



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN
NICOLÁS DE HIDALGO



INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

Posgrado en Matemáticas

Geometría de las Superficies Proyectivas Armónicas

T E S I S

Que para obtener el grado de Doctor en Matemáticas
Presenta:

JESÚS ADRIÁN CERDA RODRÍGUEZ

Director: Dr. Mustapha Lahyane
IFM-UMSNH

MORELIA, MICHOACÁN - ABRIL DE 2012.

Dedicatoria

A mi Papá el señor Guillermo Cerda Rodríguez.

Agradecimientos

Mis agradecimientos totales a Dios, a mi esposa María de la Luz Rosas, a mi familia y a mi asesor el Dr. Mustapha Lahyane.

Asimismo a los profesores Carlos Galindo Pastor, Francisco Monserrat Delpalillo, Israel Moreno Mejía y Jorge Olivares Vázquez, miembros de la mesa de sinodales, por su tiempo y por sus sugerencias para la mejora de este trabajo.

Al Instituto de Física y Matemáticas de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo por su ardua labor en la formación de recursos humanos y al Conacyt por el apoyo económico y oportunidades brindadas para lograr esta tesis y la culminación de mis estudios de doctorado.

De igual modo, al Programa de Mejoramiento del Profesorado (PROMEP) y a la Coordinación de la Investigación Científica (CIC) de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo por los apoyos otorgados durante mi estancia académica.

J. A. Cerda Rodríguez

Índice general

Dedicatoria	I
Agradecimientos	III
Índice de figuras	VII
Introducción	a
Notación y terminología	e
Capítulo 1. Grupo de Picard de un Espacio Anillado	1
1.1. Preámbulo: $\mathcal{O}_X$ -módulos	1
1.2. Morfismos de $\mathcal{O}_X$ -módulos	15
1.3. Suma Directa y Producto Tensorial de $\mathcal{O}_X$ -módulos	19
1.4. Gavilla hom: $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$	23
1.5. $\mathcal{O}_X$ -módulos Localmente Libres de Rango Finito	35
1.6. Grupo de Picard de un Espacio Anillado	42
Capítulo 2. Superficies Proyectivas Racionales en Breve	45
2.1. Divisores y la Equivalencia Lineal	45
2.2. La gavilla Canónica	52
2.3. Superficies Racionales	53
2.4. Explosiones	59
Capítulo 3. Configuración Armónica	63
3.1. Homografías	63
3.2. Posición Armónica	65
Capítulo 4. Superficies Proyectivas Armónicas	79
4.1. Diagramas Decorados de Enriques	80
4.2. La Construcción	83
4.3. Finitud del conjunto de las (-1) -curvas	91
4.4. Finitud del conjunto de las (-2) -curvas	107

4.5. Aplicaciones a los Anillos de Cox	109
4.6. Solución al Problema de los Sistemas lineales Completos	110
Bibliografía	113
Índice alfabético	117

Índice de figuras

3.1. Perspectiva desde un punto.	67
3.2. Configuración Armónica.	71
3.3. Coordenadas Homogéneas de una Configuración Armónica Realizable.	75
4.1. Diagrama decorado de Enriques del Ejemplo 4.9.	85
4.2. Superficie Proyectiva Armónica asociada a $(n_{T3}, n_{S3}, n_{T4}, n_{R4}, n_{S9}, n_{R9})$.	86
4.3. Superficie Proyectiva Armónica asociada a $(4, 5, 4, 5, 4, 4)$.	87

Introducción

Conocer la geometría de las superficies racionales proyectivas no singulares definidas sobre un campo algebraicamente cerrado de cualquier característica es un problema todavía abierto y actualmente tiene un gran interés internacional, ver por ejemplo las publicaciones [9], [10],[18], [12],[38] [30], [29], [31], [33], [34], [52], [46], [47], [48], [49], [50], [51], [54], [55], [61] y [65]. Una manera de estudiar la geometría de una superficie proyectiva racional es a través de su monoide efectivo. Aquí el monoide efectivo de una superficie proyectiva racional no singular X , denotado por $M(X)$, es el conjunto de las clases α de divisores sobre X módulo la equivalencia lineal entre divisores tal que α es efectiva.

En 1960 Nagata M. ha dado una familia de superficies proyectivas racionales no singulares X cuyos monoides efectivos no son finitamente generados. El ejemplo estándar es la explosión del plano proyectivo en r puntos en posición general, donde r es un número entero mayor o igual a 9, ver [60]. Muchos autores, como Campillo A., Ciliberto C., Galindo C., Geramita A. V., Harbourne B., Lahyane M., Looijenga E. Miranda R., Monserrat F., Mori S., Person U. por mencionar algunos, han tratado de clasificar tales superficies proyectivas racionales no singulares cuyos monoides efectivos son finitamente generados iniciando con el caso de las superficies obtenidas como explosiones del plano proyectivo en nueve puntos (no necesariamente en posición general), ver por ejemplo los trabajos [7],[8],[13],[16],[18],[19],[21], [28],[30], [31],[32],[33], [34], [35],[46],[47],[48],[49], [50],[54], [55], [58], [59] y [60]. Una respuesta favorable y definitiva a este problema cuando $r = 9$ es dada por Lahyane M. en [47] y [48]. Mientras que los casos $r \leq 9$ son estudiados por Rosoff J. en [61]. Esto deja el problema abierto cuando r es mayor o igual a diez.

Otro problema que surge de una manera natural y que nos interesa estudiar es el cálculo de las dimensiones de los sistemas lineales completos de las superficies proyectivas racionales no singulares, dicho problema tiene su planteamiento original en una de las cuatro líneas de investigación sugeridas por Mumford D. en su libro titulado *Lectures on curves on an algebraic surface* ([59, pág. 4]). Actualmente dicho problema está relacionado con la Conjetura de

Segre-Harbourne-Gimigliano-Hirschowitz que predice que un divisor sobre una superficie proyectiva no singular racional genérica tiene la cohomología natural, ver por ejemplo los artículos [10],[13],[17],[21],[20],[22],[23],[24],[26],[27],[30],[29],[32],[35],[36],[37],[40],[41],[51],[62] y [63].

De lo anterior sugerimos resolver los siguientes problemas:

1. *El Problema del Cono*: Determinar las superficies proyectivas racionales no singulares definidas sobre un campo algebraicamente cerrado de característica arbitraria cuyos monoides efectivos son finitamente generados.
2. *El Problema de los Sistemas Lineales Completos*: Que consiste en determinar explícitamente o al menos estimar el valor de la dimensión de cualquier sistema lineal completo de divisores sobre una superficie proyectiva racional no singular dada.

Mi contribución con respecto al *Problema del Cono* es la obtención de una nueva clase de superficies racionales que he denominado *superficies proyectivas armónicas* cuyos monoides efectivos son finitamente generados, ver el Teorema 4.27.

Más aún, dichas superficies permiten dar siempre una solución satisfactoria al *Problema de los Sistemas Lineales Completos*, así como algunas aplicaciones a la teoría de los anillos de Cox, ver el Teorema 4.31 y el Corolario 4.28.

De manera que el propósito de esta tesis consistirá en desarrollar la construcción de dichas superficies y el logro de los resultados mencionados.

El texto comienza con una introducción muy detallada a la teoría de $\mathcal{O}_X$ -módulos en el Capítulo 1. Dicho capítulo está constituido por seis secciones que revisan únicamente aquellas nociones necesarias para lograr definir de una forma autocontenida el grupo de Picard de un espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$. Las secciones 1.1, 1.2 y 1.3 realizan un recorrido sobre los conceptos básicos de la teoría de $\mathcal{O}_X$ -módulos como lo son: su definición, sus grupos de gérmenes, sus morfismos entre ellos y las operaciones de suma directa y de producto tensorial. La Sección 1.4 estudia el $\mathcal{O}_X$ -módulo $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, sus propiedades y algunos casos particulares importantes. En seguida, introducimos los conceptos de $\mathcal{O}_X$ -módulo localmente libre de rango finito y de gavilla invertible en la Sección 1.5; para concluir finalmente en la Sección 1.6 con la definición del grupo de Picard. En el Capítulo 2 recordamos algunas de las nociones y

propiedades básicas de las superficies proyectivas racionales no singulares fijando gran parte del lenguaje que se utilizará de manera sistemática en el resto de la tesis. Dicho capítulo desarrolla en la primer sección la relación que existe entre los divisores de Cartier módulo la equivalencia lineal y el grupo de Picard de un espacio anillado. Más aún, especificando el espacio anillado hasta un esquema con ciertas propiedades revisamos la relación que dichos grupos guardan con los divisores de Weil. Luego, en la Sección 2.2 dada una variedad no singular X definida sobre un campo algebraicamente cerrado k , de cualquier característica, recordamos las nociones de la gavilla canónica de X y de su correspondiente clase de equivalencia de divisores. Posteriormente, en la Sección 2.3 damos la definición de una superficie proyectiva racional, formulamos el teorema de Riemann-Roch correspondiente y algunas de sus aplicaciones. Finalmente, en la Sección 2.4 recopilamos los conceptos y resultados más importantes sobre explosiones que nos van a interesar. El Capítulo 3 formado por dos secciones fija la configuración de puntos en el plano proyectivo que utilizaremos para obtener las superficies proyectivas armónicas. La Sección 3.1 revisa una clase especial de transformaciones proyectivas mediante las cuales mostramos la invariancia que tiene la razón cruzada de puntos en el plano proyectivo, cantidad que definimos en la Sección 3.2 y que origina los conceptos de *puntos armónicos*, de *posición* y de *configuración armónica*. Finalmente, en el Capítulo 4 desarrollamos la parte original de este trabajo construyendo una nueva clase de superficies proyectivas racionales no singulares X tales que sus números de Picard $\rho(X)$ satisfacen la desigualdad $\rho(X) \geq 11$ y sus monoides efectivos son finitamente generados. Más aún, sus anillos de Cox también son finitamente generados (Corolario 4.28) y la dimensión de cualquier sistema lineal completo de divisores numéricamente efectivos definidos sobre tales superficies siempre es calculable (Teorema 4.31). Para tal efecto en la Sección 4.1 introducimos las nociones de constelación y de D -constelación, para cada divisor efectivo D no nulo sobre cualquier superficie proyectiva no singular X definida sobre algún campo algebraicamente cerrado de característica arbitraria. Asimismo, introducimos los conceptos de los diagramas decorados de Enriques y de las superficies asociadas a dichos diagramas. Partiendo de una configuración armónica de puntos del plano proyectivo y de una cierta 6-tupla ordenada de números enteros definimos, en la Sección 4.2, una constelación especial sobre $\mathbb{P}_k^2$ a la que denominamos *constelación armónica*, consideramos su diagrama decorado de Enriques asociado y asimismo su superficie proyectiva racional asociada. Obteniendo de este modo una familia de superficies proyectivas racionales no singulares con ciertas cualidades, una de ellas la de ser anticanónicas. Propiedad que nos lleva a determinar, en las Secciones 4.3 y 4.4, la finitud de los conjuntos de (-1) -curvas y de (-2) -curvas de tales superficies con la finalidad de garantizar que sus monoides efectivos son finitamente generados. Por último, en las Secciones 4.5 y 4.6 doy algunas aplicaciones a la teoría de los anillos de Cox de una

superficie y a los sistemas lineales completos.

