



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN
NICOLÁS DE HIDALGO



FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL

MAESTRÍA EN INGENIERÍA EN EL ÁREA DE
ESTRUCTURAS

ANÁLISIS EÓLICO EN UN PUENTE CURVO EN VOLADIZO

TESIS PARA OBTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA EN EL ÁREA DE ESTRUCTURAS

PRESENTA: ING. MAX BRANDOM MAYO HERNÁNDEZ

ASESOR: DR. HUGO HERNÁNDEZ BARRIOS

MORELIA, MICHOACÁN MAYO DE 2026

RESUMEN

Esta investigación desarrolla y optimiza herramientas computacionales de Identificación Modal Operacional (OMA) en los dominios del tiempo y frecuencia. Se implementaron algoritmos como Peak-Picking, SSI-COV y un método de Rinawi adaptativo. La contribución principal es la optimización numérica mediante filtros Savitzky-Golay, secciones de segundo orden y ventaneo adaptativo, logrando estimar con alta precisión el amortiguamiento en estructuras de baja disipación al reducir la inestabilidad y el sesgo estadístico. Además, se comparan dos metodologías de simulación de viento, en donde se realiza el análisis dinámico a un puente carretero curvo construido por voladizos sucesivos. Utilizando un modelo espina equivalente y simulaciones tridimensionales de viento, se demostró que la curvatura horizontal actúa como un moderador cinemático que estabiliza la respuesta resonante ante el aleteo (flutter).

Palabras clave: Análisis Modal Operacional, identificación estocástica, estimación de amortiguamiento, optimización numérica, puente curvo en voladizo.

ABSTRACT

This research develops and optimizes computational tools for Operational Modal Analysis (OMA) in the time and frequency domains. Algorithms such as Peak-Picking, SSI-COV, and an adaptive Rinawi method were implemented. The main contribution is the numerical optimization through Savitzky-Golay filters, second-order sections, and adaptive windowing, achieving highly accurate estimation of damping in low-dissipation structures by reducing instability and statistical bias. Furthermore, two wind simulation methodologies are compared, in which the dynamic analysis of a curved highway bridge constructed by balanced cantilevers is performed. Using an equivalent fishbone model and three-dimensional wind simulations, it was demonstrated that the horizontal curvature acts as a kinematic moderator that stabilizes the resonant response to flutter.

Keywords: Operational Modal Analysis, stochastic identification, damping estimation, numerical optimization, curved balanced cantilever bridge.

Pero el señor me dijo: “No digas que eres muy joven. Tu irás a donde yo te mande, y dirás lo que yo te ordene. No tengas miedo de nadie, pues yo estaré contigo para protegerte. Yo el señor, doy mi palabra.”

Jeremias 1:7

AGRADECIMIENTOS

A Dios, por brindarme la salud, la fuerza y la resiliencia necesarias para culminar esta importante etapa de mi vida.

A la SECIHTI, por los recursos aportados y la confianza depositada en mí para la realización de mis estudios de maestría. Su respaldo fue el cimiento que me permitió dedicarme por completo a este proyecto de investigación.

A la Facultad de Ingeniería Civil de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, por abrirme sus puertas, permitirme ser parte de su prestigioso programa académico y brindarme un espacio de excelencia para mi formación.

A mi asesor, el Dr. Hugo Hernández Barrios, por su inquebrantable compromiso, su motivación constante y por compartir desinteresadamente sus conocimientos y su apoyo personal.

A mis sinodales, el Dr. Francisco Mota, el Dr. Guillermo Ruíz, el Dr. Manuel Jara y el Dr. Jorge Ignacio Cruz, por su afinidad con este proyecto, el valioso tiempo dedicado a su revisión y el apoyo brindado para elevar el rigor analítico de este trabajo.

A mis padres, Martha Patricia y Maximino. Todo lo que he logrado se los debo a ustedes. Gracias por el amor incondicional, los sacrificios y la educación que me han forjado como la persona y el profesional que soy hoy. Este logro es tan mío como suyo.

A mi hermana, María de Jesús, por su cariño infinito, por escucharme y por ser un apoyo incondicional en cada paso de este largo camino.

A mi abuelito Claudio, por su guía y amor infinito, y a mi familia, por ser el pilar incondicional que celebra mis triunfos y me fortalece en cada adversidad.

A Peluche, mi fiel compañero de mil batallas. Gracias por haberme acompañado en cada noche de desvelo y en cada hora de estudio durante tus últimos años de vida.

Max Brandom Mayo Hernández

ÍNDICE GENERAL

Capítulo 1. Identificación modal estocástica	1
1.1 Introducción	2
1.2 Modelación y discretización espacial del sistema	2
1.3 Formulación clásica de sistemas de múltiples grados de libertad.....	2
1.3.1 Matriz de masa	3
1.3.2 Matriz de amortiguamiento.....	3
1.4 Representación en espacio de estados	4
1.4.1 Formulación en tiempo continuo	4
1.4.2 Transición al espacio modal.....	6
1.5 Caracterización estocástica en el dominio de la frecuencia	7
1.5.1 Funciones de respuesta en frecuencia en espacio de estados	7
1.5.2 Densidad espectral de potencia.....	8
1.6 Verificación mediante caso de referencia (Gómez, 2010)	8
1.7 Conclusiones.....	15
1.8 Bibliografía.....	16
Capítulo 2. Metodología de identificación modal operacional en el dominio de la frecuencia	17
2.1 Introducción	18
2.2 Clasificación de los algoritmos de identificación modal	18
2.2.1 Métodos no paramétricos (dominio de la frecuencia).....	18
2.2.2 Métodos paramétricos (dominio del tiempo)	19
2.3 Fundamentos del algoritmo Peak-picking (PP).....	19
2.3.1 Transformación al dominio de la frecuencia	19
2.3.2 Estimación espectral mediante el método del Welch.....	20
2.4 Procesamiento de señales mediante densidades espectrales	20
2.4.1 Estimación de la matriz de densidad espectral.....	21
2.4.2 Espectro medio normalizado (ANPSD)	21
2.4.3 Normalización y promedio	21
2.5 Interpretación de las funciones de transferencia	22
2.5.1 Relación de amplitud y funciones de transferencia	22
2.5.2 Evaluación de la fase modal	23

2.5.3 Identificación de porcentaje de amortiguamiento modal	23
2.5.3.1 Método del ancho de banda	23
2.5.3.2 Método de ajuste del espectro analítico	23
2.6 Verificación	24
2.6.1 Generación de señales aleatorias y resolución del sistema	24
2.6.2 Ejercicio	24
2.7 Conclusión	31
2.8 Bibliografía	32
Capítulo 3. Identificación modal estocástica en el dominio del tiempo	33
3.1 Introducción	34
3.2 Modelo de espacio de estado determinístico estocástico en tiempo discreto	34
3.3 Modelo de espacio de estado estocástico en tiempo discreto	35
3.4 Propiedades de sistemas estocásticos	35
3.5 Identificación de subespacios estocásticos basados en la covarianza y diagramas de estabilización	37
3.6 Ejemplo de aplicación	39
3.7 Conclusiones	41
3.8 Bibliografía	42
Capítulo 4. Método de Rinawi para estimar frecuencias y amortiguamiento	43
4.1 Introducción	44
4.2 Formulación del método	44
4.3 Aplicación del método	47
4.4 Conclusiones	48
4.5 Bibliografía	48
Capítulo 5. Puente curvo en voladizo	49
5.1 Introducción	50
5.2 Configuración geométrica del modelo analítico	50
5.3 Propiedades de la estructura	51
5.4 Respuesta eólica	52
5.4.1 Velocidad de diseño e intensidad de turbulencia	52
5.4.2 Ráfagas	53
5.4.3 Vórtices	54
5.5 Aeroelasticidad	55

5.5.1 Divergencia estática.....	55
5.5.2 Galopeo.....	55
5.5.3 Aleteo.....	56
5.5.4 Respuesta en el dominio del tiempo ante aleteo	57
5.5.5 Respuesta en el dominio del tiempo tridimensional.....	58
5.6 Conclusiones.....	60
5.7 Bibliografía.....	61

Capítulo 6. Conclusiones..... 63

Apéndice A. Validación de los algoritmos desarrollados mediante la replicación de pruebas de vibración ambiental 65

A.1 Introducción	66
A.2 Casos de estudio.....	66
A.2.1 Caso de estudio: Viga en voladizo de acero.....	66
A.2.2 Caso de estudio: Modelo simplificado del puente colgante Lysefjord	67
A.3 Resultados	67
A.3.1 Resultados del caso de estudio 1: Viga en voladizo.....	67
A.3.2 Resultados del caso de estudio 2: Puente Lysefjord.....	71
A.4 Comparativa entre algoritmos propuestos y software comercial ARTeMIS	75
A.5 Conclusiones.....	78
A.6 Bibliografía.....	79

Apéndice B. Construcción y calibración del modelo equivalente tipo espina81

B.1 Introducción	82
B.2 Descripción de los modelos numéricos	82
B.2.1 Modelo tridimensional detallado (García, 2018)	82
B.2.2 Modelo simplificado tipo espina (fishbone).....	83
B.3 Metodología de calibración	84
B.3.1 Corrección de la masa	84
B.3.2 Corrección de la rigidez	85
B.4 Conclusiones.....	86
B.4 Bibliografía	86

Apéndice C. Optimización numérica de los algoritmos de ajuste analítico y Rinawi para la identificación del amortiguamiento modal..... 87

C.1 Introducción	88
C.2 Desarrollo de las optimizaciones numéricas	88
C.2.1 Método de ajuste analítico.....	88
C.2.2 Método de Rinawi.....	90
C.3 Validación numérica: Resultados obtenidos con algoritmos convencionales Vs. Optimizados	91
C.3.1 Método de ajuste analítico híbrido	91
C.3.1.1 Ejemplo 1: Viga en voladizo de acero	92
C.3.1.2 Ejemplo 2: Puente colgante Lysefjord	94
C.3.2 Método de Rinawi adaptativo.....	98
C.3.2.1 Ejemplo 1: Viga en voladizo de acero	98
C.3.2.2 Ejemplo 2: Puente colgante Lysefjord	100
C.4 Conclusión	101
C.5 Bibliografía	102

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.1 Viga de estudio	9
Figura 1.2 Configuraciones de modos de vibración del sistema estructural considerado como ejemplo.	10
Figura 1.3 Viga con sus aceleraciones por nodo.....	12
Figura 1.4 Amplitud y fase de las FRF en aceleraciones del sistema considerado como ejemplo.....	14
Figura 1.5 Amplitud y fase de la matriz de densidad espectral en aceleraciones	15
Figura 2.1 Respuesta del sistema considerado a una excitación de ruido blanco	25
Figura 2.2 Estimación de las funciones de densidad espectral de la respuesta del sistema.....	26
Figura 2.3 Espectro de potencia medio normalizado	27
Figura 2.4 Funciones de transferencia	28
Figura 2.5 Identificación de modos de vibración	29
Figura 2.6 Métodos para estimar los porcentajes de amortiguamiento modal	29
Figura 3.1 Diagrama de estabilización del sistema considerado de ejemplo.....	39
Figura 3.2 Modos de vibración por el método SSI-COV	40
Figura 4.1 Espectro promedio de los 5 sensores.....	47
Figura 5.1 Vista lateral de puente de estudio.....	50
Figura 5.2 Sección transversal de la sección cajón	51
Figura 5.3 Desplazamientos del puente.....	53
Figura 5.4 Respuesta del puente en el dominio del tiempo para una velocidad resonante de 44.43 m/s.....	55
Figura 5.5 Derivadas aerodinámicas para el puente	56
Figura 5.6 Raíces de la parte imaginaria y real de la determinante de la matriz de impedancia.....	57
Figura 5.7 Simulación de velocidades para el puente.....	58
Figura 5.8 Simulación de velocidades en las tres componentes	59
Figura B.1 Sección de dovela creada en el módulo de section designer.....	83
Figura B.2 Modelos analíticos: a) 3D detallado vs. b) Espina equivalente.....	84
Figura B.3 Modo fundamental: a) 3D detallado vs. b) Espina equivalente	85
Figura C.1 Espectro medio normalizado original y optimizado para ejemplo 1	92
Figura C.2 Graficas de ajuste analítico original y optimizado para ejemplo 1.....	93
Figura C.3 Espectro medio normalizado original y optimizado para ejemplo 2	95
Figura C.4 Graficas de ajuste analítico original y optimizado para ejemplo 2.....	95
Figura C.5 Espectro medio original y optimizado para ejemplo 1	98
Figura C.6 Espectro medio original y optimizado para ejemplo 2.....	100

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 2.1 Frecuencias naturales de la estructura (teórica/identificada).....	27
Tabla 2.2 Estimación de los coeficientes de amortiguamiento	31
Tabla 3.1 Estimación de frecuencias naturales y amortiguamiento por el método SSI-COV.....	40
Tabla 4.1 Resultados de frecuencias obtenidas	48
Tabla 4.2 Resultados de amortiguamiento	48
Tabla 5.1 Propiedades dinámicas del puente curvo en voladizo.....	51
Tabla 5.2 Coeficientes aerodinámicos	52
Tabla 5.3 Factores del puente ante efectos de ráfaga.....	54
Tabla 5.4 Propiedades ante efectos de vórtices del puente	54
Tabla 5.5 Resultados de la respuesta ante el aleteo	58
Tabla 5.6 Resultados de la respuesta.....	60
Tabla A.1 Comparación de frecuencias por el método de Peak picking (PP).....	68
Tabla A.2 Comparación de amortiguamiento por el método de Peak picking (PP).....	68
Tabla A.3 Comparación de frecuencias por el método de Rinawi hibrido	68
Tabla A.4 Comparación de amortiguamiento por el método de Rinawi hibrido	69
Tabla A.5 Comparación de frecuencias por el método de subespacio estocástico (SSI-COV)	69
Tabla A.6 Comparación de amortiguamiento por el método de subespacio estocástico (SSI-COV).....	69
Tabla A.7 Comparación de formas modales por el método de peak picking caso 1	70
Tabla A.8 Comparación de formas modales por el método de subespacio estocástico caso 1	70
Tabla A.9 Comparación de frecuencias por el método de Peak picking (PP).....	71
Tabla A.10 Comparación de amortiguamiento por el método de Peak picking (PP)	71
Tabla A.11 Comparación de frecuencias por el método de Rinawi hibrido.....	72
Tabla A.12 Comparación de amortiguamiento por el método de Rinawi hibrido	72
Tabla A.13 Comparación de frecuencias por el método de subespacio estocástico (SSI-COV)	72
Tabla A.14 Comparación de amortiguamiento por el método de subespacio estocástico (SSI-COV)	73
Tabla A.15 Comparación de formas modales por el método de peak picking caso 2	73
Tabla A.16 Comparación de formas modales por el método de subespacio estocástico caso 2	74
Tabla A.17 Comparación de frecuencias para ejemplo 1	76
Tabla A.18 Comparación de amortiguamiento para ejemplo 1	76
Tabla A.19 Comparación de frecuencias para ejemplo 2.....	77
Tabla A.20 Comparación de amortiguamiento para ejemplo 2	77

Tabla B.1 Tabla de comparación de porcentajes de masa modal	86
Tabla C.1 Comparación de frecuencias del ejemplo 1 por el método de peak picking	94
Tabla C.2 Comparación de amortiguamiento de ejemplo 1 por el método de ajuste analítico	94
Tabla C.3 Comparación de frecuencias del ejemplo 2 por el método de peak picking	97
Tabla C.4 Comparación de amortiguamiento de ejemplo 2 por el método de ajuste analítico	97
Tabla C.5 Comparación de frecuencias del ejemplo 1 por el método de Rinawi	99
Tabla C.6 Comparación de amortiguamiento de ejemplo 1 por el método de Rinawi	99
Tabla C.7 Comparación de frecuencias del ejemplo 2 por el método de Rinawi	101
Tabla C.8 Comparación de amortiguamiento de ejemplo 2 por el método de Rinawi	101

INTRODUCCIÓN

La seguridad y estabilidad de los puentes carreteros de gran claro frente a solicitaciones dinámicas severas, como la acción eólica y sísmica, representa uno de los desafíos más complejos en la ingeniería civil contemporánea. Debido a su inherente flexibilidad, estas estructuras poseen periodos de vibración largos que las hacen altamente susceptibles a fenómenos aeroelásticos y resonantes. En este contexto, el análisis dinámico experimental de estructuras se posiciona como una herramienta indispensable para calibrar modelos analíticos, evaluar el estado de salud estructural y predecir el comportamiento físico real ante excitaciones ambientales.

La presente investigación tiene como objetivo principal, desarrollar, optimizar y validar una serie de metodologías computacionales para la identificación modal estocástica. A través de la implementación algorítmica de técnicas en el dominio del tiempo y de la frecuencia, se busca extraer con alta precisión los parámetros dinámicos fundamentales frecuencias naturales, formas modales y tasas de amortiguamiento utilizando exclusivamente la respuesta vibratoria de la estructura bajo condiciones operacionales (ruido blanco ambiental).

El documento se estructura en seis capítulos y tres apéndices metodológicos que guían el estudio desde la formulación matemática base hasta su aplicación en un modelo tridimensional complejo. El Capítulo 1 establece los fundamentos de la discretización espacial y justifica la transición analítica hacia la representación en el espacio de estados. Posteriormente, el Capítulo 2 aborda la identificación modal operacional en el dominio de la frecuencia mediante el método Peak-Picking (PP), mientras que el Capítulo 3 profundiza en las técnicas avanzadas en el dominio del tiempo a través del algoritmo de Identificación por Subespacios Estocásticos impulsado por Covarianza (SSI-COV), introduciendo los diagramas de estabilización para el filtrado de modos espurios. En el Capítulo 4, se desarrolla e implementa el método de Rinawi, optimizando el ajuste de curvas por mínimos cuadrados para mejorar la estimación del amortiguamiento.

La culminación analítica de estas herramientas se presenta en el Capítulo 5, donde se evalúa el comportamiento eólico de un puente curvo en voladizo de gran altura. Este análisis se sustenta en un estudio comparativo de enfoques de simulación de viento, revelando la influencia de la geometría curva en la mitigación del aleteo aeroelástico. Posteriormente en el capítulo 6 se dan las conclusiones generales y finalmente, para garantizar el rigor científico de los resultados, los Apéndices A, B y C documentan la validación cruzada de los algoritmos propios frente a software de estándar industrial (ARTEMIS Modal), la calibración de un modelo equivalente tipo espina para la optimización del costo computacional (SAP2000), y el desarrollo de filtros adaptativos de procesamiento de señales que reducen drásticamente la dispersión numérica en la identificación de amortiguamientos bajos.

Objetivo General

Implementar, optimizar y validar metodologías computacionales de identificación modal estocástica en el dominio del tiempo y la frecuencia, con el fin de extraer parámetros dinámicos precisos a partir de vibraciones ambientales y evaluar la respuesta aeroelástica en puentes curvos en doble voladizo.

Objetivos Específicos

Para alcanzar el objetivo general, se plantean las siguientes metas particulares:

- Formular el marco analítico del comportamiento dinámico de estructuras en el espacio de estados, justificando la transición del dominio continuo al discreto para el procesamiento de señales digitales.
- Programar y ejecutar rutinas computacionales para la identificación modal operacional (OMA), contrastando la eficiencia del método Peak-Picking en el dominio de la frecuencia frente al rigor matemático del método de Subespacios Estocásticos (SSI-COV) en el dominio del tiempo.
- Optimizar la estimación del amortiguamiento estructural, integrando algoritmos de ajuste de curvas por mínimos cuadrados y el método de Rinawi modificado con filtros de procesamiento adaptativo para reducir la dispersión numérica en sistemas con baja disipación de energía.
- Validar las herramientas algorítmicas desarrolladas mediante la calibración cruzada con modelos de elementos finitos equivalentes (tipo espina) y la comparativa de resultados frente a plataformas de software comercial.
- Evaluar analíticamente la estabilidad aerodinámica de un puente curvo en voladizo sometido a turbulencia eólica, determinando la influencia de la geometría espacial y la curvatura en la mitigación de fenómenos de resonancia y aleteo.

CAPÍTULO 1

IDENTIFICACIÓN MODAL ESTOCÁSTICA

1.1. INTRODUCCIÓN

Para establecer los pilares de la identificación modal, en esta sección se desarrollan las bases conceptuales de la modelación dinámica estructural. Se propone una transición analítica entre la formulación tradicional de segundo orden y el planteamiento en variables de estado, explorando su versatilidad en el dominio de la frecuencia mediante funciones de respuesta espectral. La implementación de estos conceptos y la resolución de los casos de estudio se apoyan en algoritmos propios desarrollados por el autor de este trabajo, los cuales permiten la ejecución sistemática de las ecuaciones de movimiento y la verificación de los fundamentos teóricos que se exponen a continuación.

1.2. MODELACIÓN Y DISCRETIZACIÓN ESPACIAL DEL SISTEMA

Para el estudio de sistemas estructurales complejos, la modelación dinámica se fundamenta en la transformación del continuo físico en un sistema de múltiples grados de libertad (MDOF). Este proceso de discretización espacial permite organizar las propiedades físicas en matrices globales de masa, amortiguamiento y rigidez, reduciendo el comportamiento dinámico a un sistema de ecuaciones diferenciales.

En este contexto, la definición precisa de los grados de libertad por nodo es crítica para asegurar que el modelo represente fielmente los modos de vibración de interés. Actualmente, este comportamiento puede abordarse desde la formulación clásica o mediante el enfoque de variables de estado, siendo este último el núcleo de la presente investigación por su robustez ante procesos estocásticos. La implementación numérica de esta discretización se realiza a través de herramientas propias, la cual automatiza la estructuración de los modelos y garantiza la trazabilidad paso a paso de las propiedades dinámicas del sistema estructural analizado.

1.3. FORMULACIÓN CLÁSICA DE SISTEMAS DE MÚLTIPLES GRADOS DE LIBERTAD

El estudio de estructuras complejas exige trascender el modelo de un solo grado de libertad para capturar la interacción espacial de sus componentes. En esta sección, el balance dinámico se generaliza para sistemas de múltiples grados de libertad (MDOF), donde el estado de equilibrio en cada instante se define mediante la suma vectorial de las fuerzas de inercia, amortiguamiento y elasticidad.

Matemáticamente, este balance se expresa mediante un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden acopladas (Chopra, 2001):

$$M\ddot{q}(t) + C\dot{q}(t) + Kq(t) = p(t) \quad (1.1)$$

donde M , C y K son matrices de masa, amortiguamiento y rigidez de orden $n \times n$, con componentes m_{ik} , c_{ik} y k_{ik} que representan las fuerzas generalizadas para cada coordenada i , cuando la aceleración es aplicada en una coordenada k ; $p(t)$ es un vector de excitación y $q(t)$ es el vector de respuesta del sistema.

Dada la complejidad inercial de las estructuras reales, el número de grados de libertad (DOF) necesarios para una descripción completa puede resultar computacionalmente ineficiente para

procesos de identificación en tiempo real. Para optimizar el análisis, se aplica la técnica de condensación cinemática, la cual permite reducir el orden de las matrices del sistema manteniendo la precisión en los modos de vibración de mayor relevancia energética.

En este enfoque, el vector de desplazamientos q se particiona en coordenadas q_m , denominadas "maestras", que corresponden a los grados de libertad donde se concentra la masa o se realizan las mediciones, y coordenadas "esclavas", q_s , que suelen ser aquellas con efectos inerciales despreciables, como las rotaciones o desplazamientos axiales en ciertos elementos. El sistema de ecuaciones se reestructura de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} M_{mm} & M_{ms} \\ M_{sm} & M_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_m \\ \ddot{q}_s \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{mm} & K_{ms} \\ K_{sm} & K_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_m \\ q_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_m(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.2)$$

Bajo la premisa de que las fuerzas de inercia en las coordenadas esclavas son mínimas ($\ddot{q}_s \approx 0$), se obtiene la matriz de rigidez condensada (K_{cond}):

$$K_{cond} = K_{mm} - K_{ms} K_{ss}^{-1} K_{sm} \quad (1.3)$$

Para los propósitos de esta investigación, centrada en la caracterización dinámica de puentes mediante vibración ambiental, se ha optado por condensar el sistema exclusivamente a los grados de libertad traslacionales en el eje vertical (y). Esta decisión se fundamenta en que los principales modos de flexión, críticos para la evaluación de la integridad estructural, se manifiestan predominantemente en esta dirección.

1.3.1 Matriz de masa

Complementariamente al proceso de discretización, se adopta la idealización de matrices de masa concentrada para representar la distribución inercial del sistema estructural. En este esquema, la masa física del continuo se asigna puntualmente a los nodos estratégicos que definen los grados de libertad dinámicos del modelo, resultando en una matriz de masa $[M]$ de carácter diagonal.

1.3.2 Matriz de amortiguamiento

En la formulación de sistemas MDOF, la matriz de amortiguamiento $[C]$ representa los mecanismos de disipación de energía de la estructura. Para facilitar el desacoplamiento de las ecuaciones de movimiento mediante coordenadas modales, se asume frecuentemente un amortiguamiento proporcional o clásico, el cual satisface la condición de ortogonalidad con respecto a los autovectores del sistema. Bajo esta premisa, la transformación modal resulta en una matriz de amortiguamiento diagonal, donde cada componente representa la capacidad de disipación de un modo específico.

Dentro de las opciones de amortiguamiento proporcional, se ha implementado específicamente el modelo de Amortiguamiento tipo Rayleigh. En este enfoque, la matriz $[C]$ se construye como una combinación lineal de las matrices de masa y rigidez:

$$C = \alpha M + \beta K \quad (1.4)$$

$$\alpha = \xi_i \frac{2\omega_i\omega_j}{\omega_i + \omega_j}, \quad \beta = \xi_j \frac{2}{\omega_i + \omega_j}$$

donde α y β son dos constantes que dependen de las dos primeras frecuencias naturales y los porcentajes de amortiguamiento modal.

Esta formulación permite asignar niveles de amortiguamiento controlados en el rango de frecuencias de interés para la estructura, usualmente fijados en un 5% para aplicaciones en ingeniería civil.

La herramienta computacional de autoría propia ha sido programada para gestionar tanto la estructuración de matrices de amortiguamiento proporcional genéricas como el cálculo automático de los coeficientes de Rayleigh. Esta flexibilidad permite al algoritmo ajustar la matriz de disipación de forma sistemática antes de realizar la transición al espacio de estados.

1.4. REPRESENTACIÓN EN ESPACIO DE ESTADOS

La formulación clásica de segundo orden presenta limitaciones significativas cuando el amortiguamiento estructural es de tipo no proporcional o no clásico, una característica intrínseca en estructuras con sistemas de control localizado. En estos casos, la matriz de amortiguamiento no puede ser diagonalizada mediante las coordenadas normales del sistema, lo que impide el desacoplamiento de las ecuaciones de movimiento por vías convencionales.

Ante esta restricción, se adopta la representación en el espacio de estados, la cual permite acoplar de manera eficiente los parámetros físicos discretos con la información experimental. Esta metodología transforma el sistema de n ecuaciones diferenciales de segundo orden en un sistema equivalente de $2n$ ecuaciones diferenciales de primer orden (Peeter, 2000), facilitando el manejo de procesos estocásticos y grandes volúmenes de datos temporales.

1.4.1 Formulación en tiempo continuo

La transición se fundamenta en la introducción del vector de estado $x(t)$, el cual condensa la información necesaria para predecir el comportamiento futuro del sistema a partir de sus condiciones actuales de desplazamiento $q(t)$ y velocidad $\dot{q}(t)$:

$$x(t) = \begin{bmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

A diferencia de la formulación estándar de control, para el análisis de sistemas mecánicos es conveniente expresar la dinámica mediante una forma matricial que preserve la estructura de las matrices físicas. Esto nos permite reescribir la ecuación de movimiento original como:

$$A_s \dot{x}(t) + B_s x(t) = W(t) \quad (1.6)$$

Donde las matrices de estado A_s y B_s se definen como:

$$A_s = \begin{bmatrix} C & M \\ M & 0 \end{bmatrix}, \quad B_s = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix}, \quad W(t) = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (1.7)$$

Para la resolución del sistema en el espacio de estados, se plantea el problema de valores y vectores propios complejos. El sistema homogéneo derivado de la representación anterior se expresa mediante la relación:

$$A_s \Psi \Lambda_c + B_s \Psi = 0 \quad (1.8)$$

Donde Λ_c es la matriz diagonal de autovalores y Ψ representa los autovectores complejos. Es fundamental observar la configuración interna de la matriz modal Ψ , la cual vincula directamente las formas modales de desplazamiento (Θ) con sus respectivas velocidades:

$$\Lambda_c = \begin{bmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda^* \end{bmatrix}, \quad \Psi = \begin{bmatrix} \Theta & \Theta^* \\ \Theta \Lambda & \Theta^* \Lambda^* \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

Esta estructura es la que permite que el algoritmo desarrollado en este trabajo identifique parámetros dinámicos bajo amortiguamiento no proporcional, verificando que los resultados satisfagan la ecuación característica del sistema:

$$M \Theta \Lambda^2 + C \Theta \Lambda + K \Theta = 0 \quad (1.10)$$

Las matrices A_s y B_s pueden ser diagonalizadas por Ψ estableciendo las siguientes relaciones.

$$\Psi^T A_s \Psi = \begin{bmatrix} \backslash a_{i\backslash} \end{bmatrix}, \quad \Psi^T B_s \Psi = \begin{bmatrix} \backslash b_{i\backslash} \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

La matriz $\begin{bmatrix} \backslash a_{i\backslash} \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} \backslash b_{i\backslash} \end{bmatrix}$ son conocidas como la matriz modal A y la matriz modal B.

Para un análisis detallado de las demostraciones algebraicas que sustentan esta formulación, se pueden consultar en Gómez (2010).

Una vez establecida la dinámica del sistema mediante las matrices de estado simétricas, es conveniente realizar una transición hacia la forma estándar de representación en tiempo continuo. Esta alteración es fundamental, ya que sirve de base para los métodos de identificación modal estocástica que se emplearán posteriormente.

Mediante la manipulación algebraica de la ecuación 1.6, el sistema se redefine en su forma compacta de primer orden:

$$\dot{x}(t) = A_c x(t) + B_c u(t) \quad (1.12)$$

donde:

$$A_c = -A_s^{-1} B_s = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix}, \quad B_c = -A_s^{-1} W(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}B \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

En esta representación, $A_c(2n \times 2n)$ se denomina matriz de estado y encapsula la dinámica intrínseca del sistema, permitiendo que todas las propiedades modales (frecuencias naturales, amortiguamiento y formas modales) sean extraídas mediante su descomposición espectral; $B_c(2n \times m)$ es la matriz de entrada. Esta es la estructura que el algoritmo desarrollado procesa para vincular el modelo analítico con los datos experimentales.

Para completar el modelo en el espacio de estados, se introduce la ecuación de observación, la cual vincula el vector de estado interno con la respuesta física que es capturada por los sensores en puntos específicos de la estructura. Dado que en aplicaciones prácticas solo es posible medir la respuesta en un número limitado de localizaciones ($l < n$), esta expresión es fundamental para mapear el comportamiento global del sistema hacia los datos experimentales.

La forma general de la ecuación de observación Gómez (2010) se define como:

$$C_c = \begin{bmatrix} (C_d - C_a M^{-1}K) & (C_v - C_a M^{-1}C) \end{bmatrix}; \quad D_c = C_a M^{-1}B \quad (1.14)$$

Por lo general las mediciones pueden estar limitadas ya sean a la velocidad o a la aceleración y los coeficientes C_c y D_c para el caso de la aceleración se expresa de la siguiente forma:

$$C_c = \begin{bmatrix} -C_a M^{-1}K & -C_a M^{-1}C \end{bmatrix}, \quad D_c = C_a M^{-1}B \quad (1.15)$$

Para el caso que se limite a la velocidad:

$$C_c = \begin{bmatrix} 0 & C_v \end{bmatrix}, \quad D_c = 0 \quad (1.16)$$

1.4.2 Transición al espacio modal

Para simplificar el análisis de sistemas con un gran número de grados de libertad, se define una transformación de coordenadas que proyecta el vector de estado original hacia un espacio modal. Esta operación se realiza mediante la matriz modal compleja Ψ , estableciendo la relación:

$$x(t) = \Psi x_m(t) \quad (1.17)$$

Donde x_m representa el vector de estado en coordenadas modales. Esta transformación permite desacoplar la dinámica global del sistema en una serie de contribuciones individuales por cada modo de vibración, facilitando la identificación de los parámetros dinámicos de interés.

