



Ciencia y Tecnología

Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación



Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Facultad de Ingeniería Mecánica

División de estudios de posgrado

**“MODELADO Y CONTROL DE ROBOTS
MANIPULADORES EN 3D CON UN ENFOQUE
DE BOND GRAPH”**

TESIS

*Para obtener el grado de Maestro en ciencias en Ingeniería
Mecánica*

Autor: Ing. Christian Eli Guzmán Ceballos

Asesor: Dr. Gilberto González Ávaloz

Morelia Michoacán, Abril 2026

Índice general

1. Protocolo	1
1.1. Introducción	1
1.2. Planteamiento del problema	3
1.3. Justificación	3
1.4. Hipótesis	3
1.5. Objetivos	3
1.5.1. Objetivo general	3
1.5.2. Objetivos específicos	3
1.6. Metodología/Procedimiento experimental	4
1.7. Infraestructura y recursos financieros	5
1.8. Aportación a la solución de problemas prioritarios	5
1.9. Acciones de difusión	6
2. Modelado de sistemas en Bond Graph	7
2.1. El Bond	7
2.2. Bond Activo	8
2.3. Elementos de puerto-1	9
2.4. Elementos de puerto-2	10
2.5. Elementos de puerto-3	10
2.6. Causalidad	11
2.7. Estructura de unión y vectores clave	13
2.8. Relaciones Constitutivas	14
2.9. Espacio de Estados a través de Bond Graph	15
2.10. Modelado y análisis de sistemas eléctricos en Bond Graph	16
2.11. Modelado y análisis de sistemas mecánicos en Bond Graph	24
2.12. Controlabilidad y Observabilidad en Bond Graph	29
2.13. Retroalimentación de estado	35
2.14. Retroalimentación de estados en Bond Graph	37
3. Modelado de Robots Manipuladores	41
3.1. Elementos y uniones de un Robot industrial	41
3.2. Clasificación de los Robots	42
3.3. Transformaciones Homogéneas	44
3.3.1. Rotación	44
3.3.2. Traslación	45
3.4. Cinemática directa	48
3.4.1. Cadena cinemática	48

3.5.	Denavit-Hartenberg	49
3.6.	Principio de D'Alembert	51
3.7.	Ecuación de Euler-Lagrange	52
3.8.	Análisis dinámico de Robot manipulador de 1 eslabón 2D	56
3.9.	Análisis dinámico de Robot manipulador de 2 eslabones 2D	58
3.10.	Análisis dinámico de Robot manipulador de 3 eslabones 2D	61
3.11.	Movimiento en 2 dimensiones en Bond Graph	66
3.12.	Manipulador de 2 eslabones en Bond Graph	72
3.13.	Robot manipulador de 3 eslabones en Bond Graph	77
3.14.	Linealización por retroalimentación de estados	83
3.15.	Linealización por retroalimentación de estados en Bond Graph	84
3.16.	Linealización del manipulador de 2 eslabones planar	86
3.17.	Linealización y control del manipulador de 2 eslabones planar en Bond Graph	89
4.	Modelado en Bond Graph de Robots	
	Manipuladores	92
4.1.	Las ecuaciones de Euler	92
4.2.	Transformación de coordenadas	93
4.3.	Los anillos de Euler en Bond Graph para movimiento tridimensional	96
4.4.	Manipulador Prismático	99
4.5.	Manipulador PUMA de 2 GOF	106
4.6.	Control por par calculado del manipulador PUMA 2 GOF	113
4.7.	Robot Stanford 3 DOF	119
5.	Conclusiones y Recomendaciones	143
5.1.	Conclusiones	143
5.2.	Recomendaciones	144

Abstract

Obtaining the dynamic model of manipulator robots through traditional analytical methods, such as Euler-Lagrange, presents an algebraic complexity that increases enormously as degrees of freedom are added to the system. This difficulty becomes evident in complex articulated mechanical systems, where a large number of joints lead to long equations of motion that are difficult to handle and prone to errors. Furthermore, they do not offer a clear structure that facilitates the implementation of control.

In this research, the use of the Bond Graph methodology is proposed to model 3D manipulator robots, aiming to simplify the creation of the mathematical model. The extension to the three-dimensional movement of the Stanford robot was achieved through the application of Euler rings in Bond Graph. This approach allowed for the description of rigid body dynamics and coupled inertia interactions across the x, y, and z axes, integrating revolute and prismatic joints into a single diagram.

It was verified that the dynamic models created with Bond Graph are equivalent to those of the Euler-Lagrange method, demonstrating that the equations of motion are mathematically identical. Finally, the torque controller designed and implemented in the Bond Graph domain, using modulated gyrators and transformers, stabilized the system and eliminated the non-linear terms of the robot's dynamics. Simulations conducted in the 20-sim software showed that the joint angles and displacements reached the desired values.

Resumen

La obtención del modelo dinámico de robots manipuladores mediante métodos analíticos tradicionales, como Euler-Lagrange, presenta una complejidad algebraica que aumenta enormemente a medida que se suman grados de libertad al sistema. Esta dificultad se hace evidente en sistemas mecánicos articulados complejos, donde un gran número de uniones lleva a ecuaciones de movimiento largas, difíciles de manejar y propensas a errores. Además, no ofrecen una estructura clara que facilite la implementación del control.

En esta investigación, se propone usar la metodología de Bond Graph para modelar robots manipuladores en 3D, con el objetivo de simplificar la creación del modelo matemático. La extensión al movimiento tridimensional del robot Stanford se logró mediante la aplicación de los anillos de Euler en Bond Graph. Este enfoque permitió describir la dinámica del cuerpo rígido y las interacciones de inercia acopladas en los ejes x , y y z , integrando las uniones de revolución y prismáticas en un solo diagrama.

Se verificó que los modelos dinámicos creados con Bond Graph son equivalentes a los del método de Euler-Lagrange, mostrando que las ecuaciones de movimiento son matemáticamente idénticas. Finalmente, el controlador por par que se diseñó e implementó en el dominio de Bond Graph, mediante giradores y transformadores modulados, estabilizó el sistema y eliminó los términos no lineales de la dinámica del robot. Las simulaciones realizadas en el software 20-sim mostraron que los ángulos y desplazamientos de las articulaciones alcanzaron los valores deseados.

Palabras clave

Robots manipuladores, Metodología de Bond Graph, Anillos de Euler, Espacio de estados, Grados de libertad, Retroalimentación de estados, Controlador por par calculado.

Dedicatoria

A Dios,

Por proyecto de salud, fortaleza espiritual y guía para culminar esta fase de mi formación profesional. Por haberme servido de refugio dándome claridad durante los momentos más inciertos.

A mi familia,

El pilar básico de mi vida. Gracias por su amor incondicional, por la cantidad de sacrificios que hacen para verme crecer, por el hecho de que siempre creen en mí aunque el camino

parezca difícil de conquistar. Este triunfo es el resultado de su puño firme y es tan suyo como mío.

A mis amigos,

Por su trato auténtico, por las palabras de aliento durante los momentos de cansancio y por las horas interminables que hemos compartido. Gracias por haber hecho este camino de investigación tan agotador una experiencia mucho más llevadera, enriquecedora y para haber dado fuerza y continuidad a esta empresa larga y espinosa.

A mí mismo,

Por la tenacidad y disciplina mostradas a lo largo de este proyecto. Por no haberme rendido ante la complejidad de los retos analíticos, por cada noche de desvelo y por la mantención de la convicción de culminar el camino que me he impuesto.

Agradecimientos

Deseo expresar mi agradecimiento a todas las personas e instituciones que hicieron posible la realización y culminación de este trabajo de investigación.

Al Dr. Gilberto González Avalos, por su dirección a lo largo de todo este viaje, así como por su paciencia y compromiso.

A la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo y al Posgrado en Ingeniería Mecánica, por abrirme sus puertas y brindarme lo necesario en términos de infraestructura y conocimientos básicos para llevar a cabo la investigación de este proyecto dentro de la Maestría en Diseño Mecánico y Ciencia de los Materiales.

A la Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación (SECIHTI), por el apoyo financiero otorgado mediante la beca de estudios de posgrado, recurso que me permitió dedicarme continuamente al análisis y desarrollo de esta investigación sin interrupciones.

A mis examinadores y miembros del comité, por sus perspicaces comentarios sobre este documento, los cuales han enriquecido sustancialmente el trabajo aquí presentado.

Índice de figuras

2.1. Representación gráfica del Bond	8
2.2. El Bond Activo	8
2.3. Detectores de esfuerzo y flujo	9
2.4. Representación gráfica de las fuentes en Bond Graph	9
2.5. Elementos de puerto único	10
2.6. Elementos de Puerto-2	10
2.7. Unión 0 y 1	11
2.8. Trazo causal	11
2.9. Causalidad necesaria de elementos activos	11
2.10. Elementos de puerto único con causalidad	12
2.11. Causalidad arbitraria	12
2.12. Causalidad de elementos de unión	12
2.13. Causalidad Elementos de puerto-2	12
2.14. Estructura Unión	13
2.15. Modelo de un sistema eléctrico	17
2.16. Reglas de reducción	17
2.17. Modelo del sistema eléctrico en Bond Graph	18
2.18. Sistema eléctrico 2	20
2.19. Sistema eléctrico 2 modelado en Bond Graph	20
2.20. Sistema eléctrico 2 Simulink	21
2.21. Sistema eléctrico 2 en 20 sim	21
2.22. Medición de voltaje en inductor circuito 2	22
2.23. Voltaje en el inductor a través de Simulink	22
2.24. Voltaje en el capacitor a través de Simulink	22
2.25. Voltaje en la resistencia a través de Simulink	22
2.26. Voltaje en el inductor a través de 20 sim	23
2.27. Voltaje en el capacitor a través de 20 sim	23
2.28. Voltaje en el resistencia a través de 20 sim	23
2.29. Ejemplo de sistema mecánico de traslación	25
2.30. Paso 1 y 2 de modelado de sistemas mecánicos de traslación	26
2.31. Paso 3 de modelado de sistemas mecánicos de traslación	26
2.32. Paso 4 de modelado de sistemas mecánicos de traslación	27
2.33. Modelo del sistema mecánico de traslación	27
2.34. Sistema mecánico de traslación en BG con causalidad asignada	28
2.35. Sistema mecánico de traslación en Simulink	28
2.36. Velocidad de la masa en Simulink	29
2.37. Sistema mecánico de traslación en Simulink	29
2.38. Velocidad de la masa en 20-Sim	29

2.39. Bond Graph en causalidad integral	30
2.40. Trayectoria causal de I hacia Mse	31
2.41. Trayectoria causal de C hacia Mse	31
2.42. BG Derivativo del sistema 2	32
2.43. BG derivativo observabilidad estructural	32
2.44. Trayectoria causal del elemento I hacia D_f	33
2.45. Trayectoria causal del elemento C hacia D_f	33
2.46. BG derivativo	34
2.47. Diagrama de retroalimentación de estados	35
2.48. Estabilidad natural del sistema	37
2.49. Estabilidad deseada	37
2.50. Motor de CD en BG	38
2.51. Motor de CD en BG	39
2.52. Valores físicos de simulación	39
2.53. Estados retroalimentados	40
3.1. Unión de revolución	42
3.2. Unión prismática	42
3.3. Estructura de Robot Elbow RRR	43
3.4. Configuración del manipulador esférico RRP	43
3.5. Rotación sobre el eje z en θ grados	45
3.6. Traslación de Sistemas de referencias	46
3.7. Péndulo simple	55
3.8. Manipulador de un eslabón	56
3.9. Manipulador de 2 eslabones	58
3.10. Manipulador de 2 eslabones	58
3.11. Robot Manipulador de 3 Eslabones	61
3.12. Vector de origen-unión 3	61
3.13. Eslabón 2D sin restricciones	67
3.14. Ejes de coordenadas absolutos	67
3.15. Bond Graph de un eslabón con movimiento bidimensional	68
3.16. Manipulador de un eslabón	69
3.17. BG manipulador de un eslabón general	70
3.18. BG manipulador de un eslabón	70
3.19. BG del robot manipulador de 2 eslabones parte 2	73
3.20. BG del robot manipulador de 2 eslabones parte 1	73
3.21. Parte superior del robot	78
3.22. Parte inferior del robot	78
3.23. Retroalimentación de estados del sistema linealizado	84
3.24. Retroalimentación de estados del sistema linealizado en BG	85
3.25. Contenido del bloque k	85
3.26. Contenido del bloque k	85
3.27. Respuesta de linealización y control en BG	86
3.28. Control del ángulo del primer eslabón	88
3.29. Control del ángulo del segundo eslabón	88
3.30. Linealización por retroalimentación en Bond Graph	89
3.31. Programación del bloque k_1	89
3.32. Programación del bloque k_2	90

3.33. Programación del bloque k principal	90
3.34. Programación del bloque k principal	90
3.35. Programación del bloque k principal	91
4.1. Cuerpo cualquiera en movimiento	92
4.2. Anillos de Euler en Bond Graph	93
4.3. Rotación de los ejes del cuerpo cualquiera	94
4.4. Transformación de ejes en Bond Graph	96
4.5. Anillos de Euler en Bond Graph	96
4.6. Manipulador Prismático	100
4.7. Manipulador Prismático	100
4.8. 20 sim vs simulación del modelo espacio de estados	101
4.9. Robot prismático con elementos resistivos	102
4.10. Sistema físico real	102
4.11. Controlador del Stanford constante	104
4.12. Contenido del bloque controlador	104
4.13. Respuesta del ángulo controlado	105
4.14. Respuesta del ángulo controlado	105
4.15. Controlador aplicado en Bond Graph	105
4.16. Respuesta del ángulo al controlador en BG	106
4.17. Acercamiento a la respuesta anterior	106
4.18. Esquema del robot PUMA 2 GOF	107
4.19. Bond Graph del robot PUMA 2 GOF	107
4.20. Implementación del modelo matemático	111
4.21. Respuesta en BG y del modelo matemático	112
4.22. Súper posición de los ángulos obtenidos	112
4.23. Diagrama del PUMA 2 GOF con par Calculado	115
4.24. Código del controlador en 20 sim	116
4.25. Respuesta con control aplicado	116
4.26. Nuevos ángulos deseados	116
4.27. Error de modulación de fuentes de esfuerzo/flujo	117
4.28. Combinaciones equivalentes	117
4.29. Transformadores en serie	118
4.30. PUMA 2 GOF par calculado en BG	118
4.31. Ángulos θ_1 y θ_2 con control en BG	119
4.32. Ángulos θ_1 y θ_2 con control en BG	119
4.33. Diagrama del Robot Stanford	120
4.34. Bond Graph del Manipulador Stanford	120
4.35. Modelo del robot Stanford enumerado	121
4.36. Bloque de modelo matemático junto al diagrama en BG	126
4.37. Código del bloque matemático	126
4.38. Comportamiento angular del robot Stanford	127
4.39. Comportamiento angular del robot Stanford superposición	128
4.40. Stanford bloque de control	132
4.41. Código del bloque controlador	133
4.42. Parámetros de los controladores k_i	133
4.43. Ángulos controlados	133
4.44. Parámetros de los controladores k_i	134

4.45. Ángulos controlados simulación 2	134
4.46. Representación de un termino en Bond Graph	135
4.47. Representación de un termino en Bond Graph reducido	135
4.48. Entrada e_{20} en BG	136
4.49. Ángulo θ_1 controlado por e_{20} par calculado	137
4.50. Par calculado e_{20}	137
4.51. Entrada e_{21} en BG	137
4.52. Ángulo θ_2 controlado por e_{21} par calculado	138
4.53. Par calculado e_{21}	138
4.54. Entrada e_{22} en BG	139
4.55. Extensión d_3 controlado por e_{22} par calculado	139
4.56. Par calculado e_{22}	140
4.57. Stanford posición inicial	140
4.58. Rotación de 86° de la primera unión	141
4.59. Rotación de 46° de la segunda unión	141
4.60. Extensión de 5 m de la tercera unión	142

Índice de cuadros

2.1. Variables de Esfuerzo y Flujo en Diferentes Sistemas	7
2.2. Variables de Momento y Desplazamiento en Diferentes Sistemas	8

Capítulo 1

Protocolo

1.1. Introducción

En la actualidad, existen diversos tipos de sistemas, entre los cuales se encuentran los sistemas mecánicos, que transmiten fuerzas y movimiento; y los sistemas eléctricos, que emplean circuitos para transmitir voltaje y corriente [1]. Estos sistemas a menudo coexisten y se integran en aplicaciones avanzadas como la robótica, a este tipo de sistemas en donde se transmiten variables físicas diferentes se les denomina sistemas multidominio. La robótica ha evolucionado a lo largo de los años y puede clasificarse diferentes formas una de ellas es según las etapas de desarrollo. En la primera etapa se encuentran los robots manipuladores no inteligentes, que son capaces de tomar, sujetar y mover objetos, pero no de detectar si existen obstáculos en su trayectoria de movimiento, sin embargo otra forma de clasificar a los robots manipuladores es de acuerdo a su geometría, esto se refiere a la disposición y al tipo de uniones que tenga el robot, ya sea de revolución o prismática [2].

Los manipuladores pueden dividirse en dos, los de cadena cinemática en serie, y los de cadena cinemática en paralelo, los manipuladores en serie reciben el nombre de manipulador de cadena cinemática abierta, porque inician desde una base y terminan en un eslabón libre, en cambio los manipuladores en paralelo reciben el nombre de manipulador de cadena cinemática cerrada porque inician en una base fija y terminan en la misma, es decir que se forma un circuito cerrado [2].

Bond Graph, es una metodología gráfica utilizada para el análisis de sistemas multidominio [3], con esta metodología se pueden analizar sistemas puramente hidráulicos, mecánicos y eléctricos y múltiples sistemas dinámicos más, o en otras palabras, sistemas cuyos estados cambian o evolucionan con el tiempo, a esto se le denomina, sistemas dinámicos, sin embargo también pueden analizarse sistemas que están conformados por más de un solo dominio[4].

El uso de Bond Graph presenta ventajas significativas, como la capacidad de analizar los

diferentes tipos de sistemas de forma unificada, lo que facilita una visión integral de este ademas ademas de llegar a la representación matemática de espacio de estados la cual es necesaria para determinar la estabilidad de un sistema independientemente de el deseo del control. Sin embargo, esta metodología también puede ser más difícil de dominar debido a su escasa información accesible [5].

Bond Graph a sido utilizado para desarrollar múltiples mecánicas en el área de la mecánica, por ejemplo, en el artículo realizado por Berger et al (1990), desarrolla un modelo de masa distribuida para un robot manipulador de dos enlaces, a través de la metodología de Bond Graph, resalta la gran ventaja que tiene esta metodología respecto al análisis de Lagrange, al encontrar un modelo matemático de forma mas sencilla con operaciones puramente matriciales sin la necesidad de derivar [6].

Otra aplicación se explica en el artículo realizado por Raguisila y Emami (2014), se presenta la metodología para simplificar un modelo de una pierna robótica, utilizando gráficos de enlace (Bond Graph), para encontrar mecanismos más sencillos con el comportamiento similar al de una pierna original, es decir, un modelo equivalente que mantiene las características dinámicas del sistema real, lo que facilita el diseño del sistema [7].

Por otro lado, Roberts et al (1995) presenta el modelado de un robot manipulador de dos eslabones utilizando Bond Graph y diseña un observador no lineal basado en dicho modelado para estimar las velocidades angulares de los eslabones, debido a la presencia de ruido en las mediciones físicas. Finalmente, demuestra que el observador creado a partir del modelado en Bond Graph es capaz de estimar las velocidades angulares de los eslabones incluso en presencia de ruido [8].

Otro estudio realizado por Cheng Yin et al (2014) aplica la metodología de Bond Graph a un robot paralelo planar 3-RPR. Diseñan e implementan tres controladores PID, uno para cada motor de corriente continua que acciona los actuadores prismáticos (P). El propósito de este estudio no es solo obtener un diagrama en Bond Graph del robot mencionado, sino también de los controladores PID, para establecer las ecuaciones cinemáticas inversas que permitan calcular las longitudes deseadas de los actuadores prismáticos a partir de la posición y orientación del efector final [9].

En la investigación realizada por Sahoo (2017), se presenta el modelo en Bond Graph de un robot omnidireccional de tres ruedas. Este enfoque permite modelar de manera más eficiente los sistemas multidisciplinarios que conforman el robot, como lo es el motor eléctrico, el sistema de transmisión y las ruedas, lo cual resultaría complejo con un enfoque distinto para cada sistema [10].

En este trabajo de investigación, se propone la aplicación de la metodología de Bond Graph, para el modelado de robots manipuladores en 3D, con la finalidad de simplificar la obtención del modelo matemático en comparación con los métodos tradicionales sin importar el numero de eslabones.

1.2. Planteamiento del problema

La obtención del modelo dinámico de robots manipuladores mediante métodos analíticos tradicionales, como Euler-Lagrange, conlleva una complejidad algebraica que crece de manera exponencial conforme aumentan los grados de libertad del sistema. Esta limitación se hace evidente en sistemas mecánicos articulados complejos de 3 o mas grados redundantes de libertad, donde el número elevado de uniones resulta en ecuaciones de movimiento extensas, difíciles de manipular y propensas a errores humanos durante su derivación, además de no ofrecer una estructura clara que facilite la implementación del control.

1.3. Justificación

Los métodos tradicionales pueden volverse tediosos y complicados a medida que los robots manipuladores aumentan el número de articulaciones que lo conforman, demandando nuevas formas de obtener su modelo dinámico y el control del mismo. La aplicación de la metodología de Bond Graph en los robots manipuladores es un gran atractivo, debido a su gran capacidad de modelar sistemas dinámicos no lineales, como es el caso de los manipuladores, además de la facilidad para encontrar el modelo dinámico en espacio de estados a partir del modelo unificado, entre otras las cuales pueden aprovecharse para un diseño más completo de un robot manipulador y beneficiar al sector industrial, sin necesidad de hacer cálculos matemáticos complejos.

1.4. Hipótesis

Es posible modelar robots manipuladores seriales 3D, además de diseñar el controlador de forma unificada al modelo a través de la metodología de Bond Graph.

1.5. Objetivos

1.5.1. Objetivo general

Desarrollar una metodología basada en Bond Graph que sirva tanto para obtener el modelo matemático como para diseñar el control de robots en 3D.

1.5.2. Objetivos específicos

1. Aprender los conceptos básicos sobre modelado de sistemas mecánicos en Bond Graph.
2. Aprender la representación Denavit-Hartenberg para la obtención de transformaciones homogéneas y la cinemática directa de robots manipuladores.

3. Formular las ecuaciones dinámicas de un manipulador 2D mediante el método de Euler-Lagrange.
4. Construir el modelo Bond Graph de robots de 1 y 2 eslabones en 2D y verificar su equivalencia con el modelo Euler-Lagrange obtenido.
5. Aplicar la metodología Bond Graph a un manipulador Stanford cuyo movimiento es 3D, obteniendo su modelo dinámico y diseñando un controlador teórico en BG.

1.6. Metodología/Procedimiento experimental

La metodología planteada para esta investigación es la siguiente:

1. **Revisión bibliográfica** Se llevará a cabo una revisión bibliográfica de artículos científicos, libros, tesis y otros recursos académicos relacionados con los siguientes temas:
 - Fundamentos de Bond Graph y su aplicación en sistemas mecánicos.
 - Cinemática de robots manipuladores, con énfasis en robots RRR y RRP
 - Dinámica de robots manipuladores, con el método de Euler-Lagrange.
2. **Aplicación del conocimiento previo**
 - Se aplicarán los conocimientos adquiridos en el paso anterior, a ejercicios simples para entender y digerir el conocimiento.
 - Modelado de sistemas mecánicos en Bond Graph.
 - Análisis dinámico por Euler-Lagrange de un péndulo simple.
3. **Modelado de robots manipuladores en 2D, de 1 y 2 eslabones mediante Bond Graph**
 - A partir de los modelos en Bond Graph de sistemas mecánicos se realizara el modelo de los robots manipuladores de 1 y 2 eslabones cuyo movimiento este dentro de un plano 2D así mismo, partiendo del modelado general de 1 eslabón, cuyo movimiento es en 2D.
4. **Modelado de robots manipuladores en 2D, de 1 y 2 eslabones mediante Euler-Lagrange**
 - En este paso de la metodología se obtendrá el modelo dinámico de los robots manipuladores de 1 y 2 eslabones mediante Euler-Lagrange, es decir calculando la energía cinética total y energía potencial total de cada eslabón de los manipuladores.
5. **Validación del modelo en Bond Graph respecto a Euler-Lagrange**
 - Teniendo ambos modelos dinámicos, se tratara de llegar al modelo de Euler-Lagrange por medio de Bond Graph, para ello se emplearan las relaciones que existen entre los vectores clave y las variables generalizadas para convertir el modelo en espacio de estados a la forma dinámica general.

6. Extensión al movimiento tridimensional

- Una vez validado el modelo de 1 y 2 eslabones en 2D, se extenderán los modelos para que su movimiento sea tridimensional, para ello se hará uso de herramientas exclusivas de Bond Graph, como lo son los anillos de Euler, que parten de las ecuaciones de Euler de forma analítica. Teniendo como objetivo principal el robot Stanford.

7. Diseño e implementación del controlador

- Una vez que se tenga el modelo en Bond Graph del Robot Stanford, se diseñará un controlador y se simulara para verificar el efecto del controlador sobre el modelo en BG.

1.7. Infraestructura y recursos financieros

Los recursos que se requieren para la realización de este trabajo de tesis, se cuenta con la bibliografía, el software y las condiciones para el buen desarrollo del proyecto.

1.8. Aportación a la solución de problemas prioritarios

El proyecto de investigación "Modelado y control de robots manipuladores en 3D con un enfoque de Bond Graph" contribuye a la solución de problemas prioritarios en varios sectores estratégicos. Enseguida, se presentan las contribuciones alineadas con los objetivos prioritarios del Programa Especial de Ciencia, Tecnología e Innovación (PECiTI) del Secihti.

Mejoramiento de la calidad y productividad en la industria (Objetivo prioritario 1): El proyecto proporciona las bases para un mejor diseño que pueda contribuir a la optimización, precisión y el control de los robots manipuladores, lo cual incrementara la eficiencia operativa y reduce el desperdicio de energía. Esto es importante en sectores industriales como el automotriz, aeroespacial y de electrónica, donde la exactitud y la eficiencia son puntos clave. La reducción en el consumo de energía conlleva una disminución en la quema de combustibles fósiles, contribuyendo así a la reducción de emisiones de CO₂ y el impacto ambiental. [11]

Innovación en tecnologías de la salud (Objetivo prioritario 2): En el ámbito de la salud, la aplicación de robots manipuladores avanzados puede revolucionar los servicios médicos, especialmente en áreas críticas como las cirugías de alta precisión y los cuidados a largo plazo. La precisión y la capacidad de control mejorada que ofrece este proyecto pueden aumentar la seguridad y la eficacia de procedimientos médicos, beneficiando directamente a pacientes y profesionales de la salud. Esta investigación es importante en la salud al

proporcionar las herramientas de modelado y control básicas para el desarrollo de este tipo de tecnología enfocadas a esta área tan importante. [11]

Desarrollo de capacidades científicas y tecnológicas en áreas prioritarias (Objetivo prioritario 4): La metodología de Bond Graph facilita un análisis integrado y eficiente de sistemas complejos, lo que puede ser aplicado a diversos campos de la ingeniería y la tecnología. Esto promueve soluciones innovadoras y abre nuevas vías de investigación y desarrollo en disciplinas variadas, mejorando así la capacidad científica y tecnológica del país en áreas prioritarias. [11]

1.9. Acciones de difusión

Se realizará la redacción de dos artículos de investigación, el envío y la posible publicación de los resultados en dos congresos internacionales, asegurando así el acceso universal al conocimiento científico y tecnológico.

Capítulo 2

Modelado de sistemas en Bond Graph

2.1. El Bond

Bond Graph se define como una metodología propuesta por Henry Paynter en 1959, en donde la idea principal resulta en que la potencia se transmite a los elementos del sistema, a través de las variables de esfuerzo e y flujo f [12]. Las variables de esfuerzo y flujo, dependen del sistema que se este analizando, con la condición de que, el resultado de la multiplicación escalar sea potencia como en la ecuación (2.1) [3].

$$P(t) = e(t) \bullet f(t) \quad (2.1)$$

A estas variables (esfuerzo y flujo), se les conoce como variables de potencia. Los sistemas pueden ser eléctricos, mecánicos, hidráulicos o térmicos, de manera que cada sistema tiene su variable de esfuerzo y flujo como se muestra en la tabla 2.1 [12].

Cuadro 2.1: Variables de Esfuerzo y Flujo en Diferentes Sistemas

Sistema	Variable de Esfuerzo	Variable de Flujo
Mecánica (Traslación)	Fuerza (N)	Velocidad (m/s)
Mecánica (Rotación)	Torque (N·m)	Velocidad angular (rad/s)
Eléctrico	Voltaje (V)	Corriente (A)
Térmico	Temperatura (°C) / (K)	Calor (J/s)
Hidráulico	Presión (Pa)	Caudal (m ³ /s)
Fluido	Tensión superficial (N/m)	Flujo volumétrico (m ³ /s)

En Bond Graph, al igual que en los sistemas antes mencionados, se cuenta con dos magnitudes físicas adicionales sin embargo solo tienen sentido para los elementos de almacenamiento, ya que representan la cantidad de energía almacenada, y se definen como momento p y desplazamiento q y se les denomina variables de energía [12]. Estas dos cantidades se obtienen de la integración de las variables esfuerzo e y flujo f como se muestra en las ecuaciones (2.2) y (2.3).

$$p(t) = \int_0^t e(t) dt \quad (2.2)$$

$$q(t) = \int_0^t f(t) dt \quad (2.3)$$

En la tabla 2.2 se muestran las variables de momento y desplazamiento en los distintos sistemas en los que puede aplicarse esta metodología [3].

Cuadro 2.2: Variables de Momento y Desplazamiento en Diferentes Sistemas

Sistema	Variable de Momento	Variable de Desplazamiento
Mecánico (Traslacional)	Cantidad de movimiento ($\text{kg}\cdot\text{m/s}$)	Posición (m)
Mecánico (Rotacional)	Momento angular ($\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$)	Ángulo (rad)
Eléctrico	Flujo magnético (Wb)	Carga eléctrica (C)
Térmico	Entropía (J/K)	Temperatura (C / K)
Hidráulico	Momento del fluido ($\text{Pa} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^3$)	Volumen (m^3)
Fluido	Masa del fluido (kg)	Concentración (kg/m^3)

Los Bonds en Bond Graph, están asociados a las variables de esfuerzo y las variables de energía, los Bonds sirven para interconectar los elementos del sistema, y se representa gráficamente como se muestra en la figura 2.1 [13].

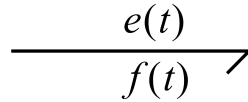


Figura 2.1: Representación gráfica del Bond

2.2. Bond Activo

Ademas del Bond tradicional/básico, existe otro tipo de Bond cuya característica recae en el producto escalar del esfuerzo y flujo, el resultado de dicho producto es cero, por tanto, su potencia es cero. A este tipo de Bond se le denomina Bond Activo o enlace de señal, porque transmite información sin afectar la conservación de la potencia, su representación de ilustra en la figura 2.2 [12].

$$P(t) = e(t) * f(t) = 0 \quad (2.4)$$

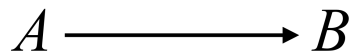


Figura 2.2: El Bond Activo

La aplicación de este tipo de Bond en Bond Graph, surgen los detectores, los detectores pueden definirse como sensores cuya tarea es medir una señal, en este caso existen dos tipos de detectores, partiendo de la ecuación (2.4), si el esfuerzo $e(t) = 0$, se tiene un detector de flujo (se transmite la señal de flujo), pero si $f(t) = 0$, se denomina detector de esfuerzo (se transmite la señal de esfuerzo), estos detectores son representados como se ilustra en la figura 2.3 [3].

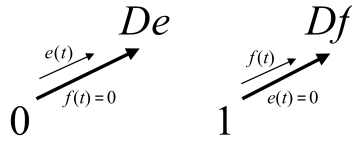


Figura 2.3: Detectores de esfuerzo y flujo

2.3. Elementos de puerto-1

En Bond Graph, existen tres grupos básicos:

1. Fuentes de energía
2. Elementos de almacenamiento
3. Elementos de disipación

Las fuentes de energía, se encargan de dar la energía al sistema, y se dividen en fuentes de esfuerzo Se y fuentes de flujo Sf , se representan como se ilustra en la figura 2.4, estos elementos reciben el nombre de puertos activos de un solo Bond [12].

En el grupo de elementos de almacenamiento se tienen dos tipos, el tipo esfuerzo (Inercias denotados como I) o tipo flujo (Capacitancia denotados como C), y su función es almacenar la energía en forma de la integral del esfuerzo o del flujo aplicado al elemento, los inductores en sistemas eléctricos y los resortes en sistemas mecánico, son ejemplos de elementos de almacenamiento de esfuerzo y capacitores, masas o inercias, son ejemplos de elementos de almacenamiento de flujo, este grupo de elementos recibe el nombre de puertos pasivos de un solo Bond, su representación es como se muestra en la figura 2.5 [3], [13].

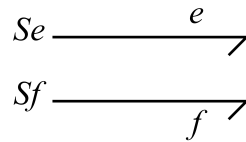


Figura 2.4: Representación gráfica de las fuentes en Bond Graph

Los elementos de disipación (figura 2.5), también llamados elementos irreversibles porque disipan parte de la energía que reciben, y a diferencia de los elementos de almacenamiento, no tienen variables de energía asociadas sin embargo, también se le denomina elemento pasivo.

A estos tres grupos de elementos se les conoce como elementos de puerto único porque tienen solo un Bond asociado a ellos, es decir, un solo flujo y un solo esfuerzo asociado, por ello, los elementos básicos también son llamados elementos de un solo puerto y todos estos, reciben potencia [12].

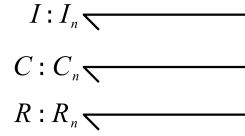


Figura 2.5: Elementos de puerto único

2.4. Elementos de puerto-2

Los elementos de puerto-2, tienen asociados a ellos, dos Bonds, uno entra al elemento, y otro sale del elemento, y por tanto, existe una relación de entrada/salida del esfuerzo/flujo a través de una constante cuyo nombre depende del tipo de puerto. Estos elementos conservan la potencia es decir que el producto del flujo y esfuerzo de entrada son iguales al producto de flujo y esfuerzo de salida [12]. Los elementos de puerto-2, pueden ser de dos tipos, Transformadores o Giradores.

$$e_1(t) * f_1(t) = e_2(t) * f_2(t) \rightarrow P_1(t) = P_2(t) \quad (2.5)$$

Los Transformadores (figura 2.6) se describen a través de la ecuación (2.6), los transformadores en Bond Graph, se caracterizan por mantener la variable de entrada a la salida, esta es la diferencia principal con el tipo girador (figura 2.6), ya que este ultimo gira la variable de potencia, como se observa en la ecuación (2.7) [3].

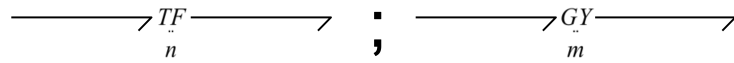


Figura 2.6: Elementos de Puerto-2

Los transformadores y giradores, también son considerados elementos de unión, debido a que cumplen una función de acoplamiento y unión entre dominios igual o diferentes, además de su capacidad para conservar la potencia [12].

$$\text{Transformadores} : \rightarrow e_2(t) = n * e_1(t); \quad f_1(t) = n * f_2(t) \quad (2.6)$$

$$\text{Giradores} : \rightarrow e_1(t) = m * f_2(t); \quad e_2(t) = m * f_1(t) \quad (2.7)$$

2.5. Elementos de puerto-3

En Bond Graph, existen dos tipos de uniones que representan las dos formas de conexión (serie y paralelo): la unión 0 y la unión 1. Estas uniones se originan a partir de la ley de la conservación de la energía y la ley de la conservación de la masa, esto significa actúan como restricciones que debe cumplir cualquier sistema dinámico [12], [4]. La unión 0, y la unión 1, se ilustra en la figura 2.7.

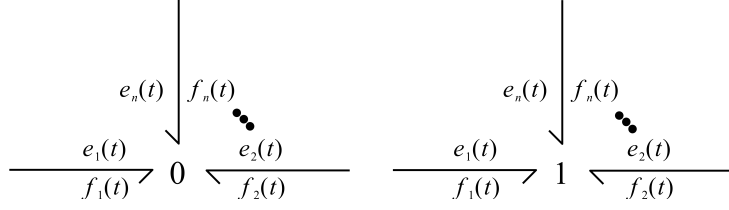


Figura 2.7: Unión 0 y 1

La unión 0, impone que todos los Bonds conectados a la unión, deben tener el mismo esfuerzo, sin embargo, la suma de los flujos que entran y salen de la unión deben ser igual a cero como se observa en la ecuación (2.8).

$$\begin{aligned} e_1(t) &= e_2(t) = \dots = e_n(t) \\ f_1(t) + f_2(t) + \dots + f_n(t) &= 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

La unión 1, por su parte establecen que todos los Bonds conectados a la unión, deben tener el mismo flujo, sin embargo, la suma de los esfuerzos que entran y salen de la unión debe ser igual a cero, esto se representa mediante la ecuación (2.9).

$$\begin{aligned} f_1(t) &= f_2(t) = \dots = f_n(t) \\ e_1(t) + e_2(t) + \dots + e_n(t) &= 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

La unión 0 representa la conservación de la masa y la conexión en paralelo. La unión 1 representa la conservación de la energía y la conexión en serie [3].

2.6. Causalidad

Los Bonds están asociados a las variables de potencia, sin embargo estas deben seguir direcciones opuestas, para definir la dirección del esfuerzo y flujo no la dirección de la potencia, se utiliza el concepto de causalidad. La causalidad define que variable de potencia entra/sale del Bond, mediante el trazo causal (figura 2.8) [12].

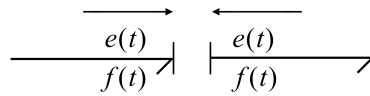


Figura 2.8: Trazo causal

El esfuerzo siempre seguirá al causal. Los elementos de Bond único, tienen su causalidad definida:

1. Causalidad necesaria: Los elementos activos tienen causalidad ya prescrita, como se observa en la figura 2.9

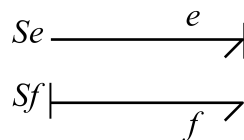


Figura 2.9: Causalidad necesaria de elementos activos

2. Causalidad integral/derivativa: Los elementos de almacenamiento, pueden tener causalidad integral o derivativa (figura 2.10), dependiendo cual es la variable de potencia que reciba, se prefiere que los elementos de almacenamiento tengan causalidad integral, sin embargo no siempre resultara posible [3].

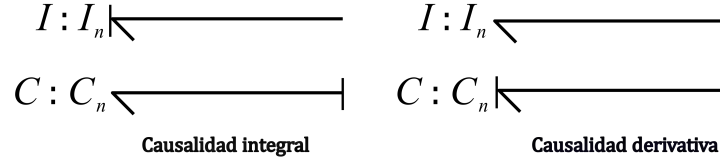


Figura 2.10: Elementos de puerto único con causalidad

3. Causalidad arbitraria: Los elementos de disipación, no tienen una causalidad preferida, puede recibir cualquier variable de potencia, sin tener preferencia por alguna, se puede representar como se observa en la figura 2.11 [13].

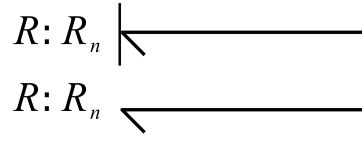


Figura 2.11: Causalidad arbitraria

La asignación de la causalidad a los elementos de almacenamiento se basa en su comportamiento natural y la forma en la que se relacionan las variables de potencia en el elemento.

La causalidad en las uniones, representan restricciones a los Bonds conectados. La unión 0, esta restringida a que solo debe entrar una variable de potencia de tipo esfuerzo, por cada unión 0, de forma similar la unión 1 esta restringida a que solo puede entrar una variable de potencia de tipo flujo, y el resto deben salir de la unión [12].

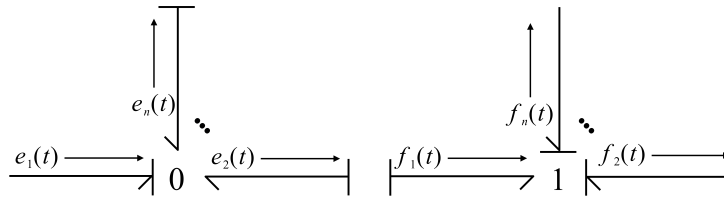


Figura 2.12: Causalidad de elementos de unión

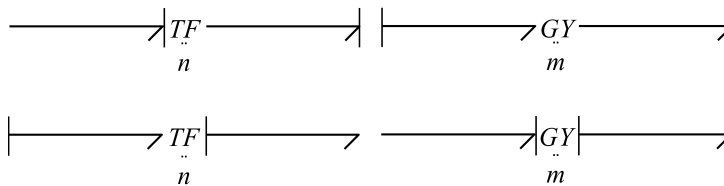


Figura 2.13: Causalidad Elementos de puerto-2

Los transformadores y giradores, también forman parte de la causalidad restrictiva, ya que el trazo causal del Bond de salida, dependerá del trazo causal del Bond de entrada y viceversa. La causalidad de los transformadores y giradores se define como se ilustra en la figura 2.13 [3].

2.7. Estructura de unión y vectores clave

De forma general, se puede clasificar a los Bond como Bonds externos y Bond internos, estructuralmente son similares, pero la diferencia principal radica en donde están conectados.

Los Bonds internos siempre estarán conectados a los elementos del sistema, ya sean elementos activos o elementos pasivos, es decir, a los elementos de puerto único, por otro lado, los Bonds externos están conectados a los elementos de unión (unión 0 y unión 1) y a los elementos de puerto-2 (transformadores y giradores) [12].

La estructura unión (figura 2.14) puede definirse como la relación de los elementos de unión y los elementos de puerto único a través de los Bonds internos y Bonds externos, esta estructura contiene la información sobre todas las interconexiones del sistema, y sobre la distribución de la potencia. Las uniones 0 y 1 son los nodos que componen la estructura central y permiten representar gráficamente las leyes de conservación de la potencia [12].

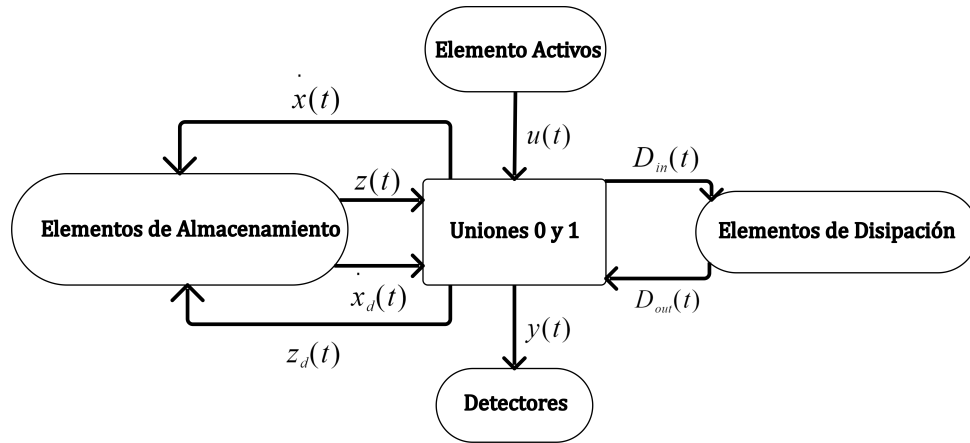


Figura 2.14: Estructura Unión

En la figura 2.14, los elementos activos, dan la energía al sistema, denotado por el vector $u(t)$, este vector de entrada, se distribuye al sistema a través de las uniones, la energía llega en forma de esfuerzo/flujo a los elementos de almacenamiento y a los elementos de disipación, denotado por los vectores $\dot{x}(t)$ y D_{in} respectivamente, los elementos de almacenamiento, devuelven la energía hacia los uniones nuevamente, denotado por el vector $z(t)$, los elementos irreversibles, disipan parte de la energía y el resto es, entregada nuevamente al sistema, denotado por el vector D_{out} [12]. Los elementos de almacenamiento pueden tener causalidad integral o causalidad derivativa, como resultado se generan los vectores $\dot{x}_d(t)$ y $z_d(t)$. El vector $x(t)$ y $x_d(t)$, representan la integral del vector $\dot{x}(t)$ y del vector $\dot{x}_d(t)$, es decir las variables de energía.

Las salidas del sistema, son detectores que transmiten una señal de esfuerzo/flujo que se encuentre en la estructura de las uniones, de alguno de los elementos que también se encuentre conectado a la unión, se representa como el vector $y(t)$, a estos vectores se les conoce como vectores clave y relacionan las variables de potencia que entran/salen del elemento, hacia/desde la estructura unión [12].

2.8. Relaciones Constitutivas

Los vectores clave relacionan las variables de esfuerzo y flujo, que entran o salen de la estructura unión, desde o hacia los elementos de disipación, almacenamiento, entradas y salidas del sistema en Bond Graph, sin embargo las relaciones constitutivas describen el comportamiento de los elementos individuales del sistema modelado en Bond Graph.

Las relaciones constitutivas de los elementos de almacenamiento, relacionan la magnitud del elemento con las variables de potencia, las relaciones constitutivas se describen en la ecuación (2.10), para las capacitancias la ecuación (2.11) para las inercias [3].

$$e(t) = \frac{1}{C} \int f(t) dt \quad (2.10)$$

$$f(t) = \frac{1}{L} \int e(t) dt \quad (2.11)$$

Sin embargo, la integral del flujo resulta en desplazamiento (ecuación (2.3)) y la integral del esfuerzo resulta en momento (ecuación (2.2)), por tanto las ecuaciones (2.10) y (2.11) pueden escribir como las ecuaciones (2.12) y (2.13).

$$e(t) = \frac{1}{C} q(t) \quad (2.12)$$

$$f(t) = \frac{1}{L} p(t) \quad (2.13)$$

Las ecuaciones (2.12) y (2.13) son descritas para los elementos de almacenamiento en causalidad integral, y se puede expresar entonces de forma vectorial como la ecuación (2.14):

$$z = F \cdot x \quad (2.14)$$

Donde F , es una matriz diagonal, cuyos elementos de la diagonal son los inversos de las magnitudes de las capacitancias e inercias, de los elementos en causalidad integral [12].

Los elementos de disipación de energía, se comportan de forma distinta a los elementos de almacenamiento, en este tipo de elementos, la relación del esfuerzo y flujo es a través de la propia magnitud de la resistencia, como se muestra en la ecuación (2.15).

$$e(t) = R f(t) \quad (2.15)$$

La resistencia representa una relación de proporción entre el esfuerzo y el flujo, además el flujo es proporcional al esfuerzo. El vector D_{in} , contiene las variables de esfuerzo y flujo que entran a los elementos de disipación, mientras que D_{out} , contiene las variables de

esfuerzo y flujo que salen de los elementos. Entonces, de forma vectorial puede escribirse como la ecuación (2.16) [12].

$$D_{out} = L \cdot D_{in} \quad (2.16)$$

Donde L es una matriz diagonal, cuyos valores de la diagonal son las magnitudes de los elementos de disipación del sistema. Debido a que estos elementos tienen una causalidad arbitraria asignada, dependerá de la ecuación (2.15), para encontrar los valores de la diagonal de la matriz L .

2.9. Espacio de Estados a través de Bond Graph

El modelo matemático en espacio de estados de un sistema modelado en Bond Graph, puede obtenerse a partir de la matriz de unión s , se tiene la ecuación tal, los vectores de entrada a cada elemento del sistema son igual a la matriz de unión por los vectores de salida de los elementos del sistema en Bond Graph con causalidad integral [12].

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ D_{in} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ D_{out} \\ u \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Donde s_{ij} son matrices, y se obtienen de la aplicación de las propiedades de las uniones 0 y uniones 1. Al realizar la multiplicación matricial y sustituir la ecuación resultante de D_{in} en tanto la ecuación de estados y la ecuación de salida se obtienen las siguientes ecuaciones [12]:

$$M = L(I - s_{22}L)^{-1} \quad (2.18)$$

$$A = (s_{11} + s_{12}Ms_{21})F \quad (2.19)$$

$$B = s_{13} + s_{12}Ms_{23} \quad (2.20)$$

mientras que la ecuación de salida en la representación en espacio de estados, se obtiene también del análisis de la estructura unión resultando en la obtención de las matrices C y D , como resultado se obtienen las ecuaciones x y.

$$C = (s_{31} + s_{32}Ms_{21}) \cdot F \quad (2.21)$$

$$D = s_{33} + s_{32}Ms_{23} \quad (2.22)$$

Sin embargo, cuando se tiene un Bond Graph con causalidad derivativa, existe una relación entre los elementos en causalidad integral y los elementos en causalidad derivativa la cual se denota como E , y se obtiene del análisis de la matriz de unión y los vectores clave, como se ilustra en la ecuación (2.23) y de su análisis se obtiene las ecuaciones (2.24) [12].

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ D_{in} \\ y \\ z_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & 0 \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & 0 \\ s_{41} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ D_{out} \\ u \\ \dot{x}_d \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Los elementos en causalidad derivativa, no producen un aumento en el numero de ecuaciones de estado, debido a que la dinámica de estos elementos con dicha causalidad,

depende de la dinámica de los elementos en causalidad integral.

En los elementos con causalidad derivativa, la variable de estado asociada a ese elemento no es la variable de potencia de su versión en causalidad integral, sino que su estado aparece en forma de derivada del estado de su versión en su causalidad contraria.

$$E = I - s_{14}F_d^{-1}s_{41}F \quad (2.24)$$

Esta matriz E , afecta a la matriz de estados A y la matriz de entradas B , como se observa en las ecuaciones (2.25) y (2.26), sin embargo, no afecta al tamaño de las matrices, por tanto no genera un aumento en las ecuaciones del sistema [12].

$$A = E^{-1}(s_{11} + s_{12}Ms_{21})F \quad (2.25)$$

$$B = E^{-1}(s_{13} + s_{12}Ms_{23}) \quad (2.26)$$

E solo afecta a la ecuación de estado, y no a la ecuación de salida, y por ello, la forma de calcular las matrices que conforman la ecuación de salida, es igual a la forma de calcularlas en causalidad integral.

2.10. Modelado y análisis de sistemas eléctricos en Bond Graph

Un sistema eléctrico transmite potencia entre sus elementos en forma de voltaje y de corriente, dicha potencia se distribuye a través de las conexiones en serie o paralelo, de tal manera que si los elementos están conectados en serie, tendrán la misma corriente fluyendo a través de ellos, pero si la conexión es paralela, el voltaje sera el mismo entre ellos. La potencia que se distribuye en el sistema, es dada por las fuentes de voltaje y las fuentes de corriente principalmente, estas fuentes son representadas en Bond Graph como fuentes de esfuerzo y flujo respectivamente, mientras que las variables de potencia seria el esfuerzo-voltaje y el flujo-corriente eléctrica [3].

Los sistemas eléctricos están formados por elementos que interactúan con las variables de potencia en este sistema, entre ellos esta el capacitor C , el inductor I , que cumplen la función de almacenar y entregar energía en alguna forma de variable de potencia, es decir, reciben energía en forma de voltaje o corriente y la seden en forma de la misma variable. La resistencia eléctrica por su parte disipa la potencia en forma de calor.

Los capacitores en el dominio de Bond Graph son elementos de almacenamiento en forma de esfuerzo, y los inductores son elementos de almacenamiento en forma de flujo, también llamadas capacitancias e inercias en Bond Graph [13].

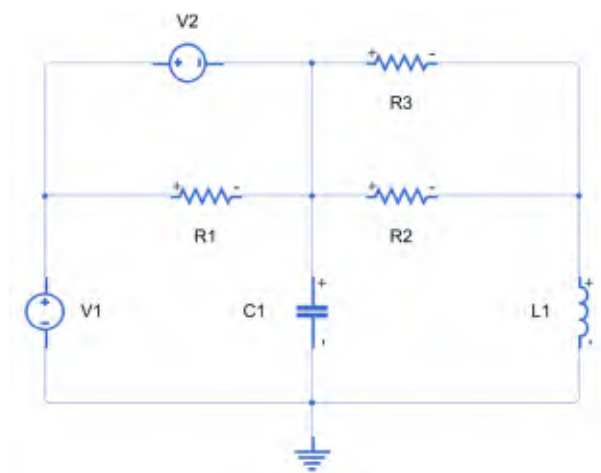


Figura 2.15: Modelo de un sistema eléctrico

El circuito de la figura 2.15, es modelado en Bond Graph a través de los elementos y conceptos vistos en secciones pasadas y se ilustra en la figura 2.17.

La forma de modelar el sistema eléctrico en Bond Graph, se resume en los siguientes pasos:

1. Por cada nodo existente en el circuito, se coloca una unión 0.
2. Por cada elemento (Fuentes, elementos de almacenamiento, disipadores), se coloca una unión 1 con su respectivo elemento y su Bond con la dirección correspondiente.
3. Se unen las uniones 0 y 1, a través de Bonds en dirección del Bond de los elementos activos.
4. El nodo tierra, en el sistema eléctrico equivalente a la unión 0 en Bond Graph, se elimina, y con ello, todos los Bonds conectados a esa unión en específico.
5. Reducir las partes del modelo que cumplan las reglas de la figura 2.16.
6. Se enumeran todos los Bonds, de preferencia de forma ordenada.
7. Establecer la causalidad de cada elemento de acuerdo a las reglas de causalidad.

