



**UNIVERSIDAD MICHOACANA
DE SAN NICOLAS DE HIDALGO
INSTITUTO DE FISICA Y MATEMATICAS**

**COSMOLOGIA INFLACIONARIA DESDE UN VACIO
APARENTE PENTA-DIMENSIONAL**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

DOCTOR EN CIENCIAS EN EL AREA DE FISICA

PRESENTA

JOSE EDGAR MADRIZ AGUILAR

ASESORES

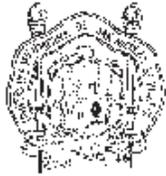
DR. MAURICIO BELLINI

DR. FRANCISCO ASTORGA SAENZ

MORELIA MICHOACAN, JULIO 2006



**INSTITUTO DE FISICA
Y MATEMATICAS**



UNIVERSIDAD MICHOACANA
DE
SAN NICOLÁS DE HIDALGO

Instituto de Física y Matemáticas
Posgrado 124/2006

Lic. Juvencio Camacho Díaz
Director de Control Escolar
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo
P R E S E N T E

Apreciable Lic. Camacho:

Atentamente me dirijo a Ud. para comunicarle que el trabajo de tesis titulado **Cosmología Inflacionaria desde un vacío aparente Penta-dimensional**, desarrollado por el M.C. José Edgar Madriz Aguilar, ha sido revisado por los Drs. Mauricio Bellini, Tatjana Vukasinac, Jorge Luis Cervantes Cota, Olivier Charles-Albert Sarbach y Francisco Antonio Astorga Sáenz y Ulises Nucamendi, aprobando que sea impresa y presentado en su examen profesional

Agradeciendo su atención me despido de Ud. con un cordial saludo

Morelia, Michoacán, 6 de junio de 2006

A T E N T A M E N T E


INSTITUTO DE FÍSICA
Y MATEMÁTICAS
Lic. Claudia Barriga Gómez

Responsable Administrativa de los Posgrados de Física y Matemáticas
Instituto de Física y Matemáticas
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

C.C.P. Dr. Mauricio Bellini, Investigador de la Universidad Nacional de Mar del Plata, Argentina
C.C.P. Dr. Jorge Luis Cervantes Cota, Investigador del Inst. Nacional de Investigaciones Nucleares
C.C.P. Dra. Tatjana Vukasinac, Investigadora de la Esc. de Economía, UMSNH
C.C.P. Dr. Francisco A. Astorga Sáenz, Investigador del Inst. de Física y Matemáticas, UMSNH
C.C.P. Dr. Ulises Nucamendi Gómez, Investigador del Instituto de Física y Matemáticas, UMSNH

COSMOLOGÍA INFLACIONARIA

DESDE

UN VACÍO APARENTE

PENTADIMENSIONAL

ÍNDICE GENERAL

1.	<i>EL MODELO COSMOLÓGICO ESTÁNDAR Y LAS TEORÍAS INFLACIONARIAS 4D</i>	9
1.1	Introducción	9
1.2	Elementos Sobre Relatividad General.	10
1.3	Elementos Sobre Cosmología Estándar.	15
1.4	El Corrimiento al Rojo Cosmológico.	20
1.5	Evidencias Observacionales	22
1.6	Historia Térmica del Universo.	25
1.7	Problemas del Modelo Cosmológico Estándar.	29
1.8	La Vieja Inflación.	31
1.9	Dinámica del Inflatón.	33
1.9.1	Dinámica Clásica del Inflatón.	35
1.9.2	La Aproximación de Rodadura Lenta.	36
1.9.3	Dinámica Cuántica del Inflatón.	39
1.9.4	Redefinición del Campo Cuántico.	40
2.	<i>LAS TEORÍAS DE KALUZA-KLEIN</i>	43
2.1	Introducción	43
2.2	La Idea de Kaluza.	45
2.3	La Idea de Klein	50
2.4	El Teorema de Campbell-Magaard.	54
2.5	La Teoría Espacio-Tiempo-Materia.	55
3.	<i>COSMOLOGÍA INFLACIONARIA DESDE UNA TEORÍA DE KALUZA-KLEIN NO COMPACTA 5D</i>	63
3.1	Introducción	63
3.2	Formalismo.	64
3.3	El Origen del Potencial Inflacionario 4D.	69
3.4	La Aproximación Semiclásica.	72

3.5	Inflación con $\Lambda = 0$.	75
4.	<i>INFLACIÓN ESTOCÁSTICA DESDE UNA TEORÍA DE KALUZA-KLEIN NO-COMPACTA 5D</i>	79
4.1	Introducción	79
4.2	Formalismo 5D	80
4.3	El Campo de Grano Grueso en 5D.	83
4.4	La Métrica de Ponce de León y la Expansión De-Sitter 4D.	85
4.5	Dinámica Estocástica 4D para χ_L en una Expansión De-Sitter.	87
5.	<i>FLUCTUACIONES ESCALARES DE LA MÉTRICA DESDE UNA TEORÍA DE KALUZA KLEIN NO COMPACTA 5D</i>	92
5.1	Introducción.	92
5.2	Formalismo.	93
5.3	Ecuaciones de Lagrange.	95
5.4	Las Ecuaciones de Einstein en 5D.	95
5.5	Normalización del campo Φ en 5D	96
5.6	Expansión De-Sitter Efectiva 4D.	98
5.7	Dinámica de Φ en una expansión de Sitter Efectiva 4D	98
5.7.1	Fluctuaciones de la Densidad de Energía.	100
6.	<i>INFLACIÓN GRAVITOELECTROMAGNÉTICA DESDE UNA TEORÍA DE KALUZA KLEIN NO COMPACTA 5D</i>	103
6.1	Introducción	103
6.2	Formalismo Pentadimensional	106
6.2.1	El Campo Electromagnético 4D embebido en 5D	108
6.3	Dinámica Efectiva Tetradimensional del Campo Electromagnético A_μ	110
6.3.1	Condiciones de Clasicidad para A_μ	112
6.3.2	Campos Electromagnéticos durante inflación	113
6.4	Campos Magnéticos Semilla inducidos	114
7.	<i>Discusión y Conclusiones</i>	120

<i>Apéndice</i>	122
<i>A. Demostración del teorema de Campbell Magaard</i>	123

INTRODUCCIÓN

Uno de los pilares de la cosmología moderna es la teoría inflacionaria del universo. Hasta finales de los 70's el modelo cosmológico estándar era el modelo de la gran explosión. Sin embargo este modelo no podía explicar, entre otras cosas, el origen de la estructura en el universo. Una solución que se dió a este problema fue incluir en el modelo cosmológico estándar un período de expansión acelerada superlumínica en el universo temprano llamado inflación. El primer modelo inflacionario fue propuesto por Starobinsky [1]. Posteriormente Guth [2] propuso el modelo conocido actualmente como "inflación vieja". Sin embargo, ninguno de estos modelos estaba libre de problemas. Así, en los 80's Linde propone el modelo conocido como inflación caótica [3, 4] que ha sido la base de un gran número de modelos inflacionarios con los que se cuenta en la actualidad. La teoría inflacionaria del universo nos brinda un mecanismo físico para la generación de fluctuaciones primordiales en la densidad de energía de una manera consistente. Estas fluctuaciones son estudiadas en el marco de la teoría relativista de perturbaciones cosmológicas. Haciendo uso de esta teoría es posible describir el proceso de formación de estructura en el universo temprano [5]. Además es indispensable relacionar las predicciones de los escenarios inflacionarios con las evidencias observacionales más recientes, basadas principalmente en las anisotropías del fondo de radiación cósmica (CMBR). En los modelos inflacionarios con mayor grado de aceptación, la dinámica es descrita por un campo escalar llamado inflatón que consta una componente homogénea y otra inhomogénea. La componente homogénea es interpretada como un campo clásico que controla la expansión del universo, mientras que la componente inhomogénea es responsable de las fluctuaciones cuánticas del inflatón que originan las fluctuaciones primordiales en la densidad de energía.

En la actualidad las teorías físicas en más de cuatro dimensiones son acreedoras de gran interés por parte de la comunidad científica. Hasta el verano de 2005 una gran cantidad de artículos sobre dimensiones extra extendidas [6], dimensiones extra torcidas [7] y dimensiones extra universales [8], han sido publicados y citados. El estudio de modelos que involucran dimensiones extra son principalmente motivados por teorías que tratan de incorporar la gravedad y las interacciones de norma de una manera consistente y en un sólo contexto. Algunas de estas teorías son la teoría de cuerdas

y su extensión la teoría M, así como la teoría de n-branas. La idea de dimensiones extra en física fue propuesta inicialmente por Gunnar Nordström en 1914 [9] y posteriormente por Kaluza en 1921 [10] y Klein en 1926 [11]. Su idea básicamente era unificar gravedad con electromagnetismo mediante la introducción de una coordenada extra. Desde entonces hasta la actualidad la posible existencia de dimensiones extra ha tenido gran motivación y se han hecho varios intentos por incorporar la gravedad con las interacciones de norma en un esquema único.

Por su parte la cosmología también se ha visto impactada por las teorías en más de cuatro dimensiones. En la actualidad una de las teorías en más de cuatro dimensiones con gran impacto en cosmología es el mundo brana. En este escenario la pregunta acerca de cuán grandes deben ser las dimensiones extra de tal manera que sus implicaciones no entren en conflicto con las evidencias observacionales es de gran relevancia. Sin embargo, para muchos investigadores una pregunta aun más interesante es si las dimensiones extra se manifiestan de alguna manera. En el escenario de los mundos brana la materia se localiza sobre una hipersuperficie llamada brana, embebida en un espacio-tiempo de dimensión mayor denominado bulto [12]. La principal motivación de este tipo de modelos proviene de las teorías de cuerdas y de su extensión la teoría M. La propuesta de gran interés de estos escenarios sobre cosmología es que nuestro universo puede ser un objeto tipo brana donde las partículas elementales son confinadas sobre una brana y solo la gravedad y otros tipos de materia exótica como algunos campos escalares tales como el dilatón, pueden propagarse a través del bulto. En las cosmologías del mundo brana las ecuaciones de Friedmann resultan modificadas, y en particular cuando se considera un modelo pentadimensional la materia es descrita por un campo escalar confinado a la brana y la gravedad se propaga a través del bulto. Algunos de los modelos mundo brana más simples fueron los propuestos por Randall y Sundrum [7, 13].

Otra teoría de gran relevancia en el contexto de los modelos cosmológicos en más de cuatro dimensiones y sobre la cual se basa esta tesis es la teoría espacio-tiempo-materia también conocida como teoría de materia inducida. Esta teoría pentadimensional, desarrollada en los 90's por Paul S. Wesson, J. Ponce de León y colaboradores, puede pensarse como una teoría de Kaluza-Klein no compacta debido a que la quinta dimensión es extendida. Sus creadores, basados en el teorema de Campbell-Magaard mostraron que es posible

interpretar las propiedades clásicas de la materia tetradimensional como resultado de la geometría riemanniana puramente pentadimensional. Todo esto permitiendo que los campos físicos dependan libremente de la quinta dimensión y sin hacer ninguna suposición acerca de la topología de la misma. En otras palabras, en la teoría espacio-tiempo-materia las ecuaciones de campo tetradimensionales con fuentes pueden ser localmente embebidas en ecuaciones de campo pentadimensionales sin fuentes [14]. En este escenario existe una clase de modelos cosmológicos pentadimensionales que se reducen a los usuales tetradimensionales (los del tipo Friedmann-Robertson-Walker) sobre hipersuperficies tetradimensionales mediante la foliación de la coordenada extra. En la presente tesis desarrollamos algunos formalismos usando las ideas de la teoría de materia inducida que nos permitirán estudiar cosmología inflacionaria en el marco de una teoría de Kaluza Klein no compacta desde un vacío aparente pentadimensional. Para ello hemos preparado la tesis con la estructura descrita a continuación.

En el primer capítulo establecemos los elementos básicos de la teoría de la relatividad general y del modelo cosmológico estándar. Así mismo estudiamos la dinámica inflacionaria estándar tetradimensional. En el segundo capítulo estudiamos la teoría de Kaluza Klein típica. Además enunciamos el teorema de Campbell-Magaard y estudiamos los elementos básicos de la teoría espacio-tiempo-materia enfocándonos en el escenario cosmológico. En el tercer capítulo establecemos un formalismo pentadimensional que nos permitirá describir el período inflacionario del universo desde un vacío aparente pentadimensional. En este formalismo el potencial inflacionario tetradimensional es inducido geoméricamente y la condición de rodadura lenta se satisface de manera natural. En el cuarto capítulo desarrollamos un tratamiento estocástico pentadimensional que permite describir la era inflacionaria mediante un campo de grano grueso y otro de grano fino. Por simplicidad se estudia el caso de una expansión de De-Sitter sin que esto afecte la generalidad del formalismo. En el quinto capítulo estudiamos inflación de De-Sitter efectiva tetradimensional desde un vacío aparente pentadimensional tomando en cuenta fluctuaciones escalares de la métrica invariantes de norma. Como veremos en este capítulo, el espectro de estas fluctuaciones tiene dependencia de la quinta dimensión. En el sexto capítulo desarrollamos un formalismo inflacionario desde un vacío aparente pentadimensional en donde la materia efectiva tetradimensional y los campos electromagnéticos efectivos tetradimensionales son descritos de manera unificada y geométrica. Este

formalismo permite explicar tanto las semillas de materia como las de los campos magnéticos cosmológicos, al final de inflación. Una estimación del valor de esos campos magnéticos semilla en la actualidad es incluida. El séptimo y último capítulo es dejado para las conclusiones y comentarios finales. Finalmente, se anexa un apéndice con la demostración del teorema de Campbell-Magaard.

1. EL MODELO COSMOLÓGICO ESTÁNDAR Y LAS TEORÍAS INFLACIONARIAS 4D

1.1 *Introducción*

La Cosmología moderna es una ciencia multidisciplinaria considerada como una línea de investigación de actualidad. Esta ciencia requiere del apoyo, entre otras, de la Teoría Cuántica de Campos, la Física de Partículas, la Termodinámica, la Física Estadística, e inclusive de las teorías modernas más exóticas como las teorías de Supercuerdas y teorías de Branas.

Una gran cantidad de modelos cosmológicos están basados en la teoría de la relatividad general (TRG), introducida por Albert Einstein en 1916. Los modelos cosmológicos de vanguardia como los soportados por las teorías de branas, las teorías de Kaluza Klein y algunas otras teorías en más de cuatro dimensiones, basan su formalismo en la TRG. Más aun, existen teorías en menos de cuatro dimensiones conocidas como teorías en el plano, como por ejemplo gravedad 1+1 cuya estructura fundamental es la de la TRG. Sin duda alguna, la TRG es una herramienta indispensable que permite el acceso a importantes disciplinas entre ellas la de nuestro interés en esta tesis, la cosmología.

Dada la imposibilidad de experimentar con nuestro universo, y aunado a esto el hecho de que sólo se cuenta con algunos datos observacionales, hacen que la construcción de modelos que describan su dinámica, sea una tarea por demás complicada. La existencia de estas evidencias observacionales permite llevar a cabo el contraste con las predicciones de los diferentes modelos teóricos dando como resultado una idea más precisa del origen y evolución del universo.

El modelo Cosmológico Estándar es el que en la actualidad se ha visto más favorecido con las recientes generaciones de datos observacionales. Sin embargo, no está libre de problemas. Hasta finales de la década de los 70's,

el Modelo Cosmológico Estándar no podía explicar entre otras cosas, la homogeneidad e isotropía a gran escala detectadas en la radiación cósmica de fondo, y mucho menos las pequeñas desviaciones de ésta a escalas angulares menores a 1° de arco. Los problemas del modelo cosmológico estándar tuvieron una solución con la aparición en la década de los 80's de la teoría inflacionaria. La teoría Inflacionaria surgió como un intento por resolver algunos de los problemas del modelo cosmológico estándar provocados por antiguas reliquias predichas genéricamente por modelos de altas energías, tales como la creación de monopolos magnéticos. Posteriormente resultó que inflación resolvía algunos enigmas adicionales del modelo cosmológico, tales como la generación de perturbaciones cosmológicas y el problema de planaridad. Esta faceta de la teoría estableció las sólidas bases que la han sustentado desde hace aproximadamente 25 años. Desde esa época hasta la actualidad la teoría no solamente ha sobrevivido, sino que se ha mantenido en una posición bastante fuerte gracias a que las llamadas teorías competidoras han sido abatidas por las evidencias observacionales, mismas que han fortalecido y favorecido a la teoría inflacionaria.

Actualmente cuando se habla del Modelo Cosmológico Estándar se hace referencia al modelo cosmológico que resulta de la unión de la antigua Teoría de la Gran Explosión y la Teoría Inflacionaria actuando ésta como un suplemento. En la siguiente sección estudiaremos los elementos básicos de la TRG que nos permitan sentar las bases para abordar el modelo cosmológico estándar.

1.2 *Elementos Sobre Relatividad General.*

La teoría de la Relatividad General es, en términos simples, un modelo gravitacional en donde la gravedad se manifiesta como la curvatura del espacio-tiempo. El espacio-tiempo (M, g) es definido en este contexto como una variedad Riemanniana analítica 4-dimensional M dotada con una métrica lorentziana g . Detalles sobre estos conceptos pueden encontrarse en libros estándar sobre relatividad general [15]-[17].

En el contexto de la teoría de la relatividad general la geometría del espacio-tiempo se define a través de una métrica, que en teorías de gravitación se representa por un tensor simétrico de segundo orden, cuyas componentes covariantes en un sistema de coordenadas $\{x^\mu\}$ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) se denotan

por $g_{\mu\nu}$. El cuadrado de la distancia entre dos puntos vecinos situados en el espacio-tiempo es dado por el elemento diferencial de longitud

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (1.1)$$

Bajo una transformación general de coordenadas $x^\mu \longrightarrow \tilde{x}^\mu$, las nuevas componentes de la métrica se obtienen usando la expresión

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\rho}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \tilde{x}^\nu} g_{\rho\sigma}. \quad (1.2)$$

Es posible definir una derivada covariante asociada a esta métrica, que denotaremos por ∇_μ y cuya acción sobre un tensor mixto de segundo orden está dada por

$$\nabla_\lambda T^\mu{}_\nu = \partial_\lambda T^\mu{}_\nu + \Gamma^\mu{}_{\lambda\sigma} T^\sigma{}_\nu - \Gamma^\sigma{}_{\lambda\nu} T^\mu{}_\sigma, \quad (1.3)$$

siendo las funciones $\Gamma^\mu{}_{\nu\alpha}$ las conexiones afines definidas en (M, g) [18]. Sin embargo, puede probarse que si una variedad M posee una métrica g , entonces existe una única conexión simétrica $\Gamma^\mu{}_{\lambda\sigma}$ llamada conexión de Christoffel o Símbolos de Christoffel, definidos como

$$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}), \quad (1.4)$$

donde la notación $g^{\mu\nu}$ corresponde a las componentes contravariantes del tensor métrico g , y satisfacen $g_{\mu\sigma} g^{\sigma\nu} = \delta^\nu{}_\mu$. Es conveniente aclarar que los símbolos de Christoffel no son tensores, pues no se transforman como tales.

La curvatura del espacio-tiempo es determinada por el “Tensor de Riemann”, cuyas componentes pueden expresarse en términos de los símbolos de Christoffel de acuerdo a

$$R_{\lambda\mu\nu}{}^\sigma = \partial_\mu \Gamma^\sigma{}_{\lambda\nu} - \partial_\lambda \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu} + \Gamma^\sigma{}_{\lambda\nu} \Gamma^\rho{}_{\sigma\mu} - \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu} \Gamma^\rho{}_{\sigma\lambda}, \quad (1.5)$$

con $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$. A partir de una contracción del tensor de Riemman se construye el tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$, cuyas componentes covariantes se definen por

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\sigma\nu}{}^\sigma. \quad (1.6)$$

La traza del tensor de Ricci define a la curvatura escalar R , dada por

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (1.7)$$

Las ecuaciones de campo de Einstein relacionan la geometría del espacio-tiempo con la materia contenida en el mismo. La geometría aparece en las ecuaciones de Einstein a través de $R_{\mu\nu}$ y R , construidos a partir del tensor métrico. Estos últimos se incluyen en el tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$ dado a través de

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}, \quad (1.8)$$

que por construcción satisface la identidad $\nabla_{\mu}G^{\mu}{}_{\nu} = 0$. La materia entra en las ecuaciones de Einstein a través del tensor energía momento denotado por $T_{\mu\nu}$, cuya componente tiempo-tiempo, escrita en forma mixta, corresponde a la densidad de energía. Las componentes tiempo-espacio, escritas también en forma mixta, corresponden a la densidad de momento y las componentes espacio-espacio al tensor de esfuerzo. Las ecuaciones de campo de Einstein son

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (1.9)$$

donde el término $\Lambda g_{\mu\nu}$ proviene de la libertad que da la condición $\nabla_{\mu}G^{\mu}{}_{\nu} = 0$. El parámetro Λ es conocido por razones históricas como Constante Cosmológica y su significado en el contexto cosmológico será analizado posteriormente.

Una manera alternativa de obtener las ecuaciones de campo de Einstein es mediante el uso de un principio variacional comunmente denominado principio de mínima acción. Considerando una métrica con signatura $(+, -, -, -)$, la correspondiente acción es dada por

$$\mathcal{S} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda + \mathcal{L}_{mat}), \quad (1.10)$$

donde \mathcal{L}_{mat} es una densidad lagrangiana asociada a materia y g es el determinante de la métrica. Puede verse facilmente que con ayuda de la siguiente definición

$$T^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_{mat})}{\delta g_{\mu\nu}}, \quad (1.11)$$

la variación de la acción (1.10) con respecto a la métrica $g_{\mu\nu}$ nos da las ecuaciones de campo de Einstein

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (1.12)$$

que coinciden exactamente con (1.9). Debe notarse que la constante cosmológica puede también interpretarse como un tensor energía momento $T_{\mu\nu} =$

$-(8\pi G)^{-1}\Lambda g_{\mu\nu}$, el cual se asocia a una ecuación de estado de vacío.

Por inducción el tensor energía momento en las ecuaciones de Einstein debe satisfacer

$$\nabla_{\mu}T^{\mu}{}_{\nu} = 0. \quad (1.13)$$

Esta relación es interpretada como una generalización, en el contexto de un espacio-tiempo curvo, de las leyes de conservación usuales para la energía y el momento.

En la TRG una geodésica es una generalización del concepto euclidiano de línea recta. En un espacio euclidiano una línea recta es la trayectoria que nos da la distancia más corta entre cualesquiera dos puntos. En la TRG una geodésica se define como una curva a través de la cual el proceso de transporte paralelo da como resultado los vectores tangentes asociados a esta curva [15]. Cabe mencionar que en general sobre una variedad con una conexión arbitraria $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$, el proceso de transporte paralelo aplicado sobre una curva no necesariamente genera vectores tangentes a la misma. De hecho los conceptos de transporte paralelo y vectores tangentes son tópicos tratados por separado en la literatura.

Consideremos una Variedad como en Relatividad General dotada de una conexión afín de Christoffel. Sean $U^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{d\sigma}$ las componentes contravariantes de un vector tangente a la curva $x^{\mu}(\sigma)$, donde σ es un parámetro real que caracteriza a la curva. La condición de que U^{μ} sea transportado paralelamente a lo largo de la curva es

$$\frac{dU^{\mu}}{d\sigma} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}U^{\alpha}U^{\beta} = f(\sigma)U^{\mu}, \quad (1.14)$$

donde $f(\sigma)$ es una función real arbitraria. La ecuación (1.14) puede escribirse de manera más simple utilizando un parámetro afín. Cualquier parámetro relacionado con el tiempo propio τ , en la forma $\lambda = a\tau + b$, con a y b constantes reales, se llama parámetro afín. Eligiendo el parámetro afín λ , la expresión (1.14) se transforma en

$$\frac{dU^{\mu}}{d\lambda} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}U^{\alpha}U^{\beta} = 0. \quad (1.15)$$

Esta relación se llama como Ecuación de Geodésicas, y puede verse que para el caso de un espacio euclidiano, corresponde a la línea recta $\frac{d^2x^{\mu}}{d\lambda^2} = 0$.

En la TRG la principal utilidad de la ecuación de geodésicas es la determinación de trayectorias sobre el espacio-tiempo asociadas a partículas sobre las cuales no actúa ninguna otra fuerza que la gravitacional. De hecho la ecuación (1.15) puede pensarse como la generalización de la segunda ley de Newton para el caso de fuerza nula.

Sin embargo, es posible introducir fuerzas agregando los términos apropiados del lado derecho de (1.15), como es el caso del movimiento de una partícula con masa m y carga eléctrica q en Relatividad Especial, cuya ecuación de movimiento es

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = \frac{q}{m} F^\mu{}_\nu \frac{dx^\nu}{d\tau}, \quad (1.16)$$

donde $F^\mu{}_\nu$ es el tensor mixto de Maxwell.

La ecuación de geodésicas se aplica tanto a partículas masivas como no masivas. En el caso de partículas masivas usualmente se toma como parámetro λ el tiempo propio τ , de tal manera que el correspondiente vector tangente U^μ es normalizado a través de la expresión $g_{\mu\nu}U^\mu U^\nu = 1$ si la signatura de la métrica es $(+, -, -, -)$ y $g_{\mu\nu}U^\mu U^\nu = -1$ si la signatura es la opuesta $(-, +, +, +)$. Estas últimas condiciones definen la geometría hiperbólica en la Variedad y básicamente significa que los vectores U^μ que las satisfacen son tipo tiempo, lo cual es de gran relevancia física en cosmología.

Para partículas no masivas, y en particular para el caso del fotón, el vector tangente es usualmente denotado por K^μ y se define como un vector nulo o tipo luz, de tal manera que se satisface la relación $g_{\mu\nu}K^\mu K^\nu = 0$.

Una vez que hemos discutido los elementos básicos de la TRG que hicieron de ella uno de los escenarios más empleados en la formulación de modelos cosmológicos, en la siguiente sección analizaremos brevemente como estos elementos han sido implementados para la construcción del considerado modelo cosmológico estándar hasta la década de los 70's, y cuyos elementos siguen vigentes en el actual modelo cosmológico estándar.

1.3 Elementos Sobre Cosmología Estándar.

Un modelo cosmológico se construye a partir de una teoría gravitacional y de un principio cosmológico. Para que un modelo pueda considerarse realista, sus predicciones teóricas deben estar de acuerdo con las evidencias observacionales en un rango aceptable.

Por lo general, los modelos cosmológicos basados en la TRG y en el principio cosmológico han predicho de manera natural la expansión observada del Universo [24, 25, 26]. Sin embargo, la expansión de Hubble no da suficiente evidencia observacional como para contrastar la totalidad de la información obtenida del modelo de la gran explosión. Sí bien la teoría de la relatividad general es capaz de describir la evolución cosmológica de cualquier distribución de materia dada, resulta muy afortunado que nuestro Universo observable parezca tan homogéneo e isotrópico a gran escala. Este es un punto interesante que abordaremos a lo largo de las precedentes secciones.

La formulación del modelo de la gran explosión comenzó en la década de los 1940's con el trabajo de George Gamow y sus colaboradores Alpher y Herman. Buscando un origen cosmológico a las abundancias de los elementos químicos, hicieron la propuesta de que el Universo temprano debió ser lo suficientemente caliente y denso como para que pudiera llevarse a cabo el proceso que hoy conocemos como nucleosíntesis del hidrógeno. Según ellos, posteriormente el Universo debió expandirse y enfriarse hasta el estado en el que se encuentra ahora [27].

En 1948, Alpher y Herman predijeron que una consecuencia directa de su modelo era la presencia actual, de una radiación remanente de fondo con una temperatura del orden de unos pocos grados kelvin [28, 29]. Esta radiación fue observada 16 años después como un fondo de radiación de microondas (CMBR) [30]. De hecho fue la detección de CMBR con una temperatura de $3^{\circ}K$, la que impulsó al modelo de la gran explosión hasta postularlo como el mejor candidato para describir la dinámica nuestro Universo. Trabajos posteriores sobre nucleosíntesis confirmaron la necesidad de que el Universo temprano fuera caliente y denso.

Todos estos modelos cosmológicos relativistas tuvieron problemas con sus condiciones iniciales, de los cuales la solución moderna es la cosmología in-

flacionaria, t3pico que abordaremos posteriormente. Esta secci3n la dedicaremos al estudio de los fundamentos del modelo cosmol3gico est3ndar hasta antes de la aparici3n de la teor3a inflacionaria.

El modelo cosmol3gico est3ndar en la d3cada de los 70's, tambi3n conocido como teor3a de la gran explosi3n, se construye a partir de las ecuaciones de Einstein implementando ciertas condiciones sobre la geometr3a del espacio-tiempo y la materia contenida en 3ste. Una de las principales suposiciones en cosmolog3a es el llamado "Principio Cosmol3gico", que asevera que el Universo es espacialmente homog3neo e isotr3pico. Este principio puede considerarse como una extensi3n del principio copernicano en el sentido de que equivale a decir que todas las posiciones espaciales en el Universo son esencialmente equivalentes. Sin embargo en la actualidad se tiene evidencia de que esto es v3lido s3lo en primera aproximaci3n, es decir, a gran escala.

El principio cosmol3gico es muy restrictivo y las 3nicas m3tricas compatibles con el principio cosmol3gico son las m3tricas del tipo Friedmann-Robertson-Walker (FRW). En el sistema de coordenadas locales (t, r, θ, ϕ) estas m3tricas toman la forma

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \right], \quad (1.17)$$

donde k es la constante de curvatura espacial que inicialmente es un numero real. Mediante un rescalamiento de la coordenada radial r elegimos que k tome s3lo los valores discretos $k = 0, +1, -1$, que corresponden a geometr3as espaciales: plana, cerrada o el3ptica y abierta o hiperb3lica, respectivamente. Bajo esta elecci3n, la coordenada radial r es adimensional, de tal manera que el factor de escala $a(t)$ posee unidades de longitud. El factor de escala $a(t)$ nos da una medida de la expansi3n del Universo y determina la distancia propia en t3rminos de las coordenadas. Una alternativa muy com3n, es definir un factor de escala adimensional $R(t) = \frac{a(t)}{a_0}$, donde $a_0 = a(t_0)$, es a evaluado a un tiempo fijo t_0 .

En el modelo cosmol3gico est3ndar la materia contenida en el Universo, compatible con el principio cosmol3gico, es descrita por un tensor energ3a momento asociado a un fluido perfecto, que en forma covariante tiene la forma

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P)U_\mu U_\nu \pm P g_{\mu\nu}, \quad (1.18)$$

donde ρ corresponde a una densidad de energía y P a una presión isotrópica. El signo (+) corresponde al caso donde la métrica tiene signatura $(-, +, +, +)$ y el signo(-) al caso de signatura $(+, -, -, -)$. Las U^μ corresponden a las cuadrivelocidades del fluido en un sistema de referencia dado.

En este modelo al igual que en todos los modelos físicos descritos en el marco de la teoría de la relatividad general, es de importancia crucial definir la clase de observadores que medirán las diferentes cantidades físicas involucradas en el modelo. Esto es lo mismo que especificar un sistema de referencia desde el cual se describirá la evolución del sistema físico. La clase de observadores que se elijen por lo general en Cosmología son los observadores en comovimiento con la expansión del Universo. Estos se especifican a través de sus cuadrivelocidades $U = U^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \delta^\mu_0 \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (1, 0, 0, 0)$. Por consiguiente, partículas en comovimiento con la expansión del Universo, son aquellas cuyas coordenadas espaciales permanecen constantes en el tiempo, y satisfacen la ecuación de geodésicas (1.15).

Sustituyendo la métrica del tipo FRW (1.17) en las ecuaciones de Einstein (1.9) y, con ayuda de (1.18) se obtienen las llamadas ecuaciones de Friedmann-Lemaître

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}, \quad (1.19)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{\Lambda}{3} - \frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P). \quad (1.20)$$

Estas ecuaciones definen la dinámica del Universo en el modelo cosmológico estándar. Una consecuencia inmediata de estas dos ecuaciones es la ecuación de continuidad

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0, \quad (1.21)$$

donde $H = \frac{\dot{a}}{a}$ es el parámetro de Hubble. La ecuación de continuidad puede también obtenerse a partir de la conservación de la energía y el momento $\nabla_\mu T^\mu{}_\nu = 0$, como mencionamos anteriormente.

La ecuación (1.19) es llamada la ecuación de Friedmann y tiene una interpretación mecánico-clásica muy simple, si despreciamos (por el momento) el término de la constante cosmológica Λ . Interpretando $-\frac{k}{a^2}$ como una “energía total”, vemos que la evolución del Universo es gobernada por una competencia entre el término de energía potencial $\frac{8\pi G}{3}\rho$ y el término de energía cinética

$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2$. Para $\Lambda = 0$ es claro que el Universo debe expandirse o contraerse. En este esquema, el destino del Universo es determinado por la constante de curvatura espacial. Para $k = +1$ el Universo re-colapsará en un tiempo finito, mientras que para $k = 0, -1$ el Universo se expandirá indefinidamente. Sin embargo, estas conclusiones tan simples se ven alteradas cuando consideramos una $\Lambda \neq 0$ arbitraria.

La mayor parte de la historia evolutiva del Universo en el modelo cosmológico estándar, es descrita suponiendo que, primero la radiación y posteriormente la materia, dominan en la densidad de energía total. En la actualidad esta perspectiva ha cambiado debido a la reciente generación de evidencias observacionales, punto que abordaremos posteriormente.

Cuando una sola componente, cualquiera que ésta sea, domina en la densidad de energía total, cada una de ellas se distingue por una ecuación de estado de la forma $P = \omega\rho$, donde ω es el parámetro de estado que caracteriza a la componente dominante en turno. Aunque en el modelo estándar ω es considerada una constante, en la actualidad existen modelos que trabajan con $\omega = \omega(t)$. Esta ecuación de estado incluye los dos principales tipos de materia en cosmología estándar, el gas de partículas relativistas que corresponde a $\omega = 1/3$ y, la materia no relativista determinada por $\omega = 0$. En ambos casos la ecuación de conservación (1.21) puede integrarse para dar

$$\rho \sim a^{-3(1+\omega)}. \quad (1.22)$$

sustituyendo en (1.19), para $\Lambda = 0$ y $k = 0$ se obtiene

$$3 \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = 8\pi G\rho_0 \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3(1+\omega)}, \quad (1.23)$$

donde, por convención el subíndice 0 denota cantidades evaluadas al tiempo actual. De esta manera se obtiene que $\dot{a}^2 \sim a^{2-3(1+\omega)}$, que es la ecuación de evolución para el factor de escala. Así, para un Universo dominado por radiación $a(t) \sim t^{1/2}$ y para un Universo dominado por materia no relativista $a(t) \sim t^{2/3}$, lo que muestra la diferente tasa de expansión del Universo en estas épocas.

Si la componente dominante corresponde a una fuente de energía de vacío V_0 , ésta debe actuar como una constante cosmológica con $\Lambda = 8\pi G V_0$ y una

ecuación de estado parametrizada por $\omega = -1$. En este caso la solución de (1.19) genera una expansión exponencial del Universo dada por

$$a(t) = a_0 e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t}. \quad (1.24)$$

Una forma de cuantificar la rapidez de la expansión es mediante el parámetro de desaceleración $q(t)$, definido mediante

$$q(t) = -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2}, \quad (1.25)$$

de tal manera que si $q < 0$ el Universo está en una etapa de expansión acelerada y si $q > 0$ el Universo se encuentra en una etapa de expansión desacelerada.

El contenido de materia en el Universo es cuantificado por el parámetro de densidad Ω definido a través de

$$\Omega(t) = \frac{\rho(t)}{\rho_c(t)}, \quad \rho_c(t) = \frac{3H(t)^2}{8\pi G}, \quad (1.26)$$

donde la densidad crítica ρ_c corresponde a la densidad de energía total para un Universo con geometría espacial plana. Dado que la densidad de energía $\rho(t)$ es siempre positiva, entonces Ω es un parámetro definido positivo. A partir de la ecuación de Friedmann (1.19) obtenemos la relación

$$\Omega - 1 + \frac{\Lambda}{3H^2} = \frac{k}{a^2H^2}. \quad (1.27)$$

Esta ecuación indica que existe una relación directa entre la cantidad de materia contenida en el Universo para cada tiempo, vista a través de Ω , y la constante de curvatura espacial k . Si $\Lambda = 0$, un $\Omega > 1$ corresponde a $k = 1$, un $\Omega = 1$ corresponde a $k = 0$ y finalmente un $\Omega < 1$ corresponde a $k = -1$. En este sentido el destino del Universo es determinado por la curvatura espacial k y viceversa. Además, resulta claro de (1.27) que la presencia de una energía de vacío puede alterar dramáticamente la evolución del Universo. Por ejemplo si $\Lambda < 0$, el Universo eventualmente recolapsará independientemente del signo de k . Para valores grandes de Λ (mayores que el valor estático de Einstein para detener cualquier expansión o contracción cosmológica), incluso un Universo cerrado se expandirá para siempre.

El radio de curvatura espacial del Universo se define por

$$R_{curv} = \frac{H^{-1}}{|\Omega - 1|^{1/2}}. \quad (1.28)$$

En términos físicos R_{curv} nos da la escala para las separaciones espaciales en las cuales el efecto de la curvatura espacial es muy pronunciado. Para el caso de un Universo con $k = +1$ el radio de curvatura coincide con el radio de la 3-esfera.

Es necesario distinguir entre las diferentes contribuciones a la densidad de energía total. Por tal motivo es conveniente definir distintos parámetros de densidad actuales. Uno asociado a materia Ω_m y otro a partículas relativistas (radiación) Ω_r , además de la cantidad asociada al vacío $\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2}$. En modelos más generales y recientes, se hace la suposición de que la densidad de energía de vacío no es constante, y se denota al parámetro de densidad actual asociado a vacío por Ω_v . De esta forma, la ecuación (1.27) se transforma en

$$\frac{k}{a_0^2 H_0^2} = \Omega_m + \Omega_r + \Omega_v - 1 \quad (1.29)$$

donde el subíndice “0” denota valores en la época actual. Así, la suma de las diferentes contribuciones determinan el signo de la curvatura escalar k .

Del análisis expuesto en esta sección claramente vemos que la expansión del Universo es algo que el modelo cosmológico estándar predice de manera natural. Por otro lado, la expansión del Universo es un hecho observacional con gran soporte en la actualidad. Para tener una idea clara de las evidencias observacionales que soportan la expansión, un concepto que juega un papel muy importante en este descubrimiento es el de corrimiento al rojo cosmológico, sobre el cual nos enfocaremos en la siguiente sección.

1.4 El Corrimiento al Rojo Cosmológico.

Las propiedades conocidas del Universo son estudiadas a partir del análisis espectroscópico de la radiación proveniente del espacio exterior. Cuando los astrónomos comenzaron a estudiar los espectros electromagnéticos de las estrellas, notaron que estos tenían los mismos conjuntos característicos de frecuencias ausentes que las estrellas de nuestra propia galaxia, sólo que

desplazados hacia el extremo correspondiente al sector infrarrojo del espectro. El parámetro empleado para medir este desplazamiento es el parámetro de corrimiento al rojo z definido por

$$z = \frac{\nu_e - \nu_0}{\nu_0}, \quad (1.30)$$

donde ν_0 es la frecuencia medida por un observador en la Tierra y ν_e la frecuencia emitida por la fuente, medida por un observador en reposo con respecto a la misma.

En la década de los 1920's Wirtz y K. Lundmark, notaron que el corrimiento al rojo aumentaba con la distancia en nebulosas espirales cercanas, con respecto a la Tierra. Ellos interpretaron, equivocadamente, que el corrimiento al rojo era debido al movimiento del sistema solar en la galaxia.

Entre 1927 y 1929, Edwin Hubble basado en observaciones extragalácticas, sugirió la existencia de una relación lineal entre la distancia luminosa a galaxias cercanas a la nuestra y el valor de z , dada por

$$z \simeq Hr, \quad (1.31)$$

donde H era una constante denominada “constante de Hubble” y r la distancia estimada hasta las diferentes galaxias en el cúmulo local.

