UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLAS DE HIDALGO

Instituto de Física y Matemática

Sobre las funciones zeta periódicas

Tesis

Para Obtener el Grado de Doctor en Matemáticas

Jorge Sánchez Ortiz

Dirigida por

Eugenio P. Balanzario

Marzo del 2008

Índice Analítico

Capítulo 0

Presentación

§1. Contenido.

En el primer capítulo de esta tesis se presenta un método de cálculo para los ceros de series de Dirichlet con coeficientes periódicos. Se aplica este método a la serie de Dirichlet de Davenport y Heilbronn (ver referencia [12]) y se presentan 30 ceros que yacen fuera de la linea crítica. Ninguno de estos ceros tiene parte real mayor que uno como hubiera sido deseable. Sin embargo, en el Capítulo 1 de esta tesis presentamos ejemplos de series de Dirichlet que satisfacen una ecuación funcional y tienen ceros con parte real mayor que uno. Los resultados de esta investigación se publicaron en la revista Mathematics of Computation de la American Mathematical Society (ver referencia [7]).

El Capítulo 2 está dedicado a una generalización de los polinomios de Bernoulli. Estos polinomios de Bernoulli generalizados se aplican para calcular el valor de ciertas series de Dirichlet en los valores naturales de su argumento. Esta generalización de los polinomios de Bernoulli que se propone aquí es nueva y no se ha considerado en la literatura sobre el tema. Este trabajo se envió para su publicación al Ramanujan Journal en marzo del 2007 y fue presentado en el XL Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana en octubre del 2007. También se considera la aplicación de estos polinomios de Bernoulli generalizados a la evaluación numérica de la función zeta de Hurwitz mediante el método de Euler-Maclaurin (ver referencia [16]). En particular, en el Teorema 18 de este Capítulo 2 se propone una mejora al trabajo publicado en [6].

En el último capítulo de esta tesis, Capítulo 3, se presenta una fórmula integral de Riemann-Siegel para la función zeta de Lerch. Esta fórmula integral de Riemann-Siegel nos permite calcular el valor numérico de la función zeta de Lerch procediendo como en el método de Turing para el cálculo de la función zeta de Riemann. La fórmula integral de Riemann-Siegel para la función zeta de Lerch presentada aquí es nueva y es un complemento de los trabajos de Deuring [15] y de Siegel [32]. Cabe decir además que en la tesis presentada aquí se invirtió mucho trabajo en la verificación de que nuestra fórmula integral de Riemann-Siegel para la función zeta de Lerch arroja los resultados numéricos correctos. Para esto presentamos en un apéndice a esta tesis un listado de instruciones en el lenguage de Mathematica que codifica nuestra fórmula integral y nos permite compararla numericamente con otros métodos de cálculo para la función zeta de Lerch.

Por último, todos los resultados nuevos de esta tesis, con la excepción del Teorema 18 del Capítulo 2, son el resultado de la colaboración entre el titular de la tesis (Jorge Sáncez Ortiz) y el director de la misma (Eugenio P. Balanzario). El Teorema 18 del Capítulo 2 es de la autoría solamente del titular de la tesis.

Capítulo 1

Ceros del ejemplo de Davenport-Heilbronn

§1. Introducción.

En este capítulo nosotros calculamos ceros fuera de la linea crítica de la serie de Dirichlet considerada por H. Davenport y H. Heilbronn en 1936. Estos ceros se obtienen por la deformación de una serie de Dirichlet de la cual conocemos un gran número de ceros, en la serie de Davenport y Heilbronn.

Sea $\xi = \big(\sqrt{10-2\sqrt{5}}-2\big)/(\sqrt{5}-1)$. Para $s = \sigma + it$, con $\sigma > 1$, sea

$$f_1(s) \;=\; 1 + \frac{\xi}{2^s} - \frac{\xi}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \frac{0}{5^s} + \cdots \tag{1}$$

una serie de Dirichlet con coeficientes periódicos de período 5. Entonces $f_1(s)$ define una función entera que satisface la siguiente ecuación funcional

$$f(s) \;=\; T^{-s+\frac{1}{2}}\,\chi_2(s)\,f(1-s) \tag{2}$$

(ver sección 10.25 en [34]) con $T = 5$ y en donde

$$\chi_2(s) = 2(2\pi)^{s-1}\,\Gamma(1-s)\cos\big(\frac{\pi s}{2}\big). \tag{3}$$

Davenport y Heilbronn (ver [12]) mostraron que $f_1(s)$ definida en (1), tiene ceros fuera de la linea crítica. En 1994, R. Spira (ver [31]) calculó los siguientes ceros del ejemplo de Davenport y Heilbronn

$$.808517 + 85.699348i, \qquad .650830 + 114.163343i,$$
$$.574356 + 166.479306i, \qquad .724258 + 176.702461i.$$

En la sección §2 nosotros presentamos un método para calcular ceros adicionales de la serie de Dirichlet dada por Davenport y Heilbronn.

§2. Continuidad de los ceros.

Para calcular los ceros de f_1, nosotros consideramos la siguiente función

$$f_0(s) \;=\; \Big(1 + \frac{\sqrt{5}}{5^s}\Big)\zeta(s), \tag{4}$$

donde $\zeta(s)$ es la función zeta de Riemann. Una gran cantidad de ceros de la función $\zeta(s)$ son conocidos. Por otro lado

$$1 + \frac{\sqrt{5}}{5^s} = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad s = \frac{1}{2} + \frac{2k+1}{\log 5}\pi i \quad \text{con} \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Para cada $\tau \in [0,1]$, sea

$$f_\tau \;=\; f_0 \cdot (1-\tau) + f_1 \cdot \tau. \tag{5}$$

El siguiente teorema muestra que si ρ_0 es un cero de f_0 y $\tau > 0$ un número pequeño, entonces f_τ tiene un cero ρ_τ en una vencidad pequeña de ρ_0. Dado ρ_0, es fácil calcular numericamente un cero ρ_τ de f_τ en una vecindad pequeña de ρ_0. Repitiendo este proceso varias veces, nosotros terminamos con un cero ρ_1 del ejemplo de Davenport-Heilbronn.

Teorema 6. *Sea q un número entero positivo fijo. Sea $a_\tau(j)\colon \mathbf{R}\times\mathbf{N} \to \mathbf{C}$ una sucesión de funciones continuas tal que $a_\tau(j+q) = a_\tau(j)$ para cada $\tau \in \mathbf{R}$ y para cada $j \in \mathbf{N}$. Sea $f_\tau(s)$ la función meromorfa, definida inicialmente para $\sigma > 1$ por*

$$f_\tau(s) \;=\; \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_\tau(j)}{j^s}.$$

Esta función se puede extender a todo el plano complejo por continuación analítica. Suponga que $f_\tau(s)$ no es identicamente cero. Sea ρ tal que

$0 < \Re\mathrm{e}(\rho) < 1$ y tal que $f_0(\rho) = 0$. Para cada $\delta > 0$ existe $\epsilon > 0$ tal que $|\tau| \leq \epsilon$ implica que existe s tal que $f_\tau(s) = 0$ y tal que $|s - \rho| < \delta$.

Demostración. Sea

$$A_\tau \;=\; \frac{1}{q}\sum_{j=1}^{q} a_\tau(j) \qquad \text{y sea} \qquad A_\tau(x) \;=\; \sum_{j \leq x} a_\tau(j).$$

Para $\sigma > 0$ tenemos que

$$f_\tau(s) \;=\; \frac{A_\tau\, s}{s-1} + s\int_1^\infty \frac{A_\tau(x) - A_\tau\, x}{x^{s+1}}\, dx.$$

Sea $\rho \in \mathbf{C}$ tal que $0 < \Re\mathrm{e}(\rho) < 1$ y tal que $f_0(\rho) = 0$. Entonces existe $\delta_1 > 0$ tal que $f_0(s) \neq 0$ para $0 < |s - \rho| \leq \delta_1$. Podemos suponer que $\delta_1 < \delta$. Sea

$$\epsilon_1 \;=\; \min\big\{|f_0(s)| \,:\, |s - \rho| = \delta_1\big\}.$$

Nótese que

$$|A_\tau(x) - A_\tau\, x - A_0(x) + A_0\, x| \;\leq\; 2\sum_{j=1}^{q} |a_\tau(j) - a_0(j)|.$$

Dado que las $a_\tau(j) : \mathbf{R} \times \mathbf{N} \to \mathbf{C}$ son funciones continuas de τ y bajo el supuesto de que $|s - \rho| = \delta_1$, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $|\tau| < \epsilon$ implica que

$$|f_\tau(s) - f_0(s)| \;\leq\; \left\{\frac{1}{q}\left|\frac{s}{s-1}\right| + 2\left|\frac{s}{\sigma}\right|\right\}\sum_{j=1}^{q} |a_\tau(j) - a_0(j)| \;<\; \epsilon_1$$

Por el teorema de Rouché

$$f_\tau(s) \;=\; f_0(s) + \Big\{f_\tau(s) - f_0(s)\Big\}$$

tiene un cero en $|s-\rho| < \delta_1 < \delta$. ∎

Así, nuestro método para calcular los ceros de f_1 es estar muy atentos a lo que pasa con los ceros de f_0 mientras hacemos una "deformación" de f_0 en f_1. Dado que nosotros conocemos los primeros ceros de f_0, entonces nosotros podemos encontrar ceros adicionales de la serie de Dirichlet de Davenport y Heilbronn f_1 definida en (1). En la siguiente tabla listamos algunos de estos ceros

$.86953 + 240.4046i$,	$.81955 + 320.8764i$,	$.76822 + 331.0502i$,
$.62850 + 366.6409i$,	$.81587 + 411.7967i$,	$.70882 + 440.4845i$,
$.51591 + 520.9438i$,	$.84695 + 531.2797i$,	$.72953 + 548.9067i$,
$.78655 + 566.5097i$,	$.58285 + 595.0233i$,	$.62825 + 611.7750i$,
$.61076 + 646.9868i$,	$.76059 + 657.1083i$,	$.78870 + 692.8924i$,
$.77736 + 737.7669i$,	$.85300 + 783.6530i$,	$.66855 + 811.7657i$,
$.56194 + 847.4657i$,	$.85610 + 857.2958i$,	$.68089 + 864.1180i$,
$.68843 + 892.1490i$,	$.75935 + 921.1726i$,	$.76249 + 983.7521i$,
$.69140 + 1012.019i$,	$.69809 + 1018.795i$,	$.58613 + 1029.004i$,
$.61106 + 1078.490i$,	$.85462 + 1092.454i$,	$.60577 + 1109.548i$.

§3. Dos hipótesis.

En esta sección nosotros consideramos el caso en el cual f_0 y f_1 son dos series de Dirichlet linealmente independientes y además satisfacen una ecuación funcional dada. Por ejemplo nosotros podemos tomar f_0 como en (4), o bien como

$$L\big(s,\chi_2^{(5)}\big) \;=\; 1-\frac{1}{2^s}-\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{0}{5^s}+\cdots.$$

Nótese que f_0 dada en (4) y $L\big(s,\chi_2^{(5)}\big)$ ambas satisfacen la ecuación funcional

$$f(s) \;=\; T^{-s+\frac{1}{2}}\,\chi_1(s)\,f(1-s) \tag{7}$$

con $T = 5$ y en donde

$$\chi_1(s) \;=\; 2(2\pi)^{s-1}\,\Gamma(1-s)\,\mathrm{sen}\Big(\frac{\pi s}{2}\Big). \tag{8}$$

Así nosotros tenemos dos series de Dirichlet linelamente independientes que satisfacen una ecuación funcional dada. Por lo tanto, tomando una combinación adecuada de estas dos series nosotros podemos producir una serie de Dirichlet f_1 que satisfaga la ecuación funcional (7) y tal que tenga un cero fuera de la linea crítica, de hecho, en cualquier lugar predeterminado del plano complejo. Con estas series f_0 y f_1, nosotros definimos f_τ como en (5). Entonces f_τ satisface la ecuación funcional (7) para todo $\tau \in [0,1]$.

Como f_τ satisface (7), entonces los ceros de f_τ con parte imaginaria distinta de cero son simétricos con respecto a la linea crítica. Por lo tanto por el Teorema 6 de la sección §2, un cero simple debe moverse a lo largo de la linea crítica. Si nosotros asumimos que todos los ceros de f_0 son simples, ¿cómo entonces nosotros podemos obtener un cero de f_1 fuera de la linea crítica? Es fácil ver que debe de existir $0 \le \tau^* < 1$ tal que f_{τ^*} tiene un cero en la linea crítica de multiplicidad par.

Por lo anterior, nosotros podemos decir que los ceros de multiplicidad mayor que uno deben de existir antes que la hipótesis de Riemann falle.

§4. Otras series periódicas de Dirichlet.

La serie de Dirichlet considerada por Davenport y Heilbronn, satisface una ecuación funcional similar a la ecuación funcional que satisface la función zeta de Riemann. Además la serie de Dirichlet de Davenport y Heilbronn es la única solución a su ecuación funcional. Es natural considerar todas las series de Dirichlet que son solución única de una ecuación funcional fija del tipo de la ecuación que satisface la función zeta de Riemann. El siguiente resultado nos ayuda a determinar todas las series de Dirichlet de este tipo.

Teorema 9. *Sea $f(s)$ una serie de Dirichlet periódica de período T. Sea $\chi_1(s)$ y $\chi_2(s)$ definidas como en (8) y (3) respectivamente. Sean*

$$\mathcal{V}_{\alpha,\beta} = \Big\{ f(s) \,:\, f(s) = (-1)^{\alpha}\, T^{-s+\frac{1}{2}}\, \chi_{\beta}(s) f(1-s) \Big\}.$$

Sean $d_1 = \dim \mathcal{V}_{0,1}$, $d_2 = \dim \mathcal{V}_{1,1}$, $d_3 = \dim \mathcal{V}_{0,2}$ y $d_4 = \dim \mathcal{V}_{1,2}$, donde $\dim \mathcal{V}_{\alpha,\beta}$ es la dimensión de $\mathcal{V}_{\alpha,\beta}$, el cual es un espacio vectorial. Entonces d_j esta dado en la siguiente tabla:

T	d_1	d_2	d_3	d_4
$4m$	$m+1$	m	m	$m-1$
$4m+1$	$m+1$	m	m	m
$4m+2$	$m+1$	$m+1$	m	m
$4m+3$	$m+1$	$m+1$	$m+1$	m

Demostración. Ver [3] y [23]. ∎

El siguiente teorema nos permite encontrar todas las series de Dirichlet $f(s)$, con coeficientes periódicos de período T, tal que satisfacen una de las siguientes ecuaciones funcionales

$$f(s) = T^{-s}\, \lambda\, \chi_1(s)\, f(1-s),$$

$$f(s) = T^{-s}\, \lambda\, \chi_2(s)\, f(1-s),$$

donde λ es alguna constante entera.

Teorema 10. (W. Schnee). *Sea*

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{n^s} \qquad (\text{para} \quad s = \sigma + it \quad \text{tal} \quad \text{que} \quad \sigma > 1)$$

una serie de Dirchlet con coefiecientes periódicos de período T, es decir, $f_{n+T} = f_n$ para cada $n \in \mathbf{N}$. Sean

$$\alpha_j = \sum_{k=1}^{T} f_k \cos(2\pi j \frac{k}{T}), \qquad \beta_j = \sum_{k=1}^{T} f_k \operatorname{sen}(2\pi j \frac{k}{T}).$$

Además para $\sigma > 1$, definamos las siguientes series

$$f_1(s) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha_j}{j^s} \qquad y \qquad f_2(s) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\beta_j}{j^s}.$$

Entonces la continuación analítica de $f(s)$, $f_1(s)$ y $f_2(s)$ satisfacen

$$T^s f(s) = \chi_1(s) f_1(1-s) + \chi_2(s) f_2(1-s).$$

Demostración. Ver [30]. ∎

En las siguientes proposiciones listamos todas las series de Dirichlet periódicas de período 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8, que son soluciones únicas a su ecuación funcional. Estas listas agotan todas las series de Dirichlet con coeficientes periódicos que son solución única a una ecuación funcional.

Proposición 11. *Sea $f(s)$ una serie de Dirichlet con coeficientes periódicos de período 2 y tal que $f(s)$ es solución única a su ecuación funcional. Entonces $f(s)$ es igual a una de las siguientes series de Dirichlet*

$$\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2^s}\right)\zeta(s), \qquad \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2^s}\right)\zeta(s).$$

Demostración. Por el Teorema 9, tenemos que los únicos espacios vectoriales de dimensión 1, para una serie de Dirichlet de período 2, están dados por

$$\mathcal{V}_{0,1} = \{f(s) : f(s) = 2^{-s+\frac{1}{2}}\chi_1(s) f(1-s)\},$$

$$\mathcal{V}_{1,1} = \{f(s) : f(s) = -2^{-s+\frac{1}{2}}\chi_1(s) f(1-s)\}.$$

Para determinar $f(s)$ en estos espacios vectoriales, por el Teorema 10, es suficiente resolver el siguiente problema de eigenvalores

$$\sum_{k=1}^{2} f_k \cos(\pi jk) \;=\; \lambda\, f_j, \qquad\qquad j = 1, 2.$$

Este problema tiene dos eigenvalores; $\lambda = \sqrt{2}$ y $\lambda = -\sqrt{2}$. El eigenvalor $\lambda = \sqrt{2}$ corresponde al espacio vectorial $\mathcal{V}_{0,1}$ y en este caso un eigenvector asociado es igual a $(-1+\sqrt{2}, 1)$. Entonces

$$f(s) \;=\; 1 + \frac{\nu}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{\nu}{4^s} + \cdots \;=\; \Big(1 + \frac{\sqrt{2}}{2^s}\Big)\zeta(s),$$

donde $\nu = (-1+\sqrt{2})^{-1}$.