Al aplicar esta transformación a las ecuaciones de estado, surgen dos operadores fundamentales para la caracterización dinámica: la matriz de factores de participación modal (L_c^T) y la matriz de respuesta modal V_c (Gómez, 2010).

$$L_c^T = \Psi^{-1} B_c, \quad V_c = C_c \Psi \quad (1.18)$$

En donde la matriz de participación modal (L_c^T) define el grado en que cada modo de vibración es excitado por las entradas del sistema y la matriz de respuesta modal; V_c representa la configuración de los modos de vibración tal como se observan en la respuesta medida. Bajo este esquema, la respuesta total del sistema $y(t)$ puede expresarse como la suma lineal de las contribuciones de cada modo individual. Esta capacidad de descomposición es la que permite que el análisis se centre en los rangos de frecuencia que contienen la mayor energía estructural, descartando el ruido o modos irrelevantes.

A diferencia de las matrices de estado, la matriz de transmisión directa (D_c) no suele presentarse descompuesta en términos de coordenadas modales en la literatura clásica. Sin embargo, para los propósitos de identificación de parámetros, es posible obtener su descomposición modal mediante la relación:

$$D_c = V_c \Lambda_c^{-1} L_c^T = \sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{\lambda_i} [v_{ci}] [l_{ci}]^T \quad (1.19)$$

donde $[v_{ci}]$ (nx1) enésima columna de la matriz V_c , $[l_{ci}]^T$ (1xm) enésima fila de la matriz L_c^T (Peeters, 2000 ; Gómez, 2010).

1.5. CARACTERIZACIÓN ESTOCÁSTICA EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA

1.5.1 Funciones de respuesta en frecuencia en espacio de estados

La relación entre la excitación y la respuesta en el dominio de la frecuencia se establece mediante la matriz de Función de Respuesta en Frecuencia (FRF). A partir de la representación en el espacio de estados y aplicando la transformada de Laplace bajo condiciones iniciales nulas, se obtiene (Peeters, 2000) la expresión general:

$$H_c(\omega) = V_c \Lambda_c^{-2} \omega^2 (j\omega I - \Lambda_c)^{-1} L_c^T \quad (1.20)$$

Una matriz de FRF para desplazamiento, la cual también se conoce como receptancia, puede ser expresada a través de.

$$H_c(\omega) = C_d \sum_{i=1}^n \left(\frac{\text{Re}_i}{j\omega - \lambda_i} + \frac{\text{Re}_i^*}{j\omega - \lambda_i^*} \right) B \quad (1.21)$$

Una respuesta contribuida por aceleraciones, que en este caso se le llama inercia, puede ser expresada a través de:

$$H_c(\omega) = C_a \sum_{i=1}^n \left(\frac{\omega^2 \text{Re}_i}{j\omega - \lambda_i} + \frac{\omega^2 \text{Re}_i^*}{j\omega - \lambda_i^*} \right) B \quad (1.22)$$

1.5.2 Densidad espectral de potencia

En el análisis de puentes bajo vibración ambiental, la excitación $u(t)$ no se conoce de forma determinística y se caracteriza como un proceso estocástico. Se asume que la entrada tiene las propiedades de un ruido blanco gaussiano, caracterizado por un espectro de potencia constante y una media nula.

La herramienta fundamental para este análisis es la matriz de densidad espectral de respuesta $S_y(\omega)$, la cual cuantifica la distribución del contenido energético de las señales medidas a lo largo de la frecuencia. La relación fundamental que vincula la entrada desconocida con la respuesta medida (Rodríguez, 2004) se define como:

$$S_y(\omega) = H_c(\omega) R_y \left(H_c(\omega)^* \right)^T \quad (1.23)$$

Para el caso donde solo se observen desplazamiento en la FRF la función de densidad espectral resulta.

$$S_y(\omega) = \left(V_c (j\omega I - \Lambda_c)^{-1} L_c^T \right) R_y \left(\left(V_c (j\omega I - \Lambda_c)^{-1} L_c^T \right)^* \right)^T \quad (1.24)$$

En el caso donde se observen solo aceleraciones la función de densidad espectral se representa como:

$$S_y(\omega) = \left(V_c \Lambda_c^{-2} \omega^2 (j\omega I - \Lambda_c)^{-1} L^T \right) R_y \left(\left(V_c \Lambda_c^{-2} \omega^2 (j\omega I - \Lambda_c)^{-1} L^T \right)^* \right)^T \quad (1.25)$$

1.6. VERIFICACIÓN

Con el objetivo de validar la precisión de los algoritmos desarrollados y la correcta implementación de la formulación en el espacio de estados, se seleccionó como caso de estudio

la viga simplemente apoyada analizada por Gómez (2010). Se trata de un elemento estructural de 6 metros de longitud, discretizado en 6 elementos de 1 metro cada uno (ver figura 1.1) se estableció una sección cuadrada de 0.15m, y un módulo de elasticidad del material igual a $1.787 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$; además, masas concentradas en la dirección vertical igual a 288.36 kg.

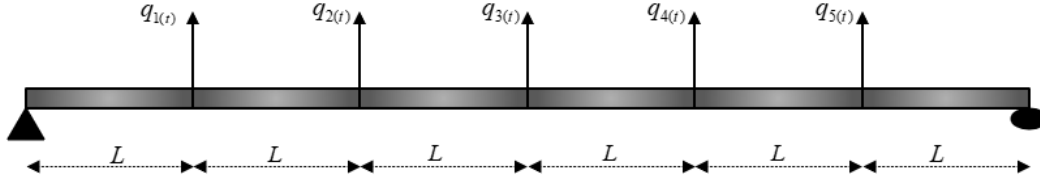


Figura 1.1 Viga de estudio

A continuación, como resultado de la implementación numérica propia se presentan las matrices de rigidez, masas y amortiguamiento consideradas con un amortiguamiento proporcional del 5%.

$$K = \begin{pmatrix} 7446560.96 & -7168184.85 & 3131731.24 & -835128.33 & 208782.08 \\ -7168184.85 & 10578292.20 & -8003313.18 & 3340513.32 & -835128.33 \\ 3131731.24 & -8003313.18 & 10787074.29 & -8003313.18 & 3131731.24 \\ -835128.33 & 3340513.32 & -8003313.18 & 10578292.20 & -7168184.85 \\ 208782.08 & -835128.33 & 3131731.24 & -7168184.85 & 7446560.96 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 288.36 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 288.36 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 288.36 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 288.36 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 288.36 \end{pmatrix}$$

Matrices de masa y rigidez

$$C = \begin{bmatrix} 3951.14 & -2393.63 & 355.20 & -73.42 & 15.73 \\ -2393.63 & 4306.35 & -2467.06 & 370.93 & -73.42 \\ 355.20 & -2467.06 & 4322.08 & -2467.06 & 355.20 \\ -73.42 & 370.93 & -2467.06 & 4306.35 & -2393.63 \\ 15.73 & -73.42 & 355.20 & -2393.63 & 3951.14 \end{bmatrix}$$

Matriz de amortiguamiento

Los valores propios, las matrices de masa modal y las formas modales.

$$\lambda_i^2 = \begin{bmatrix} 196.49 \\ 3137.47 \\ 15687.37 \\ 47062.12 \\ 96341.20 \end{bmatrix}$$

Valores propios $[\text{rad}^2/\text{s}^2]$

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0.50 & -1 & 1 & -1 & 0.50 \\ 0.86 & -1 & 0 & -1 & -0.86 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0.86 & 1 & 0 & -1 & 0.86 \\ 0.50 & 1 & 1 & 1 & 0.50 \end{bmatrix}$$

Matriz modal (vectores propios)

$$\omega_i = \begin{bmatrix} 14.017 \\ 56.01 \\ 125.24 \\ 216.93 \\ 310.38 \end{bmatrix}$$

Frecuencias angulares $[\text{rad/s}]$

$$f_i = \begin{bmatrix} 2.23 \\ 8.91 \\ 19.93 \\ 34.52 \\ 49.39 \end{bmatrix}$$

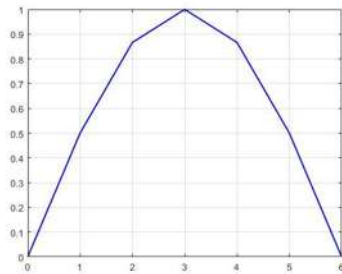
Frecuencias $[\text{Hz}]$

$$\Phi^T M \Phi = \begin{bmatrix} 865.08 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1153.44 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 865.08 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1153.44 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 865.08 \end{bmatrix}$$

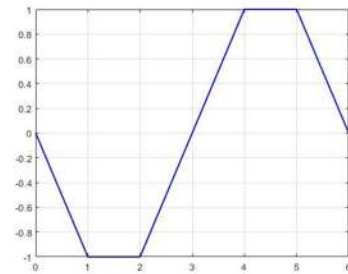
Matriz de masa modal

$$\Phi_m = \begin{bmatrix} 0.0169 & -0.029 & 0.033 & -0.029 & 0.016 \\ 0.029 & -0.029 & 0 & 0.029 & -0.029 \\ 0.033 & 0 & -0.033 & 0 & 0.0339 \\ 0.029 & 0.029 & 0 & -0.029 & -0.029 \\ 0.016 & 0.029 & 0.033 & 0.029 & 0.0169 \end{bmatrix}$$

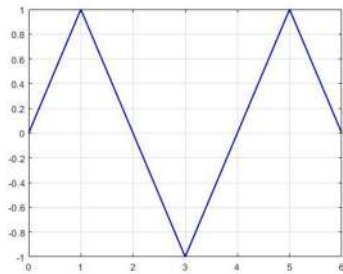
Matriz modal normalizada a la masa



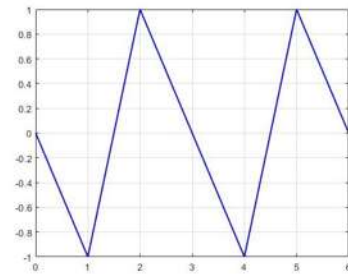
Modo de vibración 1



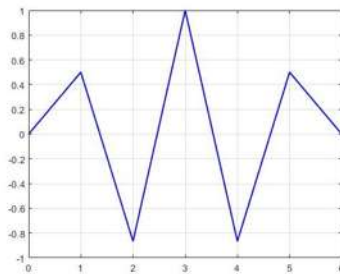
Modo de vibración 2



Modo de vibración 3



Modo de vibración 4



Modo de vibración 5

Figura 1.2 Configuraciones de modos de vibración del sistema estructural considerado como ejemplo.

Las matrices de estado resultantes son:

$$A_s = \begin{bmatrix} 3951.14 & -2393.63 & 355.20 & -73.42 & 15.73 & 288.36 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2393.63 & 4306.35 & -2467.06 & 370.93 & -73.42 & 0 & 288.36 & 0 & 0 & 0 \\ 355.20 & -2467.06 & 4322.08 & -2467.06 & 355.20 & 0 & 0 & 288.36 & 0 & 0 \\ -73.42 & 370.93 & -2467.06 & 4306.35 & -2393.63 & 0 & 0 & 0 & 288.36 & 0 \\ 15.73 & -73.42 & 355.20 & -2393.63 & 3951.14 & 0 & 0 & 0 & 0 & 288.36 \\ 288.36 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 288.36 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 288.36 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 288.36 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 288.36 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz de estado A

$$B_s = \begin{bmatrix} 7.45 \times 10^6 & -7.17 \times 10^6 & 3.13 \times 10^6 & -8.35 \times 10^5 & 2.09 \times 10^5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -7.17 \times 10^6 & 1.06 \times 10^7 & -8 \times 10^6 & 3.34 \times 10^6 & -8.35 \times 10^5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3.13 \times 10^6 & -8 \times 10^6 & 1.08 \times 10^7 & -8 \times 10^6 & 3.13 \times 10^6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8.35 \times 10^5 & 3.34 \times 10^6 & -8 \times 10^6 & 1.06 \times 10^7 & -7.17 \times 10^6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2.09 \times 10^5 & -8.35 \times 10^5 & 3.13 \times 10^6 & -7.17 \times 10^6 & 7.45 \times 10^6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2.88 \times 10^{-2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2.88 \times 10^{-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2.88 \times 10^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2.88 \times 10^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2.88 \times 10^{-2} \end{bmatrix}$$

Matriz de estado B

En seguida se muestra la matriz de vectores propios Ψ y las matrices modales a y b.

$$\Psi = \begin{bmatrix} 0.003 + 0.0343i & 0.0009 + 0.0178i & -0.0004 - 0.008i & 0.0002 + 0.0046i & -0.0001 - 0.0016i & 0.003 - 0.0343i & 0.0009 - 0.0178i & -0.0004 + 0.008i & 0.0002 - 0.0046i & -0.0001 + 0.0016i \\ 0.0052 + 0.0594i & 0.0009 + 0.0178i & -0 - 0i & -0.0002 - 0.0046i & 0.0001 + 0.0028i & 0.0052 - 0.0594i & 0.0009 - 0.0178i & -0 + 0i & -0.0002 + 0.0046i & 0.0001 - 0.0028i \\ 0.006 + 0.0686i & -0i & 0.0004 + 0.008i & 0 & -0.0002 - 0.0032i & 0.006 - 0.0686i & 0i & 0.0004 - 0.008i & 0 & -0.0002 + 0.0032i \\ 0.0052 + 0.0594i & -0.0009 - 0.0178i & -0 - 0i & 0.0002 + 0.0046i & -0.0001 + 0.0028i & 0.0052 - 0.0594i & -0.0009 + 0.0178i & -0 + 0i & 0.0002 - 0.0046i & 0.0001 - 0.0028i \\ 0.003 + 0.0343i & -0.0009 - 0.0178i & -0.0004 - 0.008i & -0.0002 - 0.0046i & -0.0001 - 0.0016i & 0.003 - 0.0343i & -0.0009 + 0.0178i & -0.0004 + 0.008i & -0.0002 + 0.0046i & -0.0001 + 0.0016i \\ -0.4822 + 0.0178i & -0.0009 + 0.0178i & 0.9994 - 0.006i & -0.9998 + 0.0002i & 0.4999 - 0.0001i & -0.4822 - 0.0178i & -0.9969 - 0.0031i & 0.9994 + 0.0006i & -0.9998 - 0.0002i & 0.4999 + 0.0001i \\ -0.8351 + 0.0309i & -0.0009 + 0.0178i & 0 - 0i & 0.9998 + 0.0002i & -0.8659 + 0.0001i & -0.8351 - 0.0309i & -0.9969 - 0.0031i & 0 + 0i & 0.9998 + 0.0002i & -0.8659 - 0.0001i \\ -0.9643 + 0.0357i & 0 + 0i & -0.9994 + 0.006i & -0 + 0i & 0.9999 - 0.0001i & -0.9643 - 0.0357i & 0 - 0i & -0.9994 - 0.0006i & -0 - 0i & 0.9999 + 0.0001i \\ -0.8351 + 0.0309i & 0.9969 - 0.0031i & 0 - 0i & -0.9998 + 0.0002i & -0.8659 + 0.0001i & -0.8351 - 0.0309i & 0.9969 + 0.0031i & 0 + 0i & -0.9998 - 0.0002i & -0.8659 - 0.0001i \\ -0.4822 + 0.0178i & 0.9969 - 0.0031i & 0.9994 - 0.006i & 0.9998 - 0.0002i & 0.4999 - 0.0001i & -0.4822 - 0.0178i & 0.9969 + 0.0031i & 0.9994 + 0.0006i & 0.9998 + 0.0002i & 0.4999 + 0.0001i \end{bmatrix}$$

Matriz de vectores propios

$$a_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -19.875 + 113.06i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4.334 + 40.651i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.394 + 13.709i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.065 + 10.536i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.557 + 5.538i \\ -19.875 - 113.06i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4.334 - 40.651i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.394 - 13.709i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1.065 - 10.563i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.557 - 5.538i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz modal a

$$b_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1596.724 - 199.004i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2286.24 - 128.613i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1723.543 - 88.472i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2300.09 - 116.125i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1725.459 - 86.739i \\ -1596.724 + 199.004i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2286.24 + 128.613i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1723.543 + 88.472i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2300 + 116.125i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1725.459 + 86.739i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz modal b

Considerando la situación en la que se debe observar la respuesta en aceleración de todos los grados de libertad (ver figura 1.3) se muestran las matrices de localización, respuesta, entrada, transmisión directa.

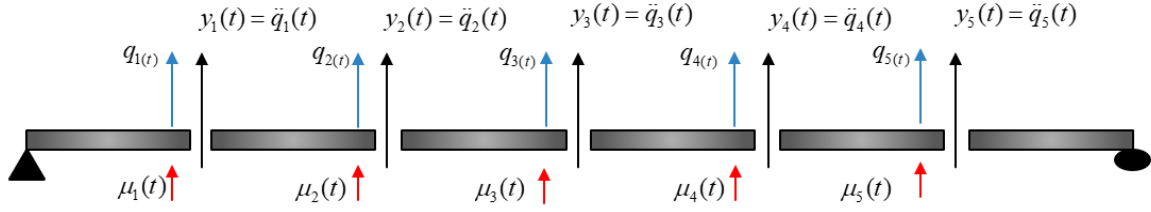


Figura 1.3 Viga con sus aceleraciones por nodo.

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ u_4(t) \\ u_5(t) \end{bmatrix} \rightarrow B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad y(t) = \begin{bmatrix} \ddot{q}_1(t) \\ \ddot{q}_2(t) \\ \ddot{q}_3(t) \\ \ddot{q}_4(t) \\ \ddot{q}_5(t) \end{bmatrix} \rightarrow C_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrices de localización

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -25822.3 & 24856.98 & -10859.85 & 2895.96 & -723.99 & -13.7 & 8.3 & -1.23 & 0.25 & -0.05 \\ 24856.98 & -36682.15 & 27752.94 & -11583.84 & 2895.96 & 8.3 & -14.93 & 8.56 & -1.29 & 0.25 \\ -10859.85 & 27752.94 & -37406.14 & 27752.94 & -10859.85 & -1.23 & 8.56 & -14.99 & 8.56 & -1.23 \\ 2895.96 & -11583.84 & 27752.94 & -36682.15 & 24856.98 & 0.25 & -1.29 & 8.56 & -14.93 & 8.3 \\ -723.99 & 2895.96 & -10859.85 & 24856.98 & -25822.3 & -0.05 & 0.25 & -1.23 & 8.3 & -13.7 \end{bmatrix}$$

Matriz de respuesta A

$$B_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 3.468 \times 10^3 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3.468 \times 10^3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3.468 \times 10^3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3.468 \times 10^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3.468 \times 10^3 \end{bmatrix}$$

Matriz de entrada B

$$C_c = \begin{bmatrix} -25822.3 & 24856.98 & -10859.85 & 2895.96 & -723.99 & -13.7 & 8.3 & -1.23 & 0.25 & -0.05 \\ 24856.98 & -36682.15 & 27752.94 & -11583.84 & 2895.96 & 8.3 & -14.93 & 8.56 & -1.29 & 0.25 \\ -10859.85 & 27752.94 & -37406.14 & 27752.94 & -10859.85 & -1.23 & 8.56 & -14.99 & 8.56 & -1.23 \\ 2895.96 & -11583.84 & 27752.94 & -36682.15 & 24856.98 & 0.25 & -1.29 & 8.56 & -14.93 & 8.3 \\ -723.99 & 2895.96 & -10859.85 & 24856.98 & -25822.3 & -0.05 & 0.25 & -1.23 & 8.3 & -13.7 \end{bmatrix}$$

Matriz de respuesta C

$$D_c = \begin{bmatrix} 3.47 \times 10^{-3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3.47 \times 10^{-3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3.47 \times 10^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3.47 \times 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3.47 \times 10^{-3} \end{bmatrix}$$

Matriz de transmisión directa

La representación de estado en términos de coordenadas modales, es:

$$L_c T = \begin{bmatrix} -0.000299 - 0.000026i & -0.000517 - 0.000045i & -0.000597 - 0.000052i & -0.000517 - 0.000045i & -0.000299 - 0.000026i \\ -0.000435 - 0.000023i & -0.000435 - 0.000023i & 0 & 0.000435 + 0.000023i & 0.000435 + 0.000023i \\ 0.000578 + 0.000029i & 0 & -0.000578 - 0.000029i & 0 & 0.000578 + 0.000029i \\ -0.000434 - 0.000022i & 0.000434 + 0.000022i & 0 & -0.000434 - 0.000022i & 0.000434 + 0.000022i \\ 0.000289 + 0.000014i & -0.000501 - 0.000025i & 0.000578 + 0.000029i & -0.000501 - 0.000025i & 0.000289 + 0.000014i \\ -0.000299 + 0.000026i & -0.000517 + 0.000045i & -0.000597 + 0.000052i & -0.000517 + 0.000045i & -0.000299 + 0.000026i \\ -0.000435 + 0.000023i & -0.000435 + 0.000023i & 0 & 0.000435 - 0.000023i & 0.000435 - 0.000023i \\ 0.000578 - 0.000029i & 0 & -0.000578 + 0.000029i & 0 & 0.000578 - 0.000029i \\ -0.000434 + 0.000022i & 0.000434 - 0.000022i & 0 & -0.000434 + 0.000022i & 0.000434 - 0.000022i \\ 0.000289 - 0.000014i & -0.000501 + 0.000025i & 0.000578 - 0.000029i & -0.000501 + 0.000025i & 0.000289 - 0.000014i \end{bmatrix}$$

Matriz de entrada modal

$$L_c = \begin{bmatrix} 0.028 - 6.763i & 2.62 - 55.778i & -6.179 + 125.014i & 13.798 - 216.617i & -7.743 + 154.98i & 0.088 + 6.763i & 2.62 + 55.778i & -6.179 - 125.014i & 13.798 + 216.617i & -7.743 - 154.98i \\ 3.153 - 11.713i & 2.62 - 55.778i & -9 - 9i & -10.798 + 216.617i & 13.411 - 268.434i & 0.153 + 11.713i & 2.62 + 55.778i & -9 - 9i & -10.798 - 216.617i & 13.411 + 268.434i \\ 3.176 - 17.525i & -9 + 9i & 6.179 - 125.014i & -9 - 9i & -15.485 + 309.961i & 0.176 + 13.525i & -9 - 9i & 6.179 + 125.014i & -9 - 9i & -15.485 - 309.961i \\ 3.153 - 11.713i & 2.62 + 55.778i & 9 + 9i & 13.798 - 216.617i & 13.411 - 268.434i & 0.153 + 11.713i & 2.62 - 55.778i & 9 + 9i & 13.798 + 216.617i & 13.411 + 268.434i \\ 0.028 - 6.763i & -2.62 + 55.778i & -6.179 + 125.014i & -10.798 + 216.617i & 7.743 + 154.98i & 0.088 + 6.763i & -2.62 - 55.778i & -6.179 - 125.014i & -10.798 - 216.617i & -7.743 - 154.98i \end{bmatrix}$$

Matriz de respuesta modal

$$D_c = \begin{pmatrix} 0.00343 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.00343 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.00343 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.00343 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.00343 \end{pmatrix}$$

Matriz de transmisión directa modal

En seguida se muestra la matriz de FRF en aceleración, en amplitud y fase.

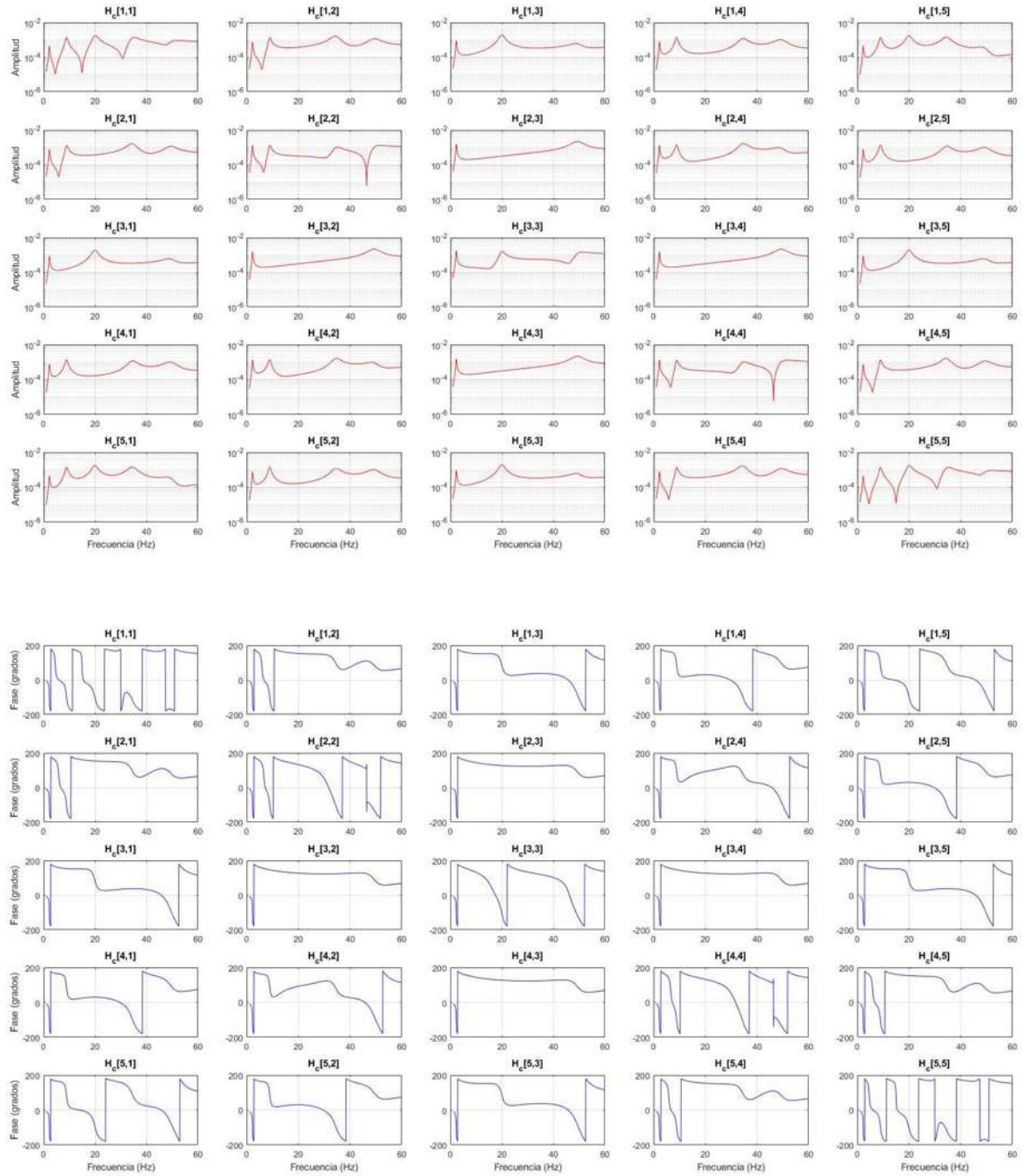


Figura 1.4 Amplitud y fase de las FRF en aceleraciones del sistema considerado como ejemplo.

A continuación, se muestra la matriz de densidad espectral en aceleración, en amplitud y fase.

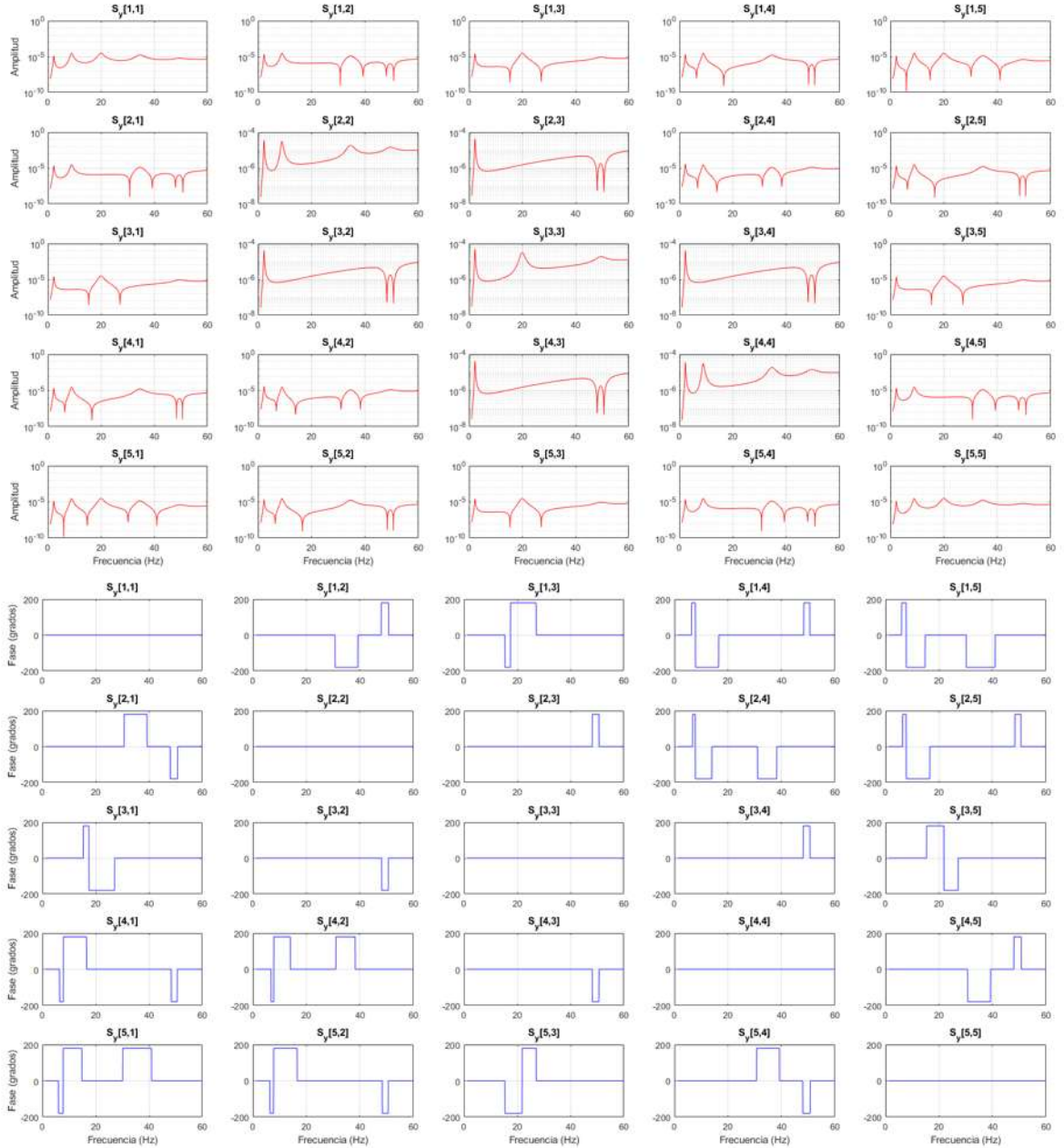


Figura 1.5 Amplitud y fase de la matriz de densidad espectral en aceleraciones

1.7 CONCLUSIONES

La descripción de los sistemas de múltiples grados de libertad mediante la formulación clásica de segundo orden y su transición a la representación en el espacio de estados no es solo un cambio de notación, sino una necesidad analítica. Mientras la formulación clásica permite una interpretación física directa de las fuerzas inerciales y elásticas, el espacio de estados surge como la herramienta más robusta para el manejo de sistemas con amortiguamiento no proporcional y para el procesamiento eficiente de señales estocásticas.

La sección de verificación numérica, fundamentada en el caso de estudio, cumplió satisfactoriamente su propósito de validación. La correspondencia exacta entre las matrices globales de masa y rigidez, así como la coincidencia en los espectros de respuesta obtenidos mediante las rutinas programadas en MATLAB.

La caracterización en el dominio de la frecuencia, mediante el uso de la Densidad Espectral de Potencia (PSD) y las Funciones de Respuesta en Frecuencia (FRF), es indispensable para el manejo de excitaciones aleatorias. Dado que las estructuras civiles están sujetas a fuentes de energía de naturaleza incierta.

1.8 BIBLIOGRAFÍA

Chopra, A.K. (2001). Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering (2nd ed.). Prentice-Hall.

Peeters, B. (2000). System identification and damage detection in civil engineering structures [Tesis de doctorado, Katholieke Universiteit Leuven].

Rodrigues, J. A. de O. (2004). Identificação modal estocástica: Métodos de análise e aplicações em estruturas de engenharia civil [Tesis de doctorado, Universidade do Porto]

Gómez Araújo, I. D. (2010). Caracterización dinámica experimental de puentes de hormigón simplemente apoyados a partir de mediciones de vibración ambiental [Tesis de maestría, Universidad Industrial de Santander].

CAPÍTULO 2

METODOLOGÍA DE IDENTIFICACIÓN MODAL OPERACIONAL EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA

2.1. INTRODUCCIÓN

La identificación de las propiedades dinámicas en estructuras de ingeniería civil ha evolucionado significativamente con el aprovechamiento de la excitación ambiental. A diferencia de los ensayos forzados, la vibración producida por fuentes naturales y de servicio como el tráfico vehicular, la acción del viento y microsismos proporciona un estímulo continuo que abarca un espectro de frecuencias lo suficientemente amplio como para excitar los modos vibratorios principales de la estructura. Bajo este esquema, y para propósitos de simplificación analítica, se asume que la excitación de entrada se comporta como un proceso estocástico de ruido blanco con una distribución Gaussiana de media cero.

