



POZOS POTENCIALES DE POCA PROFUNDIDAD PARA LA ECUACIÓN DISCRETA DE SCHRÖDINGER

Tesis que presenta
JOEL ARTURO RODRIGUEZ CEBALLOS
para obtener el grado de Doctor en Matemáticas.

Director de Tesis:
DR. PETR ZHEVANDROV BOLSHAKOVA.

**INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS.
UNIVERSIDAD MICHOACANA
DE
SAN NICOLÁS DE HIDALGO.**

Morelia, Michoacán, Mayo de 2007.



*Dedico este trabajo con todo cariño a mi esposa Oti
y a mis hijos Samadhi, Maxwell y Emmanuel.
A mi padre y maestro, Profr. Juan Rodríguez Rosales (1925–2006)
(In memoriam).*

*“Al que está sentado en el trono y al Cordero,
la alabanza, el honor, la gloria y el poder,
por los siglos de los siglos”.*
Y los cuatro vivientes respondían: “Amén”.
Ap 5:13-14

*Doy gracias a Dios y a la Virgen María en primer lugar,
a mis padres Juan y Raquel,
a la Universidad Michoacana,
al CONACyT,
a la Comisión de Becas de la SEE,
al IMATE-UNAM-Morelia,
al Dr. Petr Zhevandrov por su enorme apoyo,
a los CC. Sinodales,
y a familiares y amigos que me apoyaron de algún modo
y que no me es posible enumerar en este corto espacio.*

Índice general

INTRODUCCIÓN	v
1. FORMULACIÓN DE LOS PROBLEMAS	1
1.1. El Problema para el Caso Continuo	1
1.2. El Problema para el Caso Discreto	3
2. REDUCCIÓN DEL CASO DISCRETO	6
2.1. Interpolación del Caso Discreto	6
2.2. Espectro Esencial en el Caso Discreto	12
2.3. Representación de <i>Momenta</i> del Caso Discreto	19
3. POTENCIALES RECTANGULARES CENTRALES	21
3.1. Pozo Rectangular Caso Continuo	21
3.2. Potencial Rectangular Caso Discreto	25
4. LA UNICIDAD DE LOS VALORES PROPIOS	31
4.1. Unicidad del Valor Propio Caso Continuo	31
4.2. Unicidad de Valores Propios Caso Discreto	34
5. EL CASO CONTINUO	39
5.1. Asintótica para el Caso Continuo	39
5.2. Solución Exacta para el Caso Continuo	59
6. ASINTÓTICA PARA EL CASO DISCRETO	67

7. SOLUCIÓN EXACTA PARA EL CASO DISCRETO	98
7.1. Solución Exacta Caso Discreto con $\sum V_j \leq 0$	98
7.2. Solución Exacta Caso Discreto con $\sum V_j \geq 0$	105
8. COMPARACIÓN ENTRE LOS DOS CASOS	109
A. LA DESIGUALDAD DE PEETRE	114
B. ANÁLISIS ESPECTRAL	116
B.1. El Teorema Espectral	116
B.2. Espectro de un Operador	121
B.3. El Principio Variacional	125
BIBLIOGRAFÍA	131

INTRODUCCIÓN

Como su título indica, en este trabajo vamos a considerar la ecuación unidimensional *discreta* de Schrödinger cuando ésta tiene un cierto potencial suficientemente pequeño (ver Ec. (1.2.1)). El resultado fundamental es la construcción de una expresión explícita para los dos valores propios que aparecen en el exterior (véase [30], Def. 5.4.12) del espectro esencial (véase Definición 28 en el Apéndice) del operador *discreto* de Schrödinger (véase Definición 7), espectro que consiste en un intervalo de longitud finita del eje real. Tales valores propios se encuentran próximos, respectivamente, a cada uno de los extremos de dicho espectro. También se construyen las funciones propias correspondientes.

Consideremos primeramente la ecuación de Schrödinger

$$(-\Delta_x + \varepsilon V(x)) \Psi(x) = E \Psi(x),$$

para $V(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R}_x^D)$, donde D es la dimensión del espacio de configuraciones, $\int_{\mathbf{R}^D} V(x) dx \leq 0$ y $\varepsilon \rightarrow 0$. Esta ecuación tiene un único valor propio negativo $E_\varepsilon = -\mu^2(\varepsilon)$, $\mu(\varepsilon) > 0$, a la izquierda del espectro esencial $[0, \infty)$ para $D = 1, 2$. Ésto ya fue establecido (incluyendo el caso radialmente simétrico para $D = 2$) en el famoso libro de texto de Landau & Lifshitz [26] y después fue demostrado en el caso general por Simon [45] (véase también [1], [12]).

Aproximaciones asintóticas con respecto al parámetro pequeño ε del valor propio de la ecuación de Schrödinger (versión continua, $D = 1$) y de la correspondiente

función propia (ésta última no aparece en el trabajo de Simon) fueron encontradas explícitamente en [51], [52] por Zhevandrov & Merzon mediante una técnica diferente. Ellos pasan a la representación de momentos (o transformada de Fourier) correspondiente, con $E = -\mu^2$, para obtener

$$(p^2 + \mu^2)\tilde{\Psi}(p) = -\frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} \tilde{V}(p-p')\tilde{\Psi}(p')dp', \quad (0.0.1)$$

donde la tilde denota la transformada de Fourier ([3] Cap. 1, [10] Secc. 1.1.1),

$$\tilde{\Psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} e^{-ipx} \Psi(x) dx.$$

Ya que $V(x) = 0$ para $|x|$ grande, para tales x tenemos $\Psi(x) \sim e^{-\mu|x|}$, y $\Psi(x)$ es casi constante porque $\mu \rightarrow 0$. Luego su transformada de Fourier es una función tipo δ y el lado derecho en (0.0.1) es aproximadamente igual a $\tilde{V}(p)$ salvo una constante multiplicativa. De allí que es natural buscar la solución en la forma

$$\tilde{\Psi}(p) = \frac{a_0(p) + \varepsilon a_1(p) + \dots}{p^2 + \varepsilon^2(\beta_0 + \varepsilon\beta_1 + \dots)^2}, \quad (0.0.2)$$

con nuevas incógnitas $a_k(p) \in S(\mathbf{R})$, $\beta_k \in \mathbf{C}$, con el fin de construir una solución asintótica formal. Sustituyendo (0.0.2) en (0.0.1), descomponemos la integral resultante¹ usando el método de residuos y desarrollamos cada lado de la igualdad que queda en serie de potencias de ε . Igualando entre sí los coeficientes de potencias del mismo grado se obtienen ecuaciones para $a_k(p)$, β_k . A continuación, por medio de un razonamiento *standard*, se prueba que la asintótica formal aproxima en efecto a la función propia. En este trabajo comenzamos con la exposición del caso continuo por motivo de explicar la técnica de Zhevandrov–Merzon en la situación más simple. La obtención de las aproximaciones asintóticas para la ecuación continua es presentada en la Sección 5.1.

¹Note que el integrando correspondiente sólo tiene 2 polos en \mathbf{C} .

Por otra parte las ecuaciones en diferencias surgen frecuentemente en análisis numérico donde se intenta aproximar sistemas continuos por discretos y en modelos discretos directos con aplicaciones (véase [14]) incluyendo la mecánica cuántica (véase [31]). En este contexto la pregunta natural de si aparece también un valor propio para la ecuación unidimensional discreta de Schrödinger puede contestarse afirmativamente. Estamos interesados en este fenómeno y en la comparación de los espectros y funciones propias correspondientes para los casos continuo y discreto. Para poder hacer uso de la técnica de Zhevandrov–Merzon comentada se interpola la ecuación discreta mencionada a todo el eje real. La obtención de las aproximaciones asintóticas para la ecuación discreta de Schrödinger análogas a las de la ecuación continua es presentada en el Capítulo 6 (véase [39]).

En la Sección 5.2 exponemos una modificación de este acercamiento, obteniendo como resultado neto una solución exacta al problema para la ecuación de Schrödinger (que por supuesto coincide con la expansión asintótica —de hecho convergente— (0.0.2)). Después, aplicamos este procedimiento a la ecuación discreta de Schrödinger (Capítulo 7) y veremos que de hecho el problema discreto aproxima al continuo al disminuir el tamaño del paso del esquema de diferencias finitas correspondiente (véase las fórmulas (1.1.2), (1.1.3), (1.2.4), (1.2.5) y Capítulo 8).

Capítulo 1

FORMULACIÓN DE LOS PROBLEMAS

1.1. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA PARA EL CASO CONTINUO.

Consideremos primeramente la ecuación de Schrödinger

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + \varepsilon V(x)\right) \Psi(x) = E \Psi(x), \quad (1.1.1)$$

en la cual

- $\varepsilon V(x) : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ es una función que describe un pozo suave de potencial de poca profundidad; esto quiere decir que $\varepsilon \rightarrow 0^+$ con $V(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ (el espacio de las funciones definidas en \mathbf{R} infinitamente diferenciables y con soporte compacto, véase Fig. 1.1).
- E es la energía total de la partícula cuyo movimiento es descrito por dicha ecuación.

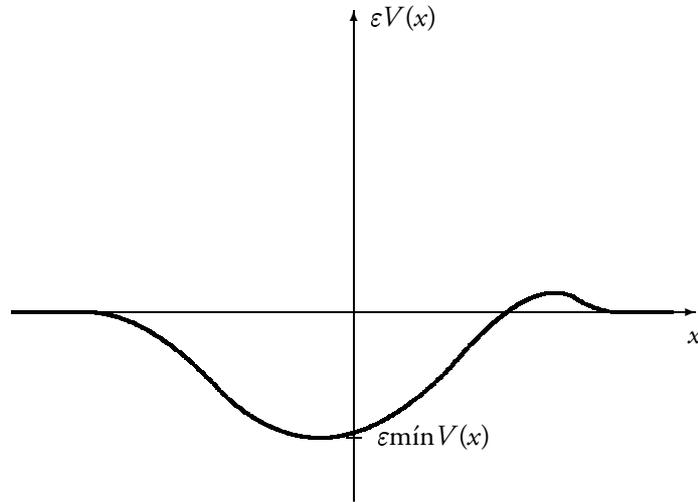


Figura 1.1: Pozo de potencial poco profundo.

Buscamos entonces construir explícitamente la función propia $\Psi(x)$ correspondiente a E de la ecuación (1.1.1). En el quinto capítulo de esta tesis demostraremos el siguiente teorema:

Teorema 1. Sea $\int_{\mathbf{R}} V(x)dx \leq 0$. Entonces el único valor propio del problema (1.1.1) está dado por $E = -\mu^2(\varepsilon)$, donde

$$\mu(\varepsilon) = -\varepsilon\sqrt{\frac{\pi}{2}}\tilde{V}(0) + \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{\Gamma} \frac{\tilde{V}(\zeta)\tilde{V}(-\zeta)}{\zeta^2} d\zeta + O(\varepsilon^3) \quad (1.1.2)$$

es la solución de la ecuación secular para μ (5.2.10). El contorno Γ está definido por (5.1.12). La transformada de Fourier de la función propia perteneciente a este valor propio es

$$\tilde{\Psi}(p) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\varepsilon}{\mu(\varepsilon)} \frac{\tilde{V}(p) + \varepsilon f(\varepsilon, p)}{p^2 + \mu^2(\varepsilon)}, \quad (1.1.3)$$

donde $f \in S(\mathbf{R}_p)$ y $\|f\| = O(1)$ en ε , donde $\|\cdot\|$ es la norma del supremo.

1.2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA PARA EL CASO DISCRETO

Consideremos la versión discreta, usando diferencias divididas finitas centrales (véase [6], Secc. 3.5.4), de la ecuación (1.1.1), a saber, la ecuación unidimensional discreta de Schrödinger

$$-\frac{1}{h^2} (\psi_{j+1} - 2\psi_j + \psi_{j-1}) + \varepsilon V_j \psi_j = E \psi_j, \quad \{\psi_j\} \in \ell_2, \quad (1.2.1)$$

donde ψ_j y V_j designan los valores de las funciones $\Psi(x)$ y $V(x)$ en los nodos de la malla (uniforme) con paso $h > 0$, e. g., $\psi_j = \Psi(jh)$, $j \in \mathbf{Z}$, y $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Así $\{V_j\}$ es un potencial discreto de soporte compacto, i.e.,

$$V_j = 0, \quad |j| \geq R, \quad R \in \mathbf{R}^+ \quad (1.2.2)$$

suficientemente grande; así que $\sum_{j=-\infty}^{\infty} V_j = \sum_{j=-[R]}^{[R]} V_j$, donde $[R]$ significa la parte entera de R . De ahora en adelante escribiremos $\sum_j V_j$ simplemente. Además, definimos

$$m_0 \equiv \left| \min_{j \in \mathbf{Z}} V_j \right|. \quad (1.2.3)$$

Surge la pregunta natural de si el mismo fenómeno de aparición de un valor propio persiste para la ecuación discreta de Schrödinger (1.2.1). La formulación matemática del problema consiste en la búsqueda de las soluciones no triviales $\{\psi_j\}$ de la Ec. (1.2.1)

con las condiciones dadas en los párrafos de arriba en esta sección. Enunciamos los siguientes resultados, que probaremos en el capítulo 7.

Teorema 2. Sea $\sum_j V_j \leq 0$. Entonces el único valor propio negativo del problema (1.2.1) es $E = -\beta_b^2(\varepsilon)$, donde

$$\beta_b(\varepsilon) = -\frac{h\varepsilon}{2} \sum_j V_j + \frac{h^4 \varepsilon^2}{16\pi} \int_{\Gamma_{s,b}} \sum_{j,k} V_j V_k e^{i(k-j)h\zeta} \frac{d\zeta}{\operatorname{sen}^2 \frac{h\zeta}{2}} + O(\varepsilon^3) \quad (1.2.4)$$

es la solución de la ecuación secular para β (7.1.7). El contorno $\Gamma_{s,b}$ está definido por (6.0.16). El vector propio perteneciente a este valor propio es $\{\psi_j\}$, donde $\psi_j = \Psi_b(jh)$ y $\Psi_b(x)$ es la transformada inversa de Fourier de

$$\widetilde{\Psi}_b(p) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\varepsilon}{\beta_b(\varepsilon)} \frac{\frac{h}{\sqrt{2\pi}} \sum_j V_j e^{-ijhp} + \varepsilon f_\beta(h, \varepsilon, p)}{\frac{4}{h^2} \operatorname{sen}^2 \frac{hp}{2} + \beta_b^2(\varepsilon)} \chi_{[-\pi/h, \pi/h]}(p). \quad (1.2.5)$$

Aquí f_β es analítica en $B_{\pi/h} = \{z \in \mathbf{C} \mid |\operatorname{Re} z| \leq \pi/h\}$ y $2\pi/h$ -periódica. Además, $\|f_\beta\| = O(1)$ uniformemente en ε , donde $\|\cdot\|$ es la norma del supremo.

Teorema 3. Sea $\sum_j V_j \geq 0$. Entonces el único valor propio positivo del problema (1.2.1) es $E = 4/h^2 + \gamma_b^2(\varepsilon)$, donde

$$\begin{aligned} \gamma_b(\varepsilon) &= \frac{h\varepsilon}{2} \sum_j V_j + \frac{h^4 \varepsilon^2}{16\pi} \int_{\Gamma_{c,b}} \sum_{j,k} (-1)^{j+k} V_j V_k e^{i(k-j)h\zeta} \frac{d\zeta}{\cos^2 \frac{h\zeta}{2}} + O(\varepsilon^3) \quad (1.2.6) \end{aligned}$$

es la solución de la ecuación secular para γ (7.2.7). El contorno $\Gamma_{c,b}$ está definido por (7.2.4). El vector propio perteneciente a este valor propio es $\{\psi_j\}$, donde $\psi_j = \Psi_b(jh)$ y $\Psi_b(x)$ es la transformada inversa de Fourier de

$$\widetilde{\Psi}_b(p) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\varepsilon}{\gamma_b(\varepsilon)} \frac{\frac{b}{\sqrt{2\pi}} \sum_j (-1)^j V_j e^{-ijhp} + \varepsilon f_\gamma(h, \varepsilon, p)}{\frac{4}{b^2} \cos^2 \frac{bp}{2} + \gamma_b^2(\varepsilon)} \chi_{[-\pi/h, \pi/h]}(p). \quad (1.2.7)$$

Aquí f_γ es analítica en $B_{\pi/h} = \{z \in \mathbf{C} \mid |\operatorname{Re} z| \leq \pi/h\}$ y $2\pi/h$ -periódica. Además, $\|f_\gamma\| = O(1)$ uniformemente en ε , donde $\|\cdot\|$ es la norma del supremo.

Capítulo 2

REDUCCIÓN DEL CASO DISCRETO A UN CASO DE TIPO CONTINUO

2.1. LA INTERPOLACIÓN DEL CASO DISCRETO

Para aplicar la técnica de Zhevandrov–Merzon comentada en la Introducción, interpolamos la Ec. (1.2.1) a todo el eje real. Cuál interpolación es la más recomendable se decide por analogía a lo ocurrido en el caso continuo. Introducimos entonces la siguiente

Definición 1. Sea el operador D_h dado por $D_h \equiv (E_{h/2} - E_{-h/2})/h$, donde $E_y : L_2(\mathbf{R}) \rightarrow L_2(\mathbf{R})$ es el operador de traslación por $y \in \mathbf{R}$ tal que

$$[E_y u](x) = u(x + y), \quad u \in L_2(\mathbf{R}). \quad (2.1.1)$$

Note que si denotamos Ψ_{Int} una interpolación de $\{\psi_j\}$ de manera que $\Psi_{\text{Int}}(jh) = \psi_j$, entonces para $k \in \mathbb{Z}$ tenemos que

$$\psi_{j+k} = \Psi_{\text{Int}}((j+k)h) = \Psi_{\text{Int}}(x+kh)|_{x=jh} = [E_{kh} \Psi_{\text{Int}}](jh).$$

Luego la interpolación correspondiente del primer término de (1.2.1) resulta ser

$$-[D_b^2 \Psi_{\text{Int}}](x). \quad (2.1.2)$$

Definición 2. El operador pseudodiferencial $L(x, \widehat{p}) : L_2(\mathbf{R}) \longrightarrow L_2(\mathbf{R})$, $\widehat{p} = -id/dx$ está definido por su *símbolo* $L(x, p)$ en la siguiente forma [43], [48], [49]

$$[L(x, \widehat{p})u](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} e^{ipy} L(x, p) \widetilde{u}(p) dp, \quad u(x) \in L_2(\mathbf{R}).$$

De esta forma, ya que

$$[E_y u](p) = e^{ipy} \widetilde{u}(p), \quad (2.1.3)$$

tenemos que e^{ipy} es el *símbolo* del operador de traslación E_y dado por (2.1.1). Así

$$[D_b^2 u](p) = -\frac{4}{b^2} \text{sen}^2 \frac{bp}{2} \cdot \widetilde{u}(p) \quad \text{y} \quad D_b = \frac{2i}{b} \text{sen} \frac{b\widehat{p}}{2}.$$

Note que el símbolo de $-d^2/dx^2$ es p^2 , mientras que el de $-D_b^2$ es

$$\frac{4}{b^2} \text{sen}^2 \frac{bp}{2}.$$

Esto ocasiona que el integrando análogo al que se hace referencia en la página VI tenga un número infinito de polos. Ocuparíamos entonces una interpolación para (1.2.1) de

tal manera que dicho integrando se anule fuera de un intervalo finito de tal forma que, al ser equivalente calcular la integral solamente sobre tal intervalo, ahora el integrando sólo posea dos polos. Por la forma de la ecuación para los polos, a saber,

$$\frac{4}{h^2} \operatorname{sen}^2 \frac{hz}{2} + \beta^2 = 0, \quad (2.1.4)$$

$E = -\beta^2$, $\beta \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$, el intervalo en cuestión más natural es $[-\pi/h, \pi/h]$. Es decir, ocupamos una interpolación $\Psi_b(x)$ de la sucesión $\{\psi_j\} \in \ell_2$ referida en (1.2.1) que esté en $L_2(\mathbf{R})$ y cuya transformada de Fourier tenga soporte $[-\pi/h, \pi/h]$. Introducimos entonces la siguiente

Definición 3. El subespacio M_b de $L_2(\mathbf{R})$ de las funciones de *banda limitada* a frecuencias $f = p/2\pi$ tales que $f \leq 1/2b$, con b el dado en la Ec. (1.2.1), se define como (véanse [3] Secc. 1.2, [13] Lecc. 38, [32] Secc. 5.19, [47] Cap. 2 Secc. 4)

$$M_b \equiv \left\{ u(x) \in L_2(\mathbf{R}) : \operatorname{supp} \tilde{v}(p) \subset [-\pi/h, \pi/h] \right\}.$$

M_b es un subespacio cerrado de $L_2(\mathbf{R})$ (véanse [13] Secc. 38.4, [32] Secc. 5.19). Luego M_b es un espacio de Hilbert ([25], Teor. 1.4-7) separable ([32] Secc. 3.12) y contiene entonces una sucesión ortonormal completa ([38], Secc. 1.6, Teor. 2), digamos $\{\varphi_j(x)\}$, $j \in \mathbf{Z}$. Por el teorema de Riesz–Fischer, para la sucesión $\{v_j\} \in \ell_2$, la serie

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} v_j \varphi_j(x)$$

converge a un elemento de M_b (véase [38], Secc. 1.6), y por tanto, de $L_2(\mathbf{R})$. Observe que podríamos generar entonces una interpolación como la que buscamos para la sucesión $\{\psi_j\} \in \ell_2$ en la Ec. (1.2.1) si las funciones $\varphi_j(x)$ fueran tales que $\varphi_j(kh) = \delta_{jk}$, $j, k \in \mathbf{Z}$, donde δ_{jk} es el símbolo de Kronecker.

Por otra parte, ya que $\tilde{u}(p) \in L_1(\mathbf{R}_p) \cap L_2(\mathbf{R}_p)$ para toda $u(x) \in M_b$, se sigue de la teoría de la transformada de Fourier en $L_1(\mathbf{R})$ (véase [24], Cap. IX, § 4.2°) que $u(x) \in M_b$ es una función continua acotada y que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x) = 0$; de hecho $u(x) \in C^\infty(\mathbf{R})$ por tener $\tilde{u}(p)$ soporte compacto (véase [13], Teor. 31.5.1).

Introducimos entonces la siguiente

Definición 4. Denominamos función *seno cardinal* a aquella dada mediante la fórmula

$$\text{senc } x \equiv \begin{cases} 1, & x = 0; \\ \frac{\text{sen } x}{x}, & x \neq 0 \end{cases}$$

(algunos llaman a $\text{sen } x / (\pi x)$ función de *Dirichlet*, véase [3], Secc. 1.3).

Si $b \in \mathbf{R}^+$,

$$[\text{senc } bx]^\sim(p) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{b} \chi_{[-b, b]}(p), \quad (2.1.5)$$

donde χ_I denota la función característica del conjunto I . Por ello, la familia de traslaciones de funciones seno cardinal dada por

$$\left\{ \text{senc } \pi \left(\frac{x}{b} - j \right) \right\}_{j \in \mathbf{Z}} \quad (2.1.6)$$

está en M_b , ya que el intervalo $[-\pi/b, \pi/b]$ es el soporte de la transformada de Fourier

$$\left[\text{senc } \pi \left(\frac{x}{b} - j \right) \right]^\sim(p) = \frac{b}{\sqrt{2\pi}} \chi_{[-\pi/b, \pi/b]}(p) e^{-ijbp}$$

de cada miembro de dicha familia. Observando que

$$\int_{\mathbf{R}} \operatorname{senc} \pi(x - k) \operatorname{senc} \pi(x - l) dx = \delta_{kl}, \quad k, l \in \mathbf{Z}, \quad (2.1.7)$$

se advierte que la familia (2.1.6) es una base ortogonal para el espacio de Hilbert M_h ; cada elemento de la misma tiene $L_2(\mathbf{R})$ -norma \sqrt{h} y sus combinaciones lineales son densas en M_h (véase [13], Prop. 38.4.1). También se cumple el teorema de Shannon (véanse [13] Secc. 38.1, [22] Secc. 14.8 y [42] Secc. 8.10):

Teorema 4. *Sea $u(x)$ una función tal que $\tilde{u}(p) \in L_2(\mathbf{R}_p)$ y $\operatorname{supp} \tilde{u}(p) \subset [-2\pi f_c, 2\pi f_c]$, $f_c \in \mathbf{R}^+$. Entonces el muestreo de paso h (paso al que se hace referencia en la Ec. (1.2.1)) de $u(x)$, dado por la sucesión $\{u(jh)\}_{j \in \mathbf{Z}}$, está en $\ell_2(\mathbf{Z})$. Si $h \leq 1/2f_c$, entonces $u(x)$ puede expresarse como*

$$u(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} u(jh) \operatorname{senc} \pi(x/h - j). \quad (2.1.8)$$

La igualdad es en el sentido de $L_2(\mathbf{R})$, es decir, la serie de la derecha en (2.1.8) converge a $u(x)$ en $L_2(\mathbf{R})$. Además si el muestreo $\{u(jh)\} \in \ell_1$, la serie de la derecha en (2.1.8) converge uniformemente sobre \mathbf{R} (obviamente a una función continua) y la igualdad se cumple para todo $x \in \mathbf{R}$.

Por ello usamos para la Ec. (1.2.1) la interpolación definida en seguida.

Definición 5. Para una sucesión dada $\{v_j\} \in \ell_2$ definimos la interpolación de Whittaker–Kotelnikov $v_h(x)$ por

$$v_h(x) \equiv [\operatorname{Kot}_h\{v_j\}](x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} v_j \operatorname{senc} \pi(x/h - j). \quad (2.1.9)$$

La transformada de Fourier de (2.1.9) es entonces

$$\tilde{v}_b(p) \equiv [\text{Kot}_b\{v_j\}]^{\sim}(p) = \frac{b}{\sqrt{2\pi}} \chi_{[-\pi/b, \pi/b]}(p) \sum_{j=-\infty}^{\infty} v_j e^{-ijbp}. \quad (2.1.10)$$

Nota 1. Por la discusión de los párrafos precedentes, $v_b(x) \in M_b$; de hecho, el soporte de $[\text{Kot}_b\{v_j\}]^{\sim}(p)$ sigue siendo $[-\pi/b, \pi/b]$. Además, por tanto, $v_b(x) \in L_2(\mathbf{R})$.

Aplicando la fórmula (2.1.9) al primer término en la Ec. (1.2.1) obtenemos

$$\begin{aligned} \left[\text{Kot}_b \frac{1}{b^2} \{ \psi_{j+1} - 2\psi_j + \psi_{j-1} \} \right] (x) \\ = \frac{1}{b^2} (\Psi_b(x+h) - 2\Psi_b(x) + \Psi_b(x-h)). \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

Por (2.1.2) vemos que el lado derecho de (2.1.11) es igual a $[D_b^2 \Psi_b](x)$, con $D_b^2 : M_b \rightarrow M_b$.

Definición 6. Sea $\widehat{V}_b : L_2(\mathbf{R}) \rightarrow M_b$ el operador tal que

$$[\widehat{V}_b u](x) = [\text{Kot}_b\{V_j u_j\}](x), \quad u \in L_2(\mathbf{R}), \quad u_j = u(jb). \quad (2.1.12)$$

Nota 2. \widehat{V}_b puede representarse en la forma integral

$$[\widehat{V}_b u](x) = \int_{\mathbf{R}} K_b(x, x') u_b(x') dx' \quad (2.1.13)$$

con núcleo

$$K_b(x, x') = \frac{1}{b} \sum_j V_j \text{senc } \pi(x/b - j) \text{senc } \pi(x'/b - j). \quad (2.1.14)$$

En efecto, sustituimos (2.1.14) y la fórmula (2.1.9) aplicada a $u_b(x)$ en el lado derecho de (2.1.13). Obtenemos (2.1.12) observando la propiedad (2.1.7).

Luego la interpolación del segundo término en la Ec. (1.2.1) es igual a $[\widehat{V}_b \Psi_b](x)$, con $\widehat{V}_b : M_b \rightarrow M_b$. Finalmente obtenemos para el problema (1.2.1) la ecuación interpolada a todo \mathbf{R} :

$$\left(-D_b^2 + \varepsilon \widehat{V}_b\right) \Psi_b = E \Psi_b, \quad (2.1.15)$$

análoga a (1.1.1).

Definición 7. Al operador pseudodiferencial $\widehat{H}_{b,\varepsilon} : M_b \rightarrow M_b$ dado por

$$\widehat{H}_{b,\varepsilon} \equiv -D_b^2 + \varepsilon \widehat{V}_b,$$

que actúa sobre Ψ_b en el lado izquierdo de (2.1.15), lo llamamos operador *discreto* de Schrödinger (aunque involucra una variable *continua*).

2.2. EL ESPECTRO ESENCIAL EN EL CASO DISCRETO

Vamos ahora a precisar el espectro del operador que actúa en el lado izquierdo de la Ec. (1.2.1). Tal operador se define así.

Definición 8. Sea $\widehat{H}_{d,b,\varepsilon} : \ell_2 \longrightarrow \ell_2$ tal que

$$\widehat{H}_{d,b,\varepsilon}\{\psi_j\} = -D_{d,b}{}^2\{\psi_j\} + \varepsilon\{V_j\psi_j\}, \quad (2.2.1)$$

donde $D_{d,b} : \ell_2 \longrightarrow \ell_2$ es tal que actúa de la forma

$$D_{d,b}{}^2\{\psi_j\} = \frac{1}{b^2}\{\psi_{j+1} - 2\psi_j + \psi_{j-1}\}$$

y $\{V_j\}$ es el potencial discreto de soporte compacto de la Ec. (1.2.1).

Note que $D_{d,b}{}^2 = (S_l - 2 + S_r)/b^2$, donde S_l, S_r son los operadores de cambio izquierdo y cambio derecho respectivamente. Como estos operadores son acotados, también lo es $D_{d,b}{}^2$.

Tenemos entonces que

$$\widehat{H}_{d,b,\varepsilon}\{\psi_j\} = [H_{b,\varepsilon}\Psi_b](jb),$$

donde la sucesión $\{\psi_j\} \in \ell_2$ y $\Psi_b(x) \equiv [\text{Kot}_b\{v_j\}](x)$.

Observemos que

$$\sum_j (\psi_{j+1} + \psi_{j-1})\bar{\psi}_j = \sum_k (\psi_{k-1}\bar{\psi}_k + \psi_k\bar{\psi}_{k-1}). \quad (2.2.2)$$

Véase entonces que la suma del lado derecho es real ya que

$$\psi_{k-1}\bar{\psi}_k + \psi_k\bar{\psi}_{k-1} = 2\{\text{Re}\psi_{k-1}\text{Re}\psi_k + \text{Im}\psi_{k-1}\text{Im}\psi_k\} \in \mathbf{R}.$$

Además, por la igualdad (2.2.3) se tiene que

$$\sum_j (\psi_{j+1} + \psi_{j-1}) \bar{\psi}_j = \sum_l \psi_l (\bar{\psi}_{l+1} + \bar{\psi}_{l-1}). \quad (2.2.3)$$

Luego el operador $D_{d,b}^2$ es simétrico y, por su dominio de definición, autoadjunto. De allí que el espectro residual $\sigma_R(-D_{d,b}^2)$ del operador $-D_{d,b}^2$ es vacío.

El operador de multiplicación por una sucesión finita cuyo resultado es la sucesión en el último término de (2.2.1), es autoadjunto y compacto en ℓ_2 . En efecto, la simetría de dicho operador viene de que $V_j \in \mathbf{R}$; la compacidad (véase, por ejemplo, [25], Teor. 8.1-4 (a)) de que es acotado

$$\begin{aligned} \|\{V_j \psi_j\}\|_{\ell_2(\mathbf{Z})}^2 &= \sum_j |V_j|^2 |\psi_j|^2 \\ &\leq \max_{k \in \mathbf{Z}} |V_k|^2 \sum_j |\psi_j|^2 = \left(\max_{k \in \mathbf{Z}} |V_k|^2 \right) \|\{\psi_j\}\|_{\ell_2(\mathbf{Z})}^2, \end{aligned}$$

con m_0 dado por (1.2.3), y el rango del mismo tiene dimensión finita $\leq 2[R] + 1$.

Nota 3. Tenemos entonces que $\widehat{H}_{d,b,\varepsilon}$ es también autoadjunto.

Recordemos ahora el teorema de Weyl (véanse, por ejemplo, [27], Cap. 2, Secc. 4.8 y [44], Cap. 1, Lema 4.3).

Teorema 5. Si T_1 y T_2 son operadores autoadjuntos donde T_2 es compacto, entonces $\sigma_{\text{ess}}(T_1 + T_2) = \sigma_{\text{ess}}(T_1)$.

Puesto que el término $\varepsilon\{V_j \psi_j\}$ en la definición de $H_{d,b,\varepsilon}$ (2.2.1) es una perturbación compacta del operador $-D_{d,b}^2$, el teorema precedente nos indica que el espectro esencial de (1.2.1) coincide con el de la ecuación libre ($V_j \equiv 0$). El siguiente lema muestra que el espectro esencial de dicha ecuación libre es el segmento $[0, 4/b^2]$. En lugar de trabajar con el operador $D_{d,b}^2$ en $\ell_2(\mathbf{Z})$ podemos trabajar con el operador D_b^2 en M_b , al ser isomorfos ambos espacios de Hilbert justamente con el isomorfismo $\text{Kot}_b : \ell_2(\mathbf{Z}) \rightarrow M_b$.

Lema 6. *El espectro esencial $\sigma_{\text{ess}}(\widehat{H}_{d,b,\varepsilon})$ del operador $\widehat{H}_{d,b,\varepsilon}$ es el intervalo $[0, 4/b^2]$ del eje real.*

Demostración. Como comentábamos antes, por el Teorema 5 el espectro esencial $\sigma_{\text{ess}}(\widehat{H}_{d,b,\varepsilon})$ de $\widehat{H}_{d,b,\varepsilon}$ es el mismo espectro esencial $\sigma_{\text{ess}}(-D_{d,b}^2)$ de $-D_{d,b}^2$. Estudiemos entonces el conjunto resolvente y el espectro del operador $-D_{d,b}^2 : \ell_2(\mathbf{Z}) \longrightarrow \ell_2(\mathbf{Z})$, que son los mismos que para el operador $-D_b^2 : M_b \longrightarrow M_b$.

Sea $\lambda \in \mathbf{C} \setminus [0, 4/b^2]$. Veamos que $\lambda + D_b^2$ es uno-uno. Sea $u(x) \in M_b$ una función tal que $(\lambda + D_b^2)u = 0$. Usando el método de la transformada de Fourier obtenemos $\left(\lambda - \frac{4}{b^2} \text{sen}^2 \frac{bp}{2}\right) \tilde{u}(p) = 0$. Como $\lambda - \frac{4}{b^2} \text{sen}^2 \frac{bp}{2}$ no se anula se tiene que $u = 0$. Por lo tanto $\lambda + D_b^2$ es uno-uno para $\lambda \in \mathbf{C} \setminus [0, 4/b^2]$.

