

UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN
NICOLÁS DE HIDALGO

INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

TESIS:

**Operador pseudodiferencial en semirrecta y
problema de Riemann-Hilbert**

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE DOCTOR
EN MATEMÁTICAS

PRESENTA:

MARTÍN PATRICIO ÁRCIGA ALEJANDRE

ASESORA:

DRA. ELENA I. KAIKINA

febrero de 2011

Índice general

Capítulo 1. Introducción	5
Capítulo 2. Preliminares	1
1. La transformada de Laplace	1
2. Integrales tipo Cauchy	7
3. Valores límite de integrales tipo Cauchy	14
4. Operador pseudodiferencial en semirrecta	16
5. El problema de Riemann-Hilbert	21
Capítulo 3. El problema lineal	23
1. La función de Green	23
Capítulo 4. Estimaciones a priori	31
1. Asintótica para la función de Green	31
2. Estimaciones para el operador de Green	39
Capítulo 5. El problema no-lineal	51
1. Existencia local en tiempo	51
2. Existencia global en tiempo	56
3. Representación asintótica para la solución	60
Bibliografía	63

Introducción

En la presente tesis, consideramos una ecuación pseudodiferencial con símbolo no-analítico en la semirrecta. Estudiamos la existencia local y global en tiempo y el comportamiento asintótico de soluciones, para del siguiente problema con valor inicial la semirrecta:

$$(0.1) \quad \begin{cases} u_t + \mathcal{N}(u) + \mathbb{K}u = 0, & t > 0, x > 0; \\ u(x, 0) = u_0(x), & x > 0, \end{cases}$$

donde $\mathcal{N}(u) = |u|^\sigma u$, $\sigma > 1$, y $\mathbb{K}$ es el operador pseudodiferencial definido por

$$(0.2) \quad \mathbb{K}u = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{px} \left(\lim_{\substack{z \rightarrow p \\ \operatorname{Re} z > 0}} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{1}{q-z} K(q) \widehat{u}(q, t) dq \right) dp,$$

donde $K(q) = |q|^\alpha$, $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, es el símbolo no-analítico y $\widehat{u}(p, t)$ es la transformada de Laplace para $u(x, t)$ con respecto a x .

La teoría de ecuaciones de evolución no lineales juega un papel muy importante en la física matemática contemporánea. Tales ecuaciones sirven como una base para modelos matemáticos que describen diferentes fenómenos en física moderna, biología y otras áreas de la ciencia. Como ejemplos, mencionamos los nombres de matemáticos involucrados en algunas ecuaciones famosas: Burgers, Schrödinger, Korteweg-de Vries, Klein-Gordon. Estas ecuaciones se deducen de leyes de conservación fundamentales (la energía, la masa, el momento, etcétera). Un progreso importante en el estudio de ecuaciones de evolución no lineales esta relacionado con el uso de poderosas supercomputadoras. Con las cuales, es posible llevar a cabo experimentos numéricos que han permitido descubrir nuevas leyes no lineales y efectos que analíticamente son difíciles de predecir. Además, estos estudios son útiles para formular hipótesis que sirven para encaminar estudios analíticos posteriores.

Es posible obtener propiedades de las soluciones para ecuaciones de evolución no lineales vía métodos generales del análisis funcional. Así, para una clase amplia de este tipo de ecuaciones, se han resuelto algunos problemas típicos, tales como la existencia y unicidad de soluciones clásicas y generalizadas, la existencia global en tiempo y la diferenciabilidad de soluciones. Varios efectos no lineales han sido estudiados, por ejemplo: la explosión de ondas en tiempo finito, la existencia y estabilidad de soluciones auto-similares, la existencia de grupos de simetrías, los

solitones, etcétera. En ocasiones, los resultados de la teoría no lineal pueden ser obtenidos vía la linealización del problema y aplicando la teoría de perturbaciones con respecto a un parámetro pequeño. Sin embargo, este enfoque no funciona cuando los efectos no lineales son esenciales en el problema; es decir, el comportamiento de las soluciones no está reflejado en el caso lineal correspondiente. Por lo tanto, el desarrollo de la teoría no lineal es muy importante. Actualmente, no existe un enfoque general para estudiar ecuaciones no lineales: cada ecuación tiene una estructura intrínseca individual y requiere de un conjunto especial de métodos analíticos de investigación. Por otro lado, muchos de los métodos que han sido desarrollados para ecuaciones particulares pueden ser generalizados para algunas clases de ecuaciones de evolución no lineales. En esta dirección podemos citar la teoría de funciones generalizadas. Sin embargo, las soluciones generalizadas no proporcionan características importantes del comportamiento de soluciones. Por ejemplo, el comportamiento asintótico de soluciones. Por lo tanto, es conveniente considerar soluciones clásicas o semi-clásicas.

Los métodos asintóticos juegan un papel muy importante en el estudio de las ecuaciones de evolución no lineales. Sólo para un número pequeño de ecuaciones no lineales es posible encontrar soluciones explícitas. Entonces, es muy importante tener una representación analítica aproximada de las soluciones y estimar el error correspondiente. Las fórmulas asintóticas nos permiten conocer propiedades básicas de las soluciones, tales como el crecimiento o decrecimiento en diferentes regiones, donde las soluciones son monótonas y donde oscilan, que información del dato inicial se preserve en la representación asintótica de la solución en tiempos grandes, etcétera. Es interesante estudiar la influencia del término no lineal en el comportamiento asintótico de soluciones. Por ejemplo, en comparación con el caso lineal correspondiente, las soluciones pueden oscilar rápidamente o converger a un perfil auto-similar. Es muy complicado obtener esta información vía experimentos numéricos, ya que en principio los errores computacionales incrementan su valor en tiempos grandes y ponen en duda la validez del resultado. Así, los métodos asintóticos son importantes no sólo desde el punto de vista teórico, sino que también son ampliamente usados en la práctica como complemento de los métodos numéricos. Notemos que “tiempo grande” no necesariamente significa un valor grande para el tiempo. En realidad es un tiempo finito, el cual es suficiente para que terminen todos los procesos transitorios relacionados con la perturbación inicial.

La teoría de series asintóticas es difícil incluso en el caso de ecuaciones de evolución lineales (véase [9, 45]). Además, en el caso de ecuaciones no lineales es necesario demostrar la existencia global de soluciones clásicas, así como obtener algunas estimaciones adicionales para precisar las expansiones asintóticas. Cada tipo de no-linealidad debe ser estudiada individualmente, especialmente en el caso de datos iniciales grandes. A pesar de la importancia de los métodos asintóticos relativamente existen pocos resultados para ecuaciones de evolución

no lineales. Sin embargo, en las últimas dos décadas, en un gran número de publicaciones se construyen representaciones asintóticas de soluciones para el problema de Cauchy para ecuaciones no lineales. Algunos ejemplos pueden consultarse en: [1, 3–8, 10–13, 15–18, 23, 25, 27, 28, 32–34, 38, 39, 41, 42, 50, 52–54]. En tales artículos se obtuvieron estimaciones con tiempo óptimo de decaimiento y fórmulas asintóticas de soluciones para diferentes ecuaciones locales y no-locales en el caso del problema de Cauchy. También, existen resultados con respecto al comportamiento asintótico para tiempos grandes, de soluciones para problemas con valor inicial y de frontera [47–49].

En el libro [22] se desarrolla la teoría general de ecuaciones pseudodiferenciales no-lineales sobre una semirrecta, el operador pseudodiferencial $\mathbb{K}$ se define por medio de la transformada de Laplace inversa. En ésta definición es importante que el símbolo $K(p)$ sea una función analítica en el semiplano complejo derecho. Por otro lado, el operador pseudodiferencial $\mathbb{K}$ definido en la ecuación (0.2) tiene el símbolo no-analítico $K(p) = |p|^\alpha$ y la teoría general desarrollada en el libro [22] no puede ser aplicada al problema (0.1). A la fecha, hay pocos resultados para problemas con valor inicial y de frontera que involucran operadores pseudodiferenciales con símbolo no analítico. El caso de que el símbolo $K(p)$ es una función racional, con algunos polos en el semiplano complejo derecho, fué estudiado en los artículos [19, 20], donde se propone un nuevo método para construir el operador de Green, basado en la introducción de condiciones necesarias en los puntos singulares del símbolo $K(p)$. En el artículo [21] fue considerado el problema de valor inicial y de frontera para una ecuación pseudodiferencial con símbolo no-analítico $K(p) = |p|^{\frac{1}{2}}$. Para demostrar que el problema con valor inicial y de frontera está bien planteado se implementó la teoría de funciones seccionalmente analíticas. Como el símbolo $K(p) = |p|^{\frac{1}{2}}$ no crece rápido cuando $p \rightarrow \infty$, no hay valor en la frontera para el problema correspondiente.

En la presente tesis, estudiamos un problema inicial de frontera para una ecuación pseudodiferencial con símbolo mas general $K(p) = |p|^\alpha$, $\frac{1}{2} < \alpha < 1$. Se da respuesta a la pregunta básica sobre el número de condiciones de frontera que deben fijarse para que el problema este bien planteado. Para construir el operador de Green, proponemos un nuevo método basado la teoría de ecuaciones integro-diferenciales singulares (véase [14, 21]). Una parte importante en el procedimiento consiste en resolver un problema del tipo Riemann-Hilbert: se obtiene una condición de frontera del tipo $\Omega^+(p) = W(p)\Omega^-(p) + g(p)$, donde $-i\infty < p < +i\infty$. La meta consiste en encontrar dos funciones analíticas, Ω^+ y Ω^- (una función seccionalmente analítica Ω), en los semiplanos complejos derecho e izquierdo, respectivamente; tal que la condición de frontera se satisface. Dos condiciones para resolver el problema son necesarias: Primero, la función W debe satisfacer la condición de Hölder para todo $-i\infty < p < +i\infty$; y segundo, el índice de la función W debe ser cero. En el problema que nos ocupa ambas condiciones

fallan. Para resolver esta dificultad, introducimos dos funciones auxiliares, tales que la condiciones de Hölder e índice-cero se satisfacen.

Una vez que se ha construido el operador de Green $\mathcal{G}$, se demuestran algunas estimaciones a priori en espacios $\mathbf{L}^p$ para $\mathcal{G}$, las cuales se utilizan para demostrar, vía un mapeo de contracción, los teoremas de existencia local y global en tiempo. Finalmente, se encuentra una representación asintótica para la solución.

Los resultados de la presente tesis se encuentran publicados en el Special Issue: *Nonlocal Boundary Value Problems*, del Journal: *Boundary Value Problems* [2].

Preliminares

La transformada de Laplace constituye una herramienta fundamental en la teoría de problemas con valores iniciales y de frontera. Aquí, serán escritos únicamente los resultados necesarios para la presente tesis. Más detalles a cerca de la transformada de Laplace se pueden encontrar en [46].

1. La transformada de Laplace

1.1. Definición y propiedades principales.

DEFINICIÓN 1. Decimos que una función $f(t)$ pertenece a la clase de funciones $\mathcal{T}_a$ si se satisfacen las siguientes condiciones:

1. $f(t) \equiv 0$ para $t < 0$.
2. La integral

$$\int_0^{+\infty} e^{-p_0 t} f(t) dt$$

converge para $\text{Rep}_0 = a$.

DEFINICIÓN 2. La transformada de Laplace de la función $f(t)$ se define mediante la integral impropia

$$(1.1) \quad \hat{f}(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt.$$

TEOREMA 1. Si $f(t) \in \mathcal{T}_a$, entonces la integral (1.1) converge para $\text{Rep} > a$. Además, para todo $x_0 > a$, la integral (1.1) converge uniformemente para $\text{Rep} \geq x_0 > a$.

Demostración. Sean

$$\phi(t) = e^{-p_0 t} f(t) \quad \text{y} \quad F(t) = - \int_t^{+\infty} \phi(\tau) d\tau.$$

Notemos que $F'(t) = \phi(t)$. Por hipótesis,

$$\int_0^{+\infty} e^{-p_0 t} f(t) dt < +\infty,$$

entonces para todo $\epsilon > 0$ existe T_0 , tal que $|F(t)| < \epsilon$, para $t \geq T_0$. Ahora, consideremos la integral

$$\int_{T_1}^{T_2} e^{-pt} f(t) dt,$$

donde $T_2 > T_1$. Tenemos que

$$\int_{T_1}^{T_2} e^{-pt} f(t) dt = \int_{T_1}^{T_2} e^{-(p-p_0)t} \phi(t) dt = \int_{T_1}^{T_2} e^{-(p-p_0)t} F'(t) dt.$$

Usando integración por partes en la última integral obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{T_1}^{T_2} e^{-(p-p_0)t} F'(t) dt &= e^{-(p-p_0)T_2} F(T_2) - e^{-(p-p_0)T_1} F(T_1) \\ &\quad + (p-p_0) \int_{T_1}^{T_2} e^{-(p-p_0)t} F(t) dt. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para $T_1, T_2 > T_0$ y $\operatorname{Re}(p-p_0) > 0$,

$$\begin{aligned} \left| \int_{T_1}^{T_2} e^{-pt} f(t) dt \right| &\leq (e^{-\operatorname{Re}(p-p_0)T_2} + e^{-\operatorname{Re}(p-p_0)T_1}) \epsilon \\ &\quad + \epsilon |p-p_0| \int_{T_1}^{T_2} e^{-\operatorname{Re}(p-p_0)t} dt \\ &\leq 2e^{-\operatorname{Re}(p-p_0)T_0} \epsilon \\ &\quad + \epsilon \frac{|p-p_0|}{\operatorname{Re}(p-p_0)} (-e^{-\operatorname{Re}(p-p_0)T_2} + e^{-\operatorname{Re}(p-p_0)T_1}) \\ &\leq \left(2 + \frac{|p-p_0|}{\operatorname{Re}(p-p_0)} \right) e^{-\operatorname{Re}(p-p_0)T_0} \epsilon. \end{aligned}$$

Así, por el criterio de Cauchy sobre la convergencia de integrales impropias¹, la integral $\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt$ es convergente para $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} p_0 = a$. En la misma forma, es posible demostrar que $\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt$ es uniformemente convergente para $\operatorname{Re} p \geq \operatorname{Re} p_1 > \operatorname{Re} p_0$. ■

El teorema anterior implica que la transformada de Laplace $\hat{f}(p)$ está definida para $\operatorname{Re} p > a$. Además, hemos obtenido que

$$|\hat{f}(p)| \rightarrow 0, \quad \text{cuando } |p| \rightarrow \infty.$$

¹Sea Y un conjunto y supongamos que, para cada $y \in Y$ fijo, la función $f(x, y)$ está definida sobre el intervalo $[a, b]$, $-\infty < a < b \leq +\infty$, y toma valores numéricos. Supongamos que para cualquier $c \in (a, b)$ la función f es integrable sobre $[a, c]$. Entonces, la integral impropia

$$\int_a^b f(x, y) dx, \quad y \in Y,$$

es convergente si, y sólo si, para $\epsilon > 0$ y $y \in Y$, existe $\eta \in (a, b)$ tal que, para todo η_1 y η_2 que satisfacen la condición $\eta < \eta_1, \eta_2 < b$, se cumple

$$\left| \int_{\eta_1}^{\eta_2} f(x, y) dx \right| < \epsilon, \quad y \in Y.$$

TEOREMA 2. Si $f(t) \in \mathcal{T}_a$, entonces la transformada de Laplace $\widehat{f}(p)$ es una función analítica para $\text{Rep} > a$.

Demostración. El Teorema 1 implica que la integral

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

converge para $\text{Rep} > a$. Representamos la integral anterior en la forma

$$\widehat{f}(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{-pt} f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(p),$$

donde $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_i < t_{i+1} < \dots < +\infty$. Tomando en cuenta que

$$\sum_{n=N}^{\infty} f_n(p) = \int_{t_N}^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt,$$

obtenemos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(p)$ converge uniformemente en el dominio $\text{Rep} \geq x_0 > a$. Finalmente, como todas las funciones

$$f_n(p) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{-pt} f(t) dt$$

son analíticas, el Teorema de Weierstrass² implica que la función $\widehat{f}(p)$ es analítica en el dominio $\text{Rep} > a$. ■

Ahora escribimos la propiedad principal de la transformada de Laplace.

TEOREMA 3. Si $f(t) \in \mathcal{T}_a$, y $\partial^n f(t) \in \mathcal{T}_a$, entonces

$$\widehat{\partial^n f}(p) = p^n \left(\widehat{f}(p) - \sum_{j=1}^n \partial^{j-1} f(0+) p^{-j} \right),$$

para $\text{Rep} > a$.

Demostración. Integrando por partes se obtiene el resultado. ■

1.2. La transformada de Laplace inversa.

TEOREMA 4. Si $f(t) \in \mathcal{T}_a$ y

$$\widehat{f}(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt,$$

²Una serie de funciones holomorfas $\sum f_\nu$ en D la cual converge sobre compactos en D tiene un límite holomorfo f en D . Además, para cada $k \in \mathbb{N}$ la serie $\sum f_\nu^{(k)}$ converge sobre compactos en D a $f^{(k)}$:

$$f^{(k)}(z) = \sum f_\nu^{(k)}(z), \quad z \in D.$$

entonces para $\sigma > a$

$$(1.2) \quad f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt} \widehat{f}(p) dp.$$

La integral (1.2) es la transformada de Laplace inversa o la integral de Mellin.

Demostración. Sea $\phi(t) = e^{-\sigma t} f(t)$, $\sigma > a$. Representemos a $\phi(t)$ como una transformada de Fourier,

$$\phi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi(t-\theta)} \phi(\theta) d\theta.$$

Como $f(\theta) = 0$, para $\theta < 0$, obtenemos

$$e^{-\sigma t} f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi t} d\xi \int_0^{+\infty} e^{-(\sigma+i\xi)\theta} f(\theta) d\theta.$$

Finalmente, tomando $p = \sigma + i\xi$ se sigue

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt} \widehat{f}(p) dp.$$

Así, el Teorema 4 ha sido demostrado. ■

Ahora, demostramos las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de la transformada de Laplace inversa para la función $F(p)$. Primero, definimos la clase de funciones $\mathcal{H}_a(p)$.

DEFINICIÓN 3. Decimos que una función $F(p)$ pertenece a la clase de funciones $\mathcal{H}_a(p)$ si se satisfacen las siguientes condiciones:

1. $F(p)$ es analítica en el dominio $\text{Rep} > a$.
2. Para cada $\epsilon > 0$ y $\sigma_0 > a$ existen constantes $C_\epsilon(\sigma_0) \geq 0$ y $m = m(\sigma_0) \geq 0$ tales que

$$|F(p)| \leq C_\epsilon(\sigma_0) e^{\epsilon\sigma} (1 + |p|^m), \quad \sigma > \sigma_0.$$

3. La norma $\|F(\sigma + i \cdot)\|_{\mathbf{L}^1} < +\infty$ para todo $\sigma > a$.

TEOREMA 5. Para que la función $f(t) \in \mathcal{T}_a$ es necesario y suficiente que la transformada de Laplace $F(p) \in \mathcal{H}_a(p)$. Además, la función original $f(t)$ puede ser reconstruida via $F(p)$ por la integral de Mellin

$$(1.3) \quad f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt} F(p) dp.$$

Demostración.

Necesidad. Sea $f(t) \in \mathcal{T}_a$, entonces $F(p)$ es analítica para $\text{Rep} > a$ y para cada $\sigma > \sigma_0 > a$, donde $p = \sigma + iw$, tenemos

$$|F(p)| = \left| \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt \right| < C.$$

Así, hemos obtenido que $F(p) \in \mathcal{H}_a(p)$.

Suficiencia. Primero, consideremos el caso

$$(1.4) \quad |F(p)| \leq \frac{C_\epsilon(\sigma_0)e^{\epsilon\sigma}}{|p-a|^\alpha}, \quad \alpha > 1.$$

Entonces, la integral

$$(1.5) \quad f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt} F(p) dp, \quad \sigma > a,$$

converge uniformemente con respecto a t y $f(t)$ es continua con respecto a $t \in (-\infty, \infty)$. Demostremos que $f(t)$ no depende de $\sigma > a$. Sean $\sigma_2 > \sigma_1 > a$. El Teorema de Cauchy implica que

$$(1.6) \quad \int_{\Gamma(d)} e^{pt} F(p) dp = 0,$$

donde

$$\begin{aligned} \Gamma(d) = \{p \in \mathbb{C} : p \in [\sigma_1 - id, \sigma_2 - id] \cup [\sigma_2 - id, \sigma_2 + id] \\ \cup [\sigma_2 + id, \sigma_1 + id] \cup [\sigma_1 + id, \sigma_1 - id]\}. \end{aligned}$$

De la desigualdad (1.4) obtenemos

$$\begin{aligned} \left| \int_{\sigma_1+id}^{\sigma_2+id} e^{pt} F(p) dp \right| &\leq \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} e^{\sigma t} |F(\sigma + id)| d\sigma \\ &\leq C_\epsilon(\sigma_1) \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{e^{\sigma(\epsilon+t)}}{[(\sigma-a)^2 + d^2]^{\frac{\alpha}{2}}} d\sigma \rightarrow 0, \end{aligned}$$

cuando $d \rightarrow +\infty$. Entonces, tomando el límite $d \rightarrow +\infty$ en (1.6) se sigue

$$\int_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty} e^{pt} F(p) dp = \int_{\sigma_2-i\infty}^{\sigma_2+i\infty} e^{pt} F(p) dp.$$

Ahora, escribimos (1.5) en la forma

$$(1.7) \quad f(t) = \frac{e^{\sigma t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iwt} F(\sigma + iw) dw, \quad \sigma > a.$$

Usando (1.4) y tomando $\sigma > \sigma_0 > a$, obtenemos

$$\begin{aligned} |f(t)| &\leq \frac{e^{\sigma t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\sigma + iw)| dw \\ &\leq \frac{C_\epsilon(\sigma_0)e^{\sigma(t+\epsilon)}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dw}{[(\sigma-a)^2 + w^2]^{\frac{\alpha}{2}}} \\ &\leq C_\epsilon(\sigma_0)e^{\sigma(t+\epsilon)}. \end{aligned}$$

Sea $t < -\epsilon$, $\epsilon > 0$. Tomando el límite $\sigma \rightarrow +\infty$ obtenemos $f(t) = 0$, y como $\epsilon > 0$ es arbitrario, se sigue que $f(t) = 0$ para todo $t < 0$. La ecuación (1.7) implica que

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt.$$

Por lo tanto, $f(t) \in \mathcal{T}_a$ y $\widehat{f}(p) = F(p)$, $\sigma > a$. Ahora, consideremos el caso general. Definimos

$$F_1(p) = \frac{F(p)}{|p-b|^k}$$

donde $b \leq a$, $\sigma_0 > a$ y el entero $k > m(\sigma_0) + 1$. Notemos que $F_1(p)$ es analítica para $\text{Rep} = \sigma > a$ y

$$\begin{aligned} |F_1(p)| &\leq \frac{C_\epsilon(\sigma_0)e^{\epsilon\sigma}(1+|p|^m)}{|p-a|^k} \\ &\leq \frac{C_\epsilon(\sigma_0)e^{\epsilon\sigma}(1+|p|^m)}{|p-a|^{k-m}|p-a|^m} < \frac{C_\epsilon(\sigma_0)e^{\epsilon\sigma}}{|p-a|^{k-m}}, \end{aligned}$$

para todo $\sigma > \sigma_0$, siempre que $k-m > 1$. Hemos probado que existe una función $f_1(t) \in \mathcal{T}_a$, tal que

$$(1.8) \quad f_1(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt} F_1(p) dp, \quad \sigma > \sigma_0.$$

Como $\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} |F(\sigma+iw)| dw < +\infty$, para $\sigma > a$, obtenemos

$$\begin{aligned} f(t) &= \left(\frac{d}{dt} - b \right)^k f_1(t) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{d}{dt} - b \right)^k \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt} F_1(p) dp \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left(\frac{d}{dt} - b \right)^k e^{pt} F_1(p) dp \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} (p-b)^k e^{pt} F_1(p) dp \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt} F(p) dp. \end{aligned}$$

Así, tenemos que $f(t) \in \mathcal{T}_a$ y $\widehat{f}(p) = F(p)$, cuando $\sigma > a$. Como

$$f(t) = \left(\frac{d}{dt} - b \right)^k f_1(t),$$

via (1.8) obtenemos la representación (1.3). El Teorema 5 ha sido demostrado. ■

2. Integrales tipo Cauchy

2.1. Definición y ejemplos.

DEFINICIÓN 4. Una **curva lisa** es una curva simple de clase $\mathbb{C}^1$ y sin puntos recurrentes (cúspides).

Sea L una curva lisa y cerrada en el plano $\mathbb{C}_z$. El dominio dentro de la curva L se llama dominio interior y se denota mediante D^+ , mientras que el dominio complementario a $D^+ + L$ se llama dominio exterior y se denota por D^- . La dirección positiva de la curva L es usualmente aquella para la cual D^+ está a la izquierda.

DEFINICIÓN 5. Sea L una curva lisa y cerrada o abierta en el plano $\mathbb{C}_\tau$ y $\phi(\tau)$ una función continua. Entonces, la integral

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\phi(\tau)}{\tau - z} d\tau,$$

se llama integral tipo Cauchy. La función $\phi(\tau)$ es la densidad y $\frac{1}{\tau - z}$ el kernel.

TEOREMA 6. Sean L una curva lisa (cerrada o abierta) de longitud finita, $f(\tau, z)$ una función continua con respecto a $\tau \in L$ y analítica en z en algún dominio para todo τ . Entonces, la función

$$F(z) = \int_L f(\tau, z) d\tau$$

es analítica en z .

