



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE
HIDALGO

INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

**Transformaciones de
Landau-Khalatnikov-Fradkin en
Electrodinámica Cuántica Reducida**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Maestra en Ciencias en el Área de Física

PRESENTA:

DANIA RODRÍGUEZ TZINTZUN

ASESOR:

DR. JUAN CARLOS ARTEAGA VELAZQUEZ

CO-ASESOR:

DR. ADNAN BASHIR



Morelia, Michoacán, México.
Enero 2026

*A mis padres, que creyeron en mí. Todo su esfuerzo
está aquí.*

Agradecimientos

A mi familia, a mis padres, Damián y Graciela, gracias por darme alas con su amor y cuidado, son los cimientos más esenciales en mi vida. A mis hermanos, Enrique y Janeth, no solo por sus ocurrencias y amor, sino también por verlos crecer y lograr cosas grandiosas, son una motivación constante.

Al Dr. Juan Carlos Arteaga Velazquez, por su paciencia, sin esas sesiones de estudio estaría perdida. Así también, por orientarme en este proceso.

Al Dr. Adnan Bashir, quien fue un pilar importante en mi formación académica, gracias por su mentoría y tiempo dedicado.

Al Dr. Luis Albino Fernández Rangel, que gracias a sus correcciones y observaciones se pudo entregar un trabajo más completo.

A mi novio Curi, por siempre estar presente y apoyarme en todo, además de ser fuente de inspiración.

A mis compañeros Carlos y Pedro, mi tiempo en la maestría fue más agradable gracias a ellos. Y a mis amigas Paloma y Lulú, que estuvieron al pendiente de mí.

Resumen

Entender cómo se transforman las funciones de Green bajo cambios de norma constituye un problema fundamental y, a la vez, desafiante en las teorías de norma. En esta tesis nos hemos centrado en estudiar la variación del propagador del electrón en la electrodinámica cuántica reducida (RQED) con fermiones masivos, aplicando las transformaciones de Landau–Khalatnikov–Fradkin (LKF).

Partiendo del propagador fermiónico a nivel árbol en una norma inicial, buscamos obtener su forma en una norma covariante arbitraria, lo cual conduce a información de carácter no perturbativo. Si bien las expresiones obtenidas son no perturbativas, en el régimen de acoplamiento débil es posible expandirlas en series perturbativas hasta el orden deseado; en nuestro caso, hemos llevado la expansión hasta términos correspondientes a dos lazos.

Palabras clave: Propagador de Electrón, Funciones de Green, Transformaciones de Landau-Khalatnikov-Fradkin, Electrodinámica Cuántica Reducida, Teoría de Perturbaciones en Dos Lazos.

Asbtract

Understanding how Green's functions transform under changes of gauge is a fundamental and challenging problem in gauge field theories. In this thesis, we focus on studying the variation of the electron propagator in reduced quantum electrodynamics (RQED) with massive fermions, applying the Landau–Khalatnikov–Fradkin (LKF) transformations.

Starting from the tree-level fermion propagator in a chosen gauge, we seek to obtain its form in an arbitrary covariant gauge, which leads to genuinely non-perturbative information. Although the resulting expressions are non-perturbative, in the weak-coupling regime it is possible to expand them perturbatively to any desired order; in our case, we carry out the expansion up to a two-loop level.

Índice

0.1. Lista de Acrónimos	1
1. Introducción	2
2. Fundamentos de la electrodinámica cuántica	5
2.1. Reglas de Feynman	7
2.2. Propagadores: discusión general	8
2.2.1. Propagador del fermión	9
2.2.2. Propagador del fotón	10
2.3. Electrodinámica cuántica reducida	11
3. Transformaciones de Landau-Khalatnikov-Fradkin	14
3.1. Transformaciones LKF	15
3.2. Herramientas y notación	16
3.3. La estrategia	17
4. Aplicación de las transformaciones LKF en RQED	19
4.1. La transformación LKF para fermiones en RQED	19
4.2. Caso de fermiones sin masa en RQED	21

4.3. Caso de fermiones masivos en RQED	23
4.3.1. Expansión perturbativa para $p^2 \ll m^2$	27
4.3.2. Expansión perturbativa para $m^2 \ll p^2$	28
 5. Conclusión	 31
 A. Integrales útiles	 33
 Referencias	 34

SECCIÓN 0.1**Lista de Acrónimos**

GF	Fijación de norma.
LKFT	Transformaciones Landau-Khalatnikov-Fradkin
QCD	Cromodinámica Cuántica
QED	Electrodinámica Cuántica
QED2	Electrodinámica Cuántica en 1 dimensión espacial + 1 temporal
QED3	Electrodinámica Cuántica en 2 dimensiones espaciales + 1 temporal
QED4	Electrodinámica Cuántica en 3 dimensiones espaciales + 1 temporal
QFT	Teoría Cuántica de Campos
RQED	Electrodinámica Cuántica Reducida
SM	Modelo Estándar
STI	Identidades de Slavnov-Taylor
U(1)	Grupo unitario de dimensión 1
WFGTI	Identidad de Ward-Fradkin-Green-Takahashi

Capítulo 1

Introducción

A través de los tiempos el ser humano, en su deseo por describir el mundo y estructurar sus ideas, ha buscado clasificar y comprender todo aquello que lo rodea en términos de teorías y modelos físicos. Desde los filósofos griegos, que propusieron la existencia de átomos indivisibles, hasta los químicos del siglo XIX, que organizaron los elementos en la tabla periódica, cada época ha intentado identificar las piezas fundamentales que constituyen la materia.

Sin embargo, fue en el siglo XX, con el descubrimiento de que los átomos no eran realmente “indivisibles”, cuando surgió con mayor fuerza la pregunta fundamental: ¿de qué está hecho todo en su nivel más básico? Primero se estableció que los átomos estaban formados por electrones que orbitan un núcleo compuesto por protones y neutrones. Más tarde, experimentos de mayor precisión revelaron que estos últimos también estaban formados por partículas aún más elementales: los quarks, los cuales interactúan mediante los gluones, portadores de la fuerza fuerte.

Combinadas, estas partículas fundamentales y sus interacciones constituyen la base de las teorías cuánticas de campos de gauge, que unifican los principios de la mecánica cuántica y la relatividad especial, proporcionando un marco teórico consistente para describir las fuerzas fundamentales de la naturaleza.

En este caos de descubrimientos, un grupo de científicos, entre ellos Sheldon Glashow [1], Abdus Salam [2], Steven Weinberg [3], entre otros, logró lo imposible: unificar dos de las fuerzas fundamentales de la naturaleza (la electromagnética y la nuclear débil) a través

de un sólo modelo, llamado el Modelo Electro débil. A esto se sumó la comprensión de la fuerza nuclear fuerte, que mantiene unidos a los quarks, gracias a la cromodinámica cuántica (QCD) [4, 5]. Juntas, estas piezas forman el Modelo Estándar de las partículas elementales y de sus interacciones fundamentales (SM, por sus siglas en inglés), una especie de "tabla periódica del siglo XXI" que clasifica no sólo la materia, sino también las fuerzas que la gobiernan. El modelo se coronó con el descubrimiento del bosón de Higgs [6] en 2012, una manifestación del mecanismo a través del cual adquieren las partículas fundamentales su masa.

Dentro del marco del Modelo Estándar, la electrodinámica cuántica (QED, por sus siglas en inglés) destaca como una de las teorías más exitosas en la historia de la física. Desarrollada en la década de 1940 por Richard Feynman, Julian Schwinger y Sin-Itiro Tomonaga, quienes fueron galardonados con el Nobel de física en 1965 debido a sus contribuciones, la QED describe con extraordinaria precisión cómo interactúan las partículas cargadas, como electrones y positrones, a través del intercambio de fotones, los cuantos de luz. Se basa en la teoría cuántica de campos y une a la mecánica cuántica con la teoría electromagnética de Maxwell. Lo que hace excepcional a esta teoría es su capacidad predictiva. La QED calcula cantidades como el momento magnético del electrón con una precisión de doce dígitos. Estas predicciones han sido verificadas experimentalmente en múltiples ocasiones [7, 8], consolidando a la QED como la teoría física más precisa. Ahora bien, en el mundo de los materiales bidimensionales como el grafeno o los polímeros cuasi-unidimensionales, surge una paradoja intrigante: aunque los electrones están confinados a moverse en un plano, el campo electromagnético con el que interactúan sigue propagándose libremente en las tres dimensiones del espacio. Esta desigualdad entre la libertad del campo y el confinamiento de las partículas plantea un desafío teórico: describir de manera consistente estas interacciones híbridas. Para resolver este problema, físicos como Eduardo C. Marino [9, 10] y Sofian Teber [11] desarrollaron un marco teórico ingenioso: la electrodinámica cuántica reducida (RQED). Esta teoría no es simplemente una QED simplificada a dos dimensiones, sino una construcción cuidadosa que preserva la naturaleza tridimensional del campo electromagnético, pero acopla su dinámica a partículas confinadas en $2+1$ -dimensiones.

La consecuencia más conocida de la covarianza de norma en la QED son las identidades de Ward-Fradkin-Green-Takahashi (WFGTI) [12, 13, 14, 15]. Estas identidades relacionan varias funciones de Green de n puntos entre sí. Aunque son intrínsecamente no perturbativas por naturaleza, se cumplen en cada orden de la teoría de perturbaciones y sirven como una verificación de los cálculos en una norma covariante arbitraria. Por ejemplo, el propagador de electrón está relacionado con el vértice de interacción electrón-fotón a través de una WFGTI. La generalización de estas identidades a la QCD son las identidades de Slavnov-Taylor (ST) [16, 17]. Otra consecuencia de la simetría de norma en la QED son las transformaciones locales que nos permiten relacionar una función de Green dada en una norma con su valor en otra norma. Estas transformaciones, relativamente menos conocidas, para los propagadores de electrón y fotón, así como el

vértice electrón-fotón en diferentes normas covariantes, fueron derivadas inicialmente por Landau y Khalatnikov en la Ref. [18] y luego de manera independiente por Fradkin en la Ref. [13] empleando el formalismo canónico de la QED. Por lo tanto, estas son llamadas correctamente las transformaciones de Landau-Khalatnikov-Fradkin (LKF). Las reglas generales que gobiernan estas transformaciones, aunque visiblemente compactas, no son simples en absoluto. Estas transformaciones fueron derivadas más tarde por Johnson y Zumino a través de métodos funcionales [19, 20]. De manera similar a las identidades ST, las transformaciones de la QED se generalizaron a las funciones de correlación de la QCD unas décadas después por Aslam y Dall’Olio [21, 22, 23] (abreviadas como transformaciones AD), respectivamente. Las transformaciones LKF para el fermión sin masa en la RQED han sido estudiadas en [24]. Es notable que, a pesar de que las WFGTI y las transformaciones LKF son relaciones independientes, está establecido que si las WFGTI se cumplen en una norma, entonces, si las funciones de Green involucradas se transforman a otra norma bajo la transformación LKF, las WFGTI en esa otra norma se cumplirán automáticamente. Debido a la naturaleza en el espacio de momentos de las WFGTI, estas identidades se han implementado ampliamente en los estudios de norma en la literatura. Sin embargo, las transformaciones LKF no han tenido la misma cantidad de aplicaciones. No obstante, todavía se pueden encontrar numerosas aplicaciones de las transformaciones de norma en la literatura en el contexto de la QED en diferentes dimensiones espacio-temporales: QED2 [25], QED3 [26, 27, 28, 29, 30], QED4 o QED [30, 31, 32, 33, 34], QEDd [35, 36], QED escalar [37, 38, 39, 40] y RQED [24, 41, 42], en la teoría de perturbaciones así como en el dominio no perturbativo de la QED.

