



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

---

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS  
“MAT. LUIS MANUEL GUTIÉRREZ”

PARAMETRIZACIÓN DE SOLUCIONES ESTACIONARIAS  
MEDIANTE IDEALES ALGEBRAICOS EN SISTEMAS  
DINÁMICOS DEFINIDOS POR ECUACIONES  
DIFERENCIALES

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

**Doctor en Ciencias en Ingeniería Física**

PRESENTA:

**Juan José Rivas Ramírez**

ASESOR:

Doctor en Ciencias (Física) Joaquin Estevez Delgado



Morelia, Michoacán, Noviembre 2025



# Resumen

---

La tesis examina la estructura y parametrización de los puntos de equilibrio en sistemas dinámicos definidos por ecuaciones diferenciales no lineales, con énfasis en modelos tridimensionales donde la organización del flujo depende de la cardinalidad y estabilidad del conjunto estacionario. Se establece un marco algebraico basado en ideales polinomiales para describir las soluciones de  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$ , permitiendo caracterizar la localización de los equilibrios, la variación de su espectro y las transiciones cualitativas asociadas a colisiones de autovalores reales y bifurcaciones de tipo Hopf. El estudio se apoya en la clasificación contemporánea de atractores según la relación entre sus cuencas y las vecindades de los equilibrios, distinguiendo entre dinámicas auto-excitadas y ocultas, y en resultados recientes sobre sistemas con equilibrios estables, inestables, infinitos o ausentes. Dentro de este panorama, se integra y formaliza un procedimiento constructivo que sustituye un parámetro del sistema de Lorenz por una función racional cuadrática, produciendo configuraciones con varios equilibrios finitos sin alterar la dimensión del sistema. Este método permite determinar condiciones explícitas para la existencia de los equilibrios inducidos, su estabilidad y los cambios locales que modifican la estructura de las variedades invariantes. Los resultados muestran que la sustitución racional cuadrática modifica de manera comprobable la estructura estacionaria del sistema de Lorenz, produciendo configuraciones de equilibrio que no aparecen en el modelo original y sin antecedentes directos en la literatura. El ideal asociado a  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$  define una variedad afín en la que se ubican las soluciones estacionarias, lo que permite describir su localización discreta y la variación de su número bajo cambios en los parámetros racionales. Estas configuraciones dependen de relaciones algebraicas que alteran la estabilidad local y generan bifurcaciones ausentes en el sistema canónico, junto con conteos cuyo comportamiento paramétrico presenta irregularidades medibles mediante técnicas fractales. El enfoque algebraico-dinámico obtenido constituye un procedimiento sistemático para modificar y estudiar equilibrios en sistemas tridimensionales mediante herramientas de geometría algebraica aplicadas a ecuaciones diferenciales no lineales.

**Palabras Clave:** Lorenz, caos, bifurcaciones, multiestabilidad, atractores, dinámica.

---



# Abstract

---

The thesis investigates the structure and parametrization of equilibrium points in dynamical systems defined by nonlinear differential equations, with emphasis on three-dimensional models in which the organization of the flow depends on the cardinality and stability of the stationary set. An algebraic framework based on polynomial ideals is developed to describe the solutions of  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$ , enabling a detailed characterization of the location of equilibria, the variation of their spectral properties, and the qualitative transitions associated with real eigenvalue collisions and Hopf-type bifurcations. The analysis draws on the contemporary classification of attractors according to the relationship between their basins and the neighborhoods of equilibrium points, distinguishing self-excited dynamics from hidden ones, and incorporates recent results for systems with stable, unstable, infinite, or absent equilibria.

Within this context, a constructive procedure is formalized in which a parameter of the Lorenz system is replaced by a quadratic rational function, producing configurations with multiple finite equilibria without altering the dimension of the system. This approach provides explicit conditions for the existence and stability of the induced equilibria, as well as for the local changes that affect the structure of invariant manifolds. The results show that the quadratic rational substitution modifies the stationary structure of the Lorenz system in a verifiable manner, generating equilibrium configurations absent from the canonical model and without direct precedent in the literature. The ideal associated with  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$  defines an affine variety on which the stationary solutions are located, allowing a precise description of their discrete placement and the variation of their number under changes in the rational parameters. These configurations arise from algebraic relations that alter local stability and produce bifurcations not present in the original system, together with counts whose parametric behavior exhibits irregularities measurable through fractal analysis. The resulting algebraic–dynamical framework provides a systematic procedure for modifying and studying equilibria in three-dimensional systems using tools from algebraic geometry applied to nonlinear differential equations.

**Keywords:** Lorenz, chaos, bifurcations, multistability, attractors, dynamics.

# Índice general

---

|                                                                                                     |            |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>Índice de figuras</b>                                                                            | <b>VII</b> |
| <b>1. Introducción</b>                                                                              | <b>1</b>   |
| 1.1. Sesenta y dos años de teoría del caos . . . . .                                                | 1          |
| <b>2. Órbitas periódicas y conjuntos límite</b>                                                     | <b>5</b>   |
| 2.1. Conjuntos límite para ecuaciones diferenciales planares . . . . .                              | 5          |
| 2.2. Teorema de Poincaré–Bendixson . . . . .                                                        | 7          |
| <b>3. Definiciones y propiedades del sistema clásico de Lorenz</b>                                  | <b>9</b>   |
| 3.1. Efecto mariposa en el sistema de Lorenz . . . . .                                              | 11         |
| 3.2. Ecuación diferencial en el sistema de Lorenz . . . . .                                         | 12         |
| 3.3. Caos en el atractor de Lorenz . . . . .                                                        | 15         |
| 3.4. Sistema de Lorenz en variables complejas: formulación y propiedades<br>estructurales . . . . . | 18         |
| <b>4. Resultados</b>                                                                                | <b>21</b>  |
| 4.1. Nuestro modelo . . . . .                                                                       | 21         |
| 4.1.1. inducción simétrica . . . . .                                                                | 23         |
| 4.1.1.1. regimen $r > 0, b > 0$ . . . . .                                                           | 26         |
| 4.1.1.2. regimen $r < 0, b < 0$ . . . . .                                                           | 26         |
| 4.1.1.3. Geometría de los equilibrios inducidos para $r < 0, b < 0$ . . . . .                       | 27         |
| 4.2. Análisis de estabilidad lineal . . . . .                                                       | 28         |
| 4.2.1. Jacobiano del modelo inducido . . . . .                                                      | 29         |
| 4.2.2. Evaluaciones en equilibrios . . . . .                                                        | 30         |
| 4.2.2.1. En el origen $\mathbf{x}_1 = (0, 0, 0)$ . . . . .                                          | 30         |
| 4.2.2.2. En los equilibrios Lorenz . . . . .                                                        | 32         |
| 4.3. Exploración numérica . . . . .                                                                 | 37         |
| 4.4. viaración de $c_1$ . . . . .                                                                   | 38         |
| 4.4.1. Diagrama de bifurcación uniparamétrico . . . . .                                             | 38         |

|                                                                                                                                 |           |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 4.5. Diagrama de bifurcación uniparamétrico (tiempo de integración ampliado)                                                    | 41        |
| 4.6. Multiestabilidad de atractores caótico–periódico . . . . .                                                                 | 44        |
| 4.6.1. Series temporales de la configuración multiestable . . . . .                                                             | 46        |
| 4.7. Cuencas de atracción con estructura fractal . . . . .                                                                      | 48        |
| 4.8. variación de $c_2$ . . . . .                                                                                               | 52        |
| <b>5. Conclusiones</b>                                                                                                          | <b>57</b> |
| <b>6. Apendice</b>                                                                                                              | <b>60</b> |
| 6.1. Programación en C y Python: Exponentes de Lyapunov, diagrama de<br>bifurcación y cuencas de atracción . . . . .            | 60        |
| 6.1.1. Pseudocódigo para el cálculo de los exponentes de lyapunov en<br>un sistema dinámico tridimensional . . . . .            | 60        |
| 6.1.2. Pseudocódigo para el cálculo del diagrama de bifurcación con $c_1$<br>como parámetro . . . . .                           | 62        |
| 6.1.3. Pseudocódigo para el cálculo de cuencas de atracción vía sección<br>de Poincaré y clasificación por centroides . . . . . | 63        |
| 6.2. Programación en mathematica : Espacio fase . . . . .                                                                       | 66        |
| 6.2.0.1. Atributos del integrador numérico de Mathematica 14 .                                                                  | 68        |
| <b>Bibliografía</b>                                                                                                             | <b>70</b> |

# Índice de figuras

---

- 3.1. Integración numérica del sistema de Lorenz mediante el integrador adaptativo de Runge–Kutta implementado en `NDSolve` de *Mathematica*. Los parámetros se fijaron en  $(\sigma, r, b) = (10, 28, \frac{8}{3})$  y la condición inicial fue  $\mathbf{x}_0 = (1, 0, 0)$ . Los puntos en rojo corresponden al tiempo transitorio  $0 \leq t \leq 5$ , mientras que los puntos en negro representan la evolución para  $5 \leq t \leq 100$ , donde la órbita se aproxima al atractor clásico de Lorenz. . . . . 10
  
- 4.1. Diagrama de bifurcación uniparamétrico en  $c_1$  para  $q(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2$  con parámetros fijos  $a_0 = 29$ ,  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = -1$ ,  $r = -1$ ,  $b = -10^{-1}$  y  $(c_0 = 1, c_2 = 4)$  constantes; condiciones iniciales  $\mathbf{x}_{01} = (0.5, -0.5, 5)$  en rojo,  $\mathbf{x}_{02} = (-0.5, 0.5, 2)$  en azul y  $\mathbf{x}_{03} = (-0.5, -0.5, 0.5)$  en negro. Barrido denso  $\Delta c_1 = 10^{-5}$  e integración con LSODA ( $\text{rtol} = 10^{-6}$ ,  $\text{atol} = 10^{-9}$ ); por cada valor de  $c_1$  se descarta un transitorio  $t_{\text{tr}} = 10^2$  y se registra una ventana de observación definida por  $it = 10^3$  máximos de  $x$ , por lo que el tiempo efectivo por muestra es deliberadamente corto. Pese a esa limitación temporal, el diagrama organiza con claridad el comportamiento por intervalos: en  $I_1 [0, 0.9]$  aparecen ventanas periódicas primarias; en  $I_2 (0.9, 12.8]$  persiste una rama estable de período uno; en  $I_3 (12.8, 15.6]$  se observan crisis interiores y fusión de bandas; en  $I_4 (15.6, 28.8]$  se restituye la órbita de período uno; en  $I_5 (28.8, 33.0]$  emerge un bloque multestable con ventanas anchas; en  $I_6 (33.0, 35.5]$  subsisten ventanas estrechas separadas por lenguas caóticas; en  $I_7 (35.5, 40]$  domina una multistabilidad asimétrica con fuerte dependencia de la cuenca. La fineza del paso en  $c_1$  confiere resolución en los umbrales, pero las conclusiones dinámicas deben confirmarse con secciones de Poincaré y exponentes de Lyapunov. . . . . 40
- 4.2. Diagrama de bifurcación usando  $c_2$  como parámetro de control . . . . . 43
- 4.3. Diagrama de bifurcación con los mismos parámetros que 4.1 pero con un tiempo de integración mayor (3 ordenes de magnitud mayor) . . . . . 43

|       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |    |
|-------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 4.4.  | Proyecciones en los planos coordenados del atractor 4.5 . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 44 |
| 4.5.  | Órbitas del sistema inducido $S^z$ para $a_0 = 29$ , $a_1 = 0$ , $a_2 = -1$ , $c_0 = 1$ , $c_1 = 6.2$ , $c_2 = 4$ , $r = -1$ , $b = -10^{-1}$ . Integración con <code>NDSolve</code> en $t \in [0, 12000]$ ; se muestra la fase asintótica $t \in [11600, 12000]$ . Condiciones iniciales: $\mathbf{x}_{01} = (0.5, -0.5, 5)$ (negro), $\mathbf{x}_{02} = (-0.5, 0.5, 2)$ (azul), $\mathbf{x}_{03} = (-0.5, -0.5, 0.5)$ (rojo). Para este valor de $c_1$ coexisten un <i>ciclo límite</i> estable (traza negra) y dos <i>atractores extraños</i> (trazas azul y roja), evidenciando <i>multistabilidad</i> dependiente de la condición inicial. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 45 |
| 4.6.  | soluciones $x(t)$ , $y(t)$ , $z(t)$ del sistema $S_1^z$ inicializado con $\mathbf{x}_{00} = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 5)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 46 |
| 4.7.  | Evolución temporal de las variables $x(t)$ , $y(t)$ y $z(t)$ (de arriba hacia abajo) para tres condiciones iniciales, con parámetros $a = \{29, 0, -1\}$ , $c = \{1, 6.2, 4\}$ , $r = -1$ , $b = -0.1$ . Las trayectorias negra, azul y roja muestran la coexistencia de un ciclo límite y un atractor extraño, reflejando la propiedad de multiestabilidad del sistema inducido. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 47 |
| 4.8.  | Cuenca de atracción de tres ciclos límite . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 50 |
| 4.9.  | Cuencas de atracción en la sección $z = 0.5$ del sistema inducido $S^z$ con $a_0 = 29$ , $a_1 = 0$ , $a_2 = -1$ , $c_0 = 1$ , $c_1 = 18$ , $c_2 = 1$ , $r = -1$ , $b = -0.1$ . Malla $800 \times 800$ en $(x_0, y_0) \in [-10, 10]^2$ . Integración con <code>solve.ivp</code> en $[0, 150]$ , transitorio $t_{tr} = 30$ y paso máximo 0.05. Clasificación por sección de Poincaré en $z = 0.5$ : se promedia el centroide de los cruces (al menos 3) y se asigna al atractor de referencia más próximo (tolerancia <code>EPS.CENT</code> = 4); se marca “no-convergence” si $\ X(t)\  > 10^2$ en algún instante. Codificación: <b>negro</b> = Attractor 1, <b>rojo</b> = Attractor 2, <b>amarillo</b> = Attractor 3, <b>violeta</b> = no-convergence, <b>blanco</b> = órbitas acotadas no asignadas. Predomina la cuenca negra, mientras que un canal central meandriforme muestra interdigitaciones rojo/amarillo con fronteras filamentosas de apariencia fractal; las lenguas violetas y los bolsillos blancos son escasos y localizados. El mapa confirma <i>multiestabilidad</i> para estos parámetros: coexisten tres ciclos límite estables con cuencas entrelazadas. | 51 |
| 4.10. | Comparación de nueve atractores generados al variar $c_2$ , con $\mathbf{a} = (29, 0, -1)$ , $\mathbf{c} = (1, 0.1, c_2)$ , y $\mathbf{p}_L = (-1, -0.1)$ . Las trayectorias se integraron con <code>NDSolve[]</code> hasta $t = 3000$ , considerando un transitorio de $t = 2800$ . Se muestran las tres condiciones iniciales: en negro $(0.5, -0.5, 5)$ , en azul $(-0.5, 0.5, 2)$ , y en rojo $(-0.5, -0.5, 0.5)$ . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 52 |
| 4.11. | $\mathbf{a} = (29, 0, -1)$ , $\mathbf{c} = (1, 0.1, 0.3)$ , $\mathbf{p}_L = (-1, -0.1)$ . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 53 |
| 4.12. | $\mathbf{a} = (29, 0, -1)$ , $\mathbf{c} = (1, 0.1, 0.32)$ , $\mathbf{p}_L = (-1, -0.1)$ . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 53 |
| 4.13. | $\mathbf{a} = (29, 0, -1)$ , $\mathbf{c} = (1, 0.1, 0.8)$ , $\mathbf{p}_L = (-1, -0.1)$ . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 53 |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 4.14. Evolución tridimensional del sistema inducido con $\mathbf{a} = (29, 0, -1)$ , $\mathbf{c} = (35, 1, 0.1)$ , y $\mathbf{p}_L = (-1, -0.1)$ , integrado con <code>NDSolve[]</code> hasta $t = 300$ tras un transitorio de $t = 100$ . Las trayectorias negra y azul permanecen acotadas, mientras que la roja presenta crecimiento no acotado en norma euclídea, lo que indica divergencia hacia infinito desde la condición inicial $(-0.5, -0.5, 0.5)$ . . . . . | 54 |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|

# Introducción

---

## 1.1. Sesenta y dos años de teoría del caos

La teoría moderna de los sistemas dinámicos ha evolucionado a través de una serie de hitos matemáticos que han ido ampliando tanto el alcance de las preguntas planteadas como la precisión de las herramientas utilizadas. En la primera mitad del siglo XX, obras como la de Birkhoff [1] pusieron de relieve que el problema no era resolver explícitamente las ecuaciones diferenciales, sino comprender la estructura global del flujo que generan. La noción de órbitas periódicas, medidas invariantes y el análisis topológico del espacio fase se convirtieron en la base para investigar el comportamiento a largo plazo de soluciones que rara vez admiten expresiones cerradas.

La conexión entre ecuaciones diferenciales y álgebra lineal quedó formalizada con Hirsch y Smale [2], quienes mostraron que la estabilidad de equilibrios y ciclos límite depende del espectro de la matriz jacobiana y de los subespacios invariantes asociados. Este planteamiento introdujo la noción de variedades estables e inestables como objetos centrales para describir la geometría de las trayectorias.

El análisis detallado de las ecuaciones de Lorenz [3] realizado por Sparrow [4] puso de manifiesto que un sistema polinómico tridimensional podía generar atractores extraños [5, 6, 7, 8, 9]. En su estudio aparecen bifurcaciones de Hopf [3], órbitas homoclínicas y duplicaciones de periodo [10, 11, 12], mostrando con precisión los mecanismos que conducen al caos.

En paralelo, se desarrolló el estudio de sistemas discretos. McCauley [13] abordó el caos desde el punto de vista de los mapas iterados, introduciendo fractales y métodos algorítmicos para caracterizar sus propiedades. El manual de Alligood, Sauer y Yorke [14] presentó criterios para diagnosticar caos en mapas y flujos, mostrando cómo valores propios, teoría topológica de coberturas y transitividad topológica se integran en un lenguaje común.

La necesidad de una teoría unificada de bifurcaciones se plasmó en el tratado de Kuznetsov [15], donde se estudian con detalle las bifurcaciones locales (saddle-node, pitch-

fork, Hopf) y globales (homoclínicas, heteroclínicas), con métodos de reducción al centro y análisis de variedades invariantes. Este texto se convirtió en la referencia estándar para transiciones dinámicas en sistemas no lineales.

Una formalización ergódica del caos fue desarrollada por Barreira y Pesin [16], quienes establecieron la existencia y propiedades de los exponentes de Lyapunov en sistemas diferenciables, mostrando cómo medir la sensibilidad a condiciones iniciales en un marco riguroso.

El inicio del siglo XXI amplió el alcance de la disciplina. Wiggins [17] enfatizó el enfoque geométrico en sistemas aplicados, mientras que Hasselblatt y Katok [18] ofrecieron un panorama de la dinámica hiperbólica y parcialmente hiperbólica. Sprott [19] introdujo métodos prácticos para analizar series temporales, reconstruir atractores y estimar dimensiones fractales y espectros de Lyapunov a partir de datos experimentales.

Un vínculo entre dinámica y álgebra lineal se explicita en Golan [20], mientras que Gekele [21] muestra cómo algoritmos numéricos y experimentos computacionales permiten atacar problemas de mecánica y dinámica no lineal.

Con la expansión del cómputo surgieron preguntas sobre cómo garantizar la validez de los resultados numéricos. El método de parametrización de variedades invariantes desarrollado por Haro et al. [22] permite calcular objetos caóticos con series formales y cotas de error, asegurando la validez matemática de los cálculos.

En años recientes, la atención se dirigió hacia la multiestabilidad y los atractores ocultos. Pham, Volos y Kapitaniak [23] mostraron la existencia de atractores ocultos en circuitos electrónicos, conjuntos invariantes cuyas cuencas no están conectadas con equilibrios. El volumen editado por Wang, Kuznetsov y Chen [24] reúne resultados sobre coexistencia de múltiples atractores y cuencas fractales. Kuznetsov y Reitmann [25] abordaron la estimación de la dimensión de atractores con algoritmos numéricamente respaldados. En paralelo, nuevas referencias han actualizado el acceso pedagógico a la disciplina: Dilão [26] con una introducción integrando ejemplos computacionales; Laplante y Laplante [27] con un texto que enlaza caos, fractales y sistemas dinámicos; y la segunda edición de Layek [28], que incorpora de forma actualizada bifurcaciones, caos y aplicaciones.

Otros textos complementan esta narrativa. El manual de Sprott sobre rutinas numéricas [29] vincula directamente la programación con la práctica de la dinámica, mientras que Parker y Chua [30] aportaron algoritmos específicos para localizar órbitas periódicas inestables y calcular exponentes de Lyapunov en sistemas caóticos. El libro de Chua abre la puerta a la conexión entre teoría y circuitos no lineales, anticipando los experimentos contemporáneos.

Desde los flujos estudiados por Birkhoff hasta los algoritmos validados de Haro y los fenómenos de multiestabilidad compilados por Wang y colaboradores, la disciplina se ha transformado en un campo que integra ecuaciones diferenciales, mapas iterados, geometría, ergódica, cómputo y aplicaciones en ciencias como la física, la biología, la

economía entre otras áreas. La evolución recogida de esta disciplina refleja una expansión en tres frentes: el objeto matemático (de equilibrios a atractores ocultos), el marco temporal (discreto y continuo), y las herramientas de análisis (del álgebra lineal y la topología a los algoritmos validados numéricamente).

Más recientemente, Rivas y Estevez [31] ampliaron el marco clásico del sistema de Lorenz al introducir la noción de *equilibrios inducidos* mediante una función racional cuadrática. Esta construcción permite que, en lugar de contar únicamente con los puntos fijos aislados característicos del modelo original, el sistema posea familias continuas de equilibrios parametrizados por una variable interna. El resultado es un cambio sustancial en la geometría del espacio fase: aparecen nuevas variedades invariantes asociadas a direcciones neutras y configuraciones que enriquecen la dinámica accesible. Esta propuesta enlaza la tradición de estudiar equilibrios aislados y sus bifurcaciones con un escenario donde el conjunto de estados de reposo se organiza en estructuras más amplias, abriendo un nuevo camino dentro de la teoría de sistemas caóticos tridimensionales.

Motivados por el trabajo publicado en 2025 [31], abordamos el caso en que la función racional cuadrática actúa en la dirección  $z$ , esto es,  $\sigma(z)$ . Al imponer las condiciones de equilibrio del sistema de Lorenz, el ideal  $\langle rx - y - xz, -bz + xy \rangle$  admite descripciones locales distintas según la variable libre: mientras en la dirección  $x$  los equilibrios inducidos se expresan como  $(x, y(x), z(x))$ , en la dirección  $z$  se obtienen representaciones del tipo  $(\mp x(z), \pm y(z), z)$ . Se trata de la misma estructura geométrica : *una familia  $\mathcal{E}$  de equilibrios de clase diferenciable* descrita en cartas diferentes; el cambio de parametrización no altera su dimensión ni su regularidad, pero sí la conveniencia del análisis local (por ejemplo, del linealizado y de las variedades estable/inestable en torno a  $\mathcal{E}$ ). Nuestro interés es estudiar con detalle esta carta  $z$ , caracterizar el espectro del linealizado sobre la familia y su interacción con valores de parámetros no convencionales de tipo Sprott [32] ( $r < 0, b < 0$ ;  $b < 0$  y  $r = 0$  conduce a la “*mariposa rota*”), para evaluar la persistencia de direcciones neutras, el acoplamiento con variedades invariantes y los posibles escenarios de multiestabilidad y atractores ocultos.

Nuestro trabajo de tesis esta organizado de la siguiente forma:

- En el Capítulo 2 abordamos el estudio de órbitas periódicas y conjuntos límite, retomando el marco clásico de las ecuaciones diferenciales autónomas. Se establece la noción de conjuntos  $\alpha$ -límite y  $\omega$ -límite, primero en dimensión uno, donde las soluciones son necesariamente monótonas y convergen a un equilibrio, y posteriormente en dimensión dos, donde surge la posibilidad de ciclos. La introducción del Teorema de Poincaré–Bendixson permite clasificar los conjuntos límite planares en tres categorías: equilibrios, órbitas periódicas y combinaciones de equilibrios con arcos de conexión. Esta caracterización ilustra por qué el caos requiere al menos tres dimensiones continuas, a diferencia de los mapas donde ya aparece en dimensión uno. A partir de este punto, el capítulo prepara el terreno para el

análisis de dinámicas más complejas, destacando el papel de las órbitas periódicas como organizadores de la geometría global del flujo.

- En el Capítulo 3 la atención se desplaza hacia el sistema de Lorenz, cuya formulación en 1963 marcó el inicio de una nueva etapa en el estudio del caos determinista. Las ecuaciones reducidas de la convección atmosférica no sólo constituyen un modelo paradigmático, sino que también muestran cómo un sistema tridimensional sencillo puede albergar dinámica impredecible. El capítulo recorre las propiedades estructurales esenciales: la simetría de reflexión en el plano  $(x, y)$ , la estabilidad del origen y la emergencia de equilibrios no triviales que, mediante bifurcaciones de Hopf, abren la puerta a regímenes oscilatorios y caóticos. Se establecen conjuntos absorbentes que certifican el carácter disipativo del flujo y se introduce la noción de atractor extraño, acompañado de su caracterización mediante contracción de volúmenes y exponentes de Lyapunov. A través del mapa de Lorenz se expone la conexión entre dinámica continua y discreta, revelando la inestabilidad de posibles órbitas cerradas y reforzando la concepción del atractor como organizador global de trayectorias. La discusión culmina con la extensión del sistema a variables complejas.
- En el Capítulo 4 desarrollamos el modelo inducido en la carta  $z$ , con  $\sigma(z)$  racional cuadrática. Se establece que el conjunto de equilibrios se descompone en la rama clásica de Lorenz y una rama inducida definida por los ceros del numerador. En régimen simétrico ( $a_1 = 0$ ) aparecen dos alturas  $\tilde{z}_{\pm}$  que generan pares antipodales en planos paralelos, de modo que el sistema puede alcanzar hasta siete equilibrios coexistentes (origen, dos de Lorenz y cuatro inducidos). Se prueba que los sistemas  $S_1^z$  y  $S_2^z$  comparten el mismo lugar estacionario pero no son equivalentes topológicamente. El análisis de estabilidad lineal da condiciones explícitas para Hopf: en el origen ocurre cuando  $\sigma_0 = -1$  con  $r > 1$ , mientras que en  $r < 0$ ,  $b < 0$  el origen nunca bifurca. En los equilibrios no triviales, el polinomio característico muestra que la sustitución  $\sigma \mapsto \sigma(r - 1)$  modifica la condición clásica y produce loci de Hopf en el plano  $(a_0, a_2)$  gobernados por la realidad de un parámetro  $\Theta$ . Bajo  $r < 0$ ,  $b < 0$  se identifican configuraciones de multiestabilidad y geometrías con baricentro en el origen, análogas a la “*mariposa rota*” de Sprott. Estas propiedades revelan cómo la inducción en  $z$  altera el espectro y amplía el espacio de dinámicas posibles, incluyendo coexistencia de ciclos, atractores extraños y cuencas fractales.
- En el Capítulo 5 damos conclusiones generales de nuestra investigación.

Estos cinco capitulares se acompañan de un apéndice que incluye los algoritmos *programados*/implementados en Mathematica 14 que utilizamos para la realización de este trabajo de grado.