En la actualidad se han repetido varias veces estas mediciones con altos grados de precisión confirmándose el resultado de Hubble. Llevó del orden de 40 años a la comunidad científica mundial aceptar esto, como la principal evidencia de que el Universo esta en expansión. Por otro lado, aunque inicialmente H era considerada una constante, ahora se sabe que $H(t)$ es uno de los parámetros cosmológicos más importantes, el parámetro de Hubble.

Formalmente, en el marco de la teoría de la relatividad general, la aproximación óptica geométrica nos dice que la luz viaja a través del espacio-tiempo en geodésicas nulas. Considérense dos señales de luz emitidas desde una fuente localizada. La primer señal es emitida en el punto espacio-temporal (t_e, r_e) y recibida en $(t_0, 0)$, pues estamos suponiendo un observador, ahora, localizado en el origen de coordenadas espaciales. La segunda señal es emitida en el punto $(t_e + \delta t_e, r_e)$ y recibida en $(t_0 + \delta t_0, 0)$. Como el observador se encuentra

al centro del sistema de coordenadas, entonces verá que las trayectorias de la luz que se aproximan a él son radiales, y por tanto tienen una trayectoria $x^\mu(\lambda) = (t(\lambda), r(\lambda), \theta_0, \phi_0)$. A partir de (1.17) e integrando sobre la geodésica nula que une los eventos (t_e, r_e) y $(t_0, 0)$ se obtiene la condición

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^{r_e} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}. \quad (1.32)$$

Para la geodésica nula que une los eventos $(t_e + \delta t_e, r_e)$ y $(t_0 + \delta t_0, 0)$ se obtiene análogamente

$$\int_{t_e + \delta t_e}^{t_0 + \delta t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^{r_e} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}. \quad (1.33)$$

Dado que el lado derecho de estas ecuaciones es idéntico para ambas trayectorias sucesivas, al restar (1.32) de (1.33) y tomar en cuenta que $a(t)$ varía muy poco durante la emisión de los pulsos electromagnéticos, se obtiene

$$\frac{\delta t_0}{a_0} = \frac{\delta t_e}{a_e}. \quad (1.34)$$

Esto implica que para frecuencias medidas a los tiempos de emisión y recepción, el parámetro de corrimiento al rojo z está dado por

$$1 + z = \frac{\nu_e}{\nu_0} = \frac{a_0}{a_e}. \quad (1.35)$$

Lo interesante en esta expresión es que se obtiene un tipo de corrimiento Doppler que no involucra ningún movimiento de la fuente. Se obtiene solamente como un efecto genuino asociado con la estructura de las métricas del tipo FRW. Este resultado explica satisfactoriamente el corrimiento al rojo observado en las estrellas y galaxias distantes como el generado por la expansión del Universo. Por tanto, determinando observacionalmente la distancia a diferentes objetos y sus correspondientes corrimientos al rojo, se logra una estimación del valor del parámetro en la actualidad. Más aun, la estimación de los diferentes parámetros cosmológicos observacionales es factible, siendo éste el tema de la siguiente sección.

1.5 Evidencias Observacionales

La cosmología observacional ha progresado rápidamente en los últimos años. La habilidad de cuantificar el desarrollo del Universo ha sido ampliamente

mejorada debido a las restricciones observacionales provenientes de formación de estructura LSS (Large Scale Structure). La precisión en la cosmología observacional, durante la última década, ha sido encabezada por las mediciones de anisotropías en la radiación cósmica de fondo (CMBR). Observaciones de LSS en la distribución de galaxias y supernovas con altos corrimientos al rojo han proporcionado la información complementaria requerida por los modelos. Los resultados de la misión WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe) sobre anisotropías en CMBR [54], el espectro de potencia $P(k)$ de las perturbaciones primordiales de densidad a partir de la superficie de galaxias 2dF (2-degree Field) [55] y la SDSS (Sloan Digital Sky Survey) de galaxias [56], han dado una estimación muy precisa de los parámetros cosmológicos [57, 58, 59]. En esta breve sección proporcionaremos los valores actuales estimados observacionalmente de los principales parámetros cosmológicos.

La medición de la rapidez de la expansión del Universo en la actualidad, dada por H_0 , fue uno de los proyectos clave en la misión del telescopio espacial Hubble. Su valor actual estimado es de $H_0 = 72 \pm 0.07 \frac{Km}{seg} Mpc^{-1}$ [60]. Por otro lado, los altos corrimientos al rojo en supernovas del tipo Ia (SNIa) también restringen la combinación $H_0 t_0 = 0.96 \pm 0.04$, implicando una edad actual del Universo de $t_0 = 13.6 \pm 1.5 \times 10^9$ años. En pocas palabras, se estima una edad que oscila entre los 12 100 y los 15 100 millones de años. Cabe mencionar que estos datos son consistentes con los provenientes de LSS [61]

La última restricción sobre el parámetro de densidad bariónico indica $\Omega_b = 0.022 \pm 0.002$. Este dato fue obtenido mediante la unión de las abundancias de elementos ligeros predichas por nucleosíntesis con las observaciones [62], que también es consistente con los datos obtenidos de formación de estructura [57, 58, 59].

La densidad de energía de vacío o asociada a una constante cosmológica Ω_v , puede inferirse a partir de mediciones de distancias luminosas como función del corrimiento al rojo z , usando SNIa como candelas estándar. Los resultados usando supernovas indican $\Omega_v - 1.4\Omega_m = 0.35 \pm 0.14$ [63]. Para un Universo plano (indicado por datos de CMBR + LSS), $\Omega_m = 0.29 \pm 0.05$ con un parámetro de estado $\omega = -1.02 \pm 0.2$, que es consistente con una ecuación de estado de vacío. Estas observaciones nos dicen que el Univer-

so se encuentra actualmente en una fase acelerada con una energía de vacío $\Omega_v = 0.71 \pm 0.05$ dominante (período conocido como de quinta esencia). Asimismo, la cantidad de materia oscura es dada por $\Omega_b \simeq 0.25$ y la presente aproximación para la densidad de radiación es $\Omega_\gamma \simeq 5 \times 10^{-5}$.

Una de las restricciones más interesantes y robustas obtenidas de la combinación de anisotropías en CMBR, LSS, SNIa, WMAP y otras observaciones, es sobre la curvatura espacial del Universo. El resultado obtenido $-0.4 \leq \Omega_k = \frac{-k}{a_0^2 H^2} \leq 0.1$ indica que el Universo es prácticamente espacialmente plano.

Finalmente y a manera de conclusión podemos decir que el escenario cosmológico soportado por las evidencias observacionales es el siguiente:

- La cosmología homogénea e isotrópica, con un Universo expandiéndose a partir de una fase inicial muy caliente debido a la dinámica gravitacional de las ecuaciones de Friedmann derivadas de la teoría de la relatividad general.
- Los constituyentes básicos del Universo son bariones, fotones, neutrinos, materia oscura y energía oscura.
- Las secciones espaciales homogéneas del espacio-tiempo son muy cercanas a ser geoméricamente planas (euclidianas).
- Hay generación de perturbaciones primordiales de densidad en una época inflacionaria. Estas perturbaciones son adiabáticas con un espectro de potencia $P(k)$ cercano a la invariancia de escala, con un índice espectral $n_s = 0.98 \pm 0.02$. El impacto de estas perturbaciones manifiesto en las anisotropías de CMBR indican correlación a escalas mayores al horizonte causal. La polarización de las anisotropías en CMBR provee de gran soporte a las condiciones iniciales adiabáticas y a la aparente correlación “acausal” entre las perturbaciones primordiales.
- La evolución de las perturbaciones de densidad bajo inestabilidad gravitacional a generado la estructura a gran escala del Universo.

De acuerdo estas evidencias observacionales, actualmente la materia domina sobre la radiación por un amplio margen. Sin embargo, debido a que la densidad de energía asociada a la materia decrece como a^{-3} y la asociada

a radiación como a^{-4} , en épocas tempranas del Universo la radiación era el elemento dominante. Por tanto, el Universo temprano puede describirse a través de una ecuación de estado correspondiente a radiación, lo que lleva a la necesidad de un tratamiento termodinámico de este período del Universo. La historia térmica del Universo será tratada en la siguiente sección.

1.6 *Historia Térmica del Universo.*

En la época dominada por radiación había principalmente tres procesos por los cuales la radiación interactuaba con la materia: la dispersión Compton, la doble dispersión Compton y el efecto Bremsstrahlung.

La interacción más simple de la radiación con la materia es la dispersión Compton de un fotón con un electrón. En este tipo de interacción, dependiendo de la energía de los electrones puede darse que los fotones transfieran energía a los electrones o que sea el proceso inverso. Por ejemplo, si el electrón es muy energético (electrón relativista), éste da energía a los fotones. De cualquier forma la combinación de ambos casos hace que se establezca un equilibrio térmico. Este tipo de interacción conserva el número de fotones.

Un proceso similar es el de la doble dispersión Compton, en la que al interactuar un fotón y un electrón, da como resultado un electrón y dos fotones.

Cuando los electrones encuentran iones experimentan una aceleración y por ende emiten radiación electromagnética. Este fenómeno es conocido como efecto Bremsstrahlung o emisión libre-libre. Esta interacción puede también ocurrir a la inversa debido a la habilidad cuántica de las partículas cargadas para absorber fotones provenientes de la radiación Bremsstrahlung de otra partícula cargada. De esta manera, a través del efecto Bremsstrahlung también se llega a establecer una termalización. Más aun, es posible definir una temperatura asociada a estos fotones cosmológicos, no solamente cuando interactúan con la materia ordinaria, sino también después de la época del desacoplamiento entre éstos y la materia.

El efecto neto es que la dispersión Compton es dominante para temperaturas superiores a los 90 eV , mientras que el efecto Bremsstrahlung es el proceso primario entre los 90 y 1 eV . A temperaturas superiores a 1 KeV , la doble dispersión Compton es la más eficiente.

Así pues, el hecho de alcanzar un equilibrio térmico pese a la expansión del Universo, hace posible calcular cantidades termodinámicas tales como la densidad de energía ρ , la presión P y la densidad de entropía s . En general la densidad de energía para un tipo de partícula dada i puede escribirse como

$$\rho_i = g_i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f_i(\vec{x}, \vec{p}) E(p), \quad (1.36)$$

donde g_i es el número de grados de libertad de cada partícula y $E^2(p) = m^2 + p^2$ la energía asociada a cada tipo de partícula. Notese que hemos tomado $\hbar = 1$. En esta expresión $f_i(\vec{x}, \vec{p})$ es la función de distribución y es característica de cada una de las especies. En general $f_i(\vec{x}, \vec{p})$ es dada por

$$f_i(\vec{x}, \vec{p}) = \frac{1}{e^{\frac{E_i - \mu_i}{T_i}} \mp 1}, \quad (1.37)$$

siendo T_i la temperatura de equilibrio, μ_i el potencial químico y el \mp correspondiendo a las estadísticas de Bose-Einstein y Fermi-Dirac, respectivamente.

La presión puede ser similarmente expresada por

$$P_i = g_i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f_i(\vec{x}, \vec{p}) \frac{p^2}{3E(p)}. \quad (1.38)$$

La densidad numérica de especies es definida por

$$n_i = \int dn_i = g_i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f_i(\vec{x}, \vec{p}), \quad (1.39)$$

y la densidad de entropía es

$$s_i = \frac{\rho_i + P_i - \mu_i n_i}{T_i}. \quad (1.40)$$

En el modelo estándar, un potencial químico es asociado con el número bariónico, pero como la densidad total bariónica relativa a la densidad de fotones se sabe es muy pequeña en la era dominada por radiación (del orden de 10^{-10}), el potencial químico puede despreciarse en esta etapa.

Para los fotones pueden obtenerse todas las cantidades termodinámicas. Tomando $g_i = 2$ debido a los estados de polarización del fotón, tenemos

$$\rho_\gamma = \frac{\pi^2}{15} T^4, \quad P_\gamma = \frac{1}{3} \rho_\gamma, \quad s_\gamma = \frac{4\rho_\gamma}{3T}, \quad n_\gamma = \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} T^3, \quad (1.41)$$

con $\frac{2\zeta(3)}{\pi^2} \simeq 0.2436$. Puede probarse a partir de (1.21) que la distribución térmica para el gas de fotones no es alterada por la expansión del Universo, excepto por un rescalamiento global de la temperatura, de tal manera que $T(t) \sim a(t)^{-1}$. Lo que corresponde a un enfriamiento de un Universo que se expande adiabáticamente.

Cuando el Universo evoluciona, la tasa de reacciones entre las diferentes especies de partículas es modificada. Un análisis detallado de estos cambios posibilita la reconstrucción de la historia térmica del Universo. Debido a sus consecuencias observacionales, hay tres eventos en el pasado térmico del Universo que juegan un papel preponderante: Nucleosíntesis primordial, recombinación y el desacoplamiento de radiación y materia.

- **Nucleosíntesis Primordial:**

De acuerdo al modelo cosmológico estándar, cuando la temperatura del Universo era de 1 MeV , el plasma cósmico consistía de partículas relativistas en equilibrio como fotones, electrones, protones y positrones. A temperaturas ligeramente superiores a 1 MeV , los neutrinos se desacoplaron de los electrones de tal manera que en el plasma compartían las mismas temperaturas con otras partículas relativistas, sólo que no se acoplaban con ellas.

De no haber habido una asimetría entre el número inicial de bariones y antibariones, lo que se esperarí­a es que estos se hubiesen aniquilado por completo cuando la temperatura era de 1 MeV . Debido a esta asimetría, la densidad numérica de bariones n_b era 10^{-10} veces menor a la densidad numérica de fotones n_γ , de hecho se tiene el cociente $\frac{n_b}{n_\gamma} \simeq 5.5 \times 10^{-10}$.

Cuando la temperatura del Universo llegó a 0.1 MeV la energía cinética de partículas como protones y electrones era tal, que se hizo posible la formación de núcleos atómicos. A este proceso se le denomina nucleosíntesis nucleosíntesis.

- **Recombinación:**

Los bariones estuvieron en forma de plasma hasta que el Universo tenía aproximadamente 300 000 años, cuando la temperatura era cercana a los $3000^{\circ}K$, temperatura suficiente como para que los protones capturasen electrones libres y formaran átomos de hidrógeno. A este proceso se le llama recombinación.

La energía de ionización del átomo de hidrógeno es de $13.6 eV$, pero la recombinación no ocurrió sino hasta que el Universo llegó a una temperatura característica de $0.3 eV$. Este fenómeno tiene varias causas. La entropía elevada del Universo hace que la rapidez de captura de los electrones sea sólo ligeramente mayor a la rapidez de fotodisociación. Más aun, cada electrón capturado en el estado base emite un fotón capaz de ionizar otro átomo recién formado, impidiendo la recombinación de átomos de hidrógeno. De esta forma, cuando la temperatura estuvo por debajo de la energía de ionización del hidrógeno, la materia neutra finalmente se condensa.

- **Desacoplamiento entre Radiación y Materia:**

Hasta la época de recombinación el Universo era opaco a la radiación electromagnética, debido a la dispersión de los fotones por electrones libres. Cuando la recombinación tuvo lugar, la densidad de electrones libres disminuyó bastante, generando el desacoplamiento entre la radiación y la materia. Lo que vemos hoy como un fondo cósmico de microondas (CMBR), fue generado por los fotones fósiles que interactuaron por última vez con la materia. Esto es a lo que se llama última superficie de dispersión, que se piensa como una cáscara esférica de grosor finito a una distancia de aproximadamente 15 billones de años luz, cuando la temperatura era poco menor a los $3000^{\circ}K$.

La CMBR representa en la actualidad una evidencia observacional preponderante para la medición de los parámetros cosmológicos y el estudio de modelos inflacionarios. Sin embargo, sabemos observacionalmente que CMBR es isotrópica hasta una resolución de 1° de arco. Este hecho es sólo uno de tantos problemas que el modelo cosmológico estándar de los 70's no pudo explicar. En la siguiente sección abordaremos un poco más detalladamente en qué consistían estos problemas.

1.7 Problemas del Modelo Cosmológico Estándar.

El modelo cosmológico estándar ha sido soportado por evidencias observacionales tan fuertes que hasta hoy sigue siendo la piedra fundamental en el entendimiento de los procesos que han tenido y tienen lugar en nuestro Universo. En particular las dos evidencias más importantes con las que se cuenta en la actualidad son el escenario de nucleosíntesis y la radiación cósmica de fondo (CMBR). Sin embargo, hacia fines de la década de los 70's se tenía conocimiento de que había una serie de problemas a los que el modelo de la gran explosión no podía dar solución. A estos problemas se les conoce como "Problemas del Modelo Cosmológico Estándar". A continuación revisaremos brevemente en qué consisten estos problemas.

- **El Problema de Homogeneidad.**

Como es sabido, a pesar de que el principio cosmológico es la hipótesis básica del modelo cosmológico estándar, en la realidad el Universo no es perfectamente homogéneo, aunque a gran escala se aproxima mucho a serlo. Evidencia de ello es la estructura existente en la actualidad como es el caso de galaxias, cúmulos de galaxias, etc. Dentro del modelo cosmológico estándar hasta la década de los 70's, la explicación más simple que se daba a las anisotropías en la CMBR era que correspondían a irregularidades en la última superficie de dispersión. El problema con esto es que estas inhomogeneidades correspondían a escalas mucho mayores al tamaño del horizonte causal en aquella época. De esta manera, al no poderse generar cuasalmente estas perturbaciones en el modelo de la gran explosión, éstas tendrían que incluirse como parte de las condiciones iniciales. Por tanto, no es muy claro cómo pudo ser el Universo temprano tan homogéneo e isotrópico a gran escala. El problema de homogeneidad básicamente nos dice que el modelo de la gran explosión no es capaz de explicar la homogeneidad e isotropía a gran escala del Universo.

- **El Problema de Planaridad.**

Otro enigma es la planaridad espacial de nuestro Universo. Para comprender con mayor claridad en qué consiste este problema, analicemos la ecuación (1.19). La ecuación de Friedmann (1.19), que vincula la

curvatura espacial k con el parámetro de densidad Ω , puede escribirse

$$\Omega - 1 \equiv \frac{8\pi G\rho}{3H^2} - 1 = \frac{k}{a^2 H^2}. \quad (1.42)$$

En el modelo de la gran explosión un factor de escala que describe una expansión tipo ley de potencias $a(t) \sim t^p$, con $p < 1$, es empleado para describir la evolución del Universo en dos etapas. Para $p = 1/2$ se describe una primer etapa dominada por radiación. Para $p = 2/3$ se describe una segunda etapa dominada por materia no relativista. Además, puede verse fácilmente que para $p < 1$, en ambas etapas la expansión del Universo es desacelerada. Como consecuencia de lo anterior el factor $(aH)^{-2}$ crece con el tiempo y por tanto $|\Omega - 1|$ debe diverger con el tiempo. Así, para explicar la planaridad espacial de un universo temprano se requiere de un sintonizado fino de Ω cercano a 1. De esta manera, el problema de planaridad nos dice que el modelo de la gran explosión tampoco es capaz de explicar la planaridad del Universo temprano.

- **El Problema del Horizonte.**

Uno de los problemas fundamentales en la teoría de la gran explosión es el problema del horizonte. El horizonte (de partícula) es la máxima distancia, respecto a la partícula, que puede ser cubierta por un rayo de luz. Para una trayectoria radial nula $dr = a(t)dt$ el horizonte es dado por

$$d_H(t) = a(t) \int_{t_i}^t \frac{dt'}{a(t')} = a(t) \left[\frac{t^{1-p} - t_i^{1-p}}{1-p} \right], \quad (1.43)$$

donde la última igualdad se obtiene suponiendo $a(t) \sim t^p$ y siendo t_i algún tiempo inicial. Como mencionamos anteriormente, en la teoría de la gran explosión ($p < 1$). Consecuentemente la integral (1.43) genera

$$d_H(t) = \left(\frac{p}{1-p} \right) H^{-1}, \quad (1.44)$$

Nótese que en este caso la integral converge en el límite $t_i = 0$. Por tanto bajo estas condiciones el tamaño del horizonte es finito y es del orden del radio de Hubble H^{-1} . Por otro lado, el radio comóvil de Hubble $(aH)^{-1}$ representa la fracción del espacio comóvil en contacto

causal. Es fácil ver que éste incrementa con el tiempo, lo cual significa que la fracción del Universo en contacto causal incrementa también con el tiempo. Sin embargo mediciones en CMBR indican que el Universo fue cuasi-homogéneo en la época de la última superficie de dispersión a escalas que comprendían, en principio, muchas regiones desconectadas causalmente. ¿Cómo explicar esto?. Este problema es conocido como el problema del horizonte.

Una solución tanto al problema del horizonte como a los otros problemas del modelo cosmológico estándar de los 70's, se da en el contexto del escenario inflacionario, el cual estudiaremos en la siguiente sección.

Adelantándonos un poco, podemos decir que la idea fundamental en el escenario inflacionario es invertir el comportamiento del radio comóvil de Hubble, esto es, hacer que decrezca lo suficiente en épocas tempranas. Esta condición corresponde a $\ddot{a} > 0$, es decir, que corresponde a una fase de expansión acelerada. Este período de expansión acelerada y superlumínica es conocido como período inflacionario del Universo.

1.8 *La Vieja Inflación.*

El primer modelo Inflacionario del Universo era una modificación del modelo cosmológico estándar de los 70's para altas temperaturas. En él se postula una expansión exponencial del Universo desde un estado metaestable del vacío durante un período muy breve. Durante este período el factor de escala se incrementó e^{50} veces más que en el modelo cosmológico estándar.

La primer versión de un modelo inflacionario que puede considerarse realista fue sugerida por Starobinsky [19]. Sin embargo en este modelo no era muy claro el significado de estado inicial del Universo. Para dar solución a este problema, en 1981 Zeldovich sugirió que el Universo pudo haber sido creado del vacío [20]. Cabe aclarar que esta idea fue originalmente propuesta por Tryon en 1973 [21]. Esta idea, aunque en un principio pareció muy extravagante, en la actualidad es muy popular.

Sin duda alguna uno de los grandes avances en materia de cosmología inflacionaria fue dado por Guth [22]. Este modelo tenía la característica de

dar solución a los problemas del modelo cosmológico estándar. El escenario de este modelo es descrito por los siguientes puntos:

(a). El Universo se expandió inicialmente desde un estado con temperaturas muy por encima de una cierta temperatura crítica T_c , provocando una restauración de simetría primordial. El estado inicial estaba dado por un valor $\varphi(T) = 0$ de un campo escalar φ . Dicho campo se conoce como inflatón y se propone en inflación como el responsable de la expansión del Universo.

(b). El potencial efectivo $V(\varphi, T)$ del campo escalar φ tiene un mínimo local en $\varphi = 0$ a muy altas temperaturas T . Como consecuencia el Universo permanece en un estado de falso vacío por un largo tiempo. El tensor energía momento asociado a ese estado rápidamente se hace igual a $T_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}V(0)$, y el Universo se expande exponencialmente con el tiempo desde el estado de falso vacío.

(c). El decaimiento desde el falso vacío provoca la formación de “burbujas” con un valor del campo φ_0 , asociado a un valor mínimo del potencial $V(\varphi_0)$. El recalentamiento del Universo se produce debido a colisiones entre las paredes de las burbujas.

Esta idea llamada **inflación vieja**, fue muy simple y atractiva. Su papel en el desarrollo de la cosmología moderna fue extremadamente importante. Desafortunadamente, como el mismo Guth lo puntualizó [22], la vieja inflación tenía un problema insoluble. Si la tasa de formación de burbujas fuera menor que la velocidad de expansión del Universo, entonces la transición de fase desde el falso vacío ocurriría demasiado rápido como para que inflación tuviera lugar. Además el Universo se volvería inaceptablemente inhomogéneo después de la transición de fase.

En 1982 tanto Linde [35], como Albrech y Steinhardt [37] propusieron un modelo conocido como Nueva Inflación. En ella se suponía una transición de fase de segundo orden del falso vacío. Sin embargo, si por un lado la teoría resolvía el problema de planaridad presentado por la de Guth [34], por otro lado predecía variaciones en la temperatura de CMBR mucho mayores a las observadas. Por ello, unos pocos meses después de haber surgido se demostró que la propuesta de Linde no era viable. Poco tiempo más tarde,

el mismo Linde [36] propuso un formalismo conocido como Inflación Caótica. Este modelo predice que el Universo en sus primeros instantes de evolución se expandió exponencialmente en un estado caracterizado por una densidad de energía dominada por el potencial $V(\phi)$ asociado a algún campo escalar ϕ . Esta rápida expansión provocó la homogeneidad, planaridad e isotropía, actualmente observables en el Universo. Posteriormente, esta densidad de energía potencial se transformó en energía térmica dando lugar al período conocido como Recalentamiento del Universo. Posterior al recalentamiento, la evolución del Universo puede ser descrita por la teoría de la gran explosión o modelo cosmológico estándar con nucleosíntesis y CMBR incluidos¹. En general inflación intenta explicar la homogeneidad del Universo observada en la actualidad. Sin embargo, al principio muchos de los modelos predecían que a escalas muy grandes el Universo sería extremadamente inhomogéneo con densidades de energía variando desde la escala de Planck hasta casi cero. Pero en la actualidad existen una gran cantidad de modelos cuyas predicciones van de acuerdo con las evidencias observacionales. La formación de estructura es asociada a las fluctuaciones en la densidad de energía del Universo en aquella época, las cuales a su vez fueron generadas por fluctuaciones cuánticas del campo escalar responsable de la expansión acelerada y superlumínica. En la siguiente sección estudiaremos en detalle la dinámica de este campo escalar conocido como Inflatón, considerando una aproximación semiclásica del mismo.

1.9 Dinámica del Inflatón.

La dinámica de un campo escalar tetradimensional φ mínimamente acoplado al campo gravitacional clásico, es descrita por la lagrangiana

$$L(\varphi, \varphi_{,\mu}) = -\sqrt{-g} \left[\frac{R}{16\pi} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \varphi_{,\mu} \varphi_{,\nu} + V(\varphi) \right], \quad (1.45)$$

donde R es la curvatura escalar, g es el determinante de la métrica y $V(\varphi)$ es el potencial asociado al operador de campo $\varphi(\vec{x}, t)$. Dada la solidez del modelo de inflación caótica nos restringiremos a modelos inflacionarios que requieren de una transición de fase de segundo orden desde un estado metaestable

¹ En este comentario no se toma en cuenta aun el período actual de quinta esencia, cuya descripción es un problema abierto hasta ahora

del vacío, donde el potencial $V(\varphi)$ debe ser “plano”. Esto último significa que su derivada segunda respecto al campo debe ser $(d^2V(\varphi)/d\varphi^2) \ll 1$. De este modo la rapidez de expansión del Universo resulta cuasi-exponencial durante todo el período inflacionario. Este tipo de potenciales son utilizados en Inflación Caótica. En este caso, el campo escalar φ rueda desde un valor para el cual su potencial $V(\varphi)$ es un máximo local. Por otro lado, como inflación es un proceso clásico, el potencial $V(\varphi)$ debe estar por debajo de la escala de Planck. Esto impone $V(\varphi) \sim M_p^4$ como la cota superior para el potencial, donde M_p es la masa de Planck. El proceso de inflación finaliza cuando el campo φ asume valores muy cercanos al mínimo absoluto del potencial escalar. Al término de inflación le sigue el período de recalentamiento y posteriormente la teoría de la gran explosión explica el resto de la evolución del Universo (sin contar el período de quinta esencia). Este es el esquema general del escenario inflacionario sin considerar los efectos cuánticos. Sin embargo, una manera de incluir las contribuciones cuánticas es a través de la aproximación semi-clásica, que abordaremos posteriormente.

Dada la expansión acelerada y superlumínica generada por el campo escalar, la geometría espacial se suaviza de tal manera que es bien descrita por la métrica de FRW, especialmente plana

$$ds^2 = dt^2 + a^2(t)dr^2, \quad (1.46)$$

donde $a(t)$ es el factor de escala del Universo y $dr^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. La dinámica de φ es dada por las ecuaciones de Euler-Lagrange y la dinámica correspondiente al factor de escala $a(t)$ es dada por la ecuación de Friedmann semi-clásica, expresadas por

$$\ddot{\varphi} - \frac{1}{a^2} \nabla^2 \varphi + 3H\dot{\varphi} + V'(\varphi) = 0, \quad (1.47)$$

$$\langle H^2 \rangle = \frac{4\pi}{3M_p^2} \langle \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{a^2} (\vec{\nabla}\varphi)^2 + 2V(\varphi) \rangle, \quad (1.48)$$

donde el punto denota derivada temporal y $V'(\varphi) \equiv \frac{dV(\varphi)}{d\varphi}$. Las ecuaciones (1.47) y (1.48) son ecuaciones operatoriales, pues el campo escalar es en general cuántico. Dada la interacción del campo escalar no es fácil definir un espacio de funciones sobre el que actúa el operador φ . Si tal espacio no es bien definido, las ecuaciones (1.47) y (1.48) no tienen sentido. Por consistencia con la métrica de FRW, el valor de expectación del campo se supone sólo

dependiente del tiempo, pues debe recuperarse la homogeneidad e isotropía a gran escala definida por la métrica.

Dada la dificultad de resolver las ecuaciones (1.47) y (1.48), se construye una teoría semiclásica mediante la llamada aproximación semiclásica del campo escalar. Esto último significa que se descompone al operador inflatón en un campo clásico ϕ_c , más una corrección cuántica descrita por el operador ϕ . Esta descomposición es dada por

$$\varphi(\vec{x}, t) = \phi_c(t) + \phi(\vec{x}, t), \quad (1.49)$$

donde $\langle \phi(\vec{x}, t) \rangle = 0$ y $\langle \varphi(\vec{x}, t) \rangle = \phi_c(t)$. De aquí que el estado cuántico de φ no es el vacío, sin embargo actúa como vacío de la componente cuántica ϕ . De este modo, sustituyendo (1.49) en (1.47), puede verse fácilmente que ambas dinámicas, cuántica y clásica de φ pueden ser descritas separadamente. La ecuación para ϕ_c describe la dinámica clásica de φ y la expresión para ϕ su correspondiente parte cuántica. Por simplicidad comenzaremos con la parte clásica.

1.9.1 Dinámica Clásica del Inflatón.

Dado un estado cuántico arbitrario $|E\rangle$, se define la componente clásica ϕ_c del campo inflatón φ por $\langle E | \varphi | E \rangle = \phi_c$. Sustituyendo (1.49) en (1.47), elegimos un ϕ_c que satisface

$$\ddot{\phi}_c + 3H\dot{\phi}_c + V'(\phi_c) = 0. \quad (1.50)$$

Sustituyendo (1.49) en (1.48) y derivando con respecto del tiempo, la dinámica clásica tanto del parámetro de Hubble como del Inflatón es caracterizada por

$$\dot{\phi}_c = -\frac{M_p^2}{4\pi} H'_c, \quad (1.51)$$

$$\dot{H}_c = H'_c \dot{\phi}_c = -\frac{M_p^2}{4\pi} (H'_c)^2. \quad (1.52)$$

Reemplazando estas ecuaciones en la expresión (1.48) se obtiene

$$V(\phi_c) = \frac{3M_p^2}{8\pi} \left(H_c^2 - \frac{M_p^2}{12\pi} (H'_c)^2 \right). \quad (1.53)$$

Esta ecuación relaciona el potencial escalar clásico con el parámetro clásico de Hubble $H_c = H(\phi_c)$. Más aun, las ecuaciones (1.52) y (1.53) definen la evolución clásica del espacio-tiempo determinada por el potencial clásico $V(\phi_c)$ durante la época inflacionaria. Durante esta era, el factor de escala satisface la condición $\ddot{a} > 0$ y crece muy rápidamente. Asimismo la ecuación (1.52) nos indica que $\dot{H}_c < 0$, lo que implica que H_c es una función decreciente del tiempo.

La escala temporal característica de rodadura del campo ϕ_c puede definirse por $\tau_d = \frac{\phi_c}{\dot{\phi}_c}$, y su relación con el parámetro de Hubble está dada por

$$\nu \equiv \frac{\tau_d}{\tau_H} = \tau_d H = \frac{H\phi_c}{\dot{\phi}_c} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{2\pi}{M_p} \frac{\phi_c}{\dot{\phi}_c} \rho^{1/2}, \quad (1.54)$$

donde $\rho \sim V(\phi_c)$ es la densidad de energía durante el período inflacionario. El número de desdoblamiento exponenciales en un período temporal se define por

$$N_e = \int_{t_0}^{t_0+\delta t} H dt = \int_{\phi_0}^{\phi_c} d\phi'_c \frac{\nu}{\phi'_c}. \quad (1.55)$$

Este número nos da una medida de la cantidad de inflación obtenida en el modelo. Una restricción muy importante es que para que un modelo inflacionario resuelva el problema del horizonte es que $N_e \geq 60$.

1.9.2 La Aproximación de Rodadura Lenta.

Para generar la cantidad de inflación suficiente, el campo debe rodar lentamente hacia el mínimo de su potencial. Esto significa que su energía potencial domina sobre su energía cinética. Esta condición es conocida como rodadura lenta. Bajo esta condición $\ddot{\phi}_c$ es despreciable frente a los otros términos en la ecuación (1.50). Por tanto, el tiempo característico de variación de $\dot{\phi}_c$ es mayor que el de expansión del Universo ($\tau \gg \tau_H = H^{-1}$). Dada esta condición, (1.50) se transforma en

$$\dot{\phi}_c \simeq -\frac{V'(\phi_c)}{3H_c}, \quad (1.56)$$

y con ayuda de la ecuación (1.52), la ecuación (1.53) genera

$$H_c^2 \simeq \frac{8\pi^2}{3M_p^2} V(\phi_c), \quad (1.57)$$

que nos define la dinámica de H_c bajo esta aproximación. Como sabemos, la versión más simple de un campo escalar es la de un campo escalar masivo no interactuante con un potencial efectivo $V_c = \frac{1}{2}m^2\phi_c^2$, donde m es la masa del campo escalar ϕ_c ($m \ll 1$). Consideremos pues como un primer ejemplo un campo escalar de este tipo. Si inicialmente el campo escalar ϕ_c es suficientemente grande $\phi_c \gg 1$, entonces puede mostrarse que las funciones $\phi_c(t)$ y $a(t)$ se aproximan rápidamente al régimen asintótico

$$\phi_c(t) = (\phi_c)_0 - \frac{m}{2(3\pi)^{1/2}} t, \quad (1.58)$$

$$a(t) = a_0 e^{2\pi[(\phi_c)_0^2 - \phi_c^2(t)]}. \quad (1.59)$$

De acuerdo a las ecuaciones (1.58) y (1.59), durante el tiempo $\frac{\phi_c}{m}$, el cambio del campo ϕ_c es pequeño, el potencial efectivo varia muy suavemente y el Universo se expande cuasi exponencialmente

$$a(t + \Delta t) \approx a(t) e^{H_c \Delta t}, \quad (1.60)$$

donde $\Delta t \leq \frac{\phi_c}{m}$. Para este modelo se tiene un parámetro de Hubble clásico dado por

$$H_c = 2\sqrt{\frac{\pi}{3}} m\phi_c. \quad (1.61)$$

Debe notarse que si $\phi_c \gg 1$, entonces $\tau_d \gg H_c^{-1}$.

La expansión inflacionaria del Universo finaliza cerca del mínimo de potencial, es decir, cuando $\phi_c \approx (\phi_c)_e$. Luego el campo comienza a oscilar alrededor de ese mínimo y comienza la época de recalentamiento. De acuerdo con esta teoría [39] hay tres etapas diferentes. Durante la primera el campo escalar clásico comienza a oscilar y decae en bosones masivos debido al fenómeno de resonancia paramétrica. En muchos casos la resonancia es muy ancha, y el proceso ocurre extremadamente rápido. Este estado se denomina precalentamiento. Los bosones producidos en este período están lejos del equilibrio térmico y tienen números de ocupación muy grandes. El segundo período consiste en el decaimiento de las partículas previamente producidas, después de lo cual éstas se termalizan con una temperatura T_R (tercera etapa). En el ejemplo que se esta considerando, $(\phi_c)_e \approx 0.2$. Así, cuando $\phi_c \leq (\phi_c)_e$ el campo escalar ϕ_c oscila rápidamente, y si interactúa con otro campo de materia, su energía potencial $V(\phi) \approx \frac{m^2(\phi_c)_e^2}{2} \approx \frac{m^2}{2}$ se transforma en energía térmica. La temperatura asociada T_R puede ser del orden

de $m^{1/2}$ o menor. Además T_R no depende del valor inicial del campo $(\phi_c)_0$, pero si del factor de escala $a(t)$, el cual crece $e^{2\pi(\phi_c)_0^2}$ veces durante la inflación.

Este resultado puede generalizarse para modelos con potenciales efectivos $V(\phi_c)$ más complicados. Por ejemplo, para teorías con $V(\phi_c) = \frac{\lambda}{n}\phi_c^n$ se obtiene

$$\phi_c^{\frac{4-n}{2}}(t) = (\phi_c)_0^{\frac{4-n}{2}} - \frac{4-n}{2} \sqrt{\sqrt{n\lambda} 24\pi t}, \quad n \neq 4, \quad (1.62)$$

$$\phi_c(t) = (\phi_c)_0 e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{6\pi}} t}, \quad n = 4. \quad (1.63)$$

Para un n arbitrario el factor de escala adquiere la forma

$$a(t) = a_o e^{\left[\frac{4\pi}{n}((\phi_c)_0^2 - \phi_c^2(t))\right]}. \quad (1.64)$$

El período inflacionario finaliza cuando

$$(\phi_c)_e \approx \frac{n}{4\sqrt{3\pi}}. \quad (1.65)$$

En general, una manera de asegurar la rodadura lenta del campo, es a través de las condiciones

$$\Theta = \frac{2}{K^2} \left(\frac{H'_c}{H_c} \right)^2 \ll 1, \quad (1.66)$$

$$\Sigma = \frac{2}{K^2} \frac{H''_c}{H_c} \ll 1, \quad (1.67)$$

donde $K = \frac{\sqrt{8\pi}}{M_p}$ [40]. Los parámetros Θ y Σ son conocidos como parámetros de rodadura lenta y pueden construirse una infinidad de estos. El proceso inflacionario termina cuando el factor de escala deja de acelerarse $\ddot{a} \sim 0$. Además, $\Theta(\phi_c) = 1$ para algun valor del campo $\phi_c = (\phi_c)_e$.

Finalmente, bajo la condición de rodadura lenta, ν y N_c pueden aproximarse a las expresiones

$$\nu \sim -\frac{8\pi^2 \phi_c}{M_p^2} \frac{V(\phi_c)}{V'(\phi_c)}, \quad (1.68)$$

$$N_c \sim -\frac{8\pi^2}{M_p^2} \int_{\phi_0}^{\phi_c} d\phi'_c \frac{V(\phi'_c)}{V'(\phi'_c)}. \quad (1.69)$$

La solución para el problema del horizonte requiere que $N_c \geq 60$, y por lo tanto $\tau_d > \tau_H$.

1.9.3 Dinámica Cuántica del Inflatón.

Durante el período inflacionario las fluctuaciones cuánticas del inflatón juegan un papel muy importante pues son el punto de partida para el proceso de generación de estructura. Las fluctuaciones a pequeña escala son de naturaleza cuántica, sin embargo al traspasar el horizonte causal pierden su coherencia cuántica y pueden considerarse como clásicas a escala cosmológica ($\lambda \gg H^{-1}(t)$). En este sentido, las fluctuaciones a escalas mayores a la del horizonte causal son consideradas las semillas para la posterior formación de estructura. Sin embargo, sus amplitudes deben ser muy pequeñas ($\delta\rho/\rho \simeq 10^{-5}$), ya que de lo contrario no se tendría concordancia con los resultados observacionales proporcionados por la radiación cósmica de fondo.

