



Universidad Nacional Autónoma de
México y Universidad Michoacana
de San Nicolás de Hidalgo



Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas
UMSNH-UNAM

Métodos Computacionales en Geometría Discreta

T E S I S

Que para obtener el grado de
Doctor en Ciencias Matemáticas

Presenta:
Gerardo Lauro Maldonado Martínez

Director:
Dr. Edgardo Roldán Pensado

Morelia, Michoacán, México
Agosto, 2025

A mis padres Samanda Martínez Y Héctor Maldonado.

Investigación realizada gracias al Programa UNAM-PAPIIT IN111923.

Resumen

El presente documento tiene como propósito mostrar el trabajo realizado sobre tres problemas de *Geometría Discreta* en los cuales he trabajado durante mis estudios de doctorado. El enfoque utilizado cuenta con el añadido del uso de herramientas computacionales. Las mismas aparecen en varios aspectos como los son: la asistencia en el estudio de los problemas, el diseño de una demostración asistida por computadora, la búsqueda de ejemplos y el diseño de algoritmos. De igual manera, se incluyen demostraciones puramente matemáticas de resultados en dichos temas.

Sobre el primer problema, en este trabajo se presenta un enfoque para estudiar cuándo podemos teselar un polígono con piezas congruentes. En el mismo capítulo se incluye una demostración asistida por computadora del hecho de que no podemos teselar cuadrados ni rectángulos con una cantidad impar $n \leq 9$ y $n \leq 7$ de piezas congruentes no rectangulares, respectivamente. Además, se listan todas las teselaciones de cuadrados, con piezas equiangulares no rectangulares, para $n \leq 5$.

En el siguiente capítulo se incluyen algunos avances en el problema de determinar la mínima dimensión en la que un conjunto de puntos puede realizarse, respetando un orden predefinido sobre sus distancias. El primero es la observación de que un tipo de orden, que había sido expuesto en otro trabajo como no realizable en cierta dimensión, de hecho puede realizarse en la misma. Para esto se muestra una construcción que funciona en general. El segundo avance es la demostración del hecho que, para órdenes bipartitos con $n < m$, la mínima dimensión en la que éstos pueden realizarse es n . Además se incluyen algunos resultados computacionales.

El último capítulo trata problemas sobre particiones de medidas y conjuntos de puntos en $\mathbb{R}^d$. En éste se muestra la resolución del caso faltante para el problema de equiparticiones ortogonales, con la exposición de una clase de medidas que no cuentan con una equipartición ortogonal en $\mathbb{R}^3$. Además,

se incluye un algoritmo para listar equiparticiones ortogonales de conjuntos de puntos para el caso discreto. Con el mismo, se construyeron ejemplos de conjuntos sin dichas equiparticiones que no caen en la clase anteriormente mencionada. También se exponen dos resultados, en los que se demuestra que cualquier conjunto de puntos cuenta con una 1-partición ortogonal y que todos los conjuntos de puntos en posición convexa cuentan con una t -partición ortogonal.

Palabras clave: Geometría Discreta, Geometría Computacional, Teselaciones, Combinatoria, Particiones.

Abstract

The present document has the purpose of showing the work I have done about three *Discrete Geometry* problems during my PhD studies. The approach used has the addition of using computational tools. These tools appear in some ways such as the assistance in the study of those problems, making a computationally assisted proof, search of examples, and algorithms design. In the same way, there are pure math proofs of results in the presented subjects.

About the first problem, in this work, an approach to studying the problem of deciding under which conditions we can tessellate a polygon with congruent pieces is shown. In the same chapter, there is a computationally assisted proof of the fact that we could not tessellate squares or rectangles with an odd amount $n \leq 9$ and $n \leq 7$ of congruent pieces unless those are rectangles, respectively. Moreover, there is a list with all tessellations of squares with equiangular pieces for $n \leq 5$.

In the next chapter, some progress is presented about the problem of deciding the minimum dimension in which a set of points can be realized such that, a prescribed order over their distances is satisfied. The first one is the observation that a type of order, which has been presented in another work as unrealizable in a dimension is realizable in that one. For this, a general construction of points is shown. The second one is the proof of the fact that, for bipartite orders with $n < m$, the minimum dimension those orders can be realized is n . To finish, some computational results are presented.

The last chapter concerns problems on measures and point sets partitions in $\mathbb{R}^d$. In this one, the resolution of the remaining cases for the orthogonal equipartition problem is presented, describing a measures class in which no measure has an orthogonal equipartition in $\mathbb{R}^3$. Also, an algorithm to list every orthogonal equipartition for a point set is included. Using that algorithm, some examples of sets without that kind of partitions not contained

in the mentioned class were built. At the end of this chapter, two results about another partition problem are shown. Those are the proofs that every point set in $\mathbb{R}^2$ has an orthogonal 1-partition and that every set of points in a convex position in the plane has an orthogonal t -partition.

Índice general

1. Introducción	2
2. Teselaciones de polígonos	7
2.1. Introducción	7
2.2. Propiedades combinatorias de la teselación	8
2.3. Explorando la teselación	12
2.4. Teselación por piezas equiangulares	19
2.5. Comentarios finales	22
3. Prescribiendo órdenes en conjuntos de distancias en el espacio	24
3.1. Introducción	24
3.2. Caso bipartito	25
3.3. Caso completo	32
3.4. Experimentos computacionales	34
4. Problemas de particiones en el plano y espacio euclidiano	36
4.1. Introducción	36
4.2. Equiparticiones ortogonales de masas en la curva de momento	38
4.3. Equiparticiones ortogonales de conjuntos de puntos en el espacio	40
4.4. Particiones ortogonales de conjuntos de puntos en el plano . .	45
Bibliografía	51

Capítulo 1

Introducción

Sería bastante difícil introducir el propósito de esta tesis mencionando algo que no se haya dicho antes sobre la importancia de las computadoras en nuestras vidas, dado que están presentes de alguna manera en cada actividad humana. Las ciencias de la computación son un campo de estudio muy amplio dedicado específicamente a investigar qué podemos lograr mediante dicha herramienta. Por otro lado, los ordenadores han probado su valía en el estudio científico. Probablemente, el lector ha escuchado al menos sobre una manera en la que son utilizados en las ciencias naturales como lo son: la Física, Química y Biología.

¿Qué hay de las matemáticas? Las ciencias de la computación pueden considerarse un área de las matemáticas. El uso de resultados matemáticos y la búsqueda de otros para construir algoritmos que calculen funciones de manera eficiente abarca gran parte de las tareas realizadas en este rubro. En el sentido contrario, las computadoras también han estado presentes en la labor matemática.

Un ejemplo fácil de explicar es el de una conjetura de Pólya sobre los números de Liouville, los cuales tienen un vínculo con la famosa función zeta de Riemann. Para $n \in \mathbb{N}$, consideremos su factorización en números primos $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ y definamos la función

$$\omega(n) = \sum_{i=1}^k \alpha_i$$

la cual cuenta la cantidad de factores primos de un número considerando su

multiplicidad. La función de Liouville se define como

$$\lambda(n) = (-1)^{\omega(n)}$$

esta función que nos dice si la cantidad de factores primos de un número es par o impar. Pólya conjeturó en 1919 [29] que la carga de números con cantidad impar de factores era en cierto sentido mayor, es decir, que la función

$$L(n) = \sum_{i=1}^n \lambda(i)$$

cumple que $L(n) \leq 0$ para $n > 1$. Dicha conjetura fue refutada por Haselgrove en 1958 [17] en un artículo donde muestra una prueba por contradicción, realizando la evaluación de una función relacionada con una Mark I. Pero no calcula explícitamente un número n tal que $L(n) > 0$. El mínimo valor donde la conjetura falla fue publicado por Tanaka en 1980 [36] y en dicho trabajo reporta que 906 150 257 es el mínimo valor para el cual $L(n) > 0$.

El anterior es un ejemplo donde el uso de la computadora está presente en la búsqueda de contra-ejemplos para una proposición, dichos cálculos serían prácticamente imposibles de realizar por un ser humano. Pero no es el único caso en el cual nos podría ser de utilidad la gran capacidad de construir ejemplos grandes. En el Capítulo 3 veremos otro uso. En este caso se construyó un ejemplo, difícil de imaginar sin asistencia, para dilucidar una propiedad suficiente para cumplir una Proposición.

Otra forma en la que las computadoras han ayudado en nuestra labor matemática es proveyendo una nueva forma de demostración. La conocida como asistida por computadora. Para ejemplificar dicha técnica utilizaré su exponente más famoso. El Teorema de los cuatro colores.

La pregunta del problema es: ¿Cuál es la mínima cantidad de colores necesarios para poder colorear propiamente cualquier gráfica plana? Se tienen registros de que dicha pregunta, parafraseada como un problema sobre colorear mapas, fue hecha por August De Morgan en 1852 en una carta dirigida a William Rowan Hamilton. Desde esa fecha, una respuesta a dicha pregunta eludió a muchos matemáticos más, entre ellos Charles Sanders Pierce, Arthur Cayley y Alfred Bay Kempe. Los intentos de dar una demostración en la que la mínima cantidad de colores necesarios es 4 incluyeron falsas demostraciones, es decir que contienen errores, correcciones de algunas de estas y hasta existe una prueba errónea que fue aceptada por muchos años como válida

por la comunidad matemática. En su libro, Amanda Montejano [28] cuenta de una forma interesante y divulgativa la historia de la proposición.

Volviendo a la respuesta de la pregunta, no fue hasta 1977 cuando se publicó una demostración de que 4 colores siempre bastan en dos artículos de K. Appel, W. Haken y J. Koch [3, 4]. En estos apareció una demostración asistida por computadora, en resumen la estrategia fue, dada la hipótesis de la planaridad de las gráficas, encontrar un conjunto finito de configuraciones inevitables y después hacer la comprobación de que solo son necesarios 4 colores para obtener una coloración propia de los vértices. Lo que nos interesa de esta prueba es la estrategia en sí, que se puede extrapolar a otros problemas, la cual consiste en reducir a una cantidad manejable por una computadora el número de casos a revisar. Esto último, seguido de la inspección automatizada implementando un algoritmo.

En conjunto con el enfoque computacional, este es un trabajo que compila resultados de investigación matemática. En específico, de Geometría Discreta. Podemos definir dicha área de las matemáticas como la que estudia las propiedades combinatorias de estructuras geométricas. Problemas de empaquetados, cubiertas, teselaciones, convexidad, teoría de rigidez, geometría de computacional y de números, son algunos ejemplares del área. El ejemplo más representativo es sin duda el Teorema de Helly, publicado en 1923 [18].

El Teorema dice que si consideramos una familia de convexos $X_1, \dots, X_n \subset \mathbb{R}^d$ tal que $n \geq d + 1$ con la propiedad de que la intersección de cualesquiera $d + 1$ es no vacía, entonces todos los conjuntos de la familia tienen intersección no vacía. Nótese que aunque es un resultado sobre objetos geométricos, la hipótesis sobre las familias es combinatoria. Como nota adicional, este también apareció publicado en 1921 por König [19] y en 1922 por Radon [30].

La búsqueda de patrones puramente combinatorios nos permite entender estructuras que son más complejas, desde un punto de vista más simple. Este es el mismo motivo por el cual se prestan para la utilización de técnicas computacionales. Al ser combinatorias las propiedades que estamos estudiando, y casi siempre de carácter finito, la utilización de algoritmos resulta natural para analizar los mismos. El objetivo de esta tesis es presentar tres trabajos realizados durante mis estudios de doctorado, en los cuales se emplearon técnicas matemáticas y computacionales.

En el Capítulo 2 se presentan pruebas asistidas por computadora de algunos hechos sobre teselaciones de polígonos. El primero es el hecho de que un cuadrado no puede ser teselado con una cantidad $n \leq 9$ impar de piezas

congruentes entre sí, a menos que dichas piezas sean rectángulos. Lo mismo se cumple al querer teselar un rectángulo con una cantidad $n \leq 7$ impar de piezas congruentes. Además, listamos las teselaciones de 5 piezas de un cuadrado, cuando las piezas son equiangulares entre sí, i.e. cuando las piezas tienen la misma medida en cada ángulo en el mismo orden. Estos resultados contestan algunas preguntas realizadas en [39], que vienen de un problema derivado del propuesto en [23].

En el Capítulo 3 tratamos con un problema sobre la prescripción de órdenes sobre las distancias de puntos en el espacio euclidiano. El problema se puede plantear como sigue. Sea G una gráfica simple con N vértices y sea $<$ un orden definido sobre las aristas de G . ¿Existen N puntos en $\mathbb{R}^d$ y una enumeración de éstos tal que $(i, j) < (k, l) \iff d(x_i, x_j) < d(x_k, x_l)$? ¿Cuál es la mínima dimensión en la que podemos encontrar dichos puntos? En [1] se responde afirmativamente la primera pregunta para cualquier par $(G, <)$ y parcialmente la segunda pregunta para gráficas completas y bipartitas. Sobre el caso de K_n , ellos afirman que $d = n - 2$ es la mínima dimensión donde existen los puntos para cualquier orden. Para esto muestran un orden que señalan que no se puede realizar en $\mathbb{R}^{n-3}$, pero el resultado que utilizan para esta tarea es falso. Además, el orden que proponen es de hecho realizable, lo cual se muestra en el mismo capítulo. Cuando $G = K_{n,m}$, prueban que $n - 1 \leq d \leq n$ para $n \leq m$ y en el mismo capítulo se exhibe una clase de órdenes que no puede realizarse en $\mathbb{R}^{n-1}$ cuando $n < m$. Además se incluyen algunos resultados computacionales sobre este caso.

En el Capítulo 4 se tratan los resultados obtenidos sobre problemas de particiones de medidas en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. Para esto consideramos medidas de Borel tales que $\mu(H) = 0$, para cualquier hiperplano H . Decimos que d hiperplanos forman una equipartición ortogonal de una medida μ , si los hiperplanos son ortogonales entre sí y cada región formada por dichos planos cumple que $\mu(R) = 1/2^d$. La pregunta que tratamos en $\mathbb{R}^3$ es, si para toda medida existe una equipartición ortogonal y la respondemos negativamente mostrando una clase de medidas sobre la curva de momento que no cuentan con dichas particiones. Además mostramos ejemplos obtenidos mediante el uso de computadora de conjuntos de puntos que no tienen equipartición ortogonal y no se encuentran sobre la curva de momento. También presentamos un algoritmo para listar todas las equiparticiones ortogonales para conjuntos de puntos. El problema que tratamos en $\mathbb{R}^2$ es uno relacionado al anterior. Sea $0 \leq t \leq 1/4$ y μ una medida en $\mathbb{R}^2$ ¿Existen dos rectas ortogonales que dividan el plano en 4 regiones (listadas en sentido horario) con medidas t ,

t , $(1 - 2t)/2$ y $(n - 2t)/2$ respecto a μ ? Se conoce que dicha pregunta tiene respuesta afirmativa para $t = 0, 1/4$. Nosotros presentamos algunos avances en la versión discreta, mostrando que la pregunta tiene respuesta afirmativa cuando $t = 1$ y para cualquier valor de t cuando los puntos se encuentran en posición convexa.

Capítulo 2

Teselaciones de polígonos

2.1. Introducción

Sean P y T polígonos convexos. Decimos que P puede ser teselado por n copias de T , si existen convexos $T_1, \dots, T_n$, todos congruentes a T , tales que $P = \bigcup T_i$ y $\text{int}(T_i) \cap \text{int}(T_j) = \emptyset$ para $i \neq j$. Una pregunta natural es ¿Bajo qué condiciones puede P ser teselado por n copias de T ? En este Capítulo nos concentraremos en dicha pregunta, cuando P es un cuadrado o un rectángulo.

Es fácil ver que para cada $n \in \mathbb{N}$, un cuadrado se puede teselar por n rectángulos congruentes. Eso se puede conseguir dividiendo el cuadrado mediante $n - 1$ líneas verticales. Si n no es primo, existen otras maneras de teselar con rectángulos. Si consideramos n par, tampoco resulta difícil de ver que podemos teselar utilizando un triángulo rectángulo. En general, no se conoce si existe un número n impar y una pieza no rectangular que tesele con n copias un cuadrado. La conjetura que se mantiene, como aparece en [31], es la siguiente:

Conjetura 2.1. Si $n \in \mathbb{N}$ es impar, entonces un cuadrado puede ser teselado por n copias congruentes de un polígono convexo T si y solo si T es un rectángulo.

Dicha conjetura fue propuesta para $n = 3$ por Rabinowitz como un problema en la revista *Cruix Mathematicorum* y fue respondida por Maltby [23]. Él mismo generalizó su resultado, mostrando que es imposible teselar un rectángulo por 3 copias de T , a menos que T sea un rectángulo [24].

Para el caso $n = 5$, la conjetura 2.1 fue verificada por Yuan *et al.* [39]. Ellos atribuyen un problema similar a Danzer, quien conjeturó que un cuadrado no puede ser teselado por 5 polígonos congruentes (convexos o no), a menos que sean rectángulos. La conjetura de Danzer sigue abierta. En el mismo trabajo de Yuan *et al.* también proponen la conjetura 2.1 solo para n primo.

