



**UNIVERSIDAD MICHOACANA DE
SAN NICOLÁS DE HIDALGO**



**DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO
FACULTAD DE INGENIERÍA QUÍMICA**

**IMPLEMENTACIÓN DE ALGORITMOS DE APRENDIZAJE
NO SUPERVISADO, PROFUNDO Y POR REFUERZO EN
REDES DE DISTRIBUCIÓN DE AGUA**

**TESIS PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS EN INGENIERÍA QUÍMICA**

**PRESENTA:
M.C.I.Q. ANGEL ALFARO BERNARDINO**

**ASESOR:
Dr. FABRICIO NÁPOLES RIVERA**

MORELIA, MICHOACÁN, FEBRERO DEL 2026

RESUMEN

La implementación de algoritmos de inteligencia artificial en la ingeniería química responde a una necesidad de traspasar las limitantes computacionales de los modelos actuales. Estos algoritmos permiten discutir la elevada no linealidad e incertidumbre inherente en el modelamiento de plantas de tratamiento de aguas residuales que son parte de las redes de distribución de agua. Con ello, se permite optimizar la toma de decisión económica, consumo de agua y ambiental en los escenarios donde las simulaciones convencionales resultan insuficientes. En este trabajo se propone la implementación de algoritmos de inteligencia artificial para los subconjuntos de aprendizaje no supervisado, profundo y por refuerzo en redes de distribución de agua. Además, se abordan estrategias de implementación de los algoritmos de k-means (KM), Redes Neuronales Artificiales Profundas (RNAP) y Actor-Critico (AC) para un caso específico de red de distribución de agua. Asimismo, los datos desplegados como resultado de la implementación de KM, son aplicados en un modelo matemático de redes de distribución de agua. Además, se implementa la integración de una RNAP y un modelo matemático de redes de distribución de agua dentro de estrategias de optimización matemática. También, un AC es empleado para la toma de decisión económica, consumo de agua y ambiental en una red de distribución de agua considerando la integración de una RNAP en un modelo matemático. Los algoritmos de KM, RNAP y AC han demostrado ser eficientes en las soluciones de las redes de distribución de agua desempeñando tareas como: encontrar la ubicación óptima de una planta de tratamiento de remoción de arsénico, representar el comportamiento de una planta de tratamiento de agua residuales y como un tomador de decisión en el suministro de agua en un complejo residencial. Por lo tanto, la utilización del aprendizaje no supervisado, profundo y por refuerzo en redes de distribución de agua, ha solucionado limitantes en el estado del arte como la eliminación de factores de eficiencia en plantas de tratamiento y la implementación de un tomador de decisión artificial. Conllevando, a establecer un marco integrado de algoritmos de inteligencia artificial, optimización matemática y redes de distribución de agua, demás, las implicaciones de este marco en campos afines a la ingeniería química como integración de procesos térmicos, energéticos, económicos y ambientales.

Palabras clave: *Aprendizaje no Supervisado, Aprendizaje Profundo, Aprendizaje por Refuerzo, Optimización Matemática, Redes de Distribución, Programación Matemática, Planta de tratamiento.*

ABSTRACT

The implementation of artificial intelligence algorithms in chemical engineering addresses the need to overcome the computational limitations of current models. These algorithms allow for addressing the high degree of nonlinearity and uncertainty inherent in the modeling of wastewater treatment plants that are part of water distribution networks. This enables the optimization of economic, water consumption, and environmental decision-making in scenarios where conventional simulations are insufficient. This work proposes the implementation of artificial intelligence algorithms for subsets of unsupervised, deep, and reinforcement learning in water distribution networks. Furthermore, it addresses implementation strategies for k-means (KM), Deep Artificial Neural Networks (DANN), and Critical Actor (CA) algorithms for a specific water distribution network case. Additionally, the data generated from the KM implementation are applied to a mathematical model of water distribution networks. Finally, the integration of a DANN and a mathematical model of water distribution networks within mathematical optimization strategies is implemented. CA is also used for economic, water consumption, and environmental decision-making in water distribution networks, considering the integration of a DANN into a mathematical model. KM, DANN and CA algorithms have proven efficient in solving water distribution network problems, performing tasks such as finding the optimal location for an arsenic removal treatment plant, representing the behavior of a wastewater treatment plant, and acting as a decision-maker for water supply in a residential complex. Therefore, the use of unsupervised, deep, and reinforcement learning in water distribution networks has overcome limitations in the state of the art, such as the elimination of efficiency factors in treatment plants and the implementation of an artificial decision-maker. This has led to the establishment of an integrated framework of artificial intelligence algorithms, mathematical optimization, and water distribution networks, as well as implications for fields related to chemical engineering, such as the integration of thermal, energy, economic, and environmental processes.

Keywords: *Unsupervised Learning, Deep Learning, Reinforcement Learning, Mathematical Optimization, Distribution Networks, Mathematical Programming, Treatment Plant.*

DEDICATORIA

Esta obra es dedicada a la Realidad Sustancial que permitió al Noúmeno alumbrar al Fenómeno, esa Realidad Sustancial que se esconde detrás de estos, difícil de encontrar para el hombre dormido, no nítido para el hombre que sueña y Ser para el hombre.

AGRADECIMIENTOS

Agradecer a la Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación (SECIHTI) por el apoyo económico dado en el transcurso de mis estudios de doctorado.

Agradecer a la Facultad de Ingeniería Química a la división de posgrado por darme un espacio en sus instalaciones.

Agradecer a mis sinodales, Dr. José María Ponce Ortega, Dr. Luis Fernando Lira Barragán, Dr. Agustín Jaime Castro Montoya y Dra. Ilse María Hernández Romero por el apoyo que me ofrecieron en este transcurso de mi vida académica.

Agradecer a mi asesor de tesis Dr. Fabricio, por todo este apoyo, que, aunque yo fallaba varios días, él nunca perdía la confianza en mí. Y también, agradecerle por todo el conocimiento que me brindo en estos años de estudio en el doctorado.

Agradecer a mis tíos, Alfonso Franco Rosales, Francisco Javier Magadan Franco y Julio Cesar Magadan Franco por enseñarme diferentes puntos de vista en cuanto a la vida. Pues cada quien, vivió su vida a su manera y esto contribuyo a los diferentes puntos de vista que me hicieron saber.

Agradecer a mi hermana, Amaranta Alfaro Bernardino, por el apoyo incondicional que me dio en toda mi vida, porque ella ha sido una de mis pilares, en el transcurso de mi vida.

Agradecer a mis padres, María Guadalupe Martina Bernardino Lomelí y Angel Alfaro Franco por el apoyo que me han dado en este transcurso de mi vida escolar y seguir creyendo en mí. Creer en una persona es lo más importante para continuar en el camino. Ese camino que llegará a su fin con todo el apoyo que se ha recibido y en su retorno regresará con todo lo dado por ustedes.

ÍNDICE

RESUMEN.....	II
ABSTRACT	III
DEDICATORIA	IV
AGRADECIMIENTOS	V
ÍNDICE	VI
LISTA DE FIGURAS	VIII
LISTA DE TABLAS.....	X
NOMENCLATURA	XII
CAPÍTULO 1	1
1.1. INTRODUCCIÓN	2
1.2. ANTECEDENTES.....	7
1.3. JUSTIFICACIÓN.....	9
1.4. HIPÓTESIS	9
1.5. OBJETIVO GENERAL	10
1.6. OBJETIVOS PARTICULARES.....	11
CAPÍTULO 2	11
2.1. MARCO TEÓRICO.....	13
2.1.1. APRENDIZAJE AUTOMÁTICO	13
2.1.1.1. APRENDIZAJE SUPERVISADO.....	14
2.1.1.2. APRENDIZAJE NO SUPERVISADO	16
2.1.1.3. APRENDIZAJE POR REFUERZO	17
2.1.2. OPTIMIZACIÓN	18
2.1.3. ECOINDICADOR 99	21
CAPITULO 3	23
3.1. FORMULACIÓN DE LOS MODELOS	24
3.2. MODELO PARA LA IMPLEMENTACIÓN DE APRENDIZAJE NO SUPERVISADO..	24
3.3. MODELO PARA LA IMPLEMENTACIÓN DE APRENDIZAJE PROFUNDO.....	52
3.4. MODELO PARA LA DE IMPLEMENTACIÓN DE APRENDIZAJE POR REFUERZO	67
CAPÍTULO 4	82
4.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	83
4.2. CASO DE ESTUDIO.....	83
4.2.1. CASO DE ESTUDIO APRENDIZAJE NO SUPERVISADO	83

4.2.2.	CASO DE ESTUDIO APRENDIZAJE PROFUNDO.....	84
4.2.3.	CASO DE ESTUDIO APRENDIZAJE POR REFUERZO	87
4.3.	METODOLOGÍA	94
4.3.1.	APRENDIZAJE NO SUPERVISADO	94
4.3.2.	APRENDIZAJE PROFUNDO.....	120
4.3.3.	APRENDIZAJE POR REFUERZO.....	131
	CAPÍTULO 5.....	137
5.1.	RESULTADOS.....	138
5.2.	RESULTADOS APRENDIZAJE NO SUPERVISADO	138
5.2.1.	ESCENARIO 1	138
5.2.2.	ESCENARIO 2	141
5.2.3.	ESCENARIO 3	144
5.2.4.	COMPARACIÓN DE ESCENARIOS	147
5.3.	RESULTADOS APRENDIZAJE PROFUNDO.....	154
5.3.1.	COMPARACIÓN DE ESCENARIOS	155
5.3.2.	ESCENARIO A	163
5.3.3.	ESCENARIO G	167
5.4.	RESULTADOS APRENDIZAJE POR REFUERZO	168
5.4.1.	AGENTE ACTOR-CRITICO	169
5.4.2.	COMPARACIÓN ENTRE ACTOR-CRITICO Y OPTIMIZACIÓN GENERAL	171
	CONCLUSIONES	180
	BIBLIOGRAFÍA.....	185

LISTA DE FIGURAS

Fig. 2.1.1.1. Clasificación del aprendizaje automático.	13
Fig. 2.1.1.3.1. Algoritmos de Optimización de Políticas Proximales.	18
Fig. 2.1.3.1. Representación de la metodología Ecoindicador 99.	21
Fig. 3.2.1. Superestructura del Sistema de Optimización de la Red de Agua para la Eliminación de Arsénico	26
Fig. 3.3.1. Figura de la superestructura de la red de distribución de agua para el aprendizaje profundo.	53
Fig. 3.4.1. Figura de la superestructura de la red de distribución de agua para el aprendizaje por refuerzo	68
Fig. 4.3.1.1. Comunidad con 33 pozos profundos.....	96
Fig. 5.2.1. Solución del modelo matemático del escenario 1.	140
Fig. 5.2.2. Solución del modelo matemático del escenario 2.	143
Fig. 5.2.3. Solución del modelo matemático del escenario 3.	146
Fig. 5.2.4. Concentraciones de arsénico del punto de fuente de pozos profundos y del punto de demanda de pozos profundos para los escenarios 1, 2 y 3.	147
Fig. 5.2.5. Los costos normalizados para cada escenario.	150
Fig. 5.2.6. Relación entre el costo total y la concentración total de arsénico en pozos de demanda profunda.	152
Fig. 5.3.1. Estructura de la red neuronal artificial profunda.....	155
Fig. 5.3.2. Curva de Pareto de los 7 escenarios.....	155
Fig. 5.3.3. Consumo de agua dulce en un periodo de una semana para cada escenario (F_i, t_{AGUAD}). a) Escenarios A y B. b) Escenarios C y D. c) Escenarios E, F y G.	157
Fig. 5.3.4. Flujo de agua desde tanques de almacenamiento a edificios residenciales en un período de una semana para cada escenario (F_n, j, k, t_{TANQ}). a) Escenarios A y B. b) Escenarios C y D. c) Escenarios E, F y G.	159
Fig. 5.3.5. Flujos de agua desde la planta de tratamiento al medio ambiente en un período de una semana para cada escenario (F_l, m, t_{AMB}). a) Escenarios A y B. b) Escenarios C y D. c) Escenarios E, F y G.	160
Fig. 5.3.6. Flujos de agua desde la planta de tratamiento hacia usos domésticos en un periodo de una semana para cada escenario ($F_l, j, k, t_{PTAR, recir}$). a) Escenarios A y B. b) Escenarios C y D. c) Escenarios E, F y G.	161
Fig. 5.3.7. Solución del Escenario A ($m^3/semana$).	164

Fig. 5.3.8. Propiedades en la entrada de edificios residenciales (P_j, k, x, t_{EDIF}, sal) en el periodo de una semana. a) Propiedad DBO, Edificio 1. b) Propiedad DBO, Edificio 2. c) Propiedad COD, Edificio 1. d) Propiedad COD, Edificio 2. e) Propiedad SST, Edificio 1. f) Propiedad SST, Edificio 2.....	165
Fig. 5.3.9. Propiedades a la entrada y salida de la planta depuradora en un plazo de una semana. a) Propiedades a la entrada de la planta de tratamiento de aguas residuales. b) Propiedades a la salida de la planta depuradora de aguas residuales.....	166
Fig. 5.3.10. Solución del Escenario G ($m^3/semana$).....	168
Fig. 5.4.1. Métricas de Pérdida, Pérdida de valor y Recompensa del agente inteligente en el entrenamiento.....	170
Fig. 5.4.2. Consumo de agua dulce durante un período de una semana, AC vs OG.....	171
Fig. 5.4.3. Flujos de recirculación de los tanques de almacenamiento para usos domésticos, AC vs OG.....	172
Fig. 5.4.4. Flujos de descarga de aguas residuales al ambiente, AC vs OG.....	173
Fig. 5.4.5. Flujos de salida de agua residual tratados en la PTAR, AC vs OG.	174
Fig. 5.4.6. Propiedades DBO, DQO y SST para usos domésticos de Sanitario y Jardinería en el Edificio Residencial 1, AC vs OG.	175
Fig. 5.4.7. Propiedades DBO, DQO y SST para usos domésticos de Sanitario y Jardinería en el Edificio Residencial 2, AC vs OG.	176
Fig. 5.4.8. Solución del Escenario AC	177
Fig. 5.4.9. Solución del Escenario OG.....	178

LISTA DE TABLAS

Tabla 3.2.1. Factores de eficiencia para cada tecnología considerada para la eliminación de arsénico.	33
Tabla 3.2.2. Flujos Máximos del punto de demanda de pozo profundo.	48
Tabla 3.2.3. Costos de instalación y operación.	49
Tabla 4.2.2.1. Eficiencias ($\vartheta j, k, t$) en función de los edificios residenciales (j), usos domésticos (k) y un periodo de tiempo (t).	85
Tabla 4.2.2.2. Propiedades ($Pj, k, x, tEDIF, sal$) de los flujos de salida de edificios residenciales mgm3x103	86
Tabla 4.2.2.3. Demanda ($Dj, k, tF2$) según edificios residenciales (j), usos domésticos (k) y periodo de tiempo (t).	87
Tabla 4.2.3.1. Temperaturas de los primeros 7 días del año 2023.	87
Tabla 4.2.3.2. Restricción de flujos externos de aguas residuales ($Re, l, tAR, ext, m3$).	88
Tabla 4.2.3.3. Demanda ($Dj, k, tEDIF$) según edificios residenciales (j), usos domésticos (k) y periodo de tiempo (t).	89
Tabla 4.2.3.4. Propiedades ($Pj, k, x, tEDIF, sal$) de los flujos de salida de edificios residenciales mgm3x103	90
Tabla 4.2.3.5. Propiedades (Pe, l, tAR, ext) de fuentes externas mgm3x103	91
Tabla 4.2.3.6. Eficiencias ($\vartheta j, k, t$) en función de los edificios residenciales (j), usos domésticos (k) y un periodo de tiempo (t).	91
Tabla 4.2.3.7. Inventario de ciclo de vida (P.E - día).	92
Tabla 4.2.3.8. Valores de las subcategorías abarcadas por el inventario del ciclo de vida por contaminante.	93
Tabla 4.3.1.1. Coordenadas cartesianas para ubicaciones de los pozos profundos.	96
Fig. 4.3.1.2. Comunidad con 33 pozos profundos y planta de tratamiento.	98
Fig. 4.3.2.3. Comunidad con 33 pozos profundos y dos plantas de tratamiento.	100
Tabla 4.3.1.2. Distancias entre pozos profundos y plantas de tratamiento.	101
Tabla 4.3.1.3. Distancia entre pozos profundos, primera parte (km).	103
Tabla 4.3.1.3. Distancia entre pozos profundos, segunda parte (km).	105
Tabla 4.3.1.3. Distancia entre pozos profundos, tercera parte (km).	107
Tabla 4.3.1.4. Flujos y concentraciones de pozos profundos.	109
Tabla 4.3.1.5. Costo de bombeo y tubería desde pozos profundos hasta las plantas de tratamiento.	111

Tabla 4.3.1.6. Costo de bombeo y tubería entre pozos profundos, primera parte (\$/m ³).....	113
Tabla 4.3.1.6. Costo de bombeo y tubería entre pozos profundos, segunda parte (\$/m ³).	115
Tabla 4.3.1.6. Costo de bombeo y tubería entre pozos profundos, tercera parte (\$/m ³).	117
Tabla 4.3.1.7. Costo de bombeo y tuberías hacia la demanda de pozos profundos.	119
Tabla 4.3.2.1. Datos implementados en la red neuronal artificial, Primera Parte.	121
Tabla 4.3.2.1. Datos implementados en la red neuronal artificial, Segunda Parte.	122
Tabla 5.2.1. Concentraciones de arsénico del punto fuente de pozos profundos y escenarios 1, 2 y 3.	148
Tabla 5.2.2. Costos para cada escenario.....	151
Tabla 5.2.3. Viabilidad del escenario en el tiempo.	153
Tabla 5.3.1. Costos anualizados para cada escenario.....	162
Tabla 5.4.1. Costos Anualizados para cada escenario (\$).....	179
Tabla 5.4.2. Variables Objetivo para cada escenario	179

NOMENCLATURA

APRENDIZAJE NO SUPERVISADO

<i>i</i>	Conjunto de pozos profundos fuente
<i>i1</i>	Conjunto de pozos profundos del Caso 1
<i>i2</i>	Conjunto de pozos profundos del Caso 2
<i>i3</i>	Conjunto de pozos profundos del Caso 3
<i>i1A</i>	Conjunto de pozos profundos del Caso 1 en Caso A
<i>i1B</i>	Conjunto de pozos profundos del Caso 1 en Caso B
<i>i1C</i>	Conjunto de pozos profundos del Caso 1 en Caso C
<i>i1A1</i>	Conjunto de pozos profundos del Caso 1 en Caso A hacia Tecnología 1
<i>i1A2</i>	Conjunto de pozos profundos del Caso 1 en Caso A hacia Tecnología 2
<i>i1A3</i>	Conjunto de pozos profundos del Caso 1 en Caso A hacia Tecnología 3
<i>i1A1T</i>	Conjunto de pozos profundos del Caso 1 en Caso A en Tecnología 1
<i>i1A2T</i>	Conjunto de pozos profundos del Caso 1 en Caso A en Tecnología 2
<i>i1A3T</i>	Conjunto de pozos profundos del Caso 1 en Caso A en Tecnología 3
<i>i1A1F</i>	Conjunto de pozos profundos del Caso 1 en Caso A en Tecnología 1 salida
<i>i1A2F</i>	Conjunto de pozos profundos del Caso 1 en Caso A en Tecnología 2 salida
<i>i1A3F</i>	Conjunto de pozos profundos del Caso 1 en Caso A en Tecnología 3 salida
<i>i1B1</i>	Conjunto de pozos profundos del Caso 1 en Caso B hacia Tecnología 1
<i>i1B2</i>	Conjunto de pozos profundos del Caso 1 en Caso B hacia Tecnología 2
<i>i1B3</i>	Conjunto de pozos profundos del Caso 1 en Caso B hacia Tecnología 3
<i>i1B1T</i>	Conjunto de pozos profundos del Caso 1 en Caso B en Tecnología 1
<i>i1B2T</i>	Conjunto de pozos profundos del Caso 1 en Caso B en Tecnología 2
<i>i1B3T</i>	Conjunto de pozos profundos del Caso 1 en Caso B en Tecnología 3
<i>i1B1F</i>	Conjunto de pozos profundos del Caso 1 en Caso B en Tecnología 1 salida
<i>i1B2F</i>	Conjunto de pozos profundos del Caso 1 en Caso B en Tecnología 2 salida
<i>i1B3F</i>	Conjunto de pozos profundos del Caso 1 en Caso B en Tecnología 3 salida
<i>i2A</i>	Conjunto de pozos profundos del Caso 2 en Caso A
<i>i2B</i>	Conjunto de pozos profundos del Caso 2 en Caso B
<i>i2A1</i>	Conjunto de pozos profundos del Caso 2 en Caso A hacia Tecnología 1
<i>i2A2</i>	Conjunto de pozos profundos del Caso 2 en Caso A hacia Tecnología 2
<i>i2A3</i>	Conjunto de pozos profundos del Caso 2 en Caso A hacia Tecnología 3

$i2A1T$	Conjunto de pozos profundos del Caso 2 en Caso A en Tecnología 1
$i2A2T$	Conjunto de pozos profundos del Caso 2 en Caso A en Tecnología 2
$i2A3T$	Conjunto de pozos profundos del Caso 2 en Caso A en Tecnología 3
$i2A1F$	Conjunto de pozos profundos del Caso 2 en Caso A en Tecnología 1 salida
$i2A2F$	Conjunto de pozos profundos del Caso 2 en Caso A en Tecnología 2 salida
$i2A3F$	Conjunto de pozos profundos del Caso 2 en Caso A en Tecnología 3 salida
j	Conjunto de pozos profundos de demanda
k	Conjunto de ubicación de planta de tratamiento
l	Conjunto de límites de distancia máxima y mínima de pozos profundos a planta de tratamiento y de pozos profundos a pozos profundos

F_i^{Fuente}	Flujos de pozos profundos fuente ($m^3/5$ años)
$F_{i,i1}^{caso 1}$	Flujos de pozos profundos de Caso 1 ($m^3/5$ años)
F_{i1}^{1Rest}	Flujos de restricción de pozos profundos de Caso 1 ($m^3/5$ años)
$F_{i,i2}^{caso 2}$	Flujos de pozos profundos de Caso 2 ($m^3/5$ años)
F_{i2}^{2Rest}	Flujos de restricción de pozos profundos de Caso 2 ($m^3/5$ años)
$F_{i,i3}^{caso 3}$	Flujos de pozos profundos de Caso 3 ($m^3/5$ años)
F_{i3}^{3Rest}	Flujos de restricción de pozos profundos de Caso 3 ($m^3/5$ años)
$F_{i1,i1A}^{caso 1A}$	Flujos de pozos profundos de Caso 1 en Caso A ($m^3/5$ años)
$F_{i1,i1B}^{caso 1B}$	Flujos de pozos profundos de Caso 1 en Caso B ($m^3/5$ años)
$F_{i1,i1C}^{caso 1C}$	Flujos de pozos profundos de Caso 1 en Caso C ($m^3/5$ años)
$F_{i1A,i1A1}^{1caso A1}$	Flujos de pozos profundos de Caso 1 en Caso A hacia Tecnología 1 ($m^3/5$ años)
$F_{i1A,i1A2}^{caso 1A2}$	Flujos de pozos profundos de Caso 1 en Caso A hacia Tecnología 2 ($m^3/5$ años)
$F_{i1A,i1A3}^{caso 1A3}$	Flujos de pozos profundos de Caso 1 en Caso A hacia Tecnología 3 ($m^3/5$ años)
$F_{i1A1,i1A1T}^{caso 1A1T}$	Flujos de pozos profundos de Caso 1 en Caso A en Tecnología 1 ($m^3/5$ años)
$F_{i1A2,i1A2T}^{caso 1A2T}$	Flujos de pozos profundos de Caso 1 en Caso A en Tecnología 2 ($m^3/5$ años)
$F_{i1A3,i1A3T}^{caso 1A3T}$	Flujos de pozos profundos de Caso 1 en Caso A en Tecnología 3 ($m^3/5$ años)
$F_{i1A1T,i1A1F}^{caso 1A1F}$	Flujos de pozos profundos de Caso 1 en Caso A en Tecnología 1 salida ($m^3/5$ años)
$F_{i1A2T,i1A2F}^{caso 1A2F}$	Flujos de pozos profundos de Caso 1 en Caso A en Tecnología 2 salida ($m^3/5$ años)
$F_{i1A3T,i1A3F}^{caso 1A3F}$	Flujos de pozos profundos de Caso 1 en Caso A en Tecnología 3 salida ($m^3/5$ años)

$F_{i1A1F,j}^{fluj,4}$	Flujos de pozos profundos de Caso 1 en Caso A en Tecnología 1 salida hacia pozos profundo demanda ($m^3/5$ años)
$F_{i1A2F,j}^{fluj,5}$	Flujos de pozos profundos de Caso 1 en Caso A en Tecnología 2 salida hacia pozos profundo demanda ($m^3/5$ años)
$F_{i1A3F}^{fluj,6}$	Flujos de pozos profundos de Caso 1 en Caso A en Tecnología 3 salida hacia pozos profundo demanda ($m^3/5$ años)
$F_{i1B,i1B1}^{caso\ 1B1}$	Flujos de pozos profundos de Caso 1 en Caso B a Tecnología 1 ($m^3/5$ años)
$F_{i1B,i1B2}^{caso\ 1B2}$	Flujos de pozos profundos de Caso 1 en Caso B a Tecnología 2 ($m^3/5$ años)
$F_{i1B,i1B3}^{caso\ 1B3}$	Flujos de pozos profundos de Caso 1 en Caso B a Tecnología 3 ($m^3/5$ años)
$F_{i1B1,i1B1T}^{caso\ 1B1T}$	Flujos de pozos profundos de Caso 1 en Caso B en Tecnología 1 ($m^3/5$ años)
$F_{i1B2,i1B2T}^{caso\ 1B2T}$	Flujos de pozos profundos de Caso 1 en Caso B en Tecnología 2 ($m^3/5$ años)
$F_{i1B3,i1B3T}^{caso\ 1B3T}$	Flujos de pozos profundos de Caso 1 en Caso B en Tecnología 3 ($m^3/5$ años)
$F_{i1B1T,i1B1F}^{caso\ 1B1F}$	Flujos de pozos profundos de Caso 1 en Caso B en Tecnología 1 salida ($m^3/5$ años)
$F_{i1B2T,i1B2F}^{caso\ 1B2F}$	Flujos de pozos profundos de Caso 1 en Caso B en Tecnología 2 salida ($m^3/5$ años)
$F_{i1B3T,i1B3F}^{caso\ 1B3F}$	Flujos de pozos profundos de Caso 1 en Caso B en Tecnología 3 salida ($m^3/5$ años)
$F_{i1B1F,j}^{fluj,7}$	Flujos de pozos profundos de Caso 1 en Caso B en Tecnología 1 salida hacia pozos profundo demanda ($m^3/5$ años)
$F_{i1B2F,j}^{fluj,8}$	Flujos de pozos profundos de Caso 1 en Caso B en Tecnología 2 salida hacia pozos profundo demanda ($m^3/5$ años)
$F_{i1B3F,j}^{fluj,9}$	Flujos de pozos profundos de Caso 1 en Caso B en Tecnología 3 salida hacia pozos profundo demanda ($m^3/5$ años)
$F_{i1C,j}^{fluj,10}$	Flujos de pozos profundos de Caso 1 en Caso C hacia pozos profundo demanda ($m^3/5$ años)
$F_{i2,i2A}^{caso\ 2A}$	Flujos de pozos profundos de Caso 2 en Caso A ($m^3/5$ años)
$F_{i2,i2B}^{caso\ 2B}$	Flujos de pozos profundos de Caso 2 en Caso B ($m^3/5$ años)
$F_{i2A,i2A1}^{caso\ 2A1}$	Flujos de pozos profundos de Caso 2 en Caso A hacia Tecnología 1 ($m^3/5$ años)
$F_{i2A,i2A2}^{caso\ 2A2}$	Flujos de pozos profundos de Caso 2 en Caso A hacia Tecnología 2 ($m^3/5$ años)
$F_{i2A,i2A3}^{caso\ 2A3}$	Flujos de pozos profundos de Caso 2 en Caso A hacia Tecnología 3 ($m^3/5$ años)
$F_{i2A1,i2A1T}^{caso\ 2A1T}$	Flujos de pozos profundos de Caso 2 en Caso A en Tecnología 1 ($m^3/5$ años)
$F_{i2A2,i2A2T}^{caso\ 2A2T}$	Flujos de pozos profundos de Caso 2 en Caso A en Tecnología 2 ($m^3/5$ años)
$F_{i2A3,i2A3T}^{caso\ 2A3T}$	Flujos de pozos profundos de Caso 2 en Caso A en Tecnología 3 ($m^3/5$ años)

$F_{i2A1T,i2A1F}^{caso\ 2A1F}$	Flujos de pozos profundos de Caso 2 en Caso A en Tecnología 1 salida (m ³ /5 años)
$F_{i2A2T,i2A2F}^{caso\ 2A2F}$	Flujos de pozos profundos de Caso 2 en Caso A en Tecnología 2 salida (m ³ /5 años)
$F_{i2A3T,i2A3F}^{caso\ 2A3F}$	Flujos de pozos profundos de Caso 2 en Caso A en Tecnología 3 salida (m ³ /5 años)
$F_{i2A1F,j}^{fluj,11}$	Flujos de pozos profundos de Caso 2 en Caso A en Tecnología 1 salida hacia pozos profundo demanda (m ³ /5 años)
$F_{i2A2F,j}^{fluj,12}$	Flujos de pozos profundos de Caso 2 en Caso A en Tecnología 2 salida hacia pozos profundo demanda (m ³ /5 años)
$F_{i2A3F,j}^{fluj,13}$	Flujos de pozos profundos de Caso 2 en Caso A en Tecnología 3 salida hacia pozos profundo demanda (m ³ /5 años)
$F_{i2B,j}^{fluj,14}$	Flujos de pozos profundos de Caso 2 en Caso B hacia pozos profundo demanda (m ³ /5 años)
$F_{i3,j}^{fluj,15}$	Flujos de pozos profundos de Caso 2 hacia pozos profundo demanda (m ³ /5 años)
$F_j^{Demanda}$	Flujos de pozos profundos de demanda (m ³ /5 años)
F_j^{Dins}	Flujos de pozos profundos de demanda insatisfecha (m ³ /5 años)
$F_j^{DemandaMAX}$	Flujos máximos de pozos profundos de demanda (m ³ /5 años)

$p_{i1A,i1A1}^{caso\ 1A1}$	Propiedad de pozos profundos de Caso 1 en Caso A hacia Tecnología 1 (mg/m ³)
$p_{i1A,i1A2}^{caso\ 1A2}$	Propiedad de pozos profundos de Caso 1 en Caso A hacia Tecnología 2 (mg/m ³)
$p_{i1A,i1A3}^{caso\ 1A3}$	Propiedad de pozos profundos de Caso 1 en Caso A hacia Tecnología 3 (mg/m ³)
$p_{i1A1,i1A1T}^{caso\ 1A1T}$	Propiedad de pozos profundos de Caso 1 en Caso A en Tecnología 1 (mg/m ³)
$p_{i1A2,i1A2T}^{caso\ 1A2T}$	Propiedad de pozos profundos de Caso 1 en Caso A en Tecnología 2 (mg/m ³)
$p_{i1A3,i1A3T}^{caso\ 1A3T}$	Propiedad de pozos profundos de Caso 1 en Caso A en Tecnología 3 (mg/m ³)
$p_{i1A1T,i1A1F}^{caso\ 1A1F}$	Propiedad de pozos profundos de Caso 1 en Caso A en Tecnología 1 salida (mg/m ³)
$p_{i1A2T,i1A2F}^{caso\ 1A2F}$	Propiedad de pozos profundos de Caso 1 en Caso A en Tecnología 2 salida (mg/m ³)
$p_{i1A3T,i1A3F}^{caso\ 1A3F}$	Propiedad de pozos profundos de Caso 1 en Caso A en Tecnología 3 salida (mg/m ³)
$p_{i1A1F,j}^{fluj,4}$	Propiedad de pozos profundos de Caso 1 en Caso A en Tecnología 1 salida hacia pozos profundos demanda (mg/m ³)
$p_{i1A2F,j}^{fluj,5}$	Propiedad de pozos profundos de Caso 1 en Caso A en Tecnología 2 salida hacia pozos profundos demanda (mg/m ³)
$p_{i1A3F,j}^{fluj,6}$	Propiedad de pozos profundos de Caso 1 en Caso A en Tecnología 3 salida hacia pozos profundos demanda (mg/m ³)

$p_{i1B,i1B1}^{caso\ 1B1}$	Propiedad de pozos profundos de Caso 1 en Caso B hacia Tecnología 1 (mg/m ³)
$p_{i1B,i1B2}^{caso\ 1B2}$	Propiedad de pozos profundos de Caso 1 en Caso B hacia Tecnología 2 (mg/m ³)
$p_{i1B,i1B3}^{caso\ 1B3}$	Propiedad de pozos profundos de Caso 1 en Caso B hacia Tecnología 3 (mg/m ³)
$p_{i1B1,i1B1T}^{caso\ 1B1T}$	Propiedad de pozos profundos de Caso 1 en Caso B en Tecnología 1 (mg/m ³)
$p_{i1B2,i1B2T}^{caso\ 1B2T}$	Propiedad de pozos profundos de Caso 1 en Caso B en Tecnología 2 (mg/m ³)
$p_{i1B3,i1B3T}^{caso\ 1B3T}$	Propiedad de pozos profundos de Caso 1 en Caso B en Tecnología 3 (mg/m ³)
$p_{i1B1T,i1B1F}^{caso\ 1B1F}$	Propiedad de pozos profundos de Caso 1 en Caso B en Tecnología 1 salida (mg/m ³)
$p_{i1B2T,i1B2F}^{caso\ 1B2F}$	Propiedad de pozos profundos de Caso 1 en Caso B en Tecnología 2 salida (mg/m ³)
$p_{i1B3T,i1B3F}^{caso\ 1B3F}$	Propiedad de pozos profundos de Caso 1 en Caso B en Tecnología 3 salida (mg/m ³)
$p_{i1B1F,j}^{fluj,7}$	Propiedad de pozos profundos de Caso 1 en Caso B en Tecnología 1 salida hacia pozos profundos demanda (mg/m ³)
$p_{i1B2F,j}^{fluj,8}$	Propiedad de pozos profundos de Caso 1 en Caso B en Tecnología 2 salida hacia pozos profundos demanda (mg/m ³)
$p_{i1B3F,j}^{fluj,9}$	Propiedad de pozos profundos de Caso 1 en Caso B en Tecnología 3 salida hacia pozos profundos demanda (mg/m ³)
$p_{i1C,j}^{fluj,10}$	Propiedad de pozos profundos de Caso 1 en Caso C hacia pozos profundos demanda (mg/m ³)
$p_{i2A,i2A1}^{caso\ 2A1}$	Propiedad de pozos profundos de Caso 2 en Caso A hacia Tecnología 1 (mg/m ³)
$p_{i2A,i2A2}^{caso\ 2A2}$	Propiedad de pozos profundos de Caso 2 en Caso A hacia Tecnología 2 (mg/m ³)
$p_{i2A,i2A3}^{caso\ 2A3}$	Propiedad de pozos profundos de Caso 2 en Caso A hacia Tecnología 3 (mg/m ³)
$p_{i2A1,i2A1T}^{caso\ 2A1T}$	Propiedad de pozos profundos de Caso 2 en Caso A en Tecnología 1 (mg/m ³)
$p_{i2A2,i2A2T}^{caso\ 2A2T}$	Propiedad de pozos profundos de Caso 2 en Caso A en Tecnología 2 (mg/m ³)
$p_{i2A3,i2A3T}^{caso\ 2A3T}$	Propiedad de pozos profundos de Caso 2 en Caso A en Tecnología 3 (mg/m ³)
$p_{i2A1T,i2A1F}^{caso\ 2A1F}$	Propiedad de pozos profundos de Caso 2 en Caso A en Tecnología 1 salida (mg/m ³)
$p_{i2A2T,i2A2F}^{caso\ 2A2F}$	Propiedad de pozos profundos de Caso 2 en Caso A en Tecnología 2 salida (mg/m ³)
$p_{i2A3T,i2A3F}^{caso\ 2A3F}$	Propiedad de pozos profundos de Caso 2 en Caso A en Tecnología 3 salida (mg/m ³)
$p_{i2A1F,j}^{fluj,11}$	Propiedad de pozos profundos de Caso 2 en Caso A en Tecnología 1 salida hacia pozos profundos demanda (mg/m ³)
$p_{i2A2F,j}^{fluj,12}$	Propiedad de pozos profundos de Caso 2 en Caso A en Tecnología 2 salida hacia pozos profundos demanda (mg/m ³)

$P_{i2A3F,j}^{flu,j,13}$	Propiedad de pozos profundos de Caso 2 en Caso A en Tecnología 3 salida hacia pozos profundos demanda (mg/m ³)
$P_{i2B,j}^{flu,j,14}$	Propiedad de pozos profundos de Caso 2 en Caso B hacia pozos profundos demanda (mg/m ³)
$P_{i3,j}^{flu,j,15}$	Propiedad de pozos profundos de Caso 2 hacia pozos profundos demanda (mg/m ³)
$P_j^{Demanda}$	Propiedad de pozos profundos demanda (mg/m ³)
C^{MAX}	Propiedad Máxima de pozos profundos demanda (mg/m ³)
ξ_{I1A1T}	Factor de Eficiencia de Caso1 en Caso A in Tecnología 1
ξ_{I1A2T}	Factor de Eficiencia de Caso1 en Caso A in Tecnología 2
ξ_{I1A3T}	Factor de Eficiencia de Caso1 en Caso A in Tecnología 3
ξ_{I1B1T}	Factor de Eficiencia de Caso1 en Caso B in Tecnología 1
ξ_{I1B2T}	Factor de Eficiencia de Caso1 en Caso B in Tecnología 2
ξ_{I1B3T}	Factor de Eficiencia de Caso1 n Caso B in Tecnología 3
ξ_{I2A1T}	Factor de Eficiencia de Caso2 en Caso A in Tecnología 1
ξ_{I2A2T}	Factor de Eficiencia de Caso2 en Caso A in Tecnología 2
ξ_{I2A3T}	Factor de Eficiencia de Caso2 en Caso A in Tecnología 3
$Y_{i,i1}^{F1}$	Variable binaria utilizada para flujo de pozos profundos de Caso 1
$Y_{i,i2}^{F2}$	Variable binaria utilizada para flujo de pozos profundos de Caso 2
$Y_{i,i3}^{F3}$	Variable binaria utilizada para flujo de pozos profundos de Caso 3
$Y_{i1,i1A}^{F1A}$	Variable binaria utilizada para flujo de pozos profundos de Caso 1 en Caso A
$Y_{i1,i1B}^{F1B}$	Variable binaria utilizada para flujo de pozos profundos de Caso 1 en Caso B
$Y_{i1,i1C}^{F1C}$	Variable binaria utilizada para flujo de pozos profundos de Caso 1 en Caso C
Y_{i1A1}^{F1A1}	Variable binaria utilizada para flujo de pozos profundos de Caso 1 en Caso A hacia tecnología 1
Y_{i1A2}^{F1A2}	Variable binaria utilizada para flujo de pozos profundos de Caso 1 en Caso A hacia tecnología 2
Y_{i1A3}^{F1A3}	Variable binaria utilizada para flujo de pozos profundos de Caso 1 en Caso A hacia tecnología 3
Y_{i1B1}^{F1B1}	Variable binaria utilizada para flujo de pozos profundos de Caso 1 en Caso B hacia tecnología 1

Y_{i1B2}^{F1B2}	Variable binaria utilizada para flujo de pozos profundos de Caso 1 en Caso B hacia tecnología 2
Y_{i1B3}^{F1B3}	Variable binaria utilizada para flujo de pozos profundos de Caso 1 en Caso B hacia tecnología 3
$Y_{i2,i2A}^{F2A}$	Variable binaria utilizada para flujo de pozos profundos de Caso 2 en Caso A
$Y_{i2,i2B}^{F2B}$	Variable binaria utilizada para flujo de pozos profundos de Caso 2 en Caso B
Y_{i2A1}^{F2A1}	Variable binaria utilizada para flujo de pozos profundos de Caso 2 en Caso A hacia tecnología 1
Y_{i2A2}^{F2A2}	Variable binaria utilizada para flujo de pozos profundos de Caso 2 en Caso A hacia tecnología 2
Y_{i2A3}^{F2A3}	Variable binaria utilizada para flujo de pozos profundos de Caso 2 en Caso A hacia tecnología 3
$C^{TB,O}$	Costos de tuberías, bombeo y operación de las tecnologías (\$)
CO_{i1A1}^{F1A1}	Costo de operación de Tecnología 1 en Caso 1 en Caso A (\$/m ³)
CO_{i1A2}^{F1A2}	Costo de operación de Tecnología 2 en Caso 1 en Caso A (\$/m ³)
CO_{i1A3}^{F1A3}	Costo de operación de Tecnología 3 en Caso 1 en Caso A (\$/m ³)
CO_{i1B1}^{F1B1}	Costo de operación de Tecnología 1 en Caso 1 en Caso B (\$/m ³)
CO_{i1B2}^{F1B2}	Costo de operación de Tecnología 2 en Caso 1 en Caso B (\$/m ³)
CO_{i1B3}^{F1B3}	Costo de operación de Tecnología 3 en Caso 1 en Caso B (\$/m ³)
CO_{i2A1}^{F2A1}	Costo de operación de Tecnología 1 en Caso 2 en Caso A (\$/m ³)
CO_{i2A2}^{F2A2}	Costo de operación de Tecnología 2 en Caso 2 en Caso A (\$/m ³)
CO_{i2A3}^{F2A3}	Costo de operación de Tecnología 3 en Caso 2 en Caso A (\$/m ³)
$CPP_{i1A,i1A1}^{F1A1}$	Costo de bombeo y tubería para Tecnología 1 en Caso 1 en Caso A (\$/m ³)
$CPP_{i1A,i1A2}^{F1A2}$	Costo de bombeo y tubería para Tecnología 2 en Caso 1 en Caso A (\$/m ³)
$CPP_{i1A,i1A3}^{F1A3}$	Costo de bombeo y tubería para Tecnología 3 en Caso 1 en Caso A (\$/m ³)
$CPP_{i1B,i1B1}^{F1B1}$	Costo de bombeo y tubería para Tecnología 1 en Caso 1 en Caso B (\$/m ³)
$CPP_{i1B,i1B2}^{F1B2}$	Costo de bombeo y tubería para Tecnología 2 en Caso 1 en Caso B (\$/m ³)
$CPP_{i1B,i1B3}^{F1B3}$	Costo de bombeo y tubería para Tecnología 3 en Caso 1 en Caso B (\$/m ³)
$CPP_{i2A,i2A1}^{F2A1}$	Costo de bombeo y tubería para Tecnología 1 en Caso 2 en Caso A (\$/m ³)
$CPP_{i2A,i2A2}^{F2A2}$	Costo de bombeo y tubería para Tecnología 2 en Caso 2 en Caso A (\$/m ³)

$CPP_{i2A,i2A3}^{F2A3}$	Costo de bombeo y tubería para Tecnología 3 en Caso 2 en Caso A (\$/m ³)
C^{TB}	Costo de bombeo y tubería para pozos profundos demanda (\$)
$CPP_{i1A1F,j}^{CI4J}$	Costo de bombeo y tubería para pozos profundos demanda de Tecnología 1 en Caso 1 en Caso A (\$/m ³)
$CPP_{i1A2F,j}^{CI5J}$	Costo de bombeo y tubería para pozos profundos demanda de Tecnología 2 en Caso 1 en Caso A (\$/m ³)
$CPP_{i1A3F,j}^{CI6J}$	Costo de bombeo y tubería para pozos profundos demanda de Tecnología 3 en Caso 1 en Caso A (\$/m ³)
$CPP_{i1B1F,j}^{CI7J}$	Costo de bombeo y tubería para pozos profundos demanda de Tecnología 1 en Caso 1 en Caso B (\$/m ³)
$CPP_{i1B2F,j}^{CI8J}$	Costo de bombeo y tubería para pozos profundos demanda de Tecnología 2 en Caso 1 en Caso B (\$/m ³)
$CPP_{i1B3F,j}^{CI9J}$	Costo de bombeo y tubería para pozos profundos demanda de Tecnología 3 en Caso 1 en Caso B (\$/m ³)
$CPP_{i1C,j}^{CI10J}$	Costo de bombeo y tubería para pozos profundos demanda de Caso 1 en Caso C (\$/m ³)
$CPP_{i2A1F,j}^{CI11J}$	Costo de bombeo y tubería para pozos profundos demanda de Tecnología 1 en Caso 1 en Caso A (\$/m ³)
$CPP_{i2A2F,j}^{CI12J}$	Costo de bombeo y tubería para pozos profundos demanda de Tecnología 2 en Caso 2 en Caso A (\$/m ³)
$CPP_{i2A3F,j}^{CI13J}$	Costo de bombeo y tubería para pozos profundos demanda de Tecnología 3 en Caso 3 en Caso A (\$/m ³)
$CPP_{i2B,j}^{CI14J}$	Costo de bombeo y tubería para pozos profundos demanda de Caso 2 en Caso B (\$/m ³)
$CPP_{i3,j}^{CI15J}$	Costo de bombeo y tubería para pozos profundos demanda de Caso 3 (\$/m ³)
C^T	Costo de instalación de planta de tratamiento (\$)
CP_{i1A1}^{CI1A1}	Costo de instalación de planta de tratamiento de tecnología 1 en Caso 1 en Caso A (\$)
CP_{i1A2}^{CI1A2}	Costo de instalación de planta de tratamiento de tecnología 2 en Caso 1 en Caso A (\$)
CP_{i1A3}^{CI1A3}	Costo de instalación de planta de tratamiento de tecnología 3 en Caso 1 en Caso A (\$)
CP_{i1B1}^{CI1B1}	Costo de instalación de planta de tratamiento de tecnología 1 en Caso 1 en Caso B (\$)
CP_{i1B2}^{CI1B2}	Costo de instalación de planta de tratamiento de tecnología 2 en Caso 1 en Caso B (\$)
CP_{i1B3}^{CI1B3}	Costo de instalación de planta de tratamiento de tecnología 3 en Caso 1 en Caso B (\$)
CP_{i2A1}^{CI2A1}	Costo de instalación de planta de tratamiento de tecnología 1 en Caso 2 en Caso A (\$)
CP_{i2A2}^{CI2A2}	Costo de instalación de planta de tratamiento de tecnología 2 en Caso 2 en Caso A (\$)

CP_{i2A3}^{CI2A3}	Costo de instalación de planta de tratamiento de tecnología 3 en Caso 2 en Caso A (\$)
CT	Costs total (\$)
δ^{1p}	Optimal distance for the location of a treatment plant (m)
χ	Optimum abscissa coordinates for the location of a treatment plant (m)
γ	Optimum ordinate coordinate for the location of a treatment plant (m)
x_i	Coordenadas de abscisas de pozos profundos fuente (m)
y_i	Coordenadas ordenadas de pozos profundos fuente (m)
δ^{2p}	Distancia óptima para la ubicación de dos plantas de tratamiento (m)
χ_k	Coordenadas de abscisas óptimas para la ubicación de dos plantas de tratamiento (m)
γ_k	Coordenadas óptimas de las ordenadas para la ubicación de dos plantas de tratamiento (m)
$y_{i,k}^p$	Variable binaria para tomar la decisión si el flujo del pozo profundo va a la primera ubicación en la primera planta o a la segunda ubicación en la segunda planta
$d_{i,k}^p$	Distancia desde cada pozo profundo hasta la ubicación de cada planta de tratamiento (m)
χ_k^p	Coordenadas de abscisas de la ubicación de cada planta de tratamiento (m)
γ_k^p	Coordenadas ordenadas de la ubicación de cada planta de tratamiento (m)
x_i^p	Coordenadas de abscisas de cada pozo profundo (m)
y_i^p	Coordenadas ordenadas de cada pozo profundo (m)
$d_{i,i}^{x,y}$	Distancia de cada pozo profundo a cada pozo profundo (m)
$Cost_l$	Límites de los costos de bombeo y tuberías (\$/m ³)
$dist_l^p$	Límites de distancias entre un pozo profundo y una planta de tratamiento (m)
m^p	Pendiente de la función de distancia a las plantas de tratamiento
b^p	Ordenada al origen de la función de distancia a las plantas de tratamiento
$Cost_{i,k}^p$	Costos de bombeo y tubería de pozos profundos a plantas de tratamiento (\$/m ³)
$dist_{i,k}^p$	Distancia de pozos profundos a plantas de tratamiento (m)
$dist_l^m$	Límites de las distancias entre pozos profundos (m)
m^m	Pendiente de la función de distancia a las plantas de tratamiento
b^m	Ordenada al origen de la función de distancia a las plantas de tratamiento
$Cost_{i,i}^m$	Costos de bombeo y conducción de pozos profundos a pozos profundos (\$/m ³)
$dist_{i,i}^m$	Distancia de pozos profundos a pozos profundos (m)

APRENDIZAJE PROFUNDO

i	Conjunto de flujo de agua dulce.
j	Conjunto de edificios.
k	Conjunto de usos domésticos.
l	Conjunto de planta de tratamiento de aguas residuales.
n	Conjunto de tanques de almacenamiento.
m	Conjunto de flujo hacia el medio ambiente.
nc, nnc	Conjuntos del número de neuronas en cada capa profunda.
x	Conjunto de propiedades.
t	Conjunto de días.
<i>Neurona, Neurosalida</i>	Conjuntos del número de neuronas en cada capa profunda en la sección 4.3.2.
<i>salida</i>	Conjunto de salidas de propiedades para RNAP en la sección 4.3.2.
<i>entrada</i>	Conjunto de entrada de propiedades para RNAP en la sección 4.3.2.
$F_{i,t}^{AGUAD}$	Flujos de agua dulce ($m^3/día$).
$F_{i,j,k,t}^{AD,EDIF}$	Flujos de agua dulce enviados a edificios residenciales ($m^3/día$).
$F_{j,k,t}^{EDIF,ent}$	Flujos de entrada de edificios residenciales ($m^3/día$).
$F_{n,j,k,t}^{TANQ}$	Flujos de los diferentes tanques ($m^3/día$).
$F_{l,j,k,t}^{PTAR,recir}$	Flujos de la planta de aguas residuales ($m^3/día$).
$F_{j,k,t}^{EDIF,sal}$	Flujos fuera de edificios residenciales ($m^3/día$).
$F_{j,k,l,t}^{ARESID}$	Flujos de aguas residuales que van a la planta de tratamiento de aguas residuales ($m^3/día$).
$F_{l,t}^{PTAR,ent}$	Flujos de aguas residual a la entrada de la planta de tratamiento de aguas residuales ($m^3/día$).
$F_{l,t}^{PTAR,sal}$	Flujos de aguas residual a la salida de la planta de tratamiento de aguas residuales ($m^3/día$).
$F_{l,n,t}^{TANQ,ent}$	Flujos entrantes a los diferentes tanques ($m^3/día$).
$F_{l,m,t}^{AMB}$	Flujos entrantes al medio ambiente ($m^3/día$).
$S_{n,t}$	Almacenamiento de los tanques de agua tratada (m^3).
S_n^{cap}	Capacidad de almacenamiento en los tanques (m^3).
S^{max}	Capacidad máxima de almacenamiento en los tanques (m^3).
$PTAR_l^{cap}$	Capacidad de tratamiento de plantas de aguas residuales (m^3).
$PTAR_{j,k}^{cap,max}$	Capacidad máxima de tratamiento en la planta de aguas residuales (m^3).
$Q_{j,k,l}^{UD,cap}$	Capacidades de tuberías para flujos desde edificios residenciales hasta la planta de tratamiento (m^3).
$Q_{n,j,k}^{T,cap}$	Capacidades de tuberías para flujos desde tanques de almacenamiento hasta edificios residenciales (m^3).
$Q_{l,j,k}^{PTAR,cap}$	Capacidad de las tuberías para el flujo de las plantas de tratamiento de aguas residuales hacia los edificios residenciales (m^3).
ADT	Agua Dulce Total(m^3).

$P_{i,j,k,t}^{AD,EDIF}$	Propiedades de los flujos de agua dulce para los diferentes usos domésticos (mg/m^3).
$P_{j,k,t}^{EDIF,ent}$	Propiedades de los flujos en la entrada de los edificios residenciales (mg/m^3).
$P_{n,j,k,t}^{TANQ}$	Propiedades de los flujos provenientes de los diferentes tanques (mg/m^3).
$P_{l,j,k,t}^{PTAR,recir}$	Propiedades de los flujos de la planta de aguas residuales (mg/m^3).
$P_{j,k,t}^{EDIF,sal}$	Propiedades de los flujos de la salida de los edificios residenciales (mg/m^3).
$P_{j,k,l,t}^{ARESID}$	Propiedades de los flujos de aguas residuales hacia la planta de tratamiento de aguas residuales (mg/m^3).
$P_{l,t}^{PTAR,ent}$	Propiedades de los flujos de aguas residuales a la entrada de la planta de tratamiento de aguas residuales (mg/m^3).
$P_{l,t}^{PTAR,sal}$	Propiedades de los flujos de aguas residuales a la salida de la planta de tratamiento de aguas residuales (mg/m^3).
$F_{l,n,t}^{TANQ,ent}$	Propiedades de los flujos entrantes a los diferentes tanques (mg/m^3).
$P_{l,m,t}^{AMB}$	Propiedades de flujos entrantes al medio ambiente (mg/m^3).
$SP_{n,x,t}$	Propiedades de almacenamiento del agua tratada en tanques (mg/m^3).
$CP_{l,nc,t}^{1,PTAR}$	Valores de salida de la primera capa oculta.
$CP_{l,nc,t}^{2,PTAR}$	Valores de salida de la segunda capa oculta.
$CP_{l,nc,t}^{3,PTAR}$	Valores de salida de la tercera capa oculta.
$CP_{l,nc,t}^{4,PTAR}$	Valores de salida de la cuarta capa oculta.
$CP_{l,nc,t}^{5,PTAR}$	Valores de salida de la quinta capa oculta.
$CP_{l,nc,t}^{6,PTAR}$	Valores de salida de la sexta capa oculta.
$CP_{l,nc,t}^{7,PTAR}$	Valores de salida de la séptima capa oculta.
$Y_{Neurona}^{capa}$	Valores de salida de alguna capa oculta en la sección 4.3.2.
$Y_{Neurona}^1$	Valores de salida de la primera capa oculta en la sección 4.3.2.
$Y_{Neurosalida}^1$	Valores de entrada de la segunda capa oculta en la sección 4.3.2.
$Y_{Neurona}^2$	Valores de salida de la segunda capa oculta en la sección 4.3.2.
$Y_{Neurosalida}^2$	Valores de entrada de la tercera capa oculta en la sección 4.3.2.
$Y_{Neurona}^3$	Valores de salida de la tercera capa oculta en la sección 4.3.2.
$Y_{Neurosalida}^3$	Valores de entrada de la cuarta capa oculta en la sección 4.3.2.
$Y_{Neurona}^4$	Valores de salida de la cuarta capa oculta en la sección 4.3.2.
$Y_{Neurosalida}^4$	Valores de entrada de la quinta capa oculta en la sección 4.3.2.
$Y_{Neurona}^5$	Valores de salida de la quinta capa oculta en la sección 4.3.2.
$Y_{Neurosalida}^5$	Valores de entrada de la sexta capa oculta en la sección 4.3.2.
$Y_{Neurona}^6$	Valores de salida de la sexta capa oculta en la sección 4.3.2.
$Y_{Neurosalida}^6$	Valores de entrada de la séptima capa oculta en la sección 4.3.2.
$Y_{Neurona}^7$	Valores de salida de la séptima capa oculta en la sección 4.3.2.
$Y_{Neurosalida}^7$	Valores de entrada de la salida capa oculta en la sección 4.3.2.
X_{salida}	Valores de entrada de la capa oculta de salida en la sección 4.3.2.

$X_{entrada}$	Valores de entrada de la primera capa oculta en la sección 4.3.2.
X_{salida}^{capa-1}	Valores de entrada de alguna capa oculta en la sección 4.3.2.
$W_{x,nc}^{1,PTAR}$	Valores de los pesos de la primera capa.
$W_{nnc,nc}^{2,PTAR}$	Valores de los pesos de la segunda capa.
$W_{nnc,nc}^{3,PTAR}$	Valores de los pesos de la tercera capa.
$W_{nnc,nc}^{4,PTAR}$	Valores de los pesos de la cuarta capa.
$W_{nnc,nc}^{5,PTAR}$	Valores de los pesos de la quinta capa.
$W_{nnc,nc}^{6,PTAR}$	Valores de los pesos de la sexta capa.
$W_{nnc,nc}^{7,PTAR}$	Valores de los pesos de la séptima capa.
$W_{nnc,x}^{PTAR,sal}$	Valores de los pesos de la capa de salida.
$W_{Neurona,Outputs}^{capa}$	Valores de los pesos de alguna capa en sección 4.3.2.
$W_{Neurona,entrada}^1$	Valores de los pesos de la primera capa en sección 4.3.2.
$W_{Neurona,Neurosalida}^2$	Valores de los pesos de la segunda capa en sección 4.3.2.
$W_{Neurona,Neurosalida}^3$	Valores de los pesos de la tercera capa en sección 4.3.2.
$W_{Neurona,Neurosalida}^4$	Valores de los pesos de la cuarta capa en sección 4.3.2.
$W_{Neurona,Neurosalida}^5$	Valores de los pesos de la quinta capa en sección 4.3.2.
$W_{Neurona,Neurosalida}^6$	Valores de los pesos de la sexta capa en sección 4.3.2.
$W_{Neurona,Neurosalida}^7$	Valores de los pesos de la séptima capa en sección 4.3.2.
$W_{salida,Neurosalida}^{salida}$	Valores de los pesos de la capa de salida en sección 4.3.2.
$B_{nc}^{1,PTAR}$	Valores de los sesgos de la primera capa.
$B_{nc}^{2,PTAR}$	Valores de los sesgos de la segunda capa.
$B_{nc}^{3,PTAR}$	Valores de los sesgos de la tercera capa.
$B_{nc}^{4,PTAR}$	Valores de los sesgos de la cuarta capa.
$B_{nc}^{5,PTAR}$	Valores de los sesgos de la quinta capa.
$B_{nc}^{6,PTAR}$	Valores de los sesgos de la sexta capa.
$B_{nc}^{7,PTAR}$	Valores de los sesgos de la séptima capa.
$B_x^{PTAR,sal}$	Valores de los sesgos de la capa de salida.
$B_{Neurona}^{capa}$	Valores de los sesgos de alguna capa en la sección 4.3.2.
$B_{Neurona}^1$	Valores de los sesgos de la primera capa en la sección 4.3.2.
$B_{Neurona}^2$	Valores de los sesgos de la segunda capa en la sección 4.3.2.
$B_{Neurona}^3$	Valores de los sesgos de la tercera capa en la sección 4.3.2.
$B_{Neurona}^4$	Valores de los sesgos de la cuarta capa en la sección 4.3.2.
$B_{Neurona}^5$	Valores de los sesgos de la quinta capa en la sección 4.3.2.
$B_{Neurona}^6$	Valores de los sesgos de la sexta capa en la sección 4.3.2.
$B_{Neurona}^7$	Valores de los sesgos de la séptima capa en la sección 4.3.2.

B_{salida}^{salida}	Valores de los sesgos de la capa de salida en la sección 4.3.2.
y_n^{Scap}	Variable binaria de existencia de la capacidad de almacenamiento en tanques.
$y_{j,k,l}^{FARRESID}$	Variable binaria de la existencia de tuberías desde edificios residenciales hasta la planta de tratamiento de aguas residuales.
$y_{n,j,k}^{FTANQ}$	Variable binaria de la existencia de tuberías desde tanques de almacenamiento a edificios residenciales.
$y_{l,j,k}^{FPTAR,recir}$	Variable binaria de la existencia de tuberías desde la planta de tratamiento hasta los edificios de viviendas.
c^{ad}	Costo unitario del agua dulce ($\$/m^3$).
$Cost^{AD}$	Costo del agua dulce (\$).
c^{Bombad}	Costo unitario de bombeo de agua dulce ($\$/m^3$).
$Cost^{Bombad}$	Costo de bombeo de agua dulce (\$).
$c^{tanq,bomb}$	Costo unitario de bombeo ($\$/m^3$).
$Cost_{n,j,k}^{TANQ,Bomb}$	Costo de bombeo de tanques de almacenamiento a edificios residenciales (\$).
$c^{ptar,bomb}$	Costo unitario de bombeo ($\$/m^3$).
$Cost_{l,j,k}^{PTAR,Bomb}$	Costo de bombeo desde la planta de tratamiento hasta los edificios residenciales (\$).
$c^{ptar,op}$	Costo unitario de operación de la planta de tratamiento ($\$/m^3$).
$Cost_l^{PTAR,OP}$	Costo de operación de la planta de tratamiento (\$).
$Cost_n^{CapTANQ}$	Costo de capital de los tanques de almacenamiento (\$).
$Cost^{FTANQ}$	Costos fijos de los tanques de almacenamiento (\$).
$Cost^{VTANK}$	Costos variables de los tanques de almacenamiento ($\$/m^3$).
$Cost_l^{CapPTAR}$	Costo de capital para la planta de tratamiento (\$).
$Cost^{F^{CapPTAR}}$	Costos fijos de la planta de tratamiento (\$).
$Cost^{V^{CapPTAR}}$	Costos variables de la planta de tratamiento ($\$/m^3$).
$Cost_{j,k,l}^{CapEDIF}$	Costo de capital de tubería para salidas de edificios residenciales (\$).
$Cost^{F^{CapEDIF}}$	Costos fijos de tuberías para salidas de edificios residenciales (\$).
$Cost^{V^{CapEDIF}}$	Costos variables de tuberías para salidas de edificios residenciales ($\$/m^3$).
$Cost_{n,j,k}^{CapTANQ}$	Costo de capital de las tuberías para los flujos desde los tanques hasta los edificios residenciales (\$).
$Cost^{F^{CapTANQ}}$	Costos fijos de tuberías para flujos de tanques hacia edificios residenciales (\$).
$Cost^{V^{CapTANQ}}$	Costos variables de tuberías para flujos de tanques hacia edificios residenciales ($\$/m^3$).
$Cost_{n,j,k}^{CapRECIR}$	Costos de capital de las tuberías para los flujos de recirculación desde las plantas de tratamiento hasta los edificios residenciales (\$).
$Cost^{F^{CapRECIR}}$	Costos fijos de tuberías para los flujos de recirculación desde las plantas de tratamiento hasta los edificios residenciales (\$).
$Cost^{V^{CapRECIR}}$	Costos variables de tuberías para flujos de recirculación desde plantas de tratamiento a edificios residenciales ($\$/m^3$).
$Cost_{n,j,k}^{CapTANQbon}$	Costos de capital de bombas para flujos de tanques hacia edificios residenciales (\$).
$Cost^{F^{CapTANQbon}}$	Costos fijos de bombeo para flujos de tanques hacia edificios residenciales (\$).
$Cost^{V^{CapTANQbon}}$	Costos variables de bombeo para flujos de tanques hacia edificios residenciales ($\$/m^3$).

$Cost_{l,j,k}^{CapRECIRBoi}$	Costos de capital de las bombas para el flujo de recirculación desde las plantas de tratamiento a los edificios residenciales (\$).
$CostF^{CapRECIRB}$	Costos fijos de bombas para recirculación de caudal desde plantas de tratamiento a edificios residenciales (\$).
$CostV^{CapRECIRB}$	Costos variables de las bombas para el flujo de recirculación desde las plantas de tratamiento a los edificios residenciales (\$/m ³).
CAT	Costo Anual Total(\$).
α	Coefficiente de pendiente.
$\vartheta_{j,k,t}$	Eficiencias en usos domésticos.
γ	Factor de economías de escala.
$D_{j,k,t}^{EDIF}$	Demanda de los habitantes de usos domésticos. (m ³ /day).
p_x^{RESTR}	Límites de propiedad permisibles (mg/m ³).
K_T	Factor para anualizar los costos de capital.
H_y	Factor de tiempo de operación.

APRENDIZAJE POR REFUERZO

$F_{e,l,t}^{AR,ext}$	Flujos de aguas residuales de otras localidades (m ³ /día)
PE_t^{PTAR}	Persona Equivalente
$\mathcal{F}^{conv}$	factor de conversión
$\beta_{c,t}$	cantidad total de producto químico
δ_d	Factor de normalización del daño
ω_d	Factor de ponderación del daño
$\alpha_{c,\kappa}$	Daño causado por unidad de producto químico
$F^{NORM,TANQ}$	Flujos a la entrada de los tanques de almacenamiento normalizados
$F^{NORM,RECIR}$	Flujos de recirculación de agua tratada a los edificios residenciales normalizados
$F^{NORM,EDIF}$	Flujos en la entrada a los edificios residenciales
$F^{NORM,PTAR}$	Flujos en la entrada de la PTAR
CAT^{NORM}	Costo anual total normalizado
ADT^{NORM}	Agua dulce total normalizado
$EI99^{NORM}$	Ecoindicador 99 normalizado
$F_{i,t}^{NORM,AGUAD}$	Flujos de agua dulce normalizados
S^{opt}	Sentido de normalización
s_t	Estados del entorno
a_t	Acción del agente inteligente
R_t	Recompensa del agente inteligente
μ_θ	Media estadística
z	Factor de ruido estadístico
σ_θ	Desviación estándar estadística
$r_t(\theta)$	Razón de cambio entre las políticas

γ	Factor de descuento
$V(s_t)$	Valor del estado actual
δ_t	Error de diferencia temporal
$\hat{A}_t$	Estimación de la ventaja generalizada
λ	Parámetro de suavizado
ϵ	Hiperparámetro de recorte
V_t^{targ}	Valor objetivo
L_t^{VF}	Función de pérdida
$S(\pi_\theta)$	Entropía de la política
$L^{CLIP}(\theta)$	Función recortada
$L^{CLIP+VF+S}(\theta)$	Función recortada total
C_1	Coeficiente de ponderación
C_2	Coeficiente de entropía
T^{min}	Temperaturas mínimas (°C)
T^{max}	Temperaturas máximas (°C)
T^{norm}	Temperaturas normalizadas
T^{prom}	Temperatura promedio (°C)
$f_{k,t}^{ext}$	Flujos externos de aguas residuales (m ³ /día)
$f_{j,k,t}^{dem}$	Flujos de demandas (m ³ /día)

CAPÍTULO 1

En este capítulo, se muestra la finalidad de este trabajo abordando el marco conceptual y teórico de la investigación. Para esto, se analiza novedad y repercusiones del aprendizaje no supervisado, profundo y por refuerzo en la modelación matemática de redes de distribución. Comenzando con la revisión de la literatura y la implementación de los algoritmos de inteligencia artificial en este campo, se fundamenta con la justificación de la investigación. Y, finalmente, se definen el alcance del trabajo a través de la formulación de la hipótesis, el objetivo general y los objetivos particulares que dirigirán el desarrollo de la tesis.

1.1. INTRODUCCIÓN

La demanda mundial de agua está experimentando un aumento anual de aproximadamente el 1% debido al crecimiento demográfico, el desarrollo económico y los cambios en los hábitos de consumo. Se prevé que la demanda de agua industrial y doméstica aumente a un ritmo mayor que la demanda de agua agrícola, aunque esta última seguirá siendo el sector con mayor tasa de consumo (UN, 2018). Dos mil millones de personas en todo el mundo sufren escasez de agua debido al crecimiento poblacional y al cambio climático (WHO, 2023). A nivel mundial, algunas regiones experimentan escasez de agua y obtienen su agua potable de fuentes superficiales como lagos y embalses, que se tratan con métodos de purificación (Reitter et al., 2021).

En los últimos años, los lagos también se han degradado por los efectos combinados del cambio climático y la intervención humana (Zhang et al., 2024). Además, el aumento de la urbanización y el desarrollo industrial están afectando la calidad y cantidad del agua (Ma et al., 2024). Asimismo, el uso doméstico (UD) de agua dulce en áreas urbanas produce una gran cantidad de aguas residuales, que es una de las principales fuentes de contaminación hídrica (Opallage et al., 2019). Las ciudades con mayor densidad de población se caracterizan por una mala calidad del agua en sus aguas residuales, con altos niveles de fosfato, amoníaco, nitratos, DQO, SST, etc. (Dona et al., 2025). Sin embargo, la reutilización de aguas residuales para diferentes campos como la agricultura (Jeong et al., 2020), las áreas urbanas (Del Rosario et al., 2025) y el medio ambiente (OMS, 2017), han proporcionado una alternativa para mitigar la escasez de agua de forma sostenible y reducir la contaminación de las aguas superficiales por aguas residuales (Aldughhaishi et al., 2024; Del Rosario et al., 2025).

También, las reservas de agua subterránea constituyen aproximadamente el 99% del total del agua dulce líquida presente en la Tierra. Además, estas fuentes de agua subterránea desempeñan un papel crucial en el suministro de la mitad del volumen de agua utilizado para el consumo doméstico a nivel mundial (UNESCO, 2022). La dependencia de las aguas subterráneas para el suministro de agua potable abarca a más de 2,500 millones de personas en todo el mundo, lo que la convierte en uno de los principales desafíos que enfrenta la sociedad actual. Si bien las aguas subterráneas se consideran seguras, las altas concentraciones de metales pesados como el arsénico (As) plantean problemas y riesgos potenciales para la salud humana (Shaji et al., 2021).

La evidencia epidemiológica ha establecido una asociación entre la exposición crónica al arsénico inorgánico y un mayor riesgo de desarrollar intolerancia a la glucosa y diabetes mellitus. La exposición al arsénico inorgánico también provoca estrés oxidativo en órganos como el hígado

(Esfahani et al., 2023). La ingestión momentánea de arsénico inorgánico en grandes cantidades puede provocar una intoxicación aguda, mientras que la ingestión prolongada de este elemento puede tener diversas consecuencias adversas, como daños en la piel, hepatopatía crónica y desarrollo de cáncer, entre otros efectos perjudiciales (Qian et al., 2023; Jomova et al., 2011).

Los límites permisibles para las concentraciones de arsénico en el agua potable han cambiado con el tiempo debido a la nueva evidencia científica sobre los efectos de este metal pesado en la salud humana. En 1958, la Organización Mundial de la Salud (OMS) implementó estándares para concentraciones permisibles de arsénico en el agua potable de 200 µg/L; en 1963, la OMS recomendó reducir el valor permisible a 50 µg/L, y en 1993, la concentración permisible de arsénico se redujo aún más a 10 µg/L. Este último valor aún se aplica en la actualidad (Akhilesh et al., 2022). Con esto, las Naciones Unidas (ONU) planean implementar los Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS), abordando así cuestiones como la disponibilidad garantizada y la gestión sostenible del agua y el saneamiento para todos (ODS-6). Esto significa que las metas del ODS-6 son 3, entre otras, la reducción de la contaminación del agua por sustancias químicas y materiales peligrosos, como la concentración permisible de arsénico en el agua potable (UN, 2023). Para cumplir con el ODS-6, es necesario eliminar el arsénico del agua potable mediante diferentes tecnologías, como la filtración por membranas, el intercambio iónico, la adsorción, la coagulación/filtración o la ósmosis inversa. Si bien la eficiencia de eliminación de arsénico es muy eficaz para algunos métodos, esto contribuye a altos costos operativos o de mantenimiento. Y, la baja eficiencia de eliminación de algunos métodos, puede hacer que el límite de concentración permisible de arsénico sea inferior al estándar (Höll, 2010; Sharf & Saif, 2017; Jie et al., 2020).

En consecuencia, a la problemática del agua, se han abordado diversas maneras para la reutilización del agua como son los procesos de remoción, tratamientos de aguas residuales y operaciones de pretratamiento. Además, se han incorporado superestructuras alternativas factibles para la reutilización y el reciclaje del agua. La consideración de flujos multicomponentes en las redes de distribución de agua ha aumentado aún más la complejidad de su solución. Estas redes se han formulado como problemas de Programación No Lineal (NLP), Programación Lineal Entera Mixta (MILP) y Programación No Lineal Entera Mixta (MINLP) debido a su complejidad inherente (Galan & Grossmann, 1998; Karuppiah & Grossmann, 2006; Ahmetović & Grossmann, 2011). Las redes de distribución de agua en la mayoría de los modelos matemáticos no consideran los componentes que se encuentran en el agua, como minerales, metales, compuestos orgánicos, etc., dejando de lado las implicaciones de estos componentes en la salud humana, como es el caso del arsénico en el agua potable. Además, las enfermedades provocadas por las altas concentraciones de arsénico son motivo

de preocupación mundial debido a la baja disponibilidad de agua superficial y la dependencia de fuentes subterráneas, que tienen mayor probabilidad de contener arsénico.

También, algunos trabajos han propuesto formulaciones matemáticas para el diseño y la operación óptimos de redes de distribución de agua en sistemas de reciclaje, regeneración y almacenamiento de agua en complejos habitacionales, basándose en estrategias industriales que contemplan la segregación de diferentes corrientes según su calidad, implementando una estrategia para la reutilización de aguas residuales en zonas urbanas. Sin embargo, en el trabajo de [García-Montoya et al. \(2015\)](#) no considera las propiedades del agua. Es importante destacar la relevancia de los parámetros regulatorios para la reutilización de aguas residuales. En este contexto, los parámetros más utilizados para caracterizar la reutilización de aguas residuales en zonas urbanas, más específicamente para usos domésticos, son la DQO, el pH y los SST, entre otros ([Tampo et al., 2022](#)).

