

UNIVERSIDAD MICHOACANA DE  
SAN NICOLÁS DE HIDALGO

INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

Tesis

Frecuencias de modos atrapados y  
resonancias para ondas de agua en canales  
Infinitos

Que presenta

MARÍA ISABEL ROMERO RODRÍGUEZ

Para obtener el grado de Doctor en Matemáticas.

Director de Tesis:

DR. PETR ZHEVANDROV BOLSHAKOVA

Morelia, Michoacán, Mayo de 2010

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>v</b>
<b>1. Ecuación de Schrödinger</b>	<b>1</b>
1.1. Introducción . . . . .	1
1.2. Valores propios para pozos de potencial . . . . .	2
1.3. Resonancias . . . . .	13
<b>2. Agua de poca profundidad</b>	<b>19</b>
2.1. Introducción . . . . .	19
2.2. Ondas atrapadas . . . . .	21
2.3. Resonancias . . . . .	29
<b>3. Asintótica</b>	<b>35</b>
3.1. Introducción . . . . .	35

3.2. Asintótica de la onda atrapada . . . . .	38
<b>4. Reducción a ecuaciones integrales</b>	<b>51</b>
4.1. Introducción . . . . .	51
4.2. Ecuaciones integrales . . . . .	52
4.3. Transformada de Fourier . . . . .	61
<b>5. Soluciones exactas</b>	<b>67</b>
5.1. Introducción . . . . .	67
5.2. Desarrollos de los operadores . . . . .	68
5.3. Ondas atrapadas . . . . .	78
5.4. Resonancias . . . . .	83
<b>A. Pozo rectangular</b>	<b>89</b>
<b>B. Barrera rectangular</b>	<b>93</b>
<b>C. Ecuación de Bessel</b>	<b>99</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>105</b>

# Introducción

El problema de ondas atrapadas (estados no triviales de energía finita en dominios infinitos) es de gran interés en varias ramas de física matemática (acústica, mecánica cuántica, hidrodinámica, electromagnetismo, etc., ver, p. ej., [1, 2]). El estudio de ellas en guías de ondas hoy en día se convirtió en toda una industria con un volumen enorme de literatura correspondiente. En breve, su existencia se debe a la no homogeneidad de las guías (p. ej., la presencia de curvatura en las paredes y/o obstáculos en la misma guía) y la aparición del espectro puntual bajo perturbaciones del extremo del espectro continuo que describe el sistema homogéneo. Varios acercamientos a este problema fueron elaborados independientemente en las áreas mencionadas. En el contexto de ondas de agua, el primer ejemplo fue la solución de Stokes (1846, [24]) que describe la “onda de borde” (*edge wave* en inglés) que se propaga a lo largo de una playa de inclinación constante y decae en la

dirección ortogonal a ella. El segundo ejemplo fue el problema de ondas atrapadas por un cilindro circular sumergido resuelto por Ursell en 1950 [25] (ver también [26, 27]). En 1957, Lavrentiev conjeturó que una sierra submarina puede guiar las ondas de agua y subsecuentemente Garipov demostró que esta conjetura es cierta (ver [3]). Después de estas publicaciones esporádicas, la cantidad de artículos dedicados a este tema empezó a crecer espectacularmente. Una buena reseña de la literatura puede ser encontrada en el libro [4] publicado en 2002. Las investigaciones más recientes pueden consultarse en la reseña [5] y en [6].

En el presente trabajo se estudia el problema de ondas de agua atrapadas por una sierra submarina de pequeña altura. Matemáticamente, el problema linealizado consiste en encontrar las soluciones del sistema

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Phi_{tt} + g\Phi_y = 0, & \text{para } y = 0, \\ \Delta\Phi + \Phi_{zz} = 0, & \text{para } -h(x, z) < y < 0, \\ \Phi_y + h_x\Phi_x + h_z\Phi_z = 0, & \text{para } y = -h(x, z), \end{array} \right.$$

donde  $\Phi(x, y, z, t)$  es el potencial de velocidades del líquido,  $x$  y  $z$  son las coordenadas horizontales,  $y$  es la coordenada vertical,  $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$ , y  $y = -h(x, z)$  describe el fondo del líquido. Vamos a suponer que el fondo es cilíndrico,  $h(x, z) = h(x)$ . Asumiendo la dependencia armónica del tiempo

y la coordenada  $z$ , vamos a buscar la solución en la forma  $\Phi = \exp[i(\omega t - kz)]\Psi(x, y)$  y por tanto, para  $\Psi$  obtenemos el problema

$$\begin{cases} \Psi_y = \lambda\Psi, & \text{para } y = 0, \\ \Delta\Psi - k^2\Psi = 0, & \text{para } -h(x) < y < 0, \\ \Psi_y + h'\Psi_x = 0, & \text{para } y = -h(x), \end{cases} \quad (0.0.1)$$

donde  $\lambda = \omega^2/g$  es el parámetro espectral. Las soluciones no triviales de (0.0.1) con energía finita se llaman *ondas atrapadas* y existen sólo para ciertos valores de  $\lambda$  y bajo ciertas restricciones sobre el fondo, es decir, sobre la función  $h(x)$ . La existencia de ondas atrapadas fue demostrada por Garipov (ver [3]) y Bonnet-Joly [28] para  $h(x)$  tal que  $\min_{x \in \mathbb{R}} h(x) < h_0$ , donde  $h_0$  es la profundidad en el infinito. En el caso de altura pequeña de la sierra, es decir, cuando  $h(x) = h_0 + \epsilon V(x)$ ,  $V(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ ,  $\epsilon \rightarrow 0^+$ , la existencia de un solo modo fue demostrada en [7] bajo la condición  $\int V(x) dx < 0$  (aquí y en lo que sigue la integral sin límites significa la integral a lo largo del eje real) y ahí también fue calculada la primera aproximación para el eigenvalor correspondiente. En [29] fue obtenida la serie completa para  $\lambda$  en potencias de  $\epsilon$  y fue demostrado que en el caso  $\int V(x) dx = 0$  también existe la onda atrapada. Estos resultados se asemejan mucho al bien conocido problema de estados confinados para la ecuación de Schrödinger con un pozo de potencial

poco profundo:

$$-\Psi'' + \epsilon V(x)\Psi = E\Psi, \quad (0.0.2)$$

donde la energía  $E$  es el parámetro espectral,  $\epsilon V(x)$  es el potencial y  $\Psi \in L_2(\mathbb{R})$  es la función propia. De hecho, cuando  $\epsilon = 0$  (problema homogéneo), tanto (0.0.1) como (0.0.2) poseen un espectro continuo que coincide con el rayo  $E \in [0, \infty)$  para (0.0.2) y con  $\lambda \in [k \tanh kh_0, \infty)$  para (0.0.1). Bajo la perturbación, el extremo izquierdo del espectro continuo da a luz a un eigenvalor cuya distancia al espectro continuo tiende a cero junto con  $\epsilon$ . Esta distancia es del orden de  $\epsilon^2$  cuando  $\int V(x) dx < 0$  y del orden de  $\epsilon^4$  en el caso que  $\int V(x) dx = 0$ . Para la ecuación de Schrödinger estas afirmaciones fueron demostradas por Simon [8, 23] (y antes en [10] para  $\int V(x) dx < 0$ ) y para el problema (0.0.1) en [29], donde fue establecida la analogía entre los dos problemas.

El primer objetivo del presente trabajo consiste en demostrar que para el problema de ondas de agua las expansiones asintóticas de [29] son en realidad convergentes igual como para la ecuación de Schrödinger [8]. Este resultado, interesante en sí mismo (¡estamos construyendo soluciones *exactas*!), es necesario para nuestro segundo objetivo que vamos a enunciar enseguida.

Consideremos la ecuación de Schrödinger con una barrera de potencial en

lugar de un pozo,  $\int V(x) dx > 0$  (los casos de pozo y barrera rectangulares admiten soluciones explícitas y se presentan en los Apéndices A y B). En este caso (0.0.2) admite un estado “anticonfinado” (*antibound state* en inglés) que describe ondas exponencialmente crecientes para cuando  $|x| \rightarrow \infty$ :  $\Psi \sim \exp(\beta|x|)$ , donde  $E = -\beta^2$ ,  $\beta > 0$  (ver [14]). En realidad, la existencia de estas resonancias está asociada con polos de la continuación analítica de la resolvente del operador de Schrödinger al plano complejo del parámetro  $\beta$  [11]. La importancia de estos polos se revela en la asintótica, para grandes valores del tiempo, de la solución del problema no estacionario correspondiente (ver [12, 13] y referencias allí). Desde este punto de vista, los estados anticonfinados juegan el mismo papel que los estados confinados (*bound states* en inglés), es decir, eigenfunciones. Por lo tanto es de interés construir análogos de ellos para un surco submarino, es decir, para el problema (0.0.1) con  $h = h_0 + \epsilon V(x)$ ,  $\int V(x) dx > 0$ . Para esto, es necesario eliminar en la solución términos proporcionales a  $\exp(-\beta|x|)$  y esto sólo es posible si la solución se conoce *exactamente* porque términos residuales del orden de  $O(\epsilon^N)$  en la asintótica pueden contener sumandos de la forma  $\epsilon^N \exp(-\beta|x|)$ . La construcción de estos estados anticonfinados, basada en la construcción exacta de las eigenfunciones, constituye el segundo objetivo de esta tesis.

El contenido del trabajo es el que sigue. En el Capítulo 1 presentamos los resultados conocidos sobre la ecuación de Schrödinger (0.0.2), tanto para eigenfunciones como para resonancias. La razón de incluir este material se basa en la analogía muy estrecha con el problema de ondas de agua (0.0.1); la metodología que usamos para (0.0.1) se ve más claramente en este sencillo ejemplo, cuando la idea principal no se oculta por los detalles técnicos. En el Capítulo 2 presentamos la reformulación de los resultados del Capítulo 1 para la ecuación linealizada de agua de poca profundidad, para después compararlos con los resultados del sistema completo. En el Capítulo 3, calculamos el primer término de la asintótica del eigenvalor para (0.0.1); este resultado nos servirá para la comprobación del resultado exacto del Capítulo 5. En el Capítulo 4, presentamos la reducción del problema (0.0.1) a dos ecuaciones integrales, las cuales se resuelven en el Capítulo 5 para obtener los estados confinados y anticonfinados del sistema (0.0.1); estos resultados coinciden en el término principal con la asintótica obtenida en el Capítulo 3 y pasan en los resultados del Capítulo 2 para pequeños valores de  $h_0$ . En los Apéndices A y B presentamos el material clásico perteneciente a pozos y barreras rectangulares, y en el Apéndice C adjuntamos algunas propiedades de la función de Macdonald que son útiles en la reducción del problema (0.0.1) a ecuaciones

integrales.

Los resultados de la tesis fueron enunciados en [36].

En todo el texto, la transformada de Fourier de una función  $f(x)$  se denota

$$\tilde{f}(p) = \mathcal{F}_{x \rightarrow p}[f(x)] = \int e^{-ipx} f(x) dx. \quad (0.0.3)$$

La transformada inversa tiene la forma

$$f(x) = \mathcal{F}_{p \rightarrow x}^{-1}[\tilde{f}(p)] = \frac{1}{2\pi} \int e^{ipx} \tilde{f}(p) dp. \quad (0.0.4)$$



# Capítulo 1

## Construcción de la solución exacta para la ecuación de Schrödinger

### 1.1. Introducción

En este capítulo introductorio consideraremos la ecuación unidimensional de Schrödinger

$$-\Psi'' + \epsilon V\Psi = E\Psi, \quad (1.1.1)$$

donde  $E$  es la energía y  $\epsilon V$  representa un pozo (o barrera) de potencial de

poca profundidad (altura), es decir,  $\epsilon \rightarrow 0^+$  y  $V(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ . La condición  $\int V(x) dx \leq 0$  corresponde a un pozo y la condición  $\int V(x) dx > 0$  a una barrera (aquí y en todo lo que sigue la integral sin límites significa la integral a lo largo del eje real). El problema de encontrar las eigenfunciones de (1.1.1) es bien conocido y se remonta al texto clásico de Landau y Lifshitz [10]. Vamos a presentar aquí la construcción de eigenfunciones elaborada en [9] y nosotros presentamos su generalización a la construcción de resonancias (estados anticonfinados o *antibound states* en inglés). Aunque los resultados son bien conocidos (ver, p. ej., [14]), exponemos este material aquí porque en los capítulos siguientes vamos a tratar los problemas de ondas guiadas de agua mediante la misma técnica y en el ejemplo de la ecuación (1.1.1) ésta se ve de la manera más clara debido a la simplicidad de la ecuación. Notemos que la aplicación a la construcción de resonancias es nueva.

## 1.2. Valores propios para pozos de potencial

Consideremos la ecuación de Schrödinger (1.1.1) y supongamos que  $V$  describe un pozo de potencial,  $\tilde{V}(0) = \int V(x) dx \leq 0$ . Nuestro resultado principal en esta sección consiste en el siguiente

**Teorema 1.2.1.** *Sea  $\int V(x)dx < 0$ . Entonces para  $\epsilon$  suficientemente pequeño la ecuación (1.1.1) posee un único valor propio dado por  $E = -\beta^2$  donde*

$$\beta = -\frac{\epsilon}{2}\tilde{V}(0) + O(\epsilon^2). \quad (1.2.1)$$

*Si  $\int V(x) dx = 0$ , la afirmación anterior sigue en pie con*

$$\beta = \frac{\epsilon^2}{4\pi} \int \frac{|\tilde{V}(p)|^2}{p^2} dp + O(\epsilon^3). \quad (1.2.2)$$

*Demostración.* Sea  $E = -\beta^2$ ,  $\beta > 0$ . Aplicando la transformada de Fourier a la ecuación (1.1.1) y pasando el término de orden de  $\epsilon$  a la parte derecha tenemos

$$(p^2 + \beta^2)\tilde{\Psi}(p) = -\frac{\epsilon}{2\pi} \int \tilde{V}(p - p')\tilde{\Psi}(p')dp', \quad (1.2.3)$$

donde la tilde denota la transformada de Fourier. Para  $x$  fuera del soporte de  $V(x)$  la solución tiene la forma  $\Psi(x) \sim e^{-\beta|x|}$ , es decir, se aproxima a una constante cuando  $\beta \rightarrow 0$ . Por tanto la transformada de Fourier  $\tilde{\Psi}(p)$  es una función tipo  $\delta$ .

En la ecuación (1.2.3) observemos que:

- Como  $\tilde{\Psi}(p)$  es una función tipo  $\delta$ , el lado derecho de la ecuación (1.2.3) es casi igual a  $\tilde{V}(p)$ , excepto por una constante multiplicativa.
- $\tilde{\Psi}(p)$  es el cociente de una “buena” función (que es regular en  $\epsilon$ ) y de la expresión  $p^2 + \beta^2$ .

Estas características nos llevan a buscar una solución de (1.1.1) en la forma:

$$\tilde{\Psi}(p, \epsilon) = \frac{A(p, \epsilon)}{p^2 + \beta^2}, \quad (1.2.4)$$

donde  $A(p, \epsilon) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  con respecto a  $p$  y depende de una manera regular de  $\epsilon$  (en lo que sigue omitiremos la dependencia explícita de  $\epsilon$ ). Si sustituimos (1.2.4) en (1.2.3) obtenemos:

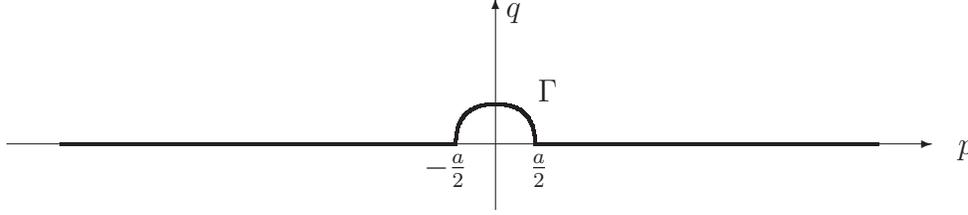
$$A(p) = -\frac{\epsilon}{2\pi} \int \frac{\tilde{V}(p - p')A(p')}{p'^2 + \beta^2} dp'. \quad (1.2.5)$$

Notemos que el integrando del lado derecho de (1.2.5) posee una singularidad para cuando  $\beta = 0$  en  $p' = 0$ , como suponemos que  $\beta$  es pequeño, para calcular la integral cambiamos el contorno de integración a uno en el plano complejo de tal manera que las singularidades  $z = \pm i\beta$  estén circunscritas por este.

**Definición 1.2.1.** *Definamos a  $\mathcal{H}_a$  como el espacio de funciones analíticas acotadas en la banda  $B_a := \{z \in \mathbb{C}, |\Im z| < a\}$ , donde  $a > 0$  no depende de  $\epsilon$ , con la norma  $\|\varphi\| = \sup_{z \in B_a} |\varphi(z)|$ .*

Asumamos que  $A(z) \in \mathcal{H}_a$ , lo que comprobaremos mas adelante, e introduzcamos el contorno dado por  $\Gamma$  (ver Fig. 1.1):

$$\Gamma := (-\infty, -a/2] \cup \{p + iq : p^2 + q^2 = a^2/4, q > 0\} \cup [a/2, \infty). \quad (1.2.6)$$

Figura 1.1: Contorno  $\Gamma$ .

Por el teorema del residuo de Cauchy, la integral en el lado derecho de (1.2.5) queda dada por:

$$A(z) = -\frac{\epsilon}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\tilde{V}(z - \zeta)A(\zeta)}{\zeta^2 + \beta^2} d\zeta - \frac{\epsilon}{2\beta} \tilde{V}(z - i\beta)A(i\beta), \quad (1.2.7)$$

donde  $\tilde{V}(\zeta)$  es la continuación analítica de  $\tilde{V}(p)$  al plano complejo.

**Definición 1.2.2.** Definamos el operador integral  $\hat{T}_\beta : \mathcal{H}_a \longrightarrow \mathcal{H}_a$  como

$$[\hat{T}_\beta \varphi(\zeta)](z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\tilde{V}(z - \zeta)\varphi(\zeta)}{\zeta^2 + \beta^2} d\zeta, \quad z \in B_a.$$

Observemos que:

- La función  $[\hat{T}_\beta \varphi(\zeta)](z)$  es analítica en  $z$ . Sabemos que  $V(x) \in \mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ , por tanto su transformada de Fourier está en  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  y así el integrando es analítico, luego la integral resulta analítica.

- $[\hat{T}_\beta \varphi(\zeta)](p + 0i) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , si  $\varphi(p + i0) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ .

En efecto, recordemos la desigualdad de Peetre

$$(1 + |\theta|)^s \leq (1 + |\theta - \theta'|)^{|s|} (1 + |\theta'|)^s$$

válida para toda  $\theta, \theta'$  y  $s \in \mathbb{R}$ . Aplicando la desigualdad de Peetre y del hecho que tanto  $\tilde{V}(p)$  como  $\varphi(\zeta)$  pertenecen a  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma} \frac{\tilde{V}(p - \zeta)\varphi(\zeta)}{\zeta^2 + \beta^2} d\zeta \right| &\leq \frac{1}{1 - \beta^2} \int_{\Gamma} |\tilde{V}(p - \zeta)\varphi(\zeta)| d\zeta \\ &\leq \text{Cte} \int_{\Gamma} \frac{1}{(1 + |p - \zeta|)^N} \frac{1}{(1 + |\zeta|)^N} |d\zeta| \\ &\leq \text{Cte} \int_{\Gamma} \frac{|d\zeta|}{(1 + |p|)^N}. \end{aligned}$$

Para sus derivadas tenemos:

$$\begin{aligned} \left| \partial_p^k \int_{\Gamma} \frac{\tilde{V}(p - \zeta)\varphi(\zeta)}{\beta^2 + \zeta^2} d\zeta \right| &= \left| \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta) \partial_p^k \tilde{V}(p - \zeta)}{\beta^2 + \zeta^2} d\zeta \right| \\ &\leq \frac{1}{1 - \beta^2} \int_{\Gamma} |\varphi(\zeta) \partial_p^k \tilde{V}(p - \zeta)| d\zeta \\ &\leq \text{Cte} \int_{\Gamma} \frac{|d\zeta|}{(1 + |\zeta|)^{N_1} (1 + |p - \zeta|)^N} \\ &\leq \text{Cte} \int_{\Gamma} \frac{(1 + |\zeta|)^N}{(1 + |\zeta|)^{N_1} (1 + |p|)^N} d\zeta, \end{aligned}$$

para cualquier  $k, N_1 \in \mathbb{N}$ . Si en la última línea ponemos  $N_1 = N + 2$ ,

$$\left| \partial_p^k \int_{\Gamma} \frac{\tilde{V}(p - \zeta)\varphi(\zeta)}{\beta^2 + \zeta^2} d\zeta \right| \leq \text{Cte} \frac{1}{(1 + |p|)^N} \int_{\Gamma} \frac{|d\zeta|}{(1 + |\zeta|)^2}.$$

- La función  $[\hat{T}_\beta\varphi(\zeta)](z)$  también es analítica en  $\beta$ , para  $\beta$  suficientemente pequeña. Esta afirmación es la consecuencia inmediata del siguiente cálculo elemental:

$$\frac{1}{\zeta^2 + \beta^2} = \frac{1}{\zeta^2(1 + (\frac{\beta}{\zeta})^2)} = \frac{1}{\zeta^2} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{\beta}{\zeta}\right)^{2m}.$$

- El operador  $\hat{T}_\beta$  es acotado. En efecto,

$$\|\hat{T}_\beta\varphi\| = \sup_{z \in B_a} \left| \int_{\Gamma} \frac{\tilde{V}(z - \zeta)\varphi(\zeta)d\zeta}{\zeta^2 + \beta^2} \right| \leq \|\varphi\| \sup_{z \in B_a} \int_{\Gamma} \frac{|\tilde{V}(z - \zeta)||d\zeta|}{|\zeta^2 + \beta^2|}.$$

Sobre  $\Gamma$  tenemos  $|\zeta^2 + \beta^2| \geq a/2$  y la última expresión es acotada por

$$\frac{2}{a} \|\varphi\| \int_{\Gamma} |\tilde{V}(z - \zeta)||d\zeta|$$

y como  $\tilde{V}(z - \zeta) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , la última integral está acotada. Por tanto,  $\hat{T}_\beta$  está acotado.

Reescribamos la ecuación (1.2.7) en términos del operador  $\hat{T}_\beta$ :

$$[(1 + \epsilon\hat{T}_\beta)A(\zeta)](z) = -\frac{\epsilon}{2\beta} \tilde{V}(z - i\beta)A(i\beta),$$

donde 1 es el operador identidad. Supongamos que  $A(i\beta) = 1$ , mas adelante lo comprobaremos.

Hemos visto que el operador  $\hat{T}_\beta$  es acotado, por tanto  $\epsilon\hat{T}_\beta$  es pequeño y podemos nuevamente reescribir la ecuación (1.2.7) como

$$A(z) = -\frac{\epsilon}{2\beta} [(1 + \epsilon\hat{T}_\beta)^{-1} \tilde{V}(\zeta - i\beta)](z), \quad (1.2.8)$$

donde  $(1 + \epsilon \hat{T}_\beta)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \epsilon^n \hat{T}_\beta^n$ ,  $\hat{T}_\beta^0 \equiv 1$ , es la correspondiente serie de Neumann. Podemos reescribir (1.2.8) como:

$$A(z) = -\frac{\epsilon}{2\beta} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \epsilon^l [\hat{T}_\beta^l \tilde{V}(\zeta - i\beta)](z) \quad (1.2.9)$$

- Si aplicamos  $l$  veces el operador  $\hat{T}_\beta$  a una función  $\varphi \in \mathcal{H}_a$ , para  $l = 1, 2, \dots$ , obtenemos:

$$[\hat{T}_\beta^l \varphi(\zeta)](z) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{\Gamma} \cdots \int_{\Gamma} \varphi(\zeta) \prod_{n=1}^l \frac{\tilde{V}(\zeta_{n-1} - \zeta_n)}{\zeta_n^2 + \beta^2} d\zeta_n, \quad (1.2.10)$$

donde  $\zeta_0 \equiv z, \zeta_1 \equiv \zeta$ .

