



Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Instituto de Física y Matemáticas



“Modelos cosmológicos dominados por materia con viscosidad volumétrica para explicar la expansión acelerada del Universo”

Tesis presentada al

Instituto de Física y Matemáticas

como requisito parcial para la obtención del grado de

Doctor en Ciencias en el Área de Física

por

Arturo Avelino Huerta

asesorado por

Dr. Ulises Nucamendi Gómez
(IFM-UMSNH)

Morelia, Michoacán, México
Noviembre 2010

Resumen

En 1998, a través de observaciones de supernovas tipo Ia (SNe Ia) se descubrió que el Universo parecía estar expandiéndose **aceleradamente** hoy en día. Esto atrajo la atención de una gran cantidad de cosmólogos, astrofísicos y astrónomos que empezaron a estudiar el fenómeno con más detalle. A partir de entonces se fueron obteniendo datos cada vez más precisos para investigar mejor este fenómeno. Los nuevos datos han seguido confirmando, y cada vez con mayor certeza, la expansión *acelerada* del Universo, fenómeno cuya evidencia ha sido también respaldada indirectamente por observaciones de la radiación cósmica de fondo y de la estructura a gran escala en el Universo.

Diversos modelos han sido propuestos para explicar la aceleración. La mayoría de ellos suponen la existencia de un tipo muy particular de *energía* hasta ahora desconocida que permea todo el Universo, con la capacidad de causar la expansión acelerada. Esta ha sido llamada “*energía oscura*”.

El modelo cosmológico más aceptado para explicar la aceleración, que es conocido como “*Lambda Cold Dark Matter*” (Λ CDM), considera que la energía oscura se comporta como una *constante cosmológica* y que constituye alrededor del 70% de la densidad de materia-energía presente en el Universo.

A pesar de que Λ CDM logra explicar las observaciones cosmológicas en cierta medida, el modelo enfrenta varios problemas, uno de ellos es el de que la densidad estimada para la energía oscura según este modelo es *120 órdenes de magnitud* más pequeña que el valor predicho por la física de partículas (el “*problema de la constante cosmológica*”, que algunos llaman “la *peor* predicción de la física teórica [1]”). Otro problema es el llamado “*problema de la coincidencia cósmica*” que cuestiona por qué el modelo Λ CDM predice una densidad de energía oscura que es, casualmente, *del mismo orden* que la densidad de materia bariónica y materia oscura¹ *hoy en día*.

A raíz de los problemas del modelo Λ CDM surge la motivación del presente trabajo de tesis, que busca proponer y explorar un modelo cosmológico viable alternativo a Λ CDM, que además sea consistente con las observaciones cosmológicas.

En esta tesis se estudia un modelo cosmológico en donde se asume que la única componente (la componente dominante) presente en el Universo es un fluido sin presión con viscosidad volumétrica parametrizada como $\zeta = \zeta_0 + \zeta_1 H$, en donde H es el parámetro de Hubble y ζ_0 , ζ_1 son coeficientes viscosos los cuales se asumen constantes espacial y temporalmente. Este fluido sin presión caracteriza conjuntamente a las componentes de materia bariónica y oscura.

El término “ ζ_0 ” permite estudiar la parametrización más sencilla que se podría tener

¹La “*materia oscura*” es algo distinto a la “*energía oscura*”. En la sección 1.4 se describirá cada una de ellas con más detalle.

para la viscosidad volumétrica: una viscosidad igual a una *constante*. Y el término “ $\zeta_1 H$ ” parametriza una viscosidad proporcional a la expansión del Universo, esto a través de H .

Para cada posible valor de ζ_0 y ζ_1 se tiene un escenario cosmológico en particular. La parametrización propuesta del presente modelo es muy general, lo que permite estudiar e incluir una gran cantidad de modelos cosmológicos particulares, incluso algunos que son populares en la literatura y que se encuentran en investigación actualmente.

Desde la perspectiva de los fluidos viscosos en cosmología, la expansión del Universo es vista como una colección de estados termodinámicos fuera de su equilibrio térmico local durante periodos de tiempo *muy pequeños* (comparados con la edad del Universo), lo cual genera una producción de entropía local y a su vez induce una viscosidad volumétrica con la capacidad de producir una aceleración en la expansión del Universo. La viscosidad volumétrica en los fluidos cosmológicos corresponde a una descripción más detallada del estudio y propiedades de estos fluidos, en los cuales, los términos viscosos que comúnmente se desprecian pueden llegar a tener efectos apreciables en el comportamiento de los mismos.

Para probar la viabilidad del modelo para explicar las observaciones cosmológicas se confrontó el modelo con datos observacionales de la distancia modular de la prueba de supernovas Ia (SNe Ia), el parámetro de corrimiento de la radiación cósmica de fondo (CMB), el pico acústico de las oscilaciones acústicas bariónicas (BAO), la segunda ley de la termodinámica local en Relatividad General y con la cota observacional sobre la edad del Universo calculada a partir de las edades de los cúmulos globulares galácticos más longevos. Con las tres primeras pruebas, además se estimaron los valores centrales de los parámetros libres del modelo y sus intervalos de confianza a través de un análisis estadístico Bayesiano.

De este análisis estadístico se encontró que los dos escenarios elegidos por las mejores estimaciones corresponden a los casos cuando los coeficientes (ζ_0, ζ_1) toman valores en los rangos: (1) $\zeta_0 > 0, \zeta_1 < 0$ con $\zeta_0 + \zeta_1 \leq 3$; y (2) $0 < \zeta_0 < 3$ con $\zeta_1 = 0$.

Por otra parte, se analizaron y clasificaron todos los posibles escenarios que predice el modelo para la evolución pasada, presente y futura del Universo de acuerdo a los valores de los coeficientes (ζ_0, ζ_1) , estudiando el comportamiento del factor de escala, la densidad de materia y el escalar de curvatura.

De este análisis se obtuvieron una gran cantidad de escenarios posibles que el modelo predice. Sin embargo, de entre todos ellos, se encontró que el escenario que mejor describe al Universo observado es el caracterizado por los valores en el intervalo $0 < \tilde{\zeta}_0 < 3$ y con $\tilde{\zeta}_1 = 0$, donde $(\tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}_1)$ son las versiones adimensionales de los coeficientes viscosos (ζ_0, ζ_1) . Este escenario predice un Big-Bang como origen del Universo, seguido de un periodo de expansión *desacelerada* en tiempos tempranos, con una transición suave a un periodo de expansión **acelerada** en tiempos recientes que continuará por siempre en el futuro. Además, este escenario es el favorecido por las observaciones cosmológicas, es decir, al realizar el análisis estadístico del modelo $\zeta = \zeta_0 + \zeta_1 H$, se encuentra que la mejor estimación es $\tilde{\zeta}_0 = 1.98 \pm 0.06$ usando los datos observacionales de supernovas, y $\tilde{\zeta}_0 = 0.10 \pm 0.04$ usando conjuntamente las tres pruebas SNe+CMB+BAO (en ambos casos asumiendo $\tilde{\zeta}_1 = 0$), que coincide precisamente con el intervalo $0 < \tilde{\zeta}_0 < 3$, lo cual es un hecho sobresaliente del modelo.

A partir de lo anterior se concluye lo siguiente: El modelo cosmológico cuya única componente es un fluido sin presión y con viscosidad volumétrica $\tilde{\zeta}_0$ constante, con valores en el intervalo $0 < \tilde{\zeta}_0 < 3$, es un candidato viable para explicar la aceleración de la

expansión del Universo y consistente con las observaciones cosmológicas de supernovas, del parámetro de corrimiento del CMB, del pico acústico de BAO, de la segunda ley de la termodinámica local y en concordancia con la cota observacional de la edad del Universo. El modelo soluciona además el problema de la “*constante cosmológica*” y el de la “*coincidencia cósmica*” debido a que logra explicar la aceleración, sin la necesidad de asumir la existencia de la componente de “energía oscura” o “constante cosmológica”.

Vale la pena recalcar los siguientes dos aspectos de la conclusión del modelo: (1) La mejor estimación de $\tilde{\zeta}_0$ calculada a partir de los datos observacionales (SNe y SNe+CMB+BAO) tiene un valor localizado *precisamente* en el intervalo $0 < \tilde{\zeta}_0 < 3$, que es el escenario que justamente describe *mejor* al Universo observado, de entre todos los otros escenarios. (2) La parametrización del modelo *es muy sencilla*, es decir, hay un *único* parámetro libre del modelo, $\tilde{\zeta}_0$, y cuyo valor es *constante*.

Uno de los aspectos a desarrollar del presente trabajo es el de proponer un modelo *microscópico* que pueda explicar el origen y composición de la viscosidad volumétrica en el fluido cosmológicos sin presión. Además, será importante estudiar las predicciones del modelo en base al espectro de potencias del CMB y la formación de estructura, que serían pruebas a realizarle en el futuro.

La organización del presente trabajo de tesis es la siguiente. En el capítulo 1 se describen los fundamentos y herramientas de la cosmología que serán de utilidad para entrar al estudio de los modelos con viscosidad. El capítulo 2 describe las pruebas cosmológicas empleadas para probar el modelo en estudio. El capítulo 3 muestra los elementos matemáticos de la estadística Bayesiana, que es uno de las herramientas para probar modelos cosmológicos usando datos observacionales. En el capítulo 4 se detalla el descubrimiento de la expansión acelerada del Universo, de cómo es que se llega a esa conclusión y se describe el modelo cosmológico estándar (Λ CDM) junto con sus problemas.

El capítulo 5 hace una revisión de la teoría de los fluidos con viscosidad volumétrica y la segunda ley de la termodinámica local. En el capítulo 6 se describe el análisis teórico realizado al modelo, su confrontación con observaciones cosmológicas, la restricción de sus posibles valores de los parámetros libres y se hace una discusión de los resultados. Finalmente, en el capítulo 7 se dan las conclusiones del trabajo.

Índice general

Resumen	III
1. Cosmología	1
1.1. ¿Qué es la cosmología?	1
1.2. Principio cosmológico.	2
1.3. La métrica de FRW	4
1.3.1. Vectores de Killing de la métrica FRW	5
1.4. Las componentes del Universo	6
1.5. Fluido perfecto y el tensor de energía-momento	8
1.5.1. Ecuación de conservación local de la materia	9
1.5.2. Ecuaciones de estado	10
1.6. Las ecuaciones de Friedmann	11
1.7. El parámetro de desaceleración	17
1.8. En resumen:	18
2. Pruebas cosmológicas	19
2.1. Las Supernovas	19
2.1.1. ¿Qué son las supernovas?	22
2.1.2. Relación entre el factor de escala y el redshift	23
2.1.3. Distancia de luminosidad	27
2.1.4. Luminosidad y flujo	28
2.1.5. La distancia modular.	30
2.2. Parámetro de corrimiento \mathcal{R} del CMB	32
2.3. Oscilaciones acústicas bariónicas	36
2.4. En resumen:	38
3. Estadística Bayesiana	41
3.1. Teoremas de probabilidad	42
3.2. Prueba χ^2	43
3.2.1. χ^2 como medida de calidad de ajuste	46
3.2.2. χ^2 por grados de libertad	47
3.3. Marginalización	47
3.3.1. FDP previa <i>constante</i> e integración analítica en SNe.	50
3.3.2. FDP previa <i>Gaussiana</i>	52
3.3.3. FDP previa <i>Delta de Dirac</i>	53
3.4. Prueba χ^2 usando SNe, CMB y BAO	54

3.5. En resumen:	55
4. Energía oscura y la expansión acelerada del Universo	57
4.1. Descubrimiento de la aceleración	57
4.2. ¿Cómo se sabe que el Universo se expande <i>aceleradamente</i> hoy?	59
4.2.1. ¿Hubo una transición “desaceleración-aceleración” en la historia pasada del Universo?	62
4.3. ¿Cómo se « <i>deduce</i> » que hay “energía oscura”?	62
4.4. Modelo cosmológico “ Λ CDM”	64
4.5. El problema de la constante cosmológica	66
4.5.1. Vacío cuántico y constante cosmológica.	68
4.5.2. Estimación de la densidad de energía del vacío cuántico.	70
4.6. El problema de la coincidencia cósmica	72
4.7. En resumen:	73
5. Fluidos imperfectos	75
5.1. Tensor de energía-momento de fluidos imperfectos	76
5.2. Fluidos imperfectos en cosmología.	78
5.3. Ecuaciones hidrodinámicas de los fluidos en Relatividad General.	80
5.4. Límite Newtoniano de las ecuaciones hidrodinámicas.	82
5.4.1. Ecuación de continuidad.	82
5.4.2. Ecuación de transferencia de calor.	84
5.4.3. Ecuaciones de Navier-Stokes.	85
5.5. Interpretación física de la viscosidad volumétrica.	87
5.5.1. Efecto de la viscosidad volumétrica en fluidos Newtonianos.	88
5.6. En resumen:	90
6. Modelos cosmológicos con viscosidad volumétrica	93
6.1. La ecuación de conservación local y el parámetro de Hubble.	94
6.2. El factor de escala.	96
6.3. Análisis del factor de escala	96
6.3.1. Caso (I) : $\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 = 3$	97
6.3.2. Caso (II) : $\tilde{\zeta}_0 < 0$, $\tilde{\zeta}_1 < 0$	97
6.3.3. Caso (III) : $\tilde{\zeta}_0 > 0$, $\tilde{\zeta}_1 < 0$	98
6.3.4. Caso (IV) : $\tilde{\zeta}_0 > 0$, $0 < \tilde{\zeta}_1 < 3$	104
6.3.5. Caso (V) : $\tilde{\zeta}_0 < 0$, $0 < \tilde{\zeta}_1 < 3$	108
6.3.6. Caso (VI) : $\tilde{\zeta}_0 > 0$, $\tilde{\zeta}_1 > 3$	108
6.3.7. Caso (VII) : $\tilde{\zeta}_0 < 0$, $\tilde{\zeta}_1 > 3$	110
6.3.8. Caso (VIII) : $\tilde{\zeta}_0 > 0$, $\tilde{\zeta}_1 = 3$	110
6.3.9. Caso (IX) : $\tilde{\zeta}_0 < 0$, $\tilde{\zeta}_1 = 3$	113
6.3.10. Caso (X) : $\tilde{\zeta}_0 = 0$, $\tilde{\zeta}_1 = 3$	113
6.3.11. Caso (XI) : $\tilde{\zeta}_0 = 0$, $\tilde{\zeta}_1 \neq 0$	115
6.3.12. Caso (XII) : $\tilde{\zeta}_0 \neq 0$, $\tilde{\zeta}_1 = 0$	117
6.4. La curvatura	123
6.4.1. La curvatura escalar R	123
6.4.2. El escalar $R^{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta}$	133

6.4.3. El escalar $R^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}$	134
6.5. Densidad de materia ρ_m	135
6.6. Pruebas cosmológicas	142
6.6.1. Supernovas, \mathcal{R} -CMB y A -BAO.	148
6.6.2. Termodinámica y la entropía local.	149
6.7. Discusión de los resultados	151
7. Conclusiones	157
A. Elementos de la métrica de FRW	161
B. Aproximación Newtoniana de Relatividad General.	165
B.1. Expansión de la cuadrivelocidad U^μ	170

Notación.

En el siguiente trabajo se utiliza la signatura: $(-, +, +, +)$. Los índices griegos indican las *componentes* de un tensor o vector en el *espacio-tiempo* 4-dimensional, mientras que los índices latinos indican las componentes espaciales solamente. Indices repetidos significa suma implícita.

A continuación se muestran los símbolos más relevantes o utilizadas a lo largo del texto junto con su significado:

<i>Símbolo</i>	<i>Significado</i>
\mathbb{R}	El conjunto de los reales.
R	Escalar de curvatura ($R \equiv R^\mu{}_\mu$).
\mathcal{R}	Parámetro de corrimiento del CMB.
\mathcal{M}	Variedad diferencial.
g	Métrica de un espacio-tiempo.
$g_{\mu\nu}$	Métrica o tensor métrico expresado en un sistema de coordenada. Estrictamente, $g^{\mu\nu}$ indica tan solo <i>una</i> de las <i>componentes</i> de la métrica g expresada en términos de un carta coordenada específica.
Σ_η	Hipersuperficie tipo <i>espacio</i> (<i>spacelike</i>) de 3 dimensiones.
U	Vector de cuadrivelocidad, tangente a una curva <i>timelike</i> y ortogonal a las hipersuperficies Σ_η
U^μ	Componentes del vector de cuadrivelocidad. U
τ	Tiempo <i>propio</i> .
P, Q	Puntos en una variedad \mathcal{M} .
$V_P(U)$	Conjunto de vectores ortogonales a U en el punto $p \in \mathcal{M}$.
s_1, s_2	Vectores tangentes a la hipersuperficie Σ_η y ortogonales a U . $s_1, s_2 \in V_p(U)$
k	Curvatura <i>espacial</i> del Universo (de la hipersuperficie <i>spacelike</i> Σ_η).
$a(t)$	Factor de escala.
(r, θ, ϕ)	Coordenadas esféricas.
$T_{\mu\nu}$	Tensor de energía-momento.
T	Traza del tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}$.
ρ	Densidad de materia-energía.
p	Presión hidrostática del fluido.
T_0	Temperatura.
ζ	Viscosidad volumétrica (" <i>bulk viscosity</i> ").
η	Viscosidad de corte (" <i>shear viscosity</i> ").
ν	Coefficiente de conducción de calor.
$P_{\mu\nu}$	Tensor de proyección ortogonal a U^μ .
Q_μ	Vector de flujo de calor.
$W_{\mu\nu}$	Tensor de corte (" <i>shear tensor</i> ").
s^μ	Vector de flujo de entropía local.
σ	Entropía por partícula.

<i>Símbolo</i>	<i>Significado</i>
H	Parámetro de Hubble.
H_0	Constante de Hubble.
Λ	Constante cosmológica.
c	Velocidad de la luz.
G	Constante gravitacional.
π	3.141591 ...
λ	Longitud de onda.
t	Coordenada temporal, tiempo.
z	Corrimiento al rojo (<i>redshift</i>).
μ	Distancia modular.
d_L	Distancia de luminosidad.
χ^2	Función estadística "ji cuadrada".
ϕ	Potencial gravitacional Newtoniano ($\nabla^2\phi = 4\pi G\rho$).
n	Densidad del número de partículas que componen un fluido.
ρ	Densidad de <i>masa</i> .

Capítulo 1

Cosmología

1.1. ¿Qué es la cosmología?

¿Cuál es el origen del Universo? ¿Cómo y cuándo nació? ¿De qué tamaño es? ¿Cuándo se acabará? ¿Qué lugar ocupamos en él? Estas son tal vez algunas de las preguntas que la humanidad se ha hecho más de una vez a lo largo de su historia, desde que el hombre existe. Estos son ejemplos de las primeras interrogantes *cosmológicas* que de manera natural el hombre se ha planteado desde sus orígenes.

Cosmología: del griego “*κοσμολογία*”; el vocablo se divide en “*κόσμος*” (*cosmos*) = Universo, y “*λογία*” (*logía*) = estudio. Se piensa que la palabra “*cosmología*” fue primeramente usada en 1731 por el filósofo alemán Christian Wolff en su tratado llamado “*Cosmologia generalis*” [2]. Sin embargo, el interés del ser humano en saber cual es el origen, evolución, tamaño, etc. del Universo, así como el lugar que el hombre ocupa en él, se remonta a los tiempos más antiguos. Desde entonces hasta la fecha, la mayoría de las antiguas civilizaciones, así como la moderna, han mantenido el interés en este tipo de preguntas y han desarrollado sus propias respuestas.

La cosmología podría definirse como la ciencia que se encarga del estudio del Universo, su origen, estructura, composición, forma, evolución, destino y de las leyes que la gobiernan en grandes escalas de espacio y tiempo. A diferencia de la astronomía, la cosmología estudia la estructura *global* del Universo. Toma en cuenta a las estructuras locales que la componen, tales como las galaxias, estrellas, nebulosas, agujeros negros, planetas, etc¹, pero las ve tan solo como las “*partículas*” que constituyen al Universo como un todo, y que al tomar su comportamiento global, logra determinar características a gran escala del Universo.

En estas escalas, la gravedad es la interacción más importante (por no decir, totalmente dominante) que gobierna la dinámica del Universo, en comparación con las otras tres fuerzas fundamentales. Es por ello que los modelos cosmológicos de hoy en día están cimentados sobre la Teoría General de la Relatividad de Einstein (GR), que da una posible explicación de lo que es la gravedad y de cómo se comporta. La cosmología se considera una de las aplicaciones más importantes de esta teoría.

Bajo la perspectiva de GR, la mayoría de los modelos cosmológicos consideran al Universo como un *espacio-tiempo 4-dimensional*², con tres dimensiones para la parte espacial

¹Estos son ejemplos de los objetos celestes que estudian la astronomía y la astrofísica.

²Existen modelos cosmológicos que asumen la existencia de más de 4 dimensiones, tales como las *Teorías*

y una para la temporal, que es curvado por la presencia de la masa-energía que el Universo contiene y cuya geometría está descrita por un *tensor métrico* $g_{\mu\nu}$ (comúnmente llamado “la métrica”).

Antes de continuar conviene mencionar algo sobre la nomenclatura usada en el presente trabajo. Los subíndices o superíndices *griegos* corresponden a las componentes *cuadriddimensionales* de la métrica, y adoptamos la convención de suma implícita de Einstein donde índices repetidos indicarán *suma* de componentes, a menos que se indique explícitamente lo contrario. Además, también se emplean sub/superíndices *latinos* que corresponden a las componentes *espaciales* de la métrica.

1.2. Principio cosmológico.

La cosmología se basa en el “*Principio de Copérnico*” que nace de la intuición y que las observaciones astronómicas modernas del Universo han ido corroborando con gran precisión. Actualmente llamado el “**Principio cosmológico**” éste se enuncia como:

“***El Universo es homogéneo e isotrópico espacialmente a escalas cosmológicas.***”

Vale la pena resaltar que solamente la parte *espacial* del Universo es homogéneo e isotrópico. A continuación se va a precisar estos conceptos.

Desde la perspectiva de la Teoría General de la Relatividad de Einstein (GR), el Universo es un *espacio-tiempo* que matemáticamente es representado por una variedad \mathcal{M} y una métrica asociada g , lo cual se denota de forma compacta como (\mathcal{M}, g) .

Para definir formalmente los conceptos de “*homogeneidad e isotropía espacial*” del Universo, considere una familia de hipersuperficies *tipo-espacio* (*spacelike*) Σ_η que folean todo el espacio-tiempo. Cada uno de los elementos de ésta familia (es decir, cada una de estas hipersuperficies *spacelike*) es etiquetado a través de un parámetro continuo $\eta \in \mathbb{R}$, de tal forma que para cada valor de η , se está eligiendo una hipersuperficie Σ_η en particular (ver figura 1.1).

Entonces, un espacio-tiempo es *espacialmente homogéneo* si existe una familia de hipersuperficies *tipo-espacio* Σ_η que folean todo el espacio-tiempo de tal forma que para cada η y para cualesquiera dos puntos $P, Q \in \Sigma_\eta$, existe una isometría de la métrica del espacio-tiempo, g , la cual lleva P a Q (ver sección 8.1 de [3], sección 6.9 de [4] y sección 5.1 de [5]).

Considere también una *congruencia* de curvas tipo-tiempo (*timelike*) en \mathcal{M} , es decir, una familia de curvas que llenan a toda la variedad \mathcal{M} , y tales que a través de cada punto $P \in \mathcal{M}$ pasa una curva de ésta familia (una curva *timelike*). En cada punto P de estas curvas tipo-tiempo se puede definir un vector tangente, que denotaremos como U . Además se puede definir también un conjunto $V_P(U)$ formado de vectores ortogonales a U en el punto P .

Se define también cierta clase de observadores que tiene la característica de que son los únicos que ven al Universo homogéneo e isotrópico, son llamados “*observadores comóviles*” y siguen justamente la congruencia de curvas tipo-tiempo (*timelike*) en la variedad \mathcal{M} , es decir, las trayectorias de estos observadores coinciden con las líneas tipo-tiempo de la congruencia.

de Branas o de dimensiones extras.

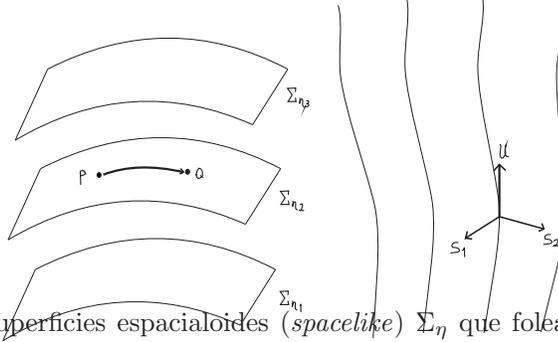


Figura 1.1: Hipersuperficies espaciales (*spacelike*) Σ_η que follean toda la variedad \mathcal{M} (izquierda) y *congruencia* de curvas temporales (*timelike*) que llenan toda la variedad \mathcal{M} (derecha).

Entonces, un espacio-tiempo es *espacialmente isotrópico* en cada punto del mismo, si este espacio-tiempo es llenado por una *congruencia* de curvas *timelike* (con vectores tangentes U en cada punto de cada curva), que satisfacen la propiedad de que dado cualquier punto P y dados cualesquiera dos vectores unitarios tangentes *espaciales*³ $s_1, s_2 \in V_P(U)$, existe una isometría de g la cual deja a P y al vector U (situado en P) fijos, pero rota s_1 hacia s_2 (ver figura 1.1, sección 8.1 de [3], sección 6.9 de [4] y sección 5.1 de [5]).

Debido a esta isometría de g y dado que s_1 y s_2 son arbitrarios es que en una variedad \mathcal{M} espacialmente isotrópica *no es posible* construir un vector tangente $s_3 \in V_P(U)$ «preferido», lo cual implicaría una dirección privilegiada que estaría en contradicción con la isotropía espacial de la variedad.

Dicho de otra forma, la “*isotropía espacial*” significa que el Universo tiene el mismo aspecto y propiedades *en cualquier dirección*, visto por un observador comóvil situado en un punto P arbitrario en el Universo. “*Homogeneidad espacial*” se refiere a que el espacio tiene las mismas características, medidas por un observador comóvil, sin importar el *lugar* en el Universo en el que se encuentre. “*Escalas cosmológicas*” se refiere a que en el Universo se observa esta homogeneidad e isotropía pero solo cuando se le estudia a grandes escalas (del orden de *megaparsecs*⁴).

A pesar de su sencillez, éste principio tiene importantes implicaciones e impone restricciones muy fuertes a cualquier teoría que pretenda describir al Universo. Por mencionar algunas consecuencias, el principio cosmológico implica que no podemos definir un “*centro*” u “*orillas*” al Universo y que no ocupamos ningún lugar privilegiado dentro de él.

Una de las observaciones que sustentan fuertemente al principio cosmológico es la impresionante isotropía observada en la *radiación de microondas cósmica de fondo* (“CMB”, de sus siglas en inglés) que permea todo el Universo hasta ahora observado. Actualmente esta radiación tiene asociada una temperatura de ≈ 2.7 K y sus variaciones son de apenas 10^{-4} Kelvins solamente [6].

³Por “*espaciales*” se refiere a que son ortogonales al vector U .

⁴Un megaparsec se denota como “Mpc” y equivale a 3.0856776×10^{19} km.

1.3. La métrica de FRW

De las posibles métricas que pudieran proponerse para describir al Universo, la única que es compatible con el principio cosmológico de isotropía y homogeneidad espacial a gran escala es la *métrica de Friedmann-Robertson-Walker* (FRW).

Sin embargo, puede surgir la pregunta “¿existirá alguna otra métrica distinta a la de FRW y que también sea espacialmente isotrópica y homogénea?”. De existir, tendría que también estudiarse para conocer las predicciones que esta otra métrica hace del Universo (pudiendo darse el caso que esté en contradicción con las predicciones de la métrica de FRW).

La respuesta es “No”. No existe ninguna otra métrica distinta a la de FRW que también sea espacialmente isotrópica y homogénea. La *única* métrica posible que se obtiene de considerar una variedad \mathcal{M} con isotropía y homogeneidad espacial es la métrica de FRW, no existe ninguna otra que pueda contener al principio cosmológico distinta a la de FRW.

En coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) y en términos del elemento diferencial de línea ds^2 , la métrica de FRW se expresa como

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right], \quad (1.1)$$

donde la función $a(t)$ es llamada el *factor de escala*. El coeficiente k es un factor que toma en cuenta la curvatura *espacial* del Universo, que además es *constante*, es decir, no cambia en el tiempo y espacio, así que una vez determinado su valor, este será el mismo a lo largo de toda la evolución del Universo. Dependiendo del valor de k el Universo puede ser de tres tipos llamados comúnmente como *cerrado*, *abierto* o *plano*, de acuerdo a si la curvatura espacial es *positiva*, *negativa* o *nula*, respectivamente (ver cuadro 1.1).

La curvatura espacial (el valor de k) queda determinada a través del contenido de materia-energía en el Universo, es decir, de la abundancia *total* de cada una de las distintas componentes de materia-energía que lo componen. En la sección 1.6 se discutirá con más detalle este aspecto. No obstante cabe mencionar ahora que las observaciones cosmológicas más recientes, principalmente de las anisotropías del CMB realizadas por el satélite WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe) durante 7 años, sugieren que el valor de k es prácticamente cero, esto es, que el Universo es espacialmente plano [6].

Una de las predicciones que se pueden obtener de la métrica de FRW es la expansión del Universo, cuantificada a través del factor de escala $a(t)$, el cual es un elemento central de esta métrica ya que permite cuantificar la evolución del Universo y su expansión. Esta función representa la *distancia comóvil* entre dos puntos en el Universo, es decir, la distancia entre dos puntos comóviles arbitrarios que se van alejando entre sí conforme el Universo se expande. Al inicio del Universo, en la época del *Big-Bang*⁵ se considera que ésta distancia es cero, esto es, $a = 0$. A partir de este momento la distancia entre los dos puntos, es decir, el factor de escala, comienza a aumentar debido a la expansión del

⁵Esta afirmación del Big-Bang es solo válida para el caso en que el modelo cosmológico prediga la existencia de un Big-Bang como inicio del Universo, ya que existen modelos cosmológicos que no predicen ningún Big-Bang, o que el valor del factor de escala nunca ha llegado a ser cero.

En el presente trabajo el Big-Bang se define como el estado del Universo en el cual el escalar de curvatura del espacio-tiempo R y de la densidad de masa-energía ρ son singulares cuando el factor de escala es cero, en el pasado del Universo.

k	Densidad crítica	Curvatura espacial	Tipo Universo
$k > 0$	$\rho > \rho_{\text{crit}}$	positiva	cerrado
$k < 0$	$\rho < \rho_{\text{crit}}$	negativa	abierto
$k = 0$	$\rho = \rho_{\text{crit}}$	nula	plano

Cuadro 1.1: Distintas geometrías espaciales del Universo dependiendo del valor del factor de curvatura espacial k , o de la densidad de masa-energía ρ total del Universo en comparación con el valor de la *densidad crítica*, que se define como $\rho_{\text{crit}} \equiv 3H^2/(8\pi G)$ (en la sección 1.6 se discutirá en detalla el concepto de densidad y densidad crítica en el Universo).

Universo. Hoy en día el valor del factor de escala se denota como “ a_0 ” y comúnmente se normaliza a $a_0 = 1$. En el caso en que la expansión continúe por siempre en el futuro, entonces a medida que el tiempo $t \rightarrow \infty \Rightarrow a \rightarrow \infty$.

Escribiendo explícitamente las componentes del tensor métrico $g_{\mu\nu}$ de la métrica de FRW en forma matricial [ver ecuación (1.1)], tenemos:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2/(1 - kr^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

El determinante de este tensor esta dado por:

$$g \equiv \det g_{\mu\nu} = -\frac{a^6 r^4 \sin^2 \theta}{1 - kr^2}. \quad (1.3)$$

1.3.1. Vectores de Killing de la métrica FRW

Como se mencionó anteriormente, la métrica asociada al Universo a nivel cosmológico es la métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW), la cual es la métrica natural que surge de tomar en cuenta el principio cosmológico.

Otra forma de considerar matemáticamente la isotropía es a través de la condición de que las ecuaciones de la teoría deben ser *invariantes ante rotaciones espaciales*, es decir, que si nos situamos en algún punto P en la hipersuperficie Σ_η en donde establecemos una *carta coordenada* (un sistema de referencia), podemos rotar en cualquier dirección y no habrá ningún cambio en las ecuaciones. De hecho, las ecuaciones no dependen de ninguna dirección preferida (ya que ésta dirección “*preferida*” no se ha observado hasta ahora en el Universo en gran escala).

Y para la homogeneidad se puede establecer como la *invariancia ante translaciones espaciales*, es decir, que si consideramos las ecuaciones en dos puntos arbitrarios distintos P y Q de la hipersuperficie Σ_η , las ecuaciones no cambiarán su forma; las ecuaciones no tendrán ninguna dependencia del punto en el que estemos situados a un tiempo fijo, o en la dirección en la que observemos.

Se dice entonces que el espacio-tiempo (\mathcal{M}, g) es invariante bajo un grupo uniparamétrico si se satisface:

$$\mathcal{L}_\varepsilon g = 0, \quad (1.4)$$

CAPÍTULO 1. COSMOLOGÍA

1.4. LAS COMPONENTES DEL UNIVERSO

es decir, la derivada de Lie de la métrica con respecto al campo vectorial ε es cero. Aquí el grupo uni-paramétrico es generado por el campo vectorial ε llamado *campo vectorial de Killing* de la métrica.

Invariancia bajo un grupo tres-paramétrico de rotaciones espaciales (isotropía) implica la existencia de un espacio vectorial de Killing de dimensión tres de la métrica de FRW expresada en (1.1), los cuales se escriben como:

$$\varepsilon_1 = \cos(\phi)\partial_\theta - \cot(\theta)\sin(\phi)\partial_\phi, \quad (1.5)$$

$$\varepsilon_2 = \sin(\phi)\partial_\theta + \cot(\theta)\cos(\phi)\partial_\phi, \quad (1.6)$$

$$\varepsilon_3 = \partial_\phi. \quad (1.7)$$

La invariancia bajo un grupo tres-paramétrico de traslaciones espaciales (homogeneidad) implica la existencia de otro espacio-vectorial de vectores de Killing de dimensión tres de la métrica de FRW, dada por la expresión (1.1), los cuales se escriben como:

$$\varepsilon_4 = \frac{1}{f(r)} \left[\sin(\theta)\cos(\phi)\partial_r + \frac{\cos(\theta)\cos(\phi)}{r}\partial_\theta - \frac{\sin(\phi)}{r\sin(\theta)}\partial_\phi \right], \quad (1.8)$$

$$\varepsilon_5 = \frac{1}{f(r)} \left[\sin(\theta)\sin(\phi)\partial_r + \frac{\cos(\theta)\sin(\phi)}{r}\partial_\theta + \frac{\cos(\phi)}{r\sin(\theta)}\partial_\phi \right], \quad (1.9)$$

$$\varepsilon_6 = \frac{1}{f(r)} \left[\cos(\theta)\partial_r - \frac{\sin(\theta)}{r}\partial_\theta \right]. \quad (1.10)$$

donde la función $f(r)$ es:

$$f(r) = \frac{1}{1 - kr^2}. \quad (1.11)$$

No existe ninguna otra métrica distinta a la de FRW que posea estas simetrías.

1.4. Las componentes del Universo

Los principales tipos de materia que se piensa constituyen el Universo, y que se utilizan más comúnmente en los modelos cosmológicos actualmente son:

Materia bariónica También llamada *materia luminosa* o “materia conocida” ya que está constituida por bariones⁶ tales como el protón y el neutrón, así como de electrones (que son leptones). En general esta formada por los *fermiones* del *Modelo Estándar* de Física de Partículas.

Se ha encontrado que el Universo hasta ahora observado es eléctricamente neutro, por lo que se considera que hay igual cantidad de protones que de electrones. Sin embargo, el protón y el neutrón son aproximadamente 2000 veces *más pesados*⁷ que el electrón, por tanto su contribución a la cantidad total de materia bariónica domina por encima de la del electrón. Es por eso que comúnmente en cosmología esta componente es llamada simplemente materia “bariónica”, a pesar de que también se toman en cuenta a los electrones y demás partículas, en ésta componente.

⁶Partículas compuestas por tres quarks.

⁷Masas. *protón*: 938.272 MeV/c²; *neutrón*: 939.565 MeV/c²; *electrón*: 0.510 MeV/c².

Esta materia se encuentra principalmente en las estructuras observadas en el Universo tales como estrellas, galaxias, nebulosas, polvo interestelar, etc.

Según algunos modelos cosmológicos⁸ la proporción total de materia bariónica en el Universo *hoy en día*⁹ es de apenas $\sim 4.6\%$.

Radiación electromagnética También llamada la radiación cósmica de fondo (CMB), permea todo el Universo de forma altamente isotrópica. La distribución espectral de esta radiación corresponde, con una enorme precisión, a la de un *cuerpo negro* con una temperatura de 2.725 K [6]. El pico de la curva Planckiana asociada con esta temperatura está localizado en la región de *microondas* , en la frecuencia de 160.2 GHz, que corresponde a una longitud de onda de 1.872 mm.

Se estima que su abundancia hoy en día es muy pequeña, de apenas $\sim 0.005\%$ de la densidad de la materia-energía presente en el Universo.

Materia oscura o materia que no emite radiación electromagnética. Esta materia solo se ha podido medir a través de sus efectos gravitacionales en los *halos* de galaxias y cúmulos de galaxias, usando las *curvas de rotación* galácticas. Del total de masa medida en una galaxia a través de efectos gravitacionales, el $\sim 90\%$ es materia oscura. Se desconoce aún mucho sobre su naturaleza, no se sabe de qué está constituida, cómo surgió, etc. Por ahora se piensa que solo interactúa gravitacionalmente, que las partículas que la componen deben ser eléctricamente neutras y que no está hecha de algún tipo de partícula del Modelo Estándar hasta conocida u experimentalmente observada. Hoy en día es un problema abierto. Las estimaciones actuales de la abundancia de esta materia sugieren que es $\sim 23.3\%$ de la proporción total de materia en el Universo actual [6].

Energía oscura La naturaleza de la *energía oscura* es un total enigma hoy en día. “Energía oscura” es el nombre genérico que comúnmente se utiliza para denominar al responsable de la presente expansión *acelerada* del Universo, descubierta inicialmente por Adam Riess et al. [7] en 1998 y confirmada meses más tarde por Perlmutter et al. [8]. De los diferentes modelos que buscan explicar la expansión acelerada, el más favorecido por las observaciones es la llamada “ *constante cosmológica* ”. En el capítulo 4 se describirá con más detalle esta componente. Según el modelo Λ CDM su abundancia se estima que es del orden de $\sim 72.1\%$ de la densidad total de materia-energía presente en el Universo [6], por lo que se considera que ésta es la componente dominante hoy en día. Tomando en cuenta a la materia oscura, resulta que el 95.4% del Universo está constituido de materia-energía desconocida según este modelo. Es importante recalcar que la “energía oscura” es algo distinto a la “materia oscura”, como se mencionó en el punto anterior, la *materia oscura* es un cierto tipo de densidad de materia descubierta en los *halos galácticos* . Mientras que la energía oscura se

⁸Tal como el modelo cosmológico llamado Λ CDM: “materia oscura fría con constante cosmológica”. Este modelo es el más favorecido por las observaciones. En la sección 4.4 se explica con detalle.

⁹Se remarca que este valor es el estimado *hoy en día* ya que hubo una época del Universo en el cual la densidad de materia bariónica fue prácticamente el 100%. Lo mismo ha pasado con las demás componentes de materia, es decir, la proporción de cada una de las componentes de materia en el Universo ha ido cambiando a lo largo del tiempo conforme el Universo se ha ido expandiendo; excepto la componente de energía oscura, según algunos modelos.

piensa que es la responsable de la presente *aceleración* en la expansión del Universo.

1.5. Fluido perfecto y el tensor de energía-momento

Una de las maneras de modelar el contenido material del Universo en cosmología es considerar a cada una de las componentes que lo constituyen (es decir, la materia bariónica, oscura, radiación¹⁰, energía oscura) como *fluidos*, caracterizados por cantidades macroscópicas tales como densidad, presión, temperatura, entropía, viscosidad, etc.

Por ejemplo, todas las estructuras conocidas tales como las galaxias, cúmulos de galaxias, etc., pueden considerarse cada una de ellas, *vistas a gran escala*, como *partículas* de un fluido, que sería el fluido de materia bariónica.

A pesar de que cada partícula del fluido tiene su propia velocidad, el fluido como un todo (a nivel cosmológico) tiene su propio campo de velocidades *global*.

Para poder caracterizar las propiedades físicas de estos fluidos se define el *tensor de energía-momento* $T^{\mu\nu}$ para cada uno de ellos. Este tensor contiene toda la información relativa a la energía del fluido tal como la densidad de energía, la presión, estrés, etc. Las componentes T^{00} y T^{ii} corresponden a la *densidad de energía* ρ y la componente de la presión p^k del fluido en cuestión respectivamente. El superíndice k sobre la presión denota a la componente de la presión en la dirección \hat{k} . T^{0i} corresponde a la *densidad de momento*, y los elementos T^{ij} son el *flujo de momento*, caracterizando a la viscosidad, intercambio de calor, etc. que pueda haber en el fluido.

Un caso particular de fluidos muy útiles en cosmología son los llamados *fluidos perfectos* que permiten aproximar en buena medida el comportamiento de los fluidos cosmológicos, por ser homogéneos e isotrópicos¹¹.

Un *fluido perfecto* se define como aquel en el cual un observador que se mueva con el fluido (un observador comóvil) verá al fluido alrededor de él *isotrópico*. En otras palabras, supongamos un fluido que tiene una cierta velocidad en cualquier punto de él, el fluido es *perfecto* si un observador con la misma velocidad (comóvil) ve el fluido isotrópico. Esto será el caso si el tiempo y camino libres medios entre colisiones son muy pequeños comparados con las escalas usadas por el observador.

Los fluidos perfectos se distinguen por ser caracterizados por tan solo dos únicas componentes, su densidad ρ y su presión p , medidos en el marco de referencia en reposo del fluido.

Respecto a “ p ”, ésta cantidad caracteriza a la presión en *cualquier dirección* en el fluido, es decir, es una medida de una presión *isotrópica*, en el marco de referencia en reposo. Dada esta isotropía de la presión, todos los términos T^{ii} son iguales a p , es decir $T^{11} = T^{22} = T^{33} = p$ (o equivalentemente, $p^1 = p^2 = p^3 = p$), además implica que no hay flujo de partículas (de momento), por lo cual los elementos T^{ij} son cero (con $i \neq j$); esto, en el marco de referencia en reposo del fluido. Por tanto, el tensor de energía-momento para un fluido perfecto tiene la forma

¹⁰La radiación puede ser tratada como un *gas de fotones* (tal como lo hace la mecánica estadística), donde es posible medir en este “gas” propiedades termodinámicas tales como densidad, presión, temperatura, etc.

¹¹Un tipo más general de fluidos homogéneos e isotrópicos son los fluidos con *viscosidad volumétrica*, que serán estudiados en los capítulos 5 y 6.

$$T^{\mu\nu} = \rho U^\mu U^\nu + p(g^{\mu\nu} + U^\mu U^\nu), \quad (1.12)$$

donde $g_{\mu\nu}$ es el *tensor métrico* y U^μ es la cuadrivelocidad de un observador comóvil que se define como

$$U^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (1.13)$$

donde τ es el tiempo propio. Los observadores comóviles se mueven junto con la contracción o expansión del fluido de tal forma que siempre guardan sus mismas coordenadas comóviles; en el contexto cosmológico, en ocasiones son referidos como *observadores fundamentales*, ya que son ellos los que ven al Universo isotrópico y homogéneo a gran escala. Normalizando las cuadri-velocidades comóviles, se tiene: $U^\nu U_\nu = -1$. De aquí que

$$U^\mu = (1, 0, 0, 0), \quad U_\nu = (-1, 0, 0, 0). \quad (1.14)$$

en el sistema de referencia comóvil. La traza T de $T^{\mu\nu}$ es:

$$T = \text{Tr}(T^\mu{}_\mu) = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = T^\mu{}_\mu = 3p - \rho. \quad (1.15)$$

Vale la pena recalcar que como se mencionó en la sección 1.4, el Universo está compuesto de varios tipos de materia (por ejemplo, materia bariónica, oscura, etc.), es decir, esta compuesto por *diversos* fluidos, *cada uno de ellos* con su propia densidad ρ_k y presión p_k (donde el subíndice k denota a cada uno de los tipos de fluido en particular) y por ende, también su propio tensor de energía-momento.

1.5.1. Ecuación de conservación local de la materia

A partir del tensor de energía-momento (1.12) y usando la identidad de Biachi es posible tener una ecuación que comúnmente es llamada la “ecuación de conservación *local* de masa-energía”. Esta ecuación se expresa como

$$\nabla_\mu T^\mu{}_\nu = 0, \quad (1.16)$$

y es obedecida *individualmente* por cada una de las diferentes componentes de materia-energía presentes en el Universo.

El nombre de “ecuación de conservación local” viene del hecho de que en un marco de referencia inercial local, lo que se obtiene de la expresión (1.16) si corresponde verdaderamente a una ecuación de conservación para la masa-energía. Sin embargo, para el caso con curvatura (de todo el espacio-tiempo, como es el caso de la cosmología) la expresión (1.16) no corresponde a una “ecuación de conservación” realmente, es en cierta forma un abuso de lenguaje, ya que la densidad de materia-energía de la materia no se conserva (ver [9], sección 22.2).

La componente temporal de (1.16) permite tener una ecuación de conservación de materia que relaciona la evolución temporal de ρ con su presión p y la expansión del Universo caracterizada por el factor de escala a .

Entonces, tomamos la componente temporal t de la ecuación (1.16), es decir, $\nabla_\mu T^\mu{}_t = 0$. Expresamos explícitamente esta derivada covariante como:

CAPÍTULO 1. COSMOLOGÍA

1.5. FLUIDO PERFECTO Y EL TENSOR DE ENERGÍA-MOMENTO

$$\partial_\mu T^\mu_t + \Gamma^\mu_{\mu\lambda} T^\lambda_t - \Gamma^\lambda_{\mu t} T^\mu_\lambda = 0, \quad (1.17)$$

donde $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$ son los símbolos de Christoffel usuales. Usando el hecho de que el tensor T^μ_ν de un fluido perfecto es diagonal en el sistema de referencia comóvil, los únicos términos diferentes de cero de T^μ_ν son los elementos de la diagonal. Con esto, la ecuación (1.17) se expresa

$$\partial_t T^t_t + \Gamma^\mu_{\mu t} T^t_t - \Gamma^r_{rt} T^r_r - \Gamma^\theta_{\theta t} T^\theta_\theta - \Gamma^\phi_{\phi t} T^\phi_\phi = 0. \quad (1.18)$$

A partir del tensor métrico de FRW (1.2) se pueden calcular las expresiones para los símbolos de Christoffel. En el apéndice A se muestran todos los elementos distintos de cero para la métrica de FRW. Para la ecuación (1.18) los elementos de interés son

$$\Gamma^r_{rt} = \Gamma^\theta_{\theta t} = \Gamma^\phi_{\phi t} = \frac{\dot{a}}{a} \quad \text{y} \quad \Gamma^t_{tt} = 0, \quad (1.19)$$

donde el punto sobre “a” indica derivada temporal. Usando estos valores en la ec. (1.18) y tomando los elementos de T^μ_ν a partir de la matriz (A.5), obtenemos:

$$\begin{aligned} -\partial_t \rho + \Gamma^r_{rt}(3T^t_t - T^r_r - T^\theta_\theta - T^\phi_\phi) &= 0, \\ -\dot{\rho} + \frac{\dot{a}}{a}(-3\rho - 3p) &= 0. \end{aligned}$$

Por tanto, se llega a la expresión que es llamada la “*ecuación de conservación local de materia-energía*”:

$$\boxed{\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0.} \quad (1.20)$$

Esta ecuación es cumplida *individualmente* por cada uno de los diferentes fluidos presentes en el Universo.

Como se mencionó al inicio de esta sección, la expresión (1.20) no es estrictamente hablando, una “ecuación de conservación” dado que la densidad de materia-energía no se conserva. Por dar un ejemplo, en la siguiente sección se demostrará que para el caso de la materia bariónica, usando la expresión (1.20), la evolución de la densidad bariónica se expresa como: $\rho_b(a) = \rho_{b0}/a^3$ [ver expresiones (1.41) y (1.42)]. Conforme el Universo se expande el factor de escala a incrementa su valor y por tanto la densidad bariónica $\rho_b(a)$ no se conserva.

1.5.2. Ecuaciones de estado

Observacionalmente se ha encontrado que los fluidos más relevantes en cosmología tales como la materia bariónica, oscura, radiación, así como teóricamente la constante cosmológica, tienen cada una de forma independiente, una *ecuación de estado* muy sencilla¹² que relaciona a la presión del fluido con su densidad de forma lineal y que puede

¹²Existen una gran cantidad de posibles ecuaciones de estado para un fluido, que relacionan de forma funcional la presión, densidad, temperatura, entropía, número de partículas, etc., en ecuaciones que podrían ser complicadas. Sin embargo, para los fluidos cosmológicos se ha encontrado observacionalmente que sus ecuaciones de estado son barotrópicas lineales esencialmente como lo es la ecuación (1.21).

expresarse de manera concisa como

$$p = w \rho \tag{1.21}$$

donde el factor w es una constante de proporcionalidad adimensional¹³. Esta expresión suele ser llamada por los cosmólogos como una *ecuación de estado barotrópica* por relacionar linealmente la presión del fluido con su densidad. Cada uno de los fluidos que constituyen al Universo tienen asociado su propia ecuación de estado de la forma (1.21), donde la diferencia entre un fluido y otro recae esencialmente en el valor de w . Por dar una idea del valor de este factor, se muestra la siguiente tabla:

<i>tipo de materia</i>	<i>w</i>
Materia bariónica y oscura	0
Radiación	1/3
Constante cosmológica	-1

Para el caso de las componentes de materia bariónica y oscura, se ha observado que la presión de estas componentes es tan pequeña que puede considerarse cero (sin que esto implique que la densidad sea cero). Esta observación se establece en la ecuación (1.21) a través de fijar: $w = 0$. Comúnmente los fluidos que tienen la característica de $p = 0$ son llamados “*polvo*”.

Para el caso de la energía oscura, si se asume que esta es la constante cosmológica, entonces se tiene que su ecuación de estado es $p = -\rho$ (es decir, $w = -1$).

1.6. Las ecuaciones de Friedmann

Las dos ecuaciones de Friedmann son expresiones centrales de la cosmología. Permiten estudiar de manera cuantitativa la evolución, composición, geometría y dinámica del Universo. En los siguientes capítulos se hará amplio uso de ellas. Para deducirlas partimos de las ecuaciones de Einstein,

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right), \tag{1.22}$$

donde $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci, T es la traza de $T_{\mu\nu}$, G es la constante gravitacional de Newton y $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momento *total* del Universo, que resulta de la suma de todos los tensores de energía-momento individuales de cada una de las componentes de materia-energía que un modelo cosmológico dado considere que están presentes en el Universo, es decir,

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^b + T_{\mu\nu}^{mo} + T_{\mu\nu}^r + T_{\mu\nu}^\Lambda + \dots \tag{1.23}$$

donde los superíndices “b”, “mo”, “r”, “Λ” denotan “materia bariónica”, “materia oscura”, “radiación” y “energía oscura (como constante cosmológica)” respectivamente. Los puntos suspensivos indican cualquier otro tipo de materia o energía adicional que algún modelo

¹³En la ecuación (1.21) se ha asumido un valor de la velocidad de la luz $c = 1$. La expresión completa es $p = c^2 w \rho$.

CAPÍTULO 1. COSMOLOGÍA

1.6. LAS ECUACIONES DE FRIEDMANN

cosmológico pudiera proponer, por ejemplo, gas de Chaplygin (ver por ejemplo [10] sus referencias), campos escalares como quintaesencia (por ejemplo [11]), etc.

Calculamos primero solo la componente temporal de la ecuación (1.22). Para ello se usan las componentes del tensor $T_{\mu\nu}$, los elementos de la matriz (1.2) para $g_{\mu\nu}$ y traza (A.6) para T . Sustituimos en la ecuación (1.22) y obtenemos:

$$R_{tt} = 8\pi G \left[\rho + \frac{1}{2}(3p - \rho) \right] = \frac{8\pi G}{2}(3p + \rho), \quad (1.24)$$

donde ρ y p denotan la densidad y presión *total* del conjunto de fluidos que conforman al Universo, esto es,

$$\rho = \rho_b + \rho_{mo} + \rho_r + \rho_\Lambda + \dots \quad (1.25)$$

$$p = p_b + p_{mo} + p_r + p_\Lambda + \dots \quad (1.26)$$

Por otra parte, es posible calcular las componentes de $R_{\mu\nu}$ a partir de la métrica de FRW. Se encuentra que $R_{tt} = -3(\ddot{a}/a)$ [cf. expresiones (A.36) del apéndice A], los dos puntos sobre “ a ” significan segunda derivada temporal. Por tanto:

$$\boxed{\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(3p + \rho)} \quad (1.27)$$

Esta ecuación es llamada la *segunda ecuación de Friedmann*. La primera ecuación, o más brevemente, la *Ecuación de Friedmann* se deriva a partir de la segunda de la siguiente forma. Se toma ahora la componente radial de la ecuación (1.22). Con la ayuda de las componentes radiales de las matrices (1.2) y $T^{\mu\nu}$, la ecuación (1.22) resulta

$$R_{rr} = 8\pi G \frac{a^2}{1 - kr^2} \left[p - \frac{1}{2}(3p - \rho) \right], \quad (1.28)$$

donde k el factor de la curvatura espacial (ver sección 1.3). De calcular R_{rr} se encuentra que [ver expresión (A.36)]:

$$R_{rr} = \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{1 - kr^2}, \quad (1.29)$$

igualando estas dos expresiones obtenemos

$$\frac{\ddot{a}}{a} + 2 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{2k}{a^2} = 4\pi G(\rho - p). \quad (1.30)$$

Sustituyendo la segunda ecuación de Friedmann (1.27) en esta última expresión:

$$\begin{aligned} 2 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{2k}{a^2} &= 4\pi G(\rho - p) + \frac{4\pi G}{3}(3p + \rho), \\ &= \frac{4\pi G}{3}(3\rho - 3p + \rho + 3p), \\ &= \frac{4\pi G}{3}4\rho, \\ \Rightarrow \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} &= \frac{8\pi G}{3}\rho. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Se define el **parámetro de Hubble** como

$$H(t) \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \quad (1.32)$$

donde “ t ” es el tiempo cósmico. Con esto, la ecuación (1.31) llega a ser

$$H^2(t) = \frac{8\pi G}{3}\rho(t) - \frac{k}{a^2(t)} \quad (1.33)$$

Esta es la primera ecuación de Friedmann, o simplemente la *Ecuación de Friedmann*.

De las otras dos componentes del tensor de Ricci (es decir, $R_{\theta\theta}, R_{\phi\phi}$) se obtiene la misma expresión (1.30).

Existen otras dos maneras muy útiles de expresar esta ecuación. Una de ellas es a través de los *parámetros de densidad* Ω_i para cada una de las componentes de materia presentes en el Universo. Estos se definen como

$$\Omega_i \equiv \frac{\rho_i}{\rho_{\text{crit}}} \quad (1.34)$$

donde ρ_i es la densidad de materia-energía de la i -ésima componente de materia del Universo (por ejemplo, materia bariónica, oscura, etc.) y ρ_{crit} es *densidad crítica* que a su vez se define como

$$\rho_{\text{crit}}(t) \equiv \frac{3H^2(t)}{8\pi G} \quad (1.35)$$

que proviene de asumir que la curvatura espacial del Universo es cero [$k = 0$ en la ecuación (1.33)]. Cuando la densidad total de la materia-energía ρ en el Universo es *igual* al valor de la densidad crítica, entonces resulta que el Universo es espacialmente *plano*. Si $\rho > \rho_{\text{crit}}$ entonces el Universo es espacialmente cerrado, y si $\rho < \rho_{\text{crit}}$ es abierto (ver cuadro 1.1).

La densidad crítica depende del tiempo cósmico t . El tiempo cósmico *presente* del Universo lo distinguiremos con un subíndice cero, es decir, t_0 , y de igual forma, todas las cantidades cosmológicas cuyo valor dependa del tiempo pero queramos distinguir el valor que tienen *hoy en día* y las etiquetaremos con un subíndice o superíndice 0. Por tanto, el valor presente de la densidad crítica lo representamos como

$$\rho_{\text{crit}}^0 \equiv \rho_{\text{crit}}(t_0) = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \simeq 1.16 \times 10^{-27} \text{kg/m}^3 \quad (1.36)$$

donde $H_0 \equiv H(t_0)$ es llamada la *constante de Hubble*.

Usando las definiciones (1.34) y (1.35) podemos reescribir la ecuación de Friedmann (1.33) de la siguiente forma. Dividimos ambos lados de la igualdad (1.33) por H^2 e identificamos el factor que corresponde a la densidad crítica,

$$1 = \frac{\rho}{\rho_{\text{crit}}} - \frac{k}{a^2 H^2} \quad (1.37)$$

CAPÍTULO 1. COSMOLOGÍA
1.6. LAS ECUACIONES DE FRIEDMANN

Se suele definir un parámetro Ω_k que corresponde a la curvatura espacial del Universo como

$$\Omega_k \equiv -\frac{k}{a^2 H^2} \quad (1.38)$$

Con ésta definición y usando también (1.35), la ecuación (1.37) llega a ser

$$\boxed{1 = \Omega_{\text{total}} + \Omega_k} \quad (1.39)$$

donde

$$\Omega_{\text{total}} \equiv \frac{\rho}{\rho_{\text{crit}}} = \Omega_b + \Omega_{\text{mo}} + \Omega_r + \Omega_\Lambda + \dots \quad (1.40)$$

Esta es otra manera de expresar la ecuación de Friedmann. A pesar de que Ω_{total} y Ω_k dependen del tiempo, esta igualdad debe satisfacerse para cualquier tiempo.

Otra alternativa de expresar la ecuación de Friedmann es una mezcla de las expresiones (1.33) y (1.39), con la ayuda de la ecuación de conservación de la materia (1.20) para cada una de las componentes del Universo. Primero hay que encontrar la dependencia de la densidad ρ_i con respecto al factor de escala para cada una de las componentes. Comencemos con la componente de materia bariónica.

Como se mencionó en la sección 1.5.2 la presión asociada al fluido de materia bariónica es cero, es decir, $p_b = 0$. Por tanto, su ecuación de conservación de materia (1.20) para esta componente toma la forma:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_b + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho_b &= 0, & (1.41) \\ \Rightarrow \frac{\dot{\rho}_b}{\rho_b} &= -3\frac{\dot{a}}{a}, \\ \Rightarrow \frac{d \ln \rho_b}{dt} &= -3\frac{d \ln a}{dt}, \\ \Rightarrow \int_{\rho_{b0}}^{\rho_b} d \ln \rho_b &= -3 \int_{a_0}^a d \ln a, \end{aligned}$$

donde ρ_{b0} y a_0 representan el valor de la densidad de materia bariónica y del factor de escala *hoy en día*. Integrando obtenemos

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{\rho_b}{\rho_{b0}} \right) &= \ln \left(\frac{a_0}{a} \right)^3, \\ \Rightarrow \rho_b(a) &= \frac{\rho_{b0}}{a^3}, \end{aligned} \quad (1.42)$$

donde hemos normalizado al factor de escala de tal forma que en el presente éste valga uno (esto es, $a_0 = 1$). Como puede verse de esta ecuación, la materia bariónica depende del factor de escala como a^{-3} .

Para el caso de la materia oscura, se tiene exactamente la misma expresión que para la bariónica dado que también se considera que su presión es despreciable (esto es, $p_{\text{mo}} = 0$), por tanto

$$\rho_{\text{mo}}(a) = \frac{\rho_{\text{mo}0}}{a^3}, \quad (1.43)$$

donde $\rho_{\text{mo}0}$ es el valor presente de la densidad de la materia oscura. En ocasiones se suele agrupar ambas componentes, materia bariónica y oscura, en una misma expresión, y se suele referir a ella simplemente como “materia”, que denotaremos como $\rho_{\text{M}}(a)$. Esta se define de la siguiente forma

$$\rho_{\text{M}}(a) \equiv \rho_{\text{b}}(a) + \rho_{\text{mo}}(a), \quad \rho_{\text{M}0} \equiv \rho_{\text{b}0} + \rho_{\text{mo}0},$$

con lo que se llega a

$$\boxed{\rho_{\text{M}}(a) = \frac{\rho_{\text{M}0}}{a^3}} \quad (1.44)$$

Para la componente de radiación, su ecuación de estado puede calcularse a partir del tensor de energía-momento del campo electromagnético, que se expresa como

$$T_{\mu\nu} = F_{\mu\alpha}F_{\nu}^{\alpha} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}, \quad (1.45)$$

donde $F_{\mu\nu}$ es el *tensor de Faraday* o de *intensidad el campo* (electromagnético)¹⁴. La traza de (1.45) es

$$\begin{aligned} T^{\mu}_{\mu} &= F_{\mu\alpha}F^{\mu\alpha} - F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} \\ \Rightarrow T^{\mu}_{\mu} &= 0, \end{aligned} \quad (1.46)$$

donde se ha usado el hecho de que $g_{\mu}^{\mu} = 4$. Considerando las ecuaciones (A.6) y (1.46), obtenemos que $T^{\mu}_{\mu} = 0 = 3p_{\text{r}} - \rho_{\text{r}}$. De aquí que

$$\boxed{p_{\text{r}} = \frac{1}{3}\rho_{\text{r}}} \quad (1.47)$$

Sustituyendo (1.47) en la ecuación de conservación local (1.20) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_{\text{r}}}{dt} + 4\frac{\dot{a}}{a}\rho_{\text{r}} &= 0, \\ \frac{1}{\rho_{\text{r}}}\frac{d\rho_{\text{r}}}{dt} &= -4\frac{\dot{a}}{a}, \\ \frac{d \ln \rho_{\text{r}}}{dt} &= -4\frac{d \ln a}{dt}, \\ \int_{\rho_{\text{r}0}}^{\rho_{\text{r}}} d \ln \rho_{\text{r}} &= -4 \int_1^a d \ln a, \\ \ln \left(\frac{\rho_{\text{r}}}{\rho_{\text{r}0}} \right) &= \ln \left(\frac{1}{a} \right)^4. \end{aligned} \quad (1.48)$$

¹⁴El tensor de intensidad del campo electromagnético $F_{\mu\nu}$ se define en términos del cuadripotencial A como $F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}$ donde $A_{\mu} = (\phi, -\mathbf{A})$, ϕ y \mathbf{A} son los potenciales eléctrico y magnético respectivamente.

Por tanto,

$$\boxed{\rho_r(a) = \frac{\rho_{r0}}{a^4}} \quad (1.49)$$

donde ρ_{r0} es el valor presente de la densidad de radiación.

Para la componente de energía oscura, *asumiendo* que es la constante cosmológica, tiene entonces una ecuación de estado de la forma $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$. Sustituyendo esta expresión en la ecuación de conservación (1.20) se obtiene

$$\frac{d\rho_\Lambda}{dt} = 0. \quad (1.50)$$

Lo cual implica que la densidad de la constante cosmológica siempre es una constante a lo largo de la expansión del Universo,

$$\boxed{\rho_\Lambda = \rho_{\Lambda 0} = \text{constante}} \quad (1.51)$$

Siguiendo esta misma estrategia se pueden ir agregando más tipos de componentes de materia-energía dado un modelo cosmológico en particular.

Sustituyendo las expresiones (1.42, 1.43, 1.49, 1.51) en la parte de la densidad de la ecuación de Friedmann (1.33) obtenemos

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left(\frac{\rho_{b0}}{a^3} + \frac{\rho_{mo0}}{a^3} + \frac{\rho_{r0}}{a^4} + \rho_{\Lambda 0} \right) - \frac{k}{a^2}. \quad (1.52)$$

Dividiendo todo por H_0^2 e identificando la expresión de la densidad crítica hoy, $\rho_{\text{crit}}^0 = 3H_0^2/8\pi G$, se tiene

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \left(\frac{\rho_{b0}}{\rho_{\text{crit}}^0} \frac{1}{a^3} + \frac{\rho_{mo0}}{\rho_{\text{crit}}^0} \frac{1}{a^3} + \frac{\rho_{r0}}{\rho_{\text{crit}}^0} \frac{1}{a^4} + \frac{\rho_{\Lambda 0}}{\rho_{\text{crit}}^0} \right) - \frac{k}{a^2 H_0^2}. \quad (1.53)$$

Usando las definiciones del parámetro de densidad (1.34) evaluadas hoy (esto es., $\Omega_{i0} \equiv \rho_{i0}/\rho_{\text{crit}}^0$), así como la definición del parámetro de la curvatura espacial (1.38) hoy, $\Omega_{k0} \equiv -k/H_0^2$ (recuerde que “ a ” evaluada hoy vale 1), llegamos a

$$H(a) = H_0 \left(\frac{\Omega_{b0}}{a^3} + \frac{\Omega_{mo0}}{a^3} + \frac{\Omega_{r0}}{a^4} + \Omega_{\Lambda 0} + \frac{\Omega_{k0}}{a^2} \right)^{1/2}. \quad (1.54)$$

En astronomía comúnmente se definen las distancias cosmológicas en terminos del “*redshift*” o *corrimiento hacia el rojo* del espectro de luz emitida por un objeto debido a su velocidad de recesión con respecto a un observador que mide la luz emitida por dicho objeto. Dado que el Universo se está expandiendo, todas las estructuras que lo componen (galaxias, cúmulos de galaxias, etc.) se están alejando entre si unas de otras lo que se traduce en un corrimiento al rojo en la luz que emiten y que es medida por algún observador comóvil.

Se acostumbra denotar el corrimiento al rojo con la letra “ z ” y se define como

$$z \equiv \frac{\lambda - \lambda_o}{\lambda_o}, \quad (1.55)$$

donde λ es la longitud de onda medida por un observador que se aleja o acerca de la fuente que emite la radiación y λ_o es la medida por un observador en reposo con la fuente.

Por otro lado, existe una relación entre z y el factor de escala, que aparece en la métrica de FRW, esta es, $a = 1/(1+z)$ [ver expresión (2.15) y sección 2.1.2]. Con esto, la expresión para el parámetro de Hubble (1.54) llega a ser

$$H(z) = H_0 \left[\Omega_{\text{b}0}(1+z)^3 + \Omega_{\text{m}0}(1+z)^3 + \Omega_{\text{r}0}(1+z)^4 + \Omega_{\Lambda 0} + \Omega_{k0}(1+z)^2 \right]^{1/2} \quad (1.56)$$

Esta otra forma del parámetro de Hubble es muy útil para probar y acotar los parámetros libres de un modelo cosmológico dado usando los datos de supernovas tipo Ia. Esto es algo de lo que se hablará con detalle en los siguientes capítulos.

Respecto al parámetro de curvatura, Ω_{k0} , para determinar cuál es el valor de k , o al menos si es positivo, negativo o cero, para un Universo dominado por polvo (materia sin presión) y una constante cosmológica podemos utilizar la ecuación de Friedman (1.39). De acuerdo al valor de k se obtiene (asumiendo el modelo Λ CDM)

$$\text{Cerrado } k > 0 \quad \Rightarrow \quad \Omega_{k0} < 0 \quad \Rightarrow \quad \Omega_{\text{M}0} + \Omega_{\Lambda 0} > 0$$

$$\text{Plano } k = 0 \quad \Rightarrow \quad \Omega_{k0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Omega_{\text{M}0} + \Omega_{\Lambda 0} = 0$$

$$\text{Abierto } k < 0 \quad \Rightarrow \quad \Omega_{k0} > 0 \quad \Rightarrow \quad \Omega_{\text{M}0} + \Omega_{\Lambda 0} < 0$$

Por tanto, logrando determinar los valores de $\Omega_{\text{M}0}$ y $\Omega_{\Lambda 0}$ queda determinada la geometría del Universo (de acuerdo a este modelo).

1.7. El parámetro de desaceleración

El *parámetro de desaceleración* de la expansión del Universo se define como

$$q(t) = -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} \quad (1.57)$$

En términos de $q(t)$ se tiene que

$$\ddot{a} > 0 \quad \Rightarrow \quad q(t) < 0 \quad \text{Expansión } \textit{acelerada} \text{ del Universo.}$$

$$\ddot{a} < 0 \quad \Rightarrow \quad q(t) > 0 \quad \text{Expansión } \textit{desacelerada} \text{ del Universo.}$$

De igual forma, de la definición del parámetro de Hubble $H(t) \equiv \dot{a}/a$ se tiene que

$$H(t) > 0 \Rightarrow \textit{Expansión} \text{ del Universo.}$$

$$H(t) < 0 \Rightarrow \textit{Contracción} \text{ del Universo.}$$

1.8. En resumen:

El este capítulo se han establecido las bases y elementos más relevantes de la cosmología que serán utilizados como herramientas de trabajo o referencia en lo siguiente, principalmente en los capítulos 4–6. Elementos tales como el *tensor de energía-momento*, la *ecuación de la conservación local de la materia-energía* y las *ecuaciones de Friedmann*, que se han ya definido en este momento, serán usados con insistencia a lo largo de los siguientes capítulos.

La parte de fluidos perfectos presentada en este capítulo será generalizada en el capítulo 5 a un tipo más global de fluidos llamados “*fluidos imperfectos*”, de los cuales, los fluidos perfectos son solo un caso particular cuando no hay efectos disipativos, no obstante, los fluidos perfectos sirven de base para este estudio.

En el siguiente capítulo se describirán tres tipos de datos observacionales que sirven para probar modelos cosmológicos, que son usados para probar el modelo propuesto en este trabajo de tesis, y que se describirá en el capítulo 6. La expresión del parámetro de Hubble presentada en este capítulo, será justamente la relación más importante para confrontar la teoría contra observaciones cosmológicas, como se explicará en el siguiente capítulo.

Capítulo 2

Pruebas cosmológicas

Un elemento central en el estudio de la cosmología moderna es que hoy en día esta área a pasado a ser, de una ciencia de especulaciones y suposiciones, a una ciencia de *precisión* debido a los avances tecnológicos que ha habido en los últimos 20 años, que han permitido hacer mediciones cosmológicas de una gran precisión, con lo que se ha logrado actualmente poner sobre bases observacionales los modelos teóricos del Universo. Aún hay mucho por medir, mejorar, refinar, precisar, tanto en la cosmología observacional como teórica, aún quedan pendientes muchas preguntas abiertas, pero se va avanzado con rapidez en ello, lo cual a su vez ha ido transformando nuestra percepción de cómo es el Universo conforme las investigaciones avanzan.

