

UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS  
DE HIDALGO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS  
INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

**DN-Problema de dispersión de una onda plana  
sobre una cuña.**

---

T E S I S

Que para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas  
Presenta:

**JOSÉ ELIGIO DE LA PAZ MÉNDEZ**

*Director:* Dr. Anatoli Merzon

---

MORELIA, MICHOACÁN - NOVIEMBRE DE 2010.



## Índice general

Agradecimientos	3
Introducción	5
Capítulo 1. Reducción del problema de dispersión a un problema estacionario en el plano.	9
1. Definiciones y resultados principales	9
2. Reducción al problema estacionario	13
3. Reducción del problema en el plano	15
Capítulo 2. Método de las características complejas: reducción a una ecuación en diferencias	19
1. Transformada de Fourier	19
2. Superficie de Riemann	20
3. Ecuación de Conexión y eliminación de dos datos de Cauchy	23
4. Automorfismos y ecuación en diferencias	25
5. Unicidad	30
6. Solución de la ecuación en diferencias	34
Capítulo 3. Representación de Sommerfeld para la onda de dispersión estacionaria	39
1. Representación de $\widehat{u}_s$	39
2. Terminación de la prueba del Teorema 1.1	41
Capítulo 4. Existencia	45
1. Integral del tipo Sommerfeld-Malyuzhinets	45
2. Problema Estacionario	47
3. Ondas estacionarias: incidentes, reflejadas y difractadas	49
4. Prueba de la partición	51
5. Densidad de la onda difractada	53
6. Derivada de la densidad de la onda difractada	55
7. La onda de dispersión. Prueba del Teorema 1.2 i)	59
8. Representación del tipo Sommerfeld-Malyuzhinets para la onda de difracción	61
9. Estimaciones para la onda de difracción	64
10. La parte singular de la onda de difracción	65
11. Derivada de la onda de difracción	69
12. El Principio de Amplitud Límite	73
13. Conclusión	75
14. Apéndice	76



Dedico esta tesis:

a mi esposa Ma. Guadalupe Echeverría Díaz y a mis amadas hijas

Karen Denisse De la Paz Echeverría

Katy Nicole De la Paz Echeverría

Elizabeth De la Paz Bautista

Rocío De la Paz Bautista

Oníx De la Paz Bautista



## **Agradecimientos**

Agradezco primeramente a Dios por permitirme culminar este trabajo, y a mi esposa Ma. Guadalupe Echeverría Díaz por su gran apoyo incondicional que siempre me ha brindado.

Le agradezco infinitamente al Dr. Anatoli Merzon por sus enseñanzas, paciencia y sobre todo, por dedicarme una parte valiosa de su tiempo para realizar este trabajo de tesis.

Agradezco también los comentarios y sugerencias de los Doctores:

Dr. Petr Zhevandrov Bolshakova

Dr. Abdon E. Choque Rivero

Dr. Sergey Grudsky

Dr. Víctor Manuel Villanueva Sandoval



## Introducción

En este trabajo continuamos con la justificación matemática de la teoría de la dispersión dependiente del tiempo sobre cuñas. En los artículos [1]-[2] este problema fue analizado para las cuñas que satisfacen las condiciones de frontera de Dirichlet o de Neumann. En este trabajo de tesis investigamos la dispersión de una onda plana sobre una cuña “duro-suave” que satisface la condición de Dirichlet sobre un lado y la condición de Neumann sobre el otro lado.

Sea  $W := \{y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1 = \rho \cos \theta, y_2 = \rho \sin \theta, \rho > 0, 0 < \theta < \phi\}$  una cuña de magnitud  $\phi$ ,

$$(1) \quad 0 < \phi < \pi.$$

Consideremos una onda plana incidente  $u_{in}(t, y)$  de la forma

$$(2) \quad u_{in}(t, y) = e^{i(k_0 \cdot y - \omega_0 t)} f(t - n_0 \cdot y) \text{ para } t \in \mathbb{R} \text{ y } y \in Q := \mathbb{R}^2 \setminus W.$$

Aquí  $\omega_0 > 0$  representa la frecuencia de la onda  $u_{in}(y, t)$ , mientras que el vector unitario y el correspondiente vector de onda son

$$(3) \quad n_0 = (\cos \alpha, \sin \alpha) \in \mathbb{R}^2, \quad k_0 = \omega_0 n_0 \in \mathbb{R}^2$$

donde  $a \cdot b$  denota el producto escalar en  $\mathbb{R}^2$ . La función  $f$  es el perfil de la onda. Supongamos que  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$  y para algún  $\tau_0 > 0$ ,

$$(4) \quad f(s) = \begin{cases} 0, & s \leq 0, \\ 1, & s \geq \tau_0. \end{cases}$$

En este caso el frente de la onda  $u_{in}(y, t)$  en el momento  $t$  es la recta en  $\mathbb{R}^2$ :  $\{t - n_0 \cdot y = 0\}$ . Delante de esta línea, es decir, cuando  $n_0 \cdot y > t$ ,  $u_{in}(y, t) = 0$  por (4). Vamos a imponer una restricción al vector  $n_0$  ó (que es equivalente) al ángulo  $\alpha$ . Supongamos que en el momento  $t = 0$  el frente de la onda  $u_{in}(y, t)$  no interseca a la cuña  $W$ . Esto nos da la siguiente condición  $\phi - \frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$  (ver Figura 1). Además, supongamos que la onda incidente se refleja por ambos lados de la cuña. Esto nos da la restricción para  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < \phi$ . Estas condiciones implican las desigualdades

$$(5) \quad \max\left\{\phi - \frac{\pi}{2}, 0\right\} < \alpha < \min\left\{\frac{\pi}{2}, \phi\right\}.$$

Si alguna de estas condiciones no se cumplen, el plantiamiento del problema se complica un poco técnicamente, pero no esencialmente. Para evitar estas complicaciones técnicas, vamos siempre en adelante a considerar (5).

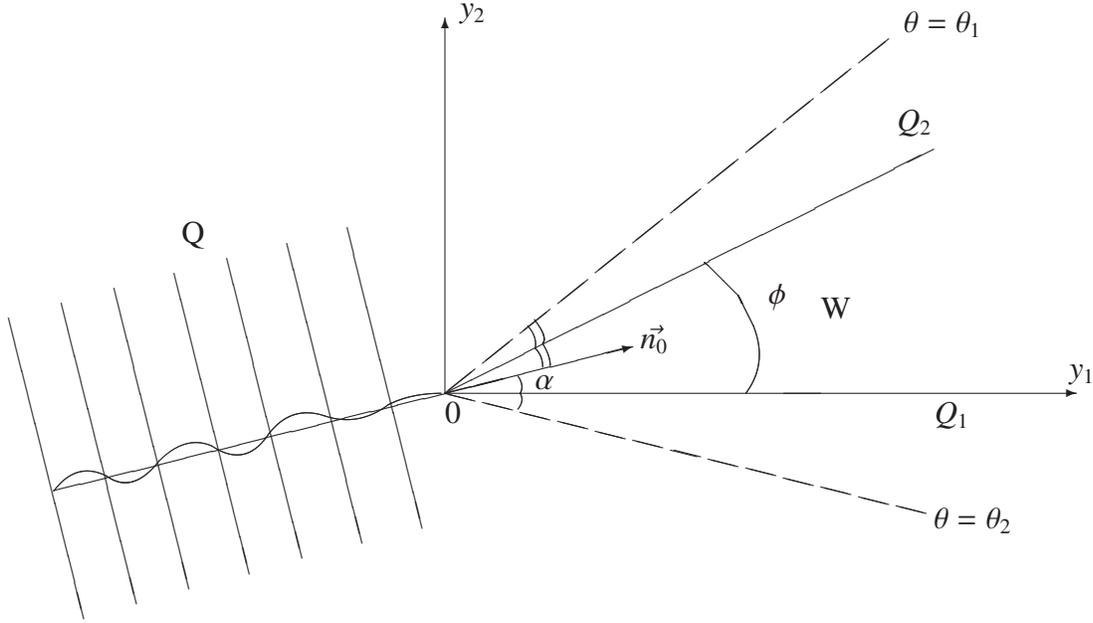


Figura 1. Onda incidente

Partimos  $\partial Q = Q_1 \cup Q_2$  donde  $Q_1 := \{y = (y_1, y_2) \in \partial Q : y_2 = 0\}$  y  $Q_2 := \{y = (y_1, y_2) \in \partial Q : y_1 = \rho \cos \phi, y_2 = \rho \sin \phi, \rho > 0\}$ . Matemáticamente el problema de dispersión de la onda (2) sobre una cuña del tipo "duro-suave" se describe por medio del siguiente DN-problema mixto para la ecuación de onda con la condición de Dirichlet sobre un lado de la cuña, digamos  $Q_2$  y la condición de Neumann sobre el otro lado  $Q_1$  de la cuña:

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \square u(y, t) = 0, \quad y \in Q \\ \partial_{y_2} u(y, t) = 0, \quad y \in Q_1 \\ u(y, t) = 0, \quad y \in Q_2 \end{array} \right| t \in \mathbb{R},$$

donde  $\square = \partial_t^2 - \Delta$ . Nosotros incluimos la onda entrante  $u_{\text{in}}$  en el planteamiento del problema a través de la condición inicial

$$(7) \quad u(y, t) = u_{\text{in}}(y, t), \quad y \in Q, \quad t < 0.$$

Esto es posible, ya que  $u_{\text{in}}(y, t)$  es una solución del problema (6) para  $t < 0$ : las condiciones de frontera en (6) se cumplen para  $t < 0$  ya que  $u_{\text{in}}$  es idénticamente cero en una vecindad de  $\partial Q$  por (5). Equivalentemente,  $u(y, t)$  es la solución del problema de Cauchy para el sistema (6) para  $t > 0$  con las condiciones iniciales

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} u(y, 0) = u_{\text{in}}(y, 0) \\ \dot{u}(y, 0) = \dot{u}_{\text{in}}(y, 0) \end{array} \right| y \in Q.$$

En el presente trabajo, nosotros derivaremos por primera vez la representación del tipo Sommerfeld para la solución  $u(y, t)$  del DN-Problema de difracción no estacionario (ver (30), (31)). Por la representación del tipo-Sommerfeld nos referimos a la transformada inversa de Fourier-Laplace de la representación integral Sommerfeld de la solución correspondiente al problema estacionario con un parámetro complejo. Usamos esta representación para probar la existencia de la solución al problema (6), (7). Denotemos las ondas de dispersión y difractada por

$$(9) \quad u_s(y, t) := u(y, t) - u_{\text{in}}(y, t), \quad u_d(y, t) := u_s(y, t) - u_r(y, t), \quad t \in \mathbb{R}$$

La onda reflejada  $u_r(y, t)$  esta dada por

$$(10) \quad u_r(y, t) := \begin{cases} u_{r,1}(\rho, \theta, t), & \phi \leq \theta \leq \theta_1 \\ 0 & \theta_1 < \theta < \theta_2 \\ u_{r,2}(\rho, \theta, t), & \theta_2 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

donde  $(\rho, \theta)$  son las coordenadas polares de  $y$ ,

$$(11) \quad \theta_1 := 2\phi - \alpha, \quad \theta_2 := 2\pi - \alpha$$

y

$$(12) \quad u_{r,1}(\rho, \theta, t) = -e^{i(k_1 \cdot y - \omega_0 t)} f(t - n_1 \cdot y), \quad u_{r,2}(\rho, \theta, t) = e^{i(k_2 \cdot y - \omega_0 t)} f(t - n_2 \cdot y),$$

$$k_1 = \omega_0 n_1, \quad n_1 = (\cos \theta_1, \sin \theta_1); \quad k_2 = \omega_0 n_2, \quad n_2 = (\cos \theta_2, \sin \theta_2)$$

(cf. con  $n_0$  en (3)) (ver Figura 1). Probamos la existencia del problema no estacionario (6), (7) en el espacio funcional  $\mathcal{E}_{\epsilon, N}$ . Más precisamente, que esta solución (campo total)  $u$  se representa como la suma de la onda incidente  $u_{\text{in}}$ , onda reflejada  $u_r$  y la onda difractada  $u_d$ . Encontramos una nueva representación del tipo Sommerfeld-Malyuzhinets para la onda difractada *no estacionaria*  $u_d$  (ver Sección 8, Capítulo 4). Esta representación nos permite probar que el campo total  $u$  pertenece a una clase funcional apropiada. También usamos esta representación para probar el Principio de Amplitud Límite. Notemos que el plan en esta parte de la tesis coincide con el artículo [3]. A pesar de esto, vamos a dar todas las formulaciones y todas las referencias. También vamos a probar el Principio de Amplitud Límite, es decir, probamos

$$u(y, t) \sim e^{-i\omega_0 t} u_{\infty}(y), \quad t \rightarrow \infty,$$

donde  $u_{\infty}(y)$  es la amplitud límite y una representación tipo-Sommerfeld para la amplitud límite. La representación de Sommerfeld juega un papel importante en la dispersión sobre cuñas, ya que da una

representación de la solución como una superposición de las ondas planas. Nuestro progreso en la justificación de la representación Sommerfeld para el DN-Problema se basa en el método general de las características complejas desarrollado en [4]-[8].

El método usa la transformada de Fourier compleja y el método de Malyshev de funciones automorfas [9]. Reducimos el problema estacionario a una *ecuación de conexión* algebraica con dos funciones desconocidas sobre la superficie de Riemann de las características complejas de la ecuación de onda. La ecuación relaciona las transformadas de Fourier de las densidades de las capas de superficie de la representación de la solución por las superficies potenciales.

El método de Malyshev permite reducir la ecuación a una ecuación en diferencias la cual resolvemos explícitamente. El método proporciona una representación explícita para todas las soluciones de la clase de las distribuciones temperadas. Esto da la solución como una integral de Fourier la cual es una superposición de ondas planas que es instructivo para obtener la representación Sommerfeld. La presente aplicación del método demuestra que proporciona una adecuada técnica para tratar la difracción sobre una cuña del tipo DN.

De los artículos desarrollados para el DN- problema mencionamos a los artículos [10], [11], [12]. Rottbrand [10] (ver, también [11]) ha considerado una onda plana no estacionaria y no periódica que cae a un semi-plano. Una solución particular es construida.

También, Rottbrand y otros [12, 11] construyeron una solución particular del problema de dispersión no estacionario para una cuña con una onda no periódica. Los autores desarrollan la técnica de Wiener-Hopf. La unicidad de la solución y el buen planteamiento no se consideran. El plan de este trabajo es el siguiente:

En la Sección 1, Capítulo 1 introducimos las clases funcionales y formulamos los resultados principales. En la Sección 2 reducimos el problema no estacionario a un problema estacionario. En la Sección 3 reducimos el problema al plano. En las Secciones 1, 2 y 3 del Capítulo 2 aplicamos la transformada de Fourier e introducimos la ecuación de conexión entre la solución de los datos de Cauchy. En la Sección 4 del Capítulo 2 obtenemos una ecuación en diferencias. En la Sección 5 del Capítulo 2 se demuestra la unicidad de la solución del problema de dispersión. En la Sección 6 del Capítulo 2 construimos una solución de la ecuación en diferencias y en la Sección 1 del Capítulo 3 obtenemos la representación tipo-Sommerfeld para el campo total  $u(y, t)$ . En las Secciones 1- 4 del Capítulo 4 demostramos la partición del campo total  $u$ . En las Secciones 5 y 6 del Capítulo 4 demostramos las estimaciones para la densidad y sus derivadas de la onda de difracción. En la Sección 7 del Capítulo 4 demostramos que la función (30) es una solución suave del problema de dispersión (6), (7). En las Secciones 8-11 del Capítulo 4 demostramos que la solución pertenece al espacio funcional. En la Sección 12 del Capítulo 4 demostramos el Principio de Amplitud Límite.

## Reducción del problema de dispersión a un problema estacionario en el plano.

### 1. Definiciones y resultados principales

1. Consideremos la función  $u(t) \in C(\mathbb{R})$ , y asumimos que  $u(t) = 0$  para  $t \leq T$  y  $|u(t)| \leq C(1 + |t|)^N$  para algunos  $C, N \in \mathbb{R}$ . Denotamos su transformada de Fourier-Laplace respecto al tiempo como

$$(13) \quad \hat{u}(\omega) := F_{t \rightarrow \omega}[u](\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} u(t) dt = \int_T^{\infty} e^{i\omega t} u(t) dt, \quad \text{Im } \omega > 0.$$

Denotemos  $\mathbb{C}^+ := \{\omega \in \mathbb{C} : \text{Im } \omega > 0\}$ . Obviamente,  $\hat{u}(\omega)$  es una función analítica en  $\omega \in \mathbb{C}^+$ .

2. También usaremos la transformada de Fourier real y compleja en las variables espaciales. Consideremos  $u(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,  $n = 1, 2$ . Nosotros denotamos por

$$(14) \quad \tilde{u}(\xi) := F_{x \rightarrow \xi}[u](\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x, \xi \rangle} u(x) dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Usaremos similares notaciones para las distribuciones temperadas  $u \in S'(\mathbb{R}^n)$ . Por el Teorema de Paley-Wiener [13, Teorema I.5.2], la distribución  $\tilde{u}(\xi)$  tiene una extensión analítica en el conjunto  $\mathbb{C}K_+^n := \{z \in \mathbb{C}^n : \text{Im } z \in K_+^n\}$ , si  $\text{supp } u \subset \overline{K_+^n} := \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}$ . Vamos en adelante a denotar esta extensión analítica por el mismo símbolo  $\tilde{u}(z)$  y nombramos a esta función como la transformada de Fourier compleja de  $u$ . Para las funciones regulares temperadas  $u(x)$  con soporte en  $\overline{K_+^n}$  su transformada de Fourier compleja se expresa como

$$(15) \quad \tilde{u}(z) = \int_{K_+^n} e^{i\langle x, z \rangle} u(x) dx, \quad z \in \mathbb{C}K_+^n.$$

3. Denotamos por  $\dot{\overline{Q}} \equiv \overline{Q} \setminus \{0\}$ ,  $\{y\} := |y|/(1 + |y|)$ ,  $y \in \mathbb{R}^2$  ó  $y \in \mathbb{R}$ .

DEFINICIÓN 1.1. i)  $E_\varepsilon = E_\varepsilon(Q)$  es el espacio de las funciones  $u(y) \in C(\overline{Q}) \cap C^1(\dot{\overline{Q}})$  con la norma finita

$$(16) \quad |u|_\varepsilon = \sup_{y \in \overline{Q}} |u(y)| + \sup_{y \in \dot{Q}} \{y\}^\varepsilon |\nabla u(y)| < \infty, \quad \varepsilon \geq 0$$

ii)  $\mathcal{E}_{\varepsilon, N} = \mathcal{E}_{\varepsilon, N}(Q)$  es el espacio de las funciones  $u(y, t) \in C^\infty(\dot{\overline{Q}} \times \overline{\mathbb{R}}_+) \cap C(\overline{Q} \times \overline{\mathbb{R}}_+)$  con la norma finita

$$(17) \quad \|u\|_{\varepsilon, N} := \sup_{t \geq 0} \left[ \sup_{y \in \overline{Q}} |u(y, t)| + \sup_{y \in \dot{Q}} (1 + t)^{-N} \{y\}^\varepsilon |\nabla_y u(y, t)| \right] < \infty, \quad N \geq 0.$$

Notemos que para  $\varepsilon < 1$  las funciones  $u \in E_\varepsilon$  tienen energía local finita

$$\int_{x \in Q: |x| < R} (|\nabla u(y)|^2 + |u(y)|^2) dy < \infty, \quad R > 0$$

OBSERVACIÓN 1.1. Si una función  $u(y, t)$  esta definida en  $\overline{Q} \times \mathbb{R}$  escribiremos  $u \in \mathcal{E}_{\varepsilon, N}$  si  $u(y, t)|_{\overline{Q} \times \mathbb{R}_+} \in \mathcal{E}_{\varepsilon, N}$ .

OBSERVACIÓN 1.2. Si  $u \in \mathcal{E}_{\varepsilon, N}$  (en el sentido de la Observación 1.1) entonces, en general,  $\widehat{u}(y, \omega) \notin E_\varepsilon$  para  $\omega \in \mathbb{C}^+$ . Por ejemplo, la función  $u_{in} \in \mathcal{E}_{0,0}$  pero  $\widehat{u}_{in} \notin E_0$  para  $\omega \in \mathbb{C}^+$  (ver (38)). Sin embargo  $F_{t \rightarrow \omega}[u(y, t)\Theta(t)] \in E_\varepsilon$  para  $\omega \in \mathbb{C}^+$  donde  $\Theta(t)$  aquí y en lo que sigue es la función de Heaviside.

4. Denotemos por

$$(18) \quad g(\omega) = \widehat{f}(\omega - \omega_0) = \int_0^\infty e^{i(\omega - \omega_0)s} f(s) ds, \quad \omega \in \mathbb{C}^+.$$

LEMA 1.1. La función  $g(\omega)$  es analítica en  $\mathbb{C}^+$  y satisface la cota

$$(19) \quad |g(\omega)| \leq C(\text{Im } \omega)^{-1}, \quad \omega \in \mathbb{C}^+.$$

**Demostración.** Ya que  $f(s)$  satisface (4), tenemos  $f'(s) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ ,  $\text{supp } f' \subset [0, \tau_0]$  y

$$(20) \quad g(\omega) = \frac{g_1(\omega)}{\omega - \omega_0}, \quad \omega \in \mathbb{C}^+$$

donde

$$(21) \quad \widehat{g}_1(\omega) = i\widehat{h}(\omega - \omega_0), \quad \omega \in \mathbb{C}$$

con  $h(s) := f'(s)$ . Por el Teorema de Paley-Wiener

$$(22) \quad \widehat{g}_1 \in H(\mathbb{C}).$$

donde aquí y en lo que sigue  $H(O)$  denota el conjunto de las funciones analíticas en  $O$  para cualquier abierto  $O \subset \mathbb{C}$ . Denotamos por  $g_1(t)$  la transformada inversa de Fourier-Laplace de la función  $\widehat{g}_1(\omega)$ . Entonces, (21) implica que

$$(23) \quad g_1(t) = ie^{-i\omega_0 t} f'(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

y (4) implica que

$$(24) \quad \text{supp } g_1 \subset [0, \tau_0]$$

Además,  $g_1 \in S(\mathbb{R})$ , y para cualquier  $k \in \mathbb{N}, N > 0$

$$(25) \quad |\widehat{g}_1^{(k)}(\omega)| \leq C_{k,N}(1 + |\omega|)^{-N}, \quad \omega \in \overline{\mathbb{C}^+}$$

Entonces, (25) y (18) implican la cota (19), ya que  $\omega_0 \in \mathbb{R}$ . ■

5. Sea

$$(26) \quad \Phi := 2\pi - \phi$$

$$(27) \quad H_1(\mu, \alpha, \Phi) := \frac{1}{\sinh[(\mu - \mu_1)q]} + \frac{1}{\sinh[(\mu - \mu_1^*)q]}, \quad q = \frac{\pi}{2\Phi}$$

donde

$$(28) \quad \mu_1 = -\frac{i\pi}{2} + i\alpha, \quad \mu_1^* = -\mu_1 + i\pi$$

OBSERVACIÓN 1.3. Usamos la denotación  $H_1$  para distinguir éste kernel del kernel similar (20) de [3].

6. Denotemos por  $C$  los contornos tipo-Sommerfeld

$$C = C_1 \cup C_2$$

donde

$$C_1 = \left\{ a_1 - \frac{i\pi}{2} : a_1 \geq 1 \right\} \cup \left\{ 1 + ib_1 : -\frac{5\pi}{2} \leq b_1 \leq -\frac{\pi}{2} \right\} \cup \left\{ a_1 - \frac{5i\pi}{2} : a_1 \geq 1 \right\}.$$

El contorno  $C_2$  es la reflexión de  $C_1$  con respecto del punto  $-\frac{3\pi}{2}$ . Escogemos la orientación del contorno  $C$ , en el sentido contrario de las manecillas del reloj (ver Figura 6).

Sea

$$(29) \quad y = \rho e^{i\theta}$$

y en lo que sigue son las coordenadas polares de  $y \in \mathbb{R}^2$ . Los resultados principales de esta tesis son los siguientes teoremas.

TEOREMA 1.1. Sea  $u(y, t)$  una solución para el problema de dispersión (6), (7) y  $u(y, t) \in \mathcal{E}_{\varepsilon, N}$  con  $\varepsilon \in [0, 1)$  y  $N \geq 0$ . Entonces la solución  $u(y, t)$

i) es única

ii) está dada por la transformada de Fourier inversa

$$(30) \quad u(\rho, \theta, t) = F_{\omega \rightarrow t}^{-1}[\hat{u}(\rho, \theta, \omega)], \quad t \geq 0, \quad (\rho, \theta) \in \bar{Q},$$

donde  $\hat{u}(\rho, \theta, \omega)$  es una integral de tipo Sommerfeld

$$(31) \quad \hat{u}(\rho, \theta, \omega) = \frac{ig(\omega)}{4\Phi} \int_C e^{-\rho\omega \sinh\mu} H_1(\mu + i\theta, \alpha, \Phi) d\mu, \quad \rho \geq 0, \quad \phi \leq \theta \leq 2\pi, \quad \omega \in C^+.$$

Sea

$$(32) \quad u_\infty(y) := A(\rho, \theta) := \frac{i}{4\Phi} \int_C e^{-\omega_0 \rho \sinh\beta} H_1(\beta + i\theta) d\beta$$

TEOREMA 1.2. i) Sea el perfil de la onda incidente  $f(s)$  una función suave (ver (4)). Entonces la función  $u(y, t)$  definida por (30), pertenece al espacio  $C^\infty(\bar{Q} \times \bar{\mathbb{R}}_+) \cap C(\bar{Q} \times \bar{\mathbb{R}}_+)$  y es una solución para el problema de dispersión (6), (7).

ii)  $u \in \mathcal{E}_{\varepsilon, N}$  con  $\varepsilon = N = 1 - \frac{\pi}{2\Phi}$ ,

iii) El Principio de Amplitud Límite se cumple: para cualquier  $\rho_0 > 0$

$$(33) \quad u(\rho, \theta, t) - e^{-i\omega_0 t} A(\rho, \theta) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty$$

uniformemente para  $\rho \in [0, \rho_0]$  and  $\theta \in [\phi, 2\pi]$ .

OBSERVACIÓN 1.4. *Nosotros reducimos el DN-Problema no estacionario al correspondiente DN-Problema estacionario por medio de la transformada de Fourier respecto al tiempo. Mostramos que la solución para el problema estacionario es única en  $E_\varepsilon$  y se expresa por la integral tipo-Sommerfeld.*

## 2. Reducción al problema estacionario

Consideremos el problema (6), (7). Vamos a aplicar la transformada de Fourier compleja (13) con respecto al tiempo  $t$  para la primera ecuación de (6) para obtener la ecuación de Helmholtz con un parámetro. Primero, reducimos el problema a la condición inicial cero y las condiciones de frontera no cero. Sea  $u(y, t) \in \mathcal{E}_{\varepsilon, N}$  una solución del problema (6)-(8) para algunos  $\varepsilon > 0$  y  $N > 0$ . Definimos la onda de dispersión como:

$$(34) \quad u_s(y, t) := u(y, t) - u_{in}(y, t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad y \in Q.$$

Entonces (7) implica

$$(35) \quad u_s(y, t) \equiv 0, \quad t \leq 0, \quad y \in Q.$$

El sentido físico de esta función es el siguiente:  $u_s(y, t)$  describe el campo de difracción que se obtiene como el resultado de la dispersión de la onda incidente  $u_{in}(y, t)$  sobre la superficie  $\partial Q$  de la cuña  $W$ .

Además,  $u_s(y, t)$  es una solución para el problema

$$(36) \quad \left\{ \begin{array}{l} \square u_s(y, t) = 0, \quad y \in Q \\ \partial_{y_2} u_s(y, t) = -\partial_{y_2} u_{in}(y, t), \quad y \in Q_1 \\ u_s(y, t) = -u_{in}(y, t), \quad y \in Q_2 \end{array} \right. \quad t > 0$$

**OBSERVACIÓN 1.5.** *Notemos que  $u_{in}(y, t) \in \mathcal{E}_{0,0}$ . Luego, la condición  $u(y, t) \in \mathcal{E}_{\varepsilon, N}$  es equivalente a la condición  $u_s(y, t) \in \mathcal{E}_{\varepsilon, N}$ . Por lo tanto, los problemas (6), (7) y (35), (36) son equivalentes.*

**LEMA 1.2.** *Sea  $u_s \in \mathcal{E}_{\varepsilon, N}$  una solución del problema (35), (36). Entonces, la transformada de Fourier  $\hat{u}_s(y, \omega)$  es una función analítica en  $\omega \in \mathbb{C}^+$  con valores en  $E_\varepsilon$ .*

En particular,  $\hat{u}_s(y, \omega)$  es una función continua de  $(y, \omega) \in \mathbb{C}^+ \times \overline{Q}$ . Nuestro plan es el siguiente. Suponiendo que  $u_s \in \mathcal{E}_{\varepsilon, N}$  satisface el sistema (35), (36), obtendremos condiciones necesarias para su transformada de Fourier compleja con respecto al tiempo  $t$ . De esto deduciremos la unicidad de la solución para (36) (y por lo tanto la unicidad de la solución para (6), (7)). Además, hallaremos una fórmula para  $\widehat{u}_s(y, \omega)$  (véase (31)). De esta manera vamos a demostrar el Teorema 1.1. En la Sección 5 del Capítulo 4 demostraremos que  $u(y, t)$  es realmente la solución del problema (6), (7) y en las Secciones 6-9 del Capítulo 4 probaremos que  $u \in \mathcal{E}_{1-\frac{\pi}{2\Phi}, 1-\frac{\pi}{2\Phi}}$ .

Aplicamos la transformada de Fourier compleja en el tiempo  $t$  al problema (35), (36). Calculamos los datos de Dirichlet y Neumann a los llamamos datos de Cauchy de la función  $\hat{u}_{in}(y, \omega)$  sobre lados  $Q_2$  y  $Q_1$  del ángulo  $Q$  respectivamente.

**LEMA 1.3.** *Los datos de Cauchy de la función  $\widehat{u}_{in}(y, \omega)$  sobre los lados de  $Q$  se expresan como*

$$(37) \quad \widehat{u}_{in}(y, \omega) \Big|_{y \in Q_2} = g(\omega) e^{-i\omega y_2 \frac{\cos(\alpha+\Phi)}{\sin\Phi}}, \quad \partial_{y_2} \widehat{u}_{in}(y, \omega) \Big|_{y \in Q_1} = i\omega g(\omega) \sin \alpha e^{i\omega y_1 \cos \alpha}.$$

**Demostración.** Primero demostramos,

$$(38) \quad \hat{u}_{in}(y, \omega) = g(\omega) e^{i\omega \rho \cos(\theta-\alpha)}, \quad y \in \mathbb{R}^2, \quad \omega \in \mathbb{C}^+.$$

De hecho, aplicando la transformada de Fourier compleja a (2) con respecto a  $t$  y usando (3), tenemos:

$$(39) \quad \widehat{u}_{in}(y, \omega) = e^{i\omega_0(n_0 \cdot y)} \int_{\mathbb{R}} e^{i(\omega - \omega_0)t} f(t - n_0 \cdot y) dt$$

Haciendo un cambio de variable,  $\xi = t - n_0 \cdot y$ , en la última integral de (39), obtenemos

$$\widehat{u}_{in}(y, \omega) = e^{i\omega_0(n_0 \cdot y)} \int_{\mathbb{R}} e^{i(\omega - \omega_0)(\xi + n_0 \cdot y)} f(\xi) d\xi = e^{i\omega(n_0 \cdot y)} \int_{\mathbb{R}} e^{i(\omega - \omega_0)s} f(s) ds.$$

Ahora (38) se sigue de (3), (18) y (29). La primera identidad en (37) se sigue de (38), con  $\theta = \phi$ . La segunda identidad en (37) se sigue también de (38) y la identidad (37). ■

Por lo tanto, el problema de dispersión (36) se reduce al siguiente problema estacionario.