En seguida consideramos el rango $\lambda + D_b^2$. Sea $v \in M_b$ para la cual existe alguna $u \in M_b$ tal que

$$(\lambda + D_b^2)u = v.$$

Afirmamos que la preimagen de v , aplicando el teorema de inversión para transformada de Fourier, está dada por

$$u = (\lambda + D_b^2)^{-1}v = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/b}^{\pi/b} \mathbf{R} \frac{e^{ipx} \tilde{v}(p)}{\lambda - \frac{4}{b^2} \text{sen}^2 \frac{bp}{2}} dp$$

Veamos que $(\lambda + D_b^2)^{-1}$ es acotado. Calculando el cuadrado de su norma tenemos

$$\begin{aligned} \|(\lambda + D_b^2)^{-1}v\|_{L_2(\mathbf{R})}^2 &= \left\| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/b}^{\pi/b} \frac{e^{ipx} \tilde{v}(p)}{\lambda - \frac{4}{b^2} \text{sen}^2 \frac{bp}{2}} dp \right\|_{L_2(\mathbf{R})}^2 \\ &= \left\| \frac{\tilde{v}(p)}{\lambda - \frac{4}{b^2} \text{sen}^2 \frac{bp}{2}} \right\|_{L_2(\mathbf{R})}^2 \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{m_1^2} \int_{-\pi/b}^{\pi/b} |\tilde{v}(p)|^2 dp = \frac{1}{m_1^2} \|v\|_{L_2(\mathbf{R})}^2$$

donde $m_1 = \min\{d(\lambda, [0, 4/b^2])\}$, el mínimo de las distancias de λ a cada uno de los puntos del conjunto $[0, 4/b^2] \subset \mathbf{C}$. Por tanto, $(\lambda + D_b^2)^{-1}$ es acotado. De esta forma hemos visto que cualquier $\lambda \in \mathbf{C} \setminus [0, 4/b^2]$ está en el conjunto resolvente $\rho(-D_b^2)$ de $-D_b^2$, o sea, $\mathbf{C} \setminus [0, 4/b^2] \subset \rho(-D_b^2)$.

Veamos ahora que el espectro puntual $\sigma_P(-D_b^2)$ de $-D_b^2$ es vacío. Supongamos ahora que $\lambda \in \mathbf{C}$ es un valor propio de $-D_b^2$ con función propia u_λ ; entonces

$$(\lambda - (-D_b^2))u_\lambda = (\lambda + D_b^2)u_\lambda = 0$$

o bien usando el método de la transformada de Fourier

$$\left(\lambda - \frac{4}{b^2} \operatorname{sen}^2 \frac{bp}{2}\right) \tilde{u}_\lambda = 0.$$

Como u_λ es función propia se tiene que $u_\lambda \neq 0$ y por tanto $\tilde{u}_\lambda \neq 0$. Luego $\tilde{u}_\lambda = \delta(p - p_0)$, donde p_0 es tal que

$$\frac{4}{b^2} \operatorname{sen}^2 \frac{bp_0}{2} - \lambda = 0. \quad (2.2.4)$$

Entonces

$$u_\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} e^{ipx} \delta(p - p_0) dp = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ip_0x} \notin L_2(\mathbf{R}).$$

Luego

$$\sigma_P(-D_b^2) = \sigma_P(-D_{d,b}^2) = \emptyset. \quad (2.2.5)$$

Para demostrar que $\sigma_{AP}(-D_b^2) = [0, 4/b^2]$ tomamos ahora $\lambda \in [0, 4/b^2]$ y consideramos la sucesión de funciones $u_\nu(x) \in M_b$, $\nu > 0$, $\nu \rightarrow 0^+$ tales que

$$\tilde{u}_\nu(p) = \frac{\nu^{-1/4}}{\sqrt{2r_\nu}} \chi_{[-\pi/h, \pi/h]}(p) e^{-\frac{(p-p_0)^2}{4\nu}} e^{ip_0 p}, \quad r_\nu \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\frac{\pi/h+p_0}{\sqrt{2\nu}}}^{\frac{\pi/h-p_0}{\sqrt{2\nu}}} e^{-\tau^2} d\tau.$$

Note que $r_\nu \rightarrow \sqrt{\pi/2}$, $\nu \rightarrow 0^+$. Dichas funciones u_ν resultan ser funciones propias aproximadas (véase Definición 24 en el Apéndice) para dicho λ . En efecto, calculando el cuadrado de la norma de las mismas tenemos

$$\begin{aligned} \|u_\nu\|_{L_2(\mathbf{R})}^2 &= \|\tilde{u}_\nu(x)\|_{L_2(\mathbf{R})}^2 = \int_{\mathbf{R}} \left| \frac{\nu^{-1/4}}{\sqrt{2r_\nu}} \chi_{[-\pi/h, \pi/h]}(p) e^{-\frac{(p-p_0)^2}{4\nu}} e^{ip_0 p} \right|^2 dp \\ &= \frac{\nu^{-1/2}}{2r_\nu} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{-\frac{(p-p_0)^2}{2\nu}} dp \\ &= \frac{\nu^{-1/2}}{2r_\nu} \sqrt{2\nu} \int_{-\frac{\pi/h+p_0}{\sqrt{2\nu}}}^{\frac{\pi/h-p_0}{\sqrt{2\nu}}} e^{-\tau^2} d\tau \\ &= \frac{1}{\sqrt{2r_\nu}} \int_{-\frac{\pi/h+p_0}{\sqrt{2\nu}}}^{\frac{\pi/h-p_0}{\sqrt{2\nu}}} e^{-\tau^2} d\tau = 1, \end{aligned}$$

donde $\tau^2 = (p - p_0)^2 / (2\nu)$. Luego la norma de las funciones u_ν de la sucesión es constante.

Ahora calculamos el cuadrado de la norma de $(\lambda + D_b^2)u_\nu$. Tenemos

$$\begin{aligned} \|(\lambda + D_b^2)u_\nu\|_{L_2(\mathbf{R})}^2 &= \left\| \left(\lambda - \frac{4}{b^2} \operatorname{sen}^2 \frac{bp}{2} \right) \tilde{u}_\nu \right\|_{L_2(\mathbf{R})}^2 \\ &= \left\| \left(\frac{4}{b^2} \operatorname{sen}^2 \frac{bp_0}{2} - \frac{4}{b^2} \operatorname{sen}^2 \frac{bp}{2} \right) \tilde{u}_\nu \right\|_{L_2(\mathbf{R})}^2 \\ &= \frac{16}{b^4} \left\| \left(\operatorname{sen}^2 \frac{bp_0}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{bp}{2} \right) \tilde{u}_\nu \right\|_{L_2(\mathbf{R})}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{16}{b^4} \int_{\mathbf{R}} \left| \left(\operatorname{sen}^2 \frac{bp_0}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{bp}{2} \right) \tilde{u}_\nu(p) \right|^2 dp \\
&= \frac{16}{b^4} \int_{-\pi/b}^{\pi/b} \left(\operatorname{sen}^2 \frac{bp_0}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{bp}{2} \right)^2 \frac{\nu^{-1/2}}{2r_\nu} e^{-\frac{(p-p_0)^2}{2\nu}} dp \\
&= \frac{8\nu^{-1/2}}{b^4 r_\nu} \int_{-\pi/b}^{\pi/b} \left(\operatorname{sen}^2 \frac{bp_0}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{bp}{2} \right)^2 e^{-\frac{(p-p_0)^2}{2\nu}} dp,
\end{aligned}$$

esto para algún $p_0 \in \mathbf{R}^+$ que sea una solución de la Ec. (2.2.4), digamos $p_0 = \frac{2}{b} \arcsen \frac{b\sqrt{\lambda}}{2}$, ya que $\lambda \in [0, 4/b^2]$. Por el lema de Hadamard (véanse [34], Secc. 2.2 y [35], Secc. 20) se tiene

$$\operatorname{sen}^2 \frac{bp}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{bp_0}{2} = (p - p_0) \int_0^1 \left(\operatorname{sen}^2 \frac{b\xi}{2} \right)' \Big|_{\xi=p_0+s(p-p_0)} ds,$$

donde la función dada por integral pertenece a $C^\infty(\mathbf{R}_p)$. Razón por la cual entonces observamos que

$$\begin{aligned}
&\int_{-\pi/b}^{\pi/b} \left(\operatorname{sen}^2 \frac{bp_0}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{bp}{2} \right)^2 e^{-\frac{(p-p_0)^2}{2\nu}} dp = \int_{-\pi/b}^{\pi/b} (p - p_0)^2 F(p, p_0) e^{-\frac{(p-p_0)^2}{2\nu}} dp \\
&\leq M_0 \int_{-\pi/b}^{\pi/b} (p - p_0)^2 e^{-\frac{(p-p_0)^2}{2\nu}} dp = 2M_0 \nu \sqrt{2\nu} \int_{-\frac{\pi/b+p_0}{\sqrt{2\nu}}}^{\frac{\pi/b-p_0}{\sqrt{2\nu}}} \tau^2 e^{-\tau^2} d\tau = \\
&2M_0 \nu \sqrt{2\nu} \left[-\frac{1}{2} \left(\tau e^{-\tau^2} \Big|_{-\frac{\pi/b+p_0}{\sqrt{2\nu}}}^{\frac{\pi/b-p_0}{\sqrt{2\nu}}} - \int_{-\frac{\pi/b+p_0}{\sqrt{2\nu}}}^{\frac{\pi/b-p_0}{\sqrt{2\nu}}} e^{-\tau^2} d\tau \right) \right] = \\
&\sqrt{2} M_0 \nu^{3/2} \left(\sqrt{2} r_\nu - \sqrt{\frac{2}{\nu}} \frac{\pi}{b} e^{-\frac{(\pi/b-p_0)^2}{2\nu}} \right) \xrightarrow{\nu \rightarrow 0} 0.
\end{aligned}$$

donde $F(p, p_0) \in C^\infty(\mathbf{R}_p)$, M_0 es su máximo en el intervalo de integración y $\tau = (p - p_0)/\sqrt{2\nu}$. Luego

$$\frac{8\nu^{-1/2}}{b^4 r_\nu} \int_{-\pi/b}^{\pi/b} \left(\operatorname{sen}^2 \frac{bp_0}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{bp}{2} \right)^2 e^{-\frac{(p-p_0)^2}{2\nu}} dp \xrightarrow{\nu \rightarrow 0} 0.$$

Así, tenemos que si $\lambda \in [0, 4/b^2]$, $\|u_\nu\| = 1$ mientras que $\|(\lambda + D_b^2)u_\nu\| \rightarrow 0$ cuando $\nu \rightarrow 0^+$. Es decir, hemos comprobado que efectivamente $\{u_\nu\}$, $\nu \rightarrow 0^+$ es una sucesión que cumple los dos primeros requisitos de una sucesión de Weyl (véase Definición 23 en el Apéndice) para $-D_b^2$ y $\lambda \in [0, 4/b^2]$. Luego $\sigma_{\text{AP}}(-D_b^2) = [0, 4/b^2]$.

Por la autoadjunción de $-D_b^2$ (que está definido en el espacio de Hilbert M_b), a saber,

$$\langle -D_b^2 u, u \rangle = \frac{4}{b^2} \int_{\mathbf{R}} \operatorname{sen}^2 \frac{bp}{2} |\tilde{u}(p)|^2 dp = \langle u, -D_b^2 u \rangle,$$

tenemos que $\sigma(-D_b^2) = [0, 4/b^2]$ (véase Nota 20 del Apéndice). Por otra parte, como $\sigma_{\text{P}}(-D_b^2) = \emptyset$, también $\sigma_{\text{disc}}(-D_b^2) = \emptyset$. Entonces $\sigma_{\text{ess}}(-D_b^2) = [0, 4/b^2]$. Luego $\sigma_{\text{ess}}(-D_{\text{d},b^2}) = \sigma_{\text{ess}}(\widehat{H}_{\text{d},b,\varepsilon}) = [0, 4/b^2]$. Así concluimos la demostración del Lema 6. \diamond

2.3. REPRESENTACIÓN EN EL ESPACIO DE MOMENTA DEL CASO DISCRETO

El paso a la transformada de Fourier de la interpolación de Whittaker-Kotelnikov (2.1.15) de la ecuación discreta de Schrödinger viene caracterizada por el siguiente

Lema 7. $\widetilde{\Psi}_b(p)$ (usamos la definición (2.1.10)) satisface la ecuación

$$\left(\frac{4}{b^2} \operatorname{sen}^2 \frac{bp}{2} - E \right) \widetilde{\Psi}_b(p) = -\frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/b}^{\pi/b} W(p-p') \widetilde{\Psi}_b(p') dp' \quad (2.3.1)$$

en $p \in [-\pi/h, \pi/h]$. Aquí $W(p)$ denota la $2\pi/h$ -continuación periódica a todo \mathbf{R} de $\widetilde{V}_b(p)$ (la transformada de Fourier de $V_b(x)$) y está dada por

$$W(p) = \frac{h}{\sqrt{2\pi}} \sum_j V_j e^{-ijbp}. \quad (2.3.2)$$

Nota 4. Note que $W(p) \in C^\infty(\mathbf{R}_p)$ y depende de h también.

Demostración. Sustituimos $(1/\sqrt{2\pi}) \int_{\mathbf{R}} e^{-ip'x'} \Psi_b(x') dx'$ en lugar de $\widetilde{\Psi}_b(p')$ en el integrando de (2.3.1), y suponemos que el lado derecho de (2.3.1) está multiplicado por $\chi_{[-\pi/h, \pi/h]}(p)$. Aplicando la transformada inversa de Fourier a (2.3.1), tenemos

$$\begin{aligned} & (-D_b^2 - E) \Psi_b(x) \\ &= -\frac{\varepsilon}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{ipx} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} W(p-p') \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ip'x'} \Psi_b(x') dx' dp' dp \\ &= -\frac{h\varepsilon}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} \sum_j V_j e^{ipx-ijb(p-p')-ip'x'} dp' dp \Psi_b(x') dx' \\ &= -\frac{\varepsilon}{h} \int_{\mathbf{R}} \sum_j V_j \operatorname{senc} \pi(x/h - j) \operatorname{senc} \pi(x'/h - j) \Psi_b(x') dx'. \end{aligned}$$

Igualando la primera y última líneas, usando (2.1.13) y transponiendo obtenemos (2.1.15). \diamond

Capítulo 3

POTENCIALES RECTANGULARES CENTRALES

3.1. EL CASO CONTINUO CON UN POZO POTENCIAL RECTANGULAR CENTRADO EN EL ORIGEN

A manera de introducción vamos a considerar en esta sección la Ec. (1.1.1) cuando $V(x) = -m\chi_{[-x_0, x_0]}(x)$, con $m, x_0 > 0$, donde $\chi_{[-x_0, x_0]}(x)$ denota la función característica del conjunto $[-x_0, x_0]$; es decir, $\varepsilon V(x)$ es un potencial de pozo rectangular (no pertenece a C_0^∞) poco profundo de anchura $2x_0$ centrado en el origen y que tiene profundidad $m\varepsilon$. Suponga que $E = -\mu^2(\varepsilon)$, $\mu > 0$, $\mu \rightarrow 0^+$, $\varepsilon \rightarrow 0^+$, por lo que podemos expresar (1.1.1) con este potencial como

$$-\frac{d^2 \Psi}{dx^2} - m\varepsilon \chi_{[-x_0, x_0]}(x) \Psi(x) = -\mu^2 \Psi(x),$$

de donde tenemos

$$\frac{d^2 \Psi}{dx^2} + (m\varepsilon \chi_{[-x_0, x_0]}(x) - \mu^2) \Psi(x) = 0, \quad (3.1.1)$$

que en \mathbf{R} es una ecuación diferencial con coeficientes variables. Buscamos entonces la solución (función de onda) $\Psi(x)$, con $\|\Psi(x)\|_{L_2(\mathbf{R})} = 1$, para la Ec. (3.1.1), y de esta forma podemos encontrar μ , y por tanto también la energía E , como función de la profundidad $m\varepsilon$ del potencial $\varepsilon V(x)$.

La forma de hacer esto es clásica (véase, por ejemplo, [5]). Las soluciones fuera del pozo que están acotadas en el infinito son

$$\Psi_-(x) = A_0 e^{\mu x}, \quad x \leq -x_0;$$

$$\Psi_+(x) = B_0 e^{-\mu x}, \quad x \geq x_0,$$

Escribimos la solución dentro del pozo en la forma

$$\Psi_1(x) = A_1 \cos \sqrt{m\varepsilon - \mu^2} x + B_1 \sin \sqrt{m\varepsilon - \mu^2} x, \quad -x_0 \leq x \leq x_0$$

Ya que $E > V(x) = -m\varepsilon$, note que

$$m\varepsilon - \mu^2 > 0.$$

Pegando soluciones y derivadas en las orillas $x = \pm x_0$ obtenemos las ecuaciones

$$A_0 e^{-\mu x_0} = A_1 \cos \sqrt{m\varepsilon - \mu^2} x_0 - B_1 \sin \sqrt{m\varepsilon - \mu^2} x_0$$

$$A_0 \mu e^{-\mu x_0} = \sqrt{m\varepsilon - \mu^2} (A_1 \sin \sqrt{m\varepsilon - \mu^2} x_0 + B_1 \cos \sqrt{m\varepsilon - \mu^2} x_0)$$

$$B_0 e^{-\mu x_0} = A_1 \cos \sqrt{m\varepsilon - \mu^2} x_0 + B_1 \sin \sqrt{m\varepsilon - \mu^2} x_0$$

$$-B_0\mu e^{-\mu x_0} = \sqrt{m\varepsilon - \mu^2} (-A_1 \operatorname{sen} \sqrt{m\varepsilon - \mu^2} x_0 + B_1 \operatorname{cos} \sqrt{m\varepsilon - \mu^2} x_0),$$

que se combinan para dar

$$\begin{aligned} \mu &= \sqrt{m\varepsilon - \mu^2} \frac{A_1 \operatorname{sen} \sqrt{m\varepsilon - \mu^2} x_0 - B_1 \operatorname{cos} \sqrt{m\varepsilon - \mu^2} x_0}{A_1 \operatorname{cos} \sqrt{m\varepsilon - \mu^2} x_0 + B_1 \operatorname{sen} \sqrt{m\varepsilon - \mu^2} x_0} \\ &= \sqrt{m\varepsilon - \mu^2} \frac{A_1 \operatorname{sen} \sqrt{m\varepsilon - \mu^2} x_0 + B_1 \operatorname{cos} \sqrt{m\varepsilon - \mu^2} x_0}{A_1 \operatorname{cos} \sqrt{m\varepsilon - \mu^2} x_0 - B_1 \operatorname{sen} \sqrt{m\varepsilon - \mu^2} x_0}. \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

Conjuntamente estas últimas implican que $A_1 B_1 = 0$, esto es, las soluciones son pares en x ($B_1 = 0$) o impares en x ($A_1 = 0$), una situación encontrada también en el caso del potencial de caja infinita. El estado base, sin nodos (raíces), es par. Las condiciones que determinan la energía son, de (3.1.2), las siguientes:

$$\mu = \sqrt{m\varepsilon - \mu^2} \tan \sqrt{m\varepsilon - \mu^2} x_0 \quad (\text{soluciones pares}) \quad (3.1.3)$$

$$\mu = -\sqrt{m\varepsilon - \mu^2} \cot \sqrt{m\varepsilon - \mu^2} x_0 \quad (\text{soluciones impares})$$

Con la notación

$$\xi = \sqrt{m\varepsilon - \mu^2} x_0 \quad (3.1.4)$$

la primera de las relaciones (3.1.3) nos da

$$\frac{\sqrt{m\varepsilon x_0^2 - \xi^2}}{\xi} = \tan \xi \quad (3.1.5)$$

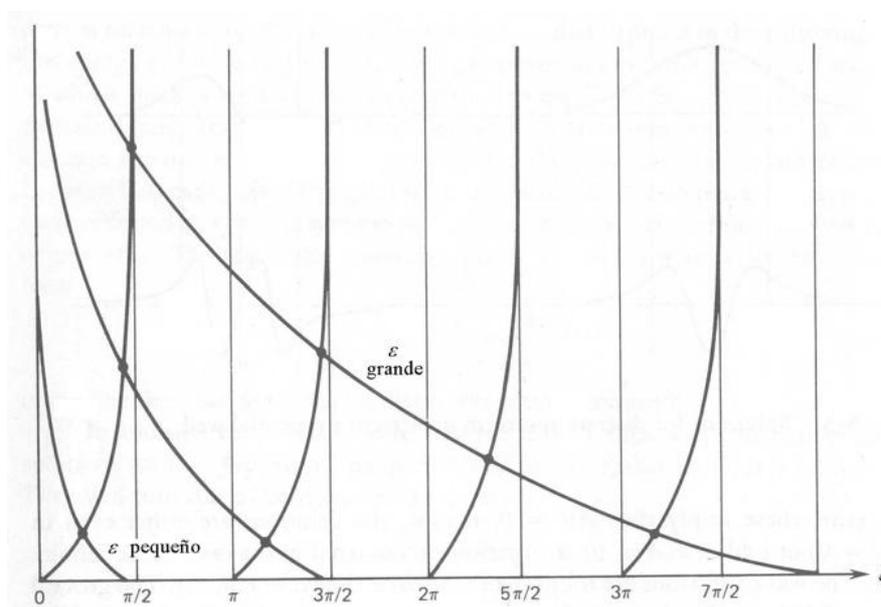


Figura 3.1: Localización de los valores propios discretos para soluciones pares en un pozo rectangular. Las curvas crecientes representan $\tan \xi$; las curvas decrecientes son $\sqrt{m\epsilon x_0^2 - \xi^2}/\xi$ para diferentes valores de ϵ .

Si graficamos $\tan \xi$ y $\sqrt{m\epsilon x_0^2 - \xi^2}/\xi$ como funciones de ξ , los puntos de intersección determinan los valores propios. Éstos forman un conjunto discreto. La figura 3.1 muestra que existe un valor propio único si ϵ es suficientemente pequeño, a saber, si

$$\epsilon < \pi^2/mx_0^2. \quad (3.1.6)$$

Sea ξ_0 la única solución de la ecuación para ξ (3.1.5) cuando se cumple (3.1.6). Entonces de la sustitución en la Ec. (3.1.4) obtenemos que

$$\mu = \sqrt{m\epsilon - \xi_0^2/x_0^2}.$$

3.2. EL CASO DISCRETO CON UN POTENCIAL RECTANGULAR CENTRADO EN EL ORIGEN

Comenzaremos considerando en esta sección la Ec. (1.2.1) cuando $V_j = -m\chi_{\{0\}}(j)$, donde $m > 0$ y $\chi_{\{0\}}(j)$ denota la función característica del conjunto $\{0\}$; es decir, $\{\varepsilon V_j\}$ es un potencial de pozo discreto que es 0 en todo $\mathbf{Z}h$ excepto en el origen, donde tiene profundidad $m\varepsilon$. Suponga que $E = -\beta^2(\varepsilon)$, $\beta > 0$, $\beta \rightarrow 0^+$, $\varepsilon \rightarrow 0^+$, por lo que podemos expresar (1.2.1) con este potencial como

$$(-\psi_{j+1} + 2\psi_j - \psi_{j-1})/h^2 - \chi_{\{0\}}(j) m\varepsilon\psi_j = -\beta^2\psi_j,$$

de donde tenemos

$$\psi_{j+1} + (\chi_{\{0\}}(j) m\varepsilon - 2/h^2 - \beta^2) h^2\psi_j + \psi_{j-1} = 0, \quad (3.2.1)$$

que es una ecuación en diferencias con coeficientes variables. Buscamos la función de onda discreta $\psi = \{\psi_j\}$ con

$$\|\psi\|_{\ell_2} = 1 \quad (3.2.2)$$

para la Ec. (3.2.1), y encontraremos β , y por tanto también la energía E , como función de la profundidad $m\varepsilon$ del potencial $\{\varepsilon V_j\}$.

Para resolver esta ecuación procedemos a resolver

$$\psi_{j+1} + (Vmb^2\varepsilon - p_1(\beta))\psi_j + \psi_{j-1} = 0, \quad (3.2.3)$$

donde V es una constante (no depende de j) y toma los valores 0 o 1, y donde

$$p_1(\beta) = 2 + h^2\beta^2. \quad (3.2.4)$$

Para esta ecuación proponemos (véase [2], Secc. 2.3) una solución $\{r_V^j\}$, donde r_V denota una constante distinta de 0 (independiente de j) que depende de la constante V ; de donde tenemos ahora la ecuación algebraica para r_V

$$r_V^2 + (Vmb^2\varepsilon - p_1) r_V + 1 = 0,$$

cuyas soluciones son

$$r_{V\pm} = 1 + \frac{\beta^2 - Vm\varepsilon}{2} b^2 \pm b \sqrt{(\beta^2 - Vm\varepsilon) \left(1 + \frac{\beta^2 - Vm\varepsilon}{4} b^2\right)}. \quad (3.2.5)$$

La solución general de la Ec. (3.2.3) está dada por $\psi_V = \{\psi_{V,j}\}$ con

$$\psi_{V,j} = A_V r_{V+}^j + B_V r_{V-}^j, \quad (3.2.6)$$

donde A_V, B_V son constantes arbitrarias independientes de j . Podemos dar la solución general de la Ec. (3.2.1) como la combinación de las soluciones ψ_V dadas por (3.2.6), las cuales quedarán respectivamente válidas sobre los subconjuntos correspondientes de \mathbf{Z} donde $V_j = -V$. Así, esta solución general de la Ec. (3.2.1) está dada por $\psi = \{\psi_j\}$ con

$$\psi_j = \chi_{\{0\}}(j) \psi_{1,j} + \chi_{\mathbf{Z} \setminus \{0\}}(j) \psi_{0,j}.$$

Para satisfacer la condición (3.2.2), tenemos que modificar las constantes arbitrarias A_V, B_V de (3.2.6) en forma distinta para cada “intervalo” discreto $\mathbf{Z}^-, \{0\}$ y \mathbf{Z}^+ .

Entonces haciendo $C = A_1 + B_1$, $B_0 = B\chi_{Z^+}(j)$ y $A_0 = A\chi_{Z^-}(j)$. Así sucede que

$$\psi_j = \begin{cases} Ar_+^j, & j \leq -1; \\ C, & j = 0; \\ Br_-^j, & j \geq 1, \end{cases} \quad (3.2.7)$$

donde $r_{\pm} = r_{0\pm}$. De este modo en particular

$$\begin{aligned} \psi_{-2} = Ar_+^{-2}, \quad \psi_{-1} = Ar_+^{-1}, \quad \psi_0 = C, \\ \psi_1 = Br_+, \quad \psi_2 = Br_-^2. \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

Ahora hay que pegar los tres pedazos de (3.2.7) (similar a lo hecho por Landau & Lifshitz [26] para el caso continuo de la ecuación de Schrödinger) observando que (3.2.1) es satisfecha particularmente cuando $j = -1$, $j = 0$ y $j = 1$, que nos genera tres ecuaciones respectivamente:

$$\begin{aligned} \psi_0 - p_1\psi_{-1} + \psi_{-2} &= 0, \\ \psi_1 + (mb^2\varepsilon - p_1)\psi_0 + \psi_{-1} &= 0, \\ \psi_2 - p_1\psi_1 + \psi_0 &= 0. \end{aligned}$$

Sustituyendo las correspondientes ψ_j 's dadas por (3.2.8) en estas ecuaciones obtenemos

$$\begin{aligned} C - p_1Ar_+^{-1} + Ar_+^{-2} &= 0, \\ Br_- + (mb^2\varepsilon - p_1)C + Ar_+^{-1} &= 0, \\ Br_-^2 - p_1Br_- + C &= 0. \end{aligned}$$

Este sistema tiene soluciones no triviales para A , B y C (y por tanto existe una ψ no trivial) si su determinante

$$\begin{vmatrix} -p_1 r_+^{-1} + r_+^{-2} & 0 & 1 \\ r_+^{-1} & r_- & mb^2 \varepsilon - p_1 \\ 0 & r_-^2 - p_1 r_- & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (3.2.9)$$

Note que

$$r_{\pm} = 1 + \frac{h^2 \beta^2}{2} \pm h\beta \sqrt{1 + \frac{h^2 \beta^2}{4}}, \quad (3.2.10)$$

el cual se obtiene haciendo $V = 0$ en (3.2.5); además, note que $r_+ r_- = 1$, $r_+ + r_- = p_1$. Por lo tanto, simplificando (3.2.9) se convierte en

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ r_- & r_- & mb^2 \varepsilon - p_1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Esto nos provee la ecuación

$$2r_- + mb^2 \varepsilon - p_1 = 0,$$

de la cual, de acuerdo a (3.2.4) y (3.2.10), podemos escribir en su turno

$$mh\varepsilon - 2\beta \sqrt{1 + \frac{h^2 \beta^2}{4}} = 0. \quad (3.2.11)$$

Considere la función

$$F_r(\beta, \varepsilon) = mh\varepsilon - 2\beta\sqrt{1 + \frac{h^2\beta^2}{4}}. \quad (3.2.12)$$

Así tenemos que la función $F_r(\beta, \varepsilon)$ es continuamente diferenciable en cada argumento. Además, $F_r(0, 0) = 0$, y como

$$\partial_\beta F_r = -\frac{2 + h^2\beta^2}{\sqrt{1 + \frac{h^2\beta^2}{4}}},$$

tenemos que $[\partial_\beta F_r](0, 0) = -2$. De aquí que, por el teorema de la función implícita (veáse por ejemplo [28], Secc.3.5, Teorema 11), la solución $\beta(\varepsilon)$ para β de la ecuación secular (3.2.11), la cual tiende a cero cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, existe, es única y está dada por (3.2.14). Para encontrar esta última expresión tenemos, de la Ec. (3.2.11), que

$$mh\varepsilon = 2\beta\sqrt{1 + \frac{h^2\beta^2}{4}}. \quad (3.2.13)$$

Ya que

$$\sqrt{1 + \frac{h^2\beta^2}{4}} = 1 + O(h^2\beta^2)$$

cuando $\beta \rightarrow 0$, sustituimos la última expresión en (3.2.13) y eliminando los términos de orden $O(h^2\beta^2)$ obtenemos

$$\beta = \frac{mh\varepsilon}{2}, \quad (3.2.14)$$

que nos da la relación entre β y ε . Vemos entonces que E es del orden de ε^2 . Resolviendo el sistema tenemos que $A = B = C$. Aquí la constante libre, digamos C , se determina por la condición (3.2.2).

Consideremos ahora la Ec. (1.2.1) en el caso en que $V_j = m\chi_{\{0\}}(j)$, $m > 0$, es decir, $\mathbf{V} \equiv \{V_j\}$ es un potencial discreto de barrera el cual es 0 en todo $\mathbf{Z}h$ excepto en el origen, donde tiene altura m . Suponga además que $E = 4 + \gamma^2(\varepsilon)$, $\gamma > 0$, $\gamma \rightarrow 0^+$, $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Por un proceso análogo al precedente también tenemos que $\gamma = mh\varepsilon/2 + O(\varepsilon^2)$.

Consideremos ahora la Ec. (1.2.1) en el caso en que

$$V_j = \pm m \sum_{k=-N}^N \delta_{jk}, \quad (3.2.15)$$

$N \in \mathbf{N}$, siendo δ_{jk} la función delta de Kronecker, es decir, \mathbf{V} es un potencial discreto de barrera (tomando el signo + en (3.2.15)) o pozo (tomando el signo -), potencial que tiene altura o profundidad m , respectivamente, sobre $[-Nh, Nh]$, y que vale 0 en cualquier otro lugar. Suponga que $E = 4 + \gamma^2(\varepsilon)$ (para la barrera) o $E = -\beta^2(\varepsilon)$ (para el pozo), $\beta, \gamma > 0$, $\beta, \gamma \rightarrow 0^+$, $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Por un proceso análogo a los previos de esta sección tenemos que en estos casos $\beta = \gamma = (2N + 1)mh\varepsilon/2 + O(\varepsilon^2)$.

Capítulo 4

LA UNICIDAD DE LOS VALORES PROPIOS

4.1. UNICIDAD DEL VALOR PROPIO PARA EL CASO CONTINUO

Introduzcamos la siguiente

Definición 9. Definimos el operador de Schrödinger \widehat{H}_ε como aquel que actúa en el lado izquierdo de la Ec. (1.1.1), es decir,

$$\widehat{H}_\varepsilon \equiv -\frac{d^2}{dx^2} + \varepsilon V(x). \quad (4.1.1)$$

La existencia y unicidad del valor propio $E = -\mu^2(\varepsilon)$, $\mu > 0$, $\mu \rightarrow 0^+$, $\varepsilon \rightarrow 0^+$, para el problema (1.1.1) enunciado en el primer capítulo de esta tesis, queda manifiesta en el siguiente hecho importante, que está probado en [45].

Afirmación 8. Existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo ε tal que $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ el operador \widehat{H}_ε tiene un valor propio único E_ε , que está localizado a la izquierda del espectro esencial $[0, \infty)$ y una función propia única (salvo por un factor constante) Ψ_ε del espacio $L_2(\mathbf{R})$, i.e.,

$$\widehat{H}_\varepsilon \Psi_\varepsilon = E_\varepsilon \Psi_\varepsilon. \quad (4.1.2)$$

Vamos a abordar en esta sección la cuestión de la unicidad de tal valor propio, la cual podemos ver de la siguiente manera.

Consideremos primeramente el operador \widehat{H} tal que

$$[\widehat{H}\Psi](x) = -\Psi''(x) + U(x)\Psi(x) \quad (4.1.3)$$

definido sobre funciones con dominio \mathbf{R}_x . Denotamos por $N_-(\widehat{H})$ el número de valores propios negativos (contadas sus multiplicidades) de \widehat{H} , estableciendo que $N_-(\widehat{H}) = +\infty$ si este número es infinito o si hay al menos un punto no aislado del espectro sobre $(-\infty, 0)$. Vamos a representar el potencial $U(x)$ como la suma

$$U(x) = U_+(x) + U_-(x)$$

donde $U_+(x) = \max\{U(x), 0\}$ (llamado parte positiva de $U(x)$) y $U_-(x) = \min\{U(x), 0\}$ (llamado parte negativa de $U(x)$).

Recordemos las siguientes definiciones (véase [4]).

Definición 10. Se dice que el potencial $U(x)$ está acotado por debajo si

$$U(x) \geq -C_0, \quad x \in \mathbf{R},$$

para alguna $C_0 \in \mathbf{R}$.

Definición 11. Se dice que $U(x)$ es localmente acotado sobre \mathbf{R} si

$$\operatorname{ess\,sup}_{x \in K} |U(x)| < \infty$$

para *cada* conjunto compacto $K \subset \mathbf{R}$.

Tenemos entonces que se cumple el siguiente teorema ([4], Secc. 2.5, 3., Teorema 5.3). La demostración se basa en el lema de Glazman (véase Lema 26 en el Apéndice) y la omitimos aquí.

Teorema 9. Sea \widehat{H} un operador de la forma (4.1.3) sobre \mathbf{R} y suponga que el potencial es localmente acotado, acotado por debajo y que tiene una parte negativa $U_-(x)$. Sea $N_-(\widehat{H})$ el número de sus valores propios negativos. Entonces

$$N_-(\widehat{H}) \leq 1 + \int_{\mathbf{R}} |x| |U_-(x)| dx. \quad (4.1.4)$$

Note que \widehat{H}_ε es un operador de la forma (4.1.3) con

$$U(x) = \varepsilon V(x). \quad (4.1.5)$$

Como $V(x) \in C_0^\infty$, entonces el potencial (4.1.5) cumple con las condiciones del potencial del Teorema 9. Luego aplicamos dicho teorema para $\widehat{H} = \widehat{H}_\varepsilon$, por lo cual la estimación (4.1.4) se convierte en

$$N_-(\widehat{H}_\varepsilon) \leq 1 + \varepsilon \int_{\operatorname{supp} V(x)} |x| |V_-(x)| dx,$$

lo cual muestra que para ε suficientemente pequeño el valor propio de \widehat{H}_ε (o sea del problema (1.1.1)) es único.

4.2. UNICIDAD DE LOS VALORES PROPIOS PARA EL CASO DISCRETO

De igual manera, supongamos que existe algún valor propio $E = -\beta^2(\varepsilon)$, $\beta > 0$, $\beta \rightarrow 0^+$, $\varepsilon \rightarrow 0^+$, para el problema (1.2.1) enunciado en el primer capítulo de esta tesis. Vamos a abordar en esta sección la cuestión de la unicidad de tal valor propio. Definimos ahora el siguiente operador.