---

## Capítulo 2

# Órbitas periódicas y conjuntos límite

---

### 2.1. Conjuntos límite para ecuaciones diferenciales planares

Comenzamos con una ecuación diferencial autónoma

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{f}(\mathbf{v}), \quad (2.1)$$

donde  $\mathbf{f}$  es una aplicación de  $\mathbb{R}^n$  en sí mismo, diferenciable o al menos Lipschitziana, para garantizar unicidad. Así para  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{f}$  es un mapeo escalar (unidimensional). Cuando  $\mathbf{v}$  es un vector en  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbf{f}$  es una función vectorial de dos variables escalares, y el retrato fase de (2.1) es un plano fase. Recordemos la definición de flujo: Para un punto  $\mathbf{v}_0 \in \mathbb{R}^n$ , escribimos  $\mathbf{F}(t, \mathbf{v}_0)$  para la solución única de (2.1) que satisface  $\mathbf{F}(0, \mathbf{v}_0) = \mathbf{v}_0$ .

---

**Definición 1** [DEFINICIÓN 1].

*Un punto  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$  pertenece al conjunto  $\omega$ -límite  $\omega(\mathbf{v}_0)$  de la curva solución  $\mathbf{F}(t, \mathbf{v}_0)$  si existe una sucesión de puntos cada vez más lejanos a lo largo de la órbita (es decir, cuando  $t \rightarrow +\infty$ ) que converge a  $\mathbf{z}$ . En forma precisa,  $\mathbf{z} \in \omega(\mathbf{v}_0)$  si existe una sucesión creciente no acotada  $\{t_n\}$  de números reales tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{F}(t_n, \mathbf{v}_0) = \mathbf{z}.$$

*Análogamente, un punto  $\mathbf{z}$  pertenece al conjunto  $\alpha$ -límite  $\alpha(\mathbf{v}_0)$  si existe una suce-*

*sión decreciente no acotada  $\{t_n\}$  de números reales (con  $t_n \rightarrow -\infty$ ) tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{F}(t_n, \mathbf{v}_0) = \mathbf{z}.$$

En el caso de aplicaciones, la sucesión creciente no acotada  $\{t_n\}$  de números reales de la definición(1) se reemplaza por una sucesión creciente no acotada  $\{m_n\}$  de enteros positivos (iteraciones de la aplicación). Si  $\mathbf{v}_0$  es un equilibrio, entonces  $\omega(\mathbf{v}_0) = \alpha(\mathbf{v}_0) = \{\mathbf{v}_0\}$ . Además, para cualquier  $\mathbf{v}_0$ , el conjunto  $\alpha$ -límite de la ecuación  $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{f}(\mathbf{v})$  es el conjunto  $\omega$ -límite de  $\dot{\mathbf{v}} = -\mathbf{f}(\mathbf{v})$ .

**Teorema 2.1.1.** *Todas las soluciones de la ecuación diferencial escalar*

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.2}$$

*son monótonamente crecientes o monótonamente decrecientes como función de  $t$ . Para  $x_0 \in \mathbb{R}$ , si la órbita  $F(t, x_0)$ ,  $t \geq 0$ , es acotada, entonces  $\omega(x_0)$  consiste únicamente en un equilibrio.*

**Demostración del Teorema 2.1.1.** Supongamos que, para una condición inicial fija  $x_0$ , existe un instante  $t^*$  en el que la solución  $\mathbf{F}(t, x_0)$  presenta un máximo o mínimo local  $x^*$  como función de  $t$ . Entonces  $\dot{x}(t^*) = f(x^*) = 0$ , de modo que  $x^*$  es un equilibrio y existe una solución idénticamente igual a  $x^*$ . Por la unicidad de soluciones, se tiene que  $\mathbf{F}(t, x_0) \equiv x^*$  para todo  $t$ . Esto implica que ninguna solución puede “invertir su dirección”, por lo que todas son monótonas. En un intervalo  $[x_0, x_1]$  que no contenga un equilibrio (es decir, donde  $f \neq 0$ ), la ecuación (2.2) puede reescribirse como

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{f(x)}. \tag{2.3}$$

Integrando ambos lados desde  $x_0$  hasta  $x_1$ , se obtiene

$$t(x_1) - t(x_0) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{f(x)} < \infty. \tag{2.4}$$

Concluimos que una trayectoria recorre cualquier intervalo cerrado y acotado sin equilibrios en tiempo finito.

Si  $f(x_0) > 0$ , la órbita  $\mathbf{F}(t, x_0)$  crece con  $t$  mientras esté por debajo del primer equilibrio. No puede detenerse en un punto inferior al equilibrio, ya que recorre en tiempo finito un intervalo centrado en dicho punto, y no puede alcanzar el equilibrio por la unicidad de soluciones. Por lo tanto, converge monótonamente al equilibrio cuando  $t \rightarrow \infty$ .

Un argumento análogo se aplica al caso  $f(x_0) < 0$ .

El Teorema 2.1.1 describe los conjuntos  $\omega$ -límite para ecuaciones diferenciales autónomas escalares y muestra que son relativamente simples: la órbita o bien diverge al infinito, o, si es acotada, converge a un único equilibrio. Para ecuaciones diferenciales de dimensión dos o superior, existe otro comportamiento asintótico denominado órbita periódica. Al igual que los equilibrios, las órbitas periódicas pueden atraer soluciones y, por lo tanto, constituir conjuntos  $\omega$ -límite.

---

**Definición 2** [DEFINICIÓN 2].

---

*Si existe un  $T > 0$  tal que  $\mathbf{F}(t + T, \mathbf{v}_0) = \mathbf{F}(t, \mathbf{v}_0)$  para todo  $t$ , y si  $\mathbf{v}_0$  no es un equilibrio, entonces la solución  $\mathbf{F}(t, \mathbf{v}_0)$  se denomina órbita periódica o ciclo. El menor de estos valores  $T$  se denomina período de la órbita.*

---

Una órbita periódica traza una curva cerrada simple en  $\mathbb{R}^n$ . El término *curva cerrada* se refiere a una trayectoria que comienza y termina en el mismo punto. Ejemplos de ello incluyen círculos, triángulos y curvas en forma de “ocho”. Una curva cerrada simple es aquella que no se cruza consigo misma; por lo tanto, una curva en forma de “ocho” no es simple. Por unicidad de soluciones, la curva cerrada correspondiente a una órbita periódica debe ser simple.

Ya hemos visto ejemplos de ciclos: en el Ejemplo 7.8, la solución  $\mathbf{F}(t, \mathbf{v}_0)$  es un círculo de radio  $|\mathbf{v}_0|$ . Toda condición inicial se encuentra sobre una órbita periódica circular de período  $2\pi$ , excepto el origen, que corresponde a un equilibrio.

La ecuación del péndulo de la Sección 7.5 también presenta ciclos cuando no hay fricción. Estas soluciones corresponden, físicamente, a oscilaciones completas de ida y vuelta del péndulo. La Figura 7.14 muestra órbitas que rodean equilibrios y que son curvas cerradas simples recorridas por el sistema.

## 2.2. Teorema de Poincaré–Bendixson

El célebre Teorema de Poincaré–Bendixson, que se enuncia en esta sección y se demuestra en la Sección 8.3, proporciona una clasificación de los conjuntos  $\omega$ -límite en el plano. Un conjunto  $\omega$ -límite de una ecuación autónoma bidimensional debe ser uno de los siguientes: (1) un conjunto de equilibrios; (2) una órbita periódica; o (3) un conjunto que contenga únicamente equilibrios y arcos de conexión. La Figura 8.3(b) muestra un círculo con dos arcos de conexión sobre él; todo el círculo constituye el conjunto límite de una trayectoria que espirala hacia su interior. Este ejemplo presenta conjuntos

$\omega$ –límite de los tipos (1) y (3).

Normalmente se trabaja con ecuaciones cuyos equilibrios son aislados, es decir, que hay solo un número finito de ellos en cualquier conjunto acotado. En particular, esto implica que cada equilibrio posee un entorno en el que no existen otros equilibrios. Para tales ecuaciones, un conjunto límite de tipo (1) contiene únicamente un punto de equilibrio. Ninguno de estos tres tipos de conjuntos  $\omega$ –límite puede ser un conjunto caótico. En todos los casos, cuando una órbita converge hacia uno de estos conjuntos, su comportamiento es completamente predecible. En particular, tal conjunto puede contener una órbita densa únicamente si el conjunto límite es una órbita periódica o un punto de equilibrio.

De este modo, se concluye a partir del siguiente teorema que, para ecuaciones diferenciales autónomas, el caos solo puede ocurrir en dimensión tres o superior. Como hemos visto, puede existir caos en aplicaciones unidimensionales, y para aplicaciones invertibles puede darse en dimensiones dos o superiores.

**Teorema 2.2.1** (Teorema de Poincaré–Bendixson). *Sea  $f$  un campo vectorial suave en el plano, tal que los equilibrios de  $\frac{d\mathbf{v}}{dt} = f(\mathbf{v})$  son aislados. Si la órbita hacia adelante  $F(t, \mathbf{v}_0)$ ,  $t \geq 0$ , es acotada, entonces se cumple una de las siguientes opciones:*

1.  $\omega(\mathbf{v}_0)$  es un equilibrio, o
2.  $\omega(\mathbf{v}_0)$  es una órbita periódica, o
3. Para cada  $\mathbf{u} \in \omega(\mathbf{v}_0)$ , los conjuntos límite  $\alpha(\mathbf{u})$  y  $\omega(\mathbf{u})$  son equilibrios.

La hipótesis de que los equilibrios sean aislados se incluye para simplificar la formulación del teorema. Si se omite esta suposición, es necesario contemplar la posibilidad de que  $\omega(\mathbf{v}_0)$  o  $\omega(\mathbf{u})$  sea un conjunto conexo de equilibrios.

Las tres posibilidades que permite el Teorema 2.2.1 se ilustran en la Figura 8.4. En el caso (a), el conjunto  $\omega$  de la solución mostrada es un equilibrio; en (b), ambas soluciones tienen como conjunto  $\omega$  la órbita periódica circular. En (c), el conjunto  $\omega$  de la órbita más externa es el equilibrio  $\mathbf{P}$  junto con los dos arcos de conexión que comienzan y terminan en  $\mathbf{P}$ . Tal como exige el Teorema 2.2.1, cualquier punto  $\mathbf{u} \in \omega(\mathbf{v}_0)$  tiene la propiedad de que  $\omega(\mathbf{u}) = \mathbf{P}$ .

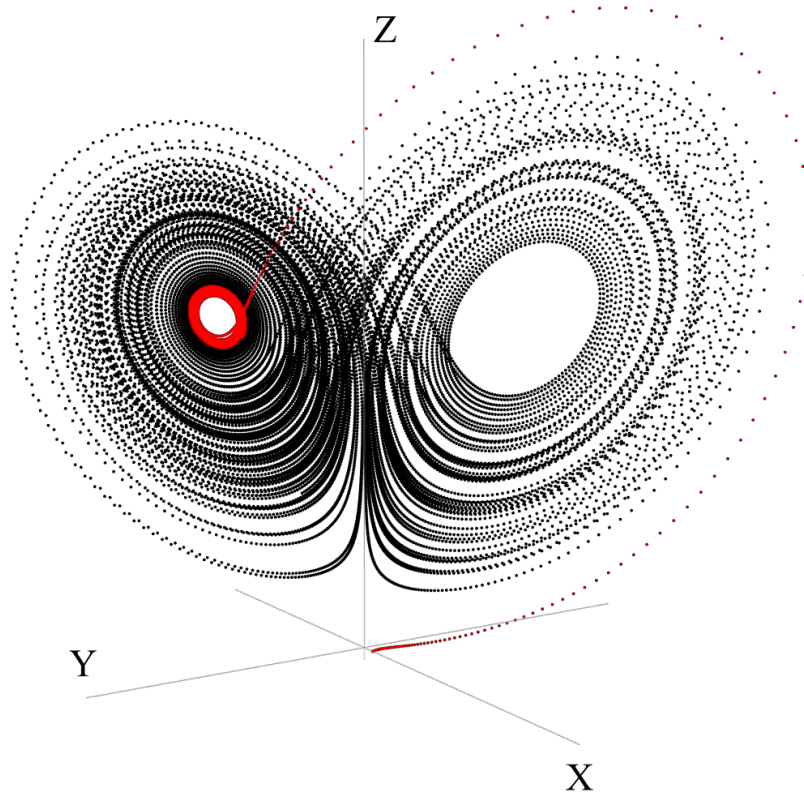
En la siguiente sección se discuten propiedades de los conjuntos límite, no sólo para flujos planos, sino también para ecuaciones autónomas en cualquier dimensión. Dichas propiedades se emplean posteriormente en la demostración del Teorema de Poincaré–Bendixson, la cual se presenta en la Sección 8.3.

## Definiciones y propiedades del sistema clásico de Lorenz

---

El sistema de Lorenz ha sido estudiado de manera extensa debido a la riqueza de su estructura y a la variedad de comportamientos que exhibe. En el análisis local, la identificación de los tres equilibrios característicos : el origen y los dos puntos simétricos que existen cuando  $r > 1$  conduce al examen del Jacobiano en cada equilibrio. La aplicación del teorema de Hartman-Grobman, bajo la restricción de hiperbolicidad, garantiza que la dinámica en un entorno de cada equilibrio sea topológicamente conjugada a la de su linealización. De esta forma, mediante criterios como el de Routh-Hurwitz, se determinan regiones de estabilidad e inestabilidad y se establecen los umbrales donde emergen bifurcaciones críticas [33]. Esta base local se enlaza con la descripción global de la dinámica, en la que aparecen propiedades caóticas certificadas por exponentes de Lyapunov positivos, dimensiones fractales no enteras (también llamada dimensión de Lyapunov), irregularidad temporal y mezcla topológica, rasgos que consolidan al atractor de Lorenz como prototipo del caos determinista [34].

El estudio del caos surgió en la década de 1970 con el trabajo de Edward Lorenz. Lorenz pensó que había descubierto el sistema matemáticamente más simple de ecuaciones diferenciales ordinarias capaz de producir caos. Las ecuaciones de Lorenz se convirtieron en un paradigma del caos y el atractor extraño asociado (Figura 3.1). Este se asemeja de manera fortuita a las alas de una mariposa y se transformó en un emblema para los primeros investigadores del caos. Historicamente Lorenz no se propuso descubrir el caos, sino que intentaba encontrar un sistema de ecuaciones cuyas soluciones fueran más complicadas que las periódicas [35, 36]. Después de encontrar tal sistema, la dependencia sensible a las condiciones iniciales (el “efecto mariposa”) surgió como una sorpresa.



**Figura 3.1:** Integración numérica del sistema de Lorenz mediante el integrador adaptativo de Runge–Kutta implementado en `NDSolve` de *Mathematica*. Los parámetros se fijaron en  $(\sigma, r, b) = (10, 28, \frac{8}{3})$  y la condición inicial fue  $\mathbf{x}_0 = (1, 0, 0)$ . Los puntos en rojo corresponden al tiempo transitorio  $0 \leq t \leq 5$ , mientras que los puntos en negro representan la evolución para  $5 \leq t \leq 100$ , donde la órbita se aproxima al atractor clásico de Lorenz.

Las ecuaciones que derivó después de reducir un sistema original de 12 dimensiones para modelar la convección atmosférica a tres dimensiones son [37]:

$$\dot{x} = \sigma(y - x), \quad \dot{y} = rx - y - xz, \quad \dot{z} = xy - bz. \quad (3.1)$$

Aquí, la sobrepuntuación denota derivada temporal  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ . Se requieren tres variables  $(x, y, z)$  debido al teorema de Poincaré–Bendixson. En Hirsch [2] señalan que la dinámica más complicada que puede ocurrir con sólo dos variables es periódica. El hecho de

que existan tres parámetros, que Lorenz tomó como  $\sigma = 10$ ,  $r = 28$  y  $b = 8/3$ , no es coincidencia. Es posible reescalar linealmente las variables  $x, y, z$  y  $t$  de modo que cuatro de los siete términos en el lado derecho de la Ecuación (3.1) tengan coeficientes iguales a 1. La elección de dónde colocar los coeficientes restantes es arbitraria, pero Lorenz los seleccionó para representar el número de Prandtl ( $\sigma$ ), el número de Rayleigh ( $r$ ) y la razón de aspecto de los cilindros de convección ( $b$ ). Para los valores usados por Lorenz, los exponentes de Lyapunov [19] se dan como  $\lambda = 0.9056, 0, -14.5723$ . Este sistema ha sido ampliamente estudiado y existe un libro entero dedicado a él [4]. Sin embargo, no se ha difundido ampliamente que puede simplificarse de diversas maneras.

### 3.1. Efecto mariposa en el sistema de Lorenz

Una simplificación trivial es fijar uno o más de los tres parámetros en 1. Existen tres maneras de hacerlo sin destruir el caos:

$$(r, \sigma, b) = (4, 16, 1), \quad (1, 16, 0.03), \quad (1, -17, -1).$$

Los atractores para estos tres casos preservan la estructura de doble lóbulo del sistema de Lorenz, como se muestra en la Figura 2 respectivamente. El exponente de Lyapunov se da como  $\lambda_i = (0.3359, 0, -6.3359)$ ,  $\lambda_i = (0.0531, 0, -2.0831)$  y  $\lambda_i = (0.0629, 0, -1.0629)$ , respectivamente. Notemos que, aunque todas las figuras las denominadores “atractores”, en realidad son solo una porción de una trayectoria tridimensional típica (representación temporal).

El sistema de Lorenz es ligeramente *in-elegante* en el sentido de que tanto la escala temporal como el tamaño del atractor dependen de los parámetros. Cada parámetro tiene dimensiones de inverso del tiempo. Así, la Ecuación (3.4) puede ponerse en forma adimensional mediante la transformación lineal  $x \rightarrow \sqrt{\sigma r}x$ ,  $y \rightarrow \sqrt{\sigma r}y$ ,  $z \rightarrow \sqrt{\sigma r}y + r$ ,  $t \rightarrow t/\sqrt{\sigma r}$ , lo que conduce al sistema:

$$\dot{x} = \alpha(y - x), \quad \dot{y} = -xz - \gamma y, \quad \dot{z} = xy - \frac{\beta}{\alpha} - \beta z, \quad (3.2)$$

donde los nuevos parámetros adimensionales están dados en términos de los antiguos por  $\alpha = \sqrt{\sigma/r}$ ,  $\gamma = 1/\sqrt{\sigma r}$  y  $\beta = b/\sqrt{\sigma r}$ . Aunque este sistema aún tiene siete términos y dos no linealidades, el espacio de parámetros en el que es caótico ahora está acotado, con un exponente de Lyapunov máximo  $\lambda = (0.0713, 0, -0.6493)$  en  $(\alpha, \gamma, \beta) = (0.3, 0.028, 0.25)$ [19]. Más significativamente, la Ecuación (3.2) presenta soluciones caóticas incluso para  $\gamma = 0$  con valores como  $(\alpha, \gamma, \beta) = (0.6, 0, 0.3)$ . Además, los exponentes de Lyapunov son  $\lambda = (0.0645, 0, -0.9645)$ . Así, el sistema de Lorenz puede reducirse a uno con solo seis términos y dos parámetros.

Resulta que se puede avanzar aún más transformando la Ecuación (3.1) de la siguiente manera:  $x \rightarrow \sigma x$ ,  $y \rightarrow \sigma y$ ,  $z \rightarrow \sigma z + r$ ,  $t \rightarrow t/\sigma$ . Luego, se pueden tomar  $r, \sigma \rightarrow \infty$  de modo que  $k = br/\sigma^2$  permanezca finito, conduciendo al sistema de Lorenz sin difusión de van der Schrier y Mass [38]:

$$\dot{x} = y - x, \quad \dot{y} = -xz, \quad \dot{z} = xy - R. \quad (3.3)$$

Además, este sistema es caótico para un amplio rango del único parámetro  $R$ , incluyendo  $R = 1$ , con exponentes de Lyapunov  $\lambda = (0.2101, 0, -1.2101)$ . Su atractor tiene la familiar estructura de dos lóbulos del sistema de Lorenz. Esto ocurre con una dimensión de Kaplan–Yorke [39] de  $D_{KY} = 2.1736$ , en contraste con el caso de la Figura 3.1 cuya dimensión es  $D_{KY} = 2.062$ . De hecho, el sistema en la ecuación (3.3) tiene su dimensión máxima  $D_{KY} = 2.2354$  en  $R = 3.4693$ , significativamente mayor que cualquier otra variante del sistema de Lorenz. Un atractor similar de dos lóbulos, se obtiene si el término  $xy$  en la Ecuación (3.3) se reemplaza por  $y^2$ . Ambas formas fueron descubiertas inicialmente en una búsqueda sistemática de sistemas caóticos con solo cinco términos y dos no linealidades cuadráticas [40]. Representan una simplificación significativa del sistema original de Lorenz, ya que tienen dos términos menos y un único parámetro ( $R$ ) con caos para  $R = 1$ .

### 3.2. Ecuación diferencial en el sistema de Lorenz

En esta sección presentaremos algunas propiedades elementales del sistema de Lorenz con el fin de visualizar la geometría de las soluciones.

**Definición 3** [SISTEMA AUTÓNOMO  $n$ -DIMENSIONAL].

*Un sistema autónomo  $n$ -dimensional de ecuaciones diferenciales ordinarias es un sistema de la forma*

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)), \quad \dots, \quad \frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)). \quad (4)$$

*Usaremos la abreviatura  $\dot{X} = F(X)$  para  $X = (x_1, \dots, x_n)$ .*

**Definición 4** [EQUILIBRIO, ESTABILIDAD].

Un punto  $X = (x_1, \dots, x_n)$  es un equilibrio si  $f_i(X) = 0$  para todo  $i$ . El equilibrio es estable (o sumidero) si existe una vecindad  $U$  de  $X$  tal que, si  $Y \in U$ , la solución que pasa por  $Y$  permanece en  $U$  para todo tiempo y tiende a  $X$ . Es inestable (o fuente) si, para todo  $Y \in U \setminus \{X\}$ , la solución que pasa por  $Y$  eventualmente sale de  $U$ . En caso contrario,  $X$  es de tipo silla.

**Lema 3.2.1** (Linealización). Sea  $x_0$  una solución de equilibrio de  $\dot{X} = F(X)$ . La linealización alrededor de  $x_0$  está dada por el sistema  $\dot{Y} = DF(x_0)Y$ , donde  $DF(x_0)$  es la matriz jacobiana evaluada en  $x_0$ . La linealización preserva la naturaleza local del equilibrio.

**Definición 5** [SISTEMA DE LORENZ].

El sistema de Lorenz es el sistema autónomo tridimensional

$$\dot{x} = \sigma(y - x), \quad \dot{y} = rx - y - xz, \quad \dot{z} = xy - bz, \quad (3.4)$$

donde  $\sigma > 0$  (número de Prandtl),  $r > 0$  (número de Rayleigh) y  $b > 0$  (parámetro geométrico). Supondremos además  $\sigma > b + 1$ .

**Proposición 3.2.2** (Simetría de inversión en  $(x, y)$ ). Si  $(x(t), y(t), z(t))$  es una solución de (3.4), entonces  $(-x(t), -y(t), z(t))$  también lo es (la reflexión respecto del eje  $z$  preserva el campo vectorial).

**Demostración.** Sea  $(x, y, z)$  solución. Entonces

$$\dot{x} = \sigma(y - x) \Rightarrow -\dot{x} = \sigma((-y) - (-x)), \quad \dot{y} = rx - y - xz \Rightarrow -\dot{y} = r(-x) - (-y) - (-x)z,$$

y

$$\dot{z} = xy - bz \Rightarrow \dot{z} = (-x)(-y) - bz.$$

Por lo tanto,  $(-x, -y, z)$  satisface (3.4).  $\square$

**Proposición 3.2.3** (Estabilidad del origen). El origen es un equilibrio sumidero para  $0 \leq r < 1$ .

**Demostración.** La jacobiana de (3.4) es

$$DF(x, y, z) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r - z & -1 & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix},$$

y en el origen resulta

$$A := DF(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}.$$

Sus autovalores son  $-b < 0$  y las raíces del polinomio

$$\lambda^2 + (\sigma + 1)\lambda + \sigma(1 - r) = 0.$$

Para  $0 \leq r < 1$ , el término independiente es positivo y la traza es negativa, de modo que  $\lambda_{\pm} < 0$ . Luego, el origen es hiperbólico y sumidero (atractor global local) para  $0 \leq r < 1$ .  $\square$

**Proposición 3.2.4** (Equilibrios no triviales y ventana de estabilidad). *Si  $r > 1$ , existen dos equilibrios adicionales*

$$Q^{\pm} = (\pm \sqrt{b(r-1)}, \pm \sqrt{b(r-1)}, r-1).$$

*Son sumideros si*

$$1 < r < \frac{\sigma + b + 3}{\sigma - b - 1}.$$

**Demostración.** Se verifica directamente que  $Q^{\pm}$  anulan (3.4). La linealización en  $Q^{\pm}$  conduce al polinomio característico (dependiente de  $r, \sigma, b$ )

$$f(\lambda) = \lambda^3 + (1 + b + \sigma)\lambda^2 + b(\sigma + r)\lambda + 2b\sigma(r - 1).$$

Para  $r = 1$ , las raíces son  $0, -b, -(\sigma + 1)$ . El criterio de Routh–Hurwitz aplicado a  $f$  proporciona la condición de estabilidad indicada; la pérdida de estabilidad ocurre por una bifurcación de Hopf cuando un par de autovalores cruza el eje imaginario.  $\square$

**Proposición 3.2.5** (Conjunto absorbente elipsoidal). *Sea*

$$V(x, y, z) = r x^2 + \sigma y^2 + \sigma (z - 2r)^2.$$

Existe  $v^* > 0$  tal que cualquier solución que empiece fuera del elipsoide  $V(x, y, z) = v^*$  eventualmente entra y permanece en su interior para todo tiempo.

**Demostración.** Derivando a lo largo de soluciones de (3.4) se obtiene

$$\dot{V} = -2\sigma(r x^2 + y^2 + b(z - r)^2 - b r^2).$$

La cuádrica  $r x^2 + y^2 + b(z - r)^2 - 2b r^2 = 0$  es un elipsoide. Tomando  $v^*$  suficientemente grande de manera que la superficie  $V = v^*$  contenga estrictamente a dicho elipsoide, se tiene  $\dot{V} < 0$  siempre que  $V \geq v^*$ , lo que prueba que el elipsoide  $V = v^*$  es absorbente.  $\square$

### 3.3. Caos en el atractor de Lorenz

**Definición 6** [ATRATOR].

Un conjunto cerrado  $A$  es un atractor si:

1.  $A$  es invariante.
2. Existe un abierto  $U$  que contiene a  $A$  tal que, si  $X \in U$ , entonces la distancia de  $X$  a  $A$  tiende a cero cuando  $t \rightarrow \infty$ ; es decir,  $A$  atrae un conjunto abierto de condiciones iniciales.
3.  $A$  es minimal (no existe subconjunto propio de  $A$  que satisfaga (1) y (2)).

Un atractor es extraño si posee estructura fractal. Un atractor es caótico si exhibe dependencia sensible a las condiciones iniciales.

La Figura 5 muestra una solución proyectada sobre el plano  $xz$ , lo que brinda una idea de la forma geométrica del atractor de Lorenz. La trayectoria espirala alrededor de  $Q^-$  varias veces antes de cruzar para espiralar alrededor de  $Q^+$ . Continúa alternando indefinidamente, y el número de vueltas a cada lado varía como si fuese aleatorio. La primera propiedad interesante del atractor de Lorenz es que no tiene volumen, lo cual demostraremos a continuación.