Debido a la gran cantidad de observaciones cosmológicas de las que se dispone hoy en día, resulta impensable que algún modelo cosmológico no sea probado, una vez que es propuesto, usando los datos observacionales para verificar su viabilidad y congruencia con los datos. De ahí la importancia de conocer y manejar, tan a detalle como sea posible, las *pruebas* cosmológicas, los datos observacionales y las técnicas estadísticas y numéricas que se aplican para probar modelos. Cada prueba o técnica por si sola puede ser todo un campo de especialización para un cosmólogo debido al vasto conocimiento y elementos que integran cada una de ellas.

En el presente capítulo se describirán tres pruebas cosmológicas, que después serán empleadas para probar un modelo cosmológico muy general, que tiene el propósito de explicar la expansión acelerada del Universo a través de fluidos imperfectos relativistas con viscosidad aplicados a cosmología, que se describirán con detalle en los capítulo 5 y 6.

Las tres cantidades observacionales que se describirán a continuación, y que se usarán para probar modelos cosmológicos son: (1) la distancia modular de las supernovas tipo Ia, (2) el parámetro de corrimiento de las anisotropías de la radiación cósmica de fondo y (3) la localización del pico acústico en las oscilaciones acústicas bariónicas.

2.1. Las Supernovas

Existen diferentes aspectos del Universo que pueden observarse y con ello utilizarse para generar datos que permitan comparar modelos teóricos con dichas observaciones. Uno de esos aspectos ha sido desde hace muchos años la medición de la *distancia y posición* a la que los objetos celestes se encuentran con respecto a nosotros como observadores.



Figura 2.1: Candelas estándar: conociendo la luminosidad *absoluta* L de una sola candela, y aprovechando el hecho de que *todas* tienen la *misma luminosidad absoluta* (que son igualmente brillantes), se puede medir la distancia a la que se encuentra cualquier otra candela simplemente midiendo el flujo *observado* f (o también llamada “luminosidad *aparente*”) de esa otra candela que se encuentra a una cierta distancia r del observador (ver sección 2.1.4 para definiciones de luminosidad y flujo). Esto es, el flujo de una fuente luminosa disminuye proporcionalmente con r^{-2} , es decir, $f = L/(4\pi r^2)$, así que conociendo f y L se puede calcular r [ver expresiones (2.25)]. Normalmente para conocer el valor de L se hace a través de estudiar y medir primero las candelas que son más cercanas y accesibles al observador.

Estas dos mediciones permiten tener una perspectiva de cómo está formado el Universo. En particular, hoy en día la medición de la *distancia* permite reconstruir la *historia de la expansión* del Cosmos.

Para poder trazar la *historia de la expansión* se necesita conocer la distancia a la que se encuentran la mayor cantidad de objetos celestes cercanos y lejanos, en todas direcciones y a cualquier distancia, y la velocidad con la que se mueven con respecto a nosotros.

Para lograrlo, los astrónomos han utilizado diferentes técnicas que con el paso de los años han ido perfeccionando notablemente. Para los objetos cercanos, no hay mucha dificultad lograr esta meta actualmente. Sin embargo, para objetos distantes (localizados a distancias del orden de megaparsecs) es un verdadero desafío conseguir medir sus distancias debido a diversas dificultades, y que además, el valor medido sea lo suficientemente confiable como para tomarlo en cuenta.

Hoy en día, una de las maneras más precisas y que permite medir la distancia de objetos muy lejanos (distancias cosmológicas) es a través de cierto tipo de explosiones ultraenergéticas llamadas “*supernovas tipo Ia*” (SNe Ia). Las explosiones de supernovas Ia tienen principalmente dos características que las hacen de gran utilidad para medir distancias en comparación a otros métodos:

Estándar. Las observaciones realizadas hasta ahora de supernovas Ia parecen indicar que la luminosidad (energía radiada) de la explosión de cada una de ellas es casi la misma entre si. Por lo mismo, se considera que la explosión de una supernova Ia que suceda en nuestra vecindad (por ejemplo, dentro de la Vía Lactea) tiene prácticamente la *misma luminosidad* que aquella que suceda a distancias cosmológicas de nosotros.



Figura 2.2: Supernova 1994D (mancha brillante en la parte inferior izquierda de la imagen e señalado con una pequeña flecha) en la galaxia NGC 4526. Créditos de la fotografía: NASA, ESA, Hubble Space Telescope and Supernova Search Team.

Sin embargo, este aspecto de la igualdad de la luminosidad en todas las SNe Ia aún está en investigación, no obstante, ya existe cierta evidencia observacional de ello.

Asumiendo como válida esta suposición de que la luminosidad de todas las explosiones de SNe Ia es la misma, permite que una vez que se conozca bien la luminosidad neta que emiten, se puede estimar la distancia de cualquier SNe Ia midiendo simplemente su luminosidad que se *observa* desde la Tierra. Debido a esta *igualdad* en la luminosidad radiada por todas las supernovas Ia es que son llamadas “candelas estándar” (ver figura 2.1).

Ultraenergética. Las explosiones de supernovas Ia son *enormemente brillantes*. Pueden ser tan brillantes que la luminosidad de una sola de ellas es comparable con el de millones de estrellas juntas que conforman la galaxia donde habita. Esto permite que estas explosiones puedan ser vistas a muy grandes distancias de nosotros (a distancias cosmológicas), lo cual significa poder medir distancias muy grandes y con gran precisión (ver figura 2.2).

Sin embargo, a pesar de su enorme luminosidad y lo estándar que son, las explosiones de SNe Ia siguen siendo muy difíciles de observar (esperar que un evento suceda). Hoy en día y solo después de ~ 20 años de intensas observaciones por parte de los astrónomos se cuenta con alrededor de 550 datos únicamente (ver figura 2.3). Actualmente, la supernova Ia más distante que se haya podido medir, y cuya medición sea confiable, se localiza a una distancia del orden de $z = 1.4 \approx 4.2 \times 10^3$ Mpc (asumiendo Λ CDM plano) que corresponde aproximadamente a medir la historia de la expansión hasta una época en la cual el Universo tenía menos de la mitad del tamaño que tiene ahora.

A través de la medición de la distancia de objetos celestes, en particular con las supernovas, se puede reconstruir la historia de la expansión del Universo. Recientemente y justo a través de la medición de supernovas Ia se descubrió que el Universo se está expandiendo *aceleradamente*. Los detalles del descubrimiento se analizarán en el capítulo 4. Lo importante a mencionar por ahora es que a partir de ese descubrimiento los astrónomos redoblaron esfuerzos por medir más supernovas, con más precisión y que se encuentren a la mayor distancia posible.

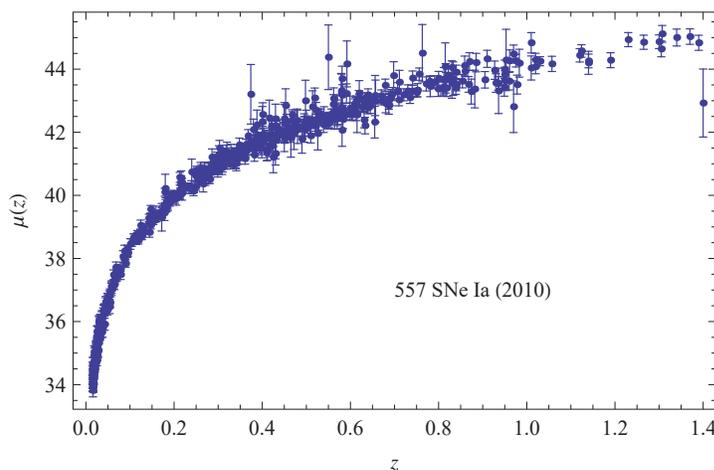


Figura 2.3: Datos de supernovas tipo Ia de la muestra llamada “Union2” del *Supernova Cosmology Project* (SCP) [18] que es la muestra más grande y robusta con la que se cuenta actualmente. Está compuesta por 557 datos de SNe Ia. El eje horizontal corresponde a corrimiento al rojo z y el vertical a la distancia modular $\mu(z)$ (ver sección 2.1.5).

Existe un proyecto para hacer mediciones de una gran cantidad de supernovas, es a través del satélite SNAP (*Supernova Acceleration Probe*) dedicado para tal fin.

2.1.1. ¿Qué son las supernovas?

Las supernovas Ia son la fase final de un sistema binario conformado por una estrella enana blanca y una gigante roja. La supernova en si misma es la explosión violenta de la enana blanca, que tiene la característica de que si su temperatura es lo suficientemente alta, se generan inestabilidades en la estrella que permiten la liberación de una enorme cantidad de energía [12].

La masa de las estrellas enanas blancas que rotan lentamente está limitada a la masa límite de Chandrasekar, que es del orden de 1.38 masas solares. Por encima de esta masa las enanas blancas colapsan [13]. En el caso de las supernovas Ia, la enana blanca está acompañada de una gigante roja, de la cual va acretando masa gradualmente hasta el punto en que su núcleo alcanza la temperatura de ignición para la fusión de carbón debido a la presión. En los primeros segundos de que se inicia la fusión nuclear del carbón una gran cantidad de materia sufre una explosiva reacción liberando suficiente energía como para desencadenar en la estrella una explosión de supernova tipo Ia [14]–[16] (ver figura 2.2).

Este tipo de explosiones de supernovas tienen un máximo en la luminosidad que generan muy *semejante* en todas ellas, debido a que la masa de la enana blanca que explota por el mecanismo de acreción es prácticamente la misma en todos los casos. Aprovechando que el máximo en la luminosidad generada es semejante en cualquier explosión de SNe Ia, es que pueden ser utilizadas como *candelas estándar*, para medir la distancia de las galaxias o cúmulos de galaxias donde suceden, debido a que el flujo observado (o “luminosidad aparente”) de la supernova depende en esencia solo de la distancia a la que se encuentra (ver figura 2.1).

La *magnitud absoluta* típica de una supernova Ia es de $M = -19.31 \pm 0.03 + 5 \log_{10} h_{70}$ [17], con pequeñas variaciones [18, 19]; donde $h_{70} = 0.7$, que significa asumir un valor de la constante de Hubble $H_0 = 70$ (km/s)Mpc⁻¹ en la definición $H_0 = h \times 100$ (km/s)Mpc⁻¹.

La magnitud de M de una SNe Ia significa que es 5×10^9 veces más brillante que el Sol. La energía radiada es de aproximadamente $1 - 2 \times 10^{44}$ joules [15]. La duración de la explosión de una supernova es de típicamente entre 50 a 200 días [20].

2.1.2. Relación entre el factor de escala y el redshift

A escala de distancias cosmológicas resulta que la luz proveniente de una fuente luminosa en el Universo, por ejemplo una galaxia o una supernova, sufre un efecto de *corrimiento al rojo* (“redshift”) al ir viajando a través del espacio debido a la velocidad recessional de esa fuente, por la *expansión* del Universo.

Por lo mismo, un observador en la Tierra que mida la luz que proviene de una lejana galaxia, notará que las líneas espectrales en conjunto de la galaxia estarán corridas al rojo, lo que significa que la frecuencia de la luz observada es menor que lo esperado si la galaxia estuviera en reposo con respecto a la Tierra (o a la Vía Láctea).

Este fenómeno del corrimiento al rojo de la luz debido a la expansión es utilizado precisamente para ir trazando la historia de la expansión a través del valor medido por los telescopios de este corrimiento, y observando objetos ubicados a distintas distancias cosmológicas de nosotros. Como se mencionó anteriormente, hoy en día los objetos más confiables para ir trazando esta expansión son las SNe Ia.

Conviene aclarar que la luz que proviene de la supernova (o galaxia, o cualquier otra fuente luminosa) sufre un corrimiento al rojo pero no solo debido a la expansión del Universo sino también debido al movimiento de rotación de la galaxia en la cual se encuentra, la rotación en el cúmulo de galaxias donde habita, etc., así como también para el observador, debido a la rotación de la Tierra en la Vía Láctea y en el cúmulo de Virgo, etc. Estos otros movimientos relativos en ocasiones, inducen incluso un *corrimiento al azul* si el objeto se mueve en dirección *hacia* la Tierra.

Para las supernovas, estos movimientos son llamados “*movimientos intrínsecos*” o “*velocidades peculiares*”, que inducen un corrimiento al rojo o azul pero que es muy pequeño¹ (despreciable) en comparación al corrimiento al rojo debido a la expansión del Universo.

Se suele llamar “*corrimiento al rojo cosmológico*”, al redshift debido únicamente a la expansión del Universo, para distinguirlo del corrimiento debido a otros movimientos relativos entre la fuente y el observador (los movimientos intrínsecos).

La relación entre el corrimiento al rojo y el factor de escala se calcula de la siguiente manera. Supongamos un Universo caracterizado por la métrica de FRW. También supongamos una fuente luminosa distante (por ejemplo, una supernova Ia o una galaxia) con coordenadas espaciales comóviles ($r = r^*, \theta = 0, \phi = 0$), y un observador ubicado en ($r = 0, \theta = 0, \phi = 0$) (ver figuras 2.4 y 2.5). Por simplicidad es que se ha elegido ($\theta = 0, \phi = 0$).

Consideremos que la fuente luminosa emite dos fotones de la misma frecuencia ω_e . Un fotón es emitido al tiempo t_e y el otro al tiempo $t_e + \delta t_e$. El subíndice “*e*” indica “emitido”. Por su parte, el observador recibe los dos fotones, el primer fotón emitido lo

¹Las velocidades peculiares v típicas de una supernova son $200 \text{ km/s} \leq v \leq 500 \text{ km/s}$ [20], algunos autores asumen en sus cálculos el valor de 300 km/s principalmente [17].

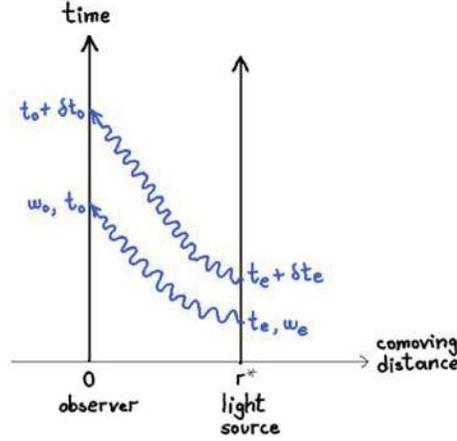


Figura 2.4: Gráfica que muestra las líneas temporales y las coordenadas comóviles de una fuente luminosa y un observador en un Universo en expansión. La fuente, que se encuentra a una distancia comóvil r^* alejada del observador, emite dos fotones con frecuencia ω_e , uno al tiempo t_e y el segundo al tiempo $t_e + \delta t_e$. El observador detecta los dos fotones con una frecuencia ω_o al tiempo t_o y $t_o + \delta t_o$ respectivamente. La frecuencia de los fotones sufre un *corrimiento al rojo cosmológico* debido a la expansión del Universo. En este tipo de gráfica, las dos líneas temporales, la del observador y la fuente, son paralelas debido a que su distancia r^* es comóvil, y las trayectorias de ambos fotones se curvan al viajar de la fuente al observador debido a la expansión.

recibe al tiempo t_o y el segundo al tiempo $t_o + \delta t_o$, y les asigna una frecuencia ω_o . El subíndice “o” indica “observado”.

Los fotones siguen una curva nula caracterizada por

$$ds^2 = 0 = -dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} \right), \quad (2.1)$$

por lo cual

$$dt = \pm a(t) \left(\frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \right). \quad (2.2)$$

El signo “+” indica que el fotón se mueve al futuro y “-” al pasado. Respecto al primer fotón emitido, entre el tiempo t_e y t_o éste viajó la distancia r^* , que se puede calcular integrando a partir de la ecuación (2.2) como

$$r^* = \int_{r^*}^0 \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = \int_{t_e}^{t_o} \frac{dt}{a(t)}. \quad (2.3)$$

Nótese que la magnitud de r^* se fijó desde el inicio, al momento de establecer las posiciones de la fuente con respecto al observador. Además, su magnitud no cambia en el tiempo ya que es una coordenada comóvil, por lo tanto es una constante².

²Como se comentó anteriormente, a pesar de que la fuente luminosa (o el observador) tenga movimientos intrínsecos, el redshift que inducen es despreciable en comparación con el corrimiento al rojo cosmológico.

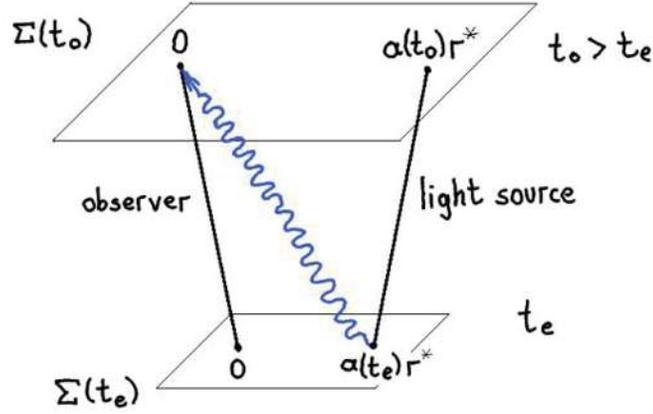


Figura 2.5: Gráfica equivalente a la figura 2.4 pero ahora en coordenadas espaciales que no son comóviles. En este caso la distancia inicial entre el observador y la fuente al tiempo t_e cuando es emitido el primer fotón es $a(t_e)r^*$. Y la distancia final cuando el fotón llega al observador es $a(t_o)r^*$. En este caso las líneas temporales de la fuente y el observador no son paralelas, sino que se van separando conforme el tiempo avanza debido a la expansión del Universo.

Del mismo modo para el segundo fotón emitido, la distancia que recorre es igual r^* y se calcula como:

$$r^* = \int_{r^*}^0 \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = \int_{t_e + \delta t_e}^{t_o + \delta t_o} \frac{dt}{a(t)}. \quad (2.4)$$

Igualando estas dos expresiones obtenemos

$$\int_{t_e}^{t_o} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_e + \delta t_e}^{t_o + \delta t_o} \frac{dt}{a(t)}, \quad (2.5)$$

desarrollamos la integral del lado derecho de la igualdad como

$$\int_{t_e + \delta t_e}^{t_o + \delta t_o} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_e + \delta t_e}^{t_e} \frac{dt}{a(t)} + \int_{t_e}^{t_o} \frac{dt}{a(t)} + \int_{t_o}^{t_o + \delta t_o} \frac{dt}{a(t)}. \quad (2.6)$$

Substituyendo en la ecuación (2.5) vemos que se elimina el término del lado izquierdo de la igualdad con uno de los que se obtienen de la expresión (2.6), por lo que la expresión (2.5) se vuelve

$$\int_{t_e}^{t_e + \delta t_e} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_o}^{t_o + \delta t_o} \frac{dt}{a(t)}. \quad (2.7)$$

Debido a ello, se puede considerar con buena aproximación que la fuente está “fija” en sus coordenadas comóviles.

CAPÍTULO 2. PRUEBAS COSMOLÓGICAS

2.1. LAS SUPERNOVAS

Ahora, asumimos que los incrementos δt_e y δt_o son muy pequeños, esto es, que el intervalo de tiempo transcurrido entre t_e y $t_e + \delta t_e$ es infinitesimal, lo mismo que para t_o y $t_o + \delta t_o$, comparados con las escalas de tiempo cosmológicas. De esto, se puede suponer que el factor de escala es aproximadamente *constante* o no cambia durante los intervalos de tiempo $[t_e, t_e + \delta t_e]$ y $[t_o, t_o + \delta t_o]$, es decir, $a(t_e) \approx a(t_e + \delta t_e)$ y $a(t_o) \approx a(t_o + \delta t_o)$. Con este argumento, podemos sacar de la integral a $a(t)$ en la expresión (2.7), obteniendo

$$\frac{1}{a(t_e)} \int_{t_e}^{t_e + \delta t_e} dt = \frac{1}{a(t_o)} \int_{t_o}^{t_o + \delta t_o} dt, \quad (2.8)$$

integrando se tiene

$$\frac{\delta t_e}{a(t_e)} = \frac{\delta t_o}{a(t_o)}. \quad (2.9)$$

En la realidad la fuente luminosa no sólo emite dos fotones sino todo un conjunto de ellos, que son emitidos con un periodo igual a δt_e , y observados con un periodo δt_o . De aquí que la frecuencia angular ω de estos fotones sea

$$\omega_e = \frac{2\pi}{\delta t_e} \quad \text{y} \quad \omega_o = \frac{2\pi}{\delta t_o}, \quad (2.10)$$

sustituyendo estas expresiones en (2.9) se obtiene

$$\frac{a(t_o)}{a(t_e)} = \frac{\omega_e}{\omega_o}, \quad (2.11)$$

usando el hecho de que el corrimiento al rojo z se define en término de la frecuencia angular como

$$z \equiv \frac{\omega_e - \omega_o}{\omega_o}, \quad (2.12)$$

podemos escribir la expresión (2.11) como

$$1 + z = \frac{a(t_o)}{a(t_e)}. \quad (2.13)$$

Regularmente en la literatura se suele expresar esta relación de manera más compacta como

$$1 + z = \frac{a_0}{a(t)}, \quad (2.14)$$

de donde se entiende que a_0 es el valor que tiene el factor de escala hoy en día y $a(t)$ el valor que tuvo o tendrá en algún otro momento. La teoría *no dice* cual debe ser el valor de a_0 , así que normalmente y por simplicidad se elige que $a_0 = 1$, por lo se que se tiene

$$\boxed{1 + z = \frac{1}{a(t)}} \quad (2.15)$$

Entonces, con la expresión (2.15), una vez que se mide el corrimiento z de una fuente lejana se puede determinar a que época de la evolución corresponde esa fuente a través de $a(t)$.

2.1.3. Distancia de luminosidad

Consideremos de nuevo las líneas de mundo de un observador ubicado en las coordenadas comóviles ($r = 0, \theta = 0, \phi = 0$) y una explosión de supernova (o alguna otra fuente luminosa) ubicada en ($r = r^*, \theta = 0, \phi = 0$) la cual emite fotones que llegan hasta el observador (ver figuras 2.4 y 2.5). El cálculo teórico de la distancia de luminosidad se realiza a través de calcular primero la distancia comóvil r^* .

A partir de la métrica de FRW, la trayectoria nula que siguen los fotones entre la fuente y el observador esta dada por las expresiones (2.1 y 2.2), de aquí se obtiene la igualdad (2.3), es decir,

$$\int_0^{r^*} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = \int_{t_e}^{t_o} \frac{dt}{a(t)}. \quad (2.16)$$

Note que se han invertido los límites de integración de la expresión (2.3). Esto es posible debido a que lo que importa es la magnitud de r^* , que es lo que se desea calcular. Integrando el lado derecho de la igualdad (2.16) tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^{r^*} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} &= \frac{1}{\sqrt{|k|}} \operatorname{sinn}^{-1}(\sqrt{|k|r}) \Big|_0^{r^*} \\ &= \frac{1}{\sqrt{|k|}} \operatorname{sinn}^{-1}(\sqrt{|k|r^*}), \end{aligned} \quad (2.17)$$

donde para simplificar la notación se ha definido la función “sinn” como

$$\operatorname{sinn}(x) \equiv \begin{cases} \sin(x) & \text{si } k > 0 \text{ (i.e., Universo espacialmente } \textit{cerrado}, \Omega_k < 0), \\ x & \text{si } k = 0 \text{ (i.e., Universo espacialmente } \textit{plano}, \Omega_k = 0), \\ \sinh(x) & \text{si } k < 0 \text{ (i.e., Universo espacialmente } \textit{abierto}, \Omega_k > 0). \end{cases} \quad (2.18)$$

Por otro lado, la integral del lado izquierdo de la igualdad de la expresión (2.16) puede reescribirse como

$$\begin{aligned} \int_{t_e}^{t_o} \frac{dt}{a(t)} &= \int_{a(t_e)}^{a(t_o)} \frac{da}{a(t)(da/dt)} \\ &= \int_{a(t_e)}^{a(t_o)} \frac{da}{a^2 \cdot (\dot{a}/a)} \\ &= \int_{a_e}^{a_o} \frac{da}{a^2 H}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

donde se ha utilizado la definición del parámetro de Hubble $H \equiv \dot{a}/a$. Luego, utilizando la relación (2.15) entre el factor de escala y el corrimiento al rojo, $a = 1/(1+z)$, implica que $da = -dz/(1+z)^2$, donde $a_e \rightarrow z$ y $a_o \rightarrow z = 0$. Haciendo el cambio de variable de $a \rightarrow z$, la expresión (2.19) puede escribirse como

$$\int_{t_e}^{t_o} \frac{dt}{a(t)} = - \int_z^0 \frac{dz'}{H(z')}. \quad (2.20)$$

CAPÍTULO 2. PRUEBAS COSMOLÓGICAS

2.1. LAS SUPERNOVAS

Utilizando las expresiones (2.17) y (2.20), la igualdad (2.16) puede expresarse como

$$\frac{1}{\sqrt{|k|}} \operatorname{sinn}^{-1}(\sqrt{|k|}r^*) = \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}. \quad (2.21)$$

De esta expresión, resolvemos para r^* para obtener

$$r^*(z) = \frac{1}{\sqrt{|k|}} \operatorname{sinn} \left[c \sqrt{|k|} \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \right], \quad (2.22)$$

donde hemos puesto explícitamente el factor de la velocidad de la luz, $c = 3 \times 10^5$ km/s, para tener la expresión de la distancia comóvil, $r^*(z)$, con sus unidades reales. Las unidades de los demás factores son, $[k] = 1/(\text{distancia})^2$, $[H] = (1/\text{tiempo})$, el redshift z es adimensional. Por otro lado, la *distancia efectiva* d_{eff} entre el observador y la fuente está dada por $d_{\text{eff}} = a(t)r^*(z)$. Luego, en astronomía resulta útil definir la llamada *distancia de luminosidad*, que en términos de la distancia efectiva se expresa como

$$d_L(z) \equiv d_{\text{eff}}(1+z). \quad (2.23)$$

Entonces, sustituyendo la expresión (2.22) para r^* en la distancia efectiva, y ésta a su vez en la definición de la distancia de luminosidad (2.23) obtenemos [20]:

$$d_L(z) = \frac{(1+z)}{\sqrt{|k|}} \operatorname{sinn} \left[c \sqrt{|k|} \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \right] \quad (2.24)$$

La expresión para $H(z)$ estará dada por el modelo cosmológico en particular en estudio, es decir, es en $H(z)$ donde entra la *teoría* cosmológica.

2.1.4. Luminosidad y flujo

Comenzemos por definir algunas cantidades usadas en astrofísica y astronomía, estas son:

Luminosidad L . Cantidad de energía radiada por una fuente, por unidad de tiempo.

Flujo f . Cantidad de energía radiada por una fuente, por unidad de tiempo, por unidad de área, en todas direcciones de forma isotrópica.

De estas definiciones es claro que L y f se relacionan de la siguiente manera

$$L = \int_{S^2} f dA = 4\pi r^2 f \quad \Rightarrow \quad f = \frac{L}{4\pi r^2}. \quad (2.25)$$

Consideremos una fuente luminosa en el Universo (por ejemplo, una galaxia o una supernova) cuya luminosidad *emitida* deseamos calcular, a una frecuencia particular ω_e de los fotones. El subíndice “e” indica “emitidos” por la fuente luminosa. Sea entonces

- n_e = número de fotones emitidos por unidad de tiempo.
- N_e = número total de fotones emitidos. Lo cual significa que $n_e = N_e/\delta t_e$, donde δt_e es el lapso de tiempo infinitesimal durante el cual la fuente luminosa emite fotones.

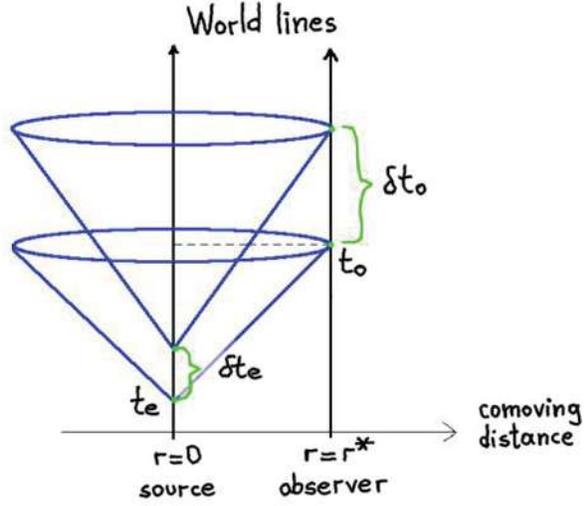


Figura 2.6: Una fuente luminosa localizada en $r = 0$ emite luz en todas direcciones durante un lapso de tiempo δt_e . Al cabo de un cierto tiempo, un observador situado a una distancia comóvil r^* mide un flujo de luz proveniente de la fuente, durante un lapso de tiempo δt_o .

- E_e =energía de un fotón con frecuencia ω_e , es decir, $E_e = \hbar\omega_e$.

La luminosidad emitida se expresa como

$$L_e = E_e \frac{N_e}{\delta t_e} = E_e n_e = \hbar\omega_e n_e. \quad (2.26)$$

Supongamos que la fuente se encuentra ubicada en las coordenadas espaciales *comóviles* ($r = 0, \theta = 0, \phi = 0$). Y que además hay un observador ubicado en ($r = r^*, \theta = 0, \phi = 0$) que mide desde su ubicación la luminosidad de la fuente (ver figura 2.6). De manera análoga a la expresión (2.26), la luminosidad *observada* de la fuente se expresa como

$$L_o = E_o \frac{N_o}{\delta t_o} = E_o n_o = \hbar\omega_o n_o, \quad (2.27)$$

donde el subíndice “o” indica “observada”. Asumiendo que *todos* los fotones emitidos por la fuente en $r = 0$ llegan a una esfera de radio $r = r^*$, al cabo de un cierto tiempo se tiene entonces que

$$N_e = N_o. \quad (2.28)$$

Usando la relación $1 + z = \delta t_o / \delta t_e = \omega_e / \omega_o$ [ver expresiones (2.10,2.12)], se puede deducir de la expresión (2.28) que

$$\begin{aligned} N_e = N_o \quad \Rightarrow \quad n_e \delta t_e = n_o \delta t_o \quad \Rightarrow \quad n_o = n_e \frac{\delta t_e}{\delta t_o} \quad \Rightarrow \\ n_o = \frac{n_e}{1 + z}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Y para la expresión (2.27) se deduce que

$$L_o = \hbar\omega_o n_o = \hbar \left(\frac{\omega_e}{1+z} \right) \left(\frac{n_e}{1+z} \right) \Rightarrow$$

$$L_o = \frac{L_e}{(1+z)^2}. \quad (2.30)$$

Por otra parte, consideremos el flujo de energía “ f_o ” [ver definición (2.25)] que el observador mide de la fuente, desde su ubicación. La distancia efectiva d_{eff} entre el observador y la fuente esta dada por $d_{\text{eff}} = a(t)r^*$. Con esto, el flujo *observado* puede expresarse como

$$f_o = \frac{L_o}{4\pi d_{\text{eff}}^2}, \quad (2.31)$$

usando la expresión (2.30) tenemos

$$f_o = \frac{L_e}{4\pi d_{\text{eff}}^2 (1+z)^2} \quad (2.32)$$

2.1.5. La distancia modular.

Como se mencionó al principio de este capítulo, en años recientes los astrónomos han descubierto que las supernovas tipo Ia se comportan como *candelas estándar*, es decir, que la luminosidad absoluta de cualquier explosión de SNe Ia es prácticamente la misma, sin importar la parte del Universo donde sucedan. Este hecho ha sido aprovechado por los astrónomos para medir distancias cosmológicas de las galaxias y cúmulos de galaxias que las hospedan y con ello ir trazando la historia de la expansión del Universo.

La otra ventaja de las SNe Ia es que la explosión es enormemente brillante, lo que permite que puedan ser vistas a grandes distancias, y con ello medir distancias muy grandes y con mayor precisión que utilizando otras técnicas u objetos. La observaciones de objetos lejanos permite recrear la historia de la expansión a tiempos más tempranos del Universo.

En una combinación de observaciones y modelos físicos, los astrónomos han determinado la expresión y sus coeficientes para la *magnitud absoluta* de la luminosidad de una supernova tipo Ia, que se expresa como

$$M \equiv -2.5 \log_{10} \left(\frac{L_e}{L_{\text{sun}}} \right) + 4.74, \quad (2.33)$$

donde el subíndice “sun” indica la luminosidad total del Sol, y que se usa como medida de referencia y calibración en la expresión (2.33). La magnitud de esta luminosidad es: $L_{\text{sun}} = 3.85 \times 10^{33}$ erg/seg. *Observacionalmente* los astrónomos han determinado un valor de $M = -19.31 \pm 0.03 + 5 \log_{10} h_{70}$ [17] para las supernovas, donde $h_{70} = 0.7$.

Por otra parte, la *magnitud aparente* u observada de la luminosidad se define como

$$m \equiv -2.5 \log_{10} \left(\frac{f_o}{f_{\text{sun}, 10\text{pc}}} \right) + 4.74, \quad (2.34)$$

donde el subíndice “sun, 10pc” indica que es el flujo del Sol medido a una distancia de 10 parsecs. La magnitud de este flujo es: $f_{\text{sun}, 10\text{pc}} = 3.21 \times 10^{-7}$ erg/(cm²·seg). Con estas dos magnitudes, se define la *distancia modular* como

CAPÍTULO 2. PRUEBAS COSMOLÓGICAS

2.1. LAS SUPERNOVAS

$$\mu \equiv m - M. \quad (2.35)$$

Utilizando las expresiones (2.33–2.34), se puede expresar la distancia modular como

$$\begin{aligned} \mu &= 2.5 \left[\log_{10} \left(\frac{L_e}{L_{\text{sun}}} \right) - \log_{10} \left(\frac{f_o}{f_{\text{sun}, 10\text{pc}}} \right) \right] \\ &= 2.5 \left[\log_{10} \left(\frac{L_e \cdot f_{\text{sun}, 10\text{pc}}}{L_{\text{sun}} \cdot f_o} \right) \right], \end{aligned} \quad (2.36)$$

sustituyendo la expresión (2.32) para f_o se obtiene

$$\mu = 2.5 \log_{10} \left(\frac{f_{\text{sun}, 10\text{pc}}}{L_{\text{sun}}} \cdot 4\pi d_{\text{eff}}^2 (1+z)^2 \right). \quad (2.37)$$

Por otra parte, usando de nuevo la expresión (2.32), se puede escribir el término del flujo para el Sol como

$$f_{\text{sun}, 10\text{pc}} = \frac{L_{\text{sun}}}{4\pi d_{\text{eff}, \text{sun}}^2 (1+z_{\text{sun}})^2}. \quad (2.38)$$

Sin embargo, el corrimiento al rojo cosmológico para el Sol, z_{sun} , es prácticamente cero, lo cual es muy razonable ya que la distancia entre la Tierra y el Sol es en esencia nula en comparación a las escalas cosmológicas, a esa ínfima distancia el efecto de la expansión es totalmente despreciable y no hay redshift cosmológico. De aquí que la ecuación (2.38) se pueda expresar como

$$f_{\text{sun}, 10\text{pc}} = \frac{L_{\text{sun}}}{4\pi (10\text{pc})^2}, \quad (2.39)$$

sustituyendo en (2.37) tenemos

$$\begin{aligned} \mu &= 2.5 \log_{10} \left(\frac{d_{\text{eff}}^2 (1+z)^2}{(10\text{pc})^2} \right) \\ &= 5 \log_{10} \left(\frac{d_{\text{eff}} (1+z)}{10\text{pc}} \right). \end{aligned} \quad (2.40)$$

Normalmente, en lugar de la distancia efectiva d_{eff} , los astrónomos suelen usar la distancia de luminosidad $d_L(z) \equiv d_{\text{eff}}(1+z)$ [ver expresión 2.24] en la distancia modular (2.40). Por otra parte, para medir distancias cosmológicas es más conveniente usar unidades de “megaparsecs” (Mpc) en lugar de parsecs. Así que utilizando el hecho de que $10\text{pc} = 1\text{Mpc}/10^5$ podemos expresar la ecuación (2.40) como

$$\begin{aligned} \mu &= 5 \log_{10} \left(\frac{d_L(z)}{1\text{Mpc}} \cdot 10^5 \right) \\ &= 5 \log_{10} \left(\frac{d_L(z)}{1\text{Mpc}} \right) + 5 \log_{10}(10^5) \end{aligned} \quad (2.41)$$

con lo cual se llega a

$$\mu(z) = 5 \log_{10} \left(\frac{d_L(z)}{1\text{Mpc}} \right) + 25 \quad (2.42)$$

donde $d_L(z)$ está dado por la expresión (2.24). Esta expresión de la distancia modular corresponde al cálculo *teórico* de su magnitud, es decir, a partir de una teoría o modelo cosmológico, se puede determinar cual es la magnitud que *predice* el modelo para la distancia modular $\mu(z)$ de un objeto luminoso ubicado a una distancia z de nosotros. En contraparte, los astrónomos *miden* esta magnitud para diversos objetos brillantes en el Universo, en particular, miden la magnitud de $\mu(z)$ para las supernovas Ia.

Por tanto, empleando la expresión (2.42) es posible confrontar las predicciones de un modelo teórico, contra el conjunto de datos observacionales de supernovas Ia (u objetos luminosos) y estudiar qué tanto el modelo es capaz de reproducirlos a través de $\mu(z)$. En la figura 4.5 se muestran los datos observacionales más recientes de supernovas Ia de la muestra “Union2” (2010) del “Supernova Cosmology Project” (SCP) compuesta de 557 datos de SNe Ia [18].

La confrontación entre “teoría *vs* datos” y toda la información que se obtiene de hacer este análisis se describirá con detalle en el capítulo 3.

2.2. Parámetro de corrimiento \mathcal{R} del CMB

La prueba cosmológica basada en el *parámetro de corrimiento* \mathcal{R} de las anisotropías de la radiación cósmica de fondo (CMB) es una prueba de gran precisión y que toma en cuenta tiempos muy tempranos del Universo (hasta un $z = 1089$). Esta se basa en la ubicación l_1^{TT} del primer pico del espectro de las anisotropías en la temperatura del CMB (ver figura 2.7).

El parámetro de corrimiento \mathcal{R} del CMB se define como [21]–[24]

$$\mathcal{R} \equiv \frac{\tilde{l}_1^{TT}}{l_1^{TT}}, \quad (2.43)$$

donde l_1^{TT} corresponde a la predicción de la ubicación del primer pico de acuerdo al modelo cosmológico que se desea probar, con ($w_m \equiv \Omega_{m0}h^2, w_b \equiv \Omega_{b0}h^2, h$) fijos. Y \tilde{l}_1^{TT} es la predicción de un modelo de *referencia*, que suele denotarse como “SCDM”, que consiste en asumir una geometría espacial del Universo plana, con $\Omega_{M0} = 1$, y asumiendolos mismos valores para (w_m, w_b) que el modelo a probar.

Observacionalmente, a través de las mediciones de las anisotropías en temperatura del CMB, se encuentra que la ubicación del primer pico es $l_1^{TT} = 220.8 \pm 0.7$ [26, 27].

Para eliminar la dependencia de modelo que pueda resultar de calcular la escala del horizonte de sonido se define un parámetro que pueda ser lo más *independiente* posible del modelo asumido. Normalmente esto se hace considerando el cociente de $\mathcal{R} = \tilde{l}_1^{TT}/l_1^{TT}$ en lugar de usar solo l_1^{TT} , para probar modelos.

El cálculo teórico de l_1^{TT} está relacionado con la escala comóvil del horizonte del sonido en la época de la última dispersión, $r_s(z_{\text{rec}})$, y la distancia diametral angular del horizonte de sonido, $d_A(z_{\text{rec}})$, a través de la escala angular del horizonte del sonido en la época de la última dispersión, θ_1^{TT} , de la siguiente forma

$$l_1^{TT} = l_A(d_A, r_s)[1 - \psi(w_m, w_b)], \quad (2.44)$$

donde

$$l_A(d_A, r_s) \equiv \frac{\pi}{\theta_1^{TT}}, \quad y \quad \theta_1^{TT} \equiv \frac{r_s(z_{\text{rec}})}{d_A(z_{\text{rec}})}, \quad (2.45)$$

de aquí que,

$$l_1^{TT} = \pi[1 - \psi(w_m, w_b)] \frac{d_A(z_{\text{rec}})}{r_s(z_{\text{rec}})}. \quad (2.46)$$

El parámetro de corrimiento de fase $\psi(w_m, w_b) \simeq 0.27$ depende débilmente de los parámetros cosmológicos [28]. La escala comóvil del horizonte del sonido, $r_s(z_{\text{rec}})$, se calcula como

$$r_s(z_{\text{rec}}) = a_{\text{rec}} \int_0^{a_{\text{rec}}} \frac{c_s(a) da}{a^2 H(a)} = a_{\text{rec}} \int_0^{a_{\text{rec}}} \frac{c_s(a) da}{\Omega_{\text{M}0}^{1/2} [\frac{\Omega_r h^2}{\Omega_{\text{M}0} h^2} + a]^{-1/2}}, \quad (2.47)$$

donde $c_s(a)$ es la velocidad del sonido³ dada por

$$c_s^2(a) = \frac{\delta p}{\delta \rho} = \frac{1}{3[1 + (3\Omega_b/4\Omega_r)a]}. \quad (2.48)$$

Por otra parte, la *distancia diametral angular* d_A de un objeto astrofísico se define como el cociente entre el *tamaño transversal físico* (real) \mathbf{x} del objeto y su *tamaño angular* θ visto por un observador, es decir,

$$d_A \equiv \frac{\mathbf{x}}{\theta}. \quad (2.49)$$

La distancia diametral angular depende del modelo cosmológico que se asuma, a través de \mathbf{x} . La distancia diametral angular es usada para convertir una separación angular entre dos puntos dados en una imagen obtenida por un telescopio, en una separación *propia*⁴ en la fuente. Resulta que d_A está relacionada con la *distancia de luminosidad* d_L [ver expresión (2.24)] de la siguiente forma [29]

$$d_A = \frac{d_L}{(1+z)^2}. \quad (2.50)$$

Por lo tanto, usando la expresión (2.24) y expresando k en términos de Ω_{k0} , resulta

$$d_A(z) = \frac{a}{H_0 \sqrt{|\Omega_k|}} \text{sinn} \left[H_0 \sqrt{|\Omega_k|} \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \right], \quad (2.51)$$

donde se ha usado $(1+z) = 1/a$. La distancia diametral angular para el modelo cosmológico de referencia SCDM, que distinguiremos por una tilde, $\tilde{d}_A(z)$, puede calcularse usando la expresión (2.51), para obtener (asumiendo el Universo espacialmente *plano*):

³En cosmología se suele llamar “sonido” a las *ondas mecánicas* que se propagan en el fluido cosmológico, en analogía a la propagación del sonido en el aire.

⁴“Propia” en el sentido de Relatividad.

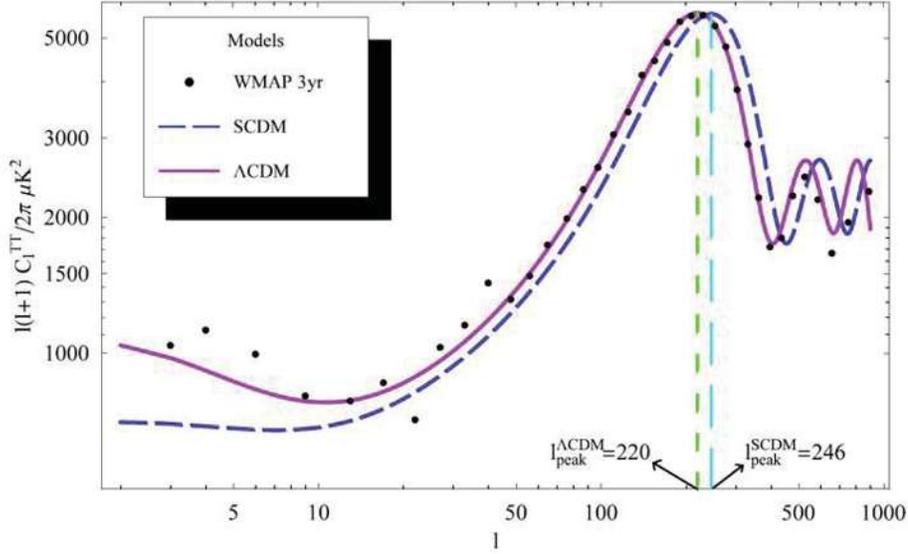


Figura 2.7: *Ubicación del primer pico l_1^{TT}* : Espectro de potencias de las anisotropías de temperatura de la radiación cósmica de fondo (CMB). La gráfica muestra los datos observacionales (puntos) medidos por WMAP durante sus tres primeros años. De acuerdo a los datos, la ubicación del primer pico l_1^{TT} (el pico más alto en la gráfica) se localiza en $l_1^{TT} = 220$, tal como lo marca la línea vertical de punteo corto. La línea continua que ajusta a los datos corresponde al modelo “ Λ CDM”, que asume los valores: ($w_m = 0.14, w_b = 0.022, h = 0.72$), donde $w_m \equiv \Omega_{M0} h^2$, $w_b \equiv \Omega_{b0} h^2$ y $H_0 = h \times 100$ (km/s)Mpc $^{-1}$. El modelo Λ CDM predice *teóricamente* que la ubicación de l_1^{TT} es también en 220 (que se denota como $l_{\text{peak}}^{\Lambda\text{CDM}} = 220$). La línea punteada corresponde a un modelo de referencia, denotado como “SCDM”, que se diferencia de “ Λ CDM” únicamente en el hecho de que SCDM asume un valor de $\Omega_{M0} = 1$, de aquí que sus valores sean ($w_m = 0.14, w_b = 0.022, h = 0.37$). SCDM predice *teóricamente* la ubicación de l_1^{TT} en 246 (que se denota como $l_{\text{peak}}^{\text{SCDM}} = 246$) y que se indica con la línea vertical de punteo largo. El parámetro de corrimiento \mathcal{R} del CMB se define como $\mathcal{R} \equiv l_{\text{peak}}^{\text{SCDM}} / l_{\text{peak}}^{\Lambda\text{CDM}}$. Créditos de la imagen original: Nesseris et al. [25].

$$\begin{aligned}\tilde{d}_a(z_{\text{rec}}) &= \frac{a_{\text{rec}}}{H_0} \int_0^{z_{\text{rec}}} \frac{dz}{[\tilde{\Omega}_{\text{M}0}(1+z)^3 + \tilde{\Omega}_r(1+z)^4]^{1/2}} \\ &= \frac{2a_{\text{rec}}}{H_0} \left[(\tilde{\Omega}_r + 1)^{1/2} - (a_{\text{rec}} + \tilde{\Omega}_r)^{1/2} \right],\end{aligned}\quad (2.52)$$

donde hemos usado el hecho de que $\tilde{\Omega}_{\text{M}0} = 1$, dado que es el modelo de referencia. Se define el *factor de corrección* como $q(\tilde{\Omega}_r, a_{\text{rec}}) \equiv (\tilde{\Omega}_r + 1)^{1/2} - (a_{\text{rec}} + \tilde{\Omega}_r)^{1/2}$. Con esto, la distancia diametral angular para SCDM es

$$\tilde{d}_a(z_{\text{rec}}) = \frac{2a_{\text{rec}}}{H_0} q(\tilde{\Omega}_r, a_{\text{rec}}). \quad (2.53)$$

Por lo tanto, usando las expresiones (2.46–2.53) y asumiendo un Universo espacialmente plano, la expresión teórica para calcular R queda dada como

$$\mathcal{R} = \frac{\tilde{l}_1^{TT}}{\tilde{l}_1^{TT}} = \frac{\tilde{l}_A(1 - \tilde{\psi})}{l_A(1 - \psi)} = \frac{r_s \tilde{d}_A(z_{\text{rec}})}{\tilde{r}_s d_A(z_{\text{rec}})} = \frac{2}{\Omega_{\text{M}0}^{1/2} \chi(z_{\text{rec}})} q(\tilde{\Omega}_r, a_{\text{rec}}), \quad (2.54)$$

donde se ha usado el hecho de que $\psi = \tilde{\psi}$, debido a que ($w_b = \tilde{w}_b, w_m = \tilde{w}_m$), y se ha definido

$$\chi(z) \equiv \int_0^z \frac{H_0}{H(z')} dz'. \quad (2.55)$$

La expresión (2.54) depende poco de la presencia o valor de otros parámetros cosmológicos que no sean a través de $H(z)$. La dependencia entra principalmente a través de la presencia de $\Omega_{\text{M}0}$ y $q(\tilde{\Omega}_r, a_{\text{rec}})$ en la expresión (2.54).

Por otro lado, se tiene que $w_m = \tilde{h}^2$, ya que por definición, $w_m \equiv \Omega_{\text{M}0} h^2$, y al considerar el modelo de referencia se asumió que $\Omega_{\text{M}0} = 1$. Los valores para los demás parámetros son [28]:

$$w_r \equiv \Omega_r h^2 \simeq 2.47 \times 10^{-5} \quad (2.56)$$

$$z_{\text{rec}} = 1048(1 + 0.00124w_b^{-0.738})(1 + g_1 w_m^{g_2}), \quad (2.57)$$

donde

$$g_1 = \frac{0.0783}{w_b^{0.238}(1 + 39.5w_b^{0.763})} \quad \text{y} \quad g_2 = \frac{0.560}{1 + 21.1w_b^{1.81}}. \quad (2.58)$$

Típicamente $z_{\text{rec}} \simeq 1089$ [23, 30]. Es importante señalar que aún no ha sido demostrado o investigado de manera cuidadosa qué tanto el parámetro de corrimiento es dependiente de los valores de (w_m, w_b) , que afectarían a \mathcal{R} a través de $q(\tilde{\Omega}_r, a_{\text{rec}})$ [lo cual es igual a $q(w_r/\tilde{h}^2, a_{\text{rec}}(w_m, w_b))$], ver expresión (2.54). Para no correr riesgos de una posible dependencia fuerte, se elige definir un parámetro $\bar{\mathcal{R}}$ que pueda ser equivalente a \mathcal{R} , que no contenga al término $q(\tilde{\Omega}_r, a_{\text{rec}})$ pero que tenga la misma utilidad que \mathcal{R} . Usualmente se define entonces como $\bar{\mathcal{R}} \equiv \Omega_{\text{M}0}^{1/2} \chi(z_{\text{rec}})$, esto es,

CAPÍTULO 2. PRUEBAS COSMOLÓGICAS
2.3. OSCILACIONES ACÚSTICAS BARIÓNICAS

$$\boxed{\bar{\mathcal{R}} = \sqrt{\Omega_{M0}} \int_0^{z_{\text{rec}}} \frac{H_0}{H(z)} dz} \quad (2.59)$$

A esta nueva $\bar{\mathcal{R}}$ es a la que se le suele llamar en la literatura como el “parámetro de corrimiento” [31, 33]. Para el caso general con curvatura espacial, $\bar{\mathcal{R}}$ tiene la forma:

$$\bar{\mathcal{R}} = \sqrt{\frac{\Omega_{M0}}{|\Omega_{k0}|}} \text{sinn} \left[\sqrt{|\Omega_{k0}|} \int_0^{z_{\text{rec}}} \frac{H_0}{H(z)} dz \right]. \quad (2.60)$$

Como se comentó anteriormente, observacionalmente se encuentra que $l_1^{TT} = 220$ [27]. Para obtener un valor de \mathcal{R} , o equivalentemente de $\bar{\mathcal{R}}$, el cual será usado para probar modelos cosmológicos arbitrarios, es preciso primero conocer el valor de \tilde{l}_1^{TT} y luego hacer el cociente con l_1^{TT} . Sin embargo, para calcular \tilde{l}_1^{TT} es preciso primero asumir o definir el modelo de referencia SCDM. Para ello se acostumbra usar el modelo Λ CDM, debido a que ajusta muy bien el primer pico. A este aspecto, es importante enfatizar que se utiliza Λ CDM pero *no* como el modelo de referencia, sino como el modelo con el cual se calcularía teóricamente el valor $l_1^{TT} = 220$, no para calcular el valor de 220, ya que esto se conoce de forma puramente observacional, sino más bien para poder determinar cuales son los valores de los parámetros (w_m, w_b, h) que se necesitan conocer para usarlos en el modelo de referencia SCDM.

Resulta entonces que los valores que mejor ajustan los datos del CMB usando Λ CDM son $(w_m = 0.14, w_b = 0.022, h = 0.72)$, generando $l_1^{TT} = 220 \pm 0.08$. Con lo cual se encuentra que los valores para SCDM deben ser entonces $(w_m = 0.14, w_b = 0.022, h = 0.37)$, con lo cual se calcula $\tilde{l}_1^{TT} = 247$. De aquí que

$$\mathcal{R} = \frac{\tilde{l}_1^{TT}}{l_1^{TT}} = 1.122 \pm 0.3. \quad (2.61)$$

O equivalentemente, asumiendo un valor de $q = 0.964$ se obtiene

$$\bar{\mathcal{R}} = \Omega_{M0}^{1/2} \chi(z_{\text{rec}}) = 1.71 \pm 0.05. \quad (2.62)$$

El valor reportado usando los datos de WMAP es de [32]

$$\boxed{\bar{\mathcal{R}} = 1.71 \pm 0.03} \quad (2.63)$$

2.3. Oscilaciones acústicas bariónicas

A través del muestreo de galaxias se ha encontrado que su distribución en el Universo es de tal forma que hay regiones con *sobredensidad* y otras de *baja densidad*, lo cual técnicamente es llamado como: “acumulación (*clustering*) de la materia bariónica”. Se le llama “materia bariónica” por tratarse de las galaxias.

El estudio de estas sobre y baja densidades se hace a través de una función de correlación a gran escala en una muestra de galaxias rojas luminosas (GRL) del SDSS (Sloan Digital Sky Survey) constituida por 46,748 galaxias ubicadas hasta una distancia de $z = 0.47$, la cual indica un pico evidente ubicado alrededor de $100h^{-1}$ Mpc [34]

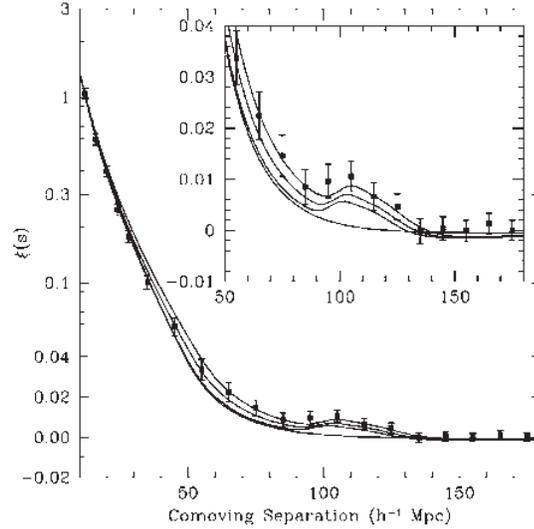


Figura 2.8: Oscilaciones acústicas bariónicas. Observe la existencia de un pico ubicado alrededor de $100h^{-1}$ Mpc. La existencia de este tipo y su valor observacional permite crear una prueba cosmológica para modelos. Créditos de la imagen: Eisenstein et al. [34].

(ver figura 2.8). La existencia de este pico es el motivo del término “*oscilaciones acústicas bariónicas*” y su ubicación permite crear una prueba para modelos cosmológicos.

Típicamente, para tomar en cuenta una región confiable de este muestreo de galaxias se hace un corte a $z = 0.35$ para estar seguros de que se está trabajando en el bulto de la muestra y no es sus orillas. Algunos autores, prefieren dividir la muestra en dos regiones o esferas, una hasta $z = 0.2$ y la otra hasta $z = 0.35$, para tener una región de galaxias *cercanas* (hasta $z = 0.2$) y otra *lejana* (hasta $z = 0.35$).

Existen al menos tres maneras de implementar la prueba de las oscilaciones acústicas bariónicas (BAO) para probar modelos cosmológicos, estas son: (1) usando el pico acústico A , (2) usando el pico acústico d_z , y (3) usando una prueba de dos puntos f . A continuación se detalla cada una de estas tres maneras.

Para el caso de un Universo plano, con w constante y usando el hecho de que se tiene un valor del redshift pequeño, $z_{\text{BAO}} = 0.35$, el *pico acústico* A de BAO se puede definir como [25, 34].

$$A(z) = \frac{\sqrt{\Omega_{\text{M}0}}}{E(z_{\text{BAO}})^{1/3}} \left[\frac{1}{z_{\text{BAO}}} \int_0^{z_{\text{BAO}}} \frac{dz}{E(z)} \right]^{2/3}. \quad (2.64)$$

Observacionalmente se encuentra que el valor de A es de [34]

$$A \equiv D_V(z_{\text{BAO}}) \frac{\sqrt{\Omega_{\text{M}0} H_0^2}}{z_{\text{BAO}} c} = 0.469 \pm 0.017, \quad (2.65)$$

donde “ c ” es la velocidad de la luz y $\Omega_{\text{M}0}$ es la componente conjunta de materia bariónica más oscura. Este valor observacional es el resultado de la función de correlación a grandes

CAPÍTULO 2. PRUEBAS COSMOLÓGICAS

2.4. EN RESUMEN:

escalas de una muestra de galaxias rojas luminosas (GRL) del SDSS (Sloan Digital Sky Survey) constituida por 46,748 galaxias ubicadas hasta una distancia de $z=0.47$ [34].

La función $D_V(z)$ se llama “*distancia de dilación*” y se define como [34, 35]

$$D_V(z) \equiv \left[d_A^2 \frac{cz(1+z)^2}{H(z)} \right]^{1/3}, \quad (2.66)$$

donde d_A es la distancia diametral angular. Se demuestra que $D_V(z)$ tiene la forma [34]–[36]

$$D_V(z) = \left[\frac{z}{H(z)} \left(\int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \right)^2 \right]^{1/3}. \quad (2.67)$$

Otra forma de implementar la prueba cosmológica usando las oscilaciones acústicas bariónicas es también a través de la posición del pico acústico pero ahora definida como [35]

$$d_z(z) \equiv r_s(z_d)/D_V(0.275), \quad (2.68)$$

donde $r_s(z_d)$ es el horizonte del sonido comóvil en la época de arrastre de bariones (baryon drag epoch) y $D_V(z)$ está dado por la expresión (2.66). El valor observacional es $d_z = 0.1390 \pm 0.0037$ [35].

La tercera forma de implementar los resultados observacionales de BAO para probar modelos cosmológicos es a través del cociente de la distancia de dilación evaluada en dos valores del corrimiento al rojo, es decir, $z = 0.2, 0.35$. Este cociente se denomina “*cociente de distancias*” f y se define como

$$f(z) \equiv \frac{D_V(0.35)}{D_V(0.2)}. \quad (2.69)$$

El valor observacional que se encuentra es $f = 1.736 \pm 0.065$ [35]. Esta tercera forma de implementar BAO es la más independiente del modelo y por tanto la más adecuada para probar modelos cosmológicos arbitrarios. El valor observacional de f , así como el de d_z , provienen del análisis espectroscópico de 893,319 galaxias sobre 9100 deg^2 del SDSS en su versión “Data Release 7” que incluye las muestras de galaxias rojas luminosas (LRG), las muestras principales y la muestra del 2dFGRS (2-degree Field Galaxy Redshift Survey) [35].

2.4. En resumen:

En este capítulo se han descrito tres tipos de pruebas cosmológicas que serán usadas para confrontar el modelo propuesto en el presente trabajo de tesis (que se describirá en el capítulo 6) contra datos observacionales, tales como los de las supernovas tipo Ia, la ubicación del primer pico del CMB y el pico de las oscilaciones acústicas bariónicas.

En este sentido, las expresiones (2.15), (2.42), (2.59), (2.63), (2.64) y (2.65) son las más relevantes de este capítulo y que se usarán posteriormente.

CAPÍTULO 2. PRUEBAS COSMOLÓGICAS

2.4. EN RESUMEN:

Confrontar modelos contra observaciones permite estudiar la viabilidad de modelos y acotar sus parámetros libres, para con ello, verifica si la teoría (el modelo) realmente puede explicar la realidad (las observaciones) y pasar de la especulación a la comprobación, de aquí la importancia de lo presentado en este capítulo.

No obstante, para poder hacer esta confrontación de la teoría contra datos aún falta un elemento central que permite hacerlo, que es la “*función estadística χ^2* ”. Esta función es el puente entre la teoría y datos, permite confrontar entre el valor medido *observacionalmente* de un dato contra su valor predicho *teóricamente*. La construcción y descripción de la función χ^2 es justamente el tema del siguiente capítulo: la *estadística Bayesiana*.

Capítulo 3

Estadística Bayesiana

Actualmente, una parte central de la cosmología consiste en utilizar los datos y observaciones cosmológicas para obtener conclusiones sobre los modelos que intentan describir al Universo. Por un lado, esto se logra a través de **probar** o verificar que los modelos sean capaces de reproducir lo que se observa a nivel cosmológico, por ejemplo, los datos observacionales de supernovas, el primer pico l_1^{TT} de las anisotropías del CMB, etc. Y por otro lado, las mismas observaciones sirven para **poner cotas** a los valores de los parámetros libres de los modelos.

En términos matemáticos, probar un modelo y poner cotas observacionales a sus parámetros libres se traduce en realizar un *análisis estadístico Bayesiano* al modelo en cuestión, usando datos observacionales, en el cual se confronta “modelo *vs* observaciones”. El análisis Bayesiano es el tema central del presente capítulo, comenzaré por explicar la notación que utilizaré.

Definición. Sean X y Y dos proposiciones, las cuales pueden tomar por ahora solamente *dos* valores cada una de ellas: que sea falsa o verdadera. Además, sea I una suposición. Entonces la notación:

$$\text{Prob}(X, Y|I)$$

indica la probabilidad de que X y Y sean verdaderas, asumiendo a I como verdadera.

Esta definición se extiende a cualquier número n de proposiciones X_1, X_2, \dots y de suposiciones I_1, I_2, \dots . O bien, la proposición sola X puede representar todo un conjunto de proposiciones o parámetros. Lo mismo para I .

En el contexto de nuestro estudio, X_1, X_2, \dots , serán los parámetros a inferir (e.g., los valores de los parámetros Ω_m, H_0, ζ , etc.) a partir de los datos observacionales. Y I_1, I_2, \dots será la información de fondo, con la que ya contamos respecto al Universo y que asumimos como cierta (e.g., los datos observacionales de las supernovas, la teoría de la Relatividad, el valor actual de la constante de Hubble, etc.).

La idea básica del estudio estadístico es buscar los valores de los parámetros que *mejor se ajusten a los datos*. Esto significa, en términos de la estadística Bayesiana, el buscar los valores que nos den la *máxima probabilidad* de que sean ciertos. Esta búsqueda se hará a través de una técnica estadística llamada **prueba** χ^2 .

3.1. Teoremas de probabilidad

Los dos axiomas de probabilidad que serán de utilidad en lo siguiente son:

Axioma. Suma de probabilidades:

$$\text{Prob}(X|I) + \text{Prob}(\bar{X} | I) = 1, \quad (3.1)$$

donde \bar{X} significa la negación de la proposición X .

Axioma. Producto de probabilidades:

$$\text{Prob}(X, Y | I) = \text{Prob}(X | Y, I) \cdot \text{Prob}(Y | I). \quad (3.2)$$

Lo que se desea es calcular probabilidades de los posibles “valores” que las proposiciones¹ pueden tomar, tales que *maximicen* la probabilidad de que estos valores sean ciertos en base a datos observacionales. Esto se traduce primeramente en calcular cierta probabilidad llamada comúnmente “*probabilidad posterior*”, que se define como:

$$\text{Prob}(X | Y, I).$$

Esta expresión se lee como: “*probabilidad de que los valores asumidos para la proposición o variable X [por ejemplo, $X = (\Omega_m, H_0)$] sean ciertos, asumiendo cierta proposición o datos Y como verdaderos (por ejemplo, $Y =$ los datos observacionales de supernovas), así como también alguna otra información de fondo I (por ejemplo, algunos otros valores cosmológicos y la teoría de la relatividad) como cierta*”.

La idea es calcular la probabilidad posterior para cada posible valor de X , buscando el valor $X = X_0$ que tiene el máximo valor de probabilidad posterior, lo cual significa que X_0 tiene la máxima probabilidad de ser cierto. A este valor X_0 se le denomina “*la mejor estimación de X* ”, calculado a partir de cierto conjunto de datos observacionales.

Desafortunadamente es difícil poder calcular la probabilidad posterior directamente, pero a través del **Teorema de Bayes** se puede hacer este cálculo.

Teorema de Bayes

$$\text{Prob}(X | Y, I) = \frac{\text{Prob}(Y | X, I) \cdot \text{Prob}(X | I)}{\text{Prob}(Y | I)}, \quad (3.3)$$

donde, cada uno de estos factores tienen un nombre particular:

- $\text{Prob}(X | Y, I) =$ Probabilidad posterior.
- $\text{Prob}(Y | X, I) =$ Función de probabilidad.
- $\text{Prob}(X | I) =$ Probabilidad previa.

¹Más adelante se verá que estas *proposiciones* usualmente corresponderán a los valores de parámetros libres de un modelo o teoría dada.

El teorema de Bayes se demuestra fácilmente de los axiomas (3.1) y (3.2). Este teorema se puede generalizar directamente al caso cuando las proposiciones o parámetros X y Y pueden tomar más que solo dos valores (falso o verdadero), sino todo un conjunto discreto de valores, o más aún, un *continuo* de valores. Además, se generaliza al caso cuando se tienen más que solo dos parámetros (X, Y), como será mostrado en la siguiente sección.

Para el caso continuo, el teorema de Bayes toma la forma

$$\mathbf{fdp}(X|Y, I) = \frac{\mathbf{fdp}(Y|X, I) \cdot \mathbf{fdp}(X|I)}{\mathbf{fdp}(X, Y|I)} \quad (3.4)$$

donde ahora X y Y toman valores continuos. Las expresiones “**fdp**” se denominan ahora como *funciones de densidad de probabilidad* (FDP) para X y Y .

3.2. Prueba χ^2

A continuación se describe la técnica estadística de estimación de parámetros llamada **prueba χ^2** .

Sean:

$X \equiv$ Vector cuyas componentes son el conjunto de los parámetros a estimar su valor [por ejemplo, $X = (\zeta, H_0, \Omega_m)$].

$D \equiv$ Vector cuyas componentes son el conjunto de datos observacionales [por ejemplo, los datos de supernovas, $D = (x_1, x_2, \dots, x_n)$].

$I \equiv$ Información de fondo que se asume como verdadera (por ejemplo, que la Teoría General de la Relatividad es correcta).

Entonces, el teorema de Bayes se escribe como:

$$\text{Prob}(X | D, I) \propto \text{Prob}(D | X, I) \cdot \text{Prob}(X | I). \quad (3.5)$$

Se ha omitido el denominador que aparecía en el teorema de Bayes (3.3), debido a que no es un factor relevante², lo importante son los otros dos factores: la *función de probabilidad* $\text{Prob}(D | X, I)$, y la *probabilidad previa* $\text{Prob}(X | I)$. Debido a que se ha omitido “ $\text{Prob}(D|I)$ ” en la expresión (3.5), es por eso que en lugar del símbolo de “igualdad” aparece el de “proporcional” (\propto).

El cálculo de la *probabilidad posterior* se basa en tres suposiciones. La primera es sobre la forma de la *probabilidad previa*. En este momento se va a asumir que es *constante*, sin embargo, en la sección 3.3 se estudiarán y utilizarán otras posibilidades (ver figura 3.1). Entonces, asumiendo una probabilidad previa *constante*, se tiene

$$\text{Prob}(X | I) = \text{cte}. \quad (3.6)$$

Esta expresión indica que todos los valores posibles para la proposición X son *igualmente probables a priori*, lo cual hace que su probabilidad previa sea una constante.

²El factor que iría como denominador sería: $\text{Prob}(D|I) =$ *probabilidad de que los datos sean ciertos asumiendo que la teoría es válida*. Este término no depende de X y se utiliza principalmente solo para normalizar el valor de la probabilidad posterior

$\text{Prob}(X | I)$ es la probabilidad de que los parámetros X tengan cierto valor, asumiendo a la teoría e información de fondo como verdaderas. Pero de la pura teoría e información de fondo, los parámetros X *no logran preferir* algún valor en particular *a priori*, sino que son los datos D quienes permiten escoger cuáles valores de X dan la mayor probabilidad de ser los verdaderos. Por tanto, la suposición “ $\text{Prob}(X | I) = \text{cte}$ ” indica que *a priori* no se está asignando alguna probabilidad mayor para algún valor particular de X sino que se les está asignando la misma probabilidad de ser, a cada uno de ellos.

Dado que la probabilidad previa es una constante, entonces todo el peso de calcular la probabilidad posterior recae sobre la *función de probabilidad*, esto es:

$$\text{Prob}(X | D, I) \propto \text{Prob}(D | X, I). \quad (3.7)$$

Ahora, tomemos dos datos cualesquiera x_k y x_l del conjunto de datos D . Del axioma (3.2) tenemos que:

$$\text{Prob}(x_k, x_l | X, I) = \text{Prob}(x_k | x_l, X, I) \cdot \text{Prob}(x_l | X, I). \quad (3.8)$$

En este momento conviene establecer la segunda suposición, esta es: “*La medición observacional de cada dato x_k es independiente de la medición de cualquier otro dato x_l* ”.

Esta suposición es muy razonable, ya que por ejemplo, medir la distancia modular $\mu(z)$ [cf. definición (2.42)] de una supernova, no influye en la medición que se obtiene al medir la distancia modular de alguna otra. Utilizando esta suposición, obtenemos:

$$\text{Prob}(x_k | x_l, X, I) = \text{Prob}(x_k | X, I),$$

de aquí que:

$$\text{Prob}(x_k, x_l | X, I) = \text{Prob}(x_k | X, I) \cdot \text{Prob}(x_l | X, I). \quad (3.9)$$

Solo ha desaparecido el elemento x_l del primer factor del lado derecho de la igualdad (3.8). Aplicando la propiedad (3.9) a todos los datos, la *función de probabilidad* se vuelve:

$$\text{Prob}(D | X, I) = \prod_{k=1}^n \text{Prob}(x_k | X, I). \quad (3.10)$$

La tercera suposición es: “*La distribución de probabilidad de cada dato x_k , generada a partir de su medición observacional, es en una buena aproximación, una distribución Gaussiana*”. Esta suposición se basa sobre el hecho *experimental* de que en la naturaleza al tomar l -mediciones de un mismo fenómeno bajo las mismas condiciones (en este caso por ejemplo, la observación de la *luminosidad relativa* de una supernova), la distribución histográfica de estas mediciones es Gaussiana.

Considerando esto, la distribución de probabilidad del dato x_k , tiene la forma:

$$\text{Prob}(x_k | X, I) = \frac{1}{\sigma_k \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(m_k - x_k)^2}{2\sigma_k^2} \right], \quad (3.11)$$

donde:

m_k es la *media* de la distribución gaussiana, es decir, m_k es el valor promedio de x_k .

σ_k es la desviación estándar que se obtiene de las multiples observaciones del dato x_k .

En términos cosmológicos y para el caso de la prueba de supernovas, el dato x_k corresponde a la medición *observacional* de la distancia modular “ μ_k ” de la k-ésima supernova del conjunto de datos de SNe. La distribución de probabilidad para μ_k surge de todas las mediciones realizadas a ésta magnitud, y que de acuerdo con la tercera suposición tiene la forma de una distribución *Gaussiana* o *normal*, centrada en el valor m_k .

