



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO
Y
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO



POSGRADO CONJUNTO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
UNAM-UMSNH

INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS
Y
CENTRO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS



CW-Complejos Cuánticos Finitos.

T E S I S

Que para optar por el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas
Presenta:

ARLEY YESSIT SIERRA ACOSTA

Director de tesis: Dr. Elmar Wagner

Instituto de Física y Matemáticas

MORELIA, MICHOACÁN - NOVIEMBRE

DE 2025.

AGRADECIMIENTOS	3
INTRODUCCIÓN	5
1. C*-ÁLGEBRAS Y SUCESIONES ESPECTRALES	8
1.1. Generalidades sobre C*-álgebras	8
1.2. C*-álgebra de Toeplitz	11
1.3. C*-álgebras gráficas	14
1.4. K-teoría de C*-álgebras	16
1.5. Teoría de Brown-Douglas Fillmore	22
1.6. Sucesiones espectrales homológicas	26
1.6.1. Parejas exactas	29
1.6.2. Sucesión espectral de Shochet	31
2. SUPERFICIES COMPACTAS CUÁNTICAS	33
2.1. Superficies Compactas Cuánticas	33
2.2. BDF y Superfices Compactas Cuánticas	38
2.3. Clases de isomorfismos	40
2.3.1. K-teoría de Superficies Compactas Cuánticas	46
3. CW-COMPLEJOS FINITOS NO-CONMUTATIVOS	51
3.1. Motivación CW-complejos cuánticos	51
3.2. CW-complejos no-conmutativos finitos	56
3.2.1. Generadores de las bolas clásicas y sus fronteras	58
3.2.2. CW-complejos cuánticos finitos	63
3.3. Sucesión espectral de Schochet y CW-complejos	65
3.3.1. Sucesión espectral caso clásico	65
3.3.2. Sucesión espectral caso cuántico	67
3.4. Estudio del primer diferencial en caso clásico y cuántico	78
4. EJEMPLOS	87
4.1. Espacio proyectivo complejo clásico vs cuántico	89
BIBLIOGRAFÍA	95

AGRADECIMIENTOS

A Dios, porque soy un hombre de fe.

A mis padres y hermanos, porque son mi fuente de motivación, porque les debo todo.

A Keyla, porque ha estado conmigo desde que tengo memoria, por ser la luz en mi camino.

Al Dr. Elmar, por sus consejos durante todos estos años que ha sido mi tutor, porque lo admiro como matemático y persona.

A mis grandes amigos y colegas: Yhon, Kevin, Yulu, Osmin, por los momentos y por el apoyo, y a todos aquellos que hicieron más agradable mi estancia en el posgrado.

A CONAHCyT, por su valioso apoyo económico, por su voto de confianza.

Al proyecto A1-S-46784 “Grupos cuánticos y geometría no conmutativa” aprobado por CONAHCYT en el programa de Ciencias Básicas 2017-2018, porque me permitió ir dos veces al Instituto de Matemáticas de la Academia Polaca de Ciencias-IMPAN en Varsovia, Polonia.

A todo el personal del posgrado, porque son parte fundamental de este proceso.

A los revisores de esta tesis, gracias, muchísimas gracias.

RESUMEN

En la presente tesis se introduce una noción de CW-complejo no-conmutativo de dimensión finita, se establece cuándo un CW-complejo de dimensión finita clásico tiene una versión no-conmutativa, además de presentar un estudio detallado de las superficies compactas clásicas orientables y no-orientables, y lo que consideramos sus versiones no-conmutativas, las cuales se ven como CW-complejos cuánticos de dimensión 2, donde probamos que estas tienen K-teoría isomorfa al caso clásico, aparte de describir los generadores de estos grupos. Más aún, se estudian las clases de isomorfismos de las C^* -álgebras no-conmutativas introducidas tanto para las superficies compactas cuánticas orientables como las no-orientables, para lo cual se emplea la Teoría de Brown-Douglas-Fillmore; este hecho representa uno de los resultados más importantes de esta tesis. A su vez, demostramos que todo CW-complejo de dimensión 2 tiene una versión no-conmutativa y que su K-teoría es isomorfa al caso clásico, donde en la prueba se utiliza la sucesión espectral de Schochet. Es así como definimos una filtración creciente de ideales cerrados de estas C^* -álgebras (tanto para el caso clásico como el cuántico) y determinamos el primer diferencial de dichas sucesiones espectrales mediante el estudio detallado de los homomorfismos conexión. Finalmente, un resultado análogo para los CW-complejos de dimensión n es obtenido, además de ilustrar los cálculos con ejemplos importantes de CW-complejos cuánticos de dimensión finita.

PALABRAS CLAVE: CW-complejo no-conmutativo, C^* -álgebra, K-teoría, homomorfismo conexión, sucesión espectral.

ABSTRACT

In this thesis, we introduce a notion of a finite-dimensional non-commutative CW-complex, we establish when a classical finite-dimensional CW-complex has a non-commutative version, and we present a detailed study of orientable and non-orientable classical compact surfaces and what we consider to be their non-commutative versions, which are seen as 2-dimensional quantum CW-complexes, where we prove that their K-theory is isomorphic to the classical case, apart from describing the generators of these groups. Furthermore, we study isomorphism classes of the introduced non-commutative C^* -algebras for both orientable and non-orientable quantum compact surfaces, for which the Brown-Douglas-Fillmore Theory is used; this fact represents one of the most important results of this thesis. In turn, we show that every 2-dimensional CW-complex has a non-commutative version and we prove that their K-theory is isomorphic to the classical case, where the Schochet spectral sequence is used in the proof. We thus define an increasing filtration of closed ideals of these C^* -algebras (both for the classical and quantum cases) and determine the first differential of such spectral sequences by detailed study of the connection homomorphisms. Finally, an analogous result is obtained for n -dimensional CW-complexes and the calculations are illustrated with important examples of finite-dimensional quantum CW-complexes.

En este trabajo las siguientes C^* -álgebras representan las versiones no-conmutativas de las C^* -álgebras sobre las superficies compactas clásicas orientables y no-orientables respectivamente:

$$\mathcal{C}(\mathbb{T}_{g,q}) := \{f \in \mathcal{T} : \sigma(f)(x) = \sigma(f)(y) \text{ si } x \sim y, \ x, y \in \partial\overline{\mathbb{D}}\}, \quad (0.1)$$

$$\mathcal{C}(\mathbb{P}_{(n,k),q}) := \{f \in \mathcal{T} : \sigma(f)(x) = \sigma(f)(y) \text{ si } x \sim y, \ x, y \in \partial\overline{\mathbb{D}}\}, \quad (0.2)$$

donde en (0.1) la frontera $\partial\overline{\mathbb{D}} = \mathbb{S}^1$ fue dividida en $4g$ arcos $a_1, \dots, a_{2g}, a_1^{-1}, \dots, a_{2g}^{-1}$, $\mathcal{T}$ denota la C^* -álgebra de Toeplitz, la función $\sigma : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{S}^1)$ denota el mapeo del símbolo y la relación de equivalencia está dada por identificar $a_j(t) \sim a_j^{-1}(t)$, $j = 1, \dots, 2g$, $t \in [0, 1]$, (ver Definición 2.1.1), así para (0.1) obtenemos una superficie cerrada cuántica orientable de género g .

Por otro lado, en (0.2) para $n, k \in \mathbb{Z}^+$ con $1 \leq k \leq n$, dividimos la frontera $\partial\overline{\mathbb{D}} = \mathbb{S}^1$ en $2n$ arcos $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_k, a_{k+1}, \dots, a_n, a_{k+1}^{-1}, \dots, a_n^{-1}$, y obtenemos una superficie cerrada cuántica no-orientable de género n bajo la relación de equivalencia dada por $a_i(t) \sim b_i(t)$ con $i = 1, \dots, k$, $t \in [0, 1]$, $a_j(t) \sim a_j^{-1}(t)$, $j = k+1, \dots, n$, $t \in [0, 1]$ (ver Definición 2.1.1). Bajo esta simbología, algunos de los resultados más destacados son

- La prueba de que superficies cerradas cuánticas de géneros diferentes no son isomorfas (esto es, no son $*$ -isomorfas como C^* -álgebras);
- La demostración de que para todo g y todo (n, k) , $\mathcal{C}(\mathbb{T}_{g,q}) \not\cong \mathcal{C}(\mathbb{P}_{(n,k),q})$;
- La prueba de que $\mathcal{C}(\mathbb{P}_{(n,k),q}) \cong \mathcal{C}(\mathbb{P}_{(n',k'),q})$ si y sólo si $(n, k) = (n', k')$;
- La demostración de que las superficies cerradas clásicas y sus contrapartes cuánticas tienen K-teoría isomorfa.

De este modo, este trabajo contiene la prueba del siguiente teorema (resultados que se encuentran en el artículo [24]).

Teorema A. Para $g \in \mathbb{Z}^+$, si $\mathcal{C}(\mathbb{T}_{g,q})$ denota una superficie compacta cuántica orientable de género g , como en (0.1). Entonces $\mathcal{C}(\mathbb{T}_{g,q})$ es isomorfa a la C^* -álgebra generada por $1, T_g, T_g^*$ y los operadores compactos $\mathbb{K} := \mathcal{K}(\mathcal{H}_g)$, donde

$$\mathcal{H}_g := \bigoplus_{j=1}^{2g} \ell_2(\mathbb{Z}), \quad T_g := \bigoplus_{j=1}^{2g} \left(\frac{j+1}{j} U - \frac{1}{j} \right),$$

y U representa al operador shift bilateral en $\ell_2(\mathbb{Z})$, esto es, $Ue_n = e_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ con $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ la base ortonormal canónica de $\ell_2(\mathbb{Z})$. Además, dados $n, k \in \mathbb{Z}^+$ con $k \leq n$, si $\mathcal{C}(\mathbb{P}_{(n,k),q})$ denota una superficie compacta cuántica no-orientable desde (0.2), entonces $\mathcal{C}(\mathbb{P}_{(n,k),q})$ es isomorfa a la C^* -álgebra generada por 1 , $T_{n,k}$, $T_{n,k}^*$ y los operadores compactos $\mathbb{K} := \mathcal{K}(\mathcal{H}_{n,k})$, donde

$$\mathcal{H}_{n,k} := \bigoplus_{j=1}^k \ell_2(\mathbb{N}) \oplus \bigoplus_{j=k+1}^n \ell_2(\mathbb{Z}), \quad T_{n,k} := \bigoplus_{j=1}^k \left(\frac{j+1}{j} S^2 - \frac{1}{j} \right) \oplus \bigoplus_{j=k+1}^n \left(\frac{j+1}{j} U - \frac{1}{j} \right),$$

y S representa el operador shift unilateral derecho en $\ell_2(\mathbb{N})$.

Siguiendo esta línea, demostramos que las superficies cerradas cuánticas se pueden ver como CW-complejos cuánticos de dimensión 2, donde a grosso modo, diremos que en general un objeto virtual $\overline{\mathbb{B}}_q^n$, su interior $\mathbb{B}_q^n$ y su frontera $\partial \overline{\mathbb{B}}_q^n$ son análogos no-conmutativos de las bolas cerradas, el interior y sus fronteras clásicas respectivamente, si y solamente si, estas tienen K-teoría isomorfa al caso clásico correspondiente. Bajo esta óptica el lector puede hacerse una idea de lo que entendemos por CW-complejo cuántico, por consiguiente, otros de los resultados más importantes de este trabajo y cuyas demostraciones fueron realizadas con la poderosa herramienta de las sucesiones espectrales, específicamente la sucesión espectral de Schochet son:

Teorema B. *La K-teoría de un CW-complejo clásico de dimensión 2, es isomorfa a la K-teoría de su contraparte no-conmutativa.*

Teorema C. *Sean X un CW-complejo clásico de dimensión n y X_q una versión no conmutativa. Entonces si la sucesión espectral de Schochet asociada a X (ver Sección 3.9) colapsa en la página 2, y las siguientes sucesiones exactas cortas se escinden*

$$0 \longrightarrow F^{v-1}\mathcal{K}_{v+w}(\mathcal{A}) \longrightarrow F^v\mathcal{K}_{v+w}(\mathcal{A}) \longrightarrow F^v\mathcal{K}_{v+w}(\mathcal{A})/F^{v-1}\mathcal{K}_{v+w}(\mathcal{A}) = E_{v,w}^\infty \longrightarrow 0,$$

se cumple que $\mathcal{K}_*(\mathcal{C}(X)) \cong \mathcal{K}_*(\mathcal{C}(X_q))$.

Ahora bien, ¿cómo nació la idea de introducir la noción de versión no-conmutativa de un CW-complejo clásico de dimensión finita? para responder esta pregunta, note que las superficies compactas clásicas son CW-complejos de dimensión 2, donde el 0-esqueleto es un punto, el 1-esqueleto es un bouquet de círculos y el 2-esqueleto lo obtenemos al pegar $\overline{\mathbb{D}}$, a lo largo de su frontera al 1-esqueleto. En este sentido, como $\mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}}_q)$ es una versión cuántica de $\mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}})$, donde el objeto virtual $\overline{\mathbb{D}}_q$ fue introducido por Klimek-Lesniewski en [15]; resulta bastante natural preguntarse por las C^* -álgebras que se pueden obtener, al “pegar” $\overline{\mathbb{D}}_q$ al 1-esqueleto (bouquet de círculos) a lo largo de su frontera, donde este proceso de pegado se hará mediante un diagrama pullback. Las C^* -álgebras obtenidas serán ejemplos de CW-complejos cuánticos de dimensión 2.

De esta manera, el presente manuscrito está organizado en 4 capítulos, el Capítulo 1 contiene todos los preliminares necesarios para la investigación, lo que incluye algunas generalidades sobre la C^* -álgebra de Toeplitz, algunos conceptos y resultados relativos a la K-teoría de C^* -álgebras, la Teoría de Brown-Douglas-Fillmore y lo mismo para las sucesiones espectrales, particularmente la sucesión espectral de Schochet. En el Capítulo 2 se desarrolla el estudio de las superficies cerradas cuánticas orientables y no-orientables, demostrando los resultados antes mencionados.

En el Capítulo 3 el lector puede encontrar la motivación del estudio de los CW-complejos cuánticos finitos, la descripción de una sucesión espectral de Schochet tanto para el caso clásico como para el cuántico, el estudio del primer diferencial, aparte de las demostraciones de los Teoremas , y otros hechos importantes. Finalmente, el Capítulo 4, contiene a $\mathcal{C}(\mathbb{C}P^n)$ y a su análogo no-conmutativo $\mathcal{C}(\mathbb{C}P_q^n)$ como un ejemplo interesante de CW-complejo cuántico finito.

En este primer capítulo desarrollaremos la teoría más importante sobre C*-álgebras que tendremos en cuenta a lo largo de esta tesis, invitamos amablemente al lector interesado a consultar los libros [4, 28, 18, 22], para información más detallada. Asimismo, haremos mención de las sucesiones espectrales y algunas de sus generalidades, dejando entrever que es una de las más poderosas herramientas para el cálculo de la K-teoría de C*-álgebras.

1.1. Generalidades sobre C*-álgebras

Recordemos que una C*-álgebra es una *-álgebra de Banach compleja $\mathcal{A}$ (la operación $*$ es una involución en $\mathcal{A}$), tal que satisface la C*-identidad: $\|a^*a\| = \|a\|^2$ para todo $a \in \mathcal{A}$. El espectro de un elemento a en una C*-álgebra con unidad $1_{\mathcal{A}}$ es usualmente denotado mediante el símbolo $\text{spec}(a)$, y está definido por $\text{spec}(a) := \{\lambda \in \mathbb{C} : a - \lambda 1_{\mathcal{A}} \text{ no es invertible en } \mathcal{A}\}$, es bien conocido que $\text{spec}(a)$ es un subconjunto compacto no-vacío del plano complejo. La notación C*-gen(S) será empleada a lo largo de esta tesis para denotar a la C*-subálgebra de $\mathcal{A}$ generada por un subconjunto no vacío S de $\mathcal{A}$.

Sea $\mathcal{A}$ una *-álgebra, entonces para cada $x \in \mathcal{A}$, definimos

$$\|x\| := \sup\{r(x) : r \text{ es una C*-seminorma en } \mathcal{A}\} \quad (1.1)$$

Si $\|x\| < \infty$ para todo $x \in \mathcal{A}$, entonces la C*-álgebra universal de $\mathcal{A}$, denotada por $\mathcal{C}^*(\mathcal{A})$, es la completación de $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ respecto a la C*-norma inducida por (1.1), donde $\mathcal{J}$ es el ideal de $\mathcal{A}$ dado por

$$\mathcal{J} := \{x \in \mathcal{A} : \|x\| = 0\}.$$

Note que $\mathcal{C}^*(\mathcal{A})$ existe si y sólo si $\|x\| < \infty$ para todo $x \in \mathcal{A}$. Los siguientes son ejemplos interesantes de C*-álgebras, algunos de ellos presentados como C*-álgebras universales:

- i) Dado un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, $\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}) \geq 2$, el conjunto de operadores lineales y acotados en $\mathcal{H}$, denotado por $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, junto con las operaciones

$$(T + S)(x) := T(x) + S(x), \quad (\alpha T)(x) := \alpha T(x), \quad (TS)(x) := T(S(x)),$$

¹Una C*-seminorma en una *-álgebra $\mathcal{A}$ es una seminorma en $\mathcal{A}$ que satisface la C*-identidad y es submultiplicativa.

para todo $T, S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ y cualquier $\alpha \in \mathbb{C}$, la involución definida por tomar adjunto y la norma de operadores, constituye una C*-álgebra no conmutativa con unidad $\text{id}_{\mathcal{H}}$ (el operador identidad en $\mathcal{H}$). Si el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ tiene dimensión infinita, el único ideal bilateral, y cerrado en norma, de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, es el subespacio de operadores compactos en $\mathcal{H}$, denotado por $\mathcal{K}(\mathcal{H})$, o simplemente $\mathbb{K}$.

- ii) Dado un espacio topológico compacto Hausdorff X , el conjunto de las funciones continuas en X , denotado por $\mathcal{C}(X)$; esto es,

$$\mathcal{C}(X) := \{f : X \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ es una función continua}\}$$

junto con las operaciones puntuales, la involución $*$: $\mathcal{C}(X) \rightarrow \mathcal{C}(X)$, $f^*(x) := \overline{f(x)}$ para todo $x \in X$ y la norma infinito, definen una C*-álgebra conmutativa con unidad. En el caso en que X sea localmente compacto Hausdorff y no-compacto, diremos que una función continua $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ se anula en el infinito si y sólo si para todo $\epsilon > 0$ existe un subconjunto compacto de X , digamos K_ϵ , tal que para todo $x \in X \setminus K_\epsilon$ se cumple $|f(x)| < \epsilon$. Así, definimos el conjunto

$$\mathcal{C}_0(X) := \{f : X \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ se anula en el infinito}\},$$

el cual resulta ser un ideal cerrado de $\mathcal{C}(\hat{X})$, donde $\hat{X}$ es la compactificación por un punto de X . Por consiguiente tenemos la siguiente sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}_0(X) \longrightarrow \mathcal{C}(\hat{X}) \twoheadrightarrow \mathcal{C}(\hat{X})/\mathcal{C}_0(X) \cong \mathbb{C} \longrightarrow 0.$$

- iii) Para $q \in (0, 1)$ se define la C*-álgebra de funciones continuas sobre el espacio cuántico compacto $SU_q(2)$ (ver [29]) como la C*-álgebra universal generada por los elementos a, b con las relaciones:

$$a^*a + b^*b = I, \quad ab = qba, \quad aa^* + q^2b^*b = I, \quad ab^* = qb^*a, \quad b^*b = bb^*.$$

En general, Vaksman y Soibelman definen el espacio cuántico compacto $SU_q(n)$ como una C*-álgebra universal.

- iv) En el artículo [15], los autores Klimek-Lesniewski definen la C*-álgebra de funciones continuas sobre el disco cuántico $\mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}}_q)$ como la C*-álgebra universal del álgebra polinomial generada por z, z^* sujetos a la relación $z^*z - q^2zz^* = (1 - q^2)1$. La cual unos párrafos más adelante veremos que es *-isomorfa a la C*-álgebra de Toeplitz (ver Sección 1.2).
- v) La C*-álgebra de funciones continuas sobre el espacio cuántico compacto $\mathbb{S}_q^{2n+1}$ (las esferas cuánticas impares de Vaksman y Soibelman [26]), $\mathcal{C}(\mathbb{S}_q^{2n+1})$, se define como la C*-álgebra universal generada por $n + 1$ -elementos $z_1, \dots, z_n, z_{n+1}$ bajo las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} z_j z_i &= q z_i z_j \quad \text{para todo } i < j; \\ z_j^* z_i &= q z_i z_j^*; \quad \text{para todo } i \neq j; \\ z_i^* z_i &= z_i z_i^* + (1 - q^2) \left(\sum_{j>i} z_j z_j^* \right), \quad i = 1, \dots, n; \end{aligned}$$

$$z_{n+1}^* z_{n+1} = z_{n+1} z_{n+1}^*; \\ \sum_{i=1}^{n+1} z_i z_i^* = 1.$$

Este espacio fue originalmente definido por Vaksman y Soibelman como el espacio cuántico homogéneo $\mathcal{C}(SU_q(n+1))/\mathcal{C}(SU_q(n))$.

Todo algebrista de operadores, siempre que desee escribir sobre C*-álgebras, se encuentra en la obligación moral de hablar de unos de los resultados más trascendentales del área, debido a Gelfand, Naimark y Segal, los teoremas que expresan una equivalencia de categorías, y que abrieron la puerta a la investigación de las C*-álgebras. En 1943, los investigadores antes mencionados demostraron que no hay otra C*-álgebra conmutativa más que el álgebra de funciones continuas en un espacio topológico compacto Hausdorff (salvo equivalencia dada por isomorfismos isométricos), y más tarde, demostraron que toda C*-álgebra se puede ver como una *-subálgebra del álgebra de operadores lineales y acotados sobre un espacio de Hilbert.

Teorema 1.1.1 (Gelfand-Naimark). *La categoría de espacios topológicos compactos Hausdorff, con mapeos continuos como morfismos, es dual a la categoría de C*-álgebras conmutativas con unidad, con *-homomorfismos como morfismos, vía los siguientes funtores contravariantes:*

- A una C*-álgebra conmutativa con unidad $\mathcal{A}$, le asociamos el espectro de Gelfand $\text{spec}(\mathcal{A})$ ², esto es, el espacio de los funcionales lineales multiplicativos no nulos en $\mathcal{A}$, y a cualquier *-homomorfismo $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ le asociamos la función continua $\hat{\phi} : \text{spec}(\mathcal{B}) \rightarrow \text{spec}(\mathcal{A})$, es decir, la única función continua tal que $\hat{\phi}(f)(a) := f(\phi(a))$ para todo $f \in \text{spec}(\mathcal{B})$ y todo $a \in \mathcal{A}$.
- A cualquier espacio topológico compacto Hausdorff X , le asociamos la C*-álgebra conmutativa con unidad $\mathcal{C}(X)$, y a cualquier función continua $f : X \rightarrow Y$, le asociamos el *-homomorfismo $g \in \mathcal{C}(Y) \mapsto g \circ f \in \mathcal{C}(X)$.

Este teorema puede ser generalizado a espacios topológicos localmente compactos Hausdorff.

En el sentido del teorema anterior y en el contexto de la Geometría No-conmutativa es válido preguntarse por los espacios que asociamos a las C*-álgebras no conmutativas, y la respuesta es: **los espacios cuánticos**, los que filosóficamente se ven como álgebras de funciones continuas, es decir, un espacio cuántico compacto suele definirse como un objeto de la categoría dual a la categoría de C*-álgebras con unidad.

En general, dentro de la teoría del álgebra de operadores podemos ver a una C*-álgebra como una C*-subálgebra de un espacio de operadores lineales y acotados en un espacio de Hilbert, más exactamente, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 1.1.2 (Gelfand-Naimark-Segal, 1943). *Para cada C*-álgebra $\mathcal{A}$ existe un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ tal que $\mathcal{A}$ es C*-isomorfa a una C*-subálgebra de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.*

²Entendemos que la topología de $\text{spec}(\mathcal{A})$ está dada por la topología *-débil del dual de $\mathcal{A}$.

1.2. C*-álgebra de Toeplitz

Una C*-álgebra muy importante en K-teoría y muy estudiada en la literatura es el álgebra de Toeplitz, por lo que merece especial atención, además de que la usaremos más adelante para definir discos cuánticos de dimensión par e impar de una manera adecuada.

Más adelante veremos que es posible definir la C*-álgebra de Toeplitz como la C*-álgebra universal asociada a cierto gráfico dirigido de fila finita (ver Ejemplo 1.3.4), mientras tanto, en esta parte mostraremos que puede ser vista como una deformación del álgebra de funciones continuas sobre el disco cerrado unitario del plano complejo $\overline{\mathbb{D}} := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$. A lo largo de esta sección $\mathbb{D}$ y $\partial\mathbb{D}$ denotarán el interior y la frontera de $\overline{\mathbb{D}}$ respectivamente. El lector puede consultar el libro [27] para más información.

Sabemos que el espacio vectorial,

$$L_2(\mathbb{D}) = L_2\left(\mathbb{D}, \frac{dA}{\pi}\right) := \left\{ f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ es medible, } \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 \frac{dA}{\pi} < \infty \right\},$$

donde $\frac{dA}{\pi}$ es la medida de Lebesgue 2-dimensional normalizada, resulta ser un espacio de Hilbert al dotarlo de la forma sesquilineal definida positiva:

$$\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{D}} \overline{f(z)} g(z) \frac{dA}{\pi}. \quad (1.2)$$

Entonces definimos el espacio de Bergman $A_2(\mathbb{D})$ como el subconjunto de $L_2(\mathbb{D})$ formado por las funciones holomorfas y L_2 -integrables en $\mathbb{D}$. Veamos que $A_2(\mathbb{D})$ es un subespacio cerrado de $L_2(\mathbb{D})$ y por consiguiente un espacio de Hilbert. Para tal fin primero notemos que por la fórmula integral de Cauchy, para cualquier disco cerrado con centro $z_0 \in \mathbb{D}$ y radio s , digamos $B(z_0; s)$, se cumple que

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\zeta}) d\zeta \quad \text{para todo } 0 < r < s, \quad f \in A_2(\mathbb{D}),$$

y al multiplicar por r e integrar en el intervalo $[0, s]$, obtenemos:

$$f(z_0) \frac{s^2}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^s \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\zeta}) r d\zeta dr = \frac{1}{2\pi} \int_{B(z_0; s)} f dA \quad \therefore \quad f(z_0) = \frac{1}{\pi s^2} \int_{B(z_0; s)} f dA.$$

En virtud de este resultado no es difícil ver que, para $\gamma \in \mathbb{D}$ fijo,

$$|f(\gamma)| \leq \frac{1}{1 - |\gamma|} \|f\|_{L_2(\mathbb{D})} \quad \text{para todo } f \in A_2(\mathbb{D}). \quad (1.3)$$

Ahora bien, recordemos que nuestro objetivo es demostrar que $\overline{A_2(\mathbb{D})} \subseteq A_2(\mathbb{D})$, así que, con tal propósito en mente, dado $f \in \overline{A_2(\mathbb{D})}$ existe una sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+} \subset A_2(\mathbb{D})$ tal que $\|f_n - f\|_{L_2(\mathbb{D})} \rightarrow 0$, y además, del análisis real sabemos que existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$ que

converge puntualmente a f , $\frac{dA}{\pi}$ -casi en todas partes. Luego por (1.3) para todo disco cerrado de centro 0 y radio r contenido en $\mathbb{D}$, y todo z en él, se cumple que

$$|f_n(z) - f_m(z)| < \frac{1}{1-r} \|f_n - f_m\|_{L_2(\mathbb{D})},$$

y por consiguiente, la sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ converge uniformemente en cada disco cerrado de centro 0 y radio r , contenido en $\mathbb{D}$. Ya que el Teorema de Morera establece la existencia de una función analítica en el interior de la bola cerrada, este límite debe coincidir con f , $\frac{dA}{\pi}$ -casi en todas partes, esto es, f es holomorfa en $\mathbb{D}$.

De esta manera, como $A_2(\mathbb{D})$ es un subespacio cerrado de $L_2(\mathbb{D})$ por el teorema de la Proyección ortogonal, podemos considerar la proyección $P : L_2(\mathbb{D}) \rightarrow A_2(\mathbb{D})$ y entonces, dado $f \in \mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}})$, definimos el operador de Toeplitz $T_f : A_2(\mathbb{D}) \rightarrow A_2(\mathbb{D})$ con símbolo f por $T_f(\varphi) = P(f\varphi)$ para todo $\varphi \in A_2(\mathbb{D})$. En virtud de esto, el álgebra de Toeplitz es la C*-subálgebra de $\mathcal{B}(L_2(\mathbb{D}))$ dada por

$$\mathcal{T} := \text{C*-gen}\{T_f : f \in \mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}})\} \subset \mathcal{B}(L_2(\mathbb{D})). \quad (1.4)$$

Observe que podemos checar que para todo símbolo continuo $f \in \mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}})$ se verifica que $T_f^* = T_{\bar{f}}$, en efecto, dados $\psi, \phi \in A_2(\mathbb{D})$,

$$\begin{aligned} \langle T_f^*(\psi), \phi \rangle &= \langle \psi, T_f(\phi) \rangle = \langle \psi, P(f\phi) \rangle = \langle P^*(\psi), f\phi \rangle = \langle \psi, f\phi \rangle \\ &= \langle \bar{f}\psi, \phi \rangle = \langle \bar{f}\psi, P(\phi) \rangle = \langle P^*(\bar{f}\psi), \phi \rangle = \langle P(\bar{f}\psi), \phi \rangle \\ &= \langle T_{\bar{f}}(\psi), \phi \rangle. \end{aligned}$$

Además, si $\ell_2(\mathbb{N})$ denota al espacio de Hilbert de las sucesiones cuadrado sumables, entonces el espacio de Hilbert $A_2(\mathbb{D})$ es isométricamente isomorfo a $\ell_2(\mathbb{N})$, ya que el conjunto

$$\{\zeta_n := \sqrt{n+1} z^n : n \in \mathbb{N}\},$$

donde $z : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \overline{\mathbb{D}}$ está dada por $z(re^{it}) = re^{it}$ (la función identidad en $\overline{\mathbb{D}}$), define una base ortonormal de $A_2(\mathbb{D})$, en efecto, es claro que $\overline{\text{span}}\{\zeta_n : n \in \mathbb{N}\} = A_2(\mathbb{D})$ y además, de la forma sesquilineal definida positiva (1.2),

$$\begin{aligned} \langle z^n, z^m \rangle &= \int_{\mathbb{D}} \bar{z}^n z^m \frac{dA}{\pi} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^n e^{-int} r^m e^{imt} r \frac{dt dr}{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 r^{n+m+1} \left(\int_0^{2\pi} e^{i(m-n)t} dt \right) dr = 2\delta_{m,n} \int_0^1 r^{n+m+1} dr \\ &= \frac{2\delta_{m,n}}{(n+m+2)}, \end{aligned}$$

de donde,

$$\langle \zeta_n, \zeta_m \rangle = \sqrt{n+1} \sqrt{m+1} \langle z^n, z^m \rangle = \sqrt{n+1} \sqrt{m+1} \frac{2\delta_{m,n}}{n+m+2} = \delta_{m,n}.$$

Por consiguiente, $\{\zeta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una base ortonormal de $A_2(\mathbb{D})$, y entonces se cumple que $A_2(\mathbb{D}) \cong \ell_2(\mathbb{N})$. Ahora bien, nuestro objetivo es ver a la C*-álgebra de Toeplitz como la C*-álgebra generada por el operador shift-unilateral derecho en $\ell_2(\mathbb{N})$, para conseguirlo note que la siguiente proposición se satisface:

Proposición 1.2.1. *Es cierto que*

i) $T_z \zeta_n = \sqrt{\frac{n+1}{n+2}} \zeta_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $T_z^* \zeta_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0, \\ \sqrt{\frac{n}{n+1}} \zeta_{n-1} & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$, donde z es la función identidad en $\overline{\mathbb{D}}$;

ii) El conmutador $[T_z, T_z^*]$ actúa en ζ_n en la forma $[T_z, T_z^*] \zeta_n = \frac{-1}{(n+1)(n+2)} \zeta_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego, $[T_z, T_z^*] \in \mathcal{K}(A_2(\mathbb{D}))$. Más aún $[T_z^n, T_{\bar{z}}^m] \in \mathcal{K}(A_2(\mathbb{D}))$ para todo $n, m \in \mathbb{N}$;

iii) $[T_g, T_h] \in \mathcal{K}(A_2(\mathbb{D}))$ para todo par de polinomios g, h en las variables z y $\bar{z}$.

Una consecuencia de la proposición anterior es que la C*-álgebra de Toeplitz es generada por $T_z, T_z^* = T_{\bar{z}}$, $\text{id}_{A_2(\mathbb{D})}$ y la subálgebra de operadores compactos $\mathcal{K}(A_2(\mathbb{D}))$, esto es,

$$\mathcal{T} = \text{C}^*\text{-gen}\{\{T_z, T_{\bar{z}}, \text{id}_{A_2(\mathbb{D})}\} \cup \mathcal{K}(A_2(\mathbb{D}))\}. \quad (1.5)$$

Más aún note que si S denota al operador shift-unilateral derecho en $A_2(\mathbb{D})$, esto es, $S(\zeta_n) = \zeta_{n+1}$. Entonces observe que

$$(S - T_z) \zeta_n = S(\zeta_n) - T_z(\zeta_n) = \left(1 - \sqrt{\frac{n+1}{n+2}}\right) \zeta_{n+1},$$

y como $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \sqrt{\frac{n+1}{n+2}}\right) = 0$, se deduce que $S - T_z \in \mathcal{K}(A_2(\mathbb{D}))$ y en virtud de (1.5) se obtiene que $S \in \mathcal{T}$. De este modo, como toda matriz elemental $E_{jk} \zeta_n := \delta_{k,n} \zeta_j$ se puede escribir en la forma $S^n(1 - SS^*)S^{*k}$, se concluye que $\mathcal{K}(A_2(\mathbb{D})) \subset \text{C}^*\text{-gen}\{S, S^*, \text{id}_{A_2(\mathbb{D})}\}$. Y en este sentido se puede demostrar que

$$\mathcal{T} \cong \text{C}^*\text{-gen}\{S, S^*, \text{id}_{\ell_2(\mathbb{N})}\} \subset B(\ell_2(\mathbb{N})), \quad (1.6)$$

donde vemos ahora a S como el operador shift-unilateral derecho de $\ell_2(\mathbb{N})$ lo cual es posible puesto que $A_2(\mathbb{D}) \cong \ell_2(\mathbb{N})$. A lo largo de este trabajo veremos a la C*-álgebra de Toeplitz como en (1.6).

Por otro lado, se conoce que la C*-álgebra del disco cuántico de dimensión 2, $\mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}}_q)$ para $0 < q < 1$, la cual se define como la C*-álgebra universal del álgebra polinomial generada por z, z^* sujetos a la relación $z^*z - q^2zz^* = (1 - q^2)1$, es isomorfa al álgebra de Toeplitz. Para obtener tal isomorfismo se define en $\ell_2(\mathbb{N})$ el elemento $z := \sum_{m=0}^{\infty} (\lambda_m - \lambda_{m+1}) S^{m+1} (S^*)^m$ donde $\lambda_m := \sqrt{1 - q^{2m}}$, el cual está en $\mathcal{T}$, y es de tal suerte que a partir de su descomposición polar se recupera el operador shift-unilateral derecho S , permitiendo probar que la C*-álgebra generada por z es isomorfa a $\mathcal{T}$. Además, en virtud de que z satisface la relación cuántica de $\overline{\mathbb{D}}_q$, basta definir los *-homomorfismos $\psi_1 : \text{C}^*\text{-gen}\{S, S^*, 1\} \rightarrow \mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}}_q)$, $\psi_1(S) = z|z|^{-1}$ y $\varphi_2 : \mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}}_q) \rightarrow \text{C}^*\text{-gen}\{S, S^*, 1\}$ por $\psi_2(z) = S$, comprobar que $\psi_1(S)$ es una isometría parcial, y notar que $\psi_2 \circ \psi_1 = \text{id}_{\text{C}^*\text{-gen}\{S, S^*, 1\}}$, $\psi_1 \circ \psi_2 = \text{id}_{\mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}}_q)}$.

De este modo, teniendo en cuenta que el conjunto de los operadores compactos en $A_2(\mathbb{D})$, denotado por $\mathcal{K}(A_2(\mathbb{D}))$, forma un ideal cerrado de $A_2(\mathbb{D})$, y que $\mathcal{T}/\mathcal{K}(A_2(\mathbb{D})) \cong \mathcal{C}(\partial\overline{\mathbb{D}})$, obtenemos una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}(A_2(\mathbb{D})) \xrightarrow{i} \mathcal{T} \cong \mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}}_q) \xrightarrow{\sigma} \mathcal{C}(\partial\overline{\mathbb{D}}) \longrightarrow 0, \quad (1.7)$$

donde ι es el mapeo inclusión, y $\sigma : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{C}(\partial\overline{\mathbb{D}})$ está dado por $\sigma(T_f) = f|_{\partial\overline{\mathbb{D}}}$ y es conocido como el mapeo del símbolo (recomendamos el libro [27] para más detalles al respecto). Equivalentemente, tenemos la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}(\ell_2(\mathbb{N})) \xrightarrow{\iota} \mathcal{T} \cong \mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}}_q) \xrightarrow{\sigma} \mathcal{C}(\partial\overline{\mathbb{D}}) \longrightarrow 0, \quad (1.8)$$

donde $\sigma : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{C}(\partial\overline{\mathbb{D}})$ se define mediante la relación $\sigma(S) = u$ y u representa al mapeo identidad en $\partial\overline{\mathbb{D}}$, note que usamos el hecho de que $\mathcal{C}(\partial\overline{\mathbb{D}}) = \text{C}^*\text{-gen}\{u, \bar{u}, 1\}$ por el Teorema de Stone-Weierstrass.

Lo anterior representa una “versión no-conmutativa” de la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}_0(\mathbb{D}) \xrightarrow{\iota} \mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}}) \xrightarrow{\varphi} \mathcal{C}(\partial\overline{\mathbb{D}}) \longrightarrow 0, \quad (1.9)$$

con $\varphi(f) = f|_{\partial\overline{\mathbb{D}}}$, donde la deformación fue prácticamente reemplazar el interior del disco $\mathbb{D}$ por los compactos. En este sentido, nos resulta muy interesante preguntarnos si este tipo de “reemplazo” cambia la K-teoría. Esta pregunta motivó el presente trabajo, ver Sección 3.1 para más detalles.

1.3. C*-álgebras gráficas

En esta subsección le damos un espacio a las C*-álgebras gráficas, en virtud de que motivaron el estudio de las esferas cuánticas y espacios proyectivos complejos cuánticos como CW-complejos no-conmutativos; desde el artículo de Szymański-Hong [14]. Para más nociones básicas sobre C*-álgebras gráficas, una referencia obligada es [20].

Definición 1.3.1 (Gráfico dirigido de fila finita). Sea $G = (G^0, G^1, r, s)$ un gráfico dirigido donde G^0 y G^1 son el conjunto contable de vértices y aristas, respectivamente. Además, r asigna a cada arista el vértice al que llega, y s el vértice del que parte. Con esta notación decimos que un vértice $v \in G^0$ es regular si el conjunto $s^{-1}(v) := \{e \in G^1 : s(e) = v\}$ es un conjunto finito no vacío, en el caso en que sea vacío decimos que v es un sink. Así diremos que un gráfico dirigido es de fila finita si todo vértice es o bien regular o un sink.

Definición 1.3.2 (C*-álgebra gráfica). Si $G = (G^0, G^1, r, s)$ es un gráfico dirigido de fila finita. La C*-álgebra universal asociada a G y denotada por $\mathcal{C}^*(G)$ es la C*-álgebra universal generada por un conjunto de proyecciones $\{p_v : v \in G^0\}$ e isometrías parciales $\{s_e : e \in G^1\}$ con las siguientes relaciones:

- i) $p_v p_w = 0$, para todo $v \neq w$;
- ii) $s_e^* s_f = 0$ para todo $e \neq f$;
- iii) $s_e^* s_e = p_{r(e)}$ para todo $e \in G^1$;
- iv) $p_v = \sum_{\{e \in G^1 : s(e) = v\}} s_e s_e^*$ para todo vértice regular $v \in G^0$.

Ilustramos estas importantes definiciones con los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1.3.3. La C*-álgebra más simple con la que podemos trabajar es la dada por el conjunto de los números complejos $\mathbb{C}$, y como C*-álgebra gráfica se representa con solamente un punto. De igual modo, la C*-álgebra de funciones continuas sobre la frontera del disco $\mathbb{D}$, $\mathcal{C}(\partial\mathbb{D})$, está dada por la C*-álgebra universal asociada al gráfico dirigido de fila finita con $G^0 = \{v\}$, $G^1 = \{e\}$ y $r(e) = v = s(e)$.

Ejemplo 1.3.4. La C*-álgebra de Toeplitz puede ser vista como una C*-álgebra gráfica (una C*-álgebra obtenida desde un gráfico). Para ello basta considerar $G^0 = \{v_1, v_2\}$, $G^1 = \{e_{11}, e_{12}\}$, $r(e_{11}) = v_1 = s(e_{11})$, $r(e_{12}) = v_2$, $s(e_{12}) = v_1$ como en la Figura 1.1.

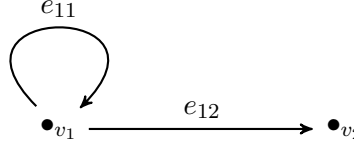


Figura 1.1: Toeplitz como C*-álgebra gráfica.

En este sentido, si $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es la base canónica de $\ell_2(\mathbb{N})$ podemos considerar el espacio de Hilbert separable $\mathcal{H} = \mathbb{C}e_0 \oplus \ell_2(\mathbb{Z}^+) = \mathbb{C}e_0 \oplus \overline{\text{span}}\{e_1, e_2, \dots\}$, y definir las proyecciones ortogonales $p_1, p_2 : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ como $p_1(\alpha e_0 \oplus a) = \alpha e_0$, $p_2(\alpha e_0 \oplus a) = a$ para todo $\alpha \in \mathbb{C}$ y todo $a \in \ell_2(\mathbb{Z}^+)$, además definimos las isometrías parciales $s_{11}, s_{12} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, $s_{11}(e_0) = 0$, $s_{11}(e_n) = e_{n+1}$ para $n \geq 1$, $s_{12}(e_0) = e_1$, $s_{12}(e_n) = 0$ para $n \geq 1$. Entonces se satisfacen las relaciones:

$$p_1^2 = p_1 = p_1^*, \quad p_2^2 = p_2 = p_2^*, \quad p_1 p_2 = p_2 p_1, \quad s_{11}^* s_{12} = 0,$$

$$s_{11}^* s_{11} = p_1, \quad s_{12}^* s_{12} = p_2, \quad s_{11} s_{11}^* + s_{12} s_{12}^* = p_1.$$

Y además $\mathcal{C}^*(G) = \text{C*-alg-universal}\{p_1, p_2, s_{11}, s_{12}\} = \text{C*-gen}\{S := s_{11} + s_{12}, S^*\} \cong \mathcal{T}$ por (1.6).

Ejemplo 1.3.5. En la Sección 1.1, se define la C*-álgebra de funciones continuas sobre el espacio cuántico $\mathbb{S}_q^{2n+1}$, de gran importancia para los géómetras no-conmutativos. Szymański-Hong [14] demostraron que esta se puede interpretar como la C*-álgebra universal de un gráfico dirigido de fila finita con los siguientes requerimientos $G^0 = \{v_i : i = 1, \dots, n+1\}$, $G^1 = \{e_{ij} : i, j = 1, \dots, n+1, i \leq j\}$, $r(e_{ij}) = v_j$, $s(e_{ij}) = v_i$. Abajo el gráfico para $n = 4$.

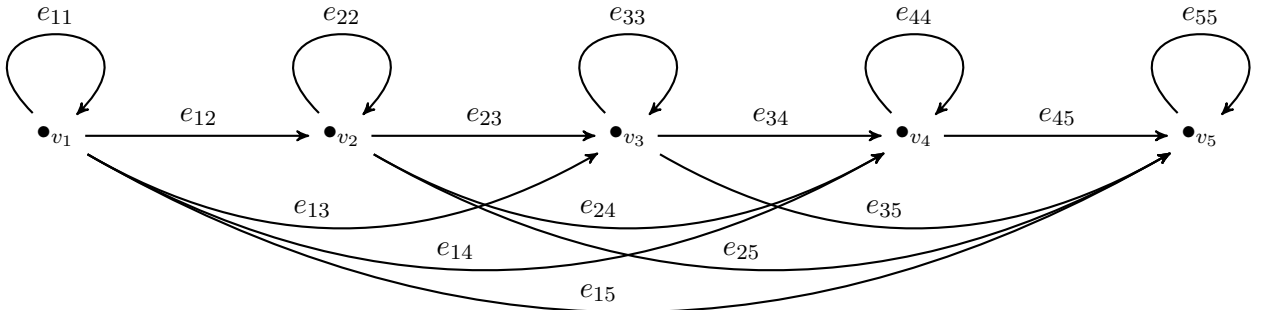


Figura 1.2: $\mathcal{C}(\mathbb{S}_q^9)$ como C*-álgebra gráfica.

1.4. K-teoría de C*-álgebras

Recordemos que dada una *-álgebra $\mathcal{A}$, definimos el conjunto de sus proyecciones, denotado por $P(\mathcal{A})$, como

$$P(\mathcal{A}) := \{p \in \mathcal{A} : p = p^2 = p^*\}.$$

En este conjunto definimos la siguiente relación de equivalencia:

$$p, q \in P(\mathcal{A}), \quad p \sim q \text{ si y sólo si existe } v \in \mathcal{A} \text{ tal que } p = v^*v, \quad q = vv^*,$$

bajo esta situación decimos que las proyecciones p y q son Murray-von Neumann equivalentes. Esta relación de equivalencia es de gran importancia en la teoría de álgebras de von Neumann, específicamente en su clasificación por tipos, a su vez, es utilizada para definir el grupo $\mathcal{K}_0$ asociado a una C*-álgebra.

En este sentido, observemos que $P(\mathcal{A})/\sim$, esto es, el conjunto de clases de equivalencia, en general no define un semigrupo bajo la operación suma más natural que se nos puede ocurrir, i.e.,

$$[p] + [q] = [p + q],$$

ya que no-necesariamente es cierto que $p + q \in P(\mathcal{A})$. De este modo si queremos una proyección, podemos pensar en la suma:

$$\begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix},$$

lo que motiva trabajar con álgebras de matrices sobre $\mathcal{A}$ y definir un *tipo* de relación de Murray-von Neumann en matrices de cualquier tamaño. Sin más filosofía, considere el siguiente conjunto

$$\mathcal{M}_\infty(\mathcal{A}) := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_n(\mathcal{A}), \text{ via los encajes } \mathcal{M}_n(\mathcal{A}) \ni a \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathcal{A}),$$

el cual define una *-álgebra no-conmutativa, en esta *-álgebra, decimos que $p, q \in P(\mathcal{M}_\infty(\mathcal{A}))$, esto es, $p \in P(\mathcal{M}_n(\mathcal{A})), q \in P(\mathcal{M}_m(\mathcal{A}))$ para algunos $n, m \in \mathbb{Z}^+$ son equivalentes, en símbolos $p \sim q$, si y sólo si existe $v \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathcal{A})$ tal que $p = v^*v$ y $q = vv^*$. Y por consiguiente, el conjunto $\mathcal{V}(\mathcal{A}) := P(\mathcal{M}_\infty(\mathcal{A}))/\sim$ junto con la operación binaria

$$+ : \mathcal{V}(\mathcal{A}) \times \mathcal{V}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{V}(\mathcal{A}) \text{ dada por } [p] + [q] := [p \oplus q] = [\text{diag}(p, q)] = \left[\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \right]$$

es un semigrupo abeliano. Así, tenemos la siguiente definición (recomendamos los libros [4, 28, 22] para consultas relacionadas con la K-teoría de C*-álgebras y el libro de Michael Atiyah [2], uno de los precursores de la K-teoría, para resultados sobre haces vectoriales y K-teoría).

Definición 1.4.1. Dada una C*-álgebra unital $\mathcal{A}$, su grupo $\mathcal{K}_0(\mathcal{A})$ se define como el grupo de Grothendieck de $\mathcal{V}(\mathcal{A})$. Note que $\mathcal{K}_0(\mathcal{A})$ resulta ser un grupo abeliano.

En la siguiente proposición resumimos algunas de las propiedades más importantes de este grupo:

Teorema 1.4.2 (Propiedades de $\mathcal{K}_0$). [22] Dada una C*-álgebra unital $\mathcal{A}$, se cumplen

- i) $\mathcal{K}_0(\mathcal{A}) := \{[p] - [q] : p, q \in P(\mathcal{M}_n(\mathcal{A})), n \in \mathbb{Z}^+\};$
- ii) $[0_{\mathcal{A}}] = 0;$
- iii) $p \sim_h q$ en $P(\mathcal{M}_n(\mathcal{A}))$ implica $[p] = [q]$, donde $\sim_h$ significa equivalencia homotópica;
- iii) (Propiedad universal) Si $\mathcal{G}$ es un grupo abeliano, y $\psi : P(\mathcal{M}_{\infty}(\mathcal{A})) \rightarrow \mathcal{G}$ es un mapeo que satisface
 - $\psi(p \oplus q) = \psi(p) + \psi(q);$
 - $\psi(0_{\mathcal{A}}) = 0;$
 - Si $p \sim_h q$ en $P(\mathcal{M}_n(\mathcal{A}))$ entonces $\psi(p) = \psi(q);$

entonces existe un único homomorfismo de grupos $\varphi : \mathcal{K}_0(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{G}$ tal que el siguiente triángulo es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} P(\mathcal{M}_{\infty}(\mathcal{A})) & \longrightarrow & \mathcal{K}_0(\mathcal{A}) \\ \psi \downarrow & \swarrow \varphi & \\ \mathcal{G} & & \end{array}$$

- iv) $\mathcal{K}_0$ es un functor covariante de la categoría de C*-álgebras con unidad a la categoría de grupos abelianos.