Esta tesis se estructura su contenido de la siguiente manera: Tras la introducción inicial, en el Capítulo 2 se revisan los fundamentos de la electrodinámica cuántica, con especial énfasis en las reglas de Feynman y la teoría de propagadores para fermiones y fotones, lo que permite introducir de manera natural el caso particular del que estamos interesados, la electrodinámica cuántica reducida. A continuación, el Capítulo 3 está dedicado a las transformaciones de Landau-Khalatnikov-Fradkin. Y finalmente, el eje central de nuestra investigación se desarrolla en el Capítulo 4, donde se aplican estas transformaciones al contexto de RQED. En él, se analizan dos cuestiones: el caso sin masa y el caso masivo, lo que permite explorar tanto las analogías como las diferencias cruciales entre estos modelos.

Capítulo 2

Fundamentos de la electrodinámica cuántica

Las teorías de norma, que estudiamos dentro del marco de las teorías cuánticas de campos (QFTs por sus siglas en inglés), describen las interacciones fundamentales de la naturaleza, como el electromagnetismo, la interacción fuerte y la interacción débil. La base en la cual se sustentan estas teorías es en el principio de norma [43, 44], que nos estipula que las interacciones entre partículas son obtenidas al demandar que el lagrangiano sea invariante ante transformaciones locales de norma.

Con el fin de describir la dinámica de fermiones, partimos de la densidad lagrangiana de Dirac para fermiones libres [45],

$$\mathcal{L}_{Dirac} = \bar{\psi}(i\cancel{D} - m)\psi, \quad (2.1)$$

donde $\psi(x)$ representa el campo fermiónico y $\cancel{D} = \gamma^\mu \partial_\mu$ en notación slash de Feynman. No obstante, este lagrangiano no es invariante ante transformaciones locales de norma del tipo $U(1)$, correspondiente a

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{i\theta(x)}\psi(x), \quad (2.2)$$

donde $\theta(x)$ es una función arbitraria de x . Para garantizar la invarianza de la teoría ante la mencionada transformación de norma, se debe incorporar un término adicional conocido como el lagrangiano de interacción $\mathcal{L}_{int}$. Esto se logra de manera natural al introducir el campo de norma A_μ a través del acoplamiento mínimo, reemplazando la derivada ordinaria ∂_μ por la derivada covariante:

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu, \quad (2.3)$$

donde, al mismo tiempo, el campo bosónico A^μ debe transformarse como

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{e} \partial_\mu \theta(x). \quad (2.4)$$

De este modo, al sumar los lagrangianos

$$\mathcal{L}_{Dirac} + \mathcal{L}_{int} = \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi, \quad (2.5)$$

obtenemos una expresión que resulta invariante ante la transformación local de norma para el campo fermiónico ψ , definida en la ecuación (2.2). Para poder interpretar al campo A^μ como un campo físico (fotones), es necesario introducir un término cinético. Este término corresponde precisamente al lagrangiano de Maxwell, con lo cual el lagrangiano completo queda expresado como:

$$\mathcal{L}_{Dirac} + \mathcal{L}_{int} + \mathcal{L}_{Maxwell} = \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi - e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (2.6)$$

donde el tensor del campo electromagnético $F^{\mu\nu}$ está descrito por la expresión

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (2.7)$$

Hasta el momento, tenemos un lagrangiano que es invariante ante las transformaciones locales de norma para el grupo $U(1)$. Para fijar la norma y obtener un propagador de fotones, se añade el término:

$$\mathcal{L}_{GF} = -\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2, \quad (2.8)$$

conocido como el término de *fijación de norma* (GF), donde ξ es el parámetro de norma covariante. Al ser un término artificial introducido a mano, el término de norma no cambia la física porque los resultados físicos son invariantes de norma y no dependen de la elección de la norma. Entonces en el contexto de la electrodinámica cuántica, el lagrangiano es ([46], [47])

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{QED} &= \mathcal{L}_{Maxwell} + \mathcal{L}_{Dirac} + \mathcal{L}_{int} + \mathcal{L}_{GF} \\ &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi - e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Por lo tanto, la interacción entre la materia y la fuerza electromagnética a nivel elemental y en cualquier dimensión se explica a través de la acción.

$$S_{QED} = \int d^d x \left[-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2 + \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi - e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \right], \quad (2.10)$$

donde $e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi = J^\mu$ es la corriente eléctrica y e la carga.

Al igual que en la mecánica clásica, una vez que hemos obtenido el Lagrangiano, por medio de las ecuaciones de Euler-Lagrange, encontramos las ecuaciones de movimiento. De manera similar, podemos encontrar las ecuaciones de movimiento en QED. Además, a partir de conocer la densidad lagrangiana es que podemos derivar las reglas de Feynman, de las que hablaremos a continuación.

SECCIÓN 2.1

Reglas de Feynman

Las Reglas de Feynman son una formulación desarrollada por Richard Feynman para ayudar a visualizar los procesos de dispersión en las teorías cuánticas de campos. Cada elemento de estos diagramas representa fermiones, bosones (ya sean propagadores o partículas iniciales y finales), y sus interacciones. Las partículas iniciales, finales o intermedias, se representan mediante líneas: en QED una línea recta corresponde a un fermión cargado, por ejemplo un electrón, y una línea ondulada a un fotón. Los vértices indican las interacciones entre ellas. Los diagramas de Feynman y las reglas de Feynman se derivan del Lagrangiano al comparar la amplitud de dispersión e intentar ofrecer una representación visual de las diferentes partes que la componen [48].

En Electrodinámica Cuántica Reducida, la regla de Feynman para el **propagador del electrón** en espacio de momentos es

$$\begin{array}{c} \longrightarrow \\ p \end{array} \quad iS_0(p) = i \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2}$$

donde m es la masa del electrón y p su momento asociado. Para el **propagador del fotón**, definido en norma y dimensión arbitrarias, tenemos

$$\begin{array}{c} \mu \quad \text{~~~~~} \quad \nu \\ q \end{array} \quad -iD_0^{\mu\nu}(q) = \frac{i}{(4\pi)^{\varepsilon_e}} \frac{\Gamma(1 - \varepsilon_e)}{(-q^2)^{1-\varepsilon_e}} \left(g^{\mu\nu} - \tilde{\xi} \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right)$$

donde $\tilde{\xi} = \xi(1 - \varepsilon_e)$, y a su vez $\varepsilon_e = (d_\gamma - d_e)/2$. Por último, para el **vértice**

$$\begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{~~~~~} \\ \mu \end{array} \quad -ie\Gamma_0^\mu = -ie\gamma^\mu$$

donde el subíndice cero indica que estamos a nivel de árbol; es decir, dichas expresiones corresponden a los términos de orden cero en la respectiva expansión perturbativa en términos del acoplamiento electromagnético $\alpha = e^2/4\pi$.

Estos son los tres propagadores y vértices fundamentales en RQED [11]. A partir de ellos es posible construir una infinidad de diagramas de Feynman, que describen procesos de dispersión cada vez más complejos.

Estos diagramas de Feynman se combinan entre sí para construir amplitudes que representan procesos físicos, como la dispersión de partículas. Cada amplitud de dispersión puede expandirse en una serie perturbativa en potencias del acoplamiento electromagnético $\alpha = e^2/4\pi$, ya que cada vértice contiene un factor e . Dado que esta constante tiene un valor aproximado de $\alpha = 1/137$ en unidades naturales, mientras más vértices tenga un diagrama, mayor será la potencia de e y, por tanto, menor su contribución.

Por esta razón, para alcanzar un cierto nivel de precisión, suele bastar con considerar únicamente los diagramas de orden más bajo, es decir, los diagramas de primer o segundo orden. Esta es, en esencia, la idea central de una expansión perturbativa. Si el acoplamiento fuera mayor que uno, la expansión perturbativa dejaría de tener sentido físico.

SECCIÓN 2.2

Propagadores: discusión general

Los propagadores son funciones de Green, es decir, soluciones de la ecuación de movimiento de campos fermiónicos o de norma, que se utilizan para representar la contribución de las partículas virtuales que aparecen en las líneas internas de los diagramas de Feynman. Físicamente, en espacio de posiciones, describen la amplitud de probabilidad de que una partícula creada en un punto x del espacio-tiempo sea aniquilada en otro punto y . En las siguientes secciones se revisarán algunos aspectos formales de estas funciones de Green.

2.2.1 Propagador del fermión

Para un fermión libre de masa m y función de onda $\psi_0(x)$, dicha función satisface la ecuación de Dirac, la cual se expresa como

$$(i\cancel{\partial} - m)\psi_0(x) = 0. \quad (2.11)$$

En presencia de un campo electromagnético, la ecuación de Dirac se modifica mediante el acoplamiento mínimo, dando lugar a la siguiente forma:

$$(i\cancel{\partial} - m)\psi(x) = e\gamma^\mu A_\mu. \quad (2.12)$$

donde A_μ es el potencial electromagnético y e la carga eléctrica del fermión.

Podemos desarrollar una estrategia para resolver esta ecuación utilizando el método de la función de Green. Para ello, definimos la función de Green $G(x, y)$ a través de la siguiente ecuación:

$$(i\cancel{\partial} - m)G(x, y) = \delta^4(x - y). \quad (2.13)$$

La siguiente función de onda formalmente satisface la ecuación de Dirac en presencia de un campo electromagnético externo,

$$\psi(x) = \psi_0(x) - \int d^4y G(x, y) e\gamma^\mu A_\mu \psi(y). \quad (2.14)$$

donde $\psi_0(x)$ es la solución libre (o de campo externo nulo) de la ecuación de Dirac (2.11). Verificamos que $\psi(x)$ resuelve la ecuación de Dirac:

$$\begin{aligned} (i\cancel{\partial} - m)\psi(x) &= \int d^4y (i\cancel{\partial} - m)G(x, y) e\gamma^\mu A_\mu \psi(y) \\ &= \int d^4y \delta^4(x - y) e\gamma^\mu A_\mu \\ &= e\gamma^\mu A_\mu \psi(x). \end{aligned} \quad (2.15)$$

A continuación, transformamos $G(x, y)$ al espacio de momentos:

$$G(x, y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} S(p) e^{-ip \cdot (x-y)}. \quad (2.16)$$

Al sustituir esta expresión en la Ec. (2.13) y aplicar el operador $i\cancel{\partial}$, sobre el exponencial, es decir,

$$(i\cancel{\partial} - m)e^{-ip \cdot (x-y)} = (\cancel{p} - m)e^{-ip \cdot (x-y)}, \quad (2.17)$$

se obtiene la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} (\cancel{p} - m) S(p) e^{-ip \cdot (x-y)} &= \delta^4(x - y) \\ &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x-y)}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Al comparar ambos lados de la ecuación, se deduce que

$$S(p) = \frac{1}{\not{p} - m}, \quad (2.19)$$

correspondiendo al propagador de un fermión en el espacio de momentos. Multiplicando y dividiendo por $\not{p} + m$ podemos expresar la propagadora de la siguiente manera:

$$S(p) = \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2}. \quad (2.20)$$

Esta expresión representa el propagador del fermión a nivel de árbol en la teoría de perturbaciones.