LEMA 1.4. *Sea  $u_s(y, t) \in \mathcal{E}_{\varepsilon, N}$  una solución para el problema (36); entonces*

i) *La función  $\widehat{u}_s(y, \omega)$  es una solución para el siguiente problema de valores en la frontera con parámetro  $\omega \in \mathbb{C}^+$ ,*

$$(40) \quad \left\{ \begin{array}{ll} (-\Delta - \omega^2)\widehat{u}_s(y, \omega) = 0, & y \in Q \\ \partial_{y_2}\widehat{u}_s(y, \omega) = -i\omega g(\omega) \sin \alpha e^{i\omega y_1 \cos \alpha}, & y \in Q_1 \\ \widehat{u}_s(y, \omega) = -g(\omega) e^{-i\omega y_2 \frac{\cos(\alpha + \Phi)}{\sin \Phi}}, & y \in Q_2 \end{array} \right. \quad \omega \in \mathbb{C}^+.$$

ii) *La función  $\widehat{u}_s(\cdot, \omega) \in E_\varepsilon$  para  $\omega \in \mathbb{C}^+$ .*

**Demostración.** i) La primera ecuación de (40) se sigue directamente de la primera ecuación de (36) por la transformada de Fourier-Laplace con respecto a  $t$ . Aplicando la misma transformada a la segunda y tercera ecuación de (36) y usando (37), obtenemos la segunda y tercera ecuación en (40).

ii) La afirmación se sigue de la Observación 1.2 y (35). ■

Sea  $u(y, t) \in \mathcal{E}_{\varepsilon, N}$  una solución del problema (6), (7). Por (2), (4) para cualquier  $y \in Q$  existe  $t_y \in \mathbb{R}$ , tal que  $u_{in}(y, t) = 0$ ,  $t \leq t_y$ . Por tanto,  $u(y, t) = 0$ ,  $t \leq t_y$ . Por (13) para cualquier  $y \in Q$  existe  $\widehat{u}(y, \omega) \in H(\mathbb{C}^+)$ .

COROLARIO 1.1.  *$\widehat{u}(y, \omega)$  satisface el siguiente sistema*

$$(41) \quad \left\{ \begin{array}{ll} (-\Delta - \omega^2)\widehat{u}(y, \omega) = 0, & y \in Q \\ \partial_{y_2}\widehat{u}(y, \omega) = 0, & y \in Q_1 \\ \widehat{u}(y, \omega) = 0, & y \in Q_2 \end{array} \right. \quad \omega \in \mathbb{C}^+.$$

**Demostración.** La primera ecuación de (41) se sigue de la primera ecuación de (40), (34) y la identidad  $\square u_{in}(y, t) = 0$ ,  $(y, t) \in Q \times \mathbb{R}$ . Las otras ecuaciones se siguen de las correspondientes ecuaciones en (40), (34) y (37). ■

OBSERVACIÓN 1.6. *Parece que el sistema (41) admite solo la única solución cero. Como vamos a demostrar en la Sección 6 que es así si  $\widehat{u}(y, \omega) \in E_\varepsilon$ . Pero  $\widehat{u}(y, \omega) \notin E_\varepsilon$  para cualquier  $\omega$  (ver Observación 1.2).*

En contraste a esto, la función  $\widehat{u}_s(y, \omega) \in E_\varepsilon$  ya que  $\text{supp } u_s(\cdot, t) \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ . Por eso preferimos resolver el problema (40).

Resolveremos (40) usando el método de las características complejas [5]-[9]. En primer lugar vamos a probar la unicidad de la solución para el problema (40) en  $E_\varepsilon$ . El Lema 1.4 implica la unicidad de la solución en el espacio  $\mathcal{E}_{\varepsilon, N}$ .

### 3. Reducción del problema en el plano

**3.1. Extensión por cero.** En esta sección reduciremos el problema (40) en el ángulo, a un problema en el plano. Supongamos que  $\widehat{u}_s(y, \omega) \in E_\varepsilon$ ,  $\omega \in \mathbb{C}^+$  y satisface el sistema (40). Hacemos un cambio de variables  $x := (x_1, x_2) = \mathcal{L}(y)$ , donde la transformación correspondiente a la matriz  $\mathcal{L}$  mapea el ángulo  $Q$  sobre  $K := \{(x_1, x_2) : x_1 < 0 \text{ ó } x_2 < 0\}$ :

$$x_1 = y_1 + y_2 \cot \Phi; \quad x_2 = -\frac{y_2}{\sin \Phi}.$$

Reescribimos el sistema (40) en las coordenadas  $x$ . Sea  $v(x, \omega)$  la función

$$(42) \quad v(x, \omega) = \widehat{u}_s(\mathcal{L}^{-1}(x, \omega)), \quad \omega \in \mathbb{C}^+, \quad x \in K.$$

La función  $v$  depende del parámetro  $\omega$ , sin embargo, de aquí en adelante, escribiremos simplemente  $v(x)$  en lugar de  $v(x, \omega)$ . Lo haremos también con todas las funciones que dependen de  $\omega$  si no da lugar a malos entendidos. Además, en todas partes, mas adelante, si no decimos otra cosa, vamos a suponer que  $\omega \in \mathbb{C}^+$ . Es fácil ver que el sistema (40) para la función  $\widehat{u}_s(y, \omega)$  toma la forma:

PROPOSICIÓN 1.1. *El problema (40) es equivalente al problema en el plano  $K$ :*

$$(43) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{H}(D)v(x) := \\ \quad = \left( -\frac{1}{\sin^2 \Phi} \left[ \Delta_x - 2 \cos \Phi \partial_{x_1 x_2}^2 \right] - \omega^2 \right) v(x) = 0, \quad x \in K \\ \cos \Phi \partial_{x_1} v(x_1, 0) - \partial_{x_2} v(x_1, 0) \\ \quad = -i\omega g(\omega) \sin \alpha \sin \Phi e^{i\omega x_1 \cos \alpha}, \quad x_1 > 0 \\ v(0, x_2) = -g(\omega) e^{i\omega x_2 \cos(\alpha + \Phi)}, \quad x_2 > 0 \end{array} \right.$$

donde denotamos  $D := (i\partial_{x_1}, i\partial_{x_2})$ .

DEFINICIÓN 1.2.  $E_\varepsilon(K)$  es la imagen del espacio  $E_\varepsilon(Q)$  bajo la transformación  $\mathcal{L}$ .

Obviamente,  $E_\varepsilon(K)$  es el espacio de las funciones  $v(x) \in C(\overline{K}) \cap C^1(\overset{\circ}{K})$  con la norma finita

$$(44) \quad |v|_\varepsilon = \sup_{x \in \overline{K}} |v(x)| + \sup_{x \in \overset{\circ}{K}} \{x\}^\varepsilon |\nabla_x v| < \infty.$$

donde  $\dot{\bar{K}} = \bar{K} \setminus \{0\}$ . Suponemos que

$$(45) \quad 0 \leq \varepsilon < 1.$$

Ya que  $\widehat{u}_s(y, \omega) \in E_\varepsilon$ ,  $\omega \in \mathbb{C}^+$ ,  $v(x, \omega) \in E_\varepsilon$  y la función  $v$  posee los siguientes datos de Neumann sobre  $\dot{\bar{K}}$ :

$$(46) \quad v_1^1(x_1) := v_1^1(x, \omega) := \partial_{x_2} v(x_1, 0, \omega), x_1 > 0; v_2^1(x_2) := v_2^1(x, \omega) := \partial_{x_1} v(0, x_2, \omega), x_2 > 0$$

y los siguientes datos de Dirichlet sobre  $\partial\bar{K}$ :

$$(47) \quad v_1^0(x_1) := v_1^0(x, \omega) := v(x_1, 0, \omega), x_1 > 0; v_2^0(x_2) := v_2^0(x, \omega) := v(0, x_2, \omega), x_2 > 0$$

Extendemos  $v_l^\beta(x_l, \omega)$  por cero para  $x_l < 0$ . Entonces, por (44),

$$(48) \quad |v_l^1(x_l, \omega)| \leq C(\omega) |x_l|^{-\varepsilon}, x_l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, |v_l^0(x_l, \omega)| \leq C(\omega), x_l \in \mathbb{R}, l = 1, 2.$$

Por tanto,

$$(49) \quad v_l^\beta(x_l) \in S'(\mathbb{R}), l = 1, 2, \beta = 0, 1, \text{supp } v_l^\beta(x_l) \subset \overline{\mathbb{R}^+}$$

y

$$(50) \quad v_l^\beta(x_l) \in L_{loc}^1(\mathbb{R})$$

por (45).

Extendemos  $v(x)$  por cero fuera de  $K$  y denotamos

$$(51) \quad v_0(x) = \begin{cases} v(x), & x \in \bar{K} \\ 0, & x \notin \bar{K}. \end{cases}$$

Entonces  $v_0(x)$  determina una distribución regular (función localmente sumable) en  $\mathbb{R}^2$  por la definición del espacio  $E_\varepsilon$ . El siguiente lema expresa la distribución  $\mathcal{H}v_0$  en términos de los datos de Cauchy de  $v$ .

**LEMA 1.5.** *Sea  $v(x) \in E_\varepsilon$  con  $\varepsilon \in (0, 1)$  una solución de (43). Entonces, en el sentido de las distribuciones,*

$$(52) \quad \mathcal{H}(D)v_0(x) = d_0(x), x \in \mathbb{R}^2,$$

donde  $d_0(x)$  es la distribución de la forma

$$(53) \quad d_0(x) := d_0(x, \omega) = \frac{1}{\sin^2 \Phi} \left[ \delta(x_2) v_1^1(x_1) + \delta'(x_2) v_1^0(x_1) + \delta(x_1) v_2^1(x_2) + \delta'(x_1) v_2^0(x_2) - \right. \\ \left. - 2 \cos \Phi \delta(x_2) \partial_{x_1} v_1^0(x_1) - 2 \cos \Phi \delta(x_1) \partial_{x_2} v_2^0(x_2) - 2 \cos \Phi v(0) \delta(x) \right].$$

donde  $v_l^\beta$  se definen en (46), (47) (con las extensiones por 0 en  $x_l < 0$ ).

**Demostración.** Para  $\tau > 0$  denotemos  $K_\tau := \{x \in K : x_1 < -\tau \text{ ó } x_2 < -\tau\}$ ;  $v_\tau := v|_{K_\tau}$ . La función  $v \in C^\infty(K)$ , es una solución del operador elíptico de la ecuación transformada de Helmholtz  $H(D)$  en  $K$ . Denotamos por

$$v_\tau(x) = \begin{cases} v(x), & x \in \bar{K}_\tau \\ 0, & x \notin \bar{K}_\tau. \end{cases}$$

Entonces,  $v_\tau \rightarrow v_0$  in  $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$  cuando  $\tau \rightarrow 0+$  ya que  $v \in E_\varepsilon$  con  $\varepsilon < 1$ . Por tanto,

$$(54) \quad v_\tau(x) \rightarrow v_0(x) \text{ in } S'(\mathbb{R}^2), \tau \rightarrow 0+.$$

Ahora aplicamos el operador  $\mathcal{H}(D)$  de (43) a la distribución  $v_\tau$ . Ya que  $v_\tau$  es una función discontinua y  $v_0$  es una solución de la ecuación homogénea transformada de Helmholtz en  $K$ , tenemos

$$(55) \quad \mathcal{H}(\omega, D)v_\tau(x) = d_\tau(x), \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

donde  $d_\tau$  es una distribución con el soporte en  $\partial K_\tau$ , dada por la expresión

$$d_\tau(x) = \frac{1}{\sin^2 \Phi} \left[ \begin{aligned} &\delta(x_2 + \tau)\Theta(x_1 + \tau)\partial_{x_2}v(x_1, -\tau) + \delta'(x_2 + \tau)\Theta(x_1 + \tau)v(x_1, -\tau) \\ &+ \delta(x_1 + \tau)\Theta(x_2 + \tau)\partial_{x_1}v(-\tau, x_2) + \delta'(x_1 + \tau)\Theta(x_2 + \tau)v(-\tau, x_2) \\ &- 2 \cos \Phi \delta(x_2 + \tau)\Theta(x_1 + \tau)\partial_{x_1}v(x_1, -\tau) \\ &- 2 \cos \Phi \delta(x_1 + \tau)\Theta(x_2 + \tau)\partial_{x_2}v(-\tau, x_2) \\ &- 2 \cos \Phi v(-\tau, \tau)\delta(x_1 + \tau)\delta(x_2 + \tau) \end{aligned} \right]$$

donde  $\Theta$  la función de Heaviside. (54) implica que

$$d_\tau(x) \rightarrow H v_0(x) \text{ in } S'(\mathbb{R}^2), \tau \rightarrow 0+.$$

Sólo resta verificar que

$$(56) \quad d_\tau \rightarrow d_0, \tau \rightarrow 0+.$$

**Paso 1.** La continuidad de  $v(x)$  en  $\bar{K}$  implica que

$$(57) \quad v(x_1, -\tau) \rightarrow v_1^0(x_1), \tau \rightarrow 0+, x_1 > 0.$$

Por (44) tenemos

$$|v(x_1, -\tau)| \leq C, \tau \geq 0, x_1 > 0.$$

Por tanto, (57) implica que

$$\Theta(x_1 + \tau)v(x_1, -\tau) \rightarrow \Theta(x_1)v_1^0(x_1) \text{ en } S'(\mathbb{R}), \tau \rightarrow 0+.$$

De aquí, tenemos

$$(58) \quad \delta'(x_2 + \tau)\Theta(x_1 + \tau)v(x_1, -\tau) \rightarrow \delta'(x_2)\Theta(x_1)v_1^0(x_1) \text{ en } S'(\mathbb{R}^2), \tau \rightarrow 0+.$$

Similarmente, tenemos

$$\delta'(x_1 + \tau)\Theta(x_2 + \tau)v(-\tau, x_2) \rightarrow \delta'(x_1)\Theta(x_2)v_2^0(x_2) \text{ en } S'(\mathbb{R}^2) \tau \rightarrow 0+.$$

y  $v(-\tau, -\tau) \rightarrow v(0, 0)$ , por lo tanto

$$(59) \quad 2 \cos \Phi v(-\tau, -\tau)\delta(x_1 + \tau)\delta(x_2 + \tau) \rightarrow 2 \cos \Phi v(0, 0)\delta(x), \tau \rightarrow 0+.$$

**Paso 2.** La continuidad de  $\nabla v_0(x)$  in  $\bar{K}$  implica que

$$(60) \quad \partial_{x_2} v(x_1, -\tau) \rightarrow \partial_{x_2} v(x_1) \quad \forall x_1 > 0, \tau \rightarrow 0+.$$

Por (44) tenemos

$$(61) \quad |\partial_{x_2} v(x_1, -\tau)| \leq C\{(x_1, \tau)\}^{-\varepsilon} \leq C_1\{x_1\}^{-\varepsilon}, \quad x_1 > -\tau.$$

(45), (60) y (61) implican por el teorema de Lebesgue que

$$\Theta(x_1 + \tau)\partial_{x_2} v(x_1, -\tau) \rightarrow \Theta(x_1)\partial_{x_2} v(x_1, 0) \text{ en } S'(\mathbb{R}^2), \tau \rightarrow 0+.$$

De aquí, tenemos

$$(62) \quad \delta'(x_2 + \tau)\Theta(x_1 + \tau)\partial_{x_2} v(x_1, -\tau) \rightarrow \delta'(x_2)v_1^1(x_1) \text{ en } S'(\mathbb{R}^2), \tau \rightarrow 0+.$$

Similarmente, tenemos

$$(63) \quad \left. \begin{aligned} \delta'(x_1 + \tau)\Theta(x_2 + \tau)\partial_{x_1} v(-\tau, x_2) &\rightarrow \delta'(x_1)v_2^1(x_2) \\ -2 \cos \Phi \delta(x_2 + \tau)\Theta(x_1 + \tau)\partial_{x_1} v(x_1, -\tau) &\rightarrow -2 \cos \Phi \delta(x_2)\partial_{x_1} v_1^0(x_1) \\ -2 \cos \Phi \delta(x_1 + \tau)\Theta(x_2 + \tau)\partial_{x_2} v(x_2, -\tau) &\rightarrow -2 \cos \Phi \delta(x_1)\partial_{x_2} v_2^0(x_2) \end{aligned} \right| \tau \rightarrow 0+$$

en  $S'(\mathbb{R}^2)$ . Finalmente, (58)-(59), (62) y (63) implica (56). ■

Ahora establecemos la relación entre los datos de Cauchy generados por las condiciones de frontera.

**PROPOSICIÓN 1.2.** *Sea  $v(x) \in E_\varepsilon(K)$  una solución de (43). Entonces los datos de Cauchy  $v_l^\beta$  para  $l = 1, 2$  y  $\beta = 0, 1$  definidos en (46), (47) (y extendidas por cero en  $x_l < 0$ ) satisfacen las condiciones de frontera:*

$$(64) \quad \left\{ \begin{aligned} &\cos \Phi \left[ \partial_{x_1} v_1^0(x_1) - \delta(x_1)v(0) \right] - v_1^1(x_1) \\ &\quad = -i\omega g(\omega) \sin \alpha \sin \Phi \theta(x_1) e^{i\omega x_1 \cos \alpha}, \quad x_1 \in \mathbb{R}, \\ &v_2^0(x_2) = -g(\omega)\theta(x_2) e^{i\omega x_2 \cos(\alpha+\Phi)}, \quad x_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned} \right.$$

**Demostración.** La segunda ecuación aquí se sigue directamente de la tercera ecuación de (43). La primera ecuación se sigue de la segunda ecuación de (43), ya que en el sentido de las distribuciones

$$\partial_{x_1} v_1^0(x_1) = \left[ \partial_{x_1} \left( v_1^0(x_1) \Big|_{x_1>0} \right) \right]_0 + \delta(x_1)v(0)$$

donde  $[\cdot]_0$  significa extensión por cero. ■

De este modo, hemos reducido el sistema (43) definido en  $K$  al sistema (52),(64), donde ahora dos datos de Cauchy  $v_2^0(x_2)$  y uno de  $v_1^0(x_1)$ ,  $v_1^1(x_1)$  son funciones conocidas by (64). En la siguiente sección, vamos a reducir este sistema al sistema con las transformadas de Fourier de  $v_l^\beta$  para  $l = 1, 2$ ,  $\beta = 0, 1$ . A partir de aquí encontraremos el resto de los datos de Cauchy de  $v_0$ .

## Método de las características complejas: reducción a una ecuación en diferencias

### 1. Transformada de Fourier

Aplicamos la transformada de Fourier (14) a la ecuación (52). Obtenemos

$$(65) \quad \mathcal{H}(\omega, \xi) \tilde{v}_0(\xi) \equiv \left[ \frac{1}{\sin^2 \Phi} (\xi_1^2 + \xi_2^2 - 2 \cos \Phi \xi_1 \xi_2) - \omega^2 \right] \tilde{v}_0(\xi) = \tilde{d}_0(\omega, \xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^2,$$

donde  $\tilde{v}_0(\xi)$  y  $\tilde{d}_0(\xi)$  denotan la transformada de Fourier (14) de las distribuciones temperadas  $v_0$  y  $d_0$  respectivamente. La identidad (65) se entiende en el sentido de las distribuciones. La fórmula (53) implica que

$$(66) \quad \tilde{d}_0(\omega, \xi) = \frac{1}{\sin^2 \Phi} \left[ \tilde{v}_1^1(\xi_1) - \tilde{v}_1^0(\xi_1)(i\xi_2 - 2i\xi_1 \cos \Phi) + \tilde{v}_2^1(\xi_2) - \tilde{v}_2^0(\xi_2)(i\xi_1 - 2i\xi_2 \cos \Phi) - 2 \cos \Phi v(0) \right].$$

La identidad (65) permite definir la solución

$$(67) \quad \tilde{v}_0(\xi) = \frac{\tilde{d}_0(\omega, \xi)}{\mathcal{H}(\omega, \xi)}, \quad \xi \in \mathbb{R}^2,$$

ya que  $\mathcal{H}(\omega, \xi) \neq 0$  para  $\xi \in \mathbb{R}^2$  y  $\omega \in \mathbb{C}^+$ . Sólo nos falta determinar las funciones desconocidas  $\tilde{v}_2^1(\xi)$  (la transformada de Fourier de los datos de Neumann  $v_2^1$ ) y uno de las funciones  $\tilde{v}_1^0(\xi_1)$  ó  $\tilde{v}_1^1(\xi_1)$  (la transformada de Fourier de los datos de Dirichlet  $\tilde{v}_1^0$  de (47)). Para este fin, usaremos las condiciones de frontera (64) y la ecuación (65). De estas últimas ecuaciones obtenemos una ecuación de conexión la cual es una relación algebraica sobre la superficie de Riemann de las características complejas del operador de Helmholtz  $\mathcal{H}$  entre los datos de Cauchy  $v_l^\beta$  (ver [5]). Encontraremos una solución particular para esta ecuación de conexión, reduciéndola a una ecuación en diferencias. Entonces probaremos que esta solución particular satisface una cierta estimación de crecimiento sobre la superficie de Riemann. Cualquier solución de  $E_\varepsilon$  satisface esta estimación de crecimiento. Esto nos permite identificar la solución particular como única solución en el espacio  $E_\varepsilon$ . Esta identificación nos lleva a la unicidad y a la representación del tipo Sommerfeld.

Notemos que (48), (50) implican que las funciones  $\tilde{v}_l^\beta(\xi_l)$ ,  $\xi \in \mathbb{R}$  admiten las continuaciones analíticas en  $\mathbb{C}^+$  y estas continuaciones analíticas son las transformadas de Fourier compleja de las funciones  $v_l^\beta(x_l)$  y admiten las representaciones

$$(68) \quad \tilde{v}_l^\beta(z_l) = \int_0^\infty e^{iz_l x_l} v_l^\beta(x_l) dx_l, \quad \text{Im } z_l \geq 0.$$

En efecto, esto se sigue de (48), (49) y (50). Por lo tanto, existe la transformada de Fourier compleja del sistema (64). En el siguiente lema demostraremos esta transformada.

LEMA 2.1. *La transformada de Fourier compleja del sistema (64), toma la forma:*

$$(69) \quad \begin{cases} \cos \Phi [-iz_1 \tilde{v}_1^0(z_1) - v(0)] - \tilde{v}_1^1(z_1) = \frac{\omega g(\omega) \sin \alpha \sin \Phi}{z_1 + \omega \cos \alpha}, \operatorname{Im} z_1 > 0, \\ \tilde{v}_2^0(z_2) = \frac{-ig(\omega)}{z_2 + \omega \cos(\alpha + \Phi)}, \operatorname{Im} z_2 > 0. \end{cases}$$

**Demostración.** i) Aplicamos (14) a la primera ecuación de (64).

$$(70) \quad \begin{aligned} \cos \Phi [-iz_1 \tilde{v}_1^0(z_1) - v(0)] - \tilde{v}_1^1(z_1) &= -i\omega g(\omega) \sin \alpha \sin \Phi \cdot F_{x_1 \rightarrow z_1}[\theta(x_1) e^{i\omega x_1 \cos \alpha}](z_1) \\ &= \frac{\omega g(\omega) \sin \alpha \sin \Phi}{z_1 + \omega \cos \alpha}, \operatorname{Im} z_1 \geq 0 \end{aligned}$$

ya que  $\cos \alpha > 0$  por (5).

ii) Aplicamos (14) a la segunda ecuación de (64).

$$(71) \quad \begin{aligned} \tilde{v}_2^0(z_2) &= -g(\omega) \cdot F_{x_2 \rightarrow z_2}[\theta(x_2) e^{i\omega x_2 \cos(\alpha + \Phi)}](z_2) \\ &= \frac{-ig(\omega)}{z_2 + \omega \cos(\alpha + \Phi)}, \operatorname{Im} z_2 \geq 0 \end{aligned}$$

ya que  $\cos(\alpha + \Phi) > 0$  por (5). ■

En seguida analizaremos el crecimiento de las funciones  $\tilde{v}_l^1(z_l)$  in  $\mathbb{C}^+$ ,  $l = 1, 2$ .

LEMA 2.2. *Para  $l = 1, 2$  tenemos*

$$(72) \quad |\tilde{v}_l^0(z_l)| \leq \frac{C}{\operatorname{Im} z_l}, \operatorname{Im} z_l > 0$$

**Demostración.** Las cotas se obtienen por integración de (48) y (14) con  $\xi = z_l \in \mathbb{C}^+$ . ■

## 2. Superficie de Riemann

Para formular la ecuación de conexión, recordemos algunas notaciones de [2], [3], [5]. Denotemos por  $V = V(\omega)$  la superficie de Riemann

$$V = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid z_1^2 + z_2^2 - 2 \cos \Phi z_1 z_2 - \omega^2 \sin^2 \Phi = 0\}.$$

La ecuación es equivalente a

$$(z_1 \sin \Phi)^2 + (z_2 - z_1 \cos \Phi)^2 = \omega^2 \sin^2 \Phi.$$

Entonces las fórmulas

$$\begin{aligned} z_1 &:= \omega \sin \varphi \\ z_2 - z_1 \cos \Phi &:= \omega \sin \Phi \cos \varphi \end{aligned} \quad \left| \varphi \in \mathbb{C} \right.$$

dan una parametrización para  $V$ . Es conveniente cambiar el parámetro  $\mu := i\varphi$ . La superficie  $V$  tiene una cubierta universal  $\check{V} \cong \mathbb{C}$  con la proyección  $p : \check{V} \rightarrow V$  definida por

$$(73) \quad p : \mu \mapsto (z_1, z_2), \quad \begin{cases} z_1 = z_1(\mu) := -i\omega \sinh \mu \\ z_2 = z_2(\mu) := -i\omega \sinh(\mu + i\Phi). \end{cases}$$

Definamos  $\check{V}_l^+$  para  $l = 1$  respectivamente  $l = 2$  como la componente conexa del conjunto  $\{\mu \in \mathbb{C} : \text{Im } z_l(\mu) > 0\}$  la cual contiene el punto  $\mu = \frac{i\pi}{2}$  respectivamente  $\mu = i(\frac{\pi}{2} - \Phi)$ . Entonces  $\partial\check{V}_l^+ = \check{\Gamma}_l^+ \cup \check{\Gamma}_l^-$ , donde

$$(74) \quad \left. \begin{aligned} \check{\Gamma}_1^- &= \{\mu \in \mathbb{C} : \text{Im } z_1(\mu) = 0, 0 \in \check{\Gamma}_1^-\} \\ \check{\Gamma}_1^+ &= \{\mu \in \mathbb{C} : \text{Im } z_1(\mu) = 0, i\pi \in \check{\Gamma}_1^+\} \\ \check{\Gamma}_2^- &= \{\mu \in \mathbb{C} : \text{Im } z_2(\mu) = 0, i(\pi - \Phi) \in \check{\Gamma}_2^-\} \\ \check{\Gamma}_2^+ &= \{\mu \in \mathbb{C} : \text{Im } z_2(\mu) = 0, -i\Phi \in \check{\Gamma}_2^+\}. \end{aligned} \right|$$

Es fácil verificar que

$$(75) \quad \check{\Gamma}_1^- = \left\{ \mu = (\mu_1 + i\mu_2) : \mu_{1,2} \in \mathbb{R}, \mu_2 = \arctan\left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \tanh \mu_1\right) \right\}$$

con el valor  $\arctan 0 = 0$ . La misma representación se cumple para  $\check{\Gamma}_1^+$  con el valor  $\arctan 0 = \pi$ . Por lo tanto, el contorno  $\check{\Gamma}_1^+$  es la traslación de  $\check{\Gamma}_1^-$  por el vector  $\pi i$ :  $\check{\Gamma}_1^+ = \check{\Gamma}_1^- + \pi i$ . Similarmente, el contorno  $\check{\Gamma}_2^-$  es la traslación de  $\check{\Gamma}_2^+$  por  $\pi i$ , y  $\check{\Gamma}_2^+$  es la traslación de  $\check{\Gamma}_2^-$  por  $-i\Phi$ . Así, todos los contornos (74) son traslaciones superiores idénticas. Para  $\nu \in \mathbb{R}$ , definimos el contorno

$$(76) \quad \gamma(\nu) \equiv \check{\Gamma}_1^- + i\nu.$$

Entonces los contornos (74) se representan en la siguiente forma

$$\begin{aligned} \check{\Gamma}_1^- &= \gamma(0), & \check{\Gamma}_1^+ &= \gamma(\pi i), \\ \check{\Gamma}_2^- &= \gamma(i(\pi - \Phi)), & \check{\Gamma}_2^+ &= \gamma(-i\Phi). \end{aligned}$$

Definamos la región  $\check{V}_l^-$  para  $l = 1, 2$  como la componente conexa del conjunto  $\{\mu \in \mathbb{C} : \text{Im } z_l(\mu) < 0\}$  la cual contiene al punto  $\mu = -\frac{i\pi}{2}$ . Sea  $\check{V}^- := \check{V}_1^- \cap \check{V}_2^-$  y

$$(77) \quad \check{V}_\Sigma := \check{V}_1^+ \cup \overline{\check{V}^-} \cup \check{V}_2^+$$

(ver Figura 2, la cual corresponde al caso  $\text{Re } \omega > 0$ ). Usando las definiciones de  $\check{V}_l^\pm$ ,  $\check{V}^-$ ,  $\check{V}_\Sigma$  podemos representar las regiones por los contornos  $\gamma(\nu)$ :

$$(78) \quad \begin{aligned} \check{V}_1^+ &= \{\mu : \gamma(0) < \mu < \gamma(\pi)\}, & \check{V}_2^+ &= \{\mu : \gamma(-2\pi + \phi) < \mu < \gamma(-\pi + \phi)\}; \\ \check{V}_1^- &= \{\mu : \gamma(-\pi) < \mu < \gamma(0)\}, & \check{V}_2^- &= \{\mu : \gamma(-\pi + \phi) < \mu < \gamma(\phi)\}; \\ \check{V}^- &= \{\mu : \gamma(-\pi + \phi) < \mu < \gamma(0)\} & \check{V}_\Sigma &= \{\mu : \gamma(-\Phi) < \mu < \gamma(\pi)\} \end{aligned}$$

Aquí el símbolo “ $<$ ” significa que el punto  $\mu$  está entre las correspondientes curvas. También, consideremos la siguiente subregión  $\check{V}_{\Sigma, \delta}$  con un  $\delta > 0$ :

$$(79) \quad \check{V}_{\Sigma, \delta} = \{\mu : \gamma(-\Phi + \delta) < \mu < \gamma(\pi - \delta)\}$$

(ver Figura 2)

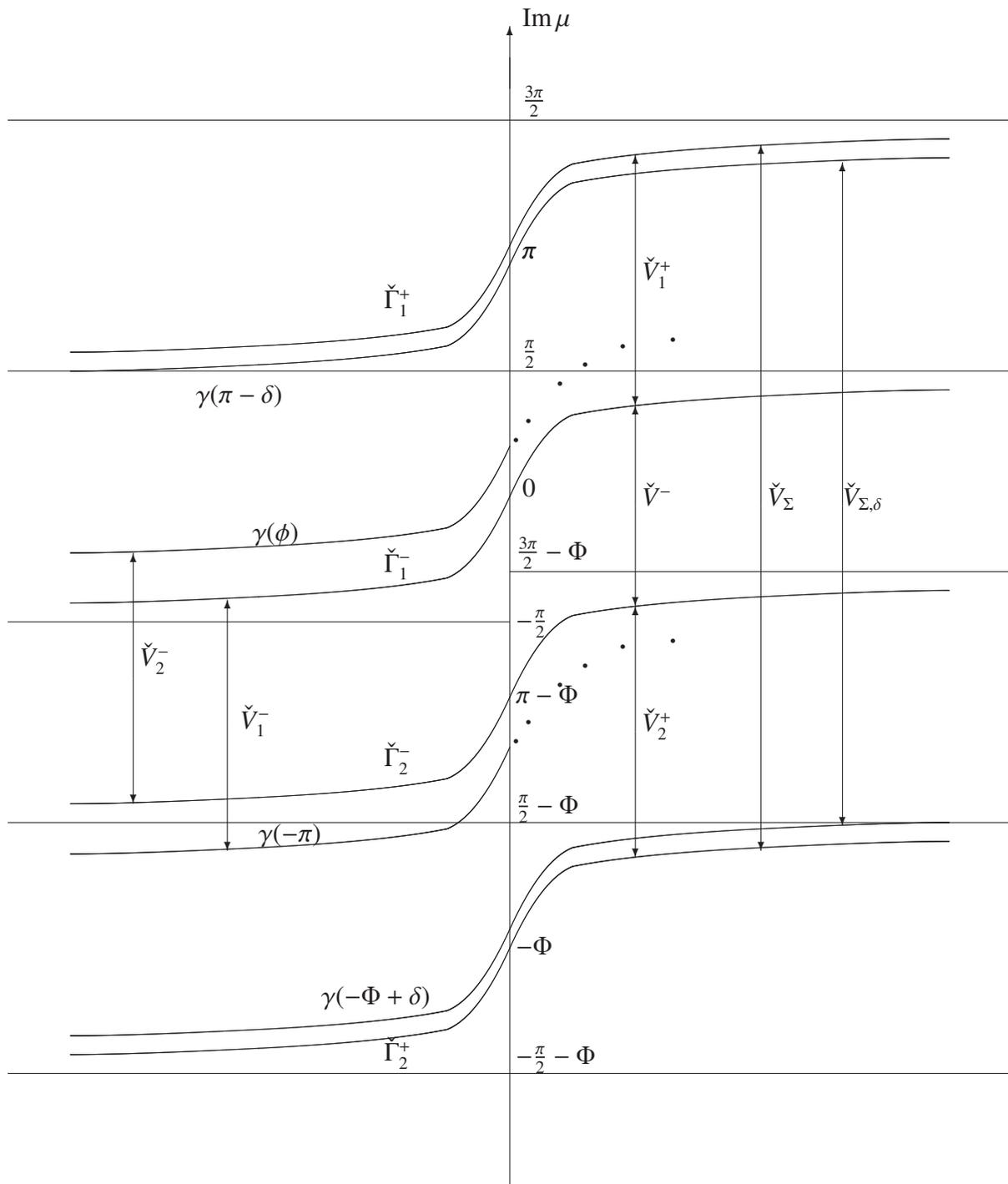


Figura 2  
Superficie de Riemman

Ahora "levantamos" las funciones  $\check{v}_l^\beta$  sobre  $\check{V}_l^+$  con la cubierta (73). Más precisamente, denotemos por  $\check{v}_l^\beta(\mu, \omega)$  la composición de  $\check{v}_l^\beta(z_l, \omega)$  y  $z_l(\mu, \omega)$ :

$$(80) \quad \check{v}_l^\beta(\mu) = \check{v}_l^\beta(\mu, \omega) := \check{v}_l^\beta(z_l(\mu, \omega)), \quad z_l \in \mathbb{C}^+, l = 1, 2, \beta = 0, 1.$$

La analiticidad de las funciones  $\check{v}_l^\beta(\mu, \cdot)$  en  $\mathbb{C}^+$  implica la analiticidad de  $\check{v}_l^\beta(\mu, \cdot)$  en  $\check{V}_l^+$ ,  $l = 1, 2$ . Nosotros calculamos estos levantamientos para la bien conocida solución de los datos de Dirichlet. Más precisamente, (69), (73) y (80) dan

$$(81) \quad \check{v}_2^0(\mu) = \frac{g(\omega)}{\omega[\sinh(\mu + i\Phi) + i \cos(\alpha + \Phi)]}, \quad \mu \in \check{V}_2^+.$$

Sea

$$(82) \quad \check{V}_{1,\epsilon} := \{\mu : \gamma(\epsilon) < \mu < \gamma(\pi/2 - \epsilon)\}$$

para algún  $\epsilon > 0$ .