**Proposición 3.3.1** (Contracción de volúmenes). *El sistema de Lorenz contrae volúmenes.*

**Demostración.** Sea  $D \subset \mathbb{R}^3$  una región con frontera suave y  $D(t)$  su imagen bajo el flujo de Lorenz. Denote  $V(t) = \text{vol } D(t)$ . Por el teorema de Liouville,

$$\frac{dV}{dt} = \int_{D(t)} \nabla \cdot F \, dx \, dy \, dz,$$

donde para  $F = (F_1, F_2, F_3)$  se tiene  $\nabla \cdot F = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial F_i}{\partial x_i}$ . Para (3.4) (con  $F_1 = \sigma(y - x)$ ,  $F_2 = rx - y - xz$ ,  $F_3 = xy - bz$ ) se obtiene

$$\nabla \cdot F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = -(\sigma + 1 + b).$$

Por tanto,

$$\frac{dV}{dt} = -(\sigma + 1 + b) V(t) \implies V(t) = e^{-(\sigma+1+b)t} V(0),$$

lo que muestra que cualquier volumen se contrae exponencialmente a cero. A un sistema con esta propiedad se le llama *disipativo*.  $\square$

**Corolario 3.3.2.** *El volumen del atractor de Lorenz es cero.*

Para justificar el carácter caótico, redefinimos los exponentes de Lyapunov para un sistema  $n$ -dimensional de EDOs.

**Definición 7** [EXPONENTES DE LYAPUNOV].

*Considérese la evolución de una infinitesimal esfera de condiciones iniciales; bajo el flujo se transforma en un elipsoide infinitesimal. Denote por  $\delta_k(t)$  la longitud del  $k$ -ésimo eje principal del elipsoide. Si*

$$\delta_k(t) \approx \delta_k(0) e^{\lambda_k t},$$

*entonces  $\lambda_k$  se llama el  $k$ -ésimo exponente de Lyapunov. Sea  $\lambda = \max_k \lambda_k$ .*

**Observación 3.3.3.** *Sea  $x(0)$  un punto del atractor y  $x(0) + \delta(0)$  un punto cercano. Si  $\delta(t)$  es la separación entre órbitas en el tiempo  $t$ , entonces  $|\delta(t)| \approx |\delta(0)| e^{\lambda t}$ . Un gráfico de  $\ln \delta(t)$  contra  $t$  (Figura 6) muestra una pendiente inicial  $\lambda \approx 0.9$  que después se satura al alcanzarse la separación máxima posible en el atractor. Un  $\lambda > 0$  indica*

dependencia sensible a las condiciones iniciales; por lo tanto, el atractor de Lorenz es caótico.

Como resultado notable del régimen caótico, analizamos el *mapa de Lorenz*.

**Definición 8** [MAPA DE LORENZ].

Lorenz definió <sup>a</sup>  $z_n$  como el  $n$ -ésimo máximo local de  $z(t)$  y representó  $z_{n+1}$  frente a  $z_n$ . Denotando esta función por  $f$ , el mapa de Lorenz queda

$$z_{n+1} = f(z_n),$$

tal como se ilustra en la Figura 13.

<sup>a</sup>Lorenz observó que la trayectoria tiende a abandonar una espiral tras alcanzar un umbral de distancia al centro, y que el exceso sobre dicho umbral parece determinar el número de espirales del siguiente giro

Por la geometría del mapa, es difícil distinguir entre comportamiento caótico y una órbita que eventualmente se hace periódica; no hay una prueba que descarte lo segundo para todas las condiciones iniciales del sistema de Lorenz. Sin embargo, sí podemos mostrar que, si existiesen órbitas cerradas, necesariamente serían inestables.

**Proposición 3.3.4** (Inestabilidad de órbitas cerradas). *Si el sistema de Lorenz posee órbitas cerradas, entonces son inestables.*

**Demostración.** Considere la sucesión  $\{z_n\}$  de una órbita cerrada. Al ser periódica, existe  $p \geq 1$  tal que  $z_{n+p} = z_n$ . Perturbe en  $z_n$  por  $\eta_n$  y estudie su evolución:

$$z_{n+1} + \eta_{n+1} = f(z_n + \eta_n) = f(z_n) + f'(z_n) \eta_n = z_{n+1} + f'(z_n) \eta_n,$$

por lo que  $\eta_{n+1} \approx f'(z_n) \eta_n$ . Iterando,

$$\eta_{n+2} \approx f'(z_{n+1}) \eta_{n+1} = f'(z_{n+1}) f'(z_n) \eta_n, \quad \dots, \quad \eta_{n+p} \approx \left[ \prod_{i=0}^{p-1} f'(z_{n+i}) \right] \eta_n.$$

Del gráfico típico del mapa de Lorenz se observa que  $|f'(z)| > 1$  para todos los  $z$  relevantes, de donde  $|\eta_{n+p}| > |\eta_n|$ . Por consiguiente, la órbita cerrada es inestable.  $\square$

### 3.4. Sistema de Lorenz en variables complejas: formulación y propiedades estructurales

**Definición 9** [SISTEMA DE LORENZ EN  $\mathbb{C}^3$ ].

Para  $a, b > 0$  y  $c \in \mathbb{R}$ , el sistema de Lorenz complejo es

$$\dot{x} = a(y - x), \quad \dot{y} = cx - y - x^*z, \quad \dot{z} = xy - bz, \quad (7)$$

donde  $x, y, z \in \mathbb{C}$  y  $x^*$  denota el conjugado complejo de  $x$ .

**Observación 3.4.1** (Realización real de dimensión seis). *Escribiendo  $x = x_1 + ix_2$ ,  $y = y_1 + iy_2$  y  $z = z_1 + iz_2$ , el sistema (7) es equivalente a un sistema polinómico en  $\mathbb{R}^6$  para  $(x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2)$ , con no linealidades al menos cuadráticas. En particular, la dependencia en  $x^*$  hace que el sistema no sea holomorfo, pero sí real-analítico.*

**Teorema 3.4.2** (Equivarianza de fase del grupo  $\mathbb{S}^1$ ). *El sistema (7) es  $\mathbb{S}^1$ -equivariante bajo*

$$\Phi_\varphi(x, y, z) = (e^{i\varphi}x, e^{i\varphi}y, e^{i2\varphi}z), \quad e^{i\varphi} \in \mathbb{S}^1.$$

**Demostración.** Sustituyendo  $(x, y, z) \mapsto (e^{i\varphi}x, e^{i\varphi}y, e^{i2\varphi}z)$  en (7) se obtiene

$$\frac{d}{dt}(e^{i\varphi}x) = e^{i\varphi}a(y - x), \quad \frac{d}{dt}(e^{i\varphi}y) = e^{i\varphi}(cx - y - x^*z), \quad \frac{d}{dt}(e^{i2\varphi}z) = e^{i2\varphi}(xy - bz),$$

pues  $(e^{i\varphi}x)^* e^{i2\varphi}z = e^{-i\varphi}x^* e^{i2\varphi}z = e^{i\varphi}x^*z$ . Por tanto, el campo vectorial conmuta con  $\Phi_\varphi$ .  $\square$

**Corolario 3.4.3** (Simetría de inversión). *Como caso particular del Teorema 3.4.2 con  $e^{i\varphi} = -1 \in \mathbb{S}^1$  (esto es,  $\varphi = \pi$ ), si  $(x(t), y(t), z(t))$  es solución, también lo es  $(-x(t), -y(t), z(t))$ .*

**Teorema 3.4.4** (Disipación y contracción de volúmenes). *La divergencia del campo asociado a (7) en coordenadas reales es constante e igual a*

$$\nabla \cdot F = -2(a + 1 + b) < 0.$$

*En consecuencia, los volúmenes en  $\mathbb{R}^6 \simeq \mathbb{C}^3$  se contraen exponencialmente a tasa  $2(a + 1 + b)$ .*

**Demostración.** En variables reales  $(x_1, x_2, \dots, z_2)$  se tiene

$$\frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} = \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2} = -a, \quad \frac{\partial \dot{y}_1}{\partial y_1} = \frac{\partial \dot{y}_2}{\partial y_2} = -1, \quad \frac{\partial \dot{z}_1}{\partial z_1} = \frac{\partial \dot{z}_2}{\partial z_2} = -b,$$

y las restantes derivadas propias son cero. Sumando las diagonales se obtiene el valor indicado. El teorema de Liouville implica la contracción exponencial de volúmenes.  $\square$

**Corolario 3.4.5** (Medida nula del atractor). *Cualquier atractor global de (7), cuando existe, tiene medida de Lebesgue nula en  $\mathbb{R}^6$ .*

**Teorema 3.4.6** (Conjunto absorbente). *Existen constantes  $\alpha, \beta, \gamma > 0$  y  $R > 0$  (dependientes de  $a, b, c$ ) tales que la bola*

$$\mathcal{B}_R = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 : \alpha|x|^2 + \beta|y|^2 + \gamma|z|^2 \leq R^2\}$$

*es absorbente para (7): toda solución entra en  $\mathcal{B}_R$  en tiempo finito y permanece en ella.*

**Demostración.** Considérese  $V = \alpha|x|^2 + \beta|y|^2 + \gamma|z|^2$ . Entonces

$$\dot{V} = 2 \operatorname{Re}[\alpha a(y - x)\bar{x} + \beta(cx - y - x^*z)\bar{y} + \gamma(xy - bz)\bar{z}].$$

Aplicando Young a los términos cruzados  $x\bar{y}$ ,  $x^*z\bar{y}$  y  $xy\bar{z}$ , se obtienen cotas del tipo

$$\dot{V} \leq -\delta V + K,$$

para cierta  $\delta > 0$  (eligiendo  $\alpha, \beta, \gamma$  adecuados) y una constante  $K = K(a, b, c)$ . De la desigualdad diferencial lineal se deduce que  $V(t)$  entra y queda acotado por  $K/\delta$ , lo que define  $\mathcal{B}_R$ .  $\square$

**Proposición 3.4.7** (Equilibrios). *El origen  $(0, 0, 0)$  es equilibrio de (7) para todo  $a, b, c$ . Además, si  $c > 1$  existe una familia continua de equilibrios dada por*

$$\mathcal{C} = \left\{ (x, y, z) = (\rho e^{i\theta}, \rho e^{i\theta}, \frac{\rho^2}{b} e^{i2\theta}) : \theta \in [0, 2\pi), \rho = \sqrt{b(c-1)} \right\}.$$

**Demostración.** De  $\dot{x} = 0$  se obtiene  $y = x$ . Con  $\dot{y} = 0$  y  $y = x$  se deduce  $(c-1)x = x^*z$ . De  $\dot{z} = 0$  sigue  $z = xy = x^2$ . Sustituyendo,  $(c-1)x = x^*x^2 = |x|^2x$ , de modo que  $x = 0$  o  $|x|^2 = c-1$ . Reescalando por  $b$  conforme a (7) (tercera ecuación), resulta  $|x|^2 = b(c-1)$  y  $z = x^2/b$ , lo que parametriza  $\mathcal{C}$  por el ángulo  $\theta$ .  $\square$

**Teorema 3.4.8** (Estabilidad lineal del origen). *El origen es asintóticamente estable si y sólo si  $c < 1$ . Si  $c > 1$ , el origen es inestable.*

**Demostración.** Los términos no lineales son al menos cuadráticos, luego la jacobiana en el origen, en forma compleja, es

$$\begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ c & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}$$

en cada una de las dos copias reales (parte real e imaginaria). Por tanto, los autovalores son  $-b$  (doble) y los de la submatriz  $2 \times 2$  con traza  $-(a+1)$  y determinante  $a(1-c)$ . Como  $a > 0$ , ambas raíces tienen parte real negativa  $\Leftrightarrow a(1-c) > 0$ , esto es,  $c < 1$ .  $\square$

**Corolario 3.4.9** (Bifurcación en  $c = 1$ ). *En  $c = 1$  el origen pierde estabilidad. Para  $c > 1$  aparece la familia  $\mathbb{C}$  de equilibrios (Proposición 3.4.7), organizada por la simetría del grupo círculo  $\mathbb{S}^1$  (Teorema 3.4.2).*

**Observación 3.4.10** (Complejidad dinámica y entropía). *En el régimen caótico, el sistema (7) puede presentar dos exponentes de Lyapunov positivos en su realización real de dimensión seis (hipercaos), y mapas de primer retorno no unimodales en secciones de Poincaré, con entropía topológica mayor que en la forma real. Estos rasgos son consistentes con la mayor libertad de fase introducida por la equivarianza de  $\mathbb{S}^1$ .*

## Resultados

---

Un aspecto original del artículo de Rivas y Estévez [31] radica en que, mientras la literatura sobre el sistema de Lorenz se ha concentrado en analizar equilibrios clásicos y sus bifurcaciones, allí se introduce un mecanismo novedoso: la posibilidad de inducir equilibrios adicionales sin eliminar los puntos fijos originales. Esto permite controlar la posición de los equilibrios en el espacio fase, abriendo un marco geométrico que no se encuentra en trabajos previos. La relevancia de nuestro trabajo de tesis se centra en trasladar el análisis a la carta  $z$ , donde la variable adquiere la interpretación de *altura* del atractor mariposa. Para  $r > 14$ , después de la explosión homoclínica, el sistema clásico genera el atractor mariposa, de modo que al estudiar  $\sigma(z)$  se obtiene un mecanismo paramétrico para situar dicha estructura incluso en alturas pequeñas de  $z$ . Esta correspondencia otorga una motivación natural: explorar cómo la inducción en  $z$  reorganiza el conjunto de equilibrios y, al mismo tiempo, conecta directamente con la geometría emblemática del caos en Lorenz, enriqueciendo los escenarios posibles de multiestabilidad y de coexistencia de atractores extraños.

### 4.1. Nuestro modelo

Trabajamos en el espacio de estados  $\mathbb{R}^3$  con vector de estado  $\mathbf{x} = [x \ y \ z]^\top$  y campo vectorial  $F : \mathbb{R}^3 \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}^3$  dado por

$$\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x}; \mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \sigma(z)(y - x) \\ rx - y - xz \\ xy - bz \end{bmatrix}, \quad (4.1)$$

donde el espacio de parámetros lo escribimos como un producto

$$\mathcal{P} = \underbrace{\{(r, b) \in \mathbb{R}^2 : rb > 0\}}_{\text{parámetros clásicos}} \times \underbrace{\mathbb{R}_{\mathbf{a}}^3}_{\text{coef. del numerador}} \times \underbrace{\mathbb{R}_{\mathbf{c}}^3}_{\text{coef. del denominador}},$$

y la inducción en Lorenz se modela haciendo  $\sigma$  una razón de polinomios cuadráticos. Para fijar notación introducimos la base monomial de orden  $\leq 2$ ,  $\mathcal{Z}(z) = [1 \ z \ z^2]^\top$ , y definimos  $p(z) = \mathbf{a} \cdot \mathcal{Z}(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2$ ,  $q(z) = \mathbf{c} \cdot \mathcal{Z}(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2$ ,

$$\sigma(z) = \frac{p(z)}{q(z)}.$$

El conjunto de equilibrios se define como

$$\mathcal{E}(\mathbf{p}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : F(\mathbf{x}; \mathbf{p}) = \mathbf{0}\},$$

donde  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^8$  representa el vector completo de parámetros  $(a_0, a_1, a_2, c_0, c_1, c_2, r, b)$ . Este conjunto es una variedad algebraico-racional obtenida como el lugar de ceros de las componentes de  $F$ , restringido al dominio  $q(z) \neq 0$  que asegura que el campo esté bien definido. La primera componente del sistema,  $\sigma(z)(y - x) = 0$ , determina una descomposición natural de  $\mathcal{E}(\mathbf{p})$  en dos subconjuntos cerrados:

$$\mathcal{E}(\mathbf{p}) = \mathcal{E}_L(\mathbf{p}) \cup \mathcal{E}_I(\mathbf{p}),$$

donde  $\mathcal{E}_L(\mathbf{p}) = \{\mathbf{x} : y = x, rx - y - xz = 0, xy - bz = 0\}$  representa la rama Lorenz, mientras que  $\mathcal{E}_I(\mathbf{p}) = \{\mathbf{x} : p(z) = 0, rx - y - xz = 0, xy - bz = 0, q(z) \neq 0\}$  representa la rama inducida. La intersección de ambas ramas corresponde a aquellos puntos en que simultáneamente  $y = x$  y  $p(z) = 0$ , siempre que el denominador no se anule. Con  $y = x$  las condiciones de equilibrio se reducen a  $x(r - 1 - z) = 0$ ,  $x^2 = bz$ , de donde

$$\mathcal{E}_L(\mathbf{p}) = \{(0, 0, 0)\} \cup \{(\pm\gamma, \pm\gamma, r - 1) : \gamma^2 = b(r - 1), q(r - 1) \neq 0\}.$$

El origen aparece siempre; los puntos no triviales existen si y sólo si  $b(r - 1) > 0$ , y requieren además  $q(r - 1) \neq 0$  para pertenecer al dominio del campo.

Por otra parte la primera ecuación fuerza  $\sigma(\tilde{z}) = 0$  y, por dominio,  $q(\tilde{z}) \neq 0$ , esto es,  $p(\tilde{z}) = 0, q(\tilde{z}) \neq 0$ . Definimos el locus de alturas admisibles por

$$Z(\mathbf{a}, \mathbf{c}) = \{\tilde{z} \in \mathbb{R} : p(\tilde{z}) = 0, q(\tilde{z}) \neq 0\}.$$

Para cada  $\tilde{z} \in Z(\mathbf{a}, \mathbf{c})$  las ecuaciones restantes dan

$$y = x(r - \tilde{z}), \quad x^2 = \frac{b\tilde{z}}{r - \tilde{z}},$$

de modo que se requieren  $r \neq \tilde{z}$  y  $\frac{b\tilde{z}}{r - \tilde{z}} \geq 0$  para obtener soluciones reales. En conse-

cuencia,

$$\mathcal{E}_I(\mathbf{p}) = \bigcup_{\tilde{z} \in Z(\mathbf{a}, \mathbf{c})} \left\{ \left( \pm \sqrt{\frac{b\tilde{z}}{r-\tilde{z}}}, \pm \sqrt{\frac{b\tilde{z}}{r-\tilde{z}}} (r-\tilde{z}), \tilde{z} \right) \right\}.$$

Observemos que los parámetros del denominador  $\mathbf{c}$  no generan nuevas alturas  $\tilde{z}$ ; únicamente restringen el dominio excluyendo las raíces de  $p$  que coinciden con polos de  $q$ . La intersección  $\mathcal{E}_L \cap \mathcal{E}_I$  se caracteriza por  $p(r-1) = 0$  y  $q(r-1) \neq 0$ .

#### 4.1.1. inducción simétrica

$a_1 = 0$ . Si  $p(z) = a_0 + a_2 z^2$ , entonces

$$\tilde{z}^2 = -\frac{a_0}{a_2},$$

y hay raíces reales si y sólo si  $a_0 a_2 < 0$ , lo que produce dos alturas simétricas  $\tilde{z} = \pm \sqrt{-a_0/a_2}$ . Cada altura admisible genera hasta dos equilibrios inducidos, condicionados por  $r \neq \tilde{z}$ ,  $\frac{b\tilde{z}}{r-\tilde{z}} \geq 0$  y  $q(\tilde{z}) \neq 0$ . Los regímenes  $a_0 < 0 < a_2$  y  $a_2 < 0 < a_0$  comparten el mismo locus  $\{\pm\tilde{z}\}$ , pero invierten la orientación de  $\sigma$  en torno a dicho locus, con impacto en la linealización y estabilidad local sin alterar el lugar geométrico de los equilibrios.

En lo que sigue fijamos  $a_1 = 0$  y consideramos las dos realizaciones del sistema

$$S_1^z : \quad \dot{\mathbf{x}} = \begin{cases} \frac{a_0 - a_2 z^2}{q(z)} (y - x), \\ r x - y - x z, \\ x y - b z. \end{cases} \quad (4.2)$$

$$S_2^z : \quad \dot{\mathbf{x}} = \begin{cases} \frac{a_2 z^2 - a_0}{q(z)} (y - x), \\ r x - y - x z, \\ x y - b z. \end{cases} \quad (4.3)$$

Es decir, ambas comparten las segundas y tercera componentes y difieren únicamente en el signo del término  $\frac{a_0 - a_2 z^2}{q(z)} (y - x)$  que multiplica a la primera. Dado que los ceros de  $\sigma(z) = \frac{a_0 + a_2 z^2}{q(z)}$  son exactamente los ceros de  $p(z)$  que no coinciden con polos de  $q(z)$ , el conjunto de alturas admisibles  $\tilde{z} \in Z(\mathbf{a}, \mathbf{c})$  es el mismo para  $S_1$  y  $S_2$ . En cada altura  $\tilde{z} \in Z(\mathbf{a}, \mathbf{c})$  la ecuación  $\sigma(\tilde{z}) = 0$  anula la primera componente y las restantes condiciones de equilibrio  $y = x(r - \tilde{z})$  y  $x^2 = \frac{b\tilde{z}}{r-\tilde{z}}$  no dependen del signo elegido;

por tanto, la rama inducida de puntos estacionarios coincide en ambos sistemas. En la rama de Lorenz ocurre lo mismo: imponer  $y = x$  elimina a  $\sigma$  y recupera exactamente los mismos puntos  $(0, 0, 0)$  y, cuando procede,  $(\pm\sqrt{b(r-1)}, \pm\sqrt{b(r-1)}, r-1)$ , siempre bajo la condición de dominio  $q(r-1) \neq 0$ . En consecuencia,

$$\mathcal{E}(S_1^z) = \mathcal{E}(S_2^z) \subset \mathbb{R}^3,$$

y la igualdad vale como conjunto, sin reservas.

Esta coincidencia del lugar estacionario no se traduce en equivalencia topológica de los flujos. Sea

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y \neq x, \sigma(z) \neq 0\},$$

un abierto no vacío del dominio del campo. En  $U$  la primera componente de  $S_1^z$  y  $S_2^z$  tiene signos opuestos, mientras que las otras dos componentes coinciden. Si existiera una reparametrización positiva del tiempo  $\alpha : U \rightarrow (0, \infty)$  tal que  $S_2^z = \alpha S_1^z$  en  $U$ , entonces la igualdad de segundas y terceras componentes obligaría  $\alpha \equiv 1$  en  $U$ , lo que forzaría también la igualdad de las primeras componentes; pero en  $U$  se verifica  $\dot{x}_{S_2^z} = -\dot{x}_{S_1^z}$ , contradicción. Por la misma razón, no existe conjugación topológica de flujos que preserve la orientación temporal y transforme  $S_1^z$  en  $S_2^z$  en ningún abierto sobre el que  $\sigma$  no se anule y  $y \neq x$ . Por lo tanto,  $S_1^z$  y  $S_2^z$  *no son topológicamente equivalentes como flujos, aun cuando comparten el mismo conjunto de equilibrios*.

Los equilibrios del sistema (4.1) son:

$$\mathbf{x}_1 = [0 \ 0 \ 0]^\top, \quad (4.4)$$

$$\mathbf{x}_2(r, b) = [\sqrt{b(r-1)} \ \sqrt{b(r-1)} \ r-1]^\top, \quad (4.5)$$

$$\mathbf{x}_3(r, b) = [-\sqrt{b(r-1)} \ -\sqrt{b(r-1)} \ r-1]^\top, \quad (4.6)$$

$$\mathbf{x}_4(\mathbf{p}, \tilde{z}) = \left[ \sqrt{\frac{b\tilde{z}}{r-\tilde{z}}} \ \sqrt{\frac{b\tilde{z}}{r-\tilde{z}}} (r-\tilde{z}) \ \tilde{z} \right]^\top, \quad (4.7)$$

$$\mathbf{x}_5(\mathbf{p}, \tilde{z}) = \left[ -\sqrt{\frac{b\tilde{z}}{r-\tilde{z}}} \ -\sqrt{\frac{b\tilde{z}}{r-\tilde{z}}} (r-\tilde{z}) \ \tilde{z} \right]^\top. \quad (4.8)$$

A continuación enlistamos algunas propiedades de las soluciones estacionarias  $\mathbf{x}_4(\mathbf{p}, \tilde{z})$  y  $\mathbf{x}_5(\mathbf{p}, \tilde{z})$ , con  $\tilde{z} \in Z(\mathbf{a}, \mathbf{c})$ ,  $q(\tilde{z}) \neq 0$ ,  $r \neq \tilde{z}$  y  $\frac{b\tilde{z}}{r-\tilde{z}} > 0$ :

1. **Caracterización algebraico-geométrica.** En el plano  $z = \tilde{z}$  son la intersección de

$$y = (r - \tilde{z})x \quad \text{y} \quad xy = b\tilde{z},$$

equivalentemente  $x = \pm \sqrt{\frac{b\tilde{z}}{r-\tilde{z}}}$ ,  $y = (r-\tilde{z})x$ .

2. **Simetría central.**  $\mathbf{x}_5(\mathbf{p}, \tilde{z}) = (-x, -y, \tilde{z})^\top$  con  $x = \sqrt{\frac{b\tilde{z}}{r-\tilde{z}}}$ ; así,

$$\frac{\mathbf{x}_4(\mathbf{p}, \tilde{z}) + \mathbf{x}_5(\mathbf{p}, \tilde{z})}{2} = [0 \quad 0 \quad \tilde{z}]^\top.$$

3. **Rescalamiento de la segunda componente.**  $\frac{y}{x} = r - \tilde{z}$ .

4. **Norma en el plano  $z = \tilde{z}$ .**

$$\|(x, y)\|^2 = x^2(1 + (r - \tilde{z})^2) = \frac{b\tilde{z}}{r - \tilde{z}} (1 + (r - \tilde{z})^2).$$

5. **Disposición por signos.**  $\text{sign}(y) = \text{sign}(r - \tilde{z}) \text{sign}(x)$ ; para  $r - \tilde{z} > 0$  las proyecciones caen en los cuadrantes I y III, y para  $r - \tilde{z} < 0$  en II y IV.

6. **Dependencia paramétrica y degeneraciones.** El mapa  $(r, b, \tilde{z}) \mapsto \mathbf{x}_{4,5}(\mathbf{p}, \tilde{z})$  es real-analítico en la región indicada. Si  $\tilde{z} = 0$  entonces  $\mathbf{x}_4 = \mathbf{x}_5 = (0, 0, 0)^\top$ ; si  $r \rightarrow \tilde{z}$  con  $b\tilde{z} \neq 0$ , entonces  $|x| \rightarrow \infty$  y no existe equilibrio finito.