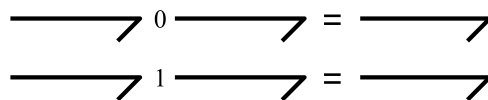


Figura 2.16: Reglas de reducción

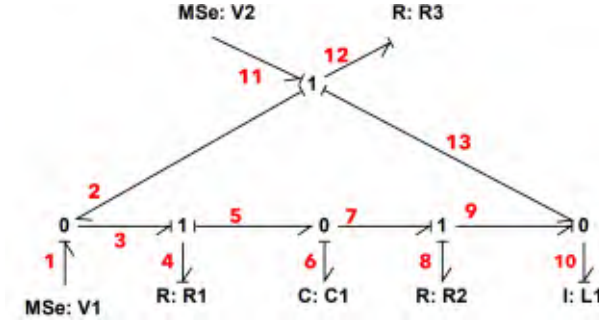


Figura 2.17: Modelo del sistema eléctrico en Bond Graph

Como el Bond Graph del sistema tiene causalidad integral, los vectores clave del modelo se muestran a continuación [12].

$$x = \begin{bmatrix} q_6 \\ p_{10} \end{bmatrix}, \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} f_6 \\ e_{10} \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} e_6 \\ f_{10} \end{bmatrix}, \quad D_{\text{in}} = \begin{bmatrix} e_4 \\ f_8 \\ e_{12} \end{bmatrix}, \quad D_{\text{out}} = \begin{bmatrix} f_4 \\ e_8 \\ f_{12} \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_{11} \end{bmatrix}, \quad y = [e_{13}],$$

La salida e_{13} , es un Bond Activo, que esta conectado junto con el capacitor C_1 , y por tanto el esfuerzo del elemento sera la señal de salida del Bond Activo. Mientras las relaciones constitutivas para el sistema eléctrico de la figura 2.15 son las siguientes

$$F = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_{10}} \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} R_4 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_8} & 0 \\ 0 & 0 & R_{12} \end{bmatrix}.$$

Y su estructura unión esta descrita por:

$$\begin{bmatrix} f_6 \\ e_{10} \\ e_4 \\ f_8 \\ e_{12} \\ e_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_6 \\ f_{10} \\ f_4 \\ e_8 \\ f_{12} \\ e_1 \\ e_{11} \end{bmatrix}.$$

La obtención de las matrices s_{ij} se realiza de elemento a elemento, a través de las reglas de las uniones 0 y 1, por ejemplo la primera fila de toda la matriz s_{ij} , esta en relación con C_6 (es decir C_1 , pero como esta asociado al Bond numero 6, el nombre cambia a C_6 para una identificación mas rápida) porque f_6 viene del Bond del elemento C_6 , con el resto de elementos del sistema partiendo siempre del Bond 6 en este caso. La forma de obtener la primera fila es la siguiente [3].

$$\begin{aligned} f_6 &= f_5 - f_7, & f_5 &= f_4, & f_7 &= f_9 = f_{10} - f_{13}, & f_{13} &= f_{12}, \\ f_6 &= f_4 - (f_{10} - f_{12}), \\ f_6 &= f_4 + f_{12} - f_{10}. \end{aligned}$$

f_6 , esta conectado a una unión 0, sin embargo, el flujo en las uniones 0 representa una suma (lo que entra debe ser igual a lo que sale), posteriormente f_7 esta conectado a una unión 1 donde los flujos conectados son iguales sin embargo, f_8 no relaciona, pero el flujo f_5 que esta conectado a una unión 1, y el flujo f_4 si se relaciona. Este proceso se debe

realizar hasta que se haya encontrado el máximo de relaciones posibles con f_6 , y así mismo para cada fila de la matriz s_{ij} . Por lo tanto, la primera fila de la matriz s_{ij} , queda de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} f_6 \\ e_{10} \\ e_4 \\ f_8 \\ e_{12} \\ e_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x & x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_6 \\ f_{10} \\ f_4 \\ e_8 \\ f_{12} \\ e_1 \\ e_{11} \end{bmatrix}$$

Al encontrar todas las relaciones con cada uno de los elementos del sistema a través de las reglas de las uniones 0 y 1, se obtiene la matriz completa para el sistema de la figura 2.15, la cual se muestra a continuación.

$$\begin{bmatrix} f_6 \\ e_{10} \\ e_4 \\ f_8 \\ e_{12} \\ e_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_6 \\ f_{10} \\ f_4 \\ e_8 \\ f_{12} \\ e_1 \\ e_{11} \end{bmatrix}$$

Se aprecia que las matrices s_{ij} son las siguientes:

$$\begin{aligned} s_{11} &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, & s_{12} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, & s_{13} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ s_{21} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, & s_{22} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, & s_{23} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \\ s_{31} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, & s_{32} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & s_{33} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Como el modelo en Bond Graph del sistema eléctrico de la figura 2.15, es de causalidad integral, se pueden utilizar las ecuaciones (2.19), (2.20) para encontrar su modelo matemático en espacio de estados [12]. Al operar las ecuaciones matriciales, resultan las siguientes matrices.

$$\begin{aligned} m &= \begin{pmatrix} R_4 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_8+R_{12}} & -\frac{R_{12}}{R_8+R_{12}} \\ 0 & \frac{R_{12}}{R_8+R_{12}} & \frac{R_8 R_{12}}{R_8+R_{12}} \end{pmatrix}; & A &= \begin{pmatrix} -\frac{R_4 + \frac{R_8 R_{12}}{R_8+R_{12}}}{C_6} & \frac{\frac{R_{12}}{R_8+R_{12}} - 1}{L_{10}} \\ -\frac{\frac{R_{12}}{R_8+R_{12}} - 1}{C_6} & -\frac{1}{L_{10}(R_8+R_{12})} \end{pmatrix}; \\ B &= \begin{pmatrix} R_4 + \frac{R_8 R_{12}}{R_8+R_{12}} & \frac{R_8 R_{12}}{R_8+R_{12}} \\ \frac{R_{12}}{R_8+R_{12}} & \frac{R_{12}}{R_8+R_{12}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La ecuación de estado del sistema eléctrico de la figura 2.15, es entonces:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -\frac{R_4 + \frac{R_8 R_{12}}{R_8 + R_{12}}}{C_6} & \frac{\frac{R_{12}}{R_8 + R_{12}} - 1}{L_{10}} \\ -\frac{\frac{R_{12}}{R_8 + R_{12}} - 1}{C_6} & -\frac{1}{L_{10} \cdot (R_8 + R_{12})} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} R_4 + \frac{R_8 R_{12}}{R_8 + R_{12}} & \frac{R_8 R_{12}}{R_8 + R_{12}} \\ \frac{R_{12}}{R_8 + R_{12}} & \frac{R_{12}}{R_8 + R_{12}} \end{pmatrix} u$$

Mientras que las matrices de salida C y D se calculan a través de las expresiones (2.21) y (2.22), al operar resultan que las matrices C y D para el sistema eléctrico son las siguientes.

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{C_6} & 0 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la ecuación de salida para el sistema eléctrico de la figura 2.15 es

$$y = \begin{pmatrix} \frac{1}{C_6} & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} u$$

Con la finalidad de comparar las señales de salida entre el modelo en Bond Graph y el modelo físico, considere el circuito eléctrico de la figura 2.18.

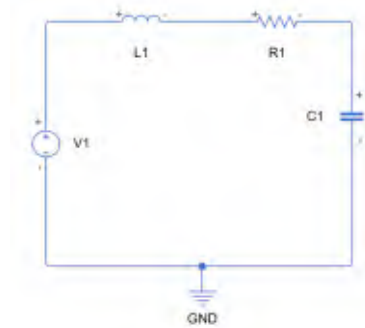


Figura 2.18: Sistema eléctrico 2

Al aplicar los pasos para modelar los sistemas eléctricos vistos anteriormente, se obtiene el modelo en Bond Graph del sistema 2.19.

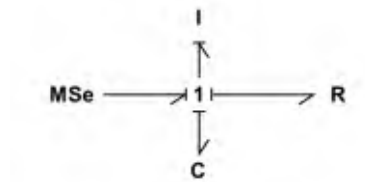


Figura 2.19: Sistema eléctrico 2 modelado en Bond Graph

Utilizando el software de simulado de MATLAB, denominado Simulink, se construye el diagrama de la figura 2.18, utilizando los bloques necesarios para su funcionamiento, se ilustran en la figura 2.20.

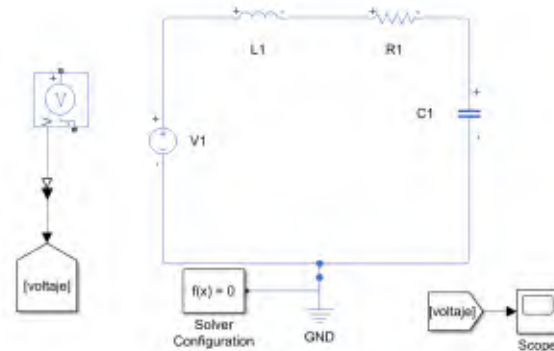


Figura 2.20: Sistema eléctrico 2 Simulink

Para la simulación del modelo en Bond Graph, se hace uso del software denominado 20 sim, y a través de sus bloques, se construye el diagrama en BG, con los elementos necesarios para su funcionamiento y se ilustra en la figura 2.21.

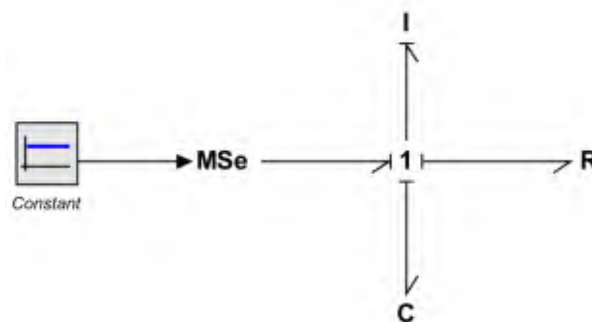


Figura 2.21: Sistema eléctrico 2 en 20 sim

La simulación de Simulink se divide en 2 partes, denominados sistemas físicos y sistemas Simulink, este caso el sistema físico es el circuito eléctrico, y el sistema Simulink es el osciloscopio, sin embargo el sensor de voltaje también es considerado parte del sistema físico, por lo que su salida se transforma al sistema Simulink a través de un conector denominado "convertidor PS-Simulink". El voltaje del inductor es medido a través del sensor de voltaje y la señal de salida física es transformada a una señal Simulink y graficada en el osciloscopio.

En sistemas eléctricos, la medición de voltaje se realiza en paralelo (figura 2.22) al elemento en el cual se desea hacer la medición, caso contrario ocurre en la medición de la corriente, el sensor de corriente se coloca en serie al elemento, pero en este caso solo se realizan mediciones de voltaje para el inductor (figura 2.23), el capacitor (figura 2.24) y la resistencia (figura 2.25).

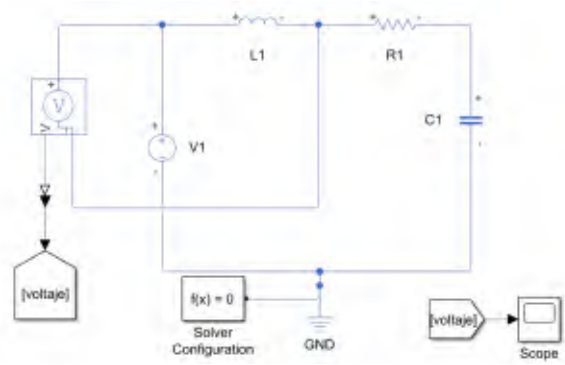


Figura 2.22: Medición de voltaje en inductor circuito 2

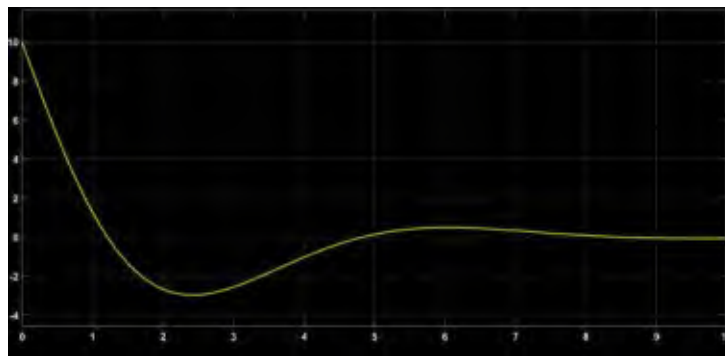


Figura 2.23: Voltaje en el inductor a través de Simulink

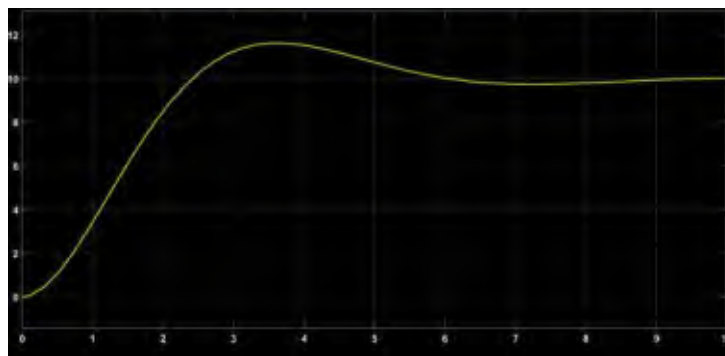


Figura 2.24: Voltaje en el capacitor a través de Simulink

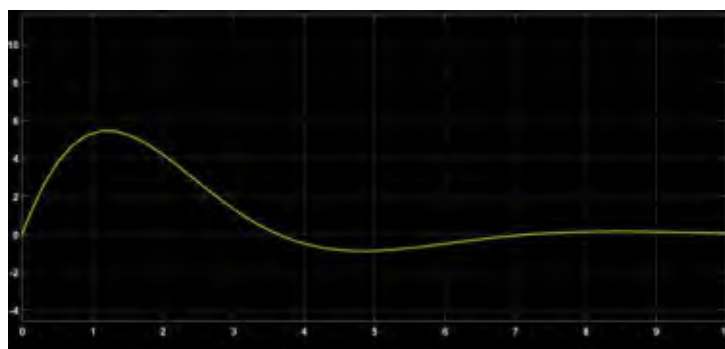


Figura 2.25: Voltaje en la resistencia a través de Simulink

Utilizando el software de 20 sim, se obtienen las figuras 2.26, 2.27 ,2.28 que representan el voltaje en el inductor, en el capacitor y en la resistencia respectivamente. Comparándolas con las figuras obtenidas desde Simulink, se aprecia que son exactamente iguales, por lo que el modelado de sistemas en Bond Graph no solo de sistemas eléctricos sino sistemas dinámicos en general, es valido y preciso.

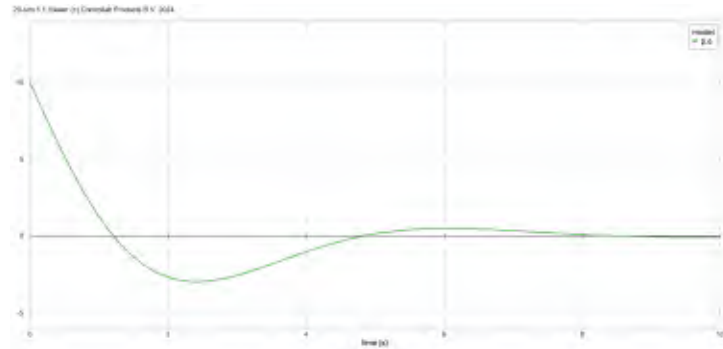


Figura 2.26: Voltaje en el inductor a través de 20 sim

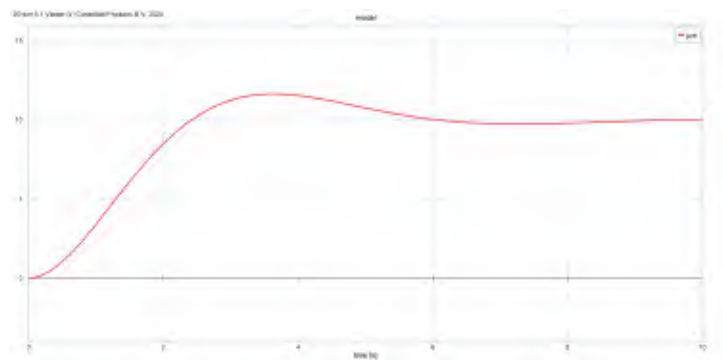


Figura 2.27: Voltaje en el capacitor a través de 20 sim

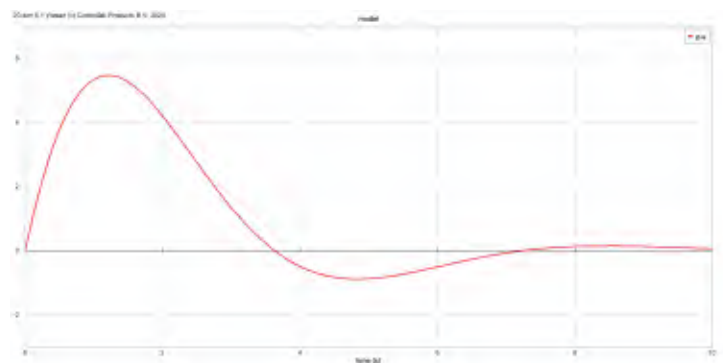


Figura 2.28: Voltaje en la resistencia a través de 20 sim

2.11. Modelado y análisis de sistemas mecánicos en Bond Graph

El modelado de sistemas mecánicos en BG, es similar al modelado de un sistema eléctrico, la diferencia radica en que las leyes de conservación que representan las uniones 0 y 1, cambian, mientras que en un sistema eléctrico las uniones 0 y 1 representan las leyes de kirchhoff, en sistemas mecánicos representan las leyes de Newton, es decir que la unión 0 representa la segunda ley de Newton, la suma de todas las fuerzas de un sistema debe ser igual a cero y la unión 1 representa la primera ley de Newton, la ley de la inercia [12], [1].

En mecánica de traslación, existen elementos que son semejantes a los elementos que encontramos en el área de eléctrica, como una inductancia, en un sistema mecánico puede representar una masa, un capacitor su equivalente es un resorte, y la resistencia eléctrica se asemeja a una resistencia mecánica, pero esto tiene un trasfondo matemático, y es que las relaciones entre las variables que transmite cada elemento son idénticas, es decir, un inductor relaciona linealmente al voltaje y la corriente, y la masa también, y lo mismo ocurre con el resorte y la resistencia mecánica. Para comparar las expresiones partimos de la ecuación (2.27) y (2.28) que expresan que la fuerza es igual a la derivada del momento, y que la velocidad es igual a la derivada de la posición [16].

$$f(t) = \frac{dp(t)}{dt} \quad (2.27)$$

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} \quad (2.28)$$

Las expresiones anteriores relacionan las variables de potencia con las variables de energía, es decir que la variable de potencia en un sistema de mecánico de traslación se relaciona linealmente con su variable de energía que es el momento, de la misma forma la velocidad. En el caso de una masa, estas variables de potencia se relacionan también de forma lineal, a través de la ecuación de la fuerza que estableció Newton (2.29).

$$f(t) = m * a \quad (2.29)$$

Sin embargo, al ser la aceleración la derivada de la velocidad, se puede expresar de la siguiente forma.

$$f(t) = m \frac{dv(t)}{dt} \quad (2.30)$$

Al encontrar la equivalencia de la velocidad en la ecuación (2.30), se llega a la expresión (2.31), donde se asemeja a la corriente en el inductor (2.32) [12].

$$v(t) = \frac{1}{m} \int f(t) dt \quad (2.31)$$

$$i(t) = \frac{1}{L} \int v(t) dt \quad (2.32)$$

Esto sucede porque ambos elementos, el inductor y la masa, se oponen a un cambio de movimiento, en el caso de un inductor, se opone al cambio de la corriente, y una masa

debido a su inercia, trata de oponerse al cambio de movimiento.

En el caso de un resorte, la expresión que relaciona las variables de potencia en un sistema mecánico de traslación, es la ley de Hooke $f(t) = k * x$. Ocurre algo similar, que al desarrollar se llega a una expresión similar al del voltaje en el capacitor (2.33), (2.34) y la expresión (2.35) y (2.36) para las resistencias [3].

$$f(t) = \frac{1}{k} \int v(t) dt \quad (2.33)$$

$$v(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt \quad (2.34)$$

$$f(t) = bv * (t) \quad (2.35)$$

$$v(t) = Ri * (t) \quad (2.36)$$

En Bond Graph, las variables de fuerza y velocidad, representan las variables de potencia de esfuerzo y flujo, mientras que el momento y la posición, representan las variables de energía momento y desplazamiento, de esta manera, se puede modelar los sistemas físicos de mecánica de traslación en esta metodología, a través de los siguientes pasos [12], [1].

1. Identificar los elementos del sistema que comparten la misma velocidad y sustituirlos por una unión 1 y conectar a través de un Bond el elemento a esta unión 0.
2. Identificar los elementos del sistema que compartan la misma fuerza, y sustituirlos por una unión 0 y conectar esos elementos a su unión 0 a través de un Bond.
3. Conectar las uniones 0 y 1, mediante Bonds.
4. Sustituir las referencias por una unión 1, y conectar una fuente de flujo con valor cero.
5. Eliminar la unión 1 de referencia y con ello, los Bonds conectados a esa unión y reducir el diagrama.

Estos pasos, son la única diferencia entre modelar los diferentes sistemas físicos en esta metodología, el análisis para encontrar su modelo en espacio de estados, es exactamente el mismo para cualquier tipo de sistema físico modelado en esta metodología.

Por ejemplo, se tiene el sistema mecánico de la figura 2.29.

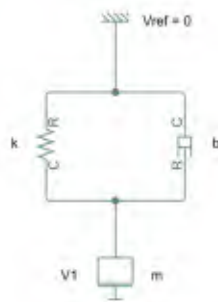


Figura 2.29: Ejemplo de sistema mecánico de traslación

El sistema de figura 2.29, esta conformado por un resorte k , una resistencia mecánica b y una inercia m , lo que sucede en este sistema, este que la masa tendera a acelerarse por la gravedad, al tener aceleración tiene una velocidad v_1 , sin embargo, tanto el resorte como la resistencia se oponen a este cambio velocidad, y el peso de la inercia recae en ambos elementos k y b por lo que se les esta aplicando la misma fuerza, mientras que la referencia tiene una velocidad de cero. Aplicando los pasos vistos anteriormente, lo anterior corresponde al paso 1 y 2, identificar cuales son las velocidades diferentes en el sistema, e identificar que elementos tienen la misma fuerza, y el resultado de estos pasos se ilustra en la figura 2.30 [12].

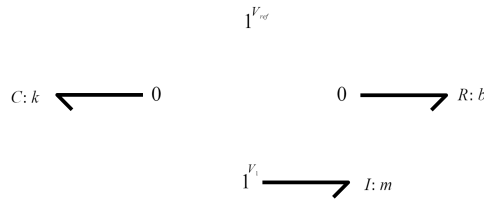


Figura 2.30: Paso 1 y 2 de modelado de sistemas mecánicos de traslación

El paso siguiente es conectar las uniones 0 y 1 mediante Bonds como se ilustra en la figura 2.31.

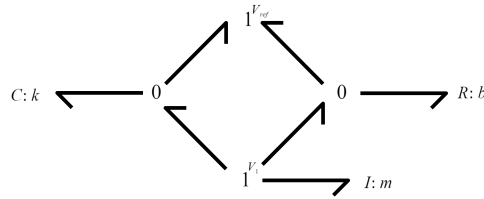


Figura 2.31: Paso 3 de modelado de sistemas mecánicos de traslación

Ahora se colocan las fuentes respectivas, por cada velocidad es una fuente de flujo, sin embargo como la masa m , esta bajo el campo gravitacional, generara un peso mg , y por tanto es una fuente de esfuerzo, esto se ilustra en la figura 2.32.

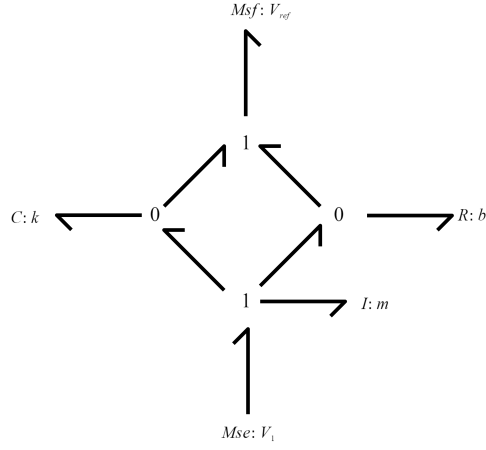


Figura 2.32: Paso 4 de modelado de sistemas mecánicos de traslación

Como la velocidad de referencia casi siempre es cero, se elimina y con ella, la unión y los Bonds conectados a ella. Finalmente el sistema de la figura 2.29 tiene el modelo equivalente en BG como ilustra en la figura 2.33.

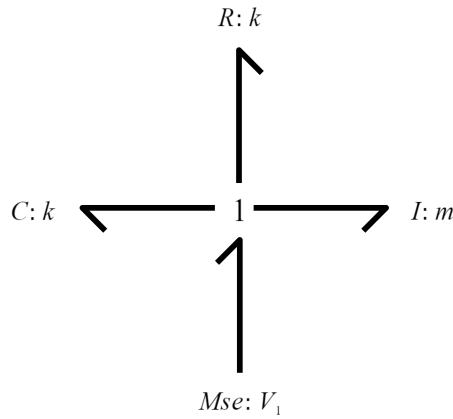


Figura 2.33: Modelo del sistema mecánico de traslación

Como se vió anteriormente en el modelado de sistemas eléctricos, a través de los vectores clave se genera la estructura unión, y queda como se ilustra en la ecuación (2.37) para este sistema mecánico de traslación. Al realizar el análisis de la estructura unión se obtienen las matrices s_{ij} mostradas en la ecuación (2.38) [12]. En la figura 2.34 se muestra el sistema modelado en BG con la causalidad ya asignada, siguiendo las reglas de asignación de causalidad.

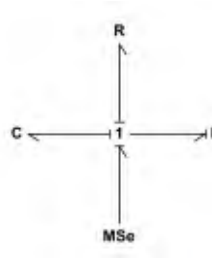


Figura 2.34: Sistema mecánico de traslación en BG con causalidad asignada

$$\begin{bmatrix} f_2 \\ e_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_2 \\ f_3 \\ e_4 \\ e_1 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} s_{11} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, & s_{12} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, & s_{13} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ s_{21} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, & s_{22} &= \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}, & s_{23} &= \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}, \\ s_{31} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, & s_{32} &= \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}, & s_{33} &= \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Como el sistema tiene elementos en causalidad integral, se pueden calcular las matrices de estado y de entrada A y B , como se expresan en las ecuaciones (2.19) y (2.20).

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{m} \\ -\frac{1}{k} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Mientras que las matrices de la ecuación de salida C y D .

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{m} \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Realizando el modelo físico en Simulink (figura 2.35), y dando valores a todos los elementos de 1 con excepción de la fuente constante de entrada, cuyo valor es de 9,81 representando el valor de la fuerza de entrada, en unidades del sistema internacional y utilizando un sensor de velocidad para medir la velocidad de la masa, se tiene la grafica de salida en la figura 2.36.

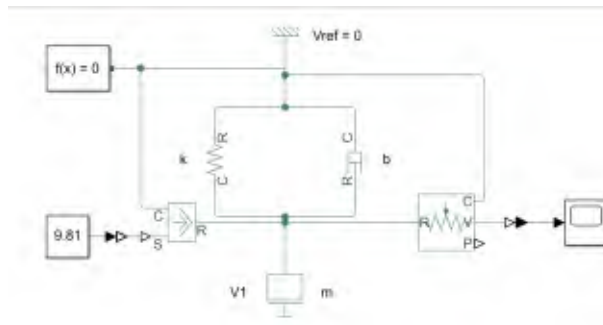


Figura 2.35: Sistema mecánico de traslación en Simulink

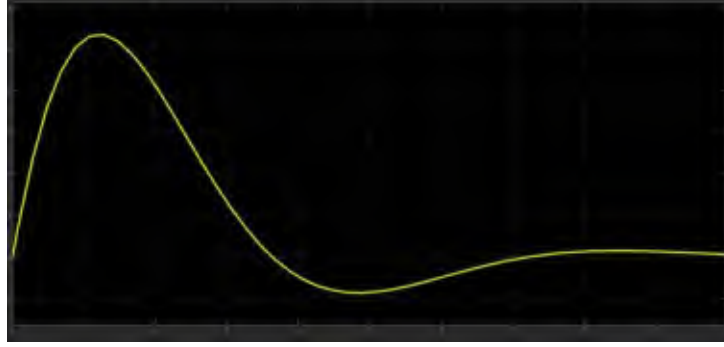


Figura 2.36: Velocidad de la masa en Simulink

Ahora construyendo el diagrama en BG del sistema utilizando 20-Sim (figura 2.37) y dando valores unitarios a todos los elementos de igual manera, la fuente de entrada teniendo un valor de 9,81 puesto que la masa cuyo valor es unitario, por la fuerza de gravedad que es de $9,81m/s$, resulta en $9,81N$. Entonces se tiene la grafica del flujo en el elemento de inercia m 2.38.

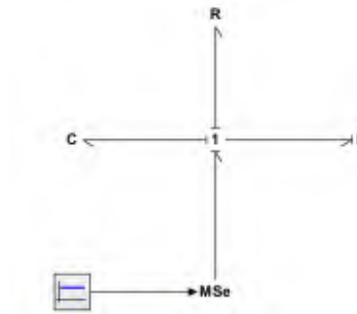


Figura 2.37: Sistema mecánico de traslación en Simulink

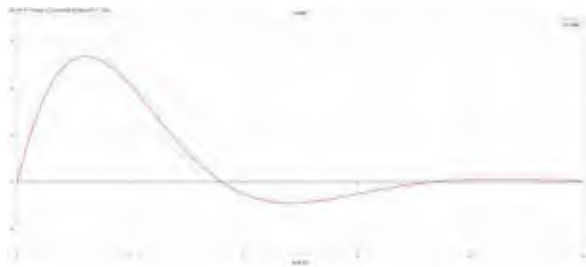


Figura 2.38: Velocidad de la masa en 20-Sim

Finalmente se observa que se obtiene exactamente la misma respuesta en ambas simulaciones, siendo la simulación del modelo en BG mas sencilla que la construcción y simulación del modelo físico en Simulink.

2.12. Controlabilidad y Observabilidad en Bond Graph

Bond Graph posee varias propiedades, las cuales están descritas y explicadas en los artículos [15] y [14], sin embargo las propiedades que mas destacan para este trabajo son las

propiedades de Controlabilidad y Observabilidad desde el propio modelo en Bond Graph del sistema físico, las cuales se denominan Controlabilidad Estructural y Observabilidad estructural.

El teorema III del artículo [14], explica que un sistema modelado en Bond Graph es estructuralmente controlable, si en el BG integral, los elementos en causalidad integral, están conectados a las fuentes de entrada a través de la causalidad, en otras palabras si existe una trayectoria causal simple desde los elementos de almacenamiento hacia las fuentes, entonces el sistema es estructuralmente controlable, pero además, se debe cumplir que el rango estructural de la matriz $[AB]$ debe ser igual a n , donde n , es el número de variables de estado del sistema (ecuación (2.39)).

$$RE[AB] = n - t_s \quad (2.39)$$

Para que se cumpla que $RE[AB] = n$, t_i debe ser cero, t_i representa a los elementos en causalidad integral, en un BG priorizando la causalidad derivativa de todos los elementos de almacenamiento, esto quiere decir que, de forma gráfica si en el BG derivativo, existen elementos en causalidad integral, significa que $t_i \neq 0$ y por tanto el sistema es estructuralmente no controlable. Sin embargo, si al dializar los elementos activos, aquellos elementos con causalidad integral, cambian a causalidad derivativa, entonces $t_i = 0$ y por tanto, es estructuralmente controlable [14].

Para ejemplificar considere el BG de la figura 2.18, este BG está en causalidad integral (figura 2.39) puesto que los elementos dinámicos se prioriza su causalidad integral. Se parte de estos elementos, hacia las fuentes de entrada para verificar si existe una trayectoria causal entre ellos, sin tomar en cuenta las reglas de las uniones 0 y 1.

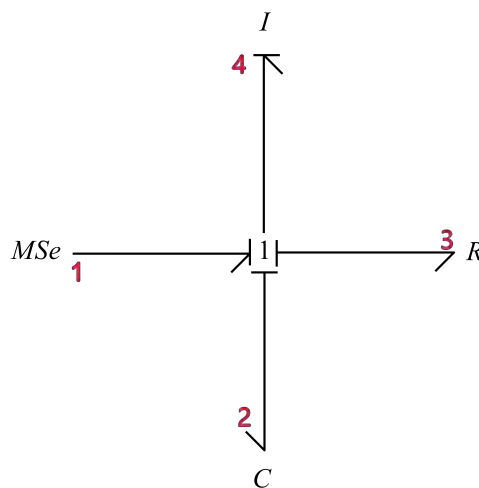


Figura 2.39: Bond Graph en causalidad integral

Partiendo del elemento I , la variable que sale de su Bond asociado es flujo y la variable que entra hacia la fuente también es flujo, por tanto existe una trayectoria causal de I hacia Mse , y viceversa (figura 2.40). En el caso del elemento C , no existe una trayectoria causal directa sin embargo, existe una trayectoria la cual es el esfuerzo saliente del elemento C

hacia el elemento I , posteriormente el elemento I regresa esa energía en forma de flujo y va hacia la fuente Mse (figura 2.41).

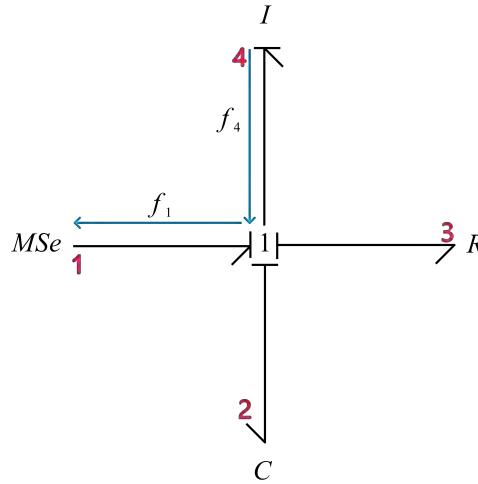


Figura 2.40: Trayectoria causal de I hacia Mse

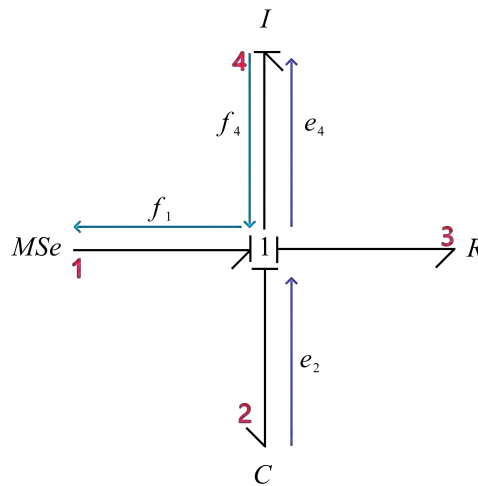


Figura 2.41: Trayectoria causal de C hacia Mse

Estas trayectorias se denotan de la siguiente manera:

Trayectoria causal de $I \rightarrow Mse$: 4-1

Trayectoria causal de $C \rightarrow Mse$: 2-4-4-1

Como se observa el BG de ejemplo cumple con la primera parte de la controlabilidad estructural, en la figura 2.42, se muestra el mismo BG pero priorizando su causalidad derivativa de los elementos, al priorizar la causalidad derivativa de los elementos de almacenamiento, y no existe ninguno con causalidad integral, entonces el sistema es estructuralmente controlable.

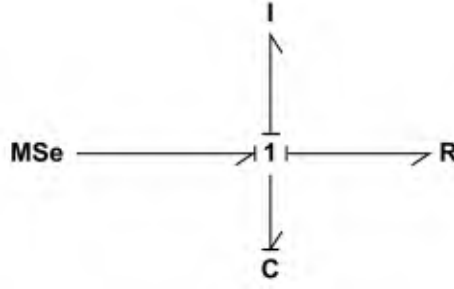


Figura 2.42: BG Derivativo del sistema 2

La observabilidad estructural es similar a la controlabilidad estructural en cuanto a procedimiento. Un sistema modelado en BG es observable, si todos los elementos de almacenamiento están casualmente conectados a los detectores/salidas y si el rango estructural de $[A \ C]^T = n$.

Esto quiere decir que se parte del BG integral, y si los elementos en causalidad integral están conectados casualmente con las salidas y además si al realizar el BG derivativo y al dualizar las salidas, todos los elementos quedan en causalidad derivativa entonces el sistema es observable [14], [15].

Como ejemplo, considere el circuito de la figura 2.18, se construye su modelo en BG priorizando la causalidad integral de los elementos de almacenamiento además se quiere medir la salida del inductor I , por ello se coloca un detector de flujo en la unión 1, su BG integral se ilustra en la figura 2.43

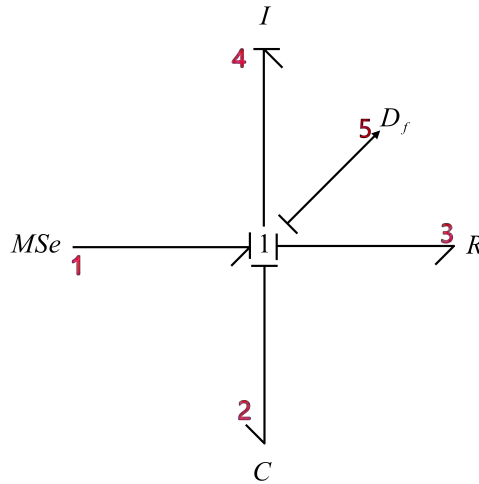


Figura 2.43: BG derivativo observabilidad estructural

Las trayectorias causales de los elementos son las siguientes:

Trayectoria causal de $I \rightarrow D_f$: 4-5

Trayectoria causal de $C \rightarrow D_f$: 2-4-4-5

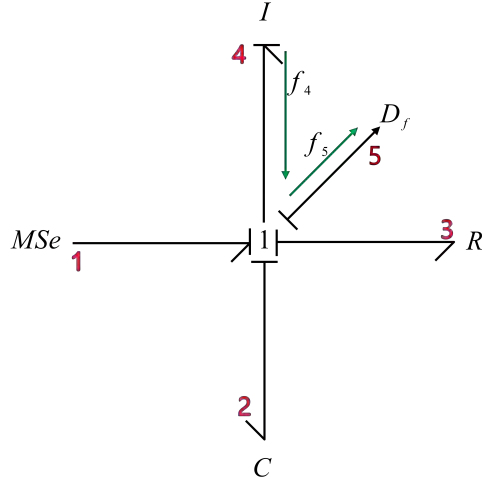


Figura 2.44: Trayectoria causal del elemento I hacia D_f

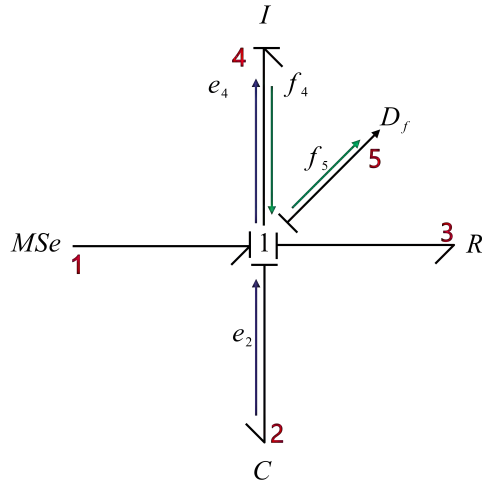


Figura 2.45: Trayectoria causal del elemento C hacia D_f

Estas trayectorias causales se ilustran en las figuras 2.44 y 2.45. Al construir el BG derivativo (figura 2.46), se observa que todos los elementos ahora poseen causalidad derivativa y por tanto el sistema entonces, es observable desde esa salida.

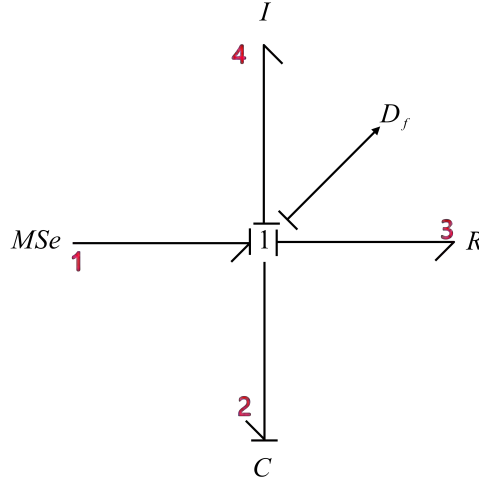


Figura 2.46: BG derivativo

Obteniendo el modelo en espacio de estados del sistema de la figura 2.18 a través de Bond Graph se obtiene la ecuación de estados y la ecuación de salida.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{L_1} & -\frac{1}{C_1} \\ \frac{1}{L_1} & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u$$

La matriz de controlabilidad para este sistema se define como $\mathcal{C} = [B \quad AB]$, y por tanto la matriz de controlabilidad resulta de la siguiente manera.

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{R_1}{L_1} \\ 0 & \frac{1}{L_1} \end{bmatrix}$$

Se puede observar que las dos columnas que conforman la matriz son linealmente independientes tanto de forma horizontal como vertical, por tanto se tienen dos vectores linealmente independientes lo que significa que su rango es de 2, esto coincide con el número de estados del sistema y por ello el sistema es controlable, tal como se obtuvo a través de la controlabilidad estructural sin ningún cálculo. Utilizando ahora las matrices que conforman la ecuación de salida y la matriz de estados A , se construye la matriz de observabilidad que para este sistema de ejemplo se construye como $\mathcal{O} = [A \quad C]^T$, de este como la matriz de observabilidad es la siguiente.

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & 0 \\ -\frac{R_1}{L_1^2} & -\frac{1}{C_1 L_1} \end{bmatrix}$$

En la matriz anterior tanto la columna 1 y 2, son linealmente independientes al igual que los vectores horizontales son linealmente independientes, por tanto su rango es de 2, al igual que el número de estados del sistema y por ende el sistema es observable.

2.13. Retroalimentación de estado

Se sabe que en la representación matemática de espacio de estados, se tienen las variables de estados, las cuales se encuentran en el vector x y multiplican a la matriz de estados A en la ecuación de estado, además se tiene un vector u que representa las entradas a un sistema en general, este mismo vector u se encuentra multiplicando a la matriz de entradas B , la suma de estos dos términos $Ax + Bu$ resulta en la ecuación de estados $\dot{x}$ [5]. Sin embargo, esta ecuación de estados se considera que está en lazo abierto, puesto que no existe una retroalimentación de los estados con las entradas, el sistema al estar en lazo abierto posee una estabilidad natural, que puede ser estable o inestable, la estabilidad o inestabilidad puede darse de forma rápida o lenta, con oscilaciones o sin oscilaciones. La finalidad de la retroalimentación de estados, es modificar esta estabilidad natural del sistema, modificando la estructura de la matriz que contiene toda la información del sistema, es decir, la matriz de estados A , sin embargo esta modificación no se realiza sobre el sistema físico, añadiendo o quitando elementos del sistema inicial, sino que se realiza a través de un lazo que conecta los estados con las entradas, pasando por constantes k , los cuales representan los polos deseados que se quieran en el sistema, esto se ilustra en forma de diagrama de bloques en la figura 2.47 [5].

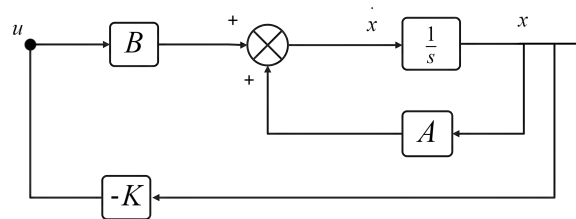


Figura 2.47: Diagrama de retroalimentación de estados

Para que pueda existir la retroalimentación de estados en un sistema, este debe cumplir con una condición, y es que los estados deben ser controlables, es decir que exista una conexión directa desde las entradas hacia los estados, basta con un estado que no sea controlable, para que el sistema entero sea no controlable, y por tanto no puede modificarse la estabilidad del sistema.

Si el sistema es controlable, entonces debe existir una entrada $u(t)$ que pueda modificar los estados de manera arbitraria esto se representa a través de la ecuación (2.40).

$$u(t) = Kx(t) + v(t) \quad (2.40)$$

Al sustituir la expresión anterior en la ecuación de estado y al reducirla se obtiene la expresión (2.41)

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t) + B_c v(t) \quad (2.41)$$

donde K es una matriz de ganancia de retroalimentación, obtenidas de la igualación entre el polinomio natural del sistema y el polinomio deseado, mientras que $v(t)$ es el vector de entradas.

A continuación se propone un ejemplo. Consideremos un sistema de segundo orden descrito por las siguientes matrices:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

donde:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Para que el sistema sea controlable, la matriz de controlabilidad $\mathcal{C}$ debe tener rango completo. La matriz de controlabilidad se define como:

$$\mathcal{C} = [B \quad AB].$$

Se calcula entonces AB :

$$AB = A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, la matriz de controlabilidad es:

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

El rango de $\mathcal{C}$ es 2, lo que indica que el sistema es controlable. El objetivo es diseñar una matriz de ganancias $K = [k_1 \quad k_2]$ tal que el sistema en lazo cerrado:

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) + Bv(t)$$

tenga autovalores en ubicaciones deseadas. Supongamos que queremos asignar los polos en $s = -2 \pm 3j$. La ecuación característica deseada es:

$$(s + 2 - 3j)(s + 2 + 3j) = s^2 + 4s + 13 = 0.$$

La matriz del sistema en lazo cerrado es:

$$A_{cl} = A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix}.$$

La ecuación característica de A_{cl} es:

$$\det(sI - A_{cl}) = s^2 + k_2s + k_1 = 0.$$

Igualando con la ecuación deseada:

$$s^2 + k_2s + k_1 = s^2 + 4s + 13.$$

Por lo tanto, las ganancias son:

$$k_1 = 13, \quad k_2 = 4.$$

Así, la matriz de ganancias es:

$$K = [13 \quad 4].$$

Y por tanto, el sistema retroalimentado se describe como:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -13 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v.$$

Y el sistema natural (sin control):

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

Los estados naturalmente son inestables y pueden observarse en la figura 2.48 pero al modificar los polos del sistema ahora es un sistema estable, figura 2.49.

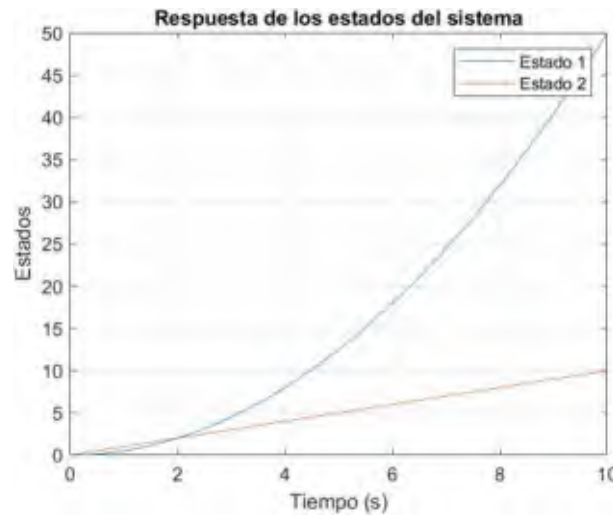


Figura 2.48: Estabilidad natural del sistema

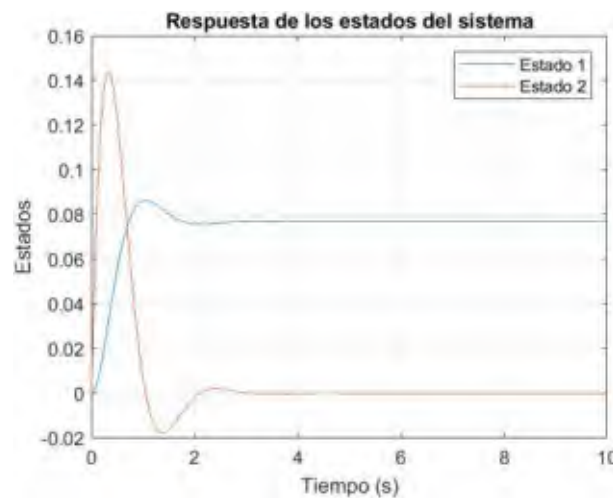


Figura 2.49: Estabilidad deseada

2.14. Retroalimentación de estados en Bond Graph

En Bond Graph esta implícito un modelo matemático de espacio de estados, el cual puede obtenerse a través del análisis de la estructura unión o bien, directamente a través de las trayectorias causales [12].

Al igual que la retroalimentación de estados en el modelo matemático de la representación en espacio de estados, el sistema debe ser controlable, en BG esto se realiza a través de

la propiedad de Controlabilidad estructural vista en otra sección de este documento.

Partiendo de que los BG integral representan un sistema en lazo abierto, debido a que tiene como resultado un modelo en espacio de estados en lazo abierto, entonces la retroalimentación de estados, puede también representarse gráficamente en Bond Graph, esto puede lograrse al realizar un seguimiento de las variables de esfuerzo/flujo de los estados y de las entradas [8], [15].

En un BG integral, los elementos de inercia entregaran la energía almacenada en forma de flujo, mientras que los elementos de capacitancia lo harán en forma de esfuerzo, sin embargo, si las entradas son de esfuerzo, las retroalimentaciones deben ser también de esfuerzo y por ello, pueden implementarse elementos como giradores para rotar las variables de flujo a esfuerzo, pero en la retroalimentación de estados se tiene la matriz K que contienen las constantes que harán que los polos del sistema se muevan en el plano complejo a donde el diseñador lo desee, estas constantes en BG, se representan a través de las ganancias de los giradores y transformadores del lazo que conecta a los estados con las entradas [12].

Por ejemplo, considerando el modelo de un motor en CD en BG, como se ilustra en la figura 2.50.

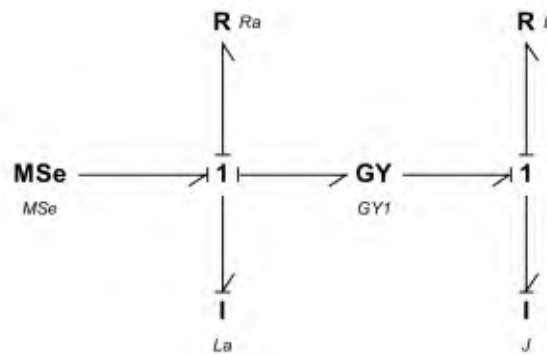


Figura 2.50: Motor de CD en BG

Como los elementos de almacenamiento, son elementos de inercia y están en causalidad integral la salida de estos dos será flujo, y puesto que la entrada es una fuente de esfuerzo, se debe rotar esta variable de salida de ambos elementos de inercia, para ello se utilizan los detectores vistos en secciones pasadas, aunado a este detector una fuente de flujo que representan en conjunto con el detector, una fuente de flujo de señal, posteriormente el girador que se encarga de rotar la variable de flujo a esfuerzo para poder cerrar el lazo, como son dos elementos de almacenamiento serán dos lazos [12]. El diagrama retroalimentado del motor de CD en BG se ilustra en la figura 2.51.

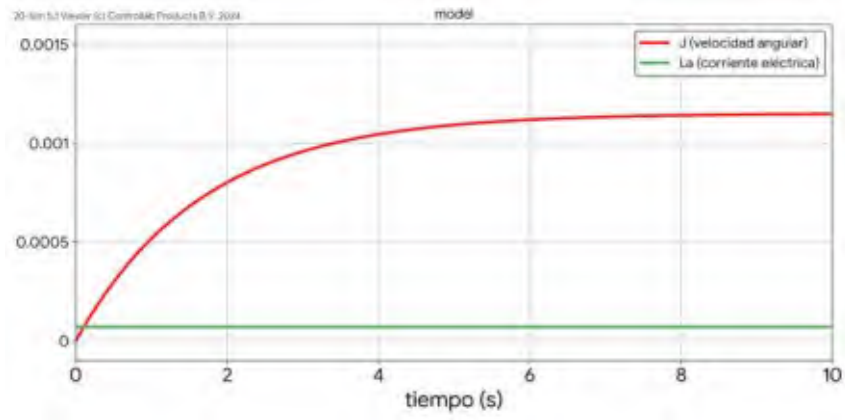


Figura 2.53: Estados retroalimentados

Capítulo 3

Modelado de Robots Manipuladores

3.1. Elementos y uniones de un Robot industrial

Mecánicamente un robot industrial, se compone de un brazo, una muñeca y una herramienta, el brazo esta conectado de forma rígida a una base de soporte mientras que la muñeca tiene la función de conectar y darle movimiento a la herramienta con el extremo del brazo. Estos robots industriales tienen un área/volumen de trabajo, dependiendo de su movimiento, esto puede entenderse como el rango máximo y mínimo de movimiento del robot [1].

La muñeca consta de normalmente tres movimientos giratorios: elevación, desviación y giro, esto quiere decir que la muñeca da la orientación y el brazo la posición. El brazo está formado por una cadena de eslabones rígidos, conectados entre si a través de uniones/juntas, donde comúnmente son de revolución o prismáticas, este tipo de uniones aporta 1 movimiento independiente al robot [16].