Cabe señalar que a diferencia del Capítulo 1, los Capítulos 2 y 3 no presentan mayor detalle que el necesario para revisar, de manera breve, las nociones y conceptos requeridos para los resultados que se ocupan en el Capítulo 4. No obstante ampliamos las referencias para que el lector interesado pueda recurrir a tales resultados de forma independiente.

Notación y terminología

Si X es un espacio topológico, entonces $\mathcal{T}_X$ denotará su topología. En particular, $\mathcal{T}_U$ denotará la topología subespacio de U , para cada subconjunto U de X . Más aún, si p es un punto de U , entonces a la colección de todos los conjuntos abiertos de X que contienen a p y que están contenidos en U la denotaremos por ${}^p\mathcal{T}_X^U$. Sin embargo, si U es igual a X escribiremos solamente ${}^p\mathcal{T}_X$. Por otro lado, si F es cualquier subconjunto de un conjunto E , entonces $E \setminus F$ denotará al subconjunto de E formado por todos los elementos de E que no están en F . En ocasiones, a los elementos de un conjunto dado los llamaremos puntos. Por ejemplo, $E \setminus F$ es el conjunto de todos los puntos de E que no están en F .

Por su parte, si Γ es un conjunto no vacío y $(M_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ es una familia de conjuntos parametrizada por Γ , entonces el conjunto $\{(m_\gamma)_{\gamma \in \Gamma} \mid m_\gamma \in M_\gamma, \forall \gamma \in \Gamma\}$ será denotado por $\prod_{\gamma \in \Gamma} M_\gamma$. Sin embargo, si Γ es un conjunto finito de cardinalidad dos o tres dicho producto lo escribiremos explícitamente. En conformidad con ello, por ejemplo, la frase: sean U y V subconjuntos abiertos de X , con frecuencia será reemplazada por: sea $(U, V) \in \mathcal{T}_X \times \mathcal{T}_X$.

Por otro lado, si M es un grupo abeliano y R es un anillo, entonces a una aplicación *bien definida* que transforme $R \times M$ en M y que otorgue a M una estructura algebraica de un R -módulo, le llamaremos *multiplicación escalar* de R sobre M . Por cierto, si E y F son conjuntos y $f : E \rightarrow F$ es una aplicación entre E y F , entonces diremos que f cae bien en su codominio, si para cada elemento e de E el valor $f(e)$ pertenece al conjunto F . Mejor aún, diremos que f está bien definida si cae bien en su codominio y para cualesquiera elementos e y e' de E con $e = e'$, se cumple que $f(e)$ y $f(e')$ son iguales. En este contexto, al conjunto de todas las aplicaciones bien definidas de E en F lo denotaremos por F^E , dicho conjunto para el caso en el que F sea un grupo abeliano también será un grupo abeliano con la operación puntual correspondiente de funciones.

Al neutro multiplicativo de un anillo A lo denotaremos por 1_A . De igual modo, al neutro aditivo de un grupo abeliano G lo denotaremos por 0_G . Por otro lado, a los conjuntos de los números naturales y enteros los denotaremos como siempre por $\mathbb{N}$ y por $\mathbb{Z}$, respectivamente. Convenimos, para el caso en el que G es igual a $\mathbb{Z}$ denotar a $0_{\mathbb{Z}}$ simplemente por 0 , así como también, denotar por $\mathbb{Z}_+$ al conjunto $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

Por último, la característica de un campo k será denotada por $ch(k)$. Así, si k es un campo de característica positiva y n es un entero $n \geq 1$, entonces la expresión $ch(k) \nmid n$ indicará que la característica de k no divide a n .

Capítulo 1

Grupo de Picard de un Espacio Anillado

El objetivo principal de este capítulo consiste en definir el grupo de Picard de un espacio anillado arbitrario. Concepto bien conocido que más allá de la basta literatura en la que lo encontramos, decidimos incluirlo sugiriendo una presentación muy detallada, agradable y autocontenida.

Iniciando con un preámbulo al estudio de la teoría de $\mathcal{O}_X$ -módulos en la Sección 1.1 y de sus morfismos en la Sección 1.2 reunimos únicamente aquellas nociones necesarias para pasar a la Sección 1.3, de este capítulo, con el estudio de su suma directa y de su producto tensorial. En seguida, consideramos particularmente el estudio de la gavilla $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ en la Sección 1.4. Seguidamente, en la Sección 1.5 revisamos los $\mathcal{O}_X$ -módulos localmente libres de rango finito y concluimos en la Sección 1.6 con la definición del grupo de Picard $\text{Pic}(X)$ de un espacio anillado dado $(X, \mathcal{O}_X)$ y algunos ejemplos particulares.

1.1. Preámbulo: $\mathcal{O}_X$ -módulos

Un $\mathcal{O}_X$ -módulo $\mathcal{M}$ sobre un espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$ es una familia de módulos parametrizada por los conjuntos abiertos U de X . Módulos que están sometidos a cierta condición de compatibilidad entre su multiplicación escalar y las aplicaciones restricción de $\mathcal{M}$ y de $\mathcal{O}_X$. En particular, un $\mathcal{O}_X$ -módulo nos da una generalización del concepto de un módulo sobre un anillo, notando que una gran parte de las propiedades que se conocen para la teoría de módulos se traduce a la teoría de $\mathcal{O}_X$ -módulos.

Como podemos ver, un $\mathcal{O}_X$ -módulo depende de los abiertos del espacio topológico X y de la gavilla estructural $\mathcal{O}_X$ de X . Por lo tanto, siendo un esquema afín $(\text{Spec}(A), \mathcal{O}_{\text{Spec}(A)})$ para cierto anillo A , el ejemplo por excelencia de un espacio anillado, partiremos de este caso para definir una gavilla de $\mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}$ -módulos sobre $\text{Spec}(A)$ cuyas propiedades de definición nos den la pauta en general para el concepto de un $\mathcal{O}_X$ -módulo sobre X .

Consideremos un anillo A , y como ingrediente principal sea M un A -módulo, de igual modo, sea $(\text{Spec}(A), \mathcal{O}_{\text{Spec}(A)})$ el espacio anillado que subyace del esquema afín asociado al anillo A . En primer lugar, recordemos que $\text{Spec}(A)$ tiene una base dada por los conjuntos

abiertos básicos $D(h)$ donde h es un elemento de A y $D(h) = \{q \in \text{Spec}(A) | h \notin q\}$. Ahora, vamos a definir una gavilla de $\mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}$ -módulos sobre $\text{Spec}(A)$, dicha gavilla será denotada por $\tilde{M}$ y la definimos de la siguiente manera:

Sea U un conjunto abierto de $\text{Spec}(A)$. Si U es el conjunto vacío, al cual denotaremos por $\emptyset$, establecemos que $\tilde{M}(U) = \{0\}$. Es decir, $\tilde{M}$ asigna al conjunto vacío el grupo abeliano trivial $\{0\}$. Por otro lado, si U es diferente de $\emptyset$, entonces asignamos a U el conjunto:

$$\tilde{M}(U) = \left\{ \begin{array}{l} i) \forall p \in U, s(p) \in M_p, \text{ y} \\ s : U \rightarrow \prod_{p \in U} M_p \mid ii) \forall p \in U, \exists V \in {}^p\mathcal{T}_{\text{Spec}(A)}^U, \exists m \in M, f \in A \\ \text{tales que } V \subseteq D(f) \text{ y } \forall q \in V, s(q) = \frac{m}{f}. \end{array} \right\}.$$

El cual es evidentemente un subgrupo del grupo abeliano $(\prod_{p \in U} M_p)^U$. En otras palabras, para cada conjunto abierto U de X tenemos asignado un grupo abeliano $\tilde{M}(U)$. Hecho que podemos interpretar como una huerta de grupos abelianos, uno por cada conjunto abierto de X .

Respecto al grupo abeliano $\tilde{M}(U)$ para U distinto de vacío notamos en su definición el abuso de la notación en el inciso $i)$. Donde escribimos $s(p) \in M_p$ para p en U , lo cual en su significado estricto no tiene sentido, ya que s es una función con codominio $\prod_{q \in U} M_q$ y no únicamente M_p . Sin embargo, lo que en realidad deseamos expresar allí es el carácter local de la función s en p , el cual viene determinado por la condición $ii)$. Precisamente, sea p en U , una vez que se tienen el abierto V y los elementos m y f de la condición $ii)$, con $m/f \in M_q$. Al escribir $s(q) = m/f$ (y por lo tanto, $s(p) \in M_p$) para los elementos q de V , la notación empleada es justamente una doble codificación de la información: por un lado $s(p)$ representa efectivamente un elemento de $\prod_{r \in U} M_r$ y por otro lado, su pertenencia en M_p , para cada $p \in U$, declara su coordenada relevante que satisface la condición $ii)$. Esto es, si $s(p)$ es la familia $(y_r)_{r \in U} \in \prod_{r \in U} M_r$, escribimos $s(p) \in M_p$ para decir, en conformidad con la condición $ii)$, que $y_p = m/f \in M_p$ y que $y_r = 0_{M_r}$ para todo $r \in U \setminus \{p\}$. Por lo tanto, sugerimos que la expresión $s(p) \in M_p$ es una codificación adecuada.