Por otro lado el eigenvalor $\lambda = -\sqrt{2}$ corresponde al espacio vectorial $\mathcal{V}_{1,1}$ y un eigenvector asociado esta dado por $(-1-\sqrt{2}, 1)$. Por lo tanto

$$f(s) \;=\; 1 + \frac{\eta}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{\eta}{4^s} + \cdots \;=\; \Big(1 - \frac{\sqrt{2}}{2^s}\Big)\zeta(s),$$

donde $\eta = (-1-\sqrt{2})^{-1}$. ∎

Proposición 12. *Sea $f(s)$ una serie de Dirichlet con coeficientes periódicos de período 3 y tal que $f(s)$ es solución única a su ecuación funcional. Entonces $f(s)$ es igual a una de las siguientes series de Dirichlet*

$$L\big(s, \chi_1^{(3)}\big), \qquad \big(1 + \frac{\sqrt{3}}{3^s}\big)\zeta(s), \qquad \big(1 - \frac{\sqrt{3}}{3^s}\big)\zeta(s),$$

donde $\chi_1^{(3)}$ es el caracter no principal módulo 3.

Demostración. Por el Teorema 9, tenemos que los únicos espacios vectoriales de dimensión 1, para una serie de Dirichlet de período 3, están dados por

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_{0,1} &= \{f(s) : f(s) = 3^{-s+\frac{1}{2}}\chi_1(s)f(1-s)\}, \\
\mathcal{V}_{1,1} &= \{f(s) : f(s) = -3^{-s+\frac{1}{2}}\chi_1(s)f(1-s)\}, \\
\mathcal{V}_{0,2} &= \{f(s) : f(s) = 3^{-s+\frac{1}{2}}\chi_2(s)f(1-s)\}.
\end{aligned}$$

Para determinar $f(s)$ en el caso de los espacios vectoriales $\mathcal{V}_{0,1}$ y $\mathcal{V}_{1,1}$, por el Teorema 10, es suficiente resolver el siguiente problema de eigenvalores

$$\sum_{k=1}^{3} f_k \cos\big(2\pi j \frac{k}{3}\big) = \lambda\, f_j, \qquad\qquad j = 1, 2, 3.$$

Este problema tiene dos eigenvalores no triviales; $\lambda = \sqrt{3}$ y $\lambda = -\sqrt{3}$. El eigenvalor $\lambda = \sqrt{3}$ corresponde al espacio vectorial $\mathcal{V}_{0,1}$ y un eigenvector asociado está dado por $(w, w, 1)$ donde $w = (-1 + \sqrt{3})/2$. Entonces

$$f(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1/w}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1/w}{6^s} + \cdots = \Big(1 + \frac{\sqrt{3}}{3^s}\Big)\zeta(s).$$

Por otro lado el eigenvalor $\lambda = -\sqrt{3}$ corresponde al espacio vectorial $\mathcal{V}_{1,1}$ y un eigenvector asociado está dado por $(\upsilon, \upsilon, 1)$ donde $\upsilon = -(1 + \sqrt{3})/2$. Por lo cual

$$f(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1/\upsilon}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1/\upsilon}{6^s} + \cdots = \Big(1 - \frac{\sqrt{3}}{3^s}\Big)\zeta(s).$$

Ahora para determinar $f(s)$ en el caso del espacio vectorial $\mathcal{V}_{0,2}$, por el Teorema 10, es suficiente resolver el siguiente problema de eigenvalores

$$\sum_{k=1}^{3} f_k \operatorname{sen}\big(2\pi j \frac{k}{3}\big) = \lambda f_j, \qquad\qquad j = 1, 2, 3.$$

Este problema solamente tiene un eigenvalor no trivial; $\lambda = \sqrt{3}$, donde un eigenvector asociado está dado por $(-1, 1, 0)$. Por lo tanto

$$f(s) = 1 - \frac{1}{2^s} + \frac{0}{3^s} + \cdots = L\big(s, \chi_1^{(3)}\big),$$

donde $\chi_1^{(3)}$ es el caracter no principal módulo 3. ∎

Proposición 13. *Sea $f(s)$ una serie de Dirichlet con coeficientes periódicos de período 4 y tal que $f(s)$ es solución única a su ecuación funcional. Entonces $f(s)$ es igual a una de las siguientes series de Dirichlet*

$$L\big(s, \chi_1^{(4)}\big), \qquad \big(1 - \frac{2}{4^s}\big)\zeta(s),$$

donde $\chi_1^{(4)}$ es el caracter no principal módulo 4.

Demostración. Por el Teorema 9, tenemos que los únicos espacios vectoriales de dimensión 1, para una serie de Dirichlet de período 4, están dados por

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_{1,1} &= \{f(s) : f(s) = -4^{-s+\frac{1}{2}}\chi_1(s) f(1-s)\},\\ \mathcal{V}_{0,2} &= \{f(s) : f(s) = 4^{-s+\frac{1}{2}}\chi_2(s) f(1-s)\}.\end{aligned}$$

Para determinar $f(s)$ en el caso del espacio vectorial $\mathcal{V}_{1,1}$, por el Teorema 10, es suficente resolver el siguiente problema de eigenvalores

$$\sum_{k=1}^{4} f_k \cos\big(2\pi j \frac{k}{4}\big) = \lambda f_j, \qquad j = 1, 2, 3, 4.$$

Este problema tiene dos eigenvalores no triviales; $\lambda = -2$ y $\lambda = 2$, donde el eigenvalor $\lambda = 2$ tiene multiplicidad 2. Entonces el único eigenvalor que nos interesa es $\lambda = -2$, el cual corresponde al espacio vectorial $\mathcal{V}_{1,1}$ y un eigenvector asociado está dado por $(-1, -1, -1, 1)$. Entonces

$$f(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \cdots = \Big(1 - \frac{2}{4^s}\Big)\zeta(s).$$

Ahora para determinar $f(s)$ en el caso del espacio vectorial $\mathcal{V}_{0,2}$, por el Teorema 10, es suficiente resolver el siguiente problema de eigenvalores

$$\sum_{k=1}^{4} f_k \operatorname{sen}\big(2\pi j \frac{k}{4}\big) = \lambda f_j, \qquad j = 1, 2, 3, 4.$$

Este problema tiene solamente un eigenvalor no trivial; $\lambda = 2$, donde un eigenvector asociado está dado por $(-1, 0, 1, 0)$. Por lo tanto

$$f(s) \,=\, 1 + \frac{0}{2^s} - \frac{1}{3^s} + \frac{0}{4^s} + \cdots \,=\, L\big(s, \chi_1^{(4)}\big),$$

donde $\chi_1^{(4)}$ es el caracter no principal módulo 4. ∎

Proposición 14. *Sea $f(s)$ una serie de Dirichlet con coeficientes periódicos de período 5 y tal que $f(s)$ es solución única a su ecuación funcional. Entonces $f(s)$ es igual a una de las siguientes series de Dirichlet*

$$\textbf{(15)} \quad \big(1 - \frac{\sqrt{5}}{5^s}\big)\zeta(s), \qquad f_1(s), \qquad f_2(s) = 1 - \frac{1/\xi}{2^s} + \frac{1/\xi}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \frac{0}{5^s} + \cdots,$$

donde f_1 es la serie de Davenport-Heilbronn y la constante ξ está definida en la introducción §1.

Demostración. Por el Teorema 9, tenemos que los únicos espacios vectoriales de dimensión 1, para una serie de Dirichlet de período 5, están dados por

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_{1,1} \,&=\, \{f(s) : f(s) = -5^{-s+\frac{1}{2}}\chi_1(s) f(1-s)\},\\
\mathcal{V}_{0,2} \,&=\, \{f(s) : f(s) = 5^{-s+\frac{1}{2}}\chi_2(s) f(1-s)\},\\
\mathcal{V}_{1,2} \,&=\, \{f(s) : f(s) = -5^{-s+\frac{1}{2}}\chi_2(s) f(1-s)\}.
\end{aligned}$$

Para determinar $f(s)$ en el caso del espacio vectorial $\mathcal{V}_{1,1}$, por el Teorema 10, es suficiente resolver el siguiente problema de eigenvalores

$$\sum_{k=1}^{5} f_k \cos\big(2\pi j \frac{k}{5}\big) \,=\, \lambda\, f_j, \qquad\qquad j = 1, \cdots, 5.$$

Este problema tiene dos eigenvalores no triviales; $\lambda = -\sqrt{5}$ y $\lambda = \sqrt{5}$, donde el eigenvalor $\lambda = \sqrt{5}$ tiene multiplicidad 2. Entonces el único eigenvalor que nos interesa es $\lambda = -\sqrt{5}$, el cual corresponde al espacio vectorial $\mathcal{V}_{1,1}$ y un eigenvector asociado está dado por $(\gamma, \gamma, \gamma, \gamma, 1)$ donde $\gamma = -(1+\sqrt{5})/4$. Entonces

$$f(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1/\gamma}{5^s} + \cdots = \Big(1 - \frac{\sqrt{5}}{5^s}\Big)\zeta(s).$$

Ahora para determinar $f(s)$ en el caso de los espacios vectoriales $\mathcal{V}_{0,2}$ y $\mathcal{V}_{1,2}$, por el Teorema 10, es suficiente resolver el siguiente problema de eigenvalores

$$\sum_{k=1}^{5} f_k \operatorname{sen}\big(2\pi j \frac{k}{5}\big) \;=\; \lambda\, f_j, \qquad\qquad j = 1, \cdots, 5.$$

Este problema tiene dos eigenvalores no triviales; $\lambda = \sqrt{5}$ y $\lambda = -\sqrt{5}$. El eigenvalor $\lambda = \sqrt{5}$ corresponde al espacio vectorial $\mathcal{V}_{0,2}$ y en este caso un eigenvector asociado es igual a $(-1,\, -\xi,\, \xi\,, 1,\, 0)$, donde la constante $\xi = \big(\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} - 2\big)/(\sqrt{5} - 1)$. Entonces

$$f(s) \;=\; 1 + \frac{\xi}{2^s} - \frac{\xi}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \frac{0}{5^s} + \cdots \;=\; f_1(s).$$

Por otro lado el eigenvalor $\lambda = -\sqrt{5}$ corresponde al espacio vectorial $\mathcal{V}_{1,2}$ y un eigenvector asociado es igual a $(-1,\, 1/\xi,\, -1/\xi\,, 1,\, 0)$. Por lo tanto

$$f(s) \;=\; 1 - \frac{1/\xi}{2^s} + \frac{1/\xi}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \frac{0}{5^s} + \cdots \;=\; f_2(s). \;\blacksquare$$

Proposición 16. *Sea $f(s)$ una serie de Dirichlet con coeficientes periódicos de período 6 y tal que $f(s)$ es solución única a su ecuación funcional. Entonces $f(s)$ es igual a una de las siguientes series de Dirichlet*

$$\Big(1 - \frac{1-\sqrt{2}}{1+2^s}\Big) L(s, \chi_1^{(6)}), \qquad\qquad \Big(1 - \frac{1+\sqrt{2}}{1+2^s}\Big) L(s, \chi_1^{(6)}).$$

Demostración. Por el Teorema 9, tenemos que los únicos espacios vectoriales de dimensión 1, para una serie de Dirichlet de período 6, están dados por

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{0,2} &= \{f(s) : f(s) = 6^{-s+\frac{1}{2}}\chi_2(s)f(1-s)\}, \\ \mathcal{V}_{1,2} &= \{f(s) : f(s) = -6^{-s+\frac{1}{2}}\chi_2(s)f(1-s)\}. \end{aligned}$$

Para determinar $f(s)$ en estos espacios vectoriales, por el Teorema 10, es suficiente resolver el siguiente problema de eigenvalores

$$\sum_{k=1}^{6} f_k \operatorname{sen}\bigl(2\pi j \frac{k}{6}\bigr) \;=\; \lambda\, f_j, \qquad\qquad j = 1, \cdots, 6.$$

Este problema tiene dos eigenvalores no triviales; $\lambda = -\sqrt{6}$ y $\lambda = \sqrt{6}$. El eigenvalor $\lambda = -\sqrt{6}$ corresponde al espacio vectorial $\mathcal{V}_{0,2}$ y en este caso un eigenvector asociado es igual a $(-1,\, \kappa,\, 0, -\kappa,\, 1,\, 0)$, donde $\kappa = 1 + \sqrt{2}$. Entonces

$$f(s) \;=\; 1 - \frac{\kappa}{2^s} + \frac{0}{3^s} + \frac{\kappa}{4^s} - \frac{1}{5^s} + \frac{0}{6^s} + \cdots \;=\; \Bigl(1 - \frac{\kappa}{1+2^s}\Bigr)L(s, \chi_1^{(6)}).$$

Por otro lado el eigenvalor $\lambda = \sqrt{6}$ corresponde al espacio vectorial $\mathcal{V}_{1,2}$ y un eigenvector asociado es igual a $(-1,\, -1/\kappa,\, 0, 1/\kappa,\, 1,\, 0)$. Por lo tanto

$$f(s) \;=\; 1 + \frac{1/\kappa}{2^s} + \frac{0}{3^s} - \frac{1/\kappa}{4^s} - \frac{1}{5^s} + \frac{0}{6^s} + \cdots \;=\; \Bigl(1 + \frac{1/\kappa}{1+2^s}\Bigr)L(s, \chi_1^{(6)}). \quad \blacksquare$$

Proposición 17. *Sea $f(s)$ una serie de Dirichlet con coeficientes periódicos de período 7 y tal que $f(s)$ es solución única a su ecuación funcional. Entonces $f(s)$ es igual a la siguiente serie de Dirichlet*

$$f_3(s) \;=\; 1 - \frac{1+\omega}{2^s} - \frac{\omega}{3^s} + \frac{\omega}{4^s} + \frac{1+\omega}{5^s} - \frac{1}{6^s} + \frac{0}{7^s} + \cdots, \tag{18}$$

donde $\omega = 0.80194\cdots$.

Demostración. Por el Teorema 9, tenemos que el único espacio vectorial de dimensión 1, para una serie de Dirichlet de período 7, está dado por

$$\mathcal{V}_{1,2} \;=\; \{f(s) : f(s) = -7^{-s+\frac{1}{2}}\chi_2(s)f(1-s)\}.$$

Para determinar $f(s)$ en este espacio vectorial, por el Teorema 10, es suficiente resolver el siguiente problema de eigenvalores

$$\sum_{k=1}^{7} f_k \operatorname{sen}\bigl(2\pi j \frac{k}{7}\bigr) \;=\; \lambda\, f_j, \qquad\qquad j = 1, \cdots, 7.$$

Este problema tiene dos eigenvalores no triviales; $\lambda = -\sqrt{7}$ y $\lambda = \sqrt{7}$, donde el eigenvalor $\lambda = \sqrt{7}$ tiene multiplicidad 2. Entonces el único eigenvalor que nos interesa es $\lambda = -\sqrt{7}$, el cual corresponde al espacio vectorial $\mathcal{V}_{1,2}$ y el vector $(-1,\, 1{+}\omega,\, \omega,\, -\omega,\, -1{-}\omega,\, 1,\, 0)$ es un eigenvector asociado de $\lambda = -\sqrt{7}$, donde $\omega = 0.80194\cdots$. Entonces

$$f(s) \;=\; 1 - \frac{1+\omega}{2^s} - \frac{\omega}{3^s} + \frac{\omega}{4^s} + \frac{1+\omega}{5^s} - \frac{1}{6^s} + \frac{0}{7^s} + \cdots = \; f_3(s). \;\blacksquare$$

Proposición 19. *Sea $f(s)$ una serie de Dirichlet con coeficientes periódicos de período 8 y tal que $f(s)$ es solución única a su ecuación funcional. Entonces $f(s)$ es igual a la siguiente serie de Dirichlet*

$$\bigl(1 - \frac{\sqrt{2}}{2^s}\bigr) L(s, \chi_1^{(8)}),$$

donde $\chi_1^{(8)}(3) = -1$, $\chi_1^{(8)}(5) = 1$ y $\chi_1^{(8)}(7) = -1$ son caracteres de Dirichlet módulo 8.

Demostración. Por el Teorema 9, tenemos que el único espacio vectorial de dimensión 1, para una serie de Dirichlet de período 8, está dado por

$$\mathcal{V}_{1,2} \;=\; \{f(s) : f(s) = -8^{-s+\frac{1}{2}}\chi_2(s) f(1-s)\}.$$

Para determinar $f(s)$ dada en este espacio vectorial, por el Teorema 10, es suficiente resolver el siguiente problema de eigenvalores

$$\sum_{k=1}^{8} f_k \operatorname{sen}\bigl(2\pi j \frac{k}{8}\bigr) \;=\; \lambda\, f_j, \qquad\qquad j = 1, \cdots, 8.$$

Este problema tiene dos eigenvalores no triviales; $\lambda = -\sqrt{8}$ y $\lambda = \sqrt{8}$, donde el eigenvalor $\lambda = \sqrt{8}$ tiene multiplicidad 2. Entonces el único eigenvalor que nos interesa es $\lambda = -\sqrt{8}$, el cual corresponde al espacio vectorial $\mathcal{V}_{1,2}$ y un eigenvector asociado es igual a $(-1, \sqrt{2}, 1, 0, -1, -\sqrt{2}, 1, 0)$. Entonces

$$f(s) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2^s} - \frac{1}{3^s} + \frac{0}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{\sqrt{2}}{6^s} - \frac{1}{7^s} + \frac{0}{8^s} + \cdots = \big(1 - \frac{\sqrt{2}}{2^s}\big) L(s, \chi_1^{(8)}). \quad \blacksquare$$

De todas las series de Dirichlet periódicas que son solución única de una ecuación funcional, únicamente tres de ellas no se pueden escribir como un producto de Euler. Estas tres series son las siguientes; f_1 la cual está dada en (1), f_2 la cual esta definida en (15) y f_3 la cual esta dada en (18).

Ahora listamos algunos ceros fuera de la linea crítica de f_2. Nótese que algunos de estos ceros tienen parte real mayor que 1.

$$\begin{array}{lll}
2.30862 + 8.91836i, & 1.94374 + 18.8994i, & 2.09106 + 26.5450i, \\
2.15626 + 36.5556i, & 1.50497 + 44.8057i, & 2.33262 + 54.4201i, \\
1.78509 + 64.3711i, & 2.17279 + 72.0637i, & 0.69340 + 77.3469i, \\
2.05503 + 82.0598i, & 1.83279 + 89.9631i, & 2.34551 + 99.8614i, \\
1.18952 + 107.106i, & 1.33795 + 109.439i, & 2.22293 + 117.572i.
\end{array}$$

Finalmente, nosotros listamos algunos ceros fuera de la linea crítica de f_3. Nótese que algunos de estos ceros tienen parte real mayor que 1.

$$\begin{array}{lll}
1.34746 + 17.5286i, & 1.06162 + 28.4426i, & 1.30492 + 45.5320i, \\
1.01460 + 56.2793i, & 0.91718 + 63.7111i, & 1.33196 + 80.3522i, \\
1.22180 + 91.1756i, & 1.22009 + 108.402i, & 0.92165 + 119.323i, \\
1.28500 + 126.482i, & 1.08964 + 137.285i, & 0.91608 + 143.175i, \\
0.78002 + 146.163i, & 1.28909 + 154.268i, & 0.65384 + 161.521i.
\end{array}$$

Capítulo 2

Polinomios de Bernoulli y una fórmula de Hurwitz en la banda crítica

§1. Introducción.