En el trabajo de [Karuppiah & Grossmann \(2006\)](#), las unidades de tratamiento se utilizan para la regeneración, el tratamiento, la reutilización y el reciclaje del agua, y contempla la minimización del costo del agua dulce utilizada y el tratamiento de aguas residuales. Aunque las unidades de tratamiento utilizan una relación de eliminación constante para calcular las propiedades de salida, esto implica que las propiedades de salida de la unidad de tratamiento no están sujetas a cambios en la estacionalidad, las condiciones de la unidad de tratamiento o factores externos. Esto se puede observar en el trabajo de [Nápoles-Rivera et al. \(2010\)](#) que incluye las propiedades de uso, como la composición, la toxicidad, la DQO, el pH, la densidad y la viscosidad, para el diseño óptimo de las redes de distribución de agua.

Para resolver el problema de los factores de eficiencia en las plantas de tratamiento, algunas investigaciones sugieren la relación de los datos de telecomunicaciones móviles para predecir propiedades de las aguas residuales, como la DBO, el nitrógeno total o el fósforo total. Sin embargo, las correlaciones entre las variables independientes y dependientes son inferiores a $R^2 = 0.50$ ([Samuelsson et al., 2025](#)). Autores como [Refaat & Hamoda \(2023\)](#) propusieron simular una planta de tratamiento mediante un software, en el que se utilizan propiedades de las aguas residuales, como la DQO, la DBO y los SST, como forma de caracterización. Además, las propiedades de la DQO y la DBO describen con mayor precisión el rendimiento de la planta de tratamiento. Asimismo, se observa que existe una alta correlación entre los valores predichos y los reales, con una correlación de $R^2 = 0.9$. Otros autores han presentado diversas aplicaciones de técnicas de Inteligencia Artificial para predecir las propiedades de las aguas residuales en plantas de tratamiento, como ([Huang et al., 2025](#); [Jawad et al., 2021](#); [S et al., 2025](#); [Bagheri et al., 2019](#); [Wang et al., 2025](#); [Shahhosseini et al., 2023](#); [Ding et al., 2025](#); [Hosseinzadeh et al., 2025](#); [Uddin et al., 2025](#); [Guo et al., 2015](#)).

Además, se ha demostrado que las redes neuronales artificiales (RNAs) son más precisas para el tratamiento de aguas residuales debido a la precisión para predecir relaciones no lineales entre datos (Ibrahim et al., 2024). Las RNAs también se han implementado en varios departamentos de plantas de tratamiento de aguas residuales (PTAR), como en la predicción de concentraciones de propiedades anómalas (Zhang et al., 2025), la disminución del consumo de energía y productos químicos utilizados en las PTAR (Yu et al., 2025) y, además, para predecir el diagnóstico y la reconstrucción de fallas de sensores en las PTAR (Ba-Alawi et al., 2023). Sin embargo, su aplicación solo modela la PTAR o partes de ella, sin extender su implementación a otras áreas como el modelado de redes de distribución de agua. Además, se ha observado que los modelos de aprendizaje profundo superan a los modelos estadísticos clásicos en campos como la predicción de la carga eléctrica de los edificios (Sultana, 2025) y el análisis de la gravedad de las lesiones por accidentes (Seyfi et al., 2025).

También, el campo de la inteligencia artificial ha ido evolucionando en el transcurso del tiempo, con nuevas ramas como el aprendizaje por refuerzo, esta rama consiste en redes neuronales profundas que imitan la inteligencia de un ser humano para resolver diversos problemas (Sutton & Barto, 1999). El aprendizaje por refuerzo se ha implementado en la gestión de agua, la ayuda ante desastres naturales y el consumo de energía en tiempo real, donde se utilizó métodos como el sistema autónomo multiagente impulsado por el aprendizaje descentralizado que mediante la detección y adquisición de datos puede tomar decisión en el uso de la energía mediante algoritmos metaheurísticos (Mancy et al., 2025). Además, otra rama de la inteligencia artificial es el aprendizaje por refuerzo de transferencia que se ha aplicado en edificios, para la optimización de redes de agua de refrigeración con el objetivo de aumentar la eficiencia energética y operativa, los resultados presentaron un ahorro energético del 10% con comparación a otros modelos, también, se ha observado la versatilidad del aprendizaje por refuerzo de transferencia en la adopción a otras redes de agua de refrigeración (Wang & Pang, 2025). Trabajos como (El Hachimi et al., 2025) presentan la aplicación de aprendizaje por refuerzo por medio de agentes inteligentes para la gestión de agua de riego en canales abiertos con la finalidad de mejorar la sostenibilidad hídrica y alimentaria en regiones con escasez de agua, se evaluaron técnicas como algoritmos genéticos y agentes inteligentes en la resolución del problema, los resultados arrojaron que el agente inteligente aprendió eficazmente la dinámica del entorno en comparación a los algoritmos genéticos que presentaron soluciones subóptimas en la dinámica del entorno. En otros trabajos se ha presentado un enfoque de aprendizaje por refuerzo en el nexo agua-energía-alimentos-tierra como lo presenta (Tan et al., 2025) que propusieron un enfoque de una programación multiobjetivo difusa con restricciones aleatorias, aprendizaje por refuerzo, algoritmo evolutivo multiobjetivo y un modelo de acoplamiento para encontrar los mejores esquemas de compensación bajo diferentes escenarios de riesgo para el nexo agua-energía-alimentos-tierra, los

resultados presentados, aumentaron el índice de oferta y demanda de agua, la productividad energética y los beneficios económicos de los alimentos con un 22,1 %, 8,7 % y 6,2 %, respectivamente, en una provincia china.

CONTRIBUCIÓN DE ESTE TRABAJO

En este estudio, se enfatiza la aplicación de estrategias de agrupamiento, específicamente el algoritmo KM, para determinar con precisión las ubicaciones óptimas para las plantas de tratamiento para la remoción de arsénico. Esta estrategia metodológicamente mejora la eficiencia en la ubicación de las plantas de tratamiento y contribuye significativamente a la sostenibilidad y seguridad de los sistemas de suministro de agua.

También, se propone un enfoque híbrido en el que la PTAR se modela mediante una RNAP que se utiliza en un marco de optimización para la síntesis de redes de agua en edificios residenciales. Se consideran las propiedades de DBO, DQO y SST en la red de distribución. La norma nacional vigente, también, se considera en las propiedades de las aguas residuales para uso doméstico. Además, la demanda de agua dulce y las propiedades de los puntos de salida de aguas residuales en edificios residenciales varían constantemente, lo que implica que las propiedades de los puntos de entrada a la PTAR están sujetas a factores externos. Mientras que, otros trabajos solo se basan en factores constantes para predecir las propiedades de salida de una PTAR, esto limita la reproducibilidad de un entorno real en los modelos matemáticos.

Finalmente, se presenta la aplicación de agentes inteligentes para la toma de decisión en el suministro de agua en edificios residenciales. Se consideran las propiedades de DBO, DQO y SST en la red de distribución. También, se considera el ciclo de vida de la PTAR para la toma de decisión del agente inteligente. El objetivo del agente inteligente es obtener la configuración de red de distribución óptima implicando variables objetivo como el costo anual total, consumo de agua total y el impacto ambiental, asimismo, dentro de la toma de decisión del agente inteligente se considera la integración de RNAP para el modelamiento de la PTAR. Esto permite minimizar el consumo de agua en una localidad determinada considerando el costo anual total y el impacto ambiente, en consecuencia, se permite proponer soluciones sostenibles para el consumo de agua e impacto ambiental. Y, que se pueden extender a otras localidades del mundo que tenga la misma problemática. Se ha observado en la literatura la implementación de agente inteligentes en otras áreas, sin embargo, no ha habido reportes de investigaciones que permitan que un agente inteligente pueda tomar decisión en el marco de redes de distribución de agua considerando aspectos económicos, consumo de agua y ambientales.

1.2. ANTECEDENTES

En los últimos cinco años, el auge de la inteligencia artificial ha permitido el desarrollo y mejoramiento de diferentes campos de la ciencia como es el caso de los autores [Gonzalez Perea et al. \(2021\)](#) que han presentado un trabajo para desarrollar gestores para la demanda de agua en un intervalo de una semana. Las herramientas utilizadas combina algoritmos de inteligencia artificial, detectores satelitales y datos climáticos de la región. Estas herramientas se aplicaron en el entorno de Python y se dio solución a un grupo de personas en una localidad determinada. En los resultados se presentaron modelos con una precisión mayor al 80%.

Asimismo, [Miro et al. \(2021\)](#) han estudiado la planificación de agua en un distrito municipal considerando el aprendizaje automático para la representación de dos fuentes subterráneas de agua. Los autores implementaron métodos de aprendizaje automático como bosques aleatorios, máquinas de vectores de soporte y redes neuronales artificiales para representar la simulación de los resultados del modelo. Se encontró que los bosques aleatorios presentan lo mejores resultados de precisión. Se concluyo que la integración de herramientas como el aprendizaje automático acorta los tiempos de ejecución del modelo y se explora mayor espacio de incertidumbre que incluyen una amplia variación en los cambios del clima.

Además, los algoritmos de inteligencia artificial se han utilizado en diferentes campos como el modelamiento ambiental y oceánico. La investigación de [Kumar et al. \(2022\)](#) propone la medición de la calidad de agua marina por medio de la predicción de la propiedad de la turbidez implementando el enfoque de aprendizaje automático. Las herramientas utilizadas son redes neuronales artificiales, regresión de vectores de soporte y redes neuronales recurrentes de memoria a largo plazo. Los resultados presentados indican que las redes neuronales recurrentes de memoria a largo plazo obtuvieron una precisión del 88.45%, siendo superior a los otros modelos de aprendizaje automático. Concluyéndose que a través de la propiedad de la turbidez y utilizando el aprendizaje automático se puede predecir los parámetros de la calidad del agua mariana.

Otros autores como [Hao et al. \(2022\)](#) han implementado diferentes técnicas de aprendizaje automático y modelos estadísticos en la predicción de la demanda de agua urbana para periodos de uno y siete días, siendo este parámetro primordial para la optimización y panificación del suministro de agua en redes de distribución. Los modelos que se han presentado en este estudio son modelos de media móvil integrada autorregresiva, redes neuronales artificiales, regresión de vectores de soporte, máquinas de refuerzo de gradiente de luz y redes de memoria a largo plazo. Los resultados mostraron un coeficiente de determinación mayor al 0.9 para el modelo de redes de memoria a largo plazo y

concluyeron el potencial de combinar modelos de aprendizaje en campos de la hidrología y los recursos hídricos.

Un problema de las redes de distribución de agua son las fallas en las tuberías en el transcurso del tiempo, por lo tanto, algunos autores como [Fan et al. \(2023\)](#) proponen la aplicación de aprendizaje profundo para la predicción de la tasa de fallas en tuberías mediante la cuantificación de la incertidumbre del sistema de redes de distribución de agua. Se integra un modelo de red neuronal de memoria a largo plazo con el método de Monte Carlo y datos históricos. Los resultados presentan que el modelo de aprendizaje profundo muestra un rango de incertidumbre mayor que los modelos estadísticos, en un 50%. Se concluye que la cuantificación de la incertidumbre se puede adaptarse a otros modelos de aprendizaje automático.

También, los modelos de aprendizaje automático se han aplicado en la predicción de propiedades de la calidad del agua como el oxígeno disuelto en redes de distribución de agua como lo presentan los autores [Bagheri et al. \(2024\)](#) que desarrollaron la integración de redes neuronales convolucionales y memoria de corto plazo que reciben los datos de sensores en tiempo real para la predicción de la propiedad de oxígeno disuelto en una red de distribución de agua. Los resultados mostraron que la integración de las redes neuronales tuvo un coeficiente de determinación de 0.94 y un error cuadrático medio de 0.12, considerando las variables de temperatura, pH, conductividad específica, salinidad, densidad, clorofila y algas verdeazuladas. Se demostró que el pH es el indicador más significativo para la propiedad de oxígeno disuelto. Se concluyó que este modelo integrado por dos redes neuronales puede superar a modelos clásicos de aprendizaje automático.

Asimismo, otros trabajos han presentado modelos de redes neuronales recurrentes convolucional de difusión para las predicciones de las propiedades de la calidad de agua en redes de distribución de agua. Como el trabajo de [Wang et al. \(2025\)](#), donde se evaluaron seis indicadores estadísticos para el modelo de predicción para las propiedades del agua en diferentes cuencas hidrográficas, se obtuvo un coeficiente de determinación entre 0.7 y 0.9 y un error porcentual absoluto medio de entre 5 y 10%. Y, se concluyó que este modelo de redes neuronales recurrentes convolucional de difusión presenta una mejor robustez en la predicción de datos de la calidad de agua.

Además, se han presentado trabajos que combinan modelos de aprendizaje automático con técnicas de programación matemática como los autores [Pedram Jazayeri et al. \(2026\)](#) que proponen dos fases en su trabajo, la primera es la predicción de la demanda de agua de una localidad determinada por medio de modelo de aprendizaje automático como son el modelo de perceptrón multicapa, regresión de vectores de soporte, bosques aleatorios, unidad recurrente cerrada y memoria a largo plazo. La

segunda etapa de su propuesta consta de la optimización del funcionamiento de bombas considerando la demanda de agua predicha, costos energéticos, nivel de agua y mantenimiento de bombas en un modelo de programación no lineal entero mixto. Los resultados presentados mostraron una reducción en la energía de bombeo del 9.7% y 15.8%, los cambios de bombas en un 64.9% y 75.7% para dos bombas estudiadas. También, se demostró que el modelo de aprendizaje automático con menor error cuadrático medio, fue el modelo de redes neuronales de memoria a largo plazo. Concluyendo, que la combinación de dos fases de su propuesta ofrece soluciones eficientes y prácticas para aumentar el rendimiento de redes de distribución de agua.

Las tendencias hacia la implementación de algoritmos de inteligencia artificial han ido aumentando conforme aumenta la precisión de sus predicciones. La calidad del agua es un campo esencial para toda la humanidad, muchos trabajos han implementado algoritmos de inteligencia artificial para predecir propiedades del agua, realizando correlaciones con diferentes variables medibles. Sin embargo, estas predicciones solo se han limitado a dar proyecciones futuras del sistema. Otros trabajos presentan una relación intermitente entre los algoritmos de inteligencia artificial y modelo matemáticos, implementando varias fases en la investigación, como el entrenamiento y predicción del algoritmo de inteligencia artificial y posteriormente la implementación de las predicciones de la inteligencia artificial en el modelo matemático. Esto es una limitante importante porque el algoritmo de inteligencia artificial esta fuera de la optimización matemática. Sin embargo, en este trabajo se proponen algoritmos de inteligencia artificial que predicen las propiedades del agua, asimismo, están integrados al modelo matemático, eliminando las fases transitorias de las diferentes investigaciones. Además, a lo mencionado anteriormente, se implementa un agente inteligente que pueda controlar variables económicas, hídricas y ambientales dentro del modelo matemático, siento esto, una gran novedad en el área de redes de distribución de agua.

1.3. JUSTIFICACIÓN

En el presente trabajo se aborda la implementación de aprendizaje no supervisado, profundo y por refuerzo en modelos matemáticos de redes de distribución de agua. Sin embargo, en las investigaciones de redes de distribución, los algoritmos de inteligencia artificial se han limitado a realizar regresiones para la predicción de datos futuros que posteriormente son incorporados al modelo matemático, dejando de lado la integración de los algoritmos de inteligencia artificial en los modelos matemáticos u optimización matemática. Así mismo, la complejidad de los datos para entrenar los algoritmos de inteligencia, tienden a representar un comportamiento casi lineal

provocando que estos algoritmos sean simples en cuanto a su estructura. Por tal motivo, en este trabajo, se propone la implementación de algoritmos de aprendizaje no supervisado, profundo y por refuerzo como KM, RNAP y AC, respectivamente. Dando soluciones a las limitaciones que se encuentran en la literatura como la implementación de fases entre los algoritmos de inteligencia artificial y modelamiento matemático, omitiendo la integración de ambas áreas y dejando parcialmente separadas en su funcionamiento. También, en este trabajo se aborda la integración unificada de los algoritmos de inteligencia artificial, modelamiento matemático y redes de distribución de agua, este mismo sistema se puede implementar en diferentes áreas, diferentes a las redes de distribución de agua, contribuyendo al impacto de este trabajo de tesis en diferentes campos de la ingeniería y científicos. Además, el algoritmo de k-means permite obtener la ubicación óptima de una planta de tratamiento de remoción de arsénico para el suministro de agua de pozos profundos en una red de distribución de agua, esto implica que el algoritmo deberá asegurar la distancia mínima entre los pozos profundos y la planta de tratamiento, minimizando los costos de bombeo y tubería dentro del modelo matemático. También, el algoritmo de redes neuronales representa el comportamiento de una PTAR considerando las propiedades de aguas residuales como son la DBO, DQO y SST, asimismo, este algoritmo (RNAP) se integra dentro del modelo matemáticos de redes de distribución de agua y estando sujetos a la optimización matemática, es decir, la optimización podrá modificar los valores de las capas ocultas y salida conforme vaya encontrando la minimización o maximización del modelo matemático. Además, el algoritmo de AC es implementado en estrategias de optimización matemática sobre un modelo de redes de distribución donde se emplea un algoritmo de RNAP para representar el comportamiento de una PTAR. El algoritmo de Actor-Crítico podrá tomar decisión con base en las variables de estado del entorno (modelo matemático) como son las variables de costo anual total, consumo de agua total y evaluación del impacto ambiental. Por lo tanto, se realiza una integración entre los algoritmos de aprendizaje no supervisado, profundo y por refuerzo, el modelo matemático y la optimización matemática. Dando en este trabajo una proyección robusta de la implementación de algoritmos de inteligencia artificial en problemas de programación matemática y redes de distribución de agua.

1.4. HIPÓTESIS

Por medio de la implementación de aprendizaje no supervisado, profundo y por refuerzo en modelos matemáticos de redes de distribución de agua, se podrá integrar algoritmos de inteligencia artificial en la optimización matemática de sistemas hídricos mejorando la robustez en predicción de propiedades y la toma de decisión en variables económicas, hídricas y ambientales.

1.5. OBJETIVO GENERAL

Desarrollar una metodología integral implementando algoritmos de aprendizaje no supervisado, profundo y por refuerzo que permitan mejorar la robustez en predicción de propiedades y la toma de decisión en variables económicas, hídricas y ambientales en redes de distribución de agua.

1.6. OBJETIVOS PARTICULARES

1. Determinar la ubicación óptima de una planta de tratamiento de remoción de arsénico para el suministro de agua de pozos profundos en una red de distribución de agua por medio de la aplicación de aprendizaje no supervisado como el algoritmo de k-means.
2. Predecir las propiedades de DBO, DQO y SST de aguas residuales por medio de un algoritmo de redes neuronales artificiales profundas que represente el comportamiento de una PTAR.
3. Integrar un algoritmo de una RNAP en un modelo matemático de una red distribución de agua, que permita utilizar la optimización matemática para su solución conjunta.
4. Desarrollar e implementar un Actor-Crítico por medio de la utilización de algoritmos de aprendizaje por refuerzo en estrategias de optimización matemática en un modelo matemático multiobjetivo de redes de distribución de agua, que pueda tomar decisión de variables como el costo anual total, consumo de agua total e impacto ambiental a través del tiempo.

CAPÍTULO 2

En este capítulo se tiene el propósito de concretar los conceptos teóricos necesarios para la comprensión integral del trabajo de investigación. En este sentido, se estructuran los fundamentos básicos del aprendizaje automático, desglosando sus tres principales ramas que son el Aprendizaje Supervisado, Aprendizaje no Supervisado y Aprendizaje por Refuerzo como algoritmos fundamentales de esta investigación. También, se abordan los diferentes problemas de la programación matemática definidos por las variables y restricciones de cada problema específico. Finalmente, se presenta los conceptos fundamentales de la metodología del Ecoindicador 99 que proporcionan los parámetros indispensables para el impacto ambiental dentro de este trabajo de tesis.

2.1. MARCO TEÓRICO

En esta sección se da las bases fundamentales sobre los temas tratados en este trabajo como son el Aprendizaje Automático, Optimización y Ecoindicador 99. Además, se dan las herramientas conceptuales para su aplicación en este trabajo.

2.1.1. APRENDIZAJE AUTOMÁTICO

La inteligencia artificial tiene un diverso campo de estudio, el aprendizaje automático es una rama de la inteligencia artificial, este permite guiar programas informáticos a través de un conjunto de datos, utilizando algoritmos y estadísticas. Los programas informáticos elaboran modelos que ayudan a predecir y desarrollar heurísticas que permiten continuar con el proceso estudiado. La utilización de un gran conjunto de datos pasados de algunas técnicas del aprendizaje automático, permite crear patrones de un sistema determinado para poder aproximar datos futuros con base a la experiencia (Singh et al., 2023). El aprendizaje automático se clasifica principalmente en tres ramas importantes como son el aprendizaje supervisado, el aprendizaje no supervisado y el aprendizaje por refuerzo (Chauhan & Singh, 2018).

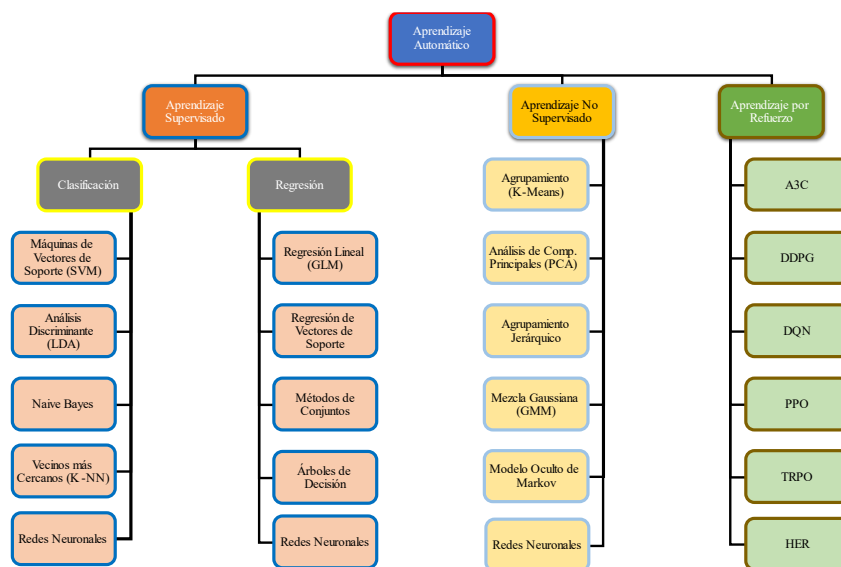


Fig. 2.1.1.1. Clasificación del aprendizaje automático.

2.1.1.1. APRENDIZAJE SUPERVISADO

En el aprendizaje supervisado se requiere un monitoreo para la predicción de los datos entrenados. Para este aprendizaje, es necesario tener un conjunto de datos que abarquen las entradas y salidas de nuestro sistema o proceso. El conjunto de datos por lo regular se divide en tres subconjuntos llamados conjunto de entrenamiento, validación y prueba. El conjunto de entrenamiento se utiliza para el aprendizaje del modelo propuesto, este conjunto es el que contiene la mayor cantidad de datos (entre un 70 a 80% de los datos). El conjunto de validación se implementa en el entrenamiento del modelo de aprendizaje supervisado como una prueba después de completar una serie de entrenamientos, este conjunto cuenta con un porcentaje de los datos de entre el 10 al 15%. El conjunto de prueba se usa para comprobar la eficacia del modelo entrenado, aplicando el 10 o 5% de los datos que no ha observado. El aprendizaje supervisado se divide en dos grandes grupos que son los métodos de clasificación y de regresión. En los métodos de clasificación podemos encontrar las máquinas de vectores de soporte, análisis discriminante, Naive Bayes, vecinos más cercanos, redes neuronales, etc. Mientras que, en los métodos de regresión se encuentran la regresión lineal, regresión de vectores de soporte, métodos de conjuntos, árboles de decisión, redes neuronales, etc. (Singh et al., 2023; Chauhan & Singh, 2018; Pandey et al., 2019).

Máquinas de vectores de soporte: Este método opera con el cálculo de margen. Para separar las características con datos de alta dimensionalidad se utiliza un enfoque de hiperplanos o un conjunto de esto, con ellos, se puede discriminar los objetos de diferentes clases. Este último enfoque, permite desarrollar soluciones para problemas multiclase mediante el uso de un conjunto de hiperplanos, a continuación, se presenta un algoritmo de solución de subgradiente estimado primario para máquina de vectores de soporte (Lee et al., 2004; Shalev-Shwartz et al., 2007).

Análisis discriminante: Este método permite agrupar a los objetos conforme a la semejanza de sus características en las diferentes clases abordadas permitiendo la disminución de la dimensionalidad de los datos utilizados. Debido a que, al aumentar el número de datos conforme a su dimensionalidad, provoca un aumento en el volumen espacial contrayendo inconvenientes en los cálculos estadísticos. Algunos de los discriminantes más populares son el Escalamiento Multidimensional, Análisis Discriminante Lineal, Análisis Discriminante Mixto, Análisis Discriminante Cuadrático y Análisis Discriminante Flexible (Islam et al., 2007).

Naive Bayes: El enfoque de este método son las clasificaciones por medio de redes bayesianas utilizando el método de probabilidad condicional permitiendo establecer si un dato pertenece a una clase específica. El enfoque bayesiano implementa grafos acíclicos que presentan un nodo no

observado y varios nodos observados. Este método impide la necesidad de definir parámetros como en otros métodos de aprendizaje supervisado ([Lowd & Domingos, 2005](#)).

Vecinos más cercanos: Este método implica que el dato con las características más semejantes a los datos más cercanos presentes en los conjuntos de entrenamiento, permitirá que la predicción pueda designar el conjunto más idóneo del dato. Por consiguiente, entre mayor sea el número de conjuntos de entrenamiento, mayor será la precisión de la predicción ([Keller et al., 1985](#)).

Métodos de regresión: En estos métodos, los datos de entrenamiento se ajustan a una curva o espacio de solución dependiendo de la dimensionalidad de los datos de entrenamiento, permitiendo la toma de decisión en los problemas abordados. Los métodos de regresión consideran una medida de error entre los datos predichos y reales para modelar la relación de las variables de entrenamiento. Algunos algoritmos de regresión son los siguientes: Regresión de Mínimos Cuadrados Ordinarios, Regresión Lineal, Regresión Logística, Regresión de Vectores de Soporte, Splines de Regresión Adaptativa Multivariante y Suavizado de Diagrama de Dispersión Estimado Localmente ([Pandey et al., 2019](#)).

Métodos de conjuntos: Los métodos de conjuntos utilizan la minimización de la varianza y el sesgo y el problema de invariancia y sobreajuste para los algoritmos de Boosting y Bagging, respectivamente, siendo estos dos algoritmos, los más destacados en los métodos de conjuntos. Otros métodos son: Bosque aleatorio, Agregación Bootstrap, Árboles de regresión potenciados por gradiente, Generalización apilada, AdaBoost y Máquinas de potenciación de gradiente ([Chauhan & Singh, 2018](#); [Pandey et al., 2019](#)).

Árboles de decisión: Este método se basa en la aplicación de nodos para expresar características, restricciones o limitantes determinadas para un objeto, mientras que, el total de los nodos expresan las etiquetas de todas las dimensiones. Las predicciones de los árboles de decisión consideran un modelo que permite crear un mapa de nodos para aprendizaje, mostrando las observaciones y conclusiones del modelo en el entrenamiento del valor objetivo del objeto. Los árboles de decisión pueden ser de clasificación o regresión dependiendo del tipo de las variables objetivo, si la variable objetivo es fija, será de clasificación, mientras que, si la variable objetivo es continua, será de regresión ([Rokach & Maimon, 2005](#); [Pandey et al., 2019](#)).

Redes neuronales: Las redes neuronales se basan en la biología humana, partiendo de la unidad neuronal básica que es la neurona. Como se observa en el cerebro humano, el procesamiento de información se realiza por medio de las interconexiones de las neuronas, mientras que, en las neuronas artificiales funcionan como nodos interconectados en tres capas principales que son la capa de entrada, capas profundas y capas de salida. Las neuronas artificiales cuentan en su estructura interior

con pesos, sesgos y una función de activación. En el entrenamiento de las redes neuronales se calcula el error del valor predicho con el valor real, este error tiene la función de dar una referencia para la actualización de los pesos y sesgos de cada neurona que conforma la red neuronal. Las redes neuronales más utilizadas son la redes neuronales profundas, redes neuronales convolucionales y redes neuronales recurrentes. Cabe señalar que, las redes neuronales inician el campo del aprendizaje profundo, es una rama del aprendizaje automático que se enfoca en los múltiples niveles de abstracción del conjunto de datos utilizando modelos no lineales implicando poder encontrar soluciones complejas y no lineales (Chauhan & Singh, 2018; Pandey et al., 2019; Sharma et al., 2012).

2.1.1.2. APRENDIZAJE NO SUPERVISADO

El aprendizaje no supervisado no requiere un monitoreo para la predicción de los datos de entrañamiento. Para este aprendizaje, no es necesario tener etiquetas de entrada y salida para abarcar al conjunto de datos de nuestro sistema o proceso. El entrenamiento de los modelos de aprendizaje no supervisado consiste en la toma de decisión para el dato de prueba disponible en las características de sin etiqueta del conjunto de datos. Los usos más frecuentes del aprendizaje no supervisado son el agrupamiento y la reducción de dimensionalidad. También, los métodos con mayor relevancia son la agrupación en conjuntos, el análisis de componente principal, modelo jerárquico, el modelo oculto de Markov y las redes neuronales (Chauhan & Singh, 2018; Pandey et al., 2019).

Agrupación en conjuntos: El método de agrupamiento consiste en un enfoque basado en centroides con k grupos, asimismo, el valor medio del grupo es el centro del agrupamiento. La agrupación de los objetos consiste en la unión de diferentes objetos con características semejantes dentro de un grupo y distancia definidas. Los objetos disponibles se distribuyen en varios grupos conforme a la necesidad que se requiera (Alsabti et al., 1997).

Análisis de componente principal: Este método permite la reducción de dimensionalidad del conjunto de datos. Tiene una capacidad limitante de transformación de un espacio de alta dimensionalidad a otro. Su enfoque se basa en maximizar las características más importantes e ignorando las menos relevantes, conservando los objetos con características distintas y descartando los objetos con características similares. Esto puede contraer en ciertos casos, pérdida de información profunda de los datos (Pandey et al., 2019).

Redes neuronales: En el campo del aprendizaje no supervisado, las redes neuronales no utilizan un objetivo como los datos reales como se observa en el aprendizaje supervisado, sino que la red

neuronal clasifica los datos de la entrada conforme a los parámetros que presenta el conjunto de datos y posteriormente los agrupa en conjuntos con semejantes características (Pandey et al., 2019).

2.1.1.3. APRENDIZAJE POR REFUERZO

El aprendizaje por refuerzo se caracteriza por utilizar el método de prueba y error, tomando acciones para obtener un resultado más cercano al objetivo planteado. Este aprendizaje es la mezcla de aprendizaje no supervisado y supervisado, en el entrenamiento, un agente toma acción conforme en una política determinada en el entorno de aprendizaje y se retroalimenta con el estado dado por el entorno y con la recompensa basada en las acciones tomadas (Sutton & Barto, 1999). Algunos algoritmos de aprendizaje por refuerzo son Métodos asincrónicos, Gradiente de política determinista profunda, Red Q profunda, Optimización de políticas proximales, Optimización de la política de regiones de confianza y Repetición de la experiencia en retrospectiva. A continuación, se presenta una descripción de los algoritmos de aprendizaje por refuerzo.

Métodos asincrónicos: Son algoritmos basados en el descenso de gradiente asíncrono para solucionar la optimización de las redes neuronales profundas. Se ha demostrado una estabilización en el entrenamiento cuando se utilizan actores-aprendices en paralelo. Una de las mejores variantes de los algoritmos asincrónicos es la asíncrona de actor-crítico (Mnih et al., 2016).

Gradiente de política determinista profunda: Este algoritmo está basado en el aprendizaje Q profundo en un dominio de acción continuo. Es un algoritmo de aprendizaje por refuerzo de actor-crítico que implica para la solución el gradiente de políticas determinista. Este algoritmo se destaca por realizar múltiples tareas simultáneas de una manera robusta. Su rendimiento en la búsqueda de políticas de solución, compite con algoritmos de planificación en dominios dinámicos (Lillicrap et al., 2019).

Red Q profunda: Este algoritmo fue uno de los primeros presentados en el aprendizaje por refuerzo. EL algoritmo Q es una red neuronal profunda que fue entrenada para encontrar políticas de control a través de información sensorial compleja por medio de técnicas de aprendizaje por refuerzo. La red neuronal profunda se basa en una red neuronal convolucional, las entradas de esta red fueron píxeles sin modificaciones y su salida una función de recompensa futura. Fue probada en diferentes juegos y experto humanos en área determinadas, se demostró la superación de los dos enfoques (Mnih et al., 2013).

Optimización de políticas proximales: Es un algoritmo que implementa métodos de gradiente de políticas, que presenta alternancias entre la muestra que recibe del entorno y una función objetivo de ascenso de gradiente estocástico. También, estos algoritmos presentan algunas de las ventajas presentadas en los algoritmos de Optimización de la política de regiones de confianza, además, su implementación es fácil, general y de mejor complejidad de muestreo en comparación de su contraparte. La optimización de políticas proximales permite un equilibrio entre la muestra de datos, simplicidad de implementación y tiempo de respuesta. A continuación, en la **Fig. 2.1.1.3.1**, se presenta el algoritmo de la optimización de políticas proximales (Schulman et al., 2017).

```

para iteración=1, 2, ... hacer
  para actor=1, 2, ...,  $N$  hacer
    Ejecutar política  $\pi_{\theta_{old}}$  en el entorno por  $T$  pasos de tiempo
    Calcular estimaciones de ventaja  $\hat{A}_1, \dots, \hat{A}_T$ 
  fin para
  Optimizar sustituto  $L$  con respecto a  $\theta$ , con  $K$  épocas y
  tamaño de minibatch  $M \leq NT$ 
   $\theta_{old} \leftarrow \theta$ 
fin para

```

Fig. 2.1.1.3.1. Algoritmos de Optimización de Políticas Proximales.

Optimización de la política de regiones de confianza: Es un algoritmo que implementa técnicas similares a los métodos de gradiente de políticas, permitiendo optimizar políticas no lineales de tamaño grande como las que se presentan en las redes neuronales. Han presentado un excelente rendimiento en diferentes pruebas con un ajuste menor en los hiperparámetro (Schulman et al., 2017).

Repetición de la experiencia en retrospectiva: Es un algoritmo que implementa una recompensa dispersa y binaria, evitando la complejidad de la formulación de la Ecuación de la recompensa. Este algoritmo puede funcionar conjuntamente con algoritmos arbitrarios que no necesitan política y se valoran como un currículo implícito. Este algoritmo destaca su implementación en entornos complejos en el área de la robótica (Andrychowicz et al., 2018).

2.1.2. OPTIMIZACIÓN

La optimización es parte fundamental para la ciencia de la toma de decisión, así como el estudio de sistemas, entornos o procesos. Su implementación requiere de un objetivo preliminar para la cuantificación métrica univariante que estime el rendimiento del sistema, entorno o proceso considerando diferentes escalares, parámetros o variables. La función objetivo se mantiene condicionada a un conjunto de variables de decisión. La finalidad del estudio del sistema, entorno o

proceso es determinar la estructura de las variables de decisión que lleve al límite a la función objetivo, operando normalmente dentro de un espacio de solución limitado por las restricciones físicas o lógicas (Nocedal & Wright, 2006).

El modelado matemático para un problema consiste en determinar los objetivos, variables y restricciones del sistema, entorno o proceso. Este es el comienzo para una correcta implementación del proceso de optimización. El modelo debe ser adecuado en su estructura, ni muy simple para evitar la mala interpretación del problema matemático y ni muy complejo para evitar la complejidad de solución. Estructurado correctamente el modelo matemático se debe implementar un algoritmo de optimización que permita dar solución. Se debe seleccionar correctamente el algoritmo de optimización para garantizar una solución veloz al problema planteado. Concluida la optimización del modelo se verifica la solución con las condiciones de optimalidad para asegurar la estimación de la solución proporción información útil del sistema, entorno o proceso (Nocedal & Wright, 2006).

Los problemas de optimización se puede clasificar conforme el tipo de variables de decisión, funciones objetivo y restricciones. Una clasificación aceptada por la mayoría es la siguiente: Programación lineal, Programación no lineal, Programación lineal entera mixta, Programación no lineal entera mixta, Programación discreta, Control óptimo y Programación estocástica. A continuación se describe la estructura de cada tipo de programación (Diwekar, 2020).

Programación lineal: Esta programación cuenta con variables de decisión consideradas como escalares o continuas, mientras que, la función objetivo y restricciones se presentan como lineales (Dantzig, 2016).

$$\begin{aligned} \min_x \quad & c^T x \\ \text{s. a.} \quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Programación no lineal: Para considerar un problema no lineal se debe tomar en cuenta que la función objetivo y/o las restricciones son no lineales, por otro lado, las variables de decisión deben ser escalares o continuas (Nocedal & Wright, 2006).

$$\begin{aligned} \min_x \quad & f(x) \\ \text{s. a.} \quad & g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & h_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Donde f , g y h son funciones diferenciables y $x \in \mathbb{R}^n$

Programación lineal entera mixta: Está constituida por variables de decisión escalares, enteras y/o continuas, para el caso de la función objetivo y restricciones del problema son lineales ([Nemhauser & Wolsey, 1988](#))

$$\min_{x,y} c^T x + d^T y$$

$$s. a. \quad Ax + By \leq b$$

$$x \in \mathbb{R}_+^n$$

$$y \in \mathbb{Z}_+^p$$

Programación no lineal entera mixta: La función objetivo y restricciones en estos problemas son no lineales, las variables de decisión son escalares, enteras y/o continuas. A continuación, presenta la estructura de un problema ([Floudas, 1995](#)).

$$\min_{x,y} f(x, y)$$

$$s. a. \quad f(x, y) \leq 0$$

$$x \in X \subseteq \mathbb{R}^n$$

$$y \in Y \subseteq \mathbb{Z}^p$$

Control óptimo: En esta optimización la función objetivo es dependiente de la trayectoria de las variables, las restricciones pueden ser Ecuaciones dinámicas, de estado y/o control, mientras que las variables de decisión son de control y/o estado ([Kirk, 2004](#)).

$$\min_{u(t)} \quad J = \Phi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), u(t), t)$$

$$s. a. \quad \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$$

$$x(t_0) = x_0$$

Donde $x(t)$ es el estado y $u(t)$ es el control.

Programación estocástica: La programación con incertidumbre presenta una función objetivo dependiente de variables inciertas, las restricciones son incierta o depende de una probabilidad,

mientras que las variables de decisión son afectadas por la incertidumbre. A continuación, se presenta la estructura de estos problemas (Birge & Louveaux, 1997).

$$\min_x c^T x + \mathbb{E}_\xi[Q(x, \xi)]$$

$$s. a. \quad Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

2.1.3. ECOINDICADOR 99

Todos los productos o procesos tienen un ciclo de vida, estos tienen un impacto en el ambiente en su tiempo de uso, para cuantificar el impacto que tiene en el ambiente es necesario la implementación de herramientas como el Ecoindicador 99. Este indicador se expresa en puntos de platino (PT) o milipuntos de platino (mPt). Además, el indicador analiza problemas ambientales que se producen en Europa. La metodología del Ecoindicador 99 describe tres principales categorías de daño que, son Salud Humana, Calidad de los Ecosistemas y Recursos. Para comprender el desarrollo de la metodología es necesario conocer la implicación de cada una de las categorías. A continuación, se da una descripción de estas tres categorías (Goedkoop & Spriensma, 2001).

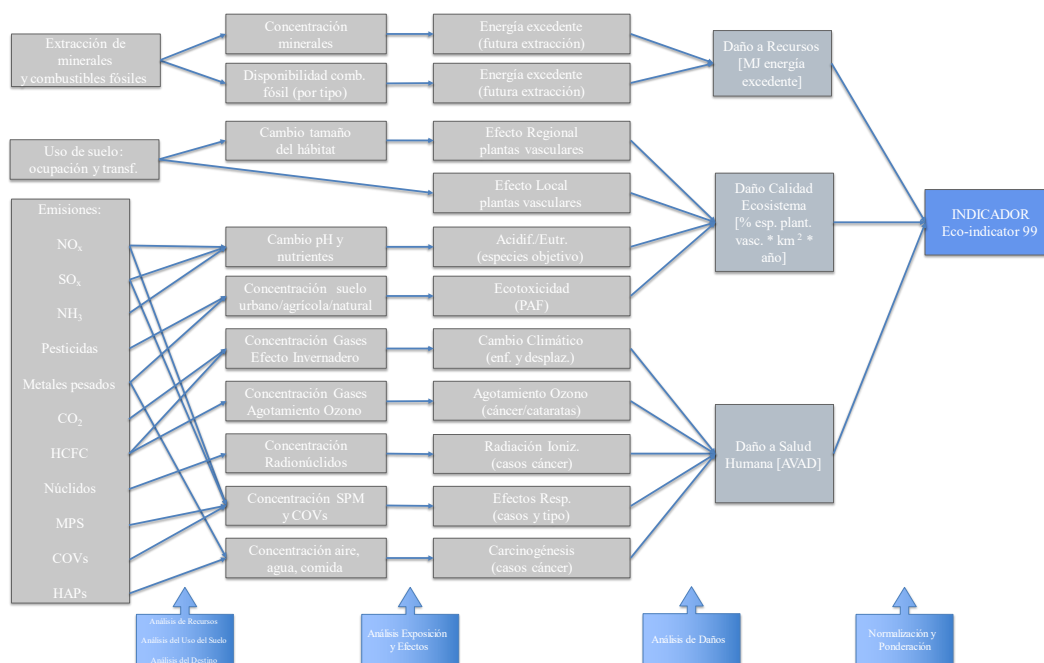


Fig. 2.1.3.1. Representación de la metodología Ecoindicador 99.

Salud Humana: Esta categoría comprende la primicia de establecer la necesidad de que cada ser humano, presente y futuro, debe estar exento de toda enfermedad, discapacidad o muerte prematura provocada por el ambiente. Esta categoría abarca a las siguientes subcategorías, efectos cancerígenos en humanos, efectos respiratorios en humanos causados por sustancias orgánicas, efectos respiratorios en humanos causados por sustancias inorgánicas, daños a la salud humana causados por el cambio climático, efectos en la salud humana causados por la radiación ionizante y efectos en la salud humana causados por el agotamiento de la capa de ozono.

Calidad de los Ecosistemas: La segunda categoría establece que toda especie, no humana, debe estar libre de cualquier cambio drástico en su población y extensión geográfica. Las subcategorías para la calidad de los ecosistemas son daños a la calidad del ecosistema causados por emisiones ecotóxicas, daños a la calidad del ecosistema causados por el efecto combinado de la acidificación y la eutrofización, y daños a la calidad del ecosistema causados por la ocupación y conversión de tierras

Recursos: La última categoría presenta la necesidad de la disponibilidad de los bienes no vivos de la naturaleza, esenciales para la sociedad, estén disponibles para generaciones futuras. Los daños a los recursos causados por la extracción de minerales y daños a los recursos causados por la extracción de combustibles fósiles son las subcategorías de los Recursos.

El Ecoindicador 99 considera la incertidumbre a través de la Teoría Cultural con tres arquetipos de modelo que son el igualitario, se considera un enfoque a largo plazo, se presenta una preocupación máxima por el impacto ambiental. Individualista, se presenta un enfoque a corto plazo, considerando que las nuevas tecnologías solucionarían los problemas de los recursos que incluyen daños probados y agudos. Jerárquico, presenta una visión a mediano plazo, considera un censo científico y político para la solución de los daños al ambiente.

También, el Ecoindicador considera la evaluación del daño por medio de tres pilares que son Análisis de destino y efecto, convierte las emisiones producidas hacia el ambiente en daño físico. Normalización, para comparar los resultados de los daños calculados es necesario normalizarlos, dividiendo los daños calculados entre el daño total causado por una persona europea promedio en un año. Ponderación, este pilar asigna importancia a cada categoría estudiada en la metodología del Ecoindicador 99 por medio de pesos por categoría, los pesos comúnmente utilizados son el 40, 40 y 20% para las categorías de Salud Humana, Calidad de los Ecosistemas y Recursos, respectivamente (Goedkoop & Spriensma, 2001).

CAPITULO 3

En este capítulo se presenta el desarrollo de los modelos matemáticos para la aplicación de los algoritmos de aprendizaje no supervisado, profundo y por refuerzo. Asimismo, se plantea la solución del modelo matemático con la integración de algoritmos de aprendizaje automático.

3.1. FORMULACIÓN DE LOS MODELOS

En las secciones posteriores, se describen el desarrollo de los modelos matemáticos de redes de distribución de agua integrando algoritmos de aprendizaje automático.

3.2. MODELO PARA LA IMPLEMENTACIÓN DE APRENDIZAJE NO SUPERVISADO

El modelo matemático está representado por la superestructura mostrada en la **Fig. 3.2.1**, que muestra los balances de masa y propiedades en el punto de origen de los pozos profundos y en los puntos de decisión para los casos de instalar dos plantas (Caso 1), una planta (Caso 2) o simplemente mezclar (Caso 3). Además, se muestra la disyunción lógica para seleccionar solo un caso de los tres mencionados anteriormente. Después de estos casos, se muestran los balances de masa y propiedades del punto de demanda de los pozos profundos.

En el Caso 1, se muestran los balances de masa y propiedades para el primer caso de ubicación (Caso A), el segundo caso de ubicación (Caso B) y el caso de mezcla (Caso C). Además, se muestra la disyunción lógica para seleccionar qué flujo de pozo profundo se enviaría a los Casos A, B o C, así como la disyunción lógica para elegir qué tecnología se implementaría en la planta para los Casos A y B. Una vez que los flujos de salida de los Casos A, B y C se envían al punto de demanda de los pozos profundos.

Para el Caso 2, se muestran los balances de masa y propiedades para el primer caso de ubicación (Caso A) y para el caso de mezcla (Caso B). Además, se muestran las disyunciones lógicas para elegir qué flujo de pozo profundo se enviaría al Caso A o al Caso B, y para elegir qué tecnología se implementaría en la planta para el Caso A. Los flujos de salida de los Casos A y B se envían al punto de demanda de los pozos profundos.

Para el Caso 3, se muestran los balances de masa y propiedades para el caso de mezcla, y en los flujos de salida se envían a los puntos de demanda de los pozos profundos. La función objetivo es la minimización del coste anual de la red y la elección de la tecnología que se instalará en un período de 5 años.

Decisión de caso: Se toma una decisión para elegir entre los Casos 1, 2 o 3 para los flujos puntuales de fuente de pozo profundo, por lo tanto, los flujos puntuales de fuente de pozo profundo (F_i^{Fuente})

serían iguales a los flujos de pozo profundo para el Caso 1 ($F_{i,i1}^{caso\ 1}$), Caso 2 ($F_{i,i2}^{caso\ 2}$) o Caso 3 ($F_{i,i3}^{caso\ 3}$):

$$F_i^{Fuente} = \sum_{i2=1}^{I2} (F_{i,i1}^{caso\ 1}) + \sum_{i3=1}^{I3} (F_{i,i2}^{caso\ 2}) + \sum_{i3=1}^{I3} (F_{i,i3}^{caso\ 3}), \quad \forall i \in I \quad (3.2.1)$$

Disyunción lógica para casos: Para decidir sobre los flujos (F_i^{Fuente}) del punto de origen de pozos profundos para los casos 1, 2 y 3, todos los flujos (F_i^{Fuente}) deben enviarse a un solo caso y los flujos individuales deben conservarse para el caso seleccionado; es decir, que no haya mezcla entre las corrientes de (F_i^{Fuente}) al llegar al caso seleccionado. Por lo tanto, F_{i1}^{1Rest} , F_{i2}^{2Rest} y F_{i3}^{3Rest} son las restricciones de los flujos de pozos profundos para los casos 1, 2 y 3, respectivamente. Por lo tanto, como parte de las estrategias de optimización, se debe elegir entre instalar dos plantas de tratamiento, instalar una sola o combinar las corrientes existentes para conservar cada flujo individual en cada caso. La siguiente disyunción se utiliza para modelar esta decisión:

$$\left[\begin{array}{c} Y_{i,i1}^{F1} \\ F_i^{Fuente} = \sum_{i1=1}^{I1} (F_{i,i1}^{caso\ 1}) \\ \sum_{i=1}^I (F_{i,i1}^{caso\ 1}) \leq F_{i1}^{1Rest} \end{array} \right] \vee \left[\begin{array}{c} Y_{i,i2}^{F2} \\ F_i^{Fuente} = \sum_{i2=1}^{I2} (F_{i,i2}^{caso\ 2}) \\ \sum_{i=1}^I (F_{i,i2}^{caso\ 2}) \leq F_{i2}^{2Rest} \end{array} \right] \vee \left[\begin{array}{c} Y_{i,i3}^{F3} \\ F_i^{Fuente} = \sum_{i3=1}^{I3} (F_{i,i3}^{caso\ 3}) \\ \sum_{i=1}^I (F_{i,i3}^{caso\ 3}) \leq F_{i3}^{3Rest} \end{array} \right] \quad (3.2.2)$$

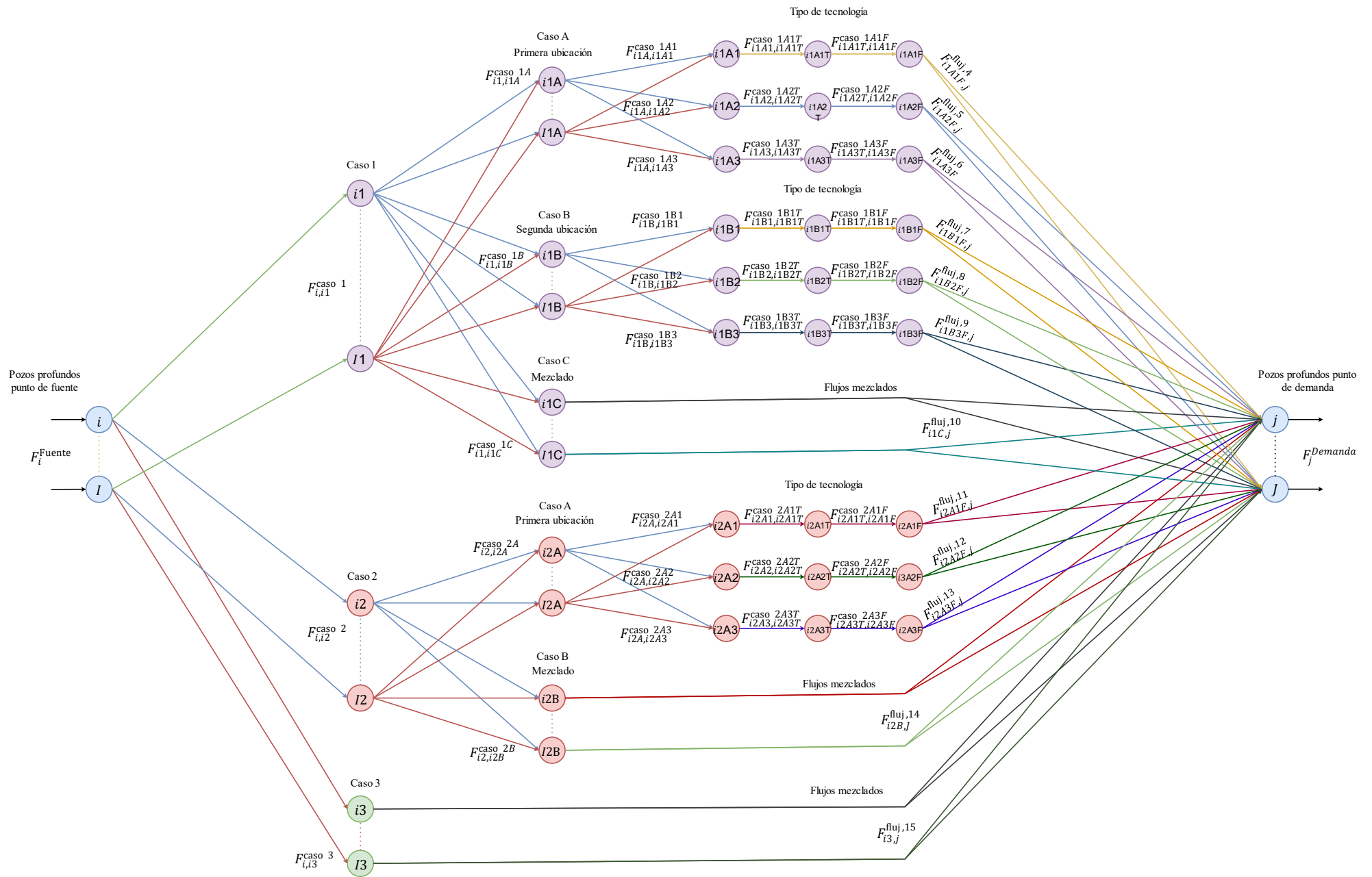


Fig. 3.2.1. Superestructura del Sistema de Optimización de la Red de Agua para la Eliminación de Arsénico

Donde $Y_{i,i1}^{F1}$, $Y_{i,i2}^{F2}$ e $Y_{i,i3}^{F3}$ son variables lógicas, utilizadas para denotar la selección de flujos de pozos profundos para los Casos 1, 2 y 3, respectivamente. Esta disyunción implica que cuando las variables booleanas $Y_{i,i1}^{F1}$, $Y_{i,i2}^{F2}$ o $Y_{i,i3}^{F3}$ son verdaderas (es decir, que las variables $Y_{i,i1}^{F1}$, $Y_{i,i2}^{F2}$ o $Y_{i,i3}^{F3}$ son iguales a 1), el flujo del punto de origen del pozo profundo (F_i^{Fuente}) se envía al Caso 1 ($F_{i,i1}^{caso\ 1}$), Caso 2 ($F_{i,i2}^{caso\ 2}$) o Caso 3 ($F_{i,i3}^{caso\ 3}$). La formulación Big-M se utiliza para modelar la disyunción debido a su enfoque compacto para reformular las disyunciones presentadas en este estudio. Además, los límites de las variables en el modelo matemático son adecuados, lo que resulta en una formulación eficaz y perspicaz para esta investigación (Raman & Grossmann, 1993). La siguiente Ecuación se utiliza para seleccionar la distribución de flujos desde los puntos de origen de pozos profundos hasta los Casos 1, 2 o 3:

$$\sum_{i=1}^I (Y_{i,i1}^{F1}) + \sum_{i=1}^I (Y_{i,i2}^{F2}) + \sum_{i=1}^I (Y_{i,i3}^{F3}) = 1, \quad \forall i1 \in I1, \quad \forall i2 \in I2, \quad \forall i3 \in I3 \quad (3.2.3)$$

Mientras que los límites inferior y superior de las variables de flujo para cada caso se muestran en las Ecuaciones (3.2.4 a 3.2.6) y (3.2.7 a 3.2.9), respectivamente.

$$F_{i,i1}^{caso\ 1} \geq -Y_{i,i1}^{F1} M^1, \quad \forall i \in I, \quad \forall i1 \in I1 \quad (3.2.4)$$

$$F_{i,i2}^{caso\ 2} \geq -Y_{i,i2}^{F2} M^2, \quad \forall i \in I, \quad \forall i2 \in I2 \quad (3.2.5)$$

$$F_{i,i3}^{caso\ 3} \geq -Y_{i,i3}^{F3} M^3, \quad \forall i \in I, \quad \forall i3 \in I3 \quad (3.2.6)$$

$$F_{i,i1}^{caso\ 1} \leq Y_{i,i1}^{F1} M^1, \quad \forall i \in I, \quad \forall i1 \in I1 \quad (3.2.7)$$

$$F_{i,i2}^{caso\ 2} \leq Y_{i,i2}^{F2} M^2, \quad \forall i \in I, \quad \forall i2 \in I2 \quad (3.2.8)$$

$$F_{i,i3}^{caso\ 3} \leq Y_{i,i3}^{F3} M^3, \quad \forall i \in I, \quad \forall i3 \in I3 \quad (3.2.9)$$

Donde M^1 , M^2 y M^3 son valores suficientemente grandes. Para que los flujos puntuales de fuente de pozo profundo (F_i^{Fuente}) conserven el flujo de los Casos 1, 2 o 3 es necesario agregar las siguientes restricciones:

$$\sum_{i=1}^I (F_{i,i1}^{caso\ 1}) \leq F_{i1}^{Rest,1}, \quad \forall i1 \in I1 \quad (3.2.10)$$

$$\sum_{i=1}^I (F_{i,i2}^{caso\ 2}) \leq F_{i2}^{Rest,2}, \quad \forall i2 \in I2 \quad (3.2.11)$$

$$\sum_{i=1}^I (F_{i,i3}^{caso\ 3}) \leq F_{i3}^{Rest,3}, \quad \forall i3 \in I3 \quad (3.2.12)$$

Decisión para el Caso 1: Se elige entre los Casos A, B o C, lo que indica que el Caso A es la primera ubicación para la instalación de la primera planta de tratamiento para el Caso 1; el Caso B es la segunda ubicación para la instalación de la segunda planta de tratamiento para el Caso 1; y el Caso C representa la mezcla de los flujos provenientes de los pozos profundos del Caso 1. Los flujos del pozo profundo del Caso 1 ($F_{i,i1}^{caso\ 1}$) serían iguales a los flujos del pozo profundo del Caso A ($F_{i1,i1A}^{caso\ 1A}$) más los flujos del pozo profundo del Caso B ($F_{i1,i1B}^{caso\ 1B}$) más los flujos del pozo profundo del Caso C ($F_{i1,i1C}^{caso\ 1C}$), como se muestra en la Ecuación (3.2.13):

$$\sum_{i=1}^I (F_{i,i1}^{caso\ 1}) = \sum_{i1A=1}^{I1A} (F_{i1,i1A}^{caso\ 1A}) + \sum_{i1B=1}^{I1B} (F_{i1,i1B}^{caso\ 1B}) + \sum_{i1C=1}^{I1C} (F_{i1,i1C}^{caso\ 1C}), \quad \forall i1 \in I1 \quad (3.2.13)$$

Disyunción lógica para Caso 1: En el caso de la toma de decisiones sobre los flujos de pozos profundos del Caso 1 ($F_{i,i1}^{caso\ 1}$) a los Casos A ($F_{i1,i1A}^{caso\ 1A}$), B ($F_{i1,i1B}^{caso\ 1B}$) y C ($F_{i1,i1C}^{caso\ 1C}$), se debe garantizar que los flujos de ($F_{i,i1}^{caso\ 1}$) puedan enviarse a cualquier Caso. Por lo tanto, se debe seleccionar entre el caso de la primera ubicación, el caso de la segunda ubicación y solo la mezcla de flujos, como se modela en la toma de decisiones con la siguiente disyunción:

$$\left[\sum_{i=1}^I (F_{i,i1}^{caso\ 1}) = \sum_{i1A=1}^{I1A} (F_{i1,i1A}^{caso\ 1A}) \right] \vee \left[\sum_{i=1}^I (F_{i,i1}^{caso\ 1}) = \sum_{i1B=1}^{I1B} (F_{i1,i1B}^{caso\ 1B}) \right] \vee \left[\sum_{i=1}^I (F_{i,i1}^{caso\ 1}) = \sum_{i1C=1}^{I1C} (F_{i1,i1C}^{caso\ 1C}) \right] \quad (3.2.14)$$

Donde $Y_{i1,i1A}^{F1A}$, $Y_{i1,i1B}^{F1B}$ e $Y_{i1,i1C}^{F1C}$ son variables lógicas, utilizadas para denotar la selección de flujos de pozos profundos para los casos A, B y C, respectivamente. Esta disyunción implica que cuando las variables booleanas $Y_{i1,i1A}^{F1A}$, $Y_{i1,i1B}^{F1B}$ e $Y_{i1,i1C}^{F1C}$ son verdaderas (es decir, que las variables $Y_{i1,i1A}^{F1A}$, $Y_{i1,i1B}^{F1B}$ e $Y_{i1,i1C}^{F1C}$ son iguales a 1) el flujo de los pozos profundos del Caso 1 ($F_{i1,i1}^{caso\ 1}$) se envía al Caso A ($F_{i1,i1A}^{caso\ 1A}$), Caso B ($F_{i1,i1B}^{caso\ 1B}$) y Caso C ($F_{i1,i1C}^{caso\ 1C}$). De lo contrario, los flujos de pozos profundos del Caso 1 ($F_{i1,i1}^{caso\ 1}$) no se envían a los Casos A ($F_{i1,i1A}^{caso\ 1A}$), B ($F_{i1,i1B}^{caso\ 1B}$) y C ($F_{i1,i1C}^{caso\ 1C}$), ya que las variables booleanas $Y_{i1,i1A}^{F1A}$, $Y_{i1,i1B}^{F1B}$ e $Y_{i1,i1C}^{F1C}$ son falsas (es decir, las variables $Y_{i1,i1A}^{F1A}$, $Y_{i1,i1B}^{F1B}$ e $Y_{i1,i1C}^{F1C}$ son iguales a 0). La siguiente Ecuación se utiliza para seleccionar el flujo de pozos profundos a los Casos A, B y C:

$$\sum_{i1=1}^{I1} (Y_{i1,i1A}^{F1A}) + \sum_{i1=1}^{I1} (Y_{i1,i1B}^{F1B}) + \sum_{i1=1}^{I1} (Y_{i1,i1C}^{F1C}) \leq 3, \quad \forall i1A \in I1A, \quad \forall i1B \in I1B, \quad \forall i1C \in I1C \quad (3.2.15)$$

Los límites inferior y superior de las variables de flujo para cada caso se muestran en las Ecuaciones (3.2.16 a 3.2.18) y (3.2.19 a 3.2.21), respectivamente.

$$F_{i1,i1A}^{caso\ 1A} \leq Y_{i1,i1A}^{F1A} M^{1A}, \quad \forall i1 \in I1, \quad \forall i1A \in I1A \quad (3.2.16)$$

$$F_{i1,i1B}^{caso\ 1B} \leq Y_{i1,i1B}^{F1B} M^{1B}, \quad \forall i1 \in I1, \quad \forall i1B \in I1B \quad (3.2.17)$$

$$F_{i1,i1C}^{caso\ 1C} \leq Y_{i1,i1C}^{F1C} M^{1C}, \quad \forall i1 \in I1, \quad \forall i1C \in I1C \quad (3.2.18)$$

$$F_{i1,i1A}^{caso\ 1A} \geq -Y_{i1,i1A}^{F1A} M^{1A}, \quad \forall i1 \in I1, \quad \forall i1A \in I1A \quad (3.2.19)$$

$$F_{i1,i1B}^{caso\ 1B} \geq -Y_{i1,i1B}^{F1B} M^{1B}, \quad \forall i1 \in I1, \quad \forall i1B \in I1B \quad (3.2.20)$$

$$F_{i1,i1C}^{caso\ 1C} \geq -Y_{i1,i1C}^{F1C} M^{1C}, \quad \forall i1 \in I1, \quad \forall i1C \in I1C \quad (3.2.21)$$

Donde M^{1A} , M^{1B} y M^{1C} son valores grandes.

Balance de masas Caso 1, Caso A: Tras decidir la ubicación de la primera planta, también debe decidirse la tecnología que se utilizará en la ubicación seleccionada. Por lo tanto, los flujos del pozo profundo resultantes de la decisión para el Caso A ($F_{i1,i1A}^{caso\ 1A}$) son iguales a la suma de los flujos del pozo profundo hacia la tecnología 1 ($F_{i1A,i1A1}^{caso\ 1A1}$, absorbedores), los flujos del pozo profundo hacia la tecnología 2 ($F_{i1A,i1A2}^{caso\ 1A2}$, ósmosis inversa) y los flujos del pozo profundo hacia la tecnología 3 ($F_{i1A,i1A3}^{caso\ 1A3}$, coagulación/filtración).

$$\sum_{i1=1}^{I1} (F_{i1,i1A}^{caso\ 1A}) = \sum_{i1A1=1}^{I1A1} (F_{i1A,i1A1}^{caso\ 1A1}) + \sum_{i1A2=1}^{I1A2} (F_{i1A,i1A2}^{caso\ 1A2}) + \sum_{i1A3=1}^{I1A3} (F_{i1A,i1A3}^{caso\ 1A3}), \quad \forall i1A \in I1A \quad (3.2.22)$$

Balance de propiedades Caso 1, Caso A: Para determinar la propiedad de los flujos de $(F_{i1A,i1A1}^{caso\ 1A1})$, $(F_{i1A,i1A2}^{caso\ 1A2})$ y $(F_{i1A,i1A3}^{caso\ 1A3})$, la regla de mezcla se muestra en la Ecuación (3.2.23).

$$\sum_{i1=1}^{I1} (F_{i1,i1A}^{caso\ 1A} p_{i1,i1A}^{caso\ 1A}) = \sum_{i1A1=1}^{I1A1} (F_{i1A,i1A1}^{caso\ 1A1} p_{i1A,i1A1}^{caso\ 1A1}) + \sum_{i1A2=1}^{I1A2} (F_{i1A,i1A2}^{caso\ 1A2} p_{i1A,i1A2}^{caso\ 1A2}) + \sum_{i1A3=1}^{I1A3} (F_{i1A,i1A3}^{caso\ 1A3} p_{i1A,i1A3}^{caso\ 1A3}), \quad (3.2.23)$$

$\forall i1A \in I1A$

Disyunción lógica Caso 1, Caso A: Al tomar decisiones sobre los flujos de pozo profundo del Caso 1 en el Caso A $(F_{i1,i1A}^{caso\ 1A})$ para los Casos 1, 2 y 3, debe asegurarse que todos los flujos $(F_{i1,i1A}^{caso\ 1A})$ se dirijan únicamente a uno de los Casos, es decir, los flujos $(F_{i1,i1A}^{caso\ 1A})$, y que solo se pueda elegir una de las tres tecnologías (absorbedores, ósmosis inversa o coagulación/filtración para el tratamiento). La siguiente disyunción describe lo anterior:

$$\left[F_{i1,i1A}^{caso\ 1A} = \sum_{i1A1=1}^{I1A1} (F_{i1A,i1A1}^{caso\ 1A1}) \right] \vee \left[F_{i1,i1A}^{caso\ 1A} = \sum_{i1A2=1}^{I1A2} (F_{i1A,i1A2}^{caso\ 1A2}) \right] \vee \left[F_{i1,i1A}^{caso\ 1A} = \sum_{i1A3=1}^{I1A3} (F_{i1A,i1A3}^{caso\ 1A3}) \right] \quad (3.2.24)$$

Donde Y_{i1A1}^{F1A1} , Y_{i1A2}^{F1A2} e Y_{i1A3}^{F1A3} son variables lógicas, utilizadas para denotar la selección de flujos de pozos profundos para los Casos 1, 2 y 3, respectivamente. Esta disyunción implica que cuando las variables booleanas Y_{i1A1}^{F1A1} , Y_{i1A2}^{F1A2} o Y_{i1A3}^{F1A3} son verdaderas (es decir, que las variables Y_{i1A1}^{F1A1} , Y_{i1A2}^{F1A2} o Y_{i1A3}^{F1A3} son iguales a 1), el flujo de los pozos profundos para el Caso 1 en el Caso A se envía al Caso 1 $(F_{i1A,i1A1}^{caso\ 1A1})$, Caso 2 $(F_{i1A,i1A2}^{caso\ 1A2})$ o Caso 3 $(F_{i1A,i1A3}^{caso\ 1A3})$. Si el flujo de pozos profundos $(F_{i1,i1A}^{caso\ 1A})$ no se envía al Caso 1 $(F_{i1A,i1A1}^{caso\ 1A1})$, Caso 2 $(F_{i1A,i1A2}^{caso\ 1A2})$ o Caso 3 $(F_{i1A,i1A3}^{caso\ 1A3})$, las variables booleanas Y_{i1A1}^{F1A1} , Y_{i1A2}^{F1A2} o Y_{i1A3}^{F1A3} son falsas (es decir, que las variables Y_{i1A1}^{F1A1} , Y_{i1A2}^{F1A2} o Y_{i1A3}^{F1A3} son iguales a 0). En este sentido, los flujos de pozo profundo para el Caso 1 $(F_{i1A,i1A1}^{caso\ 1A1})$, el Caso 2 $(F_{i1A,i1A2}^{caso\ 1A2})$ o el Caso 3 $(F_{i1A,i1A3}^{caso\ 1A3})$ serán nulos. La siguiente Ecuación se utiliza para seleccionar los flujos de pozo profundo del Caso 1 en el Caso A para los Casos 1, 2 y 3:

$$Y_{i1A1}^{F1A1} + Y_{i1A2}^{F1A2} + Y_{i1A3}^{F1A3} = 1, \quad (3.2.25)$$

$\forall i1A1 \in I1A1, \quad \forall i1A2 \in I1A2, \quad \forall i1A3 \in I1A3$

Los límites inferior y superior de las variables de flujo para el Caso 1 en el Caso A para cada caso se muestran en las Ecuaciones (3.2.26 a 3.2.28) y (3.2.29 a 3.2.31), respectivamente.

$$\sum_{i1A=1}^{I1A} (F_{i1A,i1A1}^{caso\ 1A1}) \geq -Y_{i1A1}^{F1A1} M^{1A1}, \quad \forall i1A \in I1A, \quad \forall i1A1 \in I1A1 \quad (3.2.26)$$

$$\sum_{i1A=1}^{I1A} (F_{i1A,i1A2}^{caso\ 1A2}) \geq -Y_{i1A2}^{F1A2} M^{1A2}, \quad \forall i1A \in I1A, \quad \forall i1A2 \in I1A2 \quad (3.2.27)$$

$$\sum_{i1A=1}^{I1A} (F_{i1A,i1A3}^{caso\ 1A3}) \geq -Y_{i1A3}^{F1A3} M^{1A3}, \quad \forall i1A \in I1A, \quad \forall i1A3 \in I1A3 \quad (3.2.28)$$

$$\sum_{i1A=1}^{I1A} (F_{i1A,i1A1}^{caso\ 1A1}) \leq Y_{i1A1}^{F1A1} M^{1A1}, \quad \forall i1A \in I1A, \quad \forall i1A1 \in I1A1 \quad (3.2.29)$$

$$\sum_{i1A=1}^{I1A} (F_{i1A,i1A2}^{caso\ 1A2}) \leq Y_{i1A2}^{F1A2} M^{1A2}, \quad \forall i1A \in I1A, \quad \forall i1A2 \in I1A2 \quad (3.2.30)$$

$$\sum_{i1A=1}^{I1A} (F_{i1A,i1A3}^{caso\ 1A3}) \leq Y_{i1A3}^{F1A3} M^{1A3}, \quad \forall i1A \in I1A, \quad \forall i1A3 \in I1A3 \quad (3.2.31)$$

Balances de masa Caso 1, Caso A en la entrada de tecnología: Los flujos de pozo profundo del Caso 1 en el Caso A que ingresan a las tecnologías 1, 2 y 3 son $(F_{i1A1,i1A1T}^{caso\ 1A1T})$, $(F_{i1A2,i1A2T}^{caso\ 1A2T})$ y $(F_{i1A3,i1A3T}^{caso\ 1A3T})$ que provienen de flujos de pozo profundo $(F_{i1A,i1A1}^{caso\ 1A1})$, $(F_{i1A,i1A2}^{caso\ 1A2})$ y $(F_{i1A,i1A3}^{caso\ 1A3})$, respectivamente, como se muestra en las Ecuaciones (3.2.32, 3.2.33 y 3.2.34):

$$\sum_{i1A=1}^{I1A} (F_{i1A,i1A1}^{caso\ 1A1}) = \sum_{i1A1T=1}^{I1A1T} (F_{i1A1,i1A1T}^{caso\ 1A1T}), \quad \forall i1A1 \in I1A1 \quad (3.2.32)$$

$$\sum_{i1A=1}^{I1A} (F_{i1A,i1A2}^{caso\ 1A2}) = \sum_{i1A2T=1}^{I1A2T} (F_{i1A2,i1A2T}^{caso\ 1A2T}), \quad \forall i1A2 \in I1A2 \quad (3.2.33)$$

$$\sum_{i1A=1}^{I1A} (F_{i1A,i1A3}^{caso\ 1A3}) = \sum_{i1A3T=1}^{I1A3T} (F_{i1A3,i1A3T}^{caso\ 1A3T}), \quad \forall i1A3 \in I1A3 \quad (3.2.34)$$

Balances de propiedades Caso 1, Caso A en la entrada de tecnologías: Las propiedades de los flujos ($F_{i1A1,i1A1T}^{caso\ 1A1T}$), ($F_{i1A2,i1A2T}^{caso\ 1A2T}$) y ($F_{i1A3,i1A3T}^{caso\ 1A3T}$) se obtienen con las reglas de mezcla que se muestran en las Ecuaciones (3.2.35 a 3.2.37), respectivamente.

$$\sum_{i1A=1}^{I1A} (F_{i1A,i1A1}^{caso\ 1A1} P_{i1A,i1A1}^{caso\ 1A1}) = \sum_{i1A1T=1}^{I1A1T} (F_{i1A1,i1A1T}^{caso\ 1A1T} P_{i1A1,i1A1T}^{caso\ 1A1T}), \quad \forall i1A1 \in I1A1 \quad (3.2.35)$$

$$\sum_{i1A=1}^{I1A} (F_{i1A,i1A2}^{caso\ 1A2} P_{i1A,i1A2}^{caso\ 1A2}) = \sum_{i1A2T=1}^{I1A2T} (F_{i1A2,i1A2T}^{caso\ 1A2T} P_{i1A2,i1A2T}^{caso\ 1A2T}), \quad \forall i1A2 \in I1A2 \quad (3.2.36)$$

$$\sum_{i1A=1}^{I1A} (F_{i1A,i1A3}^{caso\ 1A3} P_{i1A,i1A3}^{caso\ 1A3}) = \sum_{i1A3T=1}^{I1A3T} (F_{i1A3,i1A3T}^{caso\ 1A3T} P_{i1A3,i1A3T}^{caso\ 1A3T}), \quad \forall i1A3 \in I1A3 \quad (3.2.37)$$

Los balances de masa para el Caso 1 en el Caso A en las tecnologías existentes: Los flujos de pozo profundo del Caso 1 en el Caso 1 en las tecnologías 1, 2 y 3 existentes son ($F_{i1A1,i1A1F}^{caso\ 1A1F}$), ($F_{i1A2,i1A2F}^{caso\ 1A2F}$) y ($F_{i1A3,i1A3F}^{caso\ 1A3F}$) de las entradas ($F_{i1A1,i1A1T}^{caso\ 1A1T}$), ($F_{i1A2,i1A2T}^{caso\ 1A2T}$) y ($F_{i1A3,i1A3T}^{caso\ 1A3T}$), respectivamente, como se muestra a continuación:

$$\sum_{i1A1=1}^{I1A1} (F_{i1A1,i1A1T}^{caso\ 1A1T}) = \sum_{i1A1F=1}^{I1A1F} (F_{i1A1T,i1A1F}^{caso\ 1A1F}), \quad \forall i1A1T \in I1A1T \quad (3.2.38)$$

$$\sum_{i1A2=1}^{I1A2} (F_{i1A2,i1A2T}^{caso\ 1A2T}) = \sum_{i1A2F=1}^{I1A2F} (F_{i1A2T,i1A2F}^{caso\ 1A2F}), \quad \forall i1A2T \in I1A2T \quad (3.2.39)$$

$$\sum_{i1A3=1}^{I1A3} (F_{i1A3,i1A3T}^{caso\ 1A3T}) = \sum_{i1A3F=1}^{I1A3F} (F_{i1A3T,i1A3F}^{caso\ 1A3F}), \quad \forall i1A3T \in I1A3T \quad (3.2.40)$$

Balances de propiedades para el Caso 1 en el Caso A a la salida de las tecnologías: Las propiedades de los flujos ($F_{i1A1T,i1A1F}^{caso\ 1A1F}$), ($F_{i1A2T,i1A2F}^{caso\ 1A2F}$) y ($F_{i1A3T,i1A3F}^{caso\ 1A3F}$) dependen de la tecnología seleccionada, el factor de eficiencia (ξ_{I1A1T}), (ξ_{I1A2T}) y (ξ_{I1A3T}) corresponden a las tecnologías 1, 2 y 3, respectivamente. Estos factores se presentan en la **Tabla 3.2.1**, donde se consideran los criterios para la selección de la tecnología, como el metal a remover, el agua para uso doméstico y la capacidad de la planta (Akhilesh et al., 2022; INTI, 2021). Las tecnologías emergentes no se incluyen entre estas tres debido a su falta de madurez. Mientras que las siguientes Ecuaciones (3.2.41 a 3.2.43) muestran los balances de propiedades:

$$\sum_{i1A1F=1}^{I1A1F} (P_{i1A1T,i1A1F}^{caso\ 1A1F}) = (1 - \xi_{I1A1T}) \sum_{i1A1=1}^{I1A1} (P_{i1A1,i1A1T}^{caso\ 1A1T}), \quad \forall i1A1T \in I1A1T \quad (3.2.41)$$

$$\sum_{i1A2F=1}^{I1A2F} (P_{i1A2T,i1A2F}^{caso\ 1A2F}) = (1 - \xi_{I1A2T}) \sum_{i1A2=1}^{I1A2} (P_{i1A2,i1A2T}^{caso\ 1A2T}), \quad \forall i1A2T \in I1A2T \quad (3.2.42)$$

$$\sum_{i1A3F=1}^{I1A3F} (P_{i1A3T,i1A3F}^{caso\ 1A3F}) = (1 - \xi_{I1A3T}) \sum_{i1A3=1}^{I1A3} (P_{i1A3,i1A3T}^{caso\ 1A3T}), \quad \forall i1A3T \in I1A3T \quad (3.2.43)$$

Tabla 3.2.1. Factores de eficiencia para cada tecnología considerada para la eliminación de arsénico.