Por otra parte, si nos centramos en la cantidad de lados que debe de tener T existen algunos resultados. Thomas y Monsky [37, 27] probaron independientemente que un cuadrado no puede ser teselado por una cantidad impar de triángulos con la misma área y, en particular, por una cantidad impar de triángulos congruentes. Recientemente, Rao *et al.* mostraron que T no puede tener más de 6 lados y tampoco puede ser un trapecio rectángulo [31].

En este Capítulo se presenta otra manera de abordar este problema, con la cual se obtuvieron pruebas asistidas por computadora de los resultados presentados en las secciones 2.3 y 2.4. En resumen, la estrategia general es la siguiente: asumimos que un cuadrado o rectángulo P puede ser teselado por n copias de un polígono convexo T , el cual no es un rectángulo. En la Sección 2.2 deducimos algunas propiedades que dicha teselación debería tener. Seguido, construimos una gráfica asociada a la teselación. Después, en la Sección 2.3 se expone el algoritmo que utilizamos para descartar las posibles gráficas relacionadas con dichas teselaciones. Dado que cada teselación tiene una gráfica asociada, entonces al haber descartado todas las posibles gráficas, concluimos que no existen dichas teselaciones. La Sección 2.4 muestra una modificación al algoritmo para ser utilizado en un caso más general y de esta forma contestar algunas preguntas abiertas planteadas en [39]. La última sección está dedicada a algunas conclusiones y preguntas abiertas sobre el tema.

El trabajo que exploramos en este capítulo es el presentado en [21] en conjunto con el Dr. Edgardo Roldán.

2.2. Propiedades combinatorias de la teselación

Comenzaremos listando las cuatro propiedades que las teselaciones de un cuadrado o rectángulo deberían tener. Las primeras tres son combinatorias y serán de ayuda para reducir el número de gráficas por analizar. La última es geométrica y será usada más adelante en el algoritmo.

Lema 2.2. Sean $n \geq 3$ un natural impar y sea P un rectángulo. Consideremos s_0, s_1, s_2, s_3 como los lados cerrados de P ordenados cíclicamente, donde los índices los tomamos (mód 4). Si P puede ser teselado por n copias, $T_1, \dots, T_n$, de un polígono convexo T , entonces se cumple lo siguiente:

1. T tiene al menos cuatro lados.
2. Si una pieza T_i intersecta dos lados consecutivos s_k y s_{k+1} de P , entonces T_i contiene el vértice de P común a ambos lados.

Si P es un cuadrado, T tiene exactamente cuatro lados y no es un rectángulo, también se cumple que:

3. Una pieza T_i no puede tener dos lados a, b tales que $a \subset s_k$ y $b \subset s_{k+2}$ para ningún k .
4. T no tiene dos ángulos rectos consecutivos.

Demostración. Como se mencionó en 2.1 si P es un cuadrado, entonces (1) se sigue de los resultados en [37, 27]. Si P es un rectángulo, entonces podemos aplicar una transformación lineal que lo envíe a un cuadrado. Como las transformaciones lineales preservan áreas, el mismo resultado se cumple.

La parte (4) es el Teorema 1.2 en [31].

Para probar (2), asumamos que T_i intersecta los lados s_k y s_{k+1} , pero no intersecta la esquina contenida en $s_k \cap s_{k+1}$. Si T_i toca dos esquinas opuestas de P , como en la Figura 2.1 (izquierda), entonces el diámetro de T_i es igual al de P . Consideremos ahora las componentes conexas de $P \setminus T_i$: éstas son al menos dos, de lo contrario T_i cubriría una mitad de P . Una de estas componentes debe estar propiamente contenida en uno de los triángulos rectángulos obtenidos de partir P por su diagonal, pero cualquier pieza en esta componente debe tener diámetro menor que el de P . Lo cual es una contradicción. Si T_i no toca dos esquinas opuestas de P , como en la Figura 2.1 (medio), es similar. Sea T_j una pieza que contiene la esquina común de P a los lados s_k y s_{k+1} . Entonces el diámetro de T_j debe ser menor que el de T_i , lo cual también es una contradicción.

Para terminar, asumamos que (3) no se cumple. Consideraremos dos casos, el primero cuando alguna esquina de P es incidente a exactamente una pieza. Entonces T debe tener un ángulo recto. Como T_i tiene dos lados paralelos, debe tener dos ángulos rectos consecutivos. Esto contradice (4). El segundo caso es cuando cada esquina de P es incidente con al menos dos

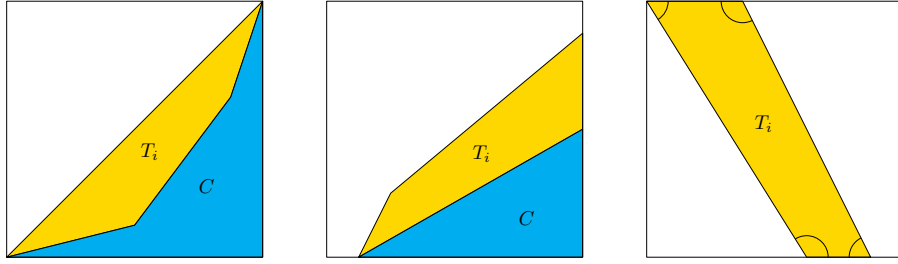


Figura 2.1: Tres tipos de teselaciones imposibles, correspondientes a las partes (2) y (3) del Lema 2.2. En las primeras figuras, el diámetro de cualquier convexo contenido en C es menor que el diámetro de T_i . En la última figura, los ángulos interiores de T_i son todos mayores que $\pi/4$.

piezas. Entonces T debe tener un ángulo interior de a lo más $\pi/4$. Pero T_i tiene dos vértices en s_k y dos en s_{k+2} , por lo que todos sus ángulos interiores son estrictamente mayores a $\pi/4$, ver Figura 2.1 (derecha). $\square$

En lo que resta de la sección nos centraremos en la gráfica asociada a cada teselación. Como veremos a continuación, dicha gráfica contiene toda la estructura combinatoria de la teselación.

Sean $T_1, \dots, T_n$ polígonos convexos que teselan un polígono P con lados cerrados $s_1, \dots, s_k$ en orden cíclico. Construyamos una gráfica $G = (V, E)$, donde $V = \{s_1, \dots, s_k, T_1, \dots, T_n\}$. Definimos las aristas como sigue:

- $\{A, B\} \in E$, si $A \cap B$ es un segmento de longitud positiva.
- $\{s_i, s_j\} \in E$ if $i - j \equiv 1 \pmod{k}$.

Llamaremos a ésta, la **gráfica de teselado**. Podemos pensar en esta como la dual de una pirámide con base en P , con este ya teselado por las piezas $T_1, \dots, T_n$.

La siguiente Proposición muestra una propiedad que será de gran utilidad.

Proposición 2.3. *Las gráficas de teselado son 3-conexas.*

Demostración. Recordemos que cada v_i es una tesela o un lado de P . Debemos probar que para cada elección de $v_1, v_2 \in V$, tenemos que $G' = G - v_1 - v_2$ es conexa. Para esto es suficiente probar que para cada $T_i \in V(G')$ y cada $S_j \in V(G')$, existe un camino de T_i a S_j . De esta manera, cada dos vértices

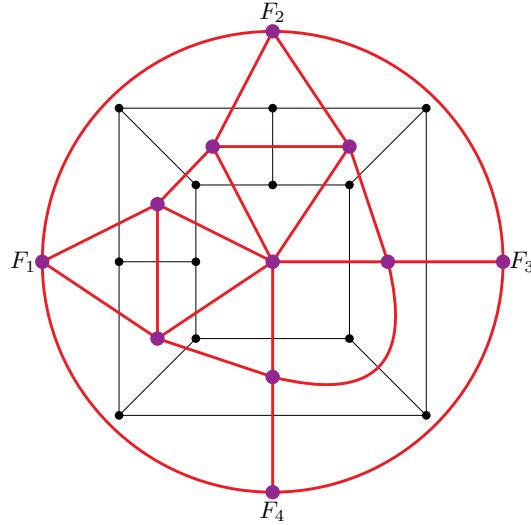


Figura 2.2: Una teselación (negro) y su gráfica asociada (rojo).

de G' estarían conectados por un camino a través de algunos lados y teselas. Sea p un punto en el interior de $T_i \in V(G')$.

Si v_1 y v_2 son lados de P , entonces consideremos un segmento l de p a cualquier punto del interior relativo de $S_j \neq v_1, v_2$. El segmento l está contenido en $P \setminus (v_1 \cup v_2)$. Tomemos la gráfica inducida por las teselas que intersecta l y S_j . Esta es una gráfica conexa de G' la cual contiene a T_i y S_j , así que G' es conexa.

En el caso de que ambos v_1 y v_2 no sean lados, consideremos una línea l que separe los interiores relativos de v_1 y v_2 . Sea l' la línea paralela a l que contiene p . Como v_1 y v_2 son convexos, la intersección de l' y $(v_1 \cup v_2)$ es un segmento, un punto o el conjunto vacío. En cualquier caso, existe un segmento contenido en l' conectando p y un lado $S_j \neq v_1, v_2$, el cual no intersecta $v_1 \cup v_2$. Como en el caso anterior, esto implica que G' es conexa. $\square$

Como observación, el Teorema de Steinitz [14] dice que la familia de gráficas poliédricas son precisamente las que cumplen ser planas y 3-conexas. Por lo tanto, nuestras gráficas de teselado son poliédricas.

Notemos que el grado de una tesela T en G puede no corresponder a su número de lados como polígono. De todos modos, la cantidad de lados es una cota inferior del grado. Por otro lado, la gráfica tiene un conjunto distinguido de vértices que forman un ciclo (las aristas correspondientes a los lados), ver

Figura 2.2.

Desde este punto nos restringiremos al caso donde P es un cuadrado o rectángulo. Trabajaremos con las parejas (G, S) , donde $G = (V, E)$ es una gráfica plana y 3-conexa con $n + 4$ vértices, y $S \subset V$ induce un 4-ciclo en G . Como estas gráficas nacen de una teselación, nos referimos a los vértices de G simplemente como lados cuando $v \in S$ y teselas en otro caso. Además, decimos que dos parejas (G, S) y (G', S') son isomorfas si existe un isomorfismo ϕ de G a G' tal que $\phi(S) = S'$.

Para evitar confusiones futuras, a la unión de los conjuntos de vértices de las piezas T_i las llamaremos los **vértices de teselado**. Como observación, cada pieza T_i tiene ángulos internos en cada uno de sus vértices de teselado, aunque algunos de estos sean iguales a π .

2.3. Explorando la teselación

Esta sección está dedicada a explicar el algoritmo y las propiedades que utiliza para descartar las posibles gráficas asociadas a una teselación.

Observación. En la práctica necesitamos generar todas las posibles gráficas de teselación utilizando `plantri` [9]. Para facilitar dicha tarea, añadimos un vértice s a la gráfica y aristas (s, s_i) , por cada vértice en S . Esto simplifica la revisión de isomorfismos, puesto que solo revisamos isomorfismos que dejan fijo a s . Además, cuando trabajamos con piezas con 4 o más lados, aseguramos que la gráfica tiene grado mínimo al menos 4.

Sea P un rectángulo con lados de longitud 1 y r o un cuadrado. Sea S el conjunto de lados de P . Supongamos que P puede ser teselado por piezas $T_1, \dots, T_n$ congruentes a un convexo T , el cual no es un rectángulo. Como consecuencia de la parte (1) del Lema 2.2, T tiene al menos 4 lados y, por tanto, su gráfica de teselado (G, S) es una gráfica plana, 3-conexa, con $n + 4$ vértices y grado mínimo 4.

Utilizando `plantri` es posible generar todas las gráficas G con dichas propiedades para $n \leq 9$. Hecho esto, podemos revisar cada gráfica y hacer una copia de la misma por cada posible ciclo 4-ciclo distinguido correspondiente a S . Para no lidiar con copias repetidas, utilizamos el algoritmo para revisar isomorfismo incluido en `NetworkX` [16].

Ahora podemos filtrar nuestras gráficas utilizando la parte (2) del Lema 2.2, eliminando cada gráfica que contiene más de un vértice adyacente a los mismos dos lados consecutivos. Después de este paso hacemos otro filtrado

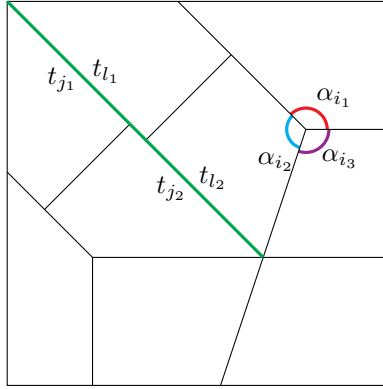


Figura 2.3: En esta teselación podemos ver que $\alpha_{i_1} + \alpha_{i_2} + \alpha_{i_3} = 2\pi$ y $t_{j_1} + t_{j_2} = t_{l_1} + t_{l_2}$.

dependiendo de si T tiene 4 o 5 lados. Si T tiene 4 lados, podemos utilizar la parte (3) del Lema 2.2 para descartar las gráficas que tienen vértices adyacentes a lados opuestos. Si T tiene 5 lados, podemos descartar las gráficas que tienen vértices asociados a piezas con grado menor a 4.

Para continuar con la eliminación de las posibles gráficas de teselado, utilizaremos las propiedades geométricas de T , en específico los valores de sus ángulos y la longitud de sus lados. Sean $p_1, \dots, p_k$ los vértices de T y $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ sus ángulos internos. También llamaremos t_i a la longitud del segmento $p_i p_{i+1}$. La primera observación es que ángulos deben satisfacer la ecuación $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = (k - 2)\pi$.

Notemos que si v es un vértice de teselado de una pieza T_i , entonces el ángulo interno de T_i en v puede ser π o algún α_j . También tenemos que para cada vértice de teselado v , la suma de los ángulos internos en v de las piezas que lo contienen debe ser 2π , π o $\pi/2$ dependiendo si v se encuentra en el interior, un lado o en un vértice de P respectivamente (ver Figura 2.3). Por lo tanto, los ángulos $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ deben satisfacer un sistema de ecuaciones lineales no homogéneas.

Algo similar pasa con las longitudes de los lados de T . Para cada lado s_i de P , toma las piezas T_j adyacentes a s_i . La suma de los lados de esas piezas contenidas en s_i deben suma la longitud de s_i la cual debe ser 1 o r . Esto nos da cuatro ecuaciones lineales no homogéneas para t_i y, si es el caso, para r . Nosotros no fijamos el valor de r , lo tratamos como variable.

Más aún, si dos piezas T_i y T_j se intersectan en un segmento $v_1 v_2$ tal que

v_1 y v_2 son esquinas consecutivas de ambas piezas, entonces podemos deducir una ecuación de la forma $t_k = t_l$. En general, si tenemos un segmento ℓ que contiene un lado de las piezas $T_{i_1}, \dots, T_{i_l}$ y $T_{j_1}, \dots, T_{j_{l'}}$ tal que los T_{i_m} y $T_{j_{m'}}$ se encuentran en lados opuestos de ℓ y cubren todo ℓ , entonces podemos deducir otra ecuación lineal para los t_i (ver Figura 2.3).

En el caso de que T sea un cuadrilátero, también podemos contar con ecuaciones que involucren lados y ángulos de T , dado que sabemos que el área de T es r/n y, por tanto,

$$t_1 t_2 \sin(\alpha_2) + t_3 t_4 \sin(\alpha_4) = t_2 t_3 \sin(\alpha_3) + t_4 t_1 \sin(\alpha_1) = 2r/n$$

. Computando las longitudes de las diagonales de T obtenemos

$$\begin{aligned} t_1^2 + t_2^2 - 2t_1 t_2 \cos(\alpha_2) &= t_3^2 + t_4^2 - 2t_3 t_4 \cos(\alpha_4) \\ t_2^2 + t_3^2 - 2t_2 t_3 \cos(\alpha_3) &= t_4^2 + t_1^2 - 2t_4 t_1 \cos(\alpha_1). \end{aligned}$$

El problema con esto es que, de la gráfica G , nosotros no podemos saber qué vértices de teselado de una pieza T_i corresponden a qué vértice de T . Si el grado de T_i en G es mayor que 4, entonces deberíamos decidir qué vértices de teselado de T_i tienen ángulo igual a π , es decir, cuáles no son vértices de T_i como polígono. odríamos calcular todas las posibles selecciones de vértices con ángulo π , pero son demasiadas incluso para una sola gráfica. En lugar de esto, hacemos un tratamiento más eficiente que nos permite descartar más gráficas restantes.