En este capítulo nosotros consideramos la función zeta de Hurwitz, definida originalmente por

$$\zeta(s,a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^s}, \qquad 0 < a \leq 1, \qquad s = \sigma + it \quad \text{y} \quad \sigma > 1.$$

En [6] se demuestra que la transformada de Mellin de una serie de Fourier se puede evaluar en términos de series de Dirichelt, y se usa esta evaluación para dar una generalización de la fórmula de Euler-Maclaurin para la función zeta de Hurwitz.

Como corolario de la fórmula general de Euler-Maclaurin en [6], aquí nosotros obtenemos (ver Teorema 18) una nueva representación de la función zeta de Hurwitz en la franja crítica.

La fórmula de Euler-Maclaurin involucra los números y polinomios de Bernoulli. Es bien conocido que estos números y polinomios de Bernoulli tienen una función generatriz. La fórmula de Euler-Maclaurin propuesta en [6] involucra una generalización de los polinomios de Bernoulli. En la sección §2 consideramos estos polinomios de Bernoulli generalizados y obtenemos su función generatriz.

§2. Funciones generatrices.

Consideramos generalizaciones de las funciones y polinomios de Bernoulli. Sea $\mathcal{B}_0(x)$ una función periódica de período uno continua a pedazos tal que $\int_0^1 \mathcal{B}_0(x)\,dx = A_0$. El caso particular de que $\mathcal{B}_0(x) = 1$ para cada $0 \le x < 1$, corresponde al caso de los polinomios usuales de Bernoulli.

Para $n \in \mathbf{N}$, definimos

$$\mathcal{B}_n(x) = \int_0^x \mathcal{B}_{n-1}(y)\,dy + \int_0^1 (y-1)\mathcal{B}_{n-1}(y)\,dy. \tag{1}$$

Estas funciones $\mathcal{B}_n(x)$ satisfacen las siguientes propiedades,

$$\mathcal{B}_n'(x) = \mathcal{B}_{n-1}(x) \qquad \text{y} \qquad \int_0^1 \mathcal{B}_n(x)\,dx = 0.$$

Estas propiedades se obtienen directamente del teorema fundamental del cálculo y de integrar (1).

Otra forma de definir los polinomios generalizados de Bernoulli $\mathcal{B}_n(x)$, está dada en la siguiente proposición.

Proposición 2. *Sea $\mathcal{B}_0(x)$ una función periódica de período uno y continua a pedazos. Supongamos que $\int_0^1 \mathcal{B}_0(x)\,dx = A_0$. Para $n \ge 1$, sea $\mathcal{B}_n(x)$ como en (1). Entonces para $n \ge 1$,*

$$\mathcal{B}_n(x) = \Re\mathrm{e}\Big[2\sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i j x}}{(2\pi i j)^n}(A_j - A_0 - iB_j)\Big]$$

donde A_j y B_j son los coeficientes de Fourier de la función periódica $\mathcal{B}_0(x)$.

Demostración. Puesto que $\mathcal{B}_0(x)$ es continua a pedazos entonces es posible considerar su representación en términos de una serie de Fourier,

$$\mathcal{B}_0(x) = A_0 + 2\sum_{j=1}^{\infty}\big[A_j\cos(2\pi j x) + B_j\,\mathrm{sen}(2\pi j x)\big].$$

La operación definida en (1), aplicada a la constante A_0, da como resultado $A_0 \mathrm{B}_n(x)$, en donde $\mathrm{B}_n(x)$ es el polinomio usual de Bernoulli. Procedemos por inducción sobre n. Supongamos que se cumple la proposición para $k = n$ y demostremos que se satisface para $k = n + 1$. Por (1) obtenemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_{n+1}(x) - A_0\,\mathrm{B}_{n+1}(x) \;&=\; \int\limits_0^x \Re\mathrm{e}\Big[2\sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i j y}}{(2\pi i j)^n}\,(A_j - iB_j)\Big]\,dy \\
&\quad + \int\limits_0^1 (y-1)\,\Re\mathrm{e}\Big[2\sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i j y}}{(2\pi i j)^n}\,(A_j - iB_j)\Big]\,dy \\
&= \;\Re\mathrm{e}\Big\{2\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(A_j - iB_j)}{(2\pi i j)^n}\Big[\int\limits_0^x e^{2\pi i j y}\,dy + \int\limits_0^1 (y-1)\,e^{2\pi i j y}\,dy\Big]\Big\}
\end{aligned}$$

donde los $\mathrm{B}_n(x)$ son los polinomios usuales de Bernoulli y la integración término a término está justifacada dado que $\mathcal{B}_0(x)$ es una función continua a pedazos (ver Walker [36] Corolario 6.11, página 69). La demostración se sigue de observar que

$$\int\limits_0^x e^{2\pi i j y}\,dy + \int\limits_0^1 (y-1)\,e^{2\pi i j y}\,dy \;=\; \frac{1}{2\pi i j}\,e^{2\pi i j x}$$

y de observar que el polinomio usual de Bernoulli $\mathrm{B}_n(x)$ tiene la siguiente expansión en serie de Fourier (ver Lehmer [27])

$$\mathrm{B}_n(x) \;=\; \Re\mathrm{e}\Big[-2\sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i j x}}{(2\pi i j)^n}\Big]. \quad \blacksquare$$

En la siguiente proposición se obtiene una función generatriz para los polinomios generalizados de Bernoulli.

Proposición 3. *Sea $\mathcal{B}_0(x)$ una función periódica de período uno y continua a pedazos. Supongamos que $\int_0^1 \mathcal{B}_0(x)\,dx = A_0$. Sea $\{\mathcal{B}_n\}$ la sucesión de polinomios generalizados definidos por la ecuación* (1). *Entonces*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{B}_k(x)t^k = \frac{te^{xt}}{e^t-1}\Big[A_0 - \int_0^1 \mathcal{B}_0'(1-y)\ \frac{e^{ty}-1}{t}\,dy\Big] + \int_0^x e^{t(x-y)}\ \mathcal{B}_0'(y)\,dy.$$

Demostración. Procedemos aquí como en el Problema 9.785 en [1]. Sea

$$G(x,t) \,=\, \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{B}_k(x)t^k.$$

Consideremos la siguiente ecuación diferencial, en donde t se considera un parámetro fijo y la derivada es con respecto a x,

$$G' - tG \,=\, \mathcal{B}_0'.$$

Multiplicando ambos lados por e^{-xt} tenemos

$$\frac{d}{dx}(Ge^{-xt}) \,=\, e^{-xt}\mathcal{B}_0'(x).$$

Integrando de 0 a x obtenemos

$$G(x,t)e^{-xt} \,=\, G(0,t) + \int_0^x e^{-yt}\mathcal{B}_0'(y)\,dy.$$

Por lo cual

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{B}_k(x)\,t^k \,=\, C\,e^{xt} + \int_0^x e^{t(x-y)}\mathcal{B}_0'(y)\,dy, \tag{4}$$

donde $C = G(0,t)$. Ahora integrando nuevamente de 0 a 1 con respecto de x e intercambiando de manera formal la suma y la integral, tenemos que

$$A_0 \,=\, C\int_0^1 e^{xt}\,dx + \int_0^1\int_0^x e^{t(x-y)}\mathcal{B}_0'(y)\,dy\,dx$$

$$= C\frac{e^t-1}{t} + \int_0^1 \mathcal{B}_0'(1-y)\,\frac{e^{ty}-1}{t}\,dy.$$

Despenjado C y sustituyendo en (4) obtenemos el resultado. ∎

Recordemos que los números de Bernoulli B_n se definen mediante la igualdad $\mathrm{B}_n = \mathrm{B}_n(0)$, es decir, los polinomios de Bernoulli evaluados en $x = 0$. De manera similar nosotros podemos definir los números generalizados de Bernoulli mediante $\mathcal{B}_n = \mathcal{B}_n(0)$. Si consideramos, a modo de ejemplo, la función $\mathcal{B}_0(x) = -6x(x-1)$ entonces tenemos que la función generatriz para los números generalizados de Bernoulli $\mathcal{B}_n$ asociados a esta elección de $\mathcal{B}_0(x)$ está dada por

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{B}_k t^k \;=\; \frac{e^t(t^3 - 6te^t + 12e^t - 6t - 12)}{t^2(e^t-1)} + \frac{12 - 12e^t + 6te^t + 6t}{t^2}.$$

Así nosotros obtenemos

$$\mathcal{B}_1 = \frac{1}{2},\quad \mathcal{B}_2 = \frac{1}{10},\quad \mathcal{B}_3 = 0,\quad \mathcal{B}_4 = \frac{-1}{560},\quad \mathcal{B}_5 \,=\, 0,\quad \mathcal{B}_6 = \frac{13}{302400}\cdots.$$

Es bien sabido que, con recurso de los números de Bernoulli, es posible evaluar la función zeta de Riemann en los enteros positivos pares. De manera similar, los Polinomios generalizados de Bernoulli nos habilitan a evaluar ciertas series de Dirichlet en los números naturales. En el siguiente teorema se generalizan los resultados en [4].

Teorema 5. *Sea $\{f_j\}$ una sucesión de números complejos de período T, es decir, $f_{T+j} = f_j$ para cada $j \in \mathbf{N}$. Sean $f(s)$ y $g(s)$ dos series de Dirichlet con coeficientes periódicos de período T, definidas por*

$$f(s) \;=\; \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(A_j - A_0)}{j^s}\, f_j,$$

$$g(s) \;=\; \sum_{j=1}^{\infty} \frac{B_j}{j^s}\, f_j,$$

donde A_j *y* B_j *son los coeficientes de Fourier de* $\mathcal{B}_0(x)$. *Para* $j \in \mathbf{N}$, *sean*

$$\alpha_j \;=\; \sum_{k=1}^{T} f_k \cos\big(2\pi j \frac{k}{T}\big), \qquad\qquad \beta_j \;=\; \sum_{k=1}^{T} f_k \operatorname{sen}\big(2\pi j \frac{k}{T}\big).$$

Si $f_{T-j} \;=\; f_j$ *para cada* $j \in \{1, \cdots, T-1\}$, *entonces para cada* $n \in \mathbf{N}$ *tenemos que*

$$f(2n) \;=\; \frac{(-1)^n}{2T} (2\pi)^{2n} \sum_{j=1}^{T} \alpha_j \, \mathcal{B}_{2n}\big(\frac{j}{T}\big), \tag{6}$$

$$g(2n+1) \;=\; \frac{(-1)^{n+1}}{2T} (2\pi)^{2n+1} \sum_{j=1}^{T} \alpha_j \, \mathcal{B}_{2n+1}\big(\frac{j}{T}\big), \tag{7}$$

donde $\mathcal{B}_n(x)$ *es el* n*-énesimo polinomio generalizado de Bernoulli. Por otro lado si* $f_{T-j} \;=\; -f_j$ *para cada* $j \in \{1, \cdots, T-1\}$ *y* $f_T = 0$, *entonces para cada* $n \in \mathbf{N}$ *tenemos que*

$$f(2n+1) \;=\; \frac{(-1)^n}{2T} (2\pi)^{2n+1} \sum_{j=1}^{T} \beta_j \, \mathcal{B}_{2n+1}\big(\frac{j}{T}\big), \tag{8}$$

$$g(2n) \;=\; \frac{(-1)^n}{2T} (2\pi)^{2n} \sum_{j=1}^{T} \beta_j \, \mathcal{B}_{2n}\big(\frac{j}{T}\big). \tag{9}$$

Demostración. Sea $0 \leq x < 1$. Por la Proposición 2 tenemos que

$$\mathcal{B}_m(x) = \Re\mathrm{e}\Big[2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i k x}}{(2\pi i k)^m} (A_k - A_0 - iB_k)\Big],$$

donde A_k y B_k son los coeficientes de Fourier de $\mathcal{B}_0(x)$. Si $m = 2n$ y $n \in \mathbf{N}$, entonces

$$\frac{(-1)^n (2\pi)^{2n}}{2} \mathcal{B}_{2n}(x) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}} \big[(A_k - A_0)\cos(2\pi k x) + B_k \operatorname{sen}(2\pi k x)\big].$$

Ahora tomando $x = j/T$ con $j = 1, 2, 3, \cdots, T$, multiplicando ambos lados de la igualdad por números arbitrarios b_j y sumando sobre j, obtenemos

$$(\mathbf{10}) \qquad \frac{(-1)^n(2\pi)^{2n}}{2}\sum_{j=1}^{T} b_j\mathcal{B}_{2n}\Big(\frac{j}{T}\Big) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{T}\frac{b_j}{k^{2n}}(A_k - A_0)\cos\Big(2\pi k\frac{j}{T}\Big) + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{T}\frac{b_j}{k^{2n}}B_k\,\mathrm{sen}\Big(2\pi k\frac{j}{T}\Big).$$

Dados los coeficientes $f_1, f_2, \cdots, f_T$ de la serie de Dirichlet $f(s)$, nosotros queremos elegir $b_1, b_2, \cdots, b_T$ tal que para cada $k = 1, 2, \cdots, T$ tengamos que

$$f_k \;=\; \sum_{j=1}^{T} b_j\cos\Big(2\pi k\frac{j}{T}\Big).$$

Una condición necesaria y suficiente para que esta igualdad se cumpla es que $f_{T-j} = f_j$ para cada $j \in \{1, \cdots, T-1\}$. En este caso los números b_j están dados por (ver Apostol [2], Teorema 8.4, pág. 200)

$$b_j \;=\; \frac{1}{T}\sum_{\eta=1}^{T} f_\eta\cos\Big(2\pi j\frac{\eta}{T}\Big) \;=\; \frac{\alpha_j}{T}.$$

Sustituyendo b_j en (10) y observando que

$$\sum_{j=1}^{T}\cos\Big(2\pi\eta\frac{j}{T}\Big)\,\mathrm{sen}\Big(2\pi k\frac{j}{T}\Big) \;=\; 0,$$

para cualesquiera números naturales k y η fijos, nosotros tenemos que

$$\frac{(-1)^n}{2T}(2\pi)^{2n}\sum_{j=1}^{T}\alpha_j\,\mathcal{B}_{2n}\Big(\frac{j}{T}\Big) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(A_k - A_0)}{k^{2n}}f_k.$$

De manera similar se demuestran (7), (8) y (9). ∎

En el siguiente teorema vamos a considerar los casos $f(2n+1)$ y $g(2n)$ cuando $f_{T-j} = f_j$ para cada $j \in \{1, \cdots, T-1\}$ y también consideraremos los casos $f(2n)$ y $g(2n+1)$ cuando $f_{T-j} = -f_j$ para cada $j \in \{1, \cdots, T-1\}$ y $f_T = 0$. Para evaluar estos casos vamos a considerar la parte par y la parte impar de $\mathcal{B}_n(x)$ y después procederemos como en Berndt [8].