Tecnología 1		Tecnología 2		Tecnología 3	
Absorbedores		Ósmosis Inversa		Coagulación/Filtración	
Factor	Eficiencia (%)	Factor	Eficiencia (%)	Factor	Eficiencia (%)
ξ_{I1A1T}	90	ξ_{I1A2T}	95	ξ_{I1A3T}	60
ξ_{I1B1T}	90	ξ_{I1B2T}	95	ξ_{I1B3T}	60
ξ_{I2A1T}	90	ξ_{I2A2T}	95	ξ_{I2A3T}	60

Balances de masa Caso 1, Caso A para demanda: Los flujos de pozos profundos del Caso 1 en el Caso A que salen de las tecnologías 1, 2 y 3 ($F_{i1A1T,i1A1F}^{caso\ 1A1F}$), ($F_{i1A2T,i1A2F}^{caso\ 1A2F}$) y ($F_{i1A3T,i1A3F}^{caso\ 1A3F}$) tienen sus puntos de división que son ($F_{i1A1F,j}^{fluj,4}$), ($F_{i1A2F,j}^{fluj,5}$) y ($F_{i1A3F}^{fluj,6}$), respectivamente, como se muestra en las siguientes Ecuaciones:

$$\sum_{i1A1T=1}^{I1A1T} (F_{i1A1T,i1A1F}^{caso\ 1A1F}) = \sum_{j=1}^J (F_{i1A1F,j}^{flu j,4}), \quad \forall i1A1F \in I1A1F \quad (3.2.44)$$

$$\sum_{i1A2T=1}^{I1A2T} (F_{i1A2T,i1A2F}^{caso\ 1A2F}) = \sum_{j=1}^J (F_{i1A2F,j}^{flu j,5}), \quad \forall i1A2F \in I1A2F \quad (3.2.45)$$

$$\sum_{i1A3T=1}^{I1A3T} (F_{i1A3T,i1A3F}^{caso\ 1A3F}) = \sum_{j=1}^J (F_{i1A3F,j}^{flu j,6}), \quad \forall i1A3F \in I1A3F \quad (3.2.46)$$

Balances de propiedades Caso 1, Caso A para demanda: Las propiedades de los pozos profundos del Caso 1 en el Caso A que surgen de las tecnologías 1 ($P_{i1A1F,j}^{flu j,4}$), 2 ($P_{i1A2F,j}^{flu j,5}$) y 3 ($P_{i1A3F,j}^{flu j,6}$) están determinadas por las reglas de mezcla que se muestran en las Ecuaciones (3.2.47 a 3.2.49), respectivamente.

$$\sum_{i1A1T=1}^{I1A1T} (F_{i1A1T,i1A1F}^{caso\ 1A1F} P_{i1A1T,i1A1F}^{caso\ 1A1F}) = \sum_{j=1}^J (F_{i1A1F,j}^{flu j,4} P_{i1A1F,j}^{flu j,4}), \quad \forall i1A1F \in I1A1F \quad (3.2.47)$$

$$\sum_{i1A2T=1}^{I1A2T} (F_{i1A2T,i1A2F}^{caso\ 1A2F} P_{i1A2T,i1A2F}^{caso\ 1A2F}) = \sum_{j=1}^J (F_{i1A2F,j}^{flu j,5} P_{i1A2F,j}^{flu j,5}), \quad \forall i1A2F \in I1A2F \quad (3.2.48)$$

$$\sum_{i1A3T=1}^{I1A3T} (F_{i1A3T,i1A3F}^{caso\ 1A3F} P_{i1A3T,i1A3F}^{caso\ 1A3F}) = \sum_{j=1}^J (F_{i1A3F,j}^{flu j,6} P_{i1A3F,j}^{flu j,6}), \quad \forall i1A3F \in I1A3F \quad (3.2.49)$$

Balances de masa Caso 1, Caso B: Tras decidir la ubicación de la segunda planta, también debe decidirse la tecnología que se utilizará en la ubicación seleccionada. Por lo tanto, los flujos de pozo profundo del Caso B ($F_{i1,i1B}^{caso\ 1B}$) son iguales a la suma de los flujos de pozo profundo hacia la tecnología 1 ($F_{i1B,i1B1}^{caso\ 1B1}$), hacia la tecnología 2 ($F_{i1B,i1B2}^{caso\ 1B2}$) y hacia la tecnología 3 ($F_{i1B,i1B3}^{caso\ 1B3}$).

$$\sum_{i1=1}^{I1} (F_{i1,i1B}^{caso\ 1B}) = \sum_{i1B1=1}^{I1B1} (F_{i1B,i1B1}^{caso\ 1B1}) + \sum_{i1B2=1}^{I1B2} (F_{i1B,i1B2}^{caso\ 1B2}) + \sum_{i1B3=1}^{I1B3} (F_{i1B,i1B3}^{caso\ 1B3}), \quad (3.2.50)$$

$$\forall i1B \in I1B$$

Balances de propiedades Caso 1, Caso B: Para determinar la propiedad de los flujos de $(F_{i1B,i1B1}^{caso 1B1})$, $(F_{i1B,i1B2}^{caso 1B2})$ y $(F_{i1B,i1B3}^{caso 1B3})$, la regla de mezcla se muestra en la Ecuación (3.2.51).

$$\sum_{i1=1}^{I1} (F_{i1,i1B}^{caso 1B} p_{i1,i1B}^{caso 1B}) = \sum_{i1B1=1}^{I1B1} (F_{i1B,i1B1}^{caso 1B1} p_{i1B,i1B1}^{caso 1B1}) + \sum_{i1B2=1}^{I1B2} (F_{i1B,i1B2}^{caso 1B2} p_{i1B,i1B2}^{caso 1B2}) + \sum_{i1B3=1}^{I1B3} (F_{i1B,i1B3}^{caso 1B3} p_{i1B,i1B3}^{caso 1B3}), \quad (3.2.51)$$

$$\forall i1B \in I1B$$

Disyunción lógica Caso 1, Caso B: Al tomar decisiones sobre los flujos de pozos profundos para el Caso 1 en el Caso B $(F_{i1B,i1B1}^{caso 1B1})$ a los Casos 1, 2 y 3, debe asegurarse que todos los flujos $(F_{i1B,i1B1}^{caso 1B1})$ se envíen solo a uno de los Casos, es decir, los flujos $(F_{i1B,i1B1}^{caso 1B1})$, y que solo se pueda elegir una de las tres tecnologías (absorbentes, ósmosis inversa o coagulación/filtración para su tratamiento). La siguiente disyunción describe lo anterior:

$$\left[F_{i1,i1B}^{caso 1B} = \sum_{i1B1=1}^{I1B1} (F_{i1B,i1B1}^{caso 1B1}) \right] \vee \left[F_{i1,i1B}^{caso 1B} = \sum_{i1B2=1}^{I1B2} (F_{i1B,i1B2}^{caso 1B2}) \right] \vee \left[F_{i1,i1B}^{caso 1B} = \sum_{i1B3=1}^{I1B3} (F_{i1B,i1B3}^{caso 1B3}) \right] \quad (3.2.52)$$

Donde (Y_{i1B1}^{F1B1}) , (Y_{i1B2}^{F1B2}) e (Y_{i1B3}^{F1B3}) son variables lógicas, utilizadas para denotar la selección de flujos de pozos profundos para los Casos 1, 2 y 3, respectivamente. Esta disyunción implica que cuando las variables booleanas (Y_{i1B1}^{F1B1}) , (Y_{i1B2}^{F1B2}) o (Y_{i1B3}^{F1B3}) son verdaderas (es decir, que las variables (Y_{i1B1}^{F1B1}) , (Y_{i1B2}^{F1B2}) o (Y_{i1B3}^{F1B3}) son iguales a 1) el flujo de los pozos profundos del Caso 1 en el Caso B se envía al Caso 1 $(F_{i1B,i1B1}^{caso 1B1})$, Caso 2 $(F_{i1B,i1B2}^{caso 1B2})$ o Caso 3 $(F_{i1B,i1B3}^{caso 1B3})$. Si el flujo de los pozos profundos $(F_{i1B,i1B}^{caso 1B})$ no se envía al Caso 1 $(F_{i1B,i1B1}^{caso 1B1})$, Caso 2 $(F_{i1B,i1B2}^{caso 1B2})$ o Caso 3 $(F_{i1B,i1B3}^{caso 1B3})$ las variables booleanas (Y_{i1B1}^{F1B1}) , (Y_{i1B2}^{F1B2}) o (Y_{i1B3}^{F1B3}) son falsas (es decir, que las variables (Y_{i1B1}^{F1B1}) , (Y_{i1B2}^{F1B2}) o (Y_{i1B3}^{F1B3}) son iguales a 0). En este sentido, los flujos de pozos profundos del Caso 1 $(F_{i1B,i1B1}^{caso 1B1})$, Caso 2 $(F_{i1B,i1B2}^{caso 1B2})$ o Caso 3 $(F_{i1B,i1B3}^{caso 1B3})$ serán nulos. La siguiente Ecuación se utiliza para seleccionar los flujos de pozos profundos del Caso 1 en el Caso B para los Casos 1, 2 y 3:

$$Y_{i1B1}^{F1B1} + Y_{i1B2}^{F1B2} + Y_{i1B3}^{F1B3} = 1, \quad (3.2.53)$$

$$\forall i1B1 \in I1B1, \quad \forall i1B2 \in I1B2, \quad \forall i1B3 \in I1B3$$

Los límites inferior y superior de las variables de flujo para el Caso 1 en el Caso B para cada caso se muestran en las Ecuaciones (3.2.54 a 3.2.56) y (3.2.57 a 3.2.59), respectivamente.

$$\sum_{i1B=1}^{I1B} (F_{i1B,i1B1}^{caso\ 1B1}) \geq -Y_{i1B1}^{F1B1} M^{1B1}, \quad \forall i1B \in I1B, \quad \forall i1B1 \in I1B1 \quad (3.2.54)$$

$$\sum_{i1B=1}^{I1B} (F_{i1B,i1B2}^{caso\ 1B2}) \geq -Y_{i1B2}^{F1B2} M^{1B2}, \quad \forall i1B \in I1B, \quad \forall i1B2 \in I1B2 \quad (3.2.55)$$

$$\sum_{i1B=1}^{I1B} (F_{i1B,i1B3}^{caso\ 1B3}) \geq -Y_{i1B3}^{F1B3} M^{1B3}, \quad \forall i1B \in I1B, \quad \forall i1B3 \in I1B3 \quad (3.2.56)$$

$$\sum_{i1B=1}^{I1B} (F_{i1B,i1B1}^{caso\ 1B1}) \leq Y_{i1B1}^{F1B1} M^{1B1}, \quad \forall i1B \in I1B, \quad \forall i1B1 \in I1B1 \quad (3.2.57)$$

$$\sum_{i1B=1}^{I1B} (F_{i1B,i1B2}^{caso\ 1B2}) \leq Y_{i1B2}^{F1B2} M^{1B2}, \quad \forall i1B \in I1B, \quad \forall i1B2 \in I1B2 \quad (3.2.58)$$

$$\sum_{i1B=1}^{I1B} (F_{i1B,i1B3}^{caso\ 1B3}) \leq Y_{i1B3}^{F1B3} M^{1B3}, \quad \forall i1B \in I1B, \quad \forall i1B3 \in I1B3 \quad (3.2.59)$$

Balances de masa Caso 1, Caso B en la entrada de tecnología: Los flujos de pozo profundo del Caso 1 en el Caso B ingresan a las tecnologías 1, 2 y 3 son $(F_{i1B1,i1B1T}^{caso\ 1B1T})$, $(F_{i1B2,i1B2T}^{caso\ 1B2T})$ y $(F_{i1B3,i1B3T}^{caso\ 1B3T})$ provenientes de flujos de pozo profundo $(F_{i1B,i1B1}^{caso\ 1B1})$, $(F_{i1B,i1B2}^{caso\ 1B2})$ y $(F_{i1B,i1B3}^{caso\ 1B3})$ respectivamente, como se muestra en las Ecuaciones (3.2.60, 3.2.61 y 3.2.62):

$$\sum_{i1B=1}^{I1B} (F_{i1B,i1B1}^{caso\ 1B1}) = \sum_{i1B1T=1}^{I1B1T} (F_{i1B1,i1B1T}^{caso\ 1B1T}), \quad \forall i1B1 \in I1B1 \quad (3.2.60)$$

$$\sum_{i1B=1}^{I1B} (F_{i1B,i1B2}^{caso\ 1B2}) = \sum_{i1B2T=1}^{I1B2T} (F_{i1B2,i1B2T}^{caso\ 1B2T}), \quad \forall i1B2 \in I1B2 \quad (3.2.61)$$

$$\sum_{i1B=1}^{I1B} (F_{i1B,i1B3}^{caso\ 1B3}) = \sum_{i1B3T=1}^{I1B3T} (F_{i1B3,i1B3T}^{caso\ 1B3T}), \quad \forall i1B3 \in I1B3 \quad (3.2.62)$$

Balances de propiedades Caso 1, Caso B en la entrada de tecnologías: Las propiedades de los flujos ($F_{i1B1,i1B1T}^{caso\ 1B1T}$), ($F_{i1B2,i1B2T}^{caso\ 1B2T}$) y ($F_{i1B3,i1B3T}^{caso\ 1B3T}$) se obtienen con las reglas de mezcla que se muestran en las Ecuaciones (3.2.63 a 3.2.65), respectivamente.

$$\sum_{i1B=1}^{I1B} (F_{i1B,i1B1}^{caso\ 1B1} P_{i1B,i1B1}^{caso\ 1B1}) = \sum_{i1B1T=1}^{I1B1T} (F_{i1B1,i1B1T}^{caso\ 1B1T} P_{i1B1,i1B1T}^{caso\ 1B1T}), \quad \forall i1B1 \in I1B1 \quad (3.2.63)$$

$$\sum_{i1B=1}^{I1B} (F_{i1B,i1B2}^{caso\ 1B2} P_{i1B,i1B2}^{caso\ 1B2}) = \sum_{i1B2T=1}^{I1B2T} (F_{i1B2,i1B2T}^{caso\ 1B2T} P_{i1B2,i1B2T}^{caso\ 1B2T}), \quad \forall i1B2 \in I1B2 \quad (3.2.64)$$

$$\sum_{i1B=1}^{I1B} (F_{i1B,i1B3}^{caso\ 1B3} P_{i1B,i1B3}^{caso\ 1B3}) = \sum_{i1B3T=1}^{I1B3T} (F_{i1B3,i1B3T}^{caso\ 1B3T} P_{i1B3,i1B3T}^{caso\ 1B3T}), \quad \forall i1B3 \in I1B3 \quad (3.2.65)$$

Balances de masa Caso 1, Caso B en la salida de las tecnologías: Los flujos de salida del pozo profundo del Caso 1 en el Caso B de las tecnologías 1, 2 y 3 son ($F_{i1B1T,i1B1F}^{caso\ 1B1F}$), ($F_{i1B2T,i1B2F}^{caso\ 1B2F}$) y ($F_{i1B3T,i1B3F}^{caso\ 1B3F}$) de los flujos de entrada ($F_{i1B1,i1B1T}^{caso\ 1B1T}$), ($F_{i1B2,i1B2T}^{caso\ 1B2T}$) y ($F_{i1B3,i1B3T}^{caso\ 1B3T}$) respectivamente, como se muestra a continuación:

$$\sum_{i1B1=1}^{I1B1} (F_{i1B1,i1B1T}^{caso\ 1B1T}) = \sum_{i1B1F=1}^{I1B1F} (F_{i1B1T,i1B1F}^{caso\ 1B1F}), \quad \forall i1B1T \in I1B1T \quad (3.2.66)$$

$$\sum_{i1B2=1}^{I1B2} (F_{i1B2,i1B2T}^{caso\ 1B2T}) = \sum_{i1B2F=1}^{I1B2F} (F_{i1B2T,i1B2F}^{caso\ 1B2F}), \quad \forall i1B2T \in I1B2T \quad (3.2.67)$$

$$\sum_{i1B3=1}^{I1B3} (F_{i1B3,i1B3T}^{caso\ 1B3T}) = \sum_{i1B3F=1}^{I1B3F} (F_{i1B3T,i1B3F}^{caso\ 1B3F}), \quad \forall i1B3T \in I1B3T \quad (3.2.68)$$

Balances de propiedades Caso 1, Caso B a la salida de las tecnologías: Las propiedades de los flujos $(F_{i1B1T,i1B1F}^{caso\ 1B1F})$, $(F_{i1B2T,i1B2F}^{caso\ 1B2F})$ y $(F_{i1B3T,i1B3F}^{caso\ 1B3F})$ dependen de la tecnología seleccionada. Los factores de conversión (ξ_{I1B1T}) , (ξ_{I1B2T}) y (ξ_{I1B3T}) corresponden a las tecnologías 1, 2 y 3, respectivamente. Estos factores se muestran en la **Tabla 3.2.1**, y las siguientes Ecuaciones muestran los balances de propiedades:

$$\sum_{i1B1F=1}^{I1B1F} (P_{i1B1T,i1B1F}^{caso\ 1B1F}) = (1 - \xi_{I1B1T}) \sum_{i1B1=1}^{I1B1} (P_{i1B1,i1B1T}^{caso\ 1B1T}), \quad \forall i1B1T \in I1B1T \quad (3.2.69)$$

$$\sum_{i1B2F=1}^{I1B2F} (P_{i1B2T,i1B2F}^{caso\ 1B2F}) = (1 - \xi_{I1B2T}) \sum_{i1B2=1}^{I1B2} (P_{i1B2,i1B2T}^{caso\ 1B2T}), \quad \forall i1B2T \in I1B2T \quad (3.2.70)$$

$$\sum_{i1B3F=1}^{I1B3F} (P_{i1B3T,i1B3F}^{caso\ 1B3F}) = (1 - \xi_{I1B3T}) \sum_{i1B3=1}^{I1B3} (P_{i1B3,i1B3T}^{caso\ 1B3T}), \quad \forall i1B3T \in I1B3T \quad (3.2.71)$$

Balances de masa Caso 1, Caso B a demanda: Los flujos de pozos profundos del Caso 1 al Caso B saliendo de las tecnologías 1 $(F_{i1B1T,i1B1F}^{caso\ 1B1F})$, 2 $(F_{i1B2T,i1B2F}^{caso\ 1B2F})$ y 3 $(F_{i1B3T,i1B3F}^{caso\ 1B3F})$ tienen sus puntos de división que son $(F_{i1B1F,j}^{flujo,7})$, $(F_{i1B2F,j}^{flujo,8})$ y $(F_{i1B3F,j}^{flujo,9})$ respectivamente, como se muestra en las siguientes Ecuaciones:

$$\sum_{i1B1T=1}^{I1B1T} (F_{i1B1T,i1B1F}^{caso\ 1B1F}) = \sum_{j=1}^J (F_{i1B1F,j}^{flujo,7}), \quad \forall i1B1F \in I1B1F \quad (3.2.72)$$

$$\sum_{i1B2T=1}^{I1B2T} (F_{i1B2T,i1B2F}^{caso\ 1B2F}) = \sum_{j=1}^J (F_{i1B2F,j}^{flujo,8}), \quad \forall i1B2F \in I1B2F \quad (3.2.73)$$

$$\sum_{i1B3T=1}^{I1B3T} (F_{i1B3T,i1B3F}^{caso\ 1B3F}) = \sum_{j=1}^J (F_{i1B3F,j}^{flujo,9}), \quad \forall i1B3F \in I1B3F \quad (3.2.74)$$

Balances de propiedades Caso 1, Caso B a demanda: Las propiedades de los pozos profundos del Caso 1 en el Caso B que surgen de las tecnologías 1 ($P_{i1B1F,j}^{flu,j,7}$), 2 ($P_{i1B2F,j}^{flu,j,8}$) y 3 ($P_{i1B3F,j}^{flu,j,9}$) están determinadas por las reglas de mezcla que se muestran en las Ecuaciones (3.2.75 a 3.2.77), respectivamente.

$$\sum_{i1B1T=1}^{I1B1T} (F_{i1B1T,i1B1F}^{caso\ 1B1F} P_{i1B1T,i1B1F}^{caso\ 1B1F}) = \sum_{j=1}^J (F_{i1B1F,j}^{flu,j,7} P_{i1B1F,j}^{flu,j,7}), \quad \forall i1B1F \in I1B1F \quad (3.2.75)$$

$$\sum_{i1B2T=1}^{I1B2T} (F_{i1B2T,i1B2F}^{caso\ 1B2F} P_{i1B2T,i1B2F}^{caso\ 1B2F}) = \sum_{j=1}^J (F_{i1B2F,j}^{flu,j,8} P_{i1B2F,j}^{flu,j,8}), \quad \forall i1B2F \in I1B2F \quad (3.2.76)$$

$$\sum_{i1B3T=1}^{I1B3T} (F_{i1B3T,i1B3F}^{caso\ 1B3F} P_{i1B3T,i1B3F}^{caso\ 1B3F}) = \sum_{j=1}^J (F_{i1B3F,j}^{flu,j,9} P_{i1B3F,j}^{flu,j,9}), \quad \forall i1B3F \in I1B3F \quad (3.2.77)$$

Balance de masa y propiedades Caso 1, Caso C: Para el balance de este caso, se mezclan los flujos de los pozos profundos que llegan al Caso C ($F_{i1,i1C}^{caso\ 1C}$) para que sean iguales a los puntos de división ($F_{i1C,j}^{flu,j,10}$) que se envían a los pozos profundos de demanda. El balance de masa y propiedades de este conjunto se muestra a continuación:

$$\sum_{i1=1}^{I1} (F_{i1,i1C}^{caso\ 1C}) = \sum_{j=1}^J (F_{i1C,j}^{flu,j,10}), \quad \forall i1C \in I1C \quad (3.2.78)$$

$$\sum_{i1=1}^{I1} (F_{i1,i1C}^{caso\ 1C} P_{i1,i1C}^{caso\ 1C}) = \sum_{j=1}^J (F_{i1C,j}^{flu,j,10} P_{i1C,j}^{flu,j,10}), \quad \forall i1C \in I1C \quad (3.2.79)$$

Decisión Caso 2: En el caso 2, se decide entre el Caso A y el Caso B. El Caso A cuenta con una ubicación para la instalación de una sola planta de tratamiento, con la posibilidad de instalar solo una de las tecnologías (absorbentes, ósmosis inversa o coagulación/filtración). El Caso B realiza únicamente la mezcla del punto de origen del pozo profundo, de modo que la concentración de arsénico sea inferior a la restricción ambiental. Por lo tanto, el flujo del pozo profundo para el Caso 2 ($F_{i2,i2}^{caso\ 2}$) es igual a la suma de los flujos del pozo profundo para el Caso A ($F_{i2,i2A}^{caso\ 2A}$) y el Caso B ($F_{i2,i2B}^{caso\ 2B}$), como se muestra en la siguiente Ecuación:

$$\sum_{i=1}^I (F_{i,i2}^{caso\ 2}) = \sum_{i2A=1}^{I2A} (F_{i2,i2A}^{caso\ 2A}) + \sum_{i2B=1}^{I2B} (F_{i2,i2B}^{caso\ 2B}), \quad \forall i2 \in I2 \quad (3.2.80)$$

Disyunción lógica Caso 2: En la situación de toma de decisiones para el Caso 2, los flujos de pozo profundo ($F_{i,i2}^{caso\ 2}$) hacia los Casos A ($F_{i2,i2A}^{caso\ 2A}$) y B ($F_{i2,i2B}^{caso\ 2B}$), debe asegurarse que los flujos de ($F_{i,i2}^{caso\ 2}$) puedan enviarse a uno o ambos Casos. La selección debe realizarse entre el caso de la primera ubicación, el caso de solo mezcla y ambos casos para los flujos de pozo profundo del Caso 2, como se modela en la Ecuación de toma de decisiones con la siguiente disyunción:

$$\left[\sum_{i=1}^I (F_{i,i2}^{caso\ 2}) = \sum_{i2A=1}^{I2A} (F_{i2,i2A}^{caso\ 2A}) \right] \vee \left[\sum_{i=1}^I (F_{i,i2}^{caso\ 2}) = \sum_{i2B=1}^{I2B} (F_{i2,i2B}^{caso\ 2B}) \right] \quad (3.2.81)$$

Donde ($Y_{i2,i2A}^{F2A}$) e ($Y_{i2,i2B}^{F2B}$) son variables lógicas, utilizadas para denotar la selección de flujos de pozos profundos para los Casos A y B, respectivamente. Esta disyunción implica que cuando las variables booleanas ($Y_{i2,i2A}^{F2A}$) y ($Y_{i2,i2B}^{F2B}$) son verdaderas (es decir, que las variables ($Y_{i2,i2A}^{F2A}$) y ($Y_{i2,i2B}^{F2B}$) son iguales a 1) el flujo de los pozos profundos del Caso 2 ($F_{i,i2}^{caso\ 2}$) se envía al Caso A ($F_{i2,i2A}^{caso\ 2A}$) y al Caso B ($F_{i2,i2B}^{caso\ 2B}$). De lo contrario, los flujos de pozo profundo del Caso 2 ($F_{i,i2}^{caso\ 2}$) no se enviarán al Caso A ($F_{i2,i2A}^{caso\ 2A}$) ni al Caso B ($F_{i2,i2B}^{caso\ 2B}$), ya que las variables booleanas ($Y_{i2,i2A}^{F2A}$) y ($Y_{i2,i2B}^{F2B}$) son falsas (es decir, las variables ($Y_{i2,i2A}^{F2A}$) y ($Y_{i2,i2B}^{F2B}$) son iguales a 0). La toma de decisiones para el caso de las variables booleanas se representaría mediante la siguiente Ecuación:

$$\sum_{i2=1}^{I2} (Y_{i2,i2A}^{F2A}) + \sum_{i2=1}^{I2} (Y_{i2,i2B}^{F2B}) \leq 2, \quad \forall i2A \in I2A, \quad \forall i2B \in I2B \quad (3.2.82)$$

Los límites inferior y superior de las variables de flujo para el Caso 2 para cada caso se muestran en las Ecuaciones (3.2.83 y 3.2.84) y (3.2.85 y 3.2.86), respectivamente.

$$F_{i2,i2A}^{caso\ 2A} \geq -Y_{i2,i2A}^{F2A} M^{2A}, \quad \forall i2 \in I2, \quad \forall i2A \in I2A \quad (3.2.83)$$

$$F_{i2,i2B}^{caso\ 2B} \geq -Y_{i2,i2B}^{F2B} M^{2B}, \quad \forall i2 \in I2, \quad \forall i2B \in I2B \quad (3.2.84)$$

$$F_{i2,i2A}^{caso\ 2A} \leq Y_{i2,i2A}^{F2A} M^{2A}, \quad \forall i2 \in I2, \quad \forall i2A \in I2A \quad (3.2.85)$$

$$F_{i2,i2B}^{caso\ 2B} \leq Y_{i2,i2B}^{F2B} M^{2B}, \quad \forall i2 \in I2, \quad \forall i2B \in I2B \quad (3.2.86)$$

Balances de masa Caso 2, Caso A: Tras decidir la ubicación de la planta, también debe decidirse la tecnología que se utilizará en la ubicación seleccionada. Por lo tanto, los flujos de pozo profundo resultantes de la decisión del Caso A ($F_{i2,i2A}^{caso\ 2A}$) son iguales a la suma de los flujos de pozo profundo para la tecnología 1 ($F_{i2A,i2A1}^{caso\ 2A1}$), para la tecnología 2 ($F_{i2A,i2A2}^{caso\ 2A2}$) y para la tecnología 3 ($F_{i2A,i2A3}^{caso\ 2A3}$).

$$\sum_{i2=1}^{I2} (F_{i2,i2A}^{caso\ 2A}) = \sum_{i2A1=1}^{I2A1} (F_{i2A,i2A1}^{caso\ 2A1}) + \sum_{i2A2=1}^{I2A2} (F_{i2A,i2A2}^{caso\ 2A2}) + \sum_{i2A3=1}^{I2A3} (F_{i2A,i2A3}^{caso\ 2A3}), \quad (3.2.87)$$

$\forall i2A \in I2A$

Balances de propiedades Caso 2, Caso A: Para determinar la propiedad de los flujos ($F_{i2A,i2A1}^{caso\ 2A1}$), ($F_{i2A,i2A2}^{caso\ 2A2}$) y ($F_{i2A,i2A3}^{caso\ 2A3}$), se aplica la regla de mezcla en la Ecuación (3.2.88)

$$\sum_{i2=1}^{I2} (F_{i2,i2A}^{caso\ 2A} P_{i2,i2A}^{caso\ 2A}) = \sum_{i2A1=1}^{I2A1} (F_{i2A,i2A1}^{caso\ 2A1} P_{i2A,i2A1}^{caso\ 2A1}) + \sum_{i2A2=1}^{I2A2} (F_{i2A,i2A2}^{caso\ 2A2} P_{i2A,i2A2}^{caso\ 2A2}) + \sum_{i2A3=1}^{I2A3} (F_{i2A,i2A3}^{caso\ 2A3} P_{i2A,i2A3}^{caso\ 2A3}), \quad (3.2.88)$$

$\forall i2A \in I2A$

Disyunción lógica Caso 2, Caso A: Al tomar decisiones sobre los flujos de pozos profundos del Caso 2 en el Caso A ($F_{i2,i2A}^{caso\ 2A}$) a los Casos 1, 2 y 3, debe asegurarse que todos los flujos ($F_{i2,i2A}^{caso\ 2A}$) se dirijan solo a uno de los casos, es decir, los flujos ($F_{i2A,i2A1}^{caso\ 2A1}$), y que se elija solo una de las tres tecnologías (absorción, ósmosis inversa o coagulación/filtración para su tratamiento). La siguiente disyunción describe la condición mencionada:

$$\left[F_{i2,i2A}^{caso\ 2A} = \sum_{i2A1=1}^{I2A1} (F_{i2A,i2A1}^{caso\ 2A1}) \right] \vee \left[F_{i2,i2A}^{caso\ 2A} = \sum_{i2A2=1}^{I2A2} (F_{i2A,i2A2}^{caso\ 2A2}) \right] \vee \left[F_{i2,i2A}^{caso\ 2A} = \sum_{i2A3=1}^{I2A3} (F_{i2A,i2A3}^{caso\ 2A3}) \right] \quad (3.2.89)$$

Donde (Y_{i2A1}^{F2A1}), (Y_{i2A2}^{F2A2}) y (Y_{i2A3}^{F2A3}) son variables lógicas utilizadas para denotar la selección de flujos de pozos profundos para los Casos 1, 2 y 3 respectivamente. Esta disyunción implica que cuando las variables booleanas (Y_{i2A1}^{F2A1}), (Y_{i2A2}^{F2A2}) o (Y_{i2A3}^{F2A3}) son verdaderas (es decir, las variables son iguales a 1), los flujos de pozos profundos en el Caso 2 en el Caso A se envían al Caso 1 ($F_{i2A,i2A1}^{caso\ 2A1}$), Caso 2

($F_{i2A,i2A2}^{caso\ 2A2}$) o Caso 3 ($F_{i2A,i2A3}^{caso\ 2A3}$). Si el flujo del pozo profundo ($F_{i2,i2A}^{caso\ 2A}$) no se envía a los casos 1, 2 o 3, las variables booleanas (Y_{i2A1}^{F2A1}), (Y_{i2A2}^{F2A2}) o (Y_{i2A3}^{F2A3}) son falsas (es decir, son iguales a 0). En este caso, los flujos del pozo profundo para los Caso 1 ($F_{i2A,i2A1}^{caso\ 2A1}$), Caso 2 ($F_{i2A,i2A2}^{caso\ 2A2}$) o Caso 3 ($F_{i2A,i2A3}^{caso\ 2A3}$) son nulos. La siguiente Ecuación se utiliza para seleccionar la distribución de flujos del pozo profundo del caso 2 en el caso A para los casos 1, 2 y 3:

$$Y_{i2A1}^{F2A1} + Y_{i2A2}^{F2A2} + Y_{i2A3}^{F2A3} = 1, \quad \forall i2A1 \in I2A1, \quad \forall i2A2 \in I2A2, \quad \forall i2A3 \in I2A3 \quad (3.2.90)$$

Los límites inferior y superior de las variables de flujo para el Caso 2 en el Caso A para cada caso se muestran en las Ecuaciones (3.2.91 a 3.2.93) y (3.2.94 a 3.2.96), respectivamente.

$$\sum_{i2A=1}^{I2A} (F_{i2A,i2A1}^{caso\ 2A1}) \geq -Y_{i2A1}^{F2A1} M^{2A1}, \quad \forall i2A \in I2A, \quad \forall i2A1 \in I2A1 \quad (3.2.91)$$

$$\sum_{i2A=1}^{I2A} (F_{i2A,i2A2}^{caso\ 2A2}) \geq -Y_{i2A2}^{F2A2} M^{2A2}, \quad \forall i2A \in I2A, \quad \forall i2A2 \in I2A2 \quad (3.2.92)$$

$$\sum_{i2A=1}^{I2A} (F_{i2A,i2A3}^{caso\ 2A3}) \geq -Y_{i2A3}^{F2A3} M^{2A3}, \quad \forall i2A \in I2A, \quad \forall i2A3 \in I2A3 \quad (3.2.93)$$

$$\sum_{i2A=1}^{I2A} (F_{i2A,i2A1}^{caso\ 2A1}) \leq Y_{i2A1}^{F2A1} M^{2A1}, \quad \forall i2A \in I2A, \quad \forall i2A1 \in I2A1 \quad (3.2.94)$$

$$\sum_{i2A=1}^{I2A} (F_{i2A,i2A2}^{caso\ 2A2}) \leq Y_{i2A2}^{F2A2} M^{2A2}, \quad \forall i2A \in I2A, \quad \forall i2A2 \in I2A2 \quad (3.2.95)$$

$$\sum_{i2A=1}^{I2A} (F_{i2A,i2A3}^{caso\ 2A3}) \leq Y_{i2A3}^{F2A3} M^{2A3}, \quad \forall i2A \in I2A, \quad \forall i2A3 \in I2A3 \quad (3.2.96)$$

Balances de masa Caso 2, Caso A en la entrada de tecnología: En el Caso 2, los flujos de pozo profundo en el Caso A que ingresan a las tecnologías 1, 2 y 3 son ($F_{i2A1,i2A1T}^{caso\ 2A1T}$), ($F_{i2A2,i2A2T}^{caso\ 2A2T}$) y ($F_{i2A3,i2A3T}^{caso\ 2A3T}$) que provienen de los flujos de pozo profundo ($F_{i2A,i2A1}^{caso\ 2A1}$), ($F_{i2A,i2A2}^{caso\ 2A2}$) y ($F_{i2A,i2A3}^{caso\ 2A3}$), respectivamente, como se muestra en las Ecuaciones (3.2.97, 3.2.98 y 3.2.99):

$$\sum_{i2A=1}^{I2A} (F_{i2A,i2A1}^{caso\ 2A1}) = \sum_{i2A1T=1}^{I2A1T} (F_{i2A1,i2A1T}^{caso\ 2A1T}), \quad \forall i2A1 \in I2A1 \quad (3.2.97)$$

$$\sum_{i2A=1}^{I2A} (F_{i2A,i2A2}^{caso\ 2A2}) = \sum_{i2A2T=1}^{I2A2T} (F_{i2A2,i2A2T}^{caso\ 2A2T}), \quad \forall i2A2 \in I2A2 \quad (3.2.98)$$

$$\sum_{i2A=1}^{I2A} (F_{i2A,i2A3}^{caso\ 2A3}) = \sum_{i2A3T=1}^{I2A3T} (F_{i2A3,i2A3T}^{caso\ 2A3T}), \quad \forall i2A3 \in I2A3 \quad (3.2.99)$$

Balances de propiedades Caso 2, Caso A en la entrada de tecnologías: Las propiedades de los flujos $(P_{i2A,i2A1}^{caso\ 2A12A1})$, $(P_{i2A,i2A2}^{caso\ 2A12A2})$ y $(P_{i2A,i2A3}^{caso\ 2A12A3})$, se obtienen con las reglas de mezcla que se muestran en las Ecuaciones (3.2.100 a 3.2.102), respectivamente.

$$\sum_{i2A=1}^{I2A} (F_{i2A,i2A1}^{caso\ 2A1} P_{i2A,i2A1}^{caso\ 2A12A1}) = \sum_{i2A1T=1}^{I2A1T} (F_{i2A1,i2A1T}^{caso\ 2A12A1T} P_{i2A1,i2A1T}^{caso\ 2A12A1T}), \quad \forall i2A1 \in I2A1 \quad (3.2.100)$$

$$\sum_{i2A=1}^{I2A} (F_{i2A,i2A2}^{caso\ 2A12A2} P_{i2A,i2A2}^{caso\ 2A12A2}) = \sum_{i2A2T=1}^{I2A2T} (F_{i2A2,i2A2T}^{caso\ 2A12A2T} P_{i2A2,i2A2T}^{caso\ 2A12A2T}), \quad \forall i2A2 \in I2A2 \quad (3.2.101)$$

$$\sum_{i2A=1}^{I2A} (F_{i2A,i2A3}^{caso\ 2A12A3} P_{i2A,i2A3}^{caso\ 2A12A3}) = \sum_{i2A3T=1}^{I2A3T} (F_{i2A3,i2A3T}^{caso\ 2A12A3T} P_{i2A3,i2A3T}^{caso\ 2A12A3T}), \quad \forall i2A3 \in I2A3 \quad (3.2.102)$$

Balances de masa Caso 2, Caso A, a la salida de las tecnologías: Los flujos de pozo profundo del Caso 2 en el Caso A que salen de las tecnologías 1, 2 y 3 son $(F_{i2A1T,i2A1F}^{caso\ 2A1F})$, $(F_{i2A2T,i2A2F}^{caso\ 2A2F})$ y $(F_{i2A3T,i2A3F}^{caso\ 2A3F})$ de las entradas $(F_{i2A1,i2A1T}^{caso\ 2A1T})$, $(F_{i2A2,i2A2T}^{caso\ 2A2T})$ y $(F_{i2A3,i2A3T}^{caso\ 2A3T})$, respectivamente, como se muestra a continuación:

$$\sum_{i2A1=1}^{I2A1} (F_{i2A1,i2A1T}^{caso\ 2A1T}) = \sum_{i2A1F=1}^{I2A1F} (F_{i2A1T,i2A1F}^{caso\ 2A1F}), \quad \forall i2A1T \in I2A1T \quad (3.2.103)$$

$$\sum_{i2A2=1}^{I2A2} (F_{i2A2,i2A2T}^{caso\ 2A2T}) = \sum_{i2A2F=1}^{I2A2F} (F_{i2A2T,i2A2F}^{caso\ 2A2F}), \quad \forall i2A2T \in I2A2T \quad (3.2.104)$$

$$\sum_{i2A3=1}^{I2A3} (F_{i2A3,i2A3T}^{caso\ 2A3T}) = \sum_{i2A3F=1}^{I2A3F} (F_{i2A3T,i2A3F}^{caso\ 2A3F}), \quad \forall i2A3T \in I2A3T \quad (3.2.105)$$

Balances de propiedades Caso 2, Caso A, a la salida de las tecnologías: Las propiedades de los flujos $(F_{i2A1T,i2A1F}^{caso\ 2A1F})$, $(F_{i2A2T,i2A2F}^{caso\ 2A2F})$ y $(F_{i2A3T,i2A3F}^{caso\ 2A3F})$ dependen de la tecnología seleccionada; los factores de conversión (ξ_{I2A1T}) , (ξ_{I2A2T}) y (ξ_{I2A3T}) corresponden a las tecnologías 1, 2 y 3, respectivamente. Estos factores se muestran en la **Tabla 3.2.1**, mientras que las siguientes Ecuaciones muestran los balances de propiedades:

$$\sum_{i2A1F=1}^{I2A1F} (P_{i2A1T,i2A1F}^{caso\ 2A1F}) = (1 - \xi_{I2A1T}) \sum_{i2A1=1}^{I2A1} (P_{i2A1,i2A1T}^{caso\ 2A1T}), \quad \forall i2A1T \in I2A1T \quad (3.2.106)$$

$$\sum_{i2A2F=1}^{I2A2F} (P_{i2A2T,i2A2F}^{caso\ 2A2F}) = (1 - \xi_{I2A2T}) \sum_{i2A2=1}^{I2A2} (P_{i2A2,i2A2T}^{caso\ 2A2T}), \quad \forall i2A2T \in I2A2T \quad (3.2.107)$$

$$\sum_{i2A3F=1}^{I2A3F} (P_{i2A3T,i2A3F}^{caso\ 2A3F}) = (1 - \xi_{I2A3T}) \sum_{i2A3=1}^{I2A3} (P_{i2A3,i2A3T}^{caso\ 2A3T}), \quad \forall i2A3T \in I2A3T \quad (3.2.108)$$

Balances de masa Caso 2, Caso A, a demanda: Los flujos de pozos profundos del Caso 1 en el Caso A, correspondientes a las tecnologías 1, 2 y 3 $(F_{i2A1T,i2A1F}^{caso\ 2A1F})$, $(F_{i2A2T,i2A2F}^{caso\ 2A2F})$ y $(F_{i2A3T,i2A3F}^{caso\ 2A3F})$ tienen sus puntos de división $(F_{i2A1F,j}^{flujo,11})$, $(F_{i2A2F,j}^{flujo,12})$ y $(F_{i2A3F,j}^{flujo,13})$, respectivamente. Esto se muestra en las siguientes Ecuaciones:

$$\sum_{i2A1T=1}^{I2A1T} (F_{i2A1T,i2A1F}^{caso\ 2A1F}) = \sum_{j=1}^J (F_{i2A1F,j}^{flujo,11}), \quad \forall i2A1F \in I2A1F \quad (3.2.109)$$

$$\sum_{i_{2A2T}=1}^{I_{2A2T}} (F_{i_{2A2T},i_{2A2F}}^{caso\ 2A2F}) = \sum_{j=1}^J (F_{i_{2A2F},j}^{flu j,12}), \quad \forall i_{2A2F} \in I_{2A2F} \quad (3.2.110)$$

$$\sum_{i_{2A3T}}^{I_{2A3T}} (F_{i_{2A3T},i_{2A3F}}^{caso\ 2A3F}) = \sum_{j=1}^J (F_{i_{2A3F},j}^{flu j,13}), \quad \forall i_{2A3F} \in I_{2A3F} \quad (3.2.111)$$

Balances de propiedades Caso 2, Caso, A demanda: Las propiedades de los pozos profundos del Caso 2 en el Caso A que existen en las tecnologías 1 ($F_{i_{2A1F},j}^{flu j,11}$), 2 ($F_{i_{2A2F},j}^{flu j,12}$) y 3 ($F_{i_{2A3F},j}^{flu j,13}$) están determinadas por las reglas de mezcla que se muestran en las Ecuaciones (3.2.112 a 3.2.114).

$$\sum_{i_{2A1T}=1}^{I_{2A1T}} (F_{i_{2A1T},i_{2A1F}}^{caso\ 2A1F} P_{i_{2A1T},i_{2A1F}}^{caso\ 2A1F}) = \sum_{j=1}^J (F_{i_{2A1F},j}^{flu j,11} P_{i_{2A1F},j}^{flu j,11}), \quad \forall i_{2A1F} \in I_{2A1F} \quad (3.2.112)$$

$$\sum_{i_{2A2T}=1}^{I_{2A2T}} (F_{i_{2A2T},i_{2A2F}}^{caso\ 2A2F} P_{i_{2A2T},i_{2A2F}}^{caso\ 2A2F}) = \sum_{j=1}^J (F_{i_{2A2F},j}^{flu j,12} P_{i_{2A2F},j}^{flu j,12}), \quad \forall i_{2A2F} \in I_{2A2F} \quad (3.2.113)$$

$$\sum_{i_{2A3T}}^{I_{2A3T}} (F_{i_{2A3T},i_{2A3F}}^{caso\ 2A3F} P_{i_{2A3T},i_{2A3F}}^{caso\ 2A3F}) = \sum_{j=1}^J (F_{i_{2A3F},j}^{flu j,13} P_{i_{2A3F},j}^{flu j,13}), \quad \forall i_{2A3F} \in I_{2A3F} \quad (3.2.114)$$

Balances de masa y propiedad Caso 2, Caso B: Tanto para los balances de masa como de propiedad para este caso, se supone que los flujos de los pozos profundos que llegan al Caso 2 en el Caso B ($F_{i_2,i_{2B}}^{caso\ 2B}$) son iguales a los puntos de división ($F_{i_{2B},j}^{flu j,14}$), y se envían a los puntos de demanda de los pozos profundos para mezclarse como se describe en las siguientes Ecuaciones:

$$\sum_{i_2=1}^{I_2} (F_{i_2,i_{2B}}^{caso\ 2B}) = \sum_{j=1}^J (F_{i_{2B},j}^{flu j,14}), \quad \forall i_{2B} \in I_{2B} \quad (3.2.115)$$

$$\sum_{i2=1}^{I2} (F_{i2,i2B}^{caso\ 2B} P_{i2,i2B}^{caso\ 2B}) = \sum_{j=1}^J (F_{i2B,j}^{flu j,14} P_{i2B,j}^{flu j,14}), \quad \forall i2B \in I2B \quad (3.2.116)$$

Balances de masa y propiedades para el Caso 3: El Caso 3 consiste únicamente en la combinación de los flujos del punto de origen del pozo profundo (F_i^{Fuente}) que llegan a este caso. Posteriormente, estos flujos se envían al punto de demanda del pozo profundo a través de los flujos divididos ($F_{i3,j}^{flu j,15}$) para completar la restricción ambiental. Los balances de masa y propiedades se describen en las siguientes Ecuaciones:

$$\sum_{i3=1}^{I3} (F_{i,i3}^{caso\ 3}) = \sum_{j=1}^J (F_{i3,j}^{flu j,15}), \quad \forall i3 \in I3 \quad (3.2.117)$$

$$\sum_{i3=1}^{I3} (F_{i,i3}^{caso\ 3} P_{i,i3}^{caso\ 3}) = \sum_{j=1}^J (F_{i3,j}^{flu j,15} P_{i3,j}^{flu j,15}), \quad \forall i3 \in I3 \quad (3.2.118)$$

Balances de masa y propiedades en demanda: El balance de masa del punto de demanda del pozo profundo ($F_j^{Demanda}$) es igual a la suma de todos los flujos de salida de cada caso (estos flujos son $F_{i2A1F,j}^{flu j,4}$, $F_{i2A2F,j}^{flu j,5}$, $F_{i1A3F,j}^{flu j,6}$, $F_{i1B1F,j}^{flu j,7}$, $F_{i1B2F,j}^{flu j,8}$, $F_{i1B3F,j}^{flu j,9}$, $F_{i1C,j}^{flu j,10}$, $F_{i2A1F,j}^{flu j,11}$, $F_{i2A2F,j}^{flu j,12}$, $F_{i2A3F,j}^{flu j,13}$, $F_{i2B,j}^{flu j,14}$ y $F_{i3,j}^{flu j,15}$) como se muestra en la siguiente Ecuación:

$$\begin{aligned} F_j^{Demanda} = & \sum_{i2A1F=1}^{I2A1F} (F_{i2A1F,j}^{flu j,4}) + \sum_{i2A2F=1}^{I2A2F} (F_{i2A2F,j}^{flu j,5}) + \sum_{i1A3F=1}^{I1A3F} (F_{i1A3F,j}^{flu j,6}) + \sum_{i1B1F=1}^{I1B1F} (F_{i1B1F,j}^{flu j,7}) \\ & + \sum_{i1B2F=1}^{I1B2F} (F_{i1B2F,j}^{flu j,8}) + \sum_{i1B3F=1}^{I1B3F} (F_{i1B3F,j}^{flu j,9}) + \sum_{i1C=1}^{I1C} (F_{i1C,j}^{flu j,10}) \\ & + \sum_{i2A1F=1}^{I2A1F} (F_{i2A1F,j}^{flu j,11}) + \sum_{i2A2F=1}^{I2A2F} (F_{i2A2F,j}^{flu j,12}) + \sum_{i2A3F=1}^{I2A3F} (F_{i2A3F,j}^{flu j,13}) \\ & + \sum_{i2B=1}^{I2B} (F_{i2B,j}^{flu j,14}) + \sum_{i3=1}^{I3} (F_{i3,j}^{flu j,15}), \quad \forall j \in J \end{aligned} \quad (3.2.119)$$

Mientras que los balances de propiedad se calculan con la siguiente regla de mezcla que se muestra en la Ecuación (3.2.120):

$$\begin{aligned}
F_j^{Demanda} P_j^{Demanda} &= \sum_{i2A1F=1}^{I2A1F} (F_{i2A1F,j}^{flu,j,4} P_{i2A1F,j}^{flu,j,4}) + \sum_{i2A2F=1}^{I2A2F} (F_{i2A2F,j}^{flu,j,5} P_{i2A2F,j}^{flu,j,5}) \\
&+ \sum_{i1A3F=1}^{I1A3F} (F_{i1A3F,j}^{flu,j,6} P_{i1A3F,j}^{flu,j,6}) + \sum_{i1B1F=1}^{I1B1F} (F_{i1B1F,j}^{flu,j,7} P_{i1B1F,j}^{flu,j,7}) \\
&+ \sum_{i1B2F=1}^{I1B2F} (F_{i1B2F,j}^{flu,j,8} P_{i1B2F,j}^{flu,j,8}) + \sum_{i1B3F=1}^{I1B3F} (F_{i1B3F,j}^{flu,j,9} P_{i1B3F,j}^{flu,j,9}) \\
&+ \sum_{i1C=1}^{I1C} (F_{i1C,j}^{flu,j,10} P_{i1C,j}^{flu,j,10}) + \sum_{i2A1F=1}^{I2A1F} (F_{i2A1F,j}^{flu,j,11} P_{i2A1F,j}^{flu,j,11}) \\
&+ \sum_{i2A2F=1}^{I2A2F} (F_{i2A2F,j}^{flu,j,12} P_{i2A2F,j}^{flu,j,12}) + \sum_{i2A3F=1}^{I2A3F} (F_{i2A3F,j}^{flu,j,13} P_{i2A3F,j}^{flu,j,13}) \\
&+ \sum_{i2B=1}^{I2B} (F_{i2B,j}^{flu,j,14} P_{i2B,j}^{flu,j,14}) + \sum_{i3=1}^{I3} (F_{i3,j}^{flu,j,15} P_{i3,j}^{flu,j,15}), \quad \forall j \in J
\end{aligned} \tag{3.2.120}$$

Restricciones de demanda: Los flujos del punto de demanda de pozos profundos ($F_j^{Demanda}$) deben satisfacer dos restricciones. La primera restricción es que los flujos de los pozos profundos deben satisfacer la demanda requerida de cada pozo profundo. Para aliviar esta restricción, se añade una variable de insatisfacción (F_j^{Dins}) a la situación en la que los flujos de la fuente no satisfacen los flujos de demanda ($F_j^{DemandaMAX}$), que se muestra en la **Tabla 3.2.2**, Ecuación (3.2.121). La segunda restricción define la concentración de arsénico permisible ($C^{MAX} = 9 \text{ mg/m}^3$) para los flujos de demanda, como se muestra en la Ecuación (3.2.122), lo que permite que el modelo matemático se adapte a los límites permisibles de arsénico variables que se encuentran globalmente. Si los límites permisibles de arsénico se establecen muy bajos, las estrategias del modelo priorizarán la instalación de plantas de eliminación, ya que la mezcla ya no sería una opción viable.

$$F_j^{Demanda} + F_j^{Dins} \leq F_j^{DemandaMAX}, \quad \forall j \in J \tag{3.2.121}$$

$$P_j^{Demanda} \leq C^{MAX}, \quad \forall j \in J \quad (3.2.122)$$

Tabla 3.2.2. Flujos Máximos del punto de demanda de pozo profundo.

Pozo	$F_j^{DemandaMAX}$ (hm ³ /5 año)
1	1.270901
2	0.630720
3	0.788400
4	0.726905
5	0.883008
6	0.842011
7	0.540842
8	1.825934
9	1.458540
10	0.165564
11	1.125835
12	2.414081
13	0.862510
14	0.450965
15	0.816782
16	0.679601
17	0.788400
18	1.963116
19	1.327666
20	0.649642
21	0.788400
22	2.641140
23	0.630720
24	0.804168
25	0.236520
26	0.425736
27	1.311898
28	0.843588
29	0.299592

30	1.400198
31	3.547800
32	0.788400
33	0.741096

Función Objetivo: La función objetivo se basa en minimizar los costos en un período de 5 años. Estos incluyen los costos operativos del tipo de tecnología utilizada en la planta, los costos de tubería y bombeo desde los puntos de fuente de pozos profundos hasta las nuevas ubicaciones de las plantas, los costos de tubería y bombeo desde las nuevas ubicaciones de la planta hasta los puntos de demanda de pozos profundos, los costos de tubería y bombeo desde los puntos de fuente de pozos profundos hasta los pozos profundos de demanda, y los costos de instalación de cada tipo de tecnología en cada ubicación activando con las variables binarias respectivas para cada caso y dividiendo entre el número total de pozos en estudio (33 pozos profundos) como se muestra en la siguiente Ecuación ([Akhilesh et al., 2022](#); [Olivarez-Areyan et al., 2022](#); [INTI, 2021](#)) datos obtenidos y actualizados hasta 2023 con (CEPCI, 2023) (ver **Tabla 3.2.3**).

Tabla 3.2.3. Costos de instalación y operación.

Tecnología	Costo de Operación (\$/m ³)	Costo de Instalación (\$)
Absorbedores	1.6141	7,440,102
Ósmosis Inversa	2.9591	9,788,546
Coagulación/Filtración	0.1345	2,784,237

$$\begin{aligned}
C^{TB,O} = & \sum_{i1A=1}^{I1A} \sum_{i1A1=1}^{I1A1} [F_{i1A,i1A1}^{caso\ 1A1} (CO_{i1A1}^{F1A1} + CPP_{i1A,i1A1}^{F1A1})] \\
& + \sum_{i1A=1}^{I1A} \sum_{i1A2=1}^{I1A2} [F_{i1A,i1A2}^{caso\ 1A2} (CO_{i1A2}^{F1A2} + CPP_{i1A,i1A2}^{F1A2})] \\
& + \sum_{i1A=1}^{I1A} \sum_{i1A3=1}^{I1A3} [F_{i1A,i1A3}^{caso\ 1A3} (CO_{i1A3}^{F1A3} + CPP_{i1A,i1A3}^{F1A3})] \\
& + \sum_{i1B=1}^{I1B} \sum_{i1B1=1}^{I1B1} [F_{i1B,i1B1}^{caso\ 1B1} (CO_{i1B1}^{F1B1} + CPP_{i1B,i1B1}^{F1B1})] \\
& + \sum_{i1B=1}^{I1B} \sum_{i1B2=1}^{I1B2} [F_{i1B,i1B2}^{caso\ 1B2} (CO_{i1B2}^{F1B2} + CPP_{i1B,i1B2}^{F1B2})] \\
& + \sum_{i1B=1}^{I1B} \sum_{i1B3=1}^{I1B3} [F_{i1B,i1B3}^{caso\ 1B3} (CO_{i1B3}^{F1B3} + CPP_{i1B,i1B3}^{F1B3})] \\
& + \sum_{i2A=1}^{I2A} \sum_{i2A1=1}^{I2A1} [F_{i2A,i2A1}^{caso\ 2A1} (CO_{i2A1}^{F2A1} + CPP_{i2A,i2A1}^{F2A1})] \\
& + \sum_{i2A=1}^{I2A} \sum_{i2A2=1}^{I2A2} [F_{i2A,i2A2}^{caso\ 2A2} (CO_{i2A2}^{F2A2} + CPP_{i2A,i2A2}^{F2A2})] \\
& + \sum_{i2A=1}^{I2A} \sum_{i2A3=1}^{I2A3} [F_{i2A,i2A3}^{caso\ 2A3} (CO_{i2A3}^{F2A3} + CPP_{i2A,i2A3}^{F2A3})]
\end{aligned} \tag{3.2.123}$$

$$\begin{aligned}
C^{TB} = & \sum_{i1A1F=1}^{I1A1F} \sum_{j=1}^J \left(F_{i1A1F,j}^{flu,j,4} CPP_{i1A1F,j}^{CI4J} \right) \\
& + \sum_{i1A2F=1}^{I1A2F} \sum_{j=1}^J \left(F_{i1A2F,j}^{lu,j,5} CPP_{i1A2F,j}^{CI5J} \right) \\
& + \sum_{i1A3F=1}^{I1A3F} \sum_{j=1}^J \left(F_{i1A3F,j}^{lu,j,6} CPP_{i1A3F,j}^{CI6J} \right) \\
& + \sum_{i1B1F=1}^{I1B1F} \sum_{j=1}^J \left(F_{i1B1F,j}^{lu,j,7} CPP_{i1B1F,j}^{CI7J} \right) \\
& + \sum_{i1B2F=1}^{I1B2F} \sum_{j=1}^J \left(F_{i1B2F,j}^{lu,j,8} CPP_{i1B2F,j}^{CI8J} \right) \\
& + \sum_{i1B3F=1}^{I1B3F} \sum_{j=1}^J \left(F_{i1B3F,j}^{lu,j,9} CPP_{i1B3F,j}^{CI9J} \right) \\
& + \sum_{i1C=1}^{I1C} \sum_{j=1}^J \left(F_{i1C,j}^{lu,j,10} CPP_{i1C,j}^{CI10J} \right) \\
& + \sum_{i2A1F=1}^{I2A1F} \sum_{j=1}^J \left(F_{i2A1F,j}^{lu,j,11} CPP_{i2A1F,j}^{CI11J} \right) \\
& + \sum_{i2A2F=1}^{I2A2F} \sum_{j=1}^J \left(F_{i2A2F,j}^{lu,j,12} CPP_{i2A2F,j}^{CI12J} \right) \\
& + \sum_{i2A3F=1}^{I2A3F} \sum_{j=1}^J \left(F_{i2A3F,j}^{lu,j,13} CPP_{i2A3F,j}^{CI13J} \right) \\
& + \sum_{i2B=1}^{I2B} \sum_{j=1}^J \left(F_{i2B,j}^{lu,j,14} CPP_{i2B,j}^{CI14J} \right) \\
& + \sum_{i3=1}^{I3} \sum_{j=1}^J \left(F_{i3,j}^{lu,j,15} CPP_{i3,j}^{CI15J} \right)
\end{aligned} \tag{3.2.124}$$

$$\begin{aligned}
C^T = & \sum_{i1A1=1}^{I1A1} (CP_{i1A1}^{CI1A1} Y_{i1A1}^{F1A1}) + \sum_{i1A2=1}^{I1A2} (CP_{i1A2}^{CI1A2} Y_{i1A2}^{F1A2}) + \sum_{i1A3=1}^{I1A3} (CP_{i1A3}^{CI1A3} Y_{i1A3}^{F1A3}) \\
& + \sum_{i1B1=1}^{I1B1} (CP_{i1B1}^{CI1B1} Y_{i1B1}^{F1B1}) + \sum_{i1B2=1}^{I1B2} (CP_{i1B2}^{CI1B2} Y_{i1B2}^{F1B2}) \\
& + \sum_{i1B3=1}^{I1B3} (CP_{i1B3}^{CI1B3} Y_{i1B3}^{F1B3}) + \sum_{i2A1=1}^{I2A1} (CP_{i2A1}^{CI2A1} Y_{i2A1}^{F2A1}) \\
& + \sum_{i2A2=1}^{I2A2} (CP_{i2A2}^{CI2A2} Y_{i2A2}^{F2A2}) + \sum_{i2A3=1}^{I2A3} (CP_{i2A3}^{CI2A3} Y_{i2A3}^{F2A3})
\end{aligned} \tag{3.2.125}$$

$$MIN \quad CT = C^{TB,O} + C^{TB} + C^T \tag{3.2.126}$$

3.3. MODELO PARA LA IMPLEMENTACIÓN DE APRENDIZAJE PROFUNDO

Esta sección presenta la formulación del modelo matemático para una red de distribución de agua de edificios residenciales (ER). Dentro de esta formulación, se integra una RNAP para una PTAR. Esta sección se divide en cinco bloques. El primer bloque contiene todas las Ecuaciones de balance de masa y propiedades antes de la PTAR. Estas Ecuaciones incluyen la distribución de agua potable, agua tratada y agua tratada desde los tanques a los ER, así como los flujos de salida de aguas residuales desde los ER a la planta de tratamiento. El segundo bloque contiene las Ecuaciones de la RNAP; describe la planta de tratamiento y su implementación en el modelo matemático. Se muestran las Ecuaciones para cada capa de la RNAP y su interacción con el modelo matemático. El tercer bloque contiene las Ecuaciones de balance de masa y propiedades después de la planta de tratamiento. Estas incluyen los flujos de salida de agua tratada desde la planta de tratamiento a los tanques de almacenamiento, el reciclaje de agua tratada a los ER y el punto de vertido al ambiente. El cuarto bloque contiene las Ecuaciones de capacidad, tuberías, bombeo y costos dentro del modelo matemático. Estas Ecuaciones muestran el cálculo de la capacidad operativa de la planta de tratamiento y los tanques de almacenamiento de agua tratada, los costos de tuberías y bombeo desde los edificios residenciales hasta la planta de tratamiento, desde los tanques de almacenamiento hasta los edificios residenciales, y desde la planta de tratamiento hasta los edificios residenciales, y desde

las fuentes de agua dulce hasta los ER, y los costos de capital. El quinto bloque muestra las Ecuaciones objetivo: el costo anual total y el consumo total de agua dulce. El objetivo es encontrar la configuración que minimice ambas variables.

Los índices utilizados en el modelo matemático son los siguientes: i representa la fuente de agua dulce, j representa los edificios residenciales, k representa los diferentes usos domésticos (UD), l representa la planta de tratamiento de aguas residuales, m representa los puntos de vertido en el entorno, n representa los diferentes tanques de almacenamiento de agua tratada, nc y nnc representan las neuronas de las capas de la RNAP. Cabe recordar que estos conjuntos actúan como entradas y salidas dentro de las capas de la RNAP, y t representa el período de tiempo (día).

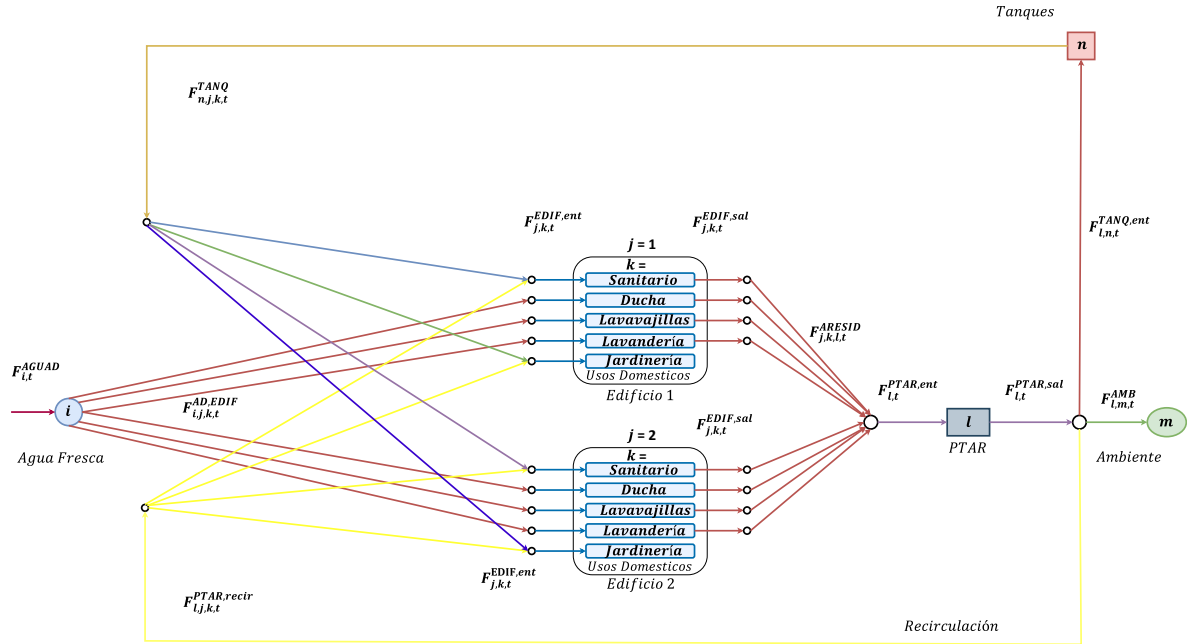


Fig. 3.3.1. Figura de la superestructura de la red de distribución de agua para el aprendizaje profundo.

ECUACIONES ANTES DE LA PTAR

Balance de agua dulce: La Ecuación (3.3.1) muestra los flujos de agua dulce ($F^{AD,EDIF}_{i,j,k,t}$) enviados a diferentes UD (k) en ERs (j) que están segregados de los flujos de agua dulce ($F^{AGUAD}_{i,t}$) a lo largo del tiempo (t).

$$F_{i,t}^{AGUAD} = \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K F_{i,j,k,t}^{AD,EDIF}, \quad \forall i \in I, \quad \forall t \in T \quad (3.3.1)$$

Balances antes de usos domésticos: El flujo de entrada en ERs ($F_{j,k,t}^{EDIF,ent}$) a lo largo del tiempo (t) es igual a la suma de los flujos de agua dulce enviados ($F_{i,j,k,t}^{AD,EDIF}$) a diferentes UD, el flujo de salida de diferentes ($F_{n,j,k,t}^{TANQ}$) tanques (n) y el flujo de salida de aguas residuales ($F_{l,j,k,t}^{PTAR,recir}$) planta (l) como se muestra en la Ecuación (3.3.2). Mientras que las propiedades ($P_{j,k,x,t}^{EDIF,ent}$) de los flujos ($F_{j,k,t}^{EDIF,ent}$) se calculan con las reglas de mezcla como se muestra en la Ecuación (3.3.3).

$$F_{j,k,t}^{EDIF,ent} = \sum_{i=1}^I F_{i,j,k,t}^{AD,EDIF} + \sum_{n=1}^N F_{n,j,k,t}^{TANQ} + \sum_{l=1}^N F_{l,j,k,t}^{PTAR,recir}, \quad \forall j \in J, \quad \forall k \in K, \quad \forall t \in T \quad (3.3.2)$$

$$\begin{aligned} F_{j,k,t}^{EDIF,ent} P_{j,k,x,t}^{EDIF,ent} &= \sum_{i=1}^I F_{i,j,k,t}^{AD,EDIF} P_{i,j,k,x,t}^{AD,EDIF} + \sum_{n=1}^N F_{n,j,k,t}^{TANQ} P_{n,j,k,x,t}^{TANQ} \\ &+ \sum_{l=1}^N F_{l,j,k,t}^{PTAR,recir} P_{l,j,k,x,t}^{PTAR,recir}, \quad \forall j \in J, \quad \forall k \in K, \\ &\forall x \in X, \quad \forall t \in T \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

Balance de usos domésticos: La Ecuación (3.3.4) muestra el flujo de salida para UD ($F_{j,k,t}^{EDIF,sal}$). Se trata de aguas residuales, cuyo flujo depende de la eficiencia del agua para UD proveniente de la entrada de ERs ($F_{j,k,t}^{EDIF,ent}$) a lo largo del tiempo (t).

$$F_{j,k,t}^{EDIF,sal} = (1 - \vartheta_{j,k,t}) F_{j,k,t}^{EDIF,ent}, \quad \forall j \in J, \quad \forall k \in K, \quad \forall t \in T \quad (3.3.4)$$

Donde ($\vartheta_{j,k,t}$) es la eficiencia; una función de los ERs (j) y los UD (k) a lo largo del tiempo (t). Para UD, la jardinería tiene una tasa de eficiencia del 100%, por lo que no se aplicó ruido gaussiano para este UD.

