



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Y

UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO



CENTRO DE CIENCIAS
MATEMÁTICAS



POSGRADO CONJUNTO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
UNAM-UMSNH

El Teorema del Encaje de Kodaira

T E S I S

que para optar por el grado de *Maestro en Ciencias Matemáticas*
presenta

Juan Pablo Peñaloza Pacheco

Asesor: Dr. Luis Abel Castorena Martínez

Morelia, Michoacán a Febrero del 2026

Agradecimientos

A SECIHTI por el apoyo brindado por medio del programa de Becas Nacionales durante mis estudios de maestría.

Introducción

La presente tesis aborda un resultado fundamental de la geometría compleja: el Teorema del Encaje de Kodaira. Este establece sobre una variedad compleja compacta, la equivalencia entre admitir un encaje proyectivo y el de admitir un haz lineal positivo. En combinación con el Teorema de Chow, este resultado permite construir un camino a la Geometría algebraica, al garantizar que tal encaje corresponde a una variedad algebraica proyectiva.

El objeto central de estudio de este trabajo son las variedades complejas compactas, que serán abordadas mediante herramientas como los haces lineales, las gavillas y la noción de positividad; elementos esenciales en la formulación y demostración del teorema

Resumen/Abstract

El Teorema del Encaje de Kodaira

Juan Pablo Peñaloza Pacheco

Resumen

La presente tesis estudia el Teorema del Encaje de Kodaira, uno de los resultados centrales en geometría compleja. Este teorema caracteriza cuándo una variedad compleja compacta puede encajarse de manera holomorfa en un espacio proyectivo, estableciendo la equivalencia entre la positividad y la amplitud de un haz lineal. A lo largo del trabajo se desarrollan las herramientas necesarias —como haces lineales, positividad, cohomología y el teorema de anulamiento de Kodaira— para presentar una demostración detallada del resultado y algunas de sus aplicaciones geométricas.

Palabras Clave: Encaje, Haces lineales, Variedad, Conexiones, Positivo.

Abstract

This thesis studies the Kodaira Embedding Theorem, one of the central results in complex geometry. The theorem characterizes when a compact complex manifold admits a holomorphic embedding into a projective space, establishing the equivalence between positivity and ampleness of a line bundle. Throughout this work, the necessary tools — including line bundles, positivity, cohomology, and the Kodaira vanishing theorem — are developed in order to present a detailed proof of the result and some of its geometric applications.

Keywords: Embedding, Line bundles, Manifold, Connections, Positive.

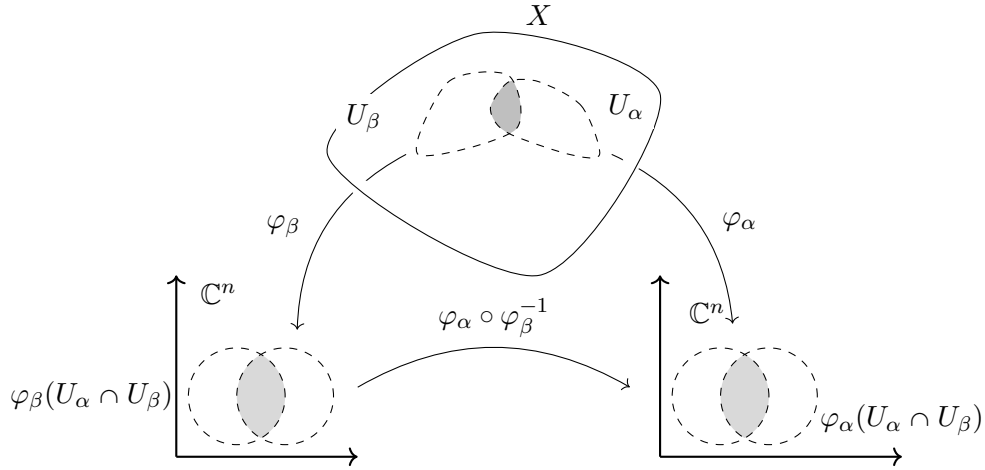
Contents

1	Preliminares	1
1.1	Haces vectoriales	2
1.2	Gavillas sobre variedades	8
1.3	Positividad de haces lineales	9
2	El Teorema de Kodaira	15
2.1	Teorema de anulamiento de Kodaira	15
2.2	Teorema de encaje de Kodaira	16
2.3	Aplicaciones del Encaje de Kodaira	19
	Bibliografía	22

Chapter 1

Preliminares

Una **variedad compleja** X es una variedad diferenciable que admite una cubierta abierta $\{U_\alpha\}$ y funciones coordenadas $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}^n$ tales que $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ es holomorfa sobre $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ para cada α y β .



A toda variedad compleja X se asocia su **espacio tangente complejificado** TX , donde cada vector tangente $v \in TX$ puede verse como una transformación $\mathbb{C}$ -lineal

$$v : C^\infty(X, \mathbb{C}) \longrightarrow C^\infty(X, \mathbb{C})$$

que satisface la regla de Leibniz $v(fg) = v(f)g + fv(g)$; es decir, v es una **derivación** sobre X . El conjunto $T_{\mathbb{C}}X$ hereda de manera natural una estructura de variedad compleja.

Decimos que una variedad diferenciable X **admite una estructura compleja** si existe una aplicación suave

$$J : TX \longrightarrow TX$$

tal que $J^2 = -\text{id}_{TX}$ y las transiciones locales son holomorfas. A dicha aplicación J se le llama la **estructura casi compleja** de X , la cual permite descomponer el espacio tangente complejificado como

$$T_{\mathbb{C}}X = T^{1,0}X \oplus T^{0,1}X,$$

a partir de la cual se definen las formas de tipo (p, q) :

$$\bigwedge^{p,q} X := \bigwedge^p (T^{1,0}X)^* \otimes \bigwedge^q (T^{0,1}X)^*.$$

El siguiente ejemplo variedad compleja es crucial para la demostración del Teorema del Encaje.

Ejemplo 1.0.1 (Explosiones). Sean X una variedad compleja de dimensión n y puntos $p_1, \dots, p_r \in X$. Definimos la **explosión de X a lo largo de $S = \{p_1, \dots, p_n\}$** como $X_S = X \setminus S \sqcup \mathbb{P}(T_{p_1}^{1,0} X) \sqcup \dots \sqcup \mathbb{P}(T_{p_n}^{1,0} X)$ la cual admite una estructura de variedad compleja. Tenemos asociado a X una función holomorfa $\pi_S : X_S \rightarrow X$ tal que

$$\pi(x) = \begin{cases} z, & z \in X_S \setminus S, \\ p_j, & z \in \mathbb{P}(T_{p_j}^{1,0} X). \end{cases}$$

La **explosión de X a lo largo de S** es la variedad X_S junto con la función π . El **divisor excepcional** de X_S se define como $\pi_S^{-1}(S)$ y es una hipersuperficie compleja.

1.1. Hazes vectoriales

Un **haz vectorial** de rango r sobre una variedad compleja X es una variedad compleja E junto con una función holomorfa $\pi : E \rightarrow X$ tal que para cada punto $x \in X$ la fibra $\pi^{-1}(x)$ es un espacio vectorial complejo de dimensión r , y existen vecindarios abiertos $U \subset X$ donde $\pi^{-1}(U) \cong U \times \mathbb{C}^r$ mediante un biholomorfismo, llamado **trivialización**, que respeta la estructura lineal en las fibras, i.e. la restricción a cada una de ellas es un $\mathbb{C}$ -isomorfismo.

Ejemplo 1.1.1 (El haz tautológico). Definimos la variedad $\mathcal{O}(-1) = \{(\xi, z) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^{n+1} \mid z \in \xi\}$ y consideramos $\pi : \mathcal{O}(-1) \rightarrow \mathbb{P}^n$ como la proyección al primer factor. Las funciones de transición del haz lineal $\pi : \mathcal{O}(-1) \rightarrow \mathbb{P}^n$ están dadas por $\tau_{jk} : U_j \cap U_k \rightarrow \mathbb{C}^*$ por $\tau_{jk}([\xi_0, \dots, \xi_n]) = \xi_j / \xi_k$. El haz lineal $\mathcal{O}(-1)$ es llamado el **haz tautológico** de $\mathbb{P}^n$.

Ejemplo 1.1.2 (Haz de hiperplano). El **haz de hiperplano** $\mathcal{O}(1)$ es el haz dual de $\mathcal{O}(-1)$ y las funciones de transición son $\tau_{jk} : U_j \cap U_k \rightarrow \mathbb{C}^*$ tales que $\tau_{jk}([\xi_0, \dots, \xi_n]) = \xi_k / \xi_j$.

Ejemplo 1.1.3 (Pullback). Sea $f : Y \rightarrow X$ una función holomorfa entre variedades complejas. Un haz vectorial $\pi : E \rightarrow X$ induce un haz vectorial $f^*E \rightarrow Y$ de la siguiente manera. Definimos la variedad $f^*E = \{(y, v) \in Y \times E \mid \pi(v) = f(y)\}$.

Si $\{(U_j, \psi_j)\}$ es un atlas de trivialización de E , con $\psi_j : E_{U_j} \rightarrow U_j \times \mathbb{C}^r$ biholomorfismo, entonces $\{(f^{-1}(U_j), \tilde{\psi}_j)\}$ es un atlas de trivialización de f^*E , con

$$\tilde{\psi}_j : (f^*E)_{f^{-1}(U_j)} \rightarrow f^{-1}(U_j) \times \mathbb{C}^r, \quad \tilde{\psi}_j(y, v) = (y, \text{pr}_2(\psi_j(v))).$$

El haz $f^*E \rightarrow Y$ se llama el **pullback** del haz $E \rightarrow X$ por la aplicación holomorfa f .

Sea $S \subset X$ una hipersuperficie compleja cerrada. Decimos que una función $f : U \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa se **anula de manera simple sobre S** si $f(p) = 0$ y $df_p = \sum \frac{\partial f}{\partial z_j}(p) dz_j \neq 0$ para cada $p \in S$, y además $f(x) \neq 0$ para todo $x \in X \setminus S$.

Ejemplo 1.1.4 (Haz lineal asociado a una hipersuperficie). Consideremos una variedad compleja X y $S \subset X$ una hipersuperficie compleja cerrada. Podemos definir una familia de funciones $f_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfas tales que se anulan de manera simple sobre S y que $\{U_\alpha\}$ es una cubierta abierta de X . Sobre $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ definimos las funciones holomorfas $\tau_{\alpha\beta} : (U_\alpha \cap U_\beta) \setminus S \rightarrow \mathbb{C}$ como $\tau_{\alpha\beta} = f_\alpha / f_\beta$; dado que f_α y f_β se anulan de manera simple sobre la hipersuperficie cerrada S , podemos extender $\tau_{\alpha\beta}$ de manera holomorfa a todo $U_\alpha \cap U_\beta$. Notemos que sobre $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \emptyset$ tenemos la condición de cociclo

$$\tau_{\alpha\beta} \tau_{\beta\gamma} = \frac{f_\alpha}{f_\beta} \frac{f_\beta}{f_\gamma} = \tau_{\alpha\gamma}.$$

Por tanto, las funciones $\tau_{\alpha\beta}$ determinan un haz lineal $L_S \rightarrow X$. Al haz lineal obtenido de esta manera lo llamamos el **haz lineal asociado a S** , y se puede demostrar que, hasta isomorfismo, no depende de la elección de las funciones holomorfas f_α .

Para un haz vectorial $\pi : E \rightarrow X$ y un abierto U de X definimos el $\mathbb{C}$ -espacio vectorial de las secciones sobre U :

$$\mathcal{O}(U, E) = \{s : U \rightarrow E \mid s \text{ es holomorfa y } \pi \circ s = id_U\}.$$

Un **marco local** para U son secciones $s_1, \dots, s_n \in \mathcal{O}(U, E)$ tal que $s_1(x), \dots, s_r(x)$ es una base para $E(x)$, para un punto $x \in U$. Diremos que algunas secciones son un **marco local alrededor de un punto $p \in X$** si existe un vecindario de U de p tales que son un marco local para U .