Las uniones prismáticas, se representan por una letra P , y permite el movimiento relativo lineal entre dos eslabones, mientras que las uniones de revolución, se representan por una letra R , y permiten el movimiento relativo angular entre dos eslabones, estas uniones se representan en la figura 3.1 y 3.2 [29].

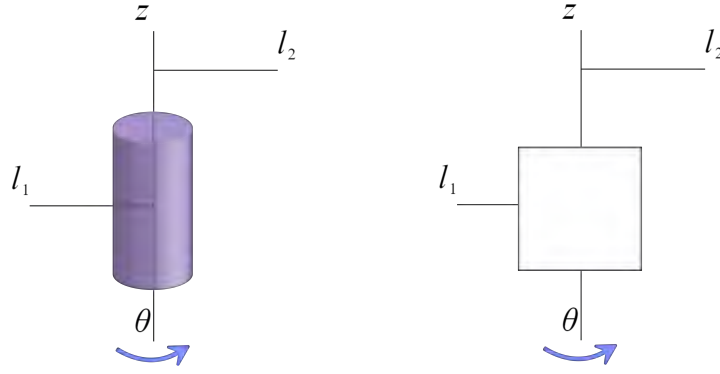


Figura 3.1: Unión de revolución

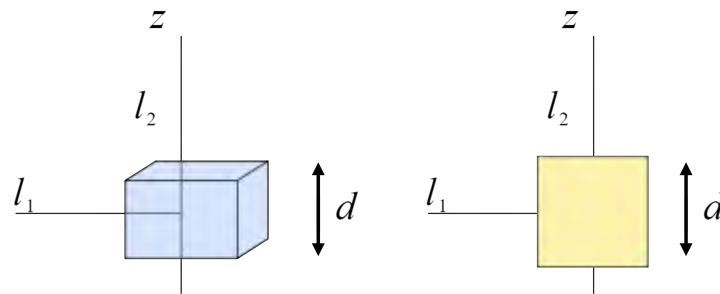


Figura 3.2: Unión prismática

Se denota el eje de rotación y/o lo largo del desplazamiento, por z_i si la unión conecta a dos eslabones. Las uniones revolución, tiene como variable el ángulo de giro, es decir θ_i mientras que la variable de las uniones prismáticas es la distancia d_i . Cada unión da n grados de libertad al robot, es decir que si un brazo tiene tres uniones de revolución, el brazo tendrá tres movimientos independientes (θ_1 , θ_2 y θ_3) y sin embargo si tiene 1 unión esférica, también tendrá 3 grados de libertad, puesto que las uniones esféricas giran alrededor de los 3 ejes, esto surge a parte ir de la aplicación del criterio de x para determinar los grados de libertad de un mecanismo [30].

Normalmente, un robot manipulador debe tener al menos seis grados de libertad para poderse mover en tres dimensiones, lo que conlleva a que tenga un volumen de trabajo, si un robot tiene menos de esa cantidad de grados de libertad, significa que no puede moverse en tres dimensiones, y por tanto su espacio de trabajo se reduce a un plano, sin embargo si tiene más de esa cantidad de grados de libertad, se denomina como un robot cinemáticamente redundante. El espacio de trabajo de un robot manipulador esta limitado por la geometría del robot y por las limitaciones mecánicas de las articulaciones/uniones [1].

3.2. Clasificación de los Robots

Los robots industriales son diseñados con distintos propósitos, como puede ser ensamblaje, soldadura, pintura, etc. lo que conlleva a una selección de varios parámetros de diseño, incluyendo su geometría y su estructura cinemática. Existen varias maneras de

clasificar a los robots manipuladores, entre ellas esta su geometría, cadena cinemática, su función, la forma en la que son controlados, etc [2], [28].

La clasificación geométrica donde caen la mayoría de robots manipuladores es la siguiente:

1. Articulado (RRR)
2. Esférico (RRP)
3. SCARA (RRP)
4. Cilíndrico (RPP)
5. Cartesiano (PPP)

Los elementos de esta clasificación, reciben el nombre de configuraciones, los robots articulados (RRR) por ejemplo, significa que las tres uniones son de revolución, pero en los robots esféricos (RRP), significa que su ultima unión, es remplazada por una unión prismática [29]. Algunas representaciones graficas de estas configuraciones se pueden observar en la figura 3.3.

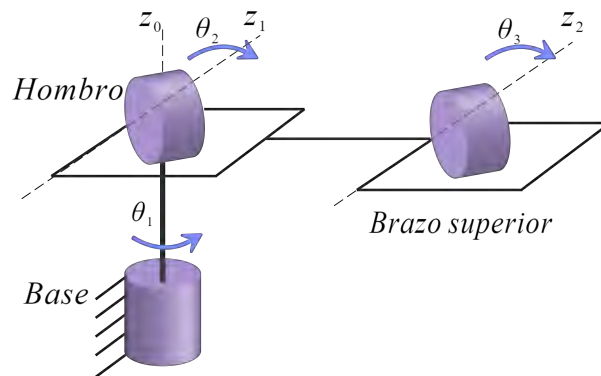


Figura 3.3: Estructura de Robot Elbow RRR

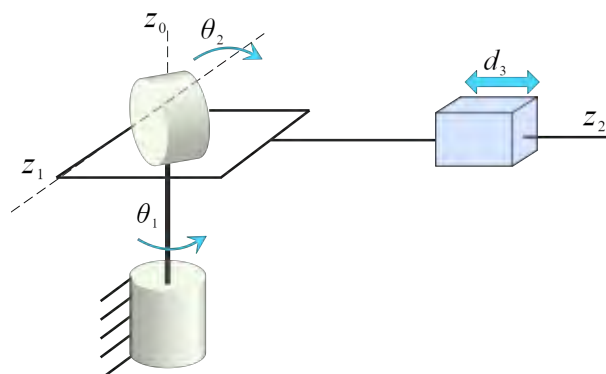


Figura 3.4: Configuración del manipulador esférico RRP

3.3. Transformaciones Homogéneas

Las transformaciones homogéneas, se refieren a una función matemática que se utiliza para transformar vectores y matrices en un espacio de un marco de referencia a otro preservando sus magnitudes. En la robótica, las transformaciones homogéneas se utilizan para describir el movimiento rotación y traslación de un robot, la matriz de transformación unifica la representación de la rotación y traslación de todos los elementos que conforman al robot en un solo marco de referencia [16].

3.3.1. Rotación

Un objeto rígido s cuyo marco de referencia es $Ox_1y_1z_1$, además de un punto p que se encuentra en s y se desea relacionar las coordenadas del punto p con las coordenadas de referencia fijas $Ox_oy_oz_o$. Como p es un punto se construye un vector P , del origen al punto p , y puede expresarse en términos del marco de referencia $Ox_1y_1z_1$ y del marco de referencia $Ox_oy_oz_o$ debido a que comparten el mismo origen, de manera que respecto al marco de referencia original se puede expresar como se la ecuación (3.1) [30].

$$P_1 = P_{1x}i_1 + P_{1y}j_1 + P_{1z}k_1 \quad (3.1)$$

Sin embargo, también puede expresarse en términos de las coordenadas fijas como se observa en la ecuación (3.2).

$$P_0 = P_{0x}i_o + P_{0y}j_o + P_{0z}k_o \quad (3.2)$$

Como P_1 y P_0 son el mismo vector en marcos de referencia diferentes, la relación de sus componentes entre estos dos marcos de referencia puede expresarse como las ecuaciones (3.3), (3.4) y (3.5).

$$P_{ox} = P_o i_o = P_1 i_1 \quad (3.3)$$

$$P_{oj} = P_o j_o = P_1 j_1 \quad (3.4)$$

$$P_{ok} = P_o k_o = P_1 k_1 \quad (3.5)$$

Al factorizar en las tres ecuaciones el vector P_1 puede escribirse como la ecuación (3.6).

$$P_o = R_o^1 P_1 \quad (3.6)$$

La matriz R_o^1 representa la matriz de transformación desde el marco de referencia $Ox_1y_1z_1$ al marco $Ox_oy_oz_o$ y es una matriz ortogonal. Si se desea encontrar la matriz de transformación desde el marco $Ox_oy_oz_o$ al marco $Ox_1y_1z_1$, como R_o^1 es una matriz ortogonal es decir que $R_1^o = (R_o^1)^{-1} = (R_o^1)^T$, entonces la ecuación (3.6) puede expresarse como se muestra en la ecuación (3.7) [1].

$$P_1 = R_1^o P_o \quad (3.7)$$

Esta matriz de transformación implica rotación, por lo que se pueden tener 3 rotaciones básicas estas son respecto al eje x , al eje y y al eje z , como se muestra a continuación.

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

La rotación desde un marco de referencia $Ox_1y_1z_1$ hacia un marco de referencia $Ox_oy_oz_o$ o viceversa, depende del ángulo θ como se ilustra en la figura 3.5. Partiendo de que el marco $Ox_1y_1z_1$ está superpuesto en el marco $Ox_oy_oz_o$, el ángulo θ será positivo, y entonces la transformación será del marco $Ox_oy_oz_o$ hacia $Ox_1y_1z_1$, pero caso contrario si el marco $Ox_oy_oz_o$ está superpuesto en el marco $Ox_1y_1z_1$ y existe una rotación sobre el eje z de θ grados, entonces la transformación es del marco $Ox_1y_1z_1$ hacia el marco $Ox_oy_oz_o$ con un ángulo θ negativo [16].

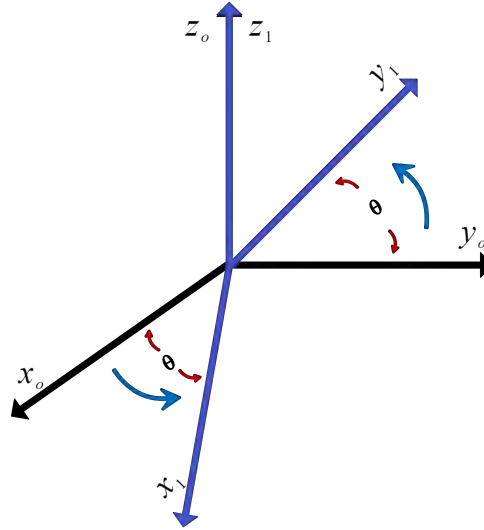


Figura 3.5: Rotación sobre el eje z en θ grados

Si existiera un tercer marco de referencia el tercer marco respecto al marco fijo se representaría por $R_o^2 = R_o^1 R_1^2$ es decir que para encontrar la representación en el marco fijo se debe encontrar la representación del marco anterior hasta el marco deseado y representar ese marco deseado en el marco anterior o bien como se muestra en la ecuación (3.11).

$$P_o = R_o^1 R_1^2 P_2 \quad (3.11)$$

Para 5 marcos de referencia entonces, la rotación del quinto marco respecto al marco de referencia fijo será como muestra en la ecuación (3.12).

$$P_o = R_o^1 R_1^2 R_2^3 R_3^4 R_4^5 P_5 \quad (3.12)$$

3.3.2. Traslación

Ahora supongamos que se tienen dos marcos de referencia con origen distinto, es decir, un marco de referencia fijo $Ox_oy_oz_o$ y un marco de referencia $O_1x_1y_1z_1$ como se ilustra en la figura 3.6 ambos son paralelos entre si, pero ahora se puede trazar un vector d que

representa la distancia entre ambos marcos de referencia, de igual manera un vector P_1 , puede representarse tanto en el marco fijo como en el marco no fijo como la ecuación (3.13) [1].

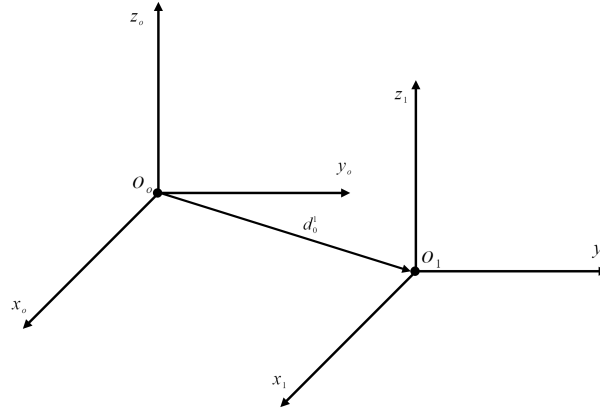


Figura 3.6: Traslación de Sistemas de referencias

$$P_o = P_1 + d_o^1 \quad (3.13)$$

Por ende sus componentes serán:

$$P_{ox} = P_{1x} + d_{ox}^1 \quad (3.14)$$

$$P_{oy} = P_{1y} + d_{oy}^1 \quad (3.15)$$

$$P_{oz} = P_{1z} + d_{oz}^1 \quad (3.16)$$

La expresión (3.13) puede ser expresada en términos de rotación y traslación como se muestra en la ecuación (3.17).

$$P_o = R_o^1 P_1 + d_o^1 \quad (3.17)$$

Donde $R_o^1 P_1$ es el movimiento de rotación y d_o^1 es el movimiento de traslación, a este tipo movimientos se les llama movimientos rígidos. Si existiera un tercer marco de referencia, el vector P_2 se representaría en el marco de P_1 de la siguiente manera.

$$P_1 = R_1^2 P_2 + d_1^2 \quad (3.18)$$

Como P_1 puede ser representado en términos de P_o a través de la expresión (3.13), sustituyendo (3.18) en (3.13), se obtiene la siguiente expresión [30].

$$P_1 = R_o^1 R_1^2 P_2 + R_o^1 d_1^2 + d_o^1 \quad (3.19)$$

En este caso $R_o^1 R_1^2$ representa el movimiento rotacional que puede ser escrito también como R_o^2 y $R_o^1 d_1^2 + d_o^1$ representa el movimiento de traslación que puede ser escrito como d_o^2 . Esto puede escribirse de forma matricial de la siguiente manera.

$$\begin{bmatrix} R_o^1 & d_o^1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1^2 & R_1^2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_o^1 R_1^2 & R_o^1 d_1^2 + d_o^1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Se observa que cada posición de la matriz resultante sin embargo, movimiento rígido específico, es decir, que la posición fila uno columna uno, esta conformada por un movimiento de puramente rotación, mientras que el elemento fila uno columna dos esta formado por un movimiento de traslación y por tanto se puede resumir esa matriz de la siguiente manera.

$$H = \begin{bmatrix} R & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

A esta matriz se le conoce como matriz homogénea o bien transformación homogénea, para poder representar la ecuación (3.13) de forma matricial como una multiplicación (ecuación (3.24)), se debe aumentar los vectores P_1 y P_o como sigue [16].

$$p_o = \begin{bmatrix} P_o \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

$$p_1 = \begin{bmatrix} P_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

$$p_o = Hp_1 \rightarrow p_o = H_o^1 p_1 \quad (3.24)$$

Algunas transformaciones homogéneas básicas están dadas de la siguiente manera.

$$Trans_{x,a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

$$Trans_{y,b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

$$Trans_{z,c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

Estas transformaciones son para movimientos puramente de traslación, respecto a x, y, z respectivamente. Para movimientos puramente rotacionales, se muestran a continuación.

$$Rot_{x,\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

$$Rot_{y,\beta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

$$Rot_{z,\theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

La forma mas general de representar esta matriz de transformaciones homogéneas es la siguiente.

$$T = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & d_x \\ n_y & s_y & a_y & d_y \\ n_z & s_z & a_z & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{n} & \vec{s} & \vec{a} & \vec{d} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Donde $\vec{n}$ es un vector representando la dirección del eje ox en el sistema $o_o x_o y_o z_o$. y de igual manera para los vectores $\vec{s}$ y $\vec{a}$ con respecto a los ejes oy y oz respectivamente en el sistema $o_o x_o y_o z_o$. El vector $\vec{d}$ representa el vector desde el origen o_o al origen o_1 expresado en las coordenadas de $o_o x_o y_o z_o$ [16].

3.4. Cinemática directa

La cinemática directa puede plantearse como determinar la posición y orientación del efector final, conociendo las variables de las uniones del robot. Estas variables son las establecidas por el tipo de unión, sera angular si la unión es revoluta o de traslación si la unión es prismática [1].

3.4.1. Cadena cinemática

El objetivo principal del análisis de la cinemática directa, ademas de calcular la posición y orientación del efector final, es conocer los efectos acumulativos de todas las variables de unión del robot, considerando que es un objeto rígido.

Partiendo de un robot que tiene $n + 1$ eslabones partiendo del eslabón 0 que es la base, las uniones son enumeradas desde 1 hasta n e $i_t h$ es el punto en el punto de conexión con los eslabones que están enumerados como $i - 1$. Las variables de cada unión $i_t h$ son enumeradas como q_i , es decir que q_i puede ser una variable angular o de desplazamiento [16].

Ahora bien, se considera que cada unión, tiene asignado un marco de referencia distinto, empezando por la base cuyo marco de referencia sera 0 es decir $o_0 x_0 y_0 z_0$, entonces la matriz de transformaciones homogéneas, denotado por A_i , transforma el marco de referencia i al marco $i - 1$ o bien al marco j , esta matriz de transformación cambia dependiendo de la configuración y el movimiento que se tenga en el marco i , y por tanto la matriz A_i , dependerá del tipo de variable que tenga la unión i , como muestra la expresión (3.32) [29].

$$A_i = A_i(q_i) \quad (3.32)$$

Ahora esta matriz, que transforma las coordenadas de un punto que se encuentra en el marco de referencia j al marco de referencia i también es llamada matriz de transformación sin embargo se denota por T_i^j , y se define de forma general para cada condición como se muestra en las siguientes ecuaciones.

$$T_i^j = A_{i+1} A_{i+2} \dots A_{j-1} A_j \quad si \quad i < j \quad (3.33)$$

$$T_i^j = I \quad \text{si} \quad i = j \quad (3.34)$$

$$T_i^j = (T_i^j)^{-1} \quad \text{si} \quad i = j \quad (3.35)$$

Mientras tanto, el efector final sera una constante que es independiente de la configuración del robot, y se denota a través de un vector que une el marco de referencia del efector final directamente con la referencia 0. Este vector de posición se representa como d_0^n y una matriz de rotación asociada al movimiento del efector final, la cual es una matriz de 3x3 dimensiones que se denota por R_0^n , es decir como la matriz homogénea de la ecuación (3.36) [16].

$$H = \begin{bmatrix} R_0^n & d_0^n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

Entonces los tres movimientos del efector final (que conforman la posición y orientación) están dados por la expresión (3.37)

$$H = T_0^n = A_1(q_1) \dots A_n(q_n) \quad (3.37)$$

Cada transformación homogénea de A_i , es una matriz de transformación homogénea de la forma

$$H = \begin{bmatrix} R_{i-1}^n & d_{i-1}^n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

Entonces

$$T_i^j = A_{i+1} \dots A_j = \begin{bmatrix} R_{i-1}^n & d_{i-1}^n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

Las matrices R expresan las rotaciones desde el efector final hasta la base, pasando por todos los ejes de referencia anteriores a los ejes de referencia del efector final, de la misma manera los vectores d [29].

3.5. Denavit-Hartenberg

La metodología vista anteriormente, sugiere una gran dificultad que depende el numero de eslabones y uniones del robot, en la actualidad es normal encontrarse con robots que posean mínimo seis grados de libertad, lo que involucra seis uniones y al rededor de la misma cantidad de eslabones, sin embargo también es común encontrarse con robots que posean mas de esta cantidad de grados de libertad, por ello se necesita una manera mas sencilla de poder resolver el problema cinemático de un robot.

La representación de Denavit-Hartenberg es una convención, puesto que en la matriz de transformaciones homogéneas se tenían seis variables, de las cuales 3 eran variables de rotación y 3 eran variables de desplazamiento, sin embargo al tratarse de marcos de referencia arbitrarios, se tiene la libertad de escoger minuciosamente que marco de referencia conviene para cada eslabón, en esta convención, se escogen los marcos de referencia específicos para que el numero de variables pase de 6 a tan solo 4. Esto quiere decir que la matriz de transformación homogénea puede representarse como la multiplicación de 4 transformaciones básicas, como se muestra en la ecuación (3.40) [1].

$$A_i = R_z(\theta_i) \cdot T_z(d_i) \cdot T_x(a_i) \cdot R_x(\alpha_i) \quad (3.40)$$

$$A_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & 0 \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i & 0 \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

$$A_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \cos \alpha_i & \sin \theta_i \sin \alpha_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \cos \alpha_i & -\cos \theta_i \sin \alpha_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

Donde las cuatro cantidades θ_i , α_i , d_i , a_i , son parámetros de cada eslabón i y unión i , además corresponden al ángulo, torsión, desplazamiento y longitud respectivamente. De estas cuatro cantidades, solo de una dependerá la matriz de transformación A_i y las otras cantidades restantes, serán constantes y por tanto dependerá del tipo de unión que una a los eslabones, si la unión es de tipo revolución, entonces se tendrá una matriz de transformación dependiente de θ_i , pero si es de tipo prismática, será dependiente del desplazamiento d_i [1].

Los pasos para aplicar esta convención a un robot en general son los siguientes:

1. Asignar los ejes de coordenadas a cada eslabón del robot de tal manera que el eje z_i , se defina a lo largo del i – *esimo* par cinemático, en otras palabras el eje z_i se define a lo largo del eje i – *esimo* de rotación de una unión revoluta o a lo largo del eje i – *esimo* de desplazamiento de una unión prismática. Además el eje x_i debe definirse perpendicular al plano formado por los ejes z_{i-1} y z_i apuntando en la dirección del movimiento relativo de los eslabones $i - 1$ e i o en otras palabras, el eje x_i tiene que ser perpendicular al plano formado por los ejes z_i y z_{i-1} apuntando hacia z_{i-1} . Por último, el eje y , se define de tal manera para que el sistema de coordenadas cartesianas $x_i y_i z_i$, sea un sistema dextro-giro, es decir que siga la regla de la mano derecha [29].

2. El paso siguiente es construir una tabla donde el primer renglón serán las cuatro cantidades vistas anteriormente, es decir θ_i , α_i , d_i , a_i , los cuales reciben el nombre de parámetros de Denavit-Hartenberg. Estos parámetros se obtienen de la siguiente manera:

θ_i es el ángulo que tiene que girar el eje z_i para alcanzar la posición de z_{i-1} o en otras palabras, el ángulo para que z_i sea paralelo a z_{i-1} .

α_i Es el ángulo que tiene que girar x_i para ser paralelo a x_{i-1} .

d_i es la distancia entre los ejes z_i y z_{i-1} .

a_i es la distancia entre los ejes x_i y x_{i-1} .

3. El paso siguiente es construir la matriz de transformación homogénea T_i^j , recordando que esta matriz relaciona el sistema de coordenadas del eslabón $i - 1$ con el eslabón i . Sustituyendo las cantidades en la expresión (3.42), de tal manera que si existen 3 eslabones, la matriz de transformación homogénea sería de la siguiente forma [16].

$$T_0^1 = A_1 \text{ para el primer eslabón.}$$

$T_0^2 = A_1 A_2$ para el segundo eslabón.

$T_0^3 = A_1 A_2 A_3$ para el ultimo eslabón.

Finalmente, la última columna de T_0^3 contiene la posición del efector final en el marco de referencia fijo, mientras que las 3 primeras columnas de T_0^3 contienen su orientación también respecto al marco de referencia fijo.

3.6. Principio de D'Alembert

El análisis dinámico de sistemas mecánicos parte de la segunda ley de Newton, la cual significa que la suma de todas las fuerzas aplicadas a un sistema debe ser igual al producto de la masa por su aceleración (ecuación (3.43)), el análisis estático, parte de la misma ley, sin embargo la diferencia es que si el sistema permanece sin movimiento, significa que la suma de todas las fuerzas debe ser igual a cero, esto se define como un caso especial de la segunda ley de Newton, donde la aceleración a es igual a cero (ecuación (3.44)) lo que resulta en un análisis de equilibrio o estática [28].

$$\sum F = ma \quad (3.43)$$

$$\sum F = 0 \quad (3.44)$$

Pero analizar la dinámica de los sistemas a través de la segunda ley de Newton puede no resultar en una tarea fácil, especialmente para sistemas grandes entonces el principio de D'Alembert juega un papel importante en el análisis dinámico. D'Alembert propuso interpretar el análisis dinámico como un simple problema de estática, introduciendo el concepto de fuerzas muertas y fuerzas vivas, lo que mas tarde se llamarían fuerzas de restricción y fuerzas aplicadas o de entrada y que la suma de estas dos fuerzas debe ser igual al producto de la masa del sistema por su aceleración [30].

Para entender mejor esto, imagine que se tienen n cantidad de partículas, enumeradas desde 1 hasta n , todas las n partículas poseen un vector de posición desde el origen de un marco de referencia hasta cada partícula n . Este conjunto de partículas, experimenta tanto fuerzas internas, entonces se puede aplicar la segunda ley de Newton, donde la sumatoria de las fuerzas internas que se ejercen entre todas las articulas, es decir entre la partícula i y la partícula j más la sumatoria de las fuerzas externas sobre cada partícula i , debe ser igual a la sumatoria del producto de la masa de cada partícula i por su aceleración correspondiente, todo esto puede expresarse como la ecuación (3.45) [16].

$$\sum_{i,j,i \neq j} F_{ji} + \sum_i F_i^{(ext)} = \sum_i m_i \ddot{r}_i \quad (3.45)$$

Debido a la tercera ley de Newton las fuerzas F_{ij} y F_{ji} se contrarrestan, es decir que $F_{ij} = -F_{ji}$, al igual que las fuerzas F_{ii} , y por lo tanto, nos queda la expresión (3.46)

$$\sum_i F_i^{(ext)} = \sum_i m_i \ddot{r}_i \quad (3.46)$$

Sin embargo, esta expresión anterior no describe completamente el movimiento del sistema, debido a que las fuerzas externas no son totalmente externas, sino que también

existen las fuerzas de restricción que limitan el movimiento del sistema y entonces se puede expresar como la ecuación (3.47).

$$\sum_i (F_i^{(apl)} + f_i) = \sum_i m_i \ddot{r}_i \quad (3.47)$$

Donde f_i son las fuerzas de restricción. Considerando un desplazamiento infinitesimal dr_i ocasionado por estas fuerzas, se obtiene el trabajo virtual (3.48).

$$w = \sum_i (F_i^{(ext)}) dr_i \quad (3.48)$$

Entonces, si la expresión anterior es igual a cero, estamos hablando de que el sistema esta en equilibrio puesto que no hay movimiento, no hay trabajo realizado y a esto se le conoce como el principio del trabajo virtual es decir que $\sum_i (F_i^{(ext)}) dr_i = 0$. Sin embargo $F_i^{(ext)} = F_i^{(apl)} + f_i$, entonces se obtiene la expresión (3.49).

$$\sum_i (F_i^{(apl)} + f_i) dr_i = 0 \quad (3.49)$$

Sin embargo, el principio de D'Alembert nos dice que las fuerzas muertas (fuerzas de restricción) no realizan trabajo, esto quiere decir que $\sum_i f_i dr_i = 0$, entonces se tiene la siguiente expresión (3.50).

$$\sum_i (F_i^{(apl)}) dr_i = 0 \quad (3.50)$$

Las restricciones cuyo trabajo es igual a cero, se les denomina restricciones holonómicas. Pero como $F_i^{(ext)} = F_i^{(apl)} + f_i = \dot{p}_i = m_i \ddot{r}_i$, sustituyendo en la expresión (3.51) se obtiene el principio de D'Alembert [30].

$$\sum_i (F_i^{(ext)} - m_i \ddot{r}_i) dr_i = 0 \quad (3.51)$$

Finalmente, una restricción holonómica es aquella que puede expresarse de la forma $r_i(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n) = 0$ en otras palabras, una expresión algebraica dependiente de las variables generalizadas, estas ultimas son linealmente independientes, mientras que r_i son linealmente dependientes de las variables generalizadas [16].

3.7. Ecuación de Euler-Lagrange

El principio de D'Alembert esta en función de las coordenadas r_i , que pueden ser linealmente independientes, sin embargo se desea que el principio de D'Alembert este en función de las variables generalizadas $q_{ji}, j = 1, 2, 3, \dots, n$. Partiendo de que $F_i^{(ext)} = F_i^{(apl)} + f_i \rightarrow F_i^{(apl)} = F_i^{(ext)} - f_i$ y como $\sum_i (f_i dr_i = 0)$ sustituyendo en el principio de D'Alembert (Ec. (3.51)), se obtiene la siguiente expresión [30].

$$\sum_i (\vec{F}_i^{(apl)} - m_i \ddot{\vec{r}}_i) d\vec{r}_i = 0 \quad (3.52)$$

Ahora se debe expresar el diferencial de los desplazamientos virtuales dr_i en función de las variables generalizadas q_j , para ello, se deriva parcialmente cada desplazamientos

virtuales dr_i respecto a cada variable generalizada q_j y multiplicado por un diferencial de la variable generalizada, esto se muestra en la siguiente ecuación.

$$d\vec{r}_i = \sum_k \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} dq_k$$

Sustituyendo y operando en la ecuación (3.52), se obtiene la siguiente expresión.

$$\sum_{k=1}^s \left[\sum_{i=1}^n \left(\vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} - m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) \right] \delta q_k = 0$$

Donde

$$Q_k = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}$$

$$\sum_{i=1}^n m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}$$

Es la fuerza generalizada o bien, el trabajo virtual de las fuerzas aplicada y la sumatoria de las masas m_i por la segunda derivada de la posición $\ddot{\vec{r}}_i$ es el termino inercial. Sustituyendo Q_k se tiene la siguiente expresión.

$$\sum_{k=1}^s \left(Q_k - \sum_{i=1}^n m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) \delta q_k = 0 \quad (3.53)$$

Sin embargo, el termino $\sum_{i=1}^n m_i \ddot{\vec{r}}_i$ puede ser expresado como

$$\sum_{i=1}^n m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{d}{dt} \left(m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) - m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right)$$

Donde se resta el termino $m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}$ debido a que queda el producto de dos variables distintas al extraer un diferencial respecto al tiempo de $\ddot{\vec{r}}_i$ en $\sum_{i=1}^n m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}$. Dado que

$$\dot{\vec{r}}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}$$

Es decir

$$\dot{\vec{r}}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_3} \dot{q}_3 + \dots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}$$

Y por tanto

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1}$$

Reescribiendo el termino inercial

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{d}{dt} \left(m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) - m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\frac{m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i}{2} \right) \right) \\ &= \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} T - \frac{\partial}{\partial q_k} T \right) \end{aligned}$$

Donde la energía cinética T es

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i = \frac{1}{2} \sum_i \left(m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right)^2$$

Sustituyendo el termino inercial en la ecuación (3.53) se obtiene la siguiente expresión.

$$\sum_{k=1}^s (Q_k - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} T + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} T) \cdot \delta q_k = 0$$

Si las restricciones son tipo holonómica entonces todos los dq_k son linealmente independientes entonces

$$\begin{aligned} Q_k - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} T + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} T &= 0 \\ Q_k &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} T - \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} T \end{aligned} \quad (3.54)$$

Si las fuerzas aplicadas F_i^{apl} son derivadas de una función potencial entonces, la fuerza generalizada Q_k toma la siguiente forma.

$$F_i^{apl} = -\frac{\partial}{\partial r_i} V(r_1, r_2, \dots)$$

$$Q_k = \sum_i F_i^{apl} \frac{\partial r_i}{\partial q_k} = \sum_i \left(-\frac{\partial V}{\partial r_i} \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \right) = -\left(\frac{\partial V}{\partial r_1} \cdot \frac{\partial r_1}{\partial q_1} + \frac{\partial V}{\partial r_2} \cdot \frac{\partial r_2}{\partial q_2} + \frac{\partial V}{\partial r_3} \cdot \frac{\partial r_3}{\partial q_3} + \dots \right)$$

Entonces

$$Q_k = -\frac{\partial V(r_1, r_2, r_3, \dots)}{\partial q_k}$$

Como la función V depende de las variables generalizadas q_k entonces $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}} = 0$ entonces la ecuación (3.54) puede reescribirse como.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} L - \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} L = 0$$

Donde se define la función de Lagrange $L = T - V$ donde T es la energía cinética y V la energía potencial. En el caso en que se tengan fuerzas de torsión o torques no derivables de una función potencial, Q_k puede dividirse en las fuerzas que si lo son y en las que no lo son (T_k), como es el caso de las fuerzas de fricción. Entonces se tiene la ecuación de Euler-Lagrange ((3.55)) [17], [16].

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} L - \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} L = T_k \quad (3.55)$$

Un ejemplo de aplicación de la ecuación de Euler-Lagrange, considere un péndulo de masa m , suspendido a través de una cuerda rígida de longitud l , como se ilustra en la figura 3.7.

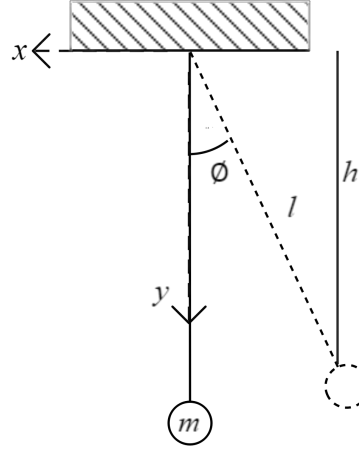


Figura 3.7: Péndulo simple

El vector de posición $\vec{r}$ desde el origen del sistema de coordenadas hasta la masa m , se define como $\vec{r} = l \cos \phi \hat{i} + l \sin \phi \hat{j}$. Donde la variable generalizada es ϕ , debido a que es la variable que esta cambiando en el sistema. De manera que la energía cinética puede ser calculada como se muestra a continuación.

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{\vec{r}})^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q} \cdot \dot{q} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}\right)^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} \cdot \dot{\phi}\right)^2$$

La derivada parcial de $\vec{r}$ es cero, puesto que no depende del tiempo y entonces la derivada parcial de $\vec{r}$ respecto a ϕ es $\vec{r} = (-l \sin \phi \hat{i} + l \cos \phi \hat{j})$, sustituyéndolo en la ecuación de la energía cinemática se tiene que.

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m((-l \sin \phi \hat{i} + l \cos \phi \hat{j}) \cdot \dot{\phi})^2 \\ &= \frac{1}{2}m((l^2 \sin^2 \phi + l^2 \cos^2 \phi) \cdot \dot{\phi}^2) \\ &= \frac{1}{2}m((\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) \cdot l^2 \cdot \dot{\phi}^2) \\ &= \frac{1}{2}m((1) \cdot l^2 \cdot \dot{\phi}^2) \\ &= \frac{1}{2}m(l \cdot \dot{\phi})^2 \end{aligned}$$

Donde $l \cdot \dot{\phi}$ es la velocidad tangencial, mientras tanto la energía potencial V , se define como $V = mgh$, pero la altura h , es desde la masa hasta el marco de referencia, de tal manera que es posible calcular la altura en función del ángulo ϕ , ya que se forma un triángulo rectángulo y utilizando la función coseno, se puede calcular la altura, es decir que queda como $h = l \cdot \cos \phi$, sin embargo como se encuentra en el eje y negativa, este termino es negativo, es decir $h = -l \cdot \cos \phi$ y sustituyendo este termino en la energía potencial, resulta lo siguiente.

$$V = m \cdot g \cdot (-l \cdot \cos \phi) = -l \cdot m \cdot g \cdot \cos \phi$$

El lagrangiano se define como $L = T - V$, lo que resulta en $L = \frac{1}{2}m(l\dot{\phi})^2 - (-lmg \cos \phi)$, reduciendo se tiene que $L = \frac{1}{2}m(l\dot{\phi})^2 + lmg \cos \phi$. Aplicando la formulación de Euler-

Lagrange se obtienen los siguientes resultados.

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \phi} &= -mgl \sin \phi \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} &= ml^2 \dot{\phi} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) &= ml^2 \ddot{\phi}\end{aligned}$$

Y por lo tanto, el modelo de Euler-Lagrange para este sistema correspondiente a un péndulo simple es.

$$ml^2 \ddot{\phi} + mgl \sin \phi = \tau$$

Sin embargo, se puede factorizar la masa m y la longitud l^2 , además de que como no existen fuerzas de entrada, ni fricción, $\tau = 0$ y por tanto.

$$\ddot{\phi} + \frac{g}{l} \sin \phi = 0$$

Lo que significa que el sistema es no lineal, porque la variable ϕ se encuentra como argumento de la función seno, y es de segundo orden porque se encuentra la segunda derivada de la variable ϕ [30].

3.8. Análisis dinámico de Robot manipulador de 1 eslabón 2D

Se tiene el robot de un eslabón en la figura 3.8, cuya longitud es l y se encuentra fijo en el origen a través de uno de sus extremos, rota a través del ángulo θ_1 en el plano xy , encontrar el análisis dinámico de este tipo de robots resulta cada vez mas complicado con forme aumentan el numero de eslabones y por ende, el siguientes de uniones que aportan nuevos grados de liberar. Para este robot al estar en un plano xy , y al ser solo un eslabón, se puede encontrar su vector de posición desde el origen hasta ya sea el centro de masa o hasta la próxima unión, en este caso el otro extremo no fijo del robot [16].

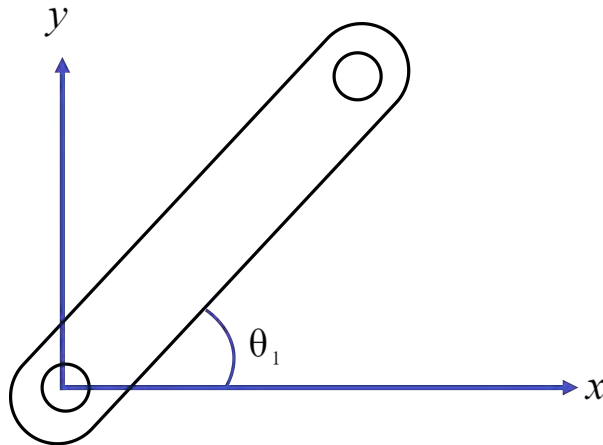


Figura 3.8: Manipulador de un eslabón

Entonces el vector de posición r , sera igual en su componente en x a $l \cdot \cos(\theta_1)$ y su componente y esta dado por $l \cdot \sin(\theta_1)$, debido a que estamos en un plano, se puede construir triángulos rectángulos para calcular estas componentes. De esta manera se tiene el vector en términos de los vectores unitarios $\hat{i}, \hat{j}$.

$$\vec{r} = (l \cdot \cos(\theta_1)) \cdot \hat{i} + (l \cdot \sin(\theta_1)) \cdot \hat{j}$$

Teniendo el vector de posición, se puede encontrar el vector de velocidad, puesto que es la derivada respecto al tiempo t del vector de posición r y así calcular la energía cinética del eslabón y posteriormente la energía potencial del mismo. Entonces el vector de velocidad $\vec{v}$ resulta en la siguiente expresión.

$$\vec{v} = (-l \cdot \sin(\theta_1) \cdot \dot{\theta}_1) \cdot \hat{i} + (l \cdot \cos(\theta_1) \cdot \dot{\theta}_1) \cdot \hat{j}$$

El producto punto entre el mismo vector v es necesario para el cálculo de la energía cinética ya que esta es una magnitud escalar, y por tanto esto resulta en la siguiente expresión.

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \vec{v} &= l^2 \cdot \cos^2(\theta_1) \cdot \dot{\theta}_1^2 + l^2 \cdot \sin^2(\theta_1) \cdot \dot{\theta}_1^2 \\ &= l^2 \cdot \dot{\theta}_1^2 \end{aligned}$$

Entonces la energía cinética resulta como sigue.

$$T = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot l^2 \cdot \dot{\theta}_1^2$$

De forma similar, la energía potencial.

$$U = m_1 \cdot g \cdot l \cdot \sin(\theta_1)$$

El lagrangiano resulta en:

$$L = \frac{1}{2} \cdot (l^2 \cdot m_1 \cdot \dot{\theta}_1^2) - g \cdot l \cdot m_1 \cdot \sin(\theta_1)$$

y la derivada parcial del lagrangiano respecto a la derivada del ángulo θ_1 resulta en:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = l^2 \cdot m_1 \cdot \dot{\theta}_1$$

Al derivar la expresión anterior resulta en la aparición de la aceleración angular $\ddot{\theta}_1$.

$$\frac{d}{dt} \cdot \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = l^2 \cdot m_1 \cdot \ddot{\theta}_1$$

Al derivar el lagrangiano respecto al ángulo.

$$\frac{dL}{d\theta_1} = -g \cdot l \cdot m_1 \cdot \cos(\theta_1)$$

Y al restar ambas expresiones resulta en la ecuación dinámica del robot de 1 eslabón en 2D.

$$\frac{d}{dt} \cdot \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{dL}{d\theta_1} = m_1 \cdot l^2 \cdot \ddot{\theta}_1 + g \cdot m_1 \cdot \cos(\theta_1) \cdot l$$

3.9. Análisis dinámico de Robot manipulador de 2 eslabones 2D

Se presenta el robot planar de dos eslabones en la figura 3.9 [1].

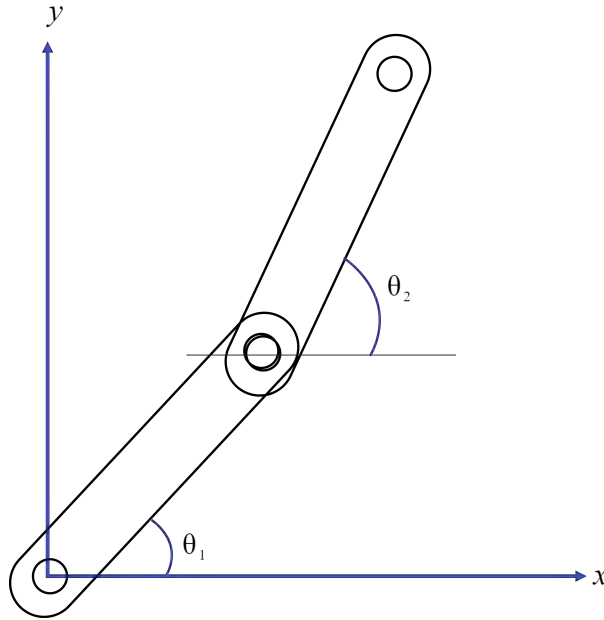


Figura 3.9: Manipulador de 2 eslabones

De forma vectorial se tienen dos vectores, uno por cada eslabón, desde el marco de referencia cero hasta el eslabón, como se ilustra en la figura 3.10.

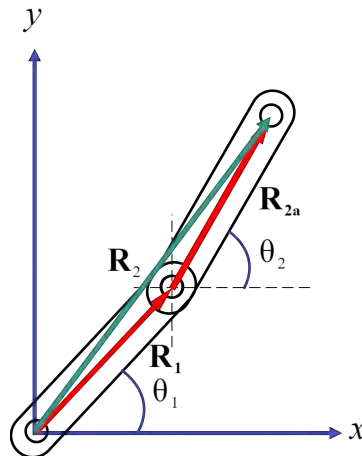


Figura 3.10: Manipulador de 2 eslabones

El vector R_2 es la suma vectorial del vector $R_1 + R_{2a}$, de manera que los vectores R_1 y R_2 están definidos como. Donde $x_1(t) = \theta_1$ y $x_2(t) = \theta_2$.

$$\vec{R}_1 = [l_1 \cos \theta_1(t)] \mathbf{i} + [l_1 \sin \theta_1(t)] \mathbf{j},$$

$$\vec{R}_2 = [l_1 \cos \theta_1(t) + l_2 \cos \theta_2(t)] \mathbf{i} + [l_1 \sin \theta_1(t) + l_2 \sin \theta_2(t)] \mathbf{j}$$

Las velocidades, son las derivadas de los vectores de posición, y por tanto están definidas como.

$$\begin{aligned}\vec{V}_1 &= \left(-l_1 \sin \theta_1(t) \dot{\theta}_1(t)\right) \mathbf{i} + \left(l_1 \cos \theta_1(t) \dot{\theta}_1(t)\right) \mathbf{j}, \\ \vec{V}_2 &= \left(-l_1 \sin \theta_1(t) \dot{\theta}_1(t) - l_2 \sin \theta_2(t) \dot{\theta}_2(t)\right) \mathbf{i} \\ &\quad + \left(l_1 \cos \theta_1(t) \dot{\theta}_1(t) + l_2 \cos \theta_2(t) \dot{\theta}_2(t)\right) \mathbf{j}\end{aligned}$$

Teniendo estas velocidades se puede calcular la energía cinética asociada a cada eslabón, para posteriormente, sumar ambas y obtener la energía cinética total.

$$\begin{aligned}T_1 &= \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2(t) \\ T_2 &= \frac{m_2}{2} \left(l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \right) \\ T &= \frac{1}{2} l_1^2 (m_1 + m_2) \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} l_2^2 m_2 \dot{\theta}_2^2 + l_1 l_2 m_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2\end{aligned}$$

La energía potencial esta asociada con la altura de cada eslabón respecto al eje x y por tanto la altura del eslabón es la componente $\hat{j}$ de cada vector de posición.

$$\begin{aligned}u_1 &= g l_1 m_1 \sin(\theta_1) \\ u_2 &= l_1 \sin(\theta_1) + l_2 \sin(\theta_2) \\ u &= g l_1 (m_1 + m_2) \sin \theta_1 + g l_2 m_2 \sin \theta_2\end{aligned}$$

Entonces, el lagrangiano se define como.

$$L = \frac{1}{2} l_1^2 (m_1 + m_2) \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} l_2^2 m_2 \dot{\theta}_2^2 - g l_1 (m_1 + m_2) \sin \theta_1 - g l_2 m_2 \sin \theta_2 + l_1 l_2 m_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2$$

Para obtener la primer ecuación entonces:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = l_1^2 (m_1 + m_2) \dot{\theta}_1 + l_1 l_2 m_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2$$

$$\frac{d}{dt} \cdot \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = l_1^2 (m_1 + m_2) \ddot{\theta}_1 + l_1 l_2 m_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2^2 + l_1 l_2 m_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_2 - l_1 l_2 m_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2$$

$$\frac{dL}{d\theta_1} = -l_1 l_2 m_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - g l_1 (m_1 + m_2) \cos \theta_1$$

$$\frac{d}{dt} \cdot \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{dL}{d\theta_1} = l_1^2 (m_1 + m_2) \ddot{\theta}_1 + g l_1 (m_1 + m_2) \cos \theta_1 + l_1 l_2 m_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2^2 + l_1 l_2 m_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_2$$

Y para la segunda ecuación.

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2 + l_1 l_2 m_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1$$

$$\frac{d}{dt} \cdot \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) = m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + l_1 l_2 m_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_1 - l_1 l_2 m_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1^2 + l_1 l_2 m_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2$$

$$\frac{dL}{d\theta_2} = l_1 l_2 m_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - gl_2 m_2 \cos \theta_2$$

$$\frac{d}{dt} \cdot \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{dL}{d\theta_2} = m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + l_1 l_2 m_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_1 - l_1 l_2 m_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1^2 + gl_2 m_2 \cos \theta_2$$

Reordenando los términos se encuentra que la matriz de inercia M es.

$$M = \begin{pmatrix} l_1^2(m_1 + m_2) & l_1 l_2 m_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ l_1 l_2 m_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) & l_2^2 m_2 \end{pmatrix}$$

Mientras que la matriz de Coriolis C .

$$C = \begin{pmatrix} 0 & l_1 l_2 m_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2 \\ -l_1 l_2 m_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Y el vector de gravedad G .

$$G = \begin{pmatrix} gl_1(m_1 + m_2) \cos \theta_1 \\ gl_2 m_2 \cos \theta_2 \end{pmatrix}$$

Entonces la ecuación dinámica queda.

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}) \ddot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) \dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\tau} \quad (3.56)$$

Matriz de inercia:

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} l_1^2(m_1 + m_2) & l_1 l_2 m_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ l_1 l_2 m_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) & l_2^2 m_2 \end{pmatrix}$$

Matriz de Coriolis/centrífugas:

$$\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) = \begin{pmatrix} 0 & l_1 l_2 m_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2 \\ -l_1 l_2 m_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vector gravitatorio:

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} gl_1(m_1 + m_2) \cos \theta_1 \\ gl_2 m_2 \cos \theta_2 \end{pmatrix}$$

Vector de torques: $\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix}$

3.10. Análisis dinámico de Robot manipulador de 3 eslabones 2D

Anteriormente se obtuvo el modelo dinámico del péndulo a través del método de Euler-Lagrange, sin embargo, este trabajo de investigación esta orientado a los robots manipuladores, mas concretamente al manipulador de tres eslabones. Se tiene el robot manipulador de 3 eslabones en la figura 3.11, la conexión entre la base y entre cada eslabón, esta dada por uniones de revolución, que suman 1 movimiento independiente por cada unión, así como son 3 uniones de revolución, se tienen 3 movimientos independientes en los ángulos θ_1 , θ_2 y θ_3 [16].

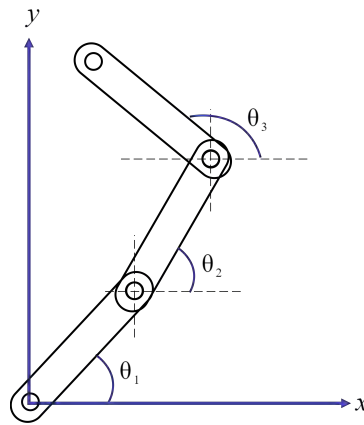


Figura 3.11: Robot Manipulador de 3 Eslabones

Se aprecia que existen 3 vectores, que parten desde el origen hacia cada extremo superior de cada eslabón, de manera que se tendrán 3 vectores desde el origen hasta cada extremo de unión (3.12) y estos estarán en función de los ángulos θ .

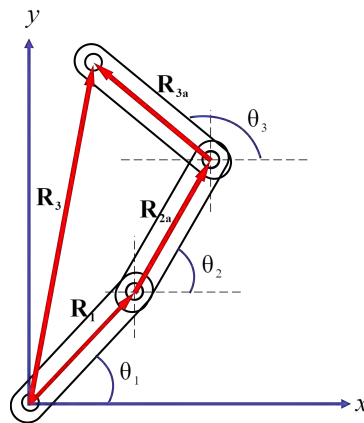


Figura 3.12: Vector de origen-uni3n 3

Las uniones est1n enumeradas empezando por la uni3n-0 hasta la uni3n-3. De manera que los vectores $\vec{R}_1$, $\vec{R}_2$ y $\vec{R}_3$ son los siguientes:

$$\begin{aligned}
\vec{R}_1 &= [l_1 \cos \theta_1(t)] \mathbf{i} + [l_1 \sin \theta_1(t)] \mathbf{j}, \\
\vec{R}_2 &= [l_1 \cos \theta_1(t) + l_2 \cos \theta_2(t)] \mathbf{i} + [l_1 \sin \theta_1(t) + l_2 \sin \theta_2(t)] \mathbf{j}, \\
\vec{R}_3 &= [l_1 \cos \theta_1(t) + l_2 \cos \theta_2(t) + l_3 \cos \theta_3(t)] \mathbf{i} \\
&\quad + [l_1 \sin \theta_1(t) + l_2 \sin \theta_2(t) + l_3 \sin \theta_3(t)] \mathbf{j}.
\end{aligned}$$

Las variables independientes θ_1 , θ_2 y θ_3 , son derivables respecto al tiempo t y por tanto se pueden encontrar los vectores de velocidad.

$$\begin{aligned}
\vec{V}_1 &= \left(-l_1 \sin \theta_1(t) \dot{\theta}_1(t) \right) \mathbf{i} + \left(l_1 \cos \theta_1(t) \dot{\theta}_1(t) \right) \mathbf{j}, \\
\vec{V}_2 &= \left(-l_1 \sin \theta_1(t) \dot{\theta}_1(t) - l_2 \sin \theta_2(t) \dot{\theta}_2(t) \right) \mathbf{i} \\
&\quad + \left(l_1 \cos \theta_1(t) \dot{\theta}_1(t) + l_2 \cos \theta_2(t) \dot{\theta}_2(t) \right) \mathbf{j}, \\
\vec{V}_3 &= \left(-l_1 \sin \theta_1(t) \dot{\theta}_1(t) - l_2 \sin \theta_2(t) \dot{\theta}_2(t) - l_3 \sin \theta_3(t) \dot{\theta}_3(t) \right) \mathbf{i} \\
&\quad + \left(l_1 \cos \theta_1(t) \dot{\theta}_1(t) + l_2 \cos \theta_2(t) \dot{\theta}_2(t) + l_3 \cos \theta_3(t) \dot{\theta}_3(t) \right) \mathbf{j}.
\end{aligned}$$

El calculo de la energía cinética para este caso se define como $T = \frac{1}{2}mV^2$, sin embargo, el termino V^2 puede expresarse como el producto punto entre el mismo vector V y entonces para este caso la energía cinética se define como $T = \frac{1}{2}m_1(V_1 \cdot V_1) + \frac{1}{2}m_2(V_2 \cdot V_2) + \frac{1}{2}m_3(V_3 \cdot V_3) = T_1 + T_2 + T_3$, debido a que son 3 masas distintas, 3 vectores distintos. A continuación se muestra la energía cinética correspondiente a cada eslabón.

$$\begin{aligned}
T_1 &= \frac{1}{2}m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2(t), \\
T_2 &= \frac{1}{2}m_2 \left[\left(l_1 \cos \theta_1(t) \dot{\theta}_1(t) + l_2 \cos \theta_2(t) \dot{\theta}_2(t) \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \left(l_1 \sin \theta_1(t) \dot{\theta}_1(t) + l_2 \sin \theta_2(t) \dot{\theta}_2(t) \right)^2 \right], \\
T_3 &= \frac{1}{2}m_3 \left[l_1^2 \dot{\theta}_1^2(t) + l_2^2 \dot{\theta}_2^2(t) + l_3^2 \dot{\theta}_3^2(t) \right. \\
&\quad + 2l_1 l_2 \cos(\theta_1(t) - \theta_2(t)) \dot{\theta}_1(t) \dot{\theta}_2(t) \\
&\quad + 2l_1 l_3 \cos(\theta_1(t) - \theta_3(t)) \dot{\theta}_1(t) \dot{\theta}_3(t) \\
&\quad \left. + 2l_2 l_3 \cos(\theta_2(t) - \theta_3(t)) \dot{\theta}_2(t) \dot{\theta}_3(t) \right].
\end{aligned}$$

Mientras que la energía cinética total $T = T_1 + T_2 + T_3$

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} \left[(m_1 + m_2 + m_3) l_1^2 \dot{\theta}_1^2(t) + (m_2 + m_3) l_2^2 \dot{\theta}_2^2(t) + m_3 l_3^2 \dot{\theta}_3^2(t) \right. \\
&\quad + 2l_1 l_2 (m_2 + m_3) \cos(\theta_1(t) - \theta_2(t)) \dot{\theta}_1(t) \dot{\theta}_2(t) \\
&\quad + 2l_1 l_3 m_3 \cos(\theta_1(t) - \theta_3(t)) \dot{\theta}_1(t) \dot{\theta}_3(t) \\
&\quad \left. + 2l_2 l_3 m_3 \cos(\theta_2(t) - \theta_3(t)) \dot{\theta}_2(t) \dot{\theta}_3(t) \right]
\end{aligned}$$

El cálculo de la energía potencial, de la misma manera que la energía cinética resulta en la suma de la energía potencial del eslabón 1, mas la energía potencial del eslabón 2 y la la energía potencial del eslabón 3, mientras que las alturas corresponden a la componente J de su vector asociado. Las energías potenciales resultan en las siguientes expresiones. Definiéndose la energía potencial como $U = mgh$.

$$\begin{aligned} U_1 &= gl_1 m_1 \sin \theta_1(t), \\ U_2 &= gm_2 (l_1 \sin \theta_1(t) + l_2 \sin \theta_2(t)), \\ U_3 &= gm_3 (l_1 \sin \theta_1(t) + l_2 \sin \theta_2(t) + l_3 \sin \theta_3(t)), \end{aligned}$$

Mientras que la energía potencial total es.

$$U = g \left[l_1 \sin \theta_1(t)(m_1 + m_2 + m_3) + l_2 \sin \theta_2(t)(m_2 + m_3) + l_3 \sin \theta_3(t)m_3 \right].$$

Teniendo la energía cinética total y la energía potencial total, se puede calcular el Lagrangiano, el cual es $L = T - U$, la diferencia entre la energía cinética total y la energía potencial total.

$$\begin{aligned} L = \frac{1}{2} & \left[(m_1 + m_2 + m_3) l_1^2 \dot{\theta}_1^2(t) + (m_2 + m_3) l_2^2 \dot{\theta}_2^2(t) + m_3 l_3^2 \dot{\theta}_3^2(t) \right] \\ & - g \left[l_1 \sin \theta_1(t)(m_1 + m_2 + m_3) + l_2 \sin \theta_2(t)(m_2 + m_3) + l_3 \sin \theta_3(t)m_3 \right] \\ & + \left[2l_1 l_2 (m_2 + m_3) \cos(\theta_1(t) - \theta_2(t)) \dot{\theta}_1(t) \dot{\theta}_2(t) \right. \\ & \quad + 2l_1 l_3 m_3 \cos(\theta_1(t) - \theta_3(t)) \dot{\theta}_1(t) \dot{\theta}_3(t) \\ & \quad \left. + 2l_2 l_3 m_3 \cos(\theta_2(t) - \theta_3(t)) \dot{\theta}_2(t) \dot{\theta}_3(t) \right]. \end{aligned}$$

Al ser tres variables generalizadas (los tres ángulos independientes), se tendrán tres ecuaciones diferenciales, obtenidas de la aplicación de la formulación de Euler-Lagrange al Lagrangiano, la primera ecuación resulta del ángulo θ_1 , esto puede ser en cualquier orden, sin embargo, para que sea mas visible se hará primero θ_1 luego θ_2 y por ultimo θ_3 . Aplicando la formulación de Euler-Lagrange para θ_1 .