Demostración. Primero, notemos que

$$\begin{aligned} & \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - \int_L f_z(\tau, z) d\tau \\ &= \int_L \left[\frac{f(\tau, z + \Delta z) - f(\tau, z)}{\Delta z} - f_z(\tau, z) \right] d\tau. \end{aligned}$$

Luego, usando la analiticidad de f en z obtenemos

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left| \frac{f(\tau, z + \Delta z) - f(\tau, z)}{\Delta z} - f_z(\tau, z) \right| = 0.$$

Finalmente, usamos que la longitud de L es finita para obtener una estimación de la integral y pasando al límite

$$F'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = \int_L f_z(\tau, z) d\tau.$$

Por lo tanto, $F(z)$ es analítica. ■

Sea L una curva cerrada. Por definición, la función $\Phi(z)$ se parte en dos funciones independientes: $\Phi^+(z)$ definida en D^+ , y $\Phi^-(z)$ definida en D^- . Las funciones $\Phi^\pm(z)$ no son en general continuación analítica una de la otra. Una función analítica $\Phi(z)$ definida en dos dominios $D^\pm$ complementarios, por dos expresiones independientes $\Phi^\pm(z)$, se llama seccionalmente analítica.

PROPOSICIÓN 1. Sea L una curva lisa (cerrada o abierta). Sea $\varphi(\tau)$ una función continua. Entonces, la función

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau$$

se anula en infinito.

Demostración. Expandimos $\Phi(z)$ en una vecindad del infinito con respecto a la serie de potencias $\frac{1}{z}$. Primero, observemos que

$$\frac{1}{\tau - z} = -\frac{1}{z} - \frac{\tau}{z^2} - \dots - \frac{\tau^{n-1}}{z^n} - \dots.$$

Multiplicando por $\frac{1}{2\pi i} \varphi(\tau)$ e integrando término a término, obtenemos

$$\Phi^-(z) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k z^{-k},$$

donde

$$C_k = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \tau^{k-1} \varphi(\tau) d\tau.$$

En la serie, la potencia cero no aparece. Por lo tanto, $\Phi^-(\infty) = 0$. ■

EJEMPLO 1. Sean $L = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, $D^+ = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $D^- = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ y

$$\varphi(\tau) = \frac{2}{\tau(\tau - 2)}.$$

Entonces,

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{1}{\tau - 2} \frac{d\tau}{\tau - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{1}{\tau} \frac{d\tau}{\tau - z}.$$

Notemos que $\frac{1}{z-2}$ es analítica en D^+ , $\frac{1}{z}$ es analítica en D^- y $\frac{1}{z} \rightarrow 0$ cuando $z \rightarrow \infty$. Además, el teorema de Cauchy implica

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{1}{\tau - 2} \frac{d\tau}{\tau - z} = \begin{cases} \frac{1}{z-2}, & z \in D^+ \\ 0, & z \in D^- \end{cases}$$

y

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{1}{\tau} \frac{d\tau}{\tau - z} = \begin{cases} 0, & z \in D^+ \\ -\frac{1}{z}, & z \in D^-. \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{z-2} \quad y \quad \Phi^-(z) = \frac{1}{z}.$$

2.2. La condición de Hölder. Sea L una curva lisa y $\varphi(t)$ una función de posición sobre L .

DEFINICIÓN 6. Decimos que la función $\varphi(t)$ satisface la condición de Hölder sobre L si, para todo $\tau, t \in L$,

$$|\varphi(\tau) - \varphi(t)| < A|\tau - t|^\lambda,$$

donde $A > 0$ y $0 < \lambda \leq 1$.

2.3. Valor principal de integrales tipo Cauchy. Supongamos que $|f(x)| \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow c$, donde $c \in (a, b)$ y f es acotada en $(a, c - \epsilon) \cup (c + \epsilon, b)$ para cada $\epsilon > 0$.

DEFINICIÓN 7. Decimos que el límite

$$\lim_{\substack{\epsilon_1 \rightarrow 0 \\ \epsilon_2 \rightarrow 0}} \left[\int_a^{c-\epsilon_1} f(x)dx + \int_{c+\epsilon_2}^b f(x)dx \right],$$

si existe, es la integral impropia de la función no acotada f en el intervalo (a, b) .

Notemos que la integral impropia existe si se satisface la desigualdad

$$|f(x)| < \frac{M}{|x - c|^\alpha}, \quad \alpha < 1.$$

Ahora, consideremos la integral

$$\int_a^b \frac{dx}{x - c}, \quad a < c < b.$$

Usando la definición de integral impropia obtenemos

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{dx}{x - c} &= \lim_{\substack{\epsilon_1 \rightarrow 0 \\ \epsilon_2 \rightarrow 0}} \left[-\int_a^{c-\epsilon_1} \frac{dx}{c - x} + \int_{c+\epsilon_2}^b \frac{dx}{x - c} \right] \\ &= \ln \frac{b - c}{c - a} + \lim_{\substack{\epsilon_1 \rightarrow 0 \\ \epsilon_2 \rightarrow 0}} \ln \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}. \end{aligned}$$

Es claro que el límite en la última expresión depende de la manera en la cual ϵ_1 y ϵ_2 tienden a cero. Luego, la integral impropia no existe. Sin embargo, podemos darle significado asumiendo que

$$\lim_{\substack{\epsilon_1 \rightarrow 0 \\ \epsilon_2 \rightarrow 0}} \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} = 1$$

En particular, tomando $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon$ el límite anterior se cumple.

DEFINICIÓN 8. El valor principal de Cauchy de la integral singular

$$\int_a^b \frac{dx}{x - c}, \quad a < c < b,$$

se define mediante

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_a^{c-\epsilon} \frac{dx}{x-c} + \int_{c+\epsilon}^b \frac{dx}{x-c} \right] = \ln \frac{b-c}{c-a}.$$

Ahora, consideremos la integral

$$\int_a^b \frac{\varphi(x)}{x-c} dx, \quad a < c < b,$$

donde $\varphi(x)$ satisface la condición de Hölder en el intervalo (a, b) . Primero, notemos que

$$\int_a^b \frac{\varphi(x)}{x-c} dx = \int_a^b \frac{\varphi(x) - \varphi(c)}{x-c} dx + \varphi(c) \int_a^b \frac{dx}{x-c}.$$

Luego, la condición de Hölder implica

$$\left| \frac{\varphi(x) - \varphi(c)}{x-c} \right| < \frac{A}{|x-c|^{1-\lambda}}.$$

De aquí, obtenemos la existencia de la integral impropia

$$\int_a^b \frac{\varphi(x) - \varphi(c)}{x-c} dx.$$

Por lo tanto, la integral singular

$$\int_a^b \frac{\varphi(x)}{x-c} dx,$$

donde $\varphi(x)$ satisface la condición de Hölder, existe en el sentido de valor principal de Cauchy, y se cumple la ecuación

$$\int_a^b \frac{\varphi(x)}{x-c} dx = \int_a^b \frac{\varphi(x) - \varphi(c)}{x-c} dx + \varphi(c) \ln \frac{b-c}{c-a}.$$

2.4. Valor principal de integrales singulares curvilíneas. Sea L una curva lisa. Sean τ y t coordenadas complejas de L . Consideremos la integral singular curvilínea

$$\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t} d\tau.$$

Sea $C_\rho = \{z \in \mathbb{C} : |z-t| = \rho\}$, donde ρ es tal que $L \cap C_\rho$ sólo contiene dos elementos, t_1 y t_2 . Sea $l = L - D_\rho$, donde $D_\rho = \{z \in \mathbb{C} : |z-t| < \rho\}$.

DEFINICIÓN 9. *El límite de la integral*

$$\int_{L-l} \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t} d\tau$$

cuando $\rho \rightarrow 0$ es llamado el valor principal de la integral singular

$$\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t} d\tau.$$

Primero, estudiemos el caso $\varphi(\tau) \equiv 1$. Asumimos que $\ln(\tau - t)$ son los valores sobre L de la función analítica $\ln(\tau - z)$. Para que $\ln(\tau - z)$ sea una función univaluada, hacemos un corte a lo largo de una curva que conecta los puntos t e ∞ , a la derecha de la curva L . Notemos que

$$\begin{aligned} \int_{L-l} \frac{1}{\tau - t} d\tau &= \ln(\tau - t) \Big|_a^{t_1} + \ln(\tau - t) \Big|_{t_2}^b \\ &= \ln \frac{b - t}{a - t} + \ln \frac{t_1 - t}{t_2 - t}, \end{aligned}$$

donde a y b son los puntos inicial y final, respectivamente, de la curva L . Por definición,

$$\ln \frac{t_1 - t}{t_2 - t} = \ln \left| \frac{t_1 - t}{t_2 - t} \right| + i[\arg(t_1 - t) - \arg(t_2 - t)]$$

y por hipótesis $|t_1 - t| = |t_2 - t|$. Entonces,

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \ln \frac{t_1 - t}{t_2 - t} = i\pi.$$

Por lo tanto,

$$\int_L \frac{1}{\tau - t} d\tau = \ln \frac{b - t}{a - t} + i\pi.$$

Notemos que la condición para t_1 y t_2 de estar en el mismo círculo, $|t_1 - t| = |t_2 - t|$, es un caso particular de la condición:

$$\lim_{\substack{t_1 \rightarrow t \\ t_2 \rightarrow t}} \left| \frac{t_1 - t}{t_2 - t} \right| = 1.$$

Seleccionando la rama de la función logaritmo de manera que $\ln(-1) = i\pi$, obtenemos que la integral anterior puede ser escrita en la forma

$$\int_L \frac{1}{\tau - t} d\tau = \ln \frac{b - t}{t - a}.$$

Además, si la curva es cerrada, $a = b$, obtenemos

$$\int_L \frac{1}{\tau - t} d\tau = i\pi.$$

Ahora, consideremos la integral

$$\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau,$$

donde $\varphi(\tau)$ satisface la condición de Hölder. Representamos la integral anterior en la forma

$$\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = \int_L \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t} d\tau + \varphi(t) \int_L \frac{1}{\tau - t} d\tau.$$

Entonces, de la discusión precedente obtenemos que la integral

$$\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau$$

existe en el sentido de valor principal de Cauchy y puede ser representada por

$$\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = \int_L \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t} d\tau + \varphi(t) \left[\ln \frac{b - t}{a - t} + i\pi \right],$$

o bien, si $\ln(-1) = i\pi$,

$$\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = \int_L \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t} d\tau + \varphi(t) \ln \frac{b - t}{t - a}.$$

En particular, para una curva cerrada ($a = b$), obtenemos

$$\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = \int_L \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t} d\tau + i\pi\varphi(t).$$

2.5. Propiedades de integrales singulares. La regla del cambio de variable se satisface para integrales singulares.

TEOREMA 7. Si la función $\tau = \alpha(\zeta)$ es una biyección de L en L' de clase $\mathbf{C}^1$ y $\alpha'(\zeta) \neq 0$, para toda ζ . Entonces,

$$\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = \int_{L'} \frac{\varphi[\alpha(\zeta)]\alpha'(\zeta)}{\alpha(\zeta) - \alpha(\xi)} d\zeta,$$

donde

$$t = \alpha(\xi).$$

Demostración. Cortamos el arco l' de la curva L' , usando un círculo centrado en $\xi \in L'$ de radio suficientemente pequeño. Sean ξ_1 y ξ_2 los puntos inicial y final, respectivamente, del arco l' , que corresponden a los puntos t_1 y t_2 en la curva L , i.e., $\alpha(t_1) = \xi_1$ y $\alpha(t_2) = \xi_2$. Definimos el valor principal de la integral transformada,

$$\int_{L'} \frac{\varphi[\alpha(\zeta)]\alpha'(\zeta)}{\alpha(\zeta) - \alpha(\xi)} d\zeta = \lim_{\substack{\xi_1 \rightarrow \xi \\ \xi_2 \rightarrow \xi}} \int_{L' - l'} \frac{\varphi[\alpha(\zeta)]\alpha'(\zeta)}{\alpha(\zeta) - \alpha(\xi)} d\zeta.$$

Hacemos la sustitución $\zeta = \beta(\tau)$, donde $\beta(\tau)$ es la función inversa de $\alpha(\zeta)$, la cual existe y es única, ya que por hipótesis se satisfacen las condiciones del teorema de la función inversa,

$$\lim_{\substack{\xi_1 \rightarrow \xi \\ \xi_2 \rightarrow \xi}} \int_{L' - l'} \frac{\varphi[\alpha(\zeta)]\alpha'(\zeta)}{\alpha(\zeta) - \alpha(\xi)} d\zeta = \lim_{\substack{t_1 \rightarrow t \\ t_2 \rightarrow t}} \int_{L - l} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau.$$

Notemos que los puntos t_1 y t_2 no están situados de manera simétrica con respecto a $t \in L$; sin embargo, se satisface la condición

$$\lim_{\substack{t_1 \rightarrow t \\ t_2 \rightarrow t}} \left| \frac{t_1 - t}{t_2 - t} \right| = 1.$$

En efecto, expandiendo la función $\alpha(\zeta)$ en serie de Taylor en el punto ξ , obtenemos

$$\alpha(\zeta) = \alpha(\xi) + \alpha'(\xi)(\zeta - \xi) + \varepsilon(\zeta, \xi)(\zeta - \xi).$$

La continuidad de $\alpha'(\zeta)$ implica que $\varepsilon(\zeta, \xi) \rightarrow 0$, cuando $\zeta \rightarrow \xi$. Sustituyendo $\zeta = \xi_1$ y $\zeta = \xi_2$ en la ecuación anterior, y recordando que $t = \alpha(\xi)$, obtenemos

$$t_1 = t + \alpha'(\xi)(\xi_1 - \xi) + \varepsilon_1(\xi_1, \xi)(\xi_1 - \xi)$$

$$t_2 = t + \alpha'(\xi)(\xi_2 - \xi) + \varepsilon_2(\xi_2, \xi)(\xi_2 - \xi),$$

donde $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0$, cuando $\xi_1, \xi_2 \rightarrow \xi$. Entonces,

$$\left| \frac{t_1 - t}{t_2 - t} \right| = \left| \frac{\alpha'(\xi) + \varepsilon_1}{\alpha'(\xi) + \varepsilon_2} \right| \left| \frac{\xi_1 - \xi}{\xi_2 - \xi} \right|.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{\substack{t_1 \rightarrow t \\ t_2 \rightarrow t}} \left| \frac{t_1 - t}{t_2 - t} \right| = \lim_{\substack{\xi_1 \rightarrow \xi \\ \xi_2 \rightarrow \xi}} \left| \frac{\xi_1 - \xi}{\xi_2 - \xi} \right| = 1.$$

■

Ahora, escribiremos la fórmula de integración por partes para integrales singulares.

TEOREMA 8. Si $\phi(\tau)$ es una función de clase $\mathbf{C}^1$ y $t \in L$ no coincide con el punto inicial ó final de L , entonces

$$\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = \varphi(\tau) \ln(\tau - t) \Big|_a^b - \int_L \varphi'(\tau) \ln(\tau - t) d\tau \pm i\pi\varphi(t).$$

El signo (+) en el último término del lado derecho corresponde al caso en el que, para hacer univaluada a la función $\ln(\tau - t)$, seleccionamos el corte a la derecha de la curva L , el signo (−) corresponde al caso opuesto.

Demostración. Usando la definición de la integral impropia obtenemos

$$\begin{aligned} & \int_L \varphi'(\tau) \ln(\tau - t) d\tau \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \left[\int_a^{t_1} \varphi'(\tau) \ln(\tau - t) d\tau + \int_{t_2}^b \varphi'(\tau) \ln(\tau - t) d\tau \right]. \end{aligned}$$

La fórmula de integración por partes para integrales ordinarias implica

$$\begin{aligned} & \int_a^{t_1} \varphi'(\tau) \ln(\tau - t) d\tau + \int_{t_2}^b \varphi'(\tau) \ln(\tau - t) d\tau \\ &= \varphi(\tau) \ln(\tau - t) \Big|_a^{t_1} + \varphi(\tau) \ln(\tau - t) \Big|_{t_2}^b \\ & \quad - \int_a^{t_1} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau - \int_{t_2}^b \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau. \end{aligned}$$

Pasando al límite, $\rho \rightarrow 0$, el primer término permanece inalterado; los dos últimos equivalen a la integral

$$- \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau,$$

en el sentido de valor principal. Ahora, observemos que

$$\varphi(\tau) \ln(\tau - t) \Big|_{t_2}^{t_1} = \varphi(t) \ln(\tau - t) \Big|_{t_2}^{t_1} + [\varphi(\tau) - \varphi(t)] \ln(\tau - t) \Big|_{t_2}^{t_1}.$$

La función $\varphi(\tau)$ es de clase $\mathbf{C}^1$, entonces satisface la condición de Lipschitz. Luego, usando que $x \ln x \rightarrow 0$, cuando $x \rightarrow 0$, obtenemos

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} [\varphi(\tau) - \varphi(t)] \ln(\tau - t) \Big|_{t_2}^{t_1} = 0$$

Finalmente, si el corte se hace a la derecha (+), o a la izquierda (-), de L , obtenemos

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \ln(\tau - t) \Big|_{t_2}^{t_1} = \pm i\pi.$$

■

Notemos que, para una curva cerrada ($a = b$), la fórmula de integración por partes se simplifica:

$$\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = +i\pi\varphi(t) - \int_L \varphi'(\tau) \ln(\tau - t) d\tau.$$

3. Valores límite de integrales tipo Cauchy

3.1. El lema básico.

LEMA 1. Si la densidad $\varphi(\tau)$ satisface la condición de Hölder y $t \in L$ no coincide con el punto inicial ó final de la curva L , entonces la función

$$\Psi(z) = \int_L \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - z} d\tau$$

es continua en t , i.e.,

$$\lim_{z \rightarrow t} \Psi(z) = \int_L \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t} d\tau = \Psi(t).$$

3.2. Las fórmulas de Sokhotski-Plemelj. Consideremos la integral

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau,$$

donde L es una curva lisa y la función $\varphi(\tau)$ satisface la condición de Hölder sobre L . Supongamos, también, que la curva L es cerrada. En el caso de que L sea abierta podemos completarla, con alguna curva arbitraria, para que ésta sea cerrada, definiendo $\varphi(\tau) = 0$ sobre la curva adicional. Investigaremos los valores límite de $\Phi(z)$ en un punto $t \in L$. Definimos

$$\Phi^\pm(t) = \lim_{z \rightarrow t^\pm} \Phi(z).$$

Aquí, $z \rightarrow t^\pm$ significa que $z \rightarrow t$ y $z \in D^\pm$. Análogamente,

$$\Psi^\pm(t) = \lim_{z \rightarrow t^\pm} \Psi(z),$$

donde

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - z} d\tau.$$

Recordemos que

$$\int_L \frac{d\tau}{\tau - z} = \begin{cases} 2\pi i, & z \in D^+ \\ 0, & z \in D^- \\ \pi i, & z \in L \end{cases}.$$

De aquí,

$$\begin{aligned} \Psi^+(t) &= \lim_{z \rightarrow t^+} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau - \frac{\varphi(t)}{2\pi i} \int_L \frac{d\tau}{\tau - z} \right] \\ &= \Phi^+(t) - \varphi(t), \\ \Psi^-(t) &= \lim_{z \rightarrow t^-} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau - \frac{\varphi(t)}{2\pi i} \int_L \frac{d\tau}{\tau - z} \right] \\ &= \Phi^-(t), \\ \Psi(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau - \frac{\varphi(t)}{2\pi i} \int_L \frac{d\tau}{\tau - t} \\ &= \Phi(t) - \frac{1}{2} \varphi(t). \end{aligned}$$

La continuidad de la función $\Psi(z)$ en $t \in L$, lema básico, implica que

$$\Phi^+(t) - \varphi(t) = \Phi^-(t) = \Phi(t) - \frac{1}{2} \varphi(t).$$

Por lo tanto, hemos obtenido la fórmulas

$$\Phi^\pm(t) = \pm \frac{1}{2} \varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau,$$

donde la integral singular

$$\Phi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau$$

se entiende en el sentido de valor principal. Finalmente, resumimos los resultados obtenidos en el siguiente teorema:

TEOREMA 9. *Sea L una curva lisa (cerrada o abierta) y $\varphi(\tau)$ una función que satisface la condición de Hölder sobre L . Entonces, la integral tipo Cauchy*

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau$$

tiene los valores límite

$$\Phi^\pm(t) = \pm \frac{1}{2} \varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau,$$

siempre que t no coincida con los puntos inicial ó final de la curva L , donde la integral singular

$$\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau$$

se entiende en el sentido de valor principal.

OBSERVACIÓN 1. Restando y sumando las fórmulas para $\Phi^\pm(t)$ obtenemos

$$\begin{aligned}\Phi^+(t) - \Phi^-(t) &= \varphi(t), \\ \Phi^+(t) + \Phi^-(t) &= \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau.\end{aligned}$$

4. Operador pseudodiferencial en semirrecta

La meta principal de la presente sección consiste en definir un operador pseudodiferencial, con símbolo no-analítico, sobre una semirrecta; así como enunciar algunas de sus propiedades básicas. Iniciamos con algunos antecedentes.

4.1. La ecuación integral de Abel.

DEFINICIÓN 10. Una función $f(x)$ es absolutamente continua sobre un intervalo I , si para todo $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que para cualquier conjunto finito de intervalos disjuntos $[a_k, b_k] \subset I$, $k = 1, \dots, n$, tales que $\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta$, se cumple la desigualdad $\sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < \epsilon$. El espacio de éstas funciones se denota por $AC(I)$.

TEOREMA 10. La ecuación de Abel

$$(4.1) \quad \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{\varphi(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha}} = f(x), \quad x > 0,$$

donde Γ es la función Gamma, $0 < \alpha < 1$, es soluble en $\mathbf{L}^1(0, b)$ si, y sólo si,

$$f_{1-\alpha}(x) \in AC([0, b]) \quad y \quad f_{1-\alpha}(0) = 0,$$

donde

$$f_{1-\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^\alpha}.$$

Si las condiciones anteriores se satisfacen, la ecuación (4.1) tiene una única solución dada por

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^\alpha}.$$

DEFINICIÓN 11. Sea $f(x)$ una función definida en el intervalo $[0, b]$. La derivada de Riemann-Liouville de orden α , $0 < \alpha < 1$, se define en la siguiente forma:

$$(4.2) \quad \mathcal{D}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^\alpha}.$$

OBSERVACIÓN 2. Si $\alpha \geq 1$, es natural extender la definición anterior mediante

$$\mathcal{D}^\alpha f(x) := \left(\frac{d}{dx} \right)^{[\alpha]} D^{\{\alpha\}} f(x),$$

donde $\alpha = [\alpha] + \{\alpha\}$. Aquí, $[\alpha]$ y $\{\alpha\}$ significan la parte entera y la parte fraccionaria de α , respectivamente.

4.2. El potencial de Riesz sobre la semirrecta. Definimos los siguientes potenciales sobre la semirrecta:

$$(4.3) \quad I^\alpha \varphi = \frac{1}{2\Gamma(\alpha) \cos(\alpha\pi/2)} \int_0^\infty \frac{\varphi(t) dt}{|x-t|^{1-\alpha}}, \quad x > 0,$$

$$(4.4) \quad H^\alpha \varphi = \frac{1}{2\Gamma(\alpha) \sin(\alpha\pi/2)} \int_0^\infty \frac{\operatorname{sgn}(x-t)}{|x-t|^{1-\alpha}} \varphi(t) dt, \quad x > 0.$$

Las siguientes relaciones se cumplen:

$$I^\alpha \varphi = H^\alpha S_{(1+\alpha)/2} \varphi = S_{-(1+\alpha)/2} H^\alpha \varphi$$

y

$$H^\alpha \varphi = -I^\alpha S_{\alpha/2} \varphi = -S_{-\alpha/2} I^\alpha \varphi,$$

donde

$$S_\gamma \varphi = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left(\frac{t}{x} \right)^\gamma \frac{\varphi(t) dt}{t-x}, \quad x > 0.$$

4.3. El potencial de Riesz en $\mathbf{R}^n$. Ahora, daremos las definiciones y algunas propiedades de integrales de Riesz fraccionarias multidimensionales (véase [37], Secciones 25 y 26). Las operaciones de integración fraccionaria y diferenciación fraccionaria en el espacio Euclidiano n -dimensional $\mathbf{R}^n$, $n \in \mathbf{N}$, son potencias fraccionarias $(-\Delta)^{-\alpha/2}$ del operador de Laplace. Para $\alpha \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ y funciones *suficientemente buenas* $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$, tales operadores fraccionarios están definidos en términos de la transformada de Fourier por

$$(4.5) \quad (-\Delta)^{-\alpha/2} = \mathcal{F}^{-1} |x|^{-\alpha} \mathcal{F} f = \begin{cases} I^\alpha f, & \operatorname{Re} \alpha > 0, \\ \mathbf{D}^{-\alpha} f, & \operatorname{Re} \alpha < 0. \end{cases}$$

Las operaciones I^α y $\mathbf{D}^\alpha$ definidas en (4.5) para $\operatorname{Re} \alpha > 0$ son llamadas la *integración fraccionaria de Riesz* y la *diferenciación fraccionaria de Riesz*, respectivamente.

La integración fraccionaria de Riesz I^α se lleva a cabo utilizando el *potencial de Riesz* definido mediante la convolución

$$(4.6) \quad (I^\alpha f)(x) = \int_{\mathbf{R}^n} k_\alpha(x-t) f(t) dt, \quad \operatorname{Re} \alpha > 0.$$

Aquí, la función $k_\alpha(x)$ está dada por

$$k_\alpha(x) := \frac{1}{\gamma_n(\alpha)} \begin{cases} |x|^{\alpha-n}, & \alpha - n \neq 0, 2, 4, \dots, \\ |x|^{\alpha-n} \ln \left(\frac{1}{|x|} \right), & \alpha - n = 0, 2, 4, \dots, \end{cases}$$

y la constante $\gamma_n(\alpha)$ tiene la forma

$$\gamma_n(\alpha) := \begin{cases} 2^\alpha \pi^{n/2} \Gamma(\alpha/2) [\Gamma((n-\alpha)/2)]^{-1}, & \alpha - n \neq 0, 2, 4, \dots, \\ (-1)^{(n-\alpha)/2} 2^{\alpha-1} \pi^{n/2} \Gamma(\alpha/2) \Gamma(1 + (\alpha-n)/2), & \alpha - n = 0, 2, 4, \dots. \end{cases}$$

Ahora, definimos un espacio de funciones de prueba apropiado para los operadores de diferenciación e integración fraccionarios.