Teorema 11. *Supongamos las mismas hipótesis del Teorema 5. Sea*

$$\mathcal{B}_n^0(x) = \frac{\mathcal{B}_n(x) + \mathcal{B}_n(1-x)}{2} \quad \text{y sea} \quad \mathcal{B}_n^1(x) = \frac{\mathcal{B}_n(x) - \mathcal{B}_n(1-x)}{2},$$

para $0 \leq x < 1$. Sea $f(s)$ una función periódica de período uno y sean $\{\gamma_k\}$ números complejos. Nosotros escribimos

$$\widehat{f}(x, \gamma) = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^{T} \gamma_k \, f\Big(\frac{x+k}{T}\Big).$$

Si $f_{T-j} = f_j$ para cada $j \in \{1, \cdots, T-1\}$, entonces para cada $n \in \mathbf{N}$ tenemos que

$$f(2n+1) = (2\pi)^{2n+1} \frac{(-1)^n}{2T} \int_0^T \widehat{\mathcal{B}}_{2n+1}^1(x, \alpha) \cot\Big(\frac{\pi x}{T}\Big) \, dx, \tag{12}$$

$$g(2n) = (2\pi)^{2n} \frac{(-1)^n}{2T} \int_0^T \widehat{\mathcal{B}}_{2n}^1(x, \alpha) \cot\Big(\frac{\pi x}{T}\Big) \, dx. \tag{13}$$

Por otro lado si $f_{T-j} = -f_j$ para cada $j \in \{1, \cdots, T-1\}$ y $f_T = 0$, entonces

$$f(2n) = (2\pi)^{2n} \frac{(-1)^{n+1}}{2T} \int_0^T \widehat{\mathcal{B}}_{2n}^0(x, \beta) \cot\Big(\frac{\pi x}{T}\Big) \, dx, \tag{14}$$

$$g(2n+1) = (2\pi)^{2n+1} \frac{(-1)^n}{2T} \int_0^T \widehat{\mathcal{B}}_{2n+1}^0(x, \beta) \cot\Big(\frac{\pi x}{T}\Big) \, dx. \tag{15}$$

Demostración. Probaremos (12). Sea $0 \leq x < 1$. Por la Proposición 2 tenemos que

$$\mathcal{B}_m(x) = \Re\mathrm{e}\Big[2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi ikx}}{(2\pi ik)^m}(A_k - A_0 - iB_k)\Big],$$

donde A_k y B_k son los coeficientes de Fourier de $\mathcal{B}_0(x)$. Si $m = 2n+1$ y $n \in \mathbf{N}$, entonces

$$\mathcal{B}^1_{2n+1}(x) \;=\; \frac{2(-1)^n}{(2\pi)^{2n+1}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(A_j - A_0)}{j^{2n+1}} \,\mathrm{sen}(2\pi jx).$$

Haciendo el cambio de variable x por $(x+k)/T$, multiplicando ambos lados de la igualdad por α_k/T^2 y sumando respecto a k desde 1 hasta T obtenemos que

$$\sum_{k=1}^{T} \frac{\alpha_k}{T^2}\mathcal{B}^1_{2n+1}(\frac{x+k}{T}) \;=\; \frac{2(-1)^n}{T^2(2\pi)^{2n+1}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(A_j - A_0)}{j^{2n+1}} \sum_{k=1}^{T} \alpha_k \mathrm{sen}\big(2\pi j\frac{x+k}{T}\big).$$

Pero como $\alpha_{T-j} \;=\; \alpha_j$, entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{T} \alpha_k \mathrm{sen}\big(2\pi j\frac{x+k}{T}\big) \;&=\; \mathrm{sen}\big(2\pi j\frac{x}{T}\big) \sum_{k=1}^{T} \alpha_k \cos\big(2\pi j\frac{k}{T}\big) \\
&\quad + \cos\big(2\pi j\frac{x}{T}\big) \sum_{k=1}^{T} \alpha_k \mathrm{sen}\big(2\pi j\frac{k}{T}\big) \\
&= \mathrm{sen}\big(2\pi j\frac{x}{T}\big) \sum_{k=1}^{T} \alpha_k \cos\big(2\pi j\frac{k}{T}\big).
\end{aligned}$$

Por otro lado, si $f_{T-j} \;=\; f_j$ para cada $j \in \{1, \cdots, T-1\}$, entonces los coeficientes f_j están dados por

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{T}\alpha_k \cos\big(2\pi j\frac{k}{T}\big) \;&=\; \sum_{k=1}^{T}\sum_{m=1}^{T} f_m \cos\big(2\pi k\frac{m}{T}\big)\cos\big(2\pi j\frac{k}{T}\big)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{T} f_m \sum_{k=1}^{T}\Big[\cos\big(2\pi k\frac{m-j}{T}\big)+\cos\big(2\pi k\frac{m+j}{T}\big)\Big]\\
&= \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{T} f_m \sum_{k=1}^{T}\Big[\frac{e^{2\pi ik(m-j)/T}+e^{-2\pi ik(m-j)/T}}{2}\Big]\\
&\quad+\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{T} f_m \sum_{k=1}^{T}\Big[\frac{e^{2\pi ik(m+j)/T}+e^{-2\pi ik(m+j)/T}}{2}\Big]\\
&= T\,f_j,
\end{aligned}$$

donde la última igualdad se sigue de observar que

$$\sum_{k=1}^{T} e^{2\pi ik(m-j)/T} \;=\; \begin{cases} T & m\equiv j \pmod T,\\ 0 & m\not\equiv j \pmod T.\end{cases}$$

Por consiguiente

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(A_j-A_0)}{j^{2n+1}}\sum_{k=1}^{T}\alpha_k \operatorname{sen}\big(2\pi j\frac{x+k}{T}\big) \;=\; T\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(A_j-A_0)}{j^{2n+1}}\, f_j \operatorname{sen}\big(2\pi j\frac{x}{T}\big).$$

Por lo tanto si multiplicamos por $\cot(\pi x/T)$ e integramos de 0 a T con respecto de x, tenemos que

$$\begin{aligned}
&(2\pi)^{2n+1}\frac{(-1)^n}{2T}\int_0^T \widehat{\mathcal{B}}^1_{2n+1}(x,\alpha)\cot\big(\frac{\pi x}{T}\big)\,dx\\
&= \frac{1}{T}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(A_j-A_0)}{j^{2n+1}}\, f_j\int_0^T \operatorname{sen}\big(2\pi j\frac{x}{T}\big)\cot\big(\frac{\pi x}{T}\big)\,dx \;=\; f(2n+1),
\end{aligned}$$

donde la integración término a término está justificada dado que $\mathcal{B}_0(x)$ es una función continua a pedazos (ver Walker [36] Corolario 6.11, pág. 69) y donde la última igualdad se sigue de observar que

$$\int_0^T \operatorname{sen}\big(2\pi j\frac{x}{T}\big)\cot\big(\frac{\pi x}{T}\big)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^T \left\{ \frac{\operatorname{sen}\big(\frac{2\pi j}{T}+1\big)x}{\operatorname{sen}x} + \frac{\operatorname{sen}\big(\frac{2\pi j}{T}-1\big)x}{\operatorname{sen}x} \right\} dx$$

$$= \int_0^T \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{j-1}\cos(2\pi kx) + \sum_{k=1}^{j}\cos(2\pi kx) \right\} dx = T.$$

La identidad

$$\frac{\operatorname{sen}\big(\frac{2\pi j}{T}+1\big)x}{\operatorname{sen}x} = 1 + 2\sum_{k=1}^{j}\cos(2\pi kx)$$

se demuestra partiendo de la siguiente igualdad

$$2\operatorname{sen}x\,\cos(2mx) = \operatorname{sen}(2m+1)x - \operatorname{sen}(2m-1)x.$$

De manera similar se demuestra (13).

Ahora probaremos (15). Sea $0 \leq x < 1$. Por la Proposición 2 tenemos que

$$\mathcal{B}_m(x) = \Re\mathrm{e}\Big[2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{2\pi ikx}}{(2\pi ik)^m}(A_k - A_0 - iB_k)\Big],$$

donde A_k y B_k son los coeficientes de Fourier de $\mathcal{B}_0(x)$. Si $m = 2n+1$ y $n \in \mathbf{N}$, entonces tenemos que

$$\mathcal{B}^0_{2n+1}(x) = \frac{2(-1)^{n+1}}{(2\pi)^{2n+1}}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{B_j}{j^{2n+1}}\cos(2\pi jx).$$

Haciendo el cambio de variable x por $(x+k)/T$, multiplicando ambos lados de la igualdad por β_k/T^2 y sumando respecto a k desde 1 hasta T obtenemos que

$$\sum_{k=1}^{T}\frac{\beta_k}{T^2}\mathcal{B}^0_{2n+1}\big(\frac{x+k}{T}\big) = \frac{2(-1)^{n+1}}{T^2(2\pi)^{2n+1}}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{B_j}{j^{2n+1}}\sum_{k=1}^{T}\beta_k\cos\big(2\pi j\frac{x+k}{T}\big).$$

Pero como $\beta_{T-j} = -\beta_j$ entonces

$$\sum_{k=1}^{T} \beta_k \cos\big(2\pi j \frac{x+k}{T}\big) \;=\; \cos\big(2\pi j \frac{x}{T}\big) \sum_{k=1}^{T} \beta_k \cos\big(2\pi j \frac{k}{T}\big)$$
$$- \operatorname{sen}\big(2\pi j \frac{x}{T}\big) \sum_{k=1}^{T} \beta_k \operatorname{sen}\big(2\pi j \frac{k}{T}\big)$$
$$= -\operatorname{sen}\big(2\pi j \frac{x}{T}\big) \sum_{k=1}^{T} \beta_k \operatorname{sen}\big(2\pi j \frac{k}{T}\big).$$

Por otro lado tenemos que los coeficientes f_j están dados por (la prueba es similar a la anterior o bien ver Apostol [2], Teorema 8.4, pág. 200)

$$f_j \;=\; \frac{1}{T} \sum_{k=1}^{T} \beta_k \operatorname{sen}\big(2\pi j \frac{k}{T}\big).$$

Una condición suficiente y necesaria para que esta igualdad se cumpla es que $f_{T-j} = -f_j$ para cada $j \in \{1, \cdots, T-1\}$ y $f_T = 0$. Por consiguiente

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{B_j}{j^{2n+1}} \sum_{k=1}^{T} \beta_k \cos\big(2\pi j \frac{x+k}{T}\big) \;=\; -T \sum_{j=1}^{\infty} \frac{B_j}{j^{2n+1}}\, f_j \operatorname{sen}\big(2\pi j \frac{x}{T}\big).$$

Por lo tanto si multiplicamos por $\cot(\pi x/T)$ e integramos de 0 a T con respecto de x, tenemos que

$$(2\pi)^{2n+1} \frac{(-1)^n}{2T} \int_0^T \widehat{\mathcal{B}}^0_{2n+1}(x,\alpha) \cot\big(\frac{\pi x}{T}\big)\, dx$$
$$= \frac{1}{T} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{B_j}{j^{2n+1}}\, f_j \int_0^T \operatorname{sen}\big(2\pi j \frac{x}{T}\big) \cot\big(\frac{\pi x}{T}\big)\, dx \;=\; g(2n+1),$$

donde la integración término a término está justificada dado que $\mathcal{B}_0(x)$ es una función continua a pedazos (ver Walker [36] Corolario 6.11, pág. 69) y donde

$$\int_0^T \operatorname{sen}\big(2\pi j \frac{x}{T}\big) \cot\big(\frac{\pi x}{T}\big)\, dx \;=\; T.$$

De manera similar se demuestra (14). ∎

Otra manera de representar las fórmulas (12), (13), (14) y (15) es como sigue. Sea $B(x)$ alguna de las siguientes funciones $\widehat{\mathcal{B}}^1_{2n+1}(x,\alpha)$, $\widehat{\mathcal{B}}^1_{2n}(x,\alpha)$, $\widehat{\mathcal{B}}^0_{2n}(x,\beta)$ o $\widehat{\mathcal{B}}^0_{2n+1}(x,\beta)$. Por integración por partes tenemos que

$$\int_0^T B(x) \cot\big(\frac{\pi x}{T}\big)\, dx \;=\; -\frac{T}{\pi} \int_0^T B'(x) \log\Big[\operatorname{sen}\big(\frac{\pi x}{T}\big)\Big]\, dx.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
f(2n+1) \;&=\; \frac{(-1)^{n+1}}{T}(2\pi)^{2n} \int_0^T \widehat{\mathcal{B}}^0_{2n}(x,\alpha) \log\Big[\operatorname{sen}\big(\frac{\pi x}{T}\big)\Big]\, dx, \\
g(2n) \;&=\; \frac{(-1)^{n+1}}{T}(2\pi)^{2n-1} \int_0^T \widehat{\mathcal{B}}^0_{2n-1}(x,\alpha) \log\Big[\operatorname{sen}\big(\frac{\pi x}{T}\big)\Big]\, dx, \\
f(2n) \;&=\; \frac{(-1)^{n}}{T}(2\pi)^{2n-1} \int_0^T \widehat{\mathcal{B}}^1_{2n-1}(x,\beta) \log\Big[\operatorname{sen}\big(\frac{\pi x}{T}\big)\Big]\, dx, \\
g(2n+1) \;&=\; \frac{(-1)^{n+1}}{T}(2\pi)^{2n} \int_0^T \widehat{\mathcal{B}}^1_{2n}(x,\beta) \log\Big[\operatorname{sen}\big(\frac{\pi x}{T}\big)\Big]\, dx.
\end{aligned}$$

Terminamos esta sección con unos ejemplos ilustrativos del Teorema 5, el Teorema 11 y la Proposición 2.

Sea la función inicial $\mathcal{B}_0(x) \;=\; e^x - e^{-x}$ para $0 \leq x < 1$. Tenemos que la función generatriz para los polinomios generalizados de Bernoulli es igual a

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{B}_k(x)\, t^k \;=\; \frac{e^{-x}(1-t+2e^{x(t+1)}-e^{2x}(t+1))}{t^2-1} + \frac{te^{tx}}{e^t-1}(-2+\frac{te}{t-1}+\frac{t}{e(t+1)}-\frac{2e^t}{t^2-1}).$$

Tomando $n=1$ y aplicando (6) obtenemos que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{f_j}{(1+4j^2\pi^2)} \;=\; \frac{3+2e^{1/6}-\sqrt{e}+2e^{5/6}-3e}{6(e-1)},$$

donde $f_1=1$, $f_2=-1$, $f_3=-1$, $f_4=-1$, $f_5=1$, $f_6=1$ y además $f_{6+j}=f_j$.

Ahora por ejemplo si consideramos la función $\mathcal{B}_0(x)=\cos(\pi x)$ para $0\le x<1$, entonces tenemos que la función generatriz de los polinomios generalizados de Bernoulli es igual a

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{B}_k(x)\, t^k \;=\; \frac{\pi^2\cos(\pi x)(e^t-1)-t(2\,t\,e^{tx}-\pi\,\mathrm{sen}(\pi x)(e^t-1))}{(e^t-1)(\pi^2+t^2)}.$$

En este caso si tomamos $n=2$ y aplicamos (9) entonces obtenemos que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{f_j}{j(4j^2-1)} \;=\; \frac{\pi}{100}\sqrt{20\big(105-22\sqrt{5}-40\sqrt{6-2\sqrt{5}}\,\big)},$$

donde $f_1=1$, $f_2=1$, $f_3=-1$, $f_4=-1$, $f_5=0$ y además $f_{5+j}=f_j$.

Por otro lado si tomamos $x=1/4$ y aplicamos la Proposición 2, podemos evaluar cualquier serie de la forma

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mathrm{sen}(\pi j/2)}{j^m(4j^2-1)},$$

con m un número impar positivo. Por ejemplo si $m=9$, tenemos que

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(\pi j/2)}{j^9(4j^2-1)} \;=\; 64\pi(\sqrt{2}-1)-2\pi^3-\frac{5\pi^5}{96}-\frac{61\pi^7}{46080}-\frac{277\pi^9}{8257536}.$$

Por último consideramos $\mathcal{B}_0(x)=\operatorname{sen}(\pi x)$ para $0\le x<1$. Tomando $T=1$, $n=2$ y aplicando (12) con $f_j=1$ para cada $j\in\mathbf{N}$, obtenemos que

$$8\log(2)-4 \;=\; \zeta(3)+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^3(1-4j^2)} \;=\; \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\zeta(3+2k)}{4^k}$$

en donde $\zeta(s)$ es la función zeta de Riemann. Ahora por ejemplo si tomamos $T=5$, $n=1$ y aplicamos (13) entonces tenemos que

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{f_j}{(4j^2-1)} \;=\frac{3}{160}\sqrt{10(5+\sqrt{5})}\,\log\Big(\frac{5-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}\Big)$$

$$-\frac{1}{160}\sqrt{10(5-\sqrt{5})}\,\log\Big(\frac{3-\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}\Big),$$

donde

$$f_1 \;=\; \sqrt{1-2\sqrt{5}},\quad f_2 \;=\; \sqrt{1+2\sqrt{5}},\quad f_3=-f_2,\quad f_4=-f_1,\quad f_5=0$$

y además $f_{5+j}=f_j$.

§3. Fórmula de Hurwitz.

El siguiente teorema nos permite representar la transformada de Mellin de una serie de Fourier en términos de series de Dirichlet.

Teorema 16. *Sea $e(x) = e^{2\pi i x}$, consideremos la siguiente serie de Fourier*

$$\Delta(x) = \sum_{j\in\mathbf{Z}} c_j e(jx) = c_0 + 2\sum_{j=1}^{\infty}\{A_j \cos(2\pi jx) + B_j \operatorname{sen}(2\pi jx)\}$$

donde

$$A_j = \frac{c_j + c_{-j}}{2} = \int_{-1/2}^{+1/2} \Delta(x)\cos(2\pi jx)\,dx,$$

$$B_j = \frac{c_{-j} - c_j}{2} = \int_{-1/2}^{+1/2} \Delta(x)\operatorname{sen}(2\pi jx)\,dx.$$

Supongamos que $c_j \ll 1/|j|$ cuando $|j| \to \infty$. Sea ℓ un número real mayor o igual que uno. Para $s = \sigma + it$ tal que $\sigma > 1$, definamos

$$z(s) = \int_{1/\ell}^{\infty} x^{-s}\Delta(x)\,dx.$$

Entonces $z(s)$ se puede extender analíticamente (meromorficamente) a el semiplano $\sigma > 0$ si $c_0 = 0$ (si $c_0 \neq 0$). Ahora definamos para $\sigma > 0$ las siguientes series de Dirichelt

$$\mathcal{Z}_1(s) = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{A_j}{j^s}, \qquad \mathcal{Z}_2(s) = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{B_j}{j^s}$$

y para toda s las siguientes funciones χ

$$(\mathbf{17}) \qquad \begin{cases} \chi_1(s) = 2(2\pi)^{s-1}\Gamma(1-s)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi s}{2}\right), \\ \chi_2(s) = 2(2\pi)^{s-1}\Gamma(1-s)\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right). \end{cases}$$

Finalmente, para $0 < \sigma < 1$, definamos $\mathcal{E}(s) = -\int_0^{1/\ell} x^{-s}\Delta(x)\,dx$. Si $0 < \sigma < 1$ entonces

$$z(s) = \chi_1(s)\,\mathcal{Z}_1(1-s) + \chi_2(s)\,\mathcal{Z}_2(1-s) + \mathcal{E}(s).$$

Demostración. Ver §2. en [6]. ∎

En el siguiente resultado damos una representación de la función zeta de Hurwitz. Este es el principal resultado de este capítulo. También es interesante comparar nuestro resultado con el resultado de Boudjelkha ver [10].

Teorema 18. *Sea $\mathcal{B}_0(x)$ una función periódica de período uno definida en $\mathbf{R}$, tal que $\int_0^1 \mathcal{B}_0(x)\,dx = 1$. Para cada $x \in [\,0,1)$ y cada $n \in \mathbf{N}$, sea $\mathcal{B}_n(x)$ como en (1). Para $0 < a \leq 1$ y para $x \in \mathbf{R}$, sea*

$$\mathcal{B}_0(x-a) = 1 + 2\sum_{j=1}^{\infty}\big\{A_j(a)\cos(2\pi jx) + B_j(a)\operatorname{sen}(2\pi jx)\big\}$$

la expansión en serie de Fourier de $\mathcal{B}_0(x-a)$. Sean $\chi_1(s)$ y $\chi_2(s)$ como en (17). Supongamos además que existe $0 < b < a$ tal que $\mathcal{B}_0(x) = 0$ para $b \leq |x| \leq 1/2$. Entonces para $0 < \sigma < 1$ y para cada $n \in \mathbf{N}$,

$$\zeta(s,a) \;=\; \chi_1(s)\sum_{j=1}^{\infty}\frac{A_j(a)}{j^{1-s}} + \chi_2(s)\sum_{j=1}^{\infty}\frac{B_j(a)}{j^{1-s}} + \int\limits_{1/2}^{1-a}\frac{\mathcal{B}_0(x)}{(x+a-1)^s}\,dx$$

$$-\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\frac{(s)_k}{k!}e(x^k)\zeta(s+k,a) + O\Big\{t^{\frac{1}{2}}\big(\frac{n}{t}\big)^{\sigma}e^{\frac{1}{2}\pi t}e(|x|^n)\zeta(\sigma+n,a-b)\Big\}$$

donde $(s)_k = \prod_{\ell=0}^{k-\ell}(s+\ell)$ y además $e\big(f(x)\big) = \int\limits_{-1/2}^{+1/2} f(x)\mathcal{B}_0(x)\,dx$.