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} &= l_1^2 m_1 \dot{\theta}_1(t) + l_1^2 m_2 \dot{\theta}_1(t) + l_1^2 m_3 \dot{\theta}_1(t) \\ & \quad + l_1 l_2 m_2 \cos(\theta_1(t) - \theta_2(t)) \dot{\theta}_2(t) \\ & \quad + l_1 l_2 m_3 \cos(\theta_1(t) - \theta_2(t)) \dot{\theta}_2(t) \\ & \quad + l_1 l_3 m_3 \cos(\theta_1(t) - \theta_3(t)) \dot{\theta}_3(t). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) &= (m_1 + m_2 + m_3) l_1^2 \ddot{\theta}_1(t) \\
&+ (m_2 + m_3) l_1 l_2 \cos(\theta_1(t) - \theta_2(t)) \ddot{\theta}_2(t) \\
&+ m_3 l_1 l_3 \cos(\theta_1(t) - \theta_3(t)) \ddot{\theta}_3(t) \\
&+ (m_2 + m_3) l_1 l_2 \sin(\theta_1(t) - \theta_2(t)) \dot{\theta}_2^2(t) \\
&+ m_3 l_1 l_3 \sin(\theta_1(t) - \theta_3(t)) \dot{\theta}_3^2(t) \\
&- (m_2 + m_3) l_1 l_2 \sin(\theta_1(t) - \theta_2(t)) \dot{\theta}_1(t) \dot{\theta}_2(t) \\
&- m_3 l_1 l_3 \sin(\theta_1(t) - \theta_3(t)) \dot{\theta}_1(t) \dot{\theta}_3(t).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \theta_1} &= -gl_1 \cos \theta_1(t) (m_1 + m_2 + m_3) \\
&- l_1 l_2 (m_2 + m_3) \sin(\theta_1(t) - \theta_2(t)) \dot{\theta}_1(t) \dot{\theta}_2(t) \\
&- l_1 l_3 m_3 \sin(\theta_1(t) - \theta_3(t)) \dot{\theta}_1(t) \dot{\theta}_3(t).
\end{aligned}$$

Por tanto la primera ecuación queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
E_{c1} &= (m_1 + m_2 + m_3) l_1^2 \ddot{\theta}_1(t) \\
&+ gl_1 \cos \theta_1(t) (m_1 + m_2 + m_3) \\
&+ l_1 l_2 (m_2 + m_3) \sin(\theta_1(t) - \theta_2(t)) \dot{\theta}_2^2(t) \\
&+ l_1 l_3 m_3 \sin(\theta_1(t) - \theta_3(t)) \dot{\theta}_3^2(t) \\
&+ l_1 l_2 (m_2 + m_3) \cos(\theta_1(t) - \theta_2(t)) \ddot{\theta}_2(t) \\
&+ l_1 l_3 m_3 \cos(\theta_1(t) - \theta_3(t)) \ddot{\theta}_3(t).
\end{aligned}$$

Repitiendo esto mismo pero para el ángulo θ_2 y su derivada $\dot{\theta}_2$, se tienen las siguientes expresiones aplicadas al lagrangiano L .

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} &= (m_2 + m_3) l_2^2 \dot{\theta}_2(t) \\
&+ (m_2 + m_3) l_1 l_2 \cos(\theta_1(t) - \theta_2(t)) \dot{\theta}_1(t) \\
&+ m_3 l_2 l_3 \cos(\theta_2(t) - \theta_3(t)) \dot{\theta}_3(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) &= (m_2 + m_3) l_2^2 \ddot{\theta}_2(t) \\
&+ (m_2 + m_3) l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_1(t) \\
&+ m_3 l_2 l_3 \cos(\theta_2 - \theta_3) \ddot{\theta}_3(t) \\
&- (m_2 + m_3) l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1^2(t) \\
&+ m_3 l_2 l_3 \sin(\theta_2 - \theta_3) \dot{\theta}_3^2(t) \\
&+ (m_2 + m_3) l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1(t) \dot{\theta}_2(t) \\
&- m_3 l_2 l_3 \sin(\theta_2 - \theta_3) \dot{\theta}_2(t) \dot{\theta}_3(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = & -gl_2 \cos \theta_2(t) (m_2 + m_3) \\ & + (m_2 + m_3) l_1 l_2 \sin (\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1(t) \dot{\theta}_2(t) \\ & - m_3 l_2 l_3 \sin (\theta_2 - \theta_3) \dot{\theta}_2(t) \dot{\theta}_3(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E_{c2} = & (m_2 + m_3) l_2^2 \ddot{\theta}_2(t) \\ & + gl_2 \cos \theta_2(t) (m_2 + m_3) \\ & - (m_2 + m_3) l_1 l_2 \sin (\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1^2(t) \\ & + m_3 l_2 l_3 \sin (\theta_2 - \theta_3) \dot{\theta}_3^2(t) \\ & + (m_2 + m_3) l_1 l_2 \cos (\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_1(t) \\ & + m_3 l_2 l_3 \cos (\theta_2 - \theta_3) \ddot{\theta}_3(t)\end{aligned}$$

finalmente para θ_3 y su derivada $\dot{\theta}_3$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_3} = & l_3^2 m_3 \dot{\theta}_3(t) \\ & + l_1 l_3 m_3 \cos (\theta_1(t) - \theta_3(t)) \dot{\theta}_1(t) \\ & + l_2 l_3 m_3 \cos (\theta_2(t) - \theta_3(t)) \dot{\theta}_2(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_3} \right) = & l_3^2 m_3 \ddot{\theta}_3(t) \\ & - l_1 l_3 m_3 \sin (\theta_1 - \theta_3) \dot{\theta}_1^2(t) \\ & - l_2 l_3 m_3 \sin (\theta_2 - \theta_3) \dot{\theta}_2^2(t) \\ & + l_1 l_3 m_3 \cos (\theta_1 - \theta_3) \ddot{\theta}_1(t) \\ & + l_2 l_3 m_3 \cos (\theta_2 - \theta_3) \ddot{\theta}_2(t) \\ & + l_1 l_3 m_3 \sin (\theta_1 - \theta_3) \dot{\theta}_3(t) \dot{\theta}_1(t) \\ & + l_2 l_3 m_3 \sin (\theta_2 - \theta_3) \dot{\theta}_3(t) \dot{\theta}_2(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \theta_3} = & l_1 l_3 m_3 \sin (\theta_1 - \theta_3) \dot{\theta}_3(t) \dot{\theta}_1(t) \\ & - gl_3 m_3 \cos \theta_3(t) \\ & + l_2 l_3 m_3 \sin (\theta_2 - \theta_3) \dot{\theta}_3(t) \dot{\theta}_2(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E_{c3} = & l_3^2 m_3 \ddot{\theta}_3(t) \\ & + gl_3 m_3 \cos \theta_3(t) \\ & - l_1 l_3 m_3 \sin (\theta_1 - \theta_3) \dot{\theta}_1^2(t) \\ & - l_2 l_3 m_3 \sin (\theta_2 - \theta_3) \dot{\theta}_2^2(t) \\ & + l_1 l_3 m_3 \cos (\theta_1 - \theta_3) \ddot{\theta}_1(t) \\ & + l_2 l_3 m_3 \cos (\theta_2 - \theta_3) \ddot{\theta}_2(t)\end{aligned}$$

Pero, generalmente estas ecuaciones se reordenan sus elementos para reescribirlas en forma de la ecuación dinámica de un robot, la cual tiene la siguiente forma.

$$\underbrace{\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta})\ddot{\boldsymbol{\theta}}}_{\text{Inercia}} + \underbrace{\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})\dot{\boldsymbol{\theta}}}_{\text{Coriolis/Centrífugas}} + \underbrace{\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta})}_{\text{Gravedad}} = \underbrace{\boldsymbol{\tau}}_{\text{Torques}} \quad (3.57)$$

Los términos de la matriz de inercia $\mathbf{M}$, dependen de las variables generalizadas y están acompañadas de sus segundas derivadas, para este robot, su matriz de inercia es la siguiente:

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} l_1^2(m_1 + m_2 + m_3) & l_1 l_2(m_2 + m_3) \cos(\theta_1 - \theta_2) & l_1 l_3 m_3 \cos(\theta_1 - \theta_3) \\ l_1 l_2(m_2 + m_3) \cos(\theta_1 - \theta_2) & l_2^2(m_2 + m_3) & l_2 l_3 m_3 \cos(\theta_2 - \theta_3) \\ l_1 l_3 m_3 \cos(\theta_1 - \theta_3) & l_2 l_3 m_3 \cos(\theta_2 - \theta_3) & l_3^2 m_3 \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

De una forma similar, la matriz de Coriolis o matriz de Centrífugas, depende de las variables generalizadas y de sus derivadas, y su derivada se puede factorizar. Para este robot la matriz de Coriolis es la siguiente.

$$\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) = \begin{bmatrix} 0 & l_1 l_2(m_2 + m_3) \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2 & l_1 l_3 m_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) \dot{\theta}_3 \\ -l_1 l_2(m_2 + m_3) \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 & 0 & l_2 l_3 m_3 \sin(\theta_2 - \theta_3) \dot{\theta}_3 \\ -l_1 l_3 m_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) \dot{\theta}_1 & -l_2 l_3 m_3 \sin(\theta_2 - \theta_3) \dot{\theta}_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

Por otra parte, el vector de gravedad G , solo depende de las variables generalizadas, para este robot, este vector es el siguiente.

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} gl_1 \cos \theta_1(t) (m_1 + m_2 + m_3) \\ gl_2 \cos \theta_2(t) (m_2 + m_3) \\ gl_3 m_3 \cos \theta_3(t) \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

El vector de torques $\boldsymbol{\tau}$, representan las fuerzas que actúan sobre cada articulación, se decir las entradas al sistema, entre otras fuerzas que actúan sobre las articulaciones [28].

3.11. Movimiento en 2 dimensiones en Bond Graph

Hasta el momento, todos los modelos antes vistos de sistemas mecánicos en Bond Graph, han sido unidireccionales, es decir que su movimiento solo es a lo largo o alrededor de un solo eje, sin embargo, existen movimientos compuestos que hacen que existan movimientos en mas de un solo eje, como por ejemplo, movimiento a lo largo de dos ejes, o a lo largo de un solo eje y ademas rotando al rededor de otro. El ejemplo mas común para ilustrar el movimiento en dos dimensiones es con un eslabón o barra rígida, consideremos que tenemos la barra rígida en un eje de coordenadas arbitrario (x,y) ilustrada en la figura 3.13, la barra no esta sujeta a nada, es decir que no tiene restricciones por lo que puede moverse a lo largo del eje x e y, ademas de poder rotar en dirección horaria o antihoraria [21].

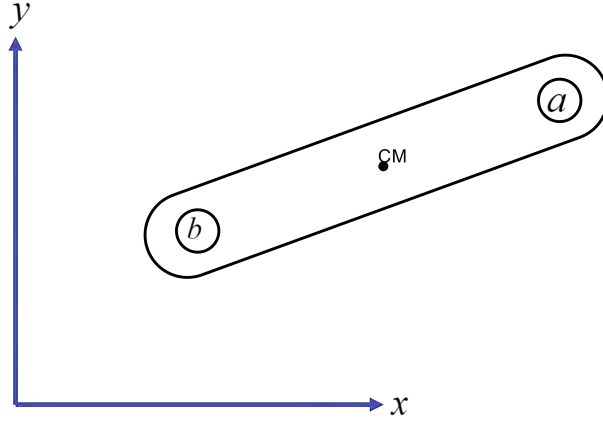


Figura 3.13: Eslabón 2D sin restricciones

Se observa en la figura 3.13, que el eslabón posee tres puntos clave, los dos extremos (A y B) y el centro de masa (CM), los dos extremos son puntos de conexión con otros elementos mecánicos, mientras que el centro de masa, es el punto de interés, puesto que el centro de masa concentra toda la masa del eslabón en un solo punto, lo que facilita la interpretación dinámica debido a que ya no se observa como un eslabón entero sino como un punto. El movimiento del eslabón, puede ser ocasionado por fuerzas aplicadas en ambos extremos, lo que producirá que se traslade o rote, o bien un movimiento combinado [23]. En Bond Graph, los tres puntos importantes tienen un eje de coordenadas distinto, al derivar dichos ejes de coordenadas, se tienen ahora en función de la velocidad y no en función de la posición, puesto que la velocidad es una variable de potencia en Bond Graph.

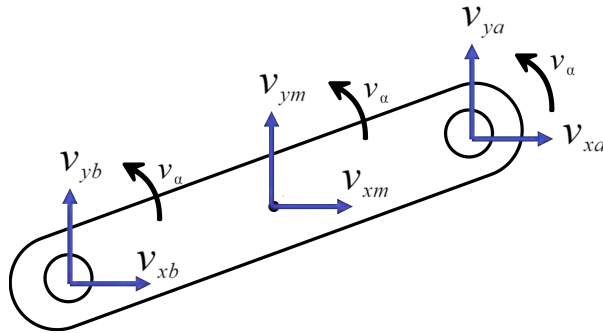


Figura 3.14: Ejes de coordenadas absolutos

La velocidad v_α es la misma para los tres puntos, puesto que los tres puntos son restricciones entre sí, y rotan a la misma velocidad. Debido a esta velocidad angular, se produce un nuevo marco de referencia en cada punto, los cuales son iguales, ya que la velocidad angular tiene asociada una velocidad tangencial la cual es descrita por las ecuaciones de transformación cuyas componentes de esta velocidad son $V_{xa\alpha}$ y $V_{ya\alpha}$ para el punto de unión a, y $V_{xb\alpha}$ y $V_{yb\alpha}$. Por tanto, la cinemática del eslabón queda descrita

por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} V_{xm} &= V_x - V_x a \alpha \\ V_{ym} &= V_y + V_y a \alpha \\ V_x &= V_{xm} - V_x b \alpha \\ V_y &= V_{ym} - V_y b \alpha \end{aligned}$$

La dinámica de la barra esta dada por las siguientes tres ecuaciones:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{xm} &= \frac{\Delta f_x}{m} \\ \dot{V}_{ym} &= \frac{\Delta f_y}{m} \\ \dot{V}_\alpha &= \frac{\Delta \tau}{J} \end{aligned}$$

Donde m y J son la masa e inercia del eslabón, mientras que Δf_x y Δf_y son las fuerzas netas actuando en las direcciones x e y del centro de masa, y $\Delta \tau$ es el par neto actuando también en el centro de masa. En la figura 3.15, se presenta el Bond Graph de un eslabón [21], [12].

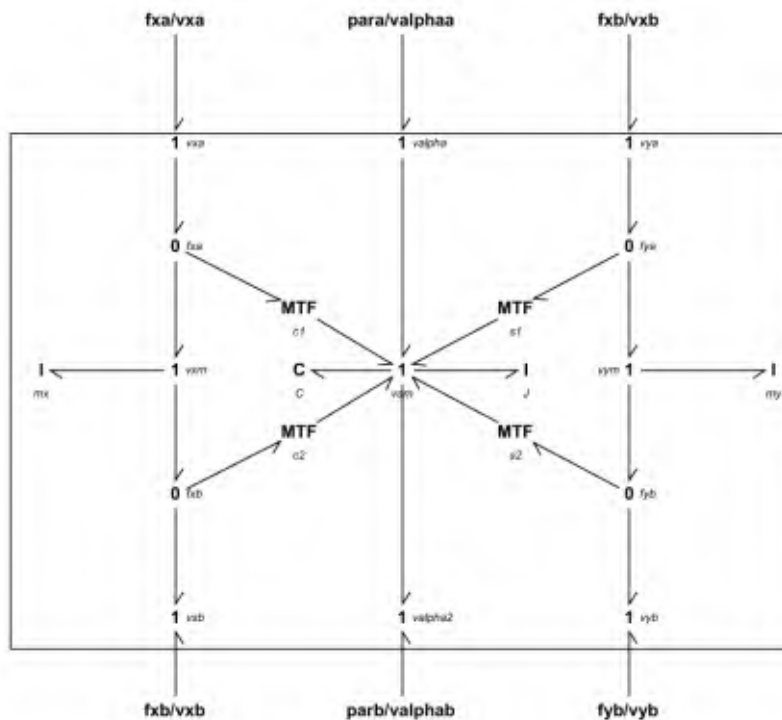


Figura 3.15: Bond Graph de un eslabón con movimiento bidimensional

A continuación se presenta una explicación del BG de la figura anterior, como cada punto de unión tiene dos componentes de velocidad diferentes, eso significa que se tienen tres uniones de conservación de flujo, es decir tres uniones 1, puesto que la velocidad angular V_α también es una variable de velocidad en mecánica rotacional. De manera que las uniones 1 etiquetadas como V_{xa} , V_{ya} corresponden a las velocidades lineales de la unión a ,

mientras que las uniones V_{xb} , V_{yb} corresponden a las velocidades en el punto de unión b , sin embargo, en ambos puntos la velocidad angular es la misma, sin embargo, la localización de la velocidad angular es diferente, por ello la unión V_α en ambos extremos.

Las tres componentes etiquetadas como m_x , m_y y J , representan las tres ecuaciones dinámicas vistas anteriormente, mientras que la componente etiquetada como C , representa la rigidez del eslabón, la variable de flujo integrada q de este elemento, resulta en el ángulo α (debido a que la señal de flujo es la velocidad angular, y la integral de la velocidad angular resulta en el propio ángulo, así mismo la integral del flujo resulta en la carga q , que equivale al ángulo α), y este modula los transformadores mediante un Bond activo [23].

Los ejes que se encuentran en el centro de masa son representados por las uniones 1 cuyas etiquetas son iguales a las mostradas en la figura 3.14, lo que significa que de estas uniones salen las velocidades asociadas al centro de masa, además de estar ligadas a las uniones 0 que representan la conservación de la fuerza en los ejes x e y y estas a su vez, en conjunto con las uniones 1 del centro de masa, calculan los esfuerzos netos actuando sobre el elemento de inercia I del eslabón. Por si solas, estas uniones 0 representan las ecuaciones cinemáticas del eslabón. Las ganancias de los transformadores representan las ecuaciones de transformación y están modulados por el ángulo α proveniente de la rigidez del elemento C .

Las fuentes que se encuentran en el exterior del rectángulo, representan las entradas que se suministran a los extremos del eslabón, estas pueden ser fuentes de velocidad o fuentes de fuerza/par, sin embargo, estas fuentes no siempre existirán, por ejemplo si la unión b del eslabón esta fija, no tiene movimiento, y por lo tanto no, no interesara la fuentes de entrada en este punto, sino en el punto a que esta libre sin embargo, para el análisis en BG, se requieren estas fuentes de forma simbólica, al final del análisis todas las fuentes no implicadas se harán cero [12].

Por ejemplo, se tiene un manipulador de un eslabón, como se ilustra en la figura 3.16, y su Bond Graph en la figura 3.17, nótese que se ha añadido una fuente de esfuerzo en la unión 1 v_{ym} , la cual representa el peso del eslabón, debido a que su masa esta bajo acción del campo gravitacional.

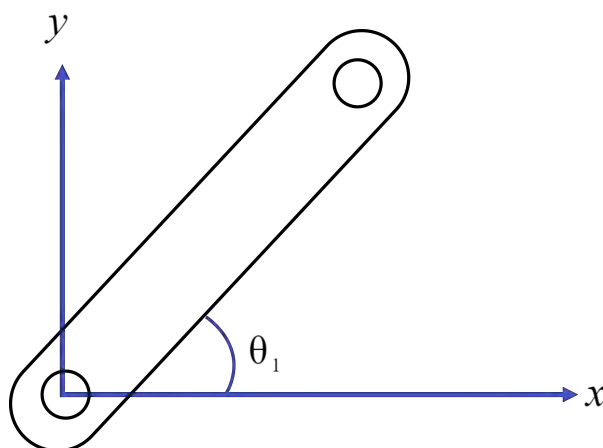


Figura 3.16: Manipulador de un eslabón

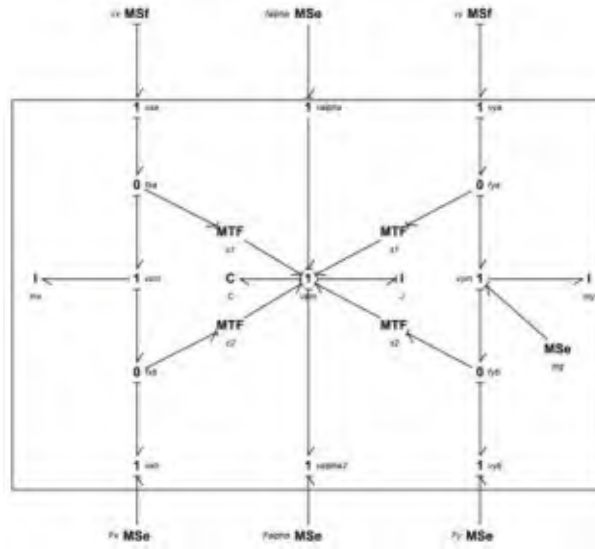


Figura 3.17: BG manipulator de un eslabón general

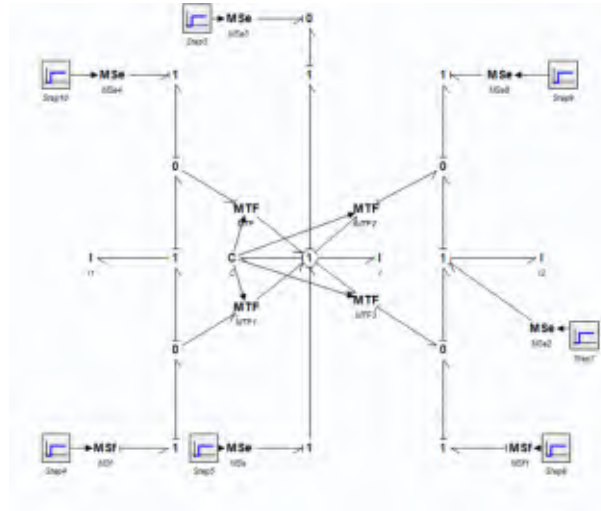


Figura 3.18: BG manipulator de un eslabón

Los elementos en causalidad integral son los elementos de rigidez y de inercia, debido a que estos deben ser linealmente independientes del resto de los elementos, ya que representan la propia inercia de la barra y su ángulo. Mientras que los demás elementos de almacenamiento deben ser linealmente dependientes de los elementos antes mencionados, por tanto los vectores clave de este BG son los siguientes:

$$x = \begin{bmatrix} q_7 \\ p_{29} \end{bmatrix}, \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} f_7 \\ e_{29} \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} e_7 \\ f_{29} \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} f_1 \\ e_{12} \\ e_{13} \\ e_{16} \\ f_{17} \\ e_{23} \\ e_{28} \end{bmatrix}.$$

$$x_d = \begin{bmatrix} p_6 \\ p_{22} \end{bmatrix}, \quad \dot{x}_d = \begin{bmatrix} e_6 \\ e_{22} \end{bmatrix}, \quad z_d = \begin{bmatrix} f_6 \\ f_{22} \end{bmatrix}$$

Se observa que no existen los vectores D_{in} y D_{out} debido a que no existen elementos que de disipación en este sistema. Los vectores de relaciones constitutivas para este robot de un solo eslabón son las siguientes:

$$F = \begin{bmatrix} \frac{1}{C} & 0 \\ 0 & \frac{1}{J} \end{bmatrix}, \quad F_d = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_x} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_y} \end{bmatrix}.$$

Por tanto, la estructura unión para este BG, resulta en el siguiente:

$$\begin{bmatrix} e_{29} \\ f_7 \\ f_6 \\ f_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{13} & s_{14} \\ s_{31} & s_{33} & s_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{29} \\ e_7 \\ f_1 \\ e_{12} \\ e_{13} \\ e_{16} \\ f_{17} \\ e_{23} \\ e_{28} \\ e_6 \\ e_{22} \end{bmatrix}$$

Al realizar el análisis de trayectorias causales, se encuentra que la estructura unión es la siguiente, recordando que las ganancias de los transformadores son $l \cdot \cos(q_{14})$ y $l \cdot \sin(q_{14})$ debido a que están modulados por el elemento C_{14} [12].

$$\begin{bmatrix} e_{29} \\ f_7 \\ f_6 \\ f_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 2l \sin(q_7) & 1 & 1 & 0 & -l \cos(q_7) & -2l \cos(q_7) & -l \sin(q_7) & l \cos(q_7) \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l \sin(q_7) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -l \cos(q_7) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{14} \\ f_{25} \\ f_7 \\ f_{21} \\ f_1 \\ f_3 \\ e_2 \\ e_{11} \\ e_{17} \\ e_{18} \\ e_{29} \end{bmatrix}$$

Como este es un sistema cuyo Bond Graph está formado por elementos en causalidad integral pero también elementos en causalidad derivativa, la matriz de estados A y la matriz de entradas B , están afectados por una matriz E que representa el efecto de los elementos en causalidad derivativa en el sistema, dichas matrices se calculan con ecuaciones vistas en secciones previas. Por tanto la matriz E resulta en lo siguiente:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{ml^2 + J}{J} \end{pmatrix}$$

Y en consecuencia la matriz A y B son descritas como:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{J} \\ -\frac{J}{C(ml^2 + J)} & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{J}{ml^2 + J} & -\frac{2Jl \sin(q_7)}{ml^2 + J} & \frac{J}{ml^2 + J} & \frac{2Jl \cos(q_7)}{ml^2 + J} & \frac{Jl \cos(q_7)}{ml^2 + J} \end{bmatrix}$$

La ecuación de estados es entonces $\dot{x} = Ax + Bu + H\dot{u}$, donde H es obtenido mediante $s_{14} * F_d^{-1} * s_{31}$ sin embargo, este cálculo resulta en la cancelación de todos los términos resultantes de la matriz H , por tanto el termino $H\dot{u}$ resulta cancelado [12]. Entonces se tiene que:

$$\begin{bmatrix} f_7 \\ e_{29} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{J} \\ -\frac{J}{C(ml^2 + J)} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_7 \\ p_{29} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{J}{ml^2 + J} & -\frac{Jl \cos(q_7)}{ml^2 + J} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_{16} \\ e_{23} \end{bmatrix}$$

Al aplicar la tranformacion de $\dot{x} = F^{-1}\dot{z} \rightarrow \dot{z} = F\dot{x}$, lo que significa que ahora esta en términos de la derivada del vector Z , es decir que con esta transformación la ecuación de estados ahora es $\dot{Z} = Ax + Bu$ y por tanto la primera ecuación se muestra a continuación [21]:

$$\begin{aligned} \dot{f}_{29} &= \frac{1}{J} \cdot -\frac{J}{C(ml^2 + J)} \cdot q_7 + \frac{1}{J} \cdot \frac{J}{ml^2 + J} \cdot e_{16} - \frac{1}{J} \cdot \frac{J}{ml^2 + J} \cdot l \cos(q_7) \cdot e_{23} \\ e_{16} &= (ml^2 + J) \cdot \ddot{\theta} + \frac{q_7}{C} + l \cos(q_7) \cdot e_{23} \end{aligned}$$

Donde $\dot{f}_{29}$ representa la derivada del flujo f_{29} , físicamente representa la derivada de la velocidad angular, es decir la aceleración angular $\ddot{\theta}$, si la rigidez C , es considerada como rigidez infinita, entonces.

$$(ml^2 + J) \cdot \ddot{\theta} + l \cos(q_7) \cdot e_{23} = e_{16}$$

Donde e_{23} representa el peso del eslabón, es decir la masa del eslabón por la gravedad mg y e_{16} es el par de entrada mientras que q_7 el ángulo θ y ademas al considerar $J = 0$, se tiene la siguiente expresión representa la dinámica del eslabón:

$$\begin{aligned} (ml^2 + J) \cdot \ddot{\theta} + l \cos(\theta) \cdot mg &= \tau \\ ml^2 \cdot \ddot{\theta} + l \cos(\theta) \cdot mg &= \tau \end{aligned}$$

Al comparar la expresión obtenida a través del análisis dinámico de Euler-Lagrange y la expresión obtenida aparir del análisis en Bond Graph, se aprecia que si el elemento $J = 0$, lo que significa que no se toma en cuenta el momento de inercia del eslabón, las expresiones matemáticas son exactamente iguales [21], [23].

3.12. Manipulador de 2 eslabones en Bond Graph

El robot manipulador de 2 eslabones planar en Bond Graph, es una extensión del de un solo eslabón, a continuación se presenta el diagrama del robot de 2 eslabones, en la figura 3.19 se presenta la parte 2, es decir la parte del eslabón 2, mientras que en la figura 3.20 se presenta la parte 1, referente al eslabón 1 [23].

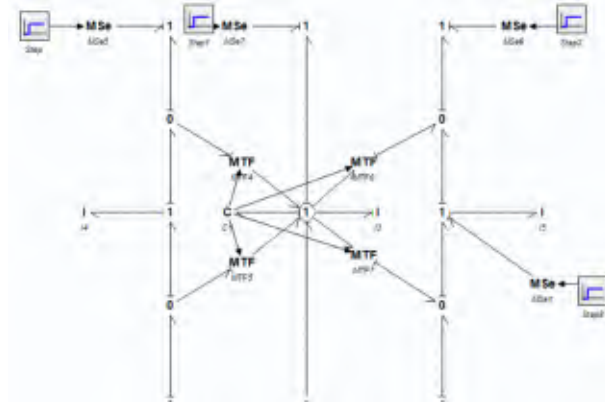


Figura 3.19: BG del robot manipulador de 2 eslabones parte 2

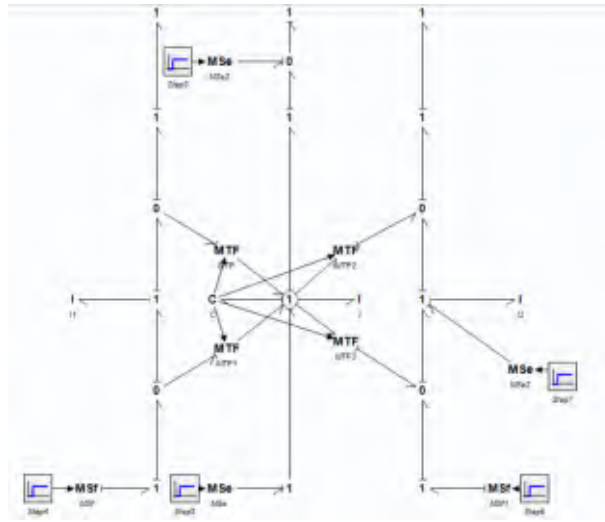


Figura 3.20: BG del robot manipulador de 2 eslabones parte 1

Al enumerar todos los Bonds, se obtienen los siguientes vectores clave.

$$x = \begin{bmatrix} p_{43} \\ q_{42} \\ p_{15} \\ q_{14} \end{bmatrix}, \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} e_{43} \\ f_{42} \\ e_{15} \\ f_{14} \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} f_{43} \\ e_{42} \\ f_{15} \\ e_{14} \end{bmatrix}, \quad u = [e_1 \ e_2 \ e_3 \ e_{17} \ e_{30} \ e_{45} \ e_{56} \ f_{55} \ f_{57}]^T.$$

Los vectores clave de los elementos en causalidad derivativa son:

$$x_d = \begin{bmatrix} p_{41} \\ p_{44} \\ p_{15} \\ p_{16} \end{bmatrix}, \quad \dot{x}_d = \begin{bmatrix} e_{41} \\ e_{44} \\ e_{15} \\ e_{16} \end{bmatrix}, \quad z_d = \begin{bmatrix} f_{41} \\ f_{44} \\ f_{15} \\ f_{16} \end{bmatrix},$$

Las matrices F y F_d (relaciones constitutivas), que contienen las magnitudes de los elementos de almacenamiento en causalidad integral y derivativa respectivamente quedan de la siguiente manera.

$$F = \begin{bmatrix} \frac{1}{J_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{J_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_2} \end{bmatrix}, \quad F_d = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_{1x}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_{1y}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{m_{2x}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m_{2y}} \end{bmatrix}.$$

Esto significa que la matriz de estructura unión sera como sigue:

$$\begin{bmatrix} e_{43} \\ f_{42} \\ e_{15} \\ f_{14} \\ f_{41} \\ f_{44} \\ f_{15} \\ f_{16} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{43} \\ e_{42} \\ f_{15} \\ e_{14} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_{17} \\ e_{30} \\ e_{45} \\ e_{56} \\ f_{55} \\ f_{57} \\ e_{41} \\ e_{44} \\ e_{15} \\ e_{16} \end{bmatrix}$$

Al realizar el análisis de la estructura unión resulta en que las matrices S_{11} , S_{13} , S_{14} y S_{41} son como sigue.

$$S_{11} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S_{13} = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(x_1) & 0 & l_1 \cos(x_1) & l_1 \cos(x_1) & -1 & l_1 \cos(x_1) & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_2 \sin(x_1 - x_2) & 1 & l_2 \cos(x_1 - x_2) & l_2 \cos(x_1 - x_2) & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S_{14} = \begin{bmatrix} l_1 \sin(x_1) & l_1 \cos(x_1) & l_1 \sin(x_1) & -l_1 \cos(x_1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -l_2 \sin(x_1 - x_2) & -l_2 \cos(x_1 - x_2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S_{41} = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(x_1) & 0 & 0 & 0 \\ -l_1 \cos(x_1) & 0 & 0 & 0 \\ -l_1 \sin(x_1) & 0 & l_2 \sin(x_1 - x_2) & 0 \\ l_1 \cos(x_1) & 0 & l_2 \cos(x_1 - x_2) & 0 \end{bmatrix}$$

Como se tienen elementos en causalidad integral, se debe calcular la matriz E , la cual describe la relación entre estos elementos y los elementos con causalidad integral que en este caso son los elementos de momento de inercia y de rigidez. La matriz de estados A , para este caso es directamente, la forma de calcular esta matriz, al igual que la matriz de estados y la matriz de entradas, se vio en secciones previas, entonces las matrices quedan de la siguiente forma [12].

$$E = \begin{bmatrix} \frac{j_1 + l_1^2 m_1 + l_1^2 m_2}{j_1} & 0 & \frac{l_1 l_2 m_2 \cos(2x_1 - x_2)}{j_2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{l_1 l_2 m_2 \cos(2x_1 - x_2)}{j_1} & 0 & \frac{m_2 l_2^2 + j_2}{j_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esta matriz E esta en función de las masas en x e y de los eslabones, sin embargo, se debe sustituir que $m1 = m1x = m1y$ de la misma manera para el eslabón 2, $m2 = m2x = m2y$, al realizar esta sustitución, y reduciendo, se obtiene la matriz E antes mostrada. Mientras tanto la matriz A y B , son como se muestran a continuación.

$$A = E^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{C_1} & 0 & 0 \\ \frac{1}{J_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{C_2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{J_2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = E^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -l_1 \sin(x_1) & 0 & l_1 \cos(x_1) & l_1 \cos(x_1) & -1 & l_1 \cos(x_1) & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_2 \sin(x_1 - x_2) & 1 & l_2 \cos(x_1 - x_2) & l_2 \cos(x_1 - x_2) & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sin embargo, solo nos interesan las entradas correspondientes al par aplicado al primer eslabón y el par aplicado al segundo eslabón, así como las entradas de masa por gravedad de ambos eslabones, y por tanto las demás entradas son cero, entonces se obtiene una matriz B acorde al modelo común del robot, la matriz de entradas se convierte en la siguiente expresión matricial.

$$B = E^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & l_1 \cos(x_1) & l_1 \cos(x_1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_2 \cos(x_1 - x_2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$u = [e56 \quad e30 \quad e45 \quad e17]$$

Así se obtiene entonces el modelo de espacio de estados del manipulador de 2 eslabones planar.

$$\begin{bmatrix} e_{43} \\ f_{42} \\ e_{15} \\ f_{14} \end{bmatrix} = E^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{C_1} & 0 & 0 \\ \frac{1}{J_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{C_2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{J_2} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_{43} \\ q_{42} \\ p_{15} \\ q_{14} \end{bmatrix} + E^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & l_1 \cos(x_1) & l_1 \cos(x_1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_2 \cos(x_1 - x_2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e56 \\ e30 \\ e45 \\ e17 \end{bmatrix}$$

Sin embargo, este espacio de estados esta en función de los estados, que son las integrales de las variables de esfuerzo y flujo y como es un sistema mecánico rotacional, los esfuerzos corresponden a par, y los flujos a velocidad angular, y por tanto los estados son momento angular y el ángulo, ya que la integral del par, es el momento angular y la integral de la velocidad angular es el propio ángulo. En la formulación de Lagrange, se tienen aceleraciones angulares y velocidades angulares por tanto se requiere llegar a estas variables, entonces se sabe que hay una relación entre los estados x y los estados z , de forma que

$z = f \cdot x$, de la misma forma existe una relación entre $\dot{x}$ y $\dot{z}$, de manera que $\dot{z} = F \cdot \dot{x}$, aplicando estas transformaciones queda entonces que.

$$\begin{bmatrix} \dot{f}_{43} \\ \dot{e}_{42} \\ \dot{f}_{15} \\ \dot{e}_{14} \end{bmatrix} = F \cdot E^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{C_1} & 0 & 0 \\ \frac{1}{J_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{C_2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{J_2} & 0 \end{bmatrix} \cdot F^{-1} \cdot \begin{bmatrix} f_{43} \\ e_{42} \\ f_{15} \\ e_{14} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 & l_1 \cos(x_1) & l_1 \cos(x_1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_2 \cos(x_1 - x_2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_{56} \\ e_{30} \\ e_{45} \\ e_{17} \end{bmatrix}$$

Operando las matrices $A \cdot F$ y aplicando la operación opuesta al termino $F \cdot E^{-1}$ se tiene entonces que [21].

$$F^{-1} \cdot E \cdot \begin{bmatrix} \dot{f}_{43} \\ \dot{e}_{42} \\ \dot{f}_{15} \\ \dot{e}_{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_{43} \\ e_{42} \\ f_{15} \\ e_{14} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 & l_1 \cos(x_1) & l_1 \cos(x_1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_2 \cos(x_1 - x_2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_{56} \\ e_{30} \\ e_{45} \\ e_{17} \end{bmatrix}$$

donde

$$F^{-1} \cdot E = \begin{bmatrix} j_1 + l_1^2 m_1 + l_1^2 m_2 & 0 & l_1 l_2 m_2 \cos(2x_1 - x_2) & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & 0 \\ l_1 l_2 m_2 \cos(2x_1 - x_2) & 0 & m_2 l_2^2 + j_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_2 \end{bmatrix}$$

Aparentemente la matriz $F^{-1} \cdot E$ no es igual a la matriz M de la formulación de Lagrange, sin embargo, los ángulos x_1 y x_2 , son ángulos respecto a un marco de referencia absoluto, es decir que engloba a θ_1 y θ_2 , de manera que los ángulos x_1 y x_2 equivalen a $x_1 = \theta_1$ y $x_2 = \theta_2 + \theta_1$, haciendo la sustitución de los ángulos absolutos por los ángulos θ , se obtiene que.

$$F^{-1} \cdot E = \begin{bmatrix} j_1 + l_1^2 m_1 + l_1^2 m_2 & 0 & l_1 l_2 m_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & 0 \\ l_1 l_2 m_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) & 0 & m_2 l_2^2 + j_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_2 \end{bmatrix}$$

Aplicando esta igualdad a la matriz B y multiplicándola por el vector u , se obtiene que.

$$G = \begin{bmatrix} e_{56} - e_{30} + e_{17} l_1 \cos(\theta_1) + e_{45} l_1 \cos(\theta_1) \\ 0 \\ e_{30} + e_{17} l_2 \cos(\theta_2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Donde e_{17} y e_{45} representan $m_2 \cdot g$ y $m_1 \cdot g$ respectivamente, por tanto la matriz G es.

$$G = \begin{bmatrix} e_{56} - e_{30} + m_2 \cdot g \cdot l_1 \cos(\theta_1) + m_1 \cdot g \cdot l_1 \cos(\theta_1) \\ 0 \\ e_{30} + m_2 \cdot g \cdot l_2 \cos(\theta_2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Donde ademas $e_{56} - e_{30}$ representan el par neto aplicado al eslabón 1 y e_{30} representa el par neto aplicado al eslabón 2. En cuanto a la matriz de Coriolis C , puede obtenerse a través de los símbolos de Chistoffel aplicado a la matriz de inercias M [28].

$$M(\theta) = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12} & M_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1^2(m_1 + m_2) & l_1 l_2 m_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ l_1 l_2 m_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) & l_2^2 m_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{sea } \Delta = \theta_1 - \theta_2, \quad M_{11} = l_1^2(m_1 + m_2), \quad M_{12} = l_1 l_2 m_2 \cos \Delta, \quad M_{22} = l_2^2 m_2.$$

calculando las derivadas parciales de M_{ij} :

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{11}}{\partial \theta_1} &= 0, & \frac{\partial M_{11}}{\partial \theta_2} &= 0, \\ \frac{\partial M_{12}}{\partial \theta_1} &= -l_1 l_2 m_2 \sin \Delta, & \frac{\partial M_{12}}{\partial \theta_2} &= +l_1 l_2 m_2 \sin \Delta, \\ \frac{\partial M_{22}}{\partial \theta_1} &= 0, & \frac{\partial M_{22}}{\partial \theta_2} &= 0. \end{aligned}$$

$$\text{Los símbolos de Christoffel de 1 : } \Gamma_{ijk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial M_{ij}}{\partial \theta_k} + \frac{\partial M_{ik}}{\partial \theta_j} - \frac{\partial M_{jk}}{\partial \theta_i} \right).$$

C culo de los términos simb licos de Christoffel no nulos:

$$\begin{aligned} \Gamma_{1,2,2} &= \frac{1}{2} (\partial_{\theta_2} M_{12} + \partial_{\theta_2} M_{12} - \partial_{\theta_1} M_{22}) = l_1 l_2 m_2 \sin \Delta, \\ \Gamma_{2,1,1} &= \frac{1}{2} (\partial_{\theta_1} M_{21} + \partial_{\theta_1} M_{21} - \partial_{\theta_2} M_{11}) = -l_1 l_2 m_2 \sin \Delta. \end{aligned}$$

$$\text{por tanto, la matriz de Coriolis es: } C_{ij}(\theta, \dot{\theta}) = \sum_{k=1}^2 \Gamma_{ijk} \dot{\theta}_k.$$

Por componentes:

$$\begin{aligned} C_{11} &= 0, \\ C_{12} &= \Gamma_{1,2,1} \dot{\theta}_1 + \Gamma_{1,2,2} \dot{\theta}_2 = 0 + (l_1 l_2 m_2 \sin \Delta) \dot{\theta}_2 = l_1 l_2 m_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2, \\ C_{21} &= \Gamma_{2,1,1} \dot{\theta}_1 + \Gamma_{2,1,2} \dot{\theta}_2 = (-l_1 l_2 m_2 \sin \Delta) \dot{\theta}_1 + 0 = -l_1 l_2 m_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1, \\ C_{22} &= 0. \end{aligned}$$

$$C(\theta, \dot{\theta}) = \begin{pmatrix} 0 & l_1 l_2 m_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2 \\ -l_1 l_2 m_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.13. Robot manipulador de 3 eslabones en Bond Graph

El diagrama de este manipulador, se obtiene al colocar 3 veces el diagrama en BG de un solo eslabón, en forma de pilar, o bien el diagrama del robot de 2 eslabones, añadir un eslabón extra, como el diagrama es relativamente grande, se parte en dos para su ilustración, en la figura 3.22 se muestran los dos primeros eslabones, mientras que en la figura 3.21 se muestra el eslabón final, que va encima de los dos primeros eslabones de la misma forma conectado mediante una unión 0 para evitar conflictos de causalidad.

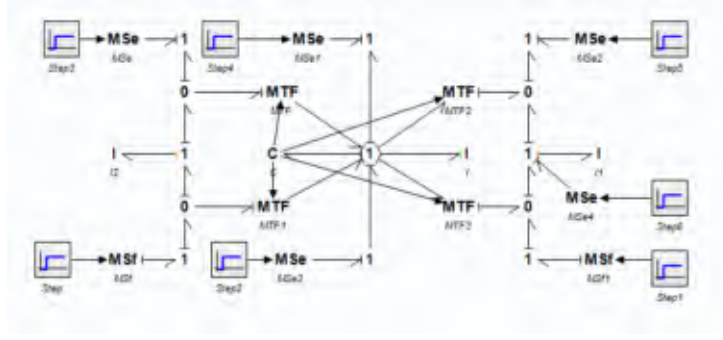


Figura 3.21: Parte superior del robot

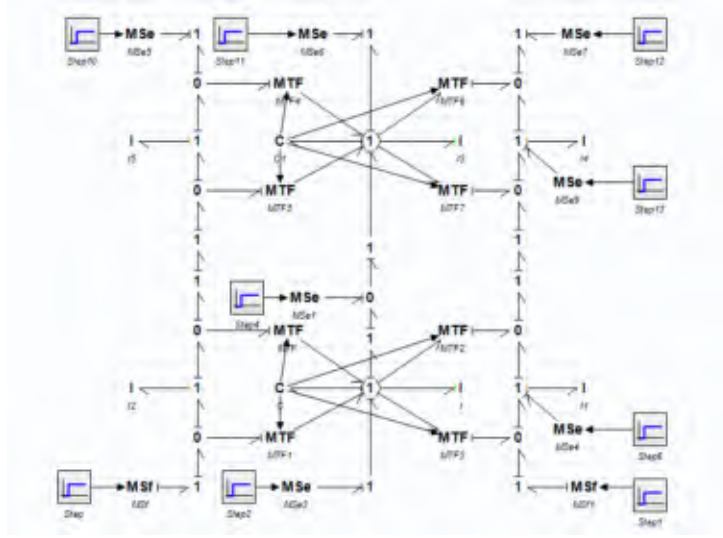


Figura 3.22: Parte inferior del robot

Cada eslabón tiene asociado su masa distribuida en los ejes absolutos x e y , así como su elemento de rigidez y de inercia asociados a sus centros de masa respectivos, además de considerar la fuerza de gravedad por su masa como una fuente de esfuerzo, colocadas en el eje absoluto y del centro de masa. Enumerando cada elemento en causalidad integral, empezando con el eslabón 1, es decir enumerando su elemento de momento de inercia como el primero, posterior su elemento de rigidez, seguido de su masa distribuida en x y después su masa distribuida en y , se consigue tener los vectores clave de los elementos en causalidad integral y en causalidad derivativa, así como las entradas [23].

$$x = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{bmatrix}, \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} f_1 \\ e_2 \\ f_3 \\ e_4 \\ f_5 \\ e_6 \end{bmatrix}, \quad u = [e_{13} \ e_{14} \ e_{15} \ e_{16} \ e_{17} \ e_{18} \ e_{19} \ e_{20} \ e_{21} \ f_{22} \ f_{23}]^T.$$

$$x_d = \begin{bmatrix} p_7 \\ p_8 \\ p_9 \\ p_{10} \\ p_{11} \\ p_{12} \end{bmatrix}, \quad \dot{x}_d = \begin{bmatrix} e_7 \\ e_8 \\ e_9 \\ e_{10} \\ e_{11} \\ e_{12} \end{bmatrix}, \quad z_d = \begin{bmatrix} f_7 \\ f_8 \\ f_9 \\ f_{10} \\ f_{11} \\ f_{12} \end{bmatrix},$$

Mientras que las relaciones constitutivas para este robot son las siguientes.

$$F = \begin{bmatrix} \frac{1}{J_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{J_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{J_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_3} \end{bmatrix}, \quad F_d = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_{x1}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_{y1}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{m_{x2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m_{y2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m_{x3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m_{y3}} \end{bmatrix}.$$

En este caso, al igual que los anteriores robots de menor número de eslabones, la relación constitutiva $L = 0$ porque no existen elementos de resistencia o de disipación que provoquen que el sistema sea no conservativo. Esto tiene como consecuencia que solo tengamos las matrices de estructura unión cuyos índices sean distintos de 2, es decir.