Evaluemos (1.2.9) en  $z = i\beta$  y multipliquemos esta expresión por  $\beta$ , obtenemos, teniendo en cuenta que  $A(i\beta) = 1$ , como resultado la ecuación secular para  $\beta$ :

$$\beta = -\frac{\epsilon}{2} [(1 + \epsilon \hat{T}_\beta)^{-1} \tilde{V}(\zeta - i\beta)](i\beta). \quad (1.2.11)$$

Consideremos ahora la función

$$F(\beta, \epsilon) = \beta + \frac{\epsilon}{2} [(1 + \epsilon \hat{T}_\beta)^{-1} \tilde{V}(\zeta - i\beta)](i\beta);$$

en esta última expresión sustituycamos  $(1 + \epsilon \hat{T}_\beta)^{-1}$  por su serie de Neumann,

$$F(\beta, \epsilon) = \beta + \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \epsilon^{l+1} [\hat{T}_\beta^l \tilde{V}(\zeta - i\beta)](i\beta). \quad (1.2.12)$$

- Observemos que la función  $[\hat{T}_\beta \tilde{V}(\zeta - i\beta)](i\beta)$  es analítica en  $\beta$ . En efecto, si en la ecuación (1.2.10) en lugar de  $z$  sustituimos  $i\beta$ , en lugar de  $\varphi(\zeta)$  ponemos  $\tilde{V}(\zeta - i\beta)$  y teniendo en cuenta las expansiones

$$\begin{aligned}\tilde{V}(i\beta - \zeta_1) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k \tilde{V}^{(k)}(-\zeta_1)}{k!} \beta^k, \\ \tilde{V}(\zeta - i\beta) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k i^k \tilde{V}^{(k)}(\zeta)}{k!} \beta^k, \\ \prod_{n=1}^l \frac{1}{\zeta_n^2 + \beta^2} &= \prod_{n=1}^l \frac{1}{\zeta_n^2} \sum_{k_n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k_n}}{\zeta_n^{2k_n}} \beta^{2k_n},\end{aligned}$$

podemos entonces concluir que la función  $F(\beta, \epsilon)$  es analítica en cada uno de sus argumentos y por el teorema de Hartogs es analítica en  $\mathbb{C}^2$ . Aún mas, como  $F(0, 0) = 0$ ,  $\partial_\beta F(0, 0) = 1$  (esto último debido a la presencia de  $\epsilon$  en el segundo término de (1.2.12)), aplicando el teorema de la función implícita, la solución  $\beta(\epsilon)$  para  $\beta$  en la ecuación secular (1.2.11), la cual tiende a cero cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ , existe, es única y está dada por las fórmulas (1.2.1), (1.2.2).

En efecto, la ecuación secular (1.2.11) es equivalente a  $F(\beta, \epsilon) = 0$ , por tanto, para resolver la ecuación (1.2.12), primero expandimos en su serie de Taylor a  $F(\beta, \epsilon)$ . Tengamos en cuenta que, en la ecuación (1.2.11) el único término que depende de  $\beta$  y no tiene como factor a  $\epsilon$  es el primero, así que las demás derivadas respecto de  $\beta$  se anulan.

Calculemos algunos de los términos de la serie

$$F_\epsilon(\beta, \epsilon) = \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l (l+1) \epsilon^l [\hat{T}_\beta^l \tilde{V}(\zeta - i\beta)](i\beta).$$

Tenemos que

$$F_\epsilon(0, 0) = \frac{1}{2} \tilde{V}(0),$$

$$\begin{aligned} F_{\beta\epsilon}(0, 0) &= \partial_\beta \left\{ \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l (l+1) \epsilon^l [\hat{T}_\beta^l \tilde{V}(\zeta - i\beta)](i\beta) \right\} \Big|_{(0,0)} \\ &= [\tilde{V}'(0)]_\beta = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{\epsilon,\epsilon}(0, 0) &= \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l l(l+1) \epsilon^{l-1} [T_{\beta,\zeta \rightarrow z}^l \tilde{V}(\zeta - i\beta)](i\beta) \right\} \Big|_{(0,0)} \\ &= \left\{ -\{[\hat{T}_\beta \tilde{V}(\zeta - i\beta)](i\beta)\} \right\} \Big|_{\beta=0} \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\tilde{V}(\zeta) \tilde{V}(-\zeta)}{\zeta^2} d\zeta. \end{aligned}$$

De acuerdo con lo anterior podemos reescribir  $F(\beta, \epsilon)$  como:

$$F(\beta, \epsilon) = \beta + \frac{\epsilon}{2} \tilde{V}(0) - \frac{\epsilon^2}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\tilde{V}(\zeta) \tilde{V}(-\zeta)}{\zeta^2} d\zeta + O(\epsilon^3 + \epsilon^2 \beta + \epsilon \beta^2). \quad (1.2.13)$$

Por tanto, logramos solucionar la ecuación secular (1.2.11), encontrando así el valor de  $\beta(\epsilon)$  dado en (1.2.1). En el caso cuando  $\tilde{V}(0) = 0$  podemos deformar el contorno  $\Gamma$  en (1.2.13) al eje real y usar el hecho de que  $\overline{\tilde{V}(p)} = \tilde{V}(-p)$  para  $p \in \mathbb{R}$ , demostrando así (1.2.2).

Aún nos falta comprobar que en efecto  $A(i\beta(\epsilon)) = 1$  y que  $A(p + i0) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_p)$ .

- Verifiquemos que  $A(i\beta) = 1$ . De la ecuación (1.2.8) tenemos:

$$A(i\beta) = -\frac{\epsilon}{2\beta} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \epsilon^l [\hat{T}_\beta^l \tilde{V}(\zeta - i\beta)](i\beta), \quad (1.2.14)$$

por otra parte, de la ecuación (1.2.11) se tiene que

$$\beta = -\frac{\epsilon}{2} [(1 + \epsilon \hat{T}_\beta)^{-1} \tilde{V}(\zeta - i\beta)](i\beta), \quad (1.2.15)$$

luego  $A(i\beta) = 1$ .

- Comprobemos que  $A(p + i0) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_p)$ . En la ecuación (1.2.8) definimos a  $A(z)$ , y sabemos que  $\tilde{V}(p) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_p)$ . Ahora consideremos el operador  $\hat{T}_\beta$ :

$$|[\hat{T}_\beta \varphi(\zeta)](p)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\tilde{V}(p - \zeta) \varphi(\zeta)}{\zeta^2 + \beta^2} d\zeta \right|. \quad (1.2.16)$$

Sabemos que  $\tilde{V}(p) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  lo que implica que podemos acotar la expresión (1.2.16) por

$$\text{Cte} \int_{\Gamma} \frac{|\varphi(\zeta)|}{|\zeta^2 + \beta^2|(1 + |p - \zeta|)^N} |d\zeta|, \quad (1.2.17)$$

y aplicando la desigualdad de Petree a  $(1 + |p - \zeta|)^{-N}$  tenemos que

$$\frac{1}{(1 + |p - \zeta|)^N} \leq \frac{(1 + |\zeta|)^N}{(1 + |p|)^N},$$

lo que nos sirve para obtener la cota

$$\text{Cte} \frac{1}{(1 + |p|)^N} \int_{\Gamma} \frac{(1 + |\zeta|)^N |\varphi(\zeta)|}{|\zeta^2 + \beta^2|} |d\zeta|$$

para la expresión anterior. Como  $\varphi(p) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_p)$ , tenemos las desigualdades

$$(1 + |\zeta|)^N |\varphi(\zeta)| \leq \text{Cte},$$

$$\int_{\Gamma} \frac{|d\zeta|}{|\zeta^2 + \beta^2|} < \text{Cte}.$$

Finalmente obtenemos

$$|[\hat{T}_{\beta} \varphi(\zeta)](p)| \leq C(1 + |p|)^{-N},$$

donde  $C$  es una constante. Por inducción conseguimos

$$|[\hat{T}_{\beta}^l \varphi(\zeta)](p)| \leq C^l (1 + |p|)^{-N}.$$

Por tanto:

$$|A(p)| \leq \frac{\text{Cte}}{(1 + |p|)^N} \sum_{l=0}^{\infty} \epsilon^l C^l \leq \frac{\text{Cte}}{(1 + |p|)^N}. \quad (1.2.18)$$

Sus derivadas se estiman de manera análoga.

De esta manera concluimos con la demostración del Teorema 1.2.1.  $\square$

### 1.3. Resonancias

En esta sección consideraremos el caso  $\int V(x) dx > 0$  (barrera de potencial) y demostraremos que bajo esta condición la ecuación (1.1.1) posee una resonancia (estado anticonfinado). Introduciremos primero la

**Definición 1.3.1.** *Una solución  $\Psi(x)$  de la ecuación (1.1.1) se llama resonancia (estado anticonfinado) si  $\Psi$  satisface*

$$\Psi(x) \sim e^{\beta|x|} \quad |x| \rightarrow \infty, \quad (1.3.1)$$

con  $\beta > 0$ ,  $E = -\beta^2$ .

**Observación 1.3.2.** *Según el Apéndice B, soluciones de este tipo pueden ser interpretadas como “ondas salientes” (outgoing waves). Nosotros no vamos a profundizar en este tema porque eventualmente las nociones de ondas*

entrantes y salientes están relacionadas con problemas no estacionarios. La condición (1.3.1) significa que la resonancia no incluye términos decrecientes proporcionales a  $\exp(-\beta|x|)$ ,  $|x| \rightarrow \infty$ .

**Teorema 1.3.1.** *Sea  $\int V(x) dx > 0$ . Entonces para  $\epsilon$  suficientemente pequeño la ecuación (1.1.1) posee una resonancia para  $E = -\beta^2$ , donde*

$$\beta = \frac{\epsilon}{2} \tilde{V}(0) + O(\epsilon^2). \quad (1.3.2)$$

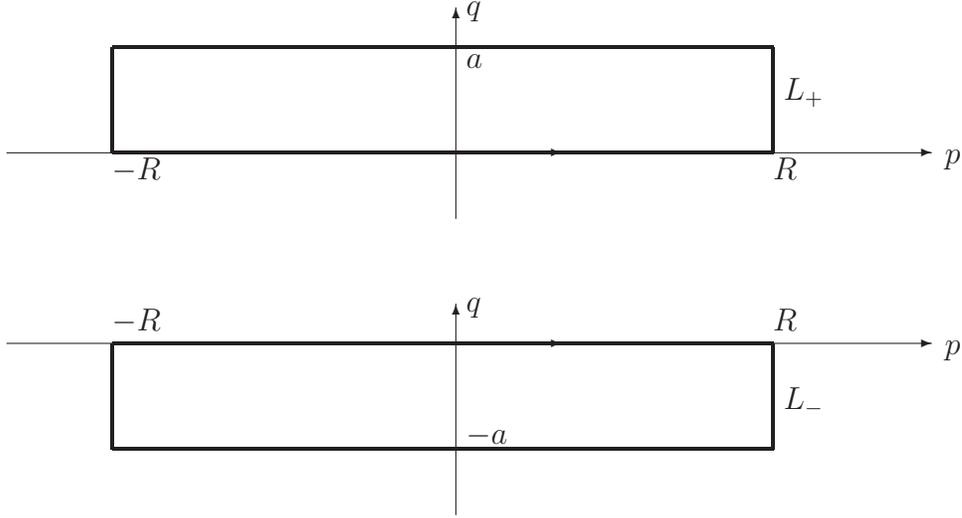
*Demostración.* Las soluciones construídas en la sección anterior tienen la forma

$$\Psi(x) = \frac{1}{2\pi} \int e^{ipx} \frac{A(p)}{p^2 + \beta^2} dp, \quad (1.3.3)$$

donde  $A(p)$  es entera y está en  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  sobre cualquier recta paralela al eje real uniformemente en  $|\Im p| \leq \text{Cte} < \infty$ . Para estudiar el comportamiento de (1.3.3) cuando  $|x| \rightarrow \infty$ , introduciremos los siguientes contornos (ver Fig. 1.2):

$$\begin{aligned} L_+ &= \{-R \leq p \leq R, q = 0\} \cup \{-R \leq p \leq R, q = a > 0\} \\ &\cup \{p = \pm R, 0 \leq q \leq a\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_- &= \{-R \leq p \leq R, q = 0\} \cup \{-R \leq p \leq R, q = -a, a > 0\} \\ &\cup \{p = \pm R, -a \leq q \leq 0\}. \end{aligned}$$

Figura 1.2: Contornos  $L_{\pm}$ .

Las únicas singularidades del integrando en (1.3.3) son los polos simples en  $p = \pm i\beta$  y por lo tanto las integrales a lo largo de  $L_{\pm}$  son iguales a  $2\pi i$  veces los residuos en  $\pm i\beta$ . Haciendo tender  $R$  al infinito y calculando los residuos, vemos que para  $x > 0$

$$\frac{1}{2\pi} \int e^{ipx} \frac{A(p)}{p^2 + \beta^2} dp = \frac{1}{2\pi} \int_{\Im p = a} e^{ipx} \frac{A(p)}{p^2 + \beta^2} dp + \frac{1}{2\beta} A(i\beta) e^{-\beta x}, \quad (1.3.4)$$

y para  $x < 0$

$$\frac{1}{2\pi} \int e^{ipx} \frac{A(p)}{p^2 + \beta^2} dp = \frac{1}{2\pi} \int_{\Im p = -a} e^{ipx} \frac{A(p)}{p^2 + \beta^2} dp + \frac{1}{2\beta} A(-i\beta) e^{\beta x}. \quad (1.3.5)$$

Consideremos la integral en la parte derecha de (1.3.4):

$$\int_{\Im p = a} e^{ipx} \frac{A(p)}{p^2 + \beta^2} dp = e^{-ax} \int e^{ipx} \frac{A(p + ia)}{(p + ia)^2 + \beta^2} dp; \quad (1.3.6)$$

siendo la última integral acotada, tenemos que la solución es  $O(e^{-ax})$  con  $a$  arbitraria. Pero para  $x$  fuera del soporte de  $V(x)$  la solución es combinación lineal de  $e^{\beta x}$  y  $e^{-\beta x}$ , por lo tanto, para  $x$  suficientemente grande, la integral (1.3.6) se anula y

$$\Psi(x) = \frac{1}{2\beta} A(i\beta) e^{-\beta x}, \quad x \gg 1. \quad (1.3.7)$$

Análogamente,

$$\Psi(x) = \frac{1}{2\beta} A(-i\beta) e^{\beta x}, \quad x \ll -1. \quad (1.3.8)$$

Ahora con el fin de eliminar las exponenciales decrecientes de la solución, buscaremos  $\Psi$  en la forma

$$\Psi(x) = \frac{1}{2\pi} \int e^{ipx} \frac{A(p)}{p^2 + \beta^2} dp + C_1 e^{-\beta x} + C_2 e^{\beta x}. \quad (1.3.9)$$

Esta función satisface la condición (1.3.1) si

$$C_1 = -\frac{A(i\beta)}{2\beta}, \quad C_2 = -\frac{A(-i\beta)}{2\beta}. \quad (1.3.10)$$

La transformada de Fourier de (1.3.9) tiene la forma

$$\tilde{\Psi}(p) = \frac{A(p)}{p^2 + \beta^2} + 2\pi C_1 \delta(p - i\beta) + 2\pi C_2 \delta(p + i\beta). \quad (1.3.11)$$

Reemplazando (1.3.11) en (1.2.3) obtenemos

$$A(p) = -\frac{\epsilon}{2\pi} \int \frac{\tilde{V}(p - p') A(p')}{p'^2 + \beta^2} dp' - C_1 \epsilon \tilde{V}(p - i\beta) - C_2 \epsilon \tilde{V}(p + i\beta). \quad (1.3.12)$$

En la ecuación (1.3.12) cambiemos el contorno de integración por  $\Gamma$  (ver sección 1.2). Tomando en cuenta (1.3.10), la ecuación (1.3.12) se convierte en

$$A(p) = -\frac{\epsilon}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\tilde{V}(p-p')A(p')}{p'^2 + \beta^2} dp' + \epsilon \frac{A(p_-)\tilde{V}(p+i\beta)}{2\beta}. \quad (1.3.13)$$

A esta ecuación apliquemos la técnica de la sección anterior. Igual como allí, podemos suponer que  $A(-i\beta) = 1$ . Tenemos entonces

$$[1 + \epsilon\hat{T}_\beta]A(p) = \epsilon \frac{\tilde{V}(p+i\beta)}{2\beta}. \quad (1.3.14)$$

Siendo  $\hat{T}_\beta$  acotado tenemos que  $\epsilon\hat{T}_\beta$  es pequeño, por tanto podemos reescribir (1.3.14) como

$$A(p) = \frac{\epsilon}{2\beta} [1 + \epsilon\hat{T}_\beta]^{-1} \tilde{V}(p+i\beta), \quad (1.3.15)$$

y nuevamente en términos de la serie de Neumann

$$A(p) = \frac{\epsilon}{2\beta} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \epsilon^n [\hat{T}_\beta^n \tilde{V}(p+i\beta)](p). \quad (1.3.16)$$

Evaluemos la expresión (1.3.16) en  $p = -i\beta$  y multipliquemos por  $\beta$ ; obtenemos de esta manera la ecuación para  $\beta$ :

$$\beta = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \epsilon^{n+1} [\hat{T}_\beta^n \tilde{V}(p+i\beta)](-i\beta). \quad (1.3.17)$$

Definamos la función  $F(\beta, \epsilon)$  como

$$F(\beta, \epsilon) = \beta - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \epsilon^{n+1} [\hat{T}_\beta^n \tilde{V}(p+i\beta)](-i\beta). \quad (1.3.18)$$

Desarrollando la sumatoria en esta última expresión obtenemos

$$F(\beta, \epsilon) = \beta - \frac{\epsilon}{2} \tilde{V}(0) + \frac{1}{4\pi} \epsilon^2 \int_{\Gamma} \frac{\tilde{V}(-i\beta - p') \tilde{V}(p' + i\beta)}{p'^2 + \beta^2} dp' + O(\epsilon^2). \quad (1.3.19)$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} F(0, 0) &= 0, & F_{\epsilon}(0, 0) &= -\frac{1}{2} \tilde{V}(0), & F_{\beta}(0, 0) &= 1, \\ F_{\beta\epsilon}(0, 0) &= 0, & F_{\epsilon\epsilon}(0, 0) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\tilde{V}(p) \tilde{V}(-p)}{p^2} dp, & F_{\beta\beta}(0, 0) &= 0. \end{aligned}$$

Esto implica que

$$F(\beta, \epsilon) = \beta - \frac{\epsilon}{2} \tilde{V}(0) + \frac{1}{4\pi} \epsilon^2 \int_{\Gamma} \frac{\tilde{V}(-p) \tilde{V}(p)}{p^2} dp + O(\epsilon^3 + \epsilon^2 \beta + \epsilon \beta^2).$$

De esta manera, tenemos por el teorema de la función implícita que

$$\beta = \frac{\epsilon}{2} \tilde{V}(0) - \frac{\epsilon^2}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\tilde{V}(-p') \tilde{V}(p')}{p'^2} dp' + O(\epsilon^3), \quad (1.3.20)$$

y esto termina la demostración del teorema. □

## Capítulo 2

# Ondas atrapadas y resonancias para la ecuación de agua de poca profundidad

### 2.1. Introducción

En el presente capítulo, aplicaremos la técnica del capítulo anterior al estudio de ondas atrapadas y resonancias para la ecuación linealizada de agua de poca profundidad (EAPP). Esta ecuación se parece bastante a la ecuación de Schrödinger estudiada en el Capítulo 1 y las consideraciones correspon-

dientes son casi idénticas. Más adelante, en el Capítulo 5, obtendremos las fórmulas para ondas atrapadas y resonancias para las ecuaciones completas que describen las ondas de agua sin la suposición de que  $h_0 \ll 1$  (donde  $h_0$  es la profundidad del agua en el infinito) y comprobaremos que ellas pasan en las del presente capítulo cuando  $h_0 \rightarrow 0$ .

La EAPP tiene la forma

$$\Phi_{tt} - g\nabla(h(x, z)\nabla\Phi) = 0,$$

donde  $\nabla = (\partial_x, \partial_z)$ ,  $g$  es la aceleración de gravedad,  $h(x, z)$  representa la profundidad del agua y  $\Phi$  (la incógnita) es, por ejemplo, la elevación de la superficie libre. Las coordenadas  $x$  y  $z$  son las coordenadas horizontales en el plano, que coincide con la superficie del agua en el reposo. Buscaremos la solución de EAPP en la forma de ondas estacionarias,  $\Phi = \exp(i\omega t)\Psi(x, z)$ , entonces para  $\Psi$  obtendremos la ecuación

$$-\nabla(h\nabla\Psi) = \lambda\Psi, \quad \lambda = \omega^2/g. \quad (2.1.1)$$

Supongamos que  $h$  describe una sierra (o surco) submarina de poca altura (profundidad) que es paralela al eje  $z$ :  $h(x, z) = h_0 + \epsilon V(x)$ ,  $V(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ ,  $\epsilon \rightarrow 0^+$ . La profundidad de esta forma describe una “sierra” si  $\int V(x) dx \leq 0$  y “surco” si  $\int V(x) dx > 0$ . Buscaremos ahora la solución de (2.1.1) en la

forma  $\Psi = \exp(ikz)\varphi(x)$  separando de esta manera la variable  $z$ . Llegamos finalmente a la ecuación

$$-h_0\varphi'' - \epsilon(V\varphi)' + k^2(h_0 + \epsilon V)\varphi = \lambda\varphi. \quad (2.1.2)$$

En esta ecuación y en todo lo que sigue vamos a suponer que  $k$  es una constante positiva,  $k \geq k_0 > 0$ . El espectro continuo de la ecuación (2.1.2) coincide con el espectro continuo de la ecuación no perturbada ( $\epsilon = 0$ ):

$$-h_0\varphi'' + k^2h_0\varphi = \lambda\varphi. \quad (2.1.3)$$

Esta última posee soluciones del tipo “ondas planas”,  $\varphi \sim \exp(\pm ilx)$ , si  $\lambda/h_0 = l^2 + k^2 \geq k^2$ . Por lo tanto, el espectro continuo es el rayo  $\lambda \geq k^2h_0$ . Igual como en el Capítulo 1, la perturbación da origen a un eigenvalor y/o una resonancia a la izquierda del punto  $\lambda = k^2h_0$  bajo ciertas condiciones sobre  $V(x)$ . En las siguientes secciones veremos la aplicación de nuestra técnica a la ecuación (2.1.2).