Demostración. Sea $0 < a \leq 1$ y cada $\sigma > 1$. Notemos primero que

$$\zeta(s,a) = \int\limits_{a}^{\infty} x^{-s}\mathcal{B}_0(x-a)\,dx - \int\limits_{a^-}^{\infty} x^{-s}d\mathcal{B}_1(x-a).$$

Sea η un entero positivo. Entonces tenemos que

$$\zeta(s,a)=\int\limits_a^{\infty} x^{-s}\mathcal{B}_0(x-a)\,dx-\int\limits_{a^-}^{\eta+a^-} x^{-s}d\mathcal{B}_1(x-a)-\int\limits_{\eta+a^-}^{\infty} x^{-s}d\mathcal{B}_1(x-a)$$

$$=\sum_{j=0}^{\eta-1}\frac{1}{(j+a)^s}+\int\limits_a^{\infty}\frac{\mathcal{B}_0(x-a)}{x^s}\,dx-\int\limits_a^{\eta+a}\frac{\mathcal{B}_0(x-a)}{x^s}\,dx-\int\limits_{\eta+a^-}^{\infty} x^{-s}d\mathcal{B}_1(x-a).$$

Nótese que $\int_a^\infty x^{-s}\,\mathcal{B}_0(x-a)\,dx$ tiene sentido sólo para $\sigma>1$. Mediante $\left\{\int_a^\infty x^{-s}\,\mathcal{B}_0(x-a)\,dx\right\}$ denotamos la continuación analítica de $\int_a^\infty x^{-s}\,\mathcal{B}_0(x-a)\,dx$ al semiplano $\sigma>0$. Si $0<\sigma<1$ entonces por el Teorema (16), nosotros obtenemos

$$\left\{\int\limits_a^{\infty}\frac{\mathcal{B}_0(x-a)}{x^s}\,dx\right\}-\int\limits_a^{\eta+a}\frac{\mathcal{B}_0(x-a)}{x^s}\,dx$$

$$=\chi_1(s)\sum_{j=1}^{\infty}\frac{A_j(a)}{j^{1-s}}+\chi_2(s)\sum_{j=1}^{\infty}\frac{B_j(a)}{j^{1-s}}-\int\limits_0^{\eta+a}\frac{\mathcal{B}_0(x-a)}{x^s}\,dx.$$

Sea J un entero no negativo. Integrando por partes, nosotros tenemos

$$-\int\limits_{\eta+a^-}^{\infty} x^{-s}d\mathcal{B}_1(x-a)=\sum_{j=0}^{J-1}(s)_j\frac{\mathcal{B}_{j+1}(a^--a)}{(\eta+a)^{s+j}}-(s)_J\int\limits_{\eta+a}^{\infty}\frac{\mathcal{B}_J(x-a)}{x^{s+J}}\,dx.$$

Por lo tanto cuando $\eta\to\infty$ tenemos la siguiente igualdad

$$\zeta(s,a)-\chi_1(s)\sum_{j=1}^{\infty}\frac{A_j(a)}{j^{1-s}}-\chi_2(s)\sum_{j=1}^{\infty}\frac{B_j(a)}{j^{1-s}}$$

$$=\int\limits_{1/2}^{1-a}\frac{\mathcal{B}_0(x)}{(x+a-1)^s}\,dx+\sum_{j=0}^{\infty}\int\limits_{-1/2}^{+1/2}\mathcal{B}_0(x)\left[\frac{1}{(j+a)^s}-\frac{1}{(x+j+a)^s}\right]dx.$$

Los términos en la suma anterior son iguales a

$$-\int_{-1/2}^{+1/2} \mathcal{B}_0(x)\left[\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(s)_k}{k!} \cdot \frac{(-x)^k}{(j+a)^{k+s}} + R_n(x,j)\right] dx$$

donde

$$R_n(x,j) = \frac{(s)_n}{n!} \cdot \frac{(-x)^n}{(\xi_x + j + a)^{n+s}} \qquad \text{y} \qquad 0 \le |\xi_x| \le |x|.$$

Por la fórmula de Stirling's $R_n(x,j) \ll \dfrac{t^{\frac{1}{2}}(n/t)^{\sigma} e^{\frac{1}{2}\pi t}|x|^n}{|\xi_x + j + a|^{n+\sigma}}$. Por lo tanto

$$\sum_{j=0}^{\infty} \int_{-1/2}^{+1/2} \mathcal{B}_0(x) R_n(x,j)\, dx \ll \sum_{j=0}^{\infty} \int_{-b}^{b} \mathcal{B}_0(x) \frac{t^{\frac{1}{2}}(n/t)^{\sigma} e^{\frac{1}{2}\pi t}|x|^n}{|\xi_x + j + a|^{n+\sigma}}\, dx$$

$$\le t^{\frac{1}{2}} \left(\frac{n}{t}\right)^{\sigma} e^{\frac{1}{2}\pi t} e(|x|^n) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(j+a-b)^{n+\sigma}}. \quad \blacksquare$$

Capítulo 3

Fórmula integral de Riemann-Siegel para la función zeta de Lerch

§1. Introducción.

La función zeta de Riemann admite la siguiente representación en términos de integrales definidas, ver Edwards [16],

$$\zeta(s) \;=\; I(s) + \pi^{s-\frac{1}{2}}\,\frac{\Gamma(1/2 - s/2)}{\Gamma(s/2)}\,\overline{I(1-\overline{s})} \tag{1}$$

en donde

$$I(s) \;=\; \int_{0\searrow 1} \frac{w^{-s}\,e^{-\pi i w^2}}{e^{\pi i w} - e^{-\pi i w}}\,dw. \tag{2}$$

Mediante $0 \searrow 1$ se denota el contorno de integración con parametrización $w = \alpha + \xi e^{-\frac{\pi}{4}i}$, en donde $\alpha \in (0,1)$ está fijo y ξ corre desde $-\infty$ hasta ∞.

La expresión (1) se conoce como la fórmula integral de Riemann-Siegel para la función zeta de Riemann. La fórmula (1) fue descubierta por Riemann en el siglo XIX pero no la publicó. Basándose en documentos póstumos de Riemann, finalmente Siegel [32] hizo pública la fórmula (1) en 1932. En la actualidad, (1) se conoce como la fórmula integral de Riemann-Siegel para la función zeta de Riemann.

Aparte de la fórmula (1), en el trabajo de Siegel [32] de 1932 también se consideró la así llamada fórmula de Riemann-Siegel (no confundir con la fórmula integral) para el cálculo numérico de la función zeta de Riemann. La fórmula de Riemann-Siegel resulta al aplicar el método del punto silla (ver de Bruijn [14]) a la siguiente representación integral, ver fórmula 2.4.2 en Titchmarsh [34],

$$\zeta(s) \;=\; \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i}\int_{H}\frac{\left(e^{-\pi i}\,w\right)^{s}}{e^{w}-1}\,\frac{dw}{w}. \qquad (\mathbf{3})$$

Aquí H denota un contorno de Hankel alrededor del origen.

En 1943, Siegel [33] obtuvo una fórmula de Riemann-Siegel para las funciones L de Dirichlet. La generalización de la fórmula de Riemann-Siegel a las funciones L de Dirichlet fue considerada también por Deuring [15]. Las fórmulas obtenidas por Siegel [33] y por Deuring [15] no hicieron posible el cálculo eficiente de las funciones L de Dirichlet. A partir de una representación para la función zeta de Hurwitz, análoga a la fórmula (3), Balanzario [5] obtuvo una fórmula de Riemann-Siegel para la función zeta de Hurwitz. El problema de obtener una fórmula de Rieman-Siegel para el cálculo numérico eficiente de las funciones zeta periódicas, fue considerado también por Davis [13], por Laurinchikas y Shyauchyunas [26]. En 1997, Guthmann [20] obtuvo una fórmula integral de Riemann-Siegel para formas modulares. En 1999, Guthmann [21] publicó una fórmula de Riemann-Siegel para formas modulares.

Por otro lado, en 1943 Turing [35] propuso una forma para el cálculo de la función zeta de Riemann. El método de Turing se basa en la fórmula integral de Riemann-Siegel (1). Para el cálculo numérico de la función zeta de Riemann, el método de Turing requiere más operaciones aritméticas de las requeridas por la fórmula de Riemann-Siegel. Sin embargo, al ser la fórmula de Riemann-Siegel una expansión asintótica, el error numérico cometido no puede hacerse arbitrariamente chico. Con el método de Turing se puede obtener el valor numérico de la función zeta de Riemann con un número arbitrariamente grande de cifras decimales. En el 2001 Galway [17] volvió a considerar el método de Turing aplicado a la función zeta de Riemann.

En este capítulo obtenemos la fórmula integral de Riemann-Siegel para la función zeta de Lerch descrita en el siguiente teorema.

Teorema 4. *Sea* $0 < a \leq 1$. *Sea* $0 < \lambda < 1$. *Sea*

$$L(\lambda, a, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i\lambda n}}{(n+a)^s} \qquad \text{para} \qquad \sigma > 1.$$

Para la prolongación analítica de $L(\lambda, a, s)$ *al semiplano* $\sigma > 0$, *se cumple que*

$$L(\lambda, a, s) = e^{-i\pi a(1+a+2\lambda)} \int_{0\searrow a} \frac{e^{-i\pi w^2+2\pi i w(a+\lambda)}}{e^{-2\pi i a}e^{i\pi w} - e^{-i\pi w}} w^{-s}\, dw$$

$$+ i e^{\pi i\lambda(\lambda+1)+\frac{\pi}{2}is} \frac{\Gamma(1-s)}{(2\pi)^{1-s}} \int_H \frac{e^{i\pi w^2+2\pi i w(a+\lambda)}}{e^{2\pi i\lambda}e^{i\pi w} - e^{-i\pi w}} w^{s-1}\, dw.$$

Aquí H *es el contorno de Hankel que va desde el punto al infinito* $\infty e^{\frac{\pi}{4}i}$ *hasta el origen* $w = 0$, *luego describe un círculo en sentido negativo (el sentido de las manecillas del reloj) y finalmente regresa al punto al infinito* $\infty e^{\frac{\pi}{4}i}$. *Mediante* $0 \searrow a$ *se denota el contorno de integración con parametrización* $w = \alpha + \xi e^{-\frac{\pi}{4}i}$, *en donde* $\alpha \in (0, a)$ *está fijo y* ξ *corre desde* $-\infty$ *hasta* ∞.

Esta fórmula integral del Teorema 4 hace posible aplicar el método de Turing para el cálculo numérico de alta precisión de la función zeta de Lerch y por lo tanto para el cálculo numérico de las funciones L de Dirichlet.

§2. Un lema auxiliar.

La prueba del siguiente lema es muy similar a la prueba del Lema 3.17 en [5]. Aquí nosotros hemos hecho las modificaciones apropiadas para aplicarlo a nuestros propósitos.

Lema 5. *Sea* $0 < a \leq 1$. *Sea* β *un número real tal que*

$$\frac{\beta}{2} - a + 1 \;<\; 1 \;<\; \frac{\beta}{2} - a + 2.$$

Sea

$$\Phi_a(\beta) \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{e^{\frac{i}{4\pi}u^2+\beta u}}{e^{-2\pi i a}e^u - 1}\,du,$$

donde L *es la linea recta que cruza el eje imaginario en* $i\pi\beta$, *hace un ángulo de* $3\pi/4$ *con el eje imaginario y se extiende al infinito en ambas direcciones. Entonces tenemos*

$$\Phi_a(\beta) \;=\; \frac{e^{i\pi\{\frac{\beta^2}{2}+\beta(a-1)-\frac{a^2}{2}+a-\frac{5}{8}\}}}{\cos\pi(\beta-a+1)}\cos\frac{\pi}{2}\Big(\beta-a+\frac{\sqrt{5}}{2}\Big)\Big(\beta-a-\frac{\sqrt{5}}{2}\Big).$$

Demostración. Sea $\varphi = e^{-2\pi i a}$. Entonces

$$\begin{aligned}\varphi\,\Phi_a(\beta+1) - \Phi_a(\beta) \;&=\; \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{e^{\frac{i}{4\pi}u^2}\big(\varphi\, e^{(\beta+1)u} - e^{\beta u}\big)}{\varphi e^u - 1}\,du \\ &=\; \frac{1}{2\pi i}\int_L e^{\frac{i}{4\pi}u^2+\beta u}\,du \;=\; \frac{e^{i\pi\beta^2}}{2\pi i}\int_L e^{\frac{i(u-2\pi i\beta)^2}{4\pi}}\,du.\end{aligned}$$

Si intercambiamos la recta L por una recta paralela a ella que cruza el eje imaginario por $2\pi i\beta$, de modo que $u - 2\pi i\beta$ pase a través del origen, entonces obtenemos que

$$\varphi\,\Phi_a(\beta+1) - \Phi_a(\beta) \;=\; -\frac{e^{i\pi\beta^2}}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{i}{4\pi}(te^{\frac{i\pi}{4}})^2}e^{\frac{i\pi}{4}}\,dt \;=\; e^{i\pi(\beta^2+\frac{3}{4})}.$$

Sea L^* una linea recta paralela a L y que cruza el eje imaginario 2π unidades abajo de L. Por las condiciones para a y β se cumple

$$\frac{\beta}{2} - 1 \;<\; a - 1 \;<\; \frac{\beta}{2}.$$

Multiplicando por 2π vemos que entre L^* y L, el integrando de $\Phi_a(\beta)$ tiene un polo en $2\pi i(a-1)$. Entonces

$$\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_L - \int_{L^*}\right\}\frac{e^{\frac{i}{4\pi}u^2+\beta u}}{\varphi e^u - 1}\,du \;=\; -e^{2\pi i(a-\frac{a^2}{2}+\beta(a-1))}.$$

Por otro lado

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L^*}\frac{e^{\frac{i}{4\pi}u^2+\beta u}}{\varphi e^u-1}\,du \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{e^{\frac{i}{4\pi}(u-2\pi i)^2+\beta(u-2\pi i)}}{\varphi e^u - 1}\,du$$

$$= \;-e^{-2\pi i\beta}\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{e^{\frac{i}{4\pi}u^2+u(\beta+1)}}{\varphi e^u-1}\,du \;=\; -e^{-2\pi i\beta}\Phi_a(\beta+1).$$

Por lo tanto

$$e^{-2\pi i a}\Phi_a(\beta+1) - \Phi_a(\beta) \;=\; e^{i\pi(\beta^2+\frac{3}{4})}$$

$$e^{-2\pi i\beta}\Phi_a(\beta+1) + \Phi_a(\beta) \;=\; -e^{2\pi i(a-\frac{a^2}{2}+\beta(a-1))}.$$

Sumando ambas igualdades tenemos que

$$\Phi_a(\beta+1) \;=\; \frac{e^{i\pi(\beta^2+\frac{3}{4})} - e^{2\pi i(a-\frac{a^2}{2}+\beta(a-1))}}{2\,e^{-(i\pi a+i\pi\beta)}\cos\pi(\beta-a+2)}$$

$$= \;\frac{e^{i\pi(\frac{\beta^2}{2}+a-\frac{a^2}{2}+\beta(a-1)+\frac{7}{8})}\cos\pi\big(\frac{\beta^2}{2}-a+\frac{a^2}{2}-\beta(a-1)-\frac{1}{8}\big)}{e^{-(i\pi a+i\pi\beta)}\cos\pi(\beta-a+2)}$$

$$= \;\frac{e^{i\pi(\frac{\beta^2}{2}+2a-\frac{a^2}{2}+\beta a+\frac{7}{8})}\cos\frac{\pi}{2}\big(\beta-a+1+\frac{\sqrt{5}}{2}\big)\big(\beta-a+1-\frac{\sqrt{5}}{2}\big)}{\cos\pi(\beta-a+2)}.$$

El lema se sigue al hacer la sustitución $\beta\mapsto\beta-1$. ∎

§3. Prueba del Teorema 4.

Para la prueba del Teorema 4, será necesario considerar las dos integrales $I(s)$ y $J(s)$ descritas en la siguiente definición.

Definición 6. Escribamos

$$f(w,\lambda) \;=\; \frac{e^{-i\pi w^2+2\pi i w(a-\lambda)}}{e^{-2\pi i a}e^{i\pi w}-e^{-i\pi w}} \qquad \text{y} \qquad h(w,\lambda) \;=\; \frac{e^{i\pi w^2+2\pi i w(a-\lambda)}}{e^{-2\pi i\lambda}e^{i\pi w}-e^{-i\pi w}}.$$

Para cada $s=\sigma+it$ tal que $\sigma<1$ sean

$$I(s) \;=\; \int_{0\nwarrow a} f(w,\lambda)\, w^{s-1}\, dw,$$

$$J(s) \;=\; -2i\,\mathrm{sen}(\pi s)\, e^{i\pi s} \int_0^{\infty i^{1/2}} h(w,\lambda)\, w^{-s}\, dw,$$

en donde $0\nwarrow a$ representa un contorno de integración que es una linea recta que cruza el eje real entre 0 y a, hace un ángulo de $3\pi/4$ con el eje real y se extiende al infinito en ambas direcciones. Por otro lado el contorno de integración en $J(s)$ es la linea recta que parte del origen y se prolonga hasta infinito a lo largo de la dirección $i^{1/2}$.

