



UNIVERSIDAD MICHOCANA DE SAN NICOLAS DE HIDALGO

INSTITUTO FÍSICO MATEMÁTICAS

TESIS

LA FÍSICA DE LA QUINTA DIMENSIÓN: UN MUNDO MEMBRANA SUAVE

QUE PRESENTA:

REFUGIO RIGEL MORA LUNA

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

DOCTOR EN FÍSICA

ASESOR:

DR. ALFREDO HERRERA AGUILAR

COASESOR:

DR. ULISES NUCAMENDI GÓMEZ

MORELIA, MICH. A ENERO 2012.



**INSTITUTO DE FÍSICA
Y MATEMÁTICAS**

UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS
DE HIDALGO

INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

DOCTORADO EN FÍSICA

Tesis de Doctorado:

**LA FÍSICA DE LA QUINTA DIMENSIÓN:
UN MUNDO MEMBRANA SUAVE**

Presenta:

Refugio Rigel Mora Luna

Asesor:

Dr. Alfredo Herrera Aguilar

Coasesor:

Dr. Ulises Nucamendi Gómez

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Los mundos membrana	1
1.2. La visión de Kaluza–Klein de las dimensiones extra	4
1.3. La solución al problema de la jerarquía de masas con dimensiones extra	7
1.4. La gravedad sobre la membrana y a través del bulto	9
1.5. La materia confinada en la membrana	11
2. Modelo de membrana ancha	14
2.1. El modelo de Randall–Sundrum como continuación analítica del límite de la solución	17
2.2. La solución como límite de membranas gruesas generadas por campos escalares	19
2.3. Reducción dimensional	22
2.4. Ajuste fino de la constante cosmológica en 4D	24

3. Perturbaciones de la métrica, localización de la gravedad y correcciones a la ley de Newton	26
3.1. Perturbaciones de la métrica	26
3.1.1. Localización de la gravedad	31
3.2. Correcciones a la ley de Newton	34
3.3. Solución máximamente simétrica <i>versus</i> localización de la gravedad 4D y existencia de un salto en el espectro de masas . .	39
4. Localización de campos de materia en la membrana	42
4.1. La localización de diversos campos de materia sobre una membrana gruesa dS	42
4.1.1. Campos escalares: espín-0	43
4.1.2. Campos vectoriales: espín-1	46
4.1.3. Campos fermiónicos: espín-1/2	52
5. Conclusiones	75
A. Solución máximamente simétrica	83
B. Elección de la norma para las perturbaciones de la métrica	86
C. Bases no coordenadas (tetradas)	95

Agradecimientos

Un inmenso agradecimiento a mis padres por la comprensión y confianza que siempre me han brindado.

Un agradecimiento especial a mis asesores, el Dr. Alfredo Herrera Aguilar y el Dr. Ulises Nucamendi Gómez, por el gran apoyo recibido a lo largo del doctorado.

Agradezco a los colegas Nandini Barbosa y Dagoberto Malagón por las útiles críticas y sugerencias realizadas a la tesis.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) y la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo (UMSNH).

Agradezco a todo el personal docente y administrativo del Instituto de Física y Matemáticas perteneciente a la UMSNH.

Capítulo 1

Introducción

1.1. Los mundos membrana

En el lenguaje contemporáneo de la física moderna, un mundo membrana es visualizado como una hipersuperficie $(1+3)$ -dimensional, a la que llamaremos membrana, en la que los campos y partículas del modelo estándar están atrapados, embebida en una hipersuperficie $(1+3+d)$ -dimensional. La Fig. 1 muestra de una forma ilustrativa cómo estaría sumergida una hipersuperficie llamada membrana en otra hipersuperficie más grande llamada bulto. Cabe señalar que las variedades de la membranas y el bulto no tienen que tener las mismas propiedades geométricas, es decir, podemos encontrar una membrana con una métrica inducida plana sumergida en un bulto con una métrica de fondo Anti de Sitter (AdS) o una membrana con una métrica inducida de Sitter (dS) embebida en un bulto con una métrica de fondo AdS, etc.

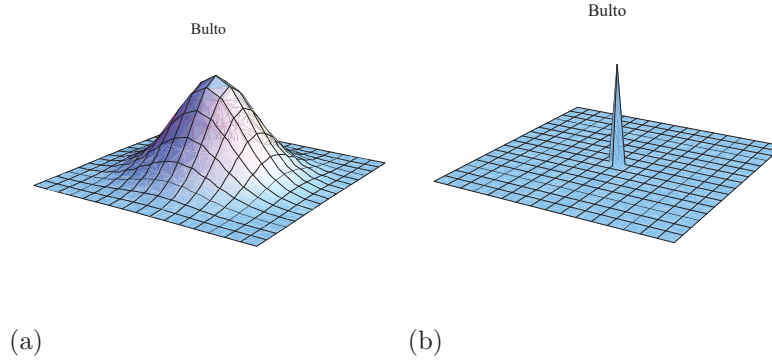


Figura 1.1: (a) membrana gruesa, (b) membrana delgada.

En la física moderna existe el llamado problema de la jerarquía de masas, el cual plantea la interrogante de por qué la interacción débil es 10^{32} veces más fuerte que la gravedad, en otras palabras se habla de un desierto entre la constante de acoplamiento de Fermi y la de Newton. Esta interrogante fue abordada a finales de la década de los 90 por un modelo que le da una interpretación puramente geométrica al problema de la jerarquía de masas, donde se plantea una explicación desde un punto de vista que emplea dimensiones extra, empezando por los trabajos de Arkani-Hamed, Dimopoulos y Dvali [1] hasta aterrizar completamente la idea por Randall y Sundrum [2]. En dichos artículos se presentan modelos de variedades cuatridimensionales embebidos en variedades hexa- y pentadimensionales. La idea de las dimensiones extra es una idea vieja considerada por primera vez por Nordström [3], para ser retomada después por Kaluza y Klein (KK) [4], en el marco de la teoría general de la relatividad en la década de los 1920. Después de más de 70 años, la idea de las dimensiones extra fue retomada con un giro importante

donde se plantea, a diferencia de KK, que todas las componentes del tensor métrico que viven en el bulto dependen de las dimensiones extra. Este giro permite plantear una teoría fundamental en cinco (o más) dimensiones donde la constante de Newton es considerada como una constante fundamental, permitiendo expresar, mediante una reducción dimensional, la constante de Newton de la teoría efectiva en 4D a través de la constante fundamental en 5D y los parámetros de la teoría fundamental. Además, a la teoría se le dio más importancia cuando se vincularon los trabajos de (RS) con los artículos de (H W) [5], donde las teorías de mundos membrana se relacionan con teorías de cuerdas. Para tener una idea más clara de cómo evolucionó la idea de KK hasta llegar al origen de los mundos membrana planteados por RS, y para familiarizar al lector con la terminología que se emplea en este trabajo de tesis, haremos una revisión de cómo surge la teoría de 5D dimensiones de KK y cómo esas ideas son retomadas y cristalizadas después de 70 años en [1] para solucionar el problema de la jerarquía de masas. Sin embargo, estos modelos de mundos membrana son generados por funciones delta de Dirac y dan lugar a singularidades desnudas en la posición de las membranas a lo largo de la quinta dimensión, una propiedad poco atractiva desde el punto de vista gravitatorio, pues esto significa que nuestro universo es una singularidad en la dimensión extra. Es así como surge la necesidad de los mundos membrana gruesos, los cuales permiten tener variedades d -dimensionales embebidas en variedades $(d+n)$ -dimensionales, pero sin singularidades en el lugar donde se centra el mundo membrana [6]-[56]. Este hecho es relevante ya que muestra cómo se puede suavizar la solución de RS mediante el empleo de campos

escalares dependientes de las dimensiones extra [6, 8, 10] o simplemente mediante el uso de una constante cosmológica fundamental incluida en la teoría con dimensiones extra [10, 54].

1.2. La visión de Kaluza–Klein de las dimensiones extra

La teoría de Kaluza-Klein es una teoría que generaliza la teoría general de la relatividad y fue presentada en el año de 1919 por Kaluza, para ser revisada y retomada después por Klein en el año de 1926. La generalización a la teoría general de la relatividad planteada por Kaluza y Klein consiste en unificar la gravedad y el electromagnetismo. Kaluza supuso que existía una quinta dimensión de la cual las magnitudes físicas conocidas no tenían ninguna dependencia. La explicación de por qué ignorar la dependencia de la quinta dimensión de todos los campos conocidos en 4D la dio Klein al suponer que la quinta dimensión era de tipo espacial, compacta y además, muy pequeña. Si tomamos en cuenta que la quinta dimensión es compacta, entonces podemos suponer que cualquier cantidad $f(x^\mu, y)$ es periódica sobre la coordenada extra, $f(x^\mu, w + 2n\pi L)$, donde L es el radio de la quinta dimensión representada por w y $\mu = 0, \dots, 3$. De esta forma, cualquier campo tensorial $g_{\mu\nu}(x^\mu, w)$, vectorial $A_\mu(x^\mu, w)$, escalar $\phi(x^\mu, w)$, etc. se puede

expresar como una serie de Fourier sobre la quinta dimensión

$$g_{\mu\nu}(x^\alpha, w) = \sum_{-\infty}^{\infty} g_{\mu\nu}^n(x^\alpha) e^{i \frac{nw}{L}}, \quad (1.1)$$

$$A_\mu(x^\alpha, w) = \sum_{-\infty}^{\infty} A_\mu^n(x^\alpha) e^{i \frac{nw}{L}}, \quad (1.2)$$

$$\phi(x^\alpha, w) = \sum_{-\infty}^{\infty} \phi^n(x^\alpha) e^{i \frac{nw}{L}}. \quad (1.3)$$

De lo anterior podemos inferir, haciendo una analogía con la mecánica cuántica, que cada modo de la serie de Fourier lleva un momento en la dirección de la quinta dimensión de orden n/L y si tomamos en cuenta la suposición de Klein $L \gg 1$, entonces estos momentos son muy grandes y sólo el momento con $n = 0$ es observable. De aquí en adelante nos referiremos a los modos discretos o continuos sobre la quinta dimensión como los modos de Kaluza-Klein, de forma abreviada KK.

Las ideas de dimensiones extra empezadas por KK fueron retomadas décadas después por la teoría de cuerdas, la cual plantea que la escala fundamental de Planck es mucho más pequeña que la escala efectiva en 4D, existen 5 teorías de supercuerdas en 1+9 dimensiones que podrían describir la gravedad cuántica. A mediados de la década de los 90 se descubrió que las 5 teorías son límites de una sola teoría (1 + 10)-dimensional de supergravedad llamada teoría M. En el marco de esta teoría surgen las llamadas p-branas y las D-branas, las cuales son generalizaciones de las cuerdas (1-branas); coloquialmente hablando, las D-branas son hipersuperficies donde el sector no gravitatorio está descrito por cuerdas abiertas que tienen sus extremos pegados a la brana y el sector gravitatorio está descrito por cuerdas cerradas que

pueden moverse libremente en todo el espacio multidimensional, al cual nos referiremos como bulto. En la teoría de Horava-Witten, los campos de norma del modelo estándar están confinados a membranas $(1+9)$ -dimensionales localizadas en los extremos del orbifoldio¹ S^1/Z_2 , que es un círculo partido en dos por su diámetro: sus puntos finales quedan diametralmente opuestos por el doblés y son singulares. Además, las 6 dimensiones extra de esta teoría son compactas y sus efectos se hacen presentes a través de campos escalares llamados campos modulares que sólo dependen de las dimensiones extra: en este punto es donde se conectan los mundos membrana de RS con la teoría de cuerdas, pues el modelo de HW es una generalización de los modelos de RS. Para el caso llamado RSI se tienen dos membranas en un orbifoldio de $(1+4)$ dimensiones y para el caso denominado RSII, el radio del orbifoldio se hace infinito y sólo se considera una membrana, pues la otra se envía al infinito a lo largo de la quinta dimensión. Aparte de los modelos de RS, hay más modelos de membranas que cristalizan las ideas de la teoría M, tales como el modelo de Arkani-Hamed-Dimopoulos-Dvali [1]. En todos estos modelos se vislumbró una solución al problema de la jerarquía de masas.

¹Un orbifoldio es un objeto obtenido por la identificación de dos puntos cualquiera de un mapeo que son equivalentes bajo alguna simetría del grupo mapeado.

1.3. La solución al problema de la jerarquía de masas con dimensiones extra

En la física actual, un problema particular es el llamado problema de la jerarquía de masas que ocurre cuando las constantes de acoplamiento de algunas teorías (lagrangianas) son muy diferentes en escala, en comparación con las mediciones hechas a los parámetros en los experimentos. La razón de esto es debido a que los parámetros que se miden en el experimento están relacionados con los parámetros fundamentales de la teoría por una renormalización y, a su vez, la renormalización de estos parámetros está estrechamente relacionada con los parámetros fundamentales, pero en algunos casos, no es posible renormalizar y se desconoce el ajuste entre los parámetros del experimento y los fundamentales. Por ello, estudiar la renormalización en los problemas de jerarquía no siempre es fácil porque tales correcciones cuánticas normalmente son divergentes. Debido a que no conocemos los detalles precisos de una teoría como la gravedad cuántica, no podemos ni siquiera saber cómo es la relación entre los parámetros de esta teoría y los de otras teorías. Sin embargo, a finales de los 90 los trabajos en dimensiones extra (mundos membrana) postularon un nuevo fenómeno físico que resuelve el problema de jerarquía de masas sin hacer ajustes finos entre los parámetros de las teorías. Al vivir en un mundo 4D podemos calcular la ley de la gravitación de Newton usando la ley de Gauss para obtener la fuerza $\vec{g}(r)$ que ejerce una partícula de masa m sobre una partícula de prueba de masa unitaria a lo largo de la

dirección $\vec{e}_r$:

$$\vec{g}(r) = -\frac{Gm\vec{e}_r}{r^2}, \quad (1.4)$$

donde r es la distancia que separa las masas localizadas en una membrana, G es la constante de Newton, que además se puede expresar en términos de la masa de Planck M_{Pl}^2 . Si pensamos que vivimos en un mundo con más dimensiones, entonces podemos encontrar de nuevo la ley de Newton usando la ley de Gauss para obtener la siguiente expresión multidimensional

$$\vec{g}(r) = -\frac{m\vec{e}_r}{M_*^{2+\delta}r^{2+\delta}}, \quad (1.5)$$

donde M_* es la masa de Planck en $n = 1 + 3 + \delta$ dimensiones. Aquí estamos suponiendo que las dimensiones extra son del mismo tamaño que las dimensiones 4D donde vivimos. Si pensamos que las dimensiones extra son de un tamaño determinado d , mucho menor que las primeras 4 dimensiones que conocemos, entonces podemos considerar situaciones en las que $r \ll d$, y usar la ley de Newton multidimensional (1.5) para medir fuerzas entre partículas a distancias r . Por otro lado, si consideramos que las dimensiones extra son muy pequeñas $r \gg d$ y usamos la conocida ley de Newton (1.4), podemos inferir entonces que cuando $r \gg d$, el flujo en las dimensiones extra que contribuye a la ley de Gauss es constante y proporcional a d^δ ; matemáticamente hablando tenemos la ley de Newton para este caso:

$$\vec{g}(r) = -\frac{m\vec{e}_r}{M_*^{2+\delta}r^2d^\delta}. \quad (1.6)$$

Esta ley de Newton que considera el flujo de las dimensiones extra cuando $r \gg d$ se puede comparar con la ley de Newton (1.4) para conocer la relación

entre la escala fundamental multidimensional de Planck M_* y escala efectiva 4D de Planck M_{Pl}

$$-\frac{m\vec{e}_r}{M_{Pl}^2 r^2} = -\frac{m\vec{e}_r}{M_*^{2+\delta} r^2 d^\delta}, \quad (1.7)$$

lo que nos lleva al resultado siguiente

$$M_{Pl}^2 = M_*^{2+\delta} d^\delta. \quad (1.8)$$

Esta expresión nos dice que la masa fundamental de Planck podría ser en realidad pequeña, lo cual significa que la gravedad es realmente fuerte vista desde el bulto, según el número y tamaño de las dimensiones extra que consideremos. Físicamente se puede explicar esto diciendo que la gravedad es débil debido a una pérdida de flujo hacia las dimensiones extra.

1.4. La gravedad sobre la membrana y a través del bulto

En la fenomenología de los mundos membrana se habla frecuentemente de los modos de KK y se tiene la idea romántica de pensar en la gravedad como cuerdas cerradas viajando en la membrana y a través del bulto. Cuando se localiza la gravedad sobre la membrana, es decir, cuando se localiza el gravitón 4D, la amplitud para el gravitón posee un modo sin masa y modos masivos de KK que representan el gravitón en 4D y gravitones masivos, respectivamente. Para ilustrar este concepto imaginemos que tenemos una membrana en 4D $(M, \bar{g})$ embebida en una variedad 5D (V, g) que contiene una

dimensión extra compacta y periódica, identificando la quinta coordenada con w , donde $w \leftrightarrow w + 2n\pi L$ con $n = 1, 2, 3, \dots$, y L constante, así podemos expandir la amplitud del gravitón proveniente de una perturbación sobre el espaciotiempo en 5 dimensiones tomando la siguiente descomposición de Fourier

$$\Psi(X^\mu, w) = \sum_n e^{inw/L} \psi_n(X^\mu) \quad (1.9)$$

donde $\psi_n(X^\mu)$ son las amplitudes de los modos de KK. Dicho en otras palabras, son los modos efectivos en 4D del gravitón en 5D. Después de linealizar nuestro espaciotiempo y haber escogido una norma adecuada en las perturbaciones, llegamos a una ecuación de onda para nuestro gravitón

$$^{(5)}\square \Psi(X^\mu, w) = 0, \quad (1.10)$$

donde $^{(5)}\square = g^{MN} \nabla_M \nabla_N$ se toma con respecto a (V, g) . En este punto sustituimos la separación de variables (1.9) en nuestra ecuación (1.10), lo cual nos da como resultado la siguiente expresión para la parte efectiva 4D

$$^{(4)}\square \psi_n = m_n^2 \psi_n, \quad m_n^2 = \frac{n^2}{L^2}; \quad (1.11)$$

donde $^{(4)}\square$ se toma con respecto a la membrana $(M, \bar{g})$ e identificamos la constante de integración m_n^2 como el cuadrado de la masa efectiva de los gravitones en 4D. Esta expresión nos muestra que hay un gravitón sin masa correspondiente a $n = 0$ y después hay una torre de modos discretos masivos debido al carácter compacto de la quinta dimensión; si la dimensión fuese infinita, lo que esperaríamos es tener una torre continua de modos masivos. Desde un punto de vista geométrico, si proyectamos la métrica g_{AB} en

5D en dirección transversa a la quinta dimensión con el vector normal n_A encontramos que la métrica inducida $\bar{g}_{AB}$ es

$$g_{AB} = {}^{(5)}g_{AB} - n_A n_B, \quad (1.12)$$

y los momentos en 5 dimensiones pueden ser descompuestos como

$${}^{(5)}P_A = m n_A + P_A, \quad P_A n^A = 0, \quad m = {}^{(5)}P_A n^A. \quad (1.13)$$

La proyección del momento sobre la membrana está dada por

$$P_A = g_{AB} {}^{(5)}P^B. \quad (1.14)$$

Podemos ver entonces que los momentos efectivos sobre la membrana 4D son P_A y expandiendo

$${}^{(5)}g_{AB} {}^{(5)}P^A {}^{(5)}P^B = 0, \quad (1.15)$$

encontramos que

$$g_{AB} P^A P^B = -m^2. \quad (1.16)$$

Esto nos muestra cómo el gravitón 5D tiene una masa efectiva sobre la membrana donde podemos identificar al gravitón usual con $m = 0$ cuando tenemos los momentos P_A tangentes a la membrana. Este es un ejemplo simple, pero claro de cómo se puede localizar el modo cero de KK para la gravedad.

1.5. La materia confinada en la membrana

La idea de que el universo en el que vivimos puede ser concebido como una membrana puede solucionar el problema de la jerarquía de masas,

puede también abordar el problema de la constante cosmológica [57],[58], [59] y además nos permite localizar la gravedad sobre la membrana; también nos hace plantearnos la interrogante de cómo los campos de materia están confinados a la 3-membrana. En los escenarios tanto de membranas gruesas generados por campos escalares dependientes sólo de las dimensiones extra, así como de membranas delgadas, resulta de interés hablar de un mecanismo que nos permita entender cómo es el confinamiento de los campos de materia en la 3-membrana. Así, aparte de la gravedad podemos ver cómo se localizan campos escalares de materia [18], campos vectoriales [19]-[20] y campos fermiónicos [18]-[35]; en particular, para estos últimos es importante introducir un campo de interacción entre los fermiones y los campos en el bulto. En general, la forma de localizar los fermiones varía según el tipo de acoplamiento del campo escalar con el campo fermiónico, es decir, varía según sea el tipo de campo escalar que genera la membrana gruesa o según el campo escalar que haya en el bulto para una teoría que describa membranas delgadas que incluya campos escalares en el bulto. En nuestro caso, en el que trataremos una membrana gruesa generada sólo por las constantes cosmológicas en 4 y 5 dimensiones, sin la presencia de campos escalares, hemos supuesto que el campo fermiónico posee una masa esparcida a lo largo de la quinta dimensión con la finalidad de encontrar los modos de KK normalizables localizados en cierto punto de la dimensión extra. En algunos modelos se da el caso en el que se localiza un número finito de estados discretos y además se tiene un salto en el espectro de masas de KK (“mass gap”), en otros podemos tener estados discretos y una torre de estados continuos, en otros casos se puede

obtener una torre infinita de estados discretos de KK que localizan fermiones en la 3-membrana.

Capítulo 2

Modelo de membrana ancha

En este trabajo de tesis se trabajará sobre un modelo de membrana ancha dS, el cual es obtenido a partir de una teoría de gravedad 5D más la inclusión de una constante cosmológica fundamental en el bulto con la peculiaridad de que el intervalo de la membrana 4D posee la forma de un espaciotiempo dS en lugar de preservar la geometría de Poincaré. Cabe resaltar que este modelo, aunque es muy simple, plantea la posibilidad de vivir en un mundo membrana grueso sin singularidades en el bulto máximamente simétrico. Esta es una propuesta mejor en comparación con los primeros modelos singulares de membranas delgadas y los de membranas anchas con campos escalares en el bulto (estos últimos intentaron suavizar los modelos de RS), pero a pesar de suavizar el factor de deformación, seguían presentando singularidades desnudas sobre la quinta dimensión al requerir la presencia de un salto en el espectro de masas de KK para los gravitones, además de tener problemas de

divergencias en los campos escalares que viven en el bulto. La acción para el mundo membrana ancho que estudiaremos en este trabajo de tesis está dado por la siguiente expresión

$$S = 2M^3 \int d^5x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda_5), \quad (2.1)$$

donde R es el escalar de curvatura, Λ_5 es la constante cosmológica en el bulto y M es la constante de acoplamiento gravitacional en 5D (también podemos escribir $1/2\kappa_5^2$ en lugar de $2M^3$).

Las ecuaciones de Einstein para este modelo están dadas por

$$G_{AB} = -\Lambda_5 g_{AB}. \quad (2.2)$$

Para la métrica de fondo hemos usado como propuesta el siguiente elemento de línea deformado por la función $f(\sigma)$ que sólo depende de la quinta dimensión e induce sobre la 3-membrana una métrica tipo Frieman-Robertson-Walker (FRW) plana:

$$ds^2 = e^{2f(\sigma)} [-dt^2 + a^2(t) (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)] + d\sigma^2, \quad (2.3)$$

donde $f(\sigma)$ es el factor de deformación y $a(t)$ es el factor de escala sobre la membrana. Usando esta métrica como propuesta, calculamos las componentes del tensor de Einstein que se ven como

$$\begin{aligned} G_{00} &= 3 \left[\frac{\dot{a}^2}{a^2} - e^{2f} (2f'^2 + f'') \right], \\ G_{\alpha\alpha} &= -2\ddot{a}a - \dot{a}^2 + 3a^2 e^{2f} (2f'^2 + f''), \\ G_{\sigma\sigma} &= -3e^{-2f} \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) + 6f'^2, \end{aligned} \quad (2.4)$$

donde f'' y $\ddot{f}$ son derivadas con respecto a la dimensión extra y al tiempo, respectivamente.