## 2.2. Ondas atrapadas

En esta sección supondremos que  $\tilde{V}(0) = \int V(x) dx \leq 0$  (sierra). En este caso siempre tendremos ondas atrapadas (es decir, esta situación es análoga

al pozo de potencial para la ecuación de Schrödinger). El resultado principal de esta sección es el siguiente

**Teorema 2.2.1.** *Sea  $\int V(x) dx < 0$ . Entonces para  $\epsilon$  suficientemente pequeño la ecuación (2.1.2) posee un valor propio dado por  $\lambda = k^2 h_0 - \beta^2$ , donde*

$$\beta = -\frac{\epsilon k^2}{2h_0^{1/2}} \tilde{V}(0) + O(\epsilon^2). \quad (2.2.1)$$

Si  $\int V(x) dx = 0$ , entonces la afirmación anterior sigue en pie con

$$\beta = \epsilon^2 \frac{k^4}{4\pi h_0^{3/2}} \int \frac{|\tilde{V}(p)|^2}{p^2} dp + O(\epsilon^3). \quad (2.2.2)$$

*Demostración.* Apliquemos la transformada de Fourier a (2.1.2). Agrupando términos de orden de  $\epsilon$  en la parte derecha tenemos

$$(h_0 p^2 + \beta^2) \tilde{\varphi}(p) = -\frac{\epsilon}{2\pi} \int \tilde{V}(p-p')(pp' + k^2) \tilde{\varphi}(p') dp'. \quad (2.2.3)$$

Siendo la ecuación (2.2.3) parecida a la transformada de Fourier de la ecuación de Schrödinger (1.2.3) del Capítulo 1, buscamos su solución en la forma

$$\tilde{\varphi}(p) = \frac{A(p)}{L(p)}, \quad (2.2.4)$$

donde  $A(p) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  y  $L(p) = h_0 p^2 + \beta^2$ . Si sustituimos (2.2.4) en (2.2.3) obtenemos

$$A(p) = -\frac{\epsilon}{2\pi} \int \frac{\tilde{V}(p-p')(pp' + k^2)A(p')}{L(p')} dp'. \quad (2.2.5)$$

Obviamente, la función  $L(p)$  posee dos ceros simples en  $p = p_{\pm} = \pm i\beta h_0^{-1/2}$ .

Por lo tanto, el integrando del lado derecho de (2.2.5) posee una singularidad para cuando  $\beta = 0$  en  $p' = 0$ ; como suponemos que  $\beta$  es pequeño (mas adelante lo comprobamos), para calcular la integral cambiamos el contorno de integración a uno en el plano complejo de tal manera que las singularidades  $z = p_{\pm}$  estén circunscritas por este (comp. con el procedimiento del Capítulo 1; el contorno  $\Gamma$  es el mismo).

**Definición 2.2.1.** *Definamos a  $\mathcal{H}_a$  como el espacio de funciones analíticas acotadas en la banda  $B_a := \{z \in \mathbb{C}, |\Im z| < a\}$ ,  $a > 0$ , con la norma  $\|\varphi\| = \sup_{z \in B_a} |\varphi(z)|$ .*

Asumamos que  $A(z) \in \mathcal{H}_a$ , lo que comprobaremos mas adelante e introduzcamos el contorno dado por  $\Gamma$ :

$$\Gamma := (-\infty, -a/2] \cup \{p + iq : p^2 + q^2 = a^2/4, q > 0\} \cup [a/2, \infty).$$

Por el teorema del residuo de Cauchy, la integral en el lado derecho de (2.2.5) queda dada por:

$$A(z) = -\frac{\epsilon}{2\pi} \int_{\Gamma} \tilde{V}(z - \zeta) \frac{A(\zeta)}{L(\zeta)} (z\zeta + k^2) d\zeta - \frac{\epsilon}{2\beta} f(z), \quad (2.2.6)$$

$$f(z) = \tilde{V}(z - p_+) A(p_+) \left( \frac{iz\beta}{h_0} + \frac{k^2}{h_0^{1/2}} \right),$$

donde  $\tilde{V}(\zeta)$  es la continuación analítica de  $\tilde{V}(p)$  al plano complejo. Las eigenfunciones son definidas salvo un factor numérico, por lo tanto, podemos suponer que  $A(p_+) = 1$  y la función  $f$  en (2.2.6) queda dada por

$$f(z) = \tilde{V}(z - p_+) \left( \frac{iz\beta}{h_0} + \frac{k^2}{h_0^{1/2}} \right).$$

**Definición 2.2.2.** *Definamos el operador integral  $\hat{T}_\beta : \mathcal{H}_a \longrightarrow \mathcal{H}_a$  como*

$$[\hat{T}_\beta \varphi(\zeta)](z) = \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \frac{\tilde{V}(z - \zeta)(z\zeta + k^2)}{L(\zeta)} \varphi(\zeta) d\zeta, \quad \zeta \in B_a. \quad (2.2.7)$$

Observemos que:

- La función  $[\hat{T}_\beta \varphi(\zeta)](z)$  es analítica en  $z$ . Sabemos que  $V(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ , por lo tanto su transformada de Fourier es entera y sobre cualquier recta  $\Im z = \text{Cte}$  está en  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  y así el integrando es analítico y la integral es convergente luego la integral resulta analítica.
- $[\hat{T}_\beta \varphi(\zeta)](p) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , si  $\varphi(p) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Recordamos la desigualdad de Peetre

$$(1 + |\theta|)^s \leq (1 + |\theta - \theta'|)^{|s|} (1 + |\theta'|)^s$$

válida para toda  $\theta, \theta'$  y  $s \in \mathbb{R}$ .

Tenemos que demostrar que  $|z|^N |\partial_z^M (\hat{T}_\beta [\varphi(\zeta)](z))|$  es acotado para toda  $M, N$ . Consideremos el caso  $M = 0$  (los demás casos se tratan de una

manera análoga). Sobre el contorno  $\Gamma$  tenemos  $|L(\zeta)| \geq \text{Cte} > 0$ . Por lo tanto

$$\begin{aligned} |z|^N |[\hat{T}_\beta \varphi(\zeta)](z)| &\leq \text{Cte} |z|^N \int_{\Gamma} |\tilde{V}(z - \zeta)| (1 + |z - \zeta|) (1 + |\zeta|)^2 |\varphi(\zeta)| |d\zeta| \\ &\leq \int_{\Gamma} (1 + |z - \zeta|)^{N+1-M} (1 + |\zeta|)^{N+2} |\varphi(\zeta)| |d\zeta| \end{aligned}$$

porque

$$|\tilde{V}(z)| \leq \text{Cte} (1 + |z|)^{-M} \quad \forall M.$$

Tomando  $M = N + 3$  y usando el hecho de que  $\varphi \in \mathcal{S}$ , tenemos que la última expresión está acotada por

$$\text{Cte} \int_{\Gamma} (1 + |z - \zeta|)^{-2} |d\zeta|,$$

y esta integral converge.

- $[\hat{T}_\beta \varphi(\zeta)]$  es analítico en  $\beta$  para  $\beta$  suficientemente pequeño. Esta afirmación es consecuencia inmediata del siguiente cálculo elemental:

$$\frac{1}{h_0 \zeta^2 + \beta^2} = \frac{1}{h_0 \zeta^2} \frac{1}{1 + \left(\frac{\beta}{h_0^{1/2} \zeta}\right)^2} = \frac{1}{h_0 \zeta^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\beta}{h_0^{1/2} \zeta}\right)^{2n}.$$

- El operador  $\hat{T}_\beta$  es acotado. En efecto, tenemos

$$\begin{aligned} \|\hat{T}_\beta \varphi\| &= \sup_{z \in B_a} \left| \int_{\Gamma} \frac{(z\zeta + k^2)\tilde{V}(z - \zeta)\varphi(\zeta) d\zeta}{h_0\zeta^2 + \beta^2} \right| \\ &\leq \|\varphi\| \sup_{z \in B_a} \int_{\Gamma} \frac{|(z\zeta + k^2)\tilde{V}(z - \zeta)| |d\zeta|}{|h_0\zeta^2 + \beta^2|} \\ &\leq \text{Cte} \|\varphi\| \end{aligned}$$

porque la última integral está acotada.

Reescribamos la ecuación (2.2.6) en términos del operador  $\hat{T}_\beta$ :

$$[(1 + \epsilon\hat{T}_\beta)A(\zeta)](z) = -\frac{\epsilon}{2\beta}f(z), \quad (2.2.8)$$

donde 1 es el operador identidad.

Hemos visto que el operador  $\hat{T}_\beta$  es acotado, por tanto  $\epsilon\hat{T}_\beta$  es pequeño y podemos nuevamente reescribir la ecuación (2.2.8) como:

$$A(z) = -\frac{\epsilon}{2\beta}[1 + \epsilon\hat{T}_\beta]^{-1}f(z), \quad (2.2.9)$$

donde  $(1 + \epsilon\hat{T}_\beta)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \epsilon^n \hat{T}_\beta^n$ ,  $\hat{T}_\beta^0 \equiv 1$ , es la correspondiente serie de Neumann. Podemos reescribir (2.2.9) como:

$$A(z) = -\frac{\epsilon}{2\beta} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \epsilon^n [\hat{T}_\beta^n f(\zeta)](z). \quad (2.2.10)$$

- Si aplicamos  $l$  veces el operador  $\hat{T}_\beta$  a una función  $\varphi \in \mathcal{H}_a$ , para  $l = 1, 2, \dots$ , obtenemos:

$$[\hat{T}_\beta^l \varphi(\zeta)](z) = \int_\Gamma \cdots \int_\Gamma \varphi(\zeta) \prod_{n=1}^l \frac{\tilde{V}(\zeta_{n-1} - \zeta_n)(\zeta_{n-1}\zeta_n + k^2)}{h_0\zeta_n^2 + \beta^2} d\zeta_n,$$

donde  $\zeta_0 \equiv z$ ,  $\zeta_1 \equiv \zeta$ .

Hemos supuesto anteriormente que  $A(p_+) = 1$ . Evaluemos (2.2.10) en  $z = p_+$  y multiplicando por  $\beta$  obtenemos como resultado la ecuación secular para  $\beta$ :

$$\beta = -\frac{\epsilon}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \epsilon^n [\hat{T}_\beta^n f(\zeta)](p_+). \quad (2.2.11)$$

Consideremos ahora la función

$$F(\beta, \epsilon) = \beta + \frac{\epsilon}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \epsilon^n [\hat{T}_\beta^n f(\zeta)](p_+), \quad (2.2.12)$$

Podemos escribir

$$F(\beta, \epsilon) = \beta + \frac{\epsilon}{2} f(p_+) - \frac{\epsilon^2}{2} [\hat{T}_\beta f(\zeta)](p_+) + O(\epsilon^3).$$

La ecuación secular (2.2.11) es equivalente a  $F(\beta, \epsilon) = 0$ , por tanto, para resolver la ecuación (2.2.11) comenzaremos por expandir en su serie de Taylor a  $F(\beta, \epsilon)$ . Tenemos que

$$F(0, 0) = 0, \quad F_\epsilon(0, 0) = \frac{\epsilon k^2}{2h_0^{1/2}} \tilde{V}(0), \quad F_\beta(0, 0) = 1,$$

$$F_{\epsilon\epsilon}(0, 0) = -\frac{k^4}{4\pi h_0^{3/2}} \int_{\Gamma} \frac{\tilde{V}(\zeta)\tilde{V}(-\zeta)}{\zeta^2} d\zeta, \quad F_{\epsilon\beta}(0, 0) = 0, \quad F_{\beta\beta}(0, 0) = 0.$$

De acuerdo con lo anterior podemos reescribir  $F(\beta, \epsilon)$  como:

$$F(\beta, \epsilon) = \beta + \frac{\epsilon k^2}{2h_0^{1/2}} \tilde{V}(0) - \frac{\epsilon^2 k^4}{4\pi h_0^{3/2}} \int_{\Gamma} \frac{\tilde{V}(\zeta)\tilde{V}(-\zeta)}{\zeta^2} d\zeta + O(\epsilon^3 + \epsilon^2\beta + \epsilon\beta^2). \quad (2.2.13)$$

Podemos aplicar el teorema de la función implícita a la ecuación secular (2.2.11) y por tanto su solución existe, es única y está dada por las fórmulas (2.2.1), (2.2.2), porque el contorno  $\Gamma$  puede ser deformado al eje real en el caso cuando  $\tilde{V}(0) = 0$  y  $\tilde{V}(-p) = \overline{\tilde{V}(p)}$  para  $p$  real.

Aún nos falta comprobar que en efecto  $A(p_+) = 1$  y que  $A(p+i0) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_p)$ .

- Verifiquemos que  $A(p_+) = 1$ . Si comparamos la ecuación (2.2.9) con (2.2.11) vemos que  $A(p_+) = 1$ .
- Comprobemos que  $A(p+i0) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_p)$ . En la ecuación (2.2.9) definimos a  $A(z)$  y sabemos que  $\tilde{V}(p) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_p)$ . Consideremos el operador definido en (2.2.7). La demostración es la misma que en el Capítulo 1.

De esta manera concluimos con la demostración del Teorema 2.2.1.  $\square$

## 2.3. Resonancias

En esta sección consideramos el caso  $\tilde{V}(0) = \int V(x) dx > 0$  (surco) y demostraremos que bajo esta condición la ecuación (2.1.2) poseé una resonancia (estado anticonfinado). Introduciremos primero la

**Definición 2.3.1.** *Una solución  $\varphi(x)$  de la ecuación (2.1.1) se llama resonancia (estado anticonfinado) si  $\varphi$  satisface*

$$\varphi(x) \sim e^{h_0^{-1/2}\beta|x|} \quad |x| \rightarrow \infty, \quad (2.3.1)$$

con  $\beta > 0$ ,  $\lambda = k^2 h_0 - \beta^2$ .

**Teorema 2.3.1.** *Sea  $\int V(x) dx > 0$ . Entonces para  $\epsilon$  suficientemente pequeño la ecuación (2.1.2) posee una resonancia para  $\lambda = k^2 h_0 - \beta^2$ , donde*

$$\beta = \frac{\epsilon k^2}{2h_0^{1/2}} \tilde{V}(0) + O(\epsilon^2). \quad (2.3.2)$$

*Demostración.* Las soluciones construídas en la sección anterior tienen la forma

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int e^{ipx} \frac{A(p)}{h_0 p^2 + \beta^2} dp, \quad (2.3.3)$$

donde  $A(p)$  es entera y está en  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  sobre cualquier recta paralela al eje real uniformemente en  $|\Im p| \leq \text{Cte} < \infty$ . Para estudiar el comportamiento

de (2.3.3) cuando  $|x| \rightarrow \infty$ , introduciremos los siguientes contornos (ver Fig. 1.2 en el Capítulo 1):

$$L_+ = \{-R \leq p \leq R, q = 0\} \cup \{-R \leq p \leq R, q = a > 0\} \\ \cup \{p = \pm R, 0 \leq q \leq a\},$$

$$L_- = \{-R \leq p \leq R, q = 0\} \cup \{-R \leq p \leq R, q = -a, a > 0\} \\ \cup \{p = \pm R, -a \leq q \leq 0\}.$$

Las singularidades del integrando en (2.3.3) son los polos simples en  $p = p_{\pm} = \pm i h_0^{-1/2} \beta$  y por lo tanto las integrales a lo largo de  $L_{\pm}$  son iguales a  $2\pi i$  veces los residuos en  $\pm i h_0^{-1/2} \beta$ . Haciendo tender  $R$  al infinito y calculando los residuos, vemos que para  $x > 0$

$$\frac{1}{2\pi} \int e^{ipx} \frac{A(p)}{L(p)} dp = \frac{1}{2\pi} \int_{\Im p = a} e^{ipx} \frac{A(p)}{L(p)} dp + \frac{1}{2h_0^{1/2}\beta} A(p_+) e^{-h_0^{-1/2}\beta x}, \quad (2.3.4)$$

y para  $x < 0$

$$\frac{1}{2\pi} \int e^{ipx} \frac{A(p)}{L(p)} dp = \frac{1}{2\pi} \int_{\Im p = -a} e^{ipx} \frac{A(p)}{L(p)} dp + \frac{1}{2h_0^{1/2}\beta} A(p_-) e^{h_0^{-1/2}\beta x}. \quad (2.3.5)$$

Consideremos la integral en la parte derecha de (2.3.4):

$$\int_{\Im p = a} e^{ipx} \frac{A(p)}{h_0 p^2 + \beta^2} dp = e^{-ax} \int e^{ipx} \frac{A(p + ia)}{h_0 (p + ia)^2 + \beta^2} dp; \quad (2.3.6)$$

siendo la última integral acotada, tenemos que la solución es  $O(e^{-ax})$  con  $a > 0$  arbitraria. Pero para  $x$  fuera del soporte de  $V(x)$  la solución es combinación lineal de  $e^{h_0^{-1/2}\beta x}$  y  $e^{-h_0^{-1/2}\beta x}$ , por lo tanto para  $x$  suficientemente grande la integral (2.3.6) se anula y

$$\varphi(x) = \frac{1}{2h_0^{1/2}\beta} A(p_+) e^{-h_0^{-1/2}\beta x}, \quad x \gg 1. \quad (2.3.7)$$

Análogamente,

$$\varphi(x) = \frac{1}{2h_0^{1/2}\beta} A(p_-) e^{h_0^{-1/2}\beta x}, \quad x \ll -1. \quad (2.3.8)$$

Ahora con el fin de eliminar las exponenciales decrecientes de la solución, buscaremos  $\varphi$  en la forma

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int e^{ipx} \frac{A(p)}{L(p)} dp + C_1 e^{-h_0^{-1/2}\beta x} + C_2 e^{h_0^{-1/2}\beta x}. \quad (2.3.9)$$

Esta función satisface la condición (2.3.1) si

$$C_1 = -\frac{A(p_+)}{2h_0^{1/2}\beta}, \quad C_2 = -\frac{A(p_-)}{2h_0^{1/2}\beta}. \quad (2.3.10)$$

La transformada de Fourier de (2.3.9) tiene la forma

$$\tilde{\varphi}(p) = \frac{A(p)}{L(p)} + 2\pi C_1 \delta(p - p_+) + 2\pi C_2 \delta(p - p_-). \quad (2.3.11)$$

Reemplazando (2.3.11) en (2.2.3) obtenemos

$$\begin{aligned} A(p) = & -\frac{\epsilon}{2\pi} \int \frac{(pp' + k^2) \tilde{V}(p - p') A(p')}{L(p')} dp' \\ & - C_1 \epsilon \tilde{V}(p - p_+) (pp_+ + k^2) - C_2 \epsilon \tilde{V}(p - p_-) (pp_- + k^2). \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

En la ecuación (2.3.12) cambiemos el contorno de integración por  $\Gamma$  (ver sección 2.2). Tomando en cuenta (2.3.10), la ecuación (2.3.12) se convierte en

$$A(p) = -\frac{\epsilon}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{(pp' + k^2)\tilde{V}(p-p')A(p')}{L(p')} dp' + \epsilon \frac{f(p)}{2\beta} \quad (2.3.13)$$

$$f(p) = \tilde{V}(p-p_-) A(p_-) \left( \frac{k^2}{h_0^{1/2}} - \frac{ip\beta}{h_0} \right).$$

A esta ecuación apliquemos la técnica aplicada a la ecuación de Schrödinger (ver sección 1.2 del Capítulo 1). Podemos suponer que  $A(p_-) = 1$ . Tenemos entonces que

$$f(p) = \tilde{V}(p-p_-) \left( \frac{k^2}{h_0^{1/2}} - \frac{ip\beta}{h_0} \right) \quad (2.3.14)$$

y por tanto

$$[(1 + \epsilon\hat{T}_\beta)A(p)'] = \frac{\epsilon}{2\beta} f(p). \quad (2.3.15)$$

Siendo  $\hat{T}_\beta$  acotado tenemos que  $\epsilon\hat{T}_\beta$  es pequeño, por tanto podemos reescribir (2.3.15) como

$$A(p) = \frac{\epsilon}{2\beta} [1 + \epsilon\hat{T}_\beta]^{-1} f(p), \quad (2.3.16)$$

y nuevamente en términos de la serie de Neumann

$$A(p) = \frac{\epsilon}{2\beta} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \epsilon^n [\hat{T}_\beta^n f(p)'](p). \quad (2.3.17)$$

Evaluemos la expresión (2.3.17) en  $p = p_-$  y multipliquemos por  $\beta$ , obtenemos de esta manera la ecuación para  $\beta$ :

$$\beta = \frac{\epsilon}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \epsilon^n [\hat{T}_\beta^n f(p')] (p_-). \quad (2.3.18)$$

Definamos la función  $F(\beta, \epsilon)$  como

$$F(\beta, \epsilon) = \beta - \frac{\epsilon}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \epsilon^n [\hat{T}_\beta^n f(p')] (p_-). \quad (2.3.19)$$

Desarrollando la sumatoria en esta última expresión obtenemos

$$F(\beta, \epsilon) = \beta - \frac{\epsilon k^2}{2h_0^{1/2}} \tilde{V}(0) + \frac{\epsilon^2 k^4}{4h_0^{1/2} \pi} \int_{\Gamma} \frac{\tilde{V}(p_- - p') \tilde{V}(p' - p_-)}{h_0 p'^2 + \beta^2} dp' + O(\epsilon^3). \quad (2.3.20)$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} F(0, 0) &= 0, & F_\epsilon(0, 0) &= -\frac{k^2}{2h_0^{1/2}} \tilde{V}(0), & F_\beta(0, 0) &= 1, \\ F_{\beta\epsilon}(0, 0) &= 0, & F_{\epsilon\epsilon}(0, 0) &= \frac{k^4}{4\pi h_0^{3/2}} \int_{\Gamma} \frac{\tilde{V}(-p') \tilde{V}(p')}{p'^2} dp' & F_{\beta\beta}(0, 0) &= 0. \end{aligned}$$

Esto implica que

$$F(\beta, \epsilon) = \beta - \frac{\epsilon k^2}{2h_0^{1/2}} \tilde{V}(0) + \frac{\epsilon^2 k^4}{4\pi h_0^{3/2}} \int_{\Gamma} \frac{\tilde{V}(-p') \tilde{V}(p')}{p'^2} dp' + O(\epsilon^3 + \epsilon^2 \beta + \epsilon \beta^2).$$

De esta manera, tenemos por el teorema de la función implícita que

$$\beta = \frac{\epsilon k^2}{2h_0^{1/2}} \tilde{V}(0) - \frac{\epsilon^2 k^4}{4\pi h_0^{3/2}} \int_{\Gamma} \frac{\tilde{V}(-p') \tilde{V}(p')}{p'^2} dp' + O(\epsilon^3), \quad (2.3.21)$$

y esto concluye la demostración del teorema.

□

# Capítulo 3

## Asintótica de ondas atrapadas para el sistema completo

### 3.1. Introducción

En el presente capítulo y los siguientes, estudiaremos las ondas atrapadas y las resonancias en la formulación completa del problema, es decir, sin acudir a la aproximación de agua de poca profundidad estudiada en el Capítulo 2.

El potencial de velocidades  $\Phi(x, y, z, t)$  satisface el siguiente sistema

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Phi_{tt} + g\Phi_y = 0, & \text{para } y = 0, \\ \Delta\Phi + \Phi_{zz} = 0, & \text{para } -h(x, z) < y < 0, \\ \Phi_y + h_x\Phi_x + h_z\Phi_z = 0, & \text{para } y = -h(x, z). \end{array} \right. \quad (3.1.1)$$

donde  $h(x, z)$  es la profundidad y la ecuación  $y = -h(x, z)$  describe el fondo del líquido,  $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$ . Como en el Capítulo 2, supondremos que  $h(x, z) = h_0 + \epsilon V(x)$ ,  $V(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ , y buscaremos la solución en la forma  $\Phi = \exp(i\omega t - ikz)\Psi(x, y)$ ; para la función  $\Psi$  tenemos el sistema (ver Fig. 3.1 para la geometría del problema):

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Psi_y = \lambda\Psi, & \text{para } y = 0 \\ \Delta\Psi - k^2\Psi = 0, & \text{para } -h(x) < y < 0 \\ \Psi_y + \epsilon V'\Psi_x = 0, & \text{para } y = -h(x), \end{array} \right. \quad (3.1.2)$$

donde  $\lambda = \omega^2/g$ .