Mapeando los ceros de la función  $\sigma$  en los equilibrios (4.4)-(4.8) obtenemos una configuración de 3 pares de equilibrios simétricos y equilibrio trivial del sistema dinámico inducido.

$$\mathbf{x}_1(\mathbf{p}) = [0 \quad 0 \quad 0]^\top, \tag{4.9}$$

$$\mathbf{x}_2(\mathbf{p}) = [\sqrt{b(r-1)} \quad \sqrt{b(r-1)} \quad r-1]^\top, \tag{4.10}$$

$$\mathbf{x}_3(\mathbf{p}) = [-\sqrt{b(r-1)} \quad -\sqrt{b(r-1)} \quad r-1]^\top \tag{4.11}$$

$$\mathbf{x}_4(\mathbf{p}) = \left[ \sqrt{\frac{b \sqrt{-a_0/a_2}}{r - \sqrt{-a_0/a_2}}} \quad \sqrt{\frac{b \sqrt{-a_0/a_2}}{r - \sqrt{-a_0/a_2}}} (r - \sqrt{-a_0/a_2}) \quad \sqrt{-\frac{a_0}{a_2}} \right]^\top, \quad (4.12)$$

$$\mathbf{x}_5(\mathbf{p}) = \left[ -\sqrt{\frac{b \sqrt{-a_0/a_2}}{r - \sqrt{-a_0/a_2}}} \quad -\sqrt{\frac{b \sqrt{-a_0/a_2}}{r - \sqrt{-a_0/a_2}}} (r - \sqrt{-a_0/a_2}) \quad \sqrt{-\frac{a_0}{a_2}} \right]^\top, \quad (4.13)$$

$$\mathbf{x}_6(\mathbf{p}) = \left[ \sqrt{\frac{b (-\sqrt{-a_0/a_2})}{r + \sqrt{-a_0/a_2}}} \quad \sqrt{\frac{b (-\sqrt{-a_0/a_2})}{r + \sqrt{-a_0/a_2}}} (r + \sqrt{-a_0/a_2}) \quad -\sqrt{-\frac{a_0}{a_2}} \right]^\top, \quad (4.14)$$

$$\mathbf{x}_7(\mathbf{p}) = \left[ -\sqrt{\frac{b (-\sqrt{-a_0/a_2})}{r + \sqrt{-a_0/a_2}}} \quad -\sqrt{\frac{b (-\sqrt{-a_0/a_2})}{r + \sqrt{-a_0/a_2}}} (r + \sqrt{-a_0/a_2}) \quad -\sqrt{-\frac{a_0}{a_2}} \right]^\top. \quad (4.15)$$

#### 4.1.1.1. regimen $r > 0$ , $b > 0$

Bajo la hipótesis  $a_1 = 0$  con  $a_0 a_2 < 0$ , las alturas inducidas son  $\tilde{z}_\pm = \pm \sqrt{-a_0/a_2}$ . Con  $b > 0$  y  $r > 0$ , la condición de realidad para los equilibrios inducidos en la altura  $\tilde{z}$  es

$$x^2 = \frac{b \tilde{z}}{r - \tilde{z}} \geq 0,$$

junto con  $r \neq \tilde{z}$  y  $q(\tilde{z}) \neq 0$ . En  $\tilde{z}_+ > 0$  se requiere  $r > \tilde{z}_+$ ; si además  $q(\tilde{z}_+) \neq 0$ , aparecen exactamente dos equilibrios inducidos (simétricos por cambio de signo en  $x$ ). En cambio, en  $\tilde{z}_- < 0$  el cociente  $\frac{b \tilde{z}_-}{r - \tilde{z}_-} = \frac{(+)\cdot(-)}{r + |\tilde{z}_-|}$  es negativo para todo  $r > 0$ , por lo que no hay soluciones reales en esa altura. *En consecuencia, con  $b > 0$  y  $r > 0$  no pueden coexistir los cuatro equilibrios inducidos: a lo sumo existen los dos correspondientes a  $\tilde{z}_+$ , y sólo cuando  $r > \tilde{z}_+$  y  $q(\tilde{z}_+) \neq 0$ .*

#### 4.1.1.2. regimen $r < 0$ , $b < 0$

con  $a_1 = 0$  y  $a_0 a_2 < 0$ . Defínamos  $\tilde{z}_\pm = \pm \sqrt{-a_0/a_2}$ . En la *rama de Lorenz*, la condición  $b(r - 1) > 0$  se satisface para todo  $r < 0$  (pues  $b < 0$  y  $r - 1 < 0$ ), de modo que existen los dos equilibrios clásicos en  $z = r - 1$  siempre que  $q(r - 1) \neq 0$ .

En la *rama inducida*, para cualquier altura  $\tilde{z}$  con  $p(\tilde{z}) = 0$  y  $q(\tilde{z}) \neq 0$ , los equilibrios verifican

$$y = x(r - \tilde{z}), \quad x^2 = \frac{b \tilde{z}}{r - \tilde{z}}, \quad r \neq \tilde{z}.$$

En  $\tilde{z}_+ > 0$  se tiene  $b \tilde{z}_+ < 0$  y  $r - \tilde{z}_+ < 0$ , por lo que  $\frac{b \tilde{z}_+}{r - \tilde{z}_+} > 0$ ; existen exactamente

dos equilibrios inducidos en  $z = \tilde{z}_+$  bajo  $q(\tilde{z}_+) \neq 0$  (y  $r \neq \tilde{z}_+$ , automático al ser  $r < 0 < \tilde{z}_+$ ). En  $\tilde{z}_- < 0$  se cumple  $b\tilde{z}_- > 0$  y  $r - \tilde{z}_- = r + |\tilde{z}_-|$ ; la condición de realidad equivale a

$$r + |\tilde{z}_-| > 0 \iff |r| < \sqrt{-\frac{a_0}{a_2}},$$

además de  $q(\tilde{z}_-) \neq 0$  y  $r \neq \tilde{z}_-$ .

En consecuencia, con  $b < 0$  y  $r < 0$  los dos equilibrios inducidos en  $\tilde{z}_+$  están siempre presentes cuando  $q(\tilde{z}_+) \neq 0$ , mientras que los dos en  $\tilde{z}_-$  existen si y sólo si  $|r| < \sqrt{-a_0/a_2}$  y  $q(\tilde{z}_-) \neq 0$ . El máximo de siete equilibrios (origen, dos de Lorenz y cuatro inducidos) se alcanza exactamente bajo

$$q(r-1) \neq 0, \quad q(\tilde{z}_\pm) \neq 0, \quad |r| < \sqrt{-\frac{a_0}{a_2}}.$$

#### 4.1.1.3. Geometría de los equilibrios inducidos para $r < 0$ , $b < 0$

Sea  $\tilde{z}_\pm = \pm\sqrt{-a_0/a_2}$  con  $a_1 = 0$  y  $a_0 a_2 < 0$ . En cada altura inducida  $\tilde{z}$  admisible (esto es,  $p(\tilde{z}) = 0$ ,  $q(\tilde{z}) \neq 0$ ) el par de equilibrios inducidos pertenece al plano  $z = \tilde{z}$  y yace sobre la recta

$$L(\tilde{z}) : \quad y = (r - \tilde{z})x,$$

dándose por los puntos antipodales  $(x, y, \tilde{z})^\top$  y  $(-x, -y, \tilde{z})^\top$  con

$$x^2 = \frac{b\tilde{z}}{r - \tilde{z}}, \quad r \neq \tilde{z}.$$

Para  $r < 0$ ,  $b < 0$  el nivel positivo  $\tilde{z}_+$  produce siempre el par (si  $q(\tilde{z}_+) \neq 0$ ), mientras que el nivel negativo  $\tilde{z}_-$  lo hace exactamente cuando  $|r| < \sqrt{-a_0/a_2}$  y  $q(\tilde{z}_-) \neq 0$ . Cuando coexisten los cuatro inducidos, quedan situados en las dos líneas

$$L(\tilde{z}_+) \subset \{z = \tilde{z}_+\}, \quad L(\tilde{z}_-) \subset \{z = \tilde{z}_-\},$$

contenidas en planos paralelos. Sus pendientes son

$$s_+ = r - \tilde{z}_+ < 0, \quad s_- = r - \tilde{z}_- = r + \tilde{z}_+,$$

y, en general,  $s_- \neq -s_+$ . El casquete convexo de los cuatro vértices es, genéricamente, un tetraedro afín con dos vértices en cada plano; además, el baricentro de los cuatro inducidos coincide con el origen  $(0, 0, 0)^\top$  (la suma vectorial de los cuatro puntos es nula). La simetría central global del conjunto sólo se alcanza en el caso especial  $r = 0$  (vease [32] como trabajo similar), en el que  $|s_+| = |s_-|$  y las proyecciones horizontales de

ambos pares tienen el mismo módulo. En suma, la geometría inducida en este régimen está gobernada por dos pares antipodales en planos paralelos y sobre líneas de pendientes generalmente no opuestas, con baricentro en el origen y sin simetría central global salvo en  $r = 0$ .

En la literatura “clásica” del sistema de Lorenz esto es, la derivación físico termofluídica (convección de Bénard) y los *estudios estándar* de dinámica se asume casi siempre  $\sigma > 0$ ,  $r \geq 0$  y  $b > 0$ . El motivo es físico:  $\sigma$  (Prandtl),  $r$  (Rayleigh adimensionalizado) y  $b$  (constante geométrica) emergen como parámetros positivos del modelo. Bajo estas hipótesis se organizan los resultados canónicos (existencia y bifurcaciones de los equilibrios de Lorenz, ventana caótica, etc.).

Trabajar con parámetros negativos no es lo usual en esa tradición; aparece de forma esporádica en extensiones matemáticas (sistemas generalizados, estudios de simetrías y signos, control/realimentación, o análisis cualitativo fuera del marco físico). Algunos cambios de variables absorben ciertos signos, pero no todos; en particular, invertir el signo de  $\sigma$  no preserva en general la equivalencia topológica del flujo. En suma, no es estándar en la literatura físico-ingenieril tratar  $r < 0$  o  $b < 0$ ; sí es válido, aunque ocasional, en estudios matemáticos abstractos donde se explora el sistema más allá de su interpretación original.

En el régimen activo  $r < 0$ ,  $b < 0$  con numerador par  $a_1 = 0$ , dos alturas inducidas  $\tilde{z}_{\pm} = \pm\sqrt{-a_0/a_2}$  (esto es,  $a_0a_2 < 0$ ) y sin polos en los niveles relevantes  $q(r-1) \neq 0$ ,  $q(\tilde{z}_{\pm}) \neq 0$  el sistema puede exhibir **siete equilibrios coexistentes**: el origen, dos de la rama de Lorenz (que existen aquí para todo  $r < 0$  porque  $b(r-1) > 0$ ) y cuatro inducidos (dos en  $\tilde{z}_+$  y dos en  $\tilde{z}_-$ ), estos últimos presentes conjuntamente exactamente cuando  $|r| < \sqrt{-a_0/a_2}$ . Este cuadro de multiestabilidad ofrece una motivación doble: matemática, porque amplía la morfología de lugares estacionarios y abre un programa de bifurcaciones no clásico al variar  $(r, b, \mathbf{a}, \mathbf{c})$ ; e ingenieril, porque proporciona *modos de operación conmutables* (pares antipodales en planos  $z = \tilde{z}_{\pm}$  sobre rectas  $y = (r - \tilde{z})x$ ), útiles para memoria, lógica por estados y diseño de superficies de disparo basadas en los ceros de  $p$ , siempre controlando los niveles prohibidos por  $q$ .

## 4.2. Análisis de estabilidad lineal

Empecemos enunciando dos teoremas relevantes:

**Hartman–Grobman (Grobman, 1959; Hartman, 1960).** Sea  $\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x})$  un campo  $C^1$  en  $\mathbb{R}^n$  y sea  $\mathbf{x}^*$  un equilibrio *hiperbólico* (esto es, el espectro de  $J(\mathbf{x}^*)$  no corta el eje imaginario). Entonces existe un homeomorfismo  $H$ , definido en una vecindad de

$\mathbf{x}^*$  con  $H(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$ , que *conjuga topológicamente* el flujo no lineal con su linealización:

$$H(\phi_t(\mathbf{x})) = e^{t\mathcal{J}(\mathbf{x}^*)} H(\mathbf{x}), \quad |t| \text{ pequeño.}$$

En particular, la cualidad (silla, nodo, foco) y la *estructura topológica* local de órbitas son las del sistema lineal  $\dot{\mathbf{u}} = \mathcal{J}(\mathbf{x}^*)\mathbf{u}$ . [41, 42]

**Sternberg (1957–1958) / Chen (1963).** Si además  $F$  es  $C^k$  ( $k \geq 2$ ) y se satisfacen *condiciones de no-resonancia* entre los autovalores de  $\mathcal{J}(\mathbf{x}^*)$  (y, en la versión  $C^\infty$ , condiciones de tipo Diophantino), entonces existe un difeomorfismo  $C^r$  ( $1 \leq r \leq k$ ) que *lineariza suavemente* el sistema en una vecindad de  $\mathbf{x}^*$ :

$$\Psi^* F = \mathcal{J}(\mathbf{x}^*) \mathbf{u} \quad (\text{sin términos no lineales}).$$

En ausencia de no-resonancia, la forma normal de Poincaré–Dulac describe los términos que no pueden eliminarse por cambios  $C^r$  [43],[44],[45].

### 4.2.1. Jacobiano del modelo inducido

Consideramos, para  $j \in \{1, 2\}$ , el sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = F_j(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \sigma_j(z)(y-x) \\ r x - y - x z \\ x y - b z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = (x, y, z)^\top, \text{ definido en el dominio } \{q(z) \neq 0\}, \text{ donde}$$

$\sigma_j(z) = \frac{p_j(z)}{q(z)}$  es  $C^1$  en dicho dominio. Denotamos por  $\sigma'_j(z)$  su derivada:

$$\sigma'_j(z) = \frac{p'_j(z)q(z) - p_j(z)q'(z)}{q(z)^2}$$

El jacobiano  $\mathcal{J}_j(\mathbf{x}) = DF_j(\mathbf{x})$  en un punto  $(x, y, z)$  es

$$\mathcal{J}_j(x, y, z) = \begin{bmatrix} -\sigma_j(z) & \sigma_j(z) & \sigma'_j(z)(y-x) \\ r-z & -1 & -x \\ y & x & -b \end{bmatrix}.$$

En el caso particular considerado en este trabajo de tesis con  $a_1 = 0$  y

$$\sigma_1(z) = \frac{a_0 - a_2 z^2}{q(z)}, \quad \sigma_2(z) = \frac{a_2 z^2 - a_0}{q(z)} = -\sigma_1(z),$$

se cumple también  $\sigma'_2(z) = -\sigma'_1(z)$ . Por tanto,

$$\mathcal{J}_2(x, y, z) = \begin{bmatrix} +\sigma_1(z) & -\sigma_1(z) & -\sigma'_1(z)(y-x) \\ r-z & -1 & -x \\ y & x & -b \end{bmatrix},$$

lo que muestra que las únicas entradas que cambian de signo entre  $\mathcal{J}_1$  y  $\mathcal{J}_2$  son las asociadas a la dependencia en  $\sigma_1$  y  $\sigma'_1$ , mientras que los bloques  $(r-z, -1, -x; y, x, -b)$  permanecen idénticos. Esta observación es útil para: (i) comparar espectros locales en puntos donde  $y = x$  (desaparece la contribución de  $\sigma'_j$ ) y (ii) estudiar cómo el signo de  $\sigma_j$  afecta la estabilidad transversal a  $y = x$ .

### 4.2.2. Evaluaciones en equilibrios

#### 4.2.2.1. En el origen $\mathbf{x}_1 = (0, 0, 0)$ .

Evalúamos el jacobiano en el equilibrio trivial  $\mathbf{x}_1 = (0, 0, 0)$  para cada modelo  $j \in \{1, 2\}$ . Denotemos

$$\sigma_0 := \sigma_j(0), \quad \mathcal{J}_j(0, 0, 0) = \begin{bmatrix} -\sigma_0 & \sigma_0 & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix}.$$

La matriz es bloque-triangular, de modo que el polinomio característico factoriza como

$$\chi_0(\lambda) = \det(\lambda I - \mathcal{J}_j(0, 0, 0)) = (\lambda + b) \left[ \lambda^2 + (\sigma_0 + 1)\lambda + \sigma_0(1 - r) \right].$$

De aquí, los autovalores son

$$\lambda_3 = -b, \quad \lambda_{1,2} = \frac{-(\sigma_0 + 1) \pm \sqrt{(\sigma_0 + 1)^2 - 4\sigma_0(1 - r)}}{2}.$$

El equilibrio trivial es *hiperbólico* siempre que ninguno de los autovalores se anule, esto es, salvo que ocurra alguno de los siguientes casos degenerados:

$$b = 0, \quad \sigma_0 = -1, \quad \sigma_0(1 - r) = 0.$$

Fuera de estas condiciones de borde, los autovalores tienen parte real distinta de cero y el teorema de Hartman–Grobman garantiza conjugación topológica con la linealización. El origen es *asintóticamente estable* si y sólo si todos los autovalores tienen parte real negativa. La condición  $\lambda_3 = -b < 0$  exige  $b > 0$ . Para el bloque  $2 \times 2$ ,

$$\text{tr} = -(\sigma_0 + 1), \quad \det = \sigma_0(1 - r).$$

De acuerdo con el criterio de Routh–Hurwitz, ambos autovalores tienen parte real negativa si y sólo si

$$\sigma_0 + 1 > 0, \quad \sigma_0(1 - r) > 0.$$

Luego, bajo las condiciones:

$$b > 0, \quad \sigma_0 > -1, \quad \sigma_0(1 - r) > 0,$$

el equilibrio trivial  $(0, 0, 0)$  es localmente asintóticamente estable. En cualquier otro régimen, el origen es inestable, pudiendo presentar uno o dos autovalores con parte real positiva según el signo de  $b$  y la localización del punto  $(\sigma_0, r)$  en el plano de parámetros. Por otra parte

**Proposición 4.2.1** (Hopf en el origen al variar  $\sigma_0$ ). *Supongamos  $q(0) \neq 0$ ,  $b > 0$  y  $r > 1$ . Consideremos  $\mu = \sigma_0 = \sigma(0) = a_0/c_0$  como parámetro. El polinomio característico del bloque  $2 \times 2$  en el origen es*

$$\lambda^2 + (\mu + 1)\lambda + \mu(1 - r) = 0.$$

En  $\mu = -1$  se tiene

$$\lambda_{1,2}(\mu) = \frac{-(\mu + 1) \pm \sqrt{(\mu + 1)^2 - 4\mu(1 - r)}}{2} \Rightarrow \lambda_{1,2}(-1) = \pm i\sqrt{r - 1},$$

mientras que  $\lambda_3 = -b < 0$ . Además,

$$\left. \frac{d}{d\mu} \operatorname{Re} \lambda_{1,2}(\mu) \right|_{\mu=-1} = -\frac{1}{2} \neq 0,$$

por lo que el par complejo cruza transversalmente el eje imaginario al pasar  $\mu$  por  $-1$ . En consecuencia, bajo estas hipótesis ocurre una bifurcación de Hopf en el equilibrio  $(0, 0, 0)$  cuando  $\sigma_0$  atraviesa  $-1$ .

**Observación 4.2.2** (Clasificación). *El enunciado garantiza Hopf (cruce transversal). La naturaleza super/subcrítica y la existencia de una órbita periódica estable/inestable se determinan computando el primer coeficiente de Lyapunov  $l_1$  en  $\mu = -1$ . Si  $l_1 \neq 0$  (condición de no-degeneración), la bifurcación es genérica.*

**Proposición 4.2.3** (No hay Hopf en el origen si  $r < 0$ ,  $b < 0$ ). *Considérese el equilibrio  $(0, 0, 0)$  del sistema inducido con  $\sigma_0 = \sigma(0)$  y  $q(0) \neq 0$ . El polinomio característico se*

factoriza como

$$\chi(\lambda) = (\lambda + b) [\lambda^2 + (\sigma_0 + 1)\lambda + \sigma_0(1 - r)].$$

Si  $r < 0$  y  $b < 0$ , entonces no puede ocurrir una bifurcación de Hopf en el origen para ninguna elección de  $\sigma_0$ .

*Demostración.* Una Hopf local del equilibrio requiere que el bloque  $2 \times 2$  tenga un par puramente imaginario, lo cual es equivalente a las condiciones

$$\text{tr} = -(\sigma_0 + 1) = 0 \quad \text{y} \quad \det = \sigma_0(1 - r) > 0.$$

La primera fuerza  $\sigma_0 = -1$ . Evaluando la segunda,

$$\det = \sigma_0(1 - r) = (-1)(1 - r) = r - 1 < 0 \quad (\text{pues } r < 0),$$

de modo que las condiciones necesarias son incompatibles: el par es real de signos opuestos (no imaginario puro). Por lo tanto, no hay Hopf en el origen cuando  $r < 0$ . Además, con  $b < 0$  se tiene  $\lambda_3 = -b > 0$ , por lo que el equilibrio ya posee una dirección inestable; pero, en cualquier caso, la inexistencia del par imaginario puro descarta Hopf en este régimen.  $\square$

**Observación 4.2.4.** *Bajo  $r < 0$ , ninguna trayectoria en el espacio de parámetros que preserve el carácter inducido (esto es, mantenga  $q(0) \neq 0$  y ceros admisibles de  $p$  fuera de  $z = 0$ ) puede generar Hopf en el origen variando  $\sigma_0$  ni  $r$ . En particular, imponer  $a_0/c_0 = -1$  (esto es,  $\sigma_0 = -1$ ) produce un par real con determinante  $r - 1 < 0$ , no un par imaginario.*

#### 4.2.2.2. En los equilibrios Lorenz

$$\mathcal{J}^k(x, y, z) = L(x, y, z; \sigma(k)) + (y - x)\sigma'(k) e_1 e_k^\top,$$

donde

$$L(x, y, z; \sigma) := \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r - z & -1 & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix}, \quad e_1 = (1, 0, 0)^\top, \quad e_x = e_1, \quad e_y = e_2, \quad e_z = e_3.$$

En la rama de Lorenz se tiene  $\tilde{y} = \tilde{x}$ , por lo que el término  $(\tilde{y} - \tilde{x})\sigma'(k)$  se anula y

queda, exactamente,

$$\mathcal{J}^k(\tilde{E}) = L(\tilde{E}; \sigma(\tilde{k})), \quad \tilde{E} = (\tilde{x}, \tilde{x}, \tilde{z}).$$

Para los equilibrios clásicos  $\tilde{E}_\pm = (\pm\gamma, \pm\gamma, r-1)$ ,  $\gamma = \sqrt{b(r-1)}$ , se obtiene explícitamente

$$\mathcal{J}^k(\tilde{E}_\pm) = \begin{pmatrix} -\sigma(\tilde{k}) & \sigma(\tilde{k}) & 0 \\ 1 & -1 & \mp\gamma \\ \pm\gamma & \pm\gamma & -b \end{pmatrix}, \quad \tilde{k} = \begin{cases} \pm\gamma, & k \in \{x, y\}, \\ r-1, & k = z. \end{cases}$$

La consecuencia inmediata es  $\mathcal{J}^x(\tilde{E}_\pm)$  y  $\mathcal{J}^y(\tilde{E}_\pm)$  coinciden (ambos usan  $\sigma(\pm\gamma)$ ) y comparten polinomio característico y espectro;  $\mathcal{J}^z(\tilde{E}_\pm)$  por el contrario evalúa  $\sigma$  en  $r-1$  e induce un polinomio característico distinto. Los autovalores en  $\tilde{E}_\pm$  son los del Lorenz clásico con el reemplazo  $\sigma \mapsto \sigma(\pm\gamma)$  para  $S^x, S^y$  y  $\sigma \mapsto \sigma(r-1)$  para  $S^z$ .

En  $S^z$  (i.e.  $\dot{x} = \sigma(z)(y-x)$ ), en la *rama de Lorenz* ( $\tilde{y} = \tilde{x}$ ) el término direccional se anula y

$$\mathcal{J}^z(\tilde{E}) = \begin{pmatrix} -\sigma(\tilde{z}) & \sigma(\tilde{z}) & 0 \\ r-\tilde{z} & -1 & -\tilde{x} \\ \tilde{y} & \tilde{x} & -b \end{pmatrix}.$$

En los equilibrios clásicos  $\tilde{E}_\pm = (\pm\gamma, \pm\gamma, r-1)$  con  $\gamma^2 = b(r-1)$  y  $\sigma_0 := \sigma(r-1)$ , se tiene

$$\mathcal{J}^z(\tilde{E}_\pm) = \begin{pmatrix} -\sigma_0 & \sigma_0 & 0 \\ 1 & -1 & \mp\gamma \\ \pm\gamma & \pm\gamma & -b \end{pmatrix},$$

cuyo polinomio característico (idéntico para  $\mp$ ) es

$$\chi_z(\lambda) = \det(\lambda I - \mathcal{J}^z(\tilde{E}_\pm)) = \lambda^3 + (\sigma_0 + b + 1)\lambda^2 + (b(\sigma_0 + 1) + \gamma^2)\lambda + 2\sigma_0\gamma^2.$$

Para un cúbico mónico

$$\chi(\lambda) = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3,$$

la condición de Hopf en términos de coeficientes es

$$a_1a_2 = a_3,$$

con las condiciones de Routh–Hurwitz  $a_1 > 0$ ,  $a_2 > 0$ ,  $a_3 > 0$  y no degeneración  $\frac{d}{d\mu}(a_1a_2 - a_3) \neq 0$  en el parámetro  $\mu$  que cruza.

Para nuestro caso,

$$a_1 = \sigma_0 + b + 1, \quad a_2 = b(\sigma_0 + 1) + \gamma^2, \quad a_3 = 2\sigma_0\gamma^2,$$

de modo que la condición de Hopf queda

$$(\sigma_0 + b + 1) (b(\sigma_0 + 1) + \gamma^2) = 2\sigma_0 \gamma^2,$$

con  $a_1, a_2, a_3 > 0$  y transversalidad.

Nuestro objetivo es aislar  $\sigma_0$ . Al expandir el lado izquierdo se obtiene

$$b\sigma_0^2 + \sigma_0(b^2 + b + \gamma^2 + 1) + (b + 1)(b + \gamma^2) = 2\sigma_0 \gamma^2.$$

Reordenando los términos llegamos a la ecuación cuadrática

$$b\sigma_0^2 + (b^2 + b + 1 - \gamma^2)\sigma_0 + (b + 1)(b + \gamma^2) = 0.$$

Finalmente, la solución explícita para  $\sigma_0$  es

$$\sigma_0 = \frac{-(b^2 + b + 1 - \gamma^2) \pm \sqrt{(b^2 + b + 1 - \gamma^2)^2 - 4b(b + 1)(b + \gamma^2)}}{2b}, \quad b \neq 0.$$

La condición de Hopf  $a_1 a_2 - a_3 = 0$  es equivalente a :

$$\frac{a_0 + a_2(r - 1)^2}{c_0 + c_1(r - 1) + c_2(r - 1)^2} = \frac{br - (b + 1)^2 \pm \sqrt{((b + 1)^2 - br)^2 - 4b^2r(b + 1)}}{2b}.$$

es posible despejar los parámetros  $a_0$  y  $a_2$ . Multiplicando en cruz se obtiene

$$a_0 + a_2(r - 1)^2 = \Theta (c_0 + c_1(r - 1) + c_2(r - 1)^2),$$

donde

$$\Theta = \frac{br - (b + 1)^2 \pm \sqrt{((b + 1)^2 - br)^2 - 4b^2r(b + 1)}}{2b}.$$

De aquí se deduce

$$a_0 = \Theta (c_0 + c_1(r - 1) + c_2(r - 1)^2) - a_2(r - 1)^2, \quad (4.16)$$

y, siempre que  $r \neq 1$ ,

$$a_2 = \frac{\Theta (c_0 + c_1(r - 1) + c_2(r - 1)^2) - a_0}{(r - 1)^2}. \quad (4.17)$$

Estas relaciones definen el lugar de bifurcación de Hopf en el plano  $(a_0, a_2)$ . Para que el espectro presente un par de autovalores puramente imaginarios con las condiciones de Hopf, es necesario además que los coeficientes de Routh–Hurwitz satisfagan

$$a_1 = \sigma_0 + b + 1 > 0, \quad a_2 = b(\sigma_0 + 1) + \gamma^2 > 0, \quad a_3 = 2\sigma_0\gamma^2 > 0,$$

y que se cumpla la transversalidad

$$\frac{d}{d\mu}(a_1a_2 - a_3) \neq 0,$$

con respecto al parámetro de bifurcación  $\mu$ . Estas condiciones garantizan que el cruce del par de autovalores imaginarios se produzca de forma no degenerada y corresponda efectivamente a una bifurcación de Hopf.