Balances después de usos domésticos: La entrada de aguas residuales ($F_{j,k,l,t}^{ARESID}$) a la PTAR (l) a lo largo del tiempo (t) es igual a la salida de los UD ($F_{j,k,t}^{EDIF,sal}$), como se muestra en la Ecuación (3.3.5). Las propiedades de las aguas residuales que entran a la planta de tratamiento ($P_{j,k,l,x,t}^{ARESID}$) dependen de

las propiedades de la salida ($P_{j,k,x,t}^{EDIF,sal}$) de los UDs, como se muestra en la Ecuación (3.3.6). Además, las propiedades para UD de jardinería carecen de valor debido a su eficiencia en el uso del agua.

$$F_{j,k,t}^{EDIF,sal} = \sum_{l=1}^L F_{j,k,l,t}^{ARESID}, \quad \forall j \in J, \quad \forall k \in K, \quad \forall t \in T \quad (3.3.5)$$

$$\begin{aligned} F_{j,k,t}^{EDIF,sal} P_{j,k,x,t}^{EDIF,sal} \\ = \sum_{l=1}^L F_{j,k,l,t}^{ARESID} P_{j,k,l,x,t}^{ARESID}, \quad \forall j \in J, \quad \forall k \in K, \quad \forall x \in X, \quad (3.3.6) \\ \forall t \in T \end{aligned}$$

Balances antes de la planta de tratamiento: La Ecuación (3.3.7) muestra la entrada de aguas residuales ($F_{l,t}^{PTAR,ent}$) a la planta de tratamiento (l) a lo largo del tiempo (t), que es igual a la suma de todas las entradas de aguas residuales a la planta de tratamiento ($F_{j,k,l,t}^{ARESID}$). Respecto al cálculo de las propiedades de entrada ($P_{l,x,t}^{PTAR,ent}$) a la planta de tratamiento, las reglas de mezcla se muestran en la Ecuación (3.3.8).

$$F_{l,t}^{PTAR,ent} = \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K F_{j,k,l,t}^{ARESID}, \quad \forall l \in L, \quad \forall t \in T \quad (3.3.7)$$

$$\begin{aligned} F_{l,t}^{PTAR,ent} P_{l,x,t}^{PTAR,ent} = \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K F_{j,k,l,t}^{ARESID} P_{j,k,l,x,t}^{ARESID}, \quad \forall l \in L, \quad \forall x \in X, \quad (3.3.8) \\ \forall t \in T \end{aligned}$$

ECUACIONES DE LA PTAR

Balances en la planta de tratamiento: El flujo de salida de agua tratada ($F_{l,t}^{PTAR,sal}$) de la PTAR (l) a lo largo del tiempo (t) es igual al flujo de entrada de aguas residuales en la planta de tratamiento ($F_{l,t}^{PTAR,ent}$), como se muestra en la Ecuación (3.3.9). Respecto a las propiedades de la PTAR, estas se calculan mediante las Ecuaciones de la RNAP. La Ecuación (3.3.10) muestra el cálculo de los datos de salida de la primera capa ($CP_{l,nc,t}^{1,PTAR}$) que es igual a la implementación de la función de activación Leaky ReLU en el resultado de la multiplicación de las propiedades de las aguas residuales de entrada ($P_{l,x,t}^{PTAR,ent}$) en la planta y los pesos ($W_{x,nc}^{1,PTAR}$) de la primera capa oculta y la suma de los sesgos ($B_{nc}^{1,PTAR}$) de la misma capa. Del mismo modo, los datos de salida para la primera capa

$(CP_{l,nc,t}^{1,PTAR})$ son los datos de entrada para la segunda capa $(CP_{l,nc,t}^{2,PTAR})$ como se muestra en la Ecuación (3.3.11). Los datos de salida de la segunda capa $(CP_{l,nc,t}^{2,PTAR})$ son también los datos de entrada para la tercera capa $(CP_{l,nc,t}^{3,PTAR})$ y sucesivamente para cada capa hasta la capa de salida como se muestra en la Ecuación (3.3.17) donde las propiedades del flujo de salida de agua tratada $(P_{l,x,t}^{PTAR,sal})$ están en la planta de tratamiento.

$$F_{l,t}^{PTAR,sal} = F_{l,t}^{PTAR,ent}, \quad \forall l \in L, \quad \forall t \in T \quad (3.3.9)$$

$$CP_{l,nc,t}^{1,PTAR} = \max \left(\alpha \left(\sum_{x=1}^X (P_{l,x,t}^{PTAR,ent} W_{x,nc}^{1,PTAR}) + B_{nc}^{1,PTAR} \right), \sum_{x=1}^X (P_{l,x,t}^{PTAR,ent} W_{x,nc}^{1,PTAR}) + B_{nc}^{1,PTAR} \right), \quad \forall l \in L, \quad (3.3.10)$$

$$\forall x \in X, \quad \forall t \in T$$

$$CP_{l,nc,t}^{2,PTAR} = \max \left(\alpha \left(\sum_{nnc=1}^{NNC} (CP_{l,nc,t}^{1,PTAR} W_{nnc,nc}^{2,PTAR}) + B_{nc}^{2,PTAR} \right), \sum_{nnc=1}^{NNC} (CP_{l,nc,t}^{1,PTAR} W_{nnc,nc}^{2,PTAR}) + B_{nc}^{2,PTAR} \right), \quad \forall l \in L, \quad (3.3.11)$$

$$\forall x \in X, \quad \forall t \in T$$

$$CP_{l,nc,t}^{3,PTAR} = \max \left(\alpha \left(\sum_{nnc=1}^{NNC} (CP_{l,nc,t}^{2,PTAR} W_{nnc,nc}^{3,PTAR}) + B_{nc}^{3,PTAR} \right), \sum_{nnc=1}^{NNC} (CP_{l,nc,t}^{2,PTAR} W_{nnc,nc}^{3,PTAR}) + B_{nc}^{3,PTAR} \right), \quad \forall l \in L, \quad (3.3.12)$$

$$\forall x \in X, \quad \forall t \in T$$

$$\begin{aligned}
CP_{l,nc,t}^{4,PTAR} = \max & \left(\alpha \left(\sum_{nnc=1}^{NNC} (CP_{l,nc,t}^{3,PTAR} W_{nnc,nc}^{4,PTAR}) \right. \right. \\
& \left. \left. + B_{nc}^{4,PTAR} \right), \sum_{nnc=1}^{NNC} (CP_{l,nc,t}^{3,PTAR} W_{nnc,nc}^{4,PTAR}) + B_{nc}^{4,PTAR} \right), \quad \forall l \in L, \\
& \forall x \in X, \quad \forall t \in T
\end{aligned} \tag{3.3.13}$$

$$\begin{aligned}
CP_{l,nc,t}^{5,PTAR} = \max & \left(\alpha \left(\sum_{nnc=1}^{NNC} (CP_{l,nc,t}^{4,PTAR} W_{nnc,nc}^{5,PTAR}) \right. \right. \\
& \left. \left. + B_{nc}^{5,PTAR} \right), \sum_{nnc=1}^{NNC} (CP_{l,nc,t}^{4,PTAR} W_{nnc,nc}^{5,PTAR}) + B_{nc}^{5,PTAR} \right), \quad \forall l \in L, \\
& \forall x \in X, \quad \forall t \in T
\end{aligned} \tag{3.3.14}$$

$$\begin{aligned}
CP_{l,nc,t}^{6,PTAR} = \max & \left(\alpha \left(\sum_{nnc=1}^{NNC} (CP_{l,nc,t}^{5,PTAR} W_{nnc,nc}^{6,PTAR}) \right. \right. \\
& \left. \left. + B_{nc}^{6,PTAR} \right), \sum_{nnc=1}^{NNC} (CP_{l,nc,t}^{5,PTAR} W_{nnc,nc}^{6,PTAR}) + B_{nc}^{6,PTAR} \right), \quad \forall l \in L, \\
& \forall x \in X, \quad \forall t \in T
\end{aligned} \tag{3.3.15}$$

$$\begin{aligned}
CP_{l,nc,t}^{7,PTAR} = \max & \left(\alpha \left(\sum_{nnc=1}^{NNC} (CP_{l,nc,t}^{6,PTAR} W_{nnc,nc}^{7,PTAR}) \right. \right. \\
& \left. \left. + B_{nc}^{7,PTAR} \right), \sum_{nnc=1}^{NNC} (CP_{l,nc,t}^{6,PTAR} W_{nnc,nc}^{7,PTAR}) + B_{nc}^{7,PTAR} \right), \quad \forall l \in L, \\
& \forall x \in X, \quad \forall t \in T
\end{aligned} \tag{3.3.16}$$

$$\begin{aligned}
P_{l,x,t}^{PTAR,sal} = \max & \left(\alpha \left(\sum_{nnc=1}^{NNC} (CP_{l,nc,t}^{7,PTAR} W_{nnc,x}^{PTAR,sal}) + B_x^{PTAR,sal} \right), \sum_{nnc=1}^{NNC} (CP_{l,nc,t}^{7,PTAR} W_{nnc,x}^{PTAR,sal}) \right. \\
& \left. + B_x^{PTAR,sal} \right), \quad \forall l \in L, \quad \forall x \in X, \quad \forall t \in T
\end{aligned} \tag{3.3.17}$$

ECUACIONES DESPUÉS DE LA PTAR

Balance después de la planta de tratamiento: El flujo de salida de agua tratada ($F_{l,t}^{PTAR,sal}$) en la planta de tratamiento (l) a lo largo del tiempo (t) se divide en el flujo de salida a los tanques ($F_{l,n,t}^{TANQ,ent}$), ambiente ($F_{l,m,t}^{AMB}$) y recirculación para UDs ($F_{l,j,k,t}^{PTAR,recir}$) como se muestra en la Ecuación (3.3.18).

$$F_{l,t}^{PTAR,sal} = \sum_{n=1}^N F_{l,n,t}^{TANQ,ent} + \sum_{m=1}^M F_{l,m,t}^{AMB} + \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K F_{l,j,k,t}^{PTAR,recir}, \quad (3.3.18)$$

$$\forall l \in L, \quad \forall t \in T$$

Balances en los tanques: La Ecuación (3.3.19) muestra el almacenamiento de agua tratada ($\mathcal{S}_{n,t}$) en los tanques (n) a lo largo del tiempo (t), que es igual al flujo de entrada en los tanques ($F_{l,n,t}^{TANQ,ent}$) más el almacenamiento de agua tratada en un período anterior ($\mathcal{S}_{n,t-1}$) menos el flujo de salida de los diferentes tanques ($F_{n,j,k,t}^{TANQ}$). La Ecuación (3.3.20) muestra las reglas de mezcla para calcular las propiedades del almacenamiento de agua tratada en tanques.

$$\mathcal{S}_{n,t} = \mathcal{S}_{n,t-1} + \sum_{l=1}^L F_{l,n,t}^{TANQ,ent} - \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K F_{n,j,k,t}^{TANQ}, \quad \forall n \in N, \quad \forall t \in T \quad (3.3.19)$$

$$\mathcal{S}_{n,t} \mathcal{S}P_{n,x,t} = \mathcal{S}_{n,t-1} \mathcal{S}P_{n,x,t-1} + \sum_{l=1}^L F_{l,n,t}^{TANQ,ent} P_{l,n,x,t}^{TANQ,ent} - \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K F_{n,j,k,t}^{TANQ} P_{n,j,k,x,t}^{TANQ}, \quad (3.3.20)$$

$$\forall l \in L, \quad \forall x \in X, \quad \forall t \in T$$

Restricción de almacenamiento inicial y final en tanques: El almacenamiento de agua tratada ($\mathcal{S}_{n,t=1}$) en tanques (n) en el primer período de tiempo (t) es igual al almacenamiento de agua tratada ($\mathcal{S}_{n,t=T}$) en tanques (n) en el último período de tiempo como se muestra en la Ecuación (3.3.21).

$$\mathcal{S}_{n,t=1} = \mathcal{S}_{n,t=T}, \quad \forall n \in N, \quad \forall t \in T \quad (3.3.21)$$

ECUACIONES DE CAPACIDAD, COSTO, TUBERÍAS Y BOMBEO

Restricción de almacenamiento en tanques: El almacenamiento de agua tratada ($\mathcal{S}_{n,t}$) en tanques (n) a lo largo del tiempo (t) es menor que la capacidad de almacenamiento de los tanques ($\mathcal{S}_n^{cap}$), como se muestra en la Ecuación (3.3.22).

$$\mathcal{S}_{n,t} \leq \mathcal{S}_n^{cap}, \quad \forall n \in N, \quad \forall t \in T \quad (3.3.22)$$

Restricción de existencia de tanques: La Ecuación (3.3.23) muestra que la relación lógica entre la existencia de capacidad de almacenamiento ($\mathcal{S}_n^{cap}$) en los tanques debe ser menor que la capacidad máxima de almacenamiento ($\mathcal{S}^{max}$) por el producto de una variable binaria (y_n^{scap}). Si la variable binaria es igual a 1, existe capacidad de almacenamiento en los tanques (n). Lo opuesto a esto es (y_n^{scap}) igual a 0 donde la capacidad de almacenamiento no existe.

$$\mathcal{S}_n^{cap} \leq \mathcal{S}^{max} y_n^{scap}, \quad \forall n \in N \quad (3.3.23)$$

Restricción de capacidad de la PTAR: La capacidad de tratamiento de la planta de aguas residuales ($PTAR_l^{cap}$) debe ser mayor o igual que la entrada de aguas residuales ($F_{l,t}^{PTAR,ent}$) en la planta a lo largo del tiempo (t) como se muestra en la Ecuación (3.3.24).

$$F_{l,t}^{PTAR,ent} \leq PTAR_l^{cap}, \quad \forall l \in L, \quad \forall t \in T \quad (3.3.24)$$

Restricción de la existencia de tuberías para uso doméstico a plantas de tratamiento: La Ecuación (3.3.25) muestra la relación lógica de la existencia de tuberías para los UD's (k) en ER's (j) a la PTAR (l). El flujo de entrada de aguas residuales a la planta de tratamiento ($F_{j,k,l,t}^{ARESID}$) debe ser menor que igual a la capacidad máxima de la planta de tratamiento de aguas residuales ($PTAR_{j,k}^{cap,max}$) multiplicada por la variable binaria ($y_{j,k,l}^{F^{ARESID}}$). Si la variable binaria es igual a 1, implica la existencia de tuberías para los UD's a la planta de tratamiento, mientras que, si la variable binaria es 0, entonces no hay tuberías para los UD's a la PTAR.

$$F_{j,k,l,t}^{ARESID} \leq PTAR_{j,k}^{cap,max} y_{j,k,l}^{F^{ARESID}}, \quad \forall j \in J, \quad \forall k \in K, \quad \forall l \in L, \quad \forall t \in T \quad (3.3.25)$$

Restricción de la existencia de tuberías desde los tanques para uso doméstico: El flujo de salida de los diferentes tanques ($F_{n,j,k,t}^{TANQ}$) debe ser menor que igual a la capacidad máxima de la PTAR ($PTAR_{j,k}^{cap,max}$) multiplicado por la variable binaria ($y_{n,j,k}^{F^{TANQ}}$). Si el flujo de salida de los tanques sale, implica que la variable binaria es igual a 1, es decir, hay tuberías desde los tanques para los UD. Si no hubiera flujos desde los tanques, la variable binaria sería igual a 0. Esto significa que no hay tuberías desde los tanques para los UD, como se muestra en la Ecuación (3.3.26).

$$F_{n,j,k,t}^{TANQ} \leq PTAR_{j,k}^{cap,max} y_{n,j,k}^{F^{TANQ}}, \quad \forall n \in K, \quad \forall j \in J, \quad \forall k \in K, \quad \forall t \in T \quad (3.3.26)$$

Restricción de la existencia de tuberías desde la planta de tratamiento para usos domésticos: La Ecuación (3.3.27) muestra que, cuando hay tuberías desde la planta de tratamiento para los UD, la variable binaria ($y_{l,j,k}^{F^{PTAR,recir}}$) es igual a 1, y cuando no hay flujos desde la planta de tratamiento para los UD, no hay tuberías. La variable binaria ($y_{l,j,k}^{F^{PTAR,recir}}$) es igual a 0.

$$F_{l,j,k,t}^{PTAR,recir} \leq PTAR_{j,k}^{cap,max} y_{l,j,k}^{F^{PTAR,recir}}, \quad \forall l \in L, \quad \forall j \in J, \quad \forall k \in K, \quad \forall t \in T \quad (3.3.27)$$

Restricción de capacidad máxima de flujos: Las Ecuaciones (3.3.28, 3.3.29, 3.3.30) muestran la capacidad de las tuberías para los flujos de los UD hacia la planta de tratamiento ($Q_{j,k,l}^{UD,cap}$), flujos desde tanques para los UD ($Q_{n,j,k}^{T,cap}$) y flujos desde la PTAR para los UD ($Q_{l,j,k}^{PTAR,cap}$); calculados a partir del flujo transportado en ($F_{j,k,l,t}^{ARESID}$), ($F_{n,j,k,t}^{TANQ}$) y ($F_{l,j,k,t}^{PTAR,recir}$), respectivamente.

$$F_{j,k,l,t}^{ARESID} \leq Q_{j,k,l}^{UD,cap}, \quad \forall j \in J, \quad \forall k \in K, \quad \forall l \in L, \quad \forall t \in T \quad (3.3.28)$$

$$F_{n,j,k,t}^{TANQ} \leq Q_{n,j,k}^{T,cap}, \quad \forall n \in N, \quad \forall j \in J, \quad \forall k \in K, \quad \forall t \in T \quad (3.3.29)$$

$$F_{l,j,k,t}^{PTAR,recir} \leq Q_{l,j,k}^{PTAR,cap}, \quad \forall l \in L, \quad \forall j \in J, \quad \forall k \in K, \quad \forall t \in T \quad (3.3.30)$$

Costo del bombeo de agua dulce: La Ecuación (3.3.31) muestra el cálculo del coste del agua dulce ($Cost^{AD}$) resultante del producto del coste unitario (c^{ad}) por el agua consumida ($F_{i,t}^{AGUAD}$) en todos

los periodos. La Ecuación (3.3.32) ilustra el cálculo del coste del bombeo de agua dulce ($Cost^{BombAD}$) resultante del producto del coste unitario de bombeo (c^{Bombad}) por el agua consumida ($F_{i,t}^{AGUAD}$) en todos los periodos.

$$Cost^{AD} = c^{ad} \sum_{i=1}^I \sum_{t=1}^T F_{i,t}^{AGUAD} \quad (3.3.31)$$

$$Cost^{BombAD} = c^{Bombad} \sum_{i=1}^I \sum_{t=1}^T F_{i,t}^{AGUAD} \quad (3.3.32)$$

Costo de bombeo del flujo de los tanques de recirculación a los edificios residenciales: El costo de bombear los tanques a los ERs ($Cost_{n,j,k}^{TANQ,Bomb}$) es el resultado de multiplicar el costo unitario de bombeo ($c^{tanq,bomb}$) por el flujo de salida de los tanques ($F_{n,j,k,t}^{TANQ}$) durante todos los períodos como se muestra en la Ecuación (3.3.33).

$$Cost_{n,j,k}^{TANQ,Bomb} = c^{tanq,bomb} \sum_{t=1}^T (F_{n,j,k,t}^{TANQ}), \quad \forall n \in N, \quad \forall j \in J, \quad \forall k \in K \quad (3.3.33)$$

Coste de bombeo del flujo de recirculación de la planta de tratamiento a edificios residenciales: El flujo de salida de la PTAR ($F_{l,j,k,t}^{PTAR,recir}$) que se recircula a los ERs durante todos los periodos se multiplica por el coste unitario de bombeo ($c^{ptar,bomb}$). Los resultados del coste de bombeo de los flujos de recirculación ($Cost_{l,j,k}^{PTAR,Bomb}$) se ilustran en la Ecuación (3.3.34).

$$Cost_{l,j,k}^{PTAR,Bomb} = c^{ptar,bomb} \sum_{t=1}^T (F_{l,j,k,t}^{PTAR,recir}), \quad \forall l \in L, \quad \forall j \in J, \quad \forall k \in K \quad (3.3.34)$$

Costo de operación de la planta de tratamiento: Los aportes de aguas residuales a la planta se implementan en un tratamiento que tiene un costo unitario, por lo tanto, el costo de operación de la planta de tratamiento ($Cost_l^{PTAR,OP}$) es igual al producto del costo unitario de operación ($c^{ptar,op}$) por el aporte a la planta en todos los periodos, como lo muestra la Ecuación (3.3.35).

$$Cost_l^{PTAR,OP} = c^{ptar,op} \sum_{t=1}^T (F_{l,t}^{PTAR,ent}), \quad \forall l \in L \quad (3.3.35)$$

Costo de capital de los tanques: El costo de capital de los tanques ($Cost_n^{CapTANQ}$) mostrado en la Ecuación (3.3.36) es igual al producto de los costos fijos de los tanques ($CostF^{TANQ}$) y la variable binaria de la capacidad de almacenamiento (y_n^{Scap}) en los tanques más el producto de los costos variables ($CostV^{TANK}$) y la capacidad de almacenamiento en los tanques (S_n^{cap}) elevado a un exponente de economías de escala (γ) de 0.6.

$$Cost_n^{CapTANQ} = CostF^{TANQ} y_n^{Scap} + CostV^{TANK} (S_n^{cap})^\gamma, \quad \forall n \in N \quad (3.3.36)$$

Costo de capital de la planta de tratamiento: La Ecuación (3.3.37) muestra los costos fijos de la planta de tratamiento ($CostF^{CapPTAR}$) más el producto de los costos variables de la planta de tratamiento ($CostV^{CapPTAR}$) y la capacidad de tratamiento de la planta de tratamiento ($PTAR_l^{cap}$) considerando que el exponente (γ) es igual al costo de capital de la planta de tratamiento ($Cost_l^{CapPTAR}$).

$$Cost_l^{CapPTAR} = CostF^{CapPTAR} + CostV^{CapPTAR} (PTAR_l^{cap})^\gamma, \quad \forall l \in L \quad (3.3.37)$$

Costo de capital de la tubería para la salida de edificios residenciales: El costo de capital de la tubería para la salida de los ERs ($Cost_{j,k,l}^{CapEDIF}$) es igual a los costos fijos de la tubería ($CostF^{CapEDIF}$) multiplicados por la variable binaria de existencia de la tubería ($y_{j,k,l}^{FARESID}$) más el producto de la variable de la tubería ($CostV^{CapEDIF}$) y las capacidades de la tubería ($Q_{j,k,l}^{UD,cap}$) elevadas a un exponente de economías de escala (γ) como se muestra en la Ecuación (3.3.38).

$$Cost_{j,k,l}^{CapEDIF} = CostF^{CapEDIF} y_{j,k,l}^{FARESID} + CostV^{CapEDIF} (Q_{j,k,l}^{UD,cap})^\gamma, \quad \forall j \in J, \quad \forall k \in K, \quad \forall l \in L \quad (3.3.38)$$

Costo de capital de la tubería para flujos de tanques a edificios residenciales: La Ecuación (3.3.39) muestra el cálculo del costo de capital de la tubería para flujos de tanques a los ERs

$(Cost_{n,j,k}^{CapTANQ})$ que es igual a los costos fijos de las capacidades de la tubería de los tanques $(CostF^{CapTANQ})$ multiplicado por la variable binaria $(y_{n,j,k}^{FTANQ})$ de la existencia de flujo de salida de los tanques más el producto de los costos variables de las capacidades de la tubería de los tanques $(CostV^{CapTANQ})$ y la capacidad de la tubería de salida de los tanques $(Q_{n,j,k}^{T, cap})$ elevado a un exponente (γ) .

$$Cost_{n,j,k}^{CapTANQ} = CostF^{CapTANQ} y_{n,j,k}^{FTANQ} + CostV^{CapTANQ} (Q_{n,j,k}^{T, cap})^\gamma, \quad \forall n \in N, \quad \forall j \in J, \quad \forall k \in K \quad (3.3.39)$$

Coste de capital de la tubería para los flujos de recirculación desde las plantas de tratamiento hasta los edificios residenciales: El producto de los costes fijos de la capacidad de la tubería desde la planta de tratamiento hasta los ERs $(CostF^{CapRECIR})$ y la variable binaria $(y_{l,j,k}^{FPTAR,recir})$ de la existencia de flujos hacia los edificios residenciales más el producto de los costes variables de la capacidad de la tubería $(CostV^{CapRECIR})$ y la capacidad de la tubería para los flujos desde la planta de tratamiento para los UD's $(Q_{l,j,k}^{PTARcap})$ elevado a un exponente (γ) es igual a los costes de capital de la tubería para los flujos de recirculación desde las plantas de tratamiento para los UD's $(Cost_{n,j,k}^{CapRECIR})$ como se muestra en la Ecuación (3.3.40).

$$Cost_{n,j,k}^{CapRECIR} = CostF^{CapRECIR} y_{l,j,k}^{FPTAR,recir} + CostV^{CapRECIR} (Q_{l,j,k}^{PTARcap})^\gamma, \quad \forall n \in N, \quad \forall j \in J, \quad \forall k \in K \quad (3.3.40)$$

Costo de capital de bombas para el flujo de tanques a edificios residenciales: El costo de capital de bombas para los flujos de los tanques a los ERs $(Cost_{n,j,k}^{CapTANQbomb})$ se muestra en la Ecuación (3.3.41). La Ecuación es igual al producto de los costos fijos de las bombas $(CostF^{CapTANQbomb})$ y la variable binaria de la existencia de salida de los tanques $(y_{n,j,k}^{FTANQ})$ más el producto de los costos variables de las bombas $(CostV^{CapTANQbomb})$ y la capacidad de las tuberías de la salida de los tanques $(Q_{n,j,k}^{T, cap})$ elevado a un exponente de economías de escala (γ) .

$$Cost_{n,j,k}^{CapTANQbomb} = CostF^{CapTANQbomb} y_{n,j,k}^{F^{TANQ}} + CostV^{CapTANQbomb} (Q_{n,j,k}^{T,cap})^{\gamma}, \quad (3.3.41)$$

$$\forall n \in N, \quad \forall j \in J, \quad \forall k \in K$$

Costo de capital de las bombas para el flujo de recirculación desde las plantas de tratamiento hasta los edificios residenciales: El producto de los costes fijos de las bombas ($CostF^{CapRECIRBomb}$) y la variable binaria de la existencia de flujos para los UD's ($y_{l,j,k}^{F^{PTAR,recir}}$) más el producto de los costes variables de las bombas y ($CostV^{CapRECIRBomb}$) la capacidad de las tuberías para los flujos desde la planta de tratamiento hasta los ERs ($Q_{l,j,k}^{PTAR,cap}$) elevado a un exponente (γ) es igual a los costes de capital de las bombas para el flujo de recirculación desde las plantas de tratamiento hasta los ERs ($Cost_{l,j,k}^{CapRECIRBomb}$) como se muestra en la Ecuación (3.3.42).

$$Cost_{l,j,k}^{CapRECIRBomb} = CostF^{CapRECIRBomb} y_{l,j,k}^{F^{PTAR,recir}} + CostV^{CapRECIRBomb} (Q_{l,j,k}^{PTAR,cap})^{\gamma}, \quad \forall l \in L, \quad \forall j \in J, \quad \forall k \in K \quad (3.3.42)$$

Restricción de reciclaje: El efluente de los tanques ($F_{n,j,k,t}^{TANQ}$) y la planta de tratamiento que retorna a los ERs ($F_{l,j,k,t}^{PTAR,recir}$) solo puede utilizarse para los UD's de jardinería y sanitario, ya que otros usos domésticos, como duchas, lavavajillas y lavandería, requieren un límite permisible inferior al permitido para jardinería y sanitario. Las Ecuaciones (3.3.43, 3.3.44) modelan el flujo de reciclaje.

$$F_{n,j,k[2,3,4]=0,t}^{TANQ} = 0, \quad \forall l \in L, \quad \forall j \in J, \quad \forall k \in K, \quad \forall t \in T \quad (3.3.43)$$

$$F_{l,j,k[2,3,4]=0,t}^{PTAR,recir} = 0, \quad \forall l \in L, \quad \forall j \in J, \quad \forall k \in K, \quad \forall t \in T \quad (3.3.44)$$

Restricción de la satisfacción del flujo para usos domésticos: El flujo de entrada de ERs ($F_{j,k,t}^{EDIF,ent}$) debe satisfacer la demanda de los UD's ($D_{j,k,t}^{EDIF}$) como se muestra en la Ecuación (3.3.45).

$$F_{j,k,t}^{EDIF,ent} \leq D_{j,k,t}^{EDIF}, \quad \forall j \in J, \quad \forall k \in K, \quad \forall t \in T \quad (3.3.45)$$

Restricciones ambientales para usos domésticos, tanques y recirculación: Las propiedades en ERs deben cumplir con los límites permisibles establecidos por la [SEMARNAT \(2003, 2022\)](#) para cada UD. Además, estos límites deben cumplirse en los tanques y en su salida, como se muestra en las Ecuaciones (3.3.46, 3.3.47 y 3.3.48).

$$P_{j,k,x,t}^{EDIF,ent} \leq P_x^{RESTR}, \quad \forall j \in J, \quad \forall k \in K, \quad \forall x \in X, \quad \forall t \in T \quad (3.3.46)$$

$$SP_{n,x,t} \leq P_x^{RESTR}, \quad \forall n \in N, \quad \forall x \in X, \quad \forall t \in T \quad (3.3.47)$$

$$P_{n,j,k,x,t}^{TANQ} \leq P_x^{RESTR}, \quad \forall n \in N, \quad \forall j \in J, \quad \forall k \in K, \quad \forall x \in X, \quad \forall t \in T \quad (3.3.48)$$

ECUACIONES OBJETIVO

Costo anual total: La Ecuación (3.3.49) muestra el costo anual total (CAT), que equivale a la suma del costo de capital de los tanques ($Cost_n^{CapTANQ}$), el costo de capital de la planta de tratamiento ($Cost_l^{CapPTAR}$), el costo de capital de las tuberías para la salida de los ERs ($Cost_{j,k,l}^{CapEDIF}$), el costo de capital de las tuberías para los flujos desde los tanques hasta los ERs ($Cost_{n,j,k}^{CapTANQ}$), el costo de capital de las tuberías para los flujos de recirculación desde la planta de tratamiento hasta los ERs ($Cost_{n,j,k}^{CapRECIR}$), el costo de capital de las bombas para los flujos desde los tanques hasta los los ERs ($Cost_{n,j,k}^{CapTANQbomb}$) y los costos de capital de las bombas para el flujo de recirculación desde las plantas de tratamiento hasta los ERs ($Cost_{l,j,k}^{CapRECIRBomb}$) multiplicado por el factor para anualizar los costos de capital (K_t). Contempla un plazo de 10 años con una tasa de interés del 10%, más el costo de bombeo de agua dulce ($Cost^{BombAD}$), el costo del agua dulce ($Cost^{AD}$), el costo de bombeo de tanques a los ERs ($Cost_{n,j,k}^{TANQ,Bomb}$), el costo de bombeo de flujos de recirculación ($Cost_{l,j,k}^{PTAR,Bomb}$) y el costo de operación de la PTAR ($Cost_l^{PTAR,OP}$) multiplicados por un factor de conversión anual H_Y .

$$\begin{aligned}
CAT = K_t & \left[\sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^N Cost_n^{CapTANQ} + \sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^N Cost_l^{CapPTAR} \right. \\
& + \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^L Cost_{j,k,l}^{CapEDIF} + \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K Cost_{n,j,k}^{CapTANQ} \\
& + \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K Cost_{n,j,k}^{CapRECIR} + \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K Cost_{n,j,k}^{CapTANQbomb} \\
& \left. + \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K Cost_{l,j,k}^{CapRECIRBomb} \right] \\
& + H_Y \left[Cost^{AD} + Cost^{BombAD} + \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K Cost_{n,j,k}^{TANQ,Bomb} \right. \\
& \left. + \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K Cost_{l,j,k}^{PTAR,Bomb} + \sum_{l=1}^L Cost_l^{PTAR,OP} \right]
\end{aligned} \tag{3.3.49}$$

Agua dulce total: El consumo total de agua dulce dado por la Ecuación (3.3.50) es igual al agua dulce consumida en todos los períodos.

$$ADT = \sum_{i=1}^I \sum_{t=1}^T F_{i,t}^{AGUAD} \tag{3.3.50}$$

Función objetivo: Las variables objetivo del CAT y el agua dulce total (ADT) se minimizan simultáneamente, como se muestra en la Ecuación (3.3.51).

$$Objective\ Function = \{[Min\ ADT] \& [Min\ CAT]\} \tag{3.3.51}$$

Se implementó el método de restricciones épsilon para resolver el problema de optimización multiobjetivo. En el procedimiento, el problema de minimización del ADT resultó en la solución para el consumo mínimo de ADT. El problema de maximización del ADT también proporcionó la solución para el consumo máximo de ADT. Como resultado de las soluciones extremas del procedimiento anterior, se resolvieron varios problemas para obtener el CAT utilizando límites en el consumo de

agua dulce, obteniendo así soluciones de Pareto. Un supuesto implícito en este trabajo es la relación entre los datos preliminares sobre el flujo y los costes de tratamiento basados en la información disponible.

3.4. MODELO PARA LA DE IMPLEMENTACIÓN DE APRENDIZAJE POR REFUERZO

En esta sección del trabajo se presenta la formulación del modelo matemático para la aplicación del aprendizaje por refuerzo. En la formulación del modelo matemático, se cuenta con una red de distribución de agua en los ERs, con la integración de una RNAP y la formulación de los algoritmos de aprendizaje por refuerzo. Esta sección se dividirá en seis bloques. El primer bloque, se describirá la distribución de agua fresca y de agua tratada que llegan a los ERs, así como la distribución de agua residual a la PTAR. El segundo bloque, se describen las Ecuaciones de la RNAP que modela PTAR, asimismo, se presenta el tratamiento de las propiedades del flujo de entrada de la planta. En el tercer bloque, se muestran las Ecuaciones para la distribución de las aguas tratadas después de la PTAR, estas aguas pueden ser enviadas para el almacenamiento, recirculación o descargadas al ambiente. El cuarto bloque, se presentan las Ecuaciones para los costos de la red de distribución. El quinto bloque, se presentan las Ecuaciones objetivo para minimizar la cantidad de agua fresca y descarga de agua tratada al ambiente. Y, en el sexto bloque, se presentan las Ecuaciones necesarias para la implementación del algoritmo de aprendizaje por refuerzo en el modelo matemático de red de distribución de agua.

Los conjuntos utilizados en esta formulación matemática representados por los siguientes índices: i representa la fuente de agua dulce, j representa los edificios residenciales, k representa los diferentes usos domésticos, e representa las fuentes externas de agua residual que puede recibir la PTAR, l representa la planta de tratamiento de aguas residuales, m representa los puntos de vertido en el entorno, n representa los diferentes tanques de almacenamiento de agua tratada, x representa la propiedades de los flujos, nc y nnc representan las neuronas de las capas de la RNAP, d representa la categoría del EI99, κ representa la subcategorías del EI99 y c representa el contaminante del EI99. Cabe recordar que estos conjuntos actúan como entradas y salidas dentro de las capas de la RNAP, y t representa el período de tiempo.

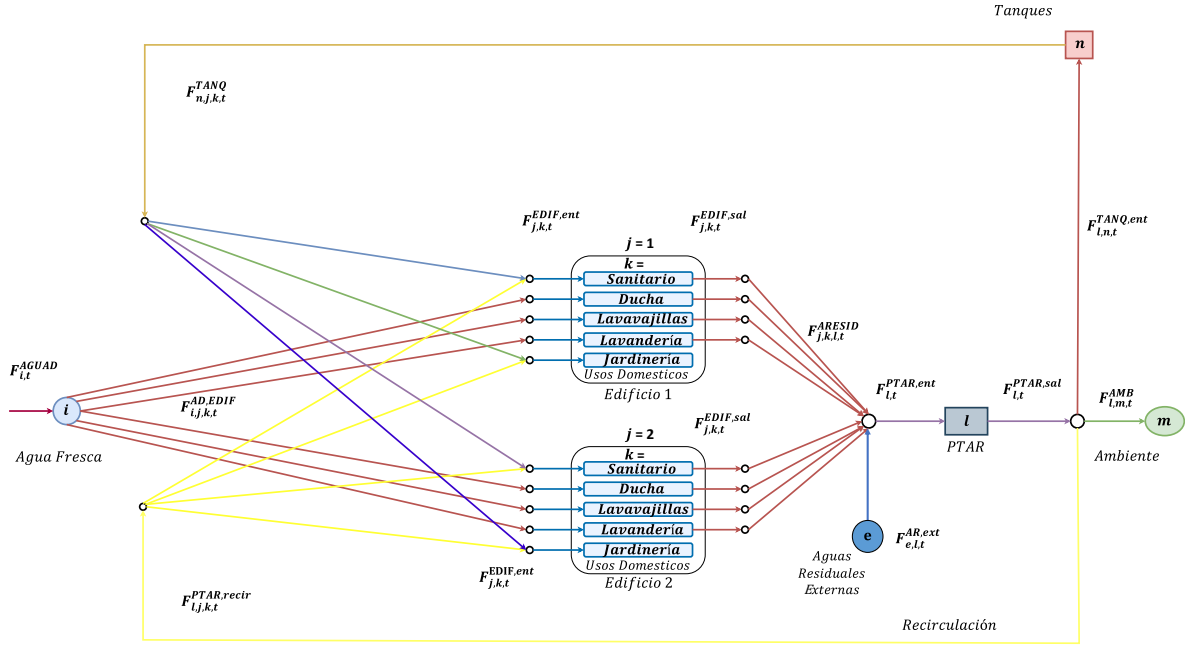


Fig. 3.4.1. Figura de la superestructura de la red de distribución de agua para el aprendizaje por refuerzo

ECUACIONES ANTES DE LA PTAR

Balance de agua dulce: La Ecuación (3.4.1) muestra los flujos de agua dulce ($F_{i,j,k,t}^{AD,EDIF}$) enviados a los diferentes UD (k) en ER (j) que están segregados de los flujos de agua dulce ($F_{i,t}^{AGUAD}$) a lo largo del tiempo (t).

$$F_{i,t}^{AGUAD} = \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K F_{i,j,k,t}^{AD,EDIF}, \quad \forall i \in I, \quad \forall t \in T \quad (3.4.1)$$

Balances antes de usos domésticos: El flujo de entrada en los ER ($F_{j,k,t}^{EDIF,ent}$) a lo largo del tiempo (t) es igual a la suma de los flujos de agua dulce enviados ($F_{i,j,k,t}^{AD,EDIF}$) a los diferentes UD, el flujo de salida de diferentes ($F_{n,j,k,t}^{TANQ}$) tanques (n) y el flujo de salida de aguas residuales ($F_{l,j,k,t}^{PTAR,recir}$) planta (l) como se muestra en la Ecuación (3.4.2). Mientras que las propiedades ($P_{j,k,x,t}^{EDIF,ent}$) de los flujos ($F_{j,k,t}^{EDIF,ent}$) se calculan con las reglas de mezcla como se muestra en la Ecuación (3.4.3).

$$F_{j,k,t}^{EDIF,ent} = \sum_{i=1}^I F_{i,j,k,t}^{AD,EDIF} + \sum_{n=1}^N F_{n,j,k,t}^{TANQ} + \sum_{n=1}^N F_{l,j,k,t}^{PTAR,recir}, \quad \forall j \in J, \quad \forall k \in K, \quad (3.4.2)$$

$$\forall t \in T$$

$$F_{j,k,t}^{EDIF,ent} P_{j,k,x,t}^{EDIF,ent} = \sum_{i=1}^I F_{i,j,k,t}^{AD,EDIF} P_{i,j,k,x,t}^{AD,EDIF} + \sum_{n=1}^N F_{n,j,k,t}^{TANQ} P_{n,j,k,x,t}^{TANQ} + \sum_{n=1}^N F_{l,j,k,t}^{PTAR,recir} P_{l,j,k,x,t}^{PTAR,recir}, \quad \forall j \in J, \quad \forall k \in K, \quad (3.4.3)$$

$$\forall x \in X, \quad \forall t \in T$$

Balance de usos domésticos: La Ecuación (3.4.4) muestra el flujo de salida para los UD's ($F_{j,k,t}^{EDIF,sal}$). Se trata de aguas residuales, cuyo flujo depende de la eficiencia del agua para los UD's proveniente de la entrada de los ER's ($F_{j,k,t}^{EDIF,ent}$) a lo largo del tiempo (t).

$$F_{j,k,t}^{EDIF,sal} = (1 - \vartheta_{j,k,t}) F_{j,k,t}^{EDIF,ent}, \quad \forall j \in J, \quad \forall k \in K, \quad \forall t \in T \quad (3.4.4)$$

Donde ($\vartheta_{j,k,t}$) es la eficiencia; una función de los ER's (j) y los UD's (k) a lo largo del tiempo (t). El UD de jardinería tiene una tasa de eficiencia del 100%, por lo que no se aplicó ruido gaussiano para este uso doméstico.

Balances después de usos domésticos: La entrada de aguas residuales ($F_{j,k,l,t}^{ARESID}$) a la PTAR (l) a lo largo del tiempo (t) es igual a la salida de los UD's ($F_{j,k,t}^{EDIF,sal}$), como se muestra en la Ecuación (3.4.5). Las propiedades de las aguas residuales que entran a la planta de tratamiento ($P_{j,k,l,x,t}^{ARESID}$) dependen de las propiedades de la salida ($P_{j,k,x,t}^{EDIF,sal}$) de los UD's, como se muestra en la Ecuación (3.4.6). Además, las propiedades para el uso doméstico de jardinería carecen de valor debido a su eficiencia en el uso del agua.

$$F_{j,k,t}^{EDIF,sal} = \sum_{l=1}^L F_{j,k,l,t}^{ARESID}, \quad \forall j \in J, \quad \forall k \in K, \quad \forall t \in T \quad (3.4.5)$$

$$\begin{aligned}
& F_{j,k,t}^{EDIF,sal} P_{j,k,x,t}^{EDIF,sal} \\
& = \sum_{l=1}^L F_{j,k,l,t}^{ARESID} P_{j,k,l,x,t}^{ARESID}, \quad \forall j \in J, \quad \forall k \in K, \quad \forall x \in X, \\
& \forall t \in T
\end{aligned} \tag{3.4.6}$$

Balances antes de la planta de tratamiento: La Ecuación (3.4.7) muestra la entrada de aguas residuales ($F_{l,t}^{PTAR,ent}$) a la planta de tratamiento (l) a lo largo del tiempo (t), que es igual a la suma de todas las entradas de aguas residuales a la planta de tratamiento ($F_{j,k,l,t}^{ARESID}$) más las aguas residuales de otras localidades ($F_{e,l,t}^{AR,ext}$). Respecto al cálculo de las propiedades de entrada ($P_{l,x,t}^{PTAR,ent}$) a la planta de tratamiento, las reglas de mezcla se muestran en la Ecuación (3.4.8).

$$F_{l,t}^{PTAR,ent} = \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K F_{j,k,l,t}^{ARESID} + \sum_{e=1}^E F_{e,l,t}^{AR,ext}, \quad \forall l \in L, \quad \forall t \in T \tag{3.4.7}$$

$$\begin{aligned}
F_{l,t}^{PTAR,ent} P_{l,x,t}^{PTAR,ent} &= \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K F_{j,k,l,t}^{ARESID} P_{j,k,l,x,t}^{ARESID} + \sum_{e=1}^E F_{e,l,t}^{AR,ext} P_{e,l,x,t}^{AR,ext}, \quad \forall l \in L, \\
&\forall x \in X, \quad \forall t \in T
\end{aligned} \tag{3.4.8}$$

ECUACIONES DE LA PTAR, PARENDIZAJE PROFUNDO

Balances en la planta de tratamiento: El flujo de salida de agua tratada ($F_{l,t}^{PTAR,sal}$) de la planta de tratamiento (l) a lo largo del tiempo (t) es igual al flujo de entrada de aguas residuales en la planta de tratamiento ($F_{l,t}^{PTAR,ent}$), como se muestra en la Ecuación (3.4.9). Respecto a las propiedades de la planta de tratamiento de aguas residuales, estas se calculan mediante las Ecuaciones de la red neuronal artificial profunda (Ecuaciones 3.4.10-3.4.17).

$$F_{l,t}^{PTAR,sal} = F_{l,t}^{PTAR,ent}, \quad \forall l \in L, \quad \forall t \in T \tag{3.4.9}$$

$$\begin{aligned}
CP_{l,nc,t}^{1,PTAR} = \max & \left(\alpha \left(\sum_{x=1}^X (P_{l,x,t}^{PTAR,ent} W_{x,nc}^{1,PTAR}) \right. \right. \\
& \left. \left. + B_{nc}^{1,PTAR} \right), \sum_{x=1}^X (P_{l,x,t}^{PTAR,ent} W_{x,nc}^{1,PTAR}) + B_{nc}^{1,PTAR} \right), \quad \forall l \in L, \\
& \forall x \in X, \quad \forall t \in T
\end{aligned} \tag{3.4.10}$$

$$\begin{aligned}
CP_{l,nc,t}^{2,PTAR} = \max & \left(\alpha \left(\sum_{nnc=1}^{NNC} (CP_{l,nc,t}^{1,PTAR} W_{nnc,nc}^{2,PTAR}) \right. \right. \\
& \left. \left. + B_{nc}^{2,PTAR} \right), \sum_{nnc=1}^{NNC} (CP_{l,nc,t}^{1,PTAR} W_{nnc,nc}^{2,PTAR}) + B_{nc}^{2,PTAR} \right), \quad \forall l \in L, \\
& \forall x \in X, \quad \forall t \in T
\end{aligned} \tag{3.4.11}$$

$$\begin{aligned}
CP_{l,nc,t}^{3,PTAR} = \max & \left(\alpha \left(\sum_{nnc=1}^{NNC} (CP_{l,nc,t}^{2,PTAR} W_{nnc,nc}^{3,PTAR}) \right. \right. \\
& \left. \left. + B_{nc}^{3,PTAR} \right), \sum_{nnc=1}^{NNC} (CP_{l,nc,t}^{2,PTAR} W_{nnc,nc}^{3,PTAR}) + B_{nc}^{3,PTAR} \right), \quad \forall l \in L, \\
& \forall x \in X, \quad \forall t \in T
\end{aligned} \tag{3.4.12}$$

$$\begin{aligned}
CP_{l,nc,t}^{4,PTAR} = \max & \left(\alpha \left(\sum_{nnc=1}^{NNC} (CP_{l,nc,t}^{3,PTAR} W_{nnc,nc}^{4,PTAR}) \right. \right. \\
& \left. \left. + B_{nc}^{4,PTAR} \right), \sum_{nnc=1}^{NNC} (CP_{l,nc,t}^{3,PTAR} W_{nnc,nc}^{4,PTAR}) + B_{nc}^{4,PTAR} \right), \quad \forall l \in L, \\
& \forall x \in X, \quad \forall t \in T
\end{aligned} \tag{3.4.13}$$

$$\begin{aligned}
CP_{l,nc,t}^{5,PTAR} = \max & \left(\alpha \left(\sum_{nnc=1}^{NNC} (CP_{l,nc,t}^{4,PTAR} W_{nnc,nc}^{5,PTAR}) \right. \right. \\
& \left. \left. + B_{nc}^{5,PTAR} \right), \sum_{nnc=1}^{NNC} (CP_{l,nc,t}^{4,PTAR} W_{nnc,nc}^{5,PTAR}) + B_{nc}^{5,PTAR} \right), \quad \forall l \in L, \\
& \forall x \in X, \quad \forall t \in T
\end{aligned} \tag{3.4.14}$$

$$\begin{aligned}
CP_{l,nc,t}^{6,PTAR} = \max & \left(\alpha \left(\sum_{nnc=1}^{NNC} (CP_{l,nc,t}^{5,PTAR} W_{nnc,nc}^{6,PTAR}) \right. \right. \\
& \left. \left. + B_{nc}^{6,PTAR} \right), \sum_{nnc=1}^{NNC} (CP_{l,nc,t}^{5,PTAR} W_{nnc,nc}^{6,PTAR}) + B_{nc}^{6,PTAR} \right), \quad \forall l \in L, \\
& \forall x \in X, \quad \forall t \in T
\end{aligned} \tag{3.4.15}$$

$$\begin{aligned}
CP_{l,nc,t}^{7,PTAR} = \max & \left(\alpha \left(\sum_{nnc=1}^{NNC} (CP_{l,nc,t}^{6,PTAR} W_{nnc,nc}^{7,PTAR}) \right. \right. \\
& \left. \left. + B_{nc}^{7,PTAR} \right), \sum_{nnc=1}^{NNC} (CP_{l,nc,t}^{6,PTAR} W_{nnc,nc}^{7,PTAR}) + B_{nc}^{7,PTAR} \right), \quad \forall l \in L, \\
& \forall x \in X, \quad \forall t \in T
\end{aligned} \tag{3.4.16}$$

$$\begin{aligned}
P_{l,x,t}^{PTAR,sal} = \max & \left(\alpha \left(\sum_{nnc=1}^{NNC} (CP_{l,nc,t}^{7,PTAR} W_{nnc,x}^{PTAR,sal}) + B_x^{PTAR,sal} \right), \sum_{nnc=1}^{NNC} (CP_{l,nc,t}^{7,PTAR} W_{nnc,x}^{PTAR,sal}) \right. \\
& \left. + B_x^{PTAR,sal} \right), \quad \forall l \in L, \quad \forall x \in X, \quad \forall t \in T
\end{aligned} \tag{3.4.17}$$

ECUACIONES DESPUÉS DE LA PTAR

Balance después de la planta de tratamiento: El flujo de salida de agua tratada ($F_{l,t}^{PTAR,sal}$) en la planta de tratamiento (l) a lo largo del tiempo (t) se divide en el flujo de salida a los tanques ($F_{l,n,t}^{TANQ,ent}$), ambiente ($F_{l,m,t}^{AMB}$) y recirculación para los UD's ($F_{l,j,k,t}^{PTAR,recir}$) como se muestra en la Ecuación (3.4.18).

$$\begin{aligned}
F_{l,t}^{PTAR,sal} = \sum_{n=1}^N F_{l,n,t}^{TANQ,ent} + \sum_{m=1}^M F_{l,m,t}^{AMB} + \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K F_{l,j,k,t}^{PTAR,recir}, \\
\forall l \in L, \quad \forall t \in T
\end{aligned} \tag{3.4.18}$$

Balances en los tanques: La Ecuación (3.4.19) muestra el almacenamiento de agua tratada ($\mathcal{S}_{n,t}$) en los tanques (n) a lo largo del tiempo (t), que es igual al flujo de entrada en los tanques ($F_{l,n,t}^{TANQ,ent}$) más el almacenamiento de agua tratada en un período anterior ($\mathcal{S}_{n,t-1}$) menos el flujo de salida de los diferentes tanques ($F_{n,j,k,t}^{TANQ}$). La Ecuación (3.4.20) muestra las reglas de mezcla para calcular las propiedades del almacenamiento de agua tratada en tanques.

$$\mathcal{S}_{n,t} = \mathcal{S}_{n,t-1} + \sum_{l=1}^L F_{l,n,t}^{TANQ,ent} - \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K F_{n,j,k,t}^{TANQ}, \quad \forall n \in N, \quad \forall t \in T \quad (3.4.19)$$

$$\mathcal{S}_{n,t} \mathcal{S}P_{n,x,t} = \mathcal{S}_{n,t-1} \mathcal{S}P_{n,x,t-1} + \sum_{l=1}^L F_{l,n,t}^{TANQ,ent} P_{l,n,x,t}^{TANQ,ent} - \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K F_{n,j,k,t}^{TANQ} P_{n,j,k,x,t}^{TANQ}, \quad (3.4.20)$$

$$\forall l \in L, \quad \forall x \in X, \quad \forall t \in T$$

Restricción de almacenamiento inicial y final en tanques: El almacenamiento de agua tratada ($\mathcal{S}_{n,t=1}$) en tanques (n) en el primer período de tiempo (t) es igual al almacenamiento de agua tratada ($\mathcal{S}_{n,t=T}$) en tanques (n) en el último período de tiempo como se muestra en la Ecuación (3.4.21).

$$\mathcal{S}_{n,t=1} = \mathcal{S}_{n,t=T}, \quad \forall n \in N, \quad \forall t \in T \quad (3.4.21)$$

ECUACIONES DE CAPACIDAD, COSTO, TUBERÍAS Y BOMBEO

Restricción de capacidad de tanques: El almacenamiento de agua tratada ($\mathcal{S}_{n,t}$) en tanques (n) a lo largo del tiempo (t) es menor que la capacidad máxima de almacenamiento de los tanques ($\mathcal{S}_n^{cap}$), como se muestra en la Ecuación (3.4.22).

$$\mathcal{S}_{n,t} \leq \mathcal{S}_n^{max}, \quad \forall n \in N, \quad \forall t \in T \quad (3.4.22)$$

Costo del bombeo de agua dulce: La Ecuación (3.4.23) muestra el cálculo del coste del agua dulce ($Cost^{AD}$) resultante del producto del coste unitario (c^{ad}) por el agua consumida ($F_{i,t}^{AGUAD}$) en todos los periodos. La Ecuación (3.4.24) ilustra el cálculo del coste del bombeo de agua dulce ($Cost^{BombAD}$) resultante del producto del coste unitario de bombeo (c^{Bombad}) por el agua consumida ($F_{i,t}^{AGUAD}$) en todos los periodos.

$$Cost^{AD} = c^{ad} \sum_{i=1}^I \sum_{t=1}^T F_{i,t}^{AGUAD} \quad (3.4.23)$$

$$Cost^{BombAD} = c^{Bombad} \sum_{i=1}^I \sum_{t=1}^T F_{i,t}^{AGUAD} \quad (3.4.24)$$

Costo de bombeo del flujo de los tanques de recirculación a los edificios residenciales: El costo de bombear los tanques a los ERs ($Cost_{n,j,k}^{TANQ,Bomb}$) es el resultado de multiplicar el costo unitario de bombeo ($c^{tanq,bomb}$) por el flujo de salida de los tanques ($F_{n,j,k,t}^{TANQ}$) durante todos los períodos como se muestra en la Ecuación (3.4.25).

$$Cost_{n,j,k}^{TANQ,Bomb} = c^{tanq,bomb} \sum_{t=1}^T (F_{n,j,k,t}^{TANQ}), \quad \forall n \in N, \quad \forall j \in J, \quad \forall k \in K \quad (3.4.25)$$

Coste de bombeo del flujo de recirculación de la planta de tratamiento a edificios residenciales: El flujo de salida de la planta de tratamiento de aguas residuales ($F_{l,j,k,t}^{PTAR,recir}$) que se recircula a los ERs durante todos los periodos se multiplica por el coste unitario de bombeo ($c^{ptar,bomb}$). Los resultados del coste de bombeo de los flujos de recirculación ($Cost_{l,j,k}^{PTAR,Bomb}$) se ilustran en la Ecuación (3.4.26).

$$Cost_{l,j,k}^{PTAR,Bomb} = c^{ptar,bomb} \sum_{t=1}^T (F_{l,j,k,t}^{PTAR,recir}), \quad \forall l \in L, \quad \forall j \in J, \quad \forall k \in K \quad (3.4.26)$$

Costo de operación de la planta de tratamiento: Los aportes de aguas residuales a la planta se implementan en un tratamiento que tiene un costo unitario, por lo tanto, el costo de operación de la planta de tratamiento ($Cost_l^{PTAR,OP}$) es igual al producto del costo unitario de operación ($c^{ptar,op}$) por el aporte a la planta en todos los periodos, como lo muestra la Ecuación (3.4.27).

$$Cost_l^{PTAR,OP} = c^{ptar,op} \sum_{t=1}^T (F_{l,t}^{PTAR,ent}), \quad \forall l \in L \quad (3.4.27)$$

RESTRICCIONES DEL MODELO MATEMÁTICO

Restricción de reciclaje: Los flujos de los tanques ($F_{n,j,k,t}^{TANQ}$) y la planta de tratamiento que retorna a los ERs ($F_{l,j,k,t}^{PTAR,recir}$) solo pueden utilizarse para los UD de jardinería y sanitario, ya que otros usos domésticos, como duchas, lavavajillas y lavandería, requieren un límite permisible inferior al permitido para el UD de jardinería y sanitario. Las Ecuaciones (3.4.28 y 3.4.29) modelan el flujo de reciclaje.

$$F_{n,j,k[2,3,4]=0,t}^{TANQ} = 0, \quad \forall l \in L, \quad \forall j \in J, \quad \forall k \in K, \quad \forall t \in T \quad (3.4.28)$$

$$F_{l,j,k[2,3,4]=0,t}^{PTAR,recir} = 0, \quad \forall l \in L, \quad \forall j \in J, \quad \forall k \in K, \quad \forall t \in T \quad (3.4.29)$$

Restricción de la satisfacción del flujo para usos domésticos: El flujo de entrada de los ERs ($F_{j,k,t}^{EDIF,ent}$) debe satisfacer la demanda de los UDs ($D_{j,k,t}^{EDIF}$) como se muestra en la Ecuación (3.4.30).

$$F_{j,k,t}^{EDIF,ent} \leq D_{j,k,t}^{EDIF}, \quad \forall j \in J, \quad \forall k \in K, \quad \forall t \in T \quad (3.4.30)$$

Restricciones ambientales para usos domésticos, tanques y recirculación: Las propiedades en edificios residenciales deben cumplir con los límites permisibles establecidos por la [SEMARNAT \(2003, 2022\)](#) para cada uso doméstico. Además, estos límites deben cumplirse en los tanques y en su salida, como se muestra en las Ecuaciones (3.4.31, 3.4.32 y 3.4.33).

$$P_{j,k,x,t}^{EDIF,ent} \leq P_x^{RESTR}, \quad \forall j \in J, \quad \forall k \in K, \quad \forall x \in X, \quad \forall t \in T \quad (3.4.31)$$

$$SP_{n,x,t} \leq P_x^{RESTR}, \quad \forall n \in N, \quad \forall x \in X, \quad \forall t \in T \quad (3.4.32)$$

$$P_{n,j,k,x,t}^{TANQ} \leq P_x^{RESTR}, \quad \forall n \in N, \quad \forall j \in J, \quad \forall k \in K, \quad \forall x \in X, \quad \forall t \in T \quad (3.4.33)$$

Restricción de flujos externos de aguas residuales: La PTAR solo permite recibir un límite volumétrico de flujos externos de aguas residuales ($R_{e,l,t}^{AR,ext}$) como se muestra en la Ecuación (3.4.34).

$$F_{e,l,t}^{AR,ext} \leq R_{e,l,t}^{AR,ext} \quad (3.4.34)$$

ECUACIONES PARA ECOINDICADOR 99

Cantidad de Persona Equivalente de la PTAR: En la Ecuación (3.4.35) se presenta el cálculo de la persona equivalente (PE_t^{PTAR}) por un periodo de tiempo t respecto a la cantidad de DBO que corresponde a los flujos de entrada de la PTAR por un factor de conversión ($\mathcal{F}^{conv}$).

$$PE_t^{PTAR} = \sum_{l=1}^L \sum_{x=1}^1 \frac{\mathcal{F}^{conv} F_{l,t}^{PTAR,ent} P_{l,x=1,t}^{PTAR,ent}}{50}, \quad \forall t \in T \quad (3.4.35)$$

Cantidad total de producto químico: En la Ecuación (3.4.36) se calcula la cantidad total de producto químico ($\beta_{c,t}$) por cada periodo de tiempo t resultado de la multiplicación de persona equivalente (PE_t^{PTAR}) y la unidad de flujo de referencia debido a las emisiones directas de cada componente c .

$$\beta_{c,t} = \beta_c^Q * PE_t^{PTAR}, \quad \forall j \in J, \quad \forall k \in K, \quad \forall t \in T \quad (3.4.36)$$

VARIABLES PARA APRENDIZAJE POR REFUERZO

Flujos totales: En las Ecuaciones (3.4.37 – 3.4.41) se presenta la sumatoria de los flujos a la entrada de los tanques de almacenamiento ($F_{l,n,t}^{total,TANQ}$), de recirculación de agua tratada a los edificios residenciales ($F_{l,j,k,t}^{total,PTAR}$), en la entrada a los edificios residenciales ($F_{j,k,t}^{total,EDIF}$), a la entrada de la PTAR ($F_{l,t}^{total,PTAR}$) y la descarga total de agua tratada al ambiente ($F^{total,AMB}$).

$$F^{total,TANQ} = \sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^N \sum_{t=1}^T F_{l,n,t}^{TANQ,ent} \quad (3.4.37)$$

$$F^{total,RECIR} = \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \sum_{t=1}^T F_{l,j,k,t}^{PTAR,recir} \quad (3.4.38)$$

$$F^{total,EDIF} = \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \sum_{t=1}^T F_{j,k,t}^{EDIF,ent} \quad (3.4.39)$$

$$F^{total,PTAR} = \sum_{l=1}^L \sum_{t=1}^T F_{l,t}^{PTAR,ent} \quad (3.4.40)$$

$$F^{total,AMB} = \sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^M \sum_{t=1}^T F_{l,m,t}^{AMB} \quad (3.4.41)$$

Variables objetivo para el agente: Las variables objetivo de la red de distribución de agua son el costo anual total (CAT), el consumo total de agua dulce (ADT) y el ecoindicador 99 (EI99) como se muestra en las Ecuaciones (3.4.42 a 3.4.44).

$$\begin{aligned} CAT = Cost^{AD} + Cost^{BombAD} + \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K Cost_{n,j,k}^{TANQ,Bomb} \\ + \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K Cost_{l,j,k}^{PTAR,Bomb} + \sum_{l=1}^L Cost_l^{PTAR,OP} \end{aligned} \quad (3.4.42)$$

$$ADT = \sum_{i=1}^I \sum_{t=1}^T F_{i,t}^{AGUAD} \quad (3.4.43)$$

$$EI99 = \sum_{d=1}^D \sum_{c=1}^C \sum_{\kappa=1}^K \sum_{t=1}^T \delta_d \omega_d \beta_{c,t} \alpha_{c,\kappa} \quad (3.4.44)$$

Función Objetivo del modelo matemático: La variable objetivo para el modelo matemático es la descarga total de agua tratada al ambiente ($F^{total,AMB}$), esta será manipulada por el agente inteligente en los dos sentidos de optimización, minimización o maximización.

$$Función\ Objetivo = \{[Min\ F^{total,AMB}] \text{ o } [Max\ F^{total,AMB}]\} \quad (3.4.45)$$

Normalización de variables: Las variables para el aprendizaje por refuerzo se normalizan, debido a que todas las variables son positivas, el límite inferior para todas las variables es cero, por lo tanto, las Ecuaciones (3.4.46 a 3.4.54) presentan la normalización de las variables considerando solo el límite superior.

$$F^{NORM,TANQ} = \frac{F^{total,TANQ}}{F^{sup,TANQ}} \quad (3.4.46)$$

$$F^{NORM,RECIR} = \frac{F^{total,RECIR}}{F^{sup,RECIR}} \quad (3.4.47)$$

$$F^{NORM,EDIF} = \frac{F^{total,EDIF}}{F^{sup,EDIF}} \quad (3.4.48)$$

$$F^{NORM,PTAR} = \frac{F^{total,PTAR}}{F^{sup,PTAR}} \quad (3.4.49)$$

$$CAT^{NORM} = \frac{CAT}{CAT^{sup}} \quad (3.4.50)$$

$$ADT^{NORM} = \frac{ADT}{ADT^{sup}} \quad (3.4.51)$$

$$EI99^{NORM} = \frac{EI99}{EI99^{sup}} \quad (3.4.52)$$

$$F_{i,t}^{NORM,AGUAD} = \frac{F_{i,t}^{AGUAD}}{F^{sup,AGUAD}} \quad (3.4.53)$$

$$S^{opt} = \begin{cases} \text{Minimizar,} & a_8 \leq 0.575 \\ \text{Maximizar,} & a_8 > 0.575 \end{cases} \quad (3.4.54)$$

ESTRATEGIA DE APRENDIZAJE POR REFUERZO

Estado y acción: En el aprendizaje por refuerzo debe haber una interacción entre el agente y el entorno, la variable s_t son los estados del entorno después de que el agente haya aplicado una acción a_t . Los estados s_t contienen las variables normalizadas de los flujos a la entrada de los tanques de almacenamiento ($F^{NORM,TANQ}$), los flujos de recirculación de agua tratada a los edificios residenciales ($F^{NORM,RECIR}$), los flujos de la entrada a los edificios residenciales ($F^{NORM,EDIF}$), los flujos de la entrada de la PTAR ($F^{NORM,PTAR}$), el costo anual total (CAT^{NORM}), el consumo total de agua dulce (ADT^{NORM}) y el ecoindicador 99 ($EI99^{NORM}$) que se obtienen después de la optimización del modelo matemático cuando el agente aplica las acciones a_t de los flujos de agua dulce ($F_{i,t}^{NORM,AGUAD}$) y el sentido de la optimización (S^{opt}) como se observan en las Ecuaciones (3.4.55 y 3.4.56).

$$s_t = [CAT^{NORM} \quad ADT^{NORM} \quad EI99^{NORM} \quad F^{NORM,TANQ} \quad F^{NORM,RECIR} \quad F^{NORM,EDIF} \quad F^{NORM,PTAR}] \quad (3.4.55)$$

$$a_t = [F_{i,1}^{NORM,AGUAD} \quad F_{i,2}^{NORM,AGUAD} \quad F_{i,3}^{NORM,AGUAD} \quad F_{i,4}^{NORM,AGUAD} \quad F_{i,5}^{NORM,AGUAD} \quad F_{i,6}^{NORM,AGUAD} \quad F_{i,7}^{NORM,AGUAD} \quad S^{opt}] \quad (3.4.56)$$

Recompensa: En la Ecuación (3.4.57) se presenta el objetivo del agente es minimizar el costo anual total (CAT^{NORM}), el consumo total de agua dulce (ADT^{NORM}) y el ecoindicador 99 ($EI99^{NORM}$). Si las variables CAT , ADT y $EI99$ tiende al límite superior CAT^{sup} , ADT^{sup} y $EI99^{sup}$ el resultado de las variables CAT^{NORM} , ADT^{NORM} y $EI99^{NORM}$ será tendiente a 1, por lo tanto, las sumatoria de las variables CAT^{NORM} , ADT^{NORM} y $EI99^{NORM}$ será 3, en consecuencia, la recompensa R_t será 0. Para el caso contrario, Si las variables CAT , ADT y $EI99$ tiende al límite inferior, el resultado de las variables CAT^{NORM} , ADT^{NORM} y $EI99^{NORM}$ será tendiente a 0, de manera que, las sumatoria de las variables CAT^{NORM} , ADT^{NORM} y $EI99^{NORM}$ será 0 y la recompensa R_t será 3.

$$R_t = 3 - CAT^{NORM} - ADT^{NORM} - EI99^{NORM} \quad (3.4.57)$$

Selección de acción del agente: La Ecuación (3.4.58) describe la toma de decisión que realiza el agente para la selección de una nueva acción que depende de la media ($\mu_\theta(s_t)$), un factor de ruido (z) y la desviación estándar ($\sigma_\theta(s_t)$).

$$a_t = \mu_\theta(s_t) + ze^{\log \sigma_\theta(s_t)} \quad (3.4.58)$$

Razón de probabilidad: La Ecuación (3.4.59) representa la razón de cambio de la nueva y vieja política que toma el agente en cada actualización comparando que tan probable es realizar una nueva política o mantener la actual política. El termino $(r_t(\theta))$ es la razón de cambio entre las políticas, $\pi_\theta(a_t|s_t)$ es la probabilidad de tomar una nueva acción respecto a la actual política ($\pi_{\theta_{old}}(a_t|s_t)$).

$$r_t(\theta) = \frac{\pi_\theta(a_t|s_t)}{\pi_{\theta_{old}}(a_t|s_t)} \quad (3.4.59)$$

Error de diferencia temporal: Este error se calcula con la Ecuación (3.4.60), es igual a la recompensa (R_t) mas la multiplicación del factor de descuento (γ) y el valor del nuevo estado ($V(s_{t+1})$) menos el valor del estado actual ($V(s_t)$).

$$\delta_t = R_t + \gamma V(s_{t+1}) - V(s_t) \quad (3.4.60)$$

Estimación de la ventaja generalizada: La Ecuación (3.4.61) describe cuanto fue mejor la nueva acción respecto a la acción promedio. $\hat{A}_t$ es la ventaja estimada en un tiempo determinado, γ es el factor de descuento y λ es el parámetro de suavizado de la estimación de la ventaja generalizada.

$$\hat{A}_t = \sum_{l=0}^{T-t-1} (\gamma\lambda)^l \delta_{t+l} \quad (3.4.61)$$

Función objetivo recortada: La Ecuación (3.4.62) describe el objetivo de la Optimización de Políticas Proximales (OPP), es igual al promedio esperado sobre todos los datos ($\hat{E}_t$) del mínimo valor de la función $clip(r_t(\theta), 1 - \epsilon, 1 + \epsilon)$ y los términos $r_t(\theta)\hat{A}_t$. Donde ϵ es el hiperparámetro de recorte.

$$L^{CLIP}(\theta) = \hat{E}_t[\min(r_t(\theta)\hat{A}_t, clip(r_t(\theta), 1 - \epsilon, 1 + \epsilon)\hat{A}_t)] \quad (3.4.62)$$

Valor objetivo: El término (V_t^{targ}) es el valor objetivo que la red neuronal critica debe tender a través de la suma de la predicción real ($V(s_t)$) y la ventaja estimada ($\hat{A}_t$) como se muestra en la Ecuación (3.4.63).

$$V_t^{targ} = V(s_t) + \hat{A}_t \quad (3.4.63)$$

Función de Pérdida: La Ecuación (3.4.64) describe la diferencia entre la predicción del agente con la realidad observada. La función de perdida (L_t^{VF}) es igual al cuadrado de la diferencia de valor objetivo (V_t^{targ}) y estimador paramétrico ($V_\theta(s_t)$).

$$L_t^{VF} = (V_\theta(s_t) - V_t^{targ})^2 \quad (3.4.64)$$

Entropía diferencial: El término $S(\pi_\theta)$ representa la entropía de la política, es igual a la sumatoria del logaritmo de la densidad de probabilidad del tipo de distribución normal que elija el agente en el transcurso del entrenamiento como se muestra en la Ecuación (3.4.65).

$$S(\pi_\theta) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\log(2\pi e \sigma_i^2)) \quad (3.4.65)$$

Función Objetivo Total: La Ecuación (3.4.66) representa el promedio esperado sobre todos los datos ($\hat{E}_t$) de la función objetivo recortada ($L^{CLIP}(\theta)$) menos la función de pérdida (L_t^{VF}) multiplicada por el coeficiente de ponderación (C_1) más la entropía diferencial ($S[\pi_\theta](s_t)$) multiplicada por el coeficiente de entropía (C_2).

$$L^{CLIP+VF+S}(\theta) = \hat{E}_t[L^{CLIP}(\theta) - C_1 L_t^{VF} + C_2 S[\pi_\theta](s_t)] \quad (3.4.66)$$

CAPÍTULO 4

En este capítulo se abordará el planteamiento del problema dando la idea estructura del trabajo que se realizará. también, se dará el caso de estudio del trabajo realizando una detallada exposición de los datos recopilados y por último se muestra la metodología que se aplicó para la resolución del problema.

4.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El problema consiste en encontrar la configuración óptima de una red de distribución de agua que satisfaga la demanda de agua en ERs y permita el reciclaje, la reutilización, la regeneración y el almacenamiento de aguas residuales. También, se propone una estrategia de ubicación de planta de tratamiento en un área determinada para minimizar el costo de bombeo y tubería para el transporte del agua. Además, se deberá cumplir con la normativa ambiental para las propiedades del agua tratada, tanto, para la reutilización en los ERs y/o en la descarga en el ambiente. En consecuencia, una RNAP debe ser capaz de modelar el comportamiento de una PTAR dentro de la red de distribución de agua. Asimismo, se consideran los costos de agua potable, bombeo y tubería; operación de la planta; bombeo y tubería de aguas residuales; y costos de tanques de almacenamiento para la red de distribución de agua. Por lo tanto, se debe determinar la distribución óptima del agua para reducir el consumo de agua potable y el costo anual total. También, se considera una herramienta para calcular el impacto ambiental que produce la PTAR por medio del ecoindicador 99. Por lo anterior, se abre la posibilidad para la toma de decisión para las variables objetivo consideradas en este trabajo que son el consumo de agua potable, el costo anual total y el impacto ambiental, por tal motivo, se propone la implementación de algoritmos de aprendizaje por refuerzo para dar solución mínima a las tres variables objetivo propuestas para la red de distribución de agua.

4.2. CASO DE ESTUDIO

4.2.1. CASO DE ESTUDIO APRENDIZAJE NO SUPERVISADO

En el caso de estudio se resolverán tres escenarios. El primer escenario aplica la metodología y formulación del modelo matemático mostrado. Los datos se toman de la **Tabla 4.3.1.4 (Sección 4.3.1)** y el objetivo es minimizar el costo total, con restricciones de concentración. Para el segundo escenario, se considera un presupuesto ilimitado y se minimiza la concentración de arsénico. Para el último escenario se considera que se cuenta con un presupuesto de 50 millones de dólares, este presupuesto se fija como límite y se minimiza la concentración de arsénico. Además, en este estudio se considera un horizonte temporal de 5 años, suponiendo flujos constantes y parámetros de costes estáticos durante todo el período. En consecuencia, la optimización se realiza utilizando un marco de período único, tratando todo el horizonte como un período agregado sin segmentación temporal. Este enfoque facilita la evaluación de factores inmediatos, como los impactos económicos, así como los

beneficios y riesgos sostenibles a largo plazo para la salud pública, al tiempo que se alinea con los ciclos típicos de los programas gubernamentales. En la **Sección 5.2** se muestran los resultados de los tres escenarios propuestos.