Si $\sigma \in \mathcal{O}(U, E)$ y $s_1, \dots, s_r$ es un marco local para U entonces existen funciones holomorfas $f_j \in \mathcal{O}(U)$ tales que $\sigma = \sum f_j s_j$. Llamaremos a las funciones f_j las **funciones componentes** de σ con respecto al marco dado.

Teorema 1.1.5. *Sea X una variedad compleja y $E \rightarrow X$ un haz vectorial. Si X es compacta, entonces $\mathcal{O}(X, E)$ es un $\mathbb{C}$ -espacio vectorial de dimensión finita.*

La demostración de este resultado se omite; véase el Teorema 3.13 en [4].

Sea $L \rightarrow X$ un haz lineal. Definimos el **conjunto de puntos base de L** como

$$Bs(L) = \{x \in X \mid s(x) = 0 \text{ para todo } s \in \mathcal{O}(X, L)\}.$$

Supongamos que X es compacta y que $\dim \mathcal{O}(X, L) > 0$. Sea $s_0, \dots, s_N$ una base de $\mathcal{O}(X, L)$.

Para cada punto $p \in X$, elegimos un marco local σ definido en un entorno de p . Podemos escribir localmente cada sección s_j como $s_j = f_j \sigma$, donde f_j es una función holomorfa. De este modo, obtenemos una función holomorfa

$$\varphi_L : X \setminus Bs(L) \longrightarrow \mathbb{P}^N, \quad \varphi_L(x) = [f_0(x), \dots, f_N(x)].$$

Esta aplicación está bien definida, es decir, no depende del marco local elegido. En efecto, si σ' es otro marco definido en un entorno de p , entonces existe una función holomorfa nunca nula λ tal que $\sigma = \lambda \sigma'$. En consecuencia, $s_j = f_j \sigma = (\lambda f_j) \sigma'$, y por lo tanto,

$$[f_0(p), \dots, f_N(p)] = [\lambda(p)f_0(p), \dots, \lambda(p)f_N(p)].$$

Además, si se elige otra base de $\mathcal{O}(X, L)$, las funciones holomorfas asociadas varían mediante un isomorfismo lineal proyectivo. Por esta razón, cualquiera de las aplicaciones holomorfas obtenidas de esta manera se denomina el **morfismo asociado a L** y se denota por φ_L .

Proposición 1.1.6. *Si X es una variedad compleja compacta y $L \rightarrow X$ un haz lineal tal que $Bs(L) = \emptyset$, entonces $L \cong \varphi_L^* \mathcal{O}(1)$ como haces lineales sobre $\mathbb{P}^N$.*

Proof. Consideremos la cubierta abierta afín $U_j : j = 0^N$ de $\mathbb{P}^N$, una base $s_0, \dots, s_N$ de $\mathcal{O}(X, L)$, y las funciones de transición $(U_\alpha, \tau_{\alpha\beta})$ de L . Para $\varphi_L^* \mathcal{O}(1)$ las funciones de transición están dadas por $\phi_{jk} : \varphi_L^{-1}(U_j) \rightarrow \mathbb{C}^*$ donde $\phi_{jk}(x) = h(s_k(x))/h(s_j(x))$ y $h : L_U \cong U \times \mathbb{C}$ es cualquier trivialización de L alrededor de x . Definimos el refinamiento $W_{\alpha j} = V_\alpha \cap \varphi_L^{-1}(U_j)$ y obtenemos funciones de transición para L y $\varphi_L^* \mathcal{O}(1)$ en estos abiertos: $\tau_{\alpha j, \beta k}$ y $\phi_{\alpha j, \beta k}$, que son las restricciones de $\tau_{\alpha\beta}$ y ϕ_{jk} a $W_{\alpha j} \cap W_{\beta k}$. Vamos a mostrar que existe una familia de funciones holomorfas nunca nulas $\Psi_{\alpha j} \in \mathcal{O}^*(W_{\alpha j})$ tales que para todo $x \in W_{\alpha j} \cap W_{\beta k}$ se tiene

$$\tau_{\alpha j, \beta k}(x) = (\Psi_{\alpha j}(x))^{-1} \phi_{\alpha j, \beta k}(x) \Psi_{\beta k}(x).$$

Si $\{h_\alpha : L_{U_\alpha} \cong U_\alpha \times \mathbb{C}\}$ son las trivializaciones que definen las funciones de transición $(U_{\alpha\beta}, \tau_{\alpha\beta})$ de L , entonces para cada abierto U_α existen funciones biholomorfas $\psi_\alpha : L_U \cong \mathbb{C}$ tales que para cada $y \in L_{U_\alpha}$ se tiene $h_\alpha(y) = (\pi(y), \psi_\alpha(y))$. Además, ψ_α restringido a cualquier fibra $L(x)$ es un isomorfismo al que denotamos por $\psi_\alpha(x) = \psi|_{L(x)} : L(x) \rightarrow \mathbb{C}$. Por tanto, las funciones de transición de L satisfacen $\tau_{\alpha\beta}(x) = \psi_\alpha(x)\psi_\beta(x)^{-1} \in \mathbb{C}^*$ para todo $x \in U_\alpha \cap U_\beta$.

Sea $\Psi_{\alpha j} : W_{\alpha j} \rightarrow \mathbb{C}$ la función holomorfa definida como $\Psi_{\alpha j}(x) = 1/(\psi_\alpha(x)(s_j(x)))$, la cual satisface que para $x \in W_{\alpha j} \cap W_{\beta k}$

$$\begin{aligned} (\Psi_{\alpha j}(x))^{-1} \phi_{\alpha j, \beta k}(x) \Psi_{\beta k}(x) &= \psi_\alpha(x)(s_j(x)) \frac{\psi_\beta(x)(s_k(x))}{\psi_\beta(x)(s_j(x))} \frac{1}{\psi_\beta(x)(s_k(x))} = \frac{\psi_\alpha(x)(s_j(x))}{\psi_\beta(x)(s_j(x))} \\ &= \tau_{\alpha j, \beta k}(x), \end{aligned}$$

lo que demuestra que $L \cong \varphi_L^* \mathcal{O}(1)$. □

Cuando $Bs(L) = \emptyset$, diremos que φ_L **separa puntos** si φ_L es inyectiva, y que φ_L **separa direcciones tangentes** si el diferencial de φ_L es inyectivo en todo punto de X .

Proposición 1.1.7. *Sea X una variedad compleja compacta y $L \rightarrow X$ un haz lineal tal que $Bs(L) = \emptyset$. Entonces, son equivalentes:*

- (i) φ_L separa puntos;
- (ii) para todo par de puntos distintos $p, q \in X$ existe una sección $s \in \mathcal{O}(X, L)$ tal que $s(p) = 0$ y $s(q) \neq 0$;
- (iii) para cualesquiera $p, q \in X$, la transformación lineal evaluación $e_X : \mathcal{O}(X, L) \rightarrow L(p) \oplus L(q)$ tal que $e_X(s) = (s(p), s(q))$, es sobreyectiva.

Proof. Fijemos una base $s_0, \dots, s_N$ para $\mathcal{O}(X, L)$. Mostremos la contrapositiva de la implicación (i) $\Rightarrow$ (ii). En este caso, la hipótesis es que existen dos puntos distintos $p, q \in X$ tales que cualquier sección $s \in \mathcal{O}(X, L)$, se tiene que $s(p) = 0$ implica $s(q) = 0$. Sin pérdida de generalidad, asumimos que $s_0(q) \neq 0$ por lo que $s_0(p) \neq 0$. Para $0 \leq j \leq N$ existen funciones holomorfas f_j, g_j tales que $s_j = f_j s_0$ y $s_j = g_j s_0$ alrededor de p y q respectivamente. Definimos la sección $s = s_j - f_j(p)s_0$ y notemos que $s(p) = 0$, por lo que la hipótesis asegura que $0 = s(q) = g_j(q)s_0(q) - f_j(p)s_0(q)$, obteniendo que $g_j(q) = f_j(p)$ para cada j ; esto significa que $\varphi_L(p) = \varphi_L(q)$, de donde se sigue que φ_L no es inyectiva.

Ahora veamos la contrapositiva de (ii) $\Rightarrow$ (i). Podemos asumir que para ciertos puntos distintos $p, q \in X$ tenemos $s_0(p) \neq 0$ y $s_k(q) \neq 0$ para algún k . Sean f_j y g_j las funciones holomorfas que satisfacen las identidades locales $s_j = f_j s_0$ en un entorno de p , y $s_j = g_j s_k$ en un entorno de q , respectivamente.

Por hipótesis, existe un $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tal que $g_j(q) = \lambda f_j(p)$. Para cualquier sección $s = \sum \alpha_j s_j \in \mathcal{O}(X, L)$ que se anula en p , tenemos que $0 = \sum \alpha_j s_j(p) = (\sum \alpha_j f_j(p))s_0(p)$ de donde obtenemos $\sum \alpha_j f_j(p) = 0$, por tanto

$$s(q) = \sum \alpha_j s_j(q) = \sum \alpha_j g_j(q) s_k(q) = \sum \alpha_j \lambda f_j(p) s_k(q) = \lambda \left(\sum \alpha_j f_j(p) \right) s_k(q) = 0,$$

como era deseado.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Sean $(u, v) \in L(p) \oplus L(q)$, para puntos distintos $p, q \in X$; por hipótesis existen secciones $s, t \in \mathcal{O}(X, L)$ tales que $s(p) = 0$, $s(q) \neq 0$, $t(p) \neq 0$ y $t(q) = 0$. Escogemos $\lambda, \gamma \in \mathbb{C}$ tales que $\lambda s(q) = v$ y $\gamma t(p) = u$ y definimos la sección $\sigma = \gamma t + \lambda s$ la cual satisface

$$e_X(\sigma) = (\sigma(p), \sigma(q)) = (\lambda t(p), \gamma s(q)) = (u, v).$$

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Para cada par de puntos distintos $p, q \in X$ elegimos un $v \in L(q) \setminus \{0\}$, por la sobreyectividad de e_X existe $s \in \mathcal{O}(X, L)$ tal que $(0, v) = e_X(s) = (s(p), s(q))$. $\square$

Sea $S \in X$ un cerrado, definimos el subespacio

$$\mathcal{I}_{\{S\}}(X, L) = \{s \in \mathcal{O}(X, L) \mid s(x) = 0 \text{ para todo } x \in S\}.$$

Proposición 1.1.8. *Sea X una variedad compleja compacta de dimensión n y $L \rightarrow X$ un haz lineal tal que $Bs(L) = \emptyset$. Entonces, son equivalentes:*

- (i) φ_L separa direcciones tangentes;
- (ii) para cada $p \in X$ y cada $v \in T_p^{1,0}X \setminus \{0\}$, existe una sección $s \in \mathcal{I}_p(X, L)$ que puede escribirse localmente como $s = f\sigma$, donde σ es un marco local alrededor de p , tal que $f(p) = 0$ y $v(f) \neq 0$;
- (iii) para algún marco local σ definido en un entorno de p , la aplicación lineal

$$d_X : \mathcal{I}_{\{p\}}(X, L) \longrightarrow \bigwedge_p^{1,0} X, \quad d_X(s) = df_p,$$

donde f es la función componente de s respecto de σ , es sobreyectiva.

