{1}{3\pi^2 m_G^2} = \frac{4\pi\alpha_{IR}}{3\pi^2 m_g^2} = \frac{4\pi\hat{\alpha}_{IR}}{3\pi^2} = \frac{4\hat{\alpha}_{IR}}{3\pi} \quad (2.91)$$

Cabe recalcar que  $M_R = \frac{M_{f_1} M_{\bar{f}_2}}{M_{f_1} + M_{\bar{f}_2}}$  es la masa reducida entre los quarks dentro del mesón. Las masas que obtenemos usando el modelo de interacción de contacto están dadas en la tabla (2.3):

Mesón	Experimental	CI	Diferencia %
$\pi(u\bar{d})$	0.139	0.140	0.72
$K(u\bar{s})$	0.493	0.495	0.40
$h_s(s\bar{s})$	—	0.69	—
$D^0(c\bar{u})$	1.86	1.86	0.03
$D_s^+(c\bar{s})$	1.97	1.95	0.66
$B^+(u\bar{b})$	5.28	5.09	3.61
$B_s^0(s\bar{b})$	5.37	5.29	1.60
$\eta_c(c\bar{c})$	2.98	2.96	0.70
$B_c^+(c\bar{b})$	6.27	6.15	2.02
$\eta_b(b\bar{b})$	9.40	9.29	1.20

Tabla 2.3: Masas calculadas usando la ecuación (2.90) y los parámetros de las tablas (2.1,2.2). Los valores experimentales son resultados de [54].

Entonces, resolviendo numéricamente la eigenecuación obtenemos las amplitudes de la tabla (2.4):

## SECCIÓN 2.8

### Relaciones de Goldberger-Triemann

En las ecuaciones de Bethe-Salpeter o cualquier variedad de estas ecuaciones, es sumamente importante mantener las identidades de Ward-Takahashi (WT), ya que, de lo

Mesón	$E_H$	$F_H$
$\pi(ud)$	0.99	0.13
$K(u\bar{s})$	0.99	0.15
$h_s(s\bar{s})$	0.98	0.18
$D^0(c\bar{u})$	0.99	0.12
$D_s^+(c\bar{s})$	0.99	0.16
$B^+(u\bar{b})$	0.99	0.06
$B_s^0(s\bar{b})$	0.99	0.08
$\eta_c(c\bar{c})$	0.98	0.19
$B_c^+(c\bar{b})$	0.99	0.15
$\eta_b(b\bar{b})$	0.98	0.19

Tabla 2.4: Amplitudes vectorial  $E_H$  y pseudovectorial  $F_H$  en  $GeV$  para el estado base de los mesones pseudoescalares.

contrario, muchas propiedades importantes se perderían. Gracias a estas restricciones podemos determinar correctamente las ecuaciones para los factores de forma.

$$\begin{aligned} \Gamma_{5\mu}^j(k, P) &= \frac{\tau^j}{2} \gamma_5 [\gamma_\mu F_R(k; P) + (\gamma \cdot k) k_\mu G_R(k; P) - \sigma_{\mu\nu} k_\nu H_R(k; P)] \\ &+ \tilde{\Gamma}_{5\mu}^j(k; P) + \frac{f_\pi P_\mu}{P^2 + m_\pi^2} \Gamma_{5\mu}^j(k, P) \end{aligned} \quad (2.92)$$

Multiplicando por  $-iP_\mu$  para ser consistentes con la ecuación de WT. Entonces obtenemos que  $P_\mu \tilde{\Gamma}_{5\mu}^j(k; P) \sim \mathcal{O}(P^2)$  y escribiendo  $m_\pi = 0$ .

$$\begin{aligned} -iP_\mu \Gamma_{5\mu}^j(k, P) &= S^{-1}(k_+) \gamma_5 \frac{\tau^j}{2} + \frac{\tau^j}{2} \gamma_5 S^{-1}(k_-) \\ &= \frac{-i\tau^j}{2} \gamma_5 [\gamma \cdot P F_R(k; P) + (\gamma \cdot k)(k \cdot P) G_R(k; P) - \sigma_{\mu\nu} k_\nu P_\mu H_R(k; P)] \\ &- i f_\pi \tau^j \gamma_5 [\gamma \cdot P F_\pi(k; P) + (\gamma \cdot k)(k \cdot P) G_\pi(k; P) + \sigma_{\mu\nu} k_\mu P_\nu H_\pi(k; P)] \\ &+ f_\pi \tau^j \gamma_5 E_\pi(k; P) \end{aligned} \quad (2.93)$$

Ahora bien, utilizando la ecuación (2.15), obtenemos que:

$$\begin{aligned} -iP_\mu \Gamma_{5\mu}^j(k, P) &= \{i\gamma \cdot (k + P) A[(k + P)^2] + B[(k + P)^2]\} \gamma_5 \frac{\tau^j}{2} \\ &+ \frac{\tau^j}{2} \gamma_5 \{i\gamma \cdot (k - P) A[(k - P)^2] + B[(k - P)^2]\} \\ &= \{i\gamma \cdot (k + P) A[(k + P)^2] - i\gamma \cdot (k - P) A[(k - P)^2]\} \gamma_5 \frac{\tau^j}{2} \\ &+ (B[(k + P)^2] + B[(k - P)^2]) \gamma_5 \frac{\tau^j}{2} \end{aligned} \quad (2.94)$$

Multiplicando la ecuación (2.94) por  $iP_\mu$  obtenemos:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{5\mu}^j(k, P) &= \frac{i}{P^2} P_\mu \gamma_5 \frac{\tau^j}{2} \{B[(k+P)^2] + B[(k-P)^2]\} + \left\{ -\frac{1}{P^2} P_\mu \gamma \cdot k A[(k+P)^2] \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{P^2} P_\mu \gamma \cdot P A[(k+P)^2] + \frac{1}{P^2} P_\mu \gamma \cdot k A[(k-P)^2] - \frac{1}{P^2} P_\mu \gamma \cdot P A[(k-P)^2] \right\} \gamma_5 \frac{\tau^j}{2} \\
&= \frac{i}{P^2} P_\mu \gamma_5 \frac{\tau^j}{2} \{B[(k+P)^2] + B[(k-P)^2]\} - \frac{1}{P^2} P_\mu \gamma \cdot k \{A[(k-P)^2] - A[(k+P)^2]\} \gamma_5 \frac{\tau^j}{2} \\
&\quad - \frac{1}{P^2} P_\mu \gamma \cdot P \{A[(k+P)^2] + A[(k-P)^2]\} \gamma_5 \frac{\tau^j}{2} \\
&= \frac{i}{P^2} P_\mu \gamma_5 \frac{\tau^j}{2} \{B[(k+P)^2] + B[(k-P)^2]\} - \gamma_\mu \{A[(k+P)^2] + A[(k-P)^2]\} \gamma_5 \frac{\tau^j}{2} \\
&\quad - \frac{\gamma \cdot k k_\mu}{P \cdot k} \{A[(k-P)^2] - A[(k+P)^2]\} \gamma_5 \frac{\tau^j}{2}
\end{aligned} \tag{2.95}$$

Ya que queremos comparar con (2.92) multiplicamos a (2.95) por  $-iP_\mu$  y obtenemos:

$$\begin{aligned}
-iP_\mu \Gamma_{5\mu}^j(k, P) &= i\gamma \cdot P \{A[(k+P)^2] + A[(k-P)^2]\} \gamma_5 \frac{\tau^j}{2} \\
&+ \frac{i(\gamma \cdot k)(k \cdot P)}{P \cdot k} \{A[(k-P)^2] - A[(k+P)^2]\} \gamma_5 \frac{\tau^j}{2} + \gamma_5 \frac{\tau^j}{2} \{B[(k+P)^2] + B[(k-P)^2]\}
\end{aligned} \tag{2.96}$$

Entonces cuando  $P \rightarrow 0$ ,  $\Gamma_{5\mu}^j$  se determina a través de la identidad axial de WT:

$$\begin{aligned}
-iP_\mu \Gamma_{5\mu}^j(k, P) &= \gamma_5 \tau^j B(k^2) + i\gamma \cdot P A(k^2) \gamma_5 \tau^j \\
&+ i(\gamma \cdot k)(k \cdot P) \left\{ \lim_{P \rightarrow 0} \frac{A[(k-P)^2] - A[(k+P)^2]}{P \cdot k} \right\} \gamma_5 \frac{\tau^j}{2} \\
&= \frac{-i\tau^j}{2} \gamma_5 [\gamma \cdot P F_R(k; P) + (\gamma \cdot k)(k \cdot P) G_R(k; P) - \sigma_{\mu\nu} k_\nu P_\mu H_R(k; P)] \\
&- i f_\pi \tau^j \gamma_5 [\gamma \cdot P F_\pi(k; P) + (\gamma \cdot k)(k \cdot P) G_\pi(k; P) + \sigma_{\mu\nu} k_\mu P_\nu H_\pi(k; P)] \\
&+ f_\pi \tau^j \gamma_5 E_\pi(k; P)
\end{aligned} \tag{2.97}$$

Con las definición  $P = \frac{p}{2}$  y comparando con:  $S^{-1}(p) = i\gamma \cdot p + M$ , llegamos a:

$$\begin{aligned}
f_\pi E_\pi(k; P=0) &= B(k^2) \\
F_R(k; 0) + 2f_\pi F_\pi(k; 0) &= A(k^2) \\
G_R(k; 0) + 2f_\pi G_\pi(k; 0) &= 2A'(k^2) \\
H_R(k; 0) + 2f_\pi H_\pi(k; 0) &= 0
\end{aligned} \tag{2.98}$$

Donde se ha utilizado la regla de L'Hôpital para resolver el limite.

Estas son conocidas como las relaciones de Goldberger-Treimann. Donde  $A$  y  $B$  son las soluciones en el limite quiral de la ecuación (2.13),  $f_\pi$  es la constante de decaimiento

leptonica del pión. Una consecuencia necesaria de estas relaciones es que las pseudocomponentes  $F_\pi$  y  $G_\pi$  y la componente del pseudovector  $H_\pi$  no son cero en (2.4). Entonces, el rompimiento de la simetría quiral es una condición suficiente y necesaria para la aparición de un bosón de Goldstone.

## SECCIÓN 2.9

### Normalización Canónica para los mesones pseudoescalares

Para obtener una consistencia total en el calculo de la constante de decaimiento leptónico de los mesones pseudoescalares y los otros observables, debemos calcular la constante de normalización canónica y renormalizar la amplitud de Bethe-Salpeter. Entonces, debemos calcular  $N_H$  a partir de:

$$N_H^2 P_\mu = \frac{3}{4\pi^2} \text{Tr} \int_q^\Lambda \Gamma_H(-P) \left[ \frac{\partial S(q_+)}{\partial P_\mu} \Gamma_H(P) S(q_-) + S(q_+) \Gamma_H(P) \frac{\partial S(q_-)}{\partial P_\mu} \right] \quad (2.99)$$

Esta ecuación nos garantiza que el factor de forma electromagnético del pión sea la unidad cuando el momento transferido es 0. Ahora, usando la invarianza traslacional podemos ver que:

$$N_H^2 P_\mu = \frac{3}{4\pi^2} \text{Tr} \int_q^\Lambda \Gamma_H(-P) \left( \frac{\partial S(q_+)}{\partial P_\mu} \right) \Gamma_H(P) S(q) \quad (2.100)$$

La amplitud de Bethe-Salpeter  $\Gamma_H(P)$  en esta ecuación esta definida por la ec. (2.10). Entonces, la amplitud BS renormalizada debe ser definida como:

$$\Gamma_H^C = \frac{1}{N_H} \Gamma_H(P) \quad (2.101)$$

Podemos reescribir la ec. (2.100) como:

$$N_H^2 P_\mu = \left[ \frac{\partial}{\partial P_\mu} \frac{3}{4\pi^2} \text{Tr} \int_q^\Lambda \Gamma_H(-K) S(q_+) \Gamma_H(K) S(q) \right] \Big|_{K=P} \quad (2.102)$$

Ahora bien, sabemos que:

$$\frac{d}{dP^2} = \frac{1}{2P^2} P_\mu \frac{\partial}{\partial P_\mu} \quad (2.103)$$

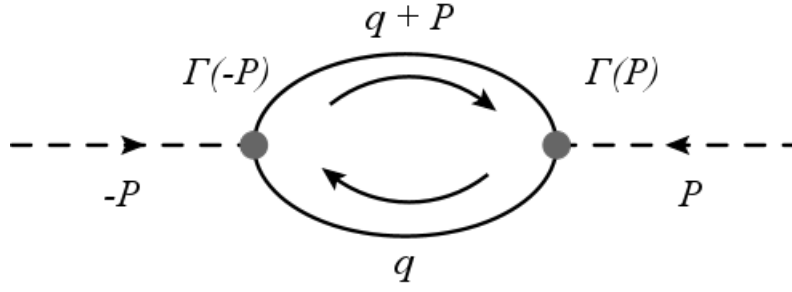


Figura 2.17: Polarización del vacío.

Por otro lado, tenemos que:

$$\begin{aligned}
 N^2 P_\mu &= a \frac{\partial \psi(K, P)}{\partial P_\mu} \\
 \Rightarrow N^2 P_\mu P_\mu &= N^2 P^2 = a P_\mu \frac{\partial \psi(K, P)}{\partial P_\mu} \\
 \Rightarrow \frac{1}{2} N^2 &= a \frac{P_\mu}{2P^2} \frac{\partial \psi(K, P)}{\partial P_\mu} = a \frac{d\psi(K, P)}{dP^2} \\
 \Rightarrow N^2 &= 2 \frac{d\Pi(K, P)}{dP^2}
 \end{aligned} \tag{2.104}$$

Podemos escribir la ecuación (2.102) de la siguiente forma:

$$N_H^2 P_\mu = 2P_\mu \left[ \frac{d}{dP^2} \frac{3}{4\pi^2} \text{Tr} \int_q^\Lambda \Gamma_H(-K) S(q_+) \Gamma_H(K) S(q) \right] \Big|_{K=P} \tag{2.105}$$

Con esto podemos deducir que:

$$N_H^2(P) = 2 \left[ \frac{d}{dP^2} \Pi(K, P) \right] \Big|_{K=P} \tag{2.106}$$

donde:

$$\Pi(K, P) = \frac{3}{4\pi^2} \text{Tr} \int_q^\Lambda \Gamma_H(-K) S(q_+) \Gamma_H(K) S(q) \tag{2.107}$$

La razón por la que podemos identificar esto con la energía propia del pión es evidente.  $\Pi(K, P)$  es la polarización del vacío {2.17}. Usando las reglas de Feynman obtenemos que:

$$\Pi(K, P) = N_c \text{Tr} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \Gamma_H(-K) S(q_+) \Gamma_H(K) S(q) \tag{2.108}$$

Ahora bien, para calcular  $N_H$  podemos usar la ecuación (2.105) o la ecuación (2.108).

Entonces:

$$\begin{aligned}
N_H^2 &= \frac{3}{2\pi^2} \left[ \frac{d}{dP^2} \text{Tr} \int_q^\Lambda \Gamma_H(-K) S_{f_1}(q_+) \Gamma_H(K) S_{\bar{f}_2}(q) \right] \Big|_{K=P} \\
&\text{Calculemos la traza del integrando:} \\
&\text{Tr} \left[ \gamma_5 \left( iE_H - \frac{\gamma \cdot K}{2M_R} F_H \right) (-i\gamma \cdot q_+ + M_{f_1}) \sigma_V^+ \gamma_5 \left( iE_H + \frac{\gamma \cdot K}{2M_R} F_H \right) \cdots \right. \\
&\quad \left. \cdots (-i\gamma \cdot q + M_{\bar{f}_2}) \sigma_V \right] \\
&= \sigma_V^+ \sigma_V \text{Tr} \left\{ \left[ iE_H(i\gamma \cdot q_+ + M_{f_1}) + \frac{\gamma \cdot K}{2M_R} F_H(i\gamma \cdot q_+ + M_{f_1}) \right] \left[ iE_H(-i\gamma \cdot q + M_{\bar{f}_2}) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\gamma \cdot K}{2M_R} F_H(-i\gamma \cdot q + M_{\bar{f}_2}) \right] \right\}
\end{aligned} \tag{2.109}$$

Veamos los términos proporcionales a  $E_H^2$ :

$$\begin{aligned}
&\sigma_V^+ \sigma_V \text{Tr} [iE_H(i\gamma \cdot q_+ + M_{f_1}) iE_H(-i\gamma \cdot q + M_{\bar{f}_2})] \\
&= -\sigma_V^+ \sigma_V E_H^2 \text{Tr} [(i\gamma \cdot q_+ + M_{f_1})(-i\gamma \cdot q + M_{\bar{f}_2})] = -\sigma_V^+ \sigma_V E_H^2 \{ \text{Tr} [\gamma \cdot q_+ \gamma \cdot q] \} \\
&- \sigma_V^+ \sigma_V E_H^2 4M_{f_1} M_{\bar{f}_2} = -4\sigma_V^+ \sigma_V E_H^2 [q \cdot P + q^2 + M_{f_1} M_{\bar{f}_2}]
\end{aligned} \tag{2.110}$$

Entonces, la integral queda como:

$$-4E_H^2 \int_q^\Lambda \frac{q \cdot P + q^2 + M_{f_1} M_{\bar{f}_2}}{(q_+^2 + M_{f_1}^2)(q^2 + M_{\bar{f}_2}^2)} = -4E_H^2 \int_0^1 dx \int_{q'}^\Lambda \frac{q \cdot P + q^2 + M_{f_1} M_{\bar{f}_2}}{(q'^2 + \eta^2)^2}$$

Donde se ha utilizado la parametrización de Feynman y además

$$\eta^2 = xM_{f_1}^2 + M_{\bar{f}_2}^2(1-x) + P^2x(1-x), \quad q' = q + xP.$$

Entonces: (2.111)

$$\begin{aligned}
&-4E_H^2 \int_0^1 dx \int_q^\Lambda \frac{q' \cdot \overrightarrow{P} - xP^2 + q'^2 + x^2P^2 - 2xq' \cdot \overrightarrow{P} + M_{f_1} M_{\bar{f}_2}}{(q'^2 + \eta^2)^2} \\
&= -4E_H^2 \int_0^1 dx \int_q^\Lambda \frac{q^2 + \eta^2}{(q^2 + \eta^2)^2} + \frac{P^2x(x-1) + M_{f_1} M_{\bar{f}_2} - \eta^2}{(q^2 + \eta^2)^2}
\end{aligned}$$

Ahora, derivamos:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dP^2} \left[ \frac{1}{q^2 + \eta^2} + \frac{P^2x(x-1) + M_{f_1} M_{\bar{f}_2} - \eta^2}{(q^2 + \eta^2)^2} \right] = x(1-x) \left[ -\frac{2(P^2x(x-1) + M_{f_1} M_{\bar{f}_2} - \eta^2)}{(q^2 + \eta^2)^3} \right] \\
&+ x(1-x) \left( \frac{-3}{(q^2 + \eta^2)^2} \right)
\end{aligned} \tag{2.112}$$

Finalmente, obtenemos la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} N_H^{EE} &= \frac{-3E_H^2}{2\pi^2} \int_0^1 dx \int s ds x(1-x) \left[ \frac{-3}{(s+\eta^2)^2} - \frac{2(P^2 x(x-1) + M_{f_1} M_{\bar{f}_2} - \eta^2)}{(s+\eta^2)^3} \right] \\ &= \frac{-3E_H^2}{2\pi^2} \int_0^1 x dx (1-x) \left[ -3 \frac{\mathcal{C}_1(\eta^2, \tau_{ir}, \tau_{uv})}{\eta^2} - 2(P^2 x(x-1) + M_{f_1} M_{\bar{f}_2} - \eta^2) \frac{\mathcal{C}_2(\eta^2, \tau_{ir}, \tau_{uv})}{\eta^2} \right] \end{aligned} \quad (2.113)$$

Donde  $\mathcal{C}_2(x, \tau_{ir}, \tau_{uv}) = \frac{x}{2} \frac{d^2}{dx^2} \mathcal{C}(x, \tau_{ir}, \tau_{uv})$ . Ahora, veamos los términos proporcionales a  $E_H F_H$ :

$$\begin{aligned} \sigma_V^+ \sigma_V Tr \left[ \frac{i E_H F_H}{2M_R} (i\gamma \cdot q_+ + M_{f_1})(\gamma \cdot K)(-i\gamma \cdot q + M_{\bar{f}_2}) + i \frac{E_H F_H}{2M_R} (\gamma \cdot K)(i\gamma \cdot q_+ + M_{f_1}) \cdots \right. \\ \left. \cdots (-i\gamma \cdot q + M_{\bar{f}_2}) \right] &= \frac{i E_H F_H}{2M_R} \sigma_V^+ \sigma_V \left\{ i(M_{\bar{f}_2} Tr[\gamma \cdot q_+ \gamma \cdot K] - M_{f_1} Tr[\gamma \cdot K \gamma \cdot q]) \right. \\ &+ i(M_{\bar{f}_2} Tr[\gamma \cdot K \gamma \cdot q_+] - M_{f_1} Tr[\gamma \cdot K \gamma \cdot q]) \left. \right\} = \frac{-4}{M_R} \sigma_V^+ \sigma_V E_H F_H M_{\bar{f}_2} (q \cdot K + P \cdot K) \\ &+ \frac{4}{M_R} \sigma_V^+ \sigma_V E_H F_H M_{f_1} (K \cdot q) \end{aligned} \quad (2.114)$$

Entonces, la integral queda como:

$$\begin{aligned} &\frac{-4E_H F_H}{M_R} \int_q^\Lambda \frac{M_{\bar{f}_2}(K \cdot q + K \cdot P) - M_{f_1} K \cdot q}{(q_+^2 + M_{f_1}^2)(q^2 + M_{\bar{f}_2}^2)} \\ &= \frac{-4E_H F_H}{M_R} \int_0^1 \int_{q'}^\Lambda \frac{M_{\bar{f}_2}(K \cdot q' + K \cdot P) - M_{f_1}(K \cdot q' + K \cdot P)}{(q'^2 + \eta^2)^2} \quad (2.115) \\ &= \frac{-4E_H F_H}{M_R} \int_0^1 dx \int_q^\Lambda \frac{[M_{\bar{f}_2}(1-x) + M_{f_1}x](K \cdot P)}{(q^2 + \eta^2)^2} \end{aligned}$$

Calculando la derivada:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dP^2} \left[ \frac{[M_{\bar{f}_2}(1-x) + M_{f_1}x](K \cdot P)}{(q^2 + \eta^2)^2} \right] &= [M_{\bar{f}_2}(1-x) + M_{f_1}x] \left[ -\frac{2(K \cdot P)x(1-x)}{(q^2 + \eta^2)^3} \right] \\ &+ [M_{\bar{f}_2}(1-x) + M_{f_1}x] \left[ \frac{K}{2P(q^2 + \eta^2)^2} \right] \end{aligned} \quad (2.116)$$

Finalmente, tenemos que:

$$\begin{aligned} N_H^{EF} &= \frac{-6E_H F_H}{4M_R \pi^2} \int_0^1 dx \int s ds (M_{\bar{f}_2}(1-x) + M_{f_1}x) \left[ \frac{K}{2P(q^2 + \eta^2)^2} \right. \\ &\left. - \frac{2(K \cdot P)x(1-x)}{(q^2 + \eta^2)^3} \right] \Big|_{K=P} \\ &= \frac{-3(E_H F_H)}{2M_R \pi^2} \int_0^1 dx (M_{\bar{f}_2}(1-x) + M_{f_1}x) \left[ \frac{\mathcal{C}_1(\eta^2, \tau_{ir}, \tau_{uv})}{2\eta^2} - 2P^2 x(1-x) \frac{\mathcal{C}_2(\eta^2, \tau_{ir}, \tau_{uv})}{\eta^2} \right] \end{aligned} \quad (2.117)$$

Finalmente, veamos los términos proporcionales a  $F_H^2$ :

$$\begin{aligned}
& \sigma_V^+ \sigma_V \text{Tr} \left[ \frac{\gamma \cdot K}{2M_R} F_H(i\gamma \cdot q_+ + M_{f_1}) \frac{\gamma \cdot K}{2M_R} F_H(-i\gamma \cdot q + M_{\bar{f}_2}) \right] \\
&= \sigma_V^+ \sigma_V \frac{F_H^2}{M_R^2} \text{Tr} [(i\gamma \cdot K \gamma \cdot q_+ \gamma \cdot K + M_{f_1}(\gamma \cdot K)^2)(-i\gamma \cdot q + M_{\bar{f}_2})] \\
&= \sigma_V^+ \sigma_V \frac{F_H^2}{M_R^2} [2(q \cdot K)(K \cdot q + K \cdot P) - K^2(q^2 + q \cdot P) + K^2 M_{f_1} M_{\bar{f}_2}]
\end{aligned} \tag{2.118}$$

Entonces, la integral queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
& \frac{F_H^2}{M_R^2} \int_q^\Lambda \frac{2(q \cdot K)(K \cdot q + K \cdot P) - K^2(q^2 + q \cdot P) + K^2 M_{f_1} M_{\bar{f}_2}}{(q_+^2 + M_{f_1}^2)(q^2 + M_{\bar{f}_2}^2)} \\
&= \frac{F_H^2}{M_R^2} \int_0^1 dx \int_{q'}^\Lambda \frac{2(q' \cdot K)(K \cdot q') - 2x(q' \cdot K)(K \cdot P)(1-x) - 2x(P \cdot K)(K \cdot q')}{(q'^2 + \eta^2)^2} \\
&- \frac{F_H^2}{M_R^2} \int_q^\Lambda \frac{2x(P \cdot K)^2(1-x) - K^2(q'^2 + P^2 x(x-1) - M_{f_1} M_{\bar{f}_2})}{(q'^2 + \eta^2)^2} \\
&= \frac{F_H^2}{M_R^2} \int_0^1 dx \int_q^\Lambda \frac{2(q \cdot K)^2 - 2(P \cdot K)^2 x(1-x) - K^2(q^2 + P^2 x(x-1) - M_{f_1} M_{\bar{f}_2})}{(q^2 + \eta^2)^2} \\
&= \frac{F_H^2 K^2}{M_R^2} \int_0^1 dx \int_q^\Lambda \frac{\frac{-2(K \cdot P)^2 x(1-x)}{K^2} - \frac{1}{2} q^2 - P^2 x(x-1) + M_{f_1} M_{\bar{f}_2}}{(q^2 + \eta^2)^2} \\
&= \frac{F_H^2 K^2}{M_R^2} \int_0^1 dx \int_q^\Lambda \frac{-\frac{1}{2} q + \eta^2}{(q^2 + \eta^2)^2} + \frac{\frac{-2(K \cdot P)^2 x(1-x)}{K^2} - P^2 x(x-1) + M_{f_1} M_{\bar{f}_2} + \eta^2}{(q^2 + \eta^2)^2} \\
&= \frac{F_H^2 K^2}{M_R^2} \int_0^1 dx \int_q^\Lambda \frac{\frac{-2(K \cdot P)^2 x(1-x)}{K^2} - P^2 x(x-1) + M_{f_1} M_{\bar{f}_2} + \eta^2}{(q^2 + \eta^2)^2}
\end{aligned} \tag{2.119}$$