El modelo matemático actual supone concentraciones de arsénico y flujos constantes para cada pozo profundo durante todo el período de estudio, lo que introduce incertidumbre al no tener en cuenta las posibles variaciones. Además, el modelo no considera la posible escasez de pozos profundos, afectando su resiliencia.

4.2.2. CASO DE ESTUDIO APRENDIZAJE PROFUNDO

Esta sección presenta el caso práctico abordado en este trabajo. Se detallan todos los requisitos y parámetros presentados en la **Sección 3.3**. Cabe destacar que, en dicha Sección, la RNAP se integró como una planta de tratamiento de aguas residuales (PTAR) en el modelo matemático de una red de distribución de agua de edificios residenciales. Por lo tanto, se utilizarán todas las especificaciones siguientes para la formulación del modelo, pero la RNAP operará implícitamente con estas consideraciones, ya que forma parte de la formulación del modelo matemático.

Este caso de estudio considera dos edificios residenciales con 894 y 835 hogares, con un promedio de 4 personas por vivienda, lo que resulta en un total de 6,920 personas. Estos ERs se ubican en el complejo residencial "Villas del Pedregal", ubicado en el municipio de Morelia, Michoacán, México (19.6773° N, 101.3062° O). Se consideraron cinco UD's en los ERs: sanitario, ducha, lavavajillas, lavandería y jardinería.

Se considera que existe una pérdida de agua a lo largo del recorrido entre ERs debido a diversas imperfecciones en los mismos, como se observa en la **Tabla 4.2.2.1**, que muestra los valores inciertos de $(\vartheta_{j,k,t})$ según [García-Montoya et al. \(2015\)](#). Se genera ruido gaussiano para estos datos con una media de cero, una desviación estándar de 0.01 y una semilla aleatoria de 13; se utiliza la función `np.random.normal()` de la biblioteca NumPy ([Harris et al., 2020](#)). Las propiedades de salida de los edificios residenciales se obtuvieron del conjunto de prueba de la red neuronal, como se muestra en la **Tabla 4.2.2.2**.

Los costos de capital, bombeo, tubería, agua potable y tratamiento se obtuvieron de [García-Montoya et al. \(2015\)](#). Todos los costos que se muestran en este documento se presentan anualmente. Se consideraron las propiedades de DBO, DQO y SST en los flujos de la red de distribución. El agua debe cumplir con los siguientes límites permisibles de DBO, DQO y SST: 75, 72 y 36

$\times 10^3 (mg/m^3)$, respectivamente, lo que permite la mezcla de flujos en diferentes UD's, cumpliendo con las regulaciones de la [SEMARNAT \(2003, 2022\)](#).

Los flujos de agua tratada en la planta de tratamiento deben cumplir con la normativa para ser recirculados, almacenados o descargados al medio ambiente. Los procesos considerados en la planta de tratamiento fueron aeróbicos y anaeróbicos. El periodo de estudio duró 7 días, y cada día se consideraron los flujos diferentes para las demandas de UD's, la eficiencia hídrica para cada uso doméstico y para las propiedades exteriores de cada ER. La demanda de agua de los residentes se basa en [THE Water Research FOUNDATION \(2016\)](#). Los flujos de inodoros y baños se unificaron, y los flujos de grifos y pérdidas por fugas se dividieron en proporciones iguales a los cinco usos domésticos; sin embargo, en este trabajo la demanda es incierta (se muestra en la **Tabla 4.2.2.3**).

Estos últimos datos se obtienen de los residentes con demanda de agua. Se aplica un ruido gaussiano con media cero, desviación estándar 5 y una semilla aleatoria de 369 mediante la función `np.random.normal()` de la biblioteca NumPy ([Harris et al., 2020](#)). Los datos varían, por lo que el modelo matemático presenta incertidumbre a lo largo del tiempo. Al formular la optimización del modelo matemático, se identificaron varios escenarios óptimos globales, como se presenta en la **Sección 5.3**.

Tabla 4.2.2.1. Eficiencias ($\vartheta_{j,k,t}$) en función de los edificios residenciales (j), usos domésticos (k) y un periodo de tiempo (t).

Edificio	UD	Periodo (día)						
		1	2	3	4	5	6	7
1	Sanitario	0.01	0.003	0.023	0.025	0.016	0.011	0
1	Ducha	0.15	0.158	0.155	0.14	0.148	0.172	0.162
1	Lavavajillas	0.12	0.12	0.134	0.112	0.129	0.126	0.13
1	Lavandería	0.2	0.205	0.209	0.187	0.203	0.2	0.189
1	Jardinería	1	1	1	1	1	1	1
2	Sanitario	0.009	0.024	0.004	0.014	0.007	0.028	0.008
2	Ducha	0.152	0.134	0.145	0.135	0.161	0.149	0.157
2	Lavavajillas	0.104	0.125	0.122	0.112	0.117	0.11	0.125
2	Lavandería	0.197	0.219	0.205	0.201	0.196	0.2	0.197
2	Jardinería	1	1	1	1	1	1	1

Tabla 4.2.2.2. Propiedades ($P_{j,k,x,t}^{EDIF,sal}$) de los flujos de salida de edificios residenciales (mg/m^3) $\times 10^3$.

Edificio	UD	Propiedad	Periodo (día)						
			1	2	3	4	5	6	7
1	Sanitario	DBO	133	151	114	142	150	92	138
1	Sanitario	DQO	284	316	521	376	371	233	268
1	Sanitario	SST	186	196	176	144	172	234	154
1	Ducha	DBO	120	164	99	121	147	94	142
1	Ducha	DQO	262	312	514	379	369	248	275
1	Ducha	SST	174	200	179	154	173	240	136
1	Lavavajillas	DBO	133	149	120	142	160	105	134
1	Lavavajillas	DQO	270	318	525	385	360	214	263
1	Lavavajillas	SST	195	178	197	159	155	220	177
1	Lavandería	DBO	138	141	117	134	149	75	150
1	Lavandería	DQO	273	307	525	385	355	239	264
1	Lavandería	SST	185	185	171	161	178	221	155
1	Jardinería	DBO	0	0	0	0	0	0	0
1	Jardinería	DQO	0	0	0	0	0	0	0
1	Jardinería	SST	0	0	0	0	0	0	0
2	Sanitario	DBO	84	191	159	132	127	153	179
2	Sanitario	DQO	251	240	310	304	274	307	265
2	Sanitario	SST	98	166	146	148	144	124	128
2	Ducha	DBO	71	204	144	111	124	155	183
2	Ducha	DQO	229	236	303	307	272	322	272
2	Ducha	SST	86	170	149	158	145	130	110
2	Lavavajillas	DBO	84	189	165	132	137	166	175
2	Lavavajillas	DQO	237	242	314	313	263	288	260
2	Lavavajillas	SST	107	148	167	163	127	110	151
2	Lavandería	DBO	89	181	162	124	126	136	191
2	Lavandería	DQO	240	231	314	313	258	313	261
2	Lavandería	SST	97	155	141	165	150	111	129
2	Jardinería	DBO	0	0	0	0	0	0	0
2	Jardinería	DQO	0	0	0	0	0	0	0
2	Jardinería	SST	0	0	0	0	0	0	0

Tabla 4.2.2.3. Demanda ($D_{j,k,t}^{F2}$) según edificios residenciales (j), usos domésticos (k) y periodo de tiempo (t).

Edificio	UD	Periodo (día)						
		1	2	3	4	5	6	7
1	Sanitario	153.51	146.91	154.897	144.75	155.637	146.515	149.13
1	Ducha	124.4	130.724	123.618	124.618	129.073	135.682	126.636
1	Lavavajillas	106.13	98.752	113.496	105.028	100.433	108.443	110.628
1	Lavandería	34.72	24.2	38.263	37.62	25.419	29.949	26.893
1	Jardinería	47.24	45.941	41.276	46.99	44.958	48.513	50.065
2	Sanitario	143.37	144.337	145.316	148.504	148.026	139.374	141.239
2	Ducha	116.19	118.075	117.57	122.83	107.115	115.475	115.529
2	Lavavajillas	99.12	88.134	103.934	97.012	109.849	90.755	93.618
2	Lavandería	32.43	30.548	33.061	25.205	40.039	38.541	29.832
2	Jardinería	44.13	40.556	47.049	44.939	35.558	38.565	52.794

4.2.3. CASO DE ESTUDIO APRENDIZAJE POR REFUERZO

En esta sección se presenta el caso de estudio para la implementación de aprendizaje por refuerzo en el modelo integrado presentado en la **Sección 3.4**. Las consideraciones tomadas para este caso de estudio competen con las consideraciones tomadas en la **Sección 4.2.2** con respecto a la ubicación del caso de estudio. Además, debido a la implementación de algunas variantes en el modelo matemático, es necesario especificar los nuevos parámetros de la formulación matemática.

El modelo implementado en este caso de estudio considera la posibilidad de recibir flujos de agua residual de otras localidades. Se considera que los flujos máximos permitidos de otras localidades sean respectivos a 543 hogares dando como resultado un total promedio de 2,172 personas. Los flujos promedio para la cantidad de personas son 93.23, 75.55, 64.45 y 21.08 m³ para los UD's de sanitario, baño, lavavajillas y lavandería, respectivamente. Los flujos de agua residual de fuentes externas son dependientes de la temperatura de la localidad, conforme la temperatura aumenta, la demanda del agua fresca aumenta. Por consiguiente, se consideraron los primeros 7 días del año 2023. Estos tienen los siguientes registros de temperatura, como se muestran en la **Tabla 4.2.3.1** (Meteostat, 2025).

Tabla 4.2.3.1. Temperaturas de los primeros 7 días del año 2023.

Día	$T^{min}(^{\circ}\text{C})$	$T^{max}(^{\circ}\text{C})$	$T^{prom}(^{\circ}\text{C})$	T^{norm}
1	6.7	24.8	15.75	0.39375
2	6.6	24	15.3	0.3825

3	6.6	24.7	15.65	0.39125
4	5.2	25.6	15.4	0.385
5	7.5	24.8	16.15	0.40375
6	6.2	25.8	16	0.4
7	6.4	25.4	15.9	0.3975

En la **Tabla 4.2.3.1** se muestran las temperaturas mínimas (T^{min}), máximas (T^{max}), promedio (T^{prom}) y normalizadas (T^{norm}). La T^{norm} tiene límite superior e inferior igual a 40 y 0 °C, respectivamente. Si la temperatura mínima y máxima aumentan en un día determinado, la temperatura normalizada aumenta hacia 1, mientras, Si la temperatura mínima y máxima disminuye, la temperatura normalizada disminuye hacia 0. Por lo tanto, el valor de temperatura normalizada $T^{norm,0.5} = 0.5$ corresponde a la temperatura de 20 °C y los flujos externos de aguas residuales ($f_{k,t}^{ext}$) de 93.23, 75.55, 64.45 y 21.08 m³ para los usos domésticos de sanitario, baño, lavavajillas y lavandería, respectivamente, se consideran los cálculos de la Sección 4.2.2 y ([THE Water Research FOUNDATION, 2016](#)) para el cálculo de flujo de agua por persona. En consecuencia, para obtener los flujos para cada día se calculan con la Ecuación (4.2.3.1) y dan como resultado los valores de la **Tabla 4.2.3.2** obtenidos de la Ecuación (4.2.3.2).

$$f_{k,t}^{ext} = \frac{T^{norm} f_{k,t}^{ext}}{T^{norm,0.5}} \quad (4.2.3.1)$$

$$R_{e,l,t}^{AR,ext} = \sum_{k=1}^K f_{k,t}^{ext}, \quad \forall e \in E, \quad \forall t \in T \quad (4.2.3.2)$$

Tabla 4.2.3.2. Restricción de flujos externos de aguas residuales ($R_{e,l,t}^{AR,ext}$, m³).

Fuente Externa	Planta	Periodo (día)						
		1	2	3	4	5	6	7
1	PTAR	200.297	194.574	199.025	195.845	205.383	203.476	202.204

Asimismo, los flujos de demanda de los edificios residenciales son dependientes de la temperatura. Por lo tanto, para el valor de temperatura normalizada $T^{norm,0.5} = 0.5$ corresponde a la temperatura de 20 °C y los flujos de demandas ($f_{j,k,t}^{dem}$) de 153.51 y 143.37, 124.4 y 116.19,

106.13 y 99.12, 34.72 y 32.43, y, 47.24 y 44.13 m³ para los usos domésticos de sanitario, baño, lavavajillas, lavandería y jardinería en los edificios residenciales 1 y 2, respectivamente, se consideran los cálculos de la **Sección 4.2.2** y (THE Water Research FOUNDATION, 2016). La Ecuación (4.2.3.3) muestra el cálculo de los flujos de la demanda de los edificios residenciales y la **Tabla 4.2.3.3** muestra los valores correspondientes.

$$D_{j,k,t}^{EDIF} = \frac{T^{norm} f_{j,k,t}^{dem}}{T^{norm,0.5}} \quad (4.2.3.3)$$

Tabla 4.2.3.3. Demanda ($D_{j,k,t}^{EDIF}$) según edificios residenciales (j), usos domésticos (k) y periodo de tiempo (t).

Edificio	UD	Periodo (día)						
		1	2	3	4	5	6	7
1	Sanitario	120.89	117.44	120.12	118.20	123.96	122.81	122.04
1	Ducha	97.97	95.17	97.34	95.79	100.45	99.52	98.90
1	Lavavajillas	83.58	81.19	83.05	81.72	85.70	84.90	84.37
1	Lavandería	27.34	26.56	27.17	26.73	28.04	27.78	27.60
1	Jardinería	37.20	36.14	36.97	36.37	38.15	37.79	37.56
2	Sanitario	112.90	109.68	112.19	110.39	115.77	114.70	113.98
2	Ducha	91.50	88.89	90.92	89.47	93.82	92.95	92.37
2	Lavavajillas	78.06	75.83	77.56	76.32	80.04	79.30	78.80
2	Lavandería	25.54	24.81	25.38	24.97	26.19	25.94	25.78
2	Jardinería	34.75	33.76	34.53	33.98	35.63	35.30	35.08

Las propiedades de salida de los ERs y fuentes externas se obtuvieron de la **Sección 4.2.2**. Sin embargo, se generó un ruido gaussiano para estos datos con una media de cero, una desviación estándar de 10 y una semilla aleatoria de 369; se utiliza la función np.random.normal() de la biblioteca NumPy (Harris et al., 2020). Los resultados se muestran en las **Tablas 4.2.3.4** y **4.2.3.5** para las propiedades de salida de los edificios residenciales y fuentes externas, respectivamente. Mientras que, el factor de eficiencia del consumo de agua de los edificios residenciales se obtiene de la **Sección 4.2.2** y se genera un ruido gaussiano para estos datos con una media de cero, una desviación estándar de 0.003 y una semilla aleatoria de 13; se utiliza la función np.random.normal() de la biblioteca NumPy (Harris et al., 2020) como se muestra en la **Tabla 4.2.3.6**.

Tabla 4.2.3.4. Propiedades ($P_{j,k,x,t}^{EDIF,sal}$) de los flujos de salida de edificios residenciales (mg/m^3) $\times 10^3$.

Edificio	UD	Propiedad	Periodo (día)						
			1	2	3	4	5	6	7
1	Sanitario	DBO	133	151	114	142	150	92	138
1	Sanitario	DQO	284	316	521	376	371	233	268
1	Sanitario	SST	186	196	176	144	172	234	154
1	Ducha	DBO	155.99	111.58	134.37	143.27	97.66	141.68	134.52
1	Ducha	DQO	295.88	528.73	382.45	354.54	225.45	258.49	289.58
1	Ducha	SST	180.82	170.41	147.81	155.73	227.69	158.38	185.02
1	Lavavajillas	DBO	129	149.21	157.73	100.69	143.04	143.08	148.24
1	Lavavajillas	DQO	535.66	370.13	373.77	222.77	284.16	268.6	320.96
1	Lavavajillas	SST	185.33	125.17	207.68	218.81	161.19	195.08	193.84
1	Lavandería	DBO	141.27	150.92	84.51	137.38	136.1	144.52	112.75
1	Lavandería	DQO	377.38	387.95	233.57	280.61	285.29	321.52	523.21
1	Lavandería	SST	158.38	170.28	241.95	169.86	178.63	208.38	170.45
1	Jardinería	DBO	0	0	0	0	0	0	0
1	Jardinería	DQO	0	0	0	0	0	0	0
1	Jardinería	SST	0	0	0	0	0	0	0
2	Sanitario	DBO	84	191	159	132	127	153	179
2	Sanitario	DQO	251	240	310	304	274	307	265
2	Sanitario	SST	98	166	146	148	144	124	128
2	Ducha	DBO	195.99	156.58	124.37	120.27	158.66	182.68	85.52
2	Ducha	DQO	219.88	317.73	310.45	257.54	299.45	255.49	256.58
2	Ducha	SST	150.82	140.41	151.81	127.73	117.69	132.38	97.02
2	Lavavajillas	DBO	174	139.21	134.73	161.69	184.04	94.08	188.24
2	Lavavajillas	DQO	324.66	298.13	276.77	296.77	281.16	235.6	244.96
2	Lavavajillas	SST	155.33	129.17	179.68	108.81	135.19	107.08	163.84
2	Lavandería	DBO	131.27	127.92	145.51	178.38	87.1	184.52	157.75
2	Lavandería	DQO	305.38	290.95	307.57	277.61	252.29	245.52	312.21
2	Lavandería	SST	162.38	142.28	131.95	143.86	90.63	178.38	140.45
2	Jardinería	DBO	0	0	0	0	0	0	0
2	Jardinería	DQO	0	0	0	0	0	0	0
2	Jardinería	SST	0	0	0	0	0	0	0

Tabla 4.2.3.5. Propiedades ($P_{e,l,t}^{AR,ext}$) de fuentes externas (mg/m^3) $\times 10^3$.

Fuente Externa	Planta	Propiedad	Periodo (día)						
			1	2	3	4	5	6	7
1	PTAR	DBO	184	223	203	230	207	237	139
		DQO	242	177	114	115	210	114	197
		SST	231	123	91	216	184	96	235

Tabla 4.2.3.6. Eficiencias ($\vartheta_{j,k,t}$) en función de los edificios residenciales (j), usos domésticos (k) y un periodo de tiempo (t).

Edificio	UD	Periodo (día)						
		1	2	3	4	5	6	7
1	Sanitario	0.01	0.007863	0.014035	0.014436	0.011689	0.010382	0.007048
1	Ducha	0.15	0.152261	0.151597	0.146864	0.14927	0.156451	0.153572
1	Lavavajillas	0.12	0.119866	0.124051	0.117633	0.122741	0.121819	0.122858
1	Lavandería	0.2	0.201355	0.202584	0.196215	0.200952	0.19992	0.196738
1	Jardinería	1	1	1	1	1	1	1
2	Sanitario	0.009925	0.004994	0.009231	0.01292	0.007092	0.014035	0.012239
2	Ducha	0.149549	0.147829	0.149771	0.148108	0.15673	0.148654	0.15012
2	Lavavajillas	0.114936	0.120412	0.118395	0.119864	0.118488	0.111192	0.122898
2	Lavandería	0.197729	0.20854	0.198771	0.201742	0.200466	0.200545	0.200442
2	Jardinería	1	1	1	1	1	1	1

Los costos bombeo, tubería, agua potable y tratamiento se obtuvieron de [García-Montoya et al. \(2015\)](#) y se actualizó al año 2023 con el Índice de Costos de Plantas de Ingeniería Química (CEPCI) ([CEPCI, 2023](#)). El costo unitario de agua fresca, costo de bombeo de agua fresca, costo de bombeo tanques de agua residual a UD's, costo de bombeo de recirculación de la PTAR a UD's y costo de operación de la PTAR son igual a 0.914, 0.021, 0.021, 0.091, 0.091 y 4.9 \$/m³, respectivamente.

Con respecto a la metodología del ecoindicador 99, en la **Tabla 4.2.3.7** se muestra el inventario del ciclo de vida de las fases de operación y mantenimiento de la PTAR (RAFAML). Para el modelo de daño Jerárquico y la normalización con la ponderación Promedio se tiene los siguientes factores normalizado de 0.0154, 5130, 8410 y ponderaciones de 400, 400, 200 para las categorías de salud humana, calidad de los ecosistemas, Recursos, respectivamente. En la **Tabla 4.2.3.8** se presentan los valores de las subcategorías abarcadas por el inventario del ciclo de vida por contaminante.

Tabla 4.2.3.7. Inventario de ciclo de vida (P.E - día)

Parámetro	Unidad	RAFAML
Consumo de energía	MJ	0.0297863
Emisiones al aire		
Partículas	kg	2.389E-05
CO ₂	kg	0.02071233
SO ₂	kg	0.00010852
NO _x	kg	6.1397E-05
CO	kg	0.00015575
Mercurio	kg	1.1781E-09
Emisiones al agua		
DQO	kg	0.0250137
N-total	kg	0.0250137
P-total	kg	0.002
Metales Pesados	kg	0.00062222
Zinc	kg	6.9135E-05
Estaño	kg	6.9135E-05
Níquel	kg	6.9135E-05
Plomo	kg	6.9135E-05
Cobre	kg	6.9135E-05
Cobalto	kg	6.9135E-05
Cromo	kg	6.9135E-05
Cadmio	kg	6.9135E-05
Arsénico	kg	6.9135E-05
Emisiones al suelo		
N-total	kg	0.8750137
P-total	kg	0.21873973
Metales Pesados	kg	5.5123E-05
Zinc	kg	6.1248E-06
Estaño	kg	6.1248E-06
Níquel	kg	6.1248E-06
Plomo	kg	6.1248E-06
Cobre	kg	6.1248E-06
Cobalto	kg	6.1248E-06
Cromo	kg	6.1248E-06
Cadmio	kg	6.1248E-06
Arsénico	kg	6.1248E-06

Tabla 4.2.3.8. Valores de las subcategorías abarcadas por el inventario del ciclo de vida por contaminante.

Parámetro	Efectos cancerígenos en humanos	Efectos respiratorios en humanos causados por sustancias inorgánicas	Daños a la salud humana causados por el cambio climático	Daños a la calidad de los ecosistemas causados por emisiones ecotóxicas	Daños a la calidad de los ecosistemas causados por el efecto combinado de la acidificación y la eutrofización	Daños a los recursos causados por la extracción de combustibles fósiles
Consumo de energía	0	0	0	0	0	0.15
Emisiones al aire						
Partículas	0	0.001075	0	0	0	0
CO ₂	0	0	0.00000021	0	0	0
SO ₂	0	0.0000546	0	0	1041	0
NO _x	0	0.0000887	0	0	5713	0
Mercurio	0	0	0	829	0	0
Emisiones al agua						
Zinc	0	0	0	16.3	0	0
Níquel	0.343	0	0	143	0	0
Plomo	0	0	0	7.39	0	0
Cobre	0	0	0	68.7	0	0
Cromo	0.343	0	0	68.7	0	0
Cadmio	0.0712	0	0	829	0	0
Arsénico	0.0657	0	0	829	0	0
Emisiones al suelo						
Zinc	0	0	0	2980	0	0
Níquel	0.00394	0	0	7320	0	0
Plomo	0	0	0	12.9	0	0
Cobre	0	0	0	1500	0	0
Cromo	0.271	0	0	4240	0	0
Cadmio	0.00398	0	0	9940	0	0
Arsénico	0.0132	0	0	610	0	0

4.3. METODOLOGÍA

4.3.1. APRENDIZAJE NO SUPERVISADO

En esta sección se inicia con el empleo de estrategias de agrupamiento para determinar las ubicaciones óptimas para las plantas de tratamiento de eliminación de arsénico. El algoritmo k-media, una técnica de aprendizaje no supervisado, se emplea para segmentar el área de estudio en varios grupos según variables relevantes como la concentración de arsénico en el agua, la densidad de población y la proximidad a las fuentes de agua. El objetivo principal de este enfoque es minimizar la distancia total entre los puntos de suministro de agua con arsénico y las ubicaciones propuestas para las plantas de tratamiento, garantizando una distribución eficiente y eficaz de los recursos. La selección de k (el número de grupos) se determina mediante la aplicación de métodos de validación interna, como el método del codo, para garantizar que el número elegido ofrezca el mejor equilibrio entre la compacidad y la separación de los grupos. Este proceso iterativo identifica ubicaciones estratégicas que maximizan la cobertura del servicio de tratamiento, optimizando al mismo tiempo los costos operativos y de infraestructura. Se proporcionan más detalles sobre la metodología de la estrategia de agrupamiento k-media en la siguiente sección. Esta sección ofrece una explicación detallada de los procedimientos y criterios utilizados para identificar los sitios más adecuados para la ubicación de las instalaciones de eliminación de arsénico.

ESTRATEGIA K-MEANS

En este estudio se realizó en una localidad con pozos profundos. Estos pozos satisfacen las necesidades de agua de la comunidad. La comunidad cuenta con 33 pozos profundos, localizados con la ayuda de Google Earth Pro, como se muestra en la **Fig. 4.3.1.1**. Una vez localizados los pozos profundos, se seleccionó una ubicación de origen para todos ellos. Este punto de origen permitió convertir las coordenadas UTM (Universal Transverse Mercator) a coordenadas cartesianas para todas las ubicaciones de los pozos profundos.

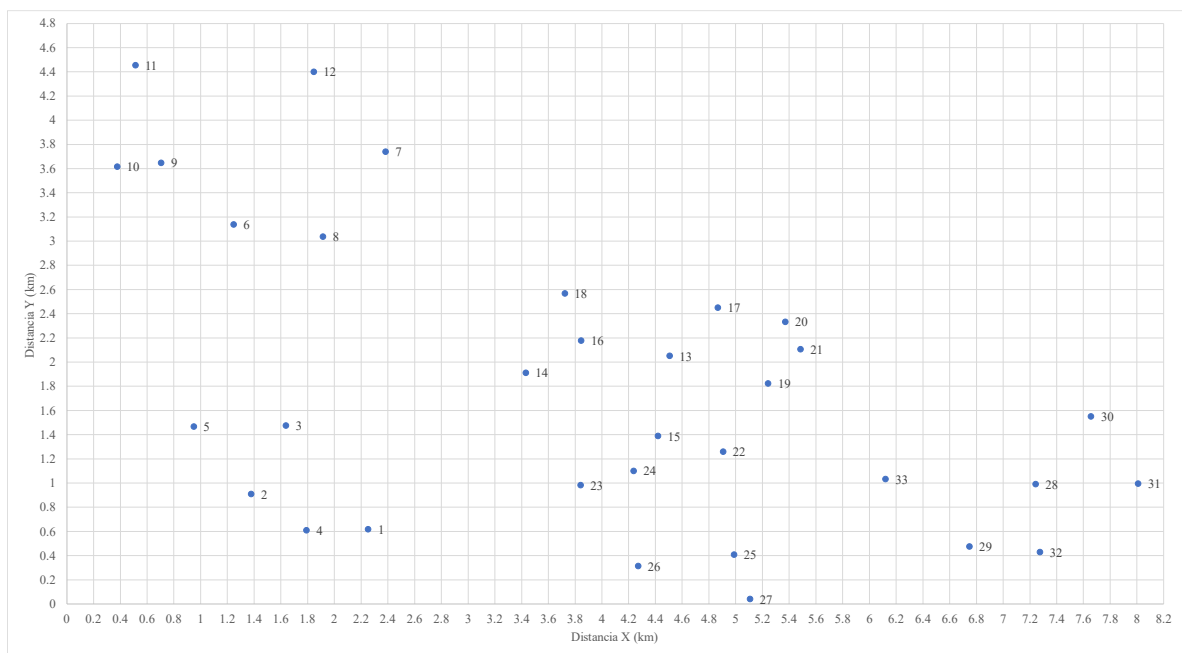
Se obtuvieron las coordenadas cartesianas de todos los pozos profundos, el área de estudio se limitó a 40,8 km², como se muestra en la **Fig. 4.3.1.1 (b)**. Se implementaron dos estrategias de k-means. La primera estrategia tuvo como objetivo encontrar la ubicación óptima para una sola planta de tratamiento con coordenadas más cercanas a todas las ubicaciones de los pozos profundos. La segunda estrategia buscó determinar las ubicaciones óptimas para dos plantas de tratamiento con base en las

distancias más cortas desde todas las ubicaciones de los pozos profundos. Se aplicó la siguiente toma de decisión para la agrupación: si un pozo profundo está más cerca de la primera planta que de la segunda, se asignará al grupo de la primera planta; de lo contrario, se asignará al grupo de la segunda planta. Este enfoque elimina la posibilidad de que ambas plantas estén ubicadas en el mismo punto. También se utilizaron solucionadores globales en ambas estrategias de k-means para garantizar un mínimo global. Las coordenadas cartesianas de los pozos profundos se proporcionan en la **Tabla 4.3.1.1.**

El parámetro más crítico de esta estrategia fue la distancia mínima entre cada pozo profundo y la ubicación de la planta. Este parámetro nos permitió garantizar que, si un pozo profundo dejaba de suministrar agua, la ubicación de la planta de extracción seguiría siendo efectiva para los pozos restantes, debido a que la ubicación de la planta depende de la distancia entre esta y los demás pozos profundos. En otras palabras, si la ubicación de la planta se basara en la población circundante y la concentración de arsénico de un pozo profundo, esta se ubicaría más cerca de pozos con mayor población circundante y/o mayor concentración de arsénico. Por lo tanto, si uno de estos pozos dejara de suministrar agua, la ubicación de la planta en relación con los demás pozos profundos sería mayor, lo que generaría mayores costos de bombeo desde los pozos restantes hasta la planta de extracción, lo cual se convertiría en un factor significativo.



a)



b)

Fig. 4.3.1.1. Comunidad con 33 pozos profundos. a) Comunidad con 33 pozos profundos, vista satelital. b) Comunidad con 33 pozos profundos, vista cartesiana.

Tabla 4.3.1.1. Coordenadas cartesianas para ubicaciones de los pozos profundos.

Pozo	Coordenada x (km)	Coordenada y (km)
1	2.2522	0.6195
2	1.3771	0.9089
3	1.6364	1.4768
4	1.7905	0.6102
5	0.9478	1.4682
6	1.2462	3.1386
7	2.3817	3.7408
8	1.9144	3.0387
9	0.7043	3.6476
10	0.3756	3.6161
11	0.5117	4.4558
12	1.8454	4.4012
13	4.5058	2.0516
14	3.4300	1.9126
15	4.4194	1.3896
16	3.8446	2.1777
17	4.8667	2.4503
18	3.7220	2.5690

19	5.2425	1.8250
20	5.3705	2.3341
21	5.4848	2.1071
22	4.9055	1.2607
23	3.8408	0.9826
24	4.2368	1.1008
25	4.9877	0.4085
26	4.2701	0.3144
27	5.1074	0.0409
28	7.2421	0.9923
29	6.7468	0.4751
30	7.6564	1.5510
31	8.0084	0.9956
32	7.2737	0.4305
33	6.1195	1.0331

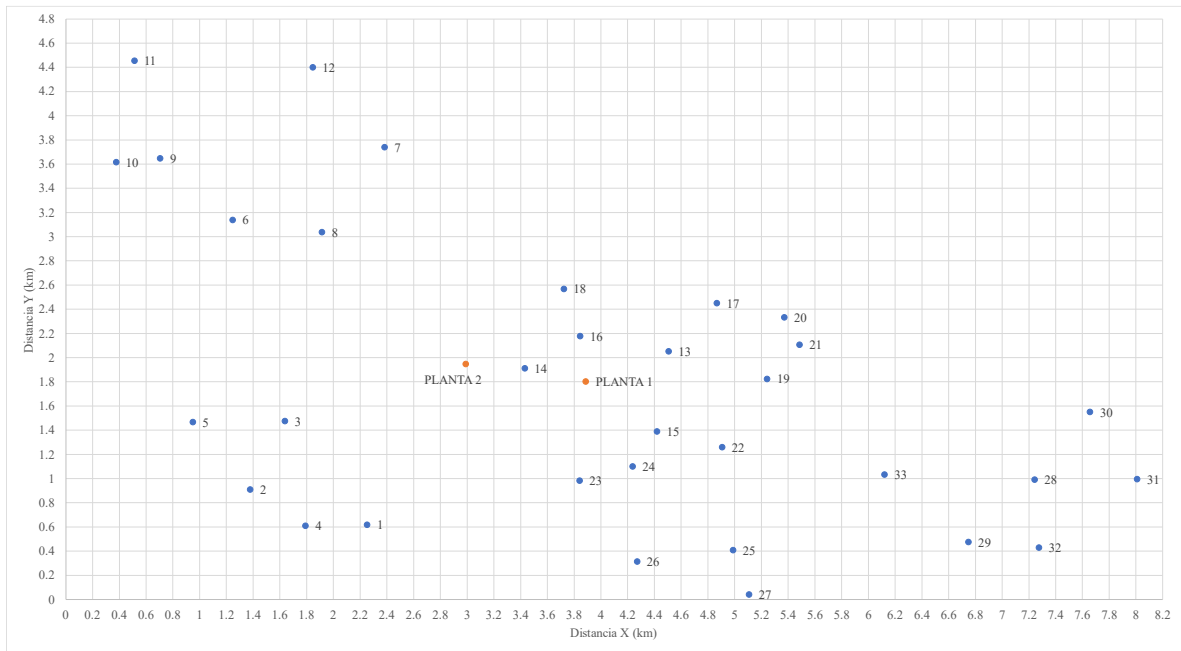
La Ecuación para encontrar la coordenada óptima de planta entre pozos profundos se muestra a continuación:

$$\delta^{1p} = \sqrt{\sum_{i=1}^I [(\chi - x_i)^2 + (\gamma - y_i)^2]} \quad (4.3.1.1)$$

Donde δ^{1p} es la raíz cuadrada de la suma de las diferencias entre el punto óptimo de la planta de tratamiento y cada ubicación de pozo profundo al cuadrado, χ es la coordenada de la abscisa de la planta de tratamiento, γ es la coordenada de la ordenada de la planta de tratamiento, mientras que x_i e y_i son las coordenadas de la abscisa y la ordenada para cada una de las ubicaciones de los pozos profundos, respectivamente. Los resultados de optimización de la Ecuación (4.3.1.1) para δ^{1p} , χ e γ son 14.3269 km, 3.8868 km y 1.8038 km, respectivamente. Debido a la disposición de la localidad, las coordenadas resultantes de la optimización estaban ocupadas por el área urbana, por lo tanto, el cambio de coordenadas se realizó al lugar más cercano con disponibilidad de terreno. Las nuevas coordenadas fueron las siguientes para χ e γ son 2.989 y 1.947 km, respectivamente. Las coordenadas óptimas y nuevas de la planta de tratamiento y las coordenadas de cada pozo profundo se grafican como se muestra en la **Fig. 4.3.1.2**. En este último, se muestra en coordenadas cartesianas (km) la ubicación de todos los pozos profundos, la ubicación óptima y la nueva planta de tratamiento.



a)



b)

Fig. 4.3.1.2. Comunidad con 33 pozos profundos y planta de tratamiento. a) Comunidad con 33 pozos profundos y una planta de tratamiento, vista satelital. b) Comunidad con 33 pozos profundos y planta de tratamiento, vista cartesiana.

La estrategia para encontrar las dos ubicaciones óptimas para la instalación de dos plantas se describe mediante la siguiente Ecuación:

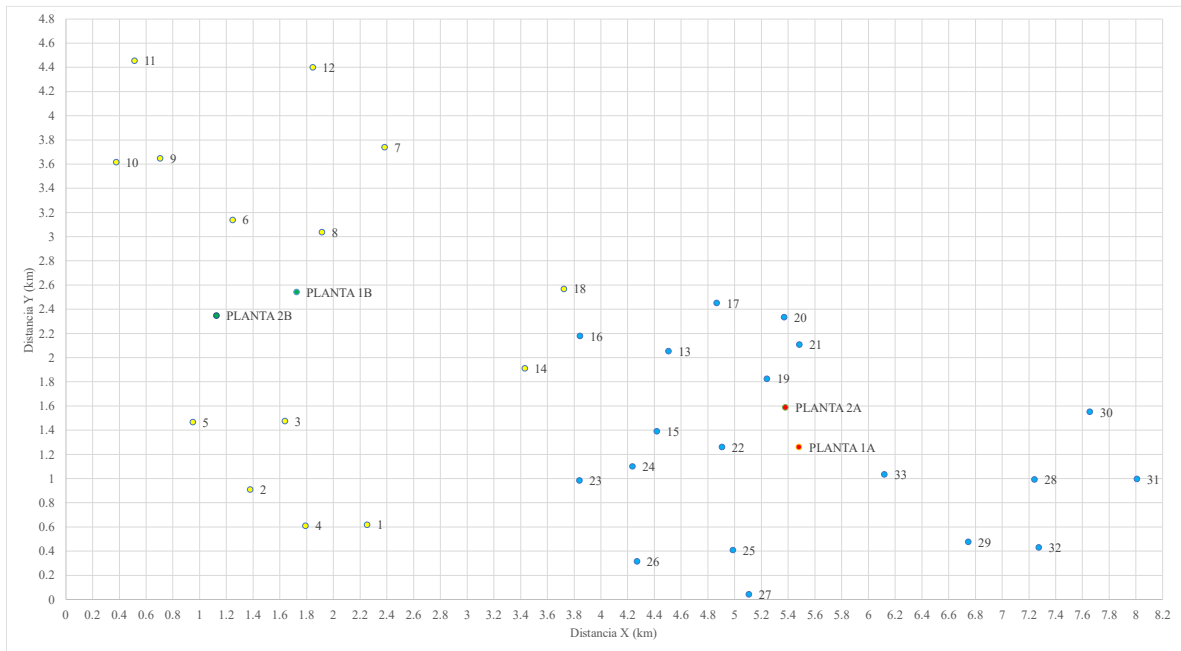
$$\delta^{2p} = \sqrt{\sum_{k=1}^K \left[\sum_{i=1}^I \left[(\chi_k - x_i) y_{i,k}^p \right]^2 + (\gamma_k - y_i) y_{i,k}^p \right]^2} \quad (4.3.1.2)$$

$$\sum_{k=1}^K (y_{i,k}^p) = 1 \quad (4.3.1.3)$$

Donde δ^{2p} es la raíz cuadrada de la suma de las diferencias de las distancias entre el punto óptimo de cada planta de tratamiento y la ubicación de cada pozo profundo, elevada al cuadrado. χ_k son las coordenadas óptimas de las dos plantas de tratamiento en el eje de abscisas. γ_k son las coordenadas óptimas de las dos plantas de tratamiento en el eje de ordenadas. $y_{i,k}^p$ es una variable binaria que determina si el flujo del pozo profundo se dirige a la primera planta o a la segunda ubicación de la segunda planta de tratamiento. Los resultados de optimización de la Ecuación (4.3.1.2) para δ^{2p} , χ_k e γ_k son 8.8441, [5.4805, 1.7239] y [1.2590, 2.5431] km, respectivamente. Considerando que el conjunto de pozos profundos para la primera ubicación de la planta de tratamiento (PLANTA 1A) son los pozos: 13, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32 y 33, mientras que para la segunda ubicación de la planta de tratamiento (PLANTA 1B) es el siguiente conjunto de pozos profundos: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14 y 18. Como ocurrió en el caso de una sola ubicación para la instalación de una planta de tratamiento, la disponibilidad de terreno se convierte en un factor importante debido a la zona urbana. Por lo tanto, el cambio de coordenadas al lugar disponible más cercano se realizó considerando las coordenadas óptimas. Las nuevas coordenadas son [5.3784, 1.1260] y [1.5896, 2.3480] km para χ_k e γ_k , respectivamente. Esto se puede observar en la **Fig. 4.3.2.3**.



a)



b)

Fig. 4.3.2.3. Comunidad con 33 pozos profundos y dos plantas de tratamiento. a) Comunidad con 33 pozos profundos y dos plantas de tratamiento, vista satelital. b) Comunidad con 33 pozos profundos y dos plantas de tratamiento, vista cartesiana.

Una vez obtenidas las coordenadas de las plantas de tratamiento 2, 2A y 2B, se calcula la distancia entre ellas y los pozos profundos. Este cálculo se realiza mediante la Ecuación de distancia lineal, como se muestra en la Ecuación (4.3.1.4):

$$d_{i,k}^P = \sqrt{(\chi_k^P - x_i^P)^2 + (\gamma_k^P - y_i^P)^2} \quad (4.3.1.4)$$

Donde $d_{i,k}^P$ es la distancia desde cada pozo profundo hasta cada ubicación de la planta, χ_k^P e γ_k^P son las coordenadas de abscisas y ordenadas de cada ubicación de la planta de tratamiento, y x_i^P e y_i^P son las coordenadas de abscisas y ordenadas de cada pozo profundo. Las distancias se muestran en la **Tabla 4.3.1.2.**

Tabla 4.3.1.2. Distancias entre pozos profundos y plantas de tratamiento.

Pozo	PLANTA 1 (km)	PLANTA 2 (km)	PLANT 2B (km)
1	1.5183	3.2734	2.0630
2	1.9172	4.0588	1.4608
3	1.4320	3.7437	1.0097
4	1.7953	3.7192	1.8604
5	2.0966	4.4323	0.8976
6	2.1113	4.4130	0.7998
7	1.8938	3.6889	1.8753
8	1.5319	3.7549	1.0482
9	2.8481	5.1071	1.3663
10	3.1009	5.3977	1.4735
11	3.5257	5.6480	2.1955
12	2.7076	4.5153	2.1757
13	1.5205	0.9873	3.3928
14	0.4423	1.9751	2.3448
15	1.5352	0.9797	3.4300
16	0.8862	1.6427	2.7239
17	1.9441	1.0013	3.7422
18	0.9613	1.9243	2.6054
19	2.2568	0.2718	4.1496
20	2.4128	0.7445	4.2446
21	2.5010	0.5283	4.3655
22	2.0357	0.5761	3.9328
23	1.2867	1.6531	3.0389
24	1.5077	1.2419	3.3516
25	2.5223	1.2441	4.3215
26	2.0752	1.6896	3.7444
27	2.8498	1.5723	4.6016

28	4.3590	1.9571	6.2646
29	4.0358	1.7649	5.9247
30	4.6842	2.2783	6.5789
31	5.1088	2.6962	7.0140
32	4.5452	2.2216	6.4398
33	3.2612	0.9268	5.1638

Para el cálculo de la distancia entre pozos profundos, la Ecuación (4.3.1.5) muestra:

$$d_{i,i}^{x,y} = \sqrt{(x_i^P - x_i^P)^2 + (y_i^P - y_i^P)^2} \quad (4.3.1.5)$$

Donde $d_{i,i}^{x,y}$ es la distancia entre los pozos profundos, estas distancias se muestran en las **Tablas 4.3.1.3.**

Tabla 4.3.1.3. Distancia entre pozos profundos, primera parte (km).

Pozo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	0	0.92164	1.05552	0.46177	1.5562	2.71262	3.12399	2.44272	3.40079	3.53574	4.21265
2	0.92164	0	0.62425	0.50993	0.70511	2.23359	3.00476	2.19652	2.82013	2.88654	3.65093
3	1.05552	0.62425	0	0.88011	0.68867	1.70708	2.38351	1.58648	2.36246	2.48324	3.18424
4	0.46177	0.50993	0.88011	0	1.20259	2.58632	3.18585	2.43162	3.2257	3.32222	4.05256
5	1.5562	0.70511	0.68867	1.20259	0	1.69688	2.68712	1.84411	2.19294	2.22281	3.01922
6	2.71262	2.23359	1.70708	2.58632	1.69688	0	1.28528	0.67561	0.74339	0.99294	1.50806
7	3.12399	3.00476	2.38351	3.18585	2.68712	1.28528	0	0.84337	1.67997	2.01	2.002
8	2.44272	2.19652	1.58648	2.43162	1.84411	0.67561	0.84337	0	1.3546	1.64355	1.99385
9	3.40079	2.82013	2.36246	3.2257	2.19294	0.74339	1.67997	1.3546	0	0.33025	0.83082
10	3.53574	2.88654	2.48324	3.32222	2.22281	0.99294	2.01	1.64355	0.33025	0	0.85064
11	4.21265	3.65093	3.18424	4.05256	3.01922	1.50806	2.002	1.99385	0.83082	0.85064	0
12	3.80359	3.52359	2.93193	3.79139	3.0673	1.39756	0.85081	1.36427	1.36748	1.66636	1.33475
13	2.6702	3.33081	2.92642	3.07417	3.60554	3.43612	2.71389	2.77309	4.12293	4.41663	4.66184
14	1.74915	2.28507	1.84575	2.09383	2.52164	2.50439	2.10733	1.88813	3.23096	3.49729	3.87085
15	2.30001	3.07999	2.78434	2.74201	3.47249	3.6233	3.11126	2.9991	4.34742	4.61623	4.96698
16	2.22798	2.77453	2.31673	2.58384	2.9824	2.77036	2.1408	2.11351	3.46721	3.75537	4.03698
17	3.19189	3.81488	3.37386	3.5846	4.04015	3.68541	2.80011	3.01044	4.33119	4.64001	4.79457
18	2.44149	2.87297	2.35423	2.75085	2.98457	2.54047	1.78028	1.86763	3.20461	3.50639	3.72365
19	3.22418	3.9724	3.62284	3.65949	4.30948	4.20665	3.44297	3.5425	4.89045	5.18601	5.41301
20	3.55865	4.24005	3.83124	3.97343	4.50667	4.20204	3.30325	3.52721	4.8475	5.15681	5.30178
21	3.55856	4.27888	3.8997	3.98608	4.58181	4.36235	3.50686	3.68999	5.02257	5.32742	5.49979
22	2.7297	3.54582	3.27619	3.18218	3.96312	4.11303	3.53836	3.47965	4.83185	5.10566	5.43261
23	1.62963	2.46477	2.25913	2.08387	2.93351	3.37354	3.12035	2.8176	4.1158	4.3524	4.81101
24	2.04219	2.8661	2.62745	2.49504	3.30949	3.61894	3.22659	3.02478	4.35485	4.60825	5.01319
25	2.74372	3.64512	3.51749	3.20363	4.17664	4.63176	4.23033	4.04523	5.37026	5.61793	6.03452
26	2.04082	2.95336	2.87874	2.49716	3.51691	4.13763	3.91223	3.60152	4.88102	5.10568	5.59246
27	2.91332	3.82996	3.75631	3.36548	4.39772	4.95029	4.5955	4.3798	5.69172	5.93066	6.37272
28	5.00389	5.86558	5.62663	5.46503	6.31232	6.36854	5.58371	5.70727	7.05646	7.35079	7.56927

29	4.49698	5.38716	5.20765	4.95818	5.88345	6.11158	5.45149	5.47034	6.82469	7.10342	7.39743
30	5.48394	6.312	6.02045	5.94088	6.70912	6.60389	5.71116	5.93162	7.26133	7.56802	7.71256
31	5.76849	6.63179	6.3901	6.22982	7.07638	7.09363	6.26059	6.42736	7.77058	8.07009	8.25663
32	5.02506	5.9159	5.73353	5.48614	6.41043	6.60792	5.9067	5.96028	7.31478	7.59815	7.86934
33	3.88945	4.74403	4.50504	4.34967	5.19003	5.30876	4.61549	4.65896	6.01332	6.29802	6.56978

Tabla 4.3.1.3. Distancia entre pozos profundos, segunda parte (km).

Pozo	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
1	3.80359	2.6702	1.74915	2.30001	2.22798	3.19189	2.44149	3.22418	3.55865	3.55856	2.7297
2	3.52359	3.33081	2.28507	3.07999	2.77453	3.81488	2.87297	3.9724	4.24005	4.27888	3.54582
3	2.93193	2.92642	1.84575	2.78434	2.31673	3.37386	2.35423	3.62284	3.83124	3.8997	3.27619
4	3.79139	3.07417	2.09383	2.74201	2.58384	3.5846	2.75085	3.65949	3.97343	3.98608	3.18218
5	3.0673	3.60554	2.52164	3.47249	2.9824	4.04015	2.98457	4.30948	4.50667	4.58181	3.96312
6	1.39756	3.43612	2.50439	3.6233	2.77036	3.68541	2.54047	4.20665	4.20204	4.36235	4.11303
7	0.85081	2.71389	2.10733	3.11126	2.1408	2.80011	1.78028	3.44297	3.30325	3.50686	3.53836
8	1.36427	2.77309	1.88813	2.9991	2.11351	3.01044	1.86763	3.5425	3.52721	3.68999	3.47965
9	1.36748	4.12293	3.23096	4.34742	3.46721	4.33119	3.20461	4.89045	4.8475	5.02257	4.83185
10	1.66636	4.41663	3.49729	4.61623	3.75537	4.64001	3.50639	5.18601	5.15681	5.32742	5.10566
11	1.33475	4.66184	3.87085	4.96698	4.03698	4.79457	3.72365	5.41301	5.30178	5.49979	5.43261
12	0	3.54948	2.95025	3.96173	2.9901	3.59648	2.62274	4.26346	4.08648	4.30215	4.38486
13	3.54948	0	1.08479	0.66757	0.67318	0.53784	0.93921	0.77071	0.90966	0.98058	0.88611
14	2.95025	1.08479	0	1.11916	0.4921	1.5341	0.71835	1.81463	1.98577	2.06405	1.61312
15	3.96173	0.66757	1.11916	0	0.97546	1.15118	1.37012	0.93114	1.34039	1.28451	0.50289
16	2.9901	0.67318	0.4921	0.97546	0	1.05792	0.41	1.44172	1.53392	1.64179	1.4023
17	3.59648	0.53784	1.5341	1.15118	1.05792	0	1.15092	0.72951	0.51697	0.70697	1.19025
18	2.62274	0.93921	0.71835	1.37012	0.41	1.15092	0	1.69275	1.66517	1.82236	1.76415
19	4.26346	0.77071	1.81463	0.93114	1.44172	0.72951	1.69275	0	0.52495	0.37193	0.65727
20	4.08648	0.90966	1.98577	1.34039	1.53392	0.51697	1.66517	0.52495	0	0.25415	1.1698
21	4.30215	0.98058	2.06405	1.28451	1.64179	0.70697	1.82236	0.37193	0.25415	0	1.02571
22	4.38486	0.88611	1.61312	0.50289	1.4023	1.19025	1.76415	0.65727	1.1698	1.02571	0
23	3.95841	1.25896	1.01677	0.70741	1.19515	1.79076	1.59083	1.63533	2.04121	1.99183	1.10038
24	4.07577	0.98811	1.14461	0.3417	1.14614	1.48932	1.55583	1.23928	1.6752	1.6032	0.68751
25	5.08102	1.71234	2.16547	1.1339	2.10646	2.04545	2.50399	1.43927	1.96332	1.76991	0.85621
26	4.75194	1.75307	1.80555	1.08551	1.91125	2.21767	2.32019	1.7965	2.3	2.1655	1.13981
27	5.44551	2.09876	2.51344	1.5141	2.48211	2.42142	2.88282	1.78921	2.30825	2.10041	1.23642
28	6.38325	2.9342	3.9217	2.85058	3.59844	2.78718	3.85714	2.16613	2.30294	2.08111	2.35204

29	6.28002	2.73996	3.61498	2.50066	3.36482	2.72694	3.67886	2.02122	2.31305	2.06304	2.00194
30	6.47237	3.1901	4.24188	3.24103	3.86301	2.93102	4.06399	2.42943	2.41632	2.24165	2.76621
31	7.04134	3.65826	4.66934	3.61054	4.32835	3.46207	4.56603	2.88757	2.95803	2.75747	3.1142
32	6.72555	3.20764	4.11957	3.01112	3.84859	3.14214	4.1458	2.46383	2.69181	2.45175	2.50951
33	5.44175	1.90824	2.82974	1.73714	2.5467	1.89156	2.84732	1.18168	1.50122	1.24754	1.23523

Tabla 4.3.1.3. Distancia entre pozos profundos, tercera parte (km).

Pozo	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
1	1.62963	2.04219	2.74372	2.04082	2.91332	5.00389	4.49698	5.48394	5.76849	5.02506	3.88945
2	2.46477	2.8661	3.64512	2.95336	3.82996	5.86558	5.38716	6.312	6.63179	5.9159	4.74403
3	2.25913	2.62745	3.51749	2.87874	3.75631	5.62663	5.20765	6.02045	6.3901	5.73353	4.50504
4	2.08387	2.49504	3.20363	2.49716	3.36548	5.46503	4.95818	5.94088	6.22982	5.48614	4.34967
5	2.93351	3.30949	4.17664	3.51691	4.39772	6.31232	5.88345	6.70912	7.07638	6.41043	5.19003
6	3.37354	3.61894	4.63176	4.13763	4.95029	6.36854	6.11158	6.60389	7.09363	6.60792	5.30876
7	3.12035	3.22659	4.23033	3.91223	4.5955	5.58371	5.45149	5.71116	6.26059	5.9067	4.61549
8	2.8176	3.02478	4.04523	3.60152	4.3798	5.70727	5.47034	5.93162	6.42736	5.96028	4.65896
9	4.1158	4.35485	5.37026	4.88102	5.69172	7.05646	6.82469	7.26133	7.77058	7.31478	6.01332
10	4.3524	4.60825	5.61793	5.10568	5.93066	7.35079	7.10342	7.56802	8.07009	7.59815	6.29802
11	4.81101	5.01319	6.03452	5.59246	6.37272	7.56927	7.39743	7.71256	8.25663	7.86934	6.56978
12	3.95841	4.07577	5.08102	4.75194	5.44551	6.38325	6.28002	6.47237	7.04134	6.72555	5.44175
13	1.25896	0.98811	1.71234	1.75307	2.09876	2.9342	2.73996	3.1901	3.65826	3.20764	1.90824
14	1.01677	1.14461	2.16547	1.80555	2.51344	3.9217	3.61498	4.24188	4.66934	4.11957	2.82974
15	0.70741	0.3417	1.1339	1.08551	1.5141	2.85058	2.50066	3.24103	3.61054	3.01112	1.73714
16	1.19515	1.14614	2.10646	1.91125	2.48211	3.59844	3.36482	3.86301	4.32835	3.84859	2.5467
17	1.79076	1.48932	2.04545	2.21767	2.42142	2.78718	2.72694	2.93102	3.46207	3.14214	1.89156
18	1.59083	1.55583	2.50399	2.32019	2.88282	3.85714	3.67886	4.06399	4.56603	4.1458	2.84732
19	1.63533	1.23928	1.43927	1.7965	1.78921	2.16613	2.02122	2.42943	2.88757	2.46383	1.18168
20	2.04121	1.6752	1.96332	2.3	2.30825	2.30294	2.31305	2.41632	2.95803	2.69181	1.50122
21	1.99183	1.6032	1.76991	2.1655	2.10041	2.08111	2.06304	2.24165	2.75747	2.45175	1.24754
22	1.10038	0.68751	0.85621	1.13981	1.23642	2.35204	2.00194	2.76621	3.1142	2.50951	1.23523
23	0	0.41327	1.2826	0.79414	1.57833	3.40133	2.94998	3.85769	4.16757	3.47696	2.27929
24	0.41327	0	1.02138	0.78705	1.37163	3.00728	2.58681	3.44909	3.77302	3.10995	1.88395
25	1.2826	1.02138	0	0.72382	0.38656	2.32876	1.76033	2.90295	3.07716	2.28603	1.29274
26	0.79414	0.78705	0.72382	0	0.88093	3.0484	2.48197	3.60506	3.79987	3.00585	1.98422
27	1.57833	1.37163	0.38656	0.88093	0	2.3371	1.6959	2.9627	3.05399	2.20097	1.41734
28	3.40133	3.00728	2.32876	3.0484	2.3371	0	0.71612	0.69555	0.76624	0.56268	1.12333

29	2.94998	2.58681	1.76033	2.48197	1.6959	0.71612	0	1.40888	1.36472	0.52874	0.83956
30	3.85769	3.44909	2.90295	3.60506	2.9627	0.69555	1.40888	0	0.65752	1.18409	1.62177
31	4.16757	3.77302	3.07716	3.79987	3.05399	0.76624	1.36472	0.65752	0	0.92692	1.88919
32	3.47696	3.10995	2.28603	3.00585	2.20097	0.56268	0.52874	1.18409	0.92692	0	1.30198
33	2.27929	1.88395	1.29274	1.98422	1.41734	1.12333	0.83956	1.62177	1.88919	1.30198	0

Tras determinar las ubicaciones óptimas para cada una de las plantas de tratamiento y la distancia entre los pozos profundos, estos últimos suministran un flujo de agua potable para satisfacer la demanda de toda la comunidad. El agua extraída de estos pozos profundos puede contener una cantidad excesiva de metales pesados, como el arsénico, que es muy perjudicial para la salud humana; por lo tanto, este elemento debe encontrarse en bajas concentraciones para su uso como agua potable. La concentración permisible de arsénico en varias regiones es de 0.01 mg/L (10 mg/m³), por lo que concentraciones más altas pueden suponer un mayor riesgo para la población general. La **Tabla 4.3.1.4** presenta las concentraciones de arsénico y los flujos de cada pozo profundo, obtenidos de fuentes gubernamentales. Cabe destacar que el modelo matemático puede adaptarse a diferentes tipos de contaminantes o metales pesados, lo que requeriría aumentar la dimensionalidad de los parámetros y las variables para tener en cuenta las propiedades respectivas.

Tabla 4.3.1.4. Flujos y concentraciones de pozos profundos.

Pozo	Flujo (hm ³ /5 year)	Concentración (mg/L) $\times 10^6$
P1	1.270901	4
P2	0.630720	5
P3	0.788400	24
P4	0.726905	3
P5	0.883008	3
P6	0.842011	3
P7	0.540842	4
P8	1.825934	2
P9	1.458540	9
P10	0.165564	3
P11	1.125835	11
P12	2.414081	11
P13	0.862510	16
P14	0.450965	10
P15	0.816782	11
P16	0.679601	2
P17	0.788400	4
P18	1.963116	9
P19	1.327666	2
P20	0.649642	18
P21	0.788400	4
P22	2.641140	5
P23	0.630720	4
P24	0.804168	5
P25	0.236520	2
P26	0.425736	8

Los flujos extraídos que se muestran en la **Tabla 4.3.1.4** corresponden a los pozos profundos y enviados a la demanda comunitaria. Como se puede observar en esta tabla, algunos de estos pozos profundos no cumplen con la restricción permisible de arsénico; por lo tanto, es necesario enviar estos flujos a las plantas de tratamiento para remover el metal. Por lo tanto, es necesario bombear los flujos e invertir en tuberías hacia estas nuevas plantas de tratamiento. El costo de bombeo y tubería es de alrededor de 0.01345042 y 0.02690085 \$/m³ (Olivarez-Areyan et al., 2021) y se actualizó al año 2023 con el Índice de Costos de Plantas de Ingeniería Química (CEPCI) (CEPCI, 2023). Al aplicar los límites superior e inferior de los costos de bombeo y tubería, el modelo matemático descrito en el material principal calcularía los resultados con base en los valores extremos para cada caso. Sin embargo, para seleccionar un punto intermedio entre estos límites ofrece una aproximación más precisa de los costos reales. Por esta razón, se requiere una estrategia para estimar los costos intermedios de bombeo y conducción. La siguiente sección describe la estrategia utilizada para calcular estas estimaciones de costos intermedios. Luego, para que el costo de bombeo y conducción sea una función de la distancia recorrida hasta las plantas de tratamiento, se utiliza la siguiente Ecuación para hallar la pendiente y la ordenada al origen:

$$Cost_l = m^P dist_l^P + b^P \quad (4.3.1.6)$$

Donde $Cost_l$ (0,01345042 y 0,02690085 \$/m³) son los límites de los costos de bombeo y conducción, $dist_l^P$ (271,82 y 7014,01 m) son los límites de las distancias entre un pozo profundo y una planta de tratamiento, y m^P y b^P son la pendiente y la ordenada al origen, respectivamente, de la función de distancia recorrida hasta las plantas de tratamiento. El resultado de la Ecuación anterior es 1.9949×10^{-6} y 0.02690 para m^P y b^P . Por lo tanto, la Ecuación en función de la distancia recorrida hasta las plantas de tratamiento se muestra en la siguiente Ecuación:

$$Cost_{i,k}^P = m^P dist_{i,k}^P + b^P \quad (4.3.1.7)$$

Donde $Cost_{i,k}^P$ son los costos de bombeo y conducción desde los pozos profundos hasta las plantas de tratamiento y $dist_{i,k}^P$ es la distancia desde los pozos profundos hasta las plantas de tratamiento. La **Tabla 4.3.1.5** muestra los costos de bombeo y conducción según la Ecuación (4.3.1.7) para cada pozo profundo hasta las plantas de tratamiento.

Tabla 4.3.1.5. Costo de bombeo y tubería desde pozos profundos hasta las plantas de tratamiento.

Pozo	PLANTA 2 (\$/m ³)	PLANTA 2A (\$/m ³)	PLANT 2B (\$/m ³)
1	0.01594	0.01944	0.01702
2	0.01673	0.02101	0.01582
3	0.01576	0.02038	0.01492
4	0.01649	0.02033	0.01662
5	0.01709	0.02175	0.01470
6	0.01712	0.02171	0.01450
7	0.01669	0.02027	0.01665
8	0.01596	0.02040	0.01500
9	0.01859	0.02310	0.01563
10	0.01909	0.02368	0.01585
11	0.01994	0.02418	0.01729
12	0.01831	0.02192	0.01725
13	0.01594	0.01488	0.01968
14	0.01379	0.01685	0.01759
15	0.01597	0.01486	0.01975
16	0.01468	0.01619	0.01834
17	0.01679	0.01491	0.02037
18	0.01483	0.01675	0.01811
19	0.01741	0.01345	0.02119
20	0.01772	0.01439	0.02138
21	0.01790	0.01396	0.02162
22	0.01697	0.01406	0.02075
23	0.01548	0.01621	0.01897
24	0.01592	0.01539	0.01959
25	0.01794	0.01539	0.02153
26	0.01705	0.01628	0.02038
27	0.01859	0.01604	0.02209
28	0.02160	0.01681	0.02541
29	0.02096	0.01643	0.02473
30	0.02225	0.01745	0.02603
31	0.02310	0.01829	0.02690
32	0.02198	0.01734	0.02576
33	0.01941	0.01476	0.02321

Considerando que, para el caso en que los flujos de los pozos profundos se dirijan a otros pozos profundos es necesario aplicar las siguientes Ecuaciones:

$$Cost_l = m^m dist_l^m + b^m \quad (4.3.1.8)$$

Donde $dist_i^m$ (0 y 8256 m) son los límites de las distancias entre los pozos profundos, m^m y b^m son la pendiente y la ordenada al origen, respectivamente, de la función de distancia recorrida entre los pozos profundos. Los resultados de la Ecuación anterior son 1.629×10^{-6} y 0.01345 para m^m y b^m , respectivamente. La Ecuación en función de las distancias entre los pozos profundos se muestra a continuación:

$$Cost_{i,i}^m = m^m dist_{i,i}^m + b^m \quad (4.3.1.9)$$

Donde $Cost_{i,i}^m$ es el costo de bombeo y tubería entre pozos profundos y $dist_{i,i}^m$ es la distancia entre pozos profundos. La **Tabla 4.3.1.6** muestran los costos de bombeo y tubería para la Ecuación (4.3.1.9) entre pozos profundos.

Tabla 4.3.1.6. Costo de bombeo y tubería entre pozos profundos, primera parte (\$/m³).

Pozo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	0.01345	0.01495	0.01517	0.01420	0.01599	0.01787	0.01854	0.01743	0.01899	0.01921	0.02031
2	0.01495	0.01345	0.01447	0.01428	0.01460	0.01709	0.01835	0.01703	0.01804	0.01815	0.01940
3	0.01517	0.01447	0.01345	0.01488	0.01457	0.01623	0.01733	0.01603	0.01730	0.01750	0.01864
4	0.01420	0.01428	0.01488	0.01345	0.01541	0.01766	0.01864	0.01741	0.01871	0.01886	0.02005
5	0.01599	0.01460	0.01457	0.01541	0.01345	0.01621	0.01783	0.01645	0.01702	0.01707	0.01837
6	0.01787	0.01709	0.01623	0.01766	0.01621	0.01345	0.01554	0.01455	0.01466	0.01507	0.01591
7	0.01854	0.01835	0.01733	0.01864	0.01783	0.01554	0.01345	0.01482	0.01619	0.01672	0.01671
8	0.01743	0.01703	0.01603	0.01741	0.01645	0.01455	0.01482	0.01345	0.01566	0.01613	0.01670
9	0.01899	0.01804	0.01730	0.01871	0.01702	0.01466	0.01619	0.01566	0.01345	0.01399	0.01480
10	0.01921	0.01815	0.01750	0.01886	0.01707	0.01507	0.01672	0.01613	0.01399	0.01345	0.01484
11	0.02031	0.01940	0.01864	0.02005	0.01837	0.01591	0.01671	0.01670	0.01480	0.01484	0.01345
12	0.01965	0.01919	0.01823	0.01963	0.01845	0.01573	0.01484	0.01567	0.01568	0.01617	0.01562
13	0.01780	0.01888	0.01822	0.01846	0.01932	0.01905	0.01787	0.01797	0.02017	0.02065	0.02104
14	0.01630	0.01717	0.01646	0.01686	0.01756	0.01753	0.01688	0.01653	0.01871	0.01915	0.01976
15	0.01720	0.01847	0.01799	0.01792	0.01911	0.01935	0.01852	0.01834	0.02053	0.02097	0.02154
16	0.01708	0.01797	0.01722	0.01766	0.01831	0.01796	0.01694	0.01689	0.01910	0.01957	0.02003
17	0.01865	0.01967	0.01895	0.01929	0.02003	0.01945	0.01801	0.01835	0.02051	0.02101	0.02126
18	0.01743	0.01813	0.01729	0.01793	0.01831	0.01759	0.01635	0.01649	0.01867	0.01916	0.01952
19	0.01870	0.01992	0.01935	0.01941	0.02047	0.02030	0.01906	0.01922	0.02142	0.02190	0.02227
20	0.01925	0.02036	0.01969	0.01992	0.02079	0.02030	0.01883	0.01920	0.02135	0.02185	0.02209
21	0.01925	0.02042	0.01980	0.01994	0.02091	0.02056	0.01916	0.01946	0.02163	0.02213	0.02241
22	0.01790	0.01923	0.01879	0.01863	0.01991	0.02015	0.01921	0.01912	0.02132	0.02177	0.02230
23	0.01611	0.01747	0.01713	0.01685	0.01823	0.01895	0.01853	0.01804	0.02016	0.02054	0.02129
24	0.01678	0.01812	0.01773	0.01751	0.01884	0.01935	0.01871	0.01838	0.02054	0.02096	0.02162
25	0.01792	0.01939	0.01918	0.01867	0.02025	0.02100	0.02034	0.02004	0.02220	0.02260	0.02328
26	0.01678	0.01826	0.01814	0.01752	0.01918	0.02019	0.01982	0.01932	0.02140	0.02177	0.02256
27	0.01820	0.01969	0.01957	0.01893	0.02061	0.02151	0.02094	0.02059	0.02272	0.02311	0.02383
28	0.02160	0.02301	0.02262	0.02235	0.02373	0.02383	0.02255	0.02275	0.02495	0.02543	0.02578

29	0.02078	0.02223	0.02193	0.02153	0.02303	0.02341	0.02233	0.02236	0.02457	0.02502	0.02550
30	0.02238	0.02373	0.02326	0.02313	0.02438	0.02421	0.02275	0.02311	0.02528	0.02578	0.02601
31	0.02285	0.02425	0.02386	0.02360	0.02498	0.02501	0.02365	0.02392	0.02611	0.02660	0.02690
32	0.02164	0.02309	0.02279	0.02239	0.02389	0.02422	0.02307	0.02316	0.02537	0.02583	0.02627
33	0.01979	0.02118	0.02079	0.02054	0.02191	0.02210	0.02097	0.02104	0.02325	0.02371	0.02415

Tabla 4.3.1.6. Costo de bombeo y tubería entre pozos profundos, segunda parte (\$/m³).

Pozo	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
1	0.01965	0.01780	0.01630	0.01720	0.01708	0.01865	0.01743	0.01870	0.01925	0.01925	0.01790
2	0.01919	0.01888	0.01717	0.01847	0.01797	0.01967	0.01813	0.01992	0.02036	0.02042	0.01923
3	0.01823	0.01822	0.01646	0.01799	0.01722	0.01895	0.01729	0.01935	0.01969	0.01980	0.01879
4	0.01963	0.01846	0.01686	0.01792	0.01766	0.01929	0.01793	0.01941	0.01992	0.01994	0.01863
5	0.01845	0.01932	0.01756	0.01911	0.01831	0.02003	0.01831	0.02047	0.02079	0.02091	0.01991
6	0.01573	0.01905	0.01753	0.01935	0.01796	0.01945	0.01759	0.02030	0.02030	0.02056	0.02015
7	0.01484	0.01787	0.01688	0.01852	0.01694	0.01801	0.01635	0.01906	0.01883	0.01916	0.01921
8	0.01567	0.01797	0.01653	0.01834	0.01689	0.01835	0.01649	0.01922	0.01920	0.01946	0.01912
9	0.01568	0.02017	0.01871	0.02053	0.01910	0.02051	0.01867	0.02142	0.02135	0.02163	0.02132
10	0.01617	0.02065	0.01915	0.02097	0.01957	0.02101	0.01916	0.02190	0.02185	0.02213	0.02177
11	0.01562	0.02104	0.01976	0.02154	0.02003	0.02126	0.01952	0.02227	0.02209	0.02241	0.02230
12	0.01345	0.01923	0.01826	0.01990	0.01832	0.01931	0.01772	0.02040	0.02011	0.02046	0.02059
13	0.01923	0.01345	0.01522	0.01454	0.01455	0.01433	0.01498	0.01471	0.01493	0.01505	0.01489
14	0.01826	0.01522	0.01345	0.01527	0.01425	0.01595	0.01462	0.01641	0.01669	0.01681	0.01608
15	0.01990	0.01454	0.01527	0.01345	0.01504	0.01533	0.01568	0.01497	0.01563	0.01554	0.01427
16	0.01832	0.01455	0.01425	0.01504	0.01345	0.01517	0.01412	0.01580	0.01595	0.01612	0.01573
17	0.01931	0.01433	0.01595	0.01533	0.01517	0.01345	0.01533	0.01464	0.01429	0.01460	0.01539
18	0.01772	0.01498	0.01462	0.01568	0.01412	0.01533	0.01345	0.01621	0.01616	0.01642	0.01632
19	0.02040	0.01471	0.01641	0.01497	0.01580	0.01464	0.01621	0.01345	0.01431	0.01406	0.01452
20	0.02011	0.01493	0.01669	0.01563	0.01595	0.01429	0.01616	0.01431	0.01345	0.01386	0.01536
21	0.02046	0.01505	0.01681	0.01554	0.01612	0.01460	0.01642	0.01406	0.01386	0.01345	0.01512
22	0.02059	0.01489	0.01608	0.01427	0.01573	0.01539	0.01632	0.01452	0.01536	0.01512	0.01345
23	0.01990	0.01550	0.01511	0.01460	0.01540	0.01637	0.01604	0.01611	0.01678	0.01670	0.01524
24	0.02009	0.01506	0.01532	0.01401	0.01532	0.01588	0.01598	0.01547	0.01618	0.01606	0.01457
25	0.02173	0.01624	0.01698	0.01530	0.01688	0.01678	0.01753	0.01580	0.01665	0.01633	0.01485
26	0.02119	0.01631	0.01639	0.01522	0.01656	0.01706	0.01723	0.01638	0.01720	0.01698	0.01531
27	0.02232	0.01687	0.01754	0.01592	0.01749	0.01740	0.01815	0.01637	0.01721	0.01687	0.01546
28	0.02385	0.01823	0.01984	0.01809	0.01931	0.01799	0.01973	0.01698	0.01720	0.01684	0.01728

29	0.02368	0.01791	0.01934	0.01752	0.01893	0.01789	0.01944	0.01674	0.01722	0.01681	0.01671
30	0.02399	0.01865	0.02036	0.01873	0.01974	0.01823	0.02007	0.01741	0.01739	0.01710	0.01796
31	0.02492	0.01941	0.02106	0.01933	0.02050	0.01909	0.02089	0.01815	0.01827	0.01794	0.01852
32	0.02441	0.01868	0.02016	0.01836	0.01972	0.01857	0.02020	0.01746	0.01784	0.01744	0.01754
33	0.02232	0.01656	0.01806	0.01628	0.01760	0.01653	0.01809	0.01538	0.01590	0.01548	0.01546

Tabla 4.3.1.6. Costo de bombeo y tubería entre pozos profundos, tercera parte (\$/m³).