Proof. Fijemos $s_0, \dots, s_N \in \mathcal{O}(X, L)$ una base y $p \in X$. Podemos asumir que $s_0(p) \neq 0$, de modo que s_0 define un marco local sobre un entorno U alrededor de p . Existen funciones holomorfas f_j tales que $s_j = f_j s_0$, y por lo tanto, el morfismo asociado se puede expresar localmente como $\varphi_L = [1, f_1, \dots, f_N] : U \rightarrow \mathbb{P}^N$, que en una carta afín se escribe como $\overline{\varphi}_L = (f_1, \dots, f_N) : U \rightarrow \mathbb{C}^N$. Sea $(z_1, \dots, z_n)$ un sistema de coordenadas locales en p y $(w_1, \dots, w_N)$ coordenadas locales en $\varphi_L(p)$. El diferencial de φ_L en p aplicado a un vector tangente $v = \sum \alpha_k \frac{\partial}{\partial z_k} \in T_p^{1,0}X$ se expresa como

$$D(\varphi_L)(p)v = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq N}} \alpha_k \frac{\partial f_j}{\partial z_k}(p) \frac{\partial}{\partial w_j} = \sum_{j=1}^N v(f_j) \frac{\partial}{\partial w_j}. \quad (1.1)$$

(i) $\Rightarrow$ (ii) Si $v \neq 0$, como $D(\varphi_L)(p)$ es inyectivo, de (1.1) obtenemos que $v(f_j) \neq 0$ para algún j . Definimos $s = s_j - f_j(p)s_0 \in \mathcal{I}_{\{p\}}(X, L)$ que localmente se escribe como $s = (f_j - f(p))s_0$ que satisface $v(f - f(p)) = v(f) \neq 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Notemos primero que la propiedad (ii) no depende del marco local elegido. Supongamos que $v \neq 0$ pero tal que $D(\varphi_L)(p)v = 0$, por (1.1) esto significa exactamente que $v(f_j) = 0$ para cada j . Por hipótesis existe una sección $s \in \mathcal{I}_{\{p\}}(X, L)$ tal que para el marco s_0 alrededor de p , ella admite la expresión $s = fs_0$ con $v(f) \neq 0$. Dado que $s = \sum \beta_j s_j$ para ciertos $\beta_j \in \mathbb{C}$, localmente tenemos $fs_0 = \sum \beta_j f_j s_0$, de aquí deducimos que $f = \sum \beta_j f_j$ y que $0 \neq v(f) = v(\sum \beta_j f_j) = \sum \beta_j v(f_j)$; pero esto contradice la suposición de que $v(f_j) = 0$ para cada j . Por lo tanto, $D(\varphi_L)(p)v \neq 0$ y $\ker D(\varphi_L)(p) = 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Por linealidad nos basta probar que para cada $1 \leq l \leq n$ existe un $\sigma_l \in \mathcal{I}_{\{p\}}(X, L)$ tal que $d_X(\sigma_l) = dz_l$.

Sean $\sigma_1, \dots, \sigma_n \in \mathcal{I}_{\{p\}}(X, L)$ cuyas funciones coordenadas en el marco local σ alrededor de p son $f_1, \dots, f_n$ respectivamente. El desarrollo en serie de Taylor alrededor de p de las funciones componentes son

$$\begin{aligned} f_1 &= a_{11}z_1 + \dots + a_{n1}z_n + \tilde{f}_1 \\ &\vdots \\ f_n &= a_{1n}z_1 + \dots + a_{nn}z_n + \tilde{f}_n \end{aligned} \quad (1.2)$$

donde los términos $\tilde{f}_j$ son de orden al menos dos y $a_{kj} = \frac{\partial f_j}{\partial z_k}(p)$. Sea $\Lambda = (a_{jk})$ la matriz jacobiana y e_l el l -ésimo vector de la base canónica de $\mathbb{C}^n$. Si $\det \Lambda \neq 0$ entonces el sistema lineal

$$\Lambda \alpha = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = e_l \quad (1.3)$$

tiene solución. Por lo que en este caso existen escalares α_j que resuelven (1.3) tales que para la sección $s = \sum \alpha_j \sigma_j \in \mathcal{I}_{\{p\}}(X, L)$ admite la expresión local $s = \sum \alpha_j f_j \sigma$ y además

$$\begin{aligned} d_X(s) &= d \left(\sum_j \alpha_j f_j \right)_p = \sum_j \alpha_j d(f_j)_p = \sum_j \alpha_j \left(\sum_k \frac{\partial f_j}{\partial z_k}(p) dz_k \right) = \sum_k \left(\sum_j a_{kj} \alpha_j \right) dz_k \\ &= \sum_k \delta_{kl} dz_k = dz_l. \end{aligned}$$

Por tanto, el problema se reduce a construir secciones en $\mathcal{I}_p(X, L)$ cuyas funciones componentes $f_1, \dots, f_n$ satisfagan que $\det \Lambda \neq 0$, siendo $\Lambda = \left(\frac{\partial f_k}{\partial z_j}(p) \right)_{jk}$.

Introduzcamos la siguiente notación: si $1 \leq k \leq n$ y $f_1, \dots, f_k$ son funciones holomorfas alrededor de p , que se anulan en p y tienen expansiones de Taylor como en (1.2), definimos la matriz

$$M(f_1, \dots, f_k) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix} \in M_{k \times k}(\mathbb{C}).$$

Afirmamos que, para $1 \leq k \leq n$, es posible construir recursivamente, secciones $\sigma_1, \dots, \sigma_k \in \mathcal{I}_{\{p\}}(X, L)$, con representación local $\sigma_j = f_j \sigma$ tales que $\det M(f_1, \dots, f_k) \neq 0$.

Comenzamos para $k = 1$. Para $v_1 = \frac{\partial}{\partial z_1}$ por hipótesis existe $\sigma_1 \in \mathcal{I}_{\{p\}}(X, L)$ tal que $\sigma_1 = f_1 \sigma$ para alguna función holomorfa f_1 con $0 \neq v_1(f_1) = \frac{\partial f_1}{\partial z_1}(p)$ por lo que $\det M(f_1) \neq 0$.

Supongamos que para $k - 1$ ya hemos construido secciones $\sigma_1, \dots, \sigma_{k-1} \in \mathcal{I}_{\{p\}}(X, L)$, siendo sus funciones coordenadas $f_1, \dots, f_{k-1}$ tales que $\det M(f_1, \dots, f_{k-1}) \neq 0$. Usando la notación como en (1.2), definamos la matriz A_{rs} como el menor (r, s) de orden $k \times k$ de la matriz

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k-1} & a_{1k} \\ a_{21} & \cdots & a_{2k-1} & a_{2k} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{k-11} & \cdots & a_{k-1k-1} & a_{k-1k} \end{pmatrix}$$

y notemos que $\det A_{k,k} = \det M(f_1, \dots, f_{k-1})$. Definimos el vector tangente

$$v_k = \sum_{j=1}^k (-1)^{j+k} \det A_{j,k} \frac{\partial}{\partial z_j} \in T_p^{1,0} X \setminus \{0\}.$$

Por hipótesis existe una sección $\sigma_k \in \mathcal{I}_{\{p\}}(X, L)$ tal que $\sigma_k = f_k \sigma$ y

$$0 \neq v_k(f_k) = \sum_{j=1}^k (-1)^{j+k} (\det A_{j,k}) \frac{\partial f_k}{\partial z_j}(p) = \sum_{j=1}^k (-1)^{j+k} a_{j,k+1} \det A_{j,k}; \quad (1.4)$$

pero la última expresión de la derecha de (1.4) es el desarrollo en cofactores de Laplace del determinante de la matriz $M(f_1, \dots, f_k)$. Por tanto, la afirmación queda probada, y para $k = n$ obtenemos las secciones deseadas de $\mathcal{I}_p(X, L)$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Sea $v = \sum \alpha_j \frac{\partial}{\partial z_j} \in T_p^{1,0} X \setminus \{0\}$. Para $u = \sum \bar{\alpha}_j dz_j \in \bigwedge_p^{1,0} X$ existe una sección $s \in \mathcal{I}_{\{p\}}(X, L)$ tal que alrededor de p se localmente se escribe $s = f\sigma$ y $u = d_X(s) = df_p$, esto significa que $\frac{\partial f}{\partial z_j}(p) = \bar{\alpha}_j$ para cada j . Por lo que $v(f) = \sum \alpha_j \frac{\partial f}{\partial z_j}(p) = \sum |\alpha_j|^2 > 0$. $\square$

Sea L un haz lineal sobre una variedad compleja X . Se dice que L es **muy amplio** si $\varphi_L : X \rightarrow \mathbb{P}^N$ es un encaje, i.e. una inmersión que es un homeomorfismo sobre su imagen con la topología de subespacio. Si existe un $k > 0$ tal que L^k es muy amplio diremos que L es **amplio**.

Corolario 1.1.9. *Sea $L \rightarrow X$ un haz lineal sobre X una variedad compleja compacta. Entonces L es muy amplio si y solo si φ_L separa puntos y direcciones tangentes.*

Proof. Por los resultados previos (1.1.7) y (1.1.8) sólo queda probar que si φ_L separa puntos y direcciones tangentes, entonces φ_L es un homeomorfismo sobre su imagen. Veamos que φ_L es cerrado: si Y es un cerrado de X , dado que X es compacto, entonces Y es compacto y su imagen $\varphi_L(Y)$ es un compacto de $\mathbb{P}^N$. pero como $\mathbb{P}^n$ es Hausdorff, se sigue que $\varphi_L(Y)$ es cerrado. Entonces φ_L es continua, cerrada y biyectiva, por lo que φ_L es un homeomorfismo sobre su imagen. $\square$

Una **variedad proyectiva** es una variedad compleja que es biholomorfa a una subvariedad cerrada de $\mathbb{P}^n$.

Corolario 1.1.10. *Una variedad compleja compacta X es proyectiva si y solo si admite un haz lineal amplio.*

Proof. Si la dimensión de X es cero, entonces X es un conjunto finito de puntos y no hay nada que demostrar. Asumamos que $\dim X > 0$.

Si $L \rightarrow X$ es un haz lineal amplio, entonces para algún entero $k > 0$ tenemos que $\varphi_L : X \rightarrow \mathbb{P}^N$ es un encaje. En particular, φ_L es una aplicación holomorfa inyectiva y, por tanto, un biholomorfismo sobre su imagen. Además, como φ_L es cerrado, la imagen $\varphi_L(X)$ es una subvariedad proyectiva de $\mathbb{P}^N$.

Supongamos ahora que la variedad X es proyectiva. Podemos asumir sin pérdida de generalidad que $X \subset \mathbb{P}^N$ y es cerrado. Sea $L \rightarrow X$ el haz lineal que es la restricción del haz de hiperplano $\mathcal{O}(1) \rightarrow \mathbb{P}^N$ a la variedad X . Usaremos las equivalencias de (1.1.7) y (1.1.8) para verificar que L es amplio.

Mostremos que φ_L separa puntos. Sean $p = [p_0, \dots, p_N]$ y $q = [q_0, \dots, q_N]$ puntos distintos de X . Definimos los puntos $P = (p_0, \dots, p_N), Q = (q_0, \dots, q_N) \in \mathbb{C}^{N+1}$. Como ellos son linealmente independientes, existe una solución al sistema

$$\begin{pmatrix} p_0 & \cdots & p_N \\ q_0 & \cdots & q_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \vdots \\ \lambda_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

Definimos la función lineal $f : \mathbb{C}^{N+1} \rightarrow \mathbb{C}$ como $f(z) = \sum_{j=0}^N \lambda_j z_j$, donde los λ_j satisfacen la ecuación anterior. Así, $f(P) = 0$ y $f(Q) = 1$.

Toda función lineal $F : \mathbb{C}^{N+1} \rightarrow \mathbb{C}$ define una sección global en $\sigma_F \in \mathcal{O}(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}(1))$, donde $\sigma_F : \mathbb{P}^N \rightarrow \mathcal{O}(1)$ está definido como $\sigma_F(\xi) = F|_{\xi}$ la restricción de F a la recta $\xi \in \mathbb{P}^N$.

Sea $\sigma_f \in \mathcal{O}(X, L)$ la sección obtenida por f , entonces tenemos que $\sigma_f(p) = 0$ y $\sigma_f(q) \neq 0$.