En la actualidad, las técnicas de identificación se dividen fundamentalmente en métodos paramétricos en el dominio del tiempo y métodos no paramétricos en el dominio de la frecuencia. Este capítulo al igual que el capítulo 4 que se verá más adelante, se centran en el desarrollo e implementación de herramientas basadas en el dominio de la frecuencia, específicamente a través del método Peak-Picking (PP). Este método, reconocido por su eficacia y simplicidad computacional, permite la estimación de frecuencias naturales y configuraciones modales mediante el análisis de las densidades espectrales de potencia y las funciones de transferencia.

El núcleo de este capítulo describe la lógica y los fundamentos matemáticos que sustentan la metodología de identificación empleada. Cabe destacar que el procesamiento de las señales, el cálculo del promedio normalizado de las densidades espectrales de potencia (ANPSD) y la extracción sistemática de los picos de resonancia se han integrado en una herramienta computacional de autoría propia. Este desarrollo permite automatizar la identificación modal a partir de los registros capturados, garantizando una interpretación técnica rigurosa de la dinámica del puente bajo estudio.

2.2. CLASIFICACIÓN DE LOS ALGORITMOS DE IDENTIFICACIÓN MODAL

La identificación de parámetros dinámicos a partir de registros de vibración ambiental se basa en el procesamiento de señales de salida (output-only), donde la entrada se considera un proceso estocástico desconocido. Los algoritmos para este propósito se clasifican generalmente en dos grandes familias, dependiendo del dominio matemático en el que se procesa la información:

2.2.1 Métodos no paramétricos (dominio de la frecuencia)

Estos métodos transforman las series de tiempo al dominio de la frecuencia mediante el algoritmo de la Transformada Rápida de Fourier (FFT) para estimar las Densidades Espectrales de Potencia (PSD). Su principal característica es que la identificación se realiza directamente sobre las funciones de respuesta espectral sin necesidad de ajustar un modelo matemático previo a los datos.

Dentro de este grupo destaca el método Peak-Picking (PP), el cual fue sistematizado por Felber (1993) y se fundamenta en la identificación de los máximos locales en los espectros de potencia para determinar las frecuencias naturales. Es el enfoque seleccionado para la herramienta

computacional desarrollada en este trabajo, debido a su eficiencia numérica y la claridad visual que ofrece para la interpretación de los modos de vibración en puentes.

2.2.2 Métodos paramétricos (dominio del tiempo)

A diferencia de los anteriores, los métodos paramétricos buscan ajustar un modelo matemático (como modelos autorregresivos o de espacio de estados) directamente a los datos temporales registrados. Estos algoritmos suelen ser más robustos ante niveles altos de ruido y modos muy cercanos entre sí, pero requieren una mayor carga computacional y criterios más complejos para la selección del orden del modelo.

2.3. FUNDAMENTOS DEL ALGORITMO PEAK-PICKING (PP)

El método de selección de picos o Peak-Picking (PP) fundamenta su capacidad de identificación en el análisis de la respuesta dinámica en el dominio de la frecuencia. Para transformar las series de tiempo capturadas en campo hacia funciones de densidad espectral que permitan la identificación modal, la herramienta computacional de autoría propia implementa una cadena de procesamiento basada en la Transformada Rápida de Fourier y el método de estimación de Welch.

2.3.1 Transformación al dominio de la frecuencia

El primer paso para el análisis estocástico es la conversión de las señales temporales de aceleración $a(t)$ en sus componentes espectrales. El algoritmo utiliza la Transformada Discreta de Fourier (DFT), optimizada mediante el algoritmo de la Transformada Rápida de Fourier (FFT). Para una señal discreta de N muestras, la transformación se define como:

$$Y_m = \frac{Y(\omega_m)}{\Delta t} = \sum_{k=0}^{N-1} w_k y_k e^{-\frac{j2\pi mk}{N}}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (2.1)$$

Donde N es el número de valores discreto de la señal y_k , Δt es el intervalo de tiempo entre los valores discretos de la señal y_k , ω es la frecuencia radial y T es la duración total de la señal y_k .

Debido a la naturaleza estocástica de las señales capturadas mediante registros de vibración ambiental, resulta indispensable la aplicación de funciones de ventana para mitigar los efectos de la fuga de energía espectral (spectral leakage). En este trabajo, se ha implementado específicamente la ventana de Hanning (Brown *et al.*, 1999) dentro de los algoritmos de procesamiento, debido a su eficacia para suavizar señales de banda ancha y mejorar la definición de los picos de resonancia. La expresión matemática de la ventana de Hanning se define como:

$$w_k = 0.5 \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi k}{N} \right) \right), \quad 0 \leq k \leq N \quad (2.2)$$

$$L = N + 1$$

2.3.2 Estimación espectral mediante el método del Welch

La estimación directa de la Densidad Espectral de Potencia (PSD) a partir de una única Transformada de Fourier de la señal completa suele presentar una varianza elevada, lo que se traduce en un espectro con excesivo "ruido" que dificulta la identificación clara de los picos modales. Para mitigar este efecto, la herramienta computacional desarrollada implementa el Método de Welch (Welch, 1967), el cual se basa en el promedio de periodogramas modificados.

De acuerdo con la metodología implementada en el código propio y basada en Gómez (2010), el proceso se realiza en las siguientes etapas descriptivas:

1. Segmentación y Traslape: La señal de tiempo se divide en varios segmentos más pequeños de igual longitud. Para evitar la pérdida de información en los extremos de estos segmentos, el algoritmo aplica un traslape o solapamiento (típicamente del 50%), lo que permite que los datos situados en los bordes de un segmento sean procesados también en el centro del siguiente.
2. Aplicación de Ventanas: Cada segmento se multiplica por una función de ventana, como la ventana de Hanning (Brown *et al.*, 1999). Esta operación suaviza los datos en los extremos de cada bloque, eliminando las discontinuidades artificiales que causarían errores de "fuga espectral" (leakage) en el resultado final.
3. Transformación y Cálculo de Espectros Individuales: Sobre cada uno de estos segmentos ya ventaneados, el programa ejecuta la Transformada Rápida de Fourier (FFT) para calcular su contenido energético individual en el dominio de la frecuencia.
4. Promedio Espectral: Finalmente, el algoritmo promedia los resultados de todos los segmentos. Este paso es el que garantiza la estabilidad estadística de la medición: mientras que un espectro individual puede ser muy irregular, el promedio de múltiples segmentos resalta las frecuencias naturales de la estructura que son constantes, mientras cancela el ruido que es aleatorio.

2.4. PROCESAMIENTO DE SEÑALES MEDIANTE DENSIDADES ESPECTRALES

Una vez calculadas las transformadas de Fourier, el algoritmo desarrollado organiza la información en matrices de respuesta espectral. En estas matrices, los auto espectros se ubican en la diagonal principal y los espectros cruzados (que relacionan dos puntos distintos) fuera de ella.

2.4.1 Estimación de la matriz de densidad espectral

Si la medición de todos los puntos de la estructura se realizara de forma simultánea, la matriz de respuesta espectral sería una matriz cuadrada. La herramienta computacional obtiene esta matriz en forma compacta mediante la siguiente expresión:

$$\hat{S}_y(\omega) = \frac{Y(\omega)^* \cdot Y(\omega)^T}{N \cdot \Delta T} \quad (2.3)$$

Donde $Y(\omega)$ es un vector columna que contiene la FFT de los vectores de respuesta capturados.

Sin embargo, en la práctica es común realizar mediciones por grupos de sensores o "setups" debido a la limitación de equipos. En estos casos, el programa calcula una matriz rectangular de tamaño $l \times r$, relacionando los grados de libertad medidos con los de referencia:

$$\hat{S}_y(\omega) = \frac{Y(\omega)^* \cdot Y^{ref}(\omega)^T}{N \cdot \Delta T} \quad (2.4)$$

en donde $Y^{ref}(\omega)$ es el vector con las FFT de las respuestas en los puntos de referencia.

2.4.2 Espectro medio normalizado (ANPSD)

Para evitar analizar múltiples gráficos de cada grado de libertad y prevenir errores si un sensor está ubicado en un punto de amplitud nula para ciertos modos, el algoritmo automatiza el cálculo de una función espectral global.

De acuerdo con la formulación adoptada en este trabajo, la estimación de la PSD se realiza mediante el promedio de periodogramas, asegurando que la varianza de la señal sea mínima y los picos modales sean fácilmente identificables.

2.4.3 Normalización y promedio

El primer paso en la rutina programada es la normalización de cada espectro individual para que el contenido energético sea comparable, independientemente de la intensidad de la excitación en diferentes instantes de tiempo. La densidad espectral normalizada (NPSD) para cada canal i se obtiene dividiendo la PSD por la suma de sus ordenadas:

$$NPSD_i(\omega) = \frac{PSD_i(\omega)}{\sum_{k=1}^N PSD(\omega_k)} \quad (2.5)$$

Finalmente, el programa consolida toda la información estructural en el Espectro Medio Normalizado (ANPSD), el cual resulta del promedio de los espectros normalizados de todos los grados de libertad instrumentados:

$$ANPSD(\omega) = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l NPSD_i(\omega) \quad (2.6)$$

2.5. INTERPRETACIÓN DE LAS FUNCIONES DE TRANSFERENCIA

Una vez identificadas las frecuencias naturales en el espectro medio normalizado, el siguiente paso en la caracterización dinámica es determinar la configuración espacial de cada modo.

2.5.1 Relación de amplitud y funciones de transferencia

Con base en la fundamentación teórica descrita previamente, el algoritmo aísla la contribución de un modo de vibración específico asociado a una frecuencia de resonancia ω_k . Para reconstruir la forma modal, el programa requiere definir un grado de libertad de referencia que haya sido medido en todos los setups instrumentales y cuya amplitud sea distinta de cero para las frecuencias de interés.

El código establece una relación directa entre la ordenada del modo de vibración en el punto de referencia $(\phi_{ref})_k$ y la ordenada en cualquier otro grado de libertad genérico $(\phi_j)_k$. Esta relación se obtiene dividiendo el espectro cruzado entre el auto espectro del punto de referencia:

$$\frac{S_y(\omega)_{j,ref}}{S_y(\omega)_{ref,ref}} \approx \frac{(\phi_j)_k}{(\phi_{ref})_k} \quad (2.7)$$

Esta expresión es el núcleo del algoritmo de Peak-Picking, ya que permite estimar los componentes del modo de vibración con un factor de escala. En la rutina programada, esta relación matemática se sistematiza definiendo la función de transferencia $(T_{j,ref})$ entre el punto j y el punto de referencia:

$$T_{j,ref} = \frac{S_y(\omega)_{j,ref}}{S_y(\omega)_{ref,ref}} \quad (2.8)$$

2.5.2 Evaluación de la fase modal

Dado que los espectros cruzados son funciones complejas, la función de transferencia resultante $T_{j,ref}$ posee una amplitud y una fase. El programa de identificación evalúa el ángulo de fase en la frecuencia de resonancia para asignar la dirección del movimiento:

- Un valor de fase cercano a 0° indica que el punto j y el punto de referencia se desplazan en el mismo sentido.
- Un valor de fase cercano a 180° indica que se desplazan en sentidos opuestos.

2.5.3 Identificación de porcentaje de amortiguamiento modal

La disipación de energía es el parámetro dinámico más complejo de estimar bajo excitación ambiental. Para resolver esto, la herramienta programada implementa dos metodologías en el dominio de la frecuencia, basándose íntegramente en los procedimientos descritos por Gómez, (2010), lo que permite contrastar y validar los resultados obtenidos por el algoritmo propio.

2.5.3.1 Método del ancho de banda

El primer enfoque programado es el método del ancho de banda (Clough y Penzien, 1993), el cual se aplica directamente sobre los picos del espectro medio normalizado (ANPSD). El algoritmo identifica la amplitud máxima en la frecuencia de resonancia ω_k y busca las frecuencias vecinas ω_1 y ω_2 donde dicha amplitud decae a la mitad de su valor máximo.

El coeficiente de amortiguamiento ξ_k se calcula mediante la relación:

$$\xi_k = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\omega_k} \quad (2.9)$$

2.5.3.2 Método de ajuste del espectro analítico

Para superar las limitaciones de resolución del método anterior, se implementó un algoritmo de optimización numérica que ajusta un espectro teórico a los datos experimentales. El modelo teórico utilizado corresponde a la respuesta en aceleración de un sistema de un grado de libertad sometido a ruido blanco:

$$S_y(\omega) = \frac{R_y}{k^2} \frac{\omega^4}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_k}\right)^2\right]^2 + \left[2\xi_k \left(\frac{\omega}{\omega_k}\right)\right]^2} + C \quad (2.10)$$

Donde k es la rigidez del sistema modal, R_y es la densidad espectral de la entrada y C es una constante introducida en el programa para mejorar el ajuste de la línea base del espectro, tal como lo sugiere Gómez (2010).

El ajuste numérico de la ecuación 2.10 se lleva a cabo en Matlab mediante la resolución de un problema de mínimos cuadrados no lineales. Para ello, se implementó el algoritmo de Levenberg-Marquardt debido a su robustez y rápida convergencia en este tipo de ajustes espectrales. El código itera hasta minimizar el error entre la curva teórica y el espectro medido, arrojando de manera simultánea y automatizada los valores óptimos para la frecuencia ω_k y el porcentaje de amortiguamiento modal ξ_k .

2.6. VERIFICACIÓN

Para validar la correcta implementación y robustez de los algoritmos de procesamiento de señales y de la técnica Peak-Picking desarrollados en este capítulo, se procedió a realizar una simulación numérica controlada. Se retomó como caso de estudio la viga de concreto simplemente apoyada de 6 metros de longitud y 5 grados de libertad, descrita y fundamentada analíticamente en el Capítulo 1, (Gómez, 2010).

2.6.1 Generación de señales aleatorias y resolución del sistema

Para simular las condiciones de vibración ambiental a las que se somete una estructura real, se requirió generar un historial de cargas que representara un proceso estocástico. A diferencia de enfoques convencionales que emplean entornos gráficos de simulación por bloques (como Simulink), en esta investigación se optó por una programación analítica directa para mantener un control absoluto sobre las variables numéricas.

El código desarrollado generó vectores de excitación correspondientes a ruido blanco gaussiano (media nula y varianza unitaria), esta matriz de vectores fue multiplicada por la matriz de masas y luego aplicando estas fuerzas aleatorias en los grados de libertad de la viga. Posteriormente, para obtener las respuestas dinámicas (aceleraciones) en el dominio del tiempo, se resolvió el sistema dinámico utilizando la formulación en el espacio de estados planteada en el Capítulo 1:

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= A_c z(t) + B_c u(t) \\ y(t) &= C_c z(t) + D_c u(t)\end{aligned}\tag{2.11}$$

El algoritmo integra numéricamente estas ecuaciones para la excitación estocástica $u(t)$, obteniendo las series de tiempo sintéticas $y(t)$ correspondientes a las aceleraciones en los nodos de la estructura.

2.6.2 Ejercicio de aplicación

Para el ejercicio se considera una serie temporal tipo ruido blanco (media cero y varianza unitaria) con una duración de 5 min a una frecuencia de muestreo de 200Hz. A continuación, se presenta la respuesta en aceleración simuladas al sistema estructural.

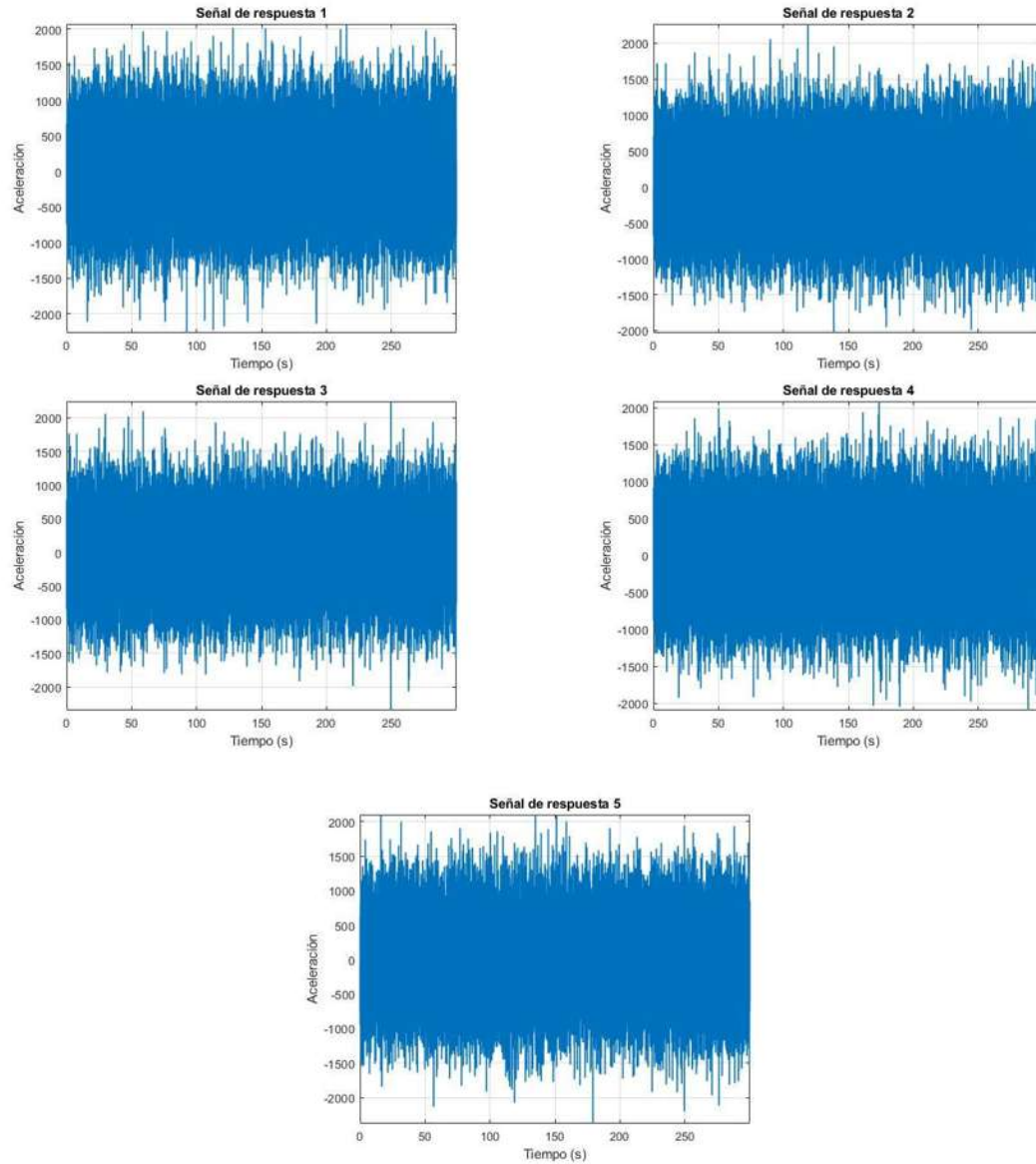


Figura 2.1 Respuesta del sistema considerado a una excitación de ruido blanco.

A continuación, se presentan las funciones de densidad espectral de respuesta en aceleración del sistema estructural (figura 2.2)

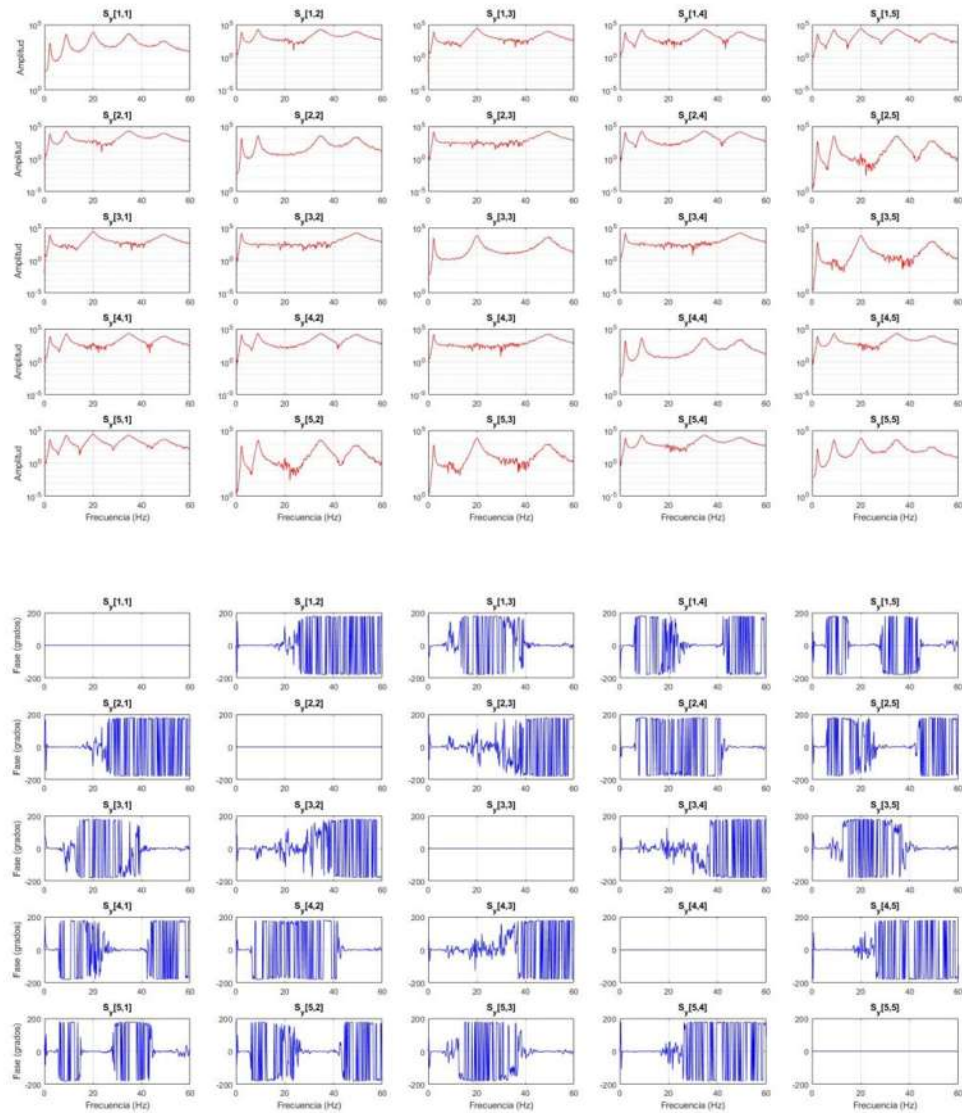


Figura 2.2 Estimación de las funciones de densidad espectral de la respuesta del sistema

En la Figura 2.3 se presenta el espectro medio normalizado y su ubicación de los picos de resonancia del sistema.

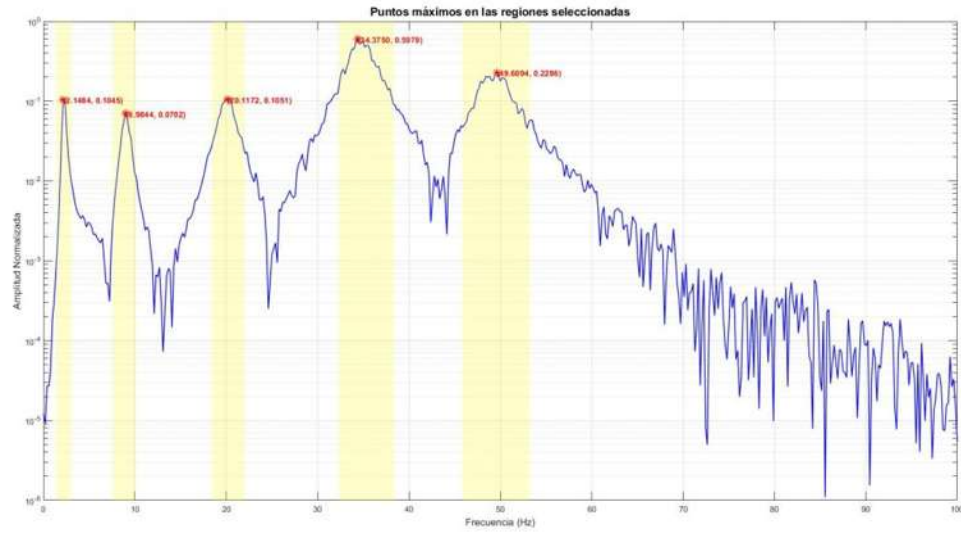


Figura 2.3 Espectro de potencia medio normalizado

En la tabla 2.1 se presentan las frecuencias identificadas y las teóricas.

Tabla 2.1 Frecuencias naturales de la estructura (teórica/identificada)

Frecuencias Teóricas (Hz)	Frecuencias Identificadas (Hz)	Error %
2.2310	2.1484	3.702
8.9150	8.9844	0.778
19.9330	20.1172	0.924
34.5260	34.3750	0.437
49.3980	49.6094	0.428

Se presenta en la figura 2.4 las funciones de transferencia.

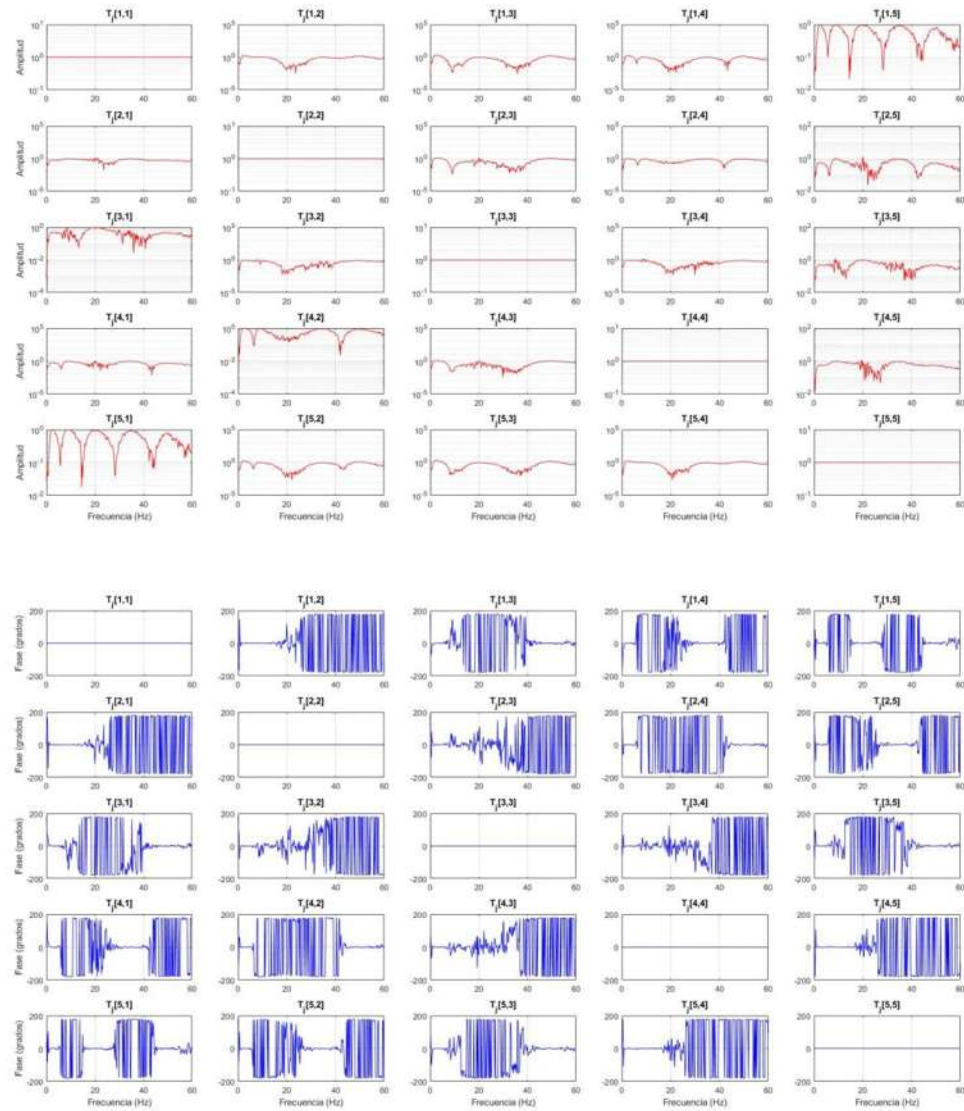


Figura 2.4 Funciones de transferencia

A continuación, se presentan los modos de vibrar de la estructura.

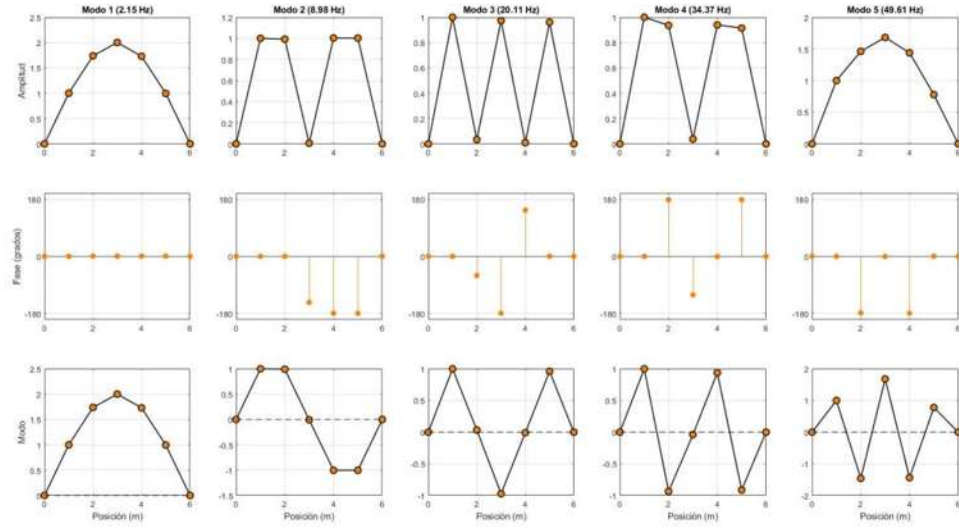


Figura 2.5 Identificación de modos de vibración

En la figura 2.6 se ilustran los dos métodos aplicados para obtener los porcentajes de amortiguamiento modal.

