



**UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLAS  
DE HIDALGO**

**Instituto de Física y Matemática**

Tesis

**“Ecuación de Schrödinger no lineal no Local  
en intervalo”**

Para obtener el grado de:

**Doctor en Matemáticas**

Que presenta

**M.C. Isahi Sánchez Suárez**

Asesor

**Dr. Pavel I. Naumkin**

Morelia, Mich. Agosto del 2008



# Índice general

<b>Prefacio</b>	<b>iv</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Antecedentes . . . . .	1
1.2. Objetivo . . . . .	5
1.3. Descripción por capítulos . . . . .	6
<b>2. Teoría preliminar</b>	<b>7</b>
2.1. Clases de funciones . . . . .	7
2.2. Espacio de Sobolev . . . . .	10
2.3. Notaciones asintóticas . . . . .	11
2.4. Principio de mapeo de Contracción . . . . .	12
2.5. Completitud de las funciones continuas . . . . .	15
2.6. Transformada de Fourier . . . . .	18
2.7. Teorema de inversión de Fourier . . . . .	18
2.8. Transformada de Laplace . . . . .	20
2.9. Transformada Inversa de Laplace . . . . .	25
2.10. Operadores pseudodiferenciales . . . . .	32

---

2.10.1. Notación y definición . . . . .	32
2.11. Integrales del tipo de Cauchy . . . . .	37
2.12. Proyectores . . . . .	39
2.13. Operador pseudodiferencial $\mathbb{K}$ . . . . .	46
2.14. Funciones inversas $K^{-1}(-\xi)$ . . . . .	49
<b>3. Problema Lineal</b>	<b>53</b>
3.1. Introducción . . . . .	53
3.2. Construcción de la función de Green . . . . .	54
3.3. Problema no lineal . . . . .	65
3.4. Análisis de la función de Green . . . . .	65
3.4.1. Estimación de la Norma $\ \mathbb{G}(x, y, t_1) \varphi(y, t_2)\ _{\mathbf{L}^\infty}$ . . . . .	66
3.4.2. Asintótica de la función de Green . . . . .	70
3.4.3. Evaluación de la función $\Lambda(s)$ . . . . .	72
<b>4. Teorema de existencia local</b>	<b>76</b>
<b>5. Teorema de existencia global</b>	<b>81</b>
<b>6. Asintótica de la solución</b>	<b>86</b>
<b>7. Conclusiones</b>	<b>91</b>
<b>8. Bibliografía</b>	<b>93</b>

# Índice de figuras

2.1. Contorno cerrado $\Gamma$ . . . . .	27
2.2. Contorno $\Gamma$ para $\operatorname{Re} p > a$ . . . . .	29
2.3. Contorno $\Gamma$ para $\operatorname{Re} p > a$ y con punto singular $p_0$ . . . . .	31
2.4. Corte $\Gamma$ en $\operatorname{Re} p < 0$ para la función $p^\alpha$ . . . . .	36
2.5. Contorno para $\operatorname{Re} q < 0$ . . . . .	40
2.6. Contorno para $\operatorname{Re} q > 0$ con punto singular $p_0$ . . . . .	41
2.7. Contorno para $\operatorname{Re} q > 0$ . . . . .	42
2.8. Contorno para $\operatorname{Re} p > 0$ . . . . .	44
2.9. Contorno cerrado para $\operatorname{Re} p > \varepsilon$ . . . . .	45
2.10. Contorno cerrado para $\operatorname{Re} p < \varepsilon$ . . . . .	46
3.1. Contorno cerrado para $\operatorname{Re} p > \varepsilon$ . . . . .	61
3.2. Contorno cerrado para $\operatorname{Re} q > 0$ . . . . .	62
3.3. Cambio de contorno de integración . . . . .	63
3.4. Contorno $\Gamma$ . . . . .	74
3.5. Contornos cerrados para $\Gamma_1$ y $\Gamma_2$ . . . . .	74

# Prefacio

Consideramos el problema de valor inicial con frontera para la ecuación no lineal no local del tipo Schrödinger

$$\begin{cases} u_t + \mathbb{N}(u) + \mathbb{K}u = 0, & x \in (0, a), t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in (0, a), \end{cases} \quad (1)$$

donde  $u = u(x, t)$ , el término no lineal  $\mathbb{N}(u) = i|u|^\delta u$  y  $\delta > 0$ . Sea  $v \in \mathbf{C}_0^\infty(0, a)$ , entonces el operador pseudodiferencial  $\mathbb{K}$  se define como

$$\mathbb{K}v(x) := \theta_a(x) \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{px} K(p) \widehat{v}(p) dp, \quad (2)$$

donde  $x \in (0, a)$ ,

$$\theta_a(x) := \begin{cases} 1, & x \in (0, a) \\ 0, & x \notin (0, a), \end{cases} \quad (3)$$

$K(p) = C_\alpha p^\alpha$ ,  $\alpha \in (0, 1)$  y  $C_\alpha$  una constante compleja tal que el operador  $\mathbb{K}$  sea disipativo, es decir

$$\operatorname{Re} K(p) > 0 \text{ para valores de } p \in \mathbb{C} \text{ para } \operatorname{Re} p = 0,$$

Aquí y abajo  $p^\alpha$  es la rama principal de la función analítica compleja en el semiplano complejo  $\operatorname{Re} p \geq 0$ , tal que  $1^\alpha = 1$  (haciendo un corte a lo largo del eje real negativo  $(-\infty, 0)$ ).

$\widehat{v}$  denota la transformada de Laplace de la función  $v$

$$\widehat{v}(p) = \int_0^a e^{-px} v(x) dx,$$

$\forall p \in \mathbb{C}$ . Notamos que la integral en (2) converge debido a que  $\widehat{v}$  decae cuando  $|p| \rightarrow \infty$ . (Luego vamos a precisar la clase de funciones a que pertenece  $v$ ).

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Antecedentes

La teoría de ecuaciones no lineales evolutivas juega un papel muy importante en la teoría de la Física Matemática contemporánea, ya que tales ecuaciones aparecen en la Física moderna, la Biología, Tecnología y otros campos de la ciencia. Mencionamos algunas de estas importantes ecuaciones. La ecuación de Otto-Sudan-Ostrovsky

$$u_t + \mathbb{N}(u) + C_1 \int_0^x \frac{u_s(s, t)}{\sqrt{x-s}} ds = 0, \quad (1.1)$$

donde el término no lineal  $\mathbb{N}(u) = uu_x$  y el término  $C_1 \int_0^x \frac{u_s(s, t)}{\sqrt{x-s}} ds$  puede ser escrito usando el operador pseudodiferencial  $\mathbb{K}$  en la siguiente manera

$$C_1 \int_0^x \frac{u_s(s, t)}{\sqrt{x-s}} ds = \mathbb{K}u(x, t) - \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{px} K(p) [u(0, t) - e^{-pa}u(a, t)] dp,$$

con  $K(p) = \sqrt{\pi}C_1 p^{\frac{1}{2}}$ ,  $\alpha = \frac{1}{2}$  y  $C_1$  se elige por la condición de disipación, tal que  $\text{Re } C_1 p^{\frac{1}{2}} > 0$  para  $\text{Re } p = 0$  (ver [27]).

La ecuación de Burgers

$$u_t + \mathbb{N}(u) - u_{xx} = 0,$$

donde el término no lineal  $\mathbb{N}(u) = uu_x$  y el término  $u_{xx}$  se describe mediante el operador pseudodiferencial  $\mathbb{K}$  por

$$u_{xx}(x, t) = \mathbb{K}u(x, t) - \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{px} K(p) \sum_{j=1}^2 \frac{u(0, t) - e^{-pa}u(a, t)}{p^j} dp,$$

donde  $K(p) = p^2$  y  $\alpha = 2$  (ver [14]).

La ecuación de Korteweg-de Vries

$$u_t + \mathbb{N}(u) + u_{xxx} = 0,$$

donde el término no lineal  $\mathbb{N}(u) = uu_x$  y el término  $u_{xxx}$  se describe mediante el operador pseudodiferencial  $\mathbb{K}$  como

$$u_{xxx}(x, t) = \mathbb{K}u(x, t) - \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{px} K(p) \sum_{j=1}^3 \frac{u(0, t) - e^{-pa}u(a, t)}{p^j} dp,$$

con  $K(p) = p^3$  y  $\alpha = 3$  (ver [29] y [42]).

También es de gran interés en la Física Matemática, la combinación de estas dos ecuaciones, la así llamada ecuación de Korteweg-de Vries Burgers

$$u_t + \mathbb{N}(u) + u_{xxx} - u_{xx} = 0.$$

donde  $u_{xxx} - u_{xx}$  se escribe como

$$\begin{aligned} u_{xxx}(x, t) - u_{xx}(x, t) &= \mathbb{K}u(x, t) - \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{px} \left[ p^3 \sum_{j=1}^3 \frac{u(0, t) - e^{-pa}u(a, t)}{p^j} \right. \\ &\quad \left. + p^2 \sum_{j=1}^2 \frac{u(0, t) - e^{-pa}u(a, t)}{p^j} \right] dp, \end{aligned}$$

donde  $K(p) = p^3 - p^2$ . Esta ecuación aparece en acústica no lineal para los líquidos con burbujas de gas (ver [39], [53] [50], [58], [22]). Estas ecuaciones son deducidas de definiciones fundamentales y de las leyes de conservación, tales como: la ley de la conservación de la energía, la masa y el impulso, características esenciales de los objetos de estudio. Cabe mencionar también, que estas ecuaciones tienen una amplia aplicación en la descripción de distintos procesos en la propagación de ondas, procesos que son disímiles a primera vista.

Con el desarrollo de software y hardware que actualmente se tiene en los grandes sistemas de computo, se han podido efectuar complicados experimentos de cálculos numéricos para estudiar ecuaciones no lineales evolutivas, permitiéndose al investigador descubrir nuevas leyes y efectos no lineales que son difíciles de enunciar a simple vista y así abrir una nueva ruta de investigación para estudios futuros (ver [26]). De esta manera en 1967 fue encontrado un método usado para encontrar explícitamente la solución de una clase particular de ecuaciones no lineales, este método es conocido como "Transformada Inversa de Dispersión"(IST) por sus siglas en inglés (ver [15]). Este método estudia las propiedades de esta clase particular de ecuaciones no lineales y es posible encontrar en muchos casos el comportamiento asintótico de las soluciones por medio de este método (ver [1] y la literatura señalada aquí).

Desgraciadamente no hay recetas para la solución de alguna ecuación no lineal evolutiva, porque cada ecuación posee su propia individualidad y requiere un enfoque especial y hasta un conjunto de métodos analíticos para su investigación. Sin embargo, es posible aplicar muchos de los métodos ya desarrollados a algunas ecuaciones particulares y generalizarlos para algunas clases de EDP no lineales.

Por otro lado se puede desarrollar las soluciones de las EDP no lineales mediante métodos asintóticos; ya que en pocas ocasiones se puede resolver explícitamente una ecuación no lineal evolutiva. Es muy importante tener una representación analítica aproximada para las soluciones en forma explícita cerrada o desarrollada en serie para poder controlar los errores. Los desarrollos asintóticos se utilizan para deducir fácilmente las propiedades básicas de la solución tales como el crecimiento o decaimiento de la solución en diferentes regiones, nos permiten saber dónde oscila y dónde es monótona, además de que nos da información sobre los datos iniciales después de un tiempo grande.

Así, los métodos asintóticos son importantes no sólo desde el punto de vista teórico sino también son usados provechosamente en la práctica como un complemento para los métodos numéricos. Sin embargo los métodos asintóticos son difíciles aún en el caso de ecuaciones lineales evolutivas (ver [19], [57]). En el caso de ecuaciones no lineales es necesario probar la existencia global de soluciones clásicas y obtener algunas estimaciones adicionales para aclarar las expansiones asintóticas. Ya que los métodos asintóticos no representan un método general, es importante decir que cada tipo de no linealidad debe ser estudiado individualmente, especialmente en el caso de tener datos iniciales grandes, pero en este trabajo sólo trabajamos con datos iniciales pequeños ya que el método que aquí desarrollamos no se aplica para datos iniciales grandes, debido a que para probar la existencia y unicidad de la solución usamos el método de principio de contracción.

A pesar de la importancia y de la actualidad de los métodos asintóticos, hay relativamente pocos resultados para las ecuaciones evolutivas no lineales. Sin embargo una gran cantidad de publicaciones se han ocupado de la representación

asintótica de soluciones al problema de Cauchy para las ecuaciones no lineales en últimos veinte años. Mientras que aún no se ha proporcionado una revisión completa de este problema en las publicaciones anteriores mencionadas, a continuación referimos algunos resultados conocidos (ver [7], [9], [10], [11], [12],[13], [19], [20], [21], [23], [24], [30], [34], [38], [40], [47], [48], [49], [56], [59], [60]), donde hay estimaciones óptimas obtenidas del decaimiento del tiempo y fórmulas asintóticas de soluciones a diversas ecuaciones no lineales locales y no locales en el caso de los problemas de Cauchy. Sin embargo, hay sólo algunos resultados referentes al comportamiento asintótico del tiempo grande de las soluciones para los problemas del valor del inicial y de frontera. Observe que "tiempo grande"; no significa valor necesariamente grande en la solución.

El problema de valor inicial y de frontera (1) es de gran interés desde un punto de vista físico ya que éste describe fenómenos físicos, tales como rayos laser, ondas sobre agua y otros fenómenos ondulatorios (ver [47]), además es un modelo simple que aparece como una primera aproximación en la descripción de ondas no lineales en un medio disipativo y dispersivo (ver [47]).

## 1.2. Objetivo

Desarrollar un método general para el estudio analítico del comportamiento asintótico de la solución del problema de valor inicial de la ecuación (1).

El propósito de este trabajo es responder algunas de las preguntas más importantes en la teoría de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, tales como la existencia, unicidad y el comportamiento asintótico de la soluciones para

---

tiempos grandes. También se resolverá la pregunta natural que surge al momento de definir nuestro problema: ¿Cuántos valores en frontera se deben considerar para la existencia y unicidad de la solución?

### 1.3. Descripción por capítulos

Este trabajo consta de siete capítulos, organizados de la siguiente manera:

El primer capítulo de este trabajo está dedicado a la introducción e inicia con una recapitulación de la teoría acerca de las EDP no lineales y el lugar que ocupan los métodos asintóticos en la solución de éstas ecuaciones.

El capítulo 2 se centra en dar la teoría básica necesaria para facilitar la comprensión del contenido de este trabajo. Además se define y desarrolla el operador pseudodiferencial  $\mathbb{K}$ , así como la definición de las integrales de tipo de Cauchy y del operador  $\mathbb{P}$ .

En el capítulo 3 se presenta el desarrollo de la solución del problema lineal empleando la metodología de la transformada de Laplace en un segmento, las propiedades del operador  $\mathbb{P}$  y teoremas de Cauchy para construir la función de Green. Al aplicar la transformada inversa de Laplace se encuentra la solución en forma integral del problema lineal y aplicando el principio de Duhamel se encuentra la solución del problema no lineal. También se presentan algunas estimaciones y la fórmula asintótica de la función de Green.

Los capítulos del 4 al 6 están dedicados a la demostración de la existencia y unicidad de la solución, así como la obtención de la asintótica de la solución para tiempos grandes.

# Capítulo 2

## Teoría preliminar

En este capítulo se pretende dar la teoría básica necesaria para facilitar la comprensión del contenido de este trabajo.

### 2.1. Clases de funciones

Los teoremas sobre la inversión para la transformada integral de las soluciones para las ecuaciones diferenciales parciales son de un tipo muy general, pero puesto que estamos interesados sobre todo en usos físicos, consideraremos solamente las funciones del tipo que se presentan normalmente en el análisis de problemas físicos.

Si una función  $f$  es continua sobre un intervalo abierto  $(a, b)$ , se dice que  $f$  pertenece a la clase de funciones  $\mathbf{C}(a, b)$ ; si el intervalo sobre el cuál la función es continua es cerrado, se escribe  $f \in \mathbf{C}[a, b]$ .

Una función  $f$  se dice que es **continua a trozos** en un intervalo  $(a, b)$ , si el

intervalo puede ser partido en un número finito de intervalos no autointersectados

$$(a, a_1), \quad (a_1, a_2), \dots, \quad (a_{n-1}, b),$$

en cada uno de los cuales la función es continua y tiene límite finito cuando  $x$  se aproxima a cada uno de los puntos fronteros de los subintervalos. Entonces se escribe que  $f \in \mathcal{P}(a, b)$ .

Si  $a_r$  es el punto extremo izquierdo de uno de los subintervalos en el cuál  $(a, b)$  es particionado, entonces por  $f(a_r-)$  quiere decir  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(a_r - \varepsilon)$ , donde  $\varepsilon$  tiende a cero a través de todos los posibles valores positivos de  $\varepsilon$ .

Cuando una función  $f$  y cada una de las primeras  $m$  derivadas  $f', f^{(2)}, \dots, f^{(m)}$  son continuas sobre el intervalo abierto  $(a, b)$  se dice que  $f$  pertenece a la clase de funciones **continuamente diferenciables de orden  $m$**  y escribimos  $f \in \mathbf{C}^m(a, b)$ .

Cuando una función  $f$  y cada una de sus derivadas hasta orden  $m$  son continuas a trozos en el intervalo abierto  $(a, b)$  se dice que  $f$  pertenece a la clase de funciones **continuamente diferenciables a trozos de orden  $m$**  y escribimos  $f \in \mathcal{P}^m(a, b)$ .

Si todas las derivadas son continuas por trozos en el intervalo abierto  $(a, b)$ , es decir, si  $f \in \mathbf{C}^k(a, b)$  para todo entero positivo menor o igual que  $k$ , decimos que  $f \in \mathbf{C}^\infty(a, b)$ , o que  $f$  es **infinitamente suave**.

Otra clase de funciones las cuales toman interés en el espacio de distribuciones, es la clase  $\mathcal{J}(\mathbf{R})$  de funciones de prueba de rápido descenso. Una función  $\phi$  se dice que es una **función de prueba de rápido descenso** si  $\phi \in \mathbf{C}^\infty(\mathbf{R})$  y si  $\phi$  y todas sus derivadas decrecen a cero más rápido que cualquier potencia de  $|x|^{-1}$ , es decir, si éstas satisfacen que

$$\left| x^m \phi^{(k)}(x) \right| \leq C,$$

donde  $C > 0$ ,  $k \geq 0$  y  $m \in \mathbb{Z}$ . Esta condición puede escribirse de forma alternativa como:

$$\left| \phi^{(k)}(x) \right| \leq O(|x|^{-m}),$$

para enteros no negativos  $m$  y  $k$  y para todos los valores de  $x$ .  $\mathcal{J}(\mathbf{R})$  es llamado **espacio de Schwartz**.

Para el mismo propósito se introduce la clase de **funciones de lento crecimiento**. Y se dice que  $\phi \in \mathcal{N}(\mathbf{R})$  si  $\phi \in \mathbf{C}^\infty(\mathbf{R})$  y existe  $N > 0$  con la propiedad de que para todo entero  $r > 0$ ,  $\phi$  satisface que

$$\left| x^{-N} \phi^{(r)}(x) \right| \leq C_r,$$

donde  $C_r > 0$ . Esta condición también puede ser escrita de forma alternativa como sigue

$$\left| \phi^{(r)}(x) \right| \leq O(|x|^N), \quad |x| \rightarrow \infty.$$

Ahora se define formalmente la clase de **funciones de prueba con soporte compacto** sobre  $\Omega$  abierto como sigue

$$\mathcal{D}(\Omega) := \{\varphi \mid \varphi \in \mathbf{C}^\infty(\Omega), \text{ y con soporte compacto en } \Omega\}.$$

El concepto de convergencia en este espacio de funciones es importante desde el punto de vista de la teoría de distribuciones y por eso enunciamos la definición siguiente.

Una sucesión de funciones de prueba  $\{\phi_l(x)\}_{l=1}^\infty$ , con  $x \in \mathbf{R}$ , es convergente en  $\mathcal{D}$  si:

- a)  $\phi_l \in \mathcal{D}$ , para todo  $l = 1, 2, \dots$ .
- b) cada una de las funciones  $\phi_l$  se anulan fuera de un intervalo fijo  $I$ , donde este intervalo pertenece a la línea real,

c) para cada entero positivo fijo  $k$ ,  $\{\phi_l^{(k)}(x)\}_{l=1}^{\infty}$  converge uniformemente para todos los valores de  $x$ .

Si  $\phi$  es la función límite de la sucesión  $\{\phi_l(x)\}_{l=1}^{\infty}$ , entonces es fácil mostrar que  $\phi \in \mathcal{D}$ .

Ahora introducimos el conjunto de **funciones absolutamente integrables**  $\mathbf{L}^1(\Omega)$ . Decimos que  $f \in \mathbf{L}^1(\Omega)$  si  $f$  es absolutamente integrable sobre  $\Omega$ , es decir si

$$\int_{\Omega} |f(x)| dx < \infty.$$

Similarmente decimos que  $f \in \mathbf{L}^r(\Omega)$  si se satisface que

$$\int_{\Omega} |f(x)|^r dx < \infty,$$

para  $1 \leq r$ .

### Funciones de orden exponencial

Si existen constantes reales  $M > 0$  y  $\gamma$  tales que para todo  $t > N$

$$|e^{-\gamma t} f(t)| < M \quad \text{o} \quad |f(t)| < M e^{\gamma t}$$

se dice que  $f$  es una función de orden exponencial  $\gamma$  cuando  $t \rightarrow \infty$  o simplemente que es una función de orden exponencial.

Intuitivamente, las fórmulas de orden exponencial no pueden crecer en valor absoluto más rápidamente que  $M e^{\gamma t}$  cuando  $t$  crece.

## 2.2. Espacio de Sobolev

Ya que se tiene en mente una aplicación en ecuaciones diferenciales parciales, utilizaremos espacios de Sobolev para estimar las soluciones de los problemas de

ecuaciones diferenciales parciales no lineales.

Se dice que  $f$  pertenece al espacio de Sobolev  $\mathbf{H}_r^k(\mathbf{R}^+)$ , si

$$\frac{d^j}{dx^j} f(x) \in \mathbf{L}^r(\mathbf{R}^+),$$

para  $0 \leq j \leq k$  y  $1 \leq r$  y  $f$  se define en sentido generalizado como

$$\int \frac{df}{dx} \varphi(x) dx := \left( \frac{df}{dx}, \varphi(x) \right) := - \left( f, \frac{d\varphi}{dx} \right)$$

$\forall \varphi \in \mathbf{C}_0^\infty(0, a)$ .