2.2.2 Propagador del fotón

Formulamos las ecuaciones de Maxwell para el campo electromagnético, cuyos cuantos son los fotones (partículas de espín 1), en presencia de una corriente externa J^μ , de la siguiente manera:

$$\square^2 A^\mu - \partial^\mu (\partial_\nu A^\nu) = J^\mu, \quad (2.21)$$

en el cual $\square$ es el operador d'Alembertiano (también llamado operador de onda). En notación covariante se define como

$$\square = \partial_\mu \partial^\mu. \quad (2.22)$$

Al imponer la condición de Lorentz, $\partial_\nu A^\nu = 0$, la ecuación de movimiento para el fotón se reduce a

$$\square^2 A^\mu = J^\mu. \quad (2.23)$$

Podemos buscar una solución formal de la ecuación en términos de una función de Green $G(x, y)$, la cual satisface la siguiente ecuación:

$$\square^2 G(x, y) = \delta^4(x - y). \quad (2.24)$$

Podemos escribir la solución $A^\mu(x)$ de la ecuación de Maxwell en términos de la función de Green $G(x, y)$:

$$A^\mu(x) = \int d^4y G(x, y) J^\mu(y). \quad (2.25)$$

Ahora podemos comprobar esta solución de la ecuación de Maxwell:

$$\square^2 A^\mu = \int d^4y \square^2 G(x, y) J^\mu(y) = \int d^4y \delta^4(x - y) J^\mu(y) = J^\mu. \quad (2.26)$$

Una vez comprobada la solución, realizamos la transformada de Fourier de $G(x, y)$ al espacio de momentos:

$$G(x, y) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} D(q) e^{-iq \cdot (x-y)} \quad (2.27)$$

Para realizar esta transformación, lo más sencillo y directo es operar la expresión anterior con $\square^2$:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} D(q) \square^2 e^{-iq \cdot (x-y)} &= \delta^4(x-y) = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} e^{-iq \cdot (x-y)} \\ \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} D(q) (-q^2) e^{-iq \cdot (x-y)} &= \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} e^{-iq \cdot (x-y)}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

por lo tanto, podemos inferir que

$$D(q) = -\frac{1}{q^2}. \quad (2.29)$$

Esto permite definir de manera tensorial al propagador del fotón como

$$\Delta^{\mu\nu}(q) = g^{\mu\nu} D(q) = -\frac{g^{\mu\nu}}{q^2}, \quad (2.30)$$

al identificar la condición de Lorentz con la norma de Feynman $\xi = 1$. En una norma covariante arbitraria ξ , el propagador del fotón se escribe de la siguiente forma:

$$\Delta^{\mu\nu}(q) = -\frac{g^{\mu\nu}}{q^2} + (1 - \xi) \frac{q^\mu q^\nu}{q^4}, \quad (2.31)$$

donde se pueden tomar valores de $\xi = 1$ si hablamos de la norma de Feynman o $\xi = 0$ si se toma la norma Landau. Parte de la discusión en este capítulo ha sido adaptada de [47].

SECCIÓN 2.3

Electrodinámica cuántica reducida

En cuanto a la electrodinámica cuántica reducida, puede considerarse una formulación adaptada de la electrodinámica cuántica, en la que los campos de materia y de norma viven en espacios de diferente dimensionalidad. Describe la interacción de un campo de norma $U(1)$ abeliano que vive en d_γ dimensiones espacio-temporales con un campo fermiónico que vive en un espacio-tiempo reducido de dimensiones d_e , es decir, $d_e \leq d_\gamma$ [49]. Partimos de la formulación de la electrodinámica cuántica reducida mediante su densidad lagrangiana.

$$S_{RQED} = \int d^{d_\gamma} x \mathcal{L}_{RQED}. \quad (2.32)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{RQED} = & -\frac{1}{4}F_{\mu\gamma\nu\gamma}F^{\mu\gamma\nu\gamma} - \frac{1}{2\xi}(\partial_{\mu\gamma}A^{\mu\gamma})^2 \\ & + \bar{\psi}(i\gamma^{\mu_e}\partial_{\mu_e} - m)\psi - e\bar{\psi}\gamma^{\mu_e}\psi A_{\mu_e}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Se limitan a los electrones a moverse en un plano definido por $\delta^{(d_\gamma-d_e)}(x)$.

La corriente fermión-fotón: Esto se logra proyectando la corriente fermión-fotón $J^\mu(x)\delta^{(d_\gamma-d_e)}(x)$ de modo que se mueva únicamente dentro de dicho plano, como se describe a continuación [50]:

$$J^\mu(x) = \begin{cases} J^\mu(x)\delta^{(d_\gamma-d_e)}(x) & \text{si } \mu = \mu_e, \\ 0 & \text{si } \mu = d_e - 1, d_e, \dots, d_\gamma - 1. \end{cases}$$

Podemos ver dos tipos de índices, pero considerando al tiempo como el índice cero. El primero son los índices de materia: $\mu_e = 0, 1, \dots, d_e - 1$. Y los segundos son los índices de norma: $\mu_\gamma = 0, 1, \dots, d_e - 1, d_e, \dots, d_\gamma - 1$, relacionados con el campo A_μ . Aquí asumimos que $d_\gamma \geq d_e$, y que el campo de gauge en el término de interacción se evalúa en $A_\mu(x_0, \dots, x_{d_e}, 0, \dots, 0)$.

Propagador del fotón en RQED: Recordemos que en la electrodinámica cuántica reducida, el electrón vive en un plano o espacio-tiempo d_e y el fotón en d_γ -dimensiones. Por tanto, en la regularización dimensional, tenemos $d_\gamma > d_e$. En el espacio de momento, el propagador usual del fotón $D_{\mu\nu}$ [9, 51] adopta la forma

$$D_{\mu\nu}(p) = -\frac{i}{p^2} \left(g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) + \xi \frac{p_\mu p_\nu}{p^4}. \quad (2.34)$$

La primera parte es la transversal, mientras que la segunda es la longitudinal. En la norma de Landau, $\xi = 0$, la parte longitudinal es cero.

En el espacio de menor dimensionalidad d_e , correspondiente a la QED reducida, el propagador se modifica y puede expresarse como:

$$D_{\mu_e\nu_e}(p) = D(p^2) \left(g_{\mu_e\nu_e} - \frac{p_{\mu_e} p_{\nu_e}}{p^2} \right) + \tilde{\xi} D(p^2) \frac{p_{\mu_e} p_{\nu_e}}{p^2}, \quad (2.35)$$

donde

$$D(p^2) = \frac{i}{(4\pi)^{\varepsilon_e}} \frac{\Gamma(1 - \varepsilon_e)}{(-p^2)^{1 - \varepsilon_e}}, \quad (2.36)$$

con $\varepsilon_e = (d_\gamma - d_e)/2$ y $\tilde{\xi} = (1 - \varepsilon_e)\xi$.

Dejaremos la discusión del **propagador del fermión** en RQED para los capítulos dedicados a las transformaciones LKF y sus aplicaciones en la QED y, en particular, en la RQED.

La motivación para la formulación de la QED reducida es bastante evidente. Dado que los fermiones cargados se encuentran en espacios de menor dimensionalidad, resulta lógico y, además, más práctico describir su interacción mediante una teoría de norma en dimensiones reducidas. La QED reducida puede aplicarse al estudio del grafeno, de las superficies de aislantes topológicos, de sistemas artificiales análogos al grafeno y de otros materiales similares [52, 53].

Capítulo 3

Transformaciones de Landau-Khalatnikov-Fradkin

Las transformaciones de Landau-Khalatnikov-Fradkin (LKF) [18, 13] en QED constituyen un conjunto de relaciones que permiten conectar una función de Green en una norma covariante con su correspondiente en otra norma covariante. En QED existen tres funciones de Green fundamentales: los propagadores de fermión y fotón (funciones de dos puntos) y el vértice de interacción fermión-fotón (función de tres puntos). Cada una de estas funciones posee su propia transformación LKF. Es importante destacar que las transformaciones LKF siguen siendo válidas en la electrodinámica cuántica reducida, aunque en este caso las integrales se adaptan a la dimensión reducida en la que se permite a los electrones propagarse. Además, es importante señalar lo siguiente:

1. Estas transformaciones son expresiones cerradas y no perturbativas. Esto significa que su derivación es independiente de si la constante de acoplamiento es pequeña o grande. Por lo tanto, estas transformaciones pueden aplicarse tanto a funciones de Green perturbativas como no perturbativas.
2. Una vez que obtenemos la expresión transformada en una forma cerrada y no perturbativa, podemos optar por expandirla hasta cualquier orden de aproximación en la expansión perturbativa para compararla con los resultados disponibles en la literatura, obtenidos mediante la evaluación de los diagramas de Feynman correspondientes.
3. Estas transformaciones también pueden aplicarse a funciones de Green puramente no perturbativas, que no pueden ser expandidas en teoría de perturbaciones,

como las soluciones del propagador de fermión obtenidas a través del rompimiento dinámico de la simetría quiral.

SECCIÓN 3.1

Transformaciones LKF

En este trabajo nos concentraremos únicamente en la función de Green del fermión (en el espacio de coordenadas) o, de manera equivalente, en el propagador del fermión (en el espacio de momentos). Anteriormente, utilizamos la notación $G(x, y)$ para representar la función de Green de dos puntos de forma genérica. En el caso de los fermiones, adoptaremos la notación $S(x_1, x_2)$ o simplemente $S(x = x_2 - x_1)$. Además, como estudiaremos la dependencia con respecto al parámetro de norma covariante ξ , incluimos explícitamente dicha dependencia en la notación: $S(x; \xi)$. Bajo la transformación local de norma en Eq. (2.2), la función de Green del fermión cargado se transforma de la siguiente manera:

$$S(x; \xi) = S(x; \xi_0) e^{ie^2[\Delta_d(0) - \Delta_d(x)]}. \quad (3.1)$$

En esta expresión, nótese lo siguiente:

- El subíndice d indica las dimensiones del espacio-tiempo que se están considerando.
- $S(x; \xi_0)$ es la función de Green del fermión cargado en una norma inicial o de partida ξ_0 . Cabe destacar que esta función constituye la entrada para las transformaciones LKF. Puede obtenerse a partir de un cálculo perturbativo a cierto orden, o bien ser una solución generada dinámicamente en la norma inicial ξ_0 .
- El factor exponencial es el factor de transformación que contiene la carga electromagnética e . Es precisamente debido a este factor que las transformaciones son de naturaleza no perturbativa. Este exponencial puede expandirse en una serie perturbativa en potencias de e^2 pero dicha expansión pierde validez si $\alpha = e^2/(4\pi) > 1$. Por lo tanto, dependiendo del valor numérico de α , es posible extraer de estas transformaciones tanto información perturbativa como no perturbativa.
- $S(x; \xi)$ es la función de Green del fermión en la norma final ξ . Aunque las transformaciones en sí mismas son exactas, nunca podemos obtener una forma completa de $S(x; \xi)$ ya que la información inicial de $S(x; \xi_0)$ siempre es incompleta. En otras palabras, nunca conocemos de manera exacta la función de Green completa de un fermión en una norma particular desde el inicio.

- Estas transformaciones están disponibles en esta forma cerrada en el espacio de coordenadas. Sin embargo, la mayoría de los cálculos en una teoría cuántica de campos (QFT) se realizan en el espacio de momentos. Realizar las transformadas de Fourier de un espacio al otro no siempre resulta sencillo.