**LEMA 2.3.** *Las funciones  $\check{v}_l^\beta(\cdot, \omega)$  son analíticas en  $\check{V}_l^+$  para  $l = 1, 2, \beta = 0, 1$  y la siguiente estimación se cumple para cualquier  $\epsilon > 0$*

$$(83) \quad |\check{v}_1^0(\mu, \omega)| \leq C(\omega, \epsilon)e^{-|\operatorname{Re} \mu|}, \quad \mu \in \check{V}_{1,\epsilon}^+.$$

**Demostración.** La analiticidad de las funciones  $\check{v}_l^\beta$  se sigue de la analiticidad de las funciones  $\check{v}_l^\beta$  en  $\mathbb{C}^+$  y (73). Vamos a probar (83). Notemos que por (72)

$$|\check{v}_1^0(z_1, \omega)| \leq \frac{C_\delta(\omega)}{1 + \operatorname{Im} z_1}, \quad \operatorname{Im} z_1 \geq \delta.$$

Por (73), esto implica que

$$(84) \quad |\check{v}_1^0(\mu, \omega)| \leq C_\delta(\omega)e^{-|\operatorname{Re} \mu|}, \quad \mu_1 \in \check{V}_{1,\delta}^+ := \{\mu \in \check{V}_1^+ : \operatorname{Im} z_1 \geq \delta\}.$$

Por el Lema A1 del Apéndice se sigue que  $\check{V}_{1,\epsilon}^+ \subset \check{V}_{1,\delta}^+$  si  $\delta = \frac{\omega_2}{\sin \epsilon}$ . (83) está probado. ■

### 3. Ecuación de Conexión y eliminación de dos datos de Cauchy

**3.1. Ecuación de conexión.** Ahora podemos formular nuestra ecuación de conexión básica [5]. Recordemos que las funciones  $\check{v}_l^\beta$ , definidas por (80), son analíticas en las regiones  $\check{V}_l^+$ . Por  $[\check{v}(\mu)]_l$ ,  $l = 1, 2$  denotemos la continuación analítica de una función  $\check{v}(\mu) \in H(V_l^+)$  a la región compleja  $\check{V}_\Sigma$  (ver Figura 2) si la continuación existe. Denotemos

$$(85) \quad \check{v}_1(\mu) := \check{v}_1^1(\mu) + \omega \sinh(\mu - i\Phi)\check{v}_1^0(\mu) - v(0) \cos \Phi, \quad \mu \in \check{V}_1^+$$

y

$$(86) \quad \check{v}_2(\mu) := \check{v}_2^1(\mu) + \omega \sinh(\mu + 2i\Phi)\check{v}_2^0(\mu) - v(0) \cos \Phi, \quad \mu \in \check{V}_2^+.$$

La siguiente ecuación de conexión fue probada en [4], [5].

PROPOSICIÓN 2.1. Sea  $v(x) \in E_\varepsilon(K)$  una solución de (43). Entonces,

i) La función  $\check{v}_1(\mu)$  admite la continuación analítica de  $\check{V}_1^+$  a  $\check{V}_\Sigma$ , y la función  $\check{v}_2(\mu)$  admite la continuación analítica de  $\check{V}_2^+$  a  $\check{V}_\Sigma$ .

ii) Para las continuaciones analíticas siguientes la ecuación de conexión se cumple:

$$(87) \quad [\check{v}_1(\mu)]_1 + [\check{v}_2(\mu)]_2 = 0, \quad \mu \in \check{V}_\Sigma.$$

iii) La siguiente estimación se cumple para la continuación analítica:

$$(88) \quad |[\check{v}_l(\mu)]| \leq C_\delta(1 + e^{|\mu|})^q, \quad \mu \in \check{V}_{\Sigma,\delta}, \quad l = 1, 2.$$

para cualquier  $\delta \in (0, \Phi/2 + \pi/2)$ , con un  $q \in \mathbb{R}$  dependiendo en  $\check{v}_1^1(\mu)$  y  $\check{v}_2^1(\mu)$  y no en función de  $\omega$ .

**3.2. Eliminación de dos datos de Cauchy en la ecuación de conexión.** En esta sección reduciremos la ecuación de conexión (87) a una ecuación que contenga solamente dos funciones incógnitas. En las siguientes secciones construiremos una solución meromorfa y después una solución analítica para la ecuación en diferencias.

PROPOSICIÓN 2.2. Sea  $v(x) \in E_\varepsilon(K)$  una solución del problema (43). Entonces las funciones  $\check{v}_1^0(\mu)$  y  $\check{v}_2^1(\mu)$  admiten la continuación meromorfa a  $\check{V}_\Sigma$  la cual satisface la ecuación de conexión

$$(89) \quad i\omega \sin \Phi \cosh \mu \check{v}_1^0(\mu) - \check{v}_2^1(\mu) = G(\mu), \quad \mu \in \check{V}_\Sigma$$

donde

$$(90) \quad G(\mu) = g(\omega) \left( \frac{\sin \Phi \sin \alpha}{i \sinh \mu - \cos \alpha} + \frac{\sinh(\mu + 2i\Phi)}{\sinh(\mu + i\Phi) + i \cos(\alpha + \Phi)} \right) - 3v(0) \cos \Phi, \quad \mu \in \mathbb{C}.$$

y  $\check{v}_1^0(\mu)$ ,  $\check{v}_2^1(\mu)$  se determinan por (80).

**Demostración.** Levantamos la primera ecuación en (69) a  $\check{V}_1^+$  usando (73) y expresamos  $\check{v}_1^1(\mu)$ :

$$(91) \quad \check{v}_1^1(\mu) = \frac{g(\omega) \sin \Phi \sin \alpha}{i \sinh \mu - \cos \alpha} - \omega \cos \Phi \sinh \mu \check{v}_1^0(\mu) - v(0) \cos \Phi, \quad \mu \in \check{V}_1^+.$$

Sustituyendo esta expresión en (85), obtenemos

$$(92) \quad \check{v}_1(\mu) = -i\omega \sin \Phi \cosh \mu \check{v}_1^0(\mu) - \frac{ig(\omega) \sin \Phi \sin \alpha}{\sinh \mu + i \cos \alpha} - 2v(0) \cos \Phi, \quad \mu \in \check{V}_1^+.$$

Similarmente, sustituyendo en el lado derecho de (86) la función  $\check{v}_2^0(\mu)$  de (81), obtenemos

$$(93) \quad \check{v}_2(\mu) = \check{v}_2^1(\mu) + \frac{g(\omega) \sinh(\mu + 2i\Phi)}{\sinh(\mu + i\Phi) + i \cos(\alpha + \Phi)} - v(0) \cos \Phi, \quad \mu \in \check{V}_2^+.$$

Ahora usamos la Proposición 2.1. Ya que  $\check{v}_1(\mu)$  admite la continuación analítica a  $\check{V}_\Sigma$ , la función  $\check{v}_1^0(\mu)$  admite la continuación meromorfa a  $\check{V}_\Sigma$  por (92). Similarmente, ya que  $\check{v}_2(\mu)$  admite la continuación

analítica a  $\check{V}_\Sigma$  por la Proposición 2.1,  $\check{v}_2^1(\mu)$  admite la continuación meromorfa a  $\check{V}_\Sigma$  por (93). Finalmente, sustituyendo (92) y (93) en (87) obtenemos:

$$(94) \quad [\omega \check{v}_1^0(\mu)(\cos \Phi \sinh \mu - \sinh(\mu - i\Phi))]_1 - [\check{v}_2^1(\mu)]_2 = G(\mu), \quad \mu \in \check{V}_\Sigma.$$

donde  $G(\mu)$  esta determinada por (90). Omitiendo paréntesis en (94), obtenemos (89). ■

#### 4. Automorfismos y ecuación en diferencias

**4.1. Automorfismos.** Para reducir la ecuación (89) a la ecuación en diferencias, usaremos las propiedades de automorfía de las funciones  $\check{v}_1^0(\mu)$  y  $\check{v}_2^1(\mu)$ .

DEFINICIÓN 2.1. *Un automorfismo  $\check{h}_l : \check{V} \rightarrow \check{V}$  para  $l = 1$  resp.  $l = 2$  es la reflexión en el punto  $i\pi/2$  resp.  $i\pi/2 - i\Phi$ :*

$$(95) \quad \left. \begin{aligned} \check{h}_1 \mu &= -\mu + i\pi \\ \check{h}_2 \mu &= -\mu + i\pi - 2i\Phi \end{aligned} \right| \mu \in \mathbb{C}.$$

Notemos que para  $l = 1, 2$  el automorfismo  $\check{h}_l$  no cambia la proyección  $\mu \mapsto z_l(\mu)$ :

$$z_l(\check{h}_l \mu) = z_l(\mu), \quad \mu \in \mathbb{C}.$$

Por lo tanto,  $\check{h}_l \check{V}_l^+ = \check{V}_l^+$ , y las funciones  $\check{v}_l^\beta$  son invariantes con respecto al automorfismo  $\check{h}_l$ :

$$(96) \quad \check{v}_l^\beta(\check{h}_l \mu) = \check{v}_l^\beta(\mu), \quad \mu \in \check{V}_l^+, \quad \beta = 0, 1.$$

**4.2. Ecuación en diferencias.** En esta sección reduciremos la ecuación de conexión dada en (89), a una ecuación en diferencias. En las siguientes secciones construiremos una solución meromorfa y después una solución analítica a dicha ecuación en diferencias. Introducimos las regiones:

$$(97) \quad \check{V}_{\Sigma,2} := \check{V}_\Sigma \cup \check{h}_2 \check{V}_\Sigma, \quad \check{W}_\Sigma := \check{V}_{\Sigma,2} \cup \check{h}_1 \check{V}_{\Sigma,2}$$

Por (78) y (95), tenemos

$$\check{V}_{\Sigma,2} = \{\mu : \gamma(-2\Phi) < \mu < \gamma(\pi)\}, \quad \check{W}_\Sigma = \{\mu : \gamma(-2\Phi) < \mu < \gamma(\pi + 2\Phi)\}.$$

Obviamente

$$(98) \quad \check{h}_2 \check{V}_{\Sigma,2} = \check{V}_{\Sigma,2}.$$

OBSERVACIÓN 2.1. *Notemos que por (97),  $\check{W}_\Sigma = \check{V}_{\Sigma,2} \cup (\check{V}_{\Sigma,2} + 2i\Phi)$ . (Véase la Figura 3).*

LEMA 2.4. *Sea  $v(x) \in E_\varepsilon(K)$  una solución al problema (43). Entonces, la analiticidad en  $\check{V}_l^+$  las funciones  $\check{v}_1^0(\mu)$  y  $\check{v}_2^1(\mu)$  admiten continuación meromorfa a  $\check{W}_\Sigma$  y satisfacen el sistema:*

$$(99) \quad \begin{cases} i\omega \sin \Phi \cosh \mu \check{v}_1^0(\mu) - \check{v}_2^1(\mu) = G(\mu), & \mu \in \check{W}_\Sigma, \\ \check{v}_1^0(-\mu + i\pi) = \check{v}_1^0(\mu), & \mu \in \check{W}_\Sigma. \end{cases}$$

donde  $G$  se determina en (90).

**Demostración.** Ya que  $\check{v}_2^1(\mu)$  es meromorfa en  $\check{V}_\Sigma$ , (véase la demostración de la Proposición 2.2) y automorfa con respecto de  $\check{h}_2$  por (95),  $\check{v}_2^1(\mu)$  admite la continuación meromorfa a  $\check{h}_2\check{V}_\Sigma$  por la fórmula

$$\check{v}_2(\mu) = \check{v}_2(\check{h}_2(\mu)), \quad \mu \in \check{h}_2\check{V}_\Sigma.$$

Ya que  $G(\mu)$  es meromorfa en  $\mathbb{C}$  por (90), de (89) se sigue que la función  $\check{v}_1^0(\mu)$  admite continuación meromorfa a  $\check{V}_{\Sigma,2} := \check{V}_\Sigma \cup \check{h}_2\check{V}_\Sigma$  y la ecuación (89) en esta región se cumple:

$$(100) \quad i\omega \sin \Phi \cosh \mu \check{v}_1^0(\mu) - \check{v}_2^1(\mu) = G(\mu), \quad \mu \in \check{V}_{\Sigma,2}.$$

Además, la función  $\check{v}_1^0(\mu)$  se extiende como una función meromorfa a la región  $\check{W}_\Sigma := \check{h}_1\check{V}_{\Sigma,2} \cup \check{V}_{\Sigma,2}$  (ver la Figura 3), ya que la función  $\check{v}_1^0(\mu)$  es automorfa en  $\check{V}_1^+$  con respecto a  $\check{h}_1(\mu)$  por (96). En esta región, obviamente  $\check{v}_1^0(\mu)$  satisface la ecuación de automorfía (99) y su continuación analítica satisface la ecuación (100) en  $\check{W}_\Sigma$ . ■

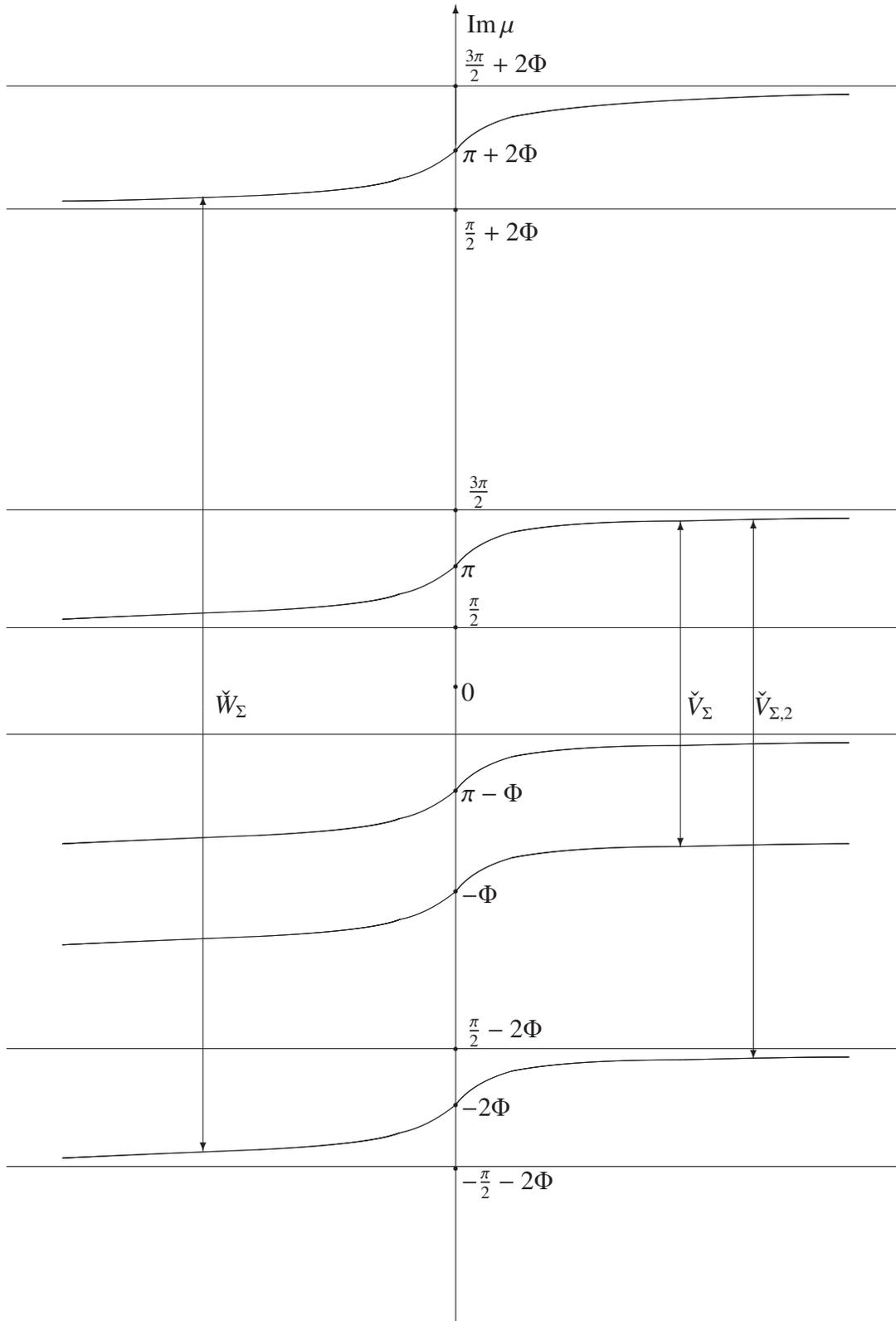


Figura 3  
Ecuación en diferencias

**TEOREMA 2.1. (La ecuación en diferencias)** Sea  $v(x) \in E_\varepsilon(K)$  una solución para (43) y  $\check{v}_1^0(\mu)$  se define en (80). Entonces,  $\check{v}_1^0(\mu)$  es analítica en  $\check{V}_1^+$ , meromorfa en  $\check{V}_\Sigma$  y satisface la siguiente ecuación en diferencias:

$$(101) \quad \cosh \mu \check{v}_1^0(\mu) + \cosh(\mu + 2i\Phi) \check{v}_1^0(\mu + 2i\Phi) = G_2(\mu), \quad \mu \in \check{V}_{\Sigma,2}$$

donde

$$(102) \quad G_2(\mu) = \frac{g(\omega)}{\omega} \left( \frac{\cosh \mu}{\sinh \mu + i \cos \alpha} + \frac{\cosh(\mu + 2i\Phi)}{\sinh(\mu + 2i\Phi) + i \cos \alpha} \right), \quad \mu \in \mathbb{C}$$

**Demostración.** La analiticidad de  $\check{v}_1^0(\mu)$  en  $\check{V}_1^+$  y la meromorfía en  $\check{W}_\Sigma$  se sigue del Lema 2.4. Demostremos (102).

**Paso I.** Aplicando el automorfismo  $\check{h}_2$  a la ecuación (100), usando (98) y (96), tenemos:

$$(103) \quad i\omega \sin \Phi \cosh(\check{h}_2(\mu)) \check{v}_1^0(\check{h}_2(\mu)) - \check{v}_2^1(\mu) = G(\check{h}_2(\mu)), \quad \mu \in \check{V}_{\Sigma,2}.$$

La automorfía de  $\check{v}_1^0(\mu)$  en  $\check{W}_\Sigma$  con respecto de  $\check{h}_1(\mu)$  y las fórmulas (95), implica que

$$\check{v}_1^0(\check{h}_2(\mu)) = \check{v}_1^0(\mu + 2i\Phi), \quad \mu \in \check{V}_{\Sigma,2}.$$

Sustituyendo esta última expresión en (103) y usando que  $\cosh(\check{h}_2(\mu)) = -\cosh(\mu + 2i\Phi)$  obtenemos:

$$(104) \quad -i\omega \sin \Phi \cosh(\mu + 2i\Phi) \check{v}_1^0(\mu + 2i\Phi) - \check{v}_2^1(\mu) = G(\check{h}_2(\mu)), \quad \mu \in \check{V}_{\Sigma,2}.$$

Restando (104) de (100) y dividiendo por  $i\omega \sin \Phi$ , obtenemos:

$$\cosh \mu \check{v}_1^0(\mu) + \cosh(\mu + 2i\Phi) \check{v}_1^0(\mu + 2i\Phi) = \frac{G_1(\mu)}{i\omega \sin \Phi}, \quad \mu \in \check{V}_{\Sigma,2}.$$

donde

$$(105) \quad G_1(\mu) := G(\mu) - G(\check{h}_2(\mu))$$

**Paso II.** Sustituyendo  $G(\mu)$  dada por (90) en la expresión (105) y dividiendo por  $i\omega \sin \Phi$ , obtenemos:

$$(106) \quad \frac{G_1(\mu)}{i\omega \sin \Phi} = \frac{g(\omega)}{\omega} \left[ \frac{-i \sin \alpha}{i \sinh \mu - \cos \alpha} + \frac{i \sin \alpha}{i \sinh(\mu + 2i\Phi) - \cos \alpha} + \frac{2 \cosh(\mu + i\Phi)}{\sinh(\mu + i\Phi) + i \cos(\alpha + \Phi)} \right].$$

Vamos a demostrar que

$$(107) \quad G_2(\mu) = \frac{G_1(\mu)}{i\omega \sin \Phi}$$

donde  $G_2$  se define por (102). Tenemos

$$(108) \quad \frac{\cosh \mu}{\sinh \mu + i \cos \alpha} = \frac{i \cosh \mu + i \sin \alpha}{i \sinh \mu - \cos \alpha} - \frac{i \sin \alpha}{i \sinh \mu - \cos \alpha},$$

y similarmente

$$(109) \quad \frac{\cosh(\mu + 2i\Phi)}{\sinh(\mu + 2i\Phi) + i \cos \alpha} = \frac{i \cosh(\mu + 2i\Phi) - i \sin \alpha}{i \sinh(\mu + 2i\Phi) - \cos \alpha} + \frac{i \sin \alpha}{i \sinh(\mu + 2i\Phi) - \cos \alpha}.$$

sumando (108) y (109), obtenemos por (102)

$$\begin{aligned} \frac{\omega G_2(\mu)}{g(\omega)} &= \frac{-i \sin \alpha}{i \sinh \mu - \cos \alpha} + \frac{i \sin \alpha}{i \sinh(\mu + 2i\Phi) - \cos \alpha} + \\ &+ \left( \frac{i \cosh \mu + i \sin \alpha}{i \sinh \mu - \cos \alpha} + \frac{i \cosh(\mu + 2i\Phi) - i \sin \alpha}{i \sinh(\mu + 2i\Phi) - \cos \alpha} \right). \end{aligned}$$

Ahora, por (106) y (107) solo queda por demostrar que

$$\begin{aligned} C(\mu) &:= \frac{i \cosh \mu + i \sin \alpha}{i \sinh \mu - \cos \alpha} + \frac{i \cosh(\mu + 2i\Phi) - i \sin \alpha}{i \sinh(\mu + 2i\Phi) - \cos \alpha} = \\ &= \frac{2 \cosh(\mu + i\Phi)}{\sinh(\mu + i\Phi) + i \cos(\alpha + \Phi)}. \end{aligned}$$

Se hace por la factorización de los numeradores y denominadores de las fracciones enteras en el lado izquierdo de esta identidad. El teorema está probado.  $\blacksquare$

**COROLARIO 2.1.** *Bajo las hipótesis del Teorema 2.1*

**i)** La función  $\check{v}_1^0(\mu)$  definida por (80) es analítica en  $\check{V}_1^+$ , admite la continuación meromorfa en  $\mathbb{C}$  y satisface la ecuación en diferencias, la cual es "la extensión" de la ecuación (101):

$$(110) \quad \cosh \mu \check{v}_1^0(\mu) + \cosh(\mu + 2i\Phi) \check{v}_1^0(\mu + 2i\Phi) = G_2(\mu), \quad \mu \in \mathbb{C}.$$

**ii)** La función  $\check{v}_1^0(\mu)$  satisface la ecuación de automorfía, la cual es "la extensión" de la ecuación de automorfía (99)

$$(111) \quad \check{v}_1^0(\check{h}_1(\mu)) = \check{v}_1^0(\mu), \quad \mu \in \mathbb{C}.$$

**iii)** La función  $\check{v}_1^0(\mu)$  admite la cota (83).

**iv)** La función  $\check{v}_1(\mu)$  dada por (85) toma la forma (92), es meromorfa en  $\mathbb{C}$ , analítica en  $\check{W}_\Sigma$  y satisface (88).

**Demostración i)** La analiticidad de  $\check{v}_1^0(\mu)$  en  $\check{V}_1^+$  fue demostrada en el Teorema 2.1. Además, la función  $\check{v}_1^0(\mu)$  es meromorfa en  $\check{W}_\Sigma$  por el Lema 2.4. Por inducción respecto a  $k \in \mathbb{Z}$ , para  $\mu \notin \check{W}_\Sigma, \mu - 2ki\Phi \in \check{W}_\Sigma, \mu - 2(k-1)i\Phi \notin \check{W}_\Sigma$ , se define  $\check{v}_1^0(\mu)$  por la fórmula "sugerida" por la ecuación en diferencias (101):

$$\check{v}_1^0(\mu) := \frac{-\cosh(\mu - 2i\Phi) \check{v}_1^0(\mu - 2i\Phi) + G_2(\mu - 2i\Phi)}{\cosh \mu}.$$

Es fácil ver que  $\check{v}_1^0(\mu)$  es continuación meromorfa de  $\check{v}_1^0(\mu)$  en  $\check{W}_\Sigma + 2i\Phi$ , suponiendo que  $\check{v}_1^0(\mu)$  es meromorfa en  $\check{W}_\Sigma + 2(k-1)i\Phi$ , ya que  $G_2$  es meromorfa en  $\mathbb{C}$ . Continuando en la misma forma, definimos  $\check{v}_1^0(\mu)$  para  $\mu$  que está por "encima" de  $\check{W}_\Sigma$ . Similarmente definimos  $\check{v}_1^0(\mu)$  para  $\mu$  que están por "abajo" de  $\check{W}_\Sigma$ .

ii) Por la unicidad de la continuación meromorfa y de la segunda ecuación de (99), es fácil convencerse que la extensión de  $\check{v}_1^0(\mu)$  así definida satisface (110) y (111).

iii) Esta afirmación se sigue del Lema 2.3.

iv) (92) se sigue de (91) y (85). La meromorfía de  $\check{v}_1$  en  $\mathbb{C}$  se sigue de la meromorfía de  $\check{v}_1^0$  en  $\mathbb{C}$  (ver afirmación i)). La analiticidad de  $\check{v}_1 \in \check{V}_\Sigma$  y la estimación (88) se sigue de la Proposición 2.1. ■

**COROLARIO 2.2.** *Bajo las hipótesis del Teorema 2.1 la función*

$$(112) \quad u(\mu) = u(\mu, \omega) := \cosh \mu \check{v}_1^0(\mu).$$

*es analítica en  $\check{V}_1^+$ , meromorfa en  $\mathbb{C}$  y satisface el sistema:*

$$(113) \quad \left\{ \begin{array}{l} u(\mu) + u(\mu + 2i\Phi) = G_2(\mu) \\ u(\check{h}_1(\mu)) = -u(\mu) \end{array} \right| \mu \in \mathbb{C}$$

*y la siguiente estimación para cualquier  $\epsilon > 0$*

$$(114) \quad |u(\mu, \omega)| \leq C(\omega, \epsilon), \quad \mu \in \check{V}_{1,\epsilon}^+$$

**Demostración.** La función  $u(\mu)$  es analítica en  $\check{V}_1^+$  y meromorfa en  $\mathbb{C}$  ya que  $\check{v}_1^0(\mu)$  tiene estas propiedades por el Corolario 2.1. La estimación (114) se sigue de (83). ■

## 5. Unicidad

En la sección anterior encontramos una solución  $\check{v}_1^0(\mu)$  que satisfaga todas las condiciones del Corolario 2.1. En esta sección demostraremos que tal función es única. Empezamos del siguiente lema.

**LEMA 2.5.** *Sea*

$$(115) \quad A(\mu) := \sinh \frac{\mu\pi}{2\Phi} + \sinh \frac{(\mu - i\pi)\pi}{2\Phi}$$

*entonces  $A(\mu)$  satisface el sistema homogéneo (113):*

$$(116) \quad \left\{ \begin{array}{l} A(\mu + 2i\Phi) = -A(\mu) \\ A(-\mu + i\pi) = -A(\mu) \end{array} \right| \mu \in \mathbb{C}.$$

*Además*

$$(117) \quad A\left(\frac{i\pi}{2}\right) = 0$$

**Demostración.** La afirmación se sigue de (115) por cálculos directos. ■

Nuestra meta ahora es demostrar el Teorema 1.1(i). Primero probamos la unicidad de la función  $\check{v}_1^0(\mu)$ .

**TEOREMA 2.2.** *No existen dos funciones que satisfagan todas las condiciones i)-iv) del Corolario 2.1.*

**Demostración.**

**Paso 1.** Sea  $\check{v}_1^0(\mu)$  y  $\check{v}_1^{0*}(\mu)$  dos funciones que satisfacen **i)**-**iv)** del Corolario 2.1. Consideremos las funciones  $\check{v}_1(\mu)$  y  $\check{v}_1^*(\mu)$  construidas por  $\check{v}_1^0(\mu)$  y  $\check{v}_1^{0*}(\mu)$  como en (92). Por la afirmación **iv)** del Corolario 2.1 estas funciones son meromorfas en  $\mathbb{C}$  y la estimación (88) se cumple para ellas con algún  $q$ . Además, estas funciones son analíticas en  $\check{V}_\Sigma$  por la Proposición 2.1. Consideremos las funciones  $u(\mu)$  y  $u^*(\mu)$  definidas por (112) con  $\check{v}_1^0(\mu)$  y  $\check{v}_1^{0*}(\mu)$  respectivamente. Por el Corolario 2.2 estas funciones son meromorfas en  $\mathbb{C}$ , analíticas en  $\check{V}_1^+$ , satisfacen el sistema (113) y la estimación (114) se cumple. Por (92) podemos reescribir las funciones  $\check{v}_1(\mu)$  y  $\check{v}_1^*(\mu)$  como

$$(118) \quad \check{v}_1(\mu) = -i\omega \sin \Phi \cdot u(\mu) - \frac{ig(\omega) \sin \Phi \sin \alpha}{\sinh \mu + i \cos \alpha} - 2\nu(0) \cos \Phi, \quad \mu \in \mathbb{C}$$

y

$$\check{v}_1^*(\mu) = -i\omega \sin \Phi \cdot u^*(\mu) - \frac{ig(\omega) \sin \Phi \sin \alpha}{\sinh \mu + i \cos \alpha} - 2\nu(0) \cos \Phi, \quad \mu \in \mathbb{C}.$$

Por lo tanto,

$$(119) \quad \check{v}_1(\mu) - \check{v}_1^*(\mu) = -i\omega \sin \Phi \cdot D(\mu), \quad \mu \in \mathbb{C}$$

donde

$$(120) \quad D(\mu) = D(\mu, \omega) := u(\mu, \omega) - u^*(\mu, \omega)$$

es meromorfa en  $\mathbb{C}$  y analítica en  $\check{V}_\Sigma$ . (113) implica que  $D(\mu)$  satisface el sistema homogéneo

$$(121) \quad \begin{cases} D(\mu) + D(\mu + 2i\Phi) = 0 \\ D(\check{h}_1(\mu)) = -D(\mu). \end{cases}$$

**Paso 2.** Consideremos la función

$$(122) \quad D_1(\mu) := A(\mu) \cdot D(\mu)$$

donde  $A(\mu)$  se define por (115). Ya que  $D(\mu)$  es meromorfa en  $\mathbb{C}$  y analítica en  $\check{V}_\Sigma$ ,  $D_1(\mu)$  también es meromorfa en  $\mathbb{C}$  y analítica en  $\check{V}_\Sigma$ . Además, la función  $D_1(\mu)$  es simétrica con respecto a  $\check{h}_1$ , ya que  $D(\mu)$  y  $A(\mu)$  son antisimétrica con respecto a  $\check{h}_1$  por (121) y (116) respectivamente. Esto implica que  $D_1(\mu)$  es analítica en  $\check{V}_\Sigma \cup \check{V}_\Sigma^{\check{h}_1}$ . Note que para  $\omega \in \mathbb{C}^+$ , la banda

$$\check{\Pi} := \{\mu \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{2} - \Phi \leq \text{Im } \mu \leq \frac{\pi}{2} + \Phi\}$$

se encuentra en  $\check{V}_\Sigma \cup \check{h}_1 \check{V}_\Sigma$  (ver Figura 3). Además, por (121), (116)  $D_1(\mu + 2i\Phi) = D_1(\mu)$ . Por tanto, la función  $D_1(\mu)$  es analítica en  $\check{\Pi}$  y en todas partes  $\mathbb{C}$  por la periodicidad. Así, la función analítica en  $D_1(\mu)$  en  $\mathbb{C}$  es invariante con respecto al grupo  $G$  generado por las traslaciones con periodo  $2i\Phi$  y la simetría en el punto  $\pi i/2$ . En otras palabras,  $D_1(\mu)$  es una función analítica en el espacio cociente  $F := \mathbb{C}/G$ . Vamos a demostrar que  $D_1(\mu)$  satisface la estimación del tipo (88)

$$(123) \quad |D_1(\mu, \omega)| \leq C_\omega (1 + e^{|\mu|})^q, \quad \mu \in \check{\Pi}$$

con algún  $q$ . Ya que  $A(\mu)$  cumple esta estimación (115) es suficiente probar (123) para  $D(\mu)$ . Usando (75), (76) y (79), es fácil verificar que existe una  $\delta(\omega) > 0$  tal que  $\check{\Pi}_1 := \{\mu : \pi/2 - \Phi \leq \text{Im } \mu \leq \pi/2\} \subset \check{V}_{\Sigma, \delta}$ . Esto implica que (123) en  $\check{\Pi}_1$  por (88), (119) y por lo tanto en  $\check{\Pi}$  por la simetría de  $D_1(\mu)$  con respecto a  $\check{h}_1$ .