### 2.3. Notaciones asintóticas

La función  $f$  es equivalente a la función  $g$  en algún punto  $x_0$  y denotamos  $f \sim g$  cuando  $x \rightarrow x_0$  si  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ .

La función  $f$  es infinitesimal con respecto a la función  $g$  en algún punto  $x_0$  y escribimos  $f = o(g)$  cuando  $x \rightarrow x_0$  si  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ .

Finalmente, la función  $f$  es del mismo orden que la función  $g$  en algún punto  $x_0$  y denotamos  $f = O(g)$  cuando  $x \rightarrow x_0$  si la desigualdad  $|f(x)| \leq C|g(x)|$  es válida con una constante  $C > 0$  para una vecindad del punto  $x_0$ .

También es común escribir  $f = O(g)$  para  $x \in \mathbf{D}$ , cuando la desigualdad  $|f(x)| \leq C|g(x)|$  es verdadera para toda  $x \in \mathbf{D} \subseteq \mathbf{R}$ , donde  $C > 0$  es alguna constante.

Decimos que la solución  $u(x, t)$  tiene la **asintótica**:

$$u(x, t) = \Psi(x, t) + O(\varphi(x, t)),$$

donde  $\Psi(x, t)$  es el término principal y  $O(\varphi(x, t))$  es el residuo, para  $t \gg 1$  uniformemente con respecto a  $x > 0$ , si existe algún  $T_0 > 0$  y una constante  $C > 0$

la cual no depende de los valores de las variables  $x$  y  $t$ , que satisfaga la siguiente estimación

$$|u(x, t) - \Psi(x, t)| \leq C |\varphi(x, t)|,$$

donde para todo valor  $t > T_0$ , donde

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\|\varphi(x, t)\|_{\mathbf{L}^\infty}}{\|\Psi(x, t)\|_{\mathbf{L}^\infty}} = 0.$$

## 2.4. Principio de mapeo de Contracción

**Definición 1** Sea  $\mathbf{X}$  un espacio métrico. El mapeo  $\mathcal{A}$  del espacio  $\mathbf{X}$  en sí mismo se llama mapeo de contracción, cuando existe un número  $0 < \lambda < 1$  tal que para todo  $x, y \in \mathbf{X}$  con la métrica  $\rho$ , se verifica la desigualdad

$$\rho(\mathcal{A}(x), \mathcal{A}(y)) \leq \lambda \rho(x, y)$$

(ver [2]).

El siguiente resultado es usualmente llamado Principio de mapeo de contracción.

**Teorema 2** Sea  $\mathbf{X}$  un espacio métrico completo y  $\mathcal{A}$  un mapeo de contracción del espacio  $\mathbf{X}$  en sí mismo. Entonces existe un único punto fijo  $\tilde{x} \in \mathbf{X}$ , esto es:  $\mathcal{A}(\tilde{x}) = \tilde{x}$ .

**Demostración.** Tomamos un punto arbitrario  $y_0 \in \mathbf{X}$  y aplicando sucesivamente

la transformación  $\mathcal{A}$  al punto  $y_0$

$$\begin{aligned}y_1 &= \mathcal{A}(y_0) \\y_2 &= \mathcal{A}(y_1) \\&\vdots \\y_k &= \mathcal{A}(y_{k-1}),\end{aligned}$$

definimos una sucesión de aproximaciones sucesivas

$$y_k := \mathcal{A}(y_{k-1})$$

para toda  $k \geq 1$  que debe de cumplir tres condiciones:

- a)  $\{y_k\} \rightarrow \tilde{y}$ .
- b)  $\tilde{y}$  es punto fijo.
- c)  $\tilde{y}$  es único.

Para probar a) es suficiente probar que  $\{y_k\}$  es una sucesión de Cauchy porque  $\mathbf{X}$  es completo. Primero calculamos la métrica entre  $y_2$  y  $y_1$

$$\rho(y_2, y_1) = \rho(\mathcal{A}(y_1), \mathcal{A}(y_0)),$$

aplicando la propiedad de contracción 2) se obtiene

$$\rho(y_2, y_1) \leq \lambda \rho(y_1, y_0). \quad (2.1)$$

Ahora para  $y_2$  y  $y_3$

$$\rho(y_3, y_2) = \rho(\mathcal{A}(y_2), \mathcal{A}(y_1)) \leq \lambda \rho(y_2, y_1)$$

aplicando (2.1) se obtiene

$$\rho(y_3, y_2) \leq \lambda^2 \rho(y_1, y_0).$$

Y así, aplicando sucesivamente se obtiene que

$$\begin{aligned}\rho(y_k, y_{k-1}) &= \rho(\mathcal{A}(y_{k-1}), \mathcal{A}(y_{k-2})) \leq \lambda \rho(y_{k-1}, y_{k-2}) \\ &\leq \lambda^k \rho(y_1, y_0)\end{aligned}\tag{2.2}$$

y de la definición de propiedad de Cauchy se tiene que  $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon)$ , tal que  $\forall n, m > N(\varepsilon)$ ,

$$\rho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Desarrollando para toda  $m = n + k$

$$\begin{aligned}\rho(y_m, y_n) &= \rho(y_{n+k}, y_n) \leq \rho(y_{n+1}, y_n) + \rho(y_{n+2}, y_{n+1}) \\ &\quad + \rho(y_{n+3}, y_{n+2}) + \cdots + \rho(y_{n+k-1}, y_{n+k-2}) \\ &\leq \sum_{j=n}^{n+k-1} \rho(y_j, y_{j+1})\end{aligned}$$

aplicando (2.2) a cada uno de los términos de la suma

$$\begin{aligned}\sum_{j=n+1}^{n+k-1} \rho(y_j, y_{j+1}) &\leq \rho(x_1, x_0) \lambda^n \sum_{j=1}^{k-1} \lambda^j \\ &\leq \rho(x_1, x_0) \lambda^n \frac{1 - \lambda^k}{1 - \lambda} \leq \rho(x_1, x_0) \frac{\lambda^n - \lambda^{n+k}}{1 - \lambda} \\ &\leq \rho(x_1, x_0) \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} < \varepsilon\end{aligned}$$

si  $n$  es suficientemente grande. Entonces la sucesión es de Cauchy que tiene límite

$$\tilde{y} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n,$$

porque  $\mathbf{X}$  es un espacio métrico completo.

Ahora probaremos b)  $\tilde{y} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$  es un punto fijo. Tomando la métrica

$$\begin{aligned} \rho(\mathcal{A}(\tilde{y}), \tilde{y}) &\leq \rho(\mathcal{A}(\tilde{y}), \mathcal{A}(y_k)) + \rho(\mathcal{A}(y_k), y_k) + \rho(y_k, \tilde{y}) \\ &\leq \lambda \rho(\tilde{y}, y_k) + \rho(y_{k-1}, y_k) + \rho(y_k, \tilde{y}) \\ &\leq \rho(\tilde{y}, y_k) + \rho(y_{k-1}, y_k) + \rho(y_k, \tilde{y}) \leq \varepsilon \end{aligned}$$

porque  $y_k \rightarrow \tilde{y}$  para  $k \rightarrow \infty$  y  $\{y_k\}$  es una sucesión de Cauchy que es convergente.

Así  $\rho(\mathcal{A}(\tilde{y}), \tilde{y}) = 0$ , lo cual implica

$$\mathcal{A}(\tilde{y}) = \tilde{y}.$$

Ahora probaremos c) el punto fijo  $\tilde{y}$  es único. Al contrario, suponemos que existen dos puntos fijos  $\tilde{y}$  y  $\tilde{\tilde{y}}$  tal que  $\mathcal{A}(\tilde{y}) = \tilde{y}$ ,  $\mathcal{A}(\tilde{\tilde{y}}) = \tilde{\tilde{y}}$  y calculamos la métrica

$$\begin{aligned} \rho(\tilde{y}, \tilde{\tilde{y}}) &= \rho(\mathcal{A}(\tilde{y}), \mathcal{A}(\tilde{\tilde{y}})) \leq \lambda \rho(\tilde{y}, \tilde{\tilde{y}}) \\ (1 - \lambda) \rho(\tilde{y}, \tilde{\tilde{y}}) &\leq 0 \end{aligned}$$

donde  $\lambda < 1$ , por lo tanto  $\rho(\tilde{y}, \tilde{\tilde{y}}) = 0$ . entonces  $\tilde{y} = \tilde{\tilde{y}}$ . ■

## 2.5. Completitud de las funciones continuas

**Proposición 3** *El conjunto de funciones continuas  $f, g \in \{\mathbf{C}([a, b])\}$  con la métrica*

$$\rho(f(t), g(t)) = \max_{a \leq t \leq b} |g(t) - f(t)|.$$

*forman un espacio métrico completo.*

**Demostración.** Sea  $\{x_n(t)\}$  una sucesión fundamental de  $\mathbf{C}([a, b])$ , y aplicando el criterio de Cauchy, una sucesión es convergente si y solo si es fundamental.

De la sucesión  $\{x_n(t)\}$ , fijamos  $t = t_0$ , para tener una sucesión numérica  $\{x_n(t_0)\}$  que es fundamental y vamos a demostrar que es convergente a  $x(t_0)$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t_0) \rightarrow x(t_0).$$

Por definición de límite según Cauchy se tiene,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_1(\varepsilon), \text{ tal que } \forall n, m > N_1(\varepsilon), \rho(x_n(t_0), x_m(t_0)) < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.3)$$

Lo primero que probaremos es que esta sucesión esta acotada.

Sea  $\varepsilon = 1$ , entonces  $\exists N_1(\varepsilon)$ , tal que  $\forall n, m > N_1(\varepsilon)$ , con  $m = N_1 + 1$ ,

$$\rho(x_n(t_0), x_m(t_0)) < 1,$$

abriendo la desigualdad se obtiene

$$x_{N_1+1}(t_0) - 1 < x_n(t_0) < x_{N_1+1}(t_0) + 1$$

y tomando como cota superior

$$M = \text{máx} \{x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_{N_1+1}(t_0) - 1, x_{N_1+1}(t_0) + 1\}$$

por lo que  $|x_n(t_0)| \leq M, \forall n$ . Aplicando el teorema de Bolzano-Weierstrass, para cada sucesión acotada existe una subsucesión que es convergente

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}(t_0) \rightarrow x(t_0), \quad (2.4)$$

por definición de (2.4)

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_2(\varepsilon), \text{ tal que } \forall n > N_2(\varepsilon), \rho(x_{n_k}(t_0), x(t_0)) < \frac{\varepsilon}{2},$$

Ahora probaremos que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon), \text{ tal que } \forall n > N(\varepsilon), \rho(x_n(t_0), x(t_0)) < \varepsilon, \quad (2.5)$$

desarrollando la desigualdad (2.5), tomando  $m = n_k$  y aplicando (2.3) se tiene

$$\begin{aligned} \rho(x_n(t_0), x(t_0)) &= \rho(x_n(t_0), x(t_0)) + \rho(x_m(t_0), x_m(t_0)) \\ &\leq \rho(x_n(t_0), x_m(t_0)) + \rho(x_m(t_0), x(t_0)) \\ &\leq \rho(x_n(t_0), x_m(t_0)) + \rho(x_{n_k}(t_0), x(t_0)) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

y como  $t_0$  es cualquiera, la convergencia no depende de  $t$ , por lo que podemos escribir la definición de convergencia uniforme con respecto a  $t$

$$\{x_n(t)\} \rightrightarrows_{t \in [a,b]} x(t). \quad (2.6)$$

Ahora probaremos que si  $\{x_n(t)\}$  es continua y se cumple (2.6), entonces  $x(t)$  también es continua.

Por definición de continuidad en un punto  $t = t_0$ ,  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ , tal que  $\forall t \in [a, b]$ , con  $|t - t_0| < \delta$ ,

$$\rho(x_n(t), x_n(t_0)) < \frac{\varepsilon}{3} \quad (2.7)$$

y la definición de convergencia uniforme  $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon)$ , tal que  $\forall n > N(\varepsilon)$ ,  $\forall t \in [a, b]$ ,

$$\rho(x_n(t), x(t)) < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (2.8)$$

Escribiendo la definición de continuidad en  $t = t_0$  se tiene  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ , tal que  $\forall t \in [a, b]$ , con  $|t - t_0| < \delta$ ,

$$\rho(x(t), x(t_0)) < \varepsilon, \quad (2.9)$$

desarrollando (2.9) y usando (2.7) y (2.8) se obtiene

$$\begin{aligned} \rho(x(t), x(t_0)) &= \rho(x(t), x(t_0)) + \rho(x_N(t), x_N(t)) + \rho(x_N(t_0), x_N(t_0)) \\ &\leq \rho(x(t), x_N(t)) + \rho(x_N(t), x_N(t_0)) + \rho(x_N(t_0), x(t_0)) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

■

## 2.6. Transformada de Fourier

**Definición 4** Definimos la transformada de Fourier como

$$F(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\xi t} dt \quad (2.10)$$

y la transformada inversa de Fourier como

$$f(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) e^{i\xi t} d\xi \quad (2.11)$$

donde  $f$  es continuamente diferenciable a trozos y absolutamente integrable sobre  $\mathbf{R}$ .

El par de fórmulas (2.10) y (2.11) determinan el así llamado, **teorema de inversión de Fourier**.

## 2.7. Teorema de inversión de Fourier

En esta sección estamos interesados en dar un argumento formal en algún sentido para que la identidad

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} d\xi \int_{-i\infty}^{i\infty} f(u) e^{iu\xi} du, \quad (2.12)$$

sea válida. Esta identidad es conocida como el teorema integral de Fourier.

En esta sección mostramos el teorema integral de Fourier para funciones  $f$  las cuales son continuamente diferenciables a trozos y absolutamente integrables sobre toda la línea real. El resultado central es:

**Teorema 5 (Teorema de la integral de Fourier)** Sea  $f \in \mathcal{P}^1(\mathbf{R})$ , y  $f \in \mathbf{L}^1(\mathbf{R})$ , entonces para toda  $x \in \mathbf{R}$ , se tiene

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \{\xi(x-t)\} dt = \frac{1}{2} [f(x+) + f(x-)].$$

**Demostración.** (ver [55]). ■

**Corolario 6** Si en adición,  $f$  es continua en el punto  $t = x$ , entonces la siguiente identidad es válida

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} d\xi \int_{-\infty}^{i\infty} f(t) e^{i\xi t} dt = f(x). \quad (2.13)$$

Si  $f$  es una función de variable real con respecto de  $t$ , el complejo conjugado de su transformada de Fourier es dada por

$$\mathcal{F}^*[f] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\xi t} dt, \quad (2.14)$$

así que

$$\mathcal{F}^*[f(t); \xi] = \mathcal{F}[f(t); -\xi].$$

Con esta notación, se puede escribir (2.14) como

$$f = \mathcal{F}^*F,$$

y ya que  $F = \mathcal{F}f$ , entonces equivalentemente se puede escribir la ecuación

$$\mathcal{F}^*\mathcal{F} = I,$$

en donde  $I$  denota el operador identidad. Así, se escribe en forma alternativa

$$\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^*, \quad (2.15)$$

donde  $\mathcal{F}^{-1}$  denota el operador inverso del operador  $\mathcal{F}$ .

## 2.8. Transformada de Laplace

**Definición 7** Clase de funciones  $\mathcal{T}_a$ .

La función  $f$  pertenece a la clase de funciones  $\mathcal{T}_a$  si

- 1) Para  $t < 0$  se tiene que  $f \equiv 0$ .
- 2) Para  $t \geq 0 : \forall R_1, R_2$  en  $t \in [R_1, R_2]$ , la función  $f$  tiene un número finito de puntos de discontinuidad de primer tipo.

3)  $f$  tiene orden exponencial  $a$ , es decir, existen constantes  $M > 0$  y  $a$ , tal que para algun  $t_0 \geq 0$

$$|f(t)| \leq Me^{at} \quad (2.16)$$

para  $t > t_0$ .

**Definición 8** La transformada de Laplace de la función  $f$  está definida por la integral impropia

$$\hat{f}(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt, \quad p \in \mathbb{C}. \quad (2.17)$$

**Teorema 9** Si  $f \in \mathcal{T}_a$  la integral (2.17) es convergente en el dominio  $\text{Re } p > a$ . También para cualquier  $x_0 > a$  la integral (2.17) converge uniformemente con respecto a  $\text{Re } p \geq x_0 > a$ .

**Demostración.** Para  $\operatorname{Re} p > a_1 = a + \varepsilon$ ,  $p = x + iy$  y usando la prueba de comparación para la convergencia de integrales impropias se consigue que

$$\left| \widehat{f}(p) \right| = \left| \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt \right| \leq \int_0^{+\infty} |e^{-pt}| |f(t)| dt$$

y aplicando (2.16) y  $|e^{-pt}| \leq e^{-\operatorname{Re} pt}$ , se obtiene

$$\left| \widehat{f}(p) \right| \leq M \int_0^{+\infty} e^{-xt} e^{a_1 t} dt,$$

integrando se obtiene que

$$\begin{aligned} \left| \widehat{f}(p) \right| &\leq \lim_{A \rightarrow \infty} \left( -\frac{M}{x - a_1} e^{-(x-a_1)t} \Big|_0^A \right) \\ &\leq -\lim_{A \rightarrow \infty} \frac{M}{x - a_1} e^{-(x-a_1)A} + \frac{M}{x - a_1} \\ &\leq \frac{M}{x - a_1}, \end{aligned}$$

por lo que  $\widehat{f}$  está acotada para  $x > a_1$ . Ahora como cada uno de los términos de la integral de la transformada de Laplace son positivos, la integral es monótona, de aquí la integral  $\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt$  es convergente para  $\operatorname{Re} p > a$ .

En forma análoga consideramos el caso para  $\operatorname{Re} p \geq x_0 > a$ , entonces

$$\begin{aligned} \left| \widehat{f}(p) \right| &= \left| \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt \right| \leq M \int_0^{+\infty} e^{-\operatorname{Re} pt} e^{a_1 t} dt \\ &\leq M \int_0^{+\infty} e^{-(x_0-a_1)t} dt \\ &\leq -\frac{M}{x_0 - a_1} \lim_{A \rightarrow \infty} e^{-(x_0-a_1)t} \Big|_0^A \\ &\leq \frac{M}{x_0 - a_1}. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Entonces  $\widehat{f}$  está acotada, es monótona y no depende de  $x$ , de aquí  $\widehat{f}$  converge uniformemente con respecto al parámetro  $p$  en el dominio  $\operatorname{Re} p \geq x_0 > a$ . ■

**Teorema 10** Si  $f \in \mathcal{T}_a$  entonces la transformada de Laplace  $\hat{f}$  es una función analítica para  $\operatorname{Re} p > a$ .

**Demostración.** Por el teorema 9 la integral

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt \quad (2.19)$$

converge en el dominio  $\operatorname{Re} p > a$  y converge uniformemente para  $\operatorname{Re} p \geq x_0 > a$ . Ahora dividimos el intervalo de integración en subintervalos  $[t_i, t_{i+1}]$  de longitud finita, donde  $t_0 = 0$ , y  $t_n \rightarrow \infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Entonces la función  $\hat{f}$  para  $\operatorname{Re} p > a$ , es la suma de una serie

$$\hat{f}(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{-pt} f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(p), \quad (2.20)$$

donde  $0 = t_0 < t_1 \dots < t_n < t_{n+1} \dots < +\infty$ . Note que a partir del  $n$ -ésimo término, la serie (2.20) es igual a  $\int_{t_{n+1}}^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$ . Tomando en cuenta que

$$u_n(p) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{-pt} f(t) dt.$$

Ahora probaremos que la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(p)$  converge uniformemente en el dominio  $\operatorname{Re} p \geq x_0 > a$ . Usando el criterio de Cauchy para convergencia uniforme se tiene

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A, \text{ tal que } \forall A_1, A_2 > A, \text{ y para } \forall \operatorname{Re} p \geq x_0$$

$$\left| \sum_{n=A_1}^{A_2} \int_{T_{A_1}}^{T_{A_2}} e^{-pt} f(t) dt \right| < \varepsilon.$$

Desarrollando la serie, se tiene

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{n=A_1}^{A_2} \int_{T_n}^{T_{n+1}} e^{-pt} f(t) dt \right| &\leq \sum_{n=A_1}^{A_2} \left| \int_{T_n}^{T_{n+1}} e^{-pt} f(t) dt \right| \\
&\leq \sum_{n=A_1}^{A_2} \int_{T_n}^{T_{n+1}} |e^{-pt}| |f(t)| dt \\
&\leq M \sum_{n=A_1}^{A_2} \int_{T_n}^{T_{n+1}} e^{-(x_0-a_1)t} dt \\
&\leq -\frac{M}{x_0-a_1} \sum_{n=A_1}^{A_2} e^{-(x_0-a_1)t} \Big|_{T_n}^{T_{n+1}} \\
&\leq -\frac{M}{x_0-a_1} \sum_{n=A_1}^{A_2} (e^{-(x_0-a_1)T_{n+1}} - e^{-(x_0-a_1)T_n}) \\
&\leq \frac{M}{x_0-a_1} (e^{-(x_0-a_1)T_{A_1}} - e^{-(x_0-a_1)T_{A_2}}) \\
&\leq \frac{M}{x_0-a_1} e^{-(x_0-a_1)T_{A_1}} < \varepsilon
\end{aligned}$$

Eligiendo  $A > T_{A_1}$ , se cumple el criterio de Cauchy de convergencia uniforme de la serie para  $\operatorname{Re} p \geq x_0 > a$ .

Cada una de las funciones

$$u_n(p) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{-pt} f(t) dt$$

están definidas como una integral dependiente de un parámetro  $p$ , sobre un intervalo de longitud finita en el plano complejo  $t$ . En base a las propiedades generales de integrales de funciones de dos variables complejas dependiente en un parámetro (ver [4]), las funciones  $u_n(p)$  son funciones enteras con respecto a  $p$ . Del razonamiento anterior se sigue que la serie (2.20) en el dominio  $\operatorname{Re} p > a$  satisface todas las condiciones del teorema de Weierstrass (ver [4]), de aquí, la función  $\widehat{f}$  es analítica

en el dominio  $\operatorname{Re} p > a$  y sus derivadas pueden calcularse diferenciando la función bajo la integral en (2.19) con respecto al parámetro  $p$ . ■

**Teorema 11** Si  $f \in \mathcal{T}_a$  y

$$\widehat{f}(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt,$$

entonces para  $x > a$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} \widehat{f}(p) dp. \quad (2.21)$$

La integral (2.21) es llamada Transformada inversa de Laplace o fórmula de Mellin (ver [4]).