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ f_2 \\ e_3 \\ f_4 \\ e_5 \\ f_6 \\ f_7 \\ f_8 \\ f_9 \\ f_{10} \\ f_{11} \\ f_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{13} & s_{14} \\ s_{31} & s_{33} & s_{24} \\ s_{41} & s_{43} & s_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ e_2 \\ f_3 \\ e_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ e_{13} \\ e_{14} \\ e_{15} \\ e_{16} \\ e_{17} \\ e_{18} \\ e_{19} \\ e_{20} \\ e_{21} \\ f_{22} \\ f_{23} \\ e_7 \\ e_8 \\ e_9 \\ e_{10} \\ e_{11} \\ e_{12} \end{bmatrix}$$

Sin embargo, como tampoco se tiene alguna salida deseada, la fila s_{3i} también resulta inexistente en este caso. Al aplicar el análisis de estructura unión a través de las ecuaciones

de conservación, se tienen las siguientes matrices.

$$\begin{aligned}
s_{11} &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \\
s_{13} &= \begin{bmatrix} 1 & l_1 \cos \theta_1 & -1 & l_1 \cos \theta_1 & 0 & l_1 \cos \theta_1 & -l_1 \sin \theta_1 & 0 & l_1 \cos \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_2 \cos \theta_2 & -1 & l_2 \cos \theta_2 & -l_2 \sin \theta_2 & 0 & l_2 \cos \theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & l_3 \cos \theta_3 & -l_3 \sin \theta_3 & 1 & l_3 \cos \theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
s_{14} &= \begin{bmatrix} l_1 \sin \theta_1 & -l_1 \cos \theta_1 & l_1 \sin \theta_1 & -l_1 \cos \theta_1 & l_1 \sin \theta_1 & -l_1 \cos \theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_2 \sin \theta_2 & -l_2 \cos \theta_2 & l_2 \sin \theta_2 & -l_2 \cos \theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & l_3 \sin \theta_3 & -l_3 \cos \theta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
s_{41} &= \begin{bmatrix} -l_1 \sin \theta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_1 \cos \theta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -l_1 \sin \theta_1 & 0 & -l_2 \sin \theta_2 & 0 & 0 & 0 \\ l_1 \cos \theta_1 & 0 & l_2 \cos \theta_2 & 0 & 0 & 0 \\ -l_1 \sin \theta_1 & 0 & -l_2 \sin \theta_2 & 0 & -l_3 \sin \theta_3 & 0 \\ l_1 \cos \theta_1 & 0 & l_2 \cos \theta_2 & 0 & l_3 \cos \theta_3 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Teniendo estas matrices podemos calcular la matriz de estados A , y la matriz de entradas B , sin embargo como es un sistema con elementos en causalidad derivativa, se tiene que calcular la matriz E , entonces obteniendo dichas matrices se llega a las siguientes

expresiones [12].

$$E = \begin{bmatrix} \frac{j_1 + l_1^2 m_1 + l_1^2 m_2 + l_1^2 m_3}{j_1} & 0 & \frac{l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)(m_2 + m_3)}{j_2} & 0 & \frac{l_1 l_3 m_3 \cos(\theta_1 - \theta_3)}{j_3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)(m_2 + m_3)}{j_1} & 0 & \frac{j_2 + l_2^2 m_2 + l_2^2 m_3}{j_2} & 0 & \frac{l_2 l_3 m_3 \cos(\theta_2 - \theta_3)}{j_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{l_1 l_3 m_3 \cos(\theta_1 - \theta_3)}{j_1} & 0 & \frac{l_2 l_3 m_3 \cos(\theta_2 - \theta_3)}{j_2} & 0 & \frac{m_3 l_3^2 + j_3}{j_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{c_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{j_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{c_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{j_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{c_3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{j_3} & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & l_1 \cos \theta_1 & -1 & l_1 \cos \theta_1 & 0 & l_1 \cos \theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_2 \cos \theta_2 & -1 & l_2 \cos \theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & l_3 \cos \theta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En caso de la matriz B , las entradas de interés son solo las primeras 6 columnas, ya que representan los 3 pares aplicados uno a cada articulación y el peso de cada eslabón. Para llegar a la forma en donde aparecen los termino de Euler-Lagrange, se necesita llevar al sistema de la forma $\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u \rightarrow E \cdot F^{-1} \cdot \dot{z} = A \cdot F^{-1} \cdot z + B \cdot u$. Entonces estas matrices son las siguientes.

$$E \cdot F^{-1} = \begin{bmatrix} j_1 + l_1^2 m_1 + l_1^2 m_2 + l_1^2 m_3 & 0 & l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)(m_2 + m_3) & 0 & l_1 l_3 m_3 \cos(\theta_1 - \theta_3) & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)(m_2 + m_3) & 0 & j_2 + l_2^2 m_2 + l_2^2 m_3 & 0 & l_2 l_3 m_3 \cos(\theta_2 - \theta_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 \\ l_1 l_3 m_3 \cos(\theta_1 - \theta_3) & 0 & l_2 l_3 m_3 \cos(\theta_2 - \theta_3) & 0 & m_3 l_3^2 + j_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot F^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B \cdot u = \begin{bmatrix} e_{13} - e_{15} + e_{14} l_1 \cos(x_1) + e_{16} l_1 \cos(x_1) + e_{18} l_1 \cos(x_1) \\ 0 \\ e_{15} - e_{17} + e_{16} l_2 \cos(x_2) + e_{18} l_2 \cos(x_2) \\ 0 \\ e_{17} + e_{18} l_3 \cos(x_3) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pero, $e_{18} = m_3 \cdot g$, $e_{16} = m_2 \cdot g$ y $e_{14} = m_1 \cdot g$ mientras que e_{13} , e_{15} y e_{17} son las entradas a las articulaciones 1, 2 y 3 respectivamente. La matriz $A \cdot F^{-1}$ esta multiplicada por el vector z , el resultado de esta multiplicación es entonces.

$$A \cdot F^{-1} \cdot z = \begin{bmatrix} -e_2 \\ f_1 \\ -e_4 \\ f_3 \\ -e_6 \\ f_5 \end{bmatrix}$$

$$B \cdot u = \begin{bmatrix} e_{13} - e_{15} + m_1 \cdot g \cdot l_1 \cos(\theta_1) + m_2 \cdot g \cdot l_1 \cos(\theta_1) + m_3 \cdot g \cdot l_1 \cos(\theta_1) \\ 0 \\ e_{15} - e_{17} + m_2 \cdot g \cdot l_2 \cos(\theta_2) + m_3 \cdot g \cdot l_2 \cos(\theta_2) \\ 0 \\ e_{17} + m_3 \cdot g \cdot l_3 \cos(\theta_3) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Los términos de $-e_2$, $-e_4$ y $-e_6$ en conjunto con los términos $e_{13} - e_{15}$, $e_{15} - e_{17}$ y e_{17} forman las entradas τ_1 , τ_2 y τ_3 respectivamente, porque son variables de esfuerzo y representan par. Al considerar los momentos de inercia iguales a cero, se obtiene que la matriz $E \cdot F^{-1} = M$ osea a la Matriz de Inercia [12], [23].

$$E \cdot F^{-1} = \begin{bmatrix} l_1^2(m_1 + m_2 + m_3) & 0 & l_1 l_2(m_2 + m_3) \cos(\theta_1 - \theta_2) & 0 & l_1 l_3 m_3 \cos(\theta_1 - \theta_3) & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_1 l_2(m_2 + m_3) \cos(\theta_1 - \theta_2) & 0 & l_2^2(m_2 + m_3) & 0 & l_2 l_3 m_3 \cos(\theta_2 - \theta_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 \\ l_1 l_3 m_3 \cos(\theta_1 - \theta_3) & 0 & l_2 l_3 m_3 \cos(\theta_2 - \theta_3) & 0 & m_3 l_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix}$$

Para la matriz de Coriolis, los símbolos de Chistoffel son los siguientes:

$$c_{ijk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial M_{kj}}{\partial \theta_i} + \frac{\partial M_{ki}}{\partial \theta_j} - \frac{\partial M_{ij}}{\partial \theta_k} \right) \quad (3.61)$$

Para la matriz de inercia $\mathbf{M}(\theta)$ dada, los símbolos de Christoffel no nulos son:

$$\begin{aligned} c_{112} &= -\ell_1 \ell_2 (m_2 + m_3) \sin(\theta_1 - \theta_2) \\ c_{113} &= -\ell_1 \ell_3 m_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) \\ c_{121} &= c_{112} \\ c_{131} &= c_{113} \\ c_{211} &= \ell_1 \ell_2 (m_2 + m_3) \sin(\theta_1 - \theta_2) \\ c_{223} &= -\ell_2 \ell_3 m_3 \sin(\theta_2 - \theta_3) \\ c_{232} &= c_{223} \\ c_{311} &= \ell_1 \ell_3 m_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) \\ c_{322} &= \ell_2 \ell_3 m_3 \sin(\theta_2 - \theta_3) \\ c_{332} &= c_{322} \end{aligned}$$

Todos los demás símbolos de Christoffel son cero. Los términos se pueden agrupar como:

$$\begin{aligned}
c_{1jk} : & \quad \begin{cases} c_{12} = c_{13} = -\ell_1 \ell_2 (m_2 + m_3) \sin(\theta_1 - \theta_2) & \text{para } k = 2 \\ c_{13} = c_{31} = -\ell_1 \ell_3 m_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) & \text{para } k = 3 \end{cases} \\
c_{2jk} : & \quad \begin{cases} c_{21} = \ell_1 \ell_2 (m_2 + m_3) \sin(\theta_1 - \theta_2) & \text{para } k = 1 \\ c_{23} = c_{32} = -\ell_2 \ell_3 m_3 \sin(\theta_2 - \theta_3) & \text{para } k = 3 \end{cases} \\
c_{3jk} : & \quad \begin{cases} c_{31} = \ell_1 \ell_3 m_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) & \text{para } k = 1 \\ c_{32} = c_{33} = \ell_2 \ell_3 m_3 \sin(\theta_2 - \theta_3) & \text{para } k = 2 \end{cases}
\end{aligned}$$

Donde se ha utilizado la simetría $c_{ijk} = c_{ikj}$ [16], [28].

3.14. Linealización por retroalimentación de estados

En secciones pasadas se explicó el concepto de retroalimentación de estados, la cual es una forma de control de sistemas lineales, sin embargo en la realidad la gran mayoría de sistemas son no lineales, lo que complica a niveles exponenciales su control, debido a que no es predecible su respuesta, además de que varían en torno a puntos de equilibrio, pudiendo ser inestables o estables al rededor del mismo punto. Para reducir la dificultad de estos sistemas, y poder controlarlo, se aplica la linealización, a través de las entradas, para el robot de un solo eslabón, se tiene un solo termino no lineal, y una entrada, por lo que la entrada replicara el termino no lineal con signo opuesto, haciendo que matemáticamente se elimine y se obtenga un modelo lineal, esto matemáticamente resulta en lo siguiente [16].

$$m_1 \cdot l_1^2 \cdot \ddot{\theta}_1 + g \cdot m_1 \cdot \cos(\theta_1) \cdot l_1 = \tau_1$$

Al comparar la ley de movimiento obtenida del manipulador de un eslabón, con la ley de movimiento general resulta en que:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M} &= m_1 l^2 \\
\mathbf{C} &= 0 \\
\mathbf{G} &= m_1 g l \cos \theta_1 \\
\tau_1 &= \mathbf{G} - \mathbf{M}(k_d \dot{\theta}_1 + k_p(\theta_1 - \theta_{1d}))
\end{aligned}$$

Donde kd, kp, θ_{1d} , son las constantes que aparecen también en la retroalimentación de estados de sistemas lineales, sin embargo el ángulo θ_{1d} es el ángulo deseado, o en otras palabras es el ángulo de seguimiento del ángulo θ_1 , el resultado de sustituir esta entrada en la ley de movimiento del manipulador de un eslabón, se llega a la siguiente expresión lineal.

$$\ddot{\theta}_1 + k_d \cdot \dot{\theta}_1 + k_p \cdot (\theta_1 - \theta_{1d}) = 0$$

Ahora que se tiene un sistema lineal, se pueden encontrar los valores de las constantes kp y kd , de tal manera que para este caso estas constantes resultan ser $kd = p_1 + p_2$ y

$kp = p_1 \cdot p_2$, donde p_1 y p_2 , son los polos deseados del sistema, como se vio en la explicación de retroalimentación de estados lineal, los sistemas poseen polos y ceros naturales, sin embargo, se pueden modificar por constantes kp y kd haciendo que se tengan polos deseados, entonces este concepto es el mismo en este método. De modo que si $p_1 = p_2 = 2$, se obtiene que $k_p = 4$ y $k_d = 4$, entonces el polinomio deseado es $(s + 2) \cdot (s + 2)$, cuyas raíces son $s_1 = s_2 = -2$ en el dominio de Laplace, y como naturalmente el nuevo sistema linealizado tiene su polinomio característico como $s^2 + kd \cdot s + kp$, al comparar ambos polinomios se llega a las equivalencias antes mencionadas de kp y kd . Por tanto al sustituir las constantes resulta que [28]:

$$\ddot{\theta}_1 + 4 \cdot \dot{\theta}_1 + 4 \cdot (\theta_1 - \theta_{1d}) = 0$$

Mientras que en el dominio de Laplace:

$$\frac{\theta_1(s)}{\theta_{1d}(s)} = \frac{kp}{s^2 + kd \cdot s + kp}$$

Al resolver cualquiera de ambos sistemas y con un ángulo deseado de $1rad$, se obtiene grafica de la figura 3.23.

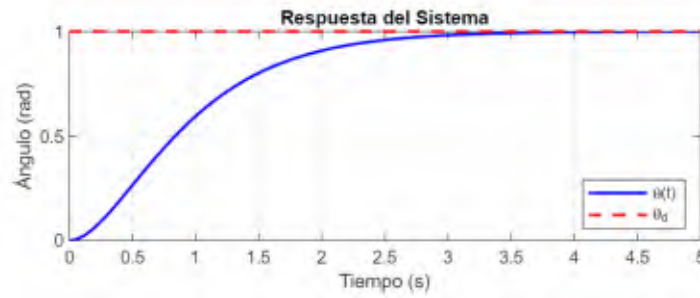


Figura 3.23: Retroalimentación de estados del sistema linealizado

En la figura 3.23 se observa que el ángulo deseado es una constante y que el ángulo θ_1 parte de cero grados y sigue al ángulo deseado hasta alcanzarlo y convergiendo asintóticamente a su valor.

3.15. Linealización por retroalimentación de estados en Bond Graph

Replicar la linealización por retroalimentación de estados en Bond Graph es relativamente sencillo, puesto que en el diagrama de Bond Graph, se tienen implícitamente las variables de θ_1 y su derivada $\dot{\theta}_1$, por lo que se genera un bloque constante, que reciba estados variables y en su interior se defina la expresión de τ_1 , vista anteriormente. El modelo en BG de este sistema con la linealización por retroalimentación queda entonces como se ilustra en la figura 3.24 [21], [24].

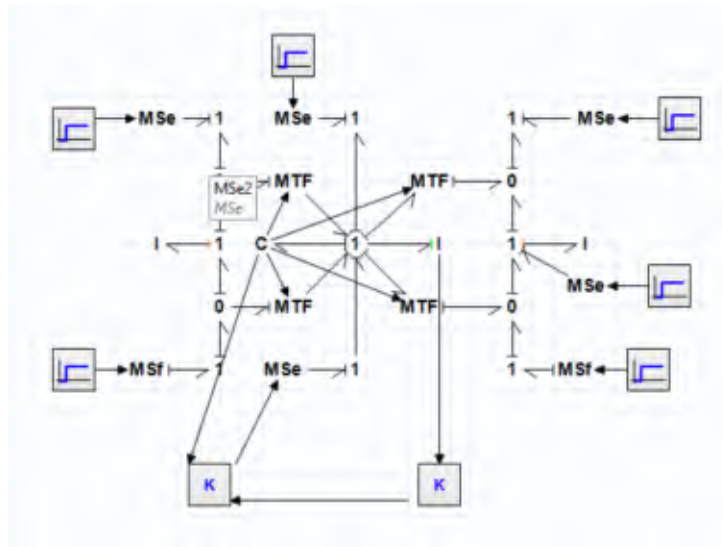


Figura 3.24: Retroalimentación de estados del sistema linealizado en BG

El contenido del bloque de dos entradas aparece en la figura 3.25.

```
constants
  real l = 1;
  real m = 1;
  real g = 9.81;
parameters
  //real K = 1.0; // gain
  real kp = 6;
  real kd = 5;
  real qd = 1;
equations
  tao = m*g*l*cos(q) - m*l^2*(kd*dotq + kp*(q-qd));
```

Figura 3.25: Contenido del bloque k

Mientras que el contenido del otro bloque k, en la figura 3.26

```
constants
  real j = 1;
parameters
  real K = 1.0; // gain
equations
  dotq = 1/j*q;
```

Figura 3.26: Contenido del bloque k

La simulación se muestra en la figura 3.27 con un ángulo deseado de 15 rad .

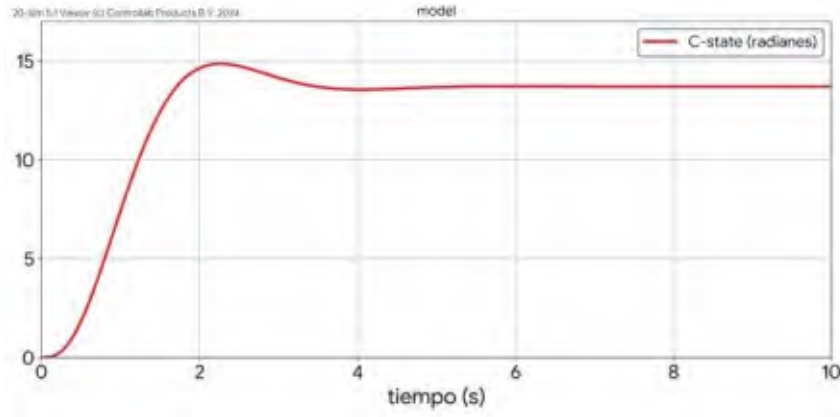


Figura 3.27: Respuesta de linealización y control en BG

Se observa que se acerca sin embargo no llega a ser idéntica a la solución numérica mediante la función analítica, esto es debido al método numérico de la simulación en BG, no es el mismo método numérico de solución y es complicado realizar sustituciones o modificaciones en los métodos de solución en el programa.

3.16. Linealización del manipulador de 2 eslabones planar

La linealización y el control de este robot es similar al visto anteriormente, sin embargo al tener dos eslabones el resultado de la linealización resulta en dos expresiones lineales desacopladas, pero es completamente correcto, debido a que desaparecen los términos no lineales. Se parte de que la ley de movimiento del manipulador es la siguiente:

$$\underbrace{\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta})\ddot{\boldsymbol{\theta}}}_{\text{Inercia}} + \underbrace{\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})\dot{\boldsymbol{\theta}}}_{\text{Coriolis/Centrífugas}} + \underbrace{\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta})}_{\text{Gravedad}} = \underbrace{\boldsymbol{\tau}}_{\text{Torques}}$$

Hay que tener en cuenta que como el manipulador es de dos eslabones, el tamaño de estas matrices y vectores es de 2×2 , 2×2 , 2×1 y 2×1 respectivamente, además de que el efecto Coriolis se desprecia, lo que significa que la matriz de Coriolis es igual a cero. El sistema en lazo abierto es entonces:

$$\begin{aligned}\ddot{\boldsymbol{\theta}} &= \mathbf{M}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau} - \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{C} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{G} \\ \ddot{\boldsymbol{\theta}} &= \mathbf{M}^{-1} \cdot (\boldsymbol{\tau} - \mathbf{G})\end{aligned}$$

Y por tanto la ley de control es [16]:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{G} - \mathbf{M} \cdot (k_d \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} + k_p \cdot (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_d))$$

Debido a las dimensiones del sistema, las constantes k_d y k_p , ya no serán solo valores escalares, sino serán vectores escalares de dimensiones 2×1 . Al operar, se llega a que las entradas τ_1 y τ_2 son entonces:

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I_1 + I_2 & I_2 \\ I_2 & I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$$

Donde k_1 y k_2 son:

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{d1} \cdot \dot{\theta}_1 + k_{p1} \cdot (\theta_1 - \theta_{1d}) \\ k_{d2} \cdot \dot{\theta}_2 + k_{p2} \cdot (\theta_2 - \theta_{2d}) \end{bmatrix}$$

Esto quiere decir que habrán dos pares de k_p y k_d por cada eslabón, así como dos ángulos deseados θ_{1d} y θ_{2d} . Al sustituir estas entradas en la expresión de lazo abierto del sistema, operando y reordenando términos, se llega a que el sistema no lineal, equivale a dos sistemas lineales desacoplados:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{1d} & 0 \\ 0 & k_{2d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{1p} \\ k_{2p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 - \theta_{1d} \\ \theta_2 - \theta_{2d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Entonces las ecuaciones son:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_1 + k_{1d} \dot{\theta}_1 + k_{1p} (\theta_1 - \theta_{1d}) &= 0, \\ \ddot{\theta}_2 + k_{2d} \dot{\theta}_2 + k_{2p} (\theta_2 - \theta_{2d}) &= 0. \end{aligned}$$

Mientras que en el dominio de Laplace:

$$\begin{aligned} \theta_1(s)(s^2 + k_{d1}s + k_{p1}) &= k_{p1}\theta_{d1}(s) \\ \theta_2(s)(s^2 + k_{d2}s + k_{p2}) &= k_{p2}\theta_{d2}(s) \end{aligned}$$

En función de transferencia:

$$\begin{aligned} \frac{\theta_1(s)}{\theta_{d1}(s)} &= \frac{k_{p1}}{s^2 + k_{d1}s + k_{p1}} \\ \frac{\theta_2(s)}{\theta_{d2}(s)} &= \frac{k_{p2}}{s^2 + k_{d2}s + k_{p2}} \end{aligned}$$

Ahora se seleccionan dos pares de polos deseados, deben ser negativos para que se tenga estabilidad:
 $p_{11}, p_{12} < 0, \quad p_{21}, p_{22} < 0$.

Los polinomios deseados en s :

$$\begin{aligned} D_1(s) &= (s - p_{11})(s - p_{12}) = s^2 - (p_{11} + p_{12})s + p_{11}p_{12}, \\ D_2(s) &= (s - p_{21})(s - p_{22}) = s^2 - (p_{21} + p_{22})s + p_{21}p_{22}. \end{aligned}$$

Al igualar estos dos polinomios deseados con el característico resulta que:

$$\begin{aligned} s^2 + k_{1d}s + k_{1p} &= D_1(s) \implies \begin{cases} k_{1d} = -(p_{11} + p_{12}), \\ k_{1p} = p_{11}p_{12}, \end{cases} \\ s^2 + k_{2d}s + k_{2p} &= D_2(s) \implies \begin{cases} k_{2d} = -(p_{21} + p_{22}), \\ k_{2p} = p_{21}p_{22}. \end{cases} \end{aligned}$$

Si los polos son:

$$\begin{aligned} p_{11} &= -2 + 1i \\ p_{12} &= -2 - 1i \\ p_{21} &= -3 \\ p_{22} &= -4 \end{aligned}$$

Eso significa que las constantes son:

$$k_{1d} = -(p_{11} + p_{12}) = 4$$

$$k_{1p} = p_{11} \cdot p_{12} = 5$$

$$k_{2d} = -(p_{21} + p_{22}) = 7$$

$$k_{2p} = p_{21} \cdot p_{22} = 12$$

Y las funciones de transferencia entonces:

$$\frac{\theta_1(s)}{\theta_{d1}(s)} = \frac{5}{s^2 + 4s + 5}$$

$$\frac{\theta_2(s)}{\theta_{d2}(s)} = \frac{12}{s^2 + 7s + 12}$$

Al simular las función de transferencia con valores de ángulos deseados de 5 y 3, se consiguen las siguientes gráficas de los ángulos θ_1 y θ_2 siguiendo a los ángulos deseados θ_{1d} y θ_{2d} , figuras 3.28 y 3.29.

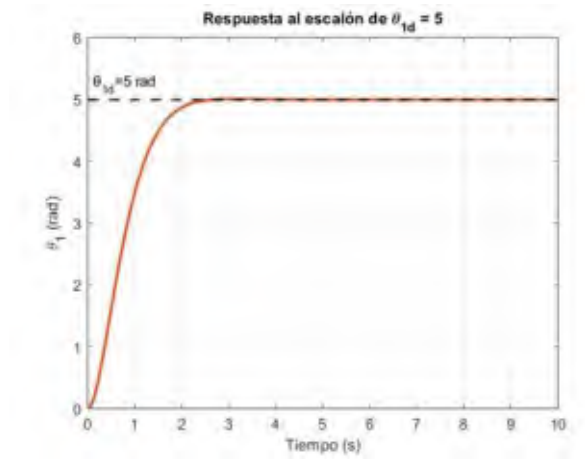


Figura 3.28: Control del ángulo del primer eslabón

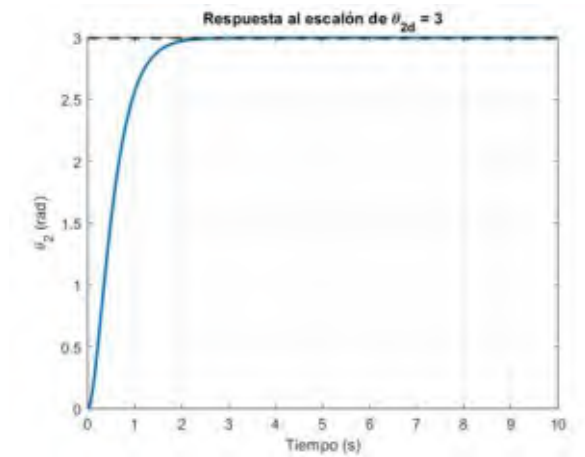


Figura 3.29: Control del ángulo del segundo eslabón

En ambas figuras, los ángulos θ_1 y θ_2 parten del origen, siguen y convergen asintóticamente a los ángulos θ_{1d} y θ_{2d}

3.17. Linealización y control del manipulador de 2 eslabones planar en Bond Graph

De manera similar a como se realizo para el de un solo eslabón, se tendrán bloques de ganancia k , cuyo interior se calculan los par de entradas necesarios para eliminar la no linealidad del sistema, pueden haber dos bloques k , uno por cada eslabón, sin embargo una forma mas simple y cómoda es realizarlo solo con un solo bloque. De manera que el diagrama en BG queda como se ilustra en la figura 3.30 [21].

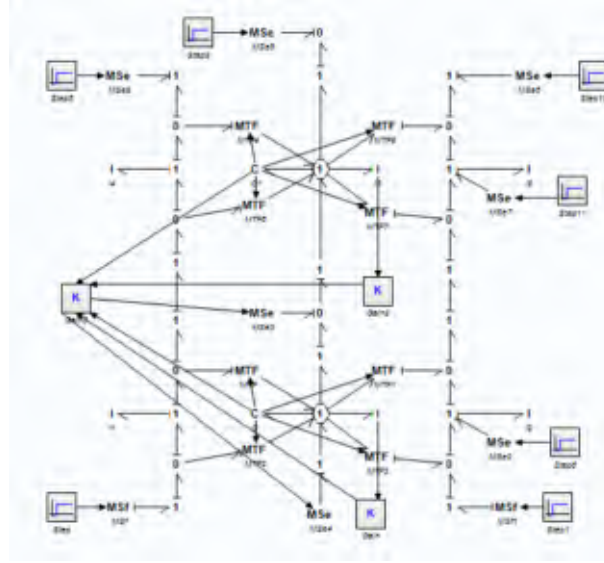


Figura 3.30: Linealización por retroalimentación en Bond Graph

En la figura 3.30 se observa que existen tres bloques k , de los cuales, los bloques que están conectados a los elementos de inercia I , son bloques que se utilizan para convertir la variable de estado x de los elementos de inercia, en variables de coenergía z , se tiene el estado de los elementos I , que es momento p , sin embargo visto anteriormente las entradas τ_1 y τ_2 están en función del ángulo y su derivada, por tanto si se tiene el estado x , se puede conocer la variable de coenergía z , tal que si x es momento, $\dot{x}$ es esfuerzo, y z es flujo, y esta variable de flujo, resulta ser la velocidad angular, es decir $\dot{\theta}$. Para la transformación ambos bloques k antes mencionados utilizan la relación $z = F \cdot x$. La programación de estos bloque se muestra en la figura 3.31 y 3.32

$$\begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1^2 \cdot g \cdot (m_1 + m_2) \cdot \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ l_2^2 \cdot g \cdot m_2 \cdot \cos(\theta_1) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} l_1^2 \cdot (m_1 + m_2) & l_1 \cdot l_2 \cdot m_2 \cdot \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ l_1 \cdot l_2 \cdot m_2 \cdot \cos(\theta_1 - \theta_2) & l_2^2 \cdot m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1^2 \cdot g \cdot (m_1 + m_2) \cdot \cos(\theta_1 - \theta_2) - l_1^2 \cdot (m_1 + m_2) \cdot k_1 - l_1 \cdot l_2 \cdot m_2 \cdot \cos(\theta_1 - \theta_2) \cdot k_2 \\ l_2^2 \cdot g \cdot m_2 \cdot \cos(\theta_1) - l_1 \cdot l_2 \cdot m_2 \cdot \cos(\theta_1 - \theta_2) \cdot k_1 - l_2^2 \cdot m_2 \cdot k_2 \end{pmatrix}$$

```
parameters
  real j = 1.0; // gain
equations
  dotteta = 1/j * teta;
```

Figura 3.31: Programación del bloque k1

```

parameters
    real j2 = 1.0;    // gain
equations
    dotteta2 = 1/j2 * teta2;

```

Figura 3.32: Programación del bloque k2

El bloque k con mas entradas, es el bloque principal de control y de linealización, este bloque tiene de entradas los estados θ_1 y θ_2 , ademas de sus derivadas $\dot{\theta}_1$ y $\dot{\theta}_2$, también posee dos salidas que alimentan a las fuentes de esfuerzo que representan el par de entrada a la articulación 1 y 2. La programación de este bloque se muestra en la figura 3.33.

```

constants
    real l = 1;
    real l2 = 1;
    real m = 1;
    real m2 = 1;
    real g = 9.81;
parameters
    real kp = 5;
    real kd = 4;
    real teta0 = 20;
    real kp2 = 12;
    real kd2 = 7;
    real teta02 = 50;
variables
    real k1;
    real k2;
equations
    k1 = (l*dotteta+kp*(teta-teta0));
    k2 = (l2*dotteta2+kd2*(teta2-teta02));
    tao1 = (m*m2)*g*cos(teta)-(m+m2)*l^2*k1-l^2*m2*cos(teta-teta2)*(k2);
    tao2 = (m2)*g*l2*cos(teta2)-l^2*m2*cos(teta-teta2)*(k1)-l^2*m2*k2;

```

Figura 3.33: Programación del bloque k principal

Las expresiones de k_1 y k_2 son las mismas vistas en la sección anterior, así como el par calculado. Al simular con los mismos valores del vector k_p y k_d , modificando los ángulos deseados a 20 y 10 se obtienen la gráfica de la figura 3.34.

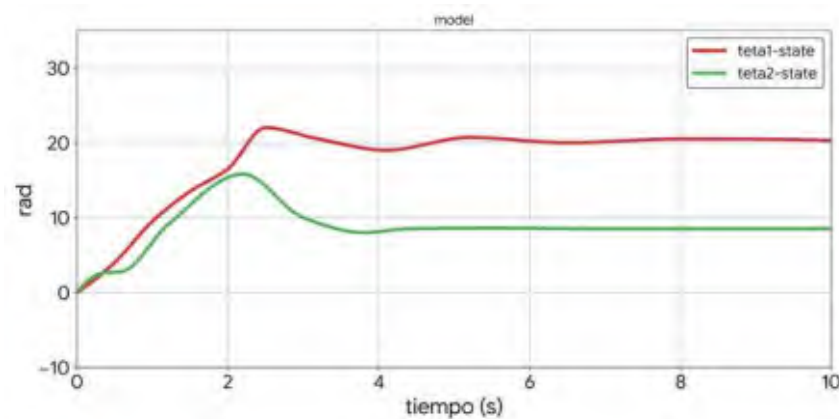


Figura 3.34: Programación del bloque k principal

Modificando los ángulos deseados a 40 y 10, en la figura 3.35 se muestra la grafica de los ángulos θ_1 y θ_2 .

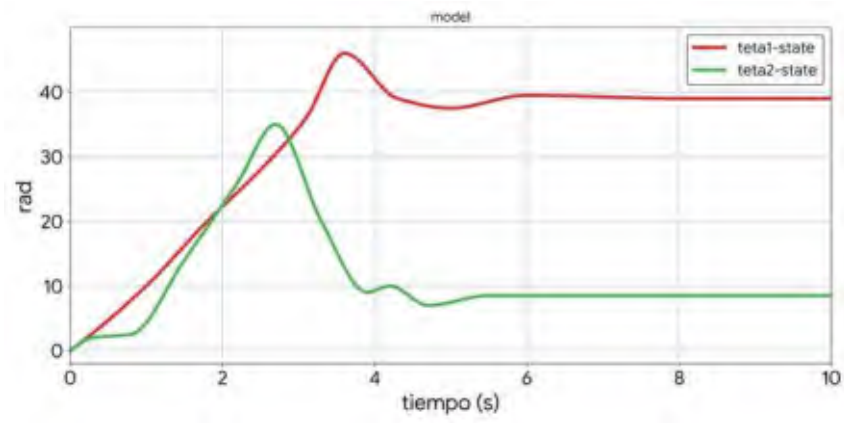


Figura 3.35: Programación del bloque k principal

Capítulo 4

Modelado en Bond Graph de Robots Manipuladores

4.1. Las ecuaciones de Euler

Considere un cuerpo en movimiento en el espacio (figura 4.1), este cuerpo tiene un centro de masa que concentra toda su materia en un punto, como dicho sistema se esta moviendo en el espacio, el marco de referencia xyz asociado al centro de masa, también esta en movimiento, al igual que los marcos de velocidad lineal y velocidad angular, sin embargo, el marco de referencia inercial XYZ , es un marco que esta fijo por lo que carece de velocidad lineal, angular y desprecia efectos de coriolis, centrifuga etc., porque no esta dentro del sistema, y por tanto no experimenta estos efectos.

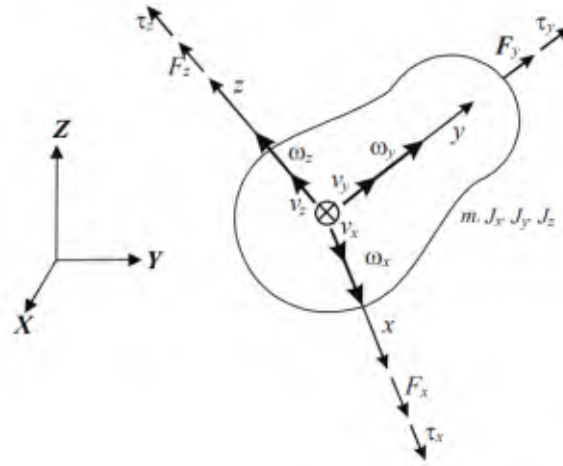


Figura 4.1: Cuerpo cualquiera en movimiento

La velocidad expresada en términos del marco de referencia inercial, resulta en componentes puramente de velocidad lineal, es decir $\dot{X}$, $\dot{Y}$ y $\dot{Z}$ y por tanto la fuerza F , que es la derivada del momento de inercia lineal p , resulta en directamente $F = \frac{dp}{dt}$, sin embargo

respecto al marco de referencia rotacional esto cambia, debido al efecto rotacional de los propios marcos de referencia, esto se expresa como:

$$F = \frac{dp}{dt} + \omega \times p$$

$$p = m \cdot v$$

Donde el producto cruz entre ω y p representa el efecto coriolis generado por la rotación del cuerpo. De forma similar para el par, el par respecto al marco de referencia inercial es simplemente $\tau = \frac{dh}{dt}$, sin embargo respecto al marco de referencia rotacional xyz esto se define como:

$$\tau = \frac{dh}{dt} + \omega \times h$$

$$h = J \cdot \omega$$

Donde h es el momento angular del cuerpo, J es el momento de inercia del cuerpo. Al expandir en ambos casos (fuerza y par), se obtienen las componentes de la fuerza y el par:

$$F_x = m\dot{v}_x + m(\omega_y v_z - \omega_z v_y)$$

$$F_y = m\dot{v}_y + m(\omega_z v_x - \omega_x v_z)$$

$$F_z = m\dot{v}_z + m(\omega_x v_y - \omega_y v_x)$$

$$\tau_x = J_{xx}\dot{\omega}_x + (J_{zz} - J_{yy})\omega_y\omega_z$$

$$\tau_y = J_{yy}\dot{\omega}_y + (J_{xx} - J_{zz})\omega_z\omega_x$$

$$\tau_z = J_{zz}\dot{\omega}_z + (J_{yy} - J_{xx})\omega_x\omega_y$$

A estas ecuaciones anteriores, se les denominan ecuaciones de Euler, estas ecuaciones solo pueden resolverse para casos específicos y por tanto no tienen una solución general, sin embargo es un punto clave para los anillos de Euler en Bond Graph. En la figura 4.2 se muestran los dos anillos de Euler, uno para el movimiento lineal y otro para el movimiento rotacional.

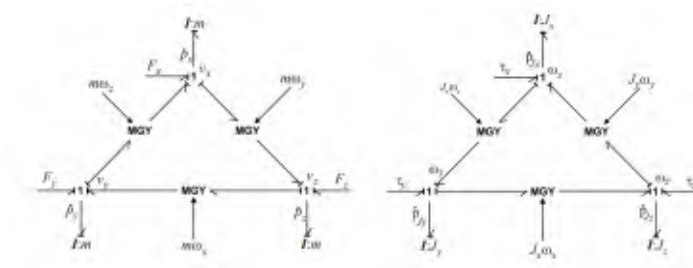


Figura 4.2: Anillos de Euler en Bond Graph

Al realiza el análisis de estructura unión a ambos anillos, resultan en las seis ecuaciones antes vistas.

4.2. Transformación de coordenadas

En un cuerpo rígido, los ejes de posición, velocidad y aceleración no están alineados, lo que supone un gran problema al momento de describir la dinámica del cuerpo, por

ello se requiere que estos ejes estén alineados respecto a un marco fijo, de manera que en el movimiento del cuerpo, estos mismos ejes sean descritos plenamente en este marco de referencia fijo. En Bond Graph existe un marco de referencia adicional, denominado marco de referencia generalizado o inercial, la característica de este marco de referencia es que es inmóvil, es decir no se mueve con el movimiento del cuerpo, sin embargo este marco de referencia describe toda la dinámica del cuerpo, como se vio en el capítulo anterior con los robots manipuladores de 1, 2 y 3 eslabones. Para que los ejes del cuerpo en movimiento se alinean con el marco de referencia generalizado, se requiere de las rotaciones básicas al rededor de los ejes de posición xyz . Las rotaciones básicas son las siguientes.

$$\mathbf{R}_x(\Phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Phi & -\sin \Phi \\ 0 & \sin \Phi & \cos \Phi \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_y(\Theta) = \begin{bmatrix} \cos \Theta & 0 & \sin \Theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \Theta & 0 & \cos \Theta \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_z(\Gamma) = \begin{bmatrix} \cos \Gamma & -\sin \Gamma & 0 \\ \sin \Gamma & \cos \Gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si esta idea es correcta, entonces se deben poder conseguir estos mismos ejes partiendo del marco de referencia fijo, y esta es la idea principal, esto se ilustra en la figura 4.3.

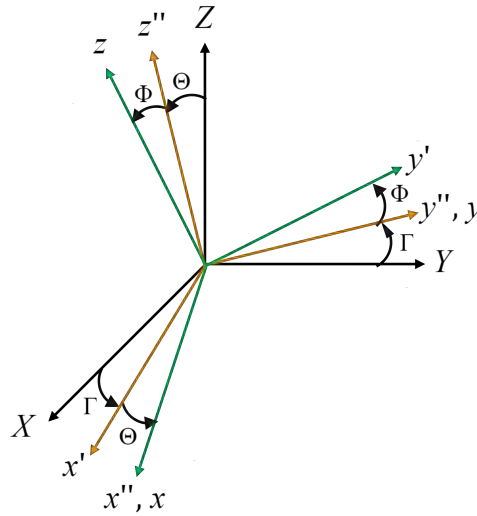


Figura 4.3: Rotación de los ejes del cuerpo cualquiera

Al aplicar una rotación sobre el eje Z , se obtiene el marco de referencia primado es decir $\dot{x}$, $\dot{y}$ y $\dot{z}$, al rotar ahora este marco de referencia primado respecto a su eje $\dot{y}$, se obtiene el marco de referencia biprimado $\ddot{x}$, $\ddot{y}$ y $\ddot{z}$ al final, se rota este ultimo marco de referencia ahora sobre su eje $\ddot{x}$ y se obtiene el marco de referencia de posición x , y y z , utilizando el ángulo Φ para describir la rotación sobre el eje $\ddot{x}$, el ángulo Θ para describir la rotación sobre el eje $\dot{y}$, y el ángulo Γ sobre el eje Z .

Al estar los ejes conectados en un mismo punto, y al aplicar solo rotaciones se tienen velocidades y aceleraciones angulares, nada de velocidades lineales de momento. Entonces,

se puede describir que el marco de referencia primado puede conseguirse como:

$$\begin{bmatrix} \omega_{\dot{x}} \\ \omega_{\dot{y}} \\ \omega_{\dot{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Phi & -\sin \Phi \\ 0 & \sin \Phi & \cos \Phi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_X \\ \omega_Y \\ \omega_Z \end{bmatrix}$$

Del mismo modo los ejes aceleración angular:

$$\begin{bmatrix} \omega_{\ddot{x}} \\ \omega_{\ddot{y}} \\ \omega_{\ddot{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Theta & 0 & \sin \Theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \Theta & 0 & \cos \Theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_{\dot{x}} \\ \omega_{\dot{y}} \\ \omega_{\dot{z}} \end{bmatrix}$$

El marco x , y y z :

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Gamma & -\sin \Gamma & 0 \\ \sin \Gamma & \cos \Gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_{\ddot{x}} \\ \omega_{\ddot{y}} \\ \omega_{\ddot{z}} \end{bmatrix}$$

Esto quiere decir, que al aplicar una rotación sobre z , luego sobre y y por último sobre el eje x , partiendo del marco de referencia fijo, se obtiene directamente el marco xyz :

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Gamma & -\sin \Gamma & 0 \\ \sin \Gamma & \cos \Gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \Theta & 0 & \sin \Theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \Theta & 0 & \cos \Theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Phi & -\sin \Phi \\ 0 & \sin \Phi & \cos \Phi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_X \\ \omega_Y \\ \omega_Z \end{bmatrix}$$

Esto quiere decir entonces que, ocurre lo mismo con la velocidad lineal, la fuerza y el par:

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Gamma & -\sin \Gamma & 0 \\ \sin \Gamma & \cos \Gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \Theta & 0 & \sin \Theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \Theta & 0 & \cos \Theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Phi & -\sin \Phi \\ 0 & \sin \Phi & \cos \Phi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_X \\ v_Y \\ v_Z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Gamma & -\sin \Gamma & 0 \\ \sin \Gamma & \cos \Gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \Theta & 0 & \sin \Theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \Theta & 0 & \cos \Theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Phi & -\sin \Phi \\ 0 & \sin \Phi & \cos \Phi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_X \\ F_Y \\ F_Z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Gamma & -\sin \Gamma & 0 \\ \sin \Gamma & \cos \Gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \Theta & 0 & \sin \Theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \Theta & 0 & \cos \Theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Phi & -\sin \Phi \\ 0 & \sin \Phi & \cos \Phi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tau_X \\ \tau_Y \\ \tau_Z \end{bmatrix}$$

Lo que se resume a:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} &= \mathbf{R}_z(\Gamma) \cdot \mathbf{R}_y(\Theta) \cdot \mathbf{R}_x(\Phi) \cdot \begin{bmatrix} \omega_X \\ \omega_Y \\ \omega_Z \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} &= \mathbf{R}_z(\Gamma) \cdot \mathbf{R}_y(\Theta) \cdot \mathbf{R}_x(\Phi) \cdot \begin{bmatrix} v_X \\ v_Y \\ v_Z \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} &= \mathbf{R}_z(\Gamma) \cdot \mathbf{R}_y(\Theta) \cdot \mathbf{R}_x(\Phi) \cdot \begin{bmatrix} F_X \\ F_Y \\ F_Z \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix} &= \mathbf{R}_z(\Gamma) \cdot \mathbf{R}_y(\Theta) \cdot \mathbf{R}_x(\Phi) \cdot \begin{bmatrix} \tau_X \\ \tau_Y \\ \tau_Z \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Esto quiere decir que, en Bond Graph se pueden obtener los marcos de referencia del cuerpo, a través de los transformadores modulados, donde la función escalar de cada transformador es cada fila de la matriz resultante de la multiplicación de las tres matrices de rotación, esto se ilustra en la figura 4.4.

$$\begin{array}{ccc}
 F_x \downarrow v_x & F_y \downarrow v_y & F_z \downarrow v_z \\
 MTF \longleftarrow \Phi \longrightarrow & MTF \\
 F_{x'} \downarrow v_{x'} & F_{y'} \downarrow v_{y'} & F_{z'} \downarrow v_{z'} \\
 MTF \longleftarrow \Theta \longrightarrow & MTF \\
 F_{x''} \downarrow v_{x''} & F_{y''} \downarrow v_{y''} & F_{z''} \downarrow v_{z''} \\
 MTF \longleftarrow \Gamma \longrightarrow & MTF \\
 F_x \downarrow v_x & F_y \downarrow v_y & F_z \downarrow v_z \\
 \tau_x \downarrow \omega_x & \tau_y \downarrow \omega_y & \tau_z \downarrow \omega_z
 \end{array}$$

Figura 4.4: Transformación de ejes en Bond Graph

4.3. Los anillos de Euler en Bond Graph para movimiento tridimensional

Anteriormente se explico el origen de las ecuaciones de Euler, que describen los movimientos máximos independientes que puede tener un cuerpo, sin embargo un cuerpo en la realidad, no posee plenamente y al mismo tiempo todos los movimientos independientes, puesto que físicamente sería un caos, y matemáticamente sería extremadamente complicado de resolver las ecuaciones, puesto que todo sería variable.

En Bond Graph, estas ecuaciones de Euler pueden representarse a través de lo que se llama, anillos de Euler 4.5

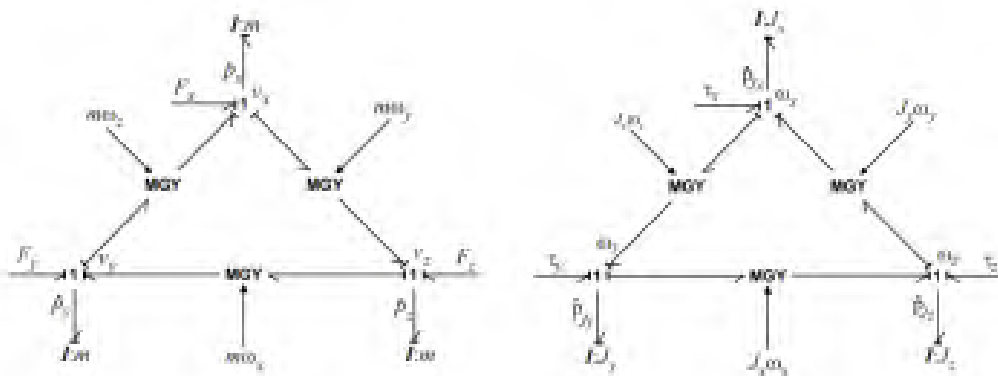


Figura 4.5: Anillos de Euler en Bond Graph

Al aplicar el análisis de la estructura unión al anillo de rotación, resulta en que solo existen las matrices s_{11} y s_{13} , esto es porque se esta analizando la forma más general, es decir los tres movimientos independientes, los giros en los tres ejes xyz , la matriz de

estructura unión es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -j_z w_z & j_y w_y & 1 & 0 & 0 \\ j_z w_z & 0 & -j_x w_x & 0 & 1 & 0 \\ -j_y w_y & j_x w_x & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

De modo que la matriz de estados $A = s_{11} \cdot F$ y la matriz de entradas $B = s_{13}$ y por tanto la estas matrices quedan de la siguiente manera:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{j_z w_z}{j_y} & \frac{j_y w_y}{j_z} \\ \frac{j_z w_z}{j_x} & 0 & -\frac{j_x w_x}{j_z} \\ -\frac{j_y w_y}{j_x} & \frac{j_x w_x}{j_y} & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Recordando que los vectores clave $\dot{x}$, x y z para este caso son:

$$x = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}, \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} e_4 \\ e_5 \\ e_6 \end{bmatrix}.$$

Y por tanto el espacio de estados queda de la siguiente manera:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{j_z w_z}{j_y} & \frac{j_y w_y}{j_z} \\ \frac{j_z w_z}{j_x} & 0 & -\frac{j_x w_x}{j_z} \\ -\frac{j_y w_y}{j_x} & \frac{j_x w_x}{j_y} & 0 \end{bmatrix} \cdot x + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot u$$

Sin embargo este espacio de estados esta en función de los estados x , es decir la integral de las velocidades angulares, y las ecuaciones de Euler están en función de las propias velocidades angulares, entonces se aplica la transformación $z = F \cdot x$ en donde al despejar x resulta que la matriz de estados debe ser multiplicada por la inversa de la matriz F , entonces el espacio de estados ahora queda en función de z , es decir.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -j_z w_z & j_y w_y \\ j_z w_z & 0 & -j_x w_x \\ -j_y w_y & j_x w_x & 0 \end{bmatrix} \cdot z + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot u$$

El resultado de multiplicar las matrices por los vectores, da la siguiente expresión.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} e_4 + f_3 j_y w_y - f_2 j_z w_z \\ e_5 - f_3 j_x w_x + f_1 j_z w_z \\ e_6 + f_2 j_x w_x - f_1 j_y w_y \end{bmatrix}$$

Sin embargo, los flujos f_1 , f_2 y f_3 corresponden a las velocidades angulares w_x , w_y y w_z , y los esfuerzos e_4 , e_5 y e_6 son los pares de entrada T_1 , T_2 y T_3 . Al sustituir queda la siguiente expresión:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} T_1 + j_y w_y w_z - j_z w_y w_z \\ T_2 - j_x w_x w_z + j_z w_x w_z \\ T_3 + j_x w_x w_y - j_y w_x w_y \end{bmatrix}$$

Al tratar cada ecuación por individual se obtienen:

$$\begin{aligned}e_1 &= T_1 + j_y w_y w_z - j_z w_y w_z \\e_2 &= T_2 - j_x w_x w_z + j_z w_x w_z \\e_3 &= T_3 + j_x w_x w_y - j_y w_x w_y\end{aligned}$$

Los esfuerzos e_1 , e_2 y e_3 , representan el par aplicado a los elementos respectivos de inercia, es decir que son equivalentes a $j_x \cdot \dot{w}_x$, $j_y \cdot \dot{w}_y$ y $j_z \cdot \dot{w}_z$. Al despejar las entradas y al aplicar este cambio a los esfuerzos, se llega a las mismas ecuaciones de Euler para movimiento rotacional.

$$\begin{aligned}j_x \dot{w}_x - j_y w_y w_z + j_z w_y w_z &= T_1 \\j_y \dot{w}_y + j_x w_x w_z - j_z w_x w_z &= T_2 \\j_z \dot{w}_z - j_x w_x w_y + j_y w_x w_y &= T_3\end{aligned}$$

La obtención de las ecuaciones de Euler para el movimiento de traslación son exactamente los mismos pasos que se siguió para obtener las ecuaciones de Euler para movimiento rotacional, la única diferencia radica en el nombre de las variables, ahora son masas en los tres ejes, fuerzas en los tres ejes, velocidades lineales en los tres ejes, y los esfuerzos provenientes de las masas serán masa por aceleración, de tal manera que si se siguen exactamente los mismos pasos y cambiando la nomenclatura se llegara a las ecuaciones de Euler para movimiento de traslación vistas anteriormente. Es decir:

$$\begin{aligned}s_{11} &= \begin{bmatrix} 0 & -m_z v_z & m_y v_y \\ m_z v_z & 0 & -m_x v_x \\ -m_y v_y & m_x v_x & 0 \end{bmatrix} \\s_{13} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

La matriz de relaciones constitutivas F , la matriz de estados A y la matriz de entradas B para este caso son:

$$\begin{aligned}F &= \begin{bmatrix} \frac{1}{m_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{m_z} \end{bmatrix} \\A &= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{m_z v_z}{m_y} & \frac{m_y v_y}{m_z} \\ \frac{m_z v_z}{m_x} & 0 & -\frac{m_x v_x}{m_z} \\ -\frac{m_y v_y}{m_x} & \frac{m_x v_x}{m_y} & 0 \end{bmatrix} \\B &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Al igual que el anillo de Euler para movimiento rotacional, las matrices A y B solo están determinadas por las matrices de estructura unión s_{11} y s_{13} . Al obtener el espacio de estados en función de x se tiene la siguiente expresión.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{m_z v_z}{m_y} & \frac{m_y v_y}{m_z} \\ \frac{m_z v_z}{m_x} & 0 & -\frac{m_x v_x}{m_z} \\ -\frac{m_y v_y}{m_x} & \frac{m_x v_x}{m_y} & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} u$$

Donde el vector de estados x y el vector de entradas u así como $\dot{x}$ y z son:

$$x = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}, \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} e_4 \\ e_5 \\ e_6 \end{bmatrix}.$$

Son exactamente igual a los definidos anteriormente en el movimiento rotacional. Al poner la ecuación de estado en función de las variables de coenergía z se obtiene lo siguiente:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -m_z v_z & m_y v_y \\ m_z v_z & 0 & -m_x v_x \\ -m_y v_y & m_x v_x & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} u$$

Ahora, al desarrollar las operaciones obtenemos tres ecuaciones más explícitas:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} e_4 + f_3 m_y v_y - f_2 m_z v_z \\ e_5 - f_3 m_x v_x + f_1 m_z v_z \\ e_6 + f_2 m_x v_x - f_1 m_y v_y \end{bmatrix}$$

Sin embargo, f_1 , f_2 y f_3 corresponden a las velocidades lineales v_x , v_y y v_z respectivamente, mientras que los esfuerzos e_4 , e_5 y e_6 corresponden a las fuerzas de entrada en los ejes x , y y z respectivamente. Al aplicar estas equivalencias se obtiene lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x + m_y v_y v_z - m_z v_y v_z \\ F_y - m_x v_x v_z + m_z v_x v_z \\ F_z + m_x v_x v_y - m_y v_x v_y \end{bmatrix}$$

Los esfuerzos e_1 , e_2 y e_3 representan el producto de la masa en el eje correspondiente por su aceleración también en el eje correspondiente, es decir $m_x \dot{v}_x$, $m_y \dot{v}_y$ y $m_z \dot{v}_z$ respectivamente. Al despejar las fuerzas de entrada de cada ecuación, se obtienen las ecuaciones de Euler para el movimiento de traslación:

$$\begin{aligned} m_x \dot{v}_x - m_y v_y v_z + m_z v_y v_z &= F_x \\ m_y \dot{v}_y + m_x v_x v_z - m_z v_x v_z &= F_y \\ m_z \dot{v}_z - m_x v_x v_y + m_y v_x v_y &= F_z \end{aligned}$$

4.4. Manipulador Prismático

El manipulador prismático se ilustra en la figura 4.6, el cual está compuesto por un eslabón fijo en la base, que rota al rededor de un eje fijo esto quiere decir que su variable es θ_1 , unido a través de una unión prismática, cuya variable es θ_3 y que esta a un ángulo θ_2 constante.