Definición 12. Sea el operador $\widehat{H}_{d_1, b, \varepsilon} : \ell_2 \longrightarrow \ell_2$ tal que

$$\widehat{H}_{d_1, b, \varepsilon} \{\psi_j\} = \{-(\psi_{j+1} - 2\psi_j + \psi_{j-1})/b^2 - m_0 \varepsilon \chi_{[-[R], [R]]}(j) \psi_j\},$$

siendo R la referida en (1.2.2), es decir, la mitad de la longitud de algún intervalo centrado en el origen que contenga al soporte de $\{V_j\}$, y m_0 el definido en (1.2.3).

Observemos que este operador $\widehat{H}_{d_1, b, \varepsilon}$ es un caso particular del operador $\widehat{H}_{d, b, \varepsilon}$. Lo podemos ver sustituyendo en el lado izquierdo de la Ec. (2.2.1) el potencial V_j dado por el signo negativo de (3.2.15), con $m = m_0$ y $N = [R]$. El potencial discreto del operador $\widehat{H}_{d_1, b, \varepsilon}$ es un pozo rectangular de profundidad m_0 que va de $-[R]b$ a $[R]b$. Este potencial lo expresaremos como

$$\{V_{j,1}\} \equiv -m_0 \{\chi_{\{j \in \mathbf{Z} \ni |j| < R\}}(j)\}.$$

Recordemos que $\widehat{H}_{d_1, b, \varepsilon}$ y $\widehat{H}_{d, b, \varepsilon}$ son autoadjuntos (véase la Nota 3). Por otra parte tenemos que los potenciales de ambos operadores están acotados por debajo por $-m_0$, a saber,

$$-m_0 \leq V_{j,1} \leq V_j, \quad j \in \mathbf{Z}. \quad (4.2.1)$$

Luego $\widehat{H}_{d_1, b, \varepsilon}$ y $\widehat{H}_{d, b, \varepsilon}$ son operadores que están acotados por debajo. En efecto, observemos que $-D_{d, b}^2$ es un operador no negativo ya que pasando a la transformada de Fourier \mathcal{F} de su interpolación de Whittaker-Kotelnikov tenemos

$$\langle -D_{d, b}^2 \{\psi_j\}, \{\psi_j\} \rangle \xrightarrow{\mathcal{F} \circ \text{Kot}_b} \frac{4}{b^2} \int_{-\pi/b}^{\pi/b} \sin^2 \frac{bp}{2} |\widetilde{\Psi}_b(p)|^2 dp \geq 0,$$

de lo cual se tiene que

$$\langle \widehat{H}_{d, b, \varepsilon} \{\psi_j\}, \{\psi_j\} \rangle \geq \varepsilon \sum_j V_j |\psi_j|^2 \geq -\varepsilon m_0 \|\{\psi_j\}\|_{\ell_2(\mathbf{Z})}^2.$$

También, de (4.2.1) y del hecho de que el dominio de definición de estos operadores es todo el espacio de Hilbert $\ell_2(\mathbf{Z})$ puede verse que

$$\widehat{H}_{d_1, b, \varepsilon} \leq \widehat{H}_{d, b, \varepsilon}.$$

Luego podemos aplicar el Teorema 28 del Apéndice haciendo $T_1 = \widehat{H}_{d_1, b, \varepsilon}$, $T_2 = \widehat{H}_{d, b, \varepsilon}$ y $\lambda = 0$ para concluir que

$$N(0; \widehat{H}_{d, b, \varepsilon}) \leq 1$$

para ε suficientemente pequeño, ya que

$$N(0; \widehat{H}_{d_1, b, \varepsilon}) = 1$$

para ε suficientemente pequeño según las conclusiones del capítulo anterior. Así, hemos mostrado que para ε suficientemente pequeño el valor propio del operador $\widehat{H}_{d_1, b, \varepsilon}$ (o sea del problema (1.2.1), $E = -\beta^2$), si existe, es único. En el séptimo capítulo de esta tesis se demuestra constructivamente esa existencia.

De manera análoga, supongamos que existe algún valor propio $E = 4/b^2 + \gamma^2(\varepsilon)$, $\gamma > 0$, $\gamma \rightarrow 0^+$, $\varepsilon \rightarrow 0^+$, para el problema (1.2.1) enunciado en el primer capítulo de

esta tesis. Se tiene que también se presenta la unicidad de tal valor propio. En efecto, la Ec. (1.2.1) con las condiciones ahora mencionadas se puede reducir a

$$\frac{1}{h^2} (\psi_{j+1} + 2\psi_j + \psi_{j-1}) - \varepsilon V_j \psi_j = -\gamma^2 \psi_j, \quad \{\psi_j\} \in \ell_2,$$

Definimos ahora los siguientes operadores.

Definición 13. Sea $\widehat{H}'_{d,b,\varepsilon} : \ell_2 \longrightarrow \ell_2$ tal que

$$\widehat{H}'_{d,b,\varepsilon} \{\psi_j\} = D_{d,b}'^2 \{\psi_j\} + \varepsilon \{V_j' \psi_j\}, \quad (4.2.2)$$

donde $D_{d,b}' : \ell_2 \longrightarrow \ell_2$ es tal que actúa de la forma

$$D_{d,b}'^2 \{\psi_j\} = \frac{1}{h^2} \{\psi_{j+1} + 2\psi_j + \psi_{j-1}\}$$

y $\{V_j'\} \equiv -\{V_j\}$.

Definición 14. Sea el operador $\widehat{H}'_{d_1,b,\varepsilon} : \ell_2 \longrightarrow \ell_2$ tal que

$$\widehat{H}'_{d_1,b,\varepsilon} \{\psi_j\} = \{(\psi_{j+1} + 2\psi_j + \psi_{j-1})/b^2 - m'_0 \varepsilon \chi_{[-R],[R]}(j) \psi_j\},$$

siendo R la referida en (1.2.2), es decir, la mitad de la longitud de algún intervalo centrado en el origen que contenga al soporte de $\{V_j\}$, y m'_0 el que corresponde a V_j' según la definición dada en (1.2.3).

Note que $\widehat{H}'_{d_1, b, \varepsilon}$ es un caso particular de $\widehat{H}'_{d, b, \varepsilon}$. Como se da la igualdad (2.2.3), el operador $D_{d, b}{}'^2$ es simétrico y, por su dominio de definición, autoadjunto. El operador de multiplicación por una sucesión finita cuyo resultado es la sucesión en el último término de (4.2.2), es autoadjunto y compacto en $\ell_2(\mathbf{Z})$, ya que la simetría de dicho operador viene de que $V_j' \in \mathbf{R}$ y la compacidad se ve de manera similar a como se hizo para el operador de multiplicación por una sucesión finita de la Sección 2.2. Tenemos entonces que $\widehat{H}'_{d_1, b, \varepsilon}$ y $\widehat{H}'_{d, b, \varepsilon}$ son también autoadjuntos. Además los potenciales de ambos operadores están acotados por debajo por $-m'_0$:

$$-m'_0 \leq V_{j,1}' \leq V_j', \quad j \in \mathbf{Z}. \quad (4.2.3)$$

Por ello $\widehat{H}'_{d_1, b, \varepsilon}$ y $\widehat{H}'_{d, b, \varepsilon}$ están acotados por debajo, ya que $D_{d, b}{}'^2$ es un operador no negativo, a saber,

$$\langle D_{d, b}{}'^2 \{\psi_j\}, \{\psi_j\} \rangle \xrightarrow{\mathcal{F} \circ \text{Kot}_b} \frac{4}{h^2} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} \cos^2 \frac{bp}{2} |\widetilde{\Psi}_b(p)|^2 dp \geq 0,$$

de lo cual

$$\langle \widehat{H}'_{d, b, \varepsilon} \{\psi_j\}, \{\psi_j\} \rangle \geq -\varepsilon m'_0 \|\{\psi_j\}\|_{\ell_2(\mathbf{Z})}^2.$$

También, de (4.2.3) y del hecho de que el dominio de definición de estos operadores es $\ell_2(\mathbf{Z})$, puede verse que

$$\widehat{H}'_{d_1, b, \varepsilon} \leq \widehat{H}'_{d, b, \varepsilon}.$$

Luego podemos aplicar el Teorema 28 del Apéndice haciendo $T_1 = \widehat{H}'_{d_1, b, \varepsilon}$, $T_2 = \widehat{H}'_{d, b, \varepsilon}$ y $\lambda = 0$ para concluir que

$$N(0; \widehat{H}'_{d, b, \varepsilon}) \leq 1$$

para ε suficientemente pequeño, ya que

$$N\left(0; \widehat{H}'_{d_1, b, \varepsilon}\right) = 1$$

para ε suficientemente pequeño según lo dicho en el último párrafo del capítulo anterior. Así, hemos mostrado que para ε suficientemente pequeño el valor propio del operador $\widehat{H}'_{d_1, b, \varepsilon}$ (o sea del problema (1.2.1), $E = 4/b^2 + \gamma^2$), si existe, es único. En el séptimo capítulo de esta tesis se demuestra constructivamente esa existencia.

Capítulo 5

EL CASO CONTINUO

5.1. LA APROXIMACIÓN ASINTÓTICA PARA EL CASO CONTINUO.

Como dijimos en la Introducción, nuestro primer acercamiento es el dado en [51], [52], a saber, la construcción de una aproximación asintótica a la solución de la Ec. (1.1.1). En esta sección daremos, considerando

$$\int_{\mathbf{R}} V(x) dx < 0 \quad (5.1.1)$$

en dicha ecuación, la construcción de una asintótica uniforme Ψ_n de la función propia normalizada Ψ con el primer método de Zhevandrov-Merzon. Tal asintótica está dada por

$$\Psi_n(x) = \frac{c(\varepsilon)\mu_n}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} e^{ipx} \frac{a_0(p) + \varepsilon a_1(p) + \cdots + \varepsilon^n a_n(p)}{p^2 + \mu_n^2} dp,$$

$n = 0, 1, 2, \dots$, y pertenece al valor propio

$$E = -\mu_n^2 + O(\varepsilon^{n+5/2}), \quad (5.1.2)$$

donde se tiene que

$$\mu_n = \varepsilon(\beta_0 + \varepsilon\beta_1 + \dots + \varepsilon^n\beta_n),$$

$$\beta_0 = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}\tilde{V}(0), \quad a_0(p) = \frac{\tilde{V}(p)}{\tilde{V}(0)},$$

$$c(\varepsilon) = \varepsilon^{1/2}(d_0 + d_1\varepsilon + \dots + d_n\varepsilon^n), \quad d_0 = \sqrt{\frac{2\beta_0}{\pi}},$$

siendo $\beta_1, \dots, \beta_n, d_0, d_1, \dots, d_n$ y las funciones a_1, \dots, a_n determinados por los sistemas de ecuaciones (5.1.19)–(5.1.24) y (5.1.42). Por tanto, Ψ_n satisface las condiciones

$$\|\Psi_n\| = 1 + O(\varepsilon^{n+1}); \quad (5.1.3)$$

$$\|\Psi - \Psi_n\| = O(\varepsilon^{n+1/2}) \quad \text{cuando} \quad \varepsilon \rightarrow 0^+. \quad (5.1.4)$$

La norma es la de $L_2(\mathbf{R})$ y $\|O(\varepsilon^{n+1})\| \leq \text{Const } \varepsilon^{n+1}$. La construcción para cuando $\int V(x)dx = 0$ se modifica ligeramente.

En efecto, aplicando la transformada de Fourier a (1.1.1) obtenemos

$$(p^2 - E)\tilde{\Psi}(p) = -\frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} \tilde{V}(p - p') \tilde{\Psi}(p') dp'. \quad (5.1.5)$$

Según el esquema delineado en la introducción, buscamos la solución aproximada de la ecuación (5.1.5) como lo sugiere (0.0.2), o sea en la forma

$$\tilde{\psi}_n(p) = \varepsilon B_n \frac{A_n(p)}{p^2 + \varepsilon^2 B_n^2}, \quad (5.1.6)$$

$$\text{con } A_n(p) = a_0(p) + \varepsilon a_1(p) + \dots + \varepsilon^n a_n(p)$$

para buscar la asintótica respecto a ε , suponiendo que $a_0(p) \not\equiv 0$ y denotando explícitamente

$$B_n = \beta_0 + \varepsilon \beta_1 + \dots + \varepsilon^n \beta_n. \quad (5.1.7)$$

El nivel de energía aproximado es

$$E_n = -\varepsilon^2 B_n^2. \quad (5.1.8)$$

Buscaremos la solución que satisface las condiciones de normalización

$$a_0(0) = 1, \quad a_k(0) = 0, \quad k = 2, \dots, n. \quad (5.1.9)$$

Posteriormente multiplicaremos la solución aproximada (5.1.6) por cierta constante $c(\varepsilon)$ para que la norma de la función propia (ya así normalizada) Ψ sea de orden $1 + O(\varepsilon^{n+1})$. Esto es necesario para la aplicación de los dos Lemas básicos 12 y 13, que proveerán un fundamento riguroso de este método.

Nuestra meta es construir valores de β_1, \dots, β_n y funciones $a_0(p), \dots, a_n(p)$ de manera que $\tilde{\psi}_n(p)$ satisfaga la ecuación (5.1.5) hasta un orden $O(\varepsilon^{n+2})$, donde $\|O(\varepsilon^{n+2})\| \leq \text{Const } \varepsilon^{n+2}$, y la norma aquí es entendida en el sentido de L_2 .

Retomando la demostración de la asintótica del Teorema 1, sustituimos (5.1.6) y (5.1.8) en (5.1.5), obteniendo una ecuación equivalente

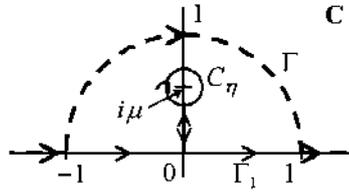
$$\varepsilon B_n A_n(p) = -\frac{\varepsilon^2 B_n}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} \frac{\tilde{V}(p-p') A_n(p') dp'}{p'^2 + \varepsilon^2 B_n^2}. \quad (5.1.10)$$

En este punto requeriremos un lema auxiliar sobre las expansiones asintóticas de integrales de la forma

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{\varphi(p, z)}{z^2 + \mu^2} dz \quad (5.1.11)$$

cuando $\mu \rightarrow 0$, donde $\varphi(p, z)$ es una función entera en z y $\varphi(p, t + si)$ pertenece a $S(\mathbf{R}_t)$ (al espacio de Schwarz en cada recta del plano complejo paralela al eje real) uniformemente en $p \in \mathbf{R}$. Hay varios métodos para calcular tal asintótica (véase [11]); para nuestro caso el método más conveniente es el basado en el cálculo de residuos. Introducimos en el plano complejo \mathbf{C} el contorno (véase Fig. 5):

$$\Gamma := (-\infty, -1] \cup \{p + iq : p^2 + q^2 = 1, q > 0\} \cup [1, \infty). \quad (5.1.12)$$

Figura 5.1: Contornos Γ_1 y Γ .

Lema 10. Sea $\varphi(z)$ una función entera tal que $\varphi(t) \in S(\mathbf{R})$, $t \in \mathbf{R}$. Entonces cuando $\mu \rightarrow 0^+$

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{\varphi(z) dz}{z^2 + \mu^2} = \sum_{k=0}^n \alpha_k \mu^k \int_{\Gamma} \frac{\varphi(z) dz}{z^{k+2}} - \alpha_n \mu^{2(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1)} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(z) dz}{z^{2(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1)} (z^2 + \mu^2)} + \frac{\pi}{\mu} \left\{ \sum_{k=0}^n (i\mu)^k \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} + \frac{(i\mu)^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-z)^n \varphi^{(n+1)}(i\mu z) dz \right\}, \quad (5.1.13)$$

para todo $m \in \mathbf{N}$, donde $\alpha_k = (1 + (-1)^k)(-1)^{k/2}/2$, $k = 0, 1, \dots, n$.

Demostración. Consideremos la integral $\int_{\Gamma_1} \frac{\varphi(z) dz}{z^2 + \mu^2}$, donde

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &:= \{z : z = t + 0i, t \in (-\infty, 0]\} \\ &\cup \{z : z = ti, t \in [0, \mu - \eta], \eta \ll \mu\} \\ &\cup \{z : z = i\mu + \eta e^{-i\vartheta}, \vartheta \in [-3\pi/2, \pi/2]\} \\ &\cup \{z : z = (\mu - \eta - t)i, t \in [0, \mu - \eta]\} \\ &\cup \{z : z = t + 0i, t \in [0, \infty)\} \end{aligned}$$

(indicado con línea continua en la Fig. 5.1, siendo Γ el camino indicado con línea punteada).

Tenemos que $\int_{\Gamma_1} \frac{\varphi(z)dz}{z^2+\mu^2} = \int_{\mathbf{R}} \frac{\varphi(z)dz}{z^2+\mu^2} + \int_{C_\eta} \frac{\varphi(z)dz}{z^2+\mu^2}$, donde C_η denota la circunferencia con centro en $i\mu$ y de radio η recorrida en sentido de las manecillas del reloj; esta última integral resulta $-2\pi i \text{Res}_{z=i\mu} [\varphi(z)/z^2 + \mu^2]$. Como la función $\varphi(z)/z^2 + \mu^2$ sólo tiene singularidades en $\pm i\mu$, las integrales de la misma a lo largo de Γ_1 y Γ son iguales y consecuentemente

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{\varphi(z)dz}{z^2 + \mu^2} = \int_{\Gamma} \frac{\varphi(z)dz}{z^2 + \mu^2} + \frac{\pi}{\mu} \varphi(i\mu). \quad (5.1.14)$$

Como $\mu \rightarrow 0$, $|\mu^2/z^2| < 1$ para z en Γ . Reconocemos entonces en el último integrando una serie geométrica convergente, por lo que esa integral es

$$\int_{\Gamma} \frac{\varphi(z)}{z^2} \left(\sum_{j=0}^m \left(-\frac{\mu^2}{z^2} \right)^j + \left(-\frac{\mu^2}{z^2} \right)^{m+1} \right) / \left(1 + \frac{\mu^2}{z^2} \right) dz$$

para cada $m \in \mathbf{N}$, la cual, definiendo $k = 2j$ y $n = 2m$, puede escribirse en la forma de los dos primeros términos del segundo miembro de (5.1.13).

Por otra parte, según el desarrollo finito de McLaurin para φ (que es entera),

$$\varphi(i\mu) = \sum_{k=0}^n \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} (i\mu)^k + \frac{1}{n!} \int_0^{i\mu} \varphi^{(n+1)}(\zeta) (i\mu - \zeta)^n d\zeta.$$

Factorizando $(i\mu)^n$ en el integrando, haciendo $z = \zeta/i\mu$, simplificando y sustituyendo este resultado en el último término del miembro derecho de (5.1.14), obtenemos el tercer término de (5.1.13). \diamond

Desarrollando el lado izquierdo de (5.1.10) en ε y usando (5.1.6) y (5.1.7), obtenemos

$$\begin{aligned} \varepsilon B_n A_n(p) &= \sum_{k=1}^{n+1} \varepsilon^k \left(\sum_{l=0}^{k-1} \beta_l a_{k-l-1}(p) \right) \\ &+ \varepsilon^{n+2} R_{n+2}(\varepsilon, \bar{\beta}, \bar{a}), \end{aligned} \quad (5.1.15)$$

donde $\bar{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n)$, $\bar{a} = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ y $R_{n+2}(\cdot, \cdot, \cdot)$ es un polinomio en sus argumentos. Sustituyendo

$$\mu \equiv \mu_n = \varepsilon B_n, \quad (5.1.16)$$

y $\varphi(z) = \varepsilon B_n \tilde{V}(p-z) A_n(z)$ en el Lema 10, calculando los coeficientes de ε^0 , ε^1 , ε^2 y observando también cómo figuran $\beta_0, \dots, \beta_{n-1}$, a_{n-2} , a_{n-1} , a_n en los coeficientes de ε^n , obtenemos el desarrollo de la integral en el lado derecho de la ecuación (5.1.10):

$$\begin{aligned} \varepsilon B_n \int_{\mathbf{R}} \frac{\tilde{V}(p-z) A_n(z) dz}{z^2 + \varepsilon^2 B_n^2} &= \\ \pi a_0(0) \tilde{V}(p) & \\ - \varepsilon \pi \left\{ \beta_0 \left[ia_0(0) \tilde{V}'(p) - ia_0'(0) \tilde{V}(p) - \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{\tilde{V}(p-z)}{z^2} a_0(z) dz \right] \right. & \\ \left. - a_1(0) \tilde{V}(p) \right\} & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\varepsilon^2 \pi \left\{ \beta_0 \left[ia_1(0) \tilde{V}'(p) - ia_1'(0) \tilde{V}(p) - \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{\tilde{V}(p-z)}{z^2} a_1(z) dz \right] \right. \\
& \quad + \beta_0^2 \left[\frac{1}{2} a_0(0) \tilde{V}''(p) - a_0'(0) \tilde{V}'(p) + \frac{1}{2} a_0''(0) \tilde{V}(p) \right] \\
& \quad + \beta_1 \left[ia_0(0) \tilde{V}'(p) - ia_0'(0) \tilde{V}(p) - \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{\tilde{V}(p-z)}{z^2} a_0(z) dz \right] \\
& \quad \left. - a_2(0) \tilde{V}(p) \right\} \\
& - \sqrt{2\pi} \sum_{k=3}^{n-1} \varepsilon^k \left\{ \int_{\Gamma} \frac{\tilde{V}(p-z) S_k(\bar{\beta}_{0,k-1}, \bar{a}_{0,k-1}(z), z)}{z^k} dz \right. \\
& \quad \left. + P_k(\bar{\beta}_{0,k-1}, \bar{a}_{0,k-1}^{(\bar{i})}(0), \tilde{V}(p), \tilde{V}'(p), \dots, \tilde{V}^{(k)}(p)) \right\} \\
& - \varepsilon^n \pi \left\{ \beta_0 \left[ia_{n-1}(0) \tilde{V}'(p) - ia_{n-1}'(0) \tilde{V}(p) - \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{\tilde{V}(p-z)}{z^2} a_{n-1}(z) dz \right] \right. \\
& \quad + \beta_0^2 \left[\frac{1}{2} a_{n-2}(0) \tilde{V}''(p) - a_{n-2}'(0) \tilde{V}'(p) + \frac{1}{2} a_{n-2}''(0) \tilde{V}(p) \right] \\
& \quad \left. + \beta_1 \left[ia_{n-2}(0) \tilde{V}'(p) - ia_{n-2}'(0) \tilde{V}(p) - \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{\tilde{V}(p-z)}{z^2} a_{n-2}(z) dz \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\Gamma} \frac{\tilde{V}(p-z) T_n(\bar{\beta}_{3,n-2}, \bar{a}_{2,n-3}(z)) dz}{z^{l_n}} \\
& + R_n(\bar{\beta}_{3,n-2}, \bar{a}_{2,n-3}^{(\bar{i})}(0), \tilde{V}(p), \dots, \tilde{V}^{(n)}(p)) \\
& + \beta_{n-1} \left[ia_0(0) \tilde{V}'(p) - ia_0'(0) \tilde{V}(p) - \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{\tilde{V}(p-z)}{z^2} a_0(z) dz \right] \\
& - a_n(0) \tilde{V}(p) \Big\} \\
& + \varepsilon^{n+1} \left\{ \int_{\Gamma} \frac{\tilde{V}(p-z) S_{n+1}(\bar{\beta}, \varepsilon, \bar{a}(z), z) dz}{z^{l_{n+1}}(z^2 + \varepsilon^2 B_n^2)} \right. \\
& \quad + P_{n+1}(\bar{\beta}, \varepsilon, \bar{a}^{(\bar{i})}(0), \tilde{V}(p), \tilde{V}'(p), \dots, \tilde{V}^{(n)}(p)) \\
& \quad + \int_0^1 (1-z)^n Q_{n+1}(\bar{\beta}, \varepsilon, \bar{a}^{(\bar{i})}(i\varepsilon B_n z), \tilde{V}(p - i\varepsilon B_n z), \dots, \\
& \quad \quad \quad \left. \tilde{V}^{(n)}(p - i\varepsilon B_n z)) dz \Big\}, \tag{5.1.17}
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\bar{\beta}_{p_1, r} &= (\beta_{p_1}, \dots, \beta_r), & \bar{a}_{p_1, r}(z) &= (a_{p_1}(z), \dots, a_r(z)), \quad p_1 < r, \\
\bar{\beta} &= (\beta_0, \dots, \beta_n), & \bar{a}(z) &= (a_0(z), \dots, a_n(z)), \tag{5.1.18} \\
\bar{a}_{p_1, r}^{(\bar{i})}(z) &= (a_{p_1}^{(i_1)}, \dots, a_r^{(i_{r-p_1+1})}), & \bar{a}^{(\bar{i})}(z) &= (a_0^{(i_1)}, \dots, a_n^{(i_n)}),
\end{aligned}$$

$$\bar{i} = (i_1, i_2, \dots, i_n), \quad i_k \leq n+1;$$

S_k, P_k para $k = 3, \dots, n-1$, $T_n, R_n, S_{n+1}, P_{n+1}, Q_{n+1}$ son polinomios de sus argumentos que contienen solamente los términos proporcionales a potencias de $\tilde{V}(p)$ (o a potencias de $\tilde{V}(p - i\varepsilon B_n z)$ para Q_{n+1}) y sus derivadas.

Multiplicando la expresión obtenida por $-\varepsilon/\sqrt{2\pi}$ e igualando en (5.1.10) a cero los coeficientes de ε^k , $k = 1, \dots, n+1$, obtenemos el sistema para β_k, a_k , $k = 0, 1, \dots, n$:

$$\beta_0 a_0(p) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} a_0(0) \tilde{V}(p), \quad (5.1.19)$$

$$\begin{aligned} & \beta_0 a_1(p) + \beta_1 a_0(p) \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left\{ \beta_0 \left[ia_0(0) \tilde{V}'(p) - ia_0'(0) \tilde{V}(p) - \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{\tilde{V}(p-z)}{z^2} a_0(z) dz \right] \right. \\ & \quad \left. - a_1(0) \tilde{V}(p) \right\}, \end{aligned} \quad (5.1.20)$$

$$\begin{aligned} & \beta_0 a_2(p) + \beta_1 a_1(p) + \beta_2 a_0(p) \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left\{ \beta_0 \left[ia_1(0) \tilde{V}'(p) - ia_1'(0) \tilde{V}(p) - \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{\tilde{V}(p-z)}{z^2} a_1(z) dz \right] \right. \\ & \quad + \beta_0^2 \left[\frac{1}{2} a_0(0) \tilde{V}''(p) - a_0'(0) \tilde{V}'(p) + \frac{1}{2} a_0''(0) \tilde{V}(p) \right] \\ & \quad + \beta_1 \left[ia_0(0) \tilde{V}'(p) - ia_0'(0) \tilde{V}(p) - \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{\tilde{V}(p-z)}{z^2} a_0(z) dz \right] \\ & \quad \left. - a_2(0) \tilde{V}(p) \right\}, \end{aligned} \quad (5.1.21)$$

$$\begin{aligned}
& \beta_0 a_3(p) + \beta_1 a_2(p) + \beta_2 a_1(p) + \beta_3 a_0(p) \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left\{ \beta_0 \left[ia_2(0) \tilde{V}'(p) - ia_2'(0) \tilde{V}(p) - \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma_1} \frac{\tilde{V}(p-z)}{z^2} a_2(z) dz \right] \right. \\
&\quad + \beta_0^2 \left[\frac{1}{2} a_1(0) \tilde{V}''(p) - a_1'(0) \tilde{V}'(p) + \frac{1}{2} a_1''(0) \tilde{V}(p) \right] \\
&\quad + \beta_1 \left[ia_1(0) \tilde{V}'(p) - ia_1'(0) \tilde{V}(p) - \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma_1} \frac{\tilde{V}(p-z)}{z^2} a_1(z) dz \right] + \dots \\
&\quad + \beta_2 \left[ia_0(0) \tilde{V}'(p) - ia_0'(0) \tilde{V}(p) - \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma_1} \frac{\tilde{V}(p-z)}{z^2} a_0(z) dz \right] \\
&\quad \left. - a_3(0) \tilde{V}(p) \right\} \tag{5.1.22}
\end{aligned}$$

...

$$\beta_0 a_k(p) + \beta_1 a_{k-1}(p) + \dots + \beta_k a_0(p)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\Gamma} \frac{\tilde{V}(p-z) S_k(\bar{\beta}_{0,k-1}, \bar{a}_{0,k-1}(z), z) dz}{z^k} \\
&\quad + P_k \left(\bar{\beta}_{0,k-1}, \bar{a}_{0,k-1}^{(i)}(0), \tilde{V}(p), \tilde{V}'(p), \dots, \tilde{V}^{(k)}(p) \right) \tag{5.1.23}
\end{aligned}$$

...

$$\begin{aligned}
& \beta_0 a_n(p) + \beta_1 a_{n-1}(p) + \beta_2 a_{n-2}(p) + \dots + \beta_{n-1} a_1(p) + \beta_n a_0(p) \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left\{ \beta_0 \left[ia_{n-1}(0) \tilde{V}'(p) - ia'_{n-1}(0) \tilde{V}(p) - \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{\tilde{V}(p-z)}{z^2} a_{n-1}(z) dz \right] \right. \\
&\quad + \beta_0^2 \left[\frac{1}{2} a_{n-2}(0) \tilde{V}''(p) - a'_{n-2}(0) \tilde{V}'(p) + \frac{1}{2} a''_{n-2}(0) \tilde{V}(p) \right] \\
&\quad + \beta_1 \left[ia_{n-2}(0) \tilde{V}'(p) - ia'_{n-2}(0) \tilde{V}(p) - \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{\tilde{V}(p-z)}{z^2} a_{n-2}(z) dz \right] \\
&\quad + \int_{\Gamma} \frac{\tilde{V}(p-z) T_n(\bar{\beta}_{3,n-2}, \bar{a}_{2,n-3}(z)) dz}{z^{2n}} \\
&\quad + R_n(\bar{\beta}_{3,n-2}, \bar{a}_{2,n-3}^{(\bar{i})}(0), \tilde{V}(p), \dots, \tilde{V}^{(n)}(p)) \\
&\quad + \beta_{n-1} \left[ia_0(0) \tilde{V}'(p) - ia'_0(0) \tilde{V}(p) - \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{\tilde{V}(p-z)}{z^2} a_0(z) dz \right] \\
&\quad \left. - a_n(0) \tilde{V}(p) \right\} \tag{5.1.24}
\end{aligned}$$

Notemos que la ecuación (5.1.24) da las primeras cuatro ecuaciones (5.1.19)–(5.1.22) si sustituimos 0, 1, 2, 3 en lugar de n , respectivamente y hacemos 0 los términos con dos índices el primero siendo menor que el segundo y los términos con índices negativos.

Lema 11. *El sistema (5.1.19)–(5.1.24) tiene una solución única bajo las condiciones $a_0(0) = 1$, $a_1(0) = 0$, ... (5.1.9) y sus soluciones a_0, \dots, a_n pertenecen a $S(\mathbf{R})$.*

Demostración de la solubilidad única del sistema. Poniendo $p = 0$ en (5.1.19) y teniendo en cuenta que por (5.1.1) $\tilde{V}(0) \neq 0$ obtenemos

$$\beta_0 = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \tilde{V}(0). \tag{5.1.25}$$

Por la condición $a_0(0) = 1$ obtenemos de (5.1.20)

$$a_0(p) = \frac{\tilde{V}(p)}{\tilde{V}(0)}. \quad (5.1.26)$$

Fijemos $p = 0$ en (5.1.20). Por (5.1.26) y la condición $a_1(0) = 0$ obtenemos

$$\beta_1 = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \frac{\tilde{V}(z)\tilde{V}(-z)}{z^2} dz. \quad (5.1.27)$$

Ahora encontremos $a_1(p)$ de (5.1.20). Sustituyendo (5.1.25), (5.1.26) y (5.1.27) en (5.1.20), y tomando en cuenta el hecho de que $a_0(0) = 1$, obtenemos

$$\begin{aligned} a_1(p) &= \frac{i}{\tilde{V}(0)} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[\tilde{V}'(p)\tilde{V}(0) - \tilde{V}'(0)\tilde{V}(p) \right] \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{2\pi}\tilde{V}(0)} \int_{\Gamma} \frac{\tilde{V}(z)\tilde{V}(p-z)}{z^2} dz \\ &\quad + \frac{\tilde{V}(p)}{\sqrt{2\pi}\tilde{V}(0)^2} \int_{\Gamma} \frac{\tilde{V}(z)\tilde{V}(-z)}{z^2} dz. \end{aligned} \quad (5.1.28)$$

Observamos que de hecho $a_1(0) = 0$. Procediendo análogamente, obtenemos β_n y a_n suponiendo que conocemos $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}, a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$, y que $a_k(0) = 0$, $k = 2, \dots, n-1$. Buscamos $a_n(p)$ tal que $a_n(0) = 0$. Poniendo $p = 0$ en (5.1.24) y tomando en cuenta el hecho de que $a_0(0) = 1$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\beta_n = & \beta_0 \left[-i\sqrt{\frac{\pi}{2}} a'_{n-1}(0) \tilde{V}(0) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Gamma} \frac{\tilde{V}(-z) a_{n-1}(z)}{z^2} dz \right] + \dots \\
& + \beta_{n-1} \left[i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \tilde{V}'(0) - i\sqrt{\frac{\pi}{2}} a'_0(0) \tilde{V}(0) \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Gamma} \frac{\tilde{V}(p-z) a_0(z)}{z^2} dz \right]; \tag{5.1.29}
\end{aligned}$$

esto es, β_n se determina de forma única. Sustituyendo (5.1.29) y $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}, a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ en (5.1.24) vemos que $a_n(p)$ se determina de forma única puesto que $\beta_0 \neq 0$. No es difícil ver que de hecho $a_n(0) = 0$. De esta forma queda probada la primera afirmación del Lema 11. \diamond

Así nos queda probar el hecho de que todas las $a_k \in S(\mathbf{R})$.

Afirmación. $a_k(p) \in S(\mathbf{R}), k = 0, 1, \dots$

Demostración. Esta afirmación es obvia para $k = 0$.