**Demostración.** Por hipótesis la función  $f$  existe y tienen orden de crecimiento  $a$ , por lo que

$$|f(t)| \leq M e^{at} \leq M e^{xt}, \quad x > a.$$

Considerando una función auxiliar

$$\varphi(t) = e^{-xt} f(t), \quad x > a, \quad (2.22)$$

que puede ser representada por la transformada de Fourier como.

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\eta) e^{i\xi(t-\eta)} d\eta. \quad (2.23)$$

Usando (2.22) en (2.23) se obtiene

$$e^{-xt} f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x\eta} f(\eta) e^{i\xi(t-\eta)} d\eta,$$

cambiando el orden de integración y como  $f(\eta) = 0$  para  $\eta < 0$  se tiene

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(x+i\xi)t} d\xi \int_0^{+\infty} e^{-(x+i\xi)\eta} f(\eta) d\eta. \quad (2.24)$$

Denotando  $p = x + i\xi$  y notamos que la integral interior de (2.24) es la transformación dada  $\widehat{f}$  de la función  $f$ , entonces la expresión (2.24) se vuelve

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} \widehat{f}(p) dp, \quad (2.25)$$

que es por definición la fórmula de Mellin. ■

## 2.9. Transformada Inversa de Laplace

Aquí consideraremos algunas condiciones suficientes bajo la cuál una función dada  $\widehat{f}$  es la transformación de alguna función  $f$ . Primero definimos la clase de funciones  $\mathcal{H}_a(p)$ .

**Definición 12** *La función  $\widehat{f}$  pertenece a la clase de funciones  $\mathcal{H}_a(p)$  si*

- 1)  $\widehat{f}$  es analítica en el dominio  $\operatorname{Re} p > a$ ,
- 2) En el dominio  $\operatorname{Re} p > a$

$$\left| \widehat{f}(p) \right| \longrightarrow 0, \quad |p| \longrightarrow \infty. \quad (2.26)$$

uniformemente con respecto al  $\arg p$ .

- 3) Para todo  $\operatorname{Re} p = x > a$

$$\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \left| \widehat{f}(p) \right| dy < M, \quad x > a. \quad (2.27)$$

El siguiente teorema nos da las condiciones suficientes para que la función  $\widehat{f}$  admita una inversión como en la ecuación (2.25), obtenida aplicando el teorema de inversión de Fourier y también las condiciones impuestas para la función  $f$  como consecuencias de la función  $\widehat{f}$ .

**Teorema 13** Si  $\widehat{f} \in \mathcal{H}_a$  entonces

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} \widehat{f}(p) dp, \quad x > a \quad (2.28)$$

pertenece a  $\mathcal{T}_a$ .

**Demostración.** Para probar que la integral (2.28) es la original de la función dada por  $\widehat{f}$ , se debe establecer que:

(1) La integral (2.28) es independiente de  $x$  y define la función  $f$ , además esta función tiene orden de crecimiento  $a$ ;

(2) para  $t < 0$ ,  $f \equiv 0$ ;

(3) la función  $\widehat{f}$  es la transformada de Laplace de  $f$ .

Ahora probaremos cada una de estas proposiciones.

(1) En el dominio para  $\operatorname{Re} p > a$  y para cualquier  $x > x_0 > a$  se tiene

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} \widehat{f}(p) dp \right| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \left| e^{pt} \widehat{f}(p) \right| dp \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \left| e^{pt} \widehat{f}(p) \right| dp \\ &\leq \frac{1}{2\pi} e^{xt} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \left| \widehat{f}(p) \right| dy, \end{aligned}$$

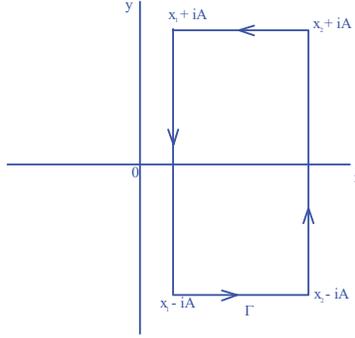
aplicando (2.27) se obtiene finalmente que

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} \widehat{f}(p) dp \right| \leq \frac{M}{2\pi} e^{xt}. \quad (2.29)$$

Ahora probaremos que (2.29) no depende de  $x$  y que

$$|f(t)| \leq M e^{at}, \quad t > 0.$$

En el dominio  $\operatorname{Re} p > a$ , considerando el contorno cerrado  $\Gamma$  mostrado en la Figura 2.1

Figura 2.1: Contorno cerrado  $\Gamma$ 

Integrando alrededor del contorno cerrado  $\Gamma$ , y como la función es analítica en el dominio  $\operatorname{Re} p > a$ , entonces por el teorema de Cauchy, la integral de la función  $e^{pt} \widehat{f}$  alrededor del contorno  $\Gamma$  es cero. Por lo tanto

$$\begin{aligned} & \lim_{A \rightarrow \infty} \left[ \int_{x_1 - iA}^{x_2 - iA} e^{pt} \widehat{f}(p) dp + \int_{x_2 - iA}^{x_2 + iA} e^{pt} \widehat{f}(p) dp \right. \\ & \left. + \int_{x_2 + iA}^{x_1 + iA} e^{pt} \widehat{f}(p) dp + \int_{x_1 + iA}^{x_1 - iA} e^{pt} \widehat{f}(p) dp \right] \\ & = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0. \end{aligned}$$

Estimando cada integral por separado se obtiene

$$\begin{aligned} |I_1| &= \lim_{A \rightarrow \infty} \left| \int_{x_1 - iA}^{x_2 - iA} e^{pt} \widehat{f}(p) dp \right| \leq \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{x_1 - iA}^{x_2 - iA} |e^{pt} \widehat{f}(p)| dp \\ &\leq \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{x_1 - iA}^{x_2 - iA} |e^{pt}| |\widehat{f}(p)| |dp|. \end{aligned}$$

Usando la propiedad 2) de la definición 12, podemos acotar la transformada de Laplace como

$$\widehat{f}(p) \leq \frac{C}{|p|}. \quad (2.30)$$

Entonces  $I_1$ , se puede representar como

$$|I_1| \leq \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{x_1 - iA}^{x_2 - iA} e^{xt} \frac{C}{|p|} |dp|,$$

haciendo el cambio de variable

$$\begin{aligned} p &= x - iA \\ dp &= dx \end{aligned}$$

se obtiene

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \lim_{A \rightarrow \infty} C \int_{x_1}^{x_2} \frac{e^{xt}}{|x - iA|} dx \leq \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{C}{|x_1 - iA|} \int_{x_1}^{x_2} e^{xt} dx \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{C}{(x_1^2 + A^2)^{\frac{1}{2}}} (e^{x_1 t} - e^{x_2 t}) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

También la integral  $I_3 \rightarrow 0$ , bajo las mismas condiciones. Por lo tanto

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_{x_1 + iA}^{x_1 - iA} e^{pt} \widehat{f}(p) dp = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{x_2 - iA}^{x_2 + iA} e^{pt} \widehat{f}(p) dp.$$

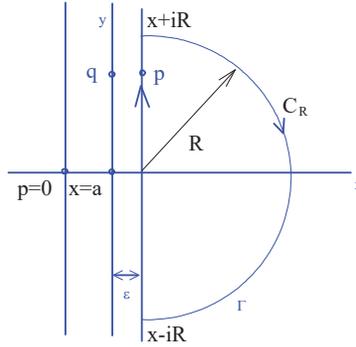
y como  $x_1$  y  $x_2$  son arbitrarios, se prueba la proposición (1). Así la integral (2.28) es una función de la variable  $t$ . Y de la evaluación de (2.29) se sigue inmediatamente que la integral (2.28) es una función de orden de crecimiento limitado con respecto a  $t$  y el orden de crecimiento es  $a$ .

(2) Ahora probaremos que

$$f(t) = 0, \quad t < 0.$$

Considerando en el dominio  $\operatorname{Re} p > a$ , un contorno cerrado  $\Gamma$  como se muestra en la Figura 2.2 y por el teorema de Cauchy, la integral de la función  $e^{pt} \widehat{f}$  sobre el contorno cerrado  $\Gamma$  es cero.

$$\int_{\Gamma} e^{pt} \widehat{f}(p) dp = 0.$$

Figura 2.2: Contorno  $\Gamma$  para  $\text{Re } p > a$ 

Escribimos el círculo  $C_R$  en forma paramétrica con

$$p = x + Re^{i\varphi}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

y estimando la integral sobre el círculo

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{C_R} e^{pt} \widehat{f}(p) dp \right| \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} |e^{pt}| |\widehat{f}(p)| dp$$

usando (2.30)

$$\widehat{f}(p) \leq \frac{C}{|p|} \leq \frac{1}{R}$$

y

$$|e^{pt}| = \left| e^{(x+Re^{i\varphi})t} \right| \leq e^{(x+R \cos \varphi)t}$$

por lo que la integral se estima como

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{pt} \widehat{f}(p) dp \right| &\leq \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{(x+R \cos \varphi)t} \frac{C}{R} R e^{i\varphi} d\varphi \\ &\leq \lim_{R \rightarrow \infty} C \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{(x+R \cos \varphi)t} d\varphi \rightarrow 0 \end{aligned}$$

por lo tanto

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} \widehat{f}(p) dp \equiv 0, \quad t < 0.$$

(3) Ahora probaremos que

$$\mathcal{L}\mathcal{L}^{-1} = E,$$

construyendo la transformada de Laplace de la función (2.28) y consideraremos este valor para algún  $p_0$  arbitrario, donde  $\operatorname{Re} p_0 > a$ . Escribimos la integral

$$\int_0^\infty e^{-p_0 t} f(t) dt = \int_0^\infty e^{-p_0 t} \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} \widehat{f}(p) dp \right] dt \quad (2.31)$$

donde la fórmula de Mellin en (2.31) es independiente de  $x$ . Elegimos un valor de  $x$  que satisfaga la condición

$$a < x < \operatorname{Re} p_0$$

y cambiando el orden de integración. Esto es posible debido a la convergencia uniformemente de las integrales correspondientes, se obtiene

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-p_0 t} f(t) dt &= \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \widehat{f}(p) dp \int_0^\infty e^{-(p_0-p)t} dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{\widehat{f}(p)}{p-p_0} dp. \end{aligned} \quad (2.32)$$

La integral (2.32) puede ser calculada con la ayuda de teoría de residuos, debido a la propiedad 2) de la definición 12, la función  $\left| \widehat{f}(p) \right| = O\left(\frac{1}{|p|}\right)$ . Por lo tanto, tomando en cuenta que hay una singularidad (un polo simple) en el punto  $p = p_0$  y cerrando el contorno hacia el semiplano derecho como se muestra en la Figura 2.3 e integrando en dirección negativa se obtiene

$$\int_0^\infty e^{-p_0 t} f(t) dt = \widehat{f}(p_0).$$

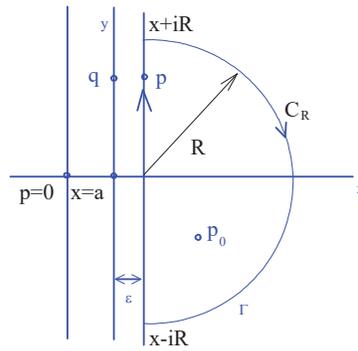


Figura 2.3: Contorno  $\Gamma$  para  $\text{Re } p > a$  y con punto singular  $p_0$

Como  $p_0$  es un punto arbitrario en el dominio  $\text{Re } p > a$ , se prueba el teorema.

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \widehat{f}(p).$$

■

## 2.10. Operadores pseudodiferenciales en el segmento $(0, a)$

### 2.10.1. Notación y definición

**Definición 14** Sea  $g \in \mathbf{L}^\infty(0, a)$  y  $g$  se extiende a  $\mathbb{R}$  con  $g = 0$  si  $x \notin (0, a)$ .

Definimos el espacio de funciones

$$D_a := \{\theta_a(x)g(x) : g(x) \in \mathbf{H}_\infty^1(0, a)\}, \quad (2.33)$$

**Definición 15** Decimos que la función  $\hat{g}$  pertenece a la clase de funciones  $\mathcal{A}_a$  si

1) Es analítica en todo el plano complejo.

$$2) |\hat{g}(p)| \leq \begin{cases} C & \text{para } |p| < 1 \\ \frac{1+|e^{-pa}|}{|p|} & \text{para } |p| \gg 1. \end{cases}$$

**Teorema 16** Si  $g \in D_a$  entonces la transformada de Laplace  $\hat{g} \in \mathcal{A}_a$ .

**Demostración.** Para demostrar 1) primero vamos a probar que la transformada de Laplace definida por

$$\hat{g}(p) = \int_0^a e^{-px} g(x) dx$$

es convergente  $\forall p$ . Como la función  $g \equiv 0$  para  $x \notin (0, a)$ , tiene discontinuidades de primer tipo en los extremos del intervalo  $(0, a)$  y esta acotada, podemos usar la prueba de comparación, obteniendo

$$\begin{aligned} |\hat{g}(p)| &= \left| \int_0^a e^{-px} g(x) dx \right| \leq \int_0^a |e^{-px}| |g(x)| dx \\ &\leq M \int_0^a |e^{-px}| dx, \end{aligned}$$

aplicando  $|e^{-px}| \leq e^{-\operatorname{Re} px}$ , donde  $p = \xi + i\eta$ , por lo tanto

$$\begin{aligned} |\widehat{g}(p)| &\leq M \int_0^a e^{-\xi x} dx \\ &\leq \frac{M}{\xi} (1 - e^{-\xi a}) \\ &\leq \frac{M}{\xi}. \end{aligned}$$

Ahora como cada uno de los términos de la integral de la transformada de Laplace son positivos, la integral es monótona, de aquí que la integral  $\int_0^a e^{-px} g(x) dx$  es convergente  $\forall p \in \mathbb{C}$ . Ahora dividimos el intervalo de integración en subintervalos  $[t_i, t_{i+1}]$  de longitud finita, donde  $t_0 = 0$  y  $t_n \rightarrow a$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Entonces la función  $\widehat{g}$ , es la suma de una serie

$$\widehat{g}(p) = \int_0^a e^{-px} g(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{-px} g(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(p).$$

Como la función  $g \equiv 0$  para  $x \notin (0, a)$  y tiene discontinuidad de primer tipo en los extremos del intervalo  $(0, a)$  y esta acotada. Usando la convergencia de la serie (2.20) la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(p)$  converge uniformemente en el dominio  $0 \leq \operatorname{Re} p \leq a$ . Cada una de las funciones

$$u_n(p) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{-px} g(x) dx$$

están definidas como una integral dependiente de un parámetro  $p$ , sobre un intervalo de longitud finita. Por lo tanto las funciones  $u_n(p)$  son funciones enteras con respecto a  $p$  y se satisfacen las condiciones del teorema de Weierstrass (ver [4]), de aquí, la función  $\widehat{g}$  es analítica  $\forall p \in \mathbb{C}$ .

Ahora probamos 2) usando integración por partes con respecto a  $x$  para  $p \gg 1$

$$\begin{aligned}
 |\widehat{g}(p)| &= \left| \int_0^a e^{-px} g(x) dx \right| \\
 &\leq \left| \frac{1}{p} [g(0) - e^{-pa} g(a)] + \frac{1}{p} \int_0^a e^{-px} g'(x) dx \right| \\
 &\leq C \frac{1 + |e^{-pa}|}{|p|} + \frac{1}{|p|} \int_0^a |e^{-px}| |g'(x)| dx \\
 &\leq C \frac{1 + |e^{-pa}|}{|p|} + \frac{C}{|p|^2} (|e^{-pa}| - 1) \\
 &\leq C \frac{1 + |e^{-pa}|}{|p|} + O\left(\frac{1}{|p|^2}\right).
 \end{aligned}$$

Para el caso  $p < 1$ , la exponencial esta acotada por  $|e^{-pa}| < 1$ , por lo que

$$|\widehat{g}(p)| < C.$$

■

**Proposición 17** Si  $g \in \mathbf{C}^n$  entonces

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{d^n g(x)}{dx^n} \right\} = p^n \left( \widehat{g}(p) - \sum_{j=1}^n \frac{d_x^{j-1} g(0) - e^{-pa} d_x^{j-1} g(a)}{p^j} \right). \quad (2.34)$$

**Demostración.** Usando el principio de inducción matemática, probaremos la fórmula (2.34).

Para  $k = 1$ , debemos integrar por partes

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} \left\{ \frac{d}{dx} g(x) \right\} &= \int_0^a e^{-px} g'(x) dx = \int_0^a e^{-px} d(g(x)) \\
 &= e^{-px} g(x) \Big|_0^a + p \int_0^a e^{-px} g(x) dx \\
 &= p \widehat{g}(p) - [g(0) - e^{-pa} g(a)] \\
 &= p \left[ \widehat{g}(p) - \frac{g(0) - e^{-pa} g(a)}{p} \right].
 \end{aligned}$$

Ahora supongamos que para  $k = n - 1$  se cumple la fórmula

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} g(x) \right\} = p^{n-1} \left( \widehat{g}(p) - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{d_x^{j-1}(g(0)) - e^{-pa} d_x^{j-1}(g(a))}{p^j} \right) \quad (2.35)$$

y probemos el caso  $k = n$ , integrando por partes

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left\{ \frac{d^n}{dx^n} g(x) \right\} &= \int_0^a e^{-px} g^{(n)}(x) dx = \int_0^a e^{-px} d(d_x^{n-1} g(x)) \\ &= e^{-px} d_x^{n-1} g(x) \Big|_0^a + p \int_0^a e^{-px} g^{(n-1)}(x) dx. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Usando la fórmula (2.35) en (2.36) se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left\{ \frac{d^n}{dx^n} g(x) \right\} &= e^{-px} d_x^{n-1} g(x) \Big|_0^a + p \left[ p^{n-1} \left( \widehat{g}(p) - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{d_x^{j-1} g(0) - e^{-pa} d_x^{j-1} g(a)}{p^j} \right) \right] \\ &= e^{-pa} d_x^{n-1} g(a) - d_x^{n-1} g(0) + p^n \left( \widehat{g}(p) - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{d_x^{j-1} g(0) - e^{-pa} d_x^{j-1} g(a)}{p^j} \right) \end{aligned}$$

desarrollando y reagrupando la suma respecto a la potencia  $p^n$  se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left\{ \frac{d^n}{dx^n} g(x) \right\} &= p^n \left( \widehat{g}(p) - \frac{g(0) - e^{-pa} g(a)}{p} - \frac{g'(0) - e^{-pa} g'(a)}{p^2} \right. \\ &\quad \left. \dots - \frac{g^{(n-2)}(0) - e^{-pa} g^{(n-2)}(a)}{p^{n-1}} - \frac{g^{(n-1)}(0) - e^{-pa} g^{(n-1)}(a)}{p^n} \right) \\ &= p^n \left( \widehat{g}(p) - \sum_{j=1}^n \frac{d_x^{j-1} g(0) - e^{-pa} d_x^{j-1} g(a)}{p^j} \right). \end{aligned}$$

Esta última escritura prueba que para  $k = n$  se cumple la fórmula (2.34). Luego la fórmula (2.34) se cumple  $n \geq 1$ . ■

Por lo que podemos definir el operador diferencial de orden entero  $n$ , en términos de la transformada inversa de Laplace como

$$\frac{d^n}{dx^n} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ p^n \left[ \widehat{g}(p) - \sum_{j=1}^n \frac{d_x^{j-1} g(0) - e^{-pa} d_x^{j-1} g(a)}{p^j} \right] \right\}.$$

Ahora definimos la derivada fraccional  $\alpha$ , donde  $\alpha \in (0, 1)$  como

$$D^\alpha := \theta_\alpha(x) \mathcal{L}^{-1} \{ p^\alpha \mathcal{L} \}.$$

Notamos que la función  $p^\alpha$  no es analítica en el semiplano complejo  $\operatorname{Re} p < 0$ , por lo que debemos hacer un corte  $\Gamma$  como se muestra en la Figura 2.4, donde el contorno  $\Gamma$  está definido como

$$\Gamma = \{ p \in (\infty e^{-i\pi}; 0) \cup (0; \infty e^{i\pi}) \},$$

por lo tanto para la correcta definición de derivada fraccional  $\alpha$ , se debe multiplicar por la característica  $\theta_\alpha(x)$ .

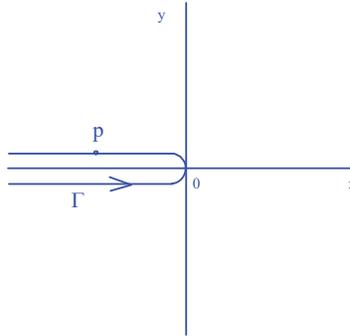


Figura 2.4: Corte  $\Gamma$  en  $\operatorname{Re} p < 0$  para la función  $p^\alpha$

## 2.11. Integrales del tipo de Cauchy

La integral de la forma

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbf{C}} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

donde  $\varphi(\zeta)$  es una función continua en el contorno, a excepción, posiblemente de un número finito de puntos, donde tiene discontinuidades integrables, se llama integral de tipo de Cauchy. La función  $\varphi(\zeta)$  se llama densidad y  $\frac{1}{\zeta - z}$  el núcleo de la integral. La integral del tipo de Cauchy representa una función  $F(z)$  analítica en todo recinto que no contiene puntos del contorno  $\mathbf{C}$ . Además

$$F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\mathbf{C}} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta.$$

Supongamos que  $\varphi(\zeta)$  verifica sobre el contorno  $\mathbf{C}$  la condición de Hölder, esto es para dos puntos cualquiera  $\zeta_1$  y  $\zeta_2$  sobre  $\mathbf{C}$

$$|\varphi(\zeta_1) - \varphi(\zeta_2)| < k |\zeta_1 - \zeta_2|^\alpha,$$

donde  $k > 0$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ , Si  $\alpha = 1$ , la condición de Hölder se llama condición de Lipschitz. En estas condiciones, si el punto  $\zeta_0$  del contorno no es un extremo suyo, existe la integral singular

$$F(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbf{C}} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta,$$

definida como el valor principal de tipo Cauchy.