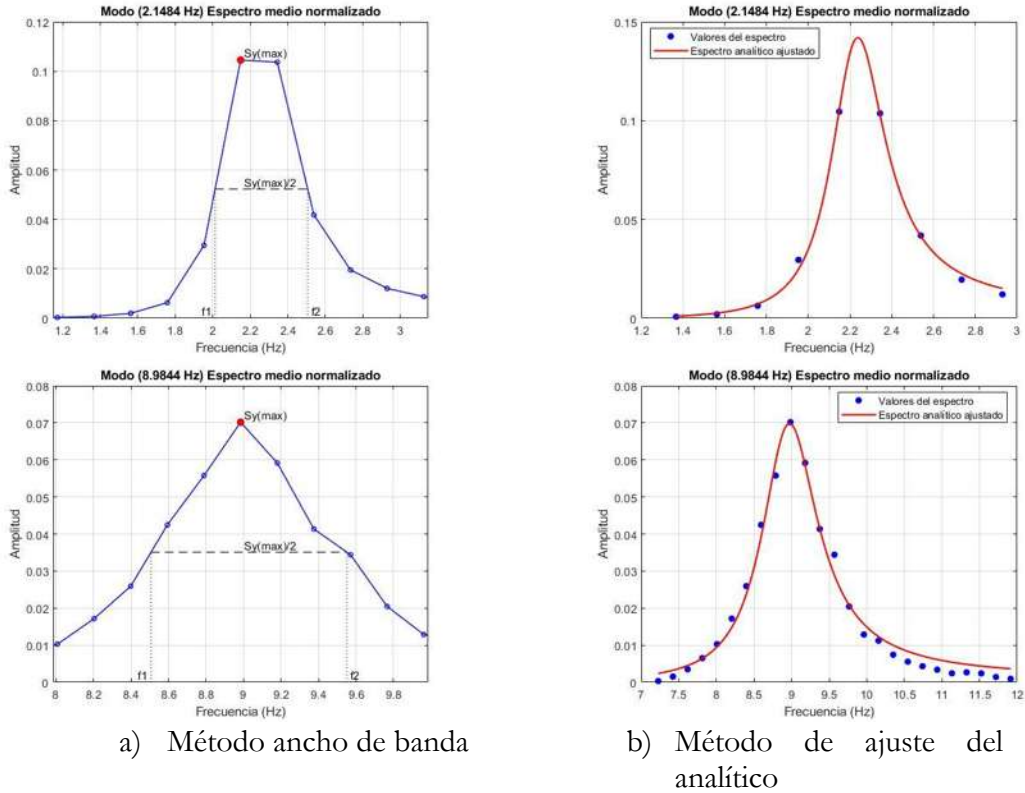


Figura 2.6 Métodos para estimar los porcentajes de amortiguamiento modal

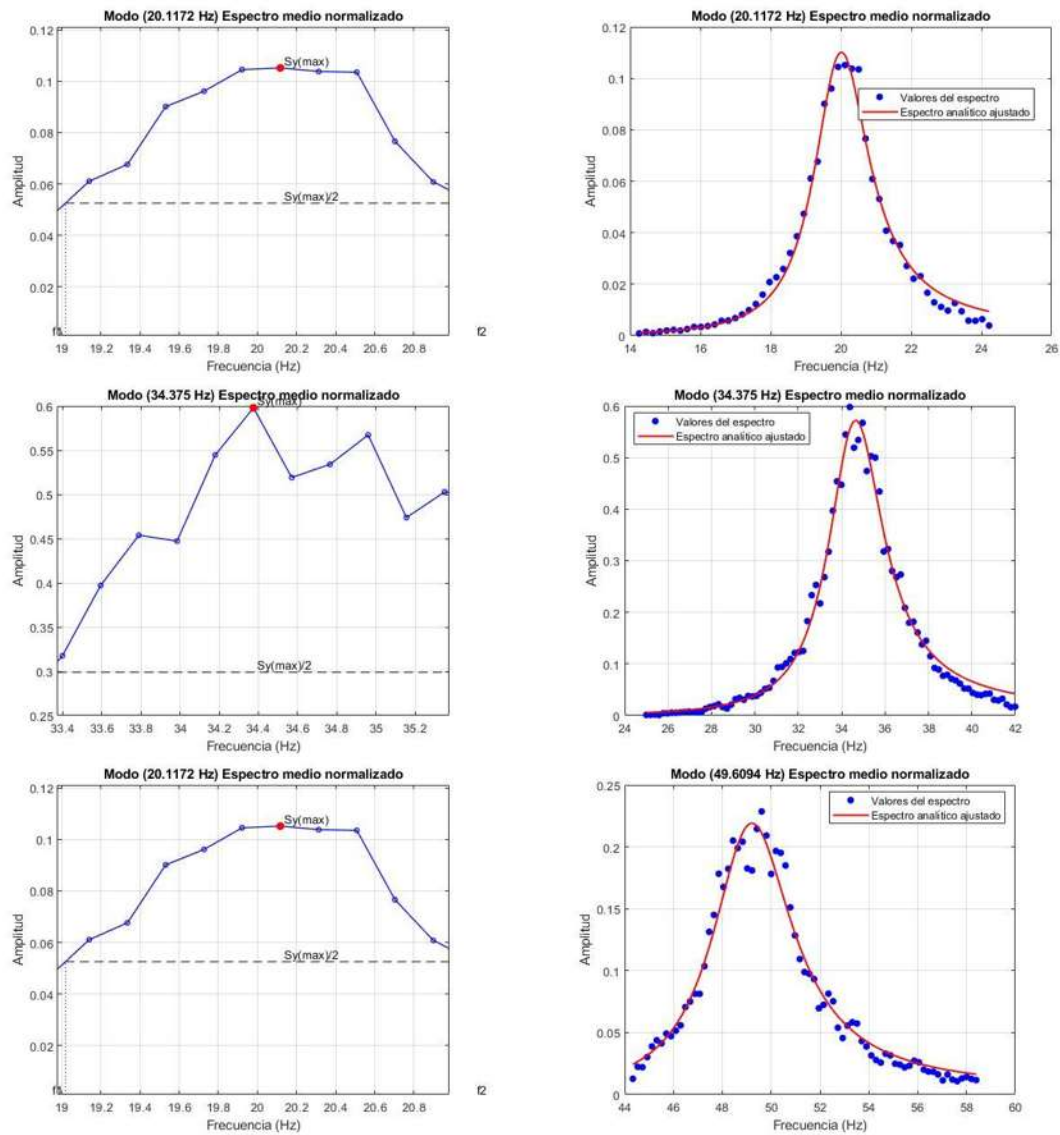


Figura 2.6 Métodos para estimar los porcentajes de amortiguamiento modal (continuación)

A continuación, se presentan los resultados de los porcentajes de amortiguamiento encontrados.

Tabla 2.2 Estimación de los coeficientes de amortiguamiento

Frecuencia	Amortiguamiento teórico	Método de ajuste del espectro	Método ancho de banda	%Error Ajuste espectro	%Error ancho de banda
2.3440 Hz	0.0500	0.0628	0.1149	25.58%	129.80%
8.9840 Hz	0.0500	0.0535	0.0581	7.04%	16.25%
20.1200 Hz	0.0500	0.0520	0.0518	3.98%	3.55%
33.9800 Hz	0.0500	0.0448	0.0424	10.45%	15.16%
49.2200 Hz	0.0500	0.0422	0.0381	15.54%	23.80%
Mediana=		0.0520	0.0518	10.45%	16.25%

En el método del ajuste analítico, los resultados mostrados en la tabla 2.2 son de una optimización que se realizó según se muestra en el apéndice C.

2.7. CONCLUSIÓN

La integración del método de Welch y el cálculo del Espectro Medio Normalizado (ANPSD) demostró ser una técnica altamente eficiente para condensar la información de múltiples sensores, mitigando el ruido aleatorio y resaltando con claridad las frecuencias naturales de la estructura.

La simulación numérica validó la exactitud del código desarrollado. Al resolver analíticamente el sistema en el espacio de estados bajo excitación de ruido blanco, y procesar las respuestas sintéticas como registros experimentales, la herramienta demostró una capacidad plena para recuperar las frecuencias teóricas, las formas modales y los porcentajes de amortiguamiento con errores mínimos.

Tras el análisis comparativo presentado en la tabla 2.2, el método del ajuste analítico demostró una consistencia superior frente al método de ancho de banda, logrando una mediana del error del 10.45% frente al 16.25% de la técnica de ancho de banda; es notable que para el primer modo (2.3440 Hz) mientras que el ancho de banda falló con un error de 129.80%, el ajuste analítico redujo dicha desviación al 25.58%. esto demuestra que la aproximación de ruido blanco es significativamente más confiable en rangos de baja frecuencia.

2.8 BIBLIOGRAFÍA

Felber, A. J. (1993). *Development of a hybrid bridge evaluation system* [Tesis de doctorado, University of British Columbia].

Brown, D. L., Ewins, D. J., & Allemang, R. J. (1999, febrero). *Modal analysis: Theory and applications* [Notas de curso de pre-conferencia]. IMAC XVII, Kissimmee, FL, Estados Unidos.

Ljung, L. (1999). *System identification: Theory for the user* (2nd ed.). Prentice Hall.

Cooley, J. W., & Tukey, J. W. (1965). An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series. *Mathematics of Computation*, 19(90), 297–301.

Welch, P. D. (1967). The use of fast Fourier transform for the estimation of power spectra: A method based on time averaging over short, modified periodograms. *IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics*, 15(2), 70–73.

Clough, R. W., & Penzien, J. (1993). *Dynamics of structures* (2nd ed.). McGraw-Hill.

Brownjohn, J. M. W., Dumanoglu, A. A., Severn, R. T., & Blakeborough, A. (1989). Ambient vibration survey of the Bosphorus suspension bridge. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 18(2), 263–283.

Gómez Araújo, I. D. (2010). Caracterización dinámica experimental de puentes de hormigón simplemente apoyados a partir de mediciones de vibración ambiental [Tesis de maestría, Universidad Industrial de Santander].

CAPÍTULO 3

IDENTIFICACIÓN MODAL ESTOCÁSTICA EN EL DOMINIO DEL TIEMPO

3.1. INTRODUCCIÓN

La caracterización dinámica de sistemas estructurales complejos mediante vibración ambiental se fundamenta en el procesamiento de señales capturadas a través de sistemas de adquisición de datos digitales. Por definición, este proceso transforma la respuesta continua de la estructura en series de tiempo discretas, representadas mediante intervalos finitos de muestreo Δt . En este contexto, la precisión de la identificación modal depende de la correcta transición de las ecuaciones de movimiento del dominio continuo al dominio discreto.

Para los fines de esta investigación, el comportamiento dinámico se describe mediante modelos de variables de estado discretizados en instantes $t_k = k\Delta t$. Bajo la premisa de que el vector de excitación $u(t)$ se mantiene constante entre cada intervalo de muestreo (aproximación de orden cero), la dinámica del sistema se representa mediante el siguiente par de ecuaciones de diferencia:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k \\ y_k &= Cx_k + Du_k \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde x_k es el vector de estado en tiempo discreto $x_k = k\Delta t = \begin{bmatrix} q_k \\ \dot{q}_k \end{bmatrix}$ que sintetiza la información de posición y velocidad, u_k es el vector discreto de excitación, y_k es el vector discreto de respuesta y las matrices A, B, C y D constituyen el marco de referencia del modelo, definiendo las propiedades de transición, entrada, salida y transmisión directa, respectivamente. Esta formulación es el pilar para la implementación de los algoritmos de subespacios estocásticos que se detallan en las secciones subsecuentes.

3.2. MODELO ESPACIO DE ESTADO DETERMINÍSTICO-ESTOCÁSTICO EN TIEMPO DISCRETO

En la práctica de la ingeniería, los modelos determinísticos presentan limitaciones para representar con exactitud las mediciones estructurales reales. Esto se debe a la presencia inevitable de perturbaciones, imprecisiones en el modelado analítico y factores inherentes a los sistemas de adquisición de datos y sensores, los cuales deben ser tratados matemáticamente como ruido.

Para compensar estas incertidumbres, el sistema en tiempo discreto evoluciona hacia una representación determinística-estocástica expresada de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k + w_k \\ y_k &= Cx_k + Du_k + v_k \end{aligned} \tag{3.2}$$

donde $w_k(2nx1)$ es un ruido en el proceso debido a perturbaciones e imprecisiones en el modelo, $v_k(nx1)$ es el ruido en las mediciones debido a inexactitud del sensor.

Dado que estos vectores de ruido no son directamente medibles en campo, la metodología asume que ambos se comportan como ruido blanco con media igual a cero. La interacción estadística de estos vectores está definida por su matriz de covarianza, expresada como:

$$E \left[\begin{pmatrix} w_p \\ v_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_q & v_q \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} Q & S \\ S^T & Rv \end{pmatrix} \delta_{pq} \quad (3.3)$$

donde E es el operador de valor esperado o media, $Q(2nx2n)$, $S(2nxn)$, $Rv(nxn)$ son matrices de covarianza de w_k y v_k , δ_{pq} es el delta de Kronecker (si $p=q$ entonces $\delta_{pq} = 1$, si no $\delta_{pq} = 0$) p y que son dos arbitrarios instantes de tiempo.

3.3. MODELO ESPACIO DE ESTADO ESTOCÁSTICO EN TIEMPO DISCRETO

Para los fines de esta investigación, el puente es excitado por una entrada ambiental que no es conocida. Debido a la imposibilidad de medir esta fuerza de excitación (u_k), el paradigma de modelación cambia: la propia excitación ambiental deja de tratarse de forma determinística y pasa a considerarse como un proceso estocástico embebido dentro de los términos de ruido w_k y v_k .

Bajo este enfoque, el sistema se simplifica y se establece la representación final del modelo de espacio de estados puramente estocástico en tiempo discreto:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + w_k \\ y_k &= Cx_k + v_k \end{aligned} \quad (3.4)$$

Para que los algoritmos de identificación modal puedan operar sobre este modelo, la entrada ambiental se asume matemáticamente como un proceso gaussiano estacionario de ruido blanco y media nula. El cumplimiento de esta hipótesis es crítico para la identificación modal estocástica; si las fuerzas de excitación reales contuvieran frecuencias claramente dominantes, el algoritmo interpretaría erróneamente esas frecuencias, produciendo polos adicionales en la matriz de estado del sistema o picos falsos en las funciones de densidad espectral.

3.4 PROPIEDADES DE SISTEMAS ESTOCÁSTICOS

Para resolver el problema de la identificación modal a partir de mediciones de vibración ambiental, es indispensable establecer las propiedades estadísticas que rigen el modelo de espacio de estados. Partiendo de la hipótesis de que los vectores de excitación w_k y v_k operan como procesos de ruido blanco gaussiano estacionario, las operaciones lineales del sistema inducen

que tanto el vector de estado x_k como el vector de respuesta medida y_k adquieran también una distribución gaussiana estacionaria de media nula.

Bajo estas condiciones de estacionariedad, el valor esperado (o media) del vector de estado y su matriz de covarianza Σ de dimensión $(2n \times 2n)$ la cual es independiente del instante de tiempo k se definen como:

$$E[x_k] = 0, \quad E[x_k x_k^T] = \Sigma \quad (3.5)$$

Dado que el ruido del proceso y el ruido de medición son independientes del estado actual del sistema, su correlación cruzada es nula, estableciéndose las siguientes relaciones matemáticas:

$$E[x_k w_k^T] = 0, \quad E[x_k v_k^T] = 0 \quad (3.6)$$

Para vincular este modelo analítico con los datos experimentales que se registran en la estructura, se define la matriz de covarianza de la respuesta R_i de dimensión $(n \times n)$ para un intervalo de tiempo arbitrario i :

$$R_i = E[y_{k+i} y_k^T] \quad (3.7)$$

Asimismo, la correlación entre la evolución del sistema y la respuesta observada se cuantifica mediante la matriz de covarianza cruzada G de dimensión $(2n \times n)$, evaluada entre el vector de estado en el instante futuro $k+1$ y la salida actual k :

$$G = E[x_{k+1} y_k^T] \quad (3.8)$$

A partir de estas definiciones estocásticas, es posible derivar un conjunto de igualdades fundamentales para el algoritmo de subespacios. La primera de ellas rige la covarianza del estado mediante la ecuación discreta de Lyapunov, las definiciones anteriores las siguientes propiedades pueden ser deducidas (Van Overschee y de Moor, 1996).

$$\Sigma = A \Sigma A^T + Q \quad (3.9)$$

De manera análoga, la evaluación de las covarianzas de salida para cualquier retraso temporal $i = 1, 2, \dots$ genera las siguientes proyecciones analíticas:

$$\begin{aligned} R_0 &= C \Sigma C^T + R_v \\ G &= A \Sigma C^T + S \\ R_i &= C A^{i-1} G \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$R_{-i} = G^T \left(A^{i-1} \right)^T C^T$$

La propiedad $R_i = CA^{i-1}G$ expresada en la Ecuación 3.10 es la piedra angular de toda la metodología de identificación. Esta relación demuestra que la matriz de covarianza R_i que puede ser calculada directamente a partir de las aceleraciones medidas en la estructura contiene en su interior la matriz de estado A . Al factorizar R_i , es posible extraer A y, consecuentemente, aislar las propiedades dinámicas del sistema estructural.

Para extraer dichos parámetros físicos, se introduce una descomposición en valores propios de la matriz de estado A :

$$A = e^{A_c \Delta t} = e^{\Psi \Lambda_c \Psi^{-1} \Delta t} = \Psi e^{\Lambda_c \Delta t} \Psi^{-1} = \Psi \Lambda_d \Psi^{-1} = \Psi \left[\mu_i \right] \Psi^{-1} \quad (3.11)$$

Donde Λ_c y Λ_d son las matrices diagonales que contienen los polos continuos y discretos respectivamente, y Ψ alberga los vectores propios. Estableciendo las relaciones de transformación modal para las matrices de entrada y salida:

$$L^T = \Psi^{-1} B, \quad V = C \Psi \quad (3.12)$$

Se obtiene finalmente la representación de la covarianza de salida en términos puramente modales:

$$R_i = V \Lambda_d^{i-1} G_m \quad (3.13)$$

En esta expresión, G_m representa la matriz de participación modal estocástica, la cual condensa el grado de excitación que el entorno ambiental ejerce sobre cada uno de los modos de vibración de la estructura.

3.5 IDENTIFICACIÓN DE SUBESPACIOS ESTOCÁSTICOS BASADOS EN LA COVARIANZA Y DIAGRAMAS DE ESTABILIZACIÓN

En esta sección se implementa el método de Identificación por Subespacios Estocásticos impulsado por Covarianza (SSI-COV). Siguiendo el enfoque de robustez algorítmica documentado por Magalhães *et al.* (2009), el procedimiento se programó computacionalmente mediante la siguiente secuencia de procesamiento.

El punto de partida del algoritmo es la evaluación de las correlaciones temporales de la respuesta estructural. A partir de las series temporales de aceleración medidas, el código estima las matrices de covarianza para distintos desfases temporales (i) mediante la siguiente expresión discreta:

$$R_i = \frac{1}{N-i} \sum_{k=0}^{N-i-1} y_{k+i} \cdot y_k^T \quad (3.14)$$

donde N es el número total de muestras de la serie temporal y el superíndice T denota la transpuesta del vector de salida y .

Con el fin de separar las propiedades del sistema del ruido aleatorio, las matrices de covarianza calculadas se ensamblan en una matriz estructurada por bloques de tipo Toeplitz (T_p). Esta matriz condensa el comportamiento estadístico de la estructura y se define computacionalmente como:

$$T_{\lfloor i \rfloor} = \begin{bmatrix} R_i & R_{i-1} & \cdots & R_1 \\ R_{i+1} & R_i & \cdots & R_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ R_{2i-1} & R_{2i-2} & \cdots & R_i \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

El número de bloques (filas y columnas) asignados a esta matriz es un parámetro de entrada crítico en el código, ya que influye directamente en la calidad del diagrama de estabilización posterior, tal como lo advierten Magalhães *et al.* (2009).

El núcleo matemático del algoritmo se fundamenta en las propiedades geométricas de los sistemas estocásticos establecidas por Van Overschee y De Moor (1996). Para extraer las matrices del sistema (A y C) a partir de la matriz de Toeplitz, el procedimiento implica ejecutar una Descomposición en Valores Singulares (SVD) y, posteriormente, la resolución de una ecuación de mínimos cuadrados mediante la aplicación de la pseudo-inversa de Moore-Penrose.

En la etapa inicial de esta descomposición, la matriz estructurada se factoriza en tres operadores fundamentales:

$$[T_p] = [U][\Sigma][V]^T \quad (3.16)$$

Donde $[U]$ y $[V]$ son matrices ortogonales que contienen los vectores singulares, y $[\Sigma]$ es una matriz diagonal que alberga los valores singulares del sistema. En el caso de matrices con valores propios complejos, la operación se generaliza utilizando la transpuesta conjugada o Hermitiana, H . (Van Overschee y de Moor, 1996):

$$[T_p] = [U][\Sigma][V]^H \quad (3.17)$$

Una vez ejecutada la partición de la SVD (que separa el subespacio de la señal del subespacio del ruido), la pseudo-inversa de Moore-Penrose permite estimar la matriz de estado A de forma numéricamente estable. La magnitud de los valores singulares en $[\Sigma]$ permite al algoritmo determinar el orden del modelo, separando el subespacio que contiene la respuesta física de la estructura del subespacio dominado por el ruido.

En estructuras reales complejas, el orden del modelo matemático (el tamaño de la matriz A) es desconocido a priori. Para sortear este desafío de programación, se resuelve el sistema iterativamente, asumiendo órdenes de modelo incrementales (Van Overschee y de Moor, 1996).

Dado que el uso de órdenes altos introduce modos puramente matemáticos (espurios) necesarios para ajustar el ruido, se usan los diagramas de estabilización. En estos diagramas, las frecuencias identificadas se grafican frente al orden del modelo.

En donde los modos físicos aparecen de forma consistente formando columnas verticales a medida que aumenta el orden del modelo, presentando amortiguamientos y formas modales estables.

3.6 EJEMPLO DE APLICACIÓN

Considerando el ejemplo del capítulo 2, con la simulación obtenida en donde se crearon series temporales de aceleración verticales, para cada grado de libertad considerado. Se determina un diagrama de estabilización y se obtienen los modos de vibrar, frecuencias y amortiguamiento de la estructura.

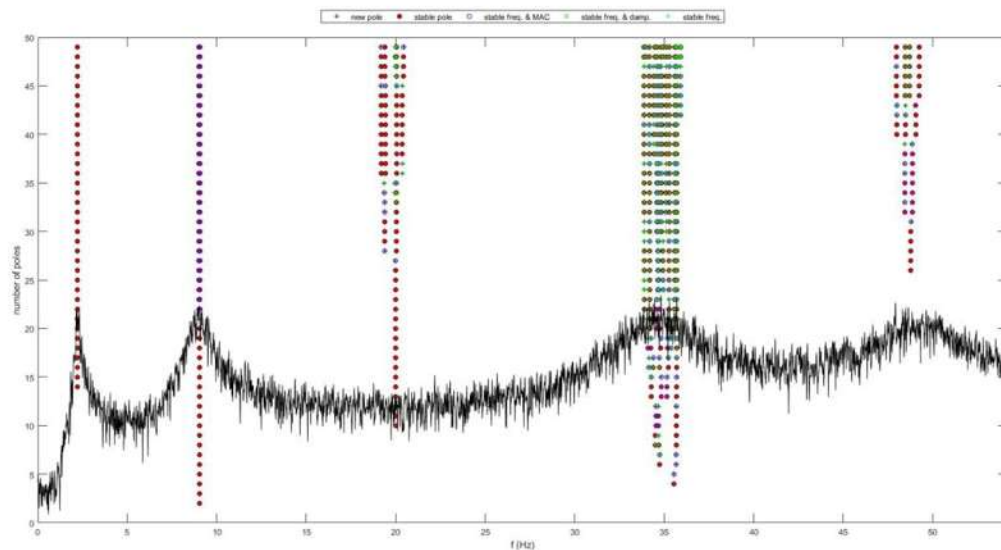


Figura 3.1 diagrama de estabilización del sistema considerado de ejemplo

La figura 3.1 presenta un diagrama de estabilización obtenido mediante la aplicación del método SSI-COV, el diagrama presentado muestra 14 alineaciones verticales de polos estables, que

representan los primeros 5 modos de la viga analizada (varias alineaciones verticales se aproximan a uno de los 5 modos).

La calidad de los diagramas de estabilización, es decir, alineaciones verticales más claras de los polos estables depende del algoritmo utilizado, de los valores de los parámetros de entrada del algoritmo y también de la relación señal/ruido de la serie temporal que se está analizando (Magalhaes, *et al.*, 2009); en el caso del método SSI-COV, el número de filas de bloques de la matriz Toeplitz utilizadas en la identificación influye considerablemente en la calidad de los diagramas de estabilización.

El diagrama de estabilización por sí solo no resuelve el problema de la identificación de los parámetros modales; es solo una herramienta grafica que ayuda a la selección manual de los polos que tienen más probabilidades de representar los modos físicos de la estructura.

Considerando el diagrama de estabilización de la figura 3.1, se determinan las frecuencias naturales, formas modales y porcentaje de amortiguamiento de los 14 polos estables.

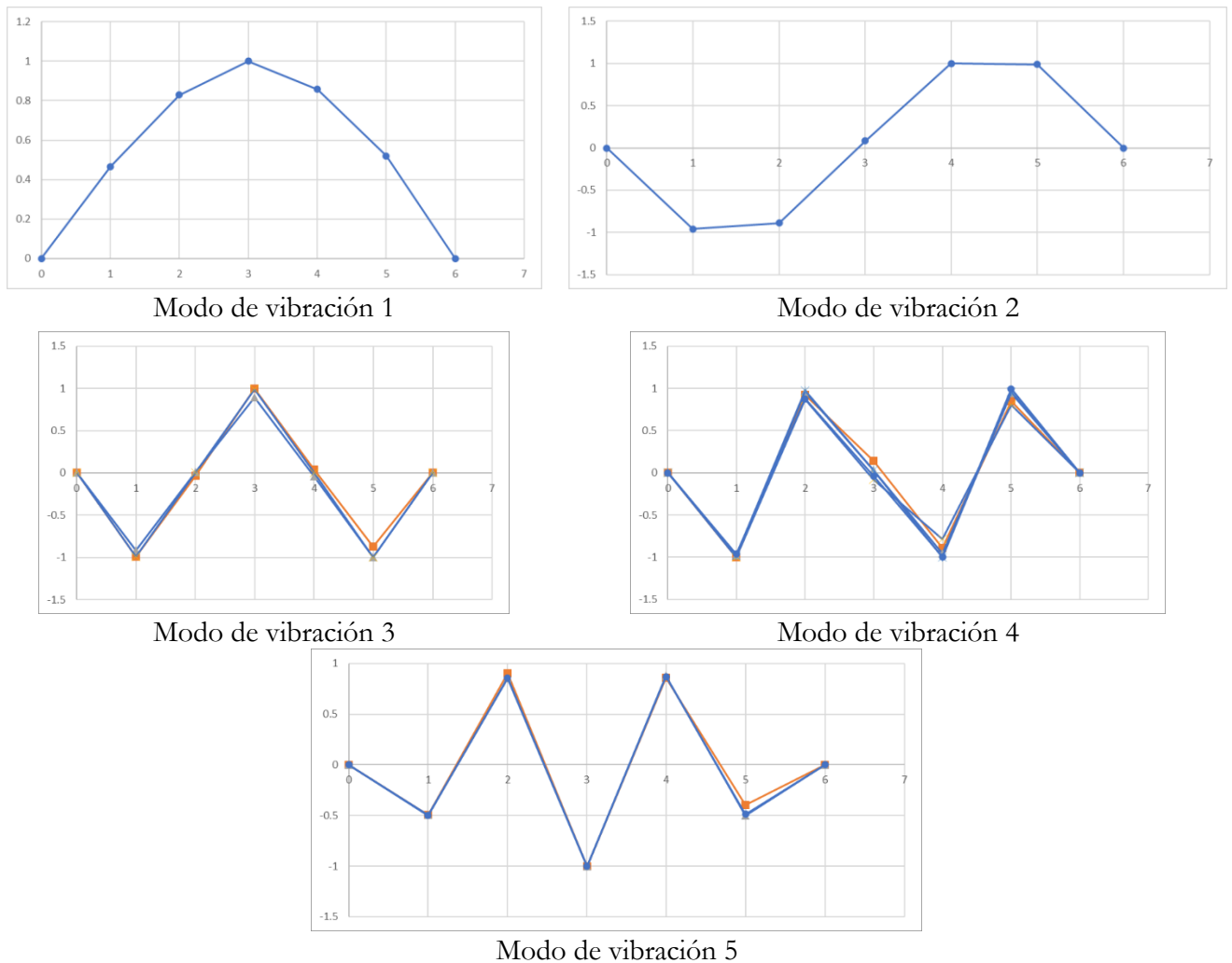


Figura 3.2 Modos de vibración por el método SSI-COV

Tabla 3.1 Estimación de frecuencias naturales y amortiguamiento por el método SSI-COV

Frecuencias calculadas (Hz)	Frecuencia obtenida SSI-COV (Hz)	Error de frecuencia (%)	Amortiguamiento esperado	Amortiguamiento obtenido	Error de amortiguamiento (%)
			$\xi(\%)$	$\xi(\%)$	
2.344	2.209	0.97	5.00	3.95	20.96
8.984	9.011	1.08	5.00	2.80	43.94
20.12	19.186	3.75	5.00	0.07	98.51
20.12	19.416	2.59	5.00	0.05	98.99
20.12	20.019	0.43	5.00	3.45	30.90
20.12	20.354	2.11	5.00	0.07	98.64
33.98	34.181	1.00	5.00	0.02	99.55
33.98	34.658	0.38	5.00	1.16	76.71
33.98	35.280	2.18	5.00	0.03	99.36
33.98	35.593	3.09	5.00	0.01	99.83
33.98	35.692	3.38	5.00	0.02	99.67
49.22	48.709	1.39	5.00	0.09	98.28
49.22	48.871	1.07	5.00	2.61	47.70
49.22	49.250	0.30	5.00	2.84	43.24

3.7 CONCLUSIONES

Al asumir las excitaciones ambientales no medidas como procesos de ruido blanco, fue posible extraer las propiedades dinámicas intrínsecas del sistema estructural utilizando únicamente matrices de covarianza de la respuesta, eliminando la necesidad de conocer las fuerzas de entrada.

La aplicación del algoritmo al caso de ejemplo (Tabla 3.1) arrojó resultados altamente satisfactorios en la identificación de las frecuencias naturales del sistema. Los bajos márgenes de error obtenidos (predominantemente menores al 4%).

El ejemplo evidenció una alta dispersión en la estimación de las razones de amortiguamiento, con discrepancias significativas respecto a los valores teóricos esperados. Lejos de representar una falla algorítmica (en el apéndice A se compara con otros ejercicios para validar el programa), este comportamiento es una limitación inherente y ampliamente documentada de los métodos de identificación modal estocástica. Mientras que la masa y la rigidez (que rigen las frecuencias) son propiedades globales estables, el amortiguamiento es un fenómeno local altamente sensible a las incertidumbres numéricas y al nivel de ruido de la señal.

3.8 BIBLIOGRAFÍA

Van Overschee, P., & De Moor, B. (1996). *Subspace identification for linear systems: Theory, implementation, applications*. Kluwer Academic Publishers.

Peeters, B. (2000). *System identification and damage detection in civil engineering structures* [Tesis de doctorado, Katholieke Universiteit Leuven]. Lirias.

Magalhaes, F., Cunha, A., & Caetano, E. (2009). Online automatic identification of the modal parameters of a long span arch bridge. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 23(2), 316-329.

CAPÍTULO 4

MÉTODO DE RINAWI PARA ESTIMAR FRECUENCIAS Y AMORTIGUAMIENTO

4.1. INTRODUCCIÓN

La identificación de las propiedades dinámicas de una estructura (frecuencia, amortiguamiento y factores de participación) es fundamental para la calibración de modelos numéricos. El método propuesto por Rinawi y Clough destaca por ser un procedimiento no iterativo basado en el ajuste de curvas por mínimos cuadrados.

Tradicionalmente, los métodos de ajuste de curvas para sistemas de un grado de libertad buscan minimizar el error entre la función de transferencia teórica y la experimental. Sin embargo, las formulaciones estándar de mínimos cuadrados tienden a asignar un peso inadecuado a los datos experimentales. Específicamente, los puntos alejados de la resonancia (donde la amplitud es baja) suelen tener una influencia desproporcionada en el error total, mientras que la información crítica cercana al pico de resonancia pierde relevancia en el ajuste. Esto puede resultar en una estimación pobre del amortiguamiento, ya que este parámetro depende en gran parte de la forma exacta del pico de resonancia.

El método de Rinawi y Clough introduce una modificación en la función de error, ponderando la ecuación linealizada mediante la propia amplitud de la respuesta experimental. Esta ponderación asegura que los datos cercanos a la resonancia tengan una mayor contribución en el proceso de minimización de error, garantizando así una estimación más precisa y confiable de la razón de amortiguamiento.

A continuación, se desarrolla la formulación matemática del método, partiendo de la ecuación del movimiento para un sistema de un grado de libertad y su posterior linealización para la aplicación del algoritmo de mínimos cuadrados.

4.2. FORMULACIÓN DEL MÉTODO

El método parte de la suposición de que, cerca de un pico de resonancia, la estructura se comporta como un sistema de un solo grado de libertad. La ecuación diferencial que gobierna este movimiento ante una excitación armónica es:

$$\ddot{y} + 2\omega_n \xi_n \dot{y} + \omega_n^2 y = P_n e^{i\Omega t} \quad (4.1)$$

donde y , ω_n , ξ_n , P_n y Ω son el desplazamiento relativo, frecuencia natural, razón de amortiguamiento viscoso, factor de participación modal y frecuencia de la excitación.

Para resolver esta ecuación en el dominio de la frecuencia, asumimos una solución de la forma $y(t) = A e^{i(\Omega t - \phi)}$. Al sustituir y resolver para la magnitud de la amplitud A_k para una frecuencia específica Ω_k , obtenemos la función de transferencia teórica:

$$A_k = \frac{P_n}{\sqrt{(\omega_n^2 - \Omega_k^2)^2 + (2\omega_n \xi_n \Omega_k)^2}} \quad (4.2)$$

Para simplificar la notación algebraica, definimos el denominador dinámico D_k como la raíz del denominador:

$$D_k = \sqrt{(\omega_n^2 - \Omega_k^2)^2 + (2\omega_n \xi_n \Omega_k)^2} \quad (4.3)$$

Sustituyendo la ecuación 4.3 en 4.2, queda

$$A_k = \frac{P_n}{D_k} \quad (4.4)$$

El objetivo es encontrar los valores ω_n y ξ_n que hagan que esta igualdad se cumpla para todos los puntos medidos. Despejando y elevando al cuadrado la ecuación 4.4 para eliminar la raíz se obtiene:

$$A_k^2 D_k^2 - P_n^2 = 0 \quad (4.5)$$

Si se usa la ecuación 4.5 para mínimos cuadrados, los puntos con amplitudes bajas (lejos de la resonancia) dominan el error (Rinawi y Clough, 1992). Para corregir esto, los autores proponen multiplicar toda la ecuación por la amplitud experimental A_k . Esto actúa como un factor de peso, forzando al algoritmo a priorizar el ajuste en el pico de resonancia, que es donde la información del amortiguamiento es más importante.

$$A_k (A_k^2 D_k^2 - P_n^2) = 0 \quad (4.6)$$

Desarrollando la ecuación 4.6

$$A_k^3 D_k^2 - A_k P_n^2 = 0 \quad (4.7)$$

Para resolver sin iteraciones la ecuación 4.7, se debe expandir el término D_k^2 y separar las variables conocidas (Ω_k, A_k) de las desconocidas (ω_n, ξ_n) .