Implementando la aproximación semiclásica en (1.47), la dinámica del operador cuántico ϕ es dada por

$$\ddot{\phi} - \frac{1}{a^2} \nabla^2 \phi + 3H\dot{\phi} + \sum_n \frac{1}{n!} V^{(n+1)}(\phi_c) \phi^n = 0, \quad (1.70)$$

donde por definición $\langle 0 | \phi | 0 \rangle = \langle \phi \rangle = 0$, con lo cual puede probarse que $\langle \dot{\phi} \rangle = 0$.

Por otro lado, esta expansión semiclásica permite expandir el parámetro de Hubble $H(t)$ en torno a su valor clásico H_c , obteniéndose

$$H = H_c \left[1 + \frac{1}{2H_c^2} \langle \dot{\phi}^2 + \frac{1}{a^2} (\vec{\nabla}\phi)^2 + \sum_n \frac{1}{n!} V^{(n+1)}(\phi_c) \phi^n \rangle \right], \quad (1.71)$$

donde H_c es dado por

$$H_c^2 = \frac{4\pi}{3M_p^2} \left[\dot{\phi}^2 + 2V(\phi_c) \right]. \quad (1.72)$$

La expresión (1.71) nos indica que si las fluctuaciones cuánticas del inflatón son lo suficientemente pequeñas, entonces el parámetro de Hubble puede considerarse como clásico $H \simeq H_c$. En este régimen, una aproximación lineal de la ecuación (1.70) es suficiente para tener una buena descripción de la dinámica de las fluctuaciones cuánticas. Haciendo esto la expresión (1.70) llega a ser

$$\ddot{\phi} - \frac{1}{a^2} \nabla^2 \phi + 3H_c \dot{\phi} + V''(\phi_c) \phi = 0. \quad (1.73)$$

Cabe mencionar que aunque esta descripción se considera suficiente, un análisis más completo incluiría las fluctuaciones cuánticas del parámetro de Hubble generadas por ϕ . Lo mismo sería para el caso de la ecuación de movimiento (1.73). Es importante notar en este análisis que la componente clásica ϕ_c es responsable de la expansión del universo, mientras que las fluctuaciones cuánticas ϕ espacialmente inhomogéneas provocan las fluctuaciones en la densidad de energía que bajo ciertas condiciones darán origen a la formación de estructura una vez finalizada la época inflacionaria.

En el caso de considerarse un acoplamiento no mínimo del campo φ con la gravedad, la masa efectiva $V''(\phi_c)$ cambiaría su evolución temporal ocasionando variaciones en la tasa de expansión del universo y modificando por tanto la dinámica de la componente clásica de φ .

1.9.4 Redefinición del Campo Cuántico.

El estudio de la componente cuántica se simplifica, si redefinimos el campo ϕ de modo que la ecuación de movimiento (1.73) no tenga un término de primer orden en sus derivadas. Para ello hacemos la transformación $\phi = e^{-\frac{3}{2} \int H dt} \chi$. Con esta redefinición la ecuación (1.73) adquiere la forma

$$\ddot{\chi} - \frac{1}{a^2} \nabla^2 \chi - \frac{k_0^2}{a^2} \chi = 0, \quad (1.74)$$

donde $k_0^2 = a^2 \left(\frac{9}{4} H^2 + \frac{3}{2} \dot{H} - V_c'' \right)$. Esta ecuación es de tipo Klein-Gordon en un espacio-tiempo curvo, isótropo y homogéneo en la cual χ puede interpretarse como un campo escalar libre con un parámetro de masa $\mu(t) = \frac{k_0}{a}$ dependiente del tiempo.

Es posible hacer una expansión de Fourier del campo χ en términos de los modos $\xi_k(t)$ en la forma

$$\chi(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 k \left[a_k e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \xi_k(t) + a_k^\dagger e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \xi_k^*(t) \right], \quad (1.75)$$

donde los operadores de creación y aniquilación satisfacen las reglas de conmutación para bosones

$$\left[a_k, a_{k'}^\dagger \right] = \delta^3(\vec{k} - \vec{k}'), \quad \left[a_k, a_{k'} \right] = \left[a_k^\dagger, a_{k'}^\dagger \right] = 0, \quad (1.76)$$

mientras que los modos están definidos por la ecuación de movimiento

$$\ddot{\xi}_k + \omega_k^2 \xi_k = 0, \quad (1.77)$$

con $\omega_k^2 = a^{-2}(k^2 - k_0^2)$. Aquellos modos cuyo número de onda k sea menor que k_0 , tendrán frecuencia imaginaria, y por lo tanto serán inestables. Lo que implica un crecimiento exponencial de los modos, en particular con respecto al horizonte. Estos modos están asociados a longitudes de onda larga, y cumplen con la condición

$$k < \left[\frac{9}{4}H^2 + \frac{3}{2}\dot{H} - V_c'' \right]^{1/2} a, \quad (1.78)$$

para $\frac{9}{4}H^2 + \frac{3}{2}\dot{H} - V_c'' > 0$. La función $k_0(t)$ es el número de onda que delimita el sector infrarrojo inestable, del sector asociado a longitudes de onda corta. Como k_0 aumenta con el tiempo, algunos modos que en un principio estaban en el sector de onda corta pasarán al sector de onda larga. Este punto es muy importante, y sobre él se basa la definición del campo promedio en un tratamiento estocástico. Para que la teoría sea consistente, los campos χ y $\dot{\chi}$ deben cumplir con las relaciones canónicas de conmutación

$$\left[\chi(\vec{r}, t), \dot{\chi}(\vec{r}', t') \right] = i\delta^3(\vec{r} - \vec{r}'). \quad (1.79)$$

Para ello debe de satisfacerse la relación de consistencia entre los modos dada por

$$\xi_k(t)\dot{\xi}_k^*(t) - \dot{\xi}_k(t)\xi_k^*(t) = i. \quad (1.80)$$

Esta ecuación nos permite renormalizar los modos satisfaciéndose la condición (1.79).

En términos generales la dinámica inflacionaria nos da un mecanismo para la generación causal de perturbaciones primordiales en la densidad de energía. Esto puede verse a través de las ecuaciones (1.77) y (1.78). Los modos en el sector IR se clasicalizan al reingresar al horizonte. Esto puede constatarse al satisfacerse la condición $\left[\chi_{IR}(\vec{r}, t), \dot{\chi}_{IR}(\vec{r}', t) \right] = 0$. De esta manera, estos modos se asocian con las fluctuaciones en la densidad de energía confirmándose que inflación nos proporciona el mecanismo causal que resuelve los problemas del modelo de la gran explosión.

En la actualidad existe todo un zoológico de modelos inflacionarios. Esto tiene su origen principalmente en la libertad de elección del potencial inflacionario $V(\varphi)$, en donde usualmente se siguen algunos criterios de física de partículas y de altas energías. Sin embargo, sería conveniente y bastante importante contar con un mecanismo que genere estos potenciales disminuyendo así la libertad para ponernos a mano. En esta tesis se propone un mecanismo que logra reducir esa libertad de elección, basándose en una teoría de Kaluza- Klein no compacta de la gravedad en cinco dimensiones. A lo largo de los siguientes capítulos estudiaremos algunos tópicos vinculados con este mecanismo.

2. LAS TEORÍAS DE KALUZA-KLEIN

2.1 *Introducción*

Una de las tendencias actuales en la física teórica es la búsqueda de una teoría que nos brinde un mecanismo de unificación de la gravedad con las otras interacciones fundamentales de la naturaleza. Una de las primeras opciones para llevar a cabo la unificación de las entonces conocidas interacciones, es decir, gravedad y electromagnetismo, fue sugerida por Theodor Franz Eduard Kaluza [47] en 1921 y mejorada por Oscar Klein [48] en 1926. Concretamente Kaluza en 1921 propuso que una variedad 5D podía usarse para unificar la teoría de la relatividad general de Einstein con la teoría electromagnética de Maxwell. Aunque en un principio no era así, después de un tiempo Einstein apoyó la idea. Sin embargo, ésta tuvo mayor empuje por Oskar Klein en 1926 quién extendió la idea haciendo la conexión con la teoría cuántica suponiendo que la dimensión extra era microscópica o compacta, vinculando su tamaño a través de la constante de Planck con la magnitud de la carga del electrón.

Es conocido que la gravedad y el electromagnetismo son muy similares en varios aspectos, pero la relación entre ellas no tiene que ver con el hecho de que clásicamente ambas sean gobernadas por leyes que van como el inverso cuadrado de la distancia. Desde el punto de vista relativista, por ejemplo, las ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo son lineales, mientras que las ecuaciones de campo gravitacionales de Einstein son altamente no lineales. Por tanto, ubicarlas en un mismo contexto resulta una tarea por demás complicada. Kaluza y Klein mostraron que dentro del contexto de una extensión pentadimensional de la teoría de la relatividad general, tanto electromagnetismo como gravedad podían tratarse similarmente en el sentido de que ambas podían ser descritas como partes de la métrica pentadimensional.

Sin embargo, históricamente fue Gunnar Nordström [49] quién introdujo la idea de dimensión espacial extra en la física. En 1914, descubrió que es

posible unir la física del electromagnetismo con la gravitacional postulando la existencia de una cuarta dimensión espacial. Consideró un potencial vectorial pentadimensional que podía escribirse en la forma $(4 + 1)$ a través de $A_B = A_\mu + \Phi$ con A_μ siendo el potencial vector electromagnético tetradimensional y Φ un campo escalar identificado como el campo gravitacional. Sin embargo, Nordström trabajó con una teoría escalar de la gravedad, y no con una teoría tensorial como la teoría de la relatividad general, la cual no había sido publicada aún. Cuando Einstein publicó su teoría de la relatividad general, Nordström abandonó su propia idea. Pero a pesar de esto, la idea de dimensiones extra ha prevalecido hasta nuestros días.

En la actualidad, con el desarrollo de la física de partículas, la teoría cuántica de campos, la teoría de cuerdas y la teoría de supercuerdas, a resurgido nuevamente el interés por las teorías de campo en altas dimensiones con miras a la unificación de las interacciones de largo y corto alcance. En este sentido, la teoría de Kaluza Klein 5D estableció el fundamento para el desarrollo de teorías modernas como supercuerdas y supergravedad en 11D.

La teoría tradicional de Kaluza-Klein, también llamada teoría de Kaluza-Klein compacta es esencialmente relatividad general en 5D y se caracteriza por ser restringida mediante las siguientes condiciones:

(a).- La llamada **condición cilíndrica** o de cilindridad fue introducida por Kaluza, y consiste en poner todas las derivadas parciales con respecto a la quinta coordenada, nulas.

(b).- La condición de **compactificación de la quinta coordenada** fue introducida por Klein, y consiste en la suposición de que la quinta dimensión tiene una topología cerrada (una circunferencia si se considera sólo una dimensión extra). En este sentido se decía que la quinta dimensión debía ser compacta.

Esta última restricción puede aplicarse retroactivamente a la solución e introduce periodicidad, permitiendo el uso de la descomposición de Fourier y de otras teorías de descomposición. Lógicamente las ecuaciones de campo se esperan de la forma $G_{AB} = kT_{AB}$, donde $A, B = 0, 1, 2, 3, 4.$, con alguna constante de acoplamiento pentadimensional apropiada k y un tensor energía momento 5D. Sin embargo, desde la época de Kaluza y Klein se ha conside-

rado por simplicidad un **vacío aparente** o **vacío** mediante el empleo de las ecuaciones de campo $G_{AB} = 0$.

En la práctica es muy difícil determinar las relaciones impuestas por las ecuaciones de campo sin una suposición inicial sobre las componentes del tensor métrico g_{AB} . Esta suposición debe conectarse con la situación física que pretende ser investigada. Por ejemplo, en la teoría gravitacional, a una suposición acerca de las componentes covariantes del tensor métrico de la forma $g_{AB} = g_{AB}(x^c)$ se le llama comúnmente **elección de coordenadas**, mientras que en física de partículas se le llama frecuentemente **elección de norma**. La teoría de Kaluza-Klein tradicional ha sido estudiada por muchos investigadores incluyendo a Jordan [90, 91], Bergmann [92], Lessner [93], Thiry [94], Liu y Wesson [95].

Actualmente existen varias versiones de la teoría de Kaluza Klein, una de las más recientes es la **teoría de materia inducida no compacta** o también conocida como **teoría espacio-tiempo-materia**, desarrollada por Paul Wesson y Ponce de Leon [50], de la cual hablaremos posteriormente en este capítulo. Sin embargo debido a la importancia y al papel fundamental que ha jugado la teoría tradicional de Kaluza-Klein en el desarrollo del formalismo inflacionario presentado en esta tesis, a continuación daremos una revisión de manera más concisa a las ideas tanto de Kaluza como de Klein que sentaron las bases para la física en altas dimensiones.

2.2 *La Idea de Kaluza.*

Kaluza fue uno de los primeros, en 1919, que intentó unificar la teoría de la relatividad general de Einstein con la teoría electromagnética de Maxwell. Su idea consistía básicamente en postular la existencia de una quinta dimensión, pero con todos los campos independientes de esta dimensión extra, dado que sólo se conocía la variación espacio-temporal de las cantidades físicas. De aquí el origen de la condición cilíndrica. De esta forma, partiendo de un modelo pentadimensional puramente gravitacional obtuvo que los campos pueden ser expresados en 4 dimensiones debido a la independencia de estos de la quinta coordenada, lo cual lo llevó a tener una variedad 4D con una cierta métrica, un campo de Maxwell y un campo escalar.

En su trabajo el elemento de línea pentadimensional era dado por

$$dS^2 = g_{AB}(x^\mu, \psi)dx^A dx^B, \quad A, B = 0, 1, 2, 3, 4., \quad (2.1)$$

donde ψ es la coordenada espacial adicional. La métrica pentadimensional g_{AB} puede expresarse en la forma matricial

$$g_{AB} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} & g_{\mu 4} \\ g_{4\nu} & g_{44} \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Una vez que se tiene la métrica como en la teoría de la relatividad general estándar, podemos construir los símbolos de Christoffel Γ_{BC}^A , el tensor de Riemann R^A_{BCD} , el tensor de Ricci R_{AB} , el escalar de curvatura pentadimensional ${}^{(5)}R$ y posteriormente las ecuaciones de campo.

En virtud de la condición cilíndrica, los símbolos de Christoffel del primer tipo para g_{AB} son

$$2\Gamma_{\lambda\mu\nu} = g_{\lambda\mu,\nu} - g_{\mu\nu,\lambda} - g_{\nu\lambda,\mu}, \quad (2.3)$$

$$2\Gamma_{\lambda\mu 4} = -g_{4\lambda,\mu} - g_{4\mu,\lambda}, \quad (2.4)$$

$$2\Gamma_{4\mu\nu} = g_{4\mu,\nu} - g_{4\nu,\mu}, \quad (2.5)$$

$$2\Gamma_{44\nu} = g_{44,\nu}, \quad (2.6)$$

$$2\Gamma_{4\mu 4} = -g_{44,\mu}, \quad (2.7)$$

$$2\Gamma_{444} = 0. \quad (2.8)$$

Ahora imponemos

$$g_{4\mu} = 2\alpha A_\mu, \quad (2.9)$$

$$g_{44} = 2\phi, \quad (2.10)$$

siendo A_μ el cuadripotencial electromagnético, ϕ un campo escalar y α una constante de proporcionalidad. Considerando ésto, las ecuaciones anteriores toman la forma

$$\Gamma_{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2}(g_{\lambda\mu,\nu} - g_{\mu\nu,\lambda} - g_{\nu\lambda,\mu}), \quad (2.11)$$

$$\Gamma_{4\mu\nu} = \alpha(A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu}) = \alpha F_{\mu\nu}, \quad (2.12)$$

$$\Gamma_{\mu\nu 4} = -\alpha(A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu}) = -\alpha F_{\mu\nu}, \quad (2.13)$$

$$\Gamma_{44\mu} = -\Gamma_{4\mu 4} = \phi_{,\mu}, \quad (2.14)$$

con $F_{\mu\nu}$ el tensor de Maxwell 4D. La ecuación (2.3) nos da los 40 símbolos de Christoffel que aparecen en la TRG estándar. El resto de las ecuaciones (2.4) a (2.8) nos da los otros 35 para hacer un total de 75 símbolos de Christoffel independientes. Los últimos 35 pueden relacionarse con $F_{\mu\nu}$ y ϕ a través de la propiedad

$$(\Gamma_{lmn} + \Gamma_{mnl} + \Gamma_{nlm})_{,k} = \Gamma_{klm,n} + \Gamma_{kmn,l} + \Gamma_{klm,n} , \quad (2.15)$$

obteniéndose

$$F_{[\mu\nu,\lambda]} = 0, \quad (2.16)$$

$$\phi_{,\mu\nu} = 0, \quad (2.17)$$

donde los corchetes [] denotan antisimetrización. Nótese que la ecuación (2.16) corresponde a las ecuaciones de Maxwell homogéneas.

Bajo la aproximación de campo débil, es decir, en la cual g_{AB} difiere de la métrica de Minkowski η_{AB} por una cantidad muy pequeña

$$g_{AB} = \eta_{AB} + h_{AB}, \quad (2.18)$$

satisfaciéndose $|h_{AB}| \ll 1$, las 50 componentes independientes del tensor de Riemann $R^A{}_{BCD}$ son ahora

$$R^\mu{}_{\nu\lambda\sigma} = \Gamma^\mu_{\nu\sigma,\lambda} - \Gamma^\mu_{\nu\lambda,\sigma} + \Gamma^\mu_{\rho\lambda}\Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \Gamma^\mu_{\rho\sigma}\Gamma^\rho_{\nu\lambda}, \quad (2.19)$$

$$R^\nu{}_{\mu\lambda 4} = \alpha F^\nu_{\mu,\lambda}, \quad (2.20)$$

$$R^4{}_{\mu 4\nu} = -\phi_{,\mu\nu}, \quad (2.21)$$

$$R^\nu{}_{\mu 44} = 0, \quad (2.22)$$

$$R^4{}_{\mu 44} = 0, \quad (2.23)$$

$$R^4{}_{444} = 0. \quad (2.24)$$

Mediante la contracción sucesiva del tensor de Riemann obtenemos que el tensor de Ricci R_{AB} es

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu,\lambda}, \quad (2.25)$$

$$R_{4\nu} = -\alpha\partial^\mu F_{\mu\nu}, \quad (2.26)$$

$$R_{44} = -\square\phi. \quad (2.27)$$

El tensor de energía momento bajo la aproximación de campo débil adquiere la forma

$$T^{AB} = \varrho U^A U^B, \quad (2.28)$$

donde ϱ es la densidad de masa en reposo y U^A la pentavelocidad. Las ecuaciones de campo para el campo gravitacional son entonces

$$R_{\mu\nu} = \kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right), \quad (2.29)$$

siendo $T = g^{AB} T_{AB}$. De estas ecuaciones se recupera la teoría de la relatividad general. Las ecuaciones para la parte electromagnética son dadas por

$$R_{4\mu} = -\kappa T_{4\mu}. \quad (2.30)$$

Por otro lado, de las ecuaciones de Maxwell sabemos que

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = J_\nu = \rho_0 V_\nu, \quad (2.31)$$

donde ρ_0 es la densidad de carga y V_ν la cuadrivelocidad asociada a la misma. Sustituyendo (2.31) en (2.30) y con ayuda de (2.28) obtenemos

$$\rho_0 v_\nu = \left(\frac{\kappa}{\alpha} \right) \varrho U_4 V_\nu. \quad (2.32)$$

En el límite de bajas velocidades, definido en este caso por ($U_0 = c, U_i \ll c$), es posible escribir $V_\mu \sim U_\mu$ y eligiendo $\alpha = \sqrt{\kappa/2}$ se obtiene una carga específica dada por

$$\frac{\rho_0}{\varrho} = 2\alpha U_4. \quad (2.33)$$

Esta ecuación interpreta la carga eléctrica como la quinta componente del tensor energía momento de materia moviéndose a través de la quinta dimensión.

Finalmente para las ecuaciones de campo para el campo escalar debemos tomar en cuenta que bajo la aproximación de velocidades bajas $T_{ij} \sim 0$, con i, j denotando solo las componentes espaciales, se obtiene

$$T = g^{AB} T_{AB} = -T_{00} = -\varrho, \quad (2.34)$$

y por tanto las ecuaciones de campo para el campo escalar son dadas por

$$R_{44} = \kappa \left(T_{44} - \frac{1}{2} g_{44} T \right), \quad (2.35)$$

$$R_{44} = \frac{1}{2} \kappa \rho. \quad (2.36)$$

De esta manera puede verse que la aproximación de Kaluza da un resultado interesante cuando se extiende la TRG de Einstein a un espacio-tiempo pentadimensional. Las quince ecuaciones de campo sobre la variedad pentadimensional se descomponen naturalmente en tres conjuntos diferentes. Un conjunto de diez ecuaciones que gobiernan la gravedad (2.29), cuatro que describen un campo vectorial que representa al electromagnetismo (2.30), y una ecuación de onda para un campo escalar (2.36). Vemos también que si el campo escalar fuera constante, las ecuaciones para el campo vectorial serían justamente las ecuaciones de Maxwell para el electromagnetismo en el vacío, y las ecuaciones para el campo tensorial serían las ecuaciones de Einstein tetradimensionales con fuentes dadas por el campo electromagnético. En otras palabras, Kaluza obtuvo una teoría con un solo campo covariante en cinco dimensiones que genera tanto la teoría de la relatividad general de Einstein como la teoría electromagnética de Maxwell, ambas en 4D.

Sin embargo, esta teoría tiene algunos problemas. No es muy claro cuál es la naturaleza de la quinta dimensión. Tampoco hay ninguna explicación para la suposición *ad hoc* de que ninguno de los campos en el Universo debe variar con respecto a la quinta dimensión, es decir, no hay justificación para el empleo de la condición de cilindridad. Por último debe notarse que la teoría de Kaluza unifica gravedad con electromagnetismo solo en el régimen de pequeñas velocidades. De acuerdo a Kaluza la carga eléctrica de una partícula esta relacionada con su velocidad U_4 a través de la quinta dimensión. Pero, para un electrón o un protón el cociente ρ_0/ρ no es pequeño y así U_5 debe ser extremadamente grande. Esto significa que en el límite de bajas velocidades la teoría puede explicar fenómenos macroscópicos pero el problema surge con respecto a la aplicabilidad de la teoría a las partículas elementales.

2.3 La Idea de Klein

Como vimos en la sección anterior, a pesar de que la idea de Kaluza era muy atractiva, presentaba dos problemas obvios. El primero consistía en que aunque los índices tomaban valores 0, 1, 2, 3, 4, los campos no dependían de la quinta coordenada, sin haber alguna explicación al respecto. El segundo problema radicaba en la pregunta, si hay una quinta dimensión entonces, ¿por qué no la vemos?.

Fue Oskar Klein en 1926, quien vino a dar una solución a ambos problemas. Klein supuso que la quinta dimensión debía ser compacta y con una topología circular (la topología de $S^{(1)}$), con un radio del orden de la longitud de Planck. De esta forma el espacio-tiempo 5D tenía la topología $\mathfrak{R}^4 \times S^{(1)}$, y la quinta coordenada ψ era periódica: $0 \leq (\psi/r) \leq 2\pi$, donde r es el radio de la circunferencia $S^{(1)}$. Resulta complicado imaginar un espacio-tiempo con esta topología, sin embargo la analogía más simple que puede darse es la de la manguera. Una manguera a grandes distancias nos parece como una línea \mathfrak{R}^1 , pero cuando nos acercamos vemos que para cada punto sobre la línea hay un pequeño círculo, y de esta manera su topología es $\mathfrak{R}^1 \times S^{(1)}$. Así, lo que Klein sugirió fue que a cada punto del espacio-tiempo 4D le correspondía una pequeña circunferencia. Este es el origen de la condición de compactificación de la quinta coordenada ψ . En otras palabras, la idea básica es que hay cuatro dimensiones espaciales y una de ellas es compacta con un radio muy pequeño. Y como resultado de esto en todos los experimentos vemos solo los efectos de cuatro dimensiones, una temporal y tres espaciales. De esta manera, Klein hizo que la condición de cilindridad de Kaluza fuera menos artificial. Este mecanismo de compactificación llegó a ser de notable interés en las teorías gravitacionales de tal manera que en la actualidad una teoría de la gravedad sobre un espacio tiempo compacto se llama teoría de Kaluza-Klein.

De manera análoga al procedimiento seguido por Kaluza, Oscar Klein mediante una elección apropiada de coordenadas (x^α, ψ) propuso

$${}^{(5)}g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - k^2\Phi^2 A_\alpha A_\beta, \quad (2.37)$$

$${}^{(5)}g_{\alpha 4} = -k\Phi^2 A_\alpha, \quad (2.38)$$

$${}^{(5)}g_{44} = -\Phi^2, \quad (2.39)$$

estableciendo posteriormente una separación $(4 + 1)$ del tensor métrico pen-

tadimensional en la forma

$$g_{AB} = \begin{pmatrix} g_{\alpha\beta} - k^2\Phi^2 A_\alpha A_\beta & -k\Phi^2 A_\alpha \\ -k\Phi^2 A_\beta & -\Phi^2 \end{pmatrix}, \quad (2.40)$$

donde k es una constante de acoplamiento vinculada con las ecuaciones de campo de Einstein en 4D. Con esta separación Klein garantizaba que los campos $g_{\alpha\beta}(x^\mu, \psi)$, $A_\alpha(x^\mu, \psi)$ y $\Phi(x^\mu, \psi)$ se transformaban como un tensor, un vector y un escalar, bajo transformaciones generales de coordenadas 4D, respectivamente.

La acción de Einstein-Hilbert para describir gravedad sobre un espacio-tiempo pentadimensional puede escribirse

$${}^{(5)}S = \frac{1}{2} \frac{1}{({}^{(5)}k)^2} \int d^5x \sqrt{|{}^{(5)}g|} {}^{(5)}R \quad (2.41)$$

donde ${}^{(5)}k$ es la constante de acoplamiento gravitacional pentadimensional y ${}^{(5)}R$ es la curvatura escalar pentadimensional. Esta acción es invariante bajo la transformación general de coordenadas pentadimensional

$$\delta g_{AB} = \partial_A \xi^C g_{CB} + \partial_B \xi^C g_{CA} + \xi^C \partial_C g_{AB}, \quad (2.42)$$

donde ξ^A es un vector de desplazamiento diferencial pentadimensional vinculado con las simetrías del espacio-tiempo 5D.

De esta manera, las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío 5D se reducen a las ecuaciones de campo 4D

$$G_{\mu\nu} = \frac{k^2\Phi^2}{2} T_{\mu\nu} - \frac{1}{\Phi} (\nabla_\mu \nabla_\nu \Phi - g_{\mu\nu} \square \Phi), \quad (2.43)$$

$$\nabla^\mu F_{\mu\nu} = -3 \frac{\nabla^\mu \Phi}{\Phi} F_{\mu\nu}, \quad (2.44)$$

$$\square \Phi = -\frac{k^2\Phi^3}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (2.45)$$

donde $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$. En estas ecuaciones $G_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein 4D, $F_{\mu\nu}$ es el tensor de Maxwell 4D y $T_{\mu\nu}$ es el tensor energía momento 4D para un campo electromagnético, y es dado por $T_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - F_\mu^\gamma F_{\nu\gamma})$. De la misma manera $\square \equiv g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu$ es el operador de onda 4D. Las ecuaciones

(2.44) son las 4 ecuaciones conocidas del electromagnetismo 4D, modificadas por una función en términos de un campo escalar Φ , el cual a través de (2.45) puede pensarse como un campo escalar que satisface una ecuación tipo onda. El lado derecho de (2.43) en cierto sentido representa un tensor energía momento que se obtiene de manera efectiva de la quinta dimensión.

Hasta este momento se ha desarrollado prácticamente el mismo procedimiento de Kaluza. Ahora, como fue sugerido por Klein, debemos implementar la condición de compactificación de la quinta coordenada. Esta condición puede expresarse mediante la condición de periodicidad $\psi = \psi + 2\pi r$, lo que implica que todos los campos son periódicos en ψ . Esta periodicidad en ψ implica que los campos $g_{\alpha\beta}(x, \psi)$, $A_\alpha(x, \psi)$ y $\Phi(x, \psi)$ pueden expandirse en serie de Fourier en la forma

$$g_{\alpha\beta}(x, \psi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_{\alpha\beta n}(x) e^{in(\psi/r)}, \quad (2.46)$$

$$A_\alpha(x, \psi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_{\alpha n}(x) e^{in(\psi/r)}, \quad (2.47)$$

$$\Phi(x, \psi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Phi_n(x) e^{in(\psi/r)}, \quad (2.48)$$

donde los coeficientes de expansión satisfacen

$$g_{\alpha\beta n}^*(x) = g_{\alpha\beta -n}(x), \quad (2.49)$$

$$A_{\alpha n}^*(x) = A_{\alpha -n}(x), \quad (2.50)$$

$$\Phi_n^*(x) = \Phi_{-n}(x). \quad (2.51)$$

De esta manera, la teoría de Kaluza-Klein describe un número infinito de campos tetradimensionales. Sin embargo, dado que el vector ξ^A depende también de las coordenadas $\xi^A = \xi^A(x^\mu, \psi)$, también puede ser expandido como

$$\xi^A(x, \psi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \xi_n^A(x) e^{in(\psi/r)} \quad (2.52)$$

donde el coeficiente de expansión ξ_n^A satisface $(\xi_n^A)^* = \xi_{-n}^A$. Por tanto la teoría describe también un número infinito de simetrías tetradimensionales. Cabe aclarar que cuando Klein introdujo inicialmente esta idea, se enfocó

sólo en los términos de primer orden de estas expansiones simplificando así el problema.

Las ecuaciones de movimiento correspondientes a la acción (2.41) pueden simplificarse y escribirse en la forma

$$(\partial^\mu \partial_\mu - \partial^\psi \partial_\psi) g_{\mu\nu}(x, \psi) = 0, \quad (2.53)$$

$$(\partial^\mu \partial_\mu - \partial^\psi \partial_\psi) A_\mu(x, \psi) = 0, \quad (2.54)$$

$$(\partial^\mu \partial_\mu - \partial^\psi \partial_\psi) \Phi(x, \psi) = 0, \quad (2.55)$$

pero dadas las expansiones (2.46)-(2.48) las ecuaciones anteriores se transforman en las expresiones para los coeficientes de expansión

$$(\partial^\mu \partial_\mu + \frac{n^2}{r^2}) g_{\mu\nu n}(x) = 0, \quad (2.56)$$

$$(\partial^\mu \partial_\mu + \frac{n^2}{r^2}) A_{\mu n}(x) = 0, \quad (2.57)$$

$$(\partial^\mu \partial_\mu + \frac{n^2}{r^2}) \Phi_n(x) = 0. \quad (2.58)$$

Comparando estas expresiones con la ecuación estándar de Klein-Gordon se obtiene que la correspondiente “masa” para estos campos es $m_n \sim (n/r)$, donde n es el modo de excitación. Por otro lado, como el objetivo es unificar las interacciones electromagnéticas con las gravitacionales, el radio natural de compactificación r debe ser la longitud de Planck $r = (1/M_p)$, donde M_p es la masa de Planck y tiene un valor aproximado de $M_p = 1.221 \times 10^{19} \text{ Gev}$. Este radio de compactificación corresponde al valor $1.62 \times 10^{-35} \text{ m}$

En resumen, la teoría tradicional de Kaluza-Klein es en general una teoría que nos brinda una manera de unificar gravedad y electromagnetismo por medio de un campo escalar a nivel clásico. Sin embargo en el lenguaje de física de partículas y de la teoría cuántica de campos moderna, las ecuaciones de campo $G_{AB} = 0$, en la teoría de Kaluza-Klein compacta describen un gravitón de espín 2, un fotón de espín 1 y un boson de espín 0 los cuales, a través del campo escalar Φ pueden conectarse con el problema de cómo las partículas adquieren masa. Sin embargo, esta teoría tiene algunos problemas que la colocan en serias contradicciones con las evidencias experimentales. Uno de los problemas más importantes es que en esta teoría los fermiones carecen de quiralidad en 5D. A pesar de esto, los intentos por unificar gravedad

con electromagnetismo siguieron su curso de tal manera que siguieron muchas versiones modificadas de la teoría de Kaluza Klein. Entre ellas teorías que incorporaban numerosas y extremadamente pequeñas dimensiones extra. De hecho este fue el origen de la teoría de cuerdas que a su vez dio lugar posteriormente a la teoría de Supercuerdas y Supergravedad en 11D.

La idea de Kaluza-Klein de dimensiones extra sigue estando presente en las nuevas teorías solo que de manera muy diferente a la versión original. De hecho otra de las modificaciones hechas a la teoría de Kaluza Klein es la idea de que la quinta coordenada es no compacta, es decir, extendida y que los efectos de esta coordenada extra se manifiestan en el comportamiento de la materia en 4D. Este tipo de teorías se conocen con el nombre de teorías de Kaluza-Klein no compactas. La teoría Espacio-Tiempo-Materia o teoría de Materia inducida es una de este tipo y es el principal objeto de este capítulo. Sin embargo es conveniente antes de abordar el contenido de esta teoría, estudiar el teorema que da soporte matemático a la misma y a otras teorías pentadimensionales no compactas. Este teorema es conocido con el nombre de Teorema de Campbell-Magaard y será enunciado en la siguiente sección.

2.4 *El Teorema de Campbell-Magaard.*

Como hemos visto en las secciones anteriores, tanto Kaluza como Klein introdujeron la idea de que nuestro Universo puede tener más de las cuatro dimensiones en el contexto de la TRG. Desde aquella época hasta la actualidad se han desarrollado muchos modelos en los que se trabaja con dimensiones extra, entre los cuales podemos mencionar a la teoría de supercuerdas y los mundos Brana, entre otros.

En general, el problema de embeber una variedad Riemanniana (o pseudoriemanniana) n -dimensional Σ_0 en un espacio M de dimensión mayor, es abstracto y complicado. Poco después de que Riemann publicó la teoría de variedades abstractas definidas intrínsecamente en 1868 [64], Schlafli consideró el problema de cómo embeber localmente tales variedades en un espacio euclidiano [65], conjeturando que el máximo número de dimensiones extra necesarias para tal embebimiento local era $\frac{1}{2}n(n-1)$.

En 1926, Janet logró una prueba parcial de la conjetura para $n = 2$ usan-

do métodos de series de potencias [66]. Ese resultado fue pronto generalizado a un n arbitrario por el matemático Cartan [67]. La prueba fue completada por Burstín [68], quién demostró que las ecuaciones de Gauss-Codazzi-Ricci eran condiciones de integrabilidad del embebecimiento.

Un problema muy importante vinculado con embebidos fue considerado primeramente por Campbell en 1926 [69]. Campbell se planteó el siguiente problema: ¿Cuántas dimensiones extra se requieren para embeber localmente Σ_0 en un espacio Ricci-plano?. En otras palabras Campbell se preguntaba acerca del número de dimensiones extra necesarias para embeber localmente un espacio-tiempo en otro espacio-tiempo vacío de dimensión mayor. Campbell propuso una solución a este problema que posteriormente fue demostrada por Magaard [70]. Esta solución se establece en el teorema que lleva sus nombres. El teorema de Campbell-Magaard puede enunciarse en términos simples diciendo que cualquier variedad n -dimensional libre de singularidades puede ser localmente embebida en una variedad $(n+1)$ -dimensional Ricci plana ¹.

En la actualidad se han hecho muchas extensiones del teorema de Campbell-Magaard que incluyen casos donde el espacio de dimensión mayor tiene una constante cosmológica no nula [71, 72], casos donde este espacio mayor es generado por un campo escalar [73], y también casos en donde tiene un tensor de Ricci no degenerado arbitrario [74]. Es importante no olvidar que estos resultados el embebecimiento es local. El problema del embebecimiento global de subvariedades arbitrarias es mucho más difícil. En 1956, Nash mostró que el mínimo número de dimensiones extra requeridas para embeber Σ_0 en un espacio euclidiano es $3n(n+3)/2$ si Σ_0 es compacta. Este número incrementa a $3n(n+1)(n+3)/2$, si Σ_0 no es compacta [75]. Resultados globales para métricas con signatura indefinida fueron obtenidos posteriormente por Clarke [76] y Greene [77].

2.5 *La Teoría Espacio-Tiempo-Materia.*

En las teorías gravitacionales tradicionales, el campo gravitacional es considerado como una consecuencia de su fuente, la materia. Sin embargo, se ha argumentado en muchos trabajos científicos que la separación entre el campo y su fuente es algo artificial. Siguiendo esta línea de pensamiento se han

¹ Para una demostración del teorema de Campbell-Magaard ver el apéndice A.

estudiado diferentes mecanismos de unificación. Como vimos en secciones anteriores, Kaluza y Klein extendieron la teoría de la relatividad general de cuatro a cinco dimensiones imponiendo severas restricciones a la geometría, como las condiciones de cilindridad y de compactificación.

En los últimos años, la mayoría de los trabajos de investigación en este tópico, se desarrollan en el contexto de la teoría de la relatividad general en más de 4 dimensiones, tales como Supergravedad (11D), Supercuerdas y los diferentes tipos de teorías de Kaluza-Klein. [81]-[84].

Una propuesta interesante es la teoría espacio-tiempo-materia, desarrollada por Paul Wesson y Ponce de León en la década de los 80's. Esta teoría unifica la materia con el campo gravitacional de tal manera que incorpora el principio de Mach, usando geometría pura en 5 dimensiones (5D). En otras palabras, explica las propiedades y existencia de la materia en 4D, a partir de un vacío aparente geométrico 5D.

Una pregunta que surge naturalmente es sobre por qué es posible dar una buena descripción geométrica de la materia usando sólo una coordenada extra, cuando existen otras teorías que hacen la descripción en espacios-tiempo de más de 5 dimensiones. Pero ésta es precisamente una de las principales conclusiones de esta teoría.

A diferencia de las teorías de Kaluza-Klein clásicas, en esta teoría todos los coeficientes métricos dependen, en principio, de la quinta coordenada ψ . Por consiguiente, no se supone la existencia de un vector de Killing en la dirección de ψ . De esta manera pueden definirse apropiadamente cantidades asociadas a la materia, que dependan de ψ y sus derivadas, tales como la presión y la densidad. Por otro lado, no se impone ningún tipo de compactificación sobre la coordenada extra. En otras palabras, la quinta coordenada es extendida.

Una de las características más notorias de esta teoría, es que se pasa de 5D a 4D definiendo una foliación de la quinta coordenada $\psi = cte$. De esta forma, se explica la aparente naturaleza del Universo 4D como una consecuencia del hecho de que la física 4D, trabaja sobre una hipersuperficie $\psi = cte$ de la variedad 5D. De aquí que cuando se habla de materia en 4D, se hace referencia a manifestaciones de la quinta dimensión sobre la hipersuperficie 4D.

Otro aspecto interesante, es que la teoría espacio-tiempo-materia no es exactamente la teoría de la relatividad general de Einstein, pues además de contar con una dimensión extra, no cuenta con un tensor energía-momento dado a priori de manera explícita en 4D. Sino que se induce a partir de un vacío aparente 5D. De aquí que a esta teoría algunas veces se le denomina teoría de Materia Inducida.

En esta sección estudiaremos los fundamentos de esta teoría. Sin embargo, aunque ésta tiene un amplio rango de aplicación en la física, para los fines de esta tesis sólo nos enfocaremos al caso cosmológico. ².

