

Grupo de Renormalización de Wilson y Cuantización por Lazos.

Elisa Manrique Ascencio

Instituto de Física y Matemáticas

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

DICIEMBRE 2006

Índice general

1. INTRODUCCIÓN.	1
2. Grupo de Renormalización de Wilson	4
2.1. Introducción.	4
2.2. Teorías de Norma sobre la Red.	7
2.3. Transformaciones por Bloques y Modelo de Ising	9
2.4. Grupo de Renormalización en Teorías de Red.	15
2.4.1. Triángulo de Renormalización	20
2.5. Modelo de Ginzburg-Landau	21
2.6. Renormalización en Teoría Cuántica de Campos.	27
3. Cuantización por Lazos.	34
3.1. Programa de la Cuantización por Lazos	34
3.1.1. Construcción del Espacio de Hilbert Cinemático \mathcal{H}_{kin}	35
3.2. Gravedad Cuántica por Lazos.	40
3.2.1. Variables de Ashtekar-Barbero	40
3.2.2. Cuantización de la Gravedad.	43
4. Teorías Efectivas y Cuantización por Lazos.	51
4.1. Introducción.	51
4.2. Nociones Básicas.	52
4.2.1. Descomposiciones Celulares.	52
4.2.2. Descripción de las Teorías Cuantizadas por Lazos.	55
4.3. Implementación del Grupo de Renormalización de Wilson y Límite Continuo.	57
4.3.1. Teorías Efectivas.	57
4.3.2. Implementación del Grupo de Renormalización de Wilson.	60
4.3.3. Límite Continuo.	62
4.4. El ejemplo: Modelo de Ising bidimensional.	65
BIBLIOGRAFÍA.	72

AGRADECIMIENTOS

A mis padres por su incondicional apoyo y cariño en todo momento de mi vida, al igual que mis hermanos.

A mis asesores, Dr. José Antonio Zapata y Dr. Axel Weber por la paciencia y dedicación que tuvieron en mi formación académica.

A mis amigos: Nandinii, Argelia, Cuco, Ulises, Arturo, Selma, Jules, Víctor, Tania, Sandra.... que me hacen sonreír todos los días.

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN.

El programa de Cuantización por Lazos es un proyecto diseñado para construir una cuantización no perturbativa para teorías de norma, la cual es independiente de una métrica de fondo. El ejemplo más representativo donde se aplica esta técnica es Relatividad General, reformulada como una teoría canónica de norma $SU(2)$ en términos de nuevas variables llamadas de Ashtekar-Barbero[13, 14].

Este ejemplo, llamado Gravedad Cuántica por Lazos, es una teoría que se ha desarrollado en los últimos veinte años y es hoy una de las candidatas más fuertes para la descripción de una teoría de gravedad cuántica. Sin embargo, a pesar de que se ha podido describir la cinemática de manera rigurosa, aún existen ciertos problemas con respecto a la implementación de la restricción escalar, que nos daría el espacio de Hilbert físico de la gravitación. Existen propuestas para tal implementación [1], mas no existe un consenso general sobre la validéz física de tal implementación. De modo que surgen alternativas para este problema pues es de suma importancia tener una descripción completa de la teoría cuántica, tal que podamos obtener predicciones teóricas que puedan ser contrastadas con posibles experimentos.

En este trabajo, proponemos una manera de obtener la dinámica de una teoría cuantizada por el método de lazos, basada en la implementación del grupo de renormalización de Wilson en el ámbito de las teorías cuantizadas por lazos. La idea surge de [50, 51], donde se plantea que naturalmente

existe la posibilidad de obtener la dinámica de éstas teorías, como un límite continuo de la dinámica de las teorías efectivas, siguiendo las ideas del grupo de renormalización de Wilson, tal como se realiza en las teorías de norma sobre la red.

En particular, puesto que el concepto de escala es fundamental en la implementación del grupo de renormalización, proponemos una nueva noción de escala, tal que nos permita realizar la implementación de estas técnicas a teorías independientes de una métrica de fondo. Cuando este límite continuo existe, podemos entonces definir la dinámica de la teoría.

En el caso de teorías que dependen de una métrica de fondo, la noción extendida de escala, se reduce a las redes convencionales que son usadas como reguladores en la teoría de red. Por lo tanto, estructuras de este tipo presentadas en este trabajo deben ser capaces de exportar mucho del trabajo realizado en las teorías de red directamente al formalismo de lazos.

La tesis está organizada de la siguiente manera: En el capítulo 2 referente al grupo de renormalización de Wilson, comenzamos con una breve descripción de las teorías de norma en la red. El grupo de renormalización es revisado después desde el punto de vista de la mecánica estadística utilizando al modelo de Ising en dos dimensiones como ejemplo principal. Las secciones siguientes describen al grupo de renormalización en la teoría de norma en la red, que será de importancia fundamental para nuestro trabajo. Para concluir el capítulo, describimos la implementación en teoría cuántica de campos. Limitamos la revisión al caso de campos escalares por simplicidad, pues en el caso de campos de norma la situación resulta ser un poco más complicada, debido a la invariancia de norma.

El capítulo 3 describe explícitamente el programa de la cuantización por lazos. Hemos querido describir tales técnicas de manera general, puesto que en principio, la cuantización por lazos se puede implementar a cualquier teoría de campos. Finalmente, como ejemplo de la cuantización por lazos, describimos las nociones básicas de la gravedad cuántica por lazos, aunque estudios completos y detallados se encuentran en las citas mencionadas al principio de la sección.

El capítulo 4 reúne nuestro trabajo de investigación. Aquí, utilizamos los conceptos básicos de los capítulos anteriores directamente en la implementación del grupo de renormalización a teorías cuantizadas por lazos en su versión lagrangiana. En éste, seguimos directamente el trabajo que publicamos en la referencia [52] y explicamos de manera detallada el proceso de límite continuo mediante el uso del triángulo de renormalización.

Concluimos con un ejemplo explícito: usando nuestra implementación del grupo de renormalización y nuestra noción de escala, construimos la dinámica de una teoría cuántica de campos cuantizada por lazos. El ejemplo se construye como el límite continuo del modelo de Ising bidimensional. Ésta es una teoría cuántica de campos relativista con interacciones y grados de libertad locales cuantizados usando técnicas de la cuantización por lazos.

Debemos mencionar que a pesar de que el modelo de Ising es una teoría que depende de una métrica de fondo, el formalismo presentado no utiliza la métrica de fondo de manera directa. Este formalismo puede aplicarse igualmente a teorías topológicas. Por lo tanto nuestro método es aplicable a teorías que no dependen de una métrica de fondo y puede producir teorías con grados de libertad locales.

Concluimos esta tesis mencionando los logros y metas futuras que se tienen en este proyecto de investigación.

CAPÍTULO 2

Grupo de Renormalización de Wilson

2.1. Introducción.

En Mecánica Estadística, uno de los objetivos más importantes de estudio es el análisis de sistemas ante la influencia de campos externos. La manera en como el sistema responde ante dicha influencia externa está determinada por el tipo de fluctuaciones que se generan. En especial, cerca del punto crítico, donde ocurren transiciones de fase (de segundo orden) del sistema, las fluctuaciones se correlacionan fuertemente sobre una amplia región del espacio implicando que interacciones de largo alcance son ahora importantes. De modo que fluctuaciones de todas las posibles longitudes de onda contribuyen a la respuesta del sistema.

Si queremos describir de manera sistemática las propiedades termodinámicas del sistema cerca del punto crítico, utilizamos la teoría de Escalamiento, que permite reescribir las funciones termodinámicas afectadas por la transición de fase en términos de leyes de potencias que dependen del punto crítico, de manera que a medida que variamos dicha distancia, las funciones termodinámicas cambian de escala pero no su forma funcional.

Esta idea de escalamiento fue aplicada al modelo de Ising por Kadanoff que motivó a Wilson para su teoría moderna de Renormalización. Una cantidad básica en este análisis es la longitud de correlación ξ definida como la longitud máxima de las longitudes de onda asociadas con las fluctuaciones que ocurren en el sistema. Esta longitud de correlación diverge en el punto

crítico, pues en ese punto las fluctuaciones de todas las posibles longitudes de onda contribuyen a la respuesta del sistema.

La idea de Kadanoff en el modelo de Ising dice que mientras la longitud de correlación varía, los campos de spines que interactúan en la red pueden ser rescalados de modo que el resultado es un sistema con “nuevos campos” que interactúan en una red más grande. Es decir, en vez de describir el sistema en términos de spines interactuantes, caracterizamos a éste en términos de bloques de spines, tomando el promedio de los valores de spin por cada bloque y definiendo un nuevo sistema. A medida que el sistema se acerca al punto crítico la longitud de correlación crece y con ella el tamaño de los bloques de spin, de modo que las funciones termodinámicas no cambian su forma funcional sino que sólo son rescaladas. Por lo tanto, al tener una red con una longitud característica, podemos considerar regiones de la red más grandes en comparación con la escala de definición del problema. Observamos que el continuo estadístico emerge, de modo que a escalas macroscópicas (en comparación con la escala característica) la red es despreciable. Así, *los efectos de largo alcance deben de tener una descripción continua sin hacer referencia alguna a la escala de la red.*

Wilson toma la idea de Kadanoff para calcular los exponentes críticos de manera microscópica y permite entender el límite continuo estadístico. El punto central de este límite estadístico es que carece de una escala asociada que caracterice el sistema. Básicamente, el método de Wilson es un procedimiento sistemático que construye teorías efectivas reduciendo grados de libertad. Como primer paso, escogemos una escala inicial, donde definimos la teoría. Para cambiar de escala, integramos sobre las fluctuaciones con longitudes de onda más pequeñas que aquella que define nuestro sistema inicial. Estas integraciones asignan al sistema inicial otro sistema, descrito por un Hamiltoniano efectivo en la nueva escala, que tiene el mismo comportamiento a distancias más grandes pues sus funciones de correlación no distinguen entre ambos. La transformación de un sistema a otro es llamada *Transformación del Grupo de Renormalización.*

Al iterar, obtenemos una secuencia de sistemas físicos tales que tienen el mismo comportamiento a distancias grandes. Esta secuencia está descrita por relaciones de recurrencia no lineales entre los parámetros de la teoría (también llamados constantes de acoplamiento) a las diferentes escalas. El punto crítico del sistema resulta ser un punto fijo de las relaciones de recurrencia en donde podemos describir el fenómeno de escalamiento. De la transformación de recurrencia alrededor de los puntos fijos se pueden leer los exponentes críticos.

Cabe mencionar que la ausencia de una escala que caracterice al sistema es evidente en Teoría Cuántica de Campos, donde se tienen integrales sobre estados intermedios que contienen energías arbitrariamente grandes, lo que puede generar integrales divergentes. El primer método construido para eliminar tales divergencias es la teoría de Renormalización -construida por Bethe, Feynman, Schwinger, Dyson entre otros - que describe el límite estadístico de una teoría local sustrayendo las partes divergentes de las integrales en el límite continuo. La restricción de este método es que sólo puede ser aplicado a aquellas teorías que son expandibles en términos de diagramas de Feynman. Sin embargo, no podemos tener una explicación de cuál es el origen de tales divergencias, así como el comportamiento del sistema mientras cambiamos de escala.

2.2. Teorías de Norma sobre la Red.

En esta sección damos una breve descripción a las ideas principales de las teorías de norma sobre la red [6] que nos serán útiles a lo largo de este trabajo. Cabe mencionar que el enfoque presentado aquí, extiende la formulación estándar de Wilson a teorías cuyos grupos de norma son discretos.

En la Teoría Cuántica de Campos, la necesidad de eliminar divergencias sugiere métodos para obtener cantidades finitas físicamente relevantes para la teoría. Uno de éstos es utilizar redes espacio-temporales que proporcionan un corte ultravioleta que remueve las divergencias surgidas. Sin embargo, la red necesita ser removida después de renormalizar la teoría, como lo es para cualquier regulador. El objetivo es que las cantidades físicas no dependan de la red y se aproximen a un valor finito.

Originalmente, las teorías sobre la red surgieron para estudiar el problema de confinamiento en las interacciones fuertes de las partículas, fenómeno que es inherentemente no perturbativo, sin embargo, hoy es una arena para estudiar diversos aspectos no perturbativos de la Teoría Cuántica de Campos. Además la relación entre ésta y la Física Estadística se hace evidente.

En la teoría de norma sobre la red las variables básicas son conexiones definidas usando transporte paralelo a lo largo de segmentos dirigidos e , llamados aristas de la red. El transporte paralelo resultante puede ser visto como elementos de un grupo de norma $g_e \in G$. Las transformaciones de norma son definidas asociando elementos $h_{v_j} \in G$ a cada vértice v_j y actuando en el elementos de grupo de las aristas g_e como:

$$g_e \rightarrow h_{v_i}^{-1} g_e h_{v_f}$$

donde e representa una arista en particular; $h_{v_i}, h_{v_f} \in G$ y v_i, v_f son los vértices que se forman los extremos iniciales y finales de la arista.

La dinámica se construye mediante una acción que describe nuestro sistema a la escala dada por la red. Usando una discretización de las variables de campo podemos obtener una acción dada mediante la suma de acciones locales S_p de cada plaqueta p de la red.

$$S = \sum_p S_p \tag{2.1}$$

Usualmente S_p es una función invariante ante transformaciones de norma.

La acción de Wilson resulta ser la más usada:

$$S = \sum_{\text{plaq}} \beta [1 - (1/n) \text{Re} W_{\text{plaq}}]$$

donde $W_{\text{plaq}} = \text{Tr}(U_{ij}U_{jk}U_{kl}U_{li})$ es el lazo de Wilson sobre cada plaqueta. Esta acción se reduce a la acción de Yang-Mills en el continuo [6]. Sin embargo, la expresión más general se deduce expandiendo la función S_p en términos de los caracteres del grupo: $S_p = \sum_n \beta_n \chi_n(g)$. La teoría cuántica se construye usando (2.1) en la función de partición:

$$Z = \int \left(\prod_e dg_e \right) \exp \left(\sum_p S_p \right)$$

Tomando la exponencial de la acción S_p en la función de partición como una expansión en términos de los caracteres χ_τ asociados al grupo de norma, obtenemos la función de partición de la acción de Heat-Kernel [2]

$$Z = \int \prod_e dg_e e^{\sum_p S_p[g]} = \sum_{\tau_p} \prod_p (\dim \tau) e^{-\beta_p C_{\tau_p}} \int \prod_e dg_e \prod_p \chi_{\tau_p}(g_p) \quad (2.2)$$

donde la suma es sobre representaciones irreducibles τ_p del grupo G asociado a cada plaqueta, C_{τ_p} es el operador de Cassimir que actúa en el álgebra de Lie del grupo y g_p es el producto de los elementos asociados a las aristas que forman la plaqueta p . Los parámetro β_p son constantes de acoplamiento locales asociadas a cada plaqueta en la red que contienen la información del área de cada una. Estas constantes fueron introducidas por primera vez en [56].

La integral en la expresión (2.2) puede ser reducida gracias a las propiedades de ortogonalidad de los caracteres y nos da algunas condiciones para los valores de las representaciones τ_p . Podemos ver que estas restricciones son interpretadas como Leyes de Gauss que actúan en los vértices de la red [6].

Un espacio de Hilbert físico puede ser asociado a rebanadas puramente espaciales del espacio tiempo y sus elementos son funciones invariantes de norma sobre el espacio de conexiones de la red en esa rebanada. Como consideramos redes en el espacio tiempo cuyas direcciones están bien definidas, elegimos las fronteras de la red como rebanadas espaciales fijas a un tiempo determinado. Esto da lugar a una formulación Hamiltoniana, en donde el Hamiltoniano de Kogut-Susskind [6] juega un papel fundamental.

Sin embargo, como la red es un regulador que debe ser removido, se necesita tomar un límite continuo tal que las mediciones de las observables físicas no dependan de la red. En este punto las técnicas del grupo de renormalización de Wilson son muy útiles para nuestro propósito, las cuales revisaremos en las siguientes secciones.

2.3. Transformaciones por Bloques y Modelo de Ising

Un ejemplo explícito de la aplicación del método del Grupo de Renormalización es el modelo de Ising en dos dimensiones, que consiste en un sistema discreto de spines $S = \pm 1$ localizados en los nodos de una red en dos dimensiones. Por simplicidad, asumimos que el sistema está definido en una red regular de tamaño L y longitud característica a . El Hamiltoniano del sistema está dado por:

$$H[S] = \kappa_0 + \kappa_1 \sum_{\{ij\}} S_i S_j + B \sum_j S_j \quad (2.3)$$

donde $\{ij\}$ representa la suma sobre puntos cercanos en la red. La función de partición asociada al sistema es una suma sobre todas las posibles configuraciones $\{S\}$ en la red :

$$Z = \sum_{\{S\}} e^{-H[S]} = \sum_{\{S\}} \exp(-\kappa_0 - \kappa_1 \sum_{\{ij\}} S_i S_j - B \sum_j S_j) \quad (2.4)$$

donde hemos absorbido el factor $1/KT$ dentro de nuestras constantes. Para describir la física de este sistema macroscópicamente, utilizamos transformaciones por bloques que permiten relacionar teorías efectivas a distintas longitudes características de la red promediando sobre grados de libertad microscópicos, definiendo así un límite para grandes escalas [3, 4].

La transformación por bloques consiste en dividir la red en bloques de spines α de tamaño sa con s un parámetro natural, para formar una nueva red cuya longitud característica sea sa . Por cada bloque asignamos una variable de spin nueva $S'_\alpha = \pm 1$ donde el signo está determinado por una distribución de probabilidad $t(S'_\alpha, S_i)$, que nos dice la probabilidad de que S'_α tome el signo \pm dada una cierta configuración de spines S_i en el bloque α .

Por otro lado, dada una configuración $\{S\}$ en la red, la probabilidad de tener una configuración específica $\{S'_\alpha\}$ se define como:

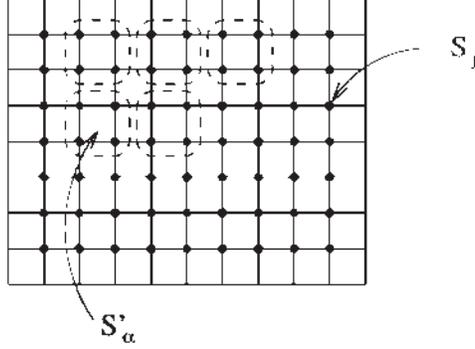


Figura 2.1: La transformación por bloques de una red de spines.

$$T[S', S] = \prod_{\alpha} t(S'_{\alpha}, S_i) \quad (2.5)$$

con la condición:

$$\sum_{[S']} T[S', S] = 1$$

Las funciones de probabilidad arriba mencionadas no son únicas y se tiene la libertad de escoger la forma funcional dependiendo del problema que se quiera atacar. La más sencilla es escoger $t(S'_{\alpha}, S_i) = \delta(S'_{\alpha}, \text{sign}(m_{\alpha}))$ donde $m_{\alpha} = \frac{1}{N} \sum_{(j \in \alpha)} S_j$ es la magnetización por cada bloque α y N es el número de spines por bloque.

Además la distribución de probabilidad $T[S', S]$ define una transformación por bloque R_s que nos relaciona diferentes teorías efectivas. De esta manera el peso de la función de partición de la nueva red de spines esta determinada por:

$$e^{-H'[S'_{\alpha}]} = \sum_{[S_i]} T[S', S] e^{-H[S_i]} \quad (2.6)$$

Cabe mencionar que esta transformación es local, puesto que a cada bloque se le asigna un número finito de spines en una determinada región de la red, empero existen ciertos métodos que utilizan transformaciones no locales. Para comparar el nuevo sistema con el inicial, es necesario tener las mismas unidades de medición. Esto implica que tenemos que rescalar las cantidades involucradas en la descripción de los sistemas. En particular, la

longitud de correlación ξ , considerada adimensional, se ve modificada por un factor llamado de dilatación s , como ξ/s . Así mismo, necesitamos renormalizar las nuevas variables $S'_\alpha \rightarrow S'_\alpha/M$, procedimiento que es llamado *renormalización de spines* y servirá para definir el límite continuo.

Obviamente tenemos que las funciones de partición asociadas son las mismas como esperamos ($Z = Z'$) pues estamos describiendo el mismo sistema de spines a diferentes escalas. Sin embargo, la transformación (2.6) generará nuevos acoplamientos a todos los órdenes entre los spines de la nueva red así como interacciones no lineales en el Hamiltoniano efectivo:

$$H'[S'] = \kappa_0 + \kappa_1 \sum_{\{\alpha\beta\}} S'_\alpha S'_\beta + \kappa_2 \sum_{\{\{\alpha\beta\}\}} S'_\alpha S'_\beta + \kappa_3 \sum_{\{\{\alpha\beta\gamma\delta\}\}} S'_\alpha S'_\beta S'_\gamma S'_\delta + \dots \quad (2.7)$$

Los coeficientes $\{\kappa_0, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3 \dots\}$ son las constantes de acoplamiento de la teoría efectiva en la nueva escala y forman el espacio de parámetros \mathcal{P} donde cada punto representa una teoría efectiva a una temperatura dada. Estas constantes de acoplamiento $\kappa(\beta)$ son funciones analíticas de las constantes de acoplamiento iniciales incluso en el punto crítico.

La transformación (2.6) establece una correspondencia entre el sistema de spines y el de bloques. Ésta induce la llamada *Transformación del Grupo de Renormalización* R_s y actúa en el espacio de parámetros, relacionando puntos dentro de éste. Además ésta última tiene asociado un incremento de la medida de longitud por s . Así, al integrar sobre longitudes de onda corta tendremos que cambiar los valores de las constantes de acoplamiento.

La estrategia ahora consiste en iterar la transformación R_s en el espacio de parámetros varias veces, lo que significa integrar sobre grados de libertad extras, rescalando en cada iteración las unidades de medición por un factor de dilatación. Esto genera una secuencia de puntos en \mathcal{P} que nos pueden dar información acerca del sistema en el límite macroscópico.

El modelo de Ising está representado en \mathcal{P} con $\kappa_0, \kappa_1 \neq 0$ a una temperatura dada T como un punto $p(T) \in \mathcal{P}$. Al variar la temperatura, llegamos al valor crítico de la constante de acoplamiento, κ_{1c} donde el sistema sufre una transición de fase y la distancia de correlación ξ diverge. Al aplicar una transformación del grupo de renormalización en este punto crítico, mandamos un punto $p(T_c) \in \mathcal{P}$ a otro $p'(T_c) = R_s p(T_c) \in \mathcal{P}$, lo que implica que la distancia de correlación se mantiene infinita y por lo tanto el sistema transformado es también crítico.

Definimos la *superficie crítica* \mathcal{S}_c como el conjunto de puntos $\{p(T_c) \in \mathcal{P}\}$. Así, las transformaciones iteradas de puntos $p \in \mathcal{S}_c$ nos llevan a puntos en la misma superficie. Si empezamos con algún punto $q(T) \notin \mathcal{S}_c$, entonces iteraciones sucesivas de la transformación R_s mueven el punto más lejos de \mathcal{S}_c , pues al reescalar la distancia de correlación $\xi \rightarrow \xi/s$ por cada iteración obtenemos sistemas que están cada vez más alejados del punto crítico.