Ahora, calculando la derivada:

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dP^2} \left[ \frac{\frac{-2(K \cdot P)^2 x(1-x)}{K^2} - P^2 x(x-1) + M_{f_1} M_{\bar{f}_2} + \eta^2}{(q^2 + \eta^2)^2} \right] \Big|_{K=P} = 2x(x-1) \frac{M_{f_1} M_{\bar{f}_2} + \eta^2}{(q^2 + \eta^2)^3} \\
&+ 2x(x-1) \frac{P^2 x(x-1)}{(q^2 + \eta^2)^3}
\end{aligned} \tag{2.120}$$

Finalmente, obtenemos que:

$$\begin{aligned}
N_H^{FF} &= \frac{3F_H^2 P^2}{4M_R^2 \pi^2} \int_0^1 dx \int s ds x(x-1) \frac{P^2 x(x-1) + M_{f_1} M_{\bar{f}_2} + \eta^2}{(s + \eta^2)^3} \\
&= \frac{3F_H^2 P^2}{4M_R^2 \pi^2} \int_0^1 x dx (x-1) (P^2 x(x-1) + M_{f_1} M_{\bar{f}_2} + \eta^2) \frac{\mathcal{C}_2(\eta^2, \tau_{ir}, \tau_{uv})}{\eta^2}
\end{aligned} \tag{2.121}$$



Resumiendo, tenemos que:

$$\begin{aligned}
N_H^{EE} &= \frac{3E_H^2}{2\pi^2} \int_0^1 x(1-x)dx \left[ 3 \frac{\mathcal{C}_1(\eta^2, \tau_{ir}, \tau_{uv})}{\eta^2} + 2(P^2 x(x-1) + M_{f_1} M_{\bar{f}_2} - \eta^2) \frac{\mathcal{C}_2(\eta^2, \tau_{ir}, \tau_{uv})}{\eta^2} \right] \\
N_H^{EF} &= \frac{-3E_H F_H}{2M_R \pi^2} \int_0^1 dx (M_{\bar{f}_2}(1-x) + M_{f_1}x) \left[ \frac{\mathcal{C}_1(\eta^2, \tau_{ir}, \tau_{uv})}{2\eta^2} - 2P^2 x(1-x) \frac{\mathcal{C}_2(\eta^2, \tau_{ir}, \tau_{uv})}{\eta^2} \right] \\
N_H^{FF} &= \frac{3F_H^2 P^2}{4M_R^2 \pi^2} \int_0^1 x(x-1)dx (P^2 x(x-1) + M_{f_1} M_{\bar{f}_2} + \eta^2) \frac{\mathcal{C}_2(\eta^2, \tau_{ir}, \tau_{uv})}{\eta^2}
\end{aligned} \tag{2.122}$$

Y tenemos que:

$$N_H^2 = N_H^{EE} + N_H^{EF} + N_H^{FF} \tag{2.123}$$

Numéricamente, obtenemos: En este punto es importante notar que las funciones  $\mathcal{C}$  las

Mesón	$N_H$	$E_H^C$	$F_H^C$
$\pi(u\bar{d})$	0.28	3.59	0.47
$K(u\bar{s})$	0.26	3.80	0.59
$h_s(s\bar{s})$	0.24	4.05	0.74
$D^0(c\bar{u})$	0.33	3.02	0.37
$D_s^+(c\bar{s})$	0.31	3.22	0.51
$B^+(u\bar{b})$	0.27	3.72	0.21
$B_s^0(s\bar{b})$	0.35	2.84	0.21
$\eta_c(c\bar{c})$	0.46	2.15	0.41
$B_c^+(c\bar{b})$	0.38	2.58	0.39
$\eta_b(b\bar{b})$	0.49	2.00	0.38

Tabla 2.5: Valores de las amplitudes vectorial  $E_H^C$  y pseudovectorial  $F_H^C$  normalizadas y en  $GeV$  para los mesones pseudoescalares utilizando los parámetros de las tablas (2.2,2.1).

podemos escribir de manera general como [48]:

$$\mathcal{C}_{\alpha\beta}(M^2, \tau_{uv}, \tau_{ir}) = \frac{M^\nu}{\Gamma(\beta)} \Gamma(\beta - 2, M\tau_{uv}^2, M\tau_{ir}^2) \tag{2.124}$$

donde  $\nu = \alpha - (\beta - 2)$  y ademas:

$$\Gamma(\alpha, z_1, z_2) = \Gamma(\alpha, z_1) - \Gamma(\alpha, z_2) = \int_{z_1}^{z_2} dt t^{\alpha-1} e^{-t} \tag{2.125}$$

es la función Gamma incompleta generalizada, de esta manera tenemos que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_{01}(M^2, \tau_{uv}, \tau_{ir}) &= \mathcal{C}(M^2, \tau_{uv}, \tau_{ir}) = \int_0^\infty dq^2 \frac{q^2}{q^2 + M^2} = \int_0^\infty ds \frac{s}{s + M^2} \\
&= M^2 [\Gamma(-1, M^2 \tau_{uv}^2) - \Gamma(-1, M^2 \tau_{ir}^2)] \\
\mathcal{C}_{02}(M^2, \tau_{uv}, \tau_{ir}) &= \mathcal{C}_1(M^2, \tau_{uv}, \tau_{ir}) = \int_0^\infty dq^2 \frac{q^2 M^2}{(q^2 + M^2)^2} = \int_0^\infty ds \frac{s M^2}{(s + M^2)^2} \\
&= -M^2 \frac{d}{dM^2} \mathcal{C}(M^2, \tau_{uv}, \tau_{ir}) = M^2 [\Gamma(0, M^2 \tau_{uv}^2) - \Gamma(0, M^2 \tau_{ir}^2)] \\
\mathcal{C}_{03}(M^2, \tau_{uv}, \tau_{ir}) &= \mathcal{C}_2(M^2, \tau_{uv}, \tau_{ir}) = \int_0^\infty dq^2 \frac{q^2 M^2}{(q^2 + M^2)^3} = \int_0^\infty ds \frac{s M^2}{(s + M^2)^3} \\
&= \frac{M^2}{2} \frac{d}{dM^2} \frac{d}{dM^2} \mathcal{C}(M^2, \tau_{uv}, \tau_{ir}) = \frac{1}{2} \left( e^{-M^2 \tau_{uv}^2} - e^{-M^2 \tau_{ir}^2} \right)
\end{aligned} \tag{2.126}$$

Entonces definimos las siguientes funciones que son las que usaremos:

$$\begin{aligned}
\bar{\mathcal{C}}_1(M^2, \tau_{uv}, \tau_{ir}) &= \frac{\mathcal{C}_1(M^2, \tau_{uv}, \tau_{ir})}{M^2} \\
\bar{\mathcal{C}}_2(M^2, \tau_{uv}, \tau_{ir}) &= \frac{\mathcal{C}_2(M^2, \tau_{uv}, \tau_{ir})}{M^2}
\end{aligned} \tag{2.127}$$

## SECCIÓN 2.10

### Constantes de Decaimiento

Las constantes de decaimiento son bastante importantes en la física de altas energías, por ejemplo, están relacionadas con el tiempo de vida de las partículas y también nos indican la fuerza de los decaimientos leptonicos. Ahora bien, la constante de decaimiento para los mesones pseudoescalares  $f_H$  esta dada por [25]

$$f_H P_\mu = N_c Tr \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \gamma_5 \gamma_\mu S_{f_1}(q_+) \Gamma_H(P) S_{\bar{f}_2}(q) \tag{2.128}$$

Esta es la expresión en teoría cuántica de campos para la proyección pseudovectorial de la función de onda de Bethe-Salpeter del mesón en el origen del espacio de configuraciones. En nuestra notación usual y con  $N_c = 3$ , tenemos:

$$f_H P_\mu = \frac{3}{4\pi^2} Tr \int_q^\Lambda \gamma_5 \gamma_\mu S_{f_1}(q_+) \Gamma_H(P) S_{\bar{f}_2}(q) \tag{2.129}$$

Entonces tenemos que:

$$f_H = \frac{N_c P_\mu}{P^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \text{Tr}[\gamma_5 \gamma_\mu S_{f_1}(q_+) \Gamma_H(P) S_{\bar{f}_2}(q)] \quad (2.130)$$

Trabajemos con el integrando:

$$\begin{aligned} & \text{Tr} \left[ \gamma_5 \gamma_\mu (-i\gamma \cdot q_+ + M_{f_1}) \sigma_V^+ \gamma_5 \left( iE_H + \frac{\gamma \cdot P}{2M_R} F_H \right) (-i\gamma \cdot q + M_{\bar{f}_2}) \sigma_V \right] \\ &= \sigma_V^+ \sigma_V \text{Tr} \left[ \underbrace{\gamma_5 \gamma_5}_I (-\gamma_\mu) (i\gamma \cdot q_+ + M_{f_1}) \left( iE_H + \frac{\gamma \cdot P}{2M_R} F_H \right) (-i\gamma \cdot q + M_{\bar{f}_2}) \right] \\ &= -\sigma_V^+ \sigma_V \text{Tr} \left[ \gamma_\mu (i\gamma \cdot q_+ + M_{f_1}) \left( iE_H + \frac{\gamma \cdot P}{2M_R} F_H \right) (-i\gamma \cdot q + M_{\bar{f}_2}) \right] \end{aligned} \quad (2.131)$$

Entonces, notemos que la ecuación (2.130) obtiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} f_H &= \frac{N_c P_\mu}{P^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{-\text{Tr} \left[ \gamma_\mu (i\gamma \cdot q_+ + M_{f_1}) \left( iE_H + \frac{\gamma \cdot P}{2M_R} F_H \right) (-i\gamma \cdot q + M_{\bar{f}_2}) \right]}{(q_+^2 + M_{f_1})(q^2 + M_{\bar{f}_2})} \\ &= \frac{N_c P_\mu}{P^2} \int_0^1 dx \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{-\text{Tr} \left[ \gamma_\mu (i\gamma \cdot q_+ + M_{f_1}) \left( iE_H + \frac{\gamma \cdot P}{2M_R} F_H \right) (-i\gamma \cdot q + M_{\bar{f}_2}) \right]}{(q'^2 + \mu^2)^2} \end{aligned} \quad (2.132)$$

Donde usado la parametrización de Feynman como en la ecuación (2.76). Ahora sigamos desarrollando la traza, veamos los términos proporcionales a  $E_H$ :

$$\begin{aligned} & -\text{Tr}[\gamma_\mu (i\gamma \cdot q_+ + M_{f_1}) iE_H (-i\gamma \cdot q + M_{\bar{f}_2})] = -iE_H \{ iM_{\bar{f}_2} \text{Tr}[\gamma_\mu \gamma \cdot q_+] - iM_{f_1} \text{Tr}[\gamma_\mu \gamma \cdot q] \} \\ &= 4E_H [M_{\bar{f}_2} q_+ - q M_{f_1}] \end{aligned} \quad (2.133)$$

Ahora, contrayendo con  $P_\mu$ , obtenemos:

$$4E_H [M_{\bar{f}_2} q_+ \cdot P - q \cdot P M_{f_1}] = 4E_H [M_{\bar{f}_2} (q \cdot P + P^2) - q \cdot P M_{f_1}] \quad (2.134)$$

Ahora, haciendo el cambio de variable  $q = q' - xP$ , obtenemos:

$$4E_H [M_{\bar{f}_2} (q' \cdot \overrightarrow{P} - xP^2 + P^2) - M_{f_1} (q' \cdot \overrightarrow{P} - xP^2)] = 4E_H [M_{\bar{f}_2} P^2 (1 - x) + M_{f_1} x P^2] \quad (2.135)$$

Esos términos se hacen cero debido a que son antisimétricos, ahora bien, la integral queda como:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{3}{4\pi^2} \right) \left( \frac{\cancel{\pi^2}}{4\pi^2} \right) \frac{1}{P^2} \cancel{A} P^2 E_H \int_0^1 dx \int \frac{sd s [M_{\bar{f}_2} (1 - x) + M_{f_1} x]}{(s + \mu^2)^2} \\ &= \frac{3E_H}{4\pi^2} \int_0^1 dx [M_{\bar{f}_2} (1 - x) + M_{f_1} x] \frac{\mathcal{C}_1(\mu^2, \tau_{ir}, \tau_{uv})}{\mu^2} \end{aligned} \quad (2.136)$$

Ahora, veamos los términos proporcionales a  $F_H$ :

$$\begin{aligned}
& -Tr \left[ \gamma_\mu (i\gamma \cdot q_+ + M_{f_1}) \frac{\gamma \cdot P}{2M_R} F_H (-i\gamma \cdot q + M_{\bar{f}_2}) \right] = \frac{-F_H}{2M_R} Tr [(i\gamma_\mu \gamma \cdot q_+ \gamma \cdot P + M_{f_1} \gamma_\mu \gamma \cdot P) \cdots \\
& \cdots (-i\gamma \cdot q + M_{\bar{f}_2})] \\
& = \frac{-F_H}{2M_R} \{ Tr [\gamma_\mu \gamma \cdot q_+ \gamma \cdot P \gamma \cdot q] + M_{f_1} M_{\bar{f}_2} Tr [\gamma_\mu \gamma \cdot P] \} \\
& = \frac{-4F_H}{2M_R} [q_+^\mu (P \cdot q) + q^\mu (P \cdot q_+) - P^\mu (q \cdot q_+) + M_{f_1} M_{\bar{f}_2} P^\mu]
\end{aligned} \tag{2.137}$$

Contrayendo con  $P_\mu$ , obtenemos:

$$\begin{aligned}
& \frac{-2F_H}{M_R} [(q_+ \cdot P)(P \cdot q) + (q \cdot P)(P \cdot q_+) - P^2(q \cdot q_+) + P^2 M_{f_1} M_{\bar{f}_2}] \\
& = \frac{-2F_H}{M_R} [(P \cdot q)^2 + P^2(P \cdot q) + (P \cdot q)^2 + P^2(P \cdot q) - P^2 q^2 - P^2(q \cdot P) + M_{f_1} M_{\bar{f}_2} P^2] \\
& = \frac{-2F_H}{M_R} [2(P \cdot q)^2 + P^2(P \cdot q) - P^2 q^2 + M_{f_1} M_{\bar{f}_2} P^2]
\end{aligned} \tag{2.138}$$

Y recordando que  $q = q' - xP$ , obtenemos:

$$\frac{-2F_H}{M_R} [2(P \cdot q)^2 + P^2((x-1)xP^2 - q^2 + M_{f_1} M_{\bar{f}_2})] = \frac{F_H P^2}{M_R} [q^2 - 2x(x-1)P^2 - 2M_{f_1} M_{\bar{f}_2}] \tag{2.139}$$

Entonces, la integral queda como:

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{-2F_H P^2}{M_R} \right) \left( \frac{3}{4\pi^2} \right) \frac{1}{P^2} \int_0^1 dx \left[ - \int_q^\Lambda \frac{\frac{q^2}{2} + \mu^2}{(q^2 + \mu^2)^2} + \int_q^\Lambda \frac{M_{f_1} M_{\bar{f}_2} + x(x-1)P^2 + \mu^2}{(q^2 + \mu^2)^2} \right] \\
& = \left( \frac{-2F_H}{M_R} \right) \left( \frac{3}{4\pi^2} \right) \frac{1}{4} \int_0^1 dx \int s ds \frac{[M_{f_1} M_{\bar{f}_2} + x(x-1)P^2 + \mu^2]}{(s + \mu^2)^2} \\
& = \frac{-3F_H}{8M_R \pi^2} \int_0^1 dx [M_{f_1} M_{\bar{f}_2} + x(x-1)P^2 + \mu^2] \frac{\mathcal{C}_1(\mu^2, \tau_{ir}, \tau_{uv})}{\mu^2}
\end{aligned} \tag{2.140}$$

Entonces la ecuación (2.130) queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
f_H & = \frac{3E_H}{4\pi^2} \int_0^1 dx [M_{\bar{f}_2}(1-x) + M_{f_1}x] \frac{\mathcal{C}_1(\mu^2, \tau_{ir}, \tau_{uv})}{\mu^2} \\
& - \frac{3F_H}{8M_R \pi^2} \int_0^1 dx [M_{f_1} M_{\bar{f}_2} + x(x-1)P^2 + \mu^2] \frac{\mathcal{C}_1(\mu^2, \tau_{ir}, \tau_{uv})}{\mu^2} \\
& = \frac{3}{4\pi^2} \int_0^1 dx \left\{ E_H [M_{\bar{f}_2}(1-x) + M_{f_1}x] - \frac{F_H}{2M_R} [M_{f_1} M_{\bar{f}_2} + x(x-1)P^2 + \mu^2] \right\} \frac{\mathcal{C}_1(\mu^2, \tau_{ir}, \tau_{uv})}{\mu^2}
\end{aligned} \tag{2.141}$$

Por otro lado, tenemos que las relaciones de Goldberger-Trienmann están dadas por (2.98). Las cuales se reducen a:

$$\begin{aligned} f_\pi E_\pi(k; P=0) &= B(k^2) \\ F_R(k; 0) + 2f_\pi F_\pi(k; 0) &= A(k^2) \end{aligned} \quad (2.142)$$

donde  $f_\pi$  es la constante de decaimiento del pión. En nuestro caso, es decir, en la interacción de contacto, tenemos que:  $B(k^2) = M$ ,  $A(k^2) = 1$ . Entonces, las relaciones de Goldberger-Trienmann quedan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} f_\pi E_\pi &= M_R \\ 2\frac{F_\pi}{E_\pi} + F_R &= 1 \end{aligned} \quad (2.143)$$

Multiplicando la ec. (2.10) por  $\frac{M_R}{E_\pi} = f_\pi$  y evaluándola en  $P^2 = 0$ . Obtenemos:

$$f_\pi \Gamma_\pi(P) = \gamma_5 \left[ iM_R + \frac{\gamma \cdot P}{2} \frac{F_\pi(P)}{E_\pi(P)} \right] \Big|_{P^2=0} \quad (2.144)$$

La cual define la relación entre las cantidades de Goldberger-Trienmann como:

$$\Gamma_\pi^{GT}(P^2 = 0) = i\gamma_5 E_\pi^{GT} + \gamma_5 \frac{\gamma \cdot P}{2} F_\pi^{GT} \quad (2.145)$$

donde:

$$\begin{aligned} \Gamma_\pi^{GT} &= f_\pi^{GT} \Gamma_\pi \\ E_\pi^{GT} &= M_R \\ F_\pi^{GT} &= \frac{F_\pi}{E_\pi} = 0.270795 \end{aligned} \quad (2.146)$$

$E_\pi^{GT}(P)$	$F_\pi^{GT}(P)$
0.357018	0.1281

Tabla 2.6: Valores de las amplitudes usando las relaciones de Goldberger-Trienmann en  $GeV$ .

$f_\pi$	$f_\pi^{GT}$
0.1	0.1

Tabla 2.7: Constante de decaimiento del pi3n utilizando las diferentes amplitudes en  $GeV$  utilizando los par3metros de las tablas (2.2, 2.1).

### SECCI3N 2.11

## Factores de Forma

Hoy en d3a es bien sabido que los hadrones tienen una subestructura, esto fue descubierto hasta la realizaci3n de experimentos relacionados con las DIS por sus siglas en ingles Deep Inelastic Scattering en el SLAC National Accelerator Laboratory en California en los a3os sesenta [69]. Por otro lado, el estudio de la estructura de los hadrones mediante la dispersi3n de electrones es una t3cnica que ha otorgado buenos resultados, esto se logra aumentando la energ3a de los electrones, lo que se traduce a aumentar la frecuencia del fot3n incidente dando como resultado que el fot3n pueda interactuar con los quarks constituyentes del hadr3n. Y dado que a energ3as peque3as la constante de acoplamiento es muy grande no podemos recurrir a t3cnicas perturbativas por lo que las t3cnicas no perturbativas se vuelven un tratamiento indispensable para el estudio de la estructura interna de los hadrones, es por esa raz3n que utilizamos los factores de forma, los cuales contienen informaci3n del aspecto no puntual de los hadrones. Para encontrar la distribuci3n de carga de un hadr3n, se debe medir la distribuci3n angular de los electrones dispersados y se compara con la expresi3n de dispersi3n de electrones con una carga puntual.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Puntual} |F(Q^2)|^2 \quad (2.147)$$

El factor de forma es la transformaci3n de Fourier de la distribuci3n de carga normalizada  $\rho(x)$ :

$$F(Q^2) = \int d^3r \rho(r) e^{i\vec{Q} \cdot \vec{r}} \quad (2.148)$$

Notemos que:

$$F(0) = \int d^3r \rho(r) = 1 \quad (2.149)$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
 F(Q^2) &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \text{sen}(\theta) d\theta \int_0^\infty r^2 \rho(r) e^{i\vec{Q} \cdot \vec{r}} dr = 2\pi \int_0^\infty r^2 \rho(r) dr \int_{-1}^1 du e^{iQru} \\
 &= 2\pi \int_0^\infty r \rho(r) \left( \frac{e^{iQr} - e^{-iQr}}{iQ} \right) dr = \frac{4\pi}{Q} \int_0^\infty r \rho(r) \text{sen}(Qr) dr
 \end{aligned} \tag{2.150}$$

Haciendo una expansión para  $\text{Sen}(Qr)$  y para  $Q$  pequeños tenemos que:

$$\begin{aligned}
 F(Q^2) &= \frac{4\pi}{Q} \int_0^\infty r \rho(r) \left[ Qr - \frac{1}{3}(Qr)^3 + \dots \right] dr \\
 &= \int \rho(r) d^3r - \frac{Q^2}{6} \int_0^\infty r^2 \rho(r) d^3r + \mathcal{O}(Q^4) \\
 &= 1 - \frac{Q^2}{6} \int \psi^* r^2 \psi d^3r + \mathcal{O}(Q^4) = 1 - \frac{Q^2}{6} \langle r^2 \rangle + \mathcal{O}(Q^4)
 \end{aligned} \tag{2.151}$$

Por lo que el radio de carga promedio de la distribución de carga del hadrón esta dado por:

$$\langle r^2 \rangle = -6 \frac{dF(Q^2)}{dQ^2} \Big|_{Q^2=0} \tag{2.152}$$

---

# Capítulo 3

## Factor de Forma Elástico para mesones Pseudoescalares

---

### SECCIÓN 3.1

#### Vértice quark-fotón vestido

Se debe tomar en cuenta el vértice quark-fotón para asegurar que la identidad vectorial de Ward-Takahashi se cumple, la cual esta dada por:

$$P_\mu \Gamma_\mu^\nu(k_+, k_-) = S^{-1}(k_+) - S^{-1}(k_-) \quad (3.1)$$

Donde  $\Gamma_\mu^\nu$  es el vértice quark-fotón vestido. Esto es de suma importancia para el estudio de los factores de forma electromagnéticos. Idealmente, el vértice tiene que vestirse a un nivel consistente con el esquema de truncación que se utiliza para calcular los estados ligados de las amplitudes de Bethe-Salpeter. Para ese caso el vértice se determina a partir de la ecuación inhomogénea de Bethe-Salpeter:

$$\Gamma_\mu^\nu(Q) = \gamma_\mu^\nu - \frac{16\pi\hat{\alpha}_{IR}}{3} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \gamma_\alpha \chi_\mu(q_+, q) \gamma_\alpha \quad (3.2)$$

Donde  $\chi(q_+, q) = S(q_+) \Gamma_H(Q) S(q)$ . Debido a la naturaleza independiente del momento del kernel de interacción, la forma general de la solución es:

$$\Gamma_\mu(Q) = \gamma_\mu^T P_T(Q^2) + \gamma_\mu^L P_L(Q^2) \quad (3.3)$$



Donde  $\gamma_\mu^T + \gamma_\mu^L = \gamma_\mu$ . Si sustituimos (3.3) en (3.2) obtenemos que:

$$P_L(Q^2) = 1 \quad (3.4)$$

Usando la misma identidad llegamos a que:

$$P_T(Q^2) = \frac{1}{1 + K_\gamma(Q^2)} \quad (3.5)$$

Donde  $K_\gamma(Q^2)$  viene dado por:

$$K_\gamma(Q^2) = \frac{4\hat{\alpha}_{IR}}{3\pi} \int_0^1 dx x(1-x) Q^2 \bar{\mathcal{C}}_1(\omega) \quad (3.6)$$

donde  $\omega = M^2 + x(1-x)Q^2$ . Además:

$$\gamma_\mu^T = \gamma_\mu - \frac{\gamma \cdot q}{q^2} q_\mu, \quad \gamma_\mu^L = \frac{\gamma \cdot q}{q^2} q_\mu \quad (3.7)$$

Por lo que es importante notar que en los cálculos del factor de forma elástico tendremos que:

$$k_\mu \gamma_\mu^L = \frac{\gamma \cdot q}{q^2} (k \cdot q) \xrightarrow{0} 0 \quad (3.8)$$

Por lo que para este calculo tendremos que:

$$\Gamma_\mu(Q) = \gamma_\mu P_T(Q^2) \quad (3.9)$$

Podemos ver en la gráfica {3.1} que  $P_T(Q^2) \rightarrow 1$  cuando  $Q^2 \rightarrow \infty$ , dando el resultado dado por la teoría de perturbaciones esperado para el vértice desnudo  $\gamma_\mu$ . Con esto aclarado, ahora calculemos el factor de forma electromagnético para mesones pseudoescalares.

## SECCIÓN 3.2

### Factor de forma elástico para mesones pseudoescalares

En la aproximación de impulso, el vértice  $M\gamma M$ , el cual describe la interacción entre un mesón ( $f_1 \bar{f}_2$ ) y un fotón es de la forma:

$$\Lambda^{M,f_1} = N_c \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} Tr \mathcal{G}^{M,f_1} \quad (3.10)$$

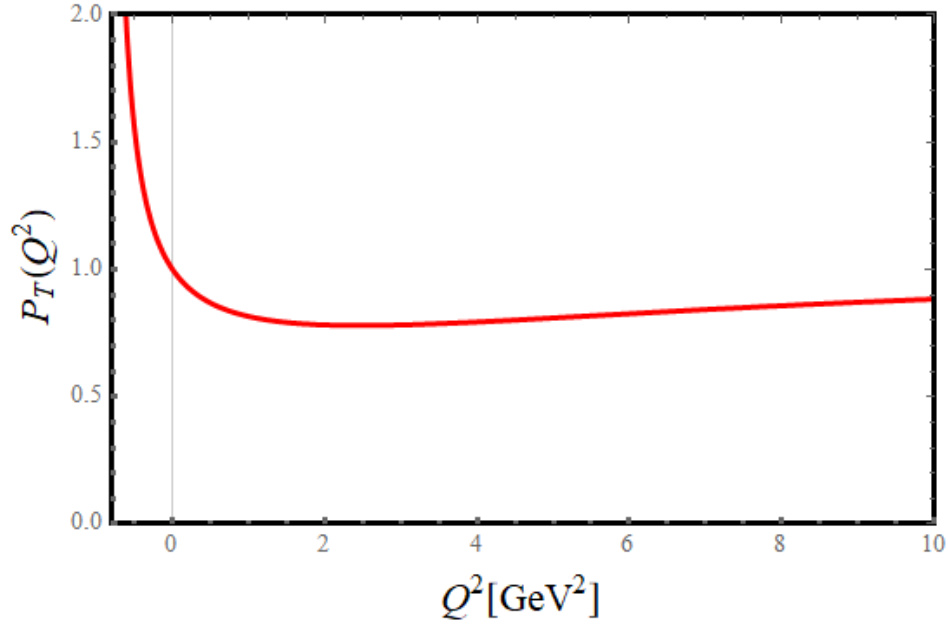


Figura 3.1: Función de vestimenta transversa para el vértice quark- fotón.