SECCIÓN 3.2

Herramientas y notación

Consideramos la estructura general del propagador del fermión de Dirac, en el espacio de momento, de la siguiente manera [30]

$$S(p; \xi) = A(p; \xi) + i \frac{B(p; \xi)}{\not{p}} = \frac{F(p; \xi)}{i\not{p} - \mathcal{M}(p; \xi)}, \quad (3.2)$$

donde $F(p; \xi)$ es la renormalización de la función de onda, $\mathcal{M}(p; \xi)$ es la función de masa del fermión y ξ es el parámetro de norma. Notemos que se ha incluido una dependencia sobre ξ porque precisamente queremos ver el propagador en diferentes normas covariantes. Nótese que este propagador depende de dos funciones debido a la naturaleza de espín 1/2 del fermión. Sin embargo, si los fermiones fueran sin masa, estaría descrito únicamente por una sola función,

$$S(p; \xi) = i \frac{B(p; \xi)}{\not{p}} = \frac{F(p; \xi)}{i\not{p}}. \quad (3.3)$$

De manera semejante, en el espacio de coordenadas, $S(x; \xi)$ puede escribirse como

$$S(x; \xi) = \not{x} X(x; \xi) + Y(x; \xi). \quad (3.4)$$

Nuevamente, para el caso de fermiones sin masa, esta expresión se convierte en:

$$S(x; \xi) = \not{x} X(x; \xi). \quad (3.5)$$

Podemos relacionar las expresiones en dos espacios mediante las transformadas de Fourier de la siguiente manera:

$$S(p; \xi) = \int d^d x e^{ip \cdot x} S(x; \xi), \quad (3.6)$$

$$S(x; \xi) = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} e^{-ip \cdot x} S(p; \xi). \quad (3.7)$$

Podemos reescribir la expresión de las transformaciones LKF absorbiendo el factor e^2 en la definición de la función Δ . Además, si elegimos la norma inicial como la de Landau, $\xi = 0$ (por ejemplo), podemos escribir:

$$S(x; \xi) = S(x; 0) e^{-i[\Delta_d(0) - \Delta_d(x)]}, \quad (3.8)$$

donde

$$\Delta_d(x) = -i\xi e^2 \mu^{4-d} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{e^{-ip \cdot x}}{p^4}, \quad (3.9)$$

en donde e representa el acoplamiento electromagnético y μ simboliza el factor de escala de la masa para que e resulte adimensional para cada d .

Considerando a θ como el ángulo formado entre p y x , e integrando sobre los $(d-2)$ ángulos restantes, es conveniente realizar un cambio coordenadas cartesianas a coordenadas esféricas:

$$d^d p = p^{d-1} dp \sin^{d-2}(\theta) d\theta \Omega_{d-2}, \quad (3.10)$$

donde el ángulo sólido es:

$$\Omega_{d-2} = \frac{2\pi^{(d-1)/2}}{\Gamma((d-1)/2)}. \quad (3.11)$$

Por lo tanto:

$$\Delta_d(x) = -i\xi e^2 \mu^{4-d} \frac{\Omega_{d-2}}{(2\pi)^d} \int_0^\infty dp p^{d-5} \int_0^\pi d\theta \sin^{d-2}(\theta) e^{-ipx \cos \theta} \quad (3.12)$$

Resolviendo la integral, llegamos a la siguiente expresión [30]:

$$\Delta_d(x) = -\frac{i\xi e^2}{16(\pi)^{d/2}} (\mu x)^{4-d} \Gamma\left(\frac{d}{2} - 2\right), \quad (3.13)$$

donde $\Gamma(z)$ es la función Gamma de Euler.

SECCIÓN 3.3

La estrategia

La estrategia para utilizar la transformación LKF consiste en los siguientes pasos:

- Partimos del conocimiento del propagador del fermión en la norma inicial, por ejemplo, la norma de Landau $\xi_0 = 0$ o $\xi_0 = 1/3$ en el caso de RQED. Si consideramos únicamente el propagador de fermión a nivel de árbol, es decir, el orden

más bajo en teoría de perturbaciones, podemos escribir

$$F(p; \xi_0) = 1, \quad (3.14)$$

$$\mathcal{M}(p; \xi_0) = m. \quad (3.15)$$

Esto constituye $S(p; \xi_0)$. Nótese que podemos alcanzar niveles mayores de sofisticación si partimos de un propagador a un loop, dos loops o a órdenes superiores.

- Luego realizamos la transformada de Fourier de esta entrada al espacio de coordenadas Eq. (3.7), obteniendo $S(x; \xi_0)$.
- A continuación, aplicamos las transformaciones LKF para obtener $S(x; \xi)$ en la norma arbitraria ξ .
- Finalmente, transformamos el resultado final de vuelta al espacio de momentos para obtener $S(p; \xi)$. Esto completa la estrategia computacional.

Al final, obtenemos la expresión no perturbativa del propagador del fermión en una norma covariante arbitraria, partiendo de su expresión en la norma inicial seleccionada, en nuestro caso $\xi_0 = 1/3$. Si existen resultados perturbativos disponibles en la literatura, podemos expandir nuestro resultado en potencias de α hasta el orden deseado y realizar las comparaciones correspondientes.

Teniendo estos pasos en consideración, el próximo paso es determinar el resultado para el propagador del fermión tras la aplicación de las transformaciones LKF en RQED. A pesar de que las transformaciones LKF no han sido ampliamente exploradas en lo que respecta a las teorías de norma, como en el caso de las identidades de WFGT, existen varias referencias accesibles en la actualidad para QED: QED2 [25], QED3 [26, 27, 28, 29, 30], QED4 o QED [30, 31, 32, 33, 34], QEDd [35, 36], QED escalar [37, 38, 39, 40] y RQED [24, 41, 42], en la teoría de perturbaciones así como en el dominio no perturbativo de la QED. De hecho, su estudio ya se ha realizado antes en RQED en [41, 54] para el caso de fermiones sin masa.

Capítulo 4

Aplicación de las transformaciones LKF en RQED

Dedicamos este capítulo a las transformaciones LKF y a su aplicación en la QED reducida. Comenzamos el capítulo con una breve discusión sobre el propagador del fermión en la QED reducida.

SECCIÓN 4.1

La transformación LKF para fermiones en RQED

La transformación LKF para fermiones en el espacio de configuraciones quedaría como

$$S(x; \xi) = S(x; \xi_0) e^{-i[\tilde{\Delta}_{d_e}(0; \varepsilon_e) - \tilde{\Delta}_{d_e}(x; \varepsilon_e)]}. \quad (4.1)$$

Si observamos la Eq. (3.8), redefinimos la dimensión — ahora d_e — para denotar que estamos en RQED. Y además

$$\tilde{\Delta}_{d_e}(x; \varepsilon_e) = -i f(\varepsilon_e) (\xi - \xi_0) e^2 \mu^{4-d_e} \int \frac{d^{d_e} q}{(2\pi)^{d_e}} \frac{e^{-iq \cdot x}}{q^{4-2\varepsilon_e}}, \quad (4.2)$$

y a su vez

$$f(\varepsilon_e) = \Gamma(2 - \varepsilon_e) / (4\pi)^{\varepsilon_e}. \quad (4.3)$$

Sabemos que, en el espacio euclidiano, al realizar el cambio de variable indicado en la Ec. (3.10) e incorporar el ángulo sólido definido en la Ec. (3.11), obtenemos:

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}_{d_e}(x; \varepsilon_e) &= -if(\varepsilon_e)(\xi - \xi_0)e^2\mu^{4-d_\gamma}\frac{1}{(2\pi)^{d_e}}\frac{2\pi^{(d_e-1)/2}}{\Gamma\left(\frac{d_e-1}{2}\right)} \\ &\quad \times 2^{-5+d_e+2\varepsilon_e}\sqrt{\pi}(x)^{4-d_e-2\varepsilon_e}\frac{\Gamma\left(\frac{d_e-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d_e-4+2\varepsilon_e}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{4-2\varepsilon_e}{2}\right)} \\ &= -if(\varepsilon_e)(\xi - \xi_0)e^2\frac{\Gamma\left(\frac{d_e-a}{2}\right)}{2^a\pi^{d_e/2}\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)}(\mu x)^{a-d_e},\end{aligned}\quad (4.4)$$

donde $a = 4 - 2\varepsilon_e$ y $d_\gamma = 2\varepsilon_e + d_e$. Al particularizar al caso de la QED reducida (RQED), consideremos como ejemplo el grafeno. En este sistema, los electrones se propagan en $d_e = 3$ dimensiones, mientras que los fotones lo hacen en $d_\gamma = 4$. Recordando también que se cumple $\varepsilon_e = \frac{d_\gamma - d_e}{2}$. Observamos que el argumento de la función Gamma en el numerador es:

$$\frac{d_e - a}{2} = \frac{3 - (4 - 2\varepsilon_e)}{2} = -\frac{1}{2} + \varepsilon_e. \quad (4.5)$$

Para el caso de interés físico que estudiamos, es decir, $d_\gamma - d_e = 1$ o $\varepsilon_e = 1/2$, tenemos una divergencia en

$$\Gamma\left(\frac{d_e - a}{2}\right) = \Gamma(0)! \quad (4.6)$$

Con el fin de aislar y controlar dicha divergencia, introducimos el parámetro de regularización ε , definida como $\varepsilon = \varepsilon_e - 1/2$, de tal manera que $\varepsilon \rightarrow 0$.

$$\tilde{\Delta}_3(x; \varepsilon) = -if(\varepsilon)(\xi - \xi_0)e^2\frac{\Gamma(\varepsilon)}{2^{3-2\varepsilon}\pi^{3/2}\Gamma\left(\frac{3}{2} - \varepsilon\right)}(\mu x)^{-2\varepsilon}, \quad (4.7)$$

donde la función $f(\varepsilon_e)$ se puede escribir o redefinir en términos de ε :

$$f(\varepsilon) = \Gamma(3/2 - \varepsilon) / (4\pi)^{\varepsilon+1/2}, \quad (4.8)$$

de modo que el argumento de la función Gamma se escribe simplemente como $\Gamma(\varepsilon)$. Esta redefinición permite realizar una expansión sistemática alrededor del límite de interés $\varepsilon \rightarrow 0$, donde la función Gamma presenta un polo simple. En este límite, las funciones involucradas se desarrollan utilizando una expansión de Taylor alrededor de $\varepsilon = 0$ como

$$\begin{aligned}\Gamma(\varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \frac{1}{12}(6\gamma_E^2 + \pi^2)\varepsilon + O(\varepsilon^2), \\ (\mu x)^{-2\varepsilon} &= 1 - 2\varepsilon \ln(\mu x) + O(\varepsilon^2), \\ (4\pi)^{\varepsilon+1/2} &= 2\sqrt{\pi} + 2\sqrt{\pi}\varepsilon \ln(4\pi) + O(\varepsilon^2),\end{aligned}\quad (4.9)$$

siendo γ_E la constante de Euler-Mascheroni. Sustituyendo estas expresiones en la Ec. (4.4) obtenemos:

$$\tilde{\Delta}_3(x; \varepsilon) = -i \frac{(\xi - \xi_0) \alpha}{4\pi} \left(\frac{1}{\varepsilon} - \ln(\pi) - \gamma_E - 2 \ln(\mu x) + \mathcal{O}(\varepsilon) \right). \quad (4.10)$$

Como la Ec. (4.10) no puede evaluarse para $x \rightarrow 0$, introducimos el parámetro de regularización adicional $x_{\min}$:

$$\tilde{\Delta}_3(x_{\min}; \varepsilon) = -i \frac{(\xi - \xi_0) \alpha}{4\pi} \left(\frac{1}{\varepsilon} - \ln(\pi) - \gamma_E - 2 \ln(\mu x_{\min}) + \mathcal{O}(\varepsilon) \right). \quad (4.11)$$

La diferencia entre estas dos últimas sería

$$-i \left[\tilde{\Delta}_3(x_{\min}; \varepsilon) - \tilde{\Delta}_3(x; \varepsilon) \right] = \ln \left(\frac{x}{x_{\min}} \right)^{-2\nu}. \quad (4.12)$$

donde $\nu \equiv \alpha(\xi - \xi_0)/4\pi$ y a su vez la constante de estructura fina es $\alpha = e^2/(4\pi)$. Teniendo la Ec. (4.12) a nuestra disposición, podemos calcular el propagador del fermión en QED reducida para cualquier norma arbitraria.