Respecto a la magnitud de m_k , en el caso de la prueba de supernovas va a corresponder al valor que *teóricamente* se predice para el dato μ_k de la supernova. Para ir relacionando la teoría estadística aquí presentada con las pruebas cosmológicas, en lo siguiente cambiaré la notación como $x_k \rightarrow \mu_k^o$, donde el superíndice “o” en μ_k^o indica que es el k-ésimo dato medido *observacionalmente*. Y $m_k \rightarrow \mu_k^t(z)$, donde el superíndice “t” en $\mu_k^t(z)$ indica que es el k-ésimo dato predicho *teóricamente* por el modelo cosmológico en estudio. Nótese que solo $\mu_k^t(z)$ depende del redshift z , el otro término, μ_k^o , *no* porque es un dato observacional, que sí tiene asociado un valor específico de z , que fue *medido* y fijado también observacionalmente.

Combinando (3.10) y (3.11), la función de probabilidad toma la forma:

$$\text{Prob}(D|X, I) = \prod_{k=1}^n \frac{1}{\sigma_k \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(\mu_k^t(z, X) - \mu_k^o)^2}{2\sigma_k^2} \right]. \quad (3.12)$$

Observe como $\mu_k^t(z, X)$ depende de X . La parte de los datos observacionales D corresponden a μ_k^o . El término σ_k es la desviación estándar que se obtiene de las multiples observaciones del dato μ_k^o , su valor se obtiene también de las observaciones.

Definiendo la constante A como

$$A \equiv \prod_{k=1}^n \frac{1}{\sigma_k \sqrt{2\pi}}, \quad (3.13)$$

y a la *función* χ^2 como

$$\chi^2 \equiv \sum_{k=1}^n \frac{(\mu_k^t(z) - \mu_k^o)^2}{\sigma_k^2} \quad (3.14)$$

obtenemos que la *función de probabilidad* del teorema de Bayes (3.5) adquiere la forma:

$$\text{Prob}(D|X, I) = A \exp \left[-\frac{\chi^2}{2} \right]. \quad (3.15)$$

Por tanto, de acuerdo a la igualdad (3.7), hemos hallado la expresión para la *probabilidad posterior*:

$$\text{Prob}(X|D, I) = B \exp \left[-\frac{\chi^2}{2} \right], \quad (3.16)$$

donde B es una constante de proporcionalidad (y normalización), en ella ya va incluida la constante A . Observe que la función χ^2 no depende de z , solo depende del conjunto de parámetros X .

Para el caso continuo, la expresión de la *función de probabilidad* (3.15) puede expresarse en términos de una función de densidad de probabilidad como

$$\mathbf{fdp}(D|X, I) = cte \cdot e^{-\chi^2/2}, \quad (3.17)$$

donde “cte” es una constante de normalización. Con esta expresión, y para el caso más general en el cual *no se asume* necesariamente que la probabilidad previa sea una constante [ver expresión (3.6)], el teorema de Bayes toma la forma [ver (3.5) y (3.4)]

$$\boxed{\mathbf{fdp}(X|D, I) = cte \cdot e^{-\chi^2/2} \cdot \mathbf{fdp}(X|I)} \quad (3.18)$$

Con esta expresión general (3.18) para la FDP posterior, es posible *redefinir* una nueva función χ^2 como

$$\mathbf{fdp}(X|D, I) \equiv cte \cdot e^{-\chi_n^2/2}, \quad (3.19)$$

donde χ_n^2 es la nueva función χ^2 , el subíndice “n” indica que es la *nueva* función. Resolviendo para χ_n^2 obtenemos

$$\boxed{\chi_n^2(X) = -2 \ln \left(\frac{\mathbf{fdp}(X|D, I)}{cte} \right)} \quad (3.20)$$

Calcular las mejores estimaciones de cierto conjunto de parámetros, $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, significa encontrar el valor x_i^0 para cada uno de los parámetros x_i que *en conjunto* formarán un vector $X^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ con la característica de que *maximiza* la probabilidad posterior $\mathbf{fdp}(X|D, I)$ [ver ecuación (3.18)], es decir, que tienen el *máximo* de probabilidad de ser ciertos. A partir de la ecuación (3.19) puede verse que encontrar los valores x_i que maximizan a $\mathbf{fdp}(X|D, I)$ es equivalente a que *minimizen* la función $\chi_n^2(X)$.

Regularmente se trabaja sobre la función $\chi_n^2(X)$ en lugar de la FDP posterior. Calcular el vector X^0 es esencialmente un trabajo de calcular el *mínimo* de una función $[\chi_n^2(X)]$ de varias variables.

3.2.1. χ^2 como medida de calidad de ajuste

Una vez que se tiene un modelo teórico que contiene ciertos parámetros libres X que se desean estimar a través de datos observacionales, se busca el mínimo de la función $\chi_n^2(X)$, con lo cual se logran dos cosas:

Estimación de parámetros. La prueba da como resultado *la mejor estimación* de los valores de los parámetros libres, X_0 , del modelo teórico, en relación al conjunto de datos observacionales utilizados.

Calidad de ajuste. La misma prueba determina qué tan bueno es el ajuste del modelo teórico a los datos. Mientras más pequeño sea el valor de χ_n^2 , mejor a sido el ajuste de la teoría a los datos.

Una manera burda de estimar si un modelo ajusta razonablemente a los datos es que el valor obtenido para $\chi_n^2(X)$ sea del mismo orden que el número de datos utilizados para la prueba.

3.2.2. χ^2 por grados de libertad

El mínimo de la función χ^2 por *grados de libertad* se suele denotar como $\chi_{\text{d.o.f.}}^2$ y se define como

$$\chi_{\text{d.o.f.}}^2 \equiv \frac{\chi_{\min}^2}{n - p} \quad (3.21)$$

donde χ_{\min}^2 denota el valor mínimo de la función χ_n^2 , n corresponde al número de datos observacionales utilizados para acotar y calcular los p parámetros libres de la teoría. Por ejemplo, la muestra de supernovas “Union2” de la SCP [18] está compuesta de 557 datos, si con esta muestra de SNe estamos interesados en acotar y calcular *dos* parámetros libres de un modelo cosmológico en particular, por ejemplo, la densidad de materia Ω_{M0} y la constante de Hubble H_0 , entonces $n = 557$ y $p = 2$. Supongamos que el valor mínimo que se obtiene de la función χ_n^2 al estimar los valores de (Ω_{M0}, H_0) es $\chi_{\min}^2 = 570$, entonces, $\chi_{\text{d.o.f.}}^2 = 1.027$.

Siguiendo con el ejemplo, si ahora se utiliza la prueba conjunta de supernovas “Union2”, más el parámetro de corrimiento \mathcal{R} del CMB, “SNe+CMB”, para calcular las mejores estimaciones de (Ω_{M0}, H_0) , entonces $n = 558$, ya que el valor observacional del \mathcal{R} aporta *un* dato al conjunto de valores observacionales.

La ventaja y utilidad de calcular el valor de $\chi_{\text{d.o.f.}}^2$ consiste en que su magnitud es más independiente del número de datos observacionales utilizados para estimar valores de parámetros libres de un modelo, en comparación al valor de χ_{\min}^2 . Debido a que el valor del mínimo de la función χ_n^2 permite medir la calidad de ajuste del modelo en cuestión a los datos observacionales, resulta muy útil tener un valor del mínimo de χ_n^2 *independiente* del número de datos utilizados, ya que esto permite *comparar* entre diferentes mínimos de χ_n^2 , obtenidos a partir de *diferentes muestras* de datos observacionales que contienen *diferentes cantidades* de números de datos n , para observar la calidad de ajuste del modelo a los diferentes grupos de datos utilizados para probarlo y poder comparar entre ellos.

Por ejemplo, si ahora se utiliza la muestra de supernovas “Union” de la SCP [37] que está compuesta de 307 datos, para estimar los valores de (Ω_{M0}, H_0) , y se obtiene un valor de $\chi_{\min}^2 = 340$, se estaría teniendo un valor mucho menor de χ_{\min}^2 que cuando se utiliza la muestra “Union2” ($\chi_{\min}^2 = 570$), sin embargo esto no significa que la calidad de ajuste sea mejor. Si ahora comparamos los valores de $\chi_{\text{d.o.f.}}^2$ notamos que en realidad el mejor ajuste se logró utilizando la muestra de “Union2” ($\chi_{\text{d.o.f.}}^2 = 1.027$), ya que usando “Union” se tiene que $\chi_{\text{d.o.f.}}^2 = 1.114$. Mientras más pequeño sea el valor de $\chi_{\text{d.o.f.}}^2$, mejor habrá sido la calidad de ajuste del modelo a los datos.

3.3. Marginalización

Una herramienta estadística de gran utilidad es la llamada **marginalización**. El proceso de *marginalización* se utiliza cuando en un modelo teórico con varios parámetros libres, es necesario reducir el número de estos o eliminar estadísticamente la dependencia del modelo con respecto a algunos parámetros en particular para después poder calcular los valores más probables de los parámetros libres restantes. Técnicamente significa construir

probabilidades o funciones de distribución de probabilidad (FDP) que *ya no* dependan de algunos parámetros en particular del modelo.

Para ilustrar esto ya en el caso de la cosmología, la marginalización se utiliza cuando se desea calcular las mejores estimaciones de ciertos parámetros libres de algún modelo cosmológico en particular, por ejemplo Ω_m , pero hay *más* parámetros libres en los cuales no estamos interesados en estimar por alguna razón, por ejemplo H_0 , entonces se usa el proceso de *marginalización*, que para el ejemplo sería *marginalizar sobre H_0* para eliminarlo como parámetro libre del modelo y poder tener una FDP que ya no dependa de H_0 y con la cual podremos calcular el valor estadísticamente más probable de Ω_m solamente.

La marginalización consiste esencialmente en *sumar* las probabilidades sobre todos los valores probables de una proposición o parámetro. Retomando la notación y expresiones que se utilizaron al principio de este capítulo, una manera de expresar la *ecuación de marginalización* en su forma más sencilla es

Ecuación de Marginalización

$$\text{Prob}(X|I) = \text{Prob}(X, Y|I) + \text{Prob}(X, \bar{Y}|I), \quad (3.22)$$

donde X y Y son proposiciones que pueden tomar solamente *dos* valores cada una de ellas: que sea falsa o verdadera. La barra sobre \bar{Y} indica que la proposición es falsa y I es una suposición. Entonces, inicialmente se tiene un sistema o modelo teórico que depende de dos proposiciones o parámetros, X y Y , cuya probabilidad de que sean verdaderas o falsas esta cuantificada por la probabilidad $\text{Prob}(X, Y|I)$. Para deshacernos del parámetro Y (i.e., marginalizar sobre Y), sumamos las probabilidades sobre todos los posibles valores de Y , que para este caso son solo dos, falso y verdadero, que es lo que se está indicando en la ecuación de marginalización (3.22). De esta suma de probabilidades sobre todos los posibles valores de Y (lado derecho de la ec. (3.22)) se obtiene una probabilidad que ya no depende de Y , es decir, $\text{Prob}(X|I)$.

La ecuación de marginalización (3.22) puede leerse como sigue: “*La probabilidad de que X y Y sean verdaderas, más la probabilidad de que X sea verdadera pero Y falsa, es igual a la probabilidad de que X sea verdadera, asumiendo a I como cierta en todos los casos*”.

La marginalización es de gran ayuda, ya que con ella se logra eliminar algunos *parámetros libres* de la teoría, y que, de conservarlos, podrían generar valores con *tendencias* en la estimación de los parámetros libres restantes que realmente puedan ser importantes.

Esta ecuación se generaliza fácilmente para el caso cuando las proposiciones pueden tomar más de dos valores discretos o bien para el caso continuo. En este último caso, la ecuación de marginalización se expresa como

$$\text{fdp}(X|I) = \int \text{fdp}(X, Y|I) dY, \quad (3.23)$$

intregrando sobre todos los posibles valores de Y que varían de forma continua.

En la práctica, la expresión a la que hay que marginalizar es la *probabilidad posterior* en el caso continuo, $\text{fdp}(X, Y|D, I)$. La ecuación de marginalización para este caso se expresa como

$$\text{fdp}(X|D, I) = \int \text{fdp}(X, Y|D, I) dY. \quad (3.24)$$

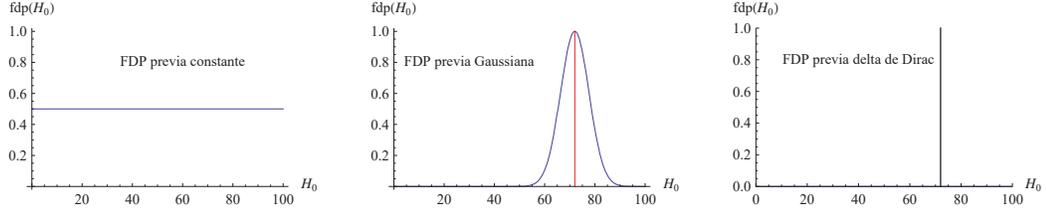


Figura 3.1: Los tres tipos principales de funciones de densidad de probabilidad (FDP) previas. En este caso se ilustran como ejemplo para la variable H_0 en el intervalo $[0, 100]$. En el caso Gaussiano y de delta de Dirac, las gráficas están centradas en el valor $H_0 = 72$.

Usando la expresión (3.18) obtenemos

$$\boxed{\mathbf{fdp}(X|D, I) = cte \cdot \int e^{-\chi^2(X, Y)/2} \cdot \mathbf{fdp}(Y|I) dY} \quad (3.25)$$

donde la función χ^2 depende de las variables (X, Y) y $\mathbf{fdp}(Y|I)$ es la *función de densidad de probabilidad previa* para la variable Y . Note cómo la nueva FDP posterior $\mathbf{fdp}(X|D, I)$ ya no depende de Y . Una vez que se tiene $\mathbf{fdp}(X|D, I)$, se puede *redefinir* una nueva función χ^2 como

$$\mathbf{fdp}(X|D, I) \equiv cte \cdot e^{-\chi_m^2/2}, \quad (3.26)$$

donde χ_m^2 es la nueva función χ^2 , el subíndice m indica que es para el caso cuando se ha “*marginalizado*”. Resolviendo para χ_m^2 obtenemos

$$\boxed{\chi_m^2(X) = -2 \ln \left(\frac{\mathbf{fdp}(X|D, I)}{cte} \right)} \quad (3.27)$$

La función $\chi_m^2(X)$ depende ahora ya solo de la variable X .

Existen varias formas de marginalización, en el presente trabajo empleamos tres que son las más importantes y utilizadas (ver figura 3.1):

1. Marginalización asumiendo una FDP previa “ $\mathbf{fdp}(Y|I)$ ” *constante*.
2. Marginalización asumiendo una FDP previa “ $\mathbf{fdp}(Y|I)$ ” *Gaussiana*.
3. Marginalización asumiendo una FDP previa “ $\mathbf{fdp}(Y|I)$ ” con la forma de una *delta de Dirac*.

En cada una de ellas, el parámetro libre a marginalizar será la constante de Hubble H_0 . Las tres formas de marginalización se ilustrarán para el caso de la prueba de supernovas y asumiendo que se tienen dos parámetros libres, $\tilde{\zeta}$ y H_0 .

La ecuación de marginalización (3.25) para este caso adquiere la forma

$$\boxed{\mathbf{fdp}(\tilde{\zeta}) = cte \cdot \int_0^\infty e^{-\chi^2(\tilde{\zeta}, H_0)/2} \cdot \mathbf{fdp}(H_0) dH_0} \quad (3.28)$$

En general, la integración (3.28) debe hacerse sobre todo el rango de posibles valores del parámetro a ser marginalizado. En este caso, el rango de posibles valores para H_0 tomando en cuenta solamente la expansión del Universo es $(0, \infty)$.

A continuación se describen estas tres técnicas de marginalización para H_0 .

3.3.1. FDP previa *constante* e integración analítica en SNe.

Asumir una FDP previa *constante* para marginalizar H_0 significa que todos los valores posibles para \tilde{H}_0 son *igualmente probables*, no hay ningún valor que destaque por encima de los demás, por lo cual su función de densidad de probabilidad es simplemente una constante. Esto también podría verse como el hecho de que no se está prefiriendo a priori ningún valor en particular para \tilde{H}_0 . Ver figura 3.1.

Para la marginalización de H_0 usando una FDP previa *constante*, en el caso de la prueba de supernovas a un modelo cosmológico dado, es posible resolver analíticamente la integral (3.28) que permite al final poder tener una expresión de la función χ^2 que ya no dependerá de H_0 .

Conviene mencionar que el procedimiento que se describe a continuación para resolver analíticamente la integral (3.28) solo es válido para el caso en que se tiene una métrica de FRW espacialmente *plana*, para el caso con curvatura espacial no es posible aplicar ésta técnica con la prueba de supernovas, sino que se debe resolver *numéricamente* la integral (3.28).

Consideremos la expresión para la distancia de luminosidad (2.24) para el caso plano ($\sqrt{k} = 0$ y $\sin x = x$). Multiplicamos y dividimos por la constante de Hubble H_0 esta ecuación para obtener

$$d_L(z, \tilde{\zeta}, H_0) = \frac{c(1+z)}{H_0} \int_0^z \frac{H_0 dz'}{H(z', \tilde{\zeta}, H_0)}. \quad (3.29)$$

Ahora, definimos una nueva “distancia de luminosidad” *adimensional* como $D_L(z, \tilde{\zeta}) \equiv H_0 \cdot d_L(z, \tilde{\zeta}, H_0)/c$. Entonces

$$D_L(z, \tilde{\zeta}) = (1+z) \int_0^z \frac{dz'}{E(z', \tilde{\zeta})}, \quad (3.30)$$

donde $D_L(z, \tilde{\zeta})$ ya no depende de H_0 , y $E(z, \tilde{\zeta}) \equiv H(z, \tilde{\zeta}, H_0)/H_0$. Con esto, la distancia modular teórica (2.42) se vuelve

$$\mu^t(z, \tilde{\zeta}, H_0) = 5 \log_{10} \left(\frac{D_L(z, \tilde{\zeta}) \cdot c}{H_0 \cdot \text{Mpc}} \right) + 25 \equiv 5 \log_{10} \left(\frac{D_L(z, \tilde{\zeta})}{\tilde{H}_0} \right) + 25, \quad (3.31)$$

donde hemos definido un “parámetro de Hubble” *adimensional* $\tilde{H}_0 \equiv H_0 \cdot \text{Mpc} / c$. Ahora, definimos una nueva distancia modular teórica que ya no dependa de H_0 , como

$$\tilde{\mu}^t(z, \tilde{\zeta}) \equiv 5 \log_{10}[D_L(z, \tilde{\zeta})] + 25. \quad (3.32)$$

Entonces, la expresión (3.31) para la distancia modular es

$$\mu^t(z, \tilde{\zeta}, H_0) = \tilde{\mu}^t(z, \tilde{\zeta}) - 5 \log_{10}[\tilde{H}_0]. \quad (3.33)$$

De esto, construimos la función χ^2 (3.14) con estas nuevas definiciones como

$$\chi^2(\tilde{\zeta}, H_0) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\tilde{\mu}^t(z_i, \tilde{\zeta}) - \mu_i^{\text{obs}} - 5 \log_{10} \tilde{H}_0}{\sigma_i} \right)^2, \quad (3.34)$$

donde μ_i^{obs} es el valor *observacional* de la distancia modular y σ_i la desviación estándar de la observación. Reescribimos la expresión (3.34) como

$$\begin{aligned} \chi^2(\tilde{\zeta}, H_0) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\tilde{\mu}_i^t - \mu_i^{\text{obs}}}{\sigma_i} \right)^2 - 2 \left(5 \log_{10} \tilde{H}_0 \right) \sum_{i=1}^n \left(\frac{\tilde{\mu}_i^t - \mu_i^{\text{obs}}}{\sigma_i^2} \right) + \\ + \left(5 \log_{10} \tilde{H}_0 \right)^2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\sigma_i^2} \right). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Si definimos³

$$A \equiv \sum_{i=1}^n \left(\frac{\tilde{\mu}_i^t - \mu_i^{\text{obs}}}{\sigma_i} \right)^2, \quad B \equiv \sum_{i=1}^n \frac{\tilde{\mu}_i^t - \mu_i^{\text{obs}}}{\sigma_i^2}, \quad C \equiv \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2}, \quad (3.36)$$

entonces podemos expresar a (3.35) como

$$\chi^2(\tilde{\zeta}, H_0) = A - 2Bx + Cx^2, \quad (3.37)$$

donde

$$x \equiv 5 \log_{10}(\tilde{H}_0). \quad (3.38)$$

Observe que toda la dependencia de la función χ^2 con respecto a H_0 está ahora contenida en la variable x . La ecuación de marginalización para \tilde{H}_0 en este caso es

$$\mathbf{fdp}(\tilde{\zeta}) = cte \cdot \int_0^\infty e^{-\chi^2(\tilde{\zeta}, \tilde{H}_0)/2} \mathbf{fdp}(\tilde{H}_0) d\tilde{H}_0, \quad (3.39)$$

donde $\mathbf{fdp}(\tilde{H}_0)$ es la FDP previa para \tilde{H}_0 . Ahora, es en este punto donde asumimos que la FDP previa para \tilde{H}_0 es *constante*. En la sección 3.3.2, donde se discute el caso Gaussiano, se asumirá una FDP previa con la forma de una Gaussiana en lugar de constante, para $\mathbf{fdp}(\tilde{H}_0)$ en la expresión (3.39).

Entonces, tomando en cuenta la suposición de FDP previa constante tenemos

$$\mathbf{fdp}(\tilde{\zeta}) = cte \cdot \int_0^\infty e^{-\chi^2/2} d\tilde{H}_0. \quad (3.40)$$

Para solucionar la integral (3.40) hacemos un cambio de variable de \tilde{H}_0 a x [ver expresión (3.38)]. Al mismo tiempo, sustituimos la expresión (3.37) en (3.40) produciendo

³Note que estas expresiones no dependen ya H_0 .

$$\mathbf{fdp}(\tilde{\zeta}) = cte \left(\frac{\ln 10}{5} \right) \exp \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{B}^2}{C} - A \right) \right] \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{C}{2} \left(x - \frac{\tilde{B}}{C} \right)^2 \right] dx, \quad (3.41)$$

donde $\tilde{B} \equiv B + (\ln 10)/5$. Podemos ver que la integral (3.41) tiene la forma de una distribución Gaussiana, es decir

$$1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{(x - \bar{x})^2}{2\sigma^2} \right] dx, \quad (3.42)$$

donde \bar{x} es la media y σ^2 es la varianza de la distribución. Entonces la expresión (3.41) se vuelve

$$\mathbf{fdp}(\tilde{\zeta}) = cte \left(\frac{\ln 10}{5} \right) \sqrt{\frac{2\pi}{C}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(A - \frac{\tilde{B}^2}{C} \right) \right], \quad (3.43)$$

tal que $\mathbf{fdp}(\tilde{\zeta})$ ya no depende de H_0 . Note entonces que para este caso no es necesario hacer integración numérica de la expresión (3.40). Podemos expresar esta $\mathbf{fdp}(\tilde{\zeta})$ en términos de una nueva función χ_c^2 como

$$\mathbf{fdp}(\tilde{\zeta}) = a \cdot e^{-\chi_c^2/2}, \quad (3.44)$$

donde $a \equiv cte \cdot \sqrt{2\pi} \ln 10 / (5\sqrt{C})$ y la etiqueta “c” indica FDP previa “constante” para H_0 . Resolviendo para χ_c^2 obtenemos

$$\chi_c^2(\tilde{\zeta}) \equiv A(\tilde{\zeta}) - \frac{\left[B(\tilde{\zeta}) + \ln(10)/5 \right]^2}{C} \quad (3.45)$$

Esta nueva χ_c^2 ya no depende de H_0 . A partir de ella se puede proceder a calcular la mejor estimación para $\tilde{\zeta}$.

3.3.2. FDP previa *Gaussiana*

Marginalizar H_0 usando una FDP previa *Gaussiana* consiste en asumir una distribución de probabilidad para H_0 con la forma de una distribución Gaussiana, la cual estará centrada en un cierto valor que indicaremos con H_0^* y con un ancho de la Gaussiana caracterizado por una desviación estándar σ^* (ver figura 3.1). A diferencia del caso de FDP previa constante, en el caso Gaussiano sí se está prefiriendo un cierto valor para H_0 (sugerido por alguna otra observación cosmológica, por ejemplo, WMAP), que es el valor central de la Gaussiana H_0^* , pero asumiendo que existen también otros valores de H_0 que tienen cierta probabilidad (menor a la de H_0^*) de ser ciertos. La probabilidad de estos otros valores están distribuidos justamente de forma Gaussiana.

Entonces, una FDP previa para H_0 con la forma de una Gaussiana se expresa como

$$\mathbf{fdp}(H_0) = \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{H_0 - H_0^*}{\sigma^*} \right)^2 \right]. \quad (3.46)$$

Con esto, la ecuación de marginalización (3.28) se vuelve

$$\mathbf{fdp}(\tilde{\zeta}) = cte \cdot \int_0^\infty e^{-\chi^2/2} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{H_0 - H_0^*}{\sigma^*} \right)^2 \right] dH_0. \quad (3.47)$$

El valor central H_0^* que se utiliza en el presente trabajo es el de $H_0^* = 72 \text{ (km/s)Mpc}^{-1}$ con una desviación estandar de $\sigma^* = 8 \text{ (km/s)Mpc}^{-1}$ como es reportado en las observaciones del telescopio espacial Hubble (HST) [38].

En este caso ya no es posible realizar un procedimiento parecido al descrito en la sección 3.3.1 para resolver *analíticamente* la integral (3.47), por lo cual ésta debe resolverse numéricamente.

Una vez que se tiene la expresión numérica de $\mathbf{fdp}(\tilde{\zeta})$, se construye una nueva función χ^2 definida como

$$\mathbf{fdp}(\tilde{\zeta}) \equiv cte \cdot e^{-\chi_g^2/2}, \quad (3.48)$$

donde χ_g^2 es la nueva función χ^2 , el subíndice “g” indica “marginalización *Gaussiana*”. Resolviendo para χ_g^2 obtenemos

$$\chi_g^2(\tilde{\zeta}) = -2 \ln \left(\frac{\mathbf{fdp}(\tilde{\zeta})}{cte} \right) \quad (3.49)$$

Esta nueva χ_g^2 ya no depende de H_0 . A partir de ella se puede proceder a calcular la mejor estimación para $\tilde{\zeta}$.

3.3.3. FDP previa *Delta de Dirac*

Esta marginalización consiste en asumir que H_0 tiene un valor *específico* H_0^* . En este caso *si* se está prefiriendo *totalmente* un valor específico para H_0 en donde se esta poniendo el 100% de la probabilidad de que sea cierto, cualquier otro valor para H_0 tiene una probabilidad *nula*. Esto significa que la distribución de la probabilidad para H_0 tiene la forma de una *delta de Dirac* centrada en el valor H_0^* . Dado que para cualquier otro valor de H_0 la probabilidad es nula, significa que la desviación estándar σ^* de la probabilidad es cero y por ello la FDP previa tiene la forma de la delta de Dirac. Es como asumir que el valor de H_0 a sido medido con infinita precisión (con desviación estandar igual a cero), tal que su $\mathbf{fdp}(H_0)$ tiene la forma de la delta.

Claramente, esta suposición es solo una idealización para simplificar el trabajo ya que un valor medido con infinita precisión no corresponde a la realidad. Sin embargo, en varios casos esta suposición es una buena aproximación. Esta FDP previa tiene la ventaja de que simplifica enormemente la manera de resolver la integral de la ecuación de marginalización (3.28) usando las propiedades matemáticas de la delta de Dirac. Entonces, una FDP previa para H_0 con la forma de una delta de Dirac tiene la forma

$$\mathbf{fdp}(H_0) = \delta(H_0 - H_0^*), \quad (3.50)$$

Con lo cual la expresión (3.28) resulta

CAPÍTULO 3. ESTADÍSTICA BAYESIANA

3.4. PRUEBA χ^2 USANDO SNE, CMB Y BAO

$$\mathbf{fdp}(\tilde{\zeta}) = cte \cdot e^{-\chi^2(\tilde{\zeta}, H_0^*)/2}. \quad (3.51)$$

El valor de H_0^* se toma de alguna otra observación cosmológica independiente. En particular elegimos $H_0^* = 72$ (km/s)Mpc⁻¹, como lo indican las observaciones del HST [38].

En la práctica, marginalizar H_0 usando una FDP previa de delta de Dirac consiste simplemente en fijar el valor de $H_0 = H_0^*$ en todas las expresiones donde aparezca la constante de Hubble, con esto entonces H_0 deja de ser un parámetro libre.

3.4. Prueba χ^2 usando SNe, CMB y BAO

En el caso de las supernovas Ia (SNe) la magnitud observacional que se utiliza para confrontar teoría *vs* observaciones es la distancia modular $\mu(z)$ definida por la expresión (2.42) y que es la cantidad utilizada para la construcción de la función χ^2 , que como ya se había indicado en la expresión (3.14), se define como

$$\chi_{\text{SNe}}^2 = \sum_{k=1}^n \left[\frac{\mu(z_k) - \mu_k}{\sigma_k} \right]^2 \quad (3.52)$$

donde μ_k es el valor *medido observacionalmente* de una supernova Ia situada a una distancia z_k del observador. Y el término $\mu(z_k)$ es la predicción *teórica* de la distancia modular dada por la expresión (2.42) para esa supernova. El denominador σ_k corresponde a la desviación estándar en la medición de μ_k .

Para el caso de las anisotropías de la radiación cósmica de fondo (CMB), el parámetro observacional que se utiliza para la construcción de la función χ^2 es el parámetro de corrimiento \mathcal{R} definido en la expresión (2.43) o su versión equivalente, $\bar{\mathcal{R}}$, en (2.59). La función χ^2 para \mathcal{R} -CMB se define como

$$\chi_{\text{CMB}}^2 \equiv \left[\frac{\mathcal{R}(z) - \mathcal{R}_{\text{obs}}}{\sigma_{\mathcal{R}}} \right]^2, \quad (3.53)$$

o equivalentemente

$$\chi_{\text{CMB}}^2 \equiv \left[\frac{\bar{\mathcal{R}}(z) - \bar{\mathcal{R}}_{\text{obs}}}{\sigma_{\bar{\mathcal{R}}}} \right]^2, \quad (3.54)$$

donde $(\bar{\mathcal{R}}, \sigma_{\bar{\mathcal{R}}})$ están dados por los valores en (2.63).

Para el caso de las variaciones acústicas bariónicas (BAO), se utiliza el pico acústico A , dado por la expresión (2.64), para construir la función χ^2 de la siguiente manera

$$\chi_{\text{A-BAO}}^2 \equiv \frac{[A(z) - 0.469]^2}{0.017^2} \quad (3.55)$$

donde $A(z)$ es el valor *teórico* que predice el modelo cosmológico. El valor observacional del pico acústico es $A_{\text{obs}} = 0.469 \pm 0.017$ [34] (ver expresión 2.65).

Usando el pico acústico d_z definido en la expresión (2.68), la función χ^2 para este caso es

$$\chi_{d_z\text{-BAO}}^2 \equiv \frac{[d_z(z) - 0.1390]^2}{0.0037^2} \quad (3.56)$$

Finalmente, cuando se usa el cociente de distancias definido en la expresión (2.69) la función χ^2 queda dada como

$$\chi_{f\text{-BAO}}^2 \equiv \frac{[f(z) - 1.736]^2}{0.065^2} \quad (3.57)$$

Es posible también definir una función χ^2 que tome en cuenta todas las pruebas cosmológicas descritas arriba. Esto se hace simplemente usando cada una de las funciones χ^2 , obteniendo

$$\chi_{\text{total}}^2 = \chi_{\text{SNe}}^2 + \chi_{\text{CMB}}^2 + \chi_{\text{A-BAO}}^2 + \chi_{d_z\text{-BAO}}^2 + \chi_{f\text{-BAO}}^2 \quad (3.58)$$

o bien, se puede considerar solo ciertas pruebas que se deseen, o incluir más.

3.5. En resumen:

El presente capítulo ha sido de estadística, y en particular sobre la *función* χ^2 , que es la parte central de la técnica para confrontar datos observacionales con predicciones teóricas. Por lo mismo, esta función desempeña un papel central en la prueba de modelos cosmológicos. Lo descrito en este capítulo, en combinación con el capítulo 2 permite tener ya todas las bases necesarias para implementar y aplicar las tres pruebas cosmológicas (SNe Ia, \mathcal{R} -CMB y A-BAO) a un modelo cosmológico dado.

Las expresiones más relevantes de este capítulo y que serán utilizadas en el capítulo 6 para probar específicamente el modelo cosmológico propuesto en el presente trabajo de tesis son: (3.14), (3.20), (3.21), (3.45), (3.49), (3.52), (3.54) y (3.55).

La sección sobre la marginalización y sus técnicas (sección 3.3) es de particular importancia, se utilizará en repetidas ocasiones en el capítulo 6 para marginalizar sobre la constante de Hubble H_0 , por lo que conviene comprender bien los conceptos descritos en esa sección.

En el siguiente capítulo se describirá el descubrimiento de la expansión *acelerada* del Universo, la energía oscura y el modelo cosmológico Λ CDM. Las tres cosas están muy vinculadas entre si ya que las dos primeras son predicciones de Λ CDM.

En el capítulo 4 se utilizará ya la función χ^2 y los datos de supernovas Ia para probar el modelo Λ CDM, hacer estimaciones sobre sus parámetros libres y acotarlos.

Capítulo 4

Energía oscura y la expansión acelerada del Universo

4.1. Descubrimiento de la aceleración

En 1998 un grupo de astrónomos encabezados por Adam G. Riess de la Universidad de California en Berkeley, publicaron un artículo titulado “*Observational evidence from supernovae for an accelerating Universe and a cosmological constant*” [7] en el que indicaban la posible evidencia de que el Universo se está expandiendo **aceleradamente**, hoy en día.

Este grupo realizó un estudio sobre una muestra de 50 supernovas tipo Ia (SNe Ia) que se encontraban a diversas distancias cosmológicas (con un redshift entre $0 \lesssim z \leq 0.62$, esta era la muestra más numerosa y de mayor redshift que se tenía en aquel momento). Del estudio descubrieron que las supernovas parecían tener una luminosidad aparente *menor* de la que predecía el modelo cosmológico más aceptado en aquel tiempo: $\Omega_{M0} = 0.2$ (con $\Omega_{r0} = \Omega_{\Lambda0} = \Omega_{k0} = 0$). Revisaron las posibles razones que atenuaban su luminosidad, tales como errores sistemáticos en las mediciones, polvo interestelar o intergaláctico, evolución de la metalicidad, perturbaciones locales en la razón de expansión, lentes gravitacionales, etc. y a pesar de tomar en cuenta estos fenómenos, la luminosidad era de cualquier forma notablemente menor a lo esperado y sin que sus contribuciones lograran explicar el atenuamiento (ver figura 4.1).

De aquí se concluyó que el atenuamiento era en realidad debido a que las supernovas se encontraban a una distancia *mayor* de la esperada, es decir, que las supernovas a alto redshift estaban en promedio 10%–15% más distantes que lo que predecía el modelo cosmológico más aceptado en aquel tiempo, que predice un Universo en expansión *desacelerada*. Al realizar un análisis estadístico con las supernovas para determinar y acotar los valores de Ω_{M0} y $\Omega_{\Lambda0}$ encontraron que el modelo cosmológico favorecido (i.e., que mejor ajustaba a los datos de supernovas) era el de una constante cosmológica positiva, $\Omega_{\Lambda0} > 0$, con un 99.9% de nivel de confianza (4.0σ) y un Universo en expansión **acelerada**, con también un 99.9% de confianza; asumiendo solamente que Ω_{M0} fuera positiva [7] (ver figura 4.1).

Con esto concluyeron que el aparente atenuamiento de las supernovas, o bien, el hecho de que estuvieran más distantes de lo predicho por el modelo cosmológico más aceptado

CAPÍTULO 4. ENERGÍA OSCURA Y LA EXPANSIÓN ACELERADA DEL UNIVERSO

4.1. DESCUBRIMIENTO DE LA ACELERACIÓN

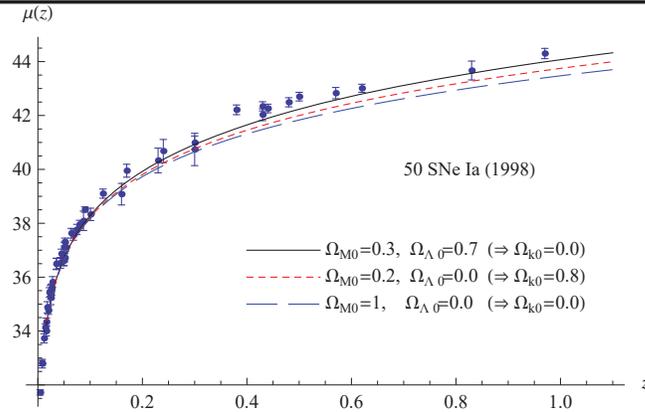


Figura 4.1: Gráfica de los 50 datos de supernovas tipo Ia utilizados por Riess et al. [7], con los que llegaron a la conclusión de la aceleración presente del Universo y la posible existencia de una constante cosmológica no nula. La figura muestra los datos con sus barras de error así como las líneas generadas por tres modelos cosmológicos diferentes. El modelo $\Omega_{M0}=0.2$, con $\Omega_{\Lambda0}$ y $\Omega_{k0} = 0$ era el de mayor aceptación entre la comunidad de cosmólogos antes del descubrimiento del grupo de Riess. Para poder construir las gráficas mostradas fue asumido un valor de $\Omega_{r0} = 0$ y $H_0 = 71$ (km/s)Mpc⁻¹.

en su tiempo, podría explicarse con la presencia de una constante cosmológica positiva ($\Omega_{\Lambda0} \approx 0.7$, asumiendo $\Omega_k = 0$) y con un Universo en una etapa de expansion acelerada actualmente [7].

Este estudio despertó gran interés en el tema dentro de la comunidad científica, lo que generó que diversos grupos se pusieran a trabajar en el tema. En el mismo año, un grupo liderado por Saul Perlmutter del *Lawrence Berkeley National Laboratory*, en Berkeley, California, realizó un estudio semejante al de Riess, pero usando sus propias formas de manejar los datos de supernovas y sus propias formas de calibración de los mismos llegó a la misma conclusión: un Universo en expansión acelerada y la presencia de una constante cosmológica con contribución del orden de $\Omega_{\Lambda0} \approx 0.7$ [39, 8].

Desde 1998 a la fecha se han realizado estudios cada vez más exhaustivos sobre este fenómeno de la expansión *acelerada*. Diversos grupos se han dedicado a obtener muestras de supernovas cada vez más numerosas, de mayor calidad y confiabilidad, y estos siguen confirmando y con mayor certeza la aceleración en la expansión del Universo (ver figuras 4.2–4.5).

Por la parte teórica se han propuesto una enorme cantidad de modelos que den explicación a este fenómeno. Sin embargo, aún no hay un modelo que lo explique de manera satisfactoria, todos los modelos, algunos mejor que otros, explican de manera parcial la aceleración pero teniendo problemas, aspectos incomprendidos o abriendo nuevos problemas, dentro del mismo modelo. Aún se está lejos de lograr una comprensión profunda del fenómeno.

La mayoría de los modelos asumen que existen un cierto tipo de energía o materia hasta ahora desconocida con la propiedad y capacidad de expandir aceleradamente al Universo.

CAPÍTULO 4. ENERGÍA OSCURA Y LA EXPANSIÓN ACELERADA DEL UNIVERSO

4.2. ¿CÓMO SE SABE QUE EL UNIVERSO SE EXPANDE ACELERADAMENTE HOY?

A esta energía responsable de la aceleración se le ha llamado **energía oscura**.

Entre todos los modelos existentes hoy en día para explicar la aceleración y la energía oscura destaca el llamado “ Λ CDM” (*Lambda Cold Dark Matter*), que es el que mejor explica las observaciones cosmológicas. Este modelo propone que el Universo está constituido principalmente por materia oscura fría y *constante cosmológica*¹ a manera de energía oscura. En las secciones 4.4–4.5 lo describiré en detalle, mostrando sus virtudes y sus problemas.

4.2. ¿Cómo se sabe que el Universo se expande *aceleradamente* hoy?

Para evidenciar la aceleración presente se utiliza el *parámetro de desaceleración*², $q(z)$, que tal como su nombre lo dice, indica la desaceleración o aceleración en la expansión del Universo (ver secciones 1.7, 4.2).

En esta sección se hará una aproximación lineal de $q(z)$, centrada en el tiempo presente ($z = 0$) para estimar el valor del parámetro de desaceleración hoy, $q(z = 0)$.

Entonces, considere al parámetro de Hubble $H(z)$, usando el hecho de que $H(z) = \dot{a}/a$, podemos reescribir a $H(z)$ en términos de $q(z)$ como

$$H(z) = H_0 \exp \left(\int_0^z [1 + q(z')] d \ln(1 + z') \right). \quad (4.1)$$

Entonces, la distancia de luminosidad (2.24) adquiere la forma:

$$d_L(z) = \frac{c(1+z)}{H_0} \int_0^z \exp \left(- \int_0^{z'} [1 + q(z'')] d \ln(1 + z'') \right) dz', \quad (4.2)$$

donde hemos asumido un Universo plano tal como lo sugiere 7y-WMAP [6]. Hasta este momento no se ha dicho nada sobre la forma funcional del parámetro $q(z)$, ni se está asumiendo algún modelo cosmológico en particular. Se puede hacer una expansión de $q(z)$ y estudiarla a primer orden,

$$q(z) = q_0 + z \left. \frac{dq}{dz} \right|_{z=0}. \quad (4.3)$$

Esta expansión permitirá por un lado calcular el valor que el parámetro de desaceleración tiene hoy en día, $q_0 \equiv q(z = 0)$, y por otro lado $(dq/dz)|_{z=0}$ indicará la evolución de $q(z)$. Con esto se podrá investigar el signo de q_0 (lo cual significa saber si el Universo está *acelerado* o *desacelerado* hoy en día) y si ha habido transiciones en el pasado, a partir del signo de $(dq/dz)|_{z=0}$.

Tomando en cuenta la expansión (4.3), la expresión (4.2) resulta

$$d_L(z) = \frac{c(1+z)}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{(1+z')^{1+q_0-q'_0} e^{z'q'_0}}, \quad (4.4)$$

¹La constante cosmológica es un término matemático en las ecuaciones de Einstein que algún tiempo atrás Einstein mismo introdujo en sus ecuaciones pero con otros motivos (para lograr tener un Universo estático). En las secciones 4.4–4.5 se describe en detalle.

²Por cuestiones históricas se le llamó “parámetro de *desaceleración*”, ya que hasta antes de 1998 se pensaba que el Universo se expandía pero *desaceleradamente*.

**CAPÍTULO 4. ENERGÍA OSCURA Y LA EXPANSIÓN ACELERADA
DEL UNIVERSO**

4.2. ¿CÓMO SE SABE QUE EL UNIVERSO SE EXPANDE *ACELERADAMENTE*
HOY?

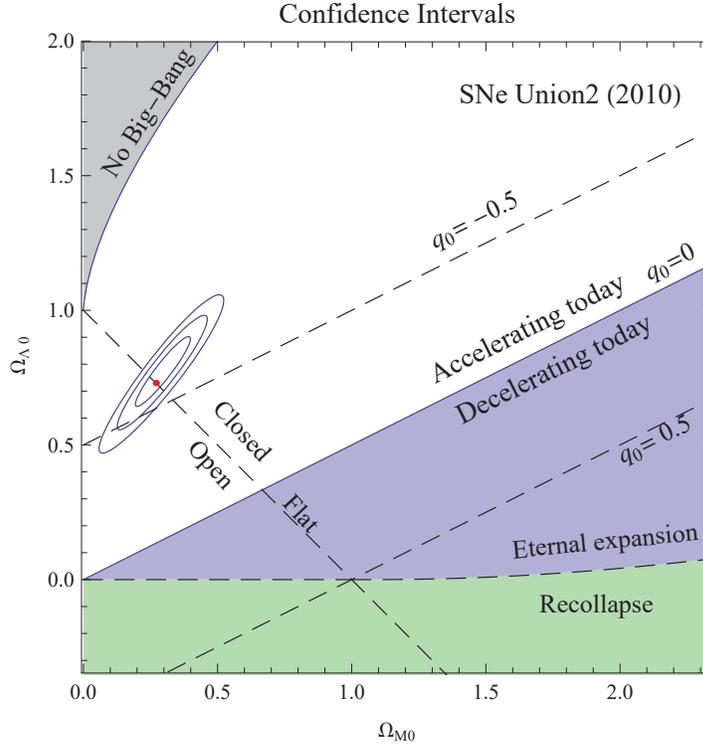


Figura 4.2: Intervalos de confianza conjuntos para los parámetros $(\Omega_{M0}, \Omega_{\Lambda0})$, usando el modelo cosmológico “ Λ CDM” [ver la expresión (4.7) y sección 4.4] y la muestra de supernovas Ia “*Union 2*” del *Supernova Cosmology Project* (SCP) [18] que es la muestra más reciente, grande y robusta con la que se cuenta hoy en día y que consta de 557 SNe Ia. Los valores estimados para $(\Omega_{M0}, \Omega_{\Lambda0})$ usando esta muestra de supernovas y asumiendo la curvatura espacial son: $\Omega_{M0} = 0.297$ y $\Omega_{\Lambda0} = 0.774$, con un valor del mínimo de la función χ^2 de $\chi^2_{\min} = 542.54$ (ver tabla 4.1). Y asumiendo un Universo espacialmente plano: $\Omega_{M0} = 0.270$ y $\Omega_{\Lambda0} = 0.729$ (el modelo de concordancia, indicado con el punto rojo), con $\chi^2_{\min} = 542.68$. Estos valores para $(\Omega_{M0}, \Omega_{\Lambda0})$ son los que permiten el mejor ajuste a los datos de supernovas (ver figura 4.5). Los intervalos de confianza corresponden a 68.3%, 95.4% y 99.73% de probabilidad. La región definida como “*No Big-Bang*” corresponden a valores de $(\Omega_{M0}, \Omega_{\Lambda0})$ que satisfacen la relación (4.11). La línea diagonal “flat” muestra el caso de un Universo *plano* ($\Omega_{M0} + \Omega_{\Lambda0} = 1$). Las otras líneas diagonales punteadas corresponden a distintos valores del parámetro de desaceleración q_0 [ver expresión (1.57)]. En particular, destaca la región con $q_0 < 0$ que indica los valores de $(\Omega_{M0}, \Omega_{\Lambda0})$ para los cuales el Universo se está expandiendo *aceleradamente* hoy en día. Observe que los tres intervalos de confianza caen dentro de la región $q_0 < 0$ holgadamente, lo cual se traduce en que usando los datos de supernovas “*Union2*” y el modelo Λ CDM se puede afirmar que el Universo se está expandiendo *aceleradamente* hoy en día con *al menos* un 99.73% de certeza. La línea vertical situada en el valor $\Omega_{\Lambda} = 0$ marca la división entre la región para la cual el Universo se expandirá *eternamente* en el futuro (arriba de la línea) y cuándo el Universo se recolapsará [abajo de la línea. Ver expresión (4.10)]. Observe cómo los datos indican con 99.73% de certeza que el Universo se va a expandir eternamente, usando el modelo Λ CDM.

CAPÍTULO 4. ENERGÍA OSCURA Y LA EXPANSIÓN ACELERADA DEL UNIVERSO

4.2. ¿CÓMO SE SABE QUE EL UNIVERSO SE EXPANDE ACELERADAMENTE HOY?

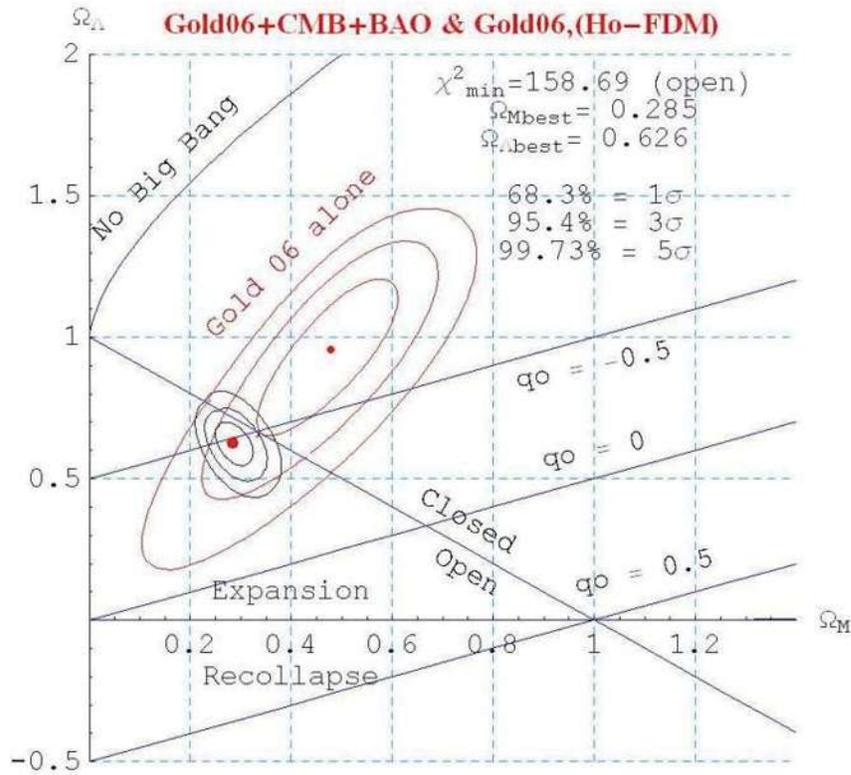


Figura 4.3: Intervalos de confianza de $(\Omega_{M0}, \Omega_{\Lambda0})$, usando el modelo cosmológico “ Λ CDM”. Misma explicación que la gráfica 4.2. En este caso se muestran los intervalos de confianza calculados a partir de usar las tres pruebas conjuntas: SNe Ia, parámetro de corrimiento \mathcal{R} del CMB y la localización del pico acústico A de BAO (elipses pequeñas de color negro). También se muestran los intervalos de confianza calculados a partir de usar solamente los datos de SNe Ia (elipses más grandes. Se usó la muestra SNe Ia “Gold 06” [40]). Observe cómo al usar la prueba conjunta de SNe+CMB+BAO las cotas sobre los valores de $(\Omega_{M0}, \Omega_{\Lambda0})$ son mucho más fuertes que solo usando supernovas.

CAPÍTULO 4. ENERGÍA OSCURA Y LA EXPANSIÓN ACELERADA DEL UNIVERSO

4.3. ¿CÓMO SE «DEDUCE» QUE HAY “ENERGÍA OSCURA”?

donde $q'_0 \equiv (dq/dz)|_{z=0}$. Con la expresión (4.4) se define la distancia modular (2.42) para usarse en la función χ^2 (3.52) y probar este ansatz. En este análisis, los parámetros libres del modelo son $(q_0, (dq/dz)|_{z=0})$. La constante de Hubble H_0 es marginalizada. Del análisis estadístico usando los datos de supernova Ia³ se encuentra que las mejores estimaciones son:

$$q_0 = -0.7432, \quad \left. \frac{dq}{dz} \right|_{z=0} = 1.6344, \quad \chi_{\text{d.o.f.}}^2 = 1.2399. \quad (4.5)$$

Observe como $q_0 < 0$, lo cual significa que el Universo tiene una expansión *acelerada* hoy en día. Además, $dq/dz|_{z=0} > 0$ lo cual *sugiere* un periodo de desaceleración en el pasado del Universo, debido a que la función $q(z)$ es una recta bajo la aproximación lineal $q(z) = q_0 + z(dq/dz)|_{z=0}$, y si $dq/dz|_{z=0} > 0$ (con $q_0 < 0$) implica entonces que $q(z)$ fue positiva para algún $z > 0$ (en algún momento en el pasado) en particular.

La figura 4.4 muestra los intervalos de confianza para la estimación de $(q_0, (dq/dz)|_{z=0})$.

4.2.1. ¿Hubo una transición “desaceleración-aceleración” en la historia pasada del Universo?

Los datos de SNe Ia dan evidencia de que el Universo se expande aceleradamente hoy en día. Además *sugieren* que hubo un periodo de desaceleración previo al de aceleración presente. La transición entre un periodo previo de desaceleración seguido de un periodo acelerado sucedería cuando $q(z_t) = 0$, donde z_t indica el valor de redshift cuando la transición sucede.

Usando nuevamente la aproximación lineal de $q(z)$ [ver expresión (4.3)], se tiene

$$\begin{aligned} q(z_t) = 0 &= q_0 + q'_0 z_t, \\ \Rightarrow z_t &= -\frac{q_0}{q'_0}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

donde $q'_0 \equiv (dq/dz)|_{z=0}$. Al evaluar $q(z_t)$ en los valores de las mejores estimaciones para (q_0, q'_0) se obtiene $z_t = 0.442$, lo cual indica que hubo una transición entre “*desaceleración-aceleración*” y que ésta sucedió muy probablemente, a un redshift de $z_t = 0.442$. La figura 4.6 muestra la distribución de probabilidad para z_t .

4.3. ¿Cómo se «deduce» que hay “energía oscura”?

La conclusión de la existencia de la “energía oscura” **depende** del modelo cosmológico que se asuma. Para tener una idea de como se llega a esta “conclusion”, utilizaré en la siguiente descripción el modelo cosmológico Λ CDM (que será descrito en la sección 4.4).

Para darse una primera idea de la afirmación de la energía oscura es útil observar las figuras 4.1 y 4.5, que son las gráficas de los datos de supernovas tipo Ia. En ellas se muestra el diagrama de Hubble que se construye de graficar los datos observacionales del redshift z de cada supernova versus su distancia modular $\mu(z)$ [ver sección 2.1 y expresión (2.42)].

La figura 4.5 muestra los datos observacionales de 557 SNe Ia que en conjunto forman la llamada muestra “Union2” (2010) [18], que es la más reciente con la que se cuenta

³Gold 04

CAPÍTULO 4. ENERGÍA OSCURA Y LA EXPANSIÓN ACELERADA DEL UNIVERSO

4.3. ¿CÓMO SE «DEDUCE» QUE HAY “ENERGÍA OSCURA”?

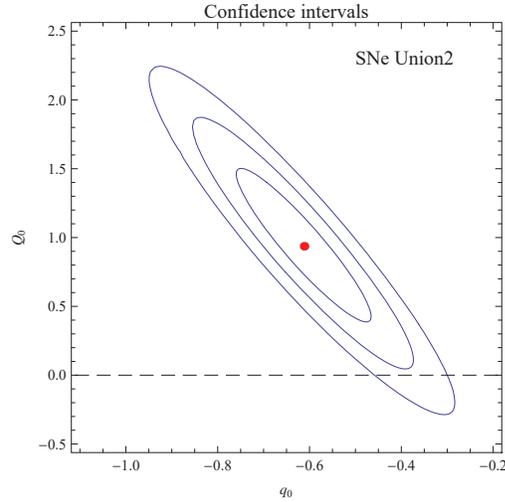


Figura 4.4: Intervalos de confianza para los parámetros (q_0, Q_0) , donde $Q_0 \equiv (dq/dz)|_{z=0}$, usando la prueba de SNe Ia (“Union2” (2010) SCP [18]). Observe cómo los datos favorecen a un Universo *acelerado* en su expansión ($q_0 < 0$), con un nivel de confianza del 99.9%, y sugieren una posible desaceleración en el pasado $Q_0 > 0$ con aproximadamente 95% de confianza.

hasta hoy en día (Octubre 2010). Esta figura muestran además las gráficas de tres modelos cosmológicos particulares, que son $(\Omega_{M0} = 0.27, \Omega_{\Lambda 0} = 0.73, \Omega_{k0} = 0.0)$, $(\Omega_{M0} = 0.2, \Omega_{\Lambda 0} = 0, \Omega_{k0} = 0.8)$ y $(\Omega_{M0} = 1, \Omega_{\Lambda 0} = 0, \Omega_{k0} = 0)$.

Lo primero que se puede observar de la figura 4.5 es que los modelos $(\Omega_{M0} = 1, \Omega_{\Lambda 0} = 0, \Omega_{k0} = 0)$ y $(\Omega_{M0} = 0.2, \Omega_{\Lambda 0} = 0, \Omega_{k0} = 0.8)$ *no ajustan* tan finamente los datos de supernovas en comparación al modelo $(\Omega_{M0} = 0.27, \Omega_{\Lambda 0} = 0.73, \Omega_{k0} = 0)$. Esto es, se observa que asumiendo un Universo constituido únicamente de materia bariónica y oscura ($\Omega_{M0} = 1$) resulta entonces que las distancias modulares de las supernovas no pueden explicarse satisfactoriamente, es decir, el valor observacional de μ es mayor que lo que este modelo predice. Lo mismo pasa con el modelo $(\Omega_{M0} = 0.2, \Omega_{\Lambda 0} = 0, \Omega_{k0} = 0.8)$ que era el modelo cosmológico que se creía era el correcto hasta antes de las observaciones de las SNe en 1998.

Sin embargo, nuestra observación “a simple vista” de la figura 4.5 no es una prueba confiable y definitiva para determinar qué modelo es el que mejor ajusta a los datos. Para tener realmente un estimación precisa y detallada de cual es el mejor modelo se hace el *análisis estadístico Bayesiano*, que permite calcular con gran precisión los valores *más probables* para los parámetros $(\Omega_{M0}, \Omega_{\Lambda 0})$ así como sus regiones de probabilidad, usando un determinado conjunto de datos (*no* solamente datos de supernovas).

El resultado de hacer este análisis estadístico para $(\Omega_{M0}, \Omega_{\Lambda 0})$ se muestra en las figuras 4.2 y 4.3, en las que se puede observar como los modelos $(\Omega_{M0} = 1, \Omega_{\Lambda 0} = 0, \Omega_{k0} = 0)$ y $(\Omega_{M0} = 0.2, \Omega_{\Lambda 0} = 0, \Omega_{k0} = 0.8)$ predicen un Universo con una expansión *desacelerada* hoy en día. Y por el contrario, el modelo $(\Omega_{M0} = 0.3, \Omega_{\Lambda 0} = 0.7, \Omega_{k0} = 0)$ más bien predice una expansión *acelerada* y eterna.

CAPÍTULO 4. ENERGÍA OSCURA Y LA EXPANSIÓN ACELERADA DEL UNIVERSO

4.4. MODELO COSMOLÓGICO “ Λ CDM”

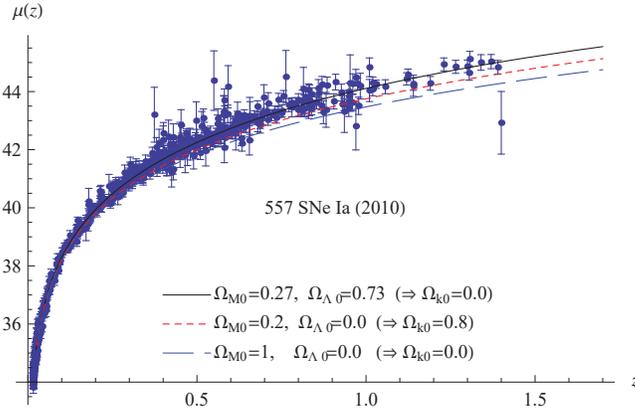


Figura 4.5: Gráfica del conjunto de datos de supernovas tipo Ia más reciente y grande con el que se cuenta hoy en día, llamada “*Union2*” del SCP [18], consta de 557 supernovas. La figura muestra los datos con sus barras de error así como las líneas generadas por tres modelos cosmológicos diferentes. El modelo $\Omega_{M0} = 0.2$, con $\Omega_{\Lambda 0}, \Omega_{k0} = 0$ era el de mayor aceptación entre la comunidad de cosmólogos antes del descubrimiento del grupo de Riess. En la construcción de las gráficas se asumió un valor de $\Omega_{r0} = 0$ y $H_0 = 65$ (km/s)Mpc⁻¹.

El análisis estadístico de los datos de supernovas y *asumiendo* el modelo cosmológico Λ CDM, da como resultado que los valores más probables (es decir., que mejor ajustan a los datos) son $(\Omega_{M0} = 0.27, \Omega_{\Lambda 0} = 0.73, \Omega_{k0} = 0.0)$ asumiendo un Universo espacialmente plano (ver tabla 4.1). Este tipo de análisis estadístico nos permite concluir de manera precisa que éste es efectivamente el modelo que mejor ajusta a los datos de SNe. Observe entonces como los datos de supernovas, en conjunto con asumir el modelo cosmológico Λ CDM plano, indican que el Universo está constituido en un 73% por energía oscura (asumiendo energía oscura como constante cosmológica), es decir, el modelo $(\Omega_{M0} = 0.27, \Omega_{\Lambda 0} = 0.73, \Omega_{k0} = 0)$. La presencia de este 73% de energía oscura rompe con el esquema que antes de 1998 se tenía del Universo.

Es importante recalcar en este momento que la conclusión de la existencia de la energía oscura es *dependiente* del modelo cosmológico que se use.

4.4. Modelo cosmológico “ Λ CDM”

El nombre “ Λ CDM” viene de “A Cold Dark Matter”, lo cual quiere decir: “*Modelo cosmológico que propone un Universo constituido por materia oscura fría y energía oscura con el comportamiento de una constante cosmológica Λ* ”.

Este modelo considera que el Universo está constituido por:

Constante cosmológica. El modelo asume que existe la energía oscura y que ésta tiene exactamente el comportamiento de una *constante cosmológica*, con una ecuación de estado: $p = -\rho$. Además predice que el porcentaje de densidad de energía con que contribuye la constante cosmológica en el Universo es de $\sim 73\%$. La constante cosmológica normalmente se representa por la letra griega “ Λ ”.

CAPÍTULO 4. ENERGÍA OSCURA Y LA EXPANSIÓN ACELERADA DEL UNIVERSO

4.4. MODELO COSMOLÓGICO “ Λ CDM”

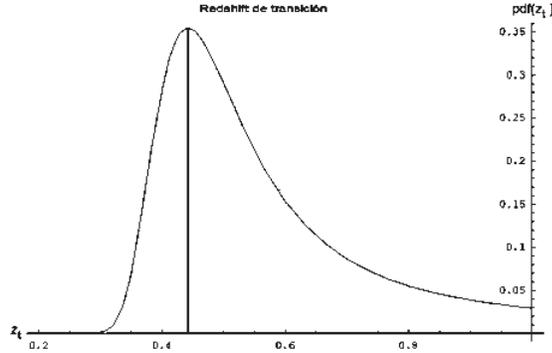


Figura 4.6: Función de distribución de probabilidad para el redshift de transición z_t entre “desaceleración-aceleración”.

Materia oscura fría. El modelo toma en cuenta la existencia de la materia oscura y asume que está compuesta por partículas *no relativistas* (de aquí el nombre de “fría”) y que a nivel de fluido cosmológico la materia oscura se comporta como *polvo*. En combinación con observaciones, el modelo Λ CDM predice una contribución del $\sim 23\%$ de la densidad de materia-energía total del Universo.

Materia bariónica. El modelo toma en cuenta la evidente presencia de la materia bariónica, de la cual asume que tiene un comportamiento de polvo. De observaciones independientes al modelo Λ CDM, se estima que el porcentaje de esta componente es de $\sim 4\%$ del total del Universo.

Radiación. También toma en cuenta la existencia de la radiación en el Universo, principalmente manifestada a través de la radiación cósmica de fondo. Se calcula un porcentaje de $\sim 0.005\%$ del total del Universo.

El modelo Λ CDM es el más aceptado entre la comunidad, sin embargo, tiene fuertes problemas como se describirá en las secciones 4.5 y 4.6.

Para el modelo Λ CDM, la expresión del parámetro de Hubble tiene la forma dada por la expresión:

$$H(z) = H_0 [\Omega_{M0}(1+z)^3 + \Omega_{\Lambda0} + \Omega_{r0}(1+z)^4 + \Omega_{k0}(1+z)^2]^{1/2}. \quad (4.7)$$

La componente de curvatura Ω_{k0} puede escribirse en términos de los otros parámetros de densidad usando la primera ecuación de Friedmann (1.39), obteniendo $\Omega_{k0} = 1 - (\Omega_{M0} + \Omega_{\Lambda0} + \Omega_{r0})$. No obstante las observaciones más recientes de WMAP indican que el Universo es espacialmente plano [6], por lo cual actualmente la mayoría de los cosmólogos asumen en sus modelos de antemano $\Omega_{k0} = 0$.

Por otra parte, la componente de radiación hoy en día es muy pequeña, por lo que su contribución o efectos en tiempos recientes del Universo es despreciable. Debido a esto, también una buena parte de cosmólogos que hacen estudios del Universo para *tiempos recientes* suelen despreciar a Ω_{r0} .

CAPÍTULO 4. ENERGÍA OSCURA Y LA EXPANSIÓN ACELERADA DEL UNIVERSO

4.5. EL PROBLEMA DE LA CONSTANTE COSMOLÓGICA

La distancia de luminosidad para el análisis de supernovas [ver expresión (2.24)], en el caso del modelo Λ CDM tomando en cuenta la curvatura espacial, tiene la forma

$$d_L(z) = \frac{c(1+z)}{H_0|1-\Omega_{M0}-\Omega_{\Lambda0}|^{1/2}} \text{sinn} \left(|1-\Omega_{M0}-\Omega_{\Lambda0}|^{1/2} \int_0^z \frac{H_0 dz}{H(z)} \right), \quad (4.8)$$

donde la función “sinn” va de acuerdo a la geometría del Universo que estemos tratando [ver expresión (2.18)]. Con esta expresión se construye la distancia modular $\mu(z)$ [ver expresión (2.42)] para Λ CDM con la que se forma la función χ^2 para probar el modelo.

Al probar el modelo Λ CDM usando las tres pruebas cosmológicas, SNe+CMB+BAO, se encuentra que los valores de los parámetros de densidad para la constante cosmológica, $\Omega_{\Lambda0}$, y de la materia oscura y bariónica juntas, Ω_{M0} , hoy en día son

$$\Omega_{\Lambda0} = 0.73, \quad \Omega_{M0} = 0.27, \quad (4.9)$$

y con la componente de radiación $\Omega_{r0} = 0.00005$. A estos valores calculados *usando* Λ CDM son llamados en la literatura como el *modelo de concordancia*.

La figura 4.5 presenta el diagrama de Hubble en el cual se muestran los datos observacionales de supernovas y el ajuste hecho con diferentes valores de $(\Omega_{M0}, \Omega_{\Lambda0})$ usando el modelo Λ CDM. La tabla 4.1 muestra los valores de las mejores estimaciones para $(\Omega_{M0}, \Omega_{\Lambda0}, \Omega_{k0})$ usando datos de supernovas, y las figuras 4.2 y 4.3 muestran los intervalos de confianza.

Por otra parte y para la figura 4.3, dado el valor de Ω_{M0} , se puede calcular el valor de $\Omega_{\Lambda0}$ para el cual el Universo se expandirá por siempre. La expresión se escribe como

$$\Omega_{\Lambda0} \geq \begin{cases} 0 & \text{para } 0 \leq \Omega_{M0} \leq 1, \\ 4\Omega_{M0} \cos^3 \left[\frac{1}{3} \cos^{-1} \left(\frac{1-\Omega_{M0}}{\Omega_{M0}} \right) + \frac{4\pi}{3} \right] & \text{para } \Omega_{M0} > 1. \end{cases} \quad (4.10)$$

Y la expresión que define la región para la cual *no* hubo Big-Bang en el pasado del Universo está dada por

$$\Omega_{\Lambda0} \geq 4\Omega_{M0} \text{coss}^3 \left[\frac{1}{3} \text{coss}^{-1} \left(\frac{1-\Omega_{M0}}{\Omega_{M0}} \right) \right], \quad (4.11)$$

donde la función “coss” significa “cosh” cuando $\Omega_{M0} < 1/2$, y “cos” cuando $\Omega_{M0} > 1/2$.

Para el caso del modelo Λ CDM el parámetro de desaceleración, q , tiene la forma

$$q = \frac{1}{2}\Omega_M - \Omega_{\Lambda}. \quad (4.12)$$

4.5. El problema de la constante cosmológica

Alrededor de la década de 1920 los físicos y astrónomos, basados en las observaciones de aquel tiempo consideraban que el Universo era *estático*, es decir, que no estaba ni en expansión (o contracción) ni en aceleración. En aquella misma época (1917), Einstein estaba estudiando su *Teoría General de la Relatividad* en el contexto cosmológico. De su teoría, inicialmente él había llegado a sus ecuaciones de campo:

**CAPÍTULO 4. ENERGÍA OSCURA Y LA EXPANSIÓN ACELERADA
DEL UNIVERSO**

4.5. EL PROBLEMA DE LA CONSTANTE COSMOLÓGICA

Geometría	Mejor estimación			χ^2
Plano	$\Omega_{M0} = 0.270$	$\Omega_{\Lambda0} = 0.729$	$\Omega_{k0} = 0$	542.68
Cerrado	$\Omega_{M0} = 0.297$	$\Omega_{\Lambda0} = 0.774$	$\Omega_{k0} = -0.07$	542.54

Cuadro 4.1: Valores calculados para las mejores estimaciones de los parámetros $(\Omega_{M0}, \Omega_{\Lambda0}, \Omega_{k0})$ usando el modelo cosmológico Λ CDM y la prueba de supernovas Ia con el conjunto de datos “Union2” (2010) compuesto por 557 SNe Ia [18]. Observe como asumiendo un Universo plano se encuentra que los datos favorecen a un modelo con $(\Omega_{M0} = 0.27$ y $\Omega_{\Lambda0} \simeq 0.73$). Los intervalos de confianza de estos tres modelos se muestran en la figura 4.3.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (4.13)$$

a partir de las cuales se obtienen las ecuaciones de Friedmann

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}, \quad (4.14)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p), \quad (4.15)$$

donde ρ y p son la densidad y presión total de las componentes de materia, k es la curvatura espacial y a es el factor de escala.

Basado en la concepción del Universo de su tiempo, Einstein estaba interesado en encontrar soluciones estáticas de sus ecuaciones, lo cual significaba crear un modelo tal que $\dot{a} = 0$ (sin expansión ni contracción) y $\ddot{a} = 0$ (no aceleración ni desaceleración).

Sin embargo, un Universo con una densidad de energía positiva es compatible con la ecuación (4.14) solo si la curvatura espacial es positiva y tanto ρ como k son *finamente* ajustadas para que entre ellas se cancelen *exactamente*. Esta necesidad del ajuste fino parecía algo extraño y no muy natural. Pero peor aún es el hecho de que la ecuación (4.15) implica que \ddot{a} *nunca* será cero en tal modelo si la presión p es positiva.