Donde:

$$\mathcal{G}^{M,f_1} = i\Gamma_H(-P_2)S(t+P_2)i\Gamma_\mu(Q)S(t+P_1)i\Gamma_H(P_1)S(t) \quad (3.11)$$

Esta notación asume que es el quark  $f_1$  el que interactúa con el fotón mientras que el antiquark  $\bar{f}_2$  permanece como espectador. De manera análoga definimos  $\Lambda^{M,\bar{f}_2}$ . La contribución de la interacción del fotón con el quark  $f_1$  se puede representar como  $F^{M,f_1}(Q^2)$  (a partir de  $\Lambda^{M,f_1}$ ) mientras que la contribución que surge a partir de la interacción del fotón con el antiquark  $\bar{f}_2$  la podemos representar como  $F^{M,\bar{f}_2}$ . El factor de forma total está dado por [33]:

$$F^M(Q^2) = e_{f_1}F^{M,f_1}(Q^2) + e_{\bar{f}_2}F^{M,\bar{f}_2}(Q^2) \quad (3.12)$$

Donde  $e_{f_1}$  y  $e_{\bar{f}_2}$  son las cargas del quark y antiquark respectivamente. Entonces, considerando un mesón pseudoescalar con momento  $P_1$  el cual interactúa con un fotón de momento  $Q$  por lo que la región de interacción tendrá un momento  $P_2 = P_1 + Q$ . Trabajaremos en el esquema de Breit, por lo cual tenemos que:  $P_1 = K - Q/2$  y  $P_2 = K + Q/2$  (ver Figura {3.2}). La cinemática es la siguiente:

$$P_1^2 = P_2^2 = K^2 + \frac{Q^2}{4} = -m^2, \quad K \cdot Q = 0 \quad (3.13)$$

En donde  $m$  es la masa corriente del mesón en cuestión. En la interacción de contacto, este proceso está dado por la siguiente expresión:

$$2K_\mu F^{M,f_1}(Q^2) = \frac{3}{2\pi^2} \int_t^\Lambda \text{Tr}[i\Gamma_H(-P_2)S(t+P_2)i\Gamma_\mu(Q)S(t+P_1)i\Gamma_H(P_1)S(t)] \quad (3.14)$$

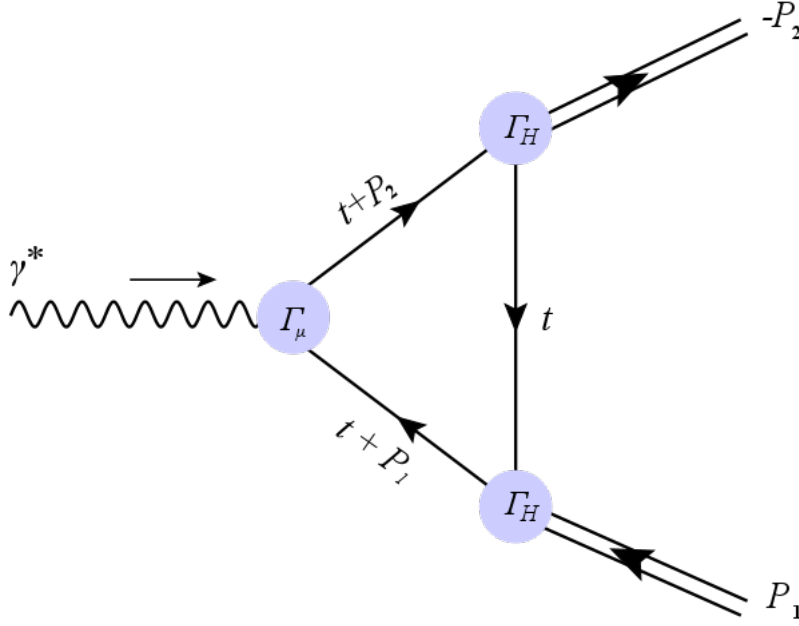


Figura 3.2: Diagrama del triángulo del factor de forma elástico.

Proyectando con  $-2K_\mu$  tenemos:

$$-4K^2 F^{M,f_1}(Q^2) = \frac{-3P_T(Q^2)}{2\pi^2} \int_t^\Lambda 2K_\mu \text{Tr}[i\Gamma_H(-P_2)S(t+P_2)i\gamma_\mu(Q)S(t+P_1)i\Gamma_H(P_1)S(t)] \quad (3.15)$$

Es importante recordar que:

$$\begin{aligned} \sigma_V(t+P_2)\sigma_V(t+P_1)\sigma_V(t) &= \frac{1}{I_{em}(t^2 + M_{f_2}^2)} \\ &= \frac{1}{(-m^2 + t^2 + 2(K \cdot t) - (Q \cdot t) + M_{f_1}^2)(-m^2 + t^2 + 2(K \cdot t) + (Q \cdot t) + M_{f_1}^2)(t^2 + M_{f_2}^2)} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Para poder calcular las integrales que surgirán mas adelante, necesitaremos la parametrización de Feynman para 2 y 3 denominadores. Veamos la de dos denominadores:

$$\frac{1}{A_1 A_2} = \int_0^1 \frac{dx}{(xA_1 + (1-x)A_2)^2} \quad (3.17)$$

donde:

$$\begin{aligned} A_1 &= -m^2 + t^2 + 2(K \cdot t) - (Q \cdot t) + M_{f_1}^2 \\ A_2 &= -m^2 + t^2 + 2(K \cdot t) + (Q \cdot t) + M_{f_1}^2 \end{aligned} \quad (3.18)$$

Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned}
A_1 x + (1-x)A_2 &= -m^2 + t^2 + 2(K \cdot t) + (Q \cdot t) + M_{f_1}^2 - 2x(Q \cdot t) \\
&= t^2 + 2t \cdot \left( K + \frac{Q}{2}(1-2x) \right) - m^2 + M_{f_1}^2 \\
&= \left( t + \left( K + \frac{Q}{2}(1-2x) \right) \right)^2 - m^2 + M_{f_1}^2 - \left( K + \frac{Q}{2}(1-2x) \right)^2
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Haciendo el cambio de variable:  $t' = t + (K + \frac{Q}{2}(1-2x))$  obtenemos:

$$t'^2 - m^2 + M_{f_1}^2 - \left( K + \frac{Q}{2}(1-2x) \right)^2 \tag{3.20}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned}
\left( K + \frac{Q}{2}(1-2x) \right)^2 &= K^2 + \frac{Q^2}{4}(1-2x)^2 = \frac{Q^2}{4}(1+4x^2-4x) \\
+ \left( -m^2 - \frac{Q^2}{4} \right) &= Q^2 x(x-1) - m^2
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Entonces (3.20) queda como:

$$t'^2 + M_{f_1}^2 - m^2 + m^2 + Q^2 x(1-x) = t'^2 + M_{f_1}^2 + Q^2 x(1-x) \tag{3.22}$$

Definiendo  $\omega_1 = M_{f_1}^2 + Q^2 x(1-x)$ . Entonces:

$$\frac{1}{A_1 A_2} = \int_0^1 \frac{dx}{(t'^2 + \omega_1)^2} \tag{3.23}$$

Ahora, al hacer los cambios de variable los productos escalares se deben transformar de igual forma, por lo que es importante notar que para el cambio de variable de dos denominadores tenemos que:

$$(K \cdot t) = (K \cdot t') - K^2 \tag{3.24}$$

Ahora veamos la parametrización de Feynman para 3 denominadores:

$$\frac{1}{A_1 A_2 A_3} = 2 \int_0^1 \frac{dx_1 dx_2 x_1}{(A_1 x_1 x_2 + A_2 x_1(1-x_2) + A_3(1-x_1))^3} \tag{3.25}$$

En este caso:

$$\begin{aligned}
A_1 &= -m^2 + t^2 + 2(K \cdot t) - (Q \cdot t) + M_{f_1}^2 \\
A_2 &= -m^2 + t^2 + 2(K \cdot t) + (Q \cdot t) + M_{f_1}^2 \\
A_3 &= t^2 + M_{f_2}^2
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
A_1 x_1 x_2 + A_2 x_1 (1 - x_2) + A_3 (1 - x_1) &= x_1 (-m^2 + 2(K \cdot t) + (Q \cdot t) + M_{f_1} + M_{\bar{f}_2}) \\
&+ t^2 + M_{f_2}^2 - 2x_1 x_2 (Q \cdot t) \\
&= t^2 + 2t \cdot \left( \frac{Q}{2} x_1 (1 - 2x_2) + K x_1 \right) + x_1 (-m^2 + M_{f_1} - M_{\bar{f}_2}) + M_{f_2}^2 \\
&= \left[ t + \left( \frac{Q}{2} x_1 (1 - 2x_2) + K x_1 \right) \right]^2 + M_{f_2}^2 - \left( \frac{Q}{2} x_1 (1 - 2x_2) + K x_1 \right)^2 \\
&+ x_1 (-m^2 + M_{f_1}^2 - M_{f_2}^2)
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Haciendo el cambio de variable  $t' = t + \frac{Q}{2} x_1 (1 - 2x_2) + K x_1$  obtenemos:

$$t'^2 + M_{f_2}^2 + x_1 (-m^2 + M_{f_1}^2 - M_{f_2}^2) - \left( \frac{Q}{2} x_1 (1 - 2x_2) + K x_1 \right)^2 \tag{3.28}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned}
\left( \frac{Q}{2} x_1 (1 - 2x_2) + K x_1 \right)^2 &= \frac{Q^2}{4} x_1^2 (1 - 2x_2)^2 + K^2 x_1^2 = \frac{Q^2}{4} (1 + 4x_2^2 - 4x_2) - m^2 x_1^2 \\
- \frac{Q^2}{4} x_1^2 &= Q^2 x_1^2 x_2 (x_2 - 1) - m^2 x_1^2
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Entonces (3.28) queda como:

$$\begin{aligned}
t'^2 + M_{f_2}^2 - m^2 x_1 + m^2 x_1^2 + Q^2 x_1^2 x_2 (1 - x_2) + x_1 (M_{f_1}^2 - M_{f_2}^2) &= t'^2 + M_{f_2}^2 \\
+ Q^2 x_1^2 x_2 (1 - x_2) + m^2 x_1 (x_1 - 1) + x_1 (M_{f_1}^2 - M_{f_2}^2) &
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Definiendo  $\omega_2 = M_{f_2}^2 (1 - x_1) + M_{f_1} + Q^2 x_1^2 x_2 (1 - x_2) + m^2 x_1 (x_1 - 1)$ . Entonces:

$$\frac{1}{A_1 A_2 A_3} = 2 \int_0^1 \frac{dx_1 dx_2 x_1}{(t'^2 + \omega_2)^3} \tag{3.31}$$

Para este cambio de variable tenemos que:

$$\begin{aligned}
(K \cdot t) &= (K \cdot t') - x_1 K^2 \\
(Q \cdot t) &= (Q \cdot t') - \frac{Q^2}{2} (x_1 - 2x_1 x_2) \\
t^2 &= t'^2 + Q^2 x_1^2 x_2 (x_2 - 1) + (Q \cdot t') (2x_1 x_2 - x_1) - 2(K \cdot t') x_1 - x_1^2 m^2
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Ademas, se han re-etiquetado los momentos  $t' \rightarrow t$  después de haber realizado el cambio de variable con la finalidad de simplificar notación. Con esto podemos seguir con los cálculos. Vamos a encontrar una expresión de la forma:

$$F^{M, f_1}(Q^2) = \frac{P_T(Q^2)}{-4K^2} [E^2 T_{EE1}(Q^2) + F^2 T_{FF1}(Q^2) + E F T_{EF1}(Q^2)] \tag{3.33}$$

Calculando la traza y proyectando, para la amplitud vectorial obtenemos:

$$\begin{aligned}
T_{EE1}(Q^2) &= \left( \frac{-3}{2\pi^2} \right) \int_t^\Lambda \frac{-4[2(K \cdot t)(-t^2 + m^2 + M_{f_1}^2 - 2M_{f_1}M_{\bar{f}_2}) - 4K^2(t^2 + M_{f_1}M_{\bar{f}_2})]}{I_{em}(t^2 + M_{f_2}^2)} \\
&= \left( \frac{6}{\pi^2} \right) \int_t^\Lambda \frac{2(K \cdot t)(m^2 + M_{f_1}^2 - 2M_{f_1}M_{\bar{f}_2}) + M_{f_1}M_{\bar{f}_2}(-4K^2) - M_{f_2}^2(-4K^2 - 2(K \cdot t))}{I_{em}(t^2 + M_{f_2}^2)} \\
&+ \left( \frac{6}{\pi^2} \right) \int_t^\Lambda \frac{(t^2 + M_{f_2}^2)(-4K^2 - 2(K \cdot t))}{I_{em}(t^2 + M_{f_2}^2)}
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Para el segundo termino se cancela un denominador por lo que solo debemos utilizar la parametrización de Feynman para dos denominadores obteniendo:

$$\begin{aligned}
&\left( \frac{6}{\pi^2} \right) \int_0^1 \int_t^\Lambda dx \frac{-4K^2 - 2(K \cdot t)}{(t'^2 + \omega_1)^2} = \left( \frac{6}{\pi^2} \right) \left( \frac{1}{4} \right) \int_0^1 \int_0^\infty \frac{-4K^2 - 2(K \cdot t') + 2K^2}{(t'^2 + \omega_1)^2} dx \\
&= \left( \frac{3}{4\pi^2} \right) (-4K^2) \int_0^1 dx \frac{\mathcal{C}_1(\omega_1)}{\omega_1}
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Para no hacer la notación demasiada cargada hemos hecho un cambio de notación para las funciones  $\mathcal{C}$  de forma que  $\mathcal{C}_\alpha(\omega, \tau_{ir}, \tau_{uv}) = \mathcal{C}_\alpha(\omega)$ .

Es importante recordar que todos los términos con potencias impares en  $t'$  se hacen 0. En el primer termino haciendo el cambio de variable para la parametrización de Feynman de 3 denominadores obtenemos:

$$\begin{aligned}
&\left( \frac{-3}{2\pi^2} \right) (4K^2) \int_0^1 \int_0^\infty dx_1 dx_2 x_1 ds \frac{(M_{f_1}^2 + m^2)x_1 + 2M_{f_1}M_{\bar{f}_2}(1 - x_1) + M_{f_2}^2(x_1 - 2)}{(s + \omega_2)^3} \\
&= \frac{3}{4\pi^2} \int_0^1 dx_1 dx_2 x_1 [(M_{f_1}^2 + m^2)x_1 + 2M_{f_1}M_{\bar{f}_2}(1 - x_1) + M_{f_2}^2(x_1 - 2)] \frac{\mathcal{C}_2(\omega_2)}{\omega_2}
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Obteniendo así que:

$$T_{EE1}(Q^2) = \left( \frac{3}{4\pi^2} \right) (-4K^2) \left[ 2 \int_0^1 dx_1 dx_2 x_1 \mathcal{A}_1 \frac{\mathcal{C}_2(\omega_2)}{\omega_2} + \int_0^1 dx \frac{\mathcal{C}_1(\omega_1)}{\omega_1} \right] \tag{3.37}$$

Donde:

$$\mathcal{A}_1 = (M_{f_1}^2 + m^2)x_1 + 2M_{f_1}M_{\bar{f}_2}(1 - x_1) + M_{f_2}^2(x_1 - 2) \tag{3.38}$$

Ahora veamos la amplitud cruzada, calculando la traza, proyectando y haciendo el

cambio de variable para 3 denominadores obtenemos:

$$\begin{aligned}
T_{EF1}(Q^2) &= \frac{4K^2}{M_R}(2) \left( \frac{3}{2\pi^2} \right) \left[ \int_0^1 \int_{t'}^\Lambda \frac{dx_1 dx_2 x_1 [(t^2 + \omega_2)(M_{f_1} + M_{\bar{f}_2}) - 4m^2 M_{f_1} x_1 (x_1 - 1)]}{(t^2 + \omega_2)^3} \right. \\
&+ \int_0^1 \int_{t'}^\Lambda \frac{dx_1 dx_2 x_1 [2M_{f_1}^2 M_{\bar{f}_2} + x_1 Q^2 M_{\bar{f}_2} (2x_1 x_2^2 - 2x_1 x_2 + x_1 - 1) - x_1^2 Q^2 M_{f_1}]}{(t^2 + \omega_2)^3} \\
&\left. + \int_0^1 \int_{t'}^\Lambda \frac{dx_1 dx_2 x_1 [2m^2 (x_1 - 1)^2 M_{\bar{f}_2} - \omega_2 (M_{f_1} + M_{\bar{f}_2})]}{(t^2 + \omega_2)^3} \right]
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Obteniendo que:

$$T_{EF1}(Q^2) = \left( \frac{-3}{4\pi^2 M_R} \right) (-4K^2) \int_0^1 dx_1 dx_2 x_1 \left( \mathcal{A}_2 \frac{\mathcal{C}_1(\omega_2)}{\omega_2} + (\mathcal{A}_3 - \mathcal{A}_2 \omega_2) \frac{\mathcal{C}_2(\omega_2)}{\omega_2} \right) \tag{3.40}$$

Donde:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_2 &= M_{f_1} + M_{\bar{f}_2} \\
\mathcal{A}_3 &= x_1 Q^2 M_{\bar{f}_2} (2x_1 x_2^2 - 2x_1 x_2 + x_1 - 1) - x_1^2 Q^2 M_{f_1} + 2M_{f_1}^2 M_{\bar{f}_2} + 2m^2 M_{\bar{f}_2} (x_1 - 1)^2 \\
&\quad - 4m^2 M_{f_1} x_1 (x_1 - 1)
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Para la amplitud pseudovectorial tenemos que:

$$\begin{aligned}
T_{FF1}(Q^2) &= \left( \frac{-3K^2}{2M_R^2 \pi^2} \right) \left[ \int_0^1 \int_t^\Lambda dx_1 dx_2 x_1 \frac{(t^2 + \omega_2 - \omega_2)[(3x_1 - 2)2m^2 + 2x_1 Q^2]}{(t^2 + \omega_2)^3} \right. \\
&+ \int_0^1 \int_t^\Lambda dx_1 dx_2 x_1 \frac{4m^2 [m^2 x_1 (x_1 - 1)^2 + M_{f_1}^2 x_1 - 2M_{f_1} M_{\bar{f}_2} (x_1 - 1)] - 4x_1 Q^2 M_{f_1} M_{\bar{f}_2}}{(t^2 + \omega_2)^3} \\
&+ \int_0^1 \int_t^\Lambda dx_1 dx_2 x_1 \frac{4m^2 Q^2 x_1^2 (3x_1 x_2^2 - 3x_1 x_2 + x_1) + 4m^2 Q^2 x_1^2 (-2x_2^2 + 2x_2 - 1)}{(t^2 + \omega_2)^3} \left. \right] \\
&= \left( \frac{3}{16M_R^2 \pi^2} \right) (-4K^2) \left[ \int_0^1 dx_1 dx_2 x_1 \left( \mathcal{A}_4 \frac{\mathcal{C}_1(\omega_2)}{\omega_2} + (\mathcal{A}_5 - \mathcal{A}_4 \omega_2) \frac{\mathcal{C}_2(\omega_2)}{\omega_2} \right) \right]
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Donde:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_4 &= m^2 (3x_1 - 2) + x_1 Q^2 \\
\mathcal{A}_5 &= 2x_1 m^4 (x_1 - 1)^2 + 2x_1^2 m^2 Q^2 (3x_1 x_2^2 - 3x_1 x_2 + x_1 - 2x_2^2 + 2x_2 - 1) + 2x_1 m^2 M_{f_1}^2 \\
&\quad - 2M_{f_1} M_{\bar{f}_2} [2(x_1 - 1)m^2 + x_1 Q^2]
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Entonces la ecuación (3.33) queda como:

$$F^{M,f_1}(Q^2) = P_T(Q^2) [(E_H)^2 T_{EE}(Q^2) + (F_H)^2 T_{FF}(Q^2) + E_H F_H T_{EF}(Q^2)] \tag{3.44}$$

En donde:

$$T_{EE} = \frac{T_{EE1}}{-4K^2}; \quad T_{FF} = \frac{T_{FF1}}{-4K^2}; \quad T_{EF} = \frac{T_{EF1}}{-4K^2} \quad (3.45)$$

Ya una vez calculado el factor de forma elástico podemos obtener el radio de carga usando la expresión:

$$r_M^2 = -6 \frac{dF(Q^2)}{dQ^2} \Big|_{Q^2=0} \quad (3.46)$$

Recordar el cambio de unidades  $1GeV = 5.068 fm^{-1}$ .

Mesón	CI	SDE [49, 50]	Lattice [51–53]	Exp [54]	HM [55]	LFF [56]	PM [82]
$\pi(u\bar{d})$	0.44	$0.676 \pm 0.002$	$0.648 \pm 0.141$	$0.659 \pm 0.004$	0.66	0.66	–
$K(u\bar{s})$	0.42	$0.593 \pm 0.002$	0.566	$0.560 \pm 0.031$	0.65	0.58	–
$h_s(s\bar{s})$	0.36	–	–	–	–	–	–
$D^0(c\bar{u})$	0.36	–	–	–	0.47	0.55	0.67
$D_s^+(c\bar{s})$	0.26	–	–	–	0.50	0.35	0.46
$B^+(u\bar{b})$	0.34	–	–	–	–	0.61	0.73
$B_s^0(s\bar{b})$	0.24	–	–	–	–	0.34	0.46
$\eta_c(c\bar{c})$	0.20	0.24	0.25	–	–	–	–
$B_c^+(c\bar{b})$	0.17	–	–	–	–	0.20	–
$\eta_b(b\bar{b})$	0.07	0.09	–	–	–	–	–

Tabla 3.1: Radio de carga del pión, calculado con el modelo interacción de contacto (CI), estudios refinados usando el formalismo de la ecuación de Schwinger-Dyson (SDE), data experimental (Exp), en un modelo híbrido (HM), en el light-front framework (LFF) y un (PM) modelo potencial de QCD. Todos los resultados son presentados en fermis (fm).



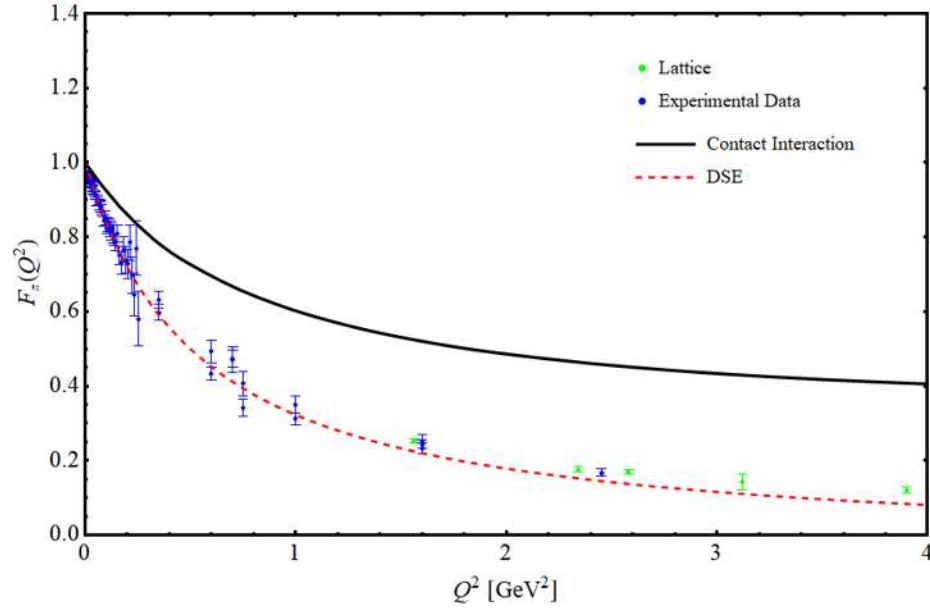


Figura 3.3: Factor de forma elástico del pión. La curva solida negra es lo que obtenemos usando interacción de contacto, la punteada es obtenida a través del formalismo de la DSE [26], los datos obtenidos a través de lattice son del trabajo [77]. Datos experimentales : [28, 40, 41, 85, 86]

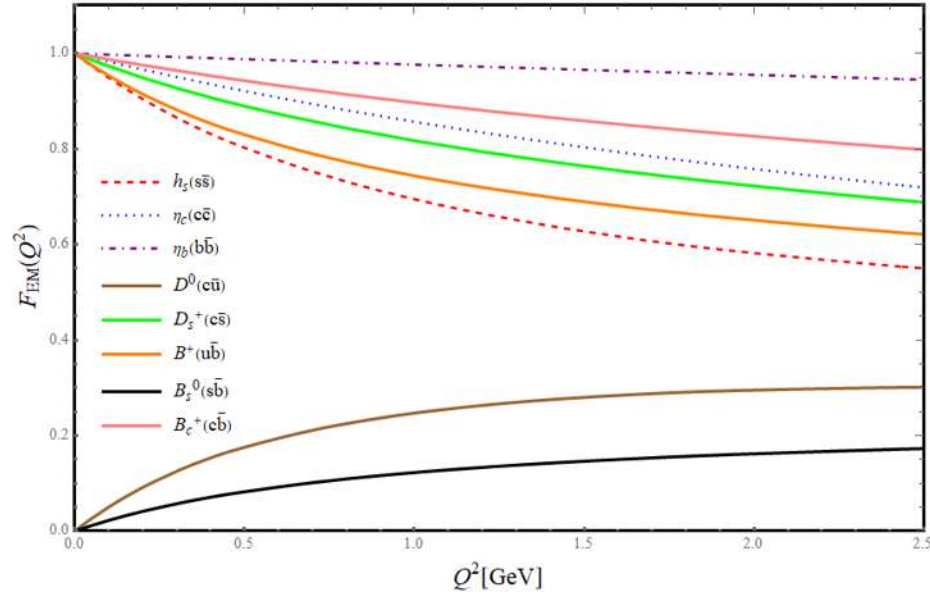


Figura 3.4: Factor de forma elástico de diferentes mesones pseudoescalares.