Las trayectorias generadas por estas iteraciones sucesivas de la transformación R_s se les llama *flujo de renormalización*. Existen ciertos flujos que se originan en puntos $p(T_c) \in \mathcal{S}_c$ tales que convergen a un punto fijo $p^*(T_c)$ tal que satisface $R_s p^* = p^*$ y que son de relevancia física.

Es interesante analizar el comportamiento de la transformación R_s cerca del punto fijo p^* pues es allí donde podemos obtener la información termodinámica del sistema, ya que tanto las funciones de correlación como las observables macroscópicas exhiben un comportamiento en forma de leyes de potencia y permiten determinar los exponentes críticos de la teoría. Notemos sin embargo que los puntos fijos p^* dependen de la forma que escogemos la transformación R_s pero no así los exponentes críticos que definen la teoría. En la vecindad de p^* , la transformación R_s la podemos aproximar mediante una matriz cuyos eigenvalores $\exp(\lambda_k)$ (que asumimos reales) identifican el carácter de las constantes de acoplamiento de la teoría efectiva con respecto al punto fijo. Así, identificamos tres casos:

$\lambda_k > 0$ implica que la constante de acoplamiento aumenta por cada iteración, por lo que es llamada *relevante*.

$\lambda_k < 0$ la constante de acoplamiento decrece por cada iteración. Ésta es llamada *irrelevante*.

$\lambda_k = 0$ tiene como consecuencia que por cada iteración la constante de acoplamiento se mantiene invariante, A esta constante se le llama *marginal*. Este caso necesita un tratamiento más allá de la aproximación lineal (2.5) para decidir su influencia en el sistema.

Supongamos por ejemplo que (2.5) es una distribución que depende de la magnetización local $m_\alpha = \frac{1}{N} \sum_{(j \in \alpha)} S_j$.

$$T[S', S] = \prod_{\alpha} \delta(S'_{\alpha}, M m_{\alpha}) \quad (2.8)$$

donde M es el factor necesario para renormalizar los spines y depende de la temperatura. Es fácil ver que esta distribución satisface las condiciones necesarias descritas en (2.5).

La ecuación (2.8) induce una transformación de renormalización R_s que genera un Hamiltoniano de la forma (2.7). Desafortunadamente, para el modelo de Ising no existe una relación de recursión exacta para las constantes de acoplamiento [3], por lo que usualmente se realizan aproximaciones que revelen el comportamiento de las constantes de acoplamiento κ_0, κ_1 . Una de ellas es el proceso de decimación, que consiste en sumar sobre ciertos spines en la red (por ejemplo podemos sumar sobre los spines que se encuentren en filas y columnas etiquetadas por un número par). En estas aproximaciones se encuentra que el punto fijo del modelo de Ising es¹

$$\kappa_{1c} = \frac{1}{2} \ln[1 + \sqrt{2}]$$

donde tenemos una transición de fase. Este resultado coincide con el calculado por Onsager [4, 5] donde encuentra una singularidad en la energía libre:

$$F = -KT \left[\ln 2 + \frac{(2\pi)^{-2}}{2} \right] \int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^{2\pi} d\theta_2 \ln[\cosh^2 2\kappa_1 - \sinh 2\kappa_1 (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)]$$

en el punto $T = T_c$ determinado por la condición:

$$\sinh 2\kappa_{1c} = 1$$

Por otro lado, consideremos la función de dos puntos en la teoría efectiva generada por la transformación (2.8):

$$\begin{aligned} \langle S'_\alpha S'_\beta \rangle &= \frac{1}{Z'} \sum_{[S']} S'_\alpha S'_\beta \left[\sum_{[S]} \prod_{\mu} \delta(S'_\mu, M m_\mu) e^{-H[S]} \right] \\ &= M^2 \frac{1}{Z} \sum_{[S]} m_\alpha m_\beta e^{-H[S]} \\ &= M^2 N^{-2} \sum_{i \in \alpha} \sum_{j \in \beta} \langle S_i S_j \rangle \end{aligned} \quad (2.9)$$

Si suponemos que la distancia de correlación ξ es lo suficientemente grande en comparación con la distancia característica de la red, entonces la función de dos puntos es prácticamente la misma para todo par de puntos $i \in \alpha$ y $j \in \beta$:

¹Véase por ejemplo [3, 6].

$$\langle S'_\alpha S'_\beta \rangle = M^2 \langle S_i S_j \rangle$$

o bien:

$$\langle S_i S_j \rangle = M^{-2} \langle S'_\alpha S'_\beta \rangle \quad (2.10)$$

donde $i \in \alpha$ y $j \in \beta$. De la misma manera es posible escribir la generalización a funciones de n puntos [7]. El límite continuo de la teoría se define de la siguiente manera: Como hasta ahora, etiquetamos mediante índices latinos los sitios de spin en la red cuya longitud característica es a . La distancia entre dos puntos arbitrarios, digamos i, j la escribimos como $|i - j|$. De manera que el límite continuo se define tomando:

$$|i - j|^2 \rightarrow \infty, \quad T \rightarrow T_c \quad (2.11)$$

mientras $a \rightarrow 0$ y manteniendo fija $a|i - j|(T - T_c) = \xi$ lo que significa mantener constante la distancia de correlación física entre los spines al realizar las transformaciones de renormalización.

La función de n puntos para $T < T_c$ (o bien $\kappa_{1c} < \kappa_1$) puede ser calculada explícitamente en el límite continuo [8]:

$$\lim_{\substack{T \rightarrow T_c \\ |i_k - i_l|^2 \rightarrow \infty}} M^{-n} \langle S(i_1) S(i_2) \cdots S(i_n) \rangle = \exp \left(\sum_{k=2}^{\infty} f_n^{(k)} \right) \quad (2.12)$$

donde

$$\begin{aligned} f_n^{(k)} &= -\frac{1}{2k(2\pi^2)^k} \int_{-\infty}^{\infty} dy_1 \cdots dy_k dx_1 \cdots dx_k \prod_{l=1}^k (1 + x_l^2 + y_l^2)^{-1} \times \\ &\times \frac{y_l + y_{l+1}}{x_l - x_{l+1} + i\epsilon} \text{Tr} \left[\prod_{l=1}^k A(l) \right] \end{aligned} \quad (2.13)$$

donde $z = \tanh \kappa_1$ y $A(l)$ es la matriz cuyos elementos están dados en términos de las componentes de la distancia $|i_j - i_k|$ entre los campos de spin $S(j)$. Explícitamente:

$$\begin{aligned} A(l)_{jk} &= \text{sgn} \left[|i_j - i_k|_y \frac{|z^2 + 2z - 1|}{\sqrt{z(1 - z^2)}} \right] \exp -i \left(\frac{|z^2 + 2z - 1|}{\sqrt{z(1 - z^2)}} \right) \times \\ &\times \left(|i_j - i_k|_y y_l + |i_j - i_k|_x x_l \right) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Aclaremos que $|i_j - i_k|_y^2 + |i_j - i_k|_x^2 = |i_j - i_k|^2$. Para el caso $T > T_c$ [8]:

$$\lim_{\substack{T \rightarrow T_c \\ |i_k - i_l|^2 \rightarrow \infty}} M^{-n} \langle S(i_1) S(i_2) \cdots S(i_n) \rangle = |\det(\sum_{k=1}^{\infty} g_{(n)ij}^{(k)})|^{1/2} \exp\left(\sum_{k=2}^{\infty} f_n^{(k)}\right) \quad (2.15)$$

donde $g_{(n)ij}^{(k)}$ es:

$$g_{(n)ij}^{(k)} = \frac{1}{(2\pi^2)^k} \int_{-\infty}^{\infty} dy_1 \cdots dy_k dx_1 \cdots dx_k \prod_{l=1}^k (1 + x_l^2 + y_l^2)^{-1} \times \\ \times \prod_{l=1}^{k-1} \frac{y_l + y_{l+1}}{x_l - x_{l+1} + i\epsilon} [\prod_{l=1}^k A(l)]_{ij} \quad (2.16)$$

El factor M toma los valores:

$$M = \begin{cases} [1 - (\sinh 2\kappa_1)^{-1}]^{1/8} & \text{si } T < T_c \\ [(\sinh 2\kappa_1)^{-1} - 1]^{1/4} & \text{si } T > T_c \end{cases} \quad (2.17)$$

y representa la magnetización espontánea para $T < T_c$. Por lo tanto tenemos dos teorías de campos en el continuo por cada límite $T < T_c$ ó $T > T_c$. Es posible demostrar que los campos de spin en el continuo son descritos como campos escalares ϕ en el modelo de Ginzburg Landau con acoplamiento ϕ^4 que describiremos a detalle más adelante.

2.4. Grupo de Renormalización en Teorías de Red.

Como dijimos en la introducción, el otro punto de vista que se tiene es el provisto por la Teoría Cuántica de Campos. En ésta, la necesidad de eliminar las divergencias, nos lleva a utilizar métodos para obtener cantidades finitas físicamente relevantes en la teoría. Uno de éstos es considerar a la red como un regulador que proporciona un corte ultravioleta. Para recuperar la teoría original, debemos remover el regulador de nuestras cantidades físicas utilizando ciertos límites, de modo que éstas no dependan finalmente de la red. Es aquí donde cualquier observable definida a escalas efectivas debe aproximarse a su valor físico. En esta sección expondremos el grupo de renormalización siguiendo [6]

Las observables definidas en la teoría efectiva, dependen de la unidad de longitud característica a de la red, de modo que el límite continuo equivale

a tomar $a \rightarrow 0$ manteniendo alguna cantidad física fija. Consideremos por ejemplo la longitud de correlación ξ adimensional (en términos de la longitud característica a): $\xi = (ma)^{-1}$, donde m es la masa que corresponde al primer nivel de excitación de la teoría. El límite continuo implica tomar $a \rightarrow 0$ mientras mantenemos fija la masa m , en consecuencia, la longitud de correlación del sistema diverge. Notemos que este comportamiento es característico en sistemas estadísticos que se encuentran en una región crítica donde ocurren transiciones de fase. Por lo tanto, para tomar el límite continuo, debemos escoger el esquema de renormalización adecuado para el problema en cuestión. Usualmente se escogen ciertas cantidades de relevancia física como fijas bajo el procedimiento que relaciona las diferentes escalas.

Consideremos una observable adimensional \mathcal{O} definida en la red de longitud característica a . Supongamos por simplicidad que ésta depende de una constante de acoplamiento inicial κ_0 también adimensional así como de la longitud característica de la red a y la escala a la que se define, r .

$$\mathcal{O} = \mathcal{O}(\kappa_0(a), a, r) \quad (2.18)$$

A medida que $a \rightarrow 0$ manteniendo fija la escala de definición r , la observable $\mathcal{O}(\kappa_0(a), a, r)$ pierde la dependencia del corte a y tiene un valor finito. En este límite se tiene el comportamiento crítico donde todas las escalas tienen lugar y ocurre sólo para ciertos valores de κ_0 . Notemos sin embargo que una teoría de red aproxima una teoría continua cuando $a \ll r$ y además a es mucho más pequeña que cualquier otra escala física involucrada en la teoría.

Refinamos ahora la red por un factor de 2. Podemos suponer que la observable \mathcal{O} no cambia drásticamente al variar la longitud de la red si a es lo suficientemente pequeña y la constante de acoplamiento se ajusta adecuadamente de modo que tengamos:

$$\mathcal{O}(\kappa_0(a/2), a/2, r) = \mathcal{O}(\kappa_0(a), a, r) + O(a^2) \quad (2.19)$$

Si el esquema de renormalización que utilizamos es mantener invariante la observable a una escala dada, entonces (2.19) es exacta a todos los órdenes en a . Queremos ahora comparar teorías definidas en diferentes escalas r . Como la observable es adimensional, entonces un rescalamiento de a y r no afecta la ecuación (2.19). Rescalamos por un factor de 2 para tener:

$$\mathcal{O}(\kappa_0(a/2), a, 2r) = \mathcal{O}(\kappa_0(a), a, r) \quad (2.20)$$

Esta ecuación exhibe la relación que existe entre la constante de acoplamiento valuada en dos redes distintas y la observable medida en dos escalas diferentes. Para estudiar el comportamiento de κ_0 en el proceso del límite, fijamos el valor de la observable como prescripción de renormalización a esta longitud a inicial:

$$\mathcal{O}(\kappa_0(a), a, r) = \mathcal{O}_0 \quad (2.21)$$

lo que permite conocer, tanto el valor inicial de $\kappa_0(a)$ como el valor de la constante de acoplamiento en la red refinada $\kappa_0(a/2)$ mediante (2.20). Una vez conocido este valor, tomamos la misma observable \mathcal{O} ahora con un valor $\kappa_0(a/2)$ de la constante de acoplamiento y repetimos el procedimiento anterior. Esto nos lleva a tener:

$$\mathcal{O}(\kappa_0(a/2), a, r) = \mathcal{O}(\kappa_0(a/2^2), a, 2r) = \mathcal{O}_1 \quad (2.22)$$

donde ahora la prescripción de renormalización es tomar fija $\mathcal{O}(\kappa_0(a/2), a, r)$ en un valor \mathcal{O}_1 distinto de \mathcal{O}_0 . Estas ecuaciones nos da el valor $\kappa_0(a/2^2)$ de la constante de acoplamiento.

La repetición n -ésima del procedimiento anterior implica las siguientes ecuaciones con las cuales sabemos el valor de la constante de acoplamiento para longitudes características $a/2^n$ cada vez más pequeñas:

$$\mathcal{O}(\kappa_0(a/2^n), a, r) = \mathcal{O}(\kappa_0(a/2^{n+1}), a, 2r) = \mathcal{O}_n \quad (2.23)$$

manteniendo fija $\mathcal{O}(\kappa_0(a/2), a, r)$ en un valor \mathcal{O}_n como prescripción de renormalización.

La secuencia $\{\mathcal{O}_0, \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \dots, \mathcal{O}_n, \dots\}$ genera un flujo de renormalización para κ_0 tipo escalera en las gráficas de $\mathcal{O}(\kappa_0, a, r)$ como función de κ_0 a dos escalas distintas r y $2r$. Las las situaciones típicas son esquematizadas en las gráficas:

- La gráfica (2.2) ejemplifica la situación que resulta cuando el flujo determinado por (2.23) tiene $\lim_{n \rightarrow \infty} \kappa_0(a/2^n) = 0$, es decir, en el continuo la constante de acoplamiento se anula, teniendo una teoría asintóticamente libre.
- La gráfica (2.3) describe otra situación cuando las trayectorias de $\mathcal{O}(\kappa_0, a, r)$ y $\mathcal{O}(\kappa_0, a, 2r)$ se intersectan en un valor no trivial κ^* . En este caso, el flujo de renormalización (2.23) se aproxima asintóticamente a dicho punto donde se tiene:

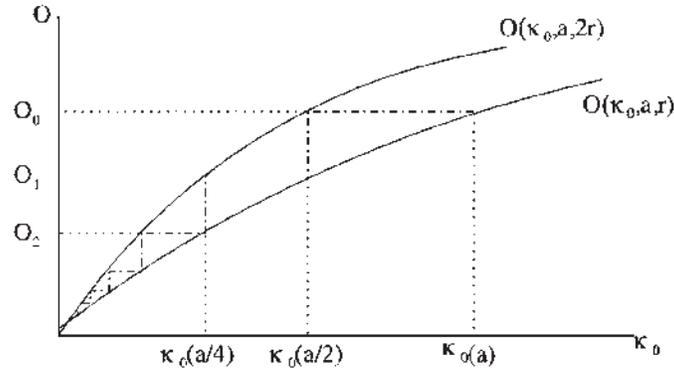


Figura 2.2: El flujo de renormalización tiene como límite continuo $\kappa_0 = 0$.

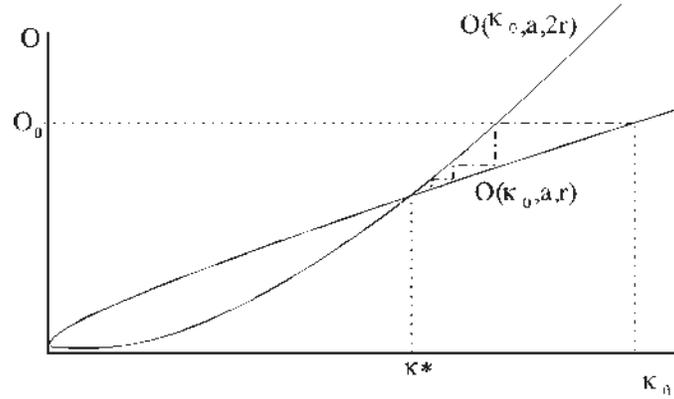


Figura 2.3: Las trayectorias de $\mathcal{O}(\kappa_0, a, r)$ y $\mathcal{O}(\kappa_0, a, 2r)$ se intersectan en un valor no trivial κ^* , que es un punto fijo atractivo en el ultravioleta del flujo de renormalización.

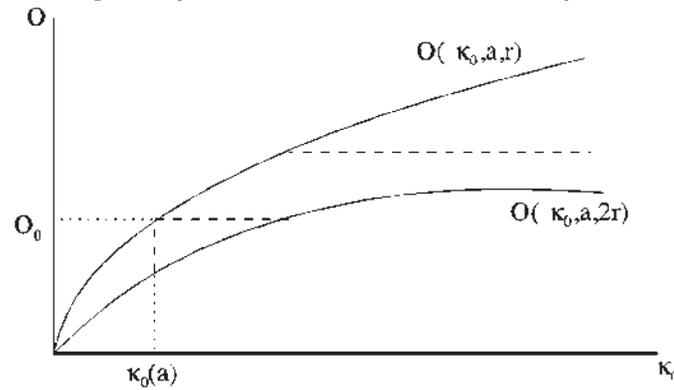


Figura 2.4: El flujo de renormalización no tiene solución..

$$\mathcal{O}(\kappa^*, a, r) = \mathcal{O}(\kappa^*, a, 2r) \quad (2.24)$$

El valor κ^* es un punto fijo atractivo de la teoría en la región ultravioleta donde se tiene una independencia de escala. El valor de la observable cambia drásticamente al pasar a través de este punto fijo y en consecuencia tenemos una transición de fase. Cabe mencionar que en el caso del punto fijo repulsivo, el flujo de renormalización se aleja asintóticamente de éste y el límite continuo sólo es posible si el valor de la constante es exactamente κ^* . La gráfica para el caso repulsivo puede realizarse si intercambiamos las trayectorias de $\mathcal{O}(\kappa_0, a, r)$ y $\mathcal{O}(\kappa_0, a, 2r)$ de la descrita anteriormente.

- Finalmente, la gráfica (2.4) ejemplifica la última situación, cuando el flujo de renormalización no tiene solución. Esto quiere decir que la ecuación (2.23) no es válida en algún punto del flujo y no se puede obtener un límite continuo.

Es importante mencionar que el procedimiento antes descrito, se toma en sentido inverso para el caso de Mecánica Estadística, tal como hemos discutido en secciones anteriores mediante el modelo de Ising. Usualmente se comienza con un sistema descrito en una red de longitud característica a pequeña y se construyen teorías efectivas (con un número mayor de constantes de acoplamiento $\{\kappa\}$) en redes cuya longitud es más grande pero que describen la misma física macroscópica. Este procedimiento corresponde a un límite infrarrojo de una teoría de campos, donde las observables macroscópicas (tales como las variables termodinámicas) son las que describen al sistema.

Si queremos un estudio analítico del comportamiento de la constante κ_0 , podemos obtener una ecuación diferencial que describe tal flujo. En este caso, podemos tomar la prescripción de renormalización $\mathcal{O}(\kappa_0(a), a, r) = \mathcal{O}_0$ para cualquier valor de a y escribir la razón de cambio de la observable \mathcal{O} con respecto al corte a :

$$a \frac{d}{da} \mathcal{O}(\kappa_0(a), a, r) = \left[a \frac{d\kappa_0}{da} \frac{\partial}{\partial \kappa_0} + a \frac{\partial}{\partial a} \right] \mathcal{O}(\kappa_0(a), a, r) = 0 \quad (2.25)$$

Llamemos $\beta(\kappa_0) = a \frac{d\kappa_0}{da}$. Ésta es la *función del grupo de renormalización*² y determina la manera en que la constante de acoplamiento depende del corte.

²La función $\beta(\kappa_0)$ es llamada *función de flujo* ó *función beta* en teoría de perturbaciones.

Los ceros en la función $\beta(\kappa_0)$ determinan los puntos fijos de la teoría y son independientes del esquema de renormalización. Además para valores de κ_0 cercanos al punto fijo atractivo en el ultravioleta κ^* tenemos:

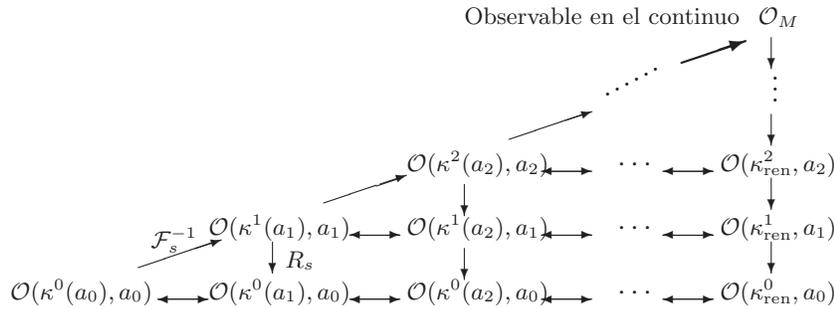
$$\begin{aligned} \beta(\kappa_0) &> 0 \quad \text{para} \quad \kappa_0 > \kappa^* \\ \beta(\kappa_0) &< 0 \quad \text{para} \quad \kappa_0 < \kappa^* \end{aligned}$$

Para el caso de puntos fijos repulsivos los signos son intercambiados. La forma funcional de $\beta(\kappa_0)$ dependerá del esquema de renormalización, en particular, dependerá de la observable \mathcal{O} y la escala física r donde definimos el problema.

2.4.1. Triángulo de Renormalización

Una manera ilustrativa de entender los flujos de renormalización, es mediante la construcción de un triángulo que represente la relación entre las teorías efectivas a diferentes escalas usando transformaciones del grupo de renormalización [9]:

Empecemos con una secuencia de redes cada vez más finas, es decir, cuya longitud característica a_j satisface: $\{a_0 > a_1 > a_2 > \dots > a_n > \dots\}$. Por cada a_j definimos la observable $\mathcal{O}(\kappa^j(a_j), a_j)$ ³ donde $\kappa^j(a_j)$ son las constantes de acoplamiento de la teoría efectiva en a_j . La siguiente pregunta que nos hacemos es cómo relacionar la observable definida en los diferentes cortes así como las constantes de acoplamiento involucradas.



³Usualmente se considera el Hamiltoniano o el Lagrangiano que definen las teorías efectivas para construir el triángulo, sin embargo, es posible hacer la construcción para cualquier observable física \mathcal{O} definida en una teoría efectiva.

Si queremos relacionar $\mathcal{O}(\kappa^0(a_0), a_0)$ con la observable definida en una red más fina $\mathcal{O}(\kappa^1(a_1), a_1)$, utilizamos una transformación de renormalización aproximada, la cual llamamos \mathcal{F}_s , de modo que preserve la misma forma funcional de la observable en las dos escalas y actúe en el espacio de constantes de acoplamiento de manera que $\mathcal{F}_s \kappa^0(a_0) = \kappa^1(a_1)$.