En el caso de C*-álgebras sin unidad, consideramos su unitización más pequeña $\tilde{\mathcal{A}} := \mathcal{A} \dot{+} \mathbb{C}$, y definimos el grupo $\mathcal{K}_0$ de $\mathcal{A}$ como $\mathcal{K}_0(\mathcal{A}) := \text{Ker}(\pi_*)$ ³ donde $\pi : \tilde{\mathcal{A}} \rightarrow \mathbb{C}, \pi(a, \alpha) = \alpha$ para todo $(a, \alpha) \in \tilde{\mathcal{A}}$, y π_* denota el homomorfismo inducido por π en los $\mathcal{K}_0$ -grupos.

Ahora bien, para definir el grupo $\mathcal{K}_1$ de una C*-álgebra unital, denotamos por $U(\mathcal{A})$ al conjunto de elementos unitarios de una C*-álgebra unital $\mathcal{A}$ y definimos en $U(\mathcal{M}_{\infty}(\mathcal{A}))$ la operación binaria $\oplus$ por

$$u \oplus v = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \in U(\mathcal{M}_{n+m}(\mathcal{A})), \quad u \in U(\mathcal{M}_n(\mathcal{A})), v \in U(\mathcal{M}_m(\mathcal{A}))$$

y definimos, además, una relación de equivalencia en $U(\mathcal{M}_{\infty}(\mathcal{A}))$, en el sentido de que si $u \in U(\mathcal{M}_n(\mathcal{A})), v \in U(\mathcal{M}_m(\mathcal{A}))$ decimos que $u \sim v$ si y sólo si existe $k \in \mathbb{Z}^+, k \geq \max\{m, n\}$ tal que $u \oplus I_{k-n} \sim_h v \oplus I_{k-m}$ en $U(\mathcal{M}_k(\mathcal{A}))$, y donde I_s es la matriz identidad en $\mathcal{M}_s(\mathcal{A})$. Con estos ingredientes, tenemos la siguiente definición

Definición 1.4.3. Dada una C*-álgebra $\mathcal{A}$, se define su grupo $\mathcal{K}_1(\mathcal{A})$ como

$$\mathcal{K}_1(\mathcal{A}) = U(\mathcal{M}_{\infty}(\tilde{\mathcal{A}})) / \sim$$

respecto a la suma $[u] + [v] := [u \oplus v]$ para todo $u, v \in U(\mathcal{M}_{\infty}(\tilde{\mathcal{A}}))$. Claramente este grupo resulta ser abeliano.

³Ker es nuestra notación para Kernel.

Teorema 1.4.4 (Propiedades de $\mathcal{K}_1$). [22] Dada una C*-álgebra $\mathcal{A}$, se cumplen

- i) $\mathcal{K}_1(\mathcal{A}) := \{[u] : u \in U(\mathcal{M}_\infty(\tilde{\mathcal{A}}))\};$
- ii) $[1] = 0;$
- iii) Si $u, v \in U(\mathcal{M}_n(\tilde{\mathcal{A}}))$ y $u \sim_h v$ entonces $[u] = [v];$
- iii) Si $u, v \in U(\mathcal{M}_n(\tilde{\mathcal{A}}))$ es cierto que $[uv] = [vu] = [u] + [v];$
- iv) (Propiedad universal) Si $\mathcal{G}$ es un grupo abeliano, y $\psi : U(\mathcal{M}_\infty(\tilde{\mathcal{A}})) \rightarrow \mathcal{G}$ es un mapeo que satisface
 - $\psi(u \oplus v) = \psi(u) + \psi(v);$
 - $\psi(1) = 0;$
 - Si $u \sim_h v$ en $U(\mathcal{M}_n(\tilde{\mathcal{A}}))$ entonces $\psi(u) = \psi(v);$

entonces existe un único homomorfismo de grupos $\varphi : \mathcal{K}_1(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{G}$ tal que el siguiente triángulo es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} U(\mathcal{M}_\infty(\tilde{\mathcal{A}})) & \longrightarrow & \mathcal{K}_1(\mathcal{A}) \\ \psi \downarrow & \swarrow \varphi & \\ \mathcal{G} & & \end{array}$$

- v) $\mathcal{K}_1$ es un functor covariante de la categoría de C*-álgebras a la categoría de grupos abelianos.

Para lo que sigue, recordemos que dada una sucesión de $\mathcal{R}$ -módulos y morfismos de $\mathcal{R}$ -módulos, denotada $\{\mathcal{M}_k, \varphi_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$, donde $\varphi_k : \mathcal{M}_k \rightarrow \mathcal{M}_{k+1}$ y $\mathcal{R}$ es un anillo con unidad, la sucesión

$$\cdots \xrightarrow{\varphi_{k-2}} \mathcal{M}_{k-1} \xrightarrow{\varphi_{k-1}} \mathcal{M}_k \xrightarrow{\varphi_k} \mathcal{M}_{k+1} \longrightarrow \cdots \quad (1.10)$$

es llamada una sucesión exacta si para cada $k \in \mathbb{Z}$ se tiene que $\text{Ker}(\varphi_{k+1}) = \text{Im}(\varphi_k)$. Más aún, se dice que la sucesión se escinde en $\mathcal{M}_k$ si existe un morfismo $\psi_k : \mathcal{M}_{k+1} \rightarrow \mathcal{M}_k$ tal que $\varphi_k \circ \psi_k = \text{id}_{\mathcal{M}_{k+1}}$, donde $\text{id}_{\mathcal{M}_{k+1}}$ es el morfismo identidad en $\mathcal{M}_{k+1}$.

Como el lector ha de suponer, a lo largo de esta tesis nosotros sólo consideraremos dos tipos de módulos; las C*-álgebras y los grupos abelianos, con $\mathcal{R} = \mathbb{C}$ y $\mathcal{R} = \mathbb{Z}$ respectivamente. Un importante resultado sobre sucesiones exactas que se escinden es el siguiente:

Proposición 1.4.5. [28] Dados $\mathcal{R}$ -módulos $\mathcal{A}, \mathcal{E}$ y $\mathcal{C}$. Si la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{E} \begin{array}{c} \xrightarrow{\beta} \\ \xleftarrow{\gamma} \end{array} \mathcal{C} \longrightarrow 0$$

es exacta y se escinde en $\mathcal{E}$, entonces los siguientes enunciados se satisfacen

- i) $\mathcal{E} = \alpha(\mathcal{A}) \oplus \gamma(\mathcal{C}) \cong \mathcal{A} \oplus \mathcal{C};$
- ii) existe un homomorfismo de $\mathcal{R}$ -módulos (un *-homomorfismo en el contexto de C*-álgebras) $\delta : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{A}$ tal que $\delta \circ \alpha = \text{id}_{\mathcal{A}};$

iii) la sucesión $0 \longrightarrow \mathcal{C} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{E} \xrightarrow{\delta} \mathcal{A} \longrightarrow 0$ es exacta y se escinde.

En este sentido si

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{E} \xrightarrow{\beta} \mathcal{C} \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta de C*-álgebras. Un resultado bastante importante en K-teoría de C*-álgebras sostiene que el functor $\mathcal{K}_0$ es semi-exacto, esto es, la sucesión

$$\mathcal{K}_0(\mathcal{A}) \xrightarrow{\alpha_*} \mathcal{K}_0(\mathcal{E}) \xrightarrow{\beta_*} \mathcal{K}_0(\mathcal{C})$$

es exacta. Lo que vuelve natural buscar grupos de K de grados más altos, que formen una sucesión exacta larga homológica. Para tal fin, se definen el cono $C\mathcal{A}$ y la suspensión $\Sigma\mathcal{A}$ de una C*-álgebra $\mathcal{A}$ como

$$C\mathcal{A} := \mathcal{C}_0((0, 1], \mathcal{A}) \cong \mathcal{C}_0((0, 1]) \otimes \mathcal{A},$$

$$\Sigma\mathcal{A} := \mathcal{C}_0((0, 1), \mathcal{A}) \cong \mathcal{C}_0((0, 1)) \otimes \mathcal{A}.$$

Ahora bien, en virtud de que $C\mathcal{A}$ es contraíble sus K-grupos superiores, definidos por homotopía, son todos 0. Sea $\text{ev}_t(f) := f(t)$ el mapeo evaluación en el punto $t \in [0, 1]$. Entonces tenemos la siguiente sucesión exacta corta de C*-álgebras

$$0 \longrightarrow \Sigma\mathcal{A} \xrightarrow{\alpha} C\mathcal{A} \xrightarrow{\text{ev}_1} \mathcal{A} \longrightarrow 0$$

y la sucesión exacta larga asociada tiene la forma

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathcal{K}_2(\mathcal{A}) \xrightarrow{\partial} \mathcal{K}_1(\Sigma\mathcal{A}) \longrightarrow \\ 0 \longrightarrow \mathcal{K}_1(\mathcal{A}) \xrightarrow{\partial} \mathcal{K}_0(\Sigma\mathcal{A}) \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathcal{K}_0(\mathcal{A}). \end{aligned}$$

La exactitud de esta sucesión larga significa que $\mathcal{K}_{i+1}(\mathcal{A}) \cong \mathcal{K}_i(\Sigma\mathcal{A})$. Por consiguiente una natural definición de K-grupos superiores puede ser $\mathcal{K}_i(\mathcal{A}) := \mathcal{K}_0(\Sigma^i \mathcal{A})$ ⁴, donde Σ^i simboliza la i -ésima suspensión.

Como el siguiente resultado establece, la K-teoría de C*-álgebras es 2-cíclica, esto es, sólo cuenta con dos K-grupos, $\mathcal{K}_0$ y $\mathcal{K}_1$. Este es un resultado muy útil en el álgebra de operadores. Muestra además una relación entre la K-teoría topológica compleja y la K-teoría C*-algebraica.

Teorema 1.4.6 (Periodicidad de Bott). *Para cualquier C*-álgebra $\mathcal{A}$, $\mathcal{K}_0(\Sigma^2 \mathcal{A}) \cong \mathcal{K}_0(\mathcal{A})$ y en consecuencia*

$$\mathcal{K}_{i+2}(\mathcal{A}) \cong \mathcal{K}_i(\mathcal{A}) \quad \text{para todo } i \in \mathbb{N}.$$

Corolario 1.4.7. ^[28] *En virtud del teorema anterior la sucesión exacta larga se reduce a la potente herramienta para el cálculo de K-grupos, conocida como la sucesión exacta de seis términos, esto es, dada una sucesión exacta corta*

$$0 \longrightarrow \mathcal{I} \xrightarrow{i} \mathcal{A} \xrightarrow{\pi} \mathcal{A}/\mathcal{I} \longrightarrow 0$$

⁴La definición de $\mathcal{K}_1$ mediante matrices unitarias y la definición empleando la suspensión, definen grupos isomorfos.

donde vemos a $\mathcal{I}$ como un ideal de $\mathcal{A}$, entonces tenemos la sucesión exacta

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{K}_0(\mathcal{I}) & \xrightarrow{i_*} & \mathcal{K}_0(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\pi_*} & \mathcal{K}_0(\mathcal{A}/\mathcal{I}) \\ \text{ind} := \partial_{01} \uparrow & & & & \downarrow \partial_{10} := \text{exp} \\ \mathcal{K}_1(\mathcal{A}/\mathcal{I}) & \xleftarrow{\pi_*} & \mathcal{K}_1(\mathcal{A}) & \xleftarrow{i_*} & \mathcal{K}_1(\mathcal{I}) \end{array} \quad (1.11)$$

y una receta para calcular los morfismos de conexión es la siguiente:

- i) Para ind: dado $u \in \mathcal{U}_n(\widetilde{A/I})$, por Teorema 1.4.4 es claro que $[u \oplus u^*] = [uu^* \oplus 1_n] = [1_{2n}] = 0$. Luego existe un levantamiento unitario $v \in \mathcal{U}_{2n}(\widetilde{A})$ tal que $\pi(v) = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix}$, ver [28, Section 4.3]. Por lo tanto $\text{ind}([u]) = \left[v \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v^* \right] - [1_n]$.
- ii) Para exp: dado $p^2 = p^* = p \in \mathcal{M}_{n \times n}(\widetilde{A/I})$ debemos encontrar un levantamiento autoadjunto de p en $\mathcal{A}$, esto es, un $x = x^* \in \mathcal{M}_{n \times n}(\widetilde{A})$ de tal suerte que $\pi(x) = p$, con esto, entonces $\text{exp}([p] - [1_n]) = [e^{2\pi i x}]$.

Considerando las bolas cerradas unitarias, sus interiores y fronteras,

$$\overline{\mathbb{B}}^k := \{x \in \mathbb{R}^k : \|x\| \leq 1\}, \quad \mathbb{B}^k := \{x \in \mathbb{R}^k : \|x\| < 1\}, \quad \partial \overline{\mathbb{B}}^k := \{x \in \mathbb{R}^k : \|x\| = 1\}, \quad (1.12)$$

los siguientes ejemplos son consecuencia directa de los Teoremas 1.4.2 y 1.4.4 del homeomorfismo $\mathbb{R}^k \cong \mathbb{B}^k$ y del hecho de que $\overline{\mathbb{B}}^k$ es contraíble.

Ejemplo 1.4.8. A continuación listamos algunos de los K-grupos que usaremos a lo largo de esta tesis, hacemos especial mención al ítem vi); el cálculo de estos K-grupos puede ser encontrado en el libro [22, Página 234]:

- i) $\mathcal{K}_0(\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^{2n})) \cong \mathcal{K}_0(\mathcal{C}_0(\mathbb{B}^{2n})) \cong \mathcal{K}_0(\Sigma^{2n}\mathbb{C}) \cong \mathcal{K}_0(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{Z}^+,$
- ii) $\mathcal{K}_0(\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^{2n-1})) \cong \mathcal{K}_0(\mathcal{C}_0(\mathbb{B}^{2n-1})) \cong \mathcal{K}_1(\Sigma^{2(n-1)}\mathbb{C}) \cong \mathcal{K}_1(\mathbb{C}) \cong 0, \quad n \in \mathbb{Z}^+,$
- iii) $\mathcal{K}_1(\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^{2n})) \cong \mathcal{K}_1(\mathcal{C}_0(\mathbb{B}^{2n})) \cong \mathcal{K}_1(\Sigma^{2n}\mathbb{C}) \cong \mathcal{K}_1(\mathbb{C}) \cong 0, \quad n \in \mathbb{Z}^+,$
- iv) $\mathcal{K}_1(\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^{2n-1})) \cong \mathcal{K}_1(\mathcal{C}_0(\mathbb{B}^{2n-1})) \cong \mathcal{K}_0(\Sigma^{2(n-1)}\mathbb{C}) \cong \mathcal{K}_0(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{Z}^+,$
- v) $\mathcal{K}_0(\mathcal{C}(\overline{\mathbb{B}}^n)) \cong \mathcal{K}_0(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}, \quad \mathcal{K}_1(\mathcal{C}(\overline{\mathbb{B}}^n)) \cong \mathcal{K}_1(\mathbb{C}) \cong 0, \quad n \in \mathbb{Z}^+.$
- vi) En la tesis de maestría [16] se muestra que si X denota una superficie compacta (sin frontera) orientable de género $n \in \mathbb{N}$ entonces se cumple $\mathcal{K}_0(\mathcal{C}(X)) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ y además $\mathcal{K}_1(\mathcal{C}(X)) \cong \bigoplus_{i=1}^{2n} \mathbb{Z}$. Por otro lado, si X denota una superficie no orientable de género $n \in \mathbb{Z}^+$ entonces $\mathcal{K}_0(\mathcal{C}(X)) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}$ y $\mathcal{K}_1(\mathcal{C}(X)) \cong \bigoplus_{i=1}^{n-1} \mathbb{Z}$.

Ejemplo 1.4.9. Como $\mathcal{K}_0(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}[1]$, $\mathcal{K}_1(\mathbb{C}) = 0$, $\mathcal{K}_0(\mathcal{C}(\mathbb{S}^1)) = \mathbb{Z}[1]$ y $\mathcal{K}_1(\mathcal{C}(\mathbb{S}^1)) = \mathbb{Z}[u]$, con u la identidad en $\mathbb{S}^1$, los K-grupos del álgebra de Toeplitz $\mathcal{T}$ se pueden calcular empleando la

sucesión exacta de seis términos dada en el Corolario 1.4.7 e inducida por la sucesión exacta corta (1.8):

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{Z}[1 - SS^*] \cong \mathcal{K}_0(\mathbb{K}) & \xrightarrow{\iota_*} & \mathcal{K}_0(\mathcal{T}) & \xrightarrow{\sigma_*} & \mathcal{K}_0(\mathcal{C}(\mathbb{S}^1)) \cong \mathbb{Z}[1] \\ & \uparrow \text{ind} & & & \downarrow \text{exp} \\ \mathbb{Z}[u] \cong \mathcal{K}_1(\mathcal{C}(\mathbb{S}^1)) & \xleftarrow{\sigma_*} & \mathcal{K}_1(\mathcal{T}) & \xleftarrow{\iota_*} & \mathcal{K}_1(\mathbb{K}) \cong 0. \end{array}$$

El mapeo del índice $\text{ind} : \mathcal{K}_1(\mathcal{C}(\mathbb{S}^1)) \rightarrow \mathbb{Z} \cong \mathcal{K}_0(\mathbb{K})$ se relaciona con el winding number $\text{wind}(\Phi) \in \mathbb{Z}$ de funciones continuas $\Phi : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ y el índice de Fredholm $\text{Index}(F) \in \mathbb{Z}$ de elementos invertibles $[F] \in \mathcal{C}$ en el álgebra de Calkin $\mathcal{C} := \mathcal{B}/\mathbb{K}$, donde $\mathcal{B} := \mathcal{B}(\mathcal{H})$. De esta manera, como $\mathcal{K}_0(\mathcal{B}) = \mathcal{K}_1(\mathcal{B}) = 0$, el mapeo del índice $\text{ind} : \mathcal{K}_1(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbb{Z} \cong \mathcal{K}_0(\mathbb{K})$ en la sucesión exacta de seis términos inducida por la sucesión exacta corta $0 \rightarrow \mathbb{K} \rightarrow \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C} \rightarrow 0$ resulta ser un isomorfismo. Ahora bien, por [28, Example 8.C], $\text{ind}[u] = -[1 - SS^*]$, donde $[1 - SS^*]$ representa un generador de $\mathcal{K}_0(\mathbb{K})$. Ya que ind es un homomorfismo de grupos abelianos podemos escribir para todo $k \in \mathbb{Z}$,

$$k = \text{wind}[u^k] = -\text{ind}[u^k] = \begin{cases} -\text{Index}(S^{*|k|}), & k < 0, \\ -\text{Index}(S^k), & k \geq 0, \end{cases}$$

y como la K-teoría de C*-álgebras es homotópicamente invariante tenemos que

$$\text{ind}[\Phi] = \text{Index}(F_\Phi) = -\text{wind}[\Phi]$$

para cualquier función invertible $\Phi \in \mathcal{C}(\mathbb{S}^1) \cong \mathcal{T}/\mathbb{K} \subset \mathcal{C}$, donde F_Φ denota un levantamiento de Φ .

Si una C*-álgebra se ve como la C*-álgebra universal de un gráfico dirigido de fila finita, entonces su K-teoría es bastante sencilla de calcular, ya que contamos con el siguiente teorema, el lector puede encontrar una prueba en [20].

Teorema 1.4.10 (K-teoría de una C*-álgebra gráfica). *Dado un gráfico dirigido de fila finita $G = (G^0, G^1, r, s)$. Sea V_G el subconjunto de G^0 de todos los vértices que no son sink y tal que sólo emiten una cantidad finita de aristas, entonces denotando a $\mathbb{Z}V_G$ y $\mathbb{Z}G^0$ como los grupos abelianos libres con generadores V_G y G^0 respectivamente, la K-teoría de $\mathcal{C}^*(G)$ puede ser calculada como*

$$\mathcal{K}_0(\mathcal{C}^*(G)) \cong \text{coker}(K_G)^5, \quad \mathcal{K}_1(\mathcal{C}^*(G)) \cong \text{Ker}(K_G),$$

donde $K_G : \mathbb{Z}V_G \rightarrow \mathbb{Z}G^0$ es el homomorfismo de grupos abelianos definido por

$$K_G(v) = \left(\sum_{\{e \in G^1 : s(e)=v\}} r(e) \right) - v, \quad \text{para todo } v \in G^0.$$

⁵ $\text{coker}(K_G)$ representa al cokernel de K_G .

1.5. Teoría de Brown-Douglas Fillmore

La Teoría de Brown-Douglas-Fillmore clasifica operadores esencialmente normales que son unitariamente equivalentes módulo compactos. Debe entenderse a un operador esencialmente normal en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ como un operador $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $TT^* - T^*T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ o equivalentemente como un operador $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $\pi(T)$ es un operador normal en el álgebra de Calkin $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathcal{H}) := \mathcal{B}(\mathcal{H})/\mathcal{K}(\mathcal{H})$ donde π denota la proyección canónica $\pi : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathcal{H})$. Recomendamos los libros [4, 28] y los artículos [5, 6] para profundizar en esta teoría.

Definición 1.5.1 (Equivalencia módulo compactos). Sean $T_1, T_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, se dice que T_1 y T_2 son unitariamente equivalentes módulo compactos cuando T_2 es unitariamente equivalente a una perturbación compacta de T_1 , es decir, existen un operador unitario $U \in U(\mathcal{H})$ y un operador compacto $K \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ tal que $UT_2U^* = T_1 + K$. Note que podemos definir una relación de equivalencia $\sim_{\mathcal{K}}$, mediante

$$T_1 \sim_{\mathcal{K}} T_2 \Leftrightarrow \exists U \in U(\mathcal{H}), K \in \mathcal{K}(\mathcal{H}) \text{ tal que } UT_2U^* = T_1 + K.$$

El resultado fundamental de esta teoría sostiene que dos operadores esencialmente normales T_1 y T_2 son unitariamente equivalentes módulo compactos si y sólo si tienen el mismo espectro esencial $\text{spec}_e(T_1) = \text{spec}_e(T_2)$ y además, $\text{Index}(T_1 - \lambda 1) = \text{Index}(T_2 - \lambda 1)$ para todo $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \text{spec}_e(T_1)$.

Estudiando este tipo de operadores, Brown, Douglas y Fillmore encontraron una relación con las extensiones de C^* -álgebras, por tal razón hacemos alusión a este importante concepto en esta tesis.

Definición 1.5.2 (Extensiones de C^* -álgebras). Dadas dos C^* -álgebras $\mathcal{A}$ y $\mathcal{C}$, una C^* -extensión (o simplemente extensión) de $\mathcal{A}$ por $\mathcal{C}$, es una C^* -álgebra $\mathcal{E}$ con $*$ -morfismos $\alpha : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{E}$ y $\beta : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{C}$ tal que la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{E} \xrightarrow{\beta} \mathcal{C} \longrightarrow 0 \quad (1.13)$$

es exacta. El conjunto de C^* -extensiones de $\mathcal{A}$ por $\mathcal{C}$ se denota mediante el símbolo $\text{Ext}(\mathcal{A}, \mathcal{C})$. Además, se dice que una extensión $\mathcal{E}$ es trivial si y sólo si la sucesión exacta (1.13) se escinde.

Dada una C^* -álgebra $\mathcal{A}$, entonces por el Teorema de Gelfand-Naimark 1.1.2, esta puede ser vista como una C^* -subálgebra de algún $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, en este sentido se define el conmutante de $\mathcal{A}$, en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, como

$$\mathcal{A}' := \{T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : T \circ S = S \circ T \text{ para todo } S \in \mathcal{A}\}.$$

Es bien conocido que $\mathcal{A}'$ resulta ser también una C^* -subálgebra de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Luego, definimos el álgebra de multiplicadores de $\mathcal{A}$, denotada $\mathcal{M}(\mathcal{A})$, como la C^* -álgebra más grande de $\mathcal{A}''$ tal que contiene a $\mathcal{A}$ como un ideal esencial, donde $\mathcal{A}''$ es el doble conmutante de $\mathcal{A}$, esto es, $\mathcal{A}'' := (\mathcal{A}')'$ (ver [28, Remarks 2.2.3]). Además, se tienen los siguientes resultados.

Proposición 1.5.3. [28, Proposition 2.2.14] Si $\mathcal{A}$ es un ideal de una C^* -álgebra $\mathcal{E}$, entonces existe un único $*$ -homomorfismo $\mu : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{A})$ tal que μ es la identidad en $\mathcal{A}$.

Lema 1.5.4. [28, Lemma 3.2.4] Dada una C^* -extensión como en (1.13), entonces existe un único $*$ -homomorfismo $\epsilon : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{A})$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathcal{E} & \\
 \alpha \nearrow & & \searrow \epsilon \\
 \mathcal{A} & \xrightarrow{\iota} & \mathcal{M}(\mathcal{A}),
 \end{array}$$

donde el *-homomorfismo $\iota : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{A})$ denota la inclusión.

Bajo estos preceptos, para definir la invariante de Busby consideremos la C*-extensión (1.13)

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{E} \xrightarrow{\beta} \mathcal{C} \longrightarrow 0.$$

Así, como se trata de una sucesión exacta corta, se cumple que $\alpha(\mathcal{A}) = \text{Ker}(\beta) \subset \mathcal{E}$ y en consecuencia, $\alpha(\mathcal{A})$ es un ideal de $\mathcal{E}$. Luego, en virtud de la Proposición 1.5.3 existe un único *-homomorfismo $\mu : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}(\alpha(\mathcal{A}))$ tal que $\mu|_{\alpha(\mathcal{A})} = \iota_{\alpha(\mathcal{A})}$. Ahora bien, como $\alpha : \mathcal{A} \rightarrow \alpha(\mathcal{A})$ es un *-isomorfismo, entonces el mapeo inducido en las álgebras de multiplicadores $\tilde{\alpha} : \mathcal{M}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{M}(\alpha(\mathcal{A}))$ también es un *-isomorfismo. Por lo tanto, si definimos $\epsilon := (\tilde{\alpha})^{-1} \circ \mu$, se cumple que $\epsilon \circ \alpha = \iota$ (lo cual constituye una prueba del Lema 1.5.4). De este modo, la invariante de Busby se define como el *-homomorfismo:

$$\tau : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{A})/\mathcal{A}, \quad \tau(c) := \pi \circ \epsilon(s(c)),$$

donde $\pi : \mathcal{M}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{A})/\mathcal{A}$ denota el mapeo cociente y $s(c) \in \mathcal{E}$ es cualquier levantamiento de $c \in \mathcal{C}$ tal que $\beta(s(c)) = c$. Para ver que este *-homomorfismo no depende del levantamiento, sean $s(c)$ y $s'(c)$ dos levantamiento de $c \in \mathcal{C}$, entonces $\beta(s(c)) = c = \beta(s'(c))$, queremos probar que $\pi(\epsilon(s(c))) = \pi(\epsilon(s'(c)))$. En efecto,

$$\begin{aligned}
 \beta(s(c)) = \beta(s'(c)) &\implies \beta(s(c)) - \beta(s'(c)) = 0 \\
 &\implies \beta(s(c) - s'(c)) = 0 \\
 &\implies s(c) - s'(c) \in \text{Ker}(\beta) \\
 &\implies s(c) - s'(c) \in \alpha(\mathcal{A}).
 \end{aligned}$$

Por consiguiente, existe $a \in \mathcal{A}$ tal que $s(c) - s'(c) = \alpha(a)$ y por el Lema 1.5.4 obtenemos que $\epsilon(s(c) - s'(c)) = \epsilon(\alpha(a)) = \iota(a)$. Entonces, $\pi(\epsilon(s(c) - s'(c))) = 0$, como queríamos.

Definición 1.5.5 (Nociones de equivalencia de C*-extensiones). [28, Section 15.4] Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{C}$ denotan C*-álgebras, dadas dos C*-extensiones de $\mathcal{A}$ por $\mathcal{C}$, digamos

$$\begin{aligned}
 0 &\longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{\alpha_1} \mathcal{E}_1 \xrightarrow{\beta_1} \mathcal{C} \longrightarrow 0 \\
 0 &\longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{\alpha_2} \mathcal{E}_2 \xrightarrow{\beta_2} \mathcal{C} \longrightarrow 0
 \end{aligned}$$

con invariantes de Busby asociadas τ_1 y τ_2 . Decimos que $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$ son

i) fuertemente equivalentes si existe un *-isomorfismo $\gamma : \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_2$ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathcal{A} & \xrightarrow{\alpha_1} & \mathcal{E}_1 & \xrightarrow{\beta_1} & \mathcal{C} \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow \gamma & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{A} & \xrightarrow{\alpha_2} & \mathcal{E}_2 & \xrightarrow{\beta_2} & \mathcal{C} \longrightarrow 0,
 \end{array}$$

es conmutativo;

- ii) fuertemente unitariamente equivalentes si existe un unitario $u \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ tal que $\tau_2(a) = \pi(u)\tau_1(a)\pi(u)^*$ donde $\pi : \mathcal{M}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{A})/\mathcal{A}$ es el $*$ -homomorfismo cociente.

En este trabajo estamos interesados en aquellas C^* -extensiones de compactos por álgebras de funciones continuas en un subconjunto compacto X del plano complejo $\mathbb{C}$. Esto es, en C^* -extensiones del tipo:

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}(\mathcal{H}) \xrightarrow{\iota} \mathcal{E} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{C}(X) \longrightarrow 0, \quad (1.14)$$

donde $\mathcal{E}$ es una C^* -subálgebra de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ con $\text{id}_{\mathcal{H}} \in \mathcal{E}$ y $\mathcal{K}(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{E}$ como ideal. Típicamente a este tipo de C^* -extensiones se les conoce como C^* -extensiones de compactos por $\mathcal{C}(X)$, y usando la notación de la Definición 1.5.2 Brown, Douglas y Fillmore clasifican los elementos de $\text{Ext}(\mathbb{K}, \mathcal{C}(X))$ o simplemente $\text{Ext}(\mathcal{C}(X))$. En este sentido, el estudio de estas C^* -extensiones está estrechamente relacionado con el estudio de los operadores esencialmente normales que son unitariamente equivalentes módulo compactos; observe la siguiente proposición.

Proposición 1.5.6. *Son ciertos:*

- i) Dada una C^* -extensión $\mathcal{E}$ de compactos por $\mathcal{C}(X)$, como en (1.14), entonces todo operador lineal y acotado en $\mathcal{E}$ resulta ser un operador esencialmente normal.
- ii) Sea $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ un operador esencialmente normal y sea $X = \text{spec}_e(T)$, entonces existe una extensión de compactos por $\mathcal{C}(X)$ de tal suerte que $\mathcal{E} = C^*\text{-gen}\{\{T, T^*, \text{id}_{\mathcal{H}}\} \cup \mathcal{K}(\mathcal{H})\}$ y

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}(\mathcal{H}) \xrightarrow{\iota} \mathcal{E} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{C}(X) \longrightarrow 0$$

es exacta, con $\varphi := (\Gamma^{-1} \circ \mathcal{C}(\phi))^{-1} \circ \pi|_{\mathcal{E}}$, donde Γ es la transformada de Gelfand y ϕ es el homeomorfismo usual entre el espacio de ideales maximales de la C^* -álgebra $C^*\text{-gen}\{\pi(T), \pi(T^*), 1\}$ y el subconjunto compacto del plano complejo X .

Definición 1.5.7. Sea X un subconjunto compacto de $\mathbb{C}$. Entonces, una función índice de X es un mapeo definido en el conjunto de componentes acotadas de $\mathbb{C} \setminus X$ con valores enteros.

En el sentido de la anterior definición, dado un operador esencialmente normal T de tal suerte que $\text{spec}_e(T) = X$, entonces la función índice asociada a T es el mapeo $\lambda \mapsto \text{Index}(T - \lambda 1)$ ⁶. En resumen, el Teorema de Brown-Douglas-Fillmore sostiene lo siguiente.

Teorema 1.5.8 (Teorema de Brown-Douglas-Fillmore). [13, Theorem 7.5.6] *Dos operadores esencialmente normales T_1 y T_2 son unitariamente equivalentes módulo compactos si y sólo si tienen el mismo espectro esencial X y además, $\text{Index}(T_1 - \lambda 1) = \text{Index}(T_2 - \lambda 1)$ para todo $\lambda \in \mathbb{C} \setminus X$. Más aún, toda función con valores en $\mathbb{Z}$, localmente constante en $\mathbb{C} \setminus X$ y que se desvanece en el infinito, es la función de índice asociada a algún operador esencialmente normal T .*

Comentario 1.5.9. [4, Section 16.2] La Teoría BDF es muy aplaudida porque en general Brown, Douglas y Fillmore demostraron que para cualquier espacio métrico compacto X , se cumple que $\text{Ext}(\mathbb{K}, \mathcal{C}(X)) \cong \mathcal{K}^1(X)$, donde $\mathcal{K}^1(X)$ denota el primer grupo de K -homología de X .

La siguiente definición es de gran importancia en esta tesis.

⁶Index denota el índice de Fredholm.

Definición 1.5.10 (Pullback de C^* -álgebras). Dadas tres C^* -álgebras $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ y $*$ -homomorfismos $\mathcal{A} \xrightarrow{\varphi_1} \mathcal{C} \xleftarrow{\varphi_2} \mathcal{B}$, el diagrama Pullback de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ a lo largo de $\mathcal{C}$ y respecto a los mapeos φ_1, φ_2 es la C^* -álgebra $\mathcal{A} \oplus_{(\varphi_1, \varphi_2)} \mathcal{B}$ dada por

$$\mathcal{A} \oplus_{(\varphi_1, \varphi_2)} \mathcal{B} := \{(a, b) \in \mathcal{A} \oplus \mathcal{B} : \varphi_1(a) = \varphi_2(b)\}.$$

Observación 1.5.11. Es preciso observar que $\mathcal{A} \oplus_{(\varphi_1, \varphi_2)} \mathcal{B}$ junto con las proyecciones $\text{pr}_1(x, y) = x$ y $\text{pr}_2(x, y) = y$ es la C^* -álgebra más pequeña tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{A} \oplus_{(\varphi_1, \varphi_2)} \mathcal{B} & \\ \text{pr}_1 \swarrow & & \searrow \text{pr}_2 \\ \mathcal{A} & & \mathcal{B} \\ \varphi_1 \searrow & & \swarrow \varphi_2 \\ & \mathcal{C} & \end{array}$$

Y más pequeña quiere decir que si existe otra C^* -álgebra $\mathcal{D}$ con $*$ -homomorfismos $\mathcal{A} \xleftarrow{\psi_1} \mathcal{D} \xrightarrow{\psi_2} \mathcal{B}$, tal que el diagrama de abajo a la izquierda conmuta, entonces existe un $*$ -homomorfismo $\gamma : \mathcal{A} \oplus_{(\varphi_1, \varphi_2)} \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{D}$ tal que el de la derecha también conmuta:

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{D} & \\ \psi_1 \swarrow & & \searrow \psi_2 \\ \mathcal{A} & & \mathcal{B} \\ \varphi_1 \searrow & & \swarrow \varphi_2 \\ & \mathcal{C} & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xleftarrow{\varphi_1} & \mathcal{A} \\ \varphi_2 \uparrow & & \uparrow \text{pr}_1 \\ \mathcal{B} & \xleftarrow{\text{pr}_2} & \mathcal{A} \oplus_{(\varphi_1, \varphi_2)} \mathcal{B} \\ & & \uparrow \gamma \\ & & \mathcal{D} \end{array}$$

Ejemplo 1.5.12 (La esfera cuántica estándar de Podleś). Esta importante C^* -álgebra para los géometras no-conmutativos se define como la C^* -álgebra $\mathcal{C}(S_q^2)$ dada por el diagrama Pullback

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{C}(S_q^2) & \\ \swarrow & & \searrow \\ \mathbb{C} & & \mathcal{T} \\ \downarrow 1 & & \downarrow \sigma \\ & \mathcal{C}(\mathbb{S}^1) & \end{array}$$

De esta manera, continuando con la invariante de Busby, esta conduce a una descripción isomorfa de $\mathcal{E}$ (en una extensión como en (1.13)), en el sentido del siguiente teorema.

Teorema 1.5.13. [28, Proposition 3.2.11] Dada una C^* -extensión $\mathcal{E}$ como en (1.13), se cumple

que $\mathcal{E}$ es $*$ -isomorfa al pullback

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{M}(\mathcal{A}) \oplus_{(\pi, \tau)} \mathcal{C} & \\ \swarrow \text{pr}_1 & & \searrow \text{pr}_2 \\ \mathcal{M}(\mathcal{A}) & & \mathcal{C} \\ \searrow \pi & & \swarrow \tau \\ & \mathcal{M}(\mathcal{A})/\mathcal{A} & \end{array}$$

donde, a partir de la Definición [1.5.10](#), el objeto $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \oplus_{(\pi, \tau)} \mathcal{C}$ está dado por

$$\mathcal{M}(\mathcal{A}) \oplus_{(\pi, \tau)} \mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \oplus \mathcal{C} : \pi(x) = \tau(y)\}.$$

Un isomorfismo entre $\mathcal{E}$ y el Pullback es establecido mediante la regla de asignación

$$\psi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{A}) \oplus_{(\pi, \tau)} \mathcal{C}, \quad \psi(e) := (\epsilon(e), \beta(e)).$$

Para ver que el $*$ -homomorfismo ψ del Teorema [1.5.13](#) es de hecho un $*$ -isomorfismo, observe que podemos aplicar el lema del cinco al siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{A} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{E} & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{C} & \longrightarrow & 0 \\ \parallel & & \downarrow \epsilon \circ \alpha & & \downarrow \psi & & \parallel & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & \epsilon \circ \alpha(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\alpha_1} & \mathcal{M}(\mathcal{A}) \oplus_{(\pi, \tau)} \mathcal{C} & \xrightarrow{\text{pr}_2} & \mathcal{C} & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

donde $\alpha_1(a) := (a, 0)$.

1.6. Sucesiones espectrales homológicas

En esta sección daremos algunas nociones sobre la teoría de sucesiones espectrales, las cuáles son una herramienta matemática muy utilizada en áreas como la topología algebraica y el álgebra (co-)homológica, ya que permiten realizar cálculos de tipo (co-)homológicos de una manera elegante, pero con el inconveniente de que, en general, los diferenciales en una sucesión espectral son muy difíciles de calcular y prácticamente bajo la presencia de problemas de extensión no nos brindan mucha información. Invitamos al lector a consultar los libros [\[17\]](#) [\[3\]](#), para deleitarse con esta rica teoría. Así como también a revisar las notas [\[21\]](#).

Desde la introducción de esta tesis hemos dicho que utilizaremos la sucesión espectral de Schochet [\[23\]](#) para adelantar los cálculos de K-teoría, y en vista de que dicha sucesión espectral es de tipo homológico (ver [\[1\]](#)); a continuación presentamos los conceptos necesarios para su comprensión, desde este paradigma.

¿Qué es una sucesión espectral?

Filosóficamente podemos pensar una sucesión espectral como un libro con infinitas páginas, donde en cada página encontramos grupos de homología (co-homología). No está de más decir

que leer un libro con infinitas páginas es evidentemente una tarea imposible de llevar a cabo, por lo cual, siempre buscamos que a partir de cierta página todas sean iguales (isomorfas) y así conocer el final de la historia sin tanto esfuerzo. Para entender a cabalidad el concepto de sucesión espectral es menester comprender la siguiente definición.

Definición 1.6.1 (Grupo abeliano bigraduado). Un grupo abeliano bigraduado digamos $\mathcal{G} = \mathcal{G}_{*,*}$ es un sucesión de grupos abelianos que se encuentra doblemente indexada, esto es,

$$\mathcal{G}_{*,*} = (\mathcal{G}_{r,s})_{r,s \in \mathbb{Z}}.$$

De acuerdo con esta notación, introducimos los siguientes objetos y algunas denominaciones encontradas en la literatura.

- Decimos que $\mathcal{G}_{r,s}$ es el grupo abeliano de bigrado (r, s) .
- Un morfismo entre grupos abelianos bigraduados $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$ de bigrado (u, v) es una sucesión de homomorfismos de grupos

$$(f_{r,s} : \mathcal{G}_{r,s} \rightarrow \mathcal{G}'_{r+u, s+v})_{r,s \in \mathbb{Z}}.$$

- Un diferencial $d : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ de bigrado (u, v) es un morfismo de bigrado (u, v) tal que $d^2 = 0$. Un grupo abeliano bigraduado $\mathcal{G}$ junto con un diferencial d de bigrado (u, v) se dice un grupo diferencial bigraduado y se denota mediante el símbolo $(\mathcal{G}, d)$.
- Un morfismo entre grupos diferenciales bigraduados $f : (\mathcal{G}, d) \rightarrow (\mathcal{G}', d')$ donde d y d' tienen bigrado (u, v) , es un morfismo $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$ tal que conmuta con los diferenciales.

Observación 1.6.2. Observe que si componemos dos morfismos $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$ y $g : \mathcal{G}' \rightarrow \mathcal{G}''$ de bigrado (u, v) y (u', v') respectivamente, entonces la composición $g \circ f : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}''$ es un morfismo de bigrado $(u + u', v + v')$. Observe también que dado un grupo abeliano bigraduado $\mathcal{G}$ y un diferencial $d : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ de bigrado (u, v) , podemos considerar los siguientes grupos abelianos bigraduados

$$\text{Ker}(d) = \text{Ker}(d)_{*,*} = (\text{Ker}(d)_{r,s})_{r,s \in \mathbb{Z}} := (\text{Ker}(d_{r,s}))_{r,s \in \mathbb{Z}},$$

$$\text{Im}(d) = \text{Im}(d)_{*,*} = (\text{Im}(d)_{r,s})_{r,s \in \mathbb{Z}} := (\text{Im}(d_{r-u, s-v}))_{r,s \in \mathbb{Z}}.$$

Y como la composición de los morfismos

$$\mathcal{G}_{r-u, s-v} \xrightarrow{d_{r-u, s-v}} \mathcal{G}_{r,s} \xrightarrow{d_{r,s}} \mathcal{G}_{r+u, s+v}$$

satisface $d_{r,s} \circ d_{r-u, s-v} = 0$, entonces se cumplen las siguientes contenciones

$$\text{Im}(d)_{r,s} \subseteq \text{Ker}(d)_{r,s} \subseteq \mathcal{G}_{r,s}.$$

De este modo, tiene sentido preguntarse por la exactitud de este complejo de cadenas, es decir, podemos pensar en determinar la homología de $(\mathcal{G}, d)$, en efecto, definimos la homología de $(\mathcal{G}, d)$, denotada por $H(\mathcal{G}, d)$, como el grupo abeliano bigraduado

$$H(\mathcal{G}, d) := \text{Ker}(d) / \text{Im}(d),$$

donde el grupo abeliano en el bigrado (r, s) está dado por el grupo cociente

$$H_{r,s}(\mathcal{G}, d) := \text{Ker}(d_{r,s}) / \text{Im}(d_{r-u, s-v}).$$

Consideramos importante mencionar que los grupos abelianos bigraduados se suelen representar en el plano $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, donde el grupo abeliano $\mathcal{G}_{r,s}$ lo etiquetamos en el punto $(r, s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Asimismo, el morfismo $d_{r,s} : \mathcal{G}_{r,s} \rightarrow \mathcal{G}_{r+u, s+v}$ lo representamos en el plano mediante una flecha que va del punto (r, s) al punto $(r+u, s+v)$.

A continuación presentamos uno de los conceptos más importantes de esta tesis; el concepto de sucesión espectral homológica.

Definición 1.6.3 (Sucesión espectral homológica). Una sucesión espectral homológica (E, d) es una sucesión de grupos abelianos diferenciales bigraduados $(E^l = E_{*,*}^l, d^l)_{l \in \mathbb{Z}^+}$, donde los diferenciales $d^l : E^l \rightarrow E^l$ tienen bigrado $(-l, l-1)$ y además

$$E^{l+1} \cong H(E^l, d^l) = \text{Ker}(d^l) / \text{Im}(d^l)$$

para todo $l \in \mathbb{Z}^+$.

En la literatura es común encontrar que al grupo abeliano diferencial bigraduado (E^l, d^l) se le conozca como la página l -ésima de la sucesión espectral o simplemente E^l -página, y que dado el morfismo $d_{r,s}^l$ al número $r+s$ se le conozca como grado total del morfismo. De este modo, en aras de ilustrar esta notación veamos (E^l, d^l) para $l=1, 2$ en el plano $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Note que el homomorfismo $d_{r,s}^1 : E_{r,s}^1 \rightarrow E_{r-1,s}^1$ se representa por una flecha que va desde el punto (r, s) hasta el punto $(r-1, s)$ ver Figura 1.3 y el homomorfismo $d_{r,s}^2 : E_{r,s}^2 \rightarrow E_{r-2,s+1}^2$ se representa por una flecha que va desde el punto (r, s) hasta el punto $(r-2, s+1)$ ver Figura 1.4.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 \dots & E_{0,2}^1 & \xleftarrow{d^1} & E_{1,2}^1 & \xleftarrow{d^1} & E_{2,2}^1 & \dots \\
 \dots & E_{0,1}^1 & \xleftarrow{d^1} & E_{1,1}^1 & \xleftarrow{d^1} & E_{2,1}^1 & \dots \\
 \dots & E_{0,0}^1 & \xleftarrow{d^1} & E_{1,0}^1 & \xleftarrow{d^1} & E_{2,0}^1 & \dots \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots &
 \end{array}$$

Figura 1.3: Página 1 de una sucesión espectral homológica.

$$\begin{array}{ccccccc}
& \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\cdots & E_{0,3}^2 & \xleftarrow{\quad} & E_{1,3}^2 & \xleftarrow{\quad} & E_{2,3}^2 & \xleftarrow{\quad} & E_{3,3}^2 & \cdots \\
& \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow \\
\cdots & E_{0,2}^2 & \xleftarrow{\quad} & E_{1,2}^2 & \xleftarrow{\quad} & E_{2,2}^2 & \xleftarrow{\quad} & E_{3,2}^2 & \cdots \\
& \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow \\
\cdots & E_{0,1}^2 & \xleftarrow{\quad} & E_{1,1}^2 & \xleftarrow{\quad} & E_{2,1}^2 & \xleftarrow{\quad} & E_{3,1}^2 & \cdots \\
& \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow \\
\cdots & E_{0,0}^2 & \xleftarrow{\quad} & E_{1,0}^2 & \xleftarrow{\quad} & E_{2,0}^2 & \xleftarrow{\quad} & E_{3,0}^2 & \cdots \\
& \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}$$

Figura 1.4: Página 2 de una sucesión espectral homológica.

Definición 1.6.4. Sean $E = (E^l, d^l)_{l \in \mathbb{Z}^+}$ y $\mathcal{E} = (\mathcal{E}^l, d^l)_{l \in \mathbb{Z}^+}$ sucesiones espectrales. Un morfismo de sucesiones espectrales $\varphi : E \rightarrow \mathcal{E}$ consiste de una sucesión de morfismos de grupos diferenciales bigraduados (ver Definición 1.6.1)

$$(\varphi^l : (E^l, d^l) \rightarrow (\mathcal{E}^l, d^l))_{l \in \mathbb{Z}^+}$$

tal que para cada $l \in \mathbb{Z}^+$ el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc}
H(E^l, d^l) & \xrightarrow{\varphi_*^l} & H(\mathcal{E}^l, d^l) \\
\cong \downarrow & & \downarrow \cong \\
E^{l+1} & \xrightarrow{\varphi^{l+1}} & \mathcal{E}^{l+1}
\end{array}$$

donde φ_*^l denota el morfismo inducido en los grupos de homología.

1.6.1. Parejas exactas

Una de las técnicas más empleadas para construir sucesiones espectrales son las parejas exactas, las cuales son definidas a continuación.

Definición 1.6.5 (Pareja exacta). Una pareja exacta de grupos abelianos bi-graduados consiste de dos grupos abelianos bi-graduados $\mathcal{D}$ y $\mathcal{E}$ y morfismos $\alpha : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$, $\beta : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ y $\gamma : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{D}$ con bigrado $(1, -1)$, $(0, 0)$ y $(-1, 0)$ respectivamente, formando un triángulo exacto

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{D} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{D} \\
& \nwarrow \gamma & \nearrow \beta \\
& \mathcal{E} &
\end{array}$$

en el sentido que la imagen de cada mapeo es el kernel del siguiente. Una pareja exacta se suele representar mediante el símbolo $(\mathcal{D}, \mathcal{E}, \alpha, \beta, \gamma)$ y a decir verdad representa una maquinaria muy útil para construir sucesiones espectrales.

Teorema 1.6.6 (Construcción de una sucesión espectral a partir de una pareja exacta). Dada una pareja exacta $(\mathcal{D}, \mathcal{E}, \alpha, \beta, \gamma)$, note que si consideramos

- i) $d := \beta \circ \gamma : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}, d \circ d = 0$;
- ii) $\mathcal{E}' := \text{Ker}(d)/\text{Im}(d)$;
- iii) $\mathcal{D}' := \text{Im}(\alpha)$;
- iv) $\alpha' : \mathcal{D}' \rightarrow \mathcal{D}'$ mapeo inducido por α ;
- v) $\gamma' : \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{D}'$ mapeo inducido por γ ;
- vi) $\beta' : \mathcal{D}' \rightarrow \mathcal{E}'$ mapeo dado por $\beta'(\alpha(d)) = [\beta(d)]$ para todo $d \in \mathcal{D}$.