Para la función a_1 , la misma afirmación se sigue de (5.1.28), la desigualdad de Peetre

$$(1 + |\vartheta|^2)^s \leq 2^{|s|} (1 + |\vartheta - \vartheta'|^2)^{|s|} (1 + |\vartheta'|^2)^s$$

para todo $\vartheta, s \in \mathbf{R}$, y la condición $\tilde{V}(p-z) \in S(\mathbf{R}_+)$. De hecho, el primero y el tercer sumandos en el lado derecho de (5.1.28) pertenecen a $S(\mathbf{R})$ porque $\tilde{V}(p)$ y $\tilde{V}'(p)$ pertenecen a $S(\mathbf{R})$. El segundo sumando pertenece a $S(\mathbf{R})$ también por la desigualdad

de Peetre. Demostrémoslo con más detalle. De la condición $\tilde{V} \in S$, para $N \in \mathbf{N}$ arbitrario tenemos

$$\begin{aligned}
\left| \partial_p^k \int_{\Gamma} \frac{\tilde{V}(z) \tilde{V}(p-z) dz}{z^2} \right| &= \left| \int_{\Gamma} \frac{\tilde{V}(z) \partial_p^k \tilde{V}(p-z) dz}{z^2} \right| \\
&\leq \int_{\Gamma} \frac{|\tilde{V}(z) \partial_p^k \tilde{V}(p-z) dz|}{|z|^2} \\
&\leq C_{k,N} \int_{\Gamma} \frac{|dz|}{(1+|z|^2)^N (1+|p-z|^2)^N}.
\end{aligned} \tag{5.1.30}$$

Por la desigualdad de Peetre para $s = N$, $\vartheta = p$, y $\vartheta' = z$, obtenemos la declaración deseada de (5.1.30). Las aserciones correspondientes para a_k con $k > 1$ se demuestran por inducción. De esta forma queda probado el Lema 11. \diamond

Completemos la construcción de la asintótica buscada. Del Lema 11 y de (5.1.19)–(5.1.24) se sigue que B_n y A_n , expresados en términos de los valores β_0, \dots, β_n y las funciones a_0, \dots, a_n mediante (5.1.6), (5.1.7), resuelven la ecuación (5.1.10) hasta un orden mayor que $O(\varepsilon^{n+2})$ en la norma de $L_2(\mathbf{R})$. Para demostrar esto, consideremos el coeficiente de ε^{n+1} en (5.1.17). Tenemos que $P_{n+1} \in S(\mathbf{R})$ uniformemente con respecto a $\varepsilon \in (0, 1]$ ya que $\tilde{V}(p) \in S(\mathbf{R})$. El primer sumando en el coeficiente en ε^{n+1} pertenece a $S(\mathbf{R})$ por la desigualdad de Peetre y la misma inclusión para \tilde{V} y a_i . Finalmente, el tercer sumando en el mismo coeficiente pertenece a $S(\mathbf{R})$ por las desigualdades siguientes para $z, \varepsilon \in (0, 1]$ y algún N :

$$\begin{aligned}
\left| Q_{n+1} \left(\bar{\beta}, \varepsilon, \bar{a}^{(\bar{i})}(i\varepsilon B_n z), \tilde{V}(p - i\varepsilon B_n z), \dots, \tilde{V}^{(n)}(p - i\varepsilon B_n z) \right) \right| \\
\leq \frac{1}{(1+|p - \varepsilon B_n z|)^N} \leq \frac{1}{|p|^N}.
\end{aligned} \tag{5.1.31}$$

Esto significa que la función propia $\tilde{\psi}_n(p)$ de (5.1.6) resuelve la ecuación (5.1.5) con E_n determinado de (5.1.8), (5.1.7) hasta $O(\varepsilon^{n+2})$. Más exactamente,

$$\widehat{H}_\varepsilon \psi_n = E_n \psi_n + O(\varepsilon^{n+2}), \quad (5.1.32)$$

donde \widehat{H}_ε es el operador de Schrödinger definido en (4.1.1) que actúa en el lado derecho de (1.1.1) y $O(\varepsilon^{n+2})$ se entiende en el sentido de la $L_2(\mathbf{R})$ -norma.

Vamos a usar ahora la siguiente aserción (Lema 1.3 de [29]):

Lema 12. *Sea T un operador autoadjunto en un espacio de Hilbert \mathcal{H} . Sea μ algún punto sobre la recta real, r la distancia de μ al espectro del operador T . Entonces para cada $g \in \mathcal{D}(T)$ es válida la siguiente desigualdad:*

$$r\|g\| \leq \|(T - \mu)g\|. \quad (5.1.33)$$

Usando este lema (o el lema similar de [23]), obtenemos, después de la normalización (5.1.3), la estimación (5.1.2) de la manera que describiremos en seguida.

Apliquemos el Lema 12 a nuestra situación. Para este fin, consideramos el operador de Schrödinger \widehat{H}_ε dependiente del parámetro ε como el operador T de dicho lema. El espacio de Hilbert \mathcal{H} en nuestro caso es el espacio M_j . Usamos la Afirmación 8.

Nuestro razonamiento es como sigue. Como dijimos en la Introducción de esta tesis, de momento, en lugar de encontrar una solución exacta de (4.1.2), la resolvemos aproximadamente, *i.e.*, encontramos un valor propio aproximado E_n (véase (5.1.8)) y una función propia ψ_n (omitimos aquí el índice ε guardando en mente que esta notación corresponde a Ec. (4.1.2)). Esto es, hemos probado la igualdad (5.1.32).

Vamos a sustituir la distancia del valor propio aproximado E_n al espectro en vez de r en la desigualdad (5.1.33) y la función propia aproximada ψ_n en lugar de g . Para obtener la estimación requerida para r que es realmente la diferencia entre el valor propio exacto $E \equiv E_\varepsilon$ y el valor propio aproximado E_n , es necesario sólo normalizar la función propia ψ_n de acuerdo a (5.1.3) en $L_2(\mathbf{R})$. A saber, construimos una función propia Ψ_n que satisface la siguiente condición de normalización:

$$\|\Psi_n\| - 1 = O(\varepsilon^{n+1}). \quad (5.1.34)$$

Hacemos esto escogiendo una constante $c(\varepsilon)$ tal que, después de multiplicarla por ψ_n , obtengamos una función propia Ψ_n que satisfaga la estimación (5.1.34).

De (5.1.6) y la identidad de Parseval sigue que

$$\|\psi_n(x)\| = \varepsilon |B_n| \left(\int_{\mathbf{R}} \frac{|A_n(p)|^2 dp}{|p^2 + \varepsilon^2 B_n^2|^2} \right)^{1/2}. \quad (5.1.35)$$

Notemos que $\beta_0 > 0$ por (5.1.25) y (5.1.1). Así, para ε suficientemente pequeño tenemos $|B_n| = B_n$.

De (5.1.7) se sigue que la expresión $(B_n)^{-1/2}$ es analítica en ε para ε pequeño. También necesitamos la asintótica de la integral en (5.1.35). Aplicando argumentos similares a aquellos del Lema 10 y tomando en cuenta la analiticidad de $B_n^{-1/2}$, podemos escribir la expansión asintótica de la norma (5.1.35):

$$\|\psi_n(x)\| = \varepsilon^{-1/2} [l_0(\bar{\beta}, \bar{a}(p)) + \cdots + \varepsilon^n l_n(\bar{\beta}, \bar{a}(p)) + O(\varepsilon^{n+1})], \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (5.1.36)$$

Para obtener el término principal $l_0(\bar{\beta}, \bar{a}(p))$ de esta expansión, usamos el siguiente

método. Cambiando la variable en (5.1.35) $p \equiv p(\varepsilon, t) = \mu_n t$, donde μ_n está determinado de (6.0.38), obtenemos

$$\|\psi_n(x)\| = \varepsilon^{-1/2} (B_n)^{-1/2} \left(\int_{\mathbf{R}} \frac{|A_n(t\mu_n)|^2 dt}{|t^2 + 1|^2} \right)^{1/2}. \quad (5.1.37)$$

Tomando en cuenta (5.1.9) y el hecho que

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{dt}{(t^2 + 1)^2} = \pi/2, \quad (5.1.38)$$

tenemos

$$l_0(\bar{\beta}, \bar{a}(p)) = \sqrt{\frac{\pi}{2\beta_0}}. \quad (5.1.39)$$

Vamos a normalizar la función propia ψ_n seleccionando la constante apropiada $c(\varepsilon)$. De (5.1.36) se sigue que esta constante tiene la forma

$$c(\varepsilon) = \varepsilon^{1/2} (d_0 + d_1 \varepsilon \cdots + d_n \varepsilon^n) + O(\varepsilon^{n+3/2}). \quad (5.1.40)$$

Multiplicando la expresión (5.1.36) por la que es para $\|\psi_n\|$, obtenemos

$$c(\varepsilon)\|\psi_n\| = d_0 l_0 + (d_0 l_1 + d_1 l_0) \varepsilon + \cdots + (d_0 l_n + \cdots + d_n l_0) \varepsilon^n + O(\varepsilon^{n+1}). \quad (5.1.41)$$

Ahora es claro que podemos hacer este producto igual a $1 + O(\varepsilon^{n+1})$. De hecho, para este fin, es suficiente resolver el sistema de ecuaciones con incógnitas d_i , $i = 0, \dots, n$:

$$d_0 l_0 = 1, \quad d_0 l_k + \dots + d_k l_0 = 0, \quad k = 1, \dots, n. \quad (5.1.42)$$

Obviamente, esto es posible ya que $l_0 \neq 0$ por (5.1.39). Además,

$$d_0 = \sqrt{\frac{2\beta_0}{\pi}}. \quad (5.1.43)$$

Así hemos encontrado la constante $c(\varepsilon)$ tal que la función propia aproximada

$$\Psi_n(x) \equiv c(\varepsilon)\psi_n(x) \quad (5.1.44)$$

satisface la condición (5.1.34). Es evidente que esta función propia normalizada Ψ_n satisface (5.1.32) con un nuevo término residual $O(\varepsilon^{n+2}\varepsilon^{1/2})$, *i.e.*,

$$\widehat{H}_\varepsilon \Psi_n = E_n \Psi_n + O(\varepsilon^{n+5/2}), \quad n = 0, \dots \quad (5.1.45)$$

Ahora sustituyendo $g = \Psi_n$ en el Lema 12 obtenemos de la estimación (5.1.33) la estimación (5.1.2).

Para obtener la estimación (5.1.4) para la función propia Ψ , *i.e.*, para probar que Ψ_n es la asintótica de la función propia Ψ , también usamos el Lema 1.4 del mismo libro [29] (o el lema semejante de [23]):

Lema 13. Sean λ_0 un valor propio aislado de un operador autoadjunto T , $M_{\lambda_0} \equiv \sigma(T) \setminus \{\lambda_0\}$ y d_{λ_0} la distancia del punto μ al conjunto M_{λ_0} . Sea P_{λ_0} el proyector sobre el subespacio propio correspondiente al valor propio λ_0 . Entonces para $g \in \mathcal{D}(T)$ es válida la siguiente desigualdad:

$$d_{\lambda_0} \|(1 - P_{\lambda_0})g\| \leq \|(T - \mu)g\| \quad (5.1.46)$$

Aplicamos este lema a nuestra situación de la siguiente manera. El punto λ_0 es la energía E que es el valor propio aislado del operador de Schrödinger \widehat{H}_ε ; M_{λ_0} es el semieje $[0, \infty)$, $d_{\lambda_0} = |E_n|$. De (5.1.2), (5.1.25), (5.1.1) se sigue que

$$c_1 \varepsilon^2 \leq |E_n| \leq c_2 \varepsilon^2, \quad c_{1,2} > 0. \quad (5.1.47)$$

Además, tomamos otra vez la función propia aproximada Ψ_n como g . Entonces de (5.1.47), la estimación (5.1.46) y (5.1.45) se sigue que

$$\|\Psi_n - \langle \Psi_n, \Psi_\varepsilon \rangle \Psi_\varepsilon\| \leq C \varepsilon^{n+1/2}, \quad (5.1.48)$$

donde $\langle \Psi_n, \Psi_\varepsilon \rangle$ significa el producto escalar en L_2 .

Sea $c_\varepsilon \equiv \langle \Psi_n, \Psi_\varepsilon \rangle$. Note que por la desigualdad de Schwarz, (5.1.3), y (5.1.34), $|c_\varepsilon| \leq 1 + O(\varepsilon^{n+1})$. De esta desigualdad y de (5.1.48) obtenemos

$$\begin{aligned} \|\Psi_n - \Psi_\varepsilon\| &= \|\Psi_n - c_\varepsilon \Psi_\varepsilon + c_\varepsilon \Psi_\varepsilon - \Psi_\varepsilon\| \\ &\leq O(\varepsilon^{n+1/2}) + |c_\varepsilon - 1| \end{aligned}$$

$$\leq O(\varepsilon^{n+1/2}).$$

Así, hemos construido la asintótica con la aproximación deseada. \diamond

5.2. LA SOLUCIÓN EXACTA PARA EL CASO CONTINUO

La aproximación asintótica construida en la sección anterior resulta ser exacta en realidad. La forma de mostrarlo se verá a continuación. Como se mencionó en la introducción, es natural buscar la solución de la ecuación (1.1.1), con $E = -\mu^2$, en la forma

$$\tilde{\Psi}(p, \varepsilon) = \frac{A(p, \varepsilon)}{p^2 + \mu^2}. \quad (5.2.1)$$

Sustituyendo (5.2.1) en (0.0.1) tenemos

$$A(p) = -\frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} \frac{\tilde{V}(p-p')A(p')dp'}{p'^2 + \mu^2}. \quad (5.2.2)$$

Nuevamente observamos que el integrando en (6.0.14) es singular en el origen cuando $\mu = 0$, el límite de μ cuando $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Por lo tanto nos gustaría cambiar el contorno de integración en el plano complejo de forma que las singularidades $z = \pm i\mu$ estén alejadas de él. Para este fin, introducimos la siguiente

Definición 15. En el plano complejo, sea B_a la banda $\{z \in \mathbf{C}, |\operatorname{Im} z| < a\}$, $a > 1$. Denotamos por Ω el espacio de funciones analíticas acotadas en B_a las cuales son continuas en su cerradura. Usamos la norma del supremo en Ω , $\|\varphi\| = \sup_{z \in B_a} |\varphi(z)|$ para todo $\varphi \in \Omega$.

Suponga que $A(z)$ pertenece a Ω (después probaremos que éste es en efecto el caso) y consideramos nuevamente el contorno Γ (véase Fig. 5.2).

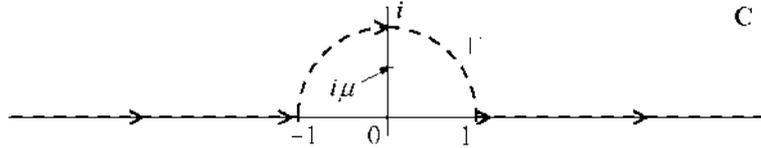


Figura 5.2: Contorno Γ .

Por el teorema del residuo de Cauchy,

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{\tilde{V}(p - \zeta)A(\zeta)d\zeta}{\zeta^2 + \mu^2} = \int_{\Gamma} \frac{\tilde{V}(p - \zeta)A(\zeta)d\zeta}{\zeta^2 + \mu^2} + \frac{\pi}{\mu} \tilde{V}(p - i\mu)A(i\mu).$$

donde $\tilde{V}(z)$ es la continuación analítica de $\tilde{V}(p)$ al plano complejo. De aquí que (6.0.14) se convierta en

$$A(z) = -\frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Gamma} \frac{\tilde{V}(z - \zeta)A(\zeta)}{\zeta^2 + \mu^2} d\zeta - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\varepsilon}{\mu} \tilde{V}(z - i\mu)A(i\mu). \quad (5.2.3)$$

Definición 16. Definimos el operador integral $T_{\mu} : \Omega \longrightarrow \Omega$ por la fórmula

$$[T_{\mu}\varphi(\zeta)](z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Gamma} \frac{\tilde{V}(z - \zeta)\varphi(\zeta)d\zeta}{\zeta^2 + \mu^2}, \quad z \in B_a.$$

Nota 5. Observe que

1. $[T_{\mu}\varphi(\zeta)](z)$ es analítica en z porque el integrando es analítico y la integral converge uniformemente en z .

2. $[T_\mu \varphi(\zeta)](p + 0i) \in S(\mathbf{R}_p)$ si $\varphi(p + i0) \in S(\mathbf{R}_p)$. Esto se sigue de la desigualdad de Peetre [49]

$$(1 + |\vartheta|)^s \leq (1 + |\vartheta - \vartheta'|)^{|s|} (1 + |\vartheta'|)^s, \quad (5.2.4)$$

válida para todo $\vartheta, s \in \mathbf{R}$, y la condición $\tilde{V}(p) \in S(\mathbf{R}_p)$. Probémoslo con más detalle. Para $N \in \mathbf{N}$ arbitrario, de las condiciones $\varphi(p + 0i) \in S(\mathbf{R}_p)$, la desigualdad $|\zeta^2 + \mu^2| \geq 1 - \mu^2$ on Γ , y (5.2.4) para $s = N$, $\vartheta = p$ y $\vartheta' = \zeta$, obtenemos el resultado deseado:

$$\begin{aligned} & \left| \partial_p^k \int_\Gamma \frac{\tilde{V}(p - \zeta) \varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta^2 + \mu^2} \right| \\ &= \left| \int_\Gamma \frac{\varphi(\zeta) \partial_p^k \tilde{V}(p - \zeta) d\zeta}{\zeta^2 + \mu^2} \right| \leq \frac{1}{1 - \mu^2} \int_\Gamma |\varphi(\zeta) \partial_p^k \tilde{V}(p - \zeta) d\zeta| \\ &\leq \text{Const} \int_\Gamma \frac{|d\zeta|}{(1 + |\zeta|)^{N_1} (1 + |p - \zeta|)^N} \\ &\leq \text{Const} \int_\Gamma \frac{(1 + |\zeta|)^N |d\zeta|}{(1 + |\zeta|)^{N_1} (1 + |p|)^N} \end{aligned}$$

para cualquier $k, N_1 \in \mathbf{N}$. Poniendo $N_1 = N + 2$ en la última línea concluimos que

$$\left| \partial_p^k \int_\Gamma \frac{\tilde{V}(p - \zeta) \varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta^2 + \mu^2} \right| \leq \text{Const} \frac{1}{(1 + |p|)^N} \int_\Gamma \frac{|d\zeta|}{(1 + |\zeta|)^2}. \quad (5.2.5)$$

Nota 6. $[T_\mu \varphi(\zeta)](z)$ también es analítica en μ ya que $|\mu/\zeta| < 1$ para $\zeta \in \Gamma$ y tenemos que

$$\frac{1}{\zeta^2 + \mu^2} = \frac{1}{\zeta^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\zeta^{2m}} \mu^{2m}. \quad (5.2.6)$$

Nota 7. Además, T_μ es acotado. En efecto,

$$\|T_\mu \varphi\| = \sup_{z \in B_a} \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_\Gamma \frac{\tilde{V}(z - \zeta) \varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta^2 + \mu^2} \right| \leq \|\varphi\| \sup_{z \in B_a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_\Gamma \frac{|\tilde{V}(z - \zeta)| |d\zeta|}{|\zeta^2 + \mu^2|}.$$

La última integral es acotada porque sobre Γ tenemos $|\zeta^2 + \mu^2| \geq 1/2$, digamos.

Ahora de (5.2.3) se sigue

$$[(1 + \varepsilon T_\mu)A(\zeta)](z) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\varepsilon}{\mu} \tilde{V}(z - i\mu)A(i\mu),$$

donde 1 es el operador identidad. Supongamos que $A(i\mu) = 1$ (después probaremos que siempre puede suponerse que esto es verdad). Ya que T_μ es acotado, εT_μ es pequeño, y tenemos

$$A(z) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\varepsilon}{\mu} \left[(1 + \varepsilon T_{\mu, \zeta \rightarrow z})^{-1} \tilde{V}(\zeta - i\mu) \right] (z), \quad (5.2.7)$$

donde $(1 + \varepsilon T_\mu)^{-1}$ es igual a la serie de Neumann correspondiente $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varepsilon^n T_\mu^n$. Aquí $T_\mu^0 \equiv 1$. El subíndice $\zeta \rightarrow z$ enfatiza la variable independiente con respecto a la cual el operador T_μ está actuando. Ahora (5.2.7) se expresa como

$$A(z) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\varepsilon}{\mu} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \varepsilon^l \left[T_{\mu, \zeta \rightarrow z}^l \tilde{V}(\zeta - i\mu) \right] (z). \quad (5.2.8)$$

Así, por el ítem 1 de la Nota 5, tenemos una serie uniformemente convergente de funciones analíticas en z sobre B_a . Aplicando el teorema de Weierstrass (véase, por ejemplo, [46], Cap. 6, Teor. 21), concluimos que $A(z)$ es analítica en $z \in B_a$.

Nota 8. Aplicando l veces el operador T_μ a una función $\varphi \in \Omega$, $l = 1, 2, \dots$, tenemos

$$\begin{aligned}
& [T_\mu^l \varphi(\zeta)](z) \\
&= (2\pi)^{-l/2} \int_\Gamma \cdots \int_\Gamma \varphi(\zeta) \prod_{n=1}^l \frac{\tilde{V}(\zeta_{n-1} - \zeta_n)}{\zeta_n^2 + \mu^2} d\zeta_n, \quad \zeta_0 \equiv z, \quad \zeta_l \equiv \zeta. \quad (5.2.9)
\end{aligned}$$

Supusimos arriba que $A(i\mu) = 1$. Evaluando (5.2.7) en $z = i\mu$ y multiplicando por μ , obtenemos la ecuación secular para μ :

$$\mu = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \varepsilon \left[(1 + \varepsilon T_{\mu, \zeta \rightarrow z})^{-1} \tilde{V}(\zeta - i\mu) \right] (i\mu). \quad (5.2.10)$$

Considere la función

$$F(\mu, \varepsilon) = \mu + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \varepsilon \left[(1 + \varepsilon T_{\mu, \zeta \rightarrow z})^{-1} \tilde{V}(\zeta - i\mu) \right] (i\mu). \quad (5.2.11)$$

Sustituyendo nuevamente $(1 + \varepsilon T)^{-1}$ por su serie de Neumann en (5.2.11), ésta se convierte en

$$F(\mu, \varepsilon) = \mu + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \varepsilon \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \varepsilon^l \left[T_{\mu, \zeta \rightarrow z}^l \tilde{V}(\zeta - i\mu) \right] (i\mu). \quad (5.2.12)$$

Nota 9. Observemos que $[T_{\mu, \zeta \rightarrow z}^l \tilde{V}(\zeta - i\mu)](i\mu)$ es analítica en μ . En efecto, en la Ec. (5.2.9) podemos sustituir $i\mu$ en lugar de z y $\tilde{V}(\zeta - i\mu)$ en lugar de $\varphi(\zeta)$, teniendo en cuenta las expansiones

$$\begin{aligned}
\tilde{V}(i\mu - \zeta_1) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k \tilde{V}^{(k)}(-\zeta_1)}{k!} \mu^k, & \tilde{V}(\zeta - i\mu) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k i^k \tilde{V}^{(k)}(\zeta)}{k!} \mu^k, \\
\prod_{n=1}^l \frac{1}{\zeta_n^2 + \mu^2} &= \prod_{n=1}^l \left(\frac{1}{\zeta_n^2} \sum_{k_n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k_n}}{\zeta_n^{2k_n}} \mu^{2k_n} \right), \quad (5.2.13)
\end{aligned}$$

la última en virtud de (5.2.6).

Así tenemos que la función $F(\mu, \varepsilon)$ es analítica en cada argumento, y por el teorema de Hartogs (véanse [8] Secc. 3.1, [15] Cap. I Secc. A, [20] Secc. 2.2), entonces también es analítica en \mathbf{C}^2 . Además, $F(0, 0) = 0$, $[\partial_\mu F](0, 0) = 1$, lo último por el factor ε en el segundo término de (5.2.12). De aquí que, por el teorema de la función implícita (véanse [15] Teor. I,B4, [20] Teor. 2.1.2.), la solución $\mu(\varepsilon)$ para μ de la ecuación secular (5.2.10), la cual tiende a cero cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, existe, es única y está dada por (1.1.2). En efecto, desarrollemos $F(\mu, \varepsilon)$ en serie de Taylor. Necesitamos los siguientes cálculos:

$$\begin{aligned} [\partial_\varepsilon F](0, 0) &= \left\{ \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l (l+1) \varepsilon^l \left[T_{\mu, \zeta \rightarrow z}^l \tilde{V}(\zeta - i\mu) \right] (i\mu) \right\} \Big|_{(0,0)} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \tilde{V}'(0), \quad (5.2.14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\partial_{\mu\varepsilon}^2 F](0, 0) &= \left\{ \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l (l+1) \varepsilon^l \left\{ \left[T_{\mu, \zeta \rightarrow z}^l \tilde{V}(\zeta - i\mu) \right] (i\mu) \right\}'_\mu \right\} \Big|_{(0,0)} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} [\tilde{V}'(0)]'_\mu = 0, \quad (5.2.15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\partial_\mu^2 F](0, 0) &= \left\{ \sqrt{\frac{\pi}{2}} \varepsilon \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \varepsilon^l \left\{ \left[T_{\mu, \zeta \rightarrow z}^l \tilde{V}(\zeta - i\mu) \right] (i\mu) \right\}''_\mu \right\} \Big|_{(0,0)} = 0, \\ & \quad (5.2.16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\partial_\varepsilon^2 F](0, 0) &= \left\{ \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l l(l+1) \varepsilon^{l-1} \left[T_{\mu, \zeta \rightarrow z}^l \tilde{V}(\zeta - i\mu) \right] (i\mu) \right\} \Big|_{(0,0)} \\ &= -\sqrt{2\pi} \left\{ \left[T_{\mu, \zeta \rightarrow z} \tilde{V}(\zeta - i\mu) \right] (i\mu) \right\} \Big|_{\mu=0} = -\int_\Gamma \frac{\tilde{V}(\zeta) \tilde{V}(-\zeta)}{\zeta^2} d\zeta. \quad (5.2.17) \end{aligned}$$

Así tenemos hasta términos de segundo orden la expansión

$$F(\mu, \varepsilon) = \mu + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \tilde{V}(0) \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{\Gamma} \frac{\tilde{V}(\zeta) \tilde{V}(-\zeta)}{\zeta^2} d\zeta + \dots \quad (5.2.18)$$

La ecuación secular (5.2.10) es equivalente a $F(\mu, \varepsilon) = 0$, y obtenemos de (5.2.18) la solución (1.1.2) a (5.2.10). Además, de (5.2.7) tenemos

$$A(z) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\varepsilon}{\mu(\varepsilon)} \left[(1 + \varepsilon T_{\mu(\varepsilon), \zeta \rightarrow z})^{-1} \tilde{V}(\zeta - i\mu(\varepsilon)) \right] (z). \quad (5.2.19)$$

Nos queda probar que $A(p + i0) \in S(\mathbf{R}_p)$ y $A(i\mu(\varepsilon)) = 1$. Ya que $\tilde{V}(p) \in S(\mathbf{R}_p)$ y por la desigualdad de Peetre, tenemos que

$$|[T_{\mu} \varphi(\zeta)](p)| \leq \frac{C_N}{(1 + |p|)^N} \int_{\Gamma} \frac{(1 + |\zeta|)^N |\varphi(\zeta)| |d\zeta|}{|\zeta^2 + \mu^2|}.$$

Usando las desigualdades

$$(1 + |\zeta|)^N |\varphi(\zeta)| \leq C'_N, \quad \int_{\Gamma} \frac{|d\zeta|}{|\zeta^2 + \mu^2|} \leq C,$$

obtenemos $|[T_{\mu} \varphi(\zeta)](p)| \leq C_N C'_N C (1 + |p|)^{-N}$. Similarmente, $|[T_{\mu}^2 \varphi(\zeta)](p)| \leq C_N^2 C'_N C^2 (1 + |p|)^{-N}$. Por inducción, $|[T_{\mu}^l \varphi(\zeta)](p)| \leq C_N^l C'_N C^l (1 + |p|)^{-N}$. De aquí que

$$|A(p)| \leq \frac{\text{Const}}{(1 + |p|)^N} \frac{\varepsilon}{\mu(\varepsilon)} \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^l C_N^l C^l \leq \frac{\varepsilon}{\mu(\varepsilon)} \frac{\text{Const}}{(1 + |p|)^N}.$$

Las derivadas son estimadas análogamente.

Verifiquemos que $A(i\mu(\varepsilon)) = 1$. En efecto,

$$A(i\mu(\varepsilon)) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\varepsilon}{\mu(\varepsilon)} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \varepsilon^l \left[T_{\mu(\varepsilon), \zeta \rightarrow z}^l \tilde{V}(\zeta - i\mu(\varepsilon)) \right] (i\mu(\varepsilon)), \quad (5.2.20)$$

pero, ya que $\mu(\varepsilon)$ satisface (5.2.10) idénticamente, a saber,

$$\mu(\varepsilon) \equiv -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \varepsilon \left[(1 + \varepsilon T_{\mu(\varepsilon), \zeta \rightarrow z})^{-1} \tilde{V}(\zeta - i\mu(\varepsilon)) \right] (i\mu(\varepsilon)), \quad (5.2.21)$$

obtenemos el resultado deseado sustituyendo (5.2.21) en el lado derecho de (5.2.20). Así, el Teorema 1 está probado.

Capítulo 6

LA ASINTÓTICA PARA EL CASO DISCRETO

Como mencionamos en la Introducción, en este capítulo daremos, considerando

$$\sum_{j=-[R/h]}^{[R/h]} V_j < 0. \quad (6.0.1)$$

en la Ec. (1.2.1), la construcción (con el primer método de Zhevandrov-Merzon, véase [39]) de un vector propio asintótico uniforme $\psi_n = \{\psi_{nj}\}$ del vector propio normalizado ψ (en adelante en esta sección, vamos a omitir pero a tener en mente el subíndice fijo h), dado por

$$\psi_{nj} = \frac{c(\varepsilon)}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{ibpj} \frac{A_n(p)}{\frac{4}{b^2} \sin^2 \frac{bp}{2} + (\varepsilon B_n)^2} dp, \quad (6.0.2)$$

donde

$$A_n(p) = a_0(p) + \varepsilon a_1(p) + \dots + \varepsilon^n a_n(p), \quad (6.0.3)$$

$$a_0(p) = \frac{1}{\sum_{j=-[R/h]}^{[R/h]} V_j} \sum_{j=-[R/h]}^{[R/h]} V_j e^{-ipj},$$

$$B_n = \beta_0 + \varepsilon \beta_1 + \dots + \varepsilon^n \beta_n, \quad \beta_0 = -\frac{h}{2} \sum_{j=-[R/h]}^{[R/h]} V_j, \quad (6.0.4)$$

siendo β_1, \dots, β_n , determinados por el sistema de ecuaciones (6.0.52)–(6.0.57). Las funciones $a_k(p)$, $k = 1, \dots, n$ son analíticas en

$$\bar{D}_{\pi/h} = \left\{ z \in \mathbf{C} \mid |z| \leq \pi/h \right\}, \quad (6.0.5)$$

el disco cerrado centrado en el origen y de radio π/h , y se determinan por medio del sistema de ecuaciones (6.0.52)–(6.0.57) también. $c(\varepsilon)$ es una constante de normalización dada por

$$c(\varepsilon) = \varepsilon^{3/2} (d_0 + d_1 \varepsilon + \dots + d_n \varepsilon^n), \quad d_0 = \sqrt{\frac{2|\beta_0^3}{\pi}}, \quad (6.0.6)$$

donde los valores restantes d_1, d_2, \dots, d_n se determinan mediante el sistema de ecuaciones (6.0.81). ψ_n pertenece al valor propio

$$E = -\varepsilon^2 B_n^2 + O(\varepsilon^{n+5/2}) \quad (6.0.7)$$

y satisface las condiciones

$$\begin{aligned} \|\psi_n\| &= 1 + O(\varepsilon^{n+1}), \\ \|\psi - \psi_n\| &= O(\varepsilon^{n+1/2}) \text{ cuando } \varepsilon \rightarrow +0, \end{aligned} \quad (6.0.8)$$

La norma es la de $\ell_2(\mathbf{Z})$. El proceso de construcción se modifica ligeramente cuando $\sum_{-[R/h]}^{[R/h]} V_j = 0$.

En efecto, por el Lema 7, pasando a la transformada de Fourier en (2.1.15) obtenemos para $\widetilde{\Psi}_b(p)$ la Ec. (2.3.1), que podemos escribir para todo $p \in \mathbf{R}$:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{4}{b^2} \operatorname{sen}^2 \frac{bp}{2} - E\right) \widetilde{\Psi}_b(p) \\ &= -\frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} \chi_{[-\pi/h, \pi/h]}(p) \int_{-\pi/h}^{\pi/h} W(p-p') \widetilde{\Psi}_b(p') dp'. \end{aligned} \quad (6.0.9)$$

Según el esquema perfilado en los capítulos anteriores, buscamos la solución aproximada de la ecuación (6.0.9) en la forma (prescindimos del subíndice b)

$$\widetilde{\psi}_n(p) = \frac{A_n(p)}{\frac{4}{b^2} \operatorname{sen}^2 \frac{bp}{2} + \varepsilon^2 B_n^2}, \quad (6.0.10)$$

con $A_n(p)$ dado por (6.0.3), para buscar la asintótica respecto a ε , suponiendo que $a_0(p) \neq 0$ y denotando explícitamente

$$B_n = \beta_0 + \varepsilon\beta_1 + \dots + \varepsilon^n\beta_n. \quad (6.0.11)$$

El nivel de la energía aproximado es

$$E_n = -\varepsilon^2 B_n^2. \quad (6.0.12)$$

Buscaremos la solución que satisface las condiciones de normalización

$$a_0(0) = 1, \quad a_k(0) = 0, \quad k = 2, \dots, n. \quad (6.0.13)$$

Posteriormente multiplicaremos la solución aproximada (6.0.10) por cierta constante $c(\varepsilon)$ para que la norma de la función propia (así normalizada) Ψ sea de orden $1 + O(\varepsilon^{n+1})$. Esto es necesario para la aplicación del Lema básico 12, que proveerá de un fundamento riguroso a este método.

Nuestra meta en esta sección es construir tales valores de $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n$ y funciones $a_0(p), \dots, a_n(p)$ de forma que $\tilde{\psi}_n(p)$ satisfaga la ecuación (6.0.9) hasta $O(\varepsilon^{n+1})$, donde $\|O(\varepsilon^{n+1})\|_{L_2} \leq \text{Const } \varepsilon^{n+1}$. Sustituyendo (6.0.10) y (6.0.12) en (6.0.9) obtenemos una ecuación equivalente

$$A_n(p) = -\frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} \frac{W(p-p')A_n(p')dp'}{\frac{4}{h^2}\sin^2\frac{bp}{2} + \varepsilon^2 B_n^2}. \quad (6.0.14)$$

Como vimos en capítulos anteriores, requerimos desarrollos asintóticos que implican desarrollar a su vez una integral del tipo

$$\int_{[-\pi/h, \pi/h]} \frac{\varphi(z)}{\frac{4}{h^2}\sin^2\frac{bz}{2} + \beta^2} dz \quad (6.0.15)$$

cuando $\beta \rightarrow 0$, donde $\varphi(z)$ es una función analítica en z para $|z| \leq \pi/h$ en \mathbf{C} . Usamos también el método basado en el cálculo de residuos (veáse [11]), sólo que introducimos ahora como contorno un pedazo del utilizado en el Capítulo anterior, aquel que va del punto $(-\pi/h, 0)$ al punto $(\pi/h, 0)$ del plano complejo \mathbf{C} :

$$\Gamma_{s,b} := [-\pi/h, -1] \cup \{p + iq : p^2 + q^2 = 1, q > 0\} \cup [1, \pi/h]. \quad (6.0.16)$$

Tenemos

$$\int_{[-\pi/b; \pi/b]} \frac{\varphi(z)dz}{\frac{4}{b^2} \operatorname{sen}^2 \frac{bz}{2} + \beta^2} = \int_{\Gamma_{s,b}} \frac{\varphi(z)dz}{\frac{4}{b^2} \operatorname{sen}^2 \frac{bz}{2} + \beta^2} \quad (6.0.17)$$

$$+ \int_{C_1} \frac{\varphi(z)dz}{\frac{4}{b^2} \operatorname{sen}^2 \frac{bz}{2} + \beta^2}$$

donde C_1 denota la frontera del semicírculo unitario contenido en el semiplano complejo superior recorrida en sentido directo. La función

$$\frac{\varphi(z)}{\frac{4}{b^2} \operatorname{sen}^2 \frac{bz}{2} + \beta^2}$$

sólo tiene como singularidades polos simples, a saber, los puntos $2k\pi/h \pm z_{\beta,b}$, $k \in \mathbf{Z}$, donde

$$z_{\beta,b} = -\frac{2i}{b} \ln \left(-\frac{h\beta}{2} + \sqrt{1 + \frac{b^2\beta^2}{4}} \right). \quad (6.0.18)$$

Como $\beta \rightarrow 0$, consideraremos que

$$\beta < 2\operatorname{sen} \frac{1}{2}, \quad (6.0.19)$$

siendo de esta manera $z_{\beta,b}$ el único polo localizado en el interior del semicírculo mencionado, y de esta forma la última integral en (6.0.17) es igual a

$$2\pi i \operatorname{Res}_{z=z_{\beta,b}} \frac{\varphi(z)}{\frac{4}{b^2} \operatorname{sen}^2 \frac{bz}{2} + \beta^2}.$$

Consecuentemente

$$\begin{aligned}
 \int_{[-\pi/h, \pi/h]} \frac{\varphi(z) dz}{\frac{4}{h^2} \operatorname{sen}^2 \frac{bz}{2} + \beta^2} &= \int_{\Gamma_{s,b}} \frac{\varphi(z) dz}{\frac{4}{h^2} \operatorname{sen}^2 \frac{bz}{2} + \beta^2} \\
 &+ \frac{\pi}{\beta \sqrt{1 + \frac{h^2 \beta^2}{4}}} \varphi(i|z_{\beta,b}|).
 \end{aligned} \tag{6.0.20}$$

Atendiendo ahora el último término de (6.0.20), evaluaremos el desarrollo finito de McLaurin para φ (que es analítica en $\overline{D}_{\pi/h}$, el disco cerrado con centro en el origen y radio π/h) en $z_{\beta,b}$, lo cual enunciaremos con un Lema, haciendo primero unas definiciones.