A los elementos de $\tilde{M}(U)$ les llamaremos secciones locales de $\tilde{M}$ sobre U y puesto que son funciones, las aplicaciones restricción que utilizaremos para completar la definición (hasta el momento) de pregavilla para $\tilde{M}$, serán simplemente las restricciones usuales de funciones. Esto es:

Para cualesquiera conjuntos abiertos U y V de $\text{Spec}(A)$ tales que V es un subconjunto de U , definimos

$$\begin{aligned} \rho_V^U : \tilde{M}(U) &\longrightarrow \tilde{M}(V) \\ s &\longmapsto \rho_V^U(s) = s|_V. \end{aligned}$$

En realidad, esta aplicación no es la restricción usual de funciones ya que mientras la restricción usual de una función no cambia su codominio dicho conjunto si cambia bajo esta aplicación. En efecto, sea $(U, V) \in \mathcal{T}_{\text{Spec}(A)} \times \mathcal{T}_{\text{Spec}(A)}$ con $V \subseteq U$, si $s \in \tilde{M}(U)$, entonces s es una función de dominio U y codominio $\prod_{p \in U} M_p$, mientras que $\rho_V^U(s) \in \tilde{M}(V)$ es una función cuyo dominio es V y cuyo codominio es $\prod_{q \in V} M_q$. No obstante, la asignación original en cuanto a evaluación puntual se refiere esa si permanece inalterada, pues para cada $q \in V \subseteq U$, se tiene que $\rho_V^U(s)(q)$ y $s(q)$ son iguales. Veamos que la aplicación ρ_V^U está bien definida. Sea $s \in \tilde{M}(U)$, probaremos que $s|_V \in \tilde{M}(V)$. Dado $p \in V$ se sigue que $s|_V(p) = s(p) \in M_p$, más aún, existen $W \in {}^p\mathcal{T}_{\text{Spec}(A)}^U$ y elementos $m \in M$ y $f \in A$ tales que $W \subseteq D(f)$ y $s(r) = m/f$ para todo $r \in W$. Así, podemos considerar al abierto $W \cap V$ que contiene a p y que está contenido en V , y notar que $W \cap V \subseteq D(f)$. Más aún, podemos observar que para cada $r \in W \cap V$ se verifica que $s|_V(r) = m/f$. Así, ρ_V^U cae bien en su codominio. Ahora, sean s y s' elementos de $\tilde{M}(U)$, es obvio que si s y s' son iguales, entonces $s|_V = s'|_V$. Por lo tanto, ρ_V^U está bien definida. Además, ρ_V^U es un homomorfismo de grupos abelianos, ya que, $\rho_V^U(s + s') = (s + s')|_V = s|_V + s'|_V$, para todo $(s, s') \in \tilde{M}(U) \times \tilde{M}(U)$.

De las construcciones anteriores nuestro resultado es el siguiente:

Proposición 1.1. *El par $(\tilde{M}, \rho)$, donde ρ representa las aplicaciones restricción de $\tilde{M}$, es una gavilla de grupos abelianos sobre $\text{Spec}(A)$.*

Demostración. En primer lugar, probaremos que $\tilde{M}$ es una pregavilla sobre $\text{Spec}(A)$. En efecto, el grupo abeliano que $\tilde{M}$ asigna al conjunto vacío es por definición el grupo abeliano trivial $\{0\}$. Así, la primer condición de pregavilla se cumple.

Luego, tomemos un abierto U no vacío de $\text{Spec}(A)$ y observemos que $\rho_U^U : \tilde{M}(U) \rightarrow \tilde{M}(U)$ envía un elemento $s \in \tilde{M}(U)$ en $s|_U = s$. En efecto, la restricción a U de $s : U \rightarrow \prod_{q \in U} M_q$ es precisamente $s|_U : U \rightarrow \prod_{q \in U} M_q$. Esto es, $\rho_U^U = \text{id}_{\tilde{M}(U)}$.

Finalmente, si U, V y W son conjuntos abiertos de $\text{Spec}(A)$ con $W \subseteq V \subseteq U$ y $s \in \tilde{M}(U)$, entonces la restricción de s a W , $\rho_W^U(s) = s|_W$, es la función $s : W \rightarrow \prod_{p \in W} M_p$; que es exactamente la aplicación $\rho_W^V(s|_V)$. La cual es la restricción a W de $s|_V : V \rightarrow \prod_{p \in V} M_p$, donde $s|_V$ es la restricción a V de s , $\rho_V^U(s)$. Esto es, $\rho_W^U = \rho_W^V \circ \rho_V^U$.

Así, $\tilde{M}$ es una pregavilla de grupos abelianos. Por lo tanto, para mostrar que es una gavilla lo único que falta probar, dado un conjunto abierto U no vacío de $\text{Spec}(A)$, y una cubierta abierta $(U_i)_{i \in I}$ de U , con I un conjunto no vacío, son las siguientes dos condiciones:

Condición G1: Si s es una sección local de $\tilde{M}$ sobre U tal que para cada $i \in I$, $s|_{U_i} = 0_{\tilde{M}(U_i)}$, entonces $s = 0_{\tilde{M}(U)}$, donde para un abierto W de $\text{Spec}(A)$, $0_{\tilde{M}(W)} \in \tilde{M}(W)$ es la función constante $0_{\tilde{M}(W)} : W \rightarrow \prod_{q \in W} M_q$, definida por $0_{\tilde{M}(W)}(q) = 0_{M_q}$, para todo $q \in W$.

Dado que tanto s como $0_{\tilde{M}(U)}$ tienen los mismos dominios y codominios de definición, lo único que debemos verificar es que ambas funciones tienen la misma regla de asignación. En efecto, consideremos un punto p arbitrario de $U = \bigcup_{i \in I} U_i$, se sigue que existe $\alpha \in I$ tal que $p \in U_\alpha$ y por lo tanto, $s(p) = s|_{U_\alpha}(p) = 0_{\tilde{M}(U_\alpha)}(p) = 0_{M_p}$. Es decir, $s = 0_{\tilde{M}(U)}$.

Condición G2: Si $(s_i)_{i \in I}$ es una familia de secciones de $\tilde{M}$ tales que para cualquier $i \in I$, $s_i \in \tilde{M}(U_i)$, y para cualesquiera i, j de I se tiene que $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$, entonces existe un elemento en $\tilde{M}(U)$ que extiende a cada una de las s_i , esto es, existe $s \in \tilde{M}(U)$ tal que $\rho_{U_i}^U(s) = s_i$, para todo $i \in I$.

Para verificar esta condición, definiremos $s : U \rightarrow \prod_{p \in U} M_p$, como sigue: para cada $p \in U$ establecemos que $s(p) = s_i(p)$, siendo i un índice en I tal que $p \in U_i$. En particular, si fijamos $i \in I$, entonces $s|_{U_i}(p) = s_i(p)$, para todo $p \in U_i$. De esta manera tenemos un buen candidato. Sin embargo, todavía necesitamos probar que nuestra función s está bien definida y que es además un elemento de $\tilde{M}(U)$. Para ello, sean $p \in U$ y $i, j \in I$ tales que $p \in U_i \cap U_j$, debemos probar que $s_i(p) = s_j(p)$. Por hipótesis, para todo $x \in U_i \cap U_j$, se tiene que $s_i|_{U_i \cap U_j}(x) = s_j|_{U_i \cap U_j}(x)$, así, en particular $s_i(p) = s_j(p)$. Y por lo tanto s está bien definida.

Ahora, verifiquemos que $s \in \tilde{M}(U)$. Ya tenemos que s es una función de la forma que queremos, es decir, de dominio U y codominio $\prod_{p \in U} M_p$. Luego, lo único que nos hace falta corroborar es la validez de la condición local de $\tilde{M}(U)$, que dice que para cada elemento p de U , $s(p) \in M_p$ y que existen $V \in {}^p\mathcal{T}_{\text{Spec}(A)}^U$ y elementos $m \in M$ y f en A tales que $V \subseteq D(f)$ y para todo $q \in V$, $s(q) = \frac{m}{f}$. Por tanto, sea p un punto de U , se sigue que $p \in U_\ell$ para algún $\ell \in I$, además $s|_{U_\ell} = s_\ell$, así, $s(p) = s_\ell(p) \in M_p$. Por otro lado, existe $V_p^\ell \in {}^p\mathcal{T}_{\text{Spec}(A)}^{U_\ell}$ y elementos $m_\ell \in M$ y f_ℓ en A , tales que $V_p^\ell \subseteq D(f_\ell)$ y para todo $q \in V_p^\ell$, $s(q) = s_\ell(q) = \frac{m_\ell}{f_\ell} \in M_q$. Esto es, $s \in \tilde{M}(U)$.

Finalmente, $\tilde{M}$ es una gavilla de grupos abelianos sobre $\text{Spec}(A)$. $\square$

Lo siguiente que haremos será demostrar que para cada conjunto abierto U de $\text{Spec}(A)$, el grupo abeliano $\tilde{M}(U)$ es un $\mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}(U)$ -módulo, característica muy particular de $\tilde{M}(U)$ que

estimula para $\tilde{M}$ su calidad de ser un $\mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}$ -módulo (ver la Definición 1.2). Por lo tanto, sea U un conjunto abierto de $\text{Spec}(A)$. Como sabemos, demostrar que $\tilde{M}(U)$ es un módulo sobre $\mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}(U)$, significa determinar una aplicación bien definida entre $\mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}(U) \times \tilde{M}(U)$ y $\tilde{M}(U)$ que otorgue a $\tilde{M}(U)$ dicha estructura algebraica. En base a esto, definamos la siguiente aplicación:

$$(1.1.1) \quad \begin{aligned} \cdot|_U : \mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}(U) \times \tilde{M}(U) &\rightarrow \tilde{M}(U) \\ (\lambda, s) &\mapsto \cdot|_U(\lambda, s) = \lambda \cdot s, \end{aligned}$$

donde $\lambda \cdot s$ es la sección local de $\tilde{M}$ sobre U , dada por

$$\begin{aligned} \lambda \cdot s : U &\rightarrow \prod_{q \in U} M_q \\ p &\mapsto (\lambda \cdot s)(p) = \lambda(p) \cdot s(p) \in M_p. \end{aligned}$$

Para probar que la aplicación (1.1.1) está bien definida, antes que nada, debemos asegurarnos de que $\lambda \cdot s$ sea un elemento de $\tilde{M}(U)$. Para ello, en primer lugar notemos que por construcción $(\lambda \cdot s)(q) \in M_q$ para todo $q \in U$. Por otro lado, sea $q \in U$, existen abiertos V y $W \in {}^p\mathcal{T}_{\text{Spec}(A)}^U$ y elementos $a, f, g \in A$ y $m \in M$ tales que para todo $r \in V$ se tiene que $f \notin r$ y $\lambda(r) = \frac{a}{f} \in A_r$, mientras que $W \subseteq D(g)$ y para todo $r \in W$ se verifica que $s(r) = \frac{m}{g} \in M_r$. Al instante, $q \in V \cap W$ y $V \cap W \subseteq D(g) \cap D(f) = D(gf)$. Así, para todo $r \in V \cap W$ se cumple que $\lambda(r) \cdot s(r) = \frac{a \cdot m}{fg} \in M_r$. De esta manera, para cada $q \in U$, son el abierto $V \cap W$ de $\text{Spec}(A)$ entorno a q y los elementos $a \cdot m \in M$ y $fg \in A$ los que caracterizan localmente a $\lambda \cdot s$ como un elemento de $\tilde{M}(U)$. Ahora bien, una vez que la aplicación (1.1.1) cae bien en su codominio, dados (λ, s) y (λ', s') elementos de $\mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}(U) \times \tilde{M}(U)$ tales que $(\lambda, s) = (\lambda', s')$, lo siguiente por probar es que $\lambda \cdot s = \lambda' \cdot s'$. En efecto, como λ es igual a λ' y s es igual a s' , se tiene que $\lambda(p) = \lambda'(p)$ y $s(p) = s'(p)$ para todo $p \in U$. Por lo tanto, $\lambda \cdot s = \lambda' \cdot s'$, y en definitiva $\mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}(U) \times \tilde{M}(U) \rightarrow \tilde{M}(U)$ está bien definida.