Entonces el objeto $(\mathcal{D}', \mathcal{E}', \alpha', \beta', \gamma')$ define una pareja exacta conocida como pareja derivada. Más aún, haciendo $\mathcal{E}^1 = \mathcal{E}, d^1 = d, \mathcal{E}^2 = \mathcal{E}', d^2 = d' = \beta' \circ \gamma'$ y así sucesivamente, obtenemos una sucesión espectral $(\mathcal{E}^l, d^l)_{l \in \mathbb{Z}^+}$ comúnmente referida como la sucesión espectral asociada a la pareja exacta $(\mathcal{D}, \mathcal{E}, \alpha, \beta, \gamma)$.

Definición 1.6.7. Una sucesión espectral $E = (E^l, d^l)_{l \in \mathbb{Z}^+}$ colapsa en la página E^t si y sólo si $d^l = 0$ para todo $l \geq t$.

Definición 1.6.8. Sea G un grupo abeliano. Una filtración de G es una familia $\{F^v G\}_{v \in \mathbb{Z}}$ de subgrupos de G tal que

$$\dots \subseteq F^{v-1}G \subseteq F^v G \subseteq F^{v+1}G \subseteq \dots \subseteq G.$$

Además, el grupo graduado asociado está definido por $\text{gr}_v(G) := F^v G / F^{v+1}G$ para cada $v \in \mathbb{Z}$.

Definición 1.6.9. Sea $(E_{*,*}^l, d^l)_{l \in \mathbb{Z}^+}$ una sucesión espectral, entonces para cada $v, w \in \mathbb{Z}$ y cada $l \in \mathbb{Z}^+$ definimos

$$\begin{aligned} Z_{v,w}^l &:= \text{Ker}(d^l : E_{v,w}^l \rightarrow E_{v-l, w+l-1}^l) \\ B_{v,w}^l &:= \text{Im}(d^l : E_{v+l, w-l+1}^l \rightarrow E_{v,w+l}^l). \end{aligned}$$

Observación 1.6.10. Note que podemos ver a $Z_{v,w}^l$ y $B_{v,w}^l$ como subgrupos de $E_{v,w}^l$. Con lo cual, se puede definir $E_{v,w}^\infty := (\cap_{l \in \mathbb{Z}^+} Z_{v,w}^l) / (\cup_{l \in \mathbb{Z}^+} B_{v,w}^l)$.

En virtud de que las sucesiones espectrales consideradas en esta tesis colapsan, la página infinito de nuestras sucesiones espectrales, denotada mediante el símbolo $E_{*,*}^\infty$, estará dada por $E_{r,s}^\infty = E_{r,s}^l$ para algún $l \in \mathbb{Z}^+$. Para más detalles sobre dicha página invitamos nuevamente al lector consultar los textos [17, 3].

Definición 1.6.11. Se dice que una sucesión espectral $(E_{*,*}^l, d^l)_{l \in \mathbb{Z}^+}$ converge a un grupo diferencial graduado $H = \{H_s\}_{s \in \mathbb{Z}}$ si y sólo si para cada $s \in \mathbb{Z}$ existe una filtración $\{F^v H_s\}_{v \in \mathbb{Z}}$ Hausdorff, exhaustiva y completa (ver [17, 3] para revisar tales conceptos) de tal suerte que $E_{v,w}^\infty \cong F^v H_{v+w} / F^{v+1} H_{v+w}$.

1.6.2. Sucesión espectral de Schochet

La sucesión espectral de Schochet es una sucesión espectral que está asociada a una pareja exacta construida mediante una sucesión creciente de ideales cerrados de C^* -álgebras. Dicha sucesión espectral es utilizada para el cálculo de K-teoría de C^* -álgebras; en este trabajo será empleada para demostrar que la K-teoría de un CW-complejo clásico finito y la K-teoría de su contraparte no-conmutativa, bajo ciertas condiciones, resulta ser la misma.

Teorema 1.6.12 (Sucesión espectral de Schochet). [23] Sean $\mathcal{A}$ una C^* -álgebra y consideremos

$$\mathcal{A}_{-1} \subset \mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{A}_n \subset \cdots \subset \mathcal{A}$$

una filtración de $\mathcal{A}$ con $\overline{\cup_n \mathcal{A}_n} = \mathcal{A}$. Entonces existe una sucesión espectral $\{E^r(\mathcal{A}), d^r\}$ con $d^r : E_{v,w}^r \rightarrow E_{v-r,w+r-1}^r$ la cual converge al objeto graduado de $\mathcal{K}_*(\mathcal{A})$ y tiene por página 1,

$$E_{v,w}^1 = \mathcal{K}_{v+w}(\mathcal{A}_v/\mathcal{A}_{v-1}).$$

Si la filtración es finita con $\mathcal{A}_n = \mathcal{A}$ para todo $n \geq N$ entonces $E_{v,w}^1 = 0$ para $v \geq N+1$ y $E^N = E^\infty$.

Observe que dada una filtración finita de ideales cerrados de una C^* -álgebra $\mathcal{A}$, esto es, sea

$$\{0\} = \mathcal{A}_{-1} \subset \mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{A}_n = \mathcal{A}$$

una filtración creciente de $\mathcal{A}$. Entonces la pareja exacta con la que construimos la sucesión espectral de Schochet es la que sigue

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K}_{*(+1)}(\mathcal{A}_{k-1}) & \xrightarrow{\mathcal{K}_*(f_{k-1})} & \mathcal{K}_*(\mathcal{A}_k) \\ & \swarrow \partial_* \quad \searrow \mathcal{K}_*(j_k) & \\ & E_{k, *+k}^1 := \mathcal{K}_*(\mathcal{A}_k/\mathcal{A}_{k-1}) & \end{array}$$

donde $\mathcal{K}_*(f_{k-1})$ y $\mathcal{K}_*(j_k)$ son los homomorfismos inducidos en los grupos de K-teoría por la inclusión y el mapeo cociente respectivamente, viendo a $\mathcal{A}_{k-1}$ como un ideal de $\mathcal{A}_k$ para cada j , $0 \leq k \leq n$, y ∂ denota a los homomorfismos conexión de (1.11). Además, la página 1 de la sucesión espectral de Schochet se ve como lo muestra la siguiente figura:

$$\begin{array}{ccccccc}
& \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
3 & \mathcal{K}_3(\mathcal{A}_0) & \xleftarrow{d_1} & \mathcal{K}_4(\mathcal{A}_1/\mathcal{A}_0) & \xleftarrow{d_1} & \mathcal{K}_5(\mathcal{A}_2/\mathcal{A}_1) & \xleftarrow{d_1} & \cdots & \xleftarrow{d_1} & \mathcal{K}_{n+3}(\mathcal{A}_n/\mathcal{A}_{n-1}) \\
2 & \mathcal{K}_2(\mathcal{A}_0) & \xleftarrow{d_1} & \mathcal{K}_3(\mathcal{A}_1/\mathcal{A}_0) & \xleftarrow{d_1} & \mathcal{K}_4(\mathcal{A}_2/\mathcal{A}_1) & \xleftarrow{d_1} & \cdots & \xleftarrow{d_1} & \mathcal{K}_{n+2}(\mathcal{A}_n/\mathcal{A}_{n-1}) \\
1 & \mathcal{K}_1(\mathcal{A}_0) & \xleftarrow{d_1} & \mathcal{K}_2(\mathcal{A}_1/\mathcal{A}_0) & \xleftarrow{d_1} & \mathcal{K}_3(\mathcal{A}_2/\mathcal{A}_1) & \xleftarrow{d_1} & \cdots & \xleftarrow{d_1} & \mathcal{K}_{n+1}(\mathcal{A}_n/\mathcal{A}_{n-1}) \\
0 & \mathcal{K}_0(\mathcal{A}_0) & \xleftarrow{d_1} & \mathcal{K}_1(\mathcal{A}_1/\mathcal{A}_0) & \xleftarrow{d_1} & \mathcal{K}_2(\mathcal{A}_2/\mathcal{A}_1) & \xleftarrow{d_1} & \cdots & \xleftarrow{d_1} & \mathcal{K}_n(\mathcal{A}_n/\mathcal{A}_{n-1}) \\
& 0 & & 1 & & 2 & & \cdots & & n
\end{array}$$

Figura 1.5: Diagrama de la sucesión espectral homológica con diferenciales d_1 .

En la Figura 1.5 podemos observar que por la periodicidad de Bott 1.4.6, las filas pares son iguales entre sí, lo mismo sucede con las impares.

Comentario 1.6.13. [23, Lemma 6.7] *Para la sucesión espectral de Schochet, el Teorema 1.6.12 implica que $E^\infty \cong F^v \mathcal{K}_{v+w}(\mathcal{A}) / F^{v-1} \mathcal{K}_{v+w}(\mathcal{A})$ donde para cada $s \in \mathbb{Z}^+$, la filtración $\{F^v \mathcal{K}_s(\mathcal{A})\}_{v \in \mathbb{Z}^+}$ está dada por*

$$F^v \mathcal{K}_s(\mathcal{A}) := \text{Im}((i_v)_* : \mathcal{K}_s(\mathcal{A}_v) \rightarrow \mathcal{K}_s(\mathcal{A}))$$

para cada $v \in \mathbb{Z}^+$ con $i_v : \mathcal{A}_v \rightarrow \mathcal{A}$ el mapeo inclusión y $(i_v)_* : \mathcal{K}_s(\mathcal{A}_v) \rightarrow \mathcal{K}_s(\mathcal{A})$ el homomorfismo inducido en los grupos de K -teoría. Además, decimos que no existen problemas de extensión, si las sucesiones exactas cortas

$$0 \longrightarrow F^{v-1} \mathcal{K}_{v+w}(\mathcal{A}) \longrightarrow F^v \mathcal{K}_{v+w}(\mathcal{A}) \longrightarrow F^v \mathcal{K}_{v+w}(\mathcal{A}) / F^{v-1} \mathcal{K}_{v+w}(\mathcal{A}) = E_{v,w}^\infty \longrightarrow 0,$$

son split (se parten) para cada $v \in \mathbb{Z}^+$. Y en consecuencia podemos recuperar la K -teoría desde el objeto graduado asociado.

CAPÍTULO 2

SUPERFICIES COMPACTAS CUÁNTICAS

En este capítulo presentamos una definición de superficies compactas cuánticas, las cuales vemos como análogos no-conmutativos de las superficies compactas clásicas (sin frontera). Estas definiciones representan nuestra motivación más importante para trabajar con CW-complejos de dimensión finita y sus versiones no-conmutativas, ya que nuestras superficies compactas cuánticas van a resultar ser CW-complejos cuánticos de dimensión 2, análogos de las superficies compactas clásicas (simplemente superficies cuando no haya lugar a confusión).

Además, nosotros hacemos una clasificación completa de las clases de isomorfismos de las superficies cuánticas introducidas, obteniendo por ejemplo que al contrario del caso clásico, las clases de isomorfismos de las superficies cuánticas compactas no-orientables dependen de un parámetro que cuenta el número de arcos que se identifican siguiendo la misma orientación. Para revisar los detalles de esta aseveración lo invitamos a ver la Sección 2.3 y consultar nuestro artículo [24].

2.1. Superficies Compactas Cuánticas

Desde la literatura, es bien sabido que las superficies compactas clásicas sin frontera pueden ser descritas mediante polígonos simplemente conexos en el plano 2-dimensional, a través de identificaciones adecuadas de las aristas, y en este sentido toda superficie compacta clásica acepta una representación simbólica, conocida como representación normal [10], por ejemplo, el toro y el plano proyectivo real se pueden escribir como $a_1 a_2 a_1^{-1} a_2^{-1}$ y $a_1 a_2 b_1 b_2$, respectivamente. Además, es bien conocido que por el Teorema de Clasificación de Superficies Cerradas sin Frontera, toda superficie de este tipo, es o bien homeomorfa a la esfera, a sumas conexas de planos proyectivos reales (si la superficie es no orientable) o a sumas conexas de toros (si la superficie es orientable de género mayor o igual que 1).

Ahora bien, en virtud de que todo polígono simplemente conexo en $\mathbb{C}$ es homeomorfo al disco cerrado unitario del plano complejo $\overline{\mathbb{D}}$, para nosotros resulta ser más apropiado identificar arcos del círculo unitario $\partial\overline{\mathbb{D}} =: \mathbb{S}^1$ en lugar de las aristas de un polígono, los que para nuestros fines serán etiquetados por pares de letras $a_1, a_2, \dots$ y $b_1, b_2, \dots$ si ellos tienen la misma orientación,

o por pares de letras $a_{k+1}, a_{k+2}, \dots$ y $a_{k+1}^{-1}, a_{k+2}^{-1}, \dots$ si ellos tiene orientación opuesta.

A lo largo de este capítulo, asumimos que luego de elegir una orientación de la frontera del disco cerrado unitario $\partial\overline{\mathbb{D}}$, los arcos aparecerán etiquetados por pares, bien sea como los pares a_j y b_j o como los pares a_j y a_j^{-1} , donde la notación a_j^{-1} hace alusión a un arco con orientación opuesta al arco a_j . En este sentido, nosotros parametrizamos los arcos mediante las curvas continuas

$$a_j, b_j, a_j^{-1} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1, \quad j \in \mathbb{Z}^+,$$

de tal forma que a_j y b_j tienen orientación positiva (sentido contrario a las manecillas del reloj) y a_j^{-1} tiene orientación negativa. Bajo estos preceptos, la frontera del disco cerrado unitario $\partial\overline{\mathbb{D}}$ estará completamente subdividida en estos arcos, donde dos arcos cualesquiera tienen a lo más un punto inicial y un punto final en común.

Siguiendo estas ideas consideremos para $n \in \mathbb{Z}^+$ los $2n$ arcos $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_k, a_{k+1}, \dots, a_n, a_{k+1}^{-1}, \dots, a_n^{-1}$, con $0 \leq k \leq n$. Ahora bien, si $k = 0$, sólo tenemos las parejas a_j y a_j^{-1} , y para $k = n$, sólo tenemos a_j, b_j y ningún arco con orientación opuesta. En este sentido, definimos el siguiente espacio topológico cociente.

Definición 2.1.1. *Definimos una relación de equivalencia $\sim$ en $\overline{\mathbb{D}}$ mediante*

$$\begin{aligned} a_i(t) &\sim b_i(t), \quad i = 1, \dots, k, \quad t \in [0, 1], \quad \text{si } k > 0, \\ a_j(t) &\sim a_j^{-1}(t), \quad j = k+1, \dots, n, \quad t \in [0, 1], \quad \text{si } k < n, \\ a_j(0) &\sim a_j(1) \sim b_i(0) \sim b_i(1) \sim a_i^{-1}(0) \sim a_i^{-1}(1), \end{aligned}$$

y aquí, los índices i, j y l en la última línea recorren todos nuestros arcos. De este modo trabajaremos sobre el espacio topológico cociente $\overline{\mathbb{D}}/\sim$.

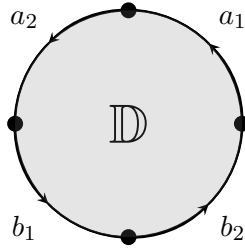
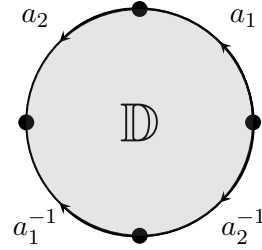
Comentario 2.1.2. Bajo esta relación de equivalencia estamos pegando a_i y b_i identificando los puntos $a_i(t)$ y $b_i(t)$, y pegando los arcos a_j y a_j^{-1} identificando los puntos $a_j(t)$ y $a_j^{-1}(t)$ de la frontera del disco. Note además que si restringimos la relación de equivalencia de la Definición 2.1.1 a $\partial\overline{\mathbb{D}}$ se producen N arcos, todos compartiendo el mismo punto de partida y punto final, y de este modo es claro que

$$\mathbb{S}^1/\sim = \partial\overline{\mathbb{D}}/\sim \cong \bigvee_{j=1}^N \mathbb{S}^1.$$

Es decir, $\partial\overline{\mathbb{D}}/\sim$ es homeomorfo al producto cuña de N círculos con un punto base común, digamos $1 \in \mathbb{C}$, luego, $\bigvee_{j=1}^N \mathbb{S}^1 := \left(\bigcup_{j=1}^N \mathbb{S}^1 \times \{j\} \right) / \sim_0$ donde $(1, l) \sim_0 (1, r)$, $l, r \in \{1, \dots, N\}$.

Desde nuestra notación recordemos que si el espacio topológico cociente (respecto a la relación de equivalencia de la Definición 2.1.1) produce una superficie cerrada orientable de género g , que simbolizaremos por $\mathbb{T}_g$, entonces es claro que $k = 0$ y además, $n = 2g$. Por otro lado, si el espacio topológico cociente produce una superficie cerrada no-orientable de género de Euler n , entonces por lo menos un arco aparece dos veces con la misma orientación por lo que claramente $k \geq 1$. Note que en cualquier caso la tercera línea en la Definición 2.1.1 es redundante.

Observe que bajo la relación de equivalencia introducida en la Definición 2.1.1, el toro y el plano proyectivo real están dados como lo muestran las Figuras 2.1 y 2.2 respectivamente.

Figura 2.1: Plano proyectivo real $a_1a_2b_1b_2$.Figura 2.2: Toro $a_1a_2a_1^{-1}a_2^{-1}$.

En aras de facilitar la comprensión de nuestra notación, los símbolos $\mathbb{P}_{(n,k),q}$ y $\mathbb{T}_{g,q}$ serán empleados para denotar espacios virtuales que representarán a las superficies cerradas cuánticas no orientables y orientables respectivamente, lo anterior utilizando las siguientes asignaciones:

$$\mathbb{P}_{(n,k),q} \text{ con arcos } a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_k, a_{k+1}, \dots, a_n, a_{k+1}^{-1}, \dots, a_n^{-1}, \quad (2.1)$$

$$\mathbb{T}_{g,q} \text{ con arcos } a_1, \dots, a_{2g}, a_1^{-1}, \dots, a_{2g}^{-1}, \quad (2.2)$$

donde $n, k, g \in \mathbb{Z}^+$, $1 \leq k \leq n$, y q es utilizado para expresar la palabra “cuántico” ó “no-conmutativo”. Filosóficamente, para las superficies cerradas cuánticas, en lugar de trabajar con el interior del disco cerrado unitario $\mathbb{D}$, lo haremos con el interior del disco cuántico, esto es, el espacio virtual $\mathbb{D}_q$, el cual definimos como el álgebra de operadores compactos $\mathcal{K}(\ell_2(\mathbb{N})) = \mathbb{K}$, es decir, $\mathcal{C}_0(\mathbb{D}_q) := \mathbb{K}$. Las Figuras 2.3 y 2.4 ilustran este hecho.

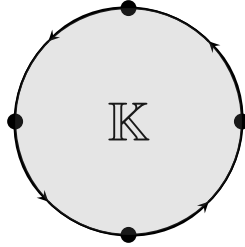


Figura 2.3: Plano proyectivo cuántico real.

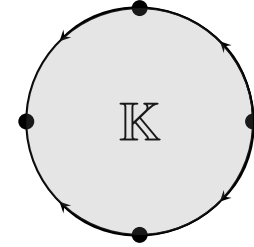


Figura 2.4: Toro cuántico.

En este sentido, los símbolos $\mathbb{P}_{(n,k),q}$ y $\mathbb{T}_{g,q}$ denotarán los análogos cuánticos de

$$\mathbb{P}_n \cong \underbrace{\mathbb{P} \# \dots \# \mathbb{P}}_{n \text{ veces}}, \quad \mathbb{T}_g \cong \underbrace{\mathbb{T} \# \dots \# \mathbb{T}}_{g \text{ veces}}.$$

donde, como ya se mencionó líneas arriba, las superficies cerradas no-orientables $\mathbb{P}_n$ con género de Euler n son homeomorfas a la suma conexa de n planos proyectivos reales $\mathbb{P} = \mathbb{P}_1$, y la superficie cerrada orientable $\mathbb{T}_g$ de género g es homeomorfa a la suma conexa de g toros $\mathbb{T} = \mathbb{T}_1$.

Introducimos en esta etapa la notación q para “cuántico” porque permitimos asignaciones tales que el espacio topológico cociente $\overline{\mathbb{D}}/\sim$ con respecto a la relación de equivalencia de la Definición 2.1.1 no necesariamente es homeomorfo a $\mathbb{P}_n$ o a $\mathbb{T}_g$. Para abordar estos casos, la tercera línea adicional en la Definición 2.1.1 fue introducida. Por ejemplo, si a_j es seguido por a_j^{-1} y la relación

de equivalencia no incluye la tercera línea, entonces la curva obtenida por pegar $a_j(t)$ y $a_j^{-1}(t)$ para cada $t \in [0, 1]$ se puede reducir a un punto en el espacio cociente $\overline{\mathbb{D}}/\sim$. Tenga en cuenta que no prescribimos el orden de los arcos aunque la lista de las letras puede sugerir lo contrario.

Si $\overline{\mathbb{D}}/\sim$ es homeomorfo a $\mathbb{T}_g$ o $\mathbb{P}_n$, entonces las C^* -álgebras de funciones continuas $\mathcal{C}(\mathbb{T}_g)$ o $\mathcal{C}(\mathbb{P}_n)$ son $*$ -isomorfas a las C^* -álgebras de todas las funciones $f \in C(\overline{\mathbb{D}})$ tales que $f(x) = f(y)$ siempre que $x \sim y$ respecto a la relación de equivalencia dada en la Definición 2.1.1.

Definición 2.1.3 (Superficies cerradas cuánticas orientables). Para $g \in \mathbb{Z}^+$, supongamos que dividimos la frontera $\partial\overline{\mathbb{D}}$ en $4g$ arcos $a_1, \dots, a_{2g}, a_1^{-1}, \dots, a_{2g}^{-1}$. Entonces una superficie cerrada cuántica orientable de género g es definida por la C^* -álgebra

$$C(\mathbb{T}_{g,q}) := \{f \in \mathcal{T} : \sigma(f)(x) = \sigma(f)(y) \text{ si } x \sim y, \ x, y \in \partial\overline{\mathbb{D}}\},$$

donde $\sigma : \mathcal{T} \rightarrow C(\mathbb{S}^1)$ denota el mapeo del símbolo de la C^* -extensión (1.7) y la relación de equivalencia es dada por la Definición 2.1.1.

Definición 2.1.4 (Esfera cuántica). Definimos una superficie cerrada cuántica orientable de género 0, una 2-esfera cuántica, de la siguiente manera:

$$C(\mathbb{S}_q^2) := \{f \in \mathcal{T} : \sigma(f)(e^{\pi it}) = \sigma(f)(e^{-\pi it}), \ t \in [0, 1]\}.$$

Definición 2.1.5 (Superficies cerradas cuánticas no-orientables). Para $n, k \in \mathbb{Z}^+$ con $1 \leq k \leq n$, dividimos la frontera $\partial\overline{\mathbb{D}}$ en $2n$ arcos $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_k, a_{k+1}, \dots, a_n, a_{k+1}^{-1}, \dots, a_n^{-1}$, y consideremos nuevamente la relación de equivalencia dada en la Definición 2.1.1. Entonces la C^* -álgebra

$$C(\mathbb{P}_{(n,k),q}) := \{f \in \mathcal{T} : \sigma(f)(x) = \sigma(f)(y) \text{ si } x \sim y, \ x, y \in \partial\overline{\mathbb{D}}\}$$

define una superficie cerrada cuántica no-orientable de género n .

Note que hemos definido una colección de superficies con el mismo género. Lo cual significa que cualquier permutación de arcos define una diferente C^* -subálgebra de $\mathcal{T}$. Por ejemplo, observe que los dos siguientes arreglos $a_1 a_2 a_1^{-1} a_2^{-1} \dots a_{2g-1} a_{2g} a_{2g-1}^{-1} a_{2g}^{-1}$ y $a_1 a_2 \dots a_{2g-1} a_{2g} a_1^{-1} a_2^{-1} \dots a_{2g-1}^{-1} a_{2g}^{-1}$ producen C^* -subálgebras de $\mathcal{T}$ diferentes, pero una superficie orientable del mismo género. Además, es importante mencionar que el procedimiento clásico de cortar y pegar utilizado para la clasificación de superficies cerradas no puede ser aplicado en nuestras superficies cuánticas, ya que la C^* -álgebra $\mathcal{C}_0(\mathbb{D}_q) := \mathbb{K}$ es simple, esto es, no puede ser dividida en dos piezas con una frontera común. Lo que sugiere que no contamos con ninguna técnica topológica de este estilo para determinar si por ejemplo las C^* -álgebras $\mathcal{C}(\mathbb{P}_{(n,k),q})$ y $\mathcal{C}(\mathbb{P}_{(n,k'),q})$ son isomorfas para $k \neq k'$.

Más adelante demostraremos que estas C^* -álgebras son $*$ -isomorfas si y sólo si $k = k'$. Además de demostrar que todas las C^* -álgebras asociadas a la misma superficie cuántica orientable son $*$ -isomorfas. Para una descripción más explícita de las superficies cerradas cuánticas orientables, considere para $g \in \mathbb{Z}^+$, $4g$ arcos en el círculo $\partial\overline{\mathbb{D}}$ dados por

$$a_j, a_j^{-1} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1, \quad a_j(t) := e^{\pi i \frac{j-1+t}{2g}}, \quad a_j^{-1}(t) := e^{\pi i \frac{2g+j-t}{2g}},$$

para $j = 1, \dots, 2g$. De donde se obtiene que el espacio topológico cociente $\overline{\mathbb{D}}/\sim$ respecto a la relación de equivalencia dada en la Definición 2.1.1, produce una superficie cerrada orientable

de género g y en consecuencia, utilizando la Definición [2.1.3](#), obtenemos una superficie cerrada cuántica orientable de género g . Del mismo modo, si queremos superficies cerradas cuánticas no-orientables de género de Euler n , podemos considerar la siguiente subdivisión de la frontera del disco unitario del plano complejo, en $2n$ arcos

$$a_j, b_j : [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1, \quad a_j(t) := e^{\pi i \frac{j-1+t}{n}}, \quad b_j(t) := e^{\pi i \frac{-j+t}{n}},$$

para $j = 1, \dots, n$. Observe que en cualquier caso, t determina la orientación de los arcos.

Note que, en virtud de que σ es un $*$ -homomorfismo y por consiguiente decreciente en norma, entonces estas definiciones producen C^* -subálgebras del álgebra de Toeplitz $\mathcal{T}$. Además, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.1.6. *Dadas las superficies cerradas cuánticas $\mathcal{C}(\mathbb{T}_{g,q})$ y $\mathcal{C}(\mathbb{P}_{(n,k),q})$ de las Definiciones [2.1.3](#) y [2.1.5](#) respectivamente. Se cumple que*

$$\mathbb{K} \subseteq \mathcal{C}(\mathbb{T}_{g,q}), \quad \mathbb{K} \subseteq \mathcal{C}(\mathbb{P}_{(n,k),q}) \quad \text{y} \quad \sigma(\mathcal{C}(\mathbb{T}_{g,q})) \cong \mathcal{C}\left(\bigvee_{j=1}^{2g} \mathbb{S}^1\right), \quad \sigma(\mathcal{C}(\mathbb{P}_{(n,k),q})) \cong \mathcal{C}\left(\bigvee_{j=1}^n \mathbb{S}^1\right).$$

Más aún, tenemos las siguientes sucesiones exactas cortas

$$0 \longrightarrow \mathbb{K} \xrightarrow{\iota} \mathcal{C}(\mathbb{T}_{g,q}) \xrightarrow{\sigma} \mathcal{C}\left(\bigvee_{j=1}^{2g} \mathbb{S}^1\right) \longrightarrow 0, \quad (2.3)$$

$$0 \longrightarrow \mathbb{K} \xrightarrow{\iota} \mathcal{C}(\mathbb{P}_{(n,k),q}) \xrightarrow{\sigma} \mathcal{C}\left(\bigvee_{j=1}^n \mathbb{S}^1\right) \longrightarrow 0, \quad (2.4)$$

donde $\sigma : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{S}^1)$ denota el mapeo del símbolo.

Demostración. Como $\text{Ker}(\sigma) \cong \mathbb{K}$ y gracias a que $\text{Ker}(\sigma) \subseteq \mathcal{C}(\mathbb{T}_{g,q})$ y $\text{Ker}(\sigma) \subseteq \mathcal{C}(\mathbb{P}_{(n,k),q})$, la primera parte del teorema se satisface. Para demostrar $\sigma(\mathcal{C}(\mathbb{T}_{g,q})) \cong \mathcal{C}\left(\bigvee_{j=1}^{2g} \mathbb{S}^1\right)$ (ver Comentario [2.1.2](#)) note que

$$\sigma(\mathcal{C}(\mathbb{T}_{g,q})) = \{\sigma(f) \in \mathcal{C}(\mathbb{S}^1) : f \in \mathcal{C}(\mathbb{T}_{g,q})\} = \{g \in \mathcal{C}(\mathbb{S}^1) : g \circ a_l = g \circ a_l^{-1}, l = 1, \dots, 2g\},$$

y entonces un $*$ -isomorfismo entre $\mathcal{C}\left(\bigvee_{j=1}^{2g} \mathbb{S}^1\right)$ y $\sigma(\mathcal{C}(\mathbb{T}_{g,q}))$ puede ser implementado por el mapeo

$\gamma : \mathcal{C}\left(\bigvee_{j=1}^{2g} \mathbb{S}^1\right) \rightarrow \sigma(\mathcal{C}(\mathbb{T}_{g,q}))$, dado por $\gamma(f)(a_l(t)) = \gamma(f)(a_l^{-1}(t)) = f(e^{2\pi i t}, l)$ para todo $t \in [0, 1]$ y todo $l \in \{1, \dots, 2g\}$. Similarmente, para las superficies cerradas cuánticas no-orientables $\mathcal{C}(\mathbb{P}_{(n,k),q})$ se tiene

$$\sigma(\mathcal{C}(\mathbb{P}_{(n,k),q})) = \{g \in \mathcal{C}(\mathbb{S}^1) : g \circ a_l = g \circ b_l, \quad g \circ a_r = g \circ a_r^{-1}, l = 1, \dots, k, r = k+1, \dots, n\}$$

y un $*$ -isomorfismo $\vartheta : \mathcal{C}\left(\bigvee_{j=1}^n \mathbb{S}^1\right) \rightarrow \sigma(\mathcal{C}(\mathbb{P}_{(n,k),q}))$ es dado por

$$\vartheta(f)(a_l(t)) = \vartheta(f)(b_l(t)) = f(e^{2\pi i t}, l), \quad \vartheta(f)(a_r(t)) = \vartheta(f)(b_r(t)) = f(e^{2\pi i t}, r+k)$$

para todo $t \in [0, 1]$ y todo $l \in \{1, \dots, k\}$, $r \in \{1, \dots, n-k\}$. □

Debido al teorema anterior, y a nuestra notación $\mathcal{C}_0(\mathbb{D}_q) := \mathbb{K} \cong \text{Ker}(\sigma)$, se tiene que $\mathcal{C}_0(\mathbb{D}_q) \subseteq \mathcal{C}(\mathbb{T}_{g,q})$ y $\mathcal{C}_0(\mathbb{D}_q) \subseteq \mathcal{C}(\mathbb{P}_{(n,k),q})$. Ahora bien, en el caso de $\mathcal{C}(\mathbb{S}_q^2)$ (ver Definición 2.1.4), la imagen del mapeo del símbolo produce solo las funciones continuas en la semi-circunferencia $\mathbb{S}_+^1 := \{x \in \partial\overline{\mathbb{D}} : \text{Im}(x) \geq 0\}$. Por consiguiente, tenemos la siguiente sucesión exacta corta de C^* -álgebras

$$0 \longrightarrow \mathbb{K} \xrightarrow{\iota} \mathcal{C}(\mathbb{S}_q^2) \xrightarrow{\sigma} \mathcal{C}(\mathbb{S}_+^1) \longrightarrow 0. \quad (2.5)$$

Recuerde que la sobreyectividad del mapeo del símbolo σ , se sigue de levantar una función $f \in \mathcal{C}\left(\bigvee_{j=1}^N \mathbb{S}^1\right) \subset \mathcal{C}(\mathbb{S}^1)$ (o $f \in \mathcal{C}(\mathbb{S}_+^1) \subset \mathcal{C}(\mathbb{S}^1)$) a una función continua $\hat{f} \in \mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}})$, esto es, $\hat{f}(re^{i\theta}) := r f(e^{i\theta})$, y en consecuencia $\sigma(T_{\hat{f}}) = f$, donde hemos parametrizado al disco cerrado unitario en la siguiente forma:

$$\mathbb{D} := \{re^{i\theta} : r \in [0, 1], \theta \in [0, 2\pi]\}.$$

De esta manera, podemos aplicar la Teoría de Brown-Douglas-Fillmore, de ahora en adelante simplemente BDF, para estudiar las sucesiones exactas cortas (2.3), (2.4) y (2.5), y por consiguiente clasificar sus clases de isomorfismos. Este es el objetivo de la siguiente Sección.

2.2. BDF y Superfices Compactas Cuánticas

Para determinar la invariante de Busby de las extensiones de C^* -álgebras (2.3) y (2.4), considere

$$\rho_N : \mathbb{S}^1 \longrightarrow (\mathbb{S}^1 / \sim) \cong \bigvee_{j=1}^N \mathbb{S}^1 \quad (2.6)$$

el mapeo cociente restringido a la frontera del disco, y respecto a la relación de equivalencia establecida en la Definición 2.1.1, donde $N = 2g$ y $N = n$, respectivamente. Entonces la inclusión $\mathcal{C}\left(\bigvee_{j=1}^N \mathbb{S}^1\right) \subset \mathcal{C}(\mathbb{S}^1) = \sigma(\mathcal{T})$ corresponde al pullback $\rho_N^* : \mathcal{C}\left(\bigvee_{j=1}^N \mathbb{S}^1\right) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathbb{S}^1)$. Ahora bien, sabemos que $\mathcal{B} := \mathcal{B}(\mathcal{H}) \cong \mathcal{M}(\mathbb{K})$, entonces $\mathcal{M}(\mathbb{K})/\mathbb{K} \cong \mathcal{B}/\mathbb{K}$, observe también que el mapeo del símbolo $\sigma : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{S}^1) \cong \mathcal{T}/\mathbb{K}$ se puede interpretar como el $*$ -homomorfismo cociente $\pi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}/\mathbb{K}$ restringido al álgebra de Toeplitz, y como para todo $f \in \mathcal{C}\left(\bigvee_{j=1}^N \mathbb{S}^1\right)$, se cumple que $\rho_N^*(f) \in \mathcal{C}(\mathbb{S}^1)$, podemos extender este mapeo a $\mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}})$, en el sentido de que podemos definir $\widehat{\rho_N^*(f)}(re^{i\theta}) = r f(e^{i\theta})$. En consecuencia, $T_{\widehat{\rho_N^*(f)}}$ es un elemento de $\mathcal{C}(\mathbb{T}_{g,q})$ para $N = 2g$, o bien un elemento de $\mathcal{C}(\mathbb{P}_{(n,k),q})$ para $N = n$. Note además que $\sigma(T_{\widehat{\rho_N^*(f)}}) = \rho_N^*(f)$ y por lo tanto, la invariante de Busby está dada por

$$\tau_N : \mathcal{C}\left(\bigvee_{j=1}^N \mathbb{S}^1\right) \longrightarrow \mathcal{B}/\mathbb{K}, \quad \tau_N(f) = \sigma(T_{\widehat{\rho_N^*(f)}}) \in \mathcal{T}/\mathbb{K} \subset \mathcal{B}/\mathbb{K}.$$

En virtud del Teorema 1.5.13, hemos probado el siguiente resultado.

Proposición 2.2.1. *Las superficies cuánticas cerradas dadas en las Definiciones [2.1.3](#) y [2.1.5](#), $\mathcal{C}(\mathbb{T}_{g,q})$ y $\mathcal{C}(\mathbb{P}_{(n,k),q})$ respectivamente, son $*$ -isomorfos al pullback*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B} \oplus_{(\pi, \tau_N)} \mathcal{C}\left(\bigvee_{j=1}^N \mathbb{S}^1\right) & & \\ \text{\scriptsize pr}_1 \swarrow & & \searrow \text{\scriptsize pr}_2 \\ \mathcal{B} & & \mathcal{C}\left(\bigvee_{j=1}^N \mathbb{S}^1\right), \\ \pi \searrow & & \swarrow \tau_N \\ & \mathcal{B}/\mathbb{K} & \end{array} \quad (2.7)$$

donde $\pi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}/\mathbb{K}$ denota el mapeo cociente y $N \in \{2g, n\}$.

Corolario 2.2.2. *Como consecuencia de la proposición anterior, las superficies cuánticas cerradas dadas en las Definiciones [2.1.3](#) y [2.1.5](#), $\mathcal{C}(\mathbb{T}_{g,q})$ y $\mathcal{C}(\mathbb{P}_{(n,k),q})$ respectivamente, son $*$ -isomorfos al pullback reducido (con $N \in \{2g, n\}$)*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}}_q) \oplus_{(\sigma, \rho_N^*)} \mathcal{C}\left(\bigvee_{j=1}^N \mathbb{S}^1\right) & & \\ \text{\scriptsize pr}_1 \swarrow & & \searrow \text{\scriptsize pr}_2 \\ \mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}}_q) & & \mathcal{C}\left(\bigvee_{j=1}^N \mathbb{S}^1\right). \\ \sigma \searrow & & \swarrow \rho_N^* \\ & \mathcal{C}(\mathbb{S}^1) & \end{array} \quad (2.8)$$

Demostración. Note que si $(b, f) \in \mathcal{B} \oplus_{(\pi, \tau_N)} \mathcal{C}\left(\bigvee_{j=1}^N \mathbb{S}^1\right)$ entonces $\pi(b) = \tau_N(f)$, luego $\pi(b) \in \sigma(\mathcal{T})$ ya que la imagen de τ_N vive en $\sigma(\mathcal{T}) = \mathcal{T}/\mathbb{K} \cong \mathcal{C}(\mathbb{S}^1)$. Entonces podemos encontrar un elemento $t \in \mathcal{T}$ tal que $\pi(b) = \sigma(t)$, de donde deducimos que $\pi(b - t) = 0$, es decir, $b - t \in \text{Ker}(\pi) = \mathbb{K}$. Por lo tanto, $b = t + (b - t) \in \mathcal{T}$, puesto que $t \in \mathcal{T}$, $\mathbb{K} \subset \mathcal{T}$ y en particular $\mathcal{T}$ es un espacio vectorial. Así obtenemos el pullback deseado, donde hemos definido $\mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}}_q) := \mathcal{T}$. $\square$

El pullback anterior nos permite dar una buena interpretación de las superficies cerradas cuánticas como CW-complejos no-conmutativos [\[9\]](#). Clásicamente, nosotros podemos ver [\(2.8\)](#) como una dualización de los siguientes diagramas pushout (de acuerdo con el género):

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{T}^g & \\ \overline{\mathbb{D}} \swarrow & & \nwarrow 2g \\ & \bigvee_{j=1}^N \mathbb{S}^1 & \\ \swarrow \iota & & \searrow \rho_{2g} \\ & \mathbb{S}^1 & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & \mathbb{P}^n & \\ \overline{\mathbb{D}} \swarrow & & \nwarrow n \\ & \bigvee_{j=1}^n \mathbb{S}^1 & \\ \swarrow \iota & & \searrow \rho_n \\ & \mathbb{S}^1 & \end{array} \quad (2.9)$$

donde ρ_{2g} y ρ_n son dados en [\(2.6\)](#), y $\iota : \mathbb{S}^1 \cong \partial \overline{\mathbb{D}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{D}}$ denota el mapeo inclusión. Observe que en este sentido, vemos a $\bigvee_{j=1}^N \mathbb{S}^1$ como un 1-esqueleto obtenido por adjuntar N arcos al 0-esqueleto el cual consiste de un solo punto. Entonces los diagramas en [\(2.9\)](#) nos indican como pegar una 2-celda al 1-esqueleto, y en [\(2.8\)](#) se expresan estas ideas pero en un sentido no-conmutativo o cuántico.

2.3. Clases de isomorfismos

Los objetivos de esta sección son listados a continuación:

- Probar que superficies cerradas cuánticas de géneros diferentes no son isomorfas (esto es, no son *-isomorfas como C^* -álgebras).
- Demostrar que para todo g y todo (n, k) , $\mathcal{C}(\mathbb{T}_{g,q}) \not\cong \mathcal{C}(\mathbb{P}_{(n,k),q})$.
- Checar que $\mathcal{C}(\mathbb{P}_{(n,k),q}) \cong \mathcal{C}(\mathbb{P}_{(n',k'),q})$ si y sólo si $(n, k) = (n', k')$. Y finalmente,
- Verificar que $\mathcal{C}(\mathbb{S}_q^2)$ no es *-isomorfa a $\mathcal{C}(\mathbb{T}_{g,q})$ ni a $\mathcal{C}(\mathbb{P}_{(n,k),q})$.

Para tales fines emplearemos la teoría de BDF (ver Sección 1.5). Dicho esto, en virtud de que en la teoría BDF se trabaja típicamente con extensiones de compactos por $\mathcal{C}(X)$ podemos ver a $\bigvee_{l=1}^N \mathbb{S}^1$ como un subespacio compacto adecuado de $\mathbb{C}$, en este sentido, note que clásicamente $\bigvee_{l=1}^N \mathbb{S}^1$ es homeomorfo a una unión de N circunferencias de radio $\frac{l+1}{l}$ y centro $-\frac{1}{l}$, que denotaremos por el símbolo $\mathbb{S}_{\frac{l+1}{l}}^1(-\frac{1}{l})$, y estas tienen un punto base común en $1 \in \mathbb{C}$; tal como en la Figura 2.5. Así, consideraremos

$$\varphi_N : \bigvee_{l=1}^N \mathbb{S}^1 \xrightarrow{\cong} X_N := \bigcup_{l=1}^N \left(\mathbb{S}_{\frac{l+1}{l}}^1 \left(-\frac{1}{l} \right) \right) = \bigcup_{l=1}^N \left\{ x \in \mathbb{C} : \left| x + \frac{1}{l} \right| = \frac{l+1}{l} \right\} \quad (2.10)$$

un homeomorfismo que atestigua tal aseveración.

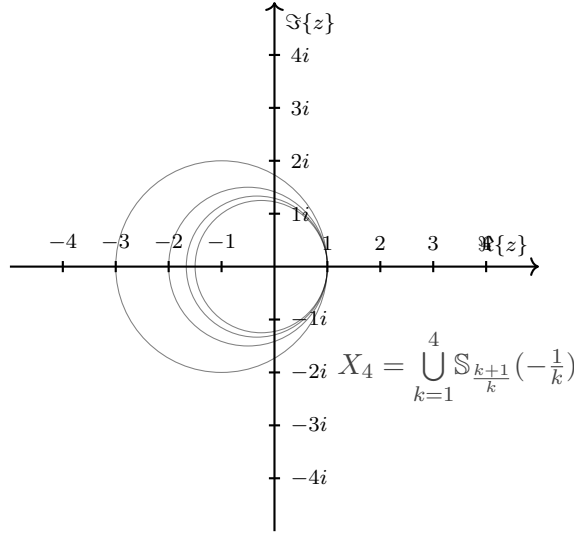


Figura 2.5: Producto cuña para $n = 4$.

Comentario 2.3.1. La suma de C^* -extensiones se basa en el isomorfismo $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \cong \mathcal{H}$ para espacios de Hilbert de dimensión infinita. De este modo, dos veces la C^* -extensión dada por el operador shift-unilateral derecho S (el cual resulta ser un operador esencialmente normal) en $\ell_2(\mathbb{N})$ corresponde a

$$S \oplus S : \ell_2(\mathbb{N}) \oplus \ell_2(\mathbb{N}) \rightarrow \ell_2(\mathbb{N}) \oplus \ell_2(\mathbb{N}), \quad S \oplus S(e_j \oplus e_k) = e_{j+1} \oplus e_{k+1},$$

para todo $j, k \in \mathbb{N}$ y aquí $\{e_l\}_{l \in \mathbb{N}}$ denota la base ortonormal canónica de $\ell_2(\mathbb{N})$. Además, note que si consideramos el operador unitario

$$V : \ell_2(\mathbb{N}) \oplus \ell_2(\mathbb{N}) \rightarrow \ell_2(\mathbb{N}), \quad V(e_j \oplus e_k) = e_{2j} + e_{2k+1}, \quad j, k \in \mathbb{N}$$

entonces

$$V^*(e_l) = \begin{cases} e_{\frac{l}{2}} \oplus 0 & \text{si } l \text{ es par,} \\ 0 \oplus e_{\frac{l-1}{2}} & \text{si } l \text{ es impar,} \end{cases}$$

y es rutinario verificar que $V(S \oplus S)V^*(e_l) = e_{l+2}$ para todo $l \in \mathbb{N}$, por consiguiente $V(S \oplus S)V^* = S^2$. Esto muestra que bajo equivalencia unitaria fuerte dos veces la C^* -extensión de Toeplitz generada por S produce una C^* -extensión generada por S^2 . Note que $[\sigma(S^2)] = [u^2] = [u] + [u] \in \mathcal{K}_1(\mathcal{C}(\mathbb{S}^1))$, de modo que la adición en el grupo de clases de equivalencias de extensiones de $\mathbb{K}$ por $\mathcal{C}(\mathbb{S}^1)$ corresponde a la adición en $\mathcal{K}_1(\mathcal{C}(\mathbb{S}^1))$. Bajo esta mirada, el operador $S \oplus S^*$ debería ser el elemento 0, esto es, unitariamente equivalente a una perturbación compacta de un operador unitario. En efecto, para ver esto, consideremos los operadores

$$W : \ell_2(\mathbb{N}) \oplus \ell_2(\mathbb{N}) \rightarrow \ell_2(\mathbb{Z}), \quad W(e_j \oplus e_k) = e_j + e_{-(k+1)}, \quad j, k \in \mathbb{N},$$

y $Ae_{-1} = e_0$, $Ae_l = 0$ para $l \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$. Trivialmente el operador A es un operador compacto en $\ell_2(\mathbb{Z})$. Además, el adjunto de W , $W^* : \ell_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell_2(\mathbb{N}) \oplus \ell_2(\mathbb{N})$ está dado por

$$W^*(e_l) = \begin{cases} e_l \oplus 0 & \text{si } l \geq 0, \\ 0 \oplus e_{-(l+1)} & \text{si } l < 0, \end{cases}$$

y por lo tanto

$$W(S \oplus S^*)W^*(e_l) = \begin{cases} e_{l+1} & \text{si } l \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}, \\ 0 & \text{si } l = -1. \end{cases}$$

En consecuencia, se deduce que $W(S \oplus S^*)W^* + A = U$, donde

$$U : \ell_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell_2(\mathbb{Z}), \quad Ue_l = e_{l+1}, \quad l \in \mathbb{Z},$$

denota el operador shift-bilateral en $\ell_2(\mathbb{Z})$, y entonces se verifica lo que queríamos. Además, el homomorfismo $s : \mathcal{C}(\mathbb{S}^1) \rightarrow C^*\text{-gen}\{\{U, U^*\} \cup \mathbb{K}\}$, $s(u) = U$ define un levantamiento ya que $\text{spec}(U) = \mathbb{S}^1$. Como consecuencia, esta C^* -extensión produce el elemento 0 en el grupo de clases de equivalencia de extensiones de compactos por $\mathcal{C}(\mathbb{S}^1)$, lo cual es consistente con la relación $[\sigma(S)] + [\sigma(S^*)] = [uu^*] = 0 \in \mathcal{K}_1(\mathcal{C}(\mathbb{S}^1))$.

De acuerdo con el comentario previo, la C^* -álgebra unital generada por el operador shift-unilateral derecho S y los operadores compactos, y la generada por S^* y $\mathbb{K}$ definen diferentes generadores en el grupo de extensiones de compactos por $\mathcal{C}(\mathbb{S}^1)$. Sin embargo, ambas C^* -álgebras son isomorfas al álgebra de Toeplitz.

En cuanto a nuestras superficies cerradas cuánticas, veremos que cambiar la orientación de un arco corresponde a reemplazar un elemento generador por su adjunto, y esto no cambia la C^* -álgebra generada. Los siguientes resultados van hacia esa dirección.