De este modo, las ecuaciones (2.2) se reducen al siguiente sistema de ecuaciones,

$$f'' = \frac{1}{3} \left(2 \frac{\dot{a}^2}{a^2} - 5 \frac{\ddot{a}}{a} \right) e^{-2f}, \quad (2.5)$$

$$f'^2 = \frac{1}{6} \left[\left(5 \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) e^{-2f} - \Lambda_5 \right]. \quad (2.6)$$

Este sistema de ecuaciones involucra dos funciones, una que depende de la quinta dimensión y otra que depende sólo del tiempo. Para resolver el sistema primero encontraremos el factor de escala de la siguiente manera: derivamos la ecuación de restricción (2.6) con respecto a la quinta dimensión, para después compararla con (2.5), de esta forma encontramos una ecuación de segundo orden para el factor de escala

$$a(t)\ddot{a}(t) - \dot{a}(t)^2 = 0, \quad (2.7)$$

que tiene como solución general

$$a(t) = a_0 e^{Ht}, \quad (2.8)$$

donde a_0 y H son constantes arbitrarias. Entonces hemos obtenido que la consistencia matemática de las ecuaciones de Einstein determina la forma de la métrica inducida sobre la membrana como un espacio dS, es decir, un espacio del tipo FRW plano máximamente simétrico con curvatura positiva y simplemente conexo definido por $a(t) = e^{Ht}$, donde por simplicidad consideraremos $a_0 = 1$ debido a que esta constante puede ser absorbida con un

cambio de coordenadas. Después de haber definido el factor de escala tenemos el camino libre que nos lleva a encontrar la solución para el factor de deformación de la ecuación (2.5), que tiene la forma siguiente

$$f(\sigma) = \ln \left(\frac{H}{b} \cos(b\sigma) \right), \quad (2.9)$$

aquí $-\pi/2b \leq \sigma \leq \pi/2b$, la constante b parametriza el inverso del ancho de la 3-membrana, la curvatura 5D y está determinada por la constante cosmológica 5D como sigue

$$b^2 = \frac{\Lambda_5}{6}. \quad (2.10)$$

Más adelante veremos como las constantes b y Λ_5 se relacionan con la masa de Planck 4D.

2.1. El modelo de Randall–Sundrum como continuación analítica del límite de la solución

Hasta este momento hemos obtenido una solución que constituye una carta de la métrica dS en 5D con una 3-membrana con simetría dS que se ve de la siguiente forma

$$ds^2 = \frac{H^2}{b^2} \cos^2(b\sigma) \left[-dt^2 + e^{2Ht} (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) \right] + d\sigma^2. \quad (2.11)$$

Por el perfil del factor de deformación podemos deducir que tenemos un modelo de membrana ancha localizada sobre la quinta dimensión alrededor

del punto $\sigma_0 = 0$. En este modelo se estudiará la localización de la gravedad y varios campos de materia más adelante.

Esta métrica viene de una solución donde las dos constantes cosmológicas, la efectiva Λ_4 y la fundamental Λ_5 , son positivas, en otras palabras, la solución representa el embebido de una 3-membrana con simetría inducida dS_4 en una carta del espaciotiempo dS_5 . Es interesante por otro lado ver cuál es el límite cuando el parámetro de Hubble tiende a ser muy pequeño o cero: $H \rightarrow 0$. Si consideramos el límite en el que ambos parámetros de la solución tienden a cero $H \rightarrow 0$ y $b \rightarrow 0$, mientras que su cociente mantiene un carácter finito $H/b \rightarrow 1$, podemos ver que esta solución se puede reducir a la 3-membrana plana multiplicada por un factor de deformación que se puede aproximar de la siguiente manera:

$$\lim_{H,b \rightarrow 0} \left[\frac{H}{b} \frac{(1 + e^{2iby}) e^{-iby}}{2} \right]^2 = e^{-2iby} \equiv e^{-2\beta|y|}, \quad (2.12)$$

donde hemos hecho una continuación analítica al parámetro b dado por $ib \equiv \beta$ y además hemos impuesto simetría Z_2 a lo largo de la coordenada extra. Este límite nos lleva a la famosa solución de Randall–Sundrum [2, 60], lo que implica que debemos agregar a la acción 5D las correspondientes membranas delgadas en el espaciotiempo 4D.

Este resultado también puede ser visto al nivel de las ecuaciones de campo (2.5)-(2.6): Si hacemos $H = 0$, vemos de (2.6) que la constante Λ_5 debe ser negativa necesariamente dado que es proporcional a $-A'^2$, y tenemos que

imponer la simetría Z_2 para obtener la solución

$$A(y) = \pm \sqrt{-\frac{\Lambda_5}{6}} |y|, \quad (2.13)$$

que corresponde a la solución de una membrana de RS, es decir, el resultado de este límite representa una membrana plana embebida en un espaciotiempo AdS 5D y además, la membrana plana es una membrana delgada que ya ha sido estudiada ampliamente en la literatura referente a los mundos membrana.

2.2. La solución como límite de membranas gruesas generadas por campos escalares

La solución anterior (2.9) puede ser obtenida como un caso límite especial de membranas anchas generadas por campos escalares, con una métrica dS 4D inducida sobre la 3-membrana, fijando algunos parámetros de la solución [8].

Consideremos la acción para un campo escalar ϕ con potencial de auto-interacción $V(\phi)$ mínimamente acoplado a la gravedad 5D

$$S_5 = \int d^5x \sqrt{|G|} \left[\frac{1}{4} R_5 - \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 - V(\phi) \right], \quad (2.14)$$

al usar el ansatz para la métrica (2.3), se obtienen las siguientes ecuaciones

de campo:

$$\begin{aligned}
\phi'' + 4f'\phi' &= \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} \\
f'' + H^2 e^{-2f} &= -\frac{2}{3}\phi'^2 \\
f'^2 - H^2 e^{-2f} &= -\frac{1}{3}V(\phi) + \frac{1}{6}\phi'^2.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

de las cuales se deriva la siguiente solución encontrada por Gremm [8], (véanse también [6],[12]-[13])

$$\begin{aligned}
e^{2f} &= \cos^2(c\sigma), \\
\phi &= \frac{1}{c} \sqrt{\frac{3}{2}(c^2 - H^2)} \ln \left[\frac{1 + \tan\left(\frac{c\sigma}{2}\right)}{1 - \tan\left(\frac{c\sigma}{2}\right)} \right], \\
V(\phi) &= \frac{3}{4} \cosh^2 \left(\frac{c\phi}{\sqrt{\frac{3}{2}(c^2 - H^2)}} \right) \left[3H^2 + c^2 - 4c^2 \tanh^2 \left(\frac{c\phi}{\sqrt{\frac{3}{2}(c^2 - H^2)}} \right) \right]
\end{aligned} \tag{2.16}$$

donde c es una constante arbitraria. La variedad resultante con el factor de deformación $f(\sigma)$ tiene singularidades desnudas en $\sigma = \pm\pi/(2c)$ y además el campo escalar diverge en esos puntos singulares [8]. Más aún, para el caso particular $c = H$, el campo escalar se anula y el potencial se torna constante. Este caso es el que corresponde precisamente a la acción (2.1) con la solución (2.9).

Por otro lado el autor Wang [12] obtuvo una familia de soluciones para la misma acción (2.14), que fue inspirada de la solución en 4D obtenida en el trabajo [71]. La solución en términos de la coordenada z tiene la forma

siguiente

$$\begin{aligned}
f &= -n \ln [\cosh (cz)], \\
\phi &= \phi_0 \sin^{-1} [\tanh (cz)], \\
V(\phi) &= V_0 \cos^{2(1-n)} \left(\frac{\phi}{\phi_0} \right),
\end{aligned} \tag{2.17}$$

donde $\phi_0 = \sqrt{3n(1-n)}$, $V_0 = nc^2[3(1+3n)]/2$, c y n son constantes arbitrarias y el último parámetro tiene los siguientes valores $0 < n < 1$.

Debido a esta desigualdad la familia de soluciones anterior no contiene nuestro caso. No obstante, ésta se puede obtener calculando formalmente el límite particular cuando $n \rightarrow 1$, que es cuando el campo escalar se hace cero y el potencial se torna constante. Para esta solución el escalar de curvatura tiene la siguiente forma

$$R = 4c^2 n(3n + 2) \cosh^{2(n-1)}(cz). \tag{2.18}$$

Este escalar es regular para $n \leq 1$ y diverge cuando $n > 1$; además podemos notar que se vuelve constante en el caso límite cuando $n \rightarrow 1$, a pesar de que la familia de soluciones excluye el caso $n = 1$, que es justamente cuando tenemos una carta 5D máximamente simétrica en la cual está encajado el modelo de membrana ancha sin campos escalares presentado en este trabajo de tesis.

2.3. Reducción dimensional

Nuestro universo 4D se encuentra en expansión acelerada y de una manera simple puede ser descrito por una 3-membrana dS con $\ddot{a} > 0$. Además, la constante cosmológica en 4D está relacionada con el parámetro de Hubble, es decir $\Lambda_4 = 3H^2$. Esto puede parecer un poco extraño y artificial si no sabemos nada acerca de la teoría que vive en 4D, pero podemos darnos cuenta de cómo es esa cosmología simple en 4D haciendo una reducción dimensional de nuestra teoría fundamental en 5D. Después de haber encontrado la solución a nuestras ecuaciones hemos visto que es posible encontrar un modelo de membrana ancha sin introducir campos escalares en el bulto. A continuación haremos un cambio de variable sobre la quinta coordenada con la finalidad de facilitar el análisis físico del modelo:

$$z = \int e^{-f(\sigma)} d\sigma. \quad (2.19)$$

De este modo, la métrica en 5D (2.3) toma una forma conforme y se ve de la siguiente manera

$$ds^2 = e^{2f(z)} [g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dz^2], \quad (2.20)$$

donde $f(z) = \log((H/b)\text{sech}(Hz))$ y $g_{\mu\nu}$ representa una métrica dS en 4D. Una vez hecho esto podemos representar la métrica conforme mediante $g_{MN} = e^{2f} \bar{g}_{MN}$. Esto nos abre el camino para calcular la relación entre la masa de Planck efectiva en 4D M_{pl} y la fundamental en 5D M usando una reducción dimensional que consiste en integrar la acción 5D con respecto a la quinta dimensión. Además, este procedimiento también nos permite encontrar el valor

de la constate cosmológica efectiva en 4D. Esto es fácil de hacer calculando R en términos de $\bar{R}$ y el factor de deformación, que vendría siendo el factor conforme como en [61]:

$$R = e^{-2f} \left[\bar{R} - 2(D-1)\bar{g}^{MN}\bar{\nabla}_M\bar{\nabla}_N f - (D-2)(D-1)g^{MN}\bar{\nabla}_M f\bar{\nabla}_N f \right], \quad (2.21)$$

donde D es el número total de dimensiones, para nuestro caso $D = 5$. Este formalismo nos ayudará a separar la acción efectiva 4D de la acción fundamental 5D, dada la solución (2.9):

$$S_{eff} \supset \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \left\{ 2M^3 \int_{-\infty}^{\infty} \left[e^{3f} \bar{R} - 4e^{3f} (2f'' + 3f'^2) - 2e^{5f} \Lambda_5 \right] dz \right\}. \quad (2.22)$$

Después de integrar sobre la quinta dimensión $z(\sigma)$ vamos a hacer una comparación directa con la acción de Einstein–Hilbert en 4D

$$S_{brane} = 2M_{pl}^2 \int d^4x \sqrt{-^4g} ({}^4R - 2\Lambda_4). \quad (2.23)$$

Ahora vamos a integrar el término de curvatura en 5D y vamos a hacer una comparación con el término de curvatura en 4D para obtener la relación entre la escala de las constantes de acoplamiento gravitacional efectiva en 4D y la fundamental en 5D

$$M_{Pl}^2 = M^3 \int_{-\infty}^{\infty} e^{3f(z)} dz = \frac{M^3 H^3}{b^3} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sech}^3(Hz) dz = \frac{\pi M^3 H^2}{2b^3}. \quad (2.24)$$

Este resultado nos muestra que la escala de Planck 4D es finita y está determinada por la escala fundamental en 5D y los parámetros de nuestra solución b y H , lo cual en principio nos abre la posibilidad de ajustar la escala de M y

el inverso del ancho de la membrana b tomando un H conocido para proponer una solución al problema de la jerarquía de masas usando nuestro modelo de membrana gruesa más una membrana auxiliar.

El segundo y tercer términos en la integral (2.22) los integramos para deducir el valor de la constante cosmológica en 4D Λ_4

$$4M_{pl}^2\Lambda_4 = \int_{-\infty}^{\infty} [8M^3H^2e^{3f} (3 - 5\text{sech}^2(Hz)) + 4M^3e^{5f}\Lambda_5] dz. \quad (2.25)$$

Después de integrar se ha llegado a la siguiente igualdad:

$$\Lambda_4 = 3H^2; \quad (2.26)$$

este resultado era de esperarse, pues se puede obtener de las ecuaciones obtenidas al variar la acción (2.23).

2.4. Ajuste fino de la constante cosmológica en 4D

Es interesante señalar que en este modelo, debido a su simplicidad, tenemos pocos parámetros libres, es decir, la solución sólo presenta los parámetros b y H . El primer parámetro, además de codificar el inverso del ancho de la membrana, representa la curvatura del espacio dS en 5D, mientras el segundo parametriza la curvatura de la 3-membrana dS en 4D. Ambas curvaturas son independientes una de la otra, es decir, la constante cosmológica en 5D es independiente de la constante cosmológica en 4D. Por otro lado,

Λ_4 se puede hacer tan grande o tan pequeña como queramos, lo que nos permite, en principio, hacer un ajuste fino para Λ_4 , manteniendo invariante la constante cosmológica Λ_5 y la curvatura $5D$. De esta manera podemos hacer que la constante cosmológica en 4D coincida con el valor observado $\Lambda_4 = 10^{-84}(GeV)^2$. Esto pareciera dejarnos una buena expectativa para nuestro modelo, sin embargo, veremos más adelante que si hacemos el ajuste fino sobre la constante cosmológica de la membrana, las masas de las partículas excitadas que podrían escapar al bulto también adoptarían valores muy pequeños, mismas que ya hubiesen sido detectadas experimentalmente. Esto muestra que no es viable considerar el modelo de membrana gruesa en un escenario que describe la época cosmológica actual, o que tal vez se deba encontrar una mejor forma de hacer el ajuste fino de la constante cosmológica en la membrana 4D.

Capítulo 3

Perturbaciones de la métrica, localización de la gravedad y correcciones a la ley de Newton

3.1. Perturbaciones de la métrica

En este capítulo primeramente llevaremos a cabo las perturbaciones de la métrica de fondo obtenida como resultado de nuestra solución y del trabajo realizado en [54]. Al perturbar nuestra métrica obtenemos la siguiente expresión

$$ds^2 = e^{2f(\sigma)} [g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}] dx^\mu dx^\nu + e^{2f(\sigma)} h_{\mu 5} dx^\mu d\sigma + (h_{55} + 1) d\sigma^2. \quad (3.1)$$

Después de elegir la métrica (3.1), las ecuaciones de Einstein linealizadas

adoptan la siguiente forma:

$$\delta G_{MN} + 2\Lambda_5 h_{MN} = 0, \quad (3.2)$$

donde las componentes del tensor linealizado de Einstein están dadas por:

$$\begin{aligned} \delta G_{MN} = & \frac{1}{2} (\nabla_p \nabla_M h_N^P + \nabla_P \nabla_N h_M^P - \nabla^2 h_{MN} - \nabla_M \nabla_N h) \\ & - \frac{1}{2} (\nabla_A \nabla_B h^{AB} - \nabla^2 h) - \frac{1}{2} H_{MN} R + \frac{1}{2} g_{MN} h^{AB} R_{AB}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

donde la derivada covariante ∇_M es tomada con respecto a la métrica (2.3).

Antes de proceder a resolver las ecuaciones de Einstein linealizadas (a primer orden), usaremos la libertad que tenemos de elegir una norma para las perturbaciones, lo cual implica que podemos imponer la siguiente condición axial $h_{5M} = 0$, con $M = 0, 1, 2, 3, 5$. Cabe señalar que hasta este punto sólo hemos usado parte de la libertad que tenemos para fijar la norma. Más adelante haremos uso de la libertad restante en los cálculos. Por el momento podemos mencionar que la métrica perturbada ya con la condición anterior se reduce a:

$$ds^2 = e^{2f(\sigma)} [g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}] dx^\mu dx^\nu + d\sigma^2. \quad (3.4)$$

Ahora usaremos la libertad residual (restante) de la norma para imponer las siguientes condiciones sobre las fluctuaciones $h_\mu^\mu = \partial^\mu h_{\mu\nu} = 0$, conocidas como condición de traza nula y condición de transversalidad, respectivamente. De esta forma reducimos el sistema de ecuaciones de Einstein linealizadas (3.2) a una sola ecuación (ver apéndice B para detalles):

$$\left[\partial_\sigma^2 + 4f' \partial_\sigma + e^{-2f(\sigma)} (-\partial_t^2 - 3H\partial_t + e^{-2Ht} \nabla^2 - 2H^2) \right] \bar{h}_{\mu\nu} = 0, \quad (3.5)$$

donde ∇^2 es el Laplaciano para un espacio tridimensional plano, la expresión entre paréntesis corresponde al D'Alambertiano para un espacio dS en 4D y $\bar{h}_{\mu\nu}$ son los modos transversos con traza nula de las fluctuaciones de la métrica.

Después de este paso, procedemos a simplificar la expresión anterior con la transformación (2.19). Esto se hace debido a que el análisis de los modos de KK para la gravedad es más fácil en estas coordenadas. Este cambio lleva la ecuación (3.5) a la siguiente forma

$$\left[\partial_z^2 + 3f' \partial_z - \partial_t^2 - 3H \partial_t + e^{-2Ht} \nabla^2 - 2H^2 \right] \bar{h}_{\mu\nu} = 0. \quad (3.6)$$

La ecuación anterior describe la dinámica de las fluctuaciones de la gravedad en 5D y para analizar los modos de KK, es necesario hacer una separación de variables que nos permita analizar la parte 5D y conectarla con la parte 4D de la gravedad. Para ello se propone la siguiente separación de variables para los modos transversos y sin traza de las perturbaciones,

$$\bar{h}_{\mu\nu} = e^{-\frac{3}{2}f(z)} \Psi_{\mu\nu}(z) g(x). \quad (3.7)$$

Este cambio de variable nos lleva a dos ecuaciones, una en 5D y otra en 4D. La ecuación para la gravedad del sector 5D tiene la forma de una ecuación tipo Schrödinger (donde los índices de la función $\Psi_{\mu\nu}(z)$ han sido suprimidos por comodidad):

$$\left(-\partial_z^2 + \frac{9}{4}f'^2 + \frac{3}{2}f'' - m^2 \right) \Psi(z) = 0, \quad (3.8)$$

donde podemos identificar un potencial, al que llamaremos por analogía a la mecánica cuántica V_{QM} , que tiene la siguiente forma

$$V_{QM} = \frac{9}{4}f'^2 + \frac{3}{2}f''. \quad (3.9)$$

Por otro lado la ecuación para el gravitón 4D se escribe como sigue

$$\left(-\partial_t^2 - 3H\partial_t + e^{-2Ht}\nabla^2 - 2H^2\right)g(x) = m^2g(x), \quad (3.10)$$

donde m es una constante de integración a la cual llamaremos masa del gravitón en 4D [62]. Además, esta ecuación representa gravitones masivos y sin masa en 4D, suponemos que tiene solución y es completamente válida.

Después de esta aclaración procedemos a resolver la ecuación (3.8) sustituyendo en el potencial el factor de deformación dependiente de la coordenada z

$$f = \ln\left(\frac{H}{b}\text{sech}(Hz)\right). \quad (3.11)$$

En términos de esta coordenada nuestro potencial toma la forma de un potencial tipo Pöschl–Teller modificado

$$V_{QM} = -\frac{15}{4}H^2\text{sech}^2(Hz) + \frac{9}{4}H^2. \quad (3.12)$$

El potencial anterior (ver Fig.(3.1)) asegura un salto en el espectro de masas de los modos de KK del gravitón, puesto que asintóticamente tiende a una cantidad definida positiva, es decir, cuando $z \rightarrow \pm\infty$, tenemos que $V_{QM} \rightarrow \frac{9}{4}H^2$, o equivalentemente $m = \frac{3H}{2}$. De esta forma, la ecuación tipo Schrödinger resultante es la siguiente

$$\left(-\partial_z^2 - \frac{15}{4}H^2\text{sech}^2(Hz) + \frac{9}{4}H^2 - m^2\right)\Psi(z) = 0. \quad (3.13)$$

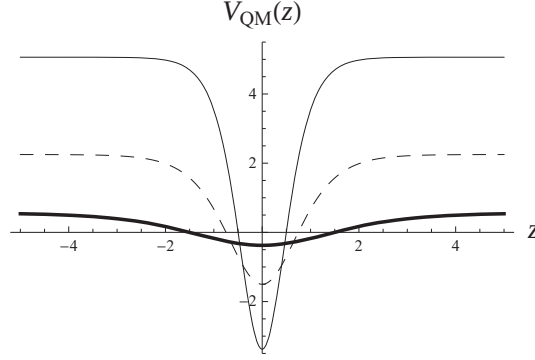


Figura 3.1: El potencial mecánico cuántico $V_{QM}(z)$ en la ecuación de tipo Schrödinger para diferentes valores de H : el primero es $H = 0,5$ representado por la línea gruesa, $H = 1,0$ para la línea punteada, y $H = 1,5$ para la línea fina.

Esta ecuación tiene un espectro de energía dado por

$$E_n = -H^2 \left(\frac{3}{2} - n \right)^2 \quad (3.14)$$

y un espectro de masas dado por

$$m_n^2 = n(3 - n)H^2, \quad (3.15)$$

donde n es un entero que satisface $0 \leq n < \frac{3}{2}$. Esto nos dice que el espectro de masas de los modos de KK tiene dos estados discretos y un continuo de modos masivos. La solución general de la ecuación tipo Schrödinger está dada por

$$\Psi(z) = C_1 P_{\frac{3}{2}}^{\mu}(\tanh(Hz)) + C_2 Q_{\frac{3}{2}}^{\mu}(\tanh(Hz)) \quad (3.16)$$

donde $P_{\frac{3}{2}}^{\mu}$ y $Q_{\frac{3}{2}}^{\mu}$ son funciones asociadas de Legendre de primer y segundo tipo, respectivamente, de grado fraccionario $\nu = 3/2$ y orden $\mu = \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{m^2}{H^2}}$ [38]–[40].

3.1.1. Localización de la gravedad

El primer estado discreto es el estado base de los modos masivos de KK (véase Fig. 3.2(a)), es el estado con energía $E_0 = -\frac{9}{4}H^2$, masa nula $m = 0$ y orden $\mu = 3/2$; este estado está asociado al gravitón en 4D y su solución se puede escribir como

$$\Psi_0(z) = k_0 \operatorname{sech}^{\frac{3}{2}}(Hz). \quad (3.17)$$

Podemos comprobar que este resultado se refiere al gravitón en 4D haciendo una sustitución directa de esta solución en la expresión (3.7) y escogiendo adecuadamente k_0 para obtener la siguiente expresión (misma que representa las perturbaciones de la métrica donde se ha eliminado la dependencia de la quinta dimensión):

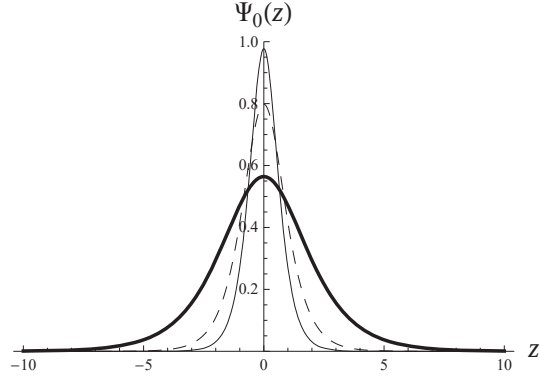
$$\bar{h}_{\mu\nu} = g(x)\delta_{\mu\nu}, \quad (3.18)$$

donde $\delta_{\mu\nu}$ representa una matriz identidad y $g(x)$ es una función que satisface la ecuación para el gravitón 4D (3.10) con $m = 0$. Físicamente, este resultado se interpreta como el gravitón 4D localizado sobre la membrana.

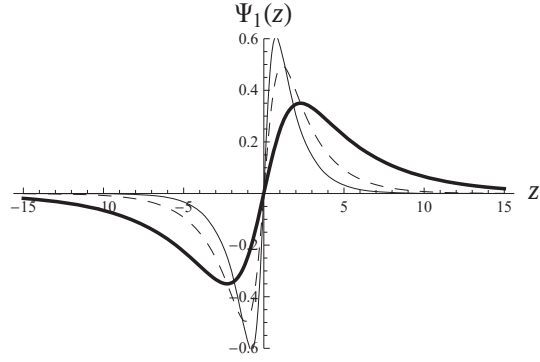
Por otro lado el segundo estado discreto, es decir, el primer estado excitado (véase Fig. 3.2(b)) corresponde a un gravitón masivo con masa $m^2 = 2H^2$, energía $E_1 = -\frac{1}{4}H^2$ y orden en la solución $\mu = \frac{1}{2}$, lo cual nos lleva a la siguiente expresión

$$\Psi_1(z) = k_1 \sinh(Hz) \operatorname{sech}^{\frac{3}{2}}(Hz). \quad (3.19)$$

Esta expresión representa un gravitón masivo localizado en el mundo membrana. La expresión para las perturbaciones de la métrica haciendo una elec-



(a) $\Psi_0(z)$



(b) $\Psi_1(z)$

Figura 3.2: La figura muestra el modo cero $\Psi_0(z)$ en (a), y el primer estado excitado $\Psi_1(z)$ en (b). El parámetro H es tomado con los siguientes valores $H = 0,5$ para la línea gruesa, $H = 1,0$ para la línea punteada, y $H = 1,5$ para la línea fina.

ción adecuada de la constante de integración k_1 es la siguiente:

$$\bar{h}_{\mu\nu} = \sinh(Hz)g(x)\delta_{\mu\nu}. \quad (3.20)$$

donde $g(x)$ es una función que satisface la ecuación para el gravitón masivo 4D (3.10) con $m = \sqrt{2}H$.