Definición 17. Para cada $\mathbf{x} = \{x_m\}$ e $\mathbf{y} = \{y_m\}$, $y_m \in \mathbf{C}$, $m = 0, 1, \dots$, definimos

$$c_{k,j}(\mathbf{y}) = \begin{cases} \chi_{\{0\}}(j), & k = 0; \\ y_j, & k = 1; \\ \sum_{j_2=0}^{j_1(j,2)} \cdots \sum_{j_k=0}^{j_1(j,k)} y_{j_2} \cdots y_{j_k} y_{j_1(j,k)-j_k}, & k > 1; \end{cases} \tag{6.0.21}$$

$$d_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{k=0}^j x_k c_{k,j-k}(\mathbf{y}) \tag{6.0.22}$$

donde $j_k = 0, 1, \dots, j_1(j, k)$,

$$j_1(j, r) = j - j(r) \sum_{r_1=2}^{r-j(r)} j_{r_1}, \quad j(r) = \chi_{\mathbf{N} \setminus \{2\}}(r), \quad \sum_{r_1=2}^r j_{r_1} \leq j, \quad r = 2, \dots$$

Lema 14. Sea $\varphi(z)$ una función analítica en z . Entonces

$$\varphi(i|z_{\beta,b}|) = \sum_{k=0}^n d_k(\varphi, \mathbf{1})(h\beta)^k + U_n(h\beta) + O((h\beta)^{n+1}) \tag{6.0.23}$$

cuando $\beta \rightarrow 0^+$, donde

$$\begin{aligned}
 \varphi &= \left\{ \frac{\varphi^{(m)}(0)}{m!} i^m \right\}, \\
 \mathbf{l} &= \{l_m\}, \quad l_m = -\frac{2}{h} \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{k+1} c_{k+1, m-k}(\mathbf{b}) \\
 \mathbf{b} &= \{b_m\}, \quad b_m = \begin{cases} -1/2, & m = 0; \\ (-1/8)^{(m+1)/2} \prod_{k_1=0}^{(m-1)/2} \frac{2k_1-1}{k_1+1}, & m \text{ impar}; \\ 0, & m \text{ par} > 0. \end{cases} \\
 U_n(h\beta) &= \frac{i^{n+1} M_n(h\beta) (h\beta)^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-z)^n \varphi^{(n+1)}(iZ_n(h\beta)z) dz; \quad (6.0.24) \\
 M_n(h\beta) &= \sum_{j=0}^n c_{n+1, j}(\mathbf{l}) (h\beta)^j + O((h\beta)^{n+1}), \\
 Z_n(h\beta) &= \sum_{j=1}^n c_j(h\beta)^j + O((h\beta)^{n+1}), \quad c_j = -d_j(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \\
 \mathbf{a} &= \{a_m\}, \quad a_m = \begin{cases} 0, & m = 0; \\ \frac{(-1)^{m-1}}{m}, & m > 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Demostración. Evaluemos el desarrollo finito de McLaurin para φ en $z_{\beta, b}$:

$$\varphi(i|z_{\beta, b}|) = \sum_{k=0}^n \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} (i|z_{\beta, b}|)^k + \frac{1}{n!} \int_0^{i|z_{\beta, b}|} \varphi^{(n+1)}(\zeta) (i|z_{\beta, b}| - \zeta)^n d\zeta.$$

Factorizando $(i|z_{\beta, b}|)^n$ en el integrando, haciendo $z = \zeta/i|z_{\beta, b}|$ y simplificando obtenemos

$$\begin{aligned} \varphi(i|z_{\beta,b}|) &= \sum_{k=0}^n \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} (i|z_{\beta,b}|)^k \\ &+ \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-z)^n \varphi^{(n+1)}(i|z_{\beta,b}|z) dz (i|z_{\beta,b}|)^{n+1}. \end{aligned} \quad (6.0.25)$$

Ahora expresemos cada una de las potencias de $z_{\beta,b}$ en serie de potencias de $h\beta$. Recordaremos para ello cómo es a su vez el desarrollo en serie de potencias de las potencias de otras series y series dobles de McLaurin que aquí aparecerán.

Consideremos las sucesiones $\mathbf{a} = \{a_m\}$ y $\mathbf{b} = \{b_m\}$, $a_m, b_m \in \mathbf{R}$, $q = 0, 1, \dots$. Para el desarrollo en serie de potencias de z , $z \rightarrow 0$

$$\sum_{j=0}^n b_j z^j + O(z^{n+1}), \quad b_0 \neq 0, \quad (6.0.26)$$

se tiene

$$\left(\sum_{j=0}^n b_j z^j + O(z^{n+1}) \right)^k = \sum_{j=0}^n c_{k,j}(\mathbf{b}) z^j + O(z^{n+1}), \quad (6.0.27)$$

$\forall k \in \mathbf{N}$, donde $c_{k,j}(\mathbf{b})$ se define de acuerdo a (6.0.21). También se cumple

$$\sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n a_k c_{k,j}(\mathbf{b}) z^{k+j} + O(z^{n+1}) = \sum_{j=0}^n d_j(\mathbf{a}, \mathbf{b}) z^j + O(z^{n+1}), \quad (6.0.28)$$

con $d_j(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{k=0}^j a_k c_{k,j-k}(\mathbf{b})$ según (6.0.22).

Ahora, desarrollando el radical que aparece en (6.0.18) en serie de McLaurin tenemos

$$\sqrt{1 + \frac{h^2 \beta^2}{4}} = \sum_{j=0}^n p_j (h\beta)^j + O((h\beta)^{n+1}) \quad (6.0.29)$$

para cada $n \in \mathbf{N}$, con

$$p_j = \begin{cases} 1, & j = 0; \\ 0, & j \text{ impar}; \\ \frac{(-1)^{j/2}}{2^{3j/2}} \prod_{k_1=0}^{j/2-1} \frac{2k_1-1}{k_1+1}, & j \text{ par } > 0; \end{cases} \quad (6.0.30)$$

de allí que

$$\ln \left(-\frac{h\beta}{2} + \sqrt{1 + \frac{(h\beta)^2}{4}} \right) = \ln \left(\sum_{j=0}^{n+1} p_j (h\beta)^j + O((h\beta)^{n+2}) \right), \quad (6.0.31)$$

redefiniendo $p_1 = -\frac{1}{2}$. Escribiendo (6.0.31) como $\ln(1 + \nu h\beta)$ su desarrollo de McLaurin es

$$\sum_{k=0}^n a_k \nu^k (h\beta)^k + O(\nu^{n+1} (h\beta)^{n+1}), \quad (6.0.32)$$

con

$$a_k = \begin{cases} 0, & k = 0; \\ \frac{(-1)^{k-1}}{k}, & k > 0. \end{cases}$$

Podemos expresar ν en la forma (6.0.26) (con $b_j = p_{j+1}$); elevando esta expresión a las potencias p y $n+1$ respectivamente, aplicando (6.0.27), sustituyendo los resultados a su vez en (6.0.32), aplicando a continuación (6.0.28), y observando que $c_0 = 0$ llegamos a

$$|z_{\beta,b}| = Z_n(h\beta) \doteq \sum_{j=1}^n c_j (h\beta)^j + O((h\beta)^{n+1}), \quad c_j = -2d_j(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

De esto

$$\begin{aligned}
 |z_{\beta,b}|^k &= \left\{ h\beta \left(\sum_{j=0}^n c_{j+1} (h\beta)^j + O((h\beta)^{n+1}) \right) \right\}^k \\
 &= (h\beta)^k \left\{ \left(\sum_{j=0}^n l_j (h\beta)^j \right)^k + O((h\beta)^{n+1}) \right\}, \quad l_j \doteq c_{j+1}.
 \end{aligned}$$

Aplicando (6.0.27) tenemos

$$|z_{\beta,b}|^k = (h\beta)^k \left(\sum_{j=0}^n c_{k,j}(\mathbf{l})(h\beta)^j + O((h\beta)^{n+1}) \right), \quad \mathbf{l} \doteq \{l_m\} \quad (6.0.33)$$

$$= (h\beta)^k \sum_{j=0}^n c_{k,j}(\mathbf{l})(h\beta)^j + O((h\beta)^{n+1}),$$

$$= \sum_{j=0}^n c_{k,j}(\mathbf{l})(h\beta)^{k+j} + O((h\beta)^{n+1}). \quad (6.0.34)$$

Sustituyendo esta última expresión en (6.0.25) y aplicando luego (6.0.28) nos queda

$$\begin{aligned}
 \varphi(i|z_{\beta,b}|) &= \sum_{k=0}^n \left[\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} i^k \left(\sum_{j=0}^n c_{k,j}(\mathbf{l})(h\beta)^{k+j} + O((h\beta)^{n+1}) \right) \right] \\
 &\quad + \left\{ \frac{i^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-z)^n \varphi^{(n+1)}(i|z_{\beta,b}|z) dz \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times (h\beta)^{n+1} \left(\sum_{j=0}^n c_{n+1,j}(\mathbf{1})(h\beta)^j + O((h\beta)^{n+1}) \right) \Big\} \\
 &= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} i^k c_{k,j}(\mathbf{1})(h\beta)^{k+j} \\
 &+ \left\{ \frac{i^{n+1}(h\beta)^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-z)^n \varphi^{(n+1)} \left(i \left[\sum_{j=1}^n c_j(h\beta)^j + O((h\beta)^{n+1}) \right] z \right) dz \right. \\
 &\quad \left. \times \left(\sum_{j=0}^n c_{n+1,j}(\mathbf{1})(h\beta)^j + O((h\beta)^{n+1}) \right) \right\} \\
 &+ O((h\beta)^{n+1}) \\
 &= \sum_{k=0}^n d_k(\varphi, \mathbf{1})(h\beta)^k + U_n(h\beta) + O((h\beta)^{n+1}), \quad \varphi \doteq \left\{ \frac{\varphi^{(q)}(0)}{q!} i^m \right\}, \\
 & \tag{6.0.35}
 \end{aligned}$$

sustituyendo (6.0.34) para $|z_{\beta,b}|^k$, $k < n+1$ y (6.0.33) para $|z_{\beta,b}|^{n+1}$, y donde $U_n(h\beta)$ está definido en (6.0.24). \diamond

Continuando entonces en la búsqueda del desarrollo de la Ec. (6.0.20), en virtud de (6.0.35) podemos escribirla como

$$\begin{aligned}
 \int_{[-\pi/h; \pi/h]} \frac{\varphi(z) dz}{\frac{4}{h^2} \operatorname{sen}^2 \frac{hz}{2} + \beta^2} &= \int_{\Gamma_{s,b}} \frac{\varphi(z) dz}{\frac{4}{h^2} \operatorname{sen}^2 \frac{hz}{2} + \beta^2} \\
 &+ \frac{\pi}{\beta \sqrt{1 + \frac{h^2 \beta^2}{4}}} \left(\sum_{k=0}^n d_k(\varphi, \mathbf{1})(h\beta)^k + U_n(h\beta) + O((h\beta)^{n+1}) \right), \tag{6.0.36}
 \end{aligned}$$

Para buscar expresar en series de potencias de β ambos lados de (6.0.36), multiplicamos ambos lados de la misma por $\beta\sqrt{1 + \frac{b^2\beta^2}{4}}$ y tenemos

$$\beta\sqrt{1 + \frac{b^2\beta^2}{4}} \left(\int_{[-\pi/h, \pi/h]} - \int_{\Gamma_{s,b}} \right) \frac{\varphi(z) dz}{\frac{4}{b^2} \operatorname{sen}^2 \frac{bz}{2} + \beta^2} = \pi \left(\sum_{k=0}^n d_k(\varphi, \mathbf{1}) b^k \beta^k + U_n(h\beta) + O((h\beta)^{n+1}) \right).$$

Sustituyendo (6.0.29) en la ecuación anterior se tiene

$$\beta \left(\sum_{j=0}^n p_j b^j \beta^j + O((h\beta)^{n+1}) \right) \left(\int_{[-\pi/h, \pi/h]} - \int_{\Gamma_{s,b}} \right) \frac{\varphi(z) dz}{\frac{4}{b^2} \operatorname{sen}^2 \frac{bz}{2} + \beta^2} = \pi \left(\sum_{k=0}^n d_k(\varphi, \mathbf{1}) b^k \beta^k + U_n(h\beta) + O((h\beta)^{n+1}) \right). \quad (6.0.37)$$

Expresaremos ahora (6.0.37) como una igualdad entre dos series de potencias de ε . En (6.0.37) sustituimos β por

$$\varepsilon B_n, \quad (6.0.38)$$

$\varphi(\zeta)$ por $\varphi_n(\zeta) = W(z - \zeta)A_n(\zeta)$, con $W(z - \zeta)$ continuación analítica de $W(p - p')$; y sustituimos también la primera integral en el lado izquierdo de (6.0.37) por $-A_n(z)\sqrt{2\pi}/\varepsilon$, al tener en cuenta (6.0.14). Nos queda

$$\begin{aligned} & \varepsilon B_n \left(\sum_{j=0}^n p_j (\varepsilon h B_n)^j + O((\varepsilon h B_n)^{n+1}) \right) \\ & \times \left(-A_n(z)\sqrt{2\pi}/\varepsilon - \int_{\Gamma_{s,b}} \frac{W(z - \zeta)A_n(\zeta) d\zeta}{\frac{4}{b^2} \operatorname{sen}^2 \frac{b\zeta}{2} + (\varepsilon B_n)^2} \right) \\ & = \pi \left(\sum_{k=0}^n d_k(\varphi_n, \mathbf{1}) (\varepsilon h B_n)^k + O((\varepsilon h B_n)^{n+1}) \right), \quad (6.0.39) \end{aligned}$$

donde $\varphi_n = \{i^q \varphi_n^{(q)}(0)/q!\}$. Definamos el operador integral $T_{\beta,b,n}$ sobre un espacio funcional conveniente de forma que, dada una función $A(z)$, analítica en un dominio suficientemente extenso del plano complejo \mathbf{C} , la acción de $T_{\beta,b,n}$ sobre $A(z)$ sea

$$[T_{\beta,b,n}A](z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Gamma_{s,b}} \frac{W(z-\zeta)A(\zeta)d\zeta}{\frac{4}{b^2} \operatorname{sen}^2 \frac{b\zeta}{2} + \varepsilon^2 B_n^2},$$

Note que $T_{\beta,b,n}$ es acotado, digamos, en la norma del supremo, y como $\varepsilon \rightarrow 0$, $\varepsilon \|T_{\beta,b,n}\| < 1$ para ε suficientemente pequeño. Entonces de (7.1.3) se sigue

$$\begin{aligned} -\sqrt{2\pi} B_n \left(\sum_{j=0}^n p_j \varepsilon^j h^j B_n^j + O(\varepsilon^{n+1} h^{n+1} B_n^{n+1}) \right) (1 + \varepsilon T_{\beta,b,n}) A_n(z) \\ = \pi \sum_{k=0}^n d_k(\varphi_n, \mathbf{1}) \varepsilon^k h^k B_n^k + O(\varepsilon^{n+1} h^{n+1} B_n^{n+1}), \end{aligned}$$

donde 1 es el operador identidad. Finalmente tenemos

$$\begin{aligned} -\sqrt{2\pi} \left(\sum_{j=0}^n p_j \varepsilon^j h^j B_n^j + O(\varepsilon^{n+1} h^{n+1} B_n^{n+1}) \right) B_n A_n(z) \\ = \pi (1 + \varepsilon T_{\beta,b,n})^{-1} \left(\sum_{k=0}^n d_k(\varphi_n, \mathbf{1}) \varepsilon^k h^k B_n^k + O(\varepsilon^{n+1} h^{n+1} B_n^{n+1}) \right) \quad (6.0.40) \end{aligned}$$

Desarrollando el producto $B_n A_n(p)$ en serie de potencias de ε obtenemos

$$\begin{aligned} B_n A_n(p) = \sum_{k=0}^n \varepsilon^k \left(\sum_{l=0}^k \beta_l a_{k-l}(p) \right) \\ + \varepsilon^{n+1} R_{0,n}(\varepsilon, \bar{\beta}_n, \bar{a}_n), \end{aligned} \quad (6.0.41)$$

donde $\bar{\beta}_n = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n)$, $\bar{a}_n = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ y $R_{n+2}(\cdot, \cdot, \cdot)$ es un polinomio en sus argumentos.

Considerando el lado izquierdo de (6.0.40), sustituimos el producto $B_n A_n(z)$ por la expresión dada por (6.0.41) y $A_n(z)$ y B_n por los desarrollos (6.0.3) y (6.0.11). Tenemos

$$\begin{aligned}
& -\sqrt{2\pi} \left(\sum_{j=0}^n p_j \varepsilon^j h^j B_n^j + O(\varepsilon^{n+1} h^{n+1} B_n^{n+1}) \right) B_n A_n(z) \\
&= -\sqrt{2\pi} \left\{ \sum_{j=0}^n p_j h^j \varepsilon^j \left(\sum_{m=0}^n \beta_m \varepsilon^m \right)^j + O\left(h^{n+1} \varepsilon^{n+1} \left[\sum_{m_1=0}^n \beta_{m_1} \varepsilon^{m_1} \right]^{n+1} \right) \right\} \\
&\quad \times \left\{ \sum_{k=0}^n \varepsilon^k \left(\sum_{l=0}^k \beta_l a_{k-l}(z) \right) + \varepsilon^{n+1} R_{0,n}(\varepsilon, \bar{\beta}_n, \bar{a}_n) \right\} \\
&= -\sqrt{2\pi} \left\{ \sum_{j=0}^n p_j h^j \varepsilon^j \left(\sum_{m=0}^n c_{j,m}(\beta) \varepsilon^m + \varepsilon^{n+1} E_{j,n}(\varepsilon, \bar{\beta}_n) \right) \right. \\
&\quad \left. + O\left(h^{n+1} \varepsilon^{n+1} \left[\sum_{m_1=0}^n c_{n+1,m_1}(\beta) \varepsilon^{m_1} + \varepsilon^{n+1} E_{n+1,n}(\varepsilon, \bar{\beta}_n) \right] \right) \right\} \\
&\quad \times \left\{ \sum_{k=0}^n \varepsilon^k i_k(z) + \varepsilon^{n+1} R_{0,n}(\varepsilon, \bar{\beta}_n, \bar{a}_n) \right\} \\
&= -\sqrt{2\pi} \left(\sum_{j=0}^n \sum_{m=0}^n p_j h^j c_{j,m}(\beta) \varepsilon^{m+j} + \varepsilon^{n+1} F_{1,n}(\varepsilon, \bar{\beta}_n) + O(\varepsilon^{n+1}) \right) \\
&\quad \times \left(\sum_{k=0}^n \varepsilon^k i_k(z) + \varepsilon^{n+1} R_{0,n}(\varepsilon, \bar{\beta}_n, \bar{a}_n) \right) \\
&= -\sqrt{2\pi} \left(\sum_{j=0}^n d_j(\mathbf{p}, \beta) \varepsilon^j + \varepsilon^{n+1} F_{2,n}(\varepsilon, \bar{\beta}_n) + O(\varepsilon^{n+1}) \right) \\
&\quad \times \left(\sum_{k=0}^n \varepsilon^k i_k(z) + \varepsilon^{n+1} R_{0,n}(\varepsilon, \bar{\beta}_n, \bar{a}_n) \right) \\
&= -\sqrt{2\pi} \left\{ \left(\sum_{j=0}^n d_j(\mathbf{p}, \beta) \varepsilon^j \right) \left(\sum_{k=0}^n \varepsilon^k i_k(z) \right) + \varepsilon^{n+1} F_{3,n}(\varepsilon, \bar{\beta}_n, \bar{a}_n) + O(\varepsilon^{n+1}) \right\} \\
&= -\sqrt{2\pi} \left\{ \sum_{k=0}^n \left(\sum_{j=0}^k d_j(\mathbf{p}, \beta) i_{k-j}(z) \right) \varepsilon^k + \varepsilon^{n+1} F_{4,n}(\varepsilon, \bar{\beta}_n, \bar{a}_n) + O(\varepsilon^{n+1}) \right\}
\end{aligned} \tag{6.0.42}$$

donde $\beta = \{\beta_j\}$, $i_k(z) = \sum_{l=0}^k \beta_l a_{k-l}(z)$, $\mathbf{p} = \{p_j h^j\}$ y $E_{\cdot, \cdot}(\cdot, \cdot)$, $F_{\cdot, \cdot}(\cdot, \cdot)$, $F_{\cdot, \cdot}(\cdot, \cdot, \cdot)$ son polinomios en sus argumentos.

En el lado derecho ocuparemos las derivadas de $\varphi_n(\zeta)$ y por tanto, las de $W(z - \zeta)$ y $A_n(\zeta)$ respecto de ζ :

$$(W(z - \zeta))'_\zeta = -W'_{\zeta_1}(\zeta_1)|_{\zeta_1=p-\zeta} = -W'(z - \zeta)$$

$$(W(z - \zeta))_\zeta^{(j)} = (-1)^j W^{(j)}(z - \zeta)$$

$$A_n^{(k)}(\zeta) = \sum_{l=0}^n a_l^{(k)}(\zeta) \varepsilon^l$$

Aplicando la fórmula de Leibniz para derivadas de orden superior de productos tenemos

$$\begin{aligned} \varphi_n^{(k)}(\zeta) &= \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (W(z - \zeta))_\zeta^{(j)} A_n^{(k-j)}(\zeta) \\ &= \sum_{j=0}^k \left[\binom{k}{j} (-1)^j W^{(j)}(z - \zeta) \sum_{l=0}^n a_l^{(k-j)}(\zeta) \varepsilon^l \right] \\ &= \sum_{l=0}^n \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j W^{(j)}(z - \zeta) a_l^{(k-j)}(\zeta) \varepsilon^l \end{aligned}$$

Notemos que podemos estimar $U_n(h\beta)$ sustituyendo

$$\begin{aligned} \varphi_n^{(n+1)}(iZ_n(h\beta)\zeta) &= \\ &= \sum_{l=0}^n \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j W^{(j)}(z - iZ_n(\varepsilon h B_n)\zeta) a_l^{(k-j)}(iZ_n(\varepsilon h B_n)\zeta) \varepsilon^l. \quad (6.0.43) \end{aligned}$$

en (6.0.24).

Consideremos ahora el lado derecho de (6.0.40). Tenemos que

$$\begin{aligned}
 d_k(\varphi_n, \mathbf{1}) &= \sum_{j=0}^k \frac{\varphi_n^{(j)}(0)}{j!} j^j c_{j,k-j}(\mathbf{1}) \\
 &= \sum_{j=0}^k \frac{j^j c_{j,k-j}(\mathbf{1})}{j!} \sum_{l=0}^n \sum_{k_1=0}^j \binom{j}{k_1} (-1)^{k_1} W^{(k_1)}(z) a_l^{(j-k_1)}(0) \varepsilon^l \\
 &= \sum_{l=0}^n \mathcal{G}_{1,k,l}(z) \varepsilon^l,
 \end{aligned} \tag{6.0.44}$$

donde

$$\mathcal{G}_{1,k,l}(z) = \sum_{j=0}^k \sum_{k_1=0}^j (-1)^{k_1} \frac{j^j c_{j,k-j}(\mathbf{1})}{k_1!(j-k_1)!} W^{(k_1)}(z) a_l^{(j-k_1)}(0). \tag{6.0.45}$$

Entonces, por sustitución de (6.0.44) en lugar de $d_k(\varphi_n, \mathbf{1})$ en el primer término del argumento del operador $(1 + \varepsilon T_{\beta,h,n})^{-1}$ en el lado derecho de (6.0.40), dicho término puede expresarse como

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^n d_k(\varphi_n, \mathbf{1}) \varepsilon^k h^k B_n^k &= \sum_{k=0}^n \left(\sum_{l=0}^n \mathcal{G}_{1,k,l}(z) \varepsilon^l \right) \varepsilon^k h^k \left(\sum_{m=0}^n \beta_m \varepsilon^m \right)^k \\
 &= \sum_{k=0}^n h^k \varepsilon^k \left(\sum_{l=0}^n \mathcal{G}_{1,k,l}(z) \varepsilon^l \right) \left(\sum_{m=0}^n c_{k,m}(\beta) \varepsilon^m + \varepsilon^{n+1} E_{k,n}(\varepsilon, \bar{\beta}_n) \right) \\
 &= \sum_{k=0}^n h^k \varepsilon^k \left(\sum_{l=0}^n \mathcal{G}_{2,k,l}(z) \varepsilon^l + O(\varepsilon^{n+1}) \right) \\
 &= \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^n h^k \mathcal{G}_{2,k,l}(z) \varepsilon^{k+l} + O(\varepsilon^{n+1}) \\
 &= \sum_{k=0}^n \mathcal{G}_{1,k}(z) \varepsilon^k + O(\varepsilon^{n+1})
 \end{aligned} \tag{6.0.46}$$

donde

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_{2,k,l}(z) &= \sum_{m=0}^l \mathcal{G}_{1,k,m}(z) c_{k,l-m}(\beta) \\ \mathcal{G}_{1,k}(z) &= \sum_{m=0}^k h^m \mathcal{G}_{2,m,k-m}(z).\end{aligned}$$

Escribamos el lado derecho de (6.0.40), mediante la sustitución (6.0.46) en lugar del primer término del argumento de $(1 + \varepsilon T_{\beta,b,n})^{-1}$, sustituyendo a su vez esta expresión de dicho operador por su serie de Neumann, y desarrollemos el producto resultante:

$$\begin{aligned}& \pi \left(\sum_{l=0}^n (-1)^l \varepsilon^l T_{\beta,b,n}^l + \varepsilon^{n+1} T_{\text{rsen},n} \right) \left(\sum_{k_1=0}^n \mathcal{G}_{1,k_1}(z) \varepsilon^{k_1} + O(\varepsilon^{n+1}) \right) \\ &= \pi \left\{ \sum_{k=0}^n \left(\sum_{l=0}^k (-1)^l \varepsilon^l T_{\beta,b,n}^l \mathcal{G}_{1,k-l}(z) \right) \varepsilon^k + O(\varepsilon^{n+1}) \right\}, \quad (6.0.47)\end{aligned}$$

donde $T_{\beta,b,n}^0 = 1$ y $T_{\text{rsen},n} = (-1)^{n+1} T_{\beta,b,n}^{n+1} (1 + \varepsilon T_{\beta,b,n})^{-1}$.

Sustituyendo (6.0.42) y (6.0.47) en los lados izquierdo y derecho de (6.0.40) respectivamente, obtenemos la igualdad

$$\begin{aligned}\sqrt{2\pi} \left\{ \sum_{k=0}^n \left(\sum_{j=0}^k d_j(\mathbf{p}, \beta) i_{k-j}(z) \right) \varepsilon^k + O(\varepsilon^{n+1}) \right\} \\ = \pi \left\{ \sum_{k=0}^n \mathcal{G}_k(z) \varepsilon^k + O(\varepsilon^{n+1}) \right\} \quad (6.0.48)\end{aligned}$$

donde

$$\mathcal{G}_k(z) = \sum_{l=0}^k (-1)^{l+1} T_{\beta, b, n}^l \mathcal{G}_{1, k-l}(z).$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_k(z) &= -\mathcal{G}_{1, k}(z) + T_{\beta, b, n} \sum_{l=1}^k (-1)^{l+1} T_{\beta, b, n}^{l-1} \mathcal{G}_{1, k-l}(z) \\ &= -\mathcal{G}_{1, k}(z) + T_{\beta, b, n} \sum_{m=0}^{k-1} (-1)^m T_{\beta, b, n}^m \mathcal{G}_{1, k-m-l}(z) \\ &= -(\mathcal{G}_{1, k}(z) + T_{\beta, b, n} \mathcal{G}_{k-1}(z)). \end{aligned} \quad (6.0.49)$$

Después, calculando los coeficientes de ε^0 , ε , ε^2 , etc., observando también cómo figuran $\beta_0, \dots, \beta_{n-1}$, a_{n-2} , a_{n-1} , a_n en los coeficientes de ε^n en ambos lados de (6.0.48) y teniendo en mente (6.0.49) en el lado derecho de (6.0.48), obtenemos una igualdad entre dos desarrollos explícitos en serie de potencias de ε equivalente a la ecuación (6.0.37):

$$\begin{aligned} &\sqrt{2\pi} \left\{ \beta_0 a_0(z) + \varepsilon(\beta_0 a_1(z) + \beta_1 a_0(z)) \right. \\ &\quad + \varepsilon^2 \left(\beta_0 a_2(z) + \beta_1 a_1(z) + \frac{\beta_0^3 a_0(z)}{8} + \beta_2 a_0(z) \right) \\ &\quad + \sum_{k=3}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^{k-j} d_j(\mathbf{p}, \beta) \beta_l a_{k-j-l}(z) \right) \varepsilon^k \\ &\quad \left. + \varepsilon^n \left(\sum_{j=0}^n \sum_{l=0}^{n-j} d_j(\mathbf{p}, \beta) \beta_l a_{n-j-l}(z) \right) \right\} + O(\varepsilon^{n+1}) \\ &= \end{aligned}$$

$$- \pi a_0(0) W(z)$$

$$\begin{aligned}
 & + \varepsilon \pi \left\{ \beta_0 [ia_0(0)W'(z) - ia'_0(0)W(z)] \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Gamma_{s,b}} \frac{W(z-\zeta)W(\zeta)}{\frac{4}{b^2} \operatorname{sen}^2 \frac{b\zeta}{2} + \varepsilon^2 B_n^2} a_0(0) d\zeta - a_1(0)W(z) \right\} \\
 & + \varepsilon^2 \pi \left\{ \beta_0 [ia_1(0)W'(z) - ia'_1(0)W(z)] + \beta_1 [ia_0(0)W'(z) - ia'_0(0)W(z)] \right. \\
 & \quad \left. + \beta_0^2 \left[\frac{1}{2} a_0(0)W''(z) - a'_0(0)W'(z) + \frac{1}{2} a''_0(0)W(z) \right] \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Gamma_{s,b}} \frac{W(z-\zeta)}{\frac{4}{b^2} \operatorname{sen}^2 \frac{b\zeta}{2} + \varepsilon^2 B_n^2} \left(\beta_0 [ia_0(0)W'(\zeta) - ia'_0(0)W(\zeta)] - a_1(0)W(\zeta) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Gamma_{s,b}} \frac{W(\zeta-\zeta_1)W(\zeta_1)}{\frac{4}{b^2} \operatorname{sen}^2 \frac{b\zeta_1}{2} + \varepsilon^2 B_n^2} a_0(0) d\zeta_1 \right) d\zeta - a_2(0)W(z) \right\} \\
 & + \sum_{k=3}^{n-1} \varepsilon^k \pi \left\{ P_k \left(\bar{\beta}_{0,k-1}, \bar{a}_{0,k-1}^{(\bar{i})}(0), W(z), W'(z), \dots, W^{(k)}(z) \right) \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Gamma_{s,b}} \frac{W(p-\zeta)\mathcal{G}_{k-1}(\zeta)}{\frac{4}{b^2} \operatorname{sen}^2 \frac{b\zeta}{2} + \varepsilon^2 B_n^2} d\zeta \right\} \\
 & + \varepsilon^n \pi \left\{ \beta_0 [ia_{n-1}(0)\tilde{V}'(z) - ia'_{n-1}(0)W(z)] + \beta_1 [ia_{n-2}(0)W'(z) - ia'_{n-2}(0)W(z)] \right. \\
 & \quad \left. + \beta_0^2 \left[\frac{1}{2} a_{n-2}(0)W''(z) - a'_{n-2}(0)W'(z) + \frac{1}{2} a''_{n-2}(0)W(z) \right] \right. \\
 & \quad \left. + R_n \left(\bar{\beta}_{3,n-2}, \bar{a}_{2,n-3}^{(\bar{i})}(0), W(z), \dots, W^{(n)}(z) \right) \right. \\
 & \quad \left. + \beta_{n-1} [ia_0(0)W'(z) - ia'_0(0)W(z)] \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Gamma_{s,b}} \frac{W(p-\zeta)\mathcal{G}_{n-1}(\zeta)}{\frac{4}{b^2} \operatorname{sen}^2 \frac{b\zeta}{2} + \varepsilon^2 B_n^2} d\zeta - a_n(0)W(z) \right\} + O(\varepsilon^{n+1})
 \end{aligned}
 \tag{6.0.50}$$

donde

$$\begin{aligned}\bar{\beta}_{p_1, r} &= (\beta_{p_1}, \dots, \beta_r), & \bar{a}_{p_1, r}(\zeta) &= (a_{p_1}(\zeta), \dots, a_r(\zeta)), \quad p_1 < r, \\ \bar{\beta} &= (\beta_0, \dots, \beta_n), & \bar{a}(\zeta) &= (a_0(\zeta), \dots, a_n(\zeta)), \\ \bar{a}_{p_1, r}^{(\bar{i})}(\zeta) &= (a_{p_1}^{(i_1)}, \dots, a_r^{(i_{r-p_1+1})}), & \bar{a}^{(\bar{i})}(\zeta) &= (a_0^{(i_1)}, \dots, a_n^{(i_n)}),\end{aligned}\tag{6.0.51}$$

$$\bar{i} = (i_1, i_2, \dots, i_n), \quad i_k \leq n+1;$$

S_k, P_k para $k = 3, \dots, n-1$, $T_n, R_n, S_{n+1}, P_{n+1}, Q_{n+1}$ son polinomios de sus argumentos que contienen solamente los términos proporcionales a potencias de $W(z)$ (o a potencias de $W(z - iZ_n(\varepsilon h B_n)\zeta)$ para Q_{n+1}) y sus derivadas.