Proposición 2.3.2. Sean X_{2g} y X_n como en (2.10), entonces existen mapeos continuos $\zeta_{2g} : \mathbb{S}^1 \rightarrow X_{2g}$, $\zeta_n : \mathbb{S}^1 \rightarrow X_n$ tales que se cumplen:

$$\sigma(\mathcal{C}(\mathbb{T}_{g,q})) = \text{C}^*\text{-gen}\{\zeta_{2g}, \bar{\zeta}_{2g}, 1\} \cong \mathcal{C}(X_{2g}),$$

$$\sigma(\mathcal{C}(\mathbb{P}_{(n,k),q})) = \text{C}^*\text{-gen}\{\zeta_n, \bar{\zeta}_n, 1\} \cong \mathcal{C}(X_n),$$

y en consecuencia tenemos las siguientes extensiones de compactos por $\mathcal{C}(X_N)$, donde $N = 2g, N = n$:

$$0 \longrightarrow \mathbb{K} \xrightarrow{\iota} \mathcal{C}(\mathbb{T}_{g,q}) \xrightarrow{\sigma} \mathcal{C}(X_{2g}) \longrightarrow 0, \quad (2.11)$$

$$0 \longrightarrow \mathbb{K} \xrightarrow{\iota} \mathcal{C}(\mathbb{P}_{(n,k),q}) \xrightarrow{\sigma} \mathcal{C}(X_n) \longrightarrow 0. \quad (2.12)$$

Demostración. Si $z : X_N \rightarrow X_N \subset \mathbb{C}$, $z(x + iy) = x + iy$ denota la función identidad en X_N , entonces es claro que z separa los puntos de X_N , por lo tanto en virtud del Teorema de Stone-Weierstrass $z, \bar{z}$ y 1 generan la C^* -álgebra $\mathcal{C}(X_N)$, esto es, $\mathcal{C}(X_N) = \text{C}^*\text{-gen}\{z, \bar{z}, 1\}$. Además, con ρ_N y φ_N como en (2.6) y (2.10) respectivamente, tenemos que $(\varphi_N \circ \rho_N)^*$ es un homomorfismo de $\mathcal{C}(X_N)$ en $\mathcal{C}(\mathbb{S}^1)$, y entonces, la función $\zeta_N \in \mathcal{C}(\mathbb{S}^1)$ dada por

$$\zeta_N := (\varphi_N \circ \rho_N)^* z : \mathbb{S}^1 \rightarrow X_N \subset \mathbb{C} \quad (2.13)$$

está bien definida y como φ_N es un homeomorfismo, entonces separa exactamente los puntos de los arcos después de la identificación por ρ_N . Además, ya que $\zeta_N \in \mathcal{C}(\mathbb{S}^1)$, la podemos extender a todo $\mathcal{C}(\mathbb{D})$ definiendo $\hat{\zeta}_N(re^{i\theta}) := r\zeta_N(e^{i\theta})$, $r \in [0, 1]$, $\theta \in \mathbb{R}$. Luego, $T_{\hat{\zeta}_N} \in \mathcal{T}$ y es claro que $\sigma(T_{\hat{\zeta}_N}) = \zeta_N$, además,

$$\text{spec}(\sigma(T_{\hat{\zeta}_N})) = \text{spec}(z) = X_N, \quad \text{C}^*\text{-gen}\{\sigma(T_{\hat{\zeta}_N}), \sigma(T_{\hat{\zeta}_N}^*), 1\} \cong \mathcal{C}(X_N) \cong \mathcal{C}(\mathbb{S}^1/\sim) \cong \mathcal{C}\left(\bigvee_{j=1}^N \mathbb{S}^1\right).$$

Por consiguiente, cualquier función $h \in \mathcal{C}\left(\bigvee_{j=1}^N \mathbb{S}^1\right) \cong \mathcal{C}(\mathbb{S}^1/\sim) \subset \mathcal{C}(\mathbb{S}^1) \cong \sigma(\mathcal{T})$ satisface las mismas “condiciones de frontera” de las Definiciones 2.1.3 y 2.1.5 para $N = 2g$ y $N = n$ respectivamente. Esto significa que cualquier h puede ser aproximado por polinomios en $\sigma(T_{\hat{\zeta}_N})$ y $\sigma(T_{\hat{\zeta}_N}^*)$. Note que hemos demostrado que $\sigma(\mathcal{C}(\mathbb{T}_{g,q})) = \text{C}^*\text{-gen}\{\zeta_{2g}, \bar{\zeta}_{2g}, 1\} \cong \mathcal{C}(X_{2g})$ y similarmente $\sigma(\mathcal{C}(\mathbb{P}_{(n,k),q})) = \text{C}^*\text{-gen}\{\zeta_n, \bar{\zeta}_n, 1\} \cong \mathcal{C}(X_n)$. Por lo tanto, los operadores esencialmente normales $T_{\hat{\zeta}_{2g}}$ y $T_{\hat{\zeta}_n}$ dan lugar a las extensiones de C^* -álgebras pretendidas, esto es,

$$\mathcal{C}(\mathbb{T}_{g,q}) = \text{C}^*\text{-gen}\{\{T_{\hat{\zeta}_{2g}}, T_{\hat{\zeta}_{2g}}^*\} \cup \mathbb{K}\}, \quad \mathcal{C}(\mathbb{P}_{(n,k),q}) = \text{C}^*\text{-gen}\{\{T_{\hat{\zeta}_n}, T_{\hat{\zeta}_n}^*\} \cup \mathbb{K}\}.$$

□

Recordemos que una extensión de una C^* -álgebra $\mathcal{A}$ por $\mathcal{C}$ con invariante de Busby τ permite una descripción isomorfa por el pullback de C^* -álgebras (ver Teorema (1.5.13)). En el caso de $\mathcal{C}(\mathbb{T}_{g,q})$ y $\mathcal{C}(\mathbb{P}_{(n,k),q})$, podemos considerar el pullback reducido (2.8). Más aún, si $\mathcal{C}\left(\bigvee_{j=1}^N \mathbb{S}^1\right)$ en (2.8) es reemplazado por su imagen isomorfa $(\varphi_N^*)^{-1} : \mathcal{C}\left(\bigvee_{j=1}^N \mathbb{S}^1\right) \xrightarrow{\cong} \mathcal{C}(X_N)$, con φ_N desde (2.10), entonces obtenemos pullbacks isomorfos

$$\begin{aligned} \phi_N : \mathcal{C}(\mathbb{D}_q) \oplus_{(\sigma, \rho_N^* \circ \varphi_N^*)} \mathcal{C}(X_N) &\xrightarrow{\cong} \mathcal{C}(\mathbb{D}_q) \oplus_{(\sigma, \rho_N^*)} \mathcal{C}\left(\bigvee_{j=1}^N \mathbb{S}^1\right), \\ \phi_N((t, f)) &:= (t, \varphi_N^*(f)). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Por lo tanto, en aras de aplicar la Teoría de Brown-Douglas-Fillmore, estudiamos las clases de isomorfismo de las C^* -álgebras dadas por las extensiones (2.11) y (2.12) con los generadores esencialmente normales $T_{\hat{\zeta}_{2g}}$ y $T_{\hat{\zeta}_n}$, respectivamente.

En ambos casos, la invariante de Busby $\tau_N : \mathcal{C}(X_N) \rightarrow \mathcal{B}/\mathbb{K}$ está definida por $\tau_N(z) = \sigma(T_{\hat{\zeta}_N}) = \zeta_N \in \mathcal{T}/\mathbb{K} \cong \mathcal{C}(\mathbb{S}^1)$, donde z denota la función identidad en X_N y $N = 2g$ o $N = n$. Por (2.13), $\zeta_N := (\varphi_N \circ \rho_N)^* z$, y por (2.14), podemos usar el homeomorfismo φ_N para ordenar los círculos de X_N en una cierta “forma normal”. Por lo tanto, asumimos que después de una permutación de círculos y posiblemente un reordenamiento de orientaciones, los círculos correspondientes a los arcos $a_1, \dots, a_N$ tienen orientación positiva y son ordenados por sus radios comenzando con el radio 2 para el arco a_1 . En el caso de superficies compactas cuánticas orientables $\mathcal{C}(\mathbb{T}_{g,q})$, cada arco a_j aparece de nuevo con orientación opuesta a_j^{-1} , y en el caso de superficies compactas cuánticas no-orientables $\mathcal{C}(\mathbb{P}_{(n,k),q})$, los primeros k arcos tienen un acompañante con la misma orientación mientras que los otros tienen un acompañante con orientación opuesta.

Proposición 2.3.3. *Suponga que existe un isomorfismo de C^* -álgebras $\alpha : \mathcal{C}(\mathbb{M}_q) \xrightarrow{\cong} \mathcal{C}(\mathbb{M}'_q)$, donde $\mathbb{M}_q, \mathbb{M}'_q \in \{\mathbb{T}_{g,q}, \mathbb{P}_{(n,k),q} : g, n, k \in \mathbb{Z}^+, k \leq n\}$, entonces las C^* -extensiones de compactos por $\mathcal{C}(\mathbb{M}_q)$ y $\mathcal{C}(\mathbb{M}'_q)$ son fuertemente equivalentes en el sentido de la Definición 1.5.5.*

Demostración. Si asumimos que existe un isomorfismo de C^* -álgebras $\alpha : \mathcal{C}(\mathbb{M}_q) \xrightarrow{\cong} \mathcal{C}(\mathbb{M}'_q)$, entonces en virtud de que todas las C^* -álgebras consideradas en esta parte son C^* -subálgebras de $\mathcal{T}$ y contienen al radical de Jacobson $\mathbb{K} = \text{Ker}(\sigma)$, obtenemos un isomorfismo $\alpha : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$. Cualquier isomorfismo como este puede ser implementado por un operador unitario $U_\alpha \in \mathcal{B}$ [13, Remark 2.5.3]. Más aún, cada isomorfismo $\alpha : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ tiene una única extensión a su álgebra de multiplicadores $\mathcal{B} = \mathcal{M}(\mathbb{K})$. Por lo tanto el isomorfismo $\alpha : \mathcal{C}(\mathbb{M}_q) \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{M}'_q)$ puede ser dado por $\alpha(t) = U_\alpha t U_\alpha^*$ con operador unitario único U_α . En la terminología de la teoría de Brown-Douglas-Fillmore, esto significa que la C^* -álgebra extensión correspondiente a $\mathcal{C}(\mathbb{M}_q)$ y $\mathcal{C}(\mathbb{M}'_q)$ son fuertemente equivalentes [4, Section 15.4]. Como una consecuencia, podemos encontrar generadores esencialmente normales $T_{\hat{\zeta}_N} \in \mathcal{C}(\mathbb{M}_q)$ y $T_{\hat{\zeta}'_{N'}} \in \mathcal{C}(\mathbb{M}'_q)$ tal que $U_\alpha T_{\hat{\zeta}_N} U_\alpha^* = T_{\hat{\zeta}'_{N'}} \text{ mod } \mathbb{K}$. $\square$

La equivalencia unitaria módulo compactos de operadores esencialmente normales con espectro esencial X_N , como se mencionó en la Sección 1.5 es exactamente el punto de partida de la teoría de Brown-Douglas-Fillmore y será la herramienta básica para nuestra clasificación de clases de isomorfismo.

En el siguiente teorema demostraremos aún más, daremos una descripción bastante explícita de un generador esencialmente normal para cada clase de isomorfismo que genera un ejemplo particular de superficie cuántica cerrada.

Teorema 2.3.4. *Para $g \in \mathbb{Z}^+$, si $\mathcal{C}(\mathbb{T}_{g,q})$ denota una superficie compacta cuántica orientable de género g , como en la Definición 2.1.3. Entonces $\mathcal{C}(\mathbb{T}_{g,q})$ es isomorfa a la C^* -álgebra generada por $1, T_g, T_g^*$ y los operadores compactos $\mathbb{K} := \mathcal{K}(\mathcal{H}_g)$, donde*

$$\mathcal{H}_g := \bigoplus_{j=1}^{2g} \ell_2(\mathbb{Z}), \quad T_g := \bigoplus_{j=1}^{2g} \left(\frac{j+1}{j} U - \frac{1}{j} \right),$$

y U representa al operador shift bilateral en $\ell_2(\mathbb{Z})$, esto es, $Ue_n = e_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ con $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ la base ortonormal canónica de $\ell_2(\mathbb{Z})$. Además, dados $n, k \in \mathbb{Z}^+$ con $k \leq n$, si $\mathcal{C}(\mathbb{P}_{(n,k),q})$ denota una superficie compacta cuántica no-orientable desde la Definición 2.1.5, entonces $\mathcal{C}(\mathbb{P}_{(n,k),q})$ es isomorfa a la C^* -álgebra generada por 1, $T_{n,k}$, $T_{n,k}^*$ y los operadores compactos $\mathbb{K} := \mathcal{K}(\mathcal{H}_{n,k})$, donde

$$\mathcal{H}_{n,k} := \bigoplus_{j=1}^k \ell_2(\mathbb{N}) \oplus \bigoplus_{j=k+1}^n \ell_2(\mathbb{Z}), \quad T_{n,k} := \bigoplus_{j=1}^k \left(\frac{j+1}{j} S^2 - \frac{1}{j} \right) \oplus \bigoplus_{j=k+1}^n \left(\frac{j+1}{j} U - \frac{1}{j} \right),$$

y S representa el operador shift unilateral derecho en $\ell_2(\mathbb{N})$.

Demostración. Primero usamos el homeomorfismo φ_N desde (2.10) para ordenar los círculos desde el producto cuña en la “forma normal” descrita líneas arriba. Supongamos sin pérdida de generalidad que las superficies compactas cuánticas se definen mediante la identificación por pares de $2N$ arcos $a_1, \dots, a_N, b_1, \dots, b_k, a_{k+1}^{-1}, \dots, a_N^{-1}$, donde $0 \leq k \leq N$. Para $k = 0$, la superficie cuántica pertenece a la familia orientable y N tiene que ser par. Suponemos además que los radios de los círculos correspondientes a los arcos $a_1, \dots, a_N$ bajo el homeomorfismo (2.10) son ordenados desde 2 a $\frac{N+1}{N}$ con radios decrecientes y la orientación de estos arcos es positiva.

Es conocido desde la Teoría de Brown-Douglas-Fillmore (ver Comentario 1.5.9) que los operadores esencialmente normales T_N con espectro esencial $X_N \subset \mathbb{C}$ son clasificados, salvo perturbaciones compactas, por $\mathcal{K}^1(X_N) \cong \mathcal{K}_1(\mathcal{C}(X_N))$. Sabemos que $\mathcal{K}_1(\mathcal{C}(X_N)) \cong \mathbb{Z}^N$, y en virtud de que [4, Theorem 16.2.1] nos dice que esta correspondencia es dada por

$$[T_N] \mapsto \bigoplus_{j=1}^N \left(\text{Index}(T_N - \lambda_j) - \text{Index}(T_N - \lambda_{j-1}) \right), \quad (2.15)$$

donde λ_j pertenece a la j -ésima componente conexa de $\mathbb{C} \setminus X_N$ contado desde la componente externa, la componente no-acotada que contiene a λ_0 hasta la componente más interna que contiene 0, y $[T_N]$ representa la clase de equivalencia de T_N .

Si $T_{\hat{\zeta}_N} \in \mathcal{C}(\mathbb{T}_{N/2,q})$ o $T_{\hat{\zeta}_N} \in \mathcal{C}(\mathbb{P}_{(N,k),q})$ denota el operador esencialmente normal que genera las C^* -extensiones (2.11) o (2.12). Entonces gracias al Ejemplo 1.4.9 concluimos que

$$\text{Index}(T_{\hat{\zeta}_N} - \lambda_j) = -\text{wind}[\sigma(T_{\hat{\zeta}_N} - \lambda_j)] = -\text{wind}[\zeta_N - \lambda_j] \quad (2.16)$$

para la función invertible $\zeta_N - \lambda_j : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{C}$, donde $\zeta_N : \mathbb{S}^1 \rightarrow X_N$ fue definido en (2.13).

Como λ_j pertenece a la j -ésima componente interna, $\text{wind}[\zeta_N - \lambda_j]$ cuenta los números de giro a lo largo de todos los arcos con índice menor o igual que j . Por consiguiente, en virtud de (2.16), $\text{Index}(T_{\hat{\zeta}_N} - \lambda_j) - \text{Index}(T_{\hat{\zeta}_N} - \lambda_{j-1})$ cuenta los números de giro a lo largo de los arcos que ζ_N mapea dentro del j -ésimo círculo. En el caso $k = 0$, esto es, $T_{\hat{\zeta}_N} \in \mathcal{C}(\mathbb{T}_{N/2,q})$, cada arco a_j ocurre exactamente una vez más con orientación opuesta, por lo tanto todos los números de giros son 0. Si $T_{\hat{\zeta}_N} \in \mathcal{C}(\mathbb{P}_{(N,k),q})$, entonces los primeros arcos a_j , $j \leq k$, tienen un compañero b_j con la misma orientación positiva y todos los otros tiene un compañero a_j^{-1} de orientación opuesta. Entonces la función $\zeta_N : \mathbb{S}^1 \rightarrow X_N$ gira dos veces alrededor de los primeros k -círculos

y tiene número de giro 0 a lo largo de los demás. Así que el mapeo dado en (2.15) junto con (2.16) queda en la forma

$$[T_{\hat{\zeta}_N}] \mapsto (0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}^N, \quad T_{\hat{\zeta}_N} \in \mathcal{C}(\mathbb{T}_{N/2,q}), \quad (2.17)$$

$$[T_{\hat{\zeta}_N}] \mapsto (-2, \dots, -2, 0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}^k \oplus \mathbb{Z}^{N-k}, \quad T_{\hat{\zeta}_N} \in \mathcal{C}(\mathbb{P}_{(N,k),q}), \quad (2.18)$$

donde $\mathbb{Z}^N \cong \mathcal{K}_1(\mathcal{C}(X_N))$.

Ahora bien, examinaremos los operadores $T_{N,k}$ para garantizar que su espectro esencial sea X_N y la diferencia de índices de Fredholm en (2.15) corresponda exactamente a la de la N -tupla en (2.17) y (2.18). Es bien sabido que $\text{spec}(\sigma(S)) = \mathbb{S}^1$ (ver [27]), donde S denota el operador shift unilateral derecho en $\ell_2(\mathbb{N})$. Note que si escribimos al operador shift-bilateral U en $\ell_2(\mathbb{Z})$ como el operador multiplicación por el generador unitario $u \in \mathcal{C}(\mathbb{S}^1)$, $u(e^{it}) = e^{it}$, en la base ortonormal $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}u^k : k \in \mathbb{Z}\} \subset L_2(\mathbb{S}^1)$, se deduce que $\text{spec}(U) = \text{spec}(\sigma(U)) = \text{spec}(u) = \mathbb{S}^1$. Ahora bien, gracias al Teorema del Mapeo Espectral, también tenemos que $\text{spec}(\sigma(S^2)) = \mathbb{S}^1$ y además

$$\text{spec}\left(\sigma\left(\frac{j+1}{j}S^2 - \frac{1}{j}\right)\right) = \mathbb{S}_{\frac{j+1}{j}}^1\left(-\frac{1}{j}\right), \quad \text{spec}\left(\sigma\left(\frac{j+1}{j}U - \frac{1}{j}\right)\right) = \mathbb{S}_{\frac{j+1}{j}}^1\left(-\frac{1}{j}\right).$$

Por lo tanto el operador $T_{N,k}$ en el Teorema 2.3.4 tiene espectro esencial $X_N \subset \mathbb{C}$, ya que

$$\text{spec}_e(T_{N,k}) = \text{spec}\left(\sigma\left(\bigoplus_{j=1}^k\left(\frac{j+1}{j}S^2 - \frac{1}{j}\right) \oplus \bigoplus_{j=k+1}^N\left(\frac{j+1}{j}U - \frac{1}{j}\right)\right)\right) = \bigcup_{k=1}^N\left(\mathbb{S}_{\frac{k+1}{k}}^1\left(-\frac{1}{k}\right)\right) = X_N.$$

Para calcular el índice de Fredholm $\text{Index}(T_{N,k} - \lambda)$ para $\lambda \notin X_N$, primero observe que la suma ortogonal de operadores de Fredholm $\bigoplus_{j=1}^m F_j$ implica que $\text{Index}\left(\bigoplus_{j=1}^m F_j\right) = \sum_{j=1}^m \dim(\text{Ker}(F_j)) - \dim(\text{Ker}(F_j^*)) = \sum_{j=1}^m \text{Index}(F_j)$, y luego

$$\text{Index}(T_{N,k} - \lambda) = \sum_{j=1}^k \text{Index}\left(\frac{j+1}{j}S^2 - \frac{1}{j} - \lambda\right) + \sum_{j=k+1}^N \text{Index}\left(\frac{j+1}{j}U - \frac{1}{j} - \lambda\right). \quad (2.19)$$

Note que, como U es un operador unitario, entonces se cumple $\text{spec}\left(\frac{j+1}{j}U - \frac{1}{j}\right) \subset \mathbb{S}_{\frac{j+1}{j}}^1\left(-\frac{1}{j}\right) \subset X_N$, por lo tanto $\frac{j+1}{j}U - \frac{1}{j} - \lambda$ es invertible para todo $\lambda \notin X_N$ y por consiguiente

$$\text{Index}\left(\frac{j+1}{j}U - \frac{1}{j} - \lambda\right) = 0 \quad \text{para todo } \lambda \notin X_N.$$

Para determinar $\text{Index}\left(\frac{j+1}{j}S^2 - \frac{1}{j} - \lambda\right)$, tenemos en cuenta que $\sigma(S) = u \in \mathcal{C}(\mathbb{S}^1)$, con u como antes. En consecuencia, por el Ejemplo 1.4.9

$$\text{Index}\left(\frac{j+1}{j}S^2 - \frac{1}{j} - \lambda\right) = -\text{wind}\left(\frac{j+1}{j}u^2 - \frac{1}{j} - \lambda\right) = \begin{cases} -2 & \text{si } \left|\frac{1}{j} + \lambda\right| < \frac{j+1}{j}, \\ 0 & \text{si } \left|\frac{1}{j} + \lambda\right| > \frac{j+1}{j}. \end{cases} \quad (2.20)$$

Recordando que λ_j en (2.15) fueron ordenados de tal modo que λ_j viven dentro del círculo $\frac{l+1}{l}S^2 - \frac{1}{l}$ para $l = 1, \dots, j$ y afuera de estos círculos para $l > j$. Aplicando (2.19)–(2.20), el mapeo (2.15) produce

$$[T_{N,k}] \mapsto (-2, \dots, -2, 0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}^k \oplus \mathbb{Z}^{N-k}, \quad (2.21)$$

en particular $[T_{2g,0}] \mapsto (0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}^{2g}$ para $k = 0$ y $N = 2g$. Como $T_{\hat{\zeta}_N}$ y $T_{N,k}$ tienen el mismo espectro esencial X_N , deducimos de (2.15), (2.17), (2.18) y (2.21) que

$$[T_{2g,0}] = [T_{\hat{\zeta}_{2g}}] \text{ para } T_{\hat{\zeta}_{2g}} \in \mathcal{C}(\mathbb{T}_{g,q}), \quad [T_{N,k}] = [T_{\hat{\zeta}_N}] \text{ para } T_{\hat{\zeta}_N} \in \mathcal{C}(\mathbb{P}_{(N,k),q}),$$

por lo tanto $T_{2g,0}$ es unitariamente equivalente a una perturbación compacta del generador $T_{\hat{\zeta}_{2g}} \in \mathcal{C}(\mathbb{T}_{g,q})$ pero no a una perturbación compacta de $T_{2g,k}$ para $k > 0$. Más aún, $T_{N,k}$ es unitariamente equivalente a una perturbación compacta del generador $T_{\hat{\zeta}_{N'}} \in \mathcal{C}(\mathbb{P}_{(N',k'),q})$ si y sólo si $N = N'$ y $k = k'$. Esto prueba que la C^* -álgebra generada por $T_{2g,0}$, $T_{2g,0}^*$, 1 y $\mathbb{K}$ es isomorfa a $\mathcal{C}(\mathbb{T}_{g,q})$ pero a ninguna otra C^* -álgebra desde la Definición 2.1.3, y que la C^* -álgebra generada por $T_{N,k}$, $T_{N,k}^*$, 1 y $\mathbb{K}$ es isomorfa a $\mathcal{C}(\mathbb{P}_{(N,k),q})$ pero a ninguna otra desde la Definición 2.1.5. □

Como consecuencia directa, se tiene el siguiente resultado.

Corolario 2.3.5. *En virtud del Teorema 2.3.4, las C^* -álgebras $\mathcal{C}(\mathbb{T}_{g,q})$ y $\mathcal{C}(\mathbb{T}_{g',q})$ son isomorfas si y sólo si $g = g'$. Además, $\mathcal{C}(\mathbb{P}_{(n,k),q})$ y $\mathcal{C}(\mathbb{P}_{(n',k'),q})$ son isomorfas si y sólo si $n = n'$ y $k = k'$. Más aún, $\mathcal{C}(\mathbb{T}_{g,q})$ nunca es isomorfo a $\mathcal{C}(\mathbb{P}_{(n,k),q})$, y $\mathcal{C}(\mathbb{S}_q^2)$ no es isomorfa a $\mathcal{C}(\mathbb{T}_{g,q})$ ni a $\mathcal{C}(\mathbb{P}_{(n,k),q})$.*

Demostración. El último enunciado de este Corolario se deduce del hecho de que un generador esencialmente normal de la C^* -álgebra $\mathcal{C}(\mathbb{S}_q^2)$ tiene al semi-círculo como espectro esencial, por lo que el espectro esencial nunca es homeomorfo a X_N . Además, según el Teorema de Weyl-von Neumann [4, Corollary 16.2.3], todos esos generadores esencialmente normales son equivalentes unitarios hasta una perturbación compacta y generan, por lo tanto, C^* -álgebras isomorfas. □

Note que el Teorema 2.3.4 muestra que no es necesario que el cociente topológico $\overline{\mathbb{D}}/\sim$ con la relación de equivalencia dada en la Definición 2.1.1 produzca una variedad topológica, sólo el número de pares de arcos y sus respectivas orientaciones importan. En este sentido, la cuantificación aumenta la degeneración. Es importante recordar que las superficies clásicas no-orientables $\mathbb{P}_{(N,k)}$ y $\mathbb{P}_{(N,k')}$ son homeomorfas siempre que $k > 0$ y $k' > 0$. Mientras que, las C^* -álgebras de las correspondientes versiones no-conmutativas $\mathcal{C}(\mathbb{P}_{(N,k),q})$ y $\mathcal{C}(\mathbb{P}_{(N,k'),q})$ son isomorfas si y sólo si $k = k'$. En este sentido, la cuantificación disminuye la degeneración.

2.3.1. K-teoría de Superficies Compactas Cuánticas

El siguiente teorema es muy interesante e importante puesto que nos dice que la deformación efectuada a las superficies compactas clásicas no cambia su K-teoría. Comparar el resultado a continuación con el dado en el Ejemplo 1.4.8 del Capítulo 1.

Teorema 2.3.6. *Es cierto que*

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_0(\mathcal{C}(\mathbb{T}_{g,q})) &\cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & \mathcal{K}_1(\mathcal{C}(\mathbb{T}_{g,q})) &\cong \bigoplus_{j=1}^{2g} \mathbb{Z}, \\ \mathcal{K}_0(\mathcal{C}(\mathbb{S}_q^2)) &\cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & \mathcal{K}_1(\mathcal{C}(\mathbb{S}_q^2)) &\cong 0, \\ \mathcal{K}_0(\mathcal{C}(\mathbb{P}_{(n,k),q})) &\cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}, & \mathcal{K}_1(\mathcal{C}(\mathbb{P}_{(n,k),q})) &\cong \bigoplus_{j=1}^{n-1} \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Demostración. Para calcular los K -grupos de nuestras superficies compactas cuánticas, haremos uso de la herramienta más utilizada para el cálculo de K -grupos de C^* -álgebras; la sucesión exacta de 6-términos. En efecto, note que si $\mathbb{M}_q \in \{\mathbb{T}_{N/2,q}, \mathbb{P}_{(N,k),q} : N, k \in \mathbb{Z}^+, k \leq N\}$, entonces la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \mathbb{K} \xrightarrow{\iota} \mathcal{C}(\mathbb{M}_q) \xrightarrow{\sigma} \mathcal{C}\left(\bigvee_{j=1}^N \mathbb{S}^1\right) \longrightarrow 0$$

induce la sucesión exacta de seis términos

$$\begin{array}{ccccc}\mathcal{K}_0(\mathbb{K}) & \xrightarrow{\iota_*} & \mathcal{K}_0(\mathcal{C}(\mathbb{M}_q)) & \xrightarrow{\sigma_*} & \mathcal{K}_0(\mathcal{C}(\bigvee_{j=1}^N \mathbb{S}^1)) \\ \uparrow \text{ind} & & & & \downarrow \text{exp} \\ \mathcal{K}_1(\mathcal{C}(\bigvee_{j=1}^N \mathbb{S}^1)) & \xleftarrow{\sigma_*} & \mathcal{K}_1(\mathcal{C}(\mathbb{M}_q)) & \xleftarrow{\iota_*} & \mathcal{K}_1(\mathbb{K}).\end{array} \quad (2.22)$$

Ahora bien, como $\mathcal{K}_1(\mathbb{K}) = 0$ y $\mathcal{K}_0(\mathbb{K}) = \mathbb{Z}[1 - SS^*]$ donde S denota el operador shift-unilateral derecho en $\ell_2(\mathbb{N})$ y además, $\mathcal{K}_0(\mathcal{C}(\bigvee_{j=1}^N \mathbb{S}^1)) = \mathbb{Z}[1]$ y $\mathcal{K}_1(\mathcal{C}(\bigvee_{j=1}^N \mathbb{S}^1)) = \bigoplus_{j=1}^N \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^N$. Entonces reemplazando estos grupos, la sucesión exacta de seis términos (2.22) queda en la forma

$$\begin{array}{ccccc}\mathbb{Z}[1 - SS^*] & \xrightarrow{\iota_*} & \mathcal{K}_0(\mathcal{C}(\mathbb{M}_q)) & \xrightarrow{\sigma_*} & \mathbb{Z}[1] \\ \uparrow \text{ind} & & & & \downarrow \text{exp} \\ \mathbb{Z}^N & \xleftarrow{\sigma_*} & \mathcal{K}_1(\mathcal{C}(\mathbb{M}_q)) & \xleftarrow{\iota_*} & 0.\end{array} \quad (2.23)$$

Ahora, la sucesión $0 \longrightarrow \text{Ker}(\sigma_*) \longrightarrow \mathcal{K}_0(\mathcal{C}(\mathbb{M}_q)) \xrightarrow{\sigma_*} \mathbb{Z}[1] \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta que se escinde, cuyo homomorfismo testigo de la escisión viene dado por $[1] \mapsto [1]$. Y como (2.23) es exacta, deducimos que

$$\mathcal{K}_0(\mathcal{C}(\mathbb{M}_q)) \cong \mathbb{Z}/\text{Im}(\text{ind}) \oplus \mathbb{Z}[1], \quad \mathcal{K}_1(\mathcal{C}(\mathbb{M}_q)) \cong \text{Ker}(\text{ind}). \quad (2.24)$$

Por lo tanto sólo resta determinar el homomorfismo $\text{ind} : \mathcal{K}_1(\mathcal{C}(\bigvee_{j=1}^N \mathbb{S}^1)) \rightarrow \mathcal{K}_0(\mathbb{K})$ en (2.22).

Sabemos que $\mathcal{K}_1(\mathcal{C}(\bigvee_{j=1}^N \mathbb{S}^1)) = \bigoplus_{j=1}^N \mathbb{Z}[u_j]$, donde los generators u_j están dados por $u_j(\tau(t)) := e^{2\pi i t}$

para $\tau : [0, 1] \rightarrow \mathcal{C}(\bigvee_{j=1}^N \mathbb{S}^1)$ parametrizando el j -ésimo círculo, y $u_j(\tau) := 1$ para cualquier otro

$\tau \in \bigvee_{j=1}^N \mathbb{S}^1$. Más aún la inclusión $\mathcal{C}(\bigvee_{j=1}^N \mathbb{S}^1) \subset \mathcal{C}(\mathbb{S}^1)$ corresponde al pullback $\rho_N^* : \mathcal{C}(\bigvee_{j=1}^N \mathbb{S}^1) \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{S}^1)$

con ρ_N desde (2.6).

Ahora bien, si suponemos que $\mathbb{M}_q = \mathbb{T}_{g,q}$ con $N = 2g$, entonces, en virtud de la Definición 2.1.1, cada arco a_j ocurre exactamente una vez más con su orientación negativa a_j^{-1} . Por lo tanto los winding numbers (números de giro) de todas las funciones invertibles $\Phi \in \mathcal{C}(\bigvee_{j=1}^{2g} \mathbb{S}^1) \subset \mathcal{C}(\mathbb{S}^1)$ son 0, así que $\text{ind} \equiv 0$ y por consiguiente $\mathcal{K}_0(\mathcal{C}(\mathbb{T}_{g,q})) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}[1]$ y $\mathcal{K}_1(\mathcal{C}(\mathbb{T}_{g,q})) \cong \mathbb{Z}^{2g}$ por (2.24).

Para el caso de $\mathbb{M}_q = \mathbb{P}_{(n,k),q}$ con $N = n$ y $1 \leq k \leq n$, observe que podemos aplicar el homeomorfismo φ_n para ordenar los círculos de $\bigvee_{j=1}^n \mathbb{S}^1$ de tal suerte que los primeros k círculos corresponden a arcos que ocurren dos veces con la misma orientación (esto es, $a_j(t) \sim b_j(t)$) y los otros pares ocurren con orientaciones opuestas (esto es, $a_j(t) \sim a_j^{-1}(t)$). Por lo tanto, una función invertible $u \in \mathcal{C}(\bigvee_{j=1}^n \mathbb{S}^1) \subset \mathcal{C}(\mathbb{S}^1)$ con winding number $m \in \mathbb{Z}$ a lo largo de a_j tiene también winding number m a lo largo de b_j si $j \leq k$. Por otro lado, si $j > k$, entonces una función con winding number $m \in \mathbb{Z}$ a lo largo de a_j tendrá winding number $-m$ a lo largo de a_j^{-1} así que estos winding number suman 0. Para los generadores $[u_j]$ de $\mathcal{K}_1(\mathcal{C}(\bigvee_{j=1}^n \mathbb{S}^1)) \cong \bigoplus_{j=1}^n \mathbb{Z}[u_j]$ descritos anteriormente, obtenemos

$$\text{ind}[u_j] = 2, \quad j \leq k, \quad \text{ind}[u_j] = 0, \quad j > k,$$

así que $\text{ind}(m_1, \dots, m_n) = 2(m_1 + \dots + m_k)$ en la sucesión exacta (2.23). En particular, $\text{Im}(\text{ind}) = 2\mathbb{Z}$ y $\text{Ker}(\text{ind}) \cong \mathbb{Z}^{n-1}$, así que el resultado para $\mathcal{C}(\mathbb{P}_{(n,k),q})$ se deduce por (2.24).

Por último, para el caso de $\mathcal{C}(\mathbb{S}_q^2)$ (ver Definición 2.1.4), recuerde que un número complejo $e^{\pi it} \in \mathbb{S}^1$ es identificado con su conjugado $e^{-\pi it} \in \mathbb{S}^1$. Entonces, el espacio topológico cociente $\mathbb{S}^1 / \sim$ resulta ser homeomorfo a un intervalo cerrado y por lo tanto contraíble, y los grupos abelianos $\mathcal{K}_0$ y $\mathcal{K}_1$ de una C^* -álgebra de funciones continuas en un espacio topológico contraíble son isomorfos a $\mathbb{Z}$ y 0 respectivamente. De esta manera, si reemplazamos $\mathcal{C}(\bigvee_{j=1}^N \mathbb{S}^1)$ por $\mathbb{C}$ en (2.22), la fila inferior se convierte en 0 y la fila superior se vuelve exacta, esto es, se obtiene la siguiente sucesión exacta de seis términos

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{\iota_*} & \mathcal{K}_0(\mathcal{C}(\mathbb{S}_q^2)) & \xrightarrow{\sigma_*} & \mathbb{Z}[1] & & \\ \text{ind} \uparrow & & & & \downarrow \text{exp} & & \\ 0 & \xleftarrow{\sigma_*} & 0 & \xleftarrow{\iota_*} & 0 & & \end{array} \quad (2.25)$$

de donde por la Proposición 1.4.5 se deduce que $\mathcal{K}_0(\mathcal{C}(\mathbb{S}_q^2)) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ y $\mathcal{K}_1(\mathcal{C}(\mathbb{S}_q^2)) = 0$ como queríamos. $\square$

Observación 2.3.7. Es importante observar que nuestras superficies compactas cuánticas orientables y no-orientables tienen los mismos K -grupos que los de sus contrapartes clásicas ver Ejemplo 1.4.8, el lector puede encontrar el cálculo de los K -grupos de las superficies compactas clásicas en la tesis de maestría [16].

En el resultado que sigue daremos una descripción explícita de los generadores de los K -grupos previamente calculados con la sucesión exacta de seis términos.

Teorema 2.3.8. *Los siguientes enunciados sobre los generadores de los grupos de K -teoría de las superficies compactas cuánticas se verifican:*

- *Los generadores del grupo abeliano $\mathcal{K}_0(\mathcal{C}(\mathbb{T}_{g,q}))$ son $[1]$ y $[P_{\text{Bott}_q}] - [1]$. De igual modo, estos también son generadores del grupo $\mathcal{K}_0(\mathcal{C}(\mathbb{P}_{(n,k),q}))$, donde P_{Bott_q} denota a la matriz $P_{\text{Bott}_q} := \begin{pmatrix} T_z T_z^* & T_z \sqrt{1 - T_z^* T_z} \\ \sqrt{1 - T_z^* T_z} T_z^* & 1 - T_z^* T_z \end{pmatrix}$, y z es la función identidad en $\mathbb{D}$. Esto es, P_{Bott_q} es la versión no-conmutativa de la famosa Proyección de Bott.*
- *Los generadores de $\mathcal{K}_1(\mathcal{C}(\mathbb{T}_{g,q}))$ están dados por la clases de equivalencias de los unitarios $\left[\bigoplus_{i=1}^{j-1} \text{id} \oplus U \oplus \bigoplus_{i=j+1}^{2g} \text{id} \right]$ para $j = 1, \dots, 2g$. En el caso del grupo $\mathcal{K}_1(\mathcal{C}(\mathbb{P}_{(n,k),q}))$ los generadores están dados por*

$$U_j := \begin{cases} \bigoplus_{i=1}^{j-1} \text{id} \oplus U \oplus \bigoplus_{i=j+1}^n \text{id} & \text{si } j > k, \\ (S^{*2} \oplus \bigoplus_{i=2}^{j-1} \text{id} \oplus S^2 \oplus \bigoplus_{i=j+1}^n \text{id}) + A_j & \text{si } j \leq k, \end{cases}$$

donde $A_j(e_0, 0, \dots, 0) = (0, \dots, 0, e_1, 0, \dots, 0)$, $A_j(e_1, 0, \dots, 0) = (0, \dots, 0, e_0, 0, \dots, 0)$ y los elementos e_0, e_1 están insertados en la j -ésima posición, $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ denota la base ortonormal canónica de $\ell_2(\mathbb{N})$ y $j \in \{2, \dots, n\}$.

Demostración. Recordemos nuevamente que en virtud del Teorema de Stone-Weirstrass, la función $u : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ definida por $u(e^{2\pi i t}) = e^{2\pi i t}$ (la función identidad en $\mathbb{S}^1$) satisface que $\mathcal{C}(\mathbb{S}^1) = \text{C}^*\text{-gen}\{u, \bar{u}, 1\}$, por consiguiente, si extendemos esta función al interior del disco cerrado unitario, en el sentido $z(re^{2\pi i t}) := ru(e^{2\pi i t})$, entonces $z \in \mathcal{C}(\mathbb{D})$ y obtenemos una deformación de la famosa proyección de Bott de $\mathcal{C}_0(\mathbb{D})$:

$$P_{\text{Bott}_q} := \begin{pmatrix} T_z T_z^* & T_z \sqrt{1 - T_z^* T_z} \\ \sqrt{1 - T_z^* T_z} T_z^* & 1 - T_z^* T_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_z \\ \sqrt{1 - T_z^* T_z} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} T_z^* & \sqrt{1 - T_z^* T_z} \end{pmatrix}.$$

Como $\text{ind}[u] = [P_{\text{Bott}_q}] - [1] \in \mathcal{K}_0(\mathbb{K})$ y $[u]$ es el generador unitario de $\mathcal{K}_1(\mathcal{C}(\mathbb{S}^1))$, concluimos que $\text{ind}[u] = [P_{\text{Bott}_q}] - [1]$ es un generador de $\mathcal{K}_0(\mathbb{K})$. Más aún, la imagen del mapeo del índice en (2.22) es o bien 0 (caso orientable) o $2\mathbb{Z}$ (caso no-orientable), por lo tanto el generador de $\mathcal{K}_0(\mathbb{K})$ nunca vive en la imagen del mapeo del índice, así que $0 \neq [1] - [P_{\text{Bott}_q}]$ es siempre un generador no-trivial del $\mathcal{K}_0$ -grupo de una superficie compacta cuántica. Además, en el caso de una superficie compacta cuántica no-orientable, tenemos la relación $2([1] - [P_{\text{Bott}_q}]) = 0 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Por otro lado, podemos levantar el generador genérico $u \in \mathcal{C}(\mathbb{S}^1)$ al operador shift $S \in \mathcal{T}$, y por el Ejemplo 1.4.9 sabemos que $\text{ind}[u] = -[1 - SS^*]$, por lo tanto la ecuación $[1] - [P_{\text{Bott}_q}] = [1 - SS^*]$ es cierta en $\mathcal{K}_0(\mathbb{K})$.

Para encontrar generadores del $\mathcal{K}_1$ -grupo, considere los generadores 1-dimensionales $[u_j] \in \mathcal{K}_1(\mathcal{C}(\bigvee_{k=1}^N \mathbb{S}^1))$ descritos antes. Para una superficie cuántica $\mathcal{C}(\mathbb{M}_q)$ de género distinto de cero, $\sigma_* : \mathcal{K}_1(\mathcal{C}(\mathbb{M}_q)) \rightarrow \text{Ker}(\text{ind})$ es un isomorfismo en virtud de (2.23). Por otro lado, sabemos

que $[u_j] = \left[\frac{j+1}{j} u_j - \frac{1}{j} \right] \in \mathcal{K}_1(\mathcal{C}(\bigvee_{k=1}^N \mathbb{S}^1))$ ya que la función invertible no-unitaria, $\frac{j+1}{j} u_j - \frac{1}{j}$ es homotópica a u_j . En el caso orientable, el isomorfismo del Teorema 2.3.4 nos permite demostrar que

$$\sigma_* \left[\bigoplus_{i=1}^{j-1} \text{id} \oplus \left(\frac{j+1}{j} U - \frac{1}{j} \right) \oplus \bigoplus_{i=j+1}^{2g} \text{id} \right] = \left[\frac{j+1}{j} u_j - \frac{1}{j} \right] = [u_j] \in \mathcal{K}_1(\mathcal{C}(\bigvee_{k=1}^{2g} \mathbb{S}^1)).$$

Luego, por homotopia, $\left[\bigoplus_{i=1}^{j-1} \text{id} \oplus U \oplus \bigoplus_{i=j+1}^{2g} \text{id} \right] \in \mathcal{K}_1(\mathcal{C}(\mathbb{T}_{g,q}))$ son generadores unitarios, donde $j = 1, \dots, 2g$.

Por otro lado, en el caso no-orientable, los operadores unitarios

$$U_j := \bigoplus_{i=1}^{j-1} \text{id} \oplus U \oplus \bigoplus_{i=j+1}^n \text{id} \in \mathcal{C}(\mathbb{P}_{(n,k),q}), \quad j > k, \quad (2.26)$$

satisfacen $\sigma_*[U_j] = [u_j] \in \text{Ker}(\text{ind})$ y producen generadores unitarios de $\mathcal{K}_1(\mathcal{C}(\mathbb{P}_{(n,k),q}))$, donde nosotros usamos de nuevo el isomorfismo del Teorema 2.3.4. Para $1 < j \leq k$, los generadores adicionales de $\text{Ker}(\text{ind}) \subset \mathcal{K}_1(\mathcal{C}(\bigvee_{k=1}^N \mathbb{S}^1))$ pueden ser dados por las sumas $[u_1^*] \oplus [u_j] = [2u_1^* - 1] \oplus \left[\frac{j+1}{j} u_j - \frac{1}{j} \right]$, donde las ecuaciones son ciertas por homotopia. Los elementos unitarios se levantan a operadores no-unitarios $S^{*2} \oplus \bigoplus_{i=2}^{j-1} \text{id} \oplus S^2 \oplus \bigoplus_{i=j+1}^n \text{id}$ en $\mathcal{C}(\mathbb{P}_{(n,k),q})$. Note que la función en $\mathcal{C}(\mathbb{S}^1)$ corresponde a $\sigma(S^{*2} \oplus \bigoplus_{i=2}^{j-1} \text{id} \oplus S^2 \oplus \bigoplus_{i=j+1}^n \text{id})$ satisface las condiciones de frontera de la Definición 2.1.5, esto es, tiene winding number -1 a lo largo de a_1 y b_1 , y winding number 1 a lo largo de a_j y b_j . Del mismo modo que en el Comentario 2.3.1, definimos un operador compacto $A_j \in \mathcal{K}(\mathcal{H}_{n,k})$, $j \leq k$, por

$$\left. \begin{aligned} A_j(e_0, 0, \dots, 0) &= (0, \dots, 0, e_1, 0, \dots, 0), \\ A_j(e_1, 0, \dots, 0) &= (0, \dots, 0, e_0, 0, \dots, 0), \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{insertado en la} \\ j\text{-ésima posición,} \end{array}$$

y 0 en todos los otros elementos básicos. Entonces

$$U_j := (S^{*2} \oplus \bigoplus_{i=2}^{j-1} \text{id} \oplus S^2 \oplus \bigoplus_{i=j+1}^n \text{id}) + A_j \in \mathcal{C}(\mathbb{P}_{(n,k),q}) \quad (2.27)$$

produce un operador unitario tal que $\sigma_*[U_j] = [u_1^*] \oplus [u_j] \in \text{Ker}(\text{ind})$. En conclusión, $[U_2], \dots, [U_n] \in \mathcal{K}_1(\mathcal{C}(\mathbb{P}_{(n,k),q}))$ producen un conjunto de generadores libres de $\mathcal{K}_1(\mathcal{C}(\mathbb{P}_{(n,k),q})) \cong \mathbb{Z}^{n-1}$, donde los operadores U_j son definidos en (2.26) y (2.27). $\square$

En el siguiente capítulo se introduce el concepto de CW-complejo no-conmutativo finito y se dictan algunas generalidades.

En este capítulo presentamos los conceptos y resultados que motivaron el título de este trabajo, entre los que destacan la definición de CW-complejo cuántico finito o CW-complejo no-conmutativo finito, en este sentido resolvemos la pregunta ¿cuál es una versión no-conmutativa de un CW-complejo clásico finito? Nuevamente, las palabras cuántico y no-conmutativo se utilizarán indistintamente. Asimismo, se les da un tratamiento a importantes ejemplos de la Geometría No-conmutativa como espacios dotados con esta estructura.

En principio abordamos una motivación a tales conceptos, utilizando las ideas expuestas en el capítulo anterior para las superficies compactas cuánticas.

3.1. Motivación CW-complejos cuánticos

A manera de resumen, recordemos que a cada C^* -álgebra $\mathcal{A}$ le podemos asociar dos grupos abelianos $\mathcal{K}_0(\mathcal{A})$ y $\mathcal{K}_1(\mathcal{A})$, donde $\mathcal{K}_0$ y $\mathcal{K}_1$ en términos categóricos, son funtores covariantes de la categoría de C^* -álgebras a la categoría de grupos abelianos. Y además, si $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ es un $*$ -isomorfismo de C^* -álgebras entonces el mapeo inducido $\mathcal{K}_*(f) : \mathcal{K}_*(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{K}_*(\mathcal{B})$ es un isomorfismo de grupos. Para resultados importantes en K-teoría invitamos al lector consultar [4, 28]. De este modo, de los conocimientos de la K-teoría de C^* -álgebras sabemos que para todo espacio de Hilbert separable y de dimensión infinita $\mathcal{H}$

$$\mathcal{K}_*(\mathbb{K}) \cong \mathcal{K}_*(\mathbb{K} \otimes \mathbb{C}) \cong \mathcal{K}_*(\mathbb{C}) \cong \mathcal{K}_*(\Sigma(\Sigma\mathbb{C})) \cong \mathcal{K}_*(\mathcal{C}_0(\mathbb{D})), \quad (3.1)$$

donde se ha usado que la estabilización de $\mathbb{C}$ es $*$ -isomorfa a $\mathbb{K} := \mathcal{K}(\mathcal{H})$ (álgebra de operadores compactos en $\mathcal{H}$) y recordamos que Σ denota la suspensión en C^* -álgebras. Por consiguiente, podemos notar que en las sucesiones exactas cortas (1.7) y (1.9), las esquinas tienen K-grupos isomorfos, lo cual sugiere la pregunta natural ¿son isomorfos los K-grupos del centro? la respuesta es afirmativa (ver la ilustración de este hecho en el Figura 3.1).

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{K}_0(\mathcal{C}_0(\mathbb{D})) & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{K}_0(\mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}})) & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{K}_0(\mathcal{C}(\mathbb{S}^1)) \\
& \searrow \cong & \downarrow \cong & & \swarrow \cong \\
& & \mathcal{K}_0(\mathbb{K}) & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{K}_0(\mathcal{T}) & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{K}_0(\mathcal{C}(\mathbb{S}^1)) \\
& & \uparrow & & \downarrow & & \uparrow \cong \\
& & \mathcal{K}_1(\mathcal{C}(\mathbb{S}^1)) & \xleftarrow{\quad} & \mathcal{K}_1(\mathcal{T}) & \xleftarrow{\quad} & \mathcal{K}_1(\mathbb{K}) \\
& \nearrow \cong & \uparrow \cong & & \downarrow \cong & & \swarrow \cong \\
\mathcal{K}_1(\mathcal{C}(\mathbb{S}^1)) & \xleftarrow{\quad} & \mathcal{K}_1(\mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}})) & \xleftarrow{\quad} & \mathcal{K}_1(\mathcal{C}_0(\mathbb{D}))
\end{array}$$

Figura 3.1: K-teoría de Toeplitz vs $\mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}})$.