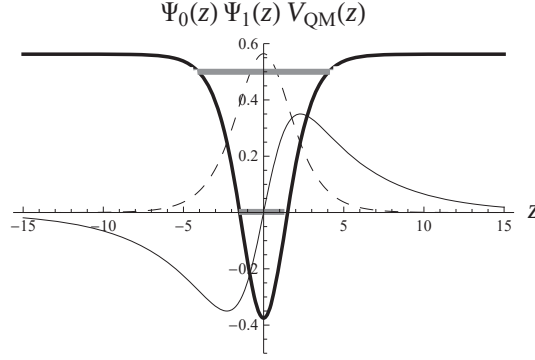


Figura 3.3: La figura muestra el potencial V_{QM} (línea gruesa), los estados ligados de los modos de KK Ψ_n (con la línea punteada se representa el estado base Ψ_0 y con la línea fina el estado excitado Ψ_1) y el espectro de masas (líneas grises). Aquí se ha fijado el parámetro $H = 0,5$.

Finalmente, en el espectro tenemos toda una torre de modos masivos continuos de KK que empieza a partir de $m \geq \frac{3H}{2}$ descrita por las siguientes funciones asociadas de Legendre con orden imaginario $\mu = i\rho$ [39]

$$\Psi_m(z) = C_1 P_{\frac{3}{2}}^{\pm i\rho}(\tanh(Hz)) + C_2 Q_{\frac{3}{2}}^{\pm i\rho}(\tanh(Hz)), \quad (3.21)$$

donde $\rho = \sqrt{\frac{m^2}{H^2} - \frac{9}{4}}$. Además, fijando $C_2 = 0$, estos modos masivos continuos de KK se ven como ondas planas asintóticamente, es decir, cuando $z \rightarrow \pm\infty$, y la expresión para las perturbaciones de la métrica adopta la forma

$$\Psi_m(z) = \sum_{+,-} e^{\pm i\alpha z} \quad (3.22)$$

donde α es una constante de integración.

3.2. Correcciones a la ley de Newton

El hecho de haber encontrado las expresiones explícitas de los modos masivos de KK para el gravitón en 5D abre el camino para calcular las correcciones a la ley de Newton provenientes de la quinta dimensión. Dichas correcciones se hallan a partir de la interacción de la gravedad con los diferentes modos masivos de KK para el gravitón en 5D, es decir, las correcciones están dadas por los gravitones masivos que viajan libres en el bulto.

De este modo, para calcular las correcciones consideraremos los modos masivos continuos de KK con masa $2m \geq 3H$, con la constante $C_2 = 0$ en la ecuación (3.21), que como ya habíamos mencionado, se comportan como ondas planas al infinito de la quinta dimensión [39]

$$\Psi_{\pm}^{\mu}(z) = C \sum_{\pm} P_{\frac{3}{2}}^{\pm i\rho}(\tanh(Hz)) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\pm iH\rho z}. \quad (3.23)$$

Después de esto tomaremos el límite de membranas delgadas, que corresponde a tomar el límite cuando el inverso del ancho de la membrana $H \mapsto \infty$, y colocaremos dos partículas de prueba con masas M_1 y una masa de prueba unitaria M_2 en el centro de la membrana en dirección transversa a la quinta dimensión. Esto equivale a introducir una fuente en la ecuación (3.6) [63]:

$$\left[-\frac{1}{2} \left(\partial_z^2 + 3f' \partial_z - \partial_t^2 - 3H \partial_t + e^{-2Ht} \nabla^2 \right) + H^2 \right] \frac{\bar{h}_{\mu\nu}}{2} = \quad (3.24)$$

$$-\lambda \delta_{\mu}^0 \delta_{\nu}^0 {}^{(3)}\delta(x) \delta(z - z_0),$$

donde $\lambda = M_1/M_{Pl}^2$, ${}^{(3)}\delta(x)$ es la función delta de Dirac 3D y z_0 denota la posición de la membrana sobre la quinta dimensión. Después de esto tomamos

el límite Newtoniano e identificamos la componente $V(x, y) = \frac{1}{2}\bar{h}_{00}$ para la cual tenemos la ecuación

$$\left[-\frac{1}{2} \left(\partial_z^2 + 3f' \partial_z - \partial_t^2 - 3H \partial_t + e^{-2Ht} \nabla^2 \right) + H^2 \right] V = -\lambda {}^{(3)}\delta(x) \delta(z - z_0). \quad (3.25)$$

El potencial V se puede expandir en términos de las funciones propias Ψ_i y Ψ_m del siguiente modo:

$$V(x^\mu, z) = \sum_i \Psi_i(z) \phi_i(x^\mu) + \int_0^\infty dm \Psi_m(z) \phi_m(x^\mu). \quad (3.26)$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación para V y considerando las ecuaciones (3.8) y (3.10) obtenemos las siguientes ecuaciones para las funciones coeficientes $\phi(x^\mu)$:

$$\left[-\frac{1}{2} \bar{\nabla}^2 + \left(H^2 + \frac{m^2}{2} \right) \right] \phi_m(x^\mu) = -\lambda \delta^3(x) \Psi_m^*(0) \quad (3.27)$$

$$\left[-\frac{1}{2} \bar{\nabla}^2 + 2H^2 \right] \phi_1(x^\mu) = -\lambda \delta^3(x) \Psi_1(0) \quad (3.28)$$

$$\left[-\frac{1}{2} \bar{\nabla}^2 + H^2 \right] \phi_0(x^\mu) = -\lambda \delta^3(x) \Psi_0(0), \quad (3.29)$$

donde por simplicidad denotamos $\bar{\nabla}^2$ como el Laplaciano dS en 4D y hemos centrado la membrana en $z_0 = 0$. Estas 3 ecuaciones diferenciales pueden ser resueltas usando el propagador dS 4D y hemos centrado la membrana en $z = 0$.

$$S^{-1}(x, x') \equiv \left\{ (-\partial_\tau^2 + \nabla^2) - 2 \frac{H}{(1 - H\tau)} \partial_\tau - \frac{m^2}{(1 - H\tau)^2} \right\} \delta^4(x - x'); \quad (3.30)$$

donde en la expresión anterior hemos introducido el tiempo conforme

$$\tau = \frac{1}{H}(1 - e^{-Ht}). \quad (3.31)$$

Como en [64] y [65] las expresiones para las funciones coeficientes son

$$\phi_0(x) = 2\lambda\Psi_0(0) \int_{-\infty}^{H^{-1}} \frac{d\tau'}{(1 - H\tau')^2} S_0(x, 0, \tau'), \quad (3.32)$$

$$\phi_1(x) = 2\lambda\Psi_1(0) \int_{-\infty}^{H^{-1}} \frac{d\tau'}{(1 - H\tau')^2} S_1(x, 0, \tau'), \quad (3.33)$$

$$\phi_m(x) = 2\lambda\Psi_m(0)^* \int_{-\infty}^{H^{-1}} \frac{d\tau'}{(1 - H\tau')^2} S_m(x, 0, \tau'). \quad (3.34)$$

En estos términos, el potencial newtoniano se puede expresar como

$$V(x, 0) = 2\lambda |\Psi_0(0)|^2 \int_{-\infty}^{H^{-1}} \frac{d\tau'}{(1 - H\tau')^2} S_0(\tau, x, \tau', 0) + \quad (3.35)$$

$$+ 2\lambda |\Psi_1(0)|^2 \int_{-\infty}^{H^{-1}} \frac{d\tau'}{(1 - H\tau')^2} S_1(\tau, x, \tau', 0) + \quad (3.36)$$

$$+ 2\lambda \int_0^\infty |\Psi_m(0)|^2 \int_{-\infty}^{H^{-1}} \frac{d\tau'}{(1 - H\tau')^2} S_m(\tau, x, \tau', 0). \quad (3.37)$$

Al recordar que el primer modo excitado de KK (3.19) se anula en el origen, ya no lo tendremos que considerar en adelante por ser una función impar. Entonces sólo nos quedamos con los términos para el modo cero y los modos continuos de KK para la masa en la expresión del potencial:

$$V(x, 0) = 2\lambda |\Psi_0(0)|^2 \int_{-\infty}^{H^{-1}} \frac{d\tau'}{(1 - H\tau')^2} S_0(\tau, x, \tau', 0) + \quad (3.38)$$

$$+ 2\lambda \int_0^\infty |\Psi_m(0)|^2 \int_{-\infty}^{H^{-1}} \frac{d\tau'}{(1 - H\tau')^2} S_m(\tau, x, \tau', 0). \quad (3.39)$$

La ecuación diferencial satisfecha por el propagador puede ser transformada en una ecuación diferencial con respecto a la distancia geodésica $\mathcal{Z}$ definida,

con $\gamma \equiv H^{-1} - \tau$, por

$$\mathcal{Z} \equiv \frac{(\gamma + \gamma')^2 - (x - x')^3}{4\gamma\gamma'}. \quad (3.40)$$

Con la distancia geodésica y siguiendo [90] llegamos a la expresión de la ecuación diferencial que satisface el propagador

$$\mathcal{Z}(1 - \mathcal{Z})S''(\mathcal{Z}) + 2(1 - 2\mathcal{Z})S'(\mathcal{Z}) - \frac{m^2}{H^2}S(\mathcal{Z}) = 0. \quad (3.41)$$

Resolviendo la ecuación anterior encontramos que la expresión para el propagador masivo es

$$S_m(\mathcal{Z}) = \frac{H^2}{16\pi^2} \left| \Gamma\left(\frac{3}{2} + 3\frac{im}{2}\right) \right|^2 {}_2F_1\left(\frac{3}{2} + 3\frac{im}{2}, \frac{3}{2} - 3\frac{im}{2}; 2; \mathcal{Z}\right) \quad (3.42)$$

y para el propagador con $m = 0$ se tiene

$$S_0(\mathcal{Z}) = \frac{iH^2}{16\pi^2} \left[\frac{1}{1 - \mathcal{Z} - i\epsilon} - \frac{1}{\mathcal{Z} + i\epsilon} + 2\ln\left(\frac{\mathcal{Z} + i\epsilon}{1 - \mathcal{Z} - i\epsilon}\right) \right]. \quad (3.43)$$

El potencial en términos de la distancia geométrica se ve como

$$V(x, 0) = \frac{2\lambda}{H^2} |\Psi_0(0)|^2 \int_{\gamma}^{\infty} \frac{d\gamma'}{\gamma'^2} S_0(\mathcal{Z}) + \quad (3.44)$$

$$+ \frac{2\lambda}{H^2} \int_0^{\infty} dm |\Psi_m(0)|^2 \int_{\gamma}^{\infty} \frac{d\gamma'}{\gamma'^2} S_m(\mathcal{Z}). \quad (3.45)$$

La contribución del modo cero al potencial puede ser integrada y en el límite cuando $R \ll 1/H$ da como resultado

$$V_0 = \frac{2\lambda}{H^2} \Psi_0^2(0) \int_{\gamma}^{\infty} \frac{d\gamma'}{\gamma'^2} S_0 \sim -\frac{\lambda \Psi_0^2(0)}{4\pi} \frac{1}{R}; \quad (3.46)$$

sustituyendo el valor de λ tenemos

$$V_0 \sim -\frac{M_1}{4\pi M_{pl}^2} \frac{1}{R}. \quad (3.47)$$

La contribución del espectro continuo al potencial está dada por

$$V_m = \frac{2\lambda}{H^2} \int_0^\infty dm |\Psi_\delta(0)|^2 \int_\gamma^\infty \frac{d\gamma'}{\gamma'^2} S_m. \quad (3.48)$$

Considerando el límite realista de distancias cortas $HR \ll 1$, el propagador debe adoptar la forma de un propagador en un espaciotiempo plano. Entonces para $R \ll 1/H$, considerando que $R > m^{-1}$, podemos aproximar el valor de la integral para la parte temporal en (3.48) como sigue

$$\int_\gamma^\infty \frac{d\gamma'}{\gamma'^2} S_m \sim -\frac{H^2}{8\pi R} e^{-mR}, \quad (3.49)$$

sustituyendo el valor de λ nuevamente tenemos

$$V_m \sim -\frac{M_1 H}{4\pi M_{pl}^2 R} \int_0^\infty dm |\Psi_m(0)|^2 e^{-mR}. \quad (3.50)$$

De este modo, las correcciones al potencial generadas por gravitones masivos están expresadas de la siguiente manera

$$V(R) \sim \frac{M_1}{R} (G_4) + \frac{M_1}{R} \left(\int_{m_0}^\infty dm e^{-mR} |\Psi_m(0)|^2 \right) = \frac{M_1}{R} (G_4 + \Delta G_4). \quad (3.51)$$

Aquí G_4 es la constante de acoplamiento gravitatoria en 4D, $\Psi_m(z_0)$ representa, como ya vimos, los modos masivos continuos de KK para el gravitón; estos últimos son los modos que deberán ser integrados sobre sus masas para calcular explícitamente las correcciones a la ley de Newton. Entonces, las correcciones que andamos buscando sólo van a tener una contribución que proviene de los modos continuos de KK. Para llevar a cabo la integración se

requiere un método numérico potente debido a la complejidad de la integral; por ello nos basaremos en la suposición de que el salto en el espectro de masas entre el estado base y los estados continuos es muy grande, dicho de otra forma, el gravitón 4D está muy lejos de sentir la interacción con los modos continuos. Haciendo esta suposición aproximamos la integral alrededor de $R = 0$ y obtenemos la siguiente expresión para las correcciones a la ley de Newton:

$$\Delta G_4 \sim \frac{1}{|\Gamma(-\frac{1}{4})\Gamma(\frac{7}{4})|^2} \frac{e^{-\frac{3}{2}HR}}{R} \left(1 + O\left(\frac{1}{HR}\right) \right); \quad (3.52)$$

estas correcciones nos dejan ver a primer orden que el primer término de la serie tiene una contribución muy pequeña a la ley de Newton, lo cual se espera que el gravitón 4D tenga una interacción muy pequeña con los gravitones masivos que viven en el bulto sobre la quinta dimensión.

3.3. Solución máximamente simétrica *versus* localización de la gravedad 4D y existencia de un salto en el espectro de masas

En la configuración de membrana que estamos estudiando existe una relación entre el estado base $\Psi_0(z) = k_0 e^{\frac{3}{2}f(z)}$, el cual es el responsable de la localización de la gravedad 4D, el carácter suave del escalar de Ricci en 5D R , el cual resulta ser constante para un espacio máximamente simétrico en 5D, y el comportamiento asintótico del potencial tipo mecánico cuántico V_{QM} .

En el trabajo [46] se mostró que si uno requiere la existencia de un salto en el espectro de masas de KK para el gravitón, junto con la localización de la gravedad 4D en mundos membrana con simetría de Poincaré, entonces la variedad en 5D necesariamente presenta singularidades desnudas, y de forma inversa, si uno impone suavidad para el escalar de Ricci en 5D junto con la localización de la gravedad 4D, entonces el potencial V_{QM} se anula asintóticamente, hecho que descarta la posibilidad de tener un salto en el espectro de masas de KK para el gravitón.

En este trabajo se incluyó una constante cosmológica en el bulto Λ_5 junto con una métrica de tipo FRW plana inducida sobre la 3-membrana. Es fácil mostrar para el modelo (2.1) con el ansatz (3.4) y para el potencial V_{QM} considerado en (3.12), que para configuraciones en la posición de la membrana podemos escribir la siguiente relación

$$R\Psi_0^{\frac{4}{3}} \sim \left[3 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) - \frac{8}{3} V_{QM} \right], \quad (3.53)$$

que en comparación con las cantidades contempladas en [46], esta expresión incluye el factor de escala de la métrica inducida sobre la membrana. Si requerimos la presencia de un salto en el espectro de masas de KK para el gravitón, entonces el potencial V_{QM} debe adoptar un valor asintótico positivo. De la relación (3.53) podemos ver que si requerimos que $\Psi_0 \rightarrow 0$ cuando $z \rightarrow \infty$, entonces el escalar de Ricci puede ser finito o singular dependiendo de la naturaleza asintótica de la expresión entre corchetes: si se anula asintóticamente, entonces el escalar de Ricci 5D puede ser finito a lo largo de la quinta dimensión, mientras que si asintóticamente tiende a un valor finito

(o infinito), entonces el escalar de curvatura 5D puede poseer singularidades desnudas en las fronteras de la variedad. Un resultado similar ha sido encontrado en [47] para un bulto AdS_5 con métricas AdS_4 y dS_4 inducidas sobre la 3-membrana.

En nuestro caso, el factor de escala tiene la forma particular que corresponde a una métrica dS plana $a = e^{Ht}$, lo cual nos lleva a la siguiente relación

$$R\Psi_0^{\frac{4}{3}} \sim \left[3H^2 - \frac{4}{3}V_{QM} \right]; \quad (3.54)$$

podemos ver que en este caso el potencial tipo mecánico cuántico V_{QM} asintóticamente se aproxima al valor $9H^2/4$, asegurando la presencia de un salto en el espectro de masas de KK para el gravitón, hecho que a su vez anula la expresión entre corchetes, implicando que el escalar de curvatura es regular a lo largo de la quinta dimensión, lo cual se puede comprobar fácilmente puesto que $R = 20b^2$, que es de hecho lo que esperábamos tener desde el principio debido a la forma máximamente simétrica de nuestra métrica en 5D. Con este resultado podemos ir a la inversa y afirmar a partir de (3.54) que la naturaleza máximamente simétrica de nuestra métrica implica la existencia de un salto en el espectro de masas de KK del gravitón si se tiene localización del gravitón 4D sobre la 3-membrana.

Capítulo 4

Localización de campos de materia en la membrana

4.1. La localización de diversos campos de materia sobre una membrana gruesa dS

En este capítulo vamos a investigar la localización de varios campos de materia sobre la membrana tipo dS que se ha generado sin ayuda de campos escalares en el bulto. Primeramente localizaremos campos escalares (espín=0), después campos vectoriales (espín=1) y por último, campos fermiónicos (espín=1/2). Estos últimos son estudiados usando una masa 5D para el campo fermiónico que depende de la geometría de la dimensión extra $MF(z)\bar{\Psi}\Psi$, donde el carácter de la localización cambia según se elija la función $F(z)$. Asimismo, supondremos que los diversos campos de materia considerados

anteriormente tienen una contribución muy pequeña a la energía del bulto. Esto permite que la solución del mundo membrana considerada en este trabajo de tesis siga siendo válida en la presencia de campos de materia en el bulto, es decir, los campos de materia del bulto tienen una contribución despreciable a la geometría del espaciotiempo. El espectro de masas de KK para los diversos campos de materia sobre una 3–membrana gruesa puramente dS es presentado y discutido al analizar el potencial de las correspondientes ecuaciones tipo Schrödinger que generan los modos de KK en la quinta dimensión, es decir, se investigarán diferentes campos de materia poniendo principal atención a los potenciales de las correspondientes ecuaciones tipo Schrödinger obtenidas convenientemente con la ayuda de la métrica (2.20).

4.1.1. Campos escalares: espín–0

Empezaremos considerando la localización de campos escalares reales sobre la membrana gruesa obtenida en el Capítulo 2. Consideremos la acción de un campo real acoplado mínimamente a la gravedad en 5D

$$S_0 = -\frac{1}{2} \int d^5x \sqrt{-g} g^{MN} \partial_M \Phi \partial_N \Phi \quad (4.1)$$

usando la métrica conforme (2.20). La ecuación de movimiento resultante de la variación de la acción (4.1) es

$$\frac{1}{\sqrt{-\hat{g}}} \partial_\mu \left(\sqrt{-\hat{g}} \hat{g}^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi \right) + e^{-3f} \partial_z \left(e^{3f} \partial_z \Phi \right) = 0. \quad (4.2)$$

Entonces, usando la descomposición de KK

$$\Phi(x, z) = \sum_n \phi_n(x) \chi_n(z) e^{-3f/2} \quad (4.3)$$

demandamos que Φ_n satisfaga la ecuación masiva de Klein–Gordon en 4D

$$\left[\frac{1}{\sqrt{-\hat{g}}} \partial_\mu \left(\sqrt{-\hat{g}} \hat{g}^{\mu\nu} \partial_\nu \right) - m_n^2 \right] \phi_n(x) = 0, \quad (4.4)$$

luego, podemos obtener la ecuación para los modos escalares de KK $\chi_n(z)$:

$$[-\partial_z^2 + V_0(z)] \chi_n(z) = m_n^2 \chi_n(z); \quad (4.5)$$

esta es una ecuación tipo Schrödinger con un potencial efectivo dado por

$$V_0(z) = \frac{3}{2} f'' + \frac{9}{4} f'^2, \quad (4.6)$$

donde m_n es una constante de integración que representa la masa del campo escalar en 4D correspondiente a las excitaciones de KK. Asimismo, vemos que el potencial $V_0(z)$ es idéntico al que tenemos cuando localizamos la gravedad y está determinado por el factor de deformación.

También podemos hacer una reducción dimensional de la acción (4.1) para obtener una acción efectiva en 4D que describa campos escalares masivos. Después de la reducción dimensional tenemos que la acción resultante tiene la forma siguiente

$$S_0 = -\frac{1}{2} \sum_n \int d^4x \sqrt{-\hat{g}} \left(\hat{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \phi_n \partial_\nu \phi_n + m_n^2 \phi_n^2 \right); \quad (4.7)$$

cuando integramos sobre la quinta dimensión, requerimos que la ecuación (4.5) se satisfaga y que además se cumplan las siguientes condiciones de ortonormalización:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \chi_m(z) \chi_n(z) dz = \delta_{mn}. \quad (4.8)$$

Para la solución de la membrana ancha (2.9), el potencial (4.6) adopta la forma

$$V_0(z) = \frac{9}{4}H^2 - \frac{15}{4}H^2 \text{sech}^2(Hz). \quad (4.9)$$

De este modo podemos ver que el potencial tiene un mínimo igual a $-\frac{3H^2}{2}$ en $z = 0$ y un máximo igual a $\frac{9H^2}{4}$ en $z = \pm\infty$ (ver Figura (4.1)). Entonces, la ecuación (4.5) toma la forma conocida de la ecuación de Schrödinger con energía $E_n = m_n^2 - \frac{9H^2}{4}$:

$$\left[-\partial_z^2 - \frac{15H^2}{4} \text{sech}^2(Hz) \right] \chi_n = E_n \chi_n. \quad (4.10)$$

Para esta ecuación con un potencial tipo Pöschl–Teller modificado, se tiene el siguiente espectro de energía [8, 20, 39, 41, 54, 66]

$$E_n = -H^2 \left(\frac{3}{2} - n \right)^2, \quad (4.11)$$

o en términos de la masa:

$$m_n^2 = n(3 - n)H^2, \quad (4.12)$$

donde n es un entero que satisface $0 \leq n < \frac{3}{2}$, por lo que es claro que hay dos estados discretos. El primer estado corresponde al estado base con $m_0^2 = 0$, y puede ser expresado como

$$\chi_0(z) = \sqrt{\frac{2H}{\pi}} \text{sech}^{\frac{3}{2}}(Hz), \quad (4.13)$$

éste es el estado de KK sin masa y como es el primero, vemos entonces que no hay estados taquiónicos (con cuadrados de masa negativos) para el espectro

de KK . El segundo estado es el primer estado excitado, que corresponde a $n = 1$ y $m_1^2 = 2H^2$, y puede ser escrito como

$$\chi_1(z) = \sqrt{\frac{2H}{\pi}} \operatorname{sech}^{\frac{3}{2}}(Hz) \sinh(Hz). \quad (4.14)$$

El perfil del modo cero de KK para el campo escalar χ_0 , el primer modo excitado χ_1 , el potencial V_0 para los modos escalares de KK y el espectro de masas, se muestran en las Figuras 4.2 y 4.3, respectivamente. El espectro continuo empieza en $m^2 = 9H^2/4$. De esta manera, cuando la energía de las partículas escalares es tan grande como $m = \frac{3H}{2}$, los modos del espectro continuo no se localizan sobre la 3-membrana, pues no pueden ser atrapados en ella, entonces esos modos se mueven en el bulto y podrían, en principio, ser un buen candidato para abrir la puerta a un experimento que tenga como finalidad descubrir las dimensiones extra. Por ejemplo, considerando las energías experimentales alcanzables en el LHC podemos fijar $H \sim 1$ TeV, entonces la constante cosmológica en 4D toma el valor $\Lambda_4 \sim 10^6$ GeV². Aunque Λ_4 es mucho más grande que la constante cosmológica medida (10^{-84} GeV²) por un factor de 10^{90} , ésta es más pequeña que la constante cosmológica predicha en teoría cuántica de campos (10^{36} GeV²) por un factor de 10^{-30} .