Cada ángulo de T se encuentra etiquetado por **a**, **r** o **o** dependiendo de si el ángulo es agudo, recto u obtuso. También etiquetamos los ángulos de cada pieza T_i en cada vértice de teselado del mismo con **a**, **r**, **o**, **p** dependiendo de si el ángulo es agudo, recto, obtuso o plano. A dichas etiquetas las llamamos **tipo de ángulo**. Es importante observar que los ángulos que no son del tipo **p** deben aparecer en el mismo orden cíclico en todas las copias de T .

Aunque los tipos de ángulo que pueden aparecer en T son bastantes, estas son fáciles de listar. Por ejemplo, si T es un cuadrilátero, sus ángulos internos (en orden cíclico y fijando una orientación) pueden ser listados de 9 maneras: **aaao**, **aaro**, **aaoo**, **arao**, **aror**, **aroo**, **aoao**, **aoro** y **aooo**. Nótese que estamos considerando la propiedad (4) del Lema 2.2 para descartar los etiquetados con dos ángulos rectos consecutivos. De la misma manera descartamos también cuando T es un rectángulo no considerando **rrrr**.

Ahora vamos a listar algunas propiedades que deben cumplir los ángulos de una pieza. Si v_k es un vértice de teselado de T_i y a la vez una esquina de

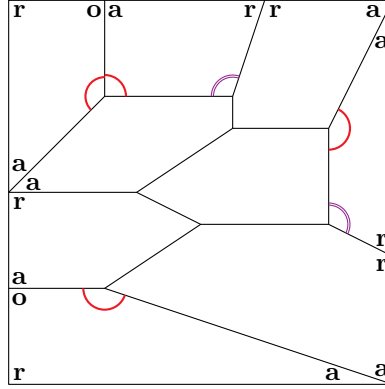


Figura 2.4: En la imagen se muestra la representación de un teselado de un cuadrado, donde los tipos de ángulo de T son **aror**. Esta es una representación puramente combinatoria basada en una gráfica G , por lo que los ángulos no necesariamente deben coincidir con el dibujo en el plano. En este caso, solo existe un posible etiquetado para los ángulos que yacen en la frontera del cuadrado P . Por tanto, se puede deducir que los ángulos en rojo son del tipo **r** y los morados **o**.

P , entonces el tipo de ángulo de T_i en v_k debe ser **a** o **r**, dependiendo si existe otra copia T_j que tenga a v_k como vértice de teselado o no. Otra propiedad fácil de observar, si T_i y T_j son las únicas piezas que tienen a v_k como vértice de teselado que además se encuentra en un lado de P , entonces los tipos de ángulo de T_i y T_j en v_k son ambos **r** o uno es **a** y el otro **o** (ver Figura 2.4).

Para evitar listar cada propiedad individualmente, introducimos las siguientes definiciones. Sea $\varepsilon > 0$ un número real lo suficientemente pequeño. Definamos $\text{minang}(T_i, v_k)$ como ε , $\pi/2$, $\pi/2 + \varepsilon$ o π , dependiendo de si el tipo de ángulo de T_i en v_k es **a**, **r**, **o** o **p**, respectivamente. De la misma forma, definamos $\text{maxang}(T_i, v_k)$ como $\pi/2 - \varepsilon$, $\pi/2$, $\pi - \varepsilon$ o π , dependiendo de si el tipo de ángulo de T_i en v_k es **a**, **r**, **o**, o **p**, respectivamente. Si ε es lo suficientemente pequeño, entonces los valores de los ángulos de T_i en v_k se encuentran en el intervalo $[\text{minang}(T_i, v_k), \text{maxang}(T_i, v_k)]$. Entonces, para

cada vértice de teselado v_k tenemos que

$$\sum_{T_i \ni v_k} \max \text{ang}(T_i, v_k) \geq \alpha(v_k),$$

$$\sum_{T_i \ni v_k} \min \text{ang}(T_i, v_k) \leq \alpha(v_k),$$

donde $\alpha(v_k)$ es $\pi/2$, π o 2π si v_k se encuentra en una esquina, un lado o el interior de P , respectivamente. En la práctica, esto nos permite decidir el tipo de ángulo de las piezas razonablemente rápido, incluso cuando no sabemos el valor exacto de los ángulos de T . Otra observación importante es que cada una de las sumas mostradas tiene a los más n términos y cuando trabajamos con $n \leq 9$, cualquier valor de $\varepsilon < \pi/18$ nos permite distinguir entre asignaciones válidas e inválidas de tipos de ángulo.

Otra propiedad sobre los ángulos de T que utilizamos para filtrar se enuncia en el siguiente Lema.

Lema 2.4. *Sea T un cuadrilátero que tesela P el cual tiene dos ángulos con tipo $\mathbf{r}$. Si alguna pieza T_i tiene un vértice de teselado v_k en una esquina de P con ángulo $\alpha_a < 90$, entonces $\alpha_a = \pi/3$ o $\alpha_a = \pi/4$.*

Demostración. Sea α_o el ángulo obtuso de T . En la teselación, el número de ángulos obtusos debe ser igual al número de agudos. Observemos que ningún ángulo obtuso coincide con una esquina de P y cualquier ángulo obtuso que coincida con un lado de P comparte vértice con el ángulo agudo de una pieza diferente. Por hipótesis, tenemos al menos un ángulo agudo en una esquina de P , entonces debe existir un vértice de teselado v en el interior de P incidente a más ángulos obtusos que agudos. Por otro lado, sean N_a , N_o y N_r el número de ángulos agudos, obtusos y rectos en la teselación, respectivamente. La suma de los ángulos en cada vértice de teselado interior es 2π , por lo que tenemos que

$$2\pi = N_o\alpha_o + N_a\alpha_a + N_r\pi/2 = N_o\alpha_o + N_a(\pi - N_o) + N_r\pi/2$$

$$= (N_o - N_a)\alpha_o + N_a\pi + N_r\pi/2$$

. Como $\alpha_o > 90$, entonces tenemos que $N_o - N_a \leq 3$ y, por tanto, α_o es de la forma $p\pi/(2q)$ con $1 \leq p \leq 4$ y $1 \leq q \leq 3$. De aquí concluimos que los únicos posibles valores para α_o son $2\pi/3$ y $3\pi/4$. Por lo tanto, α_a es igual a $\pi/3$ o $\pi/4$.

□

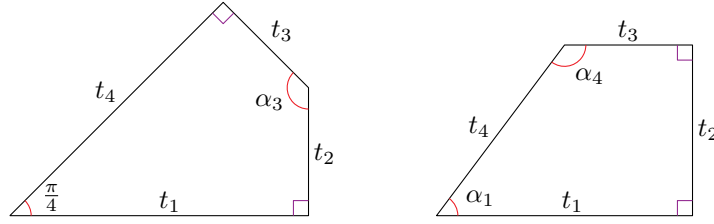


Figura 2.5: Los cuadriláteros del Lema 2.5

Otra propiedad que utilizamos para eliminar pares (G, S) es una que incluye el área de las piezas con etiquetado **aror**.

Lema 2.5. *Sea T un cuadrilátero con área A y etiquetado **aror**. Si $\alpha_1 = \pi/4$ (ver lado izquierdo de la Figura 2.5), entonces*

$$\sqrt{2A} < t_1, t_4 \leq 2\sqrt{A}.$$

*Si T está etiquetado **arro** (ver lado derecho de la Figura 2.5), entonces*

$$\begin{aligned} t_1 &= t_3 + t_4 \cos(\alpha_1), \\ t_2 &= t_4 \sin(\alpha_1). \end{aligned}$$

Demostración. Primero observemos que $t_4 = (t_1 + t_2)/\sqrt{2}$ y $t_3 = (t_1 - t_2)/\sqrt{2}$, por lo que

$$t_1 t_2 + \frac{t_1^2 - t_2^2}{2} = 2A.$$

si pensamos a t_1 en función de t_2 podemos derivar t_1 respecto a t_2 y así obtenemos que

$$t'_1 = \frac{t_2 - t_1}{t_2 + t_1}.$$

Como $\alpha_1 = \pi/4$, entonces $0 < t_2 < t_1$ y, por tanto, t'_1 es negativo y los valores extremos de t_1 se dan cuando $t_2 = 0$ y $t_2 = t_1$ lo cual nos da el resultado deseado. La segunda parte es fácil de ver proyectando t_4 sobre t_1 y t_2 . $\square$

Las propiedades combinatorias mencionadas en la Sección 2.2 y las propiedades geométricas de la presente, son suficientes para descartar cada pareja (G, S) cuando P es un cuadrado con $n \leq 9$ y cuando P es un rectángulo con $n \leq 7$. En lo que resta de la sección se explica el procedimiento para realizar dicha tarea.

Para cada pareja (G, S) seleccionamos una de las posibles asignaciones de tipo de ángulo para T . Para cada pieza T_i , queremos decidir que vértices de teselado de T_i corresponden a que vértices de T . Para hacer esto, realizamos una búsqueda en profundidad para explorar el árbol de posibilidades para dichas asignaciones. Este proceso podemos dividirlo en tres pasos:

Selección Seleccionamos una pieza T_i y uno de sus vértices de teselado v_k tal que (T_i, v_k) aún no haya sido asignado a un vértice de T .

Asignación Hacemos una lista de las posibles asignaciones válidas de (T_i, v_k) , tomando en cuenta las condiciones sobre los ángulos mostradas antes.

Verificación de ecuaciones Para cada asignación, revisamos si una nueva ecuación para los ángulos o para los lados de T fue generada. Si este es el caso, verificamos que las ecuaciones aún puedan tener solución. Esto lo realizamos utilizando **Sympy** [26] para realizar cálculos simbólicos, lo cual nos garantiza no descartar ecuaciones que si tengan solución. En caso de ser posible, también revisa las ecuaciones no lineales del Lema 2.5. Esto último se realiza numéricamente, por lo que permitimos un pequeño valor de tolerancia.

Las asignaciones que no rompen las condiciones de las ecuaciones se añaden a la pila para seguir la búsqueda.

El orden en el que exploramos las piezas y sus vértices de teselado es importante. Siempre comenzamos por las esquinas de P y las piezas que comparten vértice con estas. Después continuamos con los vértices en los lados de P . En muchos casos esto es suficiente explorar estos vértices para descartar (G, S) para un etiquetado de T . Cuando no es el caso, continuamos con los vértices en el interior de P .

Cuando P es cuadrado y $n \leq 9$ es impar o cuando P es un rectángulo y $n \leq 7$ es impar, cada gráfica (G, S) es descartada con este método. Esto prueba los siguientes resultados.

Teorema 2.6. *Sea $n = 7, 9$, entonces un cuadrado no puede ser teselado por n copias de un polígono convexo T a menos que sea un rectángulo.*

Teorema 2.7. *Sea $n = 5, 7$, entonces un rectángulo no puede ser teselado por n copias de un polígono convexo T a menos que sea un rectángulo.*

Lo anterior lo verificamos implementando dicho procedimiento utilizando las herramientas computacionales ya mencionadas. Dicha implementación puede encontrarse en <https://github.com/XGEu2X/TilingSquare>.

2.4. Teselación por piezas equiangulares

Decimos que dos polígonos convexos P y Q son equiangulares si existe una biyección f entre sus vértices, tal que el ángulo en v es igual al de $f(v)$, para cada vértice. En esta Sección se trata el problema de teselar P con piezas equiangulares en vez de congruentes. La motivación para considerar piezas equiangulares la podemos encontrar en la parte final de [39], donde se listaron los siguientes problemas abiertos:

1. ¿Todas las teselaciones de un cuadrado P con 5 piezas equiangulares tienen triángulos, isósceles o rectángulos como piezas?
2. ¿Todas las teselaciones de un cuadrado P con 5 piezas equiangulares tienen solamente piezas con ángulos que miden $\pi/4$, $\pi/2$ y $3\pi/4$?
3. Listar todas las teselaciones de un cuadrado con 5 piezas convexas no rectangulares.

Utilizando el mismo método presentado en la Sección 2.3 incluyendo algunas modificaciones, hemos sido capaces de contestar dichas preguntas. Las primeras dos con una respuesta negativa, lo cual podemos verificar con la solución presentada para el tercero.

Sobre las modificaciones realizadas al método presentado en la Sección 2.3, la más obvia es que solo consideraremos las medidas de los ángulos y las ecuaciones que los involucran. Otro cambio, el cual mejora bastante el rendimiento, es el uso de más tipos de ángulo cuando las piezas son triangulares. En este caso, en lugar de utilizar **a** para etiquetar los ángulos agudos, utilizamos (sa) , (ma) y (la) que corresponden a los ángulos agudos menores, iguales y mayores a $\pi/4$ respectivamente. Análogamente, reemplazamos **o** con (so) , (mo) y (lo) . Por último, utilizamos un Lema en remplazo del Lema 2.2, puesto que este no lo podemos utilizar directamente en este caso.

Lema 2.8. *Sea $n \geq 3$ un entero impar y P un cuadrado. Sean s_1, s_2, s_3, s_4 los lados (cerrados) de P ordenados cíclicamente, donde los índices los tomamos (mód 4). Si P puede ser teselado por polígonos convexos $T_1, \dots, T_n$ equiangulares entre sí y cada pieza son triángulos, entonces se cumple lo siguiente:*

1. *Si una pieza T_i intersecta un lado s_k en un segmento de longitud positiva y uno de sus vértices v se encuentra en s_{k+2} , entonces el ángulo α de T_i en v , satisface que $\alpha < \pi/2$.*

2. Si una pieza T_i contiene un lado s_k e intersecta s_{k+1} (o s_{k-1}) en un segmento de longitud positiva, entonces el ángulo α de T_i en $s_{k-1} \cap s_k$ (o $s_{k+1} \cap s_k$), satisface que $\alpha \leq \pi/4$.

Si T_i es un cuadrilátero, entonces:

- 3 Una pieza T_i no puede tener dos lados a, b tales que $a \subset s_k$ y $b \subset s_{k+2}$ para algún k .

Demostración. En (1), los dos lados adyacentes a v tienen longitud al menos 1, así que el lado s_k es el lado más pequeño de T_i . Entonces, el ángulo más pequeño de T_i es α y, por lo tanto, $\alpha \leq \pi/3 < \pi/2$. El enunciado (2) se deduce directamente del hecho de que T_i es un triángulo rectángulo y α es su ángulo más pequeño. El enunciado (3) se sigue de que en un triángulo todos sus lados son adyacentes entre sí. Finalmente, para probar (4), supongamos que T_i intersecta s_k , s_{k+1} y s_{k+2} . Como T_i es un cuadrilátero s_{k+1} debe ser uno de sus lados y los vértices de T_i que no están en s_{k+1} se encuentran en s_k y s_{k+2} . Por lo tanto, los ángulos incidentes a s_{k+1} son rectos y los dos ángulos restantes son mayores a $\pi/4$. $\square$

Modificamos el programa utilizado en la Sección anterior con utilizando este Lema. Al correr la implementación nos quedaron 15 gráficas cuando las piezas son triángulos y 27 en el caso de que sean cuadrilátero. De estas, 3 y 8 no representan teselaciones válidas. Esto se puede verificar fácilmente a mano. Dichas gráficas pueden ser revisadas en el repositorio, al igual que las gráficas de teselaciones no realizables y las gráficas no filtradas. Con esto podemos concluir el siguiente resultado.

Teorema 2.9. *Existen 31 maneras en las cuales uno puede teselar un cuadrado con 5 polígonos convexos no rectangulares.*

Las teselaciones se muestran en las Figuras 2.6 y 2.7.

La relación de equivalencia entre particiones con la misma gráfica podría no ser la que uno esperaba. Por ejemplo, en la Figura 2.7 se ven cuatro parejas de teselados encerrados en rectángulo punteados. Las dos teselaciones en cada rectángulo tienen la misma pareja (G, S) , pero uno podría tener motivos para pensar que son distintas.

En la Figura 2.6 se muestran las 12 formas en las cuales un cuadrado puede ser teselado por 5 piezas equiangulares. Las teselas en cada caso son triángulos rectos, sea α el ángulo más pequeño del triángulo. Los triángulos

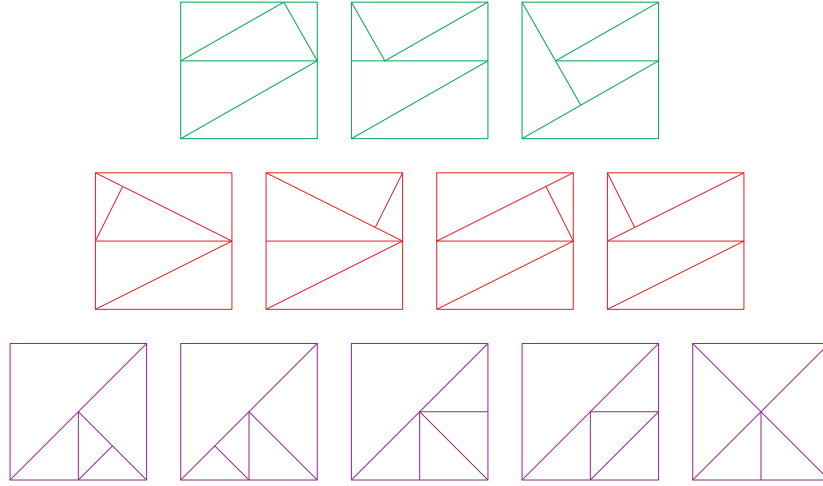


Figura 2.6: Teselaciones equianguales con cinco triángulos.