Debido a esta imposibilidad de generar un Universo estático a partir de sus ecuaciones originales, concluyó entonces que estas estaban incompletas y después de una larga búsqueda las volvió a reformular de la siguiente manera

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (4.16)$$

donde ahora incluía un nuevo término Λ al que llamó la “**constante cosmológica**”. Lovelock [41] demostró que una combinación lineal de $g_{\mu\nu}$ y $G_{\mu\nu}$ (que se define como $G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$) es el tensor más general posible, de dos índices, simétrico, sin divergencia, que puede construirse localmente a partir de la métrica y sus derivadas hasta de segundo orden. Por lo tanto, la expresión (4.16) es la modificación más general posible la cual no altera de manera sensible las propiedades de las ecuaciones de Einstein. Sin embargo, si $\Lambda \neq 0$ entonces no se recupera la teoría Newtoniana en el límite de velocidades pequeñas (comparadas a la luz) y campos débiles. Pero si Λ es lo suficientemente pequeño, entonces estas desviaciones de la teoría Newtoniana son despreciables [5].

CAPÍTULO 4. ENERGÍA OSCURA Y LA EXPANSIÓN ACELERADA DEL UNIVERSO

4.5. EL PROBLEMA DE LA CONSTANTE COSMOLÓGICA

Con ésta reformulación, las ecuaciones de Friedmann quedan como

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2}, \quad (4.17)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}. \quad (4.18)$$

Estas nuevas ecuaciones *si* admiten una solución estática, con los parámetros ρ, p, Λ no negativos y k positivo. Esta solución fue llamada “*la solución estática de Einstein*”.

A pesar de que con esto Einstein ya había logrado obtener la solución estática que buscaba con sus nuevas ecuaciones, esta solución fue muy criticada por el hecho de que se requería nuevamente un balance muy fino entre los términos (ρ, p, Λ, k) en las ecuaciones (4.17, 4.18) para poder tener y mantener la solución estática ($\dot{a} = 0 = \ddot{a}$). Cualquier pequeña desviación de ese balance rápidamente crecería hacia un Universo no estático.

Por otra parte, en 1929 Edwin Hubble descubrió que el Universo se estaba *expandiendo*. Esto fue un hecho revolucionario en su tiempo en cuanto a la concepción del Cosmos y era contrario al Universo estático que Einstein había estado buscando en sus ecuaciones, por lo cual, la necesidad empírica de la constante cosmológica fue desechada (algo que Einstein llamó “el mayor disparate de mi vida” [42]).

No obstante, la desaparición de la motivación inicial para introducir la constante cosmológica no hizo que cambiara su estatus de una adición legítima a las ecuaciones de campo gravitacionales. Ahora “ Λ ” estaba presente en las ecuaciones más generales que se podían obtener para las ecuaciones de Einstein y entonces se tendría que dar alguna justificación o modelo físico viable para poder removerla de las ecuaciones, o bien debería ser acotada mediante observaciones. La única forma de poder realmente quitar a Λ de las ecuaciones sería a través de medir con suficiente precisión los otros términos, (ρ, p, k) , para poder concluir que el término $\Lambda/3$ fuera totalmente despreciable en comparación a ellos.

Sin embargo, actualmente el reciente descubrimiento de la expansión *acelerada* del Universo ha reabierto la posibilidad, y más fuertemente que antes, de que la constante cosmológica no necesariamente debe ser cero.

4.5.1. Vacío cuántico y constante cosmológica.

Hace algunos años atrás, los físicos de partículas notaron que la constante cosmológica podría ser interpretada como una medida de la *densidad de energía del vacío cuántico*, el estado de mínima energía. Esta densidad de energía del vacío es la suma de diferentes contribuciones.

Para ilustrarlo, considere un campo escalar ϕ , con energía potencial $V(\phi)$. La acción de este campo escalar puede ser escrita como

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right], \quad (4.19)$$

y el tensor de energía-momento del campo escalar es:

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \frac{1}{2} (g^{\rho\sigma} \partial_\rho \phi \partial_\sigma \phi) g_{\mu\nu} - V(\phi) g_{\mu\nu}. \quad (4.20)$$

CAPÍTULO 4. ENERGÍA OSCURA Y LA EXPANSIÓN ACELERADA DEL UNIVERSO

4.5. EL PROBLEMA DE LA CONSTANTE COSMOLÓGICA

La configuración con la densidad de energía más baja será aquella en la que no haya contribuciones de la energía cinética o gradientes de ella, por lo cual $\partial_\mu \phi = 0$. De aquí que el tensor de energía-momento resulta ser

$$T_{\mu\nu}^v = -V(\phi_0)g_{\mu\nu}, \quad (4.21)$$

donde ϕ_0 es el valor del campo escalar que minimiza a $V(\phi)$. El superíndice “v” indica “vacío cuántico”. En principio, no hay ninguna razón por la cual $V(\phi_0)$ deba ser cero. Por otra parte, la densidad *local* de energía en general se define como

$$\rho \equiv U^\mu U^\nu T_{\mu\nu}, \quad (4.22)$$

aplicando esta definición a la expresión (4.21) y usando el hecho de que la cuadrivelocidad comóvil U^μ está normalizada [$U^\mu U^\nu g_{\mu\nu} = -1$, ver expresión (1.14)], tenemos

$$\rho_v \equiv U^\mu U^\nu T_{\mu\nu}^v = -V(\phi_0)U^\mu U^\nu g_{\mu\nu} = V(\phi_0). \quad (4.23)$$

De aquí que se pueda expresar al tensor (4.21) como

$$\boxed{T_{\mu\nu}^v = -\rho_v g_{\mu\nu}} \quad (4.24)$$

donde $\rho_v = V(\phi_0)$ es la densidad del vacío cuántico. Comparando con el tensor de energía-momento de un fluido perfecto, $T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu + pg_{\mu\nu}$ [ver expresiones (1.12)], se observa que el vacío cuántico puede ser visto como un fluido perfecto, con una presión particular de la forma

$$\boxed{p_v = -\rho_v} \quad (4.25)$$

La forma que tiene la expresión del tensor de energía-impulso (4.24) hace que sea equivalente a una constante cosmológica, y es justamente esta equivalencia que hace que la constante cosmológica sea identificada con la densidad de energía del vacío cuántico.

Para verlo, consideremos inicialmente las ecuaciones de campo (4.13). El tensor $T_{\mu\nu}$ de esta expresión es la suma de todas las contribuciones de materia-energía presentes en el espacio-tiempo. Separamos explícitamente como $T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^o + T_{\mu\nu}^v$, la contribución del vacío cuántico y cualquier otra componente, el superíndice “o” indica “otras” componentes. Con esto, reescribimos las ecuaciones (4.13) como

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi G(T_{\mu\nu}^o + T_{\mu\nu}^v), \quad (4.26)$$

usando la expresión (4.24) tenemos

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}^o - (8\pi G\rho_v)g_{\mu\nu}. \quad (4.27)$$

Pasamos al lado izquierdo de la igualdad al término $(8\pi G\rho_v)g_{\mu\nu}$, y definiendo

$$\boxed{\Lambda \equiv (8\pi G)\rho_v} \quad (4.28)$$

llegamos justamente a

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}^o, \quad (4.29)$$

que es exactamente la expresión (4.16) cuando se tiene una constante cosmológica.

CAPÍTULO 4. ENERGÍA OSCURA Y LA EXPANSIÓN ACELERADA DEL UNIVERSO

4.5. EL PROBLEMA DE LA CONSTANTE COSMOLÓGICA

4.5.2. Estimación de la densidad de energía del vacío cuántico.

Hoy en día, no se ha podido medir directamente la energía del vacío cuántico en algún experimento. Sin embargo, los físicos de partículas consideran que el *efecto Casimir* puede ser una evidencia indirecta de su existencia, aunque actualmente no hay aún un consenso respecto a ello.

Para estimar teóricamente el valor de la energía del vacío consideremos un oscilador armónico simple, esto es, una partícula moviéndose en un potencial unidimensional $V(x) = \frac{1}{2}w^2x^2$, donde x es el desplazamiento de la partícula medido a partir de su posición de equilibrio.

Desde un punto de vista clásico, el vacío para este sistema es el estado en el cual la partícula está en reposo y en su posición de equilibrio $x = 0$ (el mínimo del potencial). En este caso la energía del vacío es cero.

Sin embargo, desde el punto de vista de la mecánica cuántica, el principio de incertidumbre *prohíbe* que a la partícula se le pueda medir en un estado de total reposo y con una posición precisa $x = 0$ simultáneamente, por lo cual se encuentra que el estado de mínima energía *sí* tiene una energía, de magnitud $E_0 = \frac{1}{2}\hbar w$.

Un fenómeno semejante sucede en el caso de la teoría de campos. Supongamos un campo cuántico libre, los físicos de partículas suelen considerarlo como un conjunto infinito de osciladores armónicos⁴. Estrictamente, la energía del estado base (es decir, del vacío) de este sistema es infinita. Sin embargo, se pueden descartar los modos de momentos muy altos basándose en el hecho de que la teoría se piensa que es válida y confiable solo hasta ciertas energías (la escala de Planck). Con esto se puede hacer un corte de momentos ultravioleta k_{\max} , con lo cual la densidad de energía del estado base es finita y de la forma [43, 44, 45]

$$\rho_v \sim \hbar k_{\max}^4. \quad (4.30)$$

Los físicos de partículas eligen el corte para la energía de tal forma que esté dentro del límite superior de energías para las cuales se piensa que la teoría cuántica sigue siendo aún válida. Se especula que este límite corresponde a la escala de Planck, $k_{\text{Pl}} = (8\pi G)^{-1/2} \sim 10^{18}$ GeV, del cual se espera una contribución del orden de [45]

$$\rho_v^{\text{Pl}} \sim (10^{18} \text{ GeV})^4 \sim 2 \times 10^{110} \text{ erg/cm}^3. \quad (4.31)$$

Sin embargo, usando el modelo cosmológico Λ CDM, los datos observacionales dan un valor para la densidad de la constante cosmológica del orden de

$$\rho_\Lambda \leq (10^{-12} \text{ GeV})^4 \sim 2 \times 10^{-10} \text{ erg/cm}^3 \quad (4.32)$$

lo cual son ¡120 órdenes de magnitud de diferencia! Hasta ahora no se sabe de algún tipo especial de simetría o algún otro mecanismo que pudiera disminuir el valor de la densidad del vacío cuántico ρ_v^{Pl} , al menos remotamente, para acercarlo al valor estimado de ρ_Λ . Esta discrepancia de valores es el llamado “*problema de la constante cosmológica*”.

⁴La suposición de asumir a un campo cuántico como un conjunto infinito de osciladores armónicos es cuestionable y no está claro si es correcto asumirlo. La manera de calcular teóricamente el vacío cuántico no está aún bien establecida actualmente.

CAPÍTULO 4. ENERGÍA OSCURA Y LA EXPANSIÓN ACELERADA DEL UNIVERSO

4.5. EL PROBLEMA DE LA CONSTANTE COSMOLÓGICA

Si se estudia separadamente las contribuciones que hacen cada teoría de campo al vacío cuántico se observa que cada teoría por si sola, predice una aportación al vacío de muchos ordenes de magnitud mayor que al valor estimado de ρ_Λ .

Por ejemplo, en la teoría electrodébil de Weinberg-Salam, las “fases rotas” y la simetría no rota se distinguen por una diferencia de energía potencial de aproximadamente $k_{\text{ED}} \sim 200\text{GeV}$ [43, 45], el subíndice “ED” indica teoría “electro débil”. El valor de un giga-electrónvolt es de $1\text{ GeV} = 1.6 \times 10^3\text{ erg}$. Se considera que en tiempos tempranos, cuando el Universo se encontraba a muy altas temperaturas, éste estuvo en la fase no rota de la simetría. Hoy en día el Universo se encuentra en la fase rota debido a la temperatura baja que tiene actualmente. Por tanto, se estima que la contribución a la densidad de energía del vacío cuántico hoy en día es del orden de

$$\rho_v^{\text{ED}} \sim (200\text{ GeV})^4 \sim 3 \times 10^{47}\text{ erg/cm}^3. \quad (4.33)$$

Por otra parte, en el caso de las interacciones fuertes, los físicos de teorías de campo piensan que la “simetría quiral” se rompe por un valor de expectación no nulo del *quark bilineal* $\bar{q}q$ [43, 45]. En este caso la diferencia de energía entre las fases rotas y la simetría son del orden de la escala de QCD, es decir, $k_{\text{QCD}} \sim 0.3\text{ GeV}$, por lo que se estima que la contribución a la densidad de energía del vacío cuántico es del orden de

$$\rho_v^{\text{QCD}} \sim (0.3\text{ GeV})^4 \sim 1.6 \times 10^{36}\text{ erg/cm}^3. \quad (4.34)$$

A estas contribuciones se les debería sumar cualquier otra contribución originada por transiciones de fase desconocidas en el Universo temprano, tal como la posible contribución de las teorías de gran unificación que se piensa que es del orden de $k_{\text{GUT}} \sim 10^{16}\text{GeV}$.

El problema de la constante cosmológica es uno de los desafíos más grandes de la cosmología moderna. Algunos investigadores consideran que este es un punto en el cual se confrontan la teoría general de la relatividad con la teoría cuántica de campos, donde la discrepancia de valores puede ser un indicador de que alguna de estas dos teorías (o ambas) pudieran estar mal en alguna parte y/o necesiten una revisión.

Sin embargo, si se observa con cuidado el problema, se notará que este conflicto surge a partir de hacer una identificación entre dos fenómenos que en principio son distintos, es decir, el vacío cuántico y la constante cosmológica de las ecuaciones de Einstein, motivados esencialmente por la forma del tensor de energía-impulso (4.24).

En principio, no tienen necesariamente que estar vinculados ambos fenómenos, es decir, que la constante cosmológica no tiene porqué ser en realidad el vacío cuántico, esto es solo una *especulación*. Existen autores que asumen o *dan por un hecho* que $\rho_\Lambda \sim 2 \times 10^{-10}\text{erg/cm}^3$ (ver expresión (4.32) y [45]), e incluso se empieza ya a considerar este valor como una “medida” de la densidad del vacío cuántico.

Por un lado, la predicción de la existencia y presencia del vacío cuántico es un problema que le corresponde a la física de partículas, su medición observacional tendría que ser primero confirmada, o más aún, la manera teórica de calcularla debería primero estar bien establecida para después ligarla a otros fenómenos.

Por otro lado, es muy importante subrayar que el valor estimado para ρ_Λ (o bien Λ) a partir de los datos observacionales, es **dependiente del modelo**, se determina asumiendo el modelo cosmológico ΛCDM , que es un modelo en particular entre toda una gama de otros modelos cosmológicos, que si bien, logra tener un buen ajuste a los datos observacionales,

CAPÍTULO 4. ENERGÍA OSCURA Y LA EXPANSIÓN ACELERADA DEL UNIVERSO

4.6. EL PROBLEMA DE LA COINCIDENCIA CÓSMICA

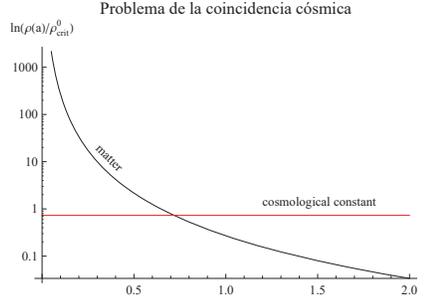


Figura 4.7: Gráficas del logaritmo de los parámetros de densidad de la componente de materia oscura+bariónica y la energía oscura como constante cosmológica. La evolución de la componente de materia con respecto al factor de escala viene dada como $\rho_M(a)/\rho_{\text{crit}}^0 = \Omega_{M0}/a^3$, y para la energía oscura como $\rho_\Lambda/\rho_{\text{crit}}^0 = \Omega_{\Lambda0} = \text{constante}$. Observe como para tiempos tempranos (“ a ” pequeñas) la diferencia entre las densidades era mucho mayor de lo que es en tiempos recientes, y para tiempos futuros la diferencia también será mayor de lo que es ahora. La *coincidencia* de que justamente en tiempos recientes las densidades parecen ser del mismo orden, es decir, que estamos viviendo una época privilegiada en la cual sucede esta semejanza de valores, y justo ahora que se ha detectado la energía oscura, levantan sospechas sobre la veracidad de las predicciones del modelo Λ CDM.

no es el único que lo hace, incluso hay otros modelos cuyo ajuste a ciertos datos es mejor que Λ CDM, aunque estos otros modelos también tienen sus propios problemas, lo mismo que Λ CDM, como se acaba de describir anteriormente.

4.6. El problema de la coincidencia cósmica

Este es otro de los problemas que tiene el modelo cosmológico Λ CDM, que ha despertado mucho interés entre la comunidad. El *problema de la coincidencia cósmica* consiste en el hecho de que, de acuerdo a las predicciones de Λ CDM, la densidad de energía oscura (con el comportamiento de una constante cosmológica) hoy en día es del mismo orden, y en realidad muy cercana, al valor de la densidad de materia oscura + bariónica hoy. Es decir, de toda la enorme variedad del continuo de posibles valores que estas densidades podría valer hoy en día, resulta que estamos viviendo justamente en una época privilegiada en la cual ambas parecen tener casi el mismo valor, lo que despierta fuertes sospechas de que tal vez algo no anda bien.

Como se mencionó en la sección 4.4, usando datos observacionales en combinación con Λ CDM se encuentra que los valores de los parámetros de densidad de constante cosmológica y de materia oscura + bariónica, hoy en día son $\Omega_{\Lambda0} \simeq 0.73$ y $\Omega_{M0} \simeq 0.27$.

La figura 4.7 muestra la evolución de los parámetros de densidad, en función del factor de escala, donde las relaciones son $\Omega_M(a) \equiv \rho_M(a)/\rho_{\text{crit}}^0 = \Omega_{M0}/a^3$ y $\Omega_\Lambda \equiv \rho_\Lambda/\rho_{\text{crit}}^0 = \Omega_{\Lambda0} = \text{constante}$. Observe cómo cuando $a = 1$, los valores de Ω_Λ y Ω_M son muy cercanos en comparación a la diferencia de valores en tiempos pasados del Universo.

4.7. En resumen:

El presente capítulo ha tenido como objetivo poner en contexto al lector en cuanto a uno de los problemas actuales más fuertes de la cosmología moderna, que es el de la *aceleración presente* en la expansión del Universo. Y que para estudiarlo, se utilizan los conceptos de cosmología descritos en el capítulo 1 y las pruebas cosmológicas (capítulo 2) a través de la estadística Bayesiana (capítulo 3).

Se ha descrito el descubrimiento de la expansión *acelerada* a través de las supernovas Ia, que es donde nace la idea de la *energía oscura* como responsable de dicha aceleración y que según el modelo cosmológico Λ CDM, constituye alrededor del 73% de la densidad total de la materia-energía presente en el Universo, y que matemáticamente tiene el comportamiento de una *constante cosmológica*. Además, se describió el modelo Λ CDM, que es de los que mejor ajustan a las observaciones cosmológicas, pero que tiene ciertos problemas que también fueron analizados.

En este sentido, en el capítulo 6 se describirá un modelo cosmológico alternativo a Λ CDM basado en fluidos viscosos, que soluciona los problemas de la *constante cosmológica* y el de la *coincidencia cósmica* del modelo Λ CDM y que además logra explicar la aceleración en la expansión del Universo. No obstante, este modelo también enfrenta problemas.

En el siguiente capítulo se introducirá el concepto de *fluidos imperfectos*, que servirá de base para presentar el modelo alternativo a Λ CDM en el capítulo 6, que se basa en proponer que el Universo presente está constituido de forma dominante por materia bariónica pero con *viscosidad volumétrica*, que es una de las características que poseen los fluidos imperfectos.

**CAPÍTULO 4. ENERGÍA OSCURA Y LA EXPANSIÓN ACELERADA
DEL UNIVERSO**
4.7. EN RESUMEN:

Capítulo 5

Fluidos imperfectos

Desde hacía varios años antes del descubrimiento de la expansión acelerada, se sabía que los fluidos cosmológicos con viscosidad volumétrica tienen la capacidad de expandir al Universo *aceleradamente* sin la necesidad de una constante cosmológica o alguna componente extraña de energía oscura. En aquel entonces, los modelos con fluidos viscosos eran usados originalmente en el contexto de modelos inflacionarios del Universo temprano [46]–[49]. Ahora, con el reciente descubrimiento de la aceleración, algunos autores han propuesto la utilización de fluidos viscosos pero en el contexto de la aceleración presente (ver por ejemplo [50]–[56]). Con los avances en la investigación en esta dirección, es posible postular a los fluidos viscosos como candidatos para explicar la aceleración observada, no obstante, con bondades y desventajas.

De los aspectos que restan para que los modelos viscosos puedan ser viables destaca el tener un modelo microscópico que explique satisfactoriamente el origen y composición de la viscosidad en los fluidos cosmológicos. No obstante, en este sentido ya hay varias propuestas [57]–[60]. Debido a esta carencia de un modelo microscópico, actualmente los modelos cosmológicos con viscosidad asumen a priori la forma funcional de esta.

El origen de la viscosidad volumétrica en un sistema físico es debido a desviaciones de su equilibrio termodinámico local. En un fluido cosmológico la viscosidad volumétrica surge cuando un fluido se expande o contrae rápidamente de modo que el sistema no tiene el tiempo suficiente para restablecer su equilibrio termodinámico local y entonces surge una *presión efectiva* restableciendo al sistema a su equilibrio. La viscosidad puede ser vista justamente como una medida de esta presión efectiva [59]. Cuando el fluido alcanza de nuevo su equilibrio termodinámico entonces la presión viscosa cesa [61]–[63].

En un Universo con expansión acelerada es altamente probable que el proceso de expansión se dé en realidad como una colección de estados fuera del equilibrio termodinámico local durante pequeñas fracciones de tiempo entre el paso de un estado al otro, dando lugar a la generación de una viscosidad volumétrica. Por tanto, es natural asumir la existencia de la viscosidad como una descripción más *realista* y *precisa* del proceso de expansión de los fluidos que componen al Universo.

El formalismo de los fluidos con viscosidad volumétrica se describe a continuación.

CAPÍTULO 5. FLUIDOS IMPERFECTOS

5.1. TENSOR DE ENERGÍA-MOMENTO DE FLUIDOS IMPERFECTOS

5.1. Tensor de energía-momento de fluidos imperfectos

En los fluidos imperfectos, a diferencia de los perfectos, la presión, la densidad, o la velocidad pueden variar de forma detectable para el observador. El tiempo y camino libres medios entre colisiones de las partículas que componen a los fluidos imperfectos son de una magnitud comparable a las escalas de medida del observador. En este tipo de fluidos, el equilibrio térmico no es mantenido estrictamente, y la energía cinética del fluido puede disiparse en forma de calor.

Consideremos que las *pequeñas* variaciones espaciales y en tiempo (perturbaciones a la isotropía) que el observador mide en el fluido imperfecto tienen el efecto de modificar el tensor de energía-momento de un fluido perfecto en una magnitud $\delta T^{\mu\nu}$, es decir,

$$T_{\text{imp}}^{\mu\nu} = \rho U^\mu U^\nu + p(g^{\mu\nu} + U^\mu U^\nu) + \delta T^{\mu\nu}, \quad (5.1)$$

donde el subíndice “imp” indica “fluido *imperfecto*”. El objetivo es calcular la expresión de $\delta T^{\mu\nu}$. De la identidad de Bianchi se tiene que

$$\nabla_\mu T_{\text{imp}}^{\mu\nu} = 0. \quad (5.2)$$

Haciendo la contracción con la cuadrivelocidad U_ν se tiene

$$U_\nu \nabla_\mu T_{\text{imp}}^{\mu\nu} = 0, \quad (5.3)$$

sustituyendo la expresión (5.1) en (5.3):

$$U_\nu \nabla_\mu [\rho U^\mu U^\nu + p(g^{\mu\nu} + U^\mu U^\nu)] = -U_\nu \nabla_\mu (\delta T^{\mu\nu}). \quad (5.4)$$

Ahora, definimos el vector de corriente de partículas N^μ como

$$N^\mu \equiv nU^\mu, \quad (5.5)$$

donde n es la densidad del número de partículas que componen al fluido en cualquier punto dado del espacio-tiempo. Por conservación de número de partículas se tiene que

$$\nabla_\mu N^\mu = \nabla_\mu (nU^\mu) = 0, \quad (5.6)$$

Esta expresión es llamada *ecuación de continuidad para la densidad de masa en reposo* y forma parte importante en la descripción de los fluidos en Relatividad General. Usando la expresión (5.6), la ecuación (5.4) puede expresarse como

$$-nU^\mu \left[p \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{1}{n} \right) + \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\rho}{n} \right) \right] = -U_\nu \nabla_\mu (\delta T^{\mu\nu}). \quad (5.7)$$

Por otra parte, la *ecuación de Gibbs* de la termodinámica establece que

$$T_0 d\sigma = pd \left(\frac{1}{n} \right) + d \left(\frac{\rho}{n} \right), \quad (5.8)$$

donde T_0 es la temperatura en cualquier punto dado del espacio-tiempo y “ σ ” es la entropía por partícula. Expresando (5.8) de forma relativista resulta:

CAPÍTULO 5. FLUIDOS IMPERFECTOS

5.1. TENSOR DE ENERGÍA-MOMENTO DE FLUIDOS IMPERFECTOS

$$T_0 U^\mu \frac{\partial \sigma}{\partial x^\mu} = p U^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{1}{n} \right) + U^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\rho}{n} \right). \quad (5.9)$$

Sustituyendo la expresión (5.9) en (5.7) obtenemos

$$n T_0 U^\mu \frac{\partial \sigma}{\partial x^\mu} = U_\nu \nabla_\mu \delta T^{\mu\nu}, \quad (5.10)$$

la cual, usando (5.6), puede expresarse también como

$$T_0 \nabla_\mu (n \sigma U^\mu) = U_\nu \nabla_\mu \delta T^{\mu\nu}. \quad (5.11)$$

Reacomodando esta expresión de tal manera que el factor de temperatura T_0 y la cuatridimensionalidad U_ν queden dentro de la derivada covariante y $\nabla_\mu (\delta T^{\mu\nu})$ fuera de ella, se llega a

$$\nabla_\mu \left[n \sigma U^\mu - \frac{U_\nu}{T_0} \delta T^{\mu\nu} \right] = -\frac{1}{T_0} (\nabla_\nu U_\mu) \delta T^{\mu\nu} + \frac{1}{T_0^2} (\nabla_\nu T_0) U_\mu \delta T^{\mu\nu}. \quad (5.12)$$

Definiendo el *vector de flujo de entropía local* como

$$s^\mu \equiv n \sigma U^\mu - \frac{U_\nu}{T_0} \delta T^{\mu\nu}, \quad (5.13)$$

se puede expresar la ecuación (5.12) como

$$\nabla_\mu s^\mu = -\frac{1}{T_0} (\nabla_\nu U_\mu) \delta T^{\mu\nu} + \frac{1}{T_0^2} (\nabla_\nu T_0) U_\mu \delta T^{\mu\nu}. \quad (5.14)$$

La ecuación (5.14) determina la razón de producción local de entropía por unidad de volumen, donde la densidad de entropía local en un sistema de referencia comóvil es $s^0 = n\sigma$. Usando la expresión (5.14), la segunda ley de la termodinámica se establece como

$$\boxed{\nabla_\mu s^\mu \geq 0} \quad (5.15)$$

Para que la desigualdad (5.15) pueda cumplirse para cualquier posible configuración de un fluido, se observa de la expresión (5.14) que es necesario que el término $\delta T^{\mu\nu}$ sea una combinación lineal de gradientes de velocidades y temperaturas *solamente*, para garantizar que el cambio en la entropía local del fluido sea siempre mayor o igual a cero. Es decir, se necesita que

$$\delta T^{\mu\nu} \propto \nabla^\mu U^\nu \quad \text{y} \quad \delta T^{\mu\nu} \propto U^\mu \nabla^\nu T_0, \quad (5.16)$$

debido a que con esto se formarían términos cuadráticos del tipo $(\nabla_\nu U_\mu)^2$ y $(\nabla_\nu T_0)^2$ en la expresión (5.14), los cuales siempre son positivos, y con ello se garantizaría (5.15).

Además, observe que por la misma razón, $\delta T^{\mu\nu}$ no puede estar relacionada con gradientes de la presión p ni densidad ρ del fluido, así como de n , ya que de estarlo, el lado derecho de la expresión (5.14) contendría productos de gradientes cruzados de (p, ρ, n) con (U_μ, T_0) , los cuales no serían positivos (por no ser cuadráticos) para todas las configuraciones posibles del fluido y por tanto no se cumpliría la ley de la entropía local (5.15).

CAPÍTULO 5. FLUIDOS IMPERFECTOS
5.2. FLUIDOS IMPERFECTOS EN COSMOLOGÍA.

Con el razonamiento descrito anteriormente, se encuentra entonces que el tensor $\delta T^{\mu\nu}$ debe ser de la forma

$$\delta T^{\mu\nu} = -\eta P^{\mu\gamma} P^{\nu\delta} W_{\gamma\delta} - \nu (P^{\mu\gamma} U^\nu + P^{\nu\gamma} U^\mu) Q_\gamma - \zeta P^{\mu\nu} \nabla_\gamma U^\gamma, \quad (5.17)$$

donde

$$\begin{aligned} P_{\mu\nu} &\equiv g_{\mu\nu} + U_\mu U_\nu, && \text{tensor de proyección al hiperplano normal a } U^\mu. \\ Q_\mu &\equiv \nabla_\mu T_0 + T_0 (\nabla_\nu U_\mu) U^\nu && \text{vector de flujo de calor.} \\ W_{\mu\nu} &\equiv \nabla_\nu U_\mu + \nabla_\mu U_\nu - \frac{2}{3} g_{\mu\nu} \nabla_\alpha U^\alpha && \text{tensor de corte ("shear tensor").} \end{aligned} \quad (5.18)$$

Y los coeficientes ζ, η, χ deben ser siempre positivos o cero, y se identifican como

$$\begin{aligned} \zeta &\geq 0, && \text{viscosidad volumétrica o de bulto ("bulk viscosity")} \\ \eta &\geq 0, && \text{viscosidad de corte ("shear viscosity")} \\ \nu &\geq 0, && \text{coeficiente de conducción de calor} \end{aligned} \quad (5.19)$$

La viscosidad de corte η suele también ser llamada “viscosidad *dinámica*”. La viscosidad volumétrica ζ también en ocasiones es llamada “segunda viscosidad” o “segundo coeficiente de viscosidad” aunque estos otros dos nombres no son estrictamente correctos.

La expresión total para el tensor de energía-momento para un fluido imperfecto viene dada por

$$\boxed{T_{\text{imp}}^{\mu\nu} = \rho U^\mu U^\nu + p(g^{\mu\nu} + U^\mu U^\nu) - \eta P^{\mu\gamma} P^{\nu\delta} W_{\gamma\delta} - \nu (P^{\mu\gamma} U^\nu + P^{\nu\gamma} U^\mu) Q_\gamma - \zeta P^{\mu\nu} \nabla_\gamma U^\gamma} \quad (5.20)$$

y la ecuación para la razón de producción de entropía local (5.14), usando (5.17) se expresa como

$$\begin{aligned} \nabla_\mu s^\mu &= \left(\frac{\eta}{2T_0} \right) P^{\mu\alpha} P^{\nu\lambda} \left(\nabla_\nu U_\mu + \nabla_\mu U_\nu - \frac{2}{3} g_{\mu\nu} \nabla_\sigma U^\sigma \right) \left(\nabla_\lambda U_\alpha + \nabla_\alpha U_\lambda - \frac{2}{3} g_{\alpha\lambda} \nabla_\sigma U^\sigma \right) + \\ &+ \frac{\nu}{T_0^2} P^{\mu\nu} (\nabla_\mu T_0 + T_0 U^\alpha \nabla_\alpha U_\mu) (\nabla_\nu T_0 + T_0 U^\lambda \nabla_\lambda U_\nu) + \\ &+ \frac{\zeta}{T_0} (\nabla_\sigma U^\sigma)^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (5.21)$$

5.2. Fluidos imperfectos en cosmología.

Para el caso cosmológico resulta que la expresión (5.17), o bien (5.20) y (5.21) se simplifican notablemente debido a que la isotropía espacial de la métrica de FRW impone que el vector de flujo de calor y el “shear tensor” deben ser cero para respetar la isotropía del Universo. Esto es, el flujo de calor puede ser solamente a lo largo del eje *temporal* en el sistema de referencia comóvil, debido a la isotropía espacial de la métrica de FRW.

CAPÍTULO 5. FLUIDOS IMPERFECTOS
5.2. FLUIDOS IMPERFECTOS EN COSMOLOGÍA.

De haber flujos *espaciales* de calor, estos definirían una dirección *espacial* preferida en el fluido, siendo entonces incompatible con la isotropía del Universo, es por ello entonces que Q_μ debe ser cero. Por otra parte, la isotropía implica que la matriz de componentes de $W_{\mu\nu}$ debe ser invariante bajo rotaciones $SO(3)$, en cada punto del espacio (debido a la isotropía y homogeneidad). La única matriz con esta característica es aquella que se forma de la matriz unidad, \mathbf{I} , multiplicada por alguna constante, es decir, $W_{\mu\nu} = a \cdot \mathbf{I}$, donde a es constante. Pero debido a que la matriz $W_{\mu\nu}$ no tiene traza (todos sus elementos de la diagonal son cero), implica entonces que la constante es cero, lo cual implica a su vez que en realidad $W_{\mu\nu} = 0$.

Por lo tanto, el único término disipativo que es compatible con la isotropía y homogeneidad de la métrica de FRW es el que corresponde a la viscosidad volumétrica, $-\zeta P^{\mu\nu} \nabla_\gamma U^\gamma$. De esta forma, fijando $Q_\mu = 0 = W_{\mu\nu}$ en la perturbación $\delta T^{\mu\nu}$, la expresión (5.17) se reduce a

$$\delta T_{\mu\nu} = -\zeta(g_{\mu\nu} + U_\mu U_\nu) \nabla_\gamma U^\gamma. \quad (5.22)$$

Considerando que $\nabla_\alpha U^\alpha = 3H$, donde H es el parámetro de Hubble y que $Q_\mu = 0 = W_{\mu\nu}$, la expresión (5.20) resulta

$$\boxed{T_{\mu\nu}^{\text{imp}} = \rho U_\mu U_\nu + P^*(g_{\mu\nu} + U_\mu U_\nu)} \quad (5.23)$$

donde

$$P^* \equiv p - \zeta \nabla_\gamma U^\gamma. \quad (5.24)$$

Al calcular $\nabla_\gamma U^\gamma$ en la métrica de FRW se obtiene que

$$\nabla_\gamma U^\gamma = 3H, \quad (5.25)$$

donde H es el parámetro de Hubble. Así que usando (5.25) la expresión (5.24) llega a ser

$$\boxed{P^* \equiv p - 3\zeta H} \quad (5.26)$$

Como puede verse de la expresión (5.26), P^* es en realidad una *presión efectiva* compuesta por la presión hidrostática o termodinámica del fluido p , más la presión viscosa $-3\zeta H$. La forma del tensor $T_{\mu\nu}^{\text{imp}}$ es similar a la de un fluido perfecto [ver expresión (1.12)], solo que con un término extra en el factor de la presión.

Observe entonces cómo el único coeficiente disipativo que prevalece en la expresión (5.23, 5.26) es la *viscosidad volumétrica* ζ , que surge cuando un fluido está fuera de su equilibrio termodinámico local y que induce la *presión viscosa* de magnitud $-3\zeta H$. Esta presión viscosa puede ser vista como una medida de la presión para restablecer el equilibrio termodinámico local [59], [61]–[63]. En general $\zeta = \zeta(t)$, es decir, puede depender del tiempo, pero *no* del espacio, para poder ser consistente con la homogeneidad del Universo.

Por otra parte, la ecuación para la razón de producción de entropía local (5.21), usando el hecho de que $Q_\mu = 0 = W_{\mu\nu}$, se puede expresar como

$$\boxed{\nabla_\mu s^\mu = \frac{\zeta}{T_0} (\nabla_\alpha U^\alpha)^2 = 9H^2 \frac{\zeta}{T_0} \geq 0} \quad (5.27)$$

CAPÍTULO 5. FLUIDOS IMPERFECTOS

5.3. ECUACIONES HIDRODINÁMICAS DE LOS FLUIDOS EN RELATIVIDAD GENERAL.

donde la desigualdad viene de tomar en cuenta la ley de la entropía local (5.15). Considerando que H^2 y T_0 son siempre positivas, implica que

$$\boxed{\zeta \geq 0} \tag{5.28}$$

El formalismo para fluidos imperfectos aquí presentado fue inicialmente derivado por Eckart [64] en 1940 para procesos disipativos relativistas en sistemas termodinámicos fuera de su equilibrio local. Más tarde Landau & Lifshitz desarrollaron también una formulación equivalente [65].

La teoría de Eckart tiene esencialmente dos problemas en su formulación, el primero es que hay posibles estados de equilibrio en esta teoría que son inestables [66], el segundo problema es que puede darse el caso de que las señales puedan propagarse en el fluido más rápido que la velocidad de la luz [67, 68]. Para corregir estos problemas, Israel-Stewart [69, 70] desarrollaron en 1979 una teoría más consistente y general que evita estos problemas, y en la cual la teoría de Eckart es el límite a primer orden cuando el tiempo de relajación tiende a cero. En este límite, la teoría de Eckart es una buena aproximación a la de Israel-Stewart, y de tal forma que los problemas de la inestabilidad y velocidades supralumínicas desaparecen. Por otro lado, se considera que estos dos problemas surgen principalmente en el dominio *no físico* de las teorías [49].

Tomando ventaja de la equivalencia de la teoría de Eckart con la de Israel-Stewart en el límite cuando el tiempo de relajación tiende a cero, es que la primera ha sido usada ampliamente en la investigación debido a su mayor sencillez en comparación a la teoría de Israel-Stewart.

Por otra parte, Steven Weinberg en 1971 fue el primero en hacer un estudio formal de los efectos de la teoría de los fluidos imperfectos para el caso de la cosmología de un Universo en expansión [71].

Hoy en día, los fluidos imperfectos han tomado nuevo auge para modelar fluidos “oscuros” con viscosidad volumétrica como responsables de la aceleración observada en la expansión del Universo, asumiendo que la aproximación de tiempo de relajación tiende a cero (ver por ejemplo [50]-[52], [54, 55, 59], [72]-[75]).

Cabe señalar que para procesos irreversibles D. Pavón et al. [76] desarrollaron una formulación más general que la teoría de Israel-Stewart, donde la temperatura podría no estar asociada con la temperatura del equilibrio. Sin embargo, en un escenario cosmológico esta formulación no ha sido totalmente explorada.

5.3. Ecuaciones hidrodinámicas de los fluidos en Relatividad General.

A partir del tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}^{\text{imp}}$ para fluidos imperfectos (ecuación 5.23) y de la ecuación de conservación del número de partículas (ecuación 5.6) es posible derivar las cinco ecuaciones hidrodinámicas más relevantes que describen el comportamiento de los fluidos en el contexto de la teoría general de la relatividad, que son:

- Ecuación de continuidad para la densidad de materia.
- Ecuación de transferencia de calor.

CAPÍTULO 5. FLUIDOS IMPERFECTOS

5.3. ECUACIONES HIDRODINÁMICAS DE LOS FLUIDOS EN RELATIVIDAD GENERAL.

- Ecuaciones de Navier-Stokes (3 ecuaciones).

El movimiento de un fluido es gobernado por estas cinco ecuaciones, a la cual se le agrega la “*ecuación de estado*” del fluido para tener una descripción completa del mismo.

En el presente trabajo de tesis se estudian específicamente los fluidos compresibles con viscosidad volumétrica.

La *ecuación de continuidad* corresponde a la expresión (5.6), es decir,

$$\nabla_{\mu}(nU^{\mu}) = 0. \quad (5.29)$$

La *ecuación de la transferencia de calor* en Relatividad General corresponde a la expresión (5.21). Esta puede ser reescrita de otra forma¹ usando la expresión (5.10). Para esto, se calcula la derivada covariante de $\delta T^{\mu\nu}$ usando la expresión (5.22), que corresponde al caso de un fluido con viscosidad volumétrica, pero sin viscosidad de corte ($\eta = 0$) ni transferencia de calor ($\nu = 0$), obteniendo

$$\nabla_{\mu}\delta T^{\mu\nu} = -\zeta [\theta^2 U^{\nu} + \theta U^{\mu}\nabla_{\mu}U^{\nu} + P^{\mu\nu}\nabla_{\mu}\theta], \quad (5.30)$$

donde se ha definido

$$\theta \equiv \nabla_{\mu}U^{\mu}. \quad (5.31)$$

El escalar θ suele llamarse la *expansión* del fluido porque describe justamente la razón de incremento del volumen de un elemento del fluido.

Sustituyendo la expresión (5.30) en (5.10) y usando el hecho de que $U^{\mu}\nabla_{\mu}U^{\nu} = 0$, la expresión (5.10) toma la forma

$$nT_0 U^{\mu} \frac{\partial \sigma}{\partial x^{\mu}} = \zeta \theta^2. \quad (5.32)$$

Esta es la ecuación de transferencia de calor en Relatividad General, para el caso de un fluido compresible y con viscosidad volumétrica.

Las ecuaciones de Navier-Stokes se calculan a partir de la parte espacial de la identidad de Bianchi, es decir,

$$P_{\nu\alpha}\nabla_{\mu}T^{\mu\nu} = 0 \quad (5.33)$$

donde $T^{\mu\nu}$ esta dado por la ecuación (5.23) y $P_{\nu\alpha}$ es el tensor de proyección (ver 5.18). Para calcular la expresión (5.33) se puede primero calcular $\nabla_{\mu}T^{\mu\nu}$, de lo que se obtiene

$$\nabla_{\mu}T^{\mu\nu} = (\rho + p - \zeta\theta)(U^{\mu}\nabla_{\mu}U^{\nu} + \theta U^{\nu}) + U^{\mu}U^{\nu}\nabla_{\mu}(\rho + p - \zeta\theta) + g^{\mu\nu}\nabla_{\mu}(p - \zeta\theta). \quad (5.34)$$

Proyectando esta expresión con $P_{\nu\alpha}$, la ecuación (5.33) resulta

$$(\rho + p - \zeta\theta)U^{\mu}\nabla_{\mu}U_{\alpha} + g^{\mu\nu}P_{\nu\alpha}\nabla_{\mu}(p - \zeta\theta) = 0. \quad (5.35)$$

Estas son las ecuaciones de Navier-Stokes en el contexto de Relatividad General.

¹El interés de expresar la ecuación (5.21) de la forma dada por la ecuación (5.32) viene del hecho de que esta segunda forma de la ecuación de transferencia de calor es más adecuada para calcular su *límite Newtoniano*. Este límite se calculará en la siguiente sección.

5.4. Límite Newtoniano de las ecuaciones hidrodinámicas.

Para mostrar la correspondencia entre las ecuaciones hidrodinámicas en Relatividad General con el contexto Newtoniano, se calcula en esta sección el *límite Newtoniano*² de las ecuaciones de continuidad, transferencia de calor y de Navier-Stokes, para obtener las ecuaciones hidrodinámicas Newtonianas para un fluido “de laboratorio”.

Para ello, se usarán las siguientes expresiones que resultan de expandir cada una de ellas en potencias de la velocidad v (recuerde que se están utilizando las unidades de velocidad de la luz $c = 1$) del movimiento de una partícula³ inmersa en un campo gravitacional. En el límite Newtoniano la expansión en potencias de v es hasta v^2 (es decir, del orden de $O(2)$), cualquier otro término mayor al orden $O(2)$ se desprecia por ser muy pequeño (en unidades donde si se toma en cuenta el valor de c , la expansión hasta orden $O(2)$ corresponde a v^2/c^2).

A continuación se enlistan las expresiones que más se usarán a lo largo de esta sección. La derivación de cada una de ellas se puede consultar en el apéndice B. La expansión de los elementos de la métrica $g_{\mu\nu}$ viene dada como (ver expresiones B.28–B.30):

$$g_{00} = -1 + 2\phi + O(4), \quad (5.36)$$

$$g_{ij} = \delta_{ij} + O(2), \quad (5.37)$$

$$g_{i0} = O(3), \quad (5.38)$$

donde ϕ es el potencial gravitacional Newtoniano definido por la ecuación de Poisson: $\nabla^2\phi = 4\pi G\rho$. El orden de ϕ es de $O(2)$. Las expansiones de los términos contravariantes $g^{\mu\nu}$ corresponden a las expresiones (B.33–B.35).

Las expansiones de las componentes de cuadrivelocidad U^α hasta un orden de v^2 son (ver expresiones B.45–B.48):

$$U^0 = 1 + \left(\frac{1}{2}v^2 - \phi\right) + O(4), \quad (5.39)$$

$$U^i = v^i + O(5), \quad (5.40)$$

$$U_0 = -\left(1 + \frac{1}{2}v^2 + \phi\right) + O(4), \quad (5.41)$$

$$U_i = v_i + O(5), \quad (5.42)$$

El término v^i representa las componentes del vector de velocidad \mathbf{v} (de dimensión 3), de magnitud $v = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$. El orden de v^i y v^2 es de $O(1)$ y $O(2)$ respectivamente. La derivada parcial con respecto al tiempo, $\partial/\partial x^0 = \partial/\partial t$, es de orden $O(1)$.

Las expansiones de los símbolos de Christoffel vienen dadas por las expresiones (B.36–B.40).

5.4.1. Ecuación de continuidad.

Desarrollando explícitamente la ecuación de continuidad (5.29) de Relatividad General tenemos

²También llamada la “*aproximación Newtoniana*”.

³Una “*partícula*” en este contexto corresponde, por ejemplo, a un planeta, un cúmulo entero de galaxias, etc.

CAPÍTULO 5. FLUIDOS IMPERFECTOS

5.4. LÍMITE NEWTONIANO DE LAS ECUACIONES HIDRODINÁMICAS.

$$\nabla_\mu(nU^\mu) = \nabla_0(nU^0) + \nabla_i(nU^i) = 0. \quad (5.43)$$

Desarrollando el primer sumando:

$$\nabla_0(nU^0) = n \frac{\partial U^0}{\partial x^0} + \frac{\partial n}{\partial x^0} U^0 + n(\Gamma_{00}^0 U^0 + \Gamma_{0i}^0 U^i). \quad (5.44)$$

Sin embargo, el primer término de la expansión de Γ_{00}^0 es de orden $O(3)$ (ver expresión B.37) por lo que este término queda descartado (dado que $\Gamma_{00}^{0(2)} = 0$). El primer término de la expansión de Γ_{0i}^0 es de orden $O(2)$ (ver expresión B.36), sin embargo, al multiplicarlo por U^i , el producto se vuelve de orden $O(3)$ así que también queda descartada su contribución. Luego, usando la expresión (5.39) para U^0 , se obtiene

$$\nabla_0(nU^0) = n \frac{\partial}{\partial x^0} \left[1 + \left(\frac{1}{2} v^2 - \phi \right) \right] + \left(\frac{\partial n}{\partial x^0} \right) \left[1 + \left(\frac{1}{2} v^2 - \phi \right) \right]. \quad (5.45)$$

Los términos “ $(\partial/\partial x^0)(\frac{1}{2}v^2 - \phi)$ ” y “ $(\partial n/\partial x^0)(\frac{1}{2}v^2 - \phi)$ ” son de orden $O(3)$ por lo que se descartan. Con esto se llega a

$$\nabla_0(nU^0) = \frac{\partial n}{\partial t}. \quad (5.46)$$

Ahora, para el sumando $\nabla_i(nU^i)$ se tiene

$$\nabla_i(nU^i) = n \frac{\partial U^i}{\partial x^i} + \frac{\partial n}{\partial x^i} U^i + n(\Gamma_{i0}^i U^0 + \Gamma_{ij}^i U^j). \quad (5.47)$$

Γ_{i0}^i y Γ_{ij}^i son de orden $O(3)$ y $O(2)$ respectivamente (ver expresiones B.38–B.39), que multiplicadas por U^0 y U^j incrementan el orden a $O(4)$ y $O(3)$ respectivamente, por lo que se descartan. Sustituyendo la expresión (5.40) para U^i se tiene

$$\nabla_i(nU^i) = n \frac{\partial v^i}{\partial x^i} + \left(\frac{\partial n}{\partial x^i} \right) v^i. \quad (5.48)$$

Sustituyendo las expresiones (5.46) y (5.48) en (5.43) se obtiene

$$\frac{\partial n}{\partial t} + n \frac{\partial v^i}{\partial x^i} + \left(\frac{\partial n}{\partial x^i} \right) v^i = 0. \quad (5.49)$$

O en notación vectorial se puede expresar como

$$\frac{\partial n}{\partial t} + n \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla n = 0, \quad (5.50)$$

Conviene expresar la ecuación (5.50) en términos de la densidad de *masa* del fluido, que denotaremos como ρ_0 y es igual a

$$\rho_0 = nm \quad (5.51)$$

donde m es la masa de una de las partículas del fluido. Con esto, la ecuación se expresa como

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho_0 = 0, \quad (5.52)$$

lo cual corresponde a la *ecuación de continuidad* conocida para los fluidos Newtonianos.

CAPÍTULO 5. FLUIDOS IMPERFECTOS

5.4. LÍMITE NEWTONIANO DE LAS ECUACIONES HIDRODINÁMICAS.

5.4.2. Ecuación de transferencia de calor.

Partiendo de la expresión (5.32) se observa que hay que expandir el factor θ :

$$\theta = \nabla_\mu U^\mu = \nabla_0 U^0 + \nabla_i U^i. \quad (5.53)$$

El primer sumando se puede expandir como

$$\nabla_0 U^0 = \frac{\partial U^0}{\partial t} + \Gamma_{00}^0 U^0 + \Gamma_{0j}^0 U^j, \quad (5.54)$$

pero Γ_{00}^0 y $\Gamma_{0j}^0 U^j$ son de orden $O(3)$, así que se descartan. Sustituyendo la expresión (5.39) para U^0 y despreciando los términos mayores a $O(2)$ resulta que todos los otros términos también se desaparecen, obteniendo

$$\nabla_0 U^0 = 0. \quad (5.55)$$

Luego, para el sumando $\nabla_i U^i$ se tiene

$$\nabla_i U^i = \frac{\partial U^i}{\partial x^i} + \Gamma_{i0}^i U^0 + \Gamma_{ij}^i U^j. \quad (5.56)$$

Nuevamente Γ_{i0}^i y $\Gamma_{ij}^i U^j$ se descartan por ser de orden $O(3)$. Al sustituir la expresión (5.40) para U^i y conservando terminos hasta de orden $O(2)$ se llega a

$$\nabla_i U^i = \frac{\partial v^i}{\partial x^i} = \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (5.57)$$

Usando las expresiones (5.55) y (5.57) en (5.53) se tiene que

$$\theta = \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (5.58)$$

Ahora, desarrollando el factor $U^\mu (\partial\sigma/\partial x^\mu)$ de la expresión (5.32), se tiene

$$\begin{aligned} U^\mu \frac{\partial\sigma}{\partial x^\mu} &= U^0 \frac{\partial\sigma}{\partial x^0} + U^i \frac{\partial\sigma}{\partial x^i}, \\ &= \left[1 + \left(\frac{1}{2} v^2 - \phi \right) \right] \frac{\partial\sigma}{\partial t} + v^i \frac{\partial\sigma}{\partial x^i}. \end{aligned} \quad (5.59)$$

Conservando solo los términos de orden $O(2)$ se obtiene

$$U^\mu \frac{\partial\sigma}{\partial x^\mu} = \frac{\partial\sigma}{\partial t} + v^i \frac{\partial\sigma}{\partial x^i}, \quad (5.60)$$

que en forma vectorial se puede escribir como

$$U^\mu \frac{\partial\sigma}{\partial x^\mu} = \frac{\partial\sigma}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\sigma \quad (5.61)$$

Sustituyendo las expresiones (5.58) y (5.61) en (5.32), y multiplicando por m resulta

$$\rho_0 T_0 \left(\frac{\partial\sigma}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\sigma \right) = \zeta (\nabla \cdot \mathbf{v})^2, \quad (5.62)$$

donde se ha usado la definición (5.51) y se ha redefinido $\zeta \rightarrow m\zeta$. Esta es la familiar ecuación Newtoniana de transferencia de calor para un fluido compresible y con viscosidad volumétrica.

5.4.3. Ecuaciones de Navier-Stokes.

Para calcular el límite Newtoniano de las ecuaciones de Navier-Stokes (5.35) conviene realizar la expansión separadamente de los dos sumandos que aparecen en (5.35). Consideremos primero el sumando $U^\mu \nabla_\mu U_\alpha$. Desarrollando solamente la parte espacial de esta expresión ($\alpha = k$) se tiene

$$\begin{aligned} U^\mu \nabla_\mu U_k &= g_{k\beta} U^\mu \nabla_\mu U^\beta \\ &= g_{k0}(U^0 \nabla_0 U^0 + U^i \nabla_i U^0) + g_{ki}(U^0 \nabla_0 U^i + U^j \nabla_j U^i) \end{aligned} \quad (5.63)$$

Pero g_{k0} es de orden $O(3)$ (ver expresión 5.38) así que se descarta. Luego, $g_{ki} = \delta_{ki} + O(2)$ (ver 5.37). Manteniendo solo términos de orden $O(2)$ resulta

$$\begin{aligned} U^\mu \nabla_\mu U_k &= \delta_{ki}(U^0 \nabla_0 U^i + U^j \nabla_j U^i) \\ &= U^0 \nabla_0 U^k + U^j \nabla_j U^k. \end{aligned} \quad (5.64)$$

Luego,

$$U^0 \nabla_0 U^k = U^0 \left(\frac{\partial U^k}{\partial x^0} + \Gamma_{00}^k U^0 + \Gamma_{0i}^k U^i \right). \quad (5.65)$$

Γ_{0i}^k es de orden $O(3)$ así que se descarta. Sustituyendo U^0, U^k y Γ_{00}^k de las expresiones (5.39, 5.40) y (B.40) respectivamente, y conservando términos de orden $O(2)$, resulta

$$U^0 \nabla_0 U^k = \frac{\partial v^k}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x^k}. \quad (5.66)$$

Ahora, el término $U^j \nabla_j U^k$ se expande como

$$U^j \nabla_j U^k = U^j \left(\frac{\partial U^k}{\partial x^j} + \Gamma_{j0}^k U^0 + \Gamma_{ji}^k U^i \right). \quad (5.67)$$

Γ_{j0}^k y $\Gamma_{ji}^k U^i$ son de orden $O(3)$. Conservando términos de orden $O(2)$:

$$U^j \nabla_j U^k = v^j \frac{\partial v^k}{\partial x^j}. \quad (5.68)$$

Sumando las expresiones (5.66) y (5.68), la ecuación (5.64) se escribe como

$$U^\mu \nabla_\mu U_k = \frac{\partial v^k}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x^k} + v^j \frac{\partial v^k}{\partial x^j}. \quad (5.69)$$

Por otra parte, el segundo término de la ecuación (5.35), en la parte espacial, se puede expandir como

$$g^{\mu\nu} P_{\nu k} \nabla_\mu (p - \zeta \theta) = (g^{00} P_{0k} + g^{0j} P_{jk}) \nabla_0 (p - \zeta \theta) + (g^{i0} P_{0k} + g^{ij} P_{jk}) \nabla_i (p - \zeta \theta), \quad (5.70)$$

g^{0j} y g^{i0} son de orden $O(3)$. El primer término del lado derecho de la expresión (5.70) puede expandirse de la siguiente forma

$$g^{00} P_{0k} \nabla_0 (p - \zeta \theta) = (-1 - 2\phi) (g_{0k} + U_0 U_k) \frac{\partial}{\partial t} (p - \zeta \theta). \quad (5.71)$$

CAPÍTULO 5. FLUIDOS IMPERFECTOS

5.4. LÍMITE NEWTONIANO DE LAS ECUACIONES HIDRODINÁMICAS.

Pero tomando en cuenta que la presión hidrostática p del fluido y el término θ son de orden $O(2)$, y $(\partial/\partial t)$ de orden $O(1)$, se observa que este todo el lado derecho de la igualdad (5.71) es mayor a $O(2)$, por lo mismo se descarta, y entonces

$$g^{00}P_{0k}\nabla_0(p - \zeta\theta) = 0. \quad (5.72)$$

Luego, el término $g^{ij}P_{jk}\nabla_i(p - \zeta\theta)$ se expande como

$$\begin{aligned} g^{ij}P_{jk}\nabla_i(p - \zeta\theta) &= \delta_{ij}(g_{jk} + U_jU_k)\frac{\partial}{\partial x^i}(p - \zeta\theta) \\ &= (\delta_{ik} + U_iU_k)\frac{\partial}{\partial x^i}(p - \zeta\theta) \\ &= \frac{\partial}{\partial x^k}(p - \zeta\theta). \end{aligned} \quad (5.73)$$

Usando las expresiones (5.72) y (5.73), la ecuación (5.70) se puede expresar como

$$g^{\mu\nu}P_{\nu k}\nabla_\mu(p - \zeta\theta) = \frac{\partial p}{\partial x^k} - \frac{\partial(\zeta\theta)}{\partial x^k}. \quad (5.74)$$

Ahora, sustituyendo las expresiones (5.69) y (5.74) en la parte espacial de (5.35), se tiene

$$(\rho + p - \zeta\theta) \left(\frac{\partial v^k}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial x^k} + v^j \frac{\partial v^k}{\partial x^j} \right) + \frac{\partial p}{\partial x^k} - \frac{\partial(\zeta\theta)}{\partial x^k} = 0. \quad (5.75)$$

ρ es de orden $O(0)$, pero p, θ, ϕ son de orden $O(2)$. Conservando solo términos de $O(2)$ en la expresión (5.75) y reorganizando se obtiene

$$\rho \left(\frac{\partial v^k}{\partial t} + v^j \frac{\partial v^k}{\partial x^j} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x^k} - \frac{\partial\phi}{\partial x^k} + \frac{\partial(\zeta\theta)}{\partial x^k}. \quad (5.76)$$

Expresando la ecuación (5.76) en forma vectorial resulta

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla p - \rho \nabla \phi + \nabla(\zeta \nabla \cdot \mathbf{v}). \quad (5.77)$$

Luego, ρ corresponde a la *densidad de energía* del fluido en el contexto de Relatividad General. Este factor puede verse como la suma de dos contribuciones, una debida a la densidad de energía que viene de la *densidad de masa* del fluido, es decir, $\rho_0 c^2$ (ver expresión 5.51), donde c es la velocidad de la luz⁴, y otra contribución que viene de la *densidad de energía interna* del fluido $\rho_0 \Pi$, donde Π es un número real, esto es,

$$\rho = \rho_0 c^2 + \rho_0 \Pi. \quad (5.78)$$

En el límite Newtoniano sucede que $\rho_0 c^2 \gg \rho_0 \Pi$. Así que despreciando $\rho_0 \Pi$ y asumiendo nuevamente $c = 1$, la ecuación (5.77) se escribe como

$$\rho_0 \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla p - \rho_0 \nabla \phi + \nabla(\zeta \nabla \cdot \mathbf{v}). \quad (5.79)$$

Que corresponde a las ecuaciones de Navier-Stokes en el contexto Newtoniano.

⁴Aquí se ha hecho la excepción de escribir explícitamente el factor c .

5.5. Interpretación física de la viscosidad volumétrica.

La viscosidad volumétrica ζ es una propiedad de los fluidos *compresibles* y que aparece principalmente en gases poliatómicos. La viscosidad volumétrica se define a través de la diferencia entre la presión *termodinámica* p del fluido y la presión *mecánica* p^* en el mismo, como

$$p - p^* = \zeta(\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (5.80)$$

donde \mathbf{v} es la velocidad del fluido. La presión termodinámica p es una medida de *toda* la energía cinética de las moléculas del fluido, este término incluye los movimientos de translación, rotación, vibración y cualquier otro movimiento de las mismas. La presión mecánica p^* es una medida de la energía *translacional* de las moléculas solamente, mientras que la presión $\zeta(\nabla \cdot \mathbf{v})$ mide las otras formas de energía cinética: *rotación y vibración* [77, 78]. De esta forma, en el caso de que los modos vibracionales y/o rotacionales (o algún otro tipo de modo) de las moléculas de un fluido compresible esten activados, entonces $\zeta \neq 0$.

En el caso en que el fluido sea *incompresible*, el término $(\nabla \cdot \mathbf{v})$ es cero y entonces ambas presiones son iguales en ese caso.

El efecto más conocido (y tal vez el único) de la viscosidad volumétrica en un fluido es el de *atenuación* de las ondas acústicas en un medio, que consisten en la reducción de la amplitud de la onda en función de la distancia de profundidad que recorre en el medio. La única manera hasta ahora conocida para medir y estudiar experimentalmente la viscosidad volumétrica es justamente a través de esta atenuación de ondas ultrasónicas, principalmente a través de una técnica llamada *espectroscopía acústica* [78].

La ecuación para la atenuación α de ondas acústicas que se propagan en un medio viscoso, térmicamente no conductivo, en el límite de bajas frecuencias (del orden de 100 MHz) se expresa como⁵ [78]

$$\alpha = \frac{\omega^2}{2\rho_0 V^3} \left(\frac{4}{3}\eta + \zeta \right) \quad (5.81)$$

donde ω es la frecuencia de la onda acústica, ρ_0 es la densidad del fluido, V es volumen y η , ζ son las viscosidades dinámica (o de corte) y volumétrica, respectivamente.

Algunos valores de la viscosidad volumétrica calculados recientemente por Dukhin y Goetz, 2009 [78] para ciertos líquidos se muestran en la tabla 5.1. Estos autores estudiaron 12 líquidos de diversa naturaleza a los que miden experimentalmente la viscosidad dinámica η y volumétrica ζ , además de otros parámetros. Encontraron, contrario a lo que se asume insistentemente en la literatura sin fundamentos experimentales, que la magnitud de la viscosidad volumétrica de cada uno de estos fluidos definitivamente **no es despreciable**, y que en todos ellos es *mayor* que la viscosidad dinámica, incluso por dos órdenes de magnitud (para la piridina por ejemplo). Además, que la viscosidad volumétrica depende esencialmente *solo* de las propiedades moleculares del fluido.

Una de las aplicaciones de interés del estudio de la viscosidad volumétrica y su efecto en la atenuación de ondas acústicas es en la técnica no destructiva de exploración de

⁵En el presente trabajo de tesis no se muestra la derivación de esta ecuación, la cual esta fuera del alcance e intereses del trabajo. Se muestra solo con fines de ilustración.

CAPÍTULO 5. FLUIDOS IMPERFECTOS

5.5. INTERPRETACIÓN FÍSICA DE LA VISCOSIDAD VOLUMÉTRICA.

Líquido	Viscosidad Volumétrica (cP)	Viscosidad Dinámica (cP)
Agua	2.4	0.890
Tolueno	7.6	0.560
Metanol	0.8	0.544
Acetona	1.4	0.306
Etanol	1.4	1.074
Piridina	62.4	0.879

Cuadro 5.1: Valores de la viscosidad volumétrica para 6 líquidos calculados por Dukhin y Goetz, 2009 [78] a través de la atenuación de ondas ultrasónicas de 100 MHz, a una temperatura de 25° C. Las unidades corresponden a *centipoises* (cP) [1 poise (P) = 1 gr/(cm · seg)]. Observe como la viscosidad volumétrica es notablemente *mayor* que la viscosidad dinámica para todos los fluidos.

medios a través de ondas acústicas ultrasónicas (por ejemplo, para generar las imágenes de ultrasonido de un bebé en el vientre materno).

Vale la pena mencionar que la viscosidad volumétrica ha sido escasamente estudiada hasta hoy en día, al punto tal que sorprende la poca información que existe al respecto [78]. Son muy pocos los trabajos que se han hecho sobre ella tanto teórica como experimentalmente. Casi no hay valores experimentales reportados para fluidos de laboratorio. Prácticamente toda literatura existente sobre fluidos viscosos se enfoca en fluidos *incompresibles* y con viscosidad *dinámica* (*shear viscosity*) quedando fuera del estudio la viscosidad volumétrica, y los que abordan los fluidos compresibles lo hacen sin entrar en detalles de lo que es la viscosidad volumétrica, salvo algunos escasos trabajos.

5.5.1. Efecto de la viscosidad volumétrica en fluidos Newtonianos.

En el presente trabajo de tesis se planteó y realizó un estudio preliminar al respecto de la siguiente pregunta (no se encontró ningún antecedente de algún estudio previo realizado en ello en la literatura): “¿podría observarse en un fluido Newtoniano el efecto de que la viscosidad volumétrica pueda inducir expansión acelerada en el fluido, tal como sucede en el contexto cosmológico?”.

Para ello, se consideró el caso de un fluido con viscosidad volumétrica, sin viscosidad dinámica ni conducción térmica. Se asume que el flujo del fluido es en la dirección del eje cartesiano x y que se mueve con una velocidad $\mathbf{v} = v(x)\hat{\mathbf{i}}$, donde la densidad del mismo depende solamente de x y el tiempo t , es decir $\rho_0 = \rho_0(t, x)$. Además, la presión es $p = p(x)$, y se asume que no hay la presencia de algún campo de fuerza externo ($\phi = 0$). Además se considera que en el fluido existe un gradiente de presión de la forma⁶

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -C \tag{5.82}$$

⁶Este gradiente (y en general esta configuración del fluido) es a semejanza del *flujo plano de Poiseuille*, para fluidos incompresibles con viscosidad *dinámica*.

CAPÍTULO 5. FLUIDOS IMPERFECTOS
5.5. INTERPRETACIÓN FÍSICA DE LA VISCOSIDAD VOLUMÉTRICA.

donde C es una constante positiva. Con estas condiciones las ecuaciones de Navier-Stokes (5.79) se reduce a una sola, que es

$$\rho_0 \left[\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right] = C + \zeta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad (5.83)$$

donde se ha usado el resultado de Dukhin y Goetz [78] de que la viscosidad no depende de x . Por otra parte, la ecuación de continuidad (5.52) para este fluido se expresa como

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0. \quad (5.84)$$

Las condiciones de frontera e iniciales que se consideran son:

$$v(t = 0, x) = 1 \quad \rho_0(t = 0, x) = 1 \quad (5.85)$$

$$v(t, x = 0) = 1 \quad \rho_0(t, x = 0) = 1 \quad (5.86)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} v(t, x = 0) = 0 \quad C = 1 \quad (5.87)$$

Se resolvió numéricamente el sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (5.84) y (5.85) para encontrar las funciones $\rho_0(t, x)$ y $v(x)$. Luego, el escalar de expansión θ , que en Relatividad General se define como (ver expresión 5.31) $\theta \equiv \nabla_\mu U^\mu$ y que en el límite Newtoniano toma la forma $\theta = \nabla \cdot \mathbf{v}$ (ver expresión 5.58), describe la razón de incremento del volumen de un elemento del fluido [79], es por ello que es llamado la *expansión*. Este término en las ecuaciones permite tomar en cuenta de que el fluido es compresible. Para fluidos incompresibles $\theta = 0$.

En el caso del fluido propuesto en esta sección, θ toma la forma

$$\theta = \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (5.88)$$

La *aceleración* en la expansión del fluido corresponde al cambio en el tiempo de θ , es decir

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \theta}{\partial t} = v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x}. \quad (5.89)$$

En las figuras 5.1–5.4 se grafican las funciones calculadas para θ , $d\theta/dt$, $v(t)$ y $\rho(t)$ en función del tiempo. Dado que estas cuatro funciones dependen de (t, x) , se eligió $x = 0.5$ cm como un valor característico fijo espacialmente para estudiar el comportamiento del fluido. Los valores elegido para ζ en las figuras 5.1–5.4, corresponden a los de la tabla 5.1, con el fin de tener una referencia experimental de fluidos reales que puedan tener esa magnitud de viscosidad volumétrica. Además, se incluyó el caso en el que la magnitud de ζ es muy pequeña ($\zeta = 0.01$ cP) para observar el comportamiento del fluido cuando la viscosidad volumétrica es “despreciable”. Las unidades utilizadas son: centipoises (viscosidad), milipascales (presión), 10^{-2} gr/cm³ (densidad) y cm/seg (velocidad).

Se analizó también el caso en que se elegía un valor de $\zeta = 62.4$ cP, que corresponde a la viscosidad volumétrica de la piridina (ver tabla 5.1), sin embargo, se obtuvo un comportamiento caótico y con singularidades para este caso, por lo que no se muestra en las gráficas.

De las figuras 5.1–5.4 (principalmente de 5.2) se observa que el fluido tiene una expansión **acelerada** ($d\theta/dt > 0$) para tiempos tempranos ($t \gtrsim 0$), tal que la aceleración se

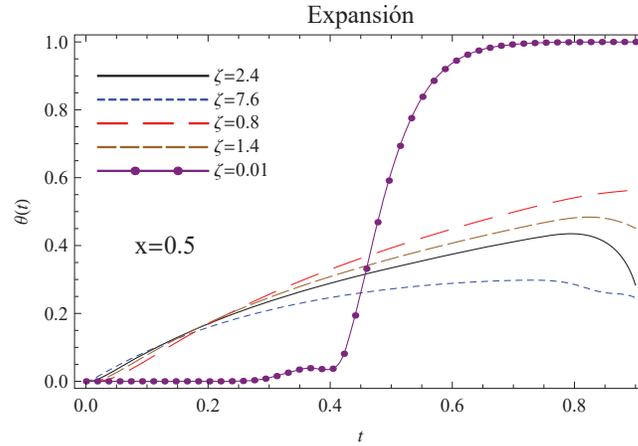


Figura 5.1: Gráfica de la función de expansión $\theta \equiv \partial v / \partial x$ en función del tiempo t (segundos) para diferentes valores de la viscosidad volumétrica. Se estudia el comportamiento del fluido a una profundidad en el medio de $x = 0.5$ cm. Las unidades de ζ están dadas en *centipoises* (cP) [1 poise (P) = 1 gr/(cm · seg)]. Se observa como el fluido se expande cada vez en mayor proporción conforme pasa el tiempo (expansión **acelerada**). Ver figura 5.2. Los valores elegidos para ζ que se muestran en la figura corresponden a los de la tabla 5.1, de tal forma que las gráficas corresponden al caso en que el fluido sea: agua ($\zeta = 2.4$ cP), tolueno ($\zeta = 7.6$ cP), metanol ($\zeta = 0.8$ cP), acetona y etanol ($\zeta = 1.4$ cP).

incrementa rápidamente en un principio hasta alcanzar un máximo y luego empieza a decrecer monóticamente hasta tener una transición suave a un periodo tardío de expansión *desacelerada* ($d\theta/dt > 0$).

Del comportamiento que se observa en las figuras 5.1–5.4, se llega a la conclusión *preliminar* de que, dada la configuración y condiciones iniciales y de frontera planteados arriba para un fluido compresible, los resultados sugieren que la presencia de la viscosidad volumétrica en un fluido compresible parecen inducir una **aceleración** en la expansión del fluido (semejante a la que se obtiene en el contexto cosmológico). Sin embargo, esta aceleración decrece en el tiempo hasta llegar a un periodo de expansión desacelerada.

Es preciso realizar un estudio más profundo para verificar y analizar el rango de validez de la conclusión arriba planteada.