Este valor principal se puede expresar a través de una integral impropia mediante la fórmula

$$F(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbf{C}} \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(\zeta_0)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta + \frac{1}{2} \varphi(\zeta_0) + \frac{\varphi(\zeta_0)}{2\pi i} \text{Ln} \frac{b - \zeta_0}{a - \zeta_0},$$

donde los puntos  $a$  y  $b$  son los puntos extremos del contorno  $\mathbf{C}$ , si este no es cerrado. La rama uniforme de  $Ln$  se escoge de manera que en el caso de un contorno cerrado ( $a = b$ ) el término con el logaritmo desaparezca y la fórmula adquiera la forma

$$F(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbf{C}} \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(\zeta_0)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta + \frac{1}{2} \varphi(\zeta_0).$$

Si designamos mediante  $F^+(\zeta_0)$  y  $F^-(\zeta_0)$  los valores frontera de la integral  $F(z)$  de tipo de Cauchy cuando  $z \rightarrow \zeta_0$  por la izquierda y por la derecha de  $\mathbf{C}$  respectivamente, tendremos de acuerdo con las fórmulas de Sokhotski-Plemelj

$$\begin{aligned} F^+(\zeta_0) &= F(\zeta_0) + \frac{1}{2} \varphi(\zeta_0), \\ F^-(\zeta_0) &= F(\zeta_0) - \frac{1}{2} \varphi(\zeta_0), \end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned} F(\zeta_0) &= \frac{1}{2} [F^+(\zeta_0) + F^-(\zeta_0)], \\ F^+(\zeta_0) - F^-(\zeta_0) &= \varphi(\zeta_0). \end{aligned}$$

Si  $\mathbf{C}$  es un contorno cerrado que se recorre como siempre,  $F^+(\zeta)$  son los valores frontera de la función  $F^+(z)$  definida en el interior del contorno (recinto  $D^+$ ), mientras que  $F^-(\zeta)$  son los valores frontera de la función  $F^-(z)$  definida en el exterior del contorno (recinto  $D^-$ ) (ver [5]).

## 2.12. proyectores

En esta sección, se define y se presentan las propiedades del operador  $\mathbb{P}$ .

**Definición 18** Si  $\widehat{f}$  satisface la condición de Hölder en  $\text{Re } p = 0$ , definimos el operador  $\mathbb{P}$  como

$$\mathbb{P} \left\{ \widehat{f}(p) \right\} := \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{e^{(q-p)a} - 1}{q-p} \widehat{f}(q) dq. \quad (2.37)$$

**Teorema 19** Si  $\widehat{f} \in \mathcal{A}_a$  entonces  $\mathbb{P} \left\{ \widehat{f}(p) \right\} = \widehat{f}(p)$ .

**Demostración.** Como  $\widehat{f}$  es analítica en todo el plano complejo, desarrollamos la integral en dos partes

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left\{ \widehat{f}(p) \right\} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{e^{(q-p)a}}{q-p} \widehat{f}(q) dq \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{1}{q-p} \widehat{f}(q) dq. \end{aligned}$$

Esta integral la analizamos en tres casos,

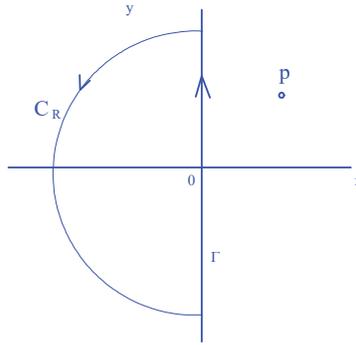
a) para  $\text{Re } p > 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left\{ \widehat{f}(p) \right\} &= \frac{1}{2\pi i} e^{-pa} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{e^{qa}}{q-p} \widehat{f}(q) dq \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{1}{q-p} \widehat{f}(q) dq \\ &= J_1 + J_2. \end{aligned}$$

Para  $J_1$ , debemos cerrar el contorno para  $\text{Re } q < 0$ , para que la función  $e^{qa} \widehat{f} \rightarrow 0$  cuando  $q \rightarrow \infty$  sobre el contorno  $C_R$ , como se muestra en la Figura 2.5.

Como la función  $e^{qa} \widehat{f}$  es analítica y dentro del contorno  $\Gamma$  no se encierra ningún punto singular, entonces aplicando el teorema de Cauchy

$$J_1 = 0.$$

Figura 2.5: Contorno para  $\text{Re } q < 0$ 

Ahora evaluamos  $J_2$  de la siguiente manera,

$$J_2 = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{1}{q-p} \widehat{f}(q) dq, \quad (2.38)$$

como la función  $\widehat{f}$  es analítica  $\forall p \in \mathbb{C}$ , la integral (2.38) puede ser calculada con la ayuda de residuos, tomando en cuenta que hay una singularidad (un polo simple) en el punto  $q = p$  y cerrando el contorno hacia el semiplano derecho como se muestra en la Figura 2.6, la integración es realizada en dirección negativa, por lo que

$$J_2 = \widehat{f}(p).$$

b) cuando  $\text{Re } p < 0$ , debemos cerrar el contorno para  $J_1$ , para  $\text{Re } p < 0$  como se muestra en la Figura 2.5. Como la función  $e^{qa} \widehat{f}$  es analítica dentro del contorno  $\Gamma$  y tomando en cuenta que hay una singularidad (polo simple) en  $q = p$ , entonces

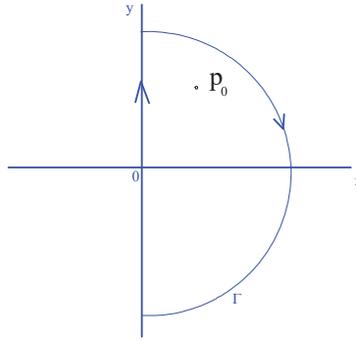


Figura 2.6: Contorno para  $\text{Re } q > 0$  con punto singular  $p_0$

aplicando el teorema de Cauchy se obtiene

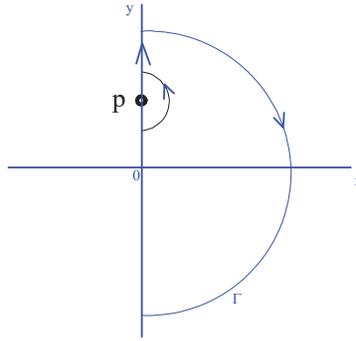
$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{1}{2\pi i} e^{-pa} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{e^{qa}}{q-p} \widehat{f}(q) dq \\ &= e^{-pa} e^{pa} \widehat{f}(p) \\ &= \widehat{f}(p). \end{aligned}$$

Ahora para el término  $J_2$ , cerramos en contorno de integración a la derecha como se muestra en la Figura 2.6, y como  $\text{Re } p < 0$ , no se encierra ningún punto singular, entonces aplicando el teorema de Cauchy

$$J_2 = 0.$$

c) Ahora consideramos el caso  $\text{Re } p = 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left\{ \widehat{f}(p) \right\} &= \frac{1}{2\pi i} e^{-pa} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{e^{qa}}{q-p} \widehat{f}(q) dq \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{1}{q-p} \widehat{f}(q) dq \\ &= J_1 + J_2. \end{aligned}$$

Figura 2.7: Contorno para  $\operatorname{Re} q > 0$ 

Para cada una de las integrales  $J_1$  y  $J_2$ , se debe cerrar el contorno para  $\operatorname{Re} q > 0$  como se muestra en la Figura 2.7 y similarmente para  $\operatorname{Re} q < 0$ , debido a que  $\operatorname{Re} p = 0$ , debemos calcular la mitad del residuo en cada integral, por lo que

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left\{ \widehat{f}(p) \right\} &= \frac{1}{2} e^{-pa} e^{-pa} \widehat{f}(p) + \frac{1}{2} \widehat{f}(p) \\ &= \widehat{f}(p). \end{aligned}$$

■

**Teorema 20** Si  $\widehat{f}$  satisface la condición de Hölder para  $\operatorname{Re} p = 0$  y  $|\widehat{f}(p)| \leq \frac{C}{|p|^\gamma}$ ,  $\gamma > 0$  y  $|p| > 1$  entonces  $\mathbb{P} \left\{ \widehat{f}(p) \right\} \in \mathcal{A}_a$  y

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \mathbb{P} \left\{ \widehat{f}(p) \right\} \right\} = \theta_a(x) \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{px} \widehat{f}(p) dp.$$

**Demostración.** Tenemos por definición

$$\mathbb{P} \left\{ \widehat{f}(p) \right\} = e^{-pa} J_1 + J_2,$$

donde

$$J_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \widehat{f}(q) \frac{e^{qa}}{q-p} dq,$$

$$J_2 = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \widehat{f}(q) \frac{1}{q-p} dq,$$

Notamos que  $J_1$  y  $J_2$  son integrales de tipo de Cauchy con núcleos  $\widehat{f}e^{qa}$  y  $-\widehat{f}$  respectivamente. Debido a las condiciones del teorema ambos núcleos satisfacen la condición de Lipschitz y obtenemos que  $J_1$  y  $J_2$  son analíticos para  $\operatorname{Re} p \neq 0$  y satisfacen condición

$$|J_i| \leq C \frac{1}{|p|}, |p| > 1, i = 1, 2.$$

Además para  $\operatorname{Re} p = 0$

$$J_1^+ - J_1^- = \widehat{f}(p) e^{pa}$$

$$J_2^+ - J_2^- = \widehat{f}(p),$$

donde

$$J_i^- = \lim_{z \rightarrow p, \operatorname{Re} z > 0} J_1(z)$$

$$J_i^+ = \lim_{z \rightarrow p, \operatorname{Re} z < 0} J_1(z).$$

Entonces para  $\operatorname{Re} p = 0$

$$\mathbb{P} \left\{ \widehat{f}(p) \right\}^+ - \mathbb{P} \left\{ \widehat{f}(p) \right\}^- = 0.$$

Por lo tanto, usando el teorema de unicidad de continuación analítica el operador  $\mathbb{P} \left\{ \widehat{f}(p) \right\} \in \mathcal{A}_a$ .

Ahora demostramos la propiedad

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \mathbb{P} \left\{ \widehat{f}(p) \right\} \right\} = \theta_a(x) \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{px} \widehat{f}(p) dp.$$

Desarrollando la parte izquierda de la igualdad para  $\operatorname{Re} p > 0$  con el contorno mostrado en la Figura 2.8, se obtiene

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \mathbb{P} \left\{ \widehat{f}(p) \right\} \right\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\varepsilon}^{+i\infty+\varepsilon} e^{px} \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{e^{(q-p)a} - 1}{q-p} \widehat{f}(q) dq \right] dp.$$

Usando el teorema de Fubini se puede cambiar el orden de integración para obtener

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \mathbb{P} \left\{ \widehat{f}(p) \right\} \right\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \widehat{f}(q) \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\varepsilon}^{+i\infty+\varepsilon} \frac{e^{qa+p(x-a)} - e^{px}}{q-p} dp \right] dq. \quad (2.39)$$

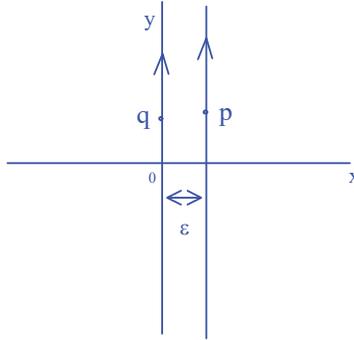


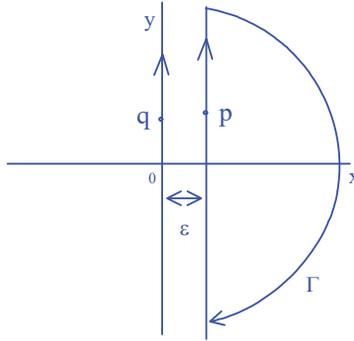
Figura 2.8: Contorno para  $\operatorname{Re} p > 0$

Ahora desarrollamos la integral interior de (2.39) y la llamamos  $I_2$

$$I_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\varepsilon}^{+i\infty+\varepsilon} \frac{e^{qa} e^{p(x-a)} - e^{px}}{q-p} dp.$$

En el caso para  $x < 0$  debemos cerrar el contorno a la derecha, como se muestra en la Figura 2.9, y el punto singular  $p = q$  queda fuera del contorno de integración y como la función  $(e^{qa} e^{p(x-a)} - e^{px})$  es analítica dentro del contorno  $\Gamma$ , por lo tanto usando el teorema de Cauchy

$$I_2 = 0.$$

Figura 2.9: Contorno cerrado para  $\text{Re } p > \epsilon$ 

En el caso para  $x > a$  se debe cerrar el contorno a la izquierda, como se muestra en la Figura 2.10, por lo que debemos calcular el residuo en el punto singular  $p = q$  (polo simple), aplicando la fórmula integral de Cauchy

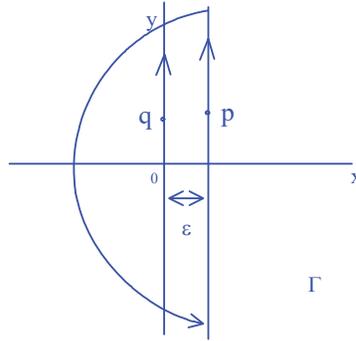
$$I_2 = e^{qa} e^{q(x-a)} - e^{qx} = 0.$$

Para el caso cuando  $0 < x < a$  separamos  $I_2$  en dos partes

$$I_2 = \frac{e^{qa}}{2\pi i} \int_{-i\infty+\epsilon}^{+i\infty+\epsilon} \frac{e^{p(x-a)}}{q-p} dp - \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\epsilon}^{+i\infty+\epsilon} \frac{e^{px}}{q-p} dp.$$

Para la primera integral se tiene que  $x - a < 0$ , por lo que se debe cerrar el contorno a la derecha, como se muestra en la Figura 2.9, por lo tanto no se encierra ningún punto singular entonces usando el teorema de Cauchy la primera integral es cero. Para la segunda integral cerramos el contorno de integración a la izquierda, como se muestra en la Figura 2.10, por lo que debemos calcular el residuo en el punto singular  $p = q$ , entonces obtenemos

$$I_2 = e^{qx}, \quad 0 < x < a.$$

Figura 2.10: Contorno cerrado para  $\text{Re } p < \varepsilon$ 

Por lo tanto finalmente obtenemos

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \mathbb{P} \left\{ \widehat{f}(p) \right\} \right\} = \theta_a(x) \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{px} \widehat{f}(p) dp.$$

■

### 2.13. Operador pseudodiferencial $\mathbb{K}$

Ahora se define el operador pseudodiferencial  $\mathbb{K}$  de la siguiente manera

$$\mathbb{K}u(x) := \theta_a(x) \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{px} K(p) \widehat{u}(p) dp, \quad x \in (0, a), \quad (2.40)$$

donde  $\theta_a(x)$  fue definida en (3),  $\widehat{u} \in \mathcal{A}_a$  y  $K(p) = C_\alpha p^\alpha$ ,  $\alpha \in (0, 1)$  y  $C_\alpha$  una constante compleja tal que el operador  $\mathbb{K}$  sea disipativo, es decir

$$\text{Re } K(p) > 0 \text{ para valores de } p \in \mathbb{C} \text{ para } \text{Re } p = 0. \quad (2.41)$$

Para probar la convergencia de la integral (2.40), separamos en dos intervalos de

integración y aplicamos la desigualdad del triángulo

$$\begin{aligned}
|\mathbb{K}u(x)| &= \left| \lim_{R_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_0^{+iR_2} e^{px} K(p) \widehat{u}(p) dp \right. \\
&\quad \left. + \lim_{R_2 \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{-iR_1}^0 e^{px} K(p) \widehat{u}(p) dp \right| \\
&\leq \left| \lim_{R_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_0^{+iR_2} e^{px} K(p) \widehat{u}(p) dp \right| \\
&\quad + \left| \lim_{R_2 \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{-iR_1}^0 e^{px} K(p) \widehat{u}(p) dp \right| \\
&= I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

Donde

$$\begin{aligned}
I_1 &= \left| \lim_{R_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_0^{+iR_2} e^{px} K(p) \widehat{u}(p) dp \right| \\
I_2 &= \left| \lim_{R_2 \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{-iR_1}^0 e^{px} K(p) \widehat{u}(p) dp \right|.
\end{aligned}$$

Ahora probaremos la convergencia del término  $I_1$  usando el criterio de Cauchy para convergencia simple, es decir  $\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0$  tal que  $\forall N > M > A$

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{iM}^{iN} e^{px} K(p) \widehat{u}(p) dp \right| < \varepsilon.$$

Integrando por partes con respecto a  $p$  y aplicando la desigualdad del triángulo se obtiene

$$\begin{aligned}
\left| \int_{iM}^{iN} e^{px} K(p) \widehat{u}(p) dp \right| &= \left| \int_{iM}^{iN} \frac{1}{x} K(p) \widehat{u}(p) d(e^{px}) \right| \\
&= \left| \frac{1}{x} e^{px} K(p) \widehat{u}(p) \Big|_{iM}^{iN} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{x} \int_{iM}^{iN} e^{px} (K'(p) \widehat{u}(p) + K(p) \widehat{u}'(p)) dp \right| \\
&\leq \left| \frac{1}{x} e^{px} K(p) \widehat{u}(p) \Big|_{iM}^{iN} \right| \\
&\quad + \left| \frac{1}{x} \int_{iM}^{iN} e^{px} K'(p) \widehat{u}(p) dp \right| + \left| \frac{1}{x} \int_{iM}^{iN} e^{px} K(p) \widehat{u}'(p) dp \right| \\
&\leq \frac{1}{x} \left| K(p) \widehat{u}(p) \Big|_{iM}^{iN} \right| + \frac{1}{x} \int_{iM}^{iN} |K'(p)| |\widehat{u}(p)| |dp| \\
&\quad + \frac{1}{x} \int_{iM}^{iN} |K(p)| |\widehat{u}'(p)| |dp|.
\end{aligned}$$

Usando (2.30) se tiene que  $|\widehat{u}(p)| \leq \frac{C}{|p|}$  y  $|\widehat{u}'(p)| \leq \frac{C}{|p|^2}$ , para  $|p| > 1$  y  $K(p) = C_\alpha p^\alpha$ , y su derivada  $K'(p) = C p^{\alpha-1}$ .

$$\begin{aligned}
\left| \int_{iM}^{iN} e^{px} K(p) \widehat{u}(p) dp \right| &\leq \frac{1}{x} \left| C_\alpha |p|^\alpha \frac{C}{|p|} \Big|_{iM}^{iN} \right| + \frac{1}{x} \int_{iM}^{iN} |C_\alpha |p|^{\alpha-1}| \frac{1}{|p|} |dp| \\
&\quad + \frac{1}{x} \int_{iM}^{iN} |C_\alpha |p|^\alpha| \frac{1}{|p|^2} |dp| \\
&\leq C \left| |iN|^\alpha \frac{1}{|iN|} \right| + C \left| |iM|^\alpha \frac{1}{|iM|} \right| \\
&\quad + C \int_{iM}^{iN} |p|^{\alpha-2} |dp| \\
&\leq C \frac{1}{N^{1-\alpha}} + C \frac{1}{M^{1-\alpha}} + C |p|^{\alpha-1} \Big|_{iM}^{iN} \\
&\leq C \frac{1}{M^{1-\alpha}} + C \frac{1}{N^{1-\alpha}} + C \frac{1}{M^{1-\alpha}} \\
&\leq C \frac{1}{M^{1-\alpha}}.
\end{aligned}$$

Para  $N > M > A = \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$  se cumple el criterio de Cauchy de convergencia simple. En forma análoga se demuestra la convergencia para el término  $I_2$ .

## 2.14. Funciones inversas $K^{-1}(-\xi)$

Para que una ecuación en derivadas parciales (EDP) tenga solución única, se requieren especificar algunas condiciones adicionales tales como condiciones iniciales o de frontera.

El paso siguiente en este trabajo es demostrar que sólo se requiere una condición inicial y no se necesita ninguna condición en frontera, para el problema (1).

Puesto que en el problema (1) sólo existe la primera derivada respecto a  $t$ , se requiere únicamente una condición inicial

$$u(x, 0) = u_0(x).$$

Ahora el siguiente Lema nos muestra que si  $\alpha \in (0, 1)$ , no es necesaria ninguna condición de frontera para el problema (1).

**Lema 21** *Sea  $K(p) = C_\alpha p^\alpha$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ , y  $K(p)$  cumple la condición (2.41), entonces no existen funciones inversas para  $\operatorname{Re} \xi > 0$  tales que  $\varphi(\xi) = K^{-1}(-\xi)$ , para  $\operatorname{Re} \varphi(\xi) > 0$ .*

**Demostración.** Sea  $K(p)$  una función analítica definida en el semiplano complejo  $\operatorname{Re} p \geq 0$ , y elegimos la rama principal de la función analítica  $C_\alpha p^\alpha$  en el semiplano complejo  $\operatorname{Re} p \geq 0$ .

Haciendo un cambio de variable con  $K(p) = C_\alpha p^\alpha = -\xi$  para  $\operatorname{Re} \xi > 0$  y

$$-\frac{\pi}{2} < \arg \xi < \frac{\pi}{2}. \quad (2.42)$$

El primer paso es hallar las raíces de  $p$  como sigue

$$p = \frac{|\xi|^{\frac{1}{\alpha}}}{|C_\alpha|^{\frac{1}{\alpha}}} e^{i(\pi + \arg \xi - \arg C_\alpha + 2\pi k)\frac{1}{\alpha}} = \varphi(\xi)$$

donde  $\varphi(\xi)$  son las funciones inversas.

Tomando  $\operatorname{Re} \varphi(\xi) = \cos\left((\pi + \arg \xi - \arg C_\alpha + 2\pi k)\frac{1}{\alpha}\right) > 0$ , el argumento de  $\varphi(\xi)$  debe estar entre los valores

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{\alpha} + \frac{\arg \xi}{\alpha} - \frac{\arg C_\alpha}{\alpha} + \frac{2\pi k}{\alpha} < \frac{\pi}{2}, \quad (2.43)$$

despejando el valor de  $k$  de la desigualdad (2.43) se obtiene que

$$-\frac{\alpha}{4} - \frac{1}{2} - \frac{\arg \xi}{2\pi} + \frac{\arg C_\alpha}{2\pi} < k < \frac{\alpha}{4} - \frac{1}{2} - \frac{\arg \xi}{2\pi} + \frac{\arg C_\alpha}{2\pi},$$

denotando una nueva variable  $\psi = -\frac{1}{2} - \frac{\arg \xi}{2\pi} + \frac{\arg C_\alpha}{2\pi}$ , reescribimos la desigualdad

$$-\frac{\alpha}{4} + \psi < k < \frac{\alpha}{4} + \psi, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (2.44)$$

Usando (2.42) tenemos que

$$-\frac{1}{4} < \frac{\arg \xi}{2\pi} < \frac{1}{4}. \quad (2.45)$$

Como  $K(p)$  es disipativo representamos

$$K(p) = |C_\alpha p^\alpha| e^{i\left(\theta_\alpha \pm \frac{\pi}{2}\alpha\right)},$$

donde  $\theta_\alpha = \arg C_\alpha$ ,  $p = iy$ ,  $y \in \mathbb{R}$ . Notamos que  $\cos(\theta_\alpha \pm \frac{\pi}{2}\alpha) > 0$ , y por lo tanto

$$\begin{cases} -\frac{1}{4} + m - \frac{\alpha}{4} < \frac{\arg C_\alpha}{2\pi} < \frac{1}{4} + m - \frac{\alpha}{4} \\ -\frac{1}{4} + n + \frac{\alpha}{4} < \frac{\arg C_\alpha}{2\pi} < \frac{1}{4} + n + \frac{\alpha}{4}. \end{cases} \quad (2.46)$$

Resolviendo el sistema obtenido tenemos

$$-\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2} < m - n < \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2}.$$

Tal que  $\alpha < 1$  y  $m, n$  son enteros, vemos que un valor posible es  $m = n = 0$ .