En este capítulo vamos a obtener la asintótica del eigenvalor  $\lambda$  bajo la condición  $\int V(x) dx \leq 0$  (sierra). Esta asintótica representa los términos principales del desarrollo de  $\lambda$  en su serie de Taylor con respecto a  $\epsilon$ . Presentamos aquí la construcción de la asintótica porque la derivación de esta es bien sencilla y sigue muy de cerca los pasos de los anteriores capítulos. Veremos que el resultado coincide con el del Capítulo 5 para el caso de la

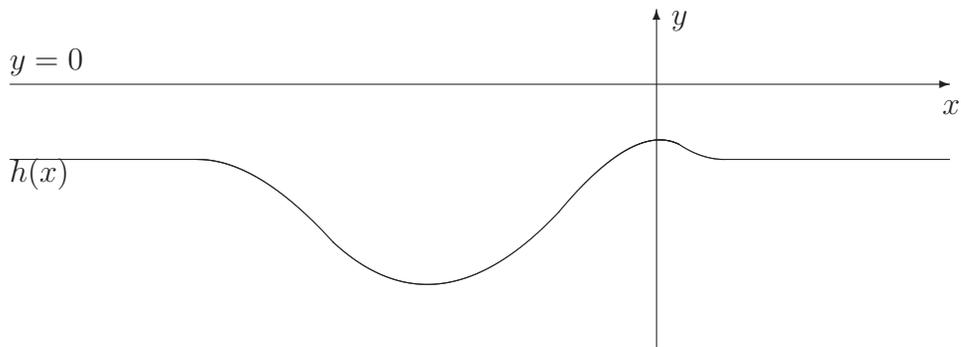


Figura 3.1: Geometría del sistema.

sierra. Notemos que la asintótica *no* puede ser utilizada para los cálculos de resonancias porque términos  $O(\epsilon^N)$  (los términos residuales al construir la asintótica) pueden incluir exponenciales decrecientes. Las consideraciones de este capítulo serán formales ya que en el Capítulo 5 obtendremos la solución exacta con todo rigor.

## 3.2. Asintótica de la onda atrapada

Siguiendo las ideas de [17, 18, 19] consideremos el problema

$$\begin{cases} \Psi = \varphi, & \text{para } y = 0, \\ \Delta\Psi - k^2\Psi = 0, & \text{para } -h(x) < y < 0, \\ \Psi_y + \epsilon V'\Psi_x = 0, & \text{para } y = -h(x), \end{cases} \quad (3.2.1)$$

donde suponemos que  $\varphi$  es una función dada; la solución existe (p. ej., en  $H_1(\Omega)$ ,  $\Omega = \{-h < y < 0, -\infty < x < \infty\}$ , donde  $H_1$  es el espacio de Sobolev estándar, si  $\varphi \in H_1(\mathbb{R})$ ). Tenemos entonces que:

$$\Psi_y|_{y=0} = \hat{R}\varphi, \quad (3.2.2)$$

donde  $\hat{R} : H_1(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$  es un operador lineal. Así, la primera ecuación en (3.1.2) se convierte en

$$\hat{R}\varphi = \lambda\varphi, \quad (3.2.3)$$

la cual es parecida a (2.1.2). Queremos encontrar  $\hat{R}$  con precisión de  $O(\epsilon^2)$ .

Buscaremos la solución  $\Psi$  de (3.2.1) en la forma de una serie de Taylor en  $\epsilon$ :

$$\Psi(x, y) = \Psi_0(x, y) + \epsilon\Psi_1(x, y) + \epsilon^2\Psi_2(x, y) + \dots \quad (3.2.4)$$

Sustituyamos (3.2.4) en (3.2.1) y desarrollemos la condición de fondo en la

serie de Taylor con respecto a  $\epsilon V$ :

$$\begin{aligned}
& \Psi_y(x, -h_0 - \epsilon V) + \epsilon V' \Psi(x, -h_0 - \epsilon V) \\
&= \Psi_y(x, -h_0) - \epsilon V \Psi_{yy}(x, -h_0) + \frac{1}{2} \epsilon^2 V^2 \Psi_{yyy}(x, -h_0) + \dots \\
&+ \epsilon V' \Psi_x(x, -h_0) - \epsilon^2 V' V \Psi_{xy}(x, -h_0) + \dots
\end{aligned} \tag{3.2.5}$$

Consideremos los términos con coeficientes  $\epsilon^0$ ,  $\epsilon^1$ ,  $\epsilon^2$  los cuales nos llevan a considerar los siguientes problemas para las funciones  $\Psi_0$ ,  $\Psi_1$ ,  $\Psi_2$ :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Psi_0 = \varphi(x), & \text{para } y = 0, \\ \Delta \Psi_0 - k^2 \Psi_0 = 0, & \text{para } -h_0 < y < 0, \\ \Psi_{0y} = 0, & \text{para } y = -h_0, \end{array} \right. \tag{3.2.6}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Psi_1 = 0, & \text{para } y = 0, \\ \Delta \Psi_1 - k^2 \Psi_1 = 0, & \text{para } -h_0 < y < 0, \\ \Psi_{1y} - V \Psi_{0yy} + V' \Psi_{0x} = 0, & \text{para } y = -h_0, \end{array} \right. \tag{3.2.7}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Psi_2 = 0, & \text{para } y = 0, \\ \Delta \Psi_2 - k^2 \Psi_2 = 0, & \text{para } -h_0 < y < 0, \\ \Psi_{2y} - V \Psi_{1yy} + \frac{1}{2} V^2 \Psi_{0yyy} \\ + V' \Psi_{1x} - V' V \Psi_{0xy} = 0, & \text{para } y = -h_0. \end{array} \right. \tag{3.2.8}$$

Apliquemos la transformada de Fourier a (3.2.6) con respecto a la variable

$x$ , tenemos que

$$\begin{cases} \tilde{\Psi}_0(p, y) = \tilde{\varphi}(p), & \text{para } y = 0, \\ \tilde{\Psi}_{0yy}(p, y) - (p^2 + k^2)\tilde{\Psi}_0(p, y) = 0, & \text{para } -h_0 < y < 0, \\ \tilde{\Psi}_{0y}(p, y) = 0, & \text{para } y = -h_0. \end{cases} \quad (3.2.9)$$

Llamemos

$$\tau(p) = \sqrt{p^2 + k^2}.$$

Al solucionar el sistema (3.2.9) obtenemos:

$$\tilde{\Psi}_0(p, y) = \tilde{\varphi}(p) \frac{\cosh(\tau(p)(y + h_0))}{\cosh(\tau(p)h_0)}, \quad (3.2.10)$$

que nos proporciona la expresión del término principal de  $\Psi$ .

Calculemos el término de  $O(\epsilon)$ . Aplicamos la transformada de Fourier a (3.2.7) y obtenemos

$$\begin{cases} \tilde{\Psi}_1(p, y) = 0, & \text{para } y = 0, \\ \tilde{\Psi}_{1yy}(p, y) - (p^2 + k^2)\tilde{\Psi}_1(p, y) = 0, & \text{para } -h_0 < y < 0, \\ \tilde{\Psi}_{1y}(p, y) = \tilde{\theta}_1(p), & \text{para } y = -h_0, \end{cases} \quad (3.2.11)$$

donde  $\theta_1(x) = V\Psi_{0yy}(x, -h_0) - V'\Psi_{0x}(x, -h_0)$  y su transformada de Fourier está dada por

$$\tilde{\theta}_1(p) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{\tau^2(p') + pp' - p'^2}{\cosh(h_0\tau(p'))} \tilde{V}(p - p') \tilde{\varphi}(p') dp'.$$

Al solucionar el sistema (3.2.11) obtenemos la expresión para  $\tilde{\Psi}_1(p, y)$ :

$$\tilde{\Psi}_1(p, y) = \frac{\sinh(\tau(p)y)}{2\pi\tau(p) \cosh(\tau(p)h_0)} \int P_1(p, p') \tilde{\varphi}(p') dp', \quad (3.2.12)$$

donde

$$P_1(p, q) = \frac{k^2 + pq}{\cosh(h_0\tau(q))} \tilde{V}(p - q). \quad (3.2.13)$$

Ahora, calculemos el término de  $O(\epsilon^2)$ . Para esto, primero aplicamos la transformada de Fourier a (3.2.8) para obtener

$$\left\{ \begin{array}{ll} \tilde{\Psi}_2(p, y) = 0, & \text{para } y = 0, \\ \tilde{\Psi}_{2yy}(p, y) - (p^2 + k^2)\tilde{\Psi}_2(p, y) = 0, & \text{para } -h_0 < y < 0, \\ \tilde{\Psi}_{2y}(p, y) = \tilde{\theta}_2(p), & \text{para } y = -h_0, \end{array} \right. \quad (3.2.14)$$

donde

$$\begin{aligned} \theta_2(x) = & V\Psi_{1yy}(x, -h_0) - \frac{1}{2}V^2\Psi_{0yyy}(x, -h_0) \\ & - V'\Psi_{1x}(x, -h_0) + V'V\Psi_{0xy}(x, -h_0) \end{aligned}$$

y su transformada de Fourier está dada por

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_2(p) = & \mathcal{F}_{x \rightarrow p} \left[ V\Psi_{1yy}(x, -h_0) - \frac{1}{2}V^2\Psi_{0yyy}(x, -h_0) \right. \\ & \left. - V'\Psi_{1x}(x, -h_0) + V'V\Psi_{0xy}(x, -h_0) \right]. \end{aligned}$$

Como conocemos las expresiones para  $\tilde{\Psi}_0(p, y)$  y  $\tilde{\Psi}_1(p, y)$ , podemos calcular

$$\begin{aligned}\Psi_{1yy} \Big|_{y=-h_0} &= \mathcal{F}_{p \rightarrow x}^{-1} \left[ -\frac{1}{2\pi} \tau(p) \tanh(\tau(p)h_0) \int P_1(p, p') \tilde{\varphi}(p') dp' \right], \\ \Psi_{1x} \Big|_{y=-h_0} &= \mathcal{F}_{p \rightarrow x}^{-1} \left[ -\frac{ip}{2\pi\tau(p)} \tanh(\tau(p)h_0) \int P_1(p, p') \tilde{\varphi}(p') dp' \right], \\ \Psi_{0yyy} \Big|_{y=-h_0} &= \mathcal{F}_{p \rightarrow x}^{-1} \left[ \tau(p) \frac{\sinh(\tau(p)(-h_0 + h_0)) \tilde{\varphi}(p)}{\cosh(\tau(p)h_0)} \right] = 0, \\ \Psi_{0xy} \Big|_{y=-h_0} &= \mathcal{F}_{p \rightarrow x}^{-1} \left[ \frac{ip\tau(p) \sinh(\tau(p)(-h_0 + h_0))}{\cosh(\tau(p)h_0)} \tilde{\varphi}(p) \right] = 0;\end{aligned}$$

de esta manera

$$\begin{aligned}\tilde{\Psi}_2(p, y) &= \frac{\sinh(\tau(p)y)}{(2\pi)^2 \tau(p) \cosh(h_0\tau(p))} \\ &\times \iint \left\{ \left( -\frac{r(p-r)}{\tau(r)} - \tau(r) \right) \tanh(h_0\tau(r)) P_1(r, q) \tilde{V}(p-r) \tilde{\varphi}(q) \right\} dq dr.\end{aligned}\tag{3.2.15}$$

Por lo tanto el operador  $\hat{R}$  en (3.2.3) está dado por

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{x \rightarrow p}[\hat{R}\varphi](p) &= \tau(p) \tanh(h_0\tau(p)) \tilde{\varphi}(p) + \epsilon \frac{1}{2\pi \cosh(h_0\tau(p))} \int P_1(p, q) \tilde{\varphi}(q) dq \\ &+ \epsilon^2 \frac{1}{(2\pi)^2 \cosh(h_0\tau(p))} \iint P_2(p, r) P_1(r, q) \tilde{\varphi}(q) dq dr + O(\epsilon^3),\end{aligned}\tag{3.2.16}$$

donde

$$P_2(p, r) = \tilde{V}(p-r) \tanh(h_0\tau(r)) \left[ -\tau(r) - \frac{r(p-r)}{\tau(r)} \right].\tag{3.2.17}$$

Sustituyendo (3.2.16) en (3.2.3) y agrupando los términos proporcionales a  $\epsilon$  y  $\epsilon^2$  (la perturbación) en la parte derecha, obtenemos

$$L(p)\tilde{\varphi}(p) = \epsilon\hat{M}\tilde{\varphi}, \quad (3.2.18)$$

donde

$$[\hat{M}\tilde{\varphi}](p) = \int M(p, q, \epsilon)\tilde{\varphi}(q) dq,$$

$$M = M_1 + \epsilon M_2 + O(\epsilon^2),$$

$$M_1(p, q) = -\frac{P_1(p, q)}{2\pi \cosh(h_0\tau(p))},$$

$$M_2(p, q) = -\frac{1}{(2\pi)^2 \cosh(\tau(p))} \int P_2(p, r)P_1(r, q) dr,$$

y  $L(p) = \tau(p) \tanh(h_0\tau(p)) - \lambda$ . Cuando la perturbación se anula ( $\epsilon = 0$ ), tenemos la ecuación

$$L(p)\tilde{\varphi}(p) = 0 \quad (3.2.19)$$

que tiene soluciones  $\tilde{\varphi}(p) = \delta(p - l)$  con  $\lambda = \sqrt{l^2 + k^2} \tanh(h_0\sqrt{l^2 + k^2})$  para  $l \in \mathbb{R}$ . Estas soluciones son transformadas de Fourier de ondas planas  $\varphi = \exp(ikx)$ , y por lo tanto el espectro continuo de (3.2.3) coincide con el rayo  $\lambda \geq k \tanh(kh_0)$ .

La perturbación, igual como en capítulos anteriores, da origen a un eigenvalor a la izquierda del espectro continuo. Por tanto, buscaremos  $\lambda$  en la forma

$\lambda = k \tanh(kh_0) - \beta^2$  con  $\beta > 0$  suficientemente pequeño. Desarrollando  $L(p)$  en su serie de Taylor con respecto a  $p$ , tenemos

$$\tau(p) \tanh(h_0\tau(p)) - k \tanh(kh_0) + \beta^2 = l^2 p^2 + O(p^4) + \beta^2, \quad (3.2.20)$$

donde

$$l^2 = \frac{1}{2} (k^{-1} \tanh(kh_0) + h_0 \operatorname{sech}^2(kh_0)). \quad (3.2.21)$$

Vemos que los términos principales de la función  $L(p)$  tienen la misma forma que su análogo en (2.2.3), (2.2.4). De hecho, la función  $L(p)$  tiene dos ceros imaginarios cerca del origen para pequeños valores de  $\beta$ , por tanto:

**Lema 3.2.1.** *Para cuando  $\beta \rightarrow 0$  la función  $L(p)$  tiene dos ceros  $p_{\pm}(\beta) = \pm im(\beta)$ ,  $m(\beta) > 0$  con  $\beta > 0$ , tales que  $p_{\pm} \rightarrow 0$  cuando  $\beta \rightarrow 0$ , donde  $m$  tiene la forma*

$$m(\beta) = \beta/l + O(\beta^3). \quad (3.2.22)$$

*Demostración.* Consideremos la función

$$f(z) = \sqrt{k^2 + z} \tanh(h_0 \sqrt{k^2 + z}) - k \tanh(kh_0).$$

Para cuando  $z \rightarrow 0$  tenemos por (3.2.20) que  $f(z) = l^2 z + O(z^2)$ . Por el teorema de la función inversa, la ecuación  $f(z) = -\beta^2$  tiene precisamente una solución

$$z = -\frac{\beta^2}{l^2} (1 + O(\beta^2)).$$

Recordando que  $p^2 = z$ , tenemos el enunciado.  $\square$

**Definición 3.2.2.** *Definamos a  $\mathcal{H}_a$  como el espacio de funciones analíticas acotadas en la banda  $B_a := \{z \in \mathbb{C}, |\Im z| < a\}$  con  $a$  suficientemente pequeña y con la norma del supremo.*

Ahora buscamos la solución de (3.2.18) en la forma

$$\tilde{\varphi}(p) = \frac{A(p)}{L(p)}, \quad (3.2.23)$$

donde  $A(p) \in \mathcal{H}_a$ . Si sustituimos (3.2.23) en (3.2.18) obtenemos

$$A(p) = \epsilon \int \frac{M(p, q, \epsilon)}{L(q)} A(q) dq. \quad (3.2.24)$$

La función  $L(p)$  posee dos ceros simples en  $p = p_{\pm}$ ; la función  $\cosh(h_0\tau(p))$  no tiene ceros en una vecindad del eje real y por lo tanto  $M(p, q, \epsilon)$  es analítica en una vecindad del eje real. En efecto,  $\cosh(h_0\tau(p))$  tiene ceros en

$$h_0\tau(p) = i \left( \frac{\pi}{2} + \pi n \right), \quad n \in \mathbb{Z},$$

y los ceros más cercanos al eje real están dados por

$$h_0\tau(p) = \pm i \frac{\pi}{2}, \quad p = \pm i \sqrt{k^2 + \pi^2 / (4h_0^2)}.$$

La función  $\tau(p)$  es analítica en la banda  $|\Im p| < k$ . Por lo tanto, podemos escojer la constante  $a$  en la Definición 3.2.2 de tal manera que

$$a < k.$$

Para calcular la integral en (3.2.24) cambiamos el contorno de integración a uno en el plano complejo, de tal manera que las singularidades  $z = p_{\pm}$  estén circunscritas por este (comp. con el procedimiento de los Capítulos 1 y 2; el contorno  $\Gamma$  es el mismo).

Mediante el teorema del residuo de Cauchy calculamos la integral en el lado derecho de (3.2.24) y así obtenemos una expresión para  $A(z)$ ,  $z \in B_a$ , dada por:

$$A(z) = \epsilon \int_{\Gamma} \frac{M(z, \zeta, \epsilon)}{L(\zeta)} A(\zeta) d\zeta + \frac{\epsilon}{m(\beta)} f(z, \epsilon) \quad (3.2.25)$$

donde

$$\begin{aligned} f(z, \epsilon) &= f_1(z) + \epsilon f_2(z) + O(\epsilon^2), \\ f_1(z) &= -\frac{(k^2 + zp_+) \tilde{V}(z - p_+) A(p_+)}{\cosh(h_0\tau(z)) \cosh(h_0\tau(p_+)) \Lambda(p_+)}, \\ f_2(z) &= -\frac{A(p_+)}{2\pi \cosh(h_0\tau(z)) \cosh(h_0\tau(p_+)) \Lambda(p_+)} \\ &\quad \times \int P_2(z, \zeta') (k^2 + \zeta' p_+) \tilde{V}(\zeta' - p_+) d\zeta', \\ \Lambda(p) &= \frac{\tanh(h_0\tau(p))}{\tau(p)} + h_0 \operatorname{sech}^2(h_0\tau(p)), \end{aligned}$$

y donde  $\tilde{V}(\zeta)$  es la continuación analítica de  $\tilde{V}(p)$  al plano complejo. Las eigenfunciones están definidas salvo un factor numérico, por lo tanto podemos

suponer que  $A(p_+) = 1$ , así las funciones  $f_{1,2}$  en (3.2.25) quedan dadas por

$$f_1(z) = -\frac{(k^2 + zp_+)\tilde{V}(z - p_+)}{\cosh(h_0\tau(z))\cosh(h_0\tau(p_+))\Lambda(p_+)}$$

y

$$f_2(z) = -\frac{1}{2\pi\cosh(h_0\tau(z))\cosh(h_0\tau(p_+))\Lambda(p_+)} \\ \times \int P_2(z, \zeta')(k^2 + \zeta'p_+)\tilde{V}(\zeta' - p_+)d\zeta'.$$

**Definición 3.2.3.** *Definamos el operador integral  $\hat{T}_\beta : \mathcal{H}_a \longrightarrow \mathcal{H}_a$  como*

$$[\hat{T}_\beta\varphi(\zeta)](z) = \int_\Gamma \frac{M(z, \zeta, \epsilon)}{L(\zeta)}\varphi(\zeta) d\zeta. \quad (3.2.26)$$

Las propiedades de analiticidad junto con las de acotación del operador  $\hat{T}_\beta$  se pueden demostrar de la misma manera que en el Capítulo 2.

Reescribamos entonces la ecuación (3.2.25) en términos del operador  $\hat{T}_\beta$ :

$$[(1 - \epsilon\hat{T}_\beta)A(\zeta)](z) = \frac{\epsilon}{m(\beta)}f(z, \epsilon), \quad (3.2.27)$$

donde 1 es el operador identidad.

Siendo el operador  $\hat{T}_\beta$  acotado, el operador  $\epsilon\hat{T}_\beta$  es pequeño y podemos nuevamente reescribir la ecuación (3.2.27) como

$$A(z) = \frac{\epsilon}{m(\beta)}[(1 - \epsilon\hat{T}_\beta)]^{-1}f(z, \epsilon), \quad (3.2.28)$$

donde  $(1 - \epsilon \hat{T}_\beta)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n \hat{T}_\beta^n$ ,  $\hat{T}_\beta^0 \equiv 1$ , es la correspondiente serie de Neumann. Podemos reescribir (3.2.28) como:

$$A(z) = \frac{\epsilon}{m(\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n [\hat{T}_\beta^n(f(\zeta, \epsilon))](z). \quad (3.2.29)$$

Anteriormente hemos supuesto que  $A(p_+) = 1$ . Evaluemos (3.2.29) en  $z = p_+$  y multipliquemos por  $m(\beta)$ , obteniendo como resultado la ecuación secular para  $\beta$ :

$$m(\beta) = \epsilon \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n [\hat{T}_\beta^n(f(\zeta, \epsilon))](p_+). \quad (3.2.30)$$

Desarrollemos la sumatoria del lado derecho en (3.2.30), obteniendo

$$m(\beta) = \epsilon [f_1(\zeta)]_{p_+} + \epsilon^2 [f_2(\zeta)]_{p_+} + \epsilon^2 \left[ \{\hat{T}_\beta(f_1(\zeta) + \epsilon f_2(\zeta) + O(\epsilon^2))\} \right]_{p_+} + \dots \quad (3.2.31)$$

Tomando términos hasta de  $O(\epsilon^2)$  tenemos que

$$m(\beta) = \epsilon [f_1(\zeta)]_{p_+} + \epsilon^2 [f_2(\zeta)]_{p_+} + \epsilon^2 \left[ \frac{1}{2\pi \cosh(h_0 \tau(\zeta))} \int_{\Gamma} \frac{P_1(z, \zeta)}{L(\zeta)} f_1(\zeta) d\zeta \right]_{p_+} + O(\epsilon^3). \quad (3.2.32)$$

Usando (3.2.22), en el caso cuando  $\tilde{V}(0) < 0$ , para el término principal tenemos

$$\begin{aligned} \beta &= -\frac{\epsilon k^3 \tilde{V}(0) l}{\cosh(kh_0)(\sinh(kh_0) + kh_0 \operatorname{sech}(kh_0))} + O(\epsilon^2) \\ &= -\frac{\epsilon k^2 \tilde{V}(0)}{2l \cosh^2(kh_0)} + O(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (3.2.33)$$

En el caso cuando  $\tilde{V}(0) = 0$ , tenemos que evaluar la corrección  $O(\epsilon^2)$  salvo términos del orden de  $\epsilon^3$ , tomando en cuenta que  $\beta = O(\epsilon^2)$ . El término de  $O(\epsilon^2)$  tiene la forma

$$\epsilon^2 [f_2(\zeta)]_{p_+} + \epsilon^2 \left[ \hat{T}_\beta(f_1(\zeta)) \right]_{p_+}.$$

Es fácil ver que

$$\epsilon^2 [f_2(\zeta)]_{p_+} = \epsilon^2 \frac{k^5}{2\pi \cosh(h_0 k) \varrho(0)} \int |\tilde{V}(r)|^2 \frac{\tanh(h_0 \tau(r))}{\tau(r)} dr + O(\epsilon^3)$$

y que

$$\begin{aligned} \epsilon^2 \left[ \hat{T}_\beta(f_1(\zeta)) \right]_{p_+} &= \epsilon^2 \frac{k^5}{2\pi \cosh(h_0 k) \varrho(0)} \\ &\times \int_{\Gamma} \frac{\tilde{V}(-r) \tilde{V}(r)}{\cosh^2(h_0 \tau(r)) (\tau(r) \tanh(h_0 \tau(r)) - k \tanh(h_0 k))} dr + O(\epsilon^3). \end{aligned}$$

En este último término podemos cambiar el contorno de integración por el eje real porque el denominador y el numerador tienen un cero del orden 2 en el origen. Sumando las dos últimas fórmulas y usando (3.2.22), tenemos en el caso cuando  $\tilde{V}(0) = 0$  que

$$\beta = \epsilon^2 \frac{k^4}{4\pi l \cosh(h_0 k)} \int \frac{1 - \frac{k}{\tau(r)} \tanh(h_0 \tau(r)) \tanh(h_0 k)}{\tau(r) \tanh(h_0 \tau(r)) - k \tanh(h_0 k)} |\tilde{V}(r)|^2 dr + O(\epsilon^3). \quad (3.2.34)$$

El integrando en la última integral es no negativo porque las funciones  $\tau(r)$  y  $\tanh(h_0 \tau(r))$  son crecientes y la última es menor que 1. Por lo tanto,  $\beta > 0$  para  $\epsilon$  suficientemente pequeño.