SECCIÓN 4.2

Caso de fermiones sin masa en RQED

Empezamos con el caso del fermión sin masa. Para este caso, solo existe una estructura de Dirac, mientras que la otra se anula para cualquier norma covariante estrictamente:

$$\begin{aligned} Y(x; \xi) &= 0, \\ \mathcal{M}(x; \xi) &= 0. \end{aligned}$$

En consecuencia, de las Ecs. (4.36) y (3.4) se obtiene que el propagador del fermión en los espacios de momento y coordenadas adopta la siguiente forma:

$$S(p; \xi) = \frac{F(p; \xi)}{i\not{p}}, \quad (4.13)$$

$$S(x; \xi) = \not{x} X(x; \xi). \quad (4.14)$$

Suponemos que, en una norma inicial $\xi = \xi_0$, se cumple que $F(p; \xi_0) = 1$. Para QED₄, la elección más adecuada de la norma inicial es $\xi_0 = 0$, correspondiente a la norma de

Landau, debido al hecho de que, en la teoría de perturbaciones, bajo la aproximación de logaritmos dominantes:

$$F(p; \xi) = 1 + \frac{\alpha\xi}{4\pi} \ln \frac{p^2}{\mu^2} + \mathcal{O}(\alpha^2), \quad (4.15)$$

lo que implica que nuestra aproximación es válida hasta el orden $\mathcal{O}(\alpha)$. Sin embargo, para RQED, la elección más adecuada es $\xi_0 = 1/3$ [42], debido a que:

$$F(p; \xi) = 1 + \frac{\alpha(\xi - 1/3)}{4\pi} \ln \frac{p^2}{\mu^2} + \mathcal{O}(\alpha^2). \quad (4.16)$$

Por razones de generalidad, continuaremos utilizando la notación ξ_0 . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} X(x; \xi_0) &= \frac{1}{\not{x}} S(x; \xi_0) \\ &= \frac{1}{\not{x}} \int \frac{d^{d_e} p}{(2\pi)^{d_e}} e^{-ip \cdot x} S(p, \xi_0) \\ &= -\frac{i}{x^2} \int \frac{d^{d_e} p}{(2\pi)^{d_e}} e^{-ip \cdot x} \frac{p \cdot x}{p^2} \\ &= -\frac{i}{x^2 (2\pi)^{d_e}} \int_0^\infty d^{d_e} p \int_0^\pi d\theta p^{d_e-1} \sin^{d_e-2}(\theta) \Omega_{d_e-2} e^{-ipx \cos \theta} \frac{px \cos \theta}{p^2}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Las integrales se resuelven empleando las Ecs. (A.1), (A.2) y (A.3), lo que conduce a:

$$X(x; \xi_0) = -\frac{1}{4\pi x^3}, \quad (4.18)$$

sin olvidarnos que nos encontramos en $d_e = 3$ dimensiones. Así que

$$X(x; \xi) = X(x; \xi_0) e^{\ln(x/x_{\min})^{-2\nu}} = -\frac{x_{\min}^{2\nu}}{4\pi} x^{-2\nu-3}. \quad (4.19)$$

donde $\nu \equiv (\xi - \xi_0)\alpha/4\pi$. Así, la renormalización de la función de onda se convierte en

$$\begin{aligned} -iF(p; \xi) &= \int d^3 x (p \cdot x) e^{ip \cdot x} X(x; \xi) \\ &= 2\pi p \int_0^\infty dx \int_0^\pi d\theta x^3 \sin \theta \cos \theta e^{ipx \cos \theta} \left(-\frac{x_{\min}^{2\nu}}{4\pi} x^{-2\nu-3} \right) \\ &= -p \frac{x_{\min}^{2\nu}}{2} \int_0^\infty dx x^{-2\nu} i\sqrt{\pi} \left(\frac{2}{px} \right)^{1/2} J_{3/2}(px), \end{aligned} \quad (4.20)$$

y haciendo uso de la Ec. (A.5), se obtiene

$$\begin{aligned}
 F(p; \xi) &= \frac{x_{\min}^{2\nu}}{\sqrt{2}} p^{2\nu} \sqrt{\pi} \int_0^\infty d(px) (px)^{-2\nu-\frac{1}{2}} J_{3/2}(px) \\
 &= \frac{x_{\min}^{2\nu}}{\sqrt{2}} p^{2\nu} \sqrt{\pi} 2^{-2\nu-1/2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(1-2\nu-1/2+3/2)\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(1+2\nu+1/2+3/2)\right)} \\
 &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(1-\nu)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+\nu\right)} \left(\frac{px_{\min}}{2}\right)^{2\nu}.
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

Nuevamente, hacemos uso de la Ec. (A.6) para obtener el resultado y, al fijar $x_{\min} = 2/\Lambda$, se tiene:

$$F(p; \xi) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(1-\nu)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+\nu\right)} \left(\frac{p}{\Lambda}\right)^{2\nu}. \tag{4.22}$$

Este es el resultado para el propagador de fermiones sin masa transformado de norma en la RQED. Para entrar más a detalle ver Ref. [55].

SECCIÓN 4.3

Caso de fermiones masivos en RQED

Aunque el estudio de las transformaciones de Landau–Khalatnikov–Fradkin en la electrodinámica cuántica reducida sin masa revela las implicaciones de la invariancia de norma y pone de manifiesto ciertas restricciones perturbativas, resulta natural extender este análisis al caso con masa fermiónica, con el fin de considerar escenarios realistas y aplicaciones a sistemas físicos que contienen fermiones masivos.

En sistemas materiales bidimensionales, como el grafeno, la masa del electrón modifica sus propiedades eléctricas y magnéticas, así como su comportamiento bajo la aplicación de campos externos. Desde una perspectiva formal, la introducción de una escala de masa puede regularizar divergencias infrarrojas, enriqueciendo y generalizando el análisis, y permitiendo explorar las implicaciones de las transformaciones de norma sobre la estructura escalar adicional que aparece en el propagador de fermiones masivos. En este trabajo, generalizamos las transformaciones LKF al caso masivo, examinando cómo la presencia de masa generaliza la forma funcional de la transformación de norma para el propagador.

Nuevamente, iniciamos suponiendo que en una norma inicial $\xi = \xi_0$,

$$S(p; \xi_0) = \frac{F(p; \xi_0)}{i\not{p} - \mathcal{M}(p; \xi_0)} = \frac{1}{i\not{p} - m}, \quad (4.23)$$

Esto es decir que asumimos que, en la norma inicial ξ_0 , el propagador del fermión corresponde al propagador desnudo, es decir,

$$\begin{aligned} F(p; \xi_0) &= 1 \\ \mathcal{M}(p; \xi_0) &= m. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$X(x; \xi_0) = \frac{1}{\not{x}} S(x; \xi_0) = -\frac{i}{x^2} \int \frac{d^{d_e} p}{(2\pi)^{d_e}} e^{-ip \cdot x} \left(\frac{x \cdot p}{p^2 + m^2} \right). \quad (4.24)$$

Concretamente, para el caso $d_e = 3$, y utilizando las soluciones de las integrales presentadas en el Apéndice, la expresión se transforma en:

$$\begin{aligned} X(x; \xi_0) &= -\frac{i}{x^2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{-ip \cdot x} \left(\frac{x \cdot p}{p^2 + m^2} \right) \\ &= -\frac{i}{x} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dp \frac{p^3}{p^2 + m^2} \int_0^\pi d\theta \sin \theta \cos \theta e^{-ipx \cos \theta} \\ &= \frac{2}{x} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dp \frac{p^3}{p^2 + m^2} \left(\frac{\cos px}{px} - \frac{\sin px}{(px)^2} \right) \\ &= -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{1 + mx}{x^3} \right) e^{-mx}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

De igual forma,

$$Y(x, \xi_0) = -m \int \frac{d^{d_e} p}{(2\pi)^{d_e}} e^{-ip \cdot x} \left(\frac{1}{p^2 + m^2} \right).$$

Procediendo con la sustitución $d_e = 3$ y utilizando las fórmulas correspondientes del Apéndice, se obtiene:

$$\begin{aligned} Y(x, \xi_0) &= -m \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{-ip \cdot x} \left(\frac{1}{p^2 + m^2} \right) \\ &= -\frac{m}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dp \frac{p^2}{p^2 + m^2} \int_0^\pi d\theta \sin \theta e^{-ipx \cos \theta} \\ &= -\frac{m}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dp \frac{p^2}{p^2 + m^2} \left(\frac{2 \sin px}{px} \right) \\ &= -\frac{m}{4\pi x} e^{-mx}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Por lo tanto, el propagador fermiónico masivo inicial —el propagador desnudo— en la norma ξ_0 , expresado en el espacio de coordenadas, es:

$$\begin{aligned} S(x; \xi_0) &= \not{x} X(x; \xi_0) + Y(x; \xi_0) , \\ &= -\not{x} \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1+mx}{x^3} \right) e^{-mx} - \frac{m}{4\pi x} e^{-mx} . \end{aligned} \quad (4.27)$$

Podemos ahora aplicar las transformaciones de norma LKF, dadas en las Ec. (4.11) y (4.12), para obtener el propagador fermiónico, en el espacio de coordenadas, en una norma arbitraria ξ , partiendo de su expresión en la norma inicial $\xi = \xi_0$, de la siguiente manera:

$$S(x; \xi) = \left[-\not{x} \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1+mx}{x^3} \right) e^{-mx} - \frac{m}{4\pi x} e^{-mx} \right] \left(\frac{x}{x_{\min}} \right)^{-2\nu} , \quad (4.28)$$

donde, como antes, $\nu = \alpha(\xi - \xi_0)/(4\pi)$. Nuevamente, escribimos de manera individual, expresiones de las funciones vectorial y escalar transformadas por las transformaciones de norma LKF, $X(x; \xi)$ y $Y(x; \xi)$, que definen el propagador fermiónico $S(x; \xi)$:

$$X(x; \xi) = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{1+mx}{x^3} \right) e^{-mx} \left(\frac{x}{x_{\min}} \right)^{-2\nu} , \quad (4.29)$$

$$Y(x; \xi) = -\frac{m}{4\pi x} e^{-mx} \left(\frac{x}{x_{\min}} \right)^{-2\nu} . \quad (4.30)$$

Con el fin de obtener la expresión del propagador en el espacio de momento, procedemos a efectuar la transformada de Fourier inversa correspondiente.

$$A(p; \xi) = \int d^3x e^{ip \cdot x} Y(x; \xi) , \quad (4.31)$$

$$iB(p; \xi) = \int d^3x e^{ip \cdot x} (p \cdot x) X(x; \xi) . \quad (4.32)$$

A continuación, se lleva a cabo la evaluación de la integral multidimensional necesaria para determinar la función $A(p; \xi)$, haciendo uso de la ecuación (4.30).

$$\begin{aligned} A(p; \xi) &= - \int d^3x e^{ip \cdot x} \frac{m}{4\pi x} e^{-mx} \left(\frac{x}{x_{\min}} \right)^{-2\nu} , \\ &= -\frac{m}{2x_{\min}^{-2\nu}} \int_0^\infty dx x^{1-2\nu} e^{-mx} \int_0^\pi d\theta \sin \theta e^{ipx \cos \theta} , \\ &= -\frac{m}{2x_{\min}^{-2\nu}} \int_0^\infty dx x^{1-2\nu} e^{-mx} 2 \frac{\sin px}{px} , \\ &= -\frac{m}{px_{\min}^{-2\nu}} \int_0^\infty x^{-2\nu} e^{-mx} \sin px dx , \\ &= \frac{(mx_{\min})^{2\nu}}{p} \frac{\Gamma(2-2\nu)}{(2\nu-1)} \left(1 + \frac{p^2}{m^2} \right)^{\nu-\frac{1}{2}} \sin \left[(1-2\nu) \tan^{-1} \frac{p}{m} \right] . \end{aligned} \quad (4.33)$$