5.6. En resumen:

Este capítulo describe las bases teóricas y físicas de los *fluidos imperfectos relativistas*, que son una generalización de los *fluidos perfectos* del capítulo 1. Los fluidos imperfectos toman en cuenta los posibles efectos disipativos presentes en los fluidos *reales* que se encuentran en la naturaleza, tales como el flujo de calor, la viscosidad de corte (la que es más familiar) y la volumétrica. Los fluidos *perfectos* son tan solo una idealización o aproximación al comportamiento de los fluidos, que en realidad es más complejo, por lo que una descripción más detallada se hace precisamente con la teoría de los *fluidos*

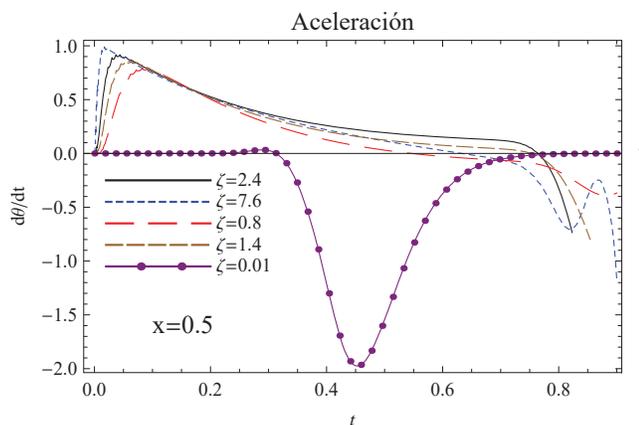


Figura 5.2: Gráfica de la *aceleración* de expansión $d\theta/dt$ (donde $\theta \equiv \partial v/\partial x$. Ver expresión 5.88) en función del tiempo t (segundos), para diferentes valores de la viscosidad volumétrica. Se estudia el comportamiento del fluido a una profundidad en el medio de $x = 0.5$ cm. Se observa que el fluido inicialmente experimenta un periodo de expansión **acelerada** ($d\theta/dt > 0$), pero cuya magnitud de la aceleración va disminuyendo gradualmente en el tiempo hasta llegar a un periodo *desacelerado* ($d\theta/dt < 0$). Sin embargo, para el caso $\zeta = 0.01$ cP, el fluido empieza con aceleración igual a cero, luego tiene una ligera etapa de aceleración seguida por una de desaceleración, y que tiempo después se vuelve cero, ya que el fluido deja de expandirse (ver figura 5.3). Las unidades de ζ son *centipoises* (cP).

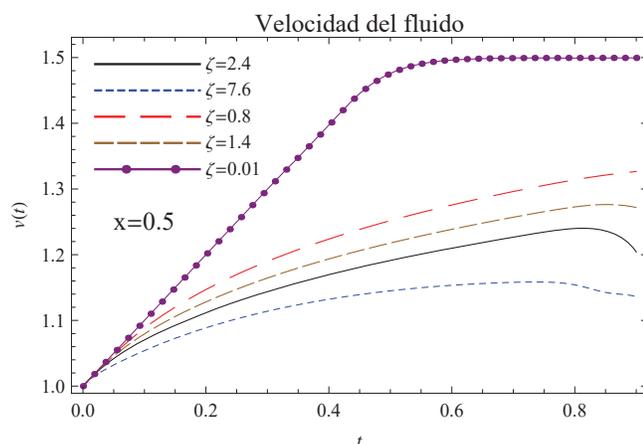


Figura 5.3: Gráfica de la velocidad del flujo $v(t)$ para distintos valores de la viscosidad volumétrica. Se estudia el comportamiento del fluido a una profundidad en el medio de $x = 0.5$ cm. Se observa como la velocidad del fluido se va incrementando conforme pasa el tiempo hasta llegar a un máximo y luego viene un periodo de decremento de la velocidad o se mantiene constante. Las unidades de ζ son *centipoises* (cP), y de la velocidad (cm/seg).

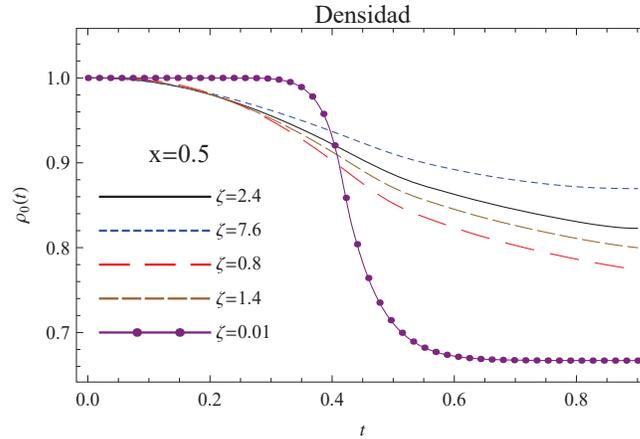


Figura 5.4: Gráfica de la densidad del fluido $\rho_0(t)$ en función del tiempo (segundos) para distintos valores de la viscosidad volumétrica. Se estudia el comportamiento del fluido a una profundidad en el medio de $x = 0.5$ cm. Se observa como la densidad del fluido va decreciendo conforme pasa el tiempo. Las unidades de ζ y ρ_0 son *centipoises* (cP) y 10^{-2} gr/cm³, respectivamente.

imperfectos.

La expresión del tensor de energía-momento de los fluidos imperfectos es más complicada que para el caso de los perfectos, sin embargo, al requerir que los fluidos sean homogéneos e isotrópicos para poder usarlos en el contexto cosmológico, la expresión del tensor se simplifica notablemente, de tal manera que el único efecto que queda es el de la *viscosidad volumétrica*.

Por otra parte, se calcularon las ecuaciones hidrodinámicas de los fluidos en el contexto de Relatividad General y su contraparte Newtoniana, para mostrar como de las ecuaciones más generales se llegan a las ecuaciones conocidas de hidrodinámica de fluidos Newtonianos.

Se estudió también la interpretación física de la viscosidad volumétrica en fluidos Newtonianos para tener una mejor comprensión de su naturaleza. Además se investigó si era posible tener un fluido de laboratorio en el cual se observara que se expande *aceleradamente* debido a la presencia de la viscosidad volumétrica. La conclusión preeliminar a la que se llegó en ese sentido es que si puede darse el caso, al menos teóricamente.

Las tres expresiones más importantes de este capítulo que serán usadas en el siguiente capítulo son: el tensor de energía-momento (5.23), la presión efectiva (5.26) y la segunda ley de la termodinámica local (5.28).

Los conceptos aquí presentados servirán de base para proponer y analizar en el siguiente capítulo un modelo cosmológico con viscosidad volumétrica para explicar la expansión acelerada del Universo, a manera de alternativa al modelo Λ CDM.

Capítulo 6

Modelos cosmológicos con viscosidad volumétrica

En los capítulos anteriores se han descrito diferentes elementos teóricos, estadísticos y observacionales de la cosmología, y en particular, aquellos relacionados con la expansión acelerada del Universo y la energía oscura. Además, en el capítulo 5 se describieron las generalidades teóricas de los fluidos imperfectos, con una orientación hacia la cosmología.

En el presente capítulo se propone y estudia un modelo muy general de cosmología viscosa, basado sobre la teoría de los fluidos imperfectos, a manera de un modelo alternativo al de la energía oscura o a Λ CDM.

Se trata de un modelo cosmológico que propone que la única¹ componente presente en el Universo es un fluido sin presión (polvo), con viscosidad volumétrica de la forma general $\zeta = \zeta_0 + \zeta_1 H$, para explicar la aceleración presente del Universo, donde ζ_0 y ζ_1 son constantes en el espacio y tiempo, y H es el parámetro de Hubble. El fluido caracteriza conjuntamente a las componentes de materia bariónica y oscura.

El término “ ζ_0 ” toma en cuenta la parametrización más simple posible para la viscosidad, esto es, que sea proporcional a una constante. Y el término “ $\zeta_1 H$ ” caracteriza a una viscosidad que es proporcional a la razón de expansión del Universo.

Se clasifican todos los posibles escenarios del Universo predichos por el modelo de acuerdo a su evolución en el pasado, presente y futuro, analizando el comportamiento del factor de escala así como el escalar de curvatura y la densidad de materia.

Por otra parte, acotamos y probamos la viabilidad del modelo desarrollando un análisis estadístico Bayesiano para calcular las mejores estimaciones de ζ_0 y ζ_1 usando los datos de supernovas tipo Ia, el parámetro de corrimiento \mathcal{R} de la radiación cósmica de fondo y el pico A de las variaciones acústicas bariónicas. Además de usar la segunda ley de la termodinámica local y las cotas observacionales sobre la edad el Universo para imponer dos cotas más sobre el modelo. Adicionalmente, desarrollamos diferentes formas de marginalizar a la constante de Hubble para estudiar la sensibilidad de los resultados ante la forma de marginalizar.

Este capítulo representa el trabajo central de la tesis, que por un lado consistió en el aprendizaje, dominio e implementación de los conceptos descritos someramente en los capítulos anteriores, y que se resumen en las pruebas cosmológicas, la estadística Bayesiana

¹Es decir, la componente *dominante* del Universo.

CAPÍTULO 6. MODELOS COSMOLÓGICOS CON VISCOSIDAD VOLUMÉTRICA

6.1. LA ECUACIÓN DE CONSERVACIÓN LOCAL Y EL PARÁMETRO DE HUBBLE.

y los fluidos imperfectos. Y por otro lado, su aplicación al estudio formal y detallado de un modelo cosmológico alternativo, con una parametrización muy general que permite abarcar un gran número de casos, los cuales son estudiados. Además, el modelo general es confrontado con pruebas cosmológicas para medir su viabilidad y calcular los parámetros libres de la teoría.

Es importante mencionar que el tercer elemento central de la tesis consistió precisamente en la confrontación “modelo *vs* datos” que implica un trabajo considerable en la parte de cálculo numérico, tanto su implementación como desarrollo, que dan como resultado ciertas gráficas y valores mostrados en las tablas de este capítulo.

Comencemos por estudiar el modelo a partir de la ecuación de conservación local de la materia y la obtención del parámetro de Hubble.

6.1. La ecuación de conservación local y el parámetro de Hubble.

Como se mencionó anteriormente, estudiamos un modelo cosmológico en la métrica de FRW donde la única componente es un fluido sin presión con viscosidad volumétrica de la forma $\zeta = \zeta_0 + \zeta_1 H$, para explicar la aceleración presente del Universo. Este fluido sin presión caracteriza conjuntamente a las componentes de materia oscura y bariónica.

Asumimos un Universo de geometría espacialmente plana que en la métrica de FRW se expresa como

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(dr^2 + r^2 d\Omega^2), \quad (6.1)$$

donde $a(t)$ es el factor de escala. Por otra parte, la ecuación de conservación *local* para el fluido viscoso se expresa como

$$\dot{\rho}_m + 3H(\rho_m + P_m^*) = 0, \quad (6.2)$$

donde

$$P_m^* \equiv P_m - 3\zeta H. \quad (6.3)$$

El subíndice “m” indica “componente de *materia*”, H es el parámetro de Hubble y el punto sobre ρ_m significa derivada temporal.

En particular, establecemos la presión hidrostática del fluido como $P_m = 0$, debido a que estamos asumiendo que la componente de materia es un fluido sin presión (polvo). Con esto, la ecuación de conservación (6.2) resulta

$$\dot{\rho}_m + 3H(\rho_m - 3\zeta H) = 0. \quad (6.4)$$

El coeficiente de viscosidad ζ en general puede depender del tiempo cósmico. Las ecuaciones de Friedmann para este caso son

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_m, \quad (6.5)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho_m - 9\zeta H). \quad (6.6)$$

**CAPÍTULO 6. MODELOS COSMOLÓGICOS CON VISCOSIDAD
VOLUMÉTRICA**
6.1. LA ECUACIÓN DE CONSERVACIÓN LOCAL Y EL PARÁMETRO DE
HUBBLE.

Usando la parametrización $\zeta = \zeta_0 + \zeta_1 H$ y la primera ecuación de Friedmann (6.5), podemos escribir el término $(\rho_m - 3\zeta H)$ de la ecuación (6.4) como:

$$\rho_m - 3\zeta H = \left(1 - \frac{\tilde{\zeta}_1}{3}\right) \rho_m - \frac{H_0}{(24\pi G)^{1/2}} \tilde{\zeta}_0 \rho_m^{1/2}, \quad (6.7)$$

donde hemos definido los coeficientes de viscosidad volumétrica *adimensionales* $\tilde{\zeta}_0$ y $\tilde{\zeta}_1$ como

$$\tilde{\zeta}_0 \equiv \left(\frac{24\pi G}{H_0}\right) \zeta_0, \quad \tilde{\zeta}_1 \equiv (24\pi G) \zeta_1, \quad (6.8)$$

y H_0 es la constante de Hubble. Usando la expresión (6.7) podemos reescribir la ecuación (6.4) en términos del factor de escala como

$$\frac{d\rho_m}{da} + (3 - \tilde{\zeta}_1) \frac{\rho_m}{a} - \frac{3H_0}{(24\pi G)^{1/2}} \frac{\tilde{\zeta}_0}{a} \rho_m^{1/2} = 0. \quad (6.9)$$

Dividimos la ecuación diferencial ordinaria (EDO) (6.9) por la *densidad crítica hoy* $\rho_{\text{crit}}^0 \equiv 3H_0^2/8\pi G$, obteniendo

$$a \frac{d\hat{\Omega}_m}{da} + (3 - \tilde{\zeta}_1) \hat{\Omega}_m - \tilde{\zeta}_0 \hat{\Omega}_m^{1/2} = 0, \quad (6.10)$$

donde ahora además hemos definido el parámetro de densidad adimensional $\hat{\Omega}_m \equiv \rho_m/\rho_{\text{crit}}^0$. Usando la relación entre el factor de escala a y el redshift $1 + z = 1/a$ podemos expresar la EDO (6.10) como

$$(1 + z) \frac{d\hat{\Omega}_m}{dz} + (\tilde{\zeta}_1 - 3) \hat{\Omega}_m + \tilde{\zeta}_0 \hat{\Omega}_m^{1/2} = 0, \quad (6.11)$$

donde la función a ser calculada es $\hat{\Omega}_m(z)$. Esta EDO tiene la solución exacta:

$$\hat{\Omega}_m(z) = \left[\left(1 - \frac{\tilde{\zeta}_0}{3 - \tilde{\zeta}_1}\right) (1 + z)^{(3 - \tilde{\zeta}_1)/2} + \frac{\tilde{\zeta}_0}{3 - \tilde{\zeta}_1} \right]^2; \quad \text{para } \tilde{\zeta}_1 \neq 3, \quad (6.12)$$

donde hemos usado la condición inicial $\Omega_{m0} \equiv \hat{\Omega}_m(z = 0) = 1$. Por otra parte, dividimos la primera ecuación de Friedmann (6.5) también por la densidad crítica hoy y le sustituimos la expresión (6.12) para obtener

$$H(z) = H_0 \frac{\left(3 - \tilde{\zeta}_0 - \tilde{\zeta}_1\right) (1 + z)^{(3 - \tilde{\zeta}_1)/2} + \tilde{\zeta}_0}{3 - \tilde{\zeta}_1}; \quad \text{para } \tilde{\zeta}_1 \neq 3. \quad (6.13)$$

O en términos del factor de escala

$$H(a) = H_0 \left[\left(1 - \frac{\tilde{\zeta}_0}{3 - \tilde{\zeta}_1}\right) a^{(\tilde{\zeta}_1 - 3)/2} + \frac{\tilde{\zeta}_0}{3 - \tilde{\zeta}_1} \right]; \quad \text{para } \tilde{\zeta}_1 \neq 3. \quad (6.14)$$

6.2. El factor de escala.

De la definición del parámetro de Hubble $H(a) \equiv \dot{a}/a$ escribimos la expresión (6.14) como

$$\frac{1}{a} \frac{da}{dt} = H_0 \left[\left(1 - \frac{\tilde{\zeta}_0}{3 - \tilde{\zeta}_1} \right) a^{(\tilde{\zeta}_1 - 3)/2} + \frac{\tilde{\zeta}_0}{3 - \tilde{\zeta}_1} \right]. \quad (6.15)$$

Definimos $\gamma \equiv \tilde{\zeta}_0/(3 - \tilde{\zeta}_1)$ y $\beta \equiv \tilde{\zeta}_1 - 3$, e integramos la ecuación (6.15), es decir,

$$\int_1^a \frac{da'}{a' [(1 - \gamma)a'^{\beta/2} + \gamma]} = \int_{t_0}^t H_0 dt' = H_0(t - t_0), \quad (6.16)$$

donde t es el tiempo cósmico. Resolviendo esta integral obtenemos

$$-\frac{2}{\gamma\beta} \ln \left[1 - \gamma + \frac{\gamma}{a^{\beta/2}} \right] = H_0(t - t_0). \quad (6.17)$$

Resolviendo para $a(t)$ y sustituyendo los valores de γ y β llegamos a

$$a(t) = \left[\frac{\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 - 3 + (3 - \tilde{\zeta}_1) \exp\left(\frac{1}{2}\tilde{\zeta}_0 H_0(t - t_0)\right)}{\tilde{\zeta}_0} \right]^{2/(3 - \tilde{\zeta}_1)}; \quad \text{para } \tilde{\zeta}_0 \neq 0, \tilde{\zeta}_1 \neq 3. \quad (6.18)$$

Además, calculamos la primera y segunda derivadas de la expresión (6.18) con respecto a $x \equiv H_0(t - t_0)$ para estudiar las épocas de expansión aceleradas o desaceleradas del Universo y las transiciones entre ellas:

$$\frac{da}{dx} = e^{\tilde{\zeta}_0 x/2} \left[\frac{\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 - 3 + (3 - \tilde{\zeta}_1)e^{\tilde{\zeta}_0 x/2}}{\tilde{\zeta}_0} \right]^{(\tilde{\zeta}_1 - 1)/(3 - \tilde{\zeta}_1)}, \quad (6.19)$$

$$\frac{d^2a}{dx^2} = \frac{1}{2} e^{\tilde{\zeta}_0 x/2} \left(\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 - 3 + 2e^{\tilde{\zeta}_0 x/2} \right) \left[\frac{\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 - 3 + (3 - \tilde{\zeta}_1)e^{\tilde{\zeta}_0 x/2}}{\tilde{\zeta}_0} \right]^{2(\tilde{\zeta}_1 - 2)/(3 - \tilde{\zeta}_1)}. \quad (6.20)$$

6.3. Análisis del factor de escala

En esta sección analizamos el comportamiento del factor de escala y la evolución del Universo que el modelo $\zeta = \zeta_0 + \zeta_1 H$ predice, además de clasificar todos sus posibles escenarios de acuerdo a su comportamiento, cuando las expresiones (6.18–6.20) son evaluadas en los diferentes valores posibles de $\tilde{\zeta}_0$ y $\tilde{\zeta}_1$. Para simplificar el análisis agrupamos los posibles valores de $(\tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}_1)$ de acuerdo al comportamiento que el Universo tiene para cada caso. Cada uno de estos casos son estudiados separadamente y son:

- Caso (I): $\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 = 3$

**CAPÍTULO 6. MODELOS COSMOLÓGICOS CON VISCOSIDAD
VOLUMÉTRICA**

6.3. ANÁLISIS DEL FACTOR DE ESCALA

- Caso (II): $\tilde{\zeta}_0 < 0, \tilde{\zeta}_1 < 0$
- Caso (III): $\tilde{\zeta}_0 > 0, \tilde{\zeta}_1 < 0$
- Caso (IV): $\tilde{\zeta}_0 > 0, 0 < \tilde{\zeta}_1 < 3$
- Caso (V): $\tilde{\zeta}_0 < 0, 0 < \tilde{\zeta}_1 < 3$
- Caso (VI): $\tilde{\zeta}_0 > 0, \tilde{\zeta}_1 > 3$
- Caso (VII): $\tilde{\zeta}_0 < 0, \tilde{\zeta}_1 > 3$
- Caso (VIII): $\tilde{\zeta}_0 > 0, \tilde{\zeta}_1 = 3$
- Caso (IX): $\tilde{\zeta}_0 < 0, \tilde{\zeta}_1 = 3$
- Caso (X): $\tilde{\zeta}_0 = 0, \tilde{\zeta}_1 = 3$
- Caso (XI): $\tilde{\zeta}_0 = 0, \tilde{\zeta}_1 \neq 0$
- Caso (XII): $\tilde{\zeta}_0 \neq 0, \tilde{\zeta}_1 = 0$

6.3.1. Caso (I): $\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 = 3$.

Estudiamos el caso cuando el factor de escala (6.18) es evaluado en todos los posibles valores de $(\tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}_1)$ tales que $\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 = 3$. Encontramos de manera simple que este caso corresponde a un Universo de *de Sitter*

$$a(t) = e^{H_0(t-t_0)}, \quad (6.21)$$

en el cual el Universo tiene una expansión eterna acelerada (ver líneas punteadas en las figuras 6.2, 6.3).

6.3.2. Caso (II): $\tilde{\zeta}_0 < 0, \tilde{\zeta}_1 < 0$.

Estudiamos el caso en el que se evalúa la expresión (6.18) para cualesquiera valores de $\tilde{\zeta}_0 < 0, \tilde{\zeta}_1 < 0$. Encontramos que en este caso el Universo comienza con un *Big-Bang*². Justo después el Universo comienza a expandirse *desaceleradamente*, y esto lo hace *por siempre*. El factor de escala está acotado en el futuro, solo puede alcanzar un valor *máximo* “ a_{\max} ” cuando el tiempo cósmico va a infinito en el futuro, dado por

$$a_{\max} \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} a(t) = \left(\frac{\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 - 3}{\tilde{\zeta}_0} \right)^{2/(3-\tilde{\zeta}_1)}, \quad (6.22)$$

donde el subíndice “max” indica “máximo”. La figura 6.1 muestra el comportamiento del factor de escala para diferentes valores de $(\tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}_1)$ para este caso.

Por otra parte, usando $a(t_{\text{BB}}) = 0$, encontramos que el tiempo cósmico t_{BB} cuando sucede el Big-Bang al inicio del Universo es

²En el presente trabajo definimos al *Big-Bang* como el estado del Universo donde el factor de escala es cero en algún tiempo pasado t_{BB} , donde además los valores del escalar de curvatura R y la densidad de materia ρ divergen. El subíndice “BB” indica “Big-Bang”.

**CAPÍTULO 6. MODELOS COSMOLÓGICOS CON VISCOSIDAD
VOLUMÉTRICA**
6.3. ANÁLISIS DEL FACTOR DE ESCALA

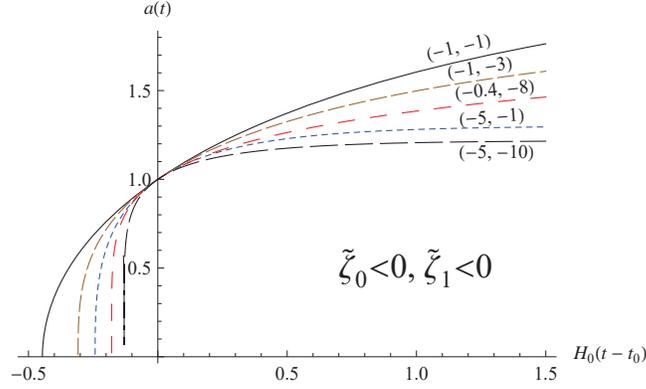


Figura 6.1: Gráficas del factor de escala con respecto a $H_0(t-t_0)$ para diferentes valores de $(\tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}_1)$ cuando $\tilde{\zeta}_0 < 0$ y $\tilde{\zeta}_1 < 0$ (ver sección 6.3.2). En este caso el modelo predice un Big-Bang como inicio del Universo, seguido por una expansión eterna desacelerada. El factor de escala está acotado por un valor máximo $a_{\max} = [(\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 - 3)/\tilde{\zeta}_0]^{2/(3-\tilde{\zeta}_1)}$ cuando $t \rightarrow \infty$. El tiempo t_0 corresponde al *tiempo presente* y H_0 es la constante de Hubble.

$$t_{\text{BB}} = t_0 + \frac{2}{H_0 \tilde{\zeta}_0} \ln \left(1 - \frac{\tilde{\zeta}_0}{3 - \tilde{\zeta}_1} \right). \quad (6.23)$$

Además, definimos la *edad del Universo* como el tiempo transcurrido entre el momento del Big-Bang t_{BB} hasta hoy en día, t_0 . Así que usando la expresión (6.23), la edad del Universo esta dada por

$$\text{Edad} \equiv |t_0 - t_{\text{BB}}| = -\frac{2}{H_0 \tilde{\zeta}_0} \ln \left(1 - \frac{\tilde{\zeta}_0}{3 - \tilde{\zeta}_1} \right) \quad (6.24)$$

6.3.3. Caso (III): $\tilde{\zeta}_0 > 0$, $\tilde{\zeta}_1 < 0$.

Analizamos el factor de escala (6.18) en valores $\tilde{\zeta}_0 > 0$, $\tilde{\zeta}_1 < 0$. Encontramos que hay dos tipos de comportamientos del Universo, dependiendo de la desigualdad:

(III-a) $\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 < 3$,

(III-b) $\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 > 3$.

Las figuras 6.2–6.12 muestran el comportamiento del factor de escala para estos subcasos usando diferentes valores de $(\tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}_1)$.

Para el subcaso **(III-a)** el modelo predice un Universo *expandiéndose eternamente*, este comienza con un Big-Bang seguido por una expansión desacelerada en la cual la des-aceleración va disminuyendo gradualmente hasta un momento en el cual es cero y es seguida por una *transición* suave a un periodo de expansión acelerada que continuará *por siempre* en el futuro, tal que $a \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$ (ver figuras 6.2-6.5).

**CAPÍTULO 6. MODELOS COSMOLÓGICOS CON VISCOSIDAD
VOLUMÉTRICA**
6.3. ANÁLISIS DEL FACTOR DE ESCALA

El tiempo cósmico “ t_{trans} ” en el cual la transición entre el periodo desacelerado al acelerado sucede puede calcularse igualando a cero la expresión (6.20) produciendo

$$t_{\text{trans}} = t_0 + \frac{2}{H_0 \tilde{\zeta}_0} \ln \left(\frac{3 - \tilde{\zeta}_0 - \tilde{\zeta}_1}{2} \right). \quad (6.25)$$

Para obtener la expresión de la transición entre el periodo desacelerado al acelerado para el factor de escala, derivamos la expresión (6.14) con respecto al factor de escala, y usando el hecho de que $H \equiv \dot{a}/a$ obtenemos

$$\frac{d\dot{a}}{da} = H_0 \left[\frac{\tilde{\zeta}_1 - 1}{2} \left(1 - \frac{\tilde{\zeta}_0}{3 - \tilde{\zeta}_1} \right) a^{(\tilde{\zeta}_1 - 3)/2} + \frac{\tilde{\zeta}_0}{3 - \tilde{\zeta}_1} \right]. \quad (6.26)$$

Esta ecuación la igualamos a cero para con ello obtener la expresión para el factor de escala, a_t , para la cual se da la transición,

$$a_t = \left[\frac{2\tilde{\zeta}_0}{(\tilde{\zeta}_1 - 1)(\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 - 3)} \right]^{2/(\tilde{\zeta}_1 - 3)}. \quad (6.27)$$

Es importante señalar que la transición entre el periodo de expansión desacelerada a acelerada viene directamente del modelo, no es necesario asumir algún otro elemento para obtenerla.

La transición toma lugar en el *pasado* del Universo si $1 < \tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 < 3$. En el *futuro* si $\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 < 1$. Y *hoy* si $\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 = 1$.

Las mejores estimaciones para los valores de los coeficientes adimensionales de la viscosidad volumétrica ($\tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}_1$) corresponden justamente a este caso (ver tabla 6.3 y la sección 6.6.1 para detalles). Las figuras 6.4 y 6.5 muestran el comportamiento del factor de escala cuando es evaluada en las mejores estimaciones.

De manera semejante al caso anterior, la edad del Universo para este subcaso está dado por la expresión (6.24). La tabla 6.1 muestra el valor de la edad del Universo cuando la expresión (6.24) es evaluada en las mejores estimaciones. La tabla muestra también el valor del factor de escala a_t y su respectivo valor del redshift z_t cuando se da la transición entre desaceleración a aceleración en la expansión del Universo, para el caso de las mejores estimaciones.

Para el subcaso **(III-b)** el modelo predice una expansión *acelerada eterna* (ver figura 6.12). En este subcaso *no hay un Big-Bang* como origen del Universo, en lugar de eso, se tiene un valor mínimo para el factor de escala cuando el tiempo cósmico tiende a *menos* infinito dado por

$$a_{\text{min}} \equiv \lim_{t \rightarrow -\infty} a(t) = \left(\frac{\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 - 3}{\tilde{\zeta}_0} \right)^{2/(3 - \tilde{\zeta}_1)}, \quad (6.28)$$

donde el subíndice “min” indica “mínimo”. A partir del valor mínimo a_{min} , el factor de escala se va incrementado conforme el tiempo pasa, hasta el infinito cuando $t \rightarrow \infty$. La edad del Universo para este subcaso no está definida [ver ecuación (6.24)].

**CAPÍTULO 6. MODELOS COSMOLÓGICOS CON VISCOSIDAD
VOLUMÉTRICA**
6.3. ANÁLISIS DEL FACTOR DE ESCALA

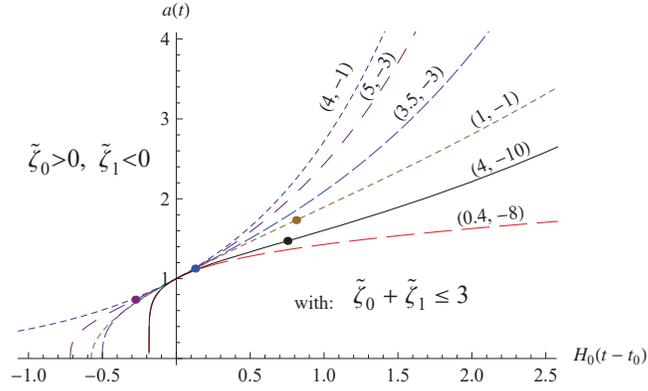


Figura 6.2: Gráficas del factor de escala con respecto a $H_0(t - t_0)$ para diferentes valores de $(\tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}_1)$ cuando $\tilde{\zeta}_0 > 0$ y $\tilde{\zeta}_1 < 0$ pero con la condición $\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 \leq 3$ (ver sección 6.3.3). El modelo predice un Universo con expansión eterna, que comienza con un Big-Bang seguido por una expansión con una desaceleración decreciente hasta el punto que es cero dando lugar a una *transición* a un periodo de expansión *acelerado*, que continuará por siempre, tal que $a \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$. Los puntos indican el tiempo en el que se da la transición entre desaceleración a aceleración para cada uno de los ejemplos mostrados [ver expresión (6.25)]. La línea punteada corresponde a un Universo de *de Sitter* (ver sección 6.3.1). El tiempo t_0 corresponde al *tiempo presente*.

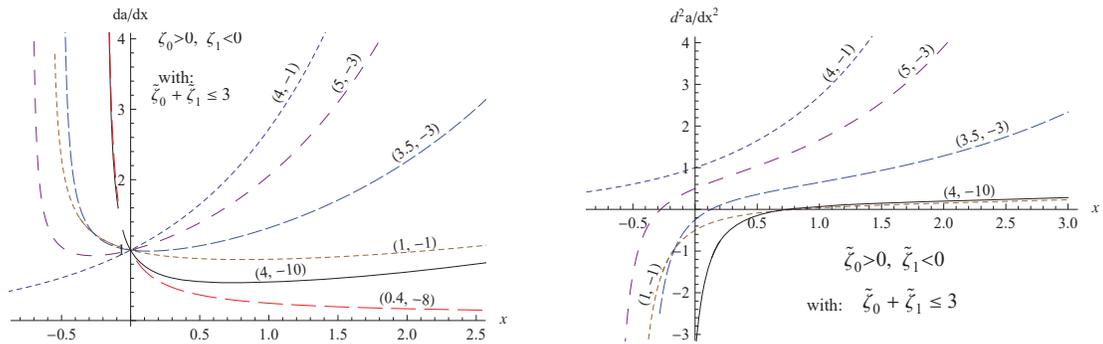


Figura 6.3: Gráficas de la primera y segunda derivadas del factor de escala con respecto a $x \equiv H_0(t - t_0)$ para diferentes valores de $(\tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}_1)$ cuando $\tilde{\zeta}_0 > 0$ y $\tilde{\zeta}_1 < 0$ pero con la condición $\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 \leq 3$ [ver ecuaciones (6.19–6.20) y la sección 6.3.3].

**CAPÍTULO 6. MODELOS COSMOLÓGICOS CON VISCOSIDAD
VOLUMÉTRICA**
6.3. ANÁLISIS DEL FACTOR DE ESCALA

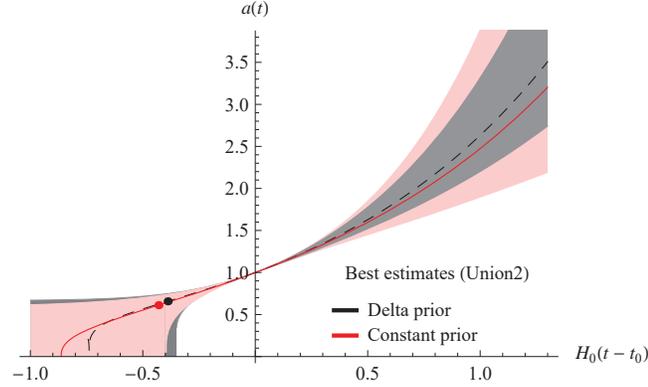


Figura 6.4: Gráficas del factor de escala $a(t)$ con respecto a $H_0(t - t_0)$ [ver expresión (6.18)] cuando es evaluado en los valores de las mejores estimaciones de $\tilde{\zeta}_0$ y $\tilde{\zeta}_1$, calculadas usando la muestra de SNe Ia “Union2” (2010) [18] (ver tabla 6.3). La línea negra punteada corresponde a los valores de ($\tilde{\zeta}_0 = 8.58 \pm 1.2$, $\tilde{\zeta}_1 = -5.96 \pm 1.1$) que vienen de usar una función de distribución de probabilidad (FDP) previa *delta de Dirac* para marginalizar sobre la constante de Hubble H_0 . La línea de color más tenue (roja) continua corresponde a los valores ($\tilde{\zeta}_0 = 4.38 \pm 1.5$, $\tilde{\zeta}_1 = -2.16 \pm 1.4$) que vienen de usar una FDP previa *constante*. Los puntos indican el tiempo cósmico cuando se da la transición entre el periodo temprano de expansión *desacelerado* al tardío de expansión *acelerada* (ver expresión (6.25) y tabla 6.1). Las bandas de tono suave y oscuro (rosa y gris) corresponden a evaluar (6.18) en los errores de las mejores estimaciones de los coeficientes de viscosidad ($\tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}_1$), cuando se usa la FDP previa constante y de delta de Dirac, respectivamente.

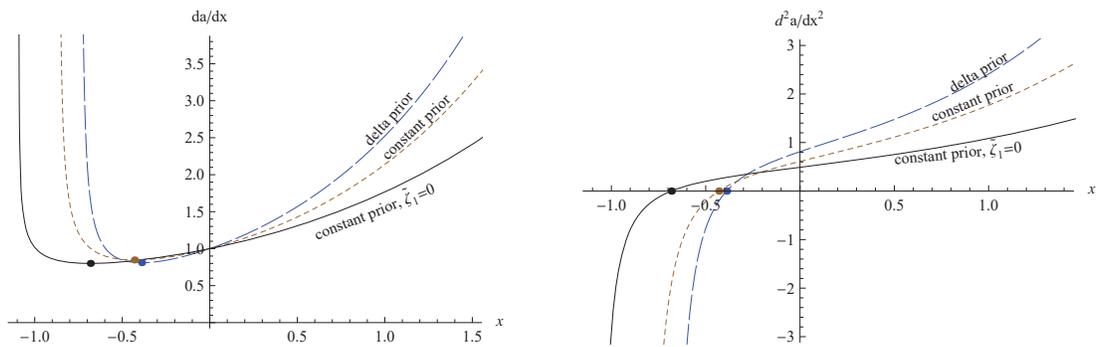


Figura 6.5: Gráficos de la primera y segunda derivadas del factor de escala $a(t)$ con respecto a $x \equiv H_0(t - t_0)$ [ver expresiones (6.19) y (6.20)] cuando son evaluadas en las mejores estimaciones de $\tilde{\zeta}_0$ y $\tilde{\zeta}_1$, calculadas usando la muestra de SNe Ia “Union2” (2010) [18] (ver tabla 6.3). Los puntos indican el tiempo en el cual se da la transición entre una época *desacelerada* a una *acelerada* [ver expresión (6.25) y tabla 6.1].

**CAPÍTULO 6. MODELOS COSMOLÓGICOS CON VISCOSIDAD
VOLUMÉTRICA**
6.3. ANÁLISIS DEL FACTOR DE ESCALA

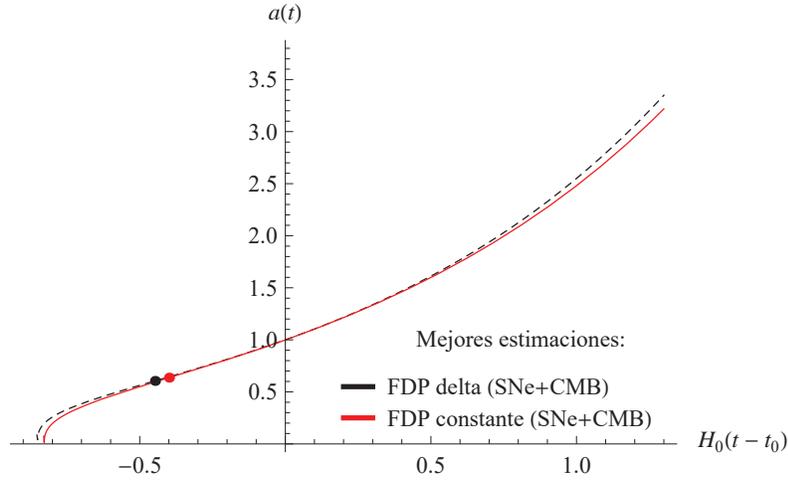


Figura 6.6: Gráfica semejante a la figura 6.4 pero ahora usando las mejores estimaciones de $\tilde{\zeta}_0$ y $\tilde{\zeta}_1$ calculadas a partir de la muestra de SNe Ia “Union” (2008) [37] y el parámetro de corrimiento \mathcal{R} del CMB, e incluyendo la componente de radiación Ω_{r0} (ver tabla 6.3). Los puntos indican el tiempo en el cual se da la transición entre una época desacelerada a una acelerada [ver expresión (6.25) y tabla 6.1].

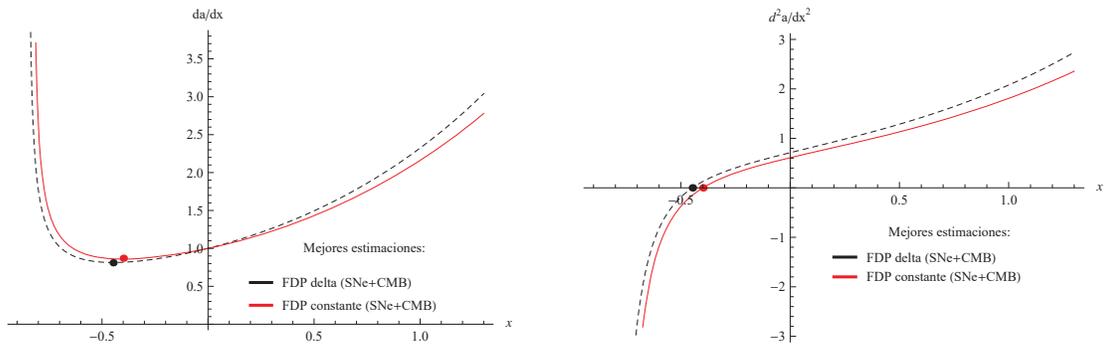


Figura 6.7: Gráficos de la primera y segunda derivadas del factor de escala $a(t)$ con respecto a $x \equiv H_0(t - t_0)$ (ver figura 6.6). Gráfica semejante a la figura 6.5 pero ahora usando la muestra de SNe Ia “Union” (2008) [37] y el parámetro de corrimiento \mathcal{R} del CMB, e incluyendo la componente de radiación Ω_{r0} .

**CAPÍTULO 6. MODELOS COSMOLÓGICOS CON VISCOSIDAD
VOLUMÉTRICA**
6.3. ANÁLISIS DEL FACTOR DE ESCALA

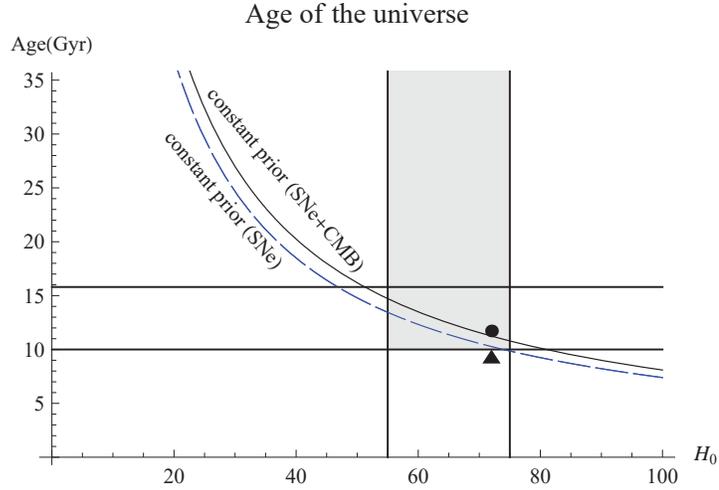


Figura 6.8: Gráfica de la edad del Universo en términos de la constante H_0 [ver expresión (6.24)]. H_0 es dada en unidades de $(\text{km/s})\text{Mpc}^{-1}$ y la edad en unidades de “Gigayears” (Gyr). Las líneas punteada y continua corresponden a la edad del Universo evaluada en las mejores estimaciones de $(\tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}_1)$ calculadas usando sólo SNe, así como conjuntamente SNe + CMB, respectivamente, asumiendo una función de distribución de probabilidad (FDP) previa constante para marginalizar sobre H_0 (ver tabla 6.3) y usando la muestra “Union” SNe Ia (2008) del SCP. El punto y el triángulo indican la edad del Universo evaluada en las mejores estimaciones, usando una FDP previa de delta de Dirac, centrada en $H_0 = 72 (\text{km/s})\text{Mpc}^{-1}$, usando SNe + CMB y solo SNe, respectivamente. El punto y el triángulo no son líneas ya que se asumió el valor particular de $H_0 = 72 (\text{km/s})\text{Mpc}^{-1}$ (la delta de Dirac) cuando las mejores estimaciones de $(\tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}_1)$ fueron calculadas. Las líneas verticales corresponden al intervalo $H_0 = [55, 75] (\text{km/s})\text{Mpc}^{-1}$, ésta es la región permitida de acuerdo a los valores de H_0 consistentes con la distancia modular usada para derivar edades de los cúmulos globulares galácticos del paralaje de *Hipparcos* [80]. Las líneas horizontales corresponden a las cotas en la edad del Universo provenientes de estos cúmulos galácticos (Edad = 12.9 ± 2.9 Gyr [80]). Por tanto, el área sombreada es la región consistente para la edad. Observe que el triángulo queda afuera del área sombreada, indicando un problema del modelo para predecir una edad que sea consistente con las observaciones. La tabla 6.1 resume los valores estimados de la edad del Universo.

**CAPÍTULO 6. MODELOS COSMOLÓGICOS CON VISCOSIDAD
VOLUMÉTRICA**
6.3. ANÁLISIS DEL FACTOR DE ESCALA

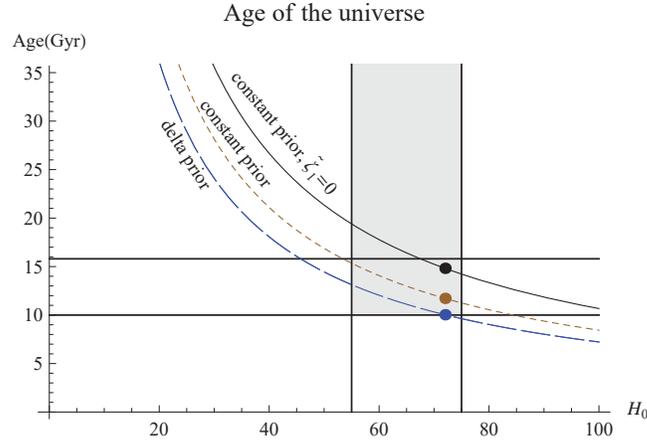


Figura 6.9: Gráfica de la edad del Universo en términos de la constante de Hubble H_0 cuando es evaluada en las mejores estimaciones para $(\tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}_1)$ [ver expresión (6.24) y tabla 6.3] y usando la muestra “Union2” SNe Ia (2010) del SCP. Los puntos indican los valores calculados para la edad del Universo cuando se asume un valor de $H_0 = 72$ (km/s)Mpc $^{-1}$, como lo sugieren las observaciones del Telescopio espacial Hubble (HST) [38]. Las líneas horizontales corresponden a las cotas en la edad del Universo a partir de estos cúmulos: Edad = 12.9 ± 2.9 Gyr [80]. El área sombreada es la región consistente para la edad del Universo. La tabla 6.1 resume los valores estimados para la edad del Universo.

6.3.4. Caso (IV): $\tilde{\zeta}_0 > 0$, $0 < \tilde{\zeta}_1 < 3$.

De acuerdo al comportamiento del factor de escala (6.18) dividimos el caso en dos subcasos:

(IV-a) $\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 < 3$

(IV-b) $\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 > 3$

Las figuras 6.13, 6.14 muestran el comportamiento del factor de escala para estos subcasos usando diferentes valores de $(\tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}_1)$.

Para el subcaso **(IV-a)**, el Universo empieza con un Big-Bang seguido por una expansión eterna. De la ecuación (6.19) vemos que cuando $\tilde{\zeta}_1 > 1$ (con $\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 < 3$) la expansión después del Big-Bang es *siempre acelerada*, con una velocidad de la expansión igual a cero al momento del Big-Bang (ver figura 6.14).

Cuando $\tilde{\zeta}_1 < 1$ (con $\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 < 3$) la expansión después del Big-Bang es *desacelerada* pero esta desaceleración va decreciendo hasta un momento en que es cero, dando lugar a una transición a una expansión *eternamente acelerada*, tal que $a \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$.

En el caso $\tilde{\zeta}_1 = 1$ ($\Rightarrow \tilde{\zeta}_0 < 2$) la expansión es *siempre acelerada*, la rapidez de la expansión justo después del Big-Bang es mayor a cero (ver figura 6.14). Usando la ecuación (6.20) encontramos que la transición entre el periodo de desaceleración al de aceleración tienen lugar en el tiempo cósmico dado por la ecuación (6.25) y la edad del Universo dada por la expresión (6.24).

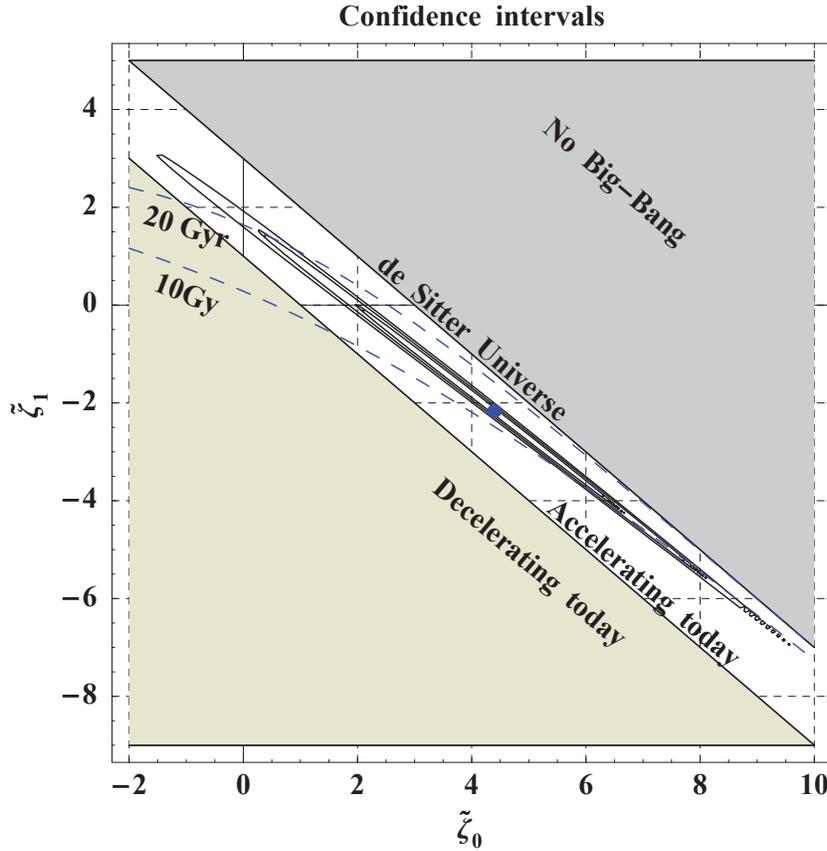


Figura 6.10: Intervalos de confianza para los coeficientes adimensionales $(\tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}_1)$ del modelo dominado por materia viscosa de la forma $\zeta = \zeta_0 + \zeta_1 H$. Se usó el conjunto de supernovas SCP “Union2” (2010) [18] para calcular las mejores estimaciones $\tilde{\zeta}_0 = 4.389 \pm 1.56$ y $\tilde{\zeta}_1 = -2.166 \pm 1.42$ que son indicados con el punto en la figura. Los intervalos de confianza corresponden a 68.3% (1σ), 95.4% (2σ) y 99.73% (3σ) de probabilidad. La región gris (parte superior de la figura) indica los valores de $(\tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}_1)$ para los cuales no hay un Big-Bang en el pasado, es decir, el factor de escala nunca es cero en el pasado del Universo, así como que el escalar de curvatura R no diverge (ver figuras 6.12 y 6.37). La línea que delimita la región gris con la blanca corresponde a los valores $\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 = 3$, que generan un Universo de *de Sitter*. La región blanca (parte central) indica los valores para los cuales el Universo se expande *aceleradamente* hoy en día, y la región verde (parte inferior) corresponde a *desaceleración* hoy en día. Observe que las mejores estimaciones así como los intervalos de confianza caen precisamente en la región *acelerada*, con al menos un 99.73% de probabilidad. Las líneas punteadas muestran un par de valores para la edad del Universo (10 y 20 Gyr). El valor central estimado para la edad del Universo es 11.72 Gyr (ver tabla 6.1). La constante de Hubble H_0 fue marginalizada asumiendo una FDP previa constante.

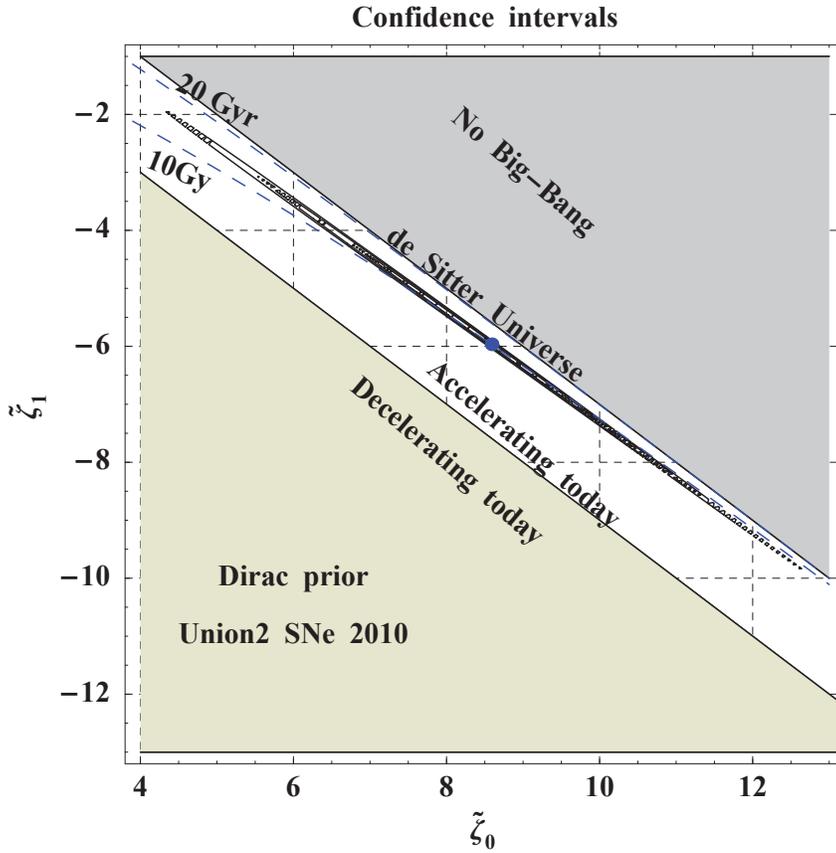


Figura 6.11: Intervalos de confianza para los coeficientes adimensionales $(\tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}_1)$. Esta gráfica es similar a la figura 6.10 y con los mismos comentarios, solo que en este caso se utilizó una FDP previa de *delta de Dirac* para marginalizar sobre H_0 . Las mejores estimaciones son $\tilde{\zeta}_0 = 8.58 \pm 1.2$ y $\tilde{\zeta}_1 = -5.96 \pm 1.15$ (ver tabla 6.3). El valor central de la edad del Universo calculada a partir de las mejores estimaciones es 10.03 Gyr (ver tabla 6.1). Observe como para este caso los intervalos de confianza en su totalidad (99.73 %) se siguen localizando en la *estrecha* región de “expansión *acelerada* hoy” de igual forma que el caso de FDP previa constante, no obstante, los intervalos de confianza están recorridos hacia valores mayores de $\tilde{\zeta}_0$ y menores de $\tilde{\zeta}_1$. Este corrimiento de los intervalos de confianza entre las figuras 6.10 y 6.11 denota los efectos que tiene el asumir métodos de marginalización distintos (FDP previa constante y delta de Dirac, respectivamente), que si bien cualitativamente indican lo mismo, cuantitativamente difieren. En este sentido, los resultados que se obtienen cuando se usa la FDP previa de delta de Dirac son menos robustos que cuando se usa la FDP previa constante, debido a que se está asumiendo un valor *específico* para H_0 , lo cual no toma en cuenta el error en el valor reportado de H_0 y que el valor elegido pueda no sea el correcto (de hecho hay diferencias en el valor central reportado de H_0 según las observaciones que se utilizan para estimarlo).

**CAPÍTULO 6. MODELOS COSMOLÓGICOS CON VISCOSIDAD
VOLUMÉTRICA**
6.3. ANÁLISIS DEL FACTOR DE ESCALA

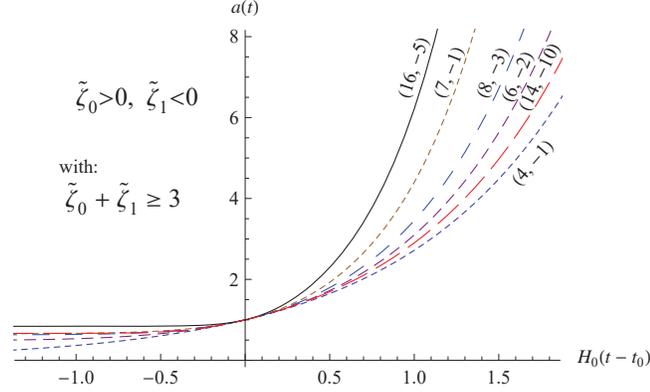


Figura 6.12: Gráfica del factor de escala con respecto a $x \equiv H_0(t - t_0)$ para diferentes valores de $(\tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}_1)$ cuando $\tilde{\zeta}_0 > 0$ y $\tilde{\zeta}_1 < 0$ pero con la condición $\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 \geq 3$ (ver sección 6.3.3). El modelo predice un Universo con una expansión eternamente acelerada. En este subcaso no hay un Big-Bang como origen, más bien el Universo tiene un mínimo en el valor del factor de escala dado por $a_{\min} = [(\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 - 3)/\tilde{\zeta}_0]^{2/(3-\tilde{\zeta}_1)}$ cuando $t \rightarrow -\infty$. A partir de este mínimo, el factor de escala va incrementando su valor a lo largo del tiempo hasta $a \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$.

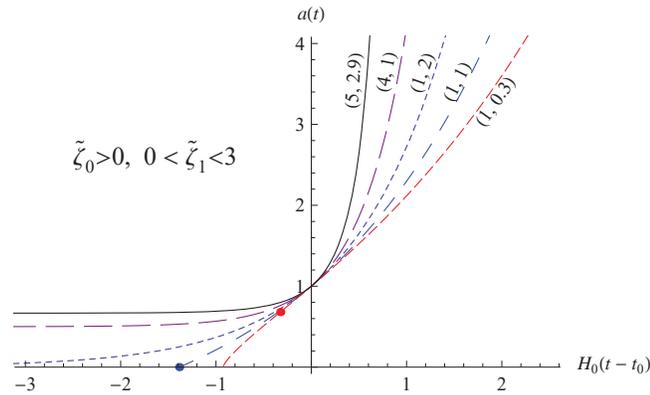


Figura 6.13: Gráfica del factor de escala con respecto a $H_0(t - t_0)$ para diferentes valores de $(\tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}_1)$ cuando $\tilde{\zeta}_0 > 0$ y $0 < \tilde{\zeta}_1 < 3$ (ver sección 6.3.4). Para el subcaso $\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 < 3$ el modelo predice un Universo que inicia con un Big-Bang seguido por una expansión eterna. Cuando $\tilde{\zeta}_1 < 1$ la expansión después del Big-Bang es desacelerada pero decreciendo en magnitud hasta llegar a cero, momento en el cual se da una transición a un periodo de expansión acelerada que continuará por siempre, tal que $a \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$. Los puntos indican el tiempo en el cual se da la transición para los ejemplos mostrados [ver expresión (6.25)]. Para el subcaso $\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 > 3$ el modelo predice una expansión eternamente acelerada.

**CAPÍTULO 6. MODELOS COSMOLÓGICOS CON VISCOSIDAD
VOLUMÉTRICA**
6.3. ANÁLISIS DEL FACTOR DE ESCALA

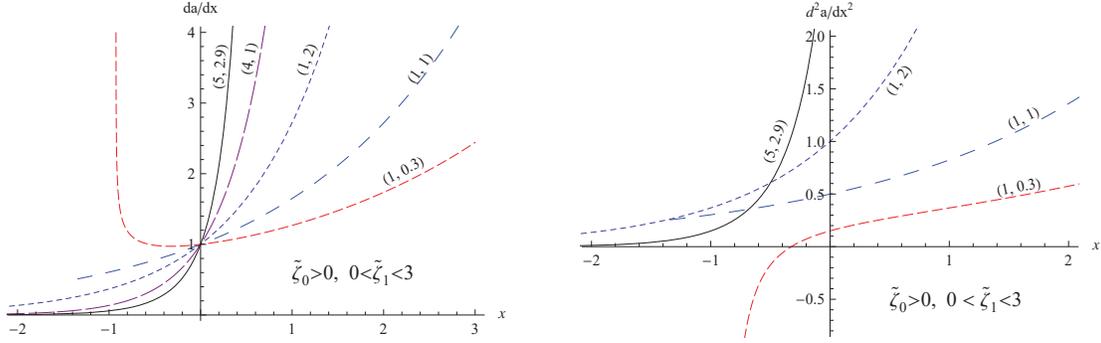


Figura 6.14: Gráfica de la primera y segunda derivadas del factor de escala con respecto a $x \equiv H_0(t - t_0)$ para diferentes valores de $(\tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}_1)$ $\tilde{\zeta}_0 > 0$ y $0 < \tilde{\zeta}_1 < 3$ (ver ecuaciones (6.19), (6.20) y sección 6.3.4).

Para el subcaso **(IV-b)** el modelo predice una expansión eterna del Universo, y esta expansión es siempre acelerada a lo largo de toda la historia del Universo (ver figura 6.13). No hay Big-Bang como origen del Universo, en lugar de ello, se tiene un valor mínimo del factor de escala dado por $a_{\min} = [1 + (\tilde{\zeta}_1 - 3)/\tilde{\zeta}_0]^{2/(3-\tilde{\zeta}_1)}$ cuando $t \rightarrow -\infty$.

Para este valor mínimo “ a_{\min} ”, el factor de escala se va incrementando a lo largo del tiempo hasta que $a \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$. La edad del Universo no está definida para este subcaso [ver ecuación (6.24)].

6.3.5. Caso (V): $\tilde{\zeta}_0 < 0$, $0 < \tilde{\zeta}_1 < 3$.

En este caso el Universo comienza con un Big-Bang. El factor de escala alcanza un valor máximo de $a_{\max} = [1 + (\tilde{\zeta}_1 - 3)/\tilde{\zeta}_0]^{2/(3-\tilde{\zeta}_1)}$ cuando $t \rightarrow \infty$ (ver figuras 6.15, 6.16).

Cuando $\tilde{\zeta}_1 > 1$, la expansión comienza *aceleradamente* desde el momento del Big-Bang. Después de un tiempo hay una transición a un periodo de expansión desacelerada que continuará por siempre. La transición sucede en el tiempo cósmico dado por la ecuación (6.25). Cuando $\tilde{\zeta}_1 \leq 1$, la expansión es *eternamente desacelerada* desde el inicio del Big-Bang. En ambos subcasos la edad del Universo esta dada por la expresión (6.24).

6.3.6. Caso (VI): $\tilde{\zeta}_0 > 0$, $\tilde{\zeta}_1 > 3$.

En este caso el factor de escala puede escribirse como

$$a(t) = \left[\frac{\tilde{\zeta}_0}{\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 - 3 + (3 - \tilde{\zeta}_1) \exp\left(\frac{1}{2}\tilde{\zeta}_0 H_0(t - t_0)\right)} \right]^{2/(\tilde{\zeta}_1 - 3)}. \quad (6.29)$$

El modelo predice un Universo en expansión acelerada. En este caso no hay Big-Bang, en lugar de ello, el Universo tiene un valor mínimo en el factor de escala $a_{\min} = [\tilde{\zeta}_0/(\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 - 3)]^{2/(\tilde{\zeta}_1 - 3)}$ cuando $t \rightarrow -\infty$ (ver figura 6.17). A partir de este valor mínimo a_{\min} el factor de escala se va incrementando de forma acelerada hasta un tiempo *finito* t_{BR} ,

**CAPÍTULO 6. MODELOS COSMOLÓGICOS CON VISCOSIDAD
VOLUMÉTRICA**
6.3. ANÁLISIS DEL FACTOR DE ESCALA

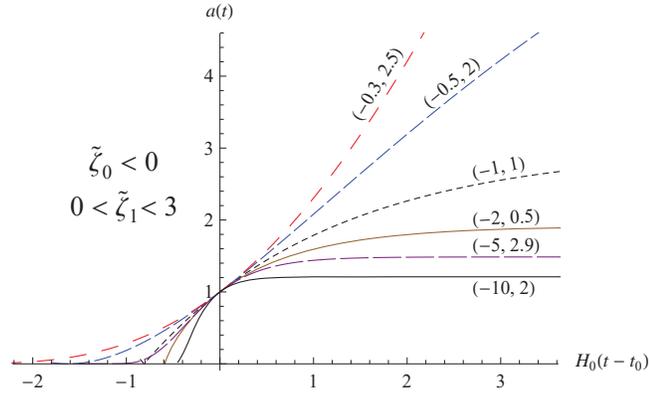


Figura 6.15: Gráfica del factor de escala con respecto a $H_0(t-t_0)$ para diferentes valores de $(\tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}_1)$ cuando $\tilde{\zeta}_0 < 0$ y $0 < \tilde{\zeta}_1 < 3$ (ver sección 6.3.5). En este caso el Universo comienza con un Big-Bang. El factor de escala alcanza un valor máximo $a_{\max} = [1 + (\tilde{\zeta}_1 - 3)/\tilde{\zeta}_0]^{2/(3-\tilde{\zeta}_1)}$ cuando $t \rightarrow \infty$. Cuando $\tilde{\zeta}_1 > 1$ la expansión comienza *aceleradamente* al momento del Big-Bang. Después de un tiempo hay una transición a un periodo de expansión *desacelerada* que continuará por siempre. Cuando $\tilde{\zeta}_1 \leq 1$ la expansión es eternamente *desacelerada* desde el Big-Bang, hasta $t \rightarrow \infty$.

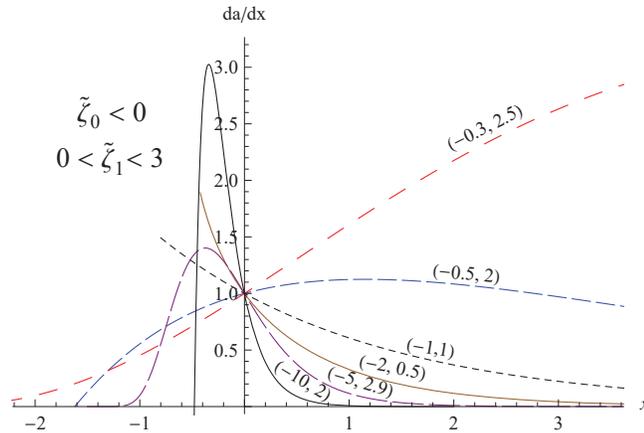


Figura 6.16: Gráfica de la primera derivada del factor de escala con respecto a $x \equiv H_0(t-t_0)$ para diferentes valores de $(\tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}_1)$ cuando $\tilde{\zeta}_0 < 0$ y $0 < \tilde{\zeta}_1 < 3$ [ver ecuación (6.19) y sección 6.3.5].

**CAPÍTULO 6. MODELOS COSMOLÓGICOS CON VISCOSIDAD
VOLUMÉTRICA**
6.3. ANÁLISIS DEL FACTOR DE ESCALA

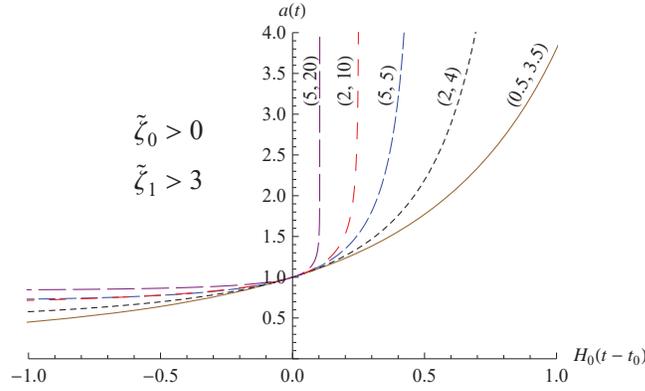


Figura 6.17: Gráficas del factor de escala con respecto a $H_0(t - t_0)$ para diferentes valores de $(\tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}_1)$ cuando $\tilde{\zeta}_0 > 0$ y $\tilde{\zeta}_1 > 3$ (ver sección 6.3.6). El modelo predice una expansión acelerada del Universo. No hay Big-Bang, más bien, el Universo tiene un valor mínimo en el factor de escala $a_{\min} = [\tilde{\zeta}_0 / (\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 - 3)]^{2/(\tilde{\zeta}_1 - 3)}$ cuando $t \rightarrow -\infty$. A partir de este valor mínimo, a_{\min} , el factor de escala se va incrementando de forma acelerada hasta un tiempo t_{BR} que es cuando sufre un “*Big-Rip*”.

que es cuando el Universo sufre un “*Big-Rip*”, es decir, el factor de escala y la curvatura escalar alcanzan un valor infinito en un tiempo finito en el futuro. El subíndice “BR” indica “Big-Rip”. El tiempo cósmico cuando el Big-Rip sucede es

$$t_{\text{BR}} = t_0 + \frac{2}{H_0 \tilde{\zeta}_0} \ln \left(\frac{\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 - 3}{\tilde{\zeta}_1 - 3} \right). \quad (6.30)$$

En este caso la edad del Universo no está definida.

6.3.7. Caso (VII): $\tilde{\zeta}_0 < 0$, $\tilde{\zeta}_1 > 3$.

A partir de la ecuación (6.29), con $\tilde{\zeta}_0 < 0$, vemos que el factor de escala es cero en el pasado pero solo hasta un tiempo cuando $t \rightarrow -\infty$. Para tiempos tempranos el Universo tiene una expansión acelerada (ver figuras 6.18 y 6.19). Cuando $\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 > 3$, con $\tilde{\zeta}_1 > 3$, el Universo se expande hasta un momento en que se da un Big-Rip al tiempo cósmico dado por la ecuación (6.30).

Cuando $\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 < 3$, el periodo de expansión acelerada, al cabo de cierto tiempo, sufre una transición a uno de expansión desacelerada. Esta transición sucede al tiempo cósmico dado por la ecuación (6.25). El factor de escala alcanza su valor máximo $a_{\max} = [\tilde{\zeta}_0 / (\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 - 3)]^{2/(\tilde{\zeta}_1 - 3)}$ cuando $t \rightarrow \infty$ (ver figuras 6.18 y 6.19).

6.3.8. Caso (VIII): $\tilde{\zeta}_0 > 0$, $\tilde{\zeta}_1 = 3$.

Para estudiar el caso $\tilde{\zeta}_1 = 3$ tenemos que empezar desde la ecuación diferencial ordinaria (EDO) (6.11) donde fijamos $\tilde{\zeta}_1 = 3$, para tener

**CAPÍTULO 6. MODELOS COSMOLÓGICOS CON VISCOSIDAD
VOLUMÉTRICA**
6.3. ANÁLISIS DEL FACTOR DE ESCALA

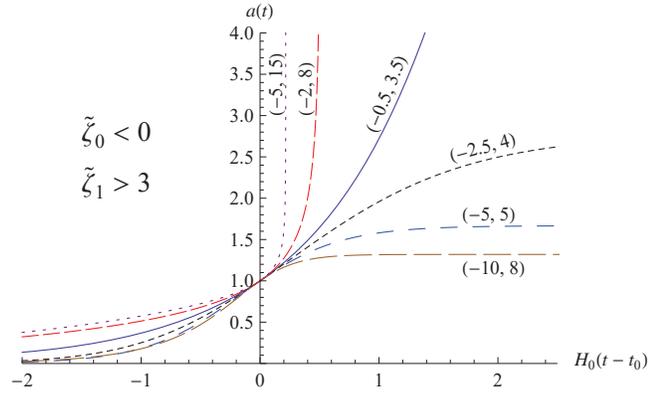


Figura 6.18: Gráficas del factor de escala con respecto a $H_0(t-t_0)$ para diferentes valores de $(\tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}_1)$ cuando $\tilde{\zeta}_0 < 0$ y $\tilde{\zeta}_1 > 3$ (ver sección 6.3.7). El factor de escala es cero cuando $t \rightarrow -\infty$. Para tiempos tempranos el Universo tiene una expansión acelerada. Cuando $\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 > 3$ (con $\tilde{\zeta}_1 > 3$) el Universo se expande hasta el tiempo en que hay un Big-Rip. Cuando $\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 < 3$ el periodo de expansión acelerada tiene una transición a un periodo desacelerado que continuará por siempre. En este subcaso el factor de escala alcanza un valor máximo $a_{\max} = [\tilde{\zeta}_0/(\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 - 3)]^{2/(\tilde{\zeta}_1 - 3)}$ cuando $t \rightarrow \infty$.