Por eso

$$\frac{\alpha - 1}{4} < \frac{\arg C_\alpha}{2\pi} < \frac{1 - \alpha}{4}. \quad (2.47)$$

Usando (2.47) y (2.45) obtenemos para (2.44)

$$-\frac{\alpha}{4} - \frac{1}{2} - \frac{\arg \xi}{2\pi} + \frac{\arg C_\alpha}{2\pi} < k < \frac{\alpha}{4} - \frac{1}{2} - \frac{\arg \xi}{2\pi} + \frac{\arg C_\alpha}{2\pi}.$$

Tomando el máximo de la parte izquierda y el mínimo de la parte derecha de la desigualdad se obtiene una nueva desigualdad para  $\alpha$

$$\psi = -\frac{1}{2} - \frac{\arg \xi}{2\pi} + \frac{\arg C_\alpha}{2\pi}$$

$$\begin{aligned} \text{máx} \{\psi\} &= -\frac{3}{4} + \frac{1 - \alpha}{4} \\ \text{mín} \{\psi\} &= -\frac{1}{4} + \frac{\alpha - 1}{4}, \end{aligned}$$

tomando la desigualdad

$$\begin{aligned} -\frac{\alpha}{4} + \text{mín} \{\psi\} &< \frac{\alpha}{4} + \text{máx} \{\psi\} \\ -\frac{\alpha}{4} - \frac{1}{4} + \frac{\alpha - 1}{4} &< \frac{\alpha}{4} - \frac{3}{4} + \frac{1 - \alpha}{4} \end{aligned}$$

se cancela el argumento de  $\frac{\arg C_\alpha}{2\pi}$ , por lo que queda

$$\begin{aligned} -\frac{\alpha}{4} - \frac{1}{4} &< \frac{\alpha}{4} - \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} &< \frac{\alpha}{2} \\ 1 &< \alpha, \end{aligned}$$

por lo que sólo existen valores de  $k$  cuando  $\alpha > 1$ . ■

Entonces se demuestra que no es necesario poner condiciones en frontera al problema (1) para que la solución sea única.

# Capítulo 3

## Problema Lineal

### 3.1. Introducción

Sea  $\mathbf{C}([0, \infty), \mathbf{L}^\infty(0, a))$  el conjunto de funciones continuas en los dominios  $t \in [0, \infty)$  y  $x \in (0, a)$ . En este capítulo vamos a demostrar que existe una solución  $u \in \mathbf{C}([0, \infty), \mathbf{L}^\infty(0, a)) \cap \mathbf{C}^1([0, \infty))$  del siguiente problema lineal asociado al problema (1)

$$\begin{cases} u_t + \mathbb{K}u = 0, & x \in (0, a), t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in (0, a), \end{cases} \quad (3.1)$$

donde  $u = u(x, t)$  y  $\mathbb{K}$  es un operador pseudodiferencial en  $x \in (0, a)$  definido por

$$\mathbb{K}u(x, t) = \theta_a(x) \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{px} K(p) \widehat{u}(p, t) dp, \quad (3.2)$$

$$\theta_a(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, a) \\ 0, & x \notin (0, a), \end{cases}$$

$K(p) = C_\alpha p^\alpha$ ,  $\alpha \in (0, 1)$  y  $C_\alpha$  una constante compleja que se elige tal que cumpla la condición (2.47) y la definición 2.41, un ejemplo es  $C_\alpha = 1$ . Además  $\widehat{u}(p, t)$  denota

la transformada de Laplace de la función  $u(x, t)$

$$\widehat{u}(p, t) = \int_0^a e^{-px} u(x, t) dx,$$

$\forall p \in \mathbb{C}, t > 0$ . La convergencia de (3.2) es condicional (ver sección 2.13).

Sea  $\varphi \in \mathbf{L}^\infty(0, a)$ , definimos el operador de Green como

$$\mathbb{G}(x, y, t) \varphi(x) := \int_0^a G(x, y, t) \varphi(y) dy$$

donde

$$G(x, y, t) = \frac{\theta_a(x)}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{p(x-y) - K(p)t} dp, \quad (3.3)$$

es una solución fundamental del problema lineal (3.1). Notamos que bajo la definición 2.41, la integral (3.3) converge uniformemente  $\forall t > 0$ .

## 3.2. Construcción de la función de Green

**Teorema 22** Si  $u_0 \in \mathbf{L}^\infty(0, a)$  entonces existe única solución  $u \in \mathbf{C}([0, \infty), \mathbf{L}^\infty(0, a))$  del problema (3.1) que tiene la siguiente representación

$$u(x, t) = \mathbb{G}(t) u_0. \quad (3.4)$$

**Demostración.** Para demostrar el teorema, primero suponemos que existe una solución  $u \in D_a$  para hallar una representación integral del problema (3.1). Por el teorema 16  $\widehat{u} \in \mathcal{A}_a$ . Aplicando la transformada de Laplace a cada uno de los términos del problema (3.1) se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{u_t(x, t)\} &= \int_0^a e^{-px} u_t(x, t) dx \\ &= \widehat{u}_t(p, t). \end{aligned}$$

Usando la condición  $\widehat{u} \in \mathcal{A}_a$  y por el teorema de Fubini se obtiene la transformada de Laplace del operador  $\mathbb{K}u$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\mathbb{K}u(x, t)\} &= \int_0^a e^{-px} \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{qx} K(q) \widehat{u}(q, t) dq \right] dx \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} K(q) \widehat{u}(q, t) \left[ \int_0^a e^{(q-p)x} dx \right] dq \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{e^{(q-p)a} - 1}{q-p} K(q) \widehat{u}(q, t) dq \\ &= \mathbb{P}\{K(p) \widehat{u}(p, t)\}. \end{aligned}$$

Por lo que aplicando la transformada de Laplace a la ecuación (3.1) respecto a la variable espacial  $x$ , y usando el teorema 19 se obtiene  $\forall p \in \mathbb{C}$

$$\mathbb{P}\{\widehat{u}_t(p, t) + K(p) \widehat{u}(p, t)\} = 0. \quad (3.5)$$

Como  $K(p)$  no es analítica para  $\operatorname{Re} p < 0$ , reescribimos el argumento del operador  $\mathbb{P}$  de la ecuación (3.5) en la forma

$$\widehat{u}_t(p, t) + K(p) \widehat{u}(p, t) = \widehat{\Phi}(p, t), \quad (3.6)$$

donde la función  $\widehat{\Phi}(p, t)$  es analítica para  $\operatorname{Re} p > 0$  y satisface las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{\widehat{\Phi}(p, t)\} &= 0, \quad \forall p \in \mathbb{C} \\ \left| \widehat{\Phi}(p, t) \right| &\leq C \frac{|e^{-pa}| + 1}{|p|^{1-\alpha}} \text{ para } |p| > 1. \end{aligned}$$

Notamos que bajo estas condiciones se cumple para  $\operatorname{Re} p = 0$

$$\widehat{\Phi}(p, t) = -\frac{e^{-pa}}{\pi i} VP \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{e^{qa}}{q-p} \widehat{\Phi}(q, t) dq \quad (3.7)$$

y para  $\operatorname{Re} p > 0$

$$\widehat{\Phi}(p, t) = -\frac{e^{-pa}}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{e^{qa}}{q-p} \widehat{\Phi}(q, t) dq. \quad (3.8)$$

Ahora tomamos la transformada de Laplace con respecto al tiempo de la ecuación (3.6), obteniéndose

$$\widehat{u}(p, \xi) = \frac{1}{K(p) + \xi} \widehat{u}_0(p) + \frac{1}{K(p) + \xi} \widehat{\Phi}(p, \xi), \quad (3.9)$$

donde  $\widehat{u}(p, \xi)$ ,  $\widehat{\Phi}(p, \xi)$  y  $\widehat{u}_0(p)$  son la transformada de Laplace con respecto a la distancia y al tiempo respectivamente.

Como  $\widehat{u}(p, \xi)$  es analítica para toda  $p \in \mathbb{C}$  se debe cumplir que

$$\mathbb{P} \left\{ \widehat{u}(p, \xi) \right\} = \widehat{u}(p, \xi). \quad (3.10)$$

Notamos que (3.10) es una condición necesaria y suficiente para satisfacer la propiedad de que la solución

$$u(x, t) = 0,$$

para  $x \notin (0, a)$ . Debido a la analiticidad de  $\mathbb{P} \left\{ \widehat{u}(p, \xi) \right\}$  también es suficiente cumplir la condición (3.10) sólo para  $\operatorname{Re} p > 0$ . Por lo tanto, se debe pedir que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{e^{(q-p)a}}{q-p} \widehat{u}(q, \xi) dq = 0 \quad \text{para } \operatorname{Re} p > 0. \quad (3.11)$$

Usando (3.11) en la ecuación de (3.9) encontramos para  $\operatorname{Re} p > 0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{e^{(q-p)a}}{q-p} \widehat{u}(q, \xi) dq &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{e^{(q-p)a}}{q-p} \frac{1}{K(q) + \xi} \widehat{u}_0(q) dq \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{e^{(q-p)a}}{q-p} \frac{1}{K(q) + \xi} \widehat{\Phi}(q, \xi) dq \\ &= I_1 + I_2 = 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Para la integral  $I_1$  todos los términos son conocidos, por lo que sólo estudiamos la integral  $I_2$ , tal que bajo la fórmula (3.7) para  $\operatorname{Re} q = 0$

$$\widehat{\Phi}(q, \xi) = -\frac{e^{-qa}}{\pi i} VP \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{e^{q_1 a}}{q_1 - p} \widehat{\Phi}(q_1, \xi) dq_1 \quad (3.13)$$

tenemos

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{e^{(q-p)a}}{q-p} \frac{1}{K(q)+\xi} \widehat{\Phi}(q, \xi) dq \\ &= -\frac{1}{2\pi i} e^{-pa} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{1}{q-p} \frac{1}{K(q)+\xi} \frac{1}{\pi i} VP \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{e^{q_1 a}}{q_1 - q} \widehat{\Phi}(q_1, \xi) dq_1 dq. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Introducimos una nueva función  $\Psi(z, \xi)$  tal que

$$\Psi(z, \xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{e^{qa}}{q-z} \widehat{\Phi}(q, \xi) dq.$$

Notamos que  $\Psi(z, \xi)$  es analítica para  $\operatorname{Re} q \neq 0$ . También según la fórmula (3.8) para  $\operatorname{Re} z > 0$

$$\Psi(z, \xi) = -e^{za} \widehat{\Phi}(z, \xi). \quad (3.15)$$

Usando la fórmula Sokhotski-Plemelj tenemos para  $\operatorname{Re} p = 0$

$$\Psi^-(p, \xi) = \frac{1}{2\pi i} VP \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^{qa}}{q-p} \widehat{\Phi}(q, \xi) dq - \frac{1}{2} e^{pa} \widehat{\Phi}(p, \xi), \quad (3.16)$$

donde

$$\Psi^-(p, \xi) = \lim_{z \rightarrow p, \operatorname{Re} z > 0} \Psi(z, \xi).$$

Entonces sustituyendo (3.16) en (3.14) obtenemos

$$\begin{aligned} I_2 &= -\frac{2}{2\pi i} e^{-pa} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{1}{q-p} \frac{1}{K(q)+\xi} \left[ \Psi^-(q, \xi) + \frac{1}{2} e^{qa} \widehat{\Phi}(q, \xi) \right] dq \\ &= -\frac{2}{2\pi i} e^{-pa} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{1}{q-p} \frac{1}{K(q)+\xi} \Psi^-(q, \xi) dq \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$-\frac{1}{2\pi i} e^{-pa} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{1}{q-p} \frac{1}{K(q)+\xi} e^{qa} \widehat{\Phi}(q, \xi) dq. \quad (3.18)$$

Como  $K(q) + \xi \neq 0$  y  $\Psi^-(q, \xi)$  es analítica para  $\operatorname{Re} q > 0$ , podemos usar el teorema de Cauchy para  $\operatorname{Re} p > 0$  en la ecuación (3.17)

$$-\frac{2}{2\pi i} e^{-pa} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{1}{q-p} \frac{1}{K(q)+\xi} \Psi^-(q, \xi) dq = \frac{2}{K(p)+\xi} e^{-pa} \Psi^-(p, \xi),$$

y por definición

$$\frac{1}{2\pi i} e^{-pa} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{1}{q-p} \frac{1}{K(q) + \xi} e^{qa} \widehat{\Phi}(q, \xi) dq = I_2.$$

Por lo tanto para la igualdad (3.18) obtenemos

$$I_2 = \frac{1}{K(p) + \xi} e^{-pa} \Psi^-(p, \xi),$$

y usando (3.15) encontramos una representación para  $I_2$

$$I_2 = -\frac{1}{K(p) + \xi} \widehat{\Phi}(p, \xi). \quad (3.19)$$

Por lo tanto, aplicando (3.12) y (3.19) probamos que

$$\frac{1}{K(p) + \xi} \widehat{\Phi}(p, \xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{e^{(q-p)a}}{q-p} \frac{1}{K(q) + \xi} \widehat{u}_0(q) dq. \quad (3.20)$$

Sustituyendo (3.20) en (3.9) se obtiene finalmente

$$\begin{aligned} \widehat{u}(p, \xi) &= \frac{1}{K(p) + \xi} \widehat{u}_0(p) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{e^{(q-p)a}}{q-p} \frac{1}{K(q) + \xi} \widehat{u}_0(q) dq \\ &= \mathbb{P} \left\{ \frac{\widehat{u}_0(p)}{K(p) + \xi} \right\}. \end{aligned}$$

Ahora tomando la transformada inversa de Laplace con respecto a  $\xi$  y  $p$ , y aplicando la propiedad

$$\mathcal{L}^{-1} \mathbb{P} = \theta_a(x) \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} dp e^{px} \quad (3.21)$$

se obtiene

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \mathcal{L}_\xi^{-1} \mathcal{L}_p^{-1} \left\{ \widehat{u}(p, \xi) \right\} \\ &= \mathcal{L}_\xi^{-1} \mathcal{L}_p^{-1} \mathbb{P} \left\{ \frac{\widehat{u}_0(p)}{K(p) + \xi} \right\}. \end{aligned}$$

Escribiendo la definición de la transformada inversa de Laplace para cada variable y aplicando (3.21) se obtiene

$$u(x, t) = \theta_a(x) \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} d\xi e^{\xi t} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{px} \frac{1}{K(p) + \xi} \widehat{u}_0(p) dp. \quad (3.22)$$

Cambiando el orden de integración y cerrando el contorno de integración para  $\operatorname{Re} \xi < 0$ , podemos aplicar el teorema de Cauchy en la siguiente manera

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \theta_a(x) \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{px} \widehat{u}_0(p) dp \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{e^{\xi t}}{K(p) + \xi} d\xi \\ &= \theta_a(x) \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{px-K(p)t} \widehat{u}_0(p) dp \\ &= \theta_a(x) \int_0^a u_0(y) dy \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{p(x-y)-K(p)t} dp. \end{aligned}$$

Por lo que encontramos una representación integral de la solución  $u$  del problema (3.1) como

$$u(x, t) = \int_0^a u_0(y) G(x, y, t) dy = \mathbb{G}(t) u_0(x) \quad (3.23)$$

donde la función de Green  $G$  se define por

$$G(x, y, t) := \frac{\theta_a(x)}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{p(x-y)-K(p)t} dp.$$

Ahora probaremos que la función de Green  $G$  es solución del problema lineal asociado

$$G_t(x, y, t) + \mathbb{K}G(x, y, t) = 0, \quad (3.24)$$

para  $t > 0$  y  $x \neq y$ . Por definición del operador  $\mathbb{K}G$  se tiene

$$\mathbb{K}G(x, y, t) = \theta_a(x) \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{px} K(p) \widehat{G}(p, y, t) dp,$$

donde

$$\begin{aligned}\widehat{G}(p, y, t) &= \int_0^a e^{-px} \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{q(x-y)-K(q)t} dq \right] dx \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{-qy-K(q)t} dq \int_0^a e^{(q-p)x} dx \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{-qy-K(q)t} \left[ \frac{e^{(q-p)a} - 1}{q-p} \right] dq.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\mathbb{K}G(x, y, t) &= \theta_a(x) \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{px} K(p) \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{-qy-K(q)t} \left[ \frac{e^{(q-p)a} - 1}{q-p} \right] dq \right\} dp \\ &= I_1 + I_2,\end{aligned}$$

donde

$$I_1 = \theta_a(x) \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{px} K(p) \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{-qy-K(q)t} \left[ \frac{e^{(q-p)a}}{q-p} \right] dq \right\} dp$$

y

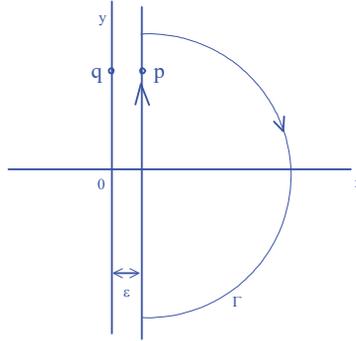
$$I_2 = -\theta_a(x) \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{px} K(p) \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{-qy-K(q)t} \left[ \frac{1}{q-p} \right] dq \right\} dp.$$

Para calcular  $I_1$ , ordenamos los términos haciendo cambio de orden de integración

$$I_1 = \theta_a(x) \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{-qy-K(q)t+qa} \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{e^{p(x-a)}}{q-p} K(p) dp \right] dq.$$

En la última integral sólo se tiene el caso cuando  $x < a$ , por lo que debemos cerrar el contorno para  $\operatorname{Re} p > 0$  como se muestra en la Figura 3.1, por lo tanto no se encierra el punto singular  $p = q$  y usando el teorema de Cauchy.

$$I_1 = 0.$$

Figura 3.1: Contorno cerrado para  $\text{Re } p > \varepsilon$ 

Ahora calculamos  $I_2$  con respecto a la variable  $q$ , en la siguiente manera

$$I_2 = -\theta_a(x) \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{px} K(p) \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{-qy - K(q)t} \left( \frac{1}{q-p} \right) dq \right] dp.$$

Como  $y > 0$  y  $\text{Re } K(p) > 0$  debemos cerrar el contorno de integración para  $\text{Re } q > 0$  como se muestra en la Figura 3.2, encerrando el punto singular  $q = p$  (polo simple) y usando el teorema de Cauchy se obtiene

$$I_2 = \theta_a(x) \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} K(p) e^{p(x-y) - K(p)t} dp. \quad (3.25)$$

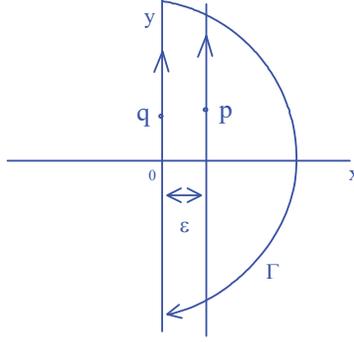
Ahora comparamos con la derivada de la función de Green con respecto al tiempo

$$G_t = \theta_a(x) \frac{1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-i\infty+\varepsilon}^{+i\infty+\varepsilon} e^{p(x-y) - K(p)t} dp.$$

Para poder intercambiar la derivada por la integral dependiente del parámetro  $t$ , debemos cumplir ciertas condiciones (Ver [6]).

Sea

$$h(x, y, t) = e^{p(x-y) - K(p)t}$$

Figura 3.2: Contorno cerrado para  $\text{Re } q > 0$ 

una función continua y su derivada parcial con respecto al parámetro  $t$

$$\frac{\partial}{\partial t} h(x, y, t) = -K(p) e^{p(x-y) - K(p)t}$$

también continua. Además la integral

$$\int_{-i\infty+\varepsilon}^{+i\infty+\varepsilon} e^{p(x-y) - K(p)t} dp$$

converge para cierto  $t \in [t_1, t_2]$ , mientras que la integral

$$\int_{-i\infty+\varepsilon}^{+i\infty+\varepsilon} \frac{\partial}{\partial t} e^{p(x-y) - K(p)t} dp = - \int_{-i\infty+\varepsilon}^{+i\infty+\varepsilon} K(p) e^{p(x-y) - K(p)t} dp$$

converge uniformemente con respecto de  $t \in [t_1, t_2]$ , entonces

$$\begin{aligned} G_t &= \theta_a(x) \frac{1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-i\infty+\varepsilon}^{+i\infty+\varepsilon} e^{p(x-y) - K(p)t} dp \\ &= \theta_a(x) \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\varepsilon}^{+i\infty+\varepsilon} \frac{\partial}{\partial t} e^{p(x-y) - K(p)t} dp. \end{aligned}$$

Por lo tanto la derivada de la integral

$$G_t = -\theta_a(x) \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\varepsilon}^{+i\infty+\varepsilon} K(p) e^{p(x-y) - K(p)t} dp. \quad (3.26)$$

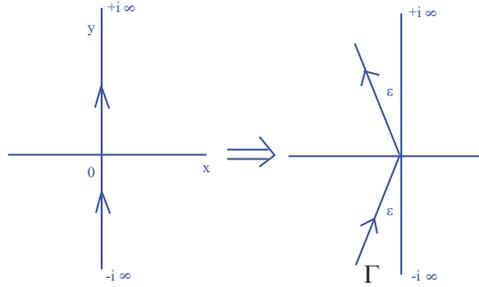


Figura 3.3: Cambio de contorno de integración

Tomando el límite de (3.26) cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$  y comparando con (3.25) se obtiene finalmente que

$$I_2 = -G_t(x, y, t).$$

Entonces la ecuación (3.24) se cumple.