Expansión del denominador:

$$D_k^2 = (\omega_n^2 - \Omega_k^2)^2 + (2\omega_n \xi_n \Omega_k)^2 = \omega_n^4 - 2\omega_n^2 \Omega_k^2 + \Omega_k^4 + 4\omega_n^2 \xi_n^2 \Omega_k^2 \quad (4.8)$$

Se agrupan los términos que multiplican a la frecuencia de excitación al cuadrado (Ω_k^2)

$$D_k^2 = \omega_n^4 + \Omega_k^2 (4\xi_n^2 \omega_n^2 - 2\omega_n^2) + \Omega_k^4 \quad (4.9)$$

Se sustituye la ecuación 4.9 en la ecuación 4.7

$$A_k^3 [\omega_n^4 + \Omega_k^2 (4\xi_n^2 \omega_n^2 - 2\omega_n^2) + \Omega_k^4] - A_k P_n^2 = 0 \quad (4.10)$$

Ahora se introducen tres nuevas variables para convertir el problema en un sistema lineal:

$$x_1 = \omega_n^4 \quad (4.11)$$

$$x_2 = 4\xi_n^2 \omega_n^2 - 2\omega_n^2$$

$$x_3 = P_n^2$$

Ahora se sustituye la ecuación 4.11 en la ecuación 4.10

$$A_k^3 [x_1 + \Omega_k^2 x_2 + \Omega_k^4] - A_k x_3 = 0 \quad (4.12)$$

Se reordena la ecuación 4.12 para dejar las incógnitas a la izquierda y lo conocido a la derecha:

$$A_k^3 x_1 + (A_k^3 \Omega_k^2) x_2 - A_k x_3 = -A_k^3 \Omega_k^4 \quad (4.13)$$

La ecuación 4.13 solo es para un punto de medición experimental, dado que tenemos un conjunto de N mediciones experimentales (Ω_k, A_k) , el sistema de ecuaciones lineales se escribe en forma matricial $[A]\{x\} = \{B\}$, donde la fila k-ésima de la matriz A y el vector B están dados por:

$$\begin{bmatrix} A_1^3 & A_1^3 \Omega_1^2 & -A_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_N^3 & A_N^3 \Omega_N^2 & -A_N \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -A_1^3 \Omega_1^4 \\ \vdots \\ -A_N^3 \Omega_N^4 \end{Bmatrix} \quad (4.14)$$

Dado que el sistema está sobre determinado (N ecuaciones > 3 incógnitas), se busca minimizar el error cuadrático medio. Esto se logra premultiplicando por la transpuesta de la matriz de coeficientes $([A]^T)$ generando las ecuaciones normales:

$$[A]^T [A] \{x\} = [A]^T \{B\} \quad (4.15)$$

Al desarrollar el producto matricial $[A]^T [A]$, los términos resultantes son sumatorias (Σ) de los productos de las columnas, lo que condensa toda la información experimental en una matriz de 3x3.

$$\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^N A_k^6 & \sum_{k=1}^N A_k^6 \Omega_k^2 & -\sum_{k=1}^N A_k^4 \\ \sum_{k=1}^N A_k^6 \Omega_k^2 & \sum_{k=1}^N A_k^6 \Omega_k^4 & -\sum_{k=1}^N A_k^4 \Omega_k^2 \\ -\sum_{k=1}^N A_k^4 & -\sum_{k=1}^N A_k^4 \Omega_k^2 & \sum_{k=1}^N A_k^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\sum_{k=1}^N A_k^6 \Omega_k^4 \\ -\sum_{k=1}^N A_k^6 \Omega_k^6 \\ \sum_{k=1}^N A_k^4 \Omega_k^4 \end{Bmatrix} \quad (4.16)$$

La ecuación 4.16 se resuelve directamente para obtener el vector $\{x\}$.

Finalmente, las propiedades dinámicas del sistema se despejan del vector $\{x\}$ mediante las relaciones inversas:

$$\begin{aligned}\omega_n &= (x_1)^{1/4} \\ \xi_n &= \sqrt{\frac{x_2}{4\omega_n^2} + \frac{1}{2}} \\ P_n &= \sqrt{x_3}\end{aligned}\tag{4.16}$$

En donde ω_n , ξ_n y P_n son la frecuencia natural, amortiguamiento y factor de participación.

4.3. APLICACIÓN DEL MÉTODO

Considerando el ejemplo del capítulo 2, con la simulación obtenida en donde se crearon series temporales de aceleración verticales, para cada grado de libertad considerado. Se procede a la identificación de parámetros mediante una versión optimizada del método de Rinawi. Esta modificación permite obtener las frecuencias y amortiguamientos con una precisión superior a la formulación estándar (los detalles del ajuste y su implementación se presentan en el apéndice C).

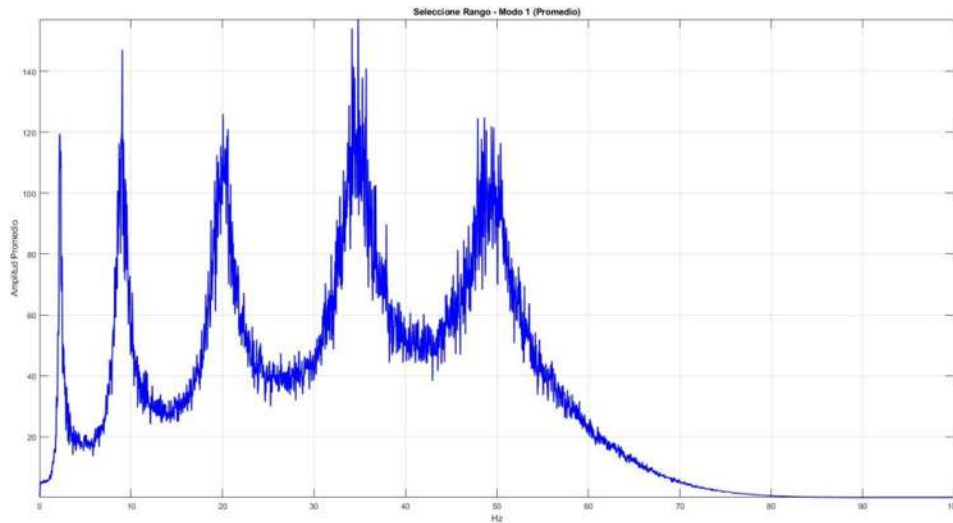


Figura 4.1 Espectro promedio de los 5 sensores.

En la figura 4.1 se observa el espectro promedio de los 5 sensores en el dominio de la frecuencia, en donde después de seleccionar un rango de frecuencias que englobe a cada pico se obtienen las frecuencias y amortiguamientos, a continuación, se presentan los resultados de frecuencias obtenidas en la tabla 4.1 y en la tabla 4.2 los resultados de amortiguamiento.

Tabla 4.1 Resultados de frecuencias obtenidas

Frecuencia teórica	Frecuencia encontrada	%Error
0.1671 Hz	0.1668 Hz	0.18%
1.0472 Hz	1.0477 Hz	0.05%
2.9323 Hz	2.9472 Hz	0.51%
5.7460 Hz	5.8403 Hz	1.64%
Mediana=		0.34%

Tabla 4.2 Resultados de amortiguamiento

Amortiguamiento teórico	Amortiguamiento encontrado	%Error
0.0500	0.0741	48.20%
0.0500	0.0506	1.20%
0.0500	0.0472	5.60%
0.0500	0.0375	25.00%
0.0500	0.0457	8.60%
Mediana=	0.0472	8.60%

4.4. CONCLUSIONES

Se observa en la tabla 4.1, que los errores porcentuales se mantienen, en su mayoría, por debajo del 0.6%, alcanzando una precisión casi exacta en el segundo modo con un error de apenas de 0.05%, además se obtuvo una mediana del error de 0.34%. el uso de la mediana como medida de tendencia central permite concluir que el método es altamente fiable y no se ve afectado por pequeñas desviaciones en los modos superiores.

La identificación del amortiguamiento suele ser el desafío más crítico en el análisis modal experimental. Sin embargo, los resultados de la tabla 4.2 validan la eficacia de las modificaciones realizadas en el algoritmo original, a pesar de la sensibilidad intrínseca de este parámetro, se logró una mediana del error de 8.60%; se eligió la mediana como parámetro estadístico porque es menos sensible a valores atípicos. Por ejemplo, el error del 48% podría “ensuciar” un promedio, pero la mediana muestra que, en general, el método aproxima muy bien la mayoría de los modos.

4.5 BIBLIOGRAFÍA

Rinawi, A. M., & Clough, R. W. (1992). Improved amplitude fitting for frequency and damping estimation. In Proceedings of the 10th International Modal Analysis Conference (pp. 893–898). Society for Experimental Mechanics.

CAPÍTULO 5

PUENTE CURVO EN VOLADIZO

5.1. INTRODUCCIÓN

La seguridad de los puentes carreteros en México es una prioridad debido a la intensa actividad sísmica y eólica del país. Las estructuras que poseen grandes claros suelen ser sumamente flexibles, lo que deriva en periodos de vibración largos que pueden entrar en resonancia con las frecuencias del viento. Bajo esta premisa, el presente capítulo aborda el análisis dinámico de un puente curvo en voladizo, seleccionado por representar un desafío técnico en términos de estabilidad. El estudio busca profundizar el comportamiento de estas estructuras ante sollicitaciones eólicas.

El objetivo central es realizar un estudio comparativo entre dos enfoques de simulación: la respuesta obtenida mediante un modelo tridimensional detallado con excitaciones en los tres ejes espaciales (Chávez, 2026), frente a una metodología basada en la síntesis de la historia en el tiempo a partir de las propiedades dinámicas del sistema (Rosales, 2018).

5.2. CONFIGURACIÓN GEOMÉTRICA DEL MODELO ANALÍTICO

La estructura bajo análisis, corresponde a un puente carretero de gran altura propuesto para salvar una barranca en una zona de orografía accidentada, con un claro principal de aproximadamente 324m, como se ilustra en la figura 5.1.

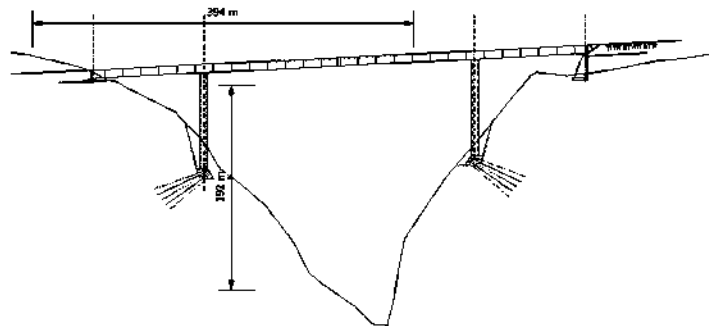


Figura 5.1 Vista lateral de puente de estudio

Geométricamente, el trazo del puente se desarrolla sobre una curva horizontal con una curvatura de $2^{\circ}45'$, presentando pendiente transversales y longitudinales de 10% y 5%, respectivamente.

La subestructura está compuesta por dos estribos convencionales de concreto reforzado y dos pilas centrales de sección transversal rectangular hueca, con una altura aproximada de 61 m cada una. La profundidad máxima desde la rasante de la superestructura hasta el fondo del cauce alcanza los 192m.

La superestructura consiste en una viga cajón de tres tramos con una longitud de 324m. el ancho de la calzada es de 13.64m, como se ve en la figura 5.2.

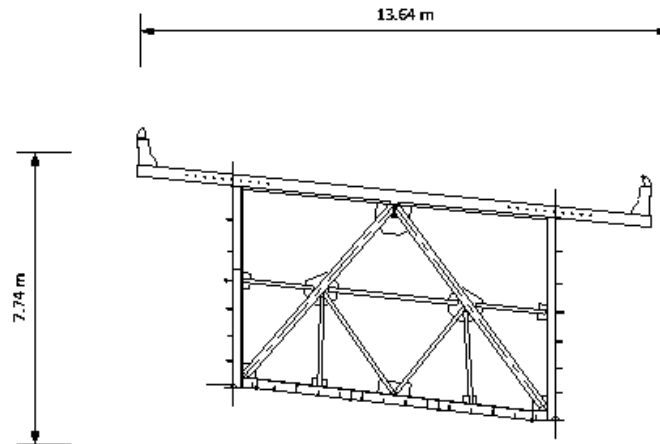


Figura 5.2 Sección transversal de la sección cajón

A diferencia de su estado operativo final, la estructura experimenta condiciones de mayor vulnerabilidad dinámica durante su construcción debido al método de voladizos sucesivos. El avance progresivo de dovelas desde las pilas genera estados de doble voladizo que, al no estar ligados al centro del claro, presentan una sensibilidad al viento significativamente superior.

El modelo tridimensional detallado fue simplificado mediante una representación de modelo de espina. En esta idealización la estructura se modela a través de elementos tipo barra que concentran las propiedades inerciales y mecánicas de la sección transversal en su eje neutro. El procedimiento técnico de reducción y la validación de este modelo simplificado frente al modelo de elementos finitos detallados puede consultarse de manera extensa en el apéndice B.

5.3. PROPIEDADES DE LA ESTRUCTURA

Para el análisis eólico de la estructura, se consideró solo la superestructura. Los coeficientes aerodinámicos se obtuvieron de Rosales (2016) los cuales se muestran en la tabla 5.2, las propiedades dinámicas se obtuvieron de García (2018) las cuales se muestran en la tabla 5.1.

Tabla 5.1 Propiedades dinámicas del puente curvo en voladizo

Dato	Símbolo	Valor
Masa modal (kg / m)	M	18936.72
Momento másico de inercia ($kg - m^2 / m$)	I	154172.74
Frecuencia angular horizontal (rad / s)	ω_u	6.10
Frecuencia angular vertical (rad / s)	ω_v	3.98
Frecuencia angular a torsión (rad / s)	ω_α	13.92
Longitud total (m)	L	159.80

Tabla 5.1 Propiedades dinámicas del puente curvo en voladizo(continuación)

Dato	Símbolo	Valor
Amortiguamiento crítico en ambas direcciones	c	0.05
Ancho del tablero (m)	B	13.64
Peralte del tablero (m)	D	7.74
Altura sobre el terreno (m)	h	192.00

Tabla 5.2 Coeficientes aerodinámicos

Dato	Símbolo	Valor
Angulo de ataque	α	0°
Coeficiente de arrastre	C_D	1.83
Coeficiente de levante	C_L	1.27
Coeficiente de momento	C_M	0.76
Derivada del coeficiente de arrastre	$\frac{\partial C_D}{\partial \alpha}$	-0.3
Derivada del coeficiente de levante	$\frac{\partial C_L}{\partial \alpha}$	0.5
Derivada del coeficiente de momento	$\frac{\partial C_M}{\partial \alpha}$	-0.05

5.4. RESPUESTA EÓLICA

5.4.1 Velocidad de diseño e intensidad de turbulencia

Basado en la tabla C.1 del apéndice del manual de Diseño de Obras Civiles (MDOC, 2008) se tiene que la velocidad regional es $V_R = 150 \text{ km/h}$ lo que equivale a $V_R = 41.67 \text{ m/s}$, la categoría de terreno, basado en la tabla 3.2, se tomó como 2. Los valores necesarios para la obtención de la velocidad de diseño son: $k_r = 0.19$, $z_0 = 0.05 \text{ m}$ y $z = 192 \text{ m}$ de acuerdo a la tabla 3.2.

Dado que la velocidad de diseño del manual de Diseño de Obras Civiles está promediada a 3s y las ecuaciones empleadas en el Eurocódigo son a 10 min se aplica la tabla 3.1 considerando que es un terreno casi abierto, se elige el factor (en tierra), por lo que la velocidad regional promediada a 10 min es

$$V_D = \frac{V_R}{1.66} = \frac{41.67}{1.66} = 25.10 \text{ m/s}$$

Con esta velocidad se puede obtener la velocidad de diseño para la altura del puente quedando

$$V_D = C_r V_R$$

$$C_r = 0.19 \ln \left(\frac{192}{0.05} \right) = 1.56$$

$$V_D = 1.56(25.10) = 39.16 \text{ m/s}$$

La intensidad turbulenta es:

$$I_u = \frac{1}{\ln \left(\frac{z}{z_0} \right)} = \frac{1}{\ln \left(\frac{192}{0.05} \right)} = 0.12$$

$$I_w = 0.5 I_u = 0.5(0.12) = 0.06$$

$$V_D = 1.56(25.10) = 39.16 \text{ m/s}$$

5.4.2 Ráfagas

A partir de la implementación de las rutinas computacionales desarrolladas por Rosales (2018) se obtuvo la respuesta dinámica en el dominio del tiempo presentada en la Figura 5.3. En esta se aprecia que los desplazamientos resultantes son de magnitud moderada, alcanzando valores máximos de 2 cm en la componente horizontal y 8 cm en la vertical. Los estadísticos descriptivos de estas señales, incluyendo desviaciones estándar, factores pico y desplazamientos máximos, se encuentran sistematizados en la Tabla 5.3.

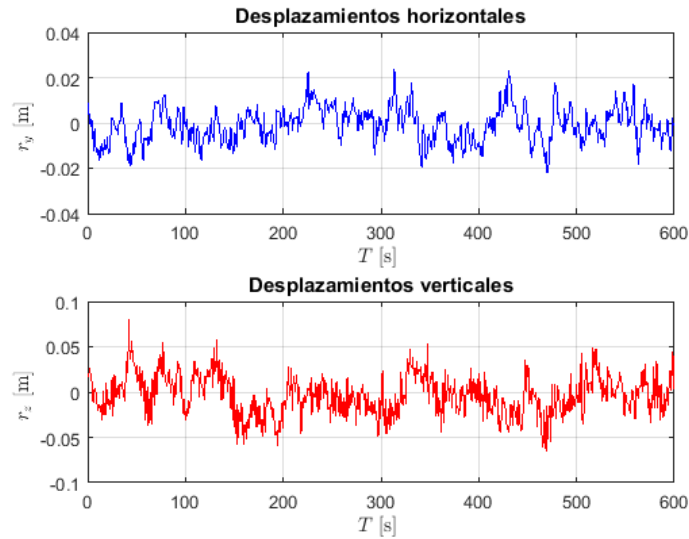


Figura 5.3 Desplazamientos del puente

Tabla 5.3 factores del puente ante efectos de ráfaga

Símbolo	Valor
σ_y	0.008 m
σ_z	0.0243 m
$\max_y$	0.0236 m
$\max_z$	0.0798 m
kp_y	2.9406
kp_z	3.5756

5.4.3 Vórtices

La respuesta estructural ante el desprendimiento de vórtices se determinó utilizando los datos de Helliesen (2013) y el número de Strouhal derivado del Eurocódigo (2002), los cuales se resumen en la Tabla 5.4. Para llevar a cabo las simulaciones numéricas de este fenómeno, se utilizó el programa computacional propuesto por Rosales (2018).

Tabla 5.4 Propiedades ante efectos de vórtices del puente

Dato	Símbolo	Valor
Valor asociado con la naturaleza autolimitante del desprendimiento de vórtices	a_z	0.4
Longitud de escala adimensional de la coherencia en dirección vertical	λ	2.0
Coefficiente adimensional de la raíz cuadrada media de la fuerza de levante	$\hat{\sigma}_{q_z}$	1.0
Parámetro de ancho de banda en la dirección vertical	b_z	0.15
Número de Strouhal	St	0.11
Coefficiente de velocidad dependiente al amortiguamiento	K_{a_z}	0.2

Debido a la naturaleza altamente resonante del desprendimiento de vórtices, el análisis se centró exclusivamente en la componente fluctuante, omitiendo la contribución del desplazamiento estático medio. Para la configuración en estudio, se identificó una velocidad crítica de resonancia de 44.43 m/s, valor que supera la velocidad media de diseño. Como se ilustra en la Figura 5.4, la respuesta en el dominio del tiempo revela amplitudes de desplazamiento que alcanzan 1.0 m; esta magnitud resulta excepcionalmente elevada para la tipología del puente, lo que sugiere una vulnerabilidad significativa ante este fenómeno.

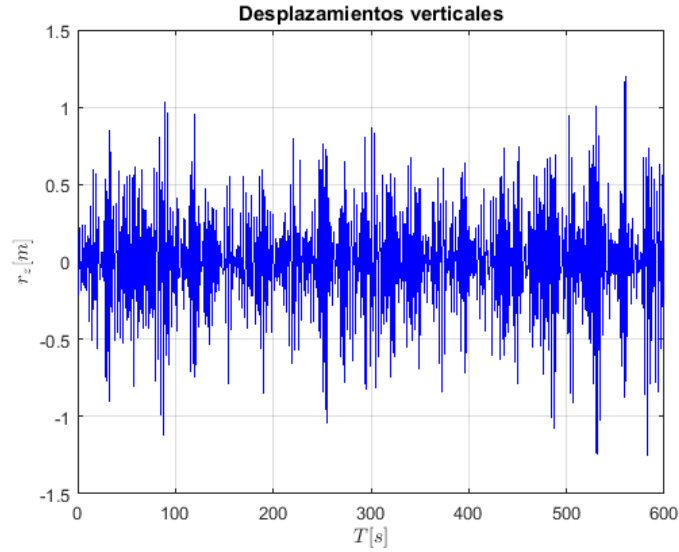


Figura 5.4 Respuesta del puente en el dominio del tiempo para una velocidad resonante de 44.43 m/s

5.5. AEROELASTICIDAD

5.5.1 Divergencia estática

Para la divergencia el momento masico de inercia es $\tilde{m}_\theta = 154172.74 \text{ kgm}^2 / \text{m}$ y su frecuencia $\omega_\theta = 13.92 \text{ rad} / \text{s}$

$$V_{cr} = B\omega_\theta \left(\frac{2\tilde{m}_\theta}{\rho B^4 C_M} \cdot 1 \right)^{1/2}$$

$$V_{cr} = (13.64)(13.92) \left(\frac{2(154172.74)}{1.25(13.64)^4 (0.76)} \cdot 1 \right)^{1/2} = 581.41 \text{ m/s}$$

La velocidad crítica supera las velocidades máximas registradas por huracanes de categoría 5 por lo que la divergencia estática no se presentará.

5.5.2 Galopeo

Para que se dé el galopeo se requiere que se cumpla la siguiente desigualdad

$$C_L' < -\bar{C}_D (D/B)$$

$$0.2 < (-0.3)(7.74/13.64)$$

$$0.2 < 0.17$$

Dado que la desigualdad es falsa no se presentará galopeo.

5.5.3 Aleteo

Con el fin de identificar el comportamiento por aleteo, se integraron las derivadas aerodinámicas del puente (ver Figura 5.5) basadas en el trabajo de Arias (2012). El cálculo de la velocidad crítica de la Figura 5.6 se realizó a través del algoritmo computacional de Rosales (2018), el cual facilita la identificación de los entornos de inestabilidad dinámica para esta tipología de puentes.

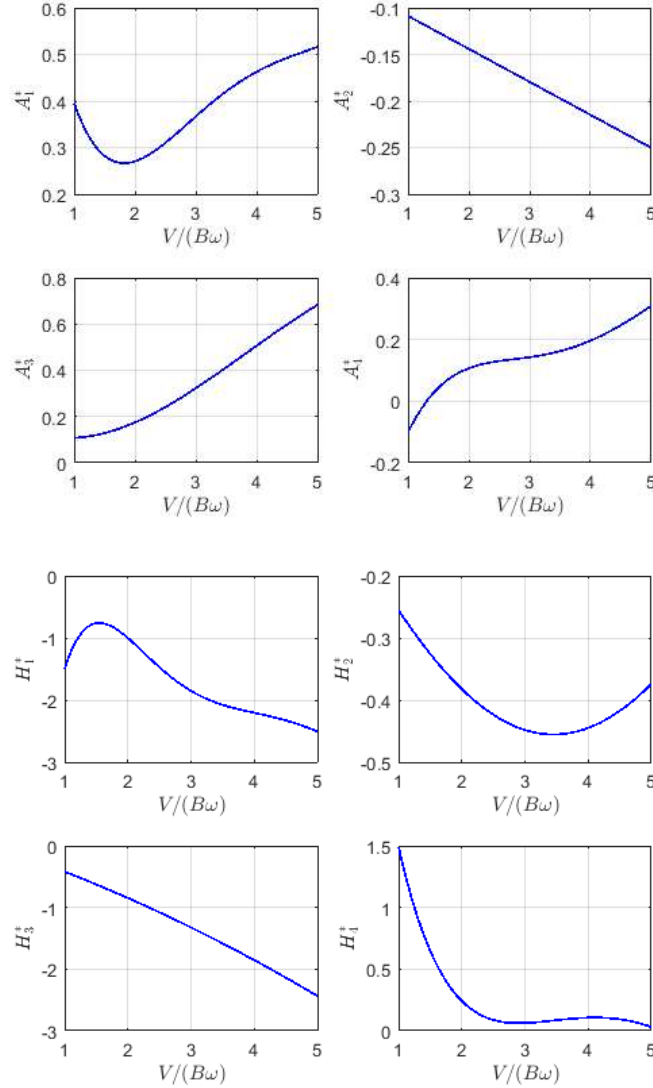


Figura 5.5 Derivadas aerodinámicas para el puente

En la figura 5.6 se tienen las gráficas de los valores reales e imaginarios, siendo el punto de intersección el valor de la velocidad crítica donde se genera la inestabilidad.

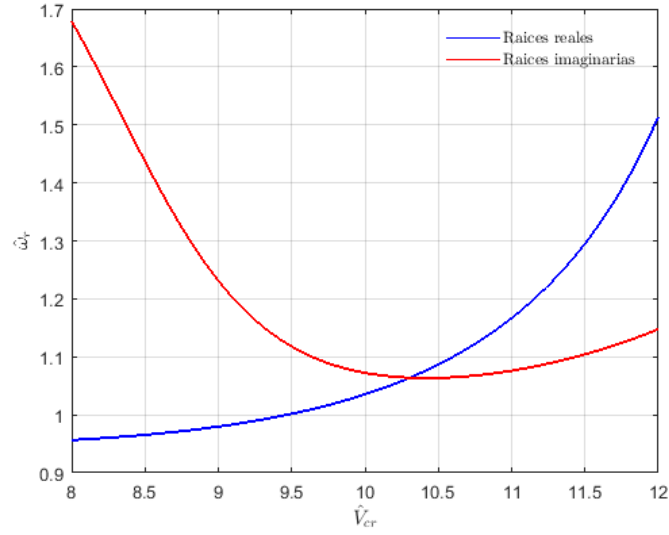


Figura 5.6 Raíces de la parte imaginaria y real de la determinante de la matriz de impedancia

El punto de intersección es $\hat{V}_{cr} = 10.30$ y $\hat{\omega}_r = 1.06$ por lo que

$$V_{cr} = (\hat{V}_{cr})(\hat{\omega}_r)(\omega_h)(B)$$

$$V_{cr} = 10.3(1.06)(6.10)(13.64) = 908.42 m/s$$

5.5.4 Respuesta en el dominio del tiempo ante aleteo

A partir de la implementación del programa computacional Rosales (2018), se sintetizaron las historias de ráfagas en las dos direcciones presentadas en la Figura 5.7. El proceso de simulación integra funciones de coherencia para modelar la relación espacial entre los distintos puntos de aplicación de carga, asegurando la continuidad del campo de velocidades en el dominio del tiempo.

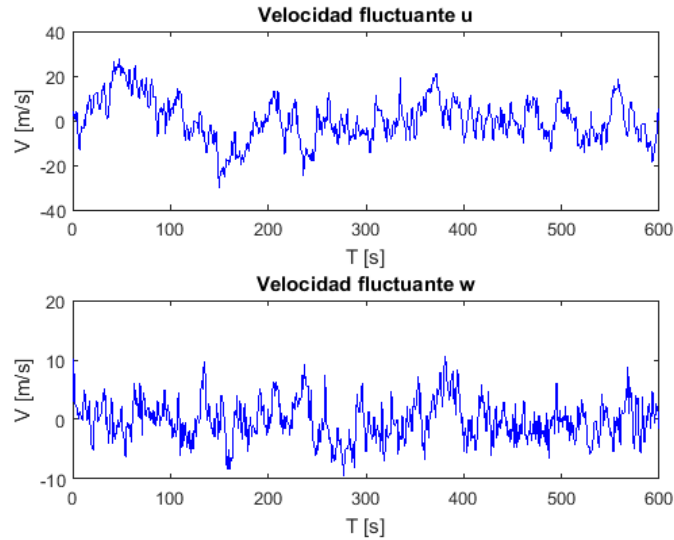


Figura 5.7 Simulación de velocidades para el puente

A través del programa computacional, se obtuvo la respuesta estructural ante aleteo, el desglose detallado de los desplazamientos máximos, junto con sus respectivos factores pico y desviaciones estándar, se encuentra disponible en la Tabla 5.5

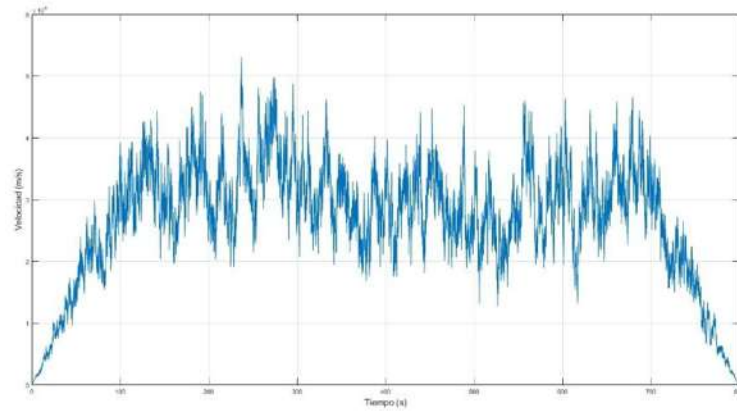
Tabla 5.5 Resultados de la respuesta ante el aleteo

Dato	Símbolo	Valor
Desviación estándar a torsión	σ_{α}	0.0016
Desviación estándar a flexión vertical	σ_h	0.09538
Rotación máxima	$\max_{\alpha}$	0.0068 rad
Desplazamiento máximo vertical	$\max_h$	0.3772 m
Factor pico a torsión	kp_{α}	4.3592
Factor pico a flexión vertical	kp_h	4.0224

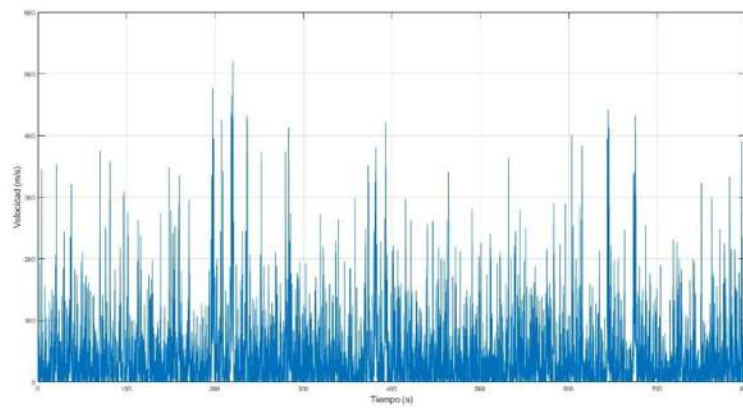
5.5.5 Respuesta en el dominio del tiempo tridimensional

Para el desarrollo de este análisis, se adoptó el marco metodológico de Chávez (2026) basado en el algoritmo WAWS para la síntesis de velocidades en los tres ejes ortogonales. Cabe destacar que esta tesis se centra en el uso y aplicación de dicha metodología para el estudio de un puente curvo construido por voladizos sucesivos, permitiendo caracterizar el comportamiento aeroelástico de esta tipología estructural frente a ráfagas de viento simuladas.

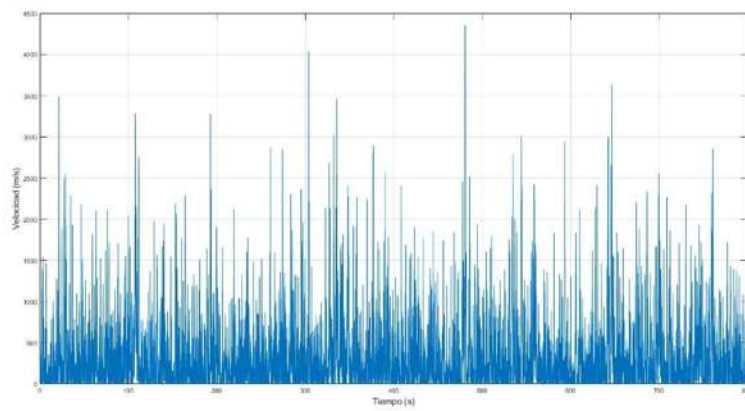
Se exponen a continuación las componentes de velocidad en los tres ejes ortogonales, obtenidas para una velocidad regional de referencia de 39.16 m/s. La figura 5.8 ilustra el comportamiento cinemático del flujo eólico que será empleado como excitación dinámica en el modelo estructural.



a). Componente lateral



b). Componente longitudinal



b). Componente vertical

Figura 5.8 Simulación de velocidades en las tres componentes

A continuación, se presenta en la Tabla 5.6 los desplazamientos verticales obtenidos para distintas velocidades de aleteo. Los valores expuestos permiten comparar la metodología de análisis por propiedades dinámicas frente al esquema de simulación global WAWS propuesto por Chávez (2026). Esta relación de datos evidencia las diferencias en la estimación de la respuesta cuando se integra una caracterización tridimensional del viento en un puente curvo en voladizo.