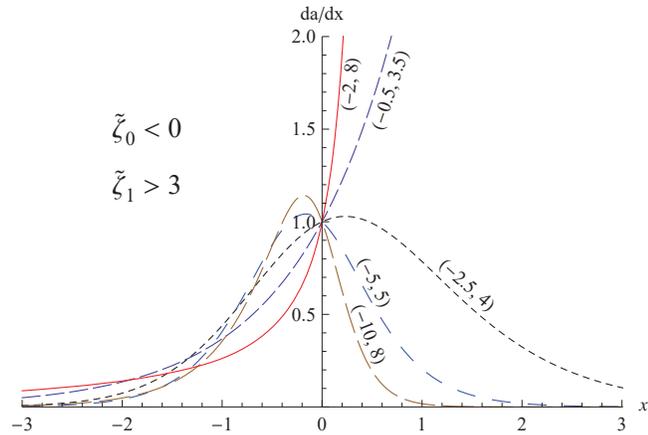


Figura 6.19: Gráficas de la primera derivada del factor de escala con respecto a $x \equiv H_0(t-t_0)$ para diferentes valores de $(\tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}_1)$ cuando $\tilde{\zeta}_0 < 0$ y $\tilde{\zeta}_1 > 3$ [ver ecuación (6.19) y sección 6.3.7].

**CAPÍTULO 6. MODELOS COSMOLÓGICOS CON VISCOSIDAD
VOLUMÉTRICA**

6.3. ANÁLISIS DEL FACTOR DE ESCALA

$$(1+z) \frac{d\hat{\Omega}_m}{dz} + \tilde{\zeta}_0 \hat{\Omega}_m^{1/2} = 0. \quad (6.31)$$

cuya solución es

$$\hat{\Omega}_m(a, \tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}_1 = 3) = \left(1 + \frac{1}{2} \tilde{\zeta}_0 \ln(a)\right)^2. \quad (6.32)$$

Ahora, usando la primera ecuación de Friedman en la forma $H(a) = H_0 \sqrt{\hat{\Omega}_m(a, \tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}_1 = 3)}$, el parámetro de Hubble para el caso $\tilde{\zeta}_1 = 3$ puede ser escrito como

$$H(a, \tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}_1 = 3) = H_0 \left[1 + \frac{1}{2} \tilde{\zeta}_0 \ln a\right], \quad (6.33)$$

o en términos del redshift z como

$$H(z, \tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}_1 = 3) = H_0 \left[1 - \frac{1}{2} \tilde{\zeta}_0 \ln(1+z)\right]. \quad (6.34)$$

De la ecuación (6.33) podemos escribir el parámetro de Hubble como $H(a) \equiv \dot{a}/a$ para obtener

$$\frac{1}{a} \frac{da}{dt} = H_0 \left[1 + \frac{1}{2} \tilde{\zeta}_0 \ln a\right]. \quad (6.35)$$

Reescribiendo esta expresión en forma integral

$$\int_1^a \frac{da'}{a' \left(1 + \frac{1}{2} \tilde{\zeta}_0 \ln a'\right)} = \int_{t_0}^t H_0 dt', \quad (6.36)$$

se visualiza la solución

$$\frac{2}{\tilde{\zeta}_0} \ln \left(1 + \frac{1}{2} \tilde{\zeta}_0 \ln a\right) = H_0(t - t_0), \quad (6.37)$$

y resolviendo para $a(t)$ obtenemos

$$a(t) = \exp \left[\frac{2}{\tilde{\zeta}_0} \left\{ \exp \left[\frac{\tilde{\zeta}_0}{2} H_0(t - t_0) \right] - 1 \right\} \right]; \quad \text{donde } \tilde{\zeta}_0 \neq 0. \quad (6.38)$$

Las figuras 6.20 y 6.22 muestran algunas gráficas del factor escala (6.38) para diferentes valores de $\tilde{\zeta}_0$.

Calculamos también la primera y segunda derivadas de $a(t)$, a partir de la función (6.38), con respecto a $x \equiv H_0(t - t_0)$:

$$\frac{da}{dx} = \exp \left\{ \frac{2}{\tilde{\zeta}_0} \left[\exp \left(\frac{\tilde{\zeta}_0}{2} x \right) - 1 \right] + \frac{\tilde{\zeta}_0}{2} x \right\}, \quad (6.39)$$

$$\frac{d^2a}{dx^2} = \exp \left\{ \frac{2}{\tilde{\zeta}_0} \left[\exp \left(\frac{\tilde{\zeta}_0}{2} x \right) - 1 \right] + \frac{\tilde{\zeta}_0}{2} x \right\} \times \left[\exp \left(\frac{\tilde{\zeta}_0}{2} x \right) + \frac{\tilde{\zeta}_0}{2} \right]. \quad (6.40)$$

**CAPÍTULO 6. MODELOS COSMOLÓGICOS CON VISCOSIDAD
VOLUMÉTRICA**

6.3. ANÁLISIS DEL FACTOR DE ESCALA

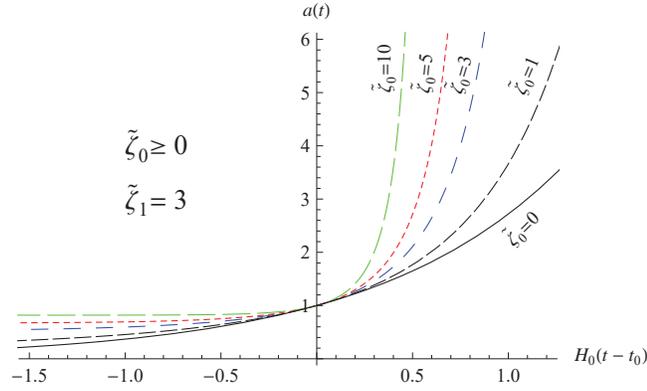


Figura 6.20: Gráficas del factor de escala para el caso $\tilde{\zeta}_0 \geq 0$ y $\tilde{\zeta}_1 = 3$ (ver sección 6.3.8). El modelo predice una expansión *eternamente acelerada*. El Universo tiene un valor mínimo del factor de escala de $a_{\min} = \exp(-2/\tilde{\zeta}_0)$ cuando $t \rightarrow -\infty$, que va incrementando su valor a lo largo del tiempo hasta $a \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$.

De la expresión (6.38), cuando $\tilde{\zeta}_0 > 0$, el modelo predice una expansión eternamente acelerada a lo largo de toda la evolución del Universo (ver figuras 6.20-6.21).

El factor de escala tiene un valor mínimo de $a_{\min} = \exp(-2/\tilde{\zeta}_0)$ cuando $t \rightarrow -\infty$, que se va incrementado a lo largo del tiempo hasta que $a \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$. La edad del Universo no esta definida en este caso.

6.3.9. Caso (IX): $\tilde{\zeta}_0 < 0$, $\tilde{\zeta}_1 = 3$.

El modelo predice una expansión acelerada del Universo en tiempos tempranos, seguida por una transición a un periodo de expansión desacelerada tardía que continuará desaceleradamente por siempre. El factor de escala es cero cuando $t \rightarrow -\infty$ y se incrementa a lo largo del tiempo hasta que alcanza un valor máximo de $a_{\max} = \exp(-2/\tilde{\zeta}_0)$ cuando $t \rightarrow \infty$ (ver figuras 6.22, 6.23). El tiempo cósmico cuando la transición sucede esta dado por

$$t_{\text{trans}} = t_0 + \frac{2}{H_0 \tilde{\zeta}_0} \ln \left(-\frac{\tilde{\zeta}_0}{2} \right). \quad (6.41)$$

La edad del Universo no está definida.

6.3.10. Caso (X): $\tilde{\zeta}_0 = 0$, $\tilde{\zeta}_1 = 3$.

Fijamos $\tilde{\zeta}_0 = 0$ en la ecuación (6.36), produciendo

$$\int_1^a \frac{da'}{a'} = \int_{t_0}^t H_0 dt' \Rightarrow \ln a = H_0(t - t_0), \quad (6.42)$$

resolviendo para $a(t)$ se tiene

$$a(t) = e^{H_0(t-t_0)}, \quad (6.43)$$

**CAPÍTULO 6. MODELOS COSMOLÓGICOS CON VISCOSIDAD
VOLUMÉTRICA**
6.3. ANÁLISIS DEL FACTOR DE ESCALA

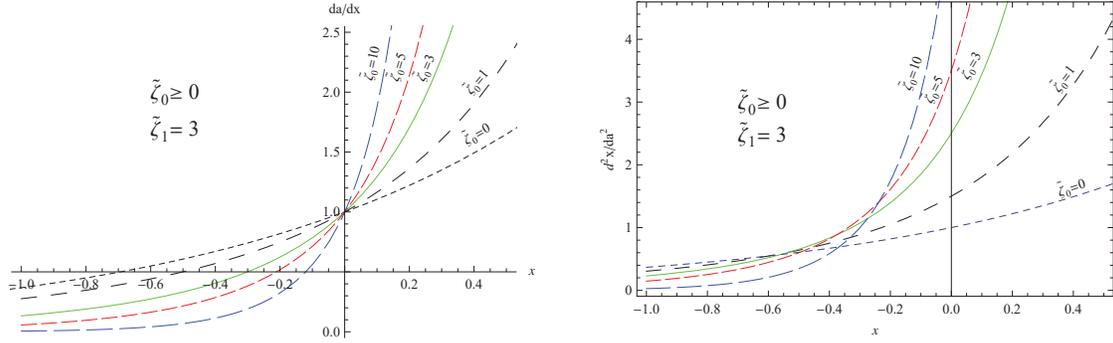


Figura 6.21: Gráficas de la primera y segunda derivada del factor de escala con respecto a $x \equiv H_0(t - t_0)$, para diferentes valores de $\tilde{\zeta}_0 \geq 0$, para el caso $\tilde{\zeta}_1 = 3$ (ver ecuaciones (6.39), (6.40) y sección 6.3.8).

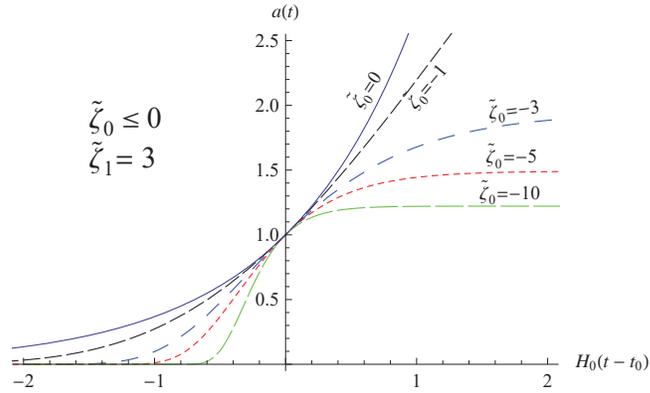


Figura 6.22: Gráficas del factor de escala con respecto a $H_0(t - t_0)$ para diferentes valores de $\tilde{\zeta}_0 \leq 0$, para el caso $\tilde{\zeta}_1 = 3$ (ver sección 6.3.9). El modelo predice una expansión acelerada en tiempos tempranos, seguida por una transición a un periodo de expansión desacelerada que continuará por siempre. El factor de escala es cero cuando $t \rightarrow -\infty$ y va incrementándose a lo largo del tiempo hasta alcanzar su valor máximo de $a_{\max} = \exp(-2/\tilde{\zeta}_0)$ cuando $t \rightarrow \infty$.

**CAPÍTULO 6. MODELOS COSMOLÓGICOS CON VISCOSIDAD
VOLUMÉTRICA**
6.3. ANÁLISIS DEL FACTOR DE ESCALA

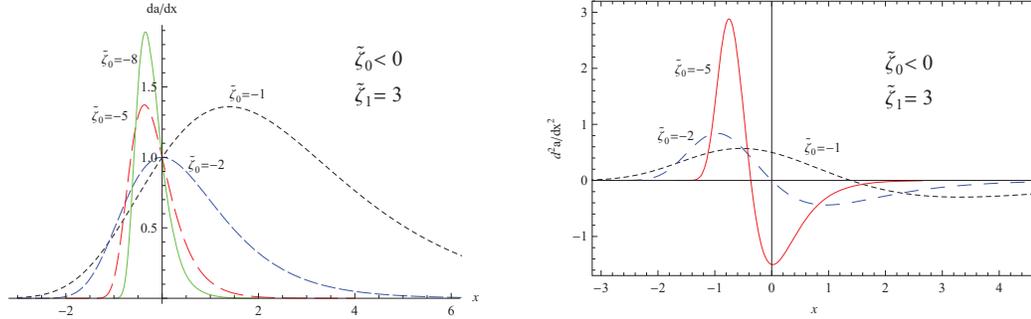


Figura 6.23: Gráficas de la primera y segunda derivadas del factor de escala con respecto a $x \equiv H_0(t - t_0)$ para diferentes valores de $\tilde{\zeta}_0 \leq 0$, para el caso $\tilde{\zeta}_1 = 3$ (ver ecuaciones (6.39), (6.40) y sección 6.3.9).

que corresponde a un Universo de *de Sitter*.

6.3.11. Caso (XI): $\tilde{\zeta}_0 = 0$, $\tilde{\zeta}_1 \neq 0$.

Para este caso fijamos $\tilde{\zeta}_0 = 0$ en la expresión para el parámetro de Hubble (6.14) para obtener $H(a, \tilde{\zeta}_0 = 0, \tilde{\zeta}_1) = H_0 a^{(\tilde{\zeta}_1 - 3)/2}$. De esta forma, siguiendo el mismo procedimiento que en la sección 6.3, la expresión del factor de escala es

$$a(t) = \left[1 + \frac{3 - \tilde{\zeta}_1}{2} H_0 (t - t_0) \right]^{2/(3 - \tilde{\zeta}_1)} ; \quad \text{para } \tilde{\zeta}_1 \neq 3. \quad (6.44)$$

En este caso el modelo predice un Universo en expansión. Cuando $\tilde{\zeta}_1 < 3$ entonces el Universo comienza con un Big-Bang seguido por una expansión eterna, tal que $a \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$. Además, cuando $\tilde{\zeta}_1 < 1$ la expansión es eternamente desacelerada. Cuando $1 < \tilde{\zeta}_1 < 3$ la expansión es eternamente acelerada. Y cuando $\tilde{\zeta}_1 = 1$, la velocidad de la expansión es constante por siempre (ver figuras 6.24 y 6.25). La edad del Universo está dada por

$$\text{Edad} = \frac{2}{H_0(3 - \tilde{\zeta}_1)}. \quad (6.45)$$

Para el subcaso $\tilde{\zeta}_1 > 3$, la expansión es siempre acelerada. El factor de escala es cero cuando $t \rightarrow -\infty$ y va creciendo hasta un valor infinito en un tiempo t_{BR} , que es cuando sucede un Big-Rip en el futuro. El Big-Rip sucede en el tiempo cósmico

$$t_{\text{BR}} = t_0 + \frac{2}{H_0(\tilde{\zeta}_1 - 3)}. \quad (6.46)$$

En este subcaso la edad del Universo no está definida.

**CAPÍTULO 6. MODELOS COSMOLÓGICOS CON VISCOSIDAD
VOLUMÉTRICA**
6.3. ANÁLISIS DEL FACTOR DE ESCALA

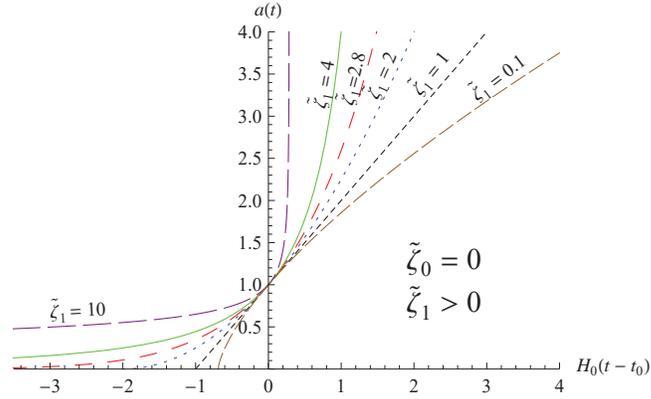


Figura 6.24: Gráficas del factor de escala con respecto a $H_0(t-t_0)$ para diferentes valores de $\tilde{\zeta}_1$, para el caso $\tilde{\zeta}_0 = 0$ (ver sección 6.3.11). El modelo predice un Universo expandiéndose. Cuando $\tilde{\zeta}_1 < 3$ el Universo comienza con un Big-Bang seguido por una expansión eterna, tal que $a \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$. Cuando $\tilde{\zeta}_1 < 1$ la expansión es eternamente desacelerada. Cuando $1 < \tilde{\zeta}_1 < 3$ la expansión es eternamente acelerada. Y cuando $\tilde{\zeta}_1 = 1$ la velocidad de la expansión es constante por siempre. Para el subcaso $\tilde{\zeta}_1 > 3$, la expansión es siempre desacelerada. El factor de escala es cero cuando $t \rightarrow -\infty$ y se va incrementado hasta un tiempo t_{BR} , en el cual hay un Big-Rip.

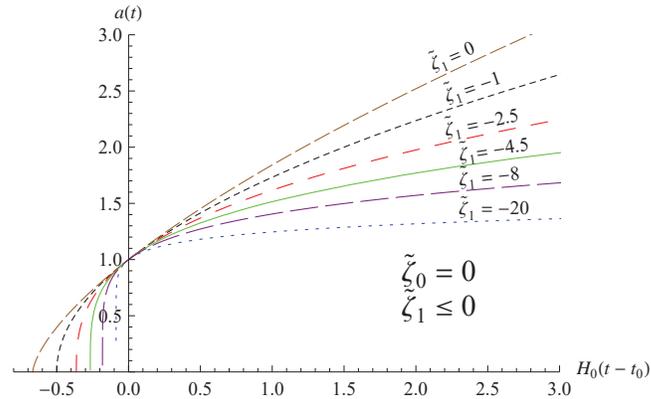


Figura 6.25: Misma explicación que de la figura 6.24, que ahora muestra el caso $\tilde{\zeta}_1 < 0$.

**CAPÍTULO 6. MODELOS COSMOLÓGICOS CON VISCOSIDAD
VOLUMÉTRICA**

6.3. ANÁLISIS DEL FACTOR DE ESCALA

6.3.12. Caso (XII): $\tilde{\zeta}_0 \neq 0$, $\tilde{\zeta}_1 = 0$.

Este es un caso de particular interés ya que resulta ser muy buen candidato para explicar la aceleración presente del Universo, y que a diferencia del caso ($\tilde{\zeta}_0 > 0$, $\tilde{\zeta}_1 < 0$) que es donde se localizan los valores de las mejores estimaciones, este caso ($\tilde{\zeta}_0 \neq 0$, $\tilde{\zeta}_1 = 0$) no viola la segunda ley de la termodinámica, como se demostrará en la sección 6.6.2.

Primero, fijamos $\tilde{\zeta}_1 = 0$ en la expresión del parámetro de Hubble (6.13) obteniendo,

$$H(z) = \frac{H_0}{3} \left[\tilde{\zeta}_0 + (3 - \tilde{\zeta}_0)(1+z)^{3/2} \right], \quad (6.47)$$

y para tener la expresión del factor de escala, fijamos de nuevo $\tilde{\zeta}_1 = 0$ en la ecuación (6.18) para llegar a

$$a(t) = \left[\frac{3 \exp\left(\frac{1}{2}\tilde{\zeta}_0 H_0(t-t_0)\right) - 3 + \tilde{\zeta}_0}{\tilde{\zeta}_0} \right]^{2/3}, \quad \tilde{\zeta}_0 \neq 0. \quad (6.48)$$

Para estudiar mejor la expresión (6.48) dividimos el análisis en los siguientes tres subcasos:

(XII-a) $0 < \tilde{\zeta}_0 < 3$

(XII-b) $\tilde{\zeta}_0 > 3$

(XII-c) $\tilde{\zeta}_0 < 0$

Las figuras 6.27–6.35 muestran el comportamiento del factor de escala para estos subcasos. El subcaso $\tilde{\zeta}_0 = 3$ (con $\tilde{\zeta}_1 = 0$) corresponde al explicado ya en la sección 6.3.1. Este es el de un Universo de de Sitter en el futuro lejano.

Para el subcaso **(XII-a)** $0 < \tilde{\zeta}_0 < 3$, cuando $t \rightarrow \infty$ entonces el factor de escala tiende al de un Universo del tipo de de Sitter,

$$a(t) \propto e^{(\tilde{\zeta}_0/3)H_0(t-t_0)}. \quad (6.49)$$

El modelo predice un Universo que comienza con un Big-Bang, seguido por una expansión eterna. La expansión comienza *desaceleradamente* al momento del Big-Bang, que va disminuyendo gradualmente hasta el momento en que es cero, dando lugar a una transición a un periodo de expansión *acelerada* que continuará por siempre (ver figuras 6.27, 6.28 y 6.29). El tiempo cósmico en el cual el Big-Bang tiene lugar esta dado por

$$t_{\text{BB}} = t_0 + \frac{2}{\tilde{\zeta}_0 H_0} \ln \left(1 - \frac{\tilde{\zeta}_0}{3} \right). \quad (6.50)$$

La transición entre el periodo inicial de expansión desacelerada al de acelerada se obtiene directamente de fijar $\tilde{\zeta}_1 = 0$ en la expresión (6.25) para llegar a

$$t_{\text{trans}} = t_0 + \frac{2}{H_0 \tilde{\zeta}_0} \ln \left(\frac{3 - \tilde{\zeta}_0}{2} \right), \quad (6.51)$$

**CAPÍTULO 6. MODELOS COSMOLÓGICOS CON VISCOSIDAD
VOLUMÉTRICA**
6.3. ANÁLISIS DEL FACTOR DE ESCALA

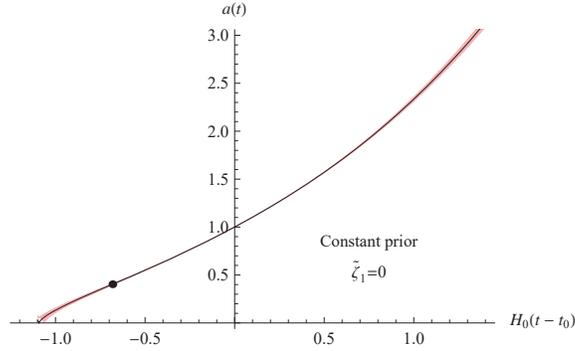


Figura 6.26: Gráfica del factor de escala $a(t)$ con respecto a $H_0(t-t_0)$ [ver expresión (6.18)] evaluada en la mejor estimación $\tilde{\zeta}_0 = 1.98 \pm 0.06$ que se calculó a partir de la muestra “Union2” (2010) del SCP (ver tabla 6.3). Esta gráfica corresponde al caso cuando $\tilde{\zeta}_1$ se fija a cero y se calcula la mejor estimación para $\tilde{\zeta}_0$ solamente, usando una FDP previa constante para marginalizar sobre H_0 , que se indica en la gráfica con la leyenda “Prior constante”. La gráfica muestra cómo el factor de escala evaluado en la mejor estimación de $\tilde{\zeta}_0$ (con $\tilde{\zeta}_1 = 0$), predice un periodo temprano de expansión *desacelerada* justo después del Big-Bang, seguido por un periodo *acelerado* en tiempos recientes que continuará por siempre. La transición entre desaceleración-aceleración sucede cuando el factor de escala tiene el valor de $a_t = 0.4$ [ver tabla 6.1 y la expresión (6.27)], que se indica con el punto negro sobre la gráfica. La banda tenue (rosa) que rodea la gráfica corresponde a evaluar a la expresión (6.18) en el error estadístico de la estimación de $\tilde{\zeta}_0$.

y en términos del factor de escala, de la ecuación (6.27) se tiene

$$a_t = \left(\frac{3 - \tilde{\zeta}_0}{2\tilde{\zeta}_0} \right)^{2/3}. \quad (6.52)$$

De la expresión (6.52) podemos ver que para valores en el intervalo $0 < \tilde{\zeta}_0 < 1$, la transición entre el periodo de expansión desacelerada a la acelerada sucede en el futuro ($a_t > 1$). Cuando $\tilde{\zeta}_0 \rightarrow 0$, el valor de a_t tiende a infinito en el futuro. Cuando $\tilde{\zeta}_0 = 1$, la transición sucede hoy en día ($a_t = 1$), cuando $1 < \tilde{\zeta}_0 < 3$ sucede en el pasado, y cuando $\tilde{\zeta}_0$ es cercano a 3 entonces la transición sucede cerca del momento del Big-Bang (ver figuras 6.28–6.30).

En este subcaso el escalar de curvatura R diverge cuando $a \rightarrow 0$. Conforme el valor del factor de escala va aumentando a lo largo del tiempo, el valor del escalar de curvatura va decreciendo al punto que llega a un valor mínimo $R = \frac{4}{3}H_0^2\tilde{\zeta}_0$ cuando $a \rightarrow \infty$ (ver sección 6.4.1 y figura 6.45 para detalles), lo que corresponde a un Universo de de Sitter [consistente con la expresión (6.49)].

De la misma forma, el valor de la densidad de materia diverge cuando $a \rightarrow 0$, y va decreciendo conforme el factor de escala aumenta, hasta llegar a un valor mínimo $\rho_m = (H_0^2/24\pi G)\tilde{\zeta}_0^2$ cuando $a \rightarrow \infty$ (ver sección 6.5).

El valor de la mejor estimación para $\tilde{\zeta}_0 = 1.983 \pm 0.066$ (usando “Union” 2008, SCP, ver tabla 6.4) y su distribución de probabilidad caen justamente en el intervalo $1 < \tilde{\zeta}_0 < 3$

**CAPÍTULO 6. MODELOS COSMOLÓGICOS CON VISCOSIDAD
VOLUMÉTRICA**
6.3. ANÁLISIS DEL FACTOR DE ESCALA

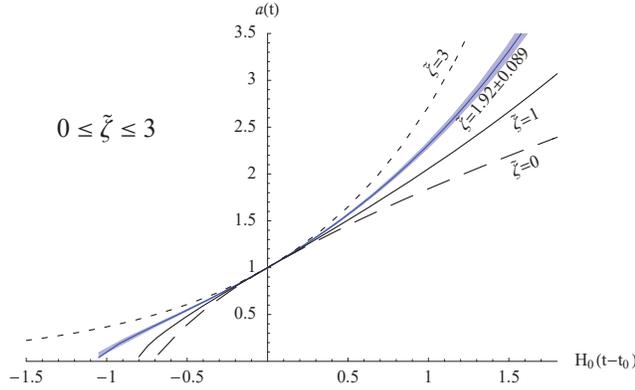


Figura 6.27: Gráficas de $a(t, \tilde{\zeta})$ para diferentes valores de $\tilde{\zeta}_0$ en el intervalo $0 \leq \tilde{\zeta}_0 \leq 3$ [ver expresión 6.48]. La línea de punteo largo corresponde a $\tilde{\zeta}_0 = 0$ (un Universo plano dominado por materia sin viscosidad). La línea de punteo corto corresponde a $\tilde{\zeta}_0 = 3$ (el Universo de de Sitter). La línea rodeada por la banda (azul) corresponde al modelo con $\tilde{\zeta}_0 = 1.922 \pm 0.089$. Esta es la mejor estimación de $\tilde{\zeta}_0$ calculada usando la muestra de SNe Ia “Union” (2008) de SCP. La banda corresponde al error en la estimación de $\tilde{\zeta}_0$ a un nivel de confianza del 68.3%.

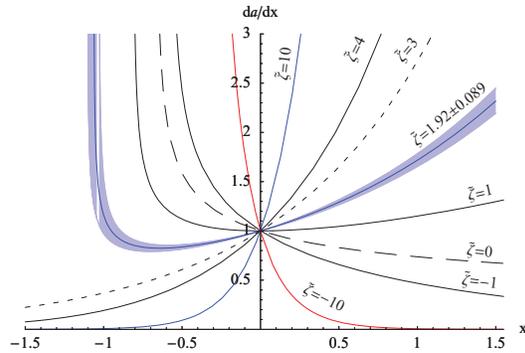


Figura 6.28: Gráficas de la primera derivada del factor de escala con respecto a $x \equiv H_0(t-t_0)$ para diferentes valores de $\tilde{\zeta}_0$ (ver figura 6.27). La línea de punteo largo corresponde a $\tilde{\zeta}_0 = 0$ (Universo dominado por materia, sin viscosidad), y la de punteo corto a $\tilde{\zeta}_0 = 3$ (Universo de de Sitter). La línea con la banda (azul) corresponde a un modelo con $\tilde{\zeta}_0 = 1.922 \pm 0.089$ (“Union” 2008, SCP). La banda corresponde al error en la estimación de $\tilde{\zeta}_0$ a un nivel de confianza del 68.3%.

**CAPÍTULO 6. MODELOS COSMOLÓGICOS CON VISCOSIDAD
VOLUMÉTRICA**
6.3. ANÁLISIS DEL FACTOR DE ESCALA

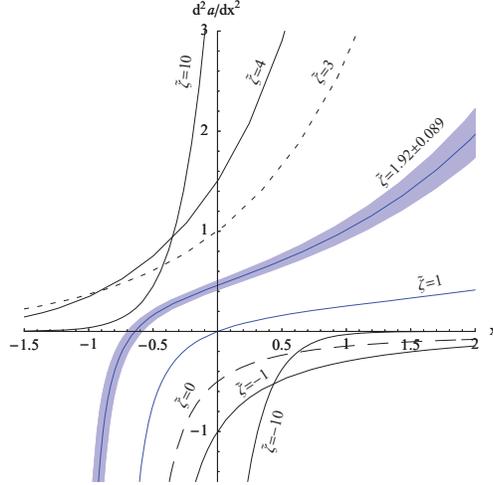


Figura 6.29: Gráficas de la segunda derivada del factor de escala con respecto a $x \equiv H_0(t - t_0)$ para diferentes valores de $\tilde{\zeta}_0$ (ver figura 6.27). La línea de punteo largo corresponde a $\tilde{\zeta}_0 = 0$ (Universo dominado por materia, sin viscosidad), y la de punteo corto a $\tilde{\zeta}_0 = 3$ (Universo de de Sitter). La línea con la banda (azul) corresponde a un modelo con $\tilde{\zeta}_0 = 1.922 \pm 0.089$ (“Union” 2008, SCP). La banda corresponde al error en la estimación de $\tilde{\zeta}_0$ a un nivel de confianza del 68.3%. Encontramos que para $\tilde{\zeta}_0 \leq 0$ el modelo predice un Universo desacelerado ($d^2a/dx^2 < 0$) por siempre. Para $\tilde{\zeta}_0 \geq 3$, predice un Universo acelerado ($d^2a/dx^2 > 0$) por siempre. Y en el intervalo $0 < \tilde{\zeta}_0 < 3$ el modelo predice dos periodos: uno *desacelerado* en tiempos tempranos del Universo y otro periodo *acelerado* en tiempos recientes.

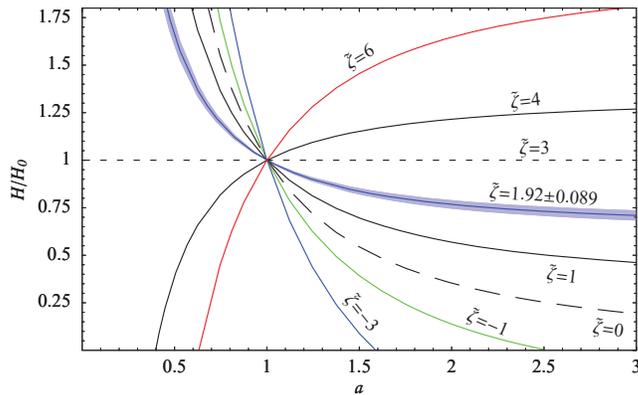


Figura 6.30: Gráficas del parámetro de Hubble $H(a, \tilde{\zeta}_0)$ para diferentes valores de $\tilde{\zeta}$ (ver figura 6.27). a es el factor de escala y H_0 la constante de Hubble. La línea con la banda (azul) corresponde a un modelo con $\tilde{\zeta} = 1.922 \pm 0.089$ (“Union” 2008, SCP). La banda corresponde al error en la estimación de $\tilde{\zeta}_0$ a un nivel de confianza del 68.3%.

**CAPÍTULO 6. MODELOS COSMOLÓGICOS CON VISCOSIDAD
VOLUMÉTRICA**
6.3. ANÁLISIS DEL FACTOR DE ESCALA

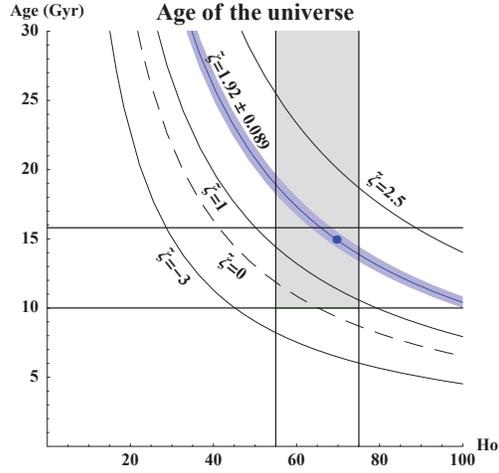


Figura 6.31: Gráfica similar a las figuras 6.8 y 6.9. El punto está localizado en 14.957 ± 0.422 Gyr que corresponde a la mejor estimación para la edad del Universo, usando la muestra “Union” (2008) de SCP, (donde $H_0 = 69.62 \pm 0.59(\text{km/s})\text{Mpc}^{-1}$, ver sección 6.6.1). La línea con la banda (azul) corresponde al modelo evaluado en la mejor estimación $\tilde{\zeta} = 1.922 \pm 0.089$.

con al menos un 99.7% de nivel de confianza. De esta forma, asumiendo el valor de la mejor estimación de $\tilde{\zeta}_0$, el factor de escala cuando se da la transición entre desaceleración a aceleración es $a_t = 0.4$.

Evaluando la expresión (6.50) en la mejor estimación de $\tilde{\zeta}_0$ y H_0 (usando “Union”, 2008, SCP), se obtiene una edad del Universo de 14.957 ± 0.422 Gyr (ver tabla 6.4). Este valor es perfectamente consistente con las cotas en la edad del Universo que vienen de los cúmulos globulares [80]. La figura 6.31 muestra la edad para diferentes valores de $\tilde{\zeta}_0$ así como para la mejor estimación. La línea vertical corresponde a $H_0 = [55, 75]$ (km/s)Mpc⁻¹³, esta es la región permitida de acuerdo a los valores de H_0 consistentes con la distancia modular usada para derivar las edades de los Cúmulos Globulares Galácticos del paralaje de *Hipparcos* [80]. Como referencia, la edad del Universo que se estima usando Λ CDM espacialmente plano y las mejores estimaciones de Ω_{m0} y H_0 es 13.750 ± 0.29 Gyr (ver tabla 6.4).

Para el subcaso (XII-b) $\tilde{\zeta}_0 > 3$, el modelo predice una expansión *eternamente acelerada*. No hay Big-Bang, en lugar de ello el Universo tiende a un Universo estático de Einstein, con un valor mínimo del factor de escala $a_{\min} = [(\tilde{\zeta}_0 - 3)/\tilde{\zeta}_0]^{2/3}$ cuando $t \rightarrow -\infty$. Cuando $t \rightarrow \infty$, el factor de escala tiende a la forma de un Universo de de Sitter. Para este subcaso la edad del Universo no está definida. La figura 6.34 muestra algunas gráficas para este subcaso.

En el subcaso $\tilde{\zeta}_0 > 3$, cuando el factor de escala tiene su valor mínimo, a_{\min} el escalar de curvatura R es cero, y a partir de este valor R va aumentando hasta alcanzar su máximo de $R = \frac{4}{3}H_0^2\tilde{\zeta}_0$ cuando $a \rightarrow \infty$ (ver sección 6.4.1 y figura 6.45 para detalles).

³Las unidades de H_0 siempre estarán expresadas en (km/s)Mpc⁻¹

**CAPÍTULO 6. MODELOS COSMOLÓGICOS CON VISCOSIDAD
VOLUMÉTRICA**
6.3. ANÁLISIS DEL FACTOR DE ESCALA

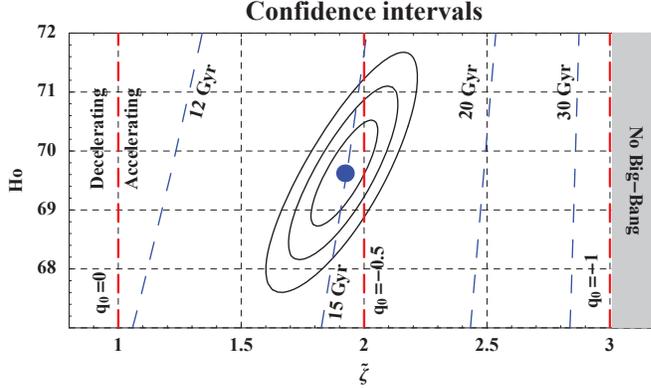


Figura 6.32: Intervalos de confianza para $\tilde{\zeta}_0$ y H_0 , donde se ha fijado: $\tilde{\zeta}_1 = 0$. Las mejores estimaciones y los intervalos de confianza fueron calculados usando la prueba de SNe con la muestra “Union” del SCP [37]. Los valores calculados son $\tilde{\zeta}_0 = 1.922 \pm 0.089$ y $H_0 = 69.62 \pm 0.59$ (km/s)Mpc⁻¹, ver tabla 6.4. Observe que al menos con un 99.73% de nivel de confianza, los posibles valores de $\tilde{\zeta}_0$ están dentro del intervalo $1 < \tilde{\zeta}_0 < 3$ indicando una aceleración en la expansión del Universo hoy. Las líneas punteadas diagonales (en azul) muestran diferentes edades del Universo (en Gigayears) de acuerdo a los valores de $\tilde{\zeta}_0$ y H_0 . Las líneas verticales punteadas gruesas (en rojo) indican diferentes valores del parámetro de desaceleración hoy en día, siendo $q_0 = 0$ el límite entre un Universo acelerado-desacelerado hoy. La edad estimada del Universo es 14.957 ± 0.422 Gyr. Encontramos que esta edad está en perfecta concordancia con las cotas observacionales calculadas usando los cúmulos globulares más longevos [80]. H_0 esta en unidades de (km/s)Mpc⁻¹ y los intervalos de confianza corresponden a 68.3%, 95.4% y 99.73% de probabilidad.

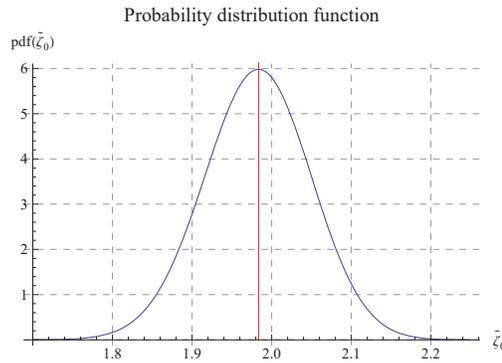


Figura 6.33: Gráfica de la función de distribución de probabilidad (FDP) normalizada de $\tilde{\zeta}_0$ para el caso cuando se fija $\tilde{\zeta}_1 = 0$. El valor calculado de la mejor estimación es $\tilde{\zeta}_0 = 1.9835 \pm 0.066$ usando SNe Ia “Union2” (2010) SCP. El error esta dado a un 68.3% nivel de confianza (ver tabla 6.3). Para marginalizar sobre H_0 una FDP previa constante fue utilizada.

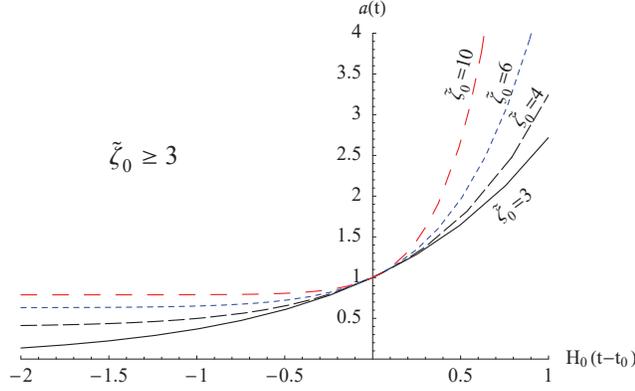


Figura 6.34: Gráficas del factor de escala $a(t, \tilde{\zeta}_0)$ para diferentes valores de $\tilde{\zeta}_0$ (donde $\tilde{\zeta}_1 = 0$) en el intervalo $\tilde{\zeta}_0 \geq 3$ [ver expresión (6.48)]. La línea $\tilde{\zeta}_0 = 3$ corresponde al Universo de de Sitter.

De igual forma, la densidad de materia $\rho_m = 0$ cuando $a = a_{\min}$, y va incrementando su valor hasta un máximo $\rho_m = (H_0^2/24\pi G)\tilde{\zeta}_0^2$ cuando $a \rightarrow \infty$, lo cual es no fásico (ver sección 6.5 y figura 6.56 para detalles).

Para el subcaso **(XII-c)** $\tilde{\zeta}_0 < 0$, el modelo predice una expansión *eternamente desacelerada*. El Universo comienza con un Big-Bang, seguido por una expansión con un factor de escala que alcanzará su máximo valor $a_{\max} = (1 - 3/\tilde{\zeta}_0)^{2/3}$ cuando $t \rightarrow \infty$, llegando a ser un Universo estático de Einstein en el futuro. El Big-bang tuvo lugar en el tiempo cósmico dado por la expresión (6.50). Las figuras 6.28–6.30 y 6.35 muestran el comportamiento del factor de escala para este subcaso.

En este caso el escalar de curvatura tiene una *transición* de valores positivos a negativos cuando $a \equiv [(\tilde{\zeta} - 3)/4\tilde{\zeta}]^{2/3}$. Cuando $a \rightarrow 0$ entonces $R \rightarrow \infty$ y cuando $a = (1 - 3/\tilde{\zeta}_0)^{2/3}$, la curvatura escalar es cero. El valor mínimo de R es negativo y este valor es alcanzado cuando $a = [(2 - 6/\tilde{\zeta})/5]^{2/3}$ (ver sección 6.4.1 y figura 6.45).

La densidad de materia diverge cuando $a \rightarrow 0$ y va decreciendo a lo largo del tiempo hasta cero cuando $a = (1 - 3/\tilde{\zeta}_0)^{2/3}$ (ver sección 6.5 y figura 6.56).

6.4. La curvatura

Analizamos el comportamiento del escalar de curvatura R , así como los invariantes que surgen de contraer el tensor de Riemann, $R^{\alpha\beta\gamma\delta}R_{\alpha\beta\gamma\delta}$, y el tensor de Ricci, $R^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}$, consigo mismos. Estos dos últimos, los analizamos solo para el caso de las mejores estimaciones de $(\tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}_1)$.

6.4.1. La curvatura escalar R

En un Universo espacialmente plano el escalar de curvatura se define como

$$R = 6 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + H^2 \right], \quad (6.53)$$

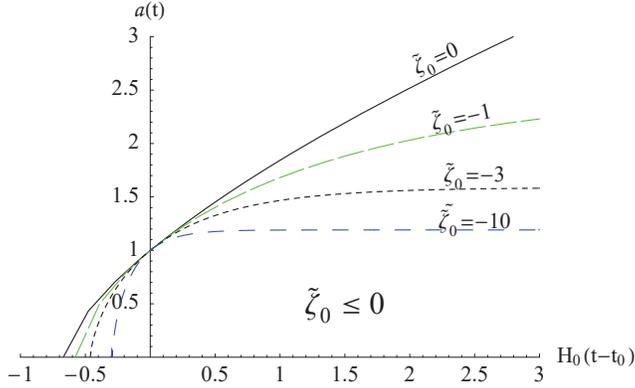


Figura 6.35: Gráficas del factor de escala $a(t, \tilde{\zeta}_0)$ para diferentes valores de $\tilde{\zeta}_0$ en el intervalo $\tilde{\zeta}_0 \leq 0$ [ver expresión (6.48)]. La línea $\tilde{\zeta}_0 = 0$ corresponde al Universo dominado por materia, sin viscosidad.

Modelo viscoso $\zeta = \zeta_0 + \zeta_1 H$

Prueba	FDP previa H_0	Edad Universo	a_t	z_t
SNe	Delta	9.64 Gyr	0.676	0.478
SNe+CMB	Delta	11.55 Gyr	0.605	0.652
SNe	Constante	10.27 Gyr	0.671	0.488
SNe+CMB	Constante	11.24 Gyr	0.636	0.570

Cuadro 6.1: Resumen de los valores centrales para la edad del Universo, el valor del factor de escala “ a_t ” cuando se da la *transición* entre un periodo desacelerado a acelerado, y su correspondiente valor en redshift “ z_t ”, calculados a partir de las mejores estimaciones de $\tilde{\zeta}_0$ y $\tilde{\zeta}_1$, usando la muestra de supernovas “Union” (2008) [37] y el parámetro de corrimiento \mathcal{R} del CMB, con distintas marginalizaciones de H_0 [ver tabla 6.3 y figuras 6.6 y 6.7]. La primera columna muestra la prueba cosmológica utilizada para calcular las mejores estimaciones. La segunda columna muestra la *función de distribución de probabilidad* (FDP) previa utilizada para marginalizar sobre la constante de Hubble. La tercer y cuarta columnas muestran los valores centrales calculados para la edad del Universo y el redshift de transición entre desaceleración-aceleración. Estas magnitudes fueron calculadas asumiendo un valor de $H_0 = 72$ (km/s)Mpc⁻¹, (como lo sugieren las observaciones del HST [38]), un valor del año de 31556925.2 segundos (año tropical) y un megaparsec = 3.0856776×10^{19} km.

**CAPÍTULO 6. MODELOS COSMOLÓGICOS CON VISCOSIDAD
VOLUMÉTRICA**
6.4. LA CURVATURA

Modelo viscoso $\zeta = \zeta_0 + \zeta_1 H$

FDP previa H_0	Edad Universo	a_t	z_t
Constante	11.72 Gyr	0.61	0.63
Delta Dirac	10.03 Gyr	0.65	0.52
Constante ($\tilde{\zeta}_1 = 0$)	14.82 Gyr	0.40	1.47

Cuadro 6.2: Tabla semejante a la tabla 6.1 pero para el caso en el cual solamente se utilizan los datos de supernovas, en particular, la muestra “Union2” (2010) [18]. En esta tabla se pueden ver los diferentes valores que se obtienen para la edad del Universo, y la transición entre “desaceleración-aceleración” de acuerdo a la marginalización que sea empleada. Además, se muestra el valor que se obtiene cuando se fija $\tilde{\zeta}_1 = 0$ y se calculan los valores usando solo la mejor estimación de $\tilde{\zeta}_0$ (tercera fila). Ver figuras 6.4, 6.5 y 6.26.

El término \ddot{a}/a corresponde a la segunda ecuación de Friedmann, es decir,

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho_m + 3P_m^*). \quad (6.54)$$

Ahora sustituimos la expresión para $P_m^* = -3\zeta H$ [ver ecuación (6.3)], $\zeta = \zeta_0 + \zeta_1 H$ y $\rho_m = (3/8\pi G)H^2$ de la primera ecuación de Friedmann en la ecuación (6.54) para obtener

$$\frac{\ddot{a}}{a} = H^2 \left[(12\pi G) \left(\frac{\zeta_0}{H} + \zeta_1 \right) - \frac{1}{2} \right]. \quad (6.55)$$

Usando la expresión del coeficiente de viscosidad adimensional $\tilde{\zeta}_0$ y $\tilde{\zeta}_1$ se obtiene

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{H^2}{2} \left[\frac{H_0}{H} \tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 - 1 \right]. \quad (6.56)$$

Sustituimos la ecuación (6.56) en (6.53) para obtener

$$R = 3H \left[H_0 \tilde{\zeta}_0 + H(\tilde{\zeta}_1 + 1) \right]. \quad (6.57)$$

Ahora, usando la ecuación (6.14) para el parámetro de Hubble llegamos a

$$R(a) = \frac{3H_0^2}{(3 - \tilde{\zeta}_1)^2} \left\{ 4\tilde{\zeta}_0^2 + (\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 - 3)a^{(\tilde{\zeta}_1-3)/2} \left[(\tilde{\zeta}_1 + 1)(\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 - 3)a^{(\tilde{\zeta}_1-3)/2} - \tilde{\zeta}_0(\tilde{\zeta}_1 + 5) \right] \right\} \quad (6.58)$$

para $\tilde{\zeta}_1 \neq 3$.

Caso $\tilde{\zeta}_0 < 0$, $\tilde{\zeta}_1 < 0$: En este caso la curvatura escalar diverge cuando el factor de escala es igual a cero. Esto respalda la existencia de un Big-Bang al inicio del Universo para este caso (ver figura 6.36 y sección 6.3.2). El factor de escala tiene un valor máximo $a_{\max} = [(\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 - 3)/\tilde{\zeta}_0]^{2/(3-\tilde{\zeta}_1)}$ cuando $t \rightarrow \infty$. El escalar de curvatura se vuelve cero cuando el factor de escala es igual a a_{\max} , i.e., $R(a_{\max}) = 0$.

Para $\tilde{\zeta}_1 > -1$, la curvatura escalar es positiva cuando $a \rightarrow 0$ y negativa cuando $\tilde{\zeta}_1 \leq -1$.

**CAPÍTULO 6. MODELOS COSMOLÓGICOS CON VISCOSIDAD
VOLUMÉTRICA**
6.4. LA CURVATURA

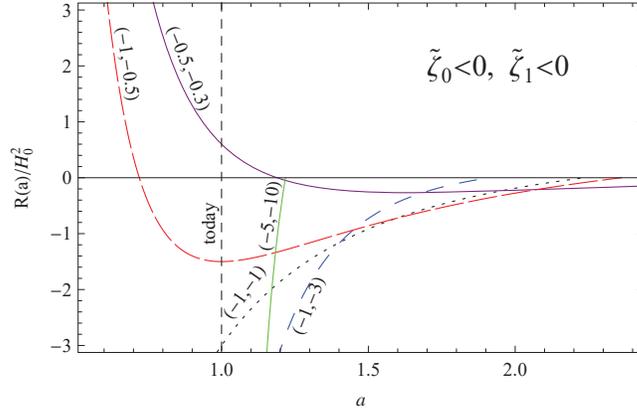


Figura 6.36: Gráfica del escalar de curvatura R con respecto al factor de escala para diferentes valores de $(\tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}_1)$ donde $\tilde{\zeta}_0 < 0$ y $\tilde{\zeta}_1 < 0$ [ver ecuación (6.58)]. La curvatura escalar diverge cuando el factor de escala es igual a cero. El factor de escala tiene un valor máximo $a_{\max} = [(\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 - 3)/\tilde{\zeta}_0]^{2/(3-\tilde{\zeta}_1)}$ cuando $t \rightarrow \infty$. Resulta que la curvatura escalar es cero cuando el factor de escala es igual a a_{\max} , i.e., $R(a_{\max}) = 0$. Cuando $\tilde{\zeta}_1 > -1$ entonces el escalar de curvatura es positivo conforme $a \rightarrow 0$ y negativo cuando $\tilde{\zeta}_1 \leq -1$.

Caso $\tilde{\zeta}_0 > 0$, $\tilde{\zeta}_1 < 0$: Cuando $a \rightarrow \infty$ entonces $R \rightarrow 12[H_0\tilde{\zeta}_0/(3 - \tilde{\zeta}_1)]^2$. Para $\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 < 3$, la curvatura escalar diverge cuando el factor de escala es cero. Esto respalda la existencia de un Big-Bang al inicio del Universo (ver figura 6.37 y sección 6.3.3).

Sin embargo, para $\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 > 3$ no hay Big-Bang, el Universo tiene un factor de escala con un valor mínimo $a_{\min} = [1 + (\tilde{\zeta}_1 - 3)/\tilde{\zeta}_0]^{2/(3-\tilde{\zeta}_1)}$ cuando $t \rightarrow -\infty$. Por lo mismo, el escalar de curvatura no diverge sino que es cero cuando el factor de escala es igual a a_{\min} , de aquí que para este caso se concluye que no hay Big-Bang (ver figura 6.37). Cuando $\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 = 3$ el escalar de curvatura tiene un valor constante $12H_0^2$ a lo largo de toda la historia del Universo.

Para $\tilde{\zeta}_1 > -1$, R es positivo cuando $a \rightarrow 0$ y negativo cuando $\tilde{\zeta}_1 < -1$. Para $\tilde{\zeta}_1 = -1$, R es positivo si $a \rightarrow 0$ y negativo si $\tilde{\zeta}_0 > 4$.

El valor central del escalar de curvatura es $R/H_0^2 = 9.66$ y $R/H_0^2 = 10.87$ cuando una FDP previa constante y delta de Dirac son utilizadas respectivamente.

Caso $\tilde{\zeta}_0 > 0$, $0 < \tilde{\zeta}_1 < 3$: En este caso el escalar de curvatura diverge a infinito cuando el factor de escala es igual a cero para $\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 < 3$. Esto respalda la existencia de un Big-Bang en el pasado del Universo (ver figura 6.38 y sección 6.3.4). Cuando $\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 > 3$ el valor mínimo que el factor de escala alcanza es $a_{\min} = [1 + (\tilde{\zeta}_1 - 3)/\tilde{\zeta}_0]^{2/(3-\tilde{\zeta}_1)}$ cuando $t \rightarrow -\infty$. La curvatura escalar es cero cuando el factor de escala tiene el valor de a_{\min} . Cuando $a \rightarrow \infty$ entonces $R \rightarrow 12[H_0\tilde{\zeta}_0/(3 - \tilde{\zeta}_1)]^2$. Cuando $\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 = 3$ el escalar de curvatura tiene el valor *constante* de $12H_0^2$ a lo largo de toda la evolución del Universo.

Caso $\tilde{\zeta}_0 < 0$, $0 < \tilde{\zeta}_1 < 3$: El escalar de curvatura diverge a infinito cuando $a = 0$. Esto

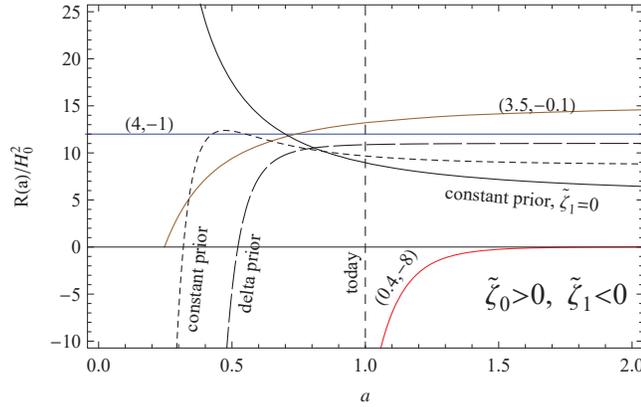


Figura 6.37: Gráfica de la curvatura escalar con respecto al factor de escala para diferentes valores de $(\tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}_1)$ para los casos $(\tilde{\zeta}_0 > 0, \tilde{\zeta}_1 < 0)$ y $(0 < \tilde{\zeta}_0 < 3, \tilde{\zeta}_1 = 0)$ [ver ecuación (6.58)]. Las líneas punteadas cortas y largas corresponden a evaluar R en las mejores estimaciones de $(\tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}_1)$ cuando una FDP previa constante y de Delta de Dirac son utilizadas para marginalizar sobre H_0 respectivamente. La línea sólida negra corresponde a evaluar R en la mejor estimación de $\tilde{\zeta}_0$ sola, cuando $\tilde{\zeta}_1 = 0$ y H_0 es marginalizada usando una FDP previa constante. En general, la curvatura diverge cuando el factor de escala es igual a cero para el subcaso $\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 < 3$ (con $\tilde{\zeta}_0 > 0, \tilde{\zeta}_1 < 0$). Para el subcaso $\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 > 3$ (con $\tilde{\zeta}_0 > 0, \tilde{\zeta}_1 < 0$) el valor mínimo que el factor de escala alcanza es $a_{\min} = [1 + (\tilde{\zeta}_1 - 3)/\tilde{\zeta}_0]^{2/(3-\tilde{\zeta}_1)}$ cuando $t \rightarrow -\infty$. Entonces, para este subcaso el escalar de curvatura no diverge sino que es cero cuando el factor de escala es igual a a_{\min} , por lo que no hay condiciones de un Big-Bang. Cuando $\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 = 3$ el escalar de curvatura tiene el valor constante de $12H_0^2$ a lo largo de toda la evolución del Universo. Cuando $\tilde{\zeta}_1 > -1$ la curvatura escalar es positiva conforme $a \rightarrow 0$ y negativa cuando $\tilde{\zeta}_1 < -1$. Cuando $\tilde{\zeta}_1 = -1$ la curvatura escalar es positiva conforme $a \rightarrow 0$ si $\tilde{\zeta}_0 < 4$ y negativa si $\tilde{\zeta}_0 > 4$. Cuando $a \rightarrow \infty$ entonces $R \rightarrow 12[H_0\tilde{\zeta}_0/(3-\tilde{\zeta}_1)]^2$. Finalmente, para el caso $(0 < \tilde{\zeta}_0 < 3, \tilde{\zeta}_1 = 0)$, la curvatura escalar diverge cuando $a = 0$ (la singularidad del Big-Bang), y cuando $a \rightarrow \infty$ entonces $R = \frac{4}{3}H_0^2\tilde{\zeta}_0$.

**CAPÍTULO 6. MODELOS COSMOLÓGICOS CON VISCOSIDAD
VOLUMÉTRICA**
6.4. LA CURVATURA

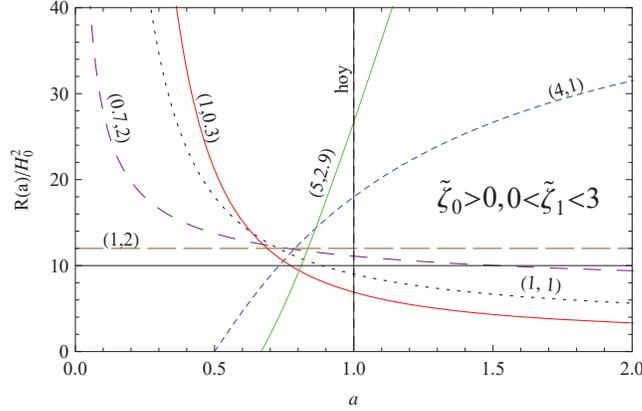


Figura 6.38: Gráfica del escalar de curvatura R con respecto al factor de escala para diferentes valores de $(\tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}_1)$ donde $\tilde{\zeta}_0 > 0$ y $0 < \tilde{\zeta}_1 < 3$ [ver ecuación (6.58)]. La curvatura escalar diverge a infinito cuando el factor de escala es igual a cero, para $\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 < 3$. Esto respalda la existencia de un Big-Bang en el pasado del Universo (ver sección 6.3.4). Cuando $\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 > 3$ el valor mínimo que el factor de escala alcanza es $a_{\min} = [1 + (\tilde{\zeta}_1 - 3)/\tilde{\zeta}_0]^{2/(3-\tilde{\zeta}_1)}$ cuando $t \rightarrow -\infty$. El escalar de curvatura es igual a cero cuando el factor de escala es igual a a_{\min} . Cuando $\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 = 3$, la curvatura escalar tiene un valor constante $12H_0^2$ a lo largo de toda la evolución del Universo. Cuando $a \rightarrow \infty$ entonces $R \rightarrow 12[H_0\tilde{\zeta}_0/(3 - \tilde{\zeta}_1)]^2$.

respalda la existencia de un Big-Bang en el pasado (ver figura 6.39 y sección 6.3.5). En este caso el valor máximo que el factor de escala puede alcanzar es $a_{\max} = [1 + (\tilde{\zeta}_1 - 3)/\tilde{\zeta}_0]^{2/(3-\tilde{\zeta}_1)}$ cuando $t \rightarrow \infty$. El escalar de curvatura es igual a cero cuando el factor de escala es igual a a_{\max} .

Caso $\tilde{\zeta}_0 > 0, \tilde{\zeta}_1 > 3$: El valor mínimo que el factor de escala alcanza es $a_{\min} = [\tilde{\zeta}_0/(\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 - 3)]^{2/(\tilde{\zeta}_1-3)}$ cuando $t \rightarrow -\infty$. El escalar de curvatura es cero cuando el factor de escala es igual a a_{\min} (ver figura 6.40 y sección 6.3.6). Cuando $a \rightarrow \infty$ entonces $R \rightarrow \infty$ también.

Caso $\tilde{\zeta}_0 < 0, \tilde{\zeta}_1 > 3$: El escalar de curvatura es $12[H_0\tilde{\zeta}_0/(\tilde{\zeta}_1 - 3)]^2$ cuando $a \rightarrow 0$. Para el caso $\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 > 3$, cuando $a \rightarrow \infty$ entonces $R \rightarrow \infty$ también. Y para $\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 < 3$ el valor máximo que el factor de escala puede alcanzar es $a_{\max} = [\tilde{\zeta}_0/(\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 - 3)]^{2/(\tilde{\zeta}_1-3)}$ cuando $t \rightarrow \infty$. El escalar de curvatura es igual a cero cuando el factor de escala es a_{\max} (ver figura 6.41 y sección 6.3.7). Cuando $\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 = 3$ el escalar de curvatura tiene el valor *constante* $12H_0^2$ a lo largo de toda la evolución del Universo.

Caso $\tilde{\zeta}_0 > 0, \tilde{\zeta}_1 = 3$: Para este caso, primero fijamos $\tilde{\zeta}_1 = 3$ en la ecuación (6.57) obteniendo:

$$R = 3 \left(H_0 \tilde{\zeta}_0 H + 4H^2 \right). \quad (6.59)$$

Usando la expresión para el parámetro de Hubble (6.33) en (6.59) llegamos a

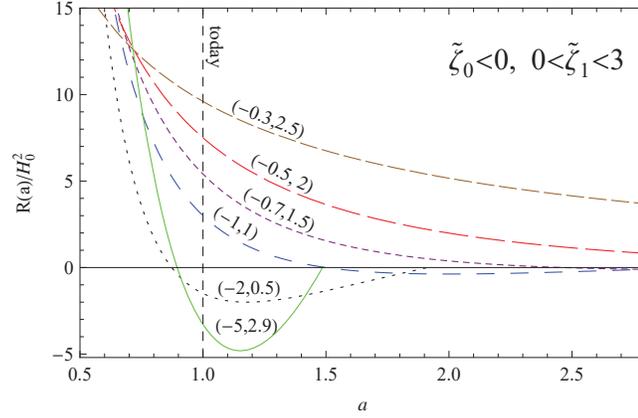


Figura 6.39: Gráficas del escalar de curvatura R con respecto al factor de escala para diferentes valores de $(\tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}_1)$ donde $\tilde{\zeta}_0 < 0$ y $0 < \tilde{\zeta}_1 < 3$. El escalar de curvatura diverge a infinito cuando $a = 0$. Esto respalda la existencia de un Big-Bang en el pasado del Universo (ver sección 6.3.5). En este caso el valor *máximo* que el factor de escala alcanza es $a_{\text{max}} = [1 + (\tilde{\zeta}_1 - 3)/\tilde{\zeta}_0]^{2/(3-\tilde{\zeta}_1)}$ cuando $t \rightarrow \infty$. El escalar de curvatura es cero cuando el factor de escala es igual a a_{max} .

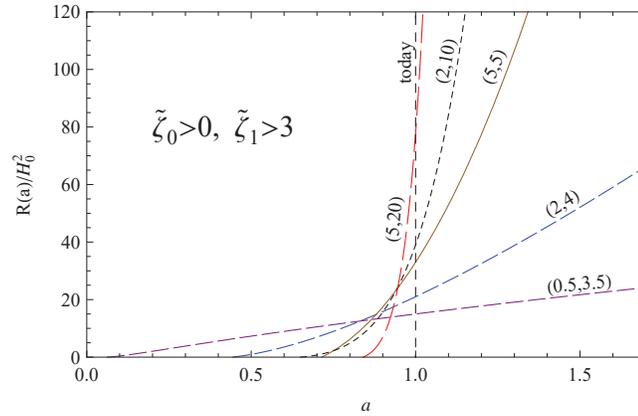


Figura 6.40: Gráfica del escalar de curvatura R con respecto al factor de escala para diferentes valores de $(\tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}_1)$ donde $\tilde{\zeta}_0 > 0$ y $\tilde{\zeta}_1 > 3$. En este caso el valor mínimo que el factor de escala alcanza es $a_{\text{min}} = [\tilde{\zeta}_0/(\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 - 3)]^{2/(\tilde{\zeta}_1 - 3)}$ cuando $t \rightarrow -\infty$. De esta forma, los valores del escalar de curvatura comienzan en el valor mínimo del factor de escala a_{min} (ver sección 6.3.6). Cuando $a \rightarrow \infty$, entonces $R \rightarrow \infty$.

CAPÍTULO 6. MODELOS COSMOLÓGICOS CON VISCOSIDAD
VOLUMÉTRICA
6.4. LA CURVATURA

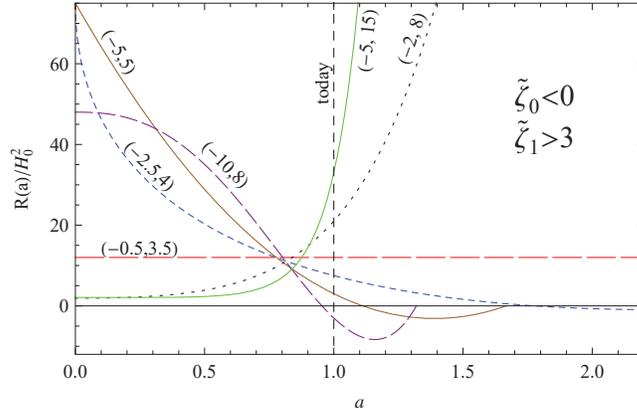


Figura 6.41: Gráfica del escalar de curvatura R con respecto al factor de escala para diferentes valores de $(\tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}_1)$ donde $\tilde{\zeta}_0 < 0$ y $\tilde{\zeta}_1 > 3$. En este caso el escalar de curvatura es igual a $12[H_0\tilde{\zeta}_0/(\tilde{\zeta}_1 - 3)]^2$ cuando $a \rightarrow 0$. Para este caso $\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 > 3$, cuando $a \rightarrow \infty$, entonces $R \rightarrow \infty$. Y para $\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 < 3$ el valor máximo que el factor de escala puede alcanzar es $a_{\max} = [\tilde{\zeta}_0/(\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 - 3)]^{2/(\tilde{\zeta}_1 - 3)}$ cuando $t \rightarrow \infty$. El escalar de curvatura es cero cuando el factor de escala es a_{\max} (ver sección 6.3.7). Cuando $\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 = 3$ el escalar de curvatura tiene un valor constante de $12H_0^2$ a lo largo de toda la evolución del Universo.

$$R(a, \tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}_1 = 3) = 3H_0^2 \left[4 + \tilde{\zeta}_0 + \left(4 + \frac{1}{2}\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_0 \ln a \right) \tilde{\zeta}_0 \ln a \right]. \quad (6.60)$$

En este caso $\tilde{\zeta}_0 > 0$ con $\tilde{\zeta}_1 = 3$, el valor *mínimo* que el factor de escala puede alcanzar es $a_{\min} = \exp(-2/\tilde{\zeta}_0)$ cuando $t \rightarrow -\infty$. Sucede además que $R(a_{\min}) = 0$ (ver figura 6.42 y sección 6.3.8). Cuando $a \rightarrow \infty$, entonces $R \rightarrow \infty$ [ver ecuación (6.60)].

Caso $\tilde{\zeta}_0 < 0, \tilde{\zeta}_1 = 3$: El escalar de curvatura diverge a infinito cuando $a \rightarrow 0$. El valor máximo que el factor de escala pueda alcanzar es $a_{\max} = \exp(-2/\tilde{\zeta}_0)$ cuando $t \rightarrow \infty$ (ver sección 6.3.9). Sucede que $R(a_{\max}) = 0$ (ver figura 6.43).

Caso $\tilde{\zeta}_0 = 0, \tilde{\zeta}_1 = 3$: Fijamos $\tilde{\zeta}_0 = 0$ en la expresión (6.60) para obtener $R(a, \tilde{\zeta}_0 = 0, \tilde{\zeta}_1 = 3) = 12H_0^2$ que es un valor *constante* a lo largo de toda la evolución del Universo.

Caso $\tilde{\zeta}_0 = 0, \tilde{\zeta}_1 \neq 0$: Primero fijamos $\tilde{\zeta}_0 = 0$ en la expresión (6.58) para obtener

$$R(a, \tilde{\zeta}_0 = 0, \tilde{\zeta}_1) = 3H_0^2(\tilde{\zeta}_1 + 1)a^{\tilde{\zeta}_1 - 3}. \quad (6.61)$$

Cuando $-1 < \tilde{\zeta}_1 < 3$ el escalar de curvatura diverge a infinito cuando $a \rightarrow 0$, y a menos infinito cuando $\tilde{\zeta}_1 < -1$. En ambos casos es cero cuando $a \rightarrow \infty$ (ver figura 6.44 y sección 6.3.11). Cuando $\tilde{\zeta}_1 = -1$, el escalar de curvatura es siempre cero. Cuando $\tilde{\zeta}_1 > 3$, el escalar de curvatura es cero cuando $a = 0$ e infinito cuando $a \rightarrow \infty$.

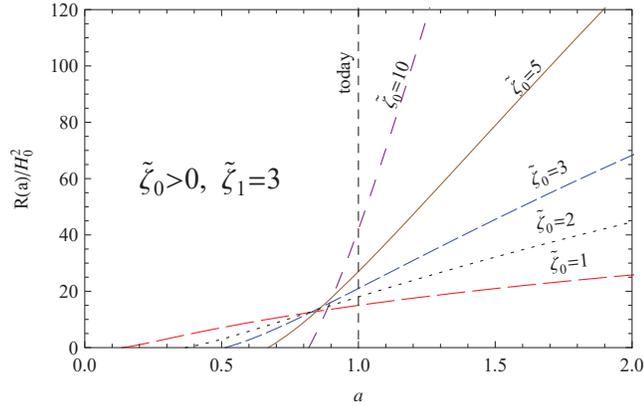


Figura 6.42: Gráficas del escalar de curvatura R con respecto al factor de escala para diferentes valores de $\tilde{\zeta}_0 > 0$ con $\tilde{\zeta}_1 = 3$ [ver ecuación (6.60)]. En este caso el valor mínimo que el factor de escala puede alcanzar es $a_{\min} = \exp(-2/\tilde{\zeta}_0)$ cuando $t \rightarrow -\infty$ (ver sección 6.3.8). Por tanto, $R(a_{\min}) = 0$ (ver sección 6.3.8). Cuando $a \rightarrow \infty$, entonces $R \rightarrow \infty$.