Para definir dicha transformación \mathcal{F}_s debemos imponer condiciones (llamadas condiciones de renormalización) sobre un número finito de cantidades físicas, por ejemplo, podemos mantener invariantes ciertos elementos de matriz del valor de expectación $\langle \mathcal{O} \rangle$ de la observable. Esta transformación aproximada está representada en la diagonal del triángulo para todas las teorías definidas en la secuencia de cortes.

Ahora bien, si tomamos la observable definida en a_1 , $\mathcal{O}(\kappa^1(a_1), a_1)$, podemos aplicar una transformación R_s , como una transformación por bloques, de manera que la relacione con la observable en a_0 . La transformación de renormalización actúa en \mathcal{P} como $R_s \kappa^1(a_1) = \kappa^0(a_1)$. Esta transformación es exacta y mantiene invariantes las cantidades físicas definidas en la escala más grande. La transformación exacta es representada por las flechas verticales en el triángulo.

Finalmente, mencionamos que $\mathcal{O}(\kappa^0(a_0), a_0)$ y $\mathcal{O}(\kappa^0(a_1), a_0)$ no son las mismas observables y sólo son iguales en el límite continuo. Sin embargo, éstas describen la misma física. Debido a esto podemos trazar las flechas horizontales que las relacionan. El límite continuo se obtiene aplicando las relaciones anteriores para redes cada vez más finas (hacia la derecha), tomando en cuenta a cada paso que $\mathcal{O}(\kappa^i(a_k), a_i) = \mathcal{O}(\kappa^i(a_l), a_i)$ en una buena aproximación si $a_k, a_l \ll a_i$.

2.5. Modelo de Ginzburg-Landau

El modelo de Ginzburg-Landau tiene como fin describir un sistema de spines en la vecindad del punto crítico y analizar los cambios de fase que ocurren en este punto mediante una aproximación de campos continuos. De hecho el modelo trata de eliminar la red donde el sistema de spines está descrito utilizando un campo escalar $\phi(x)$ que es interpretado como la magnetización local del sistema, al igual que las variables de bloque del modelo de Ising, cuando se han realizado suficientes iteraciones de la transformación de renormalización y el Hamiltoniano efectivo se considera macroscópico. De esta manera, el Hamiltoniano efectivo de bloques puede ser expresado bajo cierta aproximación como un Hamiltoniano del modelo de Ginzburg-Landau.

El Hamiltoniano de Ginzburg-Landau lo postulamos como:

$$H[\phi] = \int (d^D x) \left[\frac{1}{2} [\nabla \phi]^2 + \frac{1}{2} m^2(T) \phi^2 + \frac{1}{4!} \lambda(T) \phi^4 \right] \quad (2.26)$$

de manera que podamos modelar el sistema de spines cerca del punto crítico. Este Hamiltoniano depende de dos parámetros de carácter fenomenológico: $m^2(T)$ regula las transiciones de fase al variar la temperatura, y el acoplamiento $\lambda(T)$ que debe de ser una cantidad positiva.

El primer término $[\nabla \phi]^2$ elimina las fluctuaciones rápidas y permite hacer predicciones sobre la estructura de las funciones de correlación en ϕ mientras que el término proporcional a ϕ^4 elimina las fluctuaciones grandes para valores de ϕ grandes. El término cuadrático permite que el modelo describa el sistema debajo la temperatura crítica, representando una fase parcialmente condensada.

Teoría de Landau

Consideremos la función de partición dada como :

$$Z = \int \mathcal{D}\phi e^{-\int d^D x \left(\frac{1}{2} [\nabla \phi]^2 + \frac{1}{2} m^2(T) \phi^2 + \frac{1}{4!} \lambda(T) \phi^4 \right)} \quad (2.27)$$

donde sumamos sobre todos los posible valores del campo ϕ . La teoría de Landau se basa en suponer como aproximación que el valor del campo ϕ_0 que maximiza la exponencial en (2.27) domina la integral funcional. Este valor máximo corresponde a tomar ϕ_0 como una constante. El Hamiltoniano en esta aproximación es:

$$H[\phi_0] = \left[\int d^D x \right] \left(\frac{1}{2} m^2(T) \phi_0^2 + \frac{1}{4!} \lambda(T) \phi_0^4 \right) \quad (2.28)$$

Si consideramos $m^2(T) > 0$, entonces el Hamiltoniano (2.28) tiene un mínimo alrededor de $\phi = 0$. Sin embargo al considerar valores negativos de $m^2(T)$ tenemos dos valores mínimos más situados simétricamente alrededor del valor máximo local $\phi = 0$

Explícitamente estos mínimos son:

$$|\phi_0| = \begin{cases} 0 & m^2(T) \geq 0 \\ \sqrt{-6m^2(T)/\lambda(T)} & m^2(T) \leq 0 \end{cases} \quad (2.29)$$

Las fases del sistema entonces están caracterizadas por los valores de $m^2(T)$ ocurriendo transiciones de una a otra en $m^2(T) = 0$. Tomando en cuenta

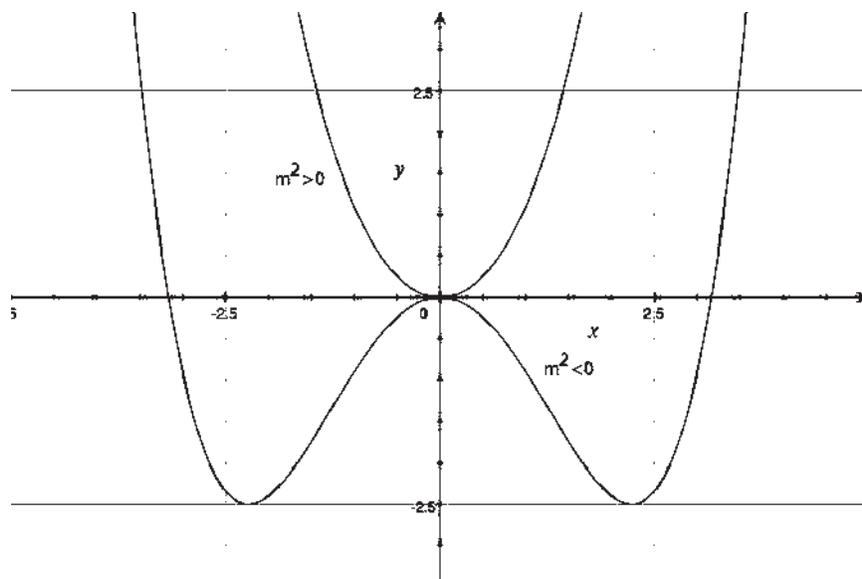


Figura 2.5: Gráficas del Hamiltoniano (2.28) para los valores de la constante de acoplamiento: $m^2 > 0$ y $m^2 < 0$.

esto, la expresión para $m^2(T)$ obtenida de un desarrollo de Taylor alrededor de T_c es:

$$m^2(T) = C \frac{T - T_c}{T} \quad (2.30)$$

donde T_c es la temperatura crítica donde ocurren las transiciones de fase y C una constante. Es decir, a temperaturas $T > T_c$, el coeficiente $m^2(T) > 0$ y el campo ϕ se anula mientras que para $T < T_c$, el parámetro $m^2(T) < 0$ y $\phi \neq 0$.

La teoría de Landau aproxima el comportamiento de un sistema ferromagnético cerca del punto crítico.

Relación entre el Modelo de Ising y el Modelo de Ginzburg-Landau

Existe una manera de derivar el Hamiltoniano del modelo de Ginzburg-Landau a partir del modelo de Ising. Ésta fue derivada por vez primera por Berlin y Kac e independientemente por Hubbard y Stratonovich (1976). Presentamos la derivación siguiendo [10]. Comenzamos con la función de partición del modelo de Ising:

$$Z_{\text{Ising}} = \sum_{\{S\}} e^{\kappa_1 \sum_{ij} J_{ij} S_i S_j + \kappa \sum_i B_i S_i} \quad (2.31)$$

donde tenemos la influencia de un campo magnético externo que toma diferentes valores B_i por cada nodo de la red.

La matriz \mathbf{J} no es positiva definida. Sin embargo si tomamos $\mathbf{U} = \gamma \mathbf{I} - \mathbf{J}$ podemos demostrar que ésta si lo es para γ lo suficientemente grande. Ya que la traza de esta matriz es $\text{Tr} \mathbf{U} = N\gamma + \text{Tr} \mathbf{J}$, la única diferencia entre la matriz \mathbf{J} y la matriz \mathbf{U} es un factor constante dependiente del parámetro γ que sale de la integral (2.31). Entonces podemos entonces sustituir \mathbf{U} en la expresión anterior y utilizando el siguiente resultado de integración gaussiana:

$$\int d^D x e^{[-\frac{1}{4} \sum_{ij} U_{ij}^{-1} x_i x_j + \sum_i S_i x_i]} = \left[(4\pi)^{N/2} \sqrt{\det U} \right] e^{\sum_{ij} U_{ij} S_i S_j}$$

obtenemos:

$$\begin{aligned} Z_{\text{Ising}} &= \frac{(4\pi)^{-N/2} e^{-\kappa_1 \gamma N}}{\sqrt{\det(\kappa_1 U)}} \times \\ &\times \sum_{\{S\}} \int d^D y e^{[-\frac{1}{4} (\kappa_1 U)_{ij}^{-1} (y^i - \kappa B^i)(y^j - \kappa B^j)]} e^{S_i y^i} \end{aligned} \quad (2.32)$$

donde hemos adoptado la convención de suma de Einstein⁴. El último término es el único que depende de las configuraciones de spin $\{S\}$ de la red, de modo que $\sum_{\{S\}} e^{S_i y^i} = 2^N \prod_i \cosh y^i$. Nuestro siguiente paso es hacer el cambio de variable:

$$\phi_i = (\kappa_1 U)_{ij}^{-1} y^j$$

La transformación da lugar a una función de partición de un modelo cuya variable es un campo con valores continuos:

$$Z_{\text{Ising}} = \mathcal{E}[B] \int d^D \phi \mathcal{D}[\phi] e^{[-\frac{1}{4} (\kappa_1 U)_{ij} \phi^i \phi^j + \frac{\kappa}{2} B_i \phi^i]} \quad (2.33)$$

donde:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}[B] &= e^{-\kappa_1 \gamma N} \sqrt{\pi^{-N} \det(\kappa_1 U)} e^{-\frac{\kappa^2}{4} (\kappa_1 U)_{ij}^{-1} B^i B^j} \\ \mathcal{D}[\phi] &= \prod_i \cosh(\kappa_1 U)_{ij} \phi^j = \exp\left[\sum_i \ln \cosh y_i\right] \end{aligned} \quad (2.34)$$

⁴La suma se entiende en índices repetidos y además, dado cualquier vector y^i , subimos o bajamos sus índices mediante la contracción con la métrica Euclidea $\eta = \text{diag}(+1, +1, \dots)$: $y^i = \eta^{ij} y_j$.

La nueva variable ϕ es interpretada como una variable estocástica cuyos valores de expectación están muy relacionados con aquellos del modelo de Ising. Se puede demostrar que diferenciando (2.32) y (2.33) obtenemos:

$$\langle S_i \rangle = \left\langle \frac{1}{2} (\phi_i - \kappa (\kappa_1 U)_{ij}^{-1} B_j) \right\rangle \quad (2.35)$$

$$\langle S_i S_j \rangle = \frac{1}{4} \langle \phi_i \phi_j \rangle - \frac{1}{2\kappa} (\kappa_1 U)_{ij}^{-1} \quad (2.36)$$

Para valores grandes de γ se puede demostrar las correlaciones de los campos $\{\phi\}$ en puntos distintos son las mismas que las correlaciones de los spines $\{S\}$.

Por otro lado, (2.33) puede ser aproximado al Hamiltoniano de Ginzburg-Landau. Observemos que la matriz U_{ij} tiene como elementos de la diagonal la constante γ mientras que los elementos diferentes de cero que están fuera de la diagonal son los proporcionales a las interacciones de vecinos cercanos digamos por un factor ϵ :

$$\begin{aligned} U_{ij} \phi^j &= \gamma \delta_{ij} \phi^j - (J_{i,i+\mu} \phi^{i+\mu} + J_{i,i-\mu} \phi^{i-\mu}), \quad \mu = 1, 2, \dots, D. \\ &= \gamma \phi_i - \epsilon \sum_{\mu} [\phi_{i+\mu} + \phi_{i-\mu}] \\ &= (\gamma - 2\epsilon D) \phi_i + \{2\epsilon D \phi_i - \epsilon \sum_{\mu} [\phi_{i+\mu} + \phi_{i-\mu}]\} \end{aligned} \quad (2.37)$$

Reconocemos el término entre corchetes como el operador Laplaciano discretizado. Entonces, tenemos:

$$U_{ij} \phi^j = (\gamma - 2\epsilon D) \phi_i + \epsilon a^2 \nabla^2 \phi_i \quad (2.38)$$

donde a es la longitud característica de la red. La función de partición (2.33) se escribe como:

$$Z_{\text{Ising}} = \mathcal{C}[B] \int d^D \phi \mathcal{D}[\phi] e^{(-\frac{1}{4} [\kappa_1 \epsilon a^2 \phi^i \nabla^2 \phi_i + \kappa_1 (\gamma - 2\epsilon D) \phi_i \phi^i] + \frac{\kappa}{2} B_i \phi^i)} \quad (2.39)$$

La aproximación que hacemos ahora es reemplazar las variables $\phi^i = \phi(x^i)$ por una variable que tome valores continuos $\phi(x)$ en el Hamiltoniano efectivo. Esto implica reemplazar las sumas por integrales D -dimensionales. Entonces, tendremos una función de partición Z_{GL} con variables continuas $\phi(x)$:

$$Z_{GL} = \mathcal{C}[B] \int \mathcal{D}\phi e^{-H_{GL}}$$

con el Hamiltoniano H_{GL} dado por:

$$H_{GL}[\phi] = a^{-D} \int d^D x \left[\frac{1}{4} [-\kappa_1 \epsilon a^2 (\nabla \phi)^2 + \kappa_1 (\gamma - 2\epsilon D) \phi^2] - \frac{\kappa}{2} B(x) \phi - \ln \cosh y(x) \right] \quad (2.40)$$

donde:

$$y(x) = \kappa_1 \epsilon a^2 \nabla^2 \phi(x) + \kappa_1 (\gamma - 2\epsilon D) \phi(x)$$

Ahora bien, el valor del campo que maximiza el Hamiltoniano efectivo (con $B = 0$) es cuando ϕ es una constante ϕ_0 . En esta aproximación tenemos:

$$y_0 = \kappa_1 (\gamma - 2\epsilon D) \phi_0 \quad (2.41)$$

y el Hamiltoniano efectivo es:

$$H_{GL}(\phi_0) = \text{vol} \left(\frac{1}{4\kappa_1 (\gamma - 2\epsilon D)} y_0^2 - \ln \cosh y_0 \right) \quad (2.42)$$

Nos interesa el comportamiento de H_{GL} para ϕ pequeña, de modo que podamos expandir en serie de Taylor $\ln \cosh y$:

$$\begin{aligned} \ln \cosh y &\approx \frac{1}{2} (y_0^2 - \frac{1}{6} y_0^4 + O(y_0^6)) \\ &\approx \frac{1}{2} ((\kappa_1 (\gamma - 2\epsilon D) \phi_0)^2 - \frac{1}{6} (\kappa_1 (\gamma - 2\epsilon D) \phi_0)^4) \end{aligned} \quad (2.43)$$

Haciendo $A^{-1} = \kappa_1 (\gamma - 2\epsilon D)$ y sustituyendo en el Hamiltoniano efectivo tenemos:

$$H_{GL}(\phi_0) = \text{vol} \left(\frac{A-2}{4A^2} \phi_0^2 + \frac{1}{12A^4} \phi_0^4 \right) \quad (2.44)$$

Esta expresión indica que la función de partición es dominada por los campos ϕ cerca del mínimo de H_{GL} . Por tanto, podemos restituir el término $\nabla \phi$ y obtener:

$$H_{GL}[\phi] = a^{-D} \int d^D x \left[\frac{-\kappa_1 \epsilon a^2}{4} (\nabla \phi)^2 + \frac{A-2}{4A^2} \phi^2 + \frac{1}{12A^4} \phi^4 - \frac{\kappa}{2} B(x) \phi \right] \quad (2.45)$$

obteniendo el Hamiltoniano de Ginzburg-Landau con campo externo $B(x)$.

Cabe mencionar que la conexión que derivamos entre el modelo de Ginzburg-Landau y el modelo de Ising no es clara, pues las aproximaciones que se han hecho en el camino pueden no ser válidas. Por ejemplo, la matriz U_{ij} no es

positiva definida a menos que el parámetro γ sea lo suficientemente grande. Por otro lado, la dependencia de las constantes de acoplamiento de γ sugieren que el rango de validez no sea el cercano al punto crítico donde la aproximación de Landau predice transiciones de fase⁵. A pesar de ésto, la derivación anterior sirve como base para justificar que cerca del punto crítico el Hamiltoniano asociado al modelo de Ising puede ser expresado como el Hamiltoniano del modelo de Ginzburg-Landau pues las aproximaciones que se hacen retienen los términos relevantes y marginales, aseverando que pertenecen a la misma clase de universalidad, es decir, el conjunto de exponentes críticos que predicen no dependen de la forma detallada de la forma funcional del Hamiltoniano sino sólo de los parámetros macroscópicos.

2.6. Renormalización en Teoría Cuántica de Campos.

Finalmente mostramos en esta sección el método del grupo de renormalización en el contexto de Teoría Cuántica de Campos usando como ejemplo la teoría ϕ^4 aunque el método puede ser extendido a cualquier teoría de campos en principio. En este contexto, es necesario eliminar las divergencias que aparecen en los valores de algunos parámetros, como las masas y las constantes de acoplamiento, si queremos tener predicciones físicas.

El método de Wilson radica en estudiar las divergencias ultravioletas aislando la dependencia de la integral funcional sobre los grados de libertad a distancias cortas del campo. Usamos un corte ultravioleta Λ para aislar las divergencias, de modo que las integraciones son sobre momentos $|k| \leq \Lambda$. Este corte no toma en cuenta las fluctuaciones cuyos momentos son más grandes que el corte dado Λ . Nuestra meta es integrar sobre un rango de momentos altos y determinar la influencia de las fluctuaciones asociadas en las predicciones físicas.

Para tal efecto, consideremos la función de partición en el espacio Euclideo de la teoría ϕ^4 , que equivale a analizar el modelo de Ginzburg-Landau descrito en la sección anterior. En un sistema ferromagnético las fluctuaciones de los spines están restringidas a la escala atómica Λ para temperaturas lejanas a la crítica. Mientras esta situación se mantenga, el inverso de la longitud de correlación ξ^{-1} es del orden de Λ ($\xi^{-1} \approx \Lambda$). En la escala que nos interesa queremos $\xi^{-1} \ll \Lambda$, precisamente cerca del punto crítico, donde

⁵En la referencia [10] se encuentra una discusión amplia acerca del papel del parámetro γ en la aproximación de Landau.

los spines están correlacionados a distancias arbitrariamente grandes y los spines fluctuantes tienden a alinearse en una dirección de magnetización. En nuestro caso debemos ajustar el valor de la longitud de correlación ξ^{-1} (pues es nuestro parámetro análogo a la temperatura) de modo que lleguemos a una región donde encontremos correlaciones del campo $\phi(x)$ a distancias mucho más grandes que $1/\Lambda$.

Explícitamente tenemos:

$$Z = \int \left[\prod_{|k| \leq \Lambda} d\phi(k) \right] e^{-\int d^D x \left[\frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 + \frac{m^2}{2} \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \right]} \quad (2.46)$$

donde m y λ son las constantes de acoplamiento iniciales. El método de renormalización consiste en integrar sistemáticamente los momentos de energía alta y construir teorías efectivas a esa nueva escala. Consideremos un parámetro $s < 1$. Éste nos servirá para integrar sobre regiones pequeñas de momentos, $s\Lambda \leq |k| < \Lambda$. Al igual que en el sistemas de spines, la transformación de renormalización R_s se realiza en tres pasos:

- Integración sobre una región pequeña de momentos $k : s\Lambda \leq k \leq \Lambda$,
- Rescalamiento del momento: $k \rightarrow k' = k/s$
- Renormalización del campo: $\phi(k) \rightarrow M s^{1-D/2} \phi(k) = \phi'(k')$

Para realizar la integración en la región de momentos $s\Lambda \leq |k| < \Lambda$, definimos la variable de integración $\phi(x)$ en dos regiones como $\phi_\Lambda = \varphi + \phi_{s\Lambda}$, donde el subíndice hace referencia de la escala donde definimos las variables:

$$\varphi(k) = \begin{cases} \phi_\Lambda(k) & s\Lambda \leq |k| < \Lambda \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2.47)$$

y por otro lado mantener la variable inicial

$$\phi_{s\Lambda}(k) = \begin{cases} \phi_\Lambda(k) & |k| < s\Lambda \\ 0 & |k| > s\Lambda \end{cases} \quad (2.48)$$

De manera que la función de partición resultante es:

$$\begin{aligned} Z &= \int \left[\prod_{|k| \leq s\Lambda} d\phi_{s\Lambda}(k) \right] \int \left[\prod_{s\Lambda \leq |k| < \Lambda} d\varphi(k) \right] \exp \left\{ - \int d^D x \left[\frac{1}{2} [\nabla(\varphi + \phi_{s\Lambda})]^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{m^2}{2} (\varphi + \phi_{s\Lambda})^2 + \frac{\lambda}{4!} (\varphi + \phi_{s\Lambda})^4 \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.49)$$

Notemos que dentro de la integral existen términos del tipo:

$$\int d^D x \varphi(x) \phi_{s\Lambda}(x) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{d^D k'}{(2\pi)^D} (2\pi)^D \delta^D(k+k') \varphi^*(k) \phi_{s\Lambda}(k') \quad (2.50)$$

que se anulan debido al rango de definición de las variables. Por lo tanto tenemos:

$$\begin{aligned} Z &= \int \left[\prod_{|k| \leq s\Lambda} d\phi_{s\Lambda}(k) \right] \exp - \int d^D x \left[\frac{1}{2} (\nabla \phi_{s\Lambda})^2 + \frac{m^2}{2} \phi_{s\Lambda}^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi_{s\Lambda}^4 \right] \\ &\times \int \left[\prod_{s\Lambda \leq |k| < \Lambda} d\varphi(k) \right] \exp \left\{ - \int d^D x \left[\frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + \frac{m^2}{2} \varphi^2 + \frac{\lambda}{4!} \varphi^4 \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{\lambda}{6} \phi_{s\Lambda}^3 \varphi + \frac{\lambda}{4} \phi_{s\Lambda}^2 \varphi^2 + \frac{\lambda}{6} \phi_{s\Lambda} \varphi^3 \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.51)$$

Ahora, debemos integrar sobre la variable φ , de modo que podamos construir un Lagrangiano efectivo definido para momentos $|k| < s\Lambda$:

$$L_{\text{eff}} = \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{m^2}{2} \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4 + F[\phi]$$

donde $F[\phi]$ representa las correcciones debidas a la integración en momentos altos. Notemos que parte de tales correcciones son proporcionales a los términos del lagrangiano original.