Y estas ideas serán tenidas en cuenta a la hora de construir ejemplos de CW-complejos cuánticos finitos. De igual manera, es menester mencionar también que, más adelante construiremos una filtración creciente de ideales para CW-complejos finitos clásicos de dimensión n y lo mismo para su versión no-conmutativa y estas filtraciones nos arrojarán dos sucesiones espectrales, una para el caso clásico y la otra para el cuántico. En consecuencia, nuestra tarea consiste en determinar los diferenciales que definen a estas sucesiones espectrales y compararlos, ahora bien, la dificultad que representa el encontrar los diferenciales en sucesiones espectrales es muy conocida, no sobra decir que para diferenciales más grandes; el problema es mayor. Así pues, una de las estrategias que hemos utilizado para intentar describirlos, encuentra su motivación en la C^* -álgebra de Toeplitz. El cálculo de los homomorfismos conexión de las sucesiones exactas de 6 términos inducidas por las sucesiones exactas cortas (1.9) y (1.7) trae consigo una filosofía importante. Para la inducida por la clásica (1.9),

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{K}_0(\mathcal{C}_0(\mathbb{D})) & \longrightarrow & \mathcal{K}_0(\mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}})) & \longrightarrow & \mathcal{K}_0(\mathcal{C}(\mathbb{S}^1)) \\
\partial_{01} \uparrow & & & & \downarrow \partial_{10} \\
\mathcal{K}_1(\mathcal{C}(\mathbb{S}^1)) & \longleftarrow & \mathcal{K}_1(\mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}})) & \longleftarrow & \mathcal{K}_1(\mathcal{C}_0(\mathbb{D})).
\end{array}$$

Note que al ser $\overline{\mathbb{D}}$ contraíble es cierto que $\mathcal{K}_0(\mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}})) \cong \mathbb{Z}$ y $\mathcal{K}_1(\mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}})) = 0$, además, ya que $\mathcal{K}_1(\mathcal{C}_0(\mathbb{D})) = 0$, el homomorfismo $\mathcal{K}_0(\mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}})) \rightarrow \mathcal{K}_0(\mathcal{C}(\mathbb{S}^1))$ resulta ser sobreyectivo, pero como el grupo $\mathcal{K}_0(\mathcal{C}(\mathbb{S}^1))$ es isomorfo a los enteros $\mathbb{Z}$, entonces también es inyectivo. De donde, el mapeo del índice ∂_{01} es un isomorfismo. Con lo cual manda generador en generador. Ahora bien, en virtud de la periodicidad de Bott, $[u]$ es un generador del grupo abeliano $\mathcal{K}(\mathcal{C}(\mathbb{S}^1))$ donde $u : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ está dado por $u(e^{2\pi it}) = e^{2\pi it}$. En este sentido, para conocer el mapeo del índice debemos encontrar un levantamiento unitario $v \in M_2(\mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}}))$ de $\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & \overline{u} \end{pmatrix}$. Con esto en mente, lo que hay que hacer es extender u de manera continua al interior del disco de dimensión 2, $\overline{\mathbb{D}}$. Observe que esto se logra “multiplicando por un radio”. Así que, si definimos $v := \begin{pmatrix} z & -\sqrt{1-|z|^2} \\ \sqrt{1-|z|^2} & \overline{z} \end{pmatrix}$ con $z : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{C}$ dado por $z(re^{2\pi it}) = ru(e^{2\pi it}) = re^{2\pi it}$. Entonces note que v define a una matriz unitaria con coeficientes en $\mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}})$, en efecto,

$$vv^* = \begin{pmatrix} z & -\sqrt{1-|z|^2} \\ \sqrt{1-|z|^2} & \bar{z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{z} & \sqrt{1-|z|^2} \\ -\sqrt{1-|z|^2} & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y similarmente verificamos que $v^*v = 1$. Además,

$$\pi \left(\begin{pmatrix} z & -\sqrt{1-|z|^2} \\ \sqrt{1-|z|^2} & \bar{z} \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & \bar{u} \end{pmatrix},$$

por lo tanto v es un levantamiento unitario de la matriz $\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & \bar{u} \end{pmatrix}$ y por el Corolario 1.4.7 el mapeo del índice está dado por

$$\begin{aligned} \partial_{01}([u]) &= \left[\begin{pmatrix} z & -\sqrt{1-|z|^2} \\ \sqrt{1-|z|^2} & \bar{z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{z} & \sqrt{1-|z|^2} \\ -\sqrt{1-|z|^2} & z \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= \left[\begin{pmatrix} |z|^2 & z\sqrt{1-|z|^2} \\ \sqrt{1-|z|^2}\bar{z} & 1-|z|^2 \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= [P_{\text{Bott}}] - [1], \end{aligned}$$

donde $P_{\text{Bott}} := \begin{pmatrix} |z|^2 & z\sqrt{1-|z|^2} \\ \sqrt{1-|z|^2}\bar{z} & 1-|z|^2 \end{pmatrix}$ es una proyección; esto es, $P_{\text{Bott}}^2 = P_{\text{Bott}} = P_{\text{Bott}}^*$. Esta proyección es típicamente conocida como proyección de Bott. Además, como

$$P_{\text{Bott}} = \begin{pmatrix} r^2 & ru\sqrt{1-r^2} \\ \sqrt{1-r^2} r\bar{u} & 1-r^2 \end{pmatrix}$$

entonces $\lim_{r \rightarrow 1} P_{\text{Bott}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y el mapeo

$$\mathcal{K}_0(\mathcal{C}_0(\mathbb{D})) \ni \left[\begin{pmatrix} r^2 & ru^n\sqrt{1-r^2} \\ \sqrt{1-r^2} r\bar{u}^{-n} & 1-r^2 \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \mapsto n = \text{wind}(u^n) \in \mathbb{Z}$$

define un isomorfismo.

Similarmente, al echar un vistazo a la versión no-conmutativa (1.7), esta sucesión exacta corta induce la sucesión exacta de 6-términos en K-teoría siguiente

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{K}_0(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{K}_0(\mathcal{T}) & \longrightarrow & \mathcal{K}_0(\mathcal{C}(\mathbb{S}^1)) \\ \partial_{01} \uparrow & & & & \downarrow \partial_{10} \\ \mathcal{K}_1(\mathcal{C}(\mathbb{S}^1)) & \longleftarrow & \mathcal{K}_1(\mathcal{T}) & \longleftarrow & \mathcal{K}_1(\mathbb{K}). \end{array}$$

Entonces por (3.1) se cumple que el mapeo $\mathcal{K}_1(\mathcal{C}(\mathbb{S}^1)) \xrightarrow{\partial_{01}} \mathcal{K}_0(\mathbb{K})$ es un isomorfismo. Y de este modo, ∂_{01} queda completamente determinado si lo conocemos en el generador del grupo abeliano $\mathcal{K}_1(\mathcal{C}(\mathbb{S}^1))$. Observe que como en la versión clásica, debemos encontrar un levantamiento unitario $v \in M_2(\mathcal{T})$ de $\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & \bar{u} \end{pmatrix}$. Así, note que si definimos $v := \begin{pmatrix} T_z & -\sqrt{1-T_z T_z^*} \\ \sqrt{1-T_z^* T_z} & T_z^* \end{pmatrix}$ con z como antes, se cumple que

$$\begin{aligned}
\partial_{01}([u]) &= \left[\begin{pmatrix} \frac{T_z}{\sqrt{1-T_z^*T_z}} & -\sqrt{1-T_zT_z^*} \\ T_z^* & T_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{T_z^*}{-\sqrt{1-T_zT_z^*}} & \sqrt{1-T_z^*T_z} \\ T_z & T_z \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \\
&= \left[\begin{pmatrix} \frac{T_zT_z^*}{\sqrt{1-T_z^*T_zT_z^*}} & T_z\sqrt{1-T_z^*T_z} \\ \sqrt{1-T_z^*T_zT_z^*} & 1-T_z^*T_z \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \\
&= [P_{\text{Bott}_q}] - [1]
\end{aligned}$$

donde $P_{\text{Bott}_q} = \begin{pmatrix} \frac{T_zT_z^*}{\sqrt{1-T_z^*T_zT_z^*}} & T_z\sqrt{1-T_z^*T_z} \\ \sqrt{1-T_z^*T_zT_z^*} & 1-T_z^*T_z \end{pmatrix}$ es considerada como la versión cuántica de P_{Bott} tal como se mencionó en el Teorema 2.3.8. De esta manera, identificando generadores, esto es $[1] \mapsto [1]$, $[u] \mapsto [u]$ y $[P_{\text{Bott}}] - [1] \mapsto [P_{\text{Bott}_q}] - [1]$ obtenemos cuadrados conmutativos en la Figura 3.1.

Para ver que v es una matriz unitaria hemos usado el lema siguiente.

Lema 3.1.1. Sean $\mathcal{A}$ una C^* -álgebra con unidad (no necesariamente conmutativa) y $a \in \mathcal{A}$ con $\|a\| \leq 1$, entonces

$$v := \begin{pmatrix} a & -\sqrt{1-aa^*} \\ \sqrt{1-a^*a} & a^* \end{pmatrix},$$

es un elemento unitario en $M_2(\mathcal{A})$.

Demostración. Para demostrar esto, observe primero que $a(a^*a)^n = (aa^*)^na$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En efecto, consideremos el conjunto $W := \{n \in \mathbb{N} : a(a^*a)^n = (aa^*)^na\}$, luego, note que $1 \in W$ y si $n \in W$, entonces

$$\begin{aligned}
a(a^*a)^{n+1} &= a(a^*a)^n(a^*a) = (aa^*)^na(a^*a) \\
&= (aa^*)^n(aa^*)a = (aa^*)^{n+1}a,
\end{aligned}$$

de donde $n+1 \in W$ y por lo tanto $W = \mathbb{N}$. Más aún, es cierto que $ap(a^*a) = p(aa^*)a$ para todo polinomio $p = p(x)$ con $x^* = x \in \mathcal{A}$. Ahora bien, como la función $[0, 1) \ni t \mapsto \sqrt{1-t}$ es un elemento de la C^* -álgebra $\mathcal{C}_0([0, 1))$ entonces por el Teorema de Stone-Wierstrass, existe una sucesión de polinomios $\{p_k = p_k(t)\}_{k \in \mathbb{N}}$ de tal suerte que $\lim_{k \rightarrow \infty} p_k(t) = \sqrt{1-t}$ para todo $t \in [0, 1)$ (de hecho la convergencia es claramente uniforme). En este sentido, por el Cálculo Funcional Continuo, para todo $T^* = T \in \mathcal{A}$ con $\text{spec}(T) \subset [0, 1]$ se satisface que $\lim_{k \rightarrow \infty} p_k(T) = \sqrt{1-T}$. Por consiguiente, se deduce

$$a\sqrt{1-a^*a} = \lim_{k \rightarrow \infty} ap_k(a^*a) = \lim_{k \rightarrow \infty} p_k(aa^*)a = \sqrt{1-aa^*}a. \quad (3.2)$$

Finalmente, debemos probar que $vv^* = I_2 = v^*v$. En efecto, por (3.2)

$$vv^* = \begin{pmatrix} a & -\sqrt{1-aa^*} \\ \sqrt{1-a^*a} & a^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^* & \sqrt{1-a^*a} \\ -\sqrt{1-aa^*} & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} aa^* + (1 - aa^*) & a\sqrt{1 - a^*a} - \sqrt{1 - aa^*}a \\ \sqrt{1 - a^*a}a^* - a^*\sqrt{1 - aa^*} & (1 - a^*a) + a^*a \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & a\sqrt{1 - a^*a} - \sqrt{1 - aa^*}a \\ \sqrt{1 - a^*a}a^* - a^*\sqrt{1 - aa^*} & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & a\sqrt{1 - a^*a} - a\sqrt{1 - a^*a} \\ \sqrt{1 - a^*a}a^* - \sqrt{1 - a^*a}a^* & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Similarmente se prueba que $v^*v = I_2$. Por lo tanto v es un elemento unitario de $\mathcal{M}_2(\mathcal{A})$. $\square$

Tal como se mencionó en el capítulo anterior, las superficies cerradas cuánticas, resultarán ser ejemplos de CW-complejos cuánticos de dimensión 2. En los siguientes ejemplos trabajaremos esto a más detalle previo a introducir la definición formal de CW-complejo cuántico de dimensión finita.

Ejemplo 3.1.2 (Superficies compactas, sin frontera, orientables y de género g). Recordemos que por el Teorema de Clasificación de Superficies Compactas sin Frontera, toda superficie de este tipo se puede ver como una suma conexa de g -toros que denotamos por $\mathbb{T}_g := \underbrace{\mathbb{T} \# \cdots \# \mathbb{T}}_{g\text{-veces}}$.

Es bien conocido que este espacio topológico resulta ser un CW-complejo clásico de dimensión 2, cuya descomposición esquelética está dada por $\emptyset \hookrightarrow \{*\} \hookrightarrow \bigvee_{i=1}^{2g} \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{T}_g$, es decir, podemos empezar con un 0-esqueleto que consista de un solo punto, y de este modo, el 1-esqueleto estará dado por el producto cuña $\bigvee_{i=1}^{2g} \mathbb{S}^1$, y finalmente, si le pegamos a este espacio un disco de dimensión 2 adecuadamente, obtenemos la suma conexa de g -toros. Ahora bien, así como vimos en el capítulo 2, este CW-complejo admite una versión no-conmutativa, cuya descomposición esquelética cuántica viene dada por $\emptyset \hookrightarrow \{*\} \hookrightarrow \bigvee_{i=1}^{2g} \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{T}_{g,q}$. Esto es, el 0-esqueleto y el 1-esqueleto son completamente clásicos, lo cual era de esperarse ya que no se conoce una deformación adecuada de un intervalo. En este sentido, note que así como se considera a $\mathcal{C}(\mathbb{T}_g)$ como C^* -subálgebra de $\mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}})$, donde

$$\mathcal{C}(\mathbb{T}_g) = \{f \in \mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}}) : f(x) = f(y), (\forall x, y \in \overline{\mathbb{D}})(x \sim y)\},$$

nosotros demostramos que $\mathcal{C}(\mathbb{T}_{g,q})$ es una C^* -subálgebra de $\mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}}_q)$. Y en consecuencia, tenemos los siguientes diagramas pullbacks:

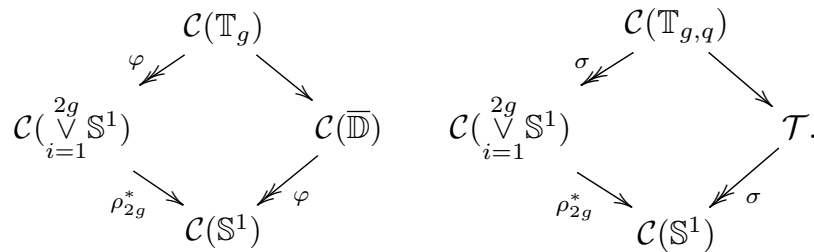


Figura 3.2: Pullbacks superficies compactas, sin frontera, orientables y de género g clásico-cuántico.

En la Figura 3.2, los $*$ -homomorfismos φ y σ representan la restricción a la frontera del disco cerrado unitario y el mapeo del símbolo respectivamente.

Ejemplo 3.1.3 (Superficies compactas, sin frontera, no orientables y de género n). Tal como en el ejemplo anterior, denotamos por $\mathbb{P}_n := \underbrace{\mathbb{P} \# \cdots \# \mathbb{P}}_{n\text{-veces}}$ la suma conexa de n planos proyectivos.

Como ya se mencionó, $\mathcal{C}(\mathbb{P}_n)$ es una C^* -subálgebra de $\mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}})$ dada por

$$\mathcal{C}(\mathbb{P}_n) = \{f \in \mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}}) : f(x) = f(y), (\forall x, y \in \overline{\mathbb{D}})(x \sim y)\}$$

y su versión no-conmutativa $\mathcal{C}(\mathbb{P}_{(n,k),q})$ resulta ser una C^* -subálgebra de $\mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}}_q)$ con descomposición esquelética cuántica $\emptyset \hookrightarrow \{*\} \hookrightarrow \bigvee_{i=1}^n \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}_{(n,k),q}$,

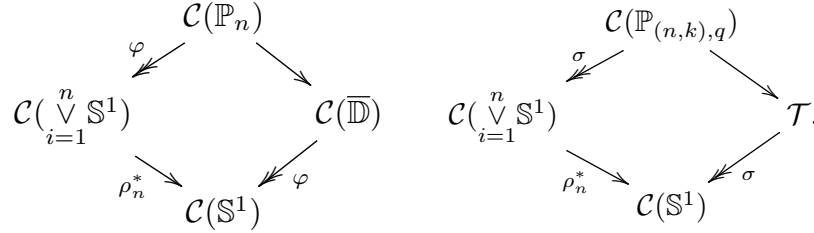


Figura 3.3: Pullbacks superficies compactas, sin frontera, no orientables y de género n clásico-cuántico.

Note que $\mathcal{T}$ es un CW-complejo cuántico de dimensión 2 y representa la cuantización del disco cerrado unitario del plano complejo $\overline{\mathbb{D}}$ (ver Subsección 1.2); y entonces, para encontrar el homomorfismo conexión lo único que tuvimos que hacer fue extender continuamente el generador u en $\mathcal{C}(\mathbb{S}^1)$ a una función en $\mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}})$, “todo el 2-esqueleto”, con norma menor o igual que 1. Pero esto es bastante simple, la dificultad empieza cuando queremos construir la versión no-conmutativa de CW-complejos obtenidos de pegar discos de más altas dimensiones. En este respecto, uno de los primeros objetivos que trazamos fue definir discos cuánticos de dimensión par e impar, nos interesamos por estudiar la K-teoría de los CW-complejos cuánticos finitos y compararla con los clásicos, invirtiendo todo el esfuerzo en encontrar un teorema de comparación que nos permita concluir cuándo la K-teoría de un CW-complejo clásico y cuántico es la misma. Intentar responder esta pregunta, dio origen a este trabajo.

3.2. CW-complejos no-conmutativos finitos

A continuación recordamos la definición de CW-complejo clásico finito en aras de comparar con lo que entenderemos por CW-complejo cuántico finito o CW-complejo no-conmutativo finito.

Definición 3.2.1 (CW-complejo finito clásico). Sea X un espacio topológico, se dice que X es un CW-complejo finito si se puede construir de la siguiente manera

- Comenzamos con $X^{-1} = \emptyset$ y un espacio discreto X^0 (un conjunto finito de puntos);
- El n -esqueleto X^n se obtiene a partir del $(n-1)$ -esqueleto X^{n-1} pegando n -celdas $\overline{\mathbb{B}}^n$ (el n -disco cerrado en $\mathbb{R}^n$) mediante las funciones $f_j : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$, es decir, tenemos Pushout (Figura 3.4) en un sentido topológico y pullback (Figura 1.5.10) en el lenguaje de C^* -álgebras.

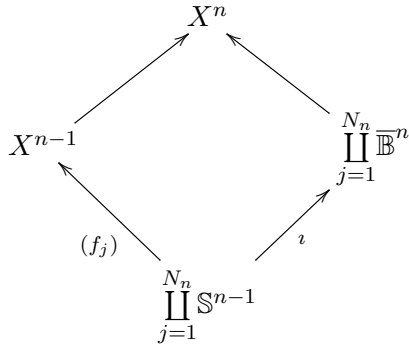


Figura 3.4: Pushout n-esqueleto.

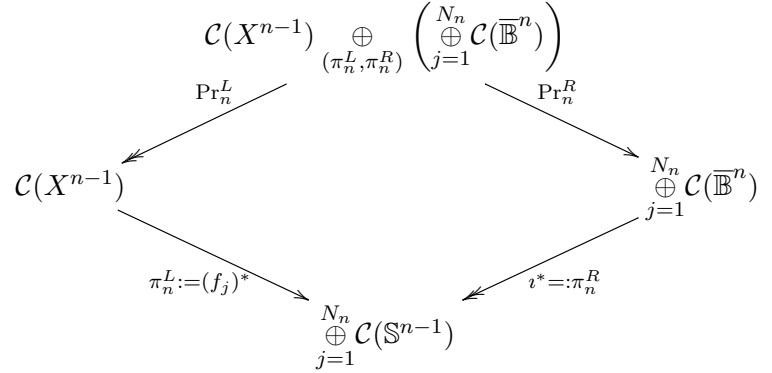


Figura 3.5: Pullback n-esqueleto.

- El proceso termina en un número finito de pasos. Esto es, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $X = X^m$, al mínimo de tales naturales se le conoce como la dimensión de X .

Dado un CW-complejo X de dimensión n , entendemos por descomposición esquelética de X , a la sucesión de inclusiones

$$\emptyset = X^{-1} \hookrightarrow X^0 \hookrightarrow X^1 \hookrightarrow \dots \hookrightarrow X^{n-1} \hookrightarrow X^n = X.$$

Observación 3.2.2. Observe que en virtud del Teorema [1.1.1](#), dado un espacio topológico compacto y Hausdorff, digamos X , al aplicar el funtor contravariante de las funciones continuas en X , “ $\mathcal{C}$ ”, obtenemos una C^* -álgebra conmutativa con unidad $\mathcal{C}(X)$, lo cual ha sido representado en la Figura [3.5](#) de la definición previa.

Para establecer una definición consistente de CW-complejo cuántico o no-conmutativo, necesitamos dejar claro lo que entendemos por bola cerrada cuántica, ya que es el objeto que tal como en el caso de la definición anterior, queremos ir pegando a lo largo de su frontera a los esqueletos, mediante $*$ -homomorfismos de C^* -álgebras (en un diagrama pullback), y es aquí donde nos encontramos con la dificultad de que las C^* -álgebras no-conmutativas cuentan con pocos ideales, en comparación con las C^* -álgebras conmutativas, por consiguiente con pocos $*$ -homomorfismos. Bajo esta discusión nos formulamos las siguientes preguntas.

- ¿Cuál es un análogo no-conmutativo de las bolas cerradas clásicas en $\mathbb{R}^n$?
- ¿Cuál es un análogo no-conmutativo del interior de las bolas cerradas clásicas en $\mathbb{R}^n$?
- ¿Cuál es un análogo no-conmutativo de la frontera de las bolas cerradas clásicas en $\mathbb{R}^n$?

Todas estas preguntas las resolvemos con la K-teoría de C^* -álgebras, esto es, diremos que un objeto virtual $\mathbb{B}_q^n$, su interior $\mathbb{B}_q^n$ y su frontera $\partial\mathbb{B}_q^n$ son análogos no-conmutativos de las bolas cerradas, el interior y sus fronteras clásicas respectivamente, si y solamente si, tienen K-teoría isomorfa a sus correspondientes contrapartes clásicas, y además, hay una correspondencia en sus generadores; la cual será explicada unas líneas más adelante. Note por ejemplo que en la Sección [1.2](#) hemos trabajado con una bola cerrada cuántica de dimensión 2, esto es, nosotros podemos considerar $\mathcal{C}(\mathbb{B}_q^2) := \mathcal{T}$, $\mathcal{C}_0(\mathbb{B}_q^2) := \mathbb{K}$ y $\mathcal{C}(\partial\mathbb{B}_q^2) := \mathcal{T}/\mathbb{K} \cong \mathcal{C}(\partial\mathbb{B}^2) = \mathcal{C}(\mathbb{S}^1)$ (donde hemos usado el homeomorfismo $\mathbb{B}^2 \cong \mathbb{D}$ y la convención $\mathbb{B}_q^2 := \mathbb{D}_q$). Más aún, sabemos que sus K-grupos satisfacen:

- $\mathcal{K}_0(\mathcal{C}(\overline{\mathbb{B}}^2)) \cong \mathbb{Z}[1];$
- $\mathcal{K}_0(\mathcal{C}(\overline{\mathbb{B}}_q^2)) \cong \mathbb{Z}[1];$
- $\mathcal{K}_1(\mathcal{C}(\overline{\mathbb{B}}^2)) \cong \{0\};$
- $\mathcal{K}_1(\mathcal{C}(\overline{\mathbb{B}}_q^2)) \cong \{0\};$
- $\mathcal{K}_0(\mathcal{C}_0(\mathbb{B}^2)) \cong \mathbb{Z}([P_{\text{Bott}}] - [1]);$
- $\mathcal{K}_0(\mathcal{C}_0(\mathbb{B}_q^2)) \cong \mathbb{Z}([P_{\text{Bott}_q}] - [1]);$
- $\mathcal{K}_1(\mathcal{C}_0(\mathbb{B}^2)) \cong \{0\} \cong \mathcal{K}_1(\mathcal{C}_0(\mathbb{B}_q^2));$
- $\mathcal{K}_0(\mathcal{C}(\partial\overline{\mathbb{B}}^2)) \cong \mathbb{Z}[1];$
- $\mathcal{K}_0(\mathcal{C}(\partial\overline{\mathbb{B}}_q^2)) \cong \mathbb{Z}[1];$
- $\mathcal{K}_1(\mathcal{C}(\partial\overline{\mathbb{B}}_q^2)) = \mathcal{K}_1(\mathcal{C}(\partial\overline{\mathbb{B}}^2)) \cong \mathbb{Z}[u].$

De modo que el siguiente diagrama es conmutativo, en el sentido obvio, al identificar los generadores.

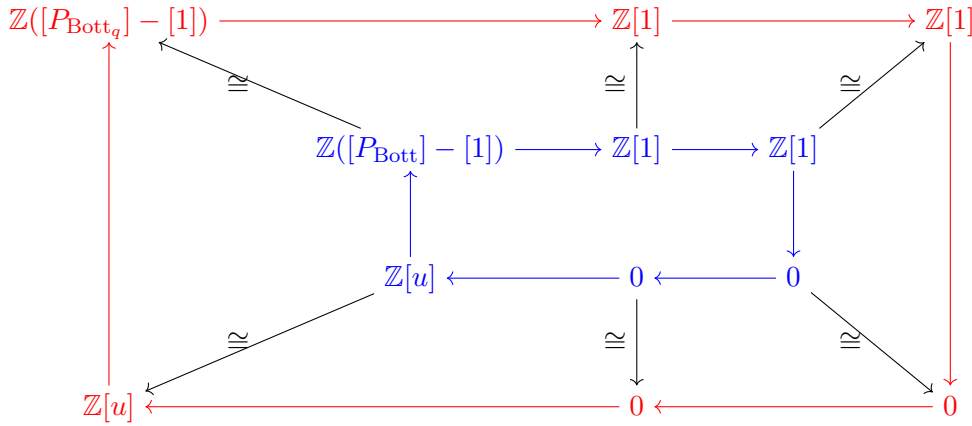


Figura 3.6: Bola clásica y cuántica de dimensión 2.

Antes de establecer una definición más precisa de lo que entendemos por bola cerrada cuántica, interior y frontera, hacemos un estudio de los generadores de las esferas clásicas en la siguiente sección.

3.2.1. Generadores de las bolas clásicas y sus fronteras

Repasamos un poco los generadores clásicos de la K-teoría de las C^* -álgebras de funciones continuas sobre las bolas clásicas, sus fronteras y sus interiores. Recordemos que la n -esfera $\mathbb{S}^n := \partial\overline{\mathbb{B}}^{n+1}$ puede ser vista como la compactificación de Alexandroff o compactificación por un punto de $\mathbb{R}^n$, o de la bola abierta $\mathbb{B}^n$. Más aún, $\mathcal{K}_1(\mathcal{C}(\mathbb{S}^n)) \cong \mathcal{K}_1(\mathcal{C}_0(\mathbb{B}^n) \dot{+} \mathbb{C}) = \mathcal{K}_1(\mathcal{C}_0(\mathbb{B}^n))$ (aquí $\dot{+}$ denota la unitización), en virtud de que por el Teorema 1.1.1 la compactificación por un punto corresponde a la mínima unitización de $\mathcal{C}_0(\mathbb{B}^n)$. De este modo, a partir de la sucesión exacta de seis términos (1.11), para $k \in \mathbb{Z}^+$ se cumple

$$\mathcal{K}_0(\mathcal{C}(\partial\overline{\mathbb{B}}^{2k})) = \mathcal{K}_0(\mathcal{C}(\mathbb{S}^{2k-1})) \cong \mathcal{K}_0(\mathcal{C}_0(\mathbb{B}^{2k-1})) \oplus \mathbb{Z}[1] \cong \mathbb{Z}[1], \quad (3.3)$$

$$\mathcal{K}_1(\mathcal{C}(\partial\overline{\mathbb{B}}^{2k})) = \mathcal{K}_1(\mathcal{C}(\mathbb{S}^{2k-1})) \cong \mathcal{K}_1(\mathcal{C}_0(\mathbb{B}^{2k-1})) \cong \mathbb{Z}[\mathcal{U}_{B_{2k-1}}], \quad (3.4)$$

$$\mathcal{K}_0(\mathcal{C}(\partial\overline{\mathbb{B}}^{2k+1})) = \mathcal{K}_0(\mathcal{C}(\mathbb{S}^{2k})) \cong \mathcal{K}_0(\mathcal{C}_0(\mathbb{B}^{2k})) \oplus \mathbb{Z}[1] \cong \mathbb{Z}([P_{B_{2k}}] - [1]) \oplus \mathbb{Z}[1], \quad (3.5)$$

$$\mathcal{K}_1(\mathcal{C}(\partial\overline{\mathbb{B}}^{2k+1})) = \mathcal{K}_1(\mathcal{C}(\mathbb{S}^{2k})) \cong \mathcal{K}_1(\mathcal{C}_0(\mathbb{B}^{2k})) \cong 0. \quad (3.6)$$

A continuación vamos a construir detalladamente los generadores $P_{B_{2k}}$ y $\mathcal{U}_{B_{2k}}$ de estos grupos de K-teoría, para ello explicaremos los por menores de como llegar a los isomorfismos anteriores a través de la sucesión exacta de seis términos. De esta manera, observe que para cada $n \in \mathbb{N}$, el mapeo $\pi : \mathcal{C}(\overline{\mathbb{B}}^n) \rightarrow \mathcal{C}(\partial\overline{\mathbb{B}}^n)$ definido por $\pi(f) = f|_{\partial\overline{\mathbb{B}}^n}$ para todo $f \in \mathcal{C}(\overline{\mathbb{B}}^n)$ es un *-homomorfismo sobreyectivo. En efecto, dado $g \in \mathcal{C}(\partial\overline{\mathbb{B}}^n)$, como la bola cerrada unitaria de dimensión n , $\overline{\mathbb{B}}^n$, puede ser parametrizada en la forma

$$\overline{\mathbb{B}}^n = \{r\theta : r \in [0, 1], \theta \in \partial\overline{\mathbb{B}}^n\}.$$

Entonces si definimos $f : \overline{\mathbb{B}}^n \rightarrow \mathbb{C}$, $f(r\theta) = rg(\theta)$ para todo $r \in [0, 1]$ y todo $\theta \in \partial\overline{\mathbb{B}}^n$, se cumple que $\pi(f) = g$. Por consiguiente π es un homomorfismo sobreyectivo de C*-álgebras. Luego la sucesión

$$0 \longrightarrow \text{Ker}(\pi) \xrightarrow{\iota} \mathcal{C}(\overline{\mathbb{B}}^n) \xrightarrow{\pi} \mathcal{C}(\partial\overline{\mathbb{B}}^n) \longrightarrow 0 \quad (3.7)$$

es una sucesión exacta corta y a raíz del diccionario del Teorema de Gelfand-Naimark [1.1.1](#) $\text{Ker}(\pi) \cong \mathcal{C}_0(\mathbb{B}^n)$. Entonces la sucesión exacta corta [\(3.7\)](#) queda en la forma

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}_0(\mathbb{B}^n) \xrightarrow{\iota} \mathcal{C}(\overline{\mathbb{B}}^n) \xrightarrow{\pi} \mathcal{C}(\partial\overline{\mathbb{B}}^n) \longrightarrow 0 \quad (3.8)$$

y en consecuencia esta induce la siguiente sucesión exacta de seis términos en K-teoría,

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{K}_0(\mathcal{C}_0(\mathbb{B}^n)) & \longrightarrow & \mathcal{K}_0(\mathcal{C}(\overline{\mathbb{B}}^n)) & \longrightarrow & \mathcal{K}_0(\mathcal{C}(\partial\overline{\mathbb{B}}^n)) \\ \uparrow \partial_{01} & & & & \downarrow \partial_{10} \\ \mathcal{K}_1(\mathcal{C}(\partial\overline{\mathbb{B}}^n)) & \longleftarrow & \mathcal{K}_1(\mathcal{C}(\overline{\mathbb{B}}^n)) & \longleftarrow & \mathcal{K}_1(\mathcal{C}_0(\mathbb{B}^n)). \end{array} \quad (3.9)$$

Note que al ser $\overline{\mathbb{B}}^n$ un espacio topológico contraíble,

$$\mathcal{K}_*(\mathcal{C}(\overline{\mathbb{B}}^n)) \cong \mathcal{K}_*(\mathbb{C}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}[1] & * = 0, \\ 0 & * = 1, \end{cases}$$

y ya que, como se dijo antes, la compactificación por un punto de $\mathbb{B}^{n-1}$ es homeomorfa a $\mathbb{S}^{n-1} := \partial\overline{\mathbb{B}}^n$, tenemos que

$$\mathcal{K}_*(\mathcal{C}(\partial\overline{\mathbb{B}}^n)) \cong \mathcal{K}_*(\mathcal{C}_0(\mathbb{B}^{n-1}) \oplus \mathbb{C}) \cong \mathcal{K}_*(\mathcal{C}_0(\mathbb{B}^{n-1})) \oplus \mathcal{K}_*(\mathbb{C}).$$

En este sentido [\(3.9\)](#) se puede ver como sigue

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{K}_0(\mathcal{C}_0(\mathbb{B}^n)) & \longrightarrow & \mathbb{Z}[1] & \longrightarrow & \mathcal{K}_0(\mathcal{C}(\partial\overline{\mathbb{B}}^n)) \\ \uparrow \partial_{01} & & & & \downarrow \partial_{10} \\ \mathcal{K}_1(\mathcal{C}(\partial\overline{\mathbb{B}}^n)) & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & \mathcal{K}_1(\mathcal{C}_0(\mathbb{B}^n)) = \mathcal{K}_1(\mathcal{C}(\partial\overline{\mathbb{B}}^{n+1})). \end{array} \quad (3.10)$$

Ahora bien, en virtud de que la teoría K de la C*-álgebra $\mathcal{C}_0(\mathbb{B}^n)$ depende de si n es par o impar, si queremos investigar los generadores de los K-grupos en [\(3.10\)](#) es imperativo considerar estos casos. Lo cual hacemos en las siguientes líneas.

Caso par

Si $n = 2k$ para algún $k \in \mathbb{N}$, recordemos que, de acuerdo con el Ejemplo 1.4.8

$$\mathcal{K}_*(\mathcal{C}_0(\mathbb{B}^n)) \cong \mathcal{K}_*(\mathbb{C}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}[1] & * = 0, \\ 0 & * = 1. \end{cases}$$

Entonces la sucesión exacta de seis términos (3.10) se ve como

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z}[1] & \xrightarrow{\text{id}} & \mathbb{Z}[1] \\ \partial_{01} \uparrow & & & & \downarrow 0 \\ \mathbb{Z} & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & 0 \end{array} \quad (3.11)$$

Note que el homomorfismo $\partial_{01} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ es inyectivo, ya que el homomorfismo precedente es el homomorfismo cero. Por consiguiente el mapeo del índice ∂_{01} también es sobreyectivo, así que ∂_{01} es realmente un isomorfismo, y en este sentido manda generadores en generadores.

Caso impar

En este caso, note que si $n = 2k + 1$ para algún $k \in \mathbb{N}$, por el Ejemplo 1.4.8 se cumple que

$$\mathcal{K}_*(\mathcal{C}_0(\mathbb{B}^n)) \cong \mathcal{K}_{*+1}(\mathbb{C}) \cong \begin{cases} 0 & * = 0, \\ \mathbb{Z} & * = 1. \end{cases}$$

Como $\mathcal{K}_1(\mathcal{C}(\partial\overline{\mathbb{B}}^n)) \cong \mathcal{K}_1(\mathcal{C}_0(\mathbb{B}^{n-1})) \oplus \mathcal{K}_1(\mathbb{C}) \cong 0 \oplus 0 = 0$ la sucesión (3.10) se ve

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}[1] & \longrightarrow & \mathcal{K}_0(\mathcal{C}_0(\mathbb{B}^{2k})) \oplus \mathbb{Z}[1] \\ \uparrow 0 & & & & \downarrow \partial_{10} \\ 0 & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & \mathbb{Z} \end{array} \quad (3.12)$$

Esto es,

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}[1] & \longrightarrow & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}[1] \\ \uparrow 0 & & & & \downarrow \partial_{10} \\ 0 & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & \mathbb{Z} \end{array} \quad (3.13)$$

Y en virtud de que la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}[1] \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}[1] \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

se escinde, el homomorfismo ∂_{10} manda $[1] \mapsto [0]$ y el generador de $\mathcal{K}_0(\mathcal{C}_0(\mathbb{B}^{2k}))$ al generador de $\mathcal{K}_1(\mathcal{C}_0(\mathbb{B}^{2k+1}))$. Con todo esto en mente investiguemos los generadores de estos grupos de K-teoría. Revisaremos el comportamiento para $n = 1, 2, 3$ para luego generalizar las ideas. Note que para $n = 1$, tenemos la sucesión exacta corta trivial

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}_0(\mathbb{B}^1) \longrightarrow \mathcal{C}(\overline{\mathbb{B}}^1) \longrightarrow \mathbb{C}\{0\} \oplus \mathbb{C}\{1\} \longrightarrow 0$$

la cual induce la sucesión exacta de seis términos en K-teoría

$$\begin{array}{ccccc}
0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}[1] & \longrightarrow & \mathbb{Z}([P_{B_0}] - [1]) \oplus \mathbb{Z}[1_{\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}}] \\
\uparrow 0 & & & & \downarrow \partial_{10} \\
0 & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & \mathbb{Z}[\mathcal{U}_{B_1}]
\end{array}$$

donde $[P_{B_0}] - [1]$ y $[\mathcal{U}_{B_1}]$ denotan al generador de $\mathcal{K}_0(\mathcal{C}(\partial\mathbb{B}^1))$ y de $\mathcal{K}_1(\mathcal{C}_0(\mathbb{B}^1)) = \mathcal{K}_1(\mathcal{C}(\partial\mathbb{B}^2)) = \mathcal{K}_1(\mathcal{C}(\mathbb{S}^1))$ respectivamente. Observe que P_{B_0} puede ser dado por $P_{B_0} := (0, 1) \in \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$, de modo que si definimos $X \in \mathcal{M}_{1 \times 1}(\mathcal{C}(\mathbb{B}^1))$, $X(t) = t$ para todo $t \in \mathbb{B}^1 \cong [0, 1]$ se verifica que

$$\pi(X) = (X(0), X(1)) = (0, 1) = P_{B_0}.$$

De esta manera, al considerar la función $\mathcal{U}_{B_1} := e^{2\pi i X}$, $\mathcal{U}_{B_1}(t) = e^{2\pi i t}$ para todo $t \in [0, 1]$, la cual ya sabemos que es el generador del grupo abeliano $\mathcal{K}_1(\mathcal{C}(\partial\mathbb{B}^2))$, obtenemos que

$$\partial_{10}([P_{B_0}]) = \partial_{10}([(0, 1)]) = [e^{2\pi i X}].$$

Ahora bien, extendiendo continuamente $\mathcal{U}_{B_1}$ al interior del disco por $\tilde{\mathcal{U}}_{B_1}(re^{2\pi i X}) = re^{2\pi i X}$ para todo $r \in [0, 1]$, podemos definir un levantamiento unitario de $\begin{pmatrix} \mathcal{U}_{B_1} & 0 \\ 0 & \mathcal{U}_{B_1}^* \end{pmatrix}$ como

$$v := \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{U}}_{B_1} & -\sqrt{1 - \tilde{\mathcal{U}}_{B_1} \tilde{\mathcal{U}}_{B_1}^*} \\ \sqrt{1 - \tilde{\mathcal{U}}_{B_1}^* \tilde{\mathcal{U}}_{B_1}} & \tilde{\mathcal{U}}_{B_1}^* \end{pmatrix}$$

y entonces ya que el mapeo del índice $\partial_{01} : \mathcal{K}_1(\mathcal{C}(\partial\mathbb{B}^2)) \rightarrow \mathcal{K}_0(\mathcal{C}_0(\mathbb{B}^2))$ es un isomorfismo y además, cumple con

$$\begin{aligned}
\partial_{01}([\mathcal{U}_{B_1}]) &= \left[\begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{U}}_{B_1} \tilde{\mathcal{U}}_{B_1}^* & \sqrt{1 - \tilde{\mathcal{U}}_{B_1} \tilde{\mathcal{U}}_{B_1}^*} \tilde{\mathcal{U}}_{B_1} \\ \sqrt{1 - \tilde{\mathcal{U}}_{B_1}^* \tilde{\mathcal{U}}_{B_1}} \tilde{\mathcal{U}}_{B_1}^* & 1 - \tilde{\mathcal{U}}_{B_1}^* \tilde{\mathcal{U}}_{B_1} \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \\
&= \left[\begin{pmatrix} r^2 & r\sqrt{1 - r^2} \mathcal{U}_{B_1} \\ r\sqrt{1 - r^2} \mathcal{U}_{B_1}^* & 1 - r^2 \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right].
\end{aligned}$$

El objeto $\left[\begin{pmatrix} r^2 & r\sqrt{1 - r^2} \mathcal{U}_{B_1} \\ r\sqrt{1 - r^2} \mathcal{U}_{B_1}^* & 1 - r^2 \end{pmatrix} \right] - [1]$ es un generador del grupo $\mathcal{K}_0(\mathcal{C}_0(\mathbb{B}^2))$, y

como hemos referido varias veces, la proyección $\begin{pmatrix} r^2 & r\sqrt{1 - r^2} \mathcal{U}_{B_1} \\ r\sqrt{1 - r^2} \mathcal{U}_{B_1}^* & 1 - r^2 \end{pmatrix}$ se conoce como proyección de Bott clásica. En esta parte la denotaremos por P_{B_2} . Note que ya hemos determinado los generadores de $\mathcal{K}_1(\mathcal{C}(\partial\mathbb{B}^2)) \cong \mathbb{Z}[\mathcal{U}_{B_1}]$, $\mathcal{K}_0(\mathcal{C}(\partial\mathbb{B}^1)) \cong \mathbb{Z}([P_{B_0}] - [1]) \oplus \mathbb{Z}[1]$ y $\mathcal{K}_0(\mathcal{C}_0(\mathbb{B}^2)) \cong \mathbb{Z}([P_{B_2}] - [1])$. Para determinar los generadores de $\mathcal{K}_1(\mathcal{C}(\partial\mathbb{B}^3))$ y $\mathcal{K}_0(\mathcal{C}_0(\mathbb{B}^3))$ hay que tener presente que gracias a que $\partial\mathbb{B}^3$ es la compactificación por un punto de $\mathbb{B}^2$ la proyección P_{B_2} puede ser vista como una función continua cuyo dominio es $\partial\mathbb{B}^3$ y codominio las matrices 2×2 con coeficientes en los complejos, donde se ha definido dicha función en el punto infinito como la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Luego, si definimos $X(\rho, \theta) = \rho P_{B_2}(\theta) \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathcal{C}(\mathbb{B}^3))$

para todo $\rho \in [0, 1]$ y todo $\theta \in \partial \bar{\mathbb{B}}^3$, X resulta ser un levantamiento autoadjunto de P_{B_2} ya que trivialmente $\pi(X) = P_{B_2}$ y entonces

$$\partial_{10}([P_{B_2}]) = [e^{2\pi i X}].$$

Así que definiendo $\mathcal{U}_{B_3} := e^{2\pi i X}$ se tiene que $\mathcal{K}_1(\mathcal{C}(\partial \bar{\mathbb{B}}^4)) \cong \mathbb{Z}[\mathcal{U}_{B_3}]$. Por consiguiente, generalizando estas ideas, podemos razonar inductivamente, de forma que dado un generador $\mathcal{U}_{B_{2k-1}} : \partial \bar{\mathbb{B}}^{2k} \rightarrow \mathcal{U}_N(\mathbb{C})$, $\mathcal{U}_{B_{2k-1}}(p)\mathcal{U}_{B_{2k-1}}(p)^* = \mathbb{1}_N = \mathcal{U}_{B_{2k-1}}(p)^*\mathcal{U}_{B_{2k-1}}(p)$ del grupo abeliano $\mathcal{K}_1(\mathcal{C}(\partial \bar{\mathbb{B}}^n))$ necesitamos encontrar un levantamiento unitario $v \in \mathcal{M}_{N \times N}(\mathcal{C}(\bar{\mathbb{B}}^{2k}))$ de tal suerte que $\pi(v) = \begin{pmatrix} \mathcal{U}_{B_{2k-1}} & 0 \\ 0 & \mathcal{U}_{B_{2k-1}}^* \end{pmatrix}$, pues en dado caso el mapeo del índice en $\mathcal{U}_{B_{2k}}$ estaría dado por $\partial_{01}(\mathcal{U}_{B_{2k}}) = \left[v \begin{pmatrix} \mathbb{1}_N & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v^* \right] - \left[\begin{pmatrix} \mathbb{1}_N & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]$. Así, buscamos responder la pregunta ¿cómo obtenemos v ? la idea es extender $\mathcal{U}_{B_{2k-1}} : \partial \bar{\mathbb{B}}^{2k} \rightarrow \mathcal{U}_N(\mathbb{C})$ al interior de la bola cerrada unitaria de dimensión $2k$ de manera continua. Note que, en este sentido, nosotros podemos definir la función $\tilde{\mathcal{U}}_{B_{2k-1}} : \bar{\mathbb{B}}^{2k} \rightarrow \mathcal{M}_{N \times N}(\mathbb{C})$, $\tilde{\mathcal{U}}_{B_{2k-1}}(r, \theta) = r\mathcal{U}_{B_{2k-1}}(\theta)$, para todo $r \in [0, 1]$ y todo $\theta \in \partial \bar{\mathbb{B}}^{2k}$ y entonces si consideramos

$$v := \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{U}}_{B_{2k-1}} & -\sqrt{1 - \tilde{\mathcal{U}}_{B_{2k-1}} \tilde{\mathcal{U}}_{B_{2k-1}}^*} \\ \sqrt{1 - \tilde{\mathcal{U}}_{B_{2k-1}}^* \tilde{\mathcal{U}}_{B_{2k-1}}} & \tilde{\mathcal{U}}_{B_{2k-1}}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\mathcal{U}_{B_{2k-1}} & -\sqrt{1 - r^2} \\ \sqrt{1 - r^2} & r\mathcal{U}_{B_{2k-1}}^* \end{pmatrix}$$

tenemos $\pi(v) = \begin{pmatrix} \mathcal{U}_{B_{2k-1}} & 0 \\ 0 & \mathcal{U}_{B_{2k-1}}^* \end{pmatrix}$. Además,

$$\begin{aligned} \partial_{01}[\mathcal{U}_{B_{2k-1}}] &= \left[v \begin{pmatrix} \mathbb{1}_N & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v^* \right] - \left[\begin{pmatrix} \mathbb{1}_N & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= \left[\begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{U}}_{B_{2k-1}} & -\sqrt{1 - \tilde{\mathcal{U}}_{B_{2k-1}} \tilde{\mathcal{U}}_{B_{2k-1}}^*} \\ \sqrt{1 - \tilde{\mathcal{U}}_{B_{2k-1}}^* \tilde{\mathcal{U}}_{B_{2k-1}}} & \tilde{\mathcal{U}}_{B_{2k-1}}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{1}_N & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{U}}_{B_{2k-1}}^* & \sqrt{1 - \tilde{\mathcal{U}}_{B_{2k-1}} \tilde{\mathcal{U}}_{B_{2k-1}}^*} \\ -\sqrt{1 - \tilde{\mathcal{U}}_{B_{2k-1}}^* \tilde{\mathcal{U}}_{B_{2k-1}}} & \tilde{\mathcal{U}}_{B_{2k-1}} \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} \mathbb{1}_N & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= \left[\begin{pmatrix} r^2 \mathbb{1}_N & r\sqrt{1 - r^2} \mathcal{U}_{B_{2k-1}} \\ r\sqrt{1 - r^2} \mathcal{U}_{B_{2k-1}}^* & (1 - r^2) \mathbb{1}_N \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} \mathbb{1}_N & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]. \end{aligned}$$

Ahora bien, definimos la función $P_{B_{2k}} : \bar{\mathbb{B}}^{2k} \rightarrow \mathcal{M}_{2N \times 2N}(\mathbb{C})$, mediante la regla de asignación $P_{B_{2k}}(r, \theta) := \begin{pmatrix} r^2 \mathbb{1}_N & r\sqrt{1 - r^2} \mathcal{U}_{B_{2k-1}}(\theta) \\ r\sqrt{1 - r^2} \mathcal{U}_{B_{2k-1}}^*(\theta) & (1 - r^2) \mathbb{1}_N \end{pmatrix}$ para todo $r \in [0, 1]$ y todo $\theta \in \partial \bar{\mathbb{B}}^{2k}$. Observe que podemos definir una función continua en la compactificación de la bola abierta $\bar{\mathbb{B}}^{2k}$; esto es, en $\partial \bar{\mathbb{B}}^{2k+1} = \bar{\mathbb{B}}^{2k} \cup \{\infty\}$, que también la denotaremos por $P_{B_{2k}}$, $P_{B_{2k}} : \partial \bar{\mathbb{B}}^{2k+1} \rightarrow \mathcal{M}_{2N \times 2N}(\mathbb{C})$, donde definimos $P_{B_{2k}}$ en el infinito como $\begin{pmatrix} \mathbb{1}_N & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Entonces,

$$[P_{B_{2k}}] \in \mathcal{K}_0(\mathcal{C}(\partial \bar{\mathbb{B}}^{2k+1})) = \mathbb{Z}([P_{B_{2k}}] - [\mathbb{1}_N]) \oplus \mathbb{Z}[1]$$

y observe que para determinar el otro homomorfismo conexión necesitamos encontrar un levantamiento autoadjunto de $P_{B_{2k}}$, esto es, encontrar un $X \in \mathcal{K}_0(\mathcal{C}(\partial\overline{\mathbb{B}}^{2k+1}))$, $X^* = X$ tal que $\pi(X) = P_{B_{2k}}$, ya que bajo tal situación el homomorfismo conexión conocido como el mapeo exponencial estaría dado por $\partial_{10}([P_{B_{2k}}]) = [e^{2\pi i X}] \in \mathcal{K}_1(\mathcal{C}_0(\mathbb{B}^{2k+1}))$. Con este objetivo en mente, definimos $X : \overline{\mathbb{B}}^{2k+1} \rightarrow \mathcal{M}_{2N \times 2N}(\mathbb{C})$ por $X(r, \theta) := rP_{B_{2k}}(\theta)$. Entonces

$$\begin{aligned} \partial_{10}([P_{B_{2k}}]) &= \left[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(2\pi i)^j}{j!} r^j P_{B_{2k}}^j \right] = \left[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(2\pi i r)^j}{j!} P_{B_{2k}}^j + \mathbb{1}_N - P_{B_{2k}} \right] \\ &= [e^{2\pi i r} P_{B_{2k}} + \mathbb{1}_N - P_{B_{2k}}]. \end{aligned}$$

En consecuencia $\mathcal{U}_{B_{2k+1}}(r, \theta) := e^{2\pi i r} P_{B_{2k}}(\theta) + \mathbb{1}_N - P_{B_{2k}}(\theta)$ es un generador del grupo $\mathcal{K}_1(\mathcal{C}_0(\mathbb{B}^{2k+1}))$ que resulta ser un bucle ya que $\mathcal{U}_{B_{2k+1}}(0, \theta) = \mathbb{1}_N = \mathcal{U}_{B_{2k+1}}(1, \theta)$, por consiguiente puede ser visto como una función $\mathcal{U}_{B_{2k+1}} : \mathcal{C}(\mathbb{B}^{2k+1} \cup \{\infty\}) = \mathcal{C}(\partial\overline{\mathbb{B}}^{2k+2}) \rightarrow \mathcal{U}_{2N}(\mathbb{C})$. Así, hemos definido inductivamente los generadores de los K-grupos de las esferas clásicas y de las bolas abiertas.