A continuación, debemos mostrar que la aplicación (1.1.1) satisface las siguientes propiedades:

M1: $\lambda \cdot (s + s') = \lambda \cdot s + \lambda \cdot s'$ para todo $\lambda \in \mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}(U)$ y para cualesquiera s, s' elementos de $\tilde{M}(U)$.

M2: $(\lambda + \lambda') \cdot s = \lambda \cdot s + \lambda' \cdot s$ para todos $\lambda, \lambda' \in \mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}(U)$ y para toda $s \in \tilde{M}(U)$.

M3: $(\lambda \cdot \lambda') \cdot s = \lambda \cdot (\lambda' \cdot s)$ para todos $\lambda, \lambda' \in \mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}(U)$ y para toda $s \in \tilde{M}(U)$.

M4: $1_{\mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}(U)} \cdot s = s$ para toda $s \in \tilde{M}(U)$.

Ya que de esta manera $\mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}(U) \times \tilde{M}(U) \rightarrow \tilde{M}(U)$ será una *multiplicación escalar* sobre $\tilde{M}(U)$. Sin embargo, la verificación de estas cuatro propiedades para (1.1.1) son triviales. Por lo tanto, podemos concluir que para cada conjunto abierto U de $\text{Spec}(A)$ el grupo abeliano $\tilde{M}(U)$ es un $\mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}(U)$ -módulo.

En lo sucesivo, cambiando adecuadamente el anillo $\mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}(U)$ por R y el grupo abeliano $\tilde{M}(U)$ por M , nos referiremos a las propiedades enlistadas en M1, M2, M3 y M4 como las propiedades que satisface una multiplicación escalar de un anillo R sobre un grupo abeliano M .

Otra propiedad que también satisface la gavilla $\tilde{M}$ es el siguiente hecho: Si U y V son conjuntos abiertos de $\text{Spec}(A)$ tales que V está contenido en U , entonces el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}(U) \times \tilde{M}(U) & \xrightarrow{\cdot|_U} & \tilde{M}(U) \\ (\rho_{\mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}(V)}^U, \rho_{\tilde{M}(V)}^U) \downarrow & & \downarrow \rho_{\tilde{M}(V)}^U \\ \mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}(V) \times \tilde{M}(V) & \xrightarrow{\cdot|_V} & \tilde{M}(V) \end{array}$$

es conmutativo. Para probar esta propiedad tomemos $(U, V) \in \mathcal{T}_{\text{Spec}(A)} \times \mathcal{T}_{\text{Spec}(A)}$ con V contenido en U y un elemento (λ, s) de $\mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}(U) \times \tilde{M}(U)$. Por un lado, tenemos que $\rho_{\tilde{M}(V)}^U(\lambda \cdot s)$ es igual a $(\lambda \cdot s)|_V$, mientras que por el otro lado, $((\cdot|_V) \circ (\rho_{\mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}(V)}^U, \rho_{\tilde{M}(V)}^U))(\lambda, s)$ es igual a $(\cdot|_V)(\lambda|_V, s|_V) = \lambda|_V \cdot s|_V$. Esto nos da secciones locales de $\tilde{M}$ sobre el abierto V que deseamos sean iguales. Ahora bien, demostrar dicha igualdad se reduce a verificar que ambas funciones tienen la misma regla de asignación. Por lo tanto, sea $p \in V$, se sigue que

$$(\lambda \cdot s)|_V(p) = \lambda(p) \cdot s(p) = \lambda|_V(p) \cdot s|_V(p) = (\lambda|_V \cdot s|_V)(p),$$

como requeríamos.

En definitiva, a partir de un módulo M , sobre un anillo A , hemos construido una gavilla $\tilde{M}$ de $\mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}$ -módulos sobre $\text{Spec}(A)$ (ver la Definición 1.2). A esta gavilla le llamaremos la gavilla de $\mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}$ -módulos *asociada* al A -módulo M .

Definición 1.2. Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un espacio anillado. Una gavilla de $\mathcal{O}_X$ -módulos (o simplemente un $\mathcal{O}_X$ -módulo) sobre X es una gavilla de grupos abelianos $\mathcal{M}$ tal que para cada conjunto abierto U de X , $\mathcal{M}(U)$ es un módulo sobre $\mathcal{O}_X(U)$ y para cada par (U, V) de conjuntos

abiertos de X , con $V \subseteq U$, la conmutatividad del siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X(U) \times \mathcal{M}(U) & \xrightarrow{\cdot|_U} & \mathcal{M}(U) \\ (\rho_{\mathcal{O}_X^U}, \rho_{\mathcal{M}^U}) \downarrow & & \downarrow \rho_{\mathcal{M}^U} \\ \mathcal{O}_X(V) \times \mathcal{M}(V) & \xrightarrow{\cdot|_V} & \mathcal{M}(V) \end{array}$$

se cumple.

Evidentemente, si p es un elemento de X , entonces el grupo de gérmenes $\mathcal{M}_p$ de $\mathcal{M}$ en p , es un $\mathcal{O}_{X,p}$ -módulo. La multiplicación escalar de $\mathcal{O}_{X,p}$ sobre $\mathcal{M}_p$ es naturalmente la aplicación $\mathcal{O}_{X,p} \times \mathcal{M}_p \rightarrow \mathcal{M}_p$ definida por la asignación $(\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x$, donde $\lambda \cdot x \in \mathcal{M}_p$ es la clase de equivalencia del par $(U \cap V, \alpha|_{U \cap V} \cdot s|_{U \cap V})$ para sendos representantes (U, α) de λ y (V, s) de x .

En vista de la definición anterior y de las construcciones previas podemos formular el siguiente resultado:

Proposición 1.3. *Si M es un módulo sobre un anillo A , entonces $\tilde{M}$ es un $\mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}$ -módulo y para cada $p \in \text{Spec}(A)$ el grupo de gérmenes $\tilde{M}_p$ tiene una estructura de A_p -módulo.*

Demostración. Lo único que debemos probar es la última parte de la proposición. Para esto, sea p en $\text{Spec}(A)$ y recordemos que un elemento de $\tilde{M}_p$ es una clase de equivalencia de pares (U, s) con $U \in {}^p\mathcal{T}_{\text{Spec}(A)}$ y $s \in \tilde{M}(U)$, donde (U, s) es equivalente a (U', s') si, y sólo si, existe $W \in {}^p\mathcal{T}_{\text{Spec}(A)}^{U \cap U'}$ tal que $s|_W = s'|_W$; aquí $U' \in {}^p\mathcal{T}_{\text{Spec}(A)}$ y $s' \in \tilde{M}(U')$. En seguida, consideremos la aplicación

$$(1.1.2) \quad \begin{aligned} \cdot : A_p \times \tilde{M}_p &\rightarrow \tilde{M}_p \\ (\lambda, \mu) &\mapsto \lambda \cdot \mu \end{aligned}$$

donde $\lambda \cdot \mu$ está determinado de la siguiente forma: si $a \in A$, $t \in A \setminus p$, $U \in {}^p\mathcal{T}_{\text{Spec}(A)}$ y $s \in \tilde{M}(U)$ son tales que $\lambda = a/t$ en A_p y $\mu = [(U, s)]$, entonces definimos $\lambda \cdot \mu$ como la clase de equivalencia del par $(D(t) \cap U, a/t \cdot s|_{D(t) \cap U})$, con

$$\begin{aligned} a/t \cdot s|_{D(t) \cap U} : D(t) \cap U &\rightarrow \prod_{q \in D(t) \cap U} M_q \\ r &\mapsto (a/t \cdot s|_{D(t) \cap U})(r) = a/t \cdot s(r). \end{aligned}$$

Demostraremos que la aplicación (1.1.2) es una multiplicación escalar de A_p sobre $\tilde{M}_p$. Esto es, probaremos que está bien definida y satisface las cuatro propiedades de una multiplicación escalar. De hecho, notando que la verificación de estas cuatro propiedades no es difícil solo mostraremos una de ellas, la propiedad M1.

En primer lugar, probaremos que $a/t \cdot s|_{D(t) \cap U}$ es una sección local de $\tilde{M}$ sobre el abierto no vacío $D(t) \cap U$. Sea $r \in D(t) \cap U$, por construcción se sigue que $(a/t \cdot s|_{D(t) \cap U})(r) \in M_r$. Más aún, existen $V \in {}^p\mathcal{T}_{\text{Spec}(A)}^{D(t) \cap U}$, $m \in M$ y $h \in A$ tales que $V \subseteq D(h)$ y $s|_{D(t) \cap U}(q) = m/h$ para cada $q \in V$. Por lo tanto, $(a/t \cdot s|_{D(t) \cap U})(r) = a/t \cdot m/h = am/th$ para cada $r \in V \cap D(t)$. Así, $a/t \cdot s|_{D(t) \cap U} \in \tilde{M}(D(t) \cap U)$. Consecuentemente, $\lambda \cdot \mu = [(D(t) \cap U, a/t \cdot s|_{D(t) \cap U})] \in \tilde{M}_r$. Es decir, la aplicación cae bien en su codominio. En seguida, dados (λ, μ) y (λ', μ') elementos de $A_p \times \tilde{M}_p$ tales que $(\lambda, \mu) = (\lambda', \mu')$, probaremos que $\lambda \cdot \mu = \lambda' \cdot \mu'$. Sean $a, a' \in A$, $t, t' \in A \setminus p$, $U, U' \in {}^p\mathcal{T}_{\text{Spec}(A)}$ y secciones locales s y s' de $\tilde{M}$, respectivamente sobre U y U' tales que $\lambda = a/t$, $\lambda' = a'/t'$, $\mu = [(U, s)]$ y $\mu' = [(U', s')]$, se sigue que existen $u \in A \setminus p$ y $W \in {}^p\mathcal{T}_{\text{Spec}(A)}^{U \cap U'}$ tales que $\frac{a}{t} = \frac{ut'}{ut'} \frac{a}{t} = \frac{uta'}{ut't'} = \frac{a'}{t'}$ y $s|_W(r) = s'|_W(r)$ para cada $r \in W$. Así, $\Gamma = W \cap U \cap U' \cap D(tt') \in {}^p\mathcal{T}_{\text{Spec}(A)}^{W \cap D(tt')}$ y para cada $r \in \Gamma$ se cumple la igualdad $a/t \cdot s|_\Gamma(r) = a'/t' \cdot s'|_\Gamma(r)$ en M_r . De manera que

$$[(D(t) \cap U, a/t \cdot s|_{D(t) \cap U})] = [(\Gamma, a/t \cdot s|_\Gamma)] = [(D(t') \cap U', a'/t' \cdot s'|_{D(t') \cap U'})],$$

es decir, $\lambda \cdot \mu = \lambda' \cdot \mu'$.