Proposición 7. *Sean $0<a\le 1$ y $0<|\lambda|<1$. Sea $s=\sigma+it$ tal que $\sigma<1$. Entonces*

$$L(-\lambda,\,a,\,1-s) \;=\; -e^{-i\pi a(1+a-2\lambda)}\, I(s) \;-\; e^{i\pi\lambda(\lambda-1)-\frac{\pi}{2}is}\, \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s}\, J(s)$$

en donde $I(s)$ y $J(s)$ son como en la Definición 6.

Demostración. Por el Lema 5 tenemos que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{e^{\frac{i}{4\pi}u^2+\beta u}}{e^{-2\pi i a}e^u-1}\, du \;=\; \frac{e^{i\pi\{\frac{\beta^2}{2}+\beta(a-1)-\frac{a^2}{2}+a-\frac{5}{8}\}}}{\cos\pi(\beta-a+1)}$$

$$\times\; \cos\frac{\pi}{2}\Big(\beta-a+\frac{\sqrt{5}}{2}\Big)\Big(\beta-a-\frac{\sqrt{5}}{2}\Big)$$

donde L es la linea recta que cruza el eje imaginario en $i\pi\beta$ y hace un ángulo de $3\pi/4$ con el eje imaginario. Escribiendo la función coseno en forma exponencial tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{e^{\frac{i}{4\pi}u^2+\beta u}}{e^{-2\pi i a}\, e^u-1}\, du \ &= \ \frac{e^{i\pi\beta^2+i\pi(a-\beta)-\frac{5}{4}\pi i}}{e^{i\pi(\beta-a+1)}+e^{-i\pi(\beta-a+1)}} \\ &\quad - \frac{e^{-i\pi a^2+2\pi i a\beta+2\pi i(a-\beta)}}{1+e^{-2\pi i(\beta-a+1)}}.\end{aligned} \tag{8}$$

Haciendo el cambio de variable $u = 2\pi i w$ obtenemos

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{e^{\frac{i}{4\pi}u^2+\beta u}}{e^{-2\pi i a}\, e^u-1}\, du \ = \int_{(a-1)\nwarrow a} \frac{e^{-i\pi w^2+2\pi i\beta w}}{e^{-2\pi i a}\, e^{2\pi i w}-1}\, dw \tag{9}$$

en donde se utilizó la relación entre a y β del Lema 5 para verificar que el contorno de integración L se transforma en el contorno $(a-1)\nwarrow a$. Tomando $\beta = v + 1/2$ tenemos que (8) y (9) implican

$$I_1(v) \ = \ I_2(v) + I_3(v) \tag{10}$$

en donde

$$I_1(v) \ = \int_{(a-1)\nwarrow a} \frac{e^{-i\pi w^2+2\pi i v w+i\pi w}}{e^{-2\pi i a}\, e^{2\pi i w}-1}\, dw,$$

$$I_2(v) \ = \ -\frac{e^{i\pi v^2+i\pi a}}{e^{i\pi(v-a)}-e^{-i\pi(v-a)}},$$

$$I_3(v) \ = \ \frac{e^{-i\pi a^2+3\pi i a-2\pi i v+2\pi i v a}}{1-e^{-2\pi i(v-a)}}.$$

Ahora multiplicamos ambos lados de (10) por $(v - a + \lambda)^{-s}$ donde $0 < |\lambda| < 1$ y $\sigma < 1$, e integramos respecto de v a lo largo de la recta que parte de $a-\lambda$ y se prolonga hasta infinito a lo largo de la dirección $i^{1/2}$. Con más precisión, el contorno de integración está dado por

$$\textbf{(11)} \qquad \begin{cases} v = a-\lambda + x e^{\frac{i\pi}{4}}, \\ \quad 0 \le x < \infty. \end{cases}$$

Entonces tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_{a-\lambda}^{\infty i^{1/2}} I_3(v)\,(v-a+\lambda)^{-s}\,dv &= \int_{a-\lambda}^{\infty i^{1/2}} \frac{e^{i\pi(3a-a^2)+2\pi i v(a-1)}}{1-e^{-2\pi i(v-a)}}(v-a+\lambda)^{-s}\,dv \\
&= e^{i\pi(a^2+a)} \int_0^{\infty i^{1/2}} \frac{e^{2\pi i(au+\lambda-u-a\lambda)}}{1-e^{-2\pi i(u-\lambda)}} u^{-s}\,du \\
&= e^{i\pi(a^2+a)-2\pi i\lambda a} \int_0^{\infty i^{1/2}} \frac{e^{-2\pi i(u-\lambda)}}{1-e^{-2\pi i(u-\lambda)}}\; e^{2\pi i u a}\, u^{-s}\,du \\
&= -e^{i\pi(a^2+a)-2\pi i\lambda a} \int_0^{\infty i^{1/2}} e^{2\pi i u a} \sum_{n=0}^{\infty} e^{2\pi i n(u-\lambda)}\, u^{-s}\,du \\
&= -e^{i\pi(a^2+a)-2\pi i\lambda a} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2\pi i n\lambda} \int_0^{\infty i^{1/2}} e^{2\pi i u(n+a)}\, u^{-s}\,du \\
&= e^{i\pi(a^2+a)-2\pi i\lambda a} \frac{i e^{\frac{i\pi}{2}s}}{(2\pi)^{1-s}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i n\lambda}}{(n+a)^{1-s}} \int_0^{\infty i^{3/2}} e^{w}\, w^{-s}\,dw \\
&= -i e^{i\pi(a^2+a)-2\pi i\lambda a} e^{-\frac{\pi i}{2}s}\, \frac{\Gamma(1-s)}{(2\pi)^{1-s}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i n\lambda}}{(n+a)^{1-s}}
\end{aligned}$$

donde la integración término a término de la serie queda justificado dado que

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^{\infty i^{1/2}} \frac{e^{2\pi i u(N+a)-2\pi i N\lambda}}{1-e^{2\pi i(u-\lambda)}}\, u^{-s}\, du \;=\; 0.$$

Si $|\lambda| \in (0,1)$ entonces el término $I_3(v)$ no tiene singularidad en $v = a-\lambda$. Esto implica que la integral $\int_{a-\lambda}^{\infty i^{1/2}} I_3(v)\,(v-a+\lambda)^{-s}\,dv$ converge de manera uniforme en s cuando s corre en subconjuntos compactos del semiplano $\sigma < 1$. Por lo tanto

$$\int_{a-\lambda}^{\infty i^{1/2}} \frac{I_3(v)}{(v-a+\lambda)^s}\,dv \;=\; -ie^{i\pi a(a+1-2\lambda)-\frac{\pi i}{2}s}\,\frac{\Gamma(1-s)}{(2\pi)^{1-s}}\,L(-\lambda,\,a\,,1-s)$$

extiende la función zeta de Lerch $L(\lambda,\,a,\,s)$ al semiplano $\sigma > 0$. En resumen

$$\textbf{(12)} \qquad \int I_3 = \mathrm{X}_3\,L \qquad \text{en donde} \qquad \mathrm{X}_3 = -ie^{i\pi a(a+1-2\lambda)-\frac{\pi i}{2}s}\,\frac{\Gamma(1-s)}{(2\pi)^{1-s}}.$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}\int_{a-\lambda}^{\infty i^{1/2}} I_2(v)(v-a+\lambda)^{-s}\,dv \;&=\; \int_{a-\lambda}^{\infty i^{1/2}} \frac{e^{i\pi v^2+i\pi a}}{e^{-i\pi(v-a)}-e^{i\pi(v-a)}}\,(v-a+\lambda)^{-s}\,dv\\
&=\; -\int_0^{\infty i^{1/2}} \frac{e^{i\pi(v^2+a^2+\lambda^2)-2\pi i\lambda(v+a)+i\pi a(2v+1)}}{e^{i\pi(v-\lambda)}-e^{-i\pi(v-\lambda)}}\,v^{-s}\,dv\\
&=\; -\,e^{i\pi a(a+1)+i\pi\lambda(\lambda-2a)}\int_0^{\infty i^{1/2}} \frac{e^{i\pi v^2+2\pi i v(a-\lambda)}}{e^{i\pi(v-\lambda)}-e^{-i\pi(v-\lambda)}}\,v^{-s}\,dv.\end{aligned}$$

En resumen

$$\textbf{(13)} \qquad \int I_2 \;=\; \mathrm{X}_2 \int_0^{\infty i^{1/2}} \qquad \text{en donde} \qquad \mathrm{X}_2 = -e^{i\pi a(a+1)+i\pi\lambda(\lambda-2a)}.$$

Por último consideramos la integral

$$\textbf{(14)} \quad \int_{a-\lambda}^{\infty i^{1/2}} \frac{I_1(v)\,dv}{(v-a+\lambda)^s} = \int_{a-\lambda}^{\infty i^{1/2}} \int_{(a-1)\nwarrow a} \frac{e^{-i\pi w^2+2\pi iwv+i\pi w}}{e^{-2\pi ia}\,e^{2\pi iw}-1} \cdot \frac{dw\,dv}{(v-a+\lambda)^s}.$$

Intercambiando formalmente el orden de integración nosotros tenemos que

$$\begin{aligned}
&\int_{a-\lambda}^{\infty i^{1/2}} \int_{(a-1)\nwarrow a} \frac{e^{-i\pi w^2+2\pi iwv+i\pi w}}{e^{-2\pi ia}\,e^{2\pi iw}-1}(v-a+\lambda)^{-s}\,dw\,dv \\
&= \int_{(a-1)\nwarrow a} \frac{e^{-i\pi w^2}}{e^{-2\pi ia}\,e^{i\pi w}-e^{-i\pi w}} \int_{a-\lambda}^{\infty i^{1/2}} e^{2\pi iwv}(v-a+\lambda)^{-s}\,dv\,dw \\
&= \int_{(a-1)\nwarrow a} \frac{e^{-i\pi w^2}}{e^{-2\pi ia}\,e^{i\pi w}-e^{-i\pi w}} \int_{0}^{\infty i^{1/2}} e^{2\pi iw(v-\lambda+a)}\,v^{-s}\,dv\,dw \\
&= \int_{(a-1)\nwarrow a} \frac{e^{-i\pi w^2+2\pi iw(a-\lambda)}}{e^{-2\pi ia}\,e^{i\pi w}-e^{-i\pi w}} \int_{0}^{\infty i^{1/2}} e^{2\pi iwv}\,v^{-s}\,dv\,dw.
\end{aligned}$$

Para justificar el intercambio anterior en el orden de las integrales, nótese que el contorno de integración $(a-1)\nwarrow a$ admite la siguiente parametrización $w = a_0 + x(-1+i)$, en donde a_0 es un número real tal que $a-1 < a_0 < a$ y en donde $-\infty < x < \infty$. Por otro lado v se puede tomar como $v = y(1+i)$ en donde $0 \le y < \infty$. Ahora bien

$$\Re\mathrm{e}(2\pi iwv) \;=\; -2\pi y a_0.$$

Por lo tanto la integral interior converge absolutamente cuando $a_0 > 0$. De aquí en adelante supondremos que $0 < a_0 < a$ y por lo tanto escribiremos $0 \nwarrow a$ en lugar de $(a-1)\nwarrow a$.

Haciendo el cambio de variable $v = x/2\pi i w$ tenemos que

$$\int_0^{\infty i^{1/2}} e^{2\pi i w v}\, v^{-s}\, dv \;=\; (2\pi w)^{s-1} e^{\frac{\pi}{2} i(s-1)} \int_0^{\infty e^{i\alpha}} e^x x^{-s}\, dx$$

en donde $\pi/2 < \alpha < 3\pi/2$. Por otra parte

$$\int_0^{\infty e^{i\alpha}} e^x x^{-s}\, dx \;=\; \int_0^{-\infty} e^x x^{-s}\, dx \;=\; -e^{-\pi i s}\,\Gamma(1-s).$$

Así entonces

$$\int_0^{\infty i^{1/2}} e^{2\pi i w v}\, v^{-s}\, dv \;=\; i(2\pi w)^{s-1}\, e^{-\frac{\pi}{2} i s}\,\Gamma(1-s).$$

Por lo tanto la integral doble en (14) es igual a

$$i\Gamma(1-s)(2\pi)^{s-1}\, e^{-\frac{\pi}{2} i s} \int_{0\nwarrow a} \frac{e^{-i\pi w^2 + 2\pi i w(a-\lambda)}}{e^{-2\pi i a}\, e^{i\pi w} - e^{-i\pi w}}\, w^{s-1}\, dw.$$

En resumen

(15) $$\int I_1 = \mathrm{X}_1 \int_{0\nwarrow a} \qquad \text{en donde} \qquad \mathrm{X}_1 = i\Gamma(1-s)(2\pi)^{s-1}\, e^{-\frac{\pi}{2} i s}.$$

Por (10), (12), (13) y (15) tenemos que

$$L \;=\; \frac{\mathrm{X}_1}{\mathrm{X}_3} \int_{0\nwarrow a} \;-\; \frac{\mathrm{X}_2}{\mathrm{X}_3} \int_0^{\infty i^{1/2}}$$

en donde

$$\frac{\mathrm{X}_1}{\mathrm{X}_3} \;=\; -\exp\big\{ -i\pi a(a+1-2\lambda)\big\}$$

y en donde

$$\frac{\mathrm{X}_2}{\mathrm{X}_3} \;=\; -2i\,e^{i\pi\lambda^2+\frac{\pi i}{2}s}\,\frac{\operatorname{sen}(\pi s)}{(2\pi)^s}\,\Gamma(s).$$

Esto termina la prueba de la Proposición 7. ∎

El propósito del siguiente lema es modificar el contorno de integración en $J(s)$ para llevarlo a un contorno de Hankel.

Lema 16. *Sea $|\lambda| \in (0,1)$ y sea $0 < r < |\lambda|$. Sea $\sigma < 1$. Consideremos el contorno de integración $\gamma(r) = C_1(r) + C_0(r) + C_2(r)$ en donde C_1, C_0 y C_2 son los siguientes contornos*

$$-C_1 = \begin{cases} w = \xi\,e^{\frac{\pi}{4}i}, \\ r \le \xi < \infty, \end{cases} \qquad -C_0 = \begin{cases} w = r\,e^{\theta i}, \\ -\dfrac{7\pi}{4} \le \theta \le \dfrac{\pi}{4}, \end{cases} \qquad C_2 = \begin{cases} w = \xi\,e^{-\frac{7\pi}{4}i}, \\ r \le \xi < \infty. \end{cases}$$

Sea $J(s)$ como en la Definición 6. Se cumple entonces que

$$J(s) \;=\; \lim_{r\to 0}\int_{\gamma(r)} h(w,\lambda)\,\frac{dw}{w^s}.$$

Demostración. La función $h(w,\lambda)$ tiene sus polos en $w = k+\lambda$ para $k \in \mathbf{Z}$. Puesto que $|\lambda| \in (0,1)$ y además $0 \le r < |\lambda|$ entonces $h(w,\lambda)$ es analítica en el disco $|w| \le r$. Por lo tanto existe una constante K tal que $|h(w,\lambda)| \le K$ para $|w| \le r$. Puesto que $\sigma < 1$, entonces

$$\int_{C_0(r)} h(w,\lambda)\,\frac{dw}{w^s} \;\ll\; 2\pi r\cdot K\frac{e^{\frac{\pi}{4}t}}{r^\sigma} \;\to\; 0$$

cuando $r \to 0$.

Para toda $0 \le r < |\lambda|$ se cumple que

$$\int_{C_2(r)} h(w,\lambda)\,\frac{dw}{w^s} \;=\; -e^{2\pi i s}\int_{C_1(r)} h(w,\lambda)\,\frac{dw}{w^s}.$$

Así entonces

$$\int_{\gamma(0)} \;=\; \int_{C_1(0)} + \int_{C_2(0)} \;=\; (1 - e^{2\pi i s}) \int_{C_1(0)}$$

y por lo tanto

$$\lim_{r\to 0} \int_{\gamma(r)} h(w,\lambda)\,\frac{dw}{w^s} \;=\; e^{\pi i s}\big(e^{-\pi i s} - e^{\pi i s}\big) \int_0^{\infty i^{1/2}} h(w,\lambda)\,\frac{dw}{w^s} \;=\; J(s). \;\blacksquare$$

El Teorema 4 se sigue de inmediato de la Proposición 7 y del Lema 16 al hacer las sustituciones $\lambda \mapsto -\lambda$ y $s \mapsto 1-s$.

§4. Preliminares al cálculo numérico.

Con objeto de calcular numericamente la función zeta de Lerch vamos primero a desplazar el contorno $0 \nwarrow a$ de la integral $I(s)$ hacia la derecha.

Lema 17. *Sea $n_0 \in \mathbf{N}$. Sea $f(w,\lambda)$ como en la Definición 6. Se cumple que*

$$I(s) \;=\; -\sum_{k=0}^{n_0} \frac{e^{-2\pi i\lambda(k+a)+i\pi a(a+1)}}{(k+a)^{1-s}} \;+\; \int f(w,\lambda)\,w^{s-1}\,dw$$

en donde la integral se toma sobre el contorno $(n_0+a) \nwarrow (n_0+a+1)$.

Demostración. La función $f(w,\lambda)\,w^{s-1}$ tiene polos en $w = k+a$ para cada $k \in \mathbf{Z}$, con residuos

$$e^{-2\pi i\lambda(k+a)+i\pi a(a+1)}\,\frac{(k+a)^{s-1}}{2\pi i}.$$

Puesto que $n_0 > 0$ entonces el cruce de los polos se realiza cerrando un contorno de integración orientado en sentido negativo. Por lo tanto los residuos deben multiplicarse por -1. $\blacksquare$

Ahora vamos a "inflar" el ojo del contorno de Hankel en la integral sobre $J(s)$.