DEFINICIÓN 12. *El espacio de Lizorkin de funciones de prueba Φ se define en la siguiente forma*

$$\Phi = \left\{ \phi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n) : \int_{\mathbf{R}^n} t^k \phi(t) dt = 0, \quad k \in \mathbf{N}^n \right\}.$$

Recordamos la relación entre la transformada de Fourier y la convolución

TEOREMA 11. *Supongamos que se cumple alguno de los siguientes casos: $h(t) \in \mathbf{L}^1(\mathbf{R}^n)$ y $\varphi(t) \in \mathbf{L}^1(\mathbf{R}^n)$, o $h(t) \in \mathbf{L}^1(\mathbf{R}^n)$ y $\varphi(t) \in \mathbf{L}^2(\mathbf{R}^n)$, o $h(t) \in \mathbf{L}^2(\mathbf{R}^n)$ y $\varphi(t) \in \mathbf{L}^2(\mathbf{R}^n)$. Entonces, la transformada de Fourier de la convolución $h * \varphi$ esta dada por la fórmula:*

$$(\mathcal{F}(h * \varphi))(x) = (\mathcal{F}h)(x)(\mathcal{F}\varphi)(x).$$

El teorema anterior implica la siguiente propiedad

PROPOSICIÓN 2. *Si $\operatorname{Re} \alpha > 0$, entonces la transformada de Fourier del potencial de Riesz (4.6) esta dada por*

$$(\mathcal{F}I^\alpha f)(x) = \frac{1}{|x|^\alpha} (\mathcal{F}f)(x).$$

Esta fórmula se cumple para una función f en el espacio de Lizorkin Φ .

COROLARIO 1. *Si $\operatorname{Re} \alpha > 2$, entonces la siguiente fórmula se cumple:*

$$\Delta I^\alpha f = -I^{\alpha-2} f, \quad \operatorname{Re} \alpha > 2, \quad f \in \Phi.$$

Para funciones $f \in \Phi$, la propiedad de semigrupo también se cumple.

PROPOSICIÓN 3. *El espacio de Lizorkin Φ es invariante con respecto al potencial de Riesz I^α , $I^\alpha(\Phi) = \Phi$. Además,*

$$I^\alpha I^\beta f = I^{\alpha+\beta} f, \quad \operatorname{Re} \alpha, \operatorname{Re} \beta > 0, \quad f \in \Phi.$$

Cuando $\alpha - n \neq 0, 2, 4, \dots$, el potencial de Riesz toma la forma:

$$(4.7) \quad (I^\alpha f)(x) = \frac{1}{\gamma_n(\alpha)} \int_{\mathbf{R}^n} \frac{f(t) dt}{|x-t|^{n-\alpha}}, \quad \operatorname{Re} \alpha > 0, \quad \alpha - n \neq 0, 2, 4, \dots.$$

Cuando $\alpha > 0$, la siguiente proposición se cumple.

PROPOSICIÓN 4. *Si $0 < \alpha < n$ y $1 < p < n/\alpha$, entonces el potencial de Riesz $(I^\alpha f)(x)$ esta definido para $f \in \mathbf{L}^p(\mathbf{R}^n)$.*

El siguiente teorema, conocido como *teorema de Sobolev*, es una generalización del teorema de Hardy-Littlewood.

TEOREMA 12. Sea $\alpha > 0$, $1 \leq p \leq \infty$ y $1 \leq q \leq \infty$. The operator $I^\alpha : \mathbf{L}^p(\mathbf{R}^n) \rightarrow \mathbf{L}^q(\mathbf{R}^n)$ es acotado si, y sólo si,

$$0 < \alpha < n, \quad 1 < p < \frac{n}{\alpha} \quad y \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}.$$

Ahora, damos una generalización del teorema anterior para espacios L^p pesados:

$$(4.8) \quad L^{p,\gamma}(\mathbf{R}^n) := \left\{ f : \|f\|_{p,\gamma} = \left(\int_{\mathbf{R}^n} |x|^\gamma |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty \right\}.$$

TEOREMA 13. Sea $\alpha > 0$, $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$, y $\gamma, \mu \in \mathbf{R}$ tales que

$$(4.9) \quad \alpha p - n < \gamma < n(p-1), \quad \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n} \leq \frac{1}{q} \leq \frac{1}{p} \quad y \quad \frac{\mu + n}{q} = \frac{\gamma + n}{p} - \alpha.$$

Entonces, el operador $I^\alpha : \mathbf{L}^{p,\gamma}(\mathbf{R}^n) \rightarrow \mathbf{L}^{q,\mu}(\mathbf{R}^n)$ es acotado:

$$(4.10) \quad \left(\int_{\mathbf{R}^n} |x|^\gamma |I^\alpha f(x)|^q \right)^{1/q} \leq C \left(\int_{\mathbf{R}^n} |x|^\gamma |f(x)|^p \right)^{1/p},$$

donde la constante $C > 0$ depende de α, n, p, q, γ y μ .

Para $\alpha > 0$, la derivada de Riesz fraccionaria $\mathbf{D}^\alpha$ en (4.5) se realiza en la forma de una integral hipersingular definida por

$$(4.11) \quad (\mathbf{D}^\alpha y)(x) := \frac{1}{d_n(l, \alpha)} \int_{\mathbf{R}^n} \frac{(\Delta_t^l y)(x)}{|t|^{n+\alpha}} dt, \quad l > \alpha.$$

Aquí, $(\Delta_t^l y)(x)$ es una diferencia finita de orden l de una función $y(x)$ con paso vectorial $t \in \mathbf{R}^n$ y centrada en el punto $x \in \mathbf{R}^n$:

$$(\Delta_t^l y)(x) = \sum_{k=0}^l (-1)^k \binom{l}{k} y(x - kt),$$

donde $x, t \in \mathbf{R}$, mientras que $d_n(l, \alpha)$ es una constante definida por

$$(4.12) \quad d_n(l, \alpha) = \frac{2^{-\alpha} \pi^{1-n/2}}{\Gamma(1 + \frac{\alpha}{2}) \Gamma(\frac{n+\alpha}{2}) \sin(\frac{\alpha\pi}{2})} A_l(\alpha),$$

donde

$$(4.13) \quad A_l(\alpha) = \sum_{k=0}^l (-1)^{k-1} \binom{l}{k} k^\alpha.$$

Note que la integral hipersingular $(\mathbf{D}^\alpha y)(x)$ no depende de la selección de l , ($l > \alpha$). Tal construcción es llamada la *derivada fraccionaria de Riesz* de orden $\alpha > 0$ en el sentido de que

$$(4.14) \quad (\mathcal{F} \mathbf{D}^\alpha y)(x) = |x|^\alpha (\mathcal{F} y)(x), \quad y > 0,$$

para funciones *suficientemente buenas* $y(x)$. En particular, ésta relación es válida para funciones f en el espacio de Lizorkin Φ . La ecuación (4.14) también se cumple para

funciones diferenciables $y(x)$. La siguiente propiedad se cumple (véase Samko et al. [37], Lema 25.3)

PROPOSICIÓN 5. *Si $y(x)$ pertenece al espacio $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, entonces la transformada de Fourier de $(\mathbf{D}^\alpha y)(x)$ esta dada por*

$$(4.15) \quad (\mathcal{F}\mathbf{D}^\alpha y)(x) = |x|^\alpha (\mathcal{F}y)(x), \quad y > 0,$$

Las condiciones para la existencia de $(\mathbf{D}^\alpha f)(x)$ están dadas por el siguiente lema (véase Samko et al. [37], sección 26.2)

LEMA 2. *Sean $\alpha > 0$ y $[\alpha]$ la parte entera de α . También sea $y(x)$ una función acotada junto con todas sus derivadas $(\mathbf{D}^k y)(x)$, $|k| = [\alpha] + 1$. Entonces la integral hipersingular $(\mathbf{D}^\alpha f)(x)$ en (4.11) es absolutamente convergente. Si $l > 2[\alpha/2]$, entonces ésta integral es sólo condicionalmente convergente.*

La derivada fraccionaria de Riesz (4.11) es un operador inverso al potencial de Riesz (4.6).

PROPOSICIÓN 6. *La fórmula*

$$(4.16) \quad \mathbf{D}^\alpha I^\alpha f = f, \quad \alpha > 0.$$

se cumple para funciones f suficientemente buenas; en particular, para $f \in \Phi$.

Además, la inversión (4.16) también se cumple para el potencial de Riesz (4.6) en el contexto de espacios $\mathbf{L}^p$: $f(x) \in \mathbf{L}^p(\mathbf{R}^n)$ para $1 \leq p < n/\alpha$. Aquí, la derivada fraccionaria de Riesz $\mathbf{D}^\alpha$ se entiende condicionalmente convergente en el siguiente sentido

$$(4.17) \quad \mathbf{D}^\alpha y = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \mathbf{D}_\epsilon^\alpha y,$$

donde $(\mathbf{D}_\epsilon^\alpha y)$ es la *integral hipersingular truncada* definida por

$$(4.18) \quad (\mathbf{D}_\epsilon^\alpha y)(x) := \frac{1}{d_n(l, \alpha)} \int_{|t| > \epsilon} \frac{(\Delta_t^l y)(x)}{|t|^{n+\alpha}} dt, \quad l > \alpha; \quad \alpha, \epsilon > 0,$$

y el límite se toma en la norma del espacio $L^p(\mathbf{R}^n)$.

El siguiente resultado se cumple (ver Samko et al. [37], Teorema 26.3).

TEOREMA 14. *Sea $0 < \alpha < n$ and let $y = I^\alpha f$ con $f(x) \in \mathbf{L}^p(\mathbf{R}^n)$, $1 \leq p < n/\alpha$. Entonces,*

$$(4.19) \quad f(x) = (\mathbf{D}^\alpha y)(x),$$

donde $(\mathbf{D}^\alpha y)(x)$ se entiende en el sentido (4.17), con el límite tomado en la norma del espacio $\mathbf{L}^p(\mathbf{R}^n)$.

COROLARIO 2. *Si $0 < \alpha < n$ y $f(x) \in \mathbf{L}^p(\mathbf{R}^n)$, $1 \leq p < n/\alpha$, entonces*

$$f(x) = (\mathbf{D}^\alpha I^\alpha f)(x),$$

donde $(\mathbf{D}^\alpha I^\alpha f)(x)$ se entiende en el sentido de (4.17), y

$$(\mathbf{D}^\alpha I^\alpha f)(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} (\mathbf{D}_\epsilon^\alpha I^\alpha f)(x),$$

con el límite tomado en la norma del espacio $L^p(\mathbf{R}^n)$.

5. El problema de Riemann-Hilbert

En esta sección consideraremos un problema con valores en la frontera $i\mathbf{R}^*$ para funciones analíticas, a saber, problema de Riemann. Primero, describiremos el concepto de índice de una función, el cual será de gran valor como una herramienta auxiliar.

5.1. El índice. Consideremos el conjunto de funciones

$$\mathbf{G} = \{G \in \mathbf{C}^0(i\mathbf{R}^*, \mathbf{C}) : \forall t, G(t) \neq 0, \text{ y } G(\pm i\infty) = A \in \mathbf{C}\},$$

donde $i\mathbf{R}^* = i\mathbf{R} \cup \{\pm i\infty\}$.

DEFINICIÓN 13. El índice de $G \in \mathbf{G}$ se define mediante la integral de Stieltjes

$$(5.1) \quad \text{Ind } G = \frac{1}{2\pi} \int_{-i\infty}^{i\infty} d \arg G(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} d \ln G(t).$$

OBSERVACIÓN 3. Como una consecuencia directa de la definición se sigue que

1. Si $G \in \mathbf{G}$, entonces $\text{Ind } G \in \mathbf{Z}$.
2. Si $G_1, G_2 \in \mathbf{G}$, entonces

$$\text{Ind } G_1 G_2 = \text{Ind } G_1 + \text{Ind } G_2 \quad \text{y} \quad \text{Ind } \frac{G_1}{G_2} = \text{Ind } G_1 - \text{Ind } G_2.$$

3. Si $G \in \mathbf{G} \cap \mathbf{C}^1(i\mathbf{R}^*, \mathbf{C})$, entonces

$$(5.2) \quad \text{Ind } G = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{G'(t)}{G(t)} dt.$$

4. Si $G(t)$ es el valor en la frontera $i\mathbf{R}^*$ de una función analítica en el semiplano derecho o izquierdo, entonces su índice es igual al número de ceros en el semiplano derecho o izquierdo, respectivamente, tomados con signo negativo.
5. Si la función $G(z)$ es analítica en el semiplano izquierdo excepto en un número finito de puntos donde podría tener polos, entonces el índice de

$$G^-(t) = \lim_{\substack{z \rightarrow t \\ \text{Re } z < 0}} G(z),$$

donde $t \in i\mathbf{R}^*$, es la diferencia entre el número de ceros y el número de polos de $G(z)$.

En la observación anterior los ceros y polos deben ser contados con sus respectivas multiplicidades.

Notemos que para $G(t) \in \mathbf{G}$, la curva $\sigma : \mathbf{R}^* \rightarrow \mathbf{C}$, definida por $\sigma(s) = G(is) = \xi(s) + i\eta(s)$, donde ξ y η son coordenadas cartesianas, es cerrada. Entonces, usando que

$$d \arg G(t) = d \arctan \frac{\eta(s)}{\xi(s)},$$

obtenemos

$$(5.3) \quad \text{Ind } G(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \frac{\xi d\eta - \eta d\xi}{\xi^2 + \eta^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\xi(s)\eta'(s) - \eta(s)\xi'(s)}{\xi^2(s) + \eta^2(s)} ds.$$

5.2. Teoremas auxiliares. Ahora, enunciaremos algunos teoremas de la teoría de funciones de variable compleja que usaremos posteriormente.

TEOREMA 15. (*Continuación analítica*) Supongamos que dos dominios D_1 y D_2 tienen frontera común lisa L ; en los dominios D_1 y D_2 dos funciones analíticas $f_1(z)$ y $f_2(z)$ están dadas. Asumimos que cuando un punto z tiende a la curva L ambas funciones tienden a valores límite, los cuales son continuos sobre la curva L e iguales. Bajo estas condiciones las funciones $f_1(z)$ y $f_2(z)$ constituyen la continuación analítica una de la otra.

TEOREMA 16. (*Liouville*) Supongamos que la función $f(z)$ es analítica en todo el plano complejo, excepto en los puntos $a_0 = \infty$, a_k ($k = 1, \dots, n$), donde tiene polos, y supongamos que las partes principales de las expansiones de la función $f(z)$ en las vecindades de los polos tienen la forma:

- $G_0(z) = c_1^0 z + \dots + c_{n_0}^0 z^{n_0}$, en el punto a_0 ;
- $G_k \left(\frac{1}{z-a_k} \right) = \frac{c_1^k}{z-a_k} + \dots + \frac{c_{m_k}^k}{(z-a_k)^{m_k}}$.

Entonces la función $f(z)$ es una función racional y se representa mediante la ecuación

$$f(z) = C + G_0(z) + \sum_{k=1}^n G_k \left(\frac{1}{z-a_k} \right).$$

En particular, si la única singularidad de la función $f(z)$ es un polo de orden m en infinito, entonces $f(z)$ es un polinomio de grado m :

$$f(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_m z^m.$$

5.3. Formulación del Problema. Denotamos a los semiplanos derecho e izquierdo mediante D^- y D^+ , respectivamente. Sean $G(t)$ y $g(t)$ dos funciones definidas sobre $i\mathbf{R}^*$ que satisfacen la condición de Hölder, y $G(t)$ no se anula. Se requiere encontrar dos funciones³: $\Omega^-(z)$, analítica en D^- , y $\Omega^+(z)$, analítica en D^+ , las cuales satisfacen sobre $i\mathbf{R}^*$ alguna de las siguientes condiciones de frontera:

- $\Omega^+(t) = G(t)\Omega^-(t)$, problema homogéneo;
- $\Omega^+(t) = G(t)\Omega^-(t) + g(t)$, problema no homogéneo.

Llamaremos a la función $G(t)$ el coeficiente del problema de Riemann y a la función $g(t)$ su término libre.

³O bien, una función seccionalmente analítica.

Capítulo 3

El problema lineal

En este capítulo construiremos la función de Green asociada al siguiente problema lineal sobre una semirrecta con valor inicial en la frontera,

$$(0.4) \quad \begin{cases} u_t + |\partial_x|^\alpha u = 0, & t > 0, \ x > 0; \\ u(x, 0) = u_0(x), & x > 0, \end{cases}$$

donde $|\partial_x|^\alpha$ es el operador diferencial módulo-fraccionario definido por

$$|\partial_x|^\alpha u(x, t) = \theta(x) \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{px} |p|^\alpha \hat{u}(p, t) dp.$$

Aquí, $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$, la función $\hat{u}(p, t)$ es la transformada de Laplace de $u(x, t)$ con respecto a x ,

$$\hat{u}(p, t) = \mathcal{L}_{x \rightarrow p}\{u(x, t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-px} u(x, t) dx,$$

y $\theta(x)$ es la función de Heaviside,

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

1. La función de Green

Definimos el operador integral $\mathcal{G}$ mediante

$$\mathcal{G}(t)\phi = \int_0^{+\infty} G(x, y, t) \phi(y) dy,$$

donde la función de Green $G(x, y, t)$ se define por

$$(1.1) \quad G(x, y, t) = -\frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{-i\infty}^{i\infty} d\xi e^{\xi t} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{px} \frac{Y^+(p, \xi)}{K(p) + \xi} Z^-(p, \xi, y) dp,$$

$$Z^-(p, \xi, y) = \lim_{\substack{z \rightarrow p \\ \text{Re } z > 0}} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{1}{q - z} \frac{1}{Y^+(q, \xi)} e^{-qy} dq.$$

En las ecuaciones anteriores

$$Y^\pm(p, \xi) = e^{\Gamma^\pm(p, \xi)} w^\pm(p),$$

donde

$$\Gamma^\pm(p, \xi) = \lim_{\substack{z \rightarrow p \\ \pm \text{Re } z < 0}} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{1}{q - z} \ln \left\{ \left(\frac{K(q) + \xi}{K_1(q) + \xi} \right) \frac{w^-(q)}{w^+(q)} \right\} dq,$$

y

$$w^\pm(p) = \frac{p^{\frac{\alpha}{2}}}{(p \mp z_0)^{\frac{\alpha}{2}}}, \quad z_0 \in \mathbb{R}^+.$$

Aquí, $K(p) = |p|^\alpha$, $K_1(p) = p^\alpha$ y $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$.

PROPOSICIÓN 7. *Para toda $u_0(x) \in \mathbf{L}^1(\mathbf{R}^+) \cup \mathbf{L}^{1,\mu}(\mathbf{R}^+) \cup \mathbf{L}^\infty(\mathbf{R}^+)$ existe una solución única $u(x, t)$ para el problema con valor inicial en la frontera (0.4), la cual tiene representación*

$$(1.2) \quad u = \mathcal{G}(t)u_0.$$

Demostración. Con la finalidad de obtener una representación integral para soluciones del problema (0.4) supondremos que existe una solución $u(x, t)$, la cual satisface

$$u(x, t) = 0, \quad \text{para todo } x < 0.$$

Definimos el operador $\mathbb{P}$,

$$\mathbb{P}_{q \rightarrow z} \{\phi(q)\} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{1}{q - z} \phi(q) dq,$$

donde $\text{Re } z \neq 0$. Usando la transformada de Laplace se obtiene

$$(1.3) \quad \mathcal{L}_{x \rightarrow q} \{|\partial_x|^\alpha u(x, t)\} = \mathbb{P}_{p \rightarrow q} \{K(p)\widehat{u}(p, t)\},$$

donde $K(p) = |p|^\alpha$. En efecto, el teorema de Fubini implica

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{x \rightarrow q} \{|\partial_x|^\alpha u(x, t)\} &= \int_0^{+\infty} e^{-qx} |\partial_x|^\alpha u(x, t) dx \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{+\infty} dx e^{-qx} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{px} |p|^\alpha \widehat{u}(p, t) dp \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} dp |p|^\alpha \widehat{u}(p, t) \int_0^{+\infty} e^{(p-q)x} dx \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{1}{p - q} |p|^\alpha \widehat{u}(p, t) dp \\ &= \mathbb{P}_{p \rightarrow q} \{K(p)\widehat{u}(p, t)\}. \end{aligned}$$

Como la función $\widehat{u}(p, t)$ es analítica para todo p tal que $\text{Re } p > 0$, usando la fórmula integral de Cauchy obtenemos

$$(1.4) \quad \mathbb{P}_{p \rightarrow q} \{\widehat{u}(p, t)\} = \widehat{u}(q, t).$$

Aplicando la transformada de Laplace con respecto a x al problema (0.4) y usando las ecuaciones (1.3) y (1.4) obtenemos

$$(1.5) \quad \begin{cases} \mathbb{P}_{p \rightarrow q} \{\widehat{u}_t(p, t) + K(p)\widehat{u}(p, t)\} = 0, & t > 0; \\ \widehat{u}(p, 0) = \widehat{u}_0(p). \end{cases}$$

Ahora, escribimos (1.5) en la forma

$$(1.6) \quad \begin{cases} \widehat{u}_t(p, t) + K(p)\widehat{u}(p, t) = \Phi(p, t); \\ \widehat{u}(p, 0) = \widehat{u}_0(p), \end{cases}$$

donde $\Phi(p, t)$ es una función tal que

$$\mathbb{P}_{p \rightarrow q} \{ \Phi(p, t) \} = 0, \quad \text{Re } p > 0,$$

y

$$|\Phi(p, t)| \leq C|p|^{\alpha-1}, \quad |p| > 1.$$

Aplicando la transformada de Laplace con respecto a t al problema (1.6) se obtiene

$$\begin{cases} \xi \widehat{\widehat{u}}(p, \xi) - \widehat{u}(p, 0) + K(p)\widehat{\widehat{u}}(p, \xi) = \widehat{\Phi}(p, \xi); \\ \widehat{\widehat{u}}(p, 0) = \widehat{u}_0(p), \end{cases}$$

o bien,

$$(1.7) \quad \widehat{\widehat{u}}(p, \xi) = \frac{1}{K(p) + \xi} \left(\widehat{u}_0(p) + \widehat{\Phi}(p, \xi) \right),$$

donde $\text{Re } p > 0$ y $\text{Re } \xi > 0$. Aquí, $\widehat{\widehat{u}}(p, \xi)$ y $\widehat{\Phi}(p, \xi)$ son las transformadas de Laplace con respecto a t de $\widehat{u}(p, t)$ y $\Phi(p, t)$, respectivamente.