4.1.2. Campos vectoriales: espín-1

Ahora analizaremos los campos vectoriales de espín-1. Considerando la acción en 5D para un campo vectorial

$$S_1 = -\frac{1}{4} \int d^5x \sqrt{-g} g^{MN} g^{RS} F_{MR} F_{NS}, \quad (4.15)$$

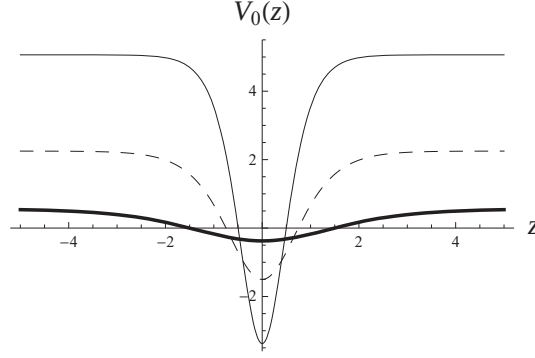


Figura 4.1: El perfil del potencial $V_0(z)$ para los modos escalares de KK para diferentes valores de H : consideramos $H = 0,5$ para la línea delgada, $H = 1,0$ para la línea punteada, y por último $H = 1,5$ para la línea gruesa.

donde $F_{MN} = \partial_M A_N - \partial_N A_M$ es el tensor de Faraday. De esta acción obtenemos las siguientes ecuaciones de campo

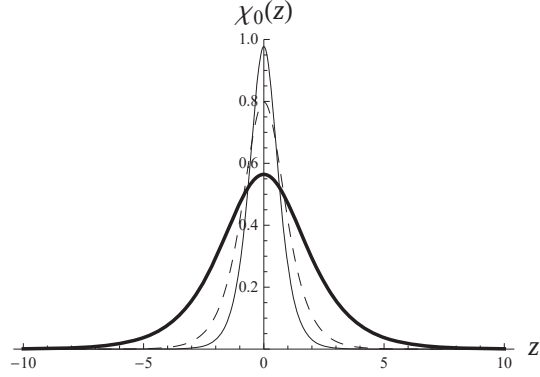
$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_M (\sqrt{-g} g^{MN} g^{RS} F_{NS}) = 0. \quad (4.16)$$

Usando la métrica de fondo (2.20), podemos escribir las ecuaciones de movimiento de la forma siguiente

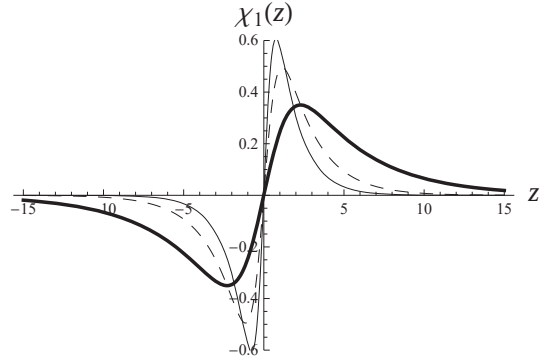
$$\frac{1}{\sqrt{-\hat{g}}} \partial_\nu \left(\sqrt{-\hat{g}} \hat{g}^{\nu\rho} \hat{g}^{\mu\lambda} F_{\rho\lambda} \right) + \hat{g}^{\mu\lambda} e^{-f} \partial_z (e^f F_{5\lambda}) = 0, \quad (4.17)$$

$$\partial_\mu \left(\sqrt{-\hat{g}} \hat{g}^{\mu\nu} F_{\nu 5} \right) = 0. \quad (4.18)$$

Como la componente A_5 no tiene modo cero en la teoría efectiva 4D, supondremos que la componente es par con respecto a la dimensión extra z . Además, para ser consistentes con la invarianza de norma de la ecuación $\oint dz A_5 = 0$, vamos a escoger $A_5 = 0$ usando la libertad de norma. Esto nos



(a) $\chi_0(z)$



(b) $\chi_1(z)$

Figura 4.2: El perfil del modo cero de KK para el campo escalar $\chi_0(z)$ en (a), y el primer estado excitado $\chi_1(z)$ en (b). Se ha fijado el parámetro $H = 0,5$ para la línea gruesa, $H = 1,0$ para la línea punteada y $H = 1,5$ para la línea delgada.

lleva a que la acción (4.15) se reduzca a la forma siguiente

$$S_1 = -\frac{1}{4} \int d^5x \sqrt{-g} \left\{ g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} + 2e^{-A} g^{\mu\nu} \partial_z A_\mu \partial_z A_\nu \right\}. \quad (4.19)$$

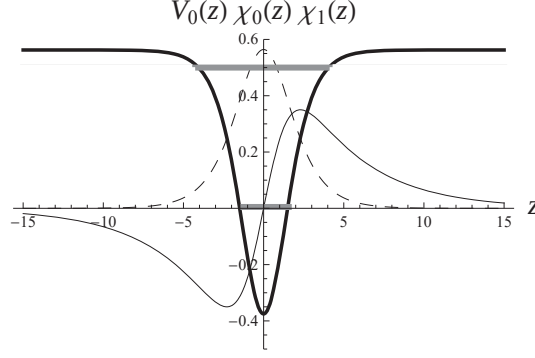


Figura 4.3: El perfil del potencial V_0 para los modos escalares de KK (línea gruesa), los estados ligados de los modos de KK del campo escalar χ_n : la línea punteada es para el estado base χ_0 y la línea delgada para el primer modo excitado χ_1 , y el espectro de masas (línea gruesa gris) con el parámetro $H = 0,5$.

Con ayuda de la separación de variables del campo vectorial $A_\mu(x, z) = \sum_n a_\mu^{(n)}(x) \rho_n(z) e^{-A/2}$ y las condiciones de ortonormalización

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho_m(z) \rho_n(z) dz = \delta_{mn}, \quad (4.20)$$

la acción (4.19) queda como

$$S_1 = \sum_n \int d^4x \sqrt{-\hat{g}} \left(-\frac{1}{4} \hat{g}^{\mu\alpha} \hat{g}^{\nu\beta} f_{\mu\nu}^{(n)} f_{\alpha\beta}^{(n)} - \frac{1}{2} m_n^2 \hat{g}^{\mu\nu} a_\mu^{(n)} a_\nu^{(n)} \right), \quad (4.21)$$

donde $f_{\mu\nu}^{(n)} = \partial_\mu a_\nu^{(n)} - \partial_\nu a_\mu^{(n)}$ es el tensor de Faraday en 4D. En el proceso anterior se requirió que los modos vectoriales de KK $\rho_n(z)$ satisfagan la ecuación de Schrödinger :

$$[-\partial_z^2 + V_1(z)] \rho_n(z) = m_n^2 \rho_n(z), \quad (4.22)$$

donde el potencial $V_1(z)$ está dado por

$$V_1(z) = \frac{H^2}{4} - \frac{3H^2}{4} \text{sech}^2(Hz). \quad (4.23)$$

Este potencial tiene un mínimo igual a $-H^2/2$ en $z = 0$ y un máximo igual a $H^2/4$ en $z = \pm\infty$ (ver Fig. 4.4). La ecuación (4.22) es de tipo Schrödinger y el potencial es de tipo Pöschl-Teller modificado:

$$\left[-\partial_z^2 - \frac{3H^2}{4} \text{sech}^2(Hz) \right] \rho_n = E_n \rho_n, \quad (4.24)$$

donde $E_n = m_n^2 - \frac{H^2}{4}$. De este modo, el espectro de energía de los estados discretos tiene la siguiente forma:

$$E_n = -H^2 \left(\frac{1}{2} - n \right)^2 \quad (4.25)$$

o, en términos del cuadrado de la masa:

$$m_n^2 = n(1-n)H^2, \quad (4.26)$$

donde n es un entero que satisface $0 \leq n < \frac{1}{2}$. Esto quiere decir que sólo hay un estado discreto (el estado base), es decir, el estado cero

$$\rho_0(z) = \sqrt{\frac{H}{\pi}} \text{sech}^2(Hz) \quad (4.27)$$

con $m_0^2 = 0$. El perfil del modo cero se muestra en la Figura 4.5. También es fácil observar que hay un salto entre el modo cero y el primer modo excitado de KK como se muestra en la Figura 4.6. Además, el espectro continuo para los modos vectoriales de KK empieza en $m^2 = H^2/4$ y asintóticamente éstos tienen la forma de ondas planas. Podemos observar que, como ocurre para

el caso escalar, considerando $H \sim 1$ TeV, es decir, cuando la energía es del orden de 1 TeV, los campos vectoriales no se pueden localizar sobre la 3-membrana.

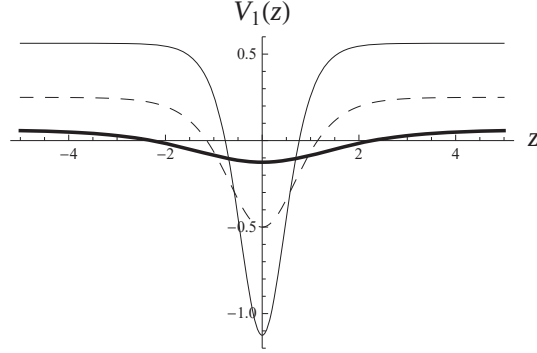


Figura 4.4: El perfil del potencial para el campo vectorial $V_1(z)$. El parámetro H se ha fijado de la siguiente manera: $H = 0,5$ para la línea gruesa, $H = 1,0$, para la línea punteada y $H = 1,5$ para línea delgada.

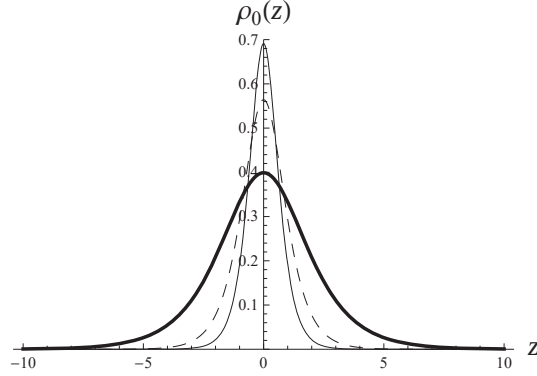


Figura 4.5: El perfil del modo cero de KK para el campo vectorial $\rho_0(z)$. Se ha elegido $H = 0,5$ para la línea gruesa, $H = 1,0$ para la línea punteada y $H = 1,5$ para la línea delgada.

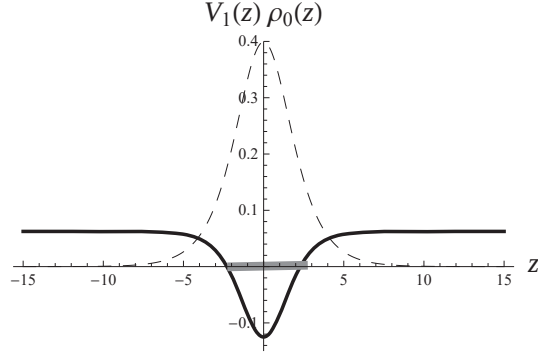


Figura 4.6: El perfil del potencial para los modos vectoriales de KK V_1 (línea gruesa), el modo vectorial cero de KK ρ_0 (línea punteada), y el espectro de masas discreto (línea gruesa gris). En la figura se ha considerado $H = 0,5$.

4.1.3. Campos fermiónicos: espín-1/2

En esta sección estudiaremos la localización de fermiones con espín-1/2 en la membrana gruesa dS considerada en este trabajo de tesis. En un espacio 5D, los fermiones son representados por espinores con 4 componentes y su estructura de Dirac puede ser descrita por las matrices gamma $\Gamma^M = e^M_{\bar{M}} \Gamma^{\bar{M}}$, donde hemos usado la tetrad $e^M_{\bar{M}}$ y las matrices gamma obedecen la siguiente relación

$$\{\Gamma^M, \Gamma^N\} = 2g^{MN}. \quad (4.28)$$

En este trabajo $\bar{M}, \bar{N}, \dots = 0, 1, 2, 3, 5$ y $\bar{\mu}, \bar{\nu}, \dots = 0, 1, 2, 3$ denotan los índices en 5D y los índices locales de Lorentz en 4D, respectivamente, y $\Gamma^{\bar{M}}$ son las matrices para un espaciotiempo plano en 5D. En este formalismo, la

tetrada está dada por

$$e_M^{\bar{M}} = \begin{pmatrix} e^f \hat{e}_\mu^{\bar{\nu}} & 0 \\ 0 & e^f \end{pmatrix}, \quad (4.29)$$

$$ds^2 = e_M^{\bar{M}} e_N^{\bar{N}} \eta_{\bar{M}\bar{N}} dx^M dx^N \quad (4.30)$$

$\Gamma^M = e^{-f}(\hat{e}_{\bar{\nu}}^\mu \gamma^{\bar{\nu}}, -i\gamma^5) = e^{-f}(\gamma^\mu, -i\gamma^5)$, donde $\gamma^\mu = \hat{e}_{\bar{\nu}}^\mu \gamma^{\bar{\nu}}$, $\gamma^{\bar{\nu}}$ y γ^5 son las matrices gamma en la representación de Dirac para un espaciotiempo plano en 4D.

La acción de Dirac para un fermión masivo con espín-1/2 en 5D tiene la siguiente forma [67]:

$$S_{\frac{1}{2}} = \int d^5x \sqrt{-g} [\bar{\Psi} i \Gamma^M (\partial_M + \omega_M) \Psi - MF(z) \bar{\Psi} \Psi], \quad (4.31)$$

donde ω_M es la conexión de espín definida como $\omega_M = \frac{1}{4} \omega_M^{\bar{M}\bar{N}} \Gamma_{\bar{M}} \Gamma_{\bar{N}}$ con

$$\begin{aligned} \omega_M^{\bar{M}\bar{N}} &= \frac{1}{2} e^{N\bar{M}} (\partial_M e_N^{\bar{N}} - \partial_N e_M^{\bar{N}}) - \frac{1}{2} e^{N\bar{N}} (\partial_M e_N^{\bar{M}} - \partial_N e_M^{\bar{M}}) \\ &\quad - \frac{1}{2} e^{P\bar{M}} e^{Q\bar{N}} (\partial_P e_{Q\bar{R}} - \partial_Q e_{P\bar{R}}) e_M^{\bar{R}}, \end{aligned} \quad (4.32)$$

y $F(z)$ es una función arbitraria dependiente de la quinta coordenada z . En este trabajo discutiremos las propiedades de la función escalar $F(z)$ en el contexto de la localización de los modos fermiónicos de KK. Las componentes distintas de cero de la conexión de espín ω_M calculadas con la métrica de fondo (2.20) son

$$\omega_\mu = \frac{1}{2} (\partial_z f) \gamma_\mu \gamma_5 + \hat{\omega}_\mu, \quad (4.33)$$

donde $\hat{\omega}_\mu = \frac{1}{4} \bar{\omega}_\mu^{\bar{\mu}\bar{\nu}} \Gamma_{\bar{\mu}} \Gamma_{\bar{\nu}}$ es la conexión de espín derivada de la métrica de fondo $\hat{g}_{\mu\nu}(x) = \hat{e}_\mu^{\bar{\mu}}(x) \hat{e}_\nu^{\bar{\nu}}(x) \eta_{\bar{\mu}\bar{\nu}}$. Entonces, la ecuación de movimiento que

corresponde a la acción (4.31) puede ser escrita como

$$\left[i\gamma^\mu(\partial_\mu + \hat{\omega}_\mu) + \gamma^5(\partial_z + 2\partial_z f) - e^f MF(z) \right] \Psi = 0, \quad (4.34)$$

donde $i\gamma^\mu(\partial_\mu + \hat{\omega}_\mu)$ es el operador de Dirac sobre la 3-membrana.

Ahora investigaremos la ecuación de Dirac en 5D (4.34) y escribiremos el espinor en términos de los campos fermiónicos efectivos en 4D. Con ayuda de la matriz γ^5 obtendremos las proyecciones derechas e izquierdas del campo espinorial en 4D.

Las soluciones para la ecuación (4.34) pueden ser obtenidas con ayuda de una descomposición quirál que en general tiene la forma siguiente

$$\Psi = e^{-2A} \left(\sum_n \psi_{Ln}(x) L_n(z) + \sum_n \psi_{Rn}(x) R_n(z) \right), \quad (4.35)$$

donde abusando de la notación por razones puramente algebraicas consideramos sólo la parte de los proyectores quirales que contribuye a la separación entre la parte 5D y la parte 4D de la ecuación 4.34 considerando $\psi_{Ln}(x) = -\gamma^5 \psi_{Ln}(x)$ y $\psi_{Rn}(x) = \gamma^5 \psi_{Rn}(x)$ como las componentes izquierdas y derechas del campo de Dirac en 4D, respectivamente, donde sólo por conveniencia algebraica se han escogido así los proyectores anteriores; por lo tanto, supondremos que $\psi_{Ln}(x)$ y $\psi_{Rn}(x)$ satisfacen las ecuaciones de Dirac en 4D. Entonces, los modos de KK $L_n(z)$ y $R_n(z)$ deben satisfacer las siguientes ecuaciones acopladas:

$$[\partial_z + e^f MF(z)] L_n(z) = m_n R_n(z), \quad (4.36a)$$

$$[\partial_z - e^f MF(z)] R_n(z) = -m_n L_n(z). \quad (4.36b)$$

A partir del par de ecuaciones anteriores podemos obtener las ecuaciones tipo Schrödinger para los modos fermiónicos de KK con quiralidad izquierda y derecha:

$$(-\partial_z^2 + V_L(z))L_n = m_{L_n}^2 L_n, \quad (4.37)$$

$$(-\partial_z^2 + V_R(z))R_n = m_{R_n}^2 R_n, \quad (4.38)$$

donde los potenciales izquierdo V_L y derecho V_R están dados por:

$$V_L(z) = e^{2f} M^2 F^2(z) - e^f f' M F(z) - e^f M \partial_z F(z), \quad (4.39a)$$

$$V_R(z) = e^{2A} M^2 F^2(z) + e^f f' M F(z) + e^f M \partial_z F(z). \quad (4.39b)$$

De este modo, podemos expresar la acción efectiva estándar en 4D para fermiones sin masa y fermiones masivos, tanto izquierdos como derechos, de la siguiente forma

$$S_{\frac{1}{2}} = \int d^5x \sqrt{-g} \bar{\Psi} [i\Gamma^M (\partial_M + \omega_M) - M F(z)] \Psi \nabla \quad (4.40)$$

$$= \sum_n \int d^4x \sqrt{-\hat{g}} \bar{\psi}_n [i\gamma^\mu (\partial_\mu + \hat{\omega}_\mu) - m_n] \psi_n, \quad (4.41)$$

entonces, se deben satisfacer las siguientes condiciones de ortonormalización para L_n y R_n :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} L_m L_n dz = \delta_{mn}, \quad (4.42)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R_m R_n dz = \delta_{mn}, \quad (4.43)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} L_m R_n dz = 0. \quad (4.44)$$

Si en las fórmulas (4.36a) y (4.36b) fijamos $m_n = 0$, obtenemos

$$L_0 \propto e^{-M \int e^f F dz}, \quad (4.45a)$$

$$R_0 \propto e^{M \int e^f F dz}. \quad (4.45b)$$

Estas relaciones nos dicen que no es posible tener ambos modos fermiónicos de KK sin masa, izquierdo y derecho, localizados sobre la 3-membrana al mismo tiempo porque sólo uno puede ser normalizable.

A partir de las ecuaciones (4.37), (4.38) y (4.39) podemos ver que si no introducimos el término de masa en la ecuación (4.31), es decir, cuando $M = 0$, los potenciales para los modos quirales izquierdos y derechos de KK $V_{L,R}(z)$ se anulan y ambos fermiones, izquierdos y derechos, no pueden localizarse sobre la membrana. Sin embargo, si demandamos que los potenciales $V_L(z)$ y $V_R(z)$ sean funciones pares con respecto a la quinta coordenada z , entonces la función $MF(z)$ debe ser una función impar de z . Nosotros consideraremos varias formas de esta función tales como: $F(z) = \varepsilon(z)$, donde $\varepsilon(z \neq 0) \equiv \frac{z}{|z|}$ y $\varepsilon(0) = 0$ es la función salto de Heaviside, $F(z) = \tanh(Hz)$, $F(z) = \sinh(Hz)$ and $F(z) = (Hz)^{2k+1}e^{-f}$.

Caso I: $F(z) = \varepsilon(z)$

Consideremos el caso simple $F(z) = \varepsilon(z)$ [67]. Entonces la forma explícita de los potenciales (4.39) es expresada como sigue:

$$V_L(z) = \frac{H^2 M \text{sech}^2(Hz)}{b^2} [M + b \sinh(Hz) \varepsilon(z)] - 2\delta(z), \quad (4.46a)$$

$$V_R(z) = \frac{H^2 M \text{sech}^2(Hz)}{b^2} [M - b \sinh(Hz) \varepsilon(z)] + 2\delta(z). \quad (4.46b)$$

A partir de estas expresiones, encontramos que los potenciales $V_{L,R}(z)$ tienen el siguiente comportamiento asintótico: $V_{L,R}(z \rightarrow \pm\infty) \rightarrow 0$. Además, tenemos una función δ en las expresiones para ambos potenciales, por lo tanto, cuando $z = 0$, $V_L(0) = -\infty$ y $V_R(0) = +\infty$. Está claro que sólo el potencial $V_L(z)$ es de tipo volcán dado por la función delta δ , localizada donde está situada la 3-membrana. Entonces sólo el modo de KK sin masa correspondiente al fermión con quiralidad izquierda puede estar localizado sobre la membrana. El modo cero de KK para el fermión con quiralidad izquierda puede ser calculado resolviendo (4.36a) con $m_0 = 0$:

$$\begin{aligned} L_0(z) &\propto \exp\left(-\int_0^z dz' e^{A(z')} M \epsilon(z')\right) \\ &= \exp\left(-\frac{2M}{b} \arctan\left[\tanh\left(\frac{H|z|}{2}\right)\right]\right). \end{aligned} \quad (4.47)$$

Sin embargo, de la expresión anterior, sabemos que cuando estamos lejos de la 3-membrana, $L_0(z \rightarrow \pm\infty)$ se aproxima a una constante positiva $e^{-\frac{\pi M}{2b}}$, esto tiene como consecuencia que $L_0(z)$ no sea normalizable. Entonces el modo cero de los modos de KK para el fermión izquierdo no puede estar localizado sobre la 3- membrana. El perfil del modo cero $L_0(z)$ es mostrado en la Figura 4.7. En conclusión, ambos modos fermiónicos de KK, el izquierdo y el derecho, no pueden estar localizados sobre la membrana. Además, como los potenciales $V_{L,R}(z)$ se anulan asintóticamente, no hay salto en el espectro de masas de KK para ambos modos fermiónicos, por lo tanto, el espectro es continuo y comienza en $m^2 = 0$.

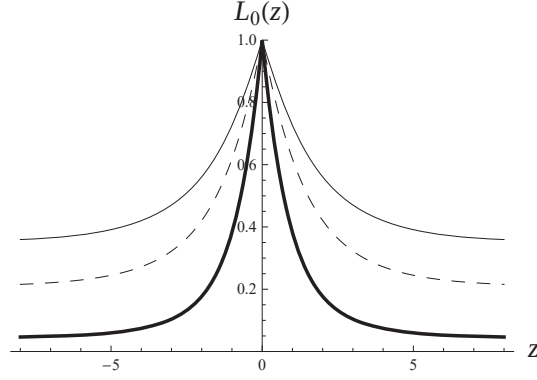


Figura 4.7: El perfil del modo cero fermiónico de KK con quiralidad izquierda $\rho_0(z)$ para diferentes valores del parámetro b . Los parámetros se han fijado de la forma siguiente: $M = 1,0$, $H = 0,5$, y $b = 0,5$ para la línea gruesa, $b = 1,0$ para la línea punteada, y $b = 1,5$ para la línea delgada.

Caso II: $F(z) = \tanh(Hz)$

Para este caso $F(z) = \tanh(Hz)$, por lo tanto la forma explícita de los potenciales (4.39) es:

$$V_L(z) = \frac{H^2 M}{4b^2} \text{sech}^4(Hz) [4M \sinh^2(Hz) + b \cosh(3Hz) - 5b \cosh(Hz)], \quad (4.48)$$

$$V_R(z) = \frac{H^2 M}{4b^2} \text{sech}^4(Hz) [4M \sinh^2(Hz) - b \cosh(3Hz) + 5b \cosh(Hz)]. \quad (4.49)$$

Como podemos ver, los potenciales $V_{L,R}$ tienen el siguiente comportamiento asintótico: tienden a cero cuando $z \rightarrow \pm\infty$, y en $z = 0$, el potencial V_L alcanza su mínimo, que es un valor negativo $-H^2 M/b$, mientras que el potencial V_R tiene un máximo, que es un valor positivo $H^2 M/b$ (ver Figura 4.8).

Entonces $V_L(z)$ es un potencial tipo volcán con fondo finito. Para este tipo de potenciales no hay salto en el espectro de masas que separe el modo cero fermiónico de KK de los modos excitados masivos. Ambos modos de KK con

quiralidad izquierda y derecha tienen un espectro continuo. Sólo el potencial izquierdo adopta un valor negativo en la posición de la 3-membrana. Nosotros sólo necesitamos estudiar el modo cero de KK de los fermiones con quiralidad izquierda L_0 ya que este modo sí puede estar localizado sobre la membrana. La expresión para L_0 es

$$L_0 \propto \exp \left[\frac{M}{b} (\text{sech}(Hz) - 1) \right]; \quad (4.50)$$

a partir de esta expresión y la Figura 4.9 podemos ver que el modo cero $L_0 \rightarrow e^{-\frac{M}{b}} > 0$ cuando $z \rightarrow \pm\infty$, lo que indica que la condición de normalización $\int_{-\infty}^{+\infty} L_0^2(z) dz < \infty$ no se puede satisfacer, entonces, el modo cero fermiónico de KK con quiralidad izquierda no puede estar localizado sobre la membrana.