**Paso 3.** Vamos a construir una transformación analítica  $S : F \rightarrow \mathbb{C}^*$  del espacio cociente  $F$  para extender la función  $D_1(\mu)$  en el plano complejo extendido  $\mathbb{C}^*$ . Un cálculo elemental proporciona (cf. [8, 14, 15]),

$$(124) \quad s(\mu) \equiv \coth^2 \frac{\pi}{2\Phi}(\mu - \pi i/2).$$

La transformación es uno-valuada en el espacio cociente  $F$ , ya que es simétrica con respecto a  $\check{h}_1(\mu)$  y periódica con periodo  $2i\Phi$ . Los rayos  $\{\mu : \mu = \pi i/2 \pm \Phi + \mu_1, \mu_1 \geq 0\}$  son transformados al intervalo  $\{s : 0 \leq s < 1\}$ . Los intervalos  $\{\mu : \mu = i\mu_2, \pi/2 - \Phi \leq \mu_2 \leq \pi/2\}$  y  $\{\mu : \mu = i\mu_2, \pi/2 \leq \mu_2 \leq \pi/2 + i\Phi\}$  se transforman a  $\{s : -\infty \leq s \leq 0\}$ . Por lo tanto, el mapeo  $\mu \mapsto s(\mu)$  es un isomorfismo analítico  $s : F \rightarrow \mathbb{C}^* \setminus \{1\}$  y existe un isomorfismo analítico inverso  $W : \mathbb{C}^* \setminus \{1\} \rightarrow F$ . La función compleja  $D_1(W(s))$  es analítica en  $\mathbb{C}^* \setminus \{1\}$  y posiblemente tiene un sólo punto singular en  $s = 1$ . Verifiquemos que si  $s = 1$  es un punto singular puede ser solo un polo. De hecho,  $D_1(\mu)$  admite la cota del tipo (123). Por otro lado, (124) implica que

$$(125) \quad s(\mu) - 1 = \frac{1}{\sinh^2 \alpha(\mu)}, \quad \alpha(\mu) = \frac{\pi}{2\Phi}(\mu - \pi i/2).$$

Por lo tanto,  $\text{Re } \mu \geq 1$  para  $|s(\mu) - 1| \leq r$  para un pequeño  $r > 0$ . Luego, la cota de tipo (123) para  $D_1(\mu)$  implica la siguiente estimación de potencias para  $D_1(W(s))$  en una cierta vecindad del punto  $s = 1$  :

$$|D_1(W(s))| \leq C|s - 1|^{p_1}, \quad |s - 1| \leq r.$$

Por lo tanto, el punto  $s=1$  es el polo de la función  $D(W(s))$ .

**Paso 4.** Vamos a verificar que este punto es regular y  $D_1(W(1)) = 0$ . Por (114), (120)  $|D(\mu)| \leq C$ ,  $\mu \in L := \{\mu + i\pi/2, \mu > 0\}$  ya que  $L$  pertenece a  $\check{V}_{1, \epsilon}^+$  para  $\epsilon$  suficientemente pequeño. Por lo tanto,  $D_1(\mu)$  admite la estimación

$$(126) \quad |D_1(\mu)| \leq C e^{\frac{\pi \text{Re } \mu}{2\Phi}}, \quad \mu \in L$$

por (115) y (122). Note que (125) implica que

$$(127) \quad s(\pi i/2 + \mu_1) - 1 = \frac{1}{\sinh^2(\frac{\pi \mu_1}{2\Phi})} \sim e^{-\frac{\pi \mu_1}{\Phi}}, \quad \mu_1 \rightarrow +\infty, \quad \mu_1 \in \mathbb{R}_+.$$

Por lo tanto,  $s(i\pi/2 + \mu_1) > 1$  y  $s(i\pi/2 + \mu_1) \rightarrow 1$ ,  $\mu_1 \rightarrow +\infty$ . Además, (127) implica que existe  $C > 0$  y  $C_1 > 0$  tal que

$$e^{\frac{\pi \mu_1}{2\Phi}} \leq C(s(i\pi/2 + \mu_1) - 1)^{-\frac{1}{2}}, \quad \mu_1 \geq C_1.$$

Luego, de (126) obtenemos para algún  $C_2, C_3$

$$(128) \quad |D_1(W(s))| \leq C_2(s - 1)^{-\frac{1}{2}}, \quad 1 < s \leq C_3.$$

Esto implica que  $D_1(W(s))$  no tiene un polo en  $s = 1$ , pues de lo contrario, para algún  $C_4$ ,  $k \geq 1$

$$|D_1(W(s))| \geq C(s-1)^{-k}, \quad 1 < s \leq C_4$$

lo cual contradice a (128). Así,  $D_1(W(s))$  es analítica en  $\mathbb{C}^*$ . Por (124)  $D_1(W(\infty)) = D_1(i\pi/2)$  y por (117), (122),  $D_1(W(\infty)) = 0$ . Esto implica que  $D_1(W(s)) \equiv 0$ ,  $s \in \mathbb{C}$  por el Teorema de Liouville. Por lo tanto,  $D_1(\mu) \equiv 0$ ,  $\mu \in \mathbb{C}$  y por (122),  $D(\mu) \equiv 0$ ,  $\mu \in \mathbb{C}$ . Por consiguiente  $u = u^*$  en  $\mathbb{C}$  por (120) y  $\check{v}_1^0(\mu) = \check{v}_1^{0*}(\mu)$  por (112). El teorema está probado. ■

**COROLARIO 2.3.** *Supongamos que  $v(x)$  y  $v^*(x)$  pertenecen a  $E_\varepsilon(K)$  y ambas son soluciones para el sistema (43). Sean  $v_l^\beta$  y  $v_l^{\beta*}$  definidas por (46) y (47) para  $v$  y  $v^*$  respectivamente. Entonces,*

$$(129) \quad \check{v}_l^\beta = \check{v}_l^{\beta*}, \quad l = 1, 2, \beta = 0, 1$$

**Demostración.** Ya que las funciones  $\check{v}_1^0$  y  $\check{v}_1^{0*}$  satisfacen **i-iv)** del Corolario 2.1,  $\check{v}_1^0(\mu) = \check{v}_1^{0*}(\mu)$  por el Teorema 2.2. Esto implica que  $\check{v}_1^0(z_1) = \check{v}_1^{0*}(z_1)$ ,  $z_1 \in \mathbb{C}^+$  por (80) y  $\check{v}_2^1(\mu) = \check{v}_2^{1*}(\mu)$ ,  $\mu \in \check{W}_\Sigma$  por (99). La última ecuación implica que  $\check{v}_2^1(z_2) = \check{v}_2^{1*}(z_2)$ ,  $z_2 \in \mathbb{C}^+$  por (80). Además,  $\check{v}_2^0(z_2) = \check{v}_2^{0*}(z_2)$ ,  $z_2 \in \mathbb{C}^+$  por (69) y  $\check{v}_1^1(\mu) = \check{v}_1^{1*}(\mu)$ ,  $\mu \in \check{V}_1^+$  por la primera ecuación de (69). Por lo tanto,

$$\check{v}_1^1(z_1) = \check{v}_1^{1*}(z_1), \quad z_1 \in \mathbb{C}^+$$

por (80). El corolario está probado. ■

**Demostración del Teorema 1.1(i).** Consideremos dos funciones  $u_s(y, t)$  y  $u_s^*(y, t)$  definidas por (34) y sus correspondientes  $u$  y  $u^*$  respectivamente. Entonces por el Lema 1.4  $\widehat{u}_s$  y  $\widehat{u}_s^*$  pertenece a  $E_\varepsilon$  y satisface (40). Las funciones  $v(x, \omega)$  y  $v^*(x, \omega)$  definidas por (42) y que corresponden a  $\widehat{u}_s$ ,  $\widehat{u}_s^*$ , satisfacen (43) y pertenecen a  $E_\varepsilon(K)$ . Ahora estamos en la situación del Corolario 2.3. Por este corolario todas las identidades (129) se cumplen. Por lo tanto,  $v(x, \omega) = v^*(x, \omega)$  por (67), (66) y (51) para cualquier  $\omega \in \mathbb{C}$ . Esto implica que  $u_s(y, t) = u_s^*(y, t)$  ya que estas funciones son las transformadas de Fourier-Laplace inversas  $u(y, \omega)$  y  $u^*(y, \omega)$  las cuales obviamente coinciden por (42). ■

## 6. Solución de la ecuación en diferencias

**6.1. Solución meromorfa.** Nuestra meta es encontrar una solución analítica  $\check{v}_1^0$  en  $\check{V}_1^+$  para la ecuación en diferencias (110). Además, la función correspondiente  $\check{v}_1(\mu)$  dada por (118) debe ser analítica en  $\check{V}_\Sigma$  debido a la Proposición 2.1. Una solución “natural” analítica en  $\check{V}_1^+$  para (110) se encuentra muy fácilmente debido a la estructura de la función  $G_2$ . Sin embargo, la función correspondiente  $\check{v}_1$  no resulta ser analítica. Entonces, necesitamos corregir la solución “natural” adicionando una solución meromorfa a la ecuación homogénea (110) tal que la nueva función  $\check{v}_1$  debe ser analítica en  $\check{V}_\Sigma$ . Lo hacemos en esta sección. Primero, construimos una solución “natural” de la ecuación en en diferencias (110) la cual decrece cuando  $e^{-|\operatorname{Re} \mu|}$  para  $\operatorname{Re} \mu \rightarrow \infty$ . Denotamos

$$(130) \quad \mu_1(k) = \mu_1 + 2k\pi i \text{ y } \mu_2(k) = \mu_2 + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \mu_2 = -i\pi/2 - i\alpha$$

donde  $\mu_1$  se define en (28). Definimos

$$(131) \quad \check{w}_1^0(\mu) := \check{w}_1^0(\mu, \omega) := \frac{g(\omega)}{\omega} \left( \frac{1}{\sinh \mu + i \cos \alpha} \right), \quad \mu \in \mathbb{C}.$$

Obviamente  $\check{w}_1^0(\mu)$  es una función meromorfa en  $\mathbb{C}$  con polos  $\mu_1(k), \mu_2(k)$  y

$$(132) \quad \operatorname{Res}(\check{w}_1^0, \mu_1(k)) = \frac{g(\omega)}{\omega \sin \alpha}, \quad \operatorname{Res}(\check{w}_1^0, \mu_2(k)) = -\frac{g(\omega)}{\omega \sin \alpha}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

En el siguiente lema demostramos que  $\check{w}_1^0(\mu)$  es una solución meromorfa de la ecuación en diferencias y es automorfa con respecto a  $\check{h}_1$ .

LEMA 2.6. **i)** La función  $\check{w}_1^0(\mu)$  es analítica  $\overline{\check{V}_1^+}$ .

**ii)** Es una solución para (110), (111).

**iii)** La estimación se cumple

$$(133) \quad |\check{w}_1^0(\mu, \omega)| \leq C(\omega)e^{-|\operatorname{Re} \mu|}, \quad \mu \in \overline{\check{V}_1^+}. \quad |\check{w}_1^0(\mu, \omega)| \leq C(\omega)e^{-|\operatorname{Re} \mu|}, \quad |\operatorname{Re} \mu| \geq 1.$$

### Demostración.

**i)** Vamos a demostrar que  $\mu_1(k), \mu_2(k) \notin \overline{\check{V}_1^+}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . (Ver Figura 4). Por (78) es suficiente verificar que  $\mu_1$  está por “abajo” de  $\gamma(0)$  y por “encima” de  $\gamma(-\pi/2)$ . Ambas afirmaciones se siguen de (28) y (5). Similarmente demostramos que  $\mu_2(k) \notin \overline{\check{V}_1^+}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

**ii)** La identidad (110) se siguen directamente usando (102). La identidad (111) se sigue del automorfismo de  $\sinh \mu$  con respecto de  $\check{h}_1$ .

**iii)** La estimación (133) se sigue de (131) y la afirmación **i)**. ■

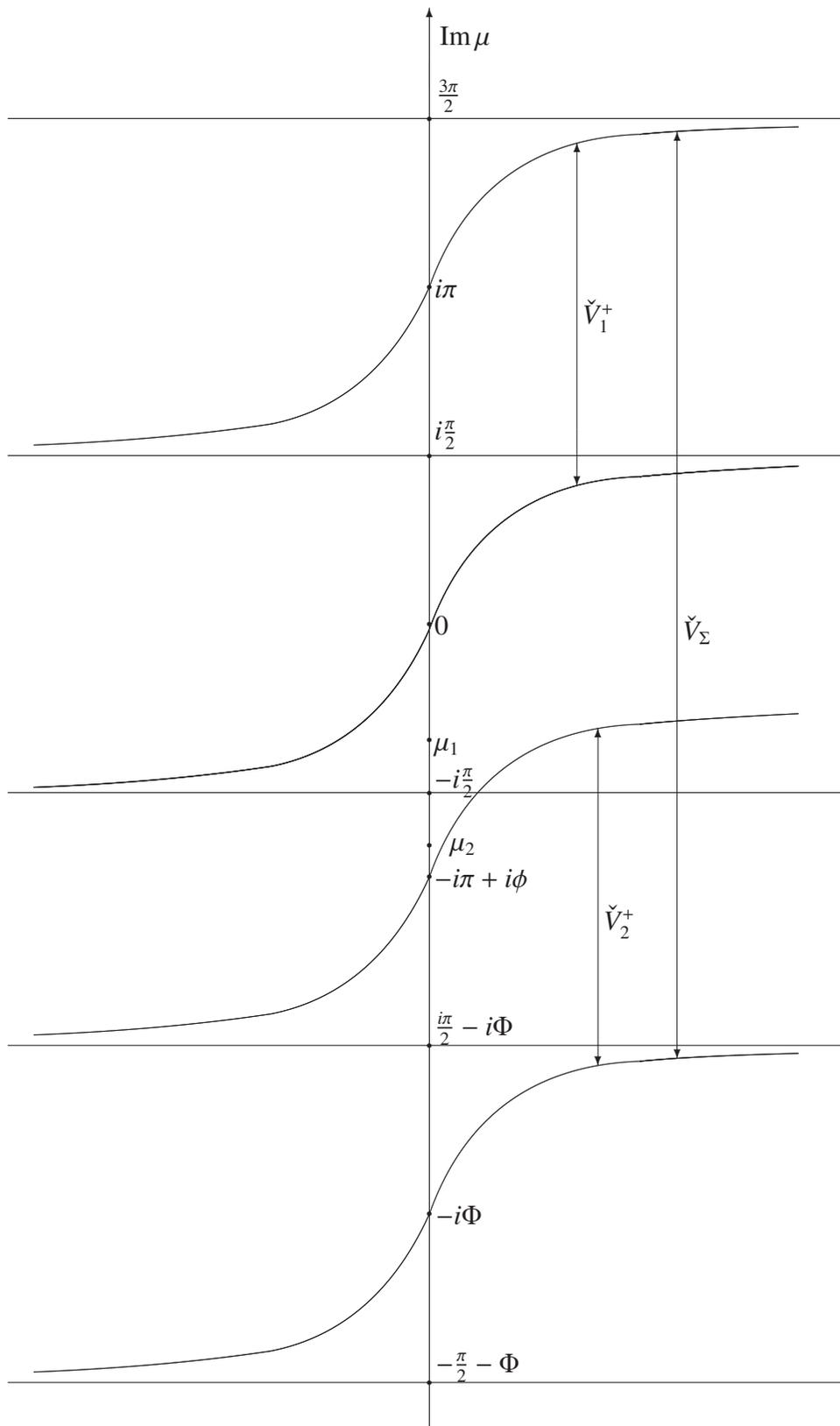


Figura 4

Los polos de la solución de la ecuación en diferencias

**6.2. La función  $\check{w}_1(\mu, \omega)$ .** En esta subsección analizaremos la correspondiente solución “natural”. Mas precisamente, definimos la función  $\check{w}_1(\mu) := \check{w}_1(\mu, \omega)$  en forma similar a  $\check{v}_1(\mu, \omega)$  de (92) con la sustitución  $\check{v}_1^0(\mu)$  por  $\check{w}_1^0(\mu)$  de (131).

LEMA 2.7. **i)** La función  $\check{w}_1(\mu, \omega)$ , admite la representación

$$(134) \quad \check{w}_1(\mu, \omega) = -i\omega \sin \Phi (\cosh \mu + \sin \alpha) \check{w}_1^0(\mu) - 2v(0) \cos \Phi.$$

**ii)** Los polos de  $\check{w}_1(\mu, \omega)$  en  $\mathbb{C}$  pueden ser solamente  $\mu_1(k)$ ,  $\mu_2(k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  que se definen en (130).

**iii)** El único polo de  $\check{w}_1(\mu, \omega)$  en  $\check{V}_\Sigma$  es  $\mu_1$  con

$$(135) \quad \text{Res}(\check{w}_1, \mu_1) = -2ig(\omega) \sin \Phi.$$

**iv)** La función  $\check{w}_1(\mu, \omega)$  admite la estimación para algún  $C(\omega) > 0$

$$(136) \quad |\check{w}_1(\mu)| \leq C(\omega), \quad |\text{Re } \mu| \geq 1.$$

**Demostración. i).** Combinando (131) y (92), obtenemos (134).

**ii)** La afirmación se sigue de (132).

**iii).** De (132), de la definición  $\check{V}_\Sigma$  (78) y (5) se sigue que los posibles polos de  $\check{w}_1^0(\mu)$  en  $\check{V}_\Sigma$  son  $\mu_1$  y  $\mu_2$ . Sin embargo,  $\mu_2$  no es el polo de  $\check{w}_1(\mu)$  en  $\check{V}_\Sigma$  debido a que  $\cosh \mu_2 + \sin \alpha = 0$ . La identidad (135) se sigue de (132) y (130).

**iv)** La estimación (136) se sigue de (134) y (133). El lema se demostró. ■

**6.3. Solución “correcta” de la ecuación en diferencias.** El Lema 2.7 enseña que  $\check{w}_1^0(\mu)$  no es la solución apropiada de la ecuación en diferencias (101) porque la función correspondiente  $\check{w}_1(\mu)$  no es analítica en  $\check{V}_\Sigma$  no obstante la Proposición 2.1. Por lo tanto necesitamos cambiar la función  $\check{w}_1^0(\mu)$  por una función  $\check{v}_1^0(\mu)$  tal que la función correspondiente  $\check{v}_1(\mu)$  será analítica en  $\check{V}_\Sigma$ .

Nuestro plan es el siguiente: agregaremos a la función  $\check{w}_1^0(\mu)$  una función  $CK_2(\mu)$  (con alguna constante  $C$ ) tal que la función correspondiente  $\check{w}_1(\mu)$  será analítica en  $\check{V}_\Sigma$  y la suma  $\check{w}_1^0(\mu) + CK_2(\mu)$  será analítica en  $\check{V}_1^+$ , satisfaga la ecuación en diferencias (110) e invariante con respecto de  $\check{h}_1(\mu)$  de (111). Claro que si  $\check{w}_1^0(\mu) + CK_2(\mu)$  satisface la ecuación (101) y  $\check{w}_1^0(\mu)$  satisface también la misma ecuación en diferencias, entonces por el Lema 2.6 la función  $K_2(\mu)$  satisficará la ecuación en diferencias homogénea:

$$(137) \quad \cosh \mu (K_2(\mu)) + \cosh(\mu + 2i\Phi)(K_2(\mu + 2i\Phi)) = 0, \quad \mu \in \mathbb{C}$$

Denotando  $K_1(\mu) := C \cosh \mu K_2(\mu)$ , obtenemos que  $K_1(\mu)$  satisface a la ecuación

$$(138) \quad K_1(\mu) + K_1(\mu + 2i\Phi) = 0.$$

Además,  $K_1(\mu)$  tiene que ser antisimétrica con respecto de  $\check{h}_1(\mu)$ , es decir

$$(139) \quad K_1(\mu + i\pi) = -K_1(\mu),$$

ya que  $K_2(\mu)$  tiene que ser simétrica con respecto de  $\check{h}_1(\mu)$  por que  $\check{v}_1^0(\mu)$  es simétrica y  $\cosh \mu$  es anti-simétrica con respecto de  $\check{h}_1(\mu)$ .

Sea

$$(140) \quad K_2(\mu) = K_2(\mu, \omega) := \frac{K_1(\mu, \omega)}{\cosh \mu}$$

con

$$(141) \quad K_1(\mu, \omega) := -\frac{\pi g(\omega)}{\omega \Phi} \cdot H_1(\mu, \alpha, \Phi), \quad \mu \in \mathbb{C}$$

y  $H_1$  definida por (27). “Corregimos” la función  $\check{w}_1^0$  y definimos  $\check{v}_1^0$  como

$$(142) \quad \check{v}_1^0(\mu) = \check{v}_1^0(\mu, \omega) := \check{w}_1^0(\mu, \omega) + K_2(\mu, \omega).$$

Es fácil verificar que  $K_2$  es una solución para la ecuación homogénea correspondiente a (110) y satisface (111). Por lo tanto,  $\check{v}_1^0$  satisface (110), (111). En el Lema 2.9 también vamos a demostrar que la función correspondiente  $\check{v}_1(\mu)$  de (92) es analítica en  $\check{V}_\Sigma$ . Los polos de la función  $K_1(\mu)$  son

$$(143) \quad \beta'_k = \mu_1 + 2\Phi ki, \quad \beta''_k = \check{h}_1(\beta'_k) = \mu_1^* + 2i\Phi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

donde  $\mu_1, \mu_1^*$  están definidos en (28). Ya que  $\Phi > \pi$  solo  $\beta'_0 = \mu_1 \in \overline{\check{V}_\Sigma}$ . Además

$$(144) \quad \text{Res}(K_1, \mu_1) = -\frac{2g(\omega)}{\omega}.$$

Obviamente  $K_1$  satisface la estimación

$$(145) \quad |K_1(\mu, \omega)| \leq C(\omega)e^{-\frac{\pi}{2\Phi}|\text{Re } \mu|}, \quad |\text{Re } \mu| \geq 1.$$

LEMA 2.8. **i)** La función  $\check{v}_1^0$  satisface (110), (111).

**ii)** Es meromorfa en  $\mathbb{C}$  y analítica en  $\check{V}_1^+$ .

**iii)** La estimación se cumple

$$(146) \quad |\check{v}_1^0(\mu, \omega)| \leq C(\omega)e^{-|\text{Re } \mu|}, \quad |\text{Re } \mu| \geq 1$$

### Demostración.

**i)** La afirmación ya fue probada.

**ii)**  $\check{v}_1^0$  es meromorfa en  $\mathbb{C}$  por (142) ya que  $\check{w}_1^0$  y  $K_2$  son meromorfas. La función  $\check{w}_1^0$  es analítica en  $\check{V}_1^+$  por el Lema 2.6 i). Los polos de  $K_2(\mu)$  en  $\check{V}_1^+$ , difieren de los polos de  $K_1(\mu)$ , sólo puede ser el cero de  $\cosh \mu$ , es decir, sólo  $\mu = \frac{i\pi}{2}$ . Pero  $K_1\left(\frac{i\pi}{2}\right) = 0$  ya que  $H_1\left(\frac{i\pi}{2}\right) = 0$  por (27). Así,  $\frac{i\pi}{2}$  no es el polo de la función  $K_2$ , y los polos de la función  $K_1(\mu)$  en  $\check{V}_1^+$ , coinciden con los polos de la función  $K_2(\mu)$  en  $\check{V}_1^+$ .  $K_1(\mu)$  tiene sólo el único polo  $\mu_1$  en  $\check{V}_\Sigma$ , por (77) y (143) que no pertenece a  $\check{V}_1^+$  por (5) y la definición (78) de  $\check{V}_1^+$  (ver Figura 4). Por lo tanto, la función  $\check{v}_1^0(\mu)$  es analítica en  $\check{V}_1^+$ .

**iii)** La función  $K_2(\mu, \omega)$  satisface (146) por (145) y (140). Por lo tanto, la estimación (146) para  $\check{v}_1^0(\mu)$  se sigue de (142) y (133). ■

Sea  $\check{v}_1(\mu) = \check{v}_1(\mu, \omega)$  una función correspondiente a  $\check{v}_1^0(\mu)$  de (142) y construida como en (92).

Demostremos que esta función es analítica en  $\overline{\check{V}_\Sigma}$ .

LEMA 2.9. **i)** La función  $\check{v}_1(\mu)$  admite la siguiente representación:

$$(147) \quad \check{v}_1(\mu) = \check{v}_1(\mu, \omega) := \check{w}_1(\mu, \omega) - i\omega \sin \Phi \cdot K_1(\mu, \omega)$$

donde,  $\check{w}_1$ ,  $K_1$  están definidos en (134) y (141) respectivamente.

**ii)**  $\check{v}_1(\mu)$  es analítica en  $\overline{\check{V}_\Sigma}$

**iii)**  $\check{v}_1(\mu)$  satisface la estimación

$$(148) \quad |\check{v}_1(\mu, \omega)| \leq C(\omega)(1 + e^{|\mu|})^q, \quad \mu \in \overline{\check{V}_\Sigma}.$$

**Demostración.** **i)** La representación (147) se sigue de (92), (131), (142), (134) y (140).

**ii)** El único polo de  $\check{w}_1$  en  $\overline{\check{V}_\Sigma}$  es  $\mu_1$  con residuo (135) por el Lema 2.7 iii). También el único polo de  $K_1(\mu)$  en  $\overline{\check{V}_\Sigma}$  es  $\mu_1$  con residuo (144). Por lo tanto,  $Res(\check{v}_1, \mu_1) = 0$  por (147).

**iii)** (136), (145) y (147) implica la estimación (148) para  $|\operatorname{Re} \mu| \geq 1$ . Para  $|\operatorname{Re} \mu| \leq 1$  la estimación se sigue de la analiticidad de  $\check{v}_1(\mu)$  en  $\overline{\check{V}_\Sigma}$ . ■

## Representación de Sommerfeld para la onda de dispersión estacionaria

### 1. Representación de $\widehat{u}_s$

En esta sección damos una solución  $\widehat{u}_s$  para el problema (40) bajo la suposición de su existencia, con la ayuda de la función  $\check{v}_1$  dada por (85). Como veremos en el Teorema 3.1 cualquier solución de la ecuación de Helmholtz se expresa por medio de esta función. En la sección anterior hemos obtenido la representación (147) para esta función usando las condiciones de frontera. Así que, vamos a obtener la expresión explícita para la solución del problema (40) usando ésta representación. Después obtendremos la representación (31). Sea  $\Gamma(\theta)$  es el contorno descrito por:

$$(149) \quad \Gamma(\theta) = \begin{cases} \overleftarrow{\gamma(\phi)} \cup \overrightarrow{\gamma(-\Phi)}, & \text{si } \phi < \theta \leq \pi \\ \overleftarrow{\gamma(\pi)} \cup \overrightarrow{\gamma(-\pi)}, & \text{si } \pi < \theta < 2\pi \end{cases}$$

donde  $\phi$  y  $\Phi$  se definen por (1) y (26) respectivamente,  $\gamma(\nu)$  se define por (76). Las orientaciones del contorno  $\Gamma(\theta)$  se muestran en la Figura 5. Denotamos por  $-\gamma$  el contorno  $\gamma$ , con la orientación contraria.

**TEOREMA 3.1.** (Ver Teorema 9.1 y Observación 12.2 de [2]). Si existe una solución  $\widehat{u}_s \in E_\varepsilon$  para la ecuación de Helmholtz (40) con los datos de Cauchy  $\check{v}_1^0$  y  $\check{v}_1^1$ , entonces la solución tiene la forma:

$$(150) \quad \widehat{u}_s(\rho, \theta, \omega) = \frac{1}{4\pi \sin \Phi} \int_{\Gamma(\theta)} e^{-\rho\omega \sinh(\mu-i\theta)} \check{v}_1(\mu) d\mu,$$

para  $\rho > 0$  y  $\phi < \theta < 2\pi$ , con  $\check{v}_1(\mu)$  definida por (85).

Ahora aplicamos este teorema general para el problema (40).

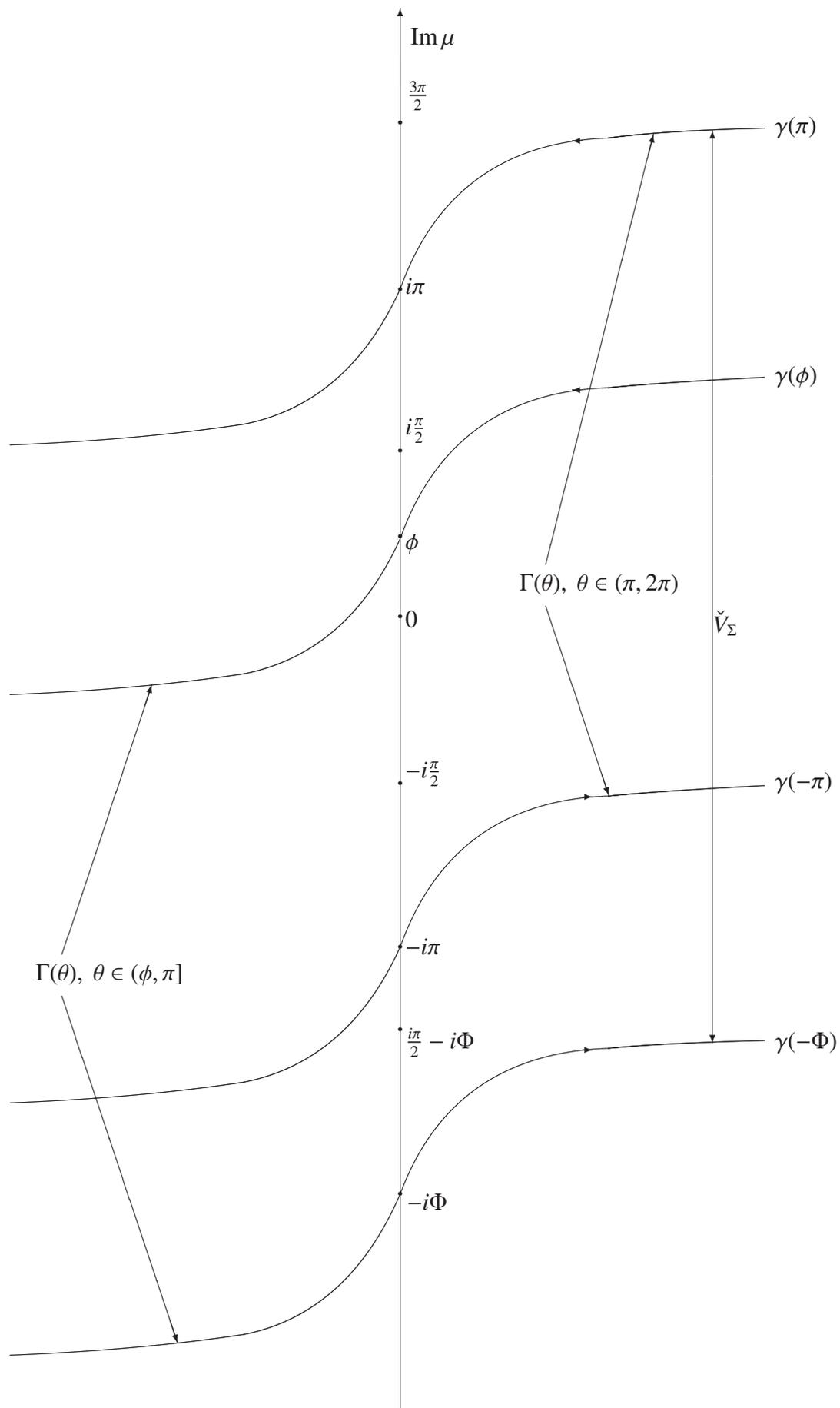


Figura 5

Vamos a representar la función (150) en la forma estándar de la integral de Sommerfeld. Esta forma es la consecuencia directa de la representación (150). Primero encontramos y reducimos el kernel de la integral  $\check{v}_1$  en (150).