Ya que $\text{sen} \frac{1}{2} \leq |\text{sen} \frac{\zeta}{2}|$ cuando $1 \leq |z| \leq \pi$ y a consecuencia de (6.0.19) se tiene que $|\varepsilon B_n / [(2/h)\text{sen}(h\zeta/2)]| < 1$ para $\zeta \in \Gamma_{s, h}$ si $h < 1$. Por lo tanto reconocemos en los integrandos de (6.0.50) una serie geométrica convergente:

$$\frac{1}{\frac{4}{h^2} \text{sen}^2 \frac{h\zeta}{2} + \varepsilon^2 B_n^2} = \frac{1}{\frac{4}{h^2} \text{sen}^2 \frac{h\zeta}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\frac{4^m}{h^{2m}} \text{sen}^{2m} \frac{h\zeta}{2}} \varepsilon^{2m} B_n^{2m}.$$

Hacemos justamente esta sustitución en (6.0.50) y desarrollamos en serie de McLaurin $W(z)$. Igualando los coeficientes de ε^k , $k = 0, \dots, n$ en ambos lados de la ecuación resultante obtenemos el sistema de ecuaciones para β_k, a_k , $k = 0, 1, \dots, n$:

$$\beta_0 a_0(z) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} a_0(0) W(z),\tag{6.0.52}$$

$$\begin{aligned}& \beta_0 a_1(z) + \beta_1 a_0(z) \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left\{ \beta_0 \left[i a_0(0) W'(z) - i a_0'(0) W(z) - \frac{h^2}{4\pi} \int_{\Gamma_{s, h}} \frac{W(z - \zeta)}{\text{sen}^2 \frac{h\zeta}{2}} a_0(\zeta) d\zeta \right] \right. \\ & \quad \left. - a_1(0) W(z) \right\},\end{aligned}\tag{6.0.53}$$

$$\begin{aligned}
 & \beta_0 a_2(z) + \beta_1 a_1(z) + \beta_2 a_0(z) + \frac{1}{8} \beta_0^3 a_0(z) \\
 &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left\{ \beta_0 \left[ia_1(0) W'(z) - ia_1'(0) W(z) - \frac{b^2}{4\pi} \int_{\Gamma_{s,b}} \frac{W(z-\zeta)}{\operatorname{sen}^2 \frac{b\zeta}{2}} a_1(\zeta) d\zeta \right] \right. \\
 & \quad + \beta_0^2 \left[\frac{1}{2} a_0(0) W''(z) - a_0'(0) W'(z) + \frac{1}{2} a_0''(0) W(z) \right] \\
 & \quad + \beta_1 \left[ia_0(0) W'(z) - ia_0'(0) W(z) - \frac{b^2}{4\pi} \int_{\Gamma_{s,b}} \frac{W(z-\zeta)}{\operatorname{sen}^2 \frac{b\zeta}{2}} a_0(\zeta) d\zeta \right] \\
 & \quad \left. - a_2(0) W(z) \right\}, \tag{6.0.54}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \beta_0 a_3(z) + \beta_1 a_2(z) + \frac{1}{8} \beta_0^3 a_1(z) + \beta_2 a_1(z) + \frac{3}{8} \beta_0^2 \beta_1 a_0(z) + \beta_3 a_0(z) \\
 &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left\{ \beta_0 \left[ia_2(0) W'(z) - ia_2'(0) W(z) - \frac{b^2}{4\pi} \int_{\Gamma_{s,b}} \frac{W(z-\zeta)}{\operatorname{sen}^2 \frac{b\zeta}{2}} a_2(\zeta) d\zeta \right] \right. \\
 & \quad + \beta_0^2 \left[\frac{1}{2} a_1(0) W''(z) - a_1'(0) W'(z) + \frac{1}{2} a_1''(0) W(z) \right] \\
 & \quad + \beta_0^3 \left[\frac{1}{24} ia_0'(0) W(z) - \frac{1}{24} ia_0(0) W'(z) \right. \\
 & \quad \quad + \frac{1}{6} ia_0'''(0) W(z) - \frac{1}{2} ia_0''(0) W'(z) \\
 & \quad \quad + \frac{1}{2} ia_0'(0) W''(z) - \frac{1}{6} ia_0(0) W'''(z) \\
 & \quad \quad \left. + \frac{b^4}{16\pi} \int_{\Gamma_{s,b}} \frac{W(z-\zeta)}{\operatorname{sen}^4 \frac{b\zeta}{2}} a_0(\zeta) d\zeta - \frac{b^2}{32\pi} \int_{\Gamma_{s,b}} \frac{W(z-\zeta)}{\operatorname{sen}^2 \frac{b\zeta}{2}} a_0(\zeta) d\zeta \right] \\
 & \quad + \beta_1 \left[ia_1(0) W'(z) - ia_1'(0) W(z) - \frac{b^2}{4\pi} \int_{\Gamma_{s,b}} \frac{W(z-\zeta)}{\operatorname{sen}^2 \frac{b\zeta}{2}} a_1(\zeta) d\zeta \right] \\
 & \quad + \beta_0 \beta_1 \left[a_0(0) W''(z) - 2a_0'(0) W'(z) + a_0''(0) W(z) \right] \\
 & \quad + \beta_2 \left[ia_0(0) W'(z) - ia_0'(0) W(z) - \frac{b^2}{4\pi} \int_{\Gamma_{s,b}} \frac{W(z-\zeta)}{\operatorname{sen}^2 \frac{b\zeta}{2}} a_0(\zeta) d\zeta \right] \\
 & \quad \left. - a_3(0) W(z) \right\} \tag{6.0.55}
 \end{aligned}$$

...

$$\begin{aligned}
 & \beta_0 a_k(z) + \beta_1 a_{k-1}(z) + \cdots + \beta_k a_0(z) + \sum_{j=1}^k \sum_{l=0}^{k-j} d_j(\mathbf{p}, \boldsymbol{\beta}) \beta_l a_{k-j-l}(z) \\
 &= \int_{\Gamma_{s,b}} \frac{W(z-\zeta) S_k \left(\bar{\beta}_{0,k-1}, \bar{a}_{0,k-1}(\zeta), \operatorname{sen} \frac{b\zeta}{2} \right) d\zeta}{\operatorname{sen}^{k} \frac{b\zeta}{2}} \\
 & \quad + P_k \left(\bar{\beta}_{0,k-1}, \bar{a}_{0,k-1}^{(\bar{i})}(0), W(z), W'(z), \dots, W^{(k)}(z) \right) \quad (6.0.56)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \beta_0 a_n(z) + \beta_1 a_{n-1}(z) + \beta_2 a_{n-2}(z) + \cdots + \beta_{n-1} a_1(z) + \beta_n a_0(z) \\
 & \quad + \sum_{j=1}^n \sum_{l=0}^{n-j} d_j(\mathbf{p}, \boldsymbol{\beta}) \beta_l a_{n-j-l}(z) \\
 &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left\{ \beta_0 \left[ia_{n-1}(0) W'(z) - ia'_{n-1}(0) W(z) - \frac{b^2}{4\pi} \int_{\Gamma_{s,b}} \frac{W(z-\zeta)}{\operatorname{sen}^2 \frac{b\zeta}{2}} a_{n-1}(\zeta) d\zeta \right] \right. \\
 & \quad + \beta_0^2 \left[\frac{1}{2} a_{n-2}(0) W''(z) - d'_{n-2}(0) W'(z) + \frac{1}{2} d''_{n-2}(0) W(z) \right] \\
 & \quad + \beta_1 \left[ia_{n-2}(0) W'(z) - ia'_{n-2}(0) W(z) - \frac{b^2}{4\pi} \int_{\Gamma_{s,b}} \frac{W(z-\zeta)}{\operatorname{sen}^2 \frac{b\zeta}{2}} a_{n-2}(\zeta) d\zeta \right] \\
 & \quad + \int_{\Gamma_{s,b}} \frac{W(z-\zeta) T_n \left(\bar{\beta}_{3,n-2}, \bar{a}_{2,n-3}(\zeta) \right) d\zeta}{\operatorname{sen}^{n} \frac{b\zeta}{2}} \\
 & \quad + R_n \left(\bar{\beta}_{3,n-2}, \bar{a}_{2,n-3}^{(\bar{i})}(0), W(z), \dots, W^{(n)}(z) \right) \\
 & \quad + \beta_{n-1} \left[ia_0(0) W'(z) - ia'_0(0) W(z) - \frac{b^2}{4\pi} \int_{\Gamma_{s,b}} \frac{W(z-\zeta)}{\operatorname{sen}^2 \frac{b\zeta}{2}} a_0(\zeta) d\zeta \right] \\
 & \quad \left. - a_n(0) W(z) \right\} \quad (6.0.57)
 \end{aligned}$$

Nota 10. Note que la Ec. (6.0.57) da las primeras cuatro Ecs. (6.0.52)–(6.0.55) si sustituimos 0, 1, 2, 3 en lugar de n , respectivamente, y hacemos cero tanto los términos con dos índices para los que el primer índice es menor que el segundo como los términos con índices negativos.

Lema 15. *El sistema (6.0.52)–(6.0.57) tiene solución única bajo las condiciones $a_0(0) = 1$, $a_1(0) = 0$, ..., (6.0.13) y sus soluciones a_0, \dots, a_n son analíticas en $\overline{D}_{\pi/h}$.*

Demostración. Poniendo $p = 0$ en (6.0.52) y teniendo en cuenta que por (6.0.1) (notemos que para $p \in [-\pi/h, \pi/h]$, $W(p) = [V_b(x)]^\sim(p)$)

$$\begin{aligned} W(0) &= \int_{\mathbf{R}} V_b(x) dx = \sum_{j=-[R/h]}^{[R/h]} V_j \int_{\mathbf{R}} \text{senc} \pi(x/h - j) dx \\ &= \frac{h}{\sqrt{2\pi}} \sum_j V_j < 0, \end{aligned} \quad (6.0.58)$$

es decir, $W(0) \neq 0$, obtenemos

$$\beta_0 = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} W(0). \quad (6.0.59)$$

Por la condición $a_0(0) = 1$ obtenemos de (6.0.53)

$$a_0(z) = \frac{W(z)}{W(0)}. \quad (6.0.60)$$

Fijemos $z = 0$ en (6.0.53). Por (6.0.60) y la condición $a_1(0) = 0$ obtenemos

$$\beta_1 = \frac{h^2}{8} \int_{\Gamma_{s,b}} \frac{W(\zeta) W(-\zeta)}{\text{sen}^2 \frac{h\zeta}{2}} d\zeta. \quad (6.0.61)$$

Ahora encontremos $a_1(z)$ de (6.0.53). Sustituyendo (6.0.59), (6.0.60) y (6.0.61) en (6.0.53), y tomando en cuenta el hecho de que $a_0(0) = 1$, obtenemos

$$\begin{aligned}
 a_1(z) &= \frac{i}{W(0)} \sqrt{\frac{\pi}{2}} [W'(z)W(0) - W'(0)W(z)] \\
 &\quad - \frac{h^2}{4\sqrt{2\pi}W(0)} \int_{\Gamma_{s,b}} \frac{W(\zeta)W(z-\zeta)}{\operatorname{sen}^2 \frac{h\zeta}{2}} d\zeta \\
 &\quad + \frac{h^2 W(z)}{4\sqrt{2\pi}(W(0))^2} \int_{\Gamma_{s,b}} \frac{W(\zeta)W(-\zeta)}{\operatorname{sen}^2 \frac{h\zeta}{2}} d\zeta.
 \end{aligned} \tag{6.0.62}$$

Observamos que de hecho $a_1(0) = 0$. Procediendo análogamente, obtenemos β_n y a_n suponiendo que conocemos $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}, a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$, y que $a_k(0) = 0$, $k = 2, \dots, n-1$. Buscamos $a_n(z)$ tal que $a_n(0) = 0$. Poniendo $z = 0$ en (6.0.57) y tomando en cuenta el hecho de que $a_0(0) = 1$, obtenemos

$$\begin{aligned}
 \beta_n &= \beta_0 \left[-i\sqrt{\frac{\pi}{2}} a'_{n-1}(0)W(0) - \frac{h^2}{4\sqrt{2\pi}} \int_{\Gamma_{s,b}} \frac{W(-\zeta)a_{n-1}(\zeta)}{\operatorname{sen}^2 \frac{h\zeta}{2}} d\zeta \right] + \dots \\
 &\quad + \beta_{n-1} \left[i\sqrt{\frac{\pi}{2}} W'(0) - i\sqrt{\frac{\pi}{2}} a'_0(0)W(0) - \frac{h^2}{4\sqrt{2\pi}} \int_{\Gamma_{s,b}} \frac{W(-\zeta)a_0(\zeta)}{\operatorname{sen}^2 \frac{h\zeta}{2}} d\zeta \right];
 \end{aligned} \tag{6.0.63}$$

esto es, β_n está determinado de manera única. Sustituyendo (6.0.63) y $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}, a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ en (6.0.57) vemos que $a_n(p)$ se determina en forma única puesto que $\beta_0 \neq 0$. No es difícil ver que de hecho $a_n(0) = 0$. \diamond

Completemos la prueba del Teorema 1. Del Lema 15 y de (6.0.52)-(6.0.57) se sigue que B_n y A_n , expresados en términos de los valores β_0, \dots, β_n y las funciones a_0, \dots, a_n mediante (6.0.3), (6.0.11), resuelven la ecuación (6.0.14) hasta un orden mayor que $O(\varepsilon^{n+1})$ en la norma de $L_2(\mathbf{R})$. Para demostrar esto, consideremos el coeficiente de ε^{n+1} en (6.0.50). Tenemos que $P_{n+1} \in C_\pi$, $k = 0, 1, \dots, n$, donde C_π es el conjunto de funciones analíticas en $\overline{D}_{\pi/h} = \{z \in \mathbf{C} \ni |z| \leq \pi/h\}$, ya que $W(z)$, $a_i \in C_\pi$. El primer sumando en el coeficiente en ε^{n+1} pertenece a C_π por la finitud del contorno $\Gamma_{s,b}$ y la misma propiedad para W y a_i . Finalmente, el tercer sumando en el mismo coeficiente pertenece a C_π de igual manera.

Esto significa que la función propia $\tilde{\psi}_n(p)$ de (6.0.10) resuelve la ecuación (6.0.9) con E_n determinado de (6.0.12), (6.0.11) hasta $O(\varepsilon^{n+1})$. Más exactamente,

$$\widehat{H}_{b,\varepsilon}\psi_n = E_n\psi_n + O(\varepsilon^{n+1}), \quad (6.0.64)$$

donde $\widehat{H}_{b,\varepsilon} = -D_b^2 + \varepsilon\widehat{V}_b$ es el operador discreto de Schrödinger de la Definición 7 del primer capítulo de esta tesis, cuyo efecto es el hecho en el lado izquierdo de la Ec. (2.1.15): D_b^2 es el operador discreto de Laplace tal que $D_b^2 = -\frac{4}{b^2}\sin^2\frac{b\widehat{p}}{2} = (E_{b/2} - E_{-b/2})^2$, siendo $\widehat{p} = -id/dx$ y E_y el operador de traslación por y tal que $[E_y f](x) = f(x+y)$, y \widehat{V}_b está dado por (2.1.13). $O(\varepsilon^{n+1})$ se entiende en el sentido de la $L_2(\mathbf{R})$ -norma.

Usando nuevamente ahora el Lema 12 (Lema 1.3 de [29], pág. 23, o el lema similar de [23]), obtenemos, después de la normalización (5.1.3), la estimación (6.0.7) de la manera que describiremos en seguida.

Consideramos el operador discreto de Schrödinger $\widehat{H}_{b,\varepsilon} = -D_b^2 + \varepsilon\widehat{V}_b$ dependiente del parámetro ε como el operador A de dicho lema. El espacio de Hilbert \mathcal{H} en este caso es el espacio $L_2(\mathbf{R})$. Para aplicar el Lema 12 nuestro razonamiento es como sigue. De momento entonces, en lugar de encontrar una solución exacta ψ_ε de

$$\widehat{H}_{b,\varepsilon}\psi_\varepsilon = E_\varepsilon\psi_\varepsilon. \quad (6.0.65)$$

la resolvemos aproximadamente, *i.e.*, encontramos un valor propio aproximado E_n (véase (6.0.12)) y una función propia aproximada ψ_n (omitimos aquí el subíndice ε guardando en mente que esta notación corresponde a la ecuación (6.0.65)). Esto es, probamos la igualdad (6.0.64).

Vamos a sustituir la distancia del valor propio aproximado E_n al espectro en vez de r en la desigualdad (5.1.33) y la función propia aproximada ψ_n en lugar de g . Es necesario sólo normalizar la función propia ψ_n de acuerdo a (5.1.3) en $L_2(\mathbf{R})$. A saber, construimos una función propia Ψ_n que satisface la siguiente condición de normalización:

$$\|\Psi_n\| - 1 = O(\varepsilon^{n+1}). \quad (6.0.66)$$

Hacemos esto escogiendo una constante $c(\varepsilon)$ tal que, después de multiplicarla por ψ_n , obtengamos una función propia $\tilde{\Psi}_n$ que satisfaga la estimación (6.0.66).

De (6.0.10) y la identidad de Parseval se sigue que

$$\begin{aligned} \|\psi_n(x)\| &= \|\tilde{\psi}_n(p)\| = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{\psi}_n(p)|^2 dp \right)^{1/2} \\ &= \left(\int_{-\pi/b}^{\pi/b} \frac{|A_n(p)|^2 dp}{\frac{4}{b^2} \sin^2 \frac{bp}{2} + \varepsilon^2 |B_n|^2} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (6.0.67)$$

Notemos que $\beta_0 > 0$ por (6.0.4) y (6.0.58). Así, para ε suficientemente pequeño tenemos $|B_n| = B_n$.

De (6.0.11) se sigue que la expresión $(B_n)^{-3/2}$ es analítica en ε para ε pequeño. También necesitamos la asintótica de la integral en (6.0.67). Para obtener el primer término de esta expansión, usamos el siguiente método. Hacemos la partición de la unidad formada por las tres funciones $\chi_{1,2,3}(p) \in C^\infty$ tales que $\chi_2(p) = \chi_3(-p)$, $\sum_j \chi_j(p) = 1$, y

$$\chi_1(p) = \begin{cases} 0, & p \in [-\pi/b, -\pi/2b] \cup [\pi/2b, \pi/b]; \\ 1, & p \in [-1/b, 1/b], \end{cases}$$

$$\chi_3(p) = \begin{cases} 0, & p \in [-\pi/b, 1/b]; \\ 1, & p \in [\pi/2b, \pi/b]. \end{cases}$$

Luego

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} \frac{A_n^2(p) dp}{\left(\frac{4}{b^2} \operatorname{sen}^2 \frac{bp}{2} + \varepsilon^2 B_n^2\right)^2} &= \int_{-\pi/h}^{\pi/h} \sum_{j=1}^3 \chi_j(p) \frac{A_n^2(p) dp}{\left(\frac{4}{b^2} \operatorname{sen}^2 \frac{bp}{2} + \varepsilon^2 B_n^2\right)^2} \\ &= \int_{-\pi/h}^{\pi/h} \chi_1(p) \frac{A_n^2(p) dp}{\left(\frac{4}{b^2} \operatorname{sen}^2 \frac{bp}{2} + \varepsilon^2 B_n^2\right)^2} \end{aligned} \quad (6.0.68)$$

$$+ \int_{-\pi/h}^{\pi/h} (\chi_2 + \chi_3)(p) \frac{A_n^2(p) dp}{\left(\frac{4}{b^2} \operatorname{sen}^2 \frac{bp}{2} + \varepsilon^2 B_n^2\right)^2} \quad (6.0.69)$$

Haciendo el cambio de variable $q = \frac{2}{b} \operatorname{sen} \frac{bp}{2}$ en la integral (6.0.68) la podemos escribir

$$\begin{aligned} \int_{-2/h}^{2/h} \frac{\chi_1\left(\frac{2}{b} \operatorname{arcsen} \frac{bq}{2}\right) A_n^2\left(\frac{2}{b} \operatorname{arcsen} \frac{bq}{2}\right) dq}{(q^2 + \varepsilon^2 B_n^2)^2 \sqrt{1 - \frac{b^2 q^2}{4}}} \\ = \int_{-\sqrt{2}/h}^{\sqrt{2}/h} \frac{\chi_1(q) (1 + O(q) + O(q)O(\varepsilon)) (1 + O(q^2)) dq}{(q^2 + \varepsilon^2 B_n^2)^2} \end{aligned} \quad (6.0.70)$$

ya que sucesivamente (tomando en cuenta las condiciones de normalización (6.0.13)) $A_n(p) = a_0(p) + O(p)O(\varepsilon)$, $a_0(p) = 1 + O(p)$, $A_n^2(p) = 1 + O(p) + O(p)O(\varepsilon)$, $\frac{2}{b} \operatorname{arcsen} \frac{bq}{2} = O(q)$ y por ende $A_n^2\left(\frac{2}{b} \operatorname{arcsen} \frac{bq}{2}\right) = 1 + O(q) + O(q)O(\varepsilon)$, y donde $\chi_1(q) \in C^\infty$ y

$$\chi_1(q) = \chi_1\left(\frac{2}{b} \operatorname{arcsen} \frac{bq}{2}\right) = \begin{cases} 0, & q \in [-2/h, -\sqrt{2}/h] \cup [\sqrt{2}/h, 2/h]; \\ 1, & q \in [-\frac{2}{b} \operatorname{sen} \frac{1}{2}, \frac{2}{b} \operatorname{sen} \frac{1}{2}], \end{cases}$$

Luego la integral (6.0.70) se puede sucesivamente escribir

$$\begin{aligned}
 \int_{-\sqrt{2}/h}^{\sqrt{2}/h} \frac{A_{1,n}(q) dq}{(q^2 + \varepsilon^2 B_n^2)^2} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A_{1,n}(q) dq}{(q^2 + \varepsilon^2 B_n^2)^2} \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1 + O(q) + O(q)O(\varepsilon)) dq}{(q^2 + \varepsilon^2 B_n^2)^2}
 \end{aligned} \tag{6.0.71}$$

donde

$$A_{1,n}(q) = \frac{\chi_1(q) A_n^2 \left(\frac{2}{b} \arcsen \frac{hq}{2} \right)}{\sqrt{1 - \frac{b^2 q^2}{4}}}$$

está en C_0^∞ y su serie asintótica es $1 + O(q) + O(q)O(\varepsilon)$. Haciendo otro cambio de variable, $q = \varepsilon B_n t$, en (6.0.71), dicha integral la podemos expresar como

$$\frac{1}{\varepsilon^3 B_n^3} \int_{\mathbf{R}} \frac{(1 + O(\varepsilon)P_1(\bar{\beta}, \varepsilon, t)) dt}{(t^2 + 1)^2} = \varepsilon^{-3} B_n^{-3} \left(\frac{\pi}{2} + O(\varepsilon) \right), \tag{6.0.72}$$

tomando en cuenta (6.0.13) y el hecho que

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{dt}{(t^2 + 1)^2} = \pi/2. \tag{6.0.73}$$

Por otra parte, la integral (6.0.69) podemos escribirla como

$$\begin{aligned}
 &\frac{b^4}{16} \int_{1/h \leq |p| \leq \pi/h} \frac{(\chi_2 + \chi_3)(p) A_n^2(p) dp}{\text{sen}^4 \frac{bp}{2} \left(1 + \frac{\varepsilon^2 B_n^2}{\frac{4}{b^2} \text{sen}^2 \frac{bp}{2}} \right)^2} \\
 &= \frac{b^4}{16} \int_{1/h \leq |p| \leq \pi/h} \frac{(\chi_2 + \chi_3)(p) \text{Const}^2 (1 + O(p) + O(p)O(\varepsilon)) dp}{\text{sen}^4 \frac{bp}{2} (1 + \text{Const}^2 b^2 \varepsilon^2 B_n^2 (1 + O(p)))^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \text{Const}^2 h^4 \int_{1/b \leq |p| \leq \pi/b} \frac{(\chi_2 + \chi_3)(p)(1 + O(\varepsilon))(1 + O(\varepsilon^2 B_n^2)) dp}{\text{sen}^4 \frac{bp}{2}} \\
 &= \text{Const}^2 h^4 \int_{1/b \leq |p| \leq \pi/b} \frac{(\chi_2 + \chi_3)(p)(1 + O(\varepsilon)) dp}{\text{sen}^4 \frac{bp}{2}} \\
 &= \text{Const}^2 h^4 \int_{1/b}^{\pi/b} \frac{\chi_3(p) dp}{\text{sen}^4 \frac{bp}{2}} + O(\varepsilon), \tag{6.0.74}
 \end{aligned}$$

ya que $\csc^2 \frac{bp}{2} = \csc^2 \frac{\pi}{4} (1 + O(p))$ y $\chi_2(p) = \chi_3(-p)$. Sustituyendo (6.0.72) y (6.0.74) en (6.0.68) y (6.0.69) respectivamente tenemos que

$$\begin{aligned}
 &\int_{-\pi/b}^{\pi/b} \frac{A_n^2(p) dp}{\left(\frac{4}{b^2} \text{sen}^2 \frac{bp}{2} + \varepsilon^2 B_n^2\right)^2} \\
 &= \varepsilon^{-3} B_n^{-3} \left(\frac{\pi}{2} + O(\varepsilon)\right) + \text{Const}^2 h^4 \int_{1/b}^{\pi/b} \frac{\chi_3(p) dp}{\text{sen}^4 \frac{bp}{2}} + O(\varepsilon) \tag{6.0.75}
 \end{aligned}$$

por lo que la norma

$$\begin{aligned}
 \|\psi_n(x)\| &= \varepsilon^{-3/2} B_n^{-3/2} \left(\frac{\pi}{2} + O(\varepsilon) + \text{Const}^2 h^4 \varepsilon^3 B_n^3 \int_{1/b}^{\pi/b} \frac{\chi_3(p) dp}{\text{sen}^4 \frac{bp}{2}} + O(\varepsilon^4)\right)^{1/2} \\
 &= \varepsilon^{-3/2} B_n^{-3/2} \left(\frac{\pi}{2} + O(\varepsilon)\right)^{1/2} = \varepsilon^{-3/2} B_n^{-3/2} \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} + O(\varepsilon)\right) \\
 &= \beta_0^{-3/2} \varepsilon^{-3/2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (1 + O(\varepsilon)) \tag{6.0.76}
 \end{aligned}$$

Aplicando argumentos similares a aquellos del Lema 14 y tomando en cuenta la analiticidad de $B_n^{-3/2}$ podemos escribir la expansión asintótica de la norma (6.0.67):

$$\begin{aligned} & \|\psi_n(x)\| \\ &= \varepsilon^{-3/2} [l_0(\bar{\beta}, \bar{a}(p)) + \dots + \varepsilon^n l_n(\bar{\beta}, \bar{a}(p)) + O(\varepsilon^{n+1})], \quad \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (6.0.77)$$

Luego, de acuerdo a (6.0.76) el término principal $l_0(\bar{\beta}, \bar{a}(p))$ es

$$\sqrt{\frac{\pi}{2\beta_0^3}}. \quad (6.0.78)$$

Vamos a normalizar la función propia ψ_n seleccionando la constante apropiada $c(\varepsilon)$. De (6.0.77) se sigue que esta constante tiene la forma

$$c(\varepsilon) = \varepsilon^{3/2} (d_0 + d_1 \varepsilon + \dots + d_n \varepsilon^n) + O(\varepsilon^{n+5/2}). \quad (6.0.79)$$

Multiplicando la expresión (6.0.77) por la que es para $\|\psi_n\|$, obtenemos

$$\begin{aligned} c(\varepsilon)\|\psi_n\| &= d_0 l_0 + (d_0 l_1 + d_1 l_0) \varepsilon + \dots + (d_0 l_n + \dots + d_n l_0) \varepsilon^n \\ &\quad + O(\varepsilon^{n+1}). \end{aligned} \quad (6.0.80)$$

Ahora es claro que podemos hacer este producto igual a $1 + O(\varepsilon^{n+1})$. De hecho, para este fin, es suficiente resolver el sistema de ecuaciones con incógnitas d_i , $i = 0, \dots, n$:

$$d_0 l_0 = 1, \quad d_0 l_k + \dots + d_k l_0 = 0, \quad k = 1, \dots, n. \quad (6.0.81)$$

Obviamente, esto es posible ya que $l_0 \neq 0$ por (6.0.78). Además,

$$d_0 = \sqrt{\frac{2\beta_0^3}{\pi}}. \quad (6.0.82)$$

Así hemos encontrado la constante $c(\varepsilon)$ tal que la función propia aproximada

$$\Psi_n(x) \equiv c(\varepsilon)\psi_n(x) \quad (6.0.83)$$

satisface la condición (6.0.66). Es evidente que esta función propia normalizada Ψ_n satisface (6.0.64) con un nuevo término residual $O(\varepsilon^{n+1}\varepsilon^{3/2})$, *i.e.*,

$$\widehat{H}_{h,\varepsilon}\Psi_n = E_n\Psi_n + O(\varepsilon^{n+5/2}), \quad n = 0, \dots \quad (6.0.84)$$

Ahora sustituyendo $g = \Psi_n$ en el Lema 12, obtenemos de la estimación (5.1.33) la estimación (6.0.7).

Capítulo 7

LA SOLUCIÓN EXACTA PARA EL CASO DISCRETO

7.1. LA SOLUCIÓN EXACTA PARA EL CASO DISCRETO CON $\sum V_j$ NO POSITIVA

Siguiendo las consideraciones heurísticas de la Introducción y tomando $E = -\beta^2$, $\beta \rightarrow 0^+$, ahora es natural, para construir una solución de la Ec. (2.3.1), buscarla en la forma (no distinguimos entre $\widetilde{\Psi}_b$ y su continuación periódica)

$$\widetilde{\Psi}_b(p) = \frac{A_b(p)}{\frac{4}{h^2} \operatorname{sen}^2 \frac{hp}{2} + \beta^2}, \quad (7.1.1)$$

donde $A_b(z)$ es una función analítica en $B_{\pi/h}$ y $2\pi/h$ -periódica en \mathbf{C} . Similarmente al caso continuo, debemos recordar el hecho de que $A_b(p)$ también depende de ε y, además, de h . Sustituyendo en (2.3.1) la función $\widetilde{\Psi}_b$ dada por (7.1.1) obtenemos la ecuación equivalente

$$A_b(p) = -\frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/b}^{\pi/b} \frac{W(p-p')A_b(p')dp'}{\frac{4}{b^2}\sin^2\frac{bp'}{2} + \beta^2}. \quad (7.1.2)$$

El integrando en (7.1.2) es también singular en el origen cuando $\beta = 0$. Introducimos la siguiente

Definición 18. Denotamos por Ω_b el espacio de funciones $2\pi/b$ -periódicas analíticas sobre $B_{\pi/b}$ y continuas en su cerradura. Usamos la norma del supremo en Ω_b , $\|\varphi\| = \sup_{z \in B_{\pi/b}} |\varphi(z)|$ para todo $\varphi \in \Omega_b$.

Nota 11. Note que, por los ceros de la expresión $\frac{4}{b^2}\sin^2\frac{bz}{2} + \beta^2$, la continuación analítica $\widetilde{\Psi}_b(z)$ de $\widetilde{\Psi}_b(p)$ a todo el plano complejo \mathbf{C} tiene polos simples $2k\pi/b \pm z_{\beta,b}$, $k \in \mathbf{Z}$, donde $z_{\beta,b}$ está dado por (6.0.18). Sin embargo, $\pm z_{\beta,b}$ son las singularidades de $\widetilde{\Psi}_b$ en $|\operatorname{Re} z| \leq \pi/b$ cuando $\beta \rightarrow 0^+$, de manera similar a las singularidades de $\widetilde{\Psi}$ en B_a para el caso continuo.

Cambiamos el contorno de integración en el plano complejo en tal forma que el polo $z = z_{\beta,b}$ esté alejado de él. Suponga que $A_b(z)$ pertenece a Ω_b (después probaremos que éste es en efecto el caso) e introducimos nuevamente el contorno $\Gamma_{s,b}$ (véase Fig. 2).

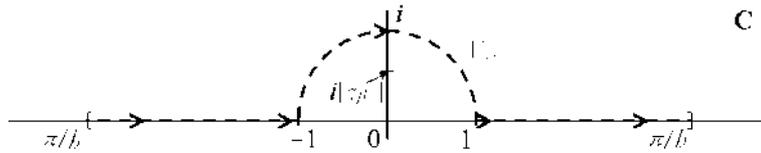


Figura 7.1: Contorno $\Gamma_{s,b}$.

Si $\beta < \frac{2}{b}\sinh\frac{b}{2}$, entonces $z_{\beta,b}$ está localizado debajo de $\Gamma_{s,b}$. Por el teorema del residuo

de Cauchy,

$$\begin{aligned} & \int_{[-\pi/h, \pi/h]} \frac{W(p - \zeta)A_b(\zeta)d\zeta}{\frac{4}{b^2}\text{sen}^2\frac{b\zeta}{2} + \beta^2} \\ &= \int_{\Gamma_{s,b}} \frac{W(p - \zeta)A_b(\zeta)d\zeta}{\frac{4}{b^2}\text{sen}^2\frac{b\zeta}{2} + \beta^2} + 2\pi i \text{Res}_{\zeta=z_{\beta,b}} \frac{W(p - \zeta)A_b(\zeta)}{\frac{4}{b^2}\text{sen}^2\frac{b\zeta}{2} + \beta^2} \\ &= \int_{\Gamma_{s,b}} \frac{W(p - \zeta)A_b(\zeta)d\zeta}{\frac{4}{b^2}\text{sen}^2\frac{b\zeta}{2} + \beta^2} + \frac{\pi}{\beta} W(p - z_{\beta,b})A_b(z_{\beta,b})\text{sec}\frac{hz_{\beta,b}}{2}. \end{aligned}$$

Así (7.1.2) toma la forma

$$\begin{aligned} & \beta \sqrt{1 + \frac{b^2\beta^2}{4}} \left(-A_b(p)\sqrt{2\pi/\varepsilon} - \int_{\Gamma_{s,b}} \frac{W(p - \zeta)A_b(\zeta)d\zeta}{\frac{4}{b^2}\text{sen}^2\frac{b\zeta}{2} + \beta^2} \right) \\ &= \pi W(p - i|z_{\beta,b}|)A_b(i|z_{\beta,b}|). \quad (7.1.3) \end{aligned}$$

Definición 19. Definimos el operador integral $T_{\beta,b} : \Omega_b \longrightarrow \Omega_b$ por la fórmula

$$[T_{\beta,b}\varphi(\zeta)](z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Gamma_{s,b}} \frac{W(z - \zeta)\varphi(\zeta)d\zeta}{\frac{4}{b^2}\text{sen}^2\frac{b\zeta}{2} + \beta^2}, \quad z \in \Omega_b. \quad (7.1.4)$$

Nota 12. $[T_{\beta,b}\varphi(\zeta)](z) \in \Omega_b$ porque el integrando es analítico. Por lo tanto $T_{\beta,b}$ está bien definida.

Nota 13. $[T_{\beta,b}\varphi(\zeta)](z)$ es analítica en β también ya que $|\beta/[(2/h)\text{sen}(h\zeta/2)]| < 1$ para $\zeta \in \Gamma_{s,b}$ y

$$\frac{1}{\frac{4}{b^2}\text{sen}^2\frac{b\zeta}{2} + \beta^2} = \frac{1}{\frac{4}{b^2}\text{sen}^2\frac{b\zeta}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\frac{4^m}{b^{2m}}\text{sen}^{2m}\frac{b\zeta}{2}} \beta^{2m}.$$

Nota 14. Además, $T_{\beta,b}$ es acotado. En efecto,

$$\begin{aligned} \|T_{\beta,b}\varphi\| &= \sup_{z \in \overline{D}_{s,b}} \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Gamma_{s,b}} \frac{W(z-\zeta)\varphi(\zeta) d\zeta}{\frac{4}{b^2} \operatorname{sen}^2 \frac{b\zeta}{2} + \beta^2} \right| \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sup_{z \in \overline{D}_{s,b}} \int_{\Gamma_{s,b}} \frac{|\varphi(\zeta)W(z-\zeta) d\zeta|}{|\frac{4}{b^2} \operatorname{sen}^2 \frac{b\zeta}{2} + \beta^2|} \leq \frac{C_{s,b}\|\varphi\|}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Gamma_{s,b}} \frac{|d\zeta|}{|\frac{4}{b^2} \operatorname{sen}^2 \frac{b\zeta}{2} + \beta^2|} \end{aligned}$$

para alguna constante adecuada $C_{s,b}$. Por lo tanto $\varepsilon \|T_{\beta,b}\| < 1$ para ε suficientemente pequeño.