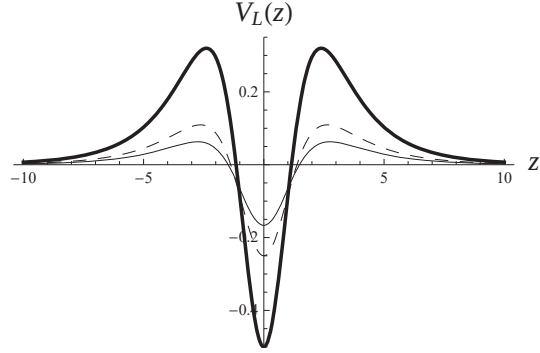
Caso III: $F(z) = \sinh(Hz)$

Haciendo la elección $F(z) = \sinh(Hz)$, los potenciales (4.39) adoptan la forma siguiente:

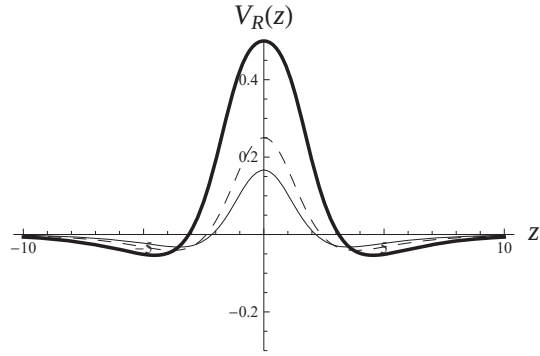
$$V_L(z) = \frac{H^2 M}{b^2} [M - (b + M) \text{sech}^2(Hz)], \quad (4.51)$$

$$V_R(z) = \frac{H^2 M}{b^2} [M + (b - M) \text{sech}^2(Hz)]. \quad (4.52)$$

A partir de la Figura 4.10 podemos ver que ambos potenciales tienen el mismo comportamiento asintótico: $V_{L,R} \rightarrow H^2 M^2 / b^2$ cuando $z \rightarrow \pm\infty$. En $z = 0$, el potencial para los fermiones con quiralidad izquierda tiene un mínimo con valor $-H^2 M / b$, por otro lado, el potencial para los fermiones con quiralidad derecha tiene un mínimo positivo: $H^2 M / b$ si y sólo si $M > b$. Entonces, sólo el potencial para los fermiones con quiralidad izquierda tiene un valor



(a) $V_L(z)$



(b) $V_R(z)$

Figura 4.8: El perfil del potencial para los fermiones con quiralidad izquierda $V_L(z)$ y derecha $V_R(z)$ está graficado en (a) y (b), respectivamente, para el caso II. Los parámetros se han fijado de la forma siguiente: $H = 0,5$, $M = 1$, $b = 0,5$ para la línea gruesa, $b = 1,0$ para la línea punteada y $b = 1,5$ para la línea delgada.

negativo en el origen de la 3-membrana, lo que implica que sólo el modo L_0 de KK puede estar localizado sobre la membrana. La forma del modo cero

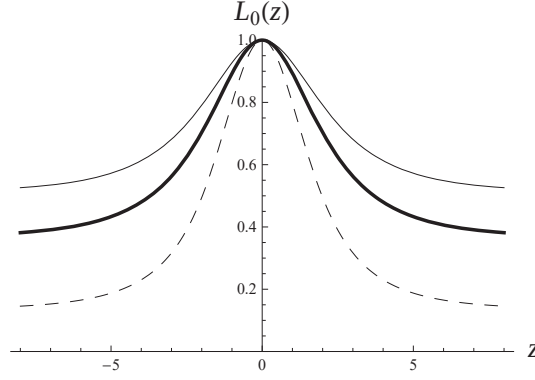


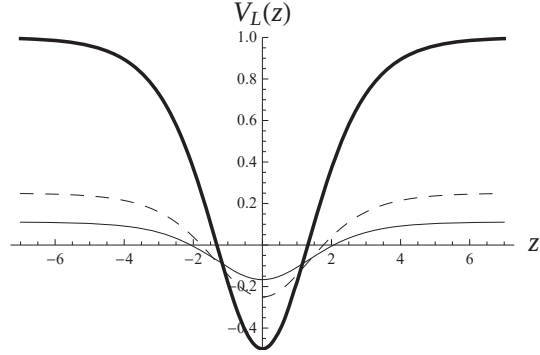
Figura 4.9: El perfil del fermión no masivo con quiralidad izquierda $L_0(z)$ para el caso II. Los parámetros se han fijado como sigue: $H = 0,5$, $M = 1$, $b = 0,5$ para la línea gruesa, $b = 1,0$ para la línea punteada y $b = 1,5$ para la línea delgada.

izquierdo L_0 es

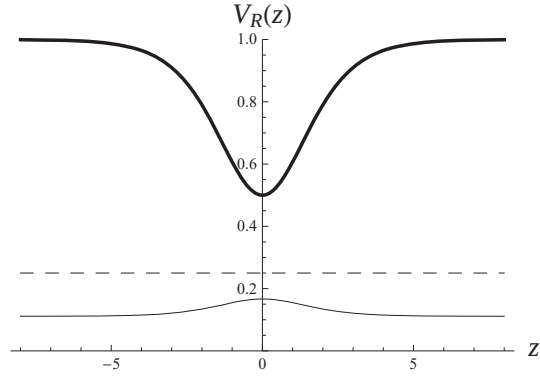
$$L_0(z) = \left[\frac{H \Gamma\left(\frac{b+M}{2b}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{M}{2b}\right)} \right]^{\frac{1}{2}} \text{sech}^{\frac{M}{b}}(Hz). \quad (4.53)$$

De lo anterior podemos ver que si M y b son positivos, el modo cero de KK L_0 tiende a cero cuando $z \rightarrow \pm\infty$ y satisface la condición de normalización. Esto implica que sólo el modo sin masa de los fermiones con quiralidad izquierda esté localizado sobre la membrana. El perfil del modo cero fermiónico de KK con quiralidad izquierda es mostrado en la Figura 4.11. Por otro lado, el modo cero de KK para los fermiones con quiralidad derecha no existe, de hecho, esto se puede ver a partir del potencial (4.52) y la Figura 4.10(b).

También podemos ver que $m_{L_n}^2 > H^2 M^2 / b^2$, por lo tanto, los modos de KK para los fermiones con quiralidad izquierda describen asintóticamente



(a) $V_L(z)$



(b) $V_R(z)$

Figura 4.10: El perfil del potencial $V_L(z)$ se muestra en (a) y el de $V_R(z)$ en (b) para el caso III. Los parámetros se han fijado de la forma siguiente: $H = 1,5$, $M = 1$, $b = 0,5$ para la línea gruesa, $b = 1,0$ para la línea punteada y $b = 1,5$ para la línea delgada.

ondas planas.

Los modos discretos de KK L_n para el potencial (4.51) tienen la siguiente forma

$$L_n \propto \cosh^{1+\frac{M}{b}}(Hz) {}_2F_1\left(a_n, b_n; \frac{1}{2}; -\sinh^2(Hz)\right) \quad (4.54)$$

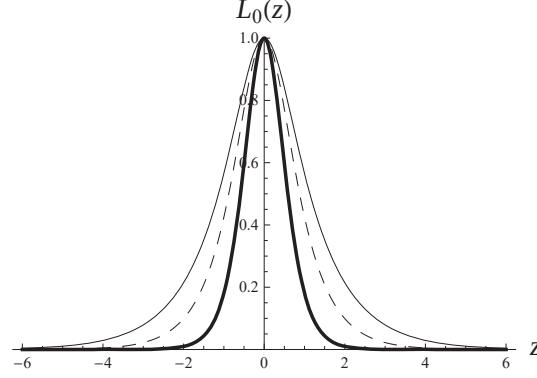


Figura 4.11: El perfil del modo cero de KK para los fermiones con quiralidad izquierda $L_0(z)$ para el caso III. Los parámetros se fijaron de la siguiente manera: $H = 1,5$, $M = 1$, $b = 0,5$ para la línea gruesa, $b = 1,0$ para la línea punteada y $b = 1,5$ para la línea delgada.

para n par y

$$L_n \propto \cosh^{1+\frac{M}{b}}(Hz) \sinh(Hz) {}_2F_1\left(a_n + \frac{1}{2}, b_n + \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -\sinh^2(Hz)\right) \quad (4.55)$$

para n impar, donde ${}_2F_1$ es la función hipergeométrica y los parámetros a_n y b_n están dados por

$$a_n = \frac{1}{2}(n+1), \quad b_n = \frac{M}{b} - \frac{1}{2}(n-1). \quad (4.56)$$

El espectro de masas correspondiente para los modos ligados de KK es

$$m_{L_n}^2 = H^2 \left(\frac{2M}{b} - n \right) n, \quad \left(n = 0, 1, 2, \dots < \frac{M}{b} \right). \quad (4.57)$$

A partir de la expresión anterior podemos ver que sólo el espectro de KK para los modos con quiralidad izquierda posee el modo cero (4.53) como estado base con $m_{L_0}^2 = 0$, y debido a que el estado base tiene masa nula, $m_{L_0}^2 = 0$,

no existen modos taquiónicos para los fermiones con quiralidad izquierda. Si $M < b$, hay sólo un estado discreto, es decir, el modo cero (4.53). Para que existan modos discretos masivos, se debe satisfacer la condición $M > b$.

Para el potencial de los fermiones con quiralidad derecha $V_R(z)$ (4.52), de la Figura 4.10(b), podemos ver que $V_R(z)$ siempre es positivo cerca del origen de la 3-membrana; esto muestra que no se puede atrapar el modo cero de KK para los fermiones con quiralidad derecha. Para el caso $M < b$, el potencial V_R tiene un máximo $H^2 M/b$ en $z = 0$, y tiene un mínimo $H^2 M^2/b^2$ en $z \rightarrow \pm\infty$, es decir, $0 < V_R(z \rightarrow \pm\infty) < V_R(z = 0)$. Entonces, en este caso no hay estados discretos de KK para los fermiones con quiralidad derecha. Para el caso especial $M = b$, el potencial V_R es una constante positiva: $V_R(z) = H^2 M^2/b^2$, por lo tanto, no hay ningún estado ligado para este caso. Para el caso $M > b$, podemos ver que $0 < V_R(z = 0) < V_R(z \rightarrow \pm\infty)$, esto indica que existen algunos estados ligados, pero el estado base es masivo

$$R_0 = \left[\frac{H \Gamma\left(\frac{M}{2b}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{M-b}{2b}\right)} \right]^{\frac{1}{2}} \cosh^{1-\frac{M}{b}}(Hz), \quad (M > b) \quad (4.58)$$

y la masa está determinada por la expresión $m_{R_0}^2 = H^2 (2M/b - 1) > H^2 > 0$. En general los estados ligados para el caso $M > b$ están dados por

$$R_n(z) \propto \cosh^{\frac{M}{b}}(Hz) {}_2F_1\left(\frac{1+n}{2}, \frac{M}{b} - \frac{1+n}{2}; \frac{1}{2}; -\sinh^2(Hz)\right) \quad (4.59)$$

para n par y

$$R_n(z) \propto \cosh^{\frac{M}{b}}(Hz) \sinh(Hz) {}_2F_1\left(1 + \frac{n}{2}, \frac{M}{b} - \frac{n}{2}; \frac{3}{2}; -\sinh^2(Hz)\right) \quad (4.60)$$

para n impar. Entonces, el espectro de masas correspondiente es

$$m_{R_n}^2 = H^2 \left(\frac{2M}{b} - (n+1) \right) (n+1), \quad \left(M > b, \quad n = 0, 1, 2, \dots < \frac{M}{b} - 1 \right). \quad (4.61)$$

Haciendo una comparación entre los espectros de masas para los modos de KK de los fermiones con quiralidad derecha e izquierda, llegamos a la conclusión de que el número de estados de KK para los fermiones con quiralidad derecha N_R es uno menos en comparación con los modos de KK para los fermiones con quiralidad izquierda N_L , es decir, $N_R = N_L - 1$.

Cuando $M < b$ hay un sólo estado de KK ligado para los fermiones con quiralidad derecha que corresponde al estado base izquierdo, esto quiere decir que sólo el fermión 4D sin masa puede localizarse sobre la membrana. Cuando $M > b$, existen N ($N = N_L \geq 2$) estados ligados de KK para los fermiones izquierdos y $N - 1$ ($N_R = N - 1$) para los fermiones derechos. Por lo tanto, de este modo aseguramos que el fermión izquierdo 4D sin masa y los pares de fermiones masivos de Dirac acoplados, izquierdos y derechos, pueden estar localizados sobre la membrana. Los modos de KK L_n y R_n se muestran en las Figuras 4.12 y 4.13, respectivamente, y el espectro de masas correspondiente se muestra en la Figura 4.14. Cuando $m_{L,R}^2 > H^2 M^2 / b^2$, ningún modo de KK, ni izquierdo ni derecho, puede confinarse a la 3- membrana, pero sí puede excitarse y escapar al bulto. En este punto podemos hacer la siguiente observación: si consideramos $HM/b \sim 1$ TeV y M del mismo orden que b , el valor del parámetro H sería del orden de 1 TeV, y $\Lambda_4 \sim 10^6$ GeV². Por otro lado, si M es del mismo orden que b , entonces el orden de H y Λ_4 puede ser pequeño. Podemos considerar un ejemplo, si $M \sim M_{\text{Pl}}$ y $b \sim 1$ GeV, H valdría 10^{-16} GeV, esto nos lleva a que $\Lambda_4 \sim 10^{-32}$ GeV². Esto nos dice que la constante cosmológica 4D difiere de la observada actualmente por un factor de 10^{52} .

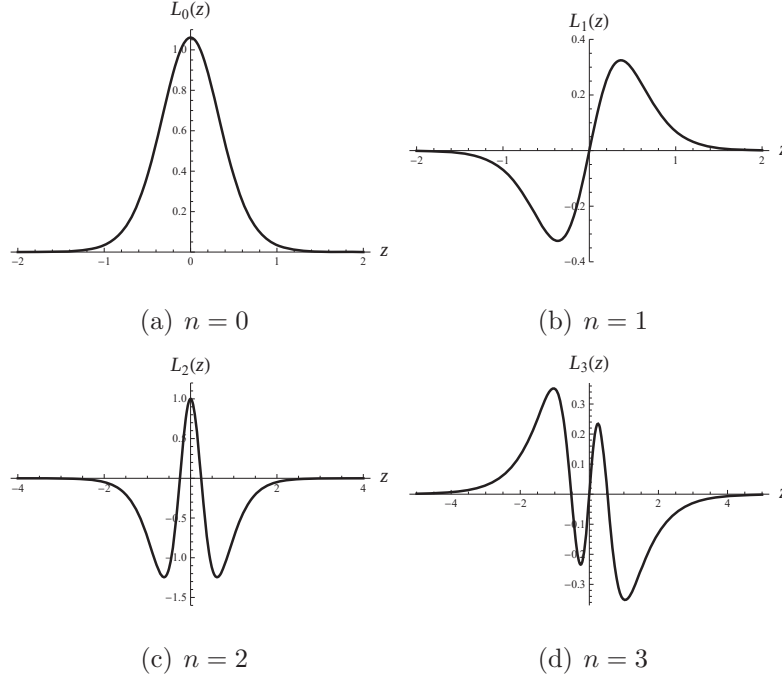


Figura 4.12: El perfil de los modos de KK para los fermiones izquierdos L_n cuando $0 \leq n \leq 3$ en el caso III. Los parámetros se han fijado como sigue: $M = 1,0$, $b = 0,25$ y $H = 1,5$.

Caso IV: $F(z) = (Hz)^{2k+1}e^{-f(z)}$

Por último vamos a considerar la familia de funciones

$$F(z) = (Hz)^{2k+1}e^{-A(z)}, \quad (4.62)$$

donde el factor Hz asegura la dimensionalidad nula de $F(z)$ y $k = 0, 1, 2, \dots$.

Al usar (2.20), la forma explícita de los potenciales (4.39) puede ser expresada

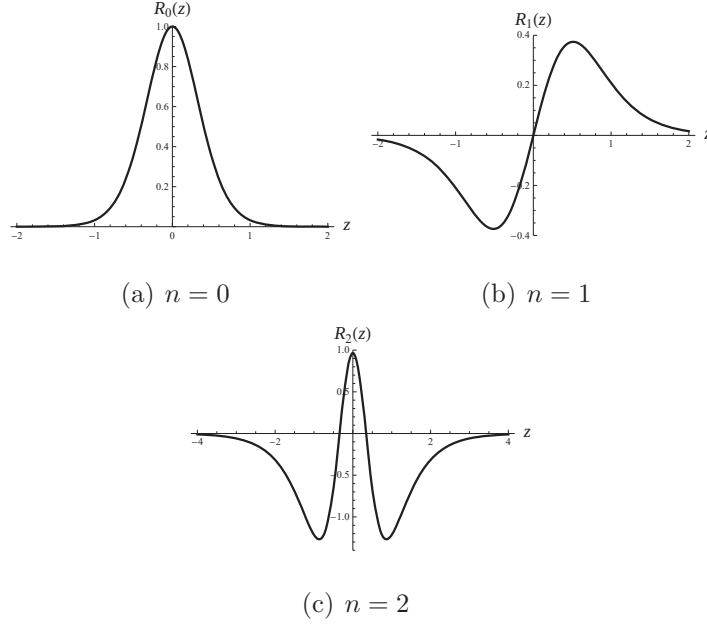


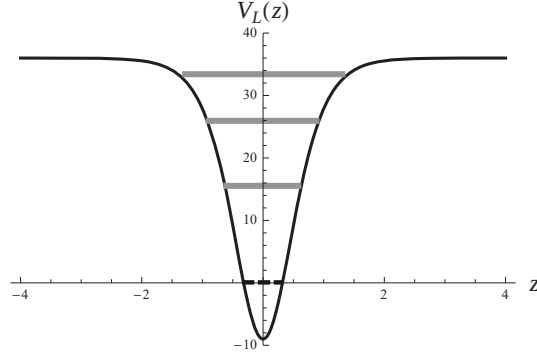
Figura 4.13: El perfil de los modos de KK para los fermiones derechos R_n cuando $0 \leq n \leq 2$ en el caso III. Los parámetros se fijaron como sigue $M = 1,0$, $b = 0,25$ and $H = 1,5$.

como sigue

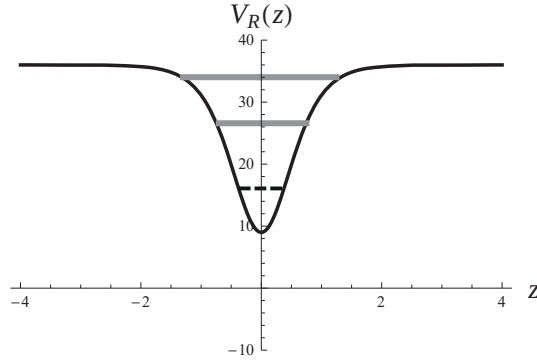
$$V_L(z) = MH \left[MH(Hz)^{4k} z^2 - (2k+1)(Hz)^{2k} \right], \quad (4.63a)$$

$$V_R(z) = MH \left[MH(Hz)^{4k} z^2 + (2k+1)(Hz)^{2k} \right]. \quad (4.63b)$$

Ambos potenciales tienen el mismo comportamiento asintótico $V_{L,R} \rightarrow \infty$ cuando $z \rightarrow \pm\infty$ y están acotados por debajo como se muestra en la Figuras 4.15 y 4.16 para diferentes valores de $k > 0$; el caso $k = 0$ lo consideraremos por separado. Entonces, el espectro de KK es discreto para ambos tipos de fermiones. Se puede mostrar usando la ecuación (4.45a) que el modo cero de



(a) Fermiones con quiralidad izquierda



(b) Fermiones con quiralidad derecha

Figura 4.14: El perfil de los potenciales $V_{L,R}$ (líneas gruesas) y el espectro de masas (las líneas punteadas corresponden a $m_{L_0}^2 = 0$ y $m_{R_0}^2 = 0$, mientras las líneas grises corresponden a los estados ligados masivos) para el caso III. Los parámetros se han fijado como sigue $M = 1,0$, $b = 0,25$ and $H = 1,5$.

KK para los fermiones izquierdos tiene la siguiente forma

$$L_0 \propto e^{-\frac{M}{2H(k+1)}(Hz)^{2(k+1)}}. \quad (4.64)$$

De este modo, el fermión correspondiente al modo sin masa de KK con

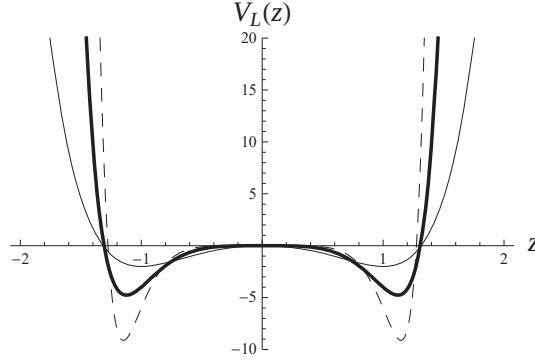


Figura 4.15: El perfil del potencial V_L está representado para diferentes valores de k : $k = 1$ (línea delgada), $k = 2$ (línea gruesa) y $k = 3$ (línea punteada). En todos los casos el potencial V_L tiene dos mínimos negativos y se torna infinito en $z \rightarrow \pm\infty$, por lo tanto, en la 3-membrana están localizados tanto un estado de KK sin masa como una torre de estados discretos masivos. Los parámetros se han fijado como sigue $H = 1$ and $M = 1$.

quiralidad izquierda está localizado sobre la membrana (véase Fig. 4.17), mientras que el fermión análogo correspondiente al modo sin masa con quiralidad derecha no existe. La clase de funciones (4.62) describe un modelo donde ambos tipos de fermiones, derechos e izquierdos, están localizados sobre la membrana y sólo el espectro de KK para los fermiones con quiralidad izquierda posee un modo sin masa.

Ahora consideremos el caso más simple $k = 0$ en (4.62); los potenciales (4.63a) toman la forma:

$$V_L(z) = H^2 M^2 z^2 - HM, \quad (4.65a)$$

$$V_R(z) = H^2 M^2 z^2 + HM. \quad (4.65b)$$

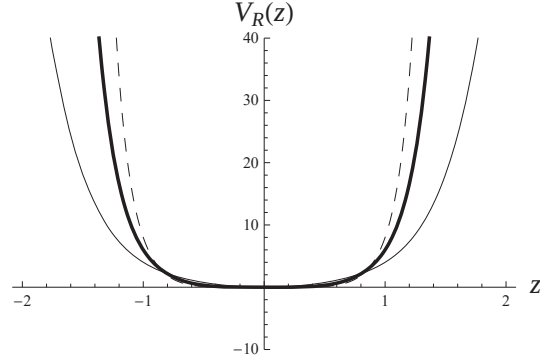


Figura 4.16: El perfil del potencial V_R es representado para $k : k = 1$ (línea delgada), $k = 2$ (línea gruesa) y $k = 3$ (línea punteada). En todos los casos hay un mínimo único en el potencial V_R en $z = 0$, el cual se vuelve infinito cuando $z \rightarrow \pm\infty$. En este caso no hay ningún modo de KK sin masa localizado en la 3-membrana y todos los modos de KK masivos están localizados. Aquí hemos fijado los parámetros como sigue $H = 1$ and $M = 1$.

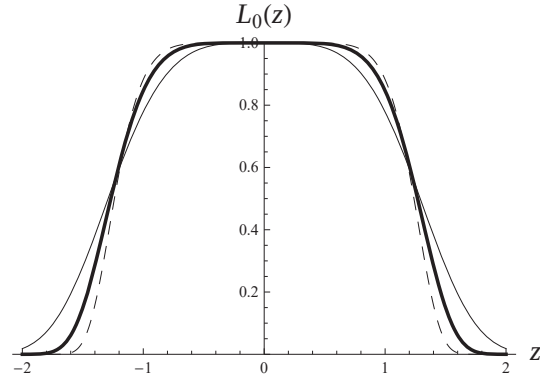


Figura 4.17: El perfil del modo de KK sin masa $L_0(z)$ es representado para diferentes valores de $k : k = 1$ (línea delgada), $k = 2$ (línea gruesa) y $k = 3$ (línea punteada). Los parámetros se han fijado como sigue $H = 1$ y $M = 1$.

Ambos potenciales $V_L(z)$ y $V_R(z)$ son de tipo oscilador armónico cuántico y están graficados en las Figuras 4.18 y 4.19, respectivamente. La ecuación tipo Schrödinger correspondiente para los potenciales $V_{L,R}$ tiene la siguiente forma:

$$-\partial_z^2 L_n(z) + H^2 M^2 z^2 L_n(z) = (m_{L_n}^2 + HM) L_n(z), \quad (4.66a)$$

$$-\partial_z^2 R_n(z) + H^2 M^2 z^2 R_n(z) = (m_{R_n}^2 - HM) R_n(z). \quad (4.66b)$$

Las ecuaciones anteriores describen un oscilador armónico cuántico en una dimensión si definimos las energías como $E_{L,R}$ y los potenciales efectivos $\bar{V}_{L,R}$ como sigue

$$E_{L_n} = \frac{1}{2} \left(\frac{m_{L_n}^2}{M} + H \right), \quad (4.67a)$$

$$E_{R_n} = \frac{1}{2} \left(\frac{m_{R_n}^2}{M} - H \right), \quad (4.67b)$$

$$\bar{V}_L(z) = \bar{V}_R(z) = H^2 M^2 z^2. \quad (4.67c)$$

Como podemos ver, ambos potenciales $\bar{V}_{L,R}$ son iguales, tienen el mismo comportamiento asintótico $\bar{V}_{L,R} \rightarrow \pm\infty$ cuando $z \rightarrow \pm\infty$ y poseen un mínimo en $z = 0$; entonces, los potenciales $\bar{V}_{L,R}$ admiten el mismo número de estados ligados de energía para los modos de KK (tanto los que corresponden a fermiones con quiralidad izquierda como los que corresponden a fermiones con quiralidad derecha). El espectro de energías correspondiente para las ecuaciones (4.66) está dado por

$$E_{L_n} = H \left(n + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{m_{L_n}^2}{M} + H \right), \quad (4.68a)$$

$$E_{R_n} = H \left(n + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{m_{R_n}^2}{M} - H \right), \quad (4.68b)$$

donde $n = 0, 1, 2, \dots$. Entonces, el espectro de masas para los modos izquierdos y derechos de KK $m_{L,R}^2$ son $m_{L_n}^2 = 2MHn$ y $m_{R_n}^2 = 2MH(n+1)$, respectivamente, como se muestra en las Figuras 4.18 y 4.19.