Ahora verificamos que nuestra solución cumple con la condición inicial, tomando

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^a u_0(y) dy \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{p(x-y)-K(p)t} dp.$$

Cambiando el orden de integración, se obtiene

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{px-K(p)t} dp \int_0^a e^{-py} u_0(y) dy \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{px-K(p)t} \widehat{u}_0(p) dp. \end{aligned}$$

Ahora debemos cambiar el contorno de integración para tener convergencia uniforme de la integral y poder intercambiar el límite con la integral, como se muestra en la Figura 3.3.

Entonces se obtiene

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{px - K(p)t} \widehat{u}_0(p) dp. \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \lim_{t \rightarrow 0} e^{px - K(p)t} \widehat{u}_0(p) dp.\end{aligned}$$

Aplicando el teorema de Cauchy, podemos cambiar los límites de integración cerrando el contorno de integración debido a la analiticidad de  $e^{px} \widehat{u}_0(p)$ , entonces

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{px} \widehat{u}_0(p) dp \\ &= u(x, 0).\end{aligned}$$

Usando estimaciones de Lema 23 (véase abajo) es fácil demostrar que  $u(x, t) \in \mathbf{C}([0, \infty), \mathbf{L}^\infty(0, a))$ . ■

### 3.3. Solución del problema no lineal

Consideramos el problema no lineal

$$\begin{cases} u_t + \mathbb{K}u = \mathbb{N}(u), & t > 0, x \in (0, a), \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in (0, a). \end{cases}$$

donde  $u = u(x, t)$ . Aplicando la integral de Duhamel (ver [4]) se obtiene la solución del problema no lineal en la siguiente manera

$$u(x, t) = \mathbb{G}(t) u_0(x) + \int_0^t \mathbb{G}(t - \tau) \mathbb{N}(u(x, \tau)) d\tau, \quad (3.27)$$

donde

$$\mathbb{G}(t) u_0(x) = \int_0^a u_0(y) G(x, y, t) dy$$

y

$$\mathbb{N}(u) = i |u|^\delta u.$$

### 3.4. Análisis de la función de Green

La solución del problema no lineal queda expresada por medio de una ecuación integral que no puede resolverse en forma exacta. Los métodos aproximados de solución por métodos numéricos son más complicados y no constituyen el objetivo de este trabajo de investigación, por lo que analizamos la función de Green por métodos asintóticos.

### 3.4.1. Estimación de la Norma $\|\mathbb{G}(x, y, t_1) \varphi(y, t_2)\|_{\mathbf{L}^\infty}$

**Lema 23** Sea  $\varphi \in \mathbf{L}^\infty(0, a)$  entonces se cumple

$$\|\mathbb{G}(x, y, t_1) \varphi(y, t_2)\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq C \langle t_1 \rangle^{-\frac{1}{\alpha}} \|\varphi(t_2)\|_{\mathbf{L}^\infty}, \quad (3.28)$$

donde  $\langle t_1 \rangle = 1 + t_1$ .

**Demostración.** Primero estimamos la función de Green en valor absoluto

$$|G(x, y, t)| = \left| \frac{\theta_a(x)}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{p(x-y)-K(p)t} dp \right| \quad (3.29)$$

donde

$$K(p)t = C_\alpha p^\alpha t.$$

Haciendo un cambio de variable para  $t > 0$

$$\begin{aligned} p^\alpha t &= z^\alpha & (3.30) \\ p &= t^{-\frac{1}{\alpha}} z, \quad dp = t^{-\frac{1}{\alpha}} dz, \\ K(p)t &= C_\alpha z^\alpha = K(z) \end{aligned}$$

se obtiene

$$\begin{aligned} |G(x, y, t)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{zt^{-\frac{1}{\alpha}}(x-y)-K(z)t^{-\frac{1}{\alpha}}} dz \right| & (3.31) \\ &\leq Ct^{-\frac{1}{\alpha}} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \left| e^{zt^{-\frac{1}{\alpha}}(x-y)-K(z)t^{-\frac{1}{\alpha}}} dz \right| \\ &\leq Ct^{-\frac{1}{\alpha}} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \left| e^{zt^{-\frac{1}{\alpha}}(x-y)} \right| |e^{-K(z)}| |dz|. \end{aligned}$$

Ahora verificamos la convergencia de la integral  $\int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{-\operatorname{Re} K(z)} dz$  separándola en tres intervalos

$$\begin{aligned} \left| \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{-\operatorname{Re} K(z)} dz \right| &\leq \left| \int_{-i}^{+i} e^{-\operatorname{Re} K(z)} dz \right| + \left| \int_{-i\infty}^{-i} e^{-\operatorname{Re} K(z)} dz \right| \\ &\quad + \left| \int_{+i}^{+i\infty} e^{-\operatorname{Re} K(z)} dz \right| \\ &= I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Estimando por separado cada una tenemos

$$\begin{aligned} I_1 &= \left| \int_{-i}^{+i} e^{-\operatorname{Re} K(z)} dz \right| \leq \int_{-i}^{+i} |e^{-\operatorname{Re} K(z)}| |dz| \\ &\leq \int_{-i}^{+i} |dz| \leq C. \end{aligned}$$

Ahora estimamos

$$I_2 = \left| \int_{+i}^{+i\infty} e^{-\operatorname{Re} K(z)} dz \right|,$$

usando la desigualdad

$$\begin{aligned} e^{-x} &\leq \frac{C}{x^\gamma}, \text{ para } \gamma > 0, & (3.32) \\ -\operatorname{Re} K(z) &= |C_\alpha| |z|^\alpha \cos\left(\frac{\pi}{2}\alpha + \arg C_\alpha z^\alpha\right) \\ &\approx \tilde{C} |z|^\alpha, \quad \tilde{C} > 0. \end{aligned}$$

Podemos estimar la integral como

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \tilde{C} \int_{+i}^{+i\infty} \frac{1}{|z|^{\alpha\gamma}} |dz| \\ &\leq \tilde{C} |z|^{-\alpha\gamma+1} \Big|_1^\infty \leq C, \end{aligned}$$

donde  $\gamma > \frac{1}{\alpha}$ .

Debido a la simetría de la integral  $I_3$ , se puede estimar de la misma manera, por lo que

$$I_3 = \left| \int_{-i\infty}^{-i} e^{-\operatorname{Re} K(z)} dz \right| \leq C. \quad (3.33)$$

Regresando a (3.31) consideramos el caso  $t > 1$ . Para  $\operatorname{Re} z = 0$  tenemos

$$\left| e^{zt^{-\frac{1}{\alpha}}(x-y)} \right| = 1,$$

y usando (3.33) se obtiene

$$\begin{aligned} |G(x, y, t)| &\leq Ct^{-\frac{1}{\alpha}} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{-\operatorname{Re} K(z)} dz \\ &\leq Ct^{-\frac{1}{\alpha}}. \end{aligned}$$

Aplicando la última estimación para  $G(x, y, t)$  se obtiene para  $t \gg 1$

$$\begin{aligned} |\mathbb{G}(x, y, t_1) \varphi(t_2)| &= \left| \int_0^a G(x, y, t_1) \varphi(y, t_2) dy \right| \\ &\leq \int_0^a |G(x, y, t_1)| |\varphi(y, t_2)| |dy| \\ &\leq Ct^{-\frac{1}{\alpha}} \|\varphi(y, t_2)\|_{\mathbf{L}^\infty}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Ahora consideramos el caso  $(x - y) > 0$  y  $t < 1$ . Tal que

$$\left| e^{zt^{-\frac{1}{\alpha}}(x-y)} \right| = 1, \operatorname{Re} z = 0,$$

por lo que cambiando el contorno de integración se obtiene

$$\begin{aligned} |G(x, y, t)| &\leq Ct^{-\frac{1}{\alpha}} \int_{\Gamma_\varepsilon} \left| e^{zt^{-\frac{1}{\alpha}}(x-y)} [(e^{-K(z)} - 1) + 1] \right| dz \\ &\leq Ct^{-\frac{1}{\alpha}} \int_{\Gamma_\varepsilon} \left| e^{zt^{-\frac{1}{\alpha}}(x-y)} (e^{-K(z)} - 1) \right| dz \\ &\quad + Ct^{-\frac{1}{\alpha}} \int_{\Gamma_\varepsilon} \left| e^{zt^{-\frac{1}{\alpha}}(x-y)} \right| |dz|, \end{aligned}$$

donde

$$\Gamma_\varepsilon = \{z \in (e^{-i(\frac{\pi}{2}+\varepsilon)}\infty, 0) \cup (0, e^{i(\frac{\pi}{2}+\varepsilon)}\infty)\}, \varepsilon > 0.$$

Aplicando las estimaciones para  $q < 1$

$$|e^q - 1| = \left| \int_0^q e^z dz \right| \leq C \min(|q|, 1), q < 1$$

y para  $\operatorname{Re} z < 0$

$$\left| e^{zt^{-\frac{1}{\alpha}}(x-y)} \right| \leq e^{\operatorname{Re}[zt^{-\frac{1}{\alpha}}(x-y)]} \leq \frac{1}{\left[zt^{-\frac{1}{\alpha}}(x-y)\right]^{\gamma+1}}.$$

Estimamos para  $\gamma > \alpha$

$$\begin{aligned} |G(x, y, t)| &= Ct^{-\frac{1}{\alpha}} \int_{\Gamma_\varepsilon, |C_\alpha z^\alpha| < 1} \left| e^{zt^{-\frac{1}{\alpha}}(x-y)} (e^{-K(z)} - 1) \right| dz \\ &\quad + Ct^{-\frac{1}{\alpha}} \int_{\Gamma_\varepsilon, |C_\alpha z^\alpha| > 1} \left| e^{zt^{-\frac{1}{\alpha}}(x-y)} (e^{-K(z)} - 1) \right| dz \\ &\leq Ct^{-\frac{1}{\alpha}} \int_{\Gamma_\varepsilon, |C_\alpha z^\alpha| < 1} \frac{|z|^\alpha}{\left[zt^{-\frac{1}{\alpha}}(x-y)\right]^{\gamma+1}} dz \\ &\quad + Ct^{-\frac{1}{\alpha}} \int_{\Gamma_\varepsilon, |C_\alpha z^\alpha| > 1} \frac{1}{\left[zt^{-\frac{1}{\alpha}}(x-y)\right]^{\gamma+1}} dz \\ &\leq \frac{Ct^{\frac{\gamma}{\alpha}}}{(x-y)^{\gamma+1}} \left( \int_{\Gamma_\varepsilon, |C_\alpha z^\alpha| < 1} \frac{|z|^\alpha}{z^{\gamma+1}} dz + \int_{\Gamma_\varepsilon, |C_\alpha z^\alpha| > 1} \frac{1}{[z]^{\gamma+1}} dz \right) \\ &\leq \frac{Ct^{\frac{\gamma}{\alpha}}}{(x-y)^{\gamma+1}}. \end{aligned}$$

Aquí usamos si  $C_\alpha z^\alpha > 1$ , el módulo  $|e^{-K(z)} - 1| \leq C$ . Finalmente

$$|G(x, y, t)| \leq \frac{Ct^{\frac{\gamma}{\alpha}}}{(x-y)^{\gamma+1}}. \quad (3.35)$$

En forma análoga podemos tener (3.35) para el caso  $(x - y) < 0, t < 1$ . Aplicando la estimación (3.35) en el caso  $t < 1$  obtenemos

$$\begin{aligned} |\mathbb{G}(x, y, t_1) \varphi(y, t_2)| &= \left| \int_0^a G(x, y, t_1) \varphi(y, t_2) dy \right| \\ &\leq \int_0^a |G(x, y, t_1)| |\varphi(y, t_2)| |dy| \\ &\leq C \|\varphi(y, t_2)\|_{\mathbf{L}^\infty} \int_0^a \frac{C t_1^{\frac{\gamma}{\alpha}}}{(x - y)^{\gamma+1}} dy, \end{aligned}$$

y la integral es convergente con respecto a  $y$  con  $\gamma > 0$ . Finalmente

$$|\mathbb{G}(x, y, t_1) \varphi(y, t_2)| \leq C \|\varphi(y, t_2)\|_{\mathbf{L}^\infty}. \quad (3.36)$$

Por lo que podemos escribir las dos estimaciones (3.34) y (3.36) en forma general como

$$\|\mathbb{G}\varphi\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq C \langle t \rangle^{-\frac{1}{\alpha}} \|\varphi(t_2)\|_{\mathbf{L}^\infty}.$$

■

### 3.4.2. Asintótica de la función de Green

**Lema 24** Si  $t \gg 1$  la función de Green se expresa

$$G(x, y, t) = \theta_a(x) t^{-\frac{1}{\alpha}} \Lambda\left(\frac{x}{t^{\frac{1}{\alpha}}}\right) + O\left(t^{-\frac{1+\delta}{\alpha}}\right),$$

donde  $y \in (0, a)$  y

$$\Lambda(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{-k(z)+zs} dz.$$

**Demostración.** Se tiene la representación de la función de Green como

$$G(x, y, t) = \frac{\theta_a(x)}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{p(x-y)-K(p)t} dp. \quad (3.37)$$

Haciendo cambio de variable

$$\begin{aligned} p^\alpha t &= z^\alpha \\ p &= \frac{z}{t^{\frac{1}{\alpha}}} \\ dp &= t^{-\frac{1}{\alpha}} dz \end{aligned}$$

obtenemos

$$\begin{aligned} G(x, y, t) &= t^{-\frac{1}{\alpha}} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{zt^{-\frac{1}{\alpha}}x - K(z)} dz \\ &\quad + t^{-\frac{1}{\alpha}} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{zt^{-\frac{1}{\alpha}}x} \left( e^{-zt^{-\frac{1}{\alpha}}y} - 1 \right) e^{-K(z)} dz \\ &= t^{-\frac{1}{\alpha}} \Lambda\left(\frac{x}{t^{\frac{1}{\alpha}}}\right) + t^{-\frac{1}{\alpha}} R(x, y). \end{aligned}$$

y vamos a probar que

$$\sup_{x, y \in (0, a)} |R(x, y, t)| \leq Ct^{-\frac{1+\delta}{\alpha}}, \delta > 0.$$

por lo tanto

$$\sup_{x, y \in (0, a)} |R(x, y, t)| \leq \int_{-i\infty}^{+i\infty} \left| e^{zt^{-\frac{1}{\alpha}}x} \right| \left| e^{-zt^{-\frac{1}{\alpha}}y} - 1 \right| e^{-\operatorname{Re} K(z)} |dz|.$$

Tal que

$$\operatorname{Re} K(z) = \operatorname{Re} C_\alpha z^\alpha = \operatorname{Re} |C_\alpha| |z^\alpha| e^{i(\arg C_\alpha \alpha \pm \frac{\pi\alpha}{2})} = C |z^\alpha|$$

y para  $\operatorname{Re} q = 0$

$$\begin{aligned} |e^q - 1| &= \left| i \int_0^q e^{iy} dy \right| \leq \int_0^q |e^{iy}| |dy| \\ &\leq \int_0^q |1| |dy| \leq |q|, \end{aligned}$$

la integral se puede estimar como

$$\sup_{x,y \in (0,a)} |R(x,y,t)| \leq Ct^{-\frac{1}{\alpha}} \int_{-i\infty}^{+i\infty} |zyt^{-\frac{1}{\alpha}}| e^{-C|z|^\alpha} d|z|.$$

Considerando el máximo cuando  $y = a$

$$\sup_{x,y \in (0,a)} |R(x,y,t)| \leq t^{-\frac{1}{\alpha}} Ct^{-\frac{1}{\alpha}} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{-C|z|^\alpha} |z| d|z|,$$

ya que

$$\int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{-C|z|^\alpha} |z| d|z| \leq C$$

por lo que finalmente se obtiene para  $0 < \delta$

$$\begin{aligned} \sup_{x,y \in (0,a)} |R(x,y,t)| &\leq Ct^{-\frac{2}{\alpha}} \\ &\leq O\left(t^{-\frac{1+\delta}{\alpha}}\right). \end{aligned}$$

■

### 3.4.3. Evaluación de la función $\Lambda(s)$

**Proposición 25** *La función*

$$\Lambda(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{-K(z)+zs} dz, \quad (3.38)$$

donde  $s = \frac{x}{t^{\frac{1}{\alpha}}}$ ,  $K(z) = z^\alpha$  y para  $\text{Re } z^\alpha > 0$ , se expresa mediante la siguiente fórmula

$$\Lambda(s) = \frac{1}{2\pi i \alpha} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) \left(1 - e^{\frac{2\pi i}{\alpha}}\right),$$

cuando  $s \rightarrow 0$ .

**Demostración.** La integral (3.38) puede ser evaluada usando técnicas de variable compleja cuando  $t \rightarrow \infty$ , es decir  $s \rightarrow 0$ , por lo que la ecuación a estudiar es

$$\Lambda(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{-z^\alpha} dz, \quad (3.39)$$

haciendo el cambio de variable

$$\begin{aligned} z &= q^{\frac{1}{\alpha}} \\ dz &= \frac{1}{\alpha} q^{\frac{1}{\alpha}-1} dq \end{aligned}$$

se obtiene

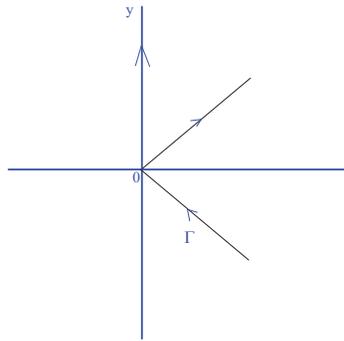
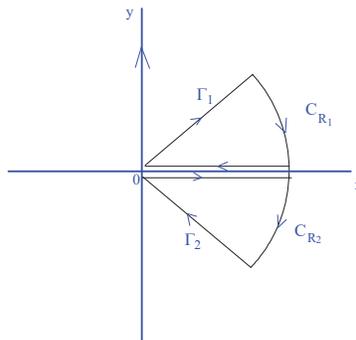
$$I = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\alpha} \int_{\Gamma} e^{-q} q^{\frac{1}{\alpha}-1} dq,$$

donde  $\Gamma$  se muestra en la Figura 3.4. Separando el contorno  $\Gamma$  en dos partes  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  y cerrándolo como se muestra en la Figura 3.5, se puede escribir  $I$  como

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\alpha} \left[ \int_{\Gamma_1} e^{-q} q^{\frac{1}{\alpha}-1} dq + \int_{C_{R_1}} e^{-q} q^{\frac{1}{\alpha}-1} dq + \int_{+\infty}^0 e^{-q} q^{\frac{1}{\alpha}-1} dq \right] \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\alpha} \left[ \int_{\Gamma_2} e^{-q} q^{\frac{1}{\alpha}-1} dq + \int_{C_{R_2}} e^{-q} q^{\frac{1}{\alpha}-1} dq + \int_0^{+\infty} e^{-q} q^{\frac{1}{\alpha}-1} e^{i2\pi(\frac{1}{\alpha}-1)} dq \right]. \end{aligned}$$

Aplicando el teorema de Cauchy, para los contornos cerrados formados por  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  y debido a la analiticidad de la función  $e^{-q} q^{\frac{1}{\alpha}-1}$  se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} e^{-q} q^{\frac{1}{\alpha}-1} dq + \int_{C_{R_1}} e^{-q} q^{\frac{1}{\alpha}-1} dq + \int_{+\infty}^0 e^{-q} q^{\frac{1}{\alpha}-1} dq &= 0 \\ \int_{\Gamma_2} e^{-q} q^{\frac{1}{\alpha}-1} dq + \int_{C_{R_2}} e^{-q} q^{\frac{1}{\alpha}-1} dq + \int_0^{+\infty} e^{-q} q^{\frac{1}{\alpha}-1} e^{i2\pi(\frac{1}{\alpha}-1)} dq &= 0. \end{aligned}$$

Figura 3.4: Contorno  $\Gamma$ Figura 3.5: Contornos cerrados para  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$ 

Las integrales de los segmentos  $C_{R_1}$  y  $C_{R_2}$  tienden a cero por el Lema de Jordan, por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} e^{-q} q^{\frac{1}{\alpha}-1} dq &= \int_0^{+\infty} e^{-q} q^{\frac{1}{\alpha}-1} dq \\ \int_{\Gamma_2} e^{-q} q^{\frac{1}{\alpha}-1} dq &= - \int_0^{+\infty} e^{-q} q^{\frac{1}{\alpha}-1} e^{i2\pi\frac{1}{\alpha}} dq. \end{aligned}$$

Por lo que para la integral  $I$ , se tiene

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\alpha} \left[ \int_0^{+\infty} e^{-q} q^{\frac{1}{\alpha}-1} dq - \int_0^{+\infty} e^{-q} q^{\frac{1}{\alpha}-1} e^{i2\pi \frac{1}{\alpha}} dq \right] \\ &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\alpha} \left( 1 - e^{i2\pi \frac{1}{\alpha}} \right) \int_0^{+\infty} e^{-q} q^{\frac{1}{\alpha}-1} dq, \end{aligned}$$

la última integral es por definición la función  $\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ , por lo que finalmente

$$I = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{2\pi i} \frac{1}{\alpha} \left( 1 - e^{i2\pi \frac{1}{\alpha}} \right).$$

Por lo que la fórmula (3.39) tiene la siguiente representación

$$\lim_{s \rightarrow 0} \Lambda(s) = \frac{1}{2\pi i \alpha} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) \left( 1 - e^{\frac{2\pi i}{\alpha}} \right).$$

■

**Lema 26** Sea  $\alpha_1 < 1, \beta_1 < 1, \alpha_2 > 0, \beta_2 > 0$  entonces

$$\int_0^t \{t - \tau\}^{-\alpha_1} \langle t - \tau \rangle^{-\alpha_2} \{\tau\}^{-\beta_1} \langle \tau \rangle^{-\beta_2} d\tau \leq \begin{cases} ct^{1-\alpha_1-\beta_1}, & t < 1 \\ Ct^{-\alpha_2} + Ct^{-\alpha_2-\beta_2+1} + Ct^{-\beta_2}, & t > 1 \end{cases},$$

donde  $\langle t \rangle = 1 + t, \{t\} = \frac{t}{\langle t \rangle}, t > 0$ .