3.2.2. CW-complejos cuánticos finitos

En virtud de las ideas expuestas en las secciones previas, introducimos la siguiente definición.

Definición 3.2.3 (Bolas Cuánticas). A lo largo de este trabajo, diremos que los objetos virtuales $\overline{\mathbb{B}}_q^n$, $\mathbb{B}_q^n$ y $\partial\overline{\mathbb{B}}_q^n$ son versiones no-conmutativas de $\overline{\mathbb{B}}^n$, $\mathbb{B}^n$ y $\partial\overline{\mathbb{B}}^n$ respectivamente, si se cumple que $\mathcal{K}_*(\mathcal{C}(\overline{\mathbb{B}}_q^n)) \cong \mathcal{K}_*(\mathcal{C}(\overline{\mathbb{B}}^n))$, $\mathcal{K}_*(\mathcal{C}_0(\mathbb{B}_q^n)) \cong \mathcal{K}_*(\mathcal{C}_0(\mathbb{B}^n))$, $\mathcal{K}_*(\mathcal{C}(\partial\overline{\mathbb{B}}_q^n)) \cong \mathcal{K}_*(\mathcal{C}(\partial\overline{\mathbb{B}}^n))$ para $* \in \{0, 1\}$ y además, podemos considerar proyecciones $Q_{B_{2k}}$ y unitarios $\mathcal{V}_{B_{2k-1}}$ tales que los diagramas de las Figuras 3.7 y 3.8 son conmutativas (en color azul se representa la sucesión exacta de seis términos en K-teoría inducida por las bolas cerradas clásicas, sus interiores y sus fronteras, y la sucesión en rojo representa la versión no-conmutativa) via las asignaciones $[P_{B_{2k}}] - [\mathbb{1}_N] \mapsto [Q_{B_{2k}}] - [\mathbb{1}_N]$ y $[\mathcal{U}_{B_{2k-1}}] \mapsto [\mathcal{V}_{B_{2k-1}}]$:

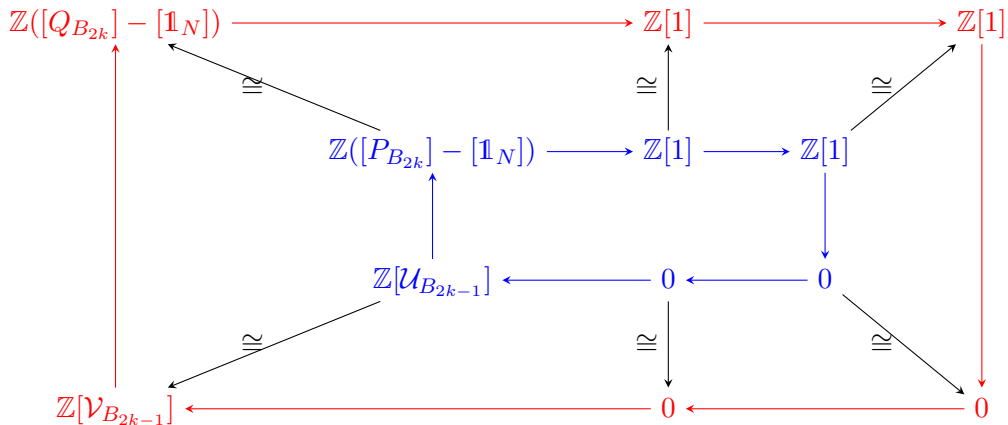
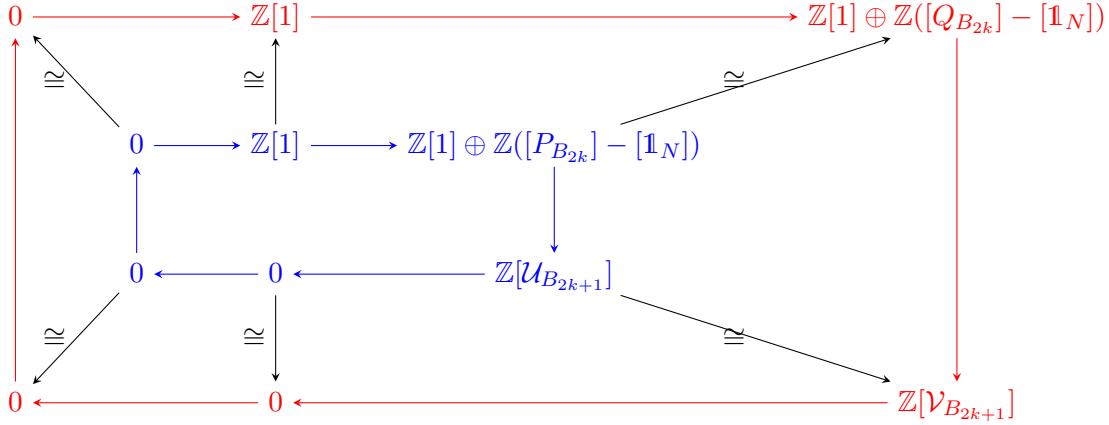


Figura 3.7: Caso par $n = 2k$.

Figura 3.8: Caso impar $n = 2k + 1$.

donde se entiende que $\mathcal{K}_0(\mathcal{C}_0(\mathbb{B}^{2k})) \cong \mathbb{Z}([P_{B_{2k}}] - [1_N])$, $\mathcal{K}_0(\mathcal{C}_0(\mathbb{B}_q^{2k})) \cong \mathbb{Z}([Q_{B_{2k}}] - [1_N])$, $\mathcal{K}_1(\mathcal{C}(\partial\overline{\mathbb{B}}^n)) \cong \mathbb{Z}[\mathcal{U}_{B_{n-1}}]$ y $\mathcal{K}_1(\mathcal{C}(\partial\overline{\mathbb{B}}_q^n)) \cong \mathbb{Z}[\mathcal{V}_{B_{n-1}}]$. Note que las sucesiones exactas de seis términos en K-teoría representadas en tales figuras se obtienen de las siguientes sucesiones exactas cortas de C*-álgebras ((3.14) y (3.15) son las C*-extensiones para las bolas clásicas y cuánticas, respectivamente, en el caso par. Lo análogo representan (3.16) y (3.17) en el caso impar)

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}_0(\mathbb{B}^{2k}) \longrightarrow \mathcal{C}(\overline{\mathbb{B}}^{2k}) \longrightarrow \mathcal{C}(\partial\overline{\mathbb{B}}^{2k}) \longrightarrow 0, \quad (3.14)$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}_0(\mathbb{B}_q^{2k}) \longrightarrow \mathcal{C}(\overline{\mathbb{B}}_q^{2k}) \longrightarrow \mathcal{C}(\partial\overline{\mathbb{B}}_q^{2k}) \longrightarrow 0, \quad (3.15)$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}_0(\mathbb{B}^{2k-1}) \longrightarrow \mathcal{C}(\overline{\mathbb{B}}^{2k-1}) \longrightarrow \mathcal{C}(\partial\overline{\mathbb{B}}^{2k-1}) \longrightarrow 0, \quad (3.16)$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}_0(\mathbb{B}_q^{2k-1}) \longrightarrow \mathcal{C}(\overline{\mathbb{B}}_q^{2k-1}) \longrightarrow \mathcal{C}(\partial\overline{\mathbb{B}}_q^{2k-1}) \longrightarrow 0. \quad (3.17)$$

A continuación introducimos la noción de CW-complejo cuántico finito.

Definición 3.2.4 (CW-complejo finito no-conmutativo). Decimos que X_q es un CW-complejo cuántico o no-conmutativo de dimensión n si y sólo si existen bolas cuánticas $\overline{\mathbb{B}}_q^n$ que pegamos a X_q^{n-1} a lo largo de $\mathbb{S}_q^{n-1} := \partial\overline{\mathbb{B}}_q^n$ vía funciones virtuales de pegado $f_{q,j} : \mathbb{S}_q^{n-1} \rightarrow X_q^{n-1}$, de tal forma que el n -esqueleto cuántico se define como el diagrama Pullback

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{C}(X_q^n) := \mathcal{C}(X_q^{n-1}) \oplus_{(\pi_{q,n}^L, \pi_{q,n}^R)} \left(\bigoplus_{j=1}^{N_n} \mathcal{C}(\overline{\mathbb{B}}_q^n) \right) & & \\
 \Pr_{q,n}^L \swarrow & & \searrow \Pr_{q,n}^R \\
 \mathcal{C}(X_q^{n-1}) & & \bigoplus_{j=1}^{N_n} \mathcal{C}(\overline{\mathbb{B}}_q^n) \\
 \pi_{q,n}^L \searrow & & \swarrow \pi_{q,n}^R \\
 & \bigoplus_{j=1}^{N_n} \mathcal{C}(\partial\overline{\mathbb{B}}_q^n) &
 \end{array}$$

donde se consideran $\pi_{q,n}^L$ y $\pi_{q,n}^R$ como el pullback de las funciones virtuales $(f_{q,j})_{j=1}^{N_n}$ y $(\iota_{q,j})_{j=1}^{N_n}$ respectivamente y los morfismos $\pi_{q,n}^R$ están dados por sumas directas de los epimorfismos en (3.15) y (3.17). Ahora bien, dado un CW-complejo cuántico X_q de dimensión n , entendemos por descomposición esquelética cuántica de X_q , a la sucesión de *-epimorfismos

$$\mathcal{C}(X_q) = \mathcal{C}(X_q^n) \twoheadrightarrow \mathcal{C}(X_q^{n-1}) \twoheadrightarrow \cdots \twoheadrightarrow \mathcal{C}(X_q^1) \twoheadrightarrow \mathcal{C}(X_q^0) \twoheadrightarrow \{0\}.$$

Comentario 3.2.5. Dentro de la Geometría No-conmutativa solemos decirle objetos virtuales a espacios topológicos cuánticos que por sí mismo no existen, sino que filosóficamente por el Teorema de Gelfand-Naimark 1.1.1 representan a una C^* -álgebra típicamente no-conmutativa. De este modo, en la definición de CW-complejo cuántico finito, trabajamos con C^* -álgebras cuyos esqueletos se definen exclusivamente con diagramas pullbacks. En la siguiente definición respondemos la pregunta sobre cuál es una versión no-conmutativa de un CW-complejo clásico finito.

Definición 3.2.6 (Versión no-conmutativa de un CW-complejo finito). Dado un CW-complejo X de dimensión n , con descomposición esquelética $\emptyset = X^{-1} \hookrightarrow X^0 \hookrightarrow X^1 \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow X^{n-1} \hookrightarrow X^n = X$, decimos que un espacio virtual X_q es una versión no-conmutativa de X si X_q es un CW-complejo no-conmutativo de dimensión n y $\mathcal{K}_*(\mathcal{C}(X^m)) \cong \mathcal{K}_*(\mathcal{C}(X_q^m))$ para todo $m \leq n-1$. Y además, el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K}_*(\mathcal{C}(X^m)) & \xrightarrow{\mathcal{K}_*(\pi_m^L)} & \mathcal{K}_*(\bigoplus_{j=1}^{N_m} \mathcal{C}(\partial \overline{\mathbb{B}}^m)) \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ \mathcal{K}_*(\mathcal{C}(X_q^m)) & \xrightarrow{\mathcal{K}_*(\pi_{q,m}^L)} & \mathcal{K}_*(\bigoplus_{j=1}^{N_m} \mathcal{C}(\partial \overline{\mathbb{B}}_q^m)) \end{array}$$

donde el isomorfismo entre la K-teoría de las esferas clásicas y cuánticas está dado por la identificación de los generadores. Algunas veces diremos que un CW-complejo cuántico es una versión no-conmutativa de uno clásico si conserva la misma forma de pegar que el clásico, y tal afirmación debe entenderse como que el diagrama de arriba conmuta.

3.3. Sucesión espectral de Schochet y CW-complejos

En lo que sigue deducimos una sucesión espectral de Schochet para CW-complejos cuánticos finitos y CW-complejos clásicos finitos. Con el objetivo de demostrar que un CW-complejo clásico y su versión no-conmutativa tienen K-teoría isomorfa. Lo cual representa uno de los principales resultados de este trabajo.

3.3.1. Sucesión espectral caso clásico

Observe que dado un CW-complejo X de dimensión n . Tenemos *-homomorfismos sobreyectivos

$$\mathcal{C}(X^n) \xrightarrow{\rho_n} \mathcal{C}(X^{n-1}) \xrightarrow{\rho_{n-1}} \mathcal{C}(X^{n-2}) \xrightarrow{\rho_{n-2}} \cdots \xrightarrow{\rho_3} \mathcal{C}(X^2) \xrightarrow{\rho_2} \mathcal{C}(X^1) \xrightarrow{\rho_1} \mathcal{C}(X^0) \xrightarrow{\rho_0} 0$$

donde $\rho_j := \text{Pr}_j^L$. Ahora bien, los siguientes ideales de $\mathcal{A} := \mathcal{C}(X^n) = \mathcal{C}(X)$ forman una filtración creciente de $\mathcal{A}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{-1} &:= \{0\}, \mathcal{A}_0 := \text{Ker}(\rho_n), \mathcal{A}_1 := \text{Ker}(\rho_{n-1} \circ \rho_n), \mathcal{A}_2 := \text{Ker}(\rho_{n-2} \circ \rho_{n-1} \circ \rho_n) \cdots, \\ \mathcal{A}_k &:= \text{Ker}(\rho_{n-k} \circ \cdots \circ \rho_{n-1} \circ \rho_n), \cdots, \mathcal{A}_n = \text{Ker}(\rho_0 \circ \cdots \circ \rho_n) = \mathcal{A},\end{aligned}$$

esto es, $\mathcal{A}_k \subset \mathcal{A}_{k+1}$ para todo entero $-1 \leq k < n$, en efecto, si $f \in \mathcal{A}_k$ entonces $\rho_{n-(k+1)} \circ \rho_{n-k} \circ \cdots \circ \rho_{n-1} \circ \rho_n(f) = \rho_{n-(k+1)}(\rho_{n-k} \circ \cdots \circ \rho_{n-1} \circ \rho_n)(f) = \rho_{n-(k+1)}(0) = 0$, por consiguiente $f \in \mathcal{A}_{k+1}$, como queríamos. Así, en virtud del Teorema 1.6.12, existe una sucesión espectral homológica $(E_{*,*}^l, d^l)_{l \in \mathbb{Z}^+}$ que converge al objeto graduado asociado a $\mathcal{K}_*(\mathcal{C}(X))$ y tiene por página 1, $E_{v,w}^1 = \mathcal{K}_{v+w}(\mathcal{A}_v/\mathcal{A}_{v-1})$. Para nuestra fortuna, los cocientes sucesivos $\mathcal{A}_v/\mathcal{A}_{v-1}$ son muy simples, de acuerdo con la siguiente proposición.

Lema 3.3.1. *Dada la información anterior, es cierto que*

$$\mathcal{A}_{n-k} \cong \mathcal{C}_0(X^n \setminus X^{k-1}) \text{ y } \mathcal{A}_{n-k}/\mathcal{A}_{n-(k+1)} \cong \bigoplus_{j=1}^{N_k} \mathcal{C}_0(\mathbb{B}^k)$$

Demostración. Se deduce de la correspondencia biyectiva entre los abiertos de X y los ideales cerrados de $\mathcal{C}(X)$. $\square$

De este modo, en virtud de la periodicidad de Bott y el Lema 3.3.1, es claro que la página 1 de la sucesión espectral de Schochet asociada a nuestra filtración se ve de la siguiente forma

$$\begin{array}{ccccccccc} \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \\ \bigoplus_{j=1}^{N_n} \mathbb{Z} & \xleftarrow{d^1} & \bigoplus_{j=1}^{N_{n-1}} \mathbb{Z} & \xleftarrow{d^1} & \cdots & \xleftarrow{d^1} & \bigoplus_{j=1}^{N_1} \mathbb{Z} & \xleftarrow{d^1} & \bigoplus_{j=1}^{N_0} \mathbb{Z} \\ \\ 0 & \xleftarrow{d^1} & 0 & \xleftarrow{d^1} & \cdots & \xleftarrow{d^1} & 0 & \xleftarrow{d^1} & 0 \\ \\ \bigoplus_{j=1}^{N_n} \mathbb{Z} & \xleftarrow{d^1} & \bigoplus_{j=1}^{N_{n-1}} \mathbb{Z} & \xleftarrow{d^1} & \cdots & \xleftarrow{d^1} & \bigoplus_{j=1}^{N_1} \mathbb{Z} & \xleftarrow{d^1} & \bigoplus_{j=1}^{N_0} \mathbb{Z} \\ \\ 0 & \xleftarrow{d^1} & 0 & \xleftarrow{d^1} & \cdots & \xleftarrow{d^1} & 0 & \xleftarrow{d^1} & 0 \end{array}$$

Figura 3.9: Diagrama de la página 1 de la sucesión espectral clásica.

3.3.2. Sucesión espectral caso cuántico

Tal como para el caso clásico, dado un CW-complejo cuántico de dimensión n , tenemos una secuencia de *-homomorfismos sobreyectivos

$$\mathcal{C}(X_q^n) \xrightarrow{\rho_{q,n}} \mathcal{C}(X_q^{n-1}) \xrightarrow{\rho_{q,n-1}} \mathcal{C}(X_q^{n-2}) \xrightarrow{\rho_{q,n-2}} \cdots \xrightarrow{\rho_{q,3}} \mathcal{C}(X_q^2) \xrightarrow{\rho_{q,2}} \mathcal{C}(X_q^1) \xrightarrow{\rho_{q,1}} \mathcal{C}(X_q^0) \xrightarrow{\rho_{q,0}} 0$$

donde $\rho_{q,j} := \text{Pr}_{q,j}^L$ para cada j , $0 \leq j \leq n$, y la C^* -álgebra no conmutativa $\mathcal{A}_q := \mathcal{C}(X_q^n) = \mathcal{C}(X_q)$ tiene una filtración creciente de ideales cerrados dada por

$$\mathcal{A}_{-1} \subset \mathcal{A}_{q,0} \subset \cdots \subset \mathcal{A}_{q,n-k} \subset \cdots \subset \mathcal{A}_{q,n} = \mathcal{C}(X_q)$$

donde $\mathcal{A}_{-1} := \{0\}$, $\mathcal{A}_{q,0} := \text{Ker}(\rho_{q,n})$, $\cdots$, $\mathcal{A}_{q,n-k} := \text{Ker}(\rho_{q,k} \circ \cdots \circ \rho_{q,n})$, $\cdots$, $\mathcal{A}_{q,n} = \mathcal{C}(X_q^n)$.

Del mismo modo que en el caso clásico los cocientes sucesivos $\mathcal{A}_{q,n-k}/\mathcal{A}_{q,n-(k+1)}$ son el interior de los discos que pegamos.

Lema 3.3.2. *Es cierto que*

$$\mathcal{C}_0(X_q^n \setminus X_q^{k-1})/\mathcal{C}_0(X_q^n \setminus X_q^k) := \mathcal{A}_{q,n-k}/\mathcal{A}_{q,n-(k+1)} \cong \bigoplus_{j=1}^{N_k} \mathcal{C}_0(\mathbb{B}_q^k) \cong \text{Ker}(\rho_{q,k})$$

donde $\rho_{q,k} : \mathcal{C}(X_q^k) \rightarrow \mathcal{C}(X_q^{k-1})$ y el mapeo dado por $\Phi : \mathcal{A}_{q,n-k}/\mathcal{A}_{q,n-(k+1)} \rightarrow \text{Ker}(\rho_{q,k})$, $\Phi([a]) = (\rho_{q,k+1} \circ \cdots \circ \rho_{q,n})(a)$ para cada $a \in \mathcal{A}_{q,n-k}$, es un *-isomorfismo.

Demostración. Veamos que Φ está bien definido, en efecto, para todo $[a] \in \mathcal{A}_{q,n-k}/\mathcal{A}_{q,n-(k+1)}$ se cumple que

$$\rho_{q,k}(\Phi([a])) = \rho_{q,k} \circ (\rho_{q,k+1} \circ \cdots \circ \rho_{q,n})(a) = 0$$

ya que $a \in \mathcal{A}_{q,n-k}$. En consecuencia $\Phi([a]) \in \text{Ker}(\rho_{q,k})$ para cada $[a] \in \mathcal{A}_{q,n-k}/\mathcal{A}_{q,n-(k+1)}$ y además, si suponemos que $[a] = [b]$, entonces $[a-b] = 0$, es decir, $a-b \in \mathcal{A}_{q,n-(k+1)}$, con lo cual $(\rho_{q,k+1} \circ \cdots \circ \rho_{q,n})(a-b) = 0$, o equivalentemente $(\rho_{q,k+1} \circ \cdots \circ \rho_{q,n})(a) = (\rho_{q,k+1} \circ \cdots \circ \rho_{q,n})(b)$. Por consiguiente $\Phi([a]) = \Phi([b])$. Entonces Φ es un *-homomorfismo bien definido, resta ver que Φ es biyectivo. Observe que la sobreyectividad es inmediata. Para la inyectividad note que si $a, b \in \mathcal{A}_{q,n-k}$ son tales que $(\rho_{q,k+1} \circ \cdots \circ \rho_{q,n})(a) = (\rho_{q,k+1} \circ \cdots \circ \rho_{q,n})(b)$ entonces $(\rho_{q,k+1} \circ \cdots \circ \rho_{q,n})(a-b) = 0$, así $(a-b) \in \text{Ker}(\rho_{q,k+1} \circ \cdots \circ \rho_{q,n})$, y obtenemos $a-b \in \mathcal{A}_{q,n-(k+1)}$, o equivalentemente $[a] = [b]$. Además, del diagrama pullback

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(X_q^k) := \mathcal{C}(X_q^{k-1}) \oplus_{(\pi_{q,k}^L, \pi_{q,k}^R)} \left(\bigoplus_{j=1}^{N_k} \mathcal{C}(\overline{\mathbb{B}}_q^k) \right) & & \\ \swarrow \rho_{q,k} & & \searrow \text{Pr}_{q,k}^R \\ \mathcal{C}(X_q^{k-1}) & & \bigoplus_{j=1}^{N_k} \mathcal{C}(\overline{\mathbb{B}}_q^k) \\ \searrow \pi_{q,k}^L & & \swarrow \pi_{q,k}^R \\ & \bigoplus_{j=1}^{N_k} \mathcal{C}(\mathbb{S}_q^{n-1}) & \end{array}$$

se deduce que $\bigoplus_{j=1}^{N_k} \mathcal{C}_0(\mathbb{B}^k) = \text{Ker}(\pi_{q,k}^R) \cong \text{Ker}(\rho_{q,k})$. $\square$

Ahora bien, por la discusión presentada en la Sección 1.6 y gracias al lema previo, en el caso no-conmutativo también tenemos una sucesión espectral de Shochet asociada a nuestra filtración creciente de ideales cerrados, que denotaremos por el símbolo $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_{*,*}^l, \mathbf{d}^l)_{l \in \mathbb{Z}^+}$ cuya primera página es similar a la Figura 3.9 (ver Figura 3.10, note la diferencia en la notación d^1 y $\mathbf{d}^1$):

$$\begin{array}{ccccccc}
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 \\
 \bigoplus_{j=1}^{N_n} \mathbb{Z} & \xleftarrow{\mathbf{d}^1} & \bigoplus_{j=1}^{N_{n-1}} \mathbb{Z} & \xleftarrow{\mathbf{d}^1} & \dots & \xleftarrow{\mathbf{d}^1} & \bigoplus_{j=1}^{N_1} \mathbb{Z} & \xleftarrow{\mathbf{d}^1} & \bigoplus_{j=1}^{N_0} \mathbb{Z} \\
 \\
 0 & \xleftarrow{\mathbf{d}^1} & 0 & \xleftarrow{\mathbf{d}^1} & \dots & \xleftarrow{\mathbf{d}^1} & 0 & \xleftarrow{\mathbf{d}^1} & 0 \\
 \\
 \bigoplus_{j=1}^{N_n} \mathbb{Z} & \xleftarrow{\mathbf{d}^1} & \bigoplus_{j=1}^{N_{n-1}} \mathbb{Z} & \xleftarrow{\mathbf{d}^1} & \dots & \xleftarrow{\mathbf{d}^1} & \bigoplus_{j=1}^{N_1} \mathbb{Z} & \xleftarrow{\mathbf{d}^1} & \bigoplus_{j=1}^{N_0} \mathbb{Z} \\
 \\
 0 & \xleftarrow{\mathbf{d}^1} & 0 & \xleftarrow{\mathbf{d}^1} & \dots & \xleftarrow{\mathbf{d}^1} & 0 & \xleftarrow{\mathbf{d}^1} & 0
 \end{array}$$

Figura 3.10: Diagrama de la página 1 de la sucesión espectral cuántica.

Aquí sucede que los diferenciales no tienen por qué ser los mismos. Lo que significaría que las páginas de las sucesiones espectrales de Schochet asociadas tanto para el caso clásico como cuántico no necesariamente son isomorfas.

Comentario 3.3.3. Es claro que la sucesión espectral homológica de Schochet (Teorema 1.6.12) se obtiene desde una pareja exacta, en nuestro caso observe que de la siguiente sucesión exacta corta (similarmente para la sucesión espectral cuántica)

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}_k \xrightarrow{f_k} \mathcal{A}_{k+1} \xrightarrow{j_{k+1}} \mathcal{A}_{k+1}/\mathcal{A}_k \longrightarrow 0,$$

donde f_k y j_{k+1} denotan el mapeo inclusión y la proyección, respectivamente. Se deduce el triángulo exacto

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{K}_*(\mathcal{A}_k) & \xrightarrow{\mathcal{K}_*(f_k)} & \mathcal{K}_*(\mathcal{A}_{k+1}) \\
& \searrow \partial_* \quad \swarrow \mathcal{K}_*(j_{k+1}) & \\
& E_{*,*}^1 = \mathcal{K}_*(\mathcal{A}_{k+1}/\mathcal{A}_k) &
\end{array}$$

con $\mathcal{K}_*(j_{k+1})$, $\mathcal{K}_*(f_k)$ y ∂_* de bigrados $(0,0)$, $(1,-1)$ y $(-1,0)$ respectivamente (∂_* son las transformaciones naturales u homomorfismos conexión). Luego, los diferenciales d^1 , los cuales tienen bigrado $(-1,0)$, están dados por

$$d^1 := \mathcal{K}_{v+w-1}(j_{v-1}) \circ \partial_{(v,v-1)} : \mathcal{K}_{v+w}(\mathcal{A}_v/\mathcal{A}_{v-1}) \longrightarrow \mathcal{K}_{v+w-1}(\mathcal{A}_{v-1}/\mathcal{A}_{v-2}).$$

Para lo que sigue, recordemos que nuestro objetivo es encontrar un teorema que permita comparar, en el caso clásico y cuántico, las sucesiones espectrales anteriores, y a su vez, concluir que los K-grupos de $\mathcal{C}(X^n)$ y $\mathcal{C}(X_q^n)$ son isomorfos, donde el símbolo X_q^n representa una versión cuántica del CW complejo X . De esta manera, note que de nuestros diagramas pullback(s) obtenemos sucesiones exactas cortas

$$\begin{aligned}
0 \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^{N_n} \mathcal{C}_0(\mathbb{B}^n) &\longrightarrow \mathcal{C}(X^n) \xrightarrow{\rho_n} \mathcal{C}(X^{n-1}) \longrightarrow 0, \\
0 \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^{N_n} \mathcal{C}_0(\mathbb{B}_q^n) &\longrightarrow \mathcal{C}(X_q^n) \xrightarrow{\rho_{q,n}} \mathcal{C}(X_q^{n-1}) \longrightarrow 0,
\end{aligned}$$

y por el Comentario [4.0.3](#) y la Definición [3.2.6](#) tendríamos las esquinas de las sucesiones anteriores con K-grupos isomorfos, (tal como en el ejemplo dado en la motivación de este trabajo). De este modo, para probar que las C*-álgebras del centro tienen la misma K-teoría tenemos a la mano, la sucesión espectral deducida de la filtración que construimos unos renglones arriba.

Comenzaremos el camino de la prueba de este hecho estudiando los CW-complejos de dimensión 2; para los cuales se cumple lo siguiente.

Proposición 3.3.4. *Dado un CW-complejo clásico de dimensión 2 siempre podemos construir un CW-complejo no-conmutativo con la misma dimensión y siguiendo la misma forma de pegar del clásico. Esto es, todo CW-complejo clásico de dimensión 2 tiene una versión no-conmutativa.*

Demostración. Sea X un CW-complejo de dimensión 2, esto es, con descomposición esquelética de la forma $\emptyset \hookrightarrow X^0 \hookrightarrow X^1 \hookrightarrow X^2 = X$, entonces de acuerdo con la Definición [3.2.1](#) sabemos que el 1-esqueleto está dado por el siguiente diagrama pullback:

$$\begin{array}{ccccc}
& \mathcal{C}(X^1) := \mathcal{C}(X^0) \oplus_{(\pi_1^L, \pi_1^R)} \bigoplus_{j=1}^{N_1} \mathcal{C}([-1, 1]) & & & \\
\text{Pr}_1^L \swarrow & & \searrow \text{Pr}_1^R & & \\
\mathcal{C}(X^0) = \mathcal{C}(\{p_1, \dots, p_{N_0}\}) & & \bigoplus_{j=1}^{N_1} \mathcal{C}([-1, 1]) & & \\
& \searrow \pi_1^L & & \swarrow \pi_1^R & \\
& \bigoplus_{j=1}^{N_1} \mathcal{C}(\mathbb{S}^0) & & &
\end{array}$$

y en vista de que $X^0 = \{p_1, \dots, p_{N_0}\} = X_q^0$ y la versión no-conmutativa de un intervalo es sí mismo. Entonces el 1-esqueleto cuántico coincide con el clásico $X^1 = X_q^1$. El 2-esqueleto cuántico lo construimos con el siguiente diagrama pullback:

$$\begin{array}{ccccc}
& \mathcal{C}(X_q^2) := \mathcal{C}(X_q^1) \oplus_{(\pi_{q,2}^L, \pi_{q,2}^R)} \bigoplus_{j=1}^{N_2} \mathcal{T} & & & \\
\text{Pr}_2^L \swarrow & & \searrow \text{Pr}_2^R & & \\
\mathcal{C}(X_q^1) = \mathcal{C}(X^1) & & \bigoplus_{j=1}^{N_2} \mathcal{T} & & \\
& \searrow \pi_{q,2}^L & & \swarrow \pi_{q,2}^R & \\
& \bigoplus_{j=1}^{N_2} \mathcal{C}(\mathbb{S}_q^1) = \bigoplus_{j=1}^{N_2} \mathcal{C}(\mathbb{S}^1) & & &
\end{array}$$

donde $\pi_{q,2}^L = \pi_2^L$ (clásico = cuántico) y $\pi_{q,2}^R(f_1, \dots, f_{N_2}) = (\sigma(f_1), \dots, \sigma(f_{N_2}))$, con $\sigma : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{S}^1)$ representando al mapeo del símbolo. Por consiguiente el objeto virtual X_q^2 así definido satisface la Definición [3.2.4](#). $\square$

Teorema 3.3.5. *En la situación de la proposición anterior, la K -teoría de un CW-complejo clásico de dimensión 2, es isomorfa a la K -teoría de su contraparte no-conmutativa.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que X es un CW-complejo conexo. Ahora bien, es claro que $\mathcal{K}_*(C(X^0)) = \mathcal{K}_*(C(X_q^0))$ y $\mathcal{K}_*(C(X^1)) = \mathcal{K}_*(C(X_q^1))$ puesto que $X^0 = X_q^0$ y $X^1 = X_q^1$. A continuación usaremos las sucesiones espectrales discutidas en las Subsecciones [3.3.1](#) y [3.3.2](#), para dar una prueba de $\mathcal{K}_*(C(X^2)) \cong \mathcal{K}_*(C(X_q^2))$. De este modo, note que los ideales cuánticos y clásicos están dados por

$$\mathcal{A}_{q,-1} = 0, \mathcal{A}_{q,0} = \text{Ker}(\rho_{q,2}) = \bigoplus_{j=1}^{N_2} C_0(\mathbb{B}_q^2) = \bigoplus_{j=1}^{N_2} \mathbb{K}, \mathcal{A}_{q,1} = \text{Ker}(\rho_{q,1} \circ \rho_{q,2}) \text{ y } \mathcal{A}_{q,2} = C(X_q^2),$$

$$\mathcal{A}_{-1} = 0, \mathcal{A}_0 = \text{Ker}(\rho_2) = \bigoplus_{j=1}^{N_2} C_0(\mathbb{B}^2), \mathcal{A}_1 = C_0(X^2 \setminus X^0) \text{ y } \mathcal{A}_2 = C(X^2).$$

De acuerdo con el Lema 3.3.2 tenemos los siguientes cocientes sucesivos

$$\mathcal{A}_{q,0}/\mathcal{A}_{q,-1} = \bigoplus_{j=1}^{N_2} C_0(\mathbb{B}_q^2) = \bigoplus_{j=1}^{N_2} \mathbb{K}, \quad \mathcal{A}_{q,1}/\mathcal{A}_{q,0} = \bigoplus_{j=1}^{N_1} C_0(\mathbb{B}^1) \text{ y } \mathcal{A}_{q,2}/\mathcal{A}_{q,1} = \bigoplus_{j=1}^{N_0} \mathbb{C}\{p_j\},$$

$$\mathcal{A}_0/\mathcal{A}_{-1} = \bigoplus_{j=1}^{N_2} C_0(\mathbb{B}^2), \quad \mathcal{A}_1/\mathcal{A}_0 = \bigoplus_{j=1}^{N_1} C_0(\mathbb{B}^1) \text{ y } \mathcal{A}_2/\mathcal{A}_1 = \bigoplus_{j=1}^{N_0} \mathbb{C}\{p_j\},$$

donde $X_q^0 = X^0 = \{p_1, \dots, p_{N_0}\}$. Ahora, observe que por periodicidad de Bott (Teorema 1.4.6) y nuestra filtración, sólo tenemos dos diferenciales d^1 (posiblemente no triviales) en la página $E_{*,*}^1$ de la sucesión espectral. Estos son en el caso clásico

$$d^1 : \mathbb{Z}^{N_0} \cong \mathcal{K}_0(\mathcal{A}_2/\mathcal{A}_1) \xrightarrow{\partial_{10}} \mathcal{K}_1(\mathcal{A}_1) \xrightarrow{\mathcal{K}_1(j_1)} \mathcal{K}_1(\mathcal{A}_1/\mathcal{A}_0) \cong \mathbb{Z}^{N_1}, \quad (3.18)$$

$$d^1 : \mathbb{Z}^{N_1} \cong \mathcal{K}_1(\mathcal{A}_1/\mathcal{A}_0) \xrightarrow{\partial_{01}} \mathcal{K}_0(\mathcal{A}_0) \xrightarrow{\mathcal{K}_1(j_0)=id} \mathcal{K}_0(\mathcal{A}_0/\mathcal{A}_{-1}) \cong \mathbb{Z}^{N_2}, \quad (3.19)$$

y en el cuántico

$$\mathbf{d}^1 : \mathbb{Z}^{N_0} \cong \mathcal{K}_0(\mathcal{A}_{q,2}/\mathcal{A}_{q,1}) \xrightarrow{\partial_{10}^q} \mathcal{K}_1(\mathcal{A}_{q,1}) \xrightarrow{\mathcal{K}_1(j_{q,1})} \mathcal{K}_1(\mathcal{A}_{q,1}/\mathcal{A}_{q,0}) \cong \mathbb{Z}^{N_1}, \quad (3.20)$$

$$\mathbf{d}^1 : \mathbb{Z}^{N_1} \cong \mathcal{K}_1(\mathcal{A}_{q,1}/\mathcal{A}_{q,0}) \xrightarrow{\partial_{01}^q} \mathcal{K}_0(\mathcal{A}_{q,0}) \xrightarrow{\mathcal{K}_0(j_{q,0})=id} \mathcal{K}_0(\mathcal{A}_{q,0}/\mathcal{A}_{q,-1}) \cong \mathbb{Z}^{N_2}. \quad (3.21)$$

En consecuencia, la primera página de nuestra sucesión espectral se ve en la forma (ver Figura 3.11 y Figura 3.12 para el caso clásico y cuántico respectivamente).

	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
2	$\mathcal{K}_0(\bigoplus_{j=1}^{N_2} C_0(\mathbb{B}^2)) \xleftarrow{d^1} \mathcal{K}_1(\bigoplus_{j=1}^{N_1} C_0(\mathbb{B}^1)) \xleftarrow{d^1} \mathcal{K}_0(\bigoplus_{j=1}^{N_0} \mathbb{C})$		
1	0	$\xleftarrow{0}$	0
0	$\mathcal{K}_0(\bigoplus_{j=1}^{N_2} C_0(\mathbb{B}^2)) \xleftarrow{d^1} \mathcal{K}_1(\bigoplus_{j=1}^{N_1} C_0(\mathbb{B}^1)) \xleftarrow{d^1} \mathcal{K}_0(\bigoplus_{j=1}^{N_0} \mathbb{C})$		
	0	1	2

Figura 3.11: Primera página CW-complejo clásico dimensión 2.

$$\begin{array}{c|ccc}
& \vdots & \vdots & \vdots \\
2 & \mathcal{K}_0(\bigoplus_{j=1}^{N_2} \mathbb{K}) & \xleftarrow{d^1} \mathcal{K}_1(\bigoplus_{j=1}^{N_1} \mathcal{C}_0(\mathbb{B}^1)) & \xleftarrow{d^1} \mathcal{K}_0(\bigoplus_{j=1}^{N_0} \mathbb{C}) \\
1 & 0 & \xleftarrow{0} 0 & \xleftarrow{0} 0 \\
0 & \mathcal{K}_0(\bigoplus_{j=1}^{N_2} \mathbb{K}) & \xleftarrow{d^1} \mathcal{K}_1(\bigoplus_{j=1}^{N_1} \mathcal{C}_0(\mathbb{B}^1)) & \xleftarrow{d^1} \mathcal{K}_0(\bigoplus_{j=1}^{N_0} \mathbb{C}) \\
\hline
& 0 & 1 & 2
\end{array}$$

Figura 3.12: Primera página CW-complejo cuántico dimensión 2.

Para el diferencial (3.18), note primero que el grupo $\mathcal{K}_0$ del 0-esqueleto es $\mathcal{K}_0(C(X_q^0)) \cong \bigoplus_{j=1}^{N_0} \mathbb{Z}[P_j]$ donde los generadores $[P_j]$ vienen dados por $P_j(p_k) = \delta_{j,k}$, $\delta_{j,k}$ denota la delta de Kronecker y note que $P_j \in \mathcal{M}_{1 \times 1}(\mathcal{C}(X_q^0))$.

Ahora bien, la sucesión exacta corta formada por ideales clásicos

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}_1 \longrightarrow \mathcal{A}_2 \longrightarrow \mathcal{A}_2/\mathcal{A}_1 \longrightarrow 0$$

induce la sucesión exacta de seis términos

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{K}_0(\mathcal{C}_0(X^2 \setminus X^0)) & \longrightarrow & \mathcal{K}_0(\mathcal{C}(X^2)) & \longrightarrow & \bigoplus_{j=1}^{N_0} \mathbb{Z}[P_j] \\
\uparrow 0 & & & & \downarrow \partial_{10} \\
0 & \longleftarrow & \mathcal{K}_1(\mathcal{C}(X^2)) & \longleftarrow & \mathcal{K}_1(\mathcal{C}_0(X^2 \setminus X^0)),
\end{array}$$

así que para determinar el homomorfismo conexión ∂_{10} debemos extender de manera continua P_k a $C(X^2)$ con $k = 1, \dots, N_0$. Para esto, el primer paso consiste en extenderlo continuamente al 1-esqueleto de manera adecuada. Para tal fin, sea $f_k^0 := P_k$ y sean $a_i : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ parametrizaciones de los intervalos $\prod_{i=1}^{N_1} [-1, 1]$ entonces para cada $k \in \{1, \dots, N_0\}$ definimos la siguiente función

$$\begin{aligned}
f_k^1 : X^1 = X_q^1 &\longrightarrow \mathcal{M}_{1 \times 1}(\mathbb{C}), \\
a_i(t) &\mapsto f_k^1(a_i(t)) := \begin{cases} -t f_k^0(a_i(-1)) & \text{si } t \in [-1, 0], \\ t f_k^0(a_i(1)) & \text{si } t \in [0, 1]. \end{cases}
\end{aligned}$$

Función que es claramente continua y extiende a f_k^0 . Hasta este punto las funciones f_k^0 y f_k^1 son las mismas para el caso clásico como cuántico, en virtud de que $X^0 = X_q^0$ y $X^1 = X_q^1$. Ahora bien, para extender esta función al 2-esqueleto en el caso clásico usamos el siguiente diagrama pullback:

$$\begin{array}{ccccc}
& \mathcal{C}(X^2) := \mathcal{C}(X^1) \oplus_{(\pi_2^L, \pi_2^R)} \bigoplus_{j=1}^{N_2} \mathcal{C}(\overline{\mathbb{B}}^2) & & & \\
& \swarrow \text{Pr}_2^L & & \searrow \text{Pr}_2^R & \\
\mathcal{C}(X^1) & & & & \bigoplus_{j=1}^{N_2} \mathcal{C}(\overline{\mathbb{B}}^2) \\
& \searrow \pi_2^L & & \swarrow \pi_2^R & \\
& \bigoplus_{j=1}^{N_2} \mathcal{C}(\mathbb{S}^1) & & &
\end{array}$$

donde

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}(X^2) &:= \mathcal{C}(X^1) \oplus_{(\pi_2^L, \pi_2^R)} \bigoplus_{j=1}^{N_2} \mathcal{C}(\overline{\mathbb{B}}^2) \\
&= \{ (f, (f_1, \dots, f_{N_2})) \in \mathcal{C}(X^1) \oplus \bigoplus_{j=1}^{N_2} \mathcal{C}(\overline{\mathbb{B}}^2) : \pi_2^L(f) = \pi_2^R((f_1, \dots, f_{N_2})) \} \\
&= \{ (f, (f_1, \dots, f_{N_2})) \in \mathcal{C}(X^1) \oplus \bigoplus_{j=1}^{N_2} \mathcal{C}(\overline{\mathbb{B}}^2) : (\pi_2^L(f))_j = f_j \upharpoonright_{\mathbb{S}^1}, j = 1, \dots, N_2 \}.
\end{aligned}$$

Así, si consideramos para cada $j \in \{1, \dots, N_2\}$, $F_{kj}(r_j \theta_j) := r_j(\pi_2^L(f_k^1))(\theta_j)$ para todo $r_j \in [0, 1]$ y $\theta_j \in \mathbb{S}^1$, entonces es claro que $F_{kj} \in \mathcal{C}(\overline{\mathbb{B}}^2)$, además definiendo $f_k^2 := (f_k^1, (F_{k1}, \dots, F_{kN_2}))$ podemos afirmar que f_k^2 es un elemento del pullback $\mathcal{C}(X^2)$. En efecto, observe que

$$\pi_2^R(F_{k1}, \dots, F_{kN_2}) = (\pi_2^L(f_k^1)_1, \dots, \pi_2^L(f_k^1)_{N_2}) = \pi_2^L(f_k^1).$$

En este sentido el elemento real f_k^2 resulta ser un levantamiento autoadjunto de $f_k^0 = P_k$ para cada $k \in \{1, \dots, N_0\}$ y en consecuencia el mapeo exponencial en la clase de equivalencia de esta función está dado por $\partial_{10}([P_k]) = [e^{2\pi i f_k^2}]$ pero como nos interesa es la proyección de este morfismo, entonces

$$\begin{aligned}
d^1([P_k]) &= \left([e^{2\pi i f_k^2} \bmod \mathcal{A}_0], \dots, [e^{2\pi i f_k^2} \bmod \mathcal{A}_0] \right) = \left([e^{2\pi i f_k^1}], \dots, [e^{2\pi i f_k^1}] \right) \\
&= (f_k^1(a_1(1)) - f_k^1(a_1(-1)), \dots, f_k^1(a_{N_1}(1)) - f_k^1(a_{N_1}(-1)))
\end{aligned} \tag{3.22}$$

donde $\{a_j\}_{j=1}^{N_1}$ son las parametrizaciones de nuestros discos de dimensión 1 (es decir, intervalos) y un elemento $[e^{2i\pi f}] \in \mathcal{K}_1(\mathcal{C}(\mathbb{S}^1))$ está determinado (por homotopía) por el winding number y el winding number se calcula por la diferencia del punto final en $\mathbb{Z}$ al punto inicial de $\mathbb{Z}$.