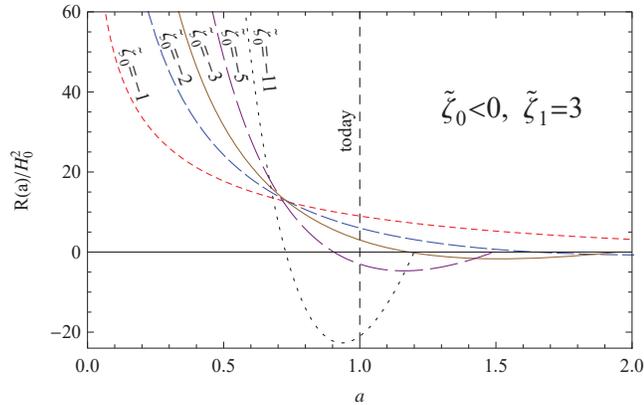


Figura 6.43: Gráfica del escalar de curvatura R con respecto al factor de escala para diferentes valores de $\tilde{\zeta}_0 < 0$ con $\tilde{\zeta}_1 = 3$. El escalar de curvatura es infinito cuando $a \rightarrow 0$. En este caso el valor máximo que el factor de escala puede alcanzar es $a_{\max} = \exp(-2/\tilde{\zeta}_0)$ cuando $t \rightarrow \infty$ (ver sección 6.3.9), en cuyo caso $R(a_{\max}) = 0$.

CAPÍTULO 6. MODELOS COSMOLÓGICOS CON VISCOSIDAD
VOLUMÉTRICA
6.4. LA CURVATURA

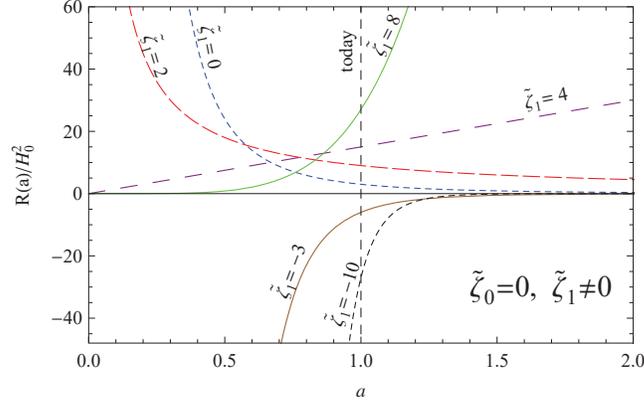


Figura 6.44: Gráfica del escalar de curvatura R con respecto al factor de escala para diferentes valores de $\tilde{\zeta}_1$ con $\tilde{\zeta}_0 = 0$ [ver ecuación (6.61)]. Cuando $-1 < \tilde{\zeta}_1 < 3$ el escalar de curvatura diverge a infinito cuando $a \rightarrow 0$, y a menos infinito cuando $\tilde{\zeta}_1 < -1$. En ambos casos es cero cuando $a \rightarrow \infty$. Cuando $\tilde{\zeta}_1 = -1$ el escalar de curvatura es siempre cero. Cuando $\tilde{\zeta}_1 > 3$ entonces R es cero cuando $a = 0$ e infinito cuando $a \rightarrow \infty$.

Caso $\tilde{\zeta}_0 \neq 0, \tilde{\zeta}_1 = 0$: Este es el otro caso de especial importancia ya que corresponde a tener un modelo cosmológico con viscosidad *constante*.

- Cuando $\tilde{\zeta}_0 = 0$ entonces $R = 3H_0^2/a^3$ que corresponde a un Universo dominado por materia sin viscosidad.
- Cuando $\tilde{\zeta}_0 = 3$ entonces $R = 12H_0^2$ que corresponde al Universo de de Sitter.
- Subcaso $0 < \tilde{\zeta}_0 < 3$: Cuando $a \rightarrow 0$ entonces $R \rightarrow \infty$ (la singularidad del Big-Bang). En este caso la curvatura es siempre positiva. A partir del valor infinito $R(a = 0)$, el escalar de curvatura va decreciendo conforme el Universo se expande hasta alcanzar su valor mínimo de $R = \frac{4}{3}H_0^2\tilde{\zeta}_0$ cuando $a \rightarrow \infty$ (ver figura 6.37).
- Subcaso $\tilde{\zeta}_0 > 3$: El escalar de curvatura es siempre una función positiva creciente desde un valor cero cuando $a = a_{\min}$ (donde $a_{\min} = (1 - 3/\tilde{\zeta}_0)^{2/3}$ es el valor mínimo del factor de escala) hasta alcanzar su valor máximo $R = \frac{4}{3}H_0^2\tilde{\zeta}_0$ cuando $a \rightarrow \infty$.
- Subcaso $\tilde{\zeta}_0 < 0$: Cuando $a \rightarrow 0$ entonces $R \rightarrow \infty$ (la singularidad del Big-Bang). El escalar de curvatura es cero en los valores del factor de escala $a_{\max} = (1 - 3/\tilde{\zeta}_0)^{2/3}$ y a^* , donde

$$a^* = \left(\frac{\tilde{\zeta}_0 - 3}{4\tilde{\zeta}_0} \right)^{2/3}, \quad (6.62)$$

y a_{\max} es el valor máximo del factor de escala (ver sección 6.3.12). En a^* hay una transición de valores positivos a negativos de R . Cuando $0 < a < a^*$ el escalar de curvatura es una función positiva y decreciente. Para $a_0 < a < a_{\max}$ el valor

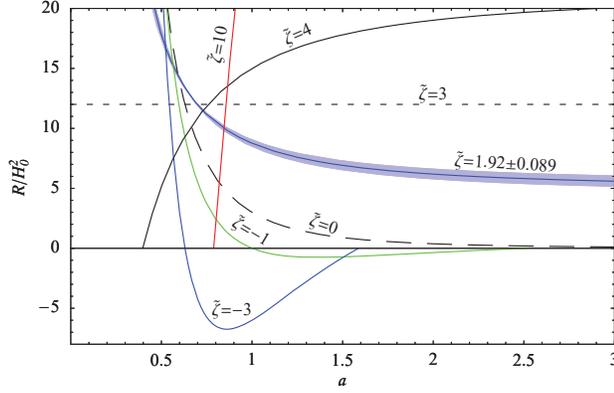


Figura 6.45: Gráfica del escalar de curvatura $R(a, \tilde{\zeta}_0)$ en función del factor de escala para diferentes valores de $\tilde{\zeta}_0$ (con $\tilde{\zeta}_1 = 0$). La línea de punteo largo corresponde a $\tilde{\zeta}_0 = 0$. La línea de punteo corto corresponde a $\tilde{\zeta}_0 = 3$ (Universo de de Sitter). La línea con su banda (azul) corresponde al modelo con $\tilde{\zeta}_0 = 1.922 \pm 0.089$ (con $\tilde{\zeta}_1 = 0$), que es la mejor estimación de $\tilde{\zeta}_0$ calculada a partir de la prueba de supernovas usando la muestra “Union” (2008) del SCP. La banda corresponde al error en la estimación de $\tilde{\zeta}_0$ a un 68.3% de confianza (1σ).

de R es negativo. El valor mínimo de la curvatura escalar es $R = -\frac{3}{4}H_0^2\tilde{\zeta}_0^2$ en los valores del factor de escala \tilde{a} , donde

$$\tilde{a} = \left[\frac{2}{5} \left(\frac{\tilde{\zeta}_0 - 3}{\tilde{\zeta}_0} \right) \right]^{2/3}. \quad (6.63)$$

6.4.2. El escalar $R^{\alpha\beta\gamma\delta}R_{\alpha\beta\gamma\delta}$

Analizamos el comportamiento del *escalar de Kretschmann*, que se define como la contracción del tensor de Riemann consigo mismo, es decir, $K \equiv R^{\alpha\beta\gamma\delta}R_{\alpha\beta\gamma\delta}$. La expresión general de K , para la métrica de FRW espacialmente curva es

$$K \equiv R^{\alpha\beta\gamma\delta}R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 12 \left[\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^4 + 2k \left(\frac{\dot{a}}{a^2} \right)^2 + \frac{k^2}{a^4} + \left(\frac{\ddot{a}}{a} \right)^2 \right], \quad (6.64)$$

donde k caracteriza la curvatura *espacial* constante de la métrica de FRW, para nuestro modelo $k = 0$. Por tanto, usando el hecho de que $H \equiv (\dot{a}/a)$ y de que \ddot{a}/a corresponde a la segunda ecuación de Friedmann dada por la expresión (6.56), reescribimos la ecuación (6.64) como

$$K = 12H^4 \left[1 + \frac{1}{4} \left(\frac{H_0\tilde{\zeta}_0}{H} + \tilde{\zeta}_1 - 1 \right)^2 \right], \quad (6.65)$$

donde H esta dado por la expresión (6.14), que sustituimos para obtener

**CAPÍTULO 6. MODELOS COSMOLÓGICOS CON VISCOSIDAD
VOLUMÉTRICA
6.4. LA CURVATURA**

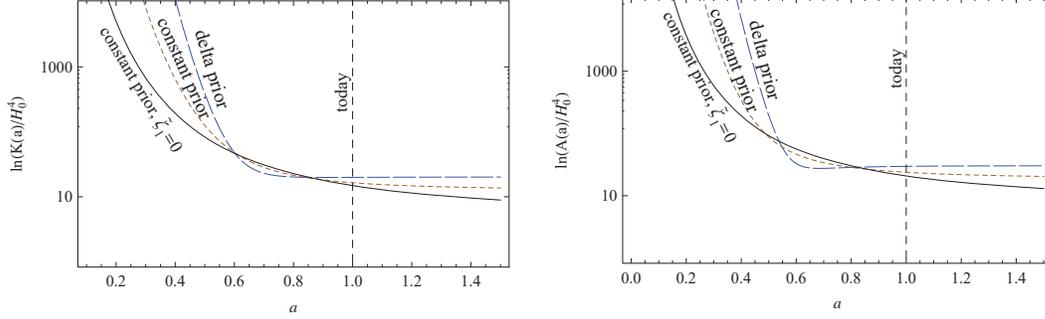


Figura 6.46: Gráficas en escala logarítmica de los escalares K (izquierda) y A (derecha), que vienen de la contracción del tensor de Riemann $K \equiv R^{\alpha\beta\gamma\delta}R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ (escalar de Kretschmann), y de Ricci $A \equiv R^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}$, con respecto al factor de escala [ver expresiones (6.66) y (6.69) respectivamente]. Ambos escalares están evaluados en las mejores estimaciones para $(\tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}_1)$ (ver tabla 6.3).

$$K = \frac{12H_0^4}{(\tilde{\zeta}_1 - 3)^4 a^6} \left\{ \tilde{\zeta}_0 a^{3/2} + (3 - \tilde{\zeta}_0 - \tilde{\zeta}_1) a^{\tilde{\zeta}_1/2} \right\}^4 \times \left\{ 1 + \frac{1}{4} \left[1 - \tilde{\zeta}_1 + \frac{\tilde{\zeta}_0(\tilde{\zeta}_1 - 3)a^{3/2}}{\tilde{\zeta}_0 a^{3/2} + (3 - \tilde{\zeta}_0 - \tilde{\zeta}_1) a^{\tilde{\zeta}_1/2}} \right]^2 \right\}. \quad (6.66)$$

Evaluamos a K en las mejores estimaciones para $\tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}_1$ (ver tabla 6.3). Para el caso $\tilde{\zeta}_0 > 0, \tilde{\zeta}_1 < 0$, encontramos que K diverge a infinito cuando $a \rightarrow 0$ (la singularidad del Big-Bang), y cuando $a \rightarrow \infty$ entonces $K \rightarrow 24[H_0\tilde{\zeta}_0/(\tilde{\zeta}_1 - 3)]^4$. Para las mejores estimaciones, el valor central del escalar de Kretschmann es $K/H_0^4 = 16.48$ y $K/H_0^4 = 19.91$ cuando una distribución previa *constante* y de *delta de Dirac* es utilizada, respectivamente.

Para el otro caso de interés, $(0 < \tilde{\zeta}_0 < 3, \tilde{\zeta}_1 = 0)$, encontramos que K es infinito cuando $a \rightarrow 0$. Este decrece desde $K(a=0)$ conforme el Universo se va expandiendo hasta alcanzar su valor mínimo $K = (8/27)(H_0\tilde{\zeta}_0)^4$ cuando $a \rightarrow \infty$ (ver figura 6.46).

6.4.3. El escalar $R^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}$

Estudiamos también el comportamiento del escalar que resulta de la contracción del tensor de Ricci consigo mismo, es decir $A \equiv R^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}$, que en general para la métrica de FRW con curvatura, tiene la forma

$$A \equiv R^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} = 12 \left[\left(\frac{\ddot{a}}{a} \right)^2 + \frac{\ddot{a}}{a^3} (\dot{a}^2 + k) + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^4 + 2k \left(\frac{\dot{a}}{a^2} \right)^2 + \left(\frac{k}{a^2} \right)^2 \right]. \quad (6.67)$$

Para nuestro modelo $k = 0$. Sustituimos \dot{a}/a por H y \ddot{a}/a por la expresión (6.56) para obtener

**CAPÍTULO 6. MODELOS COSMOLÓGICOS CON VISCOSIDAD
VOLUMÉTRICA**

6.5. DENSIDAD DE MATERIA ρ_M

$$A = 3H^2 \left[H_0^2 \tilde{\zeta}_0^2 + 2H_0 \tilde{\zeta}_0 \tilde{\zeta}_1 H + (3 + \tilde{\zeta}_1^2) H^2 \right]. \quad (6.68)$$

Ponemos la expresión de la constante de Hubble (6.14) en (6.68) produciendo

$$A = \frac{3H_0^4}{(\tilde{\zeta}_1 - 3)^4 a^6} \left\{ \tilde{\zeta}_0 a^{3/2} + (3 - \tilde{\zeta}_0 - \tilde{\zeta}_1) a^{\tilde{\zeta}_1/2} \right\}^2 \times \\ \times \left\{ 12\tilde{\zeta}_0^2 a^3 + 6\tilde{\zeta}_0(1 + \tilde{\zeta}_1)(3 - \tilde{\zeta}_0 - \tilde{\zeta}_1) a^{(3-\tilde{\zeta}_1)/2} - (3 + \tilde{\zeta}_1^2)(3 - \tilde{\zeta}_0 - \tilde{\zeta}_1)^2 a^{\tilde{\zeta}_1} \right\}. \quad (6.69)$$

Evaluamos A en las mejores estimaciones para $(\tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}_1)$. Para el caso $(\tilde{\zeta}_0 > 0, \tilde{\zeta}_1 < 0)$ encontramos que cuando $a \rightarrow 0$ entonces $A \rightarrow \infty$ (la singularidad del Big-Bang). Y cuando $a \rightarrow \infty$ entonces $A \rightarrow 36[H_0 \tilde{\zeta}_0 / (\tilde{\zeta}_1 - 3)]^4$. Para las mejores estimaciones, el valor central de la contracción de Ricci es $A/H_0^4 = 23.81$ y $A/H_0^4 = 29.66$ cuando se utiliza una FDP previa constante y de delta de Dirac, respectivamente. La figura 6.46 muestra el comportamiento de A evaluado en las mejores estimaciones, con respecto al factor de escala.

Para el otro caso de interés, $(0 < \tilde{\zeta}_0 < 3, \tilde{\zeta}_1 = 0)$, el escalar A es infinito cuando $a \rightarrow 0$, y va decreciendo desde $A(a = 0)$ conforme el Universo se va expandiendo hasta que alcanza su valor mínimo de $A = (4/9)(H_0 \tilde{\zeta}_0)^4$ cuando $a \rightarrow \infty$.

6.5. Densidad de materia ρ_m

Analizamos el comportamiento de la densidad de materia. Para ello, de la primera ecuación de Friedmann (6.5) tenemos

$$\rho_m(a) = \left(\frac{3}{8\pi G} \right) H^2(a). \quad (6.70)$$

Usando la expresión para el parámetro de Hubble (6.14) en la expresión de arriba, llegamos a

$$\rho_m(a) = \rho_{\text{crit}}^0 \left[\left(1 - \frac{\tilde{\zeta}_0}{3 - \tilde{\zeta}_1} \right) a^{(\tilde{\zeta}_1 - 3)/2} + \frac{\tilde{\zeta}_0}{3 - \tilde{\zeta}_1} \right]^2; \quad \text{para } \tilde{\zeta}_1 \neq 3. \quad (6.71)$$

Analizamos el comportamiento de $\rho_m(a)$ para todos los posibles valores de $(\tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}_1)$, agrupando por casos de la siguiente forma:

Caso $\tilde{\zeta}_0 < 0, \tilde{\zeta}_1 < 0$: En este caso la densidad de materia diverge cuando el factor de escala es cero. Esto respalda la suposición del Big-Bang como inicio del Universo, para este caso (ver sección 6.3.2). El factor de escala tiene un valor máximo de $a_{\text{max}} = [(\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 - 3)/\tilde{\zeta}_0]^{2/(3-\tilde{\zeta}_1)}$ cuando $t \rightarrow \infty$. La densidad de materia es cero cuando el factor de escala tiene valor a_{max} (ver figura 6.47).

Caso $\tilde{\zeta}_0 > 0, \tilde{\zeta}_1 < 0$: Para el subcaso $\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 < 3$ la densidad de materia diverge cuando el factor de escala es cero. Sin embargo, para el subcaso $\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 > 3$, el valor mínimo que el factor de escala alcanza es $a_{\text{min}} = [(\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 - 3)/\tilde{\zeta}_0]^{2/(3-\tilde{\zeta}_1)}$ cuando $t \rightarrow -\infty$. La densidad de materia es cero cuando el factor de escala es igual a a_{min} . Por lo tanto, no

**CAPÍTULO 6. MODELOS COSMOLÓGICOS CON VISCOSIDAD
VOLUMÉTRICA**

6.5. DENSIDAD DE MATERIA ρ_M

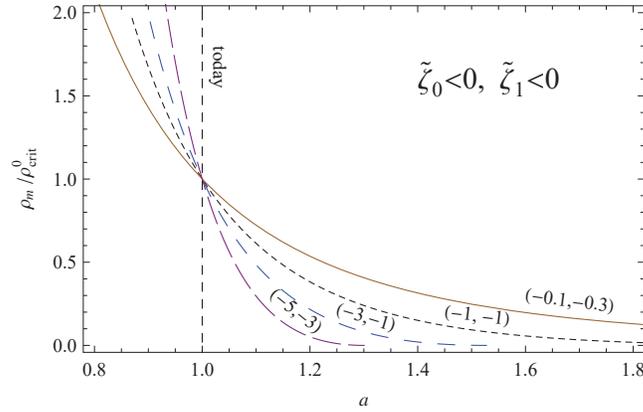


Figura 6.47: Gráficas de la densidad de materia ρ_m con respecto al factor de escala para diferentes valores de $(\tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}_1)$ donde $\tilde{\zeta}_0 < 0$ y $\tilde{\zeta}_1 < 0$ [ver ecuación (6.71)]. La densidad de materia diverge a infinito cuando el factor de escala es cero. Esto respalda la existencia de un Big-Bang como inicio del Universo, para este caso (ver sección 6.3.2). El factor de escala tiene un valor máximo de $a_{\max} = [(\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 - 3)/\tilde{\zeta}_0]^{2/(3-\tilde{\zeta}_1)}$ cuando $t \rightarrow \infty$. La densidad de materia es cero cuando el factor de escala tiene el valor a_{\max} , i.e., $\rho_m(a_{\max}) = 0$.

hay condiciones para la existencia de un Big-Bang para este subcaso además de ser un caso no físico. En ambos subcasos, cuando $a \rightarrow \infty$ entonces $\rho_m = \rho_{\text{crit}}^0 [\tilde{\zeta}_0 / (3 - \tilde{\zeta}_1)]^2$. Para el subcaso $\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 = 3$, la densidad de materia tiene el valor constante ρ_{crit}^0 . La figura 6.48 muestra el comportamiento de ρ_m con respecto al factor de escala.

Caso $\tilde{\zeta}_0 > 0, 0 < \tilde{\zeta}_1 < 3$: Este caso tiene exactamente el mismo comportamiento que el caso $(\tilde{\zeta}_0 > 0, \tilde{\zeta}_1 < 0)$. Ver figura 6.49 y expresión (6.71).

Caso $\tilde{\zeta}_0 < 0, 0 < \tilde{\zeta}_1 < 3$: La densidad de materia diverge cuando $a = 0$. Esto respalda la existencia de un Big-Bang en el pasado. El valor máximo que el factor de escala puede alcanzar es $a_{\max} = [(\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 - 3)/\tilde{\zeta}_0]^{2/(3-\tilde{\zeta}_1)}$ cuando $t \rightarrow \infty$. La densidad de materia es cero cuando el factor de escala es a_{\max} (ver figura 6.50).

Caso $\tilde{\zeta}_0 > 0, \tilde{\zeta}_1 > 3$: El valor mínimo del factor de escala es $a_{\min} = [\tilde{\zeta}_0 / (\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 - 3)]^{2/(3-\tilde{\zeta}_1)}$ cuando $t \rightarrow -\infty$ (ver sección 6.3.6). La densidad de materia es cero cuando el factor de escala es a_{\min} . Cuando $a \rightarrow \infty$, entonces $\rho_m \rightarrow \infty$ (ver figura 6.51).

Caso $\tilde{\zeta}_0 < 0, \tilde{\zeta}_1 > 3$: La densidad de materia es igual a $\rho_{\text{crit}}^0 [\tilde{\zeta}_0 / (3 - \tilde{\zeta}_1)]^2$ cuando $a \rightarrow 0$. Para el subcaso $\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 > 3$, cuando $a \rightarrow \infty$ entonces $\rho_m \rightarrow \infty$. Para el subcaso $\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 < 3$, el valor máximo que el factor de escala puede alcanzar es $a_{\max} = [\tilde{\zeta}_0 / (\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 - 3)]^{2/(3-\tilde{\zeta}_1)}$ cuando $t \rightarrow \infty$ (ver sección 6.3.7). La densidad de materia es igual a cero cuando el factor de escala es a_{\max} . Cuando $\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 = 3$, la densidad de materia tiene un valor constante de ρ_{crit}^0 a lo largo de toda la evolución del Universo (ver figura 6.52).

Caso $\tilde{\zeta}_0 > 0, \tilde{\zeta}_1 = 3$: Para este caso, primero sustituimos la expresión del parámetro de

CAPÍTULO 6. MODELOS COSMOLÓGICOS CON VISCOSIDAD
VOLUMÉTRICA

6.5. DENSIDAD DE MATERIA ρ_M

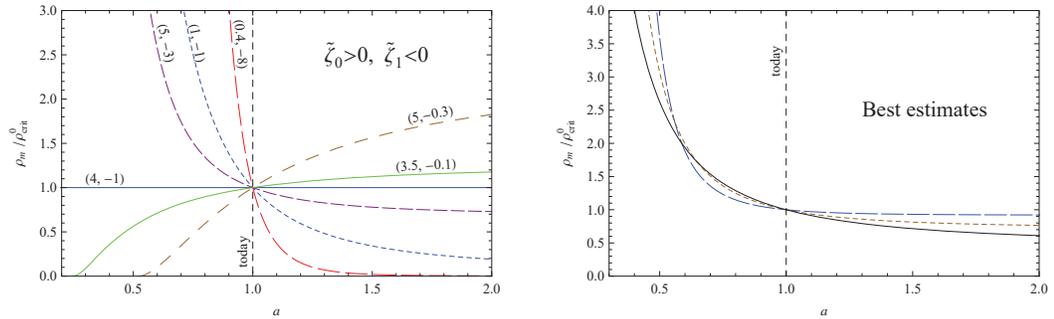


Figura 6.48: Gráfica de la densidad de materia ρ_m con respecto al factor de escala para diferentes valores de $(\tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}_1)$ donde $\tilde{\zeta}_0 > 0$ y $\tilde{\zeta}_1 < 0$ (panel de la izquierda) y también en las mejores estimaciones (panel de la derecha) [ver ecuación (6.71) y tabla 6.3]. Para el subcaso $\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 < 3$ (con $\tilde{\zeta}_0 > 0, \tilde{\zeta}_1 < 0$) la densidad de materia diverge a infinito cuando el factor de escala es cero. Esto respalda la afirmación de un Big-Bang como inicio del Universo (ver sección 6.3). Sin embargo, para el subcaso $\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 > 3$, el valor mínimo que el factor de escala alcanza es $a_{\min} = [(\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 - 3)/\tilde{\zeta}_0]^{2/(3-\tilde{\zeta}_1)}$ cuando $t \rightarrow -\infty$. La densidad de materia es cero cuando el factor de escala es igual a a_{\min} . De aquí que no haya condiciones para el Big-Bang en este subcaso. En ambos subcasos, cuando $a \rightarrow \infty$ entonces $\rho_m = \rho_{\text{crit}}^0 [\tilde{\zeta}_0 / (3 - \tilde{\zeta}_1)]^2$. Para el subcaso $\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 = 3$, la densidad de materia tiene el valor constante ρ_{crit}^0 . Para el panel de la derecha, las líneas punteadas cortas y largas corresponden a evaluar a la densidad de materia en las mejores estimaciones cuando es usada una FDP previa constante y de delta de Dirac para marginalizar sobre H_0 , respectivamente. La línea sólida negra corresponde a la mejor estimación para $\tilde{\zeta}_0$, cuando $\tilde{\zeta}_1 = 0$ y usando una FDP previa constante para marginalizar sobre H_0 .

**CAPÍTULO 6. MODELOS COSMOLÓGICOS CON VISCOSIDAD
VOLUMÉTRICA**
6.5. DENSIDAD DE MATERIA ρ_M

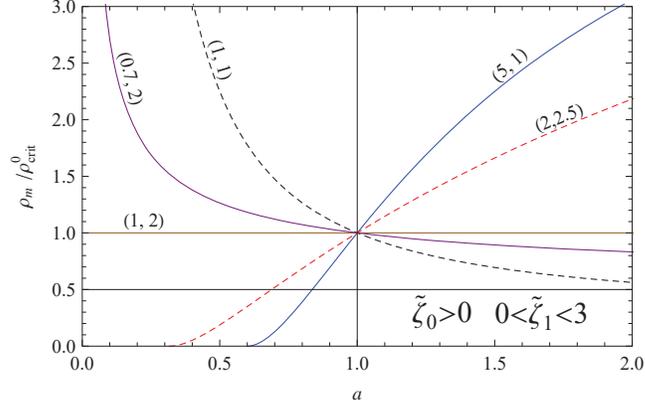


Figura 6.49: Gráfica de la densidad de materia ρ_m con respecto al factor de escala para diferentes valores de $(\tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}_1)$ donde $\tilde{\zeta}_0 > 0$ y $0 < \tilde{\zeta}_1 < 3$ [ver ecuación (6.71)]. Para el subcaso $\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 < 3$ (con $\tilde{\zeta}_0 > 0, \tilde{\zeta}_1 < 0$) la densidad de materia diverge cuando el factor de escala es igual a cero. Esto respalda la afirmación de un Big-Bang como inicio del Universo (ver sección 6.3.4). Sin embargo, para el subcaso $\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 > 3$ el valor mínimo que el factor de escala alcanza es $a_{\min} = [(\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 - 3)/\tilde{\zeta}_0]^{2/(3-\tilde{\zeta}_1)}$ cuando $t \rightarrow -\infty$. La densidad de materia es cero cuando el factor de escala es igual a a_{\min} . Por tanto, no hay condiciones para un Big-Bang, además de no ser físico este subcaso. En ambos subcasos, cuando $a \rightarrow \infty$ entonces $\rho_m = \rho_{\text{crit}}^0 [\tilde{\zeta}_0 / (3 - \tilde{\zeta}_1)]^2$. Para el subcaso $\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 = 3$, la densidad de materia tiene un valor constante ρ_{crit}^0 .

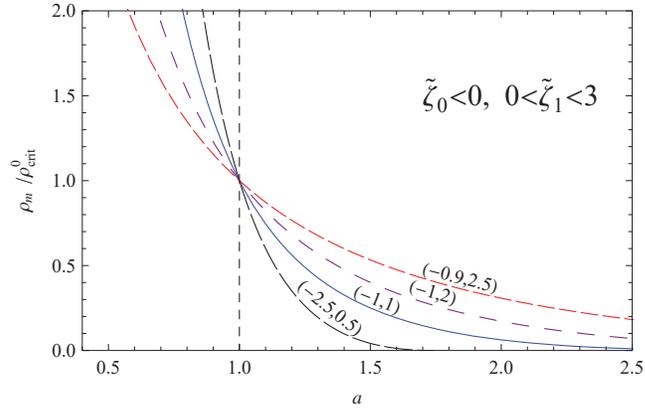


Figura 6.50: Gráficas de la densidad de materia ρ_m con respecto al factor de escala para diferentes valores de $(\tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}_1)$ donde $\tilde{\zeta}_0 < 0$ y $0 < \tilde{\zeta}_1 < 3$. La densidad de materia diverge cuando $a = 0$. Esto respalda la existencia de un Big-Bang como inicio del Universo. El valor máximo que el factor de escala puede alcanzar es $a_{\max} = [(\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 - 3)/\tilde{\zeta}_0]^{2/(3-\tilde{\zeta}_1)}$ cuando $t \rightarrow \infty$. La densidad de materia es cero cuando el factor de escala es igual a a_{\max} .

**CAPÍTULO 6. MODELOS COSMOLÓGICOS CON VISCOSIDAD
VOLUMÉTRICA**

6.5. DENSIDAD DE MATERIA ρ_M

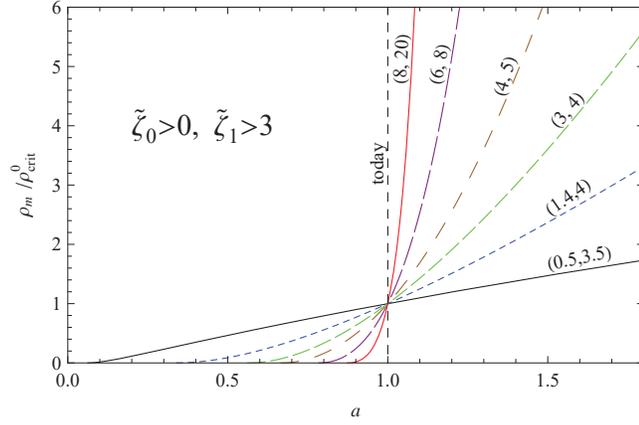


Figura 6.51: Gráficas de la densidad de materia ρ_m con respecto al factor de escala para diferentes valores de $(\tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}_1)$ donde $\tilde{\zeta}_0 > 0$ y $\tilde{\zeta}_1 > 3$. El valor mínimo que el factor de escala puede alcanzar es $a_{\min} = [\tilde{\zeta}_0 / (\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 - 3)]^{2/(3-\tilde{\zeta}_1)}$ cuando $t \rightarrow -\infty$ (ver sección 6.3.6). La densidad de materia es cero cuando el factor de escala es igual a a_{\min} lo cual carece de sentido físico. Cuando $a \rightarrow \infty$, entonces $\rho_m \rightarrow \infty$.

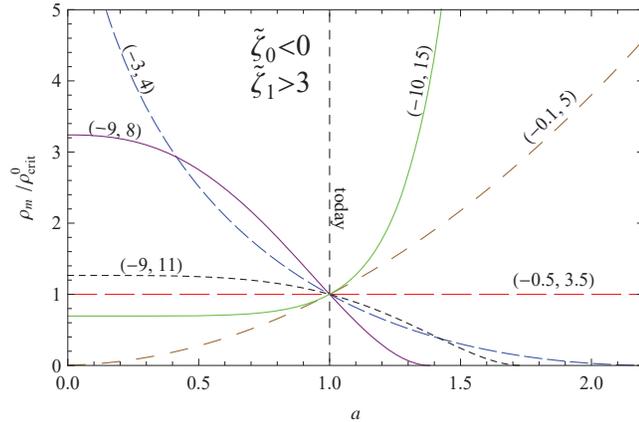


Figura 6.52: Gráfica de la densidad de materia ρ_m con respecto al factor de escala para diferentes valores de $(\tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}_1)$ donde $\tilde{\zeta}_0 < 0$ y $\tilde{\zeta}_1 > 3$. La densidad de materia es igual a $\rho_{\text{crit}}^0 [\tilde{\zeta}_0 / (3 - \tilde{\zeta}_1)]^2$ cuando $a \rightarrow 0$. Para el subcaso $\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 > 3$, cuando $a \rightarrow \infty$ entonces $\rho_m \rightarrow \infty$. Para el subcaso $\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 < 3$, el valor máximo que el factor de escala puede alcanzar es $a_{\max} = [\tilde{\zeta}_0 / (\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 - 3)]^{2/(3-\tilde{\zeta}_1)}$ cuando $t \rightarrow \infty$ (ver sección 6.3.7). La densidad de materia es igual a cero cuando el factor de escala es a_{\max} . Cuando $\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 = 3$, la densidad de materia tiene un valor constante de ρ_{crit}^0 a lo largo de la evolución del Universo.

CAPÍTULO 6. MODELOS COSMOLÓGICOS CON VISCOSIDAD
VOLUMÉTRICA

6.5. DENSIDAD DE MATERIA ρ_M

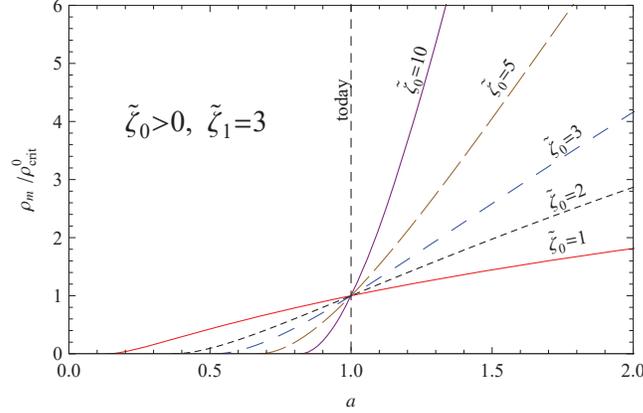


Figura 6.53: Gráficas de la densidad de materia ρ_m con respecto al factor de escala para diferentes valores de $\tilde{\zeta}_0 > 0$ con $\tilde{\zeta}_1 = 3$. El valor mínimo que el factor de escala puede alcanzar es $a_{\min} = \exp(-2/\tilde{\zeta}_0)$ cuando $t \rightarrow -\infty$ (ver sección 6.3.8). La densidad de materia es cero cuando el factor de escala es igual a a_{\min} . Y cuando $a \rightarrow \infty$, entonces $R \rightarrow \infty$.

Hubble (6.33), en (6.70) produciendo

$$\rho_m(a, \tilde{\zeta}_1 = 3) = \rho_{\text{crit}}^0 \left(1 + \frac{1}{2} \tilde{\zeta}_0 \ln a \right)^2. \quad (6.72)$$

En el caso $\tilde{\zeta}_0 > 0$ con $\tilde{\zeta}_1 = 3$, el valor mínimo que el factor de escala alcanza es $a_{\min} = \exp(-2/\tilde{\zeta}_0)$ cuando $t \rightarrow -\infty$ (ver sección 6.3.8). La densidad de materia es cero cuando el factor de escala es igual a a_{\min} . Y cuando $a \rightarrow \infty$, entonces $R \rightarrow \infty$ (ver figura 6.53).

Caso $\tilde{\zeta}_0 < 0$, $\tilde{\zeta}_1 = 3$: La densidad de materia diverge cuando $a \rightarrow 0$. El valor máximo que el factor de escala alcanza es $a_{\max} = \exp(-2/\tilde{\zeta}_0)$ (ver sección 6.3.9). Sucede que $\rho_m(a_{\max}) = 0$ (ver figura 6.54).

Caso $\tilde{\zeta}_0 = 0$, $\tilde{\zeta}_1 = 3$: Fijamos $\tilde{\zeta}_0 = 0$ en la expresión (6.72) produciendo $\rho_m = \rho_{\text{crit}}^0$.

Caso $\tilde{\zeta}_0 = 0$, $\tilde{\zeta}_1 \neq 0$: Primero fijamos $\tilde{\zeta}_0 = 0$ en la expresión (6.71) para obtener

$$\rho_m(a, \tilde{\zeta}_0 = 0, \tilde{\zeta}_1) = \rho_{\text{crit}}^0 a^{(\tilde{\zeta}_1 - 3)}. \quad (6.73)$$

Encontramos que para $\tilde{\zeta}_1 < 3$ la densidad de materia diverge cuando $a \rightarrow 0$, y es cero cuando $a \rightarrow \infty$. Para $\tilde{\zeta}_1 > 3$ sucede que $\rho_m(a \rightarrow 0) = 0$ y $\rho_m(a \rightarrow \infty) = \infty$ (ver figura 6.55).

Caso $\tilde{\zeta}_0 \neq 0$, $\tilde{\zeta}_1 = 0$: Este corresponde al otro caso de interés dado que es un buen candidato a explicar la expansión acelerada del Universo, en particular, el subcaso $0 < \tilde{\zeta} < 3$.

**CAPÍTULO 6. MODELOS COSMOLÓGICOS CON VISCOSIDAD
VOLUMÉTRICA**

6.5. DENSIDAD DE MATERIA ρ_M

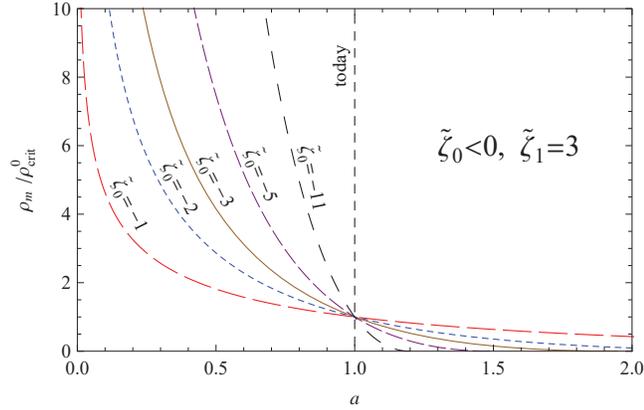


Figura 6.54: Gráficas de la densidad de materia ρ_m con respecto al factor de escala para diferentes valores de $\tilde{\zeta}_0 < 0$ con $\tilde{\zeta}_1 = 3$ [ver ecuación (6.71)]. La densidad de materia diverge cuando $a \rightarrow 0$. El valor máximo que el factor de escala alcanza es $a_{\max} = \exp(-2/\tilde{\zeta}_0)$ (ver sección 6.3.9), en este valor sucede que $\rho_m(a_{\max}) = 0$.

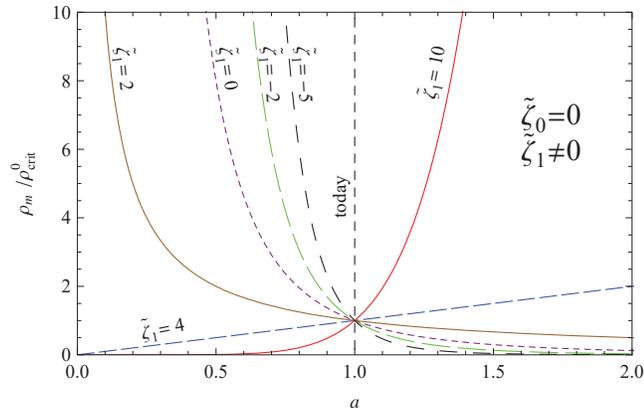


Figura 6.55: Gráfica de la densidad de materia ρ_m con respecto al factor de escala para diferentes valores de $\tilde{\zeta}_1$ con $\tilde{\zeta}_0 = 0$ [ver ecuación (6.73)]. Encontramos que para $\tilde{\zeta}_1 < 3$ la densidad de materia diverge cuando $a \rightarrow 0$ y es cero cuando $a \rightarrow \infty$. Para $\tilde{\zeta}_1 > 3$ tenemos que $\rho_m(a \rightarrow 0) = 0$ y $\rho_m(a \rightarrow \infty) = \infty$.

CAPÍTULO 6. MODELOS COSMOLÓGICOS CON VISCOSIDAD VOLUMÉTRICA

6.6. PRUEBAS COSMOLÓGICAS

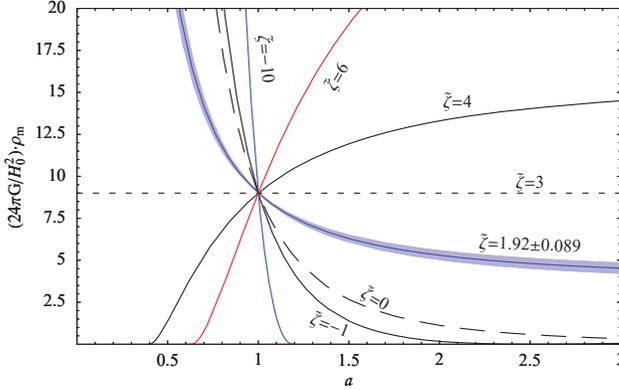


Figura 6.56: Gráfica de la densidad de materia $\rho_m(a, \tilde{\zeta}_0)$ con respecto al factor de escala, para diferentes valores de $\tilde{\zeta}_0$. La línea de punteo largo corresponde a $\tilde{\zeta}_0 = 0$ y la de punteo corto a $\tilde{\zeta}_0 = 3$ (Universo de de Sitter). La línea con la banda (azul) corresponde a un modelo con $\tilde{\zeta}_0 = 1.922 \pm 0.089$. Esta es la mejor estimación calculada a partir de los datos de supernovas Ia usando la muestra “Union” del SCP. La banda corresponde al error en la estimación de $\tilde{\zeta}_0$ a un 68.3% de nivel de confianza.

- Cuando $\tilde{\zeta}_0 = 0$ entonces $\rho_m = (3H_0^2/8\pi G) a^{-3}$ que corresponde a un Universo dominado por materia sin viscosidad.
- Cuando $\tilde{\zeta}_0 = 3$ entonces $\rho_m = 3H_0^2/8\pi G$ que corresponde a un Universo de de Sitter.
- Subcaso $0 < \tilde{\zeta}_0 < 3$: La densidad de materia es infinita cuando $a \rightarrow 0$ (la singularidad del Big-Bang). A partir de este valor infinito, la densidad de materia va decreciendo conforme el Universo se va expandiendo hasta alcanzar su valor mínimo de $\rho_m = (H_0^2/24\pi G)\tilde{\zeta}_0^2$ cuando $a \rightarrow \infty$ (ver figura 6.48).
- Subcaso $\tilde{\zeta}_0 > 3$: Cuando $a = a_{\min}$ entonces $\rho_m(a_{\min}) = 0$ donde $a_{\min} = (1 - 3/\tilde{\zeta}_0)^{2/3}$ es el valor mínimo que del factor de escala. Es una función creciente desde cero hasta alcanzar su valor máximo de $\rho_m = (H_0^2/24\pi G)\tilde{\zeta}_0^2$ cuando $a \rightarrow \infty$.
- Subcaso $\tilde{\zeta}_0 < 0$: Cuando $a \rightarrow 0$ entonces $\rho_m \rightarrow \infty$ (la singularidad del Big-Bang). Es una función decreciente hasta alcanzar su valor mínimo de $\rho_m(a_{\max}) = 0$, donde $a_{\max} = (1 - 3/\tilde{\zeta}_0)^{2/3}$.

6.6. Pruebas cosmológicas

El presente modelo cosmológico es probado usando cinco pruebas cosmológicas: los datos de supernovas Ia, el parámetro de corrimiento \mathcal{R} del CMB, la localización del pico acústico en BAO, la segunda ley de la termodinámica y las cotas observacionales en la edad del Universo. Los detalles de estas pruebas son descritos en los capítulos 2 y 5. Para las tres primeras pruebas se usó un análisis estadístico Bayesiano que es descrito en el capítulo

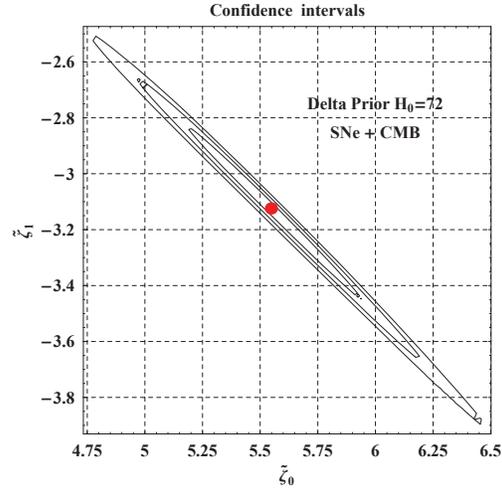


Figura 6.57: Intervalos de confianza para $(\tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}_1)$. La constante de Hubble H_0 es marginalizada asumiendo una FDP previa de la forma de un delta de Dirac centrada en $H_0 = 72$ (km/s)Mpc $^{-1}$. Los valores mejor estimados e intervalos de confianza fueron calculados usando el conjunto de datos de SNe Ia “Union” (2008) del SCP y el parámetro de corrimiento \mathcal{R} del CMB. Se encontraron los valores $\tilde{\zeta}_0 = 5.546 \pm 0.24$ y $\tilde{\zeta}_1 = -3.1241 \pm 0.2$ como mejores estimaciones. Los intervalos de confianza corresponden a 68.3%, 95.4% y 99.73% de probabilidad.

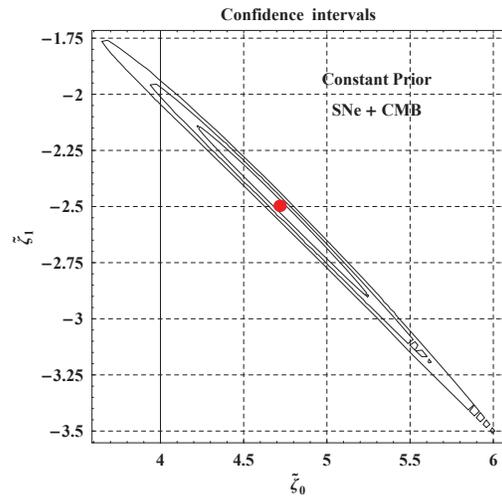


Figura 6.58: Intervalos de confianza para $(\tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}_1)$. La constante de Hubble H_0 es marginalizada asumiendo una FDP previa *constante*. Se usó el conjunto de datos de SNe Ia “Union” (2008) del SCP y el parámetro de corrimiento \mathcal{R} del CMB. Se encontraron los valores $\tilde{\zeta}_0 = 4.716 \pm 0.34$ y $\tilde{\zeta}_1 = -2.496 \pm 0.25$ como mejores estimaciones. Los intervalos de confianza corresponden a 68.3%, 95.4% y 99.73% de probabilidad.

**CAPÍTULO 6. MODELOS COSMOLÓGICOS CON VISCOSIDAD
VOLUMÉTRICA**
6.6. PRUEBAS COSMOLÓGICAS

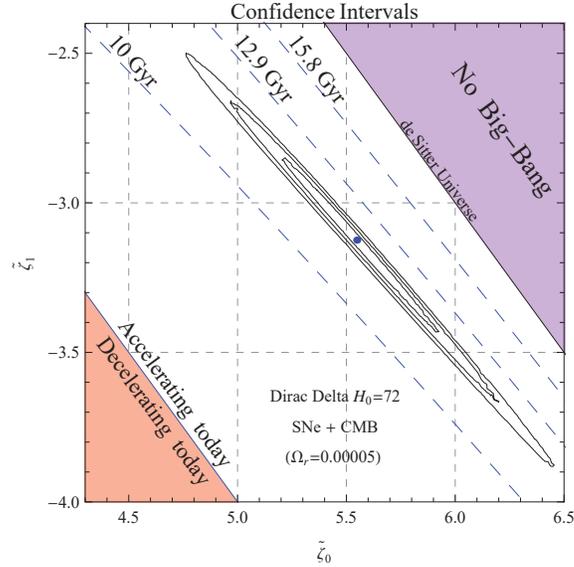


Figura 6.59: Intervalos de confianza para $(\tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}_1)$ del modelo dominado por materia viscosa $\zeta = \zeta_0 + \zeta_1 H$. La constante de Hubble H_0 es marginalizada asumiendo una FDP previa de la forma de una delta de Dirac centrada en $H_0 = 72$ (km/s)Mpc⁻¹. En este caso se consideró la presencia de la componente de radiación con un valor de $\Omega_{r0} = 0.00005$. Las mejores estimaciones e intervalos de confianza se calcularon usando la muestra de supernovas “Union” (2008) del SCP y el parámetro de corrimiento \mathcal{R} del CMB. Se encontraron los valores $\tilde{\zeta}_0 = 5.54 \pm 0.24$ y $\tilde{\zeta}_1 = -3.124 \pm 0.2$ como mejores estimaciones. Los intervalos de confianza corresponden a 68.3 %, 95.4 % y 99.73 % de probabilidad.

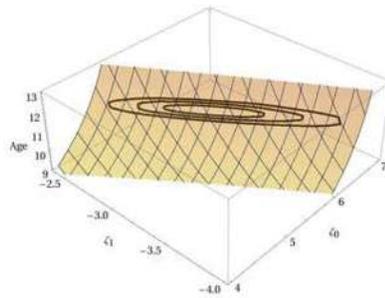


Figura 6.60: Proyección de los intervalos de confianza de $(\tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}_1)$ de la figura 6.59, en el plano de la edad del Universo dada por la expresión (6.24). La edad esta dada en unidades de *Gigayears* (Gyr). Los tres intervalos de confianza (68.3 %, 95.4 % y 99.73 %) caen en una región superior al hiperplano de 11 Gyr para la edad del Universo, lo cual es consistente con las cotas observacionales en la edad que surgen a partir de los cúmulos globulares [80] (ver también la figura 6.8).

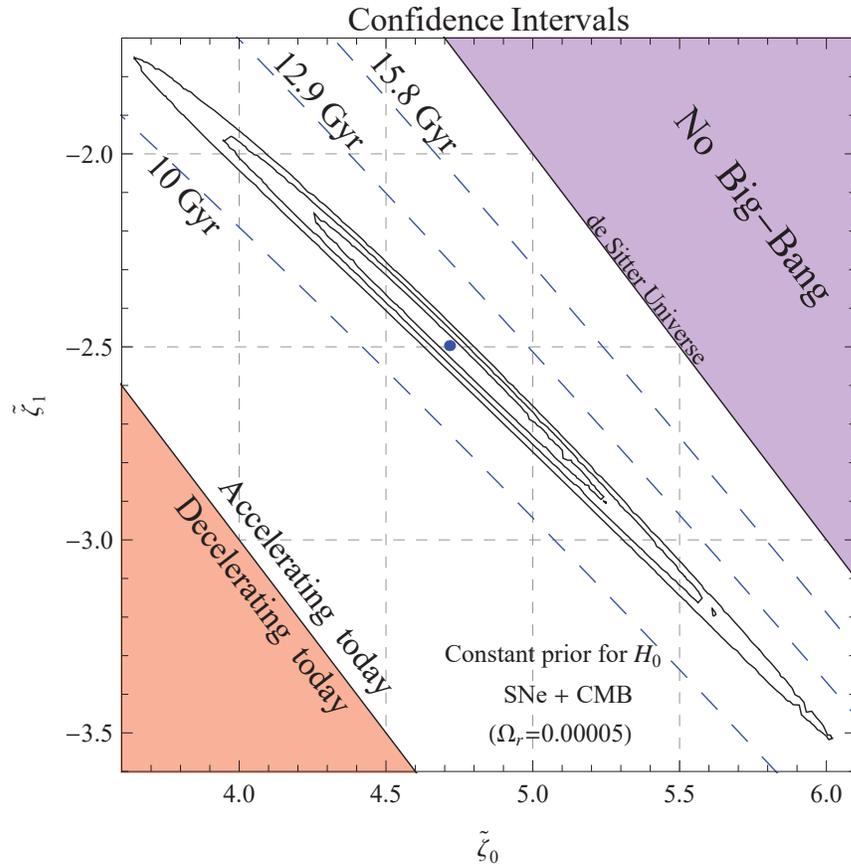


Figura 6.61: Intervalos de confianza para $(\tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}_1)$. La constante de Hubble H_0 es marginalizada asumiendo una FDP previa *constante*. En este caso se consideró también la presencia de la componente de radiación con un valor de $\Omega_{r0} = 0.00005$. Se usó la muestra de SNe Ia “Union” (2008) del SCP y el parámetro de corrimiento \mathcal{R} del CMB. Se encontraron los valores $\tilde{\zeta}_0 = 4.716 \pm 0.34$ y $\tilde{\zeta}_1 = -2.496 \pm 0.25$ como mejores estimaciones. Los intervalos de confianza corresponden a 68.3 %, 95.4 % y 99.73 % de probabilidad.

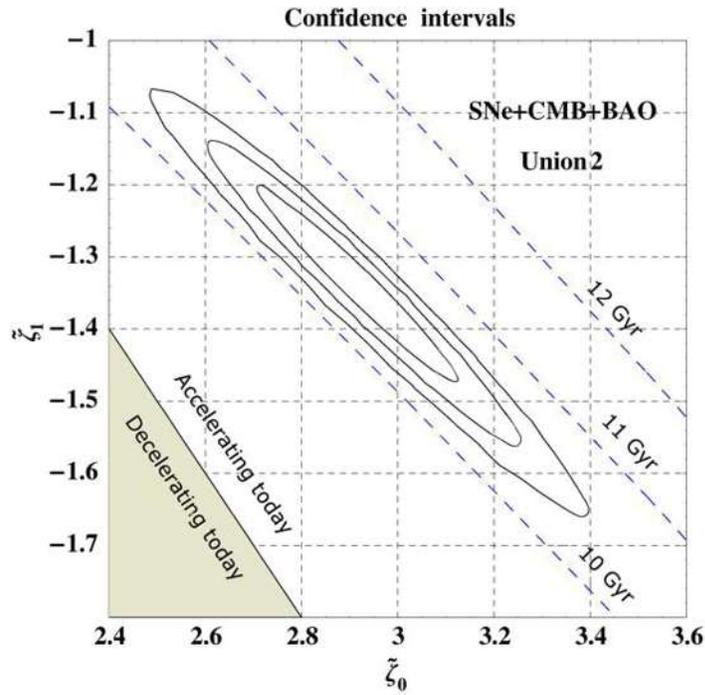


Figura 6.62: Intervalos de confianza para los coeficientes adimensionales $(\tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}_1)$ del modelo dominado por materia viscosa $\zeta = \zeta_0 + \zeta_1 H$. La constante de Hubble H_0 es marginalizada asumiendo una FDP previa constante. Los valores mejor estimados e intervalos de confianza fueron calculados usando las tres prueba conjuntas: SNe Ia “Union2” (2010) del SCP, el parámetro de corrimiento \mathcal{R} del CMB y el pico acústico A de BAO. Los intervalos de confianza corresponden a 68.3%, 95.4% y 99.73% de probabilidad.

CAPÍTULO 6. MODELOS COSMOLÓGICOS CON VISCOSIDAD
VOLUMÉTRICA
6.6. PRUEBAS COSMOLÓGICAS

Probability density functions

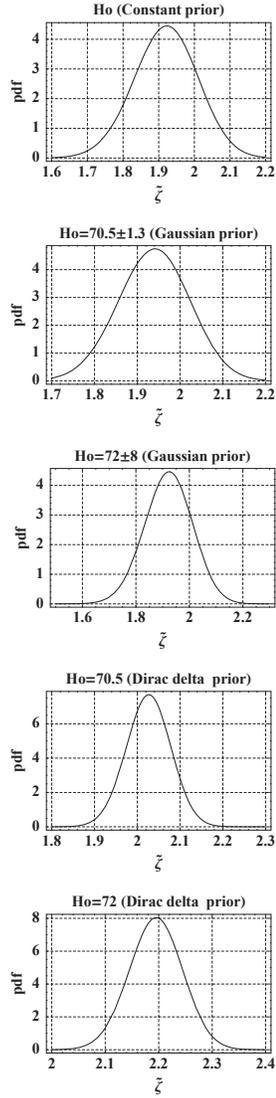


Figura 6.63: Gráfica de la función de distribución de probabilidad para $\tilde{\zeta}_0$ (con $\tilde{\zeta}_1 = 0$). Se usaron cinco diferentes marginalizaciones para H_0 , que de arriba a abajo son: Marginalización asumiendo una FDP previa (1) *constante*, (2) Gaussiana, centrada en $H_0 = 70.5 \pm 1.3(\text{km/s})\text{Mpc}^{-1}$ como lo reporta WMAP [33], (3) Gaussiana, centrada en $H_0 = 72 \pm 8(\text{km/s})\text{Mpc}^{-1}$ como lo reporta el “*Hubble Space Telescope*” de la observación de estrellas variables Cefeidas [38], (4) delta de Dirac, centrada en $H_0 = 70.5 (\text{km/s})\text{Mpc}^{-1}$ y (5) delta de Dirac, centrada en $H_0 = 72 (\text{km/s})\text{Mpc}^{-1}$. Se usó la muestra SNe Ia “Union” (2008) del SCP [37] (ver tabla 6.5).

3. Por tanto, en las siguientes secciones solo se describen los aspectos más relevantes de las pruebas, aplicadas al presente modelo.

Las pruebas antes mencionadas permiten estudiar la viabilidad del modelo y a su vez estimar e imponer cotas a los valores posibles de $(\tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}_1)$ para que sean consistentes con las observaciones. Para ello, en el caso de las pruebas de SNe, CMB y BAO, se construirá la función χ^2 con la que se calcularán las mejores estimaciones de $(\tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}_1)$ y se medirá la calidad del ajuste a los datos a través del valor obtenido del mínimo de la función χ^2 . Luego, se calcularán sus intervalos de confianza para acotar sus posibles valores a 1σ , 2σ y 3σ .

6.6.1. Supernovas, \mathcal{R} -CMB y A -BAO.

Supernovas Ia

Para el caso de la prueba de supernovas Ia se utilizó la muestra “Union” (2008) del proyecto “*The Supernova Cosmology Project*” (SCP) compuesta por 307 SNe Ia generada con 13 muestras independientes [37]. Y también la muestra “Union2” (2010) del SCP, que contiene 557 datos de SNe Ia [18]. Esta última es la muestra más grande y confiable con la que se cuenta actualmente de SNe Ia.

Usando la definición de la *distancia de luminosidad* d_L (ver expresión (2.24) y [20], [40]–[83]) en una cosmología espacialmente plana se tiene

$$d_L(z, \tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}_1, H_0) = c(1+z) \int_0^z \frac{dz'}{H(z', \tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}_1, H_0)}, \quad (6.74)$$

donde $H(z, \tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}_1, H_0)$ esta dado por la expresión (6.13) y “ c ” es la velocidad de la luz. La distancia modular teórica para la k -ésima supernova con redshift z_k queda dada como [ver expresión (2.42)]

$$\mu^t(z_k, \tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}_1, H_0) \equiv m - M = 5 \log_{10} \left[\frac{d_L(z_k, \tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}_1, H_0)}{\text{Mpc}} \right] + 25, \quad (6.75)$$

el superíndice “ t ” indica “*teórica*”. Construimos la función χ^2 como [ver expresión (3.52)]:

$$\chi_{\text{SNe}}^2(\tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}_1, H_0) \equiv \sum_{k=1}^n \frac{[\mu^t(z_k, \tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}_1, H_0) - \mu_k]^2}{\sigma_k^2}, \quad (6.76)$$

donde μ_k es la distancia modular *observacional* de la k -ésima supernova con redshift z_k y σ_k^2 es la varianza de la medición.

Parámetro de corrimiento \mathcal{R} del CMB

Para el parámetro de corrimiento \mathcal{R} del CMB, usamos el valor reportado por WMAP [33]. Teóricamente y para espacio plano, \mathcal{R} se define para nuestro modelo como (ver expresión (2.59) y [31, 33])

$$\mathcal{R}(\tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}_1) \equiv \int_0^{z_{\text{rec}}} \frac{dz'}{E(z', \tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}_1)}, \quad (6.77)$$

**CAPÍTULO 6. MODELOS COSMOLÓGICOS CON VISCOSIDAD
VOLUMÉTRICA**
6.6. PRUEBAS COSMOLÓGICAS

donde $z_{\text{rec}} = 1089$ corresponde al redshift de la época de recombinación [30] y $E(z', \tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}_1) \equiv H(z', \tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}_1)/H_0$. El valor reportado es de $\mathcal{R}_{\text{obs}} = 1.70 \pm 0.03$ [31]. La función χ^2 se define como

$$\chi_{\text{CMB}}^2(\tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}_1) \equiv \left[\frac{\mathcal{R}(\tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}_1) - \mathcal{R}_{\text{obs}}}{\sigma_{\mathcal{R}}} \right]^2. \quad (6.78)$$

Pico acústico A de BAO

En el caso del pico acústico A de las oscilaciones acústicas bariónicas, la expresión teórica viene dada por [ver expresión (2.64)]

$$A(\tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}_1) = \frac{1}{E(z_{\text{BAO}})^{1/3}} \left[\frac{1}{z_{\text{BAO}}} \int_0^{z_{\text{BAO}}} \frac{dz}{E(\tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}_1)} \right]^{2/3}, \quad (6.79)$$

donde $z_{\text{BAO}} = 0.35$. El valor reportado es de [34]

$$A_{\text{obs}} = 0.469 \pm 0.017. \quad (6.80)$$

La función χ^2 queda dada entonces como

$$\chi_{\text{BAO}}^2(\tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}_1) \equiv \frac{[A(\tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}_1) - A_{\text{obs}}]^2}{\sigma_A^2}. \quad (6.81)$$

Con estas tres funciones χ^2 construimos la χ^2 *total* como

$$\chi_{\text{total}}^2(\tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}_1, H_0) = \chi_{\text{SNe}}^2 + \chi_{\text{CMB}}^2 + \chi_{\text{BAO}}^2. \quad (6.82)$$

Minimizamos numéricamente para calcular las mejores estimaciones de $(\tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}_1)$, sus intervalos de confianza y la calidad de ajuste a los datos. Los resultados de estos análisis se muestran en las tablas 6.3–6.5 y figuras 6.10–6.63.

6.6.2. Termodinámica y la entropía local.

Como se describió en el capítulo 5, la ley de generación de entropía local en un fluido en la métrica de FRW puede escribirse como [ver ecuación (5.27)]

$$T_0 \nabla_\nu s^\nu = \zeta (\nabla_\nu U^\nu)^2 = 9H^2 \zeta, \quad (6.83)$$

donde T_0 es la temperatura y $\nabla_\nu s^\nu$ es la razón de producción de entropía por unidad de volumen. La segunda ley de la termodinámica se expresa como

$$T_0 \nabla_\nu s^\nu \geq 0, \quad (6.84)$$

lo cual implica de la expresión (6.83) que

$$\zeta \geq 0, \quad (6.85)$$

El coeficiente de viscosidad ζ corresponde a la viscosidad *total*, por lo que para el presente modelo la desigualdad (6.85) se expresa como

**CAPÍTULO 6. MODELOS COSMOLÓGICOS CON VISCOSIDAD
VOLUMÉTRICA**
6.6. PRUEBAS COSMOLÓGICAS

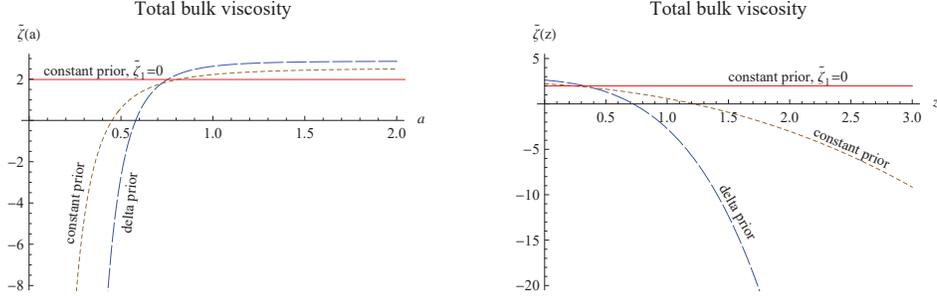


Figura 6.64: Gráfica de la viscosidad *total* adimensional $\tilde{\zeta} = \tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 H$ con respecto al factor de escala (panel izquierdo) y el redshift (panel derecho) [ver ecuación (6.87)] cuando es evaluada en las mejores estimaciones para $(\tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}_1)$ (ver tabla 6.3). En el Universo temprano la viscosidad total es negativa para el caso del uso de una FDP previa de delta de Dirac y constante, y positiva para el caso en que se fija $\tilde{\zeta}_1 = 0$. La transición entre valores negativos a positivos para el modelo $\tilde{\zeta} = \tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 H$ esta dada por la ecuación (6.88). Cuando $a \rightarrow \infty$ la viscosidad total tiene el valor de $\zeta = 3\tilde{\zeta}_0/(3 - \tilde{\zeta}_1)$.

$$\zeta = \zeta_0 + \zeta_1 H \geq 0. \quad (6.86)$$

Por otra parte, usando la expresión para el parámetro de Hubble (6.14) encontramos que la expresión para la viscosidad total $\zeta(a)$ esta dada como

$$\tilde{\zeta}(a) = \tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 \left[\left(1 - \frac{\tilde{\zeta}_0}{3 - \tilde{\zeta}_1} \right) a^{(\tilde{\zeta}_1 - 3)/2} + \frac{\tilde{\zeta}_0}{3 - \tilde{\zeta}_1} \right], \quad (6.87)$$

donde hemos definido el coeficiente adimensional de viscosidad total $\tilde{\zeta} \equiv (24\pi G/H_0)\zeta$. La figura 6.64 muestra el comportamiento de $\tilde{\zeta}$ con respecto al factor de escala cuando $(\tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}_1)$ son evaluadas en las mejores estimaciones. Encontramos que la viscosidad total para las mejores estimaciones $(\tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}_1)$ es negativa para tiempos tempranos del Universo y positiva para tiempos tardíos. Para la mejor estimación de $\tilde{\zeta}_0$ sola (cuando fijamos $\tilde{\zeta}_1 = 0$), la viscosidad total es positiva y constante a lo largo de toda la evolución del Universo.

De acuerdo a la ecuación (6.86), valores negativos de la viscosidad total $\tilde{\zeta}$ implican una violación a la segunda ley de la termodinámica. Por tanto, el modelo $\tilde{\zeta} = \tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 H$, evaluado en las mejores estimaciones, viola la ley de la entropía en tiempos tempranos, pero el modelo $\tilde{\zeta} = \tilde{\zeta}_0$, evaluado en las mejores estimaciones para $\tilde{\zeta}_0$ (con $\tilde{\zeta}_1 = 0$) no.

La transición entre valores negativos a positivos de la viscosidad total para el caso $\tilde{\zeta} = \tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 H$ sucede cuando el factor de escala tiene el valor

$$a_{\text{np}} = \left[\frac{3\tilde{\zeta}_0}{\tilde{\zeta}_1(\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 - 3)} \right]^{2/\tilde{\zeta}_1 - 3}. \quad (6.88)$$

El subíndice “np” indica valores “positivos a negativos”. Para las mejores estimaciones para $(\tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}_1)$ usando la prueba de SNe, encontramos que el valor del factor de escala a_{np}

cuando la transición sucede son $a_{\text{np}} = 0.45$ y $a_{\text{np}} = 0.57$, que corresponden a cuando una distribución previa constante y de delta de Dirac son utilizadas para marginalizar sobre la constante de Hubble, respectivamente. Para las mejores estimaciones usando la prueba conjunta SNe + CMB encontramos que $a_{\text{np}} = 0.483$ y $a_{\text{np}} = 0.486$, que corresponden a cuando una FDP previa constante y de delta de Dirac son utilizadas para marginalizar sobre la constante de Hubble, respectivamente. Cuando $a \rightarrow \infty$, la viscosidad total es $\tilde{\zeta} = 3\tilde{\zeta}_0/(3 - \tilde{\zeta}_1)$.

6.7. Discusión de los resultados

De todos los posibles escenarios que el modelo predice y que fueron estudiados con detalle en este capítulo, resulta que el que *mejor* describe al Universo observado es el caso **(XII-a)**, caracterizado por el intervalo de valores: ($\tilde{\zeta}_0 \neq 0$, $\tilde{\zeta}_1 = 0$), y con la condición adicional de $0 < \tilde{\zeta}_0 < 3$. Dado que $\tilde{\zeta}_0$ es constante, este escenario corresponde al caso de tener un modelo cosmológico dominado por materia con viscosidad volumétrica parametrizada de la forma: $\zeta = \zeta_0 = \text{constante}$, la cual es la parametrización más *sencilla* que se pueda tener.

Cuando $0 < \tilde{\zeta}_0 < 3$, este escenario predice que el Universo tuvo un Big-Bang en el pasado, seguido por una expansión *desacelerada* en tiempos tempranos, que fue disminuyendo gradualmente hasta darse una transición suave a un periodo de expansión *acelerado* en tiempos recientes y que continuará por siempre.

Por otra parte, este escenario en particular es respaldado por los siguientes resultados:

1. El valor calculado del coeficiente $\tilde{\zeta}_0$ (se fijó $\tilde{\zeta}_1 = 0$) usando la muestra más reciente y robusta de datos observacionales de supernovas Ia es: $\tilde{\zeta}_0 = 1.9835 \pm 0.066$ (ver tabla 6.3) lo cual se encuentra *precisamente* en el intervalo $0 < \tilde{\zeta}_0 < 3$. Por lo tanto, las observaciones siguen indicando la existencia de la reciente *aceleración* en la expansión del Universo, de un Big-Bang y un periodo temprano de expansión *desacelerada*. Además de que prefieren al modelo con la parametrización *más sencilla* posible: $\zeta = \text{constante}$.
2. Se obtuvo un valor de $\chi_{\text{min}}^2 = 554.58$ (o de forma equivalente $\chi_{\text{d.o.f.}}^2 = 0.979$) al hacer el cálculo del valor de $\tilde{\zeta}_0$, lo cual indica un excelente ajuste a los datos. En otras palabras, el modelo $\zeta = \text{constante}$ logra explicar los datos observacionales de SNe Ia con una gran calidad de ajuste (que es medido a partir de la magnitud de $\chi_{\text{d.o.f.}}^2$).
3. La edad del Universo estimada es de 14.82 Gyr, lo cual está en perfecta concordancia con las cotas observacionales que vienen de las edades de los cúmulos globulares galácticos (12.9 ± 2.9 Gyr).
4. Se respeta la segunda ley de la termodinámica local, que establece $\zeta > 0$, lo cual se cumple en este escenario.

De acuerdo a este escenario y utilizando el valor de la mejor estimación para $\tilde{\zeta}_0$ se encuentra que la transición entre el periodo *desacelerado* al *acelerado* sucedió en el *pasado*, a un corrimiento al rojo de aproximadamente $z_t = 1.47$ (o equivalentemente $a_t = 0.4$).

CAPÍTULO 6. MODELOS COSMOLÓGICOS CON VISCOSIDAD VOLUMÉTRICA

6.7. DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

Ver cuadro 6.2.

Además del caso **(XII-a)** descrito arriba, se encontró que también el caso **(III-a)** caracterizado por los intervalos ($\tilde{\zeta}_0 > 0$, $\tilde{\zeta}_1 < 0$), y con la condición adicional de $\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 < 3$, tiene predicciones que están *parcialmente* de acuerdo con el Universo observado y que además es también preferido por las observaciones.

Es decir, el caso **(III-a)** predice también la existencia de un Big-Bang seguido de una expansión desacelerada y con una transición a un periodo de expansión acelerada eterna. Además, cuando se calcula las mejores estimaciones para los coeficientes $(\tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}_1)$ conjuntamente, resulta que sus valores calculados se ubican precisamente en los intervalos caracterizados por el escenario **(III-a)**, esto es ($\tilde{\zeta}_0 = 4.38 \pm 1.56$, $\tilde{\zeta}_1 = -2.166 \pm 1.42$) usando supernovas, y ($\tilde{\zeta}_0 = 2.917$, $\tilde{\zeta}_1 = -1.337$) usando las tres pruebas conjuntas SNe+CMB+BAO (ver cuadro 6.3).