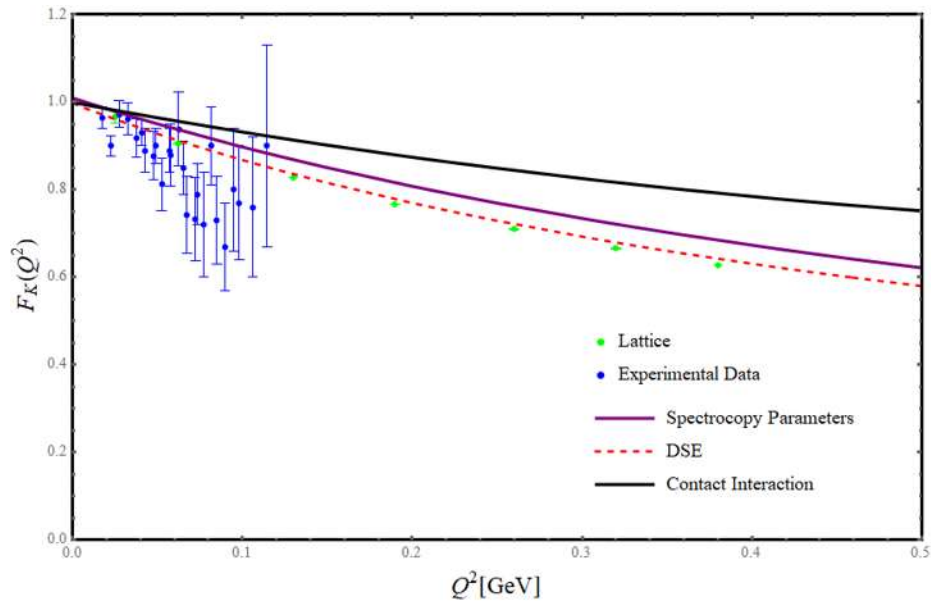


Figura 3.5: Factor de forma elástico del kaón. La curva solida negra es lo que obtenemos usando interacción de contacto, la punteada roja y morada solida fueron obtenidos a través de los trabajos [26] y [78] respectivamente, los datos de lattice se obtuvieron de [77]. Datos experimentales : [80, 81].

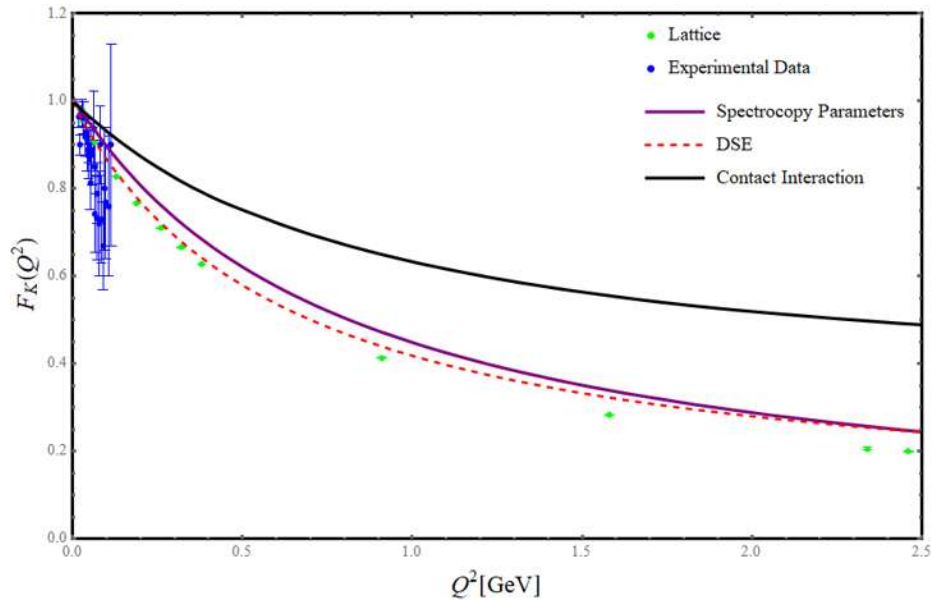


Figura 3.6: Factor de forma elástico del kaón. La curva solida negra es lo que obtenemos usando interacción de contacto, la punteada roja y morada solida fueron obtenidos a través de los trabajos [26] y [78] respectivamente, los datos de lattice se obtuvieron de [77]. Datos experimentales : [80, 81].

---

# Capítulo 4

## Factor de Forma de Transición

---

El proceso  $\gamma^*\gamma \rightarrow \pi^0$  es bastante importante ya que con este podemos estudiar el factor de forma de transición (TFF) en el dominio de transferencia de momento. Brodsky y Lepage estudiaron su importancia y propusieron predicciones perturbativas para diversos procesos [71], trabajo en el cual encontraron que:

$$\lim_{Q^2 \rightarrow \infty} Q^2 F(Q^2) = \sqrt{2} f_\pi \quad (4.1)$$

Este fenómeno también se ha sido estudiado en este modelo en [34]. En los experimentos realizados en BABAR [70], se utilizan dos aceleradores, uno lineal que sirve como inyector que acelera a los electrones y positrones a grandes energías para después depositarlos en el PEP-II que es el otro acelerador. El PEP-II está compuesto de dos anillos, uno de altas energías  $\sim 9 GeVs$  el cual acelera a los electrones y uno de bajas energías  $\sim 3.1 GeVs$  el cual acelera a los positrones, estos anillos van en sentido contrario para hacerlos colisionar justo donde están los detectores.

## SECCIÓN 4.1

Factor de forma de transición  $\gamma^* \gamma \rightarrow \pi^0$ 

El diagrama de este proceso esta esquematizado por la figura. El vértice que describe la transición  $\gamma^* \gamma \rightarrow \eta_c$  puede parametrizarse con un solo factor de forma  $G_{\gamma^* \gamma \eta_c}(Q_1^2, Q_2^2)$  el cual se puede calcular a partir de [72]

$$\mathcal{T}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}(Q_1, Q_2) + T_{\nu\mu}(Q_2, Q_1) \quad (4.2)$$

donde  $Q_1$  y  $Q_2$  son los momentos de los fotones incidentes,  $P = Q_1 + Q_2$  es el momento del mesón pseudoescalar,  $m_H$  es la masa del mesón pseudoescalar y el elemento de matriz  $T_{\mu\nu}(Q_1, Q_2)$  esta dado por:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}(Q_1, Q_2) &= \frac{\alpha_{em}}{\pi f_\pi} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} Q_{1\alpha} Q_{2\beta} G_{\gamma^* \gamma \pi}(Q_1^2, Q_2^2) \\ &= Tr \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} S(k_1) \Gamma_H(P) S(k_2) i\Gamma_\mu(Q_2) S(k_3) i\Gamma_\nu(Q_1) \end{aligned} \quad (4.3)$$

donde  $k_1 = k - Q_1$ ,  $k_2 = k + Q_2$ ,  $k_3 = k$ ,  $\alpha_{em} = e^2/(4\pi)$  y  $f_\pi$  es la constante de decaimiento leptónica. La cinemática del sistema es la siguiente (ver figura {4.1}):  $Q_1^2 = Q^2$ ,  $Q_2^2 = 0$ ,  $P^2 = (Q_1 + Q_2)^2 = -m_H^2$  y  $2(Q_1 \cdot Q_2) = -m_H^2 - Q^2$ . El proyector que utilizaremos es  $\epsilon_{\mu\nu\rho\theta} Q_{1\rho} Q_{2\theta}$ .

Multiplicando por la izquierda con  $\epsilon_{\mu\nu\rho\theta} Q_{1\rho} Q_{2\theta}$  en el lado izquierdo tenemos:

$$\frac{\alpha_{em}}{\pi f_\pi} \epsilon_{\mu\nu\rho\theta} Q_{1\rho} Q_{2\theta} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} Q_{1\alpha} Q_{2\beta} G_{\gamma^* \gamma \pi}(Q_1^2, Q_2^2) = \frac{1}{2} (Q^2 + m_H^2)^2 \frac{\alpha_{em}}{\pi f_\pi} G_{\gamma^* \gamma \pi}(Q_1^2, Q_2^2) \quad (4.4)$$

Estos son algunos productos punto necesario para este calculo:

$$\begin{aligned} k_1 \cdot k_2 &= k^2 + (k \cdot Q_2) - (k \cdot Q_1) + \frac{m_H^2 + Q^2}{2} \\ k_1 \cdot k &= k^2 - (k \cdot Q_1) \\ k_2 \cdot k &= k^2 + (k \cdot Q_2) \\ k_1 \cdot k_1 &= k_1^2 = k^2 + Q^2 - 2(k \cdot Q_1) \\ k_2 \cdot k_2 &= k_2^2 = k^2 + 2(k \cdot Q_2) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Ademas, el denominador de esta expresión tendrá la forma:

$$\begin{aligned} \sigma_v(k_1) \sigma_v(k_2) \sigma_v(k) &= \frac{1}{[k^2 + Q^2 - 2(k \cdot Q_1) + M^2][k^2 - m_1^2 + 2(k \cdot Q_2) + M^2][k^2 + M^2]} \\ &= \frac{1}{I_{em}(k^2 + M^2)} \end{aligned} \quad (4.6)$$

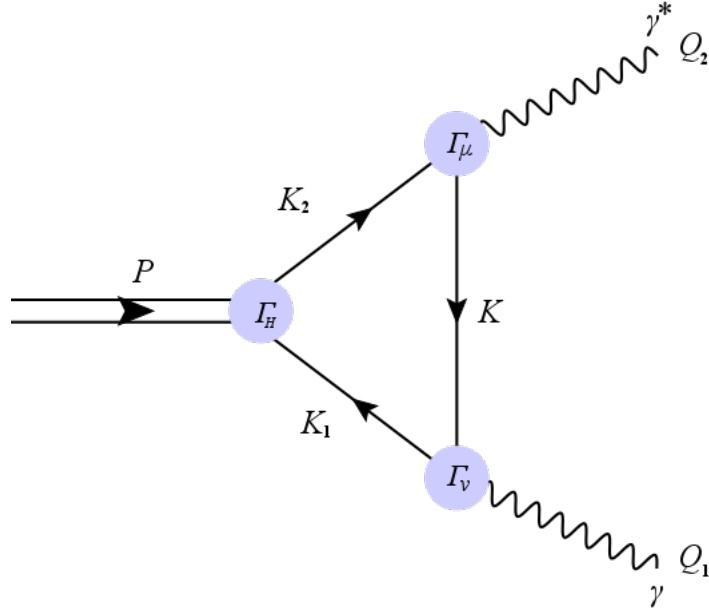


Figura 4.1: Diagrama del proceso

Utilizando la parametrización de Feynman para 3 denominadores (3.25), tomando:

$$\begin{aligned} A_1 &= k^2 + Q^2 - 2(k \cdot Q_1) + M^2 \\ A_2 &= k^2 - m_1^2 + 2(k \cdot Q_2) + M^2 \\ A_3 &= k^2 + M^2 \end{aligned} \quad (4.7)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} A_1 x_1 x_2 + A_2 x_1 (1 - x_2) + A_3 (1 - x_1) &= k^2 + 2k \cdot x_1 [Q_2 - x_2 (Q_1 + Q_2)] \\ &+ M^2 + x_1 x_2 Q^2 + (1 - 1)x_1^2 [Q_2 - x_2 (Q_1 + Q_2)]^2 \\ &= [k + x_1 (Q_2 - x_2 (Q_1 + Q_2))]^2 + x_1 x_2 Q^2 + M^2 - x_1^2 [Q_2 - x_2 (Q_1 + Q_2)]^2 \end{aligned} \quad (4.8)$$

Hacemos el cambio de variable  $k' = k + x_1 (Q_2 - x_2 (Q_1 + Q_2))$ , entonces obtenemos que:

$$A_1 x_1 x_2 + A_2 x_1 (1 - x_2) + A_3 (1 - x_1) = k'^2 + \mu_3^2 \quad (4.9)$$

donde  $\mu_3^2 = -x_1 [-Q^2 x_2 (1 - x_1) + m_H^2 x_1 x_2 (1 - x_2)] + M^2$  Finalmente obtenemos que:

$$\frac{1}{A_1 A_2 A_3} = 2 \int_0^1 \frac{dx_1 dx_2 x_1}{(k'^2 + \mu_3^2)^3} \quad (4.10)$$

Al realizar el cambio de variable, tenemos que  $k = k' + x_1 [x_2 (Q_1 + Q_2) - Q_2]$ , entonces, los productos puntos que necesitamos cambian de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} k \cdot Q_2 &= (k' \cdot Q_2) - \frac{x_1 x_2}{2} (m_H^2 + Q^2) \\ k \cdot Q_1 &= (k' \cdot Q_1) + \frac{x_1}{2} [x_2 (Q^2 - m_H^2) + m_H^2 + Q^2] \\ k^2 &= k'^2 - x_1^2 x_2^2 m_H^2 + x_1^2 x_2 (m_H^2 + Q^2) - 2(k' \cdot Q_2) x_1 + 2x_1 x_2 [(k' \cdot Q_1) + (k' \cdot Q_2)] \end{aligned} \quad (4.11)$$

Ademas, en este caso tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_k^\Lambda \frac{(k \cdot Q_1)(k \cdot Q_2)}{(k^2 + \omega^2)^n} &= Q_{1\alpha} Q_{2\beta} \int_k^\Lambda \frac{k_\alpha k_\beta}{(k^2 + \omega^2)^n} = Q_{1\alpha} Q_{2\beta} \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} \int_k^\Lambda \frac{k^2}{(k^2 + \omega^2)^n} \\ &= \frac{1}{4} (Q_1 \cdot Q_2) \int_k^\Lambda \frac{k^2}{(k^2 + \omega^2)^n} = \frac{-(m_H^2 + Q^2)}{8} \int_k^\Lambda \frac{k^2}{(k^2 + \omega^2)^n} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Ahora bien, del lado derecho de (4.3) tenemos:

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \epsilon_{\mu\nu\rho\theta} Q_{1\rho} Q_{2\theta} \text{Tr}[S(k_1) \Gamma_H(P) S(k_2) i\Gamma_\mu(Q_2) S(k_3) i\Gamma_\nu(Q_1)] \quad (4.13)$$

Recordando la forma para el propagador  $S(k_1)$  (2.15), la amplitud de Bethe-Salpeter  $\Gamma_H(P)$  (2.10) y para el vértice quark-fotón  $\Gamma_\mu(Q)$  la parte longitudinal no contribuirá en este proceso por lo que esta dado por:

$$\Gamma_\mu(Q) = P_T(Q^2) \left( \gamma_\mu - \frac{\gamma \cdot Q}{Q^2} Q_\mu \right) \quad (4.14)$$

Expresando el factor de forma como:

$$G_{\gamma^* \gamma \pi}(Q^2, 0) = G_E(Q^2, 0) + G_F(Q^2, 0) \quad (4.15)$$

Con todo esto en cuenta, calculando la traza y proyectando, tendremos la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} G_E(Q^2, 0) &= \left( \frac{\pi f_\pi}{\alpha_{em}(Q^2 + m_H^2)^2} \right) \frac{1}{4\pi^2} \int_k^\Lambda \frac{4E_H m_H^2 M Q^2 + 2E_H M Q^4 + 2E_H m_H^4 M}{I_{em}(k^2 + M^2)} \\ &= \frac{4\pi f_\pi}{\alpha_{em} 4\pi^2} \int_0^1 \int_{k'}^\Lambda \frac{E_H M 2x_1 dx_1 dx_2}{(k'^2 + \mu_3^2)^3} = \frac{2E_H M f_\pi}{\alpha_{em} \pi} \left( \frac{1}{4} \right) \int_0^1 \int_0^\infty \frac{x_1 s ds dx_1 dx_2}{(s + \mu_3^2)^3} \\ &= \frac{E_H M f_\pi}{2\alpha_{em} \pi} \int_0^1 x_1 dx_1 dx_2 \frac{\mathcal{C}_2(\mu_3^2)}{\mu_3^2} \end{aligned} \quad (4.16)$$

Para  $G_F(Q^2, 0)$  tenemos que:

$$\begin{aligned} G_F(Q^2, 0) &= \frac{\pi f_\pi}{\alpha_{em}} \frac{1}{4\pi^2} \left( \frac{-2F_H}{M} \right) \int_0^1 \int_{k'}^\Lambda 2x_1 dx_1 dx_2 \left[ \frac{[2x_1 x_2 Q^2 (x_1 - 1)^2]}{(k'^2 + \mu_3^2)^3} \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \frac{(3x_1 - 2)k'^2 + 2(x_1 - 2)(M^2 - m_H^2 x_1^2 x_2 (x_2 - 1)) + (1 - 1)(2 - 3x_1)\mu_3^2}{(k'^2 + \mu_3^2)^3} \right] \\ &= \frac{-f_\pi F_H}{\alpha_{em} M \pi} \int_0^1 \int_{k'}^\Lambda x_1 dx_1 dx_2 \left[ \frac{3x_1 - 2}{(k'^2 + \mu_3^2)^2} + \frac{\mathcal{Y}}{(k'^2 + \mu_3^2)^3} \right] \\ &= \frac{-f_\pi F_H}{4\alpha_{em} M \pi} \int_0^1 x_1 dx_1 dx_2 \left[ (3x_1 - 2) \frac{\mathcal{C}_1(\mu_3^2)}{\mu_3^2} + \mathcal{Y} \frac{\mathcal{C}_2(\mu_3^2)}{\mu_3^2} \right] \end{aligned} \quad (4.17)$$

Donde:

$$\begin{aligned} \mathcal{Y} &= 2x_1x_2Q^2(x_1-1)^2 + 2(x_1-2)[M^2 - m_H^2x_1^2x_2(x_2-1)] - (3x_1-2)\mu_3^2 \\ &= -M^2(x_1+2) - x_1x_2Q^2[(9-5x_1)x_1-4] - m^2x_1^2x_2(5x_1-6)(x_2-1) \end{aligned} \quad (4.18)$$

De este resultado obtenemos la gráfica {4.2}.

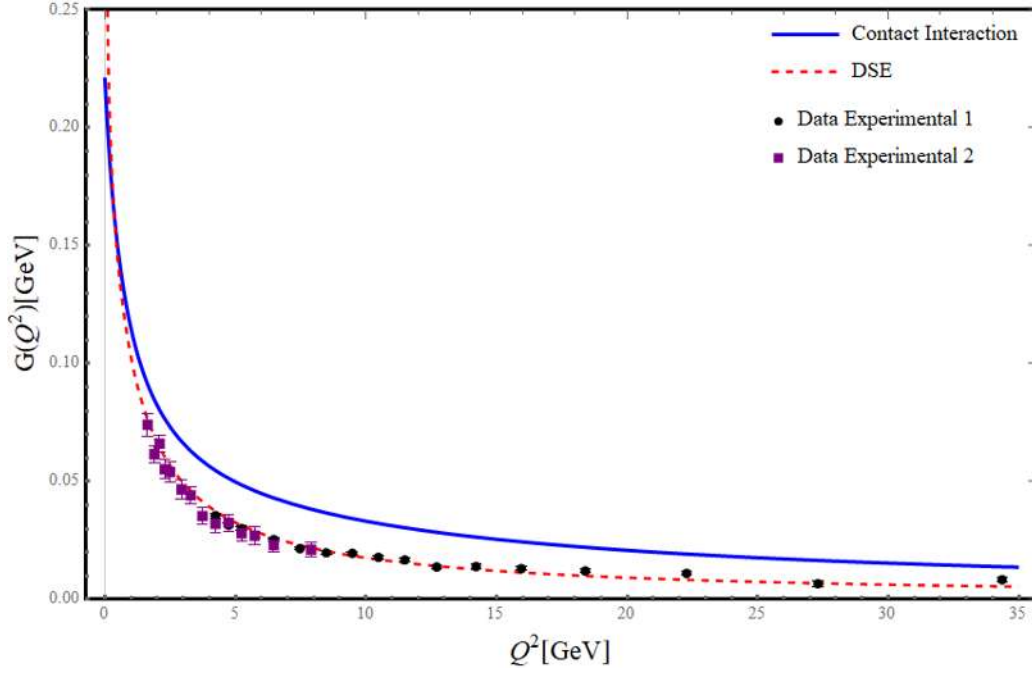


Figura 4.2: La curva solida se obtiene usando interacción de contacto, la curva punteada es un fit calculado usando QCD basada en la truncación rainbow-ladder utilizando el formalismo de las DSE [84]. Data: los círculos negros [37], cuadrados purpura [38] Las curvas han sido divididas por  $(2\pi^2 f_\pi)$  de tal forma que coincidan con la normalización de los datos experimentales.

Ahora bien, una vez que ya hemos calculado el factor de forma de transición podemos obtener su radio de interacción, el cual esta dado por:

$$r_M^2 = -6 \frac{dG(Q^2)}{dQ^2} \Big|_{Q^2=0} \quad (4.19)$$

CI	SDE [39]	Exp [73]
0.32	0.62	$0.65 \pm 0.04$

Tabla 4.1: Radio de interacción del pión. Todos los resultados son presentados en fermis (fm).



---

# Capítulo 5

## Factores de Forma Elástico y de Transición del Primer Estado Excitado

---

### SECCIÓN 5.1

#### Primer estado excitado

Ahora que ya hemos realizado los cálculos necesarios para obtener el factor de forma elástico y de transición, calcularemos estos últimos para el primer estado excitado. Para obtener las masas y amplitudes asociadas a la primera excitación radial de un mesón conformado por un quark de sabor  $f_1$  y un antiquark  $\bar{f}_2$  hemos utilizado el mismo método utilizado en los trabajos [42, 43]. Sin embargo, tenemos que incluir un termino extra debido al hecho de que la primera excitación radial posee un cero así como la función de onda radial para estados ligados en la mecánica cuántica. Dentro de cualquier tratamiento sofisticado de QCD para mesones, todos los momentos de Chebyshev en la BSA en el primer estado radial poseen un único cero, mientras que para el estado base la BSA no exhibe ninguno [44]. En la aplicación fenomenológica del modelo de interacción de contacto [45–47] insertando un cero a mano en los kernels de la BSE multiplicándola por  $(1 - q^2 d_F)$  con el cual forzamos a que el kernel en  $q^2 = 1/d_F$  sea cero donde  $d_F$  es un parámetro adicional. La presencia de este cero reduce el acoplamiento en la BSE y por lo tanto incrementa la masa del estado ligado. La amplitud de Bethe-Salpeter (2.10) sigue teniendo la misma forma pero va multiplicada por el factor  $(1 - q^2 d_F)$  donde  $q$  es

el momento de integración. Es decir que para la primera excitación radial la amplitud de Bethe-Salpeter tiene la forma:

$$\Gamma_H(P) = \gamma_5 \left( iE_H + \frac{\gamma \cdot P}{2M_R} F_H \right) (1 - d_F q^2) \quad (5.1)$$

Las amplitudes  $E_H$  y  $F_H$  para la primera excitación radial las obtenemos de la misma forma que en (2.89) pero haciendo el cambio de la funciones  $\mathcal{C}$  por las funciones  $\mathcal{F}$  (5.3). De igual forma las vamos a obtener resolviendo la eigenecuación para el eigenvalor igual a 1 cuando  $P^2 = -m_H^2$ . Se ha observado en [57–61] que el rompimiento espontaneo de simetría quiral genera un momento cromomagnético anómalo grande de quarks vestidos y como consecuencia la separación spin-orbit entre el estado base de los mesones y sus compañeros de paridad se mejora de acuerdo con las observaciones. En este estudio se asume y se implementa este efecto también en los compañeros de paridad entre las excitaciones radiales de los mesones [45, 46]. Este es el mecanismo responsable de una separación mas grande entre los compañeros de paridad, son esencialmente correcciones no perturbativas a los kernels Rainbow-Ladder, las cuales se cancelan en gran medida en el canal pseudoescalar. Ahora bien, necesitamos discutir como seleccionar la locación del cero en la excitación. Para este propósito, es necesario fijar el parametro  $d_F$ , este parámetro se fijó en lo trabajos [45, 46] como  $d_F = 2M^2$  para calcular la excitación radial de mesones ligeros en el canal pseudoescalar y vectorial, sin embargo, para el sector pesado este parámetro debe de ajustarse. En el trabajo [47] hacen el análisis para las excitaciones radiales para los diferentes canales para quarks ligeros y pesados concluyendo así que la mejor elección para este parámetro es:

$$d_F = d_1 - d_2 e^{-d_3 M_R} \quad (5.2)$$

Las constantes  $d_1$ ,  $d_2$  y  $d_3$  son diferentes para cada canal,  $M_R$  es la masa reducida de los dos quarks, para el canal pseudoescalar están listados en la tabla (5.1) .

Mesón	$d_1$	$d_2$	$d_3$
PS	8.32	41.67	11.08

Tabla 5.1: Parámetros para el canal pseudoescalar.

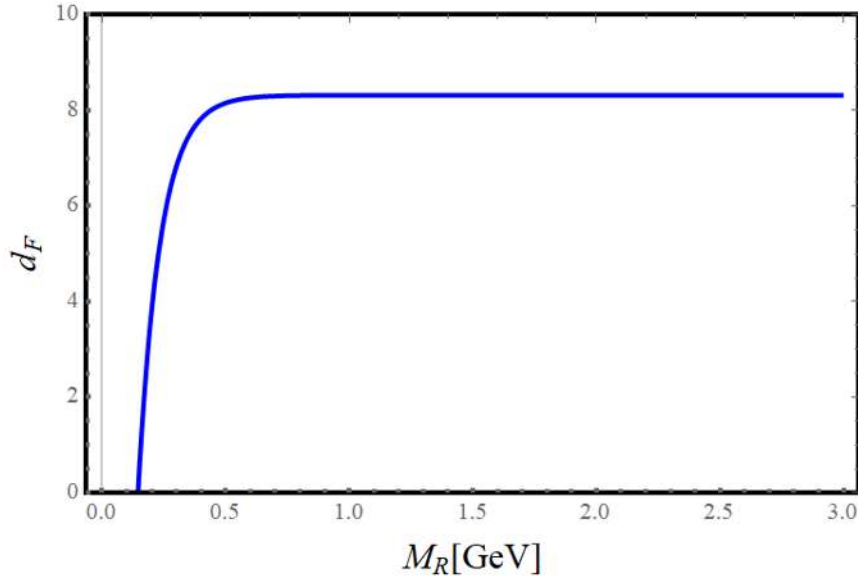


Figura 5.1: Parámetro  $d_F$  para el canal pseudoescalar.