Ahora, de (7.1.3) se sigue que

$$-\sqrt{2\pi}\beta\sqrt{1 + \frac{b^2\beta^2}{4}} \left[(1 + \varepsilon T_{\beta,b})A_h(\zeta) \right](z) = \pi \varepsilon W(z - i|z_{\beta,b}|)A_h(i|z_{\beta,b}|),$$

donde 1 es el operador identidad. Supongamos que $A_h(i|z_{\beta,b}|) = 1$ (después probaremos que siempre puede suponerse que esto es verdad). Tenemos que

$$A_h(z) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\varepsilon}{\beta\sqrt{1 + \frac{b^2\beta^2}{4}}} \left[(1 + \varepsilon T_{\beta,b, \zeta \rightarrow z})^{-1} W(\zeta - i|z_{\beta,b}|) \right](z). \quad (7.1.5)$$

Ya que $\varepsilon T_{\beta,b}$ es un operador de contracción, $(1 + \varepsilon T_{\beta,b})^{-1}$ es igual a su serie de Neumann y (7.1.5) se expresa como

$$A_h(z) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\varepsilon}{\beta\sqrt{1 + \frac{b^2\beta^2}{4}}} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \varepsilon^l \left[T_{\beta,b, \zeta \rightarrow z}^l W(\zeta - i|z_{\beta,b}|) \right](z),$$

donde $T_{\beta,b}^0 \equiv 1$. Así, por la Nota 12, tenemos una serie uniformemente convergente de funciones analíticas en z sobre $B_{\pi/h}$. Por lo tanto $A_h(z)$ es analítica en $z \in B_{\pi/h}$ ([46], Cap. 6, Teor. 21).

Nota 15. Aplicando l veces el operador $T_{\beta,b}$ a una función $\varphi \in \Omega_b$, $l = 1, 2, \dots$, tenemos

$$\begin{aligned} & [T_{\beta,b}^l \varphi(\zeta)](z) \\ &= (2\pi)^{-l/2} \int_{\Gamma_{s,b}} \dots \int_{\Gamma_{s,b}} \varphi(\zeta) \prod_{n=1}^l \frac{W(\zeta_{n-1} - \zeta_n)}{\frac{4}{b^2} \operatorname{sen}^2 \frac{b\zeta_n}{2} + \beta^2} d\zeta_n, \quad \zeta_0 \equiv z, \quad \zeta_l \equiv \zeta. \end{aligned} \quad (7.1.6)$$

Evaluando en $z = i|z_{\beta,b}|$, de (7.1.5) obtenemos la ecuación secular para β :

$$\beta \sqrt{1 + \frac{b^2 \beta^2}{4}} = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \varepsilon \left[(1 + \varepsilon T_{\beta,b,\zeta \rightarrow z})^{-1} W(\zeta - i|z_{\beta,b}|) \right] (i|z_{\beta,b}|). \quad (7.1.7)$$

Consideremos la función

$$\begin{aligned} & F_b(\beta, \varepsilon) \\ &= \beta \sqrt{1 + \frac{b^2 \beta^2}{4}} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \varepsilon \left[(1 + \varepsilon T_{\beta,b,\zeta \rightarrow z})^{-1} W(\zeta - i|z_{\beta,b}|) \right] (i|z_{\beta,b}|). \end{aligned} \quad (7.1.8)$$

Sustituyendo nuevamente $(1 + \varepsilon T_{\beta,b})^{-1}$ por su serie de Neumann en (7.1.8), ésta se convierte en

$$\begin{aligned} & F_b(\beta, \varepsilon) \\ &= \beta \sqrt{1 + \frac{b^2 \beta^2}{4}} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \varepsilon \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \varepsilon^l \left[T_{\beta,b,\zeta \rightarrow z}^l W(\zeta - i|z_{\beta,b}|) \right] (i|z_{\beta,b}|). \end{aligned} \quad (7.1.9)$$

Nota 16. Observemos que $[T_{\beta,b,\zeta \rightarrow z}^l W(\zeta - i|z_{\beta,b}|)](i|z_{\beta,b}|)$ es analítica en β . En efecto, en la Ec. (7.1.6) podemos sustituir $i|z_{\beta,b}|$ en lugar de z y $W(\zeta - i|z_{\beta,b}|)$ en lugar de

$\varphi(\zeta)$, teniendo en cuenta las expansiones $W(i|z_{\beta,b}|-\zeta_1) = \sum_{k=0}^{\infty} i^k W^{(k)}(-\zeta_1)|z_{\beta,b}|^k/k!$,
 $W(\zeta - i|z_{\beta,b}|) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k i^k W^{(k)}(\zeta)|z_{\beta,b}|^k/k!$,

$$\prod_{n=1}^l \frac{1}{\frac{4}{b^2} \operatorname{sen}^2 \frac{b\zeta_n}{2} + \beta^2} = \prod_{n=1}^l \left(\frac{1}{\frac{4}{b^2} \operatorname{sen}^2 \frac{b\zeta_n}{2}} \sum_{k_n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k_n}}{\frac{4^{k_n}}{b^{2k_n}} \operatorname{sen}^{2k_n} \frac{b\zeta_n}{2}} \beta^{2k_n} \right),$$

análogas a (5.2.13), y

$$|z_{\beta,b}|^k = \sum_{j=0}^{\infty} c_{k,j} b^{k+j} \beta^{k+j}$$

con algunos coeficientes explícitos $c_{k,j}$.

Así tenemos que la función $F_b(\beta, \varepsilon)$ es analítica en cada argumento, y por teorema de Hartogs (véanse [8] Secc. 3.1, [15] Cap. I Secc. A, [20] Secc. 2.2), es analítica en \mathbf{C}^2 . Además, $F_b(0, 0) = 0$, $[\partial_{\beta} F_b](0, 0) = 1$, lo último por el factor ε en el segundo término de (7.1.9). De aquí que, por el teorema de la función implícita (véanse [15] Teor. I,B4, [20] Teor. 2.1.2.), la solución $\beta_b(\varepsilon)$ para β de la ecuación secular (7.1.7), la cual tiende a cero cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, existe, es única y está dada por (1.2.4). En efecto, desarrollemos $F_b(\beta, \varepsilon)$ en serie de Taylor. Análogamente a (5.2.14)–(5.2.17), tenemos $[\partial_{\varepsilon} F_b](0, 0) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} W(0)$, $[\partial_{\beta \varepsilon}^2 F_b](0, 0) = 0$, $[\partial_{\beta}^2 F_b](0, 0) = 0$ y

$$[\partial_{\varepsilon}^2 F_b](0, 0) = - \int_{\Gamma_{s,b}} \frac{W(\zeta) W(-\zeta)}{\frac{4}{b^2} \operatorname{sen}^2 \frac{b\zeta}{2}} d\zeta.$$

Así tenemos hasta términos de segundo orden la expansión

$$F_b(\beta, \varepsilon) = \beta + \varepsilon \sqrt{\frac{\pi}{2}} W(0) - \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{\Gamma_{s,b}} \frac{W(\zeta) W(-\zeta)}{\frac{4}{b^2} \operatorname{sen}^2 \frac{b\zeta}{2}} d\zeta + \dots \quad (7.1.10)$$

La ecuación secular (7.1.7) es equivalente a

$$F_b(\beta, \varepsilon) = 0,$$

y obtenemos, usando la fórmula (2.3.2) en (7.1.10), la solución (1.2.4) a (7.1.7). Además, de (7.1.5) tenemos

$$A_b(z) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\varepsilon}{\beta_b(\varepsilon) \sqrt{1 + \frac{b^2 \beta_b^2(\varepsilon)}{4}}} \times \left[(1 + \varepsilon T_{\beta_b(\varepsilon), b, \zeta \rightarrow z})^{-1} W(\zeta - i|z_{\beta_b(\varepsilon), b}|) \right] (z). \quad (7.1.11)$$

Verifiquemos que $A_b(i|z_{\beta_b(\varepsilon), b}|) = 1$. En efecto,

$$A_b(i|z_{\beta_b(\varepsilon), b}|) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\varepsilon}{\beta_b(\varepsilon) \sqrt{1 + \frac{b^2 \beta_b^2(\varepsilon)}{4}}} \times \left[(1 + \varepsilon T_{\beta_b(\varepsilon), b, \zeta \rightarrow z})^{-1} W(\zeta - i|z_{\beta_b(\varepsilon), b}|) \right] (i|z_{\beta_b(\varepsilon), b}|), \quad (7.1.12)$$

pero, ya que $\beta_b(\varepsilon)$ satisface (7.1.7) idénticamente, *i. e.*,

$$\beta_b(\varepsilon) \equiv -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 + \frac{b^2 \beta_b^2(\varepsilon)}{4}}} \times \left[(1 + \varepsilon T_{\beta_b(\varepsilon), b, \zeta \rightarrow z})^{-1} W(\zeta - i|z_{\beta_b(\varepsilon), b}|) \right] (i|z_{\beta_b(\varepsilon), b}|), \quad (7.1.13)$$

obtenemos el resultado deseado si sustituimos (7.1.13) en el lado derecho de (5.2.20). Así, el Teorema 2 está probado.

7.2. LA SOLUCIÓN EXACTA PARA EL CASO DISCRETO CON $\sum V_j$ NO NEGATIVA

Tomemos $E = 4/b^2 + \gamma^2$, $\gamma \rightarrow 0^+$; entonces la Ec. (2.3.1) se convierte en

$$\left(\frac{4}{b^2}\cos^2\frac{bp}{2} + \gamma^2\right)\widetilde{\Psi}_b(p) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/b}^{\pi/b} W(p-p')\widetilde{\Psi}_b(p')dp' \quad (7.2.1)$$

en $p \in [-\pi/b, \pi/b]$. Similarmente a lo anterior, buscamos la solución en la forma

$$\widetilde{\Psi}_b(p) = \frac{D_b(p)}{\frac{4}{b^2}\cos^2\frac{bp}{2} + \gamma^2}, \quad (7.2.2)$$

donde $D_b(z)$ es una función analítica en $B_{\pi/b}$ y $2\pi/b$ -periódica. Sustituyendo en (7.2.1) la función $\widetilde{\Psi}_b$ dada por (7.2.2) obtenemos la ecuación equivalente

$$D_b(p) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/b}^{\pi/b} \frac{W(p-p')D_b(p')dp'}{\frac{4}{b^2}\cos^2\frac{bp'}{2} + \gamma^2}. \quad (7.2.3)$$

Nota 17. Note que el integrando en el lado derecho de Ec. (7.2.3) es singular en $p' = -\pi/b$ y $p' = \pi/b$ cuando $\gamma = 0$. Para reducir nuestra ecuación a una situación similar a la de la Sección 7.1, observemos que ya que se supuso que D_b es $2\pi/b$ -periódica, tenemos

$$\left(\int_{-\pi/b}^0 = \int_{\pi/b}^{2\pi/b}\right) \frac{W(p-p')D_b(p')dp'}{\frac{4}{b^2}\cos^2\frac{bp'}{2} + \gamma^2}.$$

Así podemos calcular la integral en la Ec. (7.2.3) de 0 a $2\pi/b$ con el mismo integrando, la cual, dentro del nuevo intervalo de integración, es solamente singular en $p' = \pi/b$ cuando $\gamma = 0$ (similarmente al caso discreto con $\sum_j V_j$ no positiva).

Nota 18. La única singularidad con parte imaginaria positiva de $\widetilde{\psi}_\gamma(z)$ en $0 \leq \operatorname{Re} z < 2\pi/b$ cuando $\gamma \rightarrow 0^+$ es

$$z_{\gamma,b} \equiv \pi/b - \frac{2i}{b} \ln \left(-\frac{b\gamma}{2} + \sqrt{1 + \frac{b^2\gamma^2}{4}} \right).$$

En forma análoga a la de la Sección 7.1, suponemos que $D_b(z) \in \Omega_b$ e introducimos el contorno formado por la traslación de $\Gamma_{s,b}$ a la derecha por π/b :

$$\Gamma_{c,b} := [0, \pi/b-1] \cup \{p+iq : (p-\pi/b)^2 + q^2 = 1, q > 0\} \cup [\pi/b+1, 2\pi/b]. \quad (7.2.4)$$

Si $\gamma < \frac{2}{b} \operatorname{senh} \frac{b}{2}$, por el teorema del residuo de Cauchy tenemos

$$\gamma \sqrt{1 + \frac{b^2\gamma^2}{4}} \left(\int_{[0, 2\pi/b]} - \int_{\Gamma_{c,b}} \right) \frac{W(p-\zeta)D_b(\zeta)d\zeta}{\frac{4}{b^2} \cos^2 \frac{b\zeta}{2} + \gamma^2} = \pi W(p - z_{\gamma,b})D_b(z_{\gamma,b}),$$

y (7.2.3) se convierte en

$$\begin{aligned} \gamma \sqrt{1 + \frac{b^2\gamma^2}{4}} \left(D_b(p) \sqrt{2\pi/b\epsilon} - \int_{\Gamma_{c,b}} \frac{W(p-\zeta)D_b(\zeta)d\zeta}{\frac{4}{b^2} \cos^2 \frac{b\zeta}{2} + \gamma^2} \right) \\ = \pi W(p - z_{\gamma,b})D_b(z_{\gamma,b}). \quad (7.2.5) \end{aligned}$$

Definimos el operador integral $T_{\gamma,b} : \Omega_b \longrightarrow \Omega_b$ por la fórmula

$$[T_{\gamma,b}\varphi(\zeta)](z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Gamma_{c,b}} \frac{W(z-\zeta)\varphi(\zeta)d\zeta}{\frac{4}{b^2} \cos^2 \frac{b\zeta}{2} + \gamma^2}.$$

Tenemos que $[T_{\gamma,b}\varphi(\zeta)](z) \in \Omega_b$ y es analítica en γ . Además, $T_{\gamma,b}$ es acotado. Por lo

tanto $\varepsilon \|T_{\gamma,b}\| < 1$ para ε suficientemente pequeño. Ahora, de (7.2.5) se sigue que

$$\sqrt{2\pi} \gamma \sqrt{1 + \frac{b^2 \gamma^2}{4}} [(1 - \varepsilon T_{\gamma,b}) D_b(\zeta)](z) = \pi \varepsilon W(z - z_{\gamma,b}) D_b(z_{\gamma,b}).$$

Suponiendo $D_b(z_{\gamma,b}) = 1$, tenemos

$$D_b(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\varepsilon}{\gamma \sqrt{1 + \frac{b^2 \gamma^2}{4}}} \left[(1 - \varepsilon T_{\gamma,b, \zeta \rightarrow z})^{-1} W(\zeta - z_{\gamma,b}) \right](z), \quad (7.2.6)$$

la cual se lee

$$D_b(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\varepsilon}{\gamma \sqrt{1 + \frac{b^2 \gamma^2}{4}}} \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^l \left[T_{\gamma,b, \zeta \rightarrow z}^l W(\zeta - z_{\gamma,b}) \right](z).$$

Por lo tanto, $D_b(z)$ es analítica en $z \in B_{\pi/b}$.

Evaluando (7.2.6) en $z = z_{\gamma,b}$, obtenemos la ecuación secular para γ :

$$\gamma \sqrt{1 + \frac{b^2 \gamma^2}{4}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \varepsilon \left[(1 - \varepsilon T_{\gamma, \zeta \rightarrow z})^{-1} W(\zeta - z_{\gamma,b}) \right](z_{\gamma,b}). \quad (7.2.7)$$

Consideremos la función

$$\begin{aligned} G_b(\gamma, \varepsilon) &\equiv \gamma \sqrt{1 + \frac{b^2 \gamma^2}{4}} - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \varepsilon \left[(1 - \varepsilon T_{\gamma, \zeta \rightarrow z})^{-1} W(\zeta - z_{\gamma,b}) \right](z_{\gamma,b}) \\ &= \gamma \sqrt{1 + \frac{b^2 \gamma^2}{4}} - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \varepsilon \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^l \left[T_{\gamma, \zeta \rightarrow z}^l W(\zeta - z_{\gamma,b}) \right](z_{\gamma,b}). \end{aligned}$$

Ya que $[T_{\gamma, \zeta \rightarrow z}^l W(\zeta - i\gamma)](z_{\gamma,b})$ es analítica en γ también, por el teorema de Hartogs, tenemos que $G_b(\gamma, \varepsilon)$ es analítica en \mathbf{C}^2 . Así, por las igualdades $G_b(0, 0) = 0$,

$[\partial_\gamma G_b](0, 0) = 1$ y el teorema de la función implícita, la solución $\gamma_b(\varepsilon)$ para γ de la ecuación secular (7.2.7), la cual tiende a cero cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, existe y es única. Está dada por (1.2.6), ya que expandiendo $G_b(\gamma, \varepsilon)$ en serie de Taylor, tenemos, hasta términos del segundo orden,

$$G_b(\gamma, \varepsilon) = \gamma - \varepsilon \sqrt{\frac{\pi}{2}} W(0) - \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{\Gamma_{c,b}} \frac{W(\zeta) W(-\zeta)}{\frac{4}{b^2} \cos^2 \frac{b\zeta}{2}} d\zeta - \dots$$

Además, por sustitución de (1.2.6) en (7.2.6) obtenemos $D_b(z)$.

En la misma forma que antes, podemos verificar que $D_b(z_{\gamma_b(\varepsilon), b}) = 1$. Así, el Teorema 3 está probado.

Capítulo 8

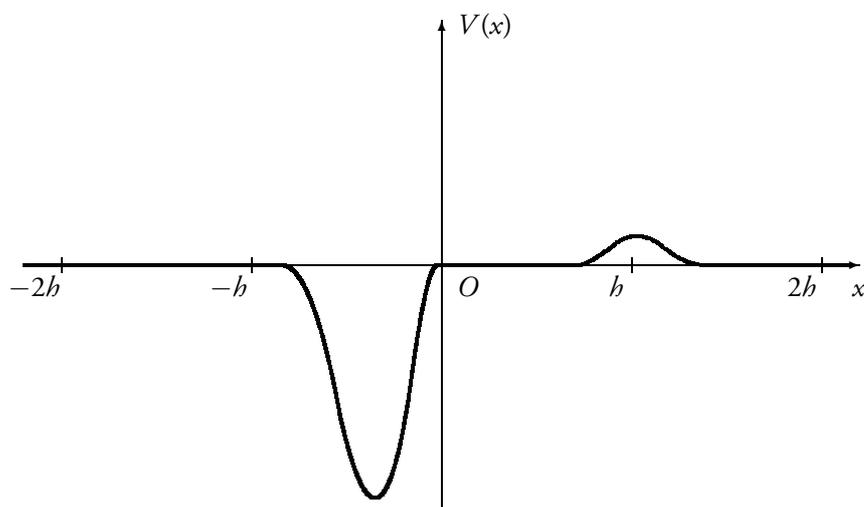
COMPARACIÓN ENTRE LOS CASOS DISCRETO Y CONTINUO

En este capítulo compararemos los modelos continuo y discreto cuando $h \rightarrow 0$. Note que en general, para a un valor fijo de h , las dos ecuaciones pueden comportarse muy diferente. Por ejemplo, si el potencial es como se presenta en la Fig. 8.1, el modelo discreto posee un valor propio positivo $4/h^2 + \gamma_b^2$, mientras que el continuo tiene un valor propio negativo. Sin embargo, probamos que para $h \rightarrow 0$ y ε suficientemente pequeño y fijo, el valor propio negativo del problema discreto pasa al del continuo. Suponemos de ahora en adelante que $\int_{\mathbf{R}} V(x)dx \leq 0$. Necesitaremos los siguientes hechos.

1. Por la fórmula de sumación de Poisson (véase por ejemplo, [13] Lecc. 37) aplicada a (2.3.2), tenemos

$$W(\zeta) = \sum_j \tilde{V}(\zeta + 2\pi j/h). \quad (8.0.1)$$

De aquí que, $W(\zeta) = \tilde{V}(\zeta) + O(h^\infty)$ para $|\zeta| \leq \pi/h$.

Figura 8.1: *Un potencial especial.*

2. La solución (6.0.18) de la ecuación (2.1.4) tiene la forma

$$z_{\beta,h} = i\beta(1 + O(h^2)). \quad (8.0.2)$$

3. El operador $T_{\beta,h}$ definido por (7.1.4) está acotado uniformemente en h , a saber,

$$\| [T_{\beta,h}\varphi] \| \leq C \|\varphi\|$$

con C no dependiente de h . En efecto, por (8.0.1),

$$\| [T_{\beta,h}\varphi](z) \| \leq \text{Const} \int_{\Gamma_{s,h}} |W(z - \zeta)| |d\zeta| \|\varphi\|$$

$$\begin{aligned} &\leq \text{Const} \left\{ \int_{\Gamma_{s,b}} \left(|\tilde{V}(z - \zeta)| + |\tilde{V}(z - \zeta + 2\pi/b)| \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + |\tilde{V}(z - \zeta - 2\pi/b)| \right) |d\zeta| \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Gamma_{s,b}} \sum_{j \geq 2} |\tilde{V}(z - \zeta + 2\pi j/b)| |d\zeta| \right\} \|\varphi\|. \end{aligned}$$

La segunda integral en corchetes es $O(b^\infty)$, ya que $|z - \zeta| \leq 2\pi/b$ y

$$|\tilde{V}(z + 2\pi j/b)| \leq \frac{C_N}{\left(1 + \frac{2\pi|j-1|}{b}\right)} \leq \frac{C_N b^N}{(2\pi|j-1|)^N}, \quad (8.0.3)$$

y la primera, obviamente, es acotada.

Por (8.0.1) y (8.0.2), de (7.1.13) tenemos

$$\beta = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \varepsilon \left\{ \left[(1 + \varepsilon T_{\beta,b,\zeta \rightarrow z})^{-1} \tilde{V}(\zeta - i|z_{\beta,b}|) \right] (i|z_{\beta,b}|) + O(b^2) \right\}.$$

De aquí que,

$$\begin{aligned} \mu - \beta &= -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \varepsilon \left\{ \left[(1 + \varepsilon T_\mu)^{-1} \tilde{V}(\zeta - i\mu) \right] (i\mu) \right. \\ &\quad \left. - \left[(1 + \varepsilon T_{\beta,b})^{-1} \tilde{V}(\zeta - i|z_{\beta,b}|) \right] (i|z_{\beta,b}|) + O(b^2) \right\} \\ &= -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \varepsilon \left\{ \left[(-\varepsilon T_\mu)(1 + \varepsilon T_\mu)^{-1} \tilde{V}(\zeta - i\mu) \right] (i\mu) \right. \\ &\quad \left. - \left[(-\varepsilon T_{\beta,b})(1 + \varepsilon T_{\beta,b})^{-1} \tilde{V}(\zeta - i|z_{\beta,b}|) \right] (i|z_{\beta,b}|) + O(b^2) \right\}. \end{aligned} \quad (8.0.4)$$

Tenemos que por (8.0.2)

$$\tilde{V}(\zeta - i|z_{\beta,b}|) = \tilde{V}(\zeta - i\mu) + O(\mu - \beta) + O(b^2).$$

Ahora de (8.0.4) tenemos que

$$\begin{aligned} \mu - \beta = & -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \varepsilon \left\{ \left[(-\varepsilon T_\mu)(1 + \varepsilon T_\mu)^{-1} \tilde{V}(\zeta - i\mu) \right] (i\mu) \right. \\ & \left. - \left[(-\varepsilon T_{\beta,h})(1 + \varepsilon T_{\beta,h})^{-1} \tilde{V}(\zeta - i\mu) \right] (i|z_{\beta,h}|) + \varepsilon O(\mu - \beta) + O(h^2) \right\}. \end{aligned} \quad (8.0.5)$$

Ahora bien

$$\begin{aligned} & \left[\left\{ (1 + \varepsilon T_{\beta,h,\zeta \rightarrow z})^{-1} - (1 + \varepsilon T_{\mu,\zeta \rightarrow z})^{-1} \right\} \tilde{V}(\zeta - i\mu) \right] (z) \\ & = \left[\left\{ (1 + \varepsilon T_{\beta,h})^{-1} \varepsilon (T_\mu - T_{\beta,h}) \right\} U_\mu(\zeta) \right] (z) = \varepsilon (O(\mu - \beta) + O(h^2)), \end{aligned} \quad (8.0.6)$$

donde

$$U_\mu(z) = \left[(1 + \varepsilon T_{\mu,\zeta \rightarrow z})^{-1} \tilde{V}(\zeta - i\mu) \right] (z),$$

ya que $[(T_\mu - T_\beta)\varphi(\zeta)](z) = O(\mu - \beta)$ y $[(T_\beta - T_{\beta,h})\varphi(\zeta)](z) = O(h^2)$ para $\varphi(p+i0) \in S(\mathbf{R}_p)$, y $U_\mu(p+i0)$ ciertamente pertenece a $S(\mathbf{R}_p)$ como vimos en la Sección 5.2. Luego, de (8.0.6) tenemos

$$\left[(1 + \varepsilon T_{\beta,h,\zeta \rightarrow z})^{-1} \tilde{V}(\zeta - i\mu) \right] (z) = U_\mu(z) + \varepsilon (O(\beta - \mu) + O(h^2)).$$

Por tanto, (8.0.5) se lee

$$\mu - \beta = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \varepsilon \left\{ \varepsilon \left[T_\mu U_\mu(\zeta) \right] (i\mu) - \varepsilon \left[T_{\beta,h} U_\mu(\zeta) \right] (i|z_{\beta,h}|) + \varepsilon O(\mu - \beta) + O(h^2) \right\}.$$

De aquí que

$$\mu - \beta = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \varepsilon \left\{ \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Gamma} \left(\frac{\tilde{V}(i\mu - \zeta)}{\zeta^2 + \mu^2} - \frac{\tilde{V}(i\beta - \zeta)}{\zeta^2 + \beta^2} \right) U_{\mu}(\zeta) d\zeta + \varepsilon O(\mu - \beta) + O(b^2) \right\} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \varepsilon (\varepsilon O(\mu - \beta) + O(b^2))$$

y finalmente tenemos que $\mu - \beta = \varepsilon O(b^2)$ para ε suficientemente pequeño.

En la misma forma, se obtiene que

$$A(p) - A_b(p) = \frac{\varepsilon}{\mu(\varepsilon)} O(b^2), \quad |p| \leq \pi/h.$$

Ésto implica la aproximación de las funciones propias correspondientes cuando $h \rightarrow 0$.

Apéndice A

LA DESIGUALDAD DE PEETRE

Recordaremos la desigualdad de Peetre ([43], [49]), usual en casos de estimaciones de integrales como las que ocupamos. En adelante en esta sección las letras griegas ξ , η y λ no se entenderán en el mismo sentido que en las secciones precedentes. λ denotará la función $\lambda(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{1/2}$ definida sobre \mathbf{R}^n , y más generalmente escribiremos $\lambda^s(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{s/2}$ para $s \in \mathbf{R}$ y $\xi \in \mathbf{R}^n$.

Lema 16 (Desigualdad de Peetre). *Para todo $s \in \mathbf{R}$ y todo $\xi, \eta \in \mathbf{R}^n$, tenemos*

$$\lambda^s(\xi) \leq 2^{|s|} \lambda^{|s|}(\xi - \eta) \lambda^s(\eta).$$

Demostración. La desigualdad triangular para la norma euclidiana en \mathbf{R}^n nos da

$$(1 + |\xi|) \leq (1 + |\xi - \eta| + |\eta|) \leq (1 + |\xi - \eta|)(1 + |\eta|)$$

así que

$$\lambda^2 \leq (1 + |\xi|)^2 \leq (1 + |\xi - \eta|)^2 (1 + |\eta|)^2.$$

Por otro lado, $(1 + |\eta|)^2 \leq (1 + |\eta|)^2 + (1 - |\eta|)^2 = 2\lambda^2(\eta)$, y estimando $(1 + |\xi - \eta|)^2$ en la misma forma, tenemos así

$$\lambda^2(\xi) \leq 2^2 \lambda^2(\xi - \eta) \lambda^2(\eta).$$

Obtenemos la conclusión del Lema 16 para $s \geq 0$ simplemente elevando esta desigualdad a la potencia $s/2$. Para $s \leq 0$, justamente tenemos que intercambiar ξ y η para ver que

$$\lambda^{-s}(\eta) \leq 2^{-s} \lambda^{-s}(\eta - \xi) \lambda^{-s}(\xi)$$

que puede reescribirse como

$$\lambda^s(\xi) \leq 2^{-s} \lambda^{-s}(\xi - \eta) \lambda^s(\eta).$$

◇

Apéndice B

ANÁLISIS ESPECTRAL PARA OPERADORES AUTOADJUNTOS

B.1. EL TEOREMA ESPECTRAL PARA OPERADORES AUTOADJUNTOS

Una familia de ortoproyectores $\{\mathbf{E}_\lambda\}_{\lambda \in \mathbf{R}}$, en un espacio de Hilbert \mathcal{H} (para cada $\lambda \in \mathbf{R}$, el operador $\mathbf{E}_\lambda : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ es lineal, continuo y autoadjunto con $\mathbf{E}_\lambda^2 = \mathbf{E}_\lambda$) se denomina una *familia espectral* o *resolución ortogonal de identidad* (sobre \mathbf{R}) si satisface

1. $\mathbf{E}_\lambda \mathbf{E}_{\lambda'} = \mathbf{E}_{\lambda'} \mathbf{E}_\lambda = \mathbf{E}_\lambda$, ($\lambda < \lambda'$).
2. $\mathbf{E}_{-\infty} = 0$, $\mathbf{E}_{+\infty} = 1$, donde 1 es el operador identidad, en la topología fuerte de operadores, es decir, $\mathbf{E}_{\pm\infty}$ está definido por (el *item* anterior garantiza la existencia del límite)

$$\mathbf{E}_{\pm\infty} u = \lim_{\lambda \rightarrow \pm\infty} \mathbf{E}_\lambda u$$

para todo u en \mathcal{H} .

3. $\mathbf{E}_\lambda u$, con $u \in \mathcal{H}$, es una función continua por la derecha con respecto a λ sobre todo el eje, es decir, $\mathbf{E}_{\lambda+} = \mathbf{E}_\lambda$ en la topología fuerte de operadores, donde $\mathbf{E}_{\lambda+}$ está definido por

$$\mathbf{E}_{\lambda+} u = \lim_{\lambda' \rightarrow \lambda, \lambda' > \lambda} \mathbf{E}_{\lambda'} u.$$

Además, bajo las condiciones mencionadas, para cualquier intervalo $[\lambda_1, \lambda_2]$ el operador $\mathbf{E}_{[\lambda_1, \lambda_2]} \equiv \mathbf{E}_{\lambda_2} - \mathbf{E}_{\lambda_1}$ es un ortoprojector (véase [27], Cap. 2, Secc. 4.8). Observemos que de hecho se cumple el siguiente

Teorema 17 ([18], Secc. 10.2, Teor. 2). *Para cada $u \in \mathcal{H}$ la función*

$$\lambda \mapsto \rho_u(\lambda) \equiv \langle \mathbf{E}_\lambda u, u \rangle$$

es monótona no decreciente y continua por la derecha sobre \mathbf{R} , con $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \rho_u(\lambda) = 0$ y $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \rho_u(\lambda) = \|u\|^2$.

Como $\mathbf{E}_\lambda^2 = \mathbf{E}_\lambda$ y $\mathbf{E}_\lambda^* \mathbf{E}_\lambda = \mathbf{E}_\lambda$,

$$\rho_u(\lambda) = \|\mathbf{E}_\lambda u\|^2$$

para todo $u \in \mathcal{H}$, $\lambda \in \mathbf{R}$ (véase [50], Secc. 5.14). Entonces, por la identidad de polarización, para todo $u, v \in \mathcal{H}$ y $\lambda \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned} 4 \langle \mathbf{E}_\lambda u, v \rangle &= \left\| \mathbf{E}_\lambda (u + v) \right\|^2 - \left\| \mathbf{E}_\lambda (v - u) \right\|^2 \\ &\quad - \alpha_1 \left\| \mathbf{E}_\lambda (\alpha_1 u + v) \right\|^2 + \alpha_1 \left\| \mathbf{E}_\lambda (v - \alpha_1 u) \right\|^2, \end{aligned} \quad (\text{B.1.1})$$

donde $\alpha_1 = 0$ o $\alpha_1 = i$ si \mathcal{H} es un espacio de Hilbert real o complejo, respectivamente. Ya que la función $\lambda \mapsto \|\mathbf{E}_\lambda w\|^2$ es no decreciente para cada $w \in \mathcal{H}$, se sigue de (B.1.1) que la función

$$\lambda \longmapsto \rho_{u,v}(\lambda) \equiv \langle \mathbf{E}_\lambda u, v \rangle$$

es de *variación acotada* para todo u y v en \mathcal{H} y se puede entonces ver la existencia de \mathbf{E}_{λ^+} y \mathbf{E}_{λ^-} .

Definición 20 ([18], Secc. 10.3, Def. 1). Se dice que λ es una *discontinuidad de salto* de \mathbf{E}_λ si $\mathbf{E}_\lambda - \mathbf{E}_{\lambda^-} \neq 0$.

Podemos entonces definir, para cada familia espectral $\{\mathbf{E}_\lambda\}_{\lambda \in \mathbf{R}}$, un operador lineal, denotado con la integral

$$\Lambda_\rho \equiv \int_{\mathbf{R}} \lambda d\mathbf{E}_\lambda, \quad (\text{B.1.2})$$

cuyo dominio de definición es el subespacio

$$\mathcal{D}(\Lambda_\rho) = \left\{ u \in \mathcal{H} : \int_{\mathbf{R}} \lambda^2 d\rho_u(\lambda) < \infty \right\}$$

(suponiendo además que es denso) y tal que para todo $u \in \mathcal{D}(\Lambda_\rho)$ y $v \in \mathcal{H}$

$$\langle \Lambda_\rho u, v \rangle \equiv \int_{\mathbf{R}} \lambda d\rho_{u,v}(\lambda).$$

Las integrales $\int_{\mathbf{R}} \cdots d\rho_u(\lambda)$, $\int_{\mathbf{R}} \cdots d\rho_{u,v}(\lambda)$ se entienden en el sentido de *Stieltjes*. Decimos que el lado derecho en (B.1.2) es la *descomposición espectral* del operador Λ_ρ .

Esta teoría trabaja de forma más general para cualquier función boreliana de λ . En efecto, cada resolución ortogonal de identidad $\{\mathbf{E}_\lambda\}_{\lambda \in \mathbf{R}}$ define una familia de medidas de Borel $\{m_{u,v}\}_{u,v \in \mathcal{H}}$ de valores complejos sobre los conjuntos de Borel de \mathbf{R} (véase, por ejemplo, [41], Cap. 1), las cuales son generadas por la función $\rho_{u,v}(\lambda)$, $u, v \in \mathcal{H}$ mediante

$$m_{u,v}(M) \equiv \int_M d\rho_{u,v}(\lambda),$$

donde M es un conjunto de Borel de \mathbf{R} . En efecto, cada $m_{u,v}$ satisface la condición de aditividad numerable: si $\{M_k\}$, $k = 1, 2, \dots$ es una sucesión de conjuntos de

Borel disjuntos dos a dos, se tiene que $m_{u,v}(\bigcup_k M_k) = \sum_k m_{u,v}(M_k)$. Las $m_{u,v}$ están normalizadas por $m_{u,v}(\mathbf{R}) = \langle u, v \rangle$.

Cada operador \mathbf{m}_M en \mathcal{H} asociado a cada conjunto de Borel M de modo que para todo $u, v \in \mathcal{H}$

$$\langle \mathbf{m}_M u, v \rangle = m_{u,v}(M),$$

es un ortoprojector en \mathcal{H} . En particular

$$\mathbf{m}_{\mathbf{R}} = 1,$$

donde 1 es el operador identidad. Tenemos entonces otra medida \mathbf{m} definida sobre los conjuntos de Borel de \mathbf{R} cuyos valores son *operadores* (véase, por ejemplo, [33], Secc. 6.2) dada por $M \mapsto \mathbf{m}_M$. También se usa la denotación

$$\mathbf{m}_M \equiv \int_M d\mathbf{E}_\lambda.$$

Hablando de manera más general, hacemos la siguiente

Definición 21 ([40], Secc. 1.5). Cualquier medida \mathfrak{E} cuyos valores $\mathfrak{E}(M)$ son ortoprojectores en \mathcal{H} y $\mathfrak{E}(\mathbf{R}) = 1$, denotando aquí con 1 el operador identidad, se denomina *medida espectral* en \mathcal{H} (definida sobre los conjuntos de Borel de \mathbf{R}).