Queremos que  $\Theta$  sea real. Su discriminante es

$$\Delta = ((b+1)^2 - br)^2 - 4b^2r(b+1) = b^2r^2 - 2b(b+1)(3b+1)r + (b+1)^4.$$

Visto como cuadrática en  $r$  (coeficiente principal  $b^2 > 0$ ), tiene raíces reales si y sólo si

$$D_r = (2b(b+1)(3b+1))^2 - 4b^2(b+1)^4 = 16b^3(b+1)^2(2b+1) \geq 0.$$

De aquí, por casos:

(i)  $-\frac{1}{2} < b < 0$ . Entonces  $D_r < 0$  y, por tanto,  $\Delta > 0$  para *todo*  $r \in \mathbb{R}$ . En este régimen,  $\Theta \in \mathbb{R}$  para todo  $r$ .

(ii)  $b = -\frac{1}{2}$ . Se tiene  $D_r = 0$  y  $\Delta \geq 0$  con mínimo nulo en

$$r_0 = \frac{(b+1)(3b+1)}{b} = \frac{1}{2}.$$

Así,  $\Theta$  es real para todo  $r$ , y puramente crítico ( $\Delta = 0$ ) en  $r = \frac{1}{2}$ .

(iii)  $b > 0$  o  $b < -\frac{1}{2}$ . Aquí  $D_r > 0$  y  $\Delta \geq 0$  si y sólo si  $r$  está fuera del intervalo  $[r_-(b), r_+(b)]$ , donde

$$r_{\pm}(b) = \frac{(b+1)(3b+1) \pm (b+1)\sqrt{b(2b+1)}}{b}, \quad b \neq 0.$$

En otras palabras,

$$\Delta \geq 0 \iff r \leq r_-(b) \text{ o } r \geq r_+(b).$$

En todos los casos anteriores asumimos además  $b \neq 0$ , y el denominador de  $\sigma(r-1)$  no nulo:

$$c_0 + c_1(r-1) + c_2(r-1)^2 \neq 0.$$

Si se requiere  $\gamma \in \mathbb{R}$ , entonces

$$\gamma^2 = b(r-1) \geq 0 \iff \begin{cases} r \geq 1, & b > 0, \\ r \leq 1, & b < 0. \end{cases}$$

**Necesidad para Hopf.** La condición  $\Delta \geq 0$  (esto es,  $\Theta \in \mathbb{R}$ ) es *necesaria* para satisfacer la igualdad de Hopf

$$\sigma(r-1) = \Theta,$$

pues el lado izquierdo es real (parámetros reales) y sólo puede igualarse si  $\Theta$  es real. No es suficiente: además deben cumplirse las condiciones de Routh–Hurwitz  $a_1 = \sigma_0 + b + 1 > 0$ ,  $a_2 = b(\sigma_0 + 1) + \gamma^2 > 0$ ,  $a_3 = 2\sigma_0\gamma^2 > 0$  y la transversalidad  $\frac{d}{d\mu}(a_1a_2 - a_3) \neq 0$  en el parámetro de bifurcación  $\mu$ .

Recapitulando : el discriminante de  $\Theta$  es

$$\Delta(r; b) = b^2r^2 - 2b(b+1)(3b+1)r + (b+1)^4.$$

Cuando  $b(2b+1) \geq 0$  (i.e.  $b \geq 0$  o  $b \leq -\frac{1}{2}$ ),  $\Delta$  tiene dos raíces reales

$$r_{\pm}(b) = \frac{b+1}{b} \left( (3b+1) \pm 2\sqrt{b(2b+1)} \right), \quad b \neq 0,$$

y el intervalo crítico donde  $\Delta < 0$  es  $[r_-(b), r_+(b)]$  (con  $r_- \leq r_+$ ). En consecuencia:

$$\Delta(r; b) \geq 0 \iff r \leq r_-(b) \text{ o } r \geq r_+(b).$$

Casos de interés:

- i)  $b > 0, r > 0$ :  $\Delta(r; b) < 0$  para  $r \in [r_-(b), r_+(b)] \cap (0, \infty)$ . Por tanto,  $\Theta$  es real sólo si  $0 < r \leq r_-(b)$  o  $r \geq r_+(b)$ .
- ii)  $b < 0, r < 0$  (con  $b \leq -\frac{1}{2}$  para que  $\sqrt{b(2b+1)} \in \mathbb{R}$ ):  $\Delta(r; b) < 0$  para  $r \in [r_-(b), r_+(b)] \cap (-\infty, 0)$ . Así,  $\Theta$  es real sólo si  $r \leq r_-(b)$  o  $r \geq r_+(b)$  dentro del semieje negativo.

Si  $-\frac{1}{2} < b < 0$ , entonces  $b(2b+1) < 0$  y la cuadrática  $\Delta(r; b)$  carece de raíces reales; en este régimen se cumple  $\Delta(r; b) > 0$  para todo  $r \in \mathbb{R}$  (no hay intervalo crítico).

En la carta  $z$ , el análisis muestra que cada cero de  $\sigma(z)$  genera un par de equilibrios antipodales  $(\mp x(z), \mp y(z), z)$ , lo que da en total cuatro inducidos organizados en dos planos paralelos. Su casquete convexo es un tetraedro afín con dos vértices en cada plano y baricentro en el origen, ya que la suma de los cuatro vectores es nula. La simetría central global sólo se alcanza en el caso  $r = 0$ , donde  $|s_+| = |s_-|$  y las proyecciones horizontales de ambos pares tienen el mismo módulo; en el régimen general, las pendientes de las líneas que contienen a cada par no son opuestas.

De esta manera, el número total de equilibrios coexistentes depende del régimen de parámetros. Para  $r > 0$ ,  $b > 0$  se obtienen cinco equilibrios: el origen, dos de Lorenz y dos inducidos. En contraste, para  $r < 0$ ,  $b < 0$  aparecen siete equilibrios: el origen, dos de Lorenz y los cuatro inducidos. Esta última configuración, inusual en comparación con el modelo clásico, es la que motiva el estudio detallado de la coexistencia de los siete estados de reposo.

En cuanto a la estabilidad del origen, el linealizado confirma que este equilibrio es estable si  $b > 0$ ,  $\sigma_0 > -1$  y  $\sigma_0(1-r) > 0$ . Una bifurcación de Hopf ocurre únicamente en  $\sigma_0 = -1$  con  $r > 1$ , mientras que en el régimen  $r < 0$ ,  $b < 0$  el origen nunca bifurca, de modo que la dinámica se concentra en los equilibrios no triviales y los inducidos.

### 4.3. Exploración numérica

En esta sección estudiamos el régimen de parámetros

$$\mathcal{R}_- := \{(r, b) \in \mathbb{R}^2 : r < 0, b < 0\},$$

donde el sistema  $S^z$  alcanza el *máximo número de equilibrios coexistentes* (origen, dos de la rama de Lorenz y cuatro inducidos) siempre que los niveles sean admisibles en el dominio  $q \neq 0$ . A diferencia de la estrategia seguida en  $S^x$  (véase [31]), en la cual se analizaba la dinámica al *acercar o alejar* los equilibrios inducidos respecto de los equilibrios de Lorenz, aquí adoptamos un enfoque complementario: *fijamos* la configuración estacionaria esto es, fijamos  $(r, b) \in \mathcal{R}_-$  y el conjunto de alturas inducidas  $Z(\mathbf{a}, \mathbf{c}) = \{\tilde{z} : p(\tilde{z}) = 0, q(\tilde{z}) \neq 0\}$  y estudiamos la *variación de la estabilidad* mediante el espectro de los linealizados  $\mathcal{J}(\tilde{E})$  al variar selectivamente los parámetros.

Bajo este marco, distinguimos el papel de los bloques de parámetros. El vector  $\mathbf{a} = (a_0, a_1, a_2)$  *determina* el locus de ceros de  $p$  y, por ende, el *conjunto* de equilibrios inducidos (dos puntos antipodales en cada plano  $z = \tilde{z} \in Z(\mathbf{a}, \mathbf{c})$ ), mientras que el vector  $\mathbf{c} = (c_0, c_1, c_2)$  sólo interviene a través del denominador  $q$  como restricción de

dominio y en la evaluación de

$$\sigma(\tilde{z}) = \frac{p(\tilde{z})}{q(\tilde{z})} = 0, \quad \sigma'(z) = \frac{p'(z)q(z) - p(z)q'(z)}{q(z)^2},$$

de modo que *no* crea ni destruye alturas inducidas salvo en eventos de frontera  $q(\tilde{z}) = 0$ . En este sentido, trataremos a  $\mathbf{c}$  como un vector de *parámetros ocultos*: no fija ni condiciona la *existencia* de las bifurcaciones asociadas a la aparición de equilibrios inducidos (gobernadas por  $p$ ), pero sí modula cuantitativamente los coeficientes del Jacobiano (vía  $\sigma$  y  $\sigma'$  en los puntos de interés) y, con ello, los umbrales de estabilidad y las transiciones locales (p. ej., cruces de Routh–Hurwitz y Hopf) manteniendo invariante el lugar estacionario.

Las subsecciones que siguen presentan barridos numéricos sobre  $\mathbf{c}$  con  $(r, b, \mathbf{a})$  fijados en  $\mathcal{R}_-$ , documentando: (i) la dependencia del espectro  $\text{spec } \mathcal{J}(\tilde{E})$  respecto de  $q$  en cada equilibrio  $\tilde{E}$ , (ii) la localización de curvas de pérdida/ganancia de estabilidad en el subespacio de parámetros ocultos, y (iii) la organización de cuencas de atracción bajo perturbaciones de  $\mathbf{c}$  cuando la geometría de equilibrios permanece constante.

## 4.4. viaración de $c_1$

### 4.4.1. Diagrama de bifurcación uniparamétrico

Consideramos el barrido uniparamétrico en el coeficiente  $c_1$  del denominador  $q(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2$  con  $a_0 = 29$ ,  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = -1$ ,  $r = -1$ ,  $b = -10^{-1}$  y  $c_0 = 1, c_2 = 4$  fijos (constantes a lo largo del barrido). El observable es el *máximo asintótico* de  $x$ ,

$$\mathcal{B}(c_1; \mathbf{x}_0) := \{x_{\text{máx}} \text{ tras descartar transitorios}\},$$

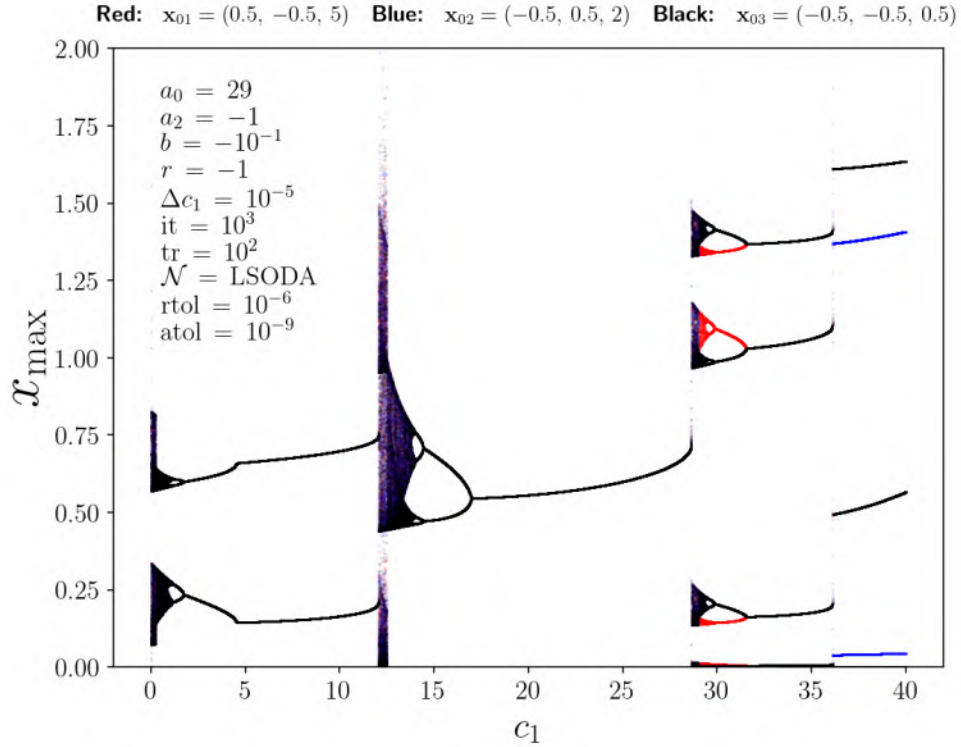
estimado con LSODA ( $\text{rtol} = 10^{-6}$ ,  $\text{atol} = 10^{-9}$ ), paso en  $c_1$   $\Delta c_1 = 10^{-5}$ ,  $t_{\text{tr}}$  corto y  $t_{\text{obs}}$  igualmente breve por punto. El diagrama de bifurcación 4.1 (trazos negro/rojo/azul para distintas condiciones iniciales)  $c_1 \mapsto \bigcup_{\mathbf{x}_0 \in \{\mathbf{x}_{01}, \mathbf{x}_{02}, \mathbf{x}_{03}\}} \mathcal{B}(c_1; \mathbf{x}_0)$  codifica cambios de estabilidad y multiestabilidad sin alterar el *lugar* de equilibrios (controlado por  $p$ ), enfatizando el papel “oculto” de  $\mathbf{c}$  sobre los coeficientes del linealizado (vía  $\sigma, \sigma'$ ). Esta representación es pertinente porque permite identificar *creaciones/deapariciones* de ciclos límites (saddle–node de ciclos), *duplicaciones de periodo* (flip), y *crisis* (interior/borde, fusión de bandas), además de delimitar regiones de cuencas disjuntas. Denotemos por  $I_k$  los intervalos contiguos en  $c_1$ . Detallamos a continuación la respuesta dinámica del sistema al barrer sobre el parámetro de control.

(I1)  $0 \lesssim \mathbf{c}_1 \lesssim 0.9$ . Aparición de *ventanas periódicas primarias* por *saddle–node de ciclos*; cada ventana culmina en una breve cascada *flip* (period–doubling) y pierde

estabilidad por crisis estrecha. Coexisten atractores para distintas  $\mathbf{x}_0$  (multicuenca).

- (I2)  $0.9 \lesssim \mathbf{c}_1 \lesssim 12.8$ . *Rama periódica estable de periodo 1* (una marca por  $x_{\text{máx}}$ ) suave en  $c_1$ ; no se observan subarmónicos dominantes. Interpretación: ausencia de cambios topológicos globales; estabilidad regulada por los términos lineales efectivos determinados por  $q$ .
- (I3)  $12.8 \lesssim \mathbf{c}_1 \lesssim 15.6$ . *Crisis interior y fusión de bandas* (band-merging): el conjunto de máximos se ensancha, emergen subventanas periódicas embebidas (islotas) y aumenta la sensibilidad a  $\mathbf{x}_0$ . La estructura es compatible con una secuencia flip seguida de crisis interior del atractor caótico.
- (I4)  $15.6 \lesssim \mathbf{c}_1 \lesssim 28.8$ . *Recuperación de una rama periódica estable* (periodo 1) por crisis inversa; disminuye la multiestabilidad observable y se restablece una única órbita atractora dominante para la mayoría de  $\mathbf{x}_0$ .
- (I5)  $28.8 \lesssim \mathbf{c}_1 \lesssim 33.0$ . *Bloque multestable*: coexisten una rama periódica principal y *ventanas periódicas anchas* (periodos bajos) separadas por lenguas caóticas; las distintas cuencas se manifiestan en los tres colores. La creación de ventanas es consistente con *saddle-node de ciclos* dependientes de  $\mathbf{x}_0$  y variaciones finas de  $q$ .
- (I6)  $33.0 \lesssim \mathbf{c}_1 \lesssim 35.5$ . *Ventanas periódicas estrechas* entre lenguas caóticas: persistencia de periodos bajos con pérdidas de estabilidad por *flip* puntuales. Región cercana a *crisis de borde* (colisión con órbitas inestables del esqueleto).
- (I7)  $35.5 \lesssim \mathbf{c}_1 \lesssim 40$ . *Multiestabilidad asimétrica*: una rama de *baja amplitud* capta preferentemente  $\mathbf{x}_{02}$  (trazo azul) mientras que otra rama regular subsiste para  $\mathbf{x}_{03}$  (negro); apariciones esporádicas del rojo. La morfología sugiere proximidad a dominios donde  $q(z)$  toma valores grandes en el soporte del atractor, amplificando  $|\sigma'|$  y segmentando cuencas.

Del diagrama tengamos presente : (i) El tiempo efectivo de observación por  $c_1$  es corto. (ii) Los “columnas” de dispersión alrededor de  $c_1 \approx 13-14$  y  $c_1 \approx 29-31$  son coherentes con zonas donde  $q(z)$  se aproxima a 0 en el soporte del atractor; allí  $\sigma$  y  $\sigma'$  inducen grandes gradientes y hacen plausible la ocurrencia de *crisis*. (iii) La lectura es consistente con el rol de  $\mathbf{c}$ :  $\mathbf{c}$  no altera  $Z(\mathbf{a}, \mathbf{c})$  (lugar de alturas inducidas) salvo en polos, pero sí modula los umbrales de estabilidad y por ende la aparición de ventanas a través de  $\sigma(r-1)$ ,  $\sigma(\tilde{z}_{\pm})$  y sus derivadas en los linealizados.



**Figura 4.1:** Diagrama de bifurcación uniparamétrico en  $c_1$  para  $q(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2$  con parámetros fijos  $a_0 = 29$ ,  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = -1$ ,  $r = -1$ ,  $b = -10^{-1}$  y  $(c_0 = 1, c_2 = 4)$  constantes; condiciones iniciales  $\mathbf{x}_{01} = (0.5, -0.5, 5)$  en rojo,  $\mathbf{x}_{02} = (-0.5, 0.5, 2)$  en azul y  $\mathbf{x}_{03} = (-0.5, -0.5, 0.5)$  en negro. Barrido denso  $\Delta c_1 = 10^{-5}$  e integración con LSODA ( $rtol = 10^{-6}$ ,  $atol = 10^{-9}$ ); por cada valor de  $c_1$  se descarta un transitorio  $t_{tr} = 10^2$  y se registra una ventana de observación definida por  $it = 10^3$  máximos de  $x$ , por lo que el tiempo efectivo por muestra es deliberadamente corto. Pese a esa limitación temporal, el diagrama organiza con claridad el comportamiento por intervalos: en  $I_1 [0, 0.9]$  aparecen ventanas periódicas primarias; en  $I_2 (0.9, 12.8]$  persiste una rama estable de período uno; en  $I_3 (12.8, 15.6]$  se observan crisis interiores y fusión de bandas; en  $I_4 (15.6, 28.8]$  se restituye la órbita de período uno; en  $I_5 (28.8, 33.0]$  emerge un bloque multestable con ventanas anchas; en  $I_6 (33.0, 35.5]$  subsisten ventanas estrechas separadas por lenguas caóticas; en  $I_7 (35.5, 40]$  domina una multistabilidad asimétrica con fuerte dependencia de la cuenca. La fineza del paso en  $c_1$  confiere resolución en los umbrales, pero las conclusiones dinámicas deben confirmarse con secciones de Poincaré y exponentes de Lyapunov.

## 4.5. Diagrama de bifurcación uniparamétrico (tiempo de integración ampliado)

Repetimos el barrido en  $c_1$  para  $q(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2$  con los mismos parámetros fijos

$$a_0 = 29, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = -1, \quad r = -1, \quad b = -10^{-1}, \quad (c_0, c_2) = (1, 4),$$

pero ahora usando un *tiempo de integración sustancialmente mayor* con el fin de permitir el asentamiento asintótico del atractor: LSODA (rtol =  $10^{-6}$ , atol =  $10^{-9}$ ), paso uniparamétrico  $\Delta c_1 = 10^{-3}$ , transitorio  $t_{\text{tr}} = 7 \times 10^4$  y ventana de observación con  $it = 10^5$  máximos de  $x$  por valor de  $c_1$ . Como antes, el observable es

$$\mathcal{B}(c_1; \mathbf{x}_0) := \{x_{\text{máx}} \text{ tras descartar transitorios}\},$$

y el diagrama 4.2  $c_1 \mapsto \bigcup_{\mathbf{x}_0 \in \{\mathbf{x}_{01}, \mathbf{x}_{02}, \mathbf{x}_{03}\}} \mathcal{B}(c_1; \mathbf{x}_0)$  (con el mapeo de colores indicado en la figura) registra cambios de estabilidad y multicuencias *sin alterar* el lugar estacionario (determinado por  $p$ ). Con el tiempo ampliado, el diagrama depura contribuciones transitorias, consolida la clasificación periódica/caótica y perfila con nitidez las crisis y fusiones de bandas. Mantenemos la notación de intervalos  $I_k$  y actualizamos la lectura dinámica:

- (I1)  $0 \lesssim c_1 \lesssim 0.9$ . Las *ventanas periódicas primarias* se consolidan: sus bordes quedan nítidos y los submúltiplos visibles; persiste la multicuencia (distintas  $\mathbf{x}_0$  seleccionan distintos periodos), pero desaparecen ramas espurias debidas a transitorios del diagrama corto.
- (I2)  $0.9 \lesssim c_1 \lesssim 12.8$ . La *rama estable de período 1* domina de forma casi monocolor; la mayoría de condiciones iniciales convergen a la misma órbita, confirmando estabilidad robusta en esta banda.
- (I3)  $12.8 \lesssim c_1 \lesssim 15.6$ . La *crisis interior* y la *fusión de bandas* se manifiestan como columnas densas y uniformes en  $x_{\text{máx}}$ , con islotes periódicos bien definidos. Se mantiene la sensibilidad a  $\mathbf{x}_0$ , pero con distribución más homogénea que en el diagrama corto.
- (I4)  $15.6 \lesssim c_1 \lesssim 28.8$ . *Recuperación* de la órbita de período 1 con carácter prácticamente monocuencia; el asentamiento temporal elimina oscilaciones residuales observadas con integración corta.
- (I5)  $28.8 \lesssim c_1 \lesssim 33.0$ . *Bloque multestable* más limpio: aparecen *ventanas anchas* (periodos bajos) con separatrices caóticas bien trazadas. La asignación por cuencas es más marcada y estable en el tiempo.

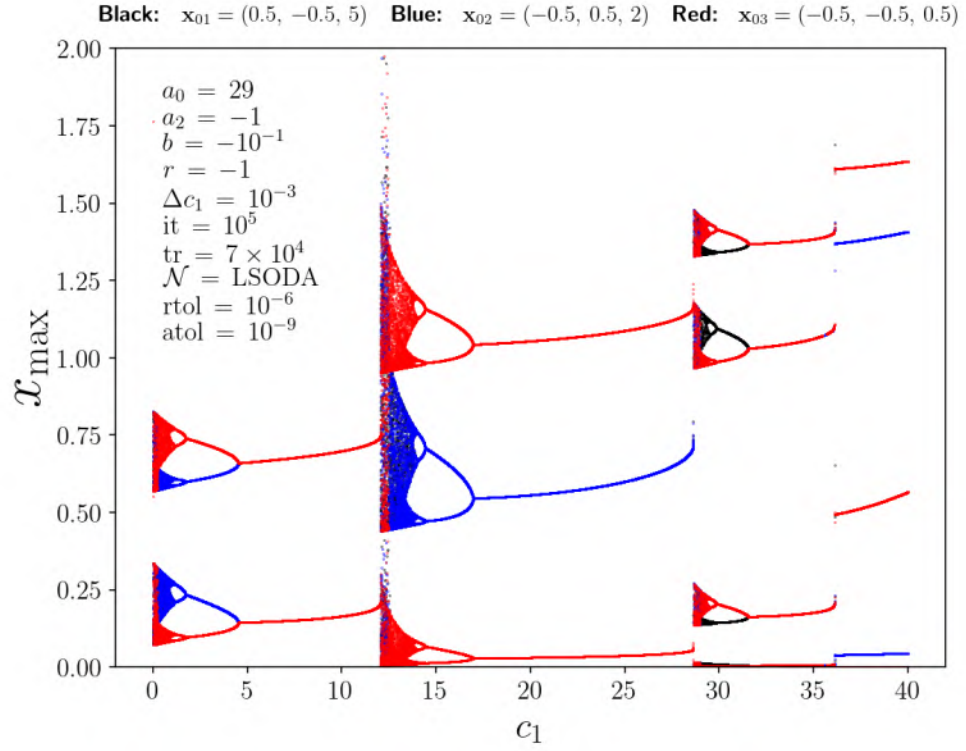
- (I6)  $33.0 \lesssim c_1 \lesssim 35.5$ . *Ventanas estrechas* entre lenguas caóticas con bordes precisos; la evidencia favorece una *crisis de borde* en los extremos de las ventanas y elimina pequeños artefactos del barrido rápido.
- (I7)  $35.5 \lesssim c_1 \lesssim 40$ . *Multistabilidad asimétrica* que se reafirma: el ramal de baja amplitud captura de forma sistemática una de las condiciones iniciales, mientras que otra cuenca conduce a una rama de mayor amplitud; la tercera cuenca interviene esporádicamente. La segmentación de cuencas resulta más clara que con tiempo corto.

### Ventajas y desventajas del diagrama con tiempo ampliado.

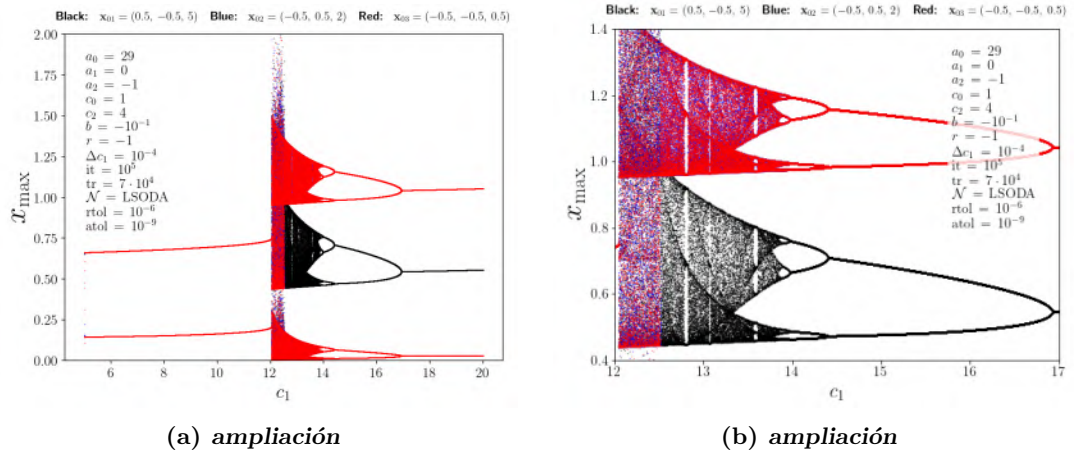
El incremento de  $t_{tr}$  e  $it$  aporta *fiabilidad dinámica*: elimina “ramas fantasma” de origen transitorio, perfila con nitidez ventanas periódicas y crisis (interior/borde, fusión de bandas) y mejora la asignación de cuencas. Sin embargo, el costo computacional crece de forma significativa y, al adoptarse un paso uniparamétrico más grueso  $\Delta c_1 = 10^{-3}$ , se *pierde resolución horizontal* frente al barrido rápido ( $\Delta c_1 = 10^{-5}$ ), pudiendo pasar por alto lenguas muy estrechas. En conjunto, el segundo diagrama es la referencia para conclusiones asintóticas, mientras que el primero sigue siendo útil como herramienta exploratoria de alta resolución en  $c_1$ ; ambos son complementarios en una estrategia de dos etapas (localizar con el rápido, confirmar con el prolongado).