En el caso no-conmutativo ¿cómo podemos extender continuamente f_k^1 al 2-esqueleto cuántico? La estrategia es similar a la clásica, esto es, usaremos el siguiente diagrama pullback para lograr tal objetivo.

$$\begin{array}{ccccc}
& \mathcal{C}(X_q^2) := \mathcal{C}(X_q^1) \oplus_{(\pi_{q,2}^L, \pi_{q,2}^R)} \bigoplus_{j=1}^{N_2} \mathcal{T} & & & \\
& \swarrow \text{Pr}_{q,2}^L & & \searrow \text{Pr}_{q,2}^R & \\
\mathcal{C}(X_q^1) = \mathcal{C}(X^1) & & & & \bigoplus_{j=1}^{N_2} \mathcal{T} \\
& \searrow \pi_{q,2}^L & & \swarrow \pi_{q,2}^R & \\
& \bigoplus_{j=1}^{N_2} \mathcal{C}(\mathbb{S}_q^1) = \bigoplus_{j=1}^{N_2} \mathcal{C}(\mathbb{S}^1) & & &
\end{array}$$

donde

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}(X_q^2) &:= \mathcal{C}(X_q^1) \oplus_{(\pi_{q,2}^L, \pi_{q,2}^R)} \bigoplus_{j=1}^{N_2} \mathcal{T} \\
&= \{(f, (f_1, \dots, f_{N_2})) \in \mathcal{C}(X_q^1) \oplus \bigoplus_{j=1}^{N_2} \mathcal{T} : \pi_{q,2}^L(f) = \pi_{q,2}^R((f_1, \dots, f_{N_2}))\} \\
&= \{(f, (f_1, \dots, f_{N_2})) \in \mathcal{C}(X_q^1) \oplus \bigoplus_{j=1}^{N_2} \mathcal{T} : (\pi_{q,2}^L(f))_j = \sigma(f_j), j = 1, \dots, N_2\}.
\end{aligned}$$

De esta manera, considerando para cada $j \in \{1, \dots, N_2\}$, $\mathcal{F}_{kj} := T_{F_{kj}}$ donde $T_{F_{kj}}$ denota al operador de Toeplitz con símbolo F_{kj} y F_{kj} es definido como en el caso clásico, entonces se cumple que $\mathcal{F}_{kj} \in \mathcal{T}$ y $T_{F_{kj}}^* = T_{\bar{F}_{kj}} = T_{F_{kj}}$ para todo $j \in \{1, \dots, N_2\}$ y todo $k \in \{1, \dots, N_0\}$. Además, definiendo $f_{q,k}^2 := (f_k^1, (\mathcal{F}_{k1}, \dots, \mathcal{F}_{kN_2}))$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\pi_{q,2}^R(\mathcal{F}_{k1}, \dots, \mathcal{F}_{kN_2}) &= (\sigma(\mathcal{F}_{k1}), \dots, \sigma(\mathcal{F}_{kN_2})) = (\sigma(T_{F_{k1}}), \dots, \sigma(T_{F_{kN_2}})) \\
&= (\pi_2^L(f_k^1)_1, \dots, \pi_2^L(f_k^1)_{N_2}) = (\pi_{q,2}^L(f_k^1)_1, \dots, \pi_{q,2}^L(f_k^1)_{N_2}) \\
&= \pi_{q,2}^L(f_k^1).
\end{aligned}$$

Por lo tanto $f_{q,k}^2$ es un elemento autoadjunto del pullback $\mathcal{C}(X_q^2)$ y en este caso el primer diferencial cuántico (3.20) está dado por

$$\begin{aligned}
d^1([P_k]) &= \left([e^{2\pi i f_{q,k}^2} \bmod \mathcal{A}_{q,0}], \dots, [e^{2\pi i f_{q,k}^2} \bmod \mathcal{A}_{q,0}] \right) \\
&= (f_k^1(a_1(1)) - f_k^1(a_1(-1)), \dots, f_k^1(a_{N_1}(1)) - f_k^1(a_{N_1}(-1))) \\
&= d^1[P_k].
\end{aligned}$$

Para calcular el otro diferencial (3.19) (caso clásico) debemos tener en cuenta la siguiente sucesión exacta de seis términos

$$\begin{array}{ccccc}
\bigoplus_{j=1}^{N_2} \mathcal{K}_0(\mathcal{C}_0(\mathbb{B}^2)) & \longrightarrow & \mathcal{K}_0(\mathcal{C}_0(X^2 \setminus X^0)) & \longrightarrow & 0 \\
& \uparrow \partial_{01} & & & \downarrow 0 \\
\bigoplus_{j=1}^{N_1} \mathcal{K}_1(\mathcal{C}_0(\mathbb{B}^1)) & \longleftarrow & \mathcal{K}_1(\mathcal{C}_0(X^2 \setminus X^0)) & \longleftarrow & 0.
\end{array} \tag{3.23}$$

Note que, para determinar el homomorfismo conexión ∂_{01} basta con calcularlo en las potencias de los generadores unitarios $u_j : \mathbb{B}_j^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$, $u_j(t) = e^{\pi i t}$ para cada $j \in \{1, \dots, N_1\}$. Para ello debemos hacer un proceso de extensión continua de este mapeo, en principio es suficiente verlo como constante $1 \in \mathbb{C}$ en los puntos de X^0 , y luego usar el diagrama pullback para extenderlo continuamente de manera adecuada a todo el 2-esqueleto. Note que consideramos a los u_j 's como generadores del grupo $\mathcal{K}_1(\mathcal{C}_0(\mathbb{B}^1))$ en virtud de que $\mathcal{K}_1(\mathcal{C}_0(\mathbb{B}^1) \dot{+} \mathbb{C}1) \cong \mathcal{K}_1(\mathcal{C}(\mathbb{S}^1))$. En este sentido, sea a_i la i -ésima arista en X^1 entonces definimos $\tilde{u}_j : X^1 \rightarrow \mathbb{C}$ por

$$\tilde{u}_j(a_i(t)) = \begin{cases} u_j(t) & j = i, \\ 1 & j \neq i. \end{cases}$$

Ahora bien, ya que el j -ésimo $\mathcal{K}_1(\mathcal{C}(\mathbb{S}^1))$ -grupo en la esquina inferior izquierda de (3.23) se puede ver como $\mathcal{K}_1(\mathcal{C}(\mathbb{S}^1)) = \{[u_j^{n_j}] : n_j \in \mathbb{Z}\}$, entonces como ya se dijo, basta calcular $\partial_{01}([u_j])$. Así, note que si definimos para cada $k \in \{1, \dots, N_2\}$ y $j \in \{1, \dots, N_1\}$ la función $v_{kj} : \mathbb{B}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ por

$$v_{kj}(r_k \theta_k) := r_k (\pi_2^L(\tilde{u}_j))_k(\theta_k),$$

se cumple que la función $w_j := (\tilde{u}_j, (v_{1j}, \dots, v_{N_2j}))$ pertenece a la C^* -álgebra $\mathcal{C}(X^2)$. En efecto,

$$\pi_2^R(v_{1j}, \dots, v_{N_2j}) = ((\pi_2^L(\tilde{u}_j))_1, \dots, (\pi_2^L(\tilde{u}_j))_{N_2}) = \pi_2^L(\tilde{u}_j),$$

entonces por el Lema 3.1.1 se cumple para todo $n_j \in \mathbb{N}$ que

$$v_j := \begin{pmatrix} \frac{w_j}{\sqrt{1 - w_j^* w_j}} & -\sqrt{1 - w_j^* w_j} \\ w_j^* & \end{pmatrix} \in \mathcal{U}_2(\mathcal{C}(X^2))$$

es un levantamiento unitario de $\begin{pmatrix} u_j & 0 \\ 0 & u_j^* \end{pmatrix}$ en $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathcal{C}(X^2))$. Por tanto, el mapeo del índice clásico en (3.23) queda

$$\partial_{01}[u_j] = \left[\begin{pmatrix} \frac{w_j w_j^*}{\sqrt{1 - w_j w_j^*}} & w_j \sqrt{1 - w_j^* w_j} \\ \sqrt{1 - w_j w_j^*} w_j^* & 1 - w_j^* w_j \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]$$

donde la matriz $P_{B,j} := \begin{pmatrix} \frac{w_j w_j^*}{\sqrt{1 - w_j w_j^*}} & w_j \sqrt{1 - w_j^* w_j} \\ \sqrt{1 - w_j w_j^*} w_j^* & 1 - w_j^* w_j \end{pmatrix} = v_j \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v_j^*$ es una proyección (proyección tipo Bott clásica). Y en consecuencia el diferencial d^1 (3.19) está dado por

$$\begin{aligned} d^1([u_j]) &= \left[v_j \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v_j^* \bmod \mathcal{A}_{-1} \right] - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= \left([P_{B,j} \upharpoonright_{\mathbb{B}_1^2}] - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right], \dots, [P_{B,j} \upharpoonright_{\mathbb{B}_{N_2}^2}] - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \right). \end{aligned}$$

Continuando con el estudio de los primeros diferenciales, en el caso del diferencial cuántico (3.21), si queremos determinar ∂_{01}^q , lo único que cambia en el razonamiento anterior es que debemos extender u_j al 2-esqueleto cuántico, para esto definimos $v_{q,kj} := T_{v_{kj}}$ con v_{kj}

como en el caso clásico para todo $k \in \{1, \dots, N_2\}$ y todo $j \in \{1, \dots, N_1\}$, así definimos $w_{q,j} := (\tilde{u}_j, (v_{q,1j}, \dots, v_{q,N_2j}))$ que claramente es un elemento de $\mathcal{C}(X_q^2)$. Además, al considerar

$$v_{q,j} := \begin{pmatrix} \frac{w_{q,j}}{\sqrt{1 - w_{q,j}^* w_{q,j}}} & -\sqrt{1 - w_{q,j}^* w_{q,j}} \\ \sqrt{1 - w_{q,j}^* w_{q,j}} & w_{q,j}^* \end{pmatrix} \in \mathcal{U}_2(\mathcal{C}(X_q^2))$$

nuevamente por el Lema 3.1.1, $v_{q,j}$ es un levantamiento unitario de u_j , y por ende

$$\mathbf{d}^1([u_j]) = \left([Q_{B_j} \upharpoonright_{\mathbb{B}_1^2}] - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \dots, [Q_{B_j} \upharpoonright_{\mathbb{B}_{N_2}^2}] - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$\text{donde } Q_{B,j} := \begin{pmatrix} w_{q,j} w_{q,j}^* & w_{q,j} \sqrt{1 - w_{q,j}^* w_{q,j}} \\ \sqrt{1 - w_{q,j} w_{q,j}^*} w_{q,j}^* & 1 - w_{q,j}^* w_{q,j} \end{pmatrix} = v_{q,j} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v_{q,j}^*.$$

Por lo tanto observe que si identificamos $[P_{B,j}]$ clásico con $[Q_{B,j}]$ obtenemos que los diferenciales (3.21) y (3.19) son iguales $d^1 = \mathbf{d}^1$ salvo isomorfismos. Ahora bien, por el Teorema 1.6.12, la sucesión espectral de Schochet colapsa en la página 2 tanto en el caso clásico como en el cuántico, luego como hemos obtenido que $E_{*,*}^1 \cong \mathcal{E}_{*,*}^1$, ver Figura 3.13 y ya que $d^2 = 0 = \mathbf{d}^2$ deducimos que $E_{*,*}^2 \cong \mathcal{E}_{*,*}^2$ y por lo tanto $E_{*,*}^\infty \cong E_{*,*}^2 \cong \mathcal{E}_{*,*}^2 \cong \mathcal{E}_{*,*}^\infty$ y la segunda página se ve como lo muestra la Figura 3.14.

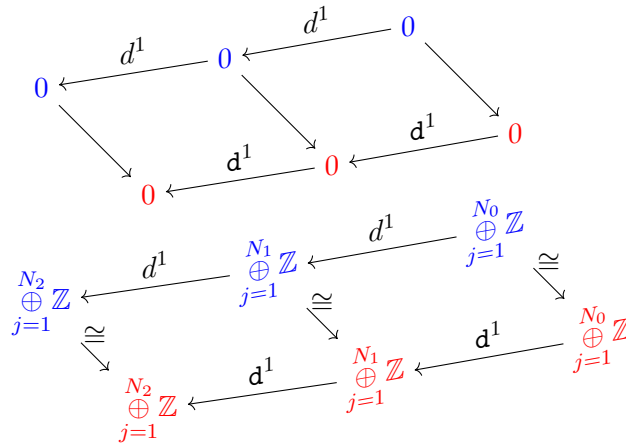


Figura 3.13: Primera página clásica (azul) y cuántica (rojo) isomorfa.

$$\begin{array}{ccccccc}
& \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\cdots & 0 & \swarrow & 0 & \swarrow & 0 & \swarrow & 0 & \cdots \\
\cdots & E_{0,2}^2 = E_{0,0}^2 & \swarrow & E_{1,2}^2 = E_{1,0}^2 & \swarrow & E_{2,2}^2 = E_{2,0}^2 & \swarrow & 0 & \cdots \\
\cdots & 0 & \swarrow & 0 & \swarrow & 0 & \swarrow & 0 & \cdots \\
\cdots & E_{0,0}^2 & \swarrow & E_{1,0}^2 & \swarrow & E_{2,0}^2 & \swarrow & 0 & \cdots \\
& \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}$$

Figura 3.14: Página 2 clásica.

Además, como la sucesión espectral de Schochet en este caso colapsa en la segunda página, obtenemos que $E_{v,w}^2 \cong F^v \mathcal{K}_{v+w}(\mathcal{A}) / F^{v-1} \mathcal{K}_{v+w}(\mathcal{A})$ (ver Comentario [1.6.13](#)) y en consecuencia tenemos las siguientes sucesiones exactas cortas

$$0 \longrightarrow F^1 \mathcal{K}_0(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{K}_0(\mathcal{A}) = F^2 \mathcal{K}_0(\mathcal{A}) \longrightarrow F^2 \mathcal{K}_0(\mathcal{A}) / F^1 \mathcal{K}_0(\mathcal{A}) = E_{2,0}^2 \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow F^0 \mathcal{K}_0(\mathcal{A}) \xrightarrow{\cong} F^1 \mathcal{K}_0(\mathcal{A}) \longrightarrow F^1 \mathcal{K}_0(\mathcal{A}) / F^0 \mathcal{K}_0(\mathcal{A}) = E_{1,1}^2 = 0 \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow \{0\} \longrightarrow F^0 \mathcal{K}_0(\mathcal{A}) \xrightarrow{\cong} E_{0,0}^2 \longrightarrow 0.$$

Igual en el caso cuántico

$$0 \longrightarrow F^0 \mathcal{K}_0(\mathcal{A}_q) \xrightarrow{\cong} F^1 \mathcal{K}_0(\mathcal{A}_q) \longrightarrow F^1 \mathcal{K}_0(\mathcal{A}_q) / F^0 \mathcal{K}_0(\mathcal{A}_q) = \mathcal{E}_{1,1}^2 = 0 \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow F^1 \mathcal{K}_0(\mathcal{A}_q) \longrightarrow \mathcal{K}_0(\mathcal{A}_q) = F^2 \mathcal{K}_0(\mathcal{A}_q) \longrightarrow F^2 \mathcal{K}_0(\mathcal{A}_q) / F^1 \mathcal{K}_0(\mathcal{A}_q) = \mathcal{E}_{2,0}^2 \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow \{0\} \longrightarrow F^0 \mathcal{K}_0(\mathcal{A}_q) \xrightarrow{\cong} \mathcal{E}_{0,0}^2 \longrightarrow 0,$$

de donde deducimos las sucesiones exactas cortas

$$0 \longrightarrow E_{0,0}^2 \longrightarrow \mathcal{K}_0(\mathcal{A}) \longrightarrow E_{2,0}^2 \longrightarrow 0, \quad (3.24)$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}_{0,0}^2 \longrightarrow \mathcal{K}_0(\mathcal{A}_q) \longrightarrow \mathcal{E}_{2,0}^2 \longrightarrow 0, \quad (3.25)$$

y afirmamos que por ser X un CW-complejo conexo entonces $E_{2,0}^2 \cong \mathbb{Z}$ y por lo tanto la sucesión exacta corta [\(3.24\)](#) se escinde. Ahora bien, note que todo CW-complejo conexo es conexo por caminos y además, en virtud de que un CW-complejo es conexo si y sólo si el 1-esqueleto es

conexo, obtenemos que el 1-esqueleto es claramente conexo por caminos (ver [11, Exercise 3, pag. 529]). De este modo, como X^1 es conexo por caminos para cada par de puntos p_i, p_j existe un camino sin lazos que une p_i con p_j , digamos $a_{k_1} \cup \dots \cup a_{k_m}$ con $a_{k_1}(-1) = n_i$, $a_{k_m}(1) = n_j$ o $a_{k_1}(1) = n_i$, $a_{k_m}(-1) = n_j$. Ahora bien, si $n_i \neq n_j$ entonces existe un a_{k_l} tal que $a_{k_l}(0) \neq a_{k_l}(1)$ y en consecuencia se tiene que, por (3.22)

$$d^1(n_1, \dots, n_{N_0}) = (a_1(1) - a_1(-1), \dots, a_{k_l}(1) - a_{k_l}(-1), \dots, a_{N_0}(1) - a_{N_0}(-1)) \notin \text{Ker}(d^1).$$

Entonces, $(n_1, \dots, n_{N_0}) \in \text{Ker}(d^1)$ si y sólo si $n_1 = \dots = n_{N_0}$, de donde obtenemos que

$$\begin{aligned} E_{2,0}^2 &:= \text{Ker}(d^1 : E_{2,0}^1 \rightarrow E_{1,0}^1) / \text{Im}(d^1 : E_{3,0}^1 \rightarrow E_{2,0}^1) = \text{Ker}(d^1 : E_{2,0}^1 \rightarrow E_{1,0}^1) \\ &\cong \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Por los argumentos anteriores la K-teoría de $\mathcal{C}(X^2)$ y $\mathcal{C}(X_q^2)$ se recupera con los objetos graduados asociados, esto es,

$$\mathcal{K}_0(\mathcal{C}(X^2)) = \mathbb{Z} \oplus E_{0,0}^2 \cong \mathbb{Z} \oplus \mathcal{E}_{0,0}^2 \cong \mathcal{K}_0(\mathcal{C}(X_q^2)), \quad \mathcal{K}_1(\mathcal{C}(X^2)) = E_{1,0}^2 \cong \mathcal{E}_{1,0}^2 \cong \mathcal{K}_1(\mathcal{C}(X_q^2)),$$

como queríamos. □

De este modo, el objetivo es demostrar algo parecido para dimensiones más altas. En la siguiente sección se mencionan ideas al respecto.

3.4. Estudio del primer diferencial en caso clásico y cuántico

A lo largo de esta parte del presente trabajo, se hace un razonamiento parecido al realizado a los CW-complejos de dimensión 2 en la sección precedente. En particular se da una descripción detallada del diferencial d^1 (respectivamente $\mathbf{d}^1$) para el caso de CW complejos finitos tanto clásicos como cuánticos. Para llevar a cabo tal objetivo, vamos a introducir la definición de lo que entendemos por tupla de giro.

Definición 3.4.1 (Tupla de Giro). *Dado un CW-complejo $\mathcal{C}(X)$ y una versión no-conmutativa $\mathcal{C}(X_q)$, note que por la Definición 3.2.3*

- si k es impar entonces $\mathcal{K}_0\left(\bigoplus_{j=1}^{N_{k+1}} \mathcal{C}_0(\mathbb{B}_q^{k+1})\right) \cong \mathbb{Z}^{N_{k+1}}$; así que definimos la tupla de giro de $[u_q] \in \mathcal{K}_1(\mathcal{C}(X_q^k))$, denotado por $\text{tup}_q([u_q])$ (respectivamente $\text{tup}([u])$ para el caso clásico), como $\text{tup}_q([u_q]) := (\partial_{01} \circ \mathcal{K}_1(\pi_{q,k+1}^L))[u_q] \in \mathbb{Z}^{N_{k+1}}$ donde ∂_{01} es el isomorfismo conexión de $\mathcal{K}_1\left(\bigoplus_{j=1}^{N_{k+1}} \mathcal{C}(\partial \mathbb{B}_q^{k+1})\right)$ en $\mathcal{K}_0\left(\bigoplus_{j=1}^{N_{k+1}} \mathcal{C}_0(\mathbb{B}_q^{k+1})\right)$;
- si k es par entonces $\mathcal{K}_1\left(\bigoplus_{j=1}^{N_{k+1}} \mathcal{C}_0(\mathbb{B}_q^{k+1})\right) \cong \mathbb{Z}^{N_{k+1}}$; así que definimos la tupla de giro de $[P_q] \in \mathcal{K}_0(\mathcal{C}(X_q^k))$, denotado por $\text{tup}_q([P_q])$ (respectivamente $\text{tup}([P])$ para el caso clásico), como $\text{tup}_q([P_q]) := (\partial_{10} \circ \mathcal{K}_0(\pi_{q,k+1}^L))[P_q] \in \mathbb{Z}^{N_{k+1}}$ donde ∂_{10} es el homomorfismo conexión de $\mathcal{K}_0\left(\bigoplus_{j=1}^{N_{k+1}} \mathcal{C}(\partial \mathbb{B}_q^{k+1})\right)$ en $\mathcal{K}_1\left(\bigoplus_{j=1}^{N_{k+1}} \mathcal{C}_0(\mathbb{B}_q^{k+1})\right)$.

Para el estudio del pimer diferencial consideramos los siguientes casos.

Caso $d^1 : \mathcal{K}_1(\mathbf{Bola\ impar}) \rightarrow \mathcal{K}_0(\mathbf{Bola\ par})$ (respectivamente d^1)

Del Lema 3.3.2 sabemos que $\mathcal{A}_{q,n-k}/\mathcal{A}_{q,n-(k+1)} \cong \bigoplus_{j=1}^{N_k} \mathcal{C}_0(\mathbb{B}_q^k)$, que es una C^* -álgebra no conmutativa sin unidad. Queremos describir el primer diferencial de nuestra sucesión espectral

$$d^1 : \mathcal{K}_1(\mathcal{A}_{q,n-k}/\mathcal{A}_{q,n-(k+1)}) \xrightarrow{\partial_{01}} \mathcal{K}_0(\mathcal{A}_{q,n-(k+1)}) \xrightarrow{\mathcal{K}_0(j_{q,n-(k+1)})} \mathcal{K}_0(\mathcal{A}_{q,n-(k+1)}/\mathcal{A}_{q,n-(k+2)}).$$

Note que estamos suponiendo que k es impar. Sea $[u_k] \in \mathcal{K}_1(\mathcal{A}_{q,n-k}/\mathcal{A}_{q,n-(k+1)})$, entonces como el $\mathcal{K}_1$ de una C^* -álgebra sin unidad debe ser igual al $\mathcal{K}_1$ de su unitización, realmente estamos tomando $[u_k]$ en $\mathcal{K}_1(\mathcal{A}_{q,n-k}/\mathcal{A}_{q,n-(k+1)} \dot{+} \mathbb{C}\mathbb{1})$ con $u_k \in \mathcal{U}_d\left(\bigoplus_{j=1}^{N_k} \mathcal{C}_0(\mathbb{B}_q^k) \dot{+} \mathbb{C}\mathbb{1}\right)$, donde $\mathcal{U}_d$ denota las matrices unitarias de tamaño $d \times d$. Para conocer el homomorfismo conexión ∂_{01} seguimos los siguientes pasos, los cuales son una generalización de las ideas desarrolladas en la motivación.

1^{er} PASO: extensión de u_k a $\mathcal{U}_d(\mathcal{C}(X_q^k))$.

Es claro que $u_k \in \mathcal{U}_d\left(\bigoplus_{j=1}^{N_k} \mathcal{C}(\overline{\mathbb{B}}_q^k)\right)$ tomando $\mathbb{1} \in \bigoplus_{j=1}^{N_k} \mathcal{C}(\overline{\mathbb{B}}_q^k)$ en la unitización de $\mathcal{A}_{q,n-k}/\mathcal{A}_{q,n-(k+1)}$.

Ahora bien, considerando $u_k(\infty) := u_k \bmod \bigoplus_{j=1}^{N_k} \mathcal{C}_0(\mathbb{B}_q^k) \in \mathcal{U}_d(\mathbb{C}\mathbb{1})$ con $\mathbb{C}\mathbb{1} = \frac{(\bigoplus_{j=1}^{N_k} \mathcal{C}_0(\mathbb{B}_q^k) \dot{+} \mathbb{C}\mathbb{1})}{\bigoplus_{j=1}^{N_k} \mathcal{C}_0(\mathbb{B}_q^k)}$, podemos reemplazar $\mathbb{1}$ por $\mathbb{1}_{\mathcal{C}(X_q^{k-1})}$ y definir

$$(u_k(\infty)\mathbb{1}_{\mathcal{C}(X_q^{k-1})}, u_k) := ((u_k(\infty))_{\alpha,\beta}\mathbb{1}_{\mathcal{C}(X_q^{k-1})}, (u_k)_{\alpha,\beta})_{1 \leq \alpha, \beta \leq d} \in \mathcal{U}_d\left(\mathcal{C}(X_q^{k-1}) \oplus \bigoplus_{j=1}^{N_k} \mathcal{C}(\overline{\mathbb{B}}_q^k)\right),$$

y evidentemente $((u_k(\infty))_{\alpha,\beta}\mathbb{1}_{\mathcal{C}(X_q^{k-1})}, (u_k)_{\alpha,\beta}) \in \mathcal{C}(X_q^{k-1}) \oplus \bigoplus_{j=1}^{N_k} \mathcal{C}(\overline{\mathbb{B}}_q^k) =: \mathcal{C}(X_q^k)$

y entonces $\tilde{u}_k := ((\tilde{u}_k)_{\alpha,\beta})_{1 \leq \alpha, \beta \leq d} \in \mathcal{U}_d(\mathcal{C}(X_q^k))$ donde $(\tilde{u}_k)_{\alpha,\beta} := ((u_k(\infty))_{\alpha,\beta}\mathbb{1}_{\mathcal{C}(X_q^{k-1})}, (u_k)_{\alpha,\beta})$.

2^{do} PASO: extensión de $\begin{pmatrix} \tilde{u}_k & 0 \\ 0 & \tilde{u}_k^* \end{pmatrix}$ a $\mathcal{U}_{2d}(\mathcal{C}(X_q^{k+1}))$.

Como $(\pi_{q,k+1}^L)^*\left(\begin{bmatrix} \tilde{u}_k & 0 \\ 0 & \tilde{u}_k^* \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \pi_{q,k+1}^L(\tilde{u}_k) & 0 \\ 0 & \pi_{q,k+1}^L(\tilde{u}_k^*) \end{bmatrix} = 0 \in \mathcal{K}_1\left(\frac{\bigoplus_{j=1}^{N_{k+1}} \mathcal{C}(\overline{\mathbb{B}}_q^{k+1})}{\bigoplus_{j=1}^{N_{k+1}} \mathcal{C}_0(\mathbb{B}_q^{k+1})}\right)$ y el

homomorfismo $\pi_{q,k+1}^R : \frac{\bigoplus_{j=1}^{N_{k+1}} \mathcal{C}(\overline{\mathbb{B}}_q^{k+1})}{\bigoplus_{j=1}^{N_{k+1}} \mathcal{C}_0(\mathbb{B}_q^{k+1})} \rightarrow \frac{\bigoplus_{j=1}^{N_{k+1}} \mathcal{C}(\overline{\mathbb{B}}_q^{k+1})}{\bigoplus_{j=1}^{N_{k+1}} \mathcal{C}_0(\mathbb{B}_q^{k+1})}$ es sobreyectivo, existe una matriz unitaria

$v_{k+1} \in \mathcal{U}_{2d}\left(\frac{\bigoplus_{j=1}^{N_{k+1}} \mathcal{C}(\overline{\mathbb{B}}_q^{k+1})}{\bigoplus_{j=1}^{N_{k+1}} \mathcal{C}_0(\mathbb{B}_q^{k+1})}\right)$ (ver [28, Section 4.3]) de tal suerte que

$$\pi_{q,k+1}^R(v_{k+1}) = \begin{pmatrix} \pi_{q,k+1}^L(\tilde{u}_k) & 0 \\ 0 & \pi_{q,k+1}^L(\tilde{u}_k^*) \end{pmatrix} = \pi_{q,k+1}^L\left(\begin{pmatrix} \tilde{u}_k & 0 \\ 0 & \tilde{u}_k^* \end{pmatrix}\right). \quad (3.26)$$

Así, si definimos $\tilde{v}_{k+1} := ((\tilde{v}_{k+1})_{\alpha\beta})_{1 \leq \alpha, \beta \leq 2d}$ con

$$(\tilde{v}_{k+1})_{\alpha\beta} := \left(\begin{pmatrix} \tilde{u}_k & 0 \\ 0 & \tilde{u}_k^* \end{pmatrix}_{\alpha\beta}, (v_{k+1})_{\alpha\beta} \right) \in \mathcal{C}(X_q^k) \oplus \bigoplus_{j=1}^{N_{k+1}} \mathcal{C}(\overline{\mathbb{B}}_q^{k+1}), \quad (3.27)$$

obtenemos que $\tilde{v}_{k+1} \in \mathcal{U}_{2d} \left(\mathcal{C}(X_q^k) \oplus_{(\pi_{q,k+1}^L, \pi_{q,k+1}^R)} \bigoplus_{j=1}^{N_{k+1}} \mathcal{C}(\overline{\mathbb{B}}_q^{k+1}) \right)$. Además, por las definiciones de $\tilde{v}_{k+1}$ y $\tilde{u}_k$, $\rho_{q,k} \circ \rho_{q,k+1}(\tilde{v}_{k+1}) = \begin{pmatrix} u_k(\infty)\mathbb{1}_{\mathcal{C}(X^{k-1})} & 0 \\ 0 & u_k^*(\infty)\mathbb{1}_{\mathcal{C}(X^{k-1})} \end{pmatrix} \in \mathcal{U}_{2d}(\mathbb{C}\mathbb{1}_{\mathcal{C}(X^{k-1})})$, y por el Lema 3.3.2, $\rho_{q,k+1}(\tilde{v}_{k+1}) \in \mathcal{U}_{2d}(\text{Ker}(\rho_{q,k}) \dot{+} \mathbb{C}\mathbb{1}) \cong \mathcal{U}_{2d}(\mathcal{A}_{q,n-k}/\mathcal{A}_{q,n-(k+1)} \dot{+} \mathbb{C}\mathbb{1})$.

3^{er} PASO: extensión de $\tilde{v}_{k+1} \in \mathcal{U}_{2d}(\mathcal{C}(X_q^{k+1}))$ a $\mathcal{U}_{4d}(\mathcal{A}_{q,n-k} \dot{+} \mathbb{C}\mathbb{1})$.

Observe que considerando $\begin{pmatrix} \tilde{v}_{k+1} & 0 \\ 0 & \tilde{v}_{k+1}^* \end{pmatrix} \in \mathcal{U}_{4d}(\mathcal{C}(X_q^{k+1}))$, entonces se cumple que $\left[\begin{pmatrix} \tilde{v}_{k+1} & 0 \\ 0 & \tilde{v}_{k+1}^* \end{pmatrix} \right] = 0 \in \mathcal{K}_1(\mathcal{C}(X_q^{k+1}))$ y como $\rho_{q,k+2} \circ \cdots \circ \rho_{q,n} : \mathcal{C}(X_q^n) \rightarrow \mathcal{C}(X_q^{k+1})$ es sobre, existe $\tilde{v}_n \in \mathcal{U}_{4d}(\mathcal{C}(X_q^n))$ tal que $\rho_{q,k+2} \circ \cdots \circ \rho_{q,n}(\tilde{v}_n) = \begin{pmatrix} \tilde{v}_{k+1} & 0 \\ 0 & \tilde{v}_{k+1}^* \end{pmatrix}$. Desde lo cual se obtiene que,

$$\begin{aligned} \rho_{q,k} \circ \rho_{q,k+1} \circ \rho_{q,k+2} \circ \cdots \circ \rho_{q,n}(\tilde{v}_n) &= \rho_{q,k} \circ \rho_{q,k+1} \begin{pmatrix} \tilde{v}_{k+1} & 0 \\ 0 & \tilde{v}_{k+1}^* \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \rho_{q,k} \circ \rho_{q,k+1}(\tilde{v}_{k+1}) & 0 \\ 0 & \rho_{q,k} \circ \rho_{q,k+1}(\tilde{v}_{k+1}^*) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_k(\infty)\mathbb{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_k^*(\infty)\mathbb{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_k^*(\infty)\mathbb{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_k(\infty)\mathbb{1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y esta última matriz es un elemento de $\mathcal{U}_{4d}(\mathbb{C}\mathbb{1}_{\mathcal{C}(X_q^{k+1})})$. Por consiguiente, deducimos que $\tilde{v}_n \in \mathcal{U}_{4d}(\text{Ker}(\rho_{q,k} \circ \rho_{q,k+1} \circ \rho_{q,k+2} \circ \cdots \circ \rho_{q,n}) \dot{+} \mathbb{C}\mathbb{1})$, esto es, $\tilde{v}_n \in \mathcal{U}_{4d}(\mathcal{A}_{q,n-k} \dot{+} \mathbb{C}\mathbb{1})$.

4^{to} PASO: descripción del primer diferencial

Para describir el diferencial $d^1 := \mathcal{K}_0(j_{q,n-(k+1)}) \circ \partial_{01}$, hacemos algunas observaciones sobre los pasos anteriores y el mapeo $j_{q,n-(k+1)} : \mathcal{A}_{q,n-(k+1)} \dot{+} \mathbb{C}\mathbb{1} \rightarrow \mathcal{A}_{q,n-(k+1)}/\mathcal{A}_{q,n-(k+2)} \dot{+} \mathbb{C}\mathbb{1}$. Con esto en mente, note que hemos considerado $[u_k] \in \mathcal{K}_1(\mathcal{A}_{q,n-k}/\mathcal{A}_{q,n-(k+1)}) = \mathcal{K}_1(\mathcal{A}_{q,n-k}/\mathcal{A}_{q,n-(k+1)} \dot{+} \mathbb{C}\mathbb{1})$ con $u_k \in \mathcal{U}_d \left(\bigoplus_{j=1}^{N_k} \mathcal{C}_0(\mathbb{B}_q^k) \dot{+} \mathbb{C}\mathbb{1} \right) = \mathcal{U}_d(\mathcal{A}_{q,n-k}/\mathcal{A}_{q,n-(k+1)} \dot{+} \mathbb{C}\mathbb{1})$.

Ahora bien, si $\tilde{v}_n \in \mathcal{U}_{4d}(\mathcal{A}_{q,n-k} \dot{+} \mathbb{C}\mathbb{1})$ es la matriz del paso anterior, entonces por el Lema 3.3.2 (Lema 3.3.1 en el caso clásico), $\mathcal{A}_{q,n-k}/\mathcal{A}_{q,n-(k+1)} \cong \text{Ker}(\rho_{q,k})$ donde el *-isomorfismo está dado por $[a] \mapsto \rho_{q,k+1} \circ \cdots \circ \rho_{q,n}(a)$, con lo cual, $\tilde{v}_n \bmod \mathcal{A}_{q,n-(k+1)}$ se puede identificar con el elemento $\rho_{q,k+1} \circ \cdots \circ \rho_{q,n}(\tilde{v}_n)$. Y este está dado por

$$\begin{aligned}
\rho_{q,k+1} \circ \cdots \circ \rho_{q,n}(\tilde{v}_n) &= \begin{pmatrix} \rho_{q,k+1}(\tilde{v}_{k+1}) & 0 \\ 0 & \rho_{k+1}(\tilde{v}_{k+1}^*) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \text{Pr}_{q,k+1}^L \left(\begin{pmatrix} \tilde{u}_k & 0 \\ 0 & \tilde{u}_k^* \end{pmatrix}, v_{k+1} \right) & 0 \\ 0 & \text{Pr}_{q,k+1}^L \left(\begin{pmatrix} \tilde{u}_k^* & 0 \\ 0 & \tilde{u}_k \end{pmatrix}, v_{k+1} \right) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \tilde{u}_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{u}_k^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{u}_k^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{u}_k \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

donde $\rho_{q,k}(\tilde{u}_k - u_k(\infty)\mathbb{1}) = u(\infty) - u_k(\infty) = 0$. Así, $\tilde{u}_k \in \mathcal{U}_d(\text{Ker}(\rho_{q,k}) \dot{+} \mathbb{C}\mathbb{1})$. Como $\rho_{q,k} = \text{Pr}_{q,k}^L$ entonces el mapeo

$$\text{Pr}_{q,k}^R : \text{Ker}(\rho_{q,k}) \dot{+} \mathbb{C}\mathbb{1} \rightarrow \bigoplus_{j=1}^{N_k} \mathcal{C}_0(\mathbb{B}_q^k) \dot{+} \mathbb{C}\mathbb{1}, \quad \text{Pr}_{q,k}^R(\alpha\mathbb{1}, b) = b, \quad (3.28)$$

es un *-isomorfismo, luego $\text{Pr}_{q,k}^R(\tilde{u}_k) = \text{Pr}_{q,k}^R(u_k(\infty)\mathbb{1}, u_k) = u_k \in \mathcal{A}_{q,n-k}/\mathcal{A}_{q,n-(k+1)} \dot{+} \mathbb{C}\mathbb{1}$. Por consiguiente

$$\text{Pr}_{q,k}^R \circ \rho_{q,k+1} \circ \cdots \circ \rho_{q,n}(\tilde{v}_n) = \begin{pmatrix} u_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_k^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_k^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_k \end{pmatrix} \in \mathcal{U}_d(\mathcal{A}_{q,n-k}/\mathcal{A}_{q,n-(k+1)} \dot{+} \mathbb{C}\mathbb{1}). \quad (3.29)$$

De este modo, note que, para describir el homomorfismo conexión $\partial_{01} : \mathcal{K}_1(\mathcal{A}_{q,n-k}/\mathcal{A}_{q,n-(k+1)} \dot{+} \mathbb{C}\mathbb{1}) \rightarrow \mathcal{K}_0(\mathcal{A}_{q,n-(k+1)})$, como $\tilde{v}_n \in \mathcal{U}_{4d}(\mathcal{A}_{q,n-k} \dot{+} \mathbb{C}\mathbb{1})$ y se cumple (3.29), entonces

$$\partial_{01}([u_k]) = \left[\tilde{v}_n \begin{pmatrix} \mathbb{1}_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tilde{v}_n^* \right] - \left[\begin{pmatrix} \mathbb{1}_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right],$$

y en consecuencia

$$\mathbf{d}^1([u_k]) = \mathcal{K}_0(j_{q,n-(k+1)}) \circ \partial_{01}[u_k] = \left[\tilde{v}_n \begin{pmatrix} \mathbb{1}_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tilde{v}_n^* \bmod \mathcal{A}_{q,n-(k+2)} \right] - \left[\begin{pmatrix} \mathbb{1}_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right].$$

Pero como $\tilde{v}_n \begin{pmatrix} \mathbb{1}_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tilde{v}_n^* \bmod \mathcal{A}_{q,n-(k+2)} \in \mathcal{A}_{q,n-(k+1)}/\mathcal{A}_{q,n-(k+2)} \dot{+} \mathbb{C}\mathbb{1}$ y además sabemos que

$$\mathcal{A}_{q,n-(k+1)}/\mathcal{A}_{q,n-(k+2)} \dot{+} \mathbb{C}\mathbf{1} \cong \text{Ker}(\rho_{q,k+1}) \dot{+} \mathbb{C}\mathbf{1} \cong \bigoplus_{j=1}^{N_{k+1}} \mathcal{C}_0(\mathbb{B}_q^{k+1}) \dot{+} \mathbb{C}\mathbf{1}.$$

Entonces la clase de equivalencia $\tilde{v}_n \begin{pmatrix} \mathbb{1}_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tilde{v}_n^* \bmod \mathcal{A}_{q,n-(k+2)}$ se puede identificar con

el elemento $\text{Pr}_{q,k+1}^R \circ \rho_{q,k+2} \circ \cdots \circ \rho_{q,n} \left(\tilde{v}_n \begin{pmatrix} \mathbb{1}_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tilde{v}_n^* \right)$, (ver (3.28)). Y por (3.27)

tenemos que

$$\begin{aligned} & \text{Pr}_{q,k+1}^R \circ \rho_{q,k+2} \circ \cdots \circ \rho_{q,n} \left(\tilde{v}_n \begin{pmatrix} \mathbb{1}_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tilde{v}_n^* \right) \\ &= \text{Pr}_{q,k+1}^R \left(\begin{pmatrix} \tilde{v}_{k+1} & 0 \\ 0 & \tilde{v}_{k+1}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{1}_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{v}_{k+1}^* & 0 \\ 0 & \tilde{v}_{k+1} \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{Pr}_{q,k+1}^R \left(\begin{pmatrix} \tilde{v}_{k+1} \begin{pmatrix} \mathbb{1}_d & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \tilde{v}_{k+1}^* & 0_{2d} \\ 0_{2d} & & 0_{2d} \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{Pr}_{q,k+1}^R \left(\begin{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} \tilde{u}_k & 0 \\ 0 & \tilde{u}_k^* \end{pmatrix}, v_{k+1} \right) \begin{pmatrix} \mathbb{1}_d & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \left(\begin{pmatrix} \tilde{u}_k^* & 0 \\ 0 & \tilde{u}_k \end{pmatrix}, v_{k+1}^* \right) & 0_{2d} \\ & & 0_{2d} \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} v_{k+1} \begin{pmatrix} \mathbb{1}_d & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v_{k+1}^* & 0_{2d} \\ 0_{2d} & & 0_{2d} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathbf{d}^1([u_k]) = \left[v_{k+1} \begin{pmatrix} \mathbb{1}_d & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v_{k+1}^* \right] - \left[\begin{pmatrix} \mathbb{1}_d & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]$. Por otro lado, en virtud de (3.26)

$\pi_{q,k+1}^R(v_{k+1}) = \begin{pmatrix} \pi_{q,k+1}^L(\tilde{u}_k) & 0 \\ 0 & \pi_{q,k+1}^L(\tilde{u}_k^*) \end{pmatrix}$ donde $[\pi_{q,k+1}^L(\tilde{u}_k)] \in \mathcal{K}_1 \left(\frac{\bigoplus_{j=1}^{N_{k+1}} \mathcal{C}(\overline{\mathbb{B}}_q^{k+1})}{\bigoplus_{j=1}^{N_{k+1}} \mathcal{C}_0(\mathbb{B}_q^{k+1})} \right)$ y como

$v_{k+1} \in \mathcal{U}_{2d} \left(\bigoplus_{j=1}^{N_{k+1}} \mathcal{C}(\overline{\mathbb{B}}_q^{k+1}) \right)$ es un levantamiento unitario de $\begin{pmatrix} \pi_{q,k+1}^L(\tilde{u}_k) & 0 \\ 0 & \pi_{q,k+1}^L(\tilde{u}_k)^*$

$\partial_{01} : \mathcal{K}_1 \left(\frac{\bigoplus_{j=1}^{N_{k+1}} \mathcal{C}(\overline{\mathbb{B}}_q^{k+1})}{\bigoplus_{j=1}^{N_{k+1}} \mathcal{C}_0(\mathbb{B}_q^{k+1})} \right) \longrightarrow \mathcal{K}_0 \left(\bigoplus_{j=1}^{N_{k+1}} \mathcal{C}_0(\mathbb{B}_q^{k+1}) \right)$ queda en la forma

$$\partial_{01}[\pi_{q,k+1}^L(\tilde{u}_k)] = \left[v_{k+1} \begin{pmatrix} \mathbb{1}_d & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v_{k+1}^* \right] - \left[\begin{pmatrix} \mathbb{1}_d & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \mathbf{d}^1[u_k].$$

Por lo tanto, el diferencial $d^1[u_k]$ es la tupla de giro de $\tilde{u}_k$, (ver Definición 3.4.1). Note que las cuentas anteriores funcionan de manera parecida para el caso clásico ($q = 1$), esto es, para determinar el diferencial d^1 , es decir, el diferencial dado por

$$d^1 : \mathcal{K}_1(\mathcal{A}_{n-k}/\mathcal{A}_{n-(k+1)}) \xrightarrow{\partial_{01}} \mathcal{K}_0(\mathcal{A}_{n-(k+1)}) \xrightarrow{\mathcal{K}_0(j_{n-(k+1)})} \mathcal{K}_0(\mathcal{A}_{n-(k+1)}/\mathcal{A}_{n-(k+2)}), \quad k \text{ impar.}$$

Así que al identificar los generadores del grupo $\mathcal{K}_1$ de las funciones continuas en las bolas clásicas de dimensión impar con el grupo $\mathcal{K}_1$ de las bolas cuánticas impares, por Definición 3.2.6, los diferenciales d^1 y d^1 en este caso son iguales salvo isomorfismos.

Caso $d^1 : \mathcal{K}_0(\text{Bola par}) \rightarrow \mathcal{K}_1(\text{Bola impar})$ (respectivamente d^1)

Observe que dado un CW-complejo clásico X de dimensión n , entonces por el Lema 3.3.1, sabemos que $\mathcal{A}_{n-k}/\mathcal{A}_{n-(k+1)} \cong \bigoplus_{j=1}^{N_k} \mathcal{C}_0(\mathbb{B}^k)$ y si tomamos k par se cumple $\mathcal{K}_0(\mathcal{A}_{n-k}/\mathcal{A}_{n-(k+1)}) \cong \mathbb{Z}^{N_k}$.

Luego, bajo este contexto, en el caso clásico el primer diferencial d^1 de la sucesión espectral es el homomorfismo de grupos abelianos

$$d^1 : \mathcal{K}_0(\mathcal{A}_{n-k}/\mathcal{A}_{n-(k+1)}) \xrightarrow{\partial_{10}} \mathcal{K}_1(\mathcal{A}_{n-(k+1)}) \xrightarrow{\mathcal{K}_0(j_{n-(k+1)})} \mathcal{K}_1(\mathcal{A}_{n-(k+1)}/\mathcal{A}_{n-(k+2)}), \quad k \text{ par.}$$

Así que, si queremos estudiar d^1 , necesitamos estudiar antes al homomorfismo conexión ∂_{10} , el cual se define en la siguiente sucesión exacta de seis términos en K-teoría de C^* -álgebras

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{K}_0(\mathcal{A}_{n-(k+1)}) & \longrightarrow & \mathcal{K}_0(\mathcal{A}_{n-k}) & \longrightarrow & \mathcal{K}_0(\mathcal{A}_{n-k}/\mathcal{A}_{n-(k+1)}) \\ \uparrow 0 & & & & \downarrow \partial_{10} \\ 0 & \longleftarrow & \mathcal{K}_1(\mathcal{A}_{n-k}) & \longleftarrow & \mathcal{K}_1(\mathcal{A}_{n-(k+1)}), \end{array}$$

luego para conocer ∂_{10} nos tomamos $[P_k] - [\mathbb{1}_d] \in \mathcal{K}_0(\mathcal{A}_{n-k}/\mathcal{A}_{n-(k+1)}) \dot{+} \mathbb{C}\mathbb{1}$ donde $[P_k]$ es tal que $P_k^* = P_k = P_k^2$. Entonces note que si queremos calcular $\partial_{10}[P_k]$ ocupamos extender continuamente P_k a $\mathcal{A}_{n-k} = \mathcal{C}_0(X^n \setminus X^{k-1}) \dot{+} \mathbb{C}\mathbb{1}$. Para lograrlo observe que

$$P_k := (P_{k,ij})_{i,j=1}^N \in \mathcal{M}_{N \times N}(\mathcal{C}_0(\Pi_{j=1}^{N_k} \mathbb{B}^k) \dot{+} \mathbb{C}\mathbb{1}), \text{ donde } N \in \mathbb{Z}^+.$$

Así que, si consideramos $\lim_{z \rightarrow \infty} P_k(z) := \begin{pmatrix} \mathbb{1}_d & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ entonces

$$\lim_{z \rightarrow \infty} P_{k,ij}(z) = \begin{cases} 1 & i = j \leq d, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

y en este sentido podemos definir

$$X_k(\infty) := \left(\lim_{z \rightarrow \infty} P_{k,ij}(z) \right)_{i,j}^N = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_d & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{N \times N}(\mathbb{C})$$

con lo cual afirmamos que

$$\tilde{P}_k := (X_k(\infty)\mathbb{1}_{C(X^{k-1})}, P_k) \in \mathcal{M}_{N \times N}(\mathcal{C}(X^k)). \quad (3.30)$$

En efecto,

$$\pi_k^L(X_k(\infty)\mathbb{1}_{\mathcal{C}(X^{k-1})}) = X_k(\infty) = \pi_k^R(P_k).$$

Ahora bien, necesitamos un levantamiento autoadjunto de $\tilde{P}_k$ en las matrices de tamaño $2N \times 2N$ sobre la C^* -álgebra de las funciones continuas en el $k+1$ -esqueleto, esto es, en X^{k+1} , y para conseguir tal objetivo usaremos el siguiente resultado, cuya prueba puede ser encontrada en [28].

Proposición 3.4.2. *Sean $\rho : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un epimorfismo entre C^* -álgebras y $b^* = b = b^2 \in \mathcal{B}$ entonces existe un autoadjunto $a \in \mathcal{A}$ tal que $\rho(a) = b$, esto es, toda proyección en $\mathcal{B}$ tiene un levantamiento autoadjunto en $\mathcal{A}$ respecto a ρ .*

De este modo, como el homomorfismo $\rho_{k+1} : \mathcal{M}_{N \times N}(\mathcal{C}(X^{k+1})) \rightarrow \mathcal{M}_{N \times N}(\mathcal{C}(X^k))$ es sobreyectivo, y además, $\tilde{P}_k$ es una proyección en $\mathcal{M}_{N \times N}(\mathcal{C}(X^k))$ entonces por la proposición anterior existe un elemento autoadjunto $Q_{k+1} \in \mathcal{M}_{N \times N}(\mathcal{C}(X^{k+1}))$ de tal suerte que $\rho_{k+1}(Q_{k+1}) = \tilde{P}_k$. A su vez, el mapeo $\rho_{k+2} \circ \cdots \circ \rho_n : \mathcal{M}_{N \times N}(\mathcal{C}(X^n)) \rightarrow \mathcal{M}_{N \times N}(\mathcal{C}(X^{k+1}))$ también es un epimorfismo, entonces existe $\tilde{Q}_n \in \mathcal{M}_{2N \times 2N}(\mathcal{C}(X^n))$ tal que $\rho_{k+2} \circ \cdots \circ \rho_n(\tilde{Q}_n) = Q_{k+1}$. De donde por [3.30] deducimos

$$\begin{aligned} \rho_k \circ \rho_{k+1} \circ \rho_{k+2} \circ \cdots \circ \rho_n(\tilde{Q}_n) &= \rho_k \circ \rho_{k+1}(Q_{k+1}) = \rho_k(\tilde{P}_k) = \text{Pr}_k^L(\tilde{P}_k) \\ &= X_k(\infty)\mathbb{1}_{\mathcal{C}(X^{k-1})} \in \mathcal{M}_{N \times N}(\mathbb{C}\mathbb{1}_{\mathcal{C}(X^{k-1})}). \end{aligned}$$

En consecuencia, considerando $\mathbb{1}_{\mathcal{C}(X^{k-1})}$ como la unidad de la unitización más pequeña,

$$\tilde{Q}_n \in \mathcal{M}_{N \times N}(\text{Ker}(\rho_k \circ \rho_{k+1} \circ \cdots \circ \rho_n) \dot{+} \mathbb{C}\mathbb{1}) = \mathcal{M}_{N \times N}(\mathcal{A}_{n-k} \dot{+} \mathbb{C}\mathbb{1}).$$

Así, por Corolario [1.4.7] se cumple $\partial_{10}([P_k] - [\mathbb{1}_d]) = \partial_{10}([P_k]) = [e^{2\pi i \tilde{Q}_n}]$. Por consiguiente, $d^1([P_k] - [\mathbb{1}_d]) = [e^{2\pi i \tilde{Q}_n} \bmod \mathcal{A}_{n-(k+2)}]$.

Por otro lado, note que $\mathcal{K}_0(\pi_{k+1}^L(\tilde{P}_k)) = [\pi_{k+1}^L(\tilde{P}_k)] \in \mathcal{K}_0\left(\frac{\bigoplus_{j=1}^{N_{k+1}} \mathcal{C}(\overline{\mathbb{B}}^{k+1})}{\bigoplus_{j=1}^{N_{k+1}} \mathcal{C}_0(\mathbb{B}^{k+1})}\right)$, así que para describir

el homomorfismo conexión $\partial_{10} : \mathcal{K}_0\left(\frac{\bigoplus_{j=1}^{N_{k+1}} \mathcal{C}(\overline{\mathbb{B}}^{k+1})}{\bigoplus_{j=1}^{N_{k+1}} \mathcal{C}_0(\mathbb{B}^{k+1})}\right) \rightarrow \mathcal{K}_1\left(\bigoplus_{j=1}^{N_{k+1}} \mathcal{C}_0(\mathbb{B}^{k+1})\right)$ consideramos

$Q_{k+1} = Q_{k+1}^* \in \mathcal{M}_{N \times N}(\mathcal{C}(X^{k+1}))$ y notamos que $\text{Pr}_{k+1}^R(Q_{k+1}) \in \mathcal{M}_{N \times N}\left(\bigoplus_{j=1}^{N_{k+1}} \mathcal{C}(\overline{\mathbb{B}}^{k+1})\right)$ es un levantamiento autoadjunto de $\pi_{k+1}^L(\tilde{P}_k)$; de esta manera $\partial_{10}([\pi_{k+1}^L(\tilde{P}_k)]) = [e^{2\pi i \text{Pr}_{k+1}^R(Q_{k+1})}]$.