Con la finalidad de obtener una fórmula integral para la solución del problema que nos ocupa, es necesario conocer a la función $\Phi(p, t)$. Para encontrarla usaremos la condición de analiticidad de la función $\widehat{\widehat{u}}(p, \xi)$ para $\text{Re } p > 0$ y $\text{Re } \xi > 0$. Primero, extendemos $\widehat{\widehat{u}}(p, \xi)$ sobre $\text{Re } p = 0$. La ecuación (1.4) y la fórmula de Sokhotski-Plemelj implican que para $\text{Re } p = 0$ se satisface

$$\begin{aligned} \widehat{\widehat{u}}(p, \xi) &= \lim_{\substack{z \rightarrow p \\ \text{Re } z > 0}} \mathbb{P}_{q \rightarrow z} \{ \widehat{\widehat{u}}(q, \xi) \} \\ &= - \lim_{\substack{z \rightarrow p \\ \text{Re } z > 0}} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{1}{q - z} \widehat{\widehat{u}}(q, \xi) dq \\ &= - \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{1}{q - p} \widehat{\widehat{u}}(q, \xi) dq + \frac{1}{2} \widehat{\widehat{u}}(p, \xi). \end{aligned}$$

Entonces,

$$(1.8) \quad \widehat{\widehat{u}}(p, \xi) = - \frac{1}{\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{1}{q - p} \widehat{\widehat{u}}(q, \xi) dq.$$

De la ecuación (1.7) se sigue que (1.8) es equivalente a

$$(1.9) \quad \Theta^+(p, \xi) = -\Lambda^+(p, \xi),$$

donde

$$(1.10) \quad \Theta(z, \xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{1}{q - z} \frac{1}{K(q) + \xi} \widehat{\Phi}(q, \xi) dq$$

y

$$(1.11) \quad \Lambda(z, \xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{1}{q-z} \frac{1}{K(q)+\xi} \widehat{u}_0(q) dq.$$

Definimos

$$(1.12) \quad \Omega(z, \xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{1}{q-z} \Psi(q, \xi) dq,$$

donde

$$\Psi(q, \xi) = \frac{K(p)}{K(p)+\xi} \widehat{\Phi}(p, \xi).$$

Notemos que para $\text{Re } z > 0$,

$$\begin{aligned} \Omega(z, \xi) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{1}{q-z} \widehat{\Phi}(q, \xi) dq \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{1}{q-z} \frac{\xi}{K(q)+\xi} \widehat{\Phi}(q, \xi) dq \\ &= -\mathbb{P}_{q \rightarrow z} \left\{ \widehat{\Phi}(q, \xi) \right\} - \xi \Theta(z, \xi) \\ &= -\xi \Theta(z, \xi). \end{aligned}$$

Entonces,

$$(1.13) \quad \Omega^-(p, \xi) = -\xi \Theta^-(p, \xi).$$

Observemos que las definiciones de Θ y Ω implican

$$\begin{aligned} \Psi(p, \xi) &= K(p) [\Theta^+(p, \xi) - \Theta^-(p, \xi)] \\ &= \Omega^+(p, \xi) - \Omega^-(p, \xi). \end{aligned}$$

Sustituyendo (1.9) y (1.13) en la ecuación anterior obtenemos

$$K(p) \left[-\Lambda^+(p, \xi) + \frac{1}{\xi} \Omega^-(p, \xi) \right] = \Omega^+(p, \xi) - \Omega^-(p, \xi),$$

o bien, para $\text{Re } p = 0$,

$$(1.14) \quad \Omega^+(p, \xi) = \frac{K(p)+\xi}{\xi} \Omega^-(p, \xi) - K(p) \Lambda^+(p, \xi).$$

La ecuación (1.14) corresponde a la condición de frontera de un problema del tipo Riemann-Hilbert no-homogéneo, en el que buscamos dos funciones $\Omega^+(z, \xi)$ y $\Omega^-(z, \xi)$, analíticas con respecto a z , en los semiplanos izquierdo ($\text{Re } z < 0$) y derecho ($\text{Re } z > 0$), respectivamente. Para encontrar la solución, definimos

$$(1.15) \quad \phi(p, \xi) = \left(\frac{K(p)+\xi}{K_1(p)+\xi} \right) \frac{w^-(p)}{w^+(p)},$$

donde $K(p) = |p|^\alpha$, $K_1(p) = p^\alpha$, $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$ y

$$w^\pm(p) = \frac{p^{\frac{\alpha}{2}}}{(p \mp z_0)^{\frac{\alpha}{2}}}, \quad z_0 \in \mathbb{R}^+.$$

Notemos que $\phi(p, \cdot)$ satisface la condición de Hölder y se cumple que el índice de $\phi(p, \cdot)$ es igual a cero. Entonces, ϕ admite la representación

$$(1.16) \quad \phi(p, \xi) = \frac{X^+(p, \xi)}{X^-(p, \xi)},$$

donde

$$X^\pm(p, \xi) = \lim_{\substack{z \rightarrow p \\ \pm \operatorname{Re} z < 0}} X(z, \xi), \quad X(z, \xi) = e^{\Gamma(z, \xi)},$$

y

$$\Gamma(z, \xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{1}{q - z} \ln \{\phi(q, \xi)\} dq.$$

Luego, definiendo

$$Y^\pm(p, \xi) = e^{\Gamma^\pm(z, \xi)} w^\pm(p),$$

de (1.15) y (1.16) se sigue que

$$(1.17) \quad \frac{Y^+(p, \xi)}{Y^-(p, \xi)} = \frac{K(p) + \xi}{K_1(p) + \xi}.$$

De aquí,

$$\frac{K(p) + \xi}{\xi} = \frac{Y^+(p, \xi)}{Y^-(p, \xi)} \left(\frac{K_1(p) + \xi}{\xi} \right).$$

Sustituyendo la ecuación anterior en (1.14) se obtiene

$$(1.18) \quad \frac{\Omega^+(p, \xi)}{Y^+(p, \xi)} = \left(\frac{K_1(p) + \xi}{\xi} \right) \frac{\Omega^-(p, \xi)}{Y^-(p, \xi)} - \frac{1}{Y^+(p, \xi)} K(p) \Lambda^+(p, \xi).$$

Por otro lado, la fórmula de Sokhotski-Plemelj y (1.11) implican

$$\Lambda^+(p, \xi) - \Lambda^-(p, \xi) = \frac{1}{K(p) + \xi} \widehat{u}_0(p).$$

Luego

$$(1.19) \quad (K(p) + \xi) \Lambda^+(p, \xi) = (K(p) + \xi) \Lambda^-(p, \xi) + \widehat{u}_0(p).$$

Sustituyendo

$$K(p) + \xi = \frac{Y^+(p, \xi)}{Y^-(p, \xi)} (K_1(p) + \xi)$$

en el lado derecho de la ecuación (1.19) se obtiene

$$(K(p) + \xi) \Lambda^+(p, \xi) = \frac{Y^+(p, \xi)}{Y^-(p, \xi)} (K_1(p) + \xi) \Lambda^-(p, \xi) + \widehat{u}_0(p).$$

La ecuación anterior implica

$$\frac{1}{Y^+} K(p) \Lambda^+ = \frac{1}{Y^-} (K_1(p) + \xi) \Lambda^- + \frac{1}{Y^+} (\widehat{u}_0(p) - \xi \Lambda^+)$$

Ahora, sustituimos la ecuación anterior en (1.18),

$$\frac{\Omega^+}{Y^+} = \left(\frac{K_1(p) + \xi}{\xi} \right) \frac{\Omega^-}{Y^-} - \frac{1}{Y^-} (K_1(p) + \xi) \Lambda^- - \frac{1}{Y^+} (\widehat{u}_0(p) - \xi \Lambda^+).$$

De aquí,

$$(1.20) \quad \frac{\Omega^+ - \xi \Lambda^+}{Y^+} = \left(\frac{K_1(p) + \xi}{\xi} \right) \left(\frac{\Omega^- - \xi \Lambda^-}{Y^-} \right) - \frac{1}{Y^+} \widehat{u}_0(p).$$

Usando que el segundo sumando en el lado derecho de la ecuación anterior satisface la condición de Hölder, obtenemos

$$(1.21) \quad \frac{1}{Y^+(p, \xi)} \widehat{u}_0(p) = U^+(p, \xi) - U^-(p, \xi),$$

donde

$$U^\pm(p, \xi) = \lim_{\substack{z \rightarrow p \\ \pm \operatorname{Re} z < 0}} U(z, \xi)$$

y

$$U(z, \xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{1}{q - z} \frac{1}{Y^+(q, \xi)} \widehat{u}_0(q) dq.$$

Entonces, sustituyendo (1.21) en (1.20),

$$\frac{\Omega^+ - \xi \Lambda^+}{Y^+} + U^+ = \left(\frac{K_1(p) + \xi}{\xi} \right) \left(\frac{\Omega^- - \xi \Lambda^-}{Y^-} \right) + U^-.$$

En la ecuación anterior, tenemos la igualdad entre los límites de funciones analíticas en los semiplanos izquierdo (+) y derecho (-). Por lo tanto, el teorema de Liouville implica que la solución del problema del tipo Riemann-Hilbert no-homogéneo, con la condición de frontera (1.14) es:

$$\begin{cases} \Omega^+(p, \xi) = -Y^+(p, \xi)U^+(p, \xi) + \xi \Lambda^+(p, \xi) \\ \Omega^-(p, \xi) = -\frac{\xi}{K_1(p) + \xi} Y^-(p, \xi)U^-(p, \xi) + \xi \Lambda^-(p, \xi), \end{cases}$$

donde $Y^\pm(p, \xi) = w^\pm(p) e^{\Gamma^\pm(p, \xi)}$,

$$U(z, \xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{1}{q - z} \frac{1}{Y^+(q, \xi)} \widehat{u}_0(q) dq$$

y

$$\Lambda(z, \xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{1}{q - z} \frac{1}{K(q) + \xi} \widehat{u}_0(q) dq.$$

Notemos que

$$\begin{aligned}\Omega^- &= -\frac{\xi}{K_1(p) + \xi} Y^- U^- + \xi \Lambda^- \\ &= -\frac{\xi}{K(p) + \xi} Y^+ \left[U^+ - \frac{1}{Y^+} \widehat{u}_0(p) \right] + \xi \Lambda^- \\ &= -\frac{\xi}{K(p) + \xi} Y^+ U^+ + \frac{\xi}{K(p) + \xi} \widehat{u}_0(p) + \xi \Lambda^-\end{aligned}$$

Entonces,

$$\Omega^+ - \Omega^- = \left[\frac{\xi}{K(p) + \xi} - 1 \right] Y^+ U^+ + \xi [\Lambda^+ - \Lambda^-] - \frac{\xi}{K(p) + \xi} \widehat{u}_0(p)$$

Luego,

$$\Psi(p, \xi) = \Omega^+(p, \xi) - \Omega^-(p, \xi) = -\frac{K(p)}{K(p) + \xi} Y^+(p, \xi) U^+(p, \xi).$$

Por lo tanto, recordando que $\Psi = \frac{K(p)}{K(p) + \xi} \widehat{\Phi}$, obtenemos

$$\widehat{\Phi}(p, \xi) = -Y^+(p, \xi) U^+(p, \xi).$$

La ecuación anterior para $\widehat{\Phi}$ implica que para $\operatorname{Re} z > 0$,

$$\mathbb{P}_{p \rightarrow z} \left\{ \widehat{\Phi}(p, \xi) \right\} = 0.$$

Así, hemos obtenido para $\widehat{u}(p, \xi)$,

$$\widehat{u}(p, \xi) = \frac{1}{K(p) + \xi} (\widehat{u}_0(p) - Y^+(p, \xi) U^+(p, \xi)).$$

Usando la formula de Sokhotski-Plemelj se sigue

$$\begin{aligned}(1.22) \quad \widehat{u}(p, \xi) &= \frac{1}{K(p) + \xi} \left(\widehat{u}_0(p) - Y^+(p, \xi) \left(U^-(p, \xi) + \frac{\widehat{u}_0(p)}{Y^+(p, \xi)} \right) \right) \\ &= -\frac{1}{K(p) + \xi} Y^+(p, \xi) U^-(p, \xi),\end{aligned}$$

o bien,

$$\widehat{u}(p, \xi) = -\frac{1}{K_1(p) + \xi} Y^-(p, \xi) U^-(p, \xi).$$

Notemos que la ecuación anterior implica que $\widehat{u}(p, \xi)$ es el límite de una función analítica en el semiplano derecho. Aplicando la transformada de Laplace inversa, con respecto a p y ξ , en la ecuación (1.22) se obtiene

$$u(x, t) = -\frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{-i\infty}^{i\infty} d\xi e^{\xi t} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{px} \frac{Y^+(p, \xi)}{K(p) + \xi} U^-(p, \xi) dp,$$

donde

$$U^-(p, \xi) = \lim_{\substack{z \rightarrow p \\ \operatorname{Re} z > 0}} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{1}{q-z} \frac{1}{Y^+(q, \xi)} \widehat{u}_0(q) dq.$$

Finalmente, sustituyendo

$$\widehat{u}_0(q) = \int_0^{+\infty} e^{-qy} u_0(y) dy$$

en la ecuación anterior e intercambiando las integrales se obtiene la fórmula para la función de Green,

$$G(x, y, t) = -\frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{-i\infty}^{i\infty} d\xi e^{\xi t} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{px} \frac{Y^+(p, \xi)}{K(p) + \xi} Z^-(p, \xi, y) dp,$$

donde

$$Z^-(p, \xi, y) = \lim_{\substack{z \rightarrow p \\ \operatorname{Re} z > 0}} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{1}{q-z} \frac{1}{Y^+(q, \xi)} e^{-qy} dq.$$

Así, la Proposición 7 ha sido demostrada. ■

Estimaciones a priori

1. Asintótica para la función de Green

En ésta sección demostraremos la siguiente proposición

PROPOSICIÓN 8. *La función de Green G , dada por la fórmula*

$$(1.1) \quad G(x, y, t) = -\frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{-i\infty}^{i\infty} d\xi e^{\xi t} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{px} \frac{Y^+(p, \xi)}{K(p) + \xi} Z^-(p, \xi, y) dp,$$

donde

$$(1.2) \quad Z(z, \xi, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{1}{q-z} \frac{1}{Y^+(q, \xi)} e^{-qy} dq,$$

satisface la representación asintótica

$$(1.3) \quad G(x, y, t) = t^{-\frac{1}{\alpha}} \Lambda \left(xt^{-\frac{1}{\alpha}} \right) + \mathcal{O} \left(t^{-\frac{1}{\alpha}(\mu+1)} y^\mu \right),$$

donde $0 \leq \mu < 2\alpha - 1$, $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ y $\Lambda(s) \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^+)$ se define por

$$\Lambda(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{ps-|p|^\alpha} dp - \frac{e^{i\frac{\pi}{4}\alpha}}{(2\pi i)^2} \int_{-i\infty}^{i\infty} d\xi e^\xi \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{ps} \frac{e^{\Gamma_0^+(p, \xi)} \left(\frac{p}{p-1} \right)^{\frac{\alpha}{2}} - e^{-i\frac{\pi}{4}\alpha}}{|p|^\alpha + \xi} dp,$$

donde

$$\Gamma_0^+(p, \xi) = \lim_{\substack{z \rightarrow p \\ \operatorname{Re} z < 0}} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{1}{q-z} \ln \left\{ \frac{|q|^\alpha + \xi}{q^\alpha + \xi} \left(\frac{q-1}{q+1} \right)^{\frac{\alpha}{2}} \right\} dq.$$

OBSERVACIÓN 4. *De la estimación (1.3) se sigue*

$$\left| \int_0^\infty \left(G(x, y, t) - t^{-\frac{1}{\alpha}} \Lambda \left(xt^{-\frac{1}{\alpha}} \right) \right) \phi(y) dy \right| \leq C t^{-\frac{1}{\alpha}(\mu+1)} \|\phi\|_{\mathbf{L}^{1, \mu}},$$

donde

$$\|\phi\|_{\mathbf{L}^{1, \mu}} = \int_0^{+\infty} (1+x)^\mu |\phi(x)| dx.$$

Por lo tanto,

$$(1.4) \quad \left\| \mathcal{G}(t)\phi - t^{-\frac{1}{\alpha}} \Lambda \left((\cdot) t^{-\frac{1}{\alpha}} \right) f(\phi) \right\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq C t^{-\frac{1}{\alpha}(\mu+1)} \|\phi\|_{\mathbf{L}^{1, \mu}},$$

donde

$$f(\phi) = \int_0^{+\infty} \phi(y) dy.$$

Demostración. Primero, estudiemos la función

$$\Gamma(z, \xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{1}{q-z} \ln \{\phi(q, \xi)\} dq,$$

donde

$$\phi(q, \xi) = \frac{K(q) + \xi}{K_1(q) + \xi} \left(\frac{q - z_0}{q + z_0} \right)^{\frac{\alpha}{2}}.$$

Notemos que

$$\arg \{\phi(q, \xi)\} \rightarrow -\frac{\pi}{2}\alpha, \quad q \rightarrow \pm i\infty.$$

Ahora, escribimos la función Γ en la forma

$$\begin{aligned} \Gamma(z, \xi) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{1}{q-z} \ln \{e^{i\frac{\pi}{2}\alpha} \phi(q, \xi)\} dq \\ (1.5) \quad &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{1}{q-z} \ln \{e^{-i\frac{\pi}{2}\alpha}\} dq. \end{aligned}$$

Calculamos la segunda integral en (1.5) explícitamente,

$$\begin{aligned} (1.6) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{1}{q-z} \ln \{e^{-i\frac{\pi}{2}\alpha}\} dq &= -\frac{\alpha}{4} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{1}{q-z} dq \\ &= i\frac{\pi}{4} \alpha \operatorname{sgn}(\operatorname{Re} z). \end{aligned}$$

Ahora, estimamos la primer integral en (1.5),

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{1}{q-z} \ln \{e^{i\frac{\pi}{2}\alpha} \phi(q, \xi)\} dq \\ (1.7) \quad &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{1}{q-z} \ln \left\{ e^{i\frac{\pi}{2}\alpha} \frac{K(q)}{K_1(q)} \left(\frac{1 + \frac{\xi}{K(q)}}{1 + \frac{\xi}{K_1(q)}} \right) \left(\frac{q - z_0}{q + z_0} \right)^{\frac{\alpha}{2}} \right\} dq \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{1}{q-z} \ln \left\{ \frac{1 + \frac{\xi}{K(q)}}{1 + \frac{\xi}{K_1(q)}} \right\} dq \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{1}{q-z} \ln \left\{ e^{i\frac{\pi}{2}\alpha(1-\operatorname{sgn}(\operatorname{Im} q))} \left(\frac{q - z_0}{q + z_0} \right)^{\frac{\alpha}{2}} \right\} dq. \end{aligned}$$

Usando la estimación $\ln(1+x) = \mathcal{O}(x)$ obtenemos

$$(1.8) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{1}{q-z} \ln \left\{ \frac{1 + \frac{\xi}{K(q)}}{1 + \frac{\xi}{K_1(q)}} \right\} dq = \mathcal{O} \left(\frac{\xi}{z^\alpha} \right).$$

Por otro lado, notemos que para $\text{Im } q > 0$,

$$\begin{aligned}
 \arg \left(\frac{q - z_0}{q + z_0} \right)^{\frac{\alpha}{2}} &= \frac{\alpha}{2} [\theta_1(q) - \theta_2(q)] \\
 (1.9) \quad &= \frac{\alpha}{2} \left[\left(\frac{\pi}{2} + \arctan \left(\frac{z_0}{|q|} \right) \right) - \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \left(\frac{z_0}{|q|} \right) \right) \right] \\
 &= \alpha \arctan \left(\frac{z_0}{|q|} \right),
 \end{aligned}$$

y para $\text{Im } q < 0$,

$$\begin{aligned}
 \arg \left(\frac{q - z_0}{q + z_0} \right)^{\frac{\alpha}{2}} &= \frac{\alpha}{2} [\theta_1(q) - \theta_2(q)] \\
 (1.10) \quad &= \frac{\alpha}{2} \left[\left(-\frac{\pi}{2} - \arctan \left(\frac{z_0}{|q|} \right) \right) - \left(\frac{3\pi}{2} + \arctan \left(\frac{z_0}{|q|} \right) \right) \right] \\
 &= -\alpha\pi - \alpha \arctan \left(\frac{z_0}{|q|} \right).
 \end{aligned}$$

Aquí, hemos definido a la función $q \mapsto \left(\frac{q - z_0}{q + z_0} \right)^{\frac{\alpha}{2}}$ en $\mathbb{C}$ menos el segmento $[-z_0, z_0] \subset \mathbb{R}$, donde los ángulos locales con respecto a z_0 y $-z_0$ son: $-\pi \leq \theta_1 < \pi$ y $0 \leq \theta_2 < 2\pi$, respectivamente. Entonces, de (1.9) y (1.10) se sigue que

$$\begin{aligned}
 \arg \left\{ e^{i \frac{\pi}{2} \alpha (1 - \text{sgn}(\text{Im} q))} \left(\frac{q - z_0}{q + z_0} \right)^{\frac{\alpha}{2}} \right\} &= \alpha \text{sgn}(\text{Im} q) \arctan \left(\frac{z_0}{|q|} \right) \\
 &= \mathcal{O} \left(\frac{z_0^{1-\epsilon}}{q^{1-\epsilon}} \right).
 \end{aligned}$$

Luego, de la definición de la función logaritmo y la estimación anterior se obtiene

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{1}{q - z} \ln \left\{ e^{i \frac{\pi}{2} \alpha (1 - \text{sgn}(\text{Im} q))} \left(\frac{q - z_0}{q + z_0} \right)^{\frac{\alpha}{2}} \right\} dq \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{1}{q - z} \ln \left| \frac{1 - \frac{z_0}{q}}{1 + \frac{z_0}{q}} \right|^{\frac{\alpha}{2}} dq \\
 (1.11) \quad &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{1}{q - z} \arg \left\{ e^{i \frac{\pi}{2} \alpha (1 - \text{sgn}(\text{Im} q))} \left(\frac{q - z_0}{q + z_0} \right)^{\frac{\alpha}{2}} \right\} dq \\
 &= \mathcal{O} \left(\frac{z_0^{1-\epsilon}}{z^{1-\epsilon}} \right) + \frac{\alpha}{2\pi} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{1}{q - z} \text{sgn}(\text{Im} q) \arctan \left(\frac{z_0}{|q|} \right) dq \\
 &= \mathcal{O} \left(\frac{z_0^{1-\epsilon}}{z^{1-\epsilon}} \right).
 \end{aligned}$$

Entonces, sustituyendo las estimaciones (1.8) y (1.11) en (1.7), obtenemos

$$(1.12) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{1}{q-z} \ln \{e^{i\frac{\pi}{2}\alpha} \phi(q, \xi)\} dq = \mathcal{O}\left(\frac{\xi}{z^\alpha}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{z_0^{1-\epsilon}}{z^{1-\epsilon}}\right).$$

Luego, sustituyendo (1.6) y (1.12) en (1.5), obtenemos la siguiente estimación para la función Γ ,

$$(1.13) \quad \Gamma(z, \xi) = i\frac{\pi}{4}\alpha \operatorname{sgn}(\operatorname{Re} z) + \mathcal{O}\left(\frac{\xi}{z^\alpha}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{z_0^{1-\epsilon}}{z^{1-\epsilon}}\right).$$

De la ecuación anterior se sigue para $\operatorname{Re} q = 0$,

$$\Gamma^+(q, \xi) = -i\frac{\pi}{4}\alpha + \mathcal{O}\left(\frac{\xi}{q^\alpha}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{z_0^{1-\epsilon}}{q^{1-\epsilon}}\right).$$

Luego, recordando que $Y^+ = e^{\Gamma^+} w^+$, donde

$$w^+(q) = \frac{q^{\frac{\alpha}{2}}}{(q - z_0)^{\frac{\alpha}{2}}},$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{Y^+(q, \xi)} &= e^{-\left(-i\frac{\pi}{4}\alpha + \mathcal{O}\left(\frac{\xi}{q^\alpha}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{z_0^{1-\epsilon}}{q^{1-\epsilon}}\right)\right)} \left(1 - \frac{z_0}{q}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \\ &= e^{i\frac{\pi}{4}\alpha} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{\xi}{q^\alpha}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{z_0^{1-\epsilon}}{q^{1-\epsilon}}\right)\right) \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{z_0}{q}\right)\right) \\ &= e^{i\frac{\pi}{4}\alpha} + \mathcal{O}\left(\frac{\xi}{q^\alpha}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{z_0^{1-\epsilon}}{q^{1-\epsilon}}\right), \end{aligned}$$

o bien,

$$(1.14) \quad \left| \frac{1}{Y^+(q, \xi)} - e^{i\frac{\pi}{4}\alpha} \right| \leq C \left(\frac{|\xi|}{|q|^\alpha} + \frac{|z_0|^{1-\epsilon}}{|q|^{1-\epsilon}} \right).$$

Ahora, notemos que las ecuaciones

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{1}{q-z} e^{-qy} dq = -e^{-zy}, \quad \operatorname{Re} z > 0,$$

y

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{1}{q-z} \left(\frac{1}{Y^+(q, \xi)} - e^{i\frac{\pi}{4}\alpha} \right) dq = 0, \quad \operatorname{Re} z > 0,$$

implican que la función Z admite la representación

$$(1.15) \quad Z(z, \xi, y) = e^{i\frac{\pi}{4}\alpha} e^{-zy} + Z_0(z, \xi, y), \quad \operatorname{Re} z > 0,$$

donde

$$Z_0(z, \xi, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{1}{q-z} \left(\frac{1}{Y^+(q, \xi)} - e^{i\frac{\pi}{4}\alpha} \right) (e^{-qy} - e^{-zy}) dq.$$

Además,

$$\begin{aligned} Z_0^-(p, \xi, y) &= \lim_{\substack{z \rightarrow p \\ \operatorname{Re} z > 0}} Z_0(z, \xi, y) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{1}{q-p} \left(\frac{1}{Y^+(q, \xi)} - e^{i\frac{\pi}{4}\alpha} \right) (e^{-qy} - e^{-py}) dq, \end{aligned}$$

entonces

$$Z^-(p, \xi, y) = e^{i\frac{\pi}{4}\alpha} e^{-py} + Z_0^-(p, \xi, y), \quad \operatorname{Re} p = 0.$$

Sustituyendo la ecuación anterior en (1.1) obtenemos

$$(1.16) \quad G(x, y, t) = -\frac{e^{i\frac{\pi}{4}\alpha}}{(2\pi i)^2} \int_{-i\infty}^{i\infty} d\xi e^{\xi t} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{px} \frac{Y^+(p, \xi)}{K(p) + \xi} e^{-py} dp + R_0(x, y, t),$$

donde

$$R_0(x, y, t) = -\frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{-i\infty}^{i\infty} d\xi e^{\xi t} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{px} \frac{Y^+(p, \xi)}{K(p) + \xi} Z_0^-(p, \xi, y) dp.$$

Ahora, sustituyendo la ecuación

$$\begin{aligned} e^{i\frac{\pi}{4}\alpha} Y^+(p, \xi) e^{-py} &= 1 + e^{i\frac{\pi}{4}\alpha} (Y^+(p, \xi) - e^{-i\frac{\pi}{4}\alpha}) \\ &\quad + e^{i\frac{\pi}{4}\alpha} (Y^+(p, \xi) - e^{-i\frac{\pi}{4}\alpha}) (e^{-py} - 1) + (e^{-py} - 1) \end{aligned}$$

en (1.16) se obtiene

$$\begin{aligned} G(x, y, t) &= -\frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{-i\infty}^{i\infty} d\xi e^{\xi t} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{px} \frac{1}{K(p) + \xi} dp \\ &\quad - \frac{e^{i\frac{\pi}{4}\alpha}}{(2\pi i)^2} \int_{-i\infty}^{i\infty} d\xi e^{\xi t} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{px} \frac{Y^+(p, \xi) - e^{-i\frac{\pi}{4}\alpha}}{K(p) + \xi} dp \\ &\quad - \frac{e^{i\frac{\pi}{4}\alpha}}{(2\pi i)^2} \int_{-i\infty}^{i\infty} d\xi e^{\xi t} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{px} \frac{Y^+(p, \xi) - e^{-i\frac{\pi}{4}\alpha}}{K(p) + \xi} (e^{-py} - 1) dp \\ &\quad - \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{-i\infty}^{i\infty} d\xi e^{\xi t} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{px} \frac{1}{K(p) + \xi} (e^{-py} - 1) dp \\ &\quad + R_0(x, y, t), \end{aligned}$$

o bien, aplicando los teoremas de Fubini y Cauchy en el primer y cuarto sumandos de la ecuación anterior,

$$\begin{aligned}
G(x, y, t) = & \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{px-K(p)t} dp \\
& - \frac{e^{i\frac{\pi}{4}\alpha}}{(2\pi i)^2} \int_{-i\infty}^{i\infty} d\xi e^{\xi t} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{px} \frac{Y^+(p, \xi) - e^{-i\frac{\pi}{4}\alpha}}{K(p) + \xi} dp \\
& - \frac{e^{i\frac{\pi}{4}\alpha}}{(2\pi i)^2} \int_{-i\infty}^{i\infty} d\xi e^{\xi t} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{px} \frac{Y^+(p, \xi) - e^{-i\frac{\pi}{4}\alpha}}{K(p) + \xi} (e^{-py} - 1) dp \\
& + \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{px-K(p)t} (e^{-py} - 1) dp + R_0(x, y, t).
\end{aligned}$$