El cambio realizado en la BSA cambiará las funciones  $\mathcal{C}_{\alpha\beta}$  dependiendo de las corrientes. Si solo tenemos una amplitud de Bethe-Salpeter en el proceso como para el calculo del amplitudes (2.89) debemos reemplazar a las funciones  $\mathcal{C}$  por  $\mathcal{F}$ , en donde:

$$\mathcal{F} = \mathcal{C} - d_F \mathcal{D} \quad (5.3)$$

Y tenemos que, utilizando el esquema de regularización de tiempo [36] propio para calcular esta integral :

$$\mathcal{D}(\omega) = \int_0^\infty \frac{s^2}{s + \omega} ds \rightarrow \int_0^\infty \int_{\tau_{uv}^2}^{\tau_{ir}^2} s^2 e^{-T(s+\omega)} dT ds = \int_0^\infty \frac{-s^2}{s + \omega} \left[ e^{-\tau_{ir}^2(s+\omega)} - e^{-\tau_{uv}^2(s+\omega)} \right] ds \quad (5.4)$$

Hagamos el cambio de variable  $s' = s + \omega$  ;  $ds = ds'$ , obteniendo:

$$\mathcal{D}(\omega) = \int_\omega^\infty \frac{-(s' - \omega)^2}{s'} \left( e^{-\tau_{ir}^2 s'} - e^{-\tau_{uv}^2 s'} \right) ds' = \int_\omega^\infty \left( 2\omega - s' - \frac{\omega^2}{s'} \right) \left( e^{-\tau_{ir}^2 s'} - e^{-\tau_{uv}^2 s'} \right) ds' \quad (5.5)$$

Ahora, haciendo el cambio de variable  $t = \tau_{ir}^2 s'$  ;  $ds' = dt/\tau_{ir}^2$  para el primer termino del segundo paréntesis:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\omega\tau_{ir}^2}^\infty \left( 2\omega - \frac{t}{\tau_{ir}^2} - \frac{\omega^2\tau_{ir}^2}{t} \right) e^{-t} \frac{dt}{\tau_{ir}^2} = \frac{1}{\tau_{ir}^2} \left[ 2\omega \int_{\omega\tau_{ir}^2}^\infty e^{-t} dt - \frac{1}{\tau_{ir}^2} \int_{\omega\tau_{ir}^2}^\infty t e^{-t} dt - \omega^2\tau_{ir}^2 \int_{\omega\tau_{ir}^2}^\infty e^{-t} dt \right] \\ &= \frac{1}{\tau_{ir}^2} \left[ 2\omega\Gamma(1, \omega\tau_{ir}^2) - \frac{1}{\tau_{ir}^2}\Gamma(2, \omega\tau_{ir}^2) - \omega^2\tau_{ir}^2\Gamma(0, \omega\tau_{ir}^2) \right] \end{aligned} \quad (5.6)$$

Donde hemos utilizado (2.33, 2.125). Ahora, haciendo el cambio de variable  $t = \tau_{uv}^2 s'$ ;  $dt = ds'/\tau_{uv}^2$  y procediendo de manera análoga, obtenemos finalmente:

$$\mathcal{D}(\omega) = 2\omega \left( \frac{1}{\tau_{ir}^2} \Gamma(1, \omega \tau_{ir}^2) - \frac{1}{\tau_{uv}^2} \Gamma(1, \omega \tau_{uv}^2) \right) + \frac{1}{\tau_{uv}^4} \Gamma(2, \omega \tau_{uv}^2) - \frac{1}{\tau_{ir}^4} \Gamma(2, \omega \tau_{ir}^2) + \omega^2 \Gamma(0, \omega \tau_{uv}^2, \omega \tau_{ir}^2) \quad (5.7)$$

Por otro lado, esta integral la parametrizan en [45] de la siguiente manera:

$$\mathcal{D}(\omega) = \int_0^\infty ds s \frac{s}{s + \omega} \rightarrow \int_{\tau_{uv}^2}^{\tau_{ir}^2} d\tau \frac{2}{\tau^3} e^{-\tau\omega} \quad (5.8)$$

Ahora bien, tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_{\tau_{uv}^2}^{\tau_{ir}^2} d\tau \frac{2}{\tau^3} e^{-\tau\omega} &= \frac{e^{-\tau_{uv}^2\omega}}{\tau_{uv}^4} - \frac{e^{-\tau_{ir}^2\omega}}{\tau_{ir}^4} - \omega \int_{\tau_{uv}^2}^{\tau_{ir}^2} \frac{e^{-\tau\omega}}{\tau^2} d\tau = \frac{e^{-\tau_{uv}^2\omega}}{\tau_{uv}^4} - \frac{e^{-\tau_{ir}^2\omega}}{\tau_{ir}^4} + \omega \left( \frac{e^{-\tau_{ir}^2\omega}}{\tau_{ir}^2} - \frac{e^{-\tau_{uv}^2\omega}}{\tau_{uv}^2} \right) \\ &+ \omega^3 \int_{\tau_{uv}^2}^{\tau_{ir}^2} \frac{e^{-\tau\omega}}{\tau} d\tau \end{aligned} \quad (5.9)$$

Donde hemos utilizado la integración por partes dos veces y notamos que:

$$\omega^3 \int_{\tau_{uv}^2}^{\tau_{ir}^2} \frac{e^{-\tau\omega}}{\tau} d\tau = \omega^2 \int_{\tau_{uv}^2\omega}^{\tau_{ir}^2\omega} e^{-t} t^{-1} dt = \omega^2 (E_i(-\tau_{ir}^2\omega) - E_i(\tau_{uv}^2\omega)) \quad (5.10)$$

En donde  $E_i(x)$  es la función exponencial integral, la cual esta íntimamente relacionada con la función Gamma de la siguiente forma, para  $x \in \mathbb{R}$ :

$$\Gamma(0, x) = \begin{cases} -E_i(-x) - i\pi & \text{para } x < 0 \\ -E_i(-x) & \text{para } x > 0 \end{cases} \quad (5.11)$$

Ademas, ya hemos demostrado que:

$$\omega \Gamma(-1, \tau_{ir}^2\omega) = \frac{e^{-\tau_{ir}^2\omega}}{\tau_{ir}^2} - \omega \Gamma(0, \tau_{ir}^2\omega) \quad (5.12)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \int_{\tau_{uv}^2}^{\tau_{ir}^2} d\tau \frac{2}{\tau^3} e^{-\tau\omega} &= \frac{e^{-\tau_{uv}^2\omega}}{\tau_{uv}^4} - \frac{e^{-\tau_{ir}^2\omega}}{\tau_{ir}^4} + \omega \left( \frac{e^{-\tau_{ir}^2\omega}}{\tau_{ir}^2} - \frac{e^{-\tau_{uv}^2\omega}}{\tau_{uv}^2} \right) + \omega^2 (\Gamma(0, \tau_{uv}^2\omega) - \Gamma(0, \tau_{ir}^2\omega)) \\ &= \frac{e^{-\tau_{uv}^2\omega}}{\tau_{uv}^4} - \frac{e^{-\tau_{ir}^2\omega}}{\tau_{ir}^4} + \omega^2 (\Gamma(-1, \tau_{ir}^2\omega) - \Gamma(-1, \tau_{uv}^2\omega)) \end{aligned} \quad (5.13)$$

Es una forma diferente de parametrizar a la función  $\mathcal{D}$  pero dan los mismos resultados numéricos. Y de igual manera, definimos:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_1(\omega) &= -\omega \frac{d}{d\omega} \mathcal{D}(\omega) = 2\omega \left( \frac{e^{-\omega\tau_{uv}^2}}{\tau_{uv}^2} - \frac{e^{-\omega\tau_{ir}^2}}{\tau_{ir}^2} - \omega\Gamma(0, \omega\tau_{uv}^2, \omega\tau_{ir}^2) \right) \\ \mathcal{D}_2(\omega) &= \frac{\omega}{2} \frac{d}{d\omega} \frac{d}{d\omega} \mathcal{D}(\omega) = \omega\Gamma(0, \tau_{uv}^2\omega, \tau_{ir}^2\omega)\end{aligned}\quad (5.14)$$

Pero si en el proceso que estamos estudiando tenemos mas de una amplitud de Bethe-Salpeter como en el calculo de la constante de nacionalización canónica (2.100) o para el factor de forma elástico (3.14) entonces tendremos el factor:

$$(1 - d_F q^2)^2 = 1 + d_F^2 q^4 - 2d_F q^2 \quad (5.15)$$

Recordando que hacemos el cambio de variable  $q^2 = s$  entonces, los términos proporcionales a  $d_F^2$  darán como resultado integrales del tipo:

$$\mathcal{H}(\omega) = \int_0^\infty \frac{s^3}{s + \omega} \quad (5.16)$$

Utilizando el esquema de regularización de tiempo [36] propio para calcular esta integral:

$$\mathcal{H}(\omega) = \int_0^\infty \frac{s^3}{s + \omega} ds \rightarrow \int_0^\infty \int_{\tau_{uv}^2}^{\tau_{ir}^2} s^3 e^{-T(s+\omega)} dT ds = \int_0^\infty \frac{-s^3}{s + \omega} \left( e^{-\tau_{ir}^2(s+\omega)} - e^{-\tau_{uv}^2(s+\omega)} \right) ds \quad (5.17)$$

Hacemos el cambio de variable  $s' = s + \omega$ ;  $ds' = ds$  obtenemos:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(\omega) &= \int_\omega^\infty \frac{-(s' - \omega)^3}{s'} \left( e^{-\tau_{ir}^2 s'} - e^{-\tau_{uv}^2 s'} \right) ds' = \int_\omega^\infty \left( \frac{\omega^3}{s'} + 3s'\omega - s'^2 - 3\omega^2 \right) \dots \\ &\dots \left( e^{-\tau_{ir}^2 s'} - e^{-\tau_{uv}^2 s'} \right) ds'\end{aligned}\quad (5.18)$$

De igual forma, hacemos el cambio de variable  $t = s'\tau_{ir}^2$ ;  $dt = ds'/\tau_{ir}^2$  para los términos que multiplican al primer termino del segundo paréntesis, obteniendo:

$$\begin{aligned}I_2 &= \frac{1}{\tau_{ir}^2} \int_{\omega\tau_{ir}^2}^\infty \left( \frac{\omega^3\tau_{ir}^2}{t} + \frac{3\omega t}{\tau_{ir}^2} - \frac{t^2}{\tau_{ir}^4} - 3\omega^2 \right) e^{-t} dt \\ &= \frac{1}{\tau_{ir}^2} \left[ \omega^3\tau_{ir}^2 \int_{\omega\tau_{ir}^2}^\infty t^{-1} e^{-t} dt + \frac{3\omega}{\tau_{ir}^2} \int_{\omega\tau_{ir}^2}^\infty t e^{-t} dt - \frac{1}{\tau_{ir}^4} \int_{\omega\tau_{ir}^2}^\infty t^2 e^{-t} dt - 3\omega^2 \int_{\omega\tau_{ir}^2}^\infty e^{-t} dt \right] \\ &= \frac{1}{\tau_{ir}^2} \left[ \omega^3\tau_{ir}^2 \Gamma(0, \omega\tau_{ir}^2) + \frac{3\omega}{\tau_{ir}^2} \Gamma(2, \omega\tau_{ir}^2) - \frac{1}{\tau_{ir}^4} \Gamma(3, \omega\tau_{ir}^2) - 3\omega^2 \Gamma(1, \omega\tau_{ir}^2) \right]\end{aligned}\quad (5.19)$$

Donde hemos utilizado (2.33, 2.125). Ahora, haciendo el cambio de variable  $t = \tau_{uv}^2 s'$ ;  $dt = ds'/\tau_{uv}^2$  y procediendo de manera análoga, obtenemos finalmente:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\omega) = & \omega^3 \Gamma(0, \omega \tau_{ir}^2, \omega \tau_{uv}^2) + 3\omega \left[ \frac{1}{\tau_{ir}^4} \Gamma(2, \omega \tau_{ir}^2) - \frac{1}{\tau_{uv}^4} \Gamma(2, \omega \tau_{uv}^2) \right] + \frac{1}{\tau_{uv}^6} \Gamma(3, \omega \tau_{uv}^2) \\ & - \frac{1}{\tau_{ir}^6} \Gamma(3, \omega \tau_{ir}^2) + 3\omega^2 \left[ \frac{1}{\omega \tau_{uv}^2} \Gamma(1, \omega \tau_{uv}^2) - \frac{1}{\tau_{ir}^2} \Gamma(1, \omega \tau_{ir}^2) \right] \end{aligned} \quad (5.20)$$

En donde de manera análoga definimos:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1(\omega) = & -\omega \frac{d}{d\omega} \mathcal{H}(\omega) = 3\omega \left[ \frac{\Gamma(2, \omega \tau_{uv}^2)}{\tau_{uv}^4} + \omega \left( \frac{2e^{-\omega \tau_{ir}^2}}{\tau_{ir}^2} - \frac{2e^{-\omega \tau_{uv}^2}}{\tau_{uv}^2} + \omega \Gamma(0, \omega \tau_{uv}^2, \omega \tau_{ir}^2) \right) \right] \\ & - 3\omega \frac{\Gamma(2, \omega \tau_{ir}^2)}{\tau_{ir}^4} \\ \mathcal{H}_2(\omega) = & \frac{\omega}{2} \frac{d}{d\omega} \frac{d}{d\omega} \mathcal{H}(\omega) = 3\omega \left( \frac{e^{-\omega \tau_{uv}^2}}{\tau_{uv}^2} - \frac{e^{-\omega \tau_{ir}^2}}{\tau_{ir}^2} + \omega \Gamma(0, \omega \tau_{ir}^2, \omega \tau_{uv}^2) \right) \end{aligned} \quad (5.21)$$

Por lo que para los cálculos en los cuales aparezcan dos amplitudes de Bethe-Salpeter tendremos que realizar el cambio de  $\mathcal{C}$  a  $\mathcal{G}$ , en donde:

$$\mathcal{G} = \mathcal{C} + d_F^2 \mathcal{H} - 2d_F \mathcal{D} \quad (5.22)$$

La función de vestimenta transversal del vértice quark-fotón  $P_T(Q^2)$  no cambia, estará definida de la misma manera (3.5, 3.6). Ahora bien, debido al aumento de la masa de los mesones del primer estado excitado respecto del estado base, debemos modificar los parámetros  $(\Lambda_{uv}, Z_H)$ , ya que  $\Lambda_{uv}$  representa la escala de energía máxima de nuestro sistema de estudio, es por esa razón que estos aumentan conforme que la masa del mesón aumenta, en este trabajo en particular estamos interesados en los factores de forma del pión y del kaón por lo tanto debemos modificar  $\Lambda_{uv}$  y de  $Z_H$ . Ahora bien, tal como se explica en el trabajo [98] nosotros hemos elegido los parámetros  $Z_H = 3.034$  y  $\Lambda_{uv} = 1/1.322$ . Podemos apreciar que el error obtenido en las masas aumenta alrededor de un 5% comparado con los resultados que obtienen en [47] pero los factores de forma tienen el mismo comportamiento cualitativo encontrado en estudios realizados con modelos mas refinados [99].

### 5.1.1 Amplitudes de la BSE para la primera excitación radial para mesones pseudoescalares

Ahora ya que contamos con todos los ingredientes y cambios necesarios para estudiar la primera excitación radial, calculemos la masa para la primera excitación radial. Tenemos

que resolver la siguiente eigenecuación:

$$\begin{bmatrix} E_{PS}(P) \\ F_{PS}(P) \end{bmatrix} = \frac{4\hat{\alpha}_{IR}}{4\pi} \begin{bmatrix} \mathcal{R}_{PS}^{EE} & \mathcal{R}_{PS}^{EF} \\ \mathcal{R}_{PS}^{FE} & \mathcal{R}_{PS}^{FF} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{PS}(P) \\ F_{PS}(P) \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

En donde:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_H^{11}(P) &= \frac{1}{3\pi^2 m_G^2} \int_0^1 dx \left[ (M_{f_1} M_{\bar{f}_2} - x(1-x)P^2 - \mu^2) \frac{\mathcal{F}_1(\mu^2, \tau_{ir}, \tau_{uv})}{\mu^2} + \mathcal{F}(\mu^2, \tau_{ir}, \tau_{uv}) \right] \\ &= \frac{\mathcal{R}_{PS}^{EE}}{3\pi^2 m_G^2} \\ \mathcal{R}_H^{12}(P) &= \frac{1}{3\pi^2 m_G^2} \frac{P^2}{2M_R} \int_0^1 dx [M_{f_1} x + (1-x)M_{\bar{f}_2}] \frac{\mathcal{F}_1(\mu^2, \tau_{ir}, \tau_{uv})}{\mu^2} = \frac{\mathcal{R}_{PS}^{EF}}{3\pi^2 m_G^2} \\ \mathcal{R}_H^{21}(P) &= \frac{M_R}{3\pi^2 m_G^2} \int_0^1 dx [(1-x)M_{\bar{f}_2} + xM_{f_1}] \frac{\mathcal{F}_1(\mu^2, \tau_{ir}, \tau_{uv})}{\mu^2} = \frac{\mathcal{R}_{PS}^{FE}}{3\pi^2 m_G^2} \\ \mathcal{R}_H^{22}(P) &= -\frac{1}{3\pi^2 m_G^2} \frac{1}{2} \int_0^1 dx [M_{f_1} M_{\bar{f}_2} + xM_{f_1}^2 + M_{\bar{f}_2}^2(1-x)] \frac{\mathcal{F}_1(\mu^2, \tau_{ir}, \tau_{uv})}{\mu^2} = \frac{\mathcal{R}_{PS}^{FF}}{3\pi^2 m_G^2} \end{aligned} \quad (5.24)$$

La cual tiene solución física cuando  $P^2 = -m_H^2$ . Las masas que obtenemos utilizando este modelo están listadas en la tabla (5.2).

Mesón	Experimental	CI	Diferencia %
$\pi(1300)$	1.3	1.38	6.15
$K(1460)$	1.46	1.58	8.22

Tabla 5.2: Masas calculadas usando la ecuación (5.23). Los valores experimentales son resultados de [54].

Entonces tenemos los siguientes razones entre la masas del estado base y las de la primera excitación radial:

$$\frac{m_{\pi(1300)}}{m_\pi} \approx 9.85 ; \quad \frac{m_{K(1460)}}{m_K} \approx 3.19 \quad (5.25)$$

### 5.1.2 Constante de normalización canónica para la primera excitación radial

Ahora calculemos la constante de normalización canónica para la primera excitación radial, la cual estará dada por:

$$N_{H1}^2 = N_{H1}^{EE} + N_{H1}^{EF} + N_{H1}^{FF} \quad (5.26)$$

Y tenemos que:

$$\begin{aligned}
N_{H1}^{EE} &= \frac{3E_H^2}{2\pi^2} \int_0^1 x(1-x)dx \left[ 3 \frac{\mathcal{G}_1(\eta^2, \tau_{ir}, \tau_{uv})}{\eta^2} + 2(P^2x(x-1) + M_{f_1}M_{\bar{f}_2} - \eta^2) \frac{\mathcal{G}_2(\eta^2, \tau_{ir}, \tau_{uv})}{\eta^2} \right] \\
N_{H1}^{EF} &= \frac{-3E_H F_H}{2M_R \pi^2} \int_0^1 dx (M_{\bar{f}_2}(1-x) + M_{f_1}x) \left[ \frac{\mathcal{G}_1(\eta^2, \tau_{ir}, \tau_{uv})}{2\eta^2} - 2P^2x(1-x) \frac{\mathcal{G}_2(\eta^2, \tau_{ir}, \tau_{uv})}{\eta^2} \right] \\
N_{H1}^{FF} &= \frac{3F_H^2 P^2}{4M_R^2 \pi^2} \int_0^1 x(x-1)dx (P^2x(x-1) + M_{f_1}M_{\bar{f}_2} + \eta^2) \frac{\mathcal{G}_2(\eta^2, \tau_{ir}, \tau_{uv})}{\eta^2}
\end{aligned} \tag{5.27}$$

Con lo que obtenemos las siguientes constantes de normalización canónicas y con la cual obtenemos las amplitudes vectorial  $E_H$  y pseudovectorial  $F_H$  normalizadas listadas en la tabla (5.3).

Mesón	$E_H^C$	$F_H^C$
$\pi(1300)$	0.427	0.080
$K(1460)$	0.254	0.049

Tabla 5.3: Amplitudes vectorial  $E_H$  y pseudovectorial  $F_H$  en  $GeV$  para la primera excitación radial de los mesones pseudoescalares.

### 5.1.3 Factor de Forma elástico para la primera excitación radial para los mesones pseudoescalares

Ya contamos con todos los ingredientes necesarios para calcular el factor de forma elástico para la primera excitación radial para los mesones pseudoescalares el cual esta dado por:

$$F_1^M(Q^2) = e_{f_1} F_1^{M,f_1}(Q^2) + e_{\bar{f}_2} F_1^{M,\bar{f}_2}(Q^2) \tag{5.28}$$

En donde:

$$F_1^{M,f_1}(Q^2) = P_T(Q^2) [(E_H^C)^2 L_{EE}(Q^2) + (F_H^C)^2 L_{FF}(Q^2) + E_H^C F_H^C L_{EF}(Q^2)] \tag{5.29}$$

En donde tenemos que:

$$\begin{aligned}
L_{EE}(Q^2) &= \left( \frac{3}{4\pi^2} \right) \left[ 2 \int_0^1 dx_1 dx_2 x_1 \mathcal{B}_1 \frac{\mathcal{G}_2(\omega_2)}{\omega_2} + \int_0^1 dx \frac{\mathcal{G}_1(\omega_1)}{\omega_1} \right] \\
L_{EF}(Q^2) &= \left( \frac{-3}{4\pi^2 M_R} \right) \int_0^1 dx_1 dx_2 x_1 \left( \mathcal{B}_2 \frac{\mathcal{G}_1(\omega_2)}{\omega_2} + (\mathcal{B}_3 - \mathcal{B}_2 \omega_2) \frac{\mathcal{G}_2(\omega_2)}{\omega_2} \right) \\
L_{FF}(Q^2) &= \left( \frac{3}{16M_R^2 \pi^2} \right) \left[ \int_0^1 dx_1 dx_2 x_1 \left( \mathcal{B}_4 \frac{\mathcal{G}_1(\omega_2)}{\omega_2} + (\mathcal{B}_5 - \mathcal{B}_4 \omega_2) \frac{\mathcal{G}_2(\omega_2)}{\omega_2} \right) \right]
\end{aligned} \tag{5.30}$$



Donde definimos:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{B}_1 &= (M_{f_1}^2 + m^2)x_1 + 2M_{f_1}M_{\bar{f}_2}(1 - x_1) + M_{\bar{f}_2}^2(x_1 - 2) \\
 \mathcal{B}_2 &= M_{f_1} + M_{\bar{f}_2} \\
 \mathcal{B}_3 &= x_1Q^2M_{\bar{f}_2}(2x_1x_2^2 - 2x_1x_2 + x_1 - 1) - x_1Q^2M_{f_1} + 2M_{f_1}^2M_{\bar{f}_2} + 2m^2M_{\bar{f}_2}(x_1 - 1)^2 \\
 &\quad - 4m^2M_{f_1}x_1(x_1 - 1) \\
 \mathcal{B}_4 &= m^2(3x_1 - 2) + x_1Q^2 \\
 \mathcal{B}_5 &= 2x_1m^4(x_1 - 1)^2 + 2x_1^2m^2Q^2(3x_1x_2^2 - 3x_1x_2 + x_1 - 2x_2^2 + 2x_2 - 1) + 2x_1m^2M_{f_1}^2 \\
 &\quad - 2M_{f_1}M_{\bar{f}_2}[2(x_1 - 1)m^2 + x_1Q^2] \\
 \omega_1 &= M_{f_1}^2 + Q^2x(1 - x) \\
 \omega_2 &= M_{\bar{f}_2}^2 + Q^2x_1^2x_2(1 - x_2) + m^2x_1(x_1 - 1)
 \end{aligned} \tag{5.31}$$

Entonces, ya tenemos todo listo para calcular los factores de forma elásticos para la primera excitación radial del pión y del kaón.

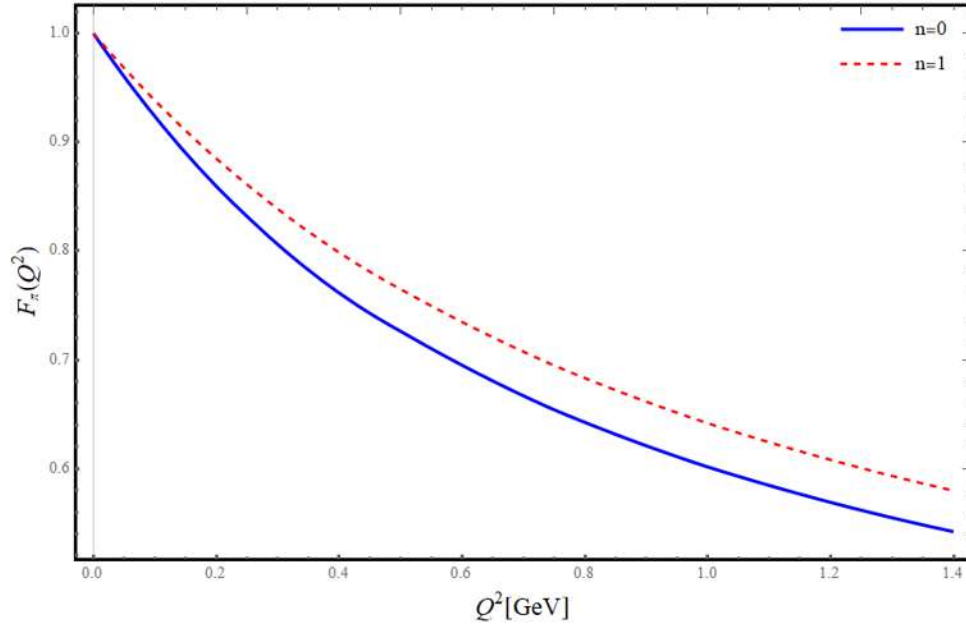


Figura 5.2: Factor de forma de elástico de la primera excitación radial y el del estado base del pión en una interacción de contacto.

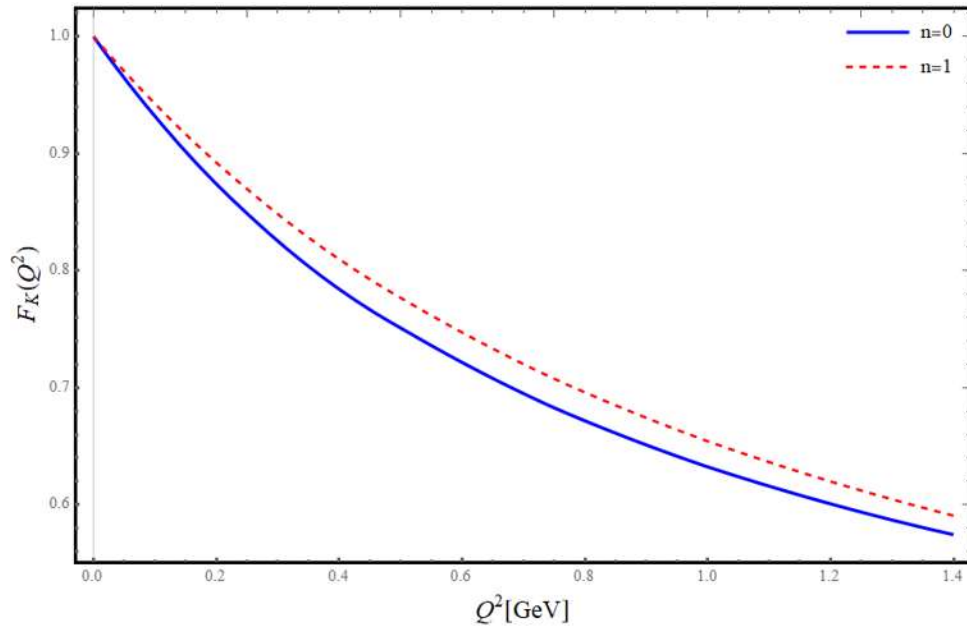


Figura 5.3: Factor de forma de elástico de la primera excitación radial y el del estado base del kaón en una interacción de contacto.