Finalmente, dados $\lambda \in A_p$ y $\mu, \mu' \in \tilde{M}_p$, demostraremos que $\lambda \cdot (\mu + \mu') = \lambda \cdot \mu + \lambda \cdot \mu'$. En efecto, sean $a \in A$, $t \in A \setminus p$, $U, U' \in {}^p\mathcal{T}_{\text{Spec}(A)}$, $s \in \tilde{M}(U)$ y $s' \in \tilde{M}(U')$ tales que $\lambda = a/t$, $\mu = [(U, s)]$ y $\mu' = [(U', s')]$, se sigue que $\Gamma = D(t) \cap U \cap U' \in {}^p\mathcal{T}_{\text{Spec}(A)}^{U \cap U'}$ y para cada $r \in \Gamma$ se cumple $a/t \cdot (s|_\Gamma + s'|_\Gamma)(r) = a/t \cdot s|_\Gamma(r) + a/t \cdot s'|_\Gamma(r)$, de modo que

$$\begin{aligned} [(\Gamma, a/t \cdot (s + s')|_\Gamma)] &= [(\Gamma, a/t \cdot (s|_\Gamma + s'|_\Gamma))] \\ &= [(\Gamma, a/t \cdot s|_\Gamma + a/t \cdot s'|_\Gamma)] \\ &= [(\Gamma, a/t \cdot s|_\Gamma)] + [(\Gamma, a/t \cdot s'|_\Gamma)] \\ &= [(D(t) \cap U, a/t \cdot s|_{D(t) \cap U})] + [(D(t) \cap U', a/t \cdot s'|_{D(t) \cap U'})] \end{aligned}$$

y por lo tanto, $\lambda \cdot (\mu + \mu') = \lambda \cdot \mu + \lambda \cdot \mu'$. $\square$

Lema 1.4. *Con las notaciones previas, sea f un elemento de A , se sigue que el grupo de las secciones locales de $\tilde{M}$ sobre el abierto básico $D(f)$ es un A_f -módulo. En particular es un A -módulo.*

Demostración. Sea $f \in A$, consideremos la aplicación

$$(1.1.3) \quad \begin{aligned} \cdot : A_f \times \tilde{M}(D(f)) &\rightarrow \tilde{M}(D(f)) \\ (\lambda, s) &\mapsto \lambda \cdot s \end{aligned}$$

siendo $\lambda \cdot s$ la sección local de $\tilde{M}$ sobre $D(f)$ dada por

$$\begin{aligned} \lambda \cdot s & : D(f) \rightarrow \prod_{q \in D(f)} M_q \\ r & \mapsto (\lambda \cdot s)(r) = \lambda \cdot s(r), \end{aligned}$$

donde la multiplicación $\lambda \cdot s(r)$ se realiza localmente en el A_r -módulo M_r , considerando a λ como un elemento de A_r bajo el homomorfismo natural entre los anillos A_f y A_r .

Demostraremos que la aplicación (1.1.3) está bien definida y satisface la propiedad **M4** de una multiplicación escalar (satisface las cuatro propiedades pero solo mostraremos esta propiedad).

En primer lugar, probaremos que efectivamente $\lambda \cdot s \in \tilde{M}(D(f))$. Sea $r \in D(f)$ y consideremos $a \in A$ y $n \in \mathbb{Z}_+$ tales que a/f^n sea un representante de λ , por construcción sabemos que $(\lambda \cdot s)(r) \in M_r$. Más aún, existen $V \in {}^r \mathcal{T}_{\text{Spec}(A)}^{D(f)}$, $m \in M$ y $g \in A$ tales que $V \subseteq D(g)$ y $s(q) = m/g$ para cada $q \in V$. Por lo tanto, $(\lambda \cdot s)(r) = \lambda \cdot s(r) = a/f^n \cdot m/g = am/gf^n$, para todo $r \in V \cap D(fg)$. Así $\lambda \cdot s \in \tilde{M}(D(f))$. Consecuentemente la aplicación (1.1.3) cae bien en su codominio. Ahora, dados (λ, s) y (λ', s') elementos de $A_f \times \tilde{M}(D(f))$ tales que $(\lambda, s) = (\lambda', s')$, mostraremos que $\lambda \cdot s = \lambda' \cdot s'$. Es suficiente verificar que la regla de asignación de las funciones $\lambda \cdot s$ y $\lambda' \cdot s'$ es la misma. Sea $r \in D(f)$, puesto que $s = s'$ se sigue que $s(r) = s'(r)$, luego $(\lambda, s(r)) = (\lambda', s'(r))$ son iguales en $A_r \times M_r$ y finalmente $\lambda \cdot s(r) = \lambda' \cdot s'(r)$, ya que la multiplicación escalar en M_r como A_r -módulo está bien definida. Por último, sea $s \in \tilde{M}(D(f))$, demostraremos que $1_{A_f} \cdot s = s$. En efecto, sea $r \in D(f)$, se sigue que $s(r) \in M_r$ y por lo tanto, $s(r) = \frac{1_A}{1_A} \cdot s(r) = (1_{A_f} \cdot s)(r)$. $\square$

El siguiente resultado determina las propiedades básicas del $\mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}$ -módulo $\tilde{M}$.

Teorema 1.5. *Sea M un módulo sobre un anillo A . Si $\tilde{M}$ es la gavilla de $\mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}$ -módulos asociada a M , entonces:*

- 1.- *Para todo $p \in \text{Spec}(A)$, el A_p -módulo $\tilde{M}_p$ es isomorfo a la localización de M en p .*
- 2.- *Para cada $f \in A$, el $\mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}(D(f))$ -módulo $\tilde{M}(D(f))$ es isomorfo a la localización de M en f . En particular, el $\mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}(\text{Spec}(A))$ -módulo $\tilde{M}(\text{Spec}(A))$ es isomorfo al A -módulo M .*

Demostración. 1.- Sea $p \in \text{Spec}(A)$ y consideremos la siguiente aplicación

$$\begin{aligned} \psi_0 : M & \rightarrow \tilde{M}_p \\ m & \mapsto [(\text{Spec}(A), \tilde{m})], \end{aligned}$$

donde la sección global $\tilde{m}$ de $\tilde{M}$ sobre $\text{Spec}(A)$ está dada por

$$\begin{aligned} \tilde{m} : \text{Spec}(A) &\rightarrow \prod_{p \in \text{Spec}(A)} M_p \\ r &\mapsto \tilde{m}(r) = \frac{m}{1_A} \in M_r. \end{aligned}$$

Se sigue que ψ_0 está bien definida y es A -lineal. En efecto, por construcción ψ_0 cae bien en su codominio. Y, si m y n son elementos de M tales que son iguales, entonces claramente $[(\text{Spec}(A), \tilde{m})]$ es igual a $[(\text{Spec}(A), \tilde{n})]$. Esto es, ψ_0 está bien definida. En seguida, sean m y n elementos de M , se sigue que

$$\begin{aligned} \psi_0(m+n) &= [(\text{Spec}(A), \widetilde{m+n})] \\ &= [(\text{Spec}(A), \tilde{m} + \tilde{n})] \\ &= [(\text{Spec}(A), \tilde{m})] + [(\text{Spec}(A), \tilde{n})] \\ &= \psi_0(m) + \psi_0(n) \end{aligned}$$

Finalmente, si $\lambda \in A$, entonces

$$\begin{aligned} \psi_0(\lambda \cdot m) &= [(\text{Spec}(A), \widetilde{\lambda \cdot m})] \\ &= [(\text{Spec}(A), \lambda \cdot \tilde{m})] \\ &= [(D(1_A) \cap \text{Spec}(A), \lambda \cdot \tilde{m})] \\ &= \frac{\lambda}{1_A} \cdot [(\text{Spec}(A), \tilde{m})] \\ &= \lambda \cdot [(\text{Spec}(A), \tilde{m})] \\ &= \lambda \cdot \psi_0(m) \end{aligned}$$

Es decir, la aplicación ψ_0 es A_p -lineal. Por otro lado, puesto que $\tilde{M}_p$ es desde la Proposición 1.3 un módulo sobre A_p , para cada $g \in A \setminus p$ se verifica que la multiplicación por g en $\tilde{M}_p$ es biyectiva.

Por lo tanto, la propiedad universal de la localización para módulos (ver [1] pág. 38), implica que existe una aplicación A -lineal, digamos ψ_1 , explícitamente determinada por

$$\begin{aligned} \psi_1 : M_p &\rightarrow \tilde{M}_p \\ \frac{m}{g} &\mapsto \psi_1\left(\frac{m}{g}\right) = \frac{1_A}{g} \cdot [(\text{Spec}(A), \tilde{m})]. \end{aligned}$$

Más aún, puesto que $\tilde{M}_p$ es un A_p -módulo, se tiene que ψ_1 también es A_p -lineal. Por consiguiente, bastará mostrar que ψ_1 es biyectiva. Para esto, primero probaremos que ψ_1 es sobre. Sean $U \in {}^p\mathcal{T}_{\text{Spec}(A)}$ y $s \in \tilde{M}(U)$, se sigue que existen $V \in {}^p\mathcal{T}_{\text{Spec}(A)}^U$ y elementos $m \in M$ y $g \in A$ tales que $V \subseteq D(g)$ y $s(q) = m/g$ para todo $q \in V$. En particular, para $p \in V$ se tiene que $s(p) = m/g$. Así, podemos tomar $m/g \in M_p$ y observar que $\psi_1(m/g) = \frac{1_A}{g} \cdot [(\text{Spec}(A), \tilde{m})] = [(D(g), \frac{1}{g} \cdot \tilde{m})] = [(V, s|_V)] = [(U, s)]$. Por lo tanto, ψ_1 es una aplicación sobreyectiva.

Por último, probaremos que ψ_1 es inyectiva. Sean $m \in M$ y $g \in A$ tales que $\psi_1(m/g) = 0_{\tilde{M}_p}$, demostraremos que $m/g = 0_{M_p}$. La igualdad $\psi_1(m/g) = 0_{\tilde{M}_p}$ significa que $\frac{1_A}{g} \cdot [(\text{Spec}(A), \tilde{m})]$ es igual a $[(\text{Spec}(A), 0_{\tilde{M}(\text{Spec}(A))})]$, es decir que $[(D(g), \frac{1_A}{g} \cdot \tilde{m})] = [(D(g), 0_{\tilde{M}(D(g))})]$. De modo que existe $V \subseteq D(g)$ tal que $p \in V$ y $\frac{1}{g} \cdot \tilde{m}|_V = 0_{\tilde{M}(V)}$. En particular, para $p \in V$ se tiene que $m/g = 0_{M_p}$. Por lo que existe $u \in A \setminus p$ tal que $u \cdot m = 0_M$. Lo cual implica que

$$\frac{m}{g} = \frac{u}{u} \frac{m}{g} = \frac{0_M}{ug} = 0_{M_p}.$$

Esto es, ψ_1 es inyectiva. En definitiva ψ_1 es un A_p -isomorfismo entre M_p y $\tilde{M}_p$.