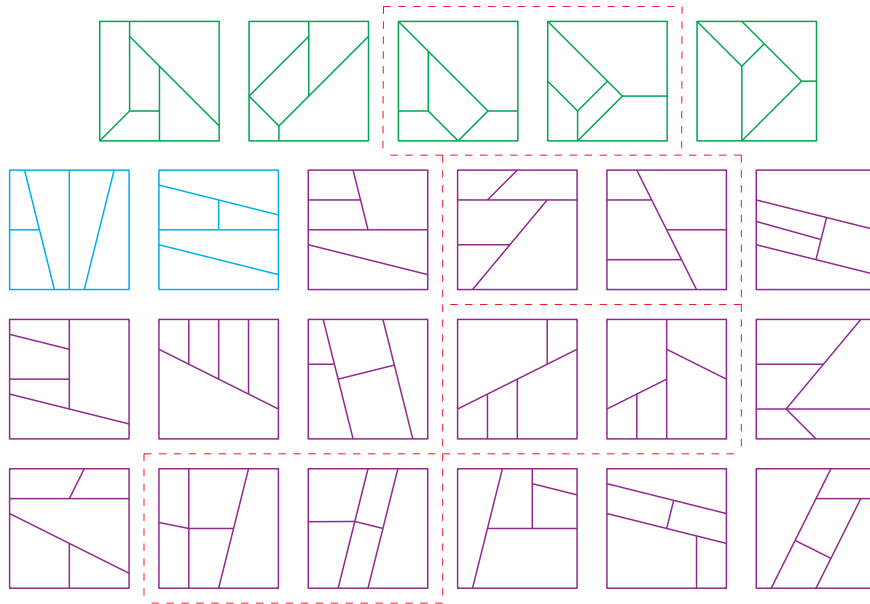


Figura 2.7: Teselaciones equianguales con cinco cuadriláteros. Los ángulos de las piezas son de la forma. $\alpha, \pi/2, \pi/2, \pi - \alpha$.

en la parte superior de la Figura 2.6 (verde) tienen $\tan(\alpha) = a \approx 0,56984$, donde a es la raíz real del polinomio $a^3 - a^2 + 2a - 1$. Los de las teselaciones en la fila de en medio (rojo) tienen $\tan(\alpha) = 1/2$. Los de las teselaciones del fondo (morado) tienen $\tan(\alpha) = 1$.

Cuando las piezas son cuadriláteros, existen 19 familias de teselaciones del cuadrado con 5 cinco cuadriláteros equiangulares. Las familias representadas en la primera fila de la Figura 2.7 (verde) tienen ángulos $\pi/4, \pi/2, \pi/2$ y $3\pi/4$. El resto tienen ángulos $\alpha, \pi/2, \pi/2$ y $\pi - \alpha$, donde α puede ser escogido, en todas, excepto en dos teselaciones, en el intervalo $(0, \pi/4)$, y a veces puede tomar otros valores. Las primeras dos teselaciones (azul) son la excepción; α solo puede ser tomado en el intervalo $(0, \arctan(1/2))$.

2.5. Comentarios finales

Como se mencionó en la Sección 2.3 la implementación de los algoritmos, documentación y algunos ejemplos se pueden encontrar en <https://github.com/XGEu2X/TilingSquare>. El tiempo de ejecución no resultó ser un problema, aunque, como cada gráfica se revisa por separado, el proceso puede ser paralelizado fácilmente. La ejecución de la prueba del Teorema 2.6 para el caso $n = 9$ toma un par de días en su ejecución en una computadora actual promedio, mientras que los demás casos se ejecutan en un par de horas a lo mucho.

Para los Teoremas 2.6 y 2.7, aumentar el número de piezas no parece factible utilizando nuestro método, puesto que el número de gráficas a considerar es simplemente muy grande. Para el caso equiangular cuando consideramos 7 piezas, nuestro algoritmo produce alrededor de 2000 gráficas. En este caso no encontramos una manera sistemática para decidir cuáles de estas gráficas eran válidas o no.

Una observación importante es que el enfoque utilizado puede emplearse para encontrar teselaciones de cualquier polígono. Esto requeriría tener su propia versión del Lema 2.2 para optimizar el procedimiento, así como lo hicimos con el Lema 2.8 en el caso equiangular. Otro hecho a considerar sería considerar otras subdivisiones para los etiquetados de los ángulos. Posiblemente, la cuestión más importante es que las gráficas generadas sean 3-conexas o en su defecto tener otra caracterización que nos permita generarlas de manera sistemática.

Regresando al caso cuando P es un rectángulo o un cuadrado, notamos

en las ejecuciones de los algoritmos que cuando el etiquetado de T es **aror**, el algoritmo usualmente tenía que explorar de manera más profunda el árbol de posibilidades de asignación de los ángulos antes de poder descartar la pareja (G, S) . Esto nos motiva a pensar que vale la pena poner especial atención en dicho tipo de piezas, pero no pudimos probar algún resultado general para las mismas.

Capítulo 3

Prescribiendo órdenes en conjuntos de distancias en el espacio

3.1. Introducción

Una pregunta común en geometría discreta es, dado un conjunto de puntos S ¿Cuántas distancias diferentes puede haber entre elementos de S ? El problema de contestar dicha pregunta es conocido como el problema de distancia de Erdős [12]. Otra pregunta relacionada es, dada una gráfica G , decidir si esta es una de distancia unitaria, *i.e.*, cuando puede esta ser realizada geoméricamente en $\mathbb{R}^d$ con aristas de longitud unitaria [2]. En el plano, este problema de decisión es NP-difícil; más aún, es completo para la teoría existencial de los reales [34].

El problema en el que nos centraremos en este capítulo está relacionado con los anteriores, pero nos concentramos solamente en el orden entre las distancias de los puntos en vez de las magnitudes en sí.

Sea $n \geq 2$, d enteros positivos y sea $P = \{p_0, \dots, p_{n-1}\}$ un conjunto de puntos en $\mathbb{R}^d$. Supongamos que los puntos de P se encuentran posicionados de un modo que cada pareja (p_i, p_j) define una única distancia. Entonces P induce un orden natural en $\binom{[n]}{2}$ (con $[n] = \{0, \dots, n-1\}$), dado por

$$(i, j) < (k, l) \iff \|p_i - p_j\| < \|p_k - p_l\|.$$

Decimos que un orden en $\binom{[n]}{2}$ es *realizable en $\mathbb{R}^d$* si existe un conjunto $P \subset \mathbb{R}^d$

el cual induce dicho orden.

La pregunta natural es la siguiente: Dados n y d , ¿qué órdenes sobre $\binom{[n]}{2}$ son realizables en $\mathbb{R}^d$? Esto es siempre posible cuando n es pequeño comparado a d . En [1], los autores estudian el problema de encontrar, para un n dado, el menor d tal que todo orden (o preorden) en $\binom{[n]}{2}$ puede ser obtenido de algún conjunto $P \subset \mathbb{R}^d$. Ellos afirman que la respuesta es $d = n - 2$ ($d = n - 1$ para preórdenes. Aunque ellos prueban que cualquier orden puede ser realizado en $\mathbb{R}^{n-2}$, el orden que muestran como no realizable en $\mathbb{R}^{n-3}$ es de hecho realizable. En la Sección 3.4 mostramos un ejemplo de un orden de ese tipo y cómo se realiza en el espacio para cada $d \geq 4$.

Por otro lado, supongamos que $2 \leq n \leq m$ y d son enteros positivos. Considera conjuntos de puntos $P = \{p_0, \dots, p_{n-1}\}$ y $Q = \{q_0, \dots, q_{m-1}\}$ en $\mathbb{R}^d$ tales que cada par de puntos $(p, q) \in P \times Q$ determina una única distancia. Entonces P y Q inducen naturalmente un orden en $[n] \times [m]$ dado por

$$(i, j) < (k, l) \iff \|p_i - q_j\| < \|p_k - q_l\|.$$

Como en el caso anterior, decimos que un orden en $[n] \times [m]$ es *realizable en $\mathbb{R}^d$* si existen conjuntos de puntos $P, Q \subset \mathbb{R}^d$ que inducen dicho orden.

Para este caso, Almendra-Hernández y Martínez-Sandoval probaron que la mínima dimensión d para la cual cualquier orden en $[n] \times [m]$ es realizable en $\mathbb{R}^d$ cumple que $n - 1 \leq d \leq n$. En la Sección 3.2 se muestra un orden en $[n] \times [n + 1]$ que no es realizable en $\mathbb{R}^{n-1}$, con lo que probamos que el valor correcto para d es precisamente n .

En la Sección 3.4 se presentan algunos resultados de experimentos computacionales relacionados con el Teorema 3.2.

El trabajo que exploramos en este capítulo es el presentado en [20] en conjunto con el Dr. Miguel Raggi y el Dr. Edgardo Roldán.

3.2. Caso bipartito

Comenzaremos por definir un tipo de orden $[d + 1] \times [d + 2]$. Más adelante mostraremos que ninguno de dicho tipo puede realizarse en $\mathbb{R}^d$.

Definición 3.1. Sea d un entero positivo y sea $<$ un orden total en $[d + 1] \times [d + 2]$. Decimos que el orden $<$ es *desalineado* si cumple las siguientes propiedades:

1. $(k, k) < (k, k - 1) < \dots < (k, k - d)$, para cada $k \in [d + 1]$,

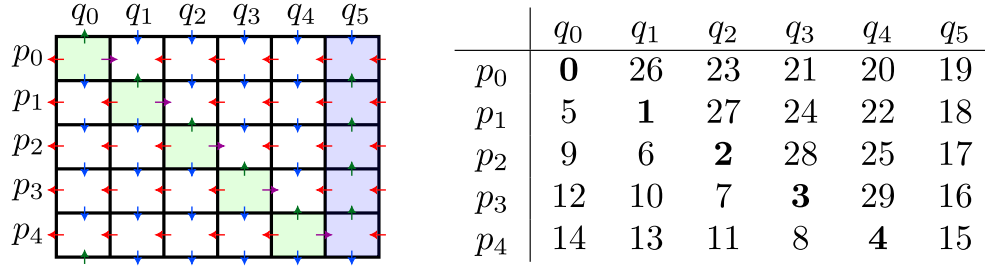


Figura 3.1: Izquierda: Las flechas representan las restricciones de orden en la Definición 3.1 (cíclicamente). Derecha: Un ejemplo para $d = 4$ de un orden desalineado.

2. $(k, k) < (k + 1, k) < \dots < (k + d, k)$, para cada $k \in [d + 1]$, y
3. $(d, d + 1) < (d - 1, d + 1) < \dots < (0, d + 1)$.

Donde las entradas de la primera y segunda coordenada de los elementos de $[d + 1] \times [d + 2]$ son tomadas (mód $d + 1$) y (mód $d + 2$), respectivamente.

Una forma fácil de entender este tipo de órdenes es utilizando la biyección

$$\varphi : [d + 1] \times [d + 2] \rightarrow [(d + 1)(d + 2)]$$

tal que

$$(i, j) < (k, l) \iff \varphi(i, j) < \varphi(k, l).$$

También podemos visualizar el orden $<$ con una tabla como en la Figura 3.1.

Las propiedades de un orden *desalineado* se pueden interpretar de la siguiente manera. La propiedad (1) pide que en cada fila, el elemento en la diagonal sea el menor, y al movernos a la izquierda hasta topar con el final de la tabla y continuar con el elemento más a la derecha, los elementos de la fila sean ascendentes hasta llegar de nuevo a la diagonal. La propiedad (2) es similar, pero para las primeras $d + 1$ columnas y moviéndonos hacia abajo. La propiedad (3) implica que los elementos en la última columna decrecen de arriba hacia abajo. En la Figura 3.1 se encuentra una representación visual de lo anterior con un orden en $[5] \times [6]$.

Es fácil construir un ejemplo de un orden desalineado: Para empezar coloca los primeros $d + 1$ números en la diagonal principal de una cuadrícula de $(d + 1) \times (d + 2)$ (en cualquier orden). Después rellena las entradas diagonales,

debajo de la diagonal principal, una por una, de tal modo que cada diagonal contenga el menor número posible. Hecho esto, rellena la última columna con los siguientes $d + 1$ números en orden creciente de abajo hacia arriba. Finalmente, rellena los espacios restantes, diagonal por diagonal, empezando por la que está más arriba y siempre utilizando el menor número posible para cada una.

Observación. Esta construcción produce

$$(d + 1)! (d!(d - 1)! \cdots 1!)^2$$

órdenes desalineados. De todos modos, este número es muy pequeño comparado al total de posibles órdenes.

En lo que resta de la sección nos enfocaremos en probar el siguiente Teorema.

Teorema 3.2. *Ningún orden desalineado en $[d + 1] \times [d + 2]$ es realizable en $\mathbb{R}^d$.*

Antes de empezar vamos a introducir notación. Si $X \subset \mathbb{R}^d$, denotamos por $\text{conv}(X)$ a la envolvente convexa de X . Si $|X| = d + 1$, denotamos por $O(X)$ al circuncentro de X .

La demostración que construiremos es una por contradicción. Supongamos que $P = \{p_0, \dots, p_d\}$ y $Q = \{q_0, \dots, q_{d+1}\}$ son subconjuntos de $\mathbb{R}^d$ tales que inducen un orden desalineado en $[d + 1] \times [d + 2]$. Por cada $i \in [n + 1]$, definimos $Q_i = Q \setminus \{q_i\}$. Nuestro objetivo es probar que $O(P)$ no puede estar dentro ni fuera del simplejo $\text{conv}(Q_{d+1})$. Para esto, comenzaremos observando algunas propiedades que tienen P y Q como consecuencia de inducir un orden desalineado.

Observación. Directamente de la Definición 3.1 se puede deducir que:

1. Para cada $p \in P$ tenemos que $d(p, q_0) < d(p, q_{d+1})$.
2. Si $i \in [d]$, entonces:
 - $d(p_{i+1}, q_{i+1}) < d(p_i, q_{i+1})$
 - $d(p_{i+1}, q_{d+1}) < d(p_i, q_{d+1})$

Pero cualquier otro elemento de Q está más cerca de p_i que de p_{i+1} .

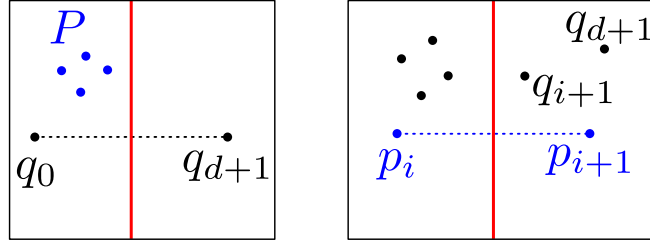


Figura 3.2: Representación visual de la propiedades de un orden desalineado. Las líneas rojas son las mediatrices de los segmentos punteados.

Denotemos por $M(x, y)$ al hiperplano mediatriz del segmento $\overline{xy}$. Tenemos que $M(x, y)$ separa los puntos más cercanos a x de los que se encuentran más cerca de y y viceversa. De este modo, la Observación sobre las propiedades de un orden desalineado se puede visualizar en la Figura 3.2.

El siguiente Lema nos muestra propiedades importantes acerca de los circuncentros de Q_{d+1} , Q_0 y P . Esto lo conseguimos utilizando algunas propiedades relevantes acerca de conos (para más cerca de conos léase [11] y [8]).

Lema 3.3. Sean $X = \{x_0, \dots, x_d\}$ y $Y = \{y_0, \dots, y_d\}$ subconjuntos de $\mathbb{R}^d$ tales que cada par de puntos en $X \times Y$ determinan una única distancia. Supongamos que para cada i tenemos que

$$\|y_i - x_i\| < \|y_i - x_{i+1}\| < \dots < \|y_i - x_{i-1}\|,$$

donde los índices los tomamos mod $d+1$. Entonces $O(X)$ se encuentra en el interior de $\text{conv}(Y)$.

Demostración. Para simplificar, considera que todos los índices los tomamos mod $d+1$. Además, podemos asumir que $O(X)$ se encuentra en el origen, por lo que cada hiperplano $M(x_i, x_j)$ contiene al origen.

Los hiperplanos $M(x_i, x_j)$ dividen $\mathbb{R}^d$ en varios conos que podemos identificar como sigue. Si $y \in \mathbb{R}^d$ es un punto que no está sobre ningún hiperplano $M(x_i, x_j)$, entonces podemos asignar a y la permutación $\sigma = (n_0, n_1, \dots, n_d)$ que representa el orden en el que las distancias desde y a los puntos x_{n_i} aparecen. En otras palabras, $\|y - x_{n_0}\| < \dots < \|y - x_{n_d}\|$. A todos los elementos del mismo cono los asignamos a la misma permutación, y los puntos en otros conos son asignados a una diferente, por lo que podemos identificar cada cono con su respectiva permutación.