Lema 18. *Sea* $0 < \lambda < 1$. *Sea* $n_1 \in \mathbf{N}$. *Sea* $\gamma(r)$ *el contorno descrito en el Lema 16. Se cumple entonces que*

$$\begin{aligned} J(s) \;=\; -e^{\pi i s} \sum_{k=0}^{n_1-1} \frac{e^{-2\pi i a(k+\lambda)-i\pi\lambda(\lambda+1)}}{(k+\lambda)^s} \\ - \sum_{k=1}^{n_1} \frac{e^{2\pi i a(k-\lambda)-i\pi\lambda(\lambda+1)}}{(k-\lambda)^s} + \int_{\gamma(n_1)} h(w,-\lambda)\, \frac{dw}{w^s}. \end{aligned}$$

Demostración. Cuando $|\lambda| \in (0,1)$, la función $h(w,\lambda)\, w^{-s}$ tiene polos en $w = k + \lambda$ para cada $k \in \mathbf{Z}$. Cuando $k < 0$ el residuo correspondiente es igual a

$$\frac{e^{2\pi i a(k+\lambda)-i\pi\lambda(\lambda-1)}}{2\pi i}\, |k+\lambda|^{-s}\, e^{i\pi s}.$$

Cuando $k \geq 0$ el residuo correspondiente es igual a

$$\frac{e^{2\pi i a(k+\lambda)-i\pi\lambda(\lambda-1)}}{2\pi i}\, |k+\lambda|^{-s}.$$

El lema se sigue al sumar estos residuos escribiendo $-\lambda$ en lugar de λ en donde $0 < \lambda < 1$. ∎

A continuación vamos a sustituir el contorno de Hankel $\gamma(n_1)$ por dos lineas paralelas.

Lema 19. *Sea* $0 < \lambda < 1$. *Sea* $n_1 \in \mathbf{N}$. *Sea* C_1 *la linea recta que cruza el eje real entre* $n_1 - \lambda$ *y* $n_1 - \lambda + 1$, *hace un ángulo de* $-3\pi/4$ *con el eje real y se extiende al infinito en ambas direcciones. Sea* C_2 *la linea recta que cruza el eje real entre* $-(n_1 + \lambda)$ *y* $-(n_1 + \lambda) + 1$, *hace un ángulo* *de $-7\pi/4$ con el eje real y se extiende al infinito en ambas direcciones. Se cumple entonces que*

$$\int_{\gamma(n_1)} h(w,-\lambda)\,\frac{dw}{w^s} \;=\; \int_{C_1} h(w,-\lambda)\,\frac{dw}{w^s} + \int_{C_2} h(w,-\lambda)\,\frac{dw}{w^s}.$$

Demostración. Sea α el punto donde C_1 intersecta al eje real. Sea $K > 0$. Consideremos los contornos de integración

$$-C_1(K) = \begin{cases} w = \alpha e^{-\frac{\pi}{2}i} + \xi e^{\frac{\pi}{4}i}, \\ \quad -K \leq \xi < \infty, \end{cases} \qquad C_2(K) = \begin{cases} w = \alpha e^{-i\pi} + \xi e^{-\frac{7}{4}\pi i}, \\ \quad -K \leq \xi < \infty. \end{cases}$$

Sea $w_1 \in C_1(K)$ y sea $w_2 \in C_2(K)$ los puntos correspondientes al valor $\xi = -K$ del parámetro en la representación paramétrica de los contornos $C_1(K)$ y $C_2(K)$. La integral de hw^{-s} sobre $\gamma(\alpha)$ es igual a la integral de hw^{-s} sobre el contorno que recorre primero $C_1(K)$, luego recorre el segmento de linea recta que va de w_1 a w_2 y finalmente recorre $C_2(K)$.

Es fácil ver que la integral sobre el segmento de linea recta que va de w_1 a w_2 es

$$\ll\; e^{-c_1 K^2} K^{-\sigma}$$

en donde $c_1 > 0$. Haciendo que $K \to \infty$, vemos que la integral sobre $\gamma(\alpha)$ es igual a la integral sobre $C_1(\infty)$ más la integral sobre $C_2(\infty)$. ∎

En la Proposición 20 que sigue vamos a resumir la discución de este apartado. Será esta expresión para la fórmula integral de Riemann-Siegel para la función zeta de Lerch, la que nos permitirá proceder según el método de Turing en el siguiente apartado. Es fácil desplazar el contorno C_2 del Lema 19 a la izquierda o a la derecha según sea conveniente. Al cruzar polos se deben tomar en cuenta los residuos correspondientes. Esto nos permite desacoplar las dos sumas del Lema 18.

Proposición 20. *Sean n_0, n_1 y n_2 números naturales. Sea $0 < \lambda < 1$. Sea $s = \sigma + it$ tal que $\sigma < 1$. Para la función zeta de Lerch se cumple que*

$$L(\lambda, a, 1-s) = \sum_{k=0}^{n_0} \frac{e^{2\pi i\lambda k}}{(k+a)^{1-s}} - e^{-i\pi a(1+a+2\lambda)} \int_{C_0} f(w,-\lambda)\, w^{s-1}\, dw$$

$$+ e^{-2\pi i a\lambda} \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s} \left[e^{\frac{\pi}{2} is} \sum_{k=0}^{n_2-1} \frac{e^{-2\pi iak}}{(k+\lambda)^s} - e^{-\frac{\pi}{2} is} \sum_{k=1}^{n_1} \frac{e^{2\pi iak}}{(k-\lambda)^s} \right]$$

$$- e^{i\pi\lambda(\lambda+1) - \frac{\pi}{2} is} \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s} \left\{ \int_{C_1} + \int_{C_2} \right\} h(w,-\lambda) \frac{dw}{w^s}$$

en donde $C_0 = (n_0 + a) \nwarrow (n_0 + a + 1)$, $C_1 = (n_1 - \lambda) \swarrow (n_1 - \lambda) + 1$ *y* $C_2 = -(n_2 + \lambda) \nearrow -(n_2 + \lambda) + 1$.

§5. Cálculo numérico.

Nuestra tarea ahora es elegir los valores de n_0, n_1 y n_2 en la Proposición 20 de tal manera que las integrales sobre f y sobre h se puedan calcular de manera conveniente.

Para la elección de n_0 nótese que la función $f(w,-\lambda)\, w^{s-1}$ tiene dos puntos silla. Por punto silla de $f(w,-\lambda)\, w^{s-1}$ nosotros entendemos aquel valor de w tal que $\phi'(w) = 0$, en donde

$$\phi(w) = -i\pi w^2 + 2\pi iw(a+\lambda) + i\pi w + (s-1)\log w.$$

Así entonces, los dos puntos silla de $f(w,-\lambda)\, w^{s-1}$ son

$$\textbf{(21)} \qquad w = \frac{A}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{A}{4}\right)^2 + \frac{s-1}{2\pi i}} \quad \text{en donde} \quad A = 2(a+\lambda) + 1.$$

Note que la función

$$f(w,-\lambda) = \frac{e^{-i\pi w^2 + 2\pi iw(a+\lambda) + i\pi w}}{e^{2\pi i(w-a)} - 1}$$

tiene polos en $w = k+a$ para cada $k \in \mathbf{Z}$. Ahora podemos hacer la elección de n_0. Sea

$$n_0 \;=\; [\beta_0 - a] \qquad \text{en donde} \qquad \beta_0 \;=\; \frac{A}{4} + \sqrt{\left(\frac{A}{4}\right)^2 + \frac{t}{2\pi}}. \tag{22}$$

En el siguiente lema vamos a estimar la contribución a la integral sobre f debida a los dos segmentos de linea recta que quedan después de remover la parte central del contorno de integración C_0.

Lema 23. *Sean $0 < \lambda < 1$ y $0 < a \leq 1$. Sea $A = 2(a+\lambda)+1$. Sea β_0 como en (22). Sea $0 < \sigma < 1$. Para $K > 0$, sea*

$$L_0(K) \;=\; \begin{cases} w = \beta_0 + \xi e^{\frac{3\pi}{4} i}, \\ K \leq |\xi| < \infty. \end{cases}$$

Sea $\Lambda_0 = 44\pi/100$. Se cumple entonces que

$$\left| \int_{L_0(K)} f(w, -\lambda)\, \frac{dw}{w^{1-s}} \right| \;\leq\; \frac{6}{5} \cdot \frac{\beta_0^{\sigma-1}}{\Lambda_0 K} \cdot \frac{e^{-\Lambda_0 K^2}}{||\beta_0 - a||}$$

en donde $||x|| = |x - [x+1/2]|$ es la distancia de x al conjunto $\mathbf{Z}$.

Demostración. Si $z = x+iy$ entonces

$$\left|\frac{1}{e^{2\pi i z} - 1}\right| \;\leq\; \max\left\{\frac{6}{5},\, \frac{3}{5}\sqrt{\frac{1}{||x||^2 + y^2}}\right\}. \tag{24}$$

Así pues, para cada $w \in L_0(0)$ tenemos que

$$\left|\frac{1}{e^{2\pi i (w-a)} - 1}\right| \;\leq\; \frac{3\sqrt{2}}{5\,||\beta_0 - a||}.$$

Por lo tanto $\left| \int_{L_0(K)} f(w,-\lambda)\, w^{s-1}\, dw \right|$ no es mayor que

$$\frac{3\sqrt{2}}{5\,||\beta_0 - a||} \int\limits_{|\xi|\geq K} \frac{\exp\big\{-\pi\xi^2 + \sqrt{2}\pi\beta_0\xi - \pi A\xi/\sqrt{2} - t\,F_0(\xi/\beta_0)\big\}}{\big|\beta_0 + \xi e^{\frac{3\pi}{4}i}\big|^{1-\sigma}}\, d\xi$$

en donde hemos escrito $F_0(\xi/\beta_0)$ en lugar de $\arg\big(\beta_0 + \xi e^{\frac{3\pi}{4}i}\big)$. Nótese que

$$F_0(\xi) \;=\; \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{\xi}{\sqrt{2}-\xi}\right) & \text{si } \xi < \sqrt{2}, \\[2ex] \pi + \arctan\left(\dfrac{\xi}{\sqrt{2}-\xi}\right) & \text{si } \xi > \sqrt{2}. \end{cases}$$

Aquí $\arctan(\xi)$ denota la función arco tangente usual, es decir, la función estrictamente creciente tal que $\arctan(x) \to \pm\pi/2$ cuando $x \to \pm\infty$ y tal que $\arctan(0) = 0$. Con el cambio de variable $\xi \mapsto \beta_0\xi$ vemos que $\left| \int_{L_0(K)} f(w,-\lambda)\, w^{s-1}\, dw \right|$ no es mayor que (ya que $0 < \sigma < 1$)

$$\frac{6\beta_0^\sigma}{5||\beta_0 - a||} \int\limits_{|\xi|\geq \frac{K}{\beta_0}} \exp\left\{\pi\beta_0^2\left(-\xi^2 + \sqrt{2}\xi - \frac{A\xi}{\beta_0\sqrt{2}} - \frac{t}{\pi\beta_0^2}F_0(\xi)\right)\right\} d\xi.$$

Por otro lado, para cada $t \geq 0$, cada $\xi \in \mathbf{R}$ y cada $1 < A \leq 5$, tenemos

$$-\xi^2 + \sqrt{2}\,\xi - \frac{A\,\xi}{\beta_0\sqrt{2}} - \frac{t}{\pi\beta_0^2}F_0(\xi) \;\leq\; -\frac{44}{100}\,\xi^2.$$

Por lo tanto $\left| \int_{L_0(K)} f(w,-\lambda)\, w^{s-1}\, dw \right|$ no es mayor que

$$\frac{12\,\beta_0^\sigma}{5\,||\beta_0 - a||} \int\limits_{K/\beta_0}^{\infty} e^{-\Lambda_0(\beta_0\xi)^2}\, d\xi \qquad \text{en donde} \qquad \Lambda_0 = \frac{44\pi}{100} = 1.3823\cdots.$$

Por último, nótese que

$$\int\limits_{K/\beta_0}^{\infty} e^{-\Lambda_0(\beta_0\xi)^2}\, d\xi \;\leq\; \frac{e^{-\Lambda_0 K^2}}{2K\Lambda_0\beta_0}. \;\blacksquare$$

Consideremos ahora la elección de n_1 y n_2. Nótese que $h(w,-\lambda)$ tiene dos puntos silla. Por punto silla de $h(w,-\lambda)w^{-s}$ nosotros entendemos aquel valor de w tal que $\phi'(w) = 0$, en donde

$$\phi(w) \;=\; i\pi w^2 + 2\pi i w(a+\lambda) + i\pi w - s\log w.$$

Así entonces, los dos puntos silla de $h(w,-\lambda)w^{-s}$ son

$$\textbf{(25)} \qquad w = -\frac{A}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{A}{4}\right)^2 + \frac{s}{2\pi i}} \quad \text{en donde} \quad A = 2(a+\lambda)+1.$$

Note que la función

$$h(w,-\lambda) \;=\; \frac{e^{i\pi w^2 + 2\pi i w(a+\lambda) + i\pi w}}{e^{2\pi i(w+\lambda)} - 1}$$

tiene polos en $w = k - \lambda$ para cada $k \in \mathbf{Z}$. Ahora podemos hacer la elección de n_1 y n_2. Sea

$$\textbf{(26)} \qquad n_1 \;=\; [\beta_1 + \lambda] \qquad \text{en donde} \qquad \beta_1 \;=\; -\frac{A}{4} + \sqrt{\left(\frac{A}{4}\right)^2 + \frac{t}{2\pi}}.$$

Finalmente, sea

$$\textbf{(27)} \qquad n_2 \;=\; -[\beta_2 + \lambda] \quad \text{en donde} \qquad \beta_2 \;=\; -\frac{A}{4} - \sqrt{\left(\frac{A}{4}\right)^2 + \frac{t}{2\pi}}.$$

En el siguiente lema vamos a estimar la contribución a la integral sobre h debida a los dos segmentos de linea recta que quedan después de remover la parte central del contorno de integración C_1. También se considera la integral sobre h a lo largo de C_2.

Lema 28. *Sean* $0 < \lambda < 1$ *y* $0 < a \leq 1$. *Sea* $A = 2(a+\lambda)+1$. *Sea* β_1 *como en (26). Sea* $0 < \sigma < 1$. *Para* $K > 0$, *sea*

$$L_1(K) \;=\; \begin{cases} w = \beta_1 + \xi e^{-\frac{3\pi}{4}i}, \\ \quad K \leq |\xi| < \infty. \end{cases}$$

Sea $\Lambda_1 = 8\pi/100$. *Si* $s = \sigma + it$ *es tal que* $t \geq 7$ *entonces*

$$\left| \int_{L_1(K)} h(w, -\lambda)\, \frac{dw}{w^s} \right| \leq \frac{6}{5} \cdot \frac{\beta_1^{-\sigma}}{\Lambda_1 K} \cdot \frac{e^{-\Lambda_1 K^2}}{||\beta_1 + \lambda||}$$

en donde $||x||$ *es la distancia de* x *al conjunto* $\mathbf{Z}$.

Demostración. Por (24), para cada $w \in L_1(0)$ tenemos que

$$\left| \frac{1}{e^{2\pi i(w+\lambda)} - 1} \right| \leq \frac{3\sqrt{2}}{5\,||\beta_1 + \lambda||}.$$

Por lo tanto $\left| \int_{L_1(K)} h(w, -\lambda)\, w^{-s}\, dw \right|$ no es mayor que

$$\frac{3\sqrt{2}}{5\,||\beta_1 + \lambda||} \int_{|\xi| \geq K} \frac{\exp\left\{ -\pi\xi^2 + \sqrt{2}\pi\beta_1\xi + \pi A\xi/\sqrt{2} + t\, F_1(\xi/\beta_1) \right\}}{\left| \beta_1 + \xi e^{-\frac{3\pi}{4} i} \right|^{\sigma}}\, d\xi$$

en donde hemos escrito $F_1(\xi/\beta_1)$ en lugar de $\arg\left(\beta_1 + \xi e^{-\frac{3\pi}{4} i} \right)$. Nótese que

$$F_1(\xi) = \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{\xi}{\xi - \sqrt{2}} \right) & \text{si } \xi < \sqrt{2}, \\[2ex] -\pi + \arctan\left(\dfrac{\xi}{\xi - \sqrt{2}} \right) & \text{si } \xi > \sqrt{2}. \end{cases}$$

Con el cambio de variable $\xi \mapsto \beta_1\xi$ vemos que $\left| \int_{L_1(K)} h(w, -\lambda)\, w^{-s}\, dw \right|$ no es mayor que (ya que $0 < \sigma < 1$)

$$\frac{6\beta_1^{1-\sigma}}{5||\beta_1 + \lambda||} \int_{|\xi| \geq \frac{K}{\beta_1}} \exp\left\{ \pi\beta_1^2 \left(-\xi^2 + \sqrt{2}\,\xi + \frac{A\,\xi}{\beta_1\sqrt{2}} + \frac{t}{\pi\beta_1^2} F_1(\xi) \right) \right\} d\xi.$$

Por otro lado, para cada $t \geq 7$, cada $\xi \in \mathbf{R}$ y cada $1 < A \leq 5$, tenemos

$$-\xi^2 + \sqrt{2}\,\xi + \frac{A\,\xi}{\beta_1\sqrt{2}} + \frac{t}{\pi\beta_1^2} F_1(\xi) \leq -\frac{8}{100}\xi^2.$$

Por lo tanto $\left| \int_{L_1(K)} h(w,-\lambda)\, w^{-s}\, dw \right|$ no es mayor que

$$\frac{12\,\beta_1^{1-\sigma}}{5\,||\beta_1+\lambda||} \int\limits_{K/\beta_1}^{\infty} e^{-\Lambda_1(\beta_1\xi)^2}\, d\xi \quad \text{en donde} \quad \Lambda_1 = \frac{8\pi}{100} = 0.2513\cdots.$$

Por último, nótese que

$$\int\limits_{K/\beta_1}^{\infty} e^{-\Lambda_1(\beta_1\xi)^2}\, d\xi \;\le\; \frac{e^{-\Lambda_1 K^2}}{2K\Lambda_1\beta_1}. \quad \blacksquare$$

Para la integral sobre h a lo largo del contorno C_2 damos a continuación dos estimaciones. Nótese en particular que en una de estas estimaciones no aparece la expresión $||\beta_2+\lambda||$ en el denominador. Esto se debe a que hacemos que el contorno C_2 pase justo en medio de dos polos.