**Observación 3.2.4.** *Para pequeños valores de  $h_0$  tenemos que*

$$l \simeq h_0^{1/2}, \quad \cosh(kh_0) \simeq 1,$$

*por lo tanto las fórmulas (3.2.33) y (3.2.34) pasan en las fórmulas (2.2.1) y (2.2.2) del Capítulo 2 que dan la frecuencia de la onda atrapada en la aproximación de agua de poca profundidad.*

# Capítulo 4

## Reducción a ecuaciones integrales

### 4.1. Introducción

En este capítulo vamos a reducir el sistema completo de ecuaciones de ondas de agua (3.1.2),

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Psi_y = \lambda\Psi, & \text{para } y = 0, \\ \Delta\Psi - k^2\Psi = 0, & \text{para } -h(x) < y < 0, \\ \Psi_y + h'(x)\Psi_x = 0, & \text{para } y = -h(x), \end{array} \right. \quad (4.1.1)$$

donde  $\Psi = \Psi(x, y)$  es el potencial y la ecuación  $y = h(x)$  describe el fondo del líquido, a dos ecuaciones integrales para las funciones

$$\varphi(x) = \Psi(x, 0), \quad \theta(x) = \Psi(x, -h(x)).$$

Esta reducción se hace mediante técnicas estándares de la teoría de potencial (ver, p. ej., [33, 34, 35]) pero la presentamos aquí con todos los detalles porque en las referencias usuales esta reducción se hace para la ecuación de Laplace, cuya solución fundamental  $(\frac{1}{2\pi} \ln r)$  es más sencilla que la solución fundamental de la ecuación de Helmholtz que nos interesa. Notemos que esta reducción es *exacta*, es decir, no estamos suponiendo que la variación de  $h$  es pequeña. En el Capítulo 5 construiremos las soluciones de las ecuaciones obtenidas mediante las técnicas desarrolladas en los capítulos anteriores bajo la suposición de que  $h = h_0 + \epsilon V(x)$ . Estas soluciones van a satisfacer todas las condiciones de suavidad requeridas en la reducción.

## 4.2. Ecuaciones integrales

Sea  $\Omega = \{-h(x) < y < 0, -\infty < x < \infty\}$  y sea  $B_\rho(\xi, \eta)$  la bola del radio  $\rho$  y centro en  $(\xi, \eta) \in \Omega$ . Dado que  $G(r) = -\frac{1}{2\pi} K_0(kr)$ , donde

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}, \quad (4.2.1)$$

y  $K_0$  es la función de Macdonald (ver Apéndice C), es la solución fundamental para el operador  $\Delta - k^2$ , se cumple que

$$\Delta G - k^2 G = 0 \quad (4.2.2)$$

en  $\Omega \setminus B_\rho$ , y por tanto, se cumple que:

$$\int_{\Omega \setminus B_\rho} \{G[\Delta \Psi - k^2 \Psi] - \Psi[\Delta G - k^2 G]\} dx dy = 0.$$

Usando la fórmula

$$\operatorname{div}(\psi \nabla \phi) = \psi \Delta \phi + \nabla \psi \cdot \nabla \phi,$$

la anterior ecuación puede escribirse como

$$\int_{\Omega \setminus B_\rho} \{\operatorname{div}(G \nabla \Psi) - \operatorname{div}(\Psi \nabla G)\} dx dy = 0.$$

A esta última integral le aplicamos el teorema de la divergencia y hacemos tender  $\rho$  a cero. Obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Gamma_F} (G \nabla \Psi) \cdot \vec{n}_F ds - \int_{\Gamma_F} (\Psi \nabla G) \cdot \vec{n}_F ds \\ &+ \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\partial B_\rho} (G \nabla \Psi) \cdot \vec{n}_\rho ds - \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\partial B_\rho} (\Psi \nabla G) \cdot \vec{n}_\rho ds \\ &+ \int_{\Gamma_B} (G \nabla \Psi) \cdot \vec{n}_B ds - \int_{\Gamma_B} (\Psi \nabla G) \cdot \vec{n}_B ds, \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

donde  $\Gamma_F = \{y = 0, -\infty < x < \infty\}$ ,  $\Gamma_B = \{y = -h(x), -\infty < x < \infty\}$ ,

$\vec{n}_{B,F}$  son normales exteriores a  $\Gamma_{B,F}$ ,  $\vec{n}_\rho$  es la normal interior a  $\partial B_\rho$ .

Para reescribir la ecuación (4.2.3) tenemos en cuenta el siguiente lema

**Lema 4.2.1.** *Sea  $\Psi \in C^1(\bar{\Omega})$ , se cumplen las siguientes identidades:*

$$(a) \int_{\Gamma_F} (G(r)\nabla\Psi) \cdot \vec{n}_F ds = -\frac{\lambda}{2\pi} \int K_0(k\sqrt{(x-\xi)^2 + \eta^2})\varphi(x)dx,$$

$$(b) \int_{\Gamma_F} (\Psi\nabla G(r)) \cdot \vec{n}_F ds = \frac{k\eta}{2\pi} \int \frac{K'_0(k\sqrt{(x-\xi)^2 + \eta^2})}{\sqrt{(x-\xi)^2 + \eta^2}} \varphi(x)dx,$$

$$(c) \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\partial B_\rho} (G(r)\nabla\Psi) \cdot \vec{n}_\rho ds = 0,$$

$$(d) -\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\partial B_\rho} (\Psi\nabla G(r)) \cdot \vec{n}_\rho ds = \Psi(\xi, \eta),$$

$$(e) \int_{\Gamma_B} (G(r)\nabla\Psi) \cdot \vec{n}_B ds = 0,$$

$$(f) \int_{\Gamma_B} (\Psi\nabla G(r)) \cdot \vec{n}_B ds = \frac{k}{2\pi} \int \frac{[h'(x)(x-\xi) - h(x) - \eta]K'_0(k\sqrt{(x-\xi)^2 + (h(x)+\eta)^2})}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (h(x)+\eta)^2}} \theta(x)dx.$$

*Demostración.* Para demostrar el item (a), tenemos en cuenta que  $\vec{n}_F =$

$(0, 1)$  y por tanto

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_F} \left(-\frac{1}{2\pi} K_0(kr)\nabla\Psi\right) \cdot \vec{n}_F ds &= \int \left(-\frac{1}{2\pi} K_0(kr)\right) \Big|_{y=0} \nabla\Psi \cdot (0, 1) dx \\ &= -\frac{\lambda}{2\pi} \int K_0(k\sqrt{(x-\xi)^2 + \eta^2})\varphi(x)dx, \end{aligned}$$

lo que demuestra (a). Para demostrar (b) tenemos en cuenta que  $\vec{n}_F = (0, 1)$

y

$$\nabla\left(-\frac{1}{2\pi}K_0(kr)\right) = -\frac{k}{2\pi}K'_0(kr)\left(\frac{x-\xi}{r}, \frac{y-\eta}{r}\right).$$

Luego

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_F} \Psi \nabla(G(r)) \cdot \vec{n}_F ds &= \int \left( -\frac{k}{2\pi}K'_0(kr)\frac{y-\eta}{r} \right) \Big|_{y=0} \Psi(x, 0) dx \\ &= \frac{k\eta}{2\pi} \int \frac{K'_0(k\sqrt{(x-\xi)^2 + \eta^2})}{\sqrt{(x-\xi)^2 + \eta^2}} \varphi(x) dx, \end{aligned}$$

donde  $r$  está definida en (4.2.1). Así obtenemos (b). Para demostrar (c)

tomamos  $r = \rho$  y usando el hecho que  $K_0(k\rho) = -\ln(k\rho) + \mathfrak{K}(k\rho)$ , donde

$\mathfrak{K}(k\rho) \in C[0, \infty)$  y  $|\mathfrak{K}(k\rho)| < \text{Cte}$  cuando  $\rho \rightarrow 0$ , tenemos que

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \left| \int_{\partial B_\rho} \left(-\frac{1}{2\pi}K_0(kr)\nabla\Psi\right) \cdot \vec{n}_\rho ds \right| \leq \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} |\ln(k\rho) - \mathfrak{K}(k\rho)| 2\pi\rho \sup_{\partial B_\rho} \|\nabla\Psi\| = 0,$$

lo que muestra (c). Ahora demostremos (d). Dado que  $\vec{n}_\rho = -(x-\xi, y-\eta)/\rho$ ,

tenemos

$$\Psi \nabla(G(r)) \cdot \vec{n}_\rho = \Psi(x, y) \frac{k}{2\pi} K'_0(kr).$$

Parametricemos  $\partial B_\rho$  así:

$$\partial B_\rho = \{(x, y) = \alpha(t) = (\rho \cos t + \xi, \rho \sin t + \eta), 0 \leq t < 2\pi\}.$$

Puesto que  $kK'_0(k\rho) = \frac{-1}{\rho} + \mathfrak{K}_1(k\rho)$  (ver Apéndice C), donde  $\mathfrak{K}_1(k\rho)$  es continua y  $\mathfrak{K}_1(k\rho) \rightarrow 0$  cuando  $\rho \rightarrow 0$ , tenemos

$$\begin{aligned} \Psi \nabla(G(r)) \cdot \vec{n}_\rho &= \Psi(\rho \cos t + \xi, \rho \sin t + \eta) \cdot \frac{k}{2\pi} K'_0(k\rho) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{-1}{\rho} + \mathfrak{K}_1(k\rho) \right) \Psi(\rho \cos t + \xi, \rho \sin t + \eta). \end{aligned}$$

Dado que  $|\alpha'(s)| = \rho$  y  $ds = \rho dt$ , tenemos

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Psi(\xi, \eta) dt = \Psi(\xi, \eta)$$

y

$$- \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathfrak{K}_1(k\rho) \Psi(\rho \cos t + \xi, \rho \sin t + \eta) \rho dt = 0,$$

en consecuencia

$$\begin{aligned} & - \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\partial B_\rho} (\Psi \nabla(G(r))) \cdot \vec{n}_\rho ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Psi(\xi, \eta) dt - \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathfrak{K}_1(k\rho) \Psi(\rho \cos t + \xi, \rho \sin t + \eta) \rho dt \\ &= \Psi(\xi, \eta), \end{aligned}$$

lo que demuestra el ítem (d). (e) es inmediata de la condición de impermeabilidad en el problema (ver la condición para  $y = -h$  en el problema (4.1.1)) puesto que  $\nabla \Psi \cdot \vec{n}_B = (\Psi_y + h' \Psi_x)(1 + h'^2)^{-1/2} = 0$ . Para demostrar (f)

tenemos en cuenta (4.2.1) y

$$\vec{n}_B = \frac{-(h'(x), 1)}{\sqrt{1 + h'(x)^2}}, \quad ds = \sqrt{1 + h'(x)^2} dx,$$

concluimos que

$$\begin{aligned} \nabla(G(r)) \cdot \vec{n}_B &= \left( -\frac{1}{2\pi} \frac{d}{dr} K_0(kr) \left( \frac{x - \xi}{r}, \frac{x - \xi}{r} \right) \right) \cdot \left( \frac{-(h'(x), 1)}{\sqrt{1 + h'(x)^2}} \right) \\ &= \frac{k}{2\pi r} K_0'(kr) \frac{h'(x)(x - \xi) + y - \eta}{\sqrt{1 + h'(x)^2}}. \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} &\int_{\Gamma_B} (\Psi \nabla(-\frac{1}{2\pi} K_0(kr))) \cdot \vec{n}_B ds \\ &= \int \left( \frac{k}{2\pi r} K_0'(kr) \frac{h'(x)(x - \xi) + y - \eta}{\sqrt{1 + h'(x)^2}} \right) \Big|_{y=-h(x)} \Psi(x, -h(x)) dx \\ &= \frac{k}{2\pi} \int \frac{K_0'(k\sqrt{(x - \xi)^2 + (h(x) + \eta)^2})}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (h(x) + \eta)^2}} [h'(x)(x - \xi) - h(x) - \eta] \theta(x) dx. \end{aligned}$$

Así queda demostrado (f) y en consecuencia el lema.  $\square$

Del Lema 4.2.1 y tomando el límite cuando  $\rho \rightarrow 0$  en (4.2.3) obtenemos

$$\begin{aligned} \Psi(\xi, \eta) &= \frac{\lambda}{2\pi} \int K_0(k\sqrt{(x - \xi)^2 + \eta^2}) \varphi(x) dx \\ &\quad + \frac{k\eta}{2\pi} \int \frac{K_0'(k\sqrt{(x - \xi)^2 + \eta^2})}{\sqrt{(x - \xi)^2 + \eta^2}} \varphi(x) dx \\ &\quad + \frac{k}{2\pi} \int \frac{K_0'(k\sqrt{(x - \xi)^2 + (h(x) + \eta)^2})}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (h(x) + \eta)^2}} \\ &\quad \times [h'(x)(x - \xi) - h(x) - \eta] \theta(x) dx, \quad (\xi, \eta) \in \Omega, \quad (4.2.4) \end{aligned}$$

**Lema 4.2.2.** Tomando los límites cuando  $\eta \rightarrow 0$  en cada uno de los términos de la ecuación (4.2.4) obtenemos la siguiente ecuación integral

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) &= \frac{\lambda}{2\pi} \int K_0(k|x-\xi|)\varphi(x)dx + \frac{1}{2}\varphi(\xi) \\ &+ \frac{k}{2\pi} \int \frac{K'_0(k\sqrt{(x-\xi)^2+h(x)^2})}{\sqrt{(x-\xi)^2+h(x)^2}} [h'(x)(x-\xi) - h(x)]\theta(x)dx. \end{aligned}$$

*Demostración.* Basta con demostrar en (4.2.4) que

$$\lim_{\eta \rightarrow 0^-} \frac{k\eta}{2\pi} \int \frac{K'_0(k\sqrt{(x-\xi)^2+\eta^2})}{\sqrt{(x-\xi)^2+\eta^2}} \varphi(x)dx = \frac{1}{2}\varphi(\xi). \quad (4.2.5)$$

Denotemos

$$H(x-\xi, \eta) = \frac{K'_0(k\sqrt{(x-\xi)^2+\eta^2})}{\sqrt{(x-\xi)^2+\eta^2}}$$

y dividamos el intervalo de integración en las partes  $(-\infty, \xi-\delta)$ ,  $(\xi-\delta, \xi+\delta)$

y  $(\xi+\delta, \infty)$ , donde  $\delta > 0$  es suficientemente pequeño. Tenemos

$$\left| \int_{-\infty}^{\xi-\delta} H(x-\xi, \eta)\varphi(x) dx \right| \leq \text{Cte}, \quad \left| \int_{\xi+\delta}^{\infty} H(x-\xi, \eta)\varphi(x) dx \right| \leq \text{Cte}$$

si  $|\varphi| \leq \text{Cte}$ . Consideremos

$$\begin{aligned} \int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} H(x-\xi, \eta)\varphi(x) dx &= \varphi(\xi) \int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} H(x-\xi, \eta) dx \\ &+ \int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} H(x-\xi, \eta)(\varphi(x) - \varphi(\xi)) dx. \end{aligned}$$

Usemos la asintótica

$$\frac{K'_0(z)}{z} \sim -\frac{1}{z^2}$$

(ver [30], pág. 376, o Apéndice C). Tenemos

$$-\eta \int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} \frac{1}{(x-\xi)^2 + \eta^2} dx \longrightarrow \pi \quad \text{cuando } \eta \rightarrow 0^-$$

y

$$\eta \int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} |H(x-\xi, \eta)| |\varphi(x) - \varphi(\xi)| dx \leq \text{Cte} \sup_{\xi-\delta < x < \xi+\delta} |\varphi(x) - \varphi(\xi)|.$$

Tomando en cuenta el hecho de que

$$\sup_{\xi-\delta < x < \xi+\delta} |\varphi(x) - \varphi(\xi)| \rightarrow 0$$

cuando  $\delta \rightarrow 0$ , tenemos lo deseado.  $\square$

**Lema 4.2.3.** *Tomando los límites cuando  $\eta \rightarrow -h(\xi)$  en cada uno de los términos de la ecuación (4.2.4) obtenemos la siguiente ecuación integral*

$$\begin{aligned} \theta(\xi) &= \frac{\lambda}{2\pi} \int K_0(k\sqrt{(x-\xi)^2 + h^2(\xi)}) \varphi(x) dx \\ &\quad - \frac{kh(\xi)}{2\pi} \int \frac{K'_0(k\sqrt{(x-\xi)^2 + h^2(\xi)})}{\sqrt{(x-\xi)^2 + h^2(\xi)}} \varphi(x) dx + \frac{1}{2} \theta(\xi) \\ &\quad + \frac{k}{2\pi} \int \frac{K'_0(k\sqrt{(x-\xi)^2 + (h(x) - h(\xi))^2})}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (h(x) - h(\xi))^2}} \\ &\quad \times [h'(x)(x-\xi) - (h(x) - h(\xi))] \theta(x) dx. \end{aligned}$$

*Demostración.* En los dos primeros términos el límite es inmediato por lo

que es suficiente demostrar que

$$\begin{aligned} & \lim_{\eta \rightarrow -h(\xi)} \frac{k}{2\pi} \int \frac{K'_0(k\sqrt{(x-\xi)^2 + (h(x) + \eta)^2})}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (h(x) + \eta)^2}} [h'(x)(x-\xi) - h(x) - \eta] \theta(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \theta(\xi) + \frac{k}{2\pi} \int \frac{K'_0(k\sqrt{(x-\xi)^2 + (h(x) - h(\xi))^2})}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (h(x) - h(\xi))^2}} \\ & \quad \times [h'(x)(x-\xi) - (h(x) - h(\xi))] \theta(x) dx. \end{aligned}$$

Pero la demostración de esto es repetición literal de la demostración del Lema

4.2.2. □

De los Lemas 4.2.2 y 4.2.3 tenemos que, tomando los límites cuando  $\eta \rightarrow 0$  y cuando  $\eta \rightarrow -h(\xi)$  en cada uno de los términos de la ecuación (4.2.4), obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones integrales

$$\begin{aligned} \pi\varphi(\xi) &= \lambda \int K_0(k|x-\xi|)\varphi(x)dx \\ &+ k \int \frac{K'_0(k\sqrt{(x-\xi)^2 + h(x)^2})}{\sqrt{(x-\xi)^2 + h^2(x)}} [h'(x)(x-\xi) - h(x)]\theta(x)dx \end{aligned} \tag{4.2.6}$$

$$\begin{aligned}
\pi\theta(\xi) &= \lambda \int K_0(k\sqrt{(x-\xi)^2 + h^2(\xi)})\varphi(x)dx \\
&\quad - kh(\xi) \int \frac{K'_0(k\sqrt{(x-\xi)^2 + h(\xi)^2})}{\sqrt{(x-\xi)^2 + h(\xi)^2}}\varphi(x)dx \\
&\quad + k \int \frac{K'_0(k\sqrt{(x-\xi)^2 + (h(x) - h(\xi))^2})}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (h(x) - h(\xi))^2}} \\
&\quad \times [h'(x)(x-\xi) - (h(x) - h(\xi))]\theta(x)dx. \tag{4.2.7}
\end{aligned}$$

### 4.3. Transformada de Fourier

Pasemos en (4.2.6) y (4.2.7) a las transformadas de Fourier de las funciones  $\varphi$  y  $\theta$  lo que nos conducirá a ecuaciones que resultan mas cómodas de trabajar. Para lograrlo, necesitaremos el siguiente lema:

**Lema 4.3.1.** *Tenemos las siguientes transformadas de Fourier de  $\xi \rightarrow p$ :*

i)

$$\mathcal{F}_{\xi \rightarrow p}[K_0(k|\xi|)](p) = \frac{\pi}{\sqrt{k^2 + p^2}},$$

ii)

$$\mathcal{F}_{\xi \rightarrow p}\left[\frac{K_1(k\sqrt{\xi^2 + h_0^2})}{\sqrt{\xi^2 + h_0^2}}\right](p) = \frac{\pi}{kh_0}e^{-h_0\sqrt{k^2 + p^2}},$$

iii)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\xi \rightarrow p} \left[ k \int \frac{K_0'(k\sqrt{(x-\xi)^2 + h^2(x)})}{\sqrt{(x-\xi)^2 + h^2(x)}} h'(x)(x-\xi)\theta(x) dx \right] (p) \\ = \frac{i\pi p}{\sqrt{k^2 + p^2}} \int e^{-ipx - h(x)\sqrt{k^2 + p^2}} h'(x)\theta(x) dx, \end{aligned}$$

iv)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\xi \rightarrow p} \left[ k \int \frac{K_1(k\sqrt{(x-\xi)^2 + h^2(x)})}{\sqrt{(x-\xi)^2 + h^2(x)}} h(x)\theta(x) dx \right] (p) \\ = \pi \int e^{-ipx - h(x)\sqrt{k^2 + p^2}} \theta(x) dx. \end{aligned}$$

*Demostración.* Para *i*) tomemos en cuenta la fórmula de Mehler (ver [30], p.