2.- Sea $f \in A$ y consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} \varphi : M &\rightarrow \tilde{M}(D(f)) \\ m &\mapsto \varphi(m) = \tilde{m}, \end{aligned}$$

donde la sección local $\tilde{m}$ de $\tilde{M}$ sobre $D(f)$ es

$$\begin{aligned} \tilde{m} : D(f) &\rightarrow \prod_{p \in D(f)} M_p \\ q &\mapsto \tilde{m}(q) = \frac{m}{1_A} \in M_q. \end{aligned}$$

Esta aplicación es evidentemente bien definida y A -lineal. Por lo tanto, para utilizar la propiedad universal de la localización para módulos bastará verificar que la multiplicación por f en el A -módulo $\tilde{M}(D(f))$ es una biyección. Sin embargo, esto es inmediato ya que $\tilde{M}(D(f))$ es un A_f -módulo (ver, el Lema 1.4). Así, dicha propiedad universal nos garantiza que existe una aplicación A -lineal, digamos φ^f , explícitamente determinada por:

$$(1.1.4) \quad \begin{aligned} \varphi^f : M_f &\rightarrow \tilde{M}(D(f)) \\ \frac{m}{f^n} &\mapsto \varphi^f\left(\frac{m}{f^n}\right) = \frac{1_A}{f^n} \cdot \tilde{m}, \end{aligned}$$

donde $(1_A/f^n) \cdot \tilde{m}$ es la sección local de $\tilde{M}$ sobre el abierto básico $D(f)$ definida como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{1_A}{f^n} \cdot \tilde{m} : D(f) &\rightarrow \prod_{p \in D(f)} M_p \\ r &\mapsto \left(\frac{1_A}{f^n} \cdot \tilde{m}\right)(r) = \frac{m}{f^n} \in M_r. \end{aligned}$$

Más aún, en vista de que los módulos dominio y codominio de φ^f son ambos módulos sobre A_f , se sigue que $\varphi^f : M_f \rightarrow \tilde{M}(D(f))$ es A_f -lineal. De esta manera, teniendo una aplicación adecuada entre los A_f -módulos M_f y $\tilde{M}(D(f))$ bastará probar que tal aplicación es una biyección. En efecto,

φ^f **es inyectiva.** Sean $m \in M$ y $n \in \mathbb{Z}_+$ tales que $\varphi^f(\frac{m}{f^n}) = 0_{\tilde{M}(D(f))}$ mostraremos que existe $\ell \in \mathbb{Z}_+$ tal que $f^\ell m = 0_M$. Primero que nada, recordemos la notación $V(I)$ para cada ideal I de un anillo A , la cual representa al cerrado de Zariski de $\text{Spec}(A)$ definido por $\{q \in \text{Spec}(A) : I \subseteq q\}$.

Por hipótesis, tenemos que para todo $r \in D(f)$,

$$\varphi^f\left(\frac{m}{f^n}\right)(r) = \frac{1_A}{f^n} \cdot \tilde{m}(r) = \frac{m}{f^n} = \frac{0_M}{1_A}.$$

De modo que, para todo $r \in D(f)$ existe $\alpha_r \notin r$ tal que $\alpha_r \cdot m = 0_M$. En otras palabras, para cada $r \in D(f)$ existe un elemento en A que está en el *aniquilador*¹ de m tal que este elemento no pertenece a r . Es decir, para cada $r \in D(f)$ se tiene que $\text{Ann}_A(m) \not\subseteq r$. Por lo tanto, $D(f) \cap V(\text{Ann}_A(m)) = \emptyset$, o equivalentemente, $(\text{Spec}(A) - V(Af)) \cap V(\text{Ann}_A(m)) = \emptyset$. Esto es, $V(\text{Ann}_A(m)) \subset V(Af)$ que a su vez implica que $\sqrt{f} \subset \sqrt{\text{Ann}_A(m)}$. En particular, $f \in \sqrt{\text{Ann}_A(m)}$ de modo que $f^\ell \in \text{Ann}_A(m)$, para algún entero $\ell \geq 0$. Esto es, $f^\ell m = 0_M$ para algún $\ell \geq 0$ y podemos escribir

$$\frac{m}{f^n} = \frac{f^\ell m}{f^\ell f^n} = \frac{f^\ell m}{f^{\ell+n}} = \frac{0_M}{f^{\ell+n}} = \frac{0_M}{1_A} = 0_{M_f}.$$

Consecuentemente, $\ker \varphi^f = \{0_{M_f}\}$ y por lo tanto φ^f es inyectiva.

φ^f **es sobreyectiva.** Sea $s \in \tilde{M}(D(f))$, probaremos que existe $\beta \in M_f$ tal que $\tilde{\varphi}^f(\beta) = s$. Para determinar β utilizaremos de manera esencial la inyectividad ya probada de φ^a para cada $a \in A$, la casicompacidad del abierto $D(f)$ y el hecho de que los abiertos $D(h)$, para $h \in A$, forman una base para la topología de $\text{Spec}(A)$.

Por definición, $s \in \tilde{M}(D(f))$ significa que para cada $q \in D(f)$ existe un subconjunto abierto V^q de $D(f)$ conteniendo a q y elementos $m^q \in M$ y $g^q \in A$ tales que $V^q \subseteq D(g^q)$ y $s(p) = \frac{m^q}{g^q} \in M_p$, para cada $p \in V^q$. De esto deducimos dos cosas: la primera es que podemos cubrir a $D(f)$ con los abiertos V^q , esto es, $D(f) = \cup_{q \in D(f)} V^q$ y la segunda es que $V^q \subseteq D(g^q)$. Ahora, ya que $\{D(h) \mid h \in A\}$ forma una base para la topología de $\text{Spec}(A)$ y cada conjunto V^q que contiene a q es un conjunto abierto, existen elementos $h^q \in A$ tales que $q \in D(h^q) \subseteq V^q$, para cada $q \in D(f)$. Por lo tanto, bajo este ajuste podemos suponer que $V^q = D(h^q)$, y como consecuencia que $D(f) = \cup_{q \in D(f)} D(h^q)$.

Por otro lado, la inclusión $D(h^q) \subseteq D(g^q)$ es equivalente a que $h^q \in \sqrt{Ag^q}$. De modo que existe $n_q \in \mathbb{N}$ tal que $h^{qn_q} \in Ag^q$. Esto es, existe $n_q \in \mathbb{N}$ tal que $h^{qn_q} = c_q g^q$ para algún $c_q \in A$. Así, puesto que M es un A -módulo y su multiplicación escalar está bien definida, se sigue que $h^{qn_q} m^q = c_q g^q m^q$. Con ello, para cada $p \in D(h^q)$ podemos escribir

$$s(p) = \frac{m^q}{g^q} = \frac{h^{qn_q} m^q}{h^{qn_q} g^q} = \frac{h^{qn_q} m^q}{h^{qn_q} g^q} = \frac{c_q g^q m^q}{g^q h^{qn_q}} = \frac{g^q c_q m^q}{g^q h^{qn_q}} = \frac{g^q c_q m^q}{g^q h^{qn_q}} = \frac{c_q m^q}{h^{qn_q}}.$$

¹El aniquilador de un elemento m de un A -módulo M , es el ideal $\{\alpha \in A \mid \alpha m = 0_M\}$ de A denotado por $\text{Ann}_A(m)$.

En seguida, como el numerador $c_q m^q$ de $s(p)$ no es más que un elemento de M , a este lo podemos representar simplemente por α^q y mejorar la escritura de $s(p)$ en $\frac{\alpha^q}{h^{qnq}}$ para cada $p \in D(h^{qnq})$. Más aún, dado que $D(h^{qnq}) = D(h^q)$ podemos remplazar h^{qnq} por h^q . Así, hemos mostrado que para todo $p \in D(h^q)$ la sección s toma el valor $s(p) = \frac{\alpha^q}{h^q}$ en M_p .

Ahora bien, ya habíamos observado que $D(f) = \cup_{q \in D(f)} D(h^q)$, por lo tanto, sabiendo que $D(f)$ es casicompacto; para la cubierta abierta $\{D(h^q)\}_{q \in D(f)}$ podemos extraer una subcubierta finita $\{D(h^{q_1}), D(h^{q_2}), \dots, D(h^{q_r})\}$ de $D(f)$ con $r \in \mathbb{N}$, esto es

$$D(f) = D(h^{q_1}) \cup D(h^{q_2}) \cup \dots \cup D(h^{q_r}).$$

Luego, para cada $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ se tiene que $s(p) = \frac{\alpha^{q_i}}{h^{q_i}}$ para todo $p \in D(h^{q_i})$. Probaremos que si $p \in D(h^{q_i}) \cap D(h^{q_j})$, entonces los valores $\frac{\alpha^{q_i}}{h^{q_i}}$ y $\frac{\alpha^{q_j}}{h^{q_j}}$, que la sección local s de $\tilde{M}$ sobre $D(f)$ toma en p , son iguales para cualesquiera índices i, j de $\{1, 2, \dots, r\}$. Para este fin, consideraremos primeramente el caso $i = 1, j = 2$. Este caso nos servirá para fijar ideas y la técnica para lograr la igualdad $\frac{\alpha^{q_i}}{h^{q_i}} = \frac{\alpha^{q_j}}{h^{q_j}}$ para cualesquiera índices i, j de $\{1, 2, \dots, r\}$.