Veamos que φ_L separa direcciones tangentes. Sea $p = [p_0, \dots, p_N] \in X$ y supongamos que $p_0 = 1$ y tomamos $z = (z_1, \dots, z_N)$ coordenadas locales alrededor de p . Consideremos $v = \sum \alpha_j \frac{\partial}{\partial z_j} \in T_p^{1,0} X$ tal que algún $v_k \neq 0$. Definimos las funciones $f : \mathbb{C}^{N+1} \rightarrow \mathbb{C}$ como $f(z) = z_k - p_k$ y $F : \mathbb{C}^{N+1} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $F(z) = (p_k/p_0 + 1)z_0 - z_k$. Notemos que $f(P) = 0$ y $F(P) \neq 0$. La función lineal F induce una sección global $\sigma_F \in \mathcal{O}(X, L)$ tal que $\sigma_F(P) \neq 0$. Entonces $s = f\sigma_F \in \mathcal{O}(X, L)$ satisface $v(f) = \sum \alpha_j \frac{\partial f}{\partial z_j}(p) = \alpha_k \neq 0$. $\square$

1.2. Gavillas sobre variedades

A continuación, daremos ejemplos de gavillas sobre una X variedad compleja. Sean $E \rightarrow X$ un haz vectorial, $S \subset X$ un cerrado y U un abierto de X . Las gavillas $\mathcal{O}, \mathcal{O}^*, \mathcal{O}(E), \mathcal{O}^*(E), \mathcal{E}, \mathcal{E}^{p,q}, \mathcal{E}(E), \mathcal{E}^{p,q}(E), \mathcal{I}_S(E)$ y $\mathcal{I}_S^2(E)$ están definidas de la siguiente manera:

- (a) $\mathcal{O}(U)$ es el espacio vectorial de las funciones holomorfas sobre U .
- (b) $\mathcal{O}^*(U)$ es el grupo abeliano de las funciones holomorfas sobre U nunca nulas.
- (c) $\mathcal{O}(U, E)$ es el espacio vectorial de secciones sobre U de E .
- (d) $\mathcal{O}^*(U, E)$ es el espacio vectorial de secciones sobre U de E nunca nulas.
- (e) $\mathcal{E}(U)$ es el espacio vectorial de las funciones diferenciales complejo valuadas sobre U .
- (f) $\mathcal{E}^{p,q}(U)$ es el espacio de (p, q) -formas diferenciales sobre U .
- (g) $\mathcal{E}(U, E)$ es el espacio vectorial de las secciones diferenciales sobre U de E visto como un haz vectorial diferenciable.
- (h) $\mathcal{E}^{p,q}(U, E)$ es el espacio de (p, q) -formas diferenciales sobre U que están valuadas en E .
- (i) $\mathcal{I}_S(U, E)$ es el espacio de secciones sobre U de E que se anulan en S .
- (j) $\mathcal{I}_S^2(U, E)$ es el espacio de secciones sobre U de E tal que sus funciones componentes en cualquier marco local se **anulan de orden al menos 2**, es decir, las funciones componentes escriben como una suma finita $\sum u_j v_j$ donde cada u_j y v_j son funciones holomorfas que se anulan en la intersección de sus dominios y S .

Proposición 1.2.1. *Si X es una variedad compleja, $S \subset X$ una hipersuperficie cerrada compleja, $L_S \rightarrow X$ el haz lineal asociado a S visto en (1.1.4) y $E \rightarrow X$ algún haz vectorial sobre X de rango r . Entonces*

- (i) *La gavilla $\mathcal{I}_S(E)$ de secciones que se anulan en S es isomorfa a $\mathcal{O}(L_S^* \otimes E)$.*
- (ii) *La gavilla $\mathcal{I}_S^2(E)$ de secciones que se anulan al menos a segundo orden sobre S es isomorfa a $\mathcal{O}(L_S^* \otimes L_S^* \otimes E)$.*

Proof. (i) Sean $\psi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(r, \mathbb{C})$ cociclos de E y $\tau_{\alpha\beta} = f_\beta/f_\alpha : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \mathbb{C}^*$ cociclos de L_S^* vistos en la demostración de (1.1.4). Para cada abierto U de X vamos a definir una transformación $\mathbb{C}$ -lineal $\Phi_U : \mathcal{I}_S(U, E) \rightarrow \mathcal{O}(U, L_S^* \otimes E)$ de la siguiente manera: una sección $s \in \mathcal{I}_S(U, L_S^*)$ está determinada por funciones holomorfas $s_\alpha : U_\alpha \cap U \rightarrow \mathbb{C}^r$ tales que s_α se anula en $S \cap U_\alpha$ y

$s_\alpha = \psi_{\alpha\beta} s_\beta$ sobre $U \cap U_\alpha \cap U_\beta$. Como f_α se anula de manera simple sobre $U_\alpha \cap S$ podemos definir funciones holomorfas $\sigma_\alpha := \frac{1}{f_\alpha} s_\alpha : U_\alpha \cap U \rightarrow \mathbb{C}^r$ y sobre $U \cap U_\alpha \cap U_\beta$ tenemos que

$$\psi_{\alpha\beta} \tau_{\alpha\beta} \sigma_\beta = \psi_{\alpha\beta} \frac{f_\beta}{f_\alpha} \frac{1}{f_\beta} s_\beta = \frac{1}{f_\alpha} \psi_{\alpha\beta} s_\beta = \frac{1}{f_\alpha} s_\alpha = \sigma_\alpha,$$

por lo que $\{\sigma_\alpha\}$ define una sección $\sigma \in \mathcal{O}(U, L_S^* \otimes E)$. Definimos $\Phi_U(s) = \sigma$ y podemos ver que cada Φ_U es una transformación lineal de $\mathbb{C}$ -espacios vectoriales y que son compatibles con la restricción, por lo que hemos definido un morfismo de gavillas $\Phi : \mathcal{I}_S(E) \rightarrow \mathcal{O}(L_S^* \otimes E)$.

El morfismo Φ es inyectivo. En efecto, para cualquier abierto $U \subset X$ y para toda sección $s \in \mathcal{I}_S(U, E)$ tal que $\Phi_U(s) = 0$, entonces tenemos $\frac{1}{f_\alpha} s_\alpha = 0$, así que $s_\alpha = 0$ para cada α ; por lo que la sección s es la sección nula.

Ahora probaremos que Φ_U es sobreyectivo para cada abierto $U \subset X$. Dado $\sigma \in \mathcal{O}(U, L_S^* \otimes E)$ existen funciones holomorfas $\sigma_\alpha : U \cap U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}^r$ tales que sobre $U \cap U_\alpha \cap U_\beta$ tenemos que $\sigma_\alpha = \psi_{\alpha\beta} \tau_{\alpha\beta} \sigma_\beta$, es decir, $f_\alpha \sigma_\alpha = \psi_{\alpha\beta} f_\beta \sigma_\beta$. Por tanto, $\{s_\alpha := f_\alpha \sigma_\alpha\}$ define una sección $s \in \mathcal{I}_S(U, L)$. Notemos que $\Phi(s) = \sigma$, pues las funciones holomorfas asociadas a $\Phi(s)$ son $\frac{1}{f_\alpha} s_\alpha$ que es justamente σ_α .

(ii) Para cada abierto $U \subset X$ definimos la transformación lineal $\Phi_U : \mathcal{I}_S^2(U, E) \rightarrow \mathcal{O}(U, L_S^* \otimes L_S^* \otimes E)$ como sigue: si $s \in \mathcal{I}_S^2(U, E)$ y $\{s_\alpha : U \cap U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}^r\}$ son las funciones holomorfas asociadas a s las cuales se anulan en S al menos en orden dos, entonces podemos considerar funciones holomorfas $\sigma_\alpha := \frac{1}{f_\alpha^2} s_\alpha : U \cap U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}^r$. Notemos que sobre $U \cap U_\alpha \cap U_\beta$ tenemos

$$\psi_{\alpha\beta} (\tau_{\alpha\beta})^2 \sigma_\beta = \psi_{\alpha\beta} \frac{f_\beta^2}{f_\alpha^2} \frac{1}{f_\beta^2} s_\beta = \frac{1}{f_\alpha^2} \psi_{\alpha\beta} s_\beta = \frac{1}{f_\alpha^2} s_\alpha = \sigma_\alpha,$$

por lo que $\{\sigma_\alpha\}$ define una sección $\sigma \in \mathcal{I}_S^2(U, L)$ y definimos $\Phi_U(s) = \sigma$. Tal como en el inciso anterior, Φ_U define un morfismo de gavillas $\Phi : \mathcal{I}_S^2(E) \rightarrow \mathcal{O}(L_S^* \otimes L_S^* \otimes E)$ y de manera análoga se prueba que es un isomorfismo. $\square$

1.3. Positividad de haces lineales

Una **métrica hermitiana** h sobre un haz vectorial $E \rightarrow X$ es una asignación de un producto hermitiano $h(x) = \langle \cdot, \cdot \rangle_x$ sobre cada fibra $E(x)$ para cada $x \in X$, tal que para cualquier abierto $U \subset X$ y secciones $\eta, \delta \in \mathcal{E}(U, E)$, la función $\langle \eta, \delta \rangle : U \rightarrow \mathbb{C}$ definida como $\langle \eta, \delta \rangle(x) = \langle \eta(x), \delta(x) \rangle_x$ es C^∞ -diferenciable.

Una **métrica hermitiana** h sobre una variedad compleja X es una métrica hermitiana sobre su haz tangente $TX \rightarrow X$. Podemos descomponer la métrica hermitiana en $g = \operatorname{Re} h$ y $\omega = -\operatorname{Im} h$ (esta última se llama la **2-forma fundamental** de la métrica) y escribir $h = g - i\omega$, con g una métrica riemanniana y ω una 2-forma de tipo (1,1).

Una (1,1)-forma ω es **positiva** si en coordenadas locales $z = (z_1, \dots, z_n)$ sobre X , la forma se expresa como

$$\omega(z) = \frac{i}{2} \sum h_{jk}(z) dz_j \wedge d\bar{z}_k$$

siendo la matriz $(h_{jk}(z))$ hermitiana y definida positiva para cada z .

Sea $J : TX \rightarrow TX$ la estructura casi compleja de la variedad compleja X , entonces ω es cualquier (1,1)-forma definida positiva si y solo si $\omega(v, Jv) > 0$ para cualquier vector tangente real v no nulo. En consecuencia, una (1,1)-forma definida positiva ω define una métrica hermitiana $h(\cdot, \cdot) = \omega(\cdot, J(\cdot)) - i\omega(\cdot, \cdot)$.

Ejemplo 1.3.1 (La métrica de Fubini-Study). Sobre el espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$ definimos una métrica, llamada métrica de Fubini-Study, de la siguiente manera. Fijemos $\mathbb{P}^n = \bigcup U_j$ la cubierta abierta estándar y consideremos las coordenadas afines $\phi_j : U_j \rightarrow \mathbb{C}^n$ tal que $\phi_j([z_0, \dots, z_n]) = (z_0/z_j, \dots, \widehat{z_j/z_j}, \dots, z_n/z_j) = (w_1, \dots, w_n)$. Definimos la 1-forma sobre U_i como

$$\omega_j = \frac{i}{2\pi} \partial \bar{\partial} \log \left(\sum_{k=0}^n \left| \frac{z_k}{z_j} \right|^2 \right)$$

que bajo ϕ_j se expresa como

$$\frac{i}{2\pi} \partial \bar{\partial} \log \left(\sum_{k=1}^n |w_k|^2 + 1 \right).$$

Se verifica que $\omega_j|_{U_j \cap U_k} = \omega_k|_{U_j \cap U_k}$, por lo que se pegan en una $(1,1)$ -forma ω_{FS} llamada **forma de Fubini-Study**. Además ω_{FS} es una forma real, cerrada y admite la expresión local

$$\omega_{FS} = \frac{i}{2\pi} \frac{1}{1 + \sum |w_l|^2} \sum h_{jk} dw_j \wedge d\bar{w}_k$$

donde $h_{jk} = (1 + \sum |w_l|^2) \delta_{jk} - \bar{w}_j w_k$ define una matriz hermitiana definida positiva. En consecuencia, ω_{FS} define una métrica hermitiana, que es la métrica Fubini-Study.