**TEOREMA 3.2.** *Si una solución al problema (40) con  $\omega \in \mathbb{C}^+$  existe en el espacio  $E_\varepsilon$  con  $\varepsilon \in (0, 1)$ , entonces se expresa por la integral tipo-Sommerfeld.*

$$(151) \quad \widehat{u}_s(\rho, \theta, \omega) = \frac{ig(\omega)}{4\Phi} \int_{\Gamma(\theta)} e^{-\rho\omega \sinh(\mu-i\theta)} H_1(\mu, \alpha, \Phi) d\mu, \quad \phi \leq \theta \leq 2\pi$$

donde  $H_1(\mu, \alpha, \Phi)$  es dada por (27).

**Demostración.** Por el Teorema 3.1, una solución del problema (40) se expresa por la integral tipo-Sommerfeld (150), donde  $\check{v}_1(\mu)$  está definido por (85). Por el Lema 2.9 la función  $\check{v}_1(\mu)$  admite la representación (147). Vamos a sustituir la expresión (147) para  $\check{v}_1(\mu)$  en (150). Como  $\check{w}_1(\mu)$  no tiene polos en  $\Gamma(\theta)$  por Lema 2.7 ii),  $\int_{\Gamma(\theta)} e^{-\rho \sinh(\mu-i\theta)} \check{w}_1(\mu) d\mu = 0$  por la periodicidad de  $\check{w}_1(\mu)$  con el período  $2\pi i$  porque  $\Gamma(\theta)$  es la unión de dos contornos que se dirigen en dirección contraria  $\gamma(\nu)$  y  $\gamma(\nu - 2i\pi)$  (ver (149)). Entonces se obtiene la representación (151) para la solución del problema (40) para  $\theta \in (\phi, 2\pi)$ . Sólo resta observar que esta integral es continua en los extremos  $\theta = 0, 2\pi$  ya que el integrando  $H_1$  decrece exponencialmente por (27). El Teorema 3.2 está probado. ■

## 2. Terminación de la prueba del Teorema 1.1

En esta sección se demuestra el Teorema 1.1(ii). Supongamos que existe una solución  $u(y, t)$  para el problema (6), (7) y  $u(y, t) \in \mathcal{E}_{\varepsilon, N}$  con un  $\varepsilon \in [0, 1)$  y una  $N \geq 0$ . La onda de dispersión correspondiente  $u_s(y, t)$  está definida por (34). Su transformada de Fourier en el tiempo se expresa por (151) según el Lema 1.4 y el Teorema 3.2.

Apliquemos la transformada de Fourier en el tiempo para (34). Primero, (2) implica (38). Por lo tanto, (34) da

$$(152) \quad \widehat{u}(y, \omega) = \widehat{u}_s(y, \omega) + \widehat{u}_{in}(y, \omega) = \widehat{u}_s(y, \omega) + g(\omega)e^{i\omega\rho \cos(\theta-\alpha)}, \quad y \in \overline{Q}, \quad \omega \in \mathbb{C}^+.$$

Vamos a probar la representación de tipo-Sommerfeld (31) para  $\widehat{u}(\omega, y)$ . Usamos el contorno  $C$  de “dos-lazos”. Vamos a deducir la representación aplicando el Teorema de Cauchy de residuos a la integral (151). Introducimos los siguientes contornos:

$$\tilde{\Gamma}(\theta) = \begin{cases} \Gamma'(\theta) \cup \Gamma_+ \cup \Gamma_-, & \text{si } \pi < \theta \leq 2\pi \\ (\Gamma'(\theta) \cup \Gamma_+ \cup \Gamma_-) - i(\pi - \phi), & \text{si } \phi < \theta < \pi \end{cases}$$

$$\Gamma(\theta) = \{\mu \in \Gamma(\theta) : |\operatorname{Re} \mu| \geq 1\}, \quad \Gamma_\pm = \{\mu : \operatorname{Re} \mu = \pm 1, \gamma(-\pi) \leq \mu \leq \check{\Gamma}_1^+\},$$

y las orientaciones correspondientes se muestran en la Figura 6. (Para una mejor visualización de las líneas verticales  $\Gamma_\pm$  y  $\Gamma_\pm - i(\pi - \phi)$  son movidas un poco una parte en ésta Figura).

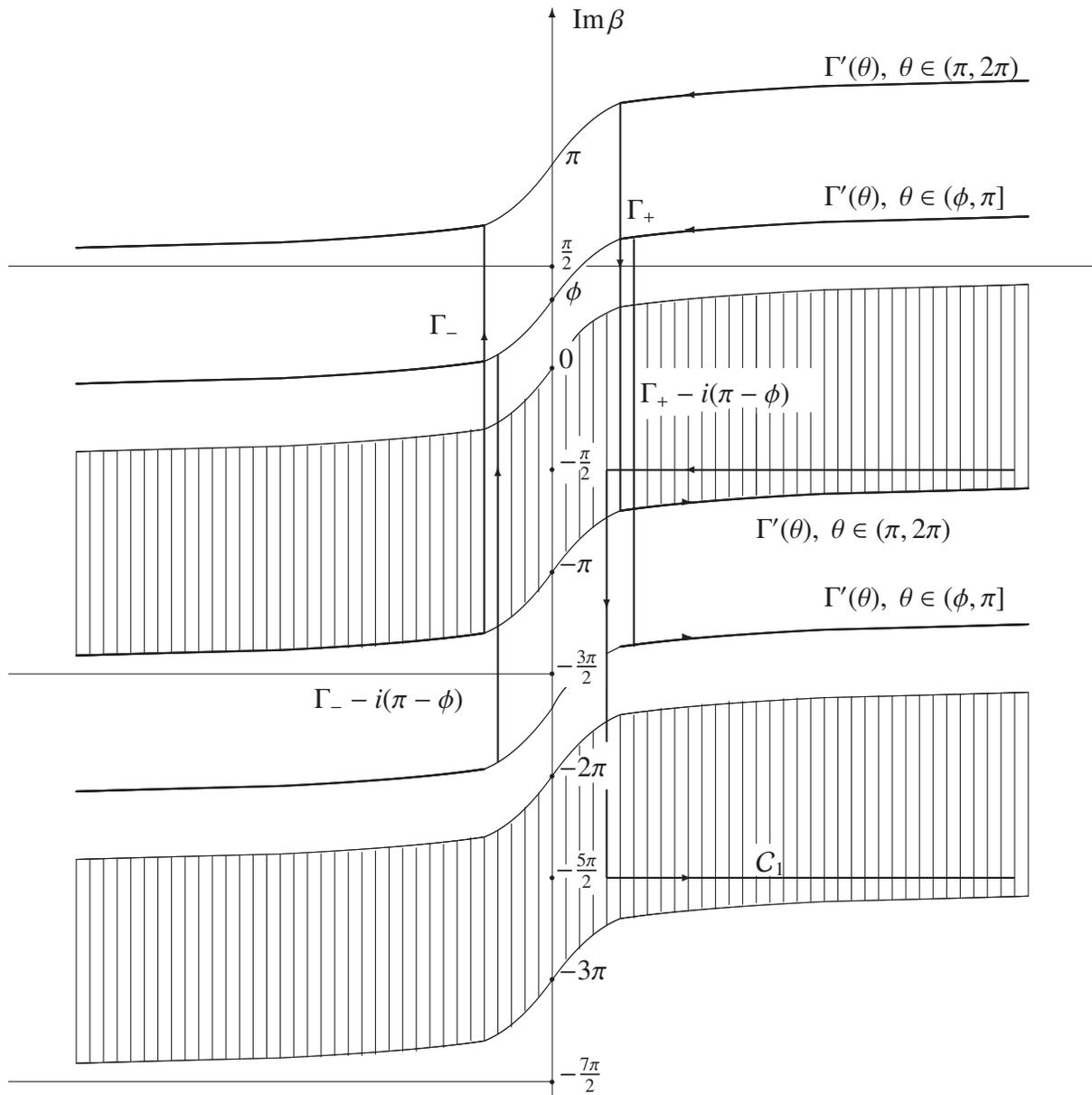


Figura 6

De (77), (141) y (143) se sigue que la función  $H_1(\mu, \alpha, \Phi)$  tiene un polo único  $\mu_1$  en  $\check{V}_\Sigma$  (ver también la demostración del Lema 2.8 y por (144), (141))

$$(153) \quad \text{Res}(H_1, \mu_1) = 2\Phi/\pi.$$

Definamos los contornos  $\Gamma''(\theta) = \{\mu \in \Gamma(\theta) : |\text{Re } \mu| \leq 1\}$  para  $\theta \in (\pi, 2\pi)$ , y representemos  $\Gamma(\theta)$  de (149) en la forma

$$\Gamma(\theta) = \begin{cases} \tilde{\Gamma}(\theta) + [\Gamma''(\theta) \cup (-\Gamma_+) \cup (-\Gamma_-)], & \pi < \theta < 2\pi \\ [\tilde{\Gamma}(\theta) + (\Gamma''(\theta) \cup (-\Gamma_+) \cup (-\Gamma_-))] - i(\Phi - \pi), & \phi < \theta \leq \pi, \end{cases}$$

donde el signo “+” significa una suma “algebraica” de los contornos. Aplicando el teorema de residuos de Cauchy a (151) y usando (153) obtenemos una representación “intermedia” para la función  $\hat{u}(\rho, \theta, \omega)$ :

$$(154) \quad \hat{u}(\rho, \theta, \omega) = \frac{ig(\omega)}{4\Phi} \int_{\tilde{\Gamma}(\theta)} e^{-\omega\rho \sinh(\mu-i\theta)} H_1(\mu, \alpha, \Phi) d\mu, \quad \rho \geq 0, \quad \phi \leq \theta \leq 2\pi, \quad \mu \in \mathbb{C}^+.$$

Sólo resta reemplazar los contornos  $\tilde{\Gamma}(\theta)$ , que dependen de  $\theta$ , por el contorno de dos lazos  $C$  que no depende de  $\theta$ . Con este fin, cambiamos la variable en la integral (154) por

$$\mu \longleftrightarrow \mu - i\theta.$$

Entonces el contorno  $\tilde{\Gamma}(\theta)$  se transforma en el contorno  $\tilde{\Gamma}(\theta) - i\theta$ . (27) implica que la función  $H_1(\mu + i\theta, \alpha, \Phi)$  decae exponencialmente en el contorno  $\tilde{\Gamma}(\theta) - i\theta$  para  $\omega \in \overline{\mathbb{C}^+}$ . Por lo tanto, podemos deformar el contorno  $\tilde{\Gamma}(\theta) - i\theta$  en la integral (154), al contorno  $C$ . Más precisamente, el contorno se encuentra en la región, donde la función  $e^{-\omega\rho \sinh \mu}$  está acotada con respecto a  $\mu$  para toda  $\omega \in \overline{\mathbb{C}^+}$ . De hecho, las líneas  $\{a_1 - i\pi/2 \mid a_1 \in \mathbb{R}\}$  y  $\{a_1 - 5/2i\pi \mid a_1 \in \mathbb{R}\}$  se encuentran en la región  $\check{V}_1^- \cup (\check{V}_1^- - 2i\pi)$  para toda  $\omega \in \overline{\mathbb{C}^+}$  (ver las franjas sombreadas en la Figura 6). En esta región, la función  $e^{-\rho\omega \sinh \mu}$  es acotada para toda  $\omega \in \overline{\mathbb{C}^+}$  por el Lema 9.2 [2]. Por lo tanto, obtenemos la representación (31) por el teorema de Cauchy.

Ahora la representación (30) para la solución  $u$  se sigue de (31). Esto completa la prueba de la afirmación **ii)**. Junto con la prueba de la afirmación **i)** de este teorema (ver Sección 5) se completa la prueba del Teorema 1.1. ■



## Existencia

### 1. Integral del tipo Sommerfeld-Malyuzhinets

Empezamos a probar la existencia de la solución del problema (6), (7), es decir, vamos a probar que la función  $u$  dada por (30) con  $\widehat{u}$  dada por (31) es realmente una solución para este problema y  $u \in \mathcal{E}_{1-\pi/2\Phi, 1-\pi/2\Phi}$ . Nuestro propósito más cercano es probar que la función  $\widehat{u}$  es una solución para el problema estacionario (41).

Para  $\omega \in \overline{\mathbb{C}^+}$  denotemos por  $\mathcal{S}(y, \omega)$  la integral “estacionaria” tipo Sommerfeld-Malyuzhinets

$$(155) \quad \mathcal{S}(y, \omega) := \frac{i}{4\Phi} \int_{\mathcal{C}} e^{-\omega\rho \sinh\beta} H_1(\beta + i\theta) d\beta, \quad \rho \geq 0, \quad \phi \leq \theta \leq 2\pi$$

donde  $H_1$  es definida por (27) y converge absolutamente (ver Lema 4.1). Hemos probado en la Sección 5 la unicidad de la solución  $u(y, t) \in \mathcal{E}_{\varepsilon, N}$  para el problema (6), (7), con  $0 < \varepsilon < 1$  y  $N > 0$ . Además, hemos demostrado el Teorema 1.1 (ii) que la solución (si existe) es dada por (30) donde en vista de (155)

$$(156) \quad \widehat{u}(\rho, \theta, \omega) = g(\omega)\mathcal{S}(\rho, \theta, \omega), \quad \omega \in \mathbb{C}^+.$$

Examinamos la convergencia de la integral (155) y sus derivadas en  $\omega$  y  $\rho, \theta$ . Los polos de la función  $H_1$  coinciden con los polos de  $K_1$  de (141) y son dados por (143). Para  $\delta > 0$  denotamos  $\mathbb{C}_\delta := \{\beta \in \mathbb{C} : |\beta - \beta_k| \geq \delta, \forall k \in \mathbb{Z}\}$ . De la representación de (27) en la forma

$$H_1(\beta, \alpha, \Phi) = \frac{\sinh[iq(2\pi - \alpha)]}{\sinh[q(\beta + i\pi/2 - i\alpha)] \sinh[q(\beta - 3/2\pi i + i\alpha)]}$$

se sigue que para cualquier  $\delta > 0$  la estimación se cumple

$$(157) \quad |H_1(\beta, \alpha, \Phi)| \leq C_\delta e^{-\frac{\pi}{2\Phi} |\operatorname{Re} \beta|}, \quad \beta \in \mathbb{C}_\delta.$$

Además, consideremos  $\omega := \omega_1 + i\omega_2$ ,  $\omega_1 \in \mathbb{R}$  con  $\omega_2 \geq 0$  y  $\beta = \beta_1 + i\beta_2 \in \mathbb{C}$  con  $\beta_{1,2} \in \mathbb{R}$ . Denotemos  $\Sigma := \mathcal{Q} \times \mathbb{C}^+$ .

LEMA 4.1. *i) La integral (155) converge absolutamente y uniformemente para  $(\rho, \theta, \omega) \in \overline{\Sigma}$ , y se puede reescribir como:*

$$(158) \quad \mathcal{S}(\rho, \theta, \omega) = \frac{i}{4\Phi} \begin{cases} \int_{\mathcal{C}_+} e^{-\omega\rho \sinh\beta} H_1(\beta + i\theta, \alpha, \Phi) d\beta, & \operatorname{Re} \omega \geq 0 \\ \int_{\mathcal{C}_-} e^{-\omega\rho \sinh\beta} H_1(\beta + i\theta, \alpha, \Phi) d\beta, & \operatorname{Re} \omega \leq 0 \end{cases}$$

donde  $C_+ := (C_1 + i\pi/4) \cup (-C_1 - 13\pi/4)$  y  $C_- := (C_1 - i\pi/4) \cup (-C_1 - 11\pi/4)$  (ver Figura 7).

ii) La función  $\mathcal{S}(\rho, \theta, \omega)$  es continua en  $\bar{\Sigma}$ .

iii) La función  $\mathcal{S}(\rho, \theta, \omega)$  es analítica en  $\omega \in \mathbb{C}^+$  y suave en  $(\rho, \theta) \in \dot{\bar{Q}}$ .

iv) La función  $\mathcal{S}(\rho, \theta, \omega) \in C^\infty(\dot{\bar{Q}} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}))$ .

### Demostración.

i) Para grandes  $\beta = \beta_1 + i\beta_2 \in C$  tenemos  $\beta = \beta_1 - \pi i/2$ , o  $\beta = \beta_1 - 5\pi i/2$  con  $\beta_1 \in \mathbb{R}$ . Entonces  $\beta_2 = -\pi/2$  o  $\beta_2 = -5\pi/2$ , así  $\cos \beta_2 = 0$  y  $\sin \beta_2 = -1$ . Por consiguiente, la estimación (157) implica que

$$(159) \quad |e^{-\omega\rho \sinh \beta} H_1(\beta + i\theta, \alpha, \Phi)| \leq C e^{-\omega_2 \rho \cosh \beta_1 - \frac{\pi}{2\Phi} |\beta_1|}, \beta \in C, |\beta_1| \geq 1$$

Entonces, para  $\omega_2, \rho \geq 0$  la integral (155) converge absolutamente y uniformemente.

Demostremos (158), por ejemplo, para  $\omega_1 = \operatorname{Re} \omega \geq 0$ . La región donde decae la exponencial (157) se muestra en las Figuras 6 y 7. Ahora, por el Teorema de Cauchy de Residuos podemos deformar el contorno  $C$  a  $C_+$  en la integral (155). Entonces obtenemos

$$(160) \quad \mathcal{S}(\rho, \theta, \omega) = \frac{i}{4\Phi} \int_{C_+} e^{-\omega\rho \sinh \beta} H_1(\beta + i\theta, \alpha, \Phi) d\beta, \rho \geq 0, \theta \in [\phi, 2\pi]$$

ii) La continuidad de la función  $\mathcal{S}$  se sigue por el Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue, de la estimación (159) y de la continuidad de la integral en (155).

iii) Para  $\omega_2, \rho > 0$  todas las derivadas de la integral (155) convergen absoluta y uniformemente por (159).

iv) Por ejemplo, consideremos  $\omega_1 = \operatorname{Re} \omega > 0$ . Entonces  $\mathcal{S}(\rho, \theta, \omega)$  admite la representación (160). Sea  $\beta \in C_1 + i\pi/4$ . Para grandes  $\beta = \beta_1 + i\beta_2$  tenemos  $\beta = \beta_1 - \pi i/4$ , o  $\beta = \beta_1 - 9\pi i/4$  con  $\beta_1 \in \mathbb{R}$ . Entonces  $\beta_2 = -\pi/4$  o  $\beta_2 = -9\pi/4$ , así  $\cos \beta_2 = 1/\sqrt{2}$  y  $\sin \beta_2 = -1/\sqrt{2}$ . Por consiguiente, la estimación (157) implica que

$$|e^{-\omega\rho \sinh \beta} H_1(\beta + i\theta, \alpha, \Phi)| \leq C e^{-\omega_1 \rho \cosh \beta_1 / \sqrt{2} - \frac{\pi}{2\Phi} |\beta_1|}, \beta \in C_+, \beta_1 > 0$$

ya que  $\omega_2 \geq 0, \rho > 0$ . Similarmente, la misma estimación es válida para  $\beta \in -C - 13\pi/4$ . De aquí, las derivadas formales de la integral (160) con respecto a  $\omega, \rho, \theta$  convergen absolutamente y uniforme.

■

## 2. Problema Estacionario

Consideremos la función  $\hat{u}(\rho, \theta, \omega)$  dada por (31) (ó por (156)).

LEMA 4.2. Para  $\omega \in \mathbb{C}^+$ , la función  $\hat{u}(\cdot, \omega) \in C^\infty(\dot{\bar{Q}})$  es una solución clásica para el problema estacionario (41).

**Demostración.** Primero, notemos que  $\hat{u}(\cdot, \omega) \in C^\infty(\dot{\bar{Q}})$  para  $\omega \in \mathbb{C}^+$  por el Lema 4.1 iii) y (156). La ecuación de Helmholtz en (41) se sigue por la diferenciación de la integral de Sommerfeld (155), después el cambio de variable  $\beta \rightarrow \beta' - i\theta$  ya que  $(\Delta + \omega^2)e^{-\omega\rho \sinh(\beta-i\theta)} = 0$ . Sólo resta verificar que  $\hat{u}$  satisface las condiciones en (41). Notemos que por (155), (156,)  $\partial_{y_2} \hat{u}(y, \omega) \Big|_{y \in Q_1} = 0$ , sii

$$(161) \quad \int_C e^{-\rho\omega \sinh\beta} \frac{\partial}{\partial\theta} H_1(\beta + i\theta) d\beta = 0, \quad \theta = 2\pi$$

De (27) tenemos

$$\begin{aligned} F(\beta) &:= \frac{\partial}{\partial\theta} H_1(\beta + i\theta) \Big|_{\theta=2\pi} \\ &= -\frac{\cosh\left[\left(\beta + \frac{5i\pi}{2} - i\alpha\right)q\right]iq}{\sinh^2\left[\left(\beta + \frac{5i\pi}{2} - i\alpha\right)q\right]} - \frac{\cosh\left[\left(\beta + \frac{i\pi}{2} + i\alpha\right)q\right](iq)}{\sinh^2\left[\left(\beta + \frac{i\pi}{2} + i\alpha\right)q\right]}. \end{aligned}$$

Es fácil verificar que  $F(-\beta - 3\pi i) = F(\beta)$ . Ahora, la simetría de los contornos  $C$  con respecto a  $-\frac{3\pi i}{2}$  implica (161). Entonces, la segunda identidad en (41) está probada. Demostremos la tercera identidad de (41). Por (155) y (156) es suficiente probar que

$$\int_C e^{-\rho\omega \sinh\beta} H_1(\beta + i\phi) d\beta = 0$$

Esta identidad se sigue de la simetría de los contornos  $C$  ya que  $H_1(\beta + i\phi) = H_1(-\beta - 3i\pi + i\phi)$  por (27). La tercera condición en (41) está probada. ■

Definamos

$$(162) \quad \hat{u}_s(\rho, \theta, \omega) := \hat{u}(\rho, \theta, \omega) - \hat{u}_{in}(\rho, \theta, \omega)$$

similarmemente a (34), donde  $\hat{u}$  se define por (156).

COROLARIO 4.1. Para  $\omega \in \mathbb{C}^+$ , la función  $\hat{u}_s(\cdot, \omega) \in C^\infty(\dot{\bar{Q}})$  es una solución clásica para el problema estacionario (40).

**Demostración.** La función  $-u_{in}(\rho, \theta, \omega) = -\hat{g}(\omega)e^{i\omega\rho \cos(\theta-\alpha)} \in C^\infty(\bar{Q})$ . Por lo tanto, el corolario se sigue del Lema 4.2, (152) y (37). ■

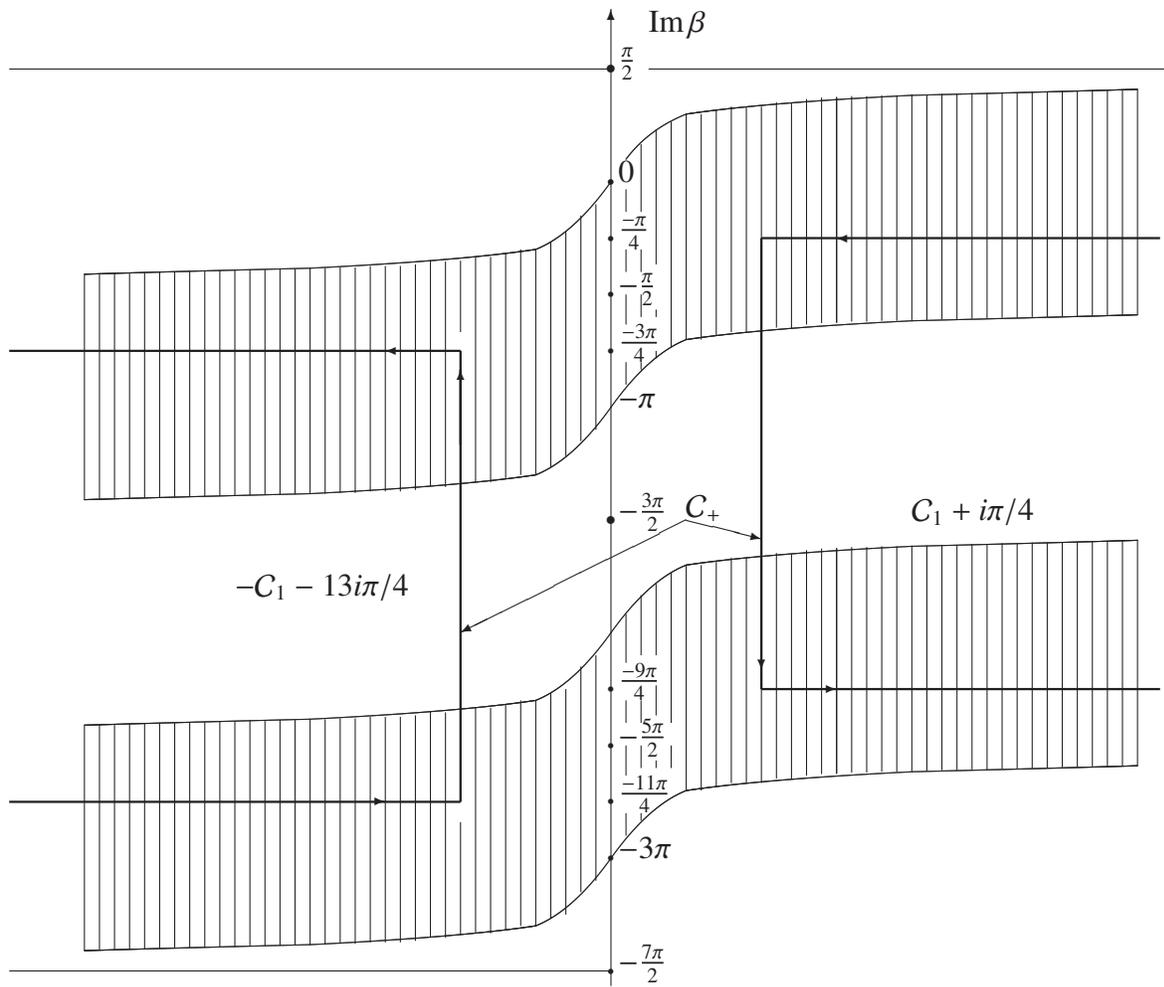


Figura 7. Contorno  $C_+$

### 3. Ondas estacionarias: incidentes, reflejadas y difractadas

En la Sección 7 probaremos la afirmación i) del Teorema 1.2. Más precisamente, probaremos que la función  $u$  definida por (30) pertenece al espacio  $C^\infty(\dot{\overline{Q}} \times \overline{\mathbb{R}}_+) \cap C(\overline{Q} \times \overline{\mathbb{R}}_+)$  y es una solución clásica para (6), (7). La pertenencia de la solución a  $\mathcal{E}_{1-\frac{\pi}{2\Phi}, 1-\frac{\pi}{2\Phi}}$  (afirmación (ii) de este teorema) se demostrará en las Secciones 8-11.

Vamos a deducir (7) de (35) por el teorema de Paley-Wiener, usando la estimación de  $\hat{u}_s(\rho, \theta, \omega)$  para  $\omega \in \mathbb{C}^+$ . Notemos que  $\mathcal{S}(\rho, \theta, \omega)$  y  $\hat{u}(\rho, \theta, \omega) = \hat{u}_s(\rho, \theta, \omega) + \hat{u}_{in}(\rho, \theta, \omega)$  no están acotadas para  $\omega \in \mathbb{C}^+$  ya que  $u_{in}(x, t) \neq 0$  para  $t < 0$ . Por lo tanto, tenemos que extraer primero la onda incidente de la integral (155).

El contorno  $C$  en esta integral cruza las “zonas malas” entre  $\gamma(-\pi)$  y  $\gamma(-2\pi)$ , donde  $\text{Re}(\omega \sinh \beta) < 0$ , y la exponencial  $e^{-\omega \rho \sinh \beta}$  es creciente para  $\text{Im} \omega \rightarrow +\infty$ . Veremos que esta parte creciente de la integral sólo corresponde a la onda incidente. Para extraer la onda incidente, vamos a dividir la función  $\mathcal{S}(\rho, \theta, \omega)$  en (156), en tres sumandos

$$(163) \quad \mathcal{S} = \mathcal{S}_{in} + \mathcal{S}_r + \mathcal{S}_d$$

que se corresponden con la onda incidente, reflejada y difractada. Con este fin describimos primero la función  $H_1(\beta + i\theta, \alpha, \Phi)$  definida por (27).

Sea

$$\gamma_1 := \{\beta_1 - i\pi/2, \beta_1 \in \mathbb{R}\}, \quad \gamma_2 := \{\beta_1 - 5i\pi/2, \beta_1 \in \mathbb{R}\}.$$

Determinamos los polos de  $H_1(\beta + i\theta, \alpha, \Phi)$ . Por (143) y (141), los polos de la función  $H_1(\beta + i\theta, \alpha, \Phi)$  como función de  $\beta$  son

$$\beta'_k(\theta) := \mu_1 - i\theta + 2i\Phi k, \quad \beta''_k(\theta) = \mu_1^* - i\theta + 2i\Phi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Tenemos que tomar en cuenta los polos entre  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$ , es decir,  $\text{Im} \beta \in [-5\pi/2, -\pi/2]$ . El polo  $\beta'_k(\theta)$  pertenece al intervalo  $[-5i\pi/2, -i\pi/2]$  sólo para  $k = 0$  ya que  $\theta \in [\phi, 2\pi]$ . Así,

$$\beta'_0(\theta) := \mu_1 - i\theta \in [-5\pi/2 + i\alpha; -i\pi/2 + i\alpha - i\phi], \quad \theta \in [\phi, 2\pi].$$

Por lo tanto, tenemos que

$$(164) \quad \beta'_0(\theta) \in [-5\pi/2; -i\pi/2], \quad \theta \in [\phi, 2\pi]$$

por (5).

Como veremos más adelante, el residuo en este polo corresponde a la onda incidente  $u_{in}$ . Similarmente el polo  $\beta''_k(\theta) \in [-5i\pi/2, -i\pi/2]$  sólo para  $k = 0$  y  $k = 1$ .

Para  $k = 0$

$$\beta''_0(\theta) = \mu_1^* - i\theta \in [-i\pi/2 - i\alpha, -i\pi/2], \quad \theta_2 \leq \theta \leq 2\pi$$

donde  $\theta_2$  se define por (11). Entonces (5) implica que

$$\begin{cases} \beta_0''(\theta) \in [-5i\pi/2; -i\pi/2], \theta \in [\theta_2; 2\pi] \\ \beta_0''(\theta_2) = -i\pi/2 \end{cases}$$

Como veremos más adelante el residuo en este polo corresponde a la onda reflejada en la cara  $\theta = 2\pi$ .

Para  $k = 1$

$$\beta_1''(\theta) = \mu_1^* - i\theta + 2i\Phi \in [-5i\pi/2 + i\phi - i\alpha, -i\pi/2], \phi \leq \theta \leq \theta_1$$

donde  $\theta_1$  es definido por (11). Entonces (5) implica que

$$(165) \quad \begin{cases} \beta_1''(\theta) \in (-5i\pi/2; -i\pi/2], \theta \in [\phi, \theta_1) \\ \beta_1''(\theta_1) = -5i\pi/2 \end{cases}$$

Como veremos más adelante, este polo corresponde a la onda reflejada en la cara  $\theta = \phi$ .

**DEFINICIÓN 4.1.** Las *direcciones críticas* corresponden a los ángulos  $\theta_2$  y  $\theta_1$  definidos por (11). Los rayos críticos  $l_1, l_2$  son los rayos en  $\mathcal{Q}$ , correspondientes a las direcciones críticas (ver Figura 1).