**Demostración.** (Ver [16]). ■

## Capítulo 4

### Teorema de existencia local

**Teorema 27** Sea  $u_0 \in \mathbf{L}^\infty(0, a)$  entonces existe  $T > 0$  y existe una única solución  $u \in \mathbf{C}([0, \infty), \mathbf{L}^\infty(0, a))$  del problema no lineal

$$\begin{cases} u_t + \mathbb{N}(u) + \mathbb{K}u = 0, & t \in (0, T), \quad x \in (0, a), \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in (0, a), \end{cases} \quad (4.1)$$

donde  $u = u(x, t)$ ,

$$\mathbb{N}(u) = i |u|^\delta u$$

y

$$T < \frac{C}{(\|u_0\|_{\mathbf{L}^\infty})^\delta}.$$

**Demostración.** Probaremos la existencia local de la solución usando el principio de mapeo de contracción. Definimos un mapeo  $\mathcal{A}$  dado por

$$\mathcal{A}u(x, t) := \mathbb{G}(t) u_0(x) + \int_0^t \mathbb{G}(t - \tau) \mathbb{N}(u(x, \tau)) d\tau \quad (4.2)$$

y un espacio métrico completo  $\mathbf{Z}$  donde

$$\mathbf{Z} := \left\{ \varphi(t, x) \in \mathbf{C}([0, T]; \mathbf{L}^\infty(0, a)), \|\varphi\|_{\mathbf{Z}} = \sup_{t \in [0, T]} \|\varphi(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} < +\infty \right\}$$

y

$$\|u_0(x)\|_{\mathbf{L}^\infty} \equiv \rho. \quad (4.3)$$

Supongamos que  $v \in \mathbf{Z}$  con  $\|v\|_{\mathbf{Z}} \leq 2\rho$  y usando la definición de (1) probaremos que

$$\|\mathcal{A}v(x, t)\|_{\mathbf{Z}} \leq 2\rho.$$

Aplicando la definición (4.2) escribimos

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}v(x, t)\|_{\mathbf{Z}} &= \left\| \mathbb{G}(t) u_0(x) + \int_0^t \mathbb{G}(t-\tau) \mathbb{N}(v(x, \tau)) d\tau \right\|_{\mathbf{Z}} \\ &\leq \|\mathbb{G}(t) u_0(x)\|_{\mathbf{Z}} + \left\| \int_0^t \mathbb{G}(t-\tau) \mathbb{N}(v(x, \tau)) d\tau \right\|_{\mathbf{Z}} \\ &\leq \sup_{t \in [0, T]} \|\mathbb{G}(t) u_0(x)\|_{\mathbf{L}^\infty} + \sup_{t \in [0, T]} \int_0^t \|\mathbb{G}(t-\tau) \mathbb{N}(v(x, \tau)) d\tau\|_{\mathbf{L}^\infty}. \end{aligned}$$

Usando el Lema 3.28 se obtiene que

$$\|\mathcal{A}v(x, t)\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq C \sup_{t \in [0, T]} \langle t \rangle^{-\frac{1}{\alpha}} \|u_0(x)\|_{\mathbf{L}^\infty} + C \sup_{t \in [0, T]} \int_0^t d\tau \langle t-\tau \rangle^{-\frac{1}{\alpha}} \|\mathbb{N}(v(x, \tau))\|_{\mathbf{L}^\infty}. \quad (4.4)$$

Ya que  $v \in \mathbf{Z} \Rightarrow \|v\|_{\mathbf{Z}} \leq 2\rho$  entonces

$$\|\mathbb{N}(v(x, t))\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq \sup_{t \in [0, T]} \|v(x, t)\|_{\mathbf{L}^\infty}^{\delta+1} \leq (2\rho)^{\delta+1}. \quad (4.5)$$

Sustituyendo (4.5) en (4.4) obtenemos

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}v(x, t)\|_{\mathbf{L}^\infty} &\leq C \langle t \rangle^{-\frac{1}{\alpha}} \|u_0(x)\|_{\mathbf{L}^\infty} + C (2\rho)^{\delta+1} \int_0^t \langle t-\tau \rangle^{-\frac{1}{\alpha}} d\tau \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Es fácil ver que

$$I_1 \leq C \sup_{t \in [0, T]} \frac{1}{(1+t)^{\frac{1}{\alpha}}} \|u_0(x)\|_{\mathbf{L}^\infty}.$$

Ya que  $\|u_0(x)\|_{\mathbf{L}^\infty} = \rho$  obtenemos

$$I_1 \leq C\rho.$$

Ahora estimamos la integral

$$I_2 = C(2\rho)^{\delta+1} \int_0^t \frac{1}{(1+t-\tau)^{\frac{1}{\alpha}}} d\tau,$$

acotando la integral por arriba cuando  $\tau = t$  se obtiene

$$I_2 \leq C(2\rho)^{\delta+1} \int_0^t d\tau = C\rho^{\delta+1}t$$

y tomando el supremo para  $t \in [0, T]$

$$I_2 \leq C \sup_{t \in [0, T]} (2\rho)^{\delta+1} t \leq C(2\rho)^{\delta+1} T. \quad (4.6)$$

Entonces

$$\|\mathcal{A}(v)\|_{\mathbf{Z}} \leq C\rho + C(2\rho)^{\delta+1} T \leq 2\rho,$$

usando (4.3) estimamos  $T$  como sigue

$$T < \frac{C}{(\|u_0(x)\|_{\mathbf{L}^\infty})^\delta}.$$

Ahora demostramos que para  $\lambda < 1$

$$\|\mathcal{A}v_1(x, t) - \mathcal{A}v_2(x, t)\|_{\mathbf{Z}} \leq \lambda \|v_1(x, t) - v_2(x, t)\|_{\mathbf{Z}}.$$

Por la definición de norma de espacio  $\mathbf{Z}$  tenemos

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}v_1(x, t) - \mathcal{A}v_2(x, t)\|_{\mathbf{Z}} &= \sup_{t \in [0, T]} \left\| \int_0^t d\tau \mathbb{G}(t-\tau) [\mathbb{N}(v_1(x, \tau)) - \mathbb{N}(v_2(x, \tau))] \right\|_{\mathbf{L}^\infty} \\ &\leq \sup_{t \in [0, T]} \int_0^t \|\mathbb{G}(t-\tau) [\mathbb{N}(v_1(x, \tau)) - \mathbb{N}(v_2(x, \tau))]\|_{\mathbf{L}^\infty} d\tau. \end{aligned}$$

Aplicando el Lema 3.28 se obtiene

$$\|\mathcal{A}v_1(x, t) - \mathcal{A}v_2(x, t)\|_{\mathbf{Z}} \leq \sup_{t \in [0, T]} \int_0^t \langle t - \tau \rangle^{-\frac{1}{\alpha}} \|\mathbb{N}(v_1(x, \tau)) - \mathbb{N}(v_2(x, \tau))\|_{\mathbf{L}^\infty} d\tau. \quad (4.7)$$

Ahora estimamos la diferencia de los términos no lineales usando el teorema de Lagrange

$$f(v_1) - f(v_2) = f'(v)(v_1 - v_2), \quad v \in (v_1, v_2).$$

Considerando que  $f(v) = i|v|^\delta v$  y su derivada por la definición de Leibnitz

$$\begin{aligned} f'(v) &= i|v|^\delta + i\delta|v|^{\delta-1} v \operatorname{sign}(v) \\ &= i(\delta + 1)|v|^\delta, \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned} \|\mathbb{N}(v_1) - \mathbb{N}(v_2)\|_{\mathbf{L}^\infty} &\leq (\delta + 1) \max_{v \in (v_1, v_2)} \|v\|_{\mathbf{L}^\infty}^\delta \|v_1 - v_2\|_{\mathbf{L}^\infty} \\ &\leq (\delta + 1) \left( \|v_1\|_{\mathbf{L}^\infty}^\delta + \|v_2\|_{\mathbf{L}^\infty}^\delta \right) \|v_1 - v_2\|_{\mathbf{L}^\infty}. \quad (4.8) \end{aligned}$$

Aplicando (4.8) a (4.7) se obtiene

$$\|\mathcal{A}v_1 - \mathcal{A}v_2\|_{\mathbf{Z}} \leq C \sup_{t \in [0, T]} \int_0^t \langle t - \tau \rangle^{-\frac{1}{\alpha}} (\delta + 1) \left( \|v_1\|_{\mathbf{L}^\infty}^\delta + \|v_2\|_{\mathbf{L}^\infty}^\delta \right) \|v_1 - v_2\|_{\mathbf{L}^\infty} d\tau.$$

Tal que  $\sup_{t \in [0, T]} \|v\|_{\mathbf{L}^\infty}^\delta = \|v\|_{\mathbf{Z}}^\delta \leq (2\rho)^\delta$ , es fácil ver

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}v_1 - \mathcal{A}v_2\|_{\mathbf{Z}} &\leq \sup_{t \in [0, T]} 2C(\delta + 1)(2\rho)_{\mathbf{Z}}^\delta \|v_1(x, t) - v_2(x, t)\|_{\mathbf{L}^\infty} \int_0^t \langle t - \tau \rangle^{-\frac{1}{\alpha}} d\tau \\ &\leq \sup_{t \in [0, T]} C \|u_0\|_{\mathbf{L}^\infty}^\delta \|v_1(x, t) - v_2(x, t)\|_{\mathbf{L}^\infty} T \\ &\leq \lambda \|v_1(x, t) - v_2(x, t)\|_{\mathbf{Z}} \end{aligned}$$

para  $T < \frac{C}{(\|u_0\|_{\mathbf{L}^\infty})^\delta}$  y

$$\|u_0\|_{\mathbf{L}^\infty}^\delta T \leq \lambda < 1.$$

Por lo tanto  $\mathcal{A}$  es mapeo de contracción en  $\mathbf{Z}$  por lo que existe una única solución  $u \in (C[0, T], \mathbf{L}^\infty(0, a))$  del problema de valor inicial (4.1). ■

# Capítulo 5

## Teorema de existencia global

**Teorema 28** Sea  $u_0 \in \mathbf{L}^\infty(0, a)$  con  $\|u_0(x)\| \leq \varepsilon$  donde  $\varepsilon > 0$  es suficientemente pequeño. Entonces existe una única solución global  $u \in \mathbf{C}([0, \infty), \mathbf{L}^\infty(0, a))$  del problema no lineal

$$\begin{cases} u_t + \mathbb{N}(u) + \mathbb{K}u = 0, & t > 0, x \in (0, a), \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in (0, a). \end{cases}$$

donde

$$\mathbb{N}(u) = i|u|^\delta u.$$

Además se cumple que

$$\|u(x, t)\|_{\mathbf{L}^\infty(0, a)} = O\left(\langle t \rangle^{-\frac{1}{\alpha}}\right).$$

**Demostración.** Aquí probaremos la existencia global de la solución usando nuevamente el principio de mapeo de contracción. Definimos un mapeo  $\mathcal{A}$  dado por

$$\mathcal{A}u(x, t) := \mathbb{G}(t)u_0(x) + \int_0^t \mathbb{G}(t - \tau) \mathbb{N}(u(x, \tau)) d\tau$$

y un espacio métrico completo  $\mathbf{X}$  donde

$$\mathbf{X} := \left\{ \varphi(t, x) \in \mathbf{C}([0, \infty); \mathbf{L}^\infty(0, a)), \|\varphi\|_{\mathbf{X}} = \sup_{t>0} \langle t \rangle^{\frac{1}{\alpha}} \|\varphi(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq \varepsilon_1 \right\},$$

donde  $\varepsilon_1 > \varepsilon$ . Supongamos que  $v \in \mathbf{X}$  con  $\|v(x, t)\|_{\mathbf{X}} \leq \varepsilon_1$  y usando la definición de (1) probaremos que

$$\|\mathcal{A}v(x, t)\|_{\mathbf{X}} \leq \varepsilon_1.$$

Tenemos

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}v(x, t)\|_{\mathbf{X}} &= \left\| \mathbb{G}(t) u_0(x) + \int_0^t \mathbb{G}(t-\tau) \mathbb{N}(v(x, \tau)) d\tau \right\|_{\mathbf{X}} \\ &\leq \|\mathbb{G}(t) u_0(x)\|_{\mathbf{X}} + \left\| \int_0^t \mathbb{G}(t-\tau) \mathbb{N}(v(x, \tau)) d\tau \right\|_{\mathbf{X}} \\ &\leq \|\mathbb{G}(t) u_0(x)\|_{\mathbf{X}} + \int_0^t \|\mathbb{G}(t-\tau) \mathbb{N}(v(x, \tau))\|_{\mathbf{X}} d\tau. \end{aligned}$$

Aplicando las condiciones del espacio  $\mathbf{X}$

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}v(x, t)\|_{\mathbf{X}} &\leq \sup_{t>0} \langle t \rangle^{\frac{1}{\alpha}} \|\mathbb{G}(t) u_0(x)\|_{\mathbf{L}^\infty} + \sup_{t>0} \langle t \rangle^{\frac{1}{\alpha}} \int_0^t \|\mathbb{G}(t-\tau) \mathbb{N}(v(x, \tau))\|_{\mathbf{L}^\infty} d\tau \\ &= I_1 + I_2, \end{aligned}$$

y usando el Lema 3.28 se obtiene

$$\begin{aligned} I_1 &\leq C \sup_{t>0} \langle t \rangle^{\frac{1}{\alpha}} \langle t \rangle^{-\frac{1}{\alpha}} \|u_0\|_{\mathbf{L}^\infty} \\ &\leq C \sup_{t>0} \|u_0\|_{\mathbf{L}^\infty} \\ &\leq C\varepsilon. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Ahora estimamos  $I_2$

$$I_2 = \sup_{t>0} \langle t \rangle^{\frac{1}{\alpha}} \int_0^t \|\mathbb{G}(t-\tau) \mathbb{N}(v(x, \tau))\|_{\mathbf{L}^\infty} d\tau,$$

usando el Lema 3.28 se obtiene

$$I_2 \leq \sup_{t>0} \langle t \rangle^{\frac{1}{\alpha}} \int_0^t \langle t - \tau \rangle^{-\frac{1}{\alpha}} \|\mathbb{N}(v(x, \tau))\|_{\mathbf{L}^\infty} d\tau. \quad (5.2)$$

Ya que  $\|v(x, \tau)\|_{\mathbf{X}} \leq \varepsilon_1$  es fácil ver

$$\|\mathbb{N}(v)\|_{\mathbf{X}} = \left\| |v|^\delta v \right\|_{\mathbf{X}} \leq \|v\|_{\mathbf{X}}^{\delta+1} \leq (\varepsilon_1)^{\delta+1},$$

entonces

$$\|\mathbb{N}(v(x, \tau))\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq \varepsilon_1^{\delta+1} \langle \tau \rangle^{-\frac{\delta+1}{\alpha}}. \quad (5.3)$$

Sustituyendo (5.3) en la integral (5.2) se obtiene

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \sup_{t>0} \langle t \rangle^{\frac{1}{\alpha}} \int_0^t d\tau \langle t - \tau \rangle^{-\frac{1}{\alpha}} \varepsilon_1^{\delta+1} \langle \tau \rangle^{-\frac{\delta+1}{\alpha}} \\ &\leq C \varepsilon_1^{\delta+1} \sup_{t>0} \langle t \rangle^{\frac{1}{\alpha}} \int_0^t \langle t - \tau \rangle^{-\frac{1}{\alpha}} \langle \tau \rangle^{-\frac{\delta+1}{\alpha}} d\tau. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Usando el Lema 26 la última integral puede ser estimada como

$$\int_0^t \langle t - \tau \rangle^{-\frac{1}{\alpha}} \langle \tau \rangle^{-\frac{\delta+1}{\alpha}} d\tau \leq C \left( t^{-\frac{1}{\alpha}} + t^{-\frac{1}{\alpha} - \frac{\delta+1}{\alpha} + 1} + t^{-\frac{\delta+1}{\alpha}} \right),$$

tal que  $\alpha \in (0, 1)$  y  $\delta > 0$  se obtiene que

$$\begin{aligned} I_2 &\leq C \varepsilon_1^{\delta+1} \sup_{t>0} \langle t \rangle^{\frac{1}{\alpha}} \langle t \rangle^{-\frac{1}{\alpha}} \\ &< C \varepsilon_1^{\delta+1}. \end{aligned}$$

Por lo que finalmente

$$\|\mathcal{A}v(x, t)\|_{\mathbf{X}} \leq C\varepsilon + C\varepsilon_1^{\delta+1} \leq \varepsilon_1.$$

Ahora probamos la diferencia

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}v_1(x, t) - \mathcal{A}v_2(x, t)\|_{\mathbf{X}} &= \left\| \int_0^t \mathbb{G}(t - \tau) [\mathbb{N}(v_1(x, \tau)) - \mathbb{N}(v_2(x, \tau))] d\tau \right\|_{\mathbf{X}} \\ &\leq \int_0^t \|\mathbb{G}(t - \tau) [\mathbb{N}(v_1(x, \tau)) - \mathbb{N}(v_2(x, \tau))]\|_{\mathbf{X}} d\tau. \end{aligned}$$

Aplicando las condiciones del espacio  $\mathbf{X}$  tenemos

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{A}v_1(x, t) - \mathcal{A}v_2(x, t)\|_{\mathbf{X}} &\leq \sup_{t>0} \langle t \rangle^{\frac{1}{\alpha}} \int_0^t \|\mathbb{G}(t - \tau) |\mathbb{N}(v_1(x, \tau)) - \mathbb{N}(v_2(x, \tau))\|_{\mathbf{L}^\infty} d\tau \\
&\leq \sup_{t>0} \langle t \rangle^{\frac{1}{\alpha}} \int_0^t \langle t - \tau \rangle^{-\frac{1}{\alpha}} \\
&\quad \times \|\mathbb{N}(v_1(x, \tau)) - \mathbb{N}(v_2(x, \tau))\|_{\mathbf{L}^\infty} d\tau.
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Ya que

$$\begin{aligned}
\|v_1 - v_2\|_{\mathbf{L}^\infty} &= \langle t \rangle^{-\frac{1}{\alpha}} \sup \langle t \rangle^{\frac{1}{\alpha}} \|v_1 - v_2\|_{\mathbf{L}^\infty} \\
&= \langle t \rangle^{-\frac{1}{\alpha}} \|v_1 - v_2\|_{\mathbf{X}}
\end{aligned} \tag{5.6}$$

y

$$\begin{aligned}
\|v_1\|_{\mathbf{L}^\infty}^\delta + \|v_2\|_{\mathbf{L}^\infty}^\delta &= \langle t \rangle^{-\frac{\delta}{\alpha}} \sup \langle t \rangle^{\frac{\delta}{\alpha}} \left( \|v_1\|_{\mathbf{L}^\infty}^\delta + \|v_2\|_{\mathbf{L}^\infty}^\delta \right) \\
&= \langle t \rangle^{-\frac{\delta}{\alpha}} \left( \|v_1\|_{\mathbf{X}}^\delta + \|v_2\|_{\mathbf{X}}^\delta \right),
\end{aligned} \tag{5.7}$$

se obtiene

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{N}(v_1) - \mathbb{N}(v_2)\|_{\mathbf{L}^\infty} &\leq \langle t \rangle^{-\frac{1+\delta}{\alpha}} \left( \|v_1\|_{\mathbf{X}}^\delta + \|v_2\|_{\mathbf{X}}^\delta \right) \\
&\quad \times \|v_1 - v_2\|_{\mathbf{X}} \\
&\leq 2\varepsilon_1^\delta \langle t \rangle^{-\frac{1+\delta}{\alpha}} \|v_1 - v_2\|_{\mathbf{X}}.
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Sustituyendo la estimación (5.8) en (5.5) encontramos

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{A}v_1(x, t) - \mathcal{A}v_2(x, t)\|_{\mathbf{X}} &\leq \sup_{t>0} \langle t \rangle^{\frac{1}{\alpha}} \int_0^t \langle t - \tau \rangle^{-\frac{1}{\alpha}} \langle \tau \rangle^{-\frac{1+\delta}{\alpha}} 2\varepsilon_1^\delta \\
&\quad \times \|v_1(x, \tau) - v_2(x, \tau)\|_{\mathbf{X}} d\tau \\
&\leq 2C\varepsilon_1^\delta \|v_1(x, t) - v_2(x, t)\|_{\mathbf{X}} \\
&\quad \times \sup_{t>0} \langle t \rangle^{\frac{1}{\alpha}} \int_0^t \langle t - \tau \rangle^{-\frac{1}{\alpha}} \langle \tau \rangle^{-\frac{1+\delta}{\alpha}} d\tau
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\mathcal{A}v_1(x, t) - \mathcal{A}v_2(x, t)\|_{\mathbf{X}} &\leq 2C\varepsilon_1^\delta \|v_1(x, t) - v_2(x, t)\|_{\mathbf{X}} \sup_{t>0} \langle t \rangle^{\frac{1}{\alpha}} \langle t \rangle^{-\frac{1}{\alpha}} \\ &\leq 2C\varepsilon_1^\delta \|v_1(x, t) - v_2(x, t)\|_{\mathbf{X}} \\ &\leq \lambda \|v_1(x, t) - v_2(x, t)\|_{\mathbf{X}},\end{aligned}$$

con  $2C\varepsilon_1^\delta = \lambda < 1$ .