Entonces,

$$(1.17) \quad G(x, y, t) = \Lambda_0(x, t) + R_0(x, y, t) + R_1(x, y, t) + R_2(x, y, t),$$

donde

$$\Lambda_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{px-K(p)t} dp - \frac{e^{i\frac{\pi}{4}\alpha}}{(2\pi i)^2} \int_{-i\infty}^{i\infty} d\xi e^{\xi t} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{px} \frac{Y^+(p, \xi) - e^{-i\frac{\pi}{4}\alpha}}{K(p) + \xi} dp$$

y

$$\begin{aligned}
R_0 &= -\frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{-i\infty}^{i\infty} d\xi e^{\xi t} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{px} \frac{Y^+(p, \xi)}{K(p) + \xi} Z_0^-(p, \xi, y) dp, \\
(1.18) \quad R_1 &= -\frac{e^{i\frac{\pi}{4}\alpha}}{(2\pi i)^2} \int_{-i\infty}^{i\infty} d\xi e^{\xi t} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{px} \frac{Y^+(p, \xi) - e^{-i\frac{\pi}{4}\alpha}}{K(p) + \xi} (e^{-py} - 1) dp, \\
R_2 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{px-K(p)t} (e^{-py} - 1) dp.
\end{aligned}$$

A continuación, demostraremos que Λ_0 admite la representación

$$(1.19) \quad \Lambda_0(x, t) = t^{-\frac{1}{\alpha}} \Lambda \left(xt^{-\frac{1}{\alpha}} \right).$$

Haciendo los cambios de variable $p = t^{-\frac{1}{\alpha}} q_0$ y $\xi = t^{-1} q_1$, obtenemos

$$(1.20) \quad Y^+(p, \xi) = Y^+(q_0, q_1).$$

En efecto, primero recordemos que $Y^+(p, \xi) = e^{\Gamma^+(p, \xi)} w^+(p)$, donde

$$\begin{aligned}
\Gamma^+(p, \xi) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{-i\infty}^{i\infty} \frac{1}{q-p} \ln \phi(q, \xi) dq + \frac{1}{2} \phi(p, \xi), \\
\phi(p, \xi) &= \left(\frac{K(p) + \xi}{K_1(p) + \xi} \right) \frac{w^-(p)}{w^+(p)} \quad \text{y} \quad w^\pm(p) = \frac{q^{\frac{\alpha}{2}}}{(q \mp z_0)^{\frac{\alpha}{2}}}.
\end{aligned}$$

Tomando $z_0 = t^{-\frac{1}{\alpha}}$, obtenemos

$$w^\pm(p) = w^\pm(t^{-\frac{1}{\alpha}}q_0) = \frac{\left(t^{-\frac{1}{\alpha}}q_0\right)^{\frac{\alpha}{2}}}{\left(t^{-\frac{1}{\alpha}}q_0 \mp t^{-\frac{1}{\alpha}}\right)^{\frac{\alpha}{2}}} = \frac{q_0^{\frac{\alpha}{2}}}{(q_0 \mp 1)^{\frac{\alpha}{2}}} = w^\pm(q_0).$$

Luego,

$$\phi(p, \xi) = \phi(t^{-\frac{1}{\alpha}}q_0, t^{-1}q_1) = \left(\frac{K(q_0)t^{-1} + q_1t^{-1}}{K_1(q_0)t^{-1} + q_1t^{-1}}\right) \frac{w^-(q_0)}{w^+(q_0)} = \phi(q_0, q_1).$$

Definiendo $q = t^{-\frac{1}{\alpha}}q_2$, se obtiene de manera análoga

$$\phi(q, \xi) = \phi(q_2, q_1).$$

Entonces, sustituyendo $p = t^{-\frac{1}{\alpha}}q_0$, $\xi = t^{-1}q_1$ y $q = t^{-\frac{1}{\alpha}}q_2$ en la ecuación para Γ^+ , se sigue

$$\Gamma^+(p, \xi) = \Gamma^+(p_0, p_1).$$

Por lo tanto, la ecuación (1.20) se cumple. Ahora, haciendo los cambios de variable $p = t^{-\frac{1}{\alpha}}q_0$ y $\xi = t^{-1}q_1$ en las integrales que definen a Λ_0 se obtiene

$$\begin{aligned} \Lambda_0(x, t) &= t^{-\frac{1}{\alpha}} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{q_0 x t^{-\frac{1}{\alpha}} - K(q_0)} dq_0 \\ &\quad - t^{-\frac{1}{\alpha}} \frac{e^{i\frac{\pi}{4}\alpha}}{(2\pi i)^2} \int_{-i\infty}^{i\infty} dq_1 e^{q_1} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{q_0 x t^{-\frac{1}{\alpha}}} \frac{Y^+(q_0, q_1) - e^{-i\frac{\pi}{4}\alpha}}{K(q_0) + q_1} dq_0. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\Lambda_0(x, t) = t^{-\frac{1}{\alpha}} \Lambda\left(x t^{-\frac{1}{\alpha}}\right),$$

donde (cambiando q_0 y q_1 por p y ξ , respectivamente),

$$\begin{aligned} \Lambda\left(x t^{-\frac{1}{\alpha}}\right) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{p x t^{-\frac{1}{\alpha}} - K(p)} dp \\ &\quad - \frac{e^{i\frac{\pi}{4}\alpha}}{(2\pi i)^2} \int_{-i\infty}^{i\infty} d\xi e^\xi \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{p x t^{-\frac{1}{\alpha}}} \frac{Y^+(p, \xi) - e^{-i\frac{\pi}{4}\alpha}}{K(p) + \xi} dp. \end{aligned}$$

Ahora, demostremos que la función R_0 definida en (1.18) satisface la siguiente estimación

$$(1.21) \quad |R_0(x, y, t)| \leq C t^{-\frac{1}{\alpha}(\mu+1)} y^\mu, \quad \mu < 2\alpha - 1.$$

Primero, recordemos que

$$Z_0^-(p, \xi, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{1}{q - p} \left(\frac{1}{Y^+(q, \xi)} - e^{i\frac{\pi}{4}\alpha} \right) (e^{-qy} - e^{-py}) dq.$$

Usando las estimaciones (1.14) y

$$|e^{-qy} - e^{-py}| \leq 2|q - p|^\mu y^\mu,$$

donde $\operatorname{Re} q = \operatorname{Re} p = 0$ y $0 < \mu < 1$, obtenemos

$$|Z_0^-(p, \xi, y)| \leq Cy^\mu \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{1}{|q-p|^{1-\mu}} \left(\frac{|\xi|}{|q|^\alpha} + \frac{|z_0|^{1-\epsilon}}{|q|^{1-\epsilon}} \right) |dq|.$$

Haciendo el cambio de variable $q = pz$, se sigue

$$|Z_0^-(p, \xi, y)| \leq C \frac{y^\mu}{|p|^{-\mu}} \left(\frac{|\xi|}{|p|^\alpha} + \frac{|z_0|^{1-\epsilon}}{|p|^{1-\epsilon}} \right) \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{|dz|}{|z-1|^{1-\mu}} \left(\frac{1}{|z|^\alpha} + \frac{1}{|z|^{1-\epsilon}} \right).$$

Entonces,

$$|Z_0^-(p, \xi, y)| \leq Cy^\mu \left(\frac{|\xi|}{|p|^{\alpha-\mu}} + \frac{|z_0|^{1-\epsilon}}{|p|^{1-\epsilon-\mu}} \right),$$

siempre que $\mu < \min\{\alpha, 1-\epsilon\}$. Ahora, usamos la desigualdad anterior para estimar R_0 , (1.18),

$$\begin{aligned} |R_0(x, y, t)| &\leq C \int_{\mathcal{C}_1} |d\xi| e^{-\lambda|\xi|t} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{1}{|K(p) + \xi|} |Z_0^-(p, \xi, y)| |dp| \\ &\leq Cy^\mu \int_{\mathcal{C}_1} |d\xi| e^{-\lambda|\xi|t} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{1}{|K(p) + \xi|} \left(\frac{|\xi|}{|p|^{\alpha-\mu}} + \frac{|z_0|^{1-\epsilon}}{|p|^{1-\epsilon-\mu}} \right) |dp|. \end{aligned}$$

Aquí,

$$\mathcal{C}_1 = \left\{ \xi \in \left(\infty e^{-i(\frac{\pi}{2} + \epsilon_1)}, 0 \right) \cup \left(\infty e^{i(\frac{\pi}{2} + \epsilon_1)}, 0 \right) \right\}, \quad \epsilon_1 > 0,$$

y hemos usado que $|e^{\xi t}| = e^{\operatorname{Re} \xi t} \leq e^{-\lambda|\xi|t}$, para $\xi \in \mathcal{C}_1$ y algún $\lambda > 0$. En la desigualdad anterior, tomamos $z_0 = t^{-\frac{1}{\alpha}}$ y hacemos los cambios de variable $p = qt^{-\frac{1}{\alpha}}$ y $\xi = q_1 t^{-1}$,

$$|R_0| \leq Ct^{-\frac{1}{\alpha}(\mu+1)} y^\mu \int_{\mathcal{C}_1} |dq_1| e^{-\lambda|q_1|} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{|dq|}{|K(q) + q_1|} \left(\frac{|q_1|}{|q|^{\alpha-\mu}} + \frac{1}{|q|^{1-\epsilon-\mu}} \right).$$

Entonces, tomando $\epsilon < 1 - \alpha$,

$$(1.22) \quad |R_0(x, y, t)| \leq Ct^{-\frac{1}{\alpha}(\mu+1)} y^\mu,$$

siempre que $\mu < \min\{\alpha, 2\alpha - 1\} = 2\alpha - 1$. Ahora, demostremos que la función R_1 definida en (1.18) satisface la estimación

$$(1.23) \quad |R_1(x, y, t)| \leq Ct^{-\frac{1}{\alpha}(\mu+1)} y^\mu, \quad \mu < 2\alpha - 1.$$

Usando que

$$|Y^+(p, \xi) - e^{-i\frac{\pi}{4}\alpha}| \leq C \left(\frac{|\xi|}{|p|^\alpha} + \frac{|z_0|^{1-\epsilon}}{|p|^{1-\epsilon}} \right)$$

y

$$(1.24) \quad |e^{-py} - 1| \leq 2|p|^\mu y^\mu,$$

donde $\operatorname{Re} p = 0$ y $0 < \mu < 1$, obtenemos

$$\begin{aligned} |R_1| &\leq C \int_{c_1} |d\xi| e^{-\lambda|\xi|t} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{|Y^+(p, \xi) - e^{-i\frac{\pi}{4}\alpha}|}{|K(p) + \xi|} |e^{-py} - 1| |dp| \\ &\leq C y^\mu \int_{c_1} |d\xi| e^{-\lambda|\xi|t} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{|dp|}{|K(p) + \xi|} \left(\frac{|\xi|}{|p|^{\alpha-\mu}} + \frac{|z_0|^{1-\epsilon}}{|p|^{1-\epsilon-\mu}} \right) |dp|. \end{aligned}$$

Entonces, tomando $z_0 = t^{-\frac{1}{\alpha}}$, $\epsilon < 1 - \alpha$ y haciendo los cambios de variable $p = qt^{-\frac{1}{\alpha}}$ y $\xi = q_1 t^{-1}$, obtenemos la estimación (1.23). Por último, demostremos que la función R_2 definida en (1.18) satisface, al igual que R_0 y R_1 , la desigualdad

$$(1.25) \quad |R_2(x, y, t)| \leq C t^{-\frac{1}{\alpha}(\mu+1)} y^\mu, \quad \mu < 2\alpha - 1.$$

Usando la desigualdad (1.24), se obtiene

$$\begin{aligned} |R_2(x, y, t)| &\leq C \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{-K(p)t} |e^{-py} - 1| |dp| \\ &\leq C y^\mu \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{-K(p)t} |p|^\mu |dp|. \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $p = qt^{-\frac{1}{\alpha}}$, se sigue

$$|R_2(x, y, t)| \leq C t^{-\frac{1}{\alpha}(\mu+1)} y^\mu \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{-K(q)t} |q|^\mu |dq|$$

Entonces, se cumple (1.25). Por lo tanto, usando (1.19) y las estimaciones (1.21), (1.23) y (1.25) en (1.17), obtenemos la representación asintótica (1.3) para la función de Green G . ■

2. Estimaciones para el operador de Green

La meta de esta sección consiste en encontrar estimaciones en espacios $\mathbf{L}^{s,\mu}(\mathbb{R}^+)$, donde $1 \leq s \leq \infty$ y $\mu \geq 0$, para el operador de Green $\mathcal{G}$, definido por

$$\mathcal{G}(t)\phi = \int_0^{+\infty} G(x, y, t)\phi(y)dy.$$

Iniciamos con una estimación en el espacio $\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^+)$, para $t > 1$.

LEMA 3. *La siguiente estimación se cumple,*

$$\|\mathcal{G}(t)\phi\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq C t^{-\frac{1}{\alpha}} \|\phi\|_{\mathbf{L}^1}.$$

Demostración. Primero, recordemos que la función de Green G está dada por la expresión

$$(2.1) \quad G(x, y, t) = -\frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{-i\infty}^{i\infty} d\xi e^{\xi t} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{px} \frac{Y^+(p, \xi)}{K(p) + \xi} Z^-(p, \xi, y) dp,$$

donde para $\operatorname{Re} z \neq 0$,

$$Z(z, \xi, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{1}{q - z} \frac{1}{Y^+(q, \xi)} e^{-qy} dq.$$

Usando la fórmula de Sokhotzki-Plemelj, se sigue que

$$Z^+(p, \xi, y) - Z^-(p, \xi, y) = \frac{1}{Y^+(p, \xi)} e^{-py}.$$

Sustituyendo la ecuación anterior en (2.1), obtenemos que la función de Green G satisface la representación

$$(2.2) \quad G(x, y, t) = J_1(x - y, t) + J_2(x, y, t),$$

donde

$$J_1(x - y, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{p(x-y) - K(p)t} dp$$

y

$$J_2(x, y, t) = -\frac{1}{(2\pi i)^3} \int_{i\infty}^{i\infty} d\xi e^{\xi t} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{px} \frac{Y^+(p, \xi)}{K(p) + \xi} Z^+(p, \xi, y) dp.$$

Primero, estimamos J_1 . Haciendo el cambio de variable $p = zt^{-\frac{1}{\alpha}}$, se obtiene

$$J_1(x - y, t) = \frac{t^{-\frac{1}{\alpha}}}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{zt^{-\frac{1}{\alpha}}(x-y) - K(z)t} dz.$$

Luego,

$$|J_1(x - y, t)| \leq Ct^{-\frac{1}{\alpha}} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{-K(z)t} |dz|.$$

Por lo tanto,

$$(2.3) \quad |J_1(x - y, t)| \leq Ct^{-\frac{1}{\alpha}}.$$

Ahora, estimamos J_2 . Considerado la extensión de la función $K(p)$,

$$K(p) = \begin{cases} (-ip)^\alpha, & \operatorname{Im} p > 0; \\ (ip)^\alpha, & \operatorname{Im} p \leq 0, \end{cases}$$

y usado los contornos

$$\mathcal{C}_1 = \left\{ \xi \in \left(\infty e^{-i(\frac{\pi}{2} + \varepsilon_1)}, 0 \right) \cup \left(0, \infty e^{i(\frac{\pi}{2} + \varepsilon_1)} \right) \right\}, \quad \varepsilon_1 > 0,$$

$$\mathcal{C}_2 = \left\{ p \in \left(\infty e^{-i(\frac{\pi}{2} + \varepsilon_2)}, 0 \right) \cup \left(0, \infty e^{i(\frac{\pi}{2} + \varepsilon_2)} \right) \right\}, \quad \varepsilon_2 > 0,$$

obtenemos la siguiente representación para J_2 :

$$(2.4) \quad J_2(x, y, t) = -\frac{1}{(2\pi i)^3} \int_{\mathcal{C}_1} d\xi e^{\xi t} \int_{\mathcal{C}_2} e^{px} \frac{Y^+(p, \xi)}{K(p) + \xi} Z^+(p, \xi, y) dp.$$

Notemos que

$$\begin{aligned} Z(z, \xi, y) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{1}{q-z} \left(\frac{1}{Y^+(q, \xi)} - e^{i\frac{\pi}{4}\alpha} \right) e^{-qy} dq \\ &\quad + \frac{e^{i\frac{\pi}{4}\alpha}}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{1}{q-z} e^{-qy} dq, \end{aligned}$$

donde $\operatorname{Re} z \neq 0$. Entonces, para $\operatorname{Re} z < 0$ se sigue

$$Z(z, \xi, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{1}{q-z} \left(\frac{1}{Y^+(q, \xi)} - e^{i\frac{\pi}{4}\alpha} \right) e^{-qy} dq.$$

Luego, usando la desigualdad (1.14),

$$\left| \frac{1}{Y^+(q, \xi)} - e^{i\frac{\pi}{4}\alpha} \right| \leq C \left(\frac{|\xi|}{|q|^\alpha} + \frac{|z_0|^{1-\epsilon}}{|q|^{1-\epsilon}} \right),$$

obtenemos

$$\begin{aligned} |Z(z, \xi, y)| &\leq C \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{1}{|q-z|} \left(\frac{|\xi|}{|q|^\alpha} + \frac{|z_0|^{1-\epsilon}}{|q|^{1-\epsilon}} \right) |dq| \\ &\leq C \left(\frac{|\xi|}{|z|^\alpha} + \frac{|z_0|^{1-\epsilon}}{|z|^{1-\epsilon}} \right), \end{aligned}$$

donde $\operatorname{Re} z < 0$. Por lo tanto,

$$|Z^+(p, \xi, y)| \leq C \left(\frac{|\xi|}{|p|^\alpha} + \frac{|z_0|^{1-\epsilon}}{|p|^{1-\epsilon}} \right),$$

donde $\operatorname{Re} p = 0$. La desigualdad anterior y (2.4) implican

$$|J_2(x, y, t)| \leq C \int_{\mathcal{C}_1} |d\xi| e^{-C|\xi|t} \int_{\mathcal{C}_2} \frac{1}{|K(p) + \xi|} \left(\frac{|\xi|}{|p|^\alpha} + \frac{|z_0|^{1-\epsilon}}{|p|^{1-\epsilon}} \right) |dp|.$$

Tomando $z_0 = t^{-\frac{1}{\alpha}}$ y haciendo los cambios de variable

$$p = zt^{-\frac{1}{\alpha}}, \quad y \quad \xi = \xi_1 t^{-1},$$

en la desigualdad anterior, se obtiene

$$|J_2(x, y, t)| \leq Ct^{-\frac{1}{\alpha}} \int_{\mathcal{C}_1} |d\xi_1| e^{-C|\xi_1|} \int_{\mathcal{C}_2} \frac{1}{|K(z) + \xi_1|} \left(\frac{|\xi_1|}{|z|^\alpha} + \frac{1}{|z|^{1-\epsilon}} \right) |dz|.$$

Pero

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}_2} \frac{1}{|K(z) + \xi_1|} \left(\frac{|\xi_1|}{|z|^\alpha} + \frac{1}{|z|^{1-\epsilon}} \right) |dz| &= |\xi_1|^{\frac{1}{\alpha}-1} \int_{\mathcal{C}_2} \frac{1}{|K(z) + 1|} \frac{1}{|z|^\alpha} |dz| \\ &\quad \frac{1}{|\xi_1|^{1-\frac{\epsilon}{\alpha}}} \int_{\mathcal{C}_2} \frac{1}{|K(z) + 1|} \frac{1}{|z|^{1-\epsilon}} |dz| \\ &\leq C \left(|\xi_1|^{\frac{1}{\alpha}-1} + \frac{1}{|\xi_1|^{1-\frac{\epsilon}{\alpha}}} \right), \end{aligned}$$

siempre que $\alpha > \frac{1}{2}$ y $\epsilon < \alpha$. Por lo tanto,

$$(2.5) \quad |J_2(x, y, t)| \leq Ct^{-\frac{1}{\alpha}}, \quad \alpha > \frac{1}{2}.$$

La ecuación (2.2) y las estimaciones (2.3) y (2.5) implican que

$$|G(x, y, t)| \leq Ct^{-\frac{1}{\alpha}}, \quad \alpha > \frac{1}{2}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{G}(t)\phi\|_{\mathbf{L}^\infty} &= \sup_{x \in \mathbb{R}^+} \left| \int_0^{+\infty} G(x, y, t)\phi(y)dy \right| \\ &\leq \int_0^{+\infty} |G(x, y, t)| |\phi(y)| dy \\ &\leq Ct^{-\frac{1}{\alpha}} \int_0^{+\infty} |\phi(y)| dy \\ &= Ct^{-\frac{1}{\alpha}} \|\phi\|_{\mathbf{L}^1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el Lema 3 ha sido demostrado.

Ahora, demostremos una estimación para el operador $\mathcal{G}$, en el espacio $\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^+)$, para $t < 1$.

LEMA 4. *Las siguiente estimación se cumple,*

$$\|\mathcal{G}(t)\phi\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq Ct^{-\frac{1}{\alpha}(1-\gamma)} (\|\phi\|_{\mathbf{L}^1} + \|\phi\|_{\mathbf{L}^\infty}),$$

donde $1 - \alpha < \gamma < 1$.

Demostración. Primero, notemos que la función de Green G admite la representación

$$(2.6) \quad G(x, y, t) = J_1(x - y, t) + J_2(x, y, t),$$

donde

$$J_1(x - y, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{p(x-y)-K(p)t} dp$$

y

$$\begin{aligned} J_2(x, y, t) &= -\frac{1}{(2\pi i)^3} \int_{\mathcal{C}_1} d\xi e^{\xi t} \int_{\mathcal{C}_2} dp e^{px} \frac{Y^+(p, \xi)}{K(p) + \xi} \\ &\quad \times \int_{\mathcal{C}_3} \frac{1}{q-p} \frac{1}{Y^-(q, \xi)} \left(\frac{K_1(q) + \xi}{K(q) + \xi} \right) e^{-qy} dq. \end{aligned}$$

Las integrales en J_2 están definidas sobre los contornos:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 &= \left\{ \xi \in \left(\infty e^{-i(\frac{\pi}{2} + \epsilon_1)}, 0 \right) \cup \left(0, \infty e^{i(\frac{\pi}{2} + \epsilon_1)} \right) \right\}, \quad \epsilon_1 > 0, \\ \mathcal{C}_2 &= \left\{ p \in \left(\infty e^{-i(\frac{\pi}{2} + \epsilon_2)}, 0 \right) \cup \left(0, \infty e^{i(\frac{\pi}{2} + \epsilon_2)} \right) \right\}, \quad \epsilon_2 > 0, \end{aligned}$$

y

$$\mathcal{C}_3 = \left\{ q \in \left(\infty e^{-i(\frac{\pi}{2}-\varepsilon_3)}, 0 \right) \cup \left(0, \infty e^{i(\frac{\pi}{2}-\varepsilon_3)} \right) \right\}, \quad \varepsilon_3 > 0.$$

Además, hemos considerado la extensión de la función $K(p)$,

$$K(p) = \begin{cases} (-ip)^\alpha, & \text{Im } p > 0; \\ (ip)^\alpha, & \text{Im } p \leq 0. \end{cases}$$

Para estimar J_1 , usamos la representación

$$J_1(r, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_\pm} e^{pr-K(p)t} dp,$$

para $\pm r > 0$, donde

$$\mathcal{C}_\pm = \left\{ p \in \left(\infty e^{-i(\frac{\pi}{2} \pm \varepsilon)}, 0 \right) \cup \left(0, \infty e^{i(\frac{\pi}{2} \pm \varepsilon)} \right) \right\}, \quad \varepsilon > 0.$$

Haciendo el cambio de variable $p = zt^{-\frac{1}{\alpha}}$ y usando la desigualdad $|e^z| \leq |z|^{-\gamma}$, $\gamma > 0$, obtenemos la estimación

$$|J_1(r, t)| \leq Ct^{-\frac{1}{\alpha}(1-\gamma)} |r|^{-\gamma},$$

o bien, para $x, y > 0$,

$$(2.7) \quad |J_1(x - y, t)| \leq Ct^{-\frac{1}{\alpha}(1-\gamma)} |x - y|^{-\gamma}.$$

Ahora, estimaremos J_2 . Usando la desigualdad $|e^{-qy}| \leq |q|^{-\gamma} y^{-\gamma}$, donde $\text{Re } q > 0$, $y > 0$ y $\gamma > 0$, obtenemos

$$|J_2(x, y, t)| \leq Cy^{-\gamma} \int_{\mathcal{C}_1} |d\xi| e^{-C|\xi|t} \int_{\mathcal{C}_2} \frac{|dp|}{|K(p) + \xi|} \int_{\mathcal{C}_3} \frac{1}{|q - p|} \frac{|dq|}{|q|^\gamma}.$$

Ahora, hacemos los cambios de variable

$$p = zt^{-\frac{1}{\alpha}}, \quad q = z_1 t^{-\frac{1}{\alpha}} \quad \text{y} \quad \xi = \xi_1 t^{-1},$$

en la desigualdad anterior,

$$|J_2(x, y, t)| \leq Ct^{-\frac{1}{\alpha}(1-\gamma)} y^{-\gamma} \int_{\mathcal{C}_1} |d\xi_1| e^{-C|\xi_1|} \int_{\mathcal{C}_2} \frac{|dz|}{|K(z) + \xi_1|} \int_{\mathcal{C}_3} \frac{1}{|z_1 - z|} \frac{|dz_1|}{|z_1|^\gamma}.$$

Usando la estimación

$$\int_{\mathcal{C}_3} \frac{1}{|z_1 - z|} \frac{1}{|z_1|^\gamma} |dz_1| \leq C \frac{1}{|z|^\gamma},$$

se sigue

$$(2.8) \quad |J_2(x, y, t)| \leq Ct^{-\frac{1}{\alpha}(1-\gamma)} y^{-\gamma} \int_{\mathcal{C}_1} |d\xi_1| e^{-C|\xi_1|} \int_{\mathcal{C}_2} \frac{1}{|K(z) + \xi_1|} \frac{1}{|z|^\gamma} |dz|.$$

Pero

$$\int_{\mathcal{C}_2} \frac{1}{|K(z) + \xi_1|} \frac{1}{|z|^\gamma} |dz| = \frac{1}{|\xi_1|^{1-\frac{1}{\alpha}(1-\gamma)}} \int_{\mathcal{C}_2} \frac{1}{|K(z) + 1|} \frac{1}{|z|^\gamma} |dz|.$$

De aquí,

$$\int_{\mathcal{C}_2} \frac{1}{|K(z) + \xi_1|} \frac{1}{|z|^\gamma} |dz| \leq C \frac{1}{|\xi_1|^{1-\frac{1}{\alpha}(1-\gamma)}},$$

siempre que $1 - \alpha < \gamma < 1$. Entonces, sustituyendo la desigualdad anterior en (2.8), obtenemos

$$|J_2(x, y, t)| \leq C t^{-\frac{1}{\alpha}(1-\gamma)} y^{-\gamma} \int_{\mathcal{C}_1} e^{-C|\xi_1|} \frac{1}{|\xi_1|^{1-\frac{1}{\alpha}(1-\gamma)}} |d\xi_1|,$$

donde $1 - \alpha < \gamma < 1$. Como la integral en la desigualdad anterior converge, hemos obtenido la estimación

$$(2.9) \quad |J_2(x, y, t)| \leq C t^{-\frac{1}{\alpha}(1-\gamma)} y^{-\gamma}, \quad 1 - \alpha < \gamma < 1.$$

Entonces, la ecuación (2.6) y las estimaciones (2.7) y (2.9) implican

$$|G(x, y, t)| \leq C t^{-\frac{1}{\alpha}(1-\gamma)} (|x - y|^{-\gamma} + y^{-\gamma}), \quad 1 - \alpha < \gamma < 1.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{G}(t)\phi\|_{\mathbf{L}^\infty} &= \sup_{x \in \mathbb{R}^+} \left| \int_0^{+\infty} G(x, y, t) \phi(y) dy \right| \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^+} \int_0^{+\infty} |G(x, y, t)| |\phi(y)| dy \\ &\leq C t^{-\frac{1}{\alpha}(1-\gamma)} \int_0^{+\infty} (|x - y|^{-\gamma} + y^{-\gamma}) |\phi(y)| dy. \end{aligned}$$

Finalmente, notando que

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} |x - y|^{-\gamma} |\phi(y)| dy &\leq C \int_0^{x-1} |\phi(y)| dy + C \int_{x+1}^{+\infty} |\phi(y)| dy \\ &\quad + \sup_{y \in \mathbb{R}^+} |\phi(y)| \int_{x-1}^{x+1} |x - y|^{-\gamma} dy \\ &\leq C (\|\phi\|_{\mathbf{L}^1} + \|\phi\|_{\mathbf{L}^\infty}) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} y^{-\gamma} |\phi(y)| dy &\leq \sup_{y \in \mathbb{R}^+} |\phi(y)| \int_0^1 y^{-\gamma} dy + C \int_1^{+\infty} |\phi(y)| dy \\ &\leq C (\|\phi\|_{\mathbf{L}^\infty} + \|\phi\|_{\mathbf{L}^1}), \end{aligned}$$

se obtiene

$$\|\mathcal{G}(t)\phi\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq C t^{-\frac{1}{\alpha}(1-\gamma)} (\|\phi\|_{\mathbf{L}^1} + \|\phi\|_{\mathbf{L}^\infty}).$$

Por lo tanto, el Lema 4 ha sido demostrado.