Tabla 5.6 Resultados de la respuesta

Velocidad	Con propiedades dinámicas		Tridimensional		
	Desplazamiento vertical fluctuante	Desplazamiento vertical total	Desplazamiento vertical	Desplazamiento lateral	Desplazamiento longitudinal
39.16	0.3772 m	0.4930 m	0.0329 m	0.0634 m	0.0098 m
60	1.1809 m	1.4488 m	0.0348 m	0.0933 m	0.0144 m
80	1.8069 m	2.2777 m	0.0674 m	0.2092 m	0.0321 m
100	2.6996 m	3.4287 m	0.0909 m	0.3304 m	0.0507 m

5.6. CONCLUSIONES

Se observo que el modelo tridimensional arroja desplazamientos verticales significativamente menores en comparación con el modelo de propiedades dinámicas. Esta diferencia no sugiere una deficiencia en el modelo 3D, si no que evidencia el método simplificado es más conservador. Al ignorar la falta de correlación espacial del viento (coherencia) y el acoplamiento entre modos de vibración, el modelo de propiedades dinámicas tiende a sobreestimar la respuesta, mientras que el modelo tridimensional (modelo de espina) captura de forma más realista como la estructura disipa energía a través de su geometría compleja.

Además, una de las aportaciones del modelo tridimensional es la capacidad de monitorear desplazamientos laterales y longitudinales, datos que en el otro modelo no aparecen. En un puente curvo, esta es una ventaja, ya que la curvatura induce efectos de torsión y desplazamientos fuera del plano que afectan directamente la estabilidad de las pilas y los apoyos, por lo que esta metodología abarca de cierta manera la estabilidad cinemática del puente.

El uso de la metodología propuesta por Chávez (2026) para generar el campo de velocidades demuestra que, al considerar la tridimensionalidad del viento, la estructura presenta un comportamiento más rígido y estable de lo que sugieren los métodos tradicionales. Esto indica que la curvatura del puente actúa como un factor que modera la respuesta resonante ante el fenómeno del aleteo, permitiendo una interpretación más ajustada a la realidad física del sitio.

5.7 BIBLIOGRAFÍA

Arias Rojas, H. (Agosto de 2012). Respuesta eólica de un puente en curva . Universidad Michacana de San Nicolás de Hidalgo.

Eurocode (Junio de 2002). Eurocode 1: Actions on structures – Part 1-4: General actions Windactions

García Ruiz, Rey Franciso (2018). Tesis: Propuestas reglamentarias para el diseño eólico de Puente . México, Universidad Nacional Autónoma de México (en proceso de publicación)

Rosales García, I. (Junio de 2016). Coeficientes Aerodinámicos de Tableros de Puentes. Universidad Nacional Autónoma de México.

Rosales García, I. (2018). Comportamiento de puentes carreteros ante cargas eólicas [Tesis de maestría, Universidad Nacional Autónoma de México]. Repositorio Institucional UNAM / TESIUNAM.

Chávez Espinola, S. (2026). Comportamiento eólico de puentes lanzados en dovelas sucesivas [Tesis de maestría, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo].

CAPÍTULO 6

CONCLUSIONES

El desarrollo sistemático de esta investigación ha permitido consolidar un marco analítico y computacional robusto para la caracterización dinámica de puentes de gran claro. De la implementación algorítmica, la optimización de procesamiento de señales y el análisis estructural del caso de estudio, se extraen las siguientes conclusiones fundamentales:

Se demostró que la implementación de algoritmos propios para la identificación modal estocástica, tanto en el dominio de la frecuencia (Peak-Picking y Rinawi) como en el dominio del tiempo (SSI-COV), posee una precisión equiparable al software comercial de estándar industrial (ARTEMIS Modal). La validación cruzada documentada en el Apéndice A confirmó errores relativos casi nulos en la estimación de frecuencias naturales. La formulación en el espacio de estados y la descomposición en valores singulares (SVD) probaron ser altamente eficientes para aislar la respuesta física del sistema estructural, filtrando adecuadamente el ruido ambiental y los modos matemáticos espurios.

La caracterización del amortiguamiento representó el desafío numérico más crítico debido a su alta sensibilidad estadística. Sin embargo, como se demostró en el Capítulo 4 y el Apéndice C, la introducción de una metodología de procesamiento adaptativo transformó radicalmente la fiabilidad de los resultados. La combinación estratégica de ventanas de Hanning y rectangulares, el uso de filtros de Savitzky-Golay para el control de sesgo de suavizado y la implementación de secciones de segundo orden (SOS), permitieron reducir la mediana del error en la estimación del amortiguamiento de niveles inaceptables (superiores al 40% o incluso 300% en métodos crudos) a márgenes manejables de entre el 7% y el 18%. Esto valida la eficacia del método de Rinawi modificado para estructuras con amortiguamiento muy bajo ($\xi \approx 0.50\%$).

Para abordar la complejidad tridimensional del puente curvo sin incurrir en costos computacionales prohibitivos durante el análisis de historias de tiempo, la construcción y calibración de un modelo simplificado tipo "espina" (Apéndice B) resultó ser una estrategia eficiente. Se comprobó que, al asignar correctamente las propiedades geométricas y la distribución de masas, el modelo reducido es capaz de reproducir con alta fidelidad los periodos de vibración, las formas modales y los factores de participación de masa direccional del modelo 3D detallado, habilitando simulaciones complejas de viento en tiempos de procesamiento viables.

La aplicación de los modelos dinámicos al puente carretero curvo en voladizo (Capítulo 5) arrojó un hallazgo de vital importancia para el diseño estructural aeroelástico. Al contrastar metodologías tradicionales frente a simulaciones de campo de velocidades tridimensionales, se descubrió que la curvatura horizontal del puente no es un elemento de debilidad geométrica, sino que actúa como un factor mitigador ante la respuesta resonante. La interacción de los tres ejes espaciales frente al fenómeno del aleteo demostró que la estructura posee un comportamiento cinemático intrínsecamente más rígido y estable de lo que sugieren los enfoques normativos unidimensionales.

APÉNDICE A

VALIDACIÓN DE LOS
ALGORITMOS
DESARROLLADOS
MEDIANTE LA
REPLICACIÓN DE
PRUEBAS DE
VIBRACIÓN
AMBIENTAL

A.1. INTRODUCCIÓN

La confiabilidad de los resultados obtenidos en la presente investigación depende directamente de la precisión de las herramientas computacionales desarrolladas. Por lo que este apéndice tiene como objetivo, presentar la validación cruzada de los algoritmos de identificación modal implementados en MATLAB, contrastando su desempeño frente a casos de estudio de vibración ambiental documentados en la literatura técnica y validándolos contra el software comercial de estándar industrial, ARTeMIS Modal.

La metodología de validación consistió en tomar las pruebas simuladas en historias de tiempo (señales en aceleración y desplazamiento) de dos artículos. Estas señales fueron procesadas mediante scripts propios utilizando tres técnicas, el método de identificación de picos (peak picking) en el dominio de la frecuencia (con el método de ajuste analítico optimizado), el método de Rinawi adaptativo y el método de identificación por subespacio estocástico en el dominio del tiempo, para extraer las propiedades dinámicas del sistema.

Se compararon tres parámetros:

1. Frecuencias naturales: se calculó el error relativo porcentual entre el valor identificado por el algoritmo propio y el valor teórico esperado. Asimismo, se determinó el error relativo correspondiente a la metodología del artículo original, lo que permite contrastar la precisión del algoritmo desarrollado frente al reportado en la literatura.
2. Amortiguamiento: Se realizó una comparación directa entre los valores de amortiguamiento estimados por los algoritmos desarrollados y los valores de referencia reportados en los casos de estudio.
3. Formas modales: Se realizó una comparación gráfica de los vectores modales obtenidos frente a los reportados en la literatura. Para esto, los modos fueron normalizados a la unidad para verificar visualmente la deformada modal.

A continuación, se detallan los casos de estudio seleccionados y la discusión de los resultados obtenidos.

A.2. CASOS DE ESTUDIO

A.2.1 Caso de estudio: Viga en voladizo de acero.

Para la validación de los programas, se seleccionó el caso de estudio documentado por Ong, (2016) correspondiente a una viga de acero de 100 metros de longitud con condiciones de frontera empotrada de un lado y libre del otro. Este modelo es representativo de estructuras civiles esbeltas, como chimeneas o edificios altos, donde los efectos de flexión son predominantes.

La metodología de identificación utilizada por el autor de referencia es la descomposición en el dominio de la frecuencia automatizada (AFDD). Esta técnica es una evolución del método clásico FDD que incorpora algoritmos de detección automática de picos para optimizar el procesamiento de datos de vibración ambiental y reducir la intervención manual del usuario (Ong, 2016).

La respuesta dinámica del sistema fue generada mediante una simulación numérica utilizando el método de diferencias finitas centrales. La excitación aplicada al modelo corresponde a una señal de aceleración de ruido blanco (White Noise Excitation), diseñada para excitar los tres primeros modos de vibración bajo condiciones estocásticas.

Los parámetros objetivo contra los cuales se compararon los resultados de los programas desarrollados son los siguientes:

Frecuencias naturales: fueron calculadas analíticamente para las vibraciones transversales de una viga continua Euler-Bernoulli.

Amortiguamiento modal: Se estableció un valor constante de $\xi = 0.005(0.50\%)$ para todos los modos. Ong (2016) destaca que la estimación precisa de este valor mediante análisis de vibración ambiental constituye el mayor desafío del caso de estudio, debido a la alta sensibilidad de los métodos de salida única frente al ruido de medición inherente de las señales.

A.2.2 Caso de estudio: Modelo simplificado del puente colgante Lysefjord.

Se utilizó un conjunto de datos simulados correspondientes a un modelo simplificado del puente Lysefjord, ubicado en Noruega. Esta estructura cuenta con una longitud de 639 metros y un claro principal de 446 metros, dimensiones que la hacen particularmente susceptible a la excitación por viento y efectos de tráfico (Cheynet, 2020).

La generación de las señales de respuesta se fundamenta en estudios previos sobre la respuesta de "buffeting" y los efectos del terreno complejo en la aerodinámica de puentes colgantes (Cheynet *et al.*, 2016; Cheynet, Snæbjörnsson y Jakobsen, 2017).

Los valores de referencia para la validación se obtuvieron mediante el método de Identificación Estocástica de Subespacios basada en datos (SSI-DAT). El algoritmo utilizado para generar los resultados comparativos corresponde a una implementación automatizada inspirada en metodologías de monitoreo continuo para puentes de gran claro (Magalhães *et al.*, 2009).

El tipo de señal son registros simulados de desplazamiento en cinco posiciones distribuidas a lo largo del puente (Cheynet, 2020).

Se estableció un valor de amortiguamiento constante de $\xi = 0.005(0.50\%)$ para todos los modos.

A.3. RESULTADOS

En esta sección se presentan los resultados numéricos y gráficos obtenidos tras el procesamiento de las señales simuladas descritas en el apartado A.2. Se comparan los parámetros modales identificados por los programas propios frente a los valores esperados y los valores obtenidos por la metodología de cada autor.

A.3.1 Resultados del caso de estudio 1: Viga en voladizo

A continuación, se presenta la comparativa de frecuencias naturales y amortiguamiento para la viga de acero simulada, contrastando los resultados con la metodología AFDD (Ong, 2016).

Tabla A.1 Comparación de frecuencias por el método de Peak picking (PP)

Frecuencia			% Error	
Teórica	PP	Articulo	PP	Articulo
0.1671 Hz	0.1660 Hz	0.1683 Hz	0.66%	0.72%
1.0472 Hz	1.0480 Hz	1.0483 Hz	0.08%	0.11%
2.9323 Hz	2.9380 Hz	2.9356 Hz	0.19%	0.11%
5.7460 Hz	5.8430 Hz	5.8362 Hz	1.69%	1.57%
Mediana=			0.43%	0.42%

Tabla A.2 Comparación de amortiguamiento por el método de Peak picking (PP)

Amortiguamiento				% Error		
Teórico	Ancho de banda	Ajuste analítico optimizado	Articulo	Ancho de banda	Ajuste analítico optimizado	Articulo
0.0050	0.0055	0.0054	0.0093	10.00%	8.00%	86.00%
0.0050	0.0068	0.0040	0.0039	36.00%	20.00%	22.00%
0.0050	0.0032	0.0047	0.0053	36.00%	6.00%	6.00%
0.0050	0.0023	0.0051	0.0054	54.00%	2.00%	8.00%
Mediana=	0.0044	0.0049	0.0054	36.00%	7.00%	15.00%

Tabla A.3 Comparación de frecuencias por el método de Rinawi híbrido

Frecuencia			% Error	
Teórica	Rinawi híbrido	Articulo	Rinawi híbrido	Articulo
0.1671 Hz	0.1673 Hz	0.1683 Hz	0.12%	0.72%
1.0472 Hz	1.0488 Hz	1.0483 Hz	0.15%	0.11%
2.9323 Hz	2.9434 Hz	2.9356 Hz	0.38%	0.11%
5.7460 Hz	5.8346 Hz	5.8362 Hz	1.54%	1.57%
Mediana=			0.27%	0.42%

Tabla A.4 Comparación de amortiguamiento por el método de Rinawi híbrido

Amortiguamiento			% Error	
Teórico	Rinawi híbrido	Artículo	Rinawi híbrido	Artículo
0.0050	0.0080	0.0093	60.00%	86.00%
0.0050	0.0060	0.0039	20.00%	22.00%
0.0050	0.0048	0.0053	4.00%	6.00%
0.0050	0.0048	0.0054	4.00%	8.00%
Mediana=	0.0054	0.0054	12.00%	15.00%

Tabla A.5 Comparación de frecuencias por el método de subespacio estocástico (SSI-COV)

Frecuencia			% Error	
Teórica	SSI-COV	Artículo	SSI-COV	Artículo
0.1671 Hz	0.1671 Hz	0.1683 Hz	0.02%	0.72%
1.0472 Hz	1.0622 Hz	1.0483 Hz	1.43%	0.11%
2.9323 Hz	2.9640 Hz	2.9356 Hz	1.08%	0.11%
5.7460 Hz	5.8458 Hz	5.8362 Hz	1.74%	1.57%
Mediana=			1.26%	0.42%

Tabla A.6 Comparación de amortiguamiento por el método de subespacio estocástico (SSI-COV)

Amortiguamiento			% Error	
Teórico	SSI-COV	Artículo	SSI-COV	Artículo
0.0050	0.0058	0.0093	16.48%	86.00%
0.0050	0.0035	0.0039	30.46%	22.00%
0.0050	0.0027	0.0053	45.41%	6.00%
0.0050	0.0048	0.0054	4.03%	8.00%
Mediana=	0.0041	0.0054	23.47%	15.00%

A continuación, se presentan los modos de vibrar encontrados por el método de Peak Picking y el método de subespacio estocástico caso 1.

Tabla A.7 Comparación de formas modales por el método de Peak Picking, caso 1

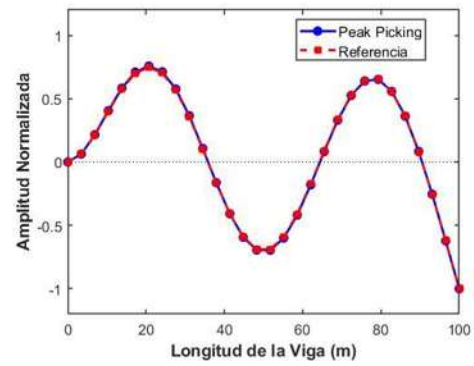
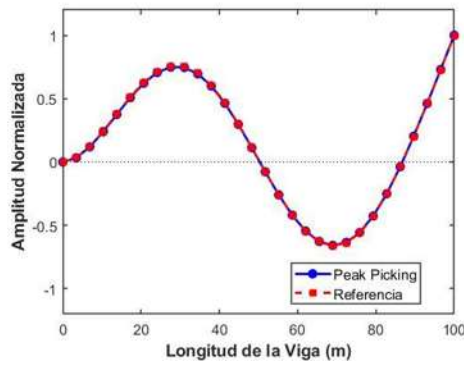
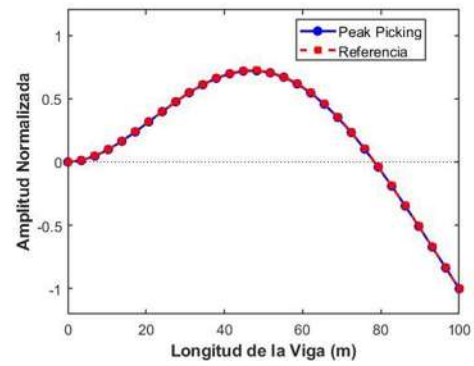
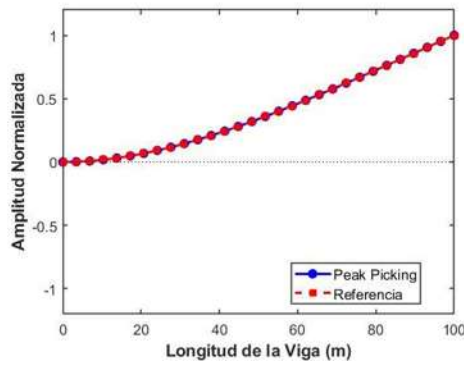


Tabla A.8 Comparación de formas modales por el método de subespacio estocástico caso 1

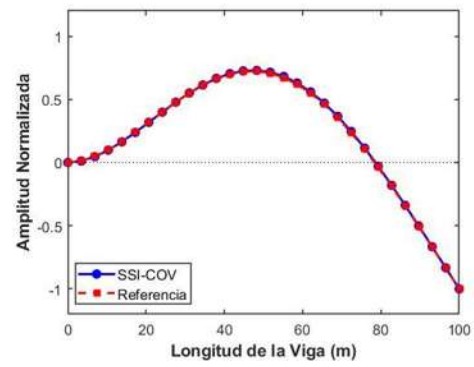
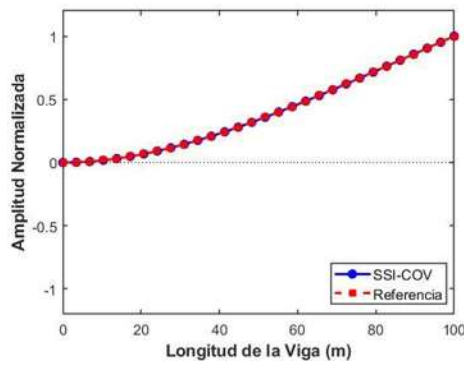
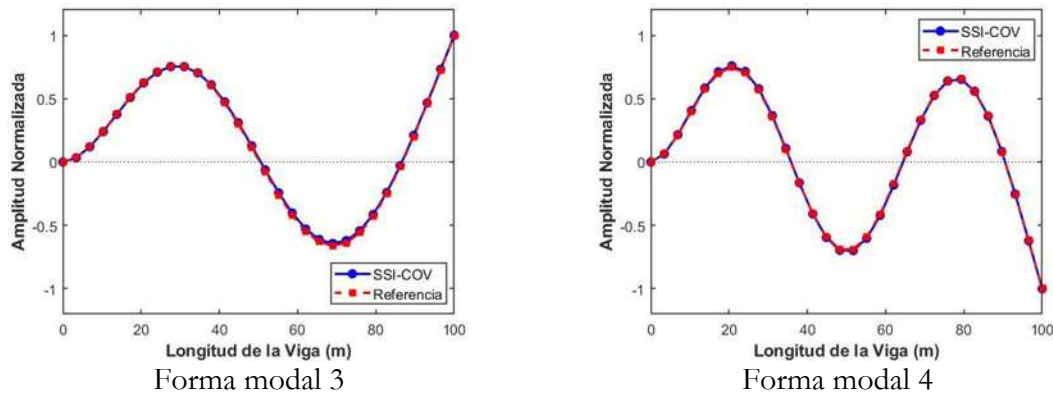


Tabla A.8 Comparación de formas modales por el método de subespacio estocástico caso 1 (continuación)



A.3.2 Resultados del caso de estudio 2: Puente Lysefjord

En este apartado se presentan los resultados de la identificación estocástica para el modelo simplificado del puente colgante, comparados con la referencia basada en el método SSI-DAT (Cheynet, 2020).

Tabla A.9 Comparación de frecuencias por el método de Peak Picking (PP)

Frecuencia			% Error	
Teórica	PP	Articulo	PP	Articulo
0.2050 Hz	0.2050 Hz	0.2050 Hz	0.00%	0.00%
0.3190 Hz	0.3190 Hz	0.3190 Hz	0.00%	0.00%
0.4390 Hz	0.4400 Hz	0.4380 Hz	0.23%	0.23%
0.5850 Hz	0.5820 Hz	0.5820 Hz	0.51%	0.51%
0.8640 Hz	0.8530 Hz	0.8550 Hz	1.27%	1.04%
Mediana=			0.23%	0.23%

Tabla A.10 Comparación de amortiguamiento por el método de Peak picking (PP)

Amortiguamiento				%Error		
Teórico	Ancho de banda	Ajuste analítico optimizado	Articulo	Ancho de banda	Ajuste analítico optimizado	Articulo
0.0050	0.0012	0.0012	0.0049	76.00%	76.00%	2.00%
0.0050	0.0008	0.0048	0.0059	84.00%	4.00%	18.00%
0.0050	0.0006	0.0006	0.0062	88.00%	87.40%	24.00%
0.0050	0.0029	0.0038	0.0055	42.00%	24.00%	10.00%
0.0050	0.0025	0.0044	0.0057	50.00%	12.00%	14.00%
Mediana=	0.0012	0.0038	0.0057	76.00%	24.00%	14.00%

Tabla A.11 Comparación de frecuencias por el método de Rinawi híbrido

Frecuencia			%Error	
Teórica	Rinawi híbrido	Artículo	Rinawi híbrido	Artículo
0.2050 Hz	0.2054 Hz	0.2050 Hz	0.20%	0.00%
0.3190 Hz	0.3182 Hz	0.3190 Hz	0.25%	0.00%
0.4390 Hz	0.4378 Hz	0.4380 Hz	0.27%	0.23%
0.5850 Hz	0.5825 Hz	0.5820 Hz	0.43%	0.51%
0.8640 Hz	0.8547 Hz	0.8550 Hz	1.08%	1.04%
Mediana=			0.27%	0.23%

Tabla A.12 Comparación de amortiguamiento por el método de Rinawi híbrido

Amortiguamiento			%Error	
Teórico	Rinawi híbrido	Artículo	Rinawi híbrido	Artículo
0.0050	0.0058	0.0049	16.00%	2.00%
0.0050	0.0032	0.0059	36.00%	18.00%
0.0050	0.0026	0.0062	48.00%	24.00%
0.0050	0.0059	0.0055	18.00%	10.00%
0.0050	0.0050	0.0057	0.00%	14.00%
Mediana=	0.0050	0.0057	18.00%	14.00%

Tabla A.13 Comparación de frecuencias por el método de subespacio estocástico (SSI-COV)

Frecuencia			%Error	
Teórica	SSI-COV	Artículo	SSI-COV	Artículo
0.2050 Hz	0.2048 Hz	0.2050 Hz	0.10%	0.00%
0.3190 Hz	0.3187 Hz	0.3190 Hz	0.09%	0.00%
0.4390 Hz	0.4379 Hz	0.4380 Hz	0.25%	0.23%
0.5850 Hz	0.5821 Hz	0.5820 Hz	0.50%	0.51%
0.8640 Hz	0.8551 Hz	0.8550 Hz	1.03%	1.04%
Mediana=			0.25%	0.23%

Tabla A.14 Comparación de amortiguamiento por el método de subespacio estocástico (SSI-COV)

Amortiguamiento			% Error	
Teórico	SSI-COV	Articulo	SSI-COV	Articulo
0.0050	0.0049	0.0049	2.00%	2.00%
0.0050	0.0058	0.0059	16.00%	18.00%
0.0050	0.0060	0.0062	20.00%	24.00%
0.0050	0.0055	0.0055	10.00%	10.00%
0.0050	0.0058	0.0057	16.00%	14.00%
Mediana=	0.0058	0.0057	16.00%	14.00%

A continuación, se presentan los modos de vibrar encontrados por el método de Peak Picking y el método de subespacio estocástico, caso 2.

Tabla A.15 Comparación de formas modales por el método de Peak Picking, caso 2

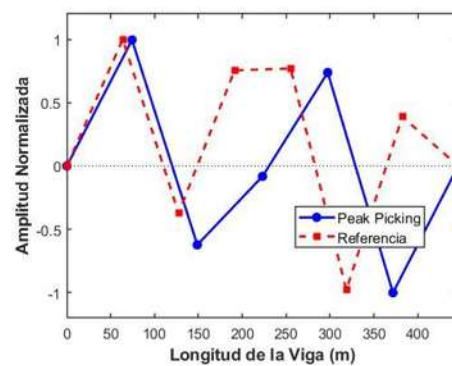
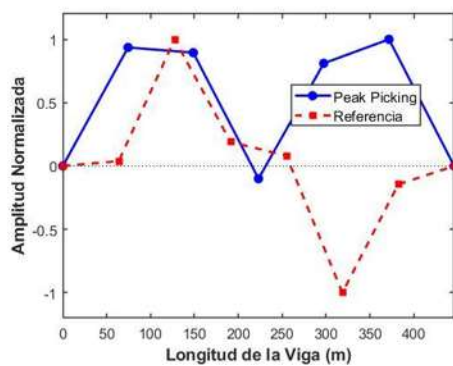
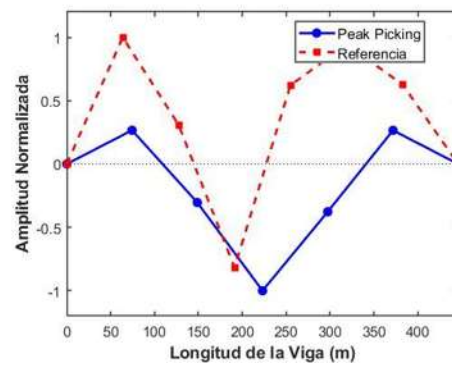
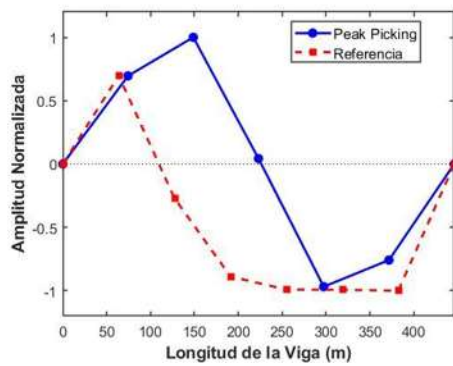


Tabla A.15 Comparación de formas modales por el método de peak picking caso 2(continuación)

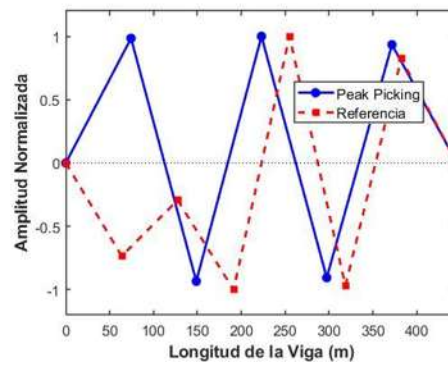


Tabla A.16 Comparación de formas modales por el método de subespacio estocástico caso 2

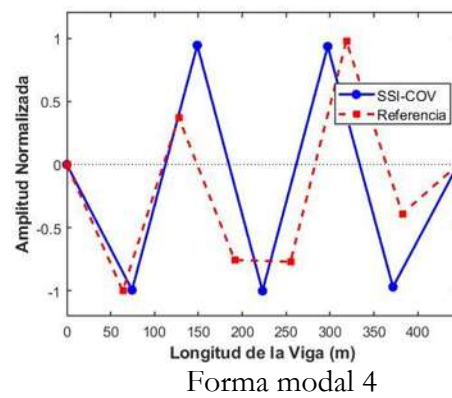
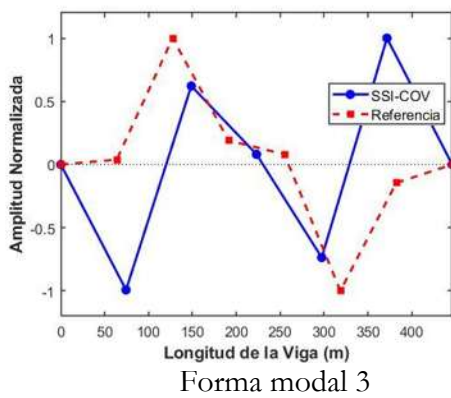
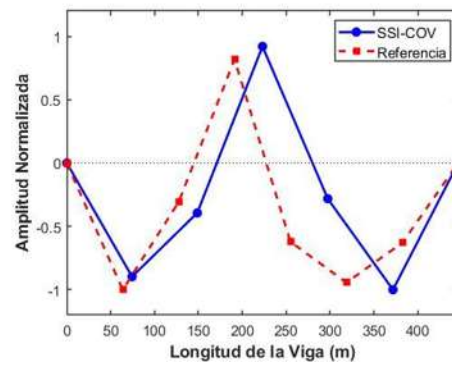
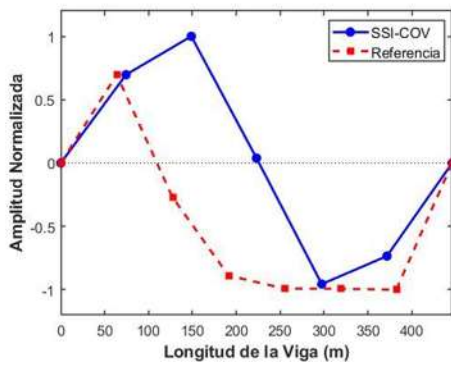
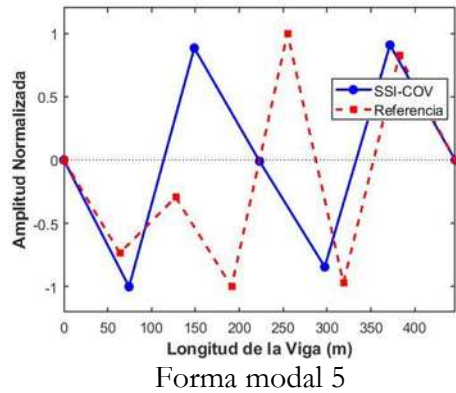


Tabla A.16 Comparación de formas modales por el método de subespacio estocástico caso 2 (continuación)



A.4. COMPARATIVA ENTRE ALGORITMOS PROPUESTOS Y SOFTWARE COMERCIAL ARTeMIS

En este apartado se presenta la comparativa entre los algoritmos desarrollados y los resultados obtenidos mediante el software especializado comercial ARTeMIS Modal.