Una **conexión** sobre un haz lineal $L \rightarrow X$ es una transformación $\mathbb{C}$ -lineal

$$D : \mathcal{E}(X, L) \rightarrow \mathcal{E}^1(X, L)$$

tal que satisface la regla de Leibniz

$$D(f\xi) = df \otimes \xi + fD\xi,$$

para toda función diferenciable $f \in \mathcal{E}(X)$ y toda sección $\xi \in \mathcal{E}(X, L)$. Elegimos un marco local e para L y podemos escribir

$$De = \theta \otimes e, \tag{1.6}$$

donde θ es una 1-forma y está determinada de manera única por el marco e . La 1-forma θ se denomina **1-forma de conexión** de D con respecto al marco e , y para indicar explícitamente esta dependencia, la denotamos por $\theta = \theta_e$.

Si $\xi \in \mathcal{E}(U, L)$ y e es un marco sobre U , entonces $\xi = fe$. En tal caso, se tiene

$$\begin{aligned} D\xi &= D(fe) = df \otimes e + fDe = df \otimes e + f\theta \otimes e \\ &= (df + f\theta) \otimes e. \end{aligned} \tag{1.7}$$

De este modo, una 1-forma determina localmente una conexión sobre U una vez fijado un marco local. Si e' es otro marco sobre U entonces tenemos que $e' = ge$ para alguna función diferenciable $g \in \mathcal{E}^*(U)$. Así,

$$(\theta_{e'}g) \otimes e = \theta_{e'} \otimes e' = De' = D(ge) = dg \otimes e + gDe = dg \otimes e + g\theta_e \otimes e = (dg + g\theta_e) \otimes e,$$

de donde obtenemos

$$\theta_{e'} = g^{-1}dg + \theta_e. \tag{1.8}$$

La igualdad (1.8) permite definir una conexi3n global a partir de 1-formas dada por la identidad (1.7). En efecto, si $f \in \mathcal{E}(U, L)$, e y e' marcos sobre U tal que $e' = ge$, entonces

$$\begin{aligned} (df + f\theta_{e'}) \otimes e' &= (df + f(g^{-1}dg + \theta_e)) \otimes (ge) = (gdf + fdg + fg\theta_e) \otimes e \\ &= (d(fg) + (fg)\theta_e) \otimes e. \end{aligned}$$

Recordemos que, por ser X una variedad compleja, tenemos sobre el haz lineal $L \rightarrow X$ la descomposici3n de las gavillas de secciones diferenciales evaluadas en L

$$\mathcal{E}^k(L) = \bigoplus_{p+q=k} \mathcal{E}^{p,q}(L),$$

donde $\mathcal{E}^{p,q}(L) = \mathcal{E}^{p,q} \otimes_{\mathcal{E}} \mathcal{E}(L)$. Por tanto, una conexi3n

$$D : \mathcal{E}(X, L) \rightarrow \mathcal{E}^1(X, L) = \mathcal{E}^{1,0}(X, L) \oplus \mathcal{E}^{0,1}(X, L)$$

se descompone como $D = D^{1,0} + D^{0,1}$ donde

$$D^{1,0} : \mathcal{E}(X, L) \rightarrow \mathcal{E}^{1,0}(X, L) \text{ y } D^{0,1} : \mathcal{E}(X, L) \rightarrow \mathcal{E}^{0,1}(X, L).$$

Sea $L \rightarrow X$ un haz lineal hermitiano provisto de una conexi3n D . Diremos que D es:

- (a) **Compatible con la m3trica** si, para toda pareja de secciones locales $\xi, \eta \in \mathcal{E}(U, L)$, se cumple

$$d\langle \xi, \eta \rangle = \langle D\xi, \eta \rangle + \langle \xi, D\eta \rangle,$$

donde $d\langle \xi, \eta \rangle$ denota la derivada exterior del producto hermitiano, y, por definici3n

$$\langle \alpha \otimes e, e \rangle := \alpha \langle e, e \rangle \text{ y an3logamente } \langle e, \alpha \otimes e \rangle := \overline{\alpha} \langle e, e \rangle,$$

siendo α una 1-forma.

- (b) **Compatible con la estructura compleja** si, para toda secci3n local $\sigma \in \mathcal{O}(U, L)$, se tiene $D^{0,1}\sigma = 0$.

Teorema 1.3.2. *Todo haz lineal hermitiano admite una 3nica conexi3n que es compatible tanto con la m3trica como con la estructura compleja. Esta conexi3n es llamada la **conexi3n de Chern** de L .*

Proof. Sea e un marco local de L sobre un abierto U . Si $\sigma = fe$, con f una funci3n holomorfa en U , una conexi3n D se escribe como $D\sigma = (df + \theta f) \otimes e$. Comparando los tipos de las 1-formas, se obtiene $D^{1,0}(fe) = (\partial f + f\theta^{1,0}) \otimes e$ y $D^{0,1}(fe) = (\bar{\partial} f + f\theta^{0,1}) \otimes e = f\theta^{0,1} \otimes e$. De aqu3 se deduce que D es compatible con la estructura compleja si y solo si la 1-forma de conexi3n θ es de tipo $(1, 0)$. Sea ahora $h = \langle e, e \rangle$. Si D es compatible con la m3trica, entonces

$$\begin{aligned} dh &= d\langle e, e \rangle = \langle De, e \rangle + \langle e, De \rangle = \langle \theta \otimes e, e \rangle + \langle e, \theta \otimes e \rangle \\ &= \theta \langle e, e \rangle + \bar{\theta} \langle e, e \rangle = \theta h + \bar{\theta} h. \end{aligned}$$

Comparando el tipo de las 1-formas tenemos que

$$\begin{aligned} \bar{\partial} h &= \theta^{0,1} h + \overline{(\theta^{1,0})} h, \\ \partial h &= \theta^{1,0} h + \overline{(\theta^{0,1})} h. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Volviendo al teorema, supongamos que existe tal conexión D . En un marco local, tenemos que la 1-forma de conexión θ de D es de tipo $(1,0)$ y la ecuación (1.9) implica

$$\theta = h^{-1}\partial h = \partial(\log h).$$

Así, localmente la conexión D está determinada de manera única. Para ver que la fórmula para θ determina una conexión global debemos mostrar que para marcos locales e y e' las 1-formas satisfacen la identidad (1.8). Si $e' = ge$ con g una función local holomorfa que no se anula, $h_{e'} = \langle e', e' \rangle$ y $h_e = \langle e, e \rangle$ entonces $h_{e'} = \bar{g}gh_e$; así que

$$\begin{aligned} g\theta_{e'} &= g(h_{e'}^{-1}\partial h_{e'}) = g((g^{-1}\bar{g}^{-1}h_e^{-1})(\partial(g\bar{g}h_e))) \\ &= \bar{g}^{-1}h_e^{-1}\partial(g\bar{g}h_e) = \bar{g}^{-1}h_e^{-1}(\bar{g}h_e\partial g + g\bar{g}\partial h_e + gh_e\partial\bar{g}) \\ &= \partial g + gh_e^{-1}\partial h_e = dg + gh_e^{-1}\partial h_e \\ &= dg + g\theta_e. \end{aligned}$$

Por tanto, las 1-formas locales $\theta = h^{-1}\partial h$ satisfacen la relación de compatibilidad requerida, y la conexión que definen es global y única $\square$

Podemos extender una conexión D a un operador

$$D : \mathcal{E}^1(X, L) \rightarrow \mathcal{E}^2(X, L)$$

de la siguiente manera: si α es una 1-forma sobre X y $\xi \in \mathcal{E}(X, L)$, entonces

$$D(\alpha \otimes \xi) = d\alpha \otimes \xi - \alpha \wedge D\xi.$$

La **curvatura** de la conexión D se define como el operador $D^2 : \mathcal{E}(X, L) \rightarrow \mathcal{E}^2(X, L)$. Si θ_e es la 1-forma de conexión de D asociada al marco local e , vemos que

$$\begin{aligned} D^2(fe) &= D(df \otimes e + f\theta \otimes e) = d^2f \otimes e - df \wedge De + d(f\theta) \otimes e - f\theta \wedge De \\ &= -df \wedge \theta \otimes e + df \wedge \theta \otimes e + fd\theta \otimes e - f\theta \wedge \theta \otimes e \\ &= fd\theta \otimes e = fD^2e. \end{aligned}$$

De aquí se sigue que D^2 es $\mathcal{E}(X)$ -lineal. Para otra elección de marco local $e' = ge$ se cumple

$$g(d\theta_e \otimes e) = gD^2(e) = D^2(ge) = D^2e' = d\theta_{e'} \otimes e' = d\theta_{e'} \otimes (ge),$$

de donde se sigue que $\theta_{e'} = \theta_e$. Esto permite definir una 2-forma global Θ , caracterizada por la identidad local $\Theta = d\theta$. La 2-forma Θ se llama **forma de curvatura** de la conexión D .

Proposición 1.3.3 (Operaciones en las formas de curvatura de conexiones de Chern). *Sean X e Y variedades complejas, L y L' haces lineales hermitianos sobre X , y $f : X \rightarrow Y$ una función holomorfa. Denotemos por Θ_L y $\Theta_{L'}$ las formas de curvatura de las conexiones de Chern de L y L' .*

Si $\Theta_{L \otimes L'}$, Θ_{L^} y Θ_{f^*L} son las formas de curvatura de las conexiones de Chern en el producto tensorial, el dual y el pullback, respectivamente, entonces se cumple que:*

$$(i) \quad \Theta_{L \otimes L'} = \Theta_L + \Theta_{L'};$$

$$(ii) \quad \Theta_{L^*} = -\Theta_L;$$

(iii) $\Theta_{f^*L} = f^*\Theta_L$.

La demostración de este resultado se omite; véase la Proposición 4.3.7 en [2].

Ejemplo 1.3.4. Para el haz tautológico $\mathcal{O}(-1) \rightarrow \mathbb{P}^n$ tenemos una métrica hermitiana $\langle, \rangle$ canónica: cada fibra puede identificarse con una línea que pasa por el origen en $\mathbb{C}^{n+1}$, de modo que hereda la métrica hermitiana estándar de $\mathbb{C}^{n+1}$. En la carta afín $U_j = \{[w] \in \mathbb{P}^n \mid w_j \neq 0\}$, la sección local $s_j : U_j \rightarrow \mathcal{O}(-1)$ definida como $s_j([w]) = ([w], \frac{1}{w_j}(w_0, \dots, w_n))$ es un marco sobre U_j . Definimos $h = \langle s_j, s_j \rangle$ y tenemos que $h^2 = |w|^2/|w_j|^2$. Por tanto, sobre U_j la 1-forma de la conexión de Chern es $\theta = \partial \log h$ y la forma de curvatura correspondiente es

$$\Theta_{\mathcal{O}(-1)} = \bar{\partial} d\theta = \bar{\partial} \partial \log \left(\frac{|w|^2}{|w_j|^2} \right) = -\bar{\partial} \bar{\partial} \log \left(\frac{|w|^2}{|w_j|^2} \right) = -\frac{2\pi}{i} \omega_{FS} = 2\pi i \omega_{FS}$$

En consecuencia,

$$\Theta_{\mathcal{O}(1)} = -\Theta_{\mathcal{O}(-1)} = -2\pi i \omega_{FS}. \quad (1.10)$$

Dada una conexión D y su forma de curvatura Θ , definimos la **primera forma de Chern** de D como

$$c_1(D) = \frac{i}{2\pi} \Theta.$$

Como $c_1(D)$ es una 2-forma cerrada, su clase define un elemento en $H_{dR}^2(X, \mathbb{C})$ y puede verificarse que esta no depende de la conexión elegida.

Además, si la conexión D sobre una haz vectorial hermitiano es compatible con la métrica, $c_1(D)$ es real y su clase define un elemento en $H_{dR}^2(X, \mathbb{R})$.

Dado que toda conexión admite una métrica hermitiana compatible, definimos la **primera clase de Chern** de L como

$$c_1(L) = [c_1(D)] \in H_{dR}^2(X, \mathbb{R}),$$

para cualquier conexión D sobre L .