Sin embargo, este escenario tiene dos problemas. Uno de ellos es que *viola* la segunda ley de la termodinámica local para tiempos tempranos del Universo (para $z > 3.22$ o $a < 0.45$). Y el segundo es que la edad del Universo estimada en este caso (11.72 Gyr) está por debajo del valor medio acotado usando cúmulos globulares galácticos (12.9 ± 2.9 Gyr). Ver cuadro 6.2.

Debido a estos problemas es que el escenario **(III-a)** no es del todo un buen candidato a explicar el Universo observado en comparación al escenario **(XII-a)** con $0 < \tilde{\zeta}_0 < 3$.

A continuación se hace una síntesis de las características de todos los escenarios, cuyo análisis detallado se puede consultar a lo largo de este capítulo. La mayoría de los escenarios [a excepción de **(III-a)** y **(XII-a)**], o bien no corresponde del todo al Universo observado o bien no son físicos, además de que no son favorecidos por las pruebas cosmológicas aplicadas (SNe, CMB, BAO).

- Caso **(I)** $\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 = 3$: Universo de *de Sitter*. No Big-Bang y con una expansión exponencial.
- Caso **(II)** $\tilde{\zeta}_0 < 0$, $\tilde{\zeta}_1 < 0$: Tiene Big-Bang. Expansión eternamente *desacelerada*. $R \rightarrow \infty$ cuando $a \rightarrow 0$, $R(a_{\max}) = 0$. $\rho_m \rightarrow \infty$ cuando $a \rightarrow 0$, $\rho_m(a_{\max}) = 0$.
- Caso **(III-a)** $\tilde{\zeta}_0 > 0$, $\tilde{\zeta}_1 < 0$, y con $\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 < 3$: Tiene Big-Bang. Expansión desacelerada con transición a acelerada. $R \rightarrow \infty$ cuando $a \rightarrow 0$, $R \rightarrow 12[H_0\tilde{\zeta}_0/(3 - \tilde{\zeta}_1)]^2$ cuando $a \rightarrow \infty$. $\rho_m \rightarrow \infty$ cuando $a \rightarrow 0$, $\rho_m = \rho_{\text{crit}}^0[\tilde{\zeta}_0/(3 - \tilde{\zeta}_1)]^2$ cuando $a \rightarrow \infty$.
- Caso **(III-b)** $\tilde{\zeta}_0 > 0$, $\tilde{\zeta}_1 < 0$, y con $\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 > 3$: No Big-Bang. Expansión eternamente *acelerada*. $R(a_{\min}) = 0$, $R \rightarrow 12[H_0\tilde{\zeta}_0/(3 - \tilde{\zeta}_1)]^2$ cuando $a \rightarrow \infty$. $\rho_m(a_{\min}) = 0$, $\rho_m = \rho_{\text{crit}}^0[\tilde{\zeta}_0/(3 - \tilde{\zeta}_1)]^2$ cuando $a \rightarrow \infty$.
- Caso **(IV-a)** $\tilde{\zeta}_0 > 0$, $0 < \tilde{\zeta}_1 < 3$, y con $\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 < 3$: Tiene Big-Bang. Expansión eternamente *acelerada*, o con *transición* desaceleración-aceleración si $\tilde{\zeta}_1 < 1$. $R \rightarrow \infty$ cuando $a \rightarrow 0$. $\rho_m \rightarrow \infty$ cuando $a \rightarrow 0$, $\rho_m = \rho_{\text{crit}}^0[\tilde{\zeta}_0/(3 - \tilde{\zeta}_1)]^2$ cuando $a \rightarrow \infty$.
- Caso **(IV-b)** $\tilde{\zeta}_0 > 0$, $0 < \tilde{\zeta}_1 < 3$, y con $\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 > 3$: No Big-Bang. Expansión eternamente *acelerada*. $R(a_{\min}) = 0$, $R \rightarrow 12[H_0\tilde{\zeta}_0/(3 - \tilde{\zeta}_1)]^2$ cuando $a \rightarrow \infty$. $\rho_m(a_{\min}) = 0$, $\rho_m = \rho_{\text{crit}}^0[\tilde{\zeta}_0/(3 - \tilde{\zeta}_1)]^2$ cuando $a \rightarrow \infty$.

**CAPÍTULO 6. MODELOS COSMOLÓGICOS CON VISCOSIDAD
VOLUMÉTRICA**

6.7. DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

- Caso **(V)** $\tilde{\zeta}_0 < 0$, $0 < \tilde{\zeta}_1 < 3$: Tiene Big-Bang. Si $\tilde{\zeta}_1 > 1$ hay transición *aceleración-desaceleración* (observe el orden de la transición). Y si $\tilde{\zeta}_1 \leq 1$ la expansión es siempre *desacelerada*. $R \rightarrow \infty$ cuando $a \rightarrow 0$, $R(a_{\max}) = 0$. $\rho_m \rightarrow \infty$ cuando $a \rightarrow 0$, $\rho_m(a_{\max}) = 0$.
- Caso **(VI)** $\tilde{\zeta}_0 > 0$, $\tilde{\zeta}_1 > 3$: No Big-Bang. Expansión siempre *acelerada* hasta alcanzar un *Big-Rip*. $R(a_{\min}) = 0$, $R \rightarrow \infty$ cuando $a \rightarrow \infty$. $\rho_m(a_{\min}) = 0$, $\rho_m \rightarrow \infty$ cuando $a \rightarrow \infty$.
- Caso **(VII-a)** $\tilde{\zeta}_0 < 0$, $\tilde{\zeta}_1 > 3$, y con $\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 < 3$: No Big-Bang. Expansión *acelerada* con *transición* a *desacelerada*. $R = 12[H_0\tilde{\zeta}_0/(\tilde{\zeta}_1 - 3)]^2$ cuando $a \rightarrow 0$, $R(a_{\max}) = 0$. $\rho_m = \rho_{\text{crit}}^0[\tilde{\zeta}_0/(3 - \tilde{\zeta}_1)]^2$ cuando $a \rightarrow 0$, $\rho_m(a_{\max}) = 0$.
- Caso **(VII-b)** $\tilde{\zeta}_0 < 0$, $\tilde{\zeta}_1 > 3$, y con $\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 > 3$: No Big-Bang. Expansión siempre *acelerada* hasta alcanzar un *Big-Rip*. $R = 12[H_0\tilde{\zeta}_0/(\tilde{\zeta}_1 - 3)]^2$ cuando $a \rightarrow 0$, $R \rightarrow \infty$ cuando $a \rightarrow \infty$. $\rho_m = \rho_{\text{crit}}^0[\tilde{\zeta}_0/(3 - \tilde{\zeta}_1)]^2$ cuando $a \rightarrow 0$, $\rho_m \rightarrow \infty$ cuando $a \rightarrow \infty$.
- Caso **(VIII)** $\tilde{\zeta}_0 > 0$, $\tilde{\zeta}_1 = 3$: No Big-Bang. Expansión eternamente *acelerada*. $R(a_{\min}) = 0$, $R \rightarrow \infty$ cuando $a \rightarrow \infty$. $\rho_m(a_{\min}) = 0$, $\rho_m \rightarrow \infty$ cuando $a \rightarrow \infty$.
- Caso **(IX)** $\tilde{\zeta}_0 < 0$, $\tilde{\zeta}_1 = 3$: Tiene Big-Bang cuando $t \rightarrow -\infty$. Expansión *acelerada* con transición a *desacelerada*. $R \rightarrow \infty$ cuando $a \rightarrow 0$, $R(a_{\max}) = 0$. $\rho_m \rightarrow \infty$ cuando $a \rightarrow 0$, $\rho_m(a_{\max}) = 0$.
- Caso **(X)** $\tilde{\zeta}_0 = 0$, $\tilde{\zeta}_1 = 3$: Universo de *de Sitter*. $R = 12H_0^2$. $\rho_m = \rho_{\text{crit}}^0$.
- Caso **(XI-a)** $\tilde{\zeta}_0 = 0$, $\tilde{\zeta}_1 \neq 0$, y con $\tilde{\zeta}_1 < 3$: Tiene Big-Bang. Cuando $\tilde{\zeta}_1 < 1$ la expansión es eternamente *desacelerada*, cuando $1 < \tilde{\zeta}_1 < 3$ la expansión es eternamente *acelerada*. $R \rightarrow 0$ cuando $a \rightarrow \infty$. Cuando $-1 < \tilde{\zeta}_1 < 3$ entonces $R \rightarrow \infty$ cuando $a \rightarrow 0$. Cuando $\tilde{\zeta}_1 < -1$ entonces $R \rightarrow -\infty$ cuando $a \rightarrow 0$. $\rho_m \rightarrow \infty$ cuando $a \rightarrow 0$, $\rho_m \rightarrow 0$ cuando $a \rightarrow \infty$.
- Caso **(XI-b)** $\tilde{\zeta}_0 = 0$, $\tilde{\zeta}_1 \neq 0$, y con $\tilde{\zeta}_1 > 3$: No Big-Bang. Expansión siempre *acelerada* hasta alcanzar un Big-Rip. $R(a = 0) = 0$, $R \rightarrow \infty$ cuando $a \rightarrow \infty$. $\rho_m \rightarrow 0$ cuando $a \rightarrow 0$, $\rho_m \rightarrow \infty$ cuando $a \rightarrow \infty$.
- Caso **(XII-a)** $\tilde{\zeta}_0 \neq 0$, $\tilde{\zeta}_1 = 0$, y con $0 < \tilde{\zeta}_0 < 3$: Tiene Big-Bang. Expansión *desacelerada* con transición a *acelerada*. $R \rightarrow \infty$ cuando $a \rightarrow 0$, $R = \frac{4}{3}H_0^2\tilde{\zeta}_0$ cuando $a \rightarrow \infty$. $\rho_m \rightarrow \infty$ cuando $a \rightarrow 0$, $\rho_m = (H_0^2/24\pi G)\tilde{\zeta}_0^2$ cuando $a \rightarrow \infty$.
- Caso **(XII-b)** $\tilde{\zeta}_0 \neq 0$, $\tilde{\zeta}_1 = 0$, y con $\tilde{\zeta}_0 > 3$: No Big-Bang. Expansión eternamente *acelerada*. $R(a_{\min}) = 0$, $R = \frac{4}{3}H_0^2\tilde{\zeta}_0$ cuando $a \rightarrow \infty$. $\rho_m(a_{\min}) = 0$, $\rho_m = (H_0^2/24\pi G)\tilde{\zeta}_0^2$ cuando $a \rightarrow \infty$.
- Caso **(XII-c)** $\tilde{\zeta}_0 \neq 0$, $\tilde{\zeta}_1 = 0$, y con $\tilde{\zeta}_0 < 0$: Tiene Big-Bang. Expansión eternamente *desacelerada*. $R \rightarrow \infty$ cuando $a \rightarrow 0$, $R(a_{\max}) = 0$. $\rho_m \rightarrow \infty$ cuando $a \rightarrow 0$, $\rho_m(a_{\max}) = 0$.

**CAPÍTULO 6. MODELOS COSMOLÓGICOS CON VISCOSIDAD
VOLUMÉTRICA**

6.7. DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

Modelo $\zeta = \zeta_0 + \zeta_1 H$

Asumiendo una FDP previa *delta de Dirac*

Prueba	Set de SNe	Ω_{r0}	$\tilde{\zeta}_0$	$\tilde{\zeta}_1$	χ^2_{\min}	$\chi^2_{d.o.f.}$
SNe	Union2	0	8.58935 ± 1.217	-5.96505 ± 1.159	561.15	1.011
SNe	Union	0	8.858 ± 1.55	-6.257 ± 1.47	314.78	1.032
SNe+CMB	Union	0	5.546 ± 0.24	-3.124 ± 0.20	319.18	1.046
SNe+CMB	Union	0.00005	5.547 ± 0.24	-3.124 ± 0.2	319.18	1.043

Asumiendo una FDP previa *constante*

Prueba	Set de SNe	Ω_{r0}	$\tilde{\zeta}_0$	$\tilde{\zeta}_1$	χ^2_{\min}	$\chi^2_{d.o.f.}$
SNe	Union2	0	4.38929 ± 1.568	-2.16673 ± 1.421	542.38	0.977
SNe	Union2	0	1.9835 ± 0.066	0 (fijado)	544.587	0.979
SNe+CMB+BAO	Union2	0	0.1054 ± 0.046	0 (fijado)	1418.89	2.551
SNe	Union	0	6.281 ± 0.1	-3.925 ± 0.11	309.99	1.016
SNe+CMB	Union	0	4.716 ± 0.34	-2.496 ± 0.25	310.647	1.018
SNe+CMB	Union	0.00005	4.716 ± 0.34	-2.496 ± 0.25	310.647	1.015
SNe+CMB+BAO	Union2	0	2.9177	-1.3378	1102.83	1.979

Cuadro 6.3: Resumen de los valores para las mejores estimaciones de los coeficientes de viscosidad $\tilde{\zeta}_0$ y $\tilde{\zeta}_1$. La tabla superior muestra los valores para el caso en que se marginalizó la constante de Hubble usando una función de distribución de la probabilidad (FDP) previa de *delta de Dirac* centrada en $H_0 = 72$ (km/s)Mpc $^{-1}$, tal como lo sugieren las observaciones del HST [38]. La tabla inferior muestra las mejores estimaciones para $(\tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}_1)$ cuando se marginaliza H_0 usando una FDP previa *constante*. Las tablas muestran en la primera columna las diferentes pruebas utilizadas para calcular las mejores estimaciones. “SNe” significa que solo se emplearon los datos de supernovas para calcular y acotar los valores de $(\tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}_1)$. “SNe+CMB” significa el uso *conjunto* de SNe y el parámetro de corrimiento del CMB y “SNe+CMB+BAO” también agrega la prueba usando el pico acústico A de BAO. Las muestras de SNe usada son “Union” (2008) [37] y “Union2” (2010) [18] del *Supernova Cosmology Project*, cada una compuesta de 307 y 557 SNe Ia respectivamente. La segunda columna muestra el conjunto de supernovas utilizado. La tercer columna muestra el valor inicial considerado para la densidad de radiación Ω_{r0} al momento de calcular las mejores estimaciones. La cuarta columna muestra los valores de las mejores estimaciones para $(\tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}_1)$ y la quinta columna muestra el valor mínimo de la función χ^2 , así como el valor de χ^2 mínimo por grados de libertad, $\chi^2_{d.o.f.}$. Las figuras 6.10–6.63 muestran los intervalos de confianza que acotan los valores para los coeficientes viscosos $(\tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}_1)$.

**CAPÍTULO 6. MODELOS COSMOLÓGICOS CON VISCOSIDAD
VOLUMÉTRICA**

6.7. DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

Modelo $\zeta_0 = \text{constante}$					
Modelo	H_0	$\tilde{\zeta}_0$	Ω_{M0}	χ_{\min}^2	$\chi_{\text{d.o.f.}}^2$
$\tilde{\zeta}_0 = \text{constante}$	69.62 ± 0.59	1.922 ± 0.089	1	314.57	1.031
ΛCDM	70.01 ± 0.59	—	0.278 ± 0.027	311.84	1.022

Cuadro 6.4: Resumen de los valores para las mejores estimaciones del coeficiente de viscosidad $\tilde{\zeta}_0$ y la constante de Hubble H_0 (donde $\tilde{\zeta}_1 = 0$). También se muestran las mejores estimaciones de (H_0, Ω_{M0}) para el caso en que se usa el modelo cosmológico ΛCDM , con el fin de comparar los valores de H_0 y χ_{\min}^2 de cada modelo usando la misma muestra de SNe Ia (“Union”, 2008, SCP [37]) y el mismo procedimiento para calcular los valores. Encontramos que son muy similares las mejores estimaciones para H_0 con su respectivo χ_{\min}^2 , lo cual muestra que el modelo con viscosidad constante es competitivo en comparación a ΛCDM , además de ser consistente con los valores reportados por WMAP ($H_0 = 70.5 \pm 1.3$ (km/s)Mpc⁻¹, ver [33]). Para el modelo ΛCDM se asumió un Universo espacialmente plano.

Modelo viscoso $\zeta_0 = \text{constante}$			
Mejores estimaciones para $\tilde{\zeta}_0$			
<i>Marg.</i>	$\tilde{\zeta}_0$	χ_{\min}^2	$\chi_{\text{d.o.f.}}^2$
(i)	1.922 ± 0.089	331.30	1.08
(ii)	1.941 ± 0.084	315.26	1.03
(iii)	1.924 ± 0.089	314.91	1.02
(iv)	2.026 ± 0.051	316.75	1.03
(v)	2.195 ± 0.049	330.41	1.07

Cuadro 6.5: Mejores estimaciones para $\tilde{\zeta}_0$ (con $\tilde{\zeta}_1 = 0$) usando la muestra de SNe Ia “Union” (2008) del SCP [37]. La primera columna muestra la FDP previa utilizada para marginalizar sobre H_0 (que se indica con “Marg”), los números corresponden a: (i) *constante*, (ii) *Gaussiana*, centrada en $H_0 = 70.5 \pm 1.3$ (km/s)Mpc⁻¹ como lo reporta WMAP [33], (iii) *Gaussiana*, centrada en $H_0 = 72 \pm 8$ (km/s)Mpc⁻¹ como lo reporta el “Hubble Space Telescope” de la observación de estrellas variables Cefeidas [38], (iv) *delta de Dirac*, centrada en $H_0 = 70.5 \pm 1.3$ (km/s)Mpc⁻¹ y (v) *delta de Dirac*, centrada en $H_0 = 72 \pm 8$ (km/s)Mpc⁻¹. La figura 6.63 muestra las FDP para $\tilde{\zeta}_0$. Los errores son calculados al 68.3% de nivel de confianza (1σ).

**CAPÍTULO 6. MODELOS COSMOLÓGICOS CON VISCOSIDAD
VOLUMÉTRICA**
6.7. DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

Capítulo 7

Conclusiones

En el presente trabajo de tesis se ha estudiado un modelo cosmológico cuya única componente (la componente dominante) es un fluido sin presión con *viscosidad volumétrica* parametrizada de la forma $\zeta = \zeta_0 + \zeta_1 H$, donde ζ_0 y ζ_1 son constantes y H es el parámetro de Hubble.

El objetivo de este estudio ha sido el proponer un modelo cosmológico viable y consistente con las observaciones cosmológicas, que pueda ser una alternativa al modelo estándar “ Λ CDM”, que a pesar de que este segundo explica en buena medida la mayoría de las observaciones, tiene problemas en sus predicciones.

El fluido sin presión caracteriza conjuntamente a las componentes de materia bariónica y oscura. El término “ $\zeta_1 H$ ” parametriza a la viscosidad proporcional a la expansión del Universo y “ ζ_0 ” a la viscosidad proporcional a una constante.

En el contexto de los fluidos viscosos la expansión del Universo se estudia como un conjunto de estados termodinámicos fuera de su equilibrio térmico local durante periodos de tiempo *muy cortos*, lo cual genera una entropía local que induce una viscosidad volumétrica, esta a su vez, es capaz de producir una aceleración en la expansión del Universo.

Se analizaron todos los posibles escenarios para el comportamiento y evolución del Universo que el modelo $\zeta = \zeta_0 + \zeta_1 H$ predice, los cuales fueron divididos en 12 casos de acuerdo a los diferentes valores de los coeficientes (ζ_0, ζ_1) . Se encontraron una amplia variedad de predicciones y escenarios posibles. En algunos casos el modelo predice la existencia de un Big-Bang como inicio del Universo, así como también predicen una expansión acelerada y otros casos desacelerada, bien en el pasado, o en el presente o en el futuro, de tal manera que algunos casos se tienen transiciones del tipo “desaceleración \rightarrow aceleración” o viceversa conforme el Universo se ha ido expandiendo. Otros casos más resultaron no tener sentido físico.

De todos estos casos se encontró que el escenario que *mejor* describe al Universo observado corresponde al caso en el cual la viscosidad es proporcional a una *constante* (que corresponde a la parametrización más sencilla posible) y que es caracterizado por los valores en el intervalo $0 < \tilde{\zeta}_0 < 3$ (con $\tilde{\zeta}_1 = 0$). Este caso predice la existencia de un Big-Bang en el pasado del Universo, seguido por una expansión desacelerada en tiempos tempranos, con una transición suave a un periodo reciente de expansión *acelerada* que continuará por siempre.

CAPÍTULO 7. CONCLUSIONES

En base al análisis realizado a este caso y basado en el hecho de que además es el escenario favorecido por las observaciones cosmológicas, la conclusión del estudio desarrollado en la presente tesis puede plantearse de la siguiente forma: El modelo cosmológico dominado por materia sin presión y con viscosidad volumétrica de la forma $\tilde{\zeta}_0 = \text{constante}$, donde $0 < \tilde{\zeta}_0 < 3$, es un candidato viable para explicar la actual aceleración en la expansión del Universo, que además es consistente con las observaciones cosmológicas. Cuando se calcula la mejor estimación de $\tilde{\zeta}_0$ usando la muestra más reciente y robusta de supernovas Ia (“Union2” SCP) y también usando las tres pruebas conjuntas de (1) supernovas, (2) el parámetro de corrimiento del CMB y (3) el pico acústico de BAO, se encuentra que el valor estimado de $\tilde{\zeta}_0$ se localiza *precisamente* en el intervalo $0 < \tilde{\zeta}_0 < 3$, y con una calidad de ajuste a los datos muy buena (medida a partir del valor de χ_{\min}^2). El modelo es además consistente con la segunda ley de la termodinámica local y la predicción de la edad del Universo (14.82 Gyr) está en perfecta concordancia con las cotas observacionales que se obtienen de los cúmulos globulares galácticos (12.9 ± 2.9 Gyr). Además, este modelo resuelve automáticamente el problema de la “constante cosmológica” y el de la “coincidencia cósmica” debido a que no introduce ninguna componente de energía oscura para poder explicar la expansión acelerada del Universo.

Un segundo escenario que también mostró tener predicciones *parcialmente* de acuerdo con el Universo observado es el caso caracterizado por los intervalos ($\tilde{\zeta}_0 > 0$, $\tilde{\zeta}_1 < 0$), con $\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 < 3$. Este caso predice también un Big-Bang en el pasado seguido por una expansión desacelerada en tiempos tempranos y con una transición a una expansión *acelerada* reciente. Cuando se calculan simultáneamente las mejores estimaciones de los coeficientes ($\tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}_1$), los valores de estos se localizan precisamente en los intervalos ($\tilde{\zeta}_0 > 0$, $\tilde{\zeta}_1 < 0$) con $\tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_1 < 3$, usando la muestra de supernovas y la prueba SNe + CMB + BAO conjunta. Sin embargo, este caso tiene dos problemas. El primero es que la estimación en la edad del Universo [11.72 Gyr (FDP constante) y 10.03 Gyr (FDP delta Dirac)] es menor que la reportada a partir de las cotas observacionales que se calculan de los cúmulos globulares (12.9 ± 2.9 Gyr). El segundo problema es que hay una violación de la segunda ley de la termodinámica local para tiempos *tempranos* del Universo, es decir, la viscosidad total es negativa ($\zeta < 0$) para redshifts $z \gtrsim 1$, pero positiva para $z \lesssim 1$. Encontramos que la violación es debida a considerar la existencia del término “ $\zeta_1 H$ ” en la expresión de la viscosidad total, y que para que este caso no viole la segunda ley de la termodinámica local sería preciso que los efectos de la viscosidad fueran relevantes solo a partir de tiempos recientes ($z \leq 1$), y despreciables a tiempos tempranos.

Es importante remarcar que de todos los posibles escenarios que el modelo general $\zeta = \zeta_0 + \zeta_1 H$ predice, los dos escenarios escogidos por las mejores estimaciones de ($\tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}_1$) calculadas a partir de las observaciones son precisamente los dos casos antes mencionados, que indican la existencia de un Big-Bang y un periodo de expansión desacelerada en tiempos tempranos con una transición suave a un periodo reciente de expansión **acelerada**, que continuará por siempre en el futuro.

Como se mencionó brevemente arriba, las mejores estimaciones de ($\tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}_1$) se calcularon usando las últimas muestras de datos observacionales de SNe Ia, de los datos provenientes del WMAP de las anisotropías en la temperatura de la radiación cósmica de fondo usando el primer pico de las anisotropías, a través del parámetro de corrimiento \mathcal{R} , y de la localización del pico acústico A en la función de correlación a grandes escalas de la distribución de 46,748 galaxias rojas ubicadas hasta una distancia de $z = 0.47$. Además,

se consideró la restricción en los valores de la viscosidad total ζ a partir de la segunda ley de la termodinámica local, y utilizamos las cotas observacionales en la edad del Universo para probar la viabilidad del modelo en ese aspecto.

En los capítulos 1–5 se describió el formalismo y los conceptos principales para abordar la investigación en el modelo cosmológico descrito en el capítulo 6. Este estudio ha implicado el aprendizaje, desarrollo e implementación de las técnicas para probar modelos cosmológicos usando hasta ahora tres tipos de datos observacionales (SNe, \mathcal{R} -CMB y A -BAO).

Una de las grandes ventajas del aprendizaje de las pruebas cosmológicas es que con estas herramientas es posible probar *cualquier* modelo cosmológico dado, lo cual abre un panorama amplio en la investigación en cosmología.

CAPÍTULO 7. CONCLUSIONES

Apéndice A

Elementos de la métrica de FRW

El elemento de línea ds^2 de la métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) en coordenadas esféricas, se puede expresar como

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \quad (\text{A.1})$$

La métrica de FRW en forma matricial tiene la forma

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2/(1 - kr^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

La matriz inversa $g^{\mu\nu}$ es

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1 - kr^2)/a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/(a^2r^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/(a^2r^2 \sin^2 \theta) \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

El determinante de $g_{\mu\nu}$ esta dado por:

$$g \equiv \det g_{\mu\nu} = -\frac{a^6 r^4 \sin^2 \theta}{1 - kr^2} \quad (\text{A.4})$$

Las componentes del tensor $T_{\mu\nu}$ en el sistema comóvil pueden escribirse en forma matricial como:

$$T^\mu{}_\nu = g^{\mu\alpha} T_{\alpha\nu} = \begin{pmatrix} -\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}. \quad (\text{A.5})$$

La traza T de este tensor es:

$$T = \text{Tr}(T^\mu{}_\mu) = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = T^\mu{}_\mu = 3p - \rho. \quad (\text{A.6})$$

APÉNDICE A. ELEMENTOS DE LA MÉTRICA DE FRW

Los símbolos de Christoffel se definen como

$$\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} = \frac{1}{2}g^{\mu\alpha} \left(\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\alpha} \right) \quad (\text{A.7})$$

Los símbolos de Christoffel distintos de cero para la métrica de FRW son los siguientes trece términos:

$$\Gamma_{rr}^t = \frac{a\dot{a}}{1-kr^2} \quad \Gamma_{rr}^r = \frac{kr}{1-kr^2} \quad (\text{A.8})$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^t = a\dot{a}r^2 \quad \Gamma_{\phi\phi}^t = a\dot{a}r^2 \sin^2\theta \quad (\text{A.9})$$

$$\Gamma_{tr}^r = \Gamma_{t\theta}^\theta = \Gamma_{t\phi}^\phi = \frac{\dot{a}}{a} \quad (\text{A.10})$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = -r(1-kr^2) \quad \Gamma_{\phi\phi}^r = -r(1-kr^2) \sin^2\theta \quad (\text{A.11})$$

$$\Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{r\phi}^\phi = \frac{1}{r} \quad (\text{A.12})$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^\theta = -\sin\theta \cos\theta \quad \Gamma_{\theta\phi}^\phi = \cot\theta. \quad (\text{A.13})$$

El tensor de Riemann $R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}$ de manera general se define como

$$R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu\Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu\Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho\Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho\Gamma_{\mu\sigma}^\lambda \quad (\text{A.14})$$

Los términos distintos de cero para el caso de la métrica de FRW, son

$$R^t{}_{rtr} = \frac{a\ddot{a}}{1-kr^2} \quad (\text{A.15})$$

$$R^t{}_{\theta t\theta} = a\ddot{a}r^2 \quad (\text{A.16})$$

$$R^t{}_{\phi t\phi} = a\ddot{a}r^2 \sin^2(\theta) \quad (\text{A.17})$$

$$R^r{}_{ttr} = R^\theta{}_{tt\theta} = R^\phi{}_{tt\phi} = \frac{\ddot{a}}{a} \quad (\text{A.18})$$

$$R^r{}_{\theta r\theta} = -R^\phi{}_{\theta\theta\phi} = r^2(\dot{a}^2 + k) \quad (\text{A.19})$$

$$R^r{}_{\phi r\phi} = R^\theta{}_{\phi\theta\phi} = r^2(\dot{a}^2 + k) \sin^2(\theta) \quad (\text{A.20})$$

$$R^\theta{}_{rr\theta} = R^\phi{}_{rr\phi} = -\frac{\dot{a}^2 + k}{1-kr^2} \quad (\text{A.21})$$

Las componentes distintas de cero del tensor de Riemann en su forma totalmente covariante $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ son

$$R_{trtr} = -\frac{a\ddot{a}}{1-kr^2} \quad (\text{A.22})$$

$$R_{t\theta t\theta} = -a\ddot{a}r^2 \quad (\text{A.23})$$

$$R_{t\phi t\phi} = -a\ddot{a}r^2 \sin^2(\theta) \quad (\text{A.24})$$

$$R_{r\theta r\theta} = \frac{a^2r^2(\dot{a}^2 + k)}{1-kr^2} \quad (\text{A.25})$$

$$R_{r\phi r\phi} = \frac{a^2r^2 \sin^2(\theta)(\dot{a}^2 + k)}{1-kr^2} \quad (\text{A.26})$$

$$R_{\theta\phi\theta\phi} = a^2r^4 \sin^2(\theta)(\dot{a}^2 + k) \quad (\text{A.27})$$

APÉNDICE A. ELEMENTOS DE LA MÉTRICA DE FRW

Y las componentes distintas de cero del tensor de Riemann en su forma totalmente *contravariante* $R^{\alpha\beta\gamma\delta}$ son

$$R^{trtr} = -\frac{\ddot{a}(1-kr^2)}{a^3} \quad (\text{A.28})$$

$$R^{t\theta t\theta} = -\frac{\ddot{a}}{a^3 r^2} \quad (\text{A.29})$$

$$R^{t\phi t\phi} = -\frac{\ddot{a}}{a^3 r^2 \sin^2(\theta)} \quad (\text{A.30})$$

$$R^{r\theta r\theta} = \frac{(1-kr^2)(\dot{a}^2+k)}{a^6 r^2} \quad (\text{A.31})$$

$$R^{r\phi r\phi} = \frac{(1-kr^2)(\dot{a}^2+k)}{a^6 r^2 \sin^2(\theta)} \quad (\text{A.32})$$

$$R^{\theta\phi\theta\phi} = \frac{\dot{a}^2+k}{a^6 r^4 \sin^2(\theta)} \quad (\text{A.33})$$

$$(\text{A.34})$$

La expresión para el escalar de Kretschmann es

$$R^{\alpha\beta\gamma\delta}R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 12 \left[\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^4 + 2k \left(\frac{\dot{a}}{a^2} \right)^2 + \frac{k^2}{a^4} + \left(\frac{\ddot{a}}{a} \right)^2 \right] \quad (\text{A.35})$$

Los términos *covariantes* distintos de cero del tensor de Ricci $R_{\mu\nu} \equiv R^\lambda{}_{\mu\lambda\nu}$ son los elementos de la diagonal, esto es,

$$R_{tt} = -3\frac{\ddot{a}}{a}$$

$$R_{rr} = \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{1-kr^2} \quad (\text{A.36})$$

$$R_{\theta\theta} = r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k)$$

$$R_{\phi\phi} = r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k) \sin^2 \theta$$

Los términos *contravariantes* distintos de cero del tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ son

$$R^{tt} = -3\frac{\ddot{a}}{a} \quad (\text{A.37})$$

$$R^{rr} = \left(\frac{1-kr^2}{a^4} \right) (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k) \quad (\text{A.38})$$

$$R^{\theta\theta} = \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{a^4 r^2} \quad (\text{A.39})$$

$$R^{\phi\phi} = \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{a^4 r^2 \sin^2(\theta)} \quad (\text{A.40})$$

$$(\text{A.41})$$

APÉNDICE A. ELEMENTOS DE LA MÉTRICA DE FRW

Expresadas de la forma “contravariante-covariante”, las componentes del tensor de Ricci $R^\mu{}_\nu$ distintas de cero son

$$R^t{}_{t} = 3\frac{\ddot{a}}{a} \quad (\text{A.42})$$

$$R^r{}_{r} = R^\theta{}_{\theta} = R^\phi{}_{\phi} = \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{a^2} \quad (\text{A.43})$$

La contracción del tensor de Ricci consigo mismo es

$$R^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} = 12 \left[\left(\frac{\ddot{a}}{a}\right)^2 + \frac{\ddot{a}}{a^3}(\dot{a}^2 + k) + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^4 + 2k\left(\frac{\dot{a}}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{k}{a^2}\right)^2 \right] \quad (\text{A.44})$$

El escalar de curvatura $R \equiv R^\alpha{}_\alpha = R_{\beta\alpha}g^{\beta\alpha}$ se expresa como:

$$R = 6 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} \right]$$

Del tensor de Einstein $G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$, los únicos términos distintos de cero son los de la diagonal, es decir:

$$\begin{aligned} G_{tt} &= \frac{3}{a^2}(\dot{a}^2 + k) \\ G_{rr} &= \frac{2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k}{-1 + kr^2} \\ G_{\theta\theta} &= -r^2(2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k) \\ G_{\phi\phi} &= -r^2(2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k)\sin^2\theta \end{aligned} \quad (\text{A.45})$$

Del tensor de Weyl, $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$, que se define como

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv R_{\alpha\beta\gamma\delta} - g_{\alpha[\gamma}R_{\delta]\beta} + g_{\beta[\gamma}R_{\delta]\alpha} \quad (\text{A.46})$$

todas sus componentes *son cero* en la métrica de FRW. Lo mismo que cuando se expresa de manera contravariante $C^{\alpha\beta\gamma\delta}$.

Apéndice B

Aproximación Newtoniana de Relatividad General.

Las aproximaciones Newtoniana y Post-Newtoniana de las ecuaciones de Einstein fueron desarrolladas primeramente por Einstein, Infeld y Hoffmann en 1938 [84]. Once años más tarde Einstein e Infeld perfeccionaron la técnica para calcular estas aproximaciones para que fuera posible calcularlas para *cualquier orden* deseado de aproximación [85].

La manera de calcular estas aproximaciones se basa en el hecho de asumir que las partículas¹ del sistema en estudio se mueven a velocidades *no* relativistas, es decir, que

$$\frac{v}{c} \ll 1 \tag{B.1}$$

donde v es la velocidad de una partícula y c la velocidad de la luz, por lo que la aproximación consiste en desarrollar en serie de potencias de v/c a los diferentes entes matemáticos de la Relatividad General, como por ejemplo, al tensor métrico, y reescribir las ecuaciones de Einstein pero conservando solamente términos de hasta un cierto orden de $(v/c)^n$, donde n es un número natural. En el caso de la aproximación Newtoniana la expansión se realiza hasta términos del orden de $(v/c)^2$, y la post-Newtoniana hasta $(v/c)^4$.

La razón de que la aproximación Newtoniana corresponde a calcular las expansiones hasta términos de orden $(v/c)^2$ puede verse de considerar una partícula de masa M alrededor de la cual orbita una segunda partícula con velocidad tangencial promedio v localizada a una distancia promedio r de la primera partícula. Usando mecánica Newtoniana se llega a que la velocidad de la segunda partícula viene dada por

$$v^2 = \frac{GM}{r} \tag{B.2}$$

donde G es la constante gravitacional de Newton. De esta ecuaciones se observa que el movimiento de la segunda partícula está gobernado por un término de la velocidad de orden v^2 [o equivalentemente $(v/c)^2$, donde la expresión (B.2) sería $(v/c)^2 = (GM/rc^2)$]. Una aproximación post-Newtoniana de la expresión (B.2), que viniera de Relatividad General sería calcular correcciones de orden $(v/c)^4$ para la expresión (B.2).

¹Una “partícula” en este contexto corresponde, por ejemplo, a un planeta girando en torno al Sol, o bien todo un cúmulo de galaxias completo (a escalas cosmológicas), etc.

APÉNDICE B. APROXIMACIÓN NEWTONIANA DE RELATIVIDAD GENERAL.

Existe otra forma de aproximar las ecuaciones de Einstein llamada “*de campos débiles*” en el cual se asume que los campos gravitacionales generados por las partículas (o más bien, la curvatura al espacio-tiempo que inducen) son pequeños o “débiles”, es decir,

$$\frac{GM}{rc^2} \ll 1, \quad (\text{B.3})$$

en donde no necesariamente se asume que $v/c \ll 1$, lo cual es útil para el caso de radiación (ver por ejemplo, Weinberg 1972 [71], capítulos 9 y 10).

En la aproximación y expansiones que se mostrarán a continuación se usará más bien el primer enfoque, donde (v/c) será el parámetro de la expansión en series de potencias de este factor. En particular, para la aproximación Newtoniana, se despreciarán cualquier término de orden mayor a $(v/c)^2$ por ser demasiado pequeña su contribución. En este sentido, conviene mencionar que el suponer velocidades pequeñas lleva implícita la idea de campos gravitacionales débiles, debido a que de no ser débiles, las partículas en torno a ellas podrían alcanzar velocidad relativistas al estar inmersas en campos gravitacionales *fuertes* ([86], sección 87).

A lo largo del presente trabajo de tesis se han usado las unidades *geometrizadas* donde $c = 1$, sin embargo, para hacer más comprensibles las expansiones siguientes se hará una excepción en este apéndice y se escribirá expresamente c donde corresponda.

En Relatividad General, la ecuación de movimiento de una partícula está dada por la ecuación geodésica

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0. \quad (\text{B.4})$$

donde τ es el tiempo propio de la partícula. La i -ésima componente de la aceleración 3-dimensional a^i de la partícula se puede definir como

$$\begin{aligned} a^i &\equiv \frac{d^2 x^i}{dt^2}, & (\text{B.5}) \\ &= \frac{d}{dt} \left[\frac{dx^i}{dt} \right] = \frac{d}{dt} \left[\left(\frac{dx^i}{d\tau} \right) \left(\frac{d\tau}{dt} \right) \right], \\ &= \left(\frac{d\tau}{dt} \right) \frac{d}{d\tau} \left[\left(\frac{dx^i}{d\tau} \right) \left(\frac{d\tau}{dt} \right) \right], \\ &= \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^{-1} \frac{d}{d\tau} \left[\left(\frac{dx^i}{d\tau} \right) \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^{-1} \right], \\ &= \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^{-1} \left[\left(\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} \right) \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^{-1} - \left(\frac{dx^i}{d\tau} \right) \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^{-2} \left(\frac{d^2 t}{d\tau^2} \right) \right], \\ &= \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^{-1} \left[\left(\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} \right) \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^{-1} - v^i \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^{-1} \left(\frac{d^2 t}{d\tau^2} \right) \right], \\ &= \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^{-2} \left[\left(\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} \right) - v^i \left(\frac{d^2 t}{d\tau^2} \right) \right], & (\text{B.6}) \end{aligned}$$

donde se ha definido la i -ésima componente de la *velocidad* 3-dimensional v^i como

**APÉNDICE B. APROXIMACIÓN NEWTONIANA DE RELATIVIDAD
GENERAL.**

$$v^i \equiv \frac{dx^i}{dt} \quad (\text{B.7})$$

Usando la ecuación geodésica (B.4) se tiene que

$$\frac{d^2x^i}{d\tau^2} = -\Gamma^i{}_{\nu\lambda} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} = -\Gamma^i{}_{\nu\lambda} \frac{dx^\nu}{dt} \frac{dx^\lambda}{dt} \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2, \quad (\text{B.8})$$

y

$$\frac{d^2t}{d\tau^2} = \frac{1}{c} \frac{d^2x^0}{d\tau^2} = -\frac{1}{c} \Gamma^0{}_{\nu\lambda} \frac{dx^\nu}{dt} \frac{dx^\lambda}{dt} \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2, \quad (\text{B.9})$$

Sustituyendo las expresiones (B.8) y (B.9) en (B.6) resulta

$$a^i = -\Gamma^i{}_{\nu\lambda} \frac{dx^\nu}{dt} \frac{dx^\lambda}{dt} + \Gamma^0{}_{\nu\lambda} \frac{dx^\nu}{dt} \frac{dx^\lambda}{dt} \left(\frac{v^i}{c}\right). \quad (\text{B.10})$$

Explícitamente:

$$a^i = -\Gamma^i{}_{00} - 2\Gamma^i{}_{0j} \left(\frac{v^j}{c}\right) - \Gamma^i{}_{jk} \left(\frac{v^j v^k}{c^2}\right) + \left[\Gamma^0{}_{00} + 2\Gamma^0{}_{0j} \left(\frac{v^j}{c}\right) + \Gamma^0{}_{jk} \left(\frac{v^j v^k}{c^2}\right) \right] \left(\frac{v^i}{c}\right) \quad (\text{B.11})$$

Evidentemente la velocidad (v^i/c) es ya de orden 1. Viendo la ecuación (B.11), se observa que para el caso de la aproximación Newtoniana (que es de orden $(v/c)^2$), el último término $\Gamma^0{}_{jk}(v^j v^k v^i)/c^3$ es de magnitud despreciable (es decir, se asume que es cero) debido a que contiene el producto de tres veces la velocidad v^i/c , por lo que *al menos* este término es ya de orden $(v/c)^3$ (sin contar $\Gamma^0{}_{jk}$). Luego, de los demás símbolos de Christoffel se necesita calcular cada uno de los que aparecen en (B.11) hasta los siguientes ordenes:

$$\begin{aligned} \Gamma^i{}_{00} & \text{ hasta orden } (v/c)^2 \\ \Gamma^i{}_{0j} & \text{ hasta orden } (v/c)^1 \\ \Gamma^i{}_{jk} & \text{ hasta orden } (v/c)^0 \\ \Gamma^0{}_{00} & \text{ hasta orden } (v/c)^1 \\ \Gamma^0{}_{0j} & \text{ hasta orden } (v/c)^0 \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Los símbolos de Christoffel se calculan a través del tensor métrico $g_{\mu\nu}$ a partir de su definición (A.7), por lo que ahora centraremos la atención en calcular la expansión de $g_{\mu\nu}$ en potencias de $(v/c)^n$.

De forma general, la expansión para las componentes de $g_{\mu\nu}$ es

$$\begin{aligned} g_{00} &= g_{00}^{(0)} + g_{00}^{(1)} + g_{00}^{(2)} + O(3), \\ g_{ij} &= g_{ij}^{(0)} + g_{ij}^{(1)} + g_{ij}^{(2)} + O(3), \\ g_{i0} &= g_{i0}^{(0)} + g_{i0}^{(1)} + g_{i0}^{(2)} + O(3), \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

donde el número entre paréntesis “ (n) ” indica el orden $(v/c)^n$ de expansión, y $O(3)$ indica los demás términos de la expansión de ordenes mayores a $(v/c)^3$. De manera análoga, la expansión de las componentes contravariantes $g^{\mu\nu}$ pueden expresarse como

APÉNDICE B. APROXIMACIÓN NEWTONIANA DE RELATIVIDAD GENERAL.

$$\begin{aligned}
 g^{00} &= g_{(0)}^{00} + g_{(1)}^{00} + g_{(2)}^{00} + O(3), \\
 g^{ij} &= g_{(0)}^{ij} + g_{(1)}^{ij} + g_{(2)}^{ij} + O(3), \\
 g^{i0} &= g_{(0)}^{i0} + g_{(1)}^{i0} + g_{(2)}^{i0} + O(3),
 \end{aligned} \tag{B.14}$$

La expansión a orden v^0 (es decir, $g_{00}^{(0)}, g_{ij}^{(0)}, g_{i0}^{(0)}$) corresponde al caso cuando no hay ningún campo gravitacional presente, es decir, el espacio-tiempo es *plano* (Minkowski), esta sería la primera aproximación del tensor $g_{\mu\nu}$, quien describe la *curvatura* del espacio-tiempo.

En términos del tensor métrico, esto significa que $g_{\mu\nu}$ debe corresponder al espacio de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ a *primera* aproximación (a orden $O(0)$), es decir $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(0)} = \eta_{\mu\nu}$, donde

$$\eta_{00} = -1, \quad \eta_{ij} = \delta_{ij}, \quad \eta_{i0} = 0. \tag{B.15}$$

Comparando las expresiones (B.15) con (B.13) se concluye que

$$g_{00}^{(0)} = -1, \quad g_{ij}^{(0)} = \delta_{ij}, \quad g_{i0}^{(0)} = 0. \tag{B.16}$$

Por otra parte, una manera de calcular los términos $g_{00}^{(1)}, g_{00}^{(2)}, g_{i0}^{(1)}$ es a través de la *acción* S de una partícula *no* relativista que se mueve con velocidad \mathbf{v} debido a la influencia de un campo gravitacional, que se expresa como

$$S = -mc^2 \int \left(1 - \frac{v^2}{2c^2} + \frac{\phi}{c^2} \right) dt, \tag{B.17}$$

donde m es la masa de la partícula, $v^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v_i v^i$, y ϕ es el potencial del campo gravitacional Newtoniano definido por la ecuación de Poisson: $\nabla^2 \phi = 4\pi G\rho$. Desarrollando el integrando de (B.17):

$$\left[\left(1 - \frac{v^2}{2c^2} + \frac{\phi}{c^2} \right)^2 \right]^{1/2} = \left[1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{2\phi}{c^2} - \frac{\phi v^2}{c^4} + \frac{v^4}{4c^4} + \frac{\phi^2}{c^4} \right]^{1/2}. \tag{B.18}$$

Despreciando términos de orden mayores a $(v/c)^2$ en (B.18), la acción (B.17) puede expresarse como.

$$S = -mc^2 \int \left(1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{2\phi}{c^2} \right)^{1/2} dt. \tag{B.19}$$

Por otra parte, la acción de la misma partícula pero dada por Relatividad General es

$$S = -mc \int d\tau, \tag{B.20}$$

donde $d\tau$ es el *tiempo propio* de la partícula, que se define como

$$d\tau^2 = -ds^2 = -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \tag{B.21}$$

$$= -g_{00} dx^0 dx^0 - 2g_{i0} dx^i dx^0 - g_{ij} dx^i dx^j. \tag{B.22}$$

APÉNDICE B. APROXIMACIÓN NEWTONIANA DE RELATIVIDAD GENERAL.

Usando el hecho de que $dx^0 = cdt$ y $v^i \equiv dx^i/dt$, se puede reescribir (B.21) como

$$d\tau^2 = \left[-g_{00} - 2g_{i0} \frac{v^i}{c} - g_{ij} \frac{v^i v^j}{c^2} \right] c^2 dt^2. \quad (\text{B.23})$$

Sustituyendo (B.22) en (B.20) resulta

$$S = -mc^2 \int \left[-g_{00} - 2g_{i0} \frac{v^i}{c} - g_{ij} \frac{v^i v^j}{c^2} \right]^{1/2} dt, \quad (\text{B.24})$$

Luego, sustituyendo las expansiones para g_{00}, g_{i0}, g_{ij} (ver B.13) tomando en cuenta los valores calculados en (B.16), y tomando solamente los términos hasta el orden $(v/c)^2$ para S , se llega a

$$S = -mc^2 \int \left[\left(1 - g_{00}^{(1)} - g_{00}^{(2)} \right) - 2g_{i0}^{(1)} \frac{v^i}{c} - \delta_{ij} \frac{v^i v^j}{c^2} \right]^{1/2} dt, \quad (\text{B.25})$$

reordenando los términos:

$$S = -mc^2 \int \left[1 - \frac{v^2}{c^2} - g_{00}^{(2)} - g_{00}^{(1)} - 2g_{i0}^{(1)} \frac{v^i}{c} \right]^{1/2} dt, \quad (\text{B.26})$$

Comparando la acción de Relatividad General (B.26) con la acción Newtoniana (B.19), y tomando en cuenta que ambas deben coincidir a orden $(v/c)^2$, se puede entonces concluir que

$$g_{00}^{(2)} = -\frac{2\phi}{c^2}, \quad g_{00}^{(1)} = 0, \quad g_{i0}^{(1)} = 0. \quad (\text{B.27})$$

De esta forma, tomando en cuenta los resultados obtenidos en (B.16) y (B.27), las expansiones (B.13) se expresan como

$$g_{00} = -1 - \frac{2\phi}{c^2} + O(3) \quad (\text{B.28})$$

$$g_{ij} = \delta_{ij} + O(1) \quad (\text{B.29})$$

$$g_{i0} = O(2), \quad (\text{B.30})$$

Como comentario vale la pena mencionar que al hacer los cálculos para la aproximación *Post-Newtoniana*, se encuentra que en la expansión de g_{00} y g_{ij} para ordenes más altos solo están presentes potencias *pares* de $(v/c)^n$, mientras que para g_{i0} son solo potencias *impares*, y en donde las expresiones (B.28–B.30) son los primeros términos en la aproximación *Post-Newtoniana*.

La expansión para las componentes contravariantes $g^{\mu\nu}$ pueden calcularse a partir del hecho de que debe satisfacerse que $g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = 1$, lo cual más explícitamente se escribe como

$$\begin{aligned} g_{0\mu}g^{\mu 0} &= g_{00}g^{00} + g_{0j}g^{j0} = 1, \\ g_{i\mu}g^{\mu j} &= g_{i0}g^{0j} + g_{ik}g^{kj} = \delta_{ij}, \\ g_{i\mu}g^{\mu 0} &= g_{i0}g^{00} + g_{ij}g^{j0} = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

APÉNDICE B. APROXIMACIÓN NEWTONIANA DE RELATIVIDAD GENERAL.

B.1. EXPANSIÓN DE LA CUADRIVELOCIDAD U^μ

De igual forma que para $g_{\mu\nu}$, la primera aproximación (a orden cero) de $g^{\mu\nu}$ corresponde al espacio de Minkowski, esto es, $g^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}_{(0)} = \eta^{\mu\nu}$, de lo cual resulta

$$g^0_0 = -1, \quad g^{ij}_{(0)} = \delta_{ij}, \quad g^{i0}_{(0)} = 0. \quad (\text{B.32})$$

Sustituyendo en (B.31) las expansiones (B.14), (B.28–B.30) y los valores (B.32), se obtiene

$$g^{00} = -1 + 2\frac{\phi}{c^2} + O(3), \quad (\text{B.33})$$

$$g^{ij} = \delta_{ij} + O(1), \quad (\text{B.34})$$

$$g^{i0} = O(2). \quad (\text{B.35})$$

Con las expansiones (B.28–B.30) y (B.33–B.35) se pueden calcular explícitamente las expansiones de los símbolos de Christoffel (B.12) a través de su definición (A.7), hasta el orden $(v/c)^2$, de lo cual se obtiene

$$\Gamma^0_{0i} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial x^i} + O(4) \quad (\text{B.36})$$

$$\Gamma^0_{00} = O(3) \quad (\text{B.37})$$

$$\Gamma^i_{j0} = O(3) \quad (\text{B.38})$$

$$\Gamma^i_{jk} = -\frac{1}{c^2} \left(\delta_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x^k} + \delta_{ik} \frac{\partial \phi}{\partial x^j} + \delta_{jk} \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \right) + O(4) \quad (\text{B.39})$$

$$\Gamma^i_{00} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial x^i} + O(4). \quad (\text{B.40})$$

Las expansiones (B.28–B.30), (B.33–B.35) y (B.36–B.40) serán muy utilizadas en el capítulo 5 para calcular las aproximaciones Newtonianas de las ecuaciones hidrodinámicas de Relatividad General.

B.1. Expansión de la cuadrivelocidad U^μ

La cuadrivelocidad U^μ se define como (ver 1.13) $U^\mu \equiv dx^\mu/d\tau$, donde τ es el *tiempo propio* definido en la expresión (B.21). Explícitamente, las componentes de U^μ se definen como

$$U^0 \equiv \frac{dx^0}{d\tau} = c \frac{dt}{d\tau} \quad \text{y} \quad U^i \equiv \frac{dx^i}{d\tau} = \frac{dx^i}{dt} \frac{dt}{d\tau} = v^i \frac{dt}{d\tau}. \quad (\text{B.41})$$

Se puede calcular $dt/d\tau$ a partir de la expresión (B.22), para ello, multiplicandola por $(1/dt)^2$ y considerando que $dx^0 = cdt$ y $v^i = dx^i/dt$, se obtiene

$$\left(\frac{d\tau}{dt} \right)^2 = -g_{00}c^2 - 2c g_{i0}v^i - g_{ij}v^i v^j. \quad (\text{B.42})$$

Sustituyendo las expresiones (B.28–B.30) en (B.42) y manteniendo solo los términos de orden $(v/c)^2$ se llega a

**APÉNDICE B. APROXIMACIÓN NEWTONIANA DE RELATIVIDAD
GENERAL.**

B.1. EXPANSIÓN DE LA CUADRIVELOCIDAD U^μ

$$\frac{1}{c^2} \left(\frac{d\tau}{dt} \right)^2 = 1 + 2\frac{\phi}{c^2} - \frac{v^2}{c^2}. \quad (\text{B.43})$$

Luego, invirtiendo $(d\tau/dt)$ por $(dt/d\tau)$ y expandiendo el inverso de la raíz cuadrada que surge de tener $(dt/d\tau)$ en (B.43), resulta:

$$\begin{aligned} c \frac{dt}{d\tau} &= \left[1 + 2\frac{\phi}{c^2} - \frac{v^2}{c^2} \right]^{-1/2} \\ &= \left[1 - \frac{1}{2} \left(2\frac{\phi}{c^2} - \frac{v^2}{c^2} \right) + O(3) \right] \\ \Rightarrow \quad c \frac{dt}{d\tau} &= \left[1 + \frac{v^2}{2c^2} - \frac{\phi}{c^2} + O(3) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.44})$$

Usando la expresión (B.44) en (B.41), la expansión hasta orden $(v/c)^2$ para U^0 viene dada como

$$U^0 = 1 + \frac{v^2}{2c^2} - \frac{\phi}{c^2}. \quad (\text{B.45})$$

Para U^i , usando la expansión (B.44) en (B.41) y despreciando términos de orden mayor a $(v/c)^2$ se llega directamente a

$$U^i = \frac{v^i}{c}. \quad (\text{B.46})$$

Por último, se puede calcular la expansión de los términos covariantes de la cuadrivelocidad usando la relación: $U_\mu = g_{\mu\nu}U^\nu$, donde $g_{\mu\nu}$ esta dada por las expresiones (B.28–B.30) y U^ν por (B.45, B.46), para obtener

$$U_0 = - \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} + \frac{\phi}{c^2} \right), \quad (\text{B.47})$$

$$U_i = \frac{v_i}{c}. \quad (\text{B.48})$$

APÉNDICE B. APROXIMACIÓN NEWTONIANA DE RELATIVIDAD
GENERAL.

B.1. EXPANSIÓN DE LA CUADRIVELOCIDAD U^μ

Bibliografía

- [1] Lawrence Krauss, tomado de "Physicists debate the nature of space-time", *NewScientist* Blog, on February 20th, 2007, http://www.edge.org/3rd.culture/krauss06/krauss06.2_index.html; Hitoshi Murayama, Berkeley center for theoretical physics website, under the keyword "cosmology", <http://ctp.berkeley.edu/cosmology.html>; <http://www.newscientist.com/blog/space/2007/02/physicists-debate-nature-of-space-time.html>
- [2] Christian Wolff, 1731, *Cosmologia Generalis: Methodo Scientifica Pertractata, Qua Ad Solidam, Imprimis Dei Atque Naturae, Cognitionem Via Sternitur*.
- [3] Sean Carroll, "*Space and Geometry. An introduction to General Relativity*", Addison Wesley, 2004, ISBN 0-8053-8732-3.
- [4] R. K. Sachs and H. Wu, "*General relativity for mathematicians*", Springer-Verlag, 1977, ISBN 0-387-90218-X.
- [5] Robert M. Wald, "*General Relativity*", The University of Chicago Press, 1984, ISBN 0-226-87033-2.
- [6] WMAP Collaboration, N. Jarosik et al., *Seven-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Sky Maps, Systematic Errors, and Basic Results*. Submitted to *Astrophysical Journal Supplement Series* (2010). [[arXiv:1001.4744v1](https://arxiv.org/abs/1001.4744v1)].
- [7] Supernova Search Team collaboration, A. G. Riess et al., 1998, *Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant*, *Astron. J.* **116**, 1009. [[astro-ph/9805201](https://arxiv.org/abs/astro-ph/9805201)].
- [8] S. Perlmutter et al., 1999, *Measurements of Ω and Λ from 42 high-redshift supernovae*, *Astrophys. J.*, **517**, 565.
- [9] James B. Hartle, "*Gravity, An introduction to Einstein's General Relativity*", Addison Wesley, 2003, ISBN 0-8053-8662-9.
- [10] A. Y. Kamenshchik, U. Moschella and V. Pasquier, *Phys. Lett. B* **511**, 265 (2001) [[arXiv:gr-qc/0103004](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0103004)]; R.C. Freitas, S.V.B. Goncalves, H.E.S. Velten, 2010, [[arXiv:1004.5585](https://arxiv.org/abs/1004.5585)]; Lixin Xu, Jianbo Lu, *JCAP* **1003**:025, 2010.

- [11] Ratra B and Peebles P J E, 1988 *Phys. Rev. D* **37** 3406; Ratra B and Peebles P J E, 2003 *Rev. Mod. Phys.* **75** 559; Wetterich C, 1988 *Nucl. Phys. B* **302** 668; Boisseau B, Esposito-Farese G, Polarski D and Starobinsky A A, 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 2236; Perrotta F, Baccigalupi C and Matarrese S, 2000 *Phys. Rev. D* **61** 023507; Bartolo N and Pietroni M, 2000 *Phys. Rev. D* **61** 023518.
- [12] Oliver Krause et al., 2008, *Tycho Brahe's 1572 supernova as a standard type Ia explosion revealed from its light echo spectrum*, [arXiv:0810.5106 (astro-ph)].
- [13] Yoon, S.-C.; Langer, L., 2004, *Presupernova Evolution of Accreting White Dwarfs with Rotation*, *Astron. & Astrophys.*, **419** (2): 623.
- [14] Mazzali, P. A.; K. Ropke, F. K.; Benetti, S.; Hillebrandt, W., 2007, *A Common Explosion Mechanism for Type Ia Supernovae*, *Science* **315** (5813): 825–828.
- [15] Khokhlov, A.; Mueller, E.; Hoefflich, P., 1993, *Light curves of Type Ia supernova models with different explosion mechanisms*, *Astron. & Astrophys.*, **270** (1–2): 223–248.
- [16] Staff, (2006-09-07), *Introduction to Supernova Remnants*, NASA Goddard/SAO. <http://heasarc.gsfc.nasa.gov/docs/objects/snrs/snrstext.html>.
- [17] Astier P., et al, 2006, *The Supernova Legacy Survey: measurement of Ω_M, Ω_Λ and w from the first year data set*, *Astron. & Astrophys.* **447** 31–48
- [18] R. Amanullah et al., *Spectra and Light Curves of Six Type Ia Supernovae at $0.511 < z < 1.12$ and the Union2 Compilation*. Accepted to be published in *Astrophys. J.* (2010) [arXiv:1004.1711].
- [19] Hillebrandt, W.; Niemeyer, J. C., 2000, *Type IA Supernova Explosion Models*, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* **38**: 191–230.
- [20] Riess A G et al., 2004, *Type Ia supernova discoveries at $z > 1$ from the Hubble space telescope: Evidence for past deceleration and constraints on dark energy evolution*, *Astrophys. J.*, **607**, 665–687.
- [21] J. R. Bond, G. Efstathiou and M. Tegmark, 1997, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **291**, L33. [arXiv:astro-ph/9702100].
- [22] R. Trotta, [arXiv:astro-ph/0410115].
- [23] A. Melchiorri and L. M. Griffiths, 2001, *New Astron. Rev.* **45**, 321. [arXiv:astro-ph/0011147].
- [24] G. Efstathiou and J. R. Bond, 1999, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **304**, 75. [arXiv:astro-ph/9807103].
- [25] S. Nesseris and Leandros Perivolaropoulos, 2007, *Crossing the Phantom Divide: Theoretical Implications and Observational Status*, *J. Cosmo. Astrop. Phys.*, 0701:018. [astro-ph/0610092].

- [26] G. Hinshaw et al., 2007, *Astrophys. J. Suppl.*, **170**, 288.
- [27] S. Hanany et al, 2000, *MAXIMA-1: A Measurement of the cosmic microwave background anisotropy on angular scales of 10 arcminutes to 5 degrees*, *Astrophys. J.*, **545**: L5. [[astro-ph/0005123](#)].
- [28] Hu W., Fukugita M, Zaldarriaga M and Tegmark M, 2001, *Astrophys. J.*, **549**, 669
- [29] David W. Hogg, 2000, *Distance measures in cosmology*, [[astro-ph/9905116](#)].
- [30] A. Melchiorri et al, 2003, *Phys. Rev. D.*, **68**, 043509.
- [31] Wang Y and Mukherjee P 2006 *Astrophys. J.* **650** 1
- [32] Spergel, D. N. et al. 2007, *Astrophys. J. Suppl.*, **170**, 377
- [33] WMAP Collaboration, G. Hinshaw et al., *Five-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: data processing, sky maps and basic results*, *Astrophys. J. Suppl.* **180** (2009) [[arXiv:0803.0732](#)].
- [34] Daniel J. Eisenstein et al., 2005, *Detection of the baryon acoustic peak in the large-scale correlation function of SDSS luminous red galaxies*, *Astrophys. J.*, **633**, 560-574. [[astro-ph/0501171](#)].
- [35] Will J. Percival et al., 2010, *Baryon Acoustic Oscillations in the Sloan Digital Sky Survey Data Release 7 Galaxy Sample*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **401**, 2148-2168. [[arXiv:0907.1660](#)].
- [36] Arman Shafieloo, Varun Sahni and Alexei A. Starobinsky, 2009, *Is cosmic acceleration slowing down?*, *Phys. Rev. D*, **80**, 101301.
- [37] Kowalski M *et al* (The Supernova Cosmology Project) 2008 *Astrophys. J.* **686** 749–778
- [38] Freedman W L *et al*, 2001 *Astrophys. J.* **553**, 47
- [39] S. Perlmutter et al., 1998, *Discovery of a supernova explosion at half the age of the universe and its cosmological implications*, *Nature (London)* **391**, 51.
- [40] Riess A G *et al*, 2007, *New Hubble Space Telescope Discoveries of Type Ia Supernovae at $z \geq 1$: Narrowing constraints on the early behavior of dark energy*, *Astrophys. J.*, **659**: 98–121
- [41] D. Lovelock, 1972, *The Four-Dimensionality of Space and the Einstein Tensor*, *J. Math. Phys.*, **13**, 874-876.
- [42] G. Gamow, 1970, *My world line*, New York: Viking. Page 44.
- [43] S. Weinberg, 1989, *The cosmological constant problem*, *Rev. Mod. Phys.*, **61**, 1–23.
- [44] S. M. Carroll, W. H. Press and E. L. Turner, 1992, *The cosmological constant*, *Annu. Rev. Astron. Astrophys.*, **30**, 499–542.

- [45] Sean. M. Carroll, 2001, *The cosmological constant*, Living Rev. Relativity, **3**, 1. <http://www.livingreviews.org/lrr-2001-1>.
- [46] Heller M, Klimek Z and Suszycki L 1973 *Astrophys. and Space Science* **20** 205–212
- [47] Heller M and Klimek Z 1975 *Astrophys. and Space Science* **33** L37-L39; Diosi L, Keszthelyi B, Lukács and Paál G 1984 *Acta Phys. Pol. B* **15** 909; 1985 *Phys. Lett. B* **157** 23; Morikawa M and Sasaki M 1985 *Phys. Lett. B* **165** 59; Waga I, Falcao R C and Chanda R 1986 *Phys. Rev. D* **33** 1839; John D Barrow 1986 *Phys. Lett. B* **180** 335–339; Padmanabhan T and Chitre S M 1987 *Phys. Lett. A* **120** 443; John D Barrow 1988 *Nucl. Phys. B* **310** 743–763; John D Barrow 1990 String-driven Inflation. In *The formation and evolution of cosmic strings* eds. G Gibbons & T Vasaspartu 449–464 CUP Cambridge; Gron O 1990 *Astrophys. and Space Science* **173** 191G; Beesham A 1993 *Physical Rev. D* **48** 3539; Maartens R 1995 *Class. Quantum Grav.* **12** 1455–1465; Coley A A, van den Hoogen R J and Maartens R 1996 *Phys. Rev. D* **54** 1393–1397.
- [48] Zimdahl W 1996 *Physical Rev. D* **53** 5483; Maartens R and Méndez V 1997 *Physical Rev. D* **55** 1937.
- [49] Hiscock W A and Salmonson J 1991 *Physical Rev. D* **43** 3249
- [50] Kremer G M and Devecchi F P 2003 *Physical Rev. D* **67** 047301; Mauricio Cataldo, Norman Cruz and Samuel Lepe, 2005 *Phys. Lett. B* **619** 5-10; I. Brevik and O. Gorbunova, *Dark energy and viscous cosmology Gen. Relativ. Gravit.* **37**(12) (2005) 2039–2045.
- [51] Fabris J C Goncalves S V B and de Sá Ribeiro R 2006 *Gen. Relativ. Gravit.* **38**(3), 495–506
- [52] I. Brevik and O. Gorbunova, *Dark energy and viscous cosmology, Gen. Relativ. Gravit.* **37**(12) (2005) 2039-2045; Ming-Guang Hu and Xin-He Meng, *Bulk viscous cosmology: statefinder and entropy, Phys. Letters B* **635** (2006) 186–194 [astro-ph/0511615]; Jie Ren and Xin-He Meng, *Cosmological model with viscosity media (dark fluid) described by an effective equation of state, Phys. Lett. B* **633** (2006) 1–8; Jie Ren and Xin-He Meng, *Modified equation of state, scalar field, and bulk viscosity in Friedmann universe, Phys. Lett. B* **636** (2006) 5–12
- [53] Marek Szydlowski and Orest Hrycyna 2007 *Annals Phys* **322** 2745–2775; Debnath P S, Paul B C and Beesham A 2007 *Phys. Rev. D* **76** 123505
- [54] Colistete R Jr, Fabris J C, Tossa J and Zimdahl W 2007 *Phys. Rev. D* **76**, 103516, 1–13
- [55] Singh C P, Kumar S and Pradhan A 2007 *Class. Quantum Grav.* **24** 455–474
- [56] X H Meng and X Dou, *Friedmann cosmology with bulk viscosity: a concrete model for dark energy* [arXiv:0812.4904]
- [57] Zimdahl W 2000 *Phys. Rev. D* **61** 083511

- [58] Zimdahl W, Schwarz D, Balakin A B and Pavón D 2001 *Phys. Rev. D* **64** 063501
- [59] Wilson J R, Mathews G J and Fuller G M 2007 *Physical Rev. D.* **75** 043521
- [60] Mathews G. J., Lan N. Q. and Kolda C., 2008, *Phys. Rev. D* **78**, 043525
- [61] Okumura H and Yonezawa F 2003 *Physica A* **321** 207
- [62] Ilg P and Ottinger H C 1999 *Phys. Rev. D* **61** 023510
- [63] Xinzhong C and Spiegel E A 2001 *Mon. Not. R., Astron. Soc.* **323** 865
- [64] Eckart C 1940 *Physical Rev.* **58** 919–924
- [65] Landau L D and Lifshitz E M 1958 *Fluid Mechanics* Reading, MA: Addison-Wesley
- [66] Hiscock W A and Lindblom L 1985 *Phys. Rev. D* **31** 725; 1987 *Phys. Rev. D* **35** 3723
- [67] Muller I 1967 *Z. Physik* **198** 329
- [68] Israel W 1976 *Ann. Phys., NY* **100** 310
- [69] Israel W and Stewart J M 1979 *Ann. Phys (N.Y.)* **118** 341
- [70] Israel W and Stewart J M 1979 *Proc. R. Soc. A* **365** 43
- [71] Weinberg S., 1972, “*Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*” (John Wiley & Sons, Inc., New York); 1971 *Astrophys. J.* **168**, 175.
- [72] A. Avelino and U. Nucamendi, *Can a matter-dominated model with constant bulk viscosity drive the accelerated expansion of the Universe?*, *JCAP* **04** (2009) 006, [arXiv:0811.3253]
- [73] Avelino A, Nucamendi U and Guzmán F S 2008 *AIP Conf. Proc. of the XI Mexican Workshop on Particles and Fields, Tuxtla Gutiérrez, México, nov 7-12, 2007.* **1026**, 300–302 [arXiv:0801.1686]
- [74] Avelino A, Nucamendi 2008 *AIP Conf. Proc. of the III International Meeting on Gravitation and Cosmology, Morelia, México, May 26-30, 2008.* 1083 1 [arXiv:0810.0303]
- [75] A. Avelino and U. Nucamendi, *Exploring a matter-dominated model with bulk viscosity to drive the accelerated expansion of the Universe.* Accepted to be published in *JCAP* (2010) [gr-qc/1002.3605]
- [76] Pavon D, Jou D and Casas-Vázquez J 1982 *Ann. Inst. Henri Poincaré* Vol. XXXVI 1 79–88
- [77] Michael E. O’Neill and Frank Chorlton, 1989, “*Viscous and compressible fluid dynamics*” (Ed. Ellis Horwood Limited, England).

- [78] Andrei S. Dukhin and Philip Goetz, 2009, *Bulk viscosity and compressibility measurement using acoustic spectroscopy*, J. Chemical Physics, **130**, 124519.
- [79] Charles W. Misner, Kip S. Thorne and John Wheeler, *Gravitation* (W. H. Freeman and Company, San Francisco), 1973
- [80] Carreta *et al*, 2000, *Astroph. J.*, **533** 215-235
- [81] Turner M. & Riess A. G., 2002, *Astroph. J.* **569**, 18
- [82] Sahni V and Starobinsky A A 2000 *Int. J. Mod. Phys. D* **9**, 373; Sahni V 2004 *Lect. Notes Phys.* **653**, 141; Padmanabhan T 2003 *Phys. Rep.* **380**, 235; Peebles P J E & Ratra B 2003 *Rev. Mod. Phys.* **75**, 559.
- [83] Copeland E J, Sami M and Tsujikawa S 2006 *Int. J. Mod. Phys. D* **15**, 1753
- [84] A. Einstein, L. Infeld and B. Hoffmann, 1938, *Ann. Math.*, **39**, 65; A. Einstein and L. Infeld, 1940, *Ann. Math.*, **41**, 455.
- [85] A. Einstein and L. Infeld, 1949, *Canad. J. Math.*, **1**, 209.
- [86] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, “*The classical theory of fields*”, translated by M. Hamermesh (Butterworth Heinemann, Fourth Revised English Edition).