Un punto metodológico poco explicitado en gran parte de la literatura sobre sistemas dinámicos —tanto en artículos como en monografías— es la *robustez numérica* con que se obtienen diagramas de bifurcación: suele indicarse el integrador, las tolerancias y, a lo sumo, un descarte de transitorio, pero rara vez se compara de forma sistemática el *tiempo de integración*, la *longitud del transitorio* y su impacto en la clasificación (periódico/caótico, crisis, multicuencas). Nuestra comparación entre el diagrama de tiempo corto y el de tiempo ampliado llena justamente ese hueco: muestra que, en el régimen  $\mathcal{R}_-$  considerado, la partición cualitativa en intervalos  $I_1$ – $I_7$  es estable y que aumentar  $t_{tr}$  e  $it$  *depura* artefactos transitorios sin reconfigurar los umbrales, lo que evidencia *convergencia rápida al atractor*. Esto contrasta con otros regímenes paramétricos (p. ej., cercanías de homoclinias, pérdidas de hiperbólica o proximidad a polos del campo efectivo) donde los transitorios pueden ser muy largos.

#### 4.5 Diagrama de bifurcación uniparamétrico (tiempo de integración ampliado)



**Figura 4.2:** Diagrama de bifurcación usando  $c_2$  como parámetro de control



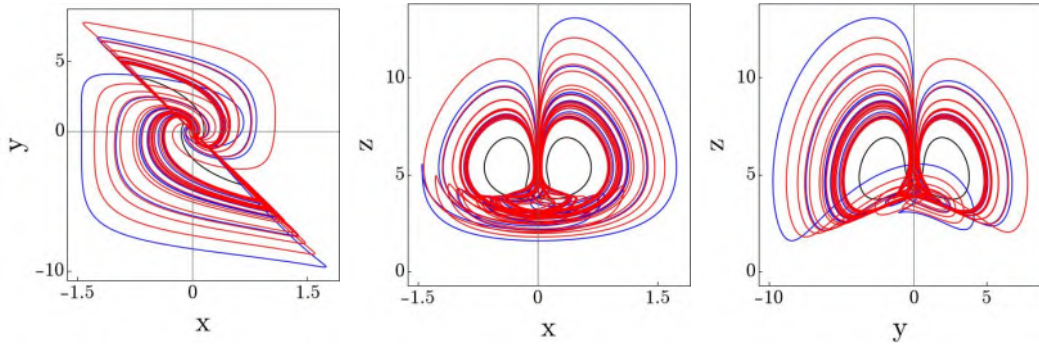
**Figura 4.3:** Diagrama de bifurcación con los mismos parámetros que 4.1 pero con un tiempo de integración mayor (3 ordenes de magnitud mayor)

## 4.6. Multiestabilidad de atractores caótico–periódico

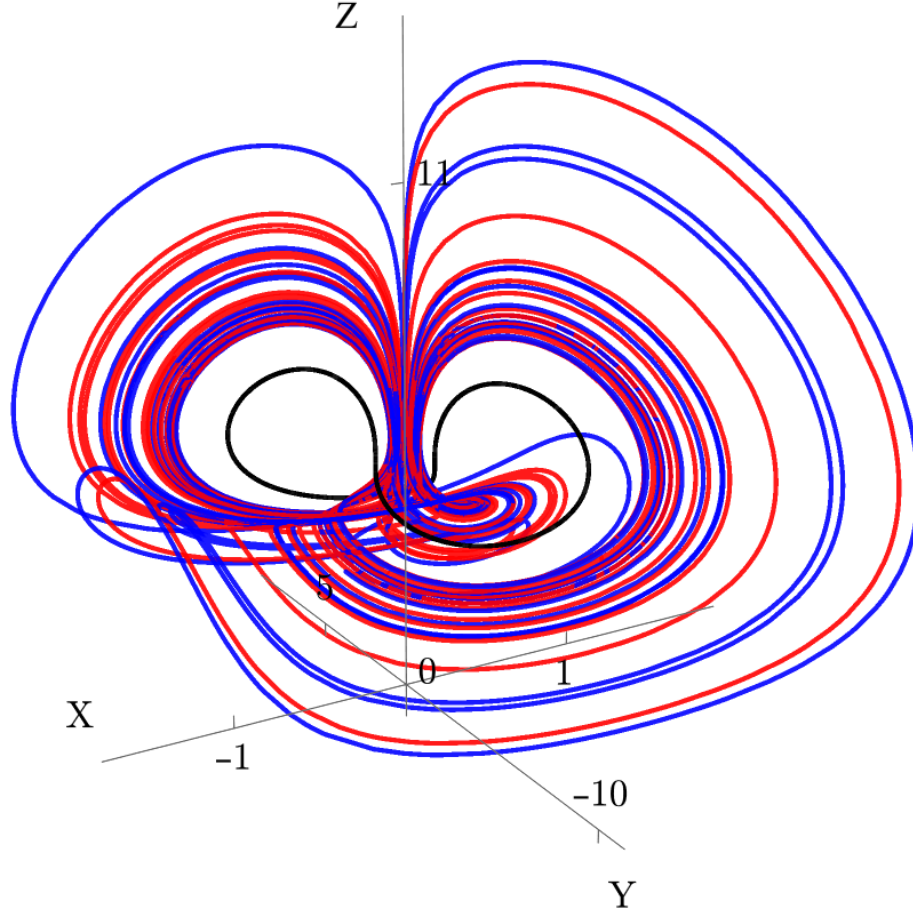
En esta sección documentamos la coexistencia de atractores extraños y periódicos en el régimen  $\mathcal{R}_-$  fijado en la sección anterior. La dinámica se resuelve numéricamente con integradores adaptativos con conmutación automática de rigidez (tipo LSODA/NDSolve), tolerancias  $\text{rtol} = 10^{-6}$ ,  $\text{atol} = 10^{-9}$ , y ventanas temporales lo bastante largas como para descartar transitorios y muestrear la fase asintótica (típicamente, integramos hasta  $t_{\text{máx}} \in [10^4, 10^5]$  y observamos la ventana temporal  $[t_{\text{máx}} - \Delta t, t_{\text{máx}}]$ ). Bajo estas hipótesis, el campo es disipativo en la región de interés. La divergencia

$$\nabla \cdot F(x, y, z) = -(\sigma(z) + 1 + b)$$

resulta negativa en el soporte de las órbitas observadas, por lo que existen conjuntos invariantes atractores. La *multiestabilidad* surge porque las variedades estables de puntos silla/órbitas inestables (originadas en los equilibrios de Lorenz y los inducidos en  $z = \tilde{z}$ ) *segmentan* el espacio de fases en cuencas disjuntas: para ciertas condiciones iniciales, la dinámica cae en un ciclo límite, mientras que para otras converge a un atractor extraño (con exponente de Lyapunov máximo positivo). En nuestro modelo, el numerador  $p$  fija la *geometría* de equilibrios; el denominador  $q$  a través de  $\sigma$  y  $\sigma'$  evaluadas en  $r - 1$  y en las alturas inducidas modula los coeficientes del linealizado y, por ende, la (*in*)estabilidad local de los ciclos que coexisten con el atractor caótico. El resultado es una morfología tipo mariposa con cuencas separadas por superficies invariantes, con un ciclo límite estable conviviendo con uno (o más) atractores extraños, como se ilustra en la Figura 4.5 órbitas numéricas obtenidas desde distintas condiciones iniciales.

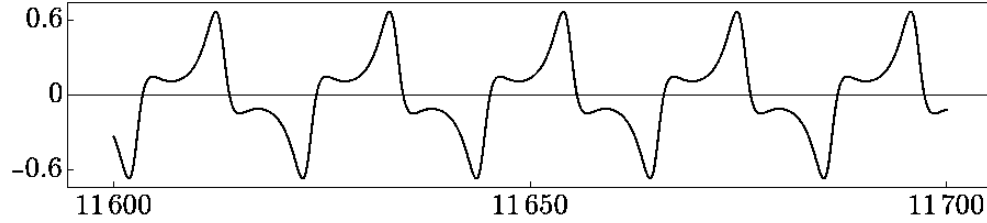


**Figura 4.4:** Proyecciones en los planos coordenados del atractor 4.5

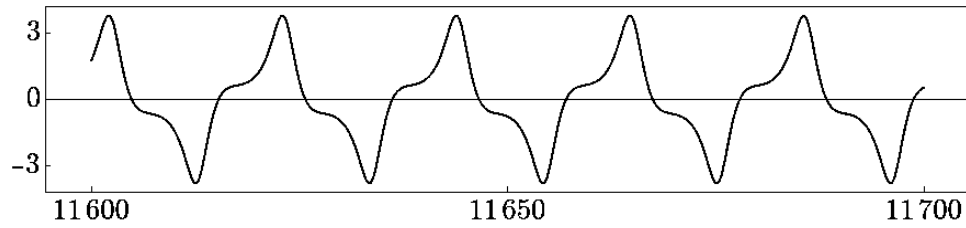


**Figura 4.5:** Órbitas del sistema inducido  $S^z$  para  $a_0 = 29$ ,  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = -1$ ,  $c_0 = 1$ ,  $c_1 = 6.2$ ,  $c_2 = 4$ ,  $r = -1$ ,  $b = -10^{-1}$ . Integración con `NDSolve` en  $t \in [0, 12000]$ ; se muestra la fase asintótica  $t \in [11600, 12000]$ . Condiciones iniciales:  $\mathbf{x}_{01} = (0.5, -0.5, 5)$  (negro),  $\mathbf{x}_{02} = (-0.5, 0.5, 2)$  (azul),  $\mathbf{x}_{03} = (-0.5, -0.5, 0.5)$  (rojo). Para este valor de  $c_1$  coexisten un *ciclo límite* estable (traza negra) y dos *atractores extraños* (trazas azul y roja), evidenciando *multistabilidad* dependiente de la condición inicial.

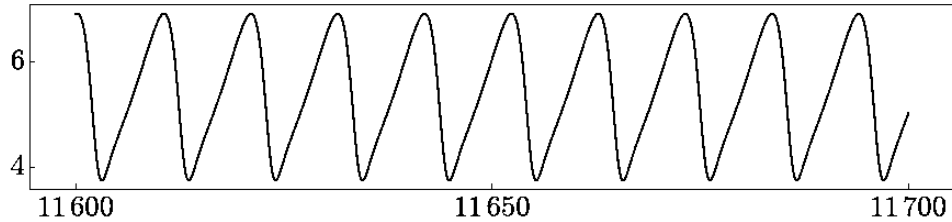
#### 4.6.1. Series temporales de la configuración multiestable



(a) Señal periódica de la variable  $x(t)$ , caracterizada por una estructura bimodal dentro de cada ciclo, con una amplitud de aproximadamente 0.669 y un periodo dominante cercano a 20.01.

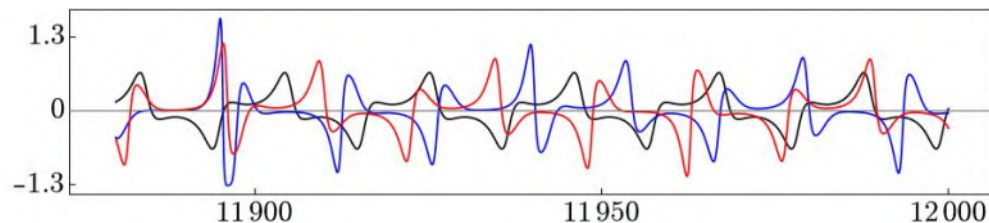


(b) Señal periódica de la variable  $y(t)$ , con amplitud aproximada de 3.791 y periodo dominante cercano a 20.01. Cada ciclo presenta un único máximo y un único mínimo local, con una forma no sinusoidal que incluye ondulaciones sistemáticas a lo largo del tiempo, lo que evidencia la presencia de componentes armónicas adicionales.

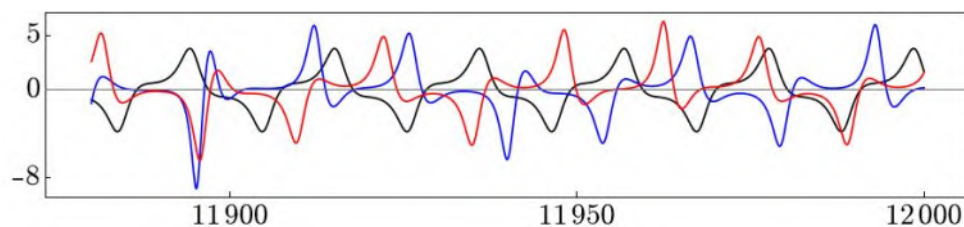


(c) La señal muestra diez ciclos completos con periodo dominante  $T \approx 10.01$ , amplitud pico-a-pico de  $\approx 3.2$  y oscilaciones entre 3.4 y 6.6. Cada ciclo presenta una única cresta y un valle bien definidos, con forma regular, transiciones suaves y sin ondulaciones internas, lo que indica un dominio claro de la frecuencia fundamental sin armónicos visibles en el dominio temporal.

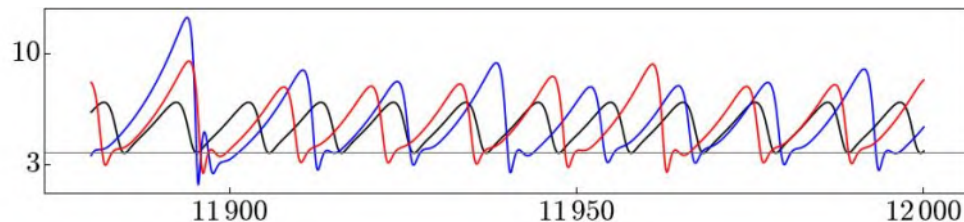
**Figura 4.6:** soluciones  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  del sistema  $S_1^z$  inicializado con  $\mathbf{x}_{00} = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 5)$



(a) *Proyección temporal de la variable  $x(t)$  para tres condiciones iniciales del sistema inducido. La trayectoria negra converge a un ciclo límite, mientras que las trayectorias azul y roja evolucionan sobre un atractor extraño.*



(b) *Proyección temporal de la variable  $y(t)$  para tres condiciones iniciales. La trayectoria negra oscila con regularidad moderada y amplitud estable, en correspondencia con un ciclo límite. En contraste, las trayectorias azul y roja presentan oscilaciones irregulares con amplitudes variables, compatibles con la evolución sobre un atractor extraño.*



(c) *Proyección temporal de la variable  $z(t)$  para tres condiciones iniciales. La trayectoria negra oscila con frecuencia y amplitud constantes, correspondiente a un ciclo límite. Las trayectorias azul y roja muestran variabilidad leve en la forma de los ciclos, compatibles con la evolución sobre un atractor extraño. Todas las trayectorias permanecen acotadas en el intervalo.*

**Figura 4.7:** Evolución temporal de las variables  $x(t)$ ,  $y(t)$  y  $z(t)$  (de arriba hacia abajo) para tres condiciones iniciales, con parámetros  $a = \{29, 0, -1\}$ ,  $c = \{1, 6.2, 4\}$ ,  $r = -1$ ,  $b = -0.1$ . Las trayectorias negra, azul y roja muestran la coexistencia de un ciclo límite y un atractor extraño, reflejando la propiedad de multiestabilidad del sistema inducido. .

## 4.7. Cuencas de atracción con estructura fractal

En el régimen multiestable documentado en las subsecciones anteriores, pasamos a cartografiar las cuencas de atracción en una sección transversal fija.

$$(a_0, a_1, a_2) = (29, 0, -1), \quad (c_0, c_1, c_2) = (1, 18, 1), \quad (r, b) = (-1, -10^{-1}),$$

para los cuales se observa la coexistencia de *tres ciclos límite* estables.

**Configuración numérica.** Se usa un integrador adaptativo con detección automática de rigidez (LSODA),  $\text{rtol} = 10^{-6}$ ,  $\text{atol} = 10^{-9}$ , tiempo total de integración  $t_{\text{int}} = 150$ , transitorio descartado  $t_{\text{tr}} = 30$ , paso máximo  $\Delta t_{\text{máx}} = 0.05$ . La sección de Poincaré es el plano

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = z_0\}, \quad z_0 = 0.5,$$

con detección de cruces por interpolación lineal entre muestras consecutivas. El dominio muestreado de condiciones iniciales es  $[x_0, y_0] \in [-10, 10]^2$  con malla  $800 \times 800$  y  $z_0$  fijo. Para descartar trayectorias no acotadas se impone un umbral de divergencia  $\|X(t)\| > 10^2$ .

**clasificador en sección.** Sea  $\phi_t$  el flujo de (4.1). Definimos, para cada condición inicial  $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ , el conjunto de tiempos de cruce

$$\mathcal{T}(\mathbf{x}_0) = \{t > t_{\text{tr}} : (z(t) - z_0)(z(t^-) - z_0) < 0\},$$

y el *conjunto de impactos* en la sección

$$\mathcal{S}(\mathbf{x}_0) = \{\pi_{xy}(\phi_t(\mathbf{x}_0)) : t \in \mathcal{T}(\mathbf{x}_0)\} \subset \mathbb{R}^2,$$

donde  $\pi_{xy}(x, y, z) = (x, y)$ . Requerimos al menos  $N_{\text{mín}} = 3$  impactos para caracterizar un régimen asintótico en  $\Sigma$ ; si  $|\mathcal{S}(\mathbf{x}_0)| \geq N_{\text{mín}}$ , definimos su *centroide*

$$m(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{|\mathcal{S}(\mathbf{x}_0)|} \sum_{p \in \mathcal{S}(\mathbf{x}_0)} p \in \mathbb{R}^2.$$

Elegimos tres *órbitas de referencia*  $\{\mathbf{x}^{(k)}(t)\}_{k=1}^3$  que, para condiciones iniciales representativas  $\{\mathbf{x}_k^{\text{ref}}\}_{k=1}^3$  (las usadas en el estudio de multiestabilidad), convergen a tres ciclos límite distintos. Sus centroides en la sección son

$$\mu_k = m(\mathbf{x}_k^{\text{ref}}) \in \mathbb{R}^2, \quad k = 1, 2, 3.$$

Con un umbral  $\varepsilon = 4$  (tolerancia en norma euclídea, consistente con la escala dinámica en  $\Sigma$ ), definimos el *clasificador por centroides*  $B : \mathbb{R}^2 \rightarrow \{0, 1, 2, 3, 4\}$ :

$$B(x_0, y_0) = \begin{cases} \arg \min_{k \in \{0,1,2\}} \|m(\mathbf{x}_0) - \mu_k\|, & \text{si } |\mathcal{S}(\mathbf{x}_0)| \geq N_{\min} \text{ y } \min_k \|m(\mathbf{x}_0) - \mu_k\| < \varepsilon, \\ 3, & \text{si } \exists t \leq t_{\text{int}} : \|\phi_t(\mathbf{x}_0)\| > 10^2 \text{ (divergente),} \\ 4, & \text{en otro caso (acotada no clasificada).} \end{cases}$$

### Algoritmo : Centroides en sección de Poincaré

1. (Calibración) Integrar las tres órbitas de referencia hasta  $t_{\text{int}}$ ; construir  $\mu_k$  a partir de  $\mathcal{S}(\mathbf{x}_k^{\text{ref}})$ .
2. (Barrido) Para cada  $(x_0, y_0)$  de la malla con  $z_0$  fijo: integrar  $\phi_t(x_0, y_0, z_0)$ , comprobar divergencia; si es acotada, construir  $\mathcal{S}(\mathbf{x}_0)$  y  $m(\mathbf{x}_0)$ ; asignar  $B(x_0, y_0)$  según la regla anterior.
3. (Salida) Pintar la imagen  $B$  con una paleta discreta.

En nuestro algoritmo anterior: (i) El uso de  $\Sigma$  transversal a los ciclos garantiza impactos regulares lejos de tangencias; (ii) la métrica de centroides es robusta cuando las órbitas periódicas son disjuntas en  $\Sigma$  y  $|\mathcal{S}|$  es suficiente; (iii) cerca de separatrices (bordes fractales) la clasificación es intrínsecamente sensible a  $\varepsilon$ ,  $t_{\text{tr}}$  y  $\Delta t_{\text{máx}}$ ; por ello, las franjas de frontera deben interpretarse con cautela y, si es necesario, refinarse con tiempos más largos o retornos múltiples del mapa de Poincaré.

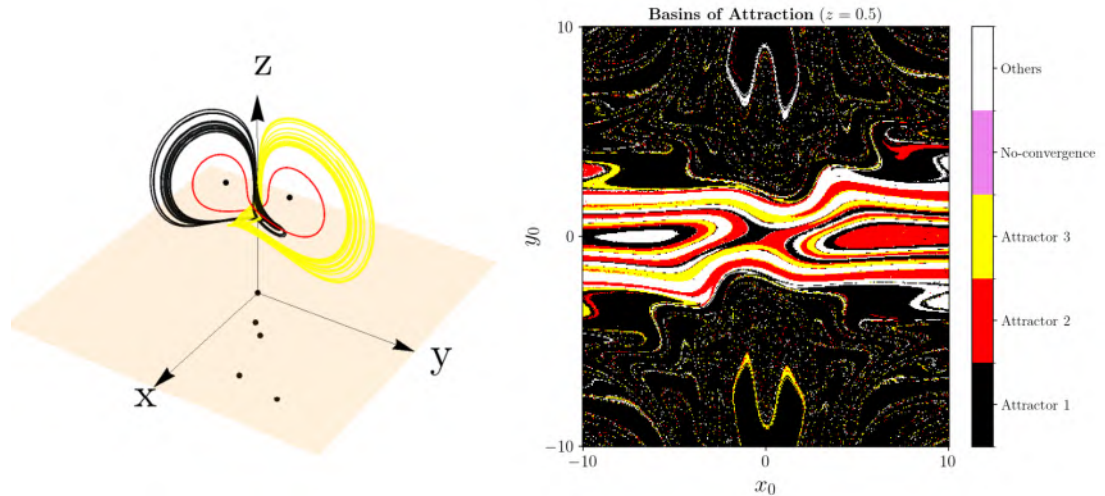
Con esta metodología obtenemos nuestra la Figura (4.9), la cual es nuestra Figura más representativa de este trabajo de grado.

La Figura 4.9 muestra las *cuencas de atracción* en la sección  $z = 0.5$ , calculadas mediante el algoritmo de clasificación por *sección de Poincaré* (promedio del centroide de cruces) sobre una malla  $800 \times 800$ . La codificación utilizada es: **negro** = Attractor 1, **rojo** = Attractor 2, **amarillo** = Attractor 3, **violeta** = trayectorias que superan el umbral de divergencia numérica, y **blanco** = órbitas acotadas no asignadas por el criterio de centroide.

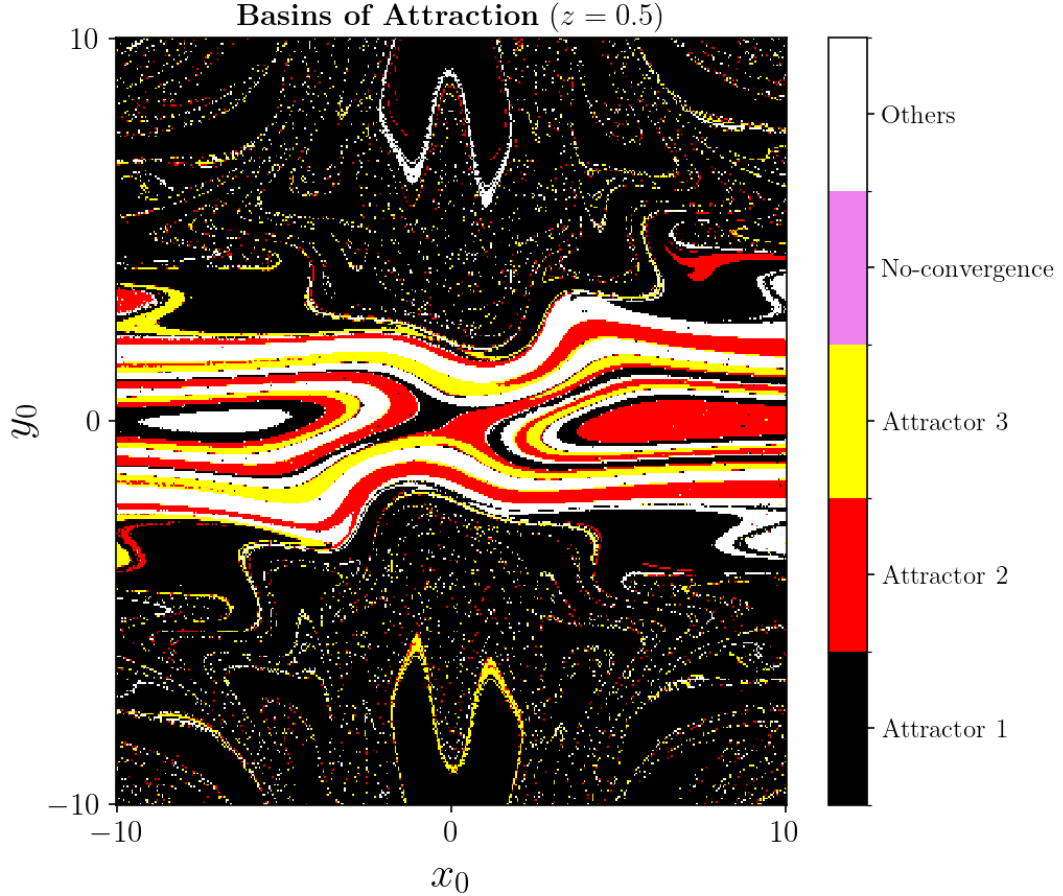
- Predomina la *cuenca del Attractor 1* (negro), que ocupa la mayor parte del plano  $(x_0, y_0)$  fuera de una franja central. Esto concuerda con los diagramas bifurcacionales: el ciclo límite estable captura una gran medida de condiciones iniciales.
- En torno a  $y_0 \approx 0$  aparece un *canal meandriforme* donde **rojo** (Attractor 2) y **amarillo** (Attractor 3) se *interdigitan* en láminas alternantes. Este cinturón confirma la *multiestabilidad*: variaciones pequeñas en  $(x_0, y_0)$  dentro del canal cambian el atractor final.

- Las *fronteras* entre negro/rojo/amarillo son finas y filamentosas, con repetición a múltiples escalas; la textura es *típicamente fractal* y compatible con bordes tipo Wada (un mismo borde separa tres cuencas), al menos en regiones extensas del canal.
- Los puntos **blancos** se concentran dentro y en los bordes del canal: son casos *acotados* que no quedaron dentro de la tolerancia de clasificación (controlada por EPS\_CENT), lo que sugiere *transitorios largos* o menor recurrencia a la sección.
- Los puntos **violetas** son minoritarios y se localizan en lenguas aisladas; corresponden a salidas numéricas del dominio efectivo ( $\|X(t)\| > 10^2$ ) y no alteran la estructura global.