Un vacío aparente geométrico pentadimensional, en la teoría de materia inducida, se define por

$$R_{AB} = 0. \quad (2.59)$$

Esta definición nos conduce a las ecuaciones de campo

$$G_{AB} = 0, \quad (2.60)$$

donde $G_{AB} \equiv R_{AB} - \frac{1}{2} {}^{(5)}R g_{AB}$ es el tensor de Einstein 5D, ${}^{(5)}R$ es el escalar de Ricci 5D, y g_{AB} son las componentes covariantes de la métrica 5D. Estas ecuaciones de campo de la teoría pueden interpretarse convenientemente si escribimos g_{AB} como un bloque (4×4) dado por $g_{\alpha\beta}$, más un término diagonal extra $g_{44} = \epsilon \Phi^2$, donde $\epsilon = \pm 1$ y Φ es una función escalar. Al imponer $g_{\alpha 4} = 0$, estamos usando 4 de los 5 grados coordenados de libertad, dejando sólo uno, que será utilizado para definir la condición de hipersuperficie para pasar de 5D a 4D. Las 15 ecuaciones (2.59) pueden descomponerse en 10 ecuaciones de campo, 4 ecuaciones de conservación y una ecuación de onda [85]. Las últimas 5 ecuaciones son satisfechas automáticamente por cualquier solución de (2.59). Las primeras 10 ecuaciones pueden escribirse en términos del tensor de Einstein 4D como

$$G_{\alpha\beta} = 8\pi G T_{\alpha\beta}. \quad (2.61)$$

Nótese que estas ecuaciones corresponden formalmente a las ecuaciones de Einstein de relatividad general. Sin embargo, el tensor energía-momento

² A lo largo de esta sección índices con letras latinas mayúsculas corren de 0 a 4, índices con letras griegas van de 0 a 3, e índices con letras latinas minúsculas toman valores de 1 a 3

4D inducido o efectivo tetradimensional $T_{\alpha\beta}$, es ahora dado en términos de cantidades geométricas 5D a través de la expresión

$$8\pi GT_{\alpha\beta} = \frac{\nabla_{\beta}\Phi_{,\alpha}}{\Phi} - \frac{\epsilon}{2\Phi^2} \left\{ \frac{\star\star\Phi g_{\alpha\beta}}{\Phi} - \star g_{\alpha\beta} + g^{\lambda\mu} \star g_{\alpha\lambda} \star g_{\beta\mu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \star g_{\mu\nu} \star g_{\alpha\beta} + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} \left[\star g^{\mu\nu} \star g_{\mu\nu} + \left(g^{\mu\nu} \star g_{\mu\nu} \right)^2 \right] \right\}, \quad (2.62)$$

donde la coma denota derivada parcial 4D, ∇_{β} la derivada covariante 4D usual, y la estrella (\star) derivada parcial con respecto a la quinta coordenada. La idea central de la teoría es que las ecuaciones (2.61) son un subconjunto de (2.60), con un tensor energía-momento inducido 4D $T_{\alpha\beta}$ que contiene las propiedades clásicas de la materia.

Como puede verse, la existencia de la materia depende crucialmente de los coeficientes métricos extra $\epsilon\Phi^2$, y de las derivadas con respecto a la quinta dimensión. Si $g_{\alpha\beta}$ fuera independiente de la quinta coordenada, puede mostrarse a partir de (2.62) que $T^{\alpha}_{\alpha} = 0$ [85]. Identificando T^0_0 con la densidad ρ y $-(1/3)(T^1_1 + T^2_2 + T^3_3)$ con la presión P de un fluido perfecto, lo anterior significa que $P = (1/3)\rho$. Por tanto, la condición $\partial g_{\alpha\beta}/\partial\psi = 0$ implica una ecuación de estado tipo radiación.

Sin embargo, la mayoría de las soluciones de (2.59) para g_{AB} deben tener $\partial g_{\alpha\beta}/\partial\psi \neq 0$, de tal manera que la materia descrita por (2.62) tenga una ecuación de estado diferente. Una investigación detallada muestra que es posible recuperar todas las ecuaciones de estado usadas comunmente en astrofísica y cosmología [86].

Para ir más allá de radiación, utilizaremos una de las clases de soluciones de (2.59) obtenida por Ponce de León en 1988. El elemento de línea se escribe

$$ds^2 = \psi^2 dt^2 - t^{\frac{2}{\alpha}} \psi^{\frac{2}{(1-\alpha)}} \left[dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \right] - \alpha^2 (1-\alpha)^{-2} t^2 d\psi^2, \quad (2.63)$$

donde α es una constante relacionada con las propiedades de la materia. Esto último puede verse sustituyendo (2.63) en (2.62), obteniéndose que la densidad ρ y la presión P satisfacen

$$8\pi G\rho = \frac{3}{\alpha^2 \psi^2 t^2}, \quad 8\pi GP = \frac{(2\alpha - 3)}{\alpha^2 \psi^2 t^2}, \quad P = \left(\frac{2\alpha}{3} - 1 \right) \rho. \quad (2.64)$$

Por tanto, si elegimos $\alpha = 2$ obtenemos $P = (1/3)\rho$ (radiación) y un factor de escala, dado por (2.63), cuya parte temporal evoluciona de acuerdo a $t^{1/2}$. Si elegimos $\alpha = 3/2$ obtenemos $P = 0$ (polvo) y un factor de escala cuya parte temporal evoluciona de acuerdo a $t^{2/3}$. Por otro lado, la métrica (2.63), bajo la foliación $\psi = \psi_0 = cte$ se transforma en

$$ds^2 = \psi_0^2 dt^2 - t^{\frac{2}{\alpha}} \psi_0^{\frac{2}{(1-\alpha)}} [dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2)], \quad (2.65)$$

que puede escribirse en la forma

$$dS^2 = d\tau^2 - a^2(\tau) [dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2)], \quad (2.66)$$

con $\tau = \psi_0 t$ y $a(\tau)$ un factor de escala. Esta métrica describe un Universo de FRW espacialmente plano. De esta forma, uniendo a este hecho las consecuencias de (2.64), puede afirmarse que sobre las hipersuperficies $\psi = \psi_0 = cte$ se recupera el modelo cosmológico estándar ³.

Las coordenadas en (2.63) son elegidas comóviles espacialmente y satisfacen $U^i = \frac{dx^i}{ds} = 0$, al igual que en la presentación usual de los modelos tetradimensionales. Las pentavelocidades U^0 y U^4 se obtienen resolviendo la ecuación de geodésicas 5D, $\frac{dU^A}{ds} + \Gamma^A_{BC} U^B U^C = 0$, generando

$$U^0 = \mp \frac{\alpha}{\sqrt{2\alpha - 1}} \frac{1}{\psi}, \quad U^4 = \pm \frac{(1 - \alpha)^2}{\alpha \sqrt{2\alpha - 1}} \frac{1}{t}. \quad (2.67)$$

Eligiendo ahora el sistema de coordenadas no comóviles espacialmente (T, R, Ψ) mediante

$$T = t\psi, \quad R = t^{\frac{1}{\alpha}} r, \quad \Psi = Qt^{\pm Q}\psi, \quad (2.68)$$

siendo $Q = \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^2$, las pentavelocidades \bar{U}^A , que se relacionan con U^B según $\bar{U}^A = \frac{\partial \bar{x}^A}{\partial x^B} U^B$, en el nuevo sistema de referencia son dadas por

$$\bar{U}^0 = \mp \frac{\sqrt{2\alpha - 1}}{\alpha}, \quad \bar{U}^1 = \mp \frac{1}{\sqrt{2\alpha - 1}} \frac{R}{T}, \quad (2.69)$$

donde $\bar{U}^2 = \bar{U}^3 = \bar{U}^4 = 0$. Comparando (2.69) con (2.67) vemos que ahora \bar{U}^0 es constante, que \bar{U}^1 es finita y no nula, y que \bar{U}^4 es ahora cero. Además,

³ Este resultado es consecuencia directa del teorema de Campbell-Magaard, pues se esta embebiendo localmente un espacio-tiempo de FRW tetradimensional sobre un espacio-tiempo Ricci plano pentadimensional.

ya que la métrica se transforma de acuerdo a $\bar{g}^{AB} = \frac{\partial \bar{x}^A}{\partial x^C} \frac{\partial \bar{x}^B}{\partial x^D} g^{CD}$, en el nuevo sistema de referencia $\bar{g}^{00} = \frac{2\alpha-1}{\alpha^2} = cte$, que para $\alpha = 2$ es $3/4$ y para $\alpha = 3/2$ es $8/9$. Este resultado significa que en el nuevo sistema de coordenadas (2.68), hay un tiempo cósmico T que es el mismo para todos los observadores, que las galaxias se mueven de acuerdo a la ley de expansión usual y, que las energías y las masas en reposo, ambas asociadas a \bar{U}^0 , son constantes.

En términos del tiempo cósmico T , la densidad y la presión (2.64) son

$$8\pi G\rho = \frac{3}{\alpha^2 T^2}, \quad 8\pi GP = \frac{(2\alpha - 3)}{T^2}, \quad (2.70)$$

que son idénticos a los valores $4D$ para radiación y polvo, pero sin el factor ψ . Claramente la presencia o ausencia de ψ y la question de si U^4 es cero o no, depende de la elección del sistema de coordenadas.

Es importante notar que cantidades como ρ y P se definen en 4D mientras que las ecuaciones de campo básicas de la teoría (2.59), son covariantes en 5D. De esta manera, la forma funcional de ρ y P cambian dependiendo de la elección de la quinta coordenada. Esta es una característica única de la teoría 5D, y significa que un modelo 5D puede tomar diferentes formas funcionales en 4D, dependiendo de la elección del sistema de coordenadas.

Una consecuencia particularmente interesante de la covarianza 5D se obtiene considerando la transformación de coordenadas

$$\begin{aligned} T &= \left(\frac{\alpha}{2}\right) t^{\frac{1}{\alpha}} \psi^{\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)} \left(1 + \frac{r^2}{\alpha^2}\right) - \frac{\alpha}{2(1-2\alpha)} \left[t^{-1} \psi^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right]^{\left(\frac{1-2\alpha}{\alpha}\right)}, \\ R &= r t^{\frac{1}{\alpha}} \psi^{\frac{1}{1-\alpha}}, \\ \Psi &= \left(\frac{\alpha}{2}\right) t^{\frac{1}{\alpha}} \psi^{\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)} \left(1 - \frac{r^2}{\alpha^2}\right) + \frac{\alpha}{2(1-2\alpha)} \left[t^{-1} \psi^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right]^{\left(\frac{1-2\alpha}{\alpha}\right)}. \end{aligned} \quad (2.71)$$

En este nuevo sistema de coordenadas el elemento de línea (2.63) se transforma en

$$ds^2 = dT^2 - dR^2 - R^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) - d\Psi^2, \quad (2.72)$$

que describe a un espacio-tiempo manifiestamente plano. Este resultado puede verificarse con el uso de una computadora, en donde se muestra que todas

las componentes del tensor de Riemann 5D para (2.72) son cero. De hecho, la parte 4D de este espacio-tiempo no es plana, ya que el escalar de Ricci 4D es no nulo, $R = \frac{6(\alpha-2)}{\alpha^2 t^2 \psi^2}$. De esta forma puede verse que el Universo puede ser curvo en 4D y al mismo tiempo plano en 5D. Con ayuda de este argumento, en la teoría de materia inducida se discute la posibilidad de que la singularidad $t = 0$ en el modelo de la gran explosión sea un mero artefacto de una elección de coordenadas en 5D.

Finalmente, llegamos a la conclusión de que la teoría de materia inducida describe un Universo que consiste de fuentes singulares localizadas, embebidas en una cosmología globalmente plana. Puede mostrarse además que esta teoría no presenta conflictos con las pruebas clásicas de relatividad general ni con causalidad [87].

Con respecto a la interpretación física de la quinta coordenada, inicialmente se pensaba que la quinta dimensión estaba vinculada con la masa en reposo de las partículas, en el fluido de materia inducida [88, 89]. De hecho, este fue uno de los orígenes del nombre de teoría espacio-tiempo-materia pensando en 3 coordenadas espaciales, una temporal, y la otra espacial pero vinculada con las propiedades clásicas de la materia inducida. Los argumentos dados por P. S. Wesson para vincular la quinta coordenada x^4 con la masa, son los siguientes:

- Toda la mecánica depende de una base de unidades de longitud, tiempo y masa. Si las dos primeras pueden tratarse como coordenadas, entonces la última también. Dimensionalmente, $x^4 = \frac{Gm}{c^2}$, nos lleva a tratar la masa en reposo de una partícula como una coordenada de longitud, en analogía con $x^0 = ct$.
- Las métricas de la teoría 5D que no dependen de x^4 , generan sólo la ecuación de estado para fotones, mientras que métricas como (2.63) que dependen de x^4 necesariamente implican ecuaciones de estado para fluidos compuestos de partículas masivas.
- La métrica

$$ds^2 = \psi^2 dt^2 - d\sigma^2 - t^2 d\psi^2, \quad (2.73)$$

se relacionan mediante la transformación de coordenadas

$$T = \frac{t^2 \psi^2}{4} + \ln [t^{1/2} \psi^{-1/2}], \quad \Psi = \frac{t^2 \psi^2}{4} - \ln [t^{1/2} \psi^{-1/2}], \quad (2.74)$$

con la métrica

$$ds^2 = dT^2 - d\sigma^2 - d\Psi^2. \quad (2.75)$$

La métrica (2.75) es plana, mientras que (2.73) para una partícula en reposo con respecto al espacio 3D $\frac{d\sigma}{ds} = 0$, y vista sobre una hipersuperficie $\psi = cte$, da un principio de mínima acción $\delta \int \psi dt = 0$, que es formalmente el mismo que el de una partícula física si tomamos $\psi = m$, en el límite local de bajas velocidades. Lo mismo es válido para las métricas cosmológicas (2.63). Esto va de acuerdo con la teoría cuántica de campos que establece que la masa en reposo de las partículas elementales es generada espontáneamente en una teoría conformalmente invariante, que incluye un campo escalar dilatón, o el bosón de Nambu-Goldstone en un espacio de Minkowski.

A pesar de que estos argumentos son certeros, no dejan de ser simplistas. Más aun, J. Ponce de León [51] demostró que la no unicidad en la descripción geodésica 5D de la dinámica de partículas de prueba, implicaba una ambigüedad en la definición de masa en reposo 4D, que es crucial para la discusión de la dinámica. De esta manera, la pregunta sobre la interpretación física de la quinta coordenada en el escenario tetradimensional de la teoría espacio-tiempo-materia, no va más allá de afirmar que la quinta dimensión está vinculada con las fuentes de materia tetradimensionales.

En este capítulo hemos estudiado la teoría clásica de Kaluza-Klein compacta, el teorema de Campbell-Magaard y por último el escenario cosmológico de la teoría espacio-tiempo-materia o de materia inducida. Llegamos a la conclusión de que algunos períodos en la evolución del Universo pueden ser descritos desde este escenario pentadimensional. Sin embargo, como hemos visto en el primer capítulo, en el modelo cosmológico estándar actual es imprescindible incluir un modelo inflacionario que vaya de acuerdo con las evidencias observacionales. De aquí la importancia de estudiar inflación desde un escenario pentadimensional. Un estudio de diferentes modelos inflacionarios desde el contexto de la teoría de materia inducida fue hecho en [52]. En el siguiente capítulo estudiaremos un nuevo formalismo inflacionario del Universo desde un escenario pentadimensional que usa las ideas fundamentales de la teoría espacio-tiempo-materia, pero con nuevos ingredientes. El principal de ellos es la introducción de un campo escalar pentadimensional libre mínimamente acoplado a la gravedad.

3. COSMOLOGÍA INFLACIONARIA DESDE UNA TEORÍA DE KALUZA- KLEIN NO COMPACTA 5D

3.1 Introducción

En la cosmología moderna es un hecho aceptado que la densidad de energía asociada a campos escalares contribuye a la expansión del Universo [23]. Esto puede constatarse en los modelos inflacionarios con alto grado de aceptación entre la comunidad científica [31]. En la actualidad este tipo de densidad de energía ha sido propuesta para explicar el presente período de expansión acelerada del Universo, conocido como período de quinta esencia [32]. El principio cosmológico favorece el uso de campos escalares para describir la dinámica global del Universo, pues los campos vectoriales, como los campos eléctricos y magnéticos, no cumplen con la homogeneidad e isotropía espaciales a gran escala requeridas. Un intento por confrontar datos observacionales con las predicciones de algunos modelos cosmológicos cuyo formalismo considera solo un campo escalar mínimamente acoplado a la gravedad, con un potencial escalar desconocido a priori fue hecho en [33].

Por otro lado, dados los escenarios en más de cuatro dimensiones, un problema de gran relevancia e interés en la física moderna, es el construir un formalismo que brinde una buena descripción geométrica de la materia, utilizando sólo una coordenada extra [31]. En este capítulo estamos interesados en la construcción de un formalismo pentadimensionale con la quinta coordenada no compacta, en el cual podamos estudiar cosmología inflacionaria ¹.

En el contexto de una teoría de Kaluza-Klein no compacta de la gravedad, en este capítulo estamos interesados en dar un origen geométrico al potencial escalar inflacionario tetradimensional $V(\varphi)$, partiendo desde un

¹ En este formalismo pueden describirse modelos cosmológicos más allá de inflación incluyendo quinta esencia, sólo que esto escapa de los objetivos de la presente tesis.

vacío aparente pentadimensional. Esto tiene fundamento en el teorema de Campbell-Magaard, pues sabemos que este teorema implica que toda solución inflacionaria puede ser generada, al menos en principio, desde un vacío de gravedad Einsteiniana pentadimensional [42].

Sin embargo, aunque el teorema de Campbell-Magaard relaciona teorías N-dimensionales con teorías desde un vacío (N+1)-dimensional, no establece una equivalencia estricta entre ellas, de tal suerte que es muy importante determinar cuando tales teorías son equivalentes. Se consideran dos nociones de equivalencia, **la equivalencia dinámica** y **la equivalencia geodésica**. La equivalencia dinámica implica que la dinámica de teorías N-dimensionales es incluida en la dinámica de teorías desde un vacío aparente (N+1)-dimensional. Alternativamente, es posible considerar la equivalencia geodésica en el sentido de Mashhoon [44]. En este caso la (3+1)-ecuación de geodésicas induce una (2+1)-ecuación de geodésicas más un término de fuerza (por unidad de masa) F^C , de la forma:

$$\frac{dU^C}{dS} + \Gamma^C{}_{AB}U^AU^B = F^C. \quad (3.1)$$

Para obtener la aproximación de equivalencia geodésica debe requerirse que $F^C = 0$, que describe la trayectoria de observadores en caída libre. En esta tesis usaremos la aproximación de equivalencia geodésica.

3.2 Formalismo.

La idea primigenia, al igual que en la teoría de Kaluza-Klein compacta, es explicar a partir de un vacío aparente 5D la materia que vemos en un espacio-tiempo 4D. A diferencia de la teoría clásica de Kaluza-Klein, no imponemos ninguna condición de compactificación sobre la quinta coordenada. En lugar de eso, dejaremos evolucionar la quinta coordenada de acuerdo al principio de mínima acción 5D manifiesto en la ecuación de geodésicas 5D.

En el sistema de coordenadas locales (N, x, y, z, ψ) , consideramos el elemento de línea pentadimensional

$$dS^2 = \epsilon(\psi^2 dN^2 - \psi^2 e^{2N} dr^2 - d\psi^2), \quad (3.2)$$

donde $dr^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. Las coordenadas (N, \vec{r}) son adimensionales, la quinta coordenada ψ tiene unidades de longitud y ϵ es un parámetro adimensional que toma valores $\epsilon = \pm 1$ introducido en principio para distinguir entre los dos diferentes tipos de firmas Lorentzianas. Cabe hacer notar que la coordenada r , en realidad engloba tres coordenadas espaciales. Esta métrica satisface $R^A{}_{BCD} = 0$ y por ende $G_{AB} = 0$. Por tanto describe un espacio-tiempo pentadimensional plano. En otras palabras, la métrica (3.2) describe un vacío geométrico.

Para describir materia neutra en un vacío geométrico como el definido por (3.2), consideraremos la Lagrangiana pentadimensional

$${}^{(5)}L(\varphi, \varphi_{,A}) = -\sqrt{\left|\frac{{}^{(5)}g}{{}^{(5)}g_0}\right|} {}^{(5)}\mathcal{L}(\varphi, \varphi_{,A}), \quad (3.3)$$

donde $|{}^{(5)}g| = \psi^8 e^{6N}$ es el valor absoluto del determinante asociado al 5D tensor métrico con componentes covariantes g_{AB} , y $|{}^{(5)}g_0| = \psi_0^8 e^{6N_0}$ es una constante de dimensionalización, determinada por $|{}^{(5)}g|$ evaluado en $\psi = \psi_0$ y $N = N_0$. El subíndice “0” denota, en este caso, el tiempo al cual inflación termina. Para los fines de esta tesis es conveniente elegir $N_0 = 0$, de tal manera que ${}^{(5)}g = \psi_0^8$.

Por otro lado dado que (3.2) describe una variedad en un vacío geométrico pentadimensional, por consistencia, la densidad lagrangiana ${}^{(5)}\mathcal{L}$ en la ecuación (3.3) debe tener la forma

$${}^{(5)}\mathcal{L}(\varphi, \varphi_{,A}) = \frac{1}{2} g^{AB} \varphi_{,A} \varphi_{,B}, \quad (3.4)$$

la cual representa un campo escalar 5D libre debido a que no aparece ningún término de potencial pentadimensional $V[\varphi(N, \vec{r}, \psi)] = 0$. En otras palabras estamos definiendo el vacío aparente 5D a través de una densidad lagrangiana 5D puramente cinética sobre un espacio-tiempo en vacío geométrico. Nótese que aunque el hecho de introducir un campo escalar libre, técnicamente nos lleva a tener un tensor energía momento pentadimensional $T_{AB} \neq 0$, esto no afecta el hecho de seguir teniendo un espacio-tiempo pentadimensional plano. Esto se debe a que la métrica (3.2) por si sola satisface $R^A{}_{BCD} = 0$, de tal manera que aunque $T_{AB} \neq 0$ en $G_{AB} = 8\pi k T_{AB}$, con k una constante de acoplamiento pentadimensional, la planaridad pentadimensional se sigue

manteniendo y $G_{AB} = 0$ ².

Considerando la métrica (3.2) y la lagrangiana (3.3), con ayuda de las ecuaciones de Lagrange la dinámica para el campo escalar φ es determinada por

$$(2\psi \frac{\partial \psi}{\partial N} + 3\psi^2) \frac{\partial \varphi}{\partial N} + \psi^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial N^2} - \psi^2 e^{-2N} \nabla_r^2 \varphi - (3\psi \frac{\partial N}{\partial \psi} + 4)\psi^3 \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} - \psi^4 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \psi^2} = 0, \quad (3.5)$$

donde $\frac{\partial N}{\partial \psi}$ y $\frac{\partial \psi}{\partial N}$ son nulas, ya que hasta este momento las coordenadas (N, \vec{r}, ψ) son independientes.

De manera análoga al procedimiento empleado en la teoría espacio-tiempo-materia, elegimos un sistema de referencia comóvil definido por $U^r = \frac{dr}{dS} = 0$, donde dS denota al elemento de longitud definido por (3.2). De esta forma, las pentavelocidades U^N y U^ψ son determinadas por la dinámica geodésica dada por la ecuación de geodésicas $\frac{dU^C}{dS} = -\Gamma_{AB}^C U^A U^B$. Dado que los símbolos de Christoffel relevantes son

$$\Gamma_{\psi\psi}^N = 0, \quad \Gamma_{\psi N}^N = \frac{1}{\psi}, \quad \Gamma_{NN}^\psi = \psi, \quad \Gamma_{N\psi}^\psi = 0, \quad (3.6)$$

las pentavelocidades U^N y U^ψ satisfacen

$$\frac{dU^N}{dS} = -\frac{2}{\psi} U^N U^\psi, \quad (3.7)$$

$$\frac{dU^\psi}{dS} = -\psi U^N U^N, \quad (3.8)$$

$$\psi^2 U^N U^N - U^\psi U^\psi = 1, \quad (3.9)$$

donde (3.9) describe la condición de hiperbolicidad $g_{AB} U^A U^B = 1$. Simplificando el sistema anterior obtenemos

$$\frac{dU^N}{dN} = -\frac{2}{\psi} U^\psi, \quad (3.10)$$

$$\frac{dU^\psi}{dN} = -\psi U^N, \quad (3.11)$$

$$\psi^2 U^N U^N - U^\psi U^\psi = 1. \quad (3.12)$$

² Nótese que podría incluirse un potencial pentadimensional $V(\varphi)$ sin violar la planaridad del espacio-tiempo 5D, sin embargo en esta tesis elegimos introducir solo campos escalares pentadimensionales libres.

La solución general a este sistema es dada por

$$\psi U^N = \cosh[S(N)], \quad U^\psi = -\sinh[S(N)], \quad (3.13)$$

donde $S(N) = \pm |N|$. Como veremos posteriormente, la coordenada N está vinculada con la coordenada física que corresponde al tiempo. Este hecho aunado a la relación existente entre la quinta coordenada y el parámetro de Hubble ($\psi = H^1$), hacen que $S(N) = -|N|$ corresponda a deflación (en general a una contracción), y en cambio que $S(N) = |N|$ corresponda a inflación (en general a una expansión). Para los fines de esta tesis es suficiente considerar sólo el caso inflacionario. Bajo esta consideración la ecuación que describe la evolución geodésica de $\psi(N)$ es

$$\frac{d\psi}{dN} = \frac{U^\psi}{U^N} = \frac{\psi}{u(N)}, \quad (3.14)$$

donde hemos definido $\tanh[S(N)] = -\frac{1}{u(N)}$. Resolviendo (3.14) obtenemos que la quinta coordenada ψ evoluciona de acuerdo a

$$\psi(N) = \psi_0 e^{\int \frac{dN}{u(N)}}, \quad (3.15)$$

donde ψ_0 es una constante de integración que tiene unidades espaciales que se determina en función de las condiciones iniciales. En esta representación las pentavelocidades son dadas por

$$U^N = \frac{u(N)}{\psi \sqrt{u^2(N) - 1}}, \quad U^r = 0, \quad U^\psi = -\frac{1}{\sqrt{u^2(N) - 1}}. \quad (3.16)$$

por otro lado, debe advertirse que las coordenadas (N, \vec{r}, ψ) usadas hasta ahora no son coordenadas físicas, de tal suerte que para describir la métrica (3.2) en coordenadas físicas proponemos la transformación

$$t = \int \psi(N) dN, \quad R = r\psi, \quad L = \psi(N) e^{-\int \frac{dN}{u(N)}}. \quad (3.17)$$

Considerando la elección entre el parámetro de Hubble efectivo y la quinta coordenada $h(t) = \frac{1}{\psi(t)}$, el nuevo elemento de longitud pentadimensional adquiere la forma

$$dS^2 = \epsilon \left(dt^2 - e^{\int h(t) dt} dR^2 - dL^2 \right), \quad (3.18)$$

donde $L = \psi_0$ es constante y $h(t) = \frac{\dot{b}}{b}$ es el parámetro de Hubble efectivo definido a partir del factor de escala efectivo del Universo $b(t)$. El parámetro $h(t)$ es efectivo en el sentido de que, como veremos más adelante, contempla tanto aspectos cuánticos como clásicos de la expansión semiclásica del potencial asociado al campo inflatón.

Este nuevo sistema de referencia (t, \vec{R}, L) , corresponde a una clase de observadores con pentavelocidades $\hat{U}^A = \frac{\partial \hat{x}^A}{\partial x^B} U^B$ dadas por

$$\hat{U}^t = \frac{2u(t)}{\sqrt{u^2(t) - 1}}, \quad \hat{U}^R = -\frac{2Rh(t)}{\sqrt{u^2(t) - 1}}, \quad \hat{U}^L = 0, \quad (3.19)$$

que satisfacen, al igual que en el antiguo sistema de referencia, la condición de hiperbolicidad

$$\hat{g}_{AB} \hat{U}^A \hat{U}^B = 1, \quad (3.20)$$

y donde hemos denotado por $(\hat{})$ a las cantidades con respecto a las nuevas coordenadas (t, \vec{R}, L) .

Las variables (t, \vec{R}, L) tienen significado físico ya que t es el tiempo cósmico y (\vec{R}, L) son variables espaciales. Por otro lado, como el elemento de línea es función del tiempo, la nueva coordenada $R = |\vec{R}|$ nos da la distancia física entre galaxias separadas a escala cosmológica. Considerando que debido a (3.17), $R(t) = \frac{r(t)}{h(t)}$, y que el horizonte de Hubble es dado por $\frac{1}{h(t)}$, debe notarse que para $r > 1$, la 3D distancia espacial $R(t)$ es definida a escalas Super-Hubble, y para $r < 1$ es definida a escalas Sub-Hubble. Dadas las anteriores interpretaciones físicas es fácil ver que el factor de escala efectivo del Universo $b(t)$ describe un 3D volumen espacial (euclidiano), y de esta forma (3.18) es una métrica efectiva 4D del tipo FRW espacialmente (3D) plana dada por

$$dS^2 \longrightarrow ds^2 = \epsilon \left(dt^2 - e^{2 \int h(t) dt} dR^2 \right). \quad (3.21)$$

Esta métrica tiene asociada una curvatura escalar efectiva 4D dada por el 4D escalar de Ricci, ${}^{(4)}\mathcal{R} = 6 \left(\dot{h} + 2h^2 \right)$. El elemento de longitud efectivo 4D (3.21) tiene asociado un tensor métrico diagonal 4D con componentes covariantes $g_{\mu\nu}$ (con $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$.) El valor absoluto del determinante de este

tensor es $|^{(4)}g| = \left(\frac{b}{b_0}\right)^6$. Por tanto, la métrica (3.21) describe un Universo espacialmente homogéneo e isotrópico, y espacialmente plano.

Como sabemos, nuestro Universo a gran escala puede modelarse a través de un espacio-tiempo con una métrica del tipo FRW y la teoría de la relatividad general 4D, considerando un fluido perfecto. Esto hace más que relevante el formalismo dado en esta sección, pues llegamos a la conclusión de que como consecuencia del teorema de Campbell-Magaard, es posible modelar nuestro Universo desde un espacio-tiempo 5D en un vacío aparente. Concretamente, hemos formulado la conexión entre un Universo 4D y uno 5D a través de los dos diferentes sistemas de referencia empleados. Es muy importante notar que la propuesta no es obtener un universo 4D a partir de un Universo 5D vía una reducción dimensional, sino que a pesar de que nuestro Universo sea 5D, existe al menos una clase de observadores o sistema de referencia desde los cuales se verá al Universo 5D como un Universo efectivo 4D. Si aceptamos que nosotros como observadores pertenecemos a esta clase, nuestra percepción del Universo sería 4D con algunos efectos de la quinta coordenada sobre éste.

Para poder estudiar cuál sería el impacto de la evolución de la quinta coordenada sobre el Universo que percibimos, es necesario describir la dinámica del Universo vista desde el sistema de referencia (3.19) asociado a una métrica efectiva 4D. Sin embargo, es de nuestro principal interés estudiar el impacto de la quinta dimensión en un escenario inflacionario.

3.3 *El Origen del Potencial Inflacionario 4D.*

En la actualidad existen muchos modelos inflacionarios tetradimensionales del Universo, formulados sobre una métrica de FRW espacialmente plana, que van desde inflación caótica hasta modelos de inflación híbrida. En los diferentes modelos construidos a partir de un campo escalar la diferencia esencial es el potencial $V(\varphi)$ introducido en cada uno de ellos. Sin embargo, a pesar de que la dinámica de este campo sea distinta en cada modelo, tienen algo en común, y es que en todos se introduce el potencial inflacionario argumentando razones físicas pero en ningún caso se da una explicación satisfactoria y completa acerca del origen de estos potenciales escalares.

Como veremos a continuación, en esta tesis es posible dar un origen geométrico a este potencial, obteniéndose así una dinámica inflacionaria más sólida y completa, comparada con la de los modelos clásicos desarrollados hasta ahora.

La idea es construir una teoría en la que a partir de un vacío aparente 5D y debido al movimiento geodésico de la quinta coordenada, un observador en el sistema de referencia definido por $(U^t, U^R, U^L = 0)$ obtenga un potencial inflacionario 4D inducido. En este sentido la dinámica 4D generada por este potencial es una consecuencia de la existencia y evolución de la quinta coordenada, vista en dicho sistema de referencia. En esta sección vamos a formalizar esta idea haciendo además un análisis general de la dinámica clásica inducida.

Con respecto al sistema referencia (t, \vec{R}, L) definido por (3.17), (3.19) y (3.20), describiremos la dinámica 4D inducida por la densidad lagrangeana (3.4) y la ecuación de movimiento (3.5). Usando las transformaciones (3.17) en (3.4) obtenemos una densidad lagrangiana efectiva tetradimensional dada por

$${}^{(4)}\mathcal{L} \left[\varphi(t, \vec{R}), \varphi_{,\mu}(t, \vec{R}) \right] = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \varphi_{,\mu} \varphi_{,\nu} - \frac{1}{2} \left[(Rh)^2 - \frac{b_0^2}{b^2} \right] (\nabla_R \varphi)^2. \quad (3.22)$$

Análogamente transformando (3.5) obtenemos la ecuación dinámica para φ efectiva tetradimensional

$$\ddot{\varphi} + 3h\dot{\varphi} - \frac{b_0^2}{b^2} \nabla_R^2 \varphi + \left[\left(4\frac{\dot{h}^3}{h} - 3\frac{\dot{h}}{h} - 3\frac{\dot{h}^5}{h^2} \right) \dot{\varphi} + \left(\frac{b_0^2}{b^2} - h^2 R^2 \right) \nabla_R^2 \varphi \right] = 0. \quad (3.23)$$

Cuando comparamos las ecuaciones (3.22) y (3.23) con las ecuaciones análogas en la teoría inflacionaria estándar, es posible hacer la identificación de los respectivos potencial escalar tetradimensional inducido $V(\varphi)$ y su derivada con respecto a $\varphi(t, \vec{R})$, obteniéndose

$$V(\varphi) \equiv \frac{1}{2} \left[(Rh)^2 - \frac{b_0^2}{b^2} \right] (\nabla_R \varphi)^2, \quad (3.24)$$

$$V'(\varphi) \equiv \left(4\frac{\dot{h}^3}{h} - 3\frac{\dot{h}}{h} - 3\frac{\dot{h}^5}{h^2} \right) \dot{\varphi} + \left(\frac{b_0^2}{b^2} - h^2 R^2 \right) \nabla_R^2 \varphi, \quad (3.25)$$

donde la prima denota derivada con respecto a φ . Las ecuaciones (3.22) y (3.23) describen la dinámica del campo inflatón $\varphi(t, \vec{R})$ en una métrica (3.21) con una Lagrangiana efectiva 4D

$${}^{(4)}L(\varphi(t, \vec{R}), \varphi_{,\mu}(t, \vec{R})) = -\sqrt{\left|\frac{{}^{(4)}g}{{}^{(4)}g_0}\right|} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \varphi_{,\mu} \varphi_{,\nu} + V(\varphi) \right], \quad (3.26)$$

siendo $|\frac{{}^{(4)}g}{{}^{(4)}g_0}| = 1$. Análogamente a lo ocurrido con la densidad lagrangiana, las ecuaciones de Einstein 5D ($G_{AB} = 0$) con la métrica (3.2) inducen las ecuaciones de campo de Einstein 4D ($G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$) con la métrica (3.21) de tal manera que identificando el tensor energía momento como el de un fluido perfecto, se obtienen una densidad de energía ρ_t y una presión P inducidas, dadas por las correspondientes ecuaciones de Friedmann

$$8\pi G \rho_t = 3\dot{h}^2, \quad (3.27)$$

$$8\pi G P = -(3\dot{h}^2 + 2\ddot{h}). \quad (3.28)$$

De esta manera hemos recuperado las ecuaciones de Friedmann tetradimensionales pero con una presión y densidad de energía inducidas geoméricamente. Por otro lado, con ayuda de (3.14), de las ecuaciones de transformación (3.17) y bajo la consideración $\psi = h^{-1}(t)$, obtenemos que la función $u(t)$ es dada por la expresión

$$u(t) = -\frac{\dot{h}^2}{\ddot{h}}, \quad (3.29)$$

donde el punto denota derivada temporal. Análogamente, el parámetro de desaceleración definido por $q(t) = -(\ddot{b}b)/\dot{b}^2$, está vinculado con la función $u(t)$ a través de

$$u(t) = \frac{1}{1 + q(t)}. \quad (3.30)$$

Como sabemos, inflación es un período de expansión acelerada del Universo ($\ddot{b} > 0$) y por tanto $q < 0$ en este período. Esto nos lleva a la condición $u > 1$. Más aun, de (3.29), usando que $\dot{h} < 0$ y que el factor de escala efectivo $b(t)$ crece muy rápidamente durante inflación vemos que $u \gg 1$. De esta forma, resumiendo las condiciones impuestas por (3.29) y (3.30), puede afirmarse que durante inflación se cumple que $u \gg 1$.

Uno de los resultados que pueden considerarse como una de las principales aportaciones, no sólo de esta sección sino de la tesis en general, consiste

en dar un origen geométrico al potencial inflacionario, logrando con esto construir un modelo inflacionario en el cual el potencial no es introducido arbitrariamente.

Como hemos visto en el capítulo anterior, en inflación se requiere de un campo escalar que satisfaga las exigencias del principio cosmológico. Este campo escalar φ puede descomponerse en dos partes, una primera que representa la parte clásica (global) que satisface el principio cosmológico y una segunda parte considerada como una fluctuación cuántica (local) del campo. Estas fluctuaciones cuánticas del inflatón son las responsables de las fluctuaciones en la densidad de energía ρ_t , que son consideradas las semillas para la posterior formación de estructura en el Universo. En la siguiente sección estudiaremos este formalismo pero en el contexto de la teoría que aquí se presenta.