Si, además, la conexión D es compatible con la estructura holomorfa, la primera forma de Chern asociada a D es una 2-forma de tipo (1,1). En consecuencia, las primeras formas de Chern asociadas a conexiones de Chern son 2-formas cerradas, reales y de tipo (1,1).

Un haz lineal es **positivo** si su primera clase de Chern puede ser representada por una (1,1)-forma positiva.

Proposición 1.3.5. *Sea $L \rightarrow X$ un haz lineal sobre una variedad compleja compacta X . Entonces, L es positivo si y solo si existe una métrica hermitiana sobre L tal que la primera forma de Chern asociada es una (1,1)-forma positiva.*

La demostración de este resultado se omite; véase la Proposición 2.2 en [5].

Observación 1.3.6. Del ejemplo (1.3.4) vemos que el haz de hiperplano $\mathcal{O}(1)$ es positivo.

Proposición 1.3.7. *Supongamos que X es una variedad compleja compacta y $L \rightarrow X$ un haz lineal positivo. Si Y es una variedad compleja y $f : Y \rightarrow X$ es una inmersión holomorfa entonces el haz lineal $f^*L \rightarrow Y$ también es positivo.*

Proof. Consideremos la primera forma de Chern $\frac{i}{2\pi} \Theta_L$ positiva asociada a una métrica hermitiana dada por (1.3.5). Esta métrica induce una métrica hermitiana en f^*L tal que su primera forma de Chern es $\frac{i}{2\pi} f^* \Theta_L$ como en (1.3.3). Para cada $y \in Y$ y para todo $v \in T_y^{1,0} Y \setminus \{0\}$ tenemos

$$\frac{i}{2\pi} \Theta_{f^*L}(v, Jv) = \frac{i}{2\pi} f^* \Theta_L(v, Jv) = \frac{i}{2\pi} \Theta_L(Df(y)v, J(Df(y)v))$$

y como $Df(y)$ es inyectiva se sigue que $\frac{i}{2\pi}\Theta_{f^*L}(v, Jv) > 0$. Por lo tanto, $\frac{i}{2\pi}\Theta_{f^*L}$ es positiva y así el haz f^*L también. $\square$

Chapter 2

El Teorema de Kodaira

En este capítulo se presenta el Teorema del Encaje de Kodaira, el cual fue probado por Kunihiro Kodaira en [3] el cual es uno de los resultados fundamentales que permite caracterizar haces lineales positivos.

2.1. Teorema de anulamiento de Kodaira

Teorema 2.1.1 (Anulamiento de Kodaira). *Si L es un haz lineal positivo sobre una variedad compleja compacta X y $K \rightarrow X$ el haz canónico, entonces*

$$H^r(X, \mathcal{O}(K \otimes L)) = 0 \quad \text{para } r > 0.$$

La demostración de este resultado se omite; véase el Corolario 10.7 en [4].

Corolario 2.1.2. *Si $L \rightarrow X$ es un haz lineal sobre una variedad compleja compacta X tal que $K^* \otimes L$ es positivo, entonces $H^r(X, \mathcal{O}(L)) = 0$ para todo $r > 0$.*

Proof. Denotamos con L' al haz lineal positivo $K^* \otimes L$ y tenemos el isomorfismo canónico $K \otimes L' \cong L$. Por el teorema de anulamiento de Kodaira $H^r(X, \mathcal{O}(L)) = H^r(X, \mathcal{O}(K \otimes L')) = 0$ para todo $r > 0$. $\square$

Lema 2.1.3. *Sean X una variedad compleja compacta y $p, q \in X$ puntos distintos. Denotemos por*

$$\pi_p : X_p \rightarrow X \quad \text{y} \quad \pi_{pq} : X_{pq} \rightarrow X$$

las explosiones de X en $\{p\}$ y en $\{p, q\}$, respectivamente. Sea $S_p \subset X_p$ (resp. $S_{pq} \subset X_{pq}$) el divisor excepcional asociado, y K_p (resp. K_{pq}) el haz canónico de X_p (resp. X_{pq}).

Si $L \rightarrow X$ es un haz lineal positivo, entonces existe un entero $k_0 > 0$ tal que para todo $k \geq k_0$ los siguientes haces lineales sobre las variedades explotadas son positivos:

$$(a) \quad \pi_{pq}^* L^k \otimes L_{S_{pq}}^* \otimes K_{pq}^*$$

$$(b) \quad \pi_p^* L^k \otimes L_{S_p}^* \otimes L_{S_{pq}}^* \otimes K_p^*.$$

Aquí L_{S_p} (resp. $L_{S_{pq}}$) denota el haz de línea asociado al divisor excepcional S_p (resp. S_{pq}).

La demostración de este resultado se omite; véase la Proposición 3.3 en [5].

2.2. Teorema de encaje de Kodaira

Comenzamos primero tratando el caso cuando la variedad tiene dimensión uno, es decir, para superficies de Riemann.

Lema 2.2.1. *Sea L un haz lineal sobre una superficie de Riemann conexa X compacta.*

- (i) Si $\deg L > 2g - 1$ entonces para todo $p \in X$ existe una sección $s \in \mathcal{O}(X, L)$ tal que $s(p) \neq 0$.
- (ii) Si $\deg L > 2g$ entonces para todo par de puntos distintos $p, q \in X$ existe una sección $s \in \mathcal{O}(X, L)$ con la propiedad $s(p) = 0$ y $s(q) \neq 0$.
- (iii) Si $\deg L > 2g$ entonces para todo $p \in X$ entonces existe una sección $s \in \mathcal{O}(X, L)$ tal que $\text{ord}_p(s) = 1$.

Proof. (i) En este caso tenemos que $\deg(K \otimes L^* \otimes L_{\{p\}}) = \deg K - \deg L + \deg L_{\{p\}} = 2g - 1 - \deg L < 0$, por el Teorema de Riemann-Roch y (1.2.1) deducimos

$$\dim \mathcal{I}_{\{p\}}(X, L) = \dim \mathcal{O}(X, L \otimes L_{\{p\}}^*) = \deg L + g = \dim \mathcal{O}(X, L) - 1.$$

(ii) Como $\deg(K \otimes L^* \otimes L_p \otimes L_q) < 0$ tenemos por Riemann-Roch $\dim \mathcal{I}_{\{p, q\}}(X, L) = \deg L - 1 + g = \dim \mathcal{O}(X, L \otimes L_{\{p\}}^*) - 1 = \dim \mathcal{I}_{\{p\}}(X, L) - 1$.

(iii) Tenemos que $\deg(K \otimes L^* \otimes L_p^2)$ por lo que por Riemann-Roch $\dim \mathcal{I}_{\{p\}}^2(X, L) = \deg L - 1 + g = \dim \mathcal{O}(X, L \otimes L_{\{p\}}^*) - 1 = \dim \mathcal{I}_{\{p\}}(X, L) - 1$. $\square$

Teorema 2.2.2. *Sobre es una superficie de Riemann conexa y compacta X todo haz lineal $L \rightarrow X$ positivo es amplio.*

Proof. Si $L \rightarrow X$ es un haz lineal positivo, entonces $\deg L > 0$. Sean g el género de X y k un entero positivo tal que $k \deg L > 2g$, así tenemos que el haz lineal L^k tiene grado $\deg L^k > 2g$ y satisface las hipótesis de (2.2.1). El inciso (i) del lema precedente garantiza que $Bs(L) = \emptyset$. Usando las equivalencias de (1.1.7) y (1.1.8), el inciso (ii) nos dice que φ_{L^k} separa puntos y (iii) que φ_{L^k} separa direcciones tangentes. De (1.1.9) concluimos que L es amplio. $\square$

Teorema 2.2.3 (Encaje de Kodaira). *Sea X una variedad compleja compacta. Un haz lineal L sobre X es positivo si y sólo si es amplio. En consecuencia, por (1.1.10), X es proyectiva si y sólo si admite un haz lineal positivo.*

Proof. Fijemos la dimensión del espacio $\mathcal{O}(X, L)$ como $N + 1$, con $N \geq 0$.

Supongamos primero que el haz L es amplio. Entonces existe un entero positivo k tal que $\varphi_{L^k} : X \rightarrow \mathbb{P}^N$ es un encaje; por (1.1.6), el haz $L^k \cong \varphi_{L^k}^* \mathcal{O}(1)$ es positivo ya que $\mathcal{O}(1)$ lo es y φ_{L^k} conserva la positividad por ser una inmersión (1.3.7). Escogemos una métrica hermitiana $\langle, \rangle_{L^k}$ sobre L^k garantizada por (1.3.5) y definimos la métrica hermitiana sobre L inducido por

$$\langle v, v \rangle_L := (\langle v \otimes \cdots \otimes v \rangle_{L^k})^{1/k}.$$

Por lo tanto, la primera forma de Chern de L asociada a esta métrica es $\frac{i}{2\pi} \Theta_L = \frac{i}{2\pi k} \Theta_{L^k}$ que es positiva. Por lo que L es un haz lineal positivo.

Supongamos ahora que el haz L es positivo. El caso en que $n = \dim X = 1$ ya fue tratado en (2.2.2); en adelante, supondremos que $n \geq 2$. Consideremos el entero k_0 del lema (2.1.3). Demostraremos que para todo $k \geq k_0$, el espacio φ_{L^k} separa puntos y direcciones tangentes.

Probemos que φ_{L^k} separa puntos. Fijemos $p, q \in X$ puntos distintos, deseamos mostrar que el homomorfismo e_X de (1.1.7) (iii) es sobreyectivo, el cual proviene de una sucesión exacta de gavillas sobre X

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_{\{p,q\}}(L^k) \hookrightarrow \mathcal{O}(L^k) \xrightarrow{e} (L^k(p))_p \oplus (L^k(q))_q \rightarrow 0. \quad (2.1)$$

Como $(L^k(p))_p \oplus (L^k(q))_q$ es isomorfa a la gavilla $\mathcal{O}(L^k)/\mathcal{I}_{\{p,q\}}(L^k)$, la sucesión (2.1) induce la sucesión exacta de gavillas sobre X

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_{\{p,q\}}(L^k) \hookrightarrow \mathcal{O}(L^k) \xrightarrow{\Pi} \mathcal{O}(L^k)/\mathcal{I}_{\{p,q\}}(L^k) \rightarrow 0. \quad (2.2)$$

Obtenemos una sucesión exacta a nivel de secciones globales

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_{\{p,q\}}(X, L^k) \hookrightarrow \mathcal{O}(X, L^k) \xrightarrow{\Pi_X} \Gamma\left(\mathcal{O}(L^k)/\mathcal{I}_{\{p,q\}}(L^k)\right). \quad (2.3)$$

por lo que la sobreyectividad de e_X está garantizada si Π_X es sobreyectivo. Sean $\pi_{pq} : X_{pq} \rightarrow X$ la explosión de X en $\{p, q\}$, $S_{pq} = \pi_{pq}^{-1}(p) \sqcup \pi_{pq}^{-1}(q)$ y $L_{pq} = \pi_{pq}^* L$. Análogamente a (2.3) tenemos una sucesión exacta:

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_{S_{pq}}(X_{pq}, L_{pq}^k) \hookrightarrow \mathcal{O}(X_{pq}, L_{pq}^k) \xrightarrow{\bar{\Pi}_{X_{pq}}} \Gamma\left(\mathcal{O}(L_{pq}^k)/\mathcal{I}_{S_{pq}}(L_{pq}^k)\right). \quad (2.4)$$

La función holomorfa $\pi_{pq} : X_{pq} \rightarrow X$ define una transformación lineal $\pi_{pq}^* : \mathcal{O}(X, L^k) \rightarrow \mathcal{O}(X_{pq}, L_{pq}^k)$ que es el pullback de secciones globales. Las sucesiones (2.3) y (2.4) y π_{pq}^* forman un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}(X, L^k) & \xrightarrow{\Pi_X} & \Gamma(\mathcal{O}(L^k)/\mathcal{I}_{\{p,q\}}(L^k)) \\ \pi_{pq}^* \downarrow & & \downarrow \Psi \\ \mathcal{O}(X_{pq}, L_{pq}^k) & \xrightarrow{\bar{\Pi}_{X_{pq}}} & \Gamma(\mathcal{O}(L_{pq}^k)/\mathcal{I}_{S_{pq}}(L_{pq}^k)), \end{array}$$

donde Ψ es el morfismo que induce π_{pq}^* en los cocientes. Probaremos que π_{pq}^* y $\bar{\Pi}_{X_{pq}}$ son sobreyectivos y que Ψ es inyectivo, de donde obtendremos la sobreyectividad de Π_X .