Por lo tanto  $\mathcal{A}$  es mapeo de contracción en  $\mathbf{X}$ , y entonces existe una única solución global  $u \in (C[0, \infty), \mathbf{L}^\infty(0, a))$  del problema de valor inicial. ■

# Capítulo 6

## Asintótica de la solución

**Teorema 29** Sea  $u \in (\mathbf{C}[0, \infty), \mathbf{L}^\infty(0, a))$  la única solución global del problema (4.1) y  $\|u(x, t)\|_{\mathbf{L}^\infty(0, a)} \leq C \langle t \rangle^{-\frac{1}{\alpha}}$ . Entonces existe una constante  $A$  tal que la solución tiene la siguiente asintótica para tiempos grandes

$$u(x, t) = \theta_a(x) A t^{-\frac{1}{\alpha}} \Lambda\left(\frac{x}{t^{\frac{1}{\alpha}}}\right) + O\left(t^{-\frac{1+\delta}{\alpha}}\right), \quad (6.1)$$

uniformemente con respecto a  $x \in (0, a)$  y  $t \rightarrow \infty$ , donde

$$A = \int_0^a u_0(y) dy + \int_0^\infty a \mathbb{N}(u(x, \tau)) d\tau < +\infty$$

y

$$\Lambda(s) = \frac{1}{2\pi i \alpha} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) \left(1 - e^{\frac{2\pi i}{\alpha}}\right).$$

**Demostración.** La asintótica de la función de Green por el Lema 24 tiene la siguiente forma

$$G(x, y, t) = \theta_a(x) t^{-\frac{1}{\alpha}} \Lambda\left(\frac{x}{t^{\frac{1}{\alpha}}}\right) + O\left(t^{-\frac{1+\delta}{\alpha}}\right). \quad (6.2)$$

Representamos la función de Green en la siguiente manera

$$G(x, y, t - \tau) = G(x, y, t) + [G(x, y, t - \tau) - G(x, y, t)]. \quad (6.3)$$

Sustituyendo (6.2) y (6.3) en (3.27) obtenemos

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^a \left[ t^{-\frac{1}{\alpha}} \Lambda \left( \frac{x}{t^{\frac{1}{\alpha}}} \right) + O \left( t^{-\frac{1+\delta}{\alpha}} \right) \right] u_0(y) dy \\ &+ \int_0^t d\tau \int_0^a \left[ t^{-\frac{1}{\alpha}} \Lambda \left( \frac{x}{t^{\frac{1}{\alpha}}} \right) + O \left( t^{-\frac{1+\delta}{\alpha}} \right) \right] \mathbb{N}(u(x, \tau)) dy \\ &+ \int_0^t d\tau \int_0^a [G(x, y, t - \tau) - G(x, y, t)] \mathbb{N}(u(x, \tau)) dy \\ &= M(x, t) + R(x, t), \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} M(x, t) &= t^{-\frac{1}{\alpha}} \Lambda \left( \frac{x}{t^{\frac{1}{\alpha}}} \right) \left[ \int_0^a u_0(y) dy \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\infty d\tau \int_0^a \mathbb{N}(u(x, \tau)) dy \right] \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} R(x, t) &= O \left( t^{-\frac{1+\delta}{\alpha}} \right) \left[ \int_0^a u_0(y) dy + \int_0^t d\tau \int_0^a \mathbb{N}(u(x, \tau)) dy \right] \\ &- t^{-\frac{1}{\alpha}} \Lambda \left( \frac{x}{t^{\frac{1}{\alpha}}} \right) \int_t^\infty d\tau \int_0^a \mathbb{N}(u(x, \tau)) dy \\ &+ \int_0^t d\tau \int_0^a [G(x, y, t - \tau) - G(x, y, t)] \mathbb{N}(u(x, \tau)) dy \\ &= I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Ya que

$$u_0 \in \mathbf{L}^\infty \Rightarrow \left| \int_0^a u_0(y) dy \right| < +\infty \quad (6.4)$$

y

$$\|\mathbb{N}(u(x, t))\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq \|u(x, t)\|_{\mathbf{L}^\infty}^{\delta+1} \leq C \langle t \rangle^{-\frac{\delta+1}{\alpha}} \quad (6.5)$$

entonces existe una constante

$$A = \int_0^a u_0(y) dy + \int_0^\infty a \mathbb{N}(u(x, \tau)) d\tau < +\infty$$

tal que

$$M(x, t) = At^{-\frac{1}{\alpha}} \Lambda\left(\frac{x}{t^{\frac{1}{\alpha}}}\right).$$

Para  $R(x, t)$  se necesita demostrar que

$$\begin{aligned} R(x, t) &= O\left(t^{-\frac{1+\delta}{\alpha}}\right) \\ &\Rightarrow \|R(x, t)\|_{L^\infty} \leq C \langle t \rangle^{-\frac{\delta+1}{\alpha}}. \end{aligned}$$

Tenemos

$$\begin{aligned} I_1 &= O\left(t^{-\frac{1+\delta}{\alpha}}\right) \left[ \int_0^a u_0(y) dy + \int_0^t d\tau \int_0^a \mathbb{N}(u(x, \tau)) dy \right] \\ I_2 &= -t^{-\frac{1}{\alpha}} \Lambda\left(\frac{x}{t^{\frac{1}{\alpha}}}\right) \int_t^\infty d\tau \int_0^a \mathbb{N}(u(x, \tau)) dy \\ I_3 &= \int_0^t d\tau \int_0^a [G(x, y, t - \tau) - G(x, y, t)] \mathbb{N}(u(x, \tau)) dy. \end{aligned}$$

Estimando en la norma  $\|\cdot\|_{\mathbf{L}^\infty}$ , se obtiene

$$\begin{aligned} \|I_1\|_{\mathbf{L}^\infty} &\leq O\left(t^{-\frac{1+\delta}{\alpha}}\right) \left[ \int_0^a |u_0(y)| dy + \int_0^t d\tau \int_0^a \|\mathbb{N}(u(x, \tau))\|_{\mathbf{L}^\infty} dy \right] \\ &\leq Ct^{-\frac{1+\delta}{\alpha}} \end{aligned} \tag{6.6}$$

Ahora estimamos  $I_2$  en la norma  $\mathbf{L}^\infty$

$$\begin{aligned} \|I_2\|_{\mathbf{L}^\infty} &\leq t^{-\frac{1}{\alpha}} \left\| \Lambda\left(\frac{x}{t^{\frac{1}{\alpha}}}\right) \right\|_{\mathbf{L}^\infty} \int_t^\infty d\tau \int_0^a \|\mathbb{N}(u(x, \tau))\|_{\mathbf{L}^\infty} dy \\ &\leq Ct^{-\frac{1}{\alpha}} \int_t^\infty \langle \tau \rangle^{-\frac{\delta+1}{\alpha} + \gamma - \gamma} d\tau \\ &\leq Ct^{-\frac{1}{\alpha}} t^{-\gamma} \int_t^\infty \langle \tau \rangle^{-\frac{\delta+1}{\alpha} + \gamma} d\tau. \end{aligned}$$

La última integral es positiva, por lo que se puede extender el dominio de integración para  $t$  hasta 0,

$$\begin{aligned} \|I_2\|_{\mathbf{L}^\infty} &\leq C t^{-\frac{1}{\alpha}-\gamma} \int_0^\infty \langle \tau \rangle^{-\frac{\delta+1}{\alpha}+\gamma} d\tau \\ &\leq C t^{-\frac{1}{\alpha}-\gamma}, \end{aligned} \quad (6.7)$$

donde  $\gamma < \frac{\delta+1}{\alpha} - 1$ . Para  $I_3$  primero estimamos la diferencia:

$$|G(x, y, t - \tau) - G(x, y, t)|,$$

usando Lagrange

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \max_{x \in [x_1, x_2]} |f'(x)| |x_1 - x_2|$$

y descomponiendo la diferencia

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq |f(x_1) - f(x_2)|^\mu |f(x_1) - f(x_2)|^{1-\mu},$$

y aplicando el supremo a la segunda diferencia se obtiene

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &\leq C |f(x_1) - f(x_2)|^\mu \|f(x)\|_{L^\infty}^{1-\mu} \\ &\leq C \max_{x \in [x_1, x_2]} |f'(x)|^\mu \|x_1 - x_2\|^\mu \|f(x)\|_{L^\infty}^{1-\mu}. \end{aligned}$$

Usando la última estimación en la función de Green obtenemos

$$|G(x, y, t - \tau) - G(x, y, t)| \leq C \max_{\tau \in [0, t]} |G_t(x, y, \tau)|^\mu \tau^\mu \|G(x, y, \tau)\|_{L^\infty}^{1-\mu}. \quad (6.8)$$

Tal que

$$\begin{aligned} \|G(x, y, \tau)\|_{\mathbf{L}^\infty_{x,y}} &\leq C \langle t \rangle^{-\frac{1}{\alpha}} \\ \|G_t(x, y, \tau)\|_{\mathbf{L}^\infty_{x,y}} &\leq C \langle t \rangle^{-\frac{2}{\alpha}} \end{aligned}$$

sustituyendo en (6.8) se obtiene

$$\|G(x, y, t - \tau) - G(x, y, t)\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq C \langle t \rangle^{-\frac{2\mu}{\alpha}} \tau^\mu \langle t \rangle^{-\frac{1-\mu}{\alpha}} \quad (6.9)$$

Sustituyendo la estimación (6.9) y (6.5) en  $I_3$ , se obtiene

$$\begin{aligned} \|I_3\|_{\mathbf{L}^\infty} &\leq \int_0^t d\tau \int_0^a \|G(x, y, t - \tau) - G(x, y, t)\|_{\mathbf{L}^\infty} \|\mathbb{N}(u(x, \tau))\|_{\mathbf{L}^\infty} dy \\ &\leq C \int_0^t d\tau \int_0^a \langle t \rangle^{-\frac{2\mu}{\alpha}} \tau^\mu \langle t \rangle^{-\frac{1-\mu}{\alpha}} \langle \tau \rangle^{-\frac{\delta+1}{\alpha}} dy \\ &\leq C \langle t \rangle^{-\frac{2\mu}{\alpha}} \langle t \rangle^{-\frac{1-\mu}{\alpha}} \int_0^t \tau^\mu \langle \tau \rangle^{-\frac{\delta+1}{\alpha}} d\tau. \end{aligned}$$

Elegimos  $\mu > 1 - \frac{\delta+1}{\alpha}$  de tal forma para que la integral sea convergente cuando  $t \rightarrow \infty$  y se puede estimar

$$\begin{aligned} \|I_3\|_{\mathbf{L}^\infty} &\leq C \langle t \rangle^{-\frac{\mu+1}{\alpha}} \\ &\leq Ct^{-\frac{\delta+1}{\alpha}} \end{aligned} \quad (6.10)$$

si  $\mu > \delta$ . Por lo tanto, sumando todos los resultados obtenidos en (6.6), (6.7) y (6.10) se obtiene:

$$\|R(x, t)\|_{L^\infty} \leq Ct^{-\frac{\delta+1}{\alpha}}.$$

■

# Capítulo 7

## Conclusiones

Las conclusiones de este trabajo son:

- Se planteó el problema no lineal y no local del tipo Schrödinger con condiciones iniciales y de frontera en el segmento  $x \in (0, a)$ , para la ecuación

$$\begin{cases} u_t + \mathbb{N}(u) + \mathbb{K}u = 0, t > 0, x \in (0, a) \\ u(x, 0) = u_0(x), x \in (0, a) \end{cases} \quad (7.1)$$

- Se presentó el problema lineal asociado y se resolvió a través de la construcción de la función de Green.
- Se analizaron las funciones inversas de  $K(p)$  para demostrar que solo se requiere una condición inicial y no se necesita ninguna condición en frontera para el problema planteado tenga solución única.
- Se analizaron las propiedades básicas y estimaciones de la función de Green.
- Se presentaron y se demostraron los siguientes teoremas que verifican la unicidad de la solución obtenida.

Sea  $u_0 \in \mathbf{L}^\infty(0, a)$  entonces existe  $T > 0$  y existe una única solución  $u \in \mathbf{C}([0, T], \mathbf{L}^\infty(0, a))$  del problema no lineal (7.1), donde

$$T < \frac{C}{\|u_0\|_{\mathbf{L}^\infty}^\delta}.$$

Sea  $u_0 \in \mathbf{L}^\infty(0, a)$  con  $\|u_0(x)\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq \varepsilon$  donde  $\varepsilon > 0$  es suficientemente pequeño. Entonces existe una única solución global  $u \in \mathbf{C}([0, \infty), \mathbf{L}^\infty(0, a))$  del problema no lineal (7.1). Además existe una constante  $A$  tal que

$$u(x, t) = \theta_a(x) At^{-\frac{1}{\alpha}} \Lambda\left(\frac{x}{t^{\frac{1}{\alpha}}}\right) + O\left(t^{-\frac{1+\delta}{\alpha}}\right).$$

uniformemente con respecto a  $x \in (0, a)$  y  $t \rightarrow \infty$ ,

$$A = \int_0^a u_0(y) dy + \int_0^\infty a\mathbb{N}(u) d\tau < +\infty$$

y

$$\Lambda(s) = \frac{1}{2\pi i \alpha} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) \left(1 - e^{\frac{2\pi i}{\alpha}}\right).$$

# Bibliografía

- [1] **M.J. Ablowitz and H. Segur.** *Solitons and Inverse Scattering Transform*, SIAM., 1980.
- [2] **A.N.Kolmogorov S.V.Fomin.** *Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional.* MIR. Moscu, 1975, 51-86.
- [3] **David Vernon Widder.** *The Laplace transform.* Princeton University Press, 1946.
- [4] **A.G. Sveshnikov, A. N. Tikhonov.** *The Theory of Functions of a Complex Variable.* MIR. Moscu, 1971, 51-56, 216-240, 251.
- [5] **Mark J. Ablowitz, Athanassios S. Fokas.** *Complex variables, Introduction and Applications.* Cambridge University Press, 1997, 514-538.
- [6] **V. LLín, E. Pozniak.** Fundamentos del Análisis Matemático 3. Mir. Moscu, 1980, 292-293
- [7] **C.J. Amick, J.L. Bona and M.E. Schonbek.** *Decay af solutions of some nonlinear wave equations*, J. Diff. Eq. 81 (1989), 1-49.

- 
- [8] **T.B. Benjamin, J.L. Bona and J.J. Mahony.** *Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems.* Phil. Trans. Roy. Soc. A, 272 (1972), 47-54.
- [9] **P. Biller.** *Asymptotic behavior in time of solutions to some equations generalizing the Korteweg-de Vries-Burgers equation.* Bull. Polish. Acad. Sc. Math., 32 (1984), 275-282.
- [10] **Biller, G. Karch and W. Woyczynski.** *Multifractal and Levy conservation laws,* C.R. Acad. Sci., Paris, Ser.1, Math. 330 (2000), no 5, 343-348.
- [11] **J.L. Bona and L. Luo.** *Asymptotic decomposition of nonlinear, dispersive wave equations with dissipation,* Advances in Nonlinear Mathematics and Science, Phys. D 152/153 (2001), 363-383.
- [12] **J.L. Bona and L. Luo.** *More results on the decay of the solutions to nonlinear dispersive wave equations,* Discrete and Continuous Dynamical System, 1 (1995), 151-193.
- [13] **J.L. Bona, F. Demengel and K.S. Promislov.** *Fourier splitting and dissipation nonlinear dispersive waves,* Proc. Roy. Soc. Edinburg Sect. A 129 (1999), no. 3, 477-502.
- [14] **J.M. Burgers.** *A mathematical model illustrating the theory of turbulence,* Adv. Appl. Mech. 1 (1948), 171-199.
- [15] **F. Calodgero and A. Degasperis.** *Spectral Transform and Solitons: Tools to Solve and Investigate Nonlinear Evolution Equations,* North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1982.

- 
- [16] **Rosa E. Cardiel Cervantes.** *Asymptotic for Whitham equation on half-line with a Source*, International Journal on Pure and Applied Mathematical., 2003.
- [17] **K.M. Case,** *The Benjamin-Otto equation: a remarkable Dynamical system*, Ann. Nuclear Energy 7 (1980), 273-277.
- [18] **H.H. Chen and Y.C. Lee.** *Interval wave solitons of fluids with depth*, Phys. Rev. Lett. **43** (1979), 264-266.
- [19] **D.B. Dix.** *Large Time Behavior of Solutions of Linear Dispersive Equations*, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1668, 1997.
- [20] **D.B. Dix.** *The dissipation of nonlinear dispersive waves; the case of asymptotic weak nonlinearity*, Comm. P.D.E., 17 (1992), 1665-1693.
- [21] **D.B. Dix.** *Temporal asymptotic behavior of solutions of the Benjamin-Ono-Burgers equations*, J. Diff. Eqs. 90 (1991), 238-287.
- [22] **R.K. Dodd, J.C. Eilbeck, J.D. Gibbon and H.C. Morris.** *Solitons and Nonlinear Wave equations*, Academic Press, Inc. N.Y. 1988.
- [23] **M. Escobedo, O. Kaviani and H. Matano.** *Large time behavior of solutions of a dissipative nonlinear heat equation*. Comm. P.D.E., 20 (1995), 1427-1452.
- [24] **M. Escobedo, J.L. Vazquez and E. Zuazua.** *Asymptotic behavior and source-type solutions for a diffusion-convection equations*, Arch. Ration. Mech. Anal. 124 (1993), no. 1, 43-65.

- 
- [25] **A.S. Fokas and M.J. Ablowitz.** The inverse scattering transform for the benjamin-Ono equation. A pivot to multidimensional problems, *Stud. Appl. Math.* 68 (1983), 1-10.
- [26] **G.E. Forsythe, M.A. Malcolm, C.A. Moler.** *Computer methods for mathematical computations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1977.
- [27] **N. Hayashi and E.I. Kaikina.** *Nonlinear Nonlocal Equations on Half-Line*, *Mathematics Studies*, Elsevier, 194 (2003).
- [28] **N. Hayashi and E.I. Kaikina,** *Local existence of solutions to the Cauchy problem for nonlinear Schrödinger equations*, *SUT Journal of Mathematics*, 34, No. 2 (1998), 111-137.
- [29] **N. Hayashi, E.I. Kaikina and J.L Guardado Zavala.** On the boundary-value problem for the Korteweg-de Vries equation, to appear.
- [30] **N. Hayashi, E.I. Kaikina and P.I. Naumkin.** Large time behavior of solutions to the dissipative nonlinear Schrödinger equation, *Proceedings of the Royal Soc. Edingburgh*, 130-A (2000), 1029-1043.
- [31] **N. Hayashi, E.I. Kaikina and R. Manzo.** *Local and global existence of solutions to the nonlocal Whitham equation on half-line*, *Nonlinear Analysis*, 48 (2002), 53-75.
- [32] **N. Hayashi, E.I. Kaikina and F.R. Paredes.** *Boundary-value problem for the Korteweg-de Vries-Burgers type equation*, *Nonlinear Differential Equations and Applications*, 8 (2002), 439-463.

- 
- [33] **N. Hayashi, E.I. Kaikina and I.A. Shishmarev.** *Asymptotics of Solutions to the Boundary-Value Problem for the Korteweg-de Vries-Burgers equation on a Half-Line*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 265 (2002), No. 2, 343-370.
- [34] **A.M. Il'in and O.A. Oleinik.** *Asymptotic behavior of solutions of the Cauchy problem for some quasilinear equations for large values of time*, Mat. Sbornik. 51 (1960), 191-216.
- [35] **R.J. Josep.** *Solitary waves in a finite depth fluid*, J. Phys. A 10 (1977), 225-227.
- [36] **E.I. Kaikina, P.I. Naumkin and I.A. Shishmarev.** *Asymptotic behavior for large time of solutions to the nonlinear nonlocal Schrödinger equation on half-line*, SUT Journal of Mathematics, 35, No.1 (1999), 37-79.
- [37] **E.I. Kaikina, I.A. Shishmarev and M. Tsutsumi.** *Asymptotics in time for nonlinear Schrödinger equations with a source*, J. Math. Soc. Japan, 51, No. 2, (1999), 463-483.
- [38] **G. Karch,** *Self-similar large time behavior of solution to the Korteweg-de Vries-Burgers equation*, Nonlinear anal., T.M.A. 35A (1999), no. 2, 199-219.
- [39] **V.I. Karpman.** *Nonlinear waves in dispersive media*, "Nauka", Moscow, 1973; English transl., Pergamon Press, New York, 1975.
- [40] **O. Kavian.** *Remarks on the large time behavior of a nonlinear diffusion equation*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Analyse non linéaire, 4 (5) (1987), 423-452.

- 
- [41] **Y. Kodama, M.J. Ablowitz and L. Satsuma.** *Direct and inverse scattering problems of the nonlinear intermediate long-wave equation*, J. Math. Phys. 23 (1982), 564-576.
- [42] **D.J. Kortewer and G. de Vries.** *On the change of form of long waves advancing in a new type of long stationary waves*, Philos. Mag. 5 (1895), 422-443.
- [43] **T. Kubota, D.R. Ko and D. Dobbis.** *Weakly nonlinear long stratified fluids on finite depth*, AIAA J. Hydronautics 12 (1978), 157-165.
- [44] **Y. Kuramoto.** *Chemical oscillations, waves and turbulence*, Springer ser. Synergetics, vol. 19, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1984.
- [45] **J.L. Lions.** *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non-linéaires*, Dunod, Paris, 1969.
- [46] **J. Lions and E. Magenes.** *Non-Homogeneous Boundary value Problems and Applications*, Springer, N.Y., 1972
- [47] **P.I. Naumkin and I.A. Shishmarev.** *Nonlinear Nonlocal Equations in the Theory of Waves*, Transl. of Math. Monographs, AMS, Providence, R.I., 133, 1994, 209-210.
- [48] **P.I. Naumkin and I.A. Shishmarev.** *Asymptotic as time tends to infinity of solutions to the nonlinear equations with large initial data*. Matematicheskie Zametki 59 (1996), no. 6, 855-864.

- 
- [49] **P.I. Naumkin and I.A. Shishmarev.** *Asymptotics relationship as  $t \rightarrow +\infty$  between solutions to some nonlinear equations I, II*, Differential Equations 30 (1994), 806-814; 1329-1340.
- [50] **G.A. Naribori and A. Sedov.** *Burgers-Korteweg-de Vries equation for viscoelastic rods paltres*, J. Math. anal. Appl. 32 (1970), 661-677.
- [51] **A. Novick-Cohen and G.I. Sivashinsky.** *On the solidification from of a dilute binary alloy: thermal diffusivity effects and breathing solutions*, Phys. D 20 (1986), 237-258.
- [52] **Michael Reed and Barry Simon.** *Functional Analysis*, Department of Mathematics Duke University and Department of Mathematics and Physics Princeton University, Academic Press. INC. San Diego, California, 1980.
- [53] **O.V. Rudenko and S.T. Soluyan.** *Theoretical foundations of nonlinear acoustic*, "Nauka", Moscow, 1975; English transl., Consultants Bureau. New York and London, 1977.
- [54] **M.E. Schonbek.** *Lower bounds of rates of decay for solutions to the Navier-Stokes equations*, J. Amer. Math. Soc. 4 (1991), no.3, 423-449.
- [55] **Ian N. Sneddon.** *The Use of integral Transforms*, Simson Professor of Mathematics, University of Glasgow, McGraw-Hill Book Company. United States of America, 1972.
- [56] **W.A. Strauss.** *Nonlinear scattering at low energy*, J. Funct. Anal. 41 (1981), pp. 110-133.

- 
- [57] **M.I. Vishik.** *Asymptotic Behavior of Solutions of Evolutionary Equations*, Lezioni Lincee, Cambridge University Press Cambridge, 1992.
- [58] **G.B. Whitham.** *Linear and Nonlinear Waves*, Wiley, N.Y., 1974.
- [59] **E. Zuazua.** *A dynamical system approach to the self-similar large time behavior in scalar convection-diffusion equation*, J. Diff. Eqs. 108 (1994). 1-35.
- [60] **E. Zuazua.** *Some recent results on the large time behavior for scalar parabolic conservation laws*, in. *Elliptic and Parabolic Problems*. Proc, 2nd European Conference, 325 (1995), 251-263.
- [61] **E. Zuazua.** *Some recent results on the large time behavior for scalar parabolic conservation laws*, in. *Elliptic and Parabolic Problems*. Proc, 2nd European Conference, 325 (1995), 251-263.