La estimación (157) implica que

$$(166) \quad |e^{-\omega\rho \sinh\beta} H_1(\beta + i\theta, \alpha, \Phi)| \leq C(\theta) e^{-\frac{\pi}{2\Phi} |\operatorname{Re}\beta|}, \omega \in \mathbb{R}, \beta \in C_0, \theta \in [\phi, 2\pi], \theta \neq \theta_{1,2}.$$

Vamos a definir las funciones

$$(167) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{S}_d(\rho, \theta, \omega) := \frac{i}{4\Phi} \int_{C_0} e^{-\omega\rho \sinh\beta} H_1(\beta + i\theta, \alpha, \Phi) d\beta, \theta \neq \theta_{1,2} \\ \mathcal{S}_{in}(\rho, \theta, \omega) := e^{i\omega\rho \cos(\theta-\alpha)} \\ \mathcal{S}_r(\rho, \theta, \omega) := \begin{cases} -e^{i\omega\rho \cos(\theta-\theta_1)} & \phi \leq \theta \leq \theta_1 \\ 0 & \theta_1 < \theta < \theta_2 \\ e^{i\omega\rho \cos(\theta-\theta_2)}, & \theta_2 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \end{array} \right. \omega \in \overline{\mathbb{C}^+}$$

donde

$$(168) \quad C_0 := \gamma_1 \cup \gamma_2$$

y  $C_0$  esta dirigido de modo que la franja entre  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  permanece a la izquierda (ver Figura 8). De (166) se sigue que la integral en (167) converge para  $\theta \neq \theta_1, \theta_2$ , y diverge para  $\theta = \theta_1, \theta_2$  ya que el integrando tiene polos en  $C_0$ . Por lo tanto, la integral es una función discontinua en  $\theta = \theta_1$  y  $\theta = \theta_2$ . Notemos que

$$(169) \quad \hat{u}_{in}(y, \omega) = g(\omega) \mathcal{S}_{in}(\rho, \theta, \omega)$$

por (38). Similarmente, calculando la transformada de Fourier-Laplace de  $u_r(\rho, \theta, t)$ , definida por (10), obtenemos

$$(170) \quad \hat{u}_r(y, \omega) = \begin{cases} \hat{u}_{r,1}(\rho, \theta, \omega), & \phi \leq \theta \leq \theta_1 \\ 0, & \theta_1 < \theta < \theta_2 \\ \hat{u}_{r,2}(\rho, \theta, \omega), & \theta_2 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

donde

$$(171) \quad \hat{u}_{r,1}(\rho, \theta, \omega) = -g(\omega)e^{i\omega\rho \cos(\theta-\theta_1)}, \quad \hat{u}_{r,2}(\rho, \theta, \omega) = g(\omega)e^{i\omega\rho \cos(\theta-\theta_2)}.$$

Por lo tanto,

$$(172) \quad \hat{u}_r(\rho, \theta, \omega) = g(\omega)\mathcal{S}_r(\rho, \theta, \omega).$$

OBSERVACIÓN 4.1. *Supongamos que (163) se cumple. Entonces (162), (156) y (169) implican*

$$(173) \quad \hat{u}_s = \hat{u} - \hat{u}_{in} = g(\mathcal{S} - \mathcal{S}_{in}) = g\mathcal{S}_s$$

donde

$$(174) \quad \mathcal{S}_s := \mathcal{S} - \mathcal{S}_{in} = \mathcal{S}_r + \mathcal{S}_d$$

Por lo tanto, (9), (172) y (174) implican

$$(175) \quad \hat{u}_d = \hat{u}_s - \hat{u}_r = g(\mathcal{S}_r + \mathcal{S}_d - \mathcal{S}_r) = g\mathcal{S}_d.$$

Llamaremos a  $\mathcal{S}$ ,  $\mathcal{S}_d$ ,  $\mathcal{S}_{in}$ ,  $\mathcal{S}_r$ ,  $\mathcal{S}_s$  como las *densidades*: total, difractada, incidente, reflejada y dispersa de las ondas, respectivamente. La parte incidente  $\mathcal{S}_{in}(\rho, \theta, \cdot)$  no es acotada en  $\mathbb{C}^+$  mientras que  $\mathcal{S}_r(\rho, \theta, \cdot)$  y  $\mathcal{S}_d(\rho, \theta, \cdot)$  son acotados en  $\mathbb{C}^+$  como lo verificaremos en las Secciones 5 y 6. Por lo tanto,  $\hat{u}_s(\rho, \theta, \cdot)$  es acotada en  $\mathbb{C}^+$ .

#### 4. Prueba de la partición

Para demostrar la partición (163), deformaremos el contorno de integración  $C$  en (155) al contorno  $C_0$ . Entonces, la integral también cambia y la diferencia es la suma de los residuos entre  $C$  y  $C_0$  por el teorema de Cauchy de residuos.

LEMA 4.3. **i)** *La partición (163) se cumple,*

$$(176) \quad \mathcal{S}(\rho, \theta, \omega) = \mathcal{S}_{in}(\rho, \theta, \omega) + \mathcal{S}_r(\rho, \theta, \omega) + \mathcal{S}_d(\rho, \theta, \omega).$$

**ii)** *Para  $(\rho, \theta) \in \bar{Q}$  con  $\theta \neq \theta_{1,2}$  tenemos*

$$(177) \quad \mathcal{S}_d(\rho, \theta, \cdot) \in H(\mathbb{C}^+), \quad \mathcal{S}_d(\rho, \theta, \omega) \in C^\infty \left( (\bar{Q} \setminus \{l_1 \cup l_2\}) \times (\mathbb{R} \setminus 0) \right)$$

**Demostración.** Deformamos el contorno  $C$  al contorno  $C_0$  en la integral (155). Usando (164), (165) y (167), se obtiene con el teorema de Cauchy de residuos que

$$\mathcal{S}(\rho, \theta, \omega) = \mathcal{S}_d(\rho, \theta, \omega) +$$

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2\Phi} \operatorname{res}_{\beta=\beta'_0(\theta)} e^{-\omega\rho \sinh\beta} H_1(\beta + i\theta, \alpha, \Phi) + \frac{\pi}{2\Phi} \operatorname{res}_{\beta=\beta'_1(\theta)} e^{-\omega\rho \sinh\beta} H_1(\beta + i\theta, \alpha, \Phi), & \phi < \theta < \theta_1 \\ \frac{\pi}{2\Phi} \operatorname{res}_{\beta=\beta'_0(\theta)} e^{-\omega\rho \sinh\beta} H_1(\beta + i\theta, \alpha, \Phi), & \theta_1 < \theta < 2\pi \\ \frac{\pi}{2\Phi} \operatorname{res}_{\beta=\beta'_0(\theta)} e^{-\omega\rho \sinh\beta} H_1(\beta + i\theta, \alpha, \Phi) + \frac{\pi}{2\Phi} \operatorname{res}_{\beta=\beta'_0(\theta)} e^{-\omega\rho \sinh\beta} H_1(\beta + i\theta, \alpha, \Phi), & \theta_2 < \theta < 2\pi \end{cases}$$

Calculando los residuos, obtenemos (176). La afirmación (177) se sigue de (176), Lema 4.1 iii), iv), y las expresiones (167) para  $\mathcal{S}_{in}$  y  $\mathcal{S}_r$ . El lema se demostró. ■

OBSERVACIÓN 4.2. La prueba muestra que la onda incidente corresponde a los residuos en  $\beta = \beta'_0(\theta)$ , y la onda reflejada a los residuos en  $\beta = \beta''_0(\theta), \beta'_1(\theta)$ .

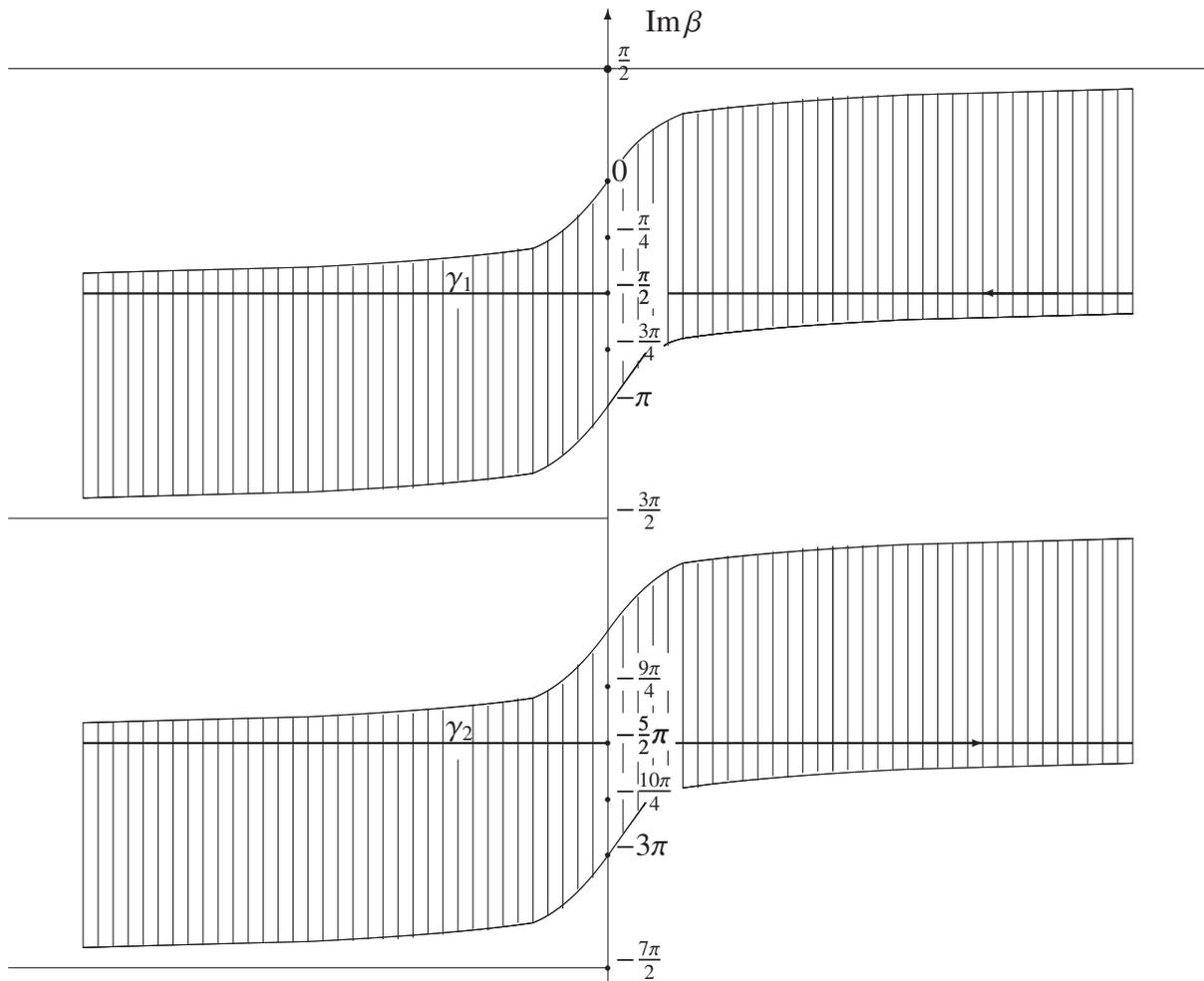


Figura 8. Contorno  $C_0$

## 5. Densidad de la onda difractada

Recuerde que uno de nuestros objetivos es demostrar (35). Lo vamos a deducir por el Teorema de Paley-Wiener y usando las estimaciones de la densidad  $\mathcal{S}_s$  de la onda de dispersión (174). Es suficiente estimar la densidad de la onda difractada  $\mathcal{S}_d$  lo cual probaremos en esta sección.

Notemos que la densidad de la onda reflejada  $\mathcal{S}_r$  es, obviamente, discontinua en las direcciones críticas  $\theta = \theta_1$  y  $\theta = \theta_2$ , mientras que la densidad de la onda incidente  $\mathcal{S}_{in}$  y la densidad total  $\mathcal{S}$  son suaves en todas partes. Por lo tanto, la densidad de la onda difractada  $\mathcal{S}_d = \mathcal{S} - \mathcal{S}_r - \mathcal{S}_{in}$  también es discontinua en  $\theta = \theta_1$  y  $\theta = \theta_2$ .

**TEOREMA 4.1.** *La densidad  $\mathcal{S}_d$  satisface la siguiente estimación*

$$(178) \quad |\mathcal{S}_d(\rho, \theta, \omega)| \leq C, \quad \omega \in \overline{\mathbb{C}^+}, \quad \rho \geq 0, \quad \theta \in [\phi, 2\pi], \quad \theta \neq \theta_{1,2}$$

### Demostración.

El contorno  $C_0$  en la integral (167) consiste de dos partes  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$ . Luego, es suficiente demostrar que la función

$$(179) \quad M_1(\rho, \theta, \omega) := \frac{i}{4\Phi} \int_{\gamma_1} e^{-\omega\rho \sinh\beta} H_1(\beta + i\theta) d\beta$$

satisface la estimación (178), ya que la función

$$M_2(\rho, \theta, \omega) := \frac{i}{4\Phi} \int_{\gamma_2} e^{-\omega\rho \sinh\beta} H_1(\beta + i\theta) d\beta$$

puede ser acotada similarmente. Omitiremos los índices abajo de  $\alpha, \Phi$  en la expresión para  $H_1$ .

Así que, consideremos la función  $M_1$ . Para  $\beta \in \gamma_1$  tenemos  $\beta := -i\pi/2 + \beta_1$  donde  $\beta_1 \in \mathbb{R}$ . Sustituyendo ésta expresión en la integral (179), y cambiando  $\beta_1$  por  $\beta$ , obtenemos

$$M_1(\rho, \theta, \omega) := -\frac{i}{4\Phi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega\rho \cosh\beta} H_1(-i\pi/2 + \beta + i\theta) d\beta$$

La desigualdad (157) implica que la integral es acotada si la función  $\beta \mapsto H(-i\pi/2 + \beta + i\theta)$  no tiene ningún polo en  $\beta \in \mathbb{R}$  para  $\theta \in [\phi, 2\pi]$ . En particular, ésta estimación es válida para  $\theta$  tal que  $|\theta - \theta_k| \geq \delta$ ,  $k = 1, 2$ . Por otro lado, la función  $H_1\left(-\frac{i\pi}{2} + \beta + i\theta\right)$  tiene un polo  $\beta = 0$  cuando  $\theta = \theta_2$ . La estimación depende de la derivación del integrando. La diferenciación nos da el factor  $\omega\rho$ , entonces no obtenemos la estimación uniforme del tipo (178). Por tanto, necesitamos métodos más cuidadosos. Nosotros usamos el método del descenso más rápido [16],[17]. Más precisamente, representemos la función  $M_1$  en la siguiente forma:

$$M_1(\rho, \theta, \omega) := M_3(\rho, \theta, \omega) + M_4(\rho, \theta, \omega)$$

donde

$$M_3(\rho, \theta, \omega) := \int_{|\beta| \leq 1} e^{i\omega\rho \cosh\beta} H_1(-i\pi/2 + \beta + i\theta) d\beta$$

$$M_4(\rho, \theta, \omega) := \int_{|\beta| \geq 1} e^{i\omega\rho \cosh\beta} H_1(-i\pi/2 + \beta + i\theta) d\beta.$$

La función  $M_4$  satisface una estimación del tipo (178) por (157) ya que

$$|e^{i\omega\rho \cosh\beta}| \leq e^{-\omega_2\rho}, \quad \beta \in \mathbb{R}, \quad \omega = \omega_1 + i\omega_2, \quad \omega_2 \geq 0$$

Sólo resta demostrar la estimación del tipo (178) para la función  $M_3$ . La representación (27) nos da

$$H_1(-i\pi/2 + \beta + i\theta) = \frac{1}{\sinh q(\beta + i\theta - i\alpha)} - \frac{1}{\sinh q(2\pi i - \beta - i\theta - i\alpha)}, \quad \beta \in \mathbb{R}$$

Por (5) la función  $\frac{1}{\sinh q(\beta + i\theta - i\alpha)}$  es continua para  $\beta \in [-1, 1]$ . Finalmente, es suficiente demostrar la estimación (178) para la función

$$M_5(\rho, \theta, \omega) := \int_{|\beta| \leq 1} e^{i\omega\rho \cosh\beta} \frac{1}{\sinh q(2\pi i - \beta - i\theta - i\alpha)} d\beta$$

El integrando tiene un polo en el punto  $\beta = 0$  para  $\theta = \theta_2$  (ver (11)). Consideremos  $\theta = \theta_2 + \varepsilon$ ,  $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ , donde  $\varepsilon_0 > 0$  es lo suficientemente pequeño. Entonces reescribimos la función  $M_5$  como la función de  $\rho, \varepsilon, \omega$ :

$$M_6(\rho, \varepsilon, \omega) := M_5(\rho, \theta_2 + \varepsilon, \omega) = - \int_{|\beta| \leq 1} \frac{e^{i\omega\rho \cosh\beta}}{\sinh q(\beta + i\varepsilon)} d\beta.$$

Primero, representemos  $M_6$  en la siguiente forma:

$$M_6(\rho, \varepsilon, \omega) := - \int_{|\beta| \leq 1} \frac{e^{i\omega_1\rho \cosh\beta} (e^{-\omega_2\rho \cosh\beta} - e^{-\omega_2\rho})}{\sinh q(\beta + i\varepsilon)} d\beta \\ - e^{-\omega_2\rho} \int_{|\beta| \leq 1} \frac{e^{i\omega_1\rho \cosh\beta}}{\sinh q(\beta + i\varepsilon)} d\beta, \quad \omega_1 \in \mathbb{R}, \quad \omega_2 \geq 0, \quad \rho \geq 0$$

Notemos que

$$\left| \frac{(e^{-\omega_2\rho \cosh\beta} - e^{-\omega_2\rho})}{\sinh q(\beta + i\varepsilon)} \right| \leq C(\varepsilon_0), \quad \omega_2 \geq 0, \quad \beta \in [-1, 1]$$

para  $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ . Por tanto, es suficiente demostrar una estimación del tipo (178) para la función

$$(180) \quad M_7(\rho, \varepsilon, \omega) := - \int_{|\beta| \leq 1} \frac{e^{i\omega\rho \cosh\beta}}{\sinh q(\beta + i\varepsilon)} d\beta, \quad \omega \in \mathbb{R}, \quad \rho \geq 0.$$

Ya que  $\frac{1}{\sinh q(\beta + i\varepsilon)} \sim \frac{1}{q(\beta + i\varepsilon)}$  para  $|\beta| \leq 1$ , la estimación (178) para  $M_7$  se sigue de la Proposición 4.5 (ii) del Apéndice. ■

## 6. Derivada de la densidad de la onda difractada

Para probar el Teorema 1.2 i) es necesario demostrar en particular que,  $u(y, t) \in C^\infty(\overline{Q} \times \mathbb{R})$ . Nosotros probaremos la suavidad en la Sección 7 usando las estimaciones para la derivada de la densidad  $\mathcal{S}_s$  de la onda de dispersión. Las estimaciones serán demostradas en la presente sección. Notemos que las estimaciones no se siguen directamente de las representaciones (30), (156) ya que la función  $\mathcal{S}(\rho, \theta, \omega)$  crece exponencialmente en  $\omega \in \mathbb{C}^+$ . El crecimiento está relacionado con la densidad  $\mathcal{S}_{in}$  de la onda incidente en (167). Así que, para acotar las derivadas, extraemos la onda incidente como anteriormente. También extraemos la onda reflejada, ya que las estimaciones para sus derivadas son obvias. Denotemos por  $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$

**TEOREMA 4.2.** *La densidad de la onda difractada  $\mathcal{S}_d$  tiene todas sus derivadas y las estimaciones se cumplen*

$$(181) \quad \left| \frac{\partial^\alpha}{\partial \rho^{\alpha_1} \partial \theta^{\alpha_2}} \mathcal{S}_d(\rho, \theta, \omega) \right| \leq C(\delta, \alpha) (1 + |\omega|)^{|\alpha|} \rho^{\alpha_2}, \quad \omega \in \overline{\mathbb{C}^+} \setminus \{0\},$$

$$\rho \geq \delta > 0, \quad \theta \in [\phi, 2\pi], \quad \theta \neq \theta_{1,2}, \quad C(\delta, \alpha) > 0.$$

para  $\alpha := (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ ,  $|\alpha| \geq 0$

**Demostración. I.** Las estimaciones para el caso  $|\alpha| = 0$  se demostraron en la sección anterior. Primero, demostremos que las derivadas (181) existen para  $\alpha \neq 0$  y encontremos una expresión apropiada para ellas. En contraste con el caso  $\alpha = 0$ , las integrales las cuales expresan las derivadas, no convergen absolutamente en el contorno  $C_0$  para  $\omega \in \mathbb{R}$ . Por tanto, tenemos que modificar la prueba para el caso  $\alpha \neq 0$ . Fijamos la función  $\kappa(\beta) \in C^\infty(\mathbb{R})$  tal que

$$\kappa(\beta) := \begin{cases} 0, & \beta \leq 1 \\ \pi/4, & \beta \geq 2 \end{cases}$$

Sea  $B_\pm$  el contorno en  $C$ :  $B_+ := \{\beta_1 \pm i\kappa(\pm\beta_1) - i\pi/2, \pm\beta_1 \geq 0\}$ ;  $B_- := \{\beta_1 \mp i\kappa(\pm\beta_1) - i\pi/2, \pm\beta_1 \geq 0\}$ . Orientamos el contorno  $B_+$  similarmente a  $\gamma_1$  y el contorno  $B_\pm - 2\pi i$  similarmente a  $\gamma_2$  (ver la Figura 9).

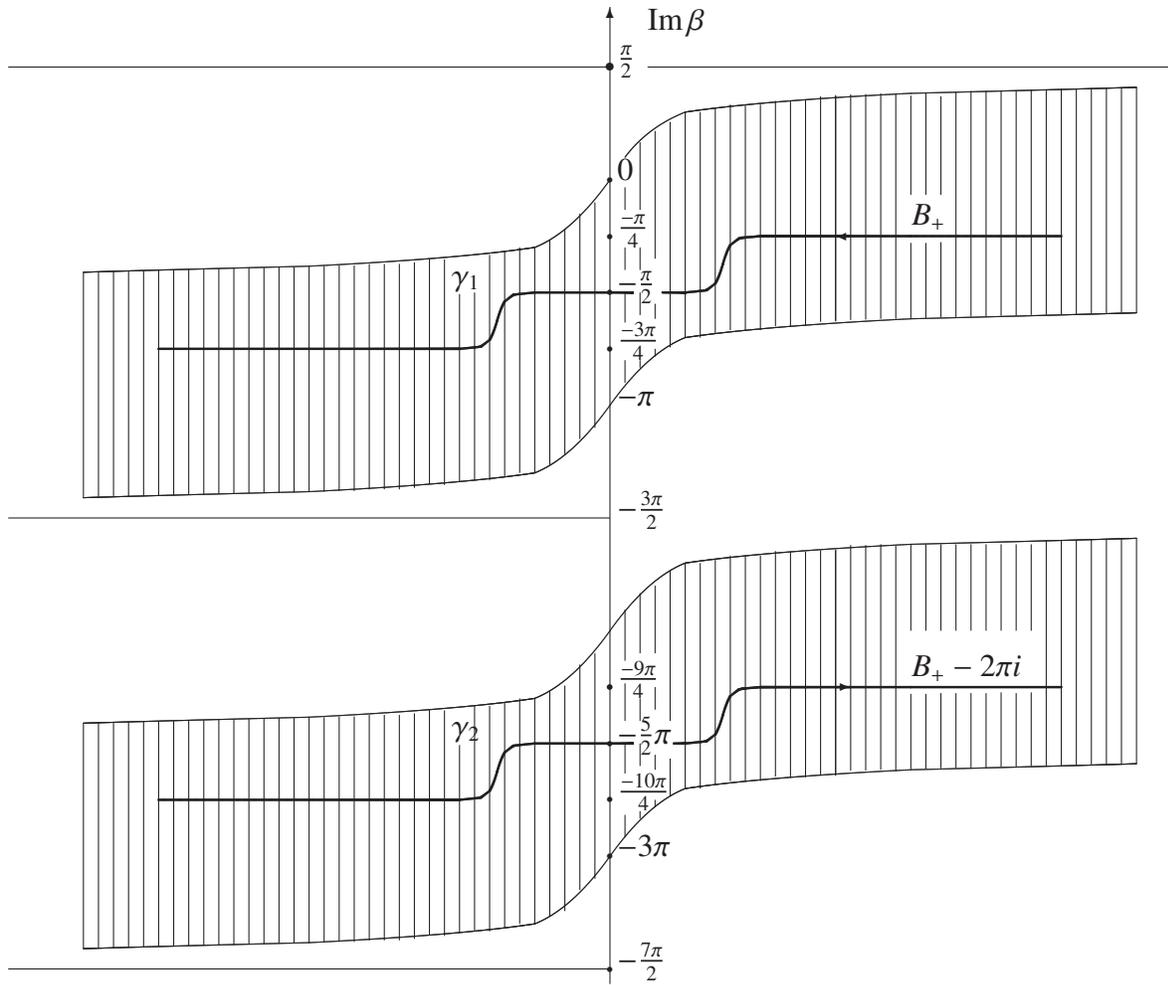


Figura 9. Contornos  $B_+, B_+ - 2\pi i$ . El caso  $\text{Re } \omega \geq 0$ .

Entonces, obtenemos la representación modificada para  $\mathcal{S}_d$  :

$$(182) \quad \mathcal{S}_d(\rho, \theta, \omega) = \frac{i}{4\Phi} \int_{B_{\pm} \cup (B_{\pm} - 2\pi i)} e^{-\omega\rho \sinh\beta} H_1(\beta + i\theta) d\beta,$$

$$\omega \in \overline{\mathbb{C}^+}, \quad \rho \geq 0, \quad \phi \leq \theta \leq 2\pi, \quad \theta \neq \theta_{1,2}$$

por la definición de  $\mathcal{S}_d$  en (167), la estimación (159) y el Teorema de Cauchy. Aquí el signo “+” se toma para  $\text{Re } \omega \geq 0$ , y el signo “-” se toma para  $\text{Re } \omega < 0$ . Diferenciando formalmente la integral con respecto de  $\rho$ , obtenemos una integral que converge absolutamente

$$(183) \quad \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial \rho^{\alpha_1}} \mathcal{S}_d(\rho, \theta, \omega) = \frac{i}{4\Phi} (-\omega)^{\alpha_1} \int_{B_{\pm} \cup (B_{\pm} - 2\pi i)} e^{-\omega\rho \sinh\beta} H_1(\beta + i\theta) (\sinh\beta)^{\alpha_1} d\beta$$

donde el contorno  $B_+ \cup (B_+ - 2\pi i)$  se escoje para  $\text{Re } \omega \geq 0$  y el contorno  $B_- \cup (B_- - 2\pi i)$  se escoje para  $\text{Re } \omega < 0$ . El contorno de integración  $B_+ \cup (B_+ - 2\pi i)$  está en las regiones sombreadas donde la exponencial decae si  $\text{Re } \omega, \text{Im } \omega \geq 0$  y  $\omega \neq 0$ . Similarmente, el contorno de integración  $B_- \cup (B_- - 2\pi i)$  está en las regiones sombreadas donde la exponencial decae si  $\text{Re } \omega < 0$  y  $\text{Im } \omega > 0$ . Por tanto, la integral (183) converge uniformemente para  $\rho \geq \delta > 0$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ ,  $|\theta - \theta_{1,2}| \geq \nu > 0$ . Luego, la diferenciación formal (183) está justificada. Ahora podemos calcular las derivadas (181). Más precisamente, diferenciando formalmente (182), obtenemos que

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^\alpha}{\partial \rho^{\alpha_1} \partial \theta^{\alpha_2}} \mathcal{S}_d(\rho, \theta, \omega) \\ &= \left(\frac{1}{i}\right)^{\alpha_2} \frac{i}{4\Phi} (-\omega)^{\alpha_1} \int_{B_{\pm} \cup (B_{\pm} - 2\pi i)} e^{-\omega\rho \sinh\beta} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial \beta^{\alpha_2}} [H_1(\beta + i\theta) (\sinh\beta)^{\alpha_1}] d\beta \end{aligned}$$

Integrando por partes, obtenemos

$$(184) \quad \frac{\partial^\alpha}{\partial \rho^{\alpha_1} \partial \theta^{\alpha_2}} \mathcal{S}_d(\rho, \theta, \omega) = \frac{i^{\alpha_2+1}}{4\Phi} (-\omega)^{|\alpha|} \rho^{\alpha_2} \int_{B_{\pm} \cup (B_{\pm} - 2\pi i)} e^{-\omega\rho \sinh\beta} H_1(\beta + i\theta) (\sinh\beta)^{\alpha_1} (\cosh\beta)^{\alpha_2} d\beta$$

**II.** Ahora demostramos la estimación uniforme (181) usando la representación (184). Primero, acotamos la derivada (184) para  $\text{Re } \omega \geq 0$ . El caso  $\text{Re } \omega < 0$  se analiza similarmente. Demostraremos que

$$(185) \quad \left| \int_{B_+} e^{-\omega\rho \sinh\beta} H_1(\beta + i\theta) (\sinh\beta)^{\alpha_1} (\cosh\beta)^{\alpha_2} d\beta \right| \leq C(\delta, \alpha) \left( \frac{1 + |\omega|}{|\omega|} \right)^{|\alpha| - \frac{\pi}{2\Phi}}, \quad \rho \geq \delta, \quad \theta \in [\phi, 2\pi], \quad \theta \neq \theta_{1,2}, \quad C(\delta, \alpha) > 0$$

si  $\text{Re } \omega, \text{Im } \omega \geq 0$  y  $\omega \neq 0$ .

Similarmente podemos estimar la misma integral sobre el contorno  $B_+ - 2\pi i$ . Entonces la estimación proporciona (181) por (184). Para probar (185), partimos la integral en dos sumandos:

$$A_1(\rho, \theta, \omega) := \int_{B_+ \cap \{|\beta_1| \geq 2\}} e^{-\omega\rho \sinh\beta} H_1(\beta + i\theta) (\sinh\beta)^{\alpha_1} (\cosh\beta)^{\alpha_2} d\beta$$

y

$$(186) \quad A_2(\rho, \theta, \omega) := \int_{B_+ \cap \{|\beta_1| \leq 2\}} e^{-\omega \rho \sinh \beta} H_1(\beta + i\theta) (\sinh \beta)^{\alpha_1} (\cosh \beta)^{\alpha_2} d\beta.$$

Notemos que la función  $A_1(\rho, \theta, \omega)$  se define para  $\theta \neq \theta_{1,2}$ , porque los polos de  $H_1(\beta + i\theta)$  están sobre el eje imaginario para  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Acotemos la integral

$$A_1^+(\rho, \theta, \omega) := \int_{B_+ \cap \{\beta_1 \geq 2\}} e^{-\omega \rho \sinh \beta} H_1(\beta + i\theta) (\sinh \beta)^{\alpha_1} (\cosh \beta)^{\alpha_2} d\beta$$

La correspondiente integral sobre  $B_+ \cap \{\beta_1 \leq -2\}$  se acota similarmente. La definición del contorno  $B_+$  implica, que

$$\begin{aligned} A_1^+(\rho, \theta, \omega) \\ := \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{\alpha_1 + \alpha_2} \int_2^\infty e^{-\omega \rho \frac{\sqrt{2}}{2} (\sinh \beta - i \cosh \beta)} H_1(\beta - i\pi/4 + i\theta) (\sinh \beta - i \cosh \beta)^{\alpha_1} \\ (\cosh \beta - i \sinh \beta)^{\alpha_2} d\beta \end{aligned}$$

Luego, la estimación (157) implica que

$$|A_1^+(\rho, \theta, \omega)| \leq C \int_2^\infty e^{-a_1 \rho (\omega_1 \sinh \beta + \omega_2 \cosh \beta)} e^{(|\alpha| - \frac{\pi}{2\Phi})\beta} d\beta \leq C_1 \int_2^\infty e^{-a_2 (\omega_1 + \omega_2) \rho e^\beta} e^{(|\alpha| - \frac{\pi}{2\Phi})\beta} d\beta$$

para  $\omega := \omega_1 + i\omega_2$ , donde  $a_1, a_2 > 0$ .