Veamos que π_{pq}^* es sobreyectivo. Consideremos una sección $\bar{\sigma} \in \mathcal{O}(X_{pq}, L_{pq}^k)$. Como la restricción $\pi_{pq} : X_{pq} \setminus S_{pq} \rightarrow X \setminus \{p, q\}$ es un biholomorfismo tenemos que $\pi_{pq}^*|_{X_{pq} \setminus S_{pq}}$ es un isomorfismo, por lo tanto, $\sigma := \pi_{pq}^*|_{X_{pq} \setminus S_{pq}}^{-1}(\bar{\sigma}) \in \mathcal{O}(X \setminus \{p, q\}, L^k)$. Escogemos un vecindario de p lo suficientemente pequeño para poder aplicar el teorema de Hartogs y extendemos la sección σ a una sección en $\mathcal{O}(X \setminus \{q\}, L^k)$. Haciendo lo mismo para el punto q , obtenemos una sección global $\sigma \in \mathcal{O}(X, L^k)$ que satisface $\pi_{pq}^*(\sigma) = \bar{\sigma}$ sobre $X_{pq} \setminus S_{pq}$. Como S_{pq} es la unión $\pi_{pq}^{-1}(p) \sqcup \pi_{pq}^{-1}(q)$, el Teorema de identidad implica que S_{pq} no tiene interior; de donde deducimos que $X_{pq} \setminus S_{pq}$ es denso y, por la continuidad de las secciones, la igualdad $\pi_{pq}^*(\sigma) = \bar{\sigma}$ se da sobre todo X_{pq} . Concluimos de esta manera que π_{pq}^* es sobreyectivo.

Para mostrar ahora que Ψ es inyectivo vamos a usar la construcción explícita de la gavillificación. Fijemos una sección global $\varphi \in \Gamma(\mathcal{O}(L_{pq}^k)/\mathcal{I}_{S_{pq}}(L_{pq}^k))$ tal que $\Psi(\varphi) = 0$. Para cualquier $x \in X$ existen un abierto $U \subset X$ vecindario de x y una sección $s \in \mathcal{O}(U, L^k)$ tal que el germe de $s + \mathcal{I}_{\{p,q\}}(U, L^k)$ en x es precisamente $\varphi(x)$. Como $\varphi \in \ker \Psi$, restringiendo el vecindario U alrededor de x de ser necesario, tenemos que $\pi_{pq}^*(s) \in \mathcal{I}_{S_{pq}}(\pi_{pq}^{-1}(U), L_{pq}^k)$, esto implica que si $\tilde{p} \in \pi^{-1}(p) \subset S_{pq}$ entonces $0 = \pi_{pq}^*(s)(\tilde{p}) = (\tilde{p}, s(\pi(\tilde{p}))) = (\tilde{p}, s(p))$, i.e. $s \in \mathcal{I}_{\{p\}}(U, L^k)$. Hacemos lo mismo para un punto $\tilde{q} \in \pi_{pq}^{-1}(q)$ y obtenemos, de esa manera, que $s \in \mathcal{I}_{\{p,q\}}(U, L^k)$. De esto se sigue que $\varphi(x) = 0$ para todo $x \in X$ y por tanto, $\varphi = 0$, como queríamos.

Mostremos que $\bar{\Pi}_{X_{pq}}$ es sobreyectivo. Como el homomorfismo $\bar{\Pi}_{X_{pq}}$ proviene de una sucesión exacta larga de cohomología de gavillas, será suficiente probar que $H^1(X_{pq}, \mathcal{I}_{S_{pq}}(L_{pq}^k))$ se anula.

Por (1.2.1) sabemos que $\mathcal{I}_{S_{pq}}(L_{pq}^k) \cong \mathcal{O}(L_{pq}^k \otimes L_{S_{pq}}^*)$; denotando K_{pq} el haz canónico de X_{pq} , nuestra elección del entero k asegura que $K_{pq}^* \otimes L_{pq}^k \otimes L_{S_{pq}}^*$ es positivo y de (2.1.2) se sigue que $H^1(X_{pq}, \mathcal{I}_{S_{pq}}(L_{pq}^k)) = H^1(X_{pq}, \mathcal{O}(L_{pq}^k \otimes L_{S_{pq}}^*)) = 0$, como era deseado.

Ahora demostraremos que φ_{L^k} separa direcciones tangentes. La técnica será similar a la utilizada para demostrar que separa puntos. Por (1.1.8) deseamos probar que, para todo punto $p \in X$, el homomorfismo $d_X : \mathcal{I}_{\{p\}}(X, L^k) \rightarrow \bigwedge_p^{1,0} X$ es sobreyectivo. El homomorfismo d_X proviene de una sucesión exacta corta de gavillas sobre X

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_{\{p\}}^2(L^k) \hookrightarrow \mathcal{I}_{\{p\}}(L^k) \xrightarrow{d} \left(\bigwedge_p^{1,0} X \right)_p \rightarrow 0. \quad (2.5)$$

Como la gavilla $\mathcal{I}_{\{p\}}(L^k)/\mathcal{I}_{\{p\}}^2(L^k)$ es isomorfa a la gavilla skyscraper $(\bigwedge_p^{1,0} X)_p$, la sucesión (2.5) induce la sucesión exacta de gavillas sobre X

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_{\{p\}}^2(L^k) \hookrightarrow \mathcal{I}_{\{p\}}(L^k) \xrightarrow{\Pi} \mathcal{I}_{\{p\}}(L^k)/\mathcal{I}_{\{p\}}^2(L^k) \rightarrow 0,$$

evaluando en las secciones globales obtenemos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_{\{p\}}^2(X, L^k) \hookrightarrow \mathcal{I}_{\{p\}}(X, L^k) \xrightarrow{\Pi_X} \Gamma\left(\mathcal{I}_{\{p\}}(L^k)/\mathcal{I}_{\{p\}}^2(L^k)\right). \quad (2.6)$$

Por tanto, la sobreyectividad de d_X esta garantizada si Π_X lo es. Denotemos $\pi_p : X_p \rightarrow X$ la explosión de X a lo largo de $\{p\}$, $S_p = \pi_p^{-1}(p)$ y $L_p = \pi_p^* L$. Análogamente, tenemos una sucesión exacta de gavillas sobre X_p .

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_{S_p}^2(L_p^k) \hookrightarrow \mathcal{I}_{S_p}(L_p^k) \xrightarrow{\tilde{\Pi}} \mathcal{I}_{S_p}(L_p^k)/\mathcal{I}_{S_p}^2(L_p^k) \rightarrow 0; \quad (2.7)$$

evaluando en las secciones globales, tenemos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_{S_p}^2(X_p, L_p^k) \hookrightarrow \mathcal{I}_{S_p}(X_p, L_p^k) \xrightarrow{\tilde{\Pi}_{X_p}} \Gamma\left(\mathcal{I}_{S_p}(L_p^k)/\mathcal{I}_{S_p}^2(L_p^k)\right). \quad (2.8)$$

Notemos que π_p induce una transformación lineal $\pi_p^* : \mathcal{I}_{\{p\}}(X, L^k) \rightarrow \mathcal{I}_{S_p}(X_p, L_p^k)$, entonces las sucesiones (2.6) y (2.8) dan lugar al siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{I}_{\{p\}}(X, L^k) & \xrightarrow{\Pi_X} & \Gamma\left(\mathcal{I}_{\{p\}}(L^k)/\mathcal{I}_{\{p\}}^2(L^k)\right) \\ \pi_p^* \downarrow & & \downarrow \Phi \\ \mathcal{I}_{S_p}(X_p, L_p^k) & \xrightarrow{\tilde{\Pi}_{X_p}} & \Gamma\left(\mathcal{I}_{S_p}(L_p^k)/\mathcal{I}_{S_p}^2(L_p^k)\right), \end{array}$$

donde Φ es el homomorfismo inducido por π_p^* en los cocientes. Probaremos que los homomorfismos π_p^* y $\tilde{\Pi}_{X_p}$ son sobreyectivos y que Φ es inyectivo; así, la sobreyectividad de Π_X está asegurada.

La demostración de que π_p^* es sobreyectiva sigue exactamente el mismo argumento que utilizamos para π_{pq}^* al probar que φ_{L^k} separa puntos.

Veamos la inyectividad de Φ . Sea $\varphi \in \Gamma\left(\mathcal{I}_{\{p\}}(L^k)/\mathcal{I}_{\{p\}}^2(L^k)\right)$ una sección global tal que $\Phi(\varphi) = 0$. Debemos probar que $\varphi(x) = 0$ para todo $x \in X$. Como $\mathcal{I}_{\{p\}}(L^k)/\mathcal{I}_{\{p\}}^2(L^k) \cong (\bigwedge_p^{1,0} X)_p$, sabemos que $\varphi(x) = 0$ para todo $x \in X \setminus \{p\}$, de modo que basta demostrar que $\varphi(p) = 0$. Como $\varphi \in \ker \Phi$, existen un vecindario abierto U de p y una sección $s \in \mathcal{I}_{\{p\}}(U, L^k)$ tales que $\varphi(p) = 0$.

es el germen en p de la sección $\pi_p^*(s) + \mathcal{I}_{S_p}^2(\pi_p^{-1}(U), L_p^k)$, por lo que $\pi_p^*(s) \in \mathcal{I}_{S_p}^2(\pi_p^{-1}(U), L_p^k)$ y lo que queremos probar es que $s \in \mathcal{I}_{\{p\}}^2(U, L^k)$ para U vecindario de p . Escogiendo un marco local t para L alrededor de p podemos escribir $s = f \cdot t \otimes \cdots \otimes t$ con $f \in \mathcal{O}(U)$ y $f(p) = 0$.

Vamos a estudiar la representación de la sección s en coordenadas locales. Después de restringir el abierto U de ser necesario, consideramos $\varphi = (v_1, \dots, v_n) : U \rightarrow B_\varepsilon(0) \subset \mathbb{C}^n$ una carta centrada en p , definimos $U_p = \pi_p^{-1}(U) \subset X_p$ y la subvariedad $T(\varepsilon) = \{([w], v) \in \mathbb{P}^{n-1} \times B_\varepsilon(0) \mid v \in [w]\}$ del haz tautológico. Como $S_p = \pi_p^{-1}(p) = \mathbb{P}(T_p^{1,0}X) \cong \mathbb{P}^{n-1}$ tenemos un biholomorfismo

$$\tau : U_p \rightarrow T(\varepsilon), \quad x \mapsto \begin{cases} ([\varphi(x)], \varphi(x)), & x \notin S_p, \\ (x, 0), & x \in S_p, \end{cases}$$

por lo que identificaremos $U_p = T(\varepsilon)$. En coordenadas locales, s se expresa

$$s(v) = f(v) (t(v) \otimes \cdots \otimes t(v)).$$

Como $f(v)$ está en el ideal $\langle v_1, \dots, v_n \rangle \subset \mathbb{C}[v_1, \dots, v_n]$, podemos escribir en coordenadas locales $f(v) = \sum_{j=1}^n v_j f_j(v)$ para algunas funciones $f_j \in \mathcal{O}(U)$.

$$s(v) = \left(\sum_{j=1}^n v_j f_j(v) \right) t(v) \otimes \cdots \otimes t(v).$$

Por tanto, para demostrar que $s \in \mathcal{I}_{\{p\}}^2(U, L^k)$ es suficiente mostrar que $f_j(p) = 0$ para cada j . Sea $e_1, \dots, e_n$ la base canónica de $\mathbb{C}^n$. Para cada $1 \leq l \leq n$ definimos la función holomorfa que $\eta_l : D_\varepsilon(0) \subset \mathbb{C} \rightarrow U_p$ tal que $\eta_l(z) = ([e_l], ze_l)$. Notemos que $\eta_l(z) \in S_p$ si y solo si $z = 0$. Entonces

$$\begin{aligned} \pi_p^*(s)(\eta_l(z)) &= (\eta_l(z), s(\pi_p(\eta_l(z)))) \\ &= \left(\eta_l(z), \left(\sum_{j=1}^n v_j(ze_l) \cdot f_j(ze_l) \right) t(v(ze_l)) \otimes \cdots \otimes t(v(ze_l)) \right) \\ &= (\eta_l(z), (z_l f_l(\zeta(ze_l)) \cdot t(\zeta(ze_l)) \otimes \cdots \otimes t(\zeta(ze_l)))). \end{aligned}$$

Como $\pi_p^*(s) \in \mathcal{I}_{S_p}^2(U_p, L_p^k)$, se sigue que $f_l(p) = 0$ para cada $1 \leq l \leq n$. Por lo tanto, $s \in \mathcal{I}_{\{p\}}^2(U, L^k)$ y, en consecuencia, $\varphi(p) = 0$, como queríamos.