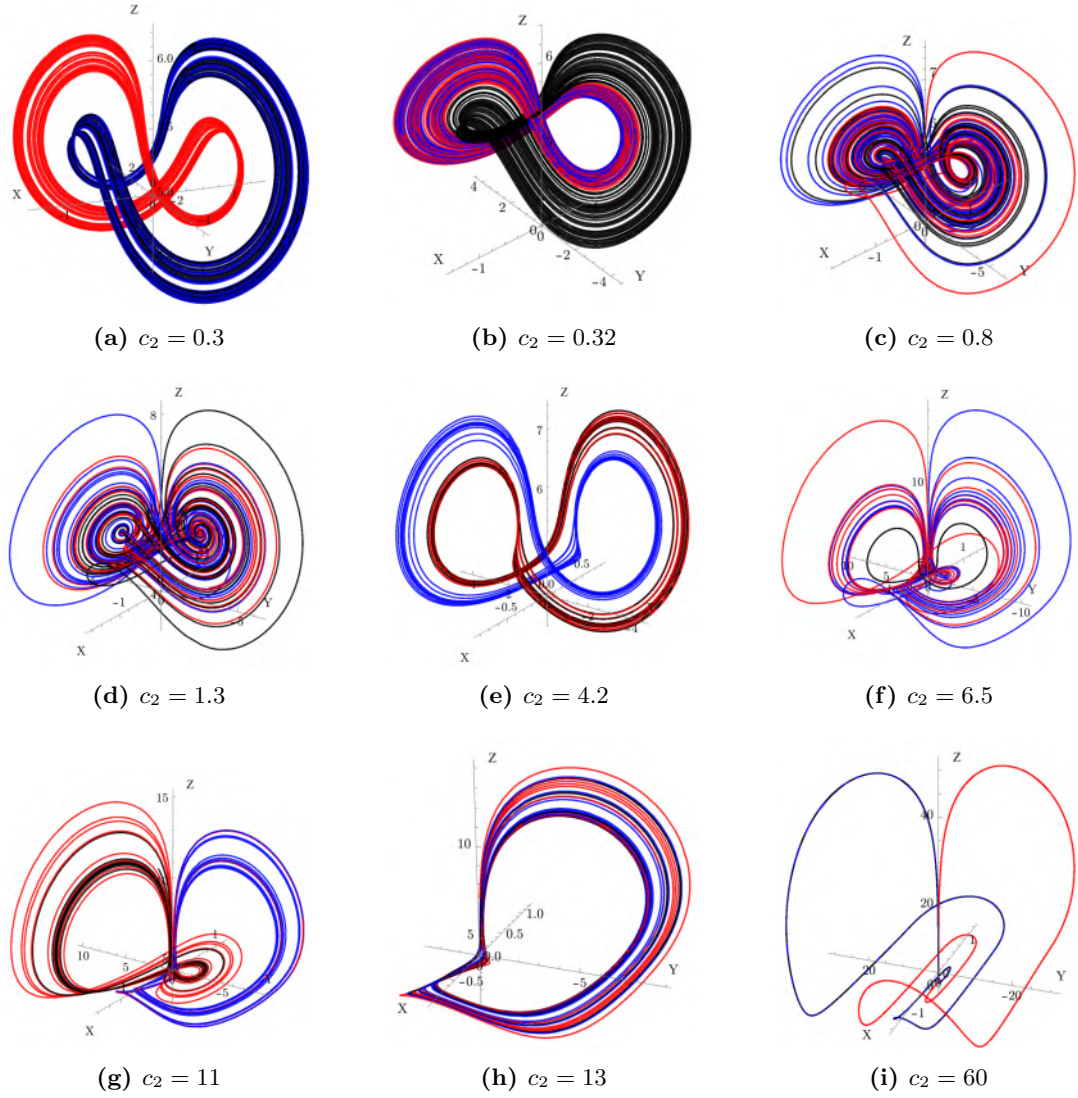
En conjunto, la figura corrobora tres hechos operativos del programa y del régimen considerado: (i) la *clasificación por centroide* separa nítidamente tres atractores con fronteras fractales; (ii) el *ciclo límite* domina en medida, mientras que los dos atractores ocupan un *cinturón entrelazado* sensible a  $(x_0, y_0)$ ; (iii) los conjuntos “No-convergence” y “Others” quedan *acotados y localizados*. En la siguiente sección documentaremos la transición caótica del sistema al variar  $c_2$ .



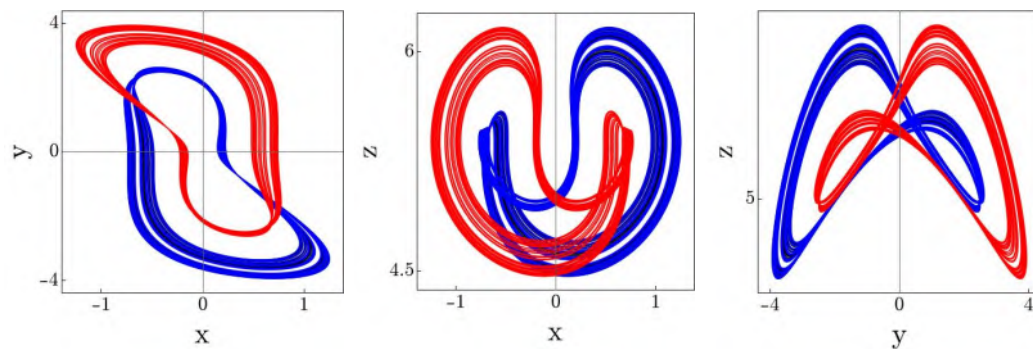
**Figura 4.8:** Cuenca de atracción de tres ciclos límite



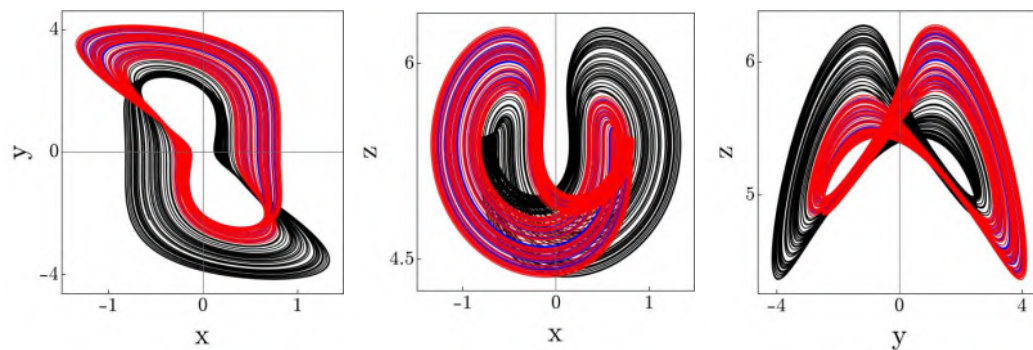
**Figura 4.9:** Cuencas de atracción en la sección  $z = 0.5$  del sistema inducido  $S^z$  con  $a_0 = 29$ ,  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = -1$ ,  $c_0 = 1$ ,  $c_1 = 18$ ,  $c_2 = 1$ ,  $r = -1$ ,  $b = -0.1$ . Malla  $800 \times 800$  en  $(x_0, y_0) \in [-10, 10]^2$ . Integración con `solve_ivp` en  $[0, 150]$ , transitorio  $t_{tr} = 30$  y paso máximo 0.05. Clasificación por sección de Poincaré en  $z = 0.5$ : se promedia el centroide de los cruces (al menos 3) y se asigna al atractor de referencia más próximo (tolerancia `EPS_CENT = 4`); se marca “no-convergence” si  $\|X(t)\| > 10^2$  en algún instante. Codificación: **negro** = Atractor 1, **rojo** = Atractor 2, **amarillo** = Atractor 3, **violeta** = no-convergence, **blanco** = órbitas acotadas no asignadas. Predomina la cuenca negra, mientras que un canal central meandriforme muestra interdigitaciones rojo/amarillo con fronteras filamentosas de apariencia fractal; las lenguas violetas y los bolsillos blancos son escasos y localizados. El mapa confirma *multiestabilidad* para estos parámetros: coexisten tres ciclos límite estables con cuencas entrelazadas.

4.8. variación de  $c_2$ 

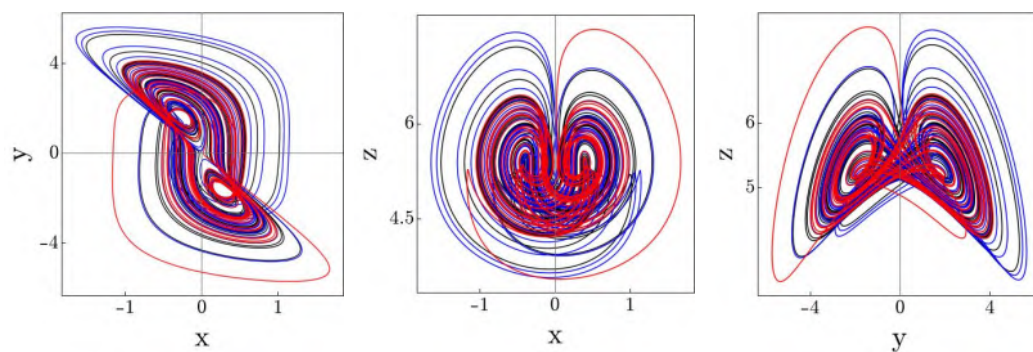
**Figura 4.10:** Comparación de nueve atractores generados al variar  $c_2$ , con  $\mathbf{a} = (29, 0, -1)$ ,  $\mathbf{c} = (1, 0.1, c_2)$ , y  $\mathbf{p}_L = (-1, -0.1)$ . Las trayectorias se integraron con `NDSolve[]` hasta  $t = 3000$ , considerando un transitorio de  $t = 2800$ . Se muestran las tres condiciones iniciales: en negro  $(0.5, -0.5, 5)$ , en azul  $(-0.5, 0.5, 2)$ , y en rojo  $(-0.5, -0.5, 0.5)$ .



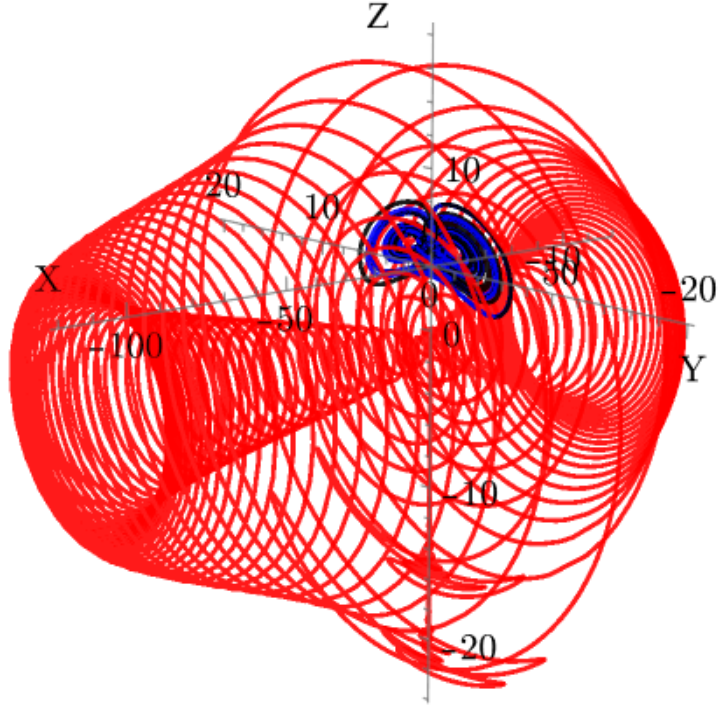
**Figura 4.11:**  $\mathbf{a} = (29, 0, -1)$ ,  $\mathbf{c} = (1, 0.1, 0.3)$ ,  $\mathbf{p}_L = (-1, -0.1)$



**Figura 4.12:**  $\mathbf{a} = (29, 0, -1)$ ,  $\mathbf{c} = (1, 0.1, 0.32)$ ,  $\mathbf{p}_L = (-1, -0.1)$



**Figura 4.13:**  $\mathbf{a} = (29, 0, -1)$ ,  $\mathbf{c} = (1, 0.1, 0.8)$ ,  $\mathbf{p}_L = (-1, -0.1)$



**Figura 4.14:** Evolución tridimensional del sistema inducido con  $\mathbf{a} = (29, 0, -1)$ ,  $\mathbf{c} = (35, 1, 0.1)$ , y  $\mathbf{p}_L = (-1, -0.1)$ , integrado con `NDSolve[]` hasta  $t = 300$  tras un transitorio de  $t = 100$ . Las trayectorias negra y azul permanecen acotadas, mientras que la roja presenta crecimiento no acotado en norma euclídea, lo que indica divergencia hacia infinito desde la condición inicial  $(-0.5, -0.5, 0.5)$ .

En esta sección ajustamos el análisis al marco de “parámetros ocultos” del texto: mantenemos fijos

$$\mathbf{a} = (29, 0, -1), \quad (r, b) = (-1, -0.1), \quad q(z) = 1 + 0.1z + c_2 z^2, \quad \sigma(z) = \frac{29 - z^2}{q(z)}.$$

Para todos los valores de la Figura 4.10  $c_2 \in \{0.3, 0.32, 0.8, 1.3, 4.2, 6.5, 11, 13, 60\}$  se cumple  $0.1^2 - 4c_2 < 0$ , luego  $q(z) \neq 0$  para todo  $z$ . En consecuencia, el *lugar de equilibrios* (rama de Lorenz e inducida) no cambia y el campo está bien definido en todo  $\mathbb{R}^3$ ; al variar  $c_2$  sólo se reescala la parte efectiva del acoplamiento transversal a

$y = x$  a través de  $\sigma$  y  $\sigma'$ . De hecho,

$$\partial_{c_2}\sigma(z) = \frac{z^2(z^2 - 29)}{q(z)^2}.$$

Las transiciones observadas en [Figura 4.10](#) son, por tanto, *cambios de estabilidad* del soporte asintótico *sin* creación/eliminación de alturas inducidas.

Con esta premisa, la morfología que se ve en [Figura 4.10](#) es la siguiente (las afirmaciones se desprenden directamente de las trazas superpuestas de tres condiciones iniciales):

- **Baja curvatura del denominador (paneles (a)–(d),  $c_2 = 0.3, 0.32, 0.8, 1.3$ ).** Atractores de *dos lóbulos* tipo mariposa con *relleno ancho* en cada lóbulo: la traza no es filiforme sino “gruesa”, y los tres colores recorren regiones extensas del mismo soporte. Esa ocupación volumétrica es consistente con dinámica caótica y “selección de lóbulo” dependiente de la condición inicial (en algunos paneles cada color pasa más tiempo en un lóbulo u otro), sin colapso a una órbita única.
- **Ventana periódica y colapso a figura–8 (panel (e),  $c_2 = 4.2$ ).** Las tres trayectorias *coinciden* prácticamente sobre una misma curva delgada que describe un “8”: el soporte es filiforme y monocolor al superponerse, rasgo inequívoco de *ciclo límite estable* que visita ambos lóbulos.
- **Monolobalización periódica (panel (f),  $c_2 = 6.5$ ).** La órbita estable se concentra en un *único lóbulo*, de nuevo *filiforme* y con clara coincidencia de colores: ciclo límite estable monolobal.
- **Aumento de amplitud monolobal (paneles (g)–(h),  $c_2 = 11, 13$ ).** Persisten curvas delgadas en un solo lóbulo con *radio* marcadamente mayor que en  $c_2 = 6.5$ ; la coincidencia de los tres colores indica una única órbita atractora para las condiciones iniciales probadas (estabilidad robusta).
- **Reaparición de multicuenca a gran  $c_2$  (panel (i),  $c_2 = 60$ ).** Las trayectorias de distinto color *no* colapsan en la misma curva: cada condición inicial se estabiliza en un lazo de gran amplitud en lóbulos distintos. Es una manifestación clara de *coexistencia de atractores* (al menos dos ciclos límite estables) con cuencas separadas.

Al incrementar  $c_2$  sin mover el conjunto de equilibrios ni introducir polos el sistema pasa, de forma visible en la figura, de un régimen *doble-pétalo caótico* (trazas gruesas superpuestas) a *ventanas periódicas* (curvas delgadas que colapsan para los tres colores), primero en figura–8 y luego *monolobales* de amplitud creciente; para valores muy grandes de  $c_2$  reaparece la *multiestabilidad*, con selección de lóbulo según la condición inicial. Este patrón es coherente con el papel de  $q$ : al cambiar  $c_2$  se modulan  $\sigma(r-1)$  y

$\sigma(\tilde{z}_{\pm})$  en los linealizados, desplazando umbrales de Routh–Hurwitz y abriendo/cerrando ventanas periódicas, mientras la geometría estacionaria impuesta por  $p(z) = 29 - z^2$  permanece invariante.

## Conclusiones

---

Este trabajo introdujo y desarrolló un marco *geométrico-paramétrico* para el sistema de Lorenz basado en la carta  $z$  y en una función de acoplamiento  $\sigma(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ ,  $\deg p, \deg q \leq 2$ , que *induce* equilibrios adicionales sin eliminar los clásicos. La idea central: *mapear los ceros de  $p$  en alturas  $z = \tilde{z}$  y resolver las dos ecuaciones restantes* permitió controlar la localización de los puntos fijos y estudiar su estabilidad con un nivel de detalle que no aparece en la literatura clásica del modelo. A continuación sintetizamos los hallazgos y su alcance.

1. **Geometría del lugar estacionario.** La descomposición  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_L \cup \mathcal{E}_I$  separa la *rama de Lorenz* ( $y = x$ ) de la *rama inducida* ( $\sigma(\tilde{z}) = 0$ ). Para  $a_1 = 0$  y  $a_0 a_2 < 0$  aparecen dos alturas simétricas  $\tilde{z}_{\pm} = \pm \sqrt{-a_0/a_2}$ ; en cada plano  $z = \tilde{z}$  surgen dos equilibrios antipodales, con intersección  $\mathcal{E}_L \cap \mathcal{E}_I$  cuando  $p(r-1) = 0$  y  $q(r-1) \neq 0$ . El vector  $\mathbf{a}$  fija el *locus* de alturas;  $\mathbf{c}$  no crea alturas nuevas (salvo en polos), sólo restringe el dominio y modula coeficientes locales vía  $\sigma, \sigma'$ .
2. **Conteo por regímenes.** En  $r > 0$ ,  $b > 0$  a lo sumo existen los dos inducidos de  $z = \tilde{z}_+ > 0$  (total: 5 equilibrios con los clásicos). En  $r < 0$ ,  $b < 0$  pueden coexistir *siete* equilibrios (origen, dos de Lorenz y cuatro inducidos) exactamente cuando

$$q(r-1) \neq 0, \quad q(\tilde{z}_{\pm}) \neq 0, \quad |r| < \sqrt{-a_0/a_2}.$$

3. **No-equivalencia de flujos con el mismo lugar estacionario.** Los sistemas  $S_1^z$  y  $S_2^z$  (que difieren sólo por el signo de la primera componente) *comparten*  $\mathcal{E}$  pero *no* son topológicamente equivalentes preservando orientación temporal en ningún abierto donde  $y \neq x$  y  $\sigma \neq 0$ . Esto subraya que igualar puntos fijos no implica igualar flujos.
4. **Estabilidad lineal y umbrales de Hopf.** En el origen, el bloque triangular da

---

condiciones nítidas: estabilidad asintótica si y sólo si

$$b > 0, \quad \sigma(0) > -1, \quad \sigma(0)(1-r) > 0.$$

Existe Hopf en el origen únicamente cuando  $r > 1$  y  $\sigma(0)$  cruza  $-1$  transversalmente. En el régimen  $r < 0$ ,  $b < 0$  *no hay Hopf* en el origen. En los equilibrios de Lorenz, el cúbico característico conduce a una condición explícita

$$\sigma(r-1) = \Theta(b, r)$$

con discriminante  $\Delta(r; b)$  que delimita la *necesidad* de realismo del umbral, y con las desigualdades de Routh–Hurwitz como *suficiencia* local.

5. **Dinámica inducida por parámetros “ocultos”.** Al fijar  $p$  (geometría de alturas) y barrer parámetros de  $q$  documentamos que  $\mathbf{c}$  actúa como *control fino de estabilidad* sin cambiar  $\mathcal{E}$ : modifica  $\sigma$  y  $\sigma'$  en los puntos relevantes, desplazando umbrales de Routh–Hurwitz/Hopf y reconfigurando el soporte asintótico.
6. **Exploración numérica en  $\mathcal{R}_- = \{r < 0, b < 0\}$ .** Con  $a_1 = 0$  y dos alturas inducidas, el barrido en  $c_1$  mostró bandas con ventanas periódicas primarias, cascadas *flip*, crisis (interior y de borde) y fusiones de bandas; la integración prolongada confirmó la partición cualitativa y depuró artefactos transitorios. El barrido en  $c_2$  exhibió transiciones coherentes con el rol de  $q$ : paso de mariposa caótica (dos lóbulos “gruesos”) a órbitas de período 1 en figura–8, luego ciclos monolobales de amplitud creciente y, para  $c_2$  grande, reaparición de multicuencas (coexistencia de ciclos).
7. **Cuencas de atracción con estructura fractal.** En una sección  $z = 0.5$  se cartografiaron cuencas para tres ciclos límite coexistentes mediante un clasificador por centroide de impactos en Poincaré. Se observaron franjas meandriformes con interdigitaciones finas y fronteras filamentosas compatibles con estructura fractal (y conjeturalmente tipo Wada), junto con zonas mayoritarias dominadas por un ciclo estable.

## Implicaciones

- La *inducción en  $z$*  proporciona un mecanismo sistemático para *posicionar* equilibrios y, con ello, esculpir variedades invariantes y cuencas, habilitando *modos conmutables* (memoria por estados, lógica por cuencas) sin añadir retardos ni forzamientos.

- 
- Separar *geometría* (**a**) de *estabilidad* (**c**) sugiere arquitecturas de control: diseñar  $p$  para fijar alturas (y simetrías) y usar  $q$  como “ganancia distribuida” que abre/-cierra ventanas periódicas o regula la coexistencia de atractores.

## Limitaciones

- El análisis global de manifolds (intersecciones hetero/homoclínicas) no se abordó de forma rigurosa; las crisis se identificaron numéricamente.
- No se calculó el primer coeficiente de Lyapunov  $l_1$  en los umbrales de Hopf; la clasificación super/subcrítica quedó abierta.
- Las propiedades de frontera tipo Wada no fueron demostradas; sólo se aportó evidencia visual.
- Se trabajó con cocientes cuadráticos; quedan fuera numeradores/denominadores de mayor grado o no polinomiales, y el tratamiento de polos cercanos al soporte del atractor.

El programa de *inducción en  $z$*  propuesto demuestra que es posible separar —y explotar— dos capas del problema: (i) la *morfología* del lugar estacionario, gobernada por los ceros de  $p$ , y (ii) la *estabilidad y bifurcaciones locales*, gobernadas por  $q$  a través de  $\sigma$  y  $\sigma'$ . Esta separación permite alcanzar configuraciones no clásicas (hasta siete equilibrios coexistentes en  $r < 0, b < 0$ ) y orquestar transiciones periódicas/caóticas y multiestabilidad sin alterar el conjunto de alturas. El enfoque abre un espacio fértil para el diseño geométrico de dinámica en Lorenz y sistemas afines, con aplicaciones potenciales en memorias por cuencas, lógica por estados y control de atractores.

## Apendice

---

### 6.1. Programación en C y Python: Exponentes de Lyapunov, diagrama de bifurcación y cuencas de atracción

#### 6.1.1. Pseudocódigo para el cálculo de los exponentes de lyapunov en un sistema dinámico tridimensional

##### Pseudocódigo

```
1: Inicio
2: Declarar constantes y variables globales:
3:    $a_0, a_1, a_2, c_0, c_1, c_2, B, R, \Delta R, \Delta t, \Delta a_0$ 
4:    $x_{00}, Y_{00}, z_{00}$                                 ▷ Condiciones iniciales
5:    $ntau, Nr, Ntrans$                                 ▷ Parámetros de la simulación
6:   FILE *fp                                           ▷ Manejo de archivos
7:
8: function MAIN
9:   for  $a_0$  desde  $a_{0min}$  hasta  $a_{0max}$  con paso  $\Delta a_0$  do
10:     Crear nombre de archivo de salida basado en  $a_0$  y  $B$ 
11:     Asignar memoria para los vectores y matrices necesarias
12:     ( $yL, yLout, y, yout, v1, v2, v3, V1, V2, V3, N, cum$ )
13:     Abrir el archivo de salida
14:     for  $R$  desde  $R_{min}$  hasta  $R_{max}$  con paso  $\Delta R$  do
15:       Inicializar tiempo  $t \leftarrow 0.0$ 
16:       Asignar condiciones iniciales a  $yL$  ( $x_{00}, Y_{00}, z_{00}$ )
17:       Ciclo Transitorio:
18:       for  $j \leftarrow 1$  hasta  $Ntrans$  do
19:         Llamar a la función de integración (mirk4) para resolver el
```

```

sistema de Lorenz
20:         Actualizar el tiempo  $t$ 
21:         Asignar la salida  $yLout$  a  $yL$  para la siguiente iteración
22:     end for
23:     Asignar condiciones iniciales para la evolución de  $y[1..12]$ 
24:          $y[1..3]$                                 ▷ Variables del modelo de Lorenz
25:          $y[4..12]$                                 ▷ Variables del espacio tangente
26:     Ciclo Principal para Calcular los Exponentes de Lyapunov:
nov:
27:         for  $m \leftarrow 1$  hasta  $Nr$  do
28:             for  $j \leftarrow 1$  hasta  $ntau$  do
29:                 Llamar a la función de integración (mirk4) para avanzar
en el tiempo
30:                 Actualizar el tiempo  $t$ 
31:             end for
32:             Construir la base ortonormal usando OGS (Ortogonalización
de Gram-Schmidt)
33:             Acumular logaritmos de las normas de los vectores ortonorma-
les
34:         end for
35:         Guardar los resultados en el archivo de salida
36:     end for
37:     Cerrar el archivo de salida
38:     Liberar la memoria asignada para los vectores y matrices
39: end for
40:     Imprimir mensaje de finalización
41: end function
42: Fin
43: function MIRK4
44:     Método de Runge-Kutta de 4to orden para resolver las ecuaciones dife-
renciales
45: end function
46: function DERIVADASLORENZ
47:     Ecuaciones diferenciales del sistema de Lorenz modificado
48: end function
49: function DERIVADAS
50:     Ecuaciones diferenciales para el sistema completo (modelo de Lorenz +
espacio tangente)
51: end function

```

```

52: function OGS
53:   Ortogonalización de Gram-Schmidt para obtener una base ortonormal
54: end function
55: function NORMA
56:   Calcular la norma de un vector
57: end function
58: function DOT
59:   Calcular el producto punto de dos vectores
60: end function

```

### 6.1.2. Pseudocódigo para el cálculo del diagrama de bifurcación con $c_1$ como parámetro

#### Pseudocódigo

```

1: Inicio
2: Definir sistema inducido (parámetro de bifurcación  $c_1$ ):
3: function MODIFIEDSYSTEM( $t, (x, y, z), a_0, a_1, a_2, c_0, c_1, c_2, b, r$ )
4:    $num \leftarrow a_0 + a_1 z + a_2 z^2$ 
5:    $den \leftarrow c_0 + c_1 z + c_2 z^2$ 
6:    $\dot{x} \leftarrow (-x + y) num / den$ 
7:    $\dot{y} \leftarrow rx - y - xz$ 
8:    $\dot{z} \leftarrow xy - bz$ 
9:   return ( $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ )
10: end function
11: Parámetros fijos:  $a_0=29, a_1=0, a_2=-1, c_0=1, c_2=4, r=-1, b=-0.1$ 
12: Rango de exploración:  $c_1 \in [0, 40]$  con paso  $10^{-3}$ 
13: Condiciones iniciales:  $CI_1 = (0.5, -0.5, 5), CI_2 = (-0.5, 0.5, 2), CI_3 = (-0.5, -0.5, 0.5)$ 
14: Tiempo de integración:  $dt = 10^{-3}, transient = 70000$  pasos,  $iterations = 10^5$  pasos
15: Evaluación temporal:  $t_{eval} = \{0, dt, 2dt, \dots, (iterations - 1)dt\}$ 
16: Método y tolerancias: LSODA,  $rtol = 10^{-6}, atol = 10^{-9}$ 
17: Estructuras para gráfica conjunta: listas  $all\_c1$  y  $all\_maxima$ 
18: for cada condición inicial  $CI_k$  do
19:    $c1\_data \leftarrow [], maxima\_data \leftarrow [], state \leftarrow CI_k$ 
20:   abrir archivo de salida sistema_c1_ci.k.dat
21:   for cada  $c_1$  en  $[0, 40]$  con paso  $10^{-3}$  do
22:      $sol \leftarrow INTEGRATESYSTEM(MODIFIEDSYSTEM, state, t_{eval}, \text{paráme-}$ 