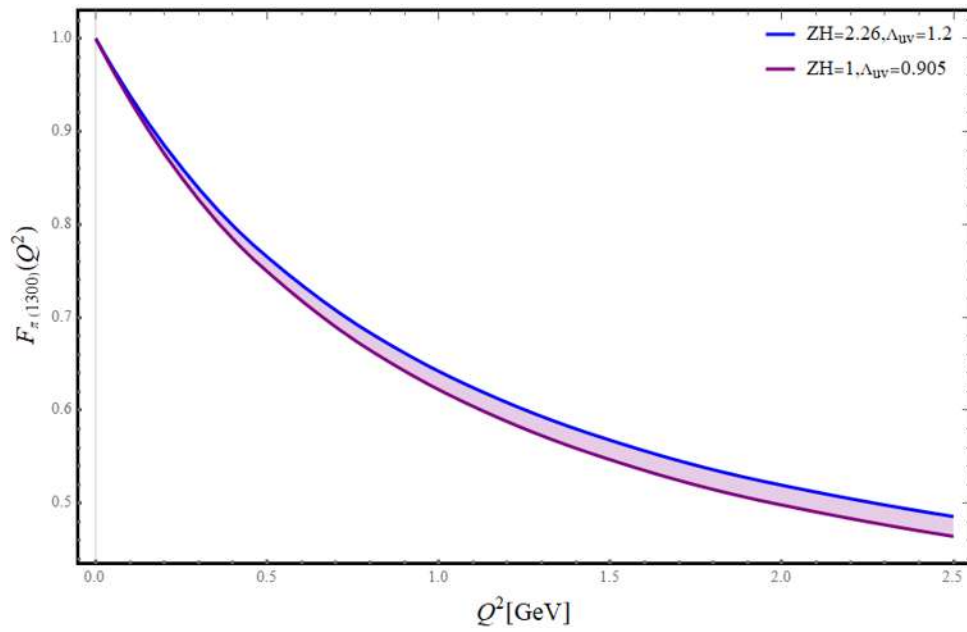


Figura 5.4: Factor de forma elástico del pión para la primera excitación radial en una interacción de contacto.

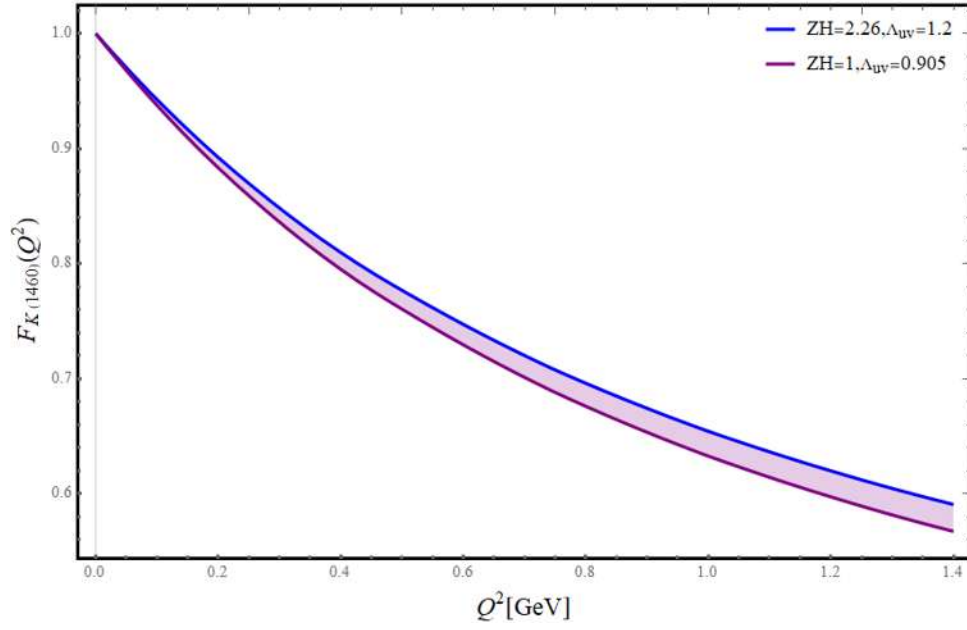


Figura 5.5: Factor de forma elástico del kaón para la primera excitación radial en una interacción de contacto.

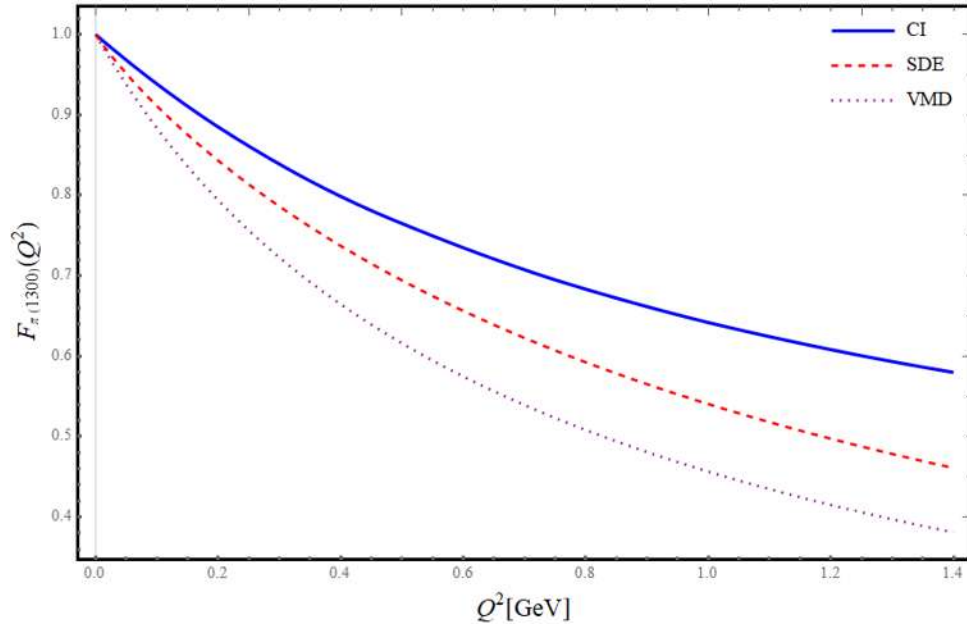


Figura 5.6: Factor de forma elástico para la primera excitación radial del pión, la curva azul solida es el resultado de utilizar una interacción de contacto, la curva discontinua en rojo son resultados del trabajo [99] y la curva punteada negra es resultado del modelo Vector Meson Dominance, el cual también viene dado en [99].

Ahora, si bien sabemos que los resultados obtenidos utilizando el modelo de interacción de contacto para los factores de forma se desvían mas de lo deseado de los valores experimentales tal como se ha visto en los trabajos [1, 34, 83] si nos pueden brindar un vistazo al comportamiento cualitativo que deberían tener. De los trabajos [94, 99] podemos ver que el radio de carga de carga para la primera excitación radial del pión es aproximadamente 14 % mas pequeño respecto al del estado base. En este trabajo, hemos obtenido un comportamiento cualitativamente similar en los factores de forma así como en los radios de cargas. Los radios de carga, los cuales podemos calcular a partir de la expresión:

$$r_M^2 = -6 \frac{dF(Q^2)}{dQ^2} \bigg|_{Q^2=0} \quad (5.32)$$

están listados en la siguiente tabla: De estos resultados encontramos que los radios de

Mesón	CI	SDE [99]
$\pi(1300)$	0.39	$0.583 \pm 0.010$
$K(1460)$	0.37	-

Tabla 5.4: Radios de carga de la primera excitación radial del pión y kaón obtenidos a partir del modelo de interacción de contacto (CI) y usando un formalismo mas refinado de la ecuación de Schwinger-Dyson (SDE).

carga para la primera excitación radial del pión y del kaón son aproximadamente un 14 % mas pequeños respecto de los del estado base, una relación similar a la encontrada en [99]. Obteniendo las siguientes razones:

$$\frac{r_{\pi(1300)}}{r_{\pi}} \approx 0.89 ; \quad \frac{r_{K(1460)}}{r_K} \approx 0.88 \quad (5.33)$$

### 5.1.4 Factor de forma de transición $\gamma^* \gamma \rightarrow \pi^{0*}$

El factor de forma de transición para la primera excitación radial esta dado por:

$$G_{\gamma^* \gamma \pi^*}(Q^2, 0) = G_E^*(Q^2, 0) + G_F^*(Q^2, 0) \quad (5.34)$$

En donde:

$$\begin{aligned} G_E^*(Q^2, 0) &= \frac{E_{H1}^C M f_{\pi}^*}{2\alpha_{em} \pi} \int_0^1 x_1 dx_1 dx_2 \frac{\mathcal{F}_2(\mu_3^2)}{\mu_3^2} \\ G_F^*(Q^2, 0) &= \frac{-f_{\pi}^* F_{H1}^C}{4\alpha_{em} M \pi} \int_0^1 x_1 dx_1 dx_2 \left[ (3x_1 - 2) \frac{\mathcal{F}_1(\mu_3^2)}{\mu_3^2} + \mathcal{X} \frac{\mathcal{F}_2(\mu_3^2)}{\mu_3^2} \right] \end{aligned} \quad (5.35)$$

En donde definimos:

$$\begin{aligned} \mathcal{X} &= -M^2(x_1 + 2) - x_1 x_2 Q^2 [(9 - 5x_1)x_1 - 4] - m^2 x_1^2 x_2 (5x_1 - 6)(x_2 - 1) \\ \mu_3^2 &= -x_1 [-Q^2 x_2 (1 - x_1) + m_H^2 x_1 x_2 (1 - x_2)] + M^2 \end{aligned} \quad (5.36)$$

Graficando estas expresiones y comparándolo con los obtenidos para el estado base obtenemos la gráfica (5.7).

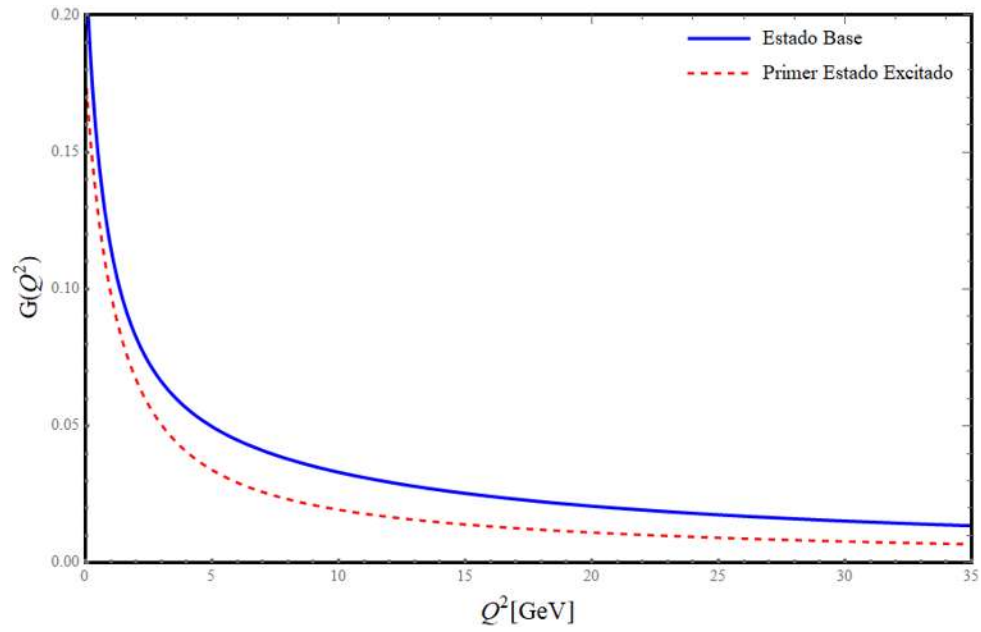


Figura 5.7: Comparación entre el factor de forma de transición de la primera excitación radial y el del estado base.

---

# Capítulo 6

## Contribución del P-box al momento anómalo magnético del muón

---

El modelo estándar ha resultado ser una teoría bastante exitosa debido a la constante confirmación con resultados experimentales. Sin embargo, ciertos observables, los cuales requieren una mayor precisión para su medición nos dan el indicio de que tal vez nuestra teoría aun no este completa, tal es el caso del momento anómalo magnético del muón,  $a_\mu := (g_\mu - 2)/2$ . Históricamente ha habido una diferencia significativa entre las mediciones experimentales y los valores teóricos de  $a_\mu$ , la cual fue reavivada después de la reciente (primera) medición experimental del muón ( $g - 2$ ) en Fermilab (FNAL) [87]:

$$a_\mu^{FNAL} = 116592040(54) \times 10^{-11} \quad (6.1)$$

La cual en combinación con las mediciones anteriores realizadas en Brookhaven National Laboratory (BNL) [88] dan un valor experimental promedio:

$$a_\mu^{Exp} = 116592061(41) \times 10^{-11} \quad (6.2)$$

El cual ha alcanzado una increíble precisión de 0.35 partes por millón. Por otro lado, el resultado obtenido a través de la teoría del modelo estándar (SM) es [89]:

$$a_\mu^{SM} = 116591810(43) \times 10^{-11} \quad (6.3)$$

El cual tiene una precisión comparable a la de la parte experimental. Sin embargo,  $a_\mu^{SM}$  se desvía  $4.2\sigma$  de  $a_\mu^{Exp}$ . Esta diferencia emociona a aquellos que buscan explicaciones basadas en nueva física. Se espera que a medida que se obtengan nuevos resultados

experimentales esta incertidumbre disminuya. Cabe mencionar que en estudios recientes [100] de lattice QCD en el cual calculan la contribución del “Hadronic Vacuum Polarization” con una mayor precisión han logrado reducir las incertidumbres en un 40 % logrando reducir de esta forma la desviación estándar a solo  $0.9\sigma$ , aunque aun faltan mas investigaciones para poder corroborar estos nuevos resultados. Por otro lado, debemos asegurar que todas las contribuciones del  $a_\mu$  obtenidas a través del modelo estándar sean incluidas y calculadas cuidadosamente. Dichas contribuciones son divididas en aquellas que vienen a partir de la electrodinámica cuántica (QED), la electrodébil (EW) y las contribuciones hadronicas (QCD) las cuales se podrían dividir en hadronic vacuum polarization (HVP) y hadronic light-by-light (HLbL). La contribución que viene dada por la QED (calculada hasta 5-loops) es la dominante [90] en donde se han calculado hasta 13643 diagramas:

$$a_\mu^{QED} = 116584718.931(104) \times 10^{-11} \quad (6.4)$$

La contribución electrodébil (calculada hasta 2-loops) es la subdominante y de igual forma esta bien determinada [91, 92]:

$$a_\mu^{EW} = 153.6(1) \times 10^{-11} \quad (6.5)$$

En el trabajo [101] explican que debido a una cancelación entre los términos de la corrección al tercer loop debido a una selección para la parametrización de la corrección del segundo loop estas resultan ser numéricamente despreciables. Por otro lado, las contribuciones hadronicas saturan el error en la predicción del SM [89, 93]:

$$a_\mu^{QCD} = a_\mu^{HVP} + a_\mu^{HLbL} \quad (6.6)$$

En donde la contribución de  $a_\mu^{HVP}$  es la dominante [89]:

$$a_\mu^{HVP} = 6845(40) \times 10^{-11} \quad (6.7)$$

Por otra parte, la contribución  $a_\mu^{HLbL}$  viene dada por [89]:

$$\begin{aligned} a_\mu^{HLbL} &= a_\mu^{\pi+\eta+\eta'-pole} + a_\mu^{\pi-box} + a_\mu^{K-box} + a_\mu^{\pi\pi} + \dots \\ a_\mu^{\pi+\eta+\eta'-pole} &= 93.8_{-3.6}^{+4.0} \times 10^{-11} \\ a_\mu^{\pi-box} &= -15.9(2) \times 10^{-11} \\ a_\mu^{K-box} &= -0.5(1) \times 10^{-11} \\ a_\mu^{HLbL} &= 92(18) \times 10^{-11} \end{aligned} \quad (6.8)$$

Debido a la naturaleza no perturbativa de la QCD a menudo se presentan dificultades no presentes en las partes de la QED y la EW, por lo que estas contribuciones requieren de una mayor atención. Es por esta razón que para poder evaluar las contribuciones hadronicas debemos recurrir a análisis de data, teorías efectivas y lattice QCD [94–96]. Sin embargo utilizando el formalismo de las ecuaciones de Dyson Schwinger no

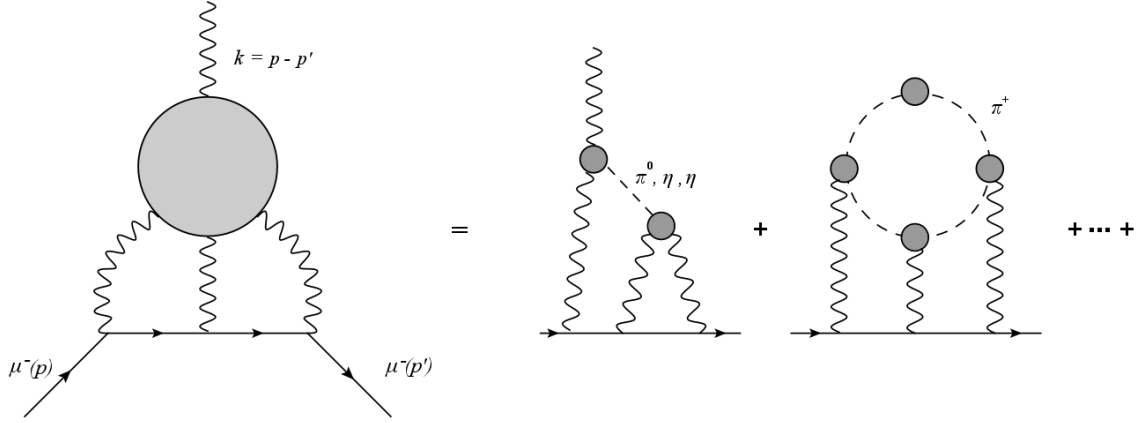


Figura 6.1: Contribución Hadronic light by light.

necesitamos inputs de data experimental ni el poder computacional que requiere lattice QCD. En este trabajo nos concentraremos en la contribución (HLbL) de  $a_\mu$ , de manera mas especifica, en la contribución de la **P**-box en donde  $\mathbf{P} = \pi^+, K^\pm, \pi(1300), K(1460)$  y denotaremos como  $a_\mu^{\mathbf{P}-box}$ . Este fenómeno ya ha sido estudiado en este formalismo como en los trabajos [94, 96] pero nuestro objetivo principal en este trabajo es estudiarlo utilizando el modelo de interacción de contacto (CI), en el cual como se ha demostrado en diversos trabajos [1, 42, 43, 47] es un modelo muy versátil pero tiene sus limitantes pero sin duda es interesante saber cual será el grado de precisión que se obtendrá utilizándolo para hacer estos cálculos ya que la mayor contribución de la (HLbL) viene dada por el sector infrarrojo, es decir a bajas energías. Para calcular la contribución del **P**-box utilizaremos la formula conocida como “The master formula” la cual es derivada en el trabajo [97]:

$$a_\mu^{\mathbf{P}-box} = \frac{\alpha_{em}^3}{432\pi^2} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{12} T_i(Q_1, Q_2, \tau) \bar{\Pi}_i^{\mathbf{P}-box}(Q_1, Q_2, \tau) \quad (6.9)$$

donde  $\alpha_{em} = 1/137$  es la constante de acoplamiento de QED y  $\int_{\Omega}$  denota una integración sobre el momento del fotón  $Q_{1,2}$  y su angulo relativo  $\tau$ . Además,  $Q_3^2 = Q_1^2 + Q_2^2 + 2|Q_1||Q_2|\tau$  y las funciones  $\bar{\Pi}_i^{\mathbf{P}-box}$  están dadas por:

$$\bar{\Pi}_i^{\mathbf{P}-box}(Q_1^2, Q_2^2, Q_3^2) = F_P(Q_1^2)F_P(Q_2^2)F_P(Q_3^2) \left( \frac{1}{16\pi^2} \right) \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy I_i(x, y) \quad (6.10)$$

las funciones escalares  $T_i$  y  $I_i$  están dadas en los apéndices G y H respectivamente. Entonces el único ingrediente faltante son los factores de forma electromagnéticos  $F_P(Q^2)$  los cuales ya hemos calculado en el capítulo 3 y capítulo 5, a los cuales podemos caracterizar con la siguiente forma funcional:

$$F_P(Q^2) = \frac{e_M + a_{PS}Q^2 + b_{PS}Q^4}{1 + c_{PS}Q^2 + d_{PS}Q^4} \quad (6.11)$$



En donde  $e_M$  es la carga eléctrica del mesón en cuestión y  $a_{PS}$ ,  $b_{PS}$ ,  $c_{PS}$  y  $d_{PS}$  son los parámetros ajustados del fit.

Mesón	$a_{PS}$	$b_{PS}$	$c_{PS}$	$d_{PS}$
$\pi$	0.326	0.032	1.178	0.077
$K$	0.339	0.014	1.136	0.024
$\pi(1300)$	0.501	0.110	1.172	0.339
$K(1460)$	0.597	0.116	1.216	0.402

Tabla 6.1: Parámetros para el fit de la ecuación (6.11).

La ecuación (6.10) puede escribirse como:

$$a_{\mu}^{\mathbf{P}-box} = \frac{\alpha_{em}^3}{432\pi^2} \int_0^\infty d\Sigma \Sigma^3 \int_0^1 dr r \sqrt{1-r^2} \int_0^{2\pi} d\phi \sum_{i=1}^{12} T_i(Q_1, Q_2, \tau) \bar{\Pi}_i^{\mathbf{P}-box}(Q_1, Q_2, \tau) \quad (6.12)$$

en donde  $Q_1$ ,  $Q_2$  y  $\tau$  son funciones de  $(\Sigma, r, \phi)$  :

$$\begin{aligned} Q_1^2(\Sigma, r, \phi) &= \frac{\Sigma}{3} \left( 1 - \frac{r}{2} \cos\phi - \frac{r}{2} \sqrt{3} \sin\phi \right) \\ Q_2^2(\Sigma, r, \phi) &= \frac{\Sigma}{3} \left( 1 - \frac{r}{2} \cos\phi + \frac{r}{2} \sqrt{3} \sin\phi \right) \\ Q_3^2(\Sigma, r, \phi) &= Q_1^2 + 2Q_1 Q_2 \tau + Q_2^2 = \frac{\Sigma}{3} (1 + r \cos\phi) \end{aligned} \quad (6.13)$$

En los trabajos [94, 99] utilizando un formalismo mas refinado obtienen:

$$\begin{aligned} a_{\mu}^{\pi-box-SDE} &= -(15.6 \pm 0.3) \times 10^{-11} \\ a_{\mu}^{\pi(1300)-box-SDE} &= -(2.02 \pm 0.11) \times 10^{-13} \\ a_{\mu}^{K-box-SDE} &= -(0.48 \pm 0.03) \times 10^{-11} \\ a_{\mu}^{K(1460)-box-SDE} &= -1.38 \times 10^{-13} \end{aligned} \quad (6.14)$$

En ese mismo trabajo también dan los resultados de esta contribución utilizando el Vector Meson Dominance (VMD):

$$\begin{aligned} a_{\mu}^{\pi-box-VMD} &= -16.4 \times 10^{-11} \\ a_{\mu}^{\pi(1300)-box-VMD} &= -(1.85 \pm 0.06) \times 10^{-13} \\ a_{\mu}^{K-box-VMD} &= -0.5 \times 10^{-11} \\ a_{\mu}^{K(1460)-box-VMD} &= -1.08 \times 10^{-13} \end{aligned} \quad (6.15)$$

Para calcular las integrales en (6.12) hemos utilizado la librería CUBA [102]. Utilizando

el modelo interacción de contacto obtenemos:

$$\begin{aligned}
 a_{\mu}^{\pi-box-CI} &= -23.1 \times 10^{-11} \\
 a_{\mu}^{\pi(1300)-box-CI} &= -3.74 \times 10^{-13} \\
 a_{\mu}^{K-box-CI} &= -0.989 \times 10^{-11} \\
 a_{\mu}^{K(1460)-box-CI} &= -2.35 \times 10^{-13}
 \end{aligned} \tag{6.16}$$

De aquí vemos que la diferencia porcentual entre los resultados encontrados en los trabajos [94, 98] y los obtenidos utilizando una interacción de contacto son de aproximadamente 65 %. Sin embargo, las razones entre la contribución dada por los estados excitados y las dadas por los estados bases tienen una diferencia de aproximadamente 20 % (al menos para los dados por el pión):

$$\frac{a_{\mu}^{\pi(1300)-box-CI}}{a_{\mu}^{\pi-box-CI}} \approx 1.62 \times 10^{-3} ; \quad \frac{a_{\mu}^{K(1460)-box-CI}}{a_{\mu}^{K-box-CI}} \approx 0.024 \tag{6.17}$$

---

# Capítulo 7

## Conclusiones y comentarios finales

---

En este trabajo hemos visto que aunque el modelo de interacción de contacto tiene sus limitaciones, las cuales se deben a tomar al propagador del gluón como constante, lo que da como resultado una función de masa vestida independiente del momento en contraste con otros modelos mas refinados tales como Lattice QCD, modelos de constante de acoplamiento efectiva como Maris-Tandy entre otros. A pesar de dichas limitaciones la simpleza de este modelo nos permite estudiar fenómenos bastante complejos y describirlos de manera cualitativa, ademas sabemos que este modelo es muy bueno para calcular observables los cuales no dependen de escalas de energía muy altas como el rompimiento espontaneo de simetría quiral tal como se ha visto en los trabajos [42, 47].

Se esperaba gracias a los resultados de los trabajos [1, 32, 82] que los factores de forma electromagnéticos obtenidos a través del modelo interacción de contacto fuesen mas duros y que el radio de carga se desvíe alrededor de un (20 – 25) % en comparación con estudios mas refinados o resultados experimentales.

A pesar de esto podemos describir el comportamiento cualitativo de dicho fenómeno. Ademas, hemos calculado los factores de forma elásticos de la primera excitación radial del pión y del kaón ( $\pi(1300)$ ,  $K(1460)$ ) en una interacción de contacto, siendo este un resultado no publicado antes. Para lo cual hemos realizado una nueva elección en los parámetros obteniendo con estos una razón entre los radios de carga de la primera excitación radial y el estado base similar a la encontrada con modelos mas sofisticados ademas de que el error en la masa para la primera excitación radial solo aumentó alrededor de un 4 %.