376):

$$K_0(k|\xi|) = \int_0^{\infty} \frac{\cos(x|\xi|)}{\sqrt{k^2 + x^2}} dx.$$

Dado que

$$\mathcal{F}_{x \rightarrow |\xi|} \left[ \frac{1}{\sqrt{k^2 + x^2}} \right] (\xi) = \int \frac{e^{-i|\xi|x}}{\sqrt{k^2 + x^2}} dx = 2 \int_0^{\infty} \frac{\cos(x|\xi|)}{\sqrt{k^2 + x^2}} dx = 2K_0(k|\xi|),$$

tomando de nuevo la transformada de Fourier  $\xi \rightarrow x$ , tenemos

$$\frac{2\pi}{\sqrt{(-x)^2 + k^2}} = \mathcal{F}_{\xi \rightarrow x} [\mathcal{F}_{x \rightarrow |\xi|} [\frac{1}{\sqrt{x^2 + k^2}}]] = 2\mathcal{F}_{\xi \rightarrow x} [K_0(k|\xi|)].$$

Así queda demostrado *i*). Demostremos ahora *ii*). En efecto,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\xi \rightarrow p} \left[ \frac{K_1(k\sqrt{\xi^2 + h_0^2})}{\sqrt{\xi^2 + h_0^2}} \right] (p) &= \int \frac{e^{-ip\xi} K_1(k\sqrt{\xi^2 + h_0^2})}{\sqrt{\xi^2 + h_0^2}} d\xi \\ &= \int \frac{(\cos(p\xi) - i \sin(p\xi)) K_1(k\sqrt{\xi^2 + h_0^2})}{\sqrt{\xi^2 + h_0^2}} d\xi \\ &= 2 \int_0^{\infty} \frac{\cos(p\xi) K_1(k\sqrt{\xi^2 + h_0^2})}{\sqrt{\xi^2 + h_0^2}} d\xi. \end{aligned}$$

Usando la fórmula  $J_{-1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \cos x$  (ver [31], pág. 54), tenemos que

$$\cos(\xi p) = \frac{J_{-1/2}(p\xi) \sqrt{\pi p \xi}}{\sqrt{2}}.$$

Entonces,

$$\mathcal{F}_{\xi \rightarrow p} \left[ \frac{K_1(k\sqrt{\xi^2 + h_0^2})}{\sqrt{\xi^2 + h_0^2}} \right] (p) = \sqrt{2\pi p} \int_0^{\infty} \frac{J_{-1/2}(p\xi) K_1(k\sqrt{\xi^2 + h_0^2}) \xi^{1/2}}{\sqrt{\xi^2 + h_0^2}} d\xi.$$

Ahora usamos la siguiente fórmula (ver [31], pág. 416):

$$\int_0^{\infty} \frac{J_{\mu}(bt) K_{\nu}(a\sqrt{t^2 + z^2}) t^{\mu+1} dt}{(t^2 + z^2)^{\frac{1}{2}\nu}} = \frac{b^{\mu}}{a^{\nu}} \left( \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{z} \right)^{\nu - \mu - 1} K_{\nu - \mu - 1}(z\sqrt{a^2 + b^2}).$$

Por tanto, tomando  $\mu = -1/2$ ,  $\nu = 1$ ,  $t = \xi$ ,  $z = h_0$ ,  $b = p$  y  $a = k$  tenemos

que

$$\mathcal{F}_{\xi \rightarrow p} \left[ \frac{K_1(k\sqrt{\xi^2 + h_0^2})}{\sqrt{\xi^2 + h_0^2}} \right] (p) = \frac{\sqrt{2\pi}}{k} \left( \frac{\sqrt{k^2 + p^2}}{h_0} \right)^{1/2} K_{1/2}(h_0\sqrt{k^2 + p^2}).$$

De ([31], pág. 80), sabemos que  $K_{1/2}(z) = \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{1/2} e^{-z}$ . Así obtenemos *ii*).

Para demostrar *iii*), usamos *ii*) y el hecho de que  $K_0'(x) = -K_1(x)$  (ver [30]),

pág 376). Obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{\xi \rightarrow p} \left[ \int \frac{kK_0'(k\sqrt{(x-\xi)^2+h^2(x)})}{\sqrt{(x-\xi)^2+h^2(x)}} h'(x)(x-\xi)\theta(x) dx \right] (p) \\
&= k \int \mathcal{F}_{\xi \rightarrow p} \left[ \frac{(\xi-x)K_1(k\sqrt{(\xi-x)^2+h^2(x)})}{\sqrt{(x-\xi)^2+h^2(x)}} \right] h'(x)\theta(x) dx \\
&= k \int e^{-ipx} \mathcal{F}_{\xi \rightarrow p} \left[ \frac{\xi K_1(k\sqrt{\xi^2+h^2(x)})}{\sqrt{\xi^2+h^2(x)}} \right] h'(x)\theta(x) dx \\
&= k \int e^{-ipx} \left( i \frac{d}{dp} \mathcal{F}_{\xi \rightarrow p} \left[ \frac{K_1(k\sqrt{\xi^2+h^2(x)})}{\sqrt{\xi^2+h^2(x)}} \right] \right) h'(x)\theta(x) dx \\
&= -\frac{i\pi p}{\sqrt{k^2+p^2}} \int e^{-ipx-h(x)\sqrt{k^2+p^2}} h'(x)\theta(x) dx.
\end{aligned}$$

Así se logra *iii*). Para demostrar *iv*) procedemos como sigue:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{\xi \rightarrow p} \left[ \int \frac{kK_1(k\sqrt{(x-\xi)^2+h^2(x)})}{\sqrt{(x-\xi)^2+h^2(x)}} h(x)\theta(x) dx \right] (p) \\
&= k \int \mathcal{F}_{\xi \rightarrow p} \left[ \frac{K_1(k\sqrt{(x-\xi)^2+h^2(x)})}{\sqrt{(x-\xi)^2+h^2(x)}} \right] h(x)\theta(x) dx \\
&= k \int e^{-ipx} \mathcal{F}_{\xi \rightarrow p} \left[ \frac{K_1(k\sqrt{\xi^2+h^2(x)})}{\sqrt{\xi^2+h^2(x)}} \right] h(x)\theta(x) dx \\
&= \pi \int e^{-ipx-h(x)\sqrt{k^2+p^2}} \theta(x) dx,
\end{aligned}$$

quedando demostrado *iv*). □

Usando los resultados del Lema 4.3.1 y tomando transformada de Fourier en las ecuaciones (4.2.6), (4.2.7) obtenemos el nuevo sistema

$$\tilde{\varphi}(p) = \frac{\lambda}{\tau(p)} \tilde{\varphi}(p) + \int e^{-ipx-h(x)\tau(p)} \left( 1 - \frac{iph'(x)}{\tau(p)} \right) \theta(x) dx, \quad (4.3.1)$$

$$\begin{aligned} \theta(\xi) &= \frac{1}{2\pi} \int e^{ip\xi - h(\xi)\tau(p)} \left( \frac{\lambda}{\tau(p)} + 1 \right) \tilde{\varphi}(p) dp \\ &+ \frac{k}{\pi} \int \frac{K'_0(k\varrho(x, \xi))}{\varrho(x, \xi)} [h'(x)(x - \xi) - (h(x) - h(\xi))] \theta(x) dx, \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

donde

$$\begin{aligned} \tau(p) &:= \sqrt{k^2 + p^2}, \\ \varrho(x, \xi) &:= \sqrt{(x - \xi)^2 + (h(x) - h(\xi))^2}. \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

Reescribimos el sistema (4.3.1)-(4.3.2) como sigue:

$$\left(1 - \frac{\lambda}{\tau(p)}\right) \tilde{\varphi}(p) = (\hat{M}_1 \theta)(p), \quad (4.3.4)$$

$$(\theta - \hat{M}_3 \theta)(\xi) = (\hat{M}_2 \tilde{\varphi})(\xi), \quad (4.3.5)$$

donde

$$\begin{aligned} (\hat{M}_1 \theta)(p) &= \int M_1(p, x) \theta(x) dx, \\ (\hat{M}_2 \tilde{\varphi})(\xi) &= \int M_2(p, \xi) \tilde{\varphi}(p) dp, \\ (\hat{M}_3 \theta)(\xi) &= \int M_3(x, \xi) \theta(x) dx, \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

con

$$\begin{aligned} M_1(p, x) &= e^{-ipx - h(x)\tau(p)} \left(1 - \frac{iph'(x)}{\tau(p)}\right), \\ M_2(p, \xi) &= \frac{1}{2\pi} e^{ip\xi - h(\xi)\tau(p)} \left(\frac{\lambda}{\tau(p)} + 1\right), \\ M_3(x, \xi) &= \frac{kK'_0(k\varrho(x, \xi))}{\pi\varrho(x, \xi)} [h'(x)(x - \xi) - (h(x) - h(\xi))], \end{aligned}$$

donde  $\tau(p)$  y  $\varrho(x, \xi)$  están definidas en (4.3.3).

Expresemos ahora la función  $\theta(x)$  en términos de su transformada de Fourier,  $\theta(x) = \mathcal{F}_{p \rightarrow x}^{-1} \tilde{\theta}(p)$ , y apliquemos la transformada de Fourier a (4.3.5).

Obtenemos

$$\left(1 - \frac{\lambda}{\tau(p)}\right) \tilde{\varphi}(p) = \hat{N}_1 \tilde{\theta}(p) \quad (4.3.7)$$

$$(1 - \hat{N}_3) \tilde{\theta}(p) = \hat{N}_2 \tilde{\varphi}(p), \quad (4.3.8)$$

donde

$$\hat{N}_1 = \hat{M}_1 \mathcal{F}_{p \rightarrow x}^{-1} \quad (4.3.9)$$

$$\hat{N}_2 = \mathcal{F}_{\xi \rightarrow p} \hat{M}_2 \quad (4.3.10)$$

$$\hat{N}_3 = \mathcal{F}_{\xi \rightarrow p} \hat{M}_3 \mathcal{F}_{p \rightarrow x}^{-1}. \quad (4.3.11)$$

Las ecuaciones (4.3.7) y (4.3.8) constituyen el resultado principal de este capítulo. Obviamente, una solución de (4.3.7), (4.3.8) por medio de (4.2.4) es una solución de (4.1.1). En el siguiente capítulo construiremos soluciones de (4.3.7) y (4.3.8) que describen ondas atrapadas y resonancias cuando el fondo es constante con una perturbación, igual, como en el Capítulo 3. La diferencia consistirá en que las soluciones obtenidas serán *exactas*, igual como las ecuaciones (4.3.7) y (4.3.8) son *exactas* y no aproximadas, como la ecuación (3.2.18) en el capítulo anterior.

# Capítulo 5

## Soluciones exactas para el sistema completo

### 5.1. Introducción

En este capítulo aplicaremos la técnica de los Capítulos 1–3 al sistema (4.3.7), (4.3.8) en el caso cuando  $h(x) = h_0 + \epsilon V(x)$ ,  $V(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ . En este caso los operadores  $\hat{N}_{1,2,3}$  en el sistema (4.3.7), (4.3.8) admiten desarrollos en series de potencias de  $\epsilon$  con coeficientes que son operadores acotados en  $\mathcal{H}_a$  (en todo lo que sigue la constante  $a$  en la definición de  $\mathcal{H}_a$  satisface la desigualdad  $0 < a < k$ ). Para los operadores  $\hat{N}_{1,2}$  estos desarrollos son

casi obvios (hay que desarrollar los núcleos correspondientes en sus series de Taylor); para el operador  $\hat{N}_3$  el procedimiento es un poco más complicado (ver el Lema 5.2.3). Notemos que la demostración de la dependencia holomorfa de los operadores de Dirichlet-Neumann sobre el parámetro que caracteriza la desviación de la profundidad de una constante fue demostrada en [20] mediante un procedimiento análogo al del Capítulo 3. Nuestros resultados de este capítulo son, por lo visto, equivalentes, pero se obtienen de manera más directa y nuestro caso (cuando la profundidad no depende de una de las variables y la ecuación principal es de Helmholtz y no de Laplace) no es cubierto por los resultados de [20]. En el caso de la ecuación de Laplace un procedimiento similar fue también usado en [15, 16].

## 5.2. Desarrollos de los operadores en series

Empecemos con los operadores  $\hat{N}_{1,2}$ . Tenemos el siguiente

**Lema 5.2.1.** *Los operadores  $\hat{N}_{1,2}$  admiten las siguientes representaciones:*

$$[\hat{N}_1 \tilde{\theta}](p) = e^{-h_0 \tau(p)} \tilde{\theta}(p) + \epsilon \hat{\mathfrak{N}}_1 \tilde{\theta}, \quad (5.2.1)$$

$$[\hat{N}_2 \tilde{\varphi}](p) = e^{-h_0 \tau(p)} \left( 1 + \frac{\lambda}{\tau(p)} \right) \tilde{\varphi}(p) + \epsilon \hat{\mathfrak{N}}_2 \tilde{\varphi}, \quad (5.2.2)$$

donde

$$[\hat{\mathfrak{N}}_1 \tilde{\theta}](p) = \int \mathfrak{N}_1(p, p', \epsilon) \tilde{\theta}(p') dp', \quad (5.2.3)$$

$$[\hat{\mathfrak{N}}_2 \tilde{\varphi}](p) = \int \mathfrak{N}_2(p, p', \epsilon) \tilde{\varphi}(p') dp', \quad (5.2.4)$$

los núcleos  $\mathfrak{N}_{1,2}(p, p', \epsilon)$  son analíticos en  $p, p' \in B_a$  y para  $\epsilon$  suficientemente pequeño. Además, las funciones  $\mathfrak{N}_{1,2}$  admiten los desarrollos

$$\mathfrak{N}_{1,2}(p, p', \epsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^{n-1} \mathfrak{N}_{1,2}^{(n)}(p, p'), \quad (5.2.5)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}_1^{(n)}(p, p') &= \frac{1}{2\pi} \frac{(-1)^n e^{-h_0 \tau(p)} \tau^{n-1}(p)}{(n-1)!} \\ &\quad \times \mathcal{F}_{x \rightarrow p-p'} \left[ V^{n-1}(x) \left( \frac{V(x) \tau(p)}{n} + \frac{ipV'(x)}{\tau(p)} \right) \right], \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

$$\mathfrak{N}_2^{(n)}(p, p') = \frac{1}{2\pi} \frac{(-1)^n e^{-h_0 \tau(p')} \tau^n(p')}{n!} \left( 1 + \frac{\lambda}{\tau(p')} \right) \mathcal{F}_{x \rightarrow p-p'} [V^n(x)]. \quad (5.2.7)$$

Finalmente, existen constantes  $c_{1,2}$  tales que

$$\left| \mathfrak{N}_{1,2}^{(n)}(p, p') \right| < \text{Cte } c_{1,2}^n (1 + |p - p'|)^{-N}, \quad N \in \mathbb{Z}, \quad (5.2.8)$$

y por lo tanto

$$|\mathfrak{N}_{1,2}(p, p', \epsilon)| < \text{Cte } (1 + |p - p'|)^{-N}, \quad N \in \mathbb{Z}, \quad (5.2.9)$$

para  $\epsilon$  suficientemente pequeño.

**Observación 5.2.2.** *Las series en (5.2.5) son absolutamente convergentes para  $\epsilon$  suficientemente pequeño por la desigualdad*

$$e^{-h_0\tau}\tau^n \leq h_0^{-n}n! \quad (5.2.10)$$

y porque las transformadas de Fourier de  $V^n(x)$  son convoluciones de  $\tilde{V}$ . Por lo mismo, se cumplen las cotas (5.2.8). La analiticidad de  $\mathfrak{N}_{1,2}$  en  $p, p'$  es, por lo tanto, una consecuencia del teorema de Weierstrass. En lo que sigue, necesitaremos la forma explícita de  $\mathfrak{N}_{1,2}^{(n)}$  para  $n = 1, 2$ . Cálculos directos nos llevan a las siguientes fórmulas:

$$\left[ \hat{\mathfrak{N}}_1^{(1)} \tilde{\theta} \right] (p) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-h_0\tau(p)} \left( \frac{p(p-q)}{\tau(p)} - \tau(p) \right) \tilde{V}(p-q) \tilde{\theta}(q) dq, \quad (5.2.11)$$

$$\begin{aligned} \left[ \hat{\mathfrak{N}}_1^{(2)} \tilde{\theta} \right] (p) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int \int e^{-h_0\tau(p)} \left( \frac{\tau^2(p)}{2} - p(p-r) \right) \\ &\quad \times \tilde{V}(p-r) \tilde{V}(r-q) \tilde{\theta}(q) drdq, \end{aligned} \quad (5.2.12)$$

$$\left[ \hat{\mathfrak{N}}_2^{(1)} \tilde{\varphi} \right] (p) = -\frac{1}{2\pi} \int e^{-h_0\tau(q)} \left( 1 + \frac{\lambda}{\tau(q)} \right) \tilde{V}(p-q) \tilde{\varphi}(q) dq, \quad (5.2.13)$$

$$\begin{aligned} \left[ \hat{\mathfrak{N}}_2^{(2)} \tilde{\varphi} \right] (p) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int \int e^{-h_0\tau(q)} \left( 1 + \frac{\lambda}{\tau(q)} \right) \frac{\tau^2(q)}{2} \\ &\quad \times \tilde{V}(p-r) \tilde{V}(r-q) \tilde{\varphi}(q) drdq. \end{aligned} \quad (5.2.14)$$

Para uniformizar la notación, introduzcamos los operadores

$$\left[ \hat{\mathfrak{N}}_1^{(0)} \tilde{\theta} \right] (p) = e^{-h_0\tau(p)} \tilde{\theta}(p), \quad (5.2.15)$$

$$\left[ \hat{\mathfrak{N}}_2^{(0)} \tilde{\varphi} \right] (p) = e^{-h_0\tau(p)} \left( 1 + \frac{\lambda}{\tau(p)} \right) \tilde{\varphi}(p). \quad (5.2.16)$$

En estos términos las fórmulas (5.2.1), (5.2.2) se reescriben como

$$\begin{aligned}\hat{N}_1 \tilde{\theta} &= \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n \hat{\mathfrak{N}}_1^{(n)} \tilde{\theta}, \\ \hat{N}_2 \tilde{\varphi} &= \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n \hat{\mathfrak{N}}_2^{(n)} \tilde{\varphi}.\end{aligned}$$

*Demostración.* La demostración es inmediata después de desarrollar  $e^{-\epsilon V(x)\tau(p)}$

en su serie de Taylor:

$$e^{-\epsilon V(x)\tau(p)} = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n \frac{(-1)^n V^n(x) \tau^n(p)}{n!}.$$

Mostraremos, por ejemplo, la cota (5.2.8) para  $\mathfrak{N}_2^{(n)}$ . Tenemos

$$\begin{aligned}\mathfrak{N}_2^{(n)}(p, p') &= \frac{1}{(2\pi)^n} \frac{(-1)^n e^{-h_0 \tau(p')} \tau^n(p')}{n!} \left(1 + \frac{\lambda}{\tau(p')}\right) \\ &\quad \times \int \dots \int \tilde{V}(p - p' - r_1 - \dots - r_{n-1}) \\ &\quad \times \tilde{V}(r_1) \dots \tilde{V}(r_{n-1}) dr_1 \dots dr_{n-1}.\end{aligned}\tag{5.2.17}$$

La función  $V(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ , por lo tanto tenemos la desigualdad

$$|\tilde{V}(p)| \leq \frac{C_N}{(1 + |p|)^N}.\tag{5.2.18}$$

Usemos la desigualdad de Peetre consecuentemente para obtener

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{(1 + |p - p' - r_1 - \dots - r_{n-1}|)^N} \\
& \leq \frac{(1 + |r_1|)^N}{(1 + |p - p' - r_2 - \dots - r_{n-1}|)^N} \\
& \leq \dots \\
& \leq \frac{(1 + |r_1|)^N \dots (1 + |r_{n-1}|)^N}{(1 + |p - p'|)^N}. \tag{5.2.19}
\end{aligned}$$

Por (5.2.10), (5.2.17), (5.2.18) y (5.2.19) obtenemos

$$\left| \mathfrak{N}_2^{(n)}(p, p') \right| \leq \frac{C_N C_{N+2}^{m-2}}{(2\pi)^n h_0^n} \left( \int \frac{dr}{(1 + |r|)^2} \right)^{n-2},$$

lo que implica (5.2.8). □

**Lema 5.2.3.** *El operador  $\hat{N}_3$  admite la siguiente representación:*

$$\hat{N}_3 \tilde{\theta} = \epsilon \hat{\mathfrak{N}}_3 \tilde{\theta},$$

donde

$$\left[ \hat{\mathfrak{N}}_3 \tilde{\theta} \right] (p) = \int \mathfrak{N}_3(p, p', \epsilon) \tilde{\theta}(p') dp',$$

el núcleo  $\mathfrak{N}(p, p', \epsilon)$  es analítico en  $p, p' \in B_a$  y para  $\epsilon$  suficientemente pequeño.

Además,  $\mathfrak{N}_3$  admite el desarrollo

$$\mathfrak{N}_3(p, p', \epsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^{2n} \mathfrak{N}_3^{(n)}(p, p'),$$

donde

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}_3^{(n)}(p, p') &= \frac{k^{2n+2}(2n+1)!!}{(2\pi)^{2n+1}2^n n!} \int \dots \int \tilde{V}(p-p'-Z_n) \tilde{V}(\zeta_1) \dots \tilde{V}(\zeta_{2n}) \\ &\quad \times F_n(p, p', \zeta_1, \dots, \zeta_{2n}) d\zeta_1 \dots d\zeta_{2n}, \end{aligned} \quad (5.2.20)$$

$$\begin{aligned} F_n(p, p', \zeta_1, \dots, \zeta_{2n}) &= \int_0^{\zeta_{2n}} \int_0^{\zeta_{2n-1}} \dots \int_0^{\zeta_1} \int_{p'+Z_n-S_n}^{p-S_n} (t-p'-Z_n+S_n) \\ &\quad \times \tau^{-2n-3}(t) dt ds_1 \dots ds_{2n}, \end{aligned} \quad (5.2.21)$$

$$Z_n = \sum_{j=1}^{2n} \zeta_j, \quad S_n = \sum_{j=1}^{2n} s_j.$$

Finalmente, existe una constante  $c_3$  tal que

$$\left| \mathfrak{N}_3^{(n)}(p, p') \right| < \text{Cte } c_3^n (1 + |p - p'|)^{-N}, \quad N \in \mathbb{Z}, \quad (5.2.22)$$

y por lo tanto

$$|\mathfrak{N}_3(p, p', \epsilon)| < \text{Cte } (1 + |p - p'|)^{-N}, \quad N \in \mathbb{Z}, \quad (5.2.23)$$

para  $\epsilon$  suficientemente pequeño.