3.4 La Aproximación Semiclásica.

En este momento podemos introducir el Hamiltoniano tetradimensional, definido por $\mathcal{H} = \pi^0 \dot{\varphi} - {}^{(4)}L$. Dada la lagrangiana tetradimensional (3.26), obtenemos el Hamiltoniano tetradimensional

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \frac{b^3}{b_0^3} \left[\dot{\varphi}^2 + \frac{b_0^2}{b^2} (\nabla\varphi)^2 + 2V(\varphi) \right]. \quad (3.31)$$

Con esto, la densidad de energía efectiva 4D ρ_t es dada por

$$\rho_t = \frac{1}{2} \left[\dot{\varphi}^2 + \frac{b_0^2}{b^2} (\nabla\varphi)^2 + 2V(\varphi) \right]. \quad (3.32)$$

De esta forma, el valor de espectación de las ecuaciones de Einstein $\langle H^2 \rangle = \frac{8\pi G}{3} \langle \rho_t \rangle$ sobre la métrica de FRW (3.21) es dado por

$$\langle H^2 \rangle = \frac{4\pi G}{3} \left\langle \dot{\varphi}^2 + \frac{b_0^2}{b^2} (\nabla\varphi)^2 + 2V(\varphi) \right\rangle, \quad (3.33)$$

siendo G la constante de gravitación universal y $\langle H^2 \rangle \equiv h^2 = \frac{\dot{b}^2}{b^2}$. Ahora podemos hacer un tratamiento semiclassical [41] para el campo cuántico

efectivo 4D $\varphi(t, \vec{R})$, tal que $\langle \varphi \rangle = \phi_c(t)$. Por consiguiente tomamos la aproximación semiclásica dada por

$$\varphi(t, \vec{R}) = \phi_c(t) + \phi(t, \vec{R}), \quad (3.34)$$

donde se satisface $\langle \phi \rangle = 0$ y $\langle \dot{\phi} \rangle = 0$. Con esta aproximación, la dinámica clásica sobre el fondo 4D definido por la métrica de FRW (3.21), es descrita por las ecuaciones

$$\ddot{\phi}_c + 3\frac{\dot{b}}{b}\dot{\phi}_c + V'(\phi_c) = 0, \quad (3.35)$$

$$H_c^2 = \frac{8\pi G}{3} \left(\frac{\dot{\phi}_c^2}{2} + V(\phi_c) \right), \quad (3.36)$$

con $H_c^2 = \frac{\dot{a}^2}{a^2}$, y la prima denotando derivada con respecto al campo ϕ_c . En otras palabras, el factor de escala $a(t)$ sólo toma en cuenta la expansión debida al parámetro clásico de Hubble, pero el factor de escala efectivo $b(t)$ toma en cuenta contribuciones tanto clásicas como cuánticas en la densidad de energía, $\frac{\dot{b}^2}{b^2} = \frac{8\pi G}{3} \langle \rho_t \rangle$. Como $\dot{\phi}_c = -\frac{H'_c}{4\pi G}$, a partir de (3.36) obtenemos el potencial escalar clásico $V(\phi_c)$ expresado en función del parámetro clásico de Hubble H_c , y tiene la forma

$$V(\phi_c) = \frac{3M_p^2}{8\pi} \left[H_c^2 - \frac{M_p^2}{12\pi} (H'_c)^2 \right], \quad (3.37)$$

donde $M_p = G^{-1/2} \simeq 1.2 \times 10^{19} \text{ GeV}$ es la masa de Planck. La dinámica cuántica es descrita por

$$\langle H^2 \rangle = H_c^2 + \frac{8\pi G}{3} \left\langle \frac{\dot{\phi}^2}{2} + \frac{b_0^2}{2b^2} (\nabla\phi)^2 + \sum_{n=1} \frac{1}{n!} V^{(n)}(\phi_c) \phi^n \right\rangle, \quad (3.38)$$

$$\ddot{\phi} + 3h\dot{\phi} - \frac{b_0^2}{b^2} \nabla^2 \phi + \sum_{n=1} \frac{1}{n!} V^{(n+1)}(\phi_c) \phi^n = 0. \quad (3.39)$$

De aquí en adelante haremos la siguiente identificación

$$\Lambda(t) = 8\pi G \left\langle \frac{\dot{\phi}^2}{2} + \frac{b_0^2}{2b^2} (\nabla\phi)^2 + \sum_{n=1} \frac{1}{n!} V^{(n)}(\phi_c) \phi^n \right\rangle, \quad (3.40)$$

tal que

$$\frac{\dot{b}^2}{b^2} = \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}. \quad (3.41)$$

A escalas cosmológicas, las fluctuaciones ϕ son pequeñas, y por tanto es suficiente hacer una aproximación lineal ($n = 1$) para estas fluctuaciones. Así el segundo término en (3.41) es despreciable a tales escalas. Sin embargo, este mismo término puede llegar a ser lo suficientemente importante en el espectro ultravioleta y más precisamente a la escala de Planck. A estas escalas, los modos para ϕ deben ser coherentes y la energía dentro de estas regiones puede considerarse como “oscura”, en el sentido de que no ha decoherentizado. De esta manera, la contribución más significativa para el parámetro cosmológico $\Lambda(t)$ será

$$\Lambda \simeq 8\pi G \left\langle \frac{\dot{\phi}^2}{2} + \frac{b_0^2}{2b^2} (\nabla\phi)^2 + \sum_{n=1} \frac{1}{n!} V^{(n)}(\phi_c) \phi^n \right\rangle \Big|_{Planck}. \quad (3.42)$$

En este sentido, hacemos la identificación para $\Lambda(t)$ como un parámetro cosmológico que toma en cuenta la contribución de “los modos cuánticos coherentes” (o energía oscura) en el valor esperado para la densidad de energía $\langle \rho_\Lambda \rangle = \frac{\Lambda}{8\pi G}$.

Una vez hecha la aproximación lineal ($n = 1$) para el tratamiento semiclásico (3.34), podemos hacer la identificación de la masa al cuadrado para el campo inflatón $m^2 = V''(\phi_c)$. Así, después de hacer una expansión lineal para $V'(\varphi)$ en la ecuación (3.25) obtenemos

$$V'(\phi_c) \equiv \left(4\frac{\dot{h}^3}{h} - 3\frac{\dot{h}}{h} - 3\frac{\dot{h}^5}{h^2} \right) \dot{\phi}_c, \quad (3.43)$$

$$m^2\phi \equiv \left(4\frac{\dot{h}^3}{h} - 3\frac{\dot{h}}{h} - 3\frac{\dot{h}^5}{h^2} \right) \frac{\partial\phi}{\partial t} + \left(\frac{b_0^2}{b^2} - h^2 R^2 \right) \nabla_R^2 \phi. \quad (3.44)$$

Tomando en cuenta las expresiones (3.35) con (3.43) y (3.39) con (3.44), obtenemos la dinámica para ϕ_c y ϕ . De esta forma las ecuaciones (3.35) y (3.39) toman ahora la forma

$$\ddot{\phi}_c + [3h(t) + f(t)]\dot{\phi}_c = 0, \quad (3.45)$$

$$\ddot{\phi} + [3h(t) + f(t)]\dot{\phi} - h^2 R^2 \nabla_R^2 \phi = 0, \quad (3.46)$$

donde

$$f(t) = \left(4\frac{h^3}{h} - 3\frac{\dot{h}}{h} - 3\frac{h^5}{h^2} \right). \quad (3.47)$$

Para ilustrar el formalismo expuesto hasta ahora, lo aplicaremos en la construcción de un modelo inflacionario simple en el cual el parámetro cosmológico $\Lambda(t)$ definido anteriormente, sea nulo.

3.5 Inflación con $\Lambda = 0$.

A escalas cosmológicas y durante inflación, las fluctuaciones cuánticas del inflatón son tan pequeñas que es suficiente considerar una aproximación lineal en (3.39) para tener una descripción realista de la evolución de las fluctuaciones cuánticas ϕ . Como consecuencia inmediata de esto el parámetro cosmológico $\Lambda(t)$ llega a ser despreciable cuando se considera a ϕ 3D espacialmente homogéneo. Cabe aclarar que en otras épocas de la evolución del Universo este término puede llegar a ser lo suficientemente importante. De esta manera la ecuación (3.41) implica que durante inflación el factor de escala efectivo $b(t)$ es igual al factor de escala clásico, sucediendo lo mismo con el parámetro efectivo de Hubble $h(t)$ y el parámetro clásico de Hubble $H_c(t)$. Durante esta misma época la condición de rodadura lenta $\gamma(t) = -\dot{H}_c/H_c^2 \ll 1$ es satisfecha naturalmente, pues sabemos que durante inflación $u(t) \gg 1$ y que $u(t) = \frac{1}{\gamma(t)}$, de tal manera que otra ventaja de este modelo es que no se impone la condición de rodadura lenta sino que surge como consecuencia de la dinámica [96]. Esto asegura que las velocidades U^A en (3.16) y \hat{U}^A en (3.19) son reales y se cumple la condición $r \gg 1$ [97]. Con esto, la ecuación de estado puede ser escrita en términos de la función $u(t)$ en la forma

$$\langle P \rangle = - \left[1 - \frac{2}{3u(t)} \right] \langle \rho_t \rangle, \quad (3.48)$$

la cual debido a que $u(t) \gg 1$ en inflación, cumple con el requisito de que durante esta época $\langle P \rangle \simeq -\langle \rho_t \rangle$. Por otro lado, hablando en términos de la métrica efectiva 4D de FRW (3.21), la evolución geodésica de la quinta coordenada nos da el horizonte de Hubble $\psi(t) = \frac{1}{H(t)}$ de tal manera que la quinta coordenada resultante $L = \psi_0$ esta dada por el horizonte de Hubble al final de inflación: $L = \frac{1}{H_c(t_0)}$.

Definimos las fluctuaciones cuánticas redefinidas $\chi(t, \vec{R}) = \phi e^{\frac{1}{2} \int [3H_c(t) + f(t)] dt}$, tal que la ecuación de movimiento para χ es dada por

$$\ddot{\chi} - \left[H_c^2 R^2 \nabla_R^2 + \frac{1}{4} (3H_c + f(t))^2 + \frac{1}{2} (3\dot{H}_c + \dot{f}(t)) \right] \chi = 0, \quad (3.49)$$

de tal manera que los modos $\chi_k(t)$ del campo χ satisfacen la ecuación diferencial

$$\ddot{\chi}_k + H_c^2 R^2 (k^2 - k_0^2(t)) \chi_k = 0, \quad (3.50)$$

con

$$k_0^2(t) = \frac{1}{R^2 H_c^2} \left[\frac{1}{4} (3H_c + f(t))^2 + \frac{1}{2} (3\dot{H}_c + \dot{f}(t)) \right], \quad (3.51)$$

donde $f(t)$ es una función del parámetro clásico de Hubble [ver la ecuación (3.47)]. De esta forma, la dinámica de las fluctuaciones cuánticas es descrita sólo por el parámetro clásico de Hubble $H_c = \frac{\dot{a}}{a}$.

Ahora vamos a estudiar un ejemplo donde $\psi(N) = -\frac{1}{(\alpha N)}$, tal que $H_c(N) = -\alpha N$. Esto implica que el parámetro clásico de Hubble (escrito como función del tiempo) es dado por $H_c(t) = H_0 e^{\alpha \Delta t}$. Al final de inflación $\alpha \Delta t \ll 1$, así que $H_c(t) \simeq H_0(1 + \alpha \Delta t)$ y $3H_c(t) + f(t) \simeq 3H_0(1 + \alpha \Delta t) + 3\alpha - \left(\frac{4H_0^2}{\alpha}\right)(1 + 2\alpha \Delta t) - \left(\frac{3H_0^3}{\alpha^2}\right)(1 + 3\alpha \Delta t)$, donde $\Delta t = t_0 - t$ y t_0 es el tiempo al cual inflación termina. Al final de inflación es suficiente hacer una expansión a primer orden en Δt para k_0^2 , de tal manera que este puede ser aproximado por

$$k_0^2 = \frac{1}{r^2} (A_1 - A_2 t). \quad (3.52)$$

Con esta aproximación, la solución general para los modos χ_k es

$$\chi_k(t) = C_1 Ai[x(t)] + C_2 Bi[x(t)], \quad (3.53)$$

donde $Ai[x(t)]$ y $Bi[x(t)]$ son las funciones de Airy con argumento $x(t)$ y (C_1, C_2) son constantes de integración. Además

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{4} \left(3H_0 - \frac{3H_0^3}{\alpha^2} + \alpha - \frac{3H_0^2}{\alpha} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(8H_0^2 - \frac{9H_0^3}{\alpha} - \alpha H_0 \right) \\ &- \frac{1}{2} \left(3H_0 - \frac{3H_0^3}{\alpha^2} + 3\alpha - \frac{8H_0^2}{\alpha} \right) \left(8H_0^2 + \frac{9H_0^3}{\alpha} - 3H_0\alpha \right) t_0 \end{aligned} \quad (3.54)$$

$$B_1 = \frac{1}{2} \left(3H_0 - 3\frac{H_0^3}{\alpha^2} + 3\alpha - \frac{8H_0^2}{\alpha} \right) \left(3H_0\alpha - 8H_0^2 - \frac{9H_0^3}{\alpha} \right), \quad (3.55)$$

$$x(t) = \frac{[(A_1 - k^2) - A_2 t]}{A_2} \left(\frac{A_2}{r^2} \right)^{1/3}. \quad (3.56)$$

Note que en este ejemplo H_0 denota el valor del parámetro clásico de Hubble al final de inflación. A escalas cosmológicas (es decir, para $k^2 \ll A_1 - A_2 t$), la solución para χ_k es inestable. Sin embargo, en el sector ultravioleta (UV), es decir, para $k^2 \gg A_1 - A_2 t$, los modos oscilan. Este comportamiento es bien descrito por la función $Bi[x(t)]$, así que tomaremos $C_1 = 0$. De esta forma al final de inflación los modos χ_k están dados por

$$\chi_k(t) = C_2 Bi[x(t)]. \quad (3.57)$$

De esta manera, debido a que los modos de las fluctuaciones cuánticas ϕ son $\phi_k = e^{-\frac{1}{2} \int [3H_c(t) + f(t)] dt} \chi_k$, las fluctuaciones cuadráticas medias para el inflatón están dadas por

$$\langle \phi^2 \rangle \simeq \frac{1}{2\pi^2} e^{-3(H_0 + \alpha) - 4\frac{H_0^2}{\alpha} - 3\frac{H_0^3}{\alpha^2}} t \int dk k^2 |\chi_k^2|, \quad (3.58)$$

donde los modos χ_k están dados por (3.57). Posteriormente las fluctuaciones de densidad de energía son estimadas por la expresión

$$\frac{\delta\rho}{\rho} \sim 2\pi^{1/2} \frac{H_0^{3/2}}{\alpha^{1/2} M_p}, \quad M_p = G^{-1/2}, \quad (3.59)$$

las cuales son del orden de 10^{-5} para $H_0 \sim 10^{-5} M_p$ y $\alpha \sim 10^{-5} M_p$. En nuestro caso el índice espectral n_s es dado por $|n_s - 1| = \frac{6}{u(t)}$. Durante inflación $u \gg 1$, así que $|n_s - 1| \ll 1$. De esta manera vemos que durante inflación el espectro se aproxima muy bien a uno de Harrison-Zeldovich ($n_s \simeq 1$).

En este capítulo hemos desarrollado un formalismo pentadimensional desde un vacío aparente, para describir un escenario inflacionario tetradimensional en el cual el potencial inflacionario $V(\varphi)$ tiene un origen geométrico. Lo característico de este formalismo es que propone un Universo pentadimensional en el cual una clase de observadores, percibe un Universo tetradimensional en donde la quinta dimensión extendida, se manifiesta a través de la existencia de las fuentes de materia, en este caso a través de la inducción del

potencial inflacionario efectivo tetradimensional $V(\varphi)$.

Por otro lado, este formalismo puede calificarse como perturbativo en el sentido de que hace uso de la aproximación semi-clásica del campo inflatón. Sin embargo, un formalismo no perturbativo también es posible desde este escenario. Un formalismo de este tipo puede verse en [53].

Uno de los aspectos en el escenario inflacionario, que no ha sido cubierto en este capítulo, es la dinámica de los modos tanto en el sector IR como en el UV del inflatón. En el siguiente capítulo incluiremos esta dinámica en el contexto de una teoría de Kaluza-Klein no compacta pentadimensional, pero mediante un formalismo estocástico que nos permitirá describir el efecto de los modos en el sector UV sobre los modos en el sector IR, como un ruido cuántico blanco o gaussiano.

4. INFLACIÓN ESTOCÁSTICA DESDE UNA TEORÍA DE KALUZA- KLEIN NO-COMPACTA 5D

4.1 Introducción

El modelo de inflación estocástica es uno de los pocos que resuelve los bien conocidos problemas del modelo estándar cosmológico. Las observaciones más recientes arrojan fluctuaciones en la densidad de energía asociadas a CMBR ($\frac{\delta\rho}{\rho} \approx 10^{-5}$), son tratadas en modelos inflacionarios, asociando su origen a las fluctuaciones cuánticas del campo inflatón durante esa era. Este problema es de naturaleza cuántica pero bajo ciertas condiciones puede considerarse como clásico a gran escala a través de un tratamiento estocástico del tipo Langevin. La aproximación más ampliamente aceptada supone que la fase inflacionaria es controlada por un sólo campo escalar cuántico φ y su potencial $V(\varphi)$. Dentro de esta perspectiva, inflación estocástica propone una descripción dinámica de este campo cuántico mediante un desdoblamiento de φ en una componente homogénea y otra inhomogénea. Usualmente la homogénea $\phi_c(t)$ se interpreta como un campo clásico que surge de promediar un campo de grano grueso sobre el volumen a gran escala del Universo observable, y juega el papel de un parámetro de orden global [102]. Toda la información a escalas menores a la de este volumen tales como las fluctuaciones de densidad, esta contenida en la componente inhomogénea.

Por otro lado, aunque la teoría de inflación estocástica es ampliamente aceptada y por ende usada, es necesario hacer la aproximación $\langle \rho \rangle \simeq \frac{\dot{\phi}_c^2}{2} + V(\phi_c)$ que permite hacer cálculos en una expansión lineal para el potencial $V(\varphi)$ alrededor de su campo de fondo clásico $\phi_c(t)$ [103]. Fue Starobinsky el primero en derivar una ecuación de Fokker-Planck para las probabilidades de transición $P(\phi_L, t | \phi'_L, t')$ en coordenadas comóviles [104], desde la ecuación estocástica para la dinámica del campo inflatón. $P(\phi_L, t | \phi'_L, t')$ nos da información estadística del número relativo de “dominios” (configuraciones

metaestables de vacío) que teniendo un valor típico ϕ'_L del campo inflatón de grano grueso, evolucionan en un intervalo de tiempo $(t' - t)$ hacia una nueva configuración con un valor típico ϕ_L .

El principal objetivo de este capítulo consiste en desarrollar un tratamiento consistente de campo de grano grueso para la dinámica de un campo escalar a escalas cosmológicas, incluyendo la era inflacionaria, pero desde un vacío aparente 5D dentro de una teoría de Kaluza Klein no caomcompacta como se ha venido haciendo a lo largo de la tesis. Por simplicidad estudiaremos el caso de una expansión de de-Sitter, sin embargo el formalismo puede usarse para estudiar otros modelos inflacionarios más realistas.

4.2 Formalismo 5D

Nuestro punto de partida en la construcción del formalismo no perturbativo es la ecuación de movimiento para el campo inflatón 5D (3.5) cuya naturaleza es no perturbativa. Esta ecuación puede escribirse

$$\overset{\star\star}{\varphi} + 3 \overset{\star}{\varphi} - e^{-2N} \nabla_r^2 \varphi - \left[4\psi \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} + \psi^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \psi^2} \right] = 0, \quad (4.1)$$

donde la estrella (\star) denota derivada con respecto de N y $\varphi \equiv \varphi(N, \vec{r}, \psi)$. El conmutador entre φ y $\Pi^N = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi, N} = g^{NN} \varphi, N$ es dado por

$$\left[\varphi(N, \vec{r}, \psi), \Pi^N(N, \vec{r}', \psi') \right] = ig^{NN} \left| \frac{^{(5)}g_0}{^{(5)}g} \right| \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') \delta(\psi - \psi'), \quad (4.2)$$

donde $g^{NN} = \psi^{-2}$. Para simplificar la estructura de (4.1) usamos la transformación $\varphi = \chi e^{-3N/2} \left(\frac{\psi_0}{\psi} \right)^2$ obteniendo

$$\overset{\star\star}{\chi} - \left[e^{-2N} \nabla_r^2 + \left(\psi^2 \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} + \frac{1}{4} \right) \right] \chi = 0. \quad (4.3)$$

Esta expresión es una ecuación tipo Klein-Gordon 5D generalizada para el campo redefinido $\chi(N, \vec{r}, \psi)$. El campo χ puede ser escrito en términos de la expansión de Fourier

$$\begin{aligned} \chi(N, \vec{r}, \psi) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 k_r \int dk_\psi \left[a_{\vec{k}_r \vec{k}_\psi} e^{i(\vec{k}_r \cdot \vec{r} + \vec{k}_\psi \cdot \vec{\psi})} \xi_{\vec{k}_r \vec{k}_\psi}(N, \psi) \right. \\ &+ \left. a_{\vec{k}_r \vec{k}_\psi}^\dagger e^{-i(\vec{k}_r \cdot \vec{r} + \vec{k}_\psi \cdot \vec{\psi})} \xi_{\vec{k}_r \vec{k}_\psi}^*(N, \psi) \right], \end{aligned} \quad (4.4)$$

donde el asterisco (*) denota complejo conjugado y $(a_{k_r k_\psi}, a_{k_r k_\psi}^\dagger)$ son los operadores de creación y aniquilación que satisfacen las relaciones de conmutación

$$\left[a_{k_r k_\psi}, a_{k_r k_\psi}^\dagger \right] = \delta^{(3)}(\vec{k}_r - \vec{k}'_r) \delta(\vec{k}_\psi - \vec{k}'_\psi), \quad (4.5)$$

$$\left[a_{k_r k_\psi}^\dagger, a_{k'_r k'_\psi}^\dagger \right] = \left[a_{k_r k_\psi}, a_{k'_r k'_\psi} \right] = 0, \quad (4.6)$$

y de esta forma los campos χ y χ^* cumplen con

$$\left[\chi(N, \vec{r}, \psi), \chi^*(N, \vec{r}, \psi) \right] = i\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') \delta(\psi - \psi'). \quad (4.7)$$

Para que la relación de conmutación (4.7) sea válida, se requiere que

$$\xi_{k_r k_\psi} \left(\xi_{k_r k_\psi}^* \right)^* - \left(\xi_{k_r k_\psi}^* \right)^* \xi_{k_r k_\psi} = i. \quad (4.8)$$

de esta forma la ecuación para los modos $\xi_{k_r k_\psi}^*$ (N, ψ) es dada por

$$\xi_{k_r k_\psi}^{**} + k_r^2 e^{-2N} \xi_{k_r k_\psi} + \psi^2 \left(k_\psi^2 - 2ik_\psi \frac{\partial}{\partial \psi} - \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} - \frac{1}{4\psi^2} \right) \xi_{k_r k_\psi} = 0. \quad (4.9)$$

Para resolver esta ecuación proponemos la separación

$$\xi_{k_r k_\psi}(N, \psi) = \xi_{k_r}^{(1)}(N) \xi_{k_\psi}^{(2)}(\psi), \quad (4.10)$$

tal que (4.9) puede escribirse mediante el sistema de ecuaciones

$$\xi_{k_r}^{** (1)} + [k_r^2 e^{-2N} - \alpha] \xi_{k_r}^{(1)} = 0, \quad (4.11)$$

$$\frac{d^2 \xi_{k_\psi}^{(2)}}{d\psi^2} + 2ik_\psi \frac{d\xi_{k_\psi}^{(2)}}{d\psi} - \left(k_\psi^2 - \frac{(1/4 - \alpha)}{\psi^2} \right) \xi_{k_\psi}^{(2)} = 0, \quad (4.12)$$

donde α es una constante adimensional. Resolviendo las ecuaciones (4.11) y (4.12) obtenemos

$$\xi_{k_r}^{(1)}[x(N)] = A_1 \mathcal{H}_\nu^{(1)}[x(N)] + A_2 \mathcal{H}_\nu^{(2)}[x(N)], \quad (4.13)$$

$$\xi_{k_\psi}^{(2)}[\psi] = e^{-i\vec{k}_\psi \cdot \vec{\psi}} \left[B_1 \psi^{(\frac{1}{2} + \sqrt{\alpha})} + B_2 \psi^{(\frac{1}{2} - \sqrt{\alpha})} \right], \quad (4.14)$$

donde $\mathcal{H}_\nu^{(1,2)}[x(N)] = \mathcal{J}_\nu[x(N)] \pm i\mathcal{Y}_\nu[x(N)]$ son las funciones de Hankel, $\mathcal{J}_\nu[x(N)]$ y $\mathcal{Y}_\nu[x(N)]$ son las funciones de Bessel del primero y segundo tipo, respectivamente, con $\nu = \sqrt{\alpha}$ y $x(N) = k_r e^{-N}$. Las constantes arbitrarias A_1 , A_2 , B_1 y B_2 son restringidas por la condición de normalización (4.8) de tal manera que

$$[(A_1 - A_2)(A_1 + A_2)] \left[B_1 \psi^{\frac{1}{2} + \nu} + B_2 \psi^{\frac{1}{2} - \nu} \right]^2 = \frac{\pi}{4}. \quad (4.15)$$

Implementando la condición de vacío de Bunch-Davies generalizada, dada en este caso por $A_1 = 0$, $B_1 = 0$ en (4.15), se obtiene $A_2 = \frac{i\sqrt{\pi}}{2B_2}$, y de esta manera la solución de (4.9) con la condición (4.15), haciendo $\alpha = 1/4$, es dada por

$$\xi_{k_r k_\psi}(N, \psi) = \frac{i\sqrt{\pi}}{2} e^{-i\vec{k}_\psi \cdot \vec{\psi}} \mathcal{H}_{1/2}^{(2)}[k_r e^{-N}], \quad (4.16)$$

que puede escribirse de manera más compacta a través de

$$\xi_{k_r k_\psi}(N, \psi) = e^{-i\vec{k}_\psi \cdot \vec{\psi}} \tilde{\xi}_{k_r}(N), \quad (4.17)$$

donde $\tilde{\xi}_{k_r}(N) = \frac{i\sqrt{\pi}}{2} \mathcal{H}_{1/2}^{(2)}[k_r e^{-N}]$. Con esto, el campo χ en la ecuación (4.4) puede escribirse

$$\chi(N, \vec{r}, \psi) = \chi(N, \vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3 k_r \int dk_\psi \left[a_{k_r k_\psi} e^{i\vec{k}_r \cdot \vec{r}} \tilde{\xi}_{k_r}(N) + c.c. \right]. \quad (4.18)$$

Así, el campo escalar φ puede escribirse en función del campo redefinido χ en la forma

$$\varphi(N, \vec{r}, \psi) = e^{-\frac{3N}{2}} \left(\frac{\psi_0}{\psi} \right)^2 \chi(N, \vec{r}), \quad (4.19)$$

con $\chi(N, \vec{r})$ dada por (4.18). Una consecuencia muy importante de este resultado es que $\varphi(N, \vec{r}, \psi)$ se propaga sólo sobre la parte espacialmente isotrópica 3D, $r(x, y, z)$, pero no sobre la coordenada tipo espacio ψ . Esto nos da una explicación de porque la materia se propaga sólo sobre la subvariedad 4D descrita por las coordenadas (N, \vec{r}) .

4.3 El Campo de Grano Grueso en 5D.

Para estudiar la evolución a gran escala del campo φ sobre la parte espacial 3D, definimos el campo de grano grueso 5D por

$$\chi_L(N, \vec{r}, \psi) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 k_r \int dk_\psi \theta(\epsilon k_0(N) - k_r) \left[a_{k_r k_\psi} e^{i\vec{k}_r \cdot \vec{r}} \tilde{\xi}_{k_r}(N) + c.c. \right], \quad (4.20)$$

donde *c.c.* denota complejo conjugado del primer término entre corchetes y $k_0 = \sqrt{\alpha} e^N$ es el número de onda dependiente de N (relativo a la parte espacial 3D homogénea e isotrópica) que separa los sectores de longitud de onda corta $k_r^2 \gg k_0^2$ y de longitud de onda larga $k_r^2 \ll k_0^2$. Los modos $\tilde{\xi}_{k_r}(N)$ son dados por la ecuación (4.17). Los modos contenidos en este campo de grano grueso son aquellos que satisfacen $\frac{k_r}{k_0} < \epsilon$, es decir, aquellos que están fuera del horizonte causal.

La parte complementaria del campo de grano grueso, es el campo de grano fino que en 5D lo definimos por

$$\chi_S(N, \vec{r}, \psi) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 k_r \int dk_\psi \theta(k_r - \epsilon k_0(N)) \left[a_{k_r k_\psi} e^{i\vec{k}_r \cdot \vec{r}} \tilde{\xi}_{k_r}(N) + c.c. \right], \quad (4.21)$$

de tal manera que $\chi = \chi_L + \chi_S$. Así, la ecuación de movimiento para χ_L será aproximadamente

$$\overset{\star\star}{\chi}_L - \left(\frac{k_0(N)}{b} \right)^2 \chi_L = \epsilon \left[\overset{\star\star}{k}_0 \eta(N, \vec{r}, \psi) + \overset{\star}{\kappa}(N, \vec{r}, \psi) + 2 \overset{\star}{\gamma}(N, \vec{r}, \psi) \right], \quad (4.22)$$

donde los operadores estocásticos η , κ y γ son dados respectivamente por

$$\eta(N, \vec{r}, \psi) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 k_r \int dk_\psi \delta(\epsilon k_0(N) - k_r) \left[a_{k_r k_\psi} e^{i\vec{k}_r \cdot \vec{r}} \tilde{\xi}_{k_r}(N) + c.c. \right] \quad (4.23)$$

$$\kappa(N, \vec{r}, \psi) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 k_r \int dk_\psi \overset{\star}{\delta}(\epsilon k_0(N) - k_r) \left[a_{k_r k_\psi} e^{i\vec{k}_r \cdot \vec{r}} \tilde{\xi}_{k_r}(N) + c.c. \right] \quad (4.24)$$

$$\gamma(N, \vec{r}, \psi) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 k_r \int dk_\psi \delta(\epsilon k_0(N) - k_r) \left[a_{k_r k_\psi} e^{i\vec{k}_r \cdot \vec{r}} \overset{\star}{\tilde{\xi}}_{k_r}(N) + c.c. \right] \quad (4.25)$$

La ecuación (4.22) puede reescribirse en la forma

$$\overset{\star\star}{\chi}_L - \alpha \chi_L = \epsilon \left[\frac{d}{dN} \left(\overset{\star}{k}_0 \eta(N, \vec{r}, \psi) \right) + \overset{\star}{k}_0 \gamma(N, \vec{r}, \psi) \right]. \quad (4.26)$$

Esta es una ecuación estocástica de segundo orden que puede escribirse como dos ecuaciones estocásticas de primer orden mediante la introducción del campo auxiliar $u = \dot{\chi}_L - \epsilon \dot{k}_0 \eta$. El sistema lineal obtenido es

$$\dot{u} = \alpha \chi_L + \epsilon \dot{k}_0 \gamma, \quad (4.27)$$

$$\dot{\chi}_L = u + \epsilon \dot{k}_0 \eta. \quad (4.28)$$

En el sistema (4.27), (4.28) el papel del ruido γ puede ser minimizarse si $(\dot{k}_0)^2 \langle \gamma^2 \rangle \ll (\dot{k}_0)^2 \langle \eta^2 \rangle$, lo cual es válido si se cumple la siguiente condición

$$\frac{\tilde{\xi}_{k_r}^* \tilde{\xi}_{k_r}^*}{\tilde{\xi}_{k_r} \tilde{\xi}_{k_r}^*} \ll 1. \quad (4.29)$$

En tal caso el sistema (4.27), (4.28) puede aproximarse a

$$\dot{u} = \alpha \chi_L, \quad (4.30)$$

$$\dot{\chi}_L = u + \epsilon \dot{k}_0 \eta. \quad (4.31)$$

Este sistema representa dos ecuaciones de Langevin con un ruido η gaussiano y blanco en naturaleza, pues satisface

$$\langle \eta \rangle = 0, \quad (4.32)$$

$$\langle \eta^2 \rangle = \frac{\epsilon(k_0^2)}{2\pi^2 \dot{k}_0} \int dk_\psi \tilde{\xi}_{\epsilon k_0} \tilde{\xi}_{\epsilon k_0}^* \delta(N - N'). \quad (4.33)$$

La ecuación que describe la dinámica de la probabilidad de transición $P[\chi_L^{(0)}, u^{(0)} | \chi_L, u]$, de una configuración $(\chi_L^{(0)}, u^{(0)})$ a otra (χ_L, u) es una de Fokker Planck dada por

$$\frac{\partial P}{\partial N} = -u \frac{\partial P}{\partial \chi_L} - \alpha \chi_L \frac{\partial P}{\partial u} + \frac{1}{2} D_{11} \frac{\partial^2 P}{\partial \chi_L^2}, \quad (4.34)$$

donde $D_{11} = \frac{1}{2} (\epsilon \dot{k}_0)^2 [\int dN \langle \eta^2 \rangle]$ es el coeficiente de difusión relacionado con la variable χ_L debido a la acción estocástica del ruido η . Explícitamente

$$D_{11} = \frac{\epsilon^3 (k_0)^2}{4\pi^2} \dot{k}_0 \int dk_\psi \tilde{\xi}_{\epsilon k_0} \tilde{\xi}_{\epsilon k_0}^*, \quad (4.35)$$

que es divergente.

4.4 La Métrica de Ponce de León y la Expansión De-Sitter 4D.

Para describir la métrica (3.2) en coordenadas físicas podemos hacer las siguientes transformaciones

$$t = \psi_0 N, \quad R = \psi_0 r, \quad \psi = \psi, \quad (4.36)$$

tal que obtenemos el elemento de línea 5D

$$dS^2 = \left(\frac{\psi}{\psi_0} \right)^2 [dt^2 - e^{2t/\psi_0} dR^2] - d\psi^2, \quad (4.37)$$

donde t es el tiempo cósmico y $R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$. Esta métrica es la de Ponce de Leon [105] y describe una métrica 3D plana homogénea e isotrópica extendida a una métrica de FRW 5D en una expansión De-Sitter [106].

Para estudiar la evolución De-Sitter del Universo sobre un espacio-tiempo 4D podemos tomar la foliación $\psi = \psi_0$ en la métrica (4.37), tal que la métrica efectiva 4D resulta

$$dS^2 \rightarrow ds^2 = dt^2 - e^{2t/\psi_0} dR^2, \quad (4.38)$$

que describe un Universo espacialmente homogéneo, isotrópico y plano, que se expande con un parámetro de Hubble $H = \frac{1}{\psi_0}$, que en nuestro caso es constante, y que tiene una 4D-curvatura escalar ${}^{(4)}R = 6(\dot{H} + 2H^2)$. Notese que en este caso particular el parámetro de Hubble es una constante, así $\dot{H} = 0$.

La densidad de energía ρ y la presión P 4D son

$$8\pi G \langle \rho \rangle = \frac{3}{\psi_0^2}, \quad (4.39)$$

$$8\pi G \langle P \rangle = -\frac{3}{\psi_0^2}, \quad (4.40)$$

donde $G = M_p^{-2}$ es la constante gravitacional y $M_p = 1.2 \times 10^{19} \text{ GeV}$ es la masa de Planck. Además el Universo describe una ecuación de estado de vacío $P = -\rho$ tal que

$$\langle \rho \rangle = \left\langle \frac{\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{a_0^2}{2a^2} (\vec{\nabla}\varphi)^2 + V(\varphi) \right\rangle, \quad (4.41)$$

donde los brackets denotan valor de espectación 4D. La densidad lagrangiana 4D es dada por

$${}^{(4)}\mathcal{L}(\varphi, \varphi, \mu) = -\sqrt{\left|\frac{{}^{(4)}g}{{}^{(4)}g_0}\right|} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \varphi, \mu \varphi, \nu + V(\varphi) \right], \quad (4.42)$$

donde podemos identificar el potencial efectivo para la métrica de FRW 4D [107] con

$$V(\varphi) = -\frac{1}{2} g^{\psi\psi} \varphi, \psi \varphi, \psi \Big|_{\psi=\psi_0} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\psi} \right)^2 \Big|_{\psi=\psi_0}. \quad (4.43)$$

En nuestro caso este potencial toma la forma

$$V(\varphi) = \frac{2}{\psi_0^2} \varphi^2(t, \vec{R}, \psi_0), \quad (4.44)$$

Note que este potencial tiene un origen geométrico y adquiere diferentes representaciones en diferentes sistemas de referencia. En nuestro caso, los observadores se encuentran en un sistema de referencia con $U^\psi = 0$ debido a que estamos considerando una foliación $\psi = \psi_0$ sobre la métrica 5D (4.37). La ecuación de movimiento 4D para φ es

$$\ddot{\varphi} + \frac{3}{\psi_0} \dot{\varphi} - e^{-\frac{2t}{\psi_0}} \nabla_R^2 \varphi - \left[\frac{4}{\psi} \frac{\partial\varphi}{\partial\psi} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\psi^2} \right] \Big|_{\psi=\psi_0} = 0, \quad (4.45)$$

lo cual significa que la derivada efectiva del potencial $V(\varphi)$ es

$$V'(\varphi)|_{\psi=\psi_0} = \frac{2}{\psi_0^2} \varphi(\vec{R}, t, \psi_0). \quad (4.46)$$

Esta $V'(\varphi)$ es efectiva en el sentido de que es sólo una identificación del último término en la ecuación (4.45) y no una derivada directa con respecto de φ de (4.44). Más aun, como φ es un campo cuántico una derivada directa de $V(\varphi)$ con respecto de φ no tendría sentido debido al carácter operatorial de φ .

Ahora, podemos implementar la transformación

$$\varphi(\vec{R}, t) = e^{-\frac{3t}{2\psi_0}} \chi(\vec{R}, t) \quad (4.47)$$

donde el campo redefinido puede expandirse en la forma

$$\chi(\vec{R}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k_R \int dk_\psi [a_{k_R k_\psi} e^{i\vec{k}_R \cdot \vec{R}} \tilde{\xi}_{k_R}(t) + c.c.] \delta(\vec{k}_\psi - \vec{k}_{\psi_0}). \quad (4.48)$$

Así, la ecuación de movimiento para χ es una ecuación de tipo Klein gordon dada por

$$\ddot{\chi} - \left[e^{-\frac{2t}{\psi_0}} \nabla_R^2 + \frac{1}{4\psi_0^2} \right] \chi = 0. \quad (4.49)$$

La ecuación de movimiento para los modos $\tilde{\xi}_{k_R}(t)$ es

$$\ddot{\tilde{\xi}}_{k_R} + \left[k_R^2 e^{-\frac{2t}{\psi_0}} - \frac{1}{4\psi_0^2} \right] \tilde{\xi}_{k_R} = 0. \quad (4.50)$$

Es importante destacar que la ecuación (4.50) es exactamente la ecuación (4.11) con $\alpha = 1/4$, con la transformación de variables (4.36), sobre la hipersuperficie $\psi = \psi_0$.