Introducimos los operadores

$$(2.10) \quad \mathcal{J}_1(t)\phi = \theta(x) \int_0^{+\infty} J_1(x - y, t) \phi(y) dy$$

y

$$(2.11) \quad \mathcal{J}_2(t)\phi = \theta(x) \int_0^{+\infty} J_2(x, y, t)\phi(y)dy,$$

donde

$$J_1(x - y, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{p(x-y)-K(p)t} dp$$

y

$$\begin{aligned} J_2(x, y, t) = & -\frac{1}{(2\pi i)^3} \int_{C_1} d\xi e^{\xi t} \int_{C_2} dp e^{px} \frac{Y^+(p, \xi)}{K(p) + \xi} \\ & \times \int_{C_3} \frac{1}{q-p} \frac{1}{Y^-(q, \xi)} \left(\frac{K_1(q) + \xi}{K(q) + \xi} \right) e^{-qy} dq. \end{aligned}$$

Entonces, el operador

$$\mathcal{G}(t)\phi = \theta(x) \int_0^{+\infty} G(x, y, t)\phi(y)dy,$$

donde

$$G(x, y, t) = J_1(x - y, t) + J_2(x, y, t),$$

se representa en la forma

$$(2.12) \quad \mathcal{G}(t) = \mathcal{J}_1(t) + \mathcal{J}_2(t).$$

En el siguiente lema, damos una estimación para el operador $\mathcal{G}$, en el espacio $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^+)$, para $t < 1$.

LEMA 5. *Las siguiente estimación se cumple,*

$$\|\mathcal{G}(t)\phi\|_{\mathbf{L}^2} \leq C (\|\phi\|_{\mathbf{L}^1} + \|\phi\|_{\mathbf{L}^\infty}).$$

Demstración. Primero, estimamos el operador $\mathcal{J}_1$. Haciendo el cambio de variable $p = qt^{-\frac{1}{\alpha}}$, obtenemos para la función J_1 ,

$$(2.13) \quad |J(r, t)| \leq Ct^{-\frac{1}{\alpha}}.$$

Ahora, hacemos el cambio de variable $z = t^{-\frac{1}{\alpha}}r$,

$$J_1(r, t) = \frac{t^{-\frac{1}{\alpha}}}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{qz-K(q)} dq.$$

Integrando por partes en la última ecuación obtenemos

$$J_1(r, t) = \frac{t^{-\frac{1}{\alpha}}}{2\pi i} \left(\frac{1}{z} \right) \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{-K(q)} de^{qz} = \frac{t^{-\frac{1}{\alpha}}}{2\pi i} \left(\frac{\alpha}{z} \right) \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{K(q)}{q} e^{qz-K(q)} dq$$

Entonces,

$$|J_1(r, t)| \leq Ct^{-\frac{1}{\alpha}} \frac{1}{|z|^{1+\gamma}} \int_{C_\pm} |q|^{\alpha-1-\gamma} e^{-C|q|^\alpha} |dq|,$$

para $\pm r > 0$, donde $C_\pm$ se definen como antes. Así, para $\gamma < \alpha$,

$$(2.14) \quad |J_1(r, t)| \leq Ct^{-\frac{1}{\alpha}} \frac{1}{|z|^{1+\gamma}}.$$

Por lo tanto, de las desigualdades (2.13) y (2.14) se sigue

$$(2.15) \quad |J_1(r, t)| \leq C \frac{t^{-\frac{1}{\alpha}}}{1 + \left(t^{-\frac{1}{\alpha}}|r|\right)^{1+\gamma}}, \quad \gamma < \alpha.$$

Recordemos algunas desigualdades clásicas:

- Desigualdad de Young. Sean $f \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R})$ y $g \in \mathbf{L}^q(\mathbb{R})$, donde $1 \leq p, q \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$. Entonces, la convolución $h(x) \equiv \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy$ pertenece a $\mathbf{L}^r(\mathbb{R})$, donde $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$ y la desigualdad de Young

$$(2.16) \quad \|h\|_{\mathbf{L}^r} \leq \|f\|_{\mathbf{L}^p} \|g\|_{\mathbf{L}^q}$$

se cumple.

- Desigualdad de Minkowski. Sean $f, g \in \mathbf{L}^p$ y $1 \leq p \leq \infty$, entonces

$$(2.17) \quad \|f + g\|_{\mathbf{L}^p} \leq \|f\|_{\mathbf{L}^p} + \|g\|_{\mathbf{L}^p}.$$

- Desigualdad de Interpolación. Sea $f \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R}) \cap \mathbf{L}^q(\mathbb{R})$ with $1 \leq p \leq q \leq \infty$, entonces $f \in \mathbf{L}^r(\mathbb{R})$ para todo $p \leq r \leq q$ y la desigualdad de interpolación se cumple,

$$(2.18) \quad \|f\|_{\mathbf{L}^r} \leq \|f\|_{\mathbf{L}^p}^\alpha \|f\|_{\mathbf{L}^q}^{1-\alpha},$$

donde $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}$ y $0 \leq \alpha \leq 1$.

- Desigualdad entre las medias aritmética y geométrica. Si a y b son no-negativos, entonces

$$(2.19) \quad \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}.$$

De (2.15) y la desigualdad de Young (2.16), obtenemos

$$\|\mathcal{J}_1(t)\phi\|_{\mathbf{L}^2} \leq \|J_1(\cdot, t)\|_{\mathbf{L}^1} \|\phi\|_{\mathbf{L}^2} \leq C \|\phi\|_{\mathbf{L}^2},$$

ya que

$$\|J_1(\cdot, t)\|_{\mathbf{L}^1} \leq C \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{-\frac{1}{\alpha}}}{1 + \left(t^{-\frac{1}{\alpha}}|r|\right)^{1+\gamma}} dr = C \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + |r|^{1+\gamma}} dr \leq C.$$

Finalmente, usando la desigualdad de Interpolación (2.18) y la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica (2.19), se obtiene

$$\|\phi\|_{\mathbf{L}^2} \leq \|\phi\|_{\mathbf{L}^1}^{\frac{1}{2}} \|\phi\|_{\mathbf{L}^\infty}^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2} (\|\phi\|_{\mathbf{L}^1} + \|\phi\|_{\mathbf{L}^\infty}).$$

Por lo tanto,

$$(2.20) \quad \|\mathcal{J}_1(t)\phi\|_{\mathbf{L}^2} \leq C (\|\phi\|_{\mathbf{L}^1} + \|\phi\|_{\mathbf{L}^\infty}).$$

Ahora, estimamos al operador $\mathcal{J}_2$. Primero, por el teorema de Cauchy se sigue para $\text{Re } z < 0$,

$$Z(z, \xi, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^{-qy}}{q - z} \left(\frac{1}{Y^+(q, \xi)} - \frac{1}{Y^-(q, \xi)} \right) dq.$$

Notemos que

$$(2.21) \quad \frac{1}{Y^+} - \frac{1}{Y^-} = \frac{1}{Y^-} \left(\frac{K_1(p) + \xi}{K(p) + \xi} - 1 \right) = \frac{1}{Y^-} \left(\frac{K_1(p) - K(p)}{K(p) + \xi} \right).$$

Entonces, usando (2.21) y las desigualdades $e^{-C|q|y} \leq Cy^{-\gamma}|q|^{-\gamma}$, donde $\operatorname{Re} q > 0$ y $\gamma > 0$, y

$$(2.22) \quad \frac{1}{|K(q) + \xi|} \leq C \frac{1}{|q|^{\alpha(1-\gamma_1)}|\xi|^{\gamma_1}}, \quad 0 < \gamma_1 < 1,$$

se obtiene

$$|Z(z, \xi, y)| \leq C \frac{y^{-\gamma}}{|\xi|^{\gamma_1}} \int_{\mathcal{C}_3} \frac{1}{|q - z|} \frac{1}{|q|^{\gamma - \alpha\gamma_1}} |dq| \leq C \frac{y^{-\gamma}}{|\xi|^{\gamma_1} |z|^{\gamma - \alpha\gamma_1}}.$$

Entonces, usando las desigualdades (2.22) y $\|e^{-C|p|x}\|_{\mathbf{L}^2} \leq C|p|^{-\frac{1}{2}}$, se obtiene para J_2

$$\|J_2(\cdot, y, t)\|_{\mathbf{L}^2} \leq Cy^{-\gamma} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{|d\xi|}{|\xi|^{2\gamma_1}} \int_{\mathcal{C}_2} \frac{|dp|}{|p|^{\frac{1}{2} + \gamma + \alpha(1-2\gamma_1)}} \leq Cy^{-\gamma}.$$

Por lo tanto,

$$\|\mathcal{J}_2(t)\phi\|_{\mathbf{L}^2} \leq \int_0^{+\infty} \|J_2(\cdot, y, t)\|_{\mathbf{L}^2} |\phi(y)| dy \leq C (\|\phi\|_{\mathbf{L}^1} + \|\phi\|_{\mathbf{L}^\infty}).$$

Así, la desigualdad anterior y (2.20) imply la estimación del Lema 5. ■

En el siguiente lema, estableceremos una estimación para el operador de Green $\mathcal{G}$ en el espacio

$$\mathbf{L}^{s,\mu}(\mathbf{R}^+) = \{\phi : \|\phi\|_{\mathbf{L}^{s,\mu}} < \infty\}, \quad \|\phi\|_{\mathbf{L}^{s,\mu}} := \|(1+x)^\mu \phi\|_{\mathbf{L}^s}.$$

LEMA 6. *La siguiente estimación se satisface,*

$$\|\mathcal{G}(t)\phi\|_{\mathbf{L}^{s,\mu}} \leq Ct^{-\frac{1}{\alpha}(\frac{1}{r} - \frac{1}{s} - \mu)} \|\phi\|_{\mathbf{L}^r} + Ct^{-\frac{1}{\alpha}(\frac{1}{r} - \frac{1}{s})} \|\phi\|_{\mathbf{L}^{r,\mu}},$$

donde $-1 < -\frac{1}{\alpha}(\frac{1}{r} - \frac{1}{s} - \mu) < 1$, $1 \leq s < r \leq \infty$ y $0 \leq \mu < 1$.

Demostración. Para estimar el operador de Green $\mathcal{G}$ usamos la ecuación (2.12). Primero, estimamos el operador $\mathcal{J}_1$, definido en (2.10). Usando la desigualdad $x^\mu \leq |x - y|^\mu + y^\mu$, donde $0 \leq \mu \leq 1$, y la desigualdad de Minkowski (2.17), obtenemos

$$\begin{aligned} \|\mathcal{J}_1(t)\phi\|_{\mathbf{L}^{s,\mu}} &\leq \left(\int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} |x - y|^\mu |J_1(x - y, t)| |\phi(y)| dy \right)^s dx \right)^{\frac{1}{s}} \\ &\quad + \left(\int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} y^\mu |J_1(x - y, t)| |\phi(y)| dy \right)^s dx \right)^{\frac{1}{s}}. \end{aligned}$$

Entonces, la desigualdad de Young (2.16) implica

$$(2.23) \quad \|\mathcal{J}_1(t)\phi\|_{\mathbf{L}^{s,\mu}} \leq \|J_1(\cdot, t)\|_{\mathbf{L}^{p,\mu}} \|\phi\|_{\mathbf{L}^r} + \|J_1(\cdot, t)\|_{\mathbf{L}^p} \|\phi\|_{\mathbf{L}^{r,\mu}},$$

donde $\frac{1}{s} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r} - 1$, $1 \leq p, r \leq \infty$, $1 \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{r} \leq 2$ y $0 \leq \mu \leq 1$. Luego, usando la desigualdad (2.15),

$$|J_1(r, t)| \leq C t^{-\frac{1}{\alpha}} \frac{1}{1 + \left(t^{-\frac{1}{\alpha}} |r|\right)^{1+\gamma}}, \quad \gamma < \alpha,$$

obtenemos

$$\|J_1(\cdot, t)\|_{\mathbf{L}^{p,\mu}} \leq C t^{-\frac{1}{\alpha}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{|r|^\mu}{1 + \left(t^{-\frac{1}{\alpha}} |r|\right)^{1+\gamma}} \right)^p dr \right)^{\frac{1}{p}},$$

o bien,

$$\|J_1(\cdot, t)\|_{\mathbf{L}^{p,\mu}} \leq C t^{-\frac{1}{\alpha}(1-\frac{1}{p}-\mu)} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{|r|^\mu}{(1+|r|)^{1+\gamma}} \right)^p dr \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Entonces,

$$\|J_1(\cdot, t)\|_{\mathbf{L}^{p,\mu}} \leq C t^{-\frac{1}{\alpha}(1-\frac{1}{p}-\mu)},$$

siempre que $1 + \gamma - \mu > \frac{1}{p}$. Recordando que $\frac{1}{s} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r} - 1$, se sigue

$$(2.24) \quad \|J_1(\cdot, t)\|_{\mathbf{L}^{p,\mu}} \leq C t^{-\frac{1}{\alpha}(\frac{1}{r}-\frac{1}{s}-\mu)},$$

donde $\frac{1}{r} - \frac{1}{s} - \mu + \gamma > 0$. Notemos que $-\frac{1}{\alpha}(\frac{1}{r} - \frac{1}{s} - \mu) < 1$, ya que $\gamma < \alpha$. Sustituyendo (2.24) en (2.23), obtenemos

$$(2.25) \quad \|\mathcal{J}_1(t)\phi\|_{\mathbf{L}^{s,\mu}} \leq C t^{-\frac{1}{\alpha}(\frac{1}{r}-\frac{1}{s}-\mu)} \|\phi\|_{\mathbf{L}^r} + C t^{-\frac{1}{\alpha}(\frac{1}{r}-\frac{1}{s})} \|\phi\|_{\mathbf{L}^{r,\mu}},$$

donde $-\frac{1}{\alpha}(\frac{1}{r} - \frac{1}{s} - \mu) < 1$, $1 \leq s, r \leq \infty$ y $0 \leq \mu \leq 1$. Ahora, estimaremos el operador $\mathcal{J}_2$, definido en (2.11). Primero, notemos que la función J_2 , definida por

$$\begin{aligned} J_2(x, y, t) &= -\frac{1}{(2\pi i)^3} \int_{\mathcal{C}_1} d\xi e^{\xi t} \int_{\mathcal{C}_2} dp e^{px} \frac{Y^+(p, \xi)}{K(p) + \xi} \\ &\quad \times \int_{\mathcal{C}_3} \frac{1}{q-p} \frac{1}{Y^-(q, \xi)} \left(\frac{K_1(q) + \xi}{K(q) + \xi} \right) e^{-qy} dq, \end{aligned}$$

satisface la siguiente desigualdad,

$$\begin{aligned} |J_2(x, y, t)| &\leq C \int_{\mathcal{C}_1} |d\xi| e^{-C|\xi|t} \int_{\mathcal{C}_2} |dp| e^{-C|p|x} \frac{1}{|K(p) + \xi|} \\ &\quad \times \int_{\mathcal{C}_3} \frac{1}{|q-p|} e^{-C|q|y} |dq|. \end{aligned}$$

Entonces, usando

$$|\mathcal{J}_2(t)\phi| \leq \int_0^{+\infty} |J_2(x, y, t)| |\phi(y)| dy,$$

obtenemos

$$\begin{aligned} |\mathcal{J}_2(t)\phi| &\leq C \int_{\mathcal{C}_1} |d\xi| e^{-C|\xi|t} \int_{\mathcal{C}_2} |dp| e^{-C|p|x} \frac{1}{|K(p) + \xi|} \\ &\quad \times \int_{\mathcal{C}_3} |dq| \frac{1}{|q-p|} \int_0^{+\infty} e^{-C|q|y} |\phi(y)| dy. \end{aligned}$$

Sustituyendo en la desigualdad anterior la estimación

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-C|q|y} |\phi(y)| dy &\leq \left\| e^{-C|q|y} \right\|_{\mathbf{L}^t} \|\phi\|_{\mathbf{L}^r} \\ &= C|q|^{-\frac{1}{t}} \|\phi\|_{\mathbf{L}^r}, \end{aligned}$$

donde $\frac{1}{t} + \frac{1}{r} = 1$, se obtiene

$$\begin{aligned} |\mathcal{J}_2(t)\phi| &\leq C \|\phi\|_{\mathbf{L}^r} \int_{\mathcal{C}_1} |d\xi| e^{-C|\xi|t} \int_{\mathcal{C}_2} |dp| e^{-C|p|x} \frac{1}{|K(p) + \xi|} \\ &\quad \times \int_{\mathcal{C}_3} \frac{1}{|q-p|} \frac{1}{|q|^{\frac{1}{t}}} |dq|, \end{aligned}$$

o bien, usando la estimación

$$\int_{\mathcal{C}_3} \frac{1}{|q-p|} \frac{1}{|q|^{\frac{1}{t}}} |dq| \leq C \frac{1}{|p|^{\frac{1}{t}}},$$

obtenemos la desigualdad

$$|\mathcal{J}_2(t)\phi| \leq C \|\phi\|_{\mathbf{L}^r} \int_{\mathcal{C}_1} |d\xi| e^{-C|\xi|t} \int_{\mathcal{C}_2} e^{-C|p|x} \frac{1}{|K(p) + \xi|} \frac{1}{|p|^{\frac{1}{t}}} |dp|.$$

Luego,

$$\|\mathcal{J}_2(t)\phi\|_{\mathbf{L}^{s,\mu}} \leq C \|\phi\|_{\mathbf{L}^r} \int_{\mathcal{C}_1} |d\xi| e^{-C|\xi|t} \int_{\mathcal{C}_2} \left\| e^{-C|p|x} \right\|_{\mathbf{L}^{s,\mu}} \frac{1}{|K(p) + \xi|} \frac{1}{|p|^{\frac{1}{t}}} |dp|.$$

Ahora, sustituyendo en la desigualdad anterior la ecuación

$$\left\| e^{-C|p|x} \right\|_{\mathbf{L}^{s,\mu}} = C \frac{1}{|p|^{\frac{1}{s} + \mu}},$$

obtenemos

$$\|\mathcal{J}_2(t)\phi\|_{\mathbf{L}^{s,\mu}} \leq C \|\phi\|_{\mathbf{L}^r} \int_{\mathcal{C}_1} |d\xi| e^{-C|\xi|t} \int_{\mathcal{C}_2} \frac{1}{|K(p) + \xi|} \frac{1}{|p|^{\frac{1}{t} + \frac{1}{s} + \mu}} |dp|,$$

o bien, recordando que $\frac{1}{t} + \frac{1}{r} = 1$,

$$\|\mathcal{J}_2(t)\phi\|_{\mathbf{L}^{s,\mu}} \leq C \|\phi\|_{\mathbf{L}^r} \int_{\mathcal{C}_1} |d\xi| e^{-C|\xi|t} \int_{\mathcal{C}_2} \frac{1}{|K(p) + \xi|} \frac{1}{|p|^{1 - \frac{1}{r} + \frac{1}{s} + \mu}} |dp|.$$

Entonces,

$$\|\mathcal{J}_2(t)\phi\|_{\mathbf{L}^{s,\mu}} \leq C \|\phi\|_{\mathbf{L}^r} \int_{\mathcal{C}_1} e^{-C|\xi|t} |\xi|^{\frac{1}{\alpha}(\frac{1}{r} - \frac{1}{s} - \mu) - 1} |d\xi|,$$

donde $0 < \frac{1}{r} - \frac{1}{s} - \mu < \alpha$. Por lo tanto,

$$(2.26) \quad \|\mathcal{J}_2(t)\phi\|_{\mathbf{L}^{s,\mu}} \leq Ct^{-\frac{1}{\alpha}(\frac{1}{r}-\frac{1}{s}-\mu)} \|\phi\|_{\mathbf{L}^r},$$

donde $0 < \frac{1}{r} - \frac{1}{s} - \mu < \alpha$, $1 \leq r < s \leq \infty$ y $0 \leq \mu < 1$. Finalmente, de las estimaciones (2.25) y (2.26) se obtiene

$$\|\mathcal{G}(t)\phi\|_{\mathbf{L}^{s,\mu}} \leq Ct^{-\frac{1}{\alpha}(\frac{1}{r}-\frac{1}{s}-\mu)} \|\phi\|_{\mathbf{L}^r} + Ct^{-\frac{1}{\alpha}(\frac{1}{r}-\frac{1}{s})} \|\phi\|_{\mathbf{L}^{r,\mu}},$$

donde $-1 < -\frac{1}{\alpha}(\frac{1}{r} - \frac{1}{s} - \mu) < 1$, $1 \leq r < s \leq \infty$ y $0 \leq \mu < 1$. Así, el Lema 6 ha sido demostrado. ■

Finalizamos esta sección con un Lema, en el que reunimos los resultados de los Lemas 3, 4, 5 y 6.

LEMA 7. *Las siguientes estimaciones se satisfacen,*

$$\|\mathcal{G}(t)\phi\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq C\{t\}^{-\frac{\gamma}{\alpha}} \langle t \rangle^{-\frac{1}{\alpha}} (\|\phi\|_{\mathbf{L}^1} + \|\phi\|_{\mathbf{L}^\infty}),$$

$$\|\mathcal{G}(t)\phi\|_{\mathbf{L}^2} \leq C(\|\phi\|_{\mathbf{L}^1} + \|\phi\|_{\mathbf{L}^\infty}),$$

$$\|\mathcal{G}(t)\phi\|_{\mathbf{L}^{s,\mu}} \leq Ct^{-\frac{1}{\alpha}(\frac{1}{r}-\frac{1}{s}-\mu)} \|\phi\|_{\mathbf{L}^r} + Ct^{-\frac{1}{\alpha}(\frac{1}{r}-\frac{1}{s})} \|\phi\|_{\mathbf{L}^{r,\mu}}, \quad 0 \leq \mu < 1,$$

donde $0 < \gamma < \alpha$, $|\frac{1}{r} - \frac{1}{s} - \mu| < \alpha$ y $1 \leq r < s \leq \infty$.