*Demostración.* De la definición de  $\hat{N}_3$  tenemos

$$\hat{N}_3 \tilde{\theta} = \int N_3(p, p', \epsilon) \tilde{\theta}(p') dp',$$

donde

$$N_3(p, p', \epsilon) = \frac{\epsilon}{2\pi} \frac{k}{\pi} \iint e^{-i\xi p + ip'x} \frac{K'_0(k\rho)}{\rho} (x - \xi)^2 u_x(x, \xi) dx d\xi, \quad (5.2.24)$$

$$\rho = \sqrt{(x - \xi)^2 + \epsilon^2(V(x) - V(\xi))^2} = |x - \xi|\sqrt{1 + \epsilon^2 u^2},$$

$$u(x, \xi) = \frac{V(x) - V(\xi)}{x - \xi}.$$

Por la fórmula (9.6.25) de [30] tenemos que

$$K_0'(k\rho) = -K_1(k\rho) = -\frac{k}{2\rho} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \rho t \, dt}{(t^2 + k^2)^{3/2}}.$$

En esta última fórmula podemos cambiar  $\cos \rho t$  por  $e^{-i\rho t}$  porque la integral del  $\sin \rho t$  se anula. Además,

$$\int \frac{e^{-i\rho t} \, dt}{(t^2 + k^2)^{3/2}} = \int \frac{e^{-i|x-\xi|\sqrt{1+\epsilon^2 u^2}t} \, dt}{(t^2 + k^2)^{3/2}} = \int \frac{e^{-i(x-\xi)\sqrt{1+\epsilon^2 u^2}t} \, dt}{(t^2 + k^2)^{3/2}}$$

porque la última integral no depende del signo de  $(x - \xi)$ . Hacemos en la última integral el cambio de variable  $\sqrt{1 + \epsilon^2 u^2}t = t'$ . Sustituyendo el resultado en la fórmula (5.2.24), obtenemos

$$N_3 = -\frac{\epsilon k^2}{(2\pi)^2} \iiint e^{-i\xi(p-t) - ix(t-p')} \frac{u_x(x, \xi)}{(t^2 + k^2 + \epsilon^2 u^2 k^2)^{3/2}} dt dx d\xi.$$

En esta fórmula usemos el desarrollo de Taylor

$$\frac{1}{(t^2 + k^2 + \epsilon^2 u^2 k^2)^{3/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)!!}{2^n \tau^{2n+3}(t) n!} \epsilon^{2n} k^{2n} u^{2n}.$$

Cambiando el orden de sumación e integración (es posible por [21], §1.77),

$$N_3 = -\frac{\epsilon k^2}{(2\pi)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)!! k^{2n} \epsilon^{2n}}{2^n n!} \times \int \mathcal{F}_{x \rightarrow r, \xi \rightarrow s} [u_x(x, \xi) u^{2n}(x, \xi)] \tau^{-2n-3}(t) \, dt, \quad (5.2.25)$$

donde

$$r = t - p', \quad s = p - t.$$

Usemos la fórmula para la transformada de Fourier de la función  $u(x, \xi)$ :

$$\mathcal{F}_{x \rightarrow r, \xi \rightarrow s} [u(x, \xi)] = i\pi(\operatorname{sgn} r + \operatorname{sgn} s)\tilde{V}(r + s).$$

Reescribiendo las transformadas de Fourier de productos en (5.2.25) como convoluciones de las transformadas de Fourier de las funciones correspondientes, ésta queda dada por

$$\begin{aligned} & \int \mathcal{F}_{x \rightarrow r, \xi \rightarrow s} [u_x(x, \xi)u^{2n}(x, \xi)] \tau^{-2n-3}(t) dt = \frac{(-1)^{n+1}\pi}{2^{4n}\pi^{2n}} \\ & \times \int \dots \int (r - R_n)\tilde{V}(r + s - R_n - S_n)(\operatorname{sgn}(r - R_n) + \operatorname{sgn}(s - S_n)) \\ & \times \tilde{V}(r_{2n} + s_{2n})\tilde{V}(r_{2n-1} + s_{2n-1}) \dots \tilde{V}(r_1 + s_1) \\ & \times (\operatorname{sgn} r_{2n} + \operatorname{sgn} s_{2n}) \dots (\operatorname{sgn} r_1 + \operatorname{sgn} s_1)\tau^{-2n-3}(t) \\ & \times ds_1 dr_1 \dots ds_{2n} dr_{2n} dt, \quad R_n = \sum_{j=1}^{2n} r_j. \end{aligned}$$

En la última integral hacemos los cambios de variables  $r_j + s_j = \zeta_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, 2n$ . Notemos que

$$\int f(t)(\operatorname{sgn}(t - \alpha) + \operatorname{sgn}(\beta - t)) dt = 2 \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt$$

y análogamente para las integrales a lo largo de  $s_1, \dots, s_{2n}$ . Introduciendo la denotación (5.2.21), llegamos a (5.2.20). La cota (5.2.22) se obtiene exacta-

mente como en el Lema 5.2.1 después de notar que la función  $F_n$  en (5.2.21) satisface

$$|F_n(p, p', \zeta_1, \dots, \zeta_{2n})| \leq |\zeta_{2n}| \cdot |\zeta_{2n-1}| \cdots |\zeta_1| \cdot |p - p' - Z_n|^2 k^{-4n-6}.$$

□

**Observación 5.2.4.** *En lo que sigue, necesitaremos la fórmula explícita para  $\hat{\mathfrak{N}}_3^{(0)}$ . Por (5.2.20) tenemos*

$$\left[ \hat{\mathfrak{N}}_3^{(0)} \tilde{\theta} \right] (p) = \frac{1}{2\pi} \int \tilde{V}(p - q) \left( \tau(q) - \frac{k^2 + pq}{\tau(p)} \right) \tilde{\theta}(q) dq.$$

Por el Lema 5.2.3 la norma del operador  $\hat{N}_3$  es  $O(\epsilon)$  y por tanto podemos invertir la expresión  $(1 - \hat{N}_3)$  en (4.3.8) obteniendo

$$\tilde{\theta} = (1 - \hat{N}_3)^{-1} \hat{N}_2 \tilde{\varphi};$$

aquí  $(1 - \hat{N}_3)^{-1}$  significa la serie de Neumann,

$$(1 - \hat{N}_3)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\hat{N}_3)^n.$$

Sustituyendo en (4.3.7), tenemos

$$\left( 1 - \frac{\lambda}{\tau(p)} \right) \tilde{\varphi} = \hat{N}_1 (1 - \hat{N}_3)^{-1} \hat{N}_2 \tilde{\varphi}. \quad (5.2.26)$$

Una solución de esta ecuación nos da una solución del problema inicial. En lo que sigue construiremos soluciones de (5.2.26) que describen ondas atrapadas

y resonancias. Para lograrlo, queremos reducir esta ecuación a una forma parecida a (3.2.18). Tenemos

$$\hat{N}_1(1 - \hat{N}_3)^{-1}\hat{N}_2 = \hat{\mathfrak{N}}_1^{(0)}\hat{\mathfrak{N}}_2^{(0)} + \epsilon\hat{\mathfrak{M}}, \quad (5.2.27)$$

donde

$$\hat{\mathfrak{M}} = \hat{\mathfrak{N}}_1\hat{N}_2 + \hat{N}_1\hat{\mathfrak{N}}_2 + \hat{N}_1 \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^{n-1} \hat{\mathfrak{N}}_3^n \hat{N}_2.$$

Agrupando en (5.2.26) los términos del orden  $O(1)$  en la parte izquierda, logramos

$$\left(1 - \frac{\lambda}{\tau(p)}\right) \tilde{\varphi} - \hat{\mathfrak{N}}_1^{(0)}\hat{\mathfrak{N}}_2^{(0)}\tilde{\varphi} = \epsilon\hat{\mathfrak{M}}\tilde{\varphi}. \quad (5.2.28)$$

Recordando las formas explícitas de los operadores  $\hat{\mathfrak{N}}_{1,2}^{(0)}$  (ver Lema 5.2.1), la ecuación (5.2.28) finalmente se transforma en

$$L(p)\tilde{\varphi} = \epsilon\hat{M}\tilde{\varphi}, \quad (5.2.29)$$

donde

$$L(p) = \tau(p) \tanh(h_0\tau(p)) - \lambda, \quad \hat{M} = \frac{\tau(p)e^{h_0\tau(p)}}{2 \cosh h_0\tau(p)} \hat{\mathfrak{M}},$$

igual como en Capítulo 3. Por los Lemas 5.2.1, 5.2.3 tenemos

$$|M(p, p', \epsilon)| \leq \text{Cte}(1 + |p - p'|)^{-N}, \quad N \in \mathbb{Z}. \quad (5.2.30)$$

### 5.3. Ondas atrapadas

En esta sección aplicaremos la técnica de los capítulos 1–3 a la ecuación (5.2.29). Los argumentos heurísticos del Capítulo 3 (ver sección 3.2) obviamente se aplican a la ecuación (5.2.29) porque por el Lema 3.2.1 los ceros de  $L(p)$  en (5.2.29) están dados por las mismas fórmulas  $p_{\pm} = \pm im(\beta)$  con  $m(\beta)$  dada en el Lema 3.2.1. Para el caso de la sierra submarina ( $\tilde{V}(0) \leq 0$ ) tenemos el siguiente resultado:

**Teorema 5.3.1.** *Sea  $\int V(x) dx < 0$ . Entonces para  $\epsilon$  suficientemente pequeño el problema (3.2.1) posee un valor propio dado por  $\lambda = k \tanh(kh_0) - \beta^2$ , donde*

$$\beta = -\frac{\epsilon k^2 \tilde{V}(0)}{2l \cosh^2(kh_0)} + O(\epsilon^2). \quad (5.3.1)$$

*Si  $\int V(x) dx = 0$ , entonces la afirmación anterior sigue en pie con*

$$\beta = \epsilon^2 \frac{k^4}{4\pi l \cosh(h_0 k)} \int \frac{1 - \frac{k}{\tau(r)} \tanh(h_0 \tau(r)) \tanh(h_0 k)}{\tau(r) \tanh(h_0 \tau(r)) - k \tanh(h_0 k)} |\tilde{V}(r)|^2 dr + O(\epsilon^3). \quad (5.3.2)$$

*Demostración.* Por los Lemas 5.2.1 y 5.2.3, basta con construir la solución de la ecuación (5.2.29). Busquémosla en la forma

$$\tilde{\varphi}(p) = \frac{A(p)}{L(p)}, \quad (5.3.3)$$

donde  $A$  es la nueva incógnita. Sustituyendo (5.3.3) en (5.2.29) y cambiando el contorno de integración por el contorno  $\Gamma$  (ver (1.2.6)), obtenemos

$$A(p) = \epsilon \int M(p, p', \epsilon) \frac{A(p')}{L(p')} dp' = \epsilon \frac{f(p)}{m(\beta)} + \epsilon \int_{\Gamma} M(p, p', \epsilon) \frac{A(p')}{L(p')} dp', \quad (5.3.4)$$

donde

$$\frac{f(p)}{m(\beta)} = 2\pi i \operatorname{Res} \left[ M(p, p', \epsilon) \frac{A(p')}{L(p')} \right] \Big|_{p=p_+} = \frac{2\pi M(p, p_+, \epsilon) A(p_+)}{m(\beta) \Lambda(p_+)}.$$

Como antes, podemos suponer que  $A(p_+) = 1$  y entonces la fórmula para  $f(p)$  queda dada por

$$f(p) = \frac{2\pi M(p, p_+, \epsilon)}{\Lambda(p_+)}.$$

Reescribamos la ecuación (5.3.4) como

$$(1 - \hat{T}_\beta) A(p) = \epsilon \frac{f(p)}{m(\beta)},$$

donde

$$\hat{T}_\beta A = \epsilon \int_{\Gamma} M(p, p', \epsilon) \frac{A(p')}{L(p')} dp'.$$

Obviamente,  $\|\hat{T}_\beta\| = O(\epsilon)$  luego

$$A(p) = \frac{\epsilon}{m(\beta)} (1 - \hat{T}_\beta)^{-1} f = \frac{\epsilon}{m(\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \hat{T}_\beta^n f.$$

igual como antes,  $A(p) \in \mathcal{H}_a$  y decae más rápido que cualquier potencia de  $\Re p$  en  $B_a$  por la desigualdad (5.2.30). Sustituyendo en esta ecuación  $p = p_+$

y multiplicando por  $m(\beta)$ , llegamos a la ecuación secular para  $\beta$ :

$$m(\beta) = \epsilon(1 - \hat{T}_\beta)^{-1} f \Big|_{p=p_+}. \quad (5.3.5)$$

Por el teorema de la función implícita, la solución  $\beta$  de esta ecuación existe, es única y posee el desarrollo en la serie de Taylor en  $\epsilon$ . Para calcular los primeros términos del desarrollo, necesitamos desarrollar la parte derecha en (5.3.5) en su serie de Taylor hasta  $O(\epsilon^2)$ . Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} \epsilon \hat{\mathfrak{M}} &= \epsilon(\hat{\mathfrak{N}}_1^{(0)} \hat{\mathfrak{N}}_2^{(1)} + \hat{\mathfrak{N}}_1^{(1)} \hat{\mathfrak{N}}_2^{(0)} + \hat{\mathfrak{N}}_1^{(0)} \hat{\mathfrak{N}}_3^{(1)} \hat{\mathfrak{N}}_2^{(0)}) \\ &\quad + \epsilon^2(\hat{\mathfrak{N}}_1^{(0)} \hat{\mathfrak{N}}_2^{(2)} + \hat{\mathfrak{N}}_1^{(1)} \hat{\mathfrak{N}}_2^{(1)} + \hat{\mathfrak{N}}_1^{(2)} \hat{\mathfrak{N}}_2^{(0)} + \hat{\mathfrak{N}}_1^{(0)} \hat{\mathfrak{N}}_3^{(1)} \hat{\mathfrak{N}}_2^{(1)} \\ &\quad + \hat{\mathfrak{N}}_1^{(1)} \hat{\mathfrak{N}}_3^{(1)} \hat{\mathfrak{N}}_2^{(0)} + \hat{\mathfrak{N}}_1^{(0)} (\hat{\mathfrak{N}}_3^{(1)})^2 \hat{\mathfrak{N}}_2^{(0)}) + O(\epsilon^3). \end{aligned} \quad (5.3.6)$$

Para los operadores en el lado derecho de (5.3.6) por los Lemas 5.2.1 y 5.2.3 tenemos que

$$\hat{\mathfrak{N}}_1^{(0)} \hat{\mathfrak{N}}_2^{(1)} \tilde{\varphi}(p) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-h_0(\tau(p)+\tau(q))} \left(1 + \frac{\lambda}{\tau(q)}\right) \tau(q) \tilde{V}(p-q) \tilde{\varphi}(q) dq,$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathfrak{N}}_1^{(1)} \hat{\mathfrak{N}}_2^{(0)} \tilde{\varphi}(p) &= -\frac{1}{2\pi} \int e^{-h_0(\tau(p)+\tau(q))} \left(1 + \frac{\lambda}{\tau(q)}\right) \\ &\quad \times \left(\frac{p(p-q)}{\tau(p)} - \tau(p)\right) \tilde{V}(p-q) \tilde{\varphi}(q) dq, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathfrak{N}}_1^{(0)} \hat{\mathfrak{N}}_3^{(1)} \hat{\mathfrak{N}}_2^{(0)} \tilde{\varphi}(p) &= \frac{1}{2\pi} \int e^{-h_0(\tau(p)+\tau(q))} \left(1 + \frac{\lambda}{\tau(q)}\right) \\ &\quad \times \left(\tau(q) - \frac{k^2 - pq}{\tau(p)}\right) \tilde{V}(p-q) \tilde{\varphi}(q) dq, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathfrak{N}}_1^{(0)} \hat{\mathfrak{N}}_2^{(2)} \tilde{\varphi}(p) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \iint e^{-h_0(\tau(p)+\tau(q))} \left(1 + \frac{\lambda}{\tau(q)}\right) \\ &\quad \times \frac{\tau^2(q)}{2} \tilde{V}(p-r) \tilde{V}(r-q) \tilde{\varphi}(q) drdq, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathfrak{N}}_1^{(1)} \hat{\mathfrak{N}}_2^{(1)} \tilde{\varphi}(p) &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \iint e^{-h_0(\tau(p)+\tau(q))} \left(1 + \frac{\lambda}{\tau(q)}\right) \\ &\quad \times \left(\frac{p(p-r)}{\tau(p)} - \tau(p)\right) \tau(q) \tilde{V}(p-r) \tilde{V}(r-q) \tilde{\varphi}(q) drdq, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathfrak{N}}_1^{(2)} \hat{\mathfrak{N}}_2^{(0)} \tilde{\varphi}(p) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \iint e^{-h_0(\tau(p)+\tau(q))} \left(1 + \frac{\lambda}{\tau(q)}\right) \\ &\quad \times \left(\frac{\tau^2(p)}{2} - p(p-r)\right) \tilde{V}(p-r) \tilde{V}(r-q) \tilde{\varphi}(q) drdq, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathfrak{N}}_1^{(0)} \hat{\mathfrak{N}}_3^{(1)} \hat{\mathfrak{N}}_2^{(1)} \tilde{\varphi}(p) &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \iint e^{-h_0(\tau(p)+\tau(q))} \left(1 + \frac{\lambda}{\tau(q)}\right) \\ &\quad \times \tau(q) \left(\tau(r) - \frac{k^2 + pr}{\tau(p)}\right) \\ &\quad \times \tilde{V}(p-r) \tilde{V}(r-q) \tilde{\varphi}(q) drdq, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\mathfrak{N}}_1^{(1)} \hat{\mathfrak{N}}_3^{(1)} \hat{\mathfrak{N}}_2^{(0)} \tilde{\varphi}(p) &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \iint e^{-h_0(\tau(p)+\tau(q))} \left(1 + \frac{\lambda}{\tau(q)}\right) \\
&\quad \times \frac{k^2 + pr}{\tau(p)} \left(\tau(q) - \frac{k^2 + qr}{\tau(r)}\right) \\
&\quad \times \tilde{V}(p-r) \tilde{V}(r-q) \tilde{\varphi}(q) drdq,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\mathfrak{N}}_1^{(0)} (\hat{\mathfrak{N}}_3^{(1)})^2 \hat{\mathfrak{N}}_2^{(0)} \tilde{\varphi}(p) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \iint e^{-h_0(\tau(p)+\tau(q))} \left(1 + \frac{\lambda}{\tau(q)}\right) \\
&\quad \times \left(\tau(r) - \frac{k^2 + pr}{\tau(p)}\right) \left(\tau(q) - \frac{k^2 + qr}{\tau(r)}\right) \\
&\quad \times \tilde{V}(p-r) \tilde{V}(r-q) \tilde{\varphi}(q) drdq.
\end{aligned}$$

Sustituyendo estas fórmulas en (5.3.6) tenemos

$$\epsilon \hat{\mathfrak{M}} \tilde{\varphi} = \int (\epsilon \mathfrak{M}_1(p, q) + \epsilon^2 \mathfrak{M}_2(p, q) + O(\epsilon^3)) \tilde{\varphi}(q) dq, \quad (5.3.7)$$

donde

$$\mathfrak{M}_1(p, q) = -\frac{1}{2\pi} e^{-h_0(\tau(p)+\tau(q))} \left(1 + \frac{\lambda}{\tau(q)}\right) \frac{2(k^2 + pq)}{\tau(p)} \tilde{V}(p-q), \quad (5.3.8)$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}_2(p, q) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int e^{-h_0(\tau(p)+\tau(q))} \left(1 + \frac{\lambda}{\tau(q)}\right) \tilde{V}(p-r)\tilde{V}(r-q) \\
&\times \left\{ \frac{\tau^2(q)}{2} + \frac{\tau^2(p)}{2} + \frac{\tau(q)}{\tau(p)}(k^2 + pr) - p(p-r) \right. \\
&\quad - \frac{k^2 + pr}{\tau(p)} \left( \tau(q) - \frac{k^2 + rq}{\tau(r)} \right) - \tau(q) \left( \tau(r) - \frac{k^2 + pr}{\tau(p)} \right) \\
&\quad \left. + \left( \tau(r) - \frac{k^2 + pr}{\tau(p)} \right) \left( \tau(q) - \frac{k^2 + qr}{\tau(r)} \right) \right\} dr. \quad (5.3.9)
\end{aligned}$$

Repitiendo ahora los cálculos en (3.2.30)-(3.2.34), llegamos al resultado.  $\square$

## 5.4. Resonancias

**Definición 5.4.1.** *Una solución  $\varphi(x)$  de la ecuación (5.2.29) se llama resonancia (estado anticonfinado) si*

$$\varphi(x) \sim e^{m(\beta)|x|} + O(e^{-\gamma|x|}), \quad |x| \rightarrow \infty, \quad (5.4.1)$$

donde  $\gamma > 0$  es una constante positiva independiente de  $\epsilon$ ,  $\beta \rightarrow 0$  cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ ,  $m(\beta)$  está definida en el Lema 3.2.1.

**Observación 5.4.2.** *La presencia del término  $e^{-\gamma|x|}$  en (5.4.1) en contraste con la Definición 1.3.1 se debe a la existencia de modos evanescentes (ceros de  $L(p)$  que están lejos del eje real). Nosotros no vamos a estudiar estas resonancias.*

**Teorema 5.4.1.** *Sea  $\int V(x) dx > 0$ . Entonces para  $\epsilon$  suficientemente pequeño la ecuación (5.2.29) posee una resonancia para  $\lambda = k \tanh(kh_0) - \beta^2$ ,  $\beta > 0$ , donde*

$$\beta = \frac{\epsilon k^2 \tilde{V}(0)}{2l \cosh^2(kh_0)} + O(\epsilon^2). \quad (5.4.2)$$

*Demostración.* Las soluciones encontradas en la sección anterior tienen la forma

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int e^{ipx} \frac{A(p)}{L(p)} dp, \quad (5.4.3)$$

donde

$$L(p) = \tau(p) \tanh(h_0 \tau(p)) - \lambda$$

y  $A(p)$  es una función del espacio de Schwartz analítica en la banda  $B_a$ . Para estudiar el comportamiento de (5.4.3) cuando  $|x| \rightarrow \infty$  introducimos los contornos dados por  $L_{\pm}$  en la sección 1.3 del Capítulo 1, con la condición  $0 < a < k$ .