4.5 Dinámica Estocástica 4D para χ_L en una Expansión De-Sitter.

Análogamente al cálculo hecho en 5D, definimos los campos de grano grueso $\chi_L(t, \vec{R})$ y de grano fino $\chi_S(t, \vec{R})$ por

$$\chi_L(t, \vec{R}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 k_R \int dk_\psi \theta(\epsilon k_0(t) - k_R) [a_{k_R k_\psi} e^{i\vec{k}_R \cdot \vec{R}} \tilde{\xi}_{k_R}(t) + c.c.] \delta(\vec{k}_\psi - \vec{k}_{\psi_0}), \quad (4.51)$$

$$\chi_S(t, \vec{R}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 k_R \int dk_\psi \theta(k_R - \epsilon k_0(t)) [a_{k_R k_\psi} e^{i\vec{k}_R \cdot \vec{R}} \tilde{\xi}_{k_R}(t) + c.c.] \delta(\vec{k}_\psi - \vec{k}_{\psi_0}), \quad (4.52)$$

donde $k_0(t) = \frac{1}{2\psi_0} e^{t/\psi_0}$. La dinámica que describe la dinámica de χ en el sector infrarrojo ($k_R^2 \ll k_0^2$) es χ_L . Su dinámica obedece la ecuación estocástica tipo Kramer

$$\ddot{\chi}_L - \frac{1}{4\psi_0^2} e^{-\frac{2t}{\psi_0}} \chi_L = \epsilon \left[\frac{d}{dt} \left(\dot{k}_0 \eta(t, \vec{R}) \right) + \dot{k}_0 \gamma(t, \vec{R}) \right], \quad (4.53)$$

donde los operadores estocásticos η y γ son

$$\eta = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 k_R \delta(\epsilon k_0 - k_R) \left[a_{k_R k_{\psi_0}} e^{i\vec{k}_R \cdot \vec{R}} \tilde{\xi}_{k_R}(t) + c.c. \right], \quad (4.54)$$

$$\gamma = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 k_R \delta(\epsilon k_0 - k_R) \left[a_{k_R k_{\psi_0}} e^{i\vec{k}_R \cdot \vec{R}} \dot{\tilde{\xi}}_{k_R}(t) + c.c. \right]. \quad (4.55)$$

La ecuación estocástica de segundo orden (4.53) puede escribirse como un sistema de dos ecuaciones estocásticas de Langevin en la forma

$$\dot{u} = \frac{1}{4\psi_0^2} e^{-\frac{2t}{\psi_0}} \chi_L + \epsilon \dot{k}_0 \gamma, \quad (4.56)$$

$$\dot{\chi}_L = u + \epsilon \dot{k}_0 \eta, \quad (4.57)$$

donde $u = \dot{\chi}_L - \epsilon \dot{k}_0 \gamma$. La condición para poder despreciar el ruido γ con respecto a η es ahora

$$\frac{\tilde{\xi}_{k_R} \tilde{\xi}_{k_R}^*}{\tilde{\xi}_{k_R} \tilde{\xi}_{k_R}^*} \ll \frac{(\ddot{k}_0)^2}{(\dot{k}_0)^2}, \quad (4.58)$$

a escalas super-Hubble. Notese que este resultado es exactamente el mismo que el de la ecuación (4.29) bajo la transformación (4.36). Para una expansión De-Sitter la ecuación (4.58) se convierte en $\frac{k_R}{k_0} < \epsilon \ll 1$. Esto significa que el ruido γ puede despreciarse a escalas $k_R \ll \frac{1}{\psi_0} e^{t/\psi_0}$, es decir, a escalas super Hubble. La ecuación de Fokker-Planck para la probabilidad de transición $P(\chi_L^{(0)}, u^{(0)} | \chi_L, u)$ es

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -u \frac{\partial P}{\partial \chi_L} - \frac{e^{-\frac{2t}{\psi_0}}}{4\psi_0^2} \chi_L \frac{\partial P}{\partial u} + D_{11}(t) \frac{\partial^2 P}{\partial \chi_L^2}, \quad (4.59)$$

donde $D_{11}(t) = \frac{\epsilon^3 k_0 k_0^2}{4\pi^2} \left| \tilde{\xi}_{\epsilon k_0} \right|^2$. De esta forma, la ecuación de movimiento para $\langle \chi_L^2 \rangle = \int d\chi_L du \chi_L^2 P(\chi_L, u)$ es

$$\frac{d}{dt} \langle \chi_L^2 \rangle = D_{11}(t) \simeq \frac{\epsilon^2 e^{\frac{3t}{\psi_0}}}{32\pi^2 \psi_0^3}. \quad (4.60)$$

Para regresar al campo original $\varphi_L = e^{-\frac{3t}{2\psi_0}} \chi_L$, la ecuación (4.60) puede escribirse

$$\frac{d}{dt} \langle \varphi_L^2 \rangle = -\frac{3}{\psi_0} \langle \varphi_L^2 \rangle + \frac{\epsilon^2}{32\pi^2 \psi_0^3}, \quad (4.61)$$

cuya solución es dada por

$$\langle \varphi_L^2 \rangle = \frac{\epsilon^2}{96\pi^2 \psi_0^2} \left[1 + C e^{-\frac{3t}{\psi_0}} \right], \quad (4.62)$$

donde C es una constante de integración. Cuando $\frac{3t}{\psi_0} \ll 1$, se obtiene para $\epsilon^2(1 + C) = 24$ que

$$\langle \varphi_L^2 \rangle_{\frac{3t}{\psi_0} \ll 1} \simeq \frac{1}{4\pi^2 \psi_0^2} \left[1 - \frac{3t}{\psi_0} \right] \equiv \frac{H^2}{4\pi^2} [1 - 3Ht]. \quad (4.63)$$

Sin embargo, después de que finaliza inflación, $\frac{3t}{\psi_0} \gg 1$, y la solución (4.62) adquiere la forma

$$\langle \varphi_L^2 \rangle_{\frac{3t}{\psi_0} \gg 1} \simeq \frac{\epsilon^2 H^2}{96\pi^2}, \quad (4.64)$$

que es válida sólo para $\epsilon^2 \ll 1$. Para entender mejor este resultado en el contexto de las fluctuaciones del campo inflatón $\phi(t, \vec{R})$, implementaremos la aproximación semiclásica

$$\varphi(t, \vec{R}) = \langle \varphi(t, \vec{R}) \rangle + \phi(t, \vec{R}), \quad (4.65)$$

donde $\langle \varphi \rangle = \phi_c(t)$ y $\langle \phi \rangle = 0$. Con esta representación se obtiene

$$\langle \varphi^2 \rangle = \phi_c^2 + \langle \phi^2 \rangle, \quad (4.66)$$

donde $\phi_c(t)$ es solución de la ecuación

$$\ddot{\phi}_c + \frac{3}{\psi_0} \dot{\phi}_c + \frac{2}{\psi_0^2} \phi_c = 0. \quad (4.67)$$

La solución general de (4.67) es

$$\phi_c(t) = \phi_c^{(0)} e^{-\frac{t}{\psi_0}} \left(1 + C_1 e^{-\frac{t}{\psi_0}} \right), \quad (4.68)$$

donde C_1 es una constante de integración y $\phi_c^{(0)} = \phi_c(t = t_i)$, siendo t_i el tiempo al cual inflación inicia. Notese que después de que inflación termina $\phi_c(t \rightarrow \infty) \rightarrow 0$. Así, después de inflación se obtiene el siguiente resultado

$$\langle \varphi^2 \rangle_{\frac{3t}{\psi_0} \gg 1} \simeq \langle \phi^2 \rangle_{\frac{3t}{\psi_0} \gg 1}, \quad (4.69)$$

lo que significa que para $\frac{3t}{\psi_0} \gg 1$ se satisface la aproximación

$$\langle \phi_L^2 \rangle_{\frac{3t}{\psi_0} \gg 1} \simeq \langle \varphi_L^2 \rangle_{\frac{3t}{\psi_0} \gg 1} \simeq \frac{\epsilon^2 H^2}{96\pi^2}. \quad (4.70)$$

Este es un resultado importante que nos dice que el valor de espectación para el segundo momento del campo φ_L al final de inflación es aproximadamente dado por el valor de espectación de las fluctuaciones del campo inflatón a escalas cosmológicas (para $\epsilon^2 \ll 1$).

La amplitud de la densidad de energía a escalas cosmológicas es estimada por

$$\frac{\delta\rho}{\rho}\Big|_{final} \simeq \frac{\langle V'(\varphi) \rangle}{\langle V(\varphi) \rangle} \langle \phi_L^2 \rangle^{1/2} \simeq \frac{\phi_c}{\langle \phi_L^2 \rangle} \langle \phi_L^2 \rangle^{1/2}. \quad (4.71)$$

Para obtener $\frac{\delta\rho}{\rho}\Big|_{final} \simeq 10^{-5}$, el valor de ϕ_c al final de inflación, tomando $\epsilon = 10^{-3}$ debe ser

$$\phi_c|_{final} \simeq \frac{0.66 \times 10^{-10}}{\psi_0} = 0.66 \times 10^{-10} H. \quad (4.72)$$

Por otro lado si consideramos $t_{final} \simeq 10^{10} G^{1/2}$, vemos que $\phi_c^{(0)} \leq M_p$ para $H \leq 10^{-10} M_p$ (o $\psi_0 \geq 10^{10} G^{1/2}$). De esta forma, cuando inflación comienza $\phi_c^{(0)}$ asume valores sub-planckianos.

A lo largo de este capítulo hemos desarrollado un modelo estocástico inflacionario pentadimensional desde una teoría de Kaluza Klein no compacta. Como hemos visto, en este modelo el campo escalar inflatón es dividido en modos de longitud de onda larga y longitud de onda corta mediante los campos de grano grueso y grano fino, respectivamente. En otras palabras el campo de grano grueso describe la dinámica de estos modos en el sector IR y el campo de grano fino describe su dinámica en el sector UV. De esta forma, los modos en el sector IR son descritos por un sistema cuántico condicionado por un ruido cuántico debido los modos en el sector UV. A diferencia de los modelos estocásticos típicos en este modelo el potencial inflacionario es inducido geoméricamente desde un vacío pentadimensional y es generado por la quinta coordenada. Además, uno de los resultados más importantes en este escenario es que el valor de espectación para el segundo momento del campo φ_L al final de inflación $\langle \varphi_L^2 \rangle_{3t/\psi_0 \gg 1}$ es dado, de acuerdo a la ecuación (4.70), aproximadamente por el valor de espectación de las fluctuaciones del inflatón a escala cosmológica $\langle \phi_L^2 \rangle_{3t/\psi_0 \gg 1}$, siendo ambos valores determinados por el valor de la quinta coordenada $\psi = \psi_0$ que define a la foliación. Finalmente de la expresión (4.72) puede verse que el valor inicial para el campo inflatón de fondo $\phi_c^{(0)}$ es sub-planckiano. Este resultado es

también de gran importancia puesto que en otros tratamientos de inflación caótica $\phi_c^{(0)}$ asume valores trans-planckianos lo que resulta en un problema de condiciones iniciales. Así en este tratamiento estocástico pentadimensional el problema de condiciones iniciales es resuelto.

5. FLUCTUACIONES ESCALARES DE LA MÉTRICA DESDE UNA TEORÍA DE KALUZA KLEIN NO COMPACTA 5D

5.1 *Introducción.*

La teoría relativista de perturbaciones cosmológicas es una pieza fundamental en nuestro entendimiento del Universo temprano, así como indispensable para relacionar diferentes escenarios de esas épocas, tales como inflación, con datos observacionales cosmológicos tales como las anisotropías en la radiación cósmica de fondo (CMBR). El modelo inflacionario [108] resuelve varias dificultades que surgen del modelo cosmológico estándar, tales como los problemas del horizonte, de planaridad y de monopolos magnéticos, además de dar un mecanismo para la generación de las fluctuaciones primordiales de densidad, necesarias para explicar la formación de estructura [109]. La aproximación 4D más ampliamente aceptada asume que la fase inflacionaria es controlada por un campo escalar cuántico φ relacionado con su potencial escalar $V(\varphi)$ [110]. Dentro de esta perspectiva, la aproximación semiclásica del campo escalar φ en inflación, propone describir la dinámica de este campo cuántico en dos partes: la espacialmente homogénea (de fondo) y la componente inhomogénea [111]. Usualmente la homogénea es interpretada como un campo clásico $\varphi_b(t)$ que surge del valor de expectación del campo cuántico. La componente inhomogénea $\delta\varphi(t, \vec{R})$ son las fluctuaciones cuánticas. Estas fluctuaciones cuánticas del campo son las responsables de las fluctuaciones de la métrica alrededor del fondo métrico de FRW [112].

Las dos versiones actuales de la teoría de gravedad 5D son la teoría de Membranas (o Branas) [113] y la teoría de materia inducida [114]. En la primera de ellas, la gravedad se propaga libremente en el bulto, mientras que las interacciones de física de partículas se confinan a una hipersuperficie, llamada Brana. La teoría de materia inducida en su forma más simple es

básicamente una teoría de Kaluza-Klein en la cual la quinta dimensión no es compacta y las ecuaciones de campo de relatividad general en 4D surgen a partir del hecho de que la variedad 5D es Ricci-plana. De esta forma, la dimensión extra es responsable de la aparición de fuentes en la teoría de la relatividad general 4D. Así, el mundo 4D de relatividad general es embebido en una variedad 5D Ricci-plana. A surgido recientemente un gran interés por encontrar soluciones exactas a las ecuaciones de campo 5D de Kaluza-Klein, donde la quinta coordenada es considerada no compacta. Esta teoría reproduce y extiende soluciones conocidas de las ecuaciones de campo de Einstein en 4D. También se ha visto un particular interés alrededor de soluciones que no sólo son Ricci-planas, sino que además son Riemann-planas. Esto se debe a que es posible tener una variedad plana 5D que contenga una subvariedad curva 4D, resultado soportado por el teorema de Campbell-Magaard. De esta manera, el Universo puede ser “vacío” y simple en 5D, pero que contiene materia en formas complicadas en 4D [115].

En este capítulo estudiaremos una 4D expansión De-Sitter del Universo desde una teoría de Kaluza-Klein no compacta de la gravedad, tomando en cuenta las fluctuaciones escalares de la métrica, las cuales son invariantes de norma. En particular describiremos la dinámica 4D de estas fluctuaciones escalares inducidas desde un vacío aparente 5D.

5.2 Formalismo.

Consideremos la acción

$$I = - \int d^4x d\psi \sqrt{\left| \frac{{}^{(5)}\bar{g}}{{}^{(5)}\bar{g}_0} \right|} \left[\frac{{}^{(5)}\bar{R}}{16\pi G} + {}^{(5)}\mathcal{L}(\varphi, \varphi_{,A}) \right], \quad (5.1)$$

para un campo escalar φ , acoplado mínimamente a la gravedad. Por definición para describir una variedad 5D en un vacío aparente, la densidad lagrangeana \mathcal{L} en (??) debe contener sólo el término cinético

$${}^{(5)}\mathcal{L}(\varphi, \varphi_{,A}) = \frac{1}{2} g^{AB} \varphi_{,A} \varphi_{,B}, \quad (5.2)$$

donde A y B toman valores 0, 1, 2, 3, 4. El elemento de línea perturbado $dS^2 = g_{AB} dx^A dx^B$ es dado por

$$dS^2 = \psi^2(1 + 2\Phi)dN^2 - \psi^2(1 - 2\Psi)e^{2N}dr^2 - (1 - Q)d\psi^2, \quad (5.3)$$

donde los campos Φ , Ψ y Q son funciones de las coordenadas $[N, \vec{r}(x, y, z), \psi]$, donde N , x , y , z son coordenadas adimensionales y ψ tiene unidades espaciales. Note que ${}^{(5)}\bar{R}$ en la acción (5.1) es el escalar de Ricci evaluado en la métrica de fondo $(dS^2)_b = \bar{g}_{AB}dx^A dx^B$. En nuestro caso consideraremos la métrica de fondo

$$(dS^2)_b = \psi^2 dN^2 - \psi^2 e^{2N} dr^2 - d\psi^2, \quad (5.4)$$

que es 3D espacialmente isotrópica, homogénea y plana [116]. Además la métrica (5.4) es globalmente plana, es decir, satisface $\bar{R}^A{}_{BCD} = 0$ y describe un vacío aparente caracterizado por $\bar{G}_{AB} = 0$.

El tensor energía-momento es dado por

$$T_{AB} = \varphi_{,A}\varphi_{,B} - \frac{1}{2}g_{AB}\varphi_{,C}\varphi^{,C}. \quad (5.5)$$

Para describir las fluctuaciones escalares de la métrica debemos considerar el tensor energía-momento covariante T_{AB} simétrico. En tal caso obtenemos que $\Psi = \Phi$ y $Q = 2\Phi$, de tal manera que el elemento de línea (5.3) puede escribirse ahora

$$dS^2 = \psi^2(1 + 2\Phi)dN^2 - \psi^2(1 - 2\Phi)e^{2N} dr^2 - (1 - 2\Phi)d\psi^2, \quad (5.6)$$

donde el campo $\Phi(N, \vec{r}, \psi)$ describe la perturbación escalar métrica del fondo métrico 5D (5.4). Para la métrica (5.6), $|{}^{(5)}\bar{g}| = \psi^8 e^{6N}$ es el valor absoluto del determinante para el fondo métrico (5.4) y $|{}^{(5)}\bar{g}_0| = \psi_0^8 e^{6N_0}$ es una constante de dimensionalización, para las constantes ψ_0 y N_0 . Además $G = M_p^{-2}$ es la constante gravitacional y $M_p = 1.2 \times 10^{19} \text{ Gev}$ es la masa de Planck. En esta tesis consideramos $N_0 = 0$, de tal manera que $|{}^{(5)}\bar{g}_0| = \psi_0^8$. En este caso, el índice “0” denota el valor de la cantidad al final de inflación, es decir, cuando $\ddot{b} = 0$, donde $b(t)$ es el factor de escala.

Por otro lado, el tensor métrico contravariante a primer orden de aproximación en Φ es

$$g^{AB} = \begin{pmatrix} \frac{(1-2\Phi)}{\psi^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{e^{-2N}(1+2\Phi)}{\psi^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{e^{-2N}(1+2\Phi)}{\psi^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{e^{-2N}(1+2\Phi)}{\psi^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(1+2\Phi) \end{pmatrix}, \quad (5.7)$$

el cual, a primer orden puede escribirse como $g^{AB} = \bar{g}^{AB} + \delta g^{AB}$, siendo \bar{g}^{AB} el tensor métrico contravariante de fondo. La dinámica para Φ y φ es bien descrita por las ecuaciones de Lagrange y de Einstein, que estudiaremos en las siguientes secciones.

5.3 Ecuaciones de Lagrange.

Las ecuaciones de Lagrange para los campos φ y Φ son respectivamente dadas por

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial N^2} + 3 \frac{\partial \varphi}{\partial N} - e^{-2N} \nabla_r^2 \varphi - \psi \left(\psi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \psi^2} + 4 \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} \right) - 2\Phi \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial N^2} + 3 \frac{\partial \varphi}{\partial N} - \right. \\ & \left. - e^{-2N} \nabla_r^2 \varphi - \psi \left(-\psi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \psi^2} + 4 \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} \right) \right] - 2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial N} \frac{\partial \Phi}{\partial N} + \psi^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \psi} \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} \right) = 0, \end{aligned} \quad (5.8)$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial N} \right)^2 + e^{-2N} (\nabla_r \varphi)^2 + \psi^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \psi} \right)^2 = 0. \quad (5.9)$$

Ahora, podemos implementar la aproximación semi-clásica $\varphi(N, \vec{r}, \psi) = \varphi_b(N, \psi) + \delta\varphi(N, \vec{r}, \psi)$ tal que φ_b es la solución de la ecuación (5.8) para cuando $\Phi = \nabla_r \varphi_b = 0$. De esta forma, las ecuaciones de Lagrange para φ_b y $\delta\varphi$ son

$$\frac{\partial^2 \varphi_b}{\partial N^2} + 3 \frac{\partial \varphi_b}{\partial N} - \psi \left[\psi \frac{\partial^2 \varphi_b}{\partial \psi^2} + 4 \frac{\partial \varphi_b}{\partial \psi} \right] = 0, \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \delta\varphi}{\partial N^2} + 3 \frac{\partial \delta\varphi}{\partial N} - e^{-2N} \nabla_r^2 \delta\varphi - \psi \left[4 \frac{\partial \delta\varphi}{\partial \psi} + \psi \frac{\partial^2 \delta\varphi}{\partial \psi^2} \right] - 2 \frac{\partial \varphi_b}{\partial N} \frac{\partial \Phi}{\partial N} - 2\psi^2 \left[\frac{\partial \varphi_b}{\partial \psi} \frac{\partial \Phi}{\partial \psi} + 2 \frac{\partial^2 \varphi_b}{\partial \psi^2} \Phi \right] = 0. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Debe notarse que para $\Phi = \nabla_r \varphi_b = 0$, la ecuación (5.9) se transforma en

$$\left(\frac{\partial \varphi_b}{\partial N} \right)^2 + \psi^2 \left(\frac{\partial \varphi_b}{\partial \psi} \right)^2 = 0, \quad (5.12)$$

que posteriormente será de utilidad.

5.4 Las Ecuaciones de Einstein en 5D.

Las ecuaciones de Einstein 5D diagonales a primer orden $\delta G_{AA} = -8\pi G T_{AA}$, son

$$9 \frac{\partial \Phi}{\partial N} - 9\psi \frac{\partial \Phi}{\partial \psi} - 3\psi^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \psi^2} - 3e^{-2N} \nabla_r^2 \Phi + 12\Phi = -16\pi G \psi^2 \Phi \left(\frac{\partial \varphi_b}{\partial \psi} \right)^2, \quad (5.13)$$

$$3\psi^2 e^{2N} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \psi^2} - 36e^{2N} \Phi + 2\nabla_r^2 \Phi - 30e^{2N} \frac{\partial \Phi}{\partial N} - 9e^{2N} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial N^2} + 3\psi \frac{\partial \Phi}{\partial \psi} = 48\pi G e^{2N} \Phi \left(\frac{\partial \varphi_b}{\partial N} \right)^2, \quad (5.14)$$

$$3 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial N^2} - e^{-2N} \nabla_r^2 \Phi + 24\Phi + 15 \frac{\partial \Phi}{\partial N} - 6\psi \frac{\partial \Phi}{\partial \psi} = -16\pi G \Phi \left(\frac{\partial \varphi_b}{\partial N} \right)^2, \quad (5.15)$$

para las componentes NN , rr y $\psi\psi$, respectivamente. Además, las ecuaciones de Einstein 5D no-diagonales, que son simétricas con respecto a la permutación de índices, $\delta G_{AB} = -8\pi G \delta T_{AB}$, con $A \neq B$, son

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x^i} + 3 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^i \partial N} = 0, \quad (5.16)$$

$$\psi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \psi \partial N} + 2 \frac{\partial \Phi}{\partial \psi} - \frac{\partial \Phi}{\partial N} = 0, \quad (5.17)$$

$$3 \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} - \psi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^i \partial \psi} = 0, \quad (5.18)$$

para las componentes Nx^i , $N\psi$ y $x^i\psi$, respectivamente. En este caso los índices latinos toman los valores 1, 2, 3. Después de algunas manipulaciones algebraicas, de las ecuaciones (5.13), (5.14) y (5.15), obtenemos

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial N^2} + 3 \frac{\partial \Phi}{\partial N} - e^{-2N} \nabla_r^2 \Phi - 2\psi^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \psi^2} + \frac{16\pi G}{3} \Phi \left[\left(\frac{\partial \varphi_b}{\partial N} \right)^2 + \psi^2 \left(\frac{\partial \varphi_b}{\partial \psi} \right)^2 \right] = 0. \quad (5.19)$$

Usando la ecuación (5.12), la ecuación (5.19) se transforma en

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial N^2} + 3 \frac{\partial \Phi}{\partial N} - e^{-2N} \nabla_r^2 \Phi - 2\psi^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \psi^2} = 0, \quad (5.20)$$

que es la ecuación de movimiento para las fluctuaciones escalares de la métrica 5D $\Phi(N, \vec{r}, \psi)$.

5.5 Normalización del campo Φ en 5D

Consideramos la factorización de las fluctuaciones escalares de la métrica 5D, $\Phi(N, \vec{r}, \psi) = \Phi_1(N)\Phi_2(\vec{r})\Phi_3(\psi)$. Dada esta factorización la ecuación (5.20) puede ser escrita como un sistema de tres ecuaciones diferenciales en la forma

$$\psi^2 \frac{d^2 \Phi_3}{d\psi^2} = k_\psi^2 \psi^2 \Phi_3, \quad (5.21)$$

$$\nabla_r^2 \Phi_2 = -k_r^2 \Phi_2, \quad (5.22)$$

$$\frac{d^2 \Phi_1}{dN^2} + 3 \frac{d\Phi_1}{dN} - (2k_\psi^2 \psi^2 + e^{-2N} k_r^2) \Phi_1 = 0, \quad (5.23)$$

donde $k_\psi^2 \psi^2 > 0$.

Si consideramos la transformación $\Phi(N, \vec{r}, \psi) = e^{-3N/2} \left(\frac{\psi}{\psi_0} \right) \chi(N, \vec{r})$, obtenemos que la ecuación de movimiento para χ es

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial N^2} - \left(e^{-2N} \nabla_r^2 + 2\psi^2 \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} \right) \chi = 0, \quad (5.24)$$

donde χ puede ser escrito como la expansión de Fourier

$$\chi(N, \vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 k_r \int dk_\psi \left[a_{k_r k_\psi} e^{i\vec{k}_r \cdot \vec{r}} \xi_{k_r k_\psi}(N) + a_{k_r k_\psi}^\dagger e^{-i\vec{k}_r \cdot \vec{r}} \xi_{k_r k_\psi}^*(N) \right], \quad (5.25)$$

en donde el asterisco denota complejo conjugado y $(a_{k_r k_\psi}, a_{k_r k_\psi}^\dagger)$ son, respectivamente, los operadores de aniquilación y creación que satisfacen

$$\left[a_{k_r k_\psi}, a_{k'_r k'_\psi}^\dagger \right] = \delta^{(3)}(\vec{k}_r - \vec{k}'_r) \delta(k_\psi - k'_\psi), \quad \left[a_{k_r k_\psi}, a_{k'_r k'_\psi} \right] = \left[a_{k_r k_\psi}^\dagger, a_{k'_r k'_\psi}^\dagger \right] = 0.$$

La ecuación de movimiento para los modos dependientes de N , es

$$\frac{d^2 \xi_{k_r k_\psi}}{dN^2} + [e^{-2N} k_r^2 - 2k_\psi^2 \psi^2] \xi_{k_r k_\psi} = 0. \quad (5.26)$$

La solución general de esta ecuación es

$$\xi_{k_r k_\psi}(N) = C_1 \mathcal{H}_\nu^{(1)}[x(N)] + C_2 \mathcal{H}_\nu^{(2)}[x(N)], \quad (5.27)$$

donde $\nu = \sqrt{2} k_\psi \psi$ es una constante y $x(N) = k_r e^{-N}$. Usando el vacío generalizado de Bunch-Davies [117], obtenemos que

$$\xi_{k_r k_\psi}(N) = i \sqrt{\frac{4}{\pi}} \mathcal{H}_\nu^{(2)}[x(N)], \quad (5.28)$$

que son los modos normalizados de χ dependientes de N .

5.6 Expansión De-Sitter Efectiva 4D.

En esta sección estudiaremos la dinámica de Φ efectiva 4D en un Universo con expansión de Sitter, que es considerado 3D (espacialmente) plano, isotrópico y homogéneo.

Para hacer esto, obtendremos la métrica de Ponce de León a partir de la transformación de coordenadas

$$t = \psi_0 N, \quad R = \psi_0 r, \quad \psi = \psi. \quad (5.29)$$

De esta forma, el fondo métrico 5D dado por (5.4) se transforma en

$$(dS^2)_b = \left(\frac{\psi}{\psi_0}\right)^2 [dt^2 - e^{2t/\psi_0} dR^2] - d\psi^2, \quad (5.30)$$

que es la métrica de Ponce de León [105], que describe una extensión 5D de la métrica de Friedmann-Robertson Walker espacialmente (3D) plana, homogénea e isotrópica en una expansión de Sitter. En (5.30) t es el tiempo cósmico y $R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$. Consideramos ahora la foliación $\psi = \psi_0$ en la métrica (5.30), tal que la métrica efectiva 4D se convierte en

$$(dS^2)_b \rightarrow (ds^2)_b = dt^2 - e^{2t/\psi_0} dR^2, \quad (5.31)$$

que describe una expansión 4D de un Universo espacialmente (3D) plano, homogéneo e isotrópico, con una tasa de expansión dada por el parámetro de Hubble constante $H = \frac{1}{\psi_0}$ y una curvatura escalar 4D ${}^{(4)}\mathcal{R} = 12H^2$. De esta manera, la métrica efectiva 4D de (5.6) sobre las hipersuperficies $\psi = 1/H$ es

$$dS^2 \rightarrow ds^2 = (1 + 2\Phi)dt^2 - (1 - 2\Phi)e^{2Ht} dR^2, \quad (5.32)$$

donde la métrica (5.32) describe una expansión de Sitter 4D perturbada del Universo, donde $\Phi(\vec{R}, t)$ es invariante de norma.

5.7 Dinámica de Φ en una expansión de Sitter Efectiva 4D

Para estudiar la dinámica 4D de las fluctuaciones escalares de la métrica invariantes de norma $\phi(\vec{R}, t)$ en un fondo de expansión de Sitter tomamos la

ecuación (5.20) con las transformaciones (5.29), para la foliación $\psi = \psi_0 = 1/H$, obteniéndose

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + 3H \frac{\partial \Phi}{\partial t} - e^{2Ht} \nabla_R^2 \Phi - 2 \left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \psi^2} \right|_{\psi=H^{-1}} = 0, \quad (5.33)$$

donde $\left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \psi^2} \right|_{\psi=H^{-1}} = k_{\psi_0}^2 \Phi$. Para simplificar la estructura de esta ecuación proponemos las fluctuaciones métricas cuánticas redefinidas $\chi(\vec{R}, t) = e^{3Ht/2} \Phi(\vec{R}, t)$, tal que χ satisface la ecuación de movimiento

$$\ddot{\chi} - e^{-2Ht} \nabla_R^2 \chi - \left[\frac{9}{4} H^2 + 4k_{\psi_0}^2 \right] \chi = 0, \quad (5.34)$$

donde el campo redefinido $\chi(\vec{R}, t)$ puede expandirse como

$$\chi(\vec{R}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 k_R \int dk_\psi [a_{k_R k_\psi} e^{i\vec{k}_R \cdot \vec{R}} \xi_{k_R k_\psi}(t) + c.c.] \delta(k_\psi - k_{\psi_0}), \quad (5.35)$$

donde los operadores $a_{k_R k_\psi}$ y $a_{k_R k_\psi}^\dagger$ cumplen con

$$\left[a_{k_R k_\psi}, a_{k'_R k'_\psi}^\dagger \right] = \delta^{(3)}(\vec{k}_R - \vec{k}'_R) \delta(k_\psi - k'_\psi), \quad \left[a_{k_R k_\psi}, a_{k'_R k'_\psi} \right] = \left[a_{k_R k_\psi}^\dagger, a_{k'_R k'_\psi}^\dagger \right] = 0.$$

Los modos dependientes del tiempo $\xi_{k_R k_{\psi_0}}(t)$ son dados por la ecuación

$$\ddot{\xi}_{k_R k_{\psi_0}}(t) + \left[k_R^2 e^{-2Ht} - \left(\frac{9}{4} H^2 + 4k_{\psi_0}^2 \right) \right] \xi_{k_R k_{\psi_0}}(t) = 0. \quad (5.36)$$

La solución general de esta ecuación es

$$\xi_{k_R k_{\psi_0}}(t) = A_1 \mathcal{H}_\mu^{(1)}[y(t)] + A_2 \mathcal{H}_\mu^{(2)}[y(t)], \quad (5.37)$$

donde $\mu = \frac{1}{2} \sqrt{9 + 16k_{\psi_0}^2/H^2}$ y $y(t) = \frac{1}{H} k_R e^{-Ht}$. Usando la condición de vacío de Bunch-Davis [117] obtenemos

$$\xi_{k_R k_{\psi_0}}(t) = i \sqrt{\frac{\pi}{4H}} \mathcal{H}_\mu^{(2)}[y(t)], \quad (5.38)$$

que son los modos normalizados dependientes del tiempo de $\chi(\vec{R}, t)$.

5.7.1 Fluctuaciones de la Densidad de Energía.

Para obtener las fluctuaciones en la densidad de energía sobre la métrica efectiva 4D de FRW, debemos calcular

$$\frac{\delta\rho}{\langle\rho\rangle} = \frac{\delta T^N{}_N}{\langle T^N{}_N\rangle} \Big|_{t=\psi_0, R=\psi_0 r, \psi=1/H}, \quad (5.39)$$

donde $\delta T^N{}_N = -\frac{1}{2}\delta g_{QN}\bar{g}^{NQ}\bar{g}^{ML}\varphi_{,L}\varphi_{,M}$ es linealizada y los brackets $\langle \dots \rangle$ denotan valor de espectación sobre las hipersuperficies 3D $R(X, Y, Z)$. Usando la expansión semi-clásica $\varphi(\vec{R}, t) = \varphi_b(t) + \delta\varphi(\vec{R}, t)$, y después de cierto procedimiento algebraico, obtenemos

$$\frac{\delta\rho}{\langle\rho\rangle} \simeq 2\Phi \left\{ 1 - \frac{\langle(\delta\dot{\varphi})^2 + e^{-2Ht}(\nabla_R\delta\varphi)^2 + 2V(\delta\varphi)\rangle}{(\dot{\varphi}_b)^2 + 4H^2(\varphi_b)^2} \right\} \simeq 2\Phi, \quad (5.40)$$

donde hemos considerado la aproximación

$$\frac{\langle(\delta\dot{\varphi})^2 + e^{-2Ht}(\nabla_R\delta\varphi)^2 + 2V(\delta\varphi)\rangle}{(\dot{\varphi}_b)^2 + 4H^2(\varphi_b)^2} \ll 1, \quad (5.41)$$

siendo $V(\delta\varphi) = V(\varphi) - V(\varphi_b)$ dado por

$$V(\delta\varphi) = -\frac{1}{2} \left[g^{\psi\psi} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\psi} \right)^2 \Big|_{\psi=H^{-1}} - \bar{g}^{\psi\psi} \left(\frac{\partial\varphi_b}{\partial\psi} \right)^2 \Big|_{\psi=H^{-1}} \right],$$

con

$$V(\varphi_b) = -\frac{1}{2} \bar{g}^{\psi\psi} \left(\frac{\partial\varphi_b}{\partial\psi} \right)^2 \Big|_{\psi=H^{-1}} = 2H^2(\varphi_b)^2. \quad (5.42)$$

La aproximación (5.41) es válida durante inflación a escalas Super Hubble (en el sector infrarrojo), en la cual las fluctuaciones del campo inflatón son muy “suaves”. Finalmente calculamos la amplitud para las fluctuaciones de la métrica invariantes de norma 4D para una expansión de Sitter en el sector infrarrojo ($k_R \ll e^{Ht}H$)

$$\langle\Phi^2\rangle = \frac{e^{-3Ht}}{(2\pi)^3} \int_0^{ee^{Ht}H} d^3k_R \xi_{k_R} \xi_{k_R}^*, \quad (5.43)$$

donde $\epsilon \simeq 10^{-3}$ es una constante adimensional. Las Φ -fluctuaciones cuadráticas tienen un espectro de potencias $\mathcal{P}(k_R)$ dado por

$$\mathcal{P}(k_R) \sim k_R^{3 - \sqrt{9 + 16k_{\psi_0}^2/H^2}}, \quad (5.44)$$

el cual para $k_{\psi_0}^2 \psi_0^2 = k_{\psi_0}^2/H^2 \ll 1$ es cercano a ser invariante de escala. En otras palabras, el espectro de potencias 3D de las fluctuaciones de la métrica invariantes de norma depende del número de onda k_{ψ_0} relacionado con la quinta coordenada sobre las hipersuperficies $\psi = \psi_0 \equiv H^{-1}$.

Por otro lado, se sabe de las evidencias observacionales [118] que el índice espectral es acotado

$$n_s = 0.97 \pm 0.03 \quad (5.45)$$

donde de acuerdo a nuestro modelo $n_s = 4 - \sqrt{9 + 16k_{\psi_0}^2/H^2}$ es el índice espectral de las perturbaciones de energía. De la condición observacional (5.45), obtenemos

$$0 \leq k_{\psi_0} \leq 0.15 H, \quad (5.46)$$

que es el principal resultado de este capítulo.

En este capítulo hemos desarrollado un formalismo pentadimensional que nos permite estudiar fluctuaciones escalares de la métrica invariantes de norma desde una teoría de Kaluza-Klein no compacta de la gravedad. En particular y por simplicidad hemos analizado estas fluctuaciones en un fondo métrico efectivo tetradimensional de De-Sitter, usando una expansión a primer orden en el tensor métrico. De acuerdo a la ecuación (5.40) en este formalismo es posible reproducir uno de los resultados tetradimensionales obtenidos típicamente en la literatura $\delta\rho/\rho \simeq 2\Phi$, durante inflación [5]. Por otro lado, hemos visto en la expresión (5.44) que el espectro de las fluctuaciones en la densidad de energía depende del número de onda asociado a la quinta coordenada k_{ψ_0} . Más aun, en este modelo la desviación del espectro de la planaridad es debida a la existencia de la quinta dimensión, tal y como puede verse en la expresión para el índice espectral $n_s = 4 - \sqrt{9 + 16k_{\psi_0}^2/H^2}$. Este hecho nos permite establecer la siguiente cota para el número de onda asociado a la quinta coordenada $k_{\psi_0} < 1.5 \times 10^{-10} M_p$, donde empleamos un valor inflacionario típico de $H_0 = 10^{-9} M_p$. Este resultado es de gran importancia ya que si bien hasta ahora no es posible obtener de manera explícita

los valores de cantidades asociadas con la quinta dimensión, si pueden establecerse algunas cotas mediante el contrastado observacional. Una ventaja de este formalismo es que puede ser extendido a otros modelos inflacionarios y cosmológicos donde la expansión del universo sea gobernada por un solo campo escalar.

6. INFLACIÓN GRAVITOELECTROMAGNÉTICA DESDE UNA TEORÍA DE KALUZA KLEIN NO COMPACTA 5D

6.1 Introducción

Las evidencias observacionales han soportado la existencia de campos magnéticos cósmicos a diferentes escalas y asociados a diferentes objetos. Desde la Tierra, el sol, estrellas hasta galaxias y cúmulos de galaxias, los campos magnéticos son parte de estos objetos. Los campos magnéticos cósmicos pueden observarse indirectamente tanto en el óptico como en longitudes de onda de radio. Estos campos exhiben diferentes comportamientos y morfologías. Por ejemplo el campo magnético terrestre cuenta con una estructura casi dipolar y tiene una magnitud aproximada de $B \sim 1 G$. Sin embargo, el campo magnético solar tiene una estructura de mayor complejidad ya que cambia su polaridad cada 22 años y en las manchas solares el campo llega a tener una intensidad de hasta $B \sim 10^3 G$. También se tiene evidencia de campos magnéticos de gran intensidad como los asociados a estrellas de neutrones cuya intensidad llega a ser $B \sim 10^{12} G$. En el otro extremo se encuentran los campos magnéticos galácticos e intergalácticos, ya que sus intensidades son del orden de micro gauss (μG) [119]-[124]. Por ejemplo nuestra galaxia tiene un campo magnético cuya intensidad es del orden de $B \simeq 10^{-6} G$, el cual es similar al detectado en galaxias con altos corrimientos al rojo [125]. También hay evidencia de campos magnéticos a gran escala de intensidad similar en cúmulos de galaxias [126], los cuales han sido recientemente estudiados por Giovannini en [127] y por Carilli y Taylor en [128]. En investigaciones recientes se han estudiado tanto la posible existencia así como la intensidad y estructura de campos magnéticos en el plano intergaláctico dentro del Super Cúmulo Local, el cual tiene su centro aproximadamente en el cúmulo de Virgo. Estos análisis indican que este campo magnético es un campo regular cuya intensidad es del orden de $B \simeq 0.3 \mu G$ [129]. Investigaciones más recientes sobre las posibles consecuencias observacionales de campos magnéticos a

escalas cosmológicas incluyendo efectos en la anisotropía en el CMBR, pueden encontrarse en [130].

Los campos magnéticos cósmicos juegan un papel importante en diferentes procesos físicos en el Universo. Los campos magnéticos están involucrados en los procesos de confinamiento de rayos cósmicos y la transferencia de momento angular hacia el exterior de los cúmulos protoestelares, generando el colapso y la formación de estrellas. Además estos campos ejercen influencia en el proceso de formación de estructura a gran escala [131, 132]. Los campos magnéticos cósmicos tienen también influencia en nucleosíntesis. Por ejemplo dado que los neutrinos poseen momento magnético, al propagarse a través de un campo magnético externo sufren un cambio en su espín, de tal manera que neutrinos con helicidad izquierda se transforman en neutrinos con helicidad derecha, dando origen a un grado de libertad efectivo extra para el neutrino, lo cual afecta nucleosíntesis primordial [133].

La existencia de campos magnéticos cósmicos conlleva al problema del mecanismo responsable de su origen. En general se han propuesto diferentes mecanismos para tratar de resolver este problema. Sin embargo, todos ellos pueden clasificarse en dos categorías. Mecanismos de tipo astrofísico y mecanismos de tipo cosmológico. Los mecanismos astrofísicos tratan de explicar el origen de los campos magnéticos galácticos. En estos modelos usualmente se postula la existencia de un pequeño campo magnético semilla el cual puede ser amplificado por la compresión de la protogalaxia y/o amplificado exponencialmente por el movimiento turbulento del fluido, como es el caso de la teoría dínamo [134]. Estos mecanismos operan a escalas de Kpc's. Por otro lado, dada la posibilidad de que los campos magnéticos galácticos provengan directamente de campos magnéticos primordiales que posteriormente serían comprimidos con el colapso del cúmulo protogaláctico, los mecanismos cosmológicos tratan de dar una explicación del origen de campos magnéticos semilla a escalas de Mpc's en épocas muy tempranas del Universo. Sin embargo, las intensidades de estos campos magnéticos primordiales cosmológicos ahora tienen que ser del orden de entre 10^{-9} y 10^{-10} Gauss a esas escalas para estar dentro del rango observacional actual. Además de la teoría dínamo, en magnetohidrodinámica ha habido otras propuestas para magnetogénesis. Por ejemplo se ha propuesto que fluctuaciones en la densidad de energía y la temperatura pudieron crear campos magnéticos débiles a través del mecanismo de la batería de Bierman, de tal manera que la magnitud de este

pequeño campo pudo haber sido incrementada mediante turbulencia en las líneas de flujo de campo magnético [135]. Cabe comentar que en esta tesis se estudiará sólo el enfoque cosmológico.