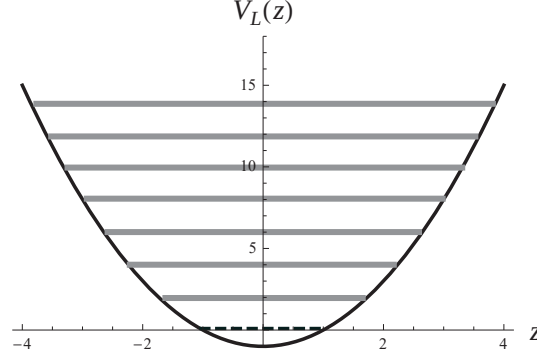


Figura 4.18: El perfil del potencial V_L es representado para $k = 0$; las líneas punteadas corresponden a $m_{L_0}^2 = 0$ y los primeros siete niveles masivos ($1 \leq n \leq 7$) del espectro $m_{L_n}^2$ están descritos por las líneas grises. Los parámetros se han fijado como sigue $H = 1$ y $M = 1$ en la Figura.

Como en el caso III, vemos que el espectro de masas de KK correspondiente a los fermiones de quiralidad derecha no incluye un modo sin masa, mientras que en el espectro de masas de KK para los fermiones con quiralidad izquierda sí hay un modo sin masa que corresponde al estado base del espectro. Al rescribir las ecuaciones (4.66), vemos que ambas representan osciladores armónicos tipo cuántico sobre la quinta dimensión

$$-\partial_z^2 L_n(z) + H^2 M^2 z^2 L_n(z) = E_{L_n} L_n(z), \quad (4.69a)$$

$$-\partial_z^2 R_n(z) + H^2 M^2 z^2 R_n(z) = E_{R_n} R_n(z). \quad (4.69b)$$

El modo cero puede localizarse para ambos espectros, el izquierdo y el de-

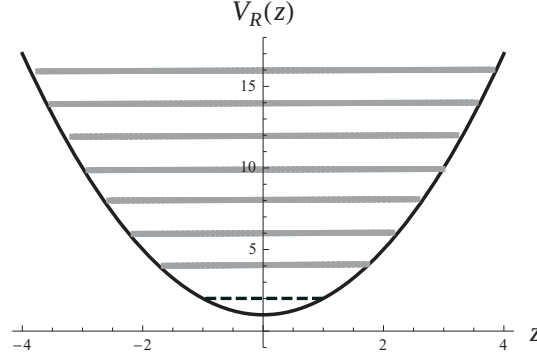


Figura 4.19: El perfil del potencial V_R es representado para $k = 0$; la línea punteada corresponde al estado masivo $m_{R_0}^2 = 2MH$ y los primeros siete niveles ($1 \leq n \leq 7$) del espectro $m_{R_n}^2$ están descritos por las líneas grises. Los parámetros se han fijado como sigue $H = 1$ y $M = 1$ en la Figura.

recho, y tiene la siguiente forma explícita

$$L_0(z) = \frac{(HM)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}HMz^2}, \quad (4.70a)$$

$$R_0(z) = \frac{(HM)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}HMz^2}, \quad (4.70b)$$

donde (4.70a) corresponde al estado base sin masa, mientras que (4.70b) es un estado masivo.

El espectro total para las ecuaciones (4.69) está representado por los polinomios de Hermite dado por las siguientes expresiones

$$L_n(z) = \frac{B_L}{2^n} (HM)^{\frac{1}{4}} H_n(\sqrt{HM}z) e^{-\frac{1}{2}HMz^2}, \quad (4.71a)$$

$$R_n(z) = \frac{B_R}{2^n} (HM)^{\frac{1}{4}} H_n(\sqrt{HM}z) e^{-\frac{1}{2}HMz^2}, \quad (4.71b)$$

donde B_L y B_R son constantes de normalización.

El espectro para ambos tipos de modos de KK, correspondientes a los fermiones con quiralidad izquierda y derecha, es discreto y la separación entre dos modos continuos de KK está dada por

$$\Delta m_n = \frac{\sqrt{2HM}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}. \quad (4.72)$$

Las relaciones anteriores nos dicen que si $n \rightarrow \infty$, $\Delta m_n \rightarrow 0$. Entonces, para modos masivos de KK con n muy alto, el espectro puede considerarse cuasi continuo. El resultado muestra que escogiendo $F(z) = Hze^{-A(z)}$, es posible localizar sobre la 3-membrana el espectro completo de modos de KK que corresponde a fermiones de Dirac en 4D: el fermión izquierdo sin masa y todos los modos masivos izquierdos, así como todos los modos masivos del fermión derecho. Además, ningún estado escapa al bulto por esa razón: con esta elección de $F(z)$ no es posible tener modos masivos de KK fermiónicos excitados en el bulto.

Capítulo 5

Conclusiones

En este trabajo se ha construido un mundo membrana regular a partir de una acción en 5D que describe gravedad con una constante cosmológica Λ_5 , haciendo uso de un ansatz muy específico para una métrica no factorizable. Resulta que al resolver las ecuaciones de Einstein del sistema, la métrica inducida sobre la membrana 4D es de tipo FRW plana y el bulto 5D es una carta de un espaciotiempo dS, pues el sistema coordinado de la solución no cubre toda la variedad.

De este modo, la 3-membrana surge como una solución solitónica de las ecuaciones no lineales de Einstein y en ella se puede localizar la gravedad 4D, así como los campos de materia escalar, vectorial (campos de norma, en particular el campo electromagnético) y espinorial. Además, en este modelo, el espectro de masas del gravitón 5D posee un salto y separa el modo no masivo, que corresponde al gravitón en 4D, de los modos masivos continuos,

definiendo claramente la escala de energías de la teoría efectiva en 4D. El salto en el espectro de masas gravitatorias también constituye una ventaja desde el punto de vista fenomenológico, pues su presencia evita la existencia de excitaciones de partículas ultraligeras que en un momento dado pudieran confundirse con el gravitón no masivo en las trazas de los experimentos.

Otro aspecto peculiar de este modelo consiste en que a partir de una teoría 5D que describe únicamente gravedad con constante cosmológica se obtuvo un mundo membrana grueso (suave o regular) que corresponde a un espaciotiempo 5D con curvatura constante definida positiva (dS_5); esto contrasta con los modelos de mundos membrana gruesos generados por campos escalares, los cuales presentan singularidades desnudas en los extremos (finitos o infinitos) de la quinta dimensión. Por otro lado, cabe señalar que a pesar de que nuestra membrana vive en un espaciotiempo dS en 5D, la solución que surge al resolver las ecuaciones de Einstein correspondientes no cubre toda la variedad 5D y, por lo tanto, constituye sólo una carta del espacio dS_5 , sin embargo, dicha carta es suficiente para localizar la gravedad 4D en la 3-membrana, así como varios campos de materia. Asimismo, en este simple modelo membránico se pueden calcular analíticamente las expresiones de los modos masivos, tanto discretos como continuos, de las excitaciones de KK del campo gravitatorio, hecho que plausiblemente nos permite calcular las correcciones a la ley de la gravitación universal de Newton de manera explícita, en contraste con otros trabajos en los que se emplean métodos numéricos para estudiar su comportamiento.

Todos los métodos utilizados para localizar la gravedad y los campos de materia en mundos membrana, delgados o gruesos, han explotado al máximo la carta que cubre parcialmente la variedad 5D que corresponde a la solución en el sistema de coordenadas en el que la métrica adopta la forma conformemente Minkowski, dS o Anti dS. Por otro lado, la localización de la gravedad y los diversos campos de materia descansa sobre la resolución de ecuaciones tipo Schrödinger, las cuales constituyen aproximaciones lineales de las ecuaciones perturbadas de Einstein y, por lo tanto, no son invariantes bajo transformaciones de coordenadas. Por esa razón, en este trabajo de tesis no fue de interés prioritario encontrar una carta global que cubra toda la variedad 5D, pues este hecho podría, de cierta manera, oscurecer o entorpecer la interpretación física de todo el trabajo realizado. No obstante, el hecho de continuar o extender la solución construida a la totalidad de la variedad 5D constituye una tarea de interés que sin duda debe abordarse en el futuro cercano. Esta complicación matemática sugiere investigar más a fondo el modelo o incluso replantear el problema para hallar una configuración de mundo membrana grueso dS inmersa en un bulto dS 5D cuya métrica de fondo de lugar a una carta global 5D.

Este modelo minimalista de mundo membrana, a pesar de ser pobre en parámetros, nos permitió encontrar una relación algebraica entre la escala fundamental de Planck 5D y la efectiva de Planck 4D y, al mismo tiempo, mediante una reducción dimensional, lograr recuperar la configuración de un espaciotiempo FRW plano en 4D (la membrana). Además, se mostró que es posible, mediante una extensión analítica de la solución, recuperar el modelo

de RS añadiendo necesariamente las membranas delgadas (funciones delta de Dirac) a mano y provocando las indeseadas singularidades a lo largo de la quinta dimensión.

En este contexto, el hecho de considerar una teoría tan simple en 5D resultó atractivo primeramente en cuanto a encontrar un bulto con curvatura constante y localizar la gravedad 4D sobre la membrana inducida.

Otro aspecto interesante del modelo es que presenta un salto en el espectro de masas de KK para el gravitón contrastando con varios modelos de membranas gruesas con simetría de Poincaré, los cuales no pueden tener un salto en el espectro de masas de KK para el gravitón y estar libres de singularidades desnudas al mismo tiempo, como suele suceder en los modelos de membranas gruesas generados por campos escalares.

En el presente mundo membrana suave, la constante cosmológica efectiva que resulta de integrar la quinta dimensión en la acción 5D del modelo adopta el valor $\Lambda_4 = 3H^2$ y se puede, en principio, hacer tan pequeña como uno desee. De este modo, la constante Λ_4 se podría ajustar finamente para que coincida con el valor observado en la actualidad. Sin embargo, si pudiéramos detectar de forma experimental los gravitones que corresponden a los modos masivos (discretos y continuos) de KK, junto con los diferentes modos masivos de KK de los diversos campos de materia tratados en este trabajo, al considerar que $H \rightarrow 0$ para hacer que la constante cosmológica efectiva en 4D se ajuste al valor observado, también se tendría una reducción significativa en la masa de dichos modos de KK, lo cual quiere decir que ya se habrían

detectado experimentalmente debido a que la energía de esos modos estaría muy por debajo de la que se maneja en el LHC (1 TeV, por ejemplo); por ello resulta interesante buscar una forma alternativa de realizar el ajuste fino de la constante cosmológica 4D sin que afecte la relación entre la escala de Planck fundamental en 5D y la efectiva en 4D, y al mismo tiempo permita tener un escenario más real en cuanto al estudio de los modos masivos de KK, tanto para la gravedad como para los diferentes campos de materia estudiados en este trabajo.

Una de las virtudes de este trabajo, en contraste con varios modelos de membranas delgadas y anchas, consiste en que es posible localizar el modo cero de las fluctuaciones de los campos de materia vectoriales (con espín-1), que corresponde al confinamiento del campo electromagnético, en particular, la localización de la luz.

Asimismo, para los campos espinoriales (con espín-1/2) es posible localizar todos los modos de KK para los fermiones con quiralidad derecha e izquierda encontrados para el caso IV de la sección de localización de campos de materia.

Para los campos escalares y vectoriales fue posible localizar los modos cero de KK sobre la membrana y se encontró un salto en el espectro de masas de KK en ambos casos.

Para el caso del campo escalar se encontró de manera similar al caso de la gravedad un espectro que tiene un modo no masivo de KK correspondiente al estado base, un modo excitado masivo de KK y una torre continua de

modos de KK masivos. Para los campos vectoriales, el espectro consiste de un modo no masivo de KK, correspondiente al estado base, y una torre de modos continuos de KK masivos, separados por un salto en el espectro de masas de dichas perturbaciones.

Para la localización de fermiones se introdujo el término $MF(z)\Psi\bar{\Psi}$ en la acción 5D. El hecho de considerar una masa efectiva en 5D que depende de la coordenada extra para los campos fermiónicos nos permitió estudiar 4 casos para la localización de fermiones en la membrana 4D. Cuando $F(z) = \epsilon(z)$ y $F(z) = \tanh(Hz)$, el modo cero no puede ser localizado sobre la membrana. Para el caso $F(z) = \sinh(Hz)$, sólo los fermiones con quiralidad izquierda pueden ser localizados sobre la membrana y existe un salto en el espectro finito de masas de KK para los fermiones izquierdos y derechos. El número de fermiones derechos es igual al número de fermiones izquierdos y está determinado por M/b . En consecuencia, sólo los fermiones izquierdos tienen un modo no masivo localizado sobre la membrana, mientras que todos los modos masivos de KK para fermiones con quiralidad tanto izquierda como derecha están localizados en la membrana y corresponden a fermiones masivos de Dirac en 4D. Para el caso particular $F(z) = (Hz)^{2k+1}e^{-f}$ se encontró que el espectro de KK para los fermiones derechos e izquierdos es infinito, discreto y se encuentra localizado sobre la membrana, es decir, que desde el punto de vista experimental, este hecho ayudaría a buscar evidencia de la existencia de una dimensión extra gracias a la posibilidad de detectar los fermiones masivos excitados localizados en la membrana. Sin embargo, este es un caso utópico en el cual todo el espectro de masas de KK está localizado

sobre la membrana, lo que quiere decir que todos los fermiones de Dirac 4D están localizados en ella. Para el caso $k > 0$ no es posible encontrar de forma analítica las expresiones de los estados ligados correspondientes a los modos masivos de KK, por ello consideramos de manera ilustrativa el caso $k = 0$, el cual nos lleva a una situación análoga a la del oscilador armónico cuántico sobre la dimensión extra, en el que el espectro de masas de KK para los fermiones derechos e izquierdos presenta un salto equidistante entre estados consecutivos, descrito por la cantidad $\Delta m_{L,R}^2$. Por otro lado, se mostró que comparando m_L^2 y m_R^2 , el espectro de masas de KK para los fermiones derechos está desplazado $2HM$ con respecto al espectro de KK de los fermiones izquierdos, y el salto en el espectro de masas $\Delta m \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Una posible dirección en la cual se puede enfocar este trabajo a futuro es generalizar la idea de un mundo membrana ancho sin campos escalares a más dimensiones y ver qué alcances tiene física derivada de la acción de Einstein–Hilbert en más de cinco dimensiones. Otra posible dirección de desarrollo puede ser encontrar una forma alternativa a la que fue usada en este trabajo para localizar campos de materia en los mundos membrana, ya que sigue siendo una incógnita el cómo la membrana atrapa los diferentes campos de materia junto con la gravedad. También es interesante buscar una solución tipo dS para la métrica del bulto que cubra toda la variedad 5D y genere un mundo membrana ancho. Asimismo, la solución al problema de la jerarquía de masas en el marco del presente mundo membrana sugiere que se debe incluir otra membrana (gruesa o delgada) en la teoría que contiene los campos de

materia del modelo estándar y se halle un mecanismo que explique por qué la gravedad en la membrana es tan débil comparada con las demás fuerzas.

Sin duda alguna otras direcciones en las que se puede desarrollar el presente modelo consiste en las aplicaciones cosmológicas que se pueden realizar en la membrana 4D.

Apéndice A

Solución máximamente simétrica

La solución (2.9) del factor de deformación, junto con la solución (2.7) del factor de escala, nos da como resultado un espacio tiempo en 5D que es homogéneo e isotrópico, tiene el máximo número de simetrías, y por consiguiente, tiene curvatura constante en cada punto. Además, la curvatura es constante y definida positiva, por ello aseguramos que se trata de una carta del espacio dS en 5D. Lo mismo pasa con la métrica inducida sobre la membrana: es un espacio dS en 4D.

Los espacios máximamente simétricos tienen una representación única para la curvatura Riemanniana, es decir, el tensor de curvatura tiene una representación única y se ve de la siguiente manera

$$R_{ijkl} = k(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}) \quad (\text{A.1})$$

donde k es una constante. Para ver que el tensor de curvatura tiene esta forma suponemos que el espacio n -dimensional es isotrópico en x_0 y escogemos un sistema de coordenadas Riemannianas centradas en x_0 donde la métrica $g_{ij}(x_0) = \eta_{ij}$; después de haber supuesto que nuestra métrica es isotrópica en x_0 podemos asegurar que el tensor de Riemann es invariante bajo transformaciones de Lorentz; sabemos de relatividad especial que los únicos tensores invariantes bajo transformaciones de Lorentz son: el espacio de Minkowski η_{ij} , productos de η_{ij} mismo y el símbolo antisimétrico de Levi Civita ϵ_{ijkl} , lo cual nos lleva a suponer que el tensor de Riemann en x_0 se ve como una combinación lineal de estos tensores

$$R_{ijkl}(x_0) = a\eta_{ij}(x_0)\eta_{kl}(x_0) + b\eta_{ik}(x_0)\eta_{jl}(x_0) + c\eta_{il}(x_0)\eta_{jk}(x_0) + d\epsilon_{ijkl}, \quad (\text{A.2})$$

donde a, b, c, d son constantes arbitrarias, y el último término sólo tiene sentido en 4 dimensiones. Haciendo uso de las simetrías del tensor de Riemann es fácil llegar a la siguiente relación para las constantes $a = d = b + c = 0$, lo cual nos lleva al siguiente resultado

$$R_{ijkl}(x_0) = b(\eta_{ik}(x_0)\eta_{jl}(x_0) - \eta_{il}(x_0)\eta_{jk}(x_0)), \quad (\text{A.3})$$

luego para un sistema arbitrario tenemos

$$R_{ijkl}(x) = b(g_{ik}(x)g_{jl}(x) - g_{il}(x)g_{jk}(x)), \quad (\text{A.4})$$

y si además suponemos que el espacio es isotrópico en cada punto, entonces el tensor de Riemann se ve como

$$R_{ijkl}(x) = b(x)(g_{ik}(x)g_{jl}(x) - g_{il}(x)g_{jk}(x)), \quad (\text{A.5})$$

donde $b(x)$ es una función arbitraria. Contrayendo el tensor de Riemman dos veces con la métrica obtenemos el tensor de Ricci y el escalar de Ricci:

$$R_{ij}(x) = (n-1)b(x)g_{ij}(x), \quad (\text{A.6})$$

$$R(x) = n(n-1)b(x); \quad (\text{A.7})$$

usando la última relación llegamos a la expresión para el tensor de Riemman en términos de la métrica y el escalar de curvatura de Ricci

$$R_{ijkl}(x) = \frac{R}{n(n-1)} (g_{ik}(x)g_{jl}(x) - g_{il}(x)g_{jk}(x)). \quad (\text{A.8})$$

Además, podemos expresar el tensor de Einstein como

$$G_{ij} = b(x) \left[(n-1) \left(1 - \frac{n}{2} \right) \right] g_{ij}(x). \quad (\text{A.9})$$

Con esta expresión es fácil corroborar que las identidades de Bianchi $\nabla^i G_{ij} = 0$ implican que $b(x)$ tiene que ser una constante. Dado que nuestro espacio-tiempo en 5D coincide con la definición de espacio máximamente simétrico y tiene curvatura constante definida positiva, entonces podemos asegurar que nuestro espaciotiempo es una carta dS en 5D aunque el ansatz de la métrica no luzca como la generalización de un espacio dS 4D. Podemos deducir lo mismo para la métrica inducida sobre la membrana, la cual se puede obtener de la teoría 5D al hacer una reducción dimensional (integrando con respecto a la quinta dimensión) para la acción de Einstein Hilbert [54] como se vio en la sección 2.3.

Apéndice B

Elección de la norma para las perturbaciones de la métrica

En este apéndice vamos a perturbar la métrica usada comúnmente en los modelos de mundos membrana (B.1) fijando la atención para el caso en el que no hay materia sólo por simplicidad, se pondrá énfasis en la manera de escoger la norma para fijar las condiciones axial y transversa de traza nula para las perturbaciones de la métrica.

La idea principal en este trabajo de perturbaciones es tomar una métrica con la siguiente forma

$$ds^2 = e^{2f(\sigma)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + d\sigma^2, \quad (\text{B.1})$$

donde $f(\sigma)$ es el factor de deformación dependiente sólo de la quinta dimensión, y perturbarla con una pequeña fluctuación denotada por $\mathring{h}_{MN}$. Después de esto procederemos a calcular las ecuaciones de Einstein perturbadas a

primer orden. Una vez hecho esto, se obtiene un sistema de ecuaciones acopladas con una complejidad considerable, por lo cual tendremos que hacer una elección de norma de manera que simplifique el sistema de ecuaciones de Einstein obtenido. Primeramente buscaremos fijar parte de la norma para obtener una restricción conveniente sobre las componentes $\overset{\circ}{h}_{5M}$. Después de haber hecho esto quedarán residuos de norma, los cuales utilizaremos para fijar una condición sobre las componentes restantes $\overset{\circ}{h}_{\mu\nu}$ de la perturbación, es decir, veremos que escoger una condición sobre las componentes $\overset{\circ}{h}_{5M}$ y $\overset{\circ}{h}_{\mu\nu}$ equivale a fijar una norma para una transformación infinitesimal sobre las coordenadas x^M , donde $M, N = 0, 1, 2, 3, 5$ como veremos más adelante. Cabe señalar que al fijar los residuos de norma que llevan a una condición sobre las componentes $\overset{\circ}{h}_{\mu\nu}$, al final obtenemos constantes residuales de la norma, las cuales pueden ser fijadas para determinar completamente la norma. Por simplicidad vamos a tomar $e^{2f(\sigma)}\overset{\circ}{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$, así la métrica perturbada adopta la forma siguiente

$$ds^2 = (e^{2f(\sigma)}\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) dx^\mu dx^\nu + h_{\mu 5} dx^\mu d\sigma + (1 + h_{55}) d\sigma^2. \quad (\text{B.2})$$

donde $|h_{MN}| \ll |g_{MN}|$ y $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$. Resolver las ecuaciones de Einstein perturbadas a primer orden con la métrica anterior representa un reto debido a la dificultad que éstas presentan, ya que las componentes de la perturbación de la métrica se hallan acopladas de una forma complicada. La manera de facilitar la solución de este problema es eligiendo una norma adecuada para las fluctuaciones h_{MN} .

Vamos a ver cómo podemos elegir una norma (también se podría usar

un formalismo invariante de norma, pero eso no se tratará en este trabajo) para las componentes mixtas h_{M5} que cumplen con la condición $h_{M5} = 0$. Esta elección reducirá el número de componentes de las 15 componentes de las perturbaciones h_{MN} a 10 componentes de h_{MN} , después usaremos los residuos de norma para fijar las componentes de los modos transversos de traza nula de h_{MN} . Al realizar una transformación infinitesimal sobre nuestras coordenadas $\bar{x}^M = x^M + \xi^M$ encontramos que se induce en h_{MN} el siguiente cambio

$$\bar{h}_{MN}(x^\mu, \sigma) = h_{MN}(x^\mu, \sigma) - \nabla_M \xi_N(x^\mu, \sigma) - \nabla_N \xi_M(x^\mu, \sigma),$$

en lo sucesivo usaremos $(x^\mu, \sigma) \equiv (X)$. Calculando las derivadas covariantes en la transformación podemos encontrar cada una de las componentes de $\bar{h}_{MN}$ en el nuevo sistema de coordenadas

$$\bar{h}_{\mu\nu}(X) = h_{\mu\nu}(X) - \partial_\mu \xi_\nu(X) - \partial_\nu \xi_\mu(X) - 2f' \eta_{\mu\nu} e^{2f} \xi_5(X), \quad (\text{B.3})$$

$$\bar{h}_{5\mu}(X) = h_{5\mu}(X) - \partial_5 \xi_\mu(X) - \partial_\mu \xi_5(X) + 2f' \xi_\mu(X), \quad (\text{B.4})$$

$$\bar{h}_{55}(X) = h_{55}(X) - 2\partial_5 \xi_5(X). \quad (\text{B.5})$$

En este punto podemos escoger la siguiente condición sobre las componentes mixtas $\bar{h}_{5M} = 0$. Una vez fijada esta condición nos quedan las siguientes ecuaciones en términos del viejo sistema de coordenadas

$$h_{5\mu}(X) = \partial_5 \xi_\mu(X) + \partial_\mu \xi_5(X) - 2f' \xi_\mu(X), \quad (\text{B.6})$$

$$h_{55}(X) = 2\partial_5 \xi_5(X). \quad (\text{B.7})$$

Haciendo una integración directa en las ecuaciones anteriores podemos encontrar las componentes del vector ξ de la transformación dadas en términos de

$$\xi_\nu(X) = e^{2f} \int^\sigma e^{-2f(w)} h_{5\nu}(x^\mu, w) dw - e^{2f} \int^\sigma e^{-2f} \partial_\nu \xi_5(x^\mu, w) dw \quad (\text{B.8})$$

$$+ e^{2f} R_\nu(x^\mu),$$

$$\xi_5(X) = \frac{1}{2} \int^\sigma h_{55}(x^\mu, w) dw + R_5(x^\mu), \quad (\text{B.9})$$

donde $R_5(x^\mu)$ y $R_\nu(x^\mu)$ son funciones residuales arbitrarias que no dependen de la quinta dimensión y representan residuos de norma que se pueden fijar a conveniencia según se requiera.