```

```

    tros)
23:      $x \leftarrow$  componente  $x$  de  $sol$  desde índice  $transient$  hasta el final
24:      $I\_máx \leftarrow \text{DETECTLOCALMAXIMA}(x)$   $\triangleright$  máximos locales discretos
25:      $M \leftarrow x[I\_máx]$   $\triangleright$  valores pico de  $x$ 
26:     anexar a  $c1\_data$  el valor actual de  $c_1$  repetido  $|M|$  veces
27:     anexar a  $maxima\_data$  los valores de  $M$ 
28:     escribir en archivo líneas " $c_1 \quad m$ " para cada  $m \in M$ 
29:      $state \leftarrow$  último estado de  $sol$   $\triangleright$  warm start para el siguiente  $c_1$ 
30: end for
31: cerrar archivo sistema_c1_ci_k.dat
32: anexar  $c1\_data$  a  $all\_c1$  y  $maxima\_data$  a  $all\_maxima$ 
33: guardar figura de dispersión individual como sistema_c1_ci_k.png
34: end for
35: Gráfica conjunta:
36: crear figura; para  $k = 1, 2, 3$  añadir series ( $all\_c1[k], all\_maxima[k]$ ) con eti-
    quetas de  $CI_k$ 
37: etiquetar ejes con  $xlabel = c_1$  y  $ylabel = x_{máx}$ ; título con  $a_0=29$ ,  $a_2= -$ 
    1,  $b= -0.1$ 
38: mostrar/guardar figura como sistema_c1_todas.png
39: Fin
40: function INTEGRATESYSTEM( $f, state, t\_eval, params$ )
41: resolver IVP con LSODA y tolerancias dadas; return solución completa
    y estado final
42: end function
43: function DETECTLOCALMAXIMA( $x[]$ )
44: retornar índices  $i$  tales que  $x[i-1] < x[i]$  y  $x[i] > x[i+1]$  (manejo de
    bordes/suavizado opcional)
45: end function

```

### 6.1.3. Pseudocódigo para el cálculo de cuencas de atracción vía sección de Poincaré y clasificación por centroides

#### Pseudocódigo

- 1: **Inicio**
- 2: **Parámetros del sistema inducido:**  $a_0=29$ ,  $a_1=0$ ,  $a_2= -$   
1,  $c_0=1$ ,  $c_1=18$ ,  $c_2=1$ ,  $r= -1$ ,  $b= -0.1$
- 3: **function** SIGMA( $z$ )

```

4:   return  $\frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2}{c_0 + c_1 z + c_2 z^2}$ 
5: end function
6: function SISTEMA( $t, (x, y, z)$ )
7:    $s \leftarrow \text{SIGMA}(z)$ 
8:   return ( $s(y-x), rx-y-xz, xy-bz$ )
9: end function
10: Parámetros de integración y de sección de Poincaré:
11:    $t\_int=150$  (tiempo total),  $t\_trans=30$  (descartar),  $max\_step=0.05$ 
12:    $DIV\_THRESH=10^2$  (umbral de norma para divergencia)
13:    $EPS\_CENT=4.0$  (tolerancia de clasificación por centroide)
14:    $MIN\_CROSS=3$  (cruces mínimos para usar centroide)
15:    $z\_0=0.5$  (plano de Poincaré)
16: function GETSECTIONPTS( $sol$ )
17:    $t \leftarrow sol.t, Y \leftarrow sol.y, z\_s \leftarrow Y[3, :]$  ▷ convención:
    $Y[1] = x, Y[2] = y, Y[3] = z$ 
18:    $pts \leftarrow []$ 
19:   for  $i \leftarrow 1$  hasta  $|z\_s| - 1$  do
20:     if  $(z\_s[i] - z\_0)(z\_s[i+1] - z\_0) < 0$  y  $t[i+1] > t\_trans$  then
21:        $\alpha \leftarrow \frac{z\_0 - z\_s[i]}{z\_s[i+1] - z\_s[i]}$ 
22:        $x^* \leftarrow Y[1, i] + \alpha (Y[1, i+1] - Y[1, i])$ 
23:        $y^* \leftarrow Y[2, i] + \alpha (Y[2, i+1] - Y[2, i])$ 
24:       append ( $x^*, y^*$ ) a  $pts$ 
25:     end if
26:   end for
27:   return matriz 2D con puntos en la sección (posiblemente vacía)
28: end function
29: Ciclos de referencia (para centroides):
30:    $CL1=(0.5, -0.5, 5.0)$  (verde),  $CL2=(-0.5, 0.5, 2.0)$  (rojo),
    $CL3=(-0.5, -0.5, 0.5)$  (azul)
31: Cálculo de centroides de referencia:
32:    $ref\_centroids \leftarrow []$ 
33: for  $CL_k$  en  $\{CL1, CL2, CL3\}$  do
34:    $sol \leftarrow \text{SOLVE\_IVP}(\text{SISTEMA}, [0, t\_int], CL_k, max\_step)$ 
35:    $pts \leftarrow \text{GETSECTIONPTS}(sol)$ 
36:   if  $|pts| < MIN\_CROSS$  then
37:     si  $|pts| > 0$  usar  $pts$  si no usar punto final  $sol.y[1:2, -1]$ 
38:   end if

```

```

39:   centroid ← promedio por columnas de pts
40:   append centroid a ref_centroids
41: end for
42: Malla de condiciones iniciales en el plano (x0, y0) con z0 fijo:
43:   xmín=−10, xmáx=10, Nx=800;   ymín=−10, ymáx=10, Ny=800
44:   xs ← partición uniforme de [xmín, xmáx] en Nx puntos
45:   ys ← partición uniforme de [ymín, ymáx] en Ny puntos
46:   UNCLASS=4                                ▷ etiqueta para “otra solución acotada”
47: function CLASSIFYIC((x0, y0, z0))
48:   sol ← SOLVE_IVP(SISTEMA, [0, tint], (x0, y0, z0), max_step)
49:   if existe ti con ||sol.y[:, i]] > DIV_THRESH then
50:     return 3                                ▷ divergente
51:   end if
52:   pts ← GETSECTIONPTS(sol)
53:   if |pts| > 0 then
54:     p ← promedio por columnas de pts
55:   else
56:     p ← sol.y[1:2, −1]                    ▷ fallback: último punto proyectado
57:   end if
58:   dists ← (||p − ref_centroids[1]||, ||p − ref_centroids[2]||, ||p −
    ref_centroids[3]||)
59:   k* ← arg mín(dists)
60:   return k* si dists[k*] < EPS_CENT en otro caso UNCLASS
61: end function
62: function CLASSIFYROW(j)
63:   row ← vector de longitud Nx inicializado en UNCLASS
64:   for i ← 1 hasta Nx do
65:     row[i] ← CLASSIFYIC((xs[i], ys[j], z0))
66:   end for
67:   return (j, row)
68: end function
69: Paralelización y ensamblado de la grilla de etiquetas:
70:   grid ← matriz Ny × Nx llena con UNCLASS
71:   crear pool de procesos con cpu_count()
72: for (j, row) en IMAP_UNORDERED(CLASSIFYROW, {1, ..., Ny}) do
73:   grid[j, :] ← row
74:   contar por clase en row y reportar progreso por consola
75: end for
76: cerrar pool

```

```

77: Persistencia:
78: guardar grid como basins.npy y tiempo total en tiempo.txt
79: Visualización:
80: construir malla  $(X, Y)$  a partir de  $(xs, ys)$ 
81: definir cmap con cinco colores para: verde, rojo, azul, divergente (negro),
    otro (gris)
82: graficar pcolormesh de grid con cmap y bordes de clase apropiados
83: etiquetar ejes como x0 y y0 (sin barras invertidas)
84: título Cuencas de atracción ( $z=0.5$ )
85: añadir barra de color con etiquetas {Verde, Rojo, Azul, Divergente, Otro}
86: ajustar diseño y guardar como basins.png (dpi 150) y basins.pdf
87: Fin

```

## 6.2. Programación en mathematica : Espacio fase

### Pseudocódigo para integración y visualización 3D en *Mathematica* del sistema inducido

#### Pseudocódigo

```

1: Inicio
2: Parámetros y vectores del sistema:
3:  $a_0=29, a_1=0, a_2=-1, c_0=1, c_1=6.2, c_2=4, r=-1, b=-0.1$ 
4:  $a \leftarrow (a_0, a_1, a_2), c \leftarrow (c_0, c_1, c_2)$ 
5: function SIGMA( $z$ )
6:   return  $\frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2}{c_0 + c_1 z + c_2 z^2}$     ▷ En código: (a.1,z,z^2)/(c.1,z,z^2)
7: end function
8: function BUILD RHS( $x, y, z$ )
9:    $s \leftarrow \text{SIGMA}(z)$ 
10:   $f\_1 \leftarrow s(y - x); f\_2 \leftarrow rx - y - xz; f\_3 \leftarrow xy - bz$ 
11:  return ( $f\_1, f\_2, f\_3$ )    ▷ En código: FF = { s (y - x), r x - y - x
    z, x y - b z };
12: end function
13: Sistema ODE en forma funcional (con  $x[t], y[t], z[t]$ ):
14: sustituir  $x \rightarrow x[t], y \rightarrow y[t], z \rightarrow z[t]$  en FF para obtener LS = {x'[t]==...,
    y'[t]==..., z'[t]==...}

```

```

15: Condiciones iniciales y tiempos:
16: CI_1=(0.5, -0.5, 5), CI_2=(-0.5, 0.5, 2), CI_3=(-0.5, -0.5, 0.5)
17: t_int=12000, t_trans ← t_int - 400
18: function SOLVETRAJECTORIES({CI_k})
19:
20:   for cada CI_k = (x_0, y_0, z_0) do
21:     resolver      NDSolve[{LS, x[0]==x0, y[0]==y0, z[0]==z0},
22:       {x,y,z}, {t,0,t_int}]
23:     almacenar la solución en lista s
24:   end for
25:   return lista de soluciones s
26: end function
27: Estilo de trazas: paleta2 = {Black, Blue, Red}           ▷ colores por
28:   trayectoria
29: function MAKEPHASEPLOTS(s)
30:   for i desde 1 hasta |s| do
31:     construir      ParametricPlot3D[{x[t],y[t],z[t]}/.s[[i]],
32:       {t,t_trans,t_int},
33:       PlotPoints->1200, PlotRange->All, BoxRatios->1,
34:       Boxed->False,
35:       AxesOrigin->{0,0,2}, ImageSize->{450,450},
36:       ViewPoint->{-1.62743,-2.75765,1.09399},
37:       Ticks->{{{ -1,1},{1,1}}, {{ -10,10},{5,5}},
38:       {{0,0},{11,11}}},
39:       AxesLabel->{Style["X",16,FontFamily->çmr10",Black],
40:         Style["Y",16,FontFamily->çmr10",Black],
41:         Style["Z",16,FontFamily->"Times New Roman",Black]},
42:       BaseStyle->{FontSize->16, FontFamily->çmr10"},
43:       PlotStyle->{Opacity[0.9], Thickness[0.0045],
44:         paleta2[[Mod[i, Length[paleta2], 1]]]}]
45:     guardar cada gráfico en lista fases
46:   end for
47:   return fases
48: end function
49: function COMPOSESHOW(fases)
50:   return Show[fases]           ▷ figura combinada fig3D
51: end function
52: Pipeline completo:

```

```

39: s = SOLVETRAJECTORIES({CI_1, CI_2, CI_3})
40: fases = MAKEPHASEPLOTS(s)
41: fig3D = COMPOSESHOW(fases)
42: Fin

```

### 6.2.0.1. Atributos del integrador numérico de Mathematica 14

Tabla 6.1: Opciones / atributos más importantes de NDSolve[ ]

| Opción / Atributo            | Significado / Uso principal                                                                                                                                                                |
|------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Method                       | Controla qué esquema numérico se usa (RK explícitos, implícitos, conmutación de rigidez, etc.).                                                                                            |
| AccuracyGoal                 | Número deseado de dígitos de precisión absoluta en la solución.                                                                                                                            |
| PrecisionGoal                | Controla la precisión en punto flotante durante el cálculo, útil si se eleva la precisión (más allá de <code>MachinePrecision</code> ).                                                    |
| WorkingPrecision             | Permite especificar precisión arbitraria (más que la precisión de máquina).                                                                                                                |
| MaxSteps                     | Máximo número de pasos permitidos durante la integración.                                                                                                                                  |
| MaxStepSize                  | Tamaño máximo de paso $h$ permitido.                                                                                                                                                       |
| StartingStepSize             | Sugerencia del primer paso de integración que debe usar el programa.                                                                                                                       |
| StepMonitor                  | Permite ejecutar una acción (monitor) en cada paso de integración (por ejemplo, guardar datos o imprimir variables).                                                                       |
| EvaluationMonitor            | Permite monitorear la evaluación de la función derivada en puntos intermedios o dentro de cada paso.                                                                                       |
| InterpolationOrder           | Controla el orden de interpolación usado para la solución intermedia. Por ejemplo, <code>InterpolationOrder -&gt; All</code> fuerza usar interpolación del mismo orden que el método base. |
| AccuracyGoal / PrecisionGoal | En métodos compuestos o de elementos finitos, estas opciones se propagan automáticamente a los submétodos inter-                                                                           |
| Compiled                     | Indica si las expresiones internas deben compilarse automáticamente antes de la evaluación.                                                                                                |
| NormFunction                 | Permite personalizar la norma usada para estimar error. En algunos contextos (por ejemplo, FEM) no tiene efecto directo.                                                                   |

*Continúa en la siguiente página*

*Continuación de la tabla anterior*

| Opción / Atributo                          | Significado / Uso principal                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|--------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Otras subopciones para PDE / FEM contextos | En casos de ecuaciones en derivadas parciales y método de elementos finitos, <code>NDSolve[ ]</code> dispone de opciones adicionales como <code>MeshOptions</code> , <code>LinearSolver</code> , <code>ExtrapolationHandler</code> , <code>BoundaryTolerance</code> , <code>IntegrationOrder</code> , entre otras. |
| <code>MethodMonitor</code>                 | Permite observar decisiones internas del método (por ejemplo, conmutación de rigidez, cambio de orden o elección de paso).                                                                                                                                                                                         |

Además de éstas, la documentación incluye opciones menos frecuentes o especializadas, tales como el manejo de condiciones de contorno, eventos discontinuos (`WhenEvent`), simplificación de ecuaciones (`EquationSimplification`), manejo de matrices de masa (`MassMatrix`) y control avanzado del integrador.

---

# Bibliografía

---

- [1] George D. Birkhoff. *Dynamical Systems*, volume 9 of *Colloquium Publications*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1927. [1](#)
- [2] Morris W. Hirsch and Stephen Smale. *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*, volume 60 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press, San Diego, New York, Boston, London, Sydney, Tokyo, Toronto, 1974. [1](#), [10](#)
- [3] Edward N. Lorenz. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 20(2):130–141, 1963. [1](#)
- [4] Colin Sparrow. *The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors*, volume 41 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1982. [1](#), [11](#)
- [5] Indranil Pan and Saptarshi Das. Evolving chaos: Identifying new attractors of the generalised lorenz family. *Applied Mathematical Modelling*, 57:391–405, 2018. [1](#)
- [6] G.A. Leonov and N.V. Kuznetsov. Differences and similarities in the analysis of lorenz, chen, and lu systems. *arXiv preprint arXiv:1409.8649*, 2014. [1](#)
- [7] Indranil Pan and Saptarshi Das. When darwin meets lorenz: Evolving new chaotic attractors through genetic programming. *Chaos, Solitons & Fractals*, 76:141–155, 2015. [1](#)
- [8] Eusebius J. Doedel, Bernd Krauskopf, and Hinke M. Osinga. Global organization of phase space in the transition to chaos in the lorenz system. *Nonlinearity*, 28(1):R1–R63, 2014. [1](#)
- [9] Sergej Čelikovský and Guanrong Chen. Generalized lorenz canonical form revisited. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 31(5):2150079, 2021. [1](#)
- [10] Tien-Yien Li and James A. Yorke. Period three implies chaos. *American Mathematical Monthly*, 82(10):985–992, 1975. [1](#)

- [11] Mitchell J. Feigenbaum. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations. *Journal of Statistical Physics*, 19(1):25–52, 1978. [1](#)
- [12] Mitchell J. Feigenbaum. The universal metric properties of nonlinear transformations. *Journal of Statistical Physics*, 21(6):669–706, 1979. [1](#)
- [13] J. L. McCauley. *Chaos, Dynamics, and Fractals: An Algorithmic Approach to Deterministic Chaos*, volume 2 of *Cambridge Nonlinear Science Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993. [1](#)
- [14] Kathleen T. Alligood, Tim D. Sauer, and James A. Yorke. *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*. Springer, New York, 1996. [1](#)
- [15] Yuri A. Kuznetsov. *Elements of Applied Bifurcation Theory*, volume 112 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer, New York, 2nd edition, 1998. [1](#)
- [16] Luis Barreira and Yakov B. Pesin. *Lyapunov Exponents and Smooth Ergodic Theory*, volume 23 of *University Lecture Series*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001. [2](#)
- [17] Stephen Wiggins. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, volume 2 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer, New York, 2nd edition, 2003. [2](#)
- [18] Boris Hasselblatt and Anatole Katok. *A First Course in Dynamics: With a Panorama of Recent Developments*. Cambridge University Press, Cambridge, 2003. [2](#)
- [19] Julien Clinton Sprott. *Chaos and Time-Series Analysis*. Oxford University Press, Oxford, 2003. [2](#), [11](#)
- [20] Jonathan S. Golan. *The Linear Algebra a Beginning Graduate Student Ought to Know*. Springer, New York, 2nd edition, 2007. [2](#)
- [21] Eckart W. Gekeler. *Mathematical Methods for Mechanics: A Handbook with MATLAB Experiments*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2008. [2](#)
- [22] Àlex Haro, Marta Canadell, Jordi-Lluís Figueras, Alejandro Luque, and Josep-Maria Mondelo. *The Parameterization Method for Invariant Manifolds: From Rigorous Results to Effective Computations*, volume 195 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer, Cham, 2016. [2](#)
- [23] Viet-Thanh Pham, Christos Volos, and Tomasz Kapitaniak. *Systems with Hidden Attractors: From Theory to Realization in Circuits*. Springer Briefs in Applied Sciences and Technology – Nonlinear Circuits. Springer, Cham, 2020. [2](#)

- [24] Xiong Wang, Nikolay V. Kuznetsov, and Guanrong Chen, editors. *Chaotic Systems with Multistability and Hidden Attractors*, volume 39 of *Emergence, Complexity and Computation*. Springer, Cham, 2021. [2](#)
- [25] Nikolay Kuznetsov and Volker Reitmann. *Attractor Dimension Estimates for Dynamical Systems: Theory and Computation*, volume 51 of *Emergence, Complexity and Computation*. Springer, Cham, 2021. Dedicated to Gennady Leonov. [2](#)
- [26] Rui Dilão. *Dynamical System and Chaos: An Introduction with Applications*. UNITEXT for Physics. Springer, Cham, 2020. [2](#)
- [27] Phil Laplante and Chris Laplante. *Introduction to Chaos, Fractals and Dynamical Systems*, volume 29 of *Problem Solving in Mathematics and Beyond*. World Scientific, Singapore, 2023. [2](#)
- [28] G. C. Layek. *An Introduction to Dynamical Systems and Chaos*. University Texts in the Mathematical Sciences. Springer, Singapore, 2nd edition, 2024. [2](#)
- [29] Julien C. Sprott. *Numerical Recipes Routines and Examples in BASIC: Companion Manual to Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, Cambridge, 1991. [2](#)
- [30] Thomas S. Parker and Leon O. Chua. *Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems*, volume 19 of *Springer Series in Synergetics*. Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, London, Paris, Tokyo, Hong Kong, 1989. [2](#)
- [31] J.J Rivas-Ramírez and J. Estevez-Delgado. Induced equilibria in the classical lorenz system by means of a quadratic rational function. *Nonlinear Dynamics*, 113:13097–13112, June 2025. [3](#), [21](#), [37](#)
- [32] Chunbiao Li and Julien Clinton Sprott. Multistability in the lorenz system: A broken butterfly. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 24(10):1450131, 2014. [3](#), [27](#)
- [33] Thair Y. Thanoon and Saad F. Al-Azzawi. Stability of lorenz differential system by parameters. *Tikrit Journal of Pure Science*, 15(2):118–122, 2010. No DOI available. [9](#)
- [34] Md. Shakhawat Alam and Payer Ahmed. Several chaotic analysis of lorenz system. *European Scientific Journal (ESJ)*, 13(9):438, 2017. Retracted on 27.11.2021. [9](#)
- [35] A. C. Fowler, J. D. Gibbon, and M. J. McGuinness. The complex lorenz equations. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 4(2):139–163, 1982. [9](#)

- [36] John D. Barrow and Janna Levin. Chaos in the einstein–yang–mills equations. *Physical Review Letters*, 80(4):656–659, 1998. [9](#)
- [37] B. Saltzman. Finite amplitude free convection as an initial value problem—i. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 19(4):329–342, 1962. [10](#)
- [38] Gerard van der Schrier and Leo R. M. Maas. The diffusionless lorenz equations; shil’nikov bifurcations and reduction to an explicit map. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 141(1–2):19–36, 2000. [12](#)
- [39] James L. Kaplan and James A. Yorke. Chaotic behavior of multidimensional difference equations. In Heinz-Otto Peitgen and Hans-Otto Walther, editors, *Functional Differential Equations and Approximation of Fixed Points. Proceedings, Bonn, July 1978*, volume 730 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 204–227. Springer Berlin Heidelberg, 1979. [12](#)
- [40] Julien C. Sprott. Some simple chaotic flows. *Physical Review E*, 50(2):R647–R650, 1994. [12](#)
- [41] David M. Grobman. Homeomorphisms of systems of differential equations. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 128:880–881, 1959. [29](#)
- [42] Philip Hartman. A lemma in the theory of structural stability of differential equations. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 11(4):610–620, 1960. [29](#)
- [43] K. T. Chen. A strong stable manifold theorem. *Annals of Mathematics*, 78(2):223–240, 1963. [29](#)
- [44] Shlomo Sternberg. On the structure of local homeomorphisms of euclidean n-space, ii. *American Journal of Mathematics*, 80(3):623–631, 1958. [29](#)
- [45] Shlomo Sternberg. Local contractions and a theorem of poincaré. *American Journal of Mathematics*, 79(4):809–824, 1957. [29](#)

# Juan José Rivas Ramírez Juan José Rivas Ramírez

## Parametrización de soluciones estacionarias mediante Ideales algebraicos en sistemas dinámicos definidos por ecuaciones d...

 Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

### Detalles del documento

Identificador de la entrega

trn:oid:::3117:526387029

Fecha de entrega

11 nov 2025, 8:33 a.m. GMT-6

Fecha de descarga

11 nov 2025, 8:40 a.m. GMT-6

Nombre del archivo

Parametrización de soluciones estacionarias mediante Ideales algebraicos en sistemas dinámico.....pdf

Tamaño del archivo

3.7 MB

83 páginas

22.669 palabras

110.143 caracteres

# 8% Similitud general

El total combinado de todas las coincidencias, incluidas las fuentes superpuestas, para ca...

## Fuentes principales

- 7%  Fuentes de Internet
- 5%  Publicaciones
- 0%  Trabajos entregados (trabajos del estudiante)

## Marcas de integridad

### N.º de alertas de integridad para revisión

No se han detectado manipulaciones de texto sospechosas.

Los algoritmos de nuestro sistema analizan un documento en profundidad para buscar inconsistencias que permitirían distinguirlo de una entrega normal. Si advertimos algo extraño, lo marcamos como una alerta para que pueda revisarlo.

Una marca de alerta no es necesariamente un indicador de problemas. Sin embargo, recomendamos que preste atención y la revise.

# Formato de Declaración de Originalidad y Uso de Inteligencia Artificial

Coordinación General de Estudios de Posgrado  
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo



A quien corresponda,

Por este medio, quien abajo firma, bajo protesta de decir verdad, declara lo siguiente:

- Que presenta para revisión de originalidad el manuscrito cuyos detalles se especifican abajo.
- Que todas las fuentes consultadas para la elaboración del manuscrito están debidamente identificadas dentro del cuerpo del texto, e incluidas en la lista de referencias.
- Que, en caso de haber usado un sistema de inteligencia artificial, en cualquier etapa del desarrollo de su trabajo, lo ha especificado en la tabla que se encuentra en este documento.
- Que conoce la normativa de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, en particular los Incisos IX y XII del artículo 85, y los artículos 88 y 101 del Estatuto Universitario de la UMSNH, además del transitorio tercero del Reglamento General para los Estudios de Posgrado de la UMSNH.

| Datos del manuscrito que se presenta a revisión |                                                                                                                                       |                                   |
|-------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------|
| Programa educativo                              | Doctorado en Ciencias en Ingeniería Física                                                                                            |                                   |
| Título del trabajo                              | Parametrización de soluciones estacionarias mediante Ideales algebraicos en sistemas dinámicos definidos por ecuaciones diferenciales |                                   |
|                                                 | Nombre                                                                                                                                | Correo electrónico                |
| Autor/es                                        | Juan José Rivas Ramírez                                                                                                               | 0651682x@umich.mx                 |
| Director                                        | Joaquin Estevez Delgado                                                                                                               | joaquin@fismat.umich.mx           |
| Codirector                                      |                                                                                                                                       |                                   |
| Coordinador del programa                        | Dr. Gonzalo Viramontes Gamboa                                                                                                         | doc.cs.ingenieria.fisica@umich.mx |

| Uso de Inteligencia Artificial |             |             |
|--------------------------------|-------------|-------------|
| Rubro                          | Uso (sí/no) | Descripción |
| Asistencia en la redacción     | no          |             |

# Formato de Declaración de Originalidad y Uso de Inteligencia Artificial

Coordinación General de Estudios de Posgrado  
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo



| Uso de Inteligencia Artificial             |             |             |
|--------------------------------------------|-------------|-------------|
| Rubro                                      | Uso (sí/no) | Descripción |
| Traducción al español                      | no          |             |
| Traducción a otra lengua                   | no          |             |
| Revisión y corrección de estilo            | no          |             |
| Análisis de datos                          | no          |             |
| Búsqueda y organización de información     | no          |             |
| Formateo de las referencias bibliográficas | no          |             |
| Generación de contenido multimedia         | no          |             |
| Otro                                       | no          |             |

| Datos del solicitante |                                        |
|-----------------------|----------------------------------------|
| Nombre y firma        | Juan José Rivas Ramírez                |
| Lugar y fecha         | Morelia, Mich. 11 de noviembre de 2025 |