De manera análoga, la función $B(p, \xi)$ puede determinarse utilizando la Ec. (4.29), siguiendo un procedimiento semejante al aplicado para $A(p, \xi)$:

$$\begin{aligned}
 iB(p; \xi) &= - \int d^3x e^{ipx \cos \theta} (px \cos \theta) \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1+mx}{x^3} \right) e^{-mx} \left(\frac{x}{x_{\min}} \right)^{-2\nu}, \\
 &= -\frac{p}{2} \int_0^\infty dx (1+mx) e^{-mx} \left(\frac{x}{x_{\min}} \right)^{-2\nu} \int_0^\pi d\theta \sin \theta \cos \theta e^{ipx \cos \theta}, \\
 &= -\frac{p}{2} \int_0^\infty dx (1+mx) e^{-mx} \left(\frac{x}{x_{\min}} \right)^{-2\nu} \left[-2i \left(\frac{\cos px}{px} - \frac{\sin px}{(px)^2} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{px_{\min}^{-2\nu}} \int_0^\infty dx (1+mx) e^{-mx} x^{-2\nu-2} (px \cos px - \sin px), \tag{4.34}
 \end{aligned}$$

donde ya hemos realizado la integración angular. A continuación, podemos efectuar la integración radial para obtener una expresión final cerrada:

$$\begin{aligned}
 B(p; \xi) &= -\frac{1}{mp} (mx_{\min})^{2\nu} \Gamma(-2\nu-1) \left(1 + \frac{p^2}{m^2} \right)^{\nu-\frac{1}{2}} \\
 &\quad \left[(2\nu+1) m^2 \sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2}} \sin \left(2\nu \tan^{-1} \left(\frac{p}{m} \right) \right) \right. \\
 &\quad \left. + m^2 \left\{ \left(1 + 2\nu \frac{p^2}{m^2} \right) \sin \left((1-2\nu) \tan^{-1} \left(\frac{p}{m} \right) \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - (4\nu^2+1) \frac{p}{m} \cos \left((1-2\nu) \tan^{-1} \left(\frac{p}{m} \right) \right) \right\} \right]. \tag{4.35}
 \end{aligned}$$

Las expresiones no perturbativas (4.33) y (4.35) para las funciones transformadas de norma $A(p; \xi)$ y $B(p; \xi)$, las cuales constituyen el propagador fermiónico

$$S(p; \xi) = A(p; \xi) + i \frac{B(p; \xi)}{\not{p}},$$

representan dos resultados principales de esta tesis. Estas expresiones son no perturbativas en el sentido de que resumen los resultados de una serie perturbativa infinita en términos de leyes de potencia o funciones trigonométricas del acoplamiento α .

Para problemas más prácticos y de interés fenomenológico, la función de masa $\mathcal{M}(p; \xi)$ resulta más relevante. Esta puede reconstruirse fácilmente a partir de las funciones $A(p; \xi)$ y $B(p; \xi)$ de la siguiente manera:

$$\mathcal{M}(p; \xi) = \frac{p^2 A(p; \xi)}{B(p; \xi)}. \tag{4.36}$$

De manera similar, podemos construir una expresión cerrada no perturbativa para la renormalización de la función de onda $F(p; \xi)$ a partir de la relación que derivamos previamente:

$$F(p; \xi) = -B(p; \xi) - \mathcal{M}(p; \xi) A(p; \xi). \tag{4.37}$$

Podemos ahora centrarnos en la expansión de estos resultados generales como una serie perturbativa en el régimen de acoplamiento débil, un régimen que es más común dentro del dominio de aplicación de la electrodinámica.

4.3.1 Expansión perturbativa para $p^2 \ll m^2$

Cuando el acoplamiento α es suficientemente pequeño, es decir, $\alpha \ll 1$, podemos realizar su expansión perturbativa hasta el orden que se desee. La expansión de los términos al orden ν^2 y en el orden principal de p^2/m^2 puede expresarse como:

$$\begin{aligned} (mx_{\min})^{2\nu} &= 1 + 2\nu \log(mx_{\min}) + 2\nu^2 \log^2(mx_{\min}) , \\ \left(1 + \frac{p^2}{m^2}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} &= 1 + \left(\nu - \frac{1}{2}\right) \frac{p^2}{m^2} , \\ \frac{\Gamma(2-2\nu)}{(2\nu-1)} &= -1 - 2\gamma_E \nu + \frac{1}{3}(-6\gamma_E^2 - \pi^2) \nu^2 , \\ \sin\left((1-2\nu) \tan^{-1} \frac{p}{m}\right) &= (1-2\nu) \frac{p}{m} . \end{aligned} \quad (4.38)$$

En orden principal en p^2/m^2 , el resultado es:

$$\mathcal{M}(p; \xi) = \frac{m\Gamma(2-2\nu)}{\Gamma(-2\nu-1)} \left[\frac{3}{2\nu(8\nu^3 - 12\nu^2 - 2\nu + 3)} - \frac{p^2}{m^2} \frac{2(\nu-1)}{5(2\nu-1)(4\nu^2 - 4\nu - 3)} \right] . \quad (4.39)$$

Podemos expandirla hasta el orden $\mathcal{O}(\alpha^2)$, lo que significa $\mathcal{O}(\nu^2)$, obteniendo:

$$\mathcal{M}(p; \xi) = m \left(1 + \frac{2}{3}\nu \left(1 + \frac{2}{5} \frac{p^2}{m^2} \right) + \frac{4}{9}\nu^2 \left(1 - \frac{1}{5} \frac{p^2}{m^2} \right) + \mathcal{O}(\nu^3) \right) . \quad (4.40)$$

Nótese que este es el límite de masa grande, $p^2 \ll m^2$, el cual resulta fácil de calcular. A partir de esta expresión, no es posible recuperar el límite de masa nula.

De manera análoga, procedemos a expandir la función $F(p; \xi)$ hasta el orden α^2 , equivalentemente ν^2 , haciendo uso de las expresiones (4.38). Finalmente, obtenemos:

$$\begin{aligned} F(p; \xi) &= 1 + \nu \left(-\frac{4}{3} + 2\gamma_E + \ln(m^2 x_{\min}^2) + \frac{3}{5} \frac{p^2}{m^2} \right) \\ &\quad + \nu^2 \left[\frac{1}{2} \ln^2(m^2 x_{\min}^2) + \left(2\gamma_E - \frac{4}{3} \right) \ln(m^2 x_{\min}^2) \right. \\ &\quad \left. + 2\gamma_E^2 - \frac{8}{3}\gamma_E + \frac{\pi^2}{3} - \frac{8}{9} + \frac{2}{45} \frac{p^2}{m^2} \left(27 \left(\gamma_E + \frac{1}{2} \ln(m^2 x_{\min}^2) \right) - 29 \right) \right] \\ &\quad + \mathcal{O}(\nu^3) . \end{aligned} \quad (4.41)$$

Las Ecs. (4.40, 4.41) constituyen la transformación LKF de las Ecs. (3.14, 3.15) a nivel de la teoría de perturbaciones a orden $\mathcal{O}(\alpha^2)$, hasta p^2/m^2 .

Para comprobar la validez de la expansión perturbativa en $F(p; \xi)$, se evaluaron explícitamente los términos de primer orden ν y segundo orden ν^2 para distintos valores de mx_{min} y p^2/m^2 y considerando $\alpha = 1/137$ y $\xi - \xi_0 = 1$. Por ejemplo, para $mx_{min} = 10^{-1}$ y $p^2/m^2 = 0$, el primer orden resulta aproximadamente -2.8×10^{-3} , mientras que el segundo orden es $\approx 4.4 \times 10^{-6}$, lo que corresponde a una razón relativa de $|R| \approx 1.6 \times 10^{-3}$. Para $mx_{min} = 10^{-2}$ y $p^2/m^2 = 0$, el primer orden es -5.5×10^{-3} y el segundo orden 1.5×10^{-5} , con $|R| \approx 2.8 \times 10^{-3}$. De manera análoga, para $mx_{min} = 10^{-3}$ se obtiene $\approx -8.1 \times 10^{-3}$ y $\approx 3.4 \times 10^{-5}$ para el primer y segundo término de la serie respectivamente, con $|R| \approx 4.1 \times 10^{-3}$. Estos valores muestran que el segundo orden es consistentemente menor que el primero entre dos y tres órdenes de magnitud, confirmando que la aproximación perturbativa está bien justificada en el régimen analizado.

4.3.2 Expansión perturbativa para $m^2 \ll p^2$

Como una verificación adicional de los resultados obtenidos, analizaremos ahora el comportamiento de nuestras expresiones en el límite en el cual la masa es mucho menor que el momento, es decir, cuando $m^2 \ll p^2$. Este régimen resulta especialmente útil, ya que permite contrastar nuestras fórmulas con las expectativas perturbativas bien establecidas en el límite ultrarelativista o en el límite de masa nula en algunos trabajos anteriores.

Bajo esta suposición, podemos expandir las funciones $A(p; \xi)$ y $B(p; \xi)$, dadas en las Ecs. (4.33) y (4.35), respectivamente, reteniendo los términos hasta orden ν^2 y únicamente el orden principal en la razón m^2/p^2 . Al llevar a cabo esta expansión sistemática,

obtenemos:

$$\begin{aligned}
A(p; \xi) = & -\left(\frac{m}{p^2}\right) \left[1 - \left(\frac{m^2}{p^2}\right) + \nu \left((2\gamma_E + \ln(p^2 x_{\min}^2)) \right. \right. \\
& - \pi \left(\frac{m}{p}\right) + \left(\frac{m^2}{p^2}\right) (3 - 2\gamma_E - \ln(p^2 x_{\min}^2)) \Big) \\
& + \nu^2 \left(2\gamma_E^2 - \frac{\pi^2}{6} + 2\gamma_E \ln(p^2 x_{\min}^2) + \frac{1}{2} \ln^2(p^2 x_{\min}^2) \right. \\
& + \left(\frac{m}{p}\right) (2\pi - 2\pi\gamma_E - \pi \ln(p^2 x_{\min}^2)) \\
& + \left(\frac{m^2}{p^2}\right) \left(-2 + 6\gamma_E - 2\gamma_E^2 + \frac{\pi^2}{6} + 3 \ln(p^2 x_{\min}^2) \right. \\
& \left. \left. \left. - 2\gamma_E \ln(p^2 x_{\min}^2) - \frac{1}{2} \ln^2(p^2 x_{\min}^2) \right) \right) \right] , \tag{4.42}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
B(p; \xi) = & -1 + \left(\frac{m^2}{p^2}\right) + \nu \left((2 - 2\gamma_E - \ln(p^2 x_{\min}^2)) \right. \\
& + \left(\frac{m^2}{p^2}\right) (-1 + 2\gamma_E + \ln(p^2 x_{\min}^2)) \Big) \\
& + \nu^2 \left(\left(-4 + 4\gamma_E - 2\gamma_E^2 + \frac{\pi^2}{6} + 2 \ln(p^2 x_{\min}^2) \right. \right. \\
& - 2\gamma_E \ln(p^2 x_{\min}^2) - \frac{1}{2} \ln^2(p^2 x_{\min}^2) \Big) \\
& + \left(\frac{m^2}{p^2}\right) \left(-2\gamma + 2\gamma^2 - \frac{\pi^2}{6} - \log(p^2 x_{\min}^2) \right. \\
& \left. \left. \left. + 2\gamma \log(p^2 x_{\min}^2) + \frac{1}{2} \log^2(p^2 x_{\min}^2) \right) \right) \right) . \tag{4.43}
\end{aligned}$$