El problema no-lineal

En este capítulo estudiaremos el siguiente problema no-lineal sobre una semirrecta con valor inicial,

$$(0.27) \quad \begin{cases} u_t + \mathcal{N}(u) + |\partial_x|^\alpha u = 0, & t > 0, x > 0; \\ u(x, 0) = u_0(x), & x > 0, \end{cases}$$

donde $\mathcal{N}(u) = |u|^\sigma u$, $\sigma > 1$, y $|\partial_x|^\alpha$ es el operador de diferenciación módulo-fraccionario definido por

$$|\partial_x|^\alpha u(x, t) = \theta(x) \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{px} |p|^\alpha \hat{u}(p, t) dp, \quad \alpha \in (0, 1).$$

Aquí, $\hat{u}(p, t)$ es la transformada de Laplace de $u(x, t)$ con respecto a x ,

$$\hat{u}(p, t) = \mathcal{L}_{x \rightarrow p}\{u(x, t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-px} u(x, t) dx,$$

y $\theta(x)$ es la función de Heaviside,

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

1. Existencia local en tiempo

En esta sección demostraremos la existencia local en tiempo de soluciones para el problema de frontera con valor inicial (0.27). Por el principio de Duhamel podemos reescribir el problema (0.27) como la siguiente ecuación integral

$$(1.1) \quad u(t) = \mathcal{G}(t)u_0 - \int_0^t \mathcal{G}(t - \tau) \mathcal{N}(u)(\tau) d\tau,$$

donde el operador de Green $\mathcal{G}$ del problema lineal correspondiente se define mediante

$$\mathcal{G}(t)\phi = \int_0^{+\infty} G(x, y, t) \phi(y) dy.$$

Así, la ecuación (1.1) es equivalente a

$$(1.2) \quad \begin{aligned} u(x, t) = & \int_0^{+\infty} G(x, y, t) u_0(y) dy \\ & - \int_0^t d\tau \int_0^{+\infty} G(x, y, t - \tau) \mathcal{N}(u(y, \tau)) dy \end{aligned}$$

A continuación, demostraremos que si una función u satisface la ecuación anterior, entonces también satisface la ecuación (0.27). Primero, notemos que es suficiente probar que la función de Green G satisface la ecuación lineal asociada a (0.27), $G_t + |\partial_x|^\alpha G = 0$, y que $G(x, y, 0) = \delta(y - x)$. En efecto, asumiendo que se cumplen las condiciones anteriores, obtenemos usando (1.2),

$$\begin{aligned} u_t + |\partial_x|^\alpha u &= \int_0^{+\infty} (G_t + |\partial_x|^\alpha G) u_0(y) dy \\ &\quad - \int_0^t d\tau \int_0^{+\infty} (G_t + |\partial_x|^\alpha G) \mathcal{N}(u(y, t - \tau)) dy \\ &\quad - \int_0^{+\infty} G(x, y, 0) \mathcal{N}(u(y, t)) dy = -\mathcal{N}(u). \end{aligned}$$

Así, basta probar la siguiente proposición:

PROPOSICIÓN 9. *La función de Green G , definida en (1.1), satisface las ecuaciones: $G_t + |\partial_x|^\alpha G = 0$ y $G(x, y, 0) = \delta(y - x)$.*

Demostración. Primero, demostremos que $G(x, y, 0) = \delta(y - x)$. En efecto, usamos que $G = J_1 + J_2$, donde

$$J_1(x - y, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{p(x-y) - K(p)t} dp$$

y

$$J_2(x, y, t) = -\frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{-i\infty}^{i\infty} d\xi e^{\xi t} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{px} \frac{Y^+(p, \xi)}{K(p) + \xi} Z^+(p, \xi, y) dp.$$

Como $J_1(x - y, 0) = \delta(y - x)$, es suficiente demostrar que $J_2(x, y, 0) = 0$. Primero, notemos que para $\text{Re } p < 0$ el teorema de Cauchy implica que

$$Z = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^{-qy}}{q - p} \frac{1}{Y^+(q, \xi)} dq = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^{-qy}}{q - p} \left(\frac{1}{Y^+(q, \xi)} - e^{-i\frac{\pi}{4}\alpha} \right) dq,$$

donde

$$\left| \frac{1}{Y^+(q, \xi)} - e^{-i\frac{\pi}{4}\alpha} \right| \leq C \frac{|q|^{\alpha\gamma}}{|\xi|^\gamma}, \quad 0 < \gamma \leq 1,$$

para $|\xi| \geq |q|^\alpha$. Además, de la desigualdad anterior y la analiticidad de la función

$$I(p, \xi) = \frac{Y^+(p, \xi)}{K(p) + \xi} \left(\frac{1}{Y^+(q, \xi)} - e^{-i\frac{\pi}{4}\alpha} \right),$$

con respecto de ξ , se obtiene

$$(1.3) \quad \int_{\mathcal{C}_1} I(p, \xi) d\xi = 0,$$

donde

$$\mathcal{C}_1 = \left\{ \xi \in \left(\infty e^{-i(\frac{\pi}{2} + \epsilon_1)}, 0 \right) \cup \left(0, \infty e^{i(\frac{\pi}{2} + \epsilon_1)} \right) \right\}, \quad \epsilon_1 > 0.$$

Por otro lado, moviendo los contornos de integración y usando el Teorema de Fubini, obtenemos

$$(1.4) \quad J_2(x, y, t) = -\frac{1}{(2\pi i)^3} \int_{\mathcal{C}_2} d\xi e^{px} \int_{\mathcal{C}_3} dq \frac{e^{-qy}}{q-p} \int_{\mathcal{C}_1} e^{\xi t} I(p, \xi) d\xi,$$

donde

$$\mathcal{C}_2 = \left\{ \xi \in \left(\infty e^{-i(\frac{\pi}{2} + \epsilon_1)}, 0 \right) \cup \left(0, \infty e^{i(\frac{\pi}{2} + \epsilon_1)} \right) \right\}, \quad \epsilon_1 > 0.$$

y

$$\mathcal{C}_3 = \left\{ \xi \in \left(\infty e^{-i(\frac{\pi}{2} - \epsilon_1)}, 0 \right) \cup \left(0, \infty e^{i(\frac{\pi}{2} - \epsilon_1)} \right) \right\}, \quad \epsilon_1 > 0.$$

Por lo tanto, las ecuaciones (1.3) y (1.4) implican que $J(x, y, 0) = 0$. Ahora, demostramos que se cumple $G_t + |\partial_x|^\alpha G = 0$. En efecto, tomando la transformada de Laplace con respecto a x y t en ecuación (1.1), se obtiene

$$\widehat{\widehat{G}}(p, \xi, y) = -\frac{1}{K(p) + \xi} Y^+(p, \xi) Z^-(p, \xi, y).$$

Luego,

$$\xi \widehat{\widehat{G}} = -\frac{\xi}{K(p) + \xi} Y^+ Z^- = -Y^+ Z^- + K(p) \frac{1}{K(p) + \xi} Y^+ Z^-,$$

o bien,

$$\xi \widehat{\widehat{G}} = -Y^+ Z^- - K(p) \widehat{\widehat{G}}.$$

Sustituyendo $Z^- = Z^+ - \frac{e^{-py}}{Y^+}$ en la ecuación anterior se obtiene

$$\xi \widehat{\widehat{G}} - e^{-py} + K(p) \widehat{\widehat{G}} = -Y^+ Z^+.$$

Ahora, tomando la transformada de Laplace inversa, con respecto de p , obtenemos

$$(1.5) \quad \begin{aligned} & \xi \widehat{G}(x, y, \xi) - \delta(y - x) + \theta(x) \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{px} K(p) \widehat{\widehat{G}}(p, y, \xi) dp \\ &= -\theta(x) \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{px} Y^+(p, \xi) Z^+(p, \xi, y) dp. \end{aligned}$$

Pero,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{px} Y^+ Z^+ dp = 0, \quad \text{ya que} \quad |Z^+(p, \xi, y)| \leq C y^\mu \frac{|\xi|}{|p|^{\alpha-\mu}}.$$

Por lo tanto, tomando la transformada de Laplace inversa, con respecto a ξ , en (1.5) se obtiene $G_t + |\partial_x|^\alpha G = 0$. ■

Con la finalidad de demostrar la existencia de solución para la ecuación integral (1.1), consideremos el operador integral

$$(1.6) \quad \mathcal{M}(u) = \mathcal{G}(t)u_0 - \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau) \mathcal{N}(u)(\tau) d\tau.$$

Ahora, definimos los siguientes espacios métricos en $\mathbf{R}^+$:

$$\mathbf{L}^{s,\mu} = \{ \phi : \|\phi\|_{\mathbf{L}^{s,\mu}} < \infty \}, \quad \|\phi\|_{\mathbf{L}^{s,\mu}} := \|(1+x)^\mu \phi\|_{\mathbf{L}^s},$$

$$\mathbf{Z} = \{\phi \in \mathbf{L}^{1,\mu} \cap \mathbf{L}^\infty : \|\phi\|_{\mathbf{Z}} < \infty\},$$

donde $\mu \in (0, 1)$, con la norma

$$\|\phi\|_{\mathbf{Z}} = \|\phi\|_{\mathbf{L}^1} + \|\phi\|_{\mathbf{L}^{1,\mu}} + \|\phi\|_{\mathbf{L}^\infty}$$

y

$$\mathbf{X}_T = \left\{ \phi \in \mathbf{C}([0, T]; \mathbf{L}^2) \cap \mathbf{C}((0, T]; \mathbf{L}^{s,\mu} \cap \mathbf{L}^\infty) : \|\phi\|_{\mathbf{X}_T} < \infty \right\},$$

donde $\mu \in (0, 1)$ y $s > 1$, con la norma

$$\|\phi\|_{\mathbf{X}_T} = \sup_{t \in [0, T]} \|\phi\|_{\mathbf{L}^2} + \sup_{t \in (0, T]} t^{\frac{\gamma}{\alpha}} (\|\phi\|_{\mathbf{L}^s} + \|\phi\|_{\mathbf{L}^{s,\mu}} + \|\phi\|_{\mathbf{L}^\infty}),$$

donde $\gamma = 1 - \frac{1}{s}$. En el siguiente teorema demostraremos la existencia local en tiempo de soluciones para el problema de frontera con valor inicial (0.27).

TEOREMA 17. *Sea el dato inicial $u_0 \in \mathbf{Z}$. Entonces, para algún $T > 0$ existe una solución única $u \in \mathbf{X}_T$ para el problema de frontera con valor inicial (0.27). Además, el tiempo de existencia T satisface la estimación*

$$T \leq C \|\phi\|_{\mathbf{Z}}^{-\frac{\sigma}{\kappa}},$$

donde $\kappa > 0$.

Demostración. Primero, notemos que el Lema 7 implica que el operador de Green $\mathcal{G} : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{X}_T$ satisface la estimación

$$\|\mathcal{G}(t)u_0\|_{\mathbf{X}_T} \leq C \|u_0\|_{\mathbf{Z}}.$$

Ahora, demostremos que se cumple la estimación

$$(1.7) \quad \left\| \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau) (\mathcal{N}(u)(\tau) - \mathcal{N}(v)(\tau)) d\tau \right\|_{\mathbf{X}_T} \leq CT^\kappa \|u - v\|_{\mathbf{X}_T} (\|u\|_{\mathbf{X}_T} + \|v\|_{\mathbf{X}_T})^\sigma,$$

para todo $u, v \in \mathbf{X}_T$, donde $\kappa \in (0, 1)$ y $\sigma > 1$. En efecto, recordando que $\mathcal{N}(u) = |u|^\sigma u$, donde $\sigma > 1$, y usando la desigualdad

$$(1.8) \quad ||u|^\sigma u - |v|^\sigma v| \leq C|u - v| (|u|^\sigma + |v|^\sigma),$$

obtenemos

$$(1.9) \quad \begin{aligned} \|\mathcal{N}(u)(\tau) - \mathcal{N}(v)(\tau)\|_{\mathbf{L}^{1,\mu}} &\leq C\|u - v\|_{\mathbf{L}^\infty} \left(\|u\|_{\mathbf{L}^{\sigma, \frac{\mu}{\sigma}}}^\sigma + \|v\|_{\mathbf{L}^{\sigma, \frac{\mu}{\sigma}}}^\sigma \right) \\ &\leq C\tau^{-\frac{\gamma}{\alpha}(\sigma+1)} \|u - v\|_{\mathbf{X}_T} (\|u\|_{\mathbf{X}_T} + \|v\|_{\mathbf{X}_T})^\sigma, \end{aligned}$$

donde $0 \leq \mu < 1$, y

$$(1.10) \quad \begin{aligned} \|\mathcal{N}(u)(\tau) - \mathcal{N}(v)(\tau)\|_{\mathbf{L}^\infty} &\leq C\|u - v\|_{\mathbf{L}^\infty} (\|u\|_{\mathbf{L}^\infty}^\sigma + \|v\|_{\mathbf{L}^\infty}^\sigma) \\ &\leq C\tau^{-\frac{\gamma}{\alpha}(\sigma+1)} \|u - v\|_{\mathbf{X}_T} (\|u\|_{\mathbf{X}_T} + \|v\|_{\mathbf{X}_T})^\sigma. \end{aligned}$$

Luego, usando (1.9), (1.10) y las estimaciones en el Lema 7, obtenemos

$$\begin{aligned}
 (1.11) \quad & \|\mathcal{G}(t-\tau) (\mathcal{N}(u)(\tau) - \mathcal{N}(v)(\tau))\|_{\mathbf{L}^2} \\
 & \leq C\tau^{-\frac{\gamma}{\alpha}(\sigma+1)} \|u-v\|_{\mathbf{X}_T} (\|u\|_{\mathbf{X}_T} + \|v\|_{\mathbf{X}_T})^\sigma, \\
 & \|\mathcal{G}(t-\tau) (\mathcal{N}(u)(\tau) - \mathcal{N}(v)(\tau))\|_{\mathbf{L}^{s,\mu}} \\
 (1.12) \quad & \leq C \left((t-\tau)^{-\frac{1}{\alpha}(\gamma-\mu)} \tau^{-\frac{\gamma}{\alpha}(\sigma+1)} \right. \\
 & \quad \left. + (t-\tau)^{-\frac{\gamma}{\alpha}} \tau^{-\frac{\gamma}{\alpha}(\sigma+1)} \right) \|u-v\|_{\mathbf{X}_T} (\|u\|_{\mathbf{X}_T} + \|v\|_{\mathbf{X}_T})^\sigma,
 \end{aligned}$$

donde $0 \leq \mu < 1$, y

$$\begin{aligned}
 (1.13) \quad & \|\mathcal{G}(t-\tau) (\mathcal{N}(u)(\tau) - \mathcal{N}(v)(\tau))\|_{\mathbf{L}^\infty} \\
 & \leq C(t-\tau)^{-\frac{\gamma}{\alpha}} \tau^{-\frac{\gamma}{\alpha}(\sigma+1)} \|u-v\|_{\mathbf{X}_T} (\|u\|_{\mathbf{X}_T} + \|v\|_{\mathbf{X}_T})^\sigma,
 \end{aligned}$$

donde $\gamma = 1 - \frac{1}{s} < \alpha$. Integrando con respecto a τ en el intervalo $[0, t]$, de (1.11), (1.12) y (1.13), se sigue para $1 < \sigma < \frac{\alpha}{\gamma} - 1$,

$$\begin{aligned}
 (1.14) \quad & \int_0^t \|\mathcal{G}(t-\tau) (\mathcal{N}(u)(\tau) - \mathcal{N}(v)(\tau))\|_{\mathbf{L}^2} \\
 & \leq Ct^{1-\frac{\gamma}{\alpha}(\sigma+1)} \|u-v\|_{\mathbf{X}_T} (\|u\|_{\mathbf{X}_T} + \|v\|_{\mathbf{X}_T})^\sigma,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (1.15) \quad & \int_0^t \|\mathcal{G}(t-\tau) (\mathcal{N}(u)(\tau) - \mathcal{N}(v)(\tau))\|_{\mathbf{L}^{s,\mu}} \\
 & \leq Ct^{-\frac{\gamma}{\alpha}} \left(t^{1-\frac{\gamma}{\alpha}(\sigma+1)} + t^{1-\frac{\gamma}{\alpha}(\sigma+1)+\frac{\mu}{\alpha}} \right) \|u-v\|_{\mathbf{X}_T} (\|u\|_{\mathbf{X}_T} + \|v\|_{\mathbf{X}_T})^\sigma,
 \end{aligned}$$

donde $0 \leq \mu < 1$, y

$$\begin{aligned}
 (1.16) \quad & \int_0^t \|\mathcal{G}(t-\tau) (\mathcal{N}(u)(\tau) - \mathcal{N}(v)(\tau))\|_{\mathbf{L}^\infty} \\
 & \leq Ct^{-\frac{\gamma}{\alpha}} t^{1-\frac{\gamma}{\alpha}(\sigma+1)} \|u-v\|_{\mathbf{X}_T} (\|u\|_{\mathbf{X}_T} + \|v\|_{\mathbf{X}_T})^\sigma.
 \end{aligned}$$

Entonces, la definición de la norma en el espacio $\mathbf{X}_T$ y las estimaciones (1.14), (1.15) y (1.16) implican

$$\begin{aligned}
 & \left\| \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau) (\mathcal{N}(u)(\tau) - \mathcal{N}(v)(\tau)) d\tau \right\|_{\mathbf{X}_T} \\
 & \leq CT^{1-\frac{\gamma}{\alpha}(\sigma+1)+\frac{\mu}{\alpha}} \|u-v\|_{\mathbf{X}_T} (\|u\|_{\mathbf{X}_T} + \|v\|_{\mathbf{X}_T})^\sigma,
 \end{aligned}$$

donde $1 < \sigma < \frac{\alpha}{\gamma} - 1$. Recordando que $\gamma = 1 - \frac{1}{s}$, obtenemos

$$\begin{aligned}
 & \left\| \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau) (\mathcal{N}(u)(\tau) - \mathcal{N}(v)(\tau)) d\tau \right\|_{\mathbf{X}_T} \\
 & \leq CT^\kappa \|u-v\|_{\mathbf{X}_T} (\|u\|_{\mathbf{X}_T} + \|v\|_{\mathbf{X}_T})^\sigma,
 \end{aligned}$$

donde $\kappa = 1 - \frac{1}{\alpha} \left(1 - \frac{1}{s}\right) (\sigma + 1) + \frac{\mu}{\alpha}$. Por lo tanto, la estimación (1.7) ha sido demostrada. Ahora, aplicaremos el principio de contracción sobre una bola de radio $\rho > 0$ en el espacio métrico completo $\mathbf{X}_T$,

$$\mathbf{X}_{T,\rho} = \{\phi \in \mathbf{X}_T : \|\phi\|_{\mathbf{X}_T} \leq \rho\},$$

donde

$$\rho = 2C\|u_0\|_{\mathbf{Z}}.$$

Aquí, la constante C coincide con la que aparece en la estimación (1.7). Primero, demostremos que se cumple

$$(1.17) \quad \|\mathcal{M}(u)\|_{\mathbf{X}_T} \leq \rho,$$

donde $u \in \mathbf{X}_{T,\rho}$. En efecto, de la fórmula integral (1.6) y la estimación (1.7) (con $v \equiv 0$) se obtiene

$$\begin{aligned} \|\mathcal{M}(u)\|_{\mathbf{X}_T} &\leq \|\mathcal{G}(t)u_0\|_{\mathbf{X}_T} + \left\| \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau)\mathcal{N}(u)(\tau) d\tau \right\|_{\mathbf{X}_T} \\ &\leq C\|u_0\|_{\mathbf{Z}} + CT^\kappa \|u\|_{\mathbf{X}_T}^{\sigma+1} \\ &\leq \frac{\rho}{2} + CT^\kappa \rho^{\sigma+1} \leq \rho, \end{aligned}$$

siempre que $T > 0$ sea suficientemente pequeño. Por lo tanto, el operador $\mathcal{M}$ transforma una bola de radio $\rho > 0$ en sí misma, en el espacio $\mathbf{X}_T$. Como en la demostración de (1.17), tenemos para $u, v \in \mathbf{X}_{T,\rho}$

$$\begin{aligned} \|\mathcal{M}(u) - \mathcal{M}(v)\|_{\mathbf{X}_T} &\leq \left\| \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau) (\mathcal{N}(u)(\tau) - \mathcal{N}(v)(\tau)) d\tau \right\|_{\mathbf{X}_T} \\ &\leq CT^\kappa \|u - v\|_{\mathbf{X}_T} (\|u\|_{\mathbf{X}_T} + \|v\|_{\mathbf{X}_T})^\sigma \\ &\leq CT^\kappa (2\rho)^\sigma \leq \frac{1}{2} \|u - v\|_{\mathbf{X}_T}, \end{aligned}$$

ya que $T > 0$ es suficientemente pequeño. Así, $\mathcal{M}$ es una contracción en $\mathbf{X}_{T,\rho}$. Por lo tanto, existe una única solución $u \in \mathbf{X}_T$ para el problema de Cauchy (0.27). El Teorema 17 ha sido demostrado. ■

2. Existencia global en tiempo

En esta sección demostraremos la existencia global en tiempo, para datos iniciales pequeños, de soluciones para el problema de frontera con valor inicial (0.27). Primero, definimos los símbolos $\langle t \rangle = 1 + t$ y $\{t\} = \frac{t}{\langle t \rangle}$, $t > 0$. El siguiente lema será de gran utilidad.

LEMA 8. *Se satisface la siguiente estimación*

$$(2.1) \quad \begin{aligned} I(t) &= \int_0^t \{t - \tau\}^{-\alpha_1} \langle t - \tau \rangle^{-\alpha_2} \{\tau\}^{-\beta_1} \langle \tau \rangle^{-\beta_2} d\tau \\ &\leq C \{t\}^{1-\alpha_1-\beta_1} \langle t \rangle^{1-\eta}, \end{aligned}$$

donde $\eta = \max\{\alpha_1 + \beta_2, \alpha_2 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2\}$, siempre que $\alpha_1, \beta_1 < 1$.

Demostración. Primero se divide el intervalo de integración en la siguiente forma:

$$\int_0^t = \int_0^1 + \int_1^{\frac{t}{2}} + \int_{\frac{t}{2}}^{t-1} + \int_{t-1}^t.$$

Luego, se consideran los casos $t \ll 1$ y $t \gg 1$, para cada una de las integrales. ■

Ahora, definimos los siguientes espacios métricos en $\mathbf{R}^+$:

$$\mathbf{L}^{s,\mu} = \{\phi : \|\phi\|_{\mathbf{L}^{s,\mu}} < \infty\}, \quad \|\phi\|_{\mathbf{L}^{s,\mu}} := \|(1+x)^\mu \phi\|_{\mathbf{L}^s},$$

$$\mathbf{Z} = \{\phi \in \mathbf{L}^{1,\mu} \cap \mathbf{L}^\infty : \|\phi\|_{\mathbf{Z}} < \infty\},$$

donde $\mu \in (0, 1)$, con la norma

$$\|\phi\|_{\mathbf{Z}} = \|\phi\|_{\mathbf{L}^1} + \|\phi\|_{\mathbf{L}^{1,\mu}} + \|\phi\|_{\mathbf{L}^\infty}$$

y

$$\mathbf{X} = \left\{ \phi \in \mathbf{C}([0, \infty); \mathbf{L}^2) \cap \mathbf{C}((0, \infty); \mathbf{L}^{s,\mu} \cap \mathbf{L}^\infty) : \|\phi\|_{\mathbf{X}} < \infty \right\},$$

donde $\mu \in (0, 1)$ y $s > 1$, con la norma

$$\|\phi\|_{\mathbf{X}} = \sup_{t \geq 0} \|\phi\|_{\mathbf{L}^2} + \sup_{t > 0} \{t\}^{\frac{\gamma}{\alpha}} \left(\langle t \rangle^{\frac{\gamma}{\alpha}} \|\phi\|_{\mathbf{L}^s} + \langle t \rangle^{\frac{1}{\alpha}(\gamma-\mu)} \|\phi\|_{\mathbf{L}^{s,\mu}} + \langle t \rangle^{\frac{1}{\alpha}} \|\phi\|_{\mathbf{L}^\infty} \right),$$

donde $|\gamma - \mu| < \alpha$ y $\gamma = 1 - \frac{1}{s}$.

En el siguiente teorema demostraremos la existencia global en tiempo de soluciones para el problema de frontera con valor inicial (0.27).

TEOREMA 18. *Sea $\sigma > 1 + \alpha$. Sea el dato inicial $u_0 \in \mathbf{Z}$, con la norma $\|u_0\|_{\mathbf{Z}}$ suficientemente pequeña. Entonces, existe una solución única $u \in \mathbf{X}$ para el problema de frontera con valor inicial (0.27). Además, se cumple la estimación $\|u_0\|_{\mathbf{X}} \leq C \|u_0\|_{\mathbf{Z}}$.*

Demostración. Por el el teorema de existencia local, Teorema 17, se sigue que la solución global (si existe) es única. En efecto, procediendo por contradicción, suponemos que existen dos soluciones globales con el mismo dato inicial. Y que esas soluciones son diferentes para algún tiempo $t > 0$. En virtud de la continuidad de soluciones con respecto al tiempo, podemos encontrar un segmento de tiempo máximo $[0, T]$, donde las soluciones son iguales, pero para $t > T$ son diferentes. Ahora, aplicamos el teorema de existencia local tomando el tiempo inicial T y obtenemos que esas soluciones coinciden en algún intervalo $[T, T_1]$, lo cual nos da una contradicción con el hecho de que T es el tiempo máximo de coincidencia. Así, la meta principal de la prueba del Teorema 18 es demostrar la existencia global en tiempo de soluciones.