Las correcciones son calculadas usando el método de perturbaciones, suponiendo que los términos proporcionales al parámetro λ son perturbaciones así como el término cuadrático proporcional a m^2 pues nos interesa la situación $m^2 \ll \Lambda^2$. De modo que podemos escribir la función de partición como:

$$Z = \int \left[\prod_{|k| \leq s\Lambda} d\phi_{s\Lambda}(k) \right] e^{-L[\phi_{s\Lambda}]} \int \left[\prod_{s\Lambda \leq |k| < \Lambda} d\varphi(k) \right] e^{-L_0[\varphi] - m^2 W_1[\varphi] - \lambda W_2[\varphi, \phi_{s\Lambda}]} \quad (2.52)$$

donde:

$$\begin{aligned}
L[\phi_{s\Lambda}] &= \int d^D x \left[\frac{1}{2} (\nabla \phi_{s\Lambda})^2 + \frac{m^2}{2} \phi_{s\Lambda}^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi_{s\Lambda}^4 \right] \\
L_0[\varphi] &= \int d^D x \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 = \frac{1}{2} \int_{s\Lambda \leq |k| < \Lambda} \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \varphi^*(k) \varphi(k) k^2 \\
W_1[\varphi] &= \int d^D x \frac{1}{2} \varphi^2 \\
W_2[\varphi, \phi_{s\Lambda}] &= \int d^D x \left[\frac{1}{6} \phi_{s\Lambda}^3 \varphi + \frac{1}{4} \phi_{s\Lambda}^2 \varphi^2 + \frac{1}{6} \phi_{s\Lambda} \varphi^3 + \frac{1}{4!} \varphi^4 \right] \quad (2.53)
\end{aligned}$$

En este caso los términos $W_1[\varphi]$ así como $W_2[\varphi, \phi_{s\Lambda}]$ son tratados como perturbaciones de $L_0[\varphi]$ [11]. El lagrangiano $L_0[\varphi]$ corresponde a la teoría libre sin interacciones. Así, a partir de L_0 construimos el propagador que nos ayudará a calcular las correcciones a cada orden del lagrangiano efectivo:

$$\langle \phi(x) \phi(y) \rangle_0 = \int_{\Lambda/s \leq k \leq \Lambda} \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{e^{-ik \cdot (x-y)}}{k^2} \quad \text{para } s\Lambda \leq |k| < \Lambda \quad (2.54)$$

Al realizar las integraciones sobre φ , convertimos (2.52) en una expresión de la forma:

$$Z = \int \left[\prod_{|k| \leq s\Lambda} d\phi_{s\Lambda}(k) \right] e^{-\int d^D x L_{\text{eff}}[\phi_{s\Lambda}]} \quad (2.55)$$

donde tenemos interacciones a todos los órdenes. Como segundo paso, queremos comparar la nueva funcional con la que originalmente comenzamos, así que rescalamos los momentos $k \rightarrow k/s$, $s < 1$ de manera que las integraciones se realicen en el intervalo $|k| < \Lambda$. En consecuencia generamos un rescalamiento en la unidad de distancia: $x \rightarrow xs$. Esquemáticamente tendremos:

$$\begin{aligned}
\int d^D x L_{\text{eff}} &= \int d^D x s^{-D} \left[\frac{s^2(1 + \delta Z)}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{(m^2 + \delta m^2)}{2} \phi^2 + \frac{(\lambda + \delta \lambda)}{4!} \phi^4 \right. \\
&\quad \left. + \delta C s^4 (\nabla \phi)^4 + \delta D \phi^6 + \dots \right] \quad (2.56)
\end{aligned}$$

donde los términos $\delta Z, \delta m^2, \delta \lambda \dots$ son las correcciones debidas a las integraciones en φ . El tercer paso indica renormalizar el campo ϕ . Observemos que si renormalizamos ϕ de acuerdo a:

$$\phi \rightarrow \phi \sqrt{s^{2-D}(1 + \delta Z)} = s^{1-D/2} M \phi \quad (2.57)$$

obtenemos el lagrangiano original (2.46) más correcciones debidas a la integración de momentos altos y con nuevas constantes de acoplamiento dadas por:

$$\begin{aligned}
 m'^2 &= \frac{m^2 + \delta m^2}{(1 + \delta Z)s^2} \\
 \lambda' &= \frac{\lambda + \delta\lambda}{(1 + \delta Z)^2 s^{4-D}} \\
 \delta C' &= \frac{\delta C s^D}{(1 + \delta Z)^2} \\
 \delta D' &= \frac{\delta D}{(1 + \delta Z)^3 s^{6-2D}}
 \end{aligned} \tag{2.58}$$

Este procedimiento es lo que se conoce como transformación de renormalización del lagrangiano, la cuál podemos repetir integrando grados de libertad asociados a momentos altos para obtener iteraciones sucesivas de las transformaciones (2.58) de las constantes de acoplamiento. En estas iteraciones, las constantes correspondientes a términos de orden más alto, como lo son C y D son diferentes de cero y por lo tanto tenemos contribuciones extras en las transformaciones de (2.58). Cabe mencionar que hemos definido esta transformación de renormalización suponiendo que el propagador de la teoría es invariante ante dicha transformación.

Los parámetros del lagrangiano efectivo L_{eff} pueden ser muy diferentes de aquellos del lagrangiano original L , debido que para calcular cantidades a una escala Λ_0 a la que podamos comparar con experimentos, usando un lagrangiano L a la escala Λ , se necesitan tomar en cuenta todas las correcciones cuánticas que surgen en las escalas entre Λ_0 y Λ , lo cual no sucede si utilizamos directamente el lagrangiano original L a la escala Λ_0 . En este sentido, los acoplamientos en L_{eff} están más relacionados a cantidades físicas en la escala Λ_0 .

Cerca del punto fijo L_0 , linealizamos la transformación (2.58) lo que da lugar a las transformaciones:

$$\begin{aligned}
m'^2 &= m^2 s^2 \\
\lambda' &= \lambda s^{D-4} \\
C' &= C s^D \\
D' &= D s^{2D-6} \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{2.59}$$

De modo que cerca del punto fijo considerado, tenemos un lagrangiano efectivo que sólo depende de un número finito de interacciones renormalizables (con parámetros relevantes y marginales). Así que, comenzando con un lagrangiano que puede ser muy complicado, éste degenera a un lagrangiano que contiene un número finito de términos renormalizables. Lejos del punto fijo, las transformaciones del grupo de renormalización sufren correcciones proporcionales a potencias altas de las constantes de acoplamiento. Si las correcciones son lo suficientemente grandes entonces se puede detener o incluso revertir el flujo de renormalización, creando otros puntos fijos que dan nuevos límites ultravioleta.

Notemos que éste análisis depende de la dimensionalidad del sistema: en el caso del campo escalar es posible determinar que para $D > 4$ tenemos una teoría efectiva para momentos pequeños tal que sólo la interacción proporcional a m^2 es relevante. El caso $D < 4$ el acoplamiento de ϕ^4 es un parámetro relevante. En consecuencia, al iterar la transformación de renormalización nos alejamos de la teoría libre. En este caso podemos probar que existe un punto fijo no gaussiano (llamado de Wilson-Fisher) [11], que controla el flujo de renormalización en una teoría ϕ^4 no masiva. Este nuevo punto fijo es en un principio analizado mediante perturbaciones, sin embargo en general, es posible encontrar puntos fijos cuyos parámetros de acoplamiento son grandes de manera que las transformaciones del grupo de renormalización no pueden ser entendidas mediante diagramas de Feynman. Finalmente, el caso $D = 4$ requiere más cuidado, pues tenemos que λ es un parámetro marginal, ya que se mantiene constante en la transformación de renormalización linealizada. Para el estudio de este tipo de situaciones utilizamos correcciones a las transformaciones lineales de modo que podamos inferir el comportamiento de éstas. El caso $D = 4$ predice una teoría efectiva trivial, es decir, el acoplamiento λ es cero en el límite ultravioleta. Esto implica que la teoría con interacción ϕ^4 no existe en el límite ultravioleta, sin embargo ésta es útil como modelo de una teoría cuántica de campos.

Como el factor de dilatación s es continuo, podemos transformar las ecuaciones de recursión (2.58) como ecuaciones diferenciales para s infinitesimal. Si nuestros parámetros son $\kappa_\mu(s)$ entonces tendremos:

$$\frac{d\kappa_\mu(s)}{ds} = \beta_\mu(\kappa_\nu(s)) \quad (2.60)$$

Estas ecuaciones son conocidas como ecuaciones de flujo de las constantes de acoplamiento ó funciones beta y han sido utilizadas ampliamente en la Teoría Cuántica de Campos. Estas ecuaciones describen el comportamiento de las constantes de acoplamiento al variar la escala s . Es decir, el factor de rescalamiento s se toma como una secuencia de transformaciones de renormalización infinitesimales. Para el caso de parámetro marginales, la función beta se obtiene mediante la teoría de perturbaciones, llamada función de Callan-Simanzik [11]. El resultado es que los parámetros marginales varían muy lentamente en comparación del resto.

Los puntos fijos del sistema se encuentran mediante la ecuación:

$$\beta_\mu(\kappa_\nu(s)) = 0$$

En el caso de una teoría escalar para $D < 4$ estas ecuaciones sirven para demostrar explícitamente la existencia de un punto fijo no trivial. Una vez encontrados los puntos fijos podemos calcular los exponentes críticos de la teoría. Cabe mencionar que existe un método más poderoso para calcular los exponentes críticos basado en la teoría de perturbaciones [12], el cual no lo expondremos en el presente trabajo.

CAPÍTULO 3

Cuantización por Lazos.

3.1. Programa de la Cuantización por Lazos

El programa de Cuantización por Lazos es un proyecto diseñado para construir una cuantización canónica no perturbativa para teorías de norma, la cual es independiente de una métrica de fondo. El ejemplo más representativo donde se aplica esta técnica es Relatividad General, reformulada como una teoría de norma $SU(2)$ en términos de nuevas variables llamadas de Ashtekar-Barbero [13, 14]. En este capítulo describiremos el programa de cuantización por lazos concluyendo con el caso particular de Gravedad Cuántica por Lazos.

El primer paso en la Cuantización por Lazos es construir el espacio de Hilbert cinemático \mathcal{H}_{kin} . Para la construcción de este espacio, utilizamos las ideas generales de la Teoría Cuántica de Campos Algebraica [15, 16]. Proponemos un conjunto de ciertas funcionales en el espacio de configuraciones clásicas que generan un álgebra C^* abeliana con unidad. Luego, mediante una construcción GNS obtenemos una representación de ésta álgebra en un espacio de Hilbert \mathcal{H}_{kin} donde las observables de configuración son operadores autoadjuntos. Los momentos conjugados se construyen en este espacio de manera que satisfagan las reglas de conmutación.

Finalmente, se promueven las restricciones del sistema como operadores en el espacio de Hilbert los cuales nos permiten caracterizar el espacio de estados físicos de la teoría.

3.1.1. Construcción del Espacio de Hilbert Cinemático \mathcal{H}_{kin} .

Consideremos una teoría de norma descrita en su formulación canónica mediante las variables de configuración, las conexiones suaves A_a^i (llamadas también potenciales de norma) valuadas en el álgebra de Lie \mathfrak{g} del grupo de norma G de la teoría y sus momentos conjugados E_i^a , llamados flujos generalizados del campo eléctrico, que corresponden a densidades tensoriales valuados de la misma manera en \mathfrak{g} . Al ser (A_a^i, E_i^a) un par conjugado, satisfacen las relaciones de conmutación del álgebra de Poisson:

$$\begin{aligned} \{A_a^i(t, x), A_b^j(t, y)\} &= 0 \\ \{E_i^a(t, x), E_j^b(t, y)\} &= 0 \\ \{A_a^i(t, x), E_j^b(t, y)\} &= \delta_j^i \delta_a^b \delta^3(x, y) \end{aligned}$$

Siguiendo el programa de cuantización de Dirac [17], debemos encontrar una representación de éstas variables canónicas como operadores en un cierto espacio de Hilbert que satisfagan las relaciones de conmutación de operadores.

Construimos un espacio de Hilbert \mathcal{H}_{kin} a partir de ciertas funcionales de las variables de configuración. Dado que la Cuantización por Lazos esta pensada para teorías de norma, el espacio de configuraciones \mathcal{A}_Σ es el espacio de conexiones A_a^i definidas en una variedad Σ como una 1-forma valuada en el álgebra de Lie \mathfrak{g} del grupo de norma G . Una cantidad natural asociada con las conexiones A_a^i son las holonomías $h_e[A]$ a lo largo de una curva, definidas de la siguiente manera:

$$h_e[A] = P \exp - \int_e A$$

dada una curva orientada $e : [0, 1] \rightarrow \Sigma$. Notemos que la holonomía caracteriza la conexión A al definir el transporte paralelo a lo largo de la curva e y se puede ver como un elemento de grupo de G . Escogemos entonces la holonomía $h_e[A]$ como una funcional básica de las conexiones $A \in \mathcal{A}_\Sigma$.

Sin embargo, sabemos que a pesar de que el espacio de configuraciones clásico se conforma de campos suaves bajo alguna norma, los estados de la teoría cuántica dependerán de un espacio de configuraciones más general. Así, es adecuado introducir el concepto de conexiones generalizadas $A \in \bar{\mathcal{A}}_\Sigma$. Una conexión generalizada $A \in \bar{\mathcal{A}}_\Sigma$ es una asignación de un elemento de grupo $h_e[A] \in G$ a una curva e , sin condiciones de continuidad. Identificamos el espacio de conexiones generalizadas $\bar{\mathcal{A}}_\Sigma$ como el espacio de configuraciones cuánticas. Más adelante describiremos las propiedades de este espacio de conexiones generalizadas.

Funciones Cilíndricas

El álgebra de observables cinemáticas que nos servirá para construir el espacio de Hilbert \mathcal{H}_{kin} es en este caso el álgebra de *funciones cilíndricas* Cyl de las conexiones generalizadas definidas de la siguiente manera:

Dada una gráfica Γ con N aristas¹ y una función suave $f : G^N \rightarrow \mathbb{C}$, el elemento $\psi_{\Gamma,f} \in \text{Cyl}_\Gamma$ es una funcional definida en la gráfica Γ como:

$$\psi_{\Gamma,f}[A] = f(h_{e_1}, \dots, h_{e_N}) \quad (3.1)$$

El espacio Cyl se construye tomando todas las gráficas $\Gamma \subset \Sigma$, es decir,

$$\text{Cyl} = \bigcup_{\Gamma} \text{Cyl}_\Gamma$$

Este espacio es un álgebra cerrada bajo la multiplicación, es decir, dadas dos funciones $\psi_{\Gamma,f}, \psi_{\Gamma',f} \in \text{Cyl}$, su multiplicación es una función $\psi_{\tilde{\Gamma},f} \in \text{Cyl}$ tal que $\Gamma \subset \tilde{\Gamma}$ y $\Gamma' \subset \tilde{\Gamma}$.

Notemos que el álgebra Cyl es una álgebra C^* abeliana con unidad² llamada usualmente en la literatura el álgebra de holonomías, pues las funcionales $\psi_{\Gamma,f}[A]$ sólo dependen de las conexiones generalizadas. El ejemplo más simple de tales funciones cilíndricas es el lazo de Wilson:

$$W_l[A] = \text{Tr}(h_l[A]) \quad (3.2)$$

donde l es una curva cerrada. Debido a las propiedades de las holonomías y de la traza es fácil ver que ésta es una cantidad invariante de norma. Otro ejemplo importante es la generalización natural de los lazos de Wilson llamado *spin network* [28, 29]. Su construcción se basa en asociar representaciones irreducibles D^j del grupo de norma G a cada vértice e de una gráfica arbitraria Γ . A cada vértice v le asociamos además un contractor I_v . Explícitamente el spin network lo escribimos como:

$$\psi_{\{\Gamma,I,j\}} = \left[\prod_{e \in \Gamma} D^{j_e}(h_e)_{\beta_e}^{\alpha_e} \prod_{v \in \Gamma} I_v^{\beta_{v_1} \beta_{v_2} \dots \beta_{N_k}}_{\alpha_{N_1} \alpha_{N_2} \dots \alpha_{N_k}} \right] \quad (3.3)$$

¹Una gráfica Γ es una colección de curvas $e \subset \Sigma$, llamadas aristas, unidas en a lo más sus extremos formando vértices.

²Matemáticamente, Cyl es un espacio vectorial normado de funciones con un operador de multiplicación bilineal, asociativo y un operador antilineal que actúa como conjugación $*$: $\text{Cyl} \rightarrow \text{Cyl}$ tal que si $f \in \text{Cyl}$ entonces $f^{**} = f$. Además como Cyl es un álgebra C^* entonces se cumple que para todo elemento $f \in \text{Cyl}$ se tiene $\|f^*\| = \|f\|$ y $\|ff^*\| = \|f\|^2$.

donde suponemos una contracción total de índices. Estas funciones juegan un papel importante en la cuantización por lazos, como veremos más adelante.

Una vez descrita el álgebra de observables, buscamos estados (algebraicos) $\mu : \text{Cyl} \rightarrow \mathbb{C}$ como aplicaciones lineales positivas y normalizadas que actúen sobre las observables $\psi_{\Gamma,f}$ [18, 27] .

En particular, como trabajamos con una teoría de norma, buscamos un estado μ_{AL} tal que sea invariante ante transformaciones de norma, llamado medida de Ashtekar-Lewandowski [27]. De este modo definimos un producto escalar, es decir, dada una función cilíndrica $\psi_{\Gamma,f}[A] \in \text{Cyl}$, definimos el estado μ_{AL} como:

$$\mu_{AL}[\psi_{\Gamma,f}] = \int \left(\prod_{e \in \Gamma} dh_e \right) f(h_{e_1}, \dots, h_{e_N}) \quad (3.4)$$

donde dh_e es la medida de Haar del grupo de norma G . De modo que el producto escalar de funciones cilíndricas es :

$$\mu_{AL}[\overline{\psi_{\Gamma,f}} \psi_{\Gamma',g}] = \int \left(\prod_{e \in \tilde{\Gamma}} dh_e \right) \overline{f(h_{e_1}, \dots, h_{e_N})} g(h_{e_1}, \dots, h_{e_N}) \quad (3.5)$$

donde $\Gamma \subset \tilde{\Gamma}$ y $\Gamma' \subset \tilde{\Gamma}$. Mediante la construcción de Gelfand-Naimark-Segal (GNS) [15], encontramos una representación adecuada del álgebra Cyl como operadores. Luego, construimos \mathcal{H}_{kin} haciendo una completación de Cauchy de este espacio en la norma inducida por (3.5) para obtener $\mathcal{H}_{kin} = L^2(\bar{\mathcal{A}}_{\Sigma}, \mu)$.

Cabe mencionar que existe una construcción de un espacio de Hilbert análoga a la anterior en la versión Hamiltoniana de la teoría de red [6], sin embargo la interpretación de (3.5) es diferente: los estados no viven en una sola red sino en todas las posibles redes de la variedad Σ .

Operadores en \mathcal{H}_{kin}

Finalmente, necesitamos describir los operadores que actúan en el espacio de Hilbert \mathcal{H}_{kin} construido anteriormente. Definimos los operadores asociados a la teoría cuántica correspondientes a las variables de configuración A_a^i y sus conjugada E_i^a . El operador \hat{h}_e que depende de las variables de configuración actúa por multiplicación sobre los estados del espacio de Hilbert, es decir:

$$(\hat{h}_e \psi)[A] = h_e[A] \psi[A]$$

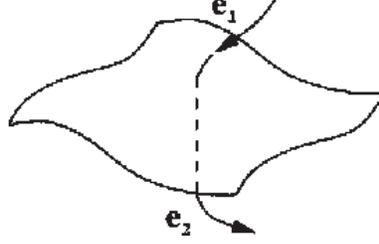


Figura 3.1: Curva e que atraviesa la superficie S en un punto. La curva se divide en dos curvas e_1 y e_2 , donde definimos las holonomías h_{e_1} y h_{e_2} .

De hecho, cualquier función cilíndrica es un operador de multiplicación en este espacio. El momento conjugado \hat{E}_i^a es un operador distribucional que actúa en Cyl como una derivada funcional con respecto a la conexión.

$$\hat{E}[S, \alpha] = \int_S (d^2s) \partial_{s_1} x^a \partial_{s_2} x^b \epsilon_{abc} \hat{E}_i^c \alpha^i = \int_S (d^2s) \partial_{s_1} x^a \partial_{s_2} x^b \epsilon_{abc} \alpha^i \frac{\delta}{\delta A_c^i} \quad (3.6)$$

donde α^i son funciones de soporte compacto valuadas en el álgebra de Lie \mathfrak{g} del grupo de norma G y $\hat{E}_i^c \epsilon_{abc}$ es el operador asociado con la dos-forma valuada en \mathfrak{g} . Una interpretación de \hat{E}_i^a es considerarlo como la generalización del flujo eléctrico a través de una superficie S .

No es difícil calcular cuál es la acción del operador de flujo $\hat{E}[S, \alpha]$ sobre una holonomía $h_e[A]$. Dada la curva e que atraviesa una superficie S , ésta se descompone en la composición de dos nuevas curvas e_1 y e_2 obteniendo las holonomías h_{e_1} y h_{e_2} respectivamente como en la figura. La acción del operador de flujo es entonces:

$$\hat{E}[S, \alpha] h_e[A] = \alpha^i h_{e_1} \tau_i h_{e_2} \quad (3.7)$$

donde τ_i es el generador del grupo de norma. Vemos que el operador de flujo es un operador autoadjunto bien definido en el espacio de Hilbert. De manera que se puede demostrar que el álgebra que forman (h_e, E_i^a) tiene una representación en el espacio de Hilbert \mathcal{H}_{kin} como operadores conjugados, como operadores que satisfacen las reglas de conmutación canónicas.

Implementación de las Restricciones.

El siguiente paso en la Cuantización por Lazos es promover las restricciones de la teoría clásica $C(\alpha)$ a ciertos operadores en el espacio de Hilbert construido anteriormente. Describimos de manera general este procedimiento,

dejando una discusión más extensa en el ejemplo de gravedad cuántica de la siguiente sección.

Observemos que las restricciones de primera clase³ juegan un papel importante, pues están asociadas a transformaciones unitarias R_g con $g \in G$, que dejan invariantes a los estados físicos. Una vez promovidas a operadores, las restricciones $\hat{C}[\alpha]$ deben formar un álgebra cerrada con el conmutador pues de otra manera tendríamos una teoría cuántica que no es consistente (ver por ejemplo [17]).