De estas expresiones podemos ver que estamos considerando el caso más general porque siempre es posible tener un sistema coordenado x^M y aplicarle una transformación infinitesimal, tal que $\bar{x}^M = x^M + \xi^M$. En el nuevo sistema de coordenadas podemos elegir las componentes ξ_ν y ξ_5 de tal forma que sea posible fijar $\bar{h}_{5M} = 0$ y los vectores del desplazamiento infinitesimal ξ^M estén determinados por los h_{5M} , que son los más generales. Además, por covarianza, el tensor de Einstein no cambia bajo la transformación $\bar{x}^M = x^M + \xi^M$, eso asegura que las ecuaciones de Einstein perturbadas sean equivalentes en los sistemas de coordenadas viejo y nuevo. Este resultado nos lleva a una expresión más sencilla para la métrica y las ecuaciones de Einstein perturbadas:

$$ds^2 = (e^{2f(\bar{\sigma})} \eta_{\mu\nu} + \bar{h}_{\mu\nu}) d\bar{x}^\mu d\bar{x}^\nu + d\bar{\sigma}^2. \quad (\text{B.10})$$

Redefiniendo $\bar{h}_{\mu\nu} = e^{2f(\tilde{\sigma})} \dot{h}_{\mu\nu}$, tenemos

$$ds^2 = e^{2f(\tilde{\sigma})} \left(\eta_{\mu\nu} + \dot{h}_{\mu\nu} \right) d\tilde{x}^\mu d\tilde{x}^\nu + d\tilde{\sigma}^2. \quad (\text{B.11})$$

Utilizando la métrica anterior se calculan las ecuaciones de Einstein perturbadas a primer orden y por simplicidad vamos a considerar que no hay materia.

De este modo, para las componentes $\mu\nu$ de las ecuaciones de Einstein linealizadas a primer orden tenemos

$$\begin{aligned} & -e^{2f} \left(\frac{1}{2} \partial_{\tilde{\sigma}}^2 + 2f' \partial_{\tilde{\sigma}} \right) \dot{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} e^{2f} f' \partial_{\tilde{\sigma}} (\eta^{kl} \dot{h}_{kl}) - \\ & - \frac{1}{2} \eta^{kl} (\partial_\mu \partial_\nu \dot{h}_{kl} - \partial_\mu \partial_k \dot{h}_{\nu l} - \partial_\nu \partial_k \dot{h}_{\mu l}) - \frac{1}{2} \square_4 \dot{h}_{\mu\nu} = 0, \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

a partir de las componentes 5μ obtenemos

$$\frac{1}{2} \eta^{kl} \partial_{\tilde{y}} (\partial_k \dot{h}_{\mu l} - \partial_\mu \dot{h}_{kl}) = 0, \quad (\text{B.13})$$

mientras para la componente 55 se tiene

$$-\frac{1}{2} (\partial_{\tilde{\sigma}}^2 + 2f' \partial_{\tilde{\sigma}}) \eta^{kl} \dot{h}_{kl} = 0. \quad (\text{B.14})$$

De la ecuación (B.14) vemos que la traza de $\dot{h}_{\mu\nu}$ tiene la siguiente forma

$$\eta^{kl} \dot{h}_{kl} = g(\tilde{x}^\mu) + \alpha(\tilde{x}^\mu) \int^{\tilde{\sigma}} dw e^{-2f(w)}, \quad (\text{B.15})$$

donde $g(\tilde{x}^\mu)$ y $\alpha(\tilde{x}^\mu)$ son funciones arbitrarias. A su vez, a partir de la ecuación (B.13) y utilizando el resultado anterior, se tiene que

$$\partial^\mu \dot{h}_{\mu l} - \partial_\mu g(\tilde{x}^\nu) - \partial_\mu \alpha(\tilde{x}^\mu) \int^{\tilde{\sigma}} dw e^{-2f(w)} = j_\mu(\tilde{x}^\nu), \quad (\text{B.16})$$

aquí $j_\mu(\dot{x}^\nu)$ es una función que no depende de la quinta coordenada.

El siguiente paso consiste en regresar y elegir un nuevo sistema donde se preserve la condición de norma $\dot{h}_{5M} = 0$. Para eso escogemos el siguiente sistema de coordenadas $\dot{x}^M = \dot{x}^M + \xi^M(\dot{x})$. Habiendo hecho esto, tenemos que las componentes del vector ξ_M dadas anteriormente por (B.8) y (B.9) adoptan la forma siguiente en el nuevo sistema de coordenadas $\dot{x}^\mu$

$$\xi_\mu(\dot{X}) = e^{2f(\dot{\sigma})} \left(\dot{\xi}_\mu(\dot{x}^\nu) - \int^{\dot{\sigma}} dw e^{-2f(w)} \partial_\mu \xi_5(\dot{x}^\mu) \right), \quad (\text{B.17})$$

$$\xi_5(\dot{x}^\mu) = \dot{\xi}_5(\dot{x}^\mu) \quad (\text{B.18})$$

donde los vectores $\dot{\xi}_5(\dot{x}^\nu)$ y $\dot{\xi}_\mu(\dot{x}^\nu)$ son funciones arbitrarias y representan residuos de norma.

Ahora calculemos las componentes de (B.3) en el sistema $\dot{X}$ teniendo en cuenta que $e^{2f(\sigma)} \dot{\dot{h}}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$:

$$\dot{h}_{\mu\nu} = \dot{\dot{h}}_{\mu\nu} + 2 \int^{\dot{\sigma}} dw e^{-2f(w)} \partial_\mu \partial_\nu \dot{\xi}_5 - 2\eta_{\mu\nu} f'(\dot{\sigma}) \dot{\xi}_5 - \partial_\mu \dot{\xi}_\nu - \partial_\nu \dot{\xi}_\mu. \quad (\text{B.19})$$

De esta expresión sacaremos la traza de $\dot{h}_{\mu\nu}$ multiplicando por $\eta_{\mu\nu}$ y aplicaremos el operador transversal $\partial^\mu \dot{h}_{\mu\nu}$. Después de esto hay que encontrar una condición sobre las $\dot{\xi}_M$ que sea compatible con anular la traza y dejar sólo los modos transversos para las $\dot{h}_{\mu\nu}$. Recordando a qué era igual la traza de $\dot{h}$ y la expresión para $\partial^l \dot{h}_{lk}$ calculadas anteriormente de las ecuaciones de Einstein perturbadas (B.13) y (B.14), podremos fijar una norma que sea compatible con las condiciones de transversalidad y traza nula para $\dot{h}_{\mu\nu}$, como mostraremos en los pasos siguientes.

Imponiendo transversalidad $\partial^l \dot{h}_{lk} = 0$ en la ecuación (B.19) y escogiendo $\alpha(\dot{x}^\nu) = -2\Box_4 \dot{\xi}_5$ en (B.15), (donde $\Box_4$ es el operador d'Alambertiano en 4 dimensiones), se obtiene lo siguiente:

$$j_k(\dot{x}^\nu) + \partial_k g(\dot{x}^\nu) - \partial^l \partial_l \dot{\xi}_k(\dot{x}^\nu) - \partial_k \partial^l \dot{\xi}_l(\dot{x}^\nu) - 2f' \partial_k \dot{\xi}_5(\dot{x}^\nu) = 0, \quad (\text{B.20})$$

y para la traza nula, de (B.19) tenemos que $\dot{h} = 0$ implica

$$g(\dot{x}^\nu) - 2\partial^l \dot{\xi}_l(\dot{x}^\nu) - 8f' \dot{\xi}_5(\dot{x}^\nu) = 0. \quad (\text{B.21})$$

Esto nos da el siguiente par de ecuaciones

$$\partial^l \partial_l \dot{\xi}_k - \partial^l \partial_k \dot{\xi}_l = j_k + 6f' \partial_k \dot{\xi}_5, \quad (\text{B.22})$$

$$\partial^l \dot{\xi}_l = \frac{1}{2}g - 4f' \dot{\xi}_5. \quad (\text{B.23})$$

Dado que $f(\sigma)$ no puede ser constante y las funciones residuales $\dot{\xi}_M$, junto con $g(\dot{x}^\mu)$ y $j(\dot{x}^\mu)$, no pueden depender de la quinta dimensión, resulta una buena elección usar la libertad de norma disponible para fijar la función residual $\dot{\xi}_5 = 0$. Esta elección nos permite ver que el numero de grados de libertad para los modos transversos de traza nula de $\dot{h}_{\mu\nu}$ es igual a 5 correspondientes a 4 funciones vectoriales $j_k(\dot{x}^\nu)$ y una escalar $g(\dot{x}^\nu)$, las ecuaciones anteriores se reducen a

$$\partial^l \partial_l \dot{\xi}_k - \partial^l \partial_k \dot{\xi}_l = j_k, \quad (\text{B.24})$$

$$\partial^l \dot{\xi}_l = \frac{1}{2}g. \quad (\text{B.25})$$

Estas ecuaciones tienen la misma estructura que las ecuaciones de Maxwell, ahora procedamos a fijar la norma de Lorentz sobre el vector $\dot{\xi}_\mu$

$$\xi'_k = \dot{\xi}_k + \partial_k \chi, \quad (\text{B.26})$$

$$g' = g + 2\partial^l \partial_l \chi, \quad (\text{B.27})$$

$$j'_k = j_k, \quad (\text{B.28})$$

donde la función χ es una función arbitraria que sólo depende de las primeras 4 dimensiones.

Tomando en cuenta esta elección de norma, el sistema de ecuaciones adopta la siguiente forma:

$$\partial^l \partial_l \xi'_k - \partial^l \partial_k \xi'_l = j'_k, \quad (\text{B.29})$$

$$\partial^l \xi'_l = \frac{1}{2} g'. \quad (\text{B.30})$$

Luego usamos la libertad que tenemos debido a la arbitrariedad de g y χ , y escogemos la siguiente condición

$$\partial^l \partial_l \chi = -\frac{1}{2} g, \quad (\text{B.31})$$

lo cual implica que las ecuaciones después de haber fijado la norma son equivalentes a

$$\begin{aligned} \partial^l \partial_l \xi'_k - \partial^l \partial_k \xi'_l &= j'_k, \\ \partial^l \xi'_l &= 0. \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

A partir de esta expresión vemos que el sistema de ecuaciones es soluble dada la similitud con las ecuaciones de Maxwell, lo que nos permite encontrar

una expresión para los vectores ξ'_μ . Esto nos dice que fijar la norma de Lorentz para los vectores $\dot{\xi}_\mu$ es equivalente a imponer las condiciones transversa y sin traza $\dot{h} = \partial^\mu \dot{h}_{\mu\nu} = 0$ para las perturbaciones de la métrica.

Una vez fijadas las condiciones $\dot{h}_{5M} = \dot{h} = \partial^\mu \dot{h}_{\mu\nu} = 0$ podemos reducir el sistema de ecuaciones (B.12)-(B.14) a la siguiente ecuación

$$(\partial_{\tilde{\sigma}}^2 + 4f'\partial_{\tilde{\sigma}})\dot{h}_{\mu\nu} + e^{2f}\Box_4\dot{h}_{\mu\nu} = 0. \quad (\text{B.33})$$

Resumiendo, vimos que es posible fijar una norma para los vectores ξ_M en el sistema de coordenadas considerado para la métrica perturbada de tal forma que obtuvimos la condición $\dot{h}_{5M} = 0$. Esta elección de norma deja invariantes las ecuaciones de Einstein para la métrica perturbada. Además, el fijar la condición anterior nos deja residuos en la norma para los vectores ξ_M , los cuales se fijan después para imponer la condición de transversalidad y traza nula sobre las componentes restantes de la fluctuación $\dot{h}_{\mu\nu}$. Una vez hecho esto, los últimos residuos de la norma son las constantes de integración que resultan de resolver el sistema de ecuaciones (B.32). Todo esto se hizo sin pérdida de generalidad, por ello aseguramos que hemos fijado la norma imponiendo las condiciones axial y transversa sin traza para las componentes de la perturbación $\dot{h}_{MN}$ en la forma más general.

Apéndice C

Bases no coordenadas (tetradas)

En este Apéndice se revisarán algunos conceptos que nos permitirán entender cómo se aplica el principio de equivalencia a una acción que describe fermiones con espín $-1/2$, en espaciotiempos curvos. Estos conceptos son extendibles a espaciotiempos con dimensiones extra. A lo largo de este trabajo de tesis hemos usado el formalismo covariante como es costumbre en relatividad general; lo hemos usado para el análisis de la localización de la gravedad, de campos escalares, de campos vectoriales y finalmente desearíamos usarlo para el tratamiento de la localización de campos espinoriales. Sin embargo, nos enfrentamos al problema de que los campos espinoriales no son invariantes bajo transformaciones de coordenadas y, por lo tanto, no podemos usar el formalismo covariante al que estamos acostumbrados, en otras palabras,

la curvatura R_{BCD}^A y la conexión de Levi Civita Γ_{MN}^P (los índices latinos en mayúsculas corren de 0,..4 igual que en el capítulo 4 secc. 4.1.3) que usamos no forman parte de un formalismo apropiado para describir la dinámica de campos con espín-1/2 en espacios curvos, por ello debemos establecer otro formalismo.

Como es costumbre, usamos siempre un formalismo en el que consideramos una base para el espacio tangente T_p de nuestra variedad en un punto p dada por las derivadas parciales con respecto a las coordenadas en cada punto $\hat{e}^{(\mu)} = \partial_\mu$ y, de manera similar, usamos una base para el espacio cotangente dada por el gradiente de las funciones coordenadas $\hat{\theta}_{(\mu)} = dx^\mu$, donde los índices griegos corren de 0, 1, ..., 3.

Sin embargo, ahora queremos utilizar un formalismo en el que la base en nuestra variedad no sea coordenada; para ello vamos a imaginar que en cada punto de la variedad está definido un conjunto de vectores base $\hat{e}^{(a)}$ donde los índices latinos los usaremos para denotar que la base no es coordenada y corren de 0, 1, ..., 3. La única condición que le pediremos a nuestra nueva base no coordenada es que constituya un conjunto de vectores ortonormal. Además, si la métrica de nuestro espacio tiene la forma canónica $\eta_{\mu\nu}$, demandaremos que el producto interno de nuestros vectores base sea $g(\hat{e}_{(a)}\hat{e}_{(b)}) = \eta_{ab}$ donde $g(,)$ es el tensor métrico usual. Al conjunto de vectores que representa una base ortonormal comúnmente se le llama tetrad y es conocida también como “Vielbein”. Después de haber escogido la base ortonormal podemos expresar cualquier vector como combinación lineal de los vectores base, es decir,

podemos expresar nuestra antigua base coordenada $\hat{e}^{(\mu)} = \partial_\mu$ en términos de nuestra nueva base no coordenada de la siguiente manera:

$$\hat{e}^{(\mu)} = e_\mu^a \hat{e}_a, \quad (\text{C.1})$$

donde las componentes e_μ^a forman una matriz invertible $n \times n$ y para distinguirlas de las componentes de los vectores, a e_μ^a les llamaremos tetradas o Vielbeins; además, denotaremos sus inversas como

$$\hat{e}_a^\mu e_\nu^a = \delta_\nu^\mu, \quad \hat{e}_\mu^a e_\nu^b = \delta_a^b, \quad (\text{C.2})$$

de forma inversa podemos escribir

$$\hat{e}^{(a)} = e_a^\mu \hat{e}_\mu. \quad (\text{C.3})$$

Usando las tetradas inversas podemos escribir el tensor métrico como

$$g_{\mu\nu} e_a^\mu e_b^\nu = \eta_{ab} \quad (\text{C.4})$$

o equivalentemente

$$g_{\mu\nu} = e_\mu^a e_\nu^b \eta_{ab}. \quad (\text{C.5})$$

De forma similar podemos definir una base ortonormal de 1-formas en T_p , que denotaremos como $\hat{\Theta}^{(a)}(\hat{e}_{(b)}) = \delta_b^a$, las cuales están relacionadas con las bases coordenadas $\hat{\Theta}^\mu = dx^\mu$ por

$$\hat{\Theta}^\mu = e_a^\mu \hat{\Theta}^{(a)} \quad \text{y} \quad \hat{\Theta}^a = e_\mu^a \hat{\Theta}^{(\mu)}. \quad (\text{C.6})$$

Con estas relaciones es posible establecer que cualquier vector V puede ser expresado en términos de las componentes ortonormales de la base no coordenada. Si un vector V es escrito en la base coordenada como $V^\mu \hat{e}_{(\mu)}$ y en la

base ortonormal no coordenada como $V^a \hat{e}_{(a)}$ entonces los conjuntos de componentes están relacionados por $V_a = e_\mu^a V^\mu$, con este ejemplo vemos que con las tetradas es posible pasar de los índices griegos a los latinos y viceversa. Además, con esta notación nos podemos referir a tensores multi-indexados (con múltiples índices) en su base ortonormal o incluso en términos de sus componentes mixtas como sigue

$$V_b^a = e_\mu^a V_b^\mu = e_b^\nu V_\nu^a = e_\mu^a e_b^\nu V_\nu^\mu. \quad (\text{C.7})$$

En particular, para subir y bajar índices en las tetradas se usa la convención acostumbrada, es decir, con la métrica; sólo que debemos tener el cuidado de subir y bajar los índices que corresponden al espacio curvo (tratado con la base coordenada) con la métrica usual $g_{\mu\nu}$ de la base coordenada, mientras los índices latinos los subimos y bajamos con la métrica plana n_{ab} para las bases no coordenadas

$$e_a^\mu = g^{\mu\nu} \eta_{ab} e_\nu^b. \quad (\text{C.8})$$

Las tetradas se pueden ver como si fueran las componentes de un tensor del tipo $(1, 1)$,

$$e = e_\nu^a dx^\nu \otimes \hat{e}_{(a)}. \quad (\text{C.9})$$

Las tetradas actúan como si fuesen una suerte de mapeo identidad con la diferencia de que cambian de base el objeto sobre el que actúan, por ejemplo a $V_a = e_\mu^a V^\mu$ lo regresa como vector, pero lo cambia de base.

Con estas bases hemos sentido el hecho de que se ha definido una nueva base no coordenada ortonormal, la cual cambia independientemente de cómo

lo hace la base coordenada. La única condición que le pedimos a esta nueva base no coordenada es que preserve ortonormalidad cuando cambia, es decir, si consideramos una métrica Lorentziana, queremos que los cambios de base sean invariantes bajo transformaciones de Lorentz locales,

$$\hat{e}_{(a)} \rightarrow \hat{e}_{a'} = \Lambda_{a'}^a(x) \hat{e}_a \quad (\text{C.10})$$

donde las matrices $\Lambda_{a'}^a$ representan transformaciones dependientes de la posición que en cada punto dejan inalterada la forma canónica de la métrica :

$$\Lambda_{a'}^a \Lambda_{b'}^b \eta_{ab} = \eta_{a'b'}. \quad (\text{C.11})$$

Las matrices anteriores son las que conocemos cotidianamente como las transformaciones inversas de Lorentz en un espacio plano. Esto nos abre la posibilidad de hacer una transformación local de Lorentz en cada punto en el espacio para nuestra base ortonormal, pero además, tenemos la posibilidad de hacer una transformación general de Lorentz sobre nuestra base coordenada al mismo tiempo, lo cual nos lleva a una ley para transformar un tensor mixto:

$$T^{a'\mu'}_{b'\nu'} = \Lambda_{a'}^a \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} \Lambda_{b'}^b \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} T^{a\mu}_{b\nu}. \quad (\text{C.12})$$

Hasta ahora, con lo que hemos visto del formalismo de bases no coordenadas podemos inferir que nos puede servir para representar teorías que involucren espinores. Sin embargo, lo que nos hace falta es ver cómo el principio de equivalencia promueve las derivadas en derivadas más un término de corrección cuando estamos en un espacio curvo sobre el cual además estamos usando una base no coordenada, es decir, tenemos que reemplazar las conexiones

procedentes de las bases coordenadas $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ por las nuevas conexiones a las que llamaremos conexiones de espín $\omega_{\mu b}^a$, donde cada índice latino corresponde a un factor de la conexión de espín tal y como pasaba con las conexiones de las bases coordenadas:

$$\nabla_\mu X_b^a = \partial_\mu X_b^a + \omega_{\mu c}^a X_b^c - \omega_{\mu b}^c X_c^a. \quad (\text{C.13})$$

Se puede ir más allá y establecer una conexión entre las conexiones de espín, las tetradas y las conexiones $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ considerando primero la derivada de un vector X y usando sólo las bases coordenadas:

$$\nabla X = (\nabla_\mu X^\nu) dx^\mu \otimes \partial_\nu = (\partial_\mu X^\nu + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu X^\lambda) dx^\mu \otimes \partial_\nu. \quad (\text{C.14})$$

Después de esto vamos a hacer lo mismo, pero para la base coordenada junto con la base no coordenada,

$$\begin{aligned} \nabla X &= (\nabla_\mu X^a) dx^\mu \otimes \hat{e}_{(a)} \\ &= (\partial_\mu X^a + \omega_{\nu b}^a X^b) dx^\mu \otimes \hat{e}_{(a)} \\ &= (\partial_\mu e_\nu^a X^\nu + \omega_{\nu b}^a e_\lambda^b X^\lambda) dx^\mu \otimes (e_a^\sigma \partial_\sigma) \\ &= e_a^\sigma (e_\nu^a \partial_\mu X^\nu + X^\nu \partial_\mu e_\nu^a + \omega_{\mu b}^a e_\lambda^b X^\lambda) dX^\mu \otimes \partial_\sigma \\ &= (\partial_\mu X^\nu + e_a^\nu \partial_\mu e_\lambda^a X^\lambda + e_a^\nu \omega_{\mu b}^a e_\lambda^b X^\lambda) dX^\mu \otimes \partial_\nu, \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

en el tercer renglón de la expresión anterior se pasó a la base coordenada; esta última expresión podemos compararla con (C.14) para obtener una expresión que nos relaciona las conexiones de espín $\omega_{\mu b}^a$ con las conexiones $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$

$$\Gamma_{\mu\lambda}^\nu = e_a^\nu \partial_\mu e_\lambda^a + e_a^\nu \omega_{\mu b}^a e_\lambda^b. \quad (\text{C.16})$$

A partir de esta expresión podemos despejar $\omega_\mu^a{}_b$ con el uso de las tetradas y tenemos

$$\omega_\mu^a{}_b = e_\nu^a e_b^\lambda \Gamma_{\mu\lambda}^\nu - e_b^\lambda \partial_\mu e_\lambda^a. \quad (\text{C.17})$$

Ahora ya estamos listos para calcular derivadas covariantes sobre tensores del tipo $(1,1)$ descritos en términos de bases mixtas como por ejemplo la tetrada

$$\nabla_\mu e_\nu^a = \partial_\mu e_\nu^a - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda e_\lambda^a + \omega_\mu^a{}_b e_\nu^b; \quad (\text{C.18})$$

cabe señalar que si en la derivada covariante anterior sustituimos (C.17) o (C.16), llegamos a que

$$\nabla_\mu e_\nu^a = 0, \quad (\text{C.19})$$

cosa que no nos extraña dada la naturaleza de la tetrada vista como si fuera un tensor $(1,1)$ que se comporta similar a un mapeo identidad (C.9). Al resultado (C.19) se le conoce como postulado de la tetrada.

Nosotros debemos considerar un formalismo covariante donde podamos usar el principio de equivalencia para promover las derivadas sobre los espinores en una acción para fermiones de espín-1/2 a derivadas covariantes en un espacio curvo, pero tenemos la dificultad de no saber cómo se transforman los espinores bajo una transformación de coordenadas; introduciendo las bases no coordenadas es posible plantear un formalismo covariante donde la base no coordenada sólo es invariante bajo transformaciones locales de Lorentz y la derivada común se promueve con el principio de equivalencia a una derivada covariante en la base no coordenada. Para definir bien la derivada covariante en la base no coordenada se debe considerar una conexión.