Afirmamos ahora que $\partial_{10}([\pi_{k+1}^L(\tilde{P}_k)]) = d^1([P_k] - [\mathbb{1}_d])$. En efecto, como

$$\rho_{k+1}(e^{2\pi i Q_{k+1}}) = e^{2\pi i \tilde{P}_k} = e^{2\pi i \tilde{P}_k} + \mathbb{1}_N - \tilde{P}_k$$

entonces

$$e^{2\pi i Q_{k+1}} \in \mathcal{U}_N(\text{Ker}(\rho_{k+1}) \dot{+} \mathbb{C}\mathbb{1}) \cong \mathcal{U}_N(\text{Ker}(\pi_{k+1}^R) \dot{+} \mathbb{C}\mathbb{1}) \cong \mathcal{U}_N(\mathcal{A}_{n-(k+1)}/\mathcal{A}_{n-(k+1)} \dot{+} \mathbb{C}\mathbb{1})$$

y ya que $\tilde{Q}_n \bmod \mathcal{A}_{n-(k+1)} \dot{+} \mathbb{C}\mathbb{1} = \text{Pr}_{k+1}^R(Q_{k+1})$ por Lema [3.3.2] y [3.28], se cumple que

$$\partial_{10}([\pi_{k+1}^L(\tilde{P}_k)] - [\mathbb{1}_d]) = [e^{2\pi i \tilde{Q}_n} \bmod \mathcal{A}_{n-(k+2)}] = d^1([P_k] - [\mathbb{1}_d]).$$

Por lo tanto, en este caso, el primer diferencial es la tupla de giro de la proyección $[\tilde{P}_k]$ (ver Definición 3.4.1). Argumentos completamente análogos funcionan para el caso cuántico, con lo cual si identificamos generadores del grupo $\mathcal{K}_0$ de la C^* -álgebra de funciones continuas sobre las bolas clásicas de dimensión par con las cuánticas, y si X_q es una versión no-conmutativa del CW-complejo de dimensión finita X (ver Definición 3.2.6) entonces las tuplas de giro en el caso clásico y cuántico son iguales (salvo isomorfismo), esto es, $\text{tup} = \text{tup}_q$, de donde obtenemos que $d^1 = d^1$.

A continuación enunciamos uno de los resultados más importantes de este trabajo, el cual representa una generalización de lo hecho en el Teorema 3.3.5 para CW-complejos de dimensión 2.

Teorema 3.4.3. *Sean X un CW-complejo clásico de dimensión n y X_q una versión no conmutativa. Entonces si la sucesión espectral de Schochet asociada a X (ver Sección 3.9) colapsa en la página 2, y las siguientes sucesiones exactas cortas se escinden*

$$0 \longrightarrow F^{v-1}\mathcal{K}_{v+w}(\mathcal{A}) \longrightarrow F^v\mathcal{K}_{v+w}(\mathcal{A}) \longrightarrow F^v\mathcal{K}_{v+w}(\mathcal{A})/F^{v-1}\mathcal{K}_{v+w}(\mathcal{A}) = E_{v,w}^\infty \longrightarrow 0,$$

se cumple que $\mathcal{K}_*(\mathcal{C}(X)) \cong \mathcal{K}_*(\mathcal{C}(X_q))$.

Demostración. Note que tal como se detalla en la Sección 3.4, si identificamos generadores de la K-teoría de nuestras bolas clásicas y cuánticas correspondientemente, obtenemos tuplas de giro iguales (ver Definición 3.4.1), salvo isomorfismo, y en consecuencia el primer diferencial en el caso clásico coincide con el primer diferencial en el caso cuántico, así, se cumple que la primera página clásica de la sucesión espectral y la respectiva cuántica son isomorfas, donde el isomorfismo está dado por la identificación de generadores (ver Figura 3.15).

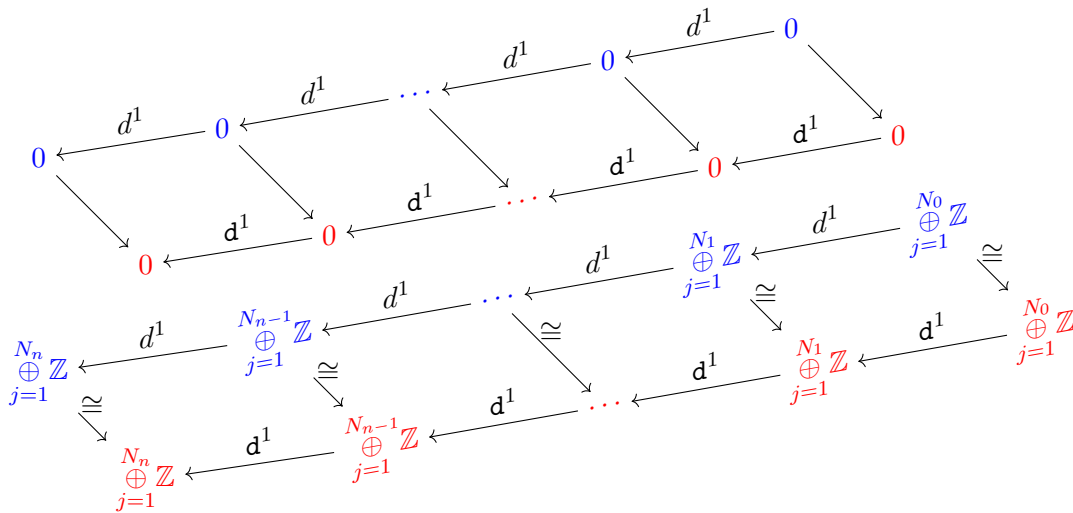


Figura 3.15: Isomorfismo entre $E_{*,*}^1$ y $E_{*,*}^1$

Lo anterior implica que la segunda página de la sucesión espectral de Schochet 3.10 para $\mathcal{C}(X_q)$ es isomorfa a la segunda página de la clásica, y por consiguiente, para el caso cuántico la sucesión espectral también colapsa en la segunda página. Ahora bien, por hipótesis se cumple que las sucesiones exactas cortas

$$0 \longrightarrow F^{v-1}\mathcal{K}_{v+w}(\mathcal{A}) \longrightarrow F^v\mathcal{K}_{v+w}(\mathcal{A}) \longrightarrow F^v\mathcal{K}_{v+w}(\mathcal{A})/F^{v-1}\mathcal{K}_{v+w}(\mathcal{A}) = E_{v,w}^\infty \longrightarrow 0,$$

se escinden, en consecuencia no existen problemas de extensión y desde los objetos filtrados asociados podemos reconstruir la K -teoría del CW-complejo, de donde $\mathcal{K}_*(\mathcal{C}(X)) \cong \mathcal{K}_*(\mathcal{C}(X_q))$. □

En este capítulo presentamos un ejemplo muy interesante de CW-complejo finito no-conmutativo, los espacios proyectivos complejos cuánticos; los cuales miramos como versiones no-conmutativas de los espacios proyectivos complejos clásicos.

Con tal objetivo en mente, las siguientes C^* -álgebras representan versiones no-conmutativas de las bolas clásicas en el sentido de la Definición [3.2.3](#), asimismo definimos sus interiores y sus fronteras:

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(\overline{\mathbb{B}}_q^{2m}) &:= \mathcal{T} \underbrace{\otimes \cdots \otimes}_{m-\text{veces}} \mathcal{T}, \quad \mathcal{C}(\overline{\mathbb{B}}_q^{2m+1}) := \mathcal{T} \underbrace{\otimes \cdots \otimes}_{m-\text{veces}} \mathcal{T} \otimes \mathcal{C}([0, 1]), \\ \mathcal{C}_0(\mathbb{B}_q^{2m}) &:= \mathbb{K} \underbrace{\otimes \cdots \otimes}_{m-\text{veces}} \mathbb{K}, \quad \mathcal{C}_0(\mathbb{B}_q^{2m+1}) := \mathbb{K} \underbrace{\otimes \cdots \otimes}_{m-\text{veces}} \mathbb{K} \otimes \mathcal{C}_0((0, 1)), \\ \mathcal{C}(\partial \overline{\mathbb{B}}_q^{2m}) &:= \mathcal{C}(\overline{\mathbb{B}}_q^{2m}) / \mathcal{C}_0(\mathbb{B}_q^{2m}), \quad \mathcal{C}(\partial \overline{\mathbb{B}}_q^{2m+1}) := \mathcal{C}(\overline{\mathbb{B}}_q^{2m+1}) / \mathcal{C}_0(\mathbb{B}_q^{2m+1}).\end{aligned}$$

De ahora en adelante usaremos la notación $\mathcal{T}^{\otimes m}$ para representar a la C^* -álgebra $\mathcal{T} \underbrace{\otimes \cdots \otimes}_{m-\text{veces}} \mathcal{T}$.

Similarmente, emplearemos la notación $\mathbb{K}^{\otimes m}$ para aludir al ideal cerrado $\mathbb{K} \underbrace{\otimes \cdots \otimes}_{m-\text{veces}} \mathbb{K}$. Las C^* -normas de los productos tensoriales son únicas porque las C^* -álgebras son nucleares, ver [\[28, Appendix T\]](#).

Ahora bien, para calcular la K-teoría de estas C^* -álgebras no conmutativas utilizaremos la Fórmula de Künneth y la sucesión exacta de seis términos en K-teoría. Por tal motivo, en las líneas siguientes recordamos la famosa Fórmula de Künneth.

Teorema 4.0.1 (Fórmula de Künneth, [\[28\]](#)). *La fórmula de Künneth sostiene que para dos C^* -álgebras $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ con $\mathcal{K}_j(\mathcal{B})$ libre de torsión y $\mathcal{A}$ separable y de tipo I; es cierto que*

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_0(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) &\cong (\mathcal{K}_0(\mathcal{A}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{K}_0(\mathcal{B})) \oplus (\mathcal{K}_1(\mathcal{A}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{K}_1(\mathcal{B})), \\ \mathcal{K}_1(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) &\cong (\mathcal{K}_0(\mathcal{A}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{K}_1(\mathcal{B})) \oplus (\mathcal{K}_1(\mathcal{A}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{K}_0(\mathcal{B})).\end{aligned}$$

De este modo, en virtud de este teorema obtenemos la siguiente proposición.

Proposición 4.0.2. *Se cumple que*

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_j(\mathcal{C}(\overline{\mathbb{B}}_q^{2m})) &\cong \begin{cases} \mathbb{Z} & , \quad j = 0, \\ 0 & , \quad j = 1. \end{cases} ; \quad \mathcal{K}_j(\mathcal{C}(\overline{\mathbb{B}}_q^{2m+1})) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & , \quad j = 0, \\ 0 & , \quad j = 1. \end{cases} \\ \mathcal{K}_j(\mathcal{C}_0(\mathbb{B}_q^{2m})) &\cong \begin{cases} \mathbb{Z} & , \quad j = 0, \\ 0 & , \quad j = 1. \end{cases} ; \quad \mathcal{K}_j(\mathcal{C}_0(\mathbb{B}_q^{2m+1})) \cong \begin{cases} 0 & , \quad j = 0, \\ \mathbb{Z} & , \quad j = 1. \end{cases} \\ \mathcal{K}_j(\mathcal{C}(\partial\overline{\mathbb{B}}_q^{2m})) &\cong \begin{cases} \mathbb{Z} & , \quad j = 0, \\ \mathbb{Z} & , \quad j = 1. \end{cases} ; \quad \mathcal{K}_j(\mathcal{C}(\partial\overline{\mathbb{B}}_q^{2m+1})) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & , \quad j = 0, \\ 0 & , \quad j = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Demostración. Por el Teorema 4.0.1, para calcular la K-teoría de nuestros discos cuánticos y sus interiores; basta aplicar inducción sobre m y usar la Fórmula de Künneth. En efecto, note por ejemplo que el grupo $\mathcal{K}_0$ de las bolas cuánticas pares, se determina de la siguiente manera

$$\mathcal{K}_0(\mathcal{C}(\overline{\mathbb{B}}_q^4)) \cong \mathcal{K}_0(\mathcal{T} \otimes \mathcal{T}) \cong \mathcal{K}_0(\mathcal{T}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{K}_0(\mathcal{T}) \oplus \mathcal{K}_1(\mathcal{T}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{K}_1(\mathcal{T}) \cong \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}[\mathbb{1}].$$

Luego, razonando por inducción matemática tenemos que

$$\mathcal{K}_0(\mathcal{C}(\overline{\mathbb{B}}_q^{2(m+1)})) \cong \mathcal{K}_0(\mathcal{T}^{\otimes m} \otimes \mathcal{T}) \cong \mathcal{K}_0(\mathcal{T}^{\otimes m}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{K}_0(\mathcal{T}) \oplus \mathcal{K}_1(\mathcal{T}^{\otimes m}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{K}_1(\mathcal{T}) \cong \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}[\mathbb{1}].$$

Por consiguiente $\mathcal{K}_0(\mathcal{C}(\overline{\mathbb{B}}_q^{2m})) \cong \mathbb{Z}[\mathbb{1}]$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Además, como la C*-álgebra de los operadores compactos es estable, se cumple

$$\mathcal{K}_0(\mathcal{C}_0(\mathbb{B}_q^{2m})) = \mathcal{K}_0(\mathbb{K}^{\otimes m}) \cong \mathcal{K}_0(\mathbb{K}) \cong \mathbb{Z}[E_0]$$

donde $E_0 := (1 - SS^*) \otimes \cdots \otimes (1 - SS^*)$ y S denota al operador shift unilateral derecho en el espacio de Hilbert $\ell_2(\mathbb{N})$. Para el grupo $\mathcal{K}_1$ de estas bolas cuánticas aplicamos nuevamente el Teorema 4.0.1

$$\mathcal{K}_1(\mathcal{C}(\overline{\mathbb{B}}_q^4)) = \mathcal{K}_1(\mathcal{T} \otimes \mathcal{T}) \cong \mathcal{K}_0(\mathcal{T}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{K}_1(\mathcal{T}) \oplus \mathcal{K}_1(\mathcal{T}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{K}_0(\mathcal{T}) \cong 0 \otimes 0 \cong 0.$$

Así de manera inductiva podemos checar que $\mathcal{K}_1(\mathcal{C}(\overline{\mathbb{B}}_q^{2m})) \cong 0$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Similarmente podemos calcular la K-teoría de las bolas impares y sus interiores.

En cuanto al cálculo de los K-grupos de las fronteras, empleamos la sucesión exacta de 6-términos en K-teoría; inducida por la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}_0(\mathbb{B}_q^m) \longrightarrow \mathcal{C}(\overline{\mathbb{B}}_q^m) \longrightarrow \mathcal{C}(\partial\overline{\mathbb{B}}_q^m) \longrightarrow 0,$$

en el caso par e impar. Esto es,

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{K}_0(\mathcal{C}_0(\mathbb{B}_q^m)) & \longrightarrow & \mathcal{K}_0(\mathcal{C}(\overline{\mathbb{B}}_q^m)) & \longrightarrow & \mathcal{K}_0(\mathcal{C}(\partial\overline{\mathbb{B}}_q^m)) \\ \uparrow \partial_{01} & & & & \downarrow \partial_{10} \\ \mathcal{K}_1(\mathcal{C}(\partial\overline{\mathbb{B}}_q^m)) & \longleftarrow & \mathcal{K}_1(\mathcal{C}(\overline{\mathbb{B}}_q^m)) & \longleftarrow & \mathcal{K}_1(\mathcal{C}_0(\mathbb{B}_q^m)) \end{array}$$

donde ∂_{01} es el mapeo del índice, ∂_{10} el mapeo exponencial y $\mathcal{K}_0(\mathcal{C}(\overline{\mathbb{B}}_q^m))$ y $\mathcal{K}_1(\mathcal{C}(\overline{\mathbb{B}}_q^m))$ son claros por la discusión anterior. $\square$

Comentario 4.0.3. *Observe que*

$$\mathcal{K}_j(\mathcal{C}(\overline{\mathbb{B}}^m)) \cong \mathcal{K}_j(\mathcal{C}(\overline{\mathbb{B}}_q^m)), \quad \mathcal{K}_j(\mathcal{C}_0(\mathbb{B}^m)) \cong \mathcal{K}_j(\mathcal{C}_0(\mathbb{B}_q^m)) \quad \text{y} \quad \mathcal{K}_j(\mathcal{C}(\partial\overline{\mathbb{B}}^m)) \cong \mathcal{K}_j(\mathcal{C}(\partial\overline{\mathbb{B}}_q^m))$$

para cada $j = 0, 1$ y $m \in \mathbb{N}$, ver Ejemplo 1.4.8.

4.1. Espacio proyectivo complejo clásico vs cuántico

Comenzamos estudiando las esferas clásicas de dimensión impar, ya que es bien conocido que el espacio proyectivo complejo clásico de dimensión n , puede ser definido como $\mathbb{C}P^n := \mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$, respecto a la relación de equivalencia

$$x, y \in \mathbb{S}^{2n+1}, \quad x \sim y \quad \text{si y sólo si existe } v \in \mathbb{S}^1 \quad \text{tal que } x = vy,$$

y observamos que $\mathbb{S}^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ es la esfera clásica de dimensión $2n+1$. Ahora bien, en aras de ilustrar la construcción clásica del espacio $\mathbb{C}P^n$ como CW-complejo de dimensión n y a su vez motivar su versión no-conmutativa, trabajaremos con $n = 1, 2$ para luego generalizar las ideas.

En el caso $n = 1$ note que la esfera clásica de dimensión 3, se puede expresar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^3 &:= \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\} \\ &= \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1| < 1, |z_2| = \sqrt{1 - |z_1|^2}\} \cup \{(z_1, 0) \in \mathbb{C}^2 : |z_1| = 1\} \\ &= \{(z, v\sqrt{1 - |z|^2}) \in \mathbb{C}^2 : (z, v) \in \mathbb{B}^2 \times \mathbb{S}^1\} \cup \{(z_1, 0) \in \mathbb{C}^2 : |z_1| = 1\}. \end{aligned}$$

En consecuencia tenemos que el diagrama de la Figura 4.1 es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{S}^3 & \\ \varphi_L^1 \nearrow & & \nwarrow \varphi_R^1 \\ \mathbb{S}^1 & & \overline{\mathbb{B}}^2 \times \mathbb{S}^1 \\ \alpha_1 \circ \psi_1 \nwarrow & \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 & \nearrow \psi_1 \circ i_1 \end{array}$$

Figura 4.1: Pushout $\mathbb{S}^3$.

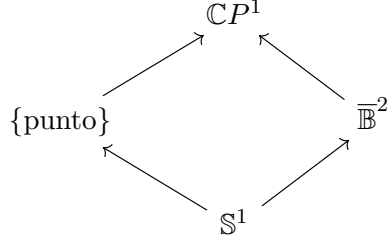
donde

$$\begin{aligned} \varphi_R^1 : \overline{\mathbb{B}}^2 \times \mathbb{S}^1 &\longrightarrow \mathbb{S}^3, & \varphi_L^1 : \mathbb{S}^1 &\longrightarrow \mathbb{S}^3, & \alpha_1 : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 &\longrightarrow \mathbb{S}^1, \\ (z, v) &\mapsto (z, v\sqrt{1 - |z|^2}), & u &\mapsto (u, 0), & (u, v) &\mapsto u, \end{aligned}$$

i_1 es el mapeo inclusión y

$$\begin{aligned} \psi_1 : \overline{\mathbb{B}}^2 \times \mathbb{S}^1 &\longrightarrow \overline{\mathbb{B}}^2 \times \mathbb{S}^1, \\ (z, v) &\mapsto (zv^*, v) \end{aligned}$$

es un homeomorfismo. Consideramos las acciones de $\mathbb{S}^1$ en el diagrama pushout definidas por $v \mapsto gv$ (parte izquierda) y $(z, v) \mapsto (gz, gv)$ (las demás entradas). Además, como la función ψ_1 es un homeomorfismo tal que $\psi_1(gz, gv) = (zv^*, gv)$, esto es, $\mathbb{S}^1$ actúa solamente en la entrada de la derecha, obtenemos del diagrama Pushout de la Figura 4.1 un diagrama $\mathbb{S}^1$ -equivariante y entonces nos arroja el espacio proyectivo complejo $\mathbb{C}P^1 = \mathbb{S}^3/\mathbb{S}^1$ de la Figura 4.2.

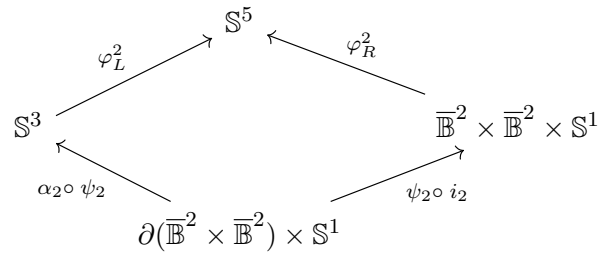
Figura 4.2: $\mathbb{C}P^1$.

En efecto, solamente necesitamos observar que cada mapeo en la Figura 4.1 es $\mathbb{S}^1$ -equivariante, es decir, respeta la acción de $\mathbb{S}^1$.

Similarmente si escribimos a $\mathbb{S}^5$ ($n = 2$) como

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^5 &:= \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 : |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 = 1\} \\ &= \{(z_1, \sqrt{1 - |z_1|^2} z_2, \sqrt{1 - |z_1|^2} \sqrt{1 - |z_2|^2} v) : (z_1, z_2, v) \in \mathbb{B}^2 \times \mathbb{B}^2 \times \mathbb{S}^1\} \\ &\cup \{(z_1, 0, 0) : |z_1| = 1\} \\ &= \{(z_1, \sqrt{1 - |z_1|^2} z_2, \sqrt{1 - |z_1|^2} \sqrt{1 - |z_2|^2} v) : (z_1, z_2, v) \in \mathbb{B}^2 \times \mathbb{B}^2 \times \mathbb{S}^1\} \\ &\cup \{(z_1, u, 0) : (z_1, u) \in \mathbb{B}^2 \times \mathbb{S}^1\} \cup \{(z_1, 0, 0) : |z_1| = 1\}, \end{aligned}$$

tenemos el diagrama

Figura 4.3: Pushout $\mathbb{S}^5$.

donde

$$\begin{aligned} \varphi_R^2 : \mathbb{B}^2 \times \mathbb{B}^2 \times \mathbb{S}^1 &\longrightarrow \mathbb{S}^5, \\ (z_1, z_2, v) &\mapsto (z_1, \sqrt{1 - |z_1|^2} z_2, \sqrt{1 - |z_1|^2} \sqrt{1 - |z_2|^2} v), \\ \varphi_L^2 : \mathbb{S}^3 &\longrightarrow \mathbb{S}^5, & \alpha_2 : \partial(\mathbb{B}^2 \times \mathbb{B}^2) \times \mathbb{S}^1 &\longrightarrow \mathbb{S}^3, \\ (z, \sqrt{1 - |z|^2} u) &\mapsto (z, \sqrt{1 - |z|^2} u, 0), & (z_1, z_2, v) &\mapsto (z_1, \sqrt{1 - |z_1|^2} z_2), \end{aligned}$$

y la función

$$\begin{aligned} \psi_2 : \overline{\mathbb{B}}^2 \times \overline{\mathbb{B}}^2 \times \mathbb{S}^1 &\longrightarrow \overline{\mathbb{B}}^2 \times \overline{\mathbb{B}}^2 \times \mathbb{S}^1, \\ (z_1, z_2, v) &\mapsto (z_1 v^*, z_2 v^*, v) \end{aligned}$$

es un homeomorfismo. Entonces el diagrama de la Figura 4.3 es un diagrama pushout $\mathbb{S}^1$ -equivariante con las acciones diagonales $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (gx_1, gx_2, gx_3)$ y en el lado izquierdo $(y_1, y_2) \mapsto (gy_1, gy_2)$, $g \in \mathbb{S}^1$. Además, como la función ψ_2 es tal que

$$\psi_2(gz_1, gz_2, gv) = (z_1 v^*, z_2 v^*, gv) \text{ para todo } (z_1, z_2, v) \in \overline{\mathbb{B}}^2 \times \overline{\mathbb{B}}^2 \times \mathbb{S}^1 \text{ y } g \in \mathbb{S}^1,$$

obtenemos el espacio $\mathbb{C}P^2 = \mathbb{S}^5/\mathbb{S}^1$, ver Figura 4.4, al considerar los mapeos anteriores módulo $\mathbb{S}^1$.

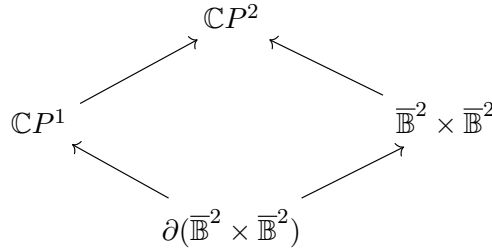


Figura 4.4: $\mathbb{C}P^2$.

En general, para facilitar nuestras cuentas, usaremos la notación $\prod_{i=1}^k \overline{\mathbb{B}}^2 := \overline{\mathbb{B}}^2 \times \cdots \times \overline{\mathbb{B}}^2$, en consecuencia observe que

$$\mathbb{S}^{2k+1} := \{(z_1, \dots, z_k, z_{k+1}) \in \mathbb{C}^{k+1} : |z_1|^2 + \cdots + |z_k|^2 + |z_{k+1}|^2 = 1\}$$

y todo elemento $(z_1, \dots, z_k, z_{k+1}) \in \mathbb{S}^{2k+1}$ se puede expresar en la forma

$$l := (z_1, \dots, \sqrt{1 - |z_1|^2} \cdots \sqrt{1 - |z_{k-1}|^2} z_k, \sqrt{1 - |z_1|^2} \cdots \sqrt{1 - |z_{k-1}|^2} \sqrt{1 - |z_k|^2} v) \quad (4.1)$$

donde $(z_1, \dots, z_k, v) \in \prod_{i=1}^k \overline{\mathbb{B}}^2 \times \mathbb{S}^1$ y si consideramos los mapeos

$$\varphi_R^k : \prod_{i=1}^k \overline{\mathbb{B}}^2 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^{2k+1}, \quad \varphi_R^k(z_1, \dots, z_k, v) := l, \text{ con } l \text{ como en (4.1),}$$

$$\varphi_L^k(z_1, \dots, \sqrt{1 - |z_1|^2} \cdots \sqrt{1 - |z_{k-1}|^2} v) = (z_1, \dots, \sqrt{1 - |z_1|^2} \cdots \sqrt{1 - |z_{k-1}|^2} v, 0)$$

$$\begin{aligned} \alpha_k : \partial(\prod_{i=1}^k \overline{\mathbb{B}}^2) \times \mathbb{S}^1 &\longrightarrow \mathbb{S}^{2k-1}, \\ (z_1, \dots, z_k, v) &\mapsto (z_1, \sqrt{1 - |z_1|^2} z_2, \dots, \sqrt{1 - |z_1|^2} \cdots \sqrt{1 - |z_{k-1}|^2} z_k). \end{aligned}$$

Entonces, tal como para los casos $n = 1$ y $n = 2$, con el homeomorfismo que convierte la acción diagonal de $\mathbb{S}^1$ a una acción en la última entrada

$$\begin{aligned} \psi_k : \prod_{i=1}^k \overline{\mathbb{B}}^2 \times \mathbb{S}^1 &\longrightarrow \prod_{i=1}^k \overline{\mathbb{B}}^2 \times \mathbb{S}^1, \\ (z_1, \dots, z_k, v) &\mapsto (z_1 v^*, \dots, z_k v^*, v), \end{aligned}$$

obtenemos el diagrama Pushout

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{C}P^k := \mathbb{S}^{2k+1}/\mathbb{S}^1 & \\ \nearrow & & \nwarrow \\ \mathbb{C}P^{k-1} := \mathbb{S}^{2k-1}/\mathbb{S}^1 & & \prod_{i=1}^k \overline{\mathbb{B}}^2 \\ \nwarrow & & \nearrow \\ & \partial(\prod_{i=1}^k \overline{\mathbb{B}}^2) & \end{array}$$

En este sentido hemos verificado que los espacios proyectivos complejos clásicos $\mathbb{C}P^n$ tienen la siguiente descomposición esquelética:

$$X^0 = X^1 = \mathbb{C}P^0 \hookrightarrow X^2 = X^3 = \mathbb{C}P^1 \hookrightarrow \dots \hookrightarrow X^{2n-2} = X^{2n-1} = \mathbb{C}P^{n-1} \hookrightarrow X^{2n} = \mathbb{C}P^n.$$

Ejemplo 4.1.1 (Espacios proyectivos cuánticos virtuales $\mathbb{C}P_q^{k+1}$). Definimos inductivamente los espacios proyectivos cuánticos o no-conmutativos de dimensión $k+1$, en símbolos $\mathcal{C}(\mathbb{C}P_q^{k+1})$, de la siguiente manera

- $\mathcal{C}(X_q^0) = \mathcal{C}(\mathbb{C}P_q^0) = \mathcal{C}(\mathbb{C}P^0) := \mathcal{C}(\{p\}) \cong \mathbb{C}$, $p = \text{punto}$;
- $\mathcal{C}(X_q^1) := \mathcal{C}(X_q^0)$;
- $\mathcal{C}(X_q^2) = \mathcal{C}(\mathbb{C}P_q^1) := \mathcal{C}(\mathbb{C}P_q^0) \oplus_{(\tau_2, \sigma_2)} \mathcal{C}(\overline{\mathbb{B}}_q^2) = \mathcal{C}(\mathbb{C}P_q^0) \oplus_{(\tau_2, \sigma_2)} \mathcal{T}$

Esto es, el espacio virtual $\mathbb{C}P_q^1$ lo definimos mediante el siguiente diagrama Pullback:

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{C}(\mathbb{C}P_q^1) := \mathcal{C}(\mathbb{C}P_q^0) \oplus_{(\tau_2, \sigma_2)} \mathcal{T} & \\ \swarrow \text{pr}_L^2 & & \searrow \text{pr}_R^2 \\ \mathcal{C}(\mathbb{C}P_q^0) \cong \mathbb{C} & & \mathcal{C}(\overline{\mathbb{B}}_q^2) = \mathcal{T}, \\ \searrow \tau_2 & & \swarrow \sigma_2 \\ & \mathcal{C}(\partial \overline{\mathbb{B}}_q^2) = \mathcal{C}(\partial \overline{\mathbb{B}}^2) = \mathcal{T}/\mathbb{K} & \end{array}$$

donde el *-homomorfismo $\tau_2 : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{S}^1)$ está dado por $\tau_2(\alpha) = \alpha \cdot 1$ para todo $\alpha \in \mathbb{C}$ y σ_2 es el *-homomorfismo cociente, es decir, $\sigma_2(t) := t \bmod \mathbb{K}$ para todo $t \in \mathcal{T}$. Por lo tanto,

$$\mathcal{C}(\mathbb{C}P_q^1) := \mathcal{C}(\mathbb{C}P_q^0) \oplus_{(\tau_2, \sigma_2)} \mathcal{T} = \{(\alpha, f) \in \mathbb{C} \oplus \mathcal{T} : \tau_2(\alpha) = \sigma_2(f)\} \cong \mathbb{K} \dot{+} \mathbb{C},$$

donde $\dot{+}$ denota la unitización (este ejemplo corresponde a la esfera cuántica estándar de Podleś Ejemplo 1.5.12). Además, note que el mapeo τ_2 es un $*$ -homomorfismo inyectivo, en consecuencia el $*$ -homomorfismo pr_R^2 también es inyectivo, y por consiguiente se cumple que $\mathcal{C}(\mathbb{C}P_q^1) \cong \text{pr}_R^2(\mathcal{C}(\mathbb{C}P_q^1)) \subset \mathcal{C}(\overline{\mathbb{B}}_q^2)$, es decir $\mathcal{C}(\mathbb{C}P_q^1)$ resulta ser una C^* -subálgebra de $\mathcal{C}(\overline{\mathbb{B}}_q^2) = \mathcal{T}$. De este modo, podemos ver el ejemplo anterior como el primer paso de inducción, y así tener definido $\mathcal{C}(\mathbb{C}P_q^k)$, es decir, nuestra hipótesis de inducción es $\mathcal{C}(\mathbb{C}P_q^k) \cong \text{pr}_R^{2k}(\mathcal{C}(\mathbb{C}P_q^k)) \subset \mathcal{C}(\overline{\mathbb{B}}_q^{2k}) = \bigotimes_{j=1}^k \mathcal{T}$

con lo cual estamos viendo a $\mathcal{C}(\mathbb{C}P_q^k)$ como C^* -subálgebra de $\bigotimes_{j=1}^k \mathcal{T}$ y entonces el espacio proyectivo complejo no conmutativo de dimensión $k+1$, $\mathcal{C}(\mathbb{C}P_q^{k+1})$, se define mediante el siguiente diagrama Pullback:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{C}(\mathbb{C}P_q^{k+1}) := \mathcal{C}(\mathbb{C}P_q^k) & \oplus & \mathcal{C}(\overline{\mathbb{B}}_q^{2(k+1)}) \\
 \text{pr}_L^{2(k+1)} \swarrow & (\tau_{2(k+1)}, \sigma_{2(k+1)}) & \searrow \text{pr}_R^{2(k+1)} \\
 \mathcal{C}(\mathbb{C}P_q^k) & & \mathcal{C}(\overline{\mathbb{B}}_q^{2(k+1)}) = \left(\bigotimes_{j=1}^k \mathcal{T} \right) \otimes \mathcal{T} \\
 \searrow \tau_{2(k+1)} & & \swarrow \sigma_{2(k+1)} \\
 & \mathcal{C}(\partial \overline{\mathbb{B}}_q^{2(k+1)}) = \left(\left(\bigotimes_{j=1}^k \mathcal{T} \right) \otimes \mathcal{T} \right) / \mathbb{K} &
 \end{array}$$

donde, el $*$ -homomorfismo $\tau_{2(k+1)} : \mathcal{C}(\mathbb{C}P_q^k) \rightarrow \left(\left(\bigotimes_{j=1}^k \mathcal{T} \right) \otimes \mathcal{T} \right) / \mathbb{K}$ está definido mediante la regla $\tau_{2(k+1)}(z) = \text{pr}_R^{2k}(z) \otimes 1 \bmod \mathbb{K}$ para todo $z \in \mathcal{C}(\mathbb{C}P_q^k)$ y además, el $*$ -homomorfismo $\sigma_{2(k+1)} : \left(\bigotimes_{j=1}^k \mathcal{T} \right) \otimes \mathcal{T} \rightarrow \left(\left(\bigotimes_{j=1}^k \mathcal{T} \right) \otimes \mathcal{T} \right) / \mathbb{K}$ es justo el $*$ -homomorfismo cociente. Observe que el mapeo $\tau_{2(k+1)}$ está bien definido gracias a la hipótesis de inducción. Veamos ahora que se trata de un $*$ -homomorfismo inyectivo. En efecto,

$$\text{Ker}(\tau_{2(k+1)}) := \{z \in \mathcal{C}(\mathbb{C}P_q^k) : \text{pr}_R^{2k}(z) \otimes 1 \bmod \mathbb{K} = 0\} = \{0\},$$

donde hemos usado que $1 = \text{id}_{\ell_2(\mathbb{N})}$ no es un operador compacto. Por lo tanto, podemos concluir que $\text{pr}_R^{2(k+1)}$ es inyectivo y luego $\mathcal{C}(\mathbb{C}P_q^{k+1}) \cong \text{pr}_R^{2(k+1)}(\mathcal{C}(\mathbb{C}P_q^{k+1})) \subset \mathcal{C}(\overline{\mathbb{B}}_q^{2(k+1)}) = \left(\bigotimes_{j=1}^k \mathcal{T} \right) \otimes \mathcal{T}$ como queríamos. Por consiguiente, tenemos la siguiente filtración esquelética virtual de este espacio cuántico

$$\begin{aligned}
 X^{-1} = \emptyset \hookrightarrow X^0 = X^1 = \mathbb{C}P^0 & \hookrightarrow X_q^2 = X_q^3 = \mathbb{C}P_q^1 \hookrightarrow \\
 \dots & \hookrightarrow X_q^{2n-2} = X_q^{2n-1} = \mathbb{C}P_q^{n-1} \hookrightarrow X_q^{2n} = \mathbb{C}P_q^n.
 \end{aligned}$$

Además, por el Lema 3.3.2, $\mathcal{A}_{q,n-k}/\mathcal{A}_{q,n-(k+1)} = \begin{cases} \mathcal{C}_0(\mathbb{B}_q^k) & \text{si } k = 2m, \\ 0 & \text{si } k = 2m+1. \end{cases}$ tal como en el caso clásico. Luego, la sucesión espectral asociada a la filtración creciente de ideales cerrados de esta C^* -álgebra se ve en la forma

$$\begin{array}{ccccccccc}
& \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\mathbb{Z} & \xleftarrow{d^1} & \dots & \xleftarrow{d^1} & \mathbb{Z} & \xleftarrow{d^1} & 0 & \xleftarrow{d^1} & \mathbb{Z} \\
0 & \xleftarrow{d^1} & 0 & \xleftarrow{d^1} & \dots & \xleftarrow{d^1} & 0 & \xleftarrow{d^1} & 0 \\
\mathbb{Z} & \xleftarrow{d^1} & \dots & \xleftarrow{d^1} & \mathbb{Z} & \xleftarrow{d^1} & 0 & \xleftarrow{d^1} & \mathbb{Z} \\
0 & \xleftarrow{d^1} & 0 & \xleftarrow{d^1} & \dots & \xleftarrow{d^1} & 0 & \xleftarrow{d^1} & 0
\end{array}$$

Figura 4.5: Sucesión espectral para $\mathbb{C}P_q^n$.

esto es, todos los diferenciales son nulos, entonces la sucesión espectral colapsa en la segunda página y

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_0(\mathcal{C}(\mathbb{C}P_q^k)) &\cong \mathbb{Z}^{k+1} \cong \mathcal{K}_0(\mathcal{C}(\mathbb{C}P^k)) \\
\mathcal{K}_1(\mathcal{C}(\mathbb{C}P_q^k)) &\cong 0 \cong \mathcal{K}_1(\mathcal{C}(\mathbb{C}P^k)).
\end{aligned}$$

Además, los homomorfismos

$$\mathcal{K}_0(\tau_{2(k+1)}) : \mathcal{K}_0(\mathcal{C}(\mathbb{C}P_q^k)) \cong \mathbb{Z}^{k+1} \rightarrow \mathcal{K}_0(\mathcal{C}(\partial \overline{\mathbb{B}}_q^{2(k+1)})) \cong \mathbb{Z}[1],$$

son split con splitting homomorfismo $[1] \mapsto [1]$ tanto en el caso clásico como en el cuántico y

$$\mathcal{K}_1(\tau_{2(k+1)}) : \mathcal{K}_1(\mathcal{C}(\mathbb{C}P_q^k)) \rightarrow \mathcal{K}_1(\mathcal{C}(\partial \overline{\mathbb{B}}_q^{2(k+1)})), \quad \mathcal{K}_1(\tau_{2(k+1)}) = 0.$$

Por lo tanto $\mathbb{C}P_q^k$ es una versión cuántica del espacio proyectivo complejo clásico $\mathbb{C}P^k$.

- [1] Atiyah, Michael y Hirzebruch, Friedrich. Vector Bundles and Homogeneous Spaces [en línea]. En: *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*. Providence: American Mathematical Society, 1961, Vol. 3, pp. 7-38 [consulta: 23 de Junio de 2025]. Disponible en: <https://hirzebruch.mpim-bonn.mpg.de/id/eprint/87>
- [2] Atiyah, Michael. *K-theory*. New York: W. A. Benjamin INC, 1964. ISBN 978-0201407921.
- [3] Bott, Raoul y Tu, Loring W. *Differential forms in algebraic topology* [en línea]. New York: Springer, 2013. [consulta: 23 de Junio de 2025]. DOI 10.1007/978-1-4757-3951-0. Disponible en: <https://link.springer.com/book/10.1007/978-1-4757-3951-0>
- [4] Blackadar, Bruce. *K-Theory for Operator Algebras* [en línea]. 2. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1998. [consulta: 23 de Junio de 2025]. ISBN 9780521635325. Disponible en: <http://bit.ly/41326N6>
- [5] Brown, Lawrence; Douglas, Ronald y Fillmore, Peter. Unitary equivalence modulo the compact operators and extensions of C^* -algebras. En *Proceedings of a Conference on Operator Theory, Lecture Notes in Mathematics* [en línea]. New York: Springer, 1973, Vol. 345, pp. 58-128. [consulta: 23 de Junio de 2025]. Disponible en: <https://link.springer.com/chapter/10.1007/BFb0058917>
- [6] Brown, Lawrence; Douglas, Ronald y Fillmore, Peter. Extensions of C^* -algebras and K-homology. *Annals of Mathematics* [en línea]. Estados Unidos: Princeton University Press, 1977, Vol. 105, no. 2, pp. 265-324 [consulta: 23 de Junio de 2025]. DOI 10.2307/1970999. Disponible en: <https://doi.org/10.2307/1970999>
- [7] Connes, Alain. *Noncommutative geometry*. San Diego: Academic Press, 1994. ISBN 9780121858605.
- [8] Dabrowski, Ludwik; Hadfield, Tom; Hajac, Piotr; Matthes, Rainer y Wagner, Elmar. Index pairings for pullbacks of C^* -algebras, *Banach Center Publications* [en línea]. Warszawa: Institute of Mathematics Polish Academy of Sciences, 2012, Vol. 98, pp. 67-84. [consulta: 23 de Junio de 2025]. DOI 10.4064/bc98-0-4. Disponible en: <https://doi.org/10.4064/bc98-0-4>
- [9] D'Andrea, Francesco; Hajac, Piotr; Maszczyk, Tomasz; Sheu, Albert y Zielinski, Bartosz. The K-theory type of quantum CW-complexes [en línea]. [consulta: 23 de Junio de 2025]. Disponible en: <https://arxiv.org/abs/2002.09015>

- [10] Fulton, William. *Algebraic Topology: A first course*. New York: Springer, 1995. ISBN 978-0387943275.
- [11] Hatcher, Allen. *Algebraic topology*. Cambridge: Cambridge University Press, 2001. ISBN 978-0521795401.
- [12] Hatcher, Allen. *Spectral Sequences* [en línea]. preprint, 2004 [consulta: 23 de Junio de 2025]. Disponible en: <https://pi.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATch5.pdf>
- [13] Higson, Nigel y Roe, John. *Analytic K-Homology* [en línea]. Oxford: Oxford University Press, 2001. [consulta: 23 de Junio de 2025]. ISBN 9780198511762. Disponible en: <https://global.oup.com/academic/product/analytic-k-homology-9780198511762?cc=co&lang=en&>
- [14] Hong, Jeong Hee y Szymański, Wojciech. Quantum Spheres and Projective Spaces as Graph Algebras. *Communications in Mathematical Physics* [en línea]. Springer, 2002, vol. 232, no. 1, pp. 157-188 [consulta: 23 de Junio de 2025]. DOI 10.1007/s00220-002-0732-1. Disponible en: <https://doi.org/10.1007/s00220-002-0732-1>
- [15] Klimek, Slawomir y Lesniewski, Andrzej. A Two-Parameter Quantum Deformation of the Unit Disc. *Journal of Functional Analysis* [en línea]. Academic press, 1993, Vol. 115, pp. 1-23 [consulta: 23 de Junio de 2025]. DOI 10.1006/jfan.1993.1078. Disponible en: <https://doi.org/10.1006/jfan.1993.1078>
- [16] López, Mario. *Teoría K de C*-álgebras* [en línea]. Tesis de maestría. Morelia: Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Instituto de Física y Matemáticas, 2018 [consulta: 23 de Junio de 2025]. Disponible en: <http://bit.ly/3TEffzQ>
- [17] McCleary, John. *A User's Guide to Spectral Sequences* [en línea]. Cambridge: Cambridge University Press, 2000. [consulta: 23 de Junio de 2025]. ISBN 9780511626289. Disponible en: <https://doi.org/10.1017/CB09780511626289>
- [18] Murphy, Gerard J. *C*-algebras and operator theory*. Boston: Academic Press, 1990. ISBN 0-12-511360-9.
- [19] Podleś, P. Quantum Spheres. *Letters in Mathematical Physics* [en línea]. Springer, 1987, Vol. 14, pp. 193-202 [consulta: 23 de Junio de 2025]. DOI 10.1007/BF00416848. Disponible en: <https://doi.org/10.1007/BF00416848>
- [20] Raeburn, Iain. Graph algebras. *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*. Washington DC: American Mathematical Society, 2005. ISBN 978-0821836606.
- [21] Rognes, John. *Spectral Sequences* [en línea]. Norway: Department of Mathematics, University of Oslo, 2010. [consulta: 23 de Junio de 2025]. Disponible en: <https://www.uio.no/studier/emner/matnat/math/MAT9580/v21/dokumenter/spseq.pdf>
- [22] Rørdam, Mikael; Larsen, Flemming y Laustsen, Niels. *An introduction to K-theory for C*-algebras*. Cambridge: Cambridge University Press, 2000. ISBN 0521783348.
- [23] Schochet, Claude. Topological Methods For C*-Algebras I: Spectral Sequences. *Pacific Journal of Mathematics* [en línea]. 1981, Vol. 96, no. 1, pp. 193-211. [consulta: 23 de Junio de 2025]. Disponible en: <http://bit.ly/4nnoVN1>

- [24] Sierra, Arley y Wagner, Elmar. Closed quantum surfaces from the Toeplitz extension. *The Rocky Mountain Journal of Mathematics* [en línea]. 2025, Vol. 55, no. 3, pp. 833-845 [consulta: 1 de Julio de 2025]. DOI 10.1216/rmj.2025.55.833. Disponible en: <https://doi.org/10.1216/rmj.2025.55.833>
- [25] Sierra, Arley y Wagner, Elmar. On the K-theory of quantum CW complexes, en preparación.
- [26] Vaksman, Leonid y Soibelman, Yakov Sergeevich. Algebra of functions on quantum $SU(n+1)$ group and odd dimensional quantum spheres. *Algebra i Analiz* [en línea]. 1990, Vol. 2, no. 5, pp. 101-120 [consulta: 23 de Junio de 2025]. Disponible en: <https://www.mathnet.ru/eng/aa208>
- [27] Vasilevski, Nikolai. *Commutative algebras of Toeplitz operators on the Bergman space*. Birkhäuser, Basel, 2008. ISBN 978-3764387266.
- [28] Wegge-Olsen, Niels Erik. *K-theory and C*-Algebras: A Friendly Approach* [en línea]. Oxford: Oxford University Press, 1993. [consulta: 23 de Junio de 2025]. ISBN 9781383031027. Disponible en: <https://doi.org/10.1093/oso/9780198596943.001.0001>
- [29] Woronowicz, Stanislaw Lech. Twisted $SU(2)$ group. An example of a non-commutative differential calculus. *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences* [en línea]. 1987, Vol. 23, no. 1, pp. 117-181 [consulta: 23 de Junio de 2025]. DOI 10.2977/prims/1195176848. Disponible en: <https://ems.press/journals/prims/articles/3332>

Formato de Declaración de Originalidad y Uso de Inteligencia Artificial

Coordinación General de Estudios de Posgrado
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo



A quien corresponda,

Por este medio, quien abajo firma, bajo protesta de decir verdad, declara lo siguiente:

- Que presenta para revisión de originalidad el manuscrito cuyos detalles se especifican abajo.
- Que todas las fuentes consultadas para la elaboración del manuscrito están debidamente identificadas dentro del cuerpo del texto, e incluidas en la lista de referencias.
- Que, en caso de haber usado un sistema de inteligencia artificial, en cualquier etapa del desarrollo de su trabajo, lo ha especificado en la tabla que se encuentra en este documento.
- Que conoce la normativa de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, en particular los Incisos IX y XII del artículo 85, y los artículos 88 y 101 del Estatuto Universitario de la UMSNH, además del transitorio tercero del Reglamento General para los Estudios de Posgrado de la UMSNH.

Datos del manuscrito que se presenta a revisión		
Programa educativo	Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas	
Título del trabajo	CW-Complejos Cuánticos Finitos	
	Nombre	Correo electrónico
Autor/es	Arley Yessit Sierra Acosta	arleysierra23@gmail.com
Director	Elmar Wagner	elmar.wagner@umich.mx
Codirector		
Coordinador del programa	Elmar Wagner	elmar.wagner@umich.mx

Uso de Inteligencia Artificial		
Rubro	Uso (sí/no)	Descripción
Asistencia en la redacción	No	

Formato de Declaración de Originalidad y Uso de Inteligencia Artificial

Coordinación General de Estudios de Posgrado
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo



Uso de Inteligencia Artificial		
Rubro	Uso (sí/no)	Descripción
Traducción al español	No	
Traducción a otra lengua	No	
Revisión y corrección de estilo	No	
Análisis de datos	No	
Búsqueda y organización de información	No	
Formateo de las referencias bibliográficas	No	
Generación de contenido multimedia	No	
Otro	No	

Datos del solicitante	
Nombre y firma	
Lugar y fecha	Morelia - Michoacán 8/10/2025

Arley Yessit Sierra Acosta

CW-Complejos Cuánticos Finitos.pdf

 Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Detalles del documento

Identificador de la entrega

trn:oid:::3117:512280508

Fecha de entrega

13 oct 2025, 8:21 a.m. GMT-6

Fecha de descarga

13 oct 2025, 8:25 a.m. GMT-6

Nombre del archivo

CW-Complejos Cuánticos Finitos.pdf

Tamaño del archivo

1.1 MB

97 páginas

35.949 palabras

154.440 caracteres

7% Similitud general

El total combinado de todas las coincidencias, incluidas las fuentes superpuestas, para ca...

Fuentes principales

- 6%  Fuentes de Internet
- 3%  Publicaciones
- 0%  Trabajos entregados (trabajos del estudiante)

Marcas de integridad

N.º de alerta de integridad para revisión



Caracteres reemplazados

633 caracteres sospechosos en N.º de páginas

Las letras son intercambiadas por caracteres similares de otro alfabeto.

Los algoritmos de nuestro sistema analizan un documento en profundidad para buscar inconsistencias que permitirían distinguirlo de una entrega normal. Si advertimos algo extraño, lo marcamos como una alerta para que pueda revisarlo.

Una marca de alerta no es necesariamente un indicador de problemas. Sin embargo, recomendamos que preste atención y la revise.