Lema 29. *Sean $0<\lambda<1$ y $0<a\le 1$. Sea $A = 2(a+\lambda)+1$. Sea $0<\sigma<1$. Sea $\beta \in (-(n_2+\lambda), -(n_2+\lambda)+1)$ en donde n_2 es como en (27). Para cada $K>0$, sea*

$$L_2(K) \;=\; \begin{cases} w = \beta + \xi e^{-\frac{7\pi}{4}i}, \\ \quad K \le |\xi| < \infty. \end{cases}$$

Sea $\Lambda_2 = 44\pi/100$. Si $\beta=\beta_2$ en donde β_2 es como en (27) entonces

$$\left| \int\limits_{L_2(K)} h(w,-\lambda)\, \frac{dw}{w^s} \right| \;\le\; \frac{6}{5}\cdot\frac{|\beta_2|^{-\sigma}}{\Lambda_2 K}\cdot\frac{e^{-\Lambda_2 K^2}}{||\beta_2+\lambda||}\, \exp\big\{-\pi t\big\}.$$

En caso de que $\beta = -(n_2+\lambda)+\dfrac{1}{2}$, en donde n_2 es como en (27), entonces

$$\left| \int\limits_{L_2(0)} h(w,-\lambda)\, \frac{dw}{w^s} \right| \;\le\; 4\,\exp\Big\{17\pi - \frac{54\pi}{100}t\Big\}.$$

Demostración. Suponga que $\beta \in (-(n_2+\lambda), -(n_2+\lambda)+1)$. Por (24), para cada $w \in L_2(0)$ tenemos que

$$\Big|\frac{1}{e^{2\pi i(w+\lambda)}-1}\Big| \;\le\; \frac{3\sqrt{2}}{5\,||\beta+\lambda||}.$$

Por lo tanto $\big|\int_{L_2(K)} h(w,-\lambda)\,w^{-s}\,dw\big|$ no es mayor que

$$\frac{3\sqrt{2}}{5\,||\beta+\lambda||}\int\limits_{|\xi|\ge K}\frac{\exp\big\{-\pi\xi^2-\sqrt{2}\pi\beta\xi-\pi A\xi/\sqrt{2}+t\,F_2(\xi/|\beta|)\big\}}{\big|\beta+\xi e^{-\frac{7\pi}{4}i}\big|^{\sigma}}\,d\xi$$

en donde hemos escrito $F_2(\xi/|\beta|)$ en lugar de $\arg\big(\beta+\xi e^{-\frac{7\pi}{4}i}\big)$. Nótese que

$$F_2(\xi) \;=\; \begin{cases} -\pi-\arctan\Big(\dfrac{\xi}{\sqrt{2}-\xi}\Big) & \text{si } \xi<\sqrt{2},\\[2ex] -\,2\pi-\arctan\Big(\dfrac{\xi}{\sqrt{2}-\xi}\Big) & \text{si } \xi>\sqrt{2}.\end{cases}$$

Con el cambio de variable $\xi\mapsto|\beta|\xi$ vemos que $\big|\int_{L_2(K)} h(w,-\lambda)\,w^{-s}\,dw\big|$ no es mayor que

$$\frac{6\,|\beta|^{1-\sigma}}{5\,||\beta+\lambda||}\int\limits_{|\xi|\ge\frac{K}{|\beta|}}\exp\Big\{\pi\beta^2\Big(-\xi^2+\sqrt{2}\,\xi+\frac{A\,\xi}{\beta\sqrt{2}}+\frac{t}{\pi\beta^2}F_2(\xi)\Big)\Big\}\,d\xi.$$

Aquí hemos utilizado que $0<\sigma<1$. Si $\beta=\beta_2$ en donde β_2 es como en (27) entonces

$$-\xi^2+\sqrt{2}\,\xi+\frac{A\,\xi}{\beta\sqrt{2}}+\frac{t}{\pi\beta^2}F_2(\xi)\;\le\;-\frac{44}{100}\,\xi^2-\frac{t}{\beta^2}$$

para cada $t\ge 0$, cada $\xi\in\mathbf{R}$ y cada $1<A\le 5$. De esta manera, obtenemos que $\big|\int_{L_2(K)} h(w,-\lambda)\,w^{-s}\,dw\big|$ es menor o igual que

$$e^{-\pi t}\,\frac{12\,|\beta_2|^{1-\sigma}}{5\,||\beta_2+\lambda||}\int\limits_{K/|\beta_2|}^{\infty} e^{-\Lambda_2(\beta_2\xi)^2}\,d\xi \quad\text{en donde}\quad \Lambda_2=\frac{44\pi}{100}=1.3823\cdots.$$

Por último, nótese que

$$\int_{K/|\beta_2|}^{\infty} e^{-\Lambda_2(\beta_2\xi)^2}\, d\xi \;\le\; \frac{e^{-\Lambda_2 K^2}}{2K\Lambda_2|\beta_2|}.$$

Supongamos ahora que $\beta = -(n_2+\lambda)+1/2$ en donde n_2 es como en (27). En este caso, para cada $w \in L_2(0)$ tenemos

$$\Big|\frac{1}{e^{2\pi i(w+\lambda)}-1}\Big| \;\le\; \sqrt{2}.$$

De aquí que $\big|\int_{L_2(0)} h(w,-\lambda)\, w^{-s}\, dw\big|$ no es mayor que

$$\textbf{(30)}\qquad 2|\beta|^{1-\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\Big\{\pi\beta^2\Big(-\xi^2+\sqrt{2}\,\xi+\frac{A\xi}{\beta\sqrt{2}}+\frac{t}{\pi\beta^2}F_2(\xi)\Big)\Big\}\, d\xi.$$

Puesto que $-7\pi/4 \le F_2(\xi) \le -3\pi/4$, vemos entonces que

$$-\xi^2+\sqrt{2}\,\xi+\frac{A\xi}{\beta\sqrt{2}}+\frac{t}{\pi\beta^2}F_2(\xi) \;\le\; -(\xi-B)^2+B^2-\frac{3t}{4\beta^2}$$

en donde $B = \dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{A}{2\beta\sqrt{2}}$. Por lo tanto

$$\beta^2\Big(B^2-\frac{3t}{4\beta^2}\Big) \;=\; \Big(\frac{\beta}{\sqrt{2}}+\frac{A}{2\sqrt{2}}\Big)^2-\frac{3t}{4}.$$

Nótese ahora que

$$\beta = [\beta_2+\lambda]-\lambda+\frac{1}{2} \ge \beta_2-\frac{1}{2} \qquad \text{de modo que} \qquad |\beta| \le |\beta_2|+\frac{1}{2}.$$

Puesto que además $A \le 5$, entonces

$$\Big|\frac{\beta}{\sqrt{2}}+\frac{A}{2\sqrt{2}}\Big| \;\le\; \frac{|\beta_2|}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{5}{2\sqrt{2}} \;=\; \frac{|\beta_2|}{\sqrt{2}}+\frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Por otro lado tenemos que, para toda $t \geq 0$,

$$(|\beta_2| + 3)^2 \ \leq \ \left\{3 + \frac{5}{4} + \sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2 + \frac{t}{2\pi}}\right\}^2 \ \leq \ 34 + \frac{126}{100}\frac{t}{\pi}.$$

Vemos entonces que

$$\beta^2\Big(B^2 - \frac{3t}{4\beta^2}\Big) \ \leq \ 17 + \frac{63}{100}\frac{t}{\pi} - \frac{3t}{4} \ \leq \ 17 - \frac{54}{100}t.$$

Al multiplicar esta desigualdad por π vemos que (30) es menor o igual que

$$2|\beta|^{1-\sigma}\exp\Big\{17\pi - \frac{54\pi}{100}t\Big\}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi\beta^2(\xi-B)^2}\,d\xi \ = \ \frac{2}{|\beta|^\sigma}\exp\Big\{17\pi - \frac{54\pi}{100}t\Big\}.$$

Note que $|\beta|^{-\sigma} \leq 2^\sigma \leq 2$. Esto termina la demostración. ∎

Antes de enunciar un algoritmo para el cálculo de la función zeta de Lerch, será necesario un par de lemas adicionales.

Lema 31. *Sea n_2 como en (27). Sea $0 < \lambda < 1$. Sea $s = \sigma + it$ en donde $0 < \sigma < 1$. Se cumple que*

$$\left|\sum_{k=0}^{n_2-1}\frac{e^{-2\pi iak}}{(k+\lambda)^s}\right| \ \leq \ \frac{1}{\lambda^\sigma} + \frac{1+\sqrt{t}}{1-\sigma}.$$

Demostración. Si $n \geq 0$ entonces

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(k+\lambda)^\sigma} \ \leq \ \frac{1}{\lambda^\sigma} + \int_0^n \frac{dx}{(x+\lambda)^\sigma} \ \leq \ \frac{1}{\lambda^\sigma} + \frac{n}{1-\sigma}.$$

El lema se cumple ya que $n_2 \leq 1 + \sqrt{t}$. ∎

Para la demostración del siguiente lema ver [22] página 95.

Lema 32. *Para la función gamma se cumple, para cada $t \geq 0$, que*

$$|\Gamma(\sigma+it)| \leq \frac{5}{2}\frac{e^{-\frac{\pi}{2}t}}{\sigma}(t+1)^{\sigma-\frac{1}{2}}.$$

Ahora podemos hacer un resumen de toda la discusión hasta este punto y concluir presentando una forma de calcular la función zeta de Lerch $L(\lambda, a, s)$. Para esto, sea $\gamma_j(K)$ el segmento finito de linea recta tal que $C_j = \gamma_j(K) + L_j(K)$ para cada $K > 0$ y en donde C_j, con $j = 0, 1, 2$, son como en la Proposición 20 y además $L_0(K)$, $L_1(K)$ y $L_2(K)$ son como en los Lemas 23, 28 y 29. Así entonces $\gamma_j(K)$ es la parte central de los contornos de integración C_j, es decir, lo que queda después de remover los extremos $L_j(K)$.

Si la función zeta de Lerch $L(\lambda, a, 1-s)$ se aproxima mediante los cuatro términos siguientes

$$\sum_{k=0}^{n_0} \frac{e^{2\pi i\lambda k}}{(k+a)^{1-s}} - e^{-2\pi i a\lambda - \frac{\pi}{2}is}\frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s}\sum_{k=1}^{n_1}\frac{e^{2\pi i a k}}{(k-\lambda)^s}$$

$$-\,e^{-i\pi a(1+a+2\lambda)}\int\limits_{\gamma_0(K_0)} f(w,-\lambda)\,\frac{dw}{w^{1-s}} - e^{i\pi\lambda(\lambda+1)-\frac{\pi}{2}is}\frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s}\int\limits_{\gamma_1(K_1)} h(w,-\lambda)\,\frac{dw}{w^s}$$

entonces, para cada $t \geq 7$, el error cometido no es mayor que

$$\frac{6}{5}\left\{\frac{\beta_0^{\sigma-1}}{\Lambda_0 K_0}\cdot\frac{e^{-\Lambda_0 K_0^2}}{||\beta_0 - a||} + \frac{5(t+1)^{\sigma-\frac{1}{2}}}{2\sigma\,(2\pi)^\sigma}\cdot\frac{\beta_1^{-\sigma}}{\Lambda_1 K_1}\cdot\frac{e^{-\Lambda_1 K_1^2}}{||\beta_1+\lambda||}\right\}$$

$$+\,\frac{5(t+1)^{\sigma-\frac{1}{2}}}{2\sigma\,(2\pi)^\sigma}\left\{4\,\exp\left(17\pi - \frac{54\pi}{100}t\right) + \left(\frac{1}{\lambda^\sigma} + \frac{1+\sqrt{t}}{1-\sigma}\right)e^{-\pi t}\right\}$$

en donde β_0 y β_1 son como en (22) y (26) respectivamente.

El parrafo anterior expresa la idea esencial del método de Turing. Tanto en el trabajo de Turing [35], como también en el de Galway [17], se dan estimaciones para el error cometido cuando se aproxima númericamente las integrales $\int_{\gamma_j(K_j)}$ en el caso de que la cuadratura se lleve a cabo mediante el método más elemental que consiste en aproximar una integral mediante sus sumas de Riemann. Estas estimaciones del error han sido discutidas por Crouch y Siegelman [11], por Goodwin [18] y por McNamee [28]. Es claro, sin embargo que hay métodos más eficientes para llevar a cabo la cuadratura numérica que el usar sumas de Riemann: el método de Simpson por ejemplo.

Finalmente debe notarse que hemos propuesto un modo de calcular $L(\lambda, a, 1-s)$ en lugar de la expresión más natural $L(\lambda, a, s)$. Esto se justifica por el hecho de que los puntos silla que resultan al considerar $L(\lambda, a, 1-s)$ están muy cerca del eje real. Esto último permite evitar la aparición de términos exponencialmente grandes.

Bibliografía

[1] **Agnew, R.P.** *Diferential equations.* Second edition. McGraw-Hill, 1960.

[2] **Apostol, T.M.** *Introduction to analytic number theory.* Springer-Verlag, 1976.

[3] **Auslander, L.; Tolimieri, R.** *Is computing with the finite Fourier transform pure or applied mathematics?* Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 1 (1979), no. 6, 847-897.

[4] **Balanzario, E.P.** *Evaluation of Dirichlet series.* Amer. Math. Monthly 108 (2001), no. 10, 969-971.

[5] **Balanzario, E.P.** *A Riemann-Siegel formula for the Hurwitz zeta function.* Bol. Soc. Mat. Mexicana (3) 10 (2004), no. 1, 1-13.

[6] **Balanzario, E.P.** *A generalized Euler-Maclaurin formula for the Hurwitz zeta function.* Math. Slovaca 56 (2006), no. 3, 307-316.

[7] **Balanzario, E.P.; Sánchez-Ortiz, J.** *Zeros of the Davenport-Heilbronn counterexample.* Math. Comp. 76 (2007), no. 260, 2045-2049.

[8] **Berndt, B.C.** *Character analogues of the Poisson and Euler-MacLaurin summation formulas with applications.* J. Number Theory 7 (1975), no. 4, 413-445.

[9] **Booker, A.R.** *Turing and the Riemann hypothesis.* Notices Amer. Math. Soc. 53 (2006), no. 10, 1208-1211.

[10] **Boudjelkha, M.T.** *A proof that extends Hurwitz formula into the critical strip.* Appl. Math. Lett. 14 (2001), no. 4, 399-403.

[11] **Crouch, E.A.C.; Spiegelman, D.** *The evaluation of integrals of the form* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\exp(-t^2)\,dt$*: application to logistic-normal models.* J. Amer. Statist. Assoc. 85 (1990), no. 410, 464-469.

[12] **Davenport, H.; Heilbronn, H.** *On the zeros of certain Dirichlet series I, II.* J. London Math. Soc. 11 (1936) 181-185, 307-312.

[13] **Davis, D.** *An approximate functional equation for Dirichlet L - functions.* Proc. Roy. Soc. London Ser. A, Vol. 284 (1965) no. 1397, 224-236.

[14] **de Bruijn, N.G.** *Asymptotic methods in analysis.* North-Holland Publishing Co., 1958.

[15] **Deuring, M.** *Asymptotische Entwicklungen der Dirichletschen L - Reihen.* Math. Ann. 168 (1967) 1-30.

[16] **Edwards, H.M.** *Riemann's zeta function.* Pure and Applied Mathematics, Vol. 58. Academic Press, New York-London, 1974.

[17] **Galway, W.F.** *Computing the Riemann zeta function by numerical quadrature.* Dynamical, spectral, and arithmetic zeta functions (San Antonio, TX, 1999), 81-91, Contemp. Math., 290, Amer. Math. Soc., 2001.

[18] **Goodwin, E.T.** *The evaluation of integrals of the form* $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-x^2}dx$. Proc. Cambridge Philos. Soc. 45, (1949). 241-245.

[19] **Gradshteyn, I.S.; Ryzhik, I.M.** *Table of integrals, series, and products.* Fourth edition. Academic Press, New York, 1965.

[20] **Guthmann, A.** *Die Riemann-Siegel-Integralformel für die Mellintransformation von Spitzenformen.* Arch. Math. (Basel) 69 (1997), no. 5, 391-402.

[21] **Guthmann, A.** *Asymptotic expansions for Dirichlet series associated to cusp forms.* Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) 65(79) (1999), 69-96.

[22] **Habsieger, L.** *Explicit approximate functional equations for various classes of Dirichlet series.* Ramanujan J. 9 (2005), no. 1-2, 93-110.

[23] **Hutchinson, J.I.** *Properties of functions represented by the Dirichlet series $\sum(a\nu + b)^{-s}$, or by linear combinations of such series.* Trans. Amer. Math. Soc. 31 (1929), no. 2, 322-344.

[24] **Ito, T.** *On an integral representation of special values of the zeta function at odd integers.* J. Math. Soc. Japan 58 (2006), no. 3, 681-691.

[25] **Karatsuba, A.A.** *Fundamentos de la teoría analítica de los números.* Editorial Mir, Moscu, 1979.

[26] **Laurinchikas, A.; Shyauchyunas, D.** *On the periodic zeta function. II.* Lithuanian Math. J. 41 (2001), no. 4, 361-372.

[27] **Lehmer, D.H.** *A new approach to Bernoulli polynomials.* Amer. Math. Monthly 95 (1988), no. 10, 905-911.

[28] **McNamee, J.** *Error-bounds for the evaluation of integrals by the Euler-Maclaurin formula and by Gauss-type formulae.* Math. Comp. 18 1964 368-381.

[29] **Sánchez-Ortiz, J.** *Los polinomios de Bernoulli generalizados y su aplicación a las series de Dirichlet.* XL Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana. Octubre del 2007.

[30] **Schnee, W.** *Die Funktionalgleichung der Zeta-Function un der Dirichletschen Reihen mit periodischen Koeffizienten.* Math. Z. 31 (1930) 378-390.

[31] **Spira, R.** *Some zeros of the Titchmarsh counterexample.* Math. Comp. 63 (1994), no. 208, 747–748.

[32] **Siegel, C.L.** *Über Riemanns Nachlass zur analytischen Zahlentheorie.* Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik 2 (1932) 45-80.

[33] **Siegel, C.L.** *Contributions to the theory of the Dirichlet L-series and the Epstein zeta-functions.* Ann. of Math. (2) 44, (1943). 143-172.

[34] **Titchmarsh, E. C.** *The theory of the Riemann zeta-function.* Second edition. The Clarendon Press, Oxford University Press, 1986.

[35] **Turing, A.M.** *A method for the calculation of the zeta-function.* Proc. London Math. Soc. (2) 48, (1943). 180-197.

[36] **Walker, J.S.** *Fourier analysis.* Oxford University Press, 1988.