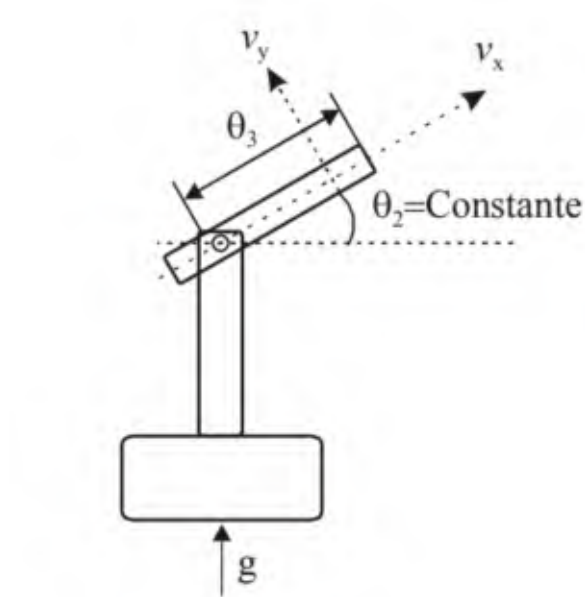


Figura 4.6: Manipulador Prismático

A continuación, se presenta el Bond Graph del sistema anterior en la figura ??.

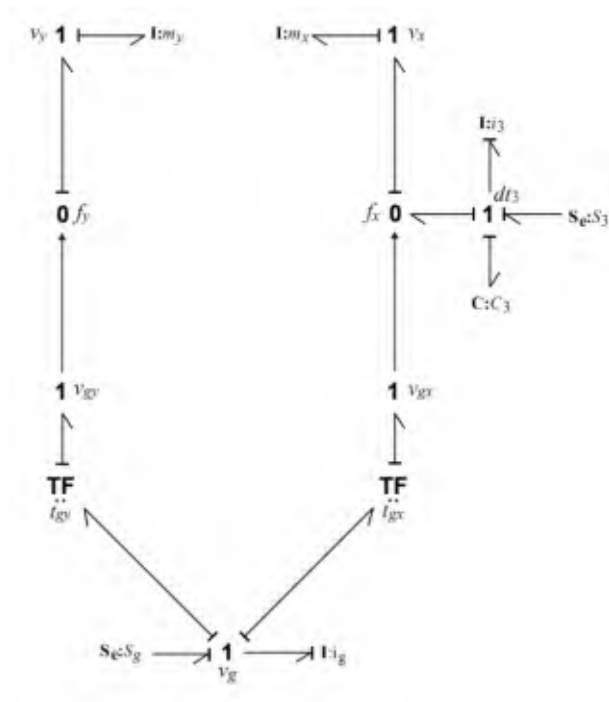


Figura 4.7: Manipulador Prismático

La unión vg , representa al eslabón fijo en conjunto con la fuerza de gravedad sg , los transformadores TF representan el movimiento que se transmite a la siguiente unión, las ganancias son $\cos(\theta_1)$ y $\sin(\theta_2)$, para tg_y y tg_x respectivamente. Al aplicar el análisis de

conservación de energía al sistema, se obtiene las siguiente matrices de estructura unión.

$$s_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad s_{13} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad s_{14} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad s_{41} = \begin{bmatrix} \sin(\theta_2) & 0 & 1 \\ \cos(\theta_1) & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Al no tener elementos de disipación, las matrices s_{12} , s_{21} , s_{22} y s_{23} son cero. Los vectores clave para este sistemas son los siguientes.

$$x = \begin{bmatrix} p_1 \\ q_3 \\ p_2 \end{bmatrix}, \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} e_1 \\ f_3 \\ e_2 \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} f_1 \\ e_3 \\ f_2 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} e_{20} \\ e_{21} \end{bmatrix}.$$

Como es un sistema en causalidad derivativa, existe la matriz de relación entre los elementos de causalidad integral y los elementos en causalidad derivativa E , la cual es de la siguiente manera para este sistema.

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{m_1 \sin(\theta_2)}{ig} & 0 & \frac{m_1}{i_3} + 1 \end{bmatrix}$$

Las matrices A y B son por consiguiente:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{i_3} \\ 0 & -\frac{i_3}{c_3(i_3+m_1)} & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{i_3 m_1 \sin(\theta_2)}{ig(i_3+m_1)} & \frac{i_3}{i_3+m_1} \end{bmatrix}$$

Entonces el espacio de estados queda de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ f_3 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{i_3} \\ 0 & -\frac{i_3}{c_3(i_3+m_1)} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ q_3 \\ p_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{i_3 m_1 \sin(\theta_2)}{ig(i_3+m_1)} & \frac{i_3}{i_3+m_1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_{20} \\ e_{21} \end{bmatrix}$$

Los estados p_1 , q_3 y p_2 , representan el momento angular del eslabón fijo, el desplazamiento del eslabón prismático y el momento angular del eslabón prismático respectivamente. Al simular con todos los valores unitarios (los elementos ig , i_3 , c_3 , m_1), la gravedad $g = 9,81m/s^2$, las entradas $m_1 * g$ y $10n * m$, así como un ángulo θ_2 constante de 45 grados y un ángulo θ_1 de cero grados, se consiguen las siguientes gráficas de la figura 4.8.

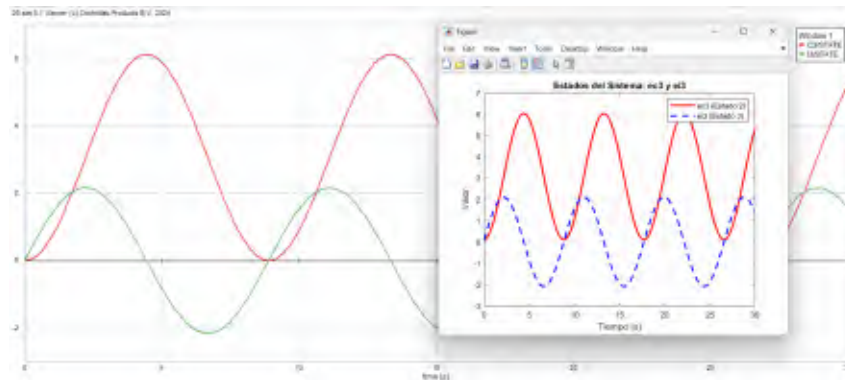


Figura 4.8: 20 sim vs simulación del modelo espacio de estados

Como este es un sistema conservativo, los estados que representan físicamente el desplazamiento y el momento angular, oscilan en el tiempo. Al conectar dos resistencias en las uniones principales de los eslabones, se consigue el modelo físico mas acercado a la realidad, simulando la resistencia del aire con el movimiento del sistema, esto se ilustra en la figura 4.9.

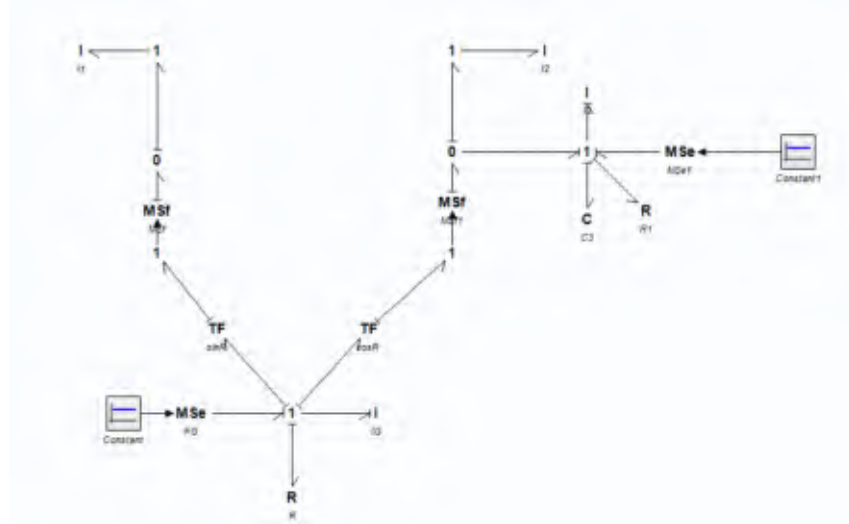


Figura 4.9: Robot prismático con elementos resistivos

El espacio de estados del mismo sistema pero con resistencia es el siguiente:

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ f_3 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{r_1}{ig} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{i_3} \\ \frac{i_3 m_1 r_1 \sin(\theta_2)}{ig^2 (i_3+m_1)} & -\frac{i_3}{c_3 (i_3+m_1)} & -\frac{r_2}{i_3+m_1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ q_3 \\ p_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{i_3 m_1 \sin(\theta_2)}{ig (i_3+m_1)} & \frac{i_3}{i_3+m_1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_{20} \\ e_{21} \end{bmatrix}$$

Los estados son iguales que el sistema anterior, la diferencia esta en la matriz de estados, que representa la relación de todos los sistemas que lo conforman. Al simular nuevamente con los mismos valores unitarios y los mismos ángulos, las mismas entradas, ahora incluyendo las resistencias cuyos valores también son unitarios, se obtiene la grafica de la figura 4.10.

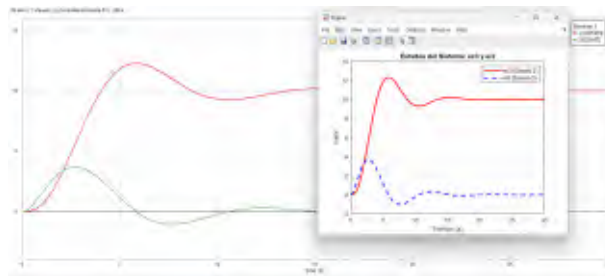


Figura 4.10: Sistema físico real

La representación de espacio de estados expandida es la siguiente:

$$A = \begin{bmatrix} e_{20} & & \\ \frac{p_2}{i_3} & & \\ \frac{e_{21} i_3}{i_3+m_1} - \frac{i_3 q_3}{c_3 (i_3+m_1)} - \frac{e_{20} i_3 m_1 \sin(x_2)}{ig (i_3+m_1)} & & \end{bmatrix}$$

Teniendo la representación en espacio de estados, se puede obtener la representación equivalente a Euler Lagrange, la cual se obtiene de aplicar las siguientes equivalencias $\dot{z} = F \cdot \dot{x}$ y $z = F \cdot x$, es decir de pasar de un sistema en función de los ángulos, a pasar a un sistema en términos de sus velocidades y aceleraciones. La matriz de inercia es la matriz E que se encontró, multiplicada por la matriz de relaciones constitutivas de los elementos en causalidad integral F , por lo que, si F es:

$$F = \begin{bmatrix} \frac{1}{ig} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{c_3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{i_3} \end{bmatrix}$$

Entonces, la matriz de inercia equivalente, M es:

$$M = E \cdot F^{-1} = \begin{bmatrix} ig & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & 0 \\ m_1 \sin(\theta_2) & 0 & i_3 \left(\frac{m_1}{i_3} + 1 \right) \end{bmatrix}$$

En este caso, el termino de coriolis es nulo, porque la matriz de coriolis puede obtenerse al derivar parcialmente la matriz de inercia a través de los índices de Chistoffel, sin embargo se podría pensar que como la matriz de inercia contiene un termino $\sin(\theta_2)$, existe pero, este ángulo es constante es decir, que durante el movimiento del eslabón prismático, este ángulo permanece sin movimiento y por tanto su derivada es cero. Por ultimo queda el vector de gravedad, que esta implícito en $b * u$.

$$G = \begin{bmatrix} e_{20} \\ 0 \\ \frac{e_{21} i_3}{i_3 + m_1} - \frac{e_{20} i_3 m_1 \sin(x_2)}{ig(i_3 + m_1)} \end{bmatrix}$$

Por tanto la representación equivalente/similar a la lagrangiano es:

$$\begin{bmatrix} ig & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & 0 \\ m_1 \sin(\theta_2) & 0 & i_3 \left(\frac{m_1}{i_3} + 1 \right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{20} \\ 0 \\ \frac{e_{21} i_3}{i_3 + m_1} - \frac{e_{20} i_3 m_1 \sin(x_2)}{ig(i_3 + m_1)} \end{bmatrix}$$

En cuanto al control, partiendo del espacio de estados es mas simple, porque la entrada debe ser igual a todo el termino del lado izquierdo que le corresponda en el espacio de estado expandido. Recordando que el controlador es $\mathbf{k} = k_d \cdot \dot{q}_3 + k_p \cdot (q_3 - q_{3d})$ esto es debido a que la otra entrada, es la fuerza de gravedad, entonces solo se tiene una entrada la cual es e_{21} , es decir que la entrada debe ser igual a todos los términos, mas el controlador. La tercer ecuación es la que describe el movimiento del eslabón prismático, así que esta es la que debemos cancelar, la entrada e_{21} , debe ser exactamente igual pero con signo contrario para que se cancelen todos los términos mas el controlador, esto de forma burda, formalmente se vera mas adelante el porque de esto, con el PUMA de 2 GOF. Aplicando esto entonces, la entrada debe ser igual a:

$$e_{20} = \frac{(i_3 + m_1) \left(\frac{i_3 q_3}{c_3(i_3 + m_1)} - k + \frac{e_{20} i_3 m_1 \sin(x_2)}{ig(i_3 + m_1)} \right)}{i_3} + k$$

Si la entrada es así, entonces el modelo en espacio de estados queda de la siguiente manera:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} e_{20} \\ \frac{p_2}{i_3} \\ k \end{bmatrix}$$

Donde k , es el controlador visto anteriormente. Nótese que ahora es un sistema lineal invariante en el tiempo, y por tanto es mas simple de controlar. Al implementar este control en el diagrama de BG se obtiene la figura 4.11.

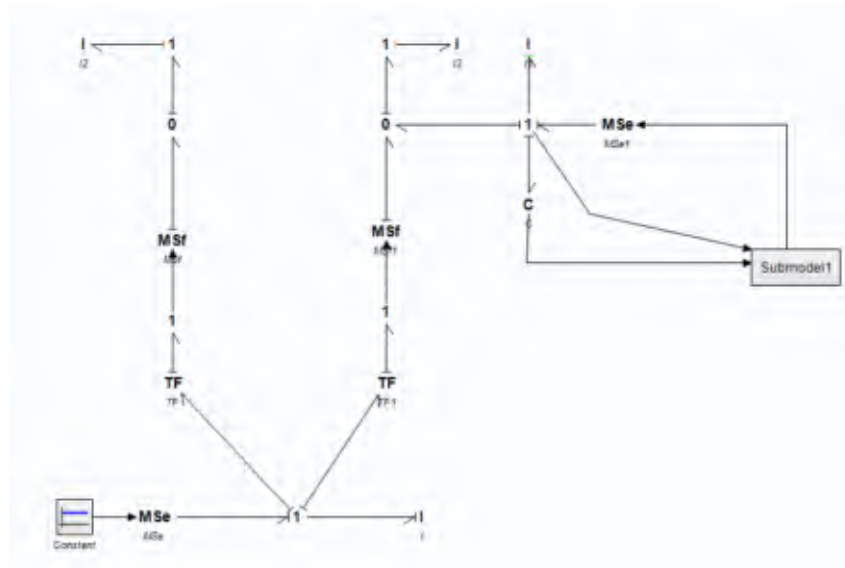


Figura 4.11: Controlador del Stanford constante

En la figura 4.11 se aprecia el bloque de "Submodel1", en el cual se tiene programado el controlador, su contenido se ilustra en la figura 4.12.

```
parameters
  real kdl = 1.0, kpl = 4.0, qdeseado1 = 1.0;

  // Parámetros faltantes definidos como 1.0

  real q2 = 1.0;
  real i3 = 1.0;
  real m1 = 1.0;
  real c3 = 1.0;
  real e20 = -9.81;
  real ig = 1.0;
  real x2 = 45;

variables
  real k;

equations
  k = (kdl * dotq3 + kpl * (q3 - qdeseado1));

  e21 = ((i3 + m1)*((i3*q3)/(c3*(i3 + m1)) - k + {e20*i3*m1*sin(x2*pi/180)}/(ig*(i3 + m1)))
```

Figura 4.12: Contenido del bloque controlador

En la figura 4.12, el ángulo deseado esta en 1, por tanto el ángulo θ_3 debe ser 1 rad, entonces se tiene la figura 4.13 que confirma que el controlador es correcto.

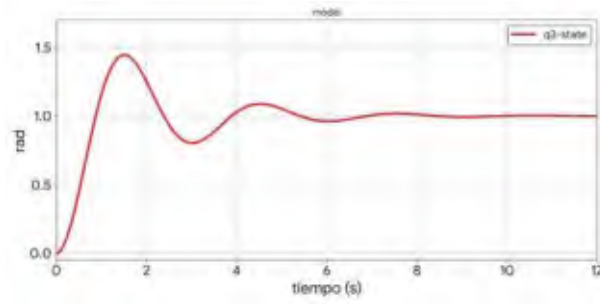


Figura 4.13: Respuesta del ángulo controlado

Para un ángulo deseado de 50 rad la salida debe ser 50 y efectivamente, en la figura 4.14 se observa que si.

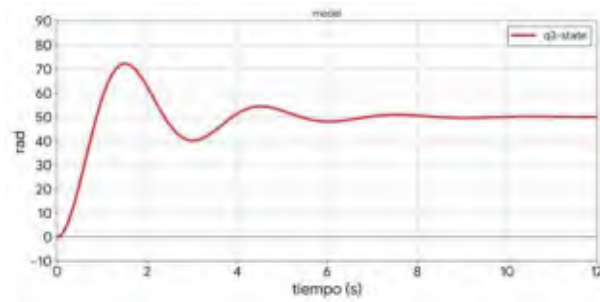


Figura 4.14: Respuesta del ángulo controlado

La aplicación de este bloque de control, utilizando elementos de Bond Graph, se aprecia en la figura 4.15.

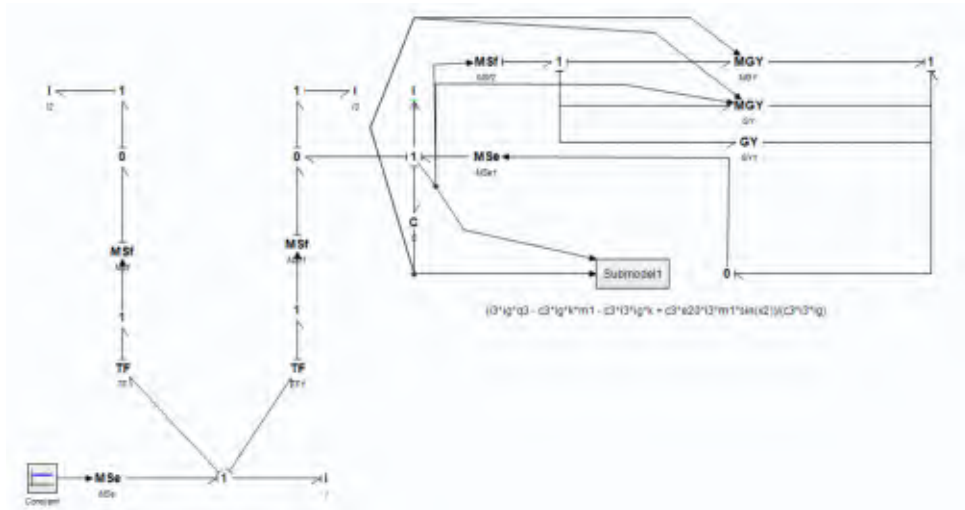


Figura 4.15: Controlador aplicado en Bond Graph

En esta ultima figura se aprecian tres giradores, dos de ellos son modulados por el ángulo θ_3 , porque la expresión del controlador posee 3 términos, de los cuales el primero de ellos contiene a θ_3 o bien q_3 , el segundo termino contiene al controlador k , y este esta en función principalmente de q_3 y su propia derivada, es decir $\dot{q}_3$, por esta razón, es que estos dos primeros giradores son modulados, mientras que el ultimo contiene términos

puramente constantes, por ello es un girador simple cuya ganancia es una constante. La naturaleza del porque son giradores, radica en que la señal que se extrae es la integral de q_3 , es decir flujo, sin embargo la señal de par, es una señal de esfuerzo y por tanto se debe "Girar" la señal de flujo que representa la velocidad angular de q_3 a una señal de esfuerzo que la represente. Al obtener la respuesta con un ángulo deseado de 33 se observa en la figura 4.16 que obtenemos también el control de forma correcta del ángulo q_3 pero implementado en Bond Graph.

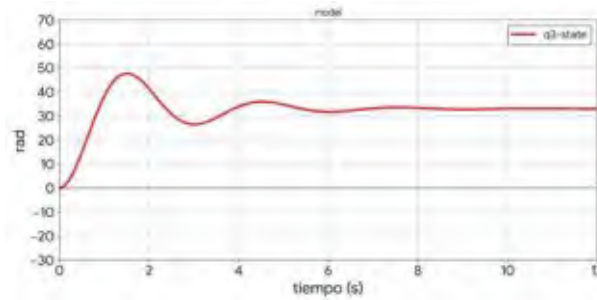


Figura 4.16: Respuesta del ángulo al controlador en BG

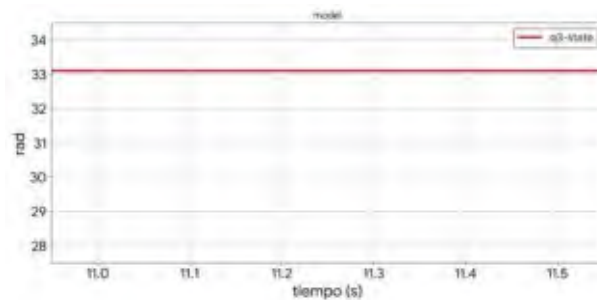


Figura 4.17: Acercamiento a la respuesta anterior

4.5. Manipulador PUMA de 2 GOF

Antes de atacar el robot principal de esta investigación, es fundamental entender el comportamiento del mismo robot con un grado de libertad inferior, el cual se muestra esquemáticamente en la figura 4.18. Este robot, se puede apreciar que tiene dos eslabones, el primero de ellos está fijo y su movimiento es puramente rotacional respecto al eje comúnmente z , sin embargo el segundo eslabón también sin embargo, viviendo puramente rotacional pero el movimiento del primer eslabón influye sobre el propio eslabón, haciendo que su trayectoria describa un movimiento en un plano comúnmente zy . Esto en BG es sencillo de modelar, gracias a los anillos de Euler, para el primer eslabón, como solo gira al rededor de un eje puede modelarse en BG como una simple unión 1 con su respectiva inercia, debido a que no existe un ángulo entre el eslabón y el propio eje pero el eslabón dos, depende del movimiento anterior por lo que se necesita representar esa relación entre ambos eslabones. El Bond Graph de este robot se muestra en la figura 4.19.

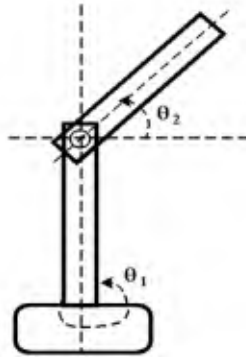


Figura 4.18: Esquema del robot PUMA 2 GOF

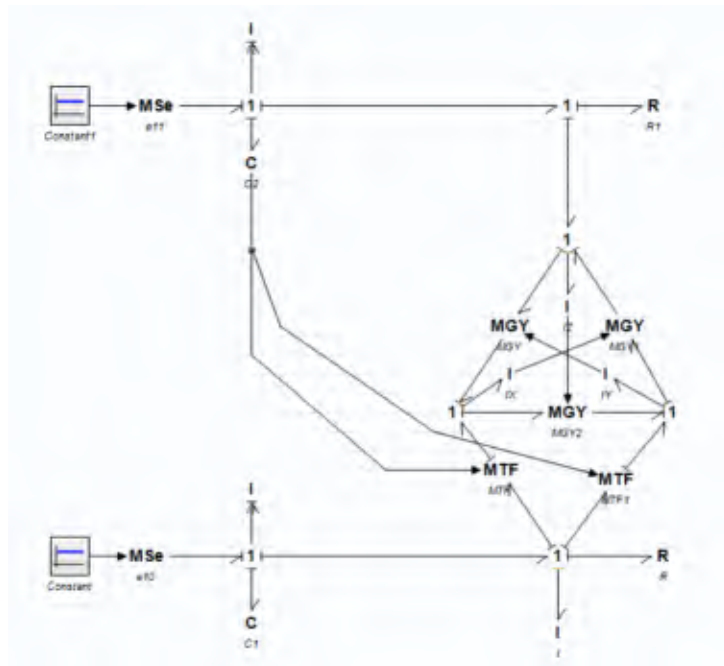


Figura 4.19: Bond Graph del robot PUMA 2 GOF

La unión 1 donde se encuentra unido el elemento C_1 y el elemento I_1 (inercia) representa el motor unido a la articulación del eslabón 1, la fuente de esfuerzo representa el par de entrada en esa unión. Ahora como el segundo eslabón ya gira en torno al eje z , también tiene movimiento en los ejes x e y pero son dependientes a la velocidad del eslabón anterior, por ello están los dos transformadores modulados MTF que convierten ese movimiento únicamente en el eje z a los ejes x e y del segundo eslabón, y son entradas a las uniones que representan estos mismos movimientos en el anillo de Euler.

La unión 1 donde se encuentran los elementos C_2 , I_2 e e_{11} , pertenecen al motor acoplado al eslabón 2, la inercia I que se encuentra en la parte inferior junto la resistencia R representa la propia inercia del eslabón 1, la inercia del eslabón 2, aparentemente no existe, pero realmente esa inercia que debería estar junto al elemento R_1 se ha transformado en las 3 inercias I_X , I_Y e I_Z del anillo.

Entonces obtenemos los vectores claves, recordando que $\dot{x}$ es la variable de esfuerzo o

flujo que entra a los elementos en causalidad integral, x es su integral, z es la variable de coenergía que se relaciona directamente con el vector x a través de la matriz F de relaciones constitutivas, y el vector u son las fuentes de esfuerzo o flujo que dan la energía al sistema.

$$x = \begin{bmatrix} p_1 \\ q_2 \\ p_3 \\ q_4 \end{bmatrix}, \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} e_1 \\ f_2 \\ e_3 \\ f_4 \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} f_1 \\ e_2 \\ f_3 \\ e_4 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} e_{10} \\ e_{11} \end{bmatrix}.$$

$$F = \begin{bmatrix} \frac{1}{I_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_2} \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix}.$$

El vector D_{in} de forma similar que el vector $\dot{x}$, es la variable de esfuerzo o flujo que entra a los elementos de disipación, mientras que D_{out} , es la variable que entrega de regreso al sistema, L es la matriz de relaciones constitutivas de estos elementos.

$$D_{\text{in}} = \begin{bmatrix} f_{20} \\ f_{21} \end{bmatrix}, \quad D_{\text{out}} = \begin{bmatrix} e_{20} \\ e_{21} \end{bmatrix}, \quad F_d = \begin{bmatrix} \frac{1}{I_X} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_Y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_Z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I} \end{bmatrix}.$$

Los vectores $\dot{x}_d$, x_d , z_d , son el mismo concepto, sin embargo la diferencia está en que estos elementos corresponden a los elementos de almacenamiento con causalidad derivativa, lo que significa que son elementos linealmente dependientes de los elementos en causalidad integral, que son los linealmente independientes.

$$x_d = \begin{bmatrix} p_5 \\ p_6 \\ p_7 \\ p_8 \end{bmatrix}, \quad \dot{x}_d = \begin{bmatrix} e_5 \\ e_6 \\ e_7 \\ e_8 \end{bmatrix}, \quad z_d = \begin{bmatrix} f_5 \\ f_6 \\ f_7 \\ f_8 \end{bmatrix}.$$

El análisis de la estructura de unión significa cómo se relacionan todos los elementos, tanto las fuentes de entrada, los elementos de almacenamiento independientes, los elementos de disipación y los elementos dependientes entre sí, a través de las leyes de conservación de la energía, la ley de conservación del desplazamiento que son las uniones 1, y la ley de conservación del momento que son las uniones 0. Como resultado de dicho análisis, se obtienen las matrices de unión S , las cuales contienen toda la información del sistema, por esta razón es que se puede obtener la representación en espacio de estados e incluso, como se ha visto en secciones anteriores, el análisis dinámico de Euler-Lagrange.

$$s_{11} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & p_6 \sin(q_4) - p_5 \cos(q_4) & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ p_5 \cos(q_4) - p_6 \sin(q_4) & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad s_{12} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad s_{13} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$s_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad s_{14} = \begin{bmatrix} -\sin(q_4) & -\cos(q_4) & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad s_{41} = \begin{bmatrix} \sin(q_4) & 0 & 0 & 0 \\ \cos(q_4) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como es un sistema en donde existen elementos dependientes, los cuales son los elementos de la inercia del eslabón 2 porque dependen del movimiento del eslabón 1, entonces existe la matriz E la cual es una matriz que representa la relación entre los elementos dependientes e independientes sin aumentar el número de ecuaciones, aparece la matriz de estados A y la matriz de entradas B , como se mostró en las ecuaciones (2.24), (2.25) y la ecuación (2.26).

$$E = \begin{bmatrix} \frac{I_Y \cos^2(q_4) + I_X \sin^2(q_4) + I}{I_1} + 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{I_Z}{I_2} + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{I_1}{I_Y \cos^2(q_4) + I_X \sin^2(q_4) + I_1 + I} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{I_2}{I_2 + I_Z} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{\alpha_1} & -\frac{I_1}{C_1 \alpha_1} & -\frac{I_1 \alpha_2}{I_2 \alpha_1} & 0 \\ \frac{1}{I_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{I_2 \alpha_2}{I_1(I_2 + I_Z)} & 0 & -\frac{R_2}{I_2 + I_Z} & -\frac{I_2}{C_2(I_2 + I_Z)} \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_2} & 0 \end{bmatrix}$$

Donde:

$$\alpha_1 = I_Y \cos^2(q_4) + I_X \sin^2(q_4) + I_1 + I$$

$$\alpha_2 = p_5 \cos(q_4) - p_6 \sin(q_4)$$

Esto quiere decir entonces, que el modelo en espacio de estados del robot manipulador PUMA de dos grados de libertad es:

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ f_2 \\ e_3 \\ f_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{\alpha_1} & -\frac{I_1}{C_1\alpha_1} & -\frac{I_1\alpha_2}{I_2\alpha_1} & 0 \\ \frac{1}{I_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{I_2\alpha_2}{I_1(I_2+I_Z)} & 0 & -\frac{R_2}{I_2+I_Z} & -\frac{I_2}{C_2(I_2+I_Z)} \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ q_2 \\ p_3 \\ q_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{I_1}{\alpha_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{I_2}{I_2+I_Z} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{10} \\ e_{11} \end{bmatrix}$$

donde:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= I_Y \cos^2(q_4) + I_X \sin^2(q_4) + I_1 + I, \\ \alpha_2 &= p_5 \cos(q_4) - p_6 \sin(q_4). \end{aligned}$$

Sin embargo, este modelo está incompleto, porque aún falta la matriz de Coriolis representada en espacio de estados. En secciones pasadas se explicó cómo obtenerla a partir de la matriz de inercias, sin embargo, se puede obtener también directamente del formalismo Bond Graph a través de la ecuación $C = S_{14}F_d^{-1}\dot{S}_{41}$. Esta no es la matriz de Coriolis clásica, sino un equivalente en espacio de estados, entonces se obtiene que:

$$S_{41} = \begin{bmatrix} \sin(q_4) & 0 & 0 & 0 \\ \cos(q_4) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \dot{S}_{41} = \begin{bmatrix} f_4 \cos(q_4) & 0 & 0 & 0 \\ -f_4 \sin(q_4) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Este efecto Coriolis está en función de los estados y no de las velocidades angulares (variable de flujo). Al sustituir en la ecuación que se mostró anteriormente, se llega a:

$$C_{ss} = \begin{bmatrix} I_Y f_4 \cos(q_4) \sin(q_4) - I_X f_4 \cos(q_4) \sin(q_4) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Esta matriz se suma con la matriz de estados obtenida anteriormente, por lo tanto, el sistema en espacio de estados completo es el siguiente:

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ f_2 \\ e_3 \\ f_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1+\alpha_3}{\alpha_1} & -\frac{I_1}{C_1\alpha_1} & -\frac{I_1\alpha_2}{I_2\alpha_1} & 0 \\ \frac{1}{I_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{I_2\alpha_2}{I_1(I_2+I_Z)} & 0 & -\frac{R_2}{I_2+I_Z} & -\frac{I_2}{C_2(I_2+I_Z)} \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ q_2 \\ p_3 \\ q_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{I_1}{\alpha_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{I_2}{I_2+I_Z} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{10} \\ e_{11} \end{bmatrix}$$

Donde:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= I_Y \cos^2(q_4) + I_X \sin^2(q_4) + I_1 + I, \\ \alpha_2 &= p_5 \cos(q_4) - p_6 \sin(q_4), \\ \alpha_3 &= I_X f_4 \cos(q_4) \sin(q_4) - I_Y f_4 \cos(q_4) \sin(q_4). \end{aligned}$$

Realizando todas las operaciones de la ecuación anterior se obtienen las cuatro ecuaciones de estado:

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ f_2 \\ e_3 \\ f_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{I_1 e_{10}}{\alpha_1} - \frac{p_1(R_1 + I_X f_4 \cos(q_4) \sin(q_4) - I_Y f_4 \cos(q_4) \sin(q_4))}{\alpha_1} - \frac{I_1 q_2}{C_1 \alpha_1} - \frac{I_1 p_3 \alpha_2}{I_2 \alpha_1} \\ \frac{p_1}{I_1} \\ \frac{I_2 e_{11}}{I_2 + I_Z} - \frac{R_2 p_3}{I_2 + I_Z} - \frac{I_2 q_4}{C_2(I_2 + I_Z)} + \frac{I_2 p_1 \alpha_2}{I_1(I_2 + I_Z)} \\ \frac{p_3}{I_2} \end{bmatrix}$$

Donde:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= I_Y \cos^2(q_4) + I_X \sin^2(q_4) + I_1 + I, \\ \alpha_2 &= p_5 \cos(q_4) - p_6 \sin(q_4). \end{aligned}$$

Al implementar, estas cuatro ecuaciones en un bloque de ecuaciones en 20 sim (figura 4.20) y comparando las graficas respecto al modelo en Bond Graph, se obtiene la figura 4.21.

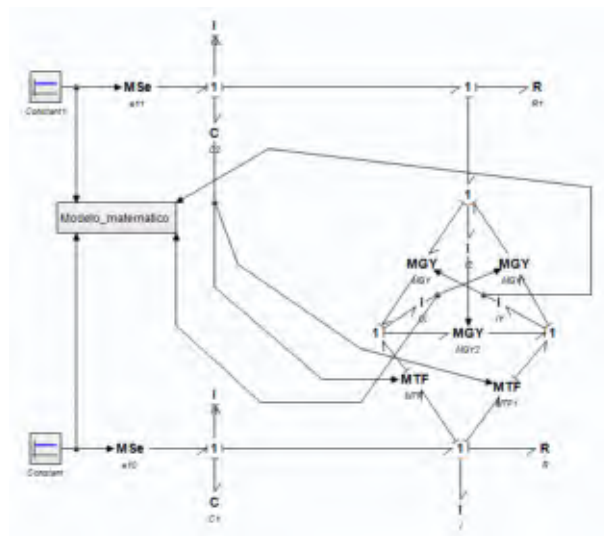


Figura 4.20: Implementación del modelo matemático

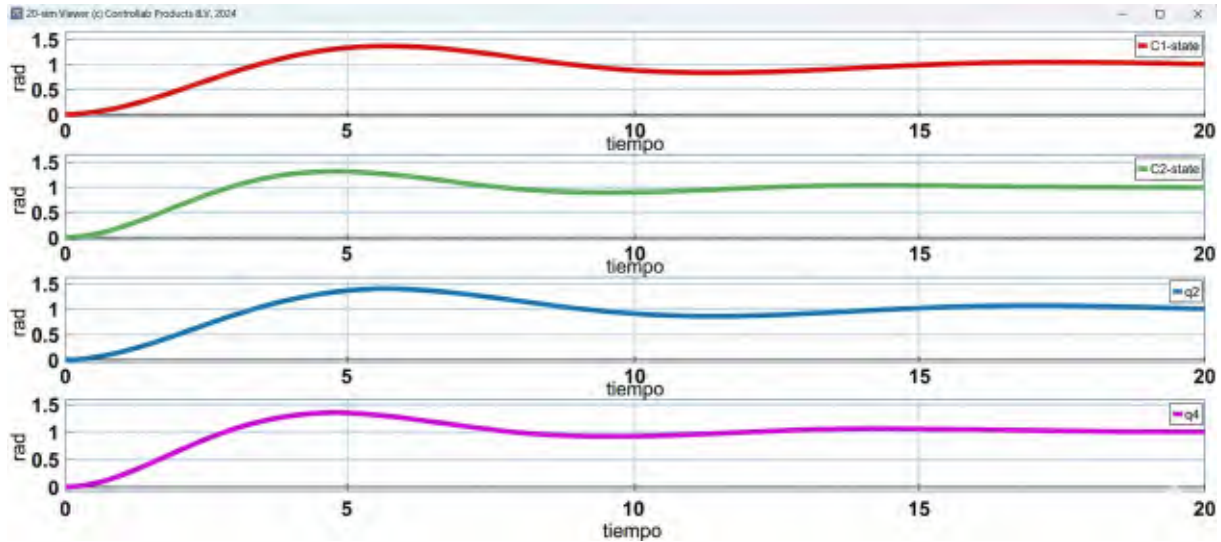


Figura 4.21: Respuesta en BG y del modelo matemático

El valor de todos los elementos es unitario I_X , I_Y , I_Z , I , C_1 , C_2 , I_2 , R_1 y R_2 , así como las fuentes de entrada e_{10} y e_{11} . Las unidades de las graficas están en radianes, puesto que los ángulos q_1 y q_2 aparecen por los elementos C_1 y C_2 , dichos elementos reciben flujo f_2 y f_4 , estas son velocidades angulares rad/seg entonces sus integrales respecto al tiempo son los estados q_1 y q_2 y por tanto son radianes. Las gráficas cuyas etiquetas son $C1 - state$ y $C2 - state$, corresponden a los estados de los elementos C_1 y C_2 obtenidos directamente de Bond Graph, mientras que las gráficas cuyas etiquetas son q_2 y q_4 son las gráficas obtenidas de resolver el modelo matemático.

Al darles valores de $I_X = 1,3$, $I_Y = 3,3$ ambos en $kg \cdot m^2$, $R_1 = R_2 = 2,5$ en $N \cdot m \cdot s/rad$ y conservando los demás valores como unitarios, tanto en BG como en el modelo matemático se obtienen la figura 4.22.

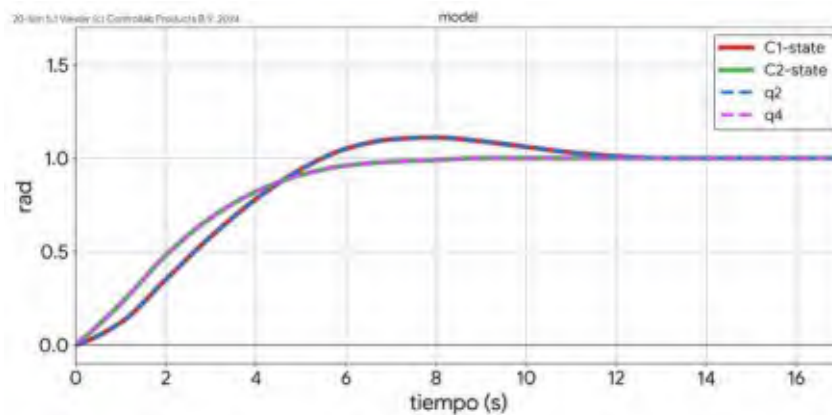


Figura 4.22: Súper posición de los ángulos obtenidos

Las gráficas $C1 - STATE$ y q_2 están superpuestas, así como las graficas de $C2 - STATE$ y q_4 , lo que significa que son iguales.

4.6. Control por par calculado del manipulador PUMA 2 GOF

Como se ha explicado en alguna sección pasada, el control por par calculado se refiere a que, se tiene un número finito de entradas en un sistema, que va ligado al número de grados de libertad que tenga el sistema, puesto que por cada grado de libertad, debe haber una fuente que impulse ese movimiento, por tanto habrá la misma cantidad de entradas, y la idea principal es que esas entradas tengan el mismo comportamiento no lineal que el sistema, o visto de otra manera, matemáticamente las entradas deben ser igual a la parte no lineal del sistema mas un controlador, para que matemáticamente los términos no lineales se eliminen y solo quede el controlador actuando como el sistema, lo que genera nuevos sistemas desacoplados pero la diferencia es que ahora estos son lineales, esta es la idea general de este tipo de controlador.

Recordando que la ley de control es:

$$\tau = C \cdot \dot{\mathbf{q}} + G \cdot \mathbf{q} - M \cdot (k_d \cdot \dot{\mathbf{q}} + k_p \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{q}_d))$$

Que se obtiene a partir de la ecuación de movimiento, al conseguir que la ecuación este solo de un lado la variable $\ddot{\mathbf{q}}$, es decir:

$$\begin{aligned} M \cdot \ddot{\mathbf{q}} + C \cdot \dot{\mathbf{q}} + G \cdot \mathbf{q} &= \tau \\ M \cdot \ddot{\mathbf{q}} &= \tau - C \cdot \dot{\mathbf{q}} - G \cdot \mathbf{q} \\ \ddot{\mathbf{q}} &= M^{-1} \cdot \tau - M^{-1} \cdot C \cdot \dot{\mathbf{q}} - M^{-1} \cdot G \cdot \mathbf{q} \end{aligned}$$

Ahora, los términos de la derecha se igualan a cero, porque la entrada debe cancelar a todos los términos y ademas se suma el controlador k , y se encuentra la expresión matemática a la que debe ser igual τ para generar sistemas lineales desacoplados y controlables.

$$\begin{aligned} 0 &= M^{-1} \cdot \tau - M^{-1} \cdot C \cdot \dot{\mathbf{q}} - M^{-1} \cdot G \cdot \mathbf{q} + k \\ M^{-1} \cdot \tau &= M^{-1} \cdot C \cdot \dot{\mathbf{q}} + M^{-1} \cdot G \cdot \mathbf{q} - k \\ \tau &= M \cdot M^{-1} \cdot C \cdot \dot{\mathbf{q}} + M \cdot M^{-1} \cdot G \cdot \mathbf{q} - M \cdot k \\ \tau &= C \cdot \dot{\mathbf{q}} + G \cdot \mathbf{q} - M \cdot k \end{aligned}$$

Así, no estamos en la representación de Lagrange, sino en espacio de estados, sin embargo es exactamente la misma idea, de hecho la variable $\dot{\mathbf{q}}$ en la representación de espacio de estados ya esta despejada, y solo queda realizar el segundo paso, que es sumar el controlador y encontrar a que debe ser igual la o las entradas en cuestión. Es decir, partimos del modelo matemático en espacio de estados del PUMA, es el cual es:

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ f_2 \\ e_3 \\ f_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{I_1 e_{10}}{\alpha_1} - \frac{p_1 (R_1 + IX f_4 \cos(q_4) \sin(q_4) - IY f_4 \cos(q_4) \sin(q_4))}{\alpha_1} - \frac{I_1 q_2}{C_1 \alpha_1} - \frac{I_1 p_3 \alpha_2}{I_2 \alpha_1} \\ \frac{p_1}{I_1} \\ \frac{I_2 e_{11}}{I_2 + IZ} - \frac{R_2 p_3}{I_2 + IZ} - \frac{I_2 q_4}{C_2 (I_2 + IZ)} + \frac{I_2 p_1 \alpha_2}{I_1 (I_2 + IZ)} \\ \frac{p_3}{I_2} \end{bmatrix}$$

donde:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= IY \cos^2(q_4) + IX \sin^2(q_4) + I_1 + I, \\ \alpha_2 &= p_5 \cos(q_4) - p_6 \sin(q_4).\end{aligned}$$

De forma nemotecnica, solo se agrega en este caso, dos variables k_1 y k_2 , una por cada entrada que se tenga, en este caso se tienen dos entradas, e_{10} y e_{11} , por tanto el sistema queda por el momento de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ f_2 \\ e_3 \\ f_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{I_1 e_{10}}{\alpha_1} - \frac{p_1 (R_1 + IX f_4 \cos(q_4) \sin(q_4) - IY f_4 \cos(q_4) \sin(q_4))}{\alpha_1} - \frac{I_1 q_2}{C_1 \alpha_1} - \frac{I_1 p_3 \alpha_2}{I_2 \alpha_1} + \mathbf{k}_1 \\ \frac{p_1}{I_1} \\ \frac{I_2 e_{11}}{I_2 + IZ} - \frac{R_2 p_3}{I_2 + IZ} - \frac{I_2 q_4}{C_2 (I_2 + IZ)} + \frac{I_2 p_1 \alpha_2}{I_1 (I_2 + IZ)} + \mathbf{k}_2 \\ \frac{p_3}{I_2} \end{bmatrix}$$

donde:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= IY \cos^2(q_4) + IX \sin^2(q_4) + I_1 + I, \\ \alpha_2 &= p_5 \cos(q_4) - p_6 \sin(q_4) \\ \mathbf{k}_1 &= k_{d1} \cdot \dot{q}_2 + k_{p1} \cdot (q_2 - q_{2d}) \\ \mathbf{k}_2 &= k_{d2} \cdot \dot{q}_4 + k_{p2} \cdot (q_4 - q_{4d}).\end{aligned}$$

Ahora cada ecuación que contenta una entrada, se iguala a cero, y se encuentra la expresión equivalente de tal manera que se cumpla que $0 = 0$, como la ecuación 2 y 4 (de la ecuación de estados de este sistema), no están en función de las entradas entonces permanecen sin afectar. Para la primera ecuación entonces se encuentra que e_{10} debe ser:

$$e_{10} = \frac{\alpha_1}{I_1} \left(\frac{p_1 (R_1 + (IX - IY) f_4 \cos q_4 \sin q_4)}{\alpha_1} - \mathbf{k}_1 + \frac{I_1 q_2}{C_1 \alpha_1} + \frac{I_1 p_3 (p_5 \cos q_4 - p_6 \sin q_4)}{I_2 \alpha_1} \right)$$

$$\text{donde } \alpha_1 = IY \cos^2 q_4 + IX \sin^2 q_4 + I_1 + I.$$

Realizando lo mismo con el tercer renglón de la ecuación de estados para encontrar e_{11} , resulta que:

$$e_{11} = -\left(\frac{I_2 + IZ}{I_2}\right) \left(\mathbf{k}_2 - \frac{R_2 p_3}{I_2 + IZ} - \frac{I_2 q_4}{C_2 (I_2 + IZ)} + \frac{I_2 p_1 (p_5 \cos q_4 - p_6 \sin q_4)}{I_1 (I_2 + IZ)} \right)$$

Al sustituir estas equivalencias de entrada, en la representación de espacio de estados del PUMA se obtiene el nuevo sistema:

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ f_2 \\ e_3 \\ f_4 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{k}_1 \\ \frac{p_1}{I_1} \\ -\mathbf{k}_2 \\ \frac{p_3}{I_2} \end{pmatrix}$$

Al sustituir $\mathbf{k}_1$ y $\mathbf{k}_2$, se obtiene el sistema linealizado y controlado, solo resta encontrar los polos y seleccionar los polos deseados para el control, sin embargo esto se puede hacer de forma aleatoria observando la respuesta del sistema.

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ f_2 \\ e_3 \\ f_4 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -k_{d1} \cdot \dot{q}_2 + k_{p1} \cdot (q_2 - q_{2d}) \\ \frac{p_1}{I_1} \\ -k_{d2} \cdot \dot{q}_4 + k_{p2} \cdot (q_4 - q_{4d}) \\ \frac{p_3}{I_2} \end{pmatrix}$$

Al realizar esto en un bloque de ecuaciones en 20 sim, programando estas estadas e introductorias como señales moduladoras de los elementos activos correspondientes a e_{10} y e_{11} , para que el programa, al resolver el sistema se quede solo con los controladores. En la figura 4.23 se muestra el diagrama del PUMA de 2 GOF con el bloque controlador incluido.

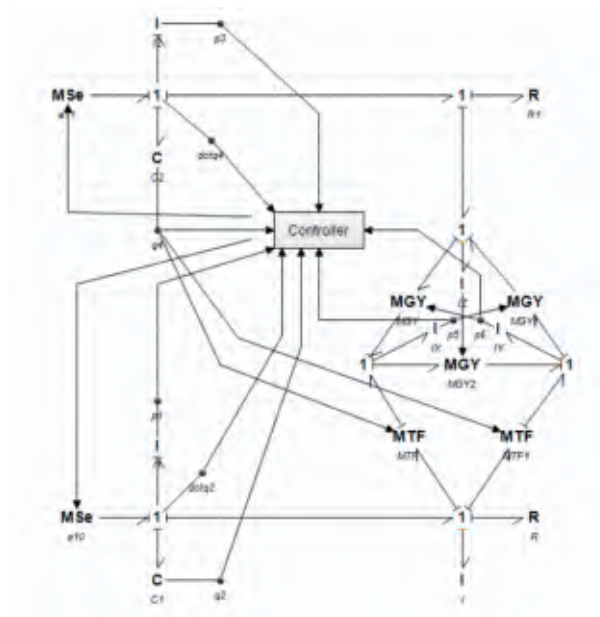


Figura 4.23: Diagrama del PUMA 2 GOF con par Calculado

El bloque controller, internamente tiene las expresiones de las entradas que encontramos anteriormente, y para generar esas salidas, necesita de los estados y la derivada de los mismos, por esta razón, se obtiene del diagrama $p_1, q_2, p_3, q_4, p_5, p_6$, las variables $\dot{q}_2$ y $\dot{q}_4$ son los flujos f_2 y f_4 respectivamente que pertenecen al vector derivada de los estados x , el bloque tiene dos salidas que van directamente a las fuentes de esfuerzo e_{10} y e_{11} , las cuales son contienen los términos a eliminar del sistema, o en otras palabras el par calculado para eliminar los términos del sistema. En la figura 4.24 se muestra el código del controlador.

```

parameters
    real I1 = 1.0, I = 1.0, IX = 1, IY = 1, IS = 1.0, I2 = 1.0;
    real R1 = 2.5, C1 = 1.0, R2 = 2.5, C2 = 1.0;
    real kd1 = 1, kp1 = 4, qdeseado1 = 1;
    real kd2 = 2, kp2 = 4, qdeseado2 = 2;
variables
    real k1, k2;
equations
    k1 = (kd1 * dotq2 + kp1 * (q2 - qdeseado1));
    k2 = (kd2 * dotq4 + kp2 * (q4 - qdeseado2));

    w10 = ((IY*cos(q4)^2 + IX*sin(q4)^2 + I1 + I)*(p1*(R1 + IX*dotq4*cos(q4)*sin(q4)
    - IY*dotq4*cos(q4)*sin(q4)))/(IY*cos(q4)^2 + IX*sin(q4)^2 + I1 + I) - k1
    + (I1*q2)/(C1*(IY*cos(q4)^2 + IX*sin(q4)^2 + I1 + I)) + (I1*p3*(p5*cos(q4)
    - p6*sin(q4)))/(I2*(IY*cos(q4)^2 + IX*sin(q4)^2 + I1 + I)))/I1;

    e11 = -((I2 + I2)*(k2 - (R2*p3)/(I2 + I2) - (I2*q4)/(C2*(I2 + I2)) + (I2*p1*(p5*cos(q4)
    - p6*sin(q4)))/(I1*(I2 + I2))))/I2;

```

Figura 4.24: Código del controlador en 20 sim

Al simular este sistema y graficar los estados q_2 y q_4 , que son los ángulos θ_1 y θ_2 respectivamente, y al tener todos los elementos en valores unitarios, exceptuando los valores de las resistencias, cuyo valor es igual a 2,5 para ambas, se obtiene la siguiente figura 4.25, la cual esta en radianes.

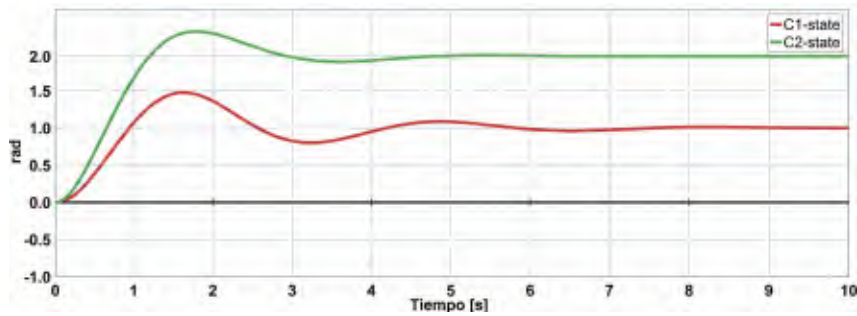


Figura 4.25: Respuesta con control aplicado

Ambas señales resultan así, porque los ángulos deseados están puestos para que el ángulo θ_1 sea de 1 rad, mientras que el ángulo θ_2 esta puesto para que sea 2 rad, esto esta en el código del controlador mostrado anteriormente, los parámetros $qdeseado$. Modificando estos ángulos deseados a 30 y 25, para los ángulos θ_1 y θ_2 respectivamente, se obtiene la siguiente grafica 4.26, en donde se observa, que los ángulos siguen el valor deseado, eso significa que las entradas están cancelando todos los términos dejando solo el controlador 1 y 2 actuando.