Cambiando la variable  $\xi := (\omega_1 + \omega_2) \rho e^\beta$  en ésta integral, y usando  $q$  de (27) y las condiciones  $\phi < \pi$ ,  $|\alpha| \geq 1$ , obtenemos

$$(187) \quad \begin{aligned} |A_1^+(\rho, \theta, \omega)| &\leq C_1 \int_{(\omega_1 + \omega_2) \rho e^2}^\infty e^{-a_2 \xi} \left( \frac{\xi}{(\omega_1 + \omega_2) \rho} \right)^{|\alpha| - \frac{\pi}{2\Phi}} \frac{d\xi}{\xi} \leq C((\omega_1 + \omega_2) \rho)^{\frac{\pi}{2\Phi} - |\alpha|} \\ &\leq C(\delta) |\omega|^{\frac{\pi}{\Phi} - |\alpha|}, \quad \rho \geq \delta > 0 \end{aligned}$$

Queda sólo acotar la función  $A_2$  de (186). La integral sobre  $B_+ \cap \{1 \leq |\beta| \leq 2\}$  se puede estimar usando (157):

$$(188) \quad \left| \int_{B_+ \cap \{1 \leq |\beta| \leq 2\}} e^{-\omega \rho \sinh \beta} H_1(\beta + i\theta) (\sinh \beta)^{\alpha_1} (\cosh \beta)^{\alpha_2} d\beta \right| \leq C, \quad \rho \geq 0, \quad \theta \in [\phi, 2\pi]$$

Por tanto, sólo falta acotar la integral

$$A_2'(\rho, \theta, \omega) := \int_{B_+ \cap \{|\beta_1| \leq 1\}} e^{-\omega \rho \sinh \beta} H_1(\beta + i\theta) (\sinh \beta)^{\alpha_1} (\cosh \beta)^{\alpha_2} d\beta$$

Verificamos la estimación de tipo (188) para ésta integral. Si  $\theta \in [\phi, 2\pi]$  no está cerca de  $\theta_2$ , o  $\alpha_2 > 0$ , la estimación (188) para  $A_2'$  es obvia, ya que el punto  $-\pi i/2$  no es el polo de la función  $H_1(\beta + i\theta) (\cosh \beta)^{\alpha_2}$  por (143) y (5). Si  $\theta$  está cerca de  $\theta_2$  y  $\alpha_2 = 0$ , la estimación del tipo (188) para ésta integral se reduce a la estimación de la función  $M_7$  de (180).

Ahora la estimación (185) se sigue de (187), y (188). El Teorema se demostró. ■

**COROLARIO 4.2.** *La estimación (181) implica que*

$$|\nabla \mathcal{S}_d(\rho, \theta, \omega)| \leq C(\delta)(1 + |\omega|), \quad \omega \in \overline{\mathbb{C}^+} \setminus \{0\}, \quad \rho \geq \delta > 0, \quad \theta \in [\phi, 2\pi], \quad \theta \neq \theta_{1,2}$$

para cualquier  $\delta > 0$ .

**COROLARIO 4.3.** *La densidad  $\mathcal{S}_s(\rho, \theta, \omega)$  de la onda de dispersión tiene todas sus derivadas con respecto a  $\rho, \theta$  en la región  $\dot{\overline{Q}}$ , y la estimación del tipo (181) se cumple para las derivadas. En particular, las estimaciones se cumplen para  $\nabla \mathcal{S}_s$  en ésta región.*

**Demostración.** (174), Lema 4.1 (iv), y la definición de  $\mathcal{S}_{in}$  en (167) implica que  $\mathcal{S}_s(\rho, \theta, \omega) \in C^\infty(\dot{\overline{Q}} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}))$ . Por otro lado, la representación  $\mathcal{S}_s = \mathcal{S}_r + \mathcal{S}_d$  de (174), Teorema 4.2 y la definición de  $\mathcal{S}_r$  en (167) implica la estimación (181) para  $\theta \neq \theta_{1,2}$ . Luego, las estimaciones se cumplen para  $\theta \in [\phi, 2\pi]$ . El corolario se demostró. ■

## 7. La onda de dispersión. Prueba del Teorema 1.2 i)

En esta sección empezaremos a demostrar el Teorema 1.2 i), esto es, que la función (30) es una solución suave para el problema de dispersión (6), (8). Notemos que  $\hat{u}_s = \hat{u} - \hat{u}_{in}$  por (173). Estudiaremos la función

$$(189) \quad u_s(\rho, \theta, t) := F_{\omega \rightarrow t}^{-1}[\hat{u}_s(\rho, \theta, \omega)]$$

donde

$$(190) \quad \hat{u}_s = g(\omega)\mathcal{S}_s(\rho, \theta, \omega)$$

por (173) y la función  $\mathcal{S}_s$  definida por (174). Nosotros demostraremos que  $u_s(\rho, \theta, t)$  satisface el sistema (36), (35).

Notemos que por el Lema 4.1 ii), iii), la fórmula (174), y la definición de  $\mathcal{S}_{in}$  en (167),

$$\mathcal{S}_s \in C(\overline{Q} \times \mathbb{R}), \quad \mathcal{S}_s(\cdot, \cdot, \omega) \in C^\infty(\dot{\overline{Q}}), \quad \omega \in \mathbb{C}^+$$

Primero, estudiaremos la función

$$(191) \quad \tilde{w}_s(\rho, \theta, \omega) := \hat{g}_1(\omega)\mathcal{S}_s(\rho, \theta, \omega), \quad \omega \in \overline{\mathbb{C}^+}$$

donde  $\hat{g}_1(\omega)$  está definida en (21). Definamos la función

$$(192) \quad w_s(\rho, \theta, t) := F_{\omega \rightarrow t}^{-1}[\tilde{w}_s(\rho, \theta, \omega)], \quad t \in \mathbb{R}$$

**LEMA 4.4.** *Para todos  $\rho \geq 0$  y  $\theta \in [\phi, 2\pi]$  existe la transformada Fourier-Laplace inversa  $w_s(\rho, \theta, t) = F_{\omega \rightarrow t}^{-1}[\tilde{w}_s]$  de la función  $\tilde{w}_s(\rho, \theta, \omega)$ , y*

$$(193) \quad w_s \in C^\infty(\dot{\overline{Q}} \times \mathbb{R})$$

$$(194) \quad w_s(\rho, \theta, t) \in C(\overline{Q} \times \mathbb{R}), \quad |w_s(\rho, \theta, t)| \leq C, \quad t \geq 0$$

$$(195) \quad w_s(\rho, \theta, t) = 0, \quad t < 0$$

**Demostración.** El Lema 4.1 iii) muestra que  $\mathcal{S}(\rho, \theta, \omega)$  es analítica en  $\omega \in \mathbb{C}^+$ . Luego, la función  $\mathcal{S}_s(\rho, \theta, \cdot) = \mathcal{S}(\rho, \theta, \cdot) - \mathcal{S}_{in}(\rho, \theta, \cdot)$  es analítica en  $\omega \in \mathbb{C}^+$ , ya que  $\mathcal{S}_{in}(\rho, \theta, \omega) = e^{i\omega\rho \cos(\theta-\alpha)}$  es analítica en  $\omega \in \mathbb{C}$ . Además, la función  $\mathcal{S}_s = \mathcal{S}_d + \mathcal{S}_r$  está acotada: esto es,  $\mathcal{S}_d$  está acotada por el Teorema 4.1, y  $\mathcal{S}_r$  está acotada por (167) ya que

$$\left. \begin{aligned} |e^{i\omega\rho \cos(\theta-\theta_1)}| &\leq C, & \phi \leq \theta \leq \theta_1; \\ |e^{i\omega\rho \cos(\theta-\theta_2)}| &\leq C, & \theta_2 \leq \theta \leq 2\pi, \end{aligned} \right\} \omega \in \overline{\mathbb{C}^+}, \rho \geq 0$$

Las estimaciones se cumplen, ya que  $-\pi/2 < \theta - \theta_l < \pi/2$ ,  $l = 1, 2$ . Esto es,  $\phi - \theta_1 < \theta - \theta_1 < 0$  y  $\phi - \theta_1 = \alpha - \phi > -\pi/2$  por (11) y (5). Similarmente, (5) implica que  $\alpha < \pi/2$ . Por tanto,  $0 < \theta - \theta_2 < \alpha < \pi/2$ , ya que  $\theta_2 = 2\pi - \alpha$  por (11). Luego,

$$|\mathcal{S}_s(\rho, \theta, \omega)| \leq C, \quad \omega \in \overline{\mathbb{C}^+}$$

Por lo tanto,  $\tilde{w}_s(\rho, \theta, \omega)$  también es analítica en  $\omega \in \mathbb{C}^+$  por (22) y

$$|\tilde{w}_s(\rho, \theta, \omega)| \leq C_N(1 + |\omega|)^{-N}, \quad \omega \in \overline{\mathbb{C}^+}$$

por (25). Luego,  $w_s$  satisface (194), (195) por el Teorema de Paley-Wiener [13].

Por otra parte, el Corolario 4.3, la fórmula (191), y la estimación (25) implica que

$$\left| \frac{\partial^\alpha}{\partial \rho^{\alpha_1} \partial \theta^{\alpha_2}} \tilde{w}_s(\rho, \theta, \omega) \right| \leq C_N(\delta, \alpha) \rho_2^\alpha (1 + |\omega|)^{-N}, \quad (\rho, \theta) \in \dot{\overline{Q}},$$

$$\omega \in \overline{\mathbb{C}^+} \setminus \{0\}, \rho \geq \delta > 0, \theta \in [0, 2\pi], C_N(\delta, \alpha) > 0$$

Por lo tanto, (193) se cumple. El lema se demostró. ■

En la proposición siguiente demostraremos, en particular que la función  $u_s(\rho, \theta, t)$ , definida por (189), satisface el problema (36), (35).

**PROPOSICIÓN 4.1.** *i) La función  $u_s(\rho, \theta, t)$  admite la siguiente representación*

$$(196) \quad u_s(\rho, \theta, t) = -i \int_0^t e^{i\omega_0(\tau-t)} w_s(\rho, \theta, \tau) d\tau, \quad (\rho, \theta) \in \overline{Q}; \quad t \in \mathbb{R}.$$

Además,

$$(197) \quad u_s \in C^\infty(\dot{\overline{Q}} \times \mathbb{R})$$

y para  $(\rho, \theta) \in Q$ ,

$$(198) \quad u_s(\rho, \theta, t) = 0, \quad t < 0, \quad |u_s(\rho, \theta, t)| \leq C(1 + t), \quad t \geq 0$$

ii)  $u_s(\rho, \theta, t)$  es una solución del sistema (36) y las condiciones iniciales (35), y

$$(199) \quad u_s(\rho, \theta, t) \in C(\overline{Q} \times \mathbb{R})$$

**Demostración i)** De (190), (191), y (20) tenemos

$$\hat{u}_s(\rho, \theta, \omega) = \frac{\tilde{w}_s(\rho, \theta, \omega)}{\omega - \omega_0 + i0}, \quad \omega \in \mathbb{C}^+.$$

De aquí y de (192)

$$(200) \quad u_s(\rho, \theta, t) = F_{\omega \rightarrow t}^{-1} \left[ \frac{1}{\omega - \omega_0 + i0} \right] * w_s(\rho, \theta, t), \quad \omega \in \mathbb{R}, \quad (\rho, \theta) \in \bar{Q}.$$

Ya que

$$F_{\omega \rightarrow t}^{-1} \left[ \frac{1}{\omega - \omega_0 + i0} \right] = -ie^{-i\omega_0 t} \Theta(t)$$

entonces (200), (195) implica que

$$u_s(\rho, \theta, t) = [-ie^{-i\omega_0 t} \Theta(t)] * w_s(\rho, \theta, t).$$

Luego, (196) se sigue. Ahora, (197) se sigue de (193) y la representación (196). Por fin, (198) se sigue de (194), (195) y (196).

ii) El sistema (36) se cumple para  $u_s$  en el sentido clásico, ya que  $\hat{u}_s$  satisface (40) por el Corolario 4.1, y (197) se cumple. La identidad (35) se sigue de (198). Finalmente, (199) se sigue de (196) y (194). ■

**Demostración del Teorema 1.2 i).** La inclusión se sigue de (197), (199), (9) y (2). Las ecuaciones (6) y (7) para  $u$  se siguen de (9) y (35), (36) para  $u_s$ . ■

Así, hemos demostrado que  $u$  es la solución clásica para (6), (7).

Sólo resta demostrar el Teorema 1.2 ii). Esto se hará en las Secciones 8-11. Note que la Definición 1.1, el Teorema 1.2 i) y la Observación 1.5 implican que es suficiente probar solo las estimaciones (17) para  $u_s$ . A su vez, para esto es suficiente probar la estimación sólo para  $u_d = u_s - u_r$  fuera de las direcciones críticas  $\theta = \theta_1, \theta_2$  ya que las estimaciones para  $u_r$  son triviales. En las Secciones 8-11 se refieren a las demostraciones de las estimaciones (17) para la onda de dispersión  $u_d(y, t)$ . ■

## 8. Representación del tipo Sommerfeld-Malyuzhinets para la onda de difracción

Para probar (17) para  $u_d$  necesitamos construir una representación conveniente para la onda difractada

$$u_d := F_{\omega \rightarrow t}^{-1}[\hat{u}_d]$$

donde  $\hat{u}_d$  esta definida por (175). La representación juega un papel crucial en la prueba de las estimaciones (17) para  $u_s(\rho, \theta, t)$ .

LEMA 4.5. *La onda de dispersión  $u_s$  admite la siguiente representación:*

$$u_s(\rho, \theta, t) = \begin{cases} u_d(\rho, \theta, t) + u_{r,1}(\rho, \theta, t), & \phi \leq \theta \leq \theta_1 \\ u_d(\rho, \theta, t), & \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \\ u_d(\rho, \theta, t) + u_{r,2}(\rho, \theta, t) & \theta_2 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

con  $u_{r,1}$  y  $u_{r,2}$  definidas por (171).

**Demostración.** La representación se sigue de (175) y (170). ■

TEOREMA 4.3. *La onda de difracción  $u_d$  admite la siguiente representación integral:*

$$(201) \quad u_d(\rho, \theta, t) = i \frac{e^{-i\omega_0 t}}{4\Phi} \int_{C_0} e^{-\omega_0 \rho \sinh \beta} H_1(\beta + i\theta) f(t - i\rho \sinh \beta) d\beta, \quad \theta \neq \theta_{1,2}$$

donde  $H_1$  está definido por (27), el contorno  $C_0$  está definido por (168) y  $f$  está definido (4).

OBSERVACIÓN 4.3. *Ya que para  $\beta \in C_0$ , tenemos  $f(t - i\rho \sinh \beta) = 0$ ,  $\rho \geq t$ , entonces*

$$u_d(\rho, \theta, \cdot) = 0, \quad \rho \geq t$$

*Notemos que esto corresponde al hecho de que la onda dispersada por el vértice del ángulo alcanza el punto  $(\rho, \theta)$  durante el tiempo  $\rho$ , si la velocidad de propagación de la señal es igual a 1.*

**Demostración del Teorema 4.3.** De (175), (20) tenemos

$$(202) \quad \hat{u}_d(\rho, \theta, \omega) = \frac{1}{\omega - \omega_0} w_d(\rho, \theta, \omega), \quad (\rho, \theta) \in \bar{Q}, \quad \omega \in \overline{\mathbb{C}^+} \setminus \{\omega_0\}$$

donde

$$(203) \quad w_d(\rho, \theta, \omega) := \hat{g}_1(\omega) S_d(\rho, \theta, \omega), \quad \omega \in \overline{\mathbb{C}^+}.$$

De (22), (25), Lema 4.3, Teorema 4.1 se sigue que  $w_d$  es analítica en  $\mathbb{C}^+$ , infinitamente diferenciable en  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  y admite la siguiente estimación

$$|w_d(\rho, \theta, \omega)| \leq C_N (1 + |\omega|)^{-N}, \quad (\rho, \theta) \in \bar{Q}, \quad N \in \mathbb{N}.$$

Luego, por el Teorema de Paley-Wiener obtenemos que

$$\text{supp } w_d(\rho, \theta, \cdot) \subset [0, \infty)$$

donde

$$(204) \quad w_d(\rho, \theta, t) := F_{\omega \rightarrow t}^{-1}[w_d(\rho, \theta, \omega)].$$

De (202) se sigue que

$$(205) \quad u_d(\rho, \theta, t) = -i[e^{-i\omega_0 t} \Theta(t)] * w_d(\rho, \theta, t).$$

Calculemos  $w_d(\rho, \theta, t)$  para  $t \geq 0$ , y  $\theta \neq \theta_1, \theta_2$ . De (204), (203), la definición de  $S_d$  en (167), las estimaciones (157), (25) y el Teorema de Fubini, tenemos para  $t \geq 0$ ,  $\theta \neq \theta_1, \theta_2$

$$(206) \quad \begin{aligned} w_d(\rho, \theta, t) &= \frac{i}{8\pi\Phi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \left[ \hat{g}_1(\omega) \int_{C_0} e^{-\omega \rho \sinh \beta} H_1(\beta + i\theta) d\beta \right] d\omega \\ &= \frac{i}{8\pi\Phi} \int_{C_0} H_1(\beta + i\theta) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t - i\rho \sinh \beta)} \hat{g}_1(\omega) d\omega \right] d\beta \\ &= \frac{i}{4\Phi} \int_{C_0} H_1(\beta + i\theta) g_1(t - i\rho \sinh \beta) d\beta \end{aligned}$$

donde  $g_1(t) := F_{\omega \rightarrow t}^{-1}[\hat{g}_1(\omega)]$ . Notemos que  $t - i\rho \sinh \beta \in \mathbb{R}$  para  $\beta \in C_0$  por definición (168) del contorno  $C_0$ . Además,

$$\text{supp } w_d(\rho, \theta, \cdot) \subset [\rho, +\infty),$$

ya que  $g_1(t - i\rho \sinh \beta) = 0$  para  $t \leq \rho$  por (24). Luego, (205) implica que

$$(207) \quad u_d(\rho, \theta, t) = \begin{cases} -ie^{-i\omega_0 t} \int_{\rho}^t e^{i\omega_0 \tau} w_d(\rho, \theta, \tau) d\tau, & \rho \leq t \\ 0, & \rho > t \end{cases} \left| (\rho, \theta) \in \bar{Q}. \right.$$

Sustituyendo (206) en (207), usando las estimaciones (157), (25) y el Teorema de Fubini obtenemos para  $\theta \neq \theta_k$ ,  $k = 1, 2$

$$(208) \quad u_d(\rho, \theta, t) = \frac{e^{-i\omega_0 t}}{4\Phi} \int_{C_0} H_1(\beta + i\theta) \left[ \int_{\rho}^t e^{i\omega_0 s} g_1(s - i\rho \sinh \beta) ds \right] d\beta, \quad \rho \leq t$$

**OBSERVACIÓN 4.4.** *La onda de difracción  $u_d(\rho, \theta, t)$  se anula para  $\rho > t$ . Esto corresponde al principio de Huygens para la dispersión sobre la cuña.*

Sustituyendo (23) en (208), obtenemos para  $\theta \neq \theta_k$ ,  $k = 1, 2$ ,

$$u_d(\rho, \theta, t) = \frac{ie^{-i\omega_0 t}}{4\pi} \int_{C_0} e^{-\omega_0 \rho \sinh \beta} H_1(\beta + i\theta) \left[ \int_{\rho}^t f'(s - i\rho \sinh \beta) ds \right] d\beta, \quad \rho \leq t$$

Luego, por (4)

$$(209) \quad u_d(\rho, \theta, t) = i \frac{e^{-i\omega_0 t}}{4\Phi} \int_{C_0} e^{-\omega_0 \rho \sinh \beta} H_1(\beta + i\theta) f(t - i\rho \sinh \beta) d\beta, \quad \rho \leq t.$$

Por lo tanto, la representación (201) se sigue de (207) y Observación 4.3.

El teorema se demostró. ■

Denotemos

$$(210) \quad Z_1(\beta, \theta) := -H_1(-i\pi/2 + \beta + i\theta) + H_1(-5i\pi/2 + \beta + i\theta)$$

y

$$(211) \quad h(\beta, \rho, t) := f(t - \rho \cosh \beta) e^{i\omega_0 \rho \cosh \beta}, \quad \beta \in \mathbb{R}$$

**OBSERVACIÓN 4.5.** *Tomamos la denotación  $Z_1$  en lugar de  $Z$  para distinguirla de la expresión similar (88) de [3], ver Observación 1.3.*

**COROLARIO 4.4.** *La función  $u_d(\rho, \theta, t)$  admite la siguiente representación para  $\theta \neq \theta_1, \theta_2$*

$$(212) \quad u_d(\rho, \theta, t) = \frac{ie^{-i\omega_0 t}}{4\Phi} \int_{\mathbb{R}} Z_1(\beta, \theta) h(\beta, \rho, t) d\beta$$

**Demostración.** Notemos que  $\sinh \beta = -i \cosh(\operatorname{Re} \beta)$  para  $\beta \in C_0$ . Haciendo el cambio de variable  $\operatorname{Re} \beta \rightarrow \beta$ , obtenemos de (209) la representación (212) para  $\theta \neq \theta_k$ ,  $k = 1, 2$ .

El corolario se demostró. ■

### 9. Estimaciones para la onda de difracción

En esta sección empezamos a probar las estimaciones (17) para  $u_d(\rho, \theta, t)$ . En las Secciones 9 y 10 demostramos que  $u_d$  es acotada. En la Sección 11 demostramos las estimaciones para las derivadas de  $u_d$ . El esquema de las demostraciones coincide con las demostraciones de las estimaciones correspondientes a las Secciones 12-14 en [3]. Primero, demostramos que la función  $u_d$  es acotada más allá de las direcciones críticas. Escojamos  $\delta > 0$  lo suficientemente pequeño.

LEMA 4.6. *La función  $u_d(\rho, \theta, t)$  satisface la siguiente estimación:*

$$(213) \quad |u_d(\rho, \theta, t)| \leq C_\delta, \quad t \geq 0$$

para  $|\theta_k - \theta| \geq \delta > 0$ ,  $k = 1, 2$ .

**Demostración.** La estimación (157) y (210) implican que la función  $Z(\beta, \theta)$  satisface la estimación del tipo (157) para  $\beta \in \mathbb{R}$  y  $|\theta - \theta_k| \geq \delta$ ,  $k = 1, 2$ . Luego, la estimación (213) se sigue de la definición (4) del perfil de la función  $f$ , (211) y (212). ■

En seguida, demostramos (213) para  $\theta$  cerca de  $\theta_1$  ó  $\theta_2$ .

TEOREMA 4.4. *Para  $k = 1, 2$  la función  $u_d(\rho, \theta, t)$  satisface la estimación (213) para  $|\theta - \theta_k| < \delta$  con algún  $\delta > 0$ .*

**Demostración.** Consideremos el caso cuando

$$(214) \quad |\theta - \theta_2| < \delta$$

para algún  $\delta > 0$ . El caso  $|\theta - \theta_1| < \delta$  es analizado similarmente. El segundo término del lado derecho de (210) no tiene polo para  $\beta \in \mathbb{R}$  y  $\theta$  satisfaciendo (214). Luego, (157) implica que

$$(215) \quad |H_1(-5i\pi/2 + \beta + i\theta)| \leq C(\delta)e^{-\frac{\pi}{2\Phi}|\operatorname{Re}\beta|}, \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

La representación (212) y (210) implica que

$$u_d = \frac{ie^{-i\omega_0 t}}{4\Phi} (-v_{d,1} + v_{d,2})$$

donde

$$(216) \quad v_{d,1}(\rho, \theta, t) = \int_{\mathbb{R}} H_1(-i\pi/2 + \beta + i\theta)h(\beta, \rho, t)d\beta$$

$$(217) \quad v_{d,2}(\rho, \theta, t) = \int_{\mathbb{R}} H_1(-5i\pi/2 + \beta + i\theta)h(\beta, \rho, t)d\beta.$$

Es suficiente probar la estimación (213) para la función  $v_{d,1}$ , ya que la estimación para  $v_{d,2}$  se sigue de (215) y (211).

Partimos la integral (216) en dos integrales: una para  $|\beta| \geq 1$  y una segunda para  $|\beta| \leq 1$ . La estimación (213) para la función

$$(218) \quad v'_{d,1}(\rho, \theta, t) := \int_{|\beta| \geq 1} H_1(-i\pi/2 + \beta + i\theta)h(\beta, \rho, t)d\beta$$

se sigue de la estimación de la función  $h(\beta, \rho, \theta)$  por (157) ya que  $|H_1(-i\pi/2 + \beta + i\theta)| \leq C_1 e^{-\frac{\pi}{2\theta} \operatorname{Re}\beta}$  para  $|\beta| \geq 1$ . Sólo queda probar (213) para la función

$$(219) \quad v'_{d,1}(\rho, \theta, t) := \int_{|\beta| \leq 1} H_1(-i\pi/2 + \beta + i\theta)h(\beta, \rho, t)d\beta.$$

Por la definición (27) tenemos

$$v'_{d,1}(\rho, \theta, t) = -v_m(\rho, \theta, t) + v_b(\rho, \theta, t)$$

donde

$$(220) \quad \begin{aligned} v_b(\rho, \theta, t) &= \int_{|\beta| \leq 1} \frac{h(\beta, \rho, t)}{\sinh[q(\beta + i\theta - i\alpha)]} d\beta \\ v_m(\rho, \theta, t) &= \int_{|\beta| \leq 1} \frac{h(\beta, \rho, t)}{\sinh[q(2\pi i - \beta - i\theta - i\alpha)]} d\beta \end{aligned}$$

La condición (214) implica que

$$\theta = \theta_2 + \varepsilon$$

donde  $|\varepsilon| < \delta$ . Sustituyendo en la representación (220) obtenemos

$$(221) \quad \begin{aligned} \tilde{v}_b(\rho, \varepsilon, t) &:= v_b(\rho, \theta_2 + \varepsilon, t) = \int_{|\beta| \leq 1} \frac{h(\beta, \rho, t)}{\sinh[q(\beta + i\varepsilon + 2i\pi - 2i\alpha)]} d\beta \\ \tilde{v}_m(\rho, \varepsilon, t) &:= v_m(\rho, \theta_2 + \varepsilon, t) = \int_{|\beta| \leq 1} \frac{h(\beta, \rho, t)}{\sinh[q(-\beta - i\varepsilon)]} d\beta. \end{aligned}$$

Notemos que la función  $\tilde{v}_b(\rho, \varepsilon, t)$  es regular en el punto  $\varepsilon = 0$  ya que  $\sinh[q(\beta + 2\pi i - 2i\alpha + i\varepsilon)]$  no tiene polo para  $|\beta| \leq 1$ , si  $|\varepsilon| \leq \delta = 1/2$ . De esto se sigue que  $\alpha < \pi/2$  por (5). Por lo tanto la estimación (213) para la función  $\tilde{v}_b$  se sigue, ya que  $h(\beta, \rho, t)$  es acotada. En contraste, la función  $\tilde{v}_m(\rho, \varepsilon, t)$  es singular en el punto  $\varepsilon = 0$ . No obstante, mostraremos que la estimación (213) se cumple para esta función también.

## 10. La parte singular de la onda de difracción

Primero acotamos la función (221) en el caso simple cuando el perfil de la función es  $f(s) \equiv \Theta(s)$ . Entonces (211) implica que

$$\tilde{v}_m(\rho, \varepsilon, t) = \int_{|\beta| \leq \bar{\beta}_0} \coth[q(\beta + i\varepsilon)]e^{i\omega_0\rho \cosh\beta} d\beta$$

donde

$$(222) \quad \bar{\beta}_0 = \min\{1, \beta_0\}$$

y  $\beta_0 = \beta_0(\rho, t) \geq 0$  está definida por

$$(223) \quad t - \rho \cosh\beta_0 = 0$$

LEMA 4.7. *La función  $\tilde{v}_m$  satisface la siguiente estimación:*

$$|\tilde{v}_m(\rho, \varepsilon, t)| \leq C, \quad t \geq \rho \geq 0, \quad \varepsilon \neq 0$$

**Demostración.** Por (222) es suficiente notar que para cualquier  $a \in [0, 1]$  la integral

$$u_1(\rho, \varepsilon, a) := \int_{|\beta| \leq a} \frac{e^{i\omega_0 \rho \cosh \beta}}{(\beta + i\varepsilon)} d\beta$$

es uniformemente acotada con respecto a sus argumentos (ver la Proposición 4.5 en el Apéndice). El lema se demostró. ■

Ahora acotamos la función (221) para una función  $f$  de perfil general.

TEOREMA 4.5. *La función  $\tilde{v}_m(\rho, \varepsilon, t)$  satisface la siguiente estimación*

$$(224) \quad |\tilde{v}_m(\rho, \varepsilon, t)| \leq C, \quad \rho \geq 0, \quad \varepsilon \neq 0$$

**Demostración.** Es suficiente acotar la función

$$(225) \quad r(\rho, \varepsilon, t) = \int_{|\beta| \leq 1} \frac{h(\beta, \rho, t)}{\beta + i\varepsilon} d\beta$$

con  $h$  definida en (211). Daremos la demostración de este teorema en los Lemas 4.8-4.10. Por (211), es suficiente verificar (224) en las siguientes tres regiones:

$$R_1 := \{(\rho, t) : 0 \leq \rho \leq 5\tau_0, \rho \leq t\}$$

$$R_2 := \{(\rho, t) : \rho \geq 5\tau_0, t - 2\tau_0 \leq \rho \leq t\}$$

$$R_3 := \{(\rho, t) : 5\tau_0 \leq \rho \leq t - 2\tau_0\}$$

donde  $\tau_0$  es lo mismo que en (4). Primero, demostremos la estimación uniforme de ésta función en  $R_1$ .

LEMA 4.8. *La función  $r(\cdot, \varepsilon, \cdot)$  está acotada uniformemente en  $R_1$ , con  $\varepsilon \neq 0$ :*

$$|r(\rho, \varepsilon, t)| \leq C, \quad (\rho, t) \in R_1, \quad \varepsilon \neq 0$$

**Demostración.** Representemos a  $r$  en la forma:

$$r(\rho, \varepsilon, t) = \int_{|\beta| \leq 1} \frac{h(\beta, \rho, t) - h(0, t, \rho)}{\beta + i\varepsilon} d\beta + h(0, t, \rho) \int_{|\beta| \leq 1} \frac{1}{\beta + i\varepsilon} d\beta.$$

El segundo sumando es acotado, debido a que  $h(0, t, \rho)$  es acotada por (211) y la integral

$$\left| \int_{|\beta| \leq 1} \frac{1}{\beta + i\varepsilon} d\beta \right| = \left| \arg(\beta + i\varepsilon) \Big|_{-1}^1 \right| \leq \pi, \quad \varepsilon \neq 0$$

Consideremos el primer sumando. Tenemos

$$h(\beta, \rho, t) - h(0, t, \rho) = h'_\beta(\tilde{\beta}, t, \rho)\beta$$

donde  $|\tilde{\beta}| \leq 1$ . Calculando la derivada de  $h$ , conseguimos que existe  $C > 0$  :

$$(226) \quad |h(\beta, \rho, t) - h(0, t, \rho)| \leq C\rho, \quad 0 \leq \rho \leq t, \quad |\beta| \leq 1$$

esto implica la estimación

$$\left| \int_{|\beta| \leq 1} \frac{h(\beta, \rho, t) - h(0, t, \rho)}{\beta + i\varepsilon} d\beta \right| \leq C\rho \int_{|\beta| \leq 1} \frac{|\beta|}{|\beta + i\varepsilon|} d\beta \leq C_1$$

ya que  $\rho \leq 5\tau_0$ .

■

Ahora probamos la estimación  $r(\rho, \varepsilon, t)$  en  $R_2$  cerca de la ecuación característica de la onda.

LEMA 4.9. *La función  $r(\cdot, \varepsilon, \cdot)$  está acotada en  $R_2$  uniformemente si  $\varepsilon \neq 0$ :*

$$(227) \quad |r(\rho, \varepsilon, t)| \leq C, \quad (\rho, t) \in R_2, \quad \varepsilon \neq 0$$

**Demostración.** Representamos la función  $r$  como

$$r(\rho, \varepsilon, t) := r_1(\rho, \theta, t) + r_2(\rho, \varepsilon, t)$$

donde

$$(228) \quad r_1(\rho, \varepsilon, t) := \int_{|\beta| \leq 1} \frac{e^{i\omega_0\rho \cosh\beta}}{\beta + i\varepsilon} \bar{f}(\beta, \rho, t) d\beta$$

con

$$\bar{f}(\beta, \rho, t) := f(t - \rho \cosh\beta) - f(t - \rho)$$

y

$$r_2(\rho, \theta, t) := f(t - \rho) \int_{|\beta| \leq 1} \frac{e^{i\omega_0\rho \cosh\beta}}{\beta + i\varepsilon} d\beta$$

La estimación (227) para la función  $r_2$  se sigue de la Proposición 4.5 del Apéndice, ya que la función  $f(t - \rho)$  es acotada. Sólo falta probar la estimación (227) para la función  $r_1$ .