Pozo	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
1	0.01611	0.01678	0.01792	0.01678	0.01820	0.02160	0.02078	0.02238	0.02285	0.02164	0.01979
2	0.01747	0.01812	0.01939	0.01826	0.01969	0.02301	0.02223	0.02373	0.02425	0.02309	0.02118
3	0.01713	0.01773	0.01918	0.01814	0.01957	0.02262	0.02193	0.02326	0.02386	0.02279	0.02079
4	0.01685	0.01751	0.01867	0.01752	0.01893	0.02235	0.02153	0.02313	0.02360	0.02239	0.02054
5	0.01823	0.01884	0.02025	0.01918	0.02061	0.02373	0.02303	0.02438	0.02498	0.02389	0.02191
6	0.01895	0.01935	0.02100	0.02019	0.02151	0.02383	0.02341	0.02421	0.02501	0.02422	0.02210
7	0.01853	0.01871	0.02034	0.01982	0.02094	0.02255	0.02233	0.02275	0.02365	0.02307	0.02097
8	0.01804	0.01838	0.02004	0.01932	0.02059	0.02275	0.02236	0.02311	0.02392	0.02316	0.02104
9	0.02016	0.02054	0.02220	0.02140	0.02272	0.02495	0.02457	0.02528	0.02611	0.02537	0.02325
10	0.02054	0.02096	0.02260	0.02177	0.02311	0.02543	0.02502	0.02578	0.02660	0.02583	0.02371
11	0.02129	0.02162	0.02328	0.02256	0.02383	0.02578	0.02550	0.02601	0.02690	0.02627	0.02415
12	0.01990	0.02009	0.02173	0.02119	0.02232	0.02385	0.02368	0.02399	0.02492	0.02441	0.02232
13	0.01550	0.01506	0.01624	0.01631	0.01687	0.01823	0.01791	0.01865	0.01941	0.01868	0.01656
14	0.01511	0.01532	0.01698	0.01639	0.01754	0.01984	0.01934	0.02036	0.02106	0.02016	0.01806
15	0.01460	0.01401	0.01530	0.01522	0.01592	0.01809	0.01752	0.01873	0.01933	0.01836	0.01628
16	0.01540	0.01532	0.01688	0.01656	0.01749	0.01931	0.01893	0.01974	0.02050	0.01972	0.01760
17	0.01637	0.01588	0.01678	0.01706	0.01740	0.01799	0.01789	0.01823	0.01909	0.01857	0.01653
18	0.01604	0.01598	0.01753	0.01723	0.01815	0.01973	0.01944	0.02007	0.02089	0.02020	0.01809
19	0.01611	0.01547	0.01580	0.01638	0.01637	0.01698	0.01674	0.01741	0.01815	0.01746	0.01538
20	0.01678	0.01618	0.01665	0.01720	0.01721	0.01720	0.01722	0.01739	0.01827	0.01784	0.01590
21	0.01670	0.01606	0.01633	0.01698	0.01687	0.01684	0.01681	0.01710	0.01794	0.01744	0.01548
22	0.01524	0.01457	0.01485	0.01531	0.01546	0.01728	0.01671	0.01796	0.01852	0.01754	0.01546
23	0.01345	0.01412	0.01554	0.01474	0.01602	0.01899	0.01826	0.01973	0.02024	0.01911	0.01716
24	0.01412	0.01345	0.01511	0.01473	0.01568	0.01835	0.01766	0.01907	0.01960	0.01852	0.01652
25	0.01554	0.01511	0.01345	0.01463	0.01408	0.01724	0.01632	0.01818	0.01846	0.01717	0.01556
26	0.01474	0.01473	0.01463	0.01345	0.01489	0.01842	0.01749	0.01932	0.01964	0.01835	0.01668
27	0.01602	0.01568	0.01408	0.01489	0.01345	0.01726	0.01621	0.01828	0.01843	0.01704	0.01576
28	0.01899	0.01835	0.01724	0.01842	0.01726	0.01345	0.01462	0.01458	0.01470	0.01437	0.01528

29	0.01826	0.01766	0.01632	0.01749	0.01621	0.01462	0.01345	0.01575	0.01567	0.01431	0.01482
30	0.01973	0.01907	0.01818	0.01932	0.01828	0.01458	0.01575	0.01345	0.01452	0.01538	0.01609
31	0.02024	0.01960	0.01846	0.01964	0.01843	0.01470	0.01567	0.01452	0.01345	0.01496	0.01653
32	0.01911	0.01852	0.01717	0.01835	0.01704	0.01437	0.01431	0.01538	0.01496	0.01345	0.01557
33	0.01716	0.01652	0.01556	0.01668	0.01576	0.01528	0.01482	0.01609	0.01653	0.01557	0.01345

Los puntos de origen de los pozos profundos se consideran ubicados en la misma ubicación que su punto de demanda; es decir, el punto de origen del pozo "1" se encuentra en la misma ubicación que su punto de demanda. Por lo tanto, si el flujo proveniente de un punto de origen de pozo profundo cumple con la demanda y la restricción de arsénico permitida, no se enviará a ninguna planta de tratamiento ni a ningún otro pozo profundo. Si el flujo proveniente de un punto de origen de pozo profundo cumple con la demanda, pero no con la restricción de arsénico permitida, tendrá dos opciones: primero, se enviará a otro punto de demanda para su mezcla y reducción de la concentración de arsénico; y segundo, se enviará a una planta de tratamiento para eliminar un porcentaje de la concentración de arsénico, y luego se enviará a un punto de demanda de pozo profundo. Si el flujo proveniente de un punto de origen de pozo profundo no cumple con ambas restricciones, recibirá flujo de otros pozos profundos, pero como punto de demanda de pozo profundo.

Como se puede observar, si el flujo del punto de fuente del pozo profundo completa las dos restricciones de flujo, los costos de bombeo y tubería serían cero, mientras que, si el flujo del punto de fuente del pozo profundo completa el flujo y no completa la restricción de arsénico permisible, el costo de bombeo y tubería sería, para la primera opción, el costo de transporte del flujo desde el punto de fuente del pozo profundo hasta el punto de demanda del pozo profundo; para la segunda opción, es el costo de transporte del flujo desde el punto de fuente del pozo profundo hasta la planta de tratamiento más el costo de transporte del flujo desde la planta de tratamiento hasta el punto de demanda del pozo profundo. Y si el flujo desde el punto de fuente del pozo profundo no completa ninguna restricción, los costos de bombeo y tubería serían iguales al costo de transporte del flujo hasta este punto de demanda del pozo profundo. Por lo tanto, los costos de bombeo y transporte de los flujos que se envían desde la fuente de los pozos profundos hasta las plantas de tratamiento (**Tabla 4.3.1.5**) serán iguales a los costos de bombeo y conducción de los flujos que se envían desde las plantas de tratamiento hasta los puntos de demanda de los pozos profundos, ya que la distancia es la misma desde la fuente de un pozo profundo hasta una planta de tratamiento (**Tabla 4.3.1.2**) que desde la planta de tratamiento hasta el punto de demanda de un pozo profundo. Tras recopilar todos estos datos, procedemos a utilizar el modelo matemático que se muestra en la **Sección 3.2**.

Tabla 4.3.1.7. Costo de bombeo y tuberías hacia la demanda de pozos profundos.

Pozo	PLANTA 2 (\$/m ³)	PLANT 2A (\$/m ³)	PLANT 2B (\$/m ³)
1	0.01594	0.01944	0.01702
2	0.01673	0.02101	0.01582
3	0.01576	0.02038	0.01492
4	0.01649	0.02033	0.01662

5	0.01709	0.02175	0.01470
6	0.01712	0.02171	0.01450
7	0.01669	0.02027	0.01665
8	0.01596	0.02040	0.01500
9	0.01859	0.02310	0.01563
10	0.01909	0.02368	0.01585
11	0.01994	0.02418	0.01729
12	0.01831	0.02192	0.01725
13	0.01594	0.01488	0.01968
14	0.01379	0.01685	0.01759
15	0.01597	0.01486	0.01975
16	0.01468	0.01619	0.01834
17	0.01679	0.01491	0.02037
18	0.01483	0.01675	0.01811
19	0.01741	0.01345	0.02119
20	0.01772	0.01439	0.02138
21	0.01790	0.01396	0.02162
22	0.01697	0.01406	0.02075
23	0.01548	0.01621	0.01897
24	0.01592	0.01539	0.01959
25	0.01794	0.01539	0.02153
26	0.01705	0.01628	0.02038
27	0.01859	0.01604	0.02209
28	0.02160	0.01681	0.02541
29	0.02096	0.01643	0.02473
30	0.02225	0.01745	0.02603
31	0.02310	0.01829	0.02690
32	0.02198	0.01734	0.02576
33	0.01941	0.01476	0.02321

4.3.2. APRENDIZAJE PROFUNDO

Esta sección consta de tres partes principales: primero es la RNAP; segundo es la integración de la RNAP en el modelo matemático de una red de distribución de agua; y tercero es la solución de la configuración óptima de una red de distribución de agua integrada con la RNAP.

Tabla 4.3.2.1. Datos implementados en la red neuronal artificial, Primera Parte.

Dato	Entrada			Salida			Dato	Entrada			Salida		
	DBO	DQO	SST	DBO	DQO	SST		DBO	DQO	SST	DBO	DQO	SST
1	138	333	240	16	62	17	42	148	400	364	11	54	9
2	156	405	200	19	71	23	43	158	256	194	10	66	9
3	95	349	136	19	67	24	44	123	246	186	12	70	15
4	196	353	174	24	71	24	45	199	380	244	13	43	15
5	194	419	186	23	71	33	46	214	641	104	11	55	14
6	202	431	200	17	63	20	47	206	305	188	14	55	10
7	148	345	162	17	60	21	48	255	282	166	13	56	20
8	247	444	166	27	52	29	49	223	459	164	19	56	23
9	161	281	164	14	63	19	50	64	361	172	8	31	14
10	156	336	192	15	59	19	51	66	352	164	11	24	12
11	265	330	362	24	70	11	52	48	356	242	5	60	12
12	138	259	256	22	59	16	53	69	326	138	8	52	9
13	192	433	300	15	60	12	54	70	388	112	12	53	16
14	211	488	268	15	63	12	55	31	281	208	3	25	12
15	200	402	184	17	64	17	56	77	256	248	7	62	9
16	257	367	206	16	56	15	57	100	256	234	11	58	10
17	183	456	232	19	60	12	58	94	409	194	14	65	11
18	183	380	192	13	63	15	59	58	397	130	20	42	16
19	174	404	192	13	55	18	60	95	302	176	19	59	15
20	327	376	184	15	47	13	61	132	288	144	11	64	13
21	159	234	292	12	36	14	62	215	440	190	9	60	13

22	134	302	208	16	66	20	63	354	539	232	14	67	17
23	132	297	176	24	63	16	64	253	354	162	16	69	12
24	224	488	256	15	36	17	65	154	310	128	15	50	11
25	132	336	130	13	68	13	66	181	348	184	21	48	19
26	175	321	176	12	67	11	67	176	387	162	17	51	14
27	165	315	170	11	53	19	68	201	434	118	12	55	18
28	184	219	148	18	37	22	69	151	294	186	9	39	11
29	89	298	116	16	42	22	70	139	294	256	11	55	14
30	75	333	142	9	32	12	71	119	220	128	7	45	9
31	181	264	124	19	72	28	72	139	263	144	9	51	10
32	137	398	188	9	66	10	73	147	224	146	15	23	18
33	189	424	264	16	68	21	74	206	324	166	12	66	23
34	182	388	272	18	71	18	75	197	497	254	10	70	19
35	166	452	120	19	56	28	76	129	237	234	7	66	19
36	140	231	160	12	39	11	77	122	287	168	12	43	16
37	192	253	186	14	48	13	78	90	271	144	10	41	14
38	176	200	176	13	45	18	79	155	243	210	9	35	12
39	146	243	164	6	59	14	80	157	361	208	12	51	17
40	139	380	256	11	51	8	81	195	246	172	11	42	18
41	117	366	300	12	67	12	82	102	269	156	10	54	13

Tabla 4.3.2.1. Datos implementados en la red neuronal artificial, Segunda Parte.

Dato	Entrada			Salida			Dato	Entrada			Salida		
	DBO	DQO	SST	DBO	DQO	SST		DBO	DQO	SST	DBO	DQO	SST

83	192	294	172	15	69	20	124	133	346	274	17	65	18
84	185	334	156	16	65	11	125	69	370	180	13	39	14
85	109	211	180	7	35	13	126	115	295	182	19	58	19
86	115	357	134	8	61	18	127	133	305	208	16	20	16
87	380	318	194	16	71	22	128	118	295	178	12	72	11
88	169	337	132	14	71	14	129	181	462	216	22	68	20
89	173	396	242	21	70	18	130	146	313	168	16	59	15
90	226	324	264	27	60	22	131	277	523	124	21	53	19
91	72	380	122	21	72	18	132	164	353	218	15	59	14
92	156	311	226	12	29	15	133	192	330	190	10	70	19
93	365	370	172	13	70	16	134	157	392	232	18	65	22
94	194	435	166	14	51	13	135	196	403	200	12	54	14
95	129	506	178	22	54	19	136	178	310	198	13	62	22
96	204	469	212	18	20	14	137	145	258	194	19	55	20
97	290	459	228	28	57	22	138	155	392	182	12	68	15
98	203	434	128	13	60	11	139	152	318	204	13	62	13
99	346	350	144	20	61	10	140	115	272	266	18	52	18
100	148	545	188	14	71	11	141	184	424	166	13	64	15
101	319	532	250	15	60	14	142	170	332	226	21	24	18
102	334	594	256	20	62	11	143	133	349	110	16	55	19
103	311	420	208	18	41	12	144	185	439	256	33	47	21
104	238	591	202	16	63	17	145	175	457	262	25	64	24
105	261	592	216	24	47	13	146	174	442	268	20	54	18
106	133	295	158	14	66	12	147	156	364	194	21	64	18

107	152	510	136	16	65	11	148	220	540	184	16	27	15
108	185	518	202	14	65	13	149	176	333	178	16	67	23
109	100	212	280	15	59	14	150	172	400	136	15	59	22
110	80	204	180	10	51	10	151	133	284	186	11	60	21
111	94	389	120	13	33	10	152	151	316	196	16	44	22
112	135	297	164	20	43	18	153	114	521	176	11	44	20
113	159	516	248	17	72	15	154	142	376	144	9	57	14
114	122	338	174	14	44	12	155	150	371	172	11	39	16
115	134	323	190	15	56	13	156	92	233	234	8	47	18
116	179	432	228	18	71	17	157	138	268	154	8	33	13
117	156	276	146	30	43	16	158	84	251	98	7	49	17
118	237	494	204	24	71	16	159	191	240	166	8	44	11
119	166	393	242	13	27	10	160	159	310	146	21	59	16
120	205	453	198	15	70	22	161	132	304	148	14	42	13
121	270	321	168	14	51	16	162	127	274	144	9	35	16
122	161	392	266	15	59	13	163	153	307	124	10	46	12
123	183	449	180	23	54	19	164	179	265	128	11	54	14

RED NEURONAL ARTIFICIAL PROFUNDA

En esta sección, se describirá todo lo relacionado con la RNAP, desde la adquisición de datos hasta las pruebas. Se ofrece una breve descripción de la diferencia entre el aprendizaje automático y el aprendizaje profundo. El aprendizaje profundo es una rama del aprendizaje automático y consiste en redes neuronales con un gran número de capas y parámetros. Por lo tanto, se conocen como redes neuronales profundas. El aprendizaje profundo puede aprender características de alto nivel de los datos, a diferencia del aprendizaje automático ([Shinde y Shah, 2018](#)). A continuación, se presenta

información sobre el modelado de la RNAP de la planta de tratamiento mediante algoritmos de aprendizaje profundo.

Los datos de entrenamiento, validación y prueba se obtuvieron del [Laboratorio de Bioinformática \(2013a, 2013b\)](#) y son de acceso abierto. El total de datos utilizados para la red neuronal fue de 164 (**Tabla 4.3.2.1.**). Estos datos tienen 6 características, que corresponden a las propiedades de los puntos de entrada y salida de la PTAR; es decir, las características 1 a 3 son las propiedades de DBO, DQO y SST de los flujos de entrada a la PTAR. Mientras tanto, las características 4 a 6 son las propiedades DBO, DQO y SST de los flujos de salida del agua tratada de la planta de tratamiento de aguas residuales.

Los datos totales se expandieron mediante la técnica de ruido gaussiano con una media de cero, una desviación estándar de 0.5 y una semilla aleatoria de 369. Para ello, se utilizó la función `random.normal()` de la biblioteca NumPy ([Harris et al., 2020](#)). El nuevo conjunto de datos totales consta de 1,640,164 datos. Este último conjunto de datos se dividió aleatoriamente en los conjuntos de entrenamiento, validación y prueba, y se utilizó la función `train test split()` de la biblioteca Scikit-learn ([Pedregosa et al., 2011](#)), con una semilla aleatoria de 369. La distribución de los datos totales fue la siguiente: datos de entrenamiento (80 %), datos de validación (10 %) y datos de prueba (10 %). Cabe destacar que cada conjunto tiene sus propios datos de entrada y salida; es decir, cada conjunto tiene seis características: las tres primeras corresponden a las propiedades de los flujos de entrada a la PTAR y las tres siguientes a las propiedades de los flujos de salida del agua tratada de la PTAR. La PTAR se modela utilizando una RNAP con la siguiente estructura: 3 entradas, 7 capas ocultas y 3 salidas. Las capas ocultas tienen 50 neuronas ([Dreyfus et al., 2002](#); [ASCE, 2000](#); [Goodfellow et al., 2016](#)). La biblioteca TensorFlow se utilizó para implementar esta estructura en Python ([Abadi et al., 2016](#)). Las entradas de la red neuronal son las propiedades DBO, DQO y SST de los flujos de entrada a la PTAR, mientras que las salidas de la RNAP son las propiedades de los flujos de salida del agua tratada de la PTAR. Las capas ocultas de la red neuronal son la función de operación de la planta similar a los cálculos de caja negra. Las capas ocultas y de salida utilizan la función de activación Leaky ReLU ([Maas et al., 2013](#)), con una pendiente negativa de $\alpha = 1 \times 10^{-3}$, esta función de activación se utilizó para evitar el problema de las neuronas muertas que ocurren en funciones de activación como ReLU.

La función de pérdida del error cuadrático medio (ECM) se utilizó como estimador durante el entrenamiento y la validación de la RNAP. Para ello, se empleó el optimizador Adam; no se emplearon métricas adicionales; la tasa de aprendizaje fue de 5×10^{-4} y las épocas fueron 62. Para el conjunto de prueba, se utilizó la métrica del coeficiente de correlación de Pearson ([Pearson, 1895](#))

para examinar la predicción correcta de nuevos datos en la red neuronal. Cuando la correlación es $R^2 \geq 0.9$, la RNAP se implementa en el modelo matemático de una red de distribución de agua de edificios residenciales.

INTEGRACIÓN DE LA RED NEURONAL PROFUNDA EN EL MODELO MATEMÁTICO

Esta sección describe la integración de la RNAP en el modelo matemático de una red de distribución de agua de edificios residenciales. El primer paso es conocer la estructura de la red neuronal y sus conexiones internas (Rumelhart et al., 1986). La Ecuación (4.3.2.1) muestra la fórmula matemática para cualquier capa de la RNAP, donde $W_{Neurona, salida}^{capa}$ son los pesos de las neuronas en la capa actual en función de las salidas de la capa anterior, X_{salida}^{capa-1} son las entradas de la capa actual y las salidas de la capa anterior, $B_{Neurona}^{capa}$ son los sesgos de las neuronas en la capa actual, LeakyReLU es la función de activación de la capa actual y $Y_{Neurona}^{capa}$ son las salidas de la capa actual y las entradas de la capa siguiente.

$$Y_{Neurona}^{capa} = LeakyReLU \left(\sum_{salida}^{SALIDA} (W_{Neurosalida}^{capa} X_{salida}^{capa-1}) + B_{Neurona}^{capa} \right), \quad (4.3.2.1)$$

$$\forall Neurona \in NEURONA$$

O

$$Y_{Neurona}^{capa} = max \left(\alpha \left(\sum_{salida}^{SALIDA} (W_{Neurosalida}^{capa} X_{salida}^{capa-1}) + B_{Neurona}^{capa} \right), \left(\sum_{salida}^{SALIDA} (W_{Neurosalida}^{capa} X_{salida}^{capa-1}) + B_{Neurona}^{capa} \right) \right), \quad (4.3.2.2)$$

$$\forall Neurona \in NEURONA$$

Donde α es la pendiente negativa de la función de activación Leaky ReLU y max es la función máxima. Como se mencionó en la sección anterior, la red neuronal tiene la siguiente estructura: 3 entradas, 7 capas ocultas y 3 salidas para modelar una planta de tratamiento de aguas residuales. Por lo tanto, las Ecuaciones que describen la estructura de la RNAP se muestran en las Ecuaciones (4.3.2.3 – 4.3.2.10).

$$\begin{aligned}
Y_{Neurona}^1 = \max & \left(\alpha \left(\sum_{entrada}^{ENTRADA} (W_{Neurona,entrada}^1 X_{entrada}) \right. \right. \\
& \left. \left. + B_{Neurona}^1 \right), \left(\sum_{entrada}^{ENTRADA} (W_{Neurona,entrada}^1 X_{entrada}) \right. \right. \\
& \left. \left. + B_{Neurona}^1 \right) \right), \\
& \forall Neurona \in NEURONA
\end{aligned} \tag{4.3.2.3}$$

$$\begin{aligned}
Y_{Neurona}^2 = \max & \left(\alpha \left(\sum_{Neurosalia}^{NEUROSALIDA} (W_{Neurona,Neurosalia}^2 Y_{Neurosalia}^1) \right. \right. \\
& \left. \left. + B_{Neurona}^2 \right), \left(\sum_{Neurosalia}^{NEUROSALIDA} (W_{Neurona,Neurosalia}^2 Y_{Neurosalia}^1) \right. \right. \\
& \left. \left. + B_{Neurona}^2 \right) \right), \\
& \forall Neurona \in NEURONA
\end{aligned} \tag{4.3.2.4}$$

$$\begin{aligned}
Y_{Neurona}^3 = \max & \left(\alpha \left(\sum_{Neurosalia}^{NEUROSALIDA} (W_{Neurona,Neurosalia}^3 Y_{Neurosalia}^2) \right. \right. \\
& \left. \left. + B_{Neurona}^3 \right), \left(\sum_{Neurosalia}^{NEUROSALIDA} (W_{Neurona,Neurosalia}^3 Y_{Neurosalia}^2) \right. \right. \\
& \left. \left. + B_{Neurona}^3 \right) \right), \\
& \forall Neurona \in NEURONA
\end{aligned} \tag{4.3.2.5}$$

$$\begin{aligned}
Y_{Neurona}^4 = \max & \left(\alpha \left(\sum_{Neurosalia}^{NEUROSALIDA} (W_{Neurona,Neurosalia}^4 Y_{Neurosalia}^3) \right. \right. \\
& \left. \left. + B_{Neurona}^4 \right), \left(\sum_{Neurosalia}^{NEUROSALIDA} (W_{Neurona,Neurosalia}^4 Y_{Neurosalia}^3) \right. \right. \\
& \left. \left. + B_{Neurona}^4 \right) \right), \\
& \forall Neurona \in NEURONA
\end{aligned} \tag{4.3.2.6}$$

$$\begin{aligned}
Y_{Neurona}^5 = \max & \left(\alpha \left(\sum_{Neurosalia}^{NEUROSALIDA} (W_{Neurona,Neurosalia}^5 Y_{Neurosalia}^4) \right. \right. \\
& \left. \left. + B_{Neurona}^5 \right), \left(\sum_{Neurosalia}^{NEUROSALIDA} (W_{Neurona,Neurosalia}^5 Y_{Neurosalia}^4) \right. \right. \\
& \left. \left. + B_{Neurona}^5 \right) \right), \\
& \forall Neurona \in NEURONA
\end{aligned} \tag{4.3.2.7}$$

$$\begin{aligned}
Y_{Neurona}^6 = \max & \left(\alpha \left(\sum_{Neurosalia}^{NEUROSALIDA} (W_{Neurona,Neurosalia}^6 Y_{Neurosalia}^5) \right. \right. \\
& \left. \left. + B_{Neurona}^6 \right), \left(\sum_{Neurosalia}^{NEUROSALIDA} (W_{Neurona,Neurosalia}^6 Y_{Neurosalia}^5) \right. \right. \\
& \left. \left. + B_{Neurona}^6 \right) \right), \\
& \forall Neurona \in NEURONA
\end{aligned} \tag{4.3.2.8}$$

$$\begin{aligned}
Y_{Neurona}^7 = \max & \left(\alpha \left(\sum_{Neurosalia}^{NEUROSALIDA} (W_{Neurona,Neurosalia}^7 Z_{Neurosalia}^6) \right. \right. \\
& \left. \left. + B_{Neurona}^7 \right), \left(\sum_{Neurosalia}^{NEUROSALIDA} (W_{Neurona,Neurosalia}^7 Z_{Neurosalia}^6) \right. \right. \\
& \left. \left. + B_{Neurona}^7 \right) \right), \\
& \forall Neurona \in NEURONA
\end{aligned} \tag{4.3.2.9}$$

$$\begin{aligned}
X_{salida} = \max & \left(\alpha \left(\sum_{Neurosalia}^{NEUROSALIDA} (W_{salida,Neurosalia}^{salida} Z_{Neurosalia}^7) \right. \right. \\
& \left. \left. + B_{salida}^{salida} \right), \left(\sum_{Neurosalia}^{NEUROSALIDA} (W_{salida,Neurosalia}^{salida} Z_{Neurosalia}^7) \right. \right. \\
& \left. \left. + B_{salida}^{salida} \right) \right), \\
& \forall Neurona \in NEURONA
\end{aligned} \tag{4.3.2.10}$$

En las Ecuaciones (4.3.2.3 – 4.3.2.10), el conjunto de *NEURONA* es igual al conjunto de *NEUROSALIDA* debido al cálculo de los valores de salida de una capa dada, $Y_{Neurona}^{capa}$. Estos valores se transfieren a la siguiente capa como valores de entrada, $Y_{Neurosalia}^{capa}$. Las características de DBO, DQO y SST de los flujos de entrada de aguas residuales a la PTAR se presentan en $X_{entrada}$, donde *entrada* es el conjunto de propiedades de entrada. Por otro lado, las características de DBO, DQO y SST de los flujos de salida de agua tratada de la PTAR se presentan en X_{salida} , donde *salida* es el conjunto de propiedades de salida.

Las Ecuaciones (4.3.2.3 a 4.3.2.10) permiten modelar una planta de tratamiento mediante una RNAP. Sin embargo, para integrar esta red neuronal en el modelo de la red de distribución de agua de edificios residenciales, es necesario implementar las Ecuaciones (4.3.2.3 a 4.3.2.10) en este modelo, ya que en el entorno de optimización matemática no es posible interactuar con algún software externo. Por lo tanto, es necesario pasar todas las capas y parámetros que representan la RNAP al modelo matemático durante su optimización.

El segundo paso para integrar la red neuronal profunda en el modelo matemático consiste en obtener los pesos ($W_{Neurona,salida}^{capa}$) y los sesgos ($B_{Neurona}^{capa}$) de cada capa de la red neuronal tras el entrenamiento, la validación y las pruebas. Los pesos y los sesgos se obtienen mediante el comando "`MODEL_DNA.layer.get_weights()`" de TensorFlow en Python. Posteriormente, los pesos y sesgos se guardan en conjuntos de datos que el entorno de optimización matemática puede interpretar, y las Ecuaciones necesarias (4.3.2.3 a 4.3.2.10) de la estructura RNAP se programan en el modelo matemático.

SOLUCIÓN INTEGRADA DEL MODELO MATEMÁTICO

Esta sección describe la solución integrada entre la RNAP y el modelo de red de distribución de agua de edificios residenciales. En la **Sección 3.3** se describe la implementación y adaptación de las Ecuaciones (4.3.2.3–4.3.2.10) en el modelo de red de distribución de agua para el caso de estudio. Cabe destacar que los pesos (W) y los sesgos (B) de la **Sección 3.3** son parámetros conocidos, mientras que los resultados de salida de las capas (L) son variables en el modelo de optimización matemática. Por lo tanto, si las propiedades (DBO, DQO y SST) de los flujos de entrada de la PTAR se introducen en las Ecuaciones de la red neuronal, esta calculará todas las variables involucradas en dichas Ecuaciones cuando sea necesario. En consecuencia, al ejecutar la optimización matemática para resolver el modelo, se utilizarán las Ecuaciones de la red neuronal para optimizarlo. La RNAP se integrará en la optimización matemática; por lo tanto, si las propiedades varían con el tiempo, las predicciones en el punto de salida de las propiedades con respecto al punto de entrada de las propiedades en la PTAR variarán con el tiempo. La optimización matemática estará sujeta a las condiciones de temporalidad del lugar, así mismo la toma de decisiones dentro de la solución de optimización variará de acuerdo al periodo de tiempo, propiedades y demanda de agua, estos factores están implicados para obtener la configuración óptima de la red de distribución de agua para cubrir la demanda de agua en edificaciones residenciales y permitir el reciclaje, reutilización, regeneración y almacenamiento de aguas residuales cumpliendo además con la normativa ambiental por un periodo de 7 días.

4.3.3. APRENDIZAJE POR REFUERZO

En esta sección se divide en tres apartados. El primer apartado, se centra en la descripción del modelo matemático integrado, así como en la implementación de nuevos algoritmos, métodos y configuración en el modelo matemático. El segundo apartado, se centra en la descripción detallada de la implementación de algoritmos de aprendizaje por refuerzo en el modelo matemático integrado, asimismo, como la explicación de los métodos utilizados dentro del entrenamiento del aprendizaje por refuerzo. Y el último apartado, se presenta la metodología de la implementación del ecoindicador 99 dentro del modelo matemático integrado.

RECOPILACIÓN DEL MODELO

En la **Sección 4.3.2** se describe la metodología de la implementación de la RNAP para el modelamiento de una PTAR y su integración en el modelamiento matemático, así como su optimización matemática. En esta sección, se describirá la implementación de algoritmos de aprendizaje por refuerzo en el modelo matemático integrado de la **Sección 4.3.2**. Se consideró la configuración optima del modelo matemático integrado en cuanto tanques y configuración de distribución de agua. Además, se implementó la herramienta del ecoindicador 99 para un análisis de ciclo de vida respecto al impacto ambiental que genera la PTAR en el tratamiento de agua residual. También, en el modelo matemático integrado se agregó la posibilidad de poder recibir agua residual de otras localidades, estos flujos se descargan antes de la entrada de la PTAR.

IMPLEMENTACIÓN DE APRENDIZAJE POR REFUERZO

En esta sección, se describe la implementación de algoritmos de aprendizaje por refuerzo en el modelo matemático integrado con las modificaciones antes mencionadas. El aprendizaje por refuerzo es una rama del aprendizaje automático, considerado en la parte de aprendizaje no supervisado debido a que la red neuronal artificial aprende con base a la toma de decisión en el entorno de aprendizaje. Esta red neuronal artificial es llamada agente. En el aprendizaje por refuerzo consta de seis componentes principales que son el agente, el entorno, estado, la acción, la recompensa y la política. En el entrenamiento del aprendizaje por refuerzo, el agente observa el estado del entorno, aplica una política inicial por medio de una elección de acciones, el entorno hace la transición a un nuevo estado, esto da información al agente a través de la recompensa calculada por el nuevo estado, el agente actualiza

su política con respecto a que tan buena es la recompensa con base a sus acciones anteriores hasta llegar a una política óptima.

Este trabajo se considera que el agente pueda tomar acción en dos variables del modelo integrado que son los flujos de agua dulce ($F_{i,t}^{NORM,AGUAD}$) y el sentido de la optimización (S^{opt}). La primera variable de acción permite que el agente regule la cantidad de agua fresca suministrada a los edificios residenciales, esto permite, que el agente decida la cantidad de agua por un periodo de tiempo, es decir, el agente podrá decidir el flujo de agua fresca por día que deberá suministrar conforme a la demanda de los edificios residenciales. La segunda variable de acción es el sentido de la optimización, permite que el agente tome la decisión de minimizar o maximizar el modelo matemático integrado conforme a la recompensa calculada en el entrenamiento del agente. Estas variables de acción deben estar normalizadas para en entrenamiento del agente, sin embargo, en la optimización del modelo matemático, estas variables no se ingresan normalizadas. Para los flujos de agua dulce, tienen que ser variables positivas, por ende, el límite inferior de esta variable es cero, mientras que, el límite superior es de 1000 m³ por día. Para el caso del sentido de la optimización, el agente tomará la decisión entre un intervalo de 0.44 y 0.7 para seleccionar el sentido de la optimización, es decir, si el agente selecciona un valor menor igual a 0.575, el sentido de la optimización será la minimización, en caso contrario, si el agente selecciona un valor mayor a 0.575, el sentido de la optimización será la maximización. La selección del intervalo de 0.44 a 0.7 se utiliza para evitar la no factibilidad en el modelo integrado en cuanto a la selección de los flujos de agua dulce menores 0.45 y mayores 0.7 que ingresan al modelo matemático, es decir, el área de solución se reduce para evitar soluciones no factibles en el modelo. Por lo tanto, el vector de las variables de acción se muestra a continuación.

$$[F_{i,1}^{NORM,AGUAD} \quad F_{i,2}^{NORM,AGUAD} \quad F_{i,3}^{NORM,AGUAD} \quad F_{i,4}^{NORM,AGUAD} \quad F_{i,5}^{NORM,AGUAD} \quad F_{i,6}^{NORM,AGUAD} \quad F_{i,7}^{NORM,AGUAD} \quad S^{opt}]$$

Cuando el agente realiza una acción, el estado del entorno cambia, por ende, las variables seleccionadas en este trabajo para medir el cambio de estado son los flujos a la entrada de los tanques de almacenamiento ($F^{NORM,TANQ}$), los flujos de recirculación de agua tratada a los edificios residenciales ($F^{NORM,RECIR}$), los flujos de la entrada a los edificios residenciales ($F^{NORM,EDIF}$), los flujos de la entrada de la PTAR ($F^{NORM,PTAR}$), el costo anual total (CAT^{NORM}), el consumo total de agua dulce (ADT^{NORM}) y el ecoindicador 99 ($EI99^{NORM}$). Las variables ($F^{NORM,TANQ}$), ($F^{NORM,RECIR}$), ($F^{NORM,EDIF}$), ($F^{NORM,PTAR}$) y (ADT^{NORM}) dan información al agente sobre la distribución del agua en la configuración de la red del agua en el modelo matemático, mientras que, las variables (CAT^{NORM}) y ($EI99^{NORM}$) dan información al agente sobre los costos y el impacto

ambiental que produce la red de distribución, respectivamente. El cambio del estado del entorno, es cuando el agente ingresa las variables de acción en el modelo integrado, posteriormente se realiza la optimización matemática y desplegando las variables de estado anteriormente mencionadas no normalizadas. Para la normalización de las variables de estado en el entrenamiento del agente, se toma en cuenta que todas las variables de estado son positivas, por lo tanto, su límite inferior es cero, mientras que los límites superiores son \$ 6×10^4 , $7.5 \times 10^3 \text{ m}^3$, $6 \times 10^{10} \text{ Pt}$, $1.5 \times 10^3 \text{ m}^3$, $5 \times 10^2 \text{ m}^3$, $5 \times 10^3 \text{ m}^3$ y $5 \times 10^3 \text{ m}^3$ para (CAT^{NORM}) , (ADT^{NORM}) , $(EI99^{NORM})$, $(F^{NORM,TANQ})$, $(F^{NORM,RECIR})$, $(F^{NORM,EDIF})$ y $(F^{NORM,PTAR})$, respectivamente. Los intervalos normalizados para todas las variables de estado están entre cero y uno. En consecuencia, el vector de las variables de estado se muestra a continuación.

$$[CAT^{NORM} \quad ADT^{NORM} \quad EI99^{NORM} \quad F^{NORM,TANQ} \quad F^{NORM,RECIR} \quad F^{NORM,EDIF} \quad F^{NORM,PTAR}]$$

Para determinar el objetivo del agente, es necesario calcular la recompensa que recibió cuando aplicó la política de acciones en el modelo matemático y se obtuvo el estado del entorno después de la optimización matemática. Para ello, en este trabajo se tomó como variables objetivo del agente, las variables de CAT^{NORM} , ADT^{NORM} y $EI99^{NORM}$, estas variables se deberán minimizar, considerando la toma de decisión de los flujos de agua dulce y el sentido de la optimización. Por lo tanto, el agente deberá aprender a minimizar las variables objetivo conforme a la Ecuación de la recompensa que se muestra a continuación.

$$R_t = 3 - CAT^{NORM} - ADT^{NORM} - EI99^{NORM} \quad (3.4.57)$$

La Ecuación (3.4.57) presenta al agente la siguiente estimación, si las variables CAT^{NORM} , ADT^{NORM} y $EI99^{NORM}$ tienen un valor tendiente a 1, la sumatoria de estas tres variables, será -3, dando como resultado una recompensa de 0. Para el caso contrario, si las variables CAT^{NORM} , ADT^{NORM} y $EI99^{NORM}$ tienen un valor tendiente a 0, la sumatoria de estas tres variables, será 0, dando como resultado una recompensa de 3. Conforme el entrenamiento del agente vaya progresando, el valor de la recompensa tenderá a 3, mientras que, en los inicios del entrenamiento el valor de la recompensa tenderá a 0. Esto permite que el agente aprenda de la toma de decisión de las variables de acción y se vayan mejorando con respecto a la recompensa obtenida.

Para el entrenamiento del agente se utiliza el método de optimización de políticas proximal (OPP), es un método de gradiente de políticas para el aprendizaje por refuerzo (Schulman et al., 2017).

También, es un método de actor-crítico debido a que entrena dos redes neuronales simultaneas, una para el actor, quien decide la acción y la segunda para el crítico, quien evalúa la acción del actor. Para las redes neuronales del actor y del crítico se cuenta con una estructura de 7 capas ocultas y 128 neuronas en cada capa oculta para cada red neuronal. En este trabajo se utilizó la variante de OPP con recorte, utilizando la razón de probabilidad $r_t(\theta)$, un error de diferencia temporal δ_t con $\gamma = 0.99$, una estimación de la ventaja generalizada $\hat{A}_t$ con $\lambda = 0.95$, un valor objetivo V_t^{targ} , una función de perdida L_t^{VF} y una entropía diferencial $S(\pi_\theta)$ como se muestra en las Ecuaciones (3.4.59 a 3.4.61, 3.4.63 a 3.4.65), respectivamente.

$$r_t(\theta) = \frac{\pi_\theta(a_t|s_t)}{\pi_{\theta_{old}}(a_t|s_t)} \quad (3.4.59)$$

$$\delta_t = R_t + \gamma V(s_{t+1}) - V(s_t) \quad (3.4.60)$$

$$\hat{A}_t = \sum_{l=0}^{T-t-1} (\gamma\lambda)^l \delta_{t+l} \quad (3.4.61)$$

$$V_t^{targ} = V(s_t) + \hat{A}_t \quad (3.4.63)$$

$$L_t^{VF} = (V_\theta(s_t) - V_t^{targ})^2 \quad (3.4.64)$$

$$S(\pi_\theta) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\log(2\pi e \sigma_i^2)) \quad (3.4.65)$$

La función objetivo de recorte para OPP se muestra en la Ecuación (3.4.62), donde $\epsilon = 0.3$. Mientras que, la función objetivo total toma en cuenta $L^{CLIP}(\theta)$, L_t^{VF} y $S(\pi_\theta)$ como se muestra en la Ecuación (3.4.66), donde $C_1 = 0.5$ y $C_2 = 0.01$.

$$L^{CLIP}(\theta) = \hat{E}_t[\min(r_t(\theta)\hat{A}_t, \text{clip}(r_t(\theta), 1 - \epsilon, 1 + \epsilon)\hat{A}_t)] \quad (3.4.62)$$

$$L^{CLIP+VF+S}(\theta) = \hat{E}_t[L^{CLIP}(\theta) - C_1 L_t^{VF} + C_2 S[\pi_\theta](s_t)] \quad (3.4.66)$$

Para el entrenamiento del agente con el método de OPP se utilizó una semilla igual a 396, una tasa de aprendizaje de 1×10^{-4} , con una cantidad de 5 pasos por episodio y una cantidad de 1400 episodios implementando la librería de *stable_baselines3* (Raffin et al., 2021).

ECOINDICADOR 99

El ecoindicador 99 es una herramienta que permite analizar el impacto ambiental de un proceso por medio de 3 categorías que son salud humana, calidad del ecosistema y recursos naturales. En este trabajo se utilizó el modelo de daño Jerárquico y la normalización con la ponderación Promedio (Goedkoop & Spriensma, 2001). Para la PTAR se consideró como un Reactor Anaeróbico de Flujo Ascendente de Manto de Lodos (RAFAML) – laguna aeróbica facultativa. Se tomó como referencia que 1 persona equivalente (P.E) representa 50 g de DBO₅ por carga diaria en la planta de tratamiento y se representa en la Ecuación (3.4.35) (Kalbar et al., 2013).

$$PE_t^{PTAR} = \sum_{l=1}^L \sum_{x=1}^1 \frac{\mathcal{F}^{conv} F_{l,t}^{PTAR,ent} P_{l,x=1,t}^{PTAR,ent}}{50}, \quad \forall t \in T \quad (3.4.35)$$

Las PE_t^{PTAR} de la PTAR en una semana se multiplican por las emisiones directas de cada componente c basado en el inventario del ciclo de vida de la fase de operación y mantenimiento de la RAFAML (Kalbar et al., 2013) como se muestra en la Ecuación (3.4.36).

$$\beta_{c,t} = \beta_c^Q * PE_t^{PTAR}, \quad \forall j \in J, \quad \forall k \in K, \quad \forall t \in T \quad (3.4.36)$$

Las subcategorías abarcadas por el inventario del ciclo de vida son las siguientes: efectos cancerígenos en los seres humanos, efectos respiratorios en humanos causados por sustancias inorgánicas, daños a la salud humana causados por el cambio climático, daño a la calidad del ecosistema causado por emisiones ecotóxicas, daño a la calidad de los ecosistemas causado por el

efecto combinado de acidificación y eutrofización y daños a los recursos causados por la extracción de combustibles fósiles.

CAPÍTULO 5

En este capítulo se hablará de todos los resultados obtenidos en este trabajo como la aplicación de aprendizaje no supervisado, profundo y por refuerzo en los diferentes modelos matemáticos de redes de distribución de agua. Así como, la representación gráfica y tabular de los resultados obtenidos por la optimización matemática de la mejor configuración de la superestructura.

5.1. RESULTADOS

En las próximas secciones, se presentarán los resultados de la implementación de algoritmos de aprendizaje no supervisado, profundo y por refuerzo obtenidos por este trabajo.

5.2. RESULTADOS APRENDIZAJE NO SUPERVISADO

El modelo matemático fue codificado en el software GAMS (Brooke et al., 1992) y consta de 21,727 variables, de las cuales 8,721 son variables binarias, 13,006 son variables continuas y 54,493 son restricciones. El modelo matemático se resolvió con el solucionador SCIP (Bestuzheva, et al., 2021). El modelo es un problema de programación no lineal entera mixta (MINLP), que se resolvió con un procesador Intel I CoITM i7-11800H @ 2,30 GHz de 11.^a generación con 20 GB de RAM y el tiempo de cálculo fue de alrededor de 6623 segundos.

Se realizó un análisis de sensibilidad realizando múltiples ejecuciones del modelo matemático con diferentes restricciones de costo total. Este análisis permitió determinar límites de costos superiores e inferiores viables y su correspondiente impacto en la eficiencia de la eliminación de arsénico. Los resultados indicaron que los costos totales más altos dieron como resultado concentraciones de arsénico más bajas en los pozos profundos, mientras que los costos totales más bajos llevaron a concentraciones de arsénico más altas. Este análisis de sensibilidad subraya la relación entre la rentabilidad y la eficiencia de eliminación de arsénico dentro del modelo.

5.2.1. ESCENARIO 1

En este escenario, las concentraciones de arsénico (As) y los flujos del punto de origen del pozo profundo se muestran en la **Tabla 4.3.1.4 (Sección 4.3.1)** y deben cumplir con las restricciones de los flujos máximos del punto de demanda del pozo profundo que se muestran en la **Tabla 3.2.2**. La concentración de arsénico debe ser menor o igual a 9 mg/m^3 . Además, se considera que existe un presupuesto limitado. En este escenario se analizan los resultados que arroja el cómputo del modelo matemático y las restricciones antes mencionadas.

La **Fig. 5.2.1** muestra la solución de optimización óptima del modelo matemático considerando las restricciones. Se observa que los puntos fuente de los pozos profundos tienen concentraciones de arsénico mayores a 9 mg/m^3 , los cuales son los pozos siguientes: 3, 11, 12, 13, 14, 15, 20, 27, 29 y 30 con concentraciones de 24, 11, 11, 16, 10, 11, 19, 28, 24 y 28 mg/m^3 , respectivamente. Asimismo, se demuestra que una mayor concentración en los flujos de los pozos profundos tiene

mayor distribución en los flujos de agua hacia los pozos profundos vecinos lo que lleva a que se mezclen con estos pozos profundos reduciendo así la alta concentración de arsénico en los pozos profundos con mayor concentración. Esto implica que algunos pozos profundos con menores concentraciones de arsénico aumentan su cantidad de arsénico en los flujos del punto de demanda. Además, algunos pozos profundos que superan los 9 mg/m^3 pueden reducir su concentración enviando flujos a pozos profundos con una menor concentración de arsénico y recibiendo flujos de estos últimos pozos profundos para cumplir con la restricción de 9 mg/m^3 .

Los pozos profundos en este escenario que no pasaron por el proceso de mezcla son los pozos profundos siguientes: 1, 2, 6, 7, 9, 10, 18 y 26, los cuales tienen concentraciones de 4, 5, 3, 4, 9, 3, 9 y 8 mg/m^3 y flujos de 1.27090, 0.63072, 0.84202, 0,54054, 1,45854, 0,16556, 1,96311, 0,42573 hm^3 . Se observó que estos pozos profundos que no pasaron por el proceso de mezcla debido al área determinada donde se ubicaban, también se ubicaron otros pozos profundos con menor concentración de arsénico. Además, si los pozos profundos que no pasaron por el proceso de mezcla enviaran flujos para mezclar con los pozos profundos de concentraciones más altas dentro de su área determinada, los pozos profundos que no se mezclaron no cumplirían con la demanda de flujo. Por lo tanto, sería necesario un gasto en bombeo y tuberías para transportar la cantidad faltante de flujo desde los pozos profundos sin mezclar. Además, los pozos profundos que suministran flujos de agua a los pozos profundos sin mezclar deben tener menores concentraciones de arsénico que aquellos pozos profundos que están siendo suministrados, y también deben estar ubicados a corta distancia para que el gasto de bombeo disminuya con el tiempo. La mejor opción es enviar flujos de agua a pozos profundos con alta concentración de arsénico desde pozos profundos con baja concentración dentro de un área determinada.

Los pozos profundos que no cambiaron sus concentraciones de arsénico en los resultados mostrados por el cálculo del modelo matemático fueron los pozos profundos que no fueron mezclados, mientras que los pozos profundos que disminuyeron su concentración de arsénico fueron los pozos profundos con mayor concentración. Además, los pozos profundos que aumentaron su concentración de flujo y que no superaron la restricción de 9 mg/m^3 fueron los pozos profundos 4, 5, 8, 16, 17, 19, 21, 22, 23, 24, 25, 28, 31, 32 y 33 iniciando con concentraciones de 2, 2, 4, 2, 4, 5, 4, 5, 2, 3, 4, 2 y 4 mg/m^3 como punto de origen de pozo profundo a 7,66, 9, 5,76, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9 y 9 mg/m^3 como punto de demanda de pozo profundo, respectivamente.

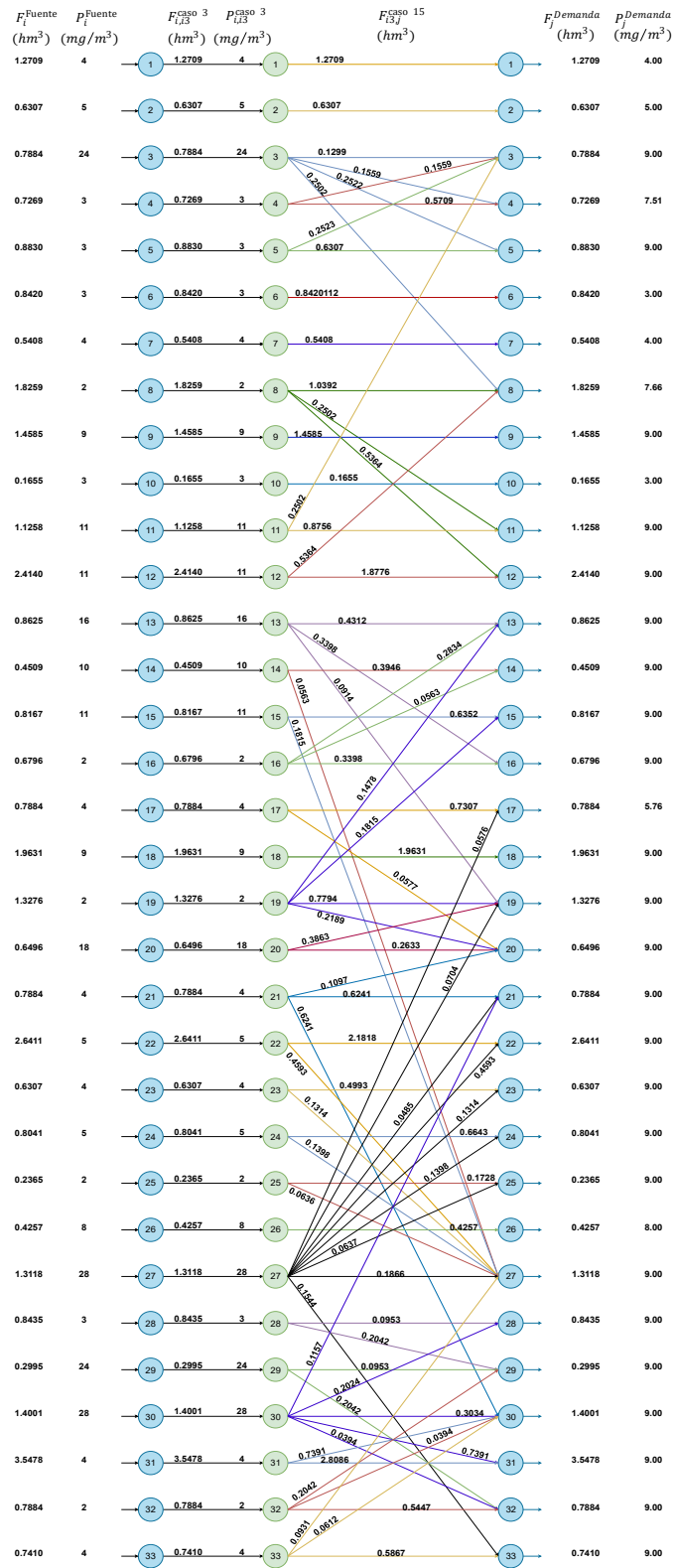


Fig. 5.2.1. Solución del modelo matemático del escenario 1.

5.2.2. ESCENARIO 2

En el segundo escenario, las concentraciones y flujos de arsénico (As) desde el punto de fuente de los pozos profundos se muestran en la **Tabla 4.3.1.4 (Sección 4.3.1)**. La concentración de arsénico en este escenario debe ser inferior a 9 mg/m^3 y los flujos desde el punto de demanda de los pozos profundos deben ser inferiores a los flujos que se muestran en la **Tabla 3.2.2**. Además, el presupuesto para este escenario es ilimitado.

La **Fig. 5.2.2** muestra la solución óptima para la optimización del modelo matemático considerando las restricciones del segundo escenario. Como se observa en el primer escenario, algunos de los pozos profundos en los puntos de origen tienen concentraciones de arsénico superiores a 9 mg/m^3 y también se observará el caso contrario, es decir, tienen concentraciones de arsénico inferiores al límite permisible. En este segundo escenario respecto al primero, no existe limitación en el gasto que requiere el modelo matemático para su optimización, por lo que en la **Fig. 5.2.2** se muestra que la toma de decisión es en el primer caso, es decir, la instalación de dos plantas de tratamiento en diferentes ubicaciones y la opción de solo mezcla. Los flujos de pozo profundo de los puntos fuente ($F_i^{Demanda}$) van a los flujos de pozo profundo del caso 1 ($F_{i,i1}^{caso 1}$), posteriormente los flujos de $F_{i,i1}^{caso 1}$ toman la decisión de ir a la ubicación i1A e i1B. Como se muestra en la **Fig. 5.2.2**, los flujos de pozo profundo del caso 1 ($F_{i,i1}^{caso 1}$) que van a la ubicación i1A son los flujos de pozo profundo del caso 1 en el caso A ($F_{i1,i1A}^{caso 1A}$), 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 y 18. En la ubicación i1A, se toma la siguiente decisión con respecto a la tecnología seleccionada, como se muestra en la **Fig. 5.2.2**, la optimización del modelo matemático seleccionado es la tecnología 2 correspondiente a la ósmosis inversa. Además, se puede observar que el pozo 18 va hacia la ubicación i1A, disminuyendo hacia la ubicación i1B, esto se debe al costo de bombeo requerido hacia la ubicación i1A que es de $0.01674 \text{ \$/m}^3$ y $0.01810 \text{ \$/m}^3$ para la ubicación i1B (ver **Tabla 4.3.1.5**). Acerca del caso 1 pozos profundos ($F_{i,i1}^{caso 1}$) que van a la ubicación i1B son el caso 1 pozo profundo fluye en el caso B ($F_{i1,i1B}^{caso 1B}$), 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32 y 33. La tecnología seleccionada para la optimización del modelo en esta ubicación (i1B) fue la ósmosis inversa (tecnología 2).

Los flujos de los pozos profundos del caso 1 en el caso A, a la salida de la tecnología 2 ($F_{i2A2F,j}^{fluj,5}$) que van a los pozos profundos de demanda ($F_j^{Demanda}$), 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14 y 18. La mayoría de estos últimos pozos de demanda profunda fueron los que seleccionaron la ubicación i1A con excepción del pozo profundo de demanda 14, debido a que el costo de bombeo y tubería es mayor en $F_{i1B2F,j}^{fluj,8}$ que en $F_{i2A2F,j}^{fluj,5}$ hacia la demanda de pozos profundos, los costos son 0.01758 y 0.01684

$\$/m^3$, mientras que, para los costos de bombeo y tubería de $F_{i1,i1A}^{caso\ 1A}$ y $F_{i1,i1B}^{caso\ 1B}$ son 0,01758 y 0,01379 $\$/m^3$, respectivamente (consulte las **Tablas 4.3.1.5 y 4.3.1.7**). En este sentido, el flujo del pozo profundo P14 selecciona la ubicación i1B pero su flujo a la demanda del pozo profundo se envía desde la ubicación i1A. Para los flujos de los pozos profundos del caso 1 en el caso B a la salida de la tecnología 2 ($F_{i1B2F,j}^{fluj,8}$) que van a los pozos profundos de demanda ($F_j^{Demanda}$), 13, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32 y 33. El pozo profundo que va a la demanda de pozo profundo 18 en la ubicación i1B también se envía a la ubicación i1A, porque el flujo que va al pozo de demanda profunda 14 en la ubicación i1A se resta del flujo total de esta ubicación dando efectos en el flujo que va a la demanda de pozo profundo 18 desde la ubicación i1A, con esto, desde la ubicación i1B se envía la cantidad restante de flujo 18 requerido por este pozo de demanda profunda. En cuanto a las concentraciones de arsénico de los pozos de demanda profundos ($P_j^{Demanda}$), se puede observar que las concentraciones dependen de la ubicación de donde provienen los flujos. En el caso de que los flujos que llegan a la demanda de pozos profundos ($F_j^{Demanda}$) sean enviados desde la ubicación i1A, tendrán concentraciones de arsénico de $0.35755\ mg/m^3$, mientras que, los flujos que provienen de la ubicación i1B tendrán concentraciones de $0.44255\ mg/m^3$. En el caso en que los flujos se envíen desde ambas localidades, como es el caso de la demanda del pozo profundo 18, la concentración dependerá de las reglas de mezcla.

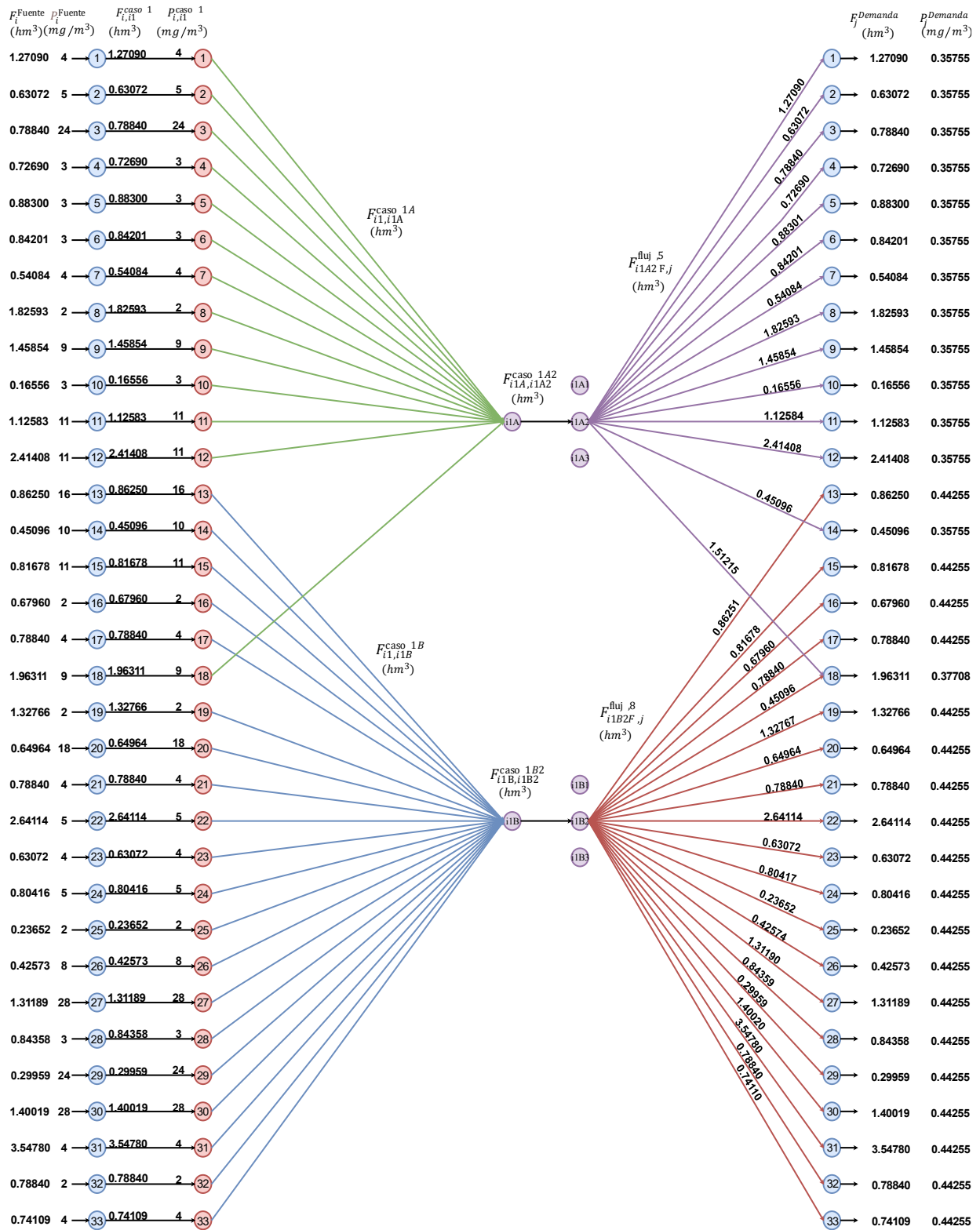


Fig. 5.2.2. Solución del modelo matemático del escenario 2.

5.2.3. ESCENARIO 3

En el tercer escenario, las concentraciones y flujos de arsénico (As) se muestran en la **Tabla 4.3.1.4 (Sección 4.3.1)**. La concentración de arsénico en este escenario debe ser inferior a 9 mg/m^3 y los flujos desde el punto de demanda de los pozos profundos deben cumplir con los flujos que se muestran en la **Tabla 3.2.2**. Además, el presupuesto para este escenario está limitado a \$50 millones; sin embargo, puede variar dependiendo de los recursos disponibles de la comunidad. Este monto fue seleccionado para representar un punto intermedio entre los dos escenarios anteriores. Luego se analizan los resultados obtenidos del modelo matemático y las restricciones mencionadas anteriormente.

La **Fig. 5.2.3** muestra la solución óptima de optimización del modelo matemático considerando las restricciones del segundo escenario. Los pozos profundos en el punto de fuente tienen concentraciones de arsénico que van desde 3 a 28 mg/m^3 , estas concentraciones de arsénico son menores y mayores que la concentración de arsénico permisible que es de 9 mg/m^3 . En este escenario, las concentraciones de la demanda de los pozos profundos deben ser menores al límite permisible antes mencionado y, además. En la **Fig. 5.2.3** se muestra que se selecciona el segundo caso, es decir, la instalación de una sola planta de tratamiento. Los flujos de pozos profundos de los puntos de origen (F_i^{Fuente}) van a los flujos de pozos profundos del caso 2 ($F_{i,i2}^{\text{caso } 2}$), posteriormente los flujos de $F_{i,i2}^{\text{caso } 2}$ toman la decisión de ir a la ubicación i2A e i2B (los flujos de pozos profundos solo son mixtos para esta ubicación). Como se muestra en la **Fig. 5.2.3**, los flujos de pozo profundo del caso 2 ($F_{i,i2}^{\text{caso } 2}$) que van a la ubicación i2A son los flujos de pozo profundo del caso 2 en el caso A ($F_{i2,i2A}^{\text{caso } 2A}$) 2, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 23, 24, 26, 27, 28, 29, 30, 31 y 33. Además, en la ubicación i2A se realiza la selección de tecnología mediante la optimización del modelo matemático, este fueron los absorbentes ($F_{i2A,i2A1}^{\text{caso } 2A1}$). Mientras que los flujos de pozo profundo del caso 2 en el caso B ($F_{i2,i2B}^{\text{caso } 2B}$) que van hacia la ubicación i2B son 1, 3, 7, 11, 14, 19, 22, 25, 27 y 32. Los flujos de los pozos profundos del caso 2 que fueron enviados a los casos A y B son 19 y 27 con concentraciones de arsénico de 2 y 28 mg/m^3 , respectivamente.

Para la ubicación i2A, los flujos del pozo profundo que salen de la tecnología 1 ($F_{i2A1F,j}^{\text{flujo},11}$) tienen una concentración de arsénico de $0,7735 \text{ mg/m}^3$. Los pozos de demanda profunda que reciben flujos $F_{i2A1F,j}^{\text{flujo},11}$ son 1, 2, 3, 4, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 24, 25, 27, 28, 29, 30, 31, 32 y 33. En cuanto a la ubicación i2B, los pozos profundos que exceden la concentración de arsénico permitida son 11, 14 y 27 con 11, 10 y 28 mg/m^3 , respectivamente. Mientras que los pozos

profundos que se encuentran por debajo del límite permisible de arsénico son 1, 3, 7, 19, 22, 25 y 32 con 4, 5, 4, 2, 5, 2 y 2 mg/m^3 , respectivamente. Los flujos de los pozos profundos del caso 2 en el caso B ($F_{i2B,J}^{fluj,14}$) (ubicación i2B) que van a los pozos profundos de demanda ($F_j^{Demanda}$) son 1 a 14, 23, 24 y 26 con flujos de 0.12885, 0.63072, 0.08560 y 0.42574 hm^3 , 3 hacia 16 y 18 con flujos de 0,23699 y 0,55141 hm^3 ; 7 hacia 3 con un flujo de 0.54084 hm^3 ; 11 hacia 14, 15 y 24 con flujos de 0,32212, 0,18383 y 0,61989 hm^3 , 14 hacia 2 con un flujo de 0,45096 hm^3 , 19 hacia 16 con un flujo de 0,07028 hm^3 , 22 hacia 3, 5, 8 y 9 con flujos de 0.24756, 0.88301, 1.07033 y 0.44025 hm^3 ; 25 hacia 8 con un flujo de 0,23652 hm^3 , 27 hacia 6, 7, 8 y 9 con flujo de 0.20460, 0.16342, 0.36810 y 0.37236 hm^3 , Y 32 hacia 6 y 8 con flujos de 0,63741 y 0,15099 hm^3 .

En cuanto a las concentraciones de arsénico de los pozos de demanda profundos, tienen valores desde 0.7735 a 9 mg/m^3 correspondientes a las reglas de mezcla que dependen de los flujos enviados desde el Caso A y el Caso B a los pozos de demanda profundos. Si el pozo de demanda profundo solo recibe flujo del Caso A, su concentración será 0,7735 mg/m^3 . Sin embargo, si el pozo de demanda profundo solo recibe flujo del Caso B, es necesario analizar si el flujo solo se envía desde un pozo profundo. Desde el punto de partida, la concentración será igual a la de este punto de partida de pozo profundo, pero, si se recibe de dos o más puntos de partida de pozo profundo, la concentración se resolverá mediante las reglas de mezcla correspondientes.

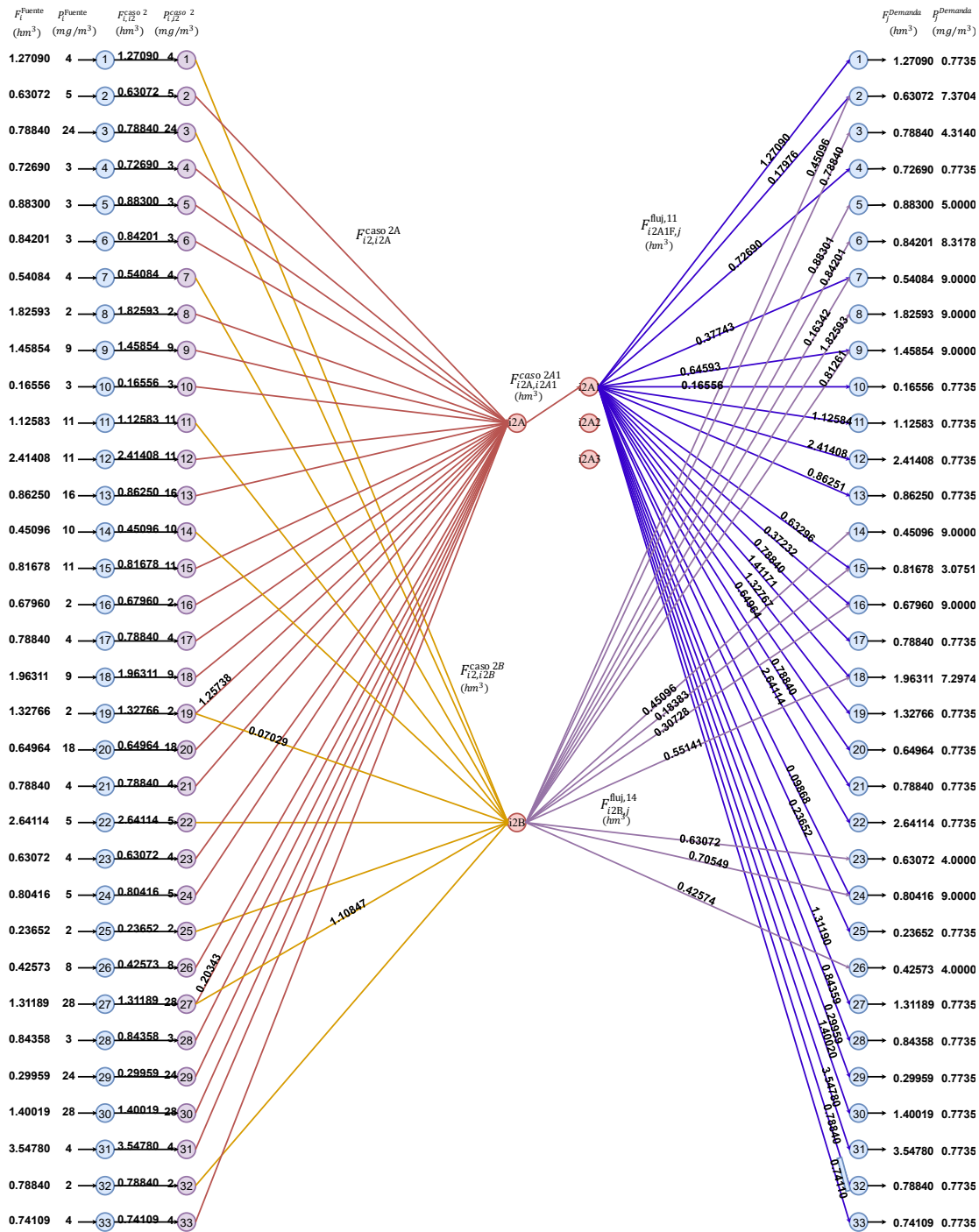


Fig. 5.2.3. Solución del modelo matemático del escenario 3.

5.2.4. COMPARACIÓN DE ESCENARIOS

La **Fig. 5.2.4** muestra las concentraciones de arsénico para cada uno de los pozos profundos. Las concentraciones de la fuente de pozos profundos se muestran en verde, como se puede ver, 10 pozos profundos están por encima del límite permisible de 9 mg/m^3 y los pozos profundos restantes cumplen con esto. En el caso de las concentraciones de los pozos profundos en el escenario 1, son las concentraciones de los pozos profundos de demanda porque estos pozos profundos son los que satisfacen las necesidades de la localidad. Para el escenario 1, se puede observar que solo 9 pozos profundos están por debajo del límite permisible de concentración de arsénico, mientras que los pozos profundos restantes están dentro del límite permisible. Para el escenario 2, las concentraciones de los pozos profundos de demanda mostrados en color amarillo están muy por debajo del límite permisible, con todos los pozos teniendo concentraciones de menos de 1 mg/m^3 de concentración de arsénico. En el caso del tercer escenario mostrado con el color verde oscuro, se demuestra que las concentraciones de la demanda de los pozos profundos cumplen con el límite permisible, 9 de los pozos profundos están dentro del límite permisible, 8 pozos profundos están por debajo de este límite y los pozos profundos restantes tienen concentraciones menores a 1 mg/m^3 .

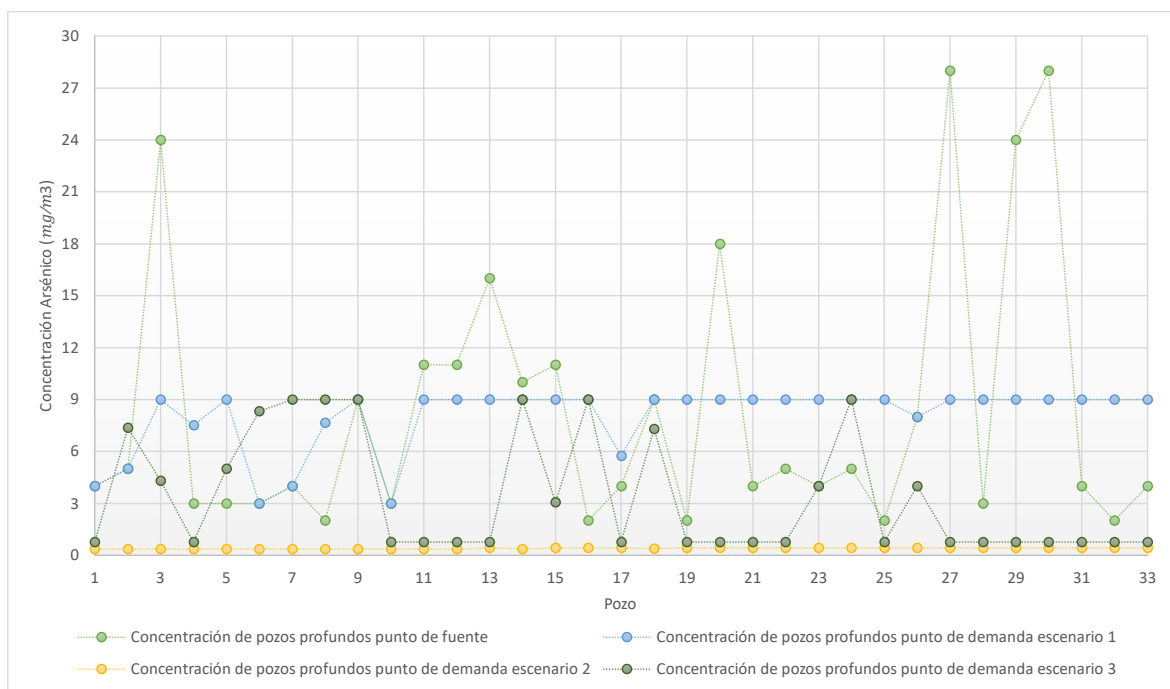


Fig. 5.2.4. Concentraciones de arsénico del punto de fuente de pozos profundos y del punto de demanda de pozos profundos para los escenarios 1, 2 y 3.

La **Tabla 5.2.1** muestra la concentración de arsénico de la fuente de pozos profundos y la demanda de pozos profundos para cada uno de los escenarios. En esta misma tabla se puede ver la variación de la concentración total de arsénico para la fuente de pozos profundos (no optimizada) y la demanda de pozos profundos para cada uno de los escenarios (optimizada). Se puede ver que la concentración total de arsénico de la fuente de pozos profundos es de 275 mg/m^3 , mientras que las concentraciones de la demanda de pozos profundos para los escenarios 1, 2 y 3 son 263,92076, 13,43380 y $112,07130 \text{ mg/m}^3$, respectivamente. Se puede ver la diferencia entre la fuente de pozos profundos y la demanda de pozos profundos para los escenarios 1, 2 y 3, que son 11,07924, 261,5662 y $162,9287 \text{ mg/m}^3$.