En la Cuantización de Lazos se han podido implementar de manera rigurosa, las restricciones que están asociadas a simetrías internas bajo el grupo de norma G y la restricción de difeomorfismos, presente en teorías libres de un fondo no dinámico [18]. Para las restricciones asociadas a simetrías internas, promovemos R_g a operador y buscamos soluciones $\psi^G \in \mathcal{H}_{kin}$ de la ecuación siguiente:

$$\hat{R}_g \psi^G = \psi^G, \quad \forall g \in G. \quad (3.8)$$

Es decir, los estados ψ^G son invariantes ante transformaciones de norma y forman el espacio \mathcal{H}_{kin}^G . Sin embargo, las restricciones de difeomorfismos son especiales. Por un lado, las transformaciones R_ϕ , con $\phi \in \text{Diff}(\Sigma)$ no son débilmente continuas y no existe un operador que genere transformaciones infinitesimales. Por el otro, el espacio de soluciones de (3.8) para las restricciones de difeomorfismos no es de relevancia física, pues consiste en funciones que son constantes. Empero, veremos que los estados invariantes ante difeomorfismos son aquellos que viven en el dual \mathcal{H}_{kin}^* y satisfacen:

$$\hat{R}_\phi \psi^* = \psi^* \quad \psi^* \in \mathcal{H}_{kin}^* \quad (3.9)$$

Notemos que el espacio de estados invariantes de norma aún no contiene información acerca de la dinámica del sistema, por lo que es necesario implementar la restricción escalar $\hat{C}[N]$, es decir buscar soluciones de la ecuación $\hat{C}[N]\psi = 0$ y así caracterizar los estados físicos de la teoría cuántica. Sin embargo, se tienen fuertes argumentos que indican que no existe una definición de $\hat{C}[N]$ universalmente considerada como físicamente correcta [14, 18]. Debido a esto, no presentamos la implementación de la restricción escalar.

³Decimos que un conjunto de restricciones $[R_j]$ son de primera clase si $\{R_i, R_j\} \approx 0 \quad \forall i, j$, es decir, que $\{R_i, R_j\} = c_{ij}^k R_k$.

3.2. Gravedad Cuántica por Lazos.

El ejemplo más importante de la Cuantización por Lazos es sin duda la cuantización de la Teoría de Relatividad General, llamada Gravedad Cuántica por Lazos. Su enfoque principal es considerar que la teoría de Einstein puede ser cuantizada de manera no perturbativa, considerando los fundamentos tanto de Relatividad General como los de Teoría Cuántica de Campos. Una bibliografía extensa del área se puede encontrar en [19].

3.2.1. Variables de Ashtekar-Barbero

La cuantización se basa en la reformulación de la teoría de Einstein en términos de una conexión $\mathfrak{su}(2)$ A_a^i y una densidad de triada E_i^a , que permiten describir RG como una teoría de norma (independiente de una métrica de fondo) tipo Yang-Mills con grupo $SU(2)$ [20]. Presentamos la derivación de las nuevas variables siguiendo la referencia [14].

Empezamos con la formulación ADM⁴ de Relatividad General. Tomemos una variedad M y una foliación de ésta, de manera que tengamos $M = \Sigma \times \mathbb{R}$. Las variables de configuración por cada hipersuperficie Σ son, la métrica h_{ab} inducida sobre Σ ; las funciones de corrimiento N_a y de lapso N que caracterizan las componentes normales y tangenciales de cualquier vector v^a con respecto a Σ . Introducimos π^{ab} como el momento conjugado a la 3-métrica h_{ab} relacionado directamente con la curvatura extrínseca K^{ab} mediante $\pi^{ab} = h^{-1/2}(K^{ab} - Kh^{ab})$. La estructura simpléctica que se tiene es la siguiente:

$$\{h_{ab}(x), h_{cd}(y)\} = 0 \quad (3.10)$$

$$\{\pi^{ab}(x), \pi^{cd}(y)\} = 0$$

$$\{\pi^{ab}(x), h_{cd}(y)\} = 2\lambda\delta_{(c}^a\delta_{d)}^b\delta(x, y) \quad (3.11)$$

donde $\lambda = 8\pi G/c^3$, factor proveniente de la acción de Einstein-Hilbert:

$$S[g_{\mu\nu}] = \frac{1}{2\lambda} \int d^4x \sqrt{-g}R.$$

La densidad Hamiltoniana obtenida después de introducir estas variables es:

$$H = N_a C^a(\pi^{ab}, h_{ab}) + NC(\pi^{ab}, h_{ab}) \quad (3.12)$$

⁴Véase por ejemplo [21, 22] para una derivación detallada de ésta formulación.

C^a es la restricción vectorial y C es la restricción escalar. Explícitamente:

$$C^a(\pi^{ab}, h_{ab}) = 2^{(3)}\nabla_a(h^{-1/2}\pi^{ab}) \quad (3.13)$$

$$C(\pi^{ab}, h_{ab}) = h^{-1/2}[(^{(3)}R - h^{-1}\pi_{ab}\pi^{ab} + \frac{1}{2}h^{-1}\pi^2)] \quad (3.14)$$

donde h es el determinante de la métrica y $\pi = \pi^a_a = h_{ab}\pi^{ab}$. Para nuestro propósito es conveniente hacer un cambio de variables, utilizando el formalismo de triadas. Introducimos la triada como una base ortonormal $\{e_a^i\}$ tales que se satisfacen:

$$h_{ab} = e_a^i e_b^j \eta_{ij} \quad (3.15)$$

considerando η_{ij} la métrica Euclideana en 3 dimensiones. Por otro lado introducimos la 1-forma ω_a^i llamada conexión de spin, compatible con la triada $\{e_a^i\}$, es decir, ω_a^i es solución de las ecuaciones de estructura de Cartan,[21, 22].

Las cantidades definidas anteriormente nos sirven para introducir nuevas variables conjugadas de la siguiente manera: Definimos la densidad de triadas $E_i^a = \epsilon^{abc}\epsilon_{ijk}e_b^j e_c^k$ y la cantidad $K_a^i = E^{-1/2}K_{ab}E_j^b \delta^{ij}$. Ambas cantidades son canónicamente conjugadas y a partir de ellas podemos definir las variables de Ashtekar-Barbero:

$$E_i^a = \epsilon^{abc}\epsilon_{ijk}e_b^j e_c^k \quad (3.16)$$

$$A_a^i = \omega_a^i + \gamma K_a^i \quad (3.17)$$

donde la conexión (3.17) es la llamada conexión de Ashtekar-Barbero [23, 24, 25]. Notemos que existe una libertad en el parámetro γ dentro de la definición (3.17). Éste es el parámetro de Immirzi, que jugará un papel importante en la teoría cuántica [26]. De nuevo, las variables satisfacen la siguiente estructura simpléctica:

$$\{E_i^a(x), E_j^b(y)\} = 0 \quad (3.18)$$

$$\{A_a^i(x), A_b^j(y)\} = 0$$

$$\{E_j^a(x), A_b^i(y)\} = \lambda\gamma\delta_b^a\delta_j^i\delta(x, y) \quad (3.19)$$

Además, debido a la libertad que se tiene en escoger marcos de referencia locales $\{e_i^a\}$ mediante rotaciones de $SO(3)$ (que actúan en los índices internos $i = 1, 2, 3$), se tiene como consecuencia una restricción extra $G_i(A, E)$ sobre las variables conjugadas (3.16) y (3.17) que impone una simetría de norma $SO(3)$ en la teoría, análoga a la ley de Gauss. De hecho (3.17) debe de ser una conexión valuada en el álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$ para que sea compatible con

la triada (3.16). Por conveniencia, escogemos trabajar con el grupo $SU(2)$ (tomando en cuenta que el álgebra de Lie de ambos grupos es la misma), de modo que la conexión de Ashtekar-Barbero es una $\mathfrak{su}(2)$ -conexión.

La densidad hamiltoniana que resulta con las nuevas variables canónicas es el siguiente:

$$H = N^a C_a(E_i^a, A_a^i) + NC((E_i^a, A_a^i)) + \alpha^i G_i(E_i^a, A_a^i) \quad (3.20)$$

o bien tomando la integral sobre la hipersuperficie Σ , el Hamiltoniano es:

$$H(N^a, N, \alpha^i) = C'(N^a) + C(N) + G(\alpha) \quad (3.21)$$

con:

$$G(\alpha^i) = \int_{\Sigma} d^3x \alpha^i G_i(E_i^a, A_a^i) \quad (3.22)$$

$$C'(N^a) = \int_{\Sigma} d^3x N^a C_a(E_i^a, A_a^i) \quad (3.23)$$

$$C(N) = \int_{\Sigma} d^3x NC((E_i^a, A_a^i)) \quad (3.24)$$

Explícitamente, escribimos los integrandos de las restricciones:

$$\begin{aligned} G_i(E_i^a, A_a^i) &= \epsilon_{ij}^k K_b^j E_k^b = D_a E_i^a \\ C_a(E_i^a, A_a^i) &= E_j^a F_{ab}^j - 2(1 + \gamma^2) K_a^i G_i \\ C(E_i^a, A_a^i) &= \frac{E_i^a E_j^b}{E^{1/2}} \left(\epsilon_{ij}^k F_{ab}^k - 2(1 + \gamma^2) K_{[a}^i K_{b]}^j \right) \end{aligned}$$

$D_a E_i^a = \partial_a E_i^a + \epsilon_{ij}^k A_a^j E_k^a$ es la derivada covariante de la densidad de triadas y las expresiones para las restricciones las escribimos utilizando la curvatura $F_{ab}^j = \partial_a A_b^j - \partial_b A_a^j + \epsilon_{jk}^i A_a^j A_b^k$ inducida por (3.17).

La restricción (3.22) genera transformaciones infinitesimales de $SU(2)$ tal como en la teoría de Yang-Mills, por lo que la llamamos restricción de Gauss. La transformación asociada es $R_g = \exp(i\omega \cdot \tau)$ donde $\tau = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ son los generadores de $SU(2)$ y $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ son los parámetros que definen la transformación por $g \in SU(2)$; (3.23) es la restricción vectorial que impone una simetría de la teoría ante el grupo de difeomorfismos $\text{Diff}(\Sigma)$ y (3.24) genera “evolución” temporal, (por supuesto, dada una norma temporal en RG).

3.2.2. Cuantización de la Gravedad.

Una vez definidas las variables adecuadas en nuestro ejemplo, la Cuantización por Lazos se sigue directamente como se describió en la sección anterior donde ahora el grupo de norma es $SU(2)$ y las variables canónicas que son promovidas a operadores son (3.16) y (3.17). De igual manera, la representación que usamos para los estados es la llamada de representación de conexiones, donde el espacio de Hilbert es un espacio $\mathcal{H}_{kin} = L^2(\bar{\mathcal{A}}_\Sigma, \mu_{AL})$ de funcionales cuadrado integrables sobre el espacio de conexiones generalizadas con respecto a la medida μ_{AL} (llamada medida de Ashtekar-Lewandowski [27]).

El espacio de Hilbert cinemático \mathcal{H}_{kin} esta generado por los spin networks [28, 29] definidos en (3.3) y el producto escalar entre funciones cilíndricas esta dado por (3.5), donde la medida es la medida de Haar asociada al grupo $SU(2)$. Las holonomías actúan como operadores de multiplicación definidas en (3.1.1) y las triadas (3.6) (definidas bajo una integral de superficie) actúan como ciertos operadores vectoriales que resultan ser derivadas funcionales con respecto a las conexiones.

Lo que resta es buscar soluciones a las ecuaciones (3.8) y (3.9):

$$\begin{aligned}\hat{R}_g \psi^G &= \psi^G, \quad \forall g \in G. \\ \hat{R}_\phi \psi^* &= \psi^*, \quad \forall \phi \in \text{Diff}(\Sigma)\end{aligned}$$

con $\psi^G \in \mathcal{H}_{kin}^G$ y $\psi^* \in \mathcal{H}_{Diff}$, Las ecuaciones anteriores tienen soluciones descritas por estados que son invariantes ante transformaciones del grupo $SU(2)$ y $\text{Diff}(\Sigma)$. Sin embargo, la solución de la restricción escalar $\hat{C}(N)$ está lejos de ser completamente entendida, como se verá más adelante.

Restricción de Gauss.

Como la restricción R_g representa a las transformaciones del grupo de norma $SU(2)$, buscamos soluciones de la ecuación (3.8) que sean estados $\psi^G \in \mathcal{H}_{kin}$ invariantes ante transformaciones del grupo $SU(2)$ y que formen el subespacio $\mathcal{H}_{kin}^G \subset \mathcal{H}_{kin}$.

Para construir el espacio de estados invariantes de norma, tomamos \hat{R}_g , el operador que representa una transformación para todo $g \in SU(2)$. Tomando en cuenta que la holonomía transforma como $h_e[A] \rightarrow g_i h_e[A] g_f^{-1}$, donde $g_i = g(x(0))$ y $g_f = g(x(1))$, entonces la acción del operador unitario \hat{R}_g sobre la base de spin networks en \mathcal{H}_{kin} es:

$$\hat{R}_g \psi_{\{\Gamma, I, j\}} = \left[\prod_{e \in \Gamma} D^{j_e} (g_{e_i} h_e g_{e_f}^{-1})_{\beta_e}^{\alpha_e} \prod_{v \in \Gamma} I_{v \alpha_{N_1} \alpha_{N_2} \dots \alpha_{N_k}}^{\beta_{v_1} \beta_{v_2} \dots \beta_{N_k}} \right] \quad (3.25)$$

Notemos que el operador \hat{R}_g actúa sólo en los vértices de la gráfica Γ . Si tomamos la acción de todos los elementos de grupo $g \in \text{SU}(2)$, definimos el proyector sobre el espacio de soluciones de la restricción de Gauss (3.8):

$$P_G = \int_{\text{SU}(2)} Dg R_g \quad (3.26)$$

Al actuar sobre los spin networks, el proyector P_G caracteriza los estados invariantes de norma ψ^G seleccionando los contractores de cada vértice $I_{v \alpha_{N_1} \alpha_{N_2} \dots \alpha_{N_k}}^{\beta_{v_1} \beta_{v_2} \dots \beta_{N_k}}$ que pertenecen al subespacio invariante del producto tensorial

$$V^{j_1} \otimes V^{j_2} \otimes \dots \otimes V^{j_{N_k}}$$

de los espacios correspondientes a las representaciones irreducibles que etiquetan las aristas que llegan o salen del vértice v . De manera que los estados que son solución de la restricción (3.8) se pueden escribir como $\psi^G = P_G \psi$ con $\psi \in \mathcal{H}_{kin}$.

Restricción de Difeomorfismos.

Usando la misma idea que anteriormente, buscamos estados ψ^{Diff} tales que sean solución de la ecuación (3.9). Definimos entonces \hat{R}_ϕ el operador unitario que representa transformaciones bajo el difeomorfismo $\phi \in \text{Diff}(\Sigma)$. La acción de \hat{R}_ϕ sobre la base de spin networks es:

$$\hat{R}_\phi(\psi_{\{\Gamma, I, j\}}) = \psi_{\{\phi^{-1}(\Gamma), I, j\}} \quad (3.27)$$

donde hemos tomado en cuenta que la holonomía transforma como $h_e[A] \rightarrow h_e[\phi^* A] = h_{\phi^{-1}e}[A]$ y $\phi^* A$ denota la acción de $\phi \in \text{Diff}(\Sigma)$ en la conexión, es decir, movemos la gráfica Γ con ϕ^{-1} . Sin embargo, observemos que el estado $\hat{R}_\phi(\psi_{\{\Gamma, I, j\}})$ es un estado ortogonal a $\psi_{\{\Gamma, I, j\}}$ bajo el producto escalar (3.5), pues son estados que están definidos en gráficas diferentes. Por lo tanto no es posible obtener un generador de transformaciones infinitesimales que actúen en \mathcal{H}_{kin} , Y además los estados ψ^{Diff} que buscamos no están en \mathcal{H}_{kin} . Afortunadamente, se pueden encontrar soluciones relevantes a (3.9) dentro del espacio dual \mathcal{H}_{kin}^* formado por funcionales lineales Ψ que actúan en los estados ψ .

Notemos que la acción de \hat{R}_ϕ en los elementos $\Psi \in \mathcal{H}_{kin}^*$ esta dada por

$$\hat{R}_\phi(\Psi)(\psi) = \Psi(\hat{R}_{\phi^{-1}}\psi) \quad (3.28)$$

Por lo tanto los estados que son invariantes ante difeomorfismos satisfacen:

$$\Psi(\hat{R}_\phi\psi) = \Psi(\psi) \quad (3.29)$$

o equivalentemente $\hat{R}_\phi(\Psi)(\psi) = \Psi(\psi)$. Por lo tanto, las soluciones de la restricción de difeomorfismos las escribimos formalmente mediante la aplicación $P_{Diff} : \mathcal{H}_{kin} \rightarrow \mathcal{H}_{kin}^*$

$$P_{Diff}(\psi)(\psi') = \sum_{\phi} \langle \hat{R}_\phi\psi, \psi' \rangle \quad (3.30)$$

donde la expresión \langle , \rangle denota el producto escalar definido anteriormente y la suma es sobre todos los difeomorfismos $\phi \in \text{Diff}(\Sigma)$. Un cuidadoso estudio en [30] logra una definición rigurosa de (3.30) en la que la suma siempre es finita.

Restricción escalar.

La última restricción que resta por analizar es la restricción escalar (3.24). Esta restricción es altamente no lineal y su cuantización trae consigo varios problemas, entre otros, la ambigüedad que se tiene en el ordenamiento de las variables. El problema parece simplificarse con la introducción de una nueva funcional que satisface ciertas identidades relacionadas con el paréntesis de Poisson que permiten reescribir (3.24) de manera más simple [31]. Esto sugiere que podemos cuantizar de manera estándar, promoviendo paréntesis de Poisson a conmutador y las variables a operadores. El operador resultante modifica el spin network agregando aristas de manera que los nuevos nodos tienen volumen nulo. La derivación de este procedimiento se encuentra en [32, 33, 34].

Sin embargo, la definición de la restricción escalar dada en [32, 33] implica que las soluciones que describen la dinámica de la teoría cuántica dependan de un vasto número de ambigüedades⁵, por lo que tenemos una infinidad de teorías matemáticamente consistentes que describen la dinámica. Incluso, existen argumentos que indican que ninguna de ellas tiene como límite clásico a Relatividad General.

⁵Ver [18, 35] así como el libro de Rovelli [13] para una descripción de estas ambigüedades.

Operadores Geométricos: Area y Volumen.

El operador de flujo $\hat{E}[S, \phi]$ definido en (3.6) es un operador que naturalmente induce una acción muy simple en los spin networks, inferida de su acción sobre holonomías (3.7). Debido a su origen geométrico podemos construir cantidades, cuyas implicaciones físicas son importantes en gravedad cuántica. El primero de éstos operadores es el de área [36, 37]. Clásicamente, el área A_S de una superficie S esta dada por:

$$A[S] = \int_S d^2\sigma \sqrt{E_i^a E_j^b \delta^{ij} n_a n_b} \quad (3.31)$$

o bien expresando la integral como el límite de una suma de Riemann definida sobre una partición de N pequeñas superficies S_n de S , reescribimos la expresión anterior de la siguiente manera:

$$A[S] = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_n^N \sqrt{E^2[S_n]} \quad (3.32)$$

donde $E^2[S] = E_i[S]E^i[S]$ y $E_i[S]$ es el flujo de E_i^a que pasa por la superficie S :

$$E_i[S, \alpha] = \int_S (d^2s) \partial_{s_1} x^a \partial_{s_2} x^b \epsilon_{abc} \hat{E}_i^c \alpha \quad (3.33)$$

Podemos entonces escribir el operador de área cuántica asociado a (3.32), donde $E_i[S]$ se promueve al operador de flujo cuántico $\hat{E}[S]$ definido en (3.6). En general dado un spin network que intersecta en varios puntos la superficie S , tomamos el operador asociado a (3.32) y construimos el operador de área dada una partición de N superficies pequeñas S_n :

$$\hat{A}[S] = \sum_n^N \sqrt{\hat{E}^2[S_n]} \quad (3.34)$$

donde suponemos que cada pequeña superficie S_n contiene a lo más un punto de intersección p con la gráfica Γ del spin network. La acción sobre el spin network puede ser inferida a partir de la acción de (3.6). Supongamos que existe un punto de intersección p entre la hipersuperficie S y la gráfica Γ donde esta definido el spin network. Si j es la representación de la arista que cruza la superficie, entonces cada operador $\hat{E}[S]$ inserta un generador τ_i de $SU(2)$ en la intersección, tal como (3.7) lo indica. De modo que la doble acción del operador de flujo sobre el mismo spin network inserta el operador

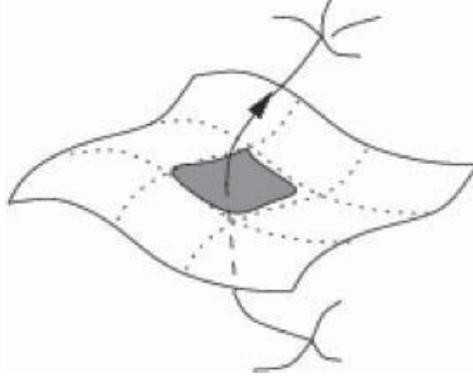


Figura 3.2: Superficie S y la acción del operador de flujo $E_i[S]$, mediante un spin network intersectado en la superficie.

de Casimir del grupo $SU(2)$ $\tau_i \tau^i$ en la intersección. El resultado final de la acción del operador de área es:

$$\hat{A}[S] \left(\psi_{\{\Gamma, j, l\}}[A] \right) = 8\pi\gamma l_p^2 \sum_{p \in S \cap \Gamma} \sqrt{j_p(j_p + 1)} \psi_{\{\Gamma, j, l\}}[A] \quad (3.35)$$

donde j_p es la representación de la arista del spin network que cruza la superficie en el punto p y l_p es la distancia de Planck. Como consecuencia de (3.35), la base de spin networks son eigenestados de todos los operadores de área cuántica cuyo espectro de eigenvalores está dado en (3.35), [36, 13].

El otro operador de gravedad cuántica físicamente relevante, es el operador de volumen [36, 38, 39]. Clásicamente el volumen de una región $\mathcal{R} \subset \Sigma$ está dado por

$$V[\mathcal{R}] = \int_{\mathcal{R}} d^3x \sqrt{\frac{1}{3!} |\epsilon_{abc} \epsilon^{ijk} E_i^a E_j^b E_k^c|}. \quad (3.36)$$

La integral anterior puede ser expresada tomando el límite de una suma de Riemann, como en el caso anterior, esta vez tomando una partición de la región \mathcal{R} en regiones \mathcal{R}_n tridimensionales:

$$V[\mathcal{R}] = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_n^N \left(\sqrt{\frac{1}{3!} |\epsilon_{abc} \epsilon^{ijk} E_i^a E_j^b E_k^c|} \right)_n \quad (3.37)$$

Para el operador de volumen $\hat{V}[\mathcal{R}]$ que actúa en un spin network, será necesario escoger una partición de modo que cada región \mathcal{R}_n contenga a lo más

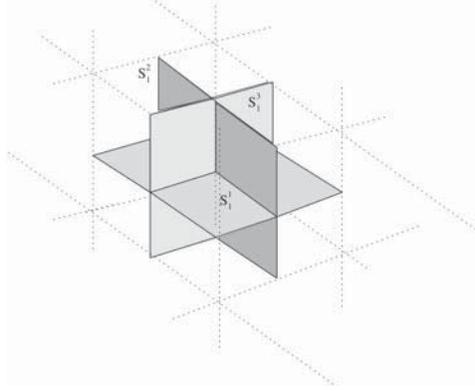


Figura 3.3: Partición en superficies S_1^j necesaria para el operador de volumen.

un vértice de la gráfica del spin network y superficies S_n^a que cubren \mathcal{R}_n como en la figura.