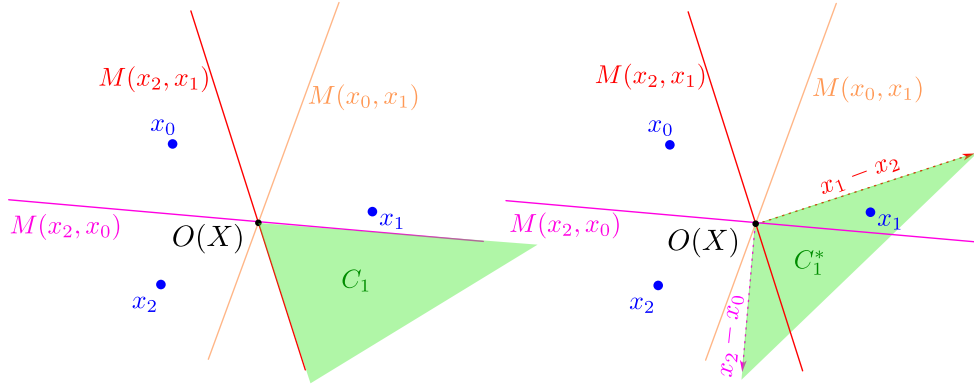


Figura 3.3: Izquierda: El cono C_1 , correspondiente a la permutación $\sigma = (1, 2, 0)$. Derecha: El cono C_1^* .

Si C_i es el cono que contiene y_i , entonces la permutación asignada a C_i es $(i, i+1, \dots, i-1)$ y ocurre que

$$C_i = M^+(x_{i+1}, x_i) \cap M^+(x_{i+2}, x_{i+1}) \cap \dots \cap M^+(x_{i-1}, x_{i-2}).$$

Antes de continuar, recordemos que si C es un cono, entonces definimos su cono dual $C^* = \{x : \langle x, y \rangle \geq 0, y \in C\}$.

Sean $v_j = x_j - x_{j+1}$ para cada $j \in [d+1]$. Entonces, C_i^* es el cono generado por el conjunto de vectores $\{x_i - x_{i+1}, x_{i+1} - x_{i+2}, \dots, x_{i-2} - x_{i-1}\} = \{v_0, \dots, v_d\} \setminus \{v_{i-1}\}$, ver Figura 3.3.

Como $\sum_{i \in [d+1]} v_i = 0$, podemos concluir que los conos C_i^* cubren $\mathbb{R}^d$.

Supongamos que $O(X)$ no está en el interior de $\text{conv}(Y)$. Entonces existe un vector v tal que $\langle v, y_i \rangle \geq 0$ para cada $i \in [d+1]$, por lo que $\langle -v, y_i \rangle < 0$ para cada $i \in [d+1]$, lo que implica que $-v \notin C_i^*$ para cada índice, pero esto contradice el hecho de que los conos C_i^* cubren $\mathbb{R}^d$. $\square$

Usemos el Lema 3.3 tres veces: Primero con $x_i = p_i$ y $y_i = q_i$ para $i \in [d+1]$; la hipótesis se satisface por la Propiedad 1 de la Definición 3.1. Seguimos aplicándolo a $x_i = q_{d+1-i}$ y $y_i = p_i$ para $i \in [d+1]$ (donde los índices de los x_i se toman mod $d+1$). La hipótesis se satisface como consecuencia la Propiedad 2 de la Definición 3.1. Finalmente, lo aplicamos con $x_i = q_{d+1-i}$ y $y_i = p_i$ para $i \in [d+1]$, donde los índices de los x_i están reducidos mod $d+1$ al conjunto $\{1, 2, \dots, d+1\}$. La hipótesis de nuevo se cumple por la Propiedad 2 de la Definición 3.1.

Las hipótesis del Lema 3.3 se satisfacen por la Definición 3.1. De esta forma obtenemos que:

$$\begin{aligned} O(P) &\in \text{conv}(Q_{d+1}), \\ O(Q_{d+1}) &\in \text{conv}(P) \text{ y} \\ O(Q_0) &\in \text{conv}(P). \end{aligned}$$

Sea $Q' = Q \setminus \{q_0, q_{d+1}\}$ y denotemos por H al hiperplano generado por Q' . Lo que sigue es probar que q_0 y q_{d+1} se encuentran en el mismo semiespacio definido por H . Consideremos la esfera circunscrita S_0 de Q_0 , entonces S_0 acota la bola B_0 con centro en $O(Q_0)$ y además $q_{d+1} \in S_0$. Análogamente, sea S_{d+1} la esfera circunscrita de Q_{d+1} y B_{d+1} la bola acotada por S_{d+1} con centro en $O(Q_{d+1})$. De la misma forma tenemos que $q_0 \in S_{d+1}$. Como ambos puntos $O(Q_0)$ y $O(Q_{d+1})$ están en $\text{conv}(P)$, además el orden es desalineado lo que implica que ambos $O(Q_0)$ y $O(Q_{d+1})$ se encuentran más cerca de q_0 que de q_{d+1} . Por lo tanto, $q_0 \in B_0$ y $q_{d+1} \notin B_{d+1}$.

En consecuencia tenemos que

$$\begin{aligned} q_0 &\in S_{d+1} \cap B_0, \\ q_{d+1} &\in S_0 \setminus B_{d+1} \end{aligned} \tag{3.4}$$

lo cual nos permite concluir que q_0 y q_{d+1} se encuentran del mismo lado de H (ver Figura 3.4).

Llamemos H^+ el semiespacio acotado por H que contiene q_0 y q_{d+1} .

Como el orden es desalineado tenemos que $M(p_i, p_{i+1})$ separa $\{q_{i+1}, q_{d+1}\}$ del resto de elementos de Q para cada $i \in [d]$ (ver Figura 3.2). Para utilizar este hecho, haremos uso del siguiente lema, el cual puede considerarse como una versión corregida del Corolario 4 en [1] (ver Sección 3.4).

Lema 3.5. *Sea $X = \{x_0, \dots, x_d\} \subset \mathbb{R}^d$ un conjunto de puntos en posición general, O un punto en el interior de $\text{conv}(X)$ y $L_0, \dots, L_d \subset \mathbb{R}^d$ hiperplanos en posición general. Para cada $i \in [d+1]$, llamemos L_i^+ a los semiespacios cerrados acotados por L_i que contienen O y L_i^- a la cerradura del complemento. Supongamos que $O \notin L_0$ y*

$$x_i \in \left(\bigcap_{j \neq i} L_j^- \right) \cap L_i^+.$$

entonces

$$O \in \bigcap_{i \in [d+1]} L_i^+ \subset \text{conv}(X).$$

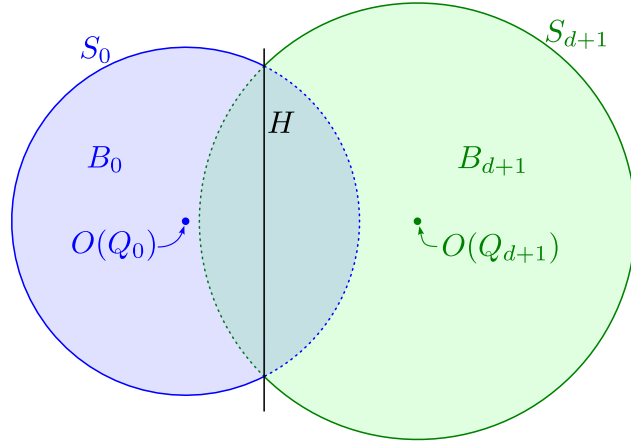


Figura 3.4: El punto q_0 debe encontrarse sobre la línea punteada verde y q_{d+1} sobre la línea azul. Por tanto, q_0 y q_{d+1} se encuentran del mismo lado de H , al igual que $O(Q_0)$.

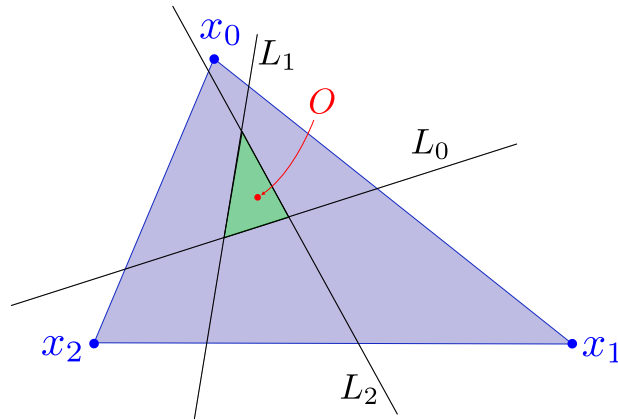


Figura 3.5: La intersección en verde está contenida dentro del simplejo azul.

El Lema puede verse ejemplificado en la Figura 3.5.

Demostración. El enunciado es trivial para $d = 1$. Consideremos $d > 1$ y sea $L := \bigcap_{i \in [d+1]} L_i^+$. Supongamos que existe un punto $y \in L$ tal que $y \notin \text{conv}(X)$. Podemos asumir que $y \in \text{int}(L)$, puesto que L es un convexo no vacío, los hiperplanos L_i están en posición general (por lo que $\text{int}(L)$ es no vacío), y $\text{conv}(X)$ es cerrado.

Como $y \notin \text{conv}(X)$ y $O \in \text{conv}(X)$, tenemos que existe un punto $z \in \text{int}(L) \cap \text{conv}(X)$ en el segmento entre O y y . Por lo tanto, existe un índice $j \in [d+1]$ tal que z es combinación convexa de los x_i , con $i \neq j$.

Los $x_i \in L_j^-$ cuando $i \neq j$, por lo que $z \in L_j^-$, pero el segmento entre O y y está contenido en L_j^+ . La única manera en la que dicho segmento pueda tener un punto interior en L_j^- es si $O, y \in L_j$, lo cual contradice la elección de y . $\square$

Si aplicamos este Lema para $O = O(P)$, $x_i = q_i$, $L_0 = H$ y $L_i = M(p_{i-1}, p_i)$ podemos concluir que $q_{d+1} \in \text{conv}(Q_{d+1}) \subset B_{d+1}$, lo cual contradice (3.4). $\square$

3.3. Caso completo

Como ya se mencionó antes, el Corolario 4 en [1] es falso. En dicho trabajo utilizan el Corolario para demostrar la Proposición 5, con la cual aseguran que no todos los órdenes en $\binom{d+3}{2}$ son realizables en $\mathbb{R}^d$. En esta sección mostramos que los órdenes que exhiben son de hecho realizables en $\mathbb{R}^d$ para todo $d \geq 4$. Por lo tanto, la pregunta sobre la mínima dimensión en el caso completo sigue abierta.

Proposición 3.6 (Contra-ejemplo a la Proposición 5 en [1]). *Para todo $d \geq 4$ existe un conjunto de puntos $P = \{p_0, \dots, p_{d+2}\}$ en $\mathbb{R}^d$ en posición general tal que cada par de puntos (distintos) define una única distancia y el orden que P induce en $\binom{d+3}{2}$ satisface las siguientes condiciones:*

1. Para cada $(i, j) \in \binom{[d]}{2}$ y $(k, l) \in \binom{[d+3]}{2} \setminus \binom{[d]}{2}$, tenemos que $(k, l) < (i, j)$,
y
2. para cada $(i, j) \in [d] \times \{d, d+1, d+2\}$ y $(k, l) \in \binom{[d+3]}{2} \setminus ([d] \times \{d, d+1, d+2\})$, tenemos que $(i, j) < (k, l)$.

Dichas condiciones piden que las distancias más largas sean entre elementos en $\binom{[d]}{2}$ y las más cortas entre los que se encuentran en $[d] \times \{d, d+1, d+2\}$.

Demostración. Para $d = 4$ tenemos el siguiente ejemplo que fue encontrado por computadora.

$$P = \{(16, 39, 7, 51), (26, 14, 0, 9), (48, 39, 47, 49), (68, 17, 27, 10), \\ (22, 13, 37, 23), (40, 54, 18, 17), (55, 18, 8, 45)\}.$$

Para $d \geq 5$, consideremos primero $\mathbb{R}^d$ como el conjunto de puntos en $\mathbb{R}^{d+1}$ cuyas coordenadas suman 1. Sea $X = \{x_0, \dots, x_d\}$ la base canónica en $\mathbb{R}^{d+1}$ tal que $\|x_i - x_j\| = \sqrt{2}$ cuando $i < j \leq d$. Sea también $c = (x_0 + \dots + x_d)/(d+1)$, y para $i \in 3$ definamos

$$y_i = c + \sqrt{2} \left(\frac{x_{2i} + x_{2i+1}}{2} - c \right) \quad (3.7)$$

tal que los vectores en $Y = \{y_0, y_1, y_2\}$ forma un triángulo equilátero, con lados de longitud

$$\|y_1 - y_0\| = \sqrt{2} \frac{\|x_2 + x_3 - x_0 - x_1\|}{2} = \sqrt{2}. \quad (3.8)$$

Gracias a la simetría entre nuestros vectores, la norma de la diferencia entre $x \in X$ y $y \in Y$ es $\|y_0 - x_0\|$ o $\|y_0 - x_2\|$. Haciendo los cálculos, se muestra que

$$\|y_0 - x_0\|^2 = 2 - \sqrt{2} - \frac{3 - 2\sqrt{2}}{d+1} < 2 - \sqrt{2} \approx 0,586$$

y

$$\|y_0 - x_2\|^2 = 2 - \frac{3 - 2\sqrt{2}}{d+1} < 2.$$

En cualquier caso, tenemos que $\|y - x\| < \sqrt{2}$.

Observemos que las coordenadas de todos los puntos en X y Y suman 1 y el conjunto $X \cup Y$ tiene $d+4$ puntos, que es uno más de los que necesitamos. Por lo que el conjunto P puede obtenerse bajo una perturbación de los vectores en $(X \setminus \{x_d\}) \cup Y$. Solo necesitamos que los tres puntos en Y se encuentren más cerca entre sí que los puntos en X . Esto lo podemos conseguir de la misma manera que en las Proposiciones 8 y 9 en [1], perturbando $X \cup Y$ podemos realizar cualquier orden en $\binom{[d]}{2} \cup \binom{\{d, d+1, d+2\}}{2}$. $\square$

3.4. Experimentos computacionales

Dados d, n, m queremos construir conjuntos de puntos para cada posible orden $[n] \times [m]$ en $\mathbb{R}^d$. Para esto podemos reformular este problema como uno de optimización.

Para cada permutación p de los elementos en $[n] \times [m]$, hacemos lo siguiente.

1. Comienza con dos conjuntos aleatorios de puntos A y B en $\mathbb{R}^d$, con n y m puntos, respectivamente.
2. Calcula todas las distancias entre los elementos de A y B .
3. Construye la permutación p' asociada al orden de dichas distancias.
4. Considera el siguiente factor de error:

$$E(A, B, p) = L_1(p, p') + d(A, B) + c(A, B)$$

Donde L_i mide la distancia entre las permutaciones, $d(A, B)$ es una penalización por tener parejas de puntos muy similares, y $c(A, B)$ otra penalización por tener parejas de puntos $(a, b) \in A \times B$, con a muy cercano a b .

5. Optimiza dicho factor hasta que $E(A, B, p) = 0$, lo cual significaría que un ejemplo ha sido encontrado. Para esto hemos utilizado *Differential Evolution* como heurística y corrimos miles de simulaciones en una GPU.

Aquí listamos algunos resultados que fueron obtenidos utilizando el método anterior:

- Para $d = 2$, $n = 3$ y $m = 3$, construimos conjuntos de puntos para todas las $9!$ permutaciones.
- Para $d = 2$, $n = 3$ y $m = 4$, de 10 000 permutaciones aleatorias, encontramos 11 para las cuales no fuimos capaces de construir un conjunto de puntos. Por otro lado, el número esperado de órdenes desalineados es $1/15\,120$.
- Para $d = 3$, $n = 4$, y $m = 4$, hemos podido construir un conjunto de puntos para cada una de las 10 000 permutaciones consideradas.

- Para $d = 3$, $n = 4$, y $m = 5$, de 10 000 permutaciones aleatorias, hubo 26 para las cuales no pudimos construir un conjunto de puntos.

Conjeturamos que todas las permutaciones de $[d + 1] \times [d + 1]$ se pueden realizar en $\mathbb{R}^d$.

Capítulo 4

Problemas de particiones en el plano y espacio euclidiano

4.1. Introducción

Sea μ una medida de Borel en $\mathbb{R}^d$, decimos que μ es una masa si $\mu(H) = 0$ para cualquier hiperplano afín. Decimos que un conjunto de hiperplanos $H_1, H_2, \dots, H_d \subset \mathbb{R}^d$ define una *equipartición* de μ si estos hiperplanos dividen $\mathbb{R}^d$ en 2^d partes de igual μ -medida. El problema de determinar el valor de d para el cual cualquier masa tiene equipartición fue propuesto por Grünbaum en 1960 [13] y es un caso especial del problema de particiones de masas de Grünbaum-Hadwiger-Ramos [32, 7]. El problema de Grünbaum tiene respuesta afirmativa para $d \leq 3$ [15, 38], respuesta negativa para $d \geq 5$ y sigue abierta para $d = 4$.