Dicha conexión no obedece la ley de transformación de un tensor, el índice griego se transforma bajo transformaciones generales de coordenadas como una 1-forma, y bajo transformaciones locales de Lorentz la conexión $\omega_\mu^{a'}_{b'}$ se transforma inhomogéneamente de la manera siguiente

$$\omega_\mu^{a'}_{b'} = \Lambda^{a'}_a \Lambda^b_{b'} \omega_\mu^a_b - \Lambda^c_{b'} \partial_\mu \Lambda^{a'}_c. \quad (\text{C.20})$$

Casi estamos listos para considerar un formalismo en el que podamos tratar espinores en un espacio curvo, sólo tenemos que ver cómo se transforman las formas diferenciales con respecto a las bases coordenada y no coordenada. Podemos ver esto calculando la derivada exterior de X_μ^a , considerando a X_μ^a como un vector en la base no coordenada y como una 1-forma en la base coordenada

$$(dX)_{\mu\nu}^a = \partial_\mu X_\nu^a - \partial_\nu X_\mu^a. \quad (\text{C.21})$$

Se puede comprobar que esta expresión se transforma como una 2-forma en el sistema coordenado, pero no se transforma como vector de Lorentz en el sistema no coordenado. Este último se debe a que el vector cambia punto a punto. Esta dificultad se soluciona introduciendo la conexión de espín junto con la ley de transformación (C.20), por lo que tenemos

$$(dX + \omega \times X)_{\mu\nu}^a = \partial_\mu X_\nu^a - \partial_\nu X_\mu^a + \omega_\mu^a_b X_\nu^b - \omega_\nu^a_b X_\mu^b. \quad (\text{C.22})$$

Se puede verificar que esta última expresión se transforma como un tensor propio. Este formalismo nos permite expresar la torsión y la curvatura, entendiendo a la torsión como una 2-forma en las bases coordenadas y un vector en la base no coordenada $T_{\mu\nu}^a$ y a la curvatura como un tensor (1,1) en la

base no coordenada y una 2-forma en la base coordenada $R_{b\mu\nu}^a$. Haciendo uso de la libertad de contraer índices, podemos usar las bases de las 1-formas y las conexiones de espín respectivamente como sigue

$$e^a = e_\mu^a dx^\mu, \quad \omega_b^a = \omega_\mu^a dx^\mu \quad (\text{C.23})$$

donde $e^a \equiv \hat{\Theta}^{(a)}$. Con este formalismo se puede definir la torsión y curvatura como sigue:

$$T^a = de^a + \omega_b^a \times e^b \quad (\text{C.24})$$

y para la curvatura tenemos

$$R_b^a = d\omega_b^a + \omega_c^a \times \omega_b^c. \quad (\text{C.25})$$

Es importante mencionar que la curvatura R_b^a es el tensor de Riemman con todos los índices de las bases coordenadas contraídos, es decir, no es el escalar de Ricci. Hasta ahora todo este formalismo ha sido planteado de forma general; si queremos aterrizar las cosas como, por ejemplo, revisar cuál es el equivalente a la conexión de Levi Civita, tendríamos que pedir que la torsión fuese cero, es decir que la ecuación (C.24) sea idénticamente cero y, además, se tiene que cumplir la condición de metricidad $\nabla_\mu g_{\nu\sigma} = 0$. Para ver qué pasa con esta condición veamos cuál es el equivalente usando la base ortonormal no coordenada donde la métrica está dada por η_{ab}

$$\begin{aligned} \nabla_\mu \eta_{ab} &= \partial_\mu \eta_{ab} - \omega_\mu^a \eta_{bc} - \omega_\mu^c \eta_{ab} = 0 \\ &= \omega_{\mu ab} + \omega_{\mu ba}. \end{aligned} \quad (\text{C.26})$$

Esta última relación nos lleva a una expresión para la condición de metricidad, que viene siendo la antisimetría de la conexión de espín $\omega_{\mu ab} = -\omega_{\mu ba}$.

Con esto finalizamos una revisión de lo que son las tetradas y su uso en la geometría diferencial para tratar teorías como lo son acciones que involucran espín en espacios curvos. Estos conceptos que hemos revisado en este apéndice se pueden extender sin pérdida de generalidad a un espaciotiempo con d dimensiones extra considerando solamente un rango mayor para los índices griegos y latinos $0, 1, \dots, 3, \dots d$.

Bibliografía

- [1] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. Dvali, *The hierarchy problem and new dimensions at a millimeter*, Phys. Lett. **B 429** (1998) 263; I. Antoniadis, N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. Dvali, *New dimensions at a millimeter to a Fermi and superstrings at a TeV*, Phys. Lett. **B 436** (1998) 257.
- [2] L. Randall and R. Sundrum, *A Large Mass Hierarchy from a Small Extra Dimension*, Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 3370; *An alternative to compactification*, Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 4690.
- [3] G. Nordström, *Über die Möglichkeit, das elektromagnetische Feld und das Gravitationsfeld zu vereinigen*, Physikalische Zeitschrift, **15**(1914) 504; arXiv:physics/0702221,0702222,0702223.
- [4] T. Kaluza, *Zum Unitätsproblem in der Physik*, Sitzungsber Preuss. Akad. Wiss. Berlin. (Math. Phys.) (1921) 966; O. Klein, *Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie*, Zeitschrift für Physik **A 37** 12 (1926) 895.

- [5] A. Lukas, B.A. Ovrut, K.S. Stelle, and D. Waldram, *Universe as a domain wall*, Phys. Rev. **D 59** (1999) 086001 ; A. Lukas, B.A. Ovrut, and D. Waldram, *Cosmological solutions of Horava Witten theory*, Phys. Rev. **D 60** (1999) 086001; A. Lukas, B.A. Ovrut, and D. Waldram, *Boundary inflation*, Phys. Rev. **D 61** (2000) 023506.
- [6] O. DeWolfe, D.Z. Freedman, S.S. Gubser and A. Karch, *Modeling the fifth dimension with scalars and gravity*, Phys. Rev. **D 62** (2000) 046008.
- [7] D. Stojkovic, *Fermionic zero modes on domain walls*, Phys. Rev. **D 63** (2000) 025010.
- [8] M. Gremm, *Four-dimensional gravity on a thick domain wall*, Phys. Lett. **B 478** (2000) 434; *Thick domain walls and singular spaces*, Phys. Rev. **D 62** (2000) 044017.
- [9] K. Ghoroku and M. Yahiro, *Instability of thick brane worlds*, hep-th/0305150; A. Kehagias and K. Tamvakis, *A Self-Tuning Solution of the Cosmological Constant Problem*, Mod. Phys. Lett. **A 17** (2002) 1767; *Localized Gravitons, Gauge Bosons and Chiral Fermions in Smooth Spaces Generated by a Bounce*, Phys. Lett. **B 504**(2001) 38; M. Giovannini, *Gauge-invariant fluctuations of scalar branes*, Phys. Rev. **D 64** (2001) 064023; *Localization of metric fluctuations on scalar branes*, Phys. Rev. **D 65** (2002) 064008;
- [10] C. Csaki, J. Erlich, T. Hollowood and Y. Shirman, *Universal Aspects of gravity localized on thick branes*, Nucl. Phys. **B 581** (2000) 309.

- [11] A. Campos, *Critical phenomena of thick brane in warped space-time*, Phys. Rev. Lett. **88** (2002) 141602.
- [12] A. Wang, *Thick de Sitter 3-Branes, Dynamic Black Holes and Localization of Gravity* Phys. Rev. **D 66**(2002) 024024.
- [13] S. Kobayashi, K. Koyama and J. Soda, *Thick brane worlds and their stability*, Phys. Rev. **D 65** (2002) 064014.
- [14] R. Emparan, R. Gregory and C. Santos, *Black holes on thick branes*, Phys. Rev. **D 63** (2001) 104022; R. Guerrero, A. Melfo and N. Pantoja, *Selfgravitating domain walls and the thin wall limit*, Phys. Rev. **D 65** (2002) 125010; A. Melfo, N. Pantoja and A. Skirzewski, *Thick domain wall space-time with and without reflection symmetry*, Phys. Rev. **D 67** (2003) 105003; K.A. Bronnikov and B.E. Meierovich, *A general thick brane supported by a scalar field*, Grav. Cosmol. **9** (2003) 313; O. Castillo–Felisola, A. Melfo, N. Pantoja and A. Ramirez, *Localizing gravity on exotic thick three-branes*, Phys. Rev. **D 70** (2004) 104029; T.R. Slatyer and R.R. Volkas, *Cosmology and fermion confinement in a scalar-field generated domain wall brane in five dimensions*, JHEP **0704** (2007) 062.
- [15] V. Dzhunushaliev, V. Folomeev, D. Singleton and S. Aguilar-Rudametkin, *6D thick branes from interacting scalar fields*, Phys. Rev. **D 77** (2008) 044006; V. Dzhunushaliev, V. Folomeev, K. Myrzakulov and R. Myrzakulov, *Thick brane in 7D and 8D spacetimes*, Gen. Rel.

- Grav. **41** (2009) 131; D. Bazeia, F.A. Brito and J.R. Nascimento, *Supergravity brane worlds and tachyon potentials*, Phys. Rev. **D 68** (2003) 085007; D. Bazeia, F.A. Brito and A.R. Gomes, *Locally Localized Gravity and Geometric Transitions*, JHEP **0411** (2004) 070; D. Bazeia and A.R. Gomes, *Bloch Brane*, JHEP **0405** (2004) 012; D. Bazeia, F.A. Brito and L. Losano, *Scalar fields, bent branes, and RG flow*, JHEP **0611** (2006) 064; D. Bazeia, A.R. Gomes and L. Losano, *Gravity localization on thick branes: a numerical approach*, Int. J. Mod. Phys. **A 24** (2009) 1135.
- [16] Y.-X. Liu, Y. Zhong and K. Yang, *Scalar-Kinetic Branes*, Europhysics Letters **90** (2010) 51001.
- [17] Y.-X. Liu, H. Guo, C.-E. Fu and J.-R. Ren, *Localization of Matters on Anti-de Sitter Thick Branes*, JHEP **1002** (2010) 080.
- [18] B. Bajc and G. Gabadadze, *Localization of matter and cosmological constant on a brane in anti de Sitter space*, Phys. Lett. **B 474** (2000) 282.
- [19] I. Oda, *Localization of matters on a string-like defect*, Phys. Lett. **B 496** (2000) 113.
- [20] Y.-X. Liu, X.-H. Zhang, L.-D. Zhang and Y.-S. Duan, *Localization of Matters on Pure Geometrical Thick Branes*, JHEP **0802** (2008) 067; Y.-X. Liu, L.-D. Zhang, L.-J. Zhang and Y.-S. Duan, *Fermions on*

- Thick Branes in the Background of Sine-Gordon Kinks*, Phys. Rev. **D 78** (2008) 065025 .
- [21] Y. Grossman and N. Neubert, *Neutrino masses and mixings in non-factorizable geometry*, Phys. Lett. **B 474** (2000) 361; R. Koley and S. Kar, *A novel braneworld model with a bulk scalar field*, Phys. Lett. **B 623** (2005) 244; A. Melfo, N. Pantoja and J.D. Tempo, *Fermion localization on thick branes*, Phys. Rev. **D 73** (2006) 044033.
- [22] T.R. Slatyer and R.R. Volkas, *Cosmology and fermion confinement in a scalar-field generated domain wall brane in five dimensions*, JHEP **0704** (2007) 062; R. Davies, D.P. George and R.R. Volkas, *Standard model on a domain wall brane*, Phys. Rev. **D 77** (2008) 124038.
- [23] S. Ichinose, *Fermions in Kaluza-Klein and Randall-Sundrum theories*, Phys. Rev. **D 66** (2002) 104015.
- [24] C. Ringeval, P. Peter and J.P. Uzan, *Localization of massive fermions on the brane*, Phys. Rev. **D 65** (2002) 044016.
- [25] T. Gherghetta and M. Shaposhnikov, *Localizing gravity on a string-like defect in six dimensions*, Phys. Rev. Lett. **85** (2000) 240.
- [26] I.P. Neupane, *Consistency of higher derivative gravity in the brane background*, JHEP **0009** (2000) 040; *Completely localized gravity with higher curvature terms*, Class. Quant. Grav. **19** (2002) 5507.

- [27] S. Randjbar-Daemi and M. Shaposhnikov, *Fermion zero-modes on brane-worlds*, Phys. Lett. **B 492** (2000) 361.
- [28] R. Koley and S. Kar, *Scalar kinks and fermion localisation in warped spacetimes*, Class. Quant. Grav. **22** (2005) 753.
- [29] S.L. Dubovsky, V.A. Rubakov and P.G. Tinyakov, *Brane world: disappearing massive matter*, Phys. Rev. **D 62** (2000) 105011.
- [30] Y. Brihaye and T. Delsate, *Remarks on bell-shaped lumps: stability and fermionic modes*, Phys. Rev. **D 78** (2008) 025014.
- [31] Y.-X. Liu, L. Zhao and Y.-S. Duan, *Localization of Fermions on a String-like Defect*, JHEP **0704** (2007) 097; Y.-X. Liu, L. Zhao, X.-H. Zhang and Y.-S. Duan, *Fermions in Self-dual Vortex Background on a String-like Defect*, Nucl. Phys. **B 785** (2007) 234; Y.-Q. Wang, T.-Y. Si, Y.-X. Liu and Y.-S. Duan, *Fermionic zero modes in self-dual vortex background*, Mod. Phys. Lett. **A 20** (2005) 3045; L. Zhao, Y.-X. Liu and Y.-S. Duan, *Fermions in gravity and gauge backgrounds on a brane world*, Mod. Phys. Lett. **A 23** (2008) 1129.
- [32] C.A.S. Almeida, R. Casana, M.M. Ferreira and A.R. Gomes, *Fermion localization and resonances on two-field thick branes*, Phys. Rev. **D 79** (2009) 125022.
- [33] Y.-X. Liu, J. Yang, Z.-H. Zhao, C.-E. Fu and Y.-S. Duan, *Fermion Localization and Resonances on A de Sitter Thick Brane*, Phys. Rev. **D**

- 80** (2009) 065019; Y.-X. Liu, C.-E. Fu, L. Zhao and Y.-S. Duan, *Localization and Mass Spectra of Fermions on Symmetric and Asymmetric Thick Branes*, Phys. Rev. **D 80** (2009) 065020.
- [34] R. Koley, J. Mitra and S. SenGupta, *Fermion localization in a generalized Randall-Sundrum model*, Phys. Rev. **D 79** (2009) 041902(R).
- [35] Y. Kodama, K. Kokubu and N. Sawado, *Localization of massive fermions on the baby-skyrmion branes in 6 dimensions*, Phys. Rev. **D 79**, 065024 (2009).
- [36] O. Arias, R. Cardenas and I. Quiros, *Thick Brane Worlds Arising From Pure Geometry*, Nucl. Phys. **B 643** (2002) 187; N. Barbosa-Cendejas and A. Herrera-Aguilar, *4D gravity localized in non Z_2 -symmetric thick branes* JHEP **0510** (2005) 101; N. Barbosa-Cendejas and A. Herrera-Aguilar, *Localization of 4D gravity on pure geometrical thick branes*, Phys. Rev. **D 73** (2006) 084022; Erratum-ibid. **D 77** (2008) 049901.
- [37] M. Cvetič, S. Griffies and S.-J. Rey, *Static Domain Walls in $N=1$ Supergravity* Nucl. Phys. **B 381** (1992) 301; M. Cvetič and H.H. Soleng, *Supergravity Domain Walls* Phys. Rept. **282** (1997) 159; M. Cvetič and M. Robnik, *Gravity Trapping on a Finite Thickness Domain Wall: An Analytic Study*, Phys. Rev. **D 77** (2008) 124003.
- [38] N. Barbosa-Cendejas, A. Herrera-Aguilar, M.A. Reyes Santos and C. Schubert, *Mass gap for gravity localized on Weyl thick branes*, Phys. Rev. **D 77** (2008) 126013.

- [39] N. Barbosa-Cendejas, A. Herrera-Aguilar, K. Kanakoglou, U. Nucamendi and I. Quiros, *Mass hierarchy and mass gap on thick branes with Poincaré symmetry*, arXiv:0712.3098[hep-th].
- [40] N. Barbosa-Cendejas, A. Herrera-Aguilar, U. Nucamendi, I. Quiros, M. A. Reyes Santos and C. Schubert, Mass gap for gravity localized on thick branes, AIP Conf. Proc. **1083** (2008) 5.
- [41] Y.-X. Liu, Z.-H. Zhao, S.-W. Wei and Y.-S. Duan, *Bulk Matters on Symmetric and Asymmetric de Sitter Thick Branes*, JCAP **02** (2009) 003.
- [42] Y.-X. Liu, L.-D. Zhang, S.-W. Wei and Y.-S. Duan, *Localization and Mass Spectrum of Matters on Weyl Thick Branes*, JHEP **0808** (2008) 041.
- [43] S. Kobayashi, K. Koyama and J. Soda, *Thick brane worlds and their stability*, Phys. Rev. **D 65** (2002) 064014.
- [44] A. Karch and L. Randall, *Locally Localized Gravity*, JHEP **0105** (2001) 008.
- [45] R. Jackiw and C. Rebbi, *Solitons with fermion number 1/2*, Phys. Rev. **D 13** (1976) 3398.
- [46] A. Herrera-Aguilar, D. Malagón-Morejón, R.R. Mora-Luna and U. Nucamendi, *Aspects of thick brane worlds: 4D gravity localization, smoothness, and mass gap*, Mod. Phys. Lett. **A 25** (2010) 2089.

- [47] H. Guo, Y.-X. Liu, S.-W. Wei and C.-E. Fu, *Aspects of Bent Thick Brane Worlds: Gravity Localization and 5D Curvature Scalar*, arXiv:1008.3686 [hep-th].
- [48] V.I. Afonso, D. Bazeia and L. Losano, *First-order formalism for bent brane*, Phys. Lett. **B 634** (2006) 526.
- [49] Y.-X. Liu, K. Yang and Y. Zhong *de Sitter Thick Brane Solution in Weyl Geometry*, arXiv:0911.0269[hep-th].
- [50] Y.-X. Liu, H.-T. Li, Z.-H. Zhao, J.-X. Li and J.-R. Ren, *Fermion Resonances on Multi-field Thick Branes*, JHEP **0910** (2009) 091.
- [51] A. Balcerzak and M.P. Dąbrowski, *Brane $f(R)$ gravity cosmologies*, Phys. Rev. **D 81** (2010) 123527.
- [52] H.-T. Li, Y.-X. Liu, Z.-H. Zhao and H. Guo, *Fermion Resonances on a Finite Thickness Brane*, arXiv:1006.4240[hep-th]; Z.-H. Zhao, Y.-X. Liu, H.-T. Li and Y.-Q. Wang, *Temperature Effect on the Fermion Localization and Resonances on Thick Branes*, arXiv:1004.2181[hep-th]; Y.-X. Liu, C.-E. Fu, H. Guo, S.-W. Wei and Z.-H. Zhao, *Bulk Matters on a GRS-Inspired Braneworld*, arXiv:1002.2130[hep-th].
- [53] N. Barbosa-Cendejas and A. Herrera-Aguilar, *Localizing gravity on thick branes: a solution for massive KK modes of the Schroedinger equation*, J. Phys. Conf. Ser. **68** (2007) 012021.

- [54] A. Herrera-Aguilar, D. Malagón-Morejón and R.R. Mora-Luna, *Localization of gravity on a thick braneworld without scalar fields*, JHEP **1011** (2010) 015.
- [55] H. Guo, A. Herrera-Aguilar, Y.-X. Liu, D. Malagon-Morejon and R.R. Mora-Luna, *Localization of bulk matter fields on a pure de Sitter thick braneworld*, arXiv:1103.2430 [hep-th]
- [56] M. Gogberashvili, A. Herrera-Aguilar, and D. Malagón-Morejón, *An anisotropic standing wave braneworld and associated Sturm-Liouville problem*, arXiv:1012.4534[hep-th]; aceptado en Class. Quant. Grav.
- [57] V.A. Rubakov and M.E. Shaposhnikov, *Do we live inside a domain wall?*, Phys. Lett. **B 125** (1983) 136; V.A. Rubakov and M.E. Shaposhnikov, *Extra space-time dimensions: towards a solution to the cosmological constant problem*, Phys. Lett. **B 125** (1983) 139; E.J. Squires, *Dimensional reduction caused by a cosmological constant*, Phys. Lett. **B 167** (1986) 286.
- [58] S. Randjbar-Daemi and C. Wetterich, *Kaluza-Klein solutions with non-compact internal spaces*, Phys. Lett. **B 166** (1986) 65.
- [59] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, N. Kaloper and R. Sundrum, *A small cosmological constant from a large extra dimension*, Phys. Lett. **B 480** (2000) 193; S. Kachru, M. Schulz and E. Silverstein, *Self-tuning flat domain walls in 5D gravity and string theory*, Phys. Rev. **D 62** (2000) 045021; A. Kehagias, *A conical tear drop as a vacuum-energy drain for*

- the solution of the cosmological constant problem*, Phys. Lett. **B 600** (2004) 133.
- [60] M. Gogberashvili, *Hierarchy problem in the shell universe model*, Int. J. Mod. Phys. **D 11** (2002) 1635; *Four dimensionality in noncompact Kaluza-Klein model*, Mod. Phys. Lett. **A 14** (1999) 2025.
- [61] R.M. Wald, *General Relativity*, University of Chicago Press, Chicago (1984) 491pp.
- [62] C. Gabriel and P. Spindel, *Massive spin-2 propagators on de Sitter space*, J. Math. Phys. **38** (1997) 622; T. Garidi, *What is mass in de Sitterian physics?* hep-th/0309104; J.P. Gazeau and M. Novello, *The question of Mass in (anti-) de Sitter Spacetimes*, J. Phys. A **41** (2008) 304008.
- [63] A. Kehagias, and K. Tamvakis, *Graviton localization and Newton law for a dS_4 brane in a 5D bulk*, Class. Quantum Grav. **19** (2002).
- [64] A. Higuchi, Nucl. Phys. **b 325** 745 (1989).
- [65] A. Higuchi and S. Kouris, Class. Quant. Grav. **18** 4317 (2001) .
- [66] J.I. Diaz, J. Negro, L.M. Nieto, O. Rosas-Ortiz, *The supersymmetric modified Pöschl-Teller and delta well potentials* , J. Phys. A: Math. Gen. **32** (1999) 8447.
- [67] I. Oda, *Locally Localized Gravity Models in Higher Dimensions*, Phys. Rev. **D 64** (2001) 026002.

- [68] M. Visser, *An exotic class of Kaluza-Klein models*, Phys. Lett. **B 159** (1985) 22.
- [69] J. Lykken and L. Randall, *The Shape of Gravity*, JHEP **0006** (2000) 014.
- [70] I. Antoniadis, *A possible new dimension at a few Tev*, Phys. Lett. **B 246** (1990) 377.
- [71] G. Goetz, *The gravitational field of plane symmetric thick domain walls*, J. Math. Phys. **31** (1990) 2683.
- [72] S. SenGupta, *Aspects of warped braneworld models*, arXiv:0812.1092[hep-th].
- [73] V. Dzhunushaliev, V. Folomeev, and M. Minamitsuji, *Thick brane solutions*, Rept. Prog. Phys. **73** (2010) 066901.
- [74] M. Shifman, *Large extra dimensions: Becoming acquainted with an alternative paradigm*, Int. J. Mod. Phys. **A 25** (2010) 199.
- [75] T.G. Rizzo, *Introduction to extra dimensions*, AIP Conf. Proc. **1256** (2010) 27.
- [76] P.D. Mannheim, *Brane-localized gravity*, (World Scientific Publishing Company, Singapore, 2005).
- [77] R. Maartens and K. Koyama, *Brane-World Gravity*, Living Rev. Rel. **13** (2010) 5.

- [78] A.H. Guth, *The Inflationary Universe: A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems*, Phys. Rev. **D 23** (1981) 347.
- [79] A.H. Guth, *A New Inflationary Universe Scenario: A Possible Solution of the Horizon, Flatness, Homogeneity, Isotropy and Primordial Monopole Problems*, Phys. Lett. **B 108** (1982) 389.
- [80] I.Y. Park, C.N. Pope, and A. Sadrzadeh, *AdS brane world Kaluza-Klein reduction*, Class. Quant. Grav. **19** (2002) 6237.
- [81] C.P. Burgess, *Lectures on Cosmic Inflation and its Potential Stringy Realizations*, Class. Quant. Grav. **24** (2007) S795.
- [82] L. McAllister and E. Silverstein, *String Cosmology: A Review*, Gen. Rel. Grav. **40** (2008) 565.
- [83] A. Strominger, *The dS / CFT correspondence*, JHEP **0110** (2001) 034.
- [84] R. Bousso, A. Maloney, and A. Strominger, *Conformal vacua and entropy in de Sitter space*, Phys. Rev. **D 65** (2002) 104039.
- [85] M. Spradlin, A. Strominger, and A. Volovich, *Les Houches lectures on de Sitter space* in *Les Houches 2001, Gravity, gauge theories and strings* (2001) 423.
- [86] K. Pilch, P. van Nieuwenhuizen, and M.F. Sohnius, *De Sitter Superalgebras And Supergravity*, Commun. Math. Phys. **98** (1985) 105.
- [87] A. Guijosa, D.A. Lowe, and J. Murugan, *A Prototype for dS/CFT* , Phys. Rev. **D 72** (2005) 046001.

- [88] I.P. Neupane, *De Sitter brane-world, localization of gravity, and the cosmological constant*, Phys. Rev. **D 83** (2011) 086004.
- [89] Durrer R. and Kocian, P., *Testing extra dimensions with the binary pulsar*, Class. Quantum Grav.,**21**, (2004).
- [90] B. Allen and T. Jacobson, Commun Math. Phys.**103** 669 (1986)