Al sustituir las Ecs. (4.42) y (4.43) en las Ecs. (4.36) y (4.37), podemos obtener la expresión para la función de masa y la expresión para la renormalización de la función de onda del fermión. Reteniendo únicamente el orden principal en la razón m^2/p^2 y los

términos hasta orden $\mathcal{O}(\alpha^2)$, dichas funciones adquieren la forma:

$$M(p; \xi) = m \left[1 + \nu \left(2 - \pi \left(\frac{m}{p} \right) + 4 \left(\frac{m^2}{p^2} \right) \right) + 4\nu^2 \left(\frac{m^2}{p^2} \right) \right] \quad (4.44)$$

$$\begin{aligned} F(p; \xi) = & 1 + \nu \left(-2 + 2\gamma_E + \ln(p^2 x_{\min}^2) + 3 \left(\frac{m^2}{p^2} \right) \right) \\ & + \nu^2 \left(4 - 4\gamma_E + 2\gamma_E^2 - \frac{\pi^2}{6} - 2 \ln(p^2 x_{\min}^2) + 2\gamma \ln(p^2 x_{\min}^2) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \ln^2(p^2 x_{\min}^2) + \left(\frac{m^2}{p^2} \right) \left(6\gamma_E + 3 \ln(p^2 x_{\min}^2) \right) \right). \end{aligned} \quad (4.45)$$

Podemos ir un paso más allá y examinar el límite sin masa, es decir, $m \rightarrow 0$. En este límite, las Ecs. (4.44) y (4.45) se reducen a:

$$M(p; \xi) = 0, \quad (4.46)$$

$$\begin{aligned} F(p; \xi) = & 1 + \nu \left(-2 + 2\gamma_E + \ln \left(\frac{p^2}{\Lambda^2} \right) \right) \\ & + \nu^2 \left(4 - 4\gamma_E + 2\gamma_E^2 - \frac{\pi^2}{6} - 2 \ln \left(\frac{p^2}{\Lambda^2} \right) + 2\gamma_E \ln \left(\frac{p^2}{\Lambda^2} \right) + \frac{1}{2} \ln^2 \left(\frac{p^2}{\Lambda^2} \right) \right), \end{aligned} \quad (4.47)$$

donde $x_{\min} = 1/\Lambda$. Podemos ver que estos resultados concuerdan con los resultados a dos lazos en la forma perturbativa en [56].

Con esto concluimos nuestra discusión sobre la aplicación de las transformaciones LKF al propagador de fermiones masivos en la electrodinámica cuántica reducida. Hemos derivado su expresión no perturbativa, llevado a cabo su expansión perturbativa en el régimen de acoplamiento débil, y analizado sus propiedades así como su comparación con resultados previos disponibles en la literatura.

Capítulo 5

Conclusión

En este trabajo, hemos estudiado las transformaciones de Landau–Khalatnikov–Fradkin (LKF) para el propagador fermiónico masivo en la electrodinámica cuántica reducida (RQED). Dichas transformaciones habían sido previamente analizadas únicamente para fermiones sin masa en RQED [54]. En este estudio, hemos generalizado el caso para incluir fermiones con masa. Los siguientes puntos resumen los aspectos más originales y relevantes del trabajo realizado:

1. El estudio de las transformaciones LKF se ha extendido desde el caso sin masa, [54], al caso del propagador fermiónico con masa en RQED. Esto implica la transformación de norma de una estructura de Dirac adicional del propagador, normalmente referida como la función de masa del fermión $\mathcal{M}(p; \xi)$ en espacio de momentos y $Y(x; \xi)$ en el espacio de coordenadas:

$$S(p; \xi) = \frac{F(p; \xi)}{i\not{p} - \mathcal{M}(p; \xi)} ,$$
$$S(x; \xi) = \not{x}X(x; \xi) + Y(x; \xi) .$$

2. Hemos proporcionado argumentos que demuestran que la mejor elección para el parámetro de norma inicial es $\xi_0 = 1/3$, ya que la expansión en logaritmos dominantes del propagador de fermiones sin masa se anula al nivel de un lazo [57]. Por lo tanto, nuestra nueva elección de norma inicial no sólo es válida a nivel árbol (el cual es, de hecho, independiente de la norma), sino que permanece cierta incluso al nivel de un lazo, una afirmación que sólo se cumple para $\xi_0 = 1/3$.

-
3. Hemos obtenido expresiones cerradas y no perturbativas para ambas funciones que definen el propagador fermiónico masivo: la renormalización de la función de onda $F(p; \xi)$ y la función de masa del fermión $\mathcal{M}(p; \xi)$.
 4. En el caso de un acoplamiento débil, es decir, $\alpha \ll 1$, nuestros resultados pueden expandirse a cualquier orden en teoría de perturbaciones, $\mathcal{O}(\alpha^n)$. En esta tesis, hemos elegido expandirlos hasta segundo orden, $\mathcal{O}(\alpha^2)$, tanto para la renormalización de la función de onda $F(p; \xi)$ como para la función de masa del fermión $\mathcal{M}(p; \xi)$.
 5. Una característica particularmente distintiva del estudio de las transformaciones LKF en RQED es que el comportamiento del propagador del fotón en $(3 + 1)$ -dimensiones interviene en el factor de transformación de norma del fermión, el cual, a su vez, está restringido a moverse en $(2 + 1)$ -dimensiones. Como resultado, el propagador fermiónico transformado adopta una forma que se asemeja mucho más a la de la QED₄ que a la de la QED₃ convencional.

Como perspectiva futura, resulta particularmente interesante estudiar estas transformaciones para el caso de la función de masa generada dinámicamente, un fenómeno relacionado con la ruptura dinámica de la simetría quiral, el cual podría corresponder a las diferencias de propiedades entre el grafeno aislado y el suspendido. Aunque en esta tesis no se aborda dicho fenómeno, la inclusión del estudio de la función de masa — incluso sin la ruptura dinámica de la simetría quiral — puede servir como una guía hacia futuros trabajos que incorporen la generación dinámica de masa.

A

Integrales útiles

La mayoría de las integrales requeridas en este documento se enlistan a continuación para su consulta [58]

$$\int_0^\pi e^{-ipx \cos(\theta)} \cos \theta \sin \theta d\theta = 2i \left(\frac{\cos(px)}{px} - \frac{\sin(px)}{p^2 x^2} \right), \quad (\text{A.1})$$

$$\int_0^\infty p^n \cos(px) dp = -(x)^{-(n+1)} \Gamma(1+n) \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right), \quad (\text{A.2})$$

$$\int_0^\infty p^n \sin(px) dp = x^{-(n+1)} \Gamma(1+n) \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right), \quad (\text{A.3})$$

$$\int_0^\pi d\theta \sin^{2a}(\theta) e^{ib \cos \theta} = \sqrt{\pi} \Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{2}{b}\right)^a J_a(b), \quad (\text{A.4})$$

$$\int_0^\pi \cos(\theta) \sin^{2a}(\theta) e^{ib \cos(\theta)} d\theta = i \sqrt{\pi} \Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{2}{b}\right)^a J_{a+1}(b), \quad (\text{A.5})$$

$$\int_0^\infty x^a J_b(x) dx = 2^a \frac{\Gamma\left(\frac{1+a+b}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-a+b}{2}\right)}, \quad (\text{A.6})$$

$$\int_0^\infty \frac{p^2}{p^2 + m^2} \cos(px) dp = -\frac{m\pi e^{-mx}}{2}, \quad (\text{A.7})$$

$$\int_0^\infty \frac{p^2}{p^2 + m^2} \sin(px) dp = -\frac{\pi e^{-mx}}{2}, \quad (\text{A.8})$$

$$\int_0^\infty \frac{p^3}{p^2 + m^2} \left[\frac{\cos(px)}{px} - \frac{\sin(px)}{(px)^2} \right] dp = -\frac{\pi}{2} \frac{(1+mx)}{x^2} e^{-mx}. \quad (\text{A.9})$$

Referencias

- [1] Sheldon L. Glashow. Partial-symmetries of weak interactions. *Nuclear Physics*, 22(4):579–588, 1961.
- [2] Jeffrey Goldstone, Abdus Salam, and Steven Weinberg. Broken symmetries. *Phys. Rev.*, 127:965–970, Aug 1962.
- [3] Steven Weinberg. A model of leptons. *Phys. Rev. Lett.*, 19:1264–1266, Nov 1967.
- [4] Murray Gell-Mann. The Eightfold Way: A Theory of strong interaction symmetry. 3 1961.
- [5] G. Zweig. *An $SU(3)$ model for strong interaction symmetry and its breaking. Version 2*, pages 22–101. 2 1964.
- [6] Peter W. Higgs. Broken symmetries and the masses of gauge bosons. *Phys. Rev. Lett.*, 13:508–509, Oct 1964.
- [7] T. Kinoshita. Theory of the anomalous magnetic moment of the electron - numerical approach. *Adv. Ser. Direct. High Energy Phys.*, 7:218–321, 1990.
- [8] D. Hanneke, S. Fogwell, and G. Gabrielse. New measurement of the electron magnetic moment and the fine structure constant. *Physical Review Letters*, 100(12), March 2008.
- [9] E.C. Marino. Quantum electrodynamics of particles on a plane and the chern-simons theory. *Nuclear Physics B*, 408(3):551–564, November 1993.
- [10] E.C. Marino. *Quantum Field Theory Approach to Condensed Matter Physics*. Cambridge University Press, 2017.
- [11] S. Teber. Electromagnetic current correlations in reduced quantum electrodynamics. *Phys. Rev. D*, 86:025005, Jul 2012.
- [12] John Clive Ward. An Identity in Quantum Electrodynamics. *Phys. Rev.*, 78:182, 1950.

-
- [13] E. S. Fradkin. Concerning some general relations of quantum electrodynamics. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 29:258–261, 1955.
 - [14] H. S. Green. A Pre-renormalized quantum electrodynamics. *Proc. Phys. Soc. A*, 66:873–880, 1953.
 - [15] Y. Takahashi. On the generalized Ward identity. *Nuovo Cim.*, 6:371, 1957.
 - [16] A. A. Slavnov. Ward Identities in Gauge Theories. *Theor. Math. Phys.*, 10:99–107, 1972.
 - [17] J. C. Taylor. Ward Identities and Charge Renormalization of the Yang-Mills Field. *Nucl. Phys. B*, 33:436–444, 1971.
 - [18] Lev Davidovich Landau and I. M. Khalatnikov. The Gauge Transformation of the Green’s Function for Charged Particles. *Sov. Phys. JETP*, 2:69–72, 1956.
 - [19] Kenneth Johnson and Bruno Zumino. Gauge Dependence of the Wave-Function Renormalization Constant in Quantum Electrodynamics. *Phys. Rev. Lett.*, 3:351–352, 1959.
 - [20] Bruno Zumino. Gauge properties of propagators in quantum electrodynamics. *J. Math. Phys.*, 1:1–7, 1960.
 - [21] M. Jamil Aslam, A. Bashir, and L. X. Gutierrez-Guerrero. Local Gauge Transformation for the Quark Propagator in an $SU(N)$ Gauge Theory. *Phys. Rev. D*, 93(7):076001, 2016.
 - [22] T. De Meerleer, D. Dudal, S. P. Sorella, P. Dall’Olio, and A. Bashir. Fresh look at the abelian and non-abelian landau-khalatnikov-fradkin transformations. *Phys. Rev. D*, 97:074017, Apr 2018.
 - [23] T. De Meerleer, D. Dudal, S. P. Sorella, P. Dall’Olio, and A. Bashir. Landau-khalatnikov-fradkin transformations, nielsen identities, their equivalence, and implications for qcd. *Phys. Rev. D*, 101:085005, Apr 2020.
 - [24] A. Ahmad, J. J. Cobos-Martínez, Y. Concha-Sánchez, and A. Raya. Landau-khalatnikov-fradkin transformations in reduced quantum electrodynamics. *Phys. Rev. D*, 93:094035, May 2016.
 - [25] José Nicasio, Adnan Bashir, Ulrich D. Jentschura, and James P. Edwards. Landau-khalatnikov-fradkin gauge transformations for the propagator and vertex in qed and qed2. *Journal of Physics: Conference Series*, 2667(1):012023, dec 2023.
 - [26] Conrad J. Burden and Craig D. Roberts. Gauge covariance and the fermion-photon vertex in three- and four-dimensional, massless quantum electrodynamics. *Physical Review D*, 47(12):5581–5588, June 1993.