Tabla 5.2.1. Concentraciones de arsénico del punto fuente de pozos profundos y escenarios 1, 2 y 3.

Pozo	Concentración Fuente (mg/m^3)	Concentración Demanda Escenario 1 (mg/m^3)	Concentración Demanda Escenario 2 (mg/m^3)	Concentración Demanda Escenario 3 (mg/m^3)
1	4	4.00000	0.35755	0.77350
2	5	5.00001	0.35755	7.37045
3	24	9.00000	0.35755	4.31400
4	3	7.50613	0.35755	0.77350
5	3	9.00000	0.35755	5.00000
6	3	3.00000	0.35755	8.31778
7	4	4.00000	0.35755	9.00000
8	2	7.65861	0.35755	9.00000
9	9	9.00000	0.35755	9.00000
10	3	3.00000	0.35755	0.77350
11	11	9.00000	0.35755	0.77350
12	11	9.00000	0.35755	0.77350
13	16	9.00000	0.44255	0.77350
14	10	9.00000	0.35755	9.00000
15	11	9.00000	0.44255	3.07511
16	2	9.00000	0.44255	9.00000
17	4	5.75599	0.44255	0.77350
18	9	9.00000	0.37708	7.29744
19	2	9.00000	0.44255	0.77350
20	18	9.00000	0.44255	0.77350

21	4	9.00000	0.44255	0.77350
22	5	9.00000	0.44255	0.77350
23	4	9.00000	0.44255	4.00000
24	5	9.00000	0.44255	9.00000
25	2	9.00000	0.44255	0.77350
26	8	8.00001	0.44255	4.00000
27	28	9.00000	0.44255	0.77350
28	3	9.00000	0.44255	0.77350
29	24	9.00000	0.44255	0.77350
30	28	9.00000	0.44255	0.77350
31	4	9.00000	0.44255	0.77350
32	2	9.00000	0.44255	0.77350
33	4	9.00000	0.44255	0.77350
TOTAL	275	263.92076	13.43380	112.07130

La **Fig. 5.2.5** muestra los costos normalizados necesarios para cada escenario para dar las concentraciones totales de arsénico que se muestran en la **Tabla 5.2.1**. Para los costos de bombeo, tubería y operación hacia las tecnologías, se observa que el 71,17% del costo corresponde al escenario 2, mientras que el escenario 3 tiene un porcentaje menor al 28,83% del costo, en cuanto al escenario 1, el costo es cero por no tener tecnologías y solo mezclas. Para los costos de bombeo y tubería hacia los pozos de demanda, se observa que el escenario 1 tiene un porcentaje del 9,12%, mientras que el escenario 2 tiene un porcentaje del 48,51% y el escenario 3 con un porcentaje del 42,36%. Para el costo de instalación de la planta para los escenarios 2 y 3, los porcentajes son 72,46 y 27,54%, respectivamente. Y finalmente, el costo total corresponde a 0.08%, 71.17% y 28.75 para los escenarios 1, 2 y 3, respectivamente.

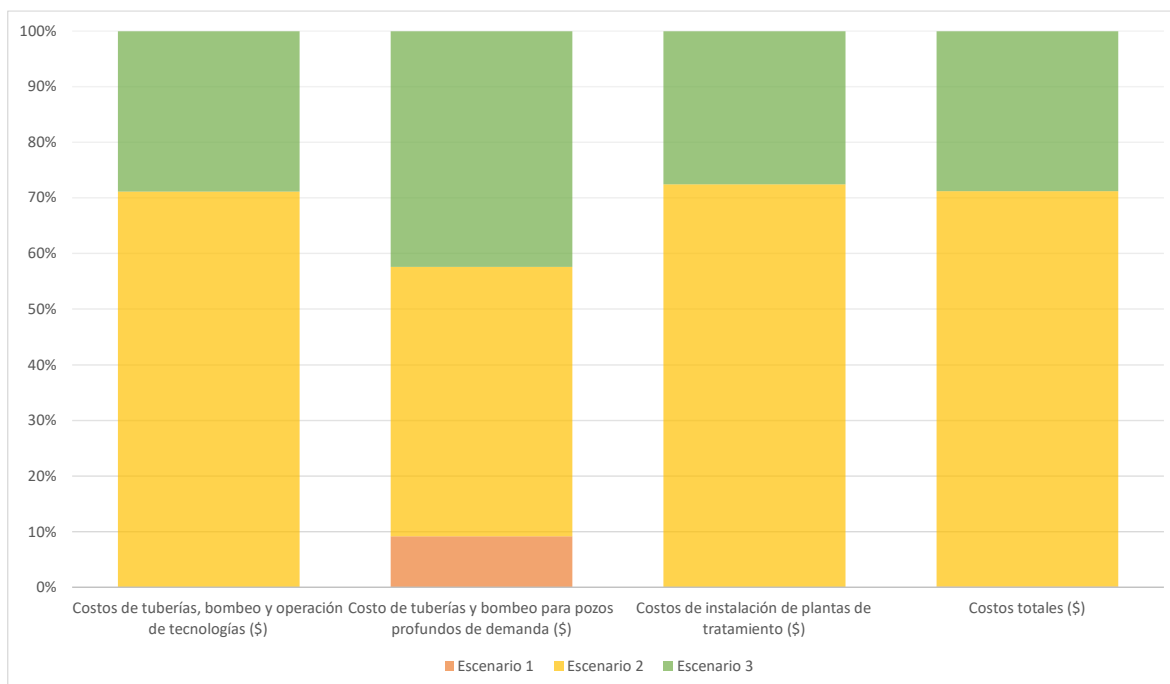


Fig. 5.2.5. Los costos normalizados para cada escenario.

La **Tabla 5.2.2** muestra los costos de bombeo, tubería y operación hacia tecnologías, costo de bombeo y tubería a pozos de demanda profunda, costo de instalación de la planta y costo total del escenario. La sostenibilidad económica a largo plazo de una planta de remoción es un factor clave en la toma de decisiones. La adaptabilidad del modelo matemático permite limitar los costos de bombeo, tubería y operación, que representan una parte significativa de los gastos totales, al tiempo que garantiza el cumplimiento de las regulaciones ambientales y la sostenibilidad. Esto es especialmente beneficioso si la localidad enfrenta restricciones presupuestarias. Además, los tomadores de decisiones evaluarán la sostenibilidad a largo plazo con base en el presupuesto disponible en la localidad donde se implementará el modelo matemático.

La **Tabla 5.2.2** muestra: en el caso del punto 1, el 74.03% del presupuesto de 30 millones corresponde a los costos de conducción, bombeo y operación de las tecnologías, es decir, los flujos que van desde los puntos de fuente de pozos profundos hasta las plantas de tratamiento y posteriormente a los puntos de demanda de pozos profundos, se favorece la instalación de plantas de tratamiento. Mientras que el 1.17% corresponde a los costos de conducción y bombeo desde los puntos de fuente de pozos profundos hasta los puntos de demanda de pozos profundos, por lo tanto, se implementa la mezcla de corrientes. Para el caso del punto 2, el 86.97% del presupuesto de 80 millones correspondería a la implementación de plantas de tratamiento, mientras que el 0.80% se gastaría en estrategias de mezcla.

Por lo tanto, a mayor presupuesto, el modelo matemático priorizará la implementación de plantas de tratamiento; de lo contrario, si el presupuesto es menor, se priorizará la mezcla entre corrientes.

Tabla 5.2.2. Costos para cada escenario.

	Costos de tuberías, bombeo y operación de tecnologías (\$)	Costo de tuberías y bombeo para pozos profundos de demanda (\$)	Costos de instalación de plantas de tratamiento (\$)	Costo Total (\$)
Escenario 1	0	142,453.69	0	142,453.69
Escenario 2	103,396,144	757,517.26	19,577,092	123,730,753
Escenario 3	41,886,154	661,453.11	7,440,102	49,987,710
Sin Tratamiento	0	0	0	0
Punto 1	22,209,665	350,232.76	7,440,102	30,000,000
Punto 2	69,573,185	638,268.10	9,788,546	80,000,000

La **Fig. 5.2.6** ilustra la relación entre el costo total requerido y la concentración total de arsénico en pozos profundos en el punto de demanda para cada escenario. Esta figura incluye seis puntos correspondientes a los tres escenarios presentados previamente, un escenario sin tratamiento y dos escenarios con diferentes presupuestos. El escenario sin tratamiento refleja los pozos profundos en su punto de origen, lo que significa que no se aplicó tratamiento ni mezcla a los flujos de los pozos. Por otro lado, los dos escenarios restantes presentan dos presupuestos diferentes, adaptados a las necesidades económicas y los desafíos de la localidad. Cada punto está etiquetado con tres secciones: la primera representa el escenario, la segunda representa el costo total del escenario y la tercera representa la concentración total de arsénico de los pozos profundos en el punto de demanda.

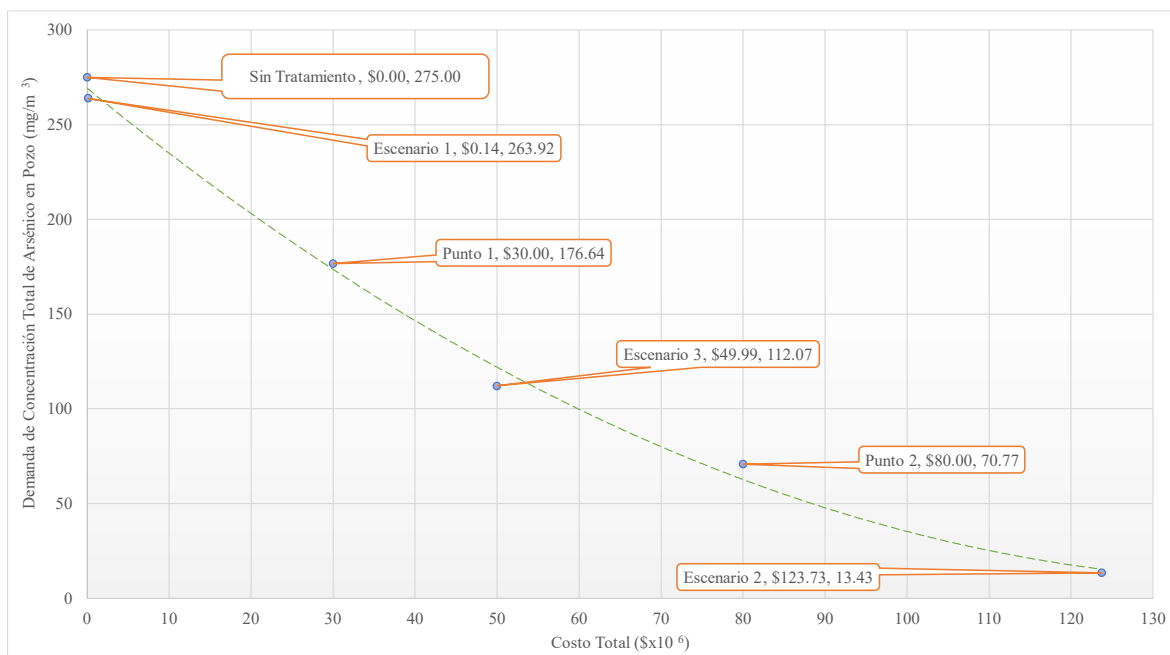


Fig. 5.2.6. Relación entre el costo total y la concentración total de arsénico en pozos de demanda profunda.

Como se muestra en la **Fig. 5.2.6**, el escenario sin tratamiento presenta una concentración total de arsénico de 275 mg/m³ y un costo total de \$0, mientras que su contraparte, el Escenario 2, presenta una concentración total de arsénico de 13,43 mg/m³ y un costo total de \$123.730.753. Estos dos puntos representan los extremos. El Escenario 3, por otro lado, se muestra como un punto de equilibrio entre estos extremos, con una concentración total de arsénico de 112,07 mg/m³ y un costo total de \$49.987.710. Los dos puntos restantes, denominados punto 1 y punto 2, demuestran la adaptabilidad del modelo matemático para proporcionar soluciones entre el Escenario 3 y los Escenarios 1 y 2, lo que significa que el modelo puede ajustarse a un presupuesto determinado. Las concentraciones totales de arsénico son de 263,93 y 70,77 mg/m³, con costos totales de 30 y 80 millones de dólares para los escenarios del punto 1 y del punto 2, respectivamente. La **Fig. 5.2.6** muestra una curva de tendencia (línea roja punteada) que representa la relación entre el costo total y la concentración total de arsénico, lo que permite aproximar diferentes presupuestos a las concentraciones totales de arsénico resultantes y facilita la toma de decisiones según el presupuesto disponible.

Este proceso implica evaluar las compensaciones entre la reducción de la concentración de arsénico y los costos asociados. La relación resaltada en la **Fig. 5.2.6** ilustra que reducciones significativas en la concentración de arsénico pueden resultar en costos exponencialmente más altos. Los tomadores

de decisiones pueden usar esta relación para identificar un punto de equilibrio óptimo donde el costo se justifique por el nivel de remoción de arsénico logrado. Al analizar la curva, es posible determinar el punto en el que los costos adicionales producen rendimientos decrecientes en términos de reducción de arsénico, optimizando efectivamente ambos objetivos. Esta interacción entre costo y eficiencia es crucial para diseñar estrategias de remoción de arsénico que sean rentables y beneficiosas para la salud pública. Además, los tomadores de decisiones pueden ajustarse a las necesidades económicas y ambientales de la localidad utilizando las aproximaciones proporcionadas por la curva en la **Fig. 5.2.6**, sin comprometer las concentraciones de arsénico debido a los costos totales requeridos por el proceso.

Además, es importante considerar que el crecimiento poblacional es una constante en cada localidad y, por lo tanto, el aumento en los volúmenes de agua requeridos será una necesidad. En consecuencia, los métodos para suministrar agua a la localidad probablemente resultarían en la perforación profunda de pozos, lo que podría conducir a un aumento en las concentraciones de arsénico. Por esta razón, es aconsejable considerar la instalación de una planta de remoción a largo plazo en lugar de depender de la mezcla de corrientes. Dado que un mayor énfasis en minimizar los niveles de concentración de arsénico los mantendría significativamente muy por debajo de los límites permisibles, proporcionaría un margen sustancial en caso de cambios regulatorios, crecimiento poblacional y aumento de las concentraciones de arsénico. Este enfoque ofrece mayor flexibilidad a largo plazo en comparación con priorizar la minimización de los costos totales. La **Tabla 5.2.3** presenta una comparación entre los escenarios y su viabilidad a lo largo del tiempo, que debe tenerse en cuenta en el proceso de toma de decisiones.

Tabla 5.2.3. Viabilidad del escenario en el tiempo.

Escenario	Costo Total	Concentración Total	Corto plazo	Corto Mediano	Muy largo plazo
1	Bajo	Alto	✓	X Aumento de la inversión	X Aumento de la inversión
2	Medio	Medio	✓	✓	X Aumento de la inversión
3	Alto	Bajo	✓	✓	✓

Tornillo, Texas, en 2016, con una capacidad de 136 m³/h y un costo de 3.75 millones de dólares (NADB, 2016). Al ajustar este último dato a valor presente, asciende a 5,551,372 dólares. Para una instalación de una sola planta, el modelo matemático muestra un valor de 7,440,102 dólares, lo que resulta en una razón de 1.31. Para la capacidad total de todas las plantas del modelo matemático, que es de 200 m³/h, la razón de capacidad es de 1.47. Por lo tanto, existe una diferencia del 12.21% entre el costo de instalación de la planta y su capacidad. Cabe destacar que este porcentaje puede variar según la tecnología instalada.

5.3. RESULTADOS APRENDIZAJE PROFUNDO

El modelo matemático es un problema de programación no lineal entera mixta (MINLP). Este problema se codificó en el software GAMS versión 48 (Brooke et al., 1992) y consta de 5355 variables, de las cuales 75 son binarias, 5280 son continuas y 7979 son restricciones. El modelo matemático se resolvió utilizando el solucionador SCIP (Chmiela et al., 2024), con un procesador Intel® Core™ i7-11800H de 11^{va} generación a 2,30 GHz, 20 GB de RAM y un tiempo de cómputo de entre 60 y 300 segundos, dependiendo del escenario. La RNAP tiene una estructura de 3 entradas, 7 capas ocultas, 50 neuronas en cada capa y 3 salidas, como se muestra en la **Fig. 5.3.1**. Las capas ocultas y de salida implementan la función de activación Leaky ReLU (Maas et al., 2013), con un valor de α igual a 1×10^{-3} . La función de pérdida utilizada para el entrenamiento y la validación del modelo de red neuronal artificial fue el error cuadrático medio (MSE), con un resultado de 1.3104 y 0.4234, respectivamente. La tasa de aprendizaje de la red neuronal implementada fue de 5×10^{-4} y el número de épocas fue de 62. El coeficiente de correlación de Pearson (Pearson, 1895) como porcentaje es igual al 98.6577, 99.6364 y 98.2514 % para las propiedades de DBO, DQO y SST, respectivamente, para el conjunto de prueba. El tiempo de cómputo de la RNAP fue de 4757 segundos con un procesador Intel® Core™ i7-11800H de 11^{va} generación a 2.30 GHz con 20 GB de RAM y gráficos Intel® UHD a 350 MHz, y un procesador gráfico NVIDIA GeForce GTX 1650 a 1125 MHz con 4 GB de memoria VRAM.

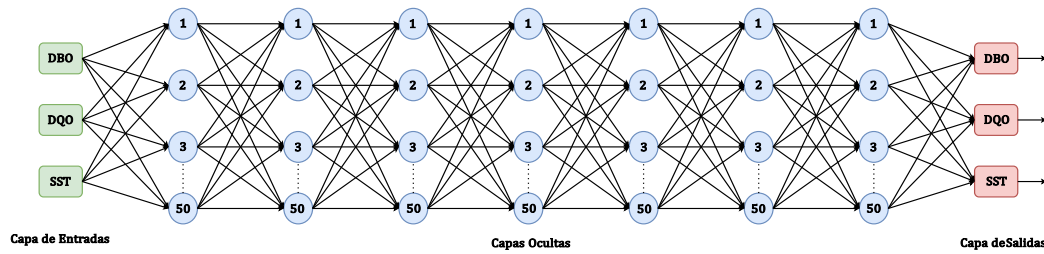


Fig. 5.3.1. Estructura de la red neuronal artificial profunda.

5.3.1. COMPARACIÓN DE ESCENARIOS

La Fig. 5.3.2 muestra los siete escenarios de la curva de Pareto. Las soluciones óptimas globales de cada escenario de esta curva presentan la relación entre el consumo de agua dulce ($F_{i,t}^{AGUAD}$), eje de abscisas, y el CAT, eje de ordenadas. Los escenarios A, B, C, D, E, F y G presentan un consumo de agua dulce de 3579.59, 4000, 4500, 5000, 5500, 6000 y 6269.68 m^3 /semana, y un CAT de \$1,077,062.63, \$1,088,717.81, \$1,103,684.78, \$1,119,443.38, \$1,135,503.13, \$1,147,416.29 y \$1,149,857.96, respectivamente. El escenario A minimiza el consumo de agua dulce y el CAT, mientras que, el escenario G lo maximiza. El escenario D muestra un equilibrio entre las funciones objetivo. Los escenarios B, C, D, E, F y G tienen un consumo de agua dulce 11.74, 25.71, 39.68, 53.65, 67.62 y 75.15% mayor, así como un TAC 1.08, 2.47, 3.93, 5.43, 6.53 y 6.76% mayor respecto al escenario A.

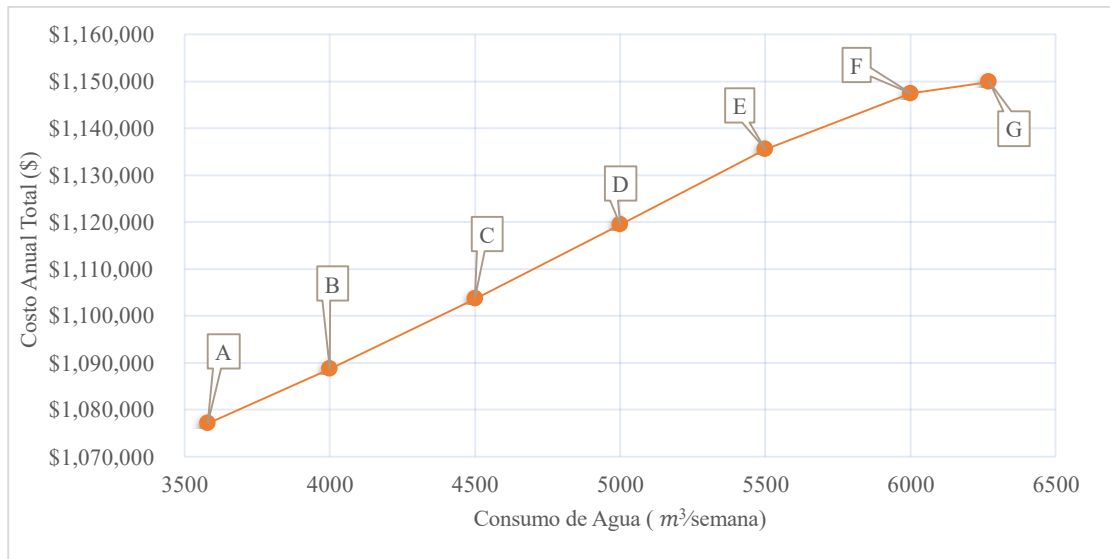


Fig. 5.3.2. Curva de Pareto de los 7 escenarios

La **Fig. 5.3.3** muestra el consumo de agua dulce durante un período de una semana, mostrando los flujos diarios para cada escenario. El escenario A muestra un consumo de agua dulce de menos de 529,94 m³ y más de 490,43 m³. El escenario G, el escenario con el mayor consumo de agua, muestra un consumo de agua dulce de menos de 918,48 m³ y más de 868,18 m³. Los escenarios restantes, B, C, D, E y F, respectivamente, tienen un consumo menor de menos de 587,06, 694,42, 742,85, 800,64 y 877,91 m³ y un consumo menor de menos de 541.69, 595.61, 670.93, 750.44 y 825.37 m³.

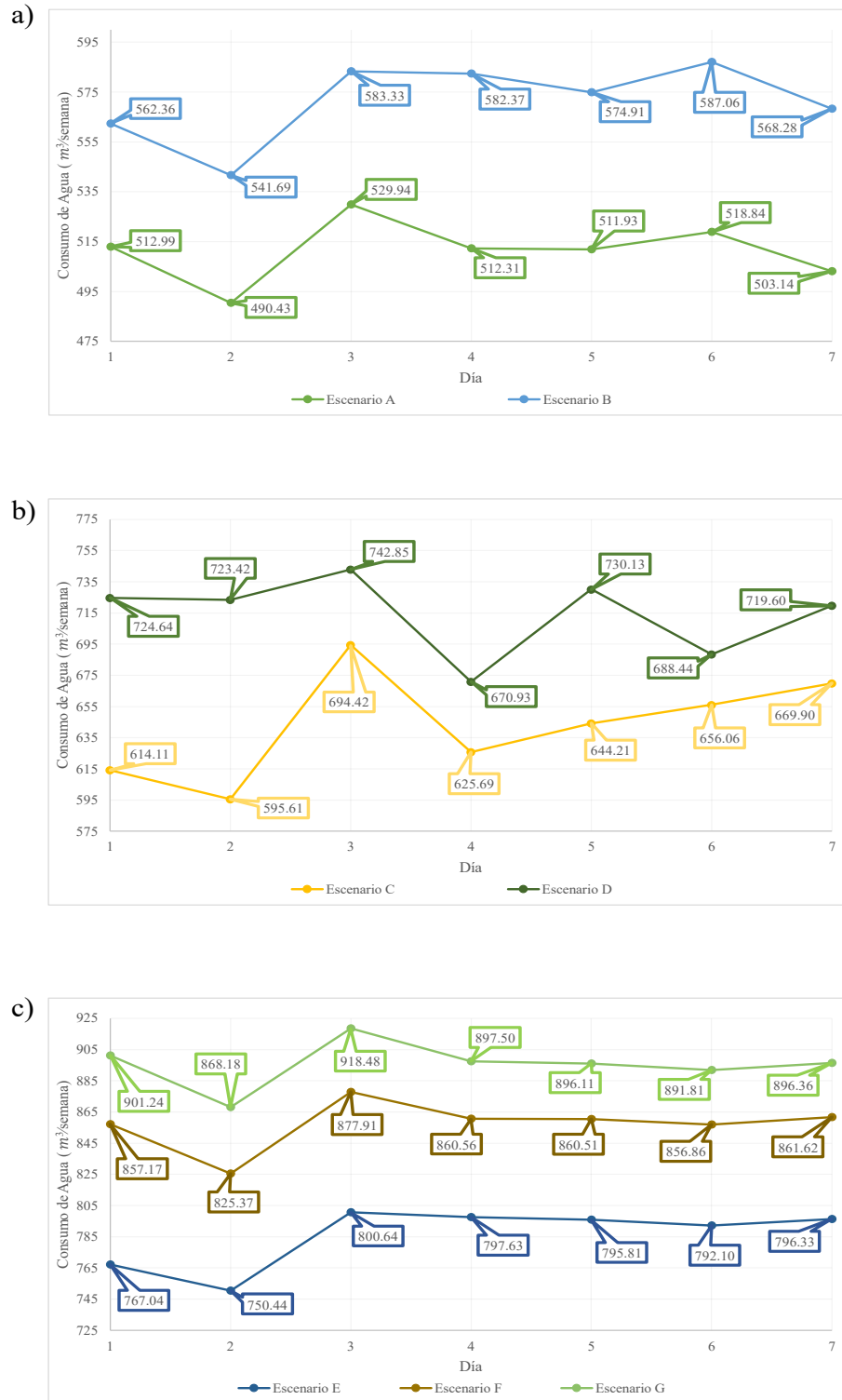


Fig. 5.3.3. Consumo de agua dulce en un periodo de una semana para cada escenario ($F_{t,t}^{AGUAD}$). a) Escenarios A y B. b) Escenarios C y D. c) Escenarios E, F y G.

La **Fig. 5.3.4** muestra los flujos de recirculación de los tanques de almacenamiento para usos domésticos. Los escenarios A, C y D presentan una alta variación en el suministro de agua para usos domésticos en comparación con los escenarios B, E, F y G, con una variación de 168.14, 186.61 y 161.43 m³ para el primero y de 36, 35.19 y 9.60 m³ para el segundo, respectivamente. El flujo de recirculación de la PTAR para usos domésticos muestra un comportamiento inverso al de los tanques de almacenamiento en la mayoría de los escenarios; es decir, si el flujo de los tanques de almacenamiento aumenta para los usos domésticos, el flujo de la planta de tratamiento disminuye, y si el flujo de la planta de tratamiento aumenta para usos domésticos, el de los tanques disminuye.

Esto es cierto si el escenario fuera instalar tanques de almacenamiento o si hubiera recirculación de la PTAR para los usos domésticos como se muestra en los escenarios A, B, C, D, E y F. En el escenario G, esta afirmación no tiene valor debido a que los resultados muestran una red de distribución de agua directa. La información anterior se puede encontrar en las **Figs. 5.3.4, 5.3.5 y 5.3.6**. Con respecto al efluente ambiental, estos son directamente proporcionales a los flujos semanales de agua dulce consumida e inversamente proporcionales a los flujos de salida de los tanques de almacenamiento y la PTAR. El efluente ambiental (**Fig. 5.3.5**) para los escenarios A, B, C, D, E, F y G son 2393.30, 2791.91, 3239.50, 3732.91, 4266.41, 4772.72 y 5094.29 m³/semana. Para el flujo de salida del tanque (**Fig. 5.3.4**) es 2154.46, 1924.05, 1438.21, 1024.42, 652.07 y 199.790 m³/semana.

Los flujos de salida de la PTAR para uso doméstico (**Fig. 5.3.6**) son 535.63, 345.63, 331.47, 245.26, 117.60 y 69.890 m³/semana. Por lo tanto, si se minimiza el consumo de agua dulce, se maximizará el flujo de salida de los tanques de almacenamiento y de la PTAR, minimizando así el flujo de salida al medio ambiente. Por otro lado, si se maximiza el consumo de agua dulce, se minimizará el flujo de salida de los tanques de almacenamiento desde la PTAR, maximizando así el flujo de salida al medio ambiente.

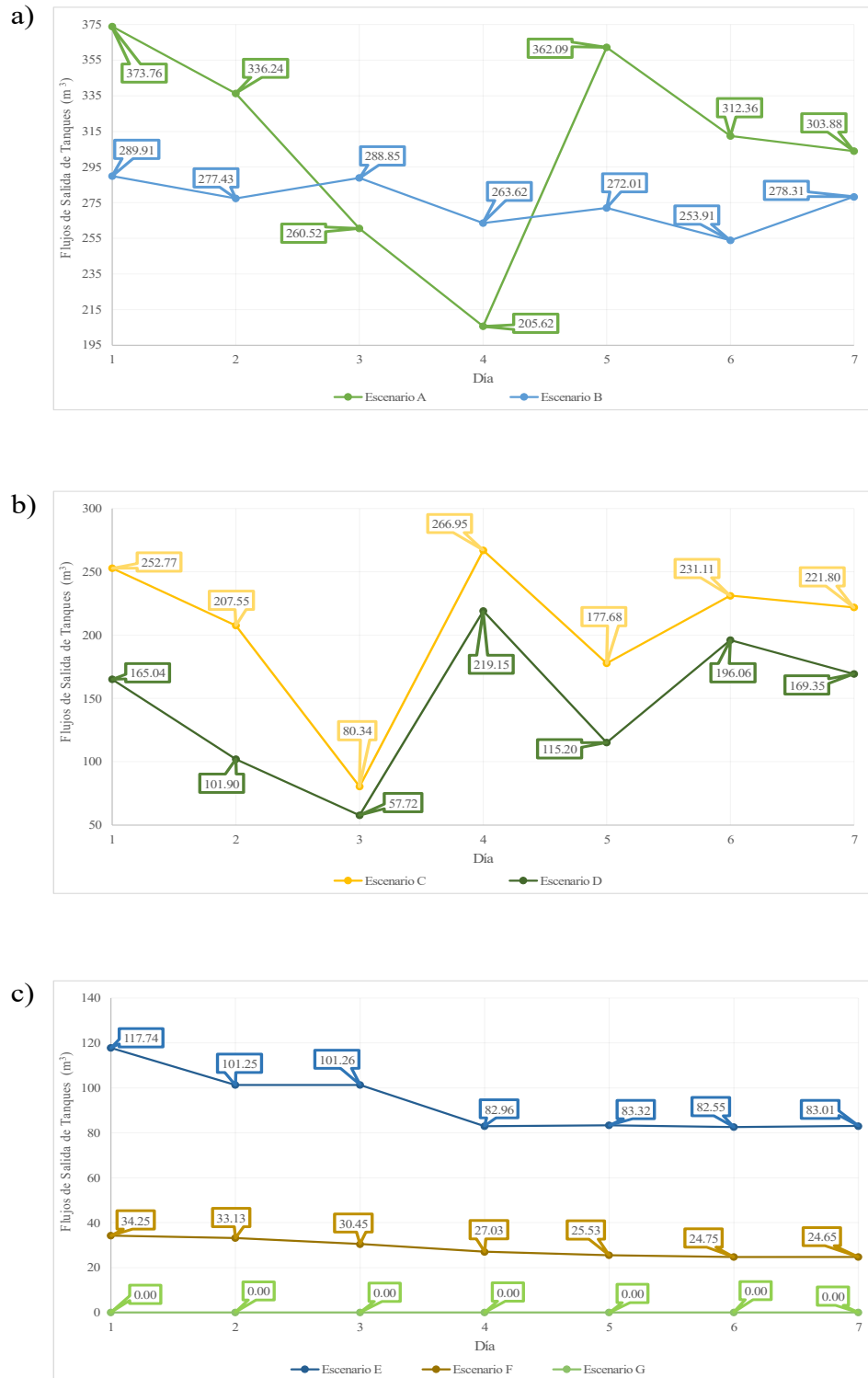


Fig. 5.3.4. Flujo de agua desde tanques de almacenamiento a edificios residenciales en un período de una semana para cada escenario ($F_{n,j,k,t}^{TANQ}$). a) Escenarios A y B. b) Escenarios C y D. c) Escenarios E, F y G.

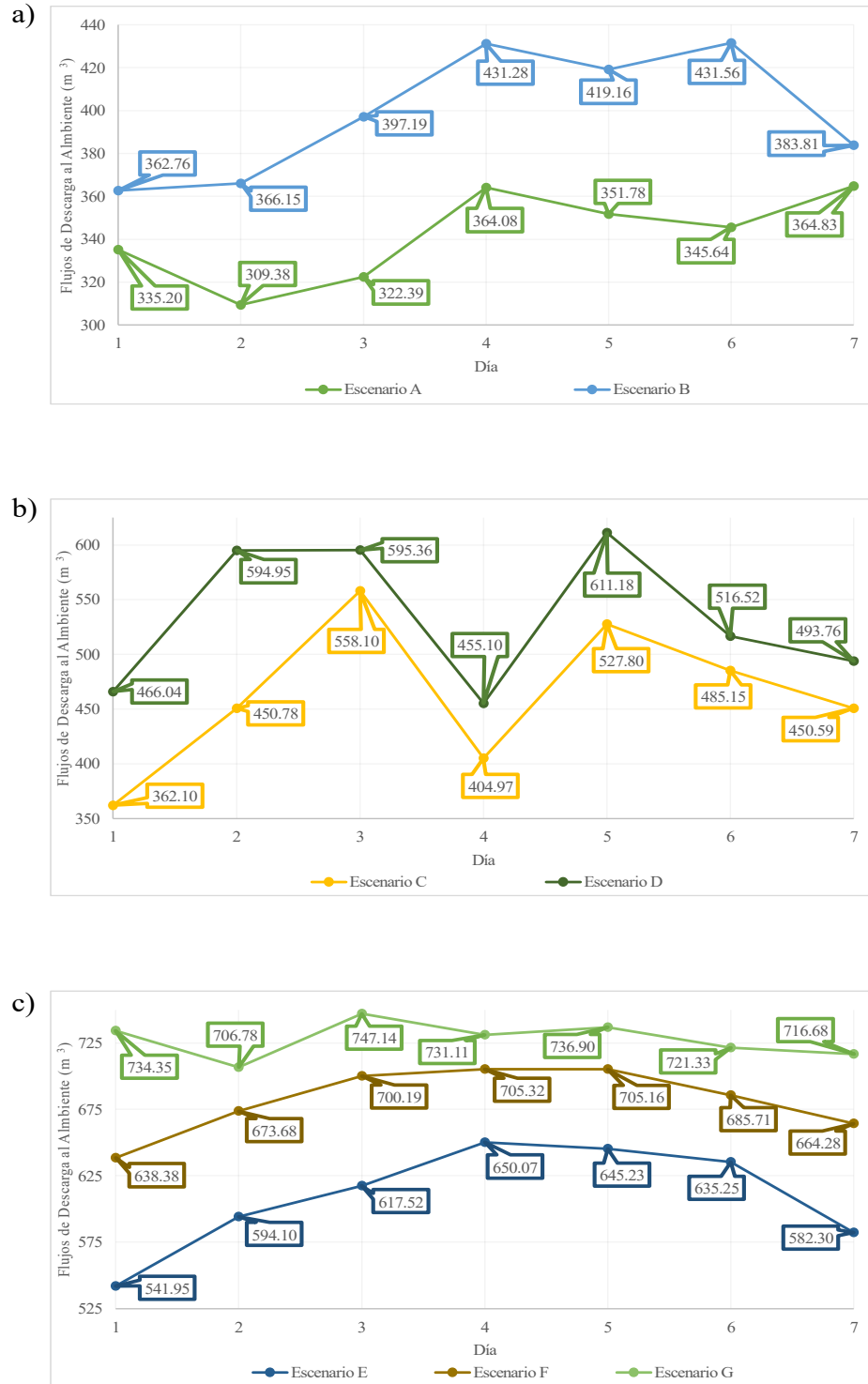


Fig. 5.3.5. Flujos de agua desde la planta de tratamiento al medio ambiente en un período de una semana para cada escenario ($F_{l,m,t}^{AMB}$). a) Escenarios A y B. b) Escenarios C y D. c) Escenarios E, F y G.

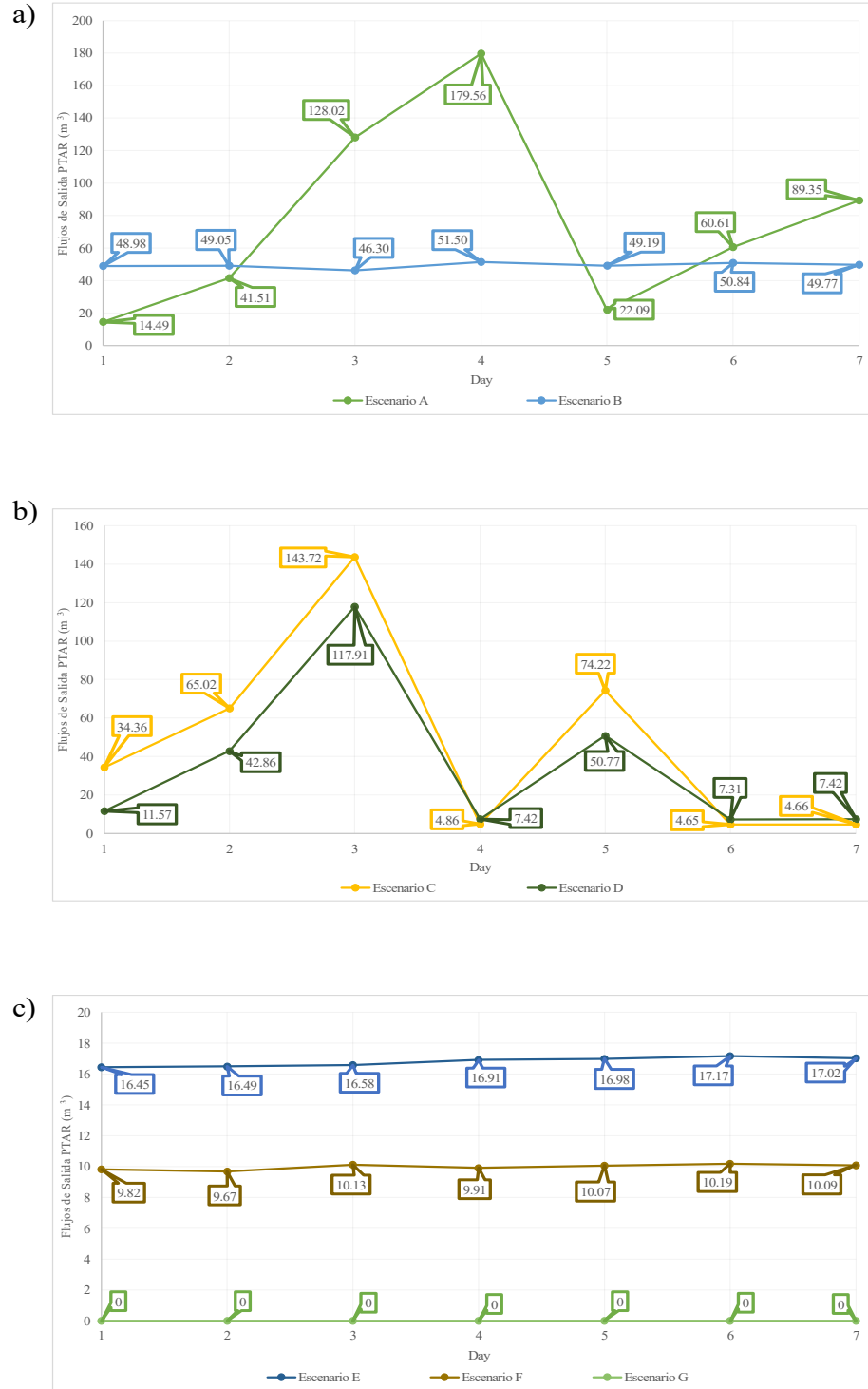


Fig. 5.3.6. Flujos de agua desde la planta de tratamiento hacia usos domésticos en un periodo de una semana para cada escenario ($F_{l,j,k,t}^{PTAR,rectr}$). a) Escenarios A y B. b) Escenarios C y D. c) Escenarios E, F y G.

La **Tabla 5.3.1** muestra los valores anualizados de los costos involucrados en cada escenario. El CAT para agua dulce y bombeo para los escenarios B, C, D, E, F y G es mayor en 11.74, 25.71, 39.68, 53.65, 67.62 y 75.15% para el escenario A, respectivamente. Mientras que el costo anualizado de bombeo de tanques para uso doméstico para los escenarios A, B, C, D y E es 10.78, 9.63, 7.20, 5.13 y 3.26 veces mayor. El CAT para bombear flujos de recirculación es 7.66, 4.95, 4.74, 3.51 y 1.68 veces mayor que el escenario F, respectivamente para cada escenario. Los costos anualizados de capital de tanques y de capital de tuberías para flujos de tanques para usos domésticos difieren en 71.65, 2.53, 18.18, 49.38 y 7.93 dólares; y, 179.68, 392.51, 92.94, 95.34 y 244.05 dólares con respecto al escenario F, con respecto a los escenarios A, B, C, D y E.

Los costos de capital anualizados de tuberías para los flujos de recirculación de la PTAR a usos domésticos y el capital de bombeo para el flujo de recirculación de la PTAR a usos domésticos de los escenarios A, B, D, E y F tienen una diferencia de 20.33, 55.71, 0.51, 27.25 y 18.13 dólares; y, 430.15, 64.99, 0.60, 31.80 y 21.15 dólares con respecto al escenario C, respectivamente. En relación con el costo de capital anualizado de bombas para flujos de tanque para usos domésticos, el escenario F tiene el costo más bajo con \$3482.44, mientras que el escenario A tiene el costo más alto con \$8569.22. Los escenarios C y D tienen una diferencia de \$2.81, mientras que los escenarios B y E tienen una diferencia de \$173.2 que es el costo de capital de bombas para flujos de tanque a usos domésticos.

Los costos anualizados de operación y capital de la PTAR y el capital de bombeo y tubería para la salida de los flujos de uso doméstico son de 919,707.78, 680 y 1,023.04 dólares para todos los escenarios, dado que la demanda total para usos domésticos en cada escenario es la misma. En el escenario G, los costos anualizados relacionados con la recirculación de los flujos para usos domésticos son cero, dado que se trata de una red de distribución directa.

Tabla 5.3.1. Costos anualizados para cada escenario.

Costo	Escenario						
	A	B	C	D	E	F	G
Agua Fresca	121,882.38	136,197.14	153,221.79	170,246.43	187,271.07	204,295.71	213,477.99
Bombeo de Agua Fresca	2,837.08	3,170.29	3,566.57	3,962.86	4,359.14	4,755.43	4,969.17
Operación de Planta de Tratamiento	929,707.78	929,707.78	929,707.78	929,707.78	929,707.78	929,707.78	929,707.78
Bombeo de Tanques a Usos Domésticos	7,324.56	6,541.22	4,889.50	3,482.72	2,216.87	679.22	0.00

Bombeo recirculación	1,820.98	1,175.03	1,126.90	833.81	399.81	237.60	0.00
Capital de Tanques	1,049.84	980.72	996.38	1027.57	986.12	978.19	0.00
Capital PTAR	680.00	680.00	680.00	680.00	680.00	680.00	680.00
Capital de Tubería Usos Domésticos	1,023.04	1,023.04	1,023.04	1,023.04	1,023.04	1,023.04	1,023.04
Capital de Tubería de Tanques a UD	377.68	590.51	290.94	293.35	442.05	198.00	0.00
Capital de Tubería de recirculación a UD	8,569.22	7,191.80	6,842.30	6,845.11	7,018.60	3,482.44	0.00
Capital de Bombeo de Tanques a UD	75.86	111.24	55.53	56.04	82.79	73.66	0.00
Capital Bombeo de Recirculación a UD	1,714.22	1,349.07	1,284.07	1,284.67	1,315.87	1,305.23	0.00

5.3.2. ESCENARIO A

La **Fig. 5.3.7** muestra la solución del Escenario A para minimizar los flujos de agua dulce ($F_{i,t}^{AGUAD}$). El CAT para este escenario es igual a \$1,077,062.63, mientras que, los flujos de agua dulce ($F_{i,j,k,t}^{AD,EDIF}$) son 3579.59 m³/semana. Estos flujos posteriores sólo se aplican para usos domésticos de Ducha, lavavajillas y lavandería, con flujos de 894.75, 742.91 y 217.06 m³/semana; y 812.78, 682.42 y 229.66 m³/semana para el primer y segundo edificio, respectivamente. En la entrada a los edificios residenciales ($F_{j,k,t}^{EDIF,ent}$), los flujos para el primer edificio son 1,051.35, 894.75, 742.91, 217.06 y 324.98 m³/semana. Los flujos para el segundo edificio son 1,010.17, 812.78, 682.42, 229.66 y 303.59 m³/semana para usos domésticos de sanitario, ducha, lavavajillas, lavandería y jardinería, respectivamente.

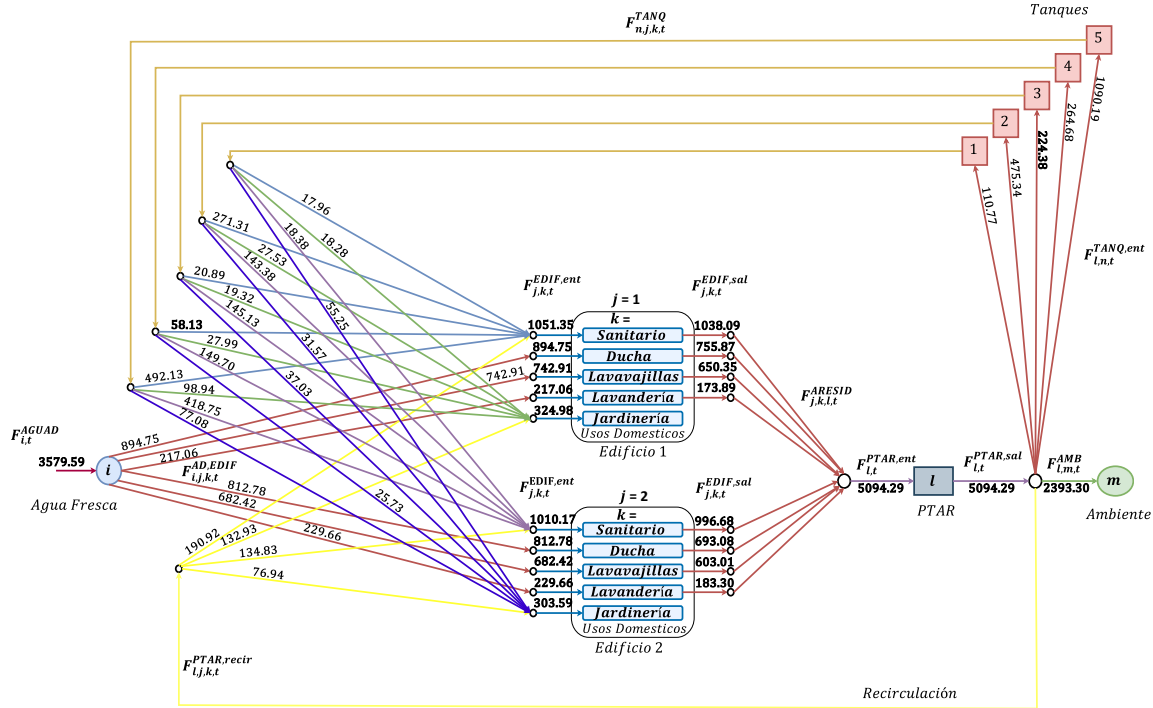


Fig. 5.3.7. Solución del Escenario A (m³/semana).

En la **Fig. 5.3.8**, las propiedades DBO (**Fig. 5.3.8a**), DQO (**Fig. 5.3.8b**) y SST (**Fig. 5.3.8c**) se muestran de acuerdo con las reglas de mezcla en un período semanal en la entrada de edificios residenciales ($P_{j,k,x,t}^{EDIF,ent}$). Los valores mostrados en la **Fig. 5.3.8** cumplen con los límites permisibles de 75, 72 y 36 $\times 10^3$ (mg/m³) para propiedades de DBO, DQO y SST, respectivamente, para los usos domésticos de sanitario y jardinería. La **Fig. 5.3.7** muestra el flujo de salida de los edificios residenciales a la planta de tratamiento de aguas residuales funcionando a 5094,29 m³/semana.

La **Fig. 5.3.9** muestra las propiedades en la entrada (sin tratar) y salida (tratada) de la planta de tratamiento. Las propiedades a la entrada de la planta de tratamiento varían en un intervalo de 67.28, 160.31 y 36.48 $\times 10^3$ (mg/m³) (**Fig. 5.3.9a**). Sin embargo, la variación de las propiedades de salida de la planta son 7.81, 9.5 y 17.12 $\times 10^3$ (mg/m³) para las propiedades DBO, DQO y SST, respectivamente (**Fig. 5.3.9b**). Las propiedades de salida de la PTAR también se mantienen dentro de los límites permisibles según las normas de la SEMARNAT (2003, 2022). Además, se observa la capacidad de la RNAP que modela la PTAR para predecir las propiedades de salida a lo largo de diferentes periodos de tiempo.

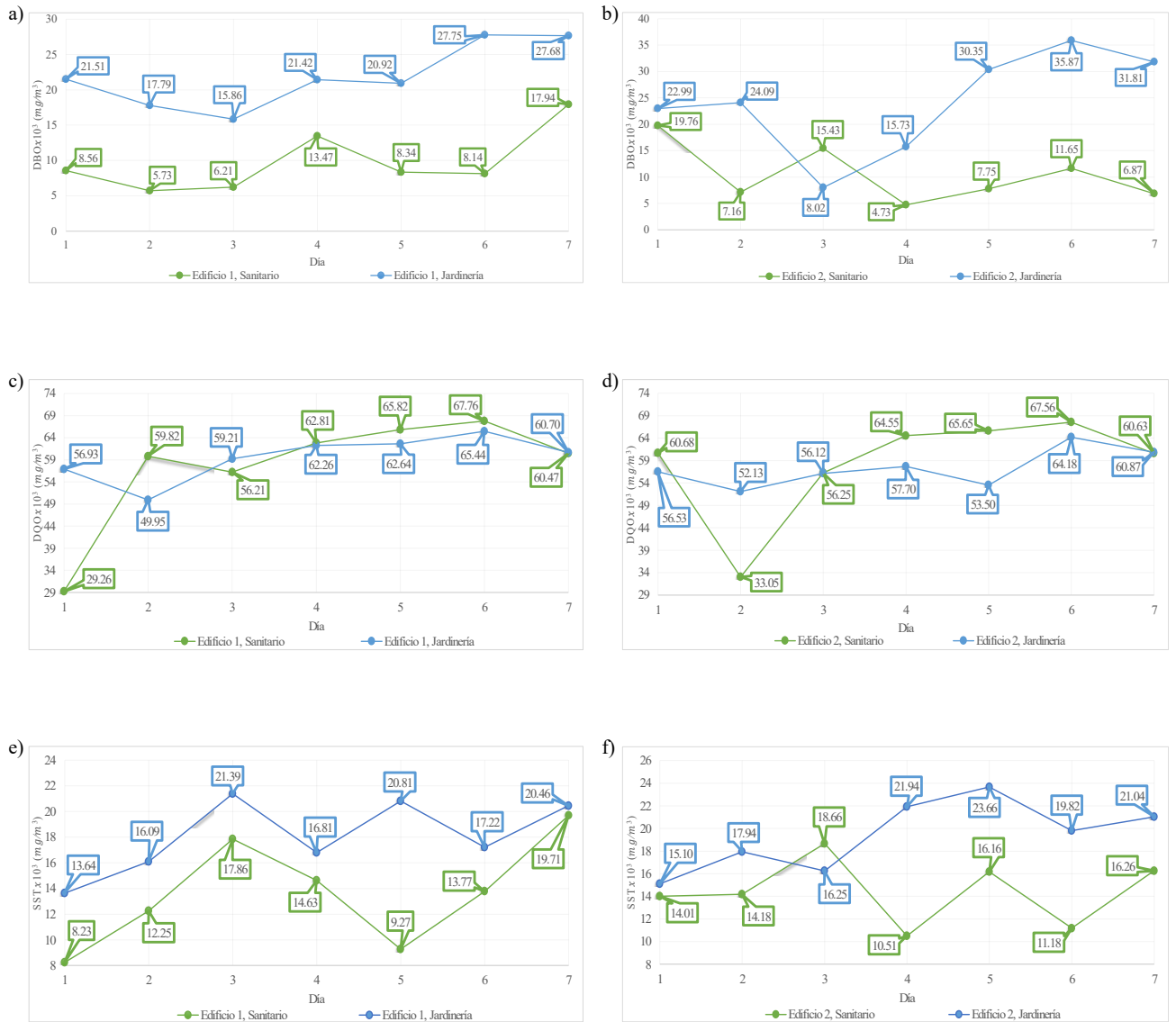


Fig. 5.3.8. Propiedades en la entrada de edificios residenciales ($P_{j,k,x,t}^{EDIF,sal}$) en el periodo de una semana. a) Propiedad DBO, Edificio 1. b) Propiedad DBO, Edificio 2. c) Propiedad COD, Edificio 1. d) Propiedad COD, Edificio 2. e) Propiedad SST, Edificio 1. f) Propiedad SST, Edificio 2.

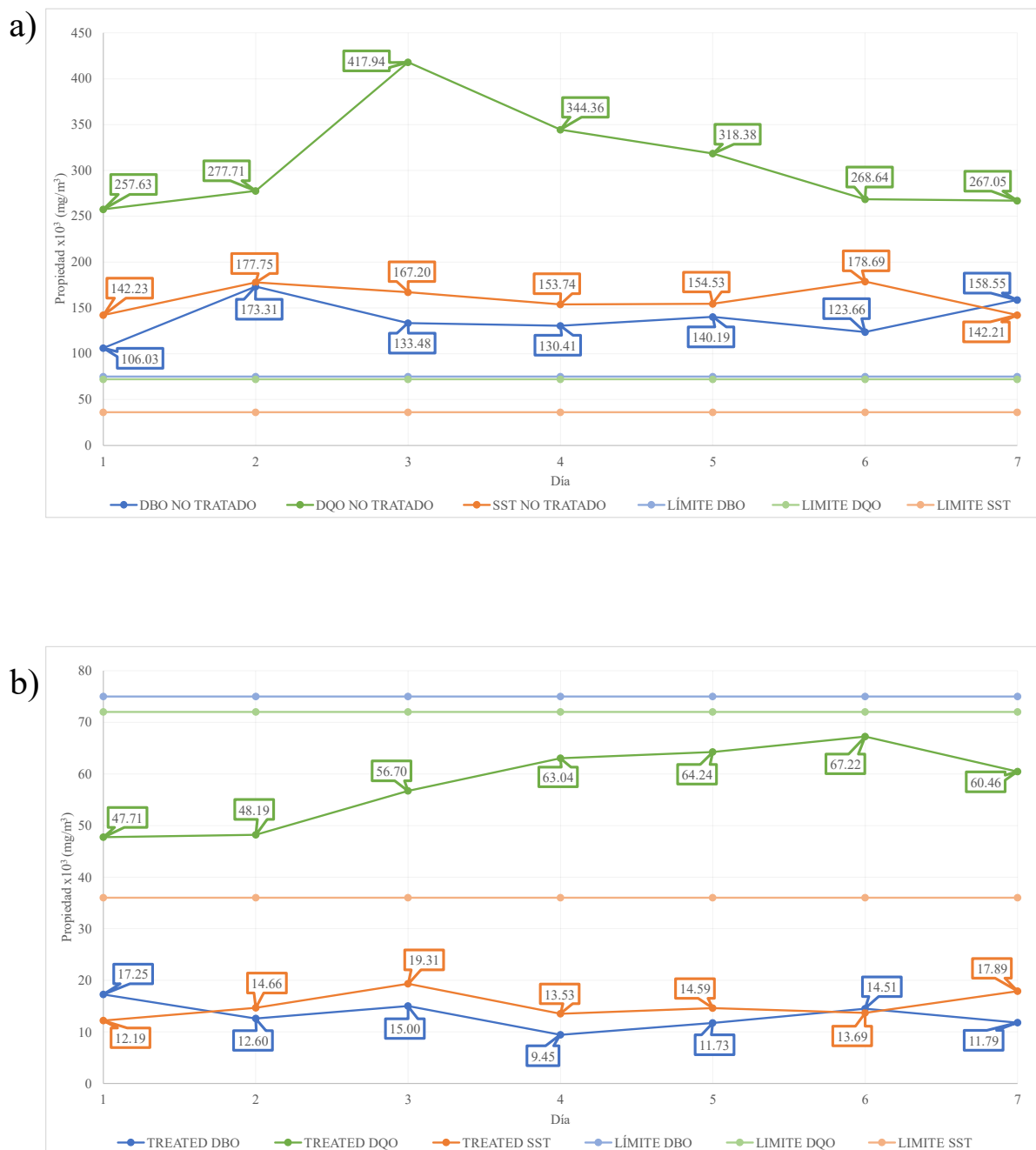


Fig. 5.3.9. Propiedades a la entrada y salida de la planta depuradora en un plazo de una semana. a) Propiedades a la entrada de la planta de tratamiento de aguas residuales. b) Propiedades a la salida de la planta depuradora de aguas residuales.

En la **Fig. 5.3.7**, la PTAR envía flujos al ambiente y a los tanques con recirculación a los edificios residenciales con flujos de 2,393.30, 2,165.36 y 535.63 m³/semana, respectivamente. Las capacidades de los tanques son 24.14, 24.26, 24.19, 24.03 y 24.29 m³ para la instalación de 5 tanques para este escenario. Los flujos de salida de los tanques a los edificios residenciales son 36.24 y 73.63 m³/semana para el primer tanque, 298.84 y 174.95 m³/semana para el segundo tanque, 40.21 y 182.15 m³/semana para el tercer tanque, 86.12 y 175.43 m³/semana para el cuarto tanque y 591.07 y 495.83 m³/semana para el quinto tanque. Esto es para el primer y segundo edificio residencial, respectivamente. Los costos anualizados de agua dulce y Operación de la Planta de Tratamiento representan el 11.32% y el 86.32%, respectivamente. Mientras que los costos restantes representan el 2.36% del CAT.

5.3.3. ESCENARIO G

En este escenario, se maximiza el CAT. La **Fig. 5.3.10** muestra la solución de este séptimo escenario. El consumo de agua dulce es de 6269.68 m³/semana y el CAT es de 1,149,857.96 dólares. Las entradas a edificios residenciales ($F_{j,k,t}^{EDIF,ent}$) son 105.35, 894.75, 742.91, 217.06 y 324.98 m³/semana. Y, 1,010.17, 812.78, 682.42, 229.66 y 303.59 m³/semana para el primer y segundo edificio, y para los usos domésticos de sanitario, ducha, lavandería, lavavajillas y jardinería, respectivamente. Mientras que, el flujo de salida ($F_{j,k,t}^{EDIF,sal}$) es de 1,038.09, 755.87, 650.35 y 173.89 m³/semana para el primer edificio y de 996.68, 693.08, 603.01 y 183.30 m³/semana para el segundo edificio correspondiente al doméstico. usos de sanitario, ducha, lavandería y lavavajillas, respectivamente. Los efluentes de usos domésticos llegan a la PTAR con un flujo de 5,094.29 m³/semana. Los efluentes de la depuradora se envían al medio ambiente. No se realiza recirculación para usos domésticos ni se instalan tanques de almacenamiento.

Respecto a los costos anualizados; el costo del agua dulce representa el 18.57%; costo de bombeo de agua dulce, 0.43%; costo de operación de la PTAR, 80.85%; costo de capital de la PTAR, 0.06%; el costo de capital de las tuberías para salidas de usos domésticos, 0.09%; del CAT. Los costos restantes no aplican porque no existe instalación de tanques de almacenamiento y recirculación para usos domésticos.

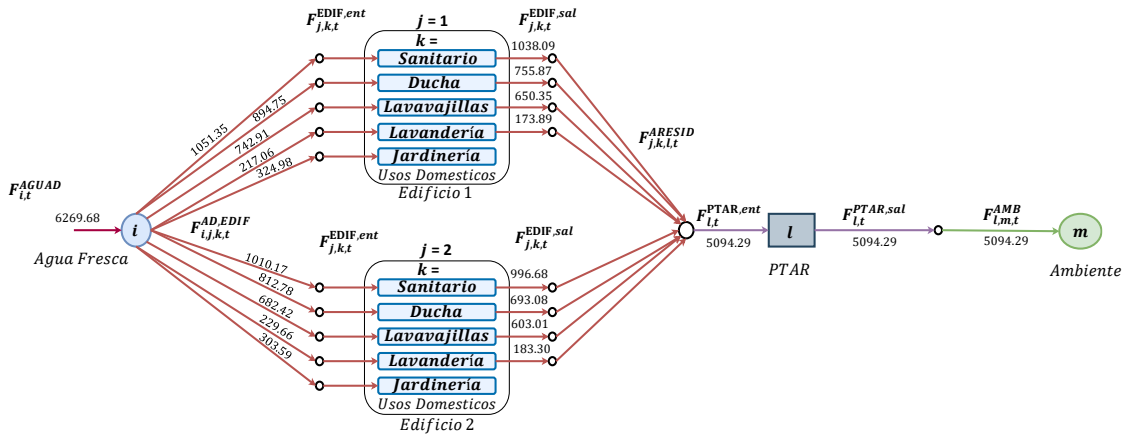


Fig. 5.3.10. Solución del Escenario G (m³/semana).

5.4. RESULTADOS APRENDIZAJE POR REFUERZO

El modelo matemático es un problema de programación no lineal (NLP). Este problema se codificó en el software de Python, versión 3.12.4 (Python Software Foundation, 2024) utilizando la librería de Pyomo, versión 6.9.2 (Michael L. et al., 2021) consta de 3372 variables, de las cuales 3372 son continuas y 2785 son restricciones. El modelo matemático se resolvió utilizando el solucionador SCIP, versión 10.0.0 (Hojny et al., 2025), con un procesador Intel® Core™ i7-11800H de 11^{va} generación a 2,30 GHz, 20 GB de RAM y un tiempo de cómputo de entre 60 y 300 segundos, dependiendo del escenario.

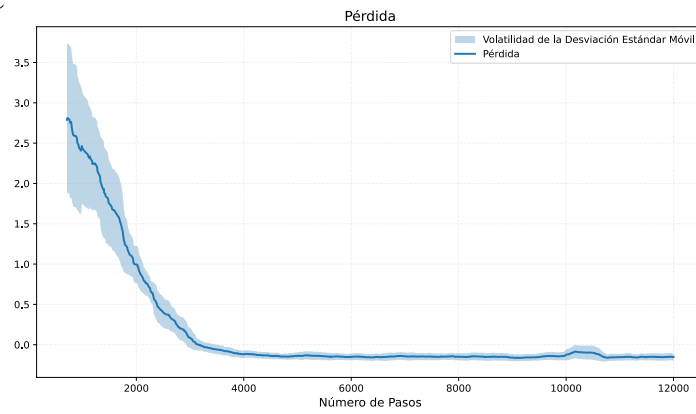
La RNAP tiene una estructura de 3 entradas, 7 capas ocultas, 50 neuronas en cada capa y 3 salidas. Las capas ocultas y de salida implementan la función de activación Leaky ReLU (Maas et al., 2013), con un valor de α igual a 1×10^{-3} . La función de pérdida utilizada para el entrenamiento y la validación del modelo de red neuronal artificial fue el error cuadrático medio (MSE), con un resultado de 1.3104 y 0.4234, respectivamente. La tasa de aprendizaje de la red neuronal implementada fue de 5×10^{-4} y el número de épocas fue de 62. El coeficiente de correlación de Pearson (Pearson, 1895) como porcentaje es igual al 98.6577, 99.6364 y 98.2514 % para las propiedades de DBO, DQO y SST, respectivamente, para el conjunto de prueba. El tiempo de cómputo de la RNAP fue de 4757 segundos con un procesador Intel® Core™ i7-11800H de 11^{va} generación a 2,30 GHz con 20 GB de RAM y gráficos Intel® UHD a 350 MHz, y un procesador gráfico NVIDIA GeForce GTX 1650 a 1125 MHz con 4 GB de memoria VRAM. Para el entrenamiento de la RNAP se utilizó la librería de Tensorflow, versión 2.18.0 (Abadi et al., 2016).

El entrenamiento del agente inteligente se realizó a través de las librerías de gymnasium, versión 1.1.1 (Towers et al., 2025) y stable_baselines3, versión 2.6.0 (Raffin et al., 2021), la primera librería se realizó la interacción del entorno con el agente, mientras que, la segunda librería se utilizó para el entrenamiento del agente. Las redes neuronales del actor y el crítico tienen una estructura de 3 capas ocultas con 128 neuronas en cada capa. Para el entrenamiento se implementó el algoritmo de PPO (Schulman et al., 2017) con las siguientes características, un rango de recorte de 0.3, una semilla de 396, una tasa de aprendizaje de 1×10^{-4} , un número de paso de 3 y un número de episodios de 4000. Las métricas resultantes del entrenamiento fueron para Divergencia Kullback-Leibler Aproximada, 0.036347687; Fracción de recorte, 0.0333; Pérdida de entropía, -9.6; Varianza explicada, 0.00184; Pérdida, -0.198; Pérdida de gradiente de política, -0.0878; Desviación estándar, 0.806; y, Pérdida de Valor, 7.07×10^{-6} . El tiempo de cómputo del agente fue de 11,766 minutos con un procesador Intel® Xeon® Gold 6230 a 2.10 GHz con 256 GB de RAM.

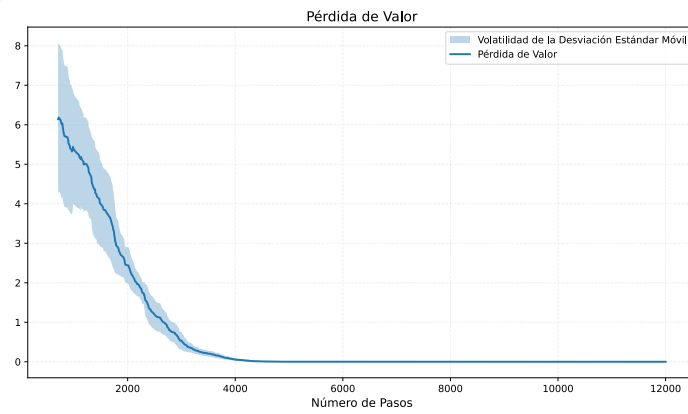
5.4.1. AGENTE ACTOR-CRITICO

En la **Fig. 5.4.1** se presentan las métricas de Pérdida, Pérdida de valor y Recompensa del agente inteligente en el entrenamiento. En la **Fig. 5.4.1a** se muestra la Pérdida del entrenamiento del agente inteligente, se debe considerar que esta es el resultado de la sumatoria de la pérdida de política, pérdida de valor y pérdida de entropía. Se observa que el rango de esta métrica está entre 2.8 a -0.198, la volatilidad móvil se estabiliza en el número de paso 4000, también, se presenta que, a partir del paso 5000 hasta la conclusión del entrenamiento la pérdida se mantiene en un rango estable menor a 0. En la **Fig. 5.4.1a** se presenta la pérdida de valor en el entrenamiento del agente, esta métrica presenta el error cuadrático medio entre la predicción de la red neuronal del crítico y el valor real obtenido del entorno, por medio del estado. En comparación con la métrica de pérdida, se puede observar que tiene un comportamiento similar en el transcurso del entrenamiento, se presenta una alta volatilidad móvil entre los pasos 4000 y 4500, el comportamiento de la pérdida de valor se estabiliza al inicio del paso 5000 y el rango se encuentra en 6.3 a 7.07×10^{-6} . En la **Fig. 5.4.1a** se observa la recompensa obtenida por el agente inteligente en el trayecto del entrenamiento. Se puede notar que, debido al recorte entre los rangos de acción del agente inteligente, este no obtiene recompensas menores o iguales a cero. En los pasos menores a 5000, el agente inteligente presenta una alta exploración en cuanto a la toma de decisión en las variables de acción, esto se puede observar con la variación de la recompensa en los primeros pasos del entrenamiento y posteriormente se observa una estabilidad en la obtención de la recompensa por el agente inteligente, esta es de 1.6690.

a)



b)



c)

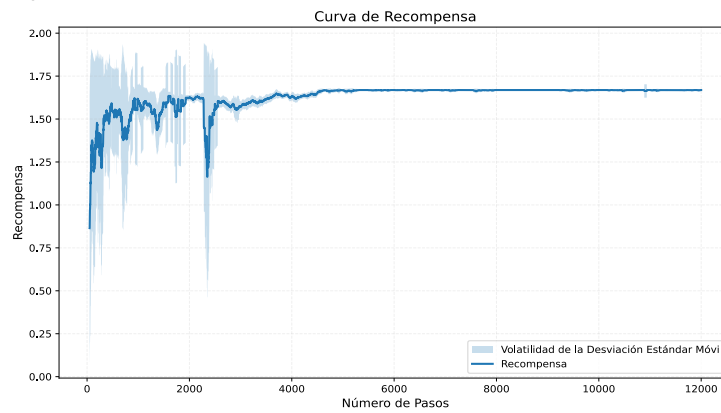


Fig. 5.4.1. Métricas de Pérdida, Pérdida de valor y Recompensa del agente inteligente en el entrenamiento

5.4.2. COMPARACIÓN ENTRE ACTOR-CRÍTICO Y OPTIMIZACIÓN GENERAL

La **Fig. 5.4.2** muestra el consumo de agua dulce durante un período de una semana, mostrando los flujos diarios para cada escenario. El escenario (Actor-Crítico) AC muestra un consumo de agua dulce constante de 440 m^3 en todo el periodo de estudio, se puede observar que es el límite inferior que se utilizó para la toma de la decisión del agente inteligente. En el escenario (Optimización General) OG se muestra un consumo de agua dulce de menos de 423.39 m^3 y más de 392.44 m^3 , este escenario presenta una mayor variación del flujo de agua dulce en cada periodo de tiempo en comparación al escenario AC, debido a que no se tenía un límite inferior definido para las variables objetivo del agente inteligente que, daban la factibilidad de la solución del modelo matemático cuando se estaban encontrando los límites superiores e inferiores de las variables objetivo.

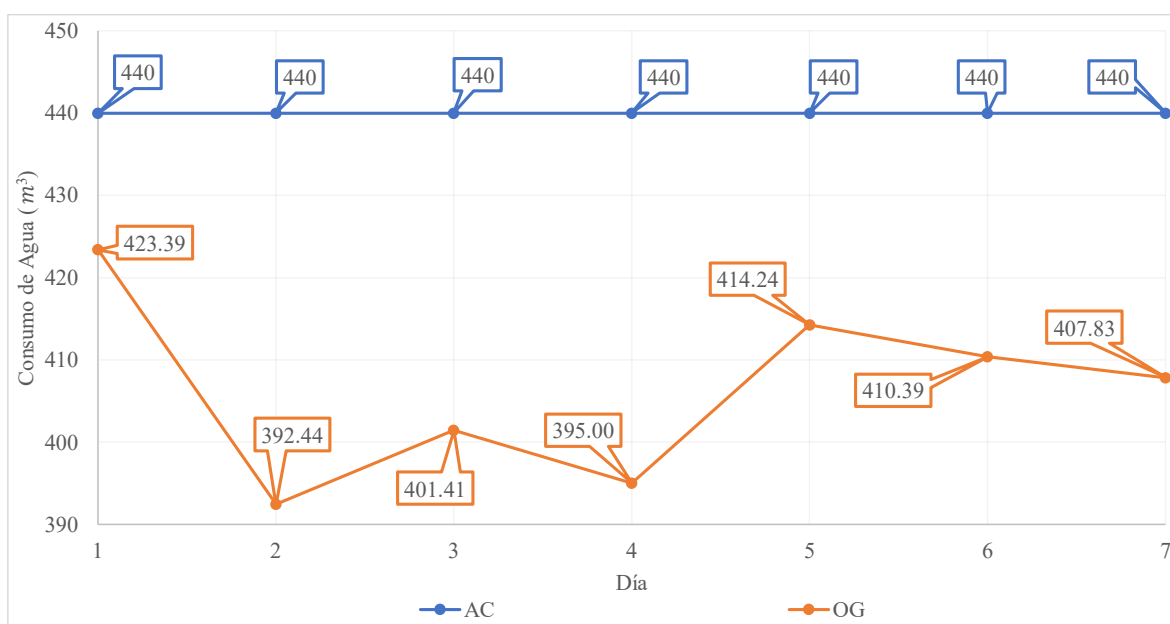


Fig. 5.4.2. Consumo de agua dulce durante un período de una semana, AC vs OG.

La **Fig. 5.4.3** muestra los flujos de recirculación de los tanques de almacenamiento para usos domésticos. El escenario AC presenta un menor suministro de agua residual para usos domésticos en comparación con el escenario OG, con una diferencia de 16.78, 35.77, 45.58, 39.80, 20.35, 23.31 y 28.66 m^3 para cada día de la semana, respectivamente. Se puede observar en ambos escenarios que, en el segundo y sexto día, existe una disminución de flujo de agua residual de los tanques de almacenamiento a los usos domésticos, respecto al día anterior. En el quinto día, se muestra que hay un segundo aumento pico en los flujos de agua residual en comparación al primer día. En tercer y

cuarto día, se presenta un aumento gradual en los flujos de agua residual después de la disminución de flujo del segundo día. Y, en el sexto y séptimo día, se vuelve observar una disminución de flujo de aguas residuales como en el segundo día, sin embargo, esta disminución es más prolongada en comparación a la primera, con dos días de caída en los flujos de agua residual.