Para finalmente calcular la contribución del **P**-box al momento anómalo del muón donde ( $\mathbf{P} = \pi, K, \pi(1300), K(1460)$ ) en una interacción de contacto siendo este un resultado no publicado antes. Cerca del 90 % de dicha contribución ocurre en el régimen de 0 a 1 GeV tal como se explica en el trabajo [97], es por esta razón que se esperaba que el error no creciera mucho ya que el único ingrediente necesario para realizar este calculo son los factores de forma electromagnéticos y estos tienen un error relativo de alrededor de un (20 – 25) % respecto del valor experimental. Nosotros esperábamos una diferencia porcentual del mismo orden pero tal como lo vimos en el capítulo 6 la diferencia porcentual aumento bastante, alrededor de un 65 %. Aunque cabe mencionar que las razones entre la contribución dada por la primera excitación radial y el estado base (al menos para el pión) si muestran un comportamiento mucho mas parecido al obtenido utilizando modelos mas sofisticados. Tomando en cuenta todos los resultados podemos tener una mejor idea del alcance del modelo de interacción de contacto.

Recapitulando, en este trabajo hemos calculado lo siguiente:

- Los factores de forma elásticos para los mesones pseudoescalares del estado base.
- El factor de forma de transición  $\gamma\gamma^* \rightarrow \pi^0$ .
- El factor de forma elástico de la primera excitación radial del pión y del kaon.
- La contribución del *P – box* al momento anómalo del muón de las partículas ( $\pi, \pi(1300), K, K(1460)$ ).

---

# A

---

## Apéndice

---

### SECCIÓN A.1

#### Convención Euclidiana

La mayoría de los cálculos en una teoría cuántica de campos no perturbativa se realizan en la métrica Euclidiana ( $a \cdot b = a_\mu \delta_{\mu\nu} b_\nu$ ). A partir de los tetra vectores en el espacio de Minkowski se obtiene el espacio Euclidiano mediante la continuación analítica al tiempo imaginario. Para transformar los vectores espacio-tiempo y energía-momento tenemos:

$$\begin{aligned} t^E &= it^M \\ \vec{x}^E &= i\vec{x}^M \end{aligned} \tag{A.1}$$

$$\begin{aligned} \epsilon^E &= i\epsilon^M \\ \vec{p}^E &= \vec{p}^M \end{aligned} \tag{A.2}$$

Los índices E y M denotan Euclidiano y Minkowski respectivamente. Las matrices gamma son de la forma:

$$\begin{aligned} \gamma^{0E} &= \gamma^{0M} \\ \vec{\gamma}^E &= -i\vec{\gamma}^M \end{aligned} \tag{A.3}$$

La métrica es de la forma:

$$g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} \tag{A.4}$$

También se tienen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}\int d^4k^M &= -i \int d^4k^E \\ \gamma^M \cdot p^M &= -i \gamma^E \cdot p^E \\ q^M \cdot p^M &= -i q^E \cdot p^E \\ x^M \cdot p^M &= -x^E \cdot p^E\end{aligned}\tag{A.5}$$

---

# B

---

## Gammas

---

Las matrices gamma Euclidianas tienen las siguientes propiedades. La propiedad que hace que las matrices gamma generen un álgebra de Clifford es la relación de anticonmutación:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\delta^{\mu\nu} I \quad (\text{B.1})$$

donde  $I$  es la matriz identidad de dimension  $d \times d$  y  $g^{\mu\nu}$  es el tensor métrico (para la métrica Euclidianas  $g^{\mu\nu} = \delta^{\mu\nu}$ ). En 4 dimensiones ( $d = 4$ ) podemos definir  $\gamma^5 \equiv \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$ , que cumple con las propiedades:

$$\begin{aligned} (\gamma^5)^\dagger &= \gamma^5 \\ (\gamma^5)^2 &= I \\ \{\gamma^5, \gamma^\mu\} &= \gamma^5 \gamma^\mu + \gamma^\mu \gamma^5 = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Las matrices cumplen las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} \gamma^\mu \gamma_\mu &= 4I \\ \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu &= -2\gamma^\nu \\ \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\mu &= 4\delta^{\nu\rho} I \\ \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\mu &= -2\gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu \\ \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho &= \delta^{\mu\nu} \gamma^\rho + \delta^{\nu\rho} \gamma^\mu - \delta^{\mu\rho} \gamma^\nu - i\epsilon^{\sigma\mu\nu\rho} \gamma_\sigma \gamma^5 \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

---

# C

---

## Trazas

---

Propiedades de la traza:

$$\begin{aligned}Tr[A + B] &= Tr[A] + Tr[B] \\Tr[rA] &= rTr[A] \\Tr[ABC] &= Tr[CAB] = Tr[BCA]\end{aligned}\tag{C.1}$$

Las matrices gamma cumplen con las siguientes propiedades de la traza:

$$\begin{aligned}Tr[\gamma^\mu] &= 0 \\Tr[No. \text{ impar de } \gamma's] &= 0 \\Tr[\gamma^\mu \gamma^\nu] &= 4\delta^{\mu\nu} \\Tr[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma] &= 4(\delta^{\mu\nu} \delta^{\rho\sigma} - \delta^{\mu\rho} \delta^{\nu\sigma} + \delta^{\mu\sigma} \delta^{\nu\rho}) \\Tr[\gamma^5] &= Tr[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5] = 0 \\Tr[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^5] &= 4i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \\Tr[\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_n}] &= Tr[\gamma^{\mu_n} \dots \gamma^{\mu_1}] \\\epsilon^{1234} &= 1\end{aligned}\tag{C.2}$$



---

# D

## Hermiticidad

---

Podemos escoger la forma de las matrices gamma para que cumplan con condiciones de hermiticidad, se impone que:

$$\gamma^{0\dagger} = \gamma^0 \quad (\text{D.1})$$

que cumple con  $(\gamma^0)^2 = I$ . Para el resto de matrices  $k = 1, 2, 3$

$$(\gamma^k)^2 = -I \quad (\text{D.2})$$

En general:

$$(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \quad (\text{D.3})$$

---

## Notación Slash de Feynman

---

La notación slash de Feynman esta definida por:

$$\not{a} := \gamma^\mu a_\mu \quad (\text{E.1})$$

Para cualquier tetravector  $a$  se cumplen las siguientes identidades:

$$\begin{aligned} \not{a}\not{b} &= a \cdot b - ia_\mu \sigma^{\mu\nu} b_\nu \\ \not{a}\not{a} &= a^\mu a^\nu \gamma_\mu \gamma_\nu - \frac{1}{2} a^\mu a^\nu (\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu) = \delta_{\mu\nu} a^\mu a^\nu = a^2 \\ \text{Tr}[\not{a}\not{b}] &= 4(a \cdot b) \\ \text{Tr}[\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}] &= 4[(a \cdot b)(c \cdot d) - (a \cdot c)(b \cdot d) + (a \cdot d)(b \cdot c)] \\ \text{Tr}[\gamma_5 \not{a}\not{b}\not{c}\not{d}] &= -4i\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} a^\mu b^\nu c^\rho d^\sigma \\ \gamma_\mu \not{a} \gamma^\mu &= -2\not{a} \\ \gamma_\mu \not{a}\not{b} \gamma^\mu &= 4a \cdot b \\ \gamma_\mu \not{a}\not{b}\not{c} \gamma^\mu &= -2\not{c}\not{b}\not{a} \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

---

# F

---

## Parametrización de Feynman

---

La parametrización de Feynman es un método de integración, el cual consiste en reducir integrales que contienen mas de un factor en el denominador a una integral que sola tenga un solo factor elevados a una potencia determinada. Comenzamos con:

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{A-B} \left( \frac{1}{B} - \frac{1}{A} \right) = \frac{1}{A-B} \int_B^A \frac{dz}{z^2} \quad (\text{F.1})$$

Usando el cambio de variable  $u = \frac{z-B}{A-B} \Rightarrow du = \frac{1}{A-B} dz$ , donde  $z \in [B, A] \Rightarrow u \in [0, 1]$ , entonces:

$$\frac{1}{A-B} \int_B^A \frac{dz}{z^2} = \int_0^1 \frac{du}{[uA + (1-u)B]^2} \quad (\text{F.2})$$

Entonces:

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 \frac{du}{[uA + (1-u)B]^2} \quad (\text{F.3})$$

esta ecuación puede reescribirse usando la delta de Dirac como:

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 du \int_0^1 dv \frac{\delta(1-u-v)}{[uA + vB]^2} \quad (\text{F.4})$$

De manera análoga podemos encontrar la parametrización de Feynman para tres denominadores:

$$\begin{aligned} \frac{1}{ABC} &= \frac{1}{C-B} \left( \frac{1}{AB} - \frac{1}{AC} \right) \\ &= \frac{1}{C-B} \left\{ \int_0^1 \frac{du}{[uA + (1-u)B]^2} - \int_0^1 \frac{du}{[uA + (1-u)C]^2} \right\} \\ &= \frac{1}{C-B} \int_0^1 \frac{du}{[uA + (1-u)x]^2} \Big|_{x=C}^{x=B} \end{aligned} \quad (\text{F.5})$$

Ahora bien, tenemos que expresar el integrando de la ecuación anterior de la siguiente forma:

$$\int_C^B f(x)dx = \frac{1}{[uA + (1-u)x]^2} \Big|_{x=C}^{x=B} \quad (\text{F.6})$$

Por lo tanto:

$$f(x) = \frac{d}{dx} \left\{ \frac{1}{[uA + (1-u)x]^2} \right\} = \frac{-2(1-u)}{[uA + (1-u)x]^3} \quad (\text{F.7})$$

De esta manera usando el cambio de variable:

$$v = (1-u) \frac{(x-C)}{(B-C)} \Rightarrow dv = \frac{1}{B-C} (1-u) dx \quad (\text{F.8})$$

Obtenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{[uA + (1-u)x]^2} \Big|_{x=C}^{x=B} &= \int_C^B \frac{-2(1-u)dx}{[uA + (1-u)x]^3} \\ &= 2(C-B) \int_0^{1-u} \frac{dv}{[uA + vB + (1-u-v)C]^3} \end{aligned} \quad (\text{F.9})$$

sustituyendo este resultado en la ecuación (F.5) obtenemos que:

$$\frac{1}{ABC} = 2 \int_0^1 du \int_0^{1-u} \frac{dv}{[uA + vB + (1-u-v)C]^3} \quad (\text{F.10})$$

Expresándolo con la delta de Dirac:

$$\frac{1}{ABC} = \int_0^1 du \int_0^1 dv \int_0^1 dw \frac{\delta(1-u-v-w)}{[uA + vBwC]^3} \quad (\text{F.11})$$

De manera similar a esto podemos encontrar la parametrización de Feynman para cuatro denominadores y así sucesivamente de manera que la parametrización para  $n$  denominadores no repetidos sería:

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_1 \cdots A_n} &= (n-1)! \int_0^1 du_1 \int_0^{1-u_1} du_2 \cdots \int_0^{1-\sum_{k=1}^{n-2} u_k} du_{n-1} \\ &\quad \times \frac{1}{[u_1 A_1 + \cdots + u_{n-1} A_{n-1} + (1 - \sum_{k=1}^{n-1} u_k) A_n]^n} \end{aligned} \quad (\text{F.12})$$

Y usando la delta de Dirac:

$$\frac{1}{A_1 \cdots A_n} = \int_0^1 du_1 \cdots \int_0^1 du_n \frac{\delta(1 - \sum_{k=1}^n u_k)}{(\sum_{k=1}^n u_k A_k)^n} \quad (\text{F.13})$$

Ahora, notemos que también podemos obtener una expresión para denominadores con exponentes, primero veamos que:

$$\frac{1}{A^\nu} = -\frac{(-1)^\nu}{\Gamma(\nu)} \frac{d^{\nu-1}}{dA^{\nu-1}} \left[ \frac{1}{A} \right] \quad (\text{F.14})$$

Lo que en una parametrización de Feynman implica que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{A^\nu BC} &= -\frac{(-1)^\nu}{\Gamma(\nu)} \frac{d^{\nu-1}}{dA^{\nu-1}} \left[ \frac{1}{ABC} \right] \\ &= -2 \frac{(-1)^\nu}{\Gamma(\nu)} \int_0^x du \int_0^{1-u} dv \frac{1}{[uA + vB + (1-u-v)C]^3} \end{aligned} \quad (\text{F.15})$$

Por otra parte, es fácil mostrar que:

$$\frac{d^\alpha}{dA^\alpha} \frac{1}{[uA + \cdots]^\beta} = (-1)^\alpha \frac{\Gamma(\alpha\beta)}{\Gamma(\beta)} [uA + \cdots]^{-(\alpha+\beta)} u^\alpha \quad (\text{F.16})$$

Entonces, para  $\alpha = \nu - 1$  y  $\beta = 3$  se tiene:

$$\frac{1}{A^\nu BC} = \frac{\Gamma(\nu+2)}{\Gamma(\nu)} \int_0^1 du \int_0^1 dv \frac{u^{\nu-1}}{[uA + vB + (1-u-v)C]^{\nu+2}} \quad (\text{F.17})$$

Siguiendo el mismo análisis podemos obtener la parametrización de Feynman para dos denominadores con exponentes:

$$\begin{aligned} \frac{1}{A^\nu B^\nu} &= \frac{(-1)^{2\nu}}{\Gamma^2(\nu)} \frac{d^{\nu-1}}{dA^{\nu-1}} \frac{d^{\nu-1}}{dB^{\nu-1}} \left[ \frac{1}{AB} \right] \\ &= \frac{1}{\Gamma^2(\nu)} \int_0^1 du \frac{d^{\nu-1}}{dA^{\nu-1}} \frac{d^{\nu-1}}{dB^{\nu-1}} \frac{1}{[uA + (1-u)B]^{2\nu}} \end{aligned} \quad (\text{F.18})$$

Y utilizando la ecuación (F.16) llegamos a:

$$\frac{1}{A^\nu B^\nu} = \frac{\Gamma(2\nu)}{\Gamma^2(\nu)} \int_0^1 du \frac{u^{\nu-1}(1-u)^{\nu-1}}{[uA + (1-u)B]^{2\nu}} \quad (\text{F.19})$$

---

# G

## Nuevas Funciones del Kernel para la formula maestra

---

Estas funciones vienen dadas en el trabajo [97].

$$T_1 = \frac{Q_1^2 \tau (\sigma_1^E - 1) (\sigma_1^E + 5) + Q_2^2 \tau (\sigma_2^E - 1) (\sigma_1^E + 5) + 4Q_1 Q_2 (\sigma_1^E + \sigma_2^E - 2) - 8\tau m_\mu^2}{2Q_1 Q_2 Q_3^2 m_\mu^2} + X \left( \frac{8(\tau^2 - 1)}{Q_3^2} - \frac{4}{m_\mu^2} \right) \quad (\text{G.1})$$

$$T_2 = \frac{Q_1 (\sigma_1^E - 1) (Q_1 \tau (\sigma_1^E + 1) + 4Q_2 (\tau^2 - 1)) - 4\tau m_\mu^2}{Q_1 Q_2 Q_3^2 m_\mu^2} + X \frac{8(\tau^2 - 1) (2m_\mu^2 - Q_2^2)}{Q_3^2 m_\mu^2} \quad (\text{G.2})$$

$$T_3 = \frac{1}{Q_3^2} \left( -\frac{2(\sigma_1^E + \sigma_2^E - 2)}{m_\mu^2} - \frac{Q_1 \tau (\sigma_1^E - 1) (\sigma_1^E + 7)}{2Q_2 m_\mu^2} + \frac{8\tau}{Q_1 Q_2} - \frac{Q_2 \tau (\sigma_2^E - 1) (\sigma_2^E + 7)}{2Q_1 m_\mu^2} \right. \\ \left. + \frac{Q_1^2 (1 - \sigma_1^E)}{Q_2^2 m_\mu^2} + \frac{Q_2^2 (1 - \sigma_2^E)}{Q_1^2 m_\mu^2} + \frac{2}{Q_1^2} + \frac{2}{Q_2^2} \right) + X \left( \frac{4}{m_\mu^2} - \frac{8\tau}{Q_1 Q_2} \right) \quad (\text{G.3})$$

$$T_4 = \frac{1}{Q_3^2} \left( \frac{4(\tau^2 (\sigma_1^E - 1) + \sigma_2^E - 1)}{m_\mu^2} - \frac{Q_1 \tau (\sigma_1^E - 5) (\sigma_1^E - 1)}{Q_2 m_\mu^2} + \frac{4\tau}{Q_1 Q_2} - \frac{Q_2 \tau (\sigma_2^E - 3) (\sigma_2^E - 1)}{Q_1 m_\mu^2} \right. \\ \left. + \frac{2Q_2^2 (\sigma_2^E - 1)}{Q_1^2 m_\mu^2} - \frac{4}{Q_1^2} + X \left( -\frac{8Q_2^2 \tau^2}{m_\mu^2} - \frac{16Q_2 Q_1 \tau}{m_\mu^2} - \frac{8Q_1^2}{m_\mu^2} + \frac{16Q_2 \tau}{Q_1} + 16 \right) \right) \quad (\text{G.4})$$

$$\begin{aligned}
T_5 = & \frac{1}{Q_3^2} \left( Q_1^2 \left( \frac{\tau^2(\sigma_1^E - 1)(\sigma_1^E + 3) + 4(\sigma_1^E + \sigma_2^E - 2)}{2m_\mu^2} - \frac{4}{Q_2^2} \right) - \frac{Q_2^2 \tau^2(\sigma_2^E - 5)(\sigma_2^E - 1)}{2m_\mu^2} \right. \\
& + \frac{Q_1^3 \tau(\sigma_1^E - 1)(\sigma_1^E + 5)}{Q_2 m_\mu^2} + Q_1 \left( \frac{Q_2 \tau(\sigma_1^E + 5\sigma_2^E - 6)}{m_\mu^2} - \frac{12\tau}{Q_2} \right) + \frac{2Q_1^4(\sigma_1^E - 1)}{Q_2^2 m_\mu^2} - 4\tau^2 \\
& \left. X \left( Q_1 \left( 8Q_2(\tau^3 + \tau) - \frac{2Q_2^3 \tau}{m_\mu^2} \right) + Q_1^2 \left( 32\tau^2 - \frac{4Q_2^2(\tau^2 + 1)}{m_\mu^2} \right) + Q_1^3 \left( \frac{16\tau}{Q_2} - \frac{10Q_2 \tau}{m_\mu^2} \right) - \frac{4Q_1^4}{m_\mu^2} \right) \right) \\
& \text{(G.5)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_6 = & \frac{1}{Q_3^2} \left( \frac{Q_1^2(\tau^2((\sigma_1^E - 22)\sigma_1^E - 8\sigma_2^E + 29) + 2(-5\sigma_1^E + \sigma_2^E + 4))}{2m_\mu^2} \right. \\
& Q_1 \left( \frac{Q_2 \tau(2\tau^2((\sigma_2^E - 3)^2 - 4\sigma_1^E) - 26\sigma_1^E + \sigma_2^E(\sigma_2^E - 12) + 37)}{2m_\mu^2} - \frac{4\tau}{Q_2} \right) \\
& + \frac{Q_2^2(\tau^2(-8\sigma_1^E + \sigma_2^E(5\sigma_2^E - 26) + 29) - 4(\sigma_1^E + 2\sigma_2^E - 3))}{2m_\mu^2} + \frac{Q_1^3 \tau(\sigma_1^E - 9)(\sigma_1^E - 1)}{2Q_2 m_\mu^2} \\
& + \frac{Q_2^3 \tau(\sigma_2^E - 9)(\sigma_2^E - 1)}{Q_1 m_\mu^2} + \frac{8Q_2 \tau}{Q_1} + \frac{2Q_2^4(1 - \sigma_2^E)}{Q_1^2 m_\mu^2} + \frac{4Q_2^2}{Q_1^2} \\
& + X \left( \frac{Q_2 Q_1^3(8\tau^3 + 22\tau)}{m_\mu^2} + \frac{Q_1^4(8\tau^2 - 2)}{m_\mu^2} + Q_1^2 \left( \frac{Q_2^2(36\tau^2 + 18)}{m_\mu^2} - 8(\tau^2 + 1) \right) \right. \\
& \left. + \frac{Q_2^4(8\tau^2 + 4)}{m_\mu^2} + Q_1 \left( \frac{Q_2^3(8\tau^3 + 34\tau)}{m_\mu^2} - 8Q_2 \tau(\tau^2 + 5) \right) - 16Q_2^2(2\tau^2 + 1) - \frac{16Q_2^3 \tau}{Q_1} \right) \Bigg) \\
& \text{(G.6)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_7 = & \frac{1}{Q_3^2} \left( \frac{Q_1^2(2(\sigma_1^E + \sigma_2^E - 2) - \tau^2((\sigma_1^E + 10)\sigma_1^E + 8\sigma_2^E - 19))}{2m_\mu^2} \right. \\
& + Q_1 \left( \frac{Q_2 \tau(2\tau^2(\sigma_2^E - 5)(\sigma_2^E - 1) - 2\sigma_1^E + \sigma_2^E(\sigma_2^E + 4) - 3)}{2m_\mu^2} - \frac{4\tau}{Q_2} \right) \\
& + \frac{Q_2^2 \tau^2(\sigma_2^E - 5)(\sigma_2^E - 1)}{2m_\mu^2} + \frac{Q_1^3 \tau(\sigma_1^E - 9)(\sigma_1^E - 1)}{2Q_2 m_\mu^2} + 4\tau^2 \\
& + X \left( \frac{Q_2 Q_1^3(8\tau^3 + 6\tau)}{m_\mu^2} + Q_1 \left( \frac{2Q_2^3 \tau}{m_\mu^2} - 8Q_2(\tau^3 + \tau) \right) + \frac{Q_1^4(8\tau^2 - 2)}{m_\mu^2} \right. \\
& \left. + Q_1^2 \left( \frac{2Q_2^2(6\tau^2 - 1)}{m_\mu^2} - 8(\tau^2 + 1) \right) \right) \Bigg) \\
& \text{(G.7)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_8 = & \frac{1}{Q_3^2} \left( Q_1^2 \left( \frac{4}{Q_2^2} - \frac{2(2\tau^2 + 1)(\sigma_1^E + \sigma_2^E - 2)}{m_\mu^2} \right) + Q_1 \left( \frac{4\tau}{Q_2} - \frac{4Q_2 \tau(\tau^2 + 1)(\sigma_2^E - 1)}{m_\mu^2} \right) \right. \\
& - \frac{6Q_1^3 \tau(\sigma_1^E - 1)}{Q_2 m_\mu^2} + \frac{Q_1^4(2 - 2\sigma_1^E)}{Q_2^2 m_\mu^2} \\
& \left. + X \left( \frac{Q_1^4(8\tau^2 + 4)}{m_\mu^2} + Q_1^3 \left( \frac{8Q_2 \tau(\tau^2 + 2)}{m_\mu^2} - \frac{16\tau}{Q_2} \right) + Q_1^2 \left( \frac{Q_2^2(8\tau^2 + 4)}{m_\mu^2} - 16\tau^2 \right) \right) \right) \\
& \text{(G.8)}
\end{aligned}$$

$$T_9 = Q_3^2 \left( \frac{\sigma_1^E - 1}{Q_2^2 m_\mu^2} + \frac{\sigma_2^E - 1}{Q_1^2 m_\mu^2} - \frac{2}{Q_1^2 Q_2^2} \right) + X \left( -\frac{2Q_3^2}{m_\mu^2} + \frac{8Q_2\tau}{Q_1} + \frac{8Q_1\tau}{Q_2} + 8(\tau^2 + 1) \right) \quad (\text{G.9})$$

$$\begin{aligned} T_{10} = & \frac{1}{2Q_3^2} \left( -\frac{Q_1^2(\tau^2(\sigma_1^E - 1)(\sigma_1^E + 3) + 2(\sigma_1^E + \sigma_2^E - 2))}{m_\mu^2} - \frac{Q_2^3\tau(\sigma_2^E - 1)(\sigma_2^E + 3)}{Q_1 m_\mu^2} \right. \\ & - \frac{Q_2^2(\tau^2(\sigma_2^E - 1)(\sigma_2^E + 3) + 2(\sigma_1^E + \sigma_2^E - 2))}{m_\mu^2} - \frac{Q_1^3\tau(\sigma_1^E - 1)(\sigma_1^E + 3)}{Q_2 m_\mu^2} \\ & + Q_1 \left( \frac{8\tau}{Q_2} - \frac{Q_2\tau((\sigma_1^E + 4)\sigma_1^E + \sigma_2^E(\sigma_2^E + 4) - 10)}{m_\mu^2} \right) + \frac{8Q_2\tau}{Q_1} + 8\tau^2 \\ & \left. + X(-16Q_1^2(\tau^2 - 1) - 16Q_2Q_1\tau(\tau^2 - 1) - 16Q_2^2(\tau^2 - 1)) \right) + \frac{X}{2} \left( \frac{4Q_2Q_1\tau}{m_\mu^2} + \frac{4Q_1^2}{m_\mu^2} + \frac{4Q_2^2}{m_\mu^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{G.10})$$

$$\begin{aligned} T_{11} = & \frac{1}{2m_\mu^2 Q_1 Q_2 Q_3^2} \left( Q_2^5\tau(-6\sigma_2^E + (\sigma_2^E)^2 + 5) + 8Q_1^5(-\sigma_1^E + 2Q_2^2(\tau^2 + 1)X + 1) \right. \\ & + 4Q_2Q_1^4\tau(-7\sigma_1^E + 2Q_2^2(2\tau^2 + 9)X + 7) \\ & + 4Q_2^2Q_1^3(2\tau^2(-3\sigma_1^E - \sigma_2^E + 8Q_2^2X + 4) - 2(\sigma_1^E + \sigma_2^E - 2) + 5Q_2^2X) \\ & + Q_2^3Q_1^2\tau(8\tau^2(-\sigma_1^E - \sigma_2^E + 2Q_2^2X + 2) - 6\sigma_1^E - (\sigma_1^E)^2 - 28\sigma_2^E + 16Q_2^2X + 35) \\ & + 2Q_2^4Q_1(\tau^2(-10\sigma_2^E + (\sigma_2^E)^2 + 9) - \sigma_1^E - 3\sigma_2^E + 2Q_2^2X + 4) \\ & - 8m_\mu^2 \left( -Q_2^3\tau + 2Q_1^3(2Q_2^2(4\tau^2X + X) - 1) + Q_2Q_1^2\tau(4Q_2^2(\tau^2 + 3)X - 5) \right. \\ & \left. + Q_2^2Q_1(2\tau^2(Q_2^2X - 1) + 2Q_2^2X - 1) + 8Q_2Q_1^4\tau X \right) \Big) \end{aligned} \quad (\text{G.11})$$

$$\begin{aligned} T_{12} = & \frac{1}{4m_\mu^2 Q_1 Q_2 Q_3^2} \left( Q_2^2\tau(-Q_3^2(\sigma_2^E)^2 + Q_2^2(6\sigma_2^E - 5) - 8m_\mu^2) \right. \\ & - 2Q_2Q_1^3(\tau^2(2\sigma_1^E + 8Xm_\mu^2 - 1) - 3\sigma_1^E + \sigma_2^E + 8Xm_\mu^2 + 2) \\ & + Q_1^2\tau(-2Q_2^2(4\tau^2 - 5)(\sigma_1^E - \sigma_2^E) + Q_3^2(\sigma_1^E)^2 + 8m_\mu^2 + 8Q_2^4(2\tau^2 - 3)X) \\ & + 2Q_2^3Q_1(\tau^2(2\sigma_2^E + 8Xm_\mu^2 - 1) + \sigma_1^E - 3\sigma_2^E + 8Xm_\mu^2 - 2Q_2^2X + 2) \\ & \left. + Q_1^4\tau(-6\sigma_1^E - 8Q_2^2(2\tau^2 - 3)X + 5) + 4Q_2Q_1^5X \right) \end{aligned} \quad (\text{G.12})$$

en donde

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{Q_1 Q_2 x} \arctan \left( \frac{zx}{1 - z\tau} \right), \quad x = \sqrt{1 - \tau^2} \quad \sigma_i^E = \sqrt{1 + \frac{4m_\mu^2}{Q_i^2}} \\ z &= \frac{Q_1 Q_2}{4m_\mu^2} (1 - \sigma_1^E)(1 - \sigma_2^E), \quad Q_3^2 = Q_1^2 + 2Q_1 Q_2 \tau + Q_2^2 \end{aligned} \quad (\text{G.13})$$