Las singularidades del integrando en (5.4.3) son los polos simples en  $p_{\pm} = \pm im(\beta)$ , donde  $m(\beta) = \frac{\beta}{l} + O(\beta^3)$ . Haciendo tender  $R$  al infinito y calculando los residuos, vemos que para  $x > 0$

$$\frac{1}{2\pi} \int e^{ipx} \frac{A(p)}{L(p)} dp = i \operatorname{Res} \left( e^{ipx} \frac{A(p)}{L(p)} \right) \Big|_{p=im(\beta)} + \frac{1}{2\pi} \int_{\Im p=a} e^{ipx} \frac{A(p)}{L(p)} dp, \quad (5.4.4)$$

y para  $x < 0$

$$\frac{1}{2\pi} \int e^{ipx} \frac{A(p)}{L(p)} dp = i \operatorname{Res} \left( e^{ipx} \frac{A(p)}{L(p)} \right) \Big|_{p=-im(\beta)} + \frac{1}{2\pi} \int_{\Im p=-a} e^{ipx} \frac{A(p)}{L(p)} dp. \quad (5.4.5)$$

Consideremos la integral de la parte derecha de (5.4.4):

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Im p=-a} e^{ipx} \frac{A(p)}{L(p)} dp = \frac{e^{-ax}}{2\pi} \int e^{ipx} \frac{A(p+ia)}{L(p+ia)} dp. \quad (5.4.6)$$

Siendo la última integral acotada, tenemos que la integral es  $O(e^{-ax})$ . Por tanto, para  $x$  suficientemente grande, tenemos, salvo términos de orden de  $O(e^{-\gamma|x|})$ , que

$$\varphi(x) = i \operatorname{Res} \left( e^{ipx} \frac{A(p)}{L(p)} \right) \Big|_{p=im(\beta)}, \quad x \gg 1. \quad (5.4.7)$$

Análogamente

$$\varphi(x) = i \operatorname{Res} \left( e^{ipx} \frac{A(p)}{L(p)} \right) \Big|_{p=-im(\beta)}, \quad x \ll -1. \quad (5.4.8)$$

Calculando los residuos tenemos

$$\begin{aligned} i \operatorname{Res} \left( e^{ipx} \frac{A(p)}{L(p)} \right) \Big|_{p=im(\beta)} &= e^{-m(\beta)x} \frac{A(p_+)}{m(\beta)\Lambda(p_+)}, \\ i \operatorname{Res} \left( e^{ipx} \frac{A(p)}{L(p)} \right) \Big|_{p=-im(\beta)} &= -e^{m(\beta)x} \frac{A(p_-)}{m(\beta)\Lambda(p_-)}. \end{aligned}$$

Ahora, con el fin de eliminar las exponenciales decrecientes de la solución,

buscaremos  $\varphi(x)$  en la forma

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int e^{ipx} \frac{A(p)}{L(p)} dp + C_1 e^{-m(\beta)x} + C_2 e^{m(\beta)x}. \quad (5.4.9)$$

Esta función satisface la condición (5.4.1) si

$$C_1 = -\frac{A(p_+)}{m(\beta)\Lambda(p_+)},$$

$$C_2 = \frac{A(p_-)}{m(\beta)\Lambda(p_-)}.$$

La transformada de Fourier de (5.4.9) tiene la forma

$$\tilde{\varphi}(p) = \frac{A(p)}{L(p)} + 2\pi C_1 \delta(p - p_+) + 2\pi C_2 \delta(p - p_-). \quad (5.4.10)$$

Reemplazando (5.4.10) en (5.2.29) obtenemos

$$A(p) = \epsilon \int M(p, p', \epsilon) \frac{A(p')}{L(p')} dp' + 2\pi\epsilon C_1 M(p, p_+, \epsilon) + 2\pi\epsilon C_2 M(p, p_-, \epsilon). \quad (5.4.11)$$

En la ecuación (5.4.11) cambiamos el contorno de integración a  $\Gamma$  y tal como

se hizo anteriormente tenemos

$$(1 - \hat{T}_\beta)A(p) = \epsilon \frac{f(p)}{m(\beta)}, \quad (5.4.12)$$

$$\hat{T}_\beta A(p) = \epsilon \int_\Gamma \frac{M(p, p', \epsilon)}{L(p')} A(p') dp',$$

$$f(p) = 2\pi A(p_-) M(p, p_-, \epsilon) / \Lambda(p_-).$$

Obviamente, la solución de (5.4.12) es

$$A(p) = \epsilon(1 - \hat{T}_\beta)^{-1} f(p) / m(\beta). \quad (5.4.13)$$

Multiplicando (5.4.13) por  $m(\beta)$  y evaluándola en  $p = p_-$ , tenemos que la ecuación para  $\beta$  es:

$$m(\beta) = \epsilon(1 - \hat{T}_\beta)^{-1} f(p) \Big|_{p=p_-} .$$

Calculando los términos principales en la última ecuación con el uso de (5.3.6) y las fórmulas siguientes, llegamos al resultado.  $\square$

# Apéndice A

## Pozo rectangular

Consideremos la ecuación de Schrödinger

$$(\hat{p}^2 + V(x))\Psi(x) = E\Psi(x) \tag{A.0.1}$$

donde  $\hat{p} = -i\partial_x$ . El lado izquierdo de la ecuación es el resultado de actuación del operador de Hamilton sobre la función  $\Psi(x)$  y  $E$  representa el nivel de energía.

El problema conocido en mecánica cuántica como el problema de encontrar los niveles de energía de una partícula en el pozo rectangular aquí lo planteamos bajo el siguiente enunciado:

Encontrar la solución de (A.0.1) cuando

$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } |x| > 1, \\ -\epsilon, & \text{si } |x| \leq 1, \end{cases}$$

para  $\Psi(x) \in L_2$ . A  $\Psi(x)$  se le llama la eigenfunción de la ecuación (A.0.1) y el correspondiente nivel de energía  $E$  es negativo  $E = -\beta^2$ , donde  $\beta \in \mathbb{R}^+$ .

La solución de (A.0.1) en las condiciones dadas está dada por:

$$\Psi(x) = \begin{cases} C_1 e^{\beta x}, & \text{si } x \leq -1, \\ C_2 \cos(\sqrt{\epsilon - \beta^2}x) + C_3 \sin(\sqrt{\epsilon - \beta^2}x), & \text{si } |x| \leq 1, \\ C_4 e^{-\beta x}, & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

donde  $C_1, C_2, C_3$  y  $C_4$  son constantes.

Como se requiere que tanto  $\Psi(x)$  como su primera derivada sean continuas, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} C_1 e^{-\beta} = C_2 \cos \sqrt{\epsilon - \beta^2} - C_3 \sin \sqrt{\epsilon - \beta^2}, \\ \beta C_1 e^{-\beta} = \sqrt{\epsilon - \beta^2} C_2 \sin \sqrt{\epsilon - \beta^2} + \sqrt{\epsilon - \beta^2} C_3 \cos \sqrt{\epsilon - \beta^2}, \\ C_4 e^{-\beta} = C_2 \cos \sqrt{\epsilon - \beta^2} + C_3 \sin \sqrt{\epsilon - \beta^2}, \\ -\beta C_4 e^{-\beta} = -\sqrt{\epsilon - \beta^2} C_2 \sin \sqrt{\epsilon - \beta^2} + \sqrt{\epsilon - \beta^2} C_3 \cos \sqrt{\epsilon - \beta^2}. \end{cases}$$

Las dos primeras ecuaciones nos proporcionan la continuidad de  $\Psi(x)$  en  $x = -1$  y las dos siguientes en  $x = 1$ .

Denotemos por  $\theta$  a  $\sqrt{\epsilon - \beta^2}$ . Llamemos  $S$  a la matriz de coeficientes del anterior sistema de ecuaciones:

$$S = \begin{bmatrix} e^{-\beta} & -\cos \theta & \sin \theta & 0 \\ \beta e^{-\beta} & -\theta \sin \theta & -\theta \cos \theta & 0 \\ 0 & -\cos \theta & -\sin \theta & e^{-\beta} \\ 0 & \theta \sin \theta & -\theta \cos \theta & -\beta e^{-\beta} \end{bmatrix}.$$

La solución de la ecuación

$$\det S = 0, \tag{A.0.2}$$

donde

$$\det S = (2\beta^2 - \epsilon) \sin 2\theta + 2\beta\theta \cos 2\theta,$$

nos proporciona los eigenvalores de (A.0.1).

De la ecuación (A.0.2) tenemos que:

$$\tan 2\theta = \frac{2\beta\theta}{\epsilon - 2\beta^2}. \tag{A.0.3}$$

Observemos que la ecuación (A.0.3) presenta diferentes comportamientos en distintos intervalos de  $\beta$  los cuales, a su vez, dependen del valor de  $\epsilon$  escogido. Para pequeños valores de  $\epsilon$  tenemos una única solución:  $\beta = \epsilon +$

$O(\epsilon^2)$ . Para valores de  $\epsilon$  del orden de 1, se puede encontrar la solución gráfica en [22], por ejemplo.

# Apéndice B

## Barrera rectangular

Para comprender cómo se obtienen soluciones de la ecuación de Schrödinger para un potencial que es una barrera rectangular, primero necesitamos comprender el concepto de ondas entrantes y salientes.

Con este fin, consideremos la ecuación no estacionaria de Schrödinger dada por:

$$\begin{aligned}i\Psi_t(x, t) &= \hat{H}\Psi(x, t), \\ \Psi|_{t=0} &= e^{i\lambda x},\end{aligned}\tag{B.0.1}$$

donde  $\hat{H} = -i\partial_x^2$ .

Sea  $E = \lambda^2$ ,  $\lambda > 0$ . Busquemos la solución de (B.0.1) en la forma:

$$\Psi(x, t) = e^{-iEt} \phi(x),$$

$$\Psi(x, t)|_{t=0} = \phi(x), \quad \text{donde } \phi(x) = e^{i\lambda x}.$$

De esta manera, la solución de (B.0.1) es:

$$\Psi(x, t) = e^{i\lambda(x-\lambda t)}. \quad (\text{B.0.2})$$

Una función de la forma  $f(x - ct)$  donde  $c > 0$ , representa una onda que se propaga a la derecha; por tanto, la solución dada por (B.0.2) de la ecuación no estacionaria de Schrödinger para el dato inicial  $\Psi|_{t=0} = e^{i\lambda x}$  representa una onda que se propaga a la derecha.

Si consideramos  $e_+(x, \lambda) = e^{i\lambda x}$  como dato inicial, dado que la onda resultante en este caso se propaga a la derecha, a  $e_+(x, \lambda)$  la llamamos una onda que viaja a la derecha. De manera similar si consideramos como dato inicial a  $e_-(x, \lambda) = e^{-i\lambda x}$ , dado que la onda resultante se propaga a la izquierda, a  $e_-(x, \lambda) = e^{-i\lambda x}$  la definimos como una onda que viaja a la izquierda.

Ahora bien, conservamos la misma terminología para las soluciones  $e_+$  y  $e_-$  incluso para el caso cuando  $\lambda$  es un número complejo.

Entonces, para definir lo que denominamos *ondas salientes*, planteamos el problema de encontrar soluciones  $\Psi(x)$  de la ecuación de Schrödinger, que

corresponden a ondas emitidas del pozo de potencial (conocidas también por *resonancias*), de la siguiente manera:

Consideremos la ecuación de Schrödinger

$$(\hat{p}^2 + V(x))\Psi(x) = E\Psi(x), \quad (\text{B.0.3})$$

donde  $\hat{p} = -i\partial_x$ ,  $E = \lambda^2$ , con una barrera rectangular de potencial dada por:

$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } |x| > 1, \\ \epsilon, & \text{si } |x| \leq 1. \end{cases}$$

Aquí, las resonancias son ondas del tipo  $e_+(x, \lambda) : e^{i\lambda x}$ , para  $x > 1$  y  $e_-(x, \lambda) : e^{-i\lambda x}$ , para  $x < -1$ . Nosotros estaremos interesados en *estados anticonfinados*, es decir, soluciones exponencialmente crecientes, las cuales existen solamente si  $\lambda = -i\beta$ , con  $\beta \in \mathbb{R}^+$ .

El estado anticonfinado de la ecuación (B.0.3) para la barrera rectangular  $V(x)$  viene dado por:

$$\Psi(x) = \begin{cases} C_1 e^{-\beta x}, & \text{si } x \leq -1, \\ C_2 e^{x\sqrt{\beta^2 + \epsilon}} + C_3 e^{-x\sqrt{\beta^2 + \epsilon}}, & \text{si } |x| < 1, \\ C_4 e^{\beta x}, & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Sea  $\theta = \sqrt{\beta^2 + \epsilon}$ . Como  $\Psi(x)$  y su derivada deben ser continuas, tenemos las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} C_1 e^\beta = C_2 e^{-\theta} + C_3 e^\theta, \\ -\beta C_1 e^\beta = \theta C_2 e^{-\theta} - \theta C_3 e^\theta, \\ C_2 e^\theta + C_3 e^{-\theta} = C_4 e^\beta, \\ \theta C_2 e^\theta - \theta C_3 e^{-\theta} = \beta C_4 e^\beta. \end{cases}$$

Las dos primeras ecuaciones nos proporcionan la continuidad de la función  $\Psi(x)$  y de su derivada en  $x = -1$  y las dos siguientes en  $x = 1$ .

Denotemos por  $S$  a la matriz de coeficientes del anterior sistema.

$$S = \begin{bmatrix} e^\beta & -e^{-\theta} & -e^\theta & 0 \\ -\beta e^\beta & -\theta e^{-\theta} & \theta_2 e^\theta & 0 \\ 0 & e^\theta & e^{-\theta} & -e^\beta \\ 0 & \theta_2 e^\theta & -\theta e^{-\theta} & -\beta e^\beta \end{bmatrix}.$$

La continuidad de  $\Psi(x)$  se tiene cuando

$$\det S = 0, \tag{B.0.4}$$

donde

$$\det S = (\theta^2 + \beta^2) \tanh(2\theta) - 2\theta\beta.$$

De la ecuación (B.0.4) tenemos que:

$$\tanh(2\theta) = 2\frac{\beta\theta}{2\beta^2 + \epsilon}. \quad (\text{B.0.5})$$

Resolviendo la ecuación (B.0.5) para pequeños valores de  $\epsilon$  obtenemos

$$\beta = \epsilon + O(\epsilon^2).$$

# Apéndice C

## Ecuación de Bessel

En este apéndice presentamos unos hechos bien conocidos sobre la función de Macdonald y la ecuación de Bessel modificada (ver [31, 32]). Estamos interesados en la solución fundamental de la ecuación de Helmholtz

$$(\Delta - k^2)u = 0, \tag{C.0.1}$$

donde  $\Delta$  es el Laplaciano,  $k$  una constante,  $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n) \in C^2(\Omega)$ ,  $\Omega$  una región del espacio.

Al poseer la ecuación (C.0.1) simetría cilíndrica podemos buscar soluciones en la forma

$$u = \Psi(r), \quad r = |x - \xi| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \xi_i)^2}. \tag{C.0.2}$$

Derivando a (C.0.2) dos veces y reemplazando el resultado en (C.0.1) logramos la ecuación diferencial ordinaria:

$$\Psi''(r) + \frac{n-1}{r}\Psi'(r) - k^2\Psi(r) = 0. \quad (\text{C.0.3})$$

Trabajemos con  $n = 2$ . La ecuación (C.0.3) se reescribe como:

$$\Psi''(r) + \frac{1}{r}\Psi'(r) - k^2\Psi(r) = 0, \quad (\text{C.0.4})$$

que es la ecuación modificada de Bessel.

Para resolver la ecuación (C.0.4) aplicamos el método de Frobenius. Notemos que en  $r = 0$  la ecuación (C.0.4) posee un punto singular regular. Buscamos entonces sus soluciones en la forma de serie:

$$\Psi(r) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^{n+l}, \quad c_0 \neq 0. \quad (\text{C.0.5})$$

Derivando dos veces la expresión (C.0.5) y sustituyendo en (C.0.4) obtenemos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+l)^2 c_n r^{n+l-2} - k^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^{n+l} = 0,$$

podemos reescribir esta última expresión como

$$l^2 c_0 r^{l-2} + (1+l)c_1 r^{l-1} + \sum_{n=2}^{\infty} ((n+l)^2 c_n - k^2 c_{n-2}) r^{n+l-2} = 0.$$

De la menor potencia de  $r$  obtenemos la ecuación indicial, la cual nos proporciona los valores posibles de  $l$ , que en este caso corresponden a  $l^2 = 0$ ,  $l_1 = l_2 = 0$ .

Al igualar a 0 los demás coeficientes de las siguientes potencias de  $r$  obtenemos:

$$(1 + l)^2 c_1 = 0, \quad \text{luego } c_1 = 0,$$

y para  $n \geq 2$  tenemos la fórmula de recurrencia:

$$(n + l)^2 c_n - k^2 c_{n-2} = 0, \quad c_n = k^2 \frac{c_{n-2}}{n^2}.$$

Notemos que los coeficientes impares son iguales a cero y que el coeficiente par general se puede escribir de la forma:

$$c_{2n} = k^{2n} \frac{c_0}{(n!)^2 2^{2n}} \quad \text{para } n \geq 1.$$

Al hacer  $l = 0$  en (C.0.5) y reemplazar los coeficientes por  $c_{2n}$ , obtenemos la expresión de la solución de (C.0.4) en su serie de potencias:

$$\Psi(r) = \sum_{n=0}^{\infty} k^{2n} \frac{c_0}{(n!)^2} \left(\frac{r}{2}\right)^{2n}; \quad (\text{C.0.6})$$

renombremos  $\Psi(r) = \Psi_1(r)$ .

El método de Frobenius nos dice que existe otra solución de (C.0.4) linealmente independiente de (C.0.6) que posee la forma:

$$\Psi_2(r) = \Psi_1(r) \ln r + \sum_{n=0}^{\infty} b_n r^n, \quad \text{para } r > 0, b_0 \neq 0. \quad (\text{C.0.7})$$

Para determinar los coeficientes  $b_n$ , nuevamente derivamos dos veces la expresión (C.0.7) y reemplazamos en (C.0.4) obteniendo la siguiente ecuación:

$$\frac{2}{r} \Psi_1'(r) + \frac{b_1}{r} + \sum_{n=2}^{\infty} (n^2 b_n - k^2 b_{n-2}) r^{n-2} = 0.$$

Tenemos entonces que  $b_1 = 0$  y por tanto  $b_{2n+1} = 0$ . La fórmula de recurrencia para los coeficientes  $b_{2n}$  queda dada por

$$b_{2n} = - \left( \frac{4nk^{2n}}{(n!)^2 2^{2n} (2n)^2} + \frac{k^2 b_{n-2}}{(2n)^2} \right), \quad \text{para } n \geq 1.$$

Nuestro principal interés es hallar la solución fundamental de la ecuación de Helmholtz (C.0.1) que decae en el infinito. Notemos que la solución  $\Psi_1(r)$  corresponde a la función  $I_0(kr)$  definida en [30],  $\Psi_1(r) = c_0 I_0(kr)$ . La solución que buscamos resulta de la combinación lineal y la adecuada elección de coeficientes para (C.0.7).

Al comparar nuestras soluciones con las dadas en [30], concluimos que  $c_0 = -1$ ,  $b_0 = -\gamma - \ln(k/2)$ , donde  $\gamma$  es la constante de Euler,

$$\gamma = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[ \sum_{l=1}^m \frac{1}{l} - \ln m \right] = 0,577\dots$$

Por tanto, la función de Macdonald  $K_0(kr)$ , que es la solución fundamental que decae en el infinito, en su serie para pequeños valores del argumento queda dada por:

$$\begin{aligned}
 K_0(kr) = & \left\{ \ln \left( \frac{1}{2}kr \right) + \gamma \right\} \Psi_1(r) + \frac{\frac{1}{4}(kr)^2}{1!^2} + \left( 1 + \frac{1}{2} \right) \frac{\left( \frac{1}{4}(kr)^2 \right)^2}{2!^2} \\
 & + \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) \frac{\left( \frac{1}{4}(kr)^2 \right)^3}{3!^2} + \dots
 \end{aligned} \tag{C.0.8}$$

# Bibliografía

- [1] Norman E. Hurt, “*Mathematical physics of quantum wires and devices*”, Kluwer, (2000).
  
- [2] J. T. Londergan, J. P. Carini, D. P. Murdock, “*Binding and scattering in two-dimensional systems: applications to quantum wires, waveguides and photonic crystals*”, Springer, (1999).
  
- [3] M. A. Lavrentiev, and B. V. Chabat, “*Effets Hydrodynamiques et Modèles Mathématiques*”, Mir, Moscow, (1972).
  
- [4] N. G. Kuznetsov, V. G. Maz'ya, B. R. Vainberg. “*Linear water waves. A mathematical approach*”, Cambridge University Press, (2002).
  
- [5] C. M. Linton, P. McIver, Embedded trapped modes in water waves and acoustics, *Wave Motion*, **45**, pp. 16-29, (2007).

- [6] O. V. Motygin, On trapping of surface water waves by cylindrical bodies in a channel, *Wave Motion*, **45**, pp. 940-951, (2008).
- [7] D. S. Kuznetsov, A spectral perturbation problem and its applications to waves above an underwater ridge, *Siberian Math. J.*, **42**, pp. 668-684, (2001).
- [8] B. Simon, The bound state of weakly coupled Schrödinger operators in one and two dimensions, *Ann. Phys.*, **97**, pp. 279-288, (1976).
- [9] J. A. Rodríguez Ceballos, P. Zhevandrov, Comparison between the discrete and continuous Schrödinger operators with a small potential well. En: *Numerical Modelling of Coupled Phenomena in Engineering and Science: Practical Uses and Examples*, M.C. Suárez Arriaga, J. Bundschuh, F.J. Domínguez-Mota (Editors), pp. 71-88, Taylor & Francis, (2008).
- [10] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Quantum mechanics. Non-relativistic theory*, Pergamon, (1958).
- [11] R. Gadyl'shin, Local perturbations of the Schrödinger operator on the axis, *Theor. Math. Phys.*, **132**, pp. 976-982, (2002).

- [12] M. Zworski, Resonances in physics and geometry, Notices of the AMS, **46**, pp. 319-328, (1999).
- [13] B. R. Vainberg, “*Asymptotic methods in equations of mathematical physics*”, Gordon & Breach, (1989).
- [14] B. Simon, Resonances in one dimension and Fredholm determinants, J. Funct. Anal., **178**, pp. 396-420, (2000).
- [15] L. V. Ovsjannikov, Cauchy problem in a scale of Banach spaces and its application to the shallow water theory justification. En: “*Applications of Methods of Functional Analysis to Problems in Mechanics*”, P. Germain and B. Nayroles (Editors), Lect. Notes Math., vol. 503, pp. 426-437, Springer, (1976).
- [16] L. V. Ovsjannikov et al., “*Nonlinear problems of the theory of surface and internal waves*”, Nauka, (1985) (in Russian).
- [17] R. M. Garipov, On the linear theory of gravity waves: the theorem of existence and uniqueness, Arch. Rat. Mech. Anal., **24**, pp. 352-362, (1967).

- [18] S. Yu. Dobrokhotov, Maslov's methods in the linearized theory of gravitational waves on the fluid surface, *Soviet Phys. Doklady*, **28**, pp. 189-191, (1983).
- [19] S. Yu. Dobrokhotov, P. N. Zhevandrov, Nonstandard characteristics and Maslov's operatorial method in linear problems concerning unsteady water waves, *Func. Anal. Appl.*, **19**, pp. 285-295, (1985).
- [20] D. B. Nicholls and M. Taber, Joint analyticity and analytic continuation of Dirichlet-Neumann operators on doubly perturbed domains, *J. Math. Fluid Mech.*, **10**, pp. 238-271, (2008).
- [21] E. C. Titchmarsh. "*The theory of functions*", Oxford University Press, 1939.
- [22] L. Schiff. "*Quantum Mechanics*", McGraw Hill, 1949.
- [23] M. Reed and B. Simon, "*Methods of Modern Mathematical Physics*", Vols. 1 and 4, Academic Press, New York, (1981).
- [24] G. G. Stokes, "*Report on Recent Researches in Hydrodynamics*", Britt. Assn. Rep., (1846).

- [25] F. Ursell, Trapping modes in the theory of surface waves, Proc. Cambridge Phil. Soc. , **47**, pp. 347-358, (1951).
- [26] F. Ursell, Edge waves on a sloping beach, Proc. Roy Soc. London, Ser. A, **214**, pp. 347-358, (1952). **49**, pp. 668-684, (1953).
- [27] F. Ursell, Mathematical aspects of trapping modes in the theory of surface waves, J. Fluid Mech., Cambridge University Press, **183**, pp. 421-437, (1987).
- [28] A. S. Bonnet-Ben Dhia and P. Joly, Mathematical analysis of guided water waves, SIAM J. Appl. Math., **53**, pp. 1507-1550, (1993).
- [29] P. Zhevandrov and A. Merzon, Asymptotics of eigenfunctions in shallow potential wells and related problems, Amer. Math. Soc. Translations (2) **208**, pp. 235-284, (2003).
- [30] M. Abramowitz and I. A. Stegun, “*Handbook of Mathematical Functions*”, Dover Publ, Inc., New York, (1970).
- [31] G. N. Watson, “*A Treatise on the Theory of Bessel Functions*”, Cambridge Mathematical Library, (1996).

- [32] F. W. Olver, “*Asymptotics and Special Functions*”, AKP Classics, New York: Academic Press, (1974).
- [33] Robert D. Richtmyer, “*Principles of Advanced Mathematical Physics*”, Springer-Verlag, Volume I, New York, (1978).
- [34] V. S. Vladimirov, “*Equations of Mathematical Physics*”, Mir Publishers, Moscow, (1984).
- [35] I. Stakgold, “*Boundary Value Problems of Mathematical Physics*”, Macmillan Company, Volume II, New York, (1968).
- [36] M. I. Romero Rodríguez and P. Zhevandrov, Frequencies of trapped modes and resonances for water waves in infinite channels, AIP Conference Proceedings, **1168**, pp. 403-405, (2009).