También se ha dado la propuesta de que los campos magnéticos cosmológicos semilla pudieron ser producidos durante el período inflacionario del Universo mediante la ruptura de la invariancia conformal [136, 137]. Una idea natural es que los campos magnéticos primordiales sean inducidos por el mecanismo responsable del proceso de formación de estructura, en este caso por inflación. Sin embargo el problema básico con algunos modelos inflacionarios que consideran la generación de campos magnéticos es que el Universo temprano es un buen conductor, de tal manera que ignorando efectos de turbulencia, el flujo de campo magnético $\sim Ba^2$ tiende a ser conservado. Para evitar esto, es necesario romper la invariancia conforme de la teoría de alguna manera. Una de las primeras sugerencias al respecto fue hecha por Turner y Widrow [136], quienes consideraron acoplamiento a la curvatura escalar R tales como RF^2 y RA^2 , así como también acoplamiento fotón-axión. En modelos inspirados en teoría de cuerdas, acoplamiento dilatónico de la forma $e^\Phi F^2$ también han sido considerados e interesantes intensidades de campo magnético pudieron obtenerse mediante el sintonizado de la intensidad del acoplamiento dilatónico [138].

Por otro lado, inflación ofrece una alternativa proporcionando un mecanismo para la producción dinámica y cinemática de campos magnéticos cósmicos semilla. Este mecanismo genera los medios cinemáticos para la producción de efectos en longitudes de onda largas, es decir, en el sector infrarrojo, en el Universo temprano mediante la amplificación de los modos de longitud de onda corta (en el sector ultravioleta) del campo inflatón. Lo mismo sucede con los modos de un campo electromagnético. Dado que una onda electromagnética con $\lambda_{fis} \geq H_0^{-1}$ tiene la apariencia de campos \vec{E} y \vec{B} estáticos, fotones con longitudes de onda muy grandes ($\lambda_{fis} \gg H_0^{-1}$) pueden generar campos magnéticos a gran escala.

En este capítulo estudiaremos un formalismo inflacionario desde un vacío aparente 5D donde la materia efectiva 4D y el electromagnetismo efectivo 4D son descritos de manera unificada y geométrica desde 5D. Como veremos este formalismo nos permitirá explicar tanto las semillas de materia como los campos magnéticos semilla cosmológicos en el Universo temprano, de

tal manera que los valores estimados para estos campos magnéticos en la actualidad van de acuerdo con las evidencias observacionales que se tienen de los mismos a escalas de Mpc's.

6.2 Formalismo Pentadimensional

Al igual que en los capítulos anteriores, para describir un espacio-tiempo pentadimensional en vacío aparente consideramos la métrica (3.2) que satisface $R^A{}_{BCD} = 0$. La descripción de materia neutra y campos electromagnéticos sobre este espacio-tiempo es basada en la acción

$$I = \int d^4x d\psi \sqrt{\left| \frac{{}^{(5)}g}{{}^{(5)}g_0} \right|} \left[\frac{{}^{(5)}R}{16\pi G} + {}^{(5)}\mathcal{L}(A_B, A_{C;B}) \right], \quad (6.1)$$

donde hemos introducido el penta-potencial vector $A_B = (A_\mu, \varphi)$ el cual está mínimamente acoplado a la gravedad. Sus componentes son el potencial electromagnético A_μ y el campo escalar inflatón φ ambos definidos sobre el fondo métrico (3.2). Al igual que en los anteriores casos estudiados en esta tesis ${}^{(5)}R$ es el escalar de Ricci pentadimensional, que para (3.2) es nulo, ${}^{(5)}g_0$ es una constante de dimensionalización y $\mathcal{L}(A_B, A_{C;B})$ es la densidad lagrangiana pentadimensional que adquiere la forma propuesta

$${}^{(5)}\mathcal{L}(A_B, A_{B;C}) = -\frac{1}{4}Q_{BC}Q^{BC} \quad (6.2)$$

mediante la introducción del campo tensorial $Q_{BC} = F_{BC} + \gamma g_{BC} (A^D{}_{;D})$ siendo $\gamma = \sqrt{(2/5)\lambda}$ una constante y $F_{BC} = A_{C;B} - A_{B;C}$ un campo tensorial 5D antisimétrico. La operación derivada covariante es denotada en este caso por $(;)$. La densidad lagrangiana (6.2) puede también ser expresada en la forma

$${}^{(5)}\mathcal{L}(A_B, A_{B;C}) = -\frac{1}{4}F_{BC}F^{BC} - \frac{\lambda}{2}(A^D{}_{;D})^2, \quad (6.3)$$

donde el último término es un término que fija la norma.¹ Las ecuaciones dinámicas pentadimensionales en el formalismo de Lagrange son

$$A^B{}_{;D}{}^{;D} - (1 - \lambda)A^C{}_{;C}{}^{;B} = 0. \quad (6.4)$$

¹ Dada la estructura de norma de la teoría, este término es necesario para llevar a cabo un apropiado proceso de cuantización de manera consistente.

Trabajando en la norma de Feynman ($\lambda = 1$), la expresión anterior se transforma en

$$\frac{1}{\sqrt{|^{(5)}g|}} \frac{\partial}{\partial x^C} \left[\sqrt{|^{(5)}g|} g^{DC} A^B{}_{,D} \right] = 0. \quad (6.5)$$

Debe notarse que $A^B = (A^\mu, -\varphi)$. Esta expresión es una ecuación tipo Klein-Gordon no masiva para el campo A^B y representa el análogo de las ecuaciones de Maxwell sobre la variedad pentadimensional en vacío aparente.

Por otro lado, cuantizando la teoría mediante el proceso de cuantización empleado típicamente en teoría cuántica de campos, vemos que los conmutadores² para el campo A^C y su momento canónico asociado correspondiente $\bar{\Pi}^B = \partial\mathcal{L}/\partial(A_{B,N}) = F^{BN} - g^{BN} A^C{}_{;C}$ son dados por

$$\left[A^C(N, \vec{r}, \psi), \bar{\Pi}^B(N, \vec{r}', \psi') \right] = ig^{CB} g^{NN} \left| \frac{{}^{(5)}g_0}{{}^{(5)}g} \right| \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') \delta(\psi - \psi') \quad (6.6)$$

$$\left[A_C(N, \vec{r}, \psi), A_B(N, \vec{r}', \psi') \right] = \left[\bar{\Pi}_C(N, \vec{r}, \psi), \bar{\Pi}_B(N, \vec{r}', \psi') \right] = 0. \quad (6.7)$$

En este caso $\bar{\Pi}^N = -g^{NN} (A^C{}_{;C})$ y $|^{(5)}g_0|/|^{(5)}g|$ es el inverso del volumen normalizado de la variedad (3.2). De las ecuaciones (6.6) y (6.7) obtenemos el conmutador

$$\left[A_C(N, \vec{r}, \psi), A_{B;N}(N, \vec{r}', \psi') \right] = -i g_{BC} \left| \frac{{}^{(5)}g_0}{{}^{(5)}g} \right| \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') \delta(\psi - \psi'). \quad (6.8)$$

Extrayendo la parte espacio-temporal de la ecuación (6.5) obtenemos que la ecuación de movimiento para el cuadri-potencial electromagnético A^μ es dada por

$$\overset{\star\star}{A}{}^\mu + 3 \overset{\star}{A}{}^\mu - e^{-2N} \nabla_r^2 A^\mu - \left[4\psi \frac{\partial A^\mu}{\partial \psi} + \psi^2 \frac{\partial^2 A^\mu}{\partial \psi^2} \right] = 0, \quad (6.9)$$

donde la estrella (\star) denota derivada con respecto de N . Similarmente considerando la parte pentadimensional de (6.5) obtenemos

$$\overset{\star\star}{\varphi} + 3 \overset{\star}{\varphi} - e^{-2N} \nabla_r^2 \varphi - \left[4\psi \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} + \psi^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \psi^2} \right] = 0, \quad (6.10)$$

² Dado que estamos cuantizando un campo escalar y el campo electromagnético, i.e bosones, empleamos relaciones de conmutación y no de anticonmutación.

que es la ecuación, obtenida con anterioridad, que describe la dinámica del campo inflatón. Nótese que en este caso se describen de manera unificada ambas dinámicas, tanto la de A^μ como la de φ . Esto puede verse en la expresión (6.5) mediante el campo A^B . Usando (6.6) el conmutador entre φ y $\overset{\star}{\varphi}$ llega a ser

$$\left[\varphi(N, \vec{r}, \psi), \overset{\star}{\varphi}(N, \vec{r}', \psi') \right] = i \left| \frac{^{(5)}g_0}{^{(5)}g} \right| \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') \delta(\psi - \psi'). \quad (6.11)$$

que corresponde a la relación de conmutación obtenida en el formalismo 5D sin la inclusión del campo electromagnético. Con esto vemos que no solamente la dinámica dada a través de las ecuaciones de movimiento es descrita de manera unificada, sino que además es posible tener una representación unificada de las relaciones de conmutación.

Dado que la dinámica del campo escalar inflatón φ ya ha sido estudiada en capítulos anteriores, a lo largo de este capítulo nos enfocaremos principalmente al análisis de la parte electromagnética.

6.2.1 El Campo Electromagnético 4D embebido en 5D

Iniciaremos en esta sección estudiando la dinámica del cuadripotencial A^μ embebido en el fondo 5D dado por (3.2). Con este objetivo, transformando A^μ de acuerdo a $A^\mu(N, \vec{r}, \psi) = e^{-3N/2}(\psi_0/\psi)^2 \bar{A}^\mu(N, \vec{r}, \psi)$ la ecuación (6.9) genera

$$\overset{\star\star}{\bar{A}}^\mu - e^{-2N} \nabla_r^2 \bar{A}^\mu - \psi^2 \frac{\partial^2 \bar{A}^\mu}{\partial \psi^2} - \frac{1}{4} \bar{A}^\mu = 0, \quad (6.12)$$

de tal manera que el conmutador entre $\overset{\star}{\bar{A}}^\mu$ y \bar{A}^ν es ahora

$$\left[\overset{\star}{\bar{A}}^\mu(N, \vec{r}, \psi), \bar{A}^\nu(N, \vec{r}', \psi') \right] = i g^{\mu\nu} \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') \delta(\psi - \psi'). \quad (6.13)$$

El campo redefinido $\bar{A}^\mu(N, \vec{r}, \psi)$ puede ser expresado en términos de la expansión de Fourier

$$\bar{A}^\mu = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 k_r d k_\psi \sum_{\alpha=0}^3 \epsilon_{(\alpha)}^\mu \left[a_{k_r, k_\psi}^{(\alpha)} e^{i \vec{k}_r \cdot \vec{r}} \zeta_{k_r, k_\psi}(N, \psi) + a_{k_r, k_\psi}^{(\alpha)\dagger} e^{-i \vec{k}_r \cdot \vec{r}} \zeta_{k_r, k_\psi}^*(N, \psi) \right] \quad (6.14)$$

donde los operadores de creación y aniquilación $(a_{k_r k_\psi}^{(\alpha)\dagger}, a_{k_r k_\psi}^{(\alpha)})$ satisfacen las relaciones de conmutación

$$\left[a_{k_r k_\psi}^{(\alpha)}, a_{k'_r k'_\psi}^{(\alpha')\dagger} \right] = -g^{\alpha\alpha'} \delta^{(3)}(\vec{k}_r - \vec{k}'_r) \delta(k_\psi - k'_\psi), \quad (6.15)$$

$$\left[a_{k_r k_\psi}^{(\alpha)}, a_{k'_r k'_\psi}^{(\alpha')} \right] = \left[a_{k_r k_\psi}^{(\alpha)\dagger}, a_{k'_r k'_\psi}^{(\alpha')\dagger} \right] = 0, \quad (6.16)$$

siendo $\epsilon_{(\alpha)}^\mu$ los vectores de polarización que satisfacen $\epsilon_{(\alpha)} \cdot \epsilon_{(\alpha')} = g_{\alpha\alpha'}$. Sustituyendo la expansión (6.14) en la ecuación (6.12) obtenemos

$$\frac{\partial^2}{\partial N^2} \zeta_{k_r k_\psi} + \left[e^{-2N} k_r^2 - \frac{1}{4} \right] \zeta_{k_r k_\psi} - \psi^2 \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} \zeta_{k_r k_\psi} = 0, \quad (6.17)$$

que es la ecuación dinámica para los modos $\zeta_{k_r k_\psi}$ de \bar{A}^μ . Proponemos la separación $\zeta_{k_r k_\psi}(N, \psi) = \zeta_{(1)}(N) \zeta_{(2)}(\psi)$, donde por simplicidad hemos suprimido las etiquetas $k_r k_\psi$ en la notación. De esta manera, la ecuación (6.17) puede ser equivalentemente expresada a través del sistema

$$\psi^2 \frac{d^2}{d\psi^2} \zeta_{(2)} - \kappa^2 \zeta_{(2)} = 0, \quad (6.18)$$

$$\frac{d^2}{dN^2} \zeta_{(1)} + \left[k_r^2 e^{-2N} - \left(\kappa^2 + \frac{1}{4} \right) \right] \zeta_{(1)} = 0, \quad (6.19)$$

donde κ es una constante de separación adimensional dada por $\kappa^2 = \psi^2 k_\psi^2$, con k_ψ el número de onda correspondiente a la quinta coordenada. La solución general para el sistema (6.18,6.19) es dada por

$$\zeta_{k_r k_\psi}(N, \psi) = C_1 \mathcal{H}_{\nu_1}^{(1)}[x(N)] + C_2 \mathcal{H}_{\nu_1}^{(2)}[x(N)], \quad (6.20)$$

siendo $\mathcal{H}_{\nu_1}^{(1)}$ y $\mathcal{H}_{\nu_1}^{(2)}$ las funciones de Hankel del primero y segundo tipo, respectivamente, con orden adimensional $\nu_1 = (1/2) \sqrt{4k_\psi^2 \psi^2 + 1}$ y argumento $x(N) = k_r e^{-N}$. Para que la relación de conmutación (6.13) se satisfaga, debe cumplirse la condición de normalización sobre los modos

$$\zeta_{k_r k_\psi} \zeta_{k_r k_\psi}^{**} - \zeta_{k_r k_\psi}^* \zeta_{k_r k_\psi}^* = i. \quad (6.21)$$

Por tanto, considerando la condición de vacío de Bunch-Davies $C_1 = 0$, la condición (6.21) genera $C_2 = i\sqrt{\pi}/2$ de tal manera que (6.20) se reduce a

$$\zeta_{k_r k_\psi}(N, \psi) = i \frac{\sqrt{\pi}}{2} \mathcal{H}_{\nu_1}^{(2)}[x(N)]. \quad (6.22)$$

Esta expresión nos da los modos normalizados correspondientes al campo electromagnético embebido en un vacío aparente 5D. Sin embargo debemos recordar que las coordenadas (N, \vec{r}, ψ) no son físicas. Por otro lado, resulta de mayor conveniencia obtener estos resultados pero sobre la subvariedad 4D. Así en la siguiente sección estudiaremos la dinámica efectiva tetradimensional del campo electromagnético efectivo 4D.

6.3 Dinámica Efectiva Tetradimensional del Campo Electromagnético A_μ

Para estudiar la dinámica tetradimensional del campo electromagnético, elegimos por simplicidad hacerlo en un espacio-tiempo de De-Sitter. Como hemos analizado con anterioridad, es posible pasar de (3.2) a un De-Sitter a través de la transformación de coordenadas (4.36), de tal manera que el elemento de línea efectivo tetradimensional (4.38) corresponde a una expansión tipo De-Sitter. De esta forma la ecuación (6.9) bajo la transformación de coordenadas (4.36) y mediante la foliación correspondiente $\psi = \psi_0 = H_0^{-1}$ nos da

$$\ddot{A}^\mu + 3H_0\dot{A}^\mu - e^{-2H_0t}\nabla_R^2 A^\mu - H_0^2 \left[4\psi \frac{\partial A^\mu}{\partial \psi} + \psi^2 \frac{\partial^2 A^\mu}{\partial \psi^2} \right] \Big|_{\psi=H_0^{-1}} = 0, \quad (6.23)$$

donde $A^\mu = A^\mu(t, \vec{R})$ es el campo electromagnético efectivo tetradimensional inducido sobre la hipersuperficie $\psi = H_0^{-1}$. Esta ecuación describe la dinámica efectiva para $A^\mu(t, \vec{R}, \psi = \psi_0) \equiv A^\mu(t, \vec{R})$. Debe notarse que el último término entre corchetes actúa como un potencial electromagnético inducido por la quinta dimensión, derivado con respecto de A^μ . Este término es el análogo al término $V'(\varphi)$ que aparece en el análisis de la parte inflacionaria con $A_4 = \varphi$, cuya correspondiente ecuación dinámica es

$$\ddot{\varphi} + 3H_0\dot{\varphi} - e^{-2H_0t}\nabla_R^2 \varphi - H_0^2 \left[4\psi \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} + \psi^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \psi^2} \right] \Big|_{\psi=H_0^{-1}} = 0. \quad (6.24)$$

Por otro lado, transformando A^μ mediante $A^\mu(t, \vec{R}) = e^{-\frac{3}{2}H_0t}\mathcal{A}^\mu(t, \vec{R})$, la ecuación (6.23) adquiere la forma

$$\ddot{\mathcal{A}}^\mu - e^{-2H_0t}\nabla_R^2 \mathcal{A}^\mu - \left(\frac{9}{4}H_0^2 + \alpha \right) \mathcal{A}^\mu = 0, \quad (6.25)$$

donde $\alpha = k_{\psi_0}^2 - 2H_0^2$ es un parámetro constante. Expresando $\mathcal{A}^\mu(t, \vec{R})$ a través de la expansión de Fourier

$$\mathcal{A}^\mu(t, \vec{R}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k_R \int dk_\psi \sum_{\gamma=0}^3 \epsilon_{(\gamma)}^\mu \left[a_{k_R}^\gamma e^{i\vec{k}_R \cdot \vec{R}} Q_{k_R}(t) + cc \right] \delta(k_\psi - k_{\psi_0}), \quad (6.26)$$

con k_{ψ_0} constante, la ecuación de movimiento para los modos asociados al campo electromagnético efectivos tetradimensionales $Q_{k_R}(t)$ es

$$\ddot{Q}_{k_R} + \left[k_R^2 e^{-2H_0 t} - \left(\frac{9}{4} H_0^2 + \alpha \right) \right] Q_{k_R} = 0, \quad (6.27)$$

cuya solución general es dada por

$$Q_{k_R}(t) = F_1 \mathcal{H}_\nu^{(1)}[y(t)] + F_2 \mathcal{H}_\nu^{(2)}[y(t)], \quad (6.28)$$

donde nuevamente aparecen las funciones de Hankel del primero y segundo tipo respectivamente, con argumento $y(t) = (k_R/H_0) e^{-H_0 t}$ y orden $\nu = (1/2H_0) \sqrt{9H_0^2 + \alpha}$. En este caso, la correspondiente condición de normalización para los modos $Q_{k_R}(t)$ adquiere la forma

$$Q_{k_R} \dot{Q}_{k_R}^* - \dot{Q}_{k_R} Q_{k_R}^* = i. \quad (6.29)$$

Así tomando además en cuenta la condición de vacío de Bunch-Davies $F_1 = 0$ y $F_2 = i\sqrt{\pi/(4H_0)}$. Por tanto la solución normalizada de (6.27) es

$$Q_{k_R}(t) = i \sqrt{\frac{\pi}{4H_0}} \mathcal{H}_\nu^{(2)}[y(t)]. \quad (6.30)$$

que describe los modos tetradimensionales efectivos normalizados correspondientes al campo electromagnético A^μ . De manera similar al efecto de la expansión inflacionaria sobre los modos asociados al inflatón $A_4 = \varphi$, se espera que los modos $Q_{k_R}(t)$ tengan el mismo comportamiento. Esto significa que aquellos modos cuya extensión sobrepase la escala del horizonte causal dinámicamente llegarán a perder su coherencia cuántica siendo en ese momento clásicos. Esos modos serán los responsables de la generación de los campos magnéticos semilla, de ahí la importancia de estudiar las condiciones de clasicidad para el campo electromagnético A_μ . Este será el tema de la siguiente sección.

6.3.1 Condiciones de Clasicalidad para A_μ

El hecho de que el campo electromagnético pueda ser clásico a escalas mayores a las del horizonte causal se deriva de una característica muy importante de los modos $Q_{k_R}(t)$ asociados a este campo A_μ . Esta característica nos indica que en el sector infrarrojo (IR) estos modos son reales. Para formalizar este comportamiento, escribimos los modos $Q_{k_R}(t)$ como una función compleja con componentes $u_{k_R}(t)$ y $v_{k_R}(t)$ en la forma $Q_{k_R}(t) = u_{k_R}(t) + iv_{k_R}(t)$. Consecuentemente la condición para que los modos sean reales es

$$\alpha_{k_R}(t) = \left| \frac{v_{k_R}(t)}{u_{k_R}(t)} \right| \ll 1. \quad (6.31)$$

Por tanto la condición para que A_μ sea clásico en el sector IR durante inflación es dada por

$$\frac{1}{M(t)} \sum_{k_R=0}^{k_r \simeq \partial k_H(t)} \alpha_{k_R}(t) \ll 1, \quad (6.32)$$

donde $M(t)$ es el número de grados de libertad dependientes del tiempo, los cuales incrementan durante inflación, en el sector IR ($k_R \ll k_H$). Estos modos de longitud de onda larga (IR) se incluyen en el campo de grano grueso

$$\mathcal{A}_\mu|_{IR} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 k_R \Theta(\epsilon k_H - k_R) \sum_{\gamma=0}^3 \epsilon_{(\gamma)}^\mu \left[a_{k_R k_{\psi_0}}^\gamma e^{i\vec{k}_R \cdot \vec{R}} Q_{k_R}(t) + c.c. \right], \quad (6.33)$$

con Θ denotando la función escalón. Este campo toma en cuenta sólo aquellos modos con $10^3 \ll \vartheta^{-1} < k_H/k_R$. Estos modos pueden considerarse como clásicos ya que

$$\left[\mathcal{A}_\mu|_{IR}, \dot{\mathcal{A}}_\mu|_{IR} \right] \simeq 0, \quad (6.34)$$

lo que a su vez implica que las fluctuaciones de $A_\mu|_{IR}$ pueden tratarse clásicamente así como los campos eléctricos y magnéticos derivados de éstas.

Una vez determinada la naturaleza clásica de las fluctuaciones de A_μ en el sector IR, el siguiente punto de nuestro interés es determinar la magnitud de estas fluctuaciones. En la siguiente sección determinaremos las fluctuaciones medias cuadráticas del campo A_μ generadas al final del proceso inflacionario de De-Sitter.

6.3.2 Campos Electromagnéticos durante inflación

Los resultados anteriores nos permiten calcular las fluctuaciones cuadráticas efectivas 4D del campo electromagnético $\langle 0|A^\mu A_\mu|0 \rangle = \langle A^2 \rangle$ a través de la expresión

$$\langle A^2 \rangle|_{IR} = \frac{2e^{-3H_0 t}}{\pi^2} \int_0^{\vartheta k_H} \frac{dk_R}{k_R} k_R^3 Q_{k_R} Q_{k_R}^*, \quad (6.35)$$

donde $\vartheta = k_{max}^{(IR)}/k_p \ll 1$ es un parámetro adimensional que define los números de onda de los modos considerados. El parámetro $k_{max}^{(IR)} = k_H(t_i) = H_0 e^{H_0 t_i}$ es el número de onda asociado al radio de Hubble al tiempo t_i , siendo este tiempo el tiempo al cual los modos reingresan al horizonte causal una vez clasicados, y k_p es el número de onda Planckiano. De hecho elegimos k_p como una escala de corte para todo el espectro.

Para obtener $\langle A^2 \rangle|_{IR}$ debemos considerar la expansión para el caso límite de argumento pequeño para $\mathcal{H}_\nu^{(2)}[y] \simeq (y/2)^\nu [1/\Gamma(1+\nu)] - (i/\pi)\Gamma(\nu) (y/2)^{-\nu}$. De la condición (6.31) obtenemos que cada k_R -modo llega a ser clásico para tiempos que cumplen con la condición

$$t \gg \frac{1}{2\nu H_0} \ln \left[\frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(1+\nu)2^{2\nu}} \left(\frac{k_R}{H_0} \right)^{2\nu} \right], \quad (6.36)$$

la cual para una expansión de De-Sitter toma la forma $(k_R/H_0) \ll e^{N_e}$, con N_e el número de desdoblamientos exponenciales al final de inflación, que como sabemos $N_e \leq 60$ para que inflación resuelva los problemas de planaridad y del horizonte. Por otro lado, debe notarse que cuando $k_{\psi_0}^2 \simeq 2H_0^2$, el parámetro constante $|\alpha|/H_0^2 \ll 1$ y así $\nu > 0$. Consecuentemente la expansión límite anterior para la función de Hankel del segundo tipo se reduce a $\mathcal{H}_\nu^{(2)}[y] \simeq -(i/\pi)\Gamma(\nu) (y/2)^{-\nu}$ de tal manera que en el sector IR obtenemos

$$\langle A^2 \rangle|_{IR} \simeq \frac{2^{2\nu-1}}{\pi^3} H_0^{2\nu-1} \Gamma^2(\nu) e^{-(3-2\nu)H_0 t} \int_0^{\vartheta k_H} \frac{dk_R}{k_R} k_R^{3-2\nu}. \quad (6.37)$$

Cuando $\alpha = 0$, el exponente $\nu = 3/2$ y por tanto el espectro $\mathcal{P}(k_R) \sim k_R^{3-2\nu}$ es invariante de escala. Efectuando la integración (6.37) se reduce a

$$\langle A^2 \rangle|_{IR} \simeq \frac{2^{2\nu-1}}{\pi^3} \frac{\Gamma^2(\nu)}{(3-2\nu)} H_0^2 \vartheta^{3-2\nu}, \quad (6.38)$$

que es similar a la expresión correspondiente para $\langle \varphi^2 \rangle|_{IR}$. Esta expresión nos indica que $\langle A^2 \rangle$ es constante en el sector IR, lo que significa que la amplitud de los correspondientes fotones es constante. Este resultado puede interpretarse como que se tiene un potencial electromagnético clásico a gran escala al final del período inflacionario. De esta forma es posible explicar la aparición de campos magnéticos semilla al final de inflación. En otras palabras el potencial electromagnético A_μ induce campos magnéticos semilla en el sector IR, sin embargo este será el tema de la siguiente sección. Por otro lado, de acuerdo al análisis anterior debe enfatizarse que a pesar de que tanto la dinámica de φ como la de A_μ corresponden a la dinámica de un sólo objeto en 5D, en 4D evolucionan de manera independiente. En otras palabras no aparecen términos de acoplamiento entre φ y A_μ .

6.4 Campos Magnéticos Semilla inducidos

En esta sección estimaremos el campo magnético semilla inducido por el potencial electromagnético cuya dinámica estudiamos en las secciones anteriores. Para este propósito consideramos las componentes espaciales del potencial vector $\vec{A} = A^i \hat{e}_i$, siendo \hat{e}_i una base vectorial 3D. De esta manera considerando las componentes espaciales de (6.23) y (6.25) obtenemos

$$\ddot{A}^i + 3H_0 \dot{A}^i - e^{-2H_0 t} \nabla_R^2 A^i - \alpha A^i = 0. \quad (6.39)$$

Esta ecuación nos da la dinámica de las componentes espaciales del potencial vector \vec{A} . Cabe aclarar que de aquí en adelante estaremos considerando las componentes físicas tanto de \vec{A} como del correspondiente campo magnético \vec{B} medidas en un sistema de referencia comóvil con la expansión del Universo³. Las componentes de la base ortonormal asociada a este tipo de observadores en una expansión de De-Sitter son dadas por

$$e_{(t)} = \frac{\partial}{\partial t}, \quad e_{(\bar{R})} = e^{-H_0 t} \frac{\partial}{\partial \bar{R}}, \quad e_{(\theta)} = e^{-H_0 t} \frac{1}{\bar{R}} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad e_{(\phi)} = e^{-H_0 t} \frac{1}{\bar{R} \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}, \quad (6.40)$$

donde la parte espacial de la métrica (4.38) ha sido reescrita en la forma $dR^2 = d\bar{R}^2 + \bar{R}^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$.

³ Dado que estamos trabajando en un contexto relativista es necesario especificar la clase de observadores para que los conceptos de campo eléctrico y magnético tengan sentido, esto puede verse por las expresiones $E_\mu = F_{\mu\nu} U^\nu$ y $B_\mu = -(1/2) \epsilon_{\mu\nu\gamma\delta} F^{\gamma\delta} U^\nu$

Por otro lado, sabemos que a partir de la expresión (6.9) mediante el uso de las transformaciones (4.36) es posible obtener las ecuaciones de Maxwell con fuentes donde estas fuentes tienen un origen geométrico. Por su parte las ecuaciones de Maxwell homogéneas, es decir, sin fuentes pueden obtenerse en la forma usual a partir de las no-homogéneas (Ver por ejemplo [139]). Con esto es posible afirmar que el campo magnético semilla comóvil \vec{B}_{com} satisface las relaciones canónicas $\vec{\nabla}_R \cdot \vec{B}_{com} = 0$ y $\vec{B}_{com} = \vec{\nabla}_R \times \vec{A}_{com}$. Haciendo uso de estas expresiones el rotacional de la ecuación (6.39) nos da

$$\ddot{B}_{com}^i + H_0 \dot{B}_{com}^i - e^{-2H_0 t} \nabla_R^2 B_{com}^i - (\alpha + 2H_0^2) B_{com}^i = 0. \quad (6.41)$$

Esta expresión describe la dinámica de las componentes comóviles del campo magnético semilla. Análogamente al procedimiento seguido para A^μ , podemos expresar estas componentes de \vec{B}_{com} como una expansión de Fourier en la forma

$$B_{com}^i(t, \vec{R}) = \frac{e^{-\frac{1}{2}H_0 t}}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 k_R \sum_{l=1}^3 \epsilon_{(l)}^i(k_R) \left[b_{k_R}^{(l)} e^{i\vec{k}_R \cdot \vec{R}} G_{k_R}(t) + b_{k_R}^{(l)\dagger} e^{-i\vec{k}_R \cdot \vec{R}} G_{k_R}^*(t) \right], \quad (6.42)$$

donde $b_{k_R}^{(l)\dagger}$ y $b_{k_R}^{(l)}$ son los operadores de creación y aniquilación respectivamente y $\epsilon_{(l)}^i(k_R)$ son los vectores tridimensionales de polarización que satisfacen $\epsilon_{(i)} \cdot \epsilon_{(j)} = g_{ij}$. Por tanto la ecuación de movimiento para $G_{k_R}(t)$ obtenida de (6.41) es

$$\ddot{G}_{k_R} + \left[k_R^2 e^{-2H_0 t} - \left(\frac{9}{4} H_0^2 + \alpha \right) \right] G_{k_R} = 0, \quad (6.43)$$

cuya solución es dada por la expresión

$$G_{k_R}(t) = L_1 \mathcal{H}_\nu^{(1)}[w(t)] + L_2 \mathcal{H}_\nu^{(2)}[w(t)], \quad (6.44)$$

siendo $\nu = (1/2H_0) \sqrt{9H_0^2 + 4\alpha}$ el orden de las funciones de Hankel que aparecen, $w(t) = (k_R/H_0) e^{-H_0 t}$ el argumento y L_1, L_2 constantes de integración. La correspondiente condición de normalización para estos modos de campo magnético es en este caso dada por

$$G_{k_R} \dot{G}_{k_R}^* - \dot{G}_{k_R} G_{k_R}^* = \frac{i}{a_0^2}, \quad (6.45)$$

con $a_0 = H_0^{-1}$ el factor de escala del Universo cuando inflación inicia. De esta forma usando nuevamente la condición de vacío de Bunch Davies, la solución

normalizada de (6.43) es

$$G_{k_R}(t) = i\sqrt{\frac{\pi H_0}{4}} \mathcal{H}_\nu^{(2)}[w(t)]. \quad (6.46)$$

Esta ecuación describe la dinámica de los modos asociados al campo magnético. Al igual que en el caso de A_μ su comportamiento en el sector IR debe llevarnos a la generación de campos magnéticos semilla clásicalizados que posteriormente reingresen al horizonte causal. Así, las fluctuaciones cuadráticas de \vec{B}_{com} a escalas super Hubble $\langle B_{com}^2 \rangle$ en la norma de Feynman son dadas por

$$\langle B_{com}^2 \rangle|_{IR} = \frac{3e^{-H_0 t}}{2\pi^2} \int_0^{\vartheta k_H} \frac{dk_R}{k_R} k_R^3 G_{k_R}(t) G_{k_R}^*(t) = \int_0^{\vartheta k_H} \frac{dk_R}{k_R} \mathcal{P}(k_R), \quad (6.47)$$

donde $\vartheta = (k_{max}^{(IR)}/k_p) \ll 1$ es un parámetro adimensional. Nuevamente estamos eligiendo k_p como una escala de corte para todo el espectro. De la expresión (6.47) podemos ver que el espectro de potencias para este campo magnético $\mathcal{P}(k_R)$ a escalas cosmológicas es

$$\mathcal{P}(k_R) = \frac{3}{8\pi^3} 2^{2\nu} \Gamma^2(\nu) H_0^{1+2\nu} e^{-(1-2\nu)H_0 t} k_R^{3-2\nu}. \quad (6.48)$$

Debe notarse que dado que $\alpha = k_{\psi_0}^2 - 2H_0^2$, entonces cuando $k_{\psi_0}^2 \simeq 2H_0^2$ vemos que $|\alpha|/H_0^2 \ll 1$ y así $\nu \lesssim 3/2$, lo que indica que en este caso se obtendría la invariancia de escala para el espectro, lo que hace que este caso sea de interés físico. Efectuando la integración en (6.47) con ayuda de (6.46) obtenemos

$$\langle B_{com}^2 \rangle|_{IR} \simeq \frac{3\Gamma^2(\nu)}{8\pi^3} \frac{2^{2\nu} H_0^4}{(3-2\nu)} \vartheta^{3-2\nu} e^{2H_0 t}. \quad (6.49)$$

Es remarcable en el resultado dado por (6.49) que $\langle B_{com}^2 \rangle|_{IR}$ es una función creciente en el tiempo durante inflación. Más aun, puede verse fácilmente que el flujo $\langle B_{com}^2 \rangle|_{IR}^{1/2} a^2$ tiene una dependencia temporal. En otras palabras no es una cantidad constante de tal manera que en este formalismo no se requiere agregar términos a la densidad lagrangiana para romper la invariancia conforme de la teoría tetradimensional⁴.

⁴ Esto ha representado un problema en la mayoría de los modelos inflacionarios tetradimensionales que incluyen la descripción de campos magnéticos.

Por otro lado, sabemos que el campo magnético físico B_{fis} está vinculado con el campo magnético comóvil B_{com} a través de $B_{fis} \sim a^{-2} B_{com}$. Lo que nos indica que después del período inflacionario, B_{fis} decrece como a^{-2} . Esto nos permite hacer una estimación para la intensidad actual de campos magnéticos cosmológicos $B_{fis}^{(a)}$ a través de la expresión

$$\left\langle \left(B_{phys}^{(a)} \right)^2 \right\rangle^{1/2} \Big|_{IR} \simeq \left(\frac{a(t=t_0)}{a(t=t_i)} \right)^4 \left\langle B_{com}^2(t=t_i) \right\rangle^{1/2} \Big|_{IR}, \quad (6.50)$$

donde $B_{com}(t=t_i)$ denota la intensidad del campo magnético comóvil al final de inflación. En la figura (6.1) hemos graficado $\langle (B_{phys}^{(a)})^2 \rangle^{1/2}$ en Gauss, con respecto a ν y ϑ . El índice espectral en este caso es $n_s = 4 - 2\nu$. Además hemos usado un valor para el parámetro de Hubble $H_0 = 0.5 \times 10^{-9} M_p$ que toma en cuenta un número de desdoblamientos exponenciales de $N_e = 63$, asegurando con esto la cantidad de inflación suficiente como para resolver los problemas del horizonte y de planaridad. El parámetro ϑ lo hemos tomado sobre el rango de 10^{-5} a 10^{-8} . Estos valores de ϑ corresponden a escalas en la actualidad que van de 3×10^3 a 3×10^6 Mpc. Estimamos el factor $(a(t=t_0)/a(t=t_i))^4 \simeq 10^{-136}$, tomando en cuenta el tamaño actual del horizonte observable que es del orden de $\sim 10^{28} cm$ y el tamaño del horizonte al final de inflación que es del orden de $\sim 3.6 \times 10^{-6} cm$. En esta gráfica puede verse que el valor actual estimado para estos campos magnéticos semilla es del orden de $\sim 10^{-9} Gauss$. Sin embargo también debe notarse que cuando nos aproximamos a la invariancia de escala, es decir, $\nu \rightarrow 3/2$ el valor del campo magnético crece indefinidamente. Esto es consecuencia del formalismo ya que se están considerando sólo aquellos modos en el sector IR pero no se está tomando en cuenta la influencia de los modos en el sector ultravioleta (UV). Esto puede constatarse mediante un formalismo estocástico como el desarrollado en [140]. En este formalismo los modos en el sector UV actúan como un ruido gaussiano sobre los modos en el sector IR de tal manera que el campo magnético está bien definido para $\nu = 3/2$.

Así pues en este capítulo hemos desarrollado un formalismo pentadimensional desde un vacío aparente con una quinta dimensión tipo espacio extendida que incluye efectos gravitoelectromagnéticos. La idea de la unificación de electricidad con magnetismo mediante la introducción de un tetrapotencial vector A_μ ha sido extendida a cinco dimensiones a través de un pentapotencial vector A_B cuya quinta componente es, en unidades naturales, el campo

escalar inflatón. Estudiamos la evolución de las fluctuaciones cuadráticas del campos magnético comóvil B_{com} durante inflación las cuales se clasicilizan a escalas cosmológicas (IR) incrementándose exponencialmente de tal manera que al final de inflación su intensidad es del orden de $(10^{127})^2 Gauss^2$. Sin embargo el valor estimado en la actualidad de los campos magnéticos semilla resultó del orden de $10^{-9} Gauss$, que va de acuerdo con los límites observacionales impuestos por CMBR [141].

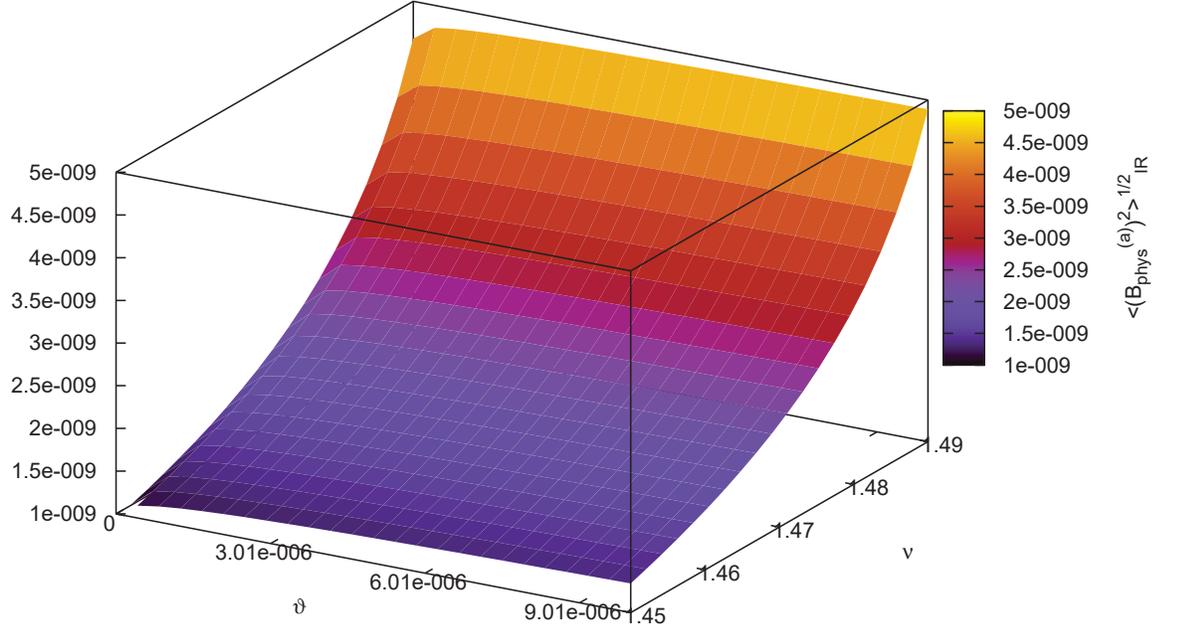


Fig. 6.1: En la figura se muestra la gráfica de $\langle (B_{phys}^{(a)})^2 \rangle_{IR}^{1/2}$ (en Gauss), con respecto a ν y ϑ . Nótese que ν se relaciona con el índice espectral n_s mediante $n_s = 4 - 2\nu$, de tal manera que los valores empleados en la gráfica para $\nu = (1.45, 1.49)$ corresponden respectivamente a $n_s = (1.1, 1.02)$. Estos valores considerados para ϑ corresponden a escalas actuales que van de 3×10^3 hasta 3×10^6 Mpc.

7. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En el transcurso de esta tesis hemos estudiado diferentes aspectos de la cosmología inflacionaria desde el escenario de una teoría de Kaluza-Klein no compacta pentadimensional.

En el primer capítulo, establecimos los conceptos básicos empleados en cosmología inflacionaria tetradimensional donde se resalta la aproximación semiclásica como uno de los puntos cruciales en el análisis.

En el segundo capítulo, estudiamos detalladamente la teoría clásica de Kaluza-Klein y, analizamos aspectos cosmológicos de la teoría espacio-tiempo materia o de materia inducida. Con esto sentamos el antecedente de una teoría pentadimensional en la cual pueden estudiarse diferentes aspectos de la cosmología moderna.

El tercer capítulo fue dedicado al desarrollo de un formalismo inflacionario desde un vacío aparente pentadimensional, en el cual se introdujo un campo escalar libre, responsable de la expansión del Universo. Se ejemplificó el uso de este formalismo mediante un modelo simple en el cual se obtuvo un espectro de fluctuaciones en la densidad de energía, debido a las fluctuaciones cuánticas del inflatón, del tipo Harrison-Zeldovich. En otras palabras se obtuvo un espectro cercano a la invariancia de escala.

En el cuarto capítulo, estudiamos la dinámica de los modos en los sectores UV e IR mediante un formalismo estocástico construido en el mismo escenario pentadimensional. A diferencia de los modelos estocásticos tetradimensionales, en este modelo se resuelve el problema de condiciones iniciales obteniéndose valores sub-planckianos para el campo inflatón clásico $\phi_c^{(0)}$.

El capítulo quinto fue dedicado al desarrollo de un formalismo pentadimensional, dentro del mismo contexto general, para estudiar fluctuaciones

escalares de la métrica invariantes de norma, para una expansión de De-Sitter. El principal resultado obtenido en este capítulo fue que el espectro de las fluctuaciones en la densidad de energía, derivado de las fluctuaciones de la métrica a primer orden, tiene dependencia del número de onda asociado a la quinta coordenada. Más aun, la desviación de este espectro de la planaridad es debido a la existencia de la quinta dimensión.

En el sexto capítulo, construimos un formalismo pentadimensional, también desde un vacío aparente, que incluye efectos electromagnéticos durante inflación. En este formalismo se describe la dinámica del inflatón con la de campos electromagnéticos de manera unificada, mediante la introducción del pentapotencial vector A_B . Se obtuvo que es posible generar campos magnéticos semilla durante inflación mediante el mismo mecanismo empleado para generar las fluctuaciones en la densidad de energía, responsables de la posterior formación de estructura. En la parte final de este capítulo se hizo una estimación del valor de los campos magnéticos semilla en la actualidad, obteniéndose un valor aproximado de 10^{-9} Gauss a escalas de Megaparsecs, es decir, a escala cosmológica. Este resultado va de acuerdo con los límites observacionales determinados por CMBR.

Una de las conclusiones más importantes en esta tesis es la plausibilidad de construir modelos inflacionarios desde una teoría de Klauza Klein no compacta pentadimensional, en donde se cuenta con un mecanismo que da un origen geométrico al potencial inflacionario. Este origen geométrico involucra directamente a la quinta coordenada, teniendo ésta diferentes contribuciones en el modelo y no solamente se limita a generar el potencial. Sin embargo, hasta ahora, no ha sido posible inferir de manera directa de la teoría, magnitudes de parámetros cosmológicos observables vinculados directamente con la quinta dimensión. En este caso, como hemos visto en la parte final del capítulo quinto, solo hemos establecido cotas sobre algunos de estos parámetros al contrastar con los datos observacionales. Sin embargo, esto no significa que en un futuro la teoría no nos proporcione esta información.

Finalmente, aunque en esta tesis solo se estudiaron tópicos relacionados con cosmología inflacionaria, en realidad el formalismo puede extenderse a la consideración de modelos cosmológicos más completos que incluyan inclusive, la descripción dinámica del actual período en la evolución del Universo, el de quinta esencia. Esto puede verse en [143] y [144].

APÉNDICE

A. DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DE CAMPBELL MAGAARD

En esta sección mostraremos la prueba de la versión más simple del teorema de Campbell-Magaard, dejando fuera las versiones más generales de este teorema, pero que no afectan la validez del contenido de la presente tesis.

Sean (M, g) una variedad $(n + 1)$ -dimensional y $x \equiv \{x^A\}$ un sistema de coordenadas locales sobre M . Supongase que una de las coordenadas es tipo tiempo y las n restantes son tipo espacio. Estas coordenadas definen direcciones tangenciales a M .

Un caso más general, pero que escapa de los objetivos de esta tesis, es el considerar dos coordenadas tipo tiempo y $(n - 1)$ tipo espacio. Un análisis detallado de este caso puede encontrarse en [142].

Introduzcamos ahora una función escalar $l = l(x)$ que define una foliación de la variedad M a través de las hipersuperficies Σ_l definidas por $l = cte$. Como hay una dirección tipo tiempo tangente a M , construiremos un campo vectorial n^A normal a Σ_l , tipo espacio. De esta manera, el espacio tangente a una hipersuperficie dada Σ_l contiene una dirección tipo tiempo y $(n - 1)$ tipo espacio. Así, cada hipersuperficie Σ_l corresponde a un espacio-tiempo Lorentziano n -dimensional.

El campo vectorial n^A normal a la hipersuperficie Σ_l se define por

$$n_A = \epsilon \Phi \partial_A l, \quad n^A n_A = \epsilon, \quad (\text{A.1})$$

donde $\epsilon = \pm 1$. El escalar Φ que normaliza al vector n^A se conoce como la función lapso.

Definimos el tensor de proyección

$$h_{AB} = g_{AB} - \epsilon n_A n_B. \quad (\text{A.2})$$

Este tensor es simétrico ($h_{AB} = h_{BA}$) y ortogonal a n_A . Sea $y = \{y^\alpha\}$ un sistema de coordenadas locales sobre cada una de las hipersuperficies n -dimensionales Σ_l .

Construiremos una base n -dimensional sobre cada una de estas hipersuperficies, cuyos n -vectores base son definidos por

$$e^A{}_\alpha = \frac{\partial x^A}{\partial y^\alpha}, \quad n_A e^A{}_\alpha = 0. \quad (\text{A.3})$$

Estos vectores son por definición tangentes a las hipersuperficies Σ_l y ortogonales a n^A . Es fácil comprobar que $e^A{}_\alpha$ se comporta como un vector bajo transformaciones de coordenadas bien definidas $\phi : x \rightarrow \bar{x}(x)$ sobre M , y como una 1-forma bajo transformaciones de coordenadas bien definidas $\xi : y \rightarrow \bar{y}(y)$ sobre Σ_l .

Podemos usar esta base vectorial para proyectar objetos en M sobre las hipersuperficies Σ_l . Por ejemplo, para una 1-forma T_A bien definida sobre M tenemos

$$T_\alpha = e^A{}_\alpha T_A. \quad (\text{A.4})$$

La 1-forma T_α es la proyección de T_A sobre Σ_l . Puede mostrarse que T_α se comporta como un escalar bajo ϕ y como una 1-forma bajo ξ .

La métrica inducida sobre las hipersuperficies Σ_l es dada por

$$h_{\alpha\beta} = e^A{}_\alpha e^B{}_\beta g_{AB} = e^A{}_\alpha e^B{}_\beta h_{AB}. \quad (\text{A.5})$$

Al igual que g_{AB} , la métrica inducida tiene una inversa definida por

$$h^{\alpha\gamma} h_{\gamma\beta} = \delta^{\alpha\beta}. \quad (\text{A.6})$$

La métrica inducida y su inversa pueden usarse para subir y bajar índices a los tensores tangentes a Σ_l y, para cambiar de posición el índice espacio-temporal α de los vectores base $e^A{}_\alpha$. Esto implica

$$e^\alpha{}_A e^A{}_\beta = \delta^\alpha{}_\beta. \quad (\text{A.7})$$

Por otro lado como h_{AB} es ortogonal a n^A , podemos expresarlo en términos de la base sobre Σ_l en la forma

$$h_{AB} = h_{\alpha\beta} e^\alpha{}_A e^\beta{}_B. \quad (\text{A.8})$$

El formalismo hasta ahora desarrollado permite definir la curvatura extrínseca $K_{\alpha\beta}$ de las hipersuperficies Σ_l por

$$K_{\alpha\beta} = e^A{}_{\alpha} e^B{}_{\beta} \nabla_A n_B = \frac{1}{2} e^A{}_{\alpha} e^B{}_{\beta} \mathcal{L}_n h_{AB}, \quad (\text{A.9})$$

donde \mathcal{L}_n denota la derivada de Lie respecto al campo vectorial n^A . Note-se que la curvatura extrínseca es simétrica ($K_{\alpha\beta} = K_{\beta\alpha}$). Esta curvatura extrínseca puede pensarse como la derivada de la métrica inducida, en la dirección normal.

Por otro lado, notemos que $\{y, l\}$ define un sistema alterno de coordenadas locales sobre M . El difeomorfismo apropiado es

$$dx^A = e^A{}_{\alpha} dy^{\alpha} + l^A dl, \quad (\text{A.10})$$

donde

$$l^A = \left(\frac{\partial x^A}{\partial l} \right) \Big|_{y^{\alpha}=cte}, \quad (\text{A.11})$$

es el vector tangente a las líneas con $y^{\alpha} = cte$. En este caso, siempre es posible descomponer vectores sobre M como la suma de una parte tangente a Σ_l y otra normal a Σ_l . La descomposición para el vector l^A puede escribirse

$$l^A = N^{\alpha} e^A{}_{\alpha} + \Phi n^A. \quad (\text{A.12})$$

Esto es consistente con $l^A \partial_A l = 1$ que es requisito para las definiciones de l^A y n^A . El n-vector N^{α} se llama vector de corrimiento y describe como cambia el sistema de coordenadas $\{y^{\alpha}\}$ cuando nos movemos de una hipersuperficie Σ_l a otra.

Usando (A.10) y (A.11), podemos escribir el elemento diferencial de línea sobre M por

$$dS_{n+1}^2 = g_{AB} dx^A dx^B = h_{\alpha\beta} (dy^{\alpha} + N^{\alpha} dl)(dy^{\beta} + N^{\beta} dl) + \epsilon \Phi^2 dl^2. \quad (\text{A.13})$$

Esto se reduce a $dS_n^2 = h_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta}$ si $dl = 0$, que es un caso de considerable interés físico.

Con el formalismo desarrollado hasta ahora, podemos derivar las ecuaciones de campo de “Einstein” n -dimensionales sobre las hipersuperficies Σ_l

a partir de las ecuaciones de campo $(n + 1)$ -dimensionales. Las ecuaciones de campo sobre la variedad $(n + 1)$ -dimensional son definidas por

$$\hat{R}_{AB} = 0, \quad (\text{A.14})$$

donde \hat{R}_{AB} es el tensor de Ricci $(n + 1)$ -dimensional. En lo que resta de la prueba usaremos variedades que satisfacen (A.14), y denotaremos con (\wedge) a aquellas cantidades definidas en $(n + 1)$ dimensiones, para diferenciarlas de las cantidades definidas en las hipersuperficies n dimensionales.

Las ecuaciones de Gauss-Codazzi sobre cada una de las hipersuperficies son

$$\hat{R}_{ABCD}e^A{}_{\alpha}e^B{}_{\beta}e^C{}_{\gamma}e^D{}_{\delta} = R_{\alpha\beta\gamma\delta} + 2\epsilon K_{\alpha[\delta}K_{\gamma]\beta}, \quad (\text{A.15})$$

$$\hat{R}_{MABC}n^M e^A{}_{\alpha}e^B{}_{\beta}e^C{}_{\gamma} = 2\nabla_{[\gamma}K_{\alpha\beta]}. \quad (\text{A.16})$$

El corchete denota antisimetría en los índices. Por otro lado sabemos de geometría diferencial que el tensor de Ricci sobre M esta dado por

$$\hat{R}_{AB} = (h^{\mu\nu}e^M{}_{\mu}e^N{}_{\nu} + \epsilon n^M n^N) \hat{R}_{AMBN}. \quad (\text{A.17})$$

Las $\frac{1}{2}(n + 1)(n + 2)$ componentes de \hat{R}_{AB} , bajo la condición (A.14), pueden separarse en las ecuaciones

$$\hat{R}_{AB}e^A{}_{\alpha}e^B{}_{\beta} = 0, \quad (\text{A.18})$$

$$\hat{R}_{AB}e^A{}_{\alpha}n^B = 0, \quad (\text{A.19})$$

$$\hat{R}_{AB}n^A n^B = 0. \quad (\text{A.20})$$

Sustituyendo (A.17) en (A.18) y haciendo uso de (A.15) y (A.16), se obtiene

$$R_{\alpha\beta} = -\epsilon [E_{\alpha\beta} + K_{\alpha}{}^{\mu}(K_{\beta\mu} - K h_{\beta\mu})], \quad (\text{A.21})$$

$$\nabla_{\alpha}(K^{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta}K) = 0, \quad (\text{A.22})$$

$$E_{\mu\nu}h^{\mu\nu} = 0, \quad (\text{A.23})$$

donde

$$K \equiv h^{\alpha\beta}K_{\alpha\beta}, \quad (\text{A.24})$$

$$E_{\alpha\beta} = \hat{R}_{MNAB}n^M e^A{}_{\alpha}n^N e^B{}_{\beta}, \quad E_{\alpha\beta} = E_{\beta\alpha}. \quad (\text{A.25})$$

El tensor de Einstein $G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta}$ sobre una hipersuperficie dada Σ_l es entonces

$$G^{\alpha\beta} = -\epsilon \left(E^{\alpha\beta} + K^\alpha{}_\mu P^{\mu\beta} - \frac{1}{2}h^{\alpha\beta} K^{\mu\nu} P_{\mu\nu} \right), \quad (\text{A.26})$$

donde hemos definido el tensor conservado

$$P_{\alpha\beta} \equiv K_{\alpha\beta} - h_{\alpha\beta}K, \quad \nabla_\beta P^{\alpha\beta} = 0. \quad (\text{A.27})$$

Este último tensor es algebraicamente equivalente al momento conjugado con la métrica inducida en la formulación Hamiltoniana ADM de la teoría de la relatividad general. Sin embargo, debemos recordar que en este formalismo la dirección ortogonal a Σ_l es tipo espacio. De esta manera, $P_{\alpha\beta}$ no puede ser formalmente identificado con un momento canónico en el sentido Hamiltoniano.

Utilizando las ecuaciones (A.22), la condición de que la divergencia del 4-tensor de Einstein sea nula, se manifiesta en la ecuación

$$\nabla_\beta E^{\alpha\beta} = \epsilon [K_{\mu\nu} h^{\alpha\gamma} \nabla_\gamma K^{\mu\nu} - K^{\mu\beta} \nabla_\beta K_\mu^\alpha]. \quad (\text{A.28})$$

En general las ecuaciones (A.18), (A.22) y (A.23) son las ecuaciones de campo que gobiernan la curvatura sobre las hipersuperficies n -dimensionales Σ_l . El hecho de que las hipersuperficies son curvas puede verse a partir de resolver (A.21) para $E_{\alpha\beta}$ y sustituir el resultado en (A.23) para obtener

$$R = \epsilon (K^2 - K^{\mu\nu} K_{\mu\nu}). \quad (\text{A.29})$$

Las ecuaciones de campo (A.21) a (A.23) no contienen derivadas de los tensores $h_{\alpha\beta}(y, l)$, $K_{\alpha\beta}(y, l)$ y $E_{\alpha\beta}(y, l)$ con respecto a l . Esto significa que estos campos deben satisfacer las ecuaciones (A.21) a (A.23) y (A.28) para cada valor de l . En otras palabras, las ecuaciones de campo sobre Σ_l se conservan cuando nos movemos de una hipersuperficie en otra. Esto es, las ecuaciones de campo (A.21) a (A.23) vistas en $(n + 1)$ dimensiones son, en el sentido Hamiltoniano, ecuaciones de restricción.

Desde el punto de vista formal, esto representa un problema pues nos dice que las ecuaciones de campo (A.14) no nos dan información de como evolucionan las ecuaciones de campo sobre Σ_l con respecto a l , lo que da una

amplia libertad.

En general, existen muchas maneras equivalentes de obtener ecuaciones que definan la l -evolución de las funciones $h_{\alpha\beta}$, $K_{\alpha\beta}$ y $E_{\alpha\beta}$. Una manera consiste en aislar derivadas con respecto de l en la ecuación de las identidades de Bianchi $\nabla_A G^{AB} = 0$. Una segunda manera es la construcción directa de las derivadas de Lie de h_{AB} y $K_{AB} = h_A^C \nabla_C n_B$, con respecto a l^A . Y una tercera manera consiste en reexpresar formalmente la lagrangiana gravitacional como una Hamiltoniana, con l jugando el papel de tiempo para obtener las ecuaciones de movimiento.

Sin embargo, desde un punto de vista práctico, el objetivo principal es encontrar soluciones a las ecuaciones de campo (A.14), tal que una hipersuperficie Σ_0 tenga ciertas propiedades geométricas requeridas. Por ejemplo, podemos pedir especificar completamente la métrica sobre esta hipersuperficie y con esto la geometría intrínseca de Σ_0 .

Sin pérdida de generalidad, supondremos que la hipersuperficie de interés es aquella con $l = 0$. De esta manera, para tener un embebimiento exitoso de Σ_0 sobre M se deben seguir los siguientes pasos:

1. Resolver las ecuaciones de restricción (A.21) a (A.23) sobre Σ_0 para los campos $h_{\alpha\beta}$, $K_{\alpha\beta}$ y $E_{\alpha\beta}$, tal que Σ_0 tenga las propiedades requeridas. La especificación de estas propiedades pueden estar vinculadas con la física.
2. Obtener las soluciones $h_{\alpha\beta}$, $K_{\alpha\beta}$ y $E_{\alpha\beta}$ para las demás hipersuperficies, $l \neq 0$, usando las ecuaciones para la l -evolución.

Para probar el teorema de Campbell-Magaard es necesario mostrar, en primer término, que el paso 1 se cumple para una elección arbitraria de $h_{\alpha\beta}$ sobre Σ_0 . En segundo término que la solución obtenida en el paso 2 preserve las ecuaciones de restricción sobre $\Sigma_l \neq \Sigma_0$. Esta última condición es necesaria ya que si las ecuaciones de restricción no se conservan, las ecuaciones de campo (A.14) no serán válidas más que para Σ_0 . Dicho de otra manera, sólo podría embeberse Σ_0 en M . Una demostración de esta ecuación de condición de conservación puede verse en [78, 79, 80].

Finalmente, de acuerdo a las ecuaciones (A.18) hay $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ ecuaciones de restricción sobre Σ_0 . Por otro lado, dado que $h_{\alpha\beta}$, $K_{\alpha\beta}$ y $E_{\alpha\beta}$, determinadas por (A.21) a (A.23), son simétricas, hay en realidad $\frac{3}{2}n(n+1)$ cantidades dinámicas independientes involucradas. Sean $n_r = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ y $n_d = \frac{3}{2}n(n+1)$, los grados de libertad de restricción y dinámicos, respectivamente. Para $n \geq 2$ se tiene que $n_d > n_r$, lo que significa que el sistema es indeterminado pues hay menos ecuaciones que incógnitas. Consecuentemente podemos especificar libremente la dependencia funcional de las $n^2 - 1$ incógnitas $h_{\alpha\beta}$, $K_{\alpha\beta}$ y $E_{\alpha\beta}$. Esta libertad es el corazón del teorema de Campbell-Magaard. Sea $n_L = n^2 - 1$ el número de grados de libertad que podemos especificar libremente. Como n_L es mayor que el número de componentes independientes de $h_{\alpha\beta}$ para $n \geq 2$, podemos elegir el elemento de línea sobre Σ_0 que corresponda a cualquier variedad Lorentziana n -dimensional y aun satisfacer las ecuaciones de restricción (A.21) y (A.23).

Esto completa la demostración del teorema y podemos establecer que cualquier variedad n -dimensional puede ser localmente embebida en una variedad $(n+1)$ -dimensional que satisface las ecuaciones (A.14).

BIBLIOGRAFÍA

- [1] A. A. Starobinsky, JETP Lett. **30**, 682 (1979).
A. A. Starobinsky, Phys. Lett. **B91**, 99 (1980).
- [2] A. H. Guth, Phys. Rev. **D23**, 347 (1981).
- [3] A. D. Linde, Phys. Lett. **B108**, 389 (1982).
A. D. Linde, Phys. Lett. **B114**, 431 (1982).
A. D. Linde, Phys. Lett. **B116**, 340 (1982).
A. D. Linde, Phys. Lett. **B116**, 335 (1982).
- [4] A. Albrecht and P. J. Steinhardt, Phys. Rev. Lett. **48**, 1220 (1982).
- [5] V. F. Mukhanov, H. A. Feldman and R. Brandenberger, Phys. Rept. **215**, 203 (1992).
P. H. Lyth and A. Riotto, Phys. Rept. **314**, 1 (1999).
- [6] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. R. Dvali, Phys. Lett. B **429**, 263 (1998).
- [7] L. Randall and R. Sundrum, Phys. Rev. Lett. **83**, 3370 (1999)
[arXiv:hep-ph/9905221]
- [8] T. Appelquist, H. C. Cheng and B. A. Dobrescu, Phys. Rev. **D64** 035002 (2001).
- [9] G. Nordström, Pys. Zeitschr **15**, 504 (1914).
- [10] Th. Kaluza, Sitz. Preuss. Akad. Wiss. Phys. Math. **K1**, 996 (1921).
- [11] O. Klein, Z. F. Physik **37**, 895 (1926).
O. Klein, Nature **118**, 516 (1926).
- [12] Abdel Pérez Lorenzana hep-ph/0406279.

- [13] L. Randall and R. Sundrum, Phys. Rev. Lett. **83**, 4690 (1999)[arXiv:hep-th/9906064]
- [14] P. S. Wesson, Spece-Time-Matter (World Scientific, Singapore 1999).
- [15] Robert M. Wald, General Relativity, Ed. The University of Chicago Press (1984), ISBN: 0-226-87032-4.
- [16] John Stewart, Advanced General Relativity, Cambridge University pres (1991), ISBN: 0-521-32319-3.
- [17] Steven Weinberg, Gravitation and Cosmology, Ed. John Wiley & Sons Inc (1972), ISBN: 0-471-92567-5.
- [18] D. Langlois arXiv: hep-th/0405053 (2004).
- [19] A. A. Starobinsky, Phys. Lett. **B117**, 175 (1982).
- [20] Ya. B. Zeldovich, Sov. Astron. Lett. **7**, 332 (1981).
- [21] E. P. Tryon, Nature **246**, 396 (1973).
- [22] A. H. Guth, Phys. Rev. **D23**, 347 (1981).
- [23] J. Dreitlein, Phys. Rev. Lett. **33**, 1243 (1974).
- [24] V.M Slipher, Pop. Astr. **23**, 21 (1915).
- [25] K. Lundmark, MNRAS **84**, 747 (1924).
- [26] E. Hubble and M.L. Humason, Ap. **J. 74**, 43 (1931).
- [27] G. Gamow, Phys. Rev. **70**, 572 (1946).
- [28] R. A. Alpher and R. C. Herman, Phys. Rev. **74**, 1737 (1948).
- [29] R. A. Alpher and R. C. Herman, Phys. Rev. **75**, 1089 (1949).
- [30] A. A. Penzias and R. W. Wilson, Ap. **J. 142**, 419 (1965).
- [31] A. Guth, Phys. Rev. **D23**, 347 (1981).

- [32] C. Wetterich, Nucl. Phys. **B302**, 668 (1988); P.J. E. Peebles and B. Ratra, Ap. J. Lett. **325**, L17 (1988); R. R. Caldwell, R. Dave and P. J. Steinhardt, Phys. Rev. Lett. **80**, 1582 (1998); C. Armendariz-Picon, V. Mukhanov and P.J. Steinhardt, Phys. Rev. Lett. **85**, 4438 (2000).
- [33] T. D. Saini, S. Raychaudhurg, V. Shani and A. A. Starobinsky, Phys. Rev. Lett. **85**, 1162 (2000).
- [34] A. H. Guth, Phys. Rev. **D23**, 347 (1981).
- [35] A. D. linde, Phys. Lett. **B108**, 389 (1982).
- [36] García Bellido, A. D. Linde, D. A. Linde, Phys. Rev. **D50**, 730 (1994).
A. Linde and D. Linde, Phys. Rev. **D50**, 2456 (1994).
- [37] A. Albrecht and P. J. Steinhardt, Phys. Rev. Lett. **48**, 1220 (1982).
A. H. Guth and P. J. Steinhardt, Sci. Am. May 1984, p. 90.
- [38] E. J. Copeland, E. W. Kolb, A. R. Liddle and J. E. Lidsey, Phys. Rev. **D48**, 2529 (1993).
- [39] L. Kofman, L. Linde and A. A. Starobinsky, Phys. Rev. Lett. **B91**, 99 (1980).
- [40] A. Riotto, Lectures delivered at the "ICTP Summer School on Astroparticle Physics and Cosmology"Trieste, 17 June-5 July 2002, arXiv: hep-ph/0210162 .
- [41] M. Bellini, Nucl. Phys. **B604**, 441 (2001).
- [42] Para una revisión de la teoría espacio-tiempo-materia el lector puede revisar J. M. Overduin and P. S. Wesson, Phys. Rep. **283**, 303 (1997).
- [43] I. Zlatev, Li-Min Wang and P. Steinhardt, Phys. Rev. Lett. **82**, 896 (1999).
- [44] B. Mashhoon, H. Liu and P. S. Wesson, Phys. Lett. **B331**, 305 (1994).
- [45] S. S. Seahra and P. S. Wesson, Gen. Rel. Grav. **33**, 1731 (2001).
- [46] J. Ponce de León, Int. J. Mod. Phys. **D12**, 757 (2003).
- [47] Kaluza, T. 1921, Sitz. Preuss. Akad. Wiss. **33**, 966.

- [48] Klein, O. 1926, Z. Phys. 37, 895.
- [49] G. Nordström, Phys. Zeitschr **15** 504 (1914).
- [50] Paul S. Wesson, Space-Time-Matter, ed. World,Scientific (1999), ISBN: 981-02-3588-7.
- [51] J. Ponce de Leon, int. J. Mod. Phys. D12: 757-780, (2003).
- [52] M. Bellini, Nucl. Phys. B660: 389 -400, (2003).
- [53] M. Bellini, Phys. Lett. B609: 187-193, 2005.
- [54] C. L. Bennet et al, Astrophys. J. Suppl. **148**, 1 (2003).
- [55] A. C. Pope et al, Astrophys. J. **607**, 655 (2004).
W. J. Percival et al, Mon. Not. R. Astron. Soc. **327**, 1297 (2001).
- [56] M. Tegmark et al, Astrophys. J. **606**, 702 (2004).
- [57] D. N. Spergel et al, Astrophys. J. Suppl. **148**, 175 (2003).
- [58] M. Tegmark et al, Phys. Rev. **D69**, 103501 (2004).
- [59] U. Seljak et al, preprint, astro-ph/0407372.
- [60] W. L. Freeman et al, Astrphys. J. **553**, 47 (2001).
- [61] J. P. Ostriker and T. Souradeep, preprint astro-ph/0409131, to appear in the Proceedings of 5th International Conference on Gravitation and Cosmology (ICGC 2004).
- [62] R. H. Cyburt, B. D. Fields and K. A. Olive, Phys. Lett. **B567**, 227, (2003).
D. Kirkman et al, Astrophys. J. Suppl. **149**, 1 (2003).
- [63] J. L. Tonry et al, Astrophys. J. **594**, 1 (2003).
- [64] B. Riemann, Abh. Konigl. gesellsch. **13**, 1 (1868).
- [65] L. Schlafli, Ann. di Mat. 2^e série **5**, 170 (1871).
- [66] M. Janet, Ann. Soc. Polon. Math. **5**, 38 (1926).

- [67] E. Cartan, *Ann. Soc. Polon. Math.* **6**, 1 (1927).
- [68] C. Burstin, *Rec. Math. Moscou (Math. Sbornik)* **38**, 74 (1931).
- [69] J. Campbell, *A Course on Differential Geometry* (Claredon, Oxford, 1926).
- [70] L. Magaard, Ph.D. thesis, Kiel (1963).
- [71] E. Anderson and J. E. Lidsey, *Class. Quant. Grav.* **18**, 4831 (2001), gr-qc/0106090.
- [72] F. Dahia and C. Romero (2001), gr-qc/0109076.
- [73] E. Anderson, F. Dahia, J. E. Lidsey, and C. Romero (2001), gr-qc/0111094.
- [74] F. Dahia and C. Romero (2001), gr-qc/0111058.
- [75] J. Nash, *Ann. Math.* **63**, 20 (1956).
- [76] C. J. Clarke, *Proc. Roy. Soc. London* **A314**, 417 (1970).
- [77] R. E. Greene, Isometric embedding of Riemannian and pseudo-Riemannian manifolds, no. 97 in *Memoirs Am. Math. Soc.* (American Mathematical Society, Providence, RI, 1970).
- [78] E. Anderson and J. E. Lidsey, *Class. Quant. Grav.* **18**, 4831 (2001), gr-qc/0106090.
- [79] F. Dahia and C. Romero, *J. Math. Phys.* **43**, 5804-5814 (2002), gr-qc/0109076.
- [80] F. Dahia and C. Romero, *J. Math. Phys.* **43**, 3097-3106 (2002), gr-qc/0111058.
- [81] V. de Sabbata and E. Schmutzer, *Unified Field Theories of More Than 4 Dimensions Including Exact Solutions* (World Scientific, Singapore, 1983).
- [82] H. C. Lee, *An introduction to Kaluza-Klein Theories* (World Scientific, Singapore, 1984).

- [83] T. Appellequist, A. Chodos and P. Freund, *Modern Kaluza-Klein Theories* (Addison-Wesley, Menlo Park, 1987).
- [84] P. D. B. Collins, A. D. Martin and E. J. Squires, *Particle Physics and Cosmology*, (Wiley, New York, 1989).
- [85] P. S. Wesson and J. Ponce de Leon, *J. Math. Phys.* **33**, 3883 (1992).
- [86] J. Ponce de Leon and P. S. Wesson, *J. Math. Phys.* **34**, 4080 (1993).
- [87] P. S. Wesson, *Space-Time-Matter Modern Kaluza Klein Theory* (World Scientific, Singapore, 1999), **ISBN 981-02-3588-7**.
- [88] B. Mashhoon, H. Liu and P. S. Wesson, *Phys. Lett.* **B331**, 305 (1994).
- [89] H. Liu and B. Mashhoon, *Ann. Phys. (Leipzig)* **4**, 565 (1995).
- [90] P. Jordan, *Ann. Phys.* **1**, 219 (1947).
- [91] P. Jordan, *Schwerkraft and Weltall* (Vieweg, Braunschweig) 1955.
- [92] P. Bergmann, *Ann. Math. (Princeton)* **49**, 225 (1948).
- [93] G. Lessner, *Phys. Rev.* **D25**, 3202 (1982).
- [94] Y. Thiry, *Com. Rend. Acad. Sci. (Paris)* **226**, 216 (1948).
- [95] H. Liu. and P.S. Wesson, *Class. Quant. Grav.* **14**, 1651 (1997).
- [96] E. Madriz Aguilar and M. Bellini, Origin of FRW cosmology in slow-roll inflation from non-compact Kaluza-Klein theory. *Eur. Phys. J.* **C38**, 123-128, (2004).
- [97] J. E. Madriz Aguilar and M. Bellini, Noncompact Kaluza-Klein theory and inflationary cosmology: a complete formalism, *Phys. Lett.* **B596**, 116 (2004).
- [98] T. Padmanabhan, *Phys. Rep.* **380**, 235 (2003).
- [99] D. N. Spigel, L. Verde, H. V. Peiris, et al., *Ap. J. Suppl.* **148**, 175 (2003).
- [100] D. N. Spigel et al. *Astrophys. J. Suppl.* **148**, 175 (2003).

- [101] Review of Particle Physics, Phys. Rev. **D66**, 010001-170 (2002).
- [102] A. S. Goncharov, A. D. Linde, Sov. J. Part. Nucl. 17 (1986) 369.
- [103] M. Bellini, H. Casini, R. Montemayor, P. Sisterna, Phys. Rev. D 54 (1996) 7172.
- [104] A. A. Starobinsky, Phys. Lett. B. 117 (1982) 175.
- [105] J. Ponce de Leon, Gen. Relativ. Gravit. 20 (1998) 539.
- [106] Para una revisión de la teoría STM puede consultarse: J, M. Overdium, P.S. Wesson, Phys. Rep. 283 (1997) 303.
- [107] J. E. Madriz Aguilar, M. Bellini, Phys. Lett. B 596 (2004) 116;
J. E. Madriz Aguilar, M. Bellini, Eur. Phys. J. C 38 (2004) 367.
- [108] A. H. Guth, Phys. Rev. **D23**, 347 (1981).
- [109] A. A. Starobinsky, in Current Topics in Field Theory, Quantum Gravity, and Strings, ed. by H. J. de Vega and N. Sánchez, Lecture Notes in Physics **226** (Springer, New York, 1986).
- [110] Para una revisión de Inflación, los lectores deben consultar por ejemplo: A. D. Linde, Particle Physics and Inflationary Cosmology (Harwood, Chur, Switzerland, 1990) y las referencias en este libro.
- [111] S. Habib and M. Mijic, UBC report 1991 (no publicado); S. Habib, Phys. Rev. **D46**, 2408 (1992); M. Bellini, H. Casini, R. Montemayor, P. Sisterna. Phys. Rev. **D54**, 7172 (1996).
- [112] V. F. Mukhanov, H. A. Feldman, R. Brandenberger, Phys. Rept. **215**, 203 (1992); P. H. Lyth, A. Riotto, Phys. Rept. **314**, 1 (1999); A. Riotto. E-print: hep-ph/0210162.
- [113] N. Akdani-Hamed, S. Dimopoulos, G. Dvali, Phys. Lett. **B429**, 263 (1998); I. Antoniadis, N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, G. Dvali, Phys. Lett. **B436**, 257 (1998); L. Randall, R. Sundrum, Phys. Rev. Lett. **83**, 4690 (1999); D. Youm, Phys. Rev. **D62**, 084002 (2000); P. S. Wesson, B. Mashhoon, H. Liu, W. N. Sajko, Phys. Lett. **B456**, 34 (2001); J. Ponce de León, Phys. Lett. **B523**, 311 (2001).

- [114] P. S. Wesson, *Mod. Phys. Lett.* **A7**, 921 (1992); J. M. Overduin, P. W. Wesson, *Phys. Rept.* **283**, 303 (1997).
- [115] El lector puede ver por ejemplo: P. S. Wesson, *Space-Time-Matter*, World Scientific, Singapore, 1999.
- [116] Ver por ejemplo: E. M. Aguilar, M. Bellini, *Eur. Phys. J.* **C38**, 123 (2004).
- [117] T. S. Bunch and P. C. W. Davis, *Proc. Roy. Soc.* **A360**, 117 (1978).
- [118] Review of Particle Physics: *Phys. Lett.* **B592**, 207 (2004)
- [119] Y. Sofue, M. Fujimoto and R. Wielebinski, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **24**, 459 (1986).
- [120] E. Asseo and H. Sol, *Phys. Rep.* **148**, 307 (1987).
- [121] P.P. Kronberg, *Rep. Prog. Phys.* **57**, 325 (1994).
- [122] R. Beck, A. Brandenburg, D. Moss, A. A. Surkhurov and D. Sokloff, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **34**, 155 (1996).
- [123] D. Grasso and H. R. Bumbstein, *Phys. Rep.* **348**, 163 (2001).
- [124] J. Bagchi, et al, *New Astron.* **7**, 249 (2002).
- [125] P. P. Kronberg, J. J. Perri and A. L. Zukowski, *Astrophys. J.* **33**, 528 (1992).
- [126] K. T. Kim, P.C. Tribble and P. P. Kronberg, *Astrophys. J.* **379**, 80 (1991).
- [127] M. Giovannini, *Int. J. Mod. Phys.* **D13**, 391 (2004).
- [128] C. Carilli and G. Taylor, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **40**, 319 (2002).
- [129] J. Vallée, *Astron. J.* **124**, 1322 (2001).
- [130] A. Kosowsky, T. Kahniashvili, G. Lavrelashvili and B. Ratra, *Phys. Rev.* **D71**, 043006 (2005).
- [131] K. Subramanian and D. Barrow, *Phys. Rev.* **D57**, 3264 (1998).

- [132] C. G. Tsagas and J. D. Barrow, *Class. Quant. Grav.* **15**, 3523 (1998);
J. P. Ostriker, C. Thompson and E. Witten, *Phys. Lett.* **B180**, 231 (1986).
- [133] Kari Enqvist, astro-ph/9803196 (1998).
- [134] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Electrodynamics of Continuous Media* (Pergamon, Oxford 1960);
Ya. B. Zeldovich, A. A. Ruzmaikin and D. D. Sokoloff, *Magnetic Fields in Astrophysics* (McGraw-Hill, New York, 1980);
E. N. Parker, *Cosmological Magnetic Fields* (Oxford Univ. Press, Oxford, 1979);
A. A. Ruzmaikin, A. A. Shukurov and D. D. Sokoloff, *Magnetic Fields of Galaxies* (Kluwer, Dordrecht, 1988);
E. Battaner, *Astrophysical Fluid Dynamics* (Cambridge University Press, Great Britain, 1996).
- [135] R. M. Kulsrud and S. W. Anderson, *Ap. J.* **396**, 606 (1992).
- [136] M. S. Turner and L. M. Widrow, *Phys. Rev.* **D37**, 2743 (1988).
- [137] A. D. Dolgov, *Phys. Rev.* **D48**, 2499 (1993).
- [138] B. Ratra, *Astrophys. J.* **391**, L1 (1992).
- [139] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, (John Wiley & sons, Inc., 1975).
- [140] J. E. Madriz A. and M. Bellini gr-qc/0605043
- [141] C. A. Clarkson, A. A. Coley, R. Maartens and C. G. Tsagas, *Class. Quant. Grav.* **20**, 1519 (2003).
- [142] Sanjeev S. Seahra and P.S. Wesson, arXiv: gr-qc/0302015 (2003).
- [143] J. E. Madriz A. and M. Bellini, *Eur. Phys. J. C38*: 367-371, (2004).
- [144] M. Anabitarte, J. E. Madriz A. and M. Bellini, *Eur. Phys. J. C45*: 249-256, (2006).