En este capítulo estamos interesados en dos variantes de dicho problema. En la primera, una condición adicional es añadida en la que pedimos que los hiperplanos sean ortogonales entre sí. En esta línea, decimos que los hiperplanos $H_1, H_2, \dots, H_k \subset \mathbb{R}^d$ definen una *equipartición ortogonal* de μ si estos hiperplanos son mutuamente ortogonales y dividen $\mathbb{R}^d$ en 2^k partes de igual μ -medida. La pregunta, dadas estas condiciones, es la siguiente:

Problema 4.1. ¿Todas las masas μ en $\mathbb{R}^d$ tienen una equipartición ortogonal con d hiperplanos?

Es un hecho conocido que la respuesta es afirmativa para $d \leq 2$ y gracias al trabajo de Avis [6] sabemos que la respuesta es negativa para $d \geq 5$. En la Sección 4.2 se responde negativamente dicha pregunta para $d \geq 3$.

La Sección 4.2 está dedicada al problema equivalente donde reemplazamos las medidas por conjuntos de puntos. Dado un conjunto de $8n$ en $\mathbb{R}^3$ una *equipartición ortogonal* de X es una partición de X en 8 conjuntos con n cada uno, los cuales pueden ser separados por 3 planos ortogonales.

En la Sección 4.3 se describe un algoritmo capaz de encontrar todas las equiparticiones ortogonales de un conjunto X . En [10] se describe un algoritmo que corre en tiempo $O(n^{15/2} \log(n))$, mientras que el nuestro lo hace en tiempo $O(n^7)$. Creemos que nuestro algoritmo puede ser mejorado para correr en tiempo $O(n^5 \log(n))$, puesto que en el caso 2-dimensional existe un algoritmo que encuentra las equiparticiones ortogonales en tiempo $O(n \log(n))$ [33]. En la misma Sección se comenta esto con más detalle.

Para la segunda variante del problema nos restringiremos al plano y a la versión discreta del problema. Sea X un conjunto de $2n$ puntos en $\mathbb{R}^2$ y t un entero positivo tal que $t \leq n/4$. Llamamos *t-partición ortogonal* a una partición de X en 4 conjuntos con t , t , $(n - t)$, y $(n - t)$ puntos en orden cíclico, tal que cada parte puede ser separada por dos rectas ortogonales.

Problema 4.2. ¿Todos los conjuntos de $2n$ puntos, X en $\mathbb{R}^2$ tienen una *t-partición ortogonal*?

La pregunta tiene respuesta afirmativa cuando t es igual a 0 o $n/4$. En el primer caso, solo es necesario encontrar una recta que parte a la mitad el conjunto y en el segundo es consecuencia de [15, 38]. Por otro lado, en [5] prueban que, utilizando la versión continua, que si μ representa un área de un cuerpo convexo K , este admite una *t-partición ortogonal* si su diámetro es al menos $\sqrt{37}$ mayor que su ancho mínimo. En la Sección 4.4 se presentan dos resultados que muestran que la pregunta tiene respuesta afirmativa para $t = 1$ y en el caso de que los puntos se encuentren en posición convexa. Además, también se incluyen algunos comentarios sobre experimentos computacionales en el intento de encontrar un ejemplo de un conjunto que no tenga una *t-partición ortogonal*.

El trabajo que exploramos en las Secciones 4.2 y 4.3, es el presentado en [22] en conjunto con el Dr. Edgardo Roldán.

4.2. Equiparticiones ortogonales de masas en la curva de momento

Podemos definir la curva de momento en $\mathbb{R}^d$ como

$$\gamma(t) = (t, t^2, \dots, t^d)$$

para $t \in \mathbb{R}$.

Para probar el Teorema 4.6 requerimos algunos Lemas. En el primero se afirma que no todos los elementos de una base ortonormal pueden estar muy lejos de una dirección dada.

Lema 4.3. *Si $\{u_1, \dots, u_d\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^d$ y $v \in \mathbb{R}^d$ un vector unitario, entonces existe un índice $i \in \{1, \dots, d\}$ tales que $|\langle u_i, v \rangle| \geq 1/\sqrt{d}$.*

Demostración. Considera el hipercubo con caras ortogonales a cada u_i . Sea $w = (u_1 + \dots + u_d)/\sqrt{d}$, entonces w es un vector unitario el cual define una línea a través dos esquinas opuestas del hipercubo. Por otro lado, existe un índice $i \in \{1, \dots, d\}$ tal que la línea generada por v cruza las dos caras opuestas F_1 y F_2 ortogonales a u_i . Observa que la línea definida por w cruza a través de esquinas de F_1 y F_2 . De esto se sigue que $|\langle u_i, v \rangle| \geq |\langle u_i, w \rangle| = 1/\sqrt{d}$. $\square$

Para M suficientemente largo, la parte de la curva de momento tal que $t \geq M$ se comporta como una línea vertical debido a que su última coordenada domina al resto. Este hecho lo utilizamos en el siguiente Lema.

Lema 4.4. *Para todo $d \geq 2$ existe un número $M_d > 0$ tal que se cumple lo siguiente:*

Si $H_1, H_2, \dots, H_d$ son hiperplanos mutuamente ortogonales en $\mathbb{R}^d$, entonces la parte de la curva de momento definida por

$$\Gamma = \{\gamma(t) : t \geq M_d\}$$

intersecta algún H_i en a lo más un punto.

Demostración. Sea u_i el vector normal a H_i con última coordenada ≥ 0 . Si $e_d = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^d$, entonces el Lema 4.3 implica que algún u_i , digamos u_1 , satisface que

$$\langle u_1, e_d \rangle \geq \frac{1}{\sqrt{d}}.$$

Supongamos que H_1 intersecta Γ en dos puntos distintos $\gamma(a)$ y $\gamma(b)$ con $0 < a, b$. Entonces el vector $v = \frac{1}{b-a}(\gamma(b) - \gamma(a))$ es paralelo a H y, por lo tanto, $\langle u_1, v \rangle = 0$.

Observemos que

$$v = \frac{\gamma(b) - \gamma(a)}{b - a} = (1, S_1, S_2, \dots, S_{d-1}),$$

donde $S_n = a^n + a^{n-1}b + \dots + ab^{n-1} + b^n$.

Si $u_1 = (x_1, \dots, x_d)$ entonces $x_d = \langle u_1, e_d \rangle \geq 1/\sqrt{d}$ y, por lo tanto,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle u_1, v \rangle = x_1 + x_2 S_1 + \dots + x_d S_{d-1} \\ &> x_1 - S_1 - \dots - S_{d-2} + \frac{S_{d-1}}{\sqrt{d}}, \end{aligned}$$

y

$$x_1 < S_1 + \dots + S_{d-2} - \frac{S_{d-1}}{\sqrt{d}}. \quad (4.5)$$

El lado derecho de esta desigualdad es un polinomio en a y b , y satisface que los coeficientes que multiplican los términos de máximo grado son negativos. Por lo tanto, si M_d es suficientemente largo y $M_d \leq a, b$, entonces (4.5) implica que $x_1 < -1$ lo cual contradice que $\|u_1\| = 1$. $\square$

Para $d = 3$ no es difícil ver que podemos escoger $M_3 < 2$. Por otro lado, para $\{\gamma(t) : t \geq 0\}$ si existen tres planos ortogonales que intersectan γ en al menos 2 puntos.

Con los Lemas anteriores estamos listos para probar el siguiente Teorema.

Teorema 4.6. *Para cada $d \geq 3$ existen una medida finita de Borel en $\mathbb{R}^d$ tal que no tiene una equipartición ortogonal por d hiperplanos.*

Demostración. Sea M_d y Γ como en el Lema 4.4 y sea μ una medida finita de Borel con soporte en Γ . Supongamos que μ tiene una equipartición ortogonal definida por hiperplanos $H_1, \dots, H_d$, entonces debe haber un segmento de longitud positiva en Γ en cada una de las 2^d componentes conexas de $\mathbb{R}^d \setminus (H_1 \cup \dots \cup H_d)$. Esto implica que Γ intersecta $H_1 \cup \dots \cup H_d$ al menos $2^d - 1$ veces.

Debido al Lema 4.4 existe un plano, digamos H_1 , que Γ intersecta solo una vez. Como Γ es un subconjunto de la curva de momento, Γ intersecta cada H_i , con $i > 1$, en a lo más d puntos. Por lo tanto, el número de puntos

de intersección entre Γ y $H_1 \cup \dots \cup H_d$ es a lo más $1 + d(d+1)$, los cuales para $d \geq 4$ son menos que $2^d - 1$. Por lo tanto, no existe un conjunto de d hiperplanos mutuamente ortogonales que definan una equipartición de μ cuando $d \geq 4$.

Para $d = 3$ tenemos que $d(d-1) + 1 = 7 = 2^d - 1$. Mostraremos que en este caso existe un segundo plano que interseca Γ en a lo más 2 puntos. Supongamos que un plano H con vector normal u interseca Γ en tres puntos $\gamma(a)$, $\gamma(b)$ y $\gamma(c)$, con $0 < a, b, c$.

Entonces el vector $v = \frac{1}{(a-b)(a-c)(b-c)}(\gamma(b) - \gamma(a)) \times (\gamma(c) - \gamma(a))$ es ortogonal a H y por tanto paralelo a u . Nótese que

$$v = (1, -a - b - c, ab + ac + bc).$$

Sean $y = a + b + c$ y $z = ab + ac + bc$, claramente tenemos que $0 < y, z$.

Si Γ interseca a H_2 y H_3 en al menos 3 puntos cada uno, sus vectores normales u_2 y u_3 son paralelos a los vectores de la forma $(1, -y_2, z_2)$ y $(1, -y_3, z_3)$, con $0 < y_2, z_2, y_3, z_3$.

Como H_2 y H_3 son ortogonales tenemos que

$$0 = \langle (1, -y_2, z_2), (1, -y_3, z_3) \rangle = 1 + y_2 y_3 + z_2 z_3 > 1,$$

lo cual es una contradicción.

Entonces, H_2 o H_3 intersecan a Γ en a lo más 2 puntos. Por lo tanto, el número de puntos intersección entre Γ y H_1, H_2, H_3 es a lo más $6 < 7 = 2^3 - 1$, probando que ningún conjunto de 3 planos mutuamente ortogonales define una equipartición de μ . $\square$

En esta Sección se ha mostrado que, para $d = 2$, Γ interseca cada par de líneas ortogonales en a lo más 3 puntos. Para $d = 3$, Γ interseca cualquier tripleta de planos mutuamente ortogonales en a lo más 6 puntos. Queda abierta la pregunta si para $d > 3$, Γ interseca cualquier conjunto de d hiperplanos en a lo más $d(d+1)/2$ puntos.

4.3. Equiparticiones ortogonales de conjuntos de puntos en el espacio

Decimos que un conjunto X de puntos en $\mathbb{R}^3$ está en *posición general*, si no existen 3 puntos colineales en X , 4 sobre el mismo plano, 6 en la unión de

2 planos ortogonales y 7 en la unión de 3 planos ortogonales. Observa que este tipo de conjuntos son los que uno esperaría al generar puntos aleatoriamente, así que podemos conseguir que cumplan dichas condiciones perturbando cualquier conjunto de puntos. Es fácil ver que, si $|X| \geq 7$, es suficiente pedir la condición de que no existan 7 puntos estén en la unión de 3 planos ortogonales para que se cumplan las demás condiciones.

Recordemos que un plano orientado $H \subset \mathbb{R}^3$ divide $\mathbb{R}^3$ en dos semiespacios abiertos. Como consideramos planos orientados, con vectores normales v , decimos que el lado positivo es el semiespacio H^+ al que apunta v y el semi-espacio opuesto H^- el negativo. Supongamos que tenemos una tripleta H_1, H_2, H_3 de planos orientados que se intersectan entre sí, entonces para cualquier selección de signos $s_1, s_2, s_3 \in \{+, -\}$ tenemos regiones cerradas definidas por

$$\bigcap_{i \in \{1,2,3\}} \overline{H_i^{s_i}}. \quad (4.7)$$

Sean X un conjunto de $8n$ puntos en $\mathbb{R}^3$ y $X_1, \dots, X_8$ una partición de X . Decimos que $X_1, \dots, X_8$ es una *partición ortogonal* de X si cada X_i tiene n puntos y existen tres planos orientados ortogonales H_1, H_2, H_3 y biyecciones $X_i \mapsto R_i$ que asignan a cada X_i una de las 8 regiones R_i definidas en 4.7, tal que $X_i \subset R_i$. En este caso decimos que los planos H_1, H_2, H_3 *certifican* la equipartición.

Nuestro algoritmo se basa en la siguiente observación.

Lema 4.8. *Si X tiene una equipartición ortogonal certificada por los planos H_1, H_2, H_3 , entonces existen planos H'_1, H'_2, H'_3 que también certifican la partición y cuya unión contiene exactamente 6 puntos de X .*

En la dirección contraria, es posible demostrar que uno siempre perturbar los planos para obtener una tripleta de planos mutuamente ortogonales que no contengan puntos de X y que también certifiquen la misma equipartición.

Si tenemos planos H_1, H_2, H_3 tales que $|H_1 \cap X| \geq |H_2 \cap X| \geq |H_3 \cap X|$, entonces solo existen dos posibilidades:

$$|H_1 \cap X| = 3, |H_2 \cap X| = 2, |H_3 \cap X| = 1,$$

o

$$|H_1 \cap X| = |H_2 \cap X| = |H_3 \cap X| = 2.$$

Sea $A_1, A_2, A_3 \subset \mathbb{R}^3$ un conjunto finito tal que $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ está en posición general. Si $|A_1| = 3$, $|A_2| = 2$ y $|A_3| = 1$, entonces es fácil revisar que existe

una única tripleta de planos ortogonales H_1, H_2 y H_3 que contienen A_1, A_2 y A_3 , respectivamente. Computar dichos planos es también una tarea sencilla.

Si $A_1 = A_2 = A_3 = 2$ entonces existe a lo más una tripleta de planos ortogonales H_1, H_2 y H_3 que contiene A_1, A_2 y A_3 , respectivamente. Dicha tripleta puede computarse como sigue:”

Primero, para cada $i \in \{1, 2, 3\}$ considera los vectores v_i los cuales son la diferencia entre los dos puntos de A_i , cada uno. Si u_i es un vector unitario normal a H_i , entonces esto es equivalente a que u_1, u_2, u_3 sea una base ortonormal tal que $u_i \perp v_i$, para cada i .

Ahora escoge a, b tal que sean vectores linealmente independientes entre sí y el plano que generan no contengan ningún v_i . Toma una base $v_i^\perp$, por ejemplo $a_i = a \times v_i$ y $b_i = b \times v_i$. Para satisfacer que $u_i \perp v_i$, cada u_i debe entonces ser una combinación lineal de a_i y b_i . Para simplificar, asume que el coeficiente de b_i es 1 y sean

$$u_i = \alpha_i a_i + b_i.$$

Para que estos vectores sean ortogonales necesitamos que, para cada $i \in \{1, 2, 3\}$,

$$\begin{aligned} 0 &= u_i \cdot u_{i+1} = \alpha_i \alpha_{i+1} (a_i \cdot a_{i+1}) + \alpha_i (a_i \cdot b_{i+1}) + \alpha_{i+1} (b_i \cdot a_{i+1}) + (b_i \cdot a_{i+1}) \\ &= A_i \alpha_i \alpha_{i+1} + B_i \alpha_i + C_i \alpha_{i+1} + D_i, \end{aligned}$$

donde los índices los tomamos (mód 3) y

$$A_i = a_i \cdot a_{i+1}, \quad B_i = a_i \cdot b_{i+1}, \quad C_i = b_i \cdot a_{i+1}, \quad D_i = b_i \cdot b_{i+1}.$$

El anterior es un sistema de tres ecuaciones cuadráticas cuya solución está dada por

$$\alpha_i = \frac{r_i \pm \sqrt{q}}{2s_i}, \quad (4.9)$$

donde

$$\begin{aligned} q &= (A_1 B_3 D_2 - A_1 C_2 D_3 + A_2 B_1 D_3 + A_2 C_3 D_1 \\ &\quad - A_3 B_2 D_1 + A_3 C_1 D_2 - B_1 B_2 B_3 - C_1 C_2 C_3)^2 \\ &\quad + 4(A_1 A_3 D_2 - A_1 C_2 C_3 + A_2 B_1 C_3 - A_3 B_1 B_2) \\ &\quad (-A_2 D_1 D_3 + B_2 B_3 D_1 - B_3 C_1 D_2 + C_1 C_2 D_3), \\ r_i &= A_i B_{i+2} D_{i+1} - A_i C_{i+1} D_{i+2} + A_{i+1} B_i D_{i+2} + A_{i+1} C_{i+2} D_i \\ &\quad - A_{i+2} B_{i+1} D_i + A_{i+2} C_i D_{i+1} - B_i B_{i+1} B_{i+2} - C_i C_{i+1} C_{i+2}, \\ s_i &= -A_i A_{i+2} D_{i+1} + A_i C_{i+1} C_{i+2} - A_{i+1} B_i C_{i+2} + A_{i+2} B_i B_{i+1}. \end{aligned}$$

Si $q < 0$, no existe una solución real y, por lo tanto, no existe una tripleta de planos H_1, H_2, H_3 que satisfaga las propiedades requeridas. Si $s_i = 0$, podríamos no asumir que $b_i = 1$. En otras palabras, podría haber una solución cuando $u_i = b_i$. Dichos casos deben revisarse. Si los vectores u_1, u_2, u_3 son encontrados, solo necesitamos construir los planos $u_1^\perp, u_2^\perp, u_3^\perp$ y trasladarlos apropiadamente para determinar H_1, H_2, H_3 . Debido a la elección del signo en (4.9) existen 8 soluciones reales, las cuales corresponden a tripletas de vectores de la forma $\pm u_1, \pm u_2, \pm u_3$ y que describen la misma tripleta de planos.