-
- [27] I.J.R. Aitchison, N.E. Mavromatos, and D. Mc Neill. Inverse landau-khalatnikov transformation and infrared critical exponents of (2+1)-dimensional quantum electrodynamics. *Physics Letters B*, 402(1–2):154–158, June 1997.
 - [28] A. Bashir, A. Kizilersu, and M. R. Pennington. Analytic form of the one-loop vertex and of the two-loop fermion propagator in 3-dimensional massless qed, 1999.
 - [29] A. Bashir, A. Kızılırsü, and M. R. Pennington. Does the weak coupling limit of the burden-tjiang deconstruction of the massless quenched three-dimensional qed vertex agree with perturbation theory? *Physical Review D*, 62(8), September 2000.
 - [30] A. Bashir and A. Raya. Landau-khalatnikov-fracdkin transformations and the fermion propagator in quantum electrodynamics. *Physical Review D*, 66(10), November 2002.
 - [31] D. C. Curtis and M. R. Pennington. Truncating the schwinger-dyson equations: How multiplicative renormalizability and the ward identity restrict the three-point vertex in qed. *Phys. Rev. D*, 42:4165–4169, Dec 1990.
 - [32] A. Bashir and M. R. Pennington. Gauge-independent chiral symmetry breaking in quenched qed. *Physical Review D*, 50(12):7679–7689, December 1994.
 - [33] A. Bashir, R. Bermudez, L. Chang, and C. D. Roberts. Dynamical chiral symmetry breaking and the fermion–gauge-boson vertex. *Phys. Rev. C*, 85:045205, Apr 2012.
 - [34] Ayşe Kızılırsü and Michael R. Pennington. Building the full fermion-photon vertex of qed by imposing multiplicative renormalizability of the schwinger-dyson equations for the fermion and photon propagators. *Physical Review D*, 79(12), June 2009.
 - [35] A Bashir and R Delbourgo. The nonperturbative propagator and vertex in massless quenched qedd. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 37(25):6587–6597, June 2004.
 - [36] Shaoyang Jia and M. R. Pennington. Landau-khalatnikov-fracdkin transformation for the fermion propagator in qed in arbitrary dimensions. *Physical Review D*, 95(7), April 2017.
 - [37] Victor M. Villanueva-Sandoval, Yajaira Concha-Sánchez, Laura Xiomara Gutiérrez Guerrero, and Alfredo Raya. On How the Scalar Propagator Transforms Covariantly in Spinless Quantum Electrodynamics. *J. Phys. Conf. Ser.*, 1208(1):012001, 2019.
 - [38] Naser Ahmadinia, Adnan Bashir, and Christian Schubert. Multiphoton amplitudes and generalized landau-khalatnikov-fracdkin transformation in scalar qed. *Physical Review D*, 93(4), February 2016.

-
- [39] L. Albino Fernández-Rangel, Adnan Bashir, L. X. Gutiérrez-Guerrero, and Y. Concha-Sánchez. Constructing scalar-photon three point vertex in massless quenched scalar qed. *Physical Review D*, 93(6), March 2016.
- [40] A. V. Kotikov and S. Teber. Landau-khalatnikov-fradkin transformation and the mystery of even ζ -values in euclidean massless correlators. *Phys. Rev. D*, 100:105017, Nov 2019.
- [41] A. James, A. V. Kotikov, and S. Teber. Landau-khalatnikov-fradkin transformation of the fermion propagator in massless reduced qed. *Physical Review D*, 101(4), February 2020.
- [42] L. Albino, A. Bashir, A. J. Mizher, and A. Raya. Electron-photon vertex and dynamical chiral symmetry breaking in reduced QED: An advanced study of gauge invariance. *Physical Review D*, 106(9), nov 2022.
- [43] I.J.R Aitchiso and A.J.G Hey. *Gauge Theories in Particle Physics*. IoP publishing Ltd, 1989.
- [44] C. Quigg. *Gauge Theories of the Strong, Weak and Electromagnetic Interactions*. Westview Press, 1983.
- [45] Paul A. M. Dirac. The Lagrangian in quantum mechanics. *Phys. Z. Sowjetunion*, 3:64–72, 1933.
- [46] E. Leader and E. Predazzi. *An Introduction to Gauge Theories and Modern Particle Physics*. Number v. 2 in An Introduction to Gauge Theories and Modern Particle Physics 2 Volume Paperback Set. Cambridge University Press, 1996.
- [47] Francis Halzen and Alan D. Martin. *Quarks and Leptons. A Introductory Course in Modern Particle Physics*. Wiley, 1991.
- [48] Michael Edward Peskin and Daniel V. Schroeder. *An Introduction to Quantum Field Theory*. Westview Press, 1995. Reading, USA: Addison-Wesley (1995).
- [49] S. Teber. Electromagnetic current correlations in reduced quantum electrodynamics. *Phys. Rev. D*, 86:025005, 2012.
- [50] E. C. Marino. Quantum electrodynamics of particles on a plane and the Chern-Simons theory. *Nucl. Phys. B*, 408:551–564, 1993.
- [51] S. Teber and A. V. Kotikov. Field theoretic renormalization study of reduced quantum electrodynamics and applications to the ultrarelativistic limit of Dirac liquids. *Phys. Rev. D*, 97(7):074004, 2018.
- [52] A. Kovner and B. Rosenstein. Kosterlitz-thouless mechanism of two-dimensional superconductivity. *Phys. Rev. B*, 42:4748–4751, Sep 1990.

-
- [53] N. Dorey and N.E. Mavromatos. Qed3 and two-dimensional superconductivity without parity violation. *Nuclear Physics B*, 386(3):614–680, 1992.
 - [54] A. Ahmad, J. J. Cobos-Martínez, Y. Concha-Sánchez, and A. Raya. Landau-Khalatnikov-Fradkin transformations in Reduced Quantum Electrodynamics. *Phys. Rev. D*, 93(9):094035, 2016.
 - [55] A. Ahmad, J.J. Cobos-Martínez, Y. Concha-Sánchez, and A. Raya. Landau-khalatnikov-fradkin transformations in reduced quantum electrodynamics. *Physical Review D*, 93(9), May 2016.
 - [56] A. V. Kotikov and S. Teber. Two-loop fermion self-energy in reduced quantum electrodynamics and application to the ultrarelativistic limit of graphene. *Phys. Rev. D*, 89(6):065038, 2014.
 - [57] L. Albino, A. Bashir, A. J. Mizher, and A. Raya. Electron-photon vertex and dynamical chiral symmetry breaking in reduced QED: An advanced study of gauge invariance. *Phys. Rev. D*, 106(9):096007, 2022.
 - [58] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik. *Table of Integrals, Series and Products*. Academic Press, USA, 6th edition, 2000.

Dania Rodríguez Tzintzun

Landau-Khalatnikov-Fradkin en Electrodinámica Cuántica Reducida.pdf

 Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Detalles del documento

Identificador de la entrega

trn:oid:::3117:545024060

Fecha de entrega

9 ene 2026, 10:43 a.m. GMT-6

Fecha de descarga

9 ene 2026, 11:32 a.m. GMT-6

Nombre del archivo

Landau-Khalatnikov-Fradkin en Electrodinámica Cuántica Reducida.pdf

Tamaño del archivo

623.0 KB

45 páginas

10.854 palabras

52.946 caracteres

13% Similitud general

El total combinado de todas las coincidencias, incluidas las fuentes superpuestas, para ca...

Filtrado desde el informe

- Texto citado
- Texto mencionado
- Coincidencias menores (menos de 10 palabras)

Fuentes principales

- 13%  Fuentes de Internet
- 11%  Publicaciones
- 0%  Trabajos entregados (trabajos del estudiante)

Marcas de integridad

N.º de alerta de integridad para revisión



Caracteres reemplazados

98 caracteres sospechosos en N.º de páginas

Las letras son intercambiadas por caracteres similares de otro alfabeto.

Los algoritmos de nuestro sistema analizan un documento en profundidad para buscar inconsistencias que permitirían distinguirlo de una entrega normal. Si advertimos algo extraño, lo marcamos como una alerta para que pueda revisarlo.

Una marca de alerta no es necesariamente un indicador de problemas. Sin embargo, recomendamos que preste atención y la revise.

Formato de Declaración de Originalidad y Uso de Inteligencia Artificial

Coordinación General de Estudios de Posgrado
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo



A quien corresponda,

Por este medio, quien abajo firma, bajo protesta de decir verdad, declara lo siguiente:

- Que presenta para revisión de originalidad el manuscrito cuyos detalles se especifican abajo.
- Que todas las fuentes consultadas para la elaboración del manuscrito están debidamente identificadas dentro del cuerpo del texto, e incluidas en la lista de referencias.
- Que, en caso de haber usado un sistema de inteligencia artificial, en cualquier etapa del desarrollo de su trabajo, lo ha especificado en la tabla que se encuentra en este documento.
- Que conoce la normativa de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, en particular los Incisos IX y XII del artículo 85, y los artículos 88 y 101 del Estatuto Universitario de la UMSNH, además del transitorio tercero del Reglamento General para los Estudios de Posgrado de la UMSNH.

Datos del manuscrito que se presenta a revisión		
Programa educativo	Maestría en Ciencias en el Área de Física	
Título del trabajo	Transformaciones de Landau-Khalatnikov-Fradkin en Electrodinámica Cuántica Reducida	
	Nombre	Correo electrónico
Autor/es	Dania Rodriguez Tzintzun	1717697x@umich.mx
Director	Juan Carlos Arteaga Velázquez	juan.arteaga@umich.mx
Codirector	Adnan Bashir	adnan.bashir@umich.mx
Coordinador del programa	Umberto Cotti Gollini	mae.ciencias.fisica@umich.mx

Uso de Inteligencia Artificial		
Rubro	Uso (sí/no)	Descripción
Asistencia en la redacción	sí	Correcciones ortográficas y mejora en la estructura gramatical.
Traducción al español	no	
Traducción a otra lengua	sí	Revisión y mejora de la traducción del Resumen de español a inglés

Formato de Declaración de Originalidad y Uso de Inteligencia Artificial

Coordinación General de Estudios de Posgrado
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo



Uso de Inteligencia Artificial		
Rubro	Uso (sí/no)	Descripción
Revisión y corrección de estilo	no	
Análisis de datos	no	
Búsqueda y organización de información	no	
Formateo de las referencias bibliográficas	no	
Generación de contenido multimedia	no	
Otro	no	

Datos del solicitante	
Nombre y firma	Dania Rodriguez Tzintzun
Lugar y fecha	Morelia, Michoacán, a 09 de diciembre del 2025