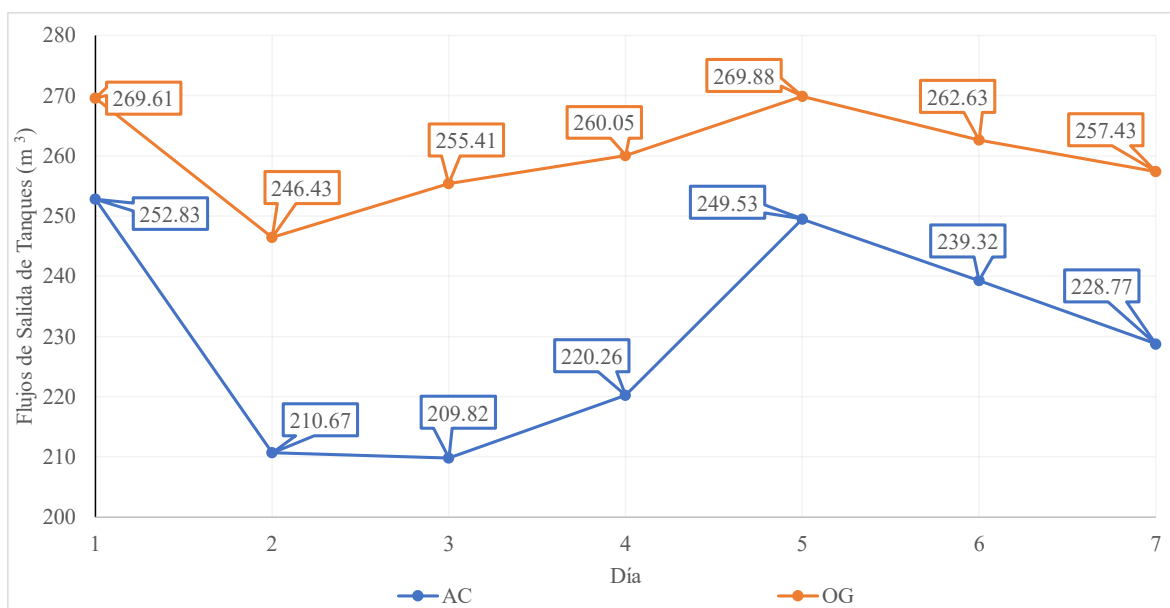


Fig. 5.4.3. Flujos de recirculación de los tanques de almacenamiento para usos domésticos, AC vs OG.

La **Fig. 5.4.4** presentan los flujos de descarga de aguas residuales al ambiente por cada periodo de tiempo. Los escenarios AC y OG muestran el mismo comportamiento para la descarga de aguas residuales en el ambiente. Los flujos de descarga de aguas residuales para todos los periodos de tiempo son 0.00, 320.79, 333.76, 298.53, 308.53, 313.22 y 267.79 m³, y 0.00, 282.23, 287.63, 252.51, 282.15, 288.34 y 231.07 m³ para los escenarios AC y OG, respectivamente. El comportamiento de ambos escenarios se muestra a continuación. Para el primer día, ningún escenario descargo aguas residuales al ambiente. En el segundo y tercer día, se observa un aumento en la descarga de agua residual. En el cuarto y séptimo día, se presenta una disminución el flujo de aguas residuales descargadas, el sexto día, presenta la menor descargar en comparación a casi todos los días con excepción del primer día que no hubo descarga de agua residual al ambiente. En el quinto y sexto día, se presenta una creciente descarga de agua residual después de la primera caída de flujo de agua residual mostrada en el cuarto día.

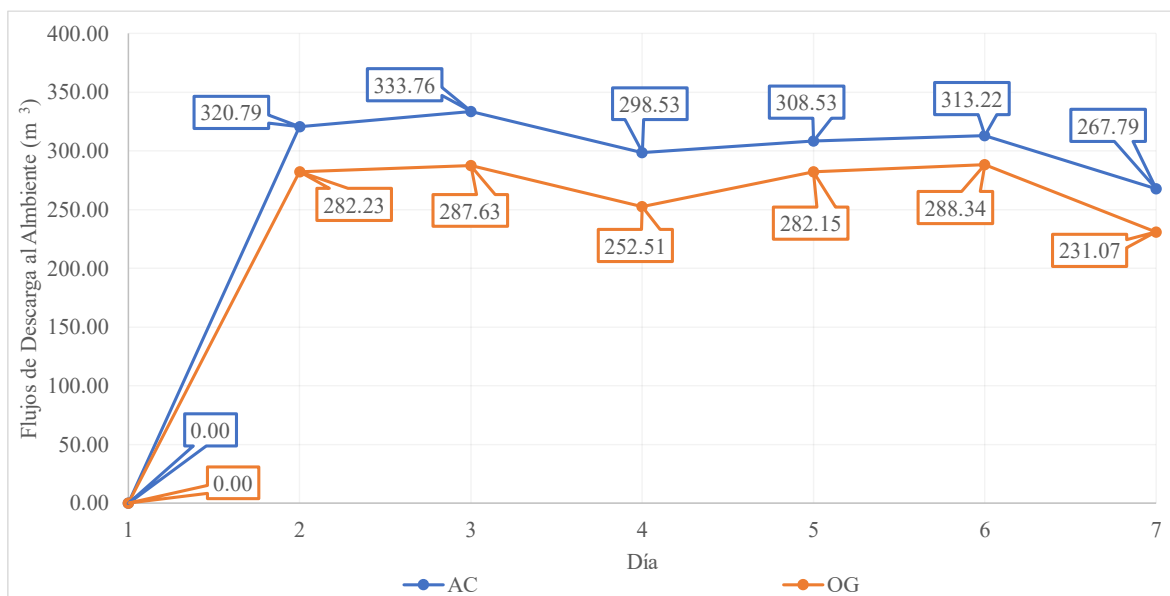


Fig. 5.4.4. Flujos de descarga de aguas residuales al ambiente, AC vs OG.

En la **Fig. 5.4.5** se muestran los flujos de salida de agua residual tratados en la PTAR. La tendencia de los flujos de agua residual en todos los periodos de tiempo es similar para los escenarios AC y OG, excepto para el tercer día, en el caso del escenario AC, el flujo de agua residual aumento, y, para el escenario OG, este flujo disminuye, con respecto al segundo día. Para el primer y segundo día, se presenta un aumento de los flujos de salida de la PTAR, mientras que, en el cuarto día, se muestra una disminución en el flujo de agua residual con comparación al tercer día. En el quinto, sexto y séptimo día, se observa un aumento en los flujos de agua residual de la PTAR, este comportamiento tiende a una función lineal. Las diferencias entre los flujos saliente de agua residual de la PTAR entre los escenarios de AC y OG son 11.7, 5.20, 5.40, 6.29 y 3.50 para el día segundo, cuarto, quinto, sexto y séptimo, respecto el escenario OG de AC, mientras que, para el día primero y tercero, la diferencia es de 0.17 y 7.00, respectivamente, respecto AC de OG.

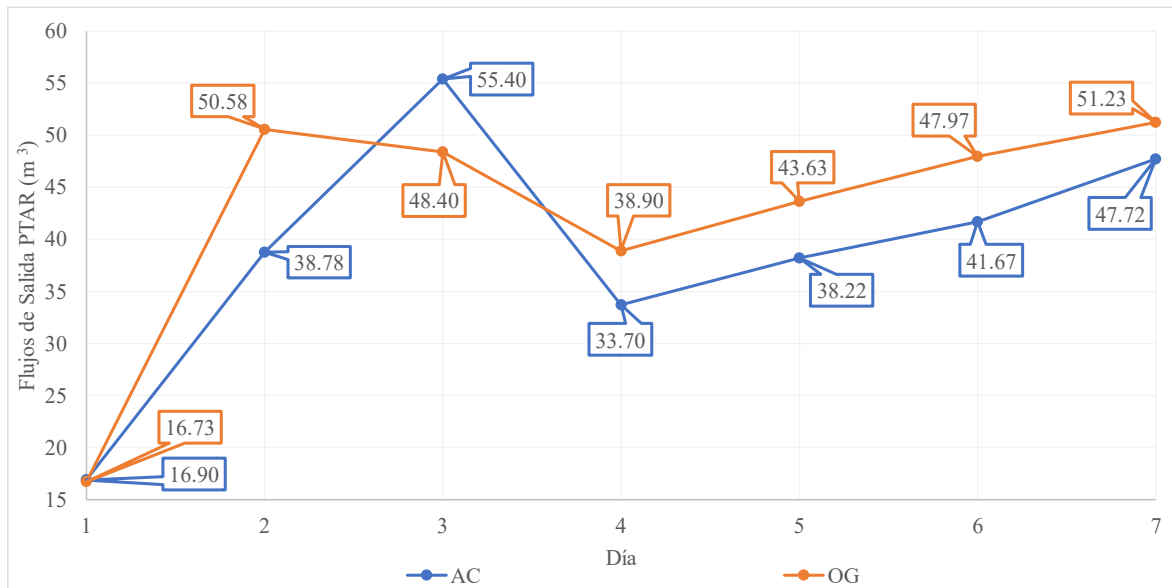


Fig. 5.4.5. Flujos de salida de agua residual tratados en la PTAR, AC vs OG.

En las **Fig. 5.4.6** y **Fig. 5.4.7** se muestran las propiedades DBO, DQO y SST de acuerdo con las reglas de mezcla en un período semanal en la entrada de edificios residenciales ($P_{j,k,x,t}^{EDIF,ent}$). Los valores mostrados en las **Fig. 5.4.6** y **Fig. 5.4.7** cumplen con los límites permisibles de 75, 72 y 36×10^3 (mg/m^3) para propiedades de DBO, DQO y SST, respectivamente, para los usos domésticos de sanitario y jardinería. En las **Fig. 5.4.6** y **Fig. 5.4.7** se puede observar que las propiedades DBO, DQO y SST en todos los periodos de tiempo para el escenario AC, son menores a las propiedades del escenario OG. Este efecto se puede deber al mayor suministro de agua fresca a estos usos domésticos en el escenario AC en comparación al escenario OG, donde el suministro de agua fresca es menor para estos usos domésticos.

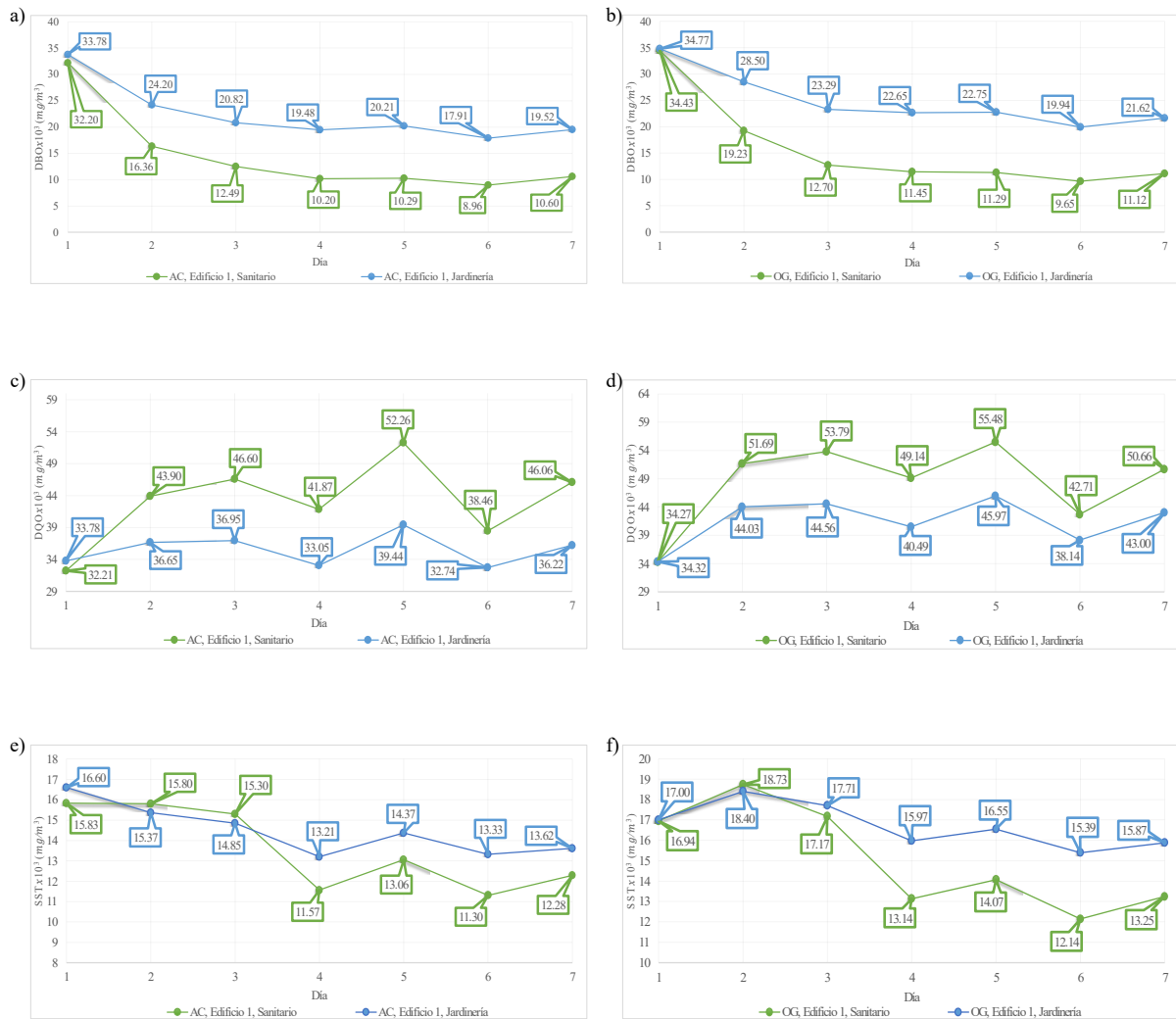


Fig. 5.4.6. Propiedades DBO, DQO y SST para usos domésticos de Sanitario y Jardinería en el Edificio Residencial 1, AC vs OG.

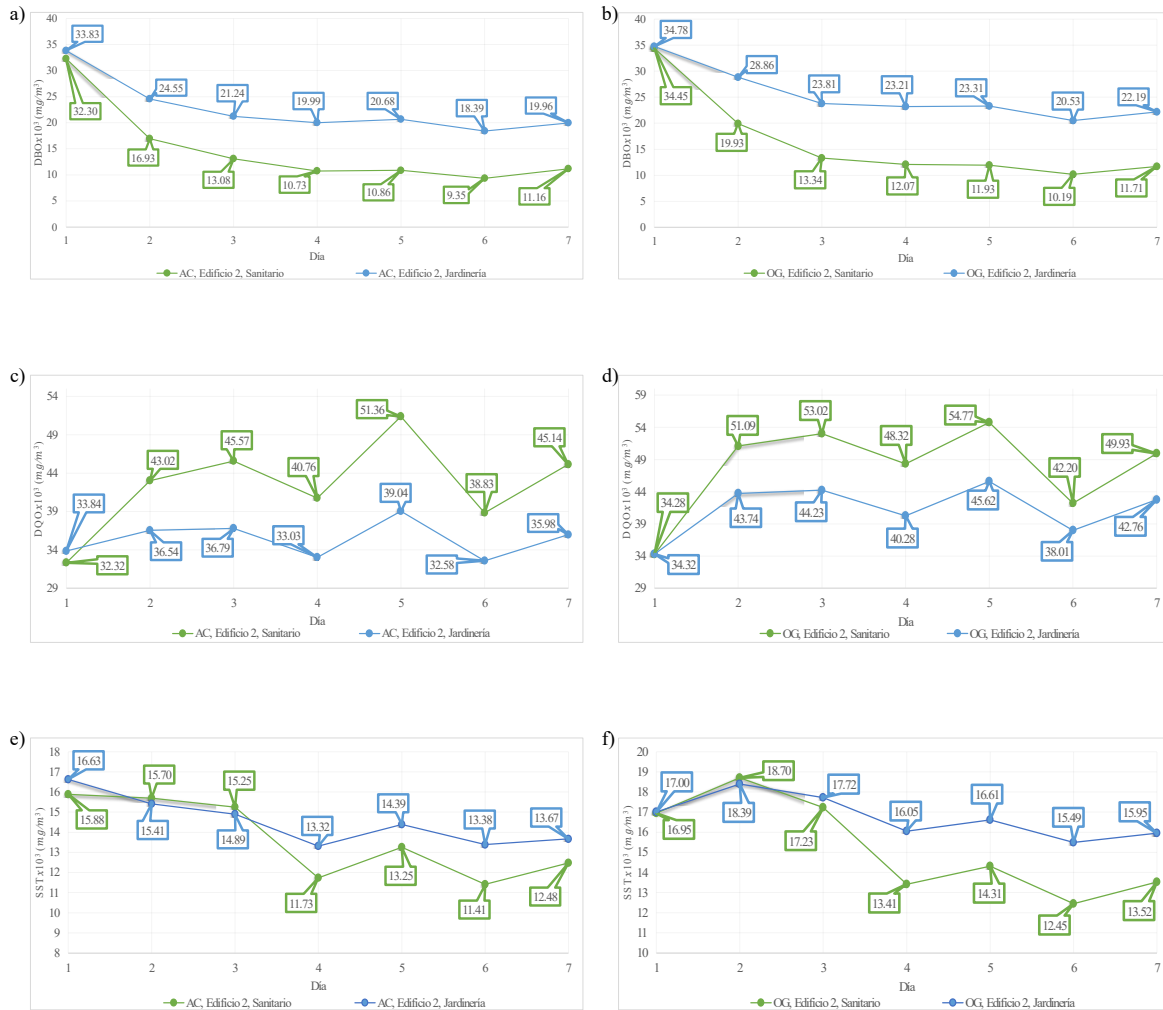


Fig. 5.4.7. Propiedades DBO, DQO y SST para usos domésticos de Sanitario y Jardinería en el Edificio Residencial 2, AC vs OG.

La **Fig. 5.4.8** muestra la solución del Escenario AC para minimizar los flujos de agua residual descargados al ambiente ($F_{i,t}^{AGUAD}$). El CAT para este escenario es igual a \$1,231,911.54, mientras que, los flujos de agua dulce ($F_{i,j,k,t}^{AD,EDIF}$) son 160,600.13 $\text{m}^3/\text{año}$. Estos flujos posteriores sólo se aplican para usos domésticos de sanitario, ducha, lavavajillas, lavandería y jardinería, con flujos de 89.85, 685.13, 584.51, 191.22 y 39.92 m^3/semana ; y 87.78, 639.92, 545.90, 178.61 y 37.16 m^3/semana para el primer y segundo edificio, respectivamente. En la entrada a los edificios residenciales ($F_{j,k,t}^{EDIF,ent}$), los flujos para el primer edificio son 845.46, 685.13, 584.51, 191.22 y 260.17 m^3/semana . Los flujos para el segundo edificio son 789.61, 685.13, 584.51, 191.22 y 243.05 m^3/semana para usos domésticos de sanitario, ducha, lavavajillas, lavandería y jardinería, respectivamente. En la **Fig. 5.4.8**,

la PTAR envía flujos al ambiente, los tanques y recirculación a los edificios residenciales con flujos de 1,842.62, 2083.86 y 272.39 m³/semana, respectivamente. Las capacidades de los tanques son 25 m³ para la instalación de 5 tanques para este escenario. Los flujos de salida de los tanques a los edificios residenciales son 204.83 y 184.41 m³/semana para el primer tanque, 178.63 y 159.75 m³/semana para el segundo tanque, 163.67 y 164.54 m³/semana para el tercer tanque, 152.79 y 132.87 m³/semana para el cuarto tanque y 137.24 y 132.48 m³/semana para el quinto tanque. Esto es para el primer y segundo edificio residencial, respectivamente.

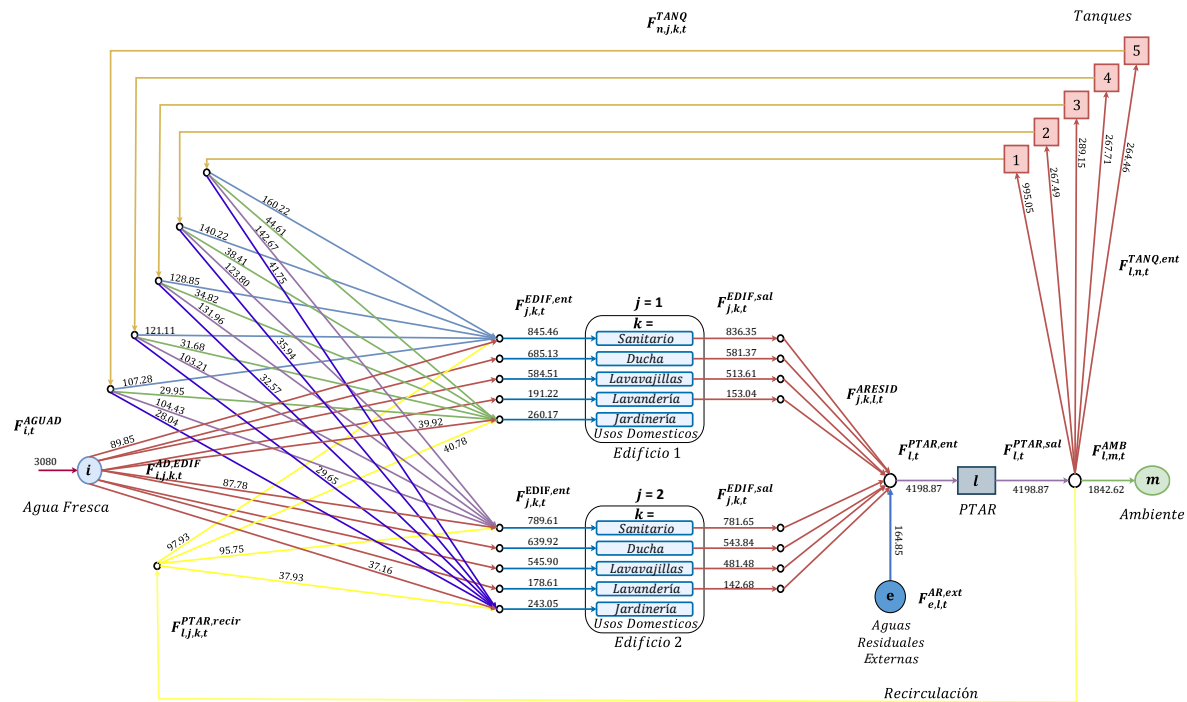


Fig. 5.4.8. Solución del Escenario AC

La **Fig. 5.4.9** muestra la solución del Escenario OG para minimizar los flujos de agua residual descargados al ambiente. El CAT para este escenario es igual a \$1,210,615.67, mientras que, los flujos de agua dulce son 148,330.83 m³/año. Estos flujos posteriores sólo se aplican para usos domésticos de sanitario, ducha, lavavajillas, lavandería y jardinería, con flujos de 7.71, 685.13, 584.51, 191.22 y 2.33 m³/semana; y 7.19, 639.92, 545.90, 178.61 y 2.18 m³/semana para el primer y segundo edificio, respectivamente. En la entrada a los edificios residenciales, los flujos para el primer edificio son 845.46, 685.13, 584.51, 191.22 y 260.17 m³/semana. Los flujos para el segundo edificio son 789.61, 639.92, 545.90, 178.61 y 243.05 m³/semana para usos domésticos de sanitario, ducha,

lavavajillas, lavandería y jardinería, respectivamente. En la **Fig. 5.4.9**, la PTAR envía flujos al ambiente, los tanques y recirculación a los edificios residenciales con flujos de 1623.93, 2234.68 y 297.44 m³/semana, respectivamente. Las capacidades de los tanques son 25 m³ para la instalación de 5 tanques para este escenario. Los flujos de salida de los tanques a los edificios residenciales son 224.53 y 212.64 m³/semana para el primer tanque, 198.23 y 188.05 m³/semana para el segundo tanque, 179.46 y 173.00 m³/semana para el tercer tanque, 175.04 y 154.25 m³/semana para el cuarto tanque y 167.29 y 148.95 m³/semana para el quinto tanque. Esto es para el primer y segundo edificio residencial, respectivamente.

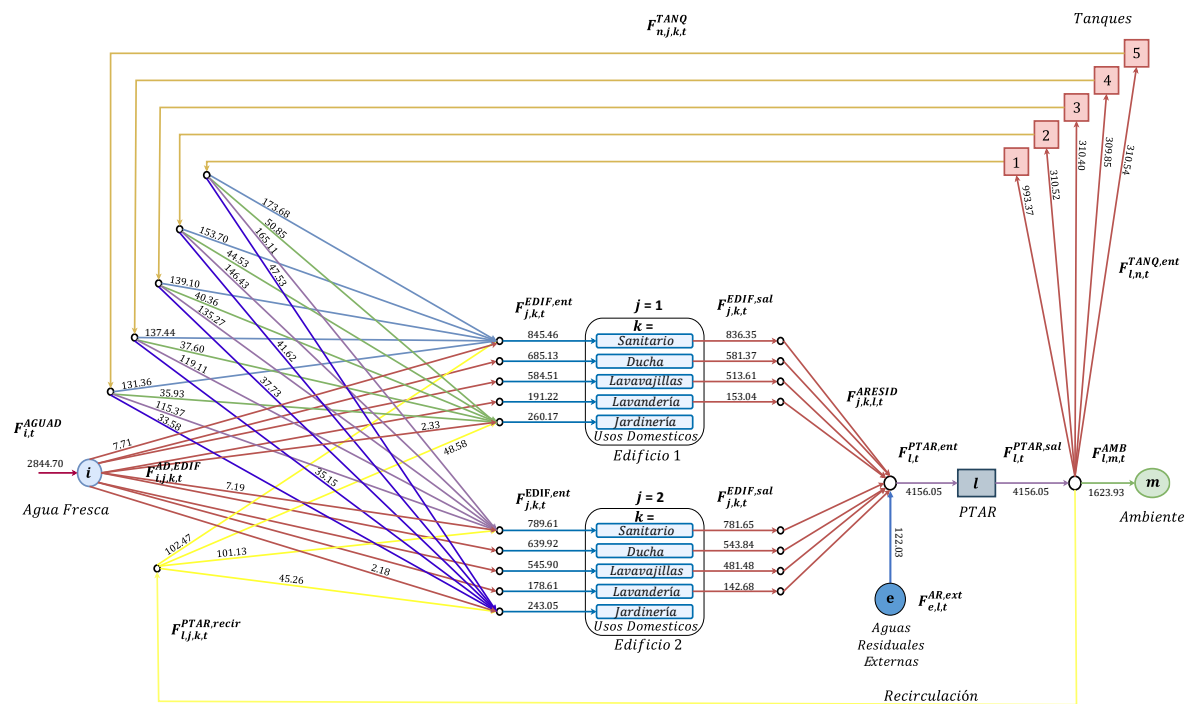


Fig. 5.4.9. Solución del Escenario OG

En la **Tabla 5.4.1** se muestran los valores anualizados de los costos involucrados en cada escenario. El CAT para el costo de Agua Fresca, Bombeo de Agua Fresca y Operación de Planta de Tratamiento es mayor en un 7.64, 7.64 y 1.02 % para el AC respecto al escenario OG y para el costo de Bombeo de Tanques a Usos Domésticos y Bombeo recirculación es menor en un 13.05 y 9.20 % para el AC respecto al escenario OG. Mientras que, en la **Tabla 5.4.2** se presenta las funciones objetivo para el

agente inteligente, se tiene que, para Costo Anual Total, Agua Dulce Total y EcoIndicador 99, el escenario AC presenta un 1.73, 7.64 y 1.32 % mayor en comparación al escenario OG.

Tabla 5.4.1. Costos Anualizados para cada escenario (\$)

Costo	Escenario	
	AC	OG
Agua Fresca	146,788.52	135,574.15
Bombeo de Agua Fresca	3,372.60	3,115.02
Operación de Planta de Tratamiento	1,072,812.53	1,061,872.43
Bombeo de Tanques a Usos Domésticos	7,645.19	8,642.69
Bombeo recirculación	1,292.62	1,411.51

Tabla 5.4.2. Variables Objetivo para cada escenario

Variable Objetivo	Escenario	
	AC	OG
Costo Anual Total (CAT, \$)	1,231,911.54	1,210,615.67
Agua Dulce Total (ADT, m ³)	160,600.13	148,330.83
EcoIndicador 99 (EI99, Pt)	1.7802x10 ¹²	1.7567x10 ¹²

CONCLUSIONES

APRENDIZAJE NO SUPERVISADO

En este enfoque se presenta un modelo de programación matemática para la optimización de una red hídrica macroscópica, donde se consideran los aspectos económicos y ambientales a través del costo de instalación de plantas de tratamiento de arsénico, los costos de canalización y bombeo del líquido, y la reducción de la concentración de arsénico en flujos de pozos profundos.

Los resultados muestran que, si bien es posible minimizar el costo en cada uno de los escenarios considerados, es importante resolver el conflicto de las condiciones ambientales; es decir, las concentraciones de arsénico deben mantenerse en valores permisibles. Por lo tanto, para el bienestar social, es necesario resolver el problema del agua limpia y segura. Del mismo modo, el modelo matemático y su enfoque de optimización proporcionan una forma sistemática de resolver posibles escenarios en diversas localidades con problemas similares.

Por otro lado, se muestra que la instalación de plantas de tratamiento de arsénico no es necesaria, pero se observa que la mayoría de la demanda de pozos profundos se encuentra dentro del límite permisible de concentración de arsénico, lo que podría causar inconvenientes en el futuro, ya que las concentraciones de arsénico pueden aumentar con el paso de los años en la localidad, por lo que se optaría por la instalación de plantas de tratamiento.

Mientras que, se implementa la instalación de una planta de tratamiento y el uso de mezcla entre los flujos de los pozos profundos, las concentraciones de arsénico de las demandas de los pozos profundos se encuentran dentro del límite permisible y la mayoría de estas están por debajo de 1 mg/m^3 . Esto se puede reflejar en que el escenario 3 tendrá menos años en el futuro para cumplir con la restricción ambiental que el escenario 2. Estos aspectos antes mencionados deben ser tomados en detalle por la localidad que implementará este modelo matemático.

Además, se ha demostrado que, si una comunidad enfrenta el problema de altas concentraciones de arsénico, la solución más adecuada es instalar una planta de remoción para abordar desafíos futuros, como cambios en las regulaciones permisibles de arsénico, el crecimiento poblacional y el aumento de las concentraciones de arsénico. Este enfoque brinda certeza respecto a las proyecciones futuras, y las decisiones sobre sostenibilidad económica deben tomarse con base en el presupuesto local. La implementación de estas políticas públicas tendrá implicaciones positivas para la sociedad, garantizando que el agua para uso doméstico esté libre de contaminantes nocivos que representan riesgos para la salud.

APRENDIZAJE PROFUNDO

Este tema se propuso un modelo matemático multiobjetivo y multiperiodo que considera la incertidumbre en parámetros y variables mediante la integración de una RNAP en la optimización para integrar una red de distribución de agua en edificios residenciales. Este modelo se formuló como un problema de programación no lineal entera mixta.

La implementación de una RNAP para modelar el comportamiento de una PTAR y eliminar las limitaciones de la aplicación de factores de eficiencia implementados en PTAR de diversas obras ha sido el foco de este trabajo, marcando un cambio de paradigma en los diferentes trabajos encontrados en la literatura que, utilizan técnicas diferentes al aprendizaje automático. Además, la RNAP tiene la versatilidad de operar en diferentes periodos de tiempo y con parámetros y variables inciertas presentadas dentro del modelo matemático. Esto le permite ser resiliente en los diferentes escenarios donde pueda surgir incertidumbre. Asimismo, permite que esta metodología empleada en este trabajo pueda ser implementada en diferentes problemáticas presentadas en diferentes campos de la ingeniería y la ciencia, y no solamente en redes de distribución de agua.

La RNAP, también puede implementarse en otros modelos matemáticos con las mismas propiedades utilizadas en este trabajo y, además, puede implementarse en un modelo matemático más grande. Sin embargo, el tiempo de cálculo depende del conjunto de datos de la RNAP y del tamaño del modelo matemático. Si el conjunto de datos es grande, el tiempo de entrenamiento será mayor para la RNAP.

En consecuencia, si la RNAP está dentro del modelo matemático no presenta una carga computacional adicional significativa. Sin embargo, aumentar el tamaño del modelo puede suponer un tiempo de cálculo considerable. Para evitar este inconveniente, es necesario delimitar o fraccionar los edificios residenciales en el modelo matemático. El modelo matemático resuelve, mediante la aplicación de la RNAP, el problema de cuantificar las propiedades del flujo de entrada para usos domésticos. Además, cumple con la normativa para la reutilización del agua tratada para diferentes usos domésticos.

Los resultados presentados en este trabajo muestran que la inversión en infraestructura para la recirculación de flujos y la instalación de tanques de almacenamiento puede reducir no solo el consumo de agua dulce, sino también los costos operativos de toda la red de distribución. Por el contrario, la implementación de una red de distribución directa incrementa los costos operativos debido al aumento del consumo de agua dulce para diversos usos domésticos. Además, la inversión en infraestructura puede ser ventajosa cuando el suministro de agua dulce es escaso. Los tanques de almacenamiento permiten reducir la cantidad de agua dulce no suministrada.

Por un lado, al minimizar el consumo de agua dulce, se maximiza el flujo de salida de los tanques de almacenamiento y las plantas de tratamiento, así como el de salida al medio ambiente. Por otro lado, si se maximiza el consumo de agua dulce, se minimiza el flujo de salida de los tanques de almacenamiento y la PTAR, así como el de salida al medio ambiente. Esta perspectiva puede ayudar a los responsables de la toma de decisiones a elegir la opción más adecuada que mejor se adapte a las necesidades de los edificios residenciales.

Una limitación del modelo RNAP es la concentración de la propiedad. Si el modelo RNAP se implementa en lugares donde las concentraciones de DBO, DQO y SST son considerablemente altas o bajas con respecto a las concentraciones de entrenamiento de RNAP, podría resultar en la predicción de datos incorrectos. Es necesario comparar el intervalo utilizado de concentración de propiedades entre RNAP y el conjunto de datos del mundo real. Si la diferencia es excesiva, debe indicarse en la sección de instrucciones de la Metodología para el conjunto de datos del mundo real.

Por lo tanto, RNAP debería predecir correctamente los datos del mundo real. Otra limitación en RNAP y otros modelos de predicción de aprendizaje profundo y automático es la degradación en la predicción en períodos prolongados (Seyfi, et al., 2025). Por esta razón, se sugiere que, si se desea aplicar el modelo RNAP para otra ubicación, se debe considerar un intervalo de entre uno y dos años de datos históricos. Esto es necesario para establecer una predicción correcta de los datos y evitar la degradación de la predicción durante períodos prolongados.

En trabajos futuros, no solo se implementará la captación de agua de lluvia o la extracción de agua dulce de pozos profundos, sino también el modelado de una planta potabilizadora mediante una RNAP. Este trabajo ampliará su período de estudio a un año, considerando las diferentes etapas del año que pueden afectar la demanda de agua dulce en edificios residenciales.

APRENDIZAJE POR REFUERZO

Se propone un modelo matemático multiobjetivo, multiperiodo e incierto con la integración de una RNAP para el modelado de comportamiento de una PTAR y también la implementación de algoritmos de aprendizaje por refuerzo que ayudan a la toma de decisión entre las variables objetivo de consumo de agua, costo anual total e impacto ambiental. El problema de distribución de agua se planteó como un problema de programación no lineal.

La implementación de un agente inteligente en la toma de decisión de una red de distribución de agua que integra una RNAP para modelar el comportamiento de una PTAR, es el enfoque de este tema, lo que se lleva a cabo es la dependencia de variables redes neuronales profundas. La primera red neuronal profunda modela el comportamiento de la PTAR. La segunda, implementa una política para

la toma de decisión en la red de distribución de agua donde se encuentra la RNAP que modela la PTAR, por lo tanto, la segunda red neuronal es para el actor, que depende de la red neuronal que modela la PTAR. Mientras que, para la tercera red neuronal, conocida como la red neuronal del crítico permite evaluar que tan mejor es la toma de acción de la red neuronal del actor. Por lo tanto, en este tema se centró en combinar estrategias de aprendizaje profundo y aprendizaje por refuerzo.

En este trabajo, se abre la posibilidad de la implementación de agentes inteligentes en problemas de programación matemática donde se deba tomar una decisión que puede generar ganancias económicas, reducción del consumo de agua dulce o reducir el impacto ambiente. Se observó que hay limitaciones al implementar el aprendizaje por refuerzo, una de ellas, es el tamaño y tipo del problema de programación matemática, sin embargo, se demostró que la utilización del aprendizaje por refuerzo es factible.

Sin embargo, se demostró la factibilidad de la implementación de aprendizaje por refuerzo sobre un modelo matemático que integra aprendizaje profundo en la optimización matemática, permitiendo combinar tres estrategias de resolución de problemas, siendo estas los algoritmos de inteligencia artificial, optimización matemática y redes de distribución de agua, en una única estrategia que permite resolver varias limitaciones en la literatura como los factores de eficiencia, modelamiento de una PTAR a través de una RNAP, integración de RNAP en la optimización matemática y la implementación de una agente inteligente en la toma de decisión de un problema de redes de distribución de agua. Además, esto permite que modelos matemáticos de diferentes campos de investigación implemente esta metodología para el desarrollo de sus proyectos, asimismo, se forma un escalón importante en esta investigación que, permitirá a otras áreas desarrollar nuevo conocimiento por medio, de lo presentado en esta investigación.

Los resultados presentaron una comparación entre la toma de decisión del algoritmo de PPO y una optimización general sobre el modelo de red de distribución de agua. Cuando el entrenamiento del agente inteligente terminó se cargaron todas las acciones tomadas por el agente inteligente en la optimización general, en este caso, fue el sentido de la optimización y la variable objetivo. Como se observó, los mejores resultados se obtuvieron por la optimización general, esto debido a la búsqueda de los límites superiores e inferiores de las variables objetivo del agente inteligente, puesto que se redujo el espacio de acción de las variables objetivo del agente debido en que ciertos intervalos de las variables objetivo, en donde el modelo matemático daba no factibilidad y además de reducir el tiempo del entrenamiento del agente inteligente. La búsqueda de los límites de las variables objetivo del agente se realizó con la minimización y maximización de una variable diferente, CAT, en comparación, cuando ambos escenarios AC y OG se presentaron en constante, $F^{total,AMB}$. Esto

demostró la versatilidad del agente inteligente para adaptarse en la toma de decisión para diferentes variables objetivos para el modelo matemático.

En trabajos futuros, se implementará el aprendizaje por refuerzo en campo como la industria química y la aplicación de este trabajo en un periodo de tiempo más extendido para poner a prueba el agente inteligente en casos donde no ha estado relacionado. Como la posibilidad de involucrar la temperatura y precipitación de lluvia como factores de demanda de agua dulce en un año determinado para entrenar al agente inteligente y observar su comportamiento en otro año diferente al de entrenamiento.

BIBLIOGRAFÍA

- Abadi, M., Barham, P., Chen, J., Chen, Z., Davis, A., Dean, J., . . . Zheng, X. (2016). TensorFlow: A system for large-scale machine learning. *arXiv*. Retrieved from <https://arxiv.org/abs/1605.08695>
- Ahmetović, E., & Grossmann, I. E. (2011). Global superstructure optimization for the design of integrated process water networks. *AIChE Journal*, 57(2), 434-457. doi:<https://doi.org/10.1002/aic.12276>
- Akhilesh, K. Y., Harish, K. Y., Aliya, N., Monika, K., Abhiroop, C., & Shashank, S. (2022). Arsenic removal technologies for middle- and low-income countries to achieve the SDG-3 and SDG-6 targets: A review. *Environmental Advances*, 9(100262). doi:<https://doi.org/10.1016/j.envadv.2022.100262>
- Aldughaiishi, U., Grattan, S. R., Nicolas, F., Peddinti, S. R., Bonfil, C., Ogunmokun, F., . . . Kisekka, I. (2024). Assessing the impact of recycled water reuse on infiltration and soil structure. *Geoderma*, 452(117103). doi:<https://doi.org/10.1016/j.geoderma.2024.117103>
- Alsabti, K., Ranka, S., & Singh, V. (1997). An efficient k-means clustering algorithm. *Electrical Engineering and Computer Science - All Scholarship*, 43. Obtenido de <https://surface.syr.edu/eecs/43>
- Andrychowicz, M., Wolski, F., Ray, A., Schneider, J., Fong, R., Welinder, P., . . . Zaremba, W. (2018). Hindsight Experience Replay. *arXiv*. doi:<https://doi.org/10.48550/arXiv.1707.01495>
- ASCE. (2000). Artificial Neural Networks in Hydrology. II: Hydrologic Applications. *Journal of Hydrologic Engineering*, 5(2), 124-137. doi:[https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)1084-0699\(2000\)5:2\(124\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)1084-0699(2000)5:2(124))
- Ba-Alawi, A. H., Al-masni, M. A., & Yoo, C. (2023). Simultaneous sensor fault diagnosis and reconstruction for intelligent monitoring in wastewater treatment plants: An explainable deep multi-task learning model. *Journal of Water Process Engineering*, 55(104119). doi:<https://doi.org/10.1016/j.jwpe.2023.104119>
- Bagheri, M., Akbari, A., & Mirbagheri, S. A. (2019). Advanced control of membrane fouling in filtration systems using artificial intelligence and machine learning techniques: A critical review. *Process Safety and Environmental Protection*, 123, 229-252. doi:<https://doi.org/10.1016/j.psep.2019.01.013>
- Bagheri, M., Bagheri, K., Farshforoush, N., Velazquez, A., & Liu, Y. (2024). A novel hybrid deep learning model for real-time monitoring of water pollution using sensor data. *Journal of Water Process Engineering*, 68(106595). doi:<https://doi.org/10.1016/j.jwpe.2024.106595>
- Bestuzheva, K., Besançon, M., Chen, W.-K., Chmiela, A., Donkiewicz, T., van Doornmalen, J., . . . Hoen, A. (2021). The SCIP Optimization Suite 8.0.
- Bioinformatics Laboratory. (2013a). *GitHub*. Obtenido de GitHub, range 2, Orange, datasets, water-treatment.htm: <https://github.com/biolab/orange2/blob/master/Orange/datasets/water-treatment.htm>

- Bioinformatics Laboratory. (2013b). *GitHub*. Obtenido de GitHub, Orange 2, Orange, datasets, water-treatment.tab: <https://github.com/biolab/orange2/blob/master/Orange/datasets/water-treatment.tab>
- Birge, J. R., & Louveaux, F. (1997). *Introduction to Stochastic Programming*. Springer. doi:<https://doi.org/10.1007/b97617>
- Brooke, A., Kendrick, D., Meeraus, A., & Raman, R. (1992). GAMS: A User's Guide. Release.
- CEPCI. (2023). *The Chemical Engineering Plant Cost Index*. Obtenido de The Chemical Engineering Plant Cost Index: <https://www.chemengonline.com/pci-home>
- Chauhan, N. K., & Singh, K. (2018). A Review on Conventional Machine Learning vs Deep Learning. *2018 International Conference on Computing, Power and Communication Technologies (GUCON)*, (pp. 347-352). Greater Noida, India. doi:<https://doi.org/10.1109/GUCON.2018.8675097>
- Chmiela, A., Dionísio, J., Donkiewicz, T., Doornmalen, J. v., Eifler, L., Ghannam, M., . . . Xu, L. (2024). The SCIP Optimization Suite 9.0. *arXiv*. Retrieved from <https://arxiv.org/abs/2402.17702>
- Dantzig, G. B. (2016). *Linear Programming and Extensions*. New Jersey: Princeton University Press.
- Del Rosario, F. L., Montallana, J. N., Huang, T.-Y., Aberilla, J. M., & Tu, Y.-M. (2025). Environmental and economic sustainability of wastewater reclamation and reuse in urban areas. *Journal of Environmental Chemical Engineering*, 13(119520). doi:<https://doi.org/10.1016/j.jece.2025.119520>
- Ding, F., Hao, S., Zhang, W., Jiang, M., Chen, L., Yuan, H., . . . Xie, X. (2025). Using multiple machine learning algorithms to optimize the water quality index model and their applicability. *Ecological Indicators*, 172(113299). doi:<https://doi.org/10.1016/j.ecolind.2025.113299>
- Diwekar, U. M. (2020). *Introduction to applied optimization* (Vol. 22). Springer Nature.
- Dona, C. G., Fukushi, K., & Mohan, G. (2025). Reusing treated wastewater and biosolids in urban agriculture: Social feasibility of a decentralized approach for underserved settlements. *Environmental Challenges*, 19(101159). doi:<https://doi.org/10.1016/j.envc.2025.101159>
- Dreyfus, G., Martinez, J., Samuelides, A., Gordon, M., Badran, F., Thiria, S., & al., e. (2002). *Réseaux de neurones - Méthodologie et applications*. Eyrolles.
- El Hachimi, C., Belaqqiz, S., Khabba, S., Karjoun, H., Kharrou, M. H., Hssaine, B. A., . . . Weng, Q. (2025). Towards collective intelligence in agriculture: Deep reinforcement learning and digital twins for efficient management of collective irrigation water distribution systems. *Energy Nexus*, 20(100599). doi:<https://doi.org/10.1016/j.nexus.2025.100599>
- Esfahani, P. P., Masoud, M., Layasadat, K., Mohsen, R., Hojatolla, N., & & Mohammad, J. K. (2023). Betaine protects against sodium arsenite-induced diabetes and hepatotoxicity in mice. *Environ Sci Pollut Res* 30, 10880–10889. doi:<https://doi.org/10.1007/s11356-022-22941-w>

- Fan, X., Zhang, X., & Yu, X. B. (2023). Uncertainty quantification of a deep learning model for failure rate prediction of water distribution networks. *Reliability Engineering & System Safety*, 236(109088). doi:<https://doi.org/10.1016/j.ress.2023.109088>
- Floudas, C. A. (1995). *Nonlinear and mixed-integer optimization: fundamentals and applications*. Oxford University Press.
- Galan, B., & Grossmann, I. E. (1998). Optimal Design of Distributed Wastewater Treatment Networks. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 37(10), 4036-4048. doi:[doi:10.1021/ie980133h](https://doi.org/10.1021/ie980133h)
- García-Montoya, M., Ponce-Ortega, J. M., Nápoles-Rivera, F., Serna-González, M., & El-Halwagi, M. M. (2015). Optimal design of reusing water systems in a housing complex. *Clean Technologies and Environmental Policy*, 17(2), 343-357. doi:<https://doi.org/10.1007/s10098-014-0784-x>
- Goedkoop, M., & Spriensma, R. (2001). The Eco-indicator 99: A Damage Oriented Method for Life Cycle Impact Assessment-Methodology Report.
- Gonzalez Perea, R., Ballesteros, R., Ortega, J. F., & Moreno, M. Á. (2021). Water and energy demand forecasting in large-scale water distribution networks for irrigation using open data and machine learning algorithms. *Computers and Electronics in Agriculture*, 188(106327). doi:<https://doi.org/10.1016/j.compag.2021.106327>
- Goodfellow, I., Bengio, Y., & Courville, A. (2016). *Deep Learning*. MIT Press. Obtenido de <http://www.deeplearningbook.org>
- Guo, H., Jeong, K., Lim, J., Jo, J., Kim, Y. M., Park, J.-p., . . . Cho, K. H. (2015). Prediction of effluent concentration in a wastewater treatment plant using machine learning models. *Journal of Environmental Sciences*, 32, 90-101. doi:<https://doi.org/10.1016/j.jes.2015.01.007>
- Hao, W., Cominola, A., & Castelletti, A. (2022). Comparing Predictive Machine Learning Models for Short- and Long-Term Urban Water Demand Forecasting in Milan, Italy. *IFAC-PapersOnLine*, 55(33), 92-98. doi:<https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2022.11.015>
- Harris, C. R., Millman, K. J., van der Walt, S. J., Gommers, R., Virtanen, P., Cournapeau, D., . . . Oliphant, T. (2020). Array programming with NumPy. *Nature*, 585(7825), 357-362. doi:<https://doi.org/10.1038/s41586-020-2649-2>
- Hojny, C., Besançon, M., Bestuzheva, K., Borst, S., Chmiela, A., Dionísio, J., . . . Kofler, K. (2025). The SCIP Optimization Suite 10.0. Retrieved from <https://www.scipopt.org/>
- Höll, W. (2010). Mechanisms of arsenic removal from water. *Environ Geochem Health*, 32, 287–290. doi:<https://doi.org/10.1007/s10653-010-9307-9>
- Hosseinzadeh, A., Altaee, A., Ibrar, I., & Zhou, J. L. (2025). Modeling and optimization of reverse salt diffusion and water flux in forward osmosis by response surface methodology and artificial neural network. *Chemical Engineering and Processing - Process Intensification*, 208(110140). doi:<https://doi.org/10.1016/j.cep.2024.110140>
- Huang, R., Wang, H., Mañkinia, J., Jin, S., Zhou, Z., Zhang, M., . . . Xie, L. (2025). Optimizing the chemical removal of phosphorus for wastewater treatment: Insights from interpretable

- machine learning modeling with binary classification of elasticity and productivity. *Resources, Conservation and Recycling*, 215(108147). doi:<https://doi.org/10.1016/j.resconrec.2025.108147>
- Ibrahim, M., Haider, A., Lim, J. W., Mainali, B., Aslam, M., Kumar, M., & Shahid, M. K. (2024). Artificial neural network modeling for the prediction, estimation, and treatment of diverse wastewaters: A comprehensive review and future perspective. *Chemosphere*, 362(142860). doi:<https://doi.org/10.1016/j.chemosphere.2024.142860>
- INTI. (2021). *Instituto Nacional de Tecnología Industrial (INTI)*. Obtenido de Modelo de intervención para el abatimiento de arsénico en aguas de consumo: <https://www.inti.gob.ar/areas/desarrollo-tecnologico-e-innovacion/industrias-y-servicios/ingenieria-de-procesos-quimicos/publicaciones>
- Islam, M. J., Wu, Q. M., Ahmadi, M., & A., S.-A. M. (2007). Investigating the Performance of Naive- Bayes Classifiers and K- Nearest Neighbor Classifiers. *2007 International Conference on Convergence Information Technology (ICCIT 2007)* (págs. 1541-1546). Gwangju, Korea (South): IEEE. doi:<https://doi.org/10.1109/ICCIT.2007.148>
- Jawad, J., Hawari, A. H., & Zaidi, S. J. (2021). Artificial neural network modeling of wastewater treatment and desalination using membrane processes: A review. *Chemical Engineering Journal*, 419(129540). doi:<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S138589472101127X>
- Jeong, H., Bhattarai, R., Adamowski, J., & J. Yu, D. (2020). Insights from socio-hydrological modeling to design sustainable wastewater reuse strategies for agriculture at the watershed scale. *Agricultural Water Management*, 231(105983). doi:<https://doi.org/10.1016/j.agwat.2019.105983>
- Jie, G., Biswarup, G., Lee, L., Stanley, C., Jinshan, W., Tsan-Liang, S., & Xiaoguang, M. (2020). hallenges of arsenic removal from municipal wastewater by coagulation with ferric chloride and alum. *Science of The Total Environment*, 725(138351). doi:<https://doi.org/10.1016/j.scitotenv.2020.138351>
- Jomova, K., Jenisova, Z., Feszterova, M., Baros, S., Liska, J., Hudecova, D., . . . and Valko, M. (2011). Arsenic: toxicity, oxidative stress and human disease. *J. Appl. Toxicol*, 95-107. doi: <https://doi.org/10.1002/jat.1649>
- Kalbar, P. P., Karmakar, S., & Asolekar, S. R. (2013). Assessment of wastewater treatment technologies: life cycle approach. *Water and Environment Journal*, 27(2), 261-268. doi: <https://doi.org/10.1111/wej.12006>
- Karuppiah, R., & Grossmann, I. E. (2006). Global optimization for the synthesis of integrated water systems in chemical processes. *Computers & Chemical Engineering*, 30(3), 650-673. doi:<https://doi.org/10.1016/j.compchemeng.2005.11.005>
- Keller, J. M., Gray, M. R., & Givens, J. A. (1985). A fuzzy K-nearest neighbor algorithm. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, SMC-15, pp. 580-585. doi:<https://doi.org/10.1109/TSMC.1985.6313426>
- Kirk, D. E. (2004). *Optimal control theory: an introduction*. Courier Corporation.

- Kumar, L., Afzal, M. S., & Ahmad, A. (2022). Prediction of water turbidity in a marine environment using machine learning: A case study of Hong Kong. *Regional Studies in Marine Science*, 52(102260). doi:<https://doi.org/10.1016/j.rsma.2022.102260>
- Lee, Y., Lin, Y., & Wahba, G. (2004). Multicategory Support Vector Machines: Theory and Application to the Classification of Microarray Data and Satellite Radiance Data. *Journal of the American Statistical Association*, 99(465), 67-81. doi:<https://doi.org/10.1198/016214504000000098>
- Lillicrap, T. P., Hunt, J. J., Pritzel, A., Heess, N., Erez, T., Tassa, Y., . . . Wierstra, D. (2019). Continuous control with deep reinforcement learning. *arXiv*. doi:<https://doi.org/10.48550/arXiv.1509.02971>
- Lowd, D., & Domingos, P. (2005). Naive Bayes models for probability estimation. In *Proceedings of the 22nd international conference on Machine learning (ICML '05)* (pp. 529–536). New York, NY, USA: Association for Computing Machinery. doi:<https://doi.org/10.1145/1102351.1102418>
- Ma, T., Zhang, Y., Wang, H., & Tan, N. (2024). A multiobjective optimization model for allocating water quantity and quality in the Yangtze and Yellow River basins. *Journal of Environmental Management*, 371(123166). doi:<https://doi.org/10.1016/j.jenvman.2024.123166>
- Maas, A. L., Hannun, A. Y., & Ng, A. Y. (2013). Rectifier Nonlinearities Improve Neural Network Acoustic Models. *Proceedings of the 30th International Conference on Machine Learning*, 28(3). Retrieved from https://ai.stanford.edu/~amaas/papers/relu_hybrid_icml2013_final.pdf
- Mancy, H., Ghannam, N. E., Abozeid, A., & Taloba, A. I. (2025). Decentralized multi-agent federated and reinforcement learning for smart water management and disaster response. *Alexandria Engineering Journal*, 126, 8-29. doi:<https://doi.org/10.1016/j.aej.2025.04.033>
- Meteostat. (2025). *Meteostat*. Obtenido de <https://meteostat.net/en/>
- Michael L., B., Hackebeil, G. A., Hart, W. E., Laird, C. D., Nicholson, B. L., Siirola, J. D., . . . Woodruff, P. D. L. (2021). *Pyomo - Optimization Modeling in Python* (3rd Edition ed.). Springer.
- Miro, M. E., Groves, D., Tincher, B., Syme, J., Tanverakul, S., & Catt, D. (2021). Adaptive water management in the face of uncertainty: Integrating machine learning, groundwater modeling and robust decision making. *Climate Risk Management*, 34(100383). doi:<https://doi.org/10.1016/j.crm.2021.100383>
- Mnih, V., Badia, Puigdomènech, A., Mirza, M., Graves, A., Lillicrap, T. P., . . . Kavukcuoglu, K. (2016). Asynchronous Methods for Deep Reinforcement Learning. *arXiv*. doi:<https://doi.org/10.48550/arXiv.1602.01783>
- Mnih, V., Kavukcuoglu, K., Silver, D., Graves, A., Antonoglou, I., Wierstra, D., & Riedmiller, M. (2013). Playing Atari with Deep Reinforcement Learning. *arXiv*. doi:<https://doi.org/10.48550/arXiv.1312.5602>

- NADB. (2016). *North American Development Bank*. (News, Construction begins on arsenic treatment facility in Tornillo, Texas) Retrieved 06 2024, from North American Development Bank, News, Construction begins on arsenic treatment facility in Tornillo, Texas: <https://www.nadb.org/news/construction-begins-on-arsenic-treatment-facility-in-tornillo-texas>
- Nápoles-Rivera, F., Ponce-Ortega, J. M., El-Halwagi, M. M., & Jiménez-Gutiérrez, A. (2010). Global optimization of mass and property integration networks with in-plant property interceptors. *Chemical Engineering Science*, 65(15), 4363-4377. doi:<https://doi.org/10.1016/j.ces.2010.03.051>
- Nemhauser, G., & Wolsey, L. (1988). *Integer and Combinatorial Optimization*. Wiley. doi:<https://doi.org/10.1002/9781118627372>
- Nocedal, J., & Wright, S. J. (2006). *Numerical optimization*.
- Olivarez-Areyan, J. J., Cerda-Flores, S. C., Nápoles-Rivera, F., & El-Halwagi, M. M. (2022). Optimal Management of Multistakeholder Macroscopic Water Networks with Social, Economic, and Environmental Considerations. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 61, 3342 – 3349. doi:<https://doi.org/10.1021/acs.iecr.1c03998>
- Olivarez-Areyan, J. J., Nápoles-Rivera, F., & El-Halwagi, M. M. (2021). Macroscopic water networks optimization considering unsatisfied demand and deep wells dynamic level. *Computers & Chemical Engineering*, 145(107160). doi:<https://doi.org/10.1016/j.compchemeng.2020.107160>
- Opallage, P., Piyadasa, R., & Dharmasoma, U. Y. (2019). Assessment of Physical-Chemical surface water quality variation across the wetlands of Metropolitan Colombo. *Research Review Journals*. Retrieved from https://www.researchgate.net/publication/335890463_Assessment_of_Physical-Chemical_surface_water_quality_variation_across_the_wetlands_of_Metropolitan_Colombo
- Pandey, D., Niwaria, K., & Chourasia, B. (2019). Machine learning algorithms: a review. *International Research Journal of Engineering and Technology (IRJET)*, 6(2).
- Pearson, K. (1895). Notes on Regression and Inheritance in the Case of Two Parents. *Proceedings of the Royal Society of London*, 58, 240-242. doi:<https://doi.org/10.1098/rspl.1895.0041>
- Pedram Jazayeri, S. H., Ebrahimi, M. S., Rahmatpanah, A., & Nazemizadeh, M. (2026). Bridging prediction and optimization: A unified MINLP, traditional machine learning and deep learning framework for water distribution networks management. *Ain Shams Engineering Journal*, 17(1), 103834. doi:<https://doi.org/10.1016/j.asej.2025.103834>
- Pedregosa, F., Varoquaux, G., Gramfort, A., Michel, V., Thirion, B., Grisel, O., . . . Duchesnay, É. (2011). Scikit-learn: Machine Learning in Python. *Journal of Machine Learning Research*, 12(85), 2825-2830. Retrieved from <https://jmlr.org/beta/papers/v12/pedregosa11a.html>
- Python Software Foundation. (2024). Python (Version 3.12). *Computer software*. doi:<https://www.python.org>

- Qian, S., Ying, H., Hang, P., Haiyan, L., Khalid, M., Zhaoxin, T., & Lianmei, H. (2023). Toxicity of inorganic arsenic to animals and its treatment strategies. *Comparative Biochemistry and Physiology Part C: Toxicology & Pharmacology*, 271(109654). doi:https://doi.org/10.1016/j.cbpc.2023.109654
- Raffin, A., Hill, A., Gleave, A., Kanervisto, A., Ernestus, M., & Dormann, N. (2021). Stable-Baselines3: Reliable Reinforcement Learning Implementations. *Journal of Machine Learning Research*, 22(268), 1-8. doi:http://jmlr.org/papers/v22/20-1364.html
- Raman, R., & Grossmann, E. I. (1993). Symbolic integration of logic in mixed-integer linear programming techniques for process synthesis. *Computers & Chemical Engineering*, 17, 909-927. doi:https://doi.org/10.1016/0098-1354(93)80073-V
- Refaat, O. A., & Hamoda, M. F. (2023). Modelling of a wastewater-treatment plant for process reliability and effluent reuse. *Journal of Environmental Engineering and Science*, 19(2), 111-119. doi:https://doi.org/10.1680/jenes.23.00074
- Reitter, C., Petzoldt, H., Korth, A., Schwab, F., Stange, C., Hambsch, B., . . . Hügler, M. (2021). Seasonal dynamics in the number and composition of coliform bacteria in drinking water reservoirs. *Science of The Total Environment*, 787(147539). doi:https://doi.org/10.1016/j.scitotenv.2021.147539
- Rokach, L., & Maimon, O. (2005). Top-down induction of decision trees classifiers - a survey. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part C (Applications and Reviews)*, 35, págs. 476-487. IEEE. doi:https://doi.org/10.1109/TSMCC.2004.843247
- Rumelhart, D. E., Hinton, G. E., & Williams, R. J. (1986). Learning representations by back-propagating errors. *Nature*, 323(6088), 533-536. doi:https://doi.org/10.1038/323533a0
- S, R., S, S., & Tuppad, P. (2025). Advanced temporal deep learning framework for enhanced predictive modeling in industrial treatment systems. *Results in Engineering*, 25(104158). doi:https://doi.org/10.1016/j.rineng.2025.104158
- Samuelsson, O., Lindblom, E. U., Djupsjö, K., Kanders, L., & Corominas, L. (2025). Mobility data for reduced uncertainties in model-based WWTP design. *Water Research X*(100418). doi:https://doi.org/10.1016/j.wroa.2025.100418
- Schulman, J., Levine, S., Moritz, P., Jordan, M. I., & Abbeel, P. (2017). Trust Region Policy Optimization. *arXiv*. doi:https://doi.org/10.48550/arXiv.1502.05477
- Schulman, J., Wolski, F., Dhariwal, P., Radford, A., & Klimov, O. (2017). Proximal Policy Optimization Algorithms. *arXiv*. doi:https://doi.org/10.48550/arXiv.1707.06347
- SEMARNAT. (2003). *NOM-001-SEMARNAT-1996*. DIARIO OFICIAL DE LA FEDERACIÓN.
- SEMARNAT. (2022). *NOM-001-SEMARNAT-2021*. DIARIO OFICIAL DE LA FEDERACIÓN.
- Seyfi, M., Mamaghan, A. M., Behnood, A., & Mannering, F. (2025). Analyzing crash injury severities with deep learning and advanced statistical models: An assessment of methodological challenges. *Analytic Methods in Accident Research*, 48(100405). doi:https://doi.org/10.1016/j.amar.2025.100405

- Shahhosseini, A., Najarchi, M., Najafizadeh, M. M., & Hezaveh, M. M. (2023). Performance optimization of water distribution network using meta-heuristic algorithms from the perspective of leakage control and resiliency factor (case study: Tehran water distribution network, Iran). *Results in Engineering*, 20(101603). doi:https://doi.org/10.1016/j.rineng.2023.101603
- Shaji, E., Santosh, M., Sarath, K., Prakash, P., Deepchand, V., & Divya, B. (2021). Arsenic contamination of groundwater: A global synopsis with focus on the Indian Peninsula. *Geoscience Frontiers*, 12(101079). doi:https://doi.org/10.1016/j.gsf.2020.08.015
- Shalev-Shwartz, S., Singer, Y., & Srebro, N. (2007). Pegasos: Primal Estimated sub-GrAdient SOLver for SVM. In *Proceedings of the 24th international conference on Machine learning (ICML '07)* (págs. 807-814). New York, United States: Association for Computing Machinery. doi:https://doi.org/10.1145/1273496.1273598
- Sharf, I. S., & Saif, A. C. (2017). Iron oxide and its modified forms as an adsorbent for arsenic removal: A comprehensive recent advancement. *Process Safety and Environmental Protection*, 111, 592-626. doi:https://doi.org/10.1016/j.psep.2017.08.009
- Sharma, V., Rai, S., & Dev, A. (2012). A comprehensive study of artificial neural networks. *International Journal of Advanced research in computer science and software engineering*, 2(10).
- Shinde, P. P., & Shah, S. (2018). A Review of Machine Learning and Deep Learning Applications. *2018 Fourth International Conference on Computing Communication Control and Automation (ICCUBEA)*, (págs. 1-6). doi:10.1109/ICCUBEA.2018.8697857
- Singh, S. K., Tiwari, A. K., & Paliwal, H. (2023). A state-of-the-art review on the utilization of machine learning in nanofluids, solar energy generation, and the prognosis of solar power. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 155, 62-86. doi:https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2023.06.003
- Sultana, N. (2025). Balancing accuracy and efficiency in multi-step building-level electric load forecasting: Deep learning vs. classical time-series models. *Energy and Built Environment*. doi:https://doi.org/10.1016/j.enbenv.2025.05.012
- Sutton, R. S., & Barto, A. G. (1999). Reinforcement learning. *Journal of Cognitive Neuroscience*, 11(1), 126-134.
- Tampo, L., Mande, S.-L. A.-S., Adekanmbi, A. O., Boguido, G., Akpataku, K. V., Ayah, M., . . . Alhassan, E. H. (2022). Treated wastewater suitability for reuse in comparison to groundwater and surface water in a peri-urban area: Implications for water quality management. *Science of The Total Environment*, 815(152780). doi:https://doi.org/10.1016/j.scitotenv.2021.152780
- Tan, Z., Li, H., Zhu, Z., Hou, J., & Wang, Z. (2025). A water-energy-food-land nexus framework for multi-objective optimization and risk assessment integrating deep reinforcement learning and Copula-based modeling. *Water Research*, 287, Part B(124474). doi:https://doi.org/10.1016/j.watres.2025.124474

- THE Water Research FOUNDATION. (2016). *THE Water Research FOUNDATION*. Obtenido de THE Water Research FOUNDATION, Residential End Uses of Water, Version 2, #4309B: <https://www.waterrf.org/resource/residential-end-uses-water-version-2-0>
- Towers, M., Kwiatkowski, A., Terry, J., Balis, J. U., De Cola, G., Deleu, T., . . . You. (2025). Gymnasium: A Standard Interface for Reinforcement Learning Environments. *arXiv*. doi:<https://doi.org/10.48550/arXiv.2407.17032>
- Uddin, M. G., Bamal, A., Diganta, M. T., Sajib, A. M., Rahman, A., Abioui, M., & Olbert, A. I. (2025). The role of optimizers in developing data-driven model for predicting lake water quality incorporating advanced water quality model. *Alexandria Engineering Journal*, 122, 411-435. doi:<https://doi.org/10.1016/j.aej.2025.03.022>
- UN. (2018, march 19). *The United Nations World Water Development Report 2018 (United Nations Educational)*. Retrieved september 10, 2023, from www.unwater.org/publications/world-water-development-report-2018/
- UN. (2023). *united nations (UN)*. Recuperado el 15 de January de 2024, de Goal 6: Ensure access to water and sanitation for all: <https://www.un.org/sustainabledevelopment/water-and-sanitation/>
- UNESCO. (2022). *The United Nations World Water Development Report 2022: groundwater: making the invisible visible*. Recuperado el 10 de september de 2023, de <https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000380726>
- Wang, Y., Han, J.-C., Zhou, Y., Wang, X., Ikram, R. M., Zhao, X., & Huang, Y. (2025). Application of novel deep learning model for high-frequency water quality prediction in multi-station river networks. *Journal of Environmental Chemical Engineering*, 13(6). doi:<https://doi.org/10.1016/j.jece.2025.119673>
- Wang, Y., Li, T., Bai, L., Yu, H., & Qu, F. (2025). Comparison of interpretable machine learning models and mechanistic model for predicting effluent nitrogen in WWTP. *Journal of Water Process Engineering*, 77(108344). doi:<https://doi.org/10.1016/j.jwpe.2025.108344>
- Wang, Z., & Pang, Z. (2025). Adaptive transfer reinforcement learning (TRL) for cooling water systems with uniform agent design and multi-agent coordination. *Energy and Buildings*, 345(116071). doi:<https://doi.org/10.1016/j.enbuild.2025.116071>
- WHO. (2017). *WHO/Home/News/Feature stories/Detail/Many at risk of contracting diseases from the poorly managed wastewater of 26 million Filipinos*. Retrieved from Many at risk of contracting diseases from the poorly managed wastewater of 26 million Filipinos: <https://www.who.int/philippines/news/feature-stories/detail/many-at-risk-of-contracting-diseases-from-the-poorly-managed-wastewater-of-26-million-filipinos>
- WHO. (2023, September 13). *World Health Organization*. Retrieved from World Health Organization, Home, Newsroom, Fact Sheets, Detail, Drinking-water: <https://www.who.int/news-room/fact-sheets/detail/drinking-water>
- Yu, C., Huang, R., Yu, J., Zhang, S., Jin, S., Xu, Q., . . . Wang, H. (2025). Quantifying the mitigation potential of energy and chemical consumption for a full-scale wastewater treatment plant with deep learning methods. *Applied Energy*, 394(126123). doi:<https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2025.126123>

- Zhang, C., Zhou, A., Kong, X., Xue, B., & Zhao, C. (2024). Human activities caused lake ecological transitions in the Chinese Loess Plateau over the past 1400 years. *Palaeogeography, Palaeoclimatology, Palaeoecology*, 643(112184). doi:<https://doi.org/10.1016/j.palaeo.2024.112184>
- Zhang, Y., Wang, J., Li, C., Duan, H., & Wang, W. (2025). Attention-based deep learning models for predicting anomalous shock of wastewater treatment plants. *Water Research*, 275(123192). doi:<https://doi.org/10.1016/j.watres.2025.123192>

Formato de Declaración de Originalidad y Uso de Inteligencia Artificial

Coordinación General de Estudios de Posgrado
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo



A quien corresponda,

Por este medio, quien abajo firma, bajo protesta de decir verdad, declara lo siguiente:

- Que presenta para revisión de originalidad el manuscrito cuyos detalles se espēifican abajo.
- Que todas las fuentes consultadas para la elaboración del manuscrito están debidamente identificadas dentro del cuerpo del texto, e incluidas en la lista de referencias.
- Que, en caso de haber usado un sistema de inteligencia artificial, en cualquier etapa del desarrollo de su trabajo, lo ha especificado en la tabla que se encuentra en este documento.
- Que conoce la normativa de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, en particular los Incisos IX y XII del artículo 85, y los artículos 88 y 101 del Estatuto Universitario de la UMSNH, además del transitorio tercero del Reglamento General para los Estudios de Posgrado de la UMSNH.

Datos del manuscrito que se presenta a revisión		
Programa educativo	DOCTORADO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA QUÍMICA	
Título del trabajo	IMPLEMENTACIÓN DE ALGORITMOS DE APRENDIZAJE NO SUPERVISADO, PROFUNDO Y POR REFUERZO EN REDES DE DISTRIBUCIÓN DE AGUA	
	Nombre	Correo electrónico
Autor/es	ANGEL ALFARO BERNARDINO	1423872x@umich.mx
Director	FABRICIO NÁPOLES RIVERA	fabricio.napoles@umich.mx
Codirector		
Coordinador del programa	JAVIER LARA ROMERO	doc.cs.ingenieria.quimica@umich.mx

Uso de Inteligencia Artificial		
Rubro	Uso (sí/no)	Descripción
Asistencia en la redacción	NO	

Formato de Declaración de Originalidad y Uso de Inteligencia Artificial

Coordinación General de Estudios de Posgrado
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo



Uso de Inteligencia Artificial		
Rubro	Uso (sí/no)	Descripción
Traducción al español	NO	
Traducción a otra lengua	NO	
Revisión y corrección de estilo	NO	
Análisis de datos	NO	
Búsqueda y organización de información	NO	
Formateo de las referencias bibliográficas	NO	
Generación de contenido multimedia	NO	
Otro	NO	

Datos del solicitante	
Nombre y firma	ANGEL ALFARO BERNARDINO ✓ 
Lugar y fecha	10 DE FEBRERO DEL 2026

Ángel Alfaro Bernardino

IMPLEMENTACIÓN DE ALGORITMOS DE APRENDIZAJE NO SUPERVISADO, PROFUNDO Y POR REFUERZO EN REDES DE D...

 Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Detalles del documento

Identificador de la entrega

trn:oid:::3117:555706861

Fecha de entrega

11 feb 2026, 9:09 a.m. GMT-6

Fecha de descarga

11 feb 2026, 9:12 a.m. GMT-6

Nombre del archivo

IMPLEMENTACIÓN DE ALGORITMOS DE APRENDIZAJE NO SUPERVISADO, PROFUNDO Y POR REFU....pdf

Tamaño del archivo

6.2 MB

220 páginas

67.279 palabras

321.437 caracteres

14% Similitud general

El total combinado de todas las coincidencias, incluidas las fuentes superpuestas, para ca...

Fuentes principales

- 12%  Fuentes de Internet
- 10%  Publicaciones
- 0%  Trabajos entregados (trabajos del estudiante)

Marcas de integridad

N.º de alerta de integridad para revisión



Texto oculto

341 caracteres sospechosos en N.º de páginas

El texto es alterado para mezclarse con el fondo blanco del documento.

Los algoritmos de nuestro sistema analizan un documento en profundidad para buscar inconsistencias que permitirían distinguirlo de una entrega normal. Si advertimos algo extraño, lo marcamos como una alerta para que pueda revisarlo.

Una marca de alerta no es necesariamente un indicador de problemas. Sin embargo, recomendamos que preste atención y la revise.