Para los cálculos computacionales es importante observar que el valor de q en (4.9) no depende del índice, así que los parámetros que definen los planos H_1, H_2, H_3 tienen coeficientes en $\mathbb{Q}[\sqrt{q}]$. Esto significa que, si $q \geq 0$, podemos determinar de manera exacta si un punto dado se encuentra en el lado positivo o negativo de un plano.

En este punto estamos listos para describir el algoritmo 1. Este recibe como entrada un conjunto de $8n$ puntos en posición general. Primero, para cada tripleta $A_1, A_2, A_3 \subset X$ con $|A_1| = 3$, $|A_2| = 2$ y $|A_3| = 1$, utilizamos la función `PLANES_321` para construir los planos ortogonales H_1, H_2, H_3 que satisfacen $H_1 \cap X = A_1$, $H_2 \cap X = A_2$ y $H_3 \cap X = A_1$. Después, la función `PARTITIONS` para construir todas las posibles particiones de X certificadas por estos planos. Esto lo realiza asignando las posibles regiones en las que pueden encontrarse a cada uno de los 6 puntos de X en $H_1 \cup H_2 \cup H_3$. Si todas las partes tienen el mismo tamaño, la partición es añadida a la lista de particiones ortogonales.

Al terminar este proceso para las tripletas con 3, 2 y 1 elementos, realiza su equivalente para las tripletas $A_1, A_2, A_3 \subset X$ con $|A_1| = |A_2| = |A_3| = 2$. Para esto, utiliza la función `PLANES_222` para construir, si estos existen, los planos ortogonales H_1, H_2, H_3 que satisfacen $H_1 \cap X = A_1$, $H_2 \cap X = A_2$ y $H_3 \cap X = A_1$. Si dichos planos existen, el algoritmo procede como en el caso anterior.

Nuestro algoritmo corre en tiempo $O(n^7)$, puesto que toma tiempo $O(n^6)$ iterar sobre los conjuntos A_1, A_2, A_3 y para cada una de estas tripletas se requiere tiempo $O(n)$ revisar si forman una equipartición.

Creemos que esto se puede mejorar para correr en tiempo $O(n^{9/2} \log(n))$. Esto debido a que para cada conjunto X que revisamos con una equipartición, esta se puede certificar con planos que satisfacen $|H_1 \cap X| = 3$, $|H_2 \cap X| = 2$ y $|H_3 \cap X| = 1$. En el caso de que solo fuera necesario revisar este tipo de planos para asegurar que un conjunto X no tiene equipartición ortogonal,

Algoritmo 1: Encontrando equiparticiones ortogonales en dimensión 3.

Datos: Un conjunto $X \subset \mathbb{R}^3$ de $8n$ puntos con coordenadas enteras en posición general.

Resultado: Un conjunto E de equiparticiones ortogonales de X .

$E \leftarrow \emptyset$

para todo $A_1 \in \binom{X}{3}, A_2 \in \binom{X}{2}, A_3 \in \binom{X}{1}$ **hacer**

$H_1, H_2, H_3 \leftarrow \text{PLANES_321}(A_1, A_2, A_3)$

para todo $p \in \text{PARTITIONS}(X, H_1, H_2, H_3)$ **hacer**

si p define una equipartición **entonces**

 Añade p a E

fin

fin

fin

para todo $A_1 \in \binom{X}{2}, A_2 \in \binom{X}{2}, A_3 \in \binom{X}{2}$, todos distintos **hacer**

$H_1, H_2, H_3 \leftarrow \text{PLANES_222}(A_1, A_2, A_3)$ **si** H_1, H_2, H_3 son planos

 válidos **entonces**

para todo $p \in \text{PARTITIONS}(X, H_1, H_2, H_3)$ **hacer**

si p es una equipartición **entonces**

 Añade p a E

fin

fin

fin

fin

entonces podríamos iterar solo sobre los conjuntos $A_1 \subset X$, con $|A_1| = 3$, para encontrar los planos $H_1 \supset A_1$ que parten a la mitad a X (de los cuales hay a lo más $n^{5/2}$ [35]). Después, proyectamos X sobre H_1 y resolvemos la versión 2-dimensional del problema sobre H_1 (en tiempo $O(n \log(n))$ [33]) lo cual produce planos H_2, H_3 ortogonales entre sí y a H_1 . Al final nos sigue tomando tiempo $O(n)$ para revisar si este proceso forma una equipartición.

La implementación de nuestro algoritmo se puede encontrar en el siguiente repositorio: <https://github.com/XGEu2X/Grunbaum-3d-Partitions>. Esta utiliza SageMath para realizar los cálculos con valores indicados. El repositorio incluye instrucciones de uso, algunos experimentos realizados y un par de ejemplos de conjuntos de puntos, uno tiene equipartición ortogonal y el segundo no. Cabe resaltar que dicho ejemplo no se encuentra sobre la curva de momento.

4.4. Particiones ortogonales de conjuntos de puntos en el plano

En esta sección asumimos que los conjuntos de puntos se encuentran en posición general. Los planos y las regiones que definen las denotaremos igual que en la Sección 4.3, sustituyendo el uso de H por el de l , puesto que estamos hablando de rectas. Además, cabe notar que al situarnos en $\mathbb{R}^2$ las direcciones para de rectas se pueden tomar en S^1 . Antes de comenzar a presentar las definiciones y resultados de esta sección, enunciamos el Teorema de *Ham-Sandwich* [25].

Teorema 4.10 (Ham-Sandwich, versión discreta). *Sean $S_1, \dots, S_d$ conjuntos de puntos en $\mathbb{R}^d$. Entonces existe un hiperplano orientado H tal que $|S_i \cap H^+| \leq |S_i|/2$ y $|S_i \cap H^-| \leq |S_i|/2$, para cada S_i .*

Este conocido resultado es usualmente demostrado en su versión general utilizando el Teorema de *Borsuk-Ulam*. Aquí no incluimos una demostración para no desviarnos del tema principal de la sección. Por otro lado también es útil señalar la siguiente observación.

Observación. Si $X \subset \mathbb{R}^2$ es un conjunto con n puntos y $0 < k \leq n$ es un entero, tenemos que para cada dirección en S^1 sucede uno de los siguientes escenarios. Existe una recta orientada l con $|l^+ \cap X| = k$ o una recta orientada l con $|l^+ \cap X| = k - 1$ y $|l \cap X| = 2$.

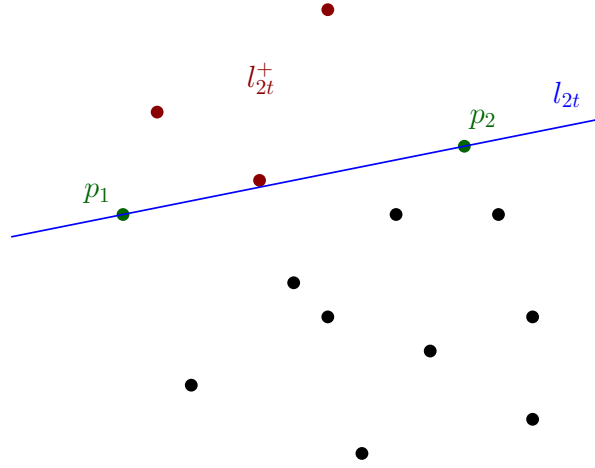


Figura 4.1: La línea l_{2t} define dos particiones para X . Ambas tienen en el semiplano positivo a los puntos en rojo y cada una contiene un punto en verde.

Si $X \subset \mathbb{R}^2$ es un conjunto de $2n$ elementos y $0 \leq t \leq n/2$ es un entero, decimos que el par de rectas (l_n, l_{2t}) forman una t -partición de X si se cumple que $|l_n^+ \cap l_{2t}^+ \cap X| = t$, $|l_n^- \cap l_{2t}^+ \cap X| = t$, $|l_n^+ \cap l_{2t}^- \cap X| = n-t$, y $|l_n^- \cap l_{2t}^- \cap X| = n-t$. Además decimos que es una t -partición ortogonal si las rectas son ortogonales entre sí.

En consecuencia de la observación anterior, para cada dirección en S^1 podemos elegir al menos una recta l_{2t} y por el Teorema 4.10 una recta l_n respecto a l_{2t} , para formar una t -partición; excepto para las que cumplen el segundo escenario de la observación 4.4. En este caso podemos elegir que punto forma parte de l_{2t}^+ y formar una t -partición para cada elección (ver Figura 4.1). Nótese que siempre podemos tomar la recta l_n que minimice $|\alpha - \pi/2|$, donde α es el ángulo correspondiente a la región $l_n^+ \cap l_{2t}^+$. Además, podemos realizar la misma construcción si comenzamos con una recta que parte a la mitad. Entonces las t -particiones de X casi inducen una partición de S^1 , salvo por los extremos donde coinciden dos particiones.

El siguiente Lema será de gran utilidad para demostrar los dos resultados principales de esta sección.

Lema 4.11. *Sea X un conjunto de $2n$ puntos en el plano y $0 \leq t \leq n/2$ un entero. Si existen parejas de rectas (l_n, l_{2t}) y (h_n, h_{2t}) que inducen t -*

particiones de X , tales que los ángulos correspondientes a las regiones $l_n^+ \cap l_{2t}^+$ y $h_n^+ \cap h_{2t}^+$ son agudo y obtuso, respectivamente, entonces X tiene una t -partición ortogonal.

Antes de demostrar el lema hagamos una observación. Consideremos una pareja de rectas (l_n, l_{2t}) que induce una t -partición de X con ángulo $\alpha < \pi/2$, correspondiente a la región $l_n^+ \cap l_{2t}^+$. Tomemos la dirección de l_{2t} y rotemos esta, en sentido contrario a las manecillas del reloj, hasta que lleguemos al límite de la partición. Llamemos l_{2t+1} a la recta en dicha dirección. Si el par de rectas (l_n, l_{2t+1}) tiene ángulo $\alpha' \geq \pi/2$, es evidente que existe una dirección intermedia en la que su recta l'_{2t} induce una t -partición ortogonal junto a la recta l_n . En el caso que $\alpha' < \pi/2$, este ángulo es el mayor posible, puesto que estamos en el límite de la partición. Además, si escogemos una recta l'_n ortogonal a l_{2t+1} que parte X a la mitad, esta cumple que $|l'_n \cap l_{2t+1}| > t$. Podemos realizar el mismo análisis para el par (h_n, h_{2t}) rotando en el sentido de las manecillas del reloj.

Dicho lo anterior, podemos describir el Lema 4.11 como sigue.

Lema 4.12. *Sea X un conjunto de $2n$ puntos en el plano y $0 \leq t \leq n/4$ un entero. Si existen parejas de rectas ortogonales (l_n, l_{2t}) y (h_n, h_{2t}) que cumplen que:*

1. $|l_n^+| = |h_n^+| = n$
2. $|l_{2t}^+| = |h_{2t}^+| = 2t$
3. $|l_n^+ \cap l_{2t}^+ \cap X| \geq t$
4. $|h_n^+ \cap h_{2t}^+ \cap X| \leq t$

Entonces X tiene una t -partición ortogonal.

Demostración. Para facilitar la escritura, vamos a utilizar los signos que aparecen en las particiones en el orden que los hemos escrito hasta ahora. Escribamos $(+, +)$, $(+, -)$, $(-, +)$, $(-, -)$, donde el primer signo se refiere al de la línea que parte a la mitad y el segundo a la otra.

Observemos como cambian de región los puntos en las direcciones que sirven de transición entre particiones, cuando rotamos en sentido antihorario. Si la partición cambió debido a la recta que divide a la mitad, entonces ocurre uno de los siguientes escenarios:

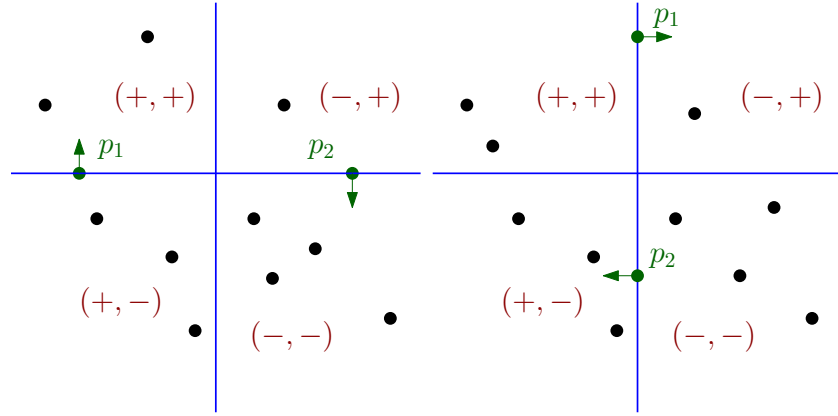


Figura 4.2: Izquierda: Al rotar en sentido antihorario, los puntos p_1 y p_2 pasan de $(+, -)$ a $(+, +)$ y de $(-, +)$ a $(-, -)$, respectivamente. Derecha: Al rotar, los puntos p_1 y p_2 pasan de $(+, +)$ a $(-, +)$ y de $(-, -)$ a $(+, -)$, respectivamente.

- Un punto pasa de $(+, \pm)$ a $(-, \pm)$ y otro de $(-, \pm)$ a $(+, \pm)$.
- Un punto pasa de $(+, +)$ a $(-, +)$ y otro de $(-, -)$ a $(+, -)$.

En ambos casos el tamaño de las partes cambia en a lo más 1. Lo mismo ocurre con las rectas que dividen en proporción $2t$ (ver Figura 4.2). Más aún, si ambos cambios ocurren en la misma dirección, ninguna partición recibe dos puntos a la vez. Por lo tanto, las hipótesis (3) y (4) implican que existe una dirección con t -partición ortogonal. $\square$

Ambas versiones del lema nos permiten utilizar la siguiente estrategia al querer probar si un conjunto tiene t -partición ortogonal. Al suponer que no es el caso, podemos asumir que todas las parejas de rectas (l_n, l_{2t}) ortogonales tales que $|l_n^+| = n$ y $|l_{2t}^+| = 2t$, cumplen que $|l_n^+ \cap l_{2t}^+ \cap X| > t$. También podemos asumir que todas las parejas de rectas (l_n, l_{2t}) que inducen t -particiones de X tienen ángulo correspondiente a la región $l_n^+ \cap l_{2t}^+$ agudo. Equivalentemente, podemos asumir que $|l_n^+ \cap l_{2t}^+ \cap X| < t$ para cada pareja de rectas ortogonales o que el ángulo correspondiente a la región $l_n^+ \cap l_{2t}^+$ es obtuso para rectas que inducen t -partición, puesto que un conjunto X tiene t -partición ortogonal si y solo si cualquier reflejado por una recta de X la tiene.

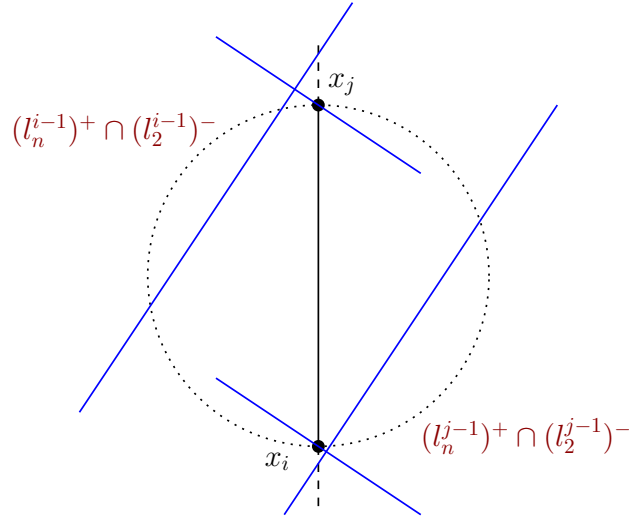


Figura 4.3: Al encontrarse todos los puntos de X dentro del círculo, tenemos que la recta descrita por el segmento $x_i x_j$ separa las regiones $(+, -)$ para ambas parejas de rectas.