Tabla A.17 Comparación de frecuencias para ejemplo 1

Frecuencia						% Error				
Teórica	SSI-COV	Rinawi hibrido	PP	Articulo	ARTEMIS OMA	PP	Rinawi hibrido	SSI-COV	Articulo	ARTEMIS OMA
0.1671 Hz	0.1671 Hz	0.1673 Hz	0.1660 Hz	0.1683 Hz	0.1670 Hz	0.66%	0.12%	0.02%	0.72%	0.06%
1.0472 Hz	1.0622 Hz	1.0488 Hz	1.0480 Hz	1.0483 Hz	1.0480 Hz	0.08%	0.15%	1.43%	0.11%	0.08%
2.9323 Hz	2.9640 Hz	2.9434 Hz	2.9380 Hz	2.9356 Hz	2.9440 Hz	0.19%	0.38%	1.08%	0.11%	0.40%
5.7460 Hz	5.8458 Hz	5.8346 Hz	5.8430 Hz	5.8362 Hz	5.8430 Hz	1.69%	1.54%	1.74%	1.57%	1.69%
Mediana=						0.43%	0.27%	1.26%	0.42%	0.24%

Tabla A.18 Comparación de amortiguamiento para ejemplo 1

Amortiguamiento							%Error					
Teórico	SSI-COV	Rinawi hibrido	Ancho de banda	Ajuste analítico optimizado	Articulo	ARTEMIS OMA	Ancho de banda	Ajuste analítico optimizado	Rinawi hibrido	SSI- COV	Articulo	ARTEMIS OMA
0.0050	0.0058	0.008	0.0055	0.0054	0.0093	0.0131	10.00%	8.00%	60.00%	16.48%	86.00%	162.60%
0.0050	0.0035	0.006	0.0068	0.0040	0.0039	0.0047	36.00%	20.00%	20.00%	30.46%	22.00%	6.80%
0.0050	0.0027	0.0048	0.0032	0.0047	0.0053	0.0042	36.00%	6.00%	4.00%	45.41%	6.00%	15.40%
0.0050	0.0048	0.0048	0.0023	0.0051	0.0054	0.0046	54.00%	2.00%	4.00%	4.03%	8.00%	8.60%
Mediana=	0.0041	0.0054	0.0044	0.0049	0.0054	0.0046	36.00%	7.00%	12.00%	23.47%	15.00%	12.00%

Tabla A.19 Comparación de frecuencias para ejemplo 2

Frecuencia						% Error				
Teórica	SSI-COV	Rinawi hibrido	PP	Articulo	ARTEMIS OMA	PP	Rinawi hibrido	SSI-COV	Articulo	ARTEMIS OMA
0.2050 Hz	0.2048 Hz	0.2054 Hz	0.2050 Hz	0.2050 Hz	0.2050 Hz	0.00%	0.20%	0.10%	0.00%	0.00%
0.3190 Hz	0.3187 Hz	0.3182 Hz	0.3190 Hz	0.3190 Hz	0.3190 Hz	0.00%	0.25%	0.09%	0.00%	0.00%
0.4390 Hz	0.4379 Hz	0.4378 Hz	0.4400 Hz	0.4380 Hz	0.4380 Hz	0.23%	0.27%	0.25%	0.23%	0.23%
0.5850 Hz	0.5821 Hz	0.5825 Hz	0.5820 Hz	0.5820 Hz	0.5820 Hz	0.51%	0.43%	0.50%	0.51%	0.51%
0.8640 Hz	0.8551 Hz	0.8547 Hz	0.8530 Hz	0.8550 Hz	0.8550 Hz	1.27%	1.08%	1.03%	1.04%	1.04%
Mediana=						0.23%	0.27%	0.25%	0.23%	0.23%

Tabla A.20 Comparación de amortiguamiento para ejemplo 2

Amortiguamiento							%Error					
Teórico	SSI-COV	Rinawi hibrido	Ancho de banda	Ajuste analítico optimizado	Articulo	ARTEMIS OMA	Ancho de banda	Ajuste analítico optimizado	Rinawi hibrido	SSI-COV	Articulo	ARTEMIS OMA
0.0050	0.0049	0.0058	0.0012	0.0012	0.0049	0.0055	76.00%	76.00%	16.00%	2.00%	2.00%	9.40%
0.0050	0.0058	0.0032	0.0008	0.0048	0.0059	0.0058	84.00%	4.00%	36.00%	16.00%	18.00%	16.80%
0.0050	0.0060	0.0026	0.0006	0.0006	0.0062	0.0071	88.00%	87.40%	48.00%	20.00%	24.00%	42.60%
0.0050	0.0055	0.0059	0.0029	0.0038	0.0055	0.0053	42.00%	24.00%	18.00%	10.00%	10.00%	6.40%
0.0050	0.0058	0.0050	0.0025	0.0044	0.0057	0.0053	50.00%	12.00%	0.00%	16.00%	14.00%	6.60%
Mediana=	0.0058	0.0050	0.0012	0.0038	0.0057	0.0055	76.00%	24.00%	18.00%	16.00%	14.00%	9.40%

A.5. CONCLUSIONES

En la comparativa entre los algoritmos desarrollados y el software especializado comercial ARTeMIS Modal se puede observar que, en la identificación de frecuencias, la mayoría de los métodos analizados presentan una convergencia con errores medianos al 0.50%; el método Rinawi híbrido mantuvo una mediana de error de 0.27%, alineándose casi perfectamente con los resultados de ARTeMIS (0.23%-0.24%).

Para el cálculo del amortiguamiento, al ser el parámetro más sensible al ruido y al procesamiento, se ve aun así un desempeño en este caso para el ejemplo 1 para el método del ajuste analítico optimizado que logra una mediana de error del 7%, superando la precisión de ARTeMIS (12%) y de los valores reportados originalmente en la literatura (15%); en el método de Rinawi híbrido gracias al uso de secciones de segundo orden (SOS) y el ventaneo adaptativo, este método alcanza una precisión idéntica a la de ARTeMIS en el primer ejemplo (12%) y se mantuvo competitivo en el segundo caso (18%), superando significativamente al método de ancho de banda tradicional.

Se puede observar que al identificar amortiguamientos cercanos al 0.50% y con frecuencias menores a 0.50Hz en los modos fundamentales, se confirma que el uso de ventanas rectangulares y datos crudos evita el ensanchamiento artificial del pico, un error que en métodos no optimizados (como el ancho de banda) escala hasta un 76%.

La evaluación de la mediana del amortiguamiento confirma que los algoritmos desarrollados presentan una concordancia técnica superior frente al software ARTeMIS, en este caso al medir la cercana con el valor teórico conocido de 0.50%, ya que para el ejemplo 1 el ajuste analítico optimizado logra una mediana de 0.49%, situándose en primer lugar, en comparación, ARTeMIS arroja una mediana de 0.46% y el método de Rinawi híbrido un 0.54%, demostrando que ambas herramientas convergen al resultado esperado desde márgenes opuestos pero con una aproximación numérica equivalente. Para el ejemplo 2 el método de Rinawi híbrido alcanza la precisión absoluta con una mediana de 0.50%, igualando exactamente el valor teórico. Este resultado supera la estimación de ARTeMIS, cuya mediana fue de 0.55%.

Se observa que para la identificación del modo fundamental del ejemplo 1 el software ARTeMIS presenta un error crítico del 162.60% al determinar el amortiguamiento de la frecuencia fundamental, por el contrario las metodologías optimizadas obtuvieron errores drásticamente menores, como el 8% registrado por el ajuste analítico optimizado, esta diferencia se atribuye a la lógica adaptativa de los 0.50Hz, la cual evita el ensanchamiento artificial del pico de resonancia que los motores de cálculo de ARTeMIS no logran corregir automáticamente.

A.6. BIBLIOGRAFÍA

Ong, C. K. (2016). *Automated Frequency Domain Decomposition (AFDD)* (Versión 1.0.0.0) [Software computacional]. MATLAB Central File Exchange. <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/57153-automated-frequency-domain-decomposition-afdd>

Cheyne, E. (2020). *M-DOF system identification using the SSI-COV method* (Versión 1.0.0.0) [Software computacional]. MATLAB Central File Exchange. <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/69030-m-dof-system-identification-using-the-ssi-cov-method>

Cheyne, E., Jakobsen, J. B., & Snæbjörnsson, J. (2016). Buffeting response of a suspension bridge in complex terrain. *Engineering Structures*, 128, 474-487. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2016.09.060>

Cheyne, E., Jakobsen, J. B., & Snæbjörnsson, J. (2017). Damping estimation of large wind-sensitive structures. *Procedia Engineering*, 199, 2047-2053. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2017.09.471>

Cheyne, E., Snæbjörnsson, J., & Jakobsen, J. B. (2017). Temperature Effects on the Modal Properties of a Suspension Bridge. En *Dynamics of Civil Structures, Volume 2* (pp. 87-93). Springer.

Magalhães, F., Cunha, A., & Caetano, E. (2009). Online automatic identification of the modal parameters of a long span arch bridge. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 23(2), 316-329. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2008.05.003>

APÉNDICE B

CONSTRUCCIÓN Y CALIBRACIÓN DEL MODELO EQUIVALENTE TIPO ESPINA

B.1. INTRODUCCIÓN

En el análisis dinámico de estructuras complejas, como el puente curvo de estudio, conlleva a un costo computacional elevado cuando se utilizan modelos tridimensionales detallados (elementos tipo Shell o Solid). Debido a la gran cantidad de grados de libertad involucrados, los tiempos de procesamiento para realizar múltiples análisis en la historia de tiempo se vuelven imprácticos.

Con el objetivo de optimizar la eficiencia del cálculo sin comprometer la precisión de los resultados, se desarrolló un modelo simplificado tipo espina. Este modelo representa la rigidez y la distribución de masa del tablero y las pilas mediante elementos barra situados en el eje neutro de la sección transversal.

Para que este modelo simplificado sea válido como sustituto del modelo tridimensional, es necesario garantizar una equivalencia dinámica rigurosa. Por tal motivo, este apéndice describe el proceso de calibración de las propiedades geométricas y dinámicas del modelo espina; cabe recalcar que para los dos modelos se usó el software comercial SAP 2000.

El objetivo es demostrar que el modelo reducido reproduce con fidelidad los siguientes parámetros dinámicos del modelo tridimensional de referencia:

1. Periodos de vibración.
2. Formas modales.
3. Factores de participación de masa.

A continuación, se detalla la metodología de ajuste.

B.2. DESCRIPCIÓN DE LOS MODELOS NUMÉRICOS

B.2.1 Modelo tridimensional detallado (García, 2018).

El modelo numérico base se construyó a partir de una propuesta conceptual de un puente vehicular curvo. Dicha propuesta plantea una estructura con una curvatura horizontal de $2^\circ 45'$.

La propuesta contempla una subestructura conformada por dos estribos y dos pilas de concreto reforzado. Las pilas presentan una sección transversal rectangular hueca (tipo cajón) y una altura de 61 metros. Para efectos de la modelación, se asignaron las propiedades mecánicas correspondientes a un concreto con resistencia a la compresión $f'_c=250 \text{ kg/cm}^2$.

La superestructura del modelo consiste en una sección cajón mixta, estructurada mediante armaduras de perfiles tubulares, losa de concreto y placas de acero. Se consideró acero estructural tipo A-36 para todos los elementos metálicos, conforme a la configuración original de la propuesta.

Para caracterizar la respuesta dinámica de esta propuesta, se generó un modelo tridimensional detallado utilizando la siguiente tipología de elementos:

Elementos Shell (cáscara): para representar las losas de concreto y placas de acero.

Elementos barra (frame): para las pilas y los elementos tubulares de la armadura.

El método constructivo que se empleó para el puente fue a partir del empujado de dovelas donde se van colocando a partir de los extremos hasta unirse en el centro, esto causa que el puente se encuentre en voladizo haciéndolo más flexible en la construcción, es por ello que se analizó solo en la última etapa considerando solo un voladizo de aproximadamente 90 metros.

B.2.2 Modelo simplificado tipo espina (fishbone).

Para reducir el tiempo de análisis asociado al gran número de grados de libertad del modelo tridimensional, se desarrolló un modelo reducido denominado modelo de espina. Este modelo representa la rigidez global y la distribución de masas de la superestructura mediante una serie de elementos lineales equivalentes.

La estructura fue idealizada como una línea de elementos tipo barra situados en el eje neutro geométrico de la sección transversal del puente. Esta línea central sigue fielmente la curvatura horizontal de $2^{\circ}45'$ y la elevación propuesta en el diseño original. A cada elemento se le asignó la misma sección transversal, para la definición de las propiedades geométricas, se empleó el módulo de section designer. En esta etapa se realizó una simplificación geométrica consistente en modelar las costillas transversales y diafragmas (ubicados físicamente a cada 3 metros) como elementos continuos extruidos a lo largo de todo el eje longitudinal del puente.

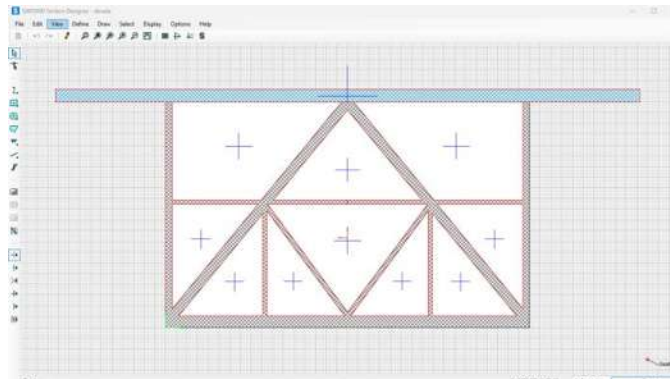


Figura B.1 Sección de dovela creada en el módulo de section designer.

Si bien esa idealización inicial genera una sección con propiedades de masa y rigidez sobreestimadas respecto a la estructura real (al considerar acero continuo donde existen vacíos), este procedimiento se adoptó para establecer las propiedades base. Posteriormente, dicho exceso de rigidez y masa fue corregido mediante la aplicación de factores modificadores de propiedad durante la fase de calibración, logrando así la equivalencia dinámica con el modelo tridimensional.



Figura B.2 Modelos analíticos: a) 3D detallado vs. b) Espina equivalente.

B.3. METODOLOGÍA DE CALIBRACIÓN

El proceso de calibración se llevó a cabo en dos etapas secuenciales: primero se realizó la corrección de la masa traslacional para igualar la inercia global del sistema, y posteriormente se ajustaron las propiedades de rigidez (I_{22} y I_{33}) mediante un proceso iterativo basado en la relación entre periodo natural y la rigidez.

B.3.1 Corrección de la masa

Debido a la idealización de la sección transversal en el modelo espina (donde las costillas se consideraron continuas a lo largo del eje), se observó una sobreestimación inicial de la masa. En donde se tenía:

Masa del modelo tridimensional

$$M_{td} = 1,267,634.11 \text{ kg} \cdot \text{s}^2 / \text{m}$$

Masa del modelo espina

$$M_e = 3,194,908.47 \text{ kg} \cdot \text{s}^2 / \text{m}$$

Calculando la relación cuanto cambia la masa:

$$R = \frac{3,194,908.47}{1,267,634.11} = 2.52$$

Para corregir esta discrepancia, se calculó un factor modificador de masa F_m aplicando la relación inversa:

$$F_m = \frac{1,267,634.11}{3,194,908.47} = 0.397$$

Este factor fue asignado a las propiedades de masa y peso del material en la sección del modelo espina, logrando así la equivalencia inercial directa.

El periodo fundamental antes de tener dicha corrección en el modelo espina era de $T = 3.1025\text{s}$ al meterle este factor de masa correctivo el periodo bajo a $T_c = 1.976\text{s}$.

B.3.2 Corrección de la rigidez

Una vez corregida la masa, se procedió a calibrar la rigidez. Dado el periodo de vibración se sabe que es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la rigidez $T \propto \sqrt{\frac{1}{K}}$ por lo tanto la relación de rigidez que se ocupa es el cuadrado de la relación de periodos, lo que nos da un factor:

$$factor = \frac{T_c^2}{T_{3D}^2} = \frac{1.976^2}{1.583^2} = 1.557$$

En donde el periodo fundamental del modelo tridimensional es 1.583 segundos; esto significa que al modelo de espina hay que incrementarlo un 55% más en rigidez para tener el comportamiento esperado, dicho factor se modificó en la inercia I33. Lo que nos da un periodo fundamental nuevo de 1.637 segundos, pero la forma modal no cambia ya que se tiene una forma modal que oscila de manera lateral y no vertical (la esperada) (ver figura B.3), esto es porque el modelo tridimensional de placas es muy difícil de “doblar” de manera lateral por su ancho, en cambio el modelo de espina es una sola barra delgada, aunque le haya puesto la sección correcta.



Figura B.3 Modo fundamental: a) 3D detallado vs. b) Espina equivalente.

Se propone la solución de desacoplar las rigideces I33 y I22, la rigidez I33 controla la flexión vertical (arriba y abajo) y la rigidez I22 controla la flexión lateral, por lo que se ajusta la rigidez I22 con un factor de 10 (simplemente propuesto para iniciar) para hacerla más rígida y con esto nos da un nuevo periodo $T = 1.136s$.

La forma modal ya es igual que el modelo tridimensional ahora solo falta ajustar el modelo correctivo a I33:

Factor nuevo

$$f_{nuevo} = factor_{antiguo} \cdot \left(\frac{T_{actual}}{T_{3D}} \right)^2 = 1.557 \cdot \left(\frac{1.136s}{1.583s} \right)^2 = 0.801$$

Revisando el segundo periodo del modelo espina da de 0.693 segundos y el modelo tridimensional da de 1.033 segundos por lo que el factor de rigidez para I22 de 10 se tendrá que modificar.

Factor para I22

$$factor_{I_{22}} = factor_{inicial} \cdot \left(\frac{T_{2espina}}{T_{23D}} \right)^2 = 10 \cdot \left(\frac{0.6935s}{1.033s} \right)^2 = 4.507$$

Como resultado se tiene un nuevo periodo fundamental 1 de 1.514 segundos por lo que se vuelve a ajustar de la siguiente manera.

$$factor_{I_{33}} = f_{nuevo} \cdot \left(\frac{T_{1espina}}{T_{13D}} \right)^2 = 0.801 \cdot \left(\frac{1.514s}{1.583s} \right)^2 = 0.732$$

Por lo que al final tenemos como resultado para el modelo de espina un periodo fundamental 1 de 1.576 segundos y un periodo dos de 1.0086 segundos.

Tabla B.1 Tabla de comparación de porcentajes de masa modal

NO.	PERIODO (s)		PORCENTAJE DE PARTICIPACIÓN (3D)						PORCENTAJE DE PARTICIPACIÓN (ESPINA)					
	ESPINA	3D	UX	UY	UZ	RX	RY	RZ	UX	UY	UZ	RX	RY	RZ
1	1.57614 s	1.58381 s	0.0008802	0.002587	0.109	0.219	0.00675	0.0003767	0.0004723	0.00007787	0.215	0.389	0.019	0.0003746
2	1.00863 s	1.03303 s	0.271	0.01	0.0001754	0.001751	0.171	0.422	0.449	0.022	0.0001985	0.001575	0.18	0.436
3	0.28110 s	0.45143 s	0.113	0.0007267	0.0007895	0.003128	0.029	0.047	0.161	0.018	0.00006345	0.00748	0.073	0.019

B.4. CONCLUSIONES

En la tabla B.1 se observa que en el modo 1 la masa predominante es en dirección vertical, acoplada con una componente rotacional alrededor del eje x, si revisamos los otros dos modos, se ve que la cantidad de masa predominante en cada dirección corresponde con el modelo tridimensional, esto nos confirma que la distribución de masas fue asignada correctamente al modelo espina y que los grados de libertad rotacionales del modelo simplificado están adecuadamente acoplados con la rigidez global del sistema.

Por otro lado, se observa que en el modo 3, los periodos se separan, esto es debido a la divergencia en modos superiores, ya que es una limitación a la simplificación de los grados de libertad (simplificación cinemática). El modelo espina, al ser una idealización, no posee los grados de libertad necesarios para replicar las vibraciones locales de las placas (paredes de la sección cajón). Sin embargo, dado que la función de este modelo es capturar la respuesta global de la estructura, y dicha condición se cumple en los modos fundamentales, la validación se considera aceptable.

B.5. BIBLIOGRAFÍA

Rosales García, I. (2018). Comportamiento de puentes carreteros ante cargas eólicas [Tesis de maestría, Universidad Nacional Autónoma de México]. Repositorio Institucional UNAM / TESIUNAM.

APÉNDICE C

OPTIMIZACIÓN NUMÉRICA DE LOS ALGORITMOS DE AJUSTE ANALÍTICO Y RINAWI PARA LA IDENTIFICACIÓN DEL AMORTIGUAMIENTO MODAL

C.1. INTRODUCCIÓN

En este apéndice se detalla la propuesta algorítmica y los ajustes numéricos implementados sobre los métodos originales de Rinawi y el método de ajuste del espectro analítico. El objetivo primordial de estas modificaciones es reducir el sesgo estadístico y la inestabilidad numérica que suelen presentar los métodos convencionales al identificar estructuras con bajo amortiguamiento.

A lo largo de este apartado, se desglosa la lógica de programación y el tratamiento de señales aplicado para mejorar la convergencia de los resultados, permitiendo reducir errores críticos en modos fundamentales.

Para demostrar la eficacia de las optimizaciones propuestas, se emplean como casos de estudio los dos ejemplos descritos detalladamente en el apéndice A de este trabajo.

C.2. DESARROLLO DE LAS OPTIMIZACIONES NUMÉRICAS

En esta sección se detallan las intervenciones realizadas a los algoritmos base de identificación modal. Dichas modificaciones fueron necesarias debido a que el método estándar presentaba una inestabilidad demasiado alta en los modos fundamentales, con errores que superaban el 600% en la estimación del amortiguamiento. A continuación, se presentan las propuestas que se le hicieron a ambos métodos.

C.2.1 Método de ajuste analítico

En el proceso de señales para ingeniería estructural existe una relación entre la resolución en frecuencia y la fuga espectral “leakage”.

La resolución nominal (Δf) está definida por la longitud del registro de tiempo (T):

$$\Delta f = \frac{1}{T} = \frac{F_s}{N_{window}} \quad (C.1)$$

Donde F_s es la frecuencia de muestreo y N_{window} es el número de muestras por ventana.

En el código se utilizan ventanas Hanning esto con el fin de evitar el “leakage” de frecuencias vecinas, pero tiene un costo: aumenta el ancho de banda de ruido equivalente (ENBW), para una ventana Hanning, el $ENBW \approx 1.5 \cdot \Delta f$.

El problema original es que se tenía una ventana de 1024 puntos fija, es decir la resolución es demasiado gruesa para ver un amortiguamiento muy pequeño (del orden de 0.5%). Suponiendo que tuviera un primer modo con una frecuencia de 0.1671 Hz y un amortiguamiento teórico de 0.5% el ancho de banda a mitad de potencia es:

$$B_{HP} = 2\xi f_n = 2(0.005)(0.1671Hz) \approx 0.0016Hz \quad (C.2)$$

El nuevo ajuste que se uso es, $N_{window} = \frac{N.muestras}{1.5}$, con esto se logra que $\Delta f < B_{HP}$. Si Δf es mayor que el ancho del pico, el método de ajuste analítico ve un pico más ancho de lo que es, disparando el error de amortiguamiento.

Se propuso también una estrategia de procesamiento adaptativo, en donde se usó el filtro Savitzky-Golay que a diferencia de un promedio móvil simple que borra los picos del espectro, este filtro utiliza regresiones polinomiales locales, lo que permite limpiar el ruido sin “aplastar” la altura real de las resonancias (Savitzky y Golay, 1964).

El filtro Savitzky-Golay, es matemáticamente una convolución en el dominio de la frecuencia.

$$S_{smooth}(f) = S_{raw}(f) * W(f) \quad (C.3)$$

Donde S_{raw} son los datos originales del espectro de densidad de potencia y $W(f)$ representa una ventana de peso W . el filtro de convolución de forma discreta esta dado de la siguiente manera (Savitzky y Golay, 1964).

$$Y_j^* = \sum_{i=-m}^m \frac{C_i \cdot Y_{j+1}}{N} \quad (C.4)$$

En donde Y_j^* es el valor suavizado del punto central. Es el dato que limpia el ruido de las señales, C_i son los coeficientes enteros de convolución (los pesos), estos se obtienen mediante el ajuste de un polinomio de mínimos cuadrados a los datos de la ventana, Y_{j+1} son los datos originales del espectro de densidad de potencia, m es el número de puntos a cada lado del centro, es decir si la ventana contiene 11 puntos entonces $m=5$, N es el factor de normalización, para un filtro suavizado (grado 0), N es simplemente la suma de todos coeficientes C_i , esto asegura que si se introduce una señal constante, el filtro devuelve el mismo valor. En la implementación computacional, los coeficientes utilizados son normalizados, incorporando el factor N dentro del valor de cada C_i , esto mediante la función nativa propia del software Matlab.

Al tener más puntos en la ventana se tiene más suavizado en la respuesta y entre mayor orden tenga el polinomio menor suavizado tendrá, por lo que para este algoritmo se utilizó un polinomio de orden 2 que es lo suficientemente bajo para suavizar el ruido blanco de las señales, pero tiene la curvatura necesaria para no “cortar” la punta del pico de resonancia.

En la implementación del código el suavizado no fue general sino condicional. Para frecuencias $f < 0.50Hz$ se decide usar los datos crudos ya que cualquier filtro incluso el Savitzky-Golay, corría el riesgo de ensanchar la base y disparar el error de amortiguamiento, ya que la energía de la respuesta es muy alta es decir los modos fundamentales que tienen frecuencias bajas suelen tener amplitudes muy superiores al ruido ambiental del sensor por lo que no es necesario filtrar el espectro.

Para las frecuencias $f > 0.50\text{Hz}$ es donde se aplica el filtro Savitzky-Golay. Dado que a frecuencias más altas suele haber más ruido, el filtro ayuda a que el algoritmo del ajuste analítico (la ecuación de Brownjohn vista en el capítulo 2) no se entretuviera con pequeñas fluctuaciones y se enfocara en la forma real de la campana.

C.2.2 Método de Rinawi

A diferencia del método original, el algoritmo programado permite la identificación simultánea de varias señales.

Se implementó una lógica de promediado, en la práctica común, se suelen promediar transformadas discretas de Fourier (FFT) simples. Sin embargo, para vibraciones ambientales (señales estocásticas), esto genera una varianza excesiva en el espectro, se incorporó el uso de periodogramas promediados de Welch para obtener la densidad espectral de potencia, matemáticamente, el método del Welch divide la señal en L segmentos solapados, reduciendo la varianza del espectro en un factor de $1/L$. esto es crítico para el método de Rinawi, ya que el método utiliza potencias elevadas del espectro (F^6, F^4) donde el ruido se amplifica exponencialmente.

Además, se propuso la estabilidad numérica del método mediante secciones de segundo orden (SOS), para garantizar la integridad de los resultados en frecuencias bajas (menores a 0.50Hz), la implementación del filtro digital se trasladó del análisis de funciones globales a secciones de segundo orden. Esta decisión técnica se fundamenta en la naturaleza matemática del dominio z y la estabilidad numérica del sistema.

El dominio z es una transformación matemática que permite analizar sistemas de tiempo discreto. Se define como:

$$z = e^{sT} \quad (\text{C.5})$$

Donde $s = \sigma + j\omega$ es la variable compleja de Laplace y T es el intervalo de muestreo; mientras que en el dominio s la estabilidad se analiza en el semiplano izquierdo, en el dominio z la estabilidad se define dentro del círculo unitario en el plano complejo; un filtro digital es esencialmente una ecuación de diferencias cuya respuesta en frecuencia depende de la ubicación de sus polos y ceros en este plano z .

Una función de transferencia global intenta representar un filtro de alto orden (como la función nativa que se usó en Matlab en el código original que es “Butterworth” de orden 4) mediante un único polinomio de grado N .

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^n b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^n a_i z^{-i}} \quad (\text{C.6})$$

El uso de la ecuación C.6 en frecuencias bajas (menores a 0.50Hz), cuando la frecuencia de corte es muy pequeña respecto a la de muestreo, los polos del sistema se comprimen en una región infinitesimal cerca del punto $(1,0)$ del círculo unitario; en esta configuración, el sistema se vuelve

extremadamente sensible a la precisión de los coeficientes $\{a_i\}$, una mínima variación debida al redondeo de la computadora puede desplazar un polo fuera del círculo unitario, volviendo al sistema inestable o generando oscilaciones numéricas que “ensucian” el espectro de potencia.

La solución a este problema son las secciones SOS (secciones de segundo orden), que resuelven este problema descomponiendo la función de transferencia global en un producto de funciones cuadráticas estables (Oppenheim y Schaffer, 2010):

$$H(z) = G \cdot \prod_{k=1}^{N/2} \frac{b_{0k} + b_{1k}z^{-1} + b_{2k}z^{-2}}{1 + a_{1k}z^{-1} + a_{2k}z^{-2}} \quad (C.7)$$

En donde G es la ganancia global del sistema, cada sección k posee sus propios coeficientes $\{a_{ik}, b_{ik}\}$, lo que desacopla la sensibilidad de los polos, al trabajar con polinomios de segundo orden, los coeficientes mantienen una magnitud similar entre sí, esto minimiza el ruido de cuantización y los errores de truncamiento que ocurren al operar, ya que el error de truncamiento se confina dentro de cada sección pequeña y no se propaga exponencialmente a través del filtro; todo el procedimiento comentado se implementó a través de la función nativa de Matlab.

Esto ocasiona que en el método de Rinawi al usar potencias en la amplitud de potencia de orden 4 y de orden 6, si el filtro introdujera el más mínimo ruido numérico por inestabilidad en el dominio z, estas potencias amplificarían el error de forma exponencial. La implementación de SOS garantiza la integridad de la densidad espectral, permitiendo que el sistema de ecuaciones de Rinawi mantenga un condicionamiento numérico óptimo y proporcione una estimación del amortiguamiento con un alto grado de certidumbre estadística.

Además, se implementó una estrategia de ventaneo adaptativo, es decir para frecuencias menores a 0.50 Hz, se optó por una ventana rectangular, dado que las ventanas convencionales (como Hanning o Hamming) presentan un lóbulo principal (pico de resonancia) significativamente más ancho, lo que provoca un ensanchamiento artificial en el pico de resonancia. Para sistemas con amortiguamiento bajos, el pico de resonancia es extremadamente agudo; el uso de la ventana rectangular ofrece un ancho de banda efectivo más estrecho posible, permitiendo una identificación precisa del amortiguamiento, por el contrario, para frecuencias superiores a 0.50Hz, se emplearon ventanas de Hanning.

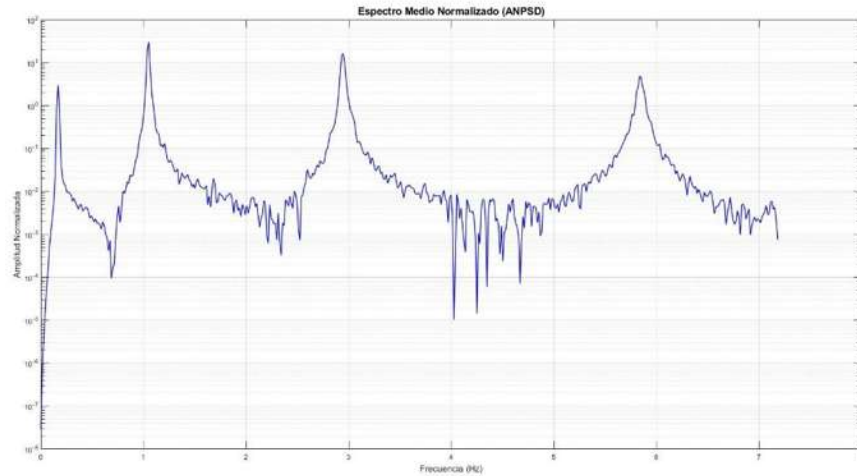
C.3. VALIDACIÓN NUMÉRICA: RESULTADOS OBTENIDOS CON ALGORITMOS CONVENCIONALES VS. OPTIMIZADOS

En este apartado se presenta la validación numérica de las mejoras de los algoritmos propuestos. A través de dos casos de estudio (comentados en el apéndice A).

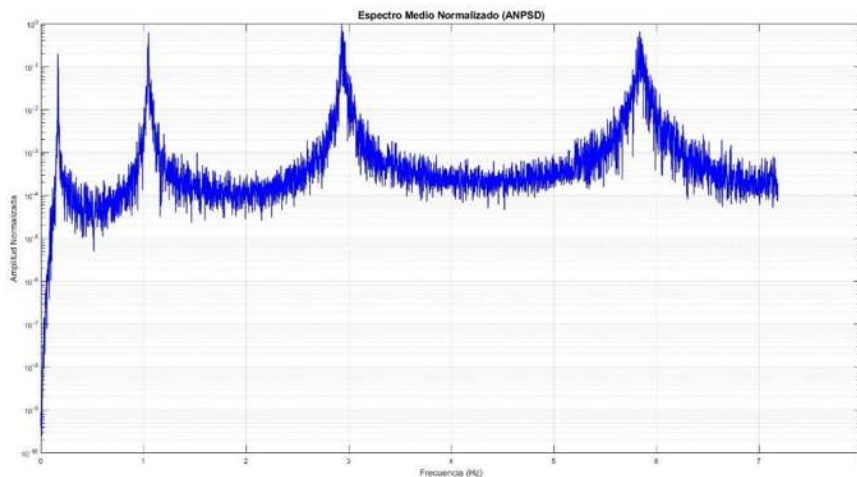
C.3.1 Método de ajuste analítico híbrido

C.3.1.1 Ejemplo 1: Viga en voladizo de acero

A continuación, se presentan los resultados del método de ajuste analítico original y el optimizado.