---

# H

## Representación de los parámetros de Feynman de la caja del pión

---

En el limite cuando  $q_4 \rightarrow 0$ , la contribución de la caja del pión de las funciones escalares que aparecen en la formula maestra pueden escribirse como una integral en dos dimensiones de parámetros de Feynman:

$$\bar{\Pi}_i^{\pi-box}(q_1^2, q_2^2, q_3^2) = F_\pi^V(q_1^2)F_\pi^V(q_2^2)F_\pi^V(q_3^2) \left( \frac{1}{16\pi^2} \right) \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy I_i(x, y) \quad (\text{H.1})$$

en donde

$$I_1(x, y) = \frac{8xy(1-2x)(1-2y)}{\Delta_{123}\Delta_{23}} \quad (\text{H.2})$$

$$I_2(x, y) = \frac{8xy(1-2x)(1-2y)}{\Delta_{132}\Delta_{32}} \quad (\text{H.3})$$

$$I_3(x, y) = \frac{4(1-x-y)(1-2x-2y)\Delta_{21}}{(\Delta_{321})^2} \left( \frac{(1-2x-2y)^2}{\Delta_{321}} - \frac{1-x(3-2x)-y(3-2y)}{\Delta_{21}} \right) + \frac{16xy(1-2x)(1-2y)}{\Delta_{321}\Delta_{21}} \quad (\text{H.4})$$

$$I_4(x, y) = \frac{4(1-x-y)(1-2x-2y)\Delta_{31}}{(\Delta_{231})^2} \left( \frac{(1-2x-2y)^2}{\Delta_{231}} - \frac{1-x(3-2x)-y(3-2y)}{\Delta_{31}} \right) + \frac{16xy(1-2x)(1-2y)}{\Delta_{231}\Delta_{31}} \quad (\text{H.5})$$

$$I_5(x, y) = - \frac{8xy(1-x-y)(1-2x)^2(1-2y)}{(\Delta_{123})^3} \quad (\text{H.6})$$

$$I_6(x, y) = - \frac{8xy(1-x-y)(1-2x)^2(1-2y)}{(\Delta_{312})^3} \quad (\text{H.7})$$

$$I_7(x, y) = - \frac{8xy(1-x-y)(1-2x)^2(1-2y)}{(\Delta_{132})^3} \quad (\text{H.8})$$

$$I_8(x, y) = \frac{16xy^2(1-2x)(1-2y)}{\Delta_{321}\Delta_{21}} \left( \frac{1-x-y}{\Delta_{321}} + \frac{1-y}{\Delta_{21}} \right) \quad (\text{H.9})$$

$$I_9(x, y) = \frac{16xy^2(1-2x)(1-2y)}{\Delta_{123}\Delta_{23}} \left( \frac{1-x-y}{\Delta_{123}} + \frac{1-y}{\Delta_{23}} \right) \quad (\text{H.10})$$

$$I_{10}(x, y) = \frac{8xy(1-x-y)(1-2x)(1-2y)(1-2x-2y)}{(\Delta_{123})^3} \quad (\text{H.11})$$

$$I_{11}(x, y) = \frac{8xy(1-x-y)(1-2x)(1-2y)(x-y)}{\Delta_{231}\Delta_{31}} \left( \frac{1}{\Delta_{231}} + \frac{1}{\Delta_{31}} \right) \quad (\text{H.12})$$

$$I_{12}(x, y) = - \frac{8xy(1-x-y)(1-2x)(1-2y)(x-y)}{\Delta_{321}\Delta_{21}} \left( \frac{1}{\Delta_{321}} + \frac{1}{\Delta_{21}} \right) \quad (\text{H.13})$$

y ademais

$$\begin{aligned} \Delta_{ijk} &= M_\pi^2 - xyq_i^2 - x(1-x-y)q_j^2 - y(1-x-y)q_k^2 \\ \Delta_{ij} &= M_\pi^2 - x(1-x)q_i^2 - y(1-y)q_j^2 \end{aligned} \quad (\text{H.14})$$

## REFERENCIAS

---

- [1] L.X Gutierrez-Guerrero, A. Bashir, I.C. Cloet, C.D. Roberts, D.J Wilson. Phys.Rev. C83 (2011) 065206
- [2] J. J. Thomson, Philosophical Magazine 44 (1897) 293;
- [3] J. J. Thomson, Philosophical Magazine 48 (1899) 295
- [4] E. Rutherford, Philosophical Magazine, 21 (1911) 669
- [5] J. Chadwick, Nature 129 (1932) 312
- [6] S. L. Glashow, Nucl. Phys. 22 (1961) 579
- [7] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. 19 (1967) 1264
- [8] A. Salam, Proceedings del ‘The Nobel Symposium’, Estocolmo, Suecia, 1968
- [9] M. Gell-Mann, ”The Eightfold Way: A Theory of strong interaction symmetry”(No. TID-12608; CTSL-20). California Inst. of Tech., Pasadena. Synchrotron Lab.
- [10] M. Gell-Mann y Y. Ne’eman, Science 147 (1965) 1026
- [11] ATLAS collaboration, Physics Letters B. 716 (2012) 1-29 ; CMS collaboration, Physics Letters B. 716 (2012) 30- 61.
- [12] J.D. Bjorken, S.L. Glashow Phys. Lett. 11 255 (1964)
- [13] S.L. Glashow, J. Iliopoulos, L. Maiani Phys.Rev. D2 (1970) 1285-1292
- [14] G. Dissertori. Adv.Ser.Direct.High Energy Phys. 26 (2016) 113-128
- [15] D.J. Gross, Rev. Mod. Phys. 77 837 (2005); H.D. Politzer, Rev. Mod. Phys. 77 851 (2005); F. Wilczek, Rev. Mod. Phys. 77 (2005).
- [16] F.J. Dyson, Phys. Rev. 75 1736 (1949).

- 
- [17] J.S. Schwinger, Proc. Nat. Acad. Sc. 37 452 (1951).
  - [18] P. Maris, C.D. Roberts and P.C. Tandy, Phys. Lett. B420 267-273 (1998).
  - [19] Y. Nambu y G. Jona-Lasino, Phys.Rev. 122, 345(1961;)Phys.Rev. 124,246 (1961)
  - [20] K. Raya and J. Rodríguez-Quintero (2022) arXiv:2204.01642 [hep-ph].
  - [21] J.-L. Zhang, K. Raya, L. Chang, Z.-F. Cui, J. M. Morgado, C. D. Roberts, and J. Rodríguez-Quintero, Phys. Lett. B 815, 136158 (2021), arXiv:2101.12286 [hep-ph].
  - [22] N. Chouika, C. Mezrag, H. Moutarde, and J. Rodríguez-Quintero, Eur. Phys. J. C 77, 906 (2017), arXiv:1711.05108 [hep-ph].
  - [23] S.-S. Xu, L. Chang, C. D. Roberts, and H.-S. Zong, Phys. Rev. D 97, 094014 (2018), arXiv:1802.09552 [nucl-th].
  - [24] P. Maris, C.D. Roberts and P.C. Tandy, Phys. Lett. B420 267-273 (1998).
  - [25] M.B. Hecht, C.D. Roberts and S.M. Schmidt, Phys. Rev. C63 025213 (2001).
  - [26] Á. Miramontes, A. Bashir, K. Raya and P. Roig, “Pion and Kaon box contribution to  $a_\mu\text{HLbL}$ ,” Phys. Rev. D **105** (2022) no.7, 074013 doi:10.1103/PhysRevD.105.074013 [arXiv:2112.13916 [hep-ph]].
  - [27] J. Volmer et al. (Jefferson Lab F(pi)), Phys. Rev. Lett. 86, 1713 (2001), arXiv:nucl-ex/0010009.
  - [28] T. Horn et al. (Jefferson Lab F(pi)-2), Phys. Rev. Lett. 97, 192001 (2006), arXiv:nucl-ex/0607005.
  - [29] P. Boucaud, J. P. Leroy, A. L. Yaouanc, J. Micheli, O. Pene and J. Rodriguez-Quintero, Few Body Syst. 53, 387 (2012) doi:10.1007/s00601-011-0301-2 [arXiv:1109.1936 [hep-ph]] .
  - [30] D. Binosi, C. Mezrag, J. Papavassiliou, C. D. Roberts and J. Rodriguez-Quintero, Phys. Rev. D 96, no. 5, 054026 (2017) doi:10.1103/PhysRevD.96.054026 [arXiv:1612.04835[nucl-th]].
  - [31] P. Zyla et al. (Particle Data Group), PTEP 2020, 083C01 (2020).
  - [32] L.X. Gutiérrez-Guerrero: Mesones Pion, Rho y los Diquarks: Factores de Forma, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Tesis Doctoral (2012).
  - [33] P. T. P. Hutaurok, I. C. Cloet, and A. W. Thomas, Phys. Rev. C94, 035201 (2016), 1604.02853.
  - [34] H.L.L. Roberts, C.D. Roberts, A. Bashir, L.X. Gutierrez-Guerrero, P.C. Tandy Phys.Rev.C 82 (2010) 065202

- 
- [35] A. C. Aguilar, D. Binosi, and J. Papavassiliou. QCD effective charges from lattice data. JHEP, 07:002, 2010. doi: 10.1007/JHEP07(2010)002.
  - [36] D. Ebert, T. Feldmann, and H. Reinhardt, Phys.Lett. B388, 154 (1996), hep-ph/9608223.
  - [37] B. Aubert et al., Phys. Rev. D 80, 052002 (2009).
  - [38] J. Gronberg et al., Phys. Rev. D 57, 33 (1998).
  - [39] P. Maris and P. C. Tandy, Phys. Rev. C 65, 045211 (2002).
  - [40] S. Amendolia, M. Arik, B. Badelek, G. Batignani, G. Beck, F. Bedeschi, E. Bellamy, E. Bertolucci, D. Bettoni, H. Bilokon, et al., Nuclear Physics B 277, 168 (1986), ISSN 0550-3213.
  - [41] H. Ackermann, T. Azemoon, W. Gabriel, H. D. Mertiens, H. D. Reich, G. Specht, F. Janata and D. Schmidt, “Determination of the Longitudinal and the Transverse Part in  $\pi^+$  Electroproduction,” Nucl. Phys. B **137** (1978), 294-300 doi:10.1016/0550-3213(78)90523-0
  - [42] L. X. Gutiérrez-Guerrero, G. Paredes-Torres, and A. Bashir (2021), 2109.09058.
  - [43] L. X. Gutiérrez-Guerrero, A. Bashir, M. A. Bedolla, and E. Santopinto, Phys. Rev. D100, 114032 (2019), 1911.09213.
  - [44] A. Holl, A. Krassnigg, and C. D. Roberts, Phys. Rev. C 70, 042203 (2004), nucl-th/0406030.
  - [45] H. L. L. Roberts, L. Chang, I. C. Cloet, and C. D. Roberts, Few Body Syst. 51, 1 (2011), 1101.4244.
  - [46] H. L. L. Roberts, A. Bashir, L. X. Gutierrez-Guerrero, C. D. Roberts, and D. J. Wilson, Phys. Rev. C83, 065206 (2011), 1102.4376.
  - [47] G. Paredes-Torres, L.X. Gutiérrez-Guerrero, A. Bashir, A. Miramontes 10.1103/PhysRevD.109.114006 (2024) .
  - [48] M. A. Bedolla, K. Raya, J. J. Cobos and Adnan Bashir Phys. Rev. D **93** (2016) no.9, 094025.
  - [49] M. S. Bhagwat and P. Maris, Phys. Rev. C77, 025203 (2008), nucl-th/0612069.
  - [50] A. Miramontes, A. Bashir, K. Raya, and P. Roig, Phys. Rev. D 105, 074013 (2022), 2112.13916.
  - [51] X. Gao, N. Karthik, S. Mukherjee, P. Petreczky, S. Syritsyn, and Y. Zhao, Phys. Rev. D 104, 114515 (2021), 2102.06047.

- 
- [52] C. T. H. Davies, J. Koponen, P. G. Lepage, A. T. Lytle, and A. C. Zimmermann-Santos (HPQCD), PoS LAT- TICE2018, 298 (2018), 1902.03808.
  - [53] J. J. Dudek, R. G. Edwards, and D. G. Richards, Phys. Rev. D 73, 074507 (2006), hep-ph/0601137.
  - [54] P. A. Zyla et al. (Particle Data Group), PTEP 2020, 083C01 (2020).
  - [55] R. J. Lombard and J. Mares, Phys. Lett. B472, 150 (2000).
  - [56] C.-W. Hwang, Eur. Phys. J. C23, 585 (2002), hep-ph/ 0112237.
  - [57] R. Bermudez, L. Albino, L. X. Guti ´errez-Guerrero, M. E. Tejeda-Yeomans, and A. Bashir, Phys. Rev. D 95, 034041 (2017), 1702.04437.
  - [58] A. Bashir, R. Bermudez, L. Chang, and C. D. Roberts, Phys. Rev. C 85, 045205 (2012), 1112.4847.
  - [59] L. Chang, Y.-X. Liu, and C. D. Roberts, Phys. Rev. Lett. 106, 072001 (2011), 1009.3458.
  - [60] L. Chang and C. D. Roberts, Phys. Rev. C 85, 052201 (2012), 1104.4821.
  - [61] L. Chang and C. D. Roberts, AIP Conf. Proc. 1361, 91 (2011), 1003.5006.
  - [62] Werner Heisenberg Z.Phys. 90 (1934) 3-4, 209-231, Z.Phys. 92 (1934) 9-10, 692-692 (erratum).
  - [63] Hideki Yukawa Proc.Phys.Math.Soc.Jap. 17 (1935) 48-57, Prog.Theor.Phys.Suppl. 1 1-10.
  - [64] Richard Feynman Phys.Rev. 76 (1949) 769-789.
  - [65] Yoichiro Nambu and G. Jona Lasinio Phys.Rev. 122 (1961) 345-358.
  - [66] E. E. Salpeter and H.A. Bethe Phys.Rev. 84 (1951) 1232-1242.
  - [67] E. E. Salpeter Astrophys.J. 121 (1955) 161-167.
  - [68] H. Bethe Z.Phys. 71 (1931) 205-226.
  - [69] Elliot D. Bloom, D. H. Coward, J. Dress and Guthrie Miller Phys.Rev.Lett. 23 (1969) 930-934.
  - [70] The BABAR Detector Nucl.Instrum.Meth.A 479 (2002) 1-116.
  - [71] G. Peter Lepage and Stanley J. Brodsky Phys.Rev.D 22 (1980) 2157.
  - [72] A. Holl et al., Phys. Rev. C 71, 065204 (2005).

- 
- [73] H. J. Behrend et al. (CELLO), Z. Phys. C49, 401 (1991).
  - [74] A. C. Aguilar, D. Binosi, C. T. Figueiredo and J. Papavassiliou, Eur. Phys. J. C 78, no. 3, 181 (2018) doi:10.1140/epjc/s10052-018-5679-2 [arXiv:1712.06926 [hep-ph]].
  - [75] A. Deur, S. J. Brodsky and G. F. de Teramond, Prog. Part. Nucl. Phys. 90, 1 (2016) doi:10.1016/j.pnpnp.2016.04.003 [arXiv:1604.08082 [hep-ph]].
  - [76] K. Raya, M. A. Bedolla, J. J. Cobos-Martínez, and A. Bashir, Few Body Syst. 59, 133 (2018), 1711.00383.
  - [77] H. T. Ding, X. Gao, A. D. Hanlon, S. Mukherjee, P. Petreczky, Q. Shi, S. Syritsyn, R. Zhang and Y. Zhao, “QCD Predictions for Meson Electromagnetic Form Factors at High Momenta: Testing Factorization in Exclusive Processes,” [arXiv:2404.04412 [hep-lat]].
  - [78] N. Er and K. Azizi Spectroscopic parameters and electromagnetic form factor of kaon in vacuum and a dense medium Eur. Phys. J. C (2022) 82:397 (2022).
  - [79] P.T.P. Hutaauruk, I.C. Cloet, A.W. Thomas, Flavor dependence of the pion and kaon form factors and parton distribution functions. Phys. Rev. C 94, 035201 (2016).
  - [80] E.B. Dally, J.M. Hauptman, J. Kubic, D.H. Stork, A.B. Watson, Z. Guzik, T.S. Nigmanov, V.D. Ryabtsov, E.N. Tsyganov, A.S. Vodopianov et al., Direct measurement of the negative kaon formfactor. Phys. Rev. Lett. 45, 232–235 (1980).
  - [81] S.R. Amendolia, G. Batignani, G.A. Beck, E.H. Bellamy, E. Bertolucci, G. Bologna, L. Bosisio, C. Bradaschia, M. Budinich, M. Dell’orso et al., A measurement of the kaon charge radius. Phys. Lett. B 178, 435–440 (1986).
  - [82] T. Das, D. K. Choudhury, and N. S. Bordoloi (2016), 1608.06896.
  - [83] R. J. Hernández-Pinto, L. X. Gutiérrez-Guerrero, A. Bashir, M. A. Bedolla and I. M. Huigera-Angulo Phys.Rev.D 107 (2023) 5, 054002.
  - [84] K. Raya, L. Chang, A. Bashir, J. J. Cobos-Martinez, L. X. Gutiérrez-Guerrero, C. D. Roberts and P. C. Tandy, “Structure of the neutral pion and its electromagnetic transition form factor,” Phys. Rev. D **93** (2016) no.7, 074017 doi:10.1103/PhysRevD.93.074017 [arXiv:1510.02799 [nucl-th]].
  - [85] J. Volmer *et al.* [Jefferson Lab F( $\pi$ )], “Measurement of the Charged Pion Electromagnetic Form-Factor,” Phys. Rev. Lett. **86** (2001), 1713-1716 doi:10.1103/PhysRevLett.86.1713 [arXiv:nucl-ex/0010009 [nucl-ex]].

- 
- [86] G. M. Huber *et al.* [Jefferson Lab], “Charged pion form-factor between  $Q^{*2} = 0.60\text{-GeV}^{*2}$  and  $2.45\text{-GeV}^{*2}$ . II. Determination of, and results for, the pion form-factor,” *Phys. Rev. C* **78** (2008), 045203 doi:10.1103/PhysRevC.78.045203 [arXiv:0809.3052 [nucl-ex]].
  - [87] B. Abi *et al.* [Muon g-2], “Measurement of the Positive Muon Anomalous Magnetic Moment to 0.46 ppm,” *Phys. Rev. Lett.* **126** (2021) no.14, 141801 doi:10.1103/PhysRevLett.126.141801 [arXiv:2104.03281 [hep-ex]].
  - [88] G. W. Bennett *et al.* Final Report of the Muon E821 Anomalous Magnetic Moment Measurement at BNL. *Phys. Rev. D*, 73:072003, 2006.
  - [89] T. Aoyama, N. Asmussen, M. Benayoun, J. Bijnens, T. Blum, M. Bruno, I. Caprini, C. M. Carloni Calame, M. Cè and G. Colangelo, *et al.* “The anomalous magnetic moment of the muon in the Standard Model,” *Phys. Rept.* **887** (2020), 1-166 doi:10.1016/j.physrep.2020.07.006 [arXiv:2006.04822 [hep-ph]].
  - [90] T. Aoyama, M. Hayakawa, T. Kinoshita and M. Nio, “Complete Tenth-Order QED Contribution to the Muon g-2,” *Phys. Rev. Lett.* **109** (2012), 111808 doi:10.1103/PhysRevLett.109.111808 [arXiv:1205.5370 [hep-ph]].
  - [91] A. Czarnecki, W. J. Marciano and A. Vainshtein, “Refinements in electroweak contributions to the muon anomalous magnetic moment,” *Phys. Rev. D* **67** (2003), 073006 [erratum: *Phys. Rev. D* **73** (2006), 119901] doi:10.1103/PhysRevD.67.073006 [arXiv:hep-ph/0212229 [hep-ph]].
  - [92] C. Gnendiger, D. Stöckinger and H. Stöckinger-Kim, “The electroweak contributions to  $(g - 2)_\mu$  after the Higgs boson mass measurement,” *Phys. Rev. D* **88** (2013), 053005 doi:10.1103/PhysRevD.88.053005 [arXiv:1306.5546 [hep-ph]].
  - [93] T. Aoyama, T. Kinoshita and M. Nio, “Theory of the Anomalous Magnetic Moment of the Electron,” *Atoms* **7** (2019) no.1, 28 doi:10.3390/atoms7010028
  - [94] Á. Miramontes, A. Bashir, K. Raya and P. Roig, “Pion and Kaon box contribution to  $a_\mu^{\text{HLbL}}$ ,” *Phys. Rev. D* **105** (2022) no.7, 074013 doi:10.1103/PhysRevD.105.074013 [arXiv:2112.13916 [hep-ph]].
  - [95] P. Roig, A. Guevara and G. López Castro, “ $VV'P$  form factors in resonance chiral theory and the  $\pi - \eta - \eta'$  light-by-light contribution to the muon  $g - 2$ ,” *Phys. Rev. D* **89** (2014) no.7, 073016 doi:10.1103/PhysRevD.89.073016 [arXiv:1401.4099 [hep-ph]].
  - [96] K. Raya, A. Bashir and P. Roig, “Contribution of neutral pseudoscalar mesons to  $a_\mu^{\text{HLbL}}$  within a Schwinger-Dyson equations approach to QCD,” *Phys. Rev. D* **101** (2020) no.7, 074021 doi:10.1103/PhysRevD.101.074021 [arXiv:1910.05960 [hep-ph]].



- 
- [97] G. Colangelo, M. Hoferichter, M. Procura and P. Stoffer, “Dispersion relation for hadronic light-by-light scattering: two-pion contributions,” *JHEP* **04** (2017), 161 doi:10.1007/JHEP04(2017)161 [arXiv:1702.07347 [hep-ph]].
  - [98] K. Raya, M. A. Bedolla, J. J. Cobos-Martínez and A. Bashir, “Heavy quarkonia in a contact interaction and an algebraic model: mass spectrum, decay constants, charge radii and elastic and transition form factors,” *Few Body Syst.* **59** (2018) no.6, 133 doi:10.1007/s00601-018-1455-y [arXiv:1711.00383 [nucl-th]].
  - [99] A. S. Miramontes, K. Raya, A. Bashir, P. Roig and G. Paredes-Torres, “Radially excited pion: electromagnetic form factor and the box contribution to the muon’s  $g - 2$ ,” [arXiv:2411.02218 [hep-ph]].
  - [100] A. Boccaletti, S. Borsanyi, M. Davier, Z. Fodor, F. Frech, A. Gerardin, D. Giusiti, A. Y. Kotov, L. Lellouch and T. Lippert, *et al.* “High precision calculation of the hadronic vacuum polarisation contribution to the muon anomaly,” [arXiv:2407.10913 [hep-lat]].
  - [101] A. Czarnecki, W. J. Marciano and A. Vainshtein, “Refinements in electroweak contributions to the muon anomalous magnetic moment,” *Phys. Rev. D* **67** (2003), 073006 [erratum: *Phys. Rev. D* **73** (2006), 119901] doi:10.1103/PhysRevD.67.073006 [arXiv:hep-ph/0212229 [hep-ph]].
  - [102] T. Hahn, “CUBA: A Library for multidimensional numerical integration,” *Comput. Phys. Commun.* **168** (2005), 78-95 doi:10.1016/j.cpc.2005.01.010 [arXiv:hep-ph/0404043 [hep-ph]].

# Formato de Declaración de Originalidad y Uso de Inteligencia Artificial

Coordinación General de Estudios de Posgrado  
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo



A quien corresponda,

Por este medio, quien abajo firma, bajo protesta de decir verdad, declara lo siguiente:

- Que presenta para revisión de originalidad el manuscrito cuyos detalles se especifican abajo.
- Que todas las fuentes consultadas para la elaboración del manuscrito están debidamente identificadas dentro del cuerpo del texto, e incluidas en la lista de referencias.
- Que, en caso de haber usado un sistema de inteligencia artificial, en cualquier etapa del desarrollo de su trabajo, lo ha especificado en la tabla que se encuentra en este documento.
- Que conoce la normativa de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, en particular los Incisos IX y XII del artículo 85, y los artículos 88 y 101 del Estatuto Universitario de la UMSNH, además del transitorio tercero del Reglamento General para los Estudios de Posgrado de la UMSNH.

Datos del manuscrito que se presenta a revisión		
Programa educativo	Maestría en Ciencias en el Área de Física	
Título del trabajo	Contribución del P-box al momento anómalo del muón en una interacción de contacto	
	Nombre	Correo electrónico
Autor/es	Axel Ahiezer Ortiz Villaseñor	1435484c@umich.mx
Director	Juan Carlos Arteaga Velázquez	juan.arteaga@umich.mx
Codirector	Adnan Bashir	adnan.bashir@umich.mx
Coordinador del programa	Umberto Cotti Gollini	mae.ciencias.fisica@umich.mx

Uso de Inteligencia Artificial		
Rubro	Uso (sí/no)	Descripción
Asistencia en la redacción	No	

# Formato de Declaración de Originalidad y Uso de Inteligencia Artificial

Coordinación General de Estudios de Posgrado  
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo



Uso de Inteligencia Artificial		
Rubro	Uso (sí/no)	Descripción
Traducción al español	No	
Traducción a otra lengua	No	
Revisión y corrección de estilo	No	
Análisis de datos	No	
Búsqueda y organización de información	No	
Formateo de las referencias bibliográficas	No	
Generación de contenido multimedia	No	
Otro	No	

Datos del solicitante	
Nombre y firma	Axel Ahiezer Ortiz Villaseñor /
Lugar y fecha	18 de Febrero del 2025. Morelia, Michoacán

# Axel Ahiezer Ortiz Villaseñor Axel Ahiezer Ortiz Villa...

## Contribución del P-box al momento anómalo magnético del muón en una interacción de contacto.pdf

 Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

### Detalles del documento

Identificador de la entrega

trn:oid:::3117:432262335

Fecha de entrega

20 feb 2025, 8:55 a.m. GMT-6

Fecha de descarga

20 feb 2025, 8:59 a.m. GMT-6

Nombre de archivo

Contribución del P-box al momento anómalo magnético del muón en una interacción de contacto.pdf

Tamaño de archivo

1.5 MB

121 Páginas

28,891 Palabras

124,151 Caracteres