Nota 19. Los ortoprojectores de una familia espectral $\{\mathbf{E}_\lambda\}_{\lambda \in \mathbf{R}}$ pueden caracterizarse por una medida espectral, digamos $\mathfrak{E}_{\{\mathbf{E}_\lambda\}_{\lambda \in \mathbf{R}}}$, mediante la definición $\mathbf{E}_\lambda \equiv \mathfrak{E}_{\{\mathbf{E}_\lambda\}_{\lambda \in \mathbf{R}}}(-\infty, \lambda)$.

Por otra parte podemos definir, con respecto a una medida espectral \mathfrak{E} (que tiene asociada la medida $m_{u,v}$ dada por $m_{u,v}(M) \equiv \langle [\mathfrak{E}(M)]u, v \rangle$), el operador lineal

$$\Lambda_{\mathfrak{E}} \equiv \int_{\mathbf{R}} \lambda d\mathfrak{E} \tag{B.1.3}$$

cuyo dominio de definición es el subespacio

$$\mathcal{D}(\Lambda_{\mathfrak{E}}) = \left\{ u \in \mathcal{H} : \int_{\mathbf{R}} \lambda^2 d\mathbf{m}_{u,u} < \infty \right\}$$

(suponiendo además que es denso) y tal que para todo $u \in \mathcal{D}(\Lambda_{\mathfrak{E}})$ y $v \in \mathcal{H}$

$$\langle \Lambda_{\mathfrak{E}} u, v \rangle \equiv \int_{\mathbf{R}} \lambda d\mathbf{m}_{u,v}.$$

Además se tiene

$$\|\Lambda_{\mathfrak{E}} u\|^2 = \int_{\mathbf{R}} \lambda^2 d\mathbf{m}_{u,u}$$

para todo $u \in \mathcal{D}(\Lambda_{\mathfrak{E}})$.

De esta forma es posible definir funciones del operador $\Lambda_{\mathfrak{E}}$ como sigue. Suponga que la función escalar $\varphi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ es medible respecto a todas las $\mathbf{m}_{u,v}$. Se dice entonces que es medible con respecto a \mathfrak{E} . Podemos entonces definir el operador lineal no acotado

$$\varphi(\Lambda_{\mathfrak{E}}) \equiv \int_{\mathbf{R}} \varphi(\lambda) d\mathfrak{E}$$

como aquel cuyo dominio de definición es el subespacio

$$\mathcal{D}(\varphi(\Lambda_{\mathfrak{E}})) = \left\{ u \in \mathcal{H} : \int_{\mathbf{R}} |\varphi(\lambda)|^2 d\mathbf{m}_{u,u} < \infty \right\}$$

(suponiéndolo denso) y

$$\langle \varphi(\Lambda_{\mathfrak{E}}) u, v \rangle \equiv \int_{\mathbf{R}} \varphi(\lambda) d\mathbf{m}_{u,v}$$

para todo $u \in \mathcal{D}(\varphi(\Lambda_{\mathfrak{E}}))$ y $v \in \mathcal{H}$. Además

$$\|\varphi(\Lambda_{\mathfrak{E}}) u\|^2 = \int_{\mathbf{R}} |\varphi(\lambda)|^2 d\mathbf{m}_{u,u}$$

para todo $u \in \mathcal{D}(\varphi(\Lambda_{\mathfrak{E}}))$. Adicionalmente puede verse también que $\mathcal{D}(\varphi(\Lambda_{\mathfrak{E}})^*) = \mathcal{D}(\varphi(\Lambda_{\mathfrak{E}}))$ y

$$\varphi(\Lambda_{\mathfrak{E}})^* = \int_{\mathbf{R}} \overline{\varphi(\lambda)} d\mathfrak{E},$$

i.e.,

$$\langle \varphi(\Lambda_{\mathfrak{E}})^* u, v \rangle = \int_{\mathbf{R}} \overline{\varphi(\lambda)} d\mathfrak{m}_{u,v}$$

se satisface para todo $u \in \mathcal{D}(\varphi(\Lambda_{\mathfrak{E}})^*)$ y $v \in \mathcal{H}$.

Consecuentemente es necesario y suficiente para la autoadjunción del operador $\varphi(\Lambda_{\mathfrak{E}})$ que la función φ esté definida sobre \mathbf{R} casi siempre (con respecto a la medida \mathfrak{E}_T). Observamos que para $\varphi = 1$ tenemos que $\varphi(\Lambda_{\mathfrak{E}})$ es el operador identidad y para el caso en que $\varphi(\lambda) = \lambda$ obtenemos el operador autoadjunto $\varphi(\Lambda_{\mathfrak{E}}) = \Lambda_{\mathfrak{E}}$. El siguiente *teorema de descomposición espectral para operadores autoadjuntos*, que desempeña un papel importante en el análisis espectral de los mismos, explicita que la situación precedente es la general.

Teorema 18 ([25] Teor. 10.6-3, [40] Teor. 1.2). *Para cada operador autoadjunto T existe una familia espectral $\{\mathbf{E}_{\lambda,T}\}_{\lambda \in \mathbf{R}}$ (medida espectral \mathfrak{E}_T) única tal que*

$$T|_{\mathcal{D}(\Lambda_{\rho,T})} = \Lambda_{\rho,T} \quad (T|_{\mathcal{D}(\Lambda_{\mathfrak{E}})} = \Lambda_{\mathfrak{E}_T}),$$

donde $\Lambda_{\rho,T}$ es el operador dado por (B.1.2) correspondiente a dicha familia espectral ($\Lambda_{\mathfrak{E}_T}$ está dado según (B.1.3)).

B.2. ESPECTRO DE UN OPERADOR

Recordemos ahora algunos conceptos de los espectros de los operadores.

Definición 22. Sea T un operador tal que $\mathcal{D}(T)$, $T(\mathcal{D}(T)) \subset \mathcal{B}$, donde \mathcal{B} es un espacio de Banach, y $\lambda \in \mathbf{C}$.

1. Si existe una solución $u \in \mathcal{D}(T) \setminus \{0\}$ de la ecuación $Tu = \lambda u$, entonces λ se llama un *valor propio* de T y u se llama un *vector propio* que corresponde a λ . El subespacio $\ker(T - \lambda)$ de vectores propios que corresponden a λ se llama *espacio propio* correspondiente a λ ([32], Def. 6.5.1). Se llama *multiplicidad* del valor propio λ ([16], Secc. 5.1) a la dimensión $\dim \ker(T - \lambda)$ de dicho espacio. Se denomina *espectro puntual* $\sigma_{\mathbb{P}}(T)$ de un operador T al conjunto de todos los valores propios de T .
2. Si $Tu = \lambda u$ no tiene soluciones no triviales en $\mathcal{D}(T)$, pero $\overline{(T - \lambda)\mathcal{D}(T)} \neq \mathcal{B}$, se dice que λ pertenece al *espectro residual* de T , $\lambda \in \sigma_{\mathbb{R}}(T)$. En este caso la variedad lineal $((T - \lambda)\mathcal{D}(T))^{\perp}$ tiene dimensión positiva que se llama de *deficiencia* de λ .
3. Si la ecuación $Tu = \lambda u$ tiene sólo la solución trivial en $\mathcal{D}(T)$ y $\overline{(T - \lambda)\mathcal{D}(T)} = \mathcal{B}$, pero $(T - \lambda)^{-1}$ no es acotado, entonces se dice que λ pertenece al *espectro continuo* de T , $\lambda \in \sigma_{\mathbb{C}}(T)$.
4. Se llama *espectro* $\sigma(T)$ del operador T al conjunto unión de los espectros puntual, residual y continuo definidos antes, y se denota

$$\sigma(T) \equiv \sigma_{\mathbb{P}}(T) \cup \sigma_{\mathbb{R}}(T) \cup \sigma_{\mathbb{C}}(T).$$

A su complemento $\mathbb{C} \setminus \sigma(T) \equiv \rho(T)$ se le denomina *conjunto resolvente* de T .

Recordamos algunos resultados importantes al respecto.

Teorema 19. *Si λ un punto del espectro residual de T , entonces $\bar{\lambda}$ es un valor propio de T^* de multiplicidad igual a la deficiencia de λ .*

Teorema 20. *Sea T un operador simétrico, entonces $\langle Tu, u \rangle$ es real para $u \in \mathcal{D}(T)$ y todos los valores propios son reales.*

Teorema 21. *Si T es simétrico, entonces los espectros puntual y continuo son reales.*

Teorema 22. *Sea T un operador autoadjunto, entonces su espectro es real y el espectro residual es vacío (véase, por ejemplo, [30], Teor. 7.6.18).*

Corolario. *Si T es autoadjunto, entonces*

1. $\lambda \in \rho(T)$ si y sólo si $(T - \lambda)\mathcal{D}(T) = \mathcal{H}$.
2. λ es un valor propio si y sólo si $\overline{(T - \lambda)\mathcal{D}(T)} \neq \mathcal{H}$.
3. $\lambda \in \sigma_{\mathbf{C}}(T)$ si y sólo si $(T - \lambda)\mathcal{D}(T) \neq \mathcal{H}$ pero $\overline{(T - \lambda)\mathcal{D}(T)} = \mathcal{H}$.

Teorema 23 ([18], Secc. 10.3, Teor. 1). *Sea T un operador autoadjunto. $\sigma_{\mathbf{P}}(T)$ es el conjunto de todos los puntos de discontinuidad de salto de $\mathbf{E}_{\lambda, T}$.*

El operador $P_{\lambda_0, T} \equiv \mathbf{E}_{\lambda_0^-, T} - \mathbf{E}_{\lambda_0, T}$ es un ortoprojector sobre el subespacio propio correspondiente al valor propio λ_0 de T (véase [27], Cap. 2, Secc. 4.8).

Definición 23 ([16], Def. 5.1). *Decimos que $\{u_\nu\} \subset \mathcal{D}(T)$, $\nu \rightarrow 0^+$ es una sucesión de Weyl para el operador T y $\lambda \in \mathbf{C}$ si*

1. $\|u_\nu\| = 1$ para toda ν .
2. $\|(T - \lambda)u_\nu\| \rightarrow 0$ cuando $\nu \rightarrow 0^+$.
3. $u_\nu \xrightarrow{w} 0$ cuando $\nu \rightarrow 0^+$.

Definición 24 (véanse [25] Secc. 10.4, [30] Def. 7.6.14, [32] Cap. 6 Secc. 5). *Sea T un operador lineal sobre un espacio de Banach complejo \mathcal{B} y consideremos el conjunto de los números $\lambda \in \mathbf{C}$ para cada uno de los cuales existe en $\mathcal{D}(T)$ una sucesión $u_{\lambda, \nu}$, $\nu \rightarrow 0^+$ que cumple las dos primeras de condiciones de una sucesión de Weyl para T y λ . Observe que, por una parte, tal conjunto es subconjunto de $\sigma(T)$, y por otra, incluye a $\sigma_{\mathbf{P}}(T)$. A dicho conjunto lo llamamos *espectro puntual aproximado* $\sigma_{\text{AP}}(T)$ de T y a sus elementos λ *valores propios aproximados* de T . Los vectores $u_{\lambda, \nu}$ se denominan *vectores propios aproximados* correspondientes a λ .*

Nota 20. Se cumple que $\sigma_C(T) \subset \sigma_{AP}(T)$ y si $\sigma_R(T) = \emptyset$, entonces $\sigma_{AP}(T) = \sigma(T)$ ([32] Cap. 6 Secc. 5), por lo que esta última igualdad es válida si T es autoadjunto ([7] Lema 4.1.2, [25] Secc. 10.4).

Definición 25. Un valor propio λ de un operador T se dice *aislado* si existe $\delta > 0$ tal que $\sigma(T) \cap (\lambda - \delta, \lambda + \delta) = \{\lambda\}$.

Definición 26. Se denomina *espectro discreto* $\sigma_{\text{disc}}(T)$ de un operador T al conjunto de los valores propios aislados de T de multiplicidad finita.

Definición 27. Sea el operador autoadjunto T definido en un espacio de Hilbert \mathcal{H} . La *función de distribución del espectro de T* la definimos como

$$N(I; T) \equiv \dim [\mathfrak{E}_T(I)]\mathcal{H}, \quad (\text{B.2.1})$$

donde $I \subset \mathbf{R}$ es un intervalo arbitrario $I \subset \mathbf{R}$ y \mathfrak{E}_T es la medida en la descomposición espectral de T según el Teorema 18.

Esta función sirve como una ayuda importante para la localización del espectro de un operador autoadjunto T . En particular puede ser igual a $+\infty$. El caso cuando $N(I; T) < \infty$ es el más interesante. En este caso el espectro de T sobre I consiste de un número finito de valores propios de multiplicidad finita y entonces (B.2.1) *es igual a la suma de sus multiplicidades* (véase [40], Secc. 1.11). El espectro discreto de T se puede caracterizar entonces de esta manera (ver [4] Secc. 3.4 1., [7] Lema 4.1.4, [17] Secc. 6.3, [36] Secc. VII.3):

$$\sigma_{\text{disc}}(T) = \left\{ \lambda \in \sigma(T) \text{ tales que } \exists \delta > 0 : N((\lambda - \delta, \lambda + \delta); T) < \infty \right\}.$$

Definición 28. Se denomina *espectro esencial* $\sigma_{\text{ess}}(T)$ de un operador T al conjunto $\sigma_{\text{ess}}(T) \equiv \sigma(T) \setminus \sigma_{\text{disc}}(T)$.

Hemos así añadido al espectro continuo:

1. Cualesquiera valores propios incrustados en el espectro continuo o en sus orillas.

2. Cualesquiera puntos límite del espectro.
3. Valores propios, si los hay, de multiplicidad infinita.

Examinando los varios casos, está visto que los puntos del espectro esencial pueden caracterizarse por vectores propios aproximados (posiblemente incluyendo verdaderos vectores propios) como sigue (ver [16] Secc. 5.1, [17] Teor. 6.3.3, [44] Cap. 1 Teor. 7.9).

Teorema 24. *Sea T un operador autoadjunto. Entonces*

$$\sigma_{\text{ess}}(T) = \left\{ \lambda : \text{existe una sucesión de Weyl } \{u_j\} \subset \mathcal{D}(T) \text{ para } T \text{ y } \lambda \right\}. \quad (\text{B.2.2})$$

Para obtener otras caracterizaciones de dicho espectro esencial podemos sustituir la condición de convergencia débil a 0 (*item 3* en la Definición 23) que se pide a los vectores unitarios de la sucesión en (B.2.2) por una de las dos condiciones siguientes:

1. Que sean linealmente independientes ([38], Secc. 11.4) o, si se prefiere, mutuamente ortogonales (criterio de Weyl, véase [36], Teor. VII.12).
2. Que su sucesión no contenga ninguna subsucesión convergente (véanse [27], Cap. 2, Secc. 4.8 y [44], Cap. 1, Teor. 4.4).

B.3. EL PRINCIPIO VARIACIONAL PARA OPERADORES AUTOADJUNTOS

Establecemos el número

$$N(\lambda; T) \equiv N((-\infty, \lambda); T), \quad \lambda \in \mathbf{R}. \quad (\text{B.3.1})$$

Ya que el Teorema 18 establece la unicidad de la medida en la descomposición espectral de T y como $\mathfrak{E}_{\{\mathbf{E}_{\lambda,T}\}_{\lambda \in \mathbf{R}}}((-\infty, \lambda)) = \mathbf{E}_{\lambda,T}$ por la Nota 19, tenemos que

$$N(\lambda; T) = \dim [\mathfrak{E}_T((-\infty, \lambda))] \mathcal{H} = \dim [\mathbf{E}_{\lambda,T}] \mathcal{H}.$$

Poniendo $N(\lambda^-; T) = \lim_{\mu \rightarrow \lambda, \mu < \lambda} N(\mu; T)$ claramente tenemos

$$N(\lambda^-; T) = \dim [\mathbf{E}_{\lambda^-, T}] \mathcal{H}.$$

Notemos que, en general, $N(\lambda^+; T) = \lim_{\mu \rightarrow \lambda^+} N(\mu; T)$ puede diferir de $N(\lambda^+; T)$ (por ejemplo, si T es el operador de multiplicación en $L_2[0, 1]$ entonces $N(0^+; T) = +\infty$ mientras que $N(0; T) = 0$). Sin embargo, si $N(\lambda^+; T)$ es finito, entonces $N(\lambda^+; T) = N(\lambda; T)$, es decir, $N(\lambda; T)$ es continua por la derecha.

Para el estudio del espectro es necesario que (B.3.1) pueda expresarse explícitamente en términos de la forma cuadrática cerrada que corresponde al operador autoadjunto T y que definiremos a continuación.

Definición 29. Un operador simétrico T se dice *semiacotado* o *acotado por debajo* si

$$\langle Tu, u \rangle \geq c \|u\|^2$$

para algún $c \in \mathbf{R}$ y para todo $u \in \mathcal{D}(T)$ (véanse [7], Secc. 4.3 y [37], Teorema XIII.1). Sea

$$\mathfrak{g}_T \equiv \inf_{u \in \mathcal{D}(T), \|u\|=1} \langle Tu, u \rangle.$$

Entonces, si en particular $\mathfrak{g}_T \geq 0$ ($\mathfrak{g}_T > 0$), decimos que T es un operador *no negativo* (*definido positivo*). Eso lo denotamos $T \geq 0$ ($T > 0$).

Ahora sea $\mathcal{D}(Q)$ un subespacio lineal denso de \mathcal{H} y Q una función de valores complejos definida en $\mathcal{D}(Q) \times \mathcal{D}(Q)$ que es lineal en el primer argumento y hermitiana, *i.e.*, $Q(u, v) = \overline{Q(v, u)}$ para todo $u, v \in \mathcal{D}(Q)$. De allí se sigue que la función es lineal conjugada en el segundo argumento. También se tiene que la *forma cuadrática*

$Q(u) \equiv Q(u, u)$, donde $u \in \mathcal{D}(Q)$, tiene valores reales. $Q(u, v)$ puede reconstruirse de manera única a partir de $Q(u)$. Tenemos una definición análoga a la anterior.

Definición 30. Una forma Q se dice *semiacotada* o *acotada por debajo* si

$$Q(u) \geq c\|u\|^2$$

para algún $c \in \mathbf{R}$ y para todo $u \in \mathcal{D}(Q)$ (véase [40], Secc. 1.8). Sea

$$\mathfrak{g}_Q \equiv \inf_{u \in \mathcal{D}(Q), \|u\|=1} Q(u).$$

Entonces, si en particular $\mathfrak{g}_Q \geq 0$ ($\mathfrak{g}_Q > 0$), decimos que Q es una forma *no negativa* (*definida positiva*). Eso lo denotamos $Q \geq 0$ ($Q > 0$).

Cualquier $Q > 0$ define una norma $\|\cdot\|_Q$ en $\mathcal{D}(Q)$ dada por $\|u\|_Q^2 \equiv Q(u)$, llamada la Q -norma.

Definición 31. La forma $Q > 0$ se dice *cerrada* (en $\mathcal{D}(Q)$) si $\mathcal{D}(Q)$ es completo en la Q -norma.

El *teorema de Friedrichs* establece una correspondencia uno-uno entre formas definidas positivas cerradas y operadores autoadjuntos definidos positivos.

Teorema 25. 1. A todo operador autoadjunto $T > 0$ corresponde una única forma cerrada $Q_T > 0$ tal que $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(Q_T)$ y

$$\langle Tu, v \rangle = Q_T(u, v)$$

para todo $u \in \mathcal{D}(T)$, $v \in \mathcal{D}(Q_T)$.

2. Viceversa, a toda forma cerrada $Q > 0$ corresponde un único operador autoadjunto $T_Q > 0$ tal que $\mathcal{D}(T_Q) \subset \mathcal{D}(Q)$ y

$$\langle T_Q u, v \rangle = Q(u, v) \tag{B.3.2}$$

para todo $u \in \mathcal{D}(T_Q)$, $v \in \mathcal{D}(Q)$.

Si un operador T y una forma Q se corresponden uno al otro en el sentido del teorema anterior, entonces

$$\mathfrak{g}_T = \mathfrak{g}_Q. \quad (\text{B.3.3})$$

Veamos la siguiente definición.

Definición 32. Sea ahora Q una forma semiacotada arbitraria. Decimos que Q es *cerrada* si la forma $Q_c(u) \equiv c\|u\|^2 + Q(u) > 0$ tiene la propiedad correspondiente para algún (y entonces para todo) $c \geq -\mathfrak{g}_Q$.

Si T_c es el operador correspondiente a Q_c , entonces el operador a ser asociado con Q es el operador autoadjunto (que es independiente de la elección de c) $T_Q \equiv T_c - c$, el cual es semiacotado y satisface las relaciones (B.3.2) y (B.3.3). Veamos otras definiciones.

Definición 33. Sea T un operador autoadjunto semiacotado. Definimos el *dominio-forma* $\mathcal{Q}(T)$ de T como aquel dominio $\mathcal{D}(Q_T)$ de la forma cerrada Q_T que corresponde al operador T (véanse [17] Secc. 6.7, [36] Secc. VIII.6).

Definición 34 ([37], Secc. XIII.2). Sean T_1 y T_2 dos operadores autoadjuntos y acotados por debajo. Entonces decimos que $T_1 \leq T_2$ si y sólo si $\mathcal{Q}(T_2) \subset \mathcal{Q}(T_1)$ y $\langle T_1 u, u \rangle \leq \langle T_2 u, u \rangle$ para todo $u \in \mathcal{Q}(T_2)$.

Ahora estamos en condiciones de enunciar el principio variacional para operadores autoadjuntos, expresado para las funciones $N(\lambda^-; T)$ y $N(\lambda; T)$ por medio del conocido *lema de Glazman* (véase, por ejemplo, [9], I. Secc. 8.1), el cual sirve como la versión más adecuada para expresar dichas funciones en términos de Q_T .

Lema 26. Sea T un operador autoadjunto acotado por debajo y \mathcal{D}_0 un subespacio denso en $\mathcal{Q}(T)$ (con respecto a la norma en $\mathcal{Q}(T)$). Entonces para cualquier $\lambda \in \mathbf{R}$ tenemos

$$N(\lambda^-; T) = \max \left\{ \dim L : L \subset \mathcal{D}_0, Q_T(u) < \lambda\|u\|^2 \text{ para todo } u \in L \setminus \{0\} \right\}.$$

Lema 27. *Para cualquier operador autoadjunto T y $\lambda \in \mathbf{R}$ tenemos*

$$N(\lambda; T) = \text{máx} \left\{ \dim L : L \subset \mathcal{D}(T), Q_T(u) \leq \lambda \|u\|^2 \text{ para todo } u \in L \right\}. \quad (\text{B.3.4})$$

Se cumple entonces el siguiente importante resultado que es una consecuencia de (B.3.4) (véanse [4], Secc. S1.3, Prop. 3.1 y [40], Teorema 1.6).

Teorema 28. *Sean T_1 y T_2 dos operadores autoadjuntos y acotados por debajo tales que $T_1 \leq T_2$. Entonces*

$$N(\lambda; T_1) \geq N(\lambda; T_2) \quad (\text{B.3.5})$$

para todo $\lambda \in \mathbf{R}$.

Ahora formulamos otra variante del principio variacional para operadores autoadjuntos. Sea T un operador autoadjunto no negativo y sea L cualquier subespacio lineal finito-dimensional del dominio de T . Definimos

$$\lambda(L) \equiv \sup \{ \langle Tu, u \rangle : u \in L \text{ y } \|u\| = 1 \}.$$

Estos números L -dependientes son usados para definir una sucesión no decreciente de números λ_n de acuerdo a la fórmula variacional de Rayleigh-Ritz:

$$\lambda_n \equiv \text{ínf} \{ \lambda(L) : L \subset \mathcal{D}(T) \text{ y } \dim L = n \}. \quad (\text{B.3.6})$$

En muchas situaciones es posible obtener cotas explícitas de estos números. El significado de las mismas se explica por la variante aludida del principio variacional, conocida como *principio de minimax de Courant* (véanse [4] Secc. S1.3 Prop. 3.2, [7] Teor. 4.5.2, [9] Secc. 8.1, [16] Teor. 5.8, [17] Secc. 6.7, [19] Prop. 75.5, [21] Teor. 8.5.3, [37] Secc. XIII.1), a saber.

Teorema 29. *Sea T un operador autoadjunto no negativo y sea λ_m definido por (B.3.6). Si T tiene un espectro esencial no vacío entonces uno de los siguientes casos ocurre.*

1. *Existe $\Lambda_0 < \infty$ tal que $\lambda_m < \Lambda_0$ para todo m y $\lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_m = \Lambda_0$. Entonces $\Lambda_0 = \min \sigma_{\text{ess}}(T)$ y el conjunto $\sigma(T) \cap [0, \Lambda_0)$ consiste de los valores propios de T , los cuales repetidos cada uno de acuerdo a su multiplicidad forman la sucesión $\{\lambda_m\}$.*
2. *Existen $\Lambda_0 < \infty$ y $N < \infty$ tales que $\lambda_N < \Lambda_0$ pero $\lambda_m = \Lambda_0$ para todo $m > N$. Entonces $\Lambda_0 = \min \sigma_{\text{ess}}(T)$ y el conjunto $\sigma(T) \cap [0, \Lambda_0)$ consiste de los valores propios de T , los cuales repetidos cada uno de acuerdo a su multiplicidad forman la sucesión finita $\{\lambda_m\}_{m=1}^N$.*

Bibliografía

- [1] S. Albeverio, F. Gesztesy, R. Høegh-Krohn, H. Holden, *Solvable Models in Quantum Mechanics*, Springer, (1988).
- [2] C. M. Bender, S. A. Orszag, *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*, Vol. I *Asymptotic Methods and Perturbation Theory* (With 148 Figures), (Originally published: McGraw-Hill, Inc., 1978), Springer-Verlag New York, Inc., (1999).
- [3] J. J. Benedetto, *Harmonic Analysis and Applications*, Studies in Advanced Mathematics, Series Editor S. G. Krantz, CRC Press, Inc., Boca Raton New York London Tokyo, (1997).
- [4] F. A. Berezin, M. A. Shubin, *The Schrödinger Equation*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, (1991).
- [5] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë, *Quantum Mechanics*, Vol. I. Translated from the French by S. R. Hemley, N. Ostrowsky, D. Ostrowsky, A Wiley Interscience Publication, John Wiley & Sons Inc. New York London Sydney Toronto – Hermann Publishers in arts and science Paris, (1977).
- [6] S. C. Chapra, R. P. Canale, *Métodos Numéricos para Ingenieros con Aplicaciones en Computadoras Personales*, (Traducido por C. Zapata S., A. Cortés A., de la primera edición en inglés de *Numerical Methods for Engineers with Personal Computer Applications*, McGraw-Hill, Inc., U. S. A., 1985), Libros McGraw-Hill de México, S. A. de C. V. México · Bogotá · Buenos Aires · Caracas · Guatemala ·

- Lisboa · Madrid Nueva York · Panamá · San Juan · Santiago · São Paulo Auckland · Hamburgo · Londres · Montreal Nueva Delhi · París · San Francisco · Singapur St. Louis · Sidney · Tokio · Toronto, (1987).
- [7] E. B. Davis, *Spectral Theory and Differential Operators*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **42**, Cambridge University Press, (1995).
- [8] S. Dineen, *Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces*, Springer-Verlag London Limited, (1999).
- [9] Yu. V. Egorov, A. I. Komech, M. A. Shubin, *Elements of the Modern Theory of Partial Differential Equations*, (Second Printing of the First Edition 1994, which was originally published as *Partial Differential Equations*, Vol. II. *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*, **31**), Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (1999).
- [10] Yu. V. Egorov, B.-W. Schulze, *Pseudo-Differential Operators, Singularities, Applications*, Birkhäuser Verlag Basel · Boston · Berlin, (1997).
- [11] M. V. Fedoryuk, *Asymptotics integrals and Series*, Nauka, Moscow, (1987).
- [12] R. Gadył'shin, "Local perturbations of the Schrödinger operator on the axis", *Theor. Math. Phys.*, **132**, 976–982 (2002).
- [13] C. Gasquet, P. Witomski, *Fourier Analysis and Applications. Filtering, Numerical Computation, Wavelets*. Translated by R. Ryan, Springer-Verlag New York, Inc., (1999).
- [14] D. Greenspan, *Discrete Models*, Addison-Wesley, London, (1973).
- [15] R. C. Gunning, H. Rossi, *Analytic Functions of Several Complex Variables*, Prentice-Hall Series in Modern Analysis, R. Creighton Buck, Editor, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., (1965).
- [16] S. J. Gustafson, I. M. Sigal, *Mathematical Concepts of Quantum Mechanics*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (2003).
- [17] B. Helffer, *Semiclassical Analysis, Witten Laplacians, and Statistical Mechanics*, World Scientific, New Jersey, London, Singapore, Hong Kong, (2002).

- [18] G. Hellwig, *Differential Operators of Mathematical Physics. An Introduction*. Translated from the German by B. Hellwig, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Massachusetts · Palo Alto · London · Don Mills, Ontario, (1967).
- [19] H. G. Heuser, *Functional Analysis*. Translated by J. Horváth, A Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons Ltd. Chichester · New York · Brisbane · Toronto · Singapore, (1982).
- [20] L. Hörmander, *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables*, North-Holland Mathematical Library, 7, Advisory Editors: M. Artin, H. Bass, J. Eells, W. Feit, P. J. Freyd, F. W. Gehring, H. Halberstam, L. Hörmander, M. Kac, J. H. B. Kemperman, H. A. Lauwerier, W. J. Luxemburg, P. F. Peterson, I. M. Singer and A. C. Zaanen, North-Holland Publishing Company – Amsterdam · London American Elsevier Publishing Company, Inc. – New York, (1973).
- [21] J. Jost, *Partial Differential Equations (With 10 Illustrations)*, Graduate Texts in Mathematics **214** Editorial Board S. Axler F. W. Gehring K. A. Ribet, Springer-Verlag New York, Inc., (2002).
- [22] R. P. Kanwal, *Generalized Functions: Theory and Technique Second Edition*, Birkhäuser Boston Basel Berlin, (1998).
- [23] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer, Berlin–Heidelberg–New York, (1976).
- [24] A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, *Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional*. Traducido del Ruso por Carlos Vega. Tercera Edición, Editorial Mir · Moscú, (1978).
- [25] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley & Sons, New York, Chichester, Brisbane, Toronto, (1978).
- [26] L. D. Landau, E. M. Lifschitz, *Quantum Mechanics*, Pergamon, London, (1958).
- [27] Yu. I. Lyubich, *Linear Functional Analysis. Functional Analysis*, Vol. I. Translated from the Russian by I. Tweddle. *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*, **19**, N.

- K. Nikol'skij (Ed.), Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York London Paris Tokyo Hong Kong Barcelona Budapest, (1992).
- [28] J. E. Marsden, A. J. Tromba, *Cálculo Vectorial*, Cuarta Edición, Versión en español Javier Páez Cárdenas, Addison Wesley Longman de México, S. A. de C. V., (1998).
- [29] V. P. Maslov, *Asymptotic Methods and Theory of Perturbations*, Moscow, Nauka, (1988).
- [30] A. N. Michel, Ch. J. Herget, *Applied Algebra and Functional Analysis* (an unabridged, corrected republication of the work first published under the title *Mathematical Foundations in Engineering and Science: Algebra and Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1981), Dover Publications, Inc., New York, (1993).
- [31] J. Montvay, G. Münster, *Quantum Fields on a Lattice*, Cambridge UP, (1994).
- [32] A. W. Naylor, G. R. Sell, *Linear Operator Theory in Engineering and Science*, Springer-Verlag New York Inc. Berlin Heidelberg London Paris Tokyo Hong Kong Barcelona, (1982).
- [33] M. Pedersen, *Functional Analysis in Applied Mathematics and Engineering*, Chapman & Hall/CRC Press LLC, (2000).
- [34] L. Perko, *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer-Verlag New York Inc. Berlin Heidelberg London Paris Tokyo Hong Kong Barcelona Budapest, (1991).
- [35] I. G. Petrovski, *Ordinary Differential Equations*. Revised English Edition. Translated and Edited by R. A. Silverman, Dover Publications, Inc. New York, (1973).
- [36] M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics*, Vol. I: *Functional Analysis*. Revised and Enlarged Edition, Academic Press, Inc. San Diego New York Boston London Sydney Tokyo Toronto, (1980).

- [37] M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics*, Vol. IV: *Analysis of Operators*, Academic Press, Inc. Harcourt Brace Jovanovich Publishers, Boston San Diego New York London Sydney Tokyo Toronto, (1978).
- [38] R. D. Richtmyer, *Principles of Advanced Mathematical Physics*, Vol. I, Springer-Verlag New York Inc. New York Heidelberg Berlin, (1978).
- [39] J. A. Rodriguez, P. Zhevandrov, “Shallow potential wells for the discrete Schrödinger equation”, *Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation WAVES 2003*, G. C. Cohen, E. Heikkola, P. Joly, P. Neittaanmäki Editors, INRIA, University of Jyväskylä, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 857-861 (2003).
- [40] G. V. Rozenblum, M. A. Shubin, M. Z. Solomyak, *Spectral Theory of Differential Operators. Partial Differential Equations*, Vol. VII. *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*, **64**, M. A. Shubin (Ed.), Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York London Paris Tokyo Hong Kong Barcelona Budapest, (1994).
- [41] W. Rudin, *Análisis Real y Complejo*. Tercera Edición. Traducción: J. M. Martínez A., McGraw-Hill, Inc./Interamericana de España, S. A., Madrid, España, (1988).
- [42] A. I. Saichev, W. A. Woyczyński, *Distributions in the Physical and Engineering Sciences*, Vol. I *Distributional and Fractal Calculus, Integral Transforms and Wavelets*, Birkhäuser Boston Basel Berlin, (1997).
- [43] X. Saint Raymond, *Elementary Introduction to the Theory of Pseudodifferential Operators*, CRC Press, Inc., Boca Raton, Ann Arbor, Boston and London, (1991).
- [44] M. Schechter, *Spectra of Partial Differential Operators*, Second Edition, North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics, **14**, Editors: J. D. Achenbach, B. Budiansky, W. T. Koiter, H. A. Lauwerier, L. Van Wijngaarden, North-Holland Amsterdam · New York · Oxford Elsevier Science Publishers B. V., (1986).

- [45] B. Simon, “The bound state of weakly coupled Schrödinger operators in one and two-dimensions”, *Ann. Phys.*, NY, **97**, 279–288 (1976).
- [46] M. R. Spiegel, *Teoría y Problemas de Variable Compleja*, (Traducción y Adaptación por C. J. Rodríguez B. de la primera edición de *Complex Variables Theory and Problems*, McGraw-Hill Inc., U. S. A., 1967), Serie de Compendios Schaum, Libros McGraw-Hill de México, S. A. de C. V. México Panamá Bogotá São Paulo Nueva York Londres Toronto Sidney Johannesburg Dusseldorf Singapur, (1971).
- [47] I. Stakgold, *Green's Functions and Boundary Value Problems*, A Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons, Inc., New York · Chichester · Brisbane · Toronto, (1979).
- [48] M. Taylor, *Partial Differential Equations*, Vol. I *Basic Theory*, Springer, (1996).
- [49] F. Trèves, *Introduction to Pseudodifferential and Fourier Integral Operators*, Vol. I, Plenum Press, New-York and London, (1982).
- [50] E. Zeidler, *Applied Functional Analysis. Applications to Mathematical Physics*, Springer-Verlag New York, Inc., (1995).
- [51] P. Zhevandrov, A. Merzon, “Asymptotics of eigenfunctions in shallow potential wells and related problems”, *AMS Translations*, series 2, **208**, 235–284 (2003).
- [52] P. Zhevandrov, A. Merzon, “Shallow potential wells for the Schrödinger equation and water waves”, *Progress in Analysis, Proceedings of the 3rd International ISAAC Congress*, ed. by H. G. W. Begehr et al., World Scientific, Singapore, **1**, 589–598 (2003).