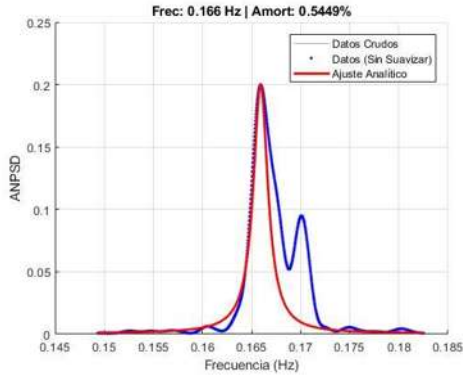


Espectro medio normalizado original

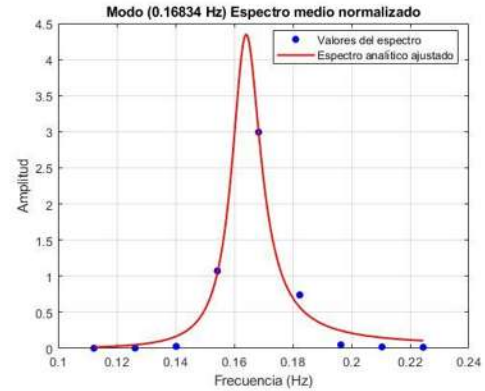


Espectro medio normalizado optimizado

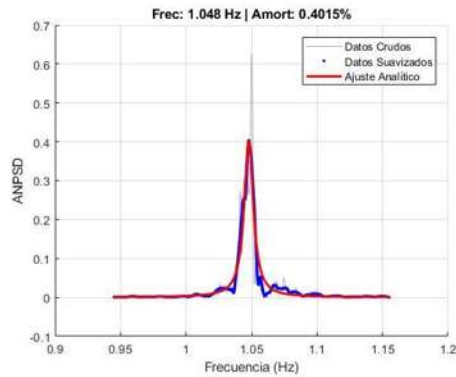
Figura C.1 Espectro medio normalizado original y optimizado para ejemplo 1



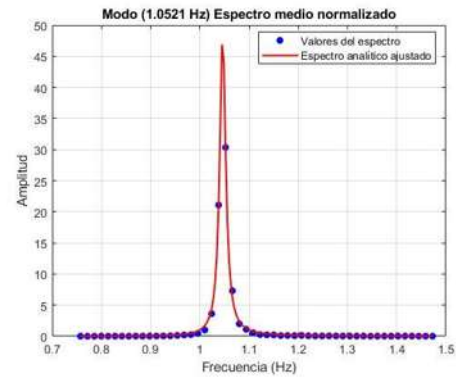
Modo 1 método híbrido



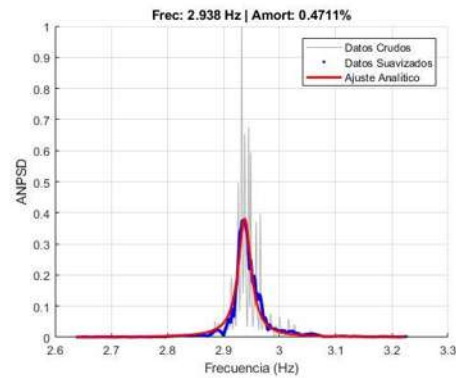
Modo 1 método original



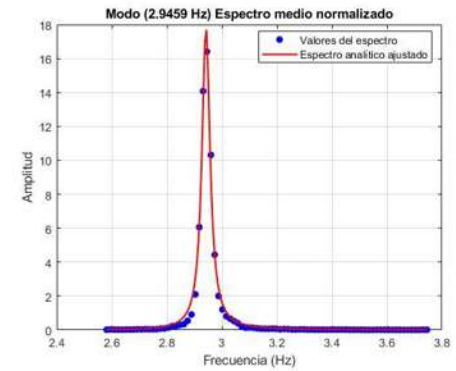
Modo 2 método híbrido



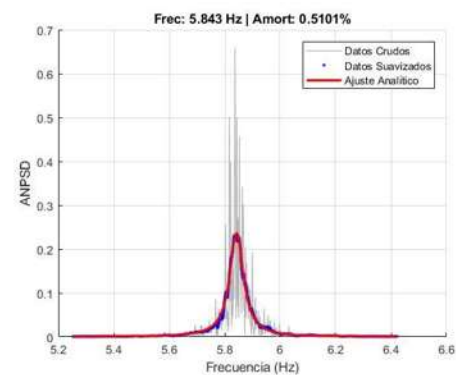
Modo 2 método original



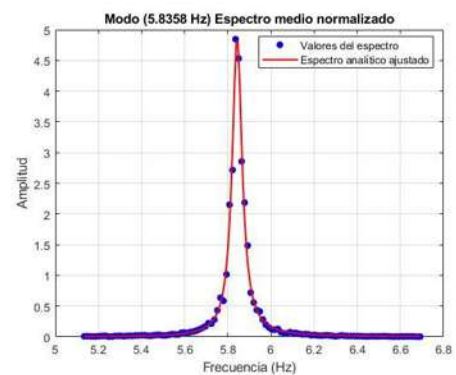
Modo 3 método híbrido



Modo 3 método original



Modo 4 método híbrido



Modo 4 método original

Figura C.2 Graficas de ajuste analítico original y optimizado para ejemplo 1

Tabla C.1 Comparación de frecuencias del ejemplo 1 por el método de Peak Picking

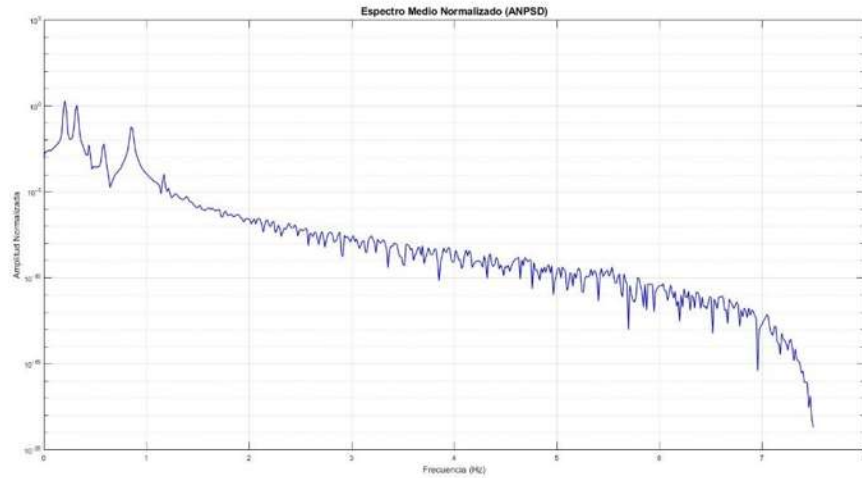
Frecuencia			% Error	
Teórica	Ajuste analítico	Ajuste analítico optimizado	Ajuste analítico	Ajuste analítico optimizado
0.1671 Hz	0.1683 Hz	0.1660 Hz	0.74%	0.66%
1.0472 Hz	1.0521 Hz	1.0480 Hz	0.47%	0.08%
2.9323 Hz	2.9459 Hz	2.9380 Hz	0.46%	0.19%
5.7460 Hz	5.8358 Hz	5.8430 Hz	1.56%	1.69%
Mediana=			0.60%	0.43%

Tabla C.2 Comparación de amortiguamiento de ejemplo 1 por el método de ajuste analítico

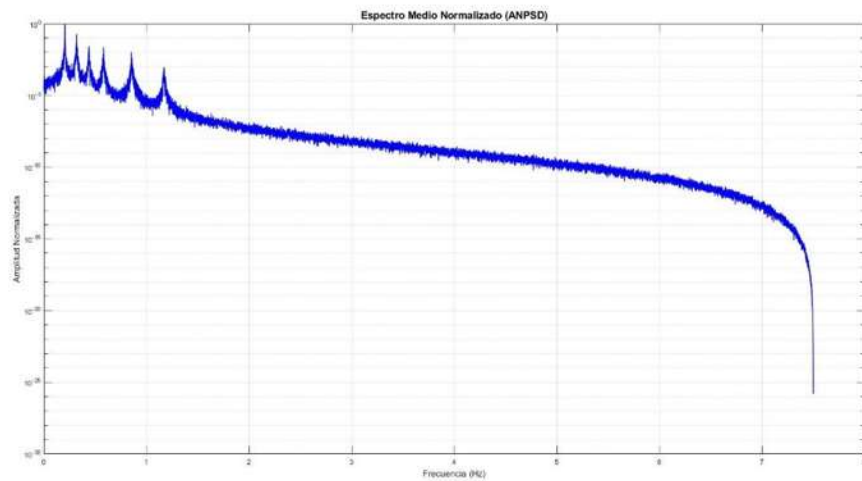
Amortiguamiento			% Error	
Teórico	Ajuste analítico	Ajuste analítico optimizado	Ajuste analítico	Ajuste analítico optimizado
0.0050	0.0368	0.0054	636.00%	8.00%
0.0050	0.0070	0.0040	40.00%	20.00%
0.0050	0.0060	0.0047	20.00%	6.00%
0.0050	0.0047	0.0051	6.00%	2.00%
Mediana=	0.0065	0.0049	30.00%	7.00%

Los resultados del ejemplo 1 demuestran que el ajuste analítico optimizado es superior para la identificación de parámetros dinámicos en estructuras con bajo amortiguamiento. Mientras que el ajuste analítico normal falla severamente en el modo fundamental debido al sesgo de suavizado, la metodología híbrida que combina el uso de datos crudos a bajas frecuencias con el filtro Savitzky-Golay en modos superiores, permite obtener estimaciones de amortiguamiento con una mediana de error de apenas el 7%, garantizando confiabilidad de los datos para la posterior calibración del modelo estructural.

C.3.1.2 Ejemplo 2: Puente colgante Lysefjord

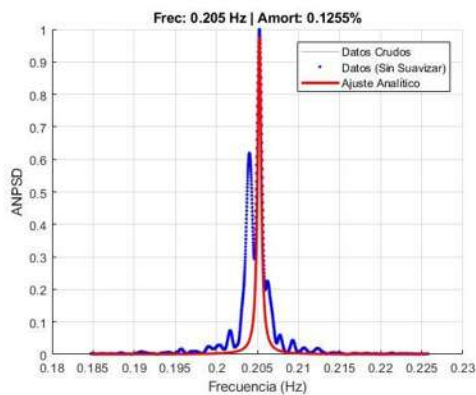


Espectro medio normalizado original

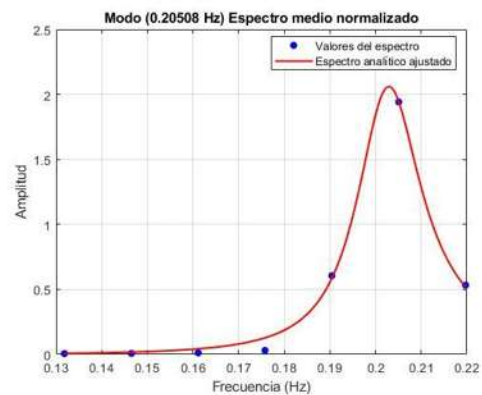


Espectro medio normalizado optimizado

Figura C.3 Espectro medio normalizado original y optimizado para ejemplo 2

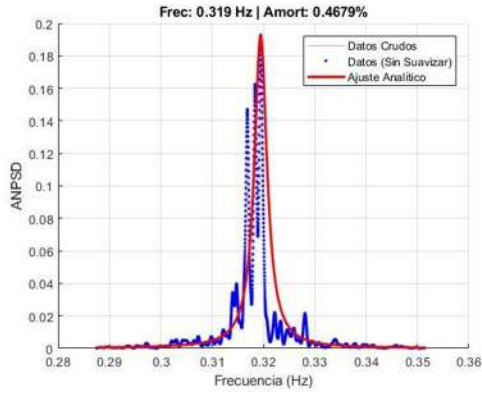


Modo 1 método híbrido

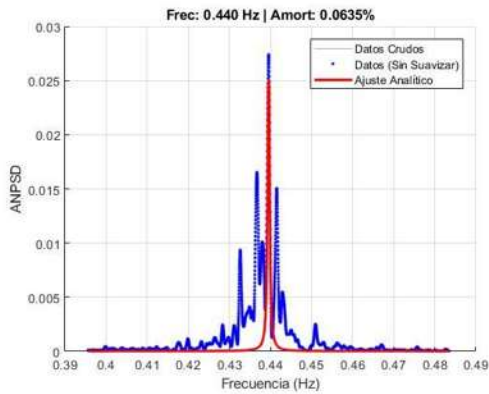


Modo 1 método original

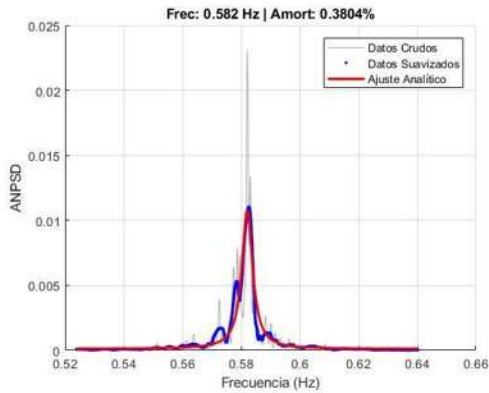
Figura C.4 Graficas de ajuste analítico original y optimizado para ejemplo 2



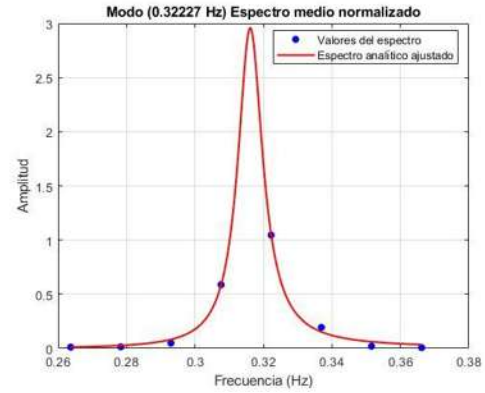
Modo 2 método híbrido



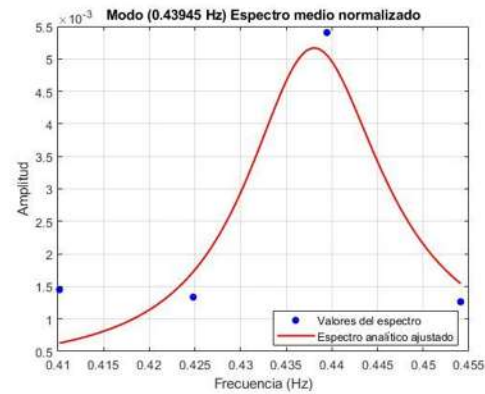
Modo 3 método híbrido



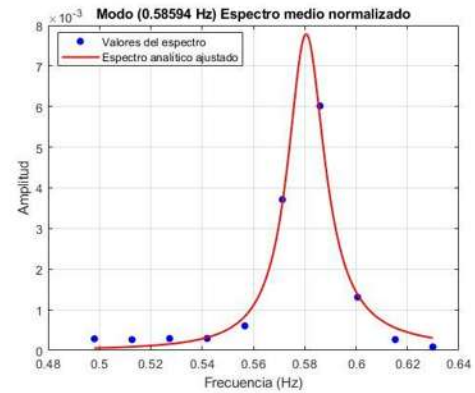
Modo 4 método híbrido



Modo 2 método original

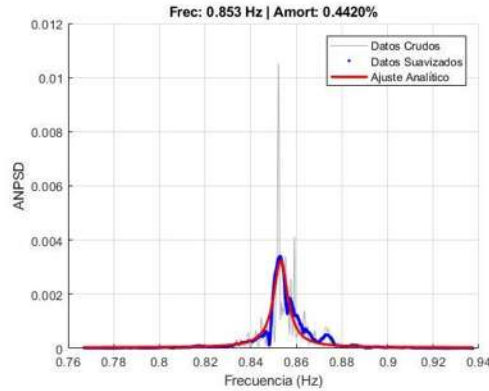


Modo 3 método original

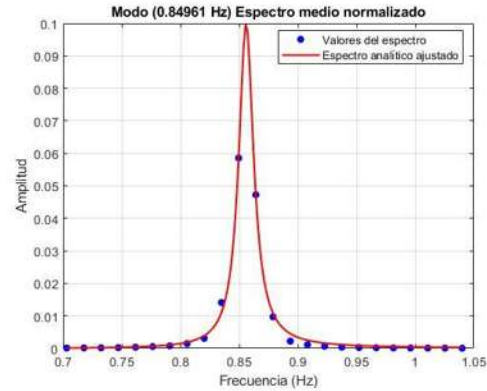


Modo 4 método original

Figura C.4 Graficas de ajuste analítico original y optimizado para ejemplo 2(continuación)



Modo 5 método híbrido



Modo 5 método original

Figura C.4 Gráficas de ajuste analítico original y optimizado para ejemplo 2(continuación)

Tabla C.3 Comparación de frecuencias del ejemplo 2 por el método de peak picking

Frecuencia			% Error	
Teórica	Ajuste analítico	Ajuste analítico optimizado	Ajuste analítico	Ajuste analítico optimizado
0.2050 Hz	0.2051 Hz	0.2050 Hz	0.04%	0.00%
0.3190 Hz	0.3222 Hz	0.3190 Hz	1.00%	0.00%
0.4390 Hz	0.4399 Hz	0.4400 Hz	0.21%	0.23%
0.5850 Hz	0.5859 Hz	0.5820 Hz	0.15%	0.51%
0.8640 Hz	0.8496 Hz	0.8530 Hz	1.67%	1.27%
Mediana=			0.21%	0.23%

Tabla C.4 Comparación de amortiguamiento de ejemplo 2 por el método de ajuste analítico

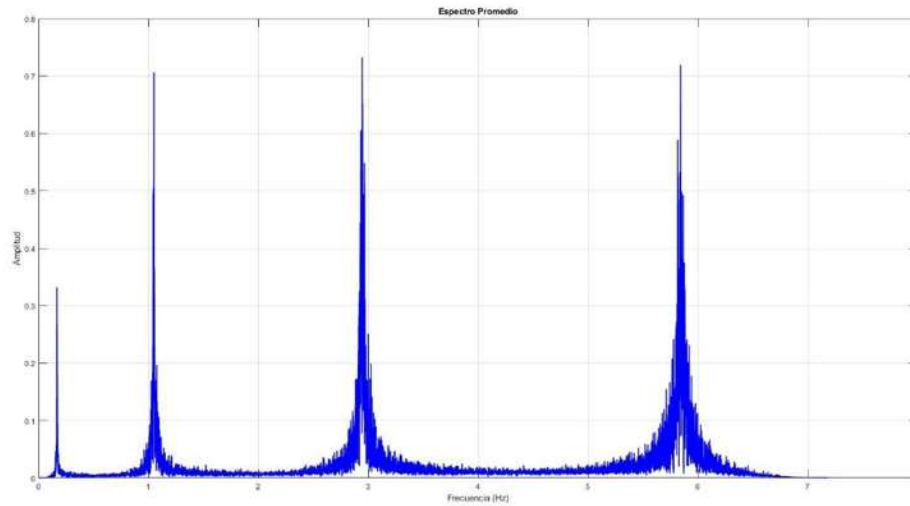
Amortiguamiento			% Error	
Teórico	Ajuste analítico	Ajuste analítico optimizado	Ajuste analítico	Ajuste analítico optimizado
0.0050	0.0388	0.0012	676.00%	76.00%
0.0050	0.0139	0.0048	178.00%	4.00%
0.0050	0.0209	0.0006	318.00%	87.40%
0.0050	0.0243	0.0038	386.40%	24.00%
0.0050	0.0089	0.0044	78.00%	12.00%
Mediana=	0.0209	0.0038	318.00%	24.00%

Para el ejemplo 2, se observa que la densidad de modos en frecuencias bajas (menor a 0.50Hz) incrementa la complejidad del ajuste. El método optimizado demuestra una superioridad clara al reducir la mediana del error de amortiguamiento de un 318% a 24%. Esta mejora sustancial se atribuye a que la lógica adaptativa evita que el filtro Savitzky-Golay ensanche la base de los picos de baja frecuencia, preservando la agudeza necesaria para identificar correctamente el amortiguamiento en un entorno de alta sensibilidad al ruido.

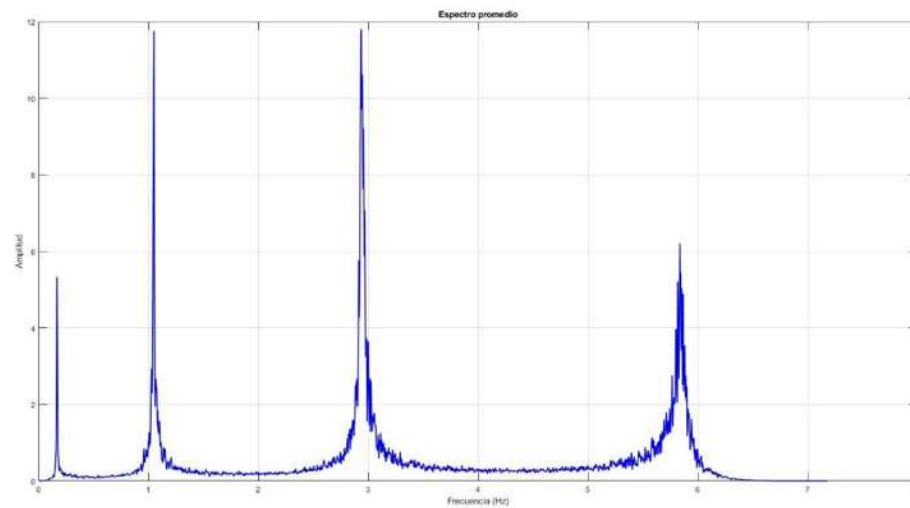
C.3.2 Método de Rinawi adaptativo

C.3.2.1 Ejemplo 1: Viga en voladizo de acero

A continuación, se presentan los resultados del método de Rinawi original y el optimizado.



Espectro medio original



Espectro medio optimizado

Figura C.5 Espectro medio original y optimizado para ejemplo 1

Tabla C.5 Comparación de frecuencias del ejemplo 1 por el método de Rinawi

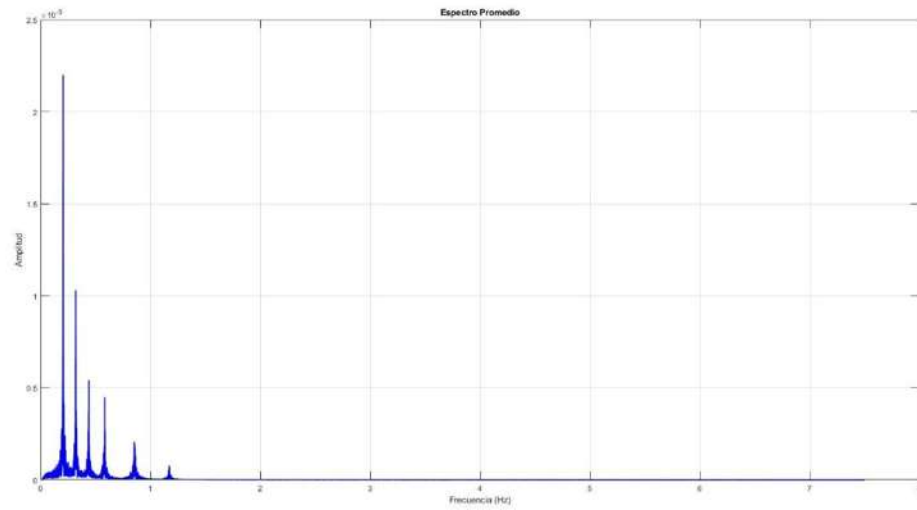
Frecuencia			% Error	
Teórica	Rinawi	Rinawi adaptativo	Rinawi	Rinawi adaptativo
0.1671 Hz	0.1666 Hz	0.1673 Hz	0.30%	0.12%
1.0472 Hz	1.0481 Hz	1.0488 Hz	0.08%	0.15%
2.9323 Hz	2.9482 Hz	2.9434 Hz	0.54%	0.38%
5.7460 Hz	5.8399 Hz	5.8346 Hz	1.63%	1.54%
Mediana=			0.42%	0.27%

Tabla C.6 Comparación de amortiguamiento de ejemplo 1 por el método de Rinawi

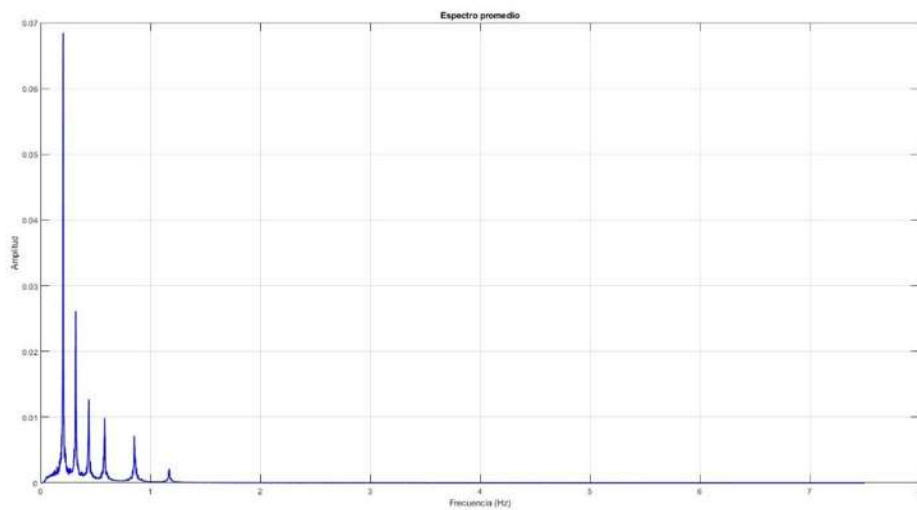
Amortiguamiento			% Error	
Teórico	Rinawi	Rinawi adaptativo	Rinawi	Rinawi adaptativo
0.0050	0.0089	0.0080	78.00%	60.00%
0.0050	0.0032	0.0060	36.00%	20.00%
0.0050	0.0037	0.0048	26.00%	4.00%
0.0050	0.0020	0.0048	60.00%	4.00%
Mediana=	0.0035	0.0054	48.00%	12.00%

Para el ejemplo 1, se observa que la optimización del método de Rinawi mediante secciones de segundo orden (SOS) y ventaneo adaptativo marca una diferencia sustancial en la precisión de la identificación modal. Al utilizar una ventana rectangular para frecuencias menores a 0.50Hz, se logra preservar la agudeza del pico de resonancia, mientras que las SOS aseguran que las potencias de orden superior no degraden la señal por inestabilidad numérica. El resultado es una mediana de error de apenas el 12%.

C.3.2.2 Ejemplo 2: Puente colgante Lysefjord



Espectro medio original



Espectro medio optimizado

Figura C.6 Espectro medio original y optimizado para ejemplo 2

Tabla C.7 Comparación de frecuencias del ejemplo 2 por el método de Rinawi

Frecuencia			% Error	
Teórica	Rinawi	Rinawi adaptativo	Rinawi	Rinawi adaptativo
0.2050 Hz	0.2048 Hz	0.2054 Hz	0.10%	0.20%
0.3190 Hz	0.3188 Hz	0.3182 Hz	0.06%	0.25%
0.4390 Hz	0.4377 Hz	0.4378 Hz	0.30%	0.27%
0.5850 Hz	0.5823 Hz	0.5825 Hz	0.46%	0.43%
0.8640 Hz	0.8553 Hz	0.8547 Hz	1.01%	1.08%
Mediana=			0.30%	0.27%

Tabla C.8 Comparación de amortiguamiento de ejemplo 2 por el método de Rinawi

Amortiguamiento			% Error	
Teórico	Rinawi	Rinawi adaptativo	Rinawi	Rinawi adaptativo
0.0050	0.0038	0.0058	24.00%	16.00%
0.0050	0.0037	0.0032	26.00%	36.00%
0.0050	0.0015	0.0026	70.00%	48.00%
0.0050	0.0028	0.0059	44.00%	18.00%
0.0050	0.0029	0.0050	42.00%	0.00%
Mediana=	0.0029	0.0050	42.00%	18.00%

Para el ejemplo 2, los resultados consolidan la eficacia de la propuesta optimizada, la transición dinámica entre ventanas rectangulares (para preservar la agudeza de los picos en baja frecuencia) y ventanas de Hanning (para el control de ruido en alta frecuencia), sumada a la implementación de secciones de segundo orden (SOS), permite reducir la mediana del error de amortiguamiento de un 42% a un 18%.

C.4. CONCLUSIÓN

La implementación de una propuesta adaptativa de procesamiento es el factor determinante para identificar con precisión amortiguamientos bajos ($\zeta \approx 0.50\%$). Esta estrategia reduce errores sistemáticos mediante: el control del sesgo de suavizado, es decir el uso de datos crudos y ventanas rectangulares en frecuencias bajas preserva la agudeza del pico de resonancia. Esto evita el ensanchamiento artificial que suele disparar el error de amortiguamiento; la estabilidad y limpieza en modos superiores mediante el empleo coordinado de filtros de Savitzky-Golay y de segundo orden, ventanas Hanning y secciones de segundo orden (SOS) permite gestionar el ruido ambiental y la inestabilidad numérica. Esta metodología redujo la mediana del error de amortiguamiento de niveles críticos (superiores a 300%) a valores entre 7-24% para ambos métodos evaluados.

C.5. BIBLIOGRAFÍA

Savitzky, A., & Golay, M. J. E. (1964). Smoothing and differentiation of data by simplified least squares procedures. *Analytical Chemistry*, 36(8), 1627–1639.

Oppenheim, A. V., & Schaffer, R. W. (2010). *Discrete-Time Signal Processing* (3rd ed., pp. 424-428). Pearson.

Max Brandom Mayo Hernández

ANÁLISIS EÓLICO EN UN PUENTE CURVO EN VOLADIZO.pdf

 Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Detalles del documento

Identificador de la entrega

trn:oid::3117:579291781

Fecha de entrega

16 abr 2026, 7:50 a.m. GMT-6

Fecha de descarga

16 abr 2026, 7:56 a.m. GMT-6

Nombre del archivo

ANÁLISIS EÓLICO EN UN PUENTE CURVO EN VOLADIZO.pdf

Tamaño del archivo

4.8 MB

118 páginas

24.979 palabras

143.295 caracteres

6% Similitud general

El total combinado de todas las coincidencias, incluidas las fuentes superpuestas, para ca...

Filtrado desde el informe

- ▶ Texto citado
- ▶ Texto mencionado
- ▶ Coincidencias menores (menos de 10 palabras)

Fuentes principales

- 6%  Fuentes de Internet
- 4%  Publicaciones
- 0%  Trabajos entregados (trabajos del estudiante)

Marcas de integridad

N.º de alerta de integridad para revisión



Caracteres reemplazados

44 caracteres sospechosos en N.º de páginas

Las letras son intercambiadas por caracteres similares de otro alfabeto.

Los algoritmos de nuestro sistema analizan un documento en profundidad para buscar inconsistencias que permitirían distinguirlo de una entrega normal. Si advertimos algo extraño, lo marcamos como una alerta para que pueda revisarlo.

Una marca de alerta no es necesariamente un indicador de problemas. Sin embargo, recomendamos que preste atención y la revise.

Formato de Declaración de Originalidad y Uso de Inteligencia Artificial

Coordinación General de Estudios de Posgrado
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo



A quien corresponda,

Por este medio, quien abajo firma, bajo protesta de decir verdad, declara lo siguiente:

- Que presenta para revisión de originalidad el manuscrito cuyos detalles se especifican abajo.
- Que todas las fuentes consultadas para la elaboración del manuscrito están debidamente identificadas dentro del cuerpo del texto, e incluidas en la lista de referencias.
- Que, en caso de haber usado un sistema de inteligencia artificial, en cualquier etapa del desarrollo de su trabajo, lo ha especificado en la tabla que se encuentra en este documento.
- Que conoce la normativa de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, en particular los Incisos IX y XII del artículo 85, y los artículos 88 y 101 del Estatuto Universitario de la UMSNH, además del transitorio tercero del Reglamento General para los Estudios de Posgrado de la UMSNH.

Datos del manuscrito que se presenta a revisión		
Programa educativo	Maestría en ingeniería en el área de estructuras	
Título del trabajo	Análisis eólico en un puente curvo en voladizo	
	Nombre	Correo electrónico
Autor/es	Max Brandom Mayo Hernández	2459622d@umich.mx
Director	Dr. Hugo Hernández Barrios	hugo.hernandez@umich.mx
Codirector		
Coordinador del programa	Dr. Guillermo Martínez Ruíz	mae.ingenieria.estructuras@umich.mx

Uso de Inteligencia Artificial		
Rubro	Uso (sí/no)	Descripción
Asistencia en la redacción	no	

Formato de Declaración de Originalidad y Uso de Inteligencia Artificial

Coordinación General de Estudios de Posgrado
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo



Uso de Inteligencia Artificial		
Rubro	Uso (sí/no)	Descripción
Traducción al español	no	
Traducción a otra lengua	no	
Revisión y corrección de estilo	no	
Análisis de datos	no	
Búsqueda y organización de información	no	
Formateo de las referencias bibliográficas	no	
Generación de contenido multimedia	no	
Otro		

Datos del solicitante	
Nombre y firma	Max Brandom Mayo Hernández
Lugar y fecha	Morelia, Michoacán a 16 de abril de 2026