Por (4) la función  $f(t - \rho \cosh\beta)$  es igual a 0 por  $\cosh\beta \geq \frac{t}{\rho}$ . Ya que  $t/\rho \leq 1 + 2\tau_0/\rho$  para  $(\rho, t) \in R_2$ , tenemos  $f(t - \rho \cosh\beta) = 0$  si  $\cosh\beta \geq 1 + 2\tau_0/\rho$ . Por lo tanto podemos cambiar el intervalo de integración en (228) por  $[-\beta_2, \beta_2]$ , donde  $\beta_2 > 0$ , y  $\cosh\beta_2 = 1 + \frac{2\tau_0}{\rho}$ , ya que  $\beta_2 < 1$  para  $\rho \geq 5\tau_0$ . Así, la función  $r_1$  está representada en la forma

$$(229) \quad r_1(\rho, \varepsilon, t) := \int_{|\beta| \leq \beta_2} \frac{e^{i\omega_0\rho \cosh\beta}}{\beta + i\varepsilon} \bar{f}(\beta, t, \rho) d\beta$$

Ahora acotamos el integrando en (229). Usando el Teorema de Lagrange escribimos

$$(230) \quad \left| \frac{e^{i\omega_0\rho \cosh\beta}}{\beta + i\varepsilon} \bar{f}(\rho, \beta, t) \right| \leq C\rho \frac{|\beta|}{|(\beta + i\varepsilon)|} |\sinh\tilde{\beta}|$$

donde  $|\tilde{\beta}| \leq \beta_2$ . Notemos que  $1 + \frac{2\tau_0}{\rho} = \cosh \beta_2 \sim 1 + \frac{\beta_2^2}{2}$ , luego  $\beta_2 \sim \frac{1}{\sqrt{\rho}}$ , ya que  $\rho \geq 5\tau_0 > 0$ . Por lo tanto,

$$\sinh \tilde{\beta} \leq \sinh \beta_2 \sim \beta_2 \sim \frac{1}{\sqrt{\rho}}$$

Ahora, (230) implica que

$$\left| \frac{e^{i\omega_0\rho \cosh \beta}}{\beta + i\varepsilon} \bar{f}(\rho, \beta, t) \right| \leq C_1 \sqrt{\rho}, \quad \rho \geq 5\tau_0$$

Por lo tanto, (229) implica que

$$|r_1(\rho, \varepsilon, t)| \leq C \sqrt{\rho} \beta_2 \leq C_1 \rho \geq 5\tau_0$$

■

Sólo resta demostrar la estimación (227) en la región  $R_3$  más allá de las características. Por (4) y (223) tenemos que

$$(231) \quad f(t - \rho \cosh \beta) = \begin{cases} 0, & \cosh \beta \geq \cosh \beta_0, \\ 1, & \cosh \beta \leq \frac{t}{\rho} - \frac{\tau_0}{\rho}. \end{cases}$$

La ecuación

$$(232) \quad \cosh \beta_3 = \frac{t}{\rho} - \frac{\tau_0}{\rho}$$

admite la solución  $\beta_3 \geq 0$ , ya que  $\frac{t}{\rho} - \frac{\tau_0}{\rho} \geq 1$  en  $R_3$ . Entonces (231) implica que

$$(233) \quad f(t - \rho \cosh \beta) = 1 \text{ for } |\beta| \leq \beta_3$$

Denotemos

$$f_1(t - \rho \cosh \beta) = \begin{cases} 0, & \beta \geq \bar{\beta}_0 \\ f(t - \rho \cosh \beta), & \beta \leq \bar{\beta}_0 \end{cases}$$

donde  $\bar{\beta}_0$  está definida por (222). Entonces escribimos (225) en la forma:

$$(234) \quad r(\rho, \varepsilon, t) = \int_{|\beta| \leq \bar{\beta}_0} f_1(\beta, t, \rho) \frac{e^{i\omega_0\rho \cosh \beta}}{\beta + i\varepsilon} d\beta, \quad \rho \leq t$$

LEMA 4.10. *La función  $r(\cdot, \varepsilon, \cdot)$  es acotada en la región  $R_3$  uniformemente en  $\varepsilon \neq 0$ :*

$$(235) \quad |r(\rho, \varepsilon, t)| \leq C, \quad 5\tau_0 \leq \rho \leq t - 2\tau_0, \quad \varepsilon \neq 0$$

**Demostración.** Denotemos por

$$(236) \quad \bar{\beta}_3 := \min\{1, \beta_3\}, \quad \rho \leq t - \tau_0$$

Entonces para  $\rho \leq t - 2\tau_0$  escribimos (234) en la forma:

$$r(\rho, \varepsilon, t) = \int_{|\beta| \leq \bar{\beta}_3} \frac{e^{i\omega_0\rho \cosh \beta}}{\beta + i\varepsilon} d\beta + \int_{\bar{\beta}_3 \leq |\beta| \leq \bar{\beta}_0} f_1(\beta, t, \rho) \frac{e^{i\omega_0\rho \cosh \beta}}{\beta + i\varepsilon} d\beta$$

La primera integral es acotada por la Proposición 4.5 del apéndice y (236):

$$\left| \int_{|\beta| \leq \bar{\beta}_3} \frac{e^{i\omega_0\rho \cosh \beta}}{\beta + i\varepsilon} d\beta \right| \leq C, \quad \rho \geq 0, \quad \varepsilon \neq 0$$

Para la segunda integral demostramos que

$$(237) \quad |A(\rho, \varepsilon, t)| := \left| \int_{\bar{\beta}_3 \leq |\beta| \leq \bar{\beta}_0} f_1(\beta, t, \rho) \frac{e^{i\omega_0 \rho \cosh \beta}}{\beta + i\varepsilon} d\beta \right| \leq C, \quad 5\tau_0 \leq \rho \leq t - 2\tau_0$$

Consideremos dos casos.

**I.** Sea  $\bar{\beta}_3 \geq \frac{1}{2}$ , entonces la estimación (237) se cumple, ya que  $|\beta + i\varepsilon| \geq 1/2$ , para  $|\beta| \geq \bar{\beta}_3$  y la integral (237) está acotada por una constante en vista de (231).

**II.** Sea  $\bar{\beta}_3(\rho, t) \leq \frac{1}{2}$ . Entonces  $\beta_3 \leq \frac{1}{2}$  por (236). Luego  $\cosh \beta_3 \leq \cosh \frac{1}{2}$ . y  $\frac{t}{\rho} \leq \frac{\tau_0}{\rho} + \cosh \frac{1}{2}$  por (232).

Por otro lado,  $\rho \geq 5\tau_0$ . Luego  $\frac{\tau_0}{\rho} \leq \frac{1}{5} \leq \cosh 1 - \cosh \frac{1}{2}$  y  $\frac{\tau_0}{\rho} + \cosh \frac{1}{2} \leq \cosh 1$ . Por lo tanto  $\frac{t}{\rho} \leq \cosh 1$  y  $\beta_0 \leq 1$  por (223). Ahora, verifiquemos que

$$(238) \quad \frac{\beta_0}{\beta_3} \leq 2$$

A saber, (238) es equivalente a  $\cosh \beta_0 \leq 2 \cosh \beta_3^2 - 1$ . Las definiciones (223), (232) de  $\beta_0, \beta_3$  implican que la última desigualdad es equivalente a  $\rho(t + \rho) \leq 2(t - \tau_0)^2$ , la cual se cumple por la hipótesis (235). Por lo tanto, (238) está probada. Ahora (237) se sigue, ya que (238) implica que

$$(239) \quad \begin{aligned} |A(\rho, \varepsilon, t)| &\leq \int_{\beta_3 \leq |\beta| \leq \beta_0} \left| \frac{d\beta}{\beta + i\varepsilon} \right| \leq \int_{\beta_3 \leq |\beta| \leq \beta_0} \left| \frac{d\beta}{\beta_3} \right| \\ &\leq \frac{2}{\beta_3} |\beta_0 - \beta_3| \leq 2 \left( 1 + \left| \frac{\beta_0}{\beta_3} \right| \right) \leq 6 \end{aligned}$$

Aquí usamos que  $\beta_3 = \bar{\beta}_3$ , ya que  $\bar{\beta}_3 \leq \frac{1}{2}$  y  $\bar{\beta}_0 = \beta_0$  ya que  $\beta_0 < 1$ . El Teorema 4.5 se demostró. ■

Así, hemos demostrado la estimación (17) para  $u_d$ . En la siguiente sección demostraremos la estimación para  $\nabla u_d$ .

## 11. Derivada de la onda de difracción

En esta sección terminaremos la prueba del Teorema 1.2 (ii). Más precisamente, demostramos las estimaciones (17) para  $\nabla u_d$ .

**11.1. Más allá de las direcciones críticas.** En esta subsección demostramos que las derivadas de la onda de difracción (212) satisfacen la estimación (17) más allá de las direcciones críticas. En la siguiente subsección demostramos que las derivadas de la onda de difracción (212) satisface la estimación (17) cerca de las direcciones críticas.

**PROPOSICIÓN 4.2.** *Sea  $\theta$  la cual satisface la condición del Lema 4.6 para algún  $\delta > 0$ . Entonces, la función  $u_d(\rho, \theta, t)$  satisface la siguiente estimación*

$$(240) \quad |\nabla u_d(\rho, \theta, t)| \leq C_\delta (1 + t^\varepsilon)(1 + \rho^{-\varepsilon}), \quad 0 < \rho < t \leq 0$$

donde

$$\varepsilon = 1 - \frac{\pi}{2\Phi}$$

**Demostración.**

i) Primero, verificamos (240) para la derivada radial  $\frac{\partial}{\partial \rho} u_d(\rho, \theta, t)$ . Después, demostramos ésta estimación para la derivada angular. Para demostrar ésta estimación para la derivada radial consideremos la derivada radial de la función  $v_{d,1}$  de (216) solamente, ya que la estimación para el segundo sumando de (217) se demuestra similarmente. Diferenciando ésta función con respecto a  $\rho$  y usando (211), obtenemos

$$(241) \quad \frac{\partial}{\partial \rho} v_{d,1}(\rho, \theta, t) = \left\{ \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega_0 \rho \cosh \beta} H_1(-i\pi/2 + \beta + i\theta) \cosh \beta [i\omega_0 f(t - \rho \cosh \beta) - f'(t - \rho \cosh \beta)] d\beta \right\}.$$

El integrando en (241) se anula fuera del intervalo  $[-\beta_0, \beta_0]$  según (4) y la definición (223). Por lo tanto, (157) implica la siguiente estimación para (241):

$$(242) \quad \left| \frac{\partial}{\partial \rho} v_{d,1}(\rho, \theta, t) \right| \leq C_\delta \int_0^{\beta_0} e^{\beta(1 - \frac{\pi}{2\Phi})} d\beta.$$

La definición (223) nos da

$$\beta_0 = \ln \left( \frac{t + \sqrt{t^2 - \rho^2}}{\rho} \right).$$

Luego, (242) implica la siguiente estimación:

$$(243) \quad \left| \frac{\partial}{\partial \rho} v_{d,1}(\rho, \theta, t) \right| \leq C \left[ \left( \frac{t + \sqrt{t^2 - \rho^2}}{\rho} \right)^\varepsilon - 1 \right], \quad \rho \leq t$$

La estimación  $(t + \sqrt{t^2 - \rho^2}) \leq 2(1 + t)$  implica la estimación  $(t + \sqrt{t^2 - \rho^2})^\varepsilon \leq C(1 + t^\varepsilon)$ . De aquí y de (243) obtenemos

$$(244) \quad \left| \frac{\partial}{\partial \rho} v_{d,1}(\rho, \theta, t) \right| \leq C [(1 + t^\varepsilon)(1 + \rho^{-\varepsilon}) + (1 + \rho^{-\varepsilon})], \quad \rho \leq t$$

Ahora, la estimación (240) se sigue de  $C_\delta := 2C$ . La afirmación i) se demostró.

ii) Demostremos la estimación (240) para la derivada angular de la función  $u_d$ . Para una prueba de ii) es suficiente demostrar ésta estimación para  $\frac{1}{\rho} v_{d,1}(\rho, \theta, t)$ . Diferenciando la función (216) con respecto a  $\theta$ , notemos que

$$\frac{\partial}{\partial \theta} H_1(-i\pi/2 + \beta + i\theta) = (-i) \frac{\partial}{\partial \beta} H_1(-i\pi/2 + \beta + i\theta) d\beta$$

De aquí:

$$(245) \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} v_{d,1}(\rho, \theta, t) = -\frac{i}{\rho} \left[ \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega_0 \rho \cosh \beta} \frac{\partial}{\partial \beta} H_1(-i\pi/2 + \beta + i\theta) f(t - \rho \cosh \beta) d\beta \right]$$

Integrando por partes en (245), y usando que la función  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  obtenemos

$$(246) \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} v_{d,1}(\rho, \theta, t) = i \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega_0 \rho \cosh \beta} H_1(-i\pi/2 + \beta + i\theta) \sinh \beta [i\omega_0 f(t - \rho \cosh \beta) - f'(t - \rho \cosh \beta)] d\beta$$

Así, hemos obtenido una expresión similar a (241) y aplicando los mismos argumentos como en la demostración de i) obtenemos la estimación (240) para la derivada  $\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} v_{d,1}(\rho, \theta, t)$ .

La proposición se demostró. ■

**11.2. Cerca de las direcciones críticas.** En esta sección obtendremos la estimación (240) para  $\theta$  cerca de  $\theta_1$  y  $\theta_2$ .

**PROPOSICIÓN 4.3.** *La estimación (240) se cumple para  $|\theta - \theta_k| < \delta$ ,  $k = 1, 2$  para  $\delta > 0$  suficientemente pequeño.*

**Demostración.** Primero, demostremos la estimación (240) para la derivada radial. Suponemos que  $\theta$  satisface (214). El caso cuando  $\theta$  está cerca de  $\theta_1$  se considera similarmente. Como en la Proposición 4.2 verificamos ésta estimación para  $\frac{\partial v_{d,1}}{\partial \rho}$  de (241). Esta función es la suma de las funciones  $w'_{d,1}$  y  $w''_{d,2}$ , donde

$$(247) \quad \begin{aligned} & w'_{d,1}(\rho, \theta, t) \\ & := \int_{|\beta| \leq 1} e^{i\omega_0 \rho \cosh \beta} H_1(-i\pi/2 + \beta + i\theta) \cosh \beta [i\omega_0 f(t - \rho \cosh \beta) \\ & \quad - f'(t - \rho \cosh \beta)] d\beta \end{aligned}$$

y

$$(248) \quad \begin{aligned} & w''_{d,1}(\rho, \theta, t) \\ & := \int_{|\beta| \geq 1} e^{i\omega_0 \rho \cosh \beta} H_1(-i\pi/2 + \beta + i\theta) \cosh \beta [i\omega_0 f(t - \rho \cosh \beta) \\ & \quad - f'(t - \rho \cosh \beta)] d\beta. \end{aligned}$$

Las funciones  $w'_{d,1}$  y  $w''_{d,2}$  son similares a las funciones  $v'_{d,1}$  y  $v''_{d,1}$  de (219) y (218). La diferencia es que la función  $h$  de (211) se cambia por la función

$$(249) \quad g(\beta, \rho, t) := e^{i\omega_0 \rho \cosh \beta} \cosh \beta [i\omega_0 f(t - \rho \cosh \beta) - f'(t - \rho \cosh \beta)], \quad \beta \in \mathbb{R}, \quad \rho \leq t.$$

La función  $w''_{d,1}$  satisface la estimación (240). En efecto, se obtiene de la estimación del tipo (242) para la función  $\frac{\partial}{\partial \rho} v_{d,1}(\rho, \theta, t)$  de (241), donde en lugar de la integración sobre  $[0, \beta_0]$  es necesario integrar sobre  $[1, \beta_0]$ .

Demostremos la estimación para  $w'_{d,1}$ . Similarmente a (219-221) reducimos éste problema a la estimación de la función

$$\tilde{w}_m(\rho, \varepsilon, t) := \int_{|\beta| \leq 1} \frac{g(\beta, t, \rho)}{\sinh[q(\beta + i\varepsilon)]} d\beta$$

Similarmente al Lema 4.7 reducimos el problema para la función

$$b(t, \rho, \varepsilon) := \int_{|\beta| \leq 1} \frac{g(\beta, t, \rho)}{\beta + i\varepsilon} d\beta.$$

Entonces, ésta función es similar a la función  $r(\rho, \varepsilon, t)$  de (225). La diferencia es que la función  $h$  en (225) se cambia por la función  $g$  de (249).

PROPOSICIÓN 4.4.

$$|b(\rho, \varepsilon, t)| \leq C, \quad \varepsilon \neq 0, \quad 0 \leq \rho \leq t$$

**Demostración.** La prueba es similar a la prueba del Teorema 4.5. Analizaremos los Lemas 4.8-4.10. La prueba del Lema 4.8 sirve para este caso ya que  $g$  admite la estimación de tipo (226):

$$|g(\beta, \rho, t) - g(0, \rho, t)| \leq C\rho, \quad 0 \leq \rho \leq t, \quad |\beta| \leq 1.$$

La prueba del Lema 4.9 también sirve ya que la función  $\bar{g} := g(t - \rho \cosh \beta) - g(t - \rho)$  admite la estimación (230). Finalmente, ya que la función  $g$  es acotada, entonces la prueba del Lema 4.10 para  $b(\rho, \varepsilon, t)$  se reduce a la estimación de la función  $A(\rho, \varepsilon, t)$  de (239). Así, la proposición y el Teorema 4.3 se demuestran para la derivada radial.

Ahora, demostremos la estimación para la derivada angular  $\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} v_{d,1}(\rho, \theta, t)$ . Consideremos la expresión (246). Similarmente al caso de la derivada radial, representemos ésta expresión como la suma de integrales de tipo (247) y (248). La integral sobre  $|\beta| \geq 1$  está acotada similarmente a la función  $w_d''(\rho, \theta, t)$ .

La estimación de la misma integral  $|\beta| \leq 1$  es trivial, ya que  $\left| \frac{\sinh \beta}{\beta + i\varepsilon} \right| \leq C, \quad |\beta| \leq 1.$  ■

Así, hemos probado completamente la estimación (240). Junto con los resultados de las Secciones 9-10, implica la estimación (17) para la función  $u_s$ . El Teorema 1.2 (ii) se demostró. ■

En la siguiente sección terminaremos la prueba del Teorema 1.2.

## 12. El Principio de Amplitud Límite

Aquí demostraremos el Principio de Amplitud Límite (33), es decir,

$$(250) \quad u(\rho, \theta, t) \sim A(\rho, \theta)e^{-i\omega_0 t}, \quad t \rightarrow \infty.$$

Consideremos la función

$$(251) \quad u(y, t) = u_{in}(y, t) + u_r(y, t) + u_d(y, t)$$

la cual es una solución del problema no estacionario (6), (8) dado por (30), con  $u_{in}$ ,  $u_r$ ,  $u_d$  dadas por (2), (10)-(12) y (212) respectivamente. Luego, las ecuaciones (2), (10)-(12) implican que para cualquier  $\rho_0 > 0$

$$(252) \quad u_{in} = A_{in}(\rho, \theta)e^{-i\omega_0 t}, \quad u_r = A_r(\rho, \theta)e^{-i\omega_0 t}, \quad t \geq \tau_0 + \rho_0, \quad \rho \leq \rho_0$$

donde

$$(253) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_{in}(\rho, \theta) := e^{i\omega_0 \rho \cos(\theta - \alpha)} \\ A_r(\rho, \theta) = \begin{cases} -e^{i\omega_0 \rho \cos(\theta - \theta_1)}, & \phi \leq \theta \leq \theta_1 \\ 0 & \theta_1 < \theta < \theta_2 \\ e^{i\omega_0 \rho \cos(\theta - \theta_2)}, & \theta_2 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \end{array} \right.$$

y  $\theta_{1,2}$  están definidos por (11). Sólo queda verificar las asintóticas de tipo (250) para la onda de difracción  $u_d(\rho, \theta, t)$  dada por (212), con el correspondiente límite de amplitud

$$(254) \quad A_d(\rho, \theta) := \frac{i}{4\Phi} \int_{\mathbf{R}} e^{i\omega_0 \rho \cosh \beta} Z_1(\beta, \theta) d\beta, \quad (\rho, \theta) \in \mathcal{Q}$$

donde  $Z_1$  está definida por (210).

**TEOREMA 4.6.** *Para cualquier  $\rho_0 > 0$  las asintóticas siguientes se cumplen*

$$u_d(\rho, \theta, t) - A_d(\rho, \theta)e^{-i\omega_0 t} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty$$

uniformemente en  $\rho \in [0, \rho_0]$  y  $\theta \in [\phi, 2\pi]$ .

**Demostración.** (212) implica que

$$(255) \quad A_d(\rho, \theta, t) := e^{i\omega_0 t} u_d(\rho, \theta, t) = \frac{i}{4\Phi} \int_{\mathbf{R}} Z_1(\beta, \theta) h(\beta, \rho, \theta) d\beta.$$

Sólo queda demostrar que

$$A_d(\rho, \theta, t) \rightarrow A_d(\rho, \theta), \quad t \rightarrow \infty$$

uniformemente con respecto a  $\rho \leq \rho_0$ . Las fórmulas (254) y (255) implican que

$$A_d(\rho, \theta, t) - A_d(\rho, \theta) = \frac{i}{4\Phi} \int_{\mathbf{R}} [Z_1(\beta, \theta) h(\beta, \rho, t) - Z_1(\beta, \theta) e^{i\omega_0 \rho \cosh \beta}] d\beta.$$

Fijamos  $\rho_0 > 0$  y  $\varepsilon > 0$ . Escojemos  $\bar{\beta} \geq 1$  tal que

$$\frac{2C_1 \Phi e^{-\frac{\pi}{2\Phi} |\bar{\beta}|}}{\pi} < \varepsilon$$

donde  $C_1$  es la constante de (157). Entonces por (210), (157) y (4)

$$(256) \quad \int_{|\beta| \geq \bar{\beta}} |Z_1(\beta, \theta)h(\beta, \rho, t) - Z_1(\beta, \theta)e^{i\omega_0\rho \cosh\beta}| < C_1 \int_{\beta \geq \bar{\beta}} e^{-\frac{\pi}{\Phi}\beta} \leq 2C_1 \frac{\Phi e^{-\frac{\pi}{\Phi}\bar{\beta}}}{\pi} < \varepsilon, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Sólo queda demostrar la convergencia a cero de la integral sobre  $|\beta| < \bar{\beta}$ . Primero,  $\cosh\beta_3(\rho, \theta) = \frac{t - \tau_0}{\rho} \geq \cosh\bar{\beta}$ , para  $t \geq \tau_0 + \rho \cosh\bar{\beta}$ , donde  $\beta_3$  está definido por (232). Esto implica que  $f(t - \rho \cos\beta) = 1$  para  $|\beta| \leq \bar{\beta}$  por (233). Luego

$$\int_{|\beta| \leq \bar{\beta}} |Z_1(\beta, \theta)h(\beta, \rho, t) - Z_1(\beta, \theta)e^{i\omega_0\rho \cosh\beta}| d\beta = 0 < \varepsilon, \quad t \geq \tau_0 + \rho_0 \cosh\bar{\beta}, \quad \rho \leq \rho_0$$

Por lo tanto, (256) implica que

$$\int_{\mathbb{R}} |Z_1(\beta, \theta)h(\beta, \rho, t) - Z_1(\beta, \theta)e^{i\omega_0\rho \cosh\beta}| d\beta < \varepsilon, \quad t \geq \tau_0 + \rho_0 \cosh\bar{\beta}, \quad \rho \leq \rho_0$$

El teorema se demostró. ■

**Demostración del Teorema 1.2 iii).** Usando el Teorema de Cauchy de Residuos, partimos el límite de amplitud  $A(\rho, \theta)$ , dada por (32), en tres sumandos, similarmente para la partición de la función  $\mathcal{S}(\rho, \theta, \omega)$  en el Lema 4.3. Así que, obtenemos

$$A(\rho, \theta) = A_{in}(\rho, \theta) + A_r(\rho, \theta) + A_d(\rho, \theta)$$

donde  $A_{in}, A_r, A_d$  son dados por (253)-(254). Aquí la representación (254) para  $A_d$  se obtiene similarmente a la derivación de (167) de la representación (212) para  $\mathcal{S}_d$ . Ahora, la afirmación iii) del Teorema 1.2 se sigue de (251), (252), y el Teorema 4.6. ■

**OBSERVACIÓN 4.6.** *La expresión (32) es un análogo de la fórmula Sommerfeld-Malyuzhinets [18]-[22]. Es conocido (ver, por ejemplo [20]) que la única solución del problema estacionario de difracción*

$$(257) \quad \begin{cases} (\Delta + \omega_0^2)A(\rho, \theta) = 0, & (\rho, \theta) \in Q \\ \partial_{y_2} A|_{Q_1} = 0 \\ A|_{Q_2} = 0 \end{cases}$$

satisface las siguientes condiciones:

1.  $A \in C(\bar{Q})$ ,  $A \in C^2(Q)$ .
2. La condición de Meixner se cumple en alguna vecindad del vértice:

$$A(\rho, \theta) = O(1), \quad \rho \rightarrow 0$$

3. El límite de amplitud  $A_d(\rho, \theta) := A - A_{in} - A_r$  de la onda de dispersión, satisface la condición de radiación de Sommerfeld ([20]), [18]-[22]).

### 13. Conclusión

En esta tesis se consideró la dispersión de una onda plana incidente  $u_{in}$  de (2) por una cuña "duro-suave". Las características de la cuña son tales que el problema que surge de la interacción de la cuña y la onda incidente  $u_{in}$  se describe por el DN-problema mixto con valores en la frontera de la ecuación de onda. Más precisamente, con la condición de Neumann digamos sobre el lado  $Q_1$  de la cuña y la condición de Dirichlet sobre el lado  $Q_2$  de la cuña. Obtenemos la solución explícita  $u(y, t)$  para el problema (6),(7) por medio de la transformada inversa de Fourier, donde  $\hat{u}(y, \omega)$  es una integral del tipo Sommerfeld. En el pico de la cuña se genera la onda de difracción  $u_d$  que es discontinua a lo largo de las direcciones críticas, mas precisamente, la solución  $u(y, t) = u_{in}(y, t) + u_r(y, t) + u_d(y, t)$  es continua. Resulta que la onda incidente y la onda reflejada se analizan facilmente, mas no asi la onda difractada que tiene mayor dificultad. Para esto, se encontró una representacion nueva y explicita para  $u_d$  (201), la cual se usa para analizar la onda difractada  $u_d$ , ya que sus discontinuidades compensan las discontinuidades de la onda reflejada y asi tenemos que la solución total  $u(y, t)$  es continua. La unicidad y existencia estan probadas en cierto espacio funcional. También se probó que el Principio de Amplitud Límite (33) se cumple.

## 14. Apéndice

**14.1. Las integrales de Cauchy tipo oscilatorio.** Consideremos la siguiente integral singular de Fresnel,

$$\psi_1(z, \varepsilon, a) := \int_{-a}^a \frac{e^{izt^2}}{t + i\varepsilon} dt, \quad \psi_2(z, \varepsilon, a) := \int_{-a}^a \frac{e^{iz \cosh t}}{t + i\varepsilon} dt$$

Hemos usado las bien conocidas estimaciones.

PROPOSICIÓN 4.5. ([21],[16])

i) La función  $\psi_1(z, \varepsilon, a)$  está uniformemente acotada:

$$|\psi_1(z, \varepsilon, a)| \leq C, \quad z \geq 0, \quad 0 \leq a \leq 1, \quad \varepsilon \neq 0$$

ii) La función  $\psi_2(z, \varepsilon, a)$  está uniformemente acotada:

$$|\psi_2(z, \varepsilon, a)| \leq C, \quad z \geq 0, \quad 0 \leq a \leq 1, \quad \varepsilon \neq 0$$

**Lema A1.** Sea  $\varepsilon > 0$ ,  $\delta = \delta(\varepsilon) := \omega_2 \sin \varepsilon$  y  $\check{V}_{1,\varepsilon}, \check{V}_{1,\varepsilon}^{+,\delta}$  son definidas por (82) y (84) respectivamente. Entonces  $\check{V}_{1,\varepsilon}^+ \subset \check{V}_{1,\varepsilon}^{+,\delta}$ .

**Demostración.** Sea  $\omega := \omega_1 + i\omega_2$ ,  $\omega_2 > 0$ ;  $\mu := \mu_1 + ia$ , donde

$$(258) \quad a := \arctan b, \quad b := \frac{\omega_1}{\omega_2} \tanh \mu_1.$$

Para (75),  $\mu \in \check{\Gamma}_1^-$ . Notemos que

$$(259) \quad \omega_1 b \sinh \mu_1 \geq 0.$$

De hecho, si  $\omega_1 > 0$  y  $\mu_1 > 0$ , entonces  $b > 0$  y si  $\mu_1 < 0$ , entonces  $b < 0$ . El caso  $\omega_1 < 0$  se analiza similarmente. Vamos a demostrar que  $\gamma(\varepsilon) = \check{\Gamma}_1^- + i\varepsilon$  está por encima de la línea  $\{\text{Im } z_1(\mu) = \delta(\varepsilon), \text{Im } \mu < \pi/2\}$ . (Ver Figura 2). Para esto es suficiente probar que  $(\text{Im } z_1(\mu_1 + i(a + \varepsilon))) > \delta$ .

(73) y (258) implica que

$$\begin{aligned} \text{Im } z_1(\mu + i(a + \varepsilon)) &= \text{Im}(-i\omega \sinh(\mu_1 + i(a + \varepsilon))) = \\ &= \frac{\sinh \varepsilon}{\sqrt{1 + b^2}} (\omega_1 b \sinh \mu_1 + \omega_2 \cosh \mu_1) \geq \delta(\varepsilon) \end{aligned}$$

por (259). Similarmente  $\gamma(\pi - \varepsilon)$  está por encima de la línea  $\{\text{Im } z_1(\mu) = \delta(\varepsilon), \text{Im } \mu > \pi/2\}$ . Por lo tanto  $\check{V}_{1,\varepsilon}^+ \subset \check{V}_{1,\varepsilon}^{+,\delta}$ . ■

## Bibliografia

- [1] A. Merzon. Well-posedness of the problem of nonstationary diffraction of Sommerfeld. Proceeding of the International Seminar "Day on Diffraction-2003". University of St.Petersburg, 2003; 151-162.
- [2] Komech AI, Mauser NJ, Merzon AE. On Sommerfeld representation and uniqueness in scattering by wedges. *Mathematical Methods in the Applied Sciences* 2005; **28**:147-183.
- [3] A.I.Komech, A.E.Merzon. Limiting Amplitude Principle in the Scattering by Wedges. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2006; 29:1147-1185
- [4] Komech AI, Merzon AE. General boundary value problems in region with corners. *Operator Theory: Adv. Appl.* 1992; **57**: 171-183.
- [5] A.I. Komech, A.E.Merzon, Relation between Cauchy data for the scattering by a wedge. Russian Journal of Mathematical Physics, vol. 14, No3, pp. 279-303, ISSN 1061-9208, Pleiades Publishing,Ltd., 2007
- [6] Komech AI. Elliptic boundary value problems on manifolds with piecewise smooth boundary. *Math. USSR Sbornik.* 1973; **21**(1): 91-135.
- [7] Komech AI. Elliptic differential equations with constant coefficients in a cone. *Moscow Univ. Math. Bull.* 1974; **29**(2): 140-145.
- [8] Komech A, Merzon A, Zhevandrov P. A method of complex characteristics for elliptic problems in angles and its applications. *American Mathematical Society Translation* 2002; **206**(2):125-159.
- [9] Malyshev V. *Random Walks, Wiener-Hopf Equations in the Quadrant of Plane, Galois Automorphisms.* Moscow University: Moscow, 1970.
- [10] Rottbrand K. Time-dependent plane wave diffraction by a half-plane: explicit solution for Rawlins' mixed initial boundary value problem. *Z.Angew. Math. Mech.* 1998; **78**(5): 321-335.
- [11] Meister E, Passow A, Rottbrand K. New results on wave diffraction by canonical obstacles. *Operator Theory: Adv. Appl.* 1999; **110**: 235-256.
- [12] Rottbrand K. Exact solution for time-dependent diffraction of plane waves by semi-infinite soft/hard wedges and half-planes. Preprint 1984 Technical University Darmstadt. 1998
- [13] Komech AI. Linear partial differential equations with constant coefficients. In Egorov YuE, Komech AI, Shubin MA. *Elements of the Modern Theory of Partial Differential Equations.* Springer: Berlin, 1999: 127-260.
- [14] Merzon AE. On Ursell's problem. *Proceedings of the Third International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation.* SIAM – INRIA, edited by Gary Cohen. 1995; 613-623.
- [15] Komech AI, Merzon AE, Zhevandrov PN. On completeness of Ursell's trapping modes. *Russian Journal of Mathematical Physics.* 1996; **4**(4): 457-485.
- [16] Fedoryuk MV. *Asymptotics: Integrals and Series.* Nauka: Moscow, 1987.
- [17] Felsen LB, Marcuvitz N. *Radiation and Scattering of Waves.* Oxford Univ Pr: Oxford, 1996.
- [18] Born M, Wolf E. *Principles of optics.* Pergamon Press: Oxford, 1968.
- [19] Clemmov PC. *The Plane Wave Spectrum Representation of Electromagnetic Fields.* Pergamon Press: Oxford, 1966.
- [20] Babich VM, Lyalinov MA, Gricurov VE. *Sommerfeld-Malyuzhinets method in diffraction problems.* S.Petersburg University: S.Petersburg, 2003.
- [21] Bleistein N. Uniform asymptotic expansion of integrals with stationary point near algebraic singularity. *Communications on Pure and Applied Mathematics* 1966; **19**:353-370.
- [22] Clemmov PC. *The Plane Wave Spectrum Representation of Electromagnetic Fields.* Pergamon Press: Oxford, 1966.