Primero, notemos que el Lema 7 implica que el operador de Green $\mathcal{G} : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{X}$ satisface la estimación

$$\|\mathcal{G}(t)u_0\|_{\mathbf{X}} \leq C \|u_0\|_{\mathbf{Z}}.$$

Ahora, demostremos que se cumple

$$(2.2) \quad \left\| \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau) (\mathcal{N}(u)(\tau) - \mathcal{N}(v)(\tau)) d\tau \right\|_{\mathbf{X}} \\ \leq C \|u - v\|_{\mathbf{X}} (\|u\|_{\mathbf{X}} + \|v\|_{\mathbf{X}})^\sigma,$$

para todo $u, v \in \mathbf{X}$, donde $\sigma > 1 + \alpha$. En efecto, recordando que $\mathcal{N}(u) = |u|^\sigma u$, donde $\sigma > 1 + \alpha$, y usando la desigualdad (1.8), obtenemos

$$(2.3) \quad \|\mathcal{N}(u)(\tau) - \mathcal{N}(v)(\tau)\|_{\mathbf{L}^{1,\mu}} \leq C \|u - v\|_{\mathbf{L}^\infty} \left(\|u\|_{\mathbf{L}^{\sigma, \frac{\mu}{\sigma}}}^\sigma + \|v\|_{\mathbf{L}^{\sigma, \frac{\mu}{\sigma}}}^\sigma \right) \\ \leq C \{\tau\}^{-\frac{\gamma}{\alpha}(\sigma+1)} \langle \tau \rangle^{-\frac{1}{\alpha}(\gamma\sigma+1-\mu)} \|u - v\|_{\mathbf{X}} (\|u\|_{\mathbf{X}} + \|v\|_{\mathbf{X}})^\sigma,$$

donde $0 \leq \mu < 1$, y

$$(2.4) \quad \|\mathcal{N}(u)(\tau) - \mathcal{N}(v)(\tau)\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq C \|u - v\|_{\mathbf{L}^\infty} (\|u\|_{\mathbf{L}^\infty}^\sigma + \|v\|_{\mathbf{L}^\infty}^\sigma) \\ \leq C \{\tau\}^{-\frac{\gamma}{\alpha}(\sigma+1)} \langle \tau \rangle^{-\frac{1}{\alpha}(\sigma+1)} \|u - v\|_{\mathbf{X}} (\|u\|_{\mathbf{X}} + \|v\|_{\mathbf{X}})^\sigma.$$

Luego, las estimaciones (2.3), (2.4) y el Lema 7 implican

$$(2.5) \quad \|\mathcal{G}(t-\tau) (\mathcal{N}(u)(\tau) - \mathcal{N}(v)(\tau))\|_{\mathbf{L}^2} \\ \leq C \left(\{\tau\}^{-\frac{\gamma}{\alpha}(\sigma+1)} \langle \tau \rangle^{-\frac{1}{\alpha}(\gamma\sigma+1)} + \{\tau\}^{-\frac{\gamma}{\alpha}(\sigma+1)} \langle \tau \rangle^{-\frac{1}{\alpha}(\sigma+1)} \right) \\ \times \|u - v\|_{\mathbf{X}} (\|u\|_{\mathbf{X}} + \|v\|_{\mathbf{X}})^\sigma,$$

$$(2.6) \quad \|\mathcal{G}(t-\tau) (\mathcal{N}(u)(\tau) - \mathcal{N}(v)(\tau))\|_{\mathbf{L}^{s,\mu}} \\ \leq C \left((t-\tau)^{-\frac{1}{\alpha}(\gamma-\mu)} \{\tau\}^{-\frac{\gamma}{\alpha}(\sigma+1)} \langle \tau \rangle^{-\frac{1}{\alpha}(\gamma\sigma+1)} \right. \\ \left. + (t-\tau)^{-\frac{\gamma}{\alpha}} \{\tau\}^{-\frac{\gamma}{\alpha}(\sigma+1)} \langle \tau \rangle^{-\frac{1}{\alpha}(\gamma\sigma+1-\mu)} \right) \|u - v\|_{\mathbf{X}} (\|u\|_{\mathbf{X}} + \|v\|_{\mathbf{X}})^\sigma,$$

donde $0 \leq \mu < 1$, y

$$(2.7) \quad \|\mathcal{G}(t-\tau) (\mathcal{N}(u)(\tau) - \mathcal{N}(v)(\tau))\|_{\mathbf{L}^\infty} \\ \leq C \left(\{t-\tau\}^{-\frac{\gamma}{\alpha}} \langle t-\tau \rangle^{-\frac{1}{\alpha}} \{\tau\}^{-\frac{\gamma}{\alpha}(\sigma+1)} \langle \tau \rangle^{-\frac{1}{\alpha}(\gamma\sigma+1)} \right. \\ \left. + \{t-\tau\}^{-\frac{\gamma}{\alpha}} \langle t-\tau \rangle^{-\frac{1}{\alpha}} \{\tau\}^{-\frac{\gamma}{\alpha}(\sigma+1)} \langle \tau \rangle^{-\frac{1}{\alpha}(\sigma+1)} \right) \\ \times \|u - v\|_{\mathbf{X}} (\|u\|_{\mathbf{X}} + \|v\|_{\mathbf{X}})^\sigma.$$

Ahora, integramos con respecto a τ , en el intervalo $[0, t]$, las desigualdades (2.5), (2.6) y (2.7). Entonces, usando el Lema 8, se sigue para $\gamma < \frac{\alpha}{\sigma+1}$,

$$\begin{aligned}
 (2.8) \quad & \int_0^t \|\mathcal{G}(t-\tau) (\mathcal{N}(u)(\tau) - \mathcal{N}(v)(\tau))\|_{\mathbf{L}^2} \\
 & \leq C \left(\{t\}^{1-\frac{\gamma}{\alpha}(\sigma+1)} \langle t \rangle^{1-\frac{1}{\alpha}-\frac{\gamma}{\alpha}(2\sigma+1)} + \{t\}^{1-\frac{\gamma}{\alpha}(\sigma+1)} \langle t \rangle^{1-\frac{1}{\alpha}(\sigma+1)(\gamma+1)} \right) \\
 & \quad \times \|u-v\|_{\mathbf{X}} (\|u\|_{\mathbf{X}} + \|v\|_{\mathbf{X}})^\sigma \leq C \|u-v\|_{\mathbf{X}} (\|u\|_{\mathbf{X}} + \|v\|_{\mathbf{X}})^\sigma,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2.9) \quad & \int_0^t \|\mathcal{G}(t-\tau) (\mathcal{N}(u)(\tau) - \mathcal{N}(v)(\tau))\|_{\mathbf{L}^{s,\mu}} \\
 & \leq C \{t\}^{-\frac{\gamma}{\alpha}} \langle t \rangle^{-\frac{1}{\alpha}(\gamma-\mu)} \left(\{t\}^{1-\frac{\gamma}{\alpha}(\sigma+1)} \langle t \rangle^{1-\frac{1}{\alpha}(2\gamma\sigma+1)} \right. \\
 & \quad \left. + \{t\}^{1-\frac{\gamma}{\alpha}(\sigma+1)+\frac{\mu}{\alpha}} \langle t \rangle^{1-\frac{1}{\alpha}(2\gamma\sigma+1)-\frac{\mu}{\alpha}} \right) \|u-v\|_{\mathbf{X}} (\|u\|_{\mathbf{X}} + \|v\|_{\mathbf{X}})^\sigma \\
 & \leq C \{t\}^{-\frac{\gamma}{\alpha}} \langle t \rangle^{-\frac{1}{\alpha}(\gamma-\mu)} \|u-v\|_{\mathbf{X}} (\|u\|_{\mathbf{X}} + \|v\|_{\mathbf{X}})^\sigma,
 \end{aligned}$$

donde $0 \leq \mu < 1$, y

$$\begin{aligned}
 (2.10) \quad & \int_0^t \|\mathcal{G}(t-\tau) (\mathcal{N}(u)(\tau) - \mathcal{N}(v)(\tau))\|_{\mathbf{L}^\infty} \\
 & \leq C \{t\}^{-\frac{\gamma}{\alpha}} \langle t \rangle^{-\frac{1}{\alpha}} \left(\{t\}^{1-\frac{\gamma}{\alpha}(\sigma+1)} \langle t \rangle^{1-\frac{1}{\alpha}(\gamma\sigma+1)} \right. \\
 & \quad \left. + \{t\}^{1-\frac{\gamma}{\alpha}(\sigma+1)} \langle t \rangle^{1-\frac{1}{\alpha}(\sigma+1)} \right) \|u-v\|_{\mathbf{X}} (\|u\|_{\mathbf{X}} + \|v\|_{\mathbf{X}})^\sigma \\
 & \leq C \{t\}^{-\frac{\gamma}{\alpha}} \langle t \rangle^{-\frac{1}{\alpha}} \|u-v\|_{\mathbf{X}} (\|u\|_{\mathbf{X}} + \|v\|_{\mathbf{X}})^\sigma.
 \end{aligned}$$

Entonces, la definición de la norma en el espacio $\mathbf{X}$ y las estimaciones (2.8), (2.9) y (2.10), implican (2.2). Ahora, aplicaremos el principio de contracción sobre una bola de radio $\rho > 0$ en el espacio $\mathbf{X}$,

$$\mathbf{X}_\rho = \{\phi \in \mathbf{X} : \|\phi\|_{\mathbf{X}} \leq \rho\},$$

donde

$$\rho = 2C\|u_0\|_{\mathbf{Z}}.$$

Aquí, la constante C coincide con la que aparece en la estimación (2.2). Primero, demostremos que se cumple

$$(2.11) \quad \|\mathcal{M}(u)\|_{\mathbf{X}} \leq \rho,$$

donde $u \in \mathbf{X}_\rho$. En efecto, de la fórmula integral (1.6) y la estimación (2.2) (con $v \equiv 0$) se obtiene

$$\begin{aligned} \|\mathcal{M}(u)\|_{\mathbf{X}} &\leq \|\mathcal{G}(t)u_0\|_{\mathbf{X}} + \left\| \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau)\mathcal{N}(u)(\tau)d\tau \right\|_{\mathbf{X}} \\ &\leq C\|u_0\|_{\mathbf{Z}} + C\|u\|_{\mathbf{X}}^{\sigma+1} \\ &\leq \frac{\rho}{2} + C\rho^{\sigma+1} \leq \rho, \end{aligned}$$

ya que $\rho > 0$ es suficientemente pequeño. Por lo tanto, el operador $\mathcal{M}$ transforma una bola de radio $\rho > 0$ en si misma, en el espacio $\mathbf{X}$. Como en la demostración de (2.11), tenemos para $u, v \in \mathbf{X}_\rho$

$$\begin{aligned} \|\mathcal{M}(u) - \mathcal{M}(v)\|_{\mathbf{X}} &\leq \left\| \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau) (\mathcal{N}(u)(\tau) - \mathcal{N}(v)(\tau)) d\tau \right\|_{\mathbf{X}} \\ &\leq C\|u - v\|_{\mathbf{X}} (\|u\|_{\mathbf{X}} + \|v\|_{\mathbf{X}})^\sigma \\ &\leq C(2\rho)^\sigma \leq \frac{1}{2}\|u - v\|_{\mathbf{X}}, \end{aligned}$$

ya que $\rho > 0$ es suficientemente pequeño. Así, $\mathcal{M}$ es una contracción en $\mathbf{X}_\rho$. Por lo tanto, existe una única solución $u \in \mathbf{X}$ para el problema de Cauchy (0.27). El Teroema 18 ha sido demostrado.

3. Representación asintótica para la solución

En esta sección demostraremos que la solución global del problema (0.27) admite una representación asintótica.

TEOREMA 19. *Sea $\sigma > 1 + \alpha$. La solución global $u \in \mathbf{X}$ para el problema (0.27) admite la representación asintótica*

$$(3.1) \quad u(x, t) = At^{-\frac{1}{\alpha}} \Lambda \left(xt^{-\frac{1}{\alpha}} \right) + O \left(t^{-\frac{1}{\alpha}(1+\kappa)} \right), \quad \kappa \in (0, \mu),$$

donde

$$A = f(u_0) - \int_0^{+\infty} f(\mathcal{N}(u(\tau)))d\tau.$$

Demostración. Denotemos $G_0(t) = t^{-\frac{1}{\alpha}} \Lambda \left(xt^{-\frac{1}{\alpha}} \right)$. De la estimación (1.4), del Capitulo 3, se sigue

$$(3.2) \quad \|\mathcal{G}(t)\phi - G_0(t)f(\phi)\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq C\langle t \rangle^{-\frac{1}{\alpha}(1+\mu)} \|\phi\|_{\mathbf{Z}}$$

para todo $t > 1$. También, de la definición de la norma en $\mathbf{X}$, se obtiene

$$\begin{aligned} |f(\mathcal{N}(u(\tau)))| &\leq \|\mathcal{N}(u(\tau))\|_{\mathbf{L}^1} \leq \|u(\tau)\|_{\mathbf{L}^\infty}^{\sigma-1} \|u(\tau)\|_{\mathbf{L}^2}^2 \\ &\leq C\{\tau\}^{-\frac{\gamma}{\alpha}(\sigma-1)} \langle \tau \rangle^{-\frac{1}{\alpha}(\sigma-1)} \|u\|_{\mathbf{X}}^{\sigma+1}. \end{aligned}$$

Un cálculo directo produce para $t > 1$,

$$\begin{aligned}
 (3.3) \quad & \left\| \int_0^{\frac{t}{2}} (G_0(t-\tau) - G_0(t)) f(\mathcal{N}(u(\tau))) d\tau \right\|_{\mathbf{L}^\infty} \\
 & \leq C \|u\|_{\mathbf{X}}^{\sigma+1} \int_0^{\frac{t}{2}} \|G_0(t-\tau) + G_0(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} \{\tau\}^{-\frac{\gamma}{\alpha}(\sigma-1)} \langle \tau \rangle^{-\frac{1}{\alpha}(\sigma-1)} d\tau \\
 & \leq C \langle t \rangle^{-\frac{1}{\alpha}} \|u\|_{\mathbf{X}}^{\sigma+1} \int_0^{\frac{t}{2}} \{\tau\}^{-\frac{\gamma}{\alpha}(\sigma-1)} \langle \tau \rangle^{-\frac{1}{\alpha}(\sigma-1)} d\tau \leq C \langle t \rangle^{-\frac{1}{\alpha}(1+\kappa)} \|u\|_{\mathbf{X}}^{\sigma+1},
 \end{aligned}$$

donde $\kappa = \sigma - 1 - \alpha$, siempre que $\sigma < 1 + \frac{\alpha}{\gamma}$, y en la misma forma

$$(3.4) \quad \left\| G_0(t) \int_{\frac{t}{2}}^\infty f(\mathcal{N}(u(\tau))) d\tau \right\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq C \langle t \rangle^{-\frac{1}{\alpha}(1+\kappa)} \|u\|_{\mathbf{X}}^{\sigma+1},$$

siempre que $\sigma > 1 + \alpha$. También, tenemos que

$$\begin{aligned}
 (3.5) \quad & \left\| \int_0^{\frac{t}{2}} (\mathcal{G}(t-\tau) \mathcal{N}(u(\tau)) - G_0(t-\tau) f(\mathcal{N}(u(\tau)))) d\tau \right\|_{\mathbf{L}^\infty} \\
 & + \left\| \int_{\frac{t}{2}}^t \mathcal{G}(t-\tau) \mathcal{N}(u(\tau)) d\tau \right\|_{\mathbf{L}^\infty} \\
 & \leq C \int_0^{\frac{t}{2}} (t-\tau)^{-\frac{1}{\alpha}} \|\mathcal{N}(u(\tau))\|_{\mathbf{L}^1} d\tau \\
 & + C \int_{\frac{t}{2}}^t \{\tau-t\}^{-\frac{\gamma}{\alpha}} \langle \tau-t \rangle^{-\frac{1}{\alpha}} (\|\mathcal{N}(u(\tau))\|_{\mathbf{L}^1} + \|\mathcal{N}(u(\tau))\|_{\mathbf{L}^\infty}) d\tau \\
 & \leq C \langle t \rangle^{-\frac{1}{\alpha}(1+\kappa)} \|u\|_{\mathbf{X}}^{\sigma+1},
 \end{aligned}$$

para todo $t > 1$. De la ecuación integral (1.6), obtenemos

$$\begin{aligned}
 & \langle t \rangle^{\frac{1}{\alpha}(1+\kappa)} \|u(t) - AG_0(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq \langle t \rangle^{\frac{1}{\alpha}(1+\kappa)} \|\mathcal{G}(t) u_0 - G_0(t) f(u_0)\|_{\mathbf{L}^\infty} \\
 & + \langle t \rangle^{\frac{1}{\alpha}(1+\kappa)} \left\| \int_0^{\frac{t}{2}} (\mathcal{G}(t-\tau) \mathcal{N}(u(\tau)) - G_0(t-\tau) f(\mathcal{N}(u(\tau)))) d\tau \right\|_{\mathbf{L}^\infty} \\
 & + \langle t \rangle^{\frac{1}{\alpha}(1+\kappa)} \left\| \int_{\frac{t}{2}}^t \mathcal{G}(t-\tau) \mathcal{N}(u(\tau)) d\tau \right\|_{\mathbf{L}^\infty} \\
 & + \langle t \rangle^{\frac{1}{\alpha}(1+\kappa)} \left\| G_0(t) \int_{\frac{t}{2}}^\infty f(\mathcal{N}(u(\tau))) d\tau \right\|_{\mathbf{L}^\infty} \\
 (3.6) \quad & + \langle t \rangle^{\frac{1}{\alpha}(1+\kappa)} \left\| \int_0^{\frac{t}{2}} (G_0(t-\tau) - G_0(t)) f(\mathcal{N}(u(\tau))) d\tau \right\|_{\mathbf{L}^\infty}.
 \end{aligned}$$

Todos los sumandos a la derecha en (3.6) se estiman por $C \|u_0\|_{\mathbf{Z}} + C \|u\|_{\mathbf{X}}^{\sigma+1}$ vía las estimaciones (3.3) - (3.5). Así, por (3.6) la asintótica (3.1) se cumple. ■

Bibliografía

- [1] C.J. Amick, J.L. Bona and M.E. Schonbek, *Decay of solutions of some nonlinear wave equations*, J. Diff. Eq. **81** (1989), pp. 1-49.
- [2] M.P. Árciga, *Asymptotics for Nonlinear Evolution Equation with Module-Fractional Derivative on a Half-Line*, Boundary Value Problems, vol. 2011, Article ID 946143, 29 pages, 2011. doi:10.1155/2011/946143.
- [3] P. Biller, *Asymptotic behavior in time of solutions to some equations generalizing the Korteweg-de Vries-Burgers equation*, Bull. Polish. Acad. Sc. Math., **32** (1984), pp. 275-282.
- [4] P. Biler, G. Karch and W. Woyczynski, *Multifractal and Levy conservation laws*, C.R.Acad. Sci., Paris, Ser.1,Math. **330** (2000), no 5, pp. 343-348.
- [5] J.L. Bona and L. Luo, *More results on the decay of the solutions to nonlinear dispersive wave equations*, Discrete and Continuous Dynamical Systems, **1** (1995), pp. 151-193.
- [6] J.L. Bona, F. Demengel and K.S. Promislow, *Fourier splitting and dissipation nonlinear dispersive waves*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **129** (1999), no. 3, pp. 477-502.
- [7] J.L. Bona and L. Luo, *Asymptotic decomposition of nonlinear, dispersive wave equations with dissipation*, Advances in Nonlinear Mathematics and Science, Phys. D **152/153** (2001), pp. 363-383.
- [8] Bourgain J., *Gobal Solutions of Nonlinear Schrödinger Equations*, Volume **46**, Colloquium Publications, American Mathematical Society: Providence, RI, 1999.
- [9] D.B. Dix, *Large Time Behavior of Solutions of Linear Dispersive Equations*, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, **1668**, 1997.
- [10] D.B. Dix, *The dissipation of nonlinear dispersive waves; the case of asymptotically weak nonlinearity*, Comm. P. D. E., **17** (1992), pp. 1665-1693.
- [11] D.B. Dix, *Temporal asymptotic behavior of solutions of the Benjamin-Ono-Burgers equation*, J. Diff. Eqs. **90** (1991), pp. 238-287.
- [12] M. Escobedo, O. Kaviani and H. Matano, *Large time behavior of solutions of a dissipative nonlinear heat equation*, Comm. P. D. E., **20** (1995), pp. 1427-1452.
- [13] M. Escobedo, J.L. Vazquez and E. Zuazua, *Asymptotic behavior and source-type solutions for a diffusion-convection equations*, Arch. Ration. Mech. Anal. **124** (1993), no. 1 pp. 43-65.
- [14] F.D. Gakhov, *Boundary value problems*, Pergamon Press, ISBN 0-486-66275-6 , (1966), pp. 562.
- [15] V.A. Galaktionov, S.P. Kurdyumov and A.A. Samarskii, *On asymptotic eigenfunctions of the Cauchy problem for a nonlinear parabolic equation*, Math. USSR Sbornik, **54** (1986), pp. 421-455.
- [16] Y. Giga and T. Kambe, *Large time behavior of the vorticity of two-dimensional viscous flow and its application to vortex formation*, Commun. Math. Phys. **117** (1988), pp. 549-568.
- [17] Ginibre J., *Introduction aux Équations de Schrödinger non Linéaires*, Onze Édition: Paris, 1998.
- [18] A. Gmira and L. Veron, *Large time behavior of the solutions of a semilinear parabolic equation in R^N* , J. Diff. Eqs. **53** (1984), pp. 258-276.

- [19] E. I. Kaikina, *Subcritical pseudodifferential equation on a half-line with nonanalytic symbol*, Differential Integral Equations **18**, (2005), no. 12, 1341–1370.
- [20] E. I. Kaikina, *Nonlinear pseudoparabolic type equations on a half-line with large initial data*, Nonlinear Anal. **67**, (2007), no. 10, 2839–2858.
- [21] E. I. Kaikina, *Pseudodifferential operator with a nonanalytic symbol on a half-line*, J. of Mathematical Physics **48**, (2007), no. 11, 1341–1370.
- [22] N. Hayashi and E. I. Kaikina, *Nonlinear theory of pseudodifferential equations on a half-line*, North-Holland Mathematics Studies **194**, Elsevier Science B.V., Amsterdam, (2004), 319 pp.
- [23] N. Hayashi, E.I. Kaikina and P.I. Naumkin, *Large time behavior of solutions to the Landau-Ginzburg type equation*, Funcialaj Ekvacioj, **44** (2001), pp. 171-200.
- [24] N. Hayashi, K. Nakamitsu and M. Tsutsumi, *On solutions of the initial value problem for nonlinear Schrödinger equations*, J. Funct. Anal., **71** (1987), pp. 218-245.
- [25] A.M. Il'in and O.A. Oleinik, *Asymptotic behavior of solutions of the Cauchy problem for some quasilinear equations for large values of time*, Mat. Sbornik. **51** (1960), pp. 191-216.
- [26] E.I. Kaikina, I.A. Shishmarev and M. Tsutsumi, *Asymptotics in time for nonlinear Schrödinger equations with a source*, J. Math. Soc. Japan, **51**, No. 2, (1999), pp. 463-483.
- [27] G. Karch, *Self-similar large time behavior of solutions to the Korteweg-de Vries-Burgers equation*, Nonlinear Anal., T.M.A. **35A** (1999), no.2, pp. 199-219.
- [28] O. Kavian, *Remarks on the large time behavior of a nonlinear diffusion equation*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Analyse non linéaire, **4** (5) (1987), pp. 423-452.
- [29] K. Kobayashi, T. Sirao and H. Tanaka, *On the growing up problem for semi-linear heat equations*, J. Math. Soc. Japan, **29** (1977), pp. 407-424.
- [30] Yu. A. Kobelev and L.A. Ostrovskii, *Nonlinear acoustics. Theoretical and experimental studies*, Gorky, 1980, pp. 143-160.
- [31] Y. Kuramoto, *Chemical Oscillations, Waves and Turbulence*, Springer-Verlag, Berlin, 1982.
- [32] P.I. Naumkin and I.A. Shishmarev, *Nonlinear Nonlocal Equations in the Theory of Waves*, Translations of Monographs, **133**, A.M.S., Providence, R.I., 1994.
- [33] P.I. Naumkin and I.A. Shishmarev, *Asymptotics as time tends to infinity of solutions to nonlinear equations with large initial data*, Matematicheskie Zametki **59** (1996), no.6, pp. 855-864.
- [34] P.I. Naumkin and I.A. Shishmarev, *Asymptotic relationship as $t \rightarrow +\infty$ between solutions to some nonlinear equations I, II*, Differential Equations **30** (1994), pp. 806-814; 1329-1340.
- [35] L.A. Ostrovsky, *Short-wave asymptotics for weak-shock waves and solitons in Mechanics*, Int. J. Non-Linear Mechanics, **11** (1976), pp. 401 - 416.
- [36] E. Ott and R.N. Sudan, *Nonlinear theory of ion acoustic waves with Landau damping*, Phys. Fluids, **12**, no. 11 (1969), pp. 2388 - 2394.
- [37] Samko, S. G., Kilbas, A. A., Marichev, O. I., *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications*, Gordon and Breach Science Publishers, Switzerland, 1993.
- [38] M.E. Schonbek, *Uniform decay rates for parabolic conservation laws*, Nonlinear Anal. T.M.A. **10** (1986), no. 9, pp. 943-953.
- [39] M.E. Schonbek, *Lower bounds of rates of decay for solutions to the Navier-Stokes equations*, J. Amer. Math. Soc. **4** (1991), no.3, pp. 423-449.
- [40] G.I. Sivashinsky, *Instabilities, pattern formation and turbulence formation*, Ann. Rev. Fluid. Mech., **15** (1983), pp. 179 - 199.
- [41] W.A. Strauss, *Nonlinear scattering theory*, Scattering Theory in Mathematical Physics, Lavita J-A, Marchand J-P (eds). Reidel: Dordrecht, Holland, Boston, 1974; 53-78.
- [42] W.A. Strauss, *Nonlinear scattering at low energy*, J. Funct. Anal., **41** (1981), pp. 110-133.
- [43] A.G. Sveshnikov and A.N. Tikhonov, *The theory of functions of a complex variable*, "Mir", Moscow, 1982, 333 pp.

- [44] S. Takeno, *Dynamical Problems in Soliton Systems*, Springer Ser. Synergetics, **30**, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1985.
- [45] M.I. Vishik, *Asymptotic Behavior of Solutions of Evolutionary Equations*, Lezioni Lincee, Cambridge University Press Cambridge, 1992.
- [46] V.S. Vladimirov, *Equations of Mathematical Physics*, Moscow, Nauka, 1976.
- [47] Weder R., *Scattering for the forced non-linear Schrödinger equation with a potential on the half-line*, Math. Meth. in the Appl. Sciences 2005, Volume **28**, 1219-1236.
- [48] Weder R., *The forced non-linear Schrödinger equation with a potential on the half-line*, Math. Meth. in the Appl. Sciences 2005, Volume **28**, 1237-1255.
- [49] Weder R., *The $L^p - L^{p'}$ estimate for the Schrödinger equation on the half-line*, Journal Mathematical Analysis and Applications 2003, Volume **281**, 233-243.
- [50] Weder R., *$L^p - L^{p'}$ Estimates for the Schrödinger Equation on the Line and Inverse Scattering for the Nonlinear Schrödinger Equation with a Potential*, Journal of Functional Analysis 2000, Volume **170**, 37-68.
- [51] V.E. Zakharov, *Collapse of the Langmuir Waves*, Soviet Phys. JETP **35** (1972), pp. 1745-1759.
- [52] L. Zhang, *Decay estimates for the solutions of some nonlinear evolution equations*, J. Diff. Eqs. **116** (1995), pp. 31-58.
- [53] E. Zuazua, *A dynamical system approach to the self-similar large time behavior in scalar convection-diffusion equations*, J. Diff. Eqs. **108** (1994), pp. 1-35.
- [54] E. Zuazua, *Some recent results on the large time behavior for scalar parabolic conservation laws*, in. Elliptic and Parabolic Problems. Proc. 2nd European Conference, **325** (1995), pp. 251-263.