Lo siguiente es probar que $\tilde{\Pi}_{X_p}$ es sobreyectivo. Como este homomorfismo proviene de la sucesión exacta de gavillas (2.7), basta verificar que $H^1(X_p, \mathcal{I}_{S_p}^2(L_p^k)) = 0$. Por (1.2.1) tenemos que $\mathcal{I}_{S_p}^2(L_p^k) \cong \mathcal{O}(L_{S_p}^* \otimes L_{S_p}^* \otimes L_p^k)$. Además, la elección de k garantiza que el haz lineal $L_{S_p}^* \otimes L_{S_p}^* \otimes L_p^k \otimes K_p^*$ sea positivo, donde K_p denota el haz canónico de X_p . Por (2.1.2) obtenemos que $H^1(X_p, \mathcal{I}_{S_p}^2(L_p^k)) = H^1(X_p, \mathcal{O}(L_{S_p}^* \otimes L_{S_p}^* \otimes L_p^k)) = 0$.

Hemos probado que φ_{L^k} separa puntos y direcciones tangentes; por lo tanto, L^k es amplio. $\square$

2.3. Aplicaciones del Encaje de Kodaira

En esta última sección se presentan algunas consecuencias del Teorema del Encaje de Kodaira.

Encaje de Kodaira versión geométrica. Una **métrica de Kähler** es una métrica hermitiana cuya 2-forma fundamental es cerrada; la cual se llama **forma de Kähler**.

El morfismo inclusión de gavillas $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R}$ induce un homomorfismo $\nu : H^2(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(X, \mathbb{R})$ y

además, existe un isomorfismo $H^2(X, \mathbb{R}) \cong H_{dR}^2(X, \mathbb{R})$, llamado de *de Rham-Weil*, tal que bajo esta identificación, la primera clase de Chern de cualquier haz lineal pertenece a la imagen de ν . Decimos que una métrica de Kähler es una **métrica de Hodge** si la clase de la 2-forma fundamental es **entera**, es decir, si su imagen en $H^2(X, \mathbb{R})$ está en la imagen de ν .

Teorema 2.3.1. *Una variedad compacta compleja X es proyectiva si y solo si admite una métrica de Hodge.*

Proof. Si X es proyectiva, entonces existe un encaje $X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$. De identidad (1.10) vemos que la forma de Fubini-Study ω_{FS} es $\frac{i}{2\pi}\Theta_{\mathcal{O}(1)}$, lo que implica que la clase de ω_{FS} es entera. Por tanto, la métrica pullback de la métrica Fubini-Study sobre X es de Hodge.

Asumamos ahora que X admite una métrica de Hodge con forma de Kähler ω . el teorema de Lefschetz sobre clases de tipo $(1,1)$ garantiza la existencia de un haz lineal positivo cuya primera clase de Chern es $[\omega]$. Por el teorema del Encaje de Kodaira, X es proyectiva. $\square$

Toros complejos. Sea un V un $\mathbb{C}$ -espacio vectorial de dimensión n y $\Lambda \subset V$ una red en V , es decir, Λ es un subgrupo discreto de rango $2n$ que libremente generado por una base real de V . El cociente V/Λ es una variedad compleja compacta, que es llamada un **toro complejo**.

Una **forma de Riemann** para Λ es una aplicación bilineal alternante $\omega : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ que cumple:

- (i) $\omega(iu, iv) = \omega(u, v)$,
- (ii) $\omega(\cdot, i\cdot)$ es definida positiva,
- (iii) $\omega(u, v) \in \mathbb{Z}$, si $u, v \in \Lambda$.

Proposición 2.3.2. *Un toro complejo $X = V/\Lambda$ es proyectivo si y solo si V admite una forma de Riemann.*

Proof. Si ω es una forma de Riemann para Λ , al identificar cada espacio tangente de V con su estructura real subyacente, ω puede verse como una 2-forma con coeficientes constantes sobre V . Las condiciones (i) y (ii) equivalen a que ω sea una forma $(1,1)$ positiva y ya que tiene coeficientes constantes también es cerrada. Además, como $\bigwedge^2 V^* \cong H^2(X, \mathbb{R})$, la condición (iii) asegura que ω sea entera, es decir, que su clase pertenezca a $H^2(X, \mathbb{Z})$. Por el Teorema (2.3.1), concluimos el resultado. $\square$

Variedades algebraicas proyectivas. Una variedad compacta compleja es una **variedad algebraica proyectiva** si puede ser encajada en algún espacio proyectivo. Por el Teorema de Chow (véase [1], pág. 167), toda variedad algebraica proyectiva puede expresarse como el conjunto de ceros de polinomios homogéneos complejos; de ahí el calificativo *algebraica*.

Proposición 2.3.3. *Si V_1 y V_2 son variedades algebraicas proyectivas entonces $V_1 \times V_2$ también.*

Proof. Como V_1 y V_2 son proyectivas, por (2.3.1) admiten métricas de Hodge cuyas formas de Kähler enteras, digamos ω_1 y ω_2 respectivamente. Si definimos $\pi_1 : V_1 \times V_2 \rightarrow V_1$ y $\pi_2 : V_1 \times V_2 \rightarrow V_2$ como las proyecciones, entonces $\pi_1^*\omega_1 + \pi_2^*\omega_2$ es una $(1,1)$ -forma positiva, cerrada y entera. Aplicando nuevamente (2.3.1) obtenemos que $V_1 \times V_2$ es una variedad algebraica proyectiva. $\square$

Una consecuencia inmediata de este resultado es que la imagen del encaje de Segre $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \rightarrow \mathbb{P}^{nm+m+n}$ es una variedad algebraica proyectiva.

Explosiones de variedades proyectivas.

Teorema 2.3.4. *Si X es una variedad proyectiva y $S \subset X$ es un subconjunto finito, entonces la explosión X_S es proyectiva.*

Proof. Como la explosión X_S puede obtenerse mediante una sucesión finita de explosiones en los puntos de S , basta considerar el caso en que S es un punto. Sea $\pi_p : X_p \rightarrow X$ la explosión de X en p . Dado que X es proyectiva, existe un haz lineal positivo $L \rightarrow X$. Por el resultado (2.1.3), para algún entero $k > 0$, el haz lineal $\pi_p^* L^k \otimes L_{S_p}^* \otimes L_{S_p}^* \otimes K_p^*$ sobre X_p es positivo. Aplicando el teorema de Encaje de Kodaira se sigue que X_p es proyectivo. $\square$

Bibliography

- [1] Phillip Griffiths and Joseph Harris. *Principles of Algebraic Geometry*. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons, New York, 1978.
- [2] Daniel Huybrechts. *Complex Geometry*. Springer, Berlin, 2005.
- [3] Kunihiko Kodaira. On kähler varieties of restricted type. an intrinsic characterization of algebraic varieties. *Annals of Mathematics*, 60(1):28–48, 1954. [doi:10.2307/1969701](https://doi.org/10.2307/1969701).
- [4] John M. Lee. *Introduction to Complex Manifolds*. AMS, New York, 2024.
- [5] Raymond O. Wells. *Differential Analysis on Complex Manifolds*. Springer, New York, 3rd ed. edition, 2008.

Juan Pablo Peñaloza Pacheco

El Teorema del Encaje de Kodaira.pdf

 Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Detalles del documento

Identificador de la entrega

trn:oid:::3117:552836912

Fecha de entrega

4 feb 2026, 8:29 a.m. GMT-6

Fecha de descarga

4 feb 2026, 8:30 a.m. GMT-6

Nombre del archivo

El Teorema del Encaje de Kodaira.pdf

Tamaño del archivo

674.9 KB

25 páginas

9685 palabras

40.356 caracteres

3% Similitud general

El total combinado de todas las coincidencias, incluidas las fuentes superpuestas, para ca...

Fuentes principales

- 3%  Fuentes de Internet
- 1%  Publicaciones
- 0%  Trabajos entregados (trabajos del estudiante)

Marcas de integridad

N.º de alerta de integridad para revisión



Caracteres reemplazados

523 caracteres sospechosos en N.º de páginas

Las letras son intercambiadas por caracteres similares de otro alfabeto.

Los algoritmos de nuestro sistema analizan un documento en profundidad para buscar inconsistencias que permitirían distinguirlo de una entrega normal. Si advertimos algo extraño, lo marcamos como una alerta para que pueda revisarlo.

Una marca de alerta no es necesariamente un indicador de problemas. Sin embargo, recomendamos que preste atención y la revise.

Formato de Declaración de Originalidad y Uso de Inteligencia Artificial

Coordinación General de Estudios de Posgrado

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo



A quien corresponda,

Por este medio, quien abajo firma, bajo protesta de decir verdad, declara lo siguiente:

- Que presenta para revisión de originalidad el manuscrito cuyos detalles se especifican abajo.
- Que todas las fuentes consultadas para la elaboración del manuscrito están debidamente identificadas dentro del cuerpo del texto, e incluidas en la lista de referencias.
- Que, en caso de haber usado un sistema de inteligencia artificial, en cualquier etapa del desarrollo de su trabajo, lo ha especificado en la tabla que se encuentra en este documento.
- Que conoce la normativa de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, en particular los Incisos IX y XII del artículo 85, y los artículos 88 y 101 del Estatuto Universitario de la UMSNH, además del transitorio tercero del Reglamento General para los Estudios de Posgrado de la UMSNH.

Datos del manuscrito que se presenta a revisión		
Programa educativo	Maestría en Ciencias Matemáticas	
Título del trabajo	El teorema del Encaje de Kodaira	
	Nombre	Correo electrónico
Autor/es	Juan Pablo Peñaloza Pacheco	juanpabloendoza@gmail.com
Director	Luis Abel Castorena Martínez	abel@matmor.unam.mx
Codirector		
Coordinador del programa	Elmar Wagner	elmar.wagner@umich.mx

Uso de Inteligencia Artificial		
Rubro	Uso (sí/no)	Descripción
Asistencia en la redacción	Sí	Mejoramiento de los párrafos introductorios

Formato de Declaración de Originalidad y Uso de Inteligencia Artificial

Coordinación General de Estudios de Posgrado
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo



Uso de Inteligencia Artificial		
Rubro	Uso (sí/no)	Descripción
Traducción al español	no	
Traducción a otra lengua	no	
Revisión y corrección de estilo	no	
Análisis de datos	no	
Búsqueda y organización de información	no	
Formateo de las referencias bibliográficas	no	
Generación de contenido multimedia	no	
Otro	no	

Datos del solicitante	
Nombre y firma	
Lugar y fecha	Morelia, Michoacán, 03 de Febrero del 2026