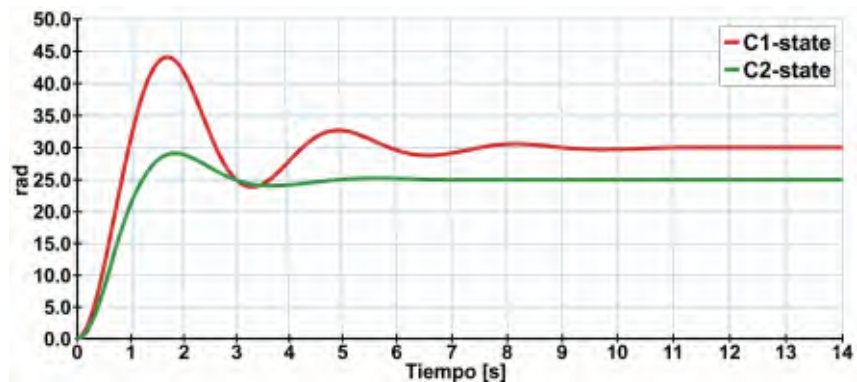


Figura 4.26: Nuevos ángulos deseados

Ahora bien, hacer esto en Bond Graph no es una tarea sencilla, pero partimos de que al igual que el modelo programado, no debe consumir potencia, al observar con detenimiento el modelo programado, todos los Bonds de entrada y salida del bloque de control, son meramente Bonds de señal, lo cual significa que no están consumiendo potencia, sino una de las variables de esfuerzo, flujo, desplazamiento o momento, es transmitida y su contraparte es cero, de la misma manera, el controlador hecho en Bond Graph, debe tener esta característica, de lo contrario, el controlador formaría parte del sistema, lo que significa que ya no sería un PUMA 2 GOF, por el hecho de que la matriz de estados A ya no sería la misma.

Una restricción que se tiene, es el utilizar los estados para modular fuentes de esfuerzo o flujo, debido a que físicamente estas fuentes representan las entradas comunes a los distintos tipos de sistemas, como por ejemplo fuerza, velocidad, voltaje o corriente, no existen fuentes de momento, de posición, o de carga eléctrica, por ello no se puede utilizar los estados como señales moduladoras de fuentes de esfuerzo o flujo, un ejemplo de este error se presenta en la figura 4.27

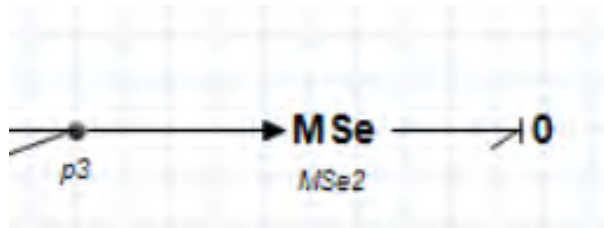


Figura 4.27: Error de modulación de fuentes de esfuerzo/flujo

Solo se pueden utilizar señales de esfuerzo o de flujo para modular estas fuentes, otra cosa a considerar es que los elementos como transformadores, transformadores modulados, giradores y giradores modulados que estén lo que comúnmente llamamos en serie o línea, pueden expresarse como uno solo, siempre y cuando sus causalidades sean compatibles, en la figura 4.28 se ilustran algunas combinaciones que dan origen a un solo transformador o un solo girador.

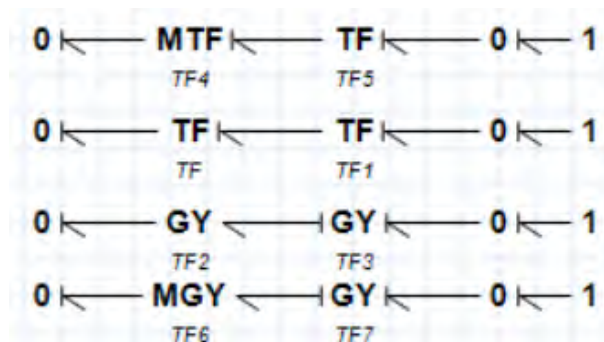


Figura 4.28: Combinaciones equivalentes

Como los transformadores modulados tienen una función como ganancia, el transformador resultante de una línea de transformador simples y transformadores modulados será un transformador modulado, sin embargo su ganancia ahora será la función que tenía anteriormente por la constante del transformador modulado, por ejemplo, se tiene la siguiente configuración de transformadores en la figura 4.29



Figura 4.29: Transformadores en serie

El transformador modulado tiene una función de ganancia $R(t)$, mientras que el transformador simple una ganancia constante de n , como ambos tienen la misma causalidad, tienen las mismas ecuaciones, $f_2 = R(t) \cdot f_1$, para el caso del transformador modulado, y $f_2 = n \cdot f_1$ para el transformador simple, lo que significa que el flujo de entrada al transformador modulado, se relaciona con el flujo de salida del transformador simple por $n \cdot R(t)$, lo que significa que puede remplazarse esos dos transformadores por un solo transformador modulado, cuya ganancia es la función $R(t)$ multiplicada por la ganancia constante del transformador simple n , es decir $n \cdot R(t)$.

Teniendo en cuenta todo esto anteriormente explicado, se puede modelar el control por par calculado en Bond Graph, el primer termino de la entrada e_{10} , al reducir, simplificar la expresión encontrada es $\frac{p1 \cdot R1}{I1}$, donde $p1$ es un estado, corresponde a $R(t)$ y $\frac{R1}{I1}$ es una constante, que corresponde a la ganancia n , el segundo termino es $p1 \cdot (IX - IY) \cdot \dot{q}4 \cdot \cos(q4) \cdot \sin(q4) / I1$. donde $p1 \cdot \dot{q}4 \cdot \cos(q4) \cdot \sin(q4)$ corresponde a $R(t)$ cabe resaltar aquí, que esta $R(t)$ esta formada por la ganancia de 3 giradores modulados, $p1$ tendría su GYM , $\dot{q}4$ también tendría un MTF y $\cos(q4) \cdot \sin(q4)$, lo que significa que $R(t)$ seria la multiplicación de $R(p1)$, $R(\dot{q}4)$ y $R(\cos(q4) \cdot \sin(q4))$, mientras que el termino constante es $\frac{(IX - IY)}{I1}$. Y así sucesivamente con todos los términos, de la entrada e_{10} y e_{11} , de manera que se obtiene el siguiente diagrama del PUMA 2 GOF con el par calculado en BG 4.30

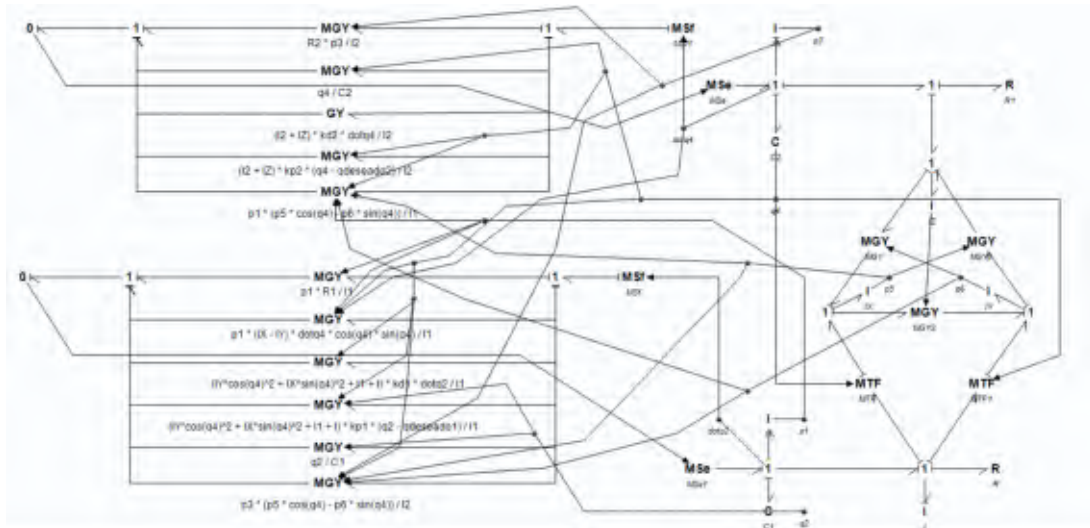


Figura 4.30: PUMA 2 GOF par calculado en BG

Al graficar los ángulos nuevamente, con todos los valores unitarios y los ángulos de-seados en 10 y 5 para los , se obtiene la siguiente figura 4.31.

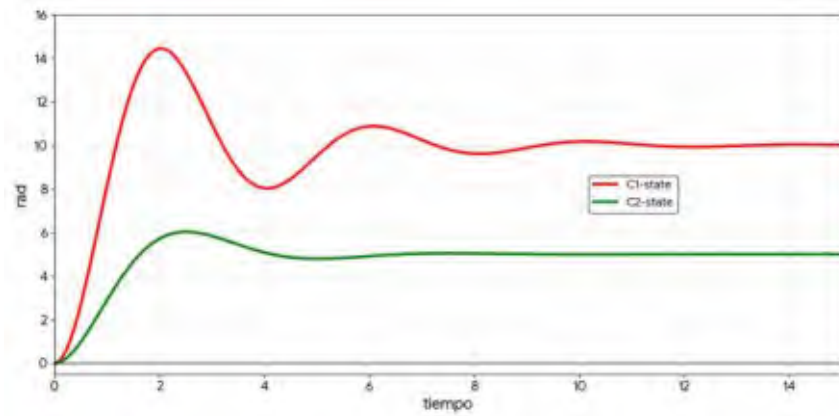


Figura 4.31: Ángulos θ_1 y θ_2 con control en BG

Modificando los ángulos deseados a 7.5 y a 12, se obtiene la grafica 4.32.

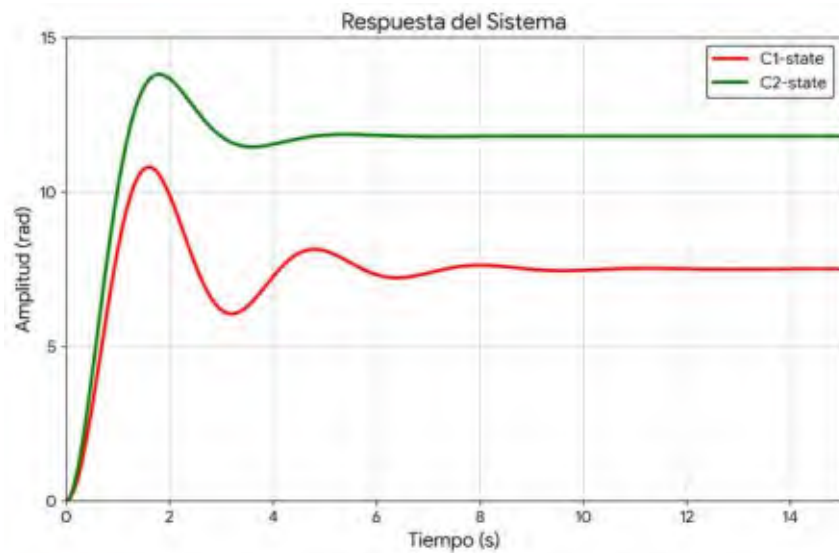


Figura 4.32: Ángulos θ_1 y θ_2 con control en BG

4.7. Robot Stanford 3 DOF

El robot Stanford presenta una cadena cinemática RRP, lo que significa que tiene una unión de revolución en la base, seguida de otra unión de revolución y una unión prismática, este robot fue de los primero en construirse, quizás no para un propósito industrial, pero si para sentar las bases de lo que hoy es la robótica moderna. A continuación se presenta una figura de este robot en la figura 4.33.

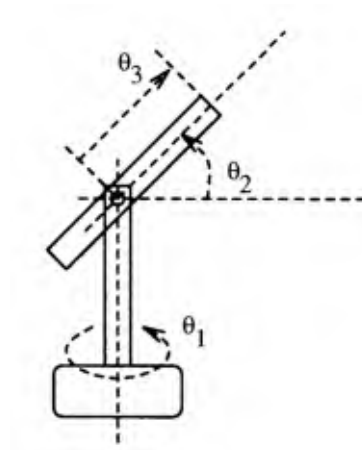


Figura 4.33: Diagrama del Robot Stanford

El robot Stanford, esta una sección mas adelante que el robot PUMA de 2 GOF, porque al tener un grado de libertad extra, su modelo es mas complicado de diseñar, sin embargo, si analizamos fríamente, la cadena cinemática del PUMA anterior, esta implícita en la cadena cinemática del robot Stanford, esto es porque el PUMA anterior tiene dos uniones de revolución exactamente en las misma configuración que las dos primeras uniones del robot Stanford, lo que significa que, el modelo en BG del PUMA anterior, estará presente también, en el modelo en Bond Graph del robot Stanford. Además de esto, el robot prismático también esta implícito, de hecho fue una versión simplificada del Stanford, puesto que el robot prismático, tenía un eslabón fijo, que rotaba manualmente y no se movía en la ejecución del eslabón prismático, al igual que el ángulo θ_2 en el mismo robot prismático, el cual era constante a elección manual y no tenia movimiento durante la ejecución de la unión prismática. A continuación se presenta el diagrama en BG de este Robot 4.34.

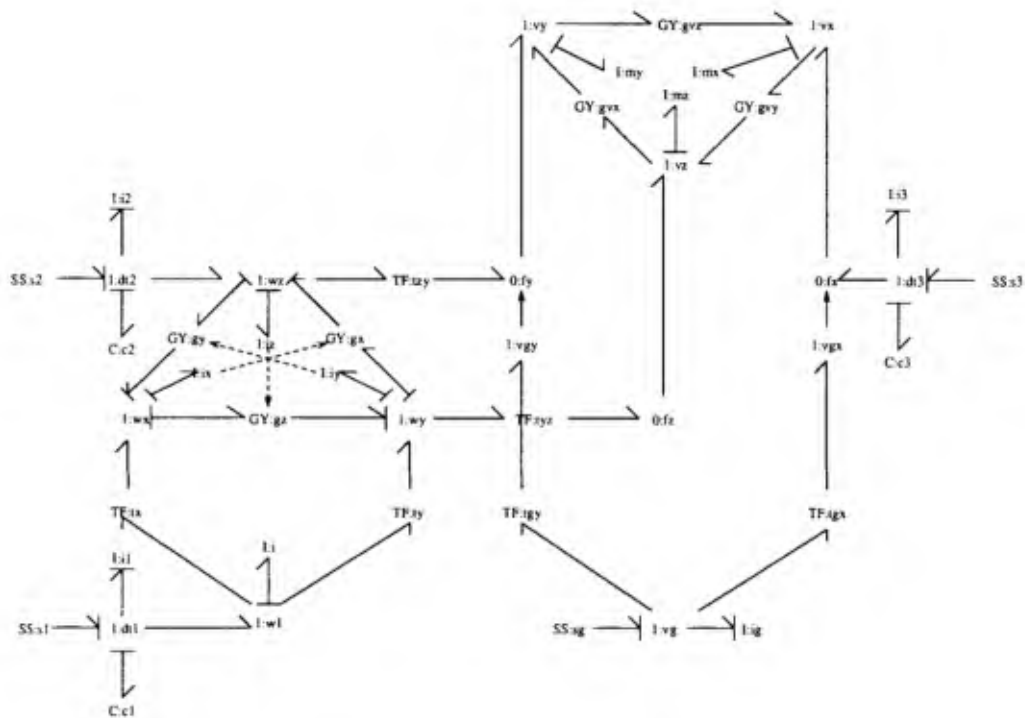


Figura 4.34: Bond Graph del Manipulador Stanford

En la figura 4.34, se puede apreciar que en la parte izquierda del diagrama, se encuentra el modelo del PUMA de 2 eslabones, esto es porque la base del robot Stanford, solo gira en torno al eje z , y por tanto puede modelarse como una sola inercia I , mientras que i_1 es la inercia del motor que da el movimiento (par) a esa articulación, el eslabón 2, como ya sin embargo, viendo transmitido por el eslabón 1, su movimiento es tridimensional, esto es porque su propio movimiento sumado con el movimiento que le transmite el eslabón 1, hace que su inercia se descomponga en el anillo de Euler, haciendo que aparezcan tres inercias que representan la inercia del eslabón 2 pero en los ejes x , y y z , mientras que i_2 representa la inercia del motor que da el movimiento (par) a esa articulación. El movimiento del eslabón 1 hace que el eslabón 2 tenga un movimiento rotacional en el plano xy de allí que existan los dos transformadores que conectan al eslabón 1 en las uniones de movimiento x y movimiento y . Ahora, del lado izquierdo se tiene la parte del último grado de libertad, la articulación prismática, donde la inercia i_3 representa la inercia del motor que da el movimiento (fuerza) al eslabón para hacer que se extienda o se contraiga, sin embargo, nótese que existe un segundo anillo de Euler, en donde antes solo existían las masas m_x y m_y .

Entonces, empezando a analizar el modelo del robot Stanford, se tendrán 7 ecuaciones, porque existen 7 elementos en causalidad integral, sin embargo, de estas 7 ecuaciones solo 3 describirán a los 3 grados de libertad del robot, estas ecuaciones vienen de los elementos de inercia I_1 , I_2 e I_3 . Los elementos se enumeran de la siguiente manera:

1. Los elementos causalidad integral son enumerados a partir del numero 1.
2. Los elementos en causalidad derivativa son enumerados a partir del numero 10.
3. Los elementos activos o bien, elementos de entrada están enumerados desde el numero 20.
4. Los elementos de disipación están enumerados a partir del numero 30.

A continuación se presenta la figura 4.35 donde se ilustra esta enumeración anterior.

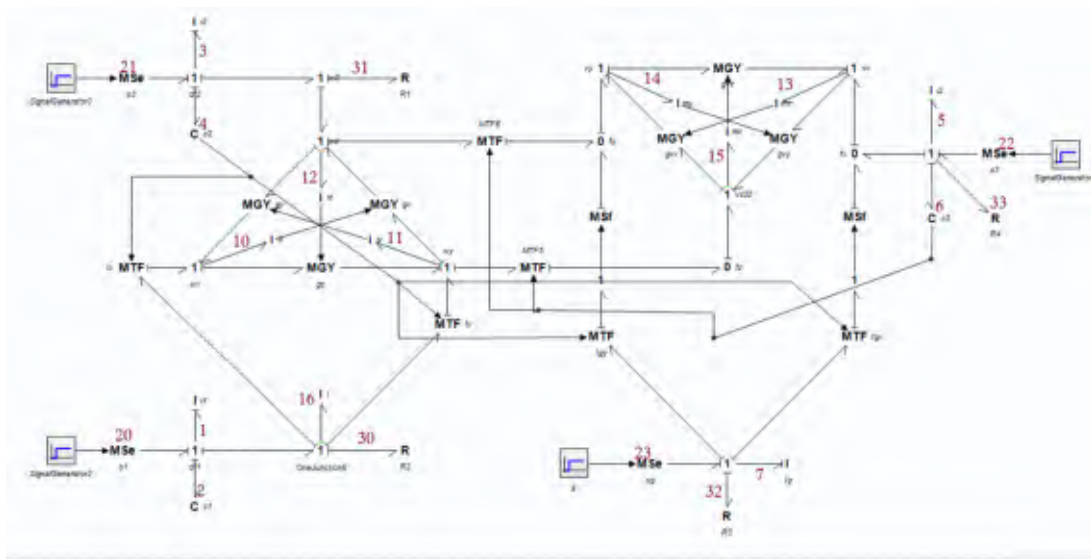


Figura 4.35: Modelo del robot Stanford enumerado

Con esto entonces, ya puede obtenerse los vectores clave, que son que reciben y que regresan al sistema los elementos anteriormente enumerados. Para los elementos en causalidad integral, elementos de disipación y entradas se tienen los siguientes vectores clave y la relación constitutiva de los elementos integrales a partir de la enumeración anterior:

$$x = \begin{bmatrix} p_1 \\ q_2 \\ p_3 \\ q_4 \\ p_5 \\ q_6 \\ p_7 \end{bmatrix}, \dot{x} = \begin{bmatrix} e_1 \\ f_2 \\ e_3 \\ f_4 \\ e_5 \\ f_6 \\ e_7 \end{bmatrix}, z = \begin{bmatrix} f_1 \\ e_2 \\ f_3 \\ e_4 \\ f_5 \\ e_6 \\ f_7 \end{bmatrix}, D_{\text{in}} = \begin{bmatrix} f_{30} \\ f_{31} \\ f_{32} \\ f_{33} \end{bmatrix}, D_{\text{out}} = \begin{bmatrix} e_{30} \\ e_{31} \\ e_{32} \\ e_{33} \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} e_{20} \\ e_{21} \\ e_{22} \\ e_{23} \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{bmatrix} \frac{1}{I_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{IG} \end{bmatrix},$$

Los vectores clave de los elementos en causalidad derivativa son los siguientes, así como las relaciones constitutivas de los elementos en causalidad derivativa y elementos de disipación:

$$x_d = \begin{bmatrix} p_{10} \\ p_{11} \\ p_{12} \\ p_{13} \\ p_{14} \\ p_{15} \\ p_{16} \end{bmatrix}, \dot{x}_d = \begin{bmatrix} e_{10} \\ e_{11} \\ e_{12} \\ e_{13} \\ e_{14} \\ e_{15} \\ e_{16} \end{bmatrix}, z_d = \begin{bmatrix} f_{10} \\ f_{11} \\ f_{12} \\ f_{13} \\ f_{14} \\ f_{15} \\ f_{16} \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} \frac{1}{IX} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{IY} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{IZ} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{mx} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{my} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{mz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I} \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_4 \end{bmatrix}.$$

Al aplicar el análisis de estructura unión, explicado en el capítulo 2, se obtienen las siguientes matrices de unión:

$$s_{11} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -\sigma_1 - p_{10} \cos(q_4) + p_{11} \sin(q_4) & 0 & \sigma_2 & 0 & p_{14}q_6 \cos(q_4) \sin(q_4) - p_{13}q_6 \cos^2(q_4) \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_1 + p_{10} \cos(q_4) - p_{11} \sin(q_4) & 0 & 0 & -1 & -p_{15}q_6 & 0 & -p_{15}q_6 \sin(q_4) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sigma_2 & 0 & p_{15}q_6 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donde

$$\sigma_1 = p_{13} \cos(q_4) q_6^2$$

$$\sigma_2 = p_{14} q_6 \cos(q_4)$$

Los elementos de inercia se relacionan con la matriz s_{11} , los estados p_{10} hasta el p_{15} son los estados de ambos anillos, del anillo de rotación y de traslación, esto significa que las tres principales inercias se están acoplando a través de los momentos de inercia de los anillos, además de representar un acoplamiento rígido, que si el eslabón 1 se mueve, el

movimiento repercute en los demás eslabones.

$$s_{12} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz s_{12} , relaciona los elementos inerciales integrales con los elementos de disipación, solo existe un valor por fila/columna, lo que significa que la resistencia del movimiento de cada elemento de inercia, solo tiene efecto en el propio elemento de inercia que interactúa con la resistencia y no con las demás, físicamente, representa que si se obstaculiza el primer eslabón, ese obstáculo/resistencia solo afectará al movimiento del primer eslabón, y lógicamente esto afectara de forma indirecta a las demás inercias, pero no de forma directa.

$$s_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz s_{13} relaciona las inercias con las entradas, de forma similar que con los elementos de disipación, físicamente representa que la entrada del eslabón 1, no producirá un movimiento directo en los demás eslabones, sino que se produce por el movimiento propio del primer eslabón.

$$s_{14} = \begin{pmatrix} -\sin(q_4) & -\cos(q_4) & 0 & 0 & 0 & -q_6 \cos(q_4) & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -q_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz s_{14} representa como retornan las fuerzas desde los elementos derivativos hacia los elementos integrales, es decir se aplica una entrada, y la energía se transmite a todos los elementos, entonces esta matriz representa el retorno de esa fuerza desde los elementos antes mencionados.

Las demás matrices significan lo mismo que las anteriores, pero en sentido opuesto es decir si la matriz s_{12} relaciona los elementos de disipación con los de inercia, La matriz s_{21} relaciona a los elementos de inercia con los elementos de disipación. Estas matrices que podrían parecer repetitivas, tienen una función mas profunda, y es que si estas matrices no coinciden con las de su indice opuesto, significa que físicamente no se conserva la energía en el trayecto opuesto al que ocurre en la misma matriz con los indices opuestos lo cual, es físicamente imposible. El resto de matrices:

$$s_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad s_{22} = 0, \quad s_{23} = 0 \quad s_{41} = \begin{pmatrix} \sin(q_4) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos(q_4) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \sin(q_4) \\ 0 & 0 & q_6 & 0 & 0 & 0 & \cos(q_4) \\ q_6 \cos(q_4) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

La matriz s_{41} se tiene la teoría de que este relacionada físicamente con el jacobiano, porque si la matriz E , representa la matriz de inercia, en el modelo de Euler Lagrange, la matriz de inercia viene del análisis de la energía cinética del sistema, y esta a su vez, del

jacobino, pero aquí el punto está en que las velocidades y aceleraciones de las articulaciones son dadas por los elementos integrales, sin embargo, las velocidades cartesianas del efector final están contenidas en los elementos derivativos, entonces la matriz s_{41} , parte de la relación de los elementos derivativos hacia los elementos integrales, sin embargo esta teoría se probará más adelante.

La matriz s_{22} , es cero porque los efectos de disipación, no se acoplan, sino que actúan de forma individual en cada eslabón, mientras que la matriz s_{23} representa que las entradas no interactúan con los efectos de disipación, es decir que las entradas no añaden un efecto extra. A partir de aquí, se calcula el modelo matemático, con solo operaciones matriciales, en comparación con el método tradicional, se debe conocer el análisis cinemático directo, el cual da la posición y velocidad del efector final en función de las velocidades articulares, sin embargo se requiere que este en función de las velocidades del efector final y por ello se requiere el jacobino y después el análisis de la energía cinética, potencial, el lagrangiano y la aplicación del análisis dinámico como tal, en Bond Graph, se utilizan las ecuaciones vistas en el capítulo 2, las cuales son (2.24), (2.25) y (2.26) para encontrar su representación en espacio de estados. La matriz E para este robot es la siguiente:

$$E = \begin{pmatrix} \frac{mz q_6^2 \cos(q_4)^2 + IY \cos(q_4)^2 + IX \sin(q_4)^2 + I}{I_1} + 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{my q_6^2 + IZ}{I_2} + 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{my q_6 \cos(q_4)}{IG} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{mx}{I_3} + 1 & 0 & \frac{mx \sin(q_4)}{IG} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz en esencia representa que todas las masas del sistema no se mueven a su antojo, sino que se mueven de forma conjunta, unida convirtiéndose en una sola identidad de inercia, que al momento de mover alguna inercia que lo conforma, este movimiento se transmitirá a través de la geometría del sistema a las demás inercias.

$$E^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{I_1}{mz q_6^2 \cos(q_4)^2 + IY \cos(q_4)^2 + IX \sin(q_4)^2 + I_1 + I} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{I_2}{my (q_6^2 + I_2 + IZ)} & 0 & 0 & 0 & -\frac{I_2 my q_6 \cos(q_4)}{IG (my q_6^2 + I_2 + IZ)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{I_3}{I_3 + mx} & 0 & -\frac{I_3 mx \sin(q_4)}{IG (I_3 + mx)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz H representa las fuerzas de velocidad, coriolis y centrífugas, que tan rápido esta cambiando la forma del robot, en cuanto a postura mientras esta en movimiento, estructuralmente como ya se vio en secciones pasadas la forma de calcular esta matriz es similar a la de la matriz E , con la diferencia que existe una derivada $s_{14} f_d^{-1} \dot{s}_{41}$.

$$H = \begin{pmatrix} IY f_4 \cos(q_4) \sin(q_4) - IX f_4 \cos(q_4) \sin(q_4) - f_6 mz q_6 \cos(q_4)^2 + f_4 mz q_6^2 \cos(q_4) \sin(q_4) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -f_6 my q_6 & 0 & 0 & 0 & f_4 my q_6 \sin(q_4) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -f_4 mx \cos(q_4) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz A , que en espacio de estados representa toda la información estructural del siste-

$$\text{ma: } A = \begin{pmatrix} -\frac{\sigma_4}{\sigma_1} & -\frac{I_1}{C_1 \sigma_1} & -\frac{I_1 \sigma_3}{I_2 \sigma_1} & 0 & \frac{I_1 p_{14} q_6 \cos(q_4)}{I_3 \sigma_1} & 0 & -\frac{I_1 (p_{13} q_6 \cos(q_4)^2 - p_{14} q_6 \cos(q_4) \sin(q_4))}{IG \sigma_1} \\ \frac{1}{I_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{I_2 \sigma_3}{I_1 \sigma_2} & 0 & -\frac{R_2 + f_6 \text{ my } q_6}{\sigma_2} & -\frac{I_2}{C_2 \sigma_2} & -\frac{I_2 p_{15} q_6}{I_3 \sigma_2} & 0 & \frac{I_2 R_3 \text{ my } q_6 \cos(q_4)}{IG^2 \sigma_2} - \frac{I_2 (p_{15} q_6 \sin(q_4) - f_4 \text{ my } q_6 \sin(q_4))}{IG \sigma_2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{I_3 p_{14} q_6 \cos(q_4)}{I_1 (I_3 + \text{mx})} & 0 & \frac{I_3 p_{15} q_6}{I_2 (I_3 + \text{mx})} & 0 & -\frac{R_4}{I_3 + \text{mx}} & -\frac{I_3}{C_3 (I_3 + \text{mx})} & \frac{I_3 R_3 \text{ mx } \sin(q_4)}{IG^2 (I_3 + \text{mx})} - \frac{I_3 f_4 \text{ mx } \cos(q_4)}{IG (I_3 + \text{mx})} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{R_3}{IG} \end{pmatrix}$$

Donde

$$\sigma_1 = \text{mz } q_6^2 \cos(q_4)^2 + IY \cos(q_4)^2 + IX \sin(q_4)^2 + I_1 + I$$

$$\sigma_2 = \text{my } q_6^2 + I_2 + IZ$$

$$\sigma_3 = p_{13} \cos(q_4) q_6^2 + p_{10} \cos(q_4) - p_{11} \sin(q_4)$$

$$\sigma_4 = R_1 + IX f_4 \cos(q_4) \sin(q_4) - IY f_4 \cos(q_4) \sin(q_4) + f_6 \text{ mz } q_6 \cos(q_4)^2 - f_4 \text{ mz } q_6^2 \cos(q_4) \sin(q_4)$$

La matriz B que relaciona las entradas del sistema con la dinámica de los estados:

$$B = \begin{pmatrix} \frac{I_1}{\text{mz } q_6^2 \cos(q_4)^2 + IY \cos(q_4)^2 + IX \sin(q_4)^2 + I_1 + I} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{I_2}{\text{my } q_6^2 + I_2 + IZ} & 0 & -\frac{I_2 \text{ my } q_6 \cos(q_4)}{IG (\text{my } q_6^2 + I_2 + IZ)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{I_3}{I_3 + \text{mx}} & -\frac{I_3 \text{ mx } \sin(q_4)}{IG (I_3 + \text{mx})} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En este punto ya se puede formar la ecuación de espacio de estados, para encontrar el bloque de control, de manera que al realizar las operaciones que existen de forma explicita en $\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u$ se obtienen las 7 ecuaciones de estado que describen toda la dinámica del manipulador Stanford en el espacio de estados.

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \frac{I_1 e_{20}}{\sigma_1} - \frac{p_1 (R_1 + IX f_4 \cos(q_4) \sin(q_4) - IY f_4 \cos(q_4) \sin(q_4) + f_6 \text{ mz } q_6 \cos(q_4)^2 - f_4 \text{ mz } q_6^2 \cos(q_4) \sin(q_4))}{\sigma_1} - \frac{I_1 q_2}{C_1 \sigma_1} - \frac{I_1 p_7 (p_{13} q_6 \cos(q_4)^2 - p_{14} q_6 \cos(q_4) \sin(q_4))}{IG \sigma_1} - \frac{I_1 p_3 \sigma_3}{I_2 \sigma_1} + \frac{I_1 p_5 p_{14} q_6 \cos(q_4)}{I_3 \sigma_1} \\ \frac{I_2 e_{21}}{\sigma_2} - \frac{p_3 (R_2 + f_6 \text{ my } q_6)}{\sigma_2} - p_7 \left(\frac{I_2 (p_{15} q_6 \sin(q_4) - f_4 \text{ my } q_6 \sin(q_4))}{IG \sigma_2} - \frac{I_2 R_3 \text{ my } q_6 \cos(q_4)}{IG^2 \sigma_2} \right) - \frac{I_2 q_4}{C_2 \sigma_2} + \frac{I_2 p_1 \sigma_3}{I_1 \sigma_2} - \frac{I_2 p_5 p_{15} q_6}{I_3 \sigma_2} - \frac{I_2 e_{23} \text{ my } q_6 \cos(q_4)}{IG \sigma_2} \\ p_7 \left(\frac{I_3 R_3 \text{ mx } \sin(q_4)}{IG^2 (I_3 + \text{mx})} - \frac{I_3 f_4 \text{ mx } \cos(q_4)}{IG (I_3 + \text{mx})} \right) + \frac{I_3 e_{22}}{I_3 + \text{mx}} - \frac{R_4 p_5}{I_3 + \text{mx}} + \frac{I_3 q_6}{C_3 (I_3 + \text{mx})} + \frac{I_3 p_3 p_{15} q_6}{I_2 (I_3 + \text{mx})} - \frac{I_3 e_{23} \text{ mx } \sin(q_4)}{IG (I_3 + \text{mx})} - \frac{I_3 p_1 p_{14} q_6 \cos(q_4)}{I_1 (I_3 + \text{mx})} \\ \frac{p_5}{I_3} \\ e_{23} - \frac{R_3 p_7}{IG} \end{pmatrix}$$

Donde

$$\sigma_1 = \text{mz } q_6^2 \cos(q_4)^2 + IY \cos(q_4)^2 + IX \sin(q_4)^2 + I_1 + I$$

$$\sigma_2 = \text{my } q_6^2 + I_2 + IZ$$

$$\sigma_3 = p_{13} \cos(q_4) q_6^2 + p_{10} \cos(q_4) - p_{11} \sin(q_4)$$

Al probar el modelo matemático obtenido, con el gráfico de Bond Graph, deben dar exactamente las mismas señales, ya que de lo contrario no se estaría representando exactamente la misma dinámica, para probar el modelo matemático, se utiliza un bloque de

programación en 20-sim, junto al diagrama en Bond Graph, como se ilustra en la figura 4.36.

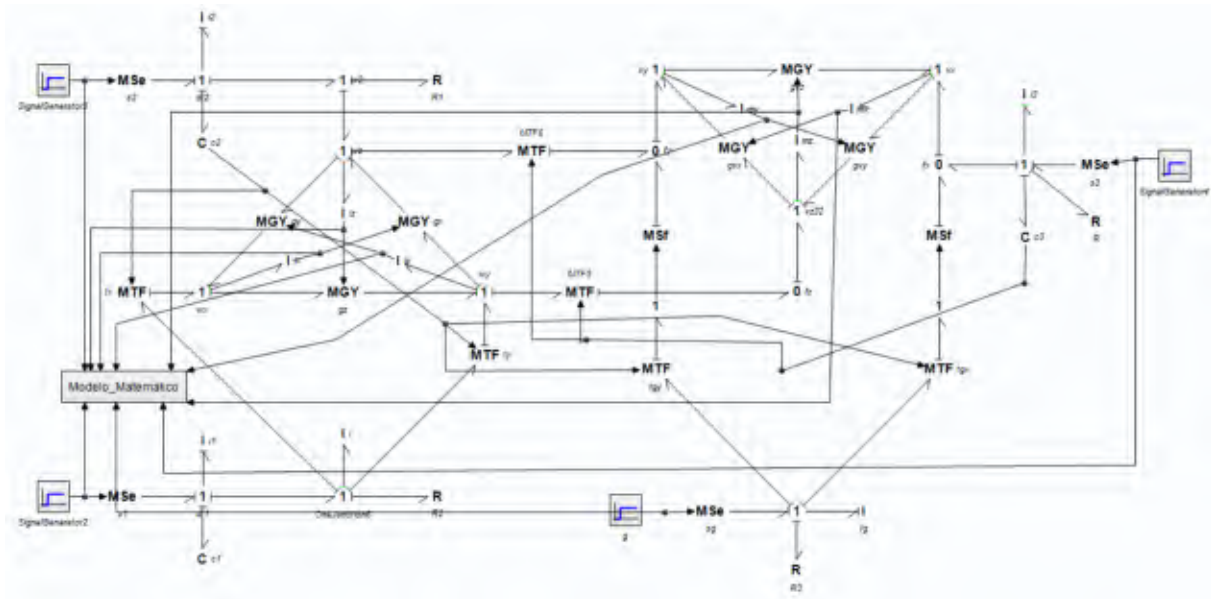


Figura 4.36: Bloque de modelo matemático junto al diagrama en BG

En la figura 4.36, se aprecia que este bloque tiene diferentes entradas, dichas entradas son los estados de los elementos en causalidad derivativa y las propias entradas al sistema, esto para evitar el calculo de estos estados y definir las entradas dentro del bloque, el cual su contenido se ilustra en la figura 4.37.

```

parameters
    real I1 = 0.1kg, I2 = 0.2, I3 = 0.2kg, I4 = 0.1, I5 = 0.1kg;
    real I6 = 0.8, I7 = 0.3, I8 = 0.3;
    real m1 = 0.4, m2 = 0.4, m3 = 0.4;
    real I9 = 0.1, I10 = 0.1, I11 = 0.1;
    real R1 = 0.1, R2 = 0.1, R3 = 0.1, R4 = 0.1;

variables
    real p1, q1, p2, q2, p3, q3, p4, q4, p5, q5, p6, q6, p7, q7; // Estados
    real e1, e2, e3, e4, e5, e6, e7; // Derivadas de los estados

equations
    e1 = (I1*I2)/(m1*q1^2*cos(q1)^2 + I1*cos(q1)^2 + I1 + I2);
    e2 = (I1*I2)/(m1*q1^2*cos(q1)^2 + I1*cos(q1)^2 + I1 + I2);
    e3 = (I1*I2)/(m1*q1^2*cos(q1)^2 + I1*cos(q1)^2 + I1 + I2);
    e4 = (I1*I2)/(m1*q1^2*cos(q1)^2 + I1*cos(q1)^2 + I1 + I2);
    e5 = (I1*I2)/(m1*q1^2*cos(q1)^2 + I1*cos(q1)^2 + I1 + I2);
    e6 = (I1*I2)/(m1*q1^2*cos(q1)^2 + I1*cos(q1)^2 + I1 + I2);
    e7 = (I1*I2)/(m1*q1^2*cos(q1)^2 + I1*cos(q1)^2 + I1 + I2);

    // Integraciones de ecuaciones diferenciales
    p1 = int(e1, 0); p2 = int(e2, 0); p3 = int(e3, 0); p4 = int(e4, 0); p5 = int(e5, 0); p6 = int(e6, 0); p7 = int(e7, 0);

```

Figura 4.37: Código del bloque matemático

Este bloque contiene los parámetros de las inercias, capacitancias, resistencias y de otros elementos así como los valores de las entradas $e_{20} = 10$, $e_{21} = 2$, $e_{22} = 5$ y $e_{23} = -9,81$ que representa la fuerza de gravedad, ademas de contener las ecuaciones de estado $\dot{x}$, mientras que la ultima linea es donde se realiza el calculo de los estados, donde q_2 , q_4 y q_6 son los de interés puesto que representan los ángulos θ_1 , θ_2 y θ_3 . Al simular con los parámetros contenidos dentro del bloque de modelo matemático, se obtienen las graficas de las figuras 4.38 y 4.39.

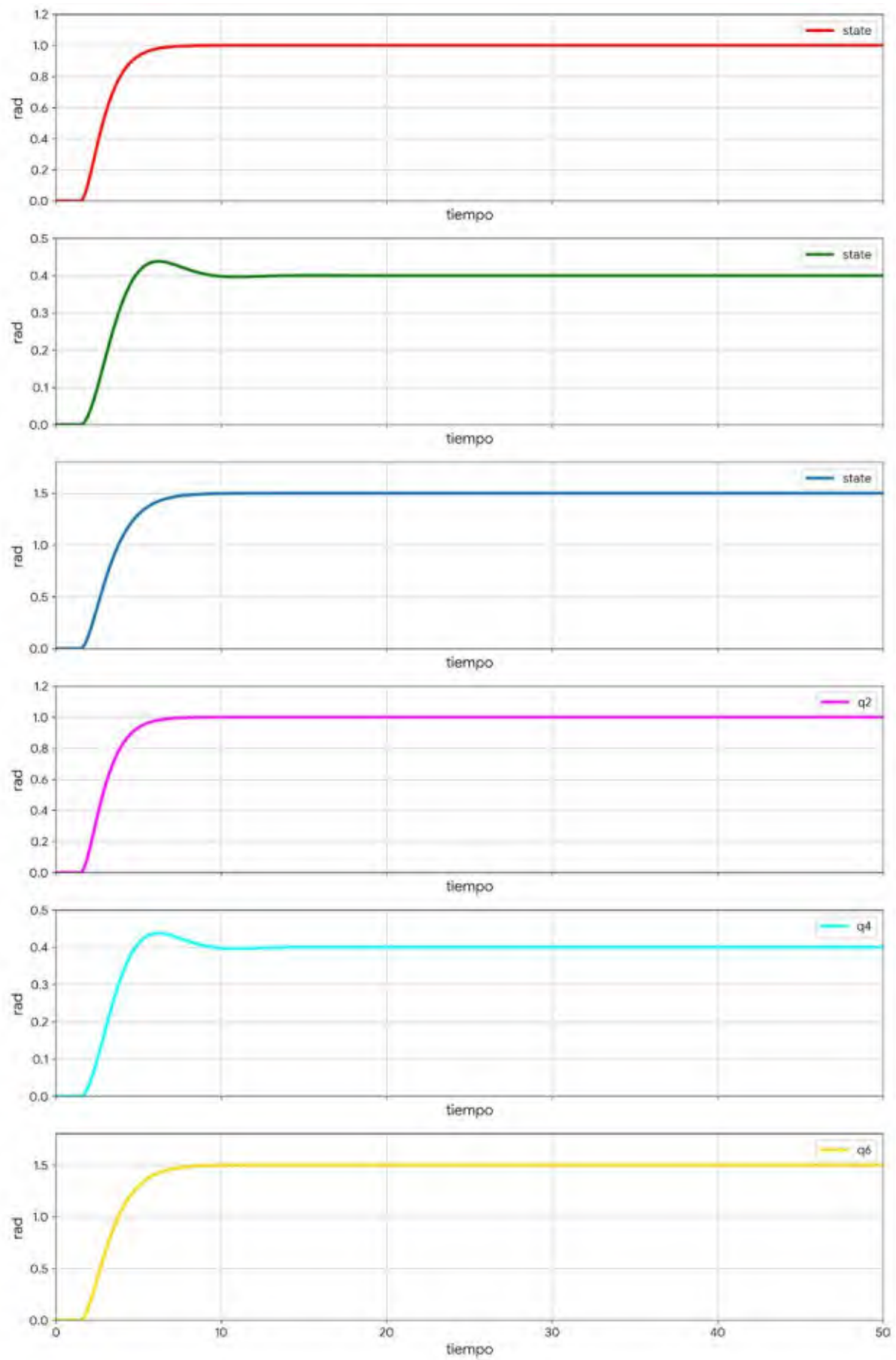


Figura 4.38: Comportamiento angular del robot Stanford

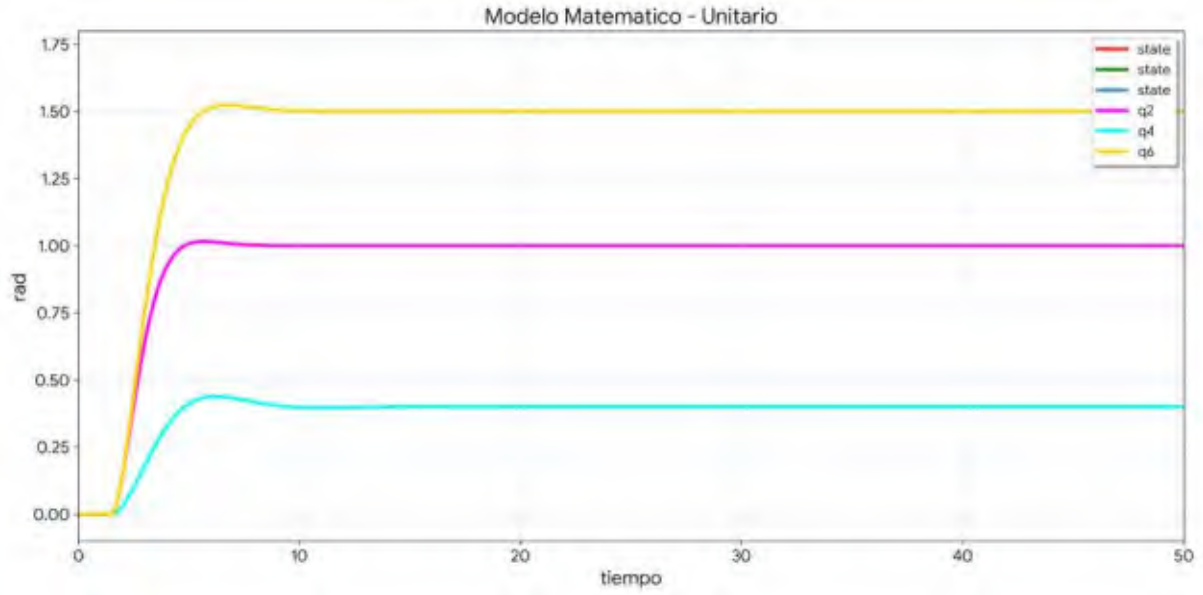


Figura 4.39: Comportamiento angular del robot Stanford superposición

En la figura 4.38, se muestra el comportamiento de los ángulos $state(rojo)$, $state(verde)$ y $state(azul)$ representan los ángulos θ_1 , θ_2 y θ_3 obtenidos por el propio diagrama de Bond Graph, mientras que q_2 , q_4 y q_6 representan los mismos ángulos θ_1 , θ_2 y θ_3 , pero obtenidos por el bloque del modelo matemático, estas gráficas deben resultar exactamente iguales, es decir $state(rojo)$ con q_2 , $state(verde)$ con q_4 y $state(azul)$ con q_6 , al súper poner las graficas, pasamos de 6 gráficas reconocibles a solo 3, lo que significa que son iguales, esto se aprecia en la figura 4.39. Sin embargo, cual es la interpretación de estos resultados, significa que para los parámetros de prueba (los que están dentro del bloque del modelo matemático), y las entradas cuyos valores se mencionaron anteriormente, el ángulo θ_1 correspondiente a la primera articulación (el eslabón que rota solo en el eje z) giro 1 radian en sentido antihorario, se observa en la gráfica que se sobrepasa de 1 radian y después se estabiliza, este "sobre paso" sera mas grande dependiendo de los parámetros y se debe a la matriz de inercia y la matriz de coriolis, el ángulo θ_2 gira 0.4 radianes en sentido antihorario, pero el ángulo θ_3 que realmente es d_3 porque es una distancia en metros, correspondiente a la articulación 3 prismática, se extiende de su longitud inicial, hasta 1.5 metros mas.

Al obtener la ecuación de movimiento del Stanford, a partir de las matrices de unión S, como se calculo exactamente igual que con el manipulador PUMA de 2 GOF, se llega a las siguientes matrices:

$$M = \begin{bmatrix} m_z q_6^2 \cos(q_4)^2 + I_Y \cos(q_4)^2 + I_X \sin(q_4)^2 + I_1 + I & 0 & 0 \\ 0 & m_y q_6^2 + I_2 + I_Z & 0 \\ 0 & 0 & I_3 + m_x \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(I_X - I_Y - m_z q_6^2) \sin(2q_4) \dot{q}_4 + m_z q_6 \cos^2(q_4) \dot{q}_6 & \frac{1}{2}(I_X - I_Y - m_z q_6^2) \sin(2q_4) \dot{q}_2 & m_z q_6 \cos^2(q_4) \dot{q}_2 \\ -\frac{1}{2}(I_X - I_Y - m_z q_6^2) \sin(2q_4) \dot{q}_2 & m_y q_6 \dot{q}_6 & m_y q_6 \dot{q}_4 \\ -m_z q_6 \cos^2(q_4) \dot{q}_2 & -m_y q_6 \dot{q}_4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} m_y q_6 \cos(q_4) \\ 0 \\ m_x \sin(q_4) \end{bmatrix}$$

Para que este modelo pueda existir en la realidad, la ecuación de movimiento debe cumplir dos reglas: la propiedad de simetría y ser definida positiva. La matriz de inercia debe cumplir ambas. Esto significa que el efecto de la aceleración de la articulación i sobre la articulación j es el mismo que el de j sobre i . Mientras que la matriz de inercia sea definida positiva significa que existe energía cinética, lo que implica movimiento real del robot.

Además, existe la propiedad de anti-simetría, que establece que $\dot{q}^T (\dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q})) \dot{q} = 0$. Esto significa que la matriz de Coriolis no realiza trabajo sobre el sistema, lo que tiene como consecuencia que estos efectos solo redistribuyen la energía, pero no la modifican. Si la ecuación de movimiento cumple con ambas propiedades, entonces quiere decir que es correcta y que puede existir en la realidad.

Dada la matriz de inercia es diagonal:

$$M(q) = \text{diag}(M_{11}, M_{22}, M_{33}) \quad (4.2)$$

La matriz es simétrica por definición ($M_{ij} = M_{ji}$). Dado que los parámetros de masa e inercia (m, I) son estrictamente positivos, se cumple que $x^T M(q) x > 0, \forall x \neq 0$.

Mientras que la propiedad de antimateria:

Se debe satisfacer que la matriz $N = \dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q})$ sea anti-simétrica ($N + N^T = 0$).

Para que no sea tan laborioso se definen términos auxiliares:

$$\begin{aligned} \alpha &= (I_X - I_Y - m_z q_6^2) \sin(2q_4) \\ \beta &= 2m_z q_6 \cos^2(q_4) \\ \gamma &= 2m_y q_6 \end{aligned}$$

La derivada temporal de la matriz de inercia $\dot{M}(q)$:

$$\dot{M} = \begin{bmatrix} \alpha \dot{q}_4 + \beta \dot{q}_6 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma \dot{q}_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Mientras que el término $2C(q, \dot{q})$:

$$2C = \begin{bmatrix} \alpha \dot{q}_4 + \beta \dot{q}_6 & \alpha \dot{q}_2 & \beta \dot{q}_2 \\ -\alpha \dot{q}_2 & \gamma \dot{q}_6 & \gamma \dot{q}_4 \\ -\beta \dot{q}_2 & -\gamma \dot{q}_4 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Al realizar la resta $N = \dot{M} - 2C$:

$$N = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha \dot{q}_2 & -\beta \dot{q}_2 \\ \alpha \dot{q}_2 & 0 & -\gamma \dot{q}_4 \\ \beta \dot{q}_2 & \gamma \dot{q}_4 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Se observa que la diagonal es nula ($N_{ii} = 0$) y los términos cruzados son opuestos ($N_{ij} = -N_{ji}$), lo que confirma que la matriz es anti-simétrica.

Entonces, teniendo el espacio de estados, se sabe que el robot Stanford tiene tres grados de libertad, y que por cada grado de libertad debe haber una fuente que suministre el par para generar su movimiento independiente, en este caso se tiene tres entradas y el control por par calculado, linealiza el modelo a través de las entradas, haciendo que el sistema ahora pase a ser de un sistema no lineal variante en el tiempo, a un sistema lineal invariante en el tiempo, sin embargo por medio del controlador k que se ha visto implementado en los robots anteriores, es que da el control del nuevo sistema que se le denomina sistema desacoplado, porque cada ecuación es ahora independiente de las demás como se ha visto implementado anteriormente. Es un sistema lineal, porque solo aparece la primera derivada de la $\dot{q}_i$ en cada controlador, así como la propia variable de estado q_i . Anteriormente se había demostrado la ley de control para la ley de movimiento, esto se encuentra en la sección 4.7, para el caso del modelo en espacio de estados, el vector derivada ya está despejado el cual es $\dot{x}$, por lo tanto, se debe encontrar las equivalencias de las entradas junto con el controlador, es decir...