La expresión concreta se escribe como:

$$\hat{V}[\mathcal{R}] = \sum_n^N \sqrt{\frac{1}{3!} \left| \epsilon_{abc} \epsilon^{ijk} \hat{E}_i[S_n^a] \hat{E}_j[S_n^b] \hat{E}_k[S_n^c] \right|} \quad (3.38)$$

El análisis del operador de volumen rebasa las intenciones de esta sección, pues se requiere detalles técnicos que no se han dado hasta ahora. Sin embargo, mencionamos dos aspectos importantes: Existen dos regularizaciones distintas del operador de volumen. Una de ellas, es puramente combinatoria, introducida por Rovelli y Smolin [36] mientras que la otra, propuesta por Ashtekar y Lewandowski, toma en cuenta la estructura diferencial de la variedad [38]. El segundo aspecto importante se refiere al espectro del operador de volumen. Es posible demostrar que el espectro del operador de volumen (3.38) es discreto, empero sólo se conoce la solución al problema de eigenvalores para este operador en casos concretos (Véase [40, 41, 42, 43]).

Spinfoams.

Hasta ahora, hemos presentado la Teoría de Gravitación Cuántica por Lazos en su formulación Hamiltoniana (o de datos iniciales). Sin embargo existe una versión espacio-tiempo covariante de gravedad por lazos que se ha desarrollado en los últimos años llamada formulación de *spinfoam*. En esta sección sólo mencionamos los aspectos básicos de spinfoams así como los

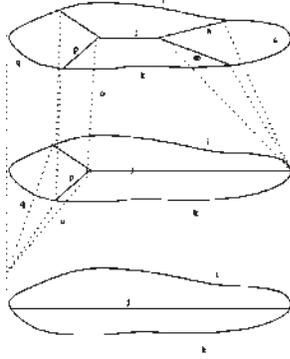


Figura 3.4: Ejemplo de un spin foam en tres dimensiones.

diferentes modelos que han sido objeto de estudio recientemente. Revisiones detalladas acerca de esta formulación las podemos encontrar en [44, 45, 46].

Los spinfoams han sido motivados por la esperanza de calcular amplitudes de transición en gravedad cuántica, expresadas como sumas sobre trayectorias. Éstos son objetos de carácter combinatorio que representan al espacio-tiempo y en consecuencia son independientes de una métrica de fondo.

Dentro del procedimiento de Reisenberger-Rovelli [47, 48] los spinfoams surgen de la formulación de datos iniciales. Consideremos la restricción escalar cuántica $\hat{C}(N)\psi = 0$ asociada a (3.24). Las soluciones de la restricción escalar pueden ser caracterizadas por una aplicación $P_C : \mathcal{H}_{kin} \rightarrow \mathcal{H}_{phys}$ del espacio de Hilbert cinemático al Kernel de $\hat{C}(N)$. Formalmente podemos escribir la aplicación P_C como:

$$P_C = \int D[N] \exp \left[i \int_{\Sigma} N(x) \hat{C}(x) \right] \quad (3.39)$$

De esta manera, el estado $P_C\psi$ es un estado que satisface todas las restricciones de la teoría. Además esta aplicación induce un producto escalar en el espacio de soluciones: Dados dos estados $P_C\psi$ y $P_C\psi'$, definimos el producto escalar como: $\langle P_C\psi, P_C\psi' \rangle \doteq \langle P_C\psi, \psi' \rangle$ donde $\psi, \psi' \in \mathcal{H}_{kin}$. Éstas amplitudes de transición calculadas en la base de spin network, se convierten en una suma discreta sobre secuencias (historias) de spin networks. A estas historias se les llama *spinfoams* y están caracterizadas por un complejo dos dimensional $\Lambda(2$ -complex formado por caras aristas y vértices) cuyas fronteras

están dadas por gráficas de spin networks; un conjunto de representaciones irreducibles $\{j_f\}$ asociadas a cada cara y $\{j_e\}$ a cada arista.

El producto escalar es expresado en términos de estas cantidades como:

$$\langle P_C \psi, \psi' \rangle = \sum_{\Lambda} \omega(\Lambda) \sum_{\{j_f, j_e\}} \prod_{f \in \Lambda} A_f(j_f) \prod_{e \in \Lambda} A_e(j_e, j_f) \prod_{v \in \Lambda} A_v(j_e, j_f) \quad (3.40)$$

donde Λ es el complejo cuyas fronteras están dadas por las gráficas de los spin networks ψ y ψ' ; $\omega(\Lambda)$ es un factor de normalización y A_f, A_e, A_v son amplitudes de transición asociadas a cada cara, arista y vértice internos y dependen de la coloración del complejo Λ . Cada elección de Λ, A_f, A_e, A_v especifica modelos diferentes de spinfoam. Los modelos construidos hasta ahora describen la cuantización de la gravedad en tres [49] y cuatro dimensiones [47, 48]. En suma, un modelo de spinfoam representa una historia posible del campo gravitacional y puede ser interpretada como un conjunto de transiciones de estados cuánticos del espacio.

CAPÍTULO 4

Teorías Efectivas y Cuantización por Lazos.

4.1. Introducción.

En esta sección proponemos una extensión del grupo de renormalización de Wilson a teorías de campo cuantizadas por el método de lazos. Basándonos en el hecho de que recientemente [50, 51] se ha discutido la posibilidad de construir la dinámica de teorías cuantizadas por el método de lazos como límite de teorías efectivas, siguiendo el grupo de renormalización de Wilson usado en teoría cuántica de campos sobre la red, construimos una extensión del grupo de renormalización utilizando un nuevo concepto de escala [52]. Una vez implementado el grupo de renormalización, buscamos el límite continuo que si existe, define la dinámica de la teoría cuantizada por lazos.

Una característica importante de nuestra extensión del grupo de renormalización es que si queremos implementar este nuevo método a teorías definidas con una métrica de fondo, nos reducimos al caso estándar de la teoría de red. Por lo tanto podemos exportar gran parte del trabajo hecho en la red al contexto de la cuantización por lazos. En especial, la extensión se ha desarrollado para campos escalares y modelos sigma aunque se tienen resultados concretos para teorías de norma, que se pueden encontrar en [53]. Finalmente como ejemplo consideramos el modelo de Ising 2D.

4.2. Nociones Básicas.

4.2.1. Descomposiciones Celulares.

La idea central del grupo de renormalización radica en el concepto de escala con la cual se definen las teorías efectivas y el límite continuo. Ya que nuestro problema principal es construir una extensión del grupo de renormalización para teorías que no dependen de una métrica de fondo, tenemos que definir un concepto generalizado de escala. Para esto, usamos la noción de descomposiciones celulares de variedades.

Una *descomposición celular* C de una variedad compacta M es una presentación de ésta como una unión finita de células disjuntas c_α :

$$M = \bigcup_{c_\alpha \in C} c_\alpha, \quad c_\alpha \cap c_\beta = \emptyset \text{ si } \alpha \neq \beta \quad (4.1)$$

Cada célula c_α es homeomorfa a un conjunto abierto cuya dimensión va de cero a $\dim M$, que es la dimensión máxima. Para nuestros propósitos es necesario tener una familia de descomposiciones celulares que satisfaga ciertas propiedades de modo que los elementos del conjunto de descomposiciones celulares jueguen el papel de escalas. Estas propiedades se describen como sigue:

Orden Parcial por Refinamiento. Dos descomposiciones celulares están relacionadas $C_1 \leq C_2$, si cualquier célula en la descomposición más gruesa C_1 , es una unión finita de células de la descomposición más fina C_2 .

Refinamiento Común. Dadas dos descomposiciones celulares, C_1 y C_2 , existe un refinamiento común C_3 tal que satisface $C_1 \leq C_3$ y $C_2 \leq C_3$. Esta propiedad hace que la familia sea parcialmente ordenada y dirigida hacia el continuo.

Refinamiento Infinito. Dado un conjunto abierto U de M , existe una descomposición celular C_0 lo suficientemente fina en la familia, con una célula de dimensión máxima $c_\alpha \in C$ tal que está completamente contenida en U .

Cabe mencionar que existen diversos tipos de familias que satisfacen tales propiedades. Un ejemplo son las familias de descomposiciones celulares regulares de \mathbb{R}^n parametrizadas por números naturales C_m . Si $m \leq n$ entonces

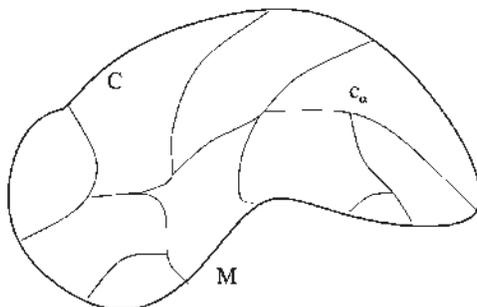


Figura 4.1: Ejemplo de una descomposición celular C en una variedad M de dos dimensiones. En la figura c_α es una célula de dimensión máxima $\dim = 2$. Las otras células corresponden a las fronteras de una dimensión y de dimensión cero.

$C_m \leq C_n$ y mientras m crece, la descomposición celular C_m es cada vez más fina. Estas se identifican con redes regulares de longitud característica $a_m = a_0/2^m$ usadas en Teoría Cuántica de Campos. Veremos que este tipo de familias serán usadas para el modelo de Ising más adelante.

En particular, tomando en cuenta la importancia que tienen las funciones de n -puntos en teoría cuántica de campos. Consideremos una variedad M donde elegimos n puntos $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ en los que evaluaremos la respectiva función de n -puntos. Pedimos entonces que las familias de descomposiciones celulares de M con n puntos elegidos satisfagan la propiedad adicional que por cada descomposición celular C_j en la familia, cada punto elegido esté contenido en una célula $c_\alpha \in C$ de dimensión máxima. Este tipo de familias se les llama *familia de descomposiciones celulares genéricas* con respecto a esta elección de puntos $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$.

Por otro lado, nuestra noción de escala permite construir *redes abstractas* $L(C)$ donde definiremos las teorías efectivas que juegan un papel importante en el grupo de renormalización de Wilson como ya hemos visto. La red abstracta $L(C)$ es el conjunto de las células $\{c_\alpha\}_{\alpha \in C}$ de una descomposición celular C dada. Denotemos los elementos de este conjunto como $\alpha \in L(C)$ donde α corresponde a la célula $c_\alpha \in C$. Podemos pensar a los elementos de $L(C)$ como puntos relacionados mediante la estructura de la descomposición celular.

Debido a lo anterior, existen aplicaciones de $L(C)$ a M llamadas *encajes representativos* $\text{Emb}_{L(C)} : L(C) \rightarrow M$ tales que $\text{Emb}_{L(C)}(\alpha)$ es un punto en la célula $c_\alpha \subset M$ para toda célula en C . Claramente los encajes represen-

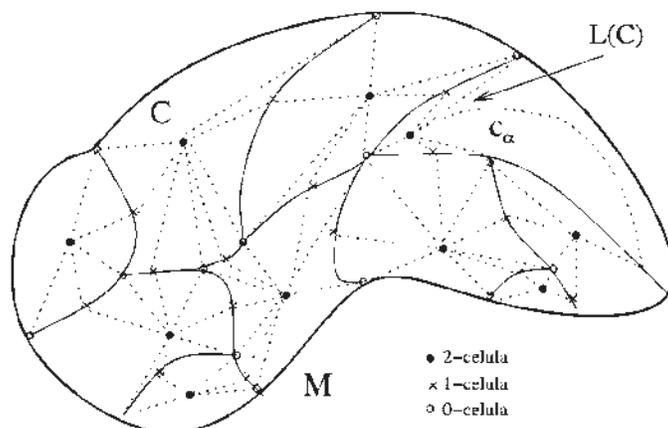


Figura 4.2: Ejemplo de un encaje representativo de la red $L(C)$ en una variedad M dos dimensional.

tativos no sonónicos. Lo anterior permite construir una red encajada *en* M semejando las redes que sirven de corte ultravioleta en Teoría Cuántica de Campos.

Ahora bien, si queremos modelar las transformaciones de renormalización (como las de bloques) necesitamos una manera de comparar redes a diferentes escalas. Tomemos dos descomposiciones celulares, $C_1 \leq C_2$. Cada una de éstas es una escala en la cual definimos una teoría efectiva. Para comparar las redes abstractas asociadas $L(C_1)$ y $L(C_2)$, podemos encajar la red más gruesa $L(C_1)$ en la más fina $L(C_2)$. Esto implica una elección en la manera de encajar una red en otra, sin embargo, pedimos que la aplicación elegida $\text{Emb}_{1,2} : L(C_1) \rightarrow L(C_2)$ satisfaga $r_{2,1} \circ \text{Emb}_{1,2} = \text{id}$. Esta clase de aplicaciones las llamamos también *encajes representativos*.

Por otro lado, notemos que existe una aplicación natural (debido a la primera propiedad) $r_{2,1} : L(C_2) \rightarrow L(C_1)$ de la red más fina $L(C_2)$ a la red más gruesa $L(C_1)$, tal que $r_{2,1}(\alpha^{(2)}) = \alpha^{(1)}$ si y sólo si la célula en $c_{\alpha^{(2)}}$ de C_2 es un subconjunto de la célula $c_{\alpha^{(1)}}$ de C_1 .

4.2.2. Descripción de las Teorías Cuantizadas por Lazos.

Cinemática de las Teorías Cuantizadas por Lazos.

Dado que gran parte del método del grupo de renormalización está descrito en la versión Euclideana de la Teoría Cuántica de Campos, describiremos las teorías cuantizadas por lazos en esta versión. En particular, daremos una prescripción del método para sistemas de spin, campos escalares y modelos sigma.

El espacio de historias Euclidianas de la teoría lo denotamos por $\bar{\mathcal{A}}_M$. Cada elemento $S \in \bar{\mathcal{A}}_M$ es una función $S : M \rightarrow G$ que asignan un elemento de grupo G a cualquier punto del espacio-tiempo M sin condiciones de continuidad. De hecho, la cuantización por lazos del campo escalar ha sido realizada usando como grupo la compactificación de Bohr de \mathbb{R} [54].

Por otro lado el álgebra de observables fundamentales es el álgebra de funciones cilíndricas $\text{Cyl}(\bar{\mathcal{A}}_M)$. las funciones $\psi_{\Gamma, f}[S] \in \text{Cyl}(\bar{\mathcal{A}}_M)$, donde $\psi_{\Gamma, f}[S] = f(S(p_1), S(p_2), \dots, S(p_N))$ ¹ dependen de un número finito de puntos en el espacio tiempo. Una función de importancia física resulta ser $\psi_{\Gamma, f} = f(S(p))$. El producto de un número finito de estas funciones nos servirá para definir las funciones de n -puntos dada una manera de calcular el valor de expectación.

Dinámica de las teorías cuantizadas por lazos.

La dinámica del sistema la obtenemos mediante una medida a la cual llamamos medida física μ_M en el espacio de historias $\bar{\mathcal{A}}_M$ y que nos permite calcular valores de expectación de observables físicas. La expresión

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \int_{\bar{\mathcal{A}}_M} \mathcal{O} d\mu_M \quad (4.2)$$

nos da un significado preciso a expresiones usadas en Teoría Cuántica de Campos del tipo:

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\phi \exp(-\mathcal{S}[\phi]) \mathcal{O}(\phi)$$

Hacemos hincapié que la descripción de la dinámica de la teoría de campos cuantizada por lazos, ya sea mediante la construcción de una medida física o

¹Observémos que en este caso Γ es una colección finita de puntos y $f : G^N \rightarrow \mathbb{C}$ una función suave.

bien, de un propagador en la versión Hamiltoniana como veremos, es nuestra meta principal, de modo que construiremos expresiones como (4.2) en la siguiente sección.

Descripción Hamiltoniana.

Nuestra extensión del grupo de Renormalización de Wilson puede ser descrito en la versión Hamiltoniana.

En el capítulo 3, utilizamos al espacio de conexiones generalizadas en el espacio $\bar{\mathcal{A}}_\Sigma$, como el espacio de configuraciones necesario para construir el espacio de Hilbert cinemático \mathcal{H}_{kin} de la teoría de lazos. Recordemos que los elementos $A \in \bar{\mathcal{A}}_\Sigma$ asignan un elemento de grupo $h_e[A] \in G$ a una curva e sin condiciones de continuidad. El álgebra de observables de configuración es el álgebra de funciones cilíndricas $\text{Cyl}(\bar{\mathcal{A}}_\Sigma)$ definidas en (3.1). En nuestra descripción, las funciones cilíndricas $\psi_{\Gamma,f}[S]$ dependen de un número finito de puntos en el espacio.

El producto escalar de éstas funciones cilíndricas se define de manera análoga a (3.5):

$$\langle \psi_{\Gamma,f}, \psi_{\Gamma',g} \rangle = \int \left(\prod_{p \in \tilde{\Gamma}} dS(p) \right) \overline{f(S(p_1), \dots, S(p_N))} g(S(p_1), \dots, S(p_N)) \quad (4.3)$$

donde $\Gamma \subset \tilde{\Gamma}$ y $\Gamma' \subset \tilde{\Gamma}$. Así, el espacio de Hilbert \mathcal{H}_{kin} es construido mediante la completación de Cauchy del espacio de funciones cilíndricas $\text{Cyl}(\bar{\mathcal{A}}_\Sigma)$ con respecto a la norma inducida por el producto escalar (4.3).

Una vez construido el espacio de Hilbert cinemático de nuestra teoría cuántica por lazos, es necesario definir la dinámica para tener una descripción completa de ésta. Dada una foliación de $M = \Sigma \times \mathbb{R}$, tomemos dos cortes del espacio Σ_1 y Σ_2 correspondientes a diferentes valores del parámetro $t = t_1$ y $t = t_2$.

Definimos el *propagador Euclideo* $P_{1,2}$ entre los estados del espacio de Hilbert cinemático \mathcal{H}_{Σ_1} y del espacio \mathcal{H}_{Σ_2} como:

$$P_{1,2} : \mathcal{H}_{\Sigma_1} \rightarrow \mathcal{H}_{\Sigma_2} \quad (4.4)$$

tal que $\langle \psi_{\Sigma_2}, (P_{1,2}\psi_{\Sigma_1}) \rangle$ es la amplitud de transición entre los estados ψ_{Σ_1} y ψ_{Σ_2} . Este operador describe la dinámica del sistema en el tiempo imaginario $i(t_2 - t_1)$ [11, 55]. En el caso de no tener un tiempo físico, dada una foliación del espacio tiempo, podemos utilizar el parámetro libre de la foliación y pensar en una “evolución” con respecto a éste.

4.3. Implementación del Grupo de Renormalización de Wilson y Límite Continuo.

Hasta ahora, hemos descrito las nociones básicas necesarias para poder implementar el grupo de renormalización a las teorías cuantizadas por lazos. La idea principal radica en definir una teoría efectiva a una escala dada C y construir un límite continuo, tal como se hace en las teorías de red. En esta sección, tales teorías efectivas son descritas sólo para sistemas de spin, campos escalares y modelos sigma, para el caso de campos de norma una descripción del método se encuentra en [53].

4.3.1. Teorías Efectivas.

Dada una escala C , definimos el espacio de historias efectivas Euclidianas como el *espacio de configuraciones de campo C -constantes* $\mathcal{A}_C \subset \bar{\mathcal{A}}_M$. Las configuraciones C -constantes $S \in \mathcal{A}_C$ son tales que para cualquier par de puntos $p, q \in M$ contenidos en la misma célula c_α de C , entonces $S(p) = S(q)$. En otras palabras, las configuraciones C -constantes, son como su nombre lo expresa, configuraciones constantes por cada célula $c_\alpha \in C$. El álgebra de observables de configuración *efectivas* a la escala C es $\text{Cyl}(\mathcal{A}_C)$, que consiste en funciones cilíndricas $\psi_{\gamma, f}[S]$ que dependen de configuraciones de un número finito de células.

Para definir la teoría efectiva a escala C , debemos especificar una medida $d\mu_C$ en el espacio de configuraciones efectivas, de modo que tengamos una manera de calcular valores de expectación de observables a esta escala. Formalmente, escribimos:

$$\langle \mathcal{O}_C \rangle_C = \int_{\mathcal{A}_C} \mathcal{O}_C d\mu_C.$$

para una observable física efectiva \mathcal{O}_C . Por lo tanto, especificamos una teoría efectiva a escala C mediante el par $(\mathcal{A}_C, d\mu_C)$. Por otro lado, debido a su definición, el espacio de funciones C -constantes en M está en correspondencia inyectiva con el espacio de funciones en la red $L(C)$, de modo que existe una identificación natural entre \mathcal{A}_C y el espacio $\mathcal{A}_{L(C)}$ que consiste en funciones de $L(C)$ al grupo G . Así, la teoría efectiva puede ser especificada en la red $L(C)$ mediante el par $(\mathcal{A}_{L(C)}, d\mu_C)$.

Ahora bien, para aplicar el grupo de renormalización, debemos relacionar las teorías efectivas definidas en diferentes escalas. Así pues, consideremos dos

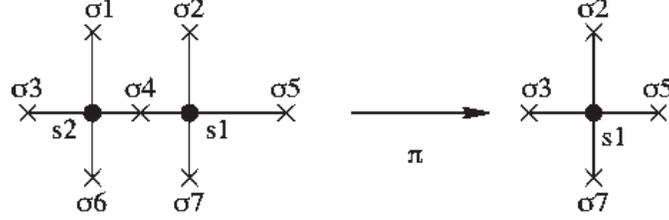


Figura 4.3: Ejemplo de una aplicación de decimación π en un par de descomposiciones regulares dos dimensiones $C_1 \leq C_2$. La configuración C -constante $(\{\sigma_j\}, s_1, s_2)$ está asociada a la descomosición celular más fina C_2 .

descomposiciones celulares $C_1 \leq C_2$. Las teorías efectivas correspondientes se pueden relacionar en dos maneras distintas:

- (a) **La inclusión $i_{C_1 C_2}$.** Esta aplicación está definida en la dirección de refinamiento pues $\mathcal{A}_{C_1} \subset \mathcal{A}_{C_2}$:

$$i_{C_1 C_2} : \mathcal{A}_{C_1} \rightarrow \mathcal{A}_{C_2} \quad (4.5)$$

o bien en términos de los espacios $\mathcal{A}_{L(C)}$:

$$i_{C_1 C_2} = r_{2,1}^* : \mathcal{A}_{L(C_1)} \rightarrow \mathcal{A}_{L(C_2)} \quad (4.6)$$

Debido a que $\mathcal{A}_C \subset \bar{\mathcal{A}}_M$, tenemos la aplicación $i_C : \mathcal{A}_C \rightarrow \bar{\mathcal{A}}_M$. Esta aplicación induce una *regularización* que lleva cualquier observable del continuo a la escala C :

$$i_C^* : \text{Cyl}(\bar{\mathcal{A}}_M) \rightarrow \text{Cyl}(\mathcal{A}_C) \quad (4.7)$$

Estas regularizaciones vinculan todas las teorías efectivas a la teoría del continuo.