Dicho esto, podemos proceder con el primero de los dos resultados principales de la sección utilizando el Lema 4.12.

Teorema 4.13. *Todos los conjuntos $X \subset \mathbb{R}^2$ con $2n$ elementos tienen 1-partición ortogonal.*

Demostración. Supongamos que X no tiene 1-partición ortogonal. Entonces podemos asumir que cualquier par de rectas (l_n, l_{2t}) tales que $|l_n^+| = n$ y $|l_{2t}^+| = 2t$ cumple que $|l_n^+ \cap l_{2t}^+ \cap X| = 0$.

Listemos los elementos de X en su envolvente convexa, en sentido anti-horario, como $x_0, \dots, x_{k-1}$. Los segmentos $x_i x_{i+1}$ induce rectas ortogonales (l_n^i, l_2^i) tales que $|l_n^i| = n$ y $|l_2^i| = 2$. Más aún $(l_n^i)^+ \cap (l_2^i)^+ \cap X = \emptyset$, considerando todos los índices (mód k).

Ahora consideremos dos elementos $x_i, x_j \in X$ tales que $d(x_i, x_j) \geq d(x, y)$ para cada $x, y \in X$. Como estos puntos son diametrales, entonces todos los elementos de X se encuentran dentro del círculo $\mathcal{C}$ con diámetro $x_i x_j$. En consecuencia, es fácil ver que la recta que contiene a x_i y x_j separa a $(l_n^{i-1})^+ \cap (l_2^{i-1})^-$ y $(l_n^{j-1})^+ \cap (l_2^{j-1})^-$. Por lo tanto, tenemos que

$$|X| \geq |(l_n^{i-1})^+ \cap (l_2^{i-1})^- \cap X| + |(l_n^{j-1})^+ \cap (l_2^{j-1})^- \cap X| + 2 = 2n + 2,$$

lo cual es una contradicción (ver Figura 4.3). $\square$

Para el segundo resultado, vamos a utilizar el Lema 4.11.

Teorema 4.14. *Sea $X \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto en posición convexa con $2n$ elementos y $0 \leq t \leq n/4$ un entero. Entonces X tiene una t -partición ortogonal.*

Demostración. En esta prueba todos los índices los consideramos (mód $2n-1$). Para comenzar listemos los elementos de X , en sentido antihorario, como $x_0, \dots, x_{2n-1}$. Los pares de rectas (l_n^{i+t}, l_{2t}^i) definidas por los segmentos $x_i x_{(i+2t)}$ y $x_{(i+t)} x_{(i+t+n)}$ forman una t -partición. Supongamos que X no tiene una t -partición ortogonal, entonces los ángulos correspondientes a las regiones $(l_n^{i+t})^+ \cap (l_{2t}^i)^+$ son agudos, lo que es equivalente a que

$$\langle x_{(i+2t)} - x_i, x_{(i+t)} - x_{(i+t+n)} \rangle < 0,$$

se cumpla para cada i .

Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{2n-1} \langle x_{(i+2t)} - x_i, x_{(i+t)} - x_{(i+t+n)} \rangle \\ &= \sum_{i=0}^{2n-1} \langle x_{(i+2t)}, x_{(i+t)} \rangle - \langle x_{(i+t+n)}, x_{(i+2t)} \rangle - \langle x_{(i+t)}, x_i \rangle + \langle x_i, x_{(i+t+n)} \rangle \\ &= \sum_{i=0}^{2n-1} \langle x_{(i+2t)}, x_{(i+t)} \rangle - \sum_{i=0}^{2n-1} \langle x_{(i+t+t)}, x_{(i+t)} \rangle \\ & \quad + \sum_{i=0}^{2n-1} \langle x_i, x_{(i+t+n)} \rangle - \sum_{i=0}^{2n-1} \langle x_{(i+t+n+n-t)}, x_{(i+2t+n-t)} \rangle = 0, \end{aligned}$$

lo cual nos lleva a una contradicción. $\square$

Para finalizar, los Teoremas 4.13 y 4.14 en conjunto con los experimentos computacionales que realizamos nos llevan a creer que todo conjunto tiene t -partición ortogonal. Lamentablemente, no fuimos capaces de construir una demostración para el caso general. Sobre los experimentos, realizamos la búsqueda de un conjunto sin dicho tipo de partición sin éxito, para conjuntos con hasta 26 puntos. Para esto utilizamos variantes de los algoritmos mencionados en la Sección 4.3 y *Differential Evolution* como heurística de búsqueda.

Bibliografía

- [1] Almendra-Hernández, Víctor Hugo and Martínez-Sandoval, Leonardo. On prescribing total orders and preorders to pairwise distances of points in Euclidean space. *Comput. Geom.*, 107:Paper No. 101898, 10, 2022. doi:10.1016/j.comgeo.2022.101898.
- [2] Alon, Noga and Kupavskii, Andrey. Two notions of unit distance graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 125:1–17, 2014. doi:10.1016/j.jcta.2014.02.006.
- [3] Appel, K. and Haken, W. Every planar map is four colorable. Part I: Discharging. *Illinois Journal of Mathematics*, 21(3):429 – 490, 1977. doi:10.1215/ijm/1256049011.
- [4] Appel, K., Haken, W., and Koch, J. Every planar map is four colorable. Part II: Reducibility. *Illinois Journal of Mathematics*, 21(3):491 – 567, 1977. doi:10.1215/ijm/1256049012.
- [5] Arocha, J., Montejano, L., and Roldán-Pensado, E. On a conjecture of grünbaum concerning partitions of convex sets. *Periodica Mathematica Hungarica*, 60:41–47, 2010. doi:10.1007/s10998-010-1041-7.
- [6] Avis, David. Non-partitionable point sets. *Information Processing Letters*, 19(3):125–129, 1984. doi:10.1016/0020-0190(84)90090-5.
- [7] Blagojevic, Pavle V. M., Frick, Florian, Haase, Albert, and Ziegler, Günter M. Topology of the grünbaum-hadwiger-ramos hyperplane mass partition problem, 2018. URL: <https://arxiv.org/abs/1502.02975>, arXiv:1502.02975.

- [8] Boltyanski, Vladimir, Martini, Horst, and Soltan, Petru S. *Excursions into combinatorial geometry*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 1997. doi:10.1007/978-3-642-59237-9.
- [9] Brinkmann, Gunnar and McKay, Brendan D. Fast generation of planar graphs. *Match-communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, 58:323–357, 2007. URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:116425311>.
- [10] Diaz, Matthew Galen. *Algorithms for balanced partitioning of polygons and point sets*. PhD thesis, USA, 1991. UMI Order No. GAX91-13656. URL: <https://dl.acm.org/doi/abs/10.5555/123890>.
- [11] Ewald, Günter. *Combinatorial convexity and algebraic geometry*, volume 168 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1996. doi:10.1007/978-1-4612-4044-0.
- [12] Garibaldi, Julia, Iosevich, Alex, and Senger, Steven. *The Erdős distance problem*, volume 56 of *Student Mathematical Library*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2011. doi:10.1090/stml/056.
- [13] Grünbaum, B. Partitions of mass-distributions and of convex bodies by hyperplanes. *Pacific J. Math.*, 10:1257–1261, 1960. URL: <https://msp.org/pjm/1960/10-4/pjm-v10-n4-p18-s.pdf>.
- [14] Grünbaum, Branko. Graphs of polyhedra; polyhedra as graphs. *Discrete Mathematics*, 307(3):445–463, 2007. Algebraic and Topological Methods in Graph Theory. doi:10.1016/j.disc.2005.09.037.
- [15] Hadwiger, H. Simultane Verteilung zweier Körper (German). *Arch. Math. (Basel)*, 17:274–278, 1966. doi:10.1007/BF01899586.
- [16] Hagberg, Aric A., Schult, Daniel A., Swart, Pieter, and Hagberg, JM. Exploring network structure, dynamics, and function using networkx. 2008. URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:16050699>.
- [17] Haselgrove, C. B. A disproof of a conjecture of pólya. *Mathematika*, 5(2):141–145, 1958. doi:10.1112/S0025579300001480.

- [18] Helly, Ed. Über mengen konvexer körper mit gemeinschaftlichen punkte. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 32:175–176, 1923. URL: <http://eudml.org/doc/145659>.
- [19] König, Dénes. Über konvexe körper. *Mathematische Zeitschrift*, 14:208 – 210, 1922. doi:10.1007/BF01215899.
- [20] Maldonado, Gerardo L., Pérez, Miguel Raggi, and Roldán-Pensado, Edgardo. Total orders realizable as the distances between two sets of points, 2024. URL: <https://arxiv.org/abs/2304.05535>, arXiv:2304.05535.
- [21] Maldonado, Gerardo L. and Roldán-Pensado, Edgardo. Dissecting the square into seven or nine congruent parts. *Discrete Mathematics*, 345(5):112800, 2022. doi:10.1016/j.disc.2022.112800.
- [22] Maldonado, Gerardo L. and Roldán-Pensado, Edgardo. On the orthogonal grünbaum partition problem in dimension three, 2024. URL: <https://arxiv.org/abs/2404.01504>, arXiv:2404.01504.
- [23] Maltby, Samuel J. Solution to problem 875. *Crux Mathematicorum*17, pages 141–146, 1991. URL: https://cms.math.ca/wp-content/uploads/crux-pdfs/Crux_v17n03_Mar.pdf.
- [24] Maltby, Samuel J. Trisecting a rectangle. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 66(1):40–52, 1994. doi:10.1016/0097-3165(94)90049-3.
- [25] Matousek, J. *Lectures on discrete geometry*, volume 212. Springer New York, NY, 2013. doi:10.1007/978-1-4613-0039-7.
- [26] Meurer, Aaron, Smith, Christopher P., Paprocki, Mateusz, Čertík, Ondřej, Kirpichev, Sergey B., Rocklin, Matthew, Kumar, AMiT, Ivanov, Sergiu, Moore, Jason K., Singh, Sartaj, Rathnayake, Thilina, Vig, Sean, Granger, Brian E., Muller, Richard P., Bonazzi, Francesco, Gupta, Harsh, Vats, Shivam, Johansson, Fredrik, Pedregosa, Fabian, Curry, Matthew J., Terrel, Andy R., Roučka, Stepán, Saboo, Ashutosh, Fernando, Isuru, Kulal, Sumith, Cimrman, Robert, and Scopatz, Anthony. Sympy: symbolic computing in python. *PeerJ Computer Science*, 3:e103, January 2017. doi:10.7717/peerj-cs.103.

- [27] Monsky, Paul. On dividing a square into triangles. *The American Mathematical Monthly*, 77(2):161–164, 1970. URL: <http://www.jstor.org/stable/2317329>.
- [28] Montejano, Amanda. *Matemáticas de colores*. Fondo de cultura económica (FCE), 2022. URL: <https://books.google.com.mx/books?id=OdlpEAAAQBAJ>.
- [29] Pólya, G. Verschiedene Bemerkungen zur Zahlentheorie. *Jahresber. Dtsch. Math.-Ver.*, 28:31–40, 1919. URL: <https://eudml.org/doc/145560>.
- [30] Radon, Johann. Mengen konvexer körper, die einen gemeinsamen punkt enthalten. *Mathematische Annalen*, 83:113 – 115, 1921. doi:10.1007/BF01464231.
- [31] Rao, Hui, Ren, Lei, and Wang, Yang. Dissecting a square into congruent polygons. *Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science*, 22(Combinatorics), 2020. doi:10.23638/DMTCS-22-1-21.
- [32] Roldán-Pensado, E. and Soberón, P. A survey of mass partitions. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 59(2):227–267, 2022. doi:10.1090/bull/1725.
- [33] Roy, Sambuddha and Steiger, William. Some combinatorial and algorithmic applications of the borsuk–ulam theorem. *Graphs and Combinatorics*, 23:331–341, 06 2007. doi:10.1007/s00373-007-0716-1.
- [34] Schaefer, Marcus. *Realizability of Graphs and Linkages*, pages 461–482. Springer New York, New York, NY, 2013. doi:10.1007/978-1-4614-0110-0_24.
- [35] Sharir, M., Smorodinsky, S., and Tardos, G. An improved bound for k-sets in three dimensions. *Discrete & Computational Geometry*, 26:195–204, 2001. URL: <https://doi.org/10.1007/s00454-001-0005-3>.
- [36] Tanaka, Minoru. A Numerical Investigation on Cumulative Sum of the Liouville Function. *Tokyo Journal of Mathematics*, 3(1):187 – 189, 1980. doi:10.3836/tjm/1270216093.

- [37] Thomas, John. A dissection problem. *Mathematics Magazine*, 41(4):187–190, 1968. doi:10.1080/0025570X.1968.11975875.
- [38] Yao, F., Dobkin, David, Edelsbrunner, Herbert, and Paterson, Mike. Partitioning space for range queries. *SIAM J. Comput.*, 18:371–384, 04 1989. doi:10.1137/0218025.
- [39] Yuan, Liping, Zamfirescu, Carol T., and Zamfirescu, Tudor I. Dissecting the square into five congruent parts. *Discrete Mathematics*, 339(1):288–298, 2016. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0012365X15002940>, doi:10.1016/j.disc.2015.08.009.

Gerardo Lauro Maldonado Martínez

Métodos Computacionales en Geometría Discreta.pdf

 Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Detalles del documento

Identificador de la entrega

trn:oid:::3117:439014008

Fecha de entrega

13 mar 2025, 8:11 a.m. GMT-6

Fecha de descarga

13 mar 2025, 8:32 a.m. GMT-6

Nombre de archivo

Métodos Computacionales en Geometría Discreta.pdf

Tamaño de archivo

1.2 MB

62 Páginas

17,388 Palabras

79,879 Caracteres

9% Similitud general

El total combinado de todas las coincidencias, incluidas las fuentes superpuestas, para ca...

Fuentes principales

- 9%  Fuentes de Internet
- 5%  Publicaciones
- 0%  Trabajos entregados (trabajos del estudiante)

Marcas de integridad

N.º de alerta de integridad para revisión



Caracteres reemplazados

52 caracteres sospechosos en N.º de páginas

Las letras son intercambiadas por caracteres similares de otro alfabeto.

Los algoritmos de nuestro sistema analizan un documento en profundidad para buscar inconsistencias que permitirían distinguirlo de una entrega normal. Si advertimos algo extraño, lo marcamos como una alerta para que pueda revisarlo.

Una marca de alerta no es necesariamente un indicador de problemas. Sin embargo, recomendamos que preste atención y la revise.

Formato de Declaración de Originalidad y Uso de Inteligencia Artificial

Coordinación General de Estudios de Posgrado
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo



A quien corresponda,

Por este medio, quien abajo firma, bajo protesta de decir verdad, declara lo siguiente:

- Que presenta para revisión de originalidad el manuscrito cuyos detalles se especifican abajo.
- Que todas las fuentes consultadas para la elaboración del manuscrito están debidamente identificadas dentro del cuerpo del texto, e incluidas en la lista de referencias.
- Que, en caso de haber usado un sistema de inteligencia artificial, en cualquier etapa del desarrollo de su trabajo, lo ha especificado en la tabla que se encuentra en este documento.
- Que conoce la normativa de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, en particular los Incisos IX y XII del artículo 85, y los artículos 88 y 101 del Estatuto Universitario de la UMSNH, además del transitorio tercero del Reglamento General para los Estudios de Posgrado de la UMSNH.

Datos del manuscrito que se presenta a revisión		
Programa educativo	Doctorado en Ciencias Matemáticas	
Título del trabajo	Métodos Computacionales en Geometría Discreta	
	Nombre	Correo electrónico
Autor/es	Gerardo Lauro Maldonado Martínez	¿
Director	Edgardo Roldán Pensado	eroldan@matmor.umich.mx
Codirector		
Coordinador del programa	Elmar Wagner	elmar@ifm.umich.mx

Uso de Inteligencia Artificial		
Rubro	Uso (sí/no)	Descripción
Asistencia en la redacción	No	

Formato de Declaración de Originalidad y Uso de Inteligencia Artificial

Coordinación General de Estudios de Posgrado
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo



Uso de Inteligencia Artificial		
Rubro	Uso (sí/no)	Descripción
Traducción al español	No	
Traducción a otra lengua	No	
Revisión y corrección de estilo	No	
Análisis de datos	No	
Búsqueda y organización de información	No	
Formateo de las referencias bibliográficas	No	
Generación de contenido multimedia	No	
Otro	No	

Datos del solicitante	
Nombre y firma	MARTINEZ ✓
Lugar y fecha	Morelia, Michoacán, 12 de Marzo del 2025