Para la primera ecuación:

$$\begin{aligned}
e_1 = & \frac{I_1 e_{20}}{\text{mz } q_6^2 \cos^2(q_4) + \text{IY } \cos^2(q_4) + \text{IX } \sin^2(q_4) + I_1 + \text{I}} \\
& - \frac{p_1(R_1 + \text{IX } f_4 \cos(q_4) \sin(q_4) - \text{IY } f_4 \cos(q_4) \sin(q_4) + f_6 \text{mz } q_6 \cos^2(q_4) - f_4 \text{mz } q_6^2 \cos(q_4) \sin(q_4))}{\text{mz } q_6^2 \cos^2(q_4) + \text{IY } \cos^2(q_4) + \text{IX } \sin^2(q_4) + I_1 + \text{I}} \\
& - \frac{I_1 q_2}{C_1 (\text{mz } q_6^2 \cos^2(q_4) + \text{IY } \cos^2(q_4) + \text{IX } \sin^2(q_4) + I_1 + \text{I})} \\
& - \frac{I_1 p_7 (p_{13} q_6 \cos^2(q_4) - p_{14} q_6 \cos(q_4) \sin(q_4))}{\text{IG } (\text{mz } q_6^2 \cos^2(q_4) + \text{IY } \cos^2(q_4) + \text{IX } \sin^2(q_4) + I_1 + \text{I})} \\
& - \frac{I_1 p_3 (p_{13} \cos(q_4) q_6^2 + p_{10} \cos(q_4) - p_{11} \sin(q_4))}{I_2 (\text{mz } q_6^2 \cos^2(q_4) + \text{IY } \cos^2(q_4) + \text{IX } \sin^2(q_4) + I_1 + \text{I})} \\
& + \frac{I_1 p_5 p_{14} q_6 \cos(q_4)}{I_3 (\text{mz } q_6^2 \cos^2(q_4) + \text{IY } \cos^2(q_4) + \text{IX } \sin^2(q_4) + I_1 + \text{I})}
\end{aligned}$$

La entrada que nos interesa es e_{20} , entonces ahora como se vio en la demostración en la sección 4.7, igualar a cero para encontrar cuanto debe valer esta entrada para que toda

la ecuación sea cero mas el controlador, esto en términos simples.

$$\begin{aligned}
0 = & \frac{I_1 e_{20}}{\text{mz } q_6^2 \cos^2(q_4) + \text{IY } \cos^2(q_4) + \text{IX } \sin^2(q_4) + I_1 + \text{I}} \\
& - \frac{p_1 (R_1 + \text{IX } f_4 \cos(q_4) \sin(q_4) - \text{IY } f_4 \cos(q_4) \sin(q_4) + f_6 \text{mz } q_6 \cos^2(q_4) - f_4 \text{mz } q_6^2 \cos(q_4) \sin(q_4))}{\text{mz } q_6^2 \cos^2(q_4) + \text{IY } \cos^2(q_4) + \text{IX } \sin^2(q_4) + I_1 + \text{I}} \\
& - \frac{I_1 q_2}{C_1 (\text{mz } q_6^2 \cos^2(q_4) + \text{IY } \cos^2(q_4) + \text{IX } \sin^2(q_4) + I_1 + \text{I})} \\
& - \frac{I_1 p_7 (p_{13} q_6 \cos^2(q_4) - p_{14} q_6 \cos(q_4) \sin(q_4))}{\text{IG } (\text{mz } q_6^2 \cos^2(q_4) + \text{IY } \cos^2(q_4) + \text{IX } \sin^2(q_4) + I_1 + \text{I})} \\
& - \frac{I_1 p_3 (p_{13} \cos(q_4) q_6^2 + p_{10} \cos(q_4) - p_{11} \sin(q_4))}{I_2 (\text{mz } q_6^2 \cos^2(q_4) + \text{IY } \cos^2(q_4) + \text{IX } \sin^2(q_4) + I_1 + \text{I})} \\
& + \frac{I_1 p_5 p_{14} q_6 \cos(q_4)}{I_3 (\text{mz } q_6^2 \cos^2(q_4) + \text{IY } \cos^2(q_4) + \text{IX } \sin^2(q_4) + I_1 + \text{I})} + k_1
\end{aligned}$$

Entonces, se aprecia que la entrada e_{20} para que cancele a toda la primera ecuación de estado debe ser igual a:

$$\begin{aligned}
e_{20} = & \frac{p_1 (R_1 + \text{IX } f_4 \cos(q_4) \sin(q_4) - \text{IY } f_4 \cos(q_4) \sin(q_4) + f_6 \text{mz } q_6 \cos^2(q_4) - f_4 \text{mz } q_6^2 \cos(q_4) \sin(q_4))}{I_1} \\
& - \frac{k_1 (\text{mz } q_6^2 \cos^2(q_4) + \text{IY } \cos^2(q_4) + \text{IX } \sin^2(q_4) + I_1 + \text{I})}{I_1} + \frac{q_2}{C_1} + \frac{p_7 (p_{13} q_6 \cos^2(q_4) - p_{14} q_6 \cos(q_4) \sin(q_4))}{\text{IG}} \\
& + \frac{p_3 (p_{13} \cos(q_4) q_6^2 + p_{10} \cos(q_4) - p_{11} \sin(q_4))}{I_2} - \frac{p_5 p_{14} q_6 \cos(q_4)}{I_3}
\end{aligned}$$

Al remplazar la entrada en la primera ecuación de estado, debe quedar unicamente el controlador $-k_1$, con esto, el primer eslabón ahora esta desacoplado, y controlable. Las ecuaciones 3 y 5, corresponden a los eslabones 2 y 3, porque están relacionadas con las inercias I_2 e I_3 , al realizar los pasos anteriores ahora con las ecuaciones de estado 3 y 5, se obtienen la expresión correspondiente a las entradas e_{21} y e_{22} .

$$\begin{aligned}
e_{21} = & p_7 \left(\frac{p_{15} q_6 \sin(q_4) - f_4 \text{my } q_6 \sin(q_4)}{\text{IG}} - \frac{R_3 \text{my } q_6 \cos(q_4)}{\text{IG}^2} \right) - \frac{k_2 (\text{my } q_6^2 + I_2 + \text{IZ})}{I_2} \\
& + \frac{p_3 (R_2 + f_6 \text{my } q_6)}{I_2} + \frac{q_4}{C_2} - \frac{p_1 (p_{13} \cos(q_4) q_6^2 + p_{10} \cos(q_4) - p_{11} \sin(q_4))}{I_1} \\
& + \frac{p_5 p_{15} q_6}{I_3} + \frac{e_{23} \text{my } q_6 \cos(q_4)}{\text{IG}} \\
e_{22} = & \frac{R_4 p_5}{I_3} - p_7 \left(\frac{R_3 \text{mx } \sin(q_4)}{\text{IG}^2} - \frac{f_4 \text{mx } \cos(q_4)}{\text{IG}} \right) - \frac{k_3 (I_3 + \text{mx})}{I_3} + \frac{q_6}{C_3} - \frac{p_3 p_{15} q_6}{I_2} \\
& + \frac{\text{mx } \sin(q_4)}{\text{IG}} e_{23} + \frac{p_1 p_{14} q_6 \cos(q_4)}{I_1}
\end{aligned}$$

Al sustituir estas entradas en la ecuación de estado, se eliminan todos los términos resul-

tando solamente en los controladores k_1 , k_2 y k_3 , es decir:

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ f_2 \\ e_3 \\ f_4 \\ e_5 \\ f_6 \\ e_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 \\ \frac{p_1}{I_1} \\ -k_2 \\ \frac{p_3}{I_2} \\ -k_3 \\ \frac{p_5}{I_3} \\ e_{23} - \frac{R_3 p_7}{IG} \end{bmatrix}$$

Donde:

$$\begin{aligned} k_1 &= (kd_1 \cdot f_2 + kp_1 \cdot (q_2 - q_{deseado_1})) \\ k_2 &= (kd_2 \cdot f_4 + kp_2 \cdot (q_4 - q_{deseado_2})) \\ k_3 &= (kd_3 \cdot f_6 + kp_3 \cdot (q_6 - q_{deseado_3})). \end{aligned}$$

Esto implementado en un bloque de programación en Bond Graph, se tienen las tres expresiones de las entradas como salidas del bloque, que van conectadas a cada fuente activa correspondiente. El diagrama se ilustra en la figura 4.40.

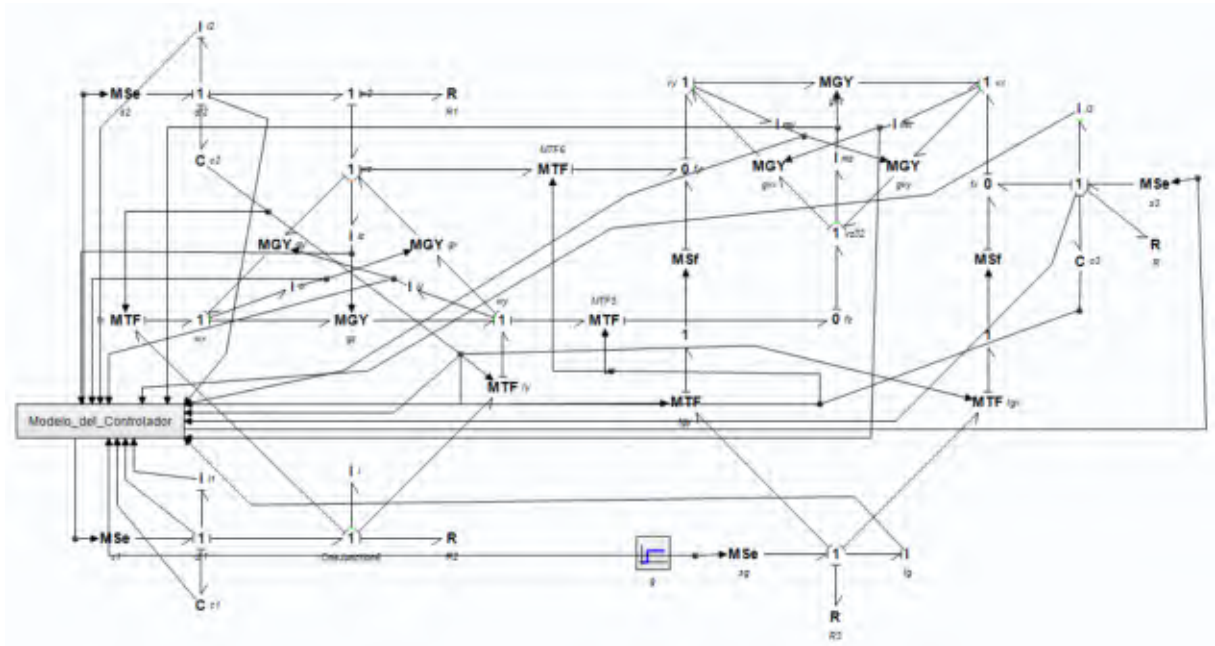


Figura 4.40: Stanford bloque de control

Nótese que el bloque de control tiene varias entradas y solo 3 salidas, las entradas corresponden a los estados de los elementos derivativos e incluso los elementos integrales, incluyendo los ángulos, esto es porque las salidas de este bloque deben de representar toda la dinámica de cada grado de libertad, y esto alimentando las entradas. El bloque de control internamente contiene las tres ecuaciones que se mostraron anteriormente para las entradas e_{20} , e_{21} y e_{22} , y los parámetros de simulación, así como los ángulos que se desean tener se ilustra en la figura 4.41.

```

parameters
  real I1 = 0.15, I2 = 0.2, I3 = 0.25, I = 0.1, IG = 0.15;
  real IX = 0.3, IY = 0.3, IZ = 0.3;
  real mx = 0.4, my = 0.4, mz = 0.4;
  real C1 = 0.1, C2 = 0.2, C3 = 0.3;
  real R1 = 3.0, R2 = 5.0, R3 = 2.0, R4 = 2.5;
  real kd1 = 1, kp1 = 4, qdeseado1 = 1;
  real kd2 = 2, kp2 = 4, qdeseado2 = 2;
  real kd3 = 2, kp3 = 4, qdeseado3 = 2;

variables
  real ki, k2, k3;

equations
  ki = (kd1 * f2 + kp1 * (q2 - qdeseado1));
  k2 = (kd2 * f4 + kp2 * (q4 - qdeseado2));
  k3 = (kd3 * f6 + kp3 * (q6 - qdeseado3));

  e20 = ((mz*q6^2*cos(q4)^2 + IY*cos(q4)^2 + IX*sin(q4)^2 + I1 + I)*(p1*(R1 + IX*f4*cos(q4)*sin(q4) - IY*f4*cos(q4)*sin(q4) + f6*mz*q6*cos(q4)^2 - f4*mz*q6^2*cos(q4)*sin(q4)))/(mz*q6^2*cos(q4)^2 + IY*cos(q4)^2 + IX*sin(q4)^2 + I1 + I) - ki + (I1*q2)/(C1*(mz*q6^2*cos(q4)^2 + IY*cos(q4)^2 + IX*sin(q4)^2 + I1 + I)) + (I1*p7*(p13*q6*cos(q4)^2 - p14*q6*cos(q4)*sin(q4)))/(IG*(mz*q6^2*cos(q4)^2 + IY*cos(q4)^2 + IX*sin(q4)^2 + I1 + I)) + (I1*p3*(p13*cos(q4)*q6^2 - p10*cos(q4) - p11*sin(q4)))/(I2*(mz*q6^2*cos(q4)^2 + IY*cos(q4)^2 + IX*sin(q4)^2 + I1 + I)) - (I1*p5*p14*q6*cos(q4))/(I3*(mz*q6^2*cos(q4)^2 + IY*cos(q4)^2 + IX*sin(q4)^2 + I1 + I)))/I1;

  e21 = ((my*q6^2 + I2 + I2)*(p7*((I2*(p15*q6*sin(q4) - f4*my*q6*sin(q4)))/(IG*(my*q6^2 + I2 + I2)) - (I2*R3*my*q6*cos(q4))/(IG^2*(my*q6^2 + I2 + I2)) - k2 + (p3*(R2 + f6*my*q6))/(my*q6^2 + I2 + I2) + (I2*q4)/(C2*(my*q6^2 + I2 + I2)) - (I2*p1*(p13*cos(q4)*q6^2 + p10*cos(q4) - p11*sin(q4)))/(I1*(my*q6^2 + I2 + I2)) + (I2*p5*p15*q6)/(I3*(my*q6^2 + I2 + I2)) + (I2*e23*my*q6*cos(q4))/(IG*(my*q6^2 + I2 + I2)))/I2;

  e22 = ((I3 + mx)*(R4*p5)/(I3 + mx) - p7*((I3*R3*mx*sin(q4))/(IG^2*(I3 + mx)) - (I3*f4*mx*cos(q4))/(IG*(I3 + mx)) - k3 + (I3*q6)/(C3*(I3 + mx)) - (I3*p3*p15*q6)/(I2*(I3 + mx)) + (I3*e23*mx*sin(q4))/(IG*(I3 + mx)) + (I3*p1*p14*q6*cos(q4))/(I1*(I3 + mx)))/I3;

```

Figura 4.41: Código del bloque controlador

De manera que el bloque controlador genera las señales que van directamente a las fuentes de esfuerzo e_{20} , e_{21} y e_{22} . Al simular el sistema con esos parámetros del bloque de controlador, y los valores de los ángulos deseados y de k_p y k_d para cada controlador, mostrados en la figura 4.42, se obtienen las siguientes graficas.

```

real kd1 = 1, kp1 = 4, qdeseado1 = 1;
real kd2 = 2, kp2 = 4, qdeseado2 = 2;
real kd3 = 2, kp3 = 4, qdeseado3 = 4;

```

Figura 4.42: Parámetros de los controladores k_i

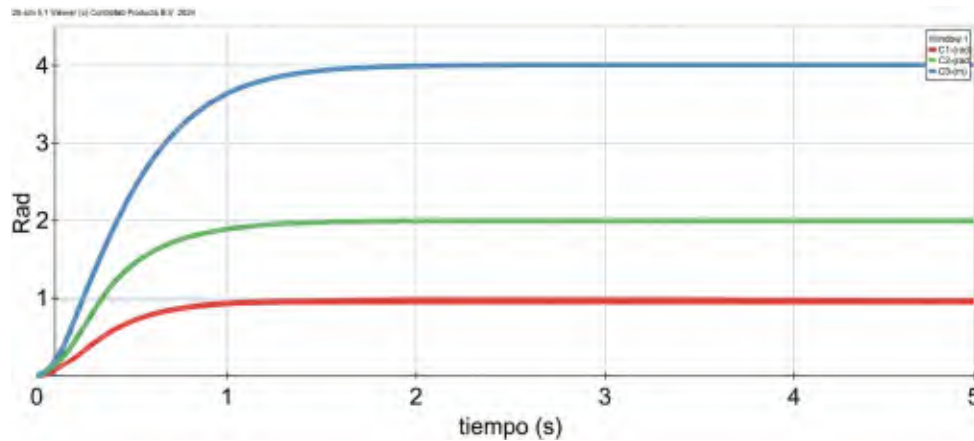


Figura 4.43: Ángulos controlados

Los ángulos deseados como se aprecia en la figura 4.43 son de 1, 2 y 4 para los algunos θ_1 , θ_2 y θ_3 o bien d_3 , eso quiere decir que el ángulo θ_1 se moverá 1 rad en sentido antihorario, el ángulo θ_2 se moverá 2 rad en sentido antihorario y la articulación prismática se extenderá 4 metros, se debe tener cuidado principalmente con este ultimo en la realidad, puesto que las articulaciones prismáticas tienen una longitud mínima y una longitud máxima de alcance, si se desea una extensión mas allá de la alcanzada naturalmente, siempre dará

el máximo y nunca el deseado. Modificando los ángulos deseados a los mostrados en la figura 4.44, se obtienen los ángulos de la figura 4.45.

```
real kd1 = 1, kp1 = 4, qdeseado1 = 1;
real kd2 = 2, kp2 = 4, qdeseado2 = 3;
real kd3 = 2, kp3 = 4, qdeseado3 = 1;
```

Figura 4.44: Parámetros de los controladores k_i

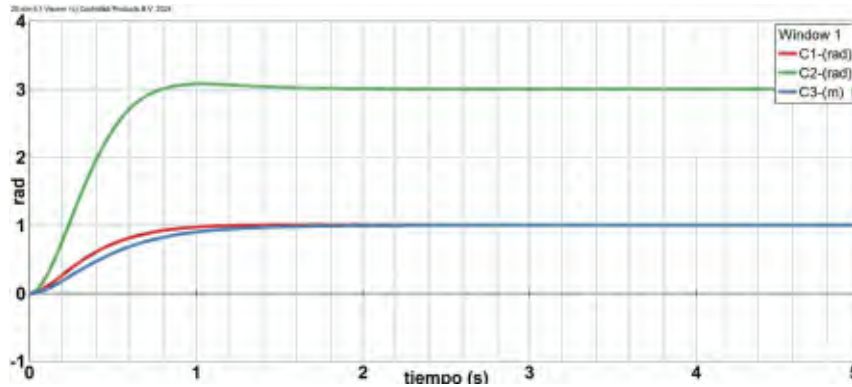


Figura 4.45: Ángulos controlados simulación 2

En este caso los ángulos deseados son 1,4 y 1 y en la figura 4.45, se aprecia como los primeros ángulos rotan 1 y 4 radianes en sentido antihorario (de forma positiva), mientras que la distancia d_3 se extiende 1 metro.

Hasta ahora, el control se ha realizado con un bloque de control que calcula la dinámica del sistema de forma matemática, ahora solo queda mapear el controlador al dominio de Bond Graph, para esto se utilizan los transformadores y giradores modulados y no modulados, dependiendo de los módulos. Para mapear los 3 controladores al dominio de Bond Graph, se debe analizar termino a termino, para así, adaptarlo a un girador o transformador modulado o no modulado. La ecuación (4.7), puede reescribirse de manera que sea un poco mas compacta y visible cada termino.

$$\begin{aligned}
e_{20} = & \frac{p_1 R_1}{I_1} + \frac{p_1 f_4 \cos(q_4) \sin(q_4) (IX - IY)}{I_1} - \frac{p_1 f_4 \cos(q_4) \sin(q_4) m z q_6^2}{I_1} \\
& + \frac{p_1 f_6 m z q_6 \cos^2(q_4)}{I_1} - \frac{k_1 (m z q_6^2 \cos^2(q_4) + IY \cos^2(q_4) + IX \sin^2(q_4) + I_1 + I)}{I_1} \\
& + \frac{q_2}{C_1} + \frac{p_7 p_{13} q_6 \cos^2(q_4)}{IG} - \frac{p_7 p_{14} q_6 \cos(q_4) \sin(q_4)}{IG} \\
& + \frac{p_3 p_{13} q_6^2 \cos(q_4)}{I_2} + \frac{p_3 p_{10} \cos(q_4)}{I_2} - \frac{p_3 p_{11} \sin(q_4)}{I_2} - \frac{p_5 p_{14} q_6 \cos(q_4)}{I_3}.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

En donde existen 12 términos y todos son giradores modulados, porque aparecen estados

de algún elemento integral o derivativo, no puramente parámetros constantes.

$$\begin{aligned}
e_{21} = & \frac{p_7(p_{15} q_6 \sin(q_4) - f_4 \text{ my } q_6 \sin(q_4))}{IG} - \frac{p_7 R_3 \text{ my } q_6 \cos(q_4)}{IG^2} \\
& - \frac{k_2(\text{my } q_6^2 + I_2 + IZ)}{I_2} + \frac{p_3(R_2 + f_6 \text{ my } q_6)}{I_2} + \frac{q_4}{C_2} \\
& - \frac{p_1(p_{13} \cos(q_4) q_6^2 + p_{10} \cos(q_4) - p_{11} \sin(q_4))}{I_1} + \frac{p_5 p_{15} q_6}{I_3} + \frac{e_{23} \text{ my } q_6 \cos(q_4)}{IG}
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Para e_{21} existen 8 términos de los cuales todos serán giradores modulados, porque también existen estados de elementos de derivativos e integrales.

$$e_{22} = \frac{R_4 p_5}{I_3} - \frac{p_7 R_3 m_x \sin(q_4)}{IG^2} + \frac{p_7 f_4 m_x \cos(q_4)}{IG} - k_3 \left(\frac{I_3 + m_x}{I_3} \right) + \frac{q_6}{C_3} - \frac{p_3 p_{15} q_6}{I_2} + \frac{e_{23} m_x \sin(q_4)}{IG} + \frac{p_1 p_{14} q_6 \cos(q_4)}{I_1} \tag{4.8}$$

Para e_{22} de forma similar a la entrada anterior, existen 8 términos de los cuales en todos aparece un estado, y por tanto, serán giradores modulados. Entonces, por cada elemento que aparezca en un termino, debe haber un transformador o girador modulado, y el primero de la serie, debe ser un girador dependiendo de la señal que se quiera generar, por ejemplo en este caso se quiere generar el par o en Bond Graph el esfuerzo a partir de la derivada del estado del elemento de inercia que genere la ecuación dinámica, en este caso I_1 genera una ecuación dinámica, y su derivada de variable de estado es velocidad (flujo), entonces hay que girarla a esfuerzo, si fuese esfuerzo, deberían ser todos transformadores modulados. Por ejemplo para el término $\frac{p_1 f_4 \cos(q_4) \sin(q_4) (IX - IY)}{I_1}$, su configuración de sería como se ilustra en la figura 4.46.

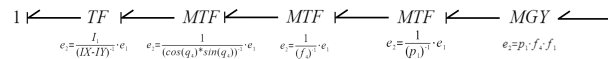


Figura 4.46: Representación de un termino en Bond Graph

Sin embargo, hacer esto es extremadamente tedioso, como se tienen 28 términos por representar y de estos 28 términos contienen varios elementos, sería un desastre, por ello al igual que en los sistemas eléctricos y mecánicos, estos elementos pueden reducirse para generar un solo elemento que represente exactamente la misma cadena, de manera que todos los módulos de la serie pasarán a ser solo uno, pero este único elemento debe ser un girador, puesto que se requiere esfuerzo a partir de una señal de flujo, por tanto, el elemento reducido que representa el termino antes mostrado se ilustra en la figura 4.47.

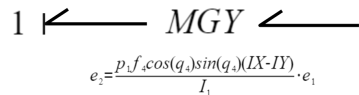


Figura 4.47: Representación de un termino en Bond Graph reducido

Esta representación anterior es equivalente, y puede usarse para representar cada termino de cada expresión, de manera que la representación de la ecuación 4.6, en Bond Graph, se ilustra en la figura 4.48.

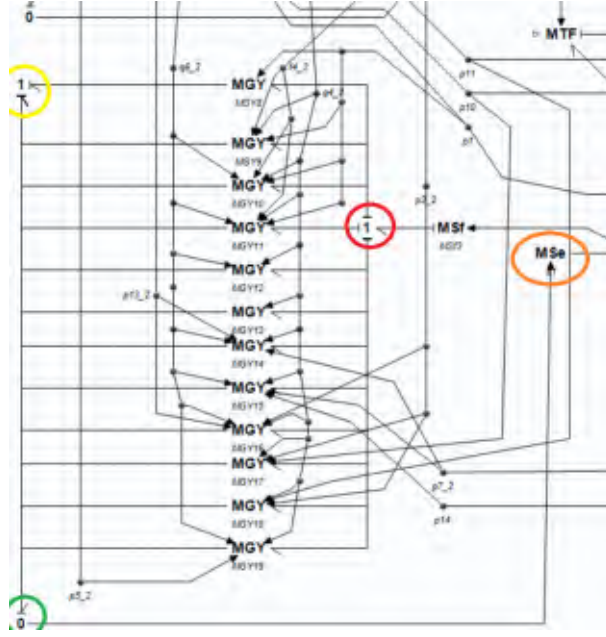


Figura 4.48: Entrada e_{20} en BG

Los términos que aparecen en la ecuación 4.6 están en lista en la figura 4.48, el primer girador modulado de arriba abajo, representa el termino $\frac{p_1 \cdot R_1}{I_1}$, por ello como entrada tiene solo p_1 , el segundo girador modulado representa al termino antes explicado, por ello recibe p_1 , q_4 y f_4 , el tercer girador modulado de arriba abajo, representa el termino $\frac{p_1 f_4 \cos(q_4) \sin(q_4) \text{mz } q_6^2}{I_1}$, recibe entonces p_1 , f_4 y ahora la variable de estado q_6 , y así sucesivamente para el resto de términos, son 12 términos para la primera entrada, 12 giradores modulados, cuya señal de final o de salida de todos los giradores modulados, van a una unión 1 (circulo amarillo), recordando que en una unión 1, todos los esfuerzos que entran deben ser iguales a los esfuerzos que salen, lo que implica que todas las salidas de los giradores se van a sumar en esa unión porque todas entran y solo un Bond sale, caso contrario a lo que ocurre en la unión 1 de las entradas de los giradores (circulo rojo), en esta todos son Bonds de flujo, y por tanto, todos los flujos son iguales a la entrada que es la velocidad de eslabón 1, el único Bond que sale de la unión 1 de salida (circulo amarillo), contiene toda la expresión de la ecuación 4.6 y va directo a una unión 0, donde el esfuerzo se conserva, es igual para todos los Bonds que se conecten a esa unión, sin embargo no se puede conectar esta unión 0 a la entrada (circulo naranja) a través de un Bond convencional, porque este Bond consume potencia (transmite tanto esfuerzo como flujo), entonces se debe conectar a través de un Bond activo, recordando que un Bond activo proveniente de una unión 0, transmite solo la señal de esfuerzo mientras que la señal de flujo es cero, entonces la señal de esfuerzo modula la entrada (circulo naranja) y alimenta al sistema, esta señal que alimenta al sistema no es mas ni menos que el par calculado, que al calcularlo con los mismos parámetros vistos en el bloque del controlador en la figura 4.41, modificando el ángulo deseado θ_1 a 1.5 se obtienen las figuras 4.49 y 4.50.

$my * q_6 * \sin(q_4)))/IG$, donde f_4 ya está implícito en la ecuación del girador modulado $e_2 = r(q) \cdot f_1$ este f_1 es f_4 y por ello no aparece de forma explícita, el segundo girador modulado representa el término $-p_7 * (R_3 * my * q_6 * \cos(q_4))/(IG^2)$, recibe p_7 , q_6 , q_4 , los demás parámetros son constantes dentro del elemento, y así sucesivamente con el resto de los 6 términos. De la misma manera que el eslabón anterior, todas las entradas de los giradores reciben el mismo flujo, en este caso f_4 , y convierten esa variable de flujo en esfuerzo, multiplicando/dividiendo por los estados de entrada en cada girador modulado, para posteriormente sumarse en la unión 1 de salida y extraer la señal de esfuerzo en la unión 0 para modular la entrada, de manera que al simular con los mismos parámetros, modificando solo el ángulo deseado a 0.8 rad, se obtienen las siguientes gráficas 4.52 y 4.53.

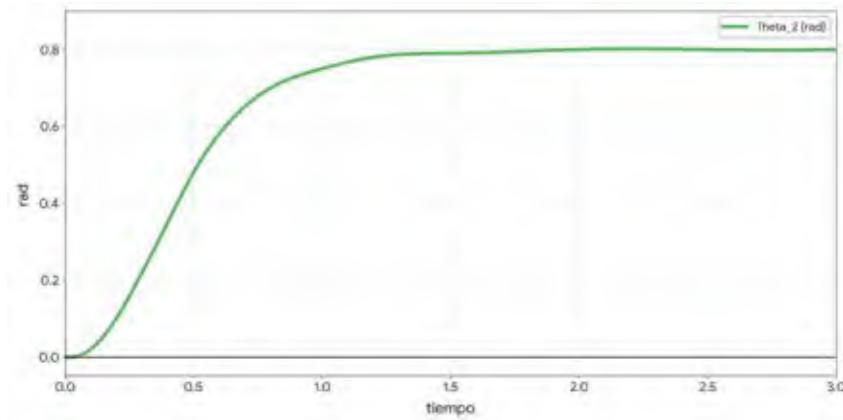


Figura 4.52: Ángulo θ_2 controlado por e_{21} par calculado

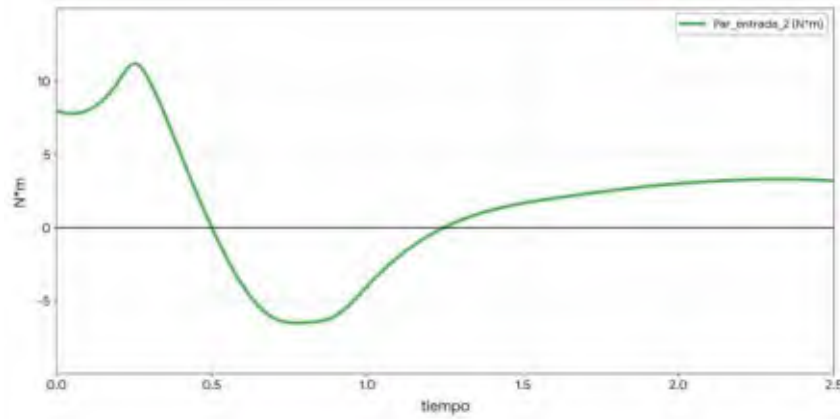


Figura 4.53: Par calculado e_{21}

En la figura 4.53 se aprecia el par que tiene que generar el actuador físico, para que produzca que el segundo eslabón, se mueva 8 rad en sentido antihorario como en la figura 4.52. Para la articulación prismática se tiene la ecuación de la entrada 4.8, que también consta de 8 términos y cada término tiene 2 o más elementos que corresponden a los estados de los elementos integrales o bien de los elementos derivativos, entonces su representación en Bond Graph será como los anteriores uniones, esto se muestra en la figura 4.54.

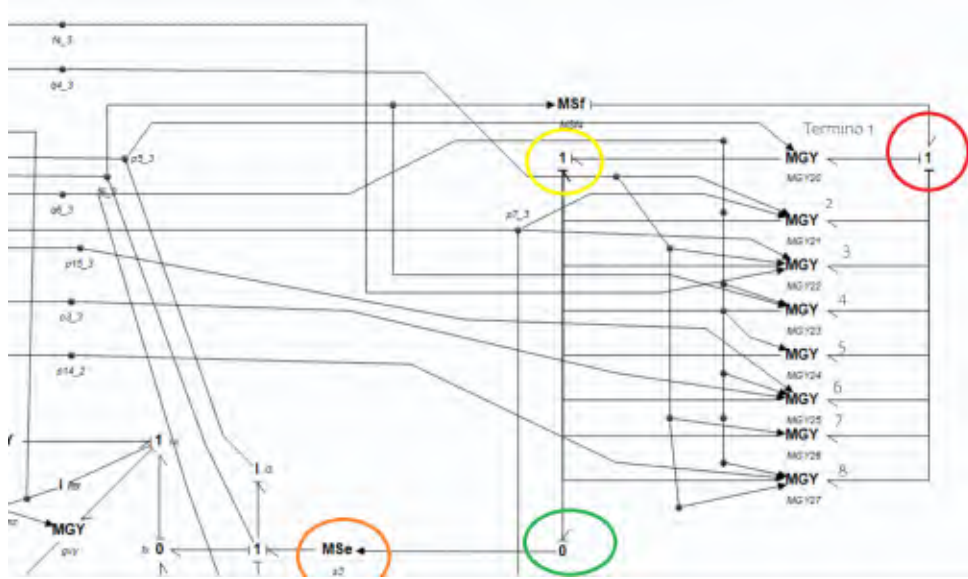


Figura 4.54: Entrada e_{22} en BG

De manera que el primer girador de arriba abajo representa el termino $\frac{R_4 p_5}{I_3}$, la enumeración p_53 solo es nombre, no representa otra variable, el nombre puro p_5 estaba ya en uso, de la misma manera con los demás nodos donde se aprecie un numero extra, es notación. El segundo girador de arriba abajo representa el termino $-\frac{p_7 R_3 m_x \sin(q_4)}{IG^2}$, donde el signo negativo esta dentro del modulo, el tercer girador representa el termino $+\frac{p_7 f_4 m_x \cos(q_4)}{IG}$ y así sucesivamente hasta el octavo termino. Al simular con los mismos parámetros modificando solo el ángulo deseado, se obtienen las figuras 4.55 y 4.56.

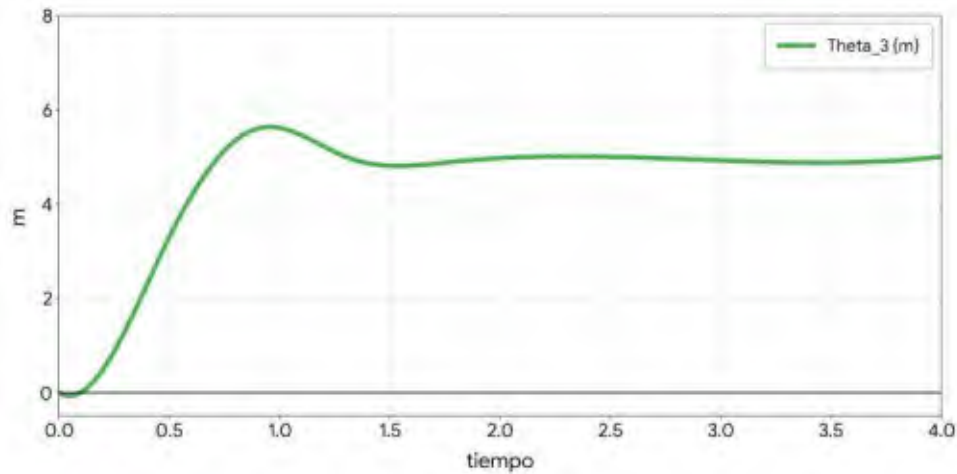


Figura 4.55: Extensión d_3 controlado por e_{22} par calculado

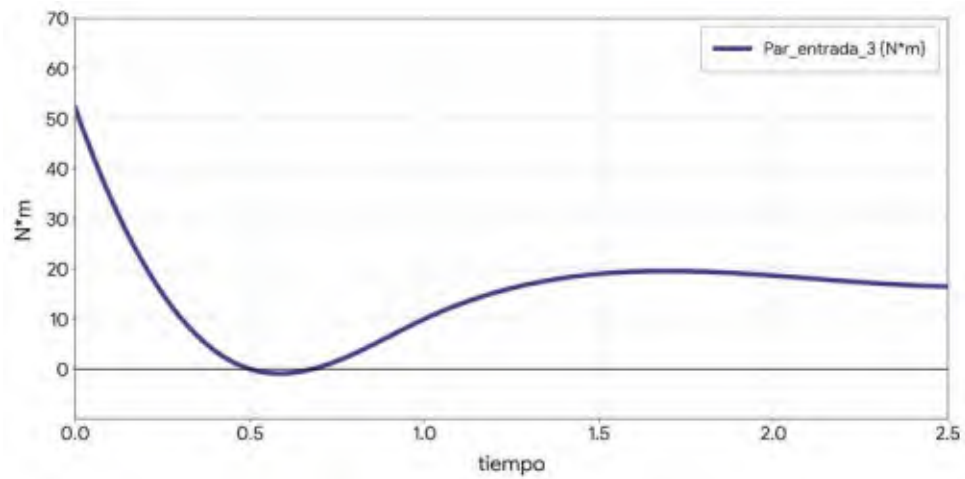


Figura 4.56: Par calculado e_{22}

En la realidad se vería al robot partir de la posición inicial, moverse a cada uno de los ángulos deseados, siempre y cuando se genere la misma forma de señal de cada par de entrada, es decir si partimos de la posición inicial arbitraria del Stanford por ejemplo la que se muestra en la figura 4.57, Al aplicar aplicar el primer par calculado, el eslabón 1 debe moverse 1.5 rad, o bien aproximadamente 86 grados 4.58.

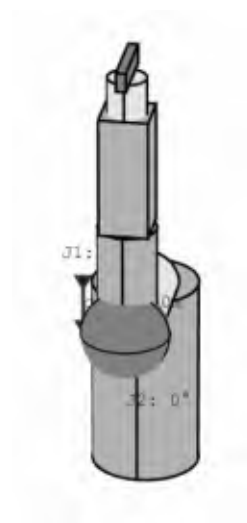


Figura 4.57: Stanford posición inicial

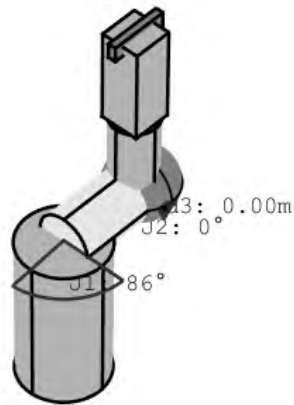


Figura 4.58: Rotación de 86° de la primera unión

Al aplicar el par 2, la segunda unión de revolución debe rotar 0.8 rad o bien aproximadamente 85 deg, como se ejemplifica en la figura 4.59.

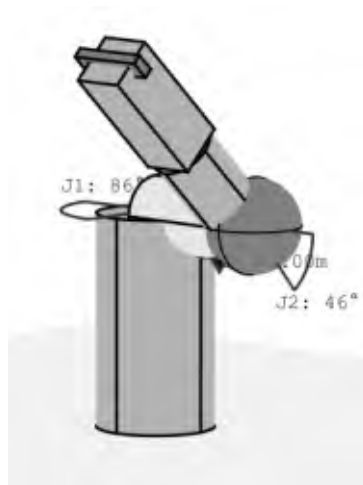


Figura 4.59: Rotación de 46° de la segunda unión

Por ultimo, si se aplica el par 3 graficado anteriormente, a partir del control en Bond Graph la unión prismática debe extenderse 5 metros, extenderse implica a largarse, desplegarse, a manera de ejemplo esto se ilustra en la figura 4.60.



Figura 4.60: Extensión de 5 m de la tercera unión

Capítulo 5

Conclusiones y Recomendaciones

5.1. Conclusiones

Se desarrolló una metodología basada en Bond Graph que sirvió tanto para obtener el modelo matemático como para diseñar el control de robots manipuladores en 3D. La aplicación de este enfoque gráfico permitió unificar el análisis de sistemas mecánicos y de control, facilitando la obtención de las ecuaciones en el espacio de estados directamente a partir de la estructura de unión y los vectores clave, sin la necesidad de recurrir a la complejidad algebraica de los métodos analíticos tradicionales. La hipótesis planteada fue validada mediante los resultados obtenidos.

Se verificó la equivalencia entre los modelos dinámicos generados por Bond Graph y el método de Euler-Lagrange para manipuladores de 1 y 2 eslabones, demostrando que las ecuaciones de movimiento son matemáticamente idénticas. Esta validación confirma que la metodología preserva la interpretación física del sistema, relacionando linealmente las variables de potencia (esfuerzo y flujo) con las variables de energía (momento y desplazamiento).

La extensión al movimiento tridimensional del robot Stanford se logró mediante la implementación de los anillos de Euler en Bond Graph. Este marco permitió describir la dinámica de cuerpo rígido y las interacciones de inercia acopladas en los ejes x , y y z , integrando las uniones de revolución y prismáticas en un solo diagrama. El análisis de la causalidad integral y derivativa en la estructura de unión evidenció la controlabilidad y observabilidad estructural del sistema, propiedades necesarias para el diseño del controlador. Finalmente, el controlador por par calculado, diseñado e implementado dentro del dominio de Bond Graph a través de giradores y transformadores modulados, estabilizó el sistema y anuló los términos no lineales de la dinámica del robot. Las simulaciones en el software 20-sim demostraron que los ángulos y desplazamientos de las articulaciones convergieron a los valores deseados, corroborando la capacidad de la metodología para sistematizar el modelado y control de sistemas multidominio complejos.

5.2. Recomendaciones

Como trabajo futuro se sugiere la implementación física del controlador realizado en un robot Stanford real para poder validar los resultados de la simulación obtenidos en el software 20-sim con datos empíricos.

Como parte de esta investigación, se sugiere profundizar en la usabilidad de los anillos de Euler en el Bond Graph para el modelamiento de la dinámica de sistemas con cuerpos flexibles o que integren otros dominios (hidráulicos o térmicos) para un nivel de aplicación más sofisticado.

Se propone que se considere la enseñanza de la metodología de Bond Graph en los programas de ingeniería mecánica, así se desarrollará la capacidad científico-tecnológica en áreas prioritarias, permitiendo el ejercicio de un análisis integrado y eficiente de sistemas complejos.

Se propone que el control de los manipuladores se optimice por medio del modelado unificado, lo que puede conllevar a la disminución del consumo energético y, por ende, a la reducción de efectos ambientales adversos en el nivel de la producción industrial.

Bibliografía

- [1] Craig, J. J. (2005). Introduction to Robotics: Mechanics and Control. Pearson Prentice Hall.
- [2] Telefónica. (2024, 13 marzo). Tipos de robots: clasificación, aplicaciones y ejemplos. Telefónica. <https://www.telefonica.com/es/sala-comunicacion/blog/tipos-de-robots-clasificacion-aplicaciones-y-ejemplos/>
- [3] Lozano Ruiz, J. A. (n.d.). Introducción a la técnica de Bond-Graph. Universidad Politécnica de Madrid, Escuela Técnica Superior de Ingeniería y Diseño Industrial, Departamento de Ingeniería Mecánica, Química y Diseño Industrial.
- [4] UNIR México. (n.d.). ¿Qué son los sistemas dinámicos en Matemáticas? . UNIR México. <https://mexico.unir.net/noticias/ingenieria/sistemas-dinamicos-matematicas/>
- [5] Unbehauen, H. (Ed.). (2009). Control systems, robotics and automation-volume III: system analysis and control: classical approaches-III. EOLSS Publications.
- [6] Berger, R., ElMaraghy, H., and ElMaraghy, W. (1990). The analysis of simple robots using bond graphs. Journal Of Manufacturing Systems, 9(1), 13-19. [https://doi.org/10.1016/0278-6125\(90\)90065-p](https://doi.org/10.1016/0278-6125(90)90065-p)
- [7] Ragusila, V., & Emami, M. R. (2014). Modelling of a robotic leg using bond graphs. Simulation Modelling Practice And Theory, 40, 132-143. <https://doi.org/10.1016/j.simpat.2013.09.006>
- [8] Roberts, D., Ballance, D., & Gawthrop, P. (1995). DESIGN AND IMPLEMENTATION OF A BOND-GRAPH OBSERVER FOR ROBOT CONTROL. 3(10), 1447-1457.
- [9] Yin, C., John, S., Shengqi Jian, C., Md Hassan Faghih, C., Md Toufiqul Islam, C., & Luc Rolland, C. (2014). Bond Graph Modeling and Simulating of 3 RPR Planar Parallel Manipulator. <http://www.asme.org/about-asme/terms-of-use>
- [10] Sahoo, S. R., Chiddarwar, S. S., & Alakshendra, V. (2017). Dynamic modelling and simulation of a three-Wheeled Omnidirectional Mobile Robot: Bond graph approach. ACM International Conference Proceeding Series, Part F132085. <https://doi.org/10.1145/3132446.3134866>
- [11] Conacyt. (2023). Programa Especial de Ciencia, Tecnología e Innovación 2021-2024 – Conahcyt. Conahcyt. <https://conahcyt.mx/conahcyt/peciti/>

- [12] Borutzky, W. (2010). Bond graph methodology: Development and analysis of multidisciplinary dynamic system models. In *Bond Graph Methodology: Development and Analysis of Multidisciplinary Dynamic System Models*. Springer London
- [13] Tenreiro Machado, J. A., & R Cunha, V. M. (n.d.). *An Introduction to Bond Graph Modeling with Applications*.
- [14] Sueur, jj C, & Dauphin-Tanguy, G. (n.d.). *Bond-graph Approach for Structural Analysis of MIMO Linear Systems*.
- [15] Dauphin-Tanguy, G., Rahmani, A., & Sueur, C. (n.d.). Bond graph aided design of controlled systems. www.elsevier.nl/locate/simpra
- [16] Spong, M. W., Hutchinson, S., & Vidyasagar, M. (2020). *Robot Modeling and Control* (2nd ed.). John Wiley & Sons.
- [17] Murray, R. M., Li, Z., & Sastry, S. S. (1994). *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*. CRC Press.
- [18] Borutzky, W. (2010). *Bond Graph Methodology: Development and Analysis of Multidisciplinary Dynamic System Models*. Springer.
- [19] Borutzky, W. (Ed.). (2011). *Bond Graph Modelling of Engineering Systems: Theory, Applications and Software Support*. Springer.
- [20] Borutzky, W. (Ed.). (2017). *Bond Graphs for Modelling, Control and Fault Diagnosis of Engineering Systems* (2nd ed.). Springer International Publishing.
- [21] Karnopp, D. C., Margolis, D. L., & Rosenberg, R. C. (2012). *System Dynamics: Modeling, Simulation, and Control of Mechatronic Systems* (5th ed.). John Wiley & Sons.
- [22] Mukherjee, A., Karmakar, R., & Samantaray, A. K. (2006). *Bond Graph in Modeling, Simulation and Fault Identification*. CRC Press.
- [23] Merzouki, R., Samantaray, A. K., Pathak, P. M., & Bouamama, B. O. (2012). *Intelligent Mechatronic Systems: Modeling, Control and Diagnosis*. Springer.
- [24] Gawthrop, P., & Smith, L. (1996). *Metamodelling: Bond Graphs and Dynamic Systems*. Prentice Hall.
- [25] Spong, M. W., Hutchinson, S., & Vidyasagar, M. (2020). *Robot Modeling and Control* (2nd ed.). John Wiley & Sons.
- [26] Cellier, F. E. (1991). *Continuous System Modeling*. Springer-Verlag.
- [27] Spong, M. W., Hutchinson, S., & Vidyasagar, M. (2020). *Robot Modeling and Control* (2nd ed.). John Wiley & Sons.
- [28] Siciliano, B., Sciavicco, L., Villani, L., & Oriolo, G. (2009). *Robotics: Modelling, Planning and Control*. Springer.
- [29] Craig, J. J. (2018). *Introduction to Robotics: Mechanics and Control* (4th ed.). Pearson.

- [30] Lynch, K. M., & Park, F. C. (2017). *Modern Robotics: Mechanics, Planning, and Control*. Cambridge University Press.
- [31] Featherstone, R. (2008). *Rigid Body Dynamics Algorithms*. Springer.
- [32] Luh, J. Y. S., Walker, M. W., & Paul, R. P. C. (1980). On-line Computational Scheme for Mechanical Manipulators. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 102(2), 69-76.
- [33] Walker, M. W., & Orin, D. E. (1982). Efficient Dynamic Computer Simulation of Robotic Mechanisms. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 104(3), 205-211.
- [34] Khatib, O. (1987). A unified approach for motion and force control of robot manipulators: The operational space formulation. *IEEE Journal on Robotics and Automation*, 3(1), 43-53.
- [35] Park, F. C., Bobrow, J. E., & Ploen, S. R. (1995). A Lie Group Formulation of Robot Dynamics. *The International Journal of Robotics Research*, 14(6), 609-618.
- [36] Ai, B., Tian, S., Shi, H., Wang, Y., Pfaff, T., Tan, C., Christensen, H. I., Su, H., Wu, J., & Li, Y. (2025). A review of learning-based dynamics models for robotic manipulation. *Science Robotics*, 10(106).

Formato de Declaración de Originalidad y Uso de Inteligencia Artificial

Coordinación General de Estudios de Posgrado
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo



A quien corresponda,

Por este medio, quien abajo firma, bajo protesta de decir verdad, declara lo siguiente:

- Que presenta para revisión de originalidad el manuscrito cuyos detalles se especifican abajo.
- Que todas las fuentes consultadas para la elaboración del manuscrito están debidamente identificadas dentro del cuerpo del texto, e incluidas en la lista de referencias.
- Que, en caso de haber usado un sistema de inteligencia artificial, en cualquier etapa del desarrollo de su trabajo, lo ha especificado en la tabla que se encuentra en este documento.
- Que conoce la normativa de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, en particular los Incisos IX y XII del artículo 85, y los artículos 88 y 101 del Estatuto Universitario de la UMSNH, además del transitorio tercero del Reglamento General para los Estudios de Posgrado de la UMSNH.

Datos del manuscrito que se presenta a revisión		
Programa educativo	Maestria en ciencias en ingenieria mecanica	
Título del trabajo	“Modelado y control de robots manipuladores en 3D con un enfoque de Bond Graph”	
	Nombre	Correo electrónico
Autor/es	Christian Eli Guzman Ceballos	1577703d@umich.mx
Director	Dr. Gilberto González Avalos	gilberto.gonzalez@umich.mx
Codirector		
Coordinador del programa	Dr. Pablo Genaro Martinez Torres	mae.cs.ingenieria.mecanica@umich.mx

Uso de Inteligencia Artificial		
Rubro	Uso (sí/no)	Descripción
Asistencia en la redacción	NO	

Formato de Declaración de Originalidad y Uso de Inteligencia Artificial

Coordinación General de Estudios de Posgrado
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo



Uso de Inteligencia Artificial		
Rubro	Uso (sí/no)	Descripción
Traducción al español	NO	
Traducción a otra lengua	NO	
Revisión y corrección de estilo	NO	
Análisis de datos	NO	
Búsqueda y organización de información	NO	
Formateo de las referencias bibliográficas	SI	Se utilizó inteligencia artificial para la estructuración de la lista de referencias
Generación de contenido multimedia	NO	
Otro	NO	

Datos del solicitante	
Nombre y firma	Christian Eli Guzman Ceballos
Lugar y fecha	Morelia Michoacán Mexico 04/21/2026

Christian Eli Guzmán Ceballos

Modelado y control de robots manipuladores en 3D con un enfoque de Bond Graph.pdf

 Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Detalles del documento

Identificador de la entrega

trn:oid:::3117:581519333

Fecha de entrega

21 abr 2026, 5:32 p.m. GMT-6

Fecha de descarga

21 abr 2026, 5:52 p.m. GMT-6

Nombre del archivo

Modelado y control de robots manipuladores en 3D con un enfoque de Bond Graph.pdf

Tamaño del archivo

34.1 MB

157 páginas

42.152 palabras

191.082 caracteres

13% Similitud general

El total combinado de todas las coincidencias, incluidas las fuentes superpuestas, para ca...

Fuentes principales

- 13%  Fuentes de Internet
- 7%  Publicaciones
- 0%  Trabajos entregados (trabajos del estudiante)

Marcas de integridad

N.º de alerta de integridad para revisión



Caracteres reemplazados

516 caracteres sospechosos en N.º de páginas

Las letras son intercambiadas por caracteres similares de otro alfabeto.

Los algoritmos de nuestro sistema analizan un documento en profundidad para buscar inconsistencias que permitirían distinguirlo de una entrega normal. Si advertimos algo extraño, lo marcamos como una alerta para que pueda revisarlo.

Una marca de alerta no es necesariamente un indicador de problemas. Sin embargo, recomendamos que preste atención y la revise.

Christian Eli Guzmán Ceballos

Modelado y control de robots manipuladores en 3D con un enfoque de Bond Graph.pdf

 Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Detalles del documento

Identificador de la entrega

trn:oid:::3117:581519333

Fecha de entrega

21 abr 2026, 5:32 p.m. GMT-6

Fecha de descarga

21 abr 2026, 5:37 p.m. GMT-6

Nombre del archivo

Modelado y control de robots manipuladores en 3D con un enfoque de Bond Graph.pdf

Tamaño del archivo

34.1 MB

157 páginas

42.152 palabras

191.082 caracteres

8% Similitud general

El total combinado de todas las coincidencias, incluidas las fuentes superpuestas, para ca...

Filtrado desde el informe

- Texto citado
- Texto mencionado
- Coincidencias menores (menos de 10 palabras)

Fuentes principales

- 8%  Fuentes de Internet
- 4%  Publicaciones
- 0%  Trabajos entregados (trabajos del estudiante)

Marcas de integridad

N.º de alerta de integridad para revisión

-  **Caracteres reemplazados**
516 caracteres sospechosos en N.º de páginas
Las letras son intercambiadas por caracteres similares de otro alfabeto.

Los algoritmos de nuestro sistema analizan un documento en profundidad para buscar inconsistencias que permitirían distinguirlo de una entrega normal. Si advertimos algo extraño, lo marcamos como una alerta para que pueda revisarlo.

Una marca de alerta no es necesariamente un indicador de problemas. Sin embargo, recomendamos que preste atención y la revise.