- (b) **La decimación $\pi_{C_2 C_1}$.** La otra manera de relacionar las teorías efectivas es mediante la aplicación $\pi_{C_2 C_1}$ que modela un promedio mediante una decimación. Ésta es definida a través de la elección de una aplicación de encaje representativo $\text{Emb}_{1,2} : L(C_1) \rightarrow L(C_2)$:

$$\pi_{C_2 C_1} = \text{Emb}_{1,2}^* : \mathcal{A}_{L(C_2)} \rightarrow \mathcal{A}_{L(C_1)} \quad (4.8)$$

Dada una configuración $S \in \mathcal{A}_{C_2}$, entonces $\pi_{C_2 C_1}(S)$ es una configuración C_1 -constante que ignora los valores den la configuración $S \in \mathcal{A}_{C_2}$

excepto por aquellos valores de las células elegidas por el encaje representativo.

De la misma manera, la decimación desde el continuo π_C se define mediante la elección del encaje $\text{Emb}_{L(C)} : L(C) \rightarrow M$ como:

$$\pi_C := \text{Emb}_{L(C)}^* : \bar{\mathcal{A}}_M \rightarrow \mathcal{A}_C \quad (4.9)$$

Estas aplicaciones juegan un papel fundamental en la implementación del grupo de renormalización. En primer lugar, notemos que para una familia de descomposiciones celulares $\{C_i\}$ que satisface las propiedades mencionadas en la sección anterior, los espacios de configuraciones C -constantes $\{\mathcal{A}_{C_i}\}$ correspondientes tienen un orden parcial por inclusión, es decir, éstos satisfacen:

$$\mathcal{A}_{C_1} \xrightarrow{i_{C_1 C_2}} \mathcal{A}_{C_2} \xrightarrow{i_{C_2 C_3}} \mathcal{A}_{C_3} \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \bar{\mathcal{A}}_M \quad (4.10)$$

Entonces podemos definir el conjunto $\lim_{C \rightarrow M} \mathcal{A}_C$ como la unión de los espacios \mathcal{A}_C de las descomposiciones celulares de la familia. Obviamente, como $\mathcal{A}_C \subset \bar{\mathcal{A}}_M$ para toda C , entonces $\lim_{C \rightarrow M} \mathcal{A}_C$ es un subconjunto del continuo $\bar{\mathcal{A}}_M$. Ya que nuestro objetivo principal es construir la teoría de campos en el continuo a partir del límite de teorías efectivas, el conjunto $\lim_{C \rightarrow M} \mathcal{A}_C$ nos será de gran utilidad.

Observemos que siempre podremos distinguir dos observables f y g en $\text{Cyl}(\bar{\mathcal{A}}_M)$, al regularizarlas a una escala C mediante la aplicación i_C^* . Esto se debe a la propiedad *refinamiento infinito* de la familia, que asegura que existe una descomposición C_0 lo suficientemente fina tal que $i_{C_0}^* f$ y $i_{C_0}^* g$ pueden ser distinguibles. Esta propiedad de regularización en las familias de configuraciones efectivas sólo puede ser cierta si $\lim_{C \rightarrow M} \mathcal{A}_C$ es un subconjunto denso de $\bar{\mathcal{A}}_M$, por lo tanto, podemos escribir:

$$\overline{\lim_{C \rightarrow M} \mathcal{A}_C} = \bar{\mathcal{A}}_M. \quad (4.11)$$

Finalmente, mediante $\lim_{C \rightarrow M} \mathcal{A}_C$ podremos construir teorías en el continuo como límite de teorías efectivas, tal como planteamos en nuestro objetivo.

Por otro lado, la aplicación de decimación $\pi_{C_2 C_1}$ actúa de manera natural en las medidas μ_C de modo que define una manera de calcular valores de expectación en funciones de observables de una teoría efectiva a escala más gruesa de acuerdo a la teoría efectiva donde es definida inicialmente. Es decir, $\pi_{C_2 C_1}$ actúa en \mathcal{A}_{C_2} integrando los grados de libertad que no contribuyen en la escala más gruesa:

$$\langle \mathcal{O} \rangle_{C_1(C_2)} := \int_{\mathcal{A}_{C_1}} \mathcal{O} d(\pi_{C_2 C_1}^* \mu_{C_2}) = \int_{\mathcal{A}_{C_2}} (\mathcal{O} \circ \pi_{C_2 C_1}) d\mu_{C_2}. \quad (4.12)$$

De esta manera definimos la medida $\pi_{C_2 C_1}^* \mu_{C_2}$ en \mathcal{A}_{C_1} . Similarmente, medidas en el continuo μ_M en $\bar{\mathcal{A}}_M$ pueden ser transformadas a medidas efectivas $\pi_{C^*} \mu_M$ en \mathcal{A}_C definidas por:

$$\langle \mathcal{O} \rangle_{C(M)} := \int_{\mathcal{A}_C} \mathcal{O} d(\pi_{C^*} \mu_M) = \int_{\bar{\mathcal{A}}_M} (\mathcal{O} \circ \pi_C) d\mu_M.$$

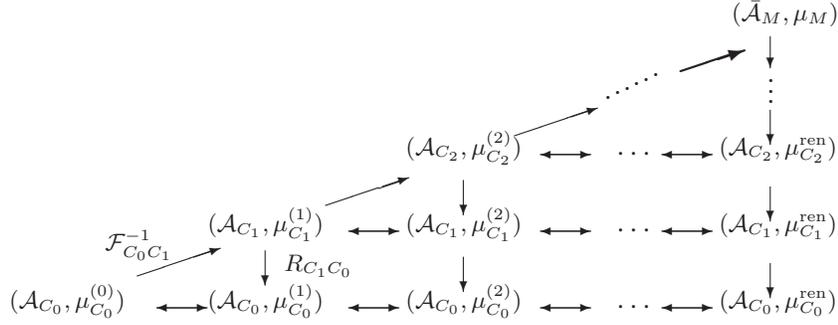
4.3.2. Implementación del Grupo de Renormalización de Wilson.

Una vez descritas las teorías efectivas y sus relaciones entre ellas, podremos entonces implementar el procedimiento sistemático para obtener el límite continuo de las teorías efectivas a través del grupo de renormalización.

Consideremos una sucesión de descomposiciones celulares cada vez más finas $\{C_i\}$. Pensamos en estas descomposiciones celulares como una secuencia de escalas en donde definimos las teorías efectivas. Aquí cualquier par de teorías efectivas están relacionadas por las aplicaciones antes mencionadas: la inclusión $i_{C_j C_k}$ y la decimación $\pi_{C_k C_j}$. En esta sucesión, la aplicación de decimación está restringida a una condición de compatibilidad que exige que dos decimaciones diferentes satisfagan $\pi_{C_2 C_1} \circ \pi_{C_3 C_2} = \pi_{C_3 C_1}$ siempre que $C_1 \leq C_2 \leq C_3$.

Transformaciones del Grupo de Renormalización.

El procedimiento para obtener el límite continuo puede ser descrito mediante un triángulo de renormalización como el presentado en el capítulo 2.



Triángulo de Renormalización para teorías cuantizadas por el método de lazos.

Este triángulo se lee de la siguiente manera: Para relacionar dos teorías efectivas $(\mathcal{A}_{C_k}, \mu_{C_k})$ y $(\mathcal{A}_{C_{k+1}}, \mu_{C_{k+1}})$ definidas a escalas $C_k \leq C_{k+1}$ utilizamos las *transformaciones exactas* $R_{C_{k+1}C_k}$. Esta transformación exacta es definida a través de la aplicación de decimación $\pi_{C_{k+1}C_k}$ que nos relaciona la medida correspondiente a la escala más fina con la medida en la escala mayor de acuerdo a:

$$\mu_{C_k} = \pi_{C_{k+1}C_k} \mu_{C_{k+1}} \quad (4.13)$$

La transformación de renormalización se aplica a las medidas, pues éstas son las que permiten calcular los valores de expectación de las observables a las diferentes escalas. Es decir, consideremos una escala inicial C_0 fija, donde definimos la teoría efectiva $(\mathcal{A}_{C_0}, \mu_{C_0}^{(0)})$. Dada cualquier observable $\mathcal{O} \in \text{Cyl}(\mathcal{A}_{C_0})$ calculamos su valor de expectación tomando en cuenta (4.13) y de acuerdo a (4.12). El valor de expectación de la observable será:

$$\langle \mathcal{O} \rangle_{C_0(C_k)} = \int_{\mathcal{A}_{C_0}} \mathcal{O} d(\pi_{C_k C_0} \mu_{C_0}) = \int_{\mathcal{A}_{C_k}} (\mathcal{O} \circ \pi_{C_k C_0}) d\mu_{C_k}. \quad (4.14)$$

Esto significa que para cualquier escala más fina $C_k \geq C_0$ podemos describir la física de la teoría efectiva $(\mathcal{A}_{C_0}, \mu_{C_0}^{(k)})$, donde el superíndice (k) indica que tan fina es la escala con la cual empezamos, mediante medidas μ_{C_k} definidas a dichas escalas. Notemos sin embargo, que las transformaciones de renormalización exactas $R_{C_{k+1}C_k}$ dadas por (4.13), están dirigidas hacia

el límite macroscópico y por lo tanto no definen directamente el límite al continuo μ_M para las medidas efectivas.

Las transformaciones de renormalización exactas (4.13) inducen medidas efectivas cuya forma funcional es muy complicada en general y por lo tanto la iteración del proceso de renormalización se hace casi imposible. Podemos considerar en cambio, medidas restringidas a una cierta forma funcional, denotadas por $\mu_{\kappa(C_j)}$ de modo que están parametrizadas por un número pequeño de constantes de acoplamiento $\kappa(C_j)$.

Estas medidas $\mu_{\kappa(C_j)}$ a la escala C_j determinan la medida $\mu_{\kappa(C_0)}$ a la escala inicial, mediante una transformación llamada *transformación de renormalización aproximada* $\mathcal{F}_{C_j C_{j+1}}$ que mantiene la misma forma funcional de las medidas a escalas más grandes. Debido a esto, podemos relacionar las constantes de acoplamiento κ_{C_j} de las teorías efectivas a diferentes escalas. Para fijar estas constantes de acoplamiento a la escala C_i , imponemos *condiciones de renormalización* en las medidas, que consisten en mantener exactamente invariantes el valor de expectación de suficientes observables físicas \mathcal{O}_I en la escala C_0 de manera que las constantes de acoplamiento κ_{C_i} queden determinadas para todo $C_i \geq C_0$

Más aún, la transformación $\mathcal{F}_{C_j C_{j+1}}$ es invertible; basta con leer la ecuación (4.15) como una condición que determina las constantes κ_{C_i} en términos de κ_{C_0} para obtener la función $\mathcal{F}_{C_j C_{j+1}}^{-1}$ que aparece en el triángulo de renormalización.

$$\langle \mathcal{O}_I \rangle_{C_0} := \int_{\mathcal{A}_{C_0}} \mathcal{O}_I d\mu_{\kappa(C_0)} = \int_{\mathcal{A}_{C_i}} (\mathcal{O}_I \circ \pi_{C_i C_0}) d\mu_{\kappa(C_i)} \quad (4.15)$$

Notemos que si consideramos situaciones en donde la medida $\mu_{\kappa(C)}$ no es homogénea, de manera que para especificarla completamente necesitamos un conjunto de *constantes de acoplamiento locales* [56, 57], es decir, constantes de acoplamiento que toman diferentes valores para diferentes células de la descomposición celular. En este caso, necesitamos condiciones de renormalización locales para especificar la medida. Tal situación surge en materiales inhomogéneos y en sistemas que no dependen de una métrica de fondo, como lo es el caso de la gravedad cuántica.

4.3.3. Límite Continuo.

Ahora bien, las aplicaciones sucesivas de transformaciones de renormalización inversas nos conducen a la teoría en el continuo $(\bar{\mathcal{A}}_M, \mu_M)$, siguiendo el

esquema del triángulo de renormalización escrito anteriormente. Estas iteraciones se realizan tomando $C_i \rightarrow M$ en la secuencia de escalas $\{C_i\}$ cada vez más finas. Observemos que las medidas correspondientes a las teorías efectivas son determinadas mediante un conjunto apropiado de condiciones de renormalización por cada escala.

Decimos que una teoría definida a una escala C_0 tiene un límite continuo si los valores de expectación $\langle \mathcal{O} \rangle_{C_0(C_i)}$ de todas las observables $\mathcal{O} \in \text{Cyl}(\mathcal{A}_{C_0})$ convergen en el límite $C_i \rightarrow M$ siempre que se tengan las condiciones de renormalización adecuadas. Esto define la *medida completamente renormalizada* $\mu_{C_0}^{\text{ren}}$ como:

$$\langle \mathcal{O} \rangle_{C_0}^{\text{ren}} := \lim_{C_i \rightarrow M} \langle \mathcal{O} \rangle_{C_0(C_i)} = \lim_{C_i \rightarrow M} \int_{\mathcal{A}_{C_i}} (\mathcal{O} \circ \pi_{C_i C_0}) d\mu_{\kappa(C_i)} \quad (4.16)$$

la cual debe de existir para cualquier escala C_0 . Cabe mencionar que el límite anterior se entiende de la siguiente manera: dada cualquier observable $\mathcal{O} \in \text{Cyl}(\mathcal{A}_{C_0})$ fija y $\epsilon > 0$ existe una descomposición celular C lo suficientemente fina tal que se tiene $|\langle \mathcal{O} \rangle_{C_0}^{\text{ren}} - \langle \mathcal{O} \rangle_{C_0(C_i)}| \leq \epsilon$ para cualquier $C_i \geq C$.

Notemos que cuando este límite existe, las medidas completamente renormalizadas satisfacen exactamente la relación (4.13) en la secuencia de teorías efectivas relacionadas por las transformaciones de renormalización. En el triángulo de renormalización, esto significa que la última columna de la derecha relaciona exactamente todas las teorías efectivas $(\mathcal{A}_{C_j}, \mu_{C_j}^{\text{ren}})$ mediante la ecuación:

$$\mu_{C_i}^{\text{ren}} = \pi_{C_{i+1} C_i} * \mu_{C_{i+1}}^{\text{ren}} \quad (4.17)$$

Por otro lado, cualquier observable definida a una escala física C_0 , $\mathcal{O} \in \text{Cyl}(\mathcal{A}_{C_0})$ induce una secuencia de observables mediante la aplicación de decimación $\pi_{C_i C_0}$ para $C_i \geq C_0$, la cual la escribimos como $\{\mathcal{O} \circ \pi_{C_i C_0}\}$. Debido a la compatibilidad de las medidas completamente renormalizadas dada por (4.17), definimos el valor de expectación en el continuo, para la observable $\mathcal{O} \circ \pi_{C_i C_0}$ de la teoría efectiva en la escala C_i como:

$$\langle \{\mathcal{O} \circ \pi_{C_i C_0}\} \rangle_M := \langle \mathcal{O} \circ \pi_{C_i C_0} \rangle_{C_i}^{\text{ren}} \quad (4.18)$$

para cualquier escala $C_i \geq C_0$. Es decir, podemos describir observables que son macroscópicas en alguna escala mediante un límite continuo.

El análisis anterior ha servido para poder calcular valores de expectación en el continuo de observables definidas en alguna escala. Sin embargo, todavía

queda por encontrar la medida μ_M de la teoría del continuo $(\bar{\mathcal{A}}_M, \mu_M)$, de modo que podamos calcular valores de expectación de observables $\mathcal{O} \in \text{Cyl}(\bar{\mathcal{A}}_M)$.

En esta búsqueda, la estrategia consiste en aprovechar la estructura de las teorías efectivas y construir una medida en el continuo como límite de las medidas efectivas definidas mediante un proceso alterno, como describiremos a continuación.

Para cualquier observable $\mathcal{O} \in \text{Cyl}(\bar{\mathcal{A}}_M)$, su valor de expectación a una escala efectiva C_i puede calcularse regularizando la observable mediante (4.7): $\langle i_{C_i}^* \mathcal{O} \rangle_{C_i}$. Si hacemos esta regularización para toda escala C_i en la secuencia $\{C_i\}$ con $C_i \rightarrow M$, obtenemos una secuencia de valores para los cuales buscamos convergencia.

De esta manera, decimos que la familia de medidas $\{\mu_{C_i}\}$ tiene como límite continuo la medida μ_M si para cualquier $\mathcal{O} \in \text{Cyl}(\bar{\mathcal{A}}_M)$ existe el siguiente límite:

$$\langle \mathcal{O} \rangle_M = \lim_{C_i \rightarrow M} \langle i_{C_i}^* \mathcal{O} \rangle_{C_i}, \quad \text{con } i_{C_i}^* : \text{Cyl}(\bar{\mathcal{A}}_M) \rightarrow \text{Cyl}(\mathcal{A}_{C_i}) \quad (4.19)$$

definiendo de manera constructiva una medida μ_M en $\bar{\mathcal{A}}_M^2$. La relevancia física de la medida μ_M del continuo reside en el hecho que cuando ésta existe, entonces la medida completamente renormalizada μ_C^{ren} también existe y satisface:

$$\pi_{C*} \mu_M = \mu_C^{\text{ren}}, \quad \text{con } \pi_{C*} : \text{Cyl}(\mathcal{A}_C) \rightarrow \text{Cyl}(\bar{\mathcal{A}}_M). \quad (4.20)$$

de acuerdo al esquema presentado en el triángulo de renormalización y significa que μ_M actúa en cualquier observable en $\text{Cyl}(\bar{\mathcal{A}}_M)$ al mismo tiempo que induce una medida completamente renormalizada a la escala C . por lo tanto (4.19) extiende el límite continuo a $\bar{\mathcal{A}}_M$.

Para completar la definición formal de este límite continuo, mencionamos que éste se realiza tomando la subfamilia de descomposiciones celulares que son genéricas con respecto a \mathcal{O} . Esto quiere decir que si la observable depende sensiblemente a las configuraciones $\{S(p_1) \dots S(p_n)\}$, como lo es el caso de las funciones de n -puntos, tomamos descomposiciones celulares genéricas con respecto a la colección de puntos $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$.

²En realidad si el límite existe para toda función cilíndrica, entonces hemos dado la definición constructiva de una funcional lineal positiva μ en $\bar{\mathcal{A}}_M$ que permitirá calcular valores de expectación.

4.4. El ejemplo: Modelo de Ising bidimensional.

En esta sección presentamos el modelo de Ising de dos dimensiones como ejemplo de nuestra construcción de medidas en el continuo. Es de particular importancia enfatizar que la teoría de fenómenos críticos y la teoría de escalamiento han servido como base para nuestra extensión del grupo de renormalización. En estas teorías, el modelo de Ising es por mucho uno de los modelos más importantes para estudiar sistemas los fenómenos ocurridos en sistemas estadísticos [3, 4]. Por otro lado, este modelo estadístico ha sido el único con el cual se ha podido construir explícitamente una teoría de campos en el continuo, llamada Teoría de Campos de Ising, ejemplificando la relación que existe entre los modelos estadísticos y los sistemas definidos en Teoría Cuántica de Campos [58].

Una cantidad básica en el grupo de renormalización aplicado al modelo de Ising es la longitud de correlación ξ . Condiciones impuestas sobre esta longitud de correlación en el proceso de renormalización nos ayudará a definir el límite continuo.

En nuestra propuesta, las familias de descomposiciones celulares que sirven como escala en el sistema de spines son las familias de descomposiciones regulares en \mathbb{R}^2 , que se identifican con las redes regulares usadas en especial en el modelo de Ising.

Para construir este tipo de descomposiciones celulares, tomamos los ejes coordenados de \mathbb{R}^2 fijos y definimos $C_{m,t}$ como una descomposición celular regular cartesiana de longitud característica es $a_m = a_0/2^m$, tal que sus células de dimensión dos son cuadrados; las células unidimensionales corresponden a segmentos abiertos (horizontales y verticales) llamados aristas y finalmente las células de dimensión cero son puntos llamados vértices que unen a las aristas.

La manera de encajar esta descomposición celular en \mathbb{R}^2 está determinada por la posición que tienen los vértices. Éstos están etiquetados por un par $(I, J) \in \mathbb{N}$ que indican la posición del vértice $v^{IJ} = ((v_x)^{IJ}, (v_y)^{IJ})$ con respecto a los ejes coordenados (x, y) . Explícitamente, tenemos:

$$((v_x)^{IJ}, (v_y)^{IJ}) = (a_m I, a_m J) + (t_x, t_y)$$

donde el parámetro $t = (t_x, t_y)$ permite una traslación rígida de la descomposición celular $C_{m,t}$. Para t fijo, obtenemos una familia de descomposiciones celulares regulares $\{C_{m,t}\}_{m \in \mathbb{N}}$ que satisface (i) el orden parcial por

refinamiento; (ii) el refinamiento común y (iii) el refinamiento infinito; propiedades que caracterizan a las descomposiciones celulares como escalas en nuestro sistema. Además, ésta familia es genérica con respecto a un conjunto de puntos marcados $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ si permitimos que el parámetro t tome los valores adecuados.

El espacio de historias Euclidianas que utilizamos en la teoría de campos de Ising es $\bar{\mathcal{A}}_{\mathbb{R}^2}$, definido como el espacio de campos de spin en \mathbb{R}^2 . En la escala $C_{m,t}$ los objetos que son físicamente relevantes para nuestro estudio son las funciones de n -puntos efectivas definidas como:

$$\langle S(\alpha_1) \cdots S(\alpha_n) \rangle_{C_{m,t}} = \frac{1}{Z_{C_{m,t}}} \sum_{\{S\}} \frac{S(\alpha_1) S(\alpha_2) \cdots S(\alpha_n)}{M(\kappa_{C_{m,t}})^n} e^{[-\kappa_{C_{m,t}} \sum_{(\alpha_i \alpha_j)} S(\alpha_i) S(\alpha_j)]} \quad (4.21)$$

donde $Z_{C_{m,t}}$ es la función de partición de la teoría a la escala $C_{m,t}$; la suma en la exponencial corre sobre células vecinas cercanas $(\alpha_i \alpha_j)$ y el factor $M(\kappa_{C_{m,t}}) = |1 - \sinh^{-4}(2\kappa_{C_{m,t}})|^{1/8}$. Cabe mencionar que en nuestra notación $S(\alpha_j) = S(p)$ para cualquier punto p en la célula α_j . En particular, dados n puntos marcados $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$, tenemos $S(p_j) = S(\alpha_j)$, donde cada punto p_j está en la célula de dimensión máxima α_j .

Para justificar la definición (4.21), observemos que la regularización de un campo de spin en el continuo a la escala $C_{m,t}$ es: $i_{C_{m,t}}^* S(p_j) = S(\alpha_j^{(m)})$, donde $\alpha_j^{(m)} \in C_{m,t}$. Para la función de n puntos tendremos:

$$\langle i_{C_{m,t}}^* [S(p_1) \cdots S(p_n)] \rangle_{C_{m,t}} = \langle [i_{C_{m,t}}^* S(p_1)] \cdots [i_{C_{m,t}}^* S(p_n)] \rangle_{C_{m,t}}$$

por lo tanto después de la regularización de los campos de spin, tendremos funciones de n puntos del tipo (4.21).

El encaje representativo que utilizamos para el proceso de decimación es:

$$\text{Emb}_{m,m+1} : L(C_{m,t}) \rightarrow L(C_{m+1,t}) \quad (4.22)$$

Específicamente, el encaje para las células de dos dimensiones $\alpha^{(m)}(X, Y)$, etiquetadas por el par de enteros (X, Y) correspondientes a los ejes coordenados x e y , se define como:

$$\text{Emb}_{m,m+1}(\alpha^{(m)}(X, Y)) := \alpha^{(m+1)}(2X, 2Y)$$

Esto significa que un paso en el proceso de decimación consiste en elegir fijas las “filas” y “columnas” de la descomposición celular regular $C_{m+1,t}$

que están etiquetadas con un entero par e integrar sobre el resto. Por lo tanto la aplicación de decimación se define como:

$$\pi_{m+1,m} = \text{Emb}_{m,m+1}^* : \mathcal{A}_{L(C_{m+1,t})} \rightarrow \mathcal{A}_{L(C_{m,t})} \quad (4.23)$$

Cabe mencionar que para especificar completamente el encaje representativo $\text{Emb}_{m,m+1}$ debemos determinar el encaje para las células de dimensión menor. Escogemos que las células unidimensionales (aristas) de $L(C_{m,t})$ sean encajadas en aristas de las filas y columnas de $L(C_{m+1,t})$ etiquetadas con un número par. Debido a que sólo utilizamos descomposiciones celulares genéricas para calcular el límite continuo de las funciones de n puntos, el encaje de las células de dimensión cero es irrelevante. Claramente, la elección de las “filas” y “columnas” involucradas en el proceso de decimación es arbitraria, al final, la decimación nos lleva a los mismos resultados.

Una vez definida la aplicación $\pi_{m+1,m}$, la decimación de las funciones de n puntos es:

$$\begin{aligned} \langle S(\alpha_1^{(m)}) \cdots S(\alpha_n^{(m)}) \rangle_{C_{m,t}(C_{m+1,t})} &= \langle S(\text{Emb}_{m,m+1}[\alpha_1^{(m)}]) \cdots S(\text{Emb}_{m,m+1}[\alpha_n^{(m)}]) \rangle_{C_{m,t}} \\ &= \langle S(\alpha_1^{(m+1)}) \cdots S(\alpha_n^{(m+1)}) \rangle_{C_{m,t}} \end{aligned} \quad (4.24)$$

Nuestro siguiente paso es construir el límite continuo de las funciones de n -puntos (4.21), resolviendo las condiciones de renormalización adecuadas como veremos. Para calcular este límite, notemos primero que dados n puntos marcados $\{p_1, \dots, p_n\}$ en \mathbb{R}^2 , éstos inducen un conjunto de células marcadas de dimensión máxima $\{\alpha_1^{(m)} \cdots \alpha_n^{(m)}\}$ a la escala $C_{m,t}$.

Es conveniente entonces, denotar sus posiciones relativas en términos de sus coordenadas x e y : Dada una célula $\alpha_j^{(m)}$, sea $X_j(m)$ la coordenada correspondiente al eje x y $Y_j(m)$ la correspondiente a y . La posición relativa de dos células $\alpha_j^{(m)}$ y $\alpha_k^{(m)}$ en la descomposición celular $C_{m,t}$ está dada por los enteros:

$$X_{jk}(m) = X_j(m) - X_k(m) \quad (4.25)$$

$$Y_{jk}(m) = Y_j(m) - Y_k(m) \quad (4.26)$$

El límite continuo se construye tomando:

$$C_{m,t} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \text{mientras} \quad X_{jk}(m) \rightarrow \infty, Y_{jk}(m) \rightarrow \infty \quad (4.27)$$

Esto significa que mientras refinamos la escala $C_{m,t}$ hacia el continuo \mathbb{R}^2 , el tamaño de las células $\alpha^{(m)} \in C_{m,t}$ tiende a cero y por lo tanto las posiciones relativas de éstas medidas en unidades de la “red” divergen. Sin embargo, ya que los puntos físicos $\{p_1, \dots, p_n\}$ están fijos, entonces $a_m X_{jk}(m)$ y $a_m Y_{jk}(m)$ tiene un límite bien definido.

Otra cantidad que diverge es la distancia de correlación definida en unidades de la red ξ_m , de tal modo que la cantidad $a_m \xi_m$ converge a la función de correlación física ξ del sistema mientras se toma el límite al continuo, ajustando las constantes de acoplamiento.

Para nuestro interés, conviene hacer notar que una definición alterna de la longitud de correlación ξ , está en términos de la función de dos puntos. Aquí, la longitud de correlación mide el comportamiento asintótico de la interacción entre dos campos de spin lejanos [3, 12]:

$$\langle S(\alpha(0,0))S(\alpha(R,0)) \rangle \sim R^{-p} \exp(-R/\xi)$$

Tomando en cuenta esta definición, proponemos como condición de renormalización que:

$$a_m \xi_m = a_{m+1} \xi_{m(m+1)} \quad (4.28)$$

donde $\xi_{m(m+1)}$ es la longitud de correlación calculada usando la función $\langle S(\alpha_1^{(m)})S(\alpha_2^{(m)}) \rangle_{C_{m,t}(C_{m+1,t})}$. Debido a que la longitud de correlación sólo mide la interacción entre campos de spin muy lejanos, podemos suponer que $a_m \xi_{m(m+1)} = a_{m+1} \xi_{m+1}$. Por lo tanto la prescripción de renormalización puede ser escrita como:

$$a_m \xi_m = a_{m+1} \xi_{m+1}$$

o explícitamente en términos de la constante de acoplamiento $\kappa_{C_{m,t}}$:

$$a_m \xi_m = a_m |z_m^2 + 2z_m - 1|^{-1} [z_m(1 - z_m^2)]^{1/2} = \xi, \quad \text{donde } z_m = \tanh(\kappa_{C_{m,t}}) \quad (4.29)$$

Sin embargo la condición de renormalización (4.28) no es única. Notemos por ejemplo, que otra condición natural es imponer que las funciones de correlación de dos puntos se mantengan exactamente invariantes en cada paso del proceso de renormalización. Finalmente, ambas condiciones nos llevan al mismo límite continuo.

El paso siguiente una vez impuestas las condiciones de renormalización, es investigar si el límite (4.19) de funciones de n puntos (4.21) del modelo de Ising existe. En [7, 8], McCoy, Tracy and Wu encontraron convergencia de

escalamiento para las funciones de n puntos del modelo de Ising dos dimensional. De hecho, en el capítulo 2 mostramos explícitamente los resultados de éste límite. En el nuevo lenguaje desarrollado a lo largo de este capítulo, tales resultados se pueden traducir mediante el siguiente teorema:

(McCoy, Tracy, Wu) 4.4.1 *Sea $\kappa_{C_{m,t}}$ tal que satisfaga la prescripción de renormalización (4.28). La medida $\mu_{\mathbb{R}^2}$ en $\bar{\mathcal{A}}_{\mathbb{R}^2}$ es definida por las funciones de n -puntos calculadas mediante el límite continuo siguiente:*

$$\lim_{C_{m,t} \rightarrow \mathbb{R}^2} \langle S(p_1) \cdots S(p_n) \rangle_{C_{m,t}} = \langle S(p_1) \cdots S(p_n) \rangle_{\mathbb{R}^2}$$

Escribimos de nuevo las expresiones encontradas para las funciones de n puntos. En el caso en el que la constante de acoplamiento $\kappa_{C_{m,t}}$ esta por debajo del punto crítico $\kappa_c = \tanh^{-1}(\sqrt{2} - 1)$, $\kappa_{C_{m,t}} \leq \kappa_c$, McCoy *et al*, muestran que:

$$\lim_{C_{m,t} \rightarrow \mathbb{R}^2} \langle S(p_1) \cdots S(p_n) \rangle_{C_{m,t}} = \exp \left[\sum_{k=2}^{\infty} f_n^{(k)} \right] \quad (4.30)$$

donde

$$\begin{aligned} f_n^{(k)} &= -\frac{1}{2k(2\pi^2)^k} \int_{-\infty}^{\infty} dy_1 \cdots dy_k dx_1 \cdots dx_k \prod_{l=1}^k \left(1 + x_l^2 + y_l^2\right)^{-1} \times \\ &\times \frac{y_l + y_{l+1}}{x_l - x_{l+1} + i\epsilon} \text{Tr} \left[\prod_{l=1}^k A(l) \right] \end{aligned} \quad (4.31)$$

y $A(l)$ es la matriz cuyos elementos están dados en términos de las componentes de la distancia X_{jk} e Y_{jk} entre los campos de spin:

$$A(l)_{jk} = \text{sgn}[Y_{jk}/\xi_m] \exp -i \left[\frac{Y_{jk}y_l + X_{jk}x_l}{\xi_m} \right] \quad (4.32)$$

donde $\xi_m = [|z_m^2 + 2z_m - 1| \sqrt{z_m(1 - z_m^2)}]^{-1}$ es la longitud de correlación definida a la escala $C_{m,t}$.

Por otro lado, para el caso en el que tenemos $\kappa_{C_{m,t}} \geq \kappa_c$ se tiene que:

$$\lim_{C_{m,t} \rightarrow \mathbb{R}^2} \langle S(p_1) \cdots S(p_n) \rangle_{C_{m,t}} = \left| \det \left(\sum_{k=1}^{\infty} g_{(n)ij}^{(k)} \right) \right|^{1/2} \exp \left[\sum_{k=2}^{\infty} f_n^{(k)} \right] \quad (4.33)$$

donde $g_{(n)ij}^{(k)}$ es:

$$\begin{aligned}
g_{(n)ij}^{(k)} &= \frac{1}{(2\pi^2)^k} \int_{-\infty}^{\infty} dy_1 \cdots dy_k dx_1 \cdots dx_k \prod_{l=1}^k (1 + x_l^2 + y_l^2)^{-1} \times \\
&\times \prod_{l=1}^{k-1} \frac{y_l + y_{l+1}}{x_l - x_{l+1} + i\epsilon} [\prod_{l=1}^k A(l)]_{ij}
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Una vez construida la teoría en el continuo, podemos regresarnos a la escala $C_{m,t}$ y calcular las correcciones de la teoría efectiva. La teoría completamente renormalizada a la escala $C_{m,t}$ está determinada por la decimación de la función de n puntos del continuo:

$$\langle S(\alpha_1) \cdots S(\alpha_n) \rangle_{C_{m+1,t}}^{\text{ren}} = \langle S(p_1) \cdots S(p_n) \rangle_{\mathbb{R}^2} \tag{4.35}$$

con $p_j = \text{Emb}_{L(C_{m,t})} \alpha_j$. Por lo tanto, podemos hacer mediciones en escalas macroscópicas de la teoría en el continuo.

De esta manera, construimos la teoría en el continuo cuantizada por lazos mediante teorías efectivas. En particular, las teorías efectivas corresponden al modelo de Ising descrito en términos de variables de lazos a la escala $C_{m,t}$. La teoría efectiva correspondería a una teoría de campos de Ising cuantizada por lazos. Cabe mencionar que la teoría de campos de Ising es descrita, bajo ciertas aproximaciones como un modelo de Ginzburg Landau con acoplamiento ϕ^4 [10].

Además, las funciones de n puntos en el continuo definidas anteriormente satisfacen los axiomas Osterwalder-Schrader [59] que permiten la reconstrucción completa de la teoría en el continuo en el espacio Euclideo [60, 61, 62]. En particular, se demuestra que la invariancia rotacional perdida por el uso de familias de descomposiciones regulares es recuperada en el límite continuo.

CONCLUSIONES Y DIRECCIONES FUTURAS

Usando nuestro formalismo basado en técnicas del grupo de renormalización, hemos podido construir una dinámica de una teoría cuantizada por lazos en el continuo como límite de la dinámica de teorías efectivas. Así, hemos obtenido el primer ejemplo explícito de una teoría relativista cuantizada por lazos con interacciones, que es el límite continuo del modelo de Ising. Con respecto a esta teoría cuántica relativista, podemos dar explícitamente una teoría Hamiltoniana covariante siguiendo una construcción del tipo Osterwalder-Schrader en el espacio $\bar{\mathcal{A}}_M$ como la propuesta en [63].

Por otro lado, aún quedan ciertos aspectos importantes por analizar. Uno de ellos, es encontrar la relación explícita entre la teoría de Ising cuantizada por lazos que hemos derivado y la teoría estándar relacionada con el modelo ϕ^4 de Ginzburg-Landau. Ambas teorías comparten las mismas funciones de n puntos y por lo tanto las mismas predicciones físicas. Sin embargo, no conocemos la relación explícita de ambas formulaciones, lo cual implicaría que podríamos importar conceptos físicamente importantes de la formulación estándar de teoría cuántica de campos a nuestra teoría de lazos.

Si bien, este trabajo se ha centrado principalmente en el caso de sistemas de spines, campos escalares y modelos sigma lineales, también está desarrollado en [53] el caso de teorías de norma, aunque no se ha probado específicamente en alguna. En particular es de nuestro interés primario, aplicar nuestro formalismo al caso de la gravitación por lazos, que ha motivado principalmente este trabajo.

Otro aspecto importante que es posible analizar es relacionado con el rompimiento de la simetría inherente a las teorías de red. En el caso del modelo de Ising, ha podido demostrarse que la invariancia rotacional es recuperada en el límite continuo [7]. Sin embargo para teorías que no dependen de una métrica de fondo, éste aspecto necesita un estudio cuidadoso el cual hemos comenzado, obteniendo resultados interesantes.

Bibliografía

- [1] La implementación de las restricciones se puede encontrar en la serie de artículos de Thiemann: *Phys.Lett.B*, 380:257, 1996; *Class.Quant.Grav.*, 15:839-873, 1998; *Class.Quant.Grav.* 18:2025, 2001.
- [2] R Oeckl, “Discrete Gauge Theory: From Lattices to Tqft”, Imperial College Press, 2005.
- [3] LP Kadanoff, “Statistical Physics: Statics, Dynamics and Renormalization”, Singapore:World Scientific, 2000.
- [4] KP Huang , “Statistical Mechanics”, John Wiley & Sons, Inc., 1963.
- [5] L Onsager, “ Crystal Statistics. I. A two Dimensional Model with an Order-Disorder Transition”, *Phys.Rev.***65**, 117, 1944.
- [6] M Creutz, “Quarks, Gluons and Lattices”, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, 1983
- [7] BM McCoy, CA Tracy, TT Wu, “Two-dimensional Ising model as an exactly solvable relativistic quantum field theory: explicit formulas for N point functions”,*Phys. Rev. Lett.***38** 793, 1977.
- [8] TT Wu , BM McCoy, Ca Tracy, E Barouch “Spin-spin correlation functions for the two-dimensional Ising Model: exact theory in the scaling region.”, *Phys.Rev.B* **13**, 1976.
- [9] KG Wilson, “The Renormalization Group: Critical Phenomena and the Kondo Problem”, *Rev.Mod.Phys* **47** no.4, 1975.
- [10] JJ Binney, NJ Dowrick, AJ Fisher, MEJ Newman, “The Theory of Critical Phenomena: An Introduction to the Renormalization Group”, Oxford Science Publications, 1992

- [11] ME Peskin, DV Schroeder, “An Introduction to Quantum Field Theory”, Addison-Wesley Publishing Company, 1995.
- [12] M Le Bellac, “Quantum and Statistical Field Theory”, Oxford Science Publications, 1991.
- [13] Rovelli C, “Quantum Gravity”, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, 2004.
- [14] Perez A, “Introduction to Loop Quantum Gravity and Spin Foams”, *preprint* gr-qc/0409061v3 2005
- [15] R Haag. “Local Quantum Physics: Fields, Particles, Algebras”, Springer, Texts and Monographs in Physics. 1992.
- [16] Wald RM, “Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics”, Chicago Lectures in Physics, 1994.
- [17] Dirac P AM, “Lectures on Quantum Mechanics”, Dover Publications 1964.
- [18] A Ashtekar, J Lewandowski “Background Independent Quantum Gravity: A Status Report.”, *Class.Quant.Grav.* **21**:R53, 2004.
- [19] A Corichi, A Hauser “Bibliography of Publications Related to Classical Self-Dual Variables and Loop Quantum Gravity”, *preprint* gr-qc/0509039
- [20] A Ashtekar, “Lectures on Non Perturbative Canonical gravity”, World Scientific, 1991
- [21] Wald RM “General Relativity”, University of chicago Press, 1984
- [22] Misner CW, Thorne KS, Wheeler JA, “Gravitation”, Ed. Freeman and Company, 1973
- [23] JF Barbero, “From Euclidean to Lorentzian General Relativity: The real way”, *Phys.Rev.D* **54**, 1492-1499, 1996.
- [24] JF Barbero, “Real ashtekar Variables for Lorentzian Signature Spacetimes”, *Phys.Rev.D* **51**, 5507-5510, 1995
- [25] JF Barbero, “A real Polynomial Formulation for General Relativity in Terms of Connections”, *Phys.Rev.D* **49**, 6935-6938, 1994

- [26] G Immirzi, “Real and Complex Connections for Canonical Gravity”, *Class.Quant.Grav.* **14**, L177-L181, 1997.
- [27] A Ashtekar, J Lewandowski, “Projective Techniques and Functional Integration”, *J.Math.Phys.* **36**, 2170, 1995.
- [28] C Rovelli, L Smolin, “Spin networks and Quantum Gravity.”, *Phys.Rev.D* **53**, 5743, 1995
- [29] J Baez, “Spin networks States in Gauge Theory”, *Adv.Math.* **117**, 253-272, 1996.
- [30] A Ashtekar, J Lewandowski, D Marolf, J Morurao, T Thiemann, *J.Math.Phys* **36** 6456, 1995.
- [31] T Thiemann, “Gauge Field Theory Coherent States (gcs): I. General Properties.”, *Class.Quant.Grav.* **18** 2025, 2001.
- [32] T Thiemann, “Anomaly-free formulation of Non Perturbative, Four dimensional Lorentzian Quantum Gravity”, *Phys.Lett.B* **380**, 257, 1996.
- [33] T Thiemann, “Quantum Spin Dynamics (qsd)”, *Class.Quant.Grav.* **15**, 839-873, 1998.
- [34] T Thiemann, “Introduction to Modern Canonical General Relativity”, *preprint gr-qc/0110034*.
- [35] M Gaul, C Rovelli, “A Generalized Hamiltonian Constrained Operator in Loop Quantum Gravity and its Simplest Euclidean Matrix Elements”, *Class.Quant.Grav.* **18**, 1593-1624, 2001.
- [36] C Rovelli, L Smolin, “Discreteness of the Area and Volume in Quantum Gravity”. *Nucl.Phys.B* 442, 1995. Erratum: 456:593,734, 1995.
- [37] A Ashtekar, J Lewandowski, “Quantum Theory of Gravity I: Area Operators”, *Class.Quant.Grav.* **14**, A55-A81, 1997.
- [38] Ashtekar, J Lewandowski, “Quantum Theory of Gravity II: Volume Operators”, *preprint gr-qc/971031*, 1997
- [39] R Loll, “The Volume Operator in Discretized Quantum Gravity”, *Phys.Rev.Lett* **75**, 3048-3051, 1995.
- [40] R Loll, “Simplifying the Spectra Analysis of the Volume Operator.”, *Nucl.Phys.B* **500**, 405-420, 1997

- [41] R Loll, “Spectrum of the Volume Operator in Quantum Gravity”, *Nucl.Phys. B* **460** 143-154, 1996.
- [42] T Thiemann, “Closed Formula for the Matrix Elements of the Volume Operator in Canonical Quantum Gravity”, *J.Math.Phys.* **39**, 3347-3371, 1998.
- [43] J Brunnemann, T Thiemann, “Simplication of the spectral Analysis of the Volume Operator in Loop Quantum Gravity”, *preprint gr-qc/0405060*, 2004
- [44] A Perez, “Spin foam Models for Quantum Gravity”, *Class.Quant.Grav.* **20**, R43, 2003.
- [45] D Oriti, “Spacetime Geometry from Algebra: Spin Foam Models for Non Perturbative Quantum Gravity”, *Rept.Prog.Phys* **69** 1489-1544, 2001
- [46] J Baez, “An Introduction to spin Foam Models os BF Theory and Quantum Gravity”, *Geometry and Quantum Physics*, ed H. Gausterer & H.Grosse, *Lecture Notes in Physics* **543**, 25-94, 1994
- [47] MP Reisenberger, C Rovelli, “Sum over Surfaces form of Loop Quantum Gravity”, *Phys.Rev.D* **56**, 3490-508, 1997.
- [48] C Rovelli, “The Projector on Physical States in Loop Quantum Gravity”, *Phys.Rev.D* **59**, 104015, 1999.
- [49] L Freidel, “A Ponzano Regge Model of Lorentzian 3-Dimensional Quantum Gravity”, *Nucl.Phys.Proc.Suppl.* **88**, 237-240, 2000
- [50] JA Zapata, “Continuum Spin Foam Model for 3D gravity”, *J.Math.Phys.***43**, 5612, 2002 (preprint gr-qc/0205037).
- [51] JA Zapata, “Loop Quantuzation from a Lattice Gauge Theory Perspective”, *Class.Quant.Grav.*21 L115, 2004 (preprint gr-qc/0401109).
- [52] E Manrique, R Oeckl, A Weber, JA Zapata, “Loop quantization as a Continuum Limit”, *Class.Quant.Grav.* **23** 3393-3403, 2006.
- [53] J Martinez, C Meneses, JA Zapata, “Geometry of C-Flat Connections, Coarse Grainning and the Continuum Limit”, *J.Math.Phys.***46** 102301, 2005, (preprint hep-th/0507039).

- [54] A Ashtekar, J Lewandowski, H Sahlmann, “Polymer and Fock Representations for a Scalar Field”, *Class.Quant.Grav.***20** L11, 2003, (preprint gr-qc/0211012).
- [55] J Glimm, AM Jaffe, “Quantum Physics. A Functional Integral Point of View”, New York:Springer, 1987.
- [56] R Oeckl, “Renormalization of Discrete Models without Background”, *Nucl.Phys.***B657** 107, 2003, (preprint gr-qc/0212047).
- [57] R Oeckl, “Renormalization of Spin foam models of Quantum Gravity”, *Talk given at 10th. Marcel Grossmann Meeting.* Rio de Janeiro, Brasil. 2003, (preprint gr-qc/0401087).
- [58] BM McCoy, “The Connection Between Statistical Mechanics and Quantum Field Theory”, *Canberra 1994: Statistical Mechanics and Field Theory* 26-128, preprint hep-th/9403084, 1994.
- [59] K Osterwalder, R Schrader, “Axiomas for Euclidean Green’s Functions II.”, *Commun.Math,Phys.***42**, 281, 1975.
- [60] B Schroer, TT Truong, “The relativistic Quantum Fields of the D=2 Ising Model”, *Phys.Lett.* **B72**, 371, 1978.
- [61] J Palmer, C Tracy, “Two Dimensional Ising Correlation Functions: Convergence of Scaling limit”, *Adv.Appl.Math.* **2**, 329-88, 1981.
- [62] J Palmer, C Tracy, “Two Dimensional Ising Correlation Functions: The SMJ analisis”, *Adv.Appl.Math.***4**, 46-102, 1983.
- [63] A Ashtekar, D Marolf, J Mourao, T Thiemann, “Constructing Hamiltonian Quantum Theories form Path Integrals in a Diffeomorphism-invariant- Context”, *Class.Quant.Grav.***17**, 4919, 2000, (preprint quant-ph/9904094).