Es un hecho conocido que $D(h^{q_1}) \cap D(h^{q_2})$ es igual a $D(h^{q_1} h^{q_2})$. Por lo tanto, escribiendo $\frac{\alpha^{q_1}}{h^{q_1}} = \frac{h^{q_2}}{h^{q_2}} \frac{\alpha^{q_1}}{h^{q_1}} \in M_{h^{q_1} h^{q_2}}$ y $\frac{\alpha^{q_2}}{h^{q_2}} = \frac{h^{q_1}}{h^{q_1}} \frac{\alpha^{q_2}}{h^{q_2}} \in M_{h^{q_1} h^{q_2}}$, una manera de estimar si $\frac{\alpha^{q_1}}{h^{q_1}}$ y $\frac{\alpha^{q_2}}{h^{q_2}}$ son iguales es calculando su diferencia $\frac{h^{q_2}}{h^{q_2}} \frac{\alpha^{q_1}}{h^{q_1}} - \frac{h^{q_1}}{h^{q_1}} \frac{\alpha^{q_2}}{h^{q_2}}$ en $M_{h^{q_1} h^{q_2}}$. Lo cual nos sugiere considerar el homomorfismo

$$\begin{aligned} \varphi^{h^{q_1} h^{q_2}} : \quad M_{h^{q_1} h^{q_2}} &\rightarrow \tilde{M}(D(h^{q_1} h^{q_2})) \\ m/(h^{q_1} h^{q_2})^n &\mapsto \varphi(m/(h^{q_1} h^{q_2})^n), \end{aligned}$$

definido en (1.1.4) asociado al elemento $h^{q_1} h^{q_2}$ de A , que sabemos es inyectivo. Evaluando $\varphi^{h^{q_1} h^{q_2}}$ en la diferencia $\frac{h^{q_2}}{h^{q_2}} \frac{\alpha^{q_1}}{h^{q_1}} - \frac{h^{q_1}}{h^{q_1}} \frac{\alpha^{q_2}}{h^{q_2}}$, se verifica que

$$\varphi^{h^{q_1} h^{q_2}} \left(\frac{h^{q_2}}{h^{q_2}} \frac{\alpha^{q_1}}{h^{q_1}} - \frac{h^{q_1}}{h^{q_1}} \frac{\alpha^{q_2}}{h^{q_2}} \right) = \varphi^{h^{q_1} h^{q_2}} \left(\frac{\alpha^{q_1}}{h^{q_1}} - \frac{\alpha^{q_2}}{h^{q_2}} \right) = \varphi^{h^{q_1} h^{q_2}} \left(\frac{\alpha^{q_1}}{h^{q_1}} \right) - \varphi^{h^{q_1} h^{q_2}} \left(\frac{\alpha^{q_2}}{h^{q_2}} \right) = 0_{\tilde{M}(D(h^{q_1} h^{q_2}))}.$$

En efecto, para todo $p \in D(h^{q_1} h^{q_2})$, se tiene que

$$\begin{aligned} \left(\varphi^{h^{q_1} h^{q_2}} \left(\frac{\alpha^{q_1}}{h^{q_1}} \right) - \varphi^{h^{q_1} h^{q_2}} \left(\frac{\alpha^{q_2}}{h^{q_2}} \right) \right)(p) &= \varphi^{h^{q_1} h^{q_2}} \left(\frac{\alpha^{q_1}}{h^{q_1}} \right)(p) - \varphi^{h^{q_1} h^{q_2}} \left(\frac{\alpha^{q_2}}{h^{q_2}} \right)(p) \\ &= s(p) - s(p) \\ &= 0_{\tilde{M}(D(h^{q_1} h^{q_2}))}(p). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\frac{h^{q_2}}{h^{q_2}} \frac{\alpha^{q_1}}{h^{q_1}} - \frac{h^{q_1}}{h^{q_1}} \frac{\alpha^{q_2}}{h^{q_2}} = \frac{\alpha^{q_1}}{h^{q_1}} - \frac{\alpha^{q_2}}{h^{q_2}} = 0_{M_{h^{q_1} h^{q_2}}}$. Es decir, $\frac{\alpha^{q_1}}{h^{q_1}}$ y $\frac{\alpha^{q_2}}{h^{q_2}}$ son iguales en $M_{h^{q_1} h^{q_2}}$. Sin embargo, deseamos que $\frac{\alpha^{q_1}}{h^{q_1}}$ y $\frac{\alpha^{q_2}}{h^{q_2}}$ sean iguales en $M_{h^{q_1}}$ y en $M_{h^{q_2}}$. Por lo tanto, recordando lo que significa la igualdad $\frac{\alpha^{q_1}}{h^{q_1}} = \frac{\alpha^{q_2}}{h^{q_2}}$ tenemos que existe un entero no negativo $n_{1,2}$ tal que

$$(h^{q_1} h^{q_2})^{n_{1,2}} [h^{q_2} \alpha^{q_1} - h^{q_1} \alpha^{q_2}] = 0_M.$$

Esto es, existe $n_{1,2} \in \mathbb{Z}_+$ tal que $h^{q_2 n_{1,2} + 1} (h^{q_1 n_{1,2}} \alpha^{q_1}) - h^{q_1 n_{1,2} + 1} (h^{q_2 n_{1,2}} \alpha^{q_2}) = 0_M$. Así, reemplazando $h^{q_2 n_{1,2} + 1}$ por h^{q_2} , $h^{q_1 n_{1,2}} \alpha^{q_1}$ por α^{q_1} , $h^{q_1 n_{1,2} + 1}$ por h^{q_1} y $h^{q_2 n_{1,2}} \alpha^{q_2}$ por α^{q_2} ,

resulta que $h^{q_2}\alpha^{q_1} - h^{q_1}\alpha^{q_2} = 0_M$. Esto es, $h^{q_2}\alpha^{q_1} = h^{q_1}\alpha^{q_2}$ en M y en definitiva $\frac{\alpha^{q_1}}{h^{q_1}}$ y $\frac{\alpha^{q_2}}{h^{q_2}}$ son iguales tanto en $M_{h^{q_2}}$ como en $M_{h^{q_1}}$. Es decir, si $p \in D(h^{q_1}) \cap D(h^{q_2})$, entonces $h^{q_2}\alpha^{q_1} = h^{q_1}\alpha^{q_2}$ en M y los valores $s(p) = \frac{\alpha^{q_1}}{h^{q_1}}$ y $s(p) = \frac{\alpha^{q_2}}{h^{q_2}}$ son iguales.

En seguida, tomando cualesquiera índices i, j en $\{1, 2, \dots, r\}$, por lo desarrollado anteriormente, se tiene que existe un entero $n_{i,j} \in \mathbb{Z}_+$ tal que

$$(h^{q_i}h^{q_j})^{n_{i,j}}[h^{q_j}\alpha^{q_i} - h^{q_i}\alpha^{q_j}] = 0_M.$$

Pero la cantidad de combinaciones para elegir pares de índices (i, j) es finita, por tanto, podemos definir $N = \max\{n_{i,j} | 1 \leq i, j \leq r\}$. Esta potencia mantendrá válida la ecuación $(h^{q_i}h^{q_j})^N[h^{q_j}\alpha^{q_i} - h^{q_i}\alpha^{q_j}] = 0_M$ para cualesquiera i y j en $\{1, 2, \dots, r\}$. Ecuación que podemos reescribir como $h^{q_j N+1}(h^{q_i N}\alpha^{q_i}) - h^{q_i N+1}(h^{q_j N}\alpha^{q_j}) = 0_M$. De modo que, al reemplazar $h^{q_j N+1}$ por h^{q_j} , $h^{q_i N}\alpha^{q_i}$ por α^{q_i} , $h^{q_i N+1}$ por h^{q_i} y $h^{q_j N}\alpha^{q_j}$ por α^{q_j} , obtenemos la igualdad $h^{q_j}\alpha^{q_i} - h^{q_i}\alpha^{q_j} = 0_M$, para cualesquiera índices i y j en $\{1, 2, \dots, r\}$. De lo cual podemos concluir que, si p está en $D(h^{q_i}) \cap D(h^{q_j})$, entonces $\frac{\alpha^{q_i}}{h^{q_i}}$ es igual a $\frac{\alpha^{q_j}}{h^{q_j}}$, tanto en $M_{h^{q_j}}$ como en $M_{h^{q_i}}$, para cualesquiera índices i, j en $\{1, 2, \dots, r\}$.

Por consiguiente, del hecho que $(D(h^{q_i}))_{i \in \{1, 2, \dots, r\}}$ cubre $D(f)$, se sigue que $\sqrt{Af}$ está contenido en $\sqrt{Ah^{q_1} + Ah^{q_2} + \dots + Ah^{q_r}}$. Lo cual implica que $f \in \sqrt{Ah^{q_1} + Ah^{q_2} + \dots + Ah^{q_r}}$. Esto es, existen $n \in \mathbb{N}$ y $b_1, b_2, \dots, b_r$ en A , tales que $f^n = b_1h^{q_1} + b_2h^{q_2} + \dots + b_rh^{q_r}$. Por lo tanto, haciendo $m = \sum_{i=1}^r b_i\alpha^{q_i}$ tenemos que

$$h^{q_j}m = h^{q_j} \sum_{i=1}^r b_i\alpha^{q_i} = \sum_{i=1}^r h^{q_j}b_i\alpha^{q_i} = \sum_{i=1}^r b_ih^{q_j}\alpha^{q_i} = \sum_{i=1}^r b_ih^{q_i}\alpha^{q_j} = f^n\alpha^{q_j},$$

para cada $j \in \{1, 2, \dots, r\}$. Equivalentemente, $1_A(h^{q_j}m - f^n\alpha^{q_j}) = 0_M$. Es decir, $\frac{m}{f^n} = \frac{\alpha^{q_j}}{h^{q_j}}$ en $M_{h^{q_j}}$, para cada $j \in \{1, 2, \dots, r\}$. De esta manera, podemos considerar $\beta = \frac{m}{f^n} \in M_f$ y observar que $\varphi^f(\frac{m}{f^n}) = s$. En efecto, para cada $p \in D(f)$ se cumple que: $p \in D(h^{q_j})$ para algún $j \in \{1, 2, \dots, r\}$ y

$$\varphi^f(\frac{m}{f^n})(p) = \frac{1_A}{f^n} \cdot \tilde{m}(p) = \frac{m}{f^n} = \frac{\alpha^{q_j}}{h^{q_j}} = s(p).$$

Por lo tanto, φ^f es sobreyectiva y el teorema queda demostrado en su totalidad. $\square$

Observación 1.6. Si en la proposición anterior, el módulo M es igual al anillo A , entonces $\tilde{A}$ es igual a $\mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}$.

Observación 1.7. Sea A un anillo, como lo mencionamos el esquema afín $(\text{Spec}(A), \mathcal{O}_{\text{Spec}(A)})$ asociado al anillo A y las gavillas $\tilde{M}$ definidas para cada A -módulo M son los ejemplos estándar de un espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$ y de $\mathcal{O}_X$ -módulos, respectivamente. Sin embargo,

como es evidente estos ejemplos solo forman una clase muy particular de tales objetos. No obstante su estudio resulta de gran interés como lo muestra la cantidad enorme de aplicaciones que tienen. Tal es así que dichos $\mathcal{O}_X$ -módulos constituyen las piezas clave de construcción de las gavillas *casicoherentes* sobre esquemas arbitrarios.

1.2. Morfismos de $\mathcal{O}_X$ -módulos

Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un espacio anillado, en esta sección recordaremos los conceptos de morfismo y de isomorfismo entre $\mathcal{O}_X$ -módulos, asimismo algunas de sus caracterizaciones.

Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ gavillas de $\mathcal{O}_X$ -módulos sobre X , la colección de todos los morfismos entre $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ es un grupo abeliano denotado usualmente por $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$. La definición de sus elementos es como sigue:

Definición 1.8. *Con las notaciones anticipadas, un morfismo φ entre $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ es una familia $(\varphi_W : \mathcal{F}(W) \rightarrow \mathcal{G}(W))_{W \in \mathcal{T}_X}$ de homomorfismos de $\mathcal{O}_X(W)$ -módulos sujeta a ciertas condiciones de compatibilidad.*

Las condiciones a las que se refiere la definición son:

$$\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \iff \varphi \text{ es } \left\{ \begin{array}{l} \text{una familia } (\varphi_W : \mathcal{F}(W) \longrightarrow \mathcal{G}(W))_{W \in \mathcal{T}_X} \\ \text{de homomorfismos de grupos abelianos} \\ \text{tal que para todo } (U, V) \in \mathcal{T}_X \times \mathcal{T}_X \\ \text{con } V \subseteq U, \text{ los diagramas subyacentes} \\ \begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\varphi_U} & \mathcal{G}(U) \\ \rho_{\mathcal{F}}^U \downarrow & & \downarrow \rho_{\mathcal{G}}^U \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\varphi_V} & \mathcal{G}(V) \end{array} \\ \text{y} \\ \begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X(U) \times \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\cdot|_U} & \mathcal{F}(U) \\ (id_{\mathcal{O}_X(U)}, \varphi_U) \downarrow & & \downarrow \varphi_U \\ \mathcal{O}_X(U) \times \mathcal{G}(U) & \xrightarrow{\cdot|_U} & \mathcal{G}(U) \end{array} \\ \text{son conmutativos.} \end{array} \right.$$

Un primer resultado acerca del conjunto que acabamos de describir lo especifica el siguiente:

Lema 1.9. *Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un espacio anillado y sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ $\mathcal{O}_X$ -módulos, se tiene que $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ es un módulo sobre $\mathcal{O}_X(X)$.*

Demostración. Primero que nada, notemos que $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ es un conjunto no vacío pues la familia de homomorfismos nulos $(0_{\text{Hom}_{\mathcal{O}_X(W)}(\mathcal{F}(W), \mathcal{G}(W))})_{W \in \mathcal{T}_X}$ es uno de sus elementos. De hecho este morfismo que denotaremos por $0_{\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})}$ es su neutro aditivo. La operación de adición entre los elementos de $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ está dada por:

$$(1.2.1) \quad \begin{aligned} + : \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \times \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) &\rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \\ (\varphi, \psi) &\mapsto \varphi + \psi, \end{aligned}$$

donde $\varphi + \psi$ es el morfismo determinado por la familia de homomorfismos $\mathcal{O}_X(W)$ -lineales $((\varphi + \psi)_W : \mathcal{F}(W) \rightarrow \mathcal{G}(W))_{W \in \mathcal{T}_X}$ con $(\varphi + \psi)_W = \varphi_W + \psi_W$ para cada $W \in \mathcal{T}_X$. Mientras que la aplicación que define una multiplicación escalar de $\mathcal{O}_X(X)$ sobre $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ es:

$$(1.2.2) \quad \begin{aligned} \cdot : \mathcal{O}_X(X) \times \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) &\rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \\ (\lambda, \phi) &\mapsto \lambda \cdot \phi \end{aligned}$$

donde $\lambda \cdot \phi$ es el morfismo entre $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ dado por la familia de aplicaciones $\mathcal{O}_X(W)$ -lineales $((\lambda \cdot \phi)_W : \mathcal{F}(W) \rightarrow \mathcal{G}(W))_{W \in \mathcal{T}_X}$, cuyo valor en cada elemento s de $\mathcal{F}(W)$ está dado por $(\lambda \cdot \phi)_W(s) = \lambda|_W \cdot \phi_W(s) \in \mathcal{G}(W)$. Son la operación de adición (1.2.1) y la aplicación (1.2.2) las que equipan a $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ con la estructura algebraica de un módulo sobre $\mathcal{O}_X(X)$. En efecto, no es difícil mostrar que ambas operaciones están bien definidas y satisfacen cada requisito de lo que se ha dicho sobre ellas. Por ejemplo, para verificar que el morfismo $0_{\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})}$ satisface la igualdad $\psi + 0_{\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})} = 0_{\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})} + \psi = \psi$, tomamos un abierto W de U y notamos que para cada $s \in \mathcal{F}(W)$ se cumple que $(\psi + 0_{\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})})_W(s)$ es igual a $(0_{\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})} + \psi)_W(s) = \psi_W(s)$, como sigue

$$\begin{aligned} (\psi + 0_{\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})})_W(s) &= (\psi_W + 0_{\text{Hom}_{\mathcal{O}_X(W)}(\mathcal{F}(W), \mathcal{G}(W))})(s) \\ &= \psi_W(s) + 0_{\text{Hom}_{\mathcal{O}_X(W)}(\mathcal{F}(W), \mathcal{G}(W))}(s) \\ &= \psi_W(s) + 0_{\text{Hom}_{\mathcal{O}_X(W)}(\mathcal{F}(W), \mathcal{G}(W))}(s) \\ &= \psi_W(s) + 0_{\mathcal{G}(W)} \\ &= 0_{\mathcal{G}(W)} + \psi_W(s) \\ &= \psi_W(s). \end{aligned}$$

Del mismo modo, para verificar, por ejemplo, la propiedad **M3** de una multiplicación escalar; la cual nos dice que $(\lambda \cdot \lambda') \cdot \phi = \lambda \cdot (\lambda' \cdot \phi)$ para cualesquiera $\lambda, \lambda' \in \mathcal{O}_X(X)$ y para todo $\phi \in \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$. Procedemos de la siguiente manera, seleccionamos cualquier conjunto abierto $\mathcal{E}$ de X y cualquier sección local t de $\mathcal{F}$ sobre $\mathcal{E}$ y notamos que se cumplen las

igualdades

$$\begin{aligned}
 ((\lambda \cdot \lambda') \cdot \phi)_\varepsilon(t) &= (\lambda \cdot \lambda')|_\varepsilon \cdot \phi_\varepsilon(t) \\
 &= \lambda|_\varepsilon \cdot \lambda'|_\varepsilon \cdot \phi_\varepsilon(t) \\
 &= \lambda|_\varepsilon \cdot (\lambda'|_\varepsilon \cdot \phi_\varepsilon(t)) \\
 &= \lambda|_\varepsilon \cdot (\lambda' \cdot \phi)_\varepsilon(t) \\
 &= (\lambda \cdot (\lambda' \cdot \phi))_\varepsilon(t).
 \end{aligned}$$

Las demás propiedades también se cumplen, sin embargo, no las demostraremos aquí pues en gran medida su validez repite el mismo patrón de prueba que hemos presentado. $\square$

Dos gavillas de $\mathcal{O}_X$ -módulos $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son isomorfos si, y sólo si, existen $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ y $\psi \in \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ tales que $\psi \circ \varphi = \text{id}_{\mathcal{F}}$ y $\varphi \circ \psi = \text{id}_{\mathcal{G}}$. En tal caso, decimos que φ es un *isomorfismo* de $\mathcal{O}_X$ -módulos entre $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$, lo cual equivale a que todos los homomorfismos $\varphi_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ sean $\mathcal{O}_X(U)$ -isomorfismos para cada conjunto abierto U de X . Mejor aún, recordando que los grupos de gérmenes $\mathcal{M}_p$ de un $\mathcal{O}_X$ -módulo $\mathcal{M}$ para cada $p \in X$, son $\mathcal{O}_{X,p}$ -módulos; tenemos la siguiente caracterización conocida, ver [11].

Proposición 1.10. *Sea $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un morfismo de $\mathcal{O}_X$ -módulos sobre un espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$. φ es un isomorfismo de $\mathcal{O}_X$ -módulos si, y sólo si, el morfismo inducido en los grupos de gérmenes $\varphi_p : \mathcal{F}_p \rightarrow \mathcal{G}_p$ es un isomorfismo de $\mathcal{O}_{X,p}$ -módulos, para cada $p \in X$.*

Un corolario del Teorema 1.5 y de la Proposición 1.10 es el siguiente:

Corolario 1.11. *Sean M , N y P módulos sobre un anillo A , se tiene que una sucesión de A -módulos*

$$(1.2.3) \quad 0 \longrightarrow M \xrightarrow{\varphi} N \xrightarrow{\psi} P \longrightarrow 0$$

es exacta sí, y sólo si, la sucesión de $\mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}$ -módulos

$$(1.2.4) \quad 0 \longrightarrow \tilde{M} \xrightarrow{\tilde{\varphi}} \tilde{N} \xrightarrow{\tilde{\psi}} \tilde{P} \longrightarrow 0$$

es exacta.

A continuación, damos un resultado que caracteriza los isomorfismos de $\mathcal{O}_X$ -módulos con respecto a los elementos de una cubierta abierta de X . Lo formularemos como una proposición, sin embargo, antes recordaremos una definición y un lema previos.

Definición 1.12. *Sean U un conjunto abierto no vacío de un espacio topológico X y $\mathcal{F}$ una pregavilla de grupos abelianos sobre X . La restricción de $\mathcal{F}$ a U , considerado con su topología subespacio es la pregavilla de grupos abelianos sobre U , denotada por $\mathcal{F}|_U$, definida*

por la asignación $V \mapsto \mathcal{F}|_U(V) := \mathcal{F}(V)$ para cada subconjunto abierto V de U , junto con las aplicaciones restricción de $\mathcal{F}$.

Observamos que si $\mathcal{F}$ es una gavilla de anillos (resp. de grupos abelianos), entonces $\mathcal{F}|_U$ es una gavilla de anillos (resp. de grupos abelianos). De la misma manera, si $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{O}_X$ -módulo sobre un espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$, entonces $\mathcal{F}|_U$ es un $\mathcal{O}_X|_U$ -módulo sobre el espacio anillado $(U, \mathcal{O}_X|_U)$.

Por otro lado, si $\mathcal{F}$ es una gavilla, entonces dado que el germen en un punto de una sección local de $\mathcal{F}$ no cambia si se restringe a un subconjunto abierto más pequeño que contenga al punto, se sigue que los grupos de gérmenes de la gavilla restricción $\mathcal{F}|_U$ de $\mathcal{F}$ a un conjunto abierto U no vacío de X , son los mismos grupos de gérmenes de $\mathcal{F}$, para cada punto de U . Este resultado se cumple para pregavillas su versión más general es como sigue:

Lema 1.13. *Sean $\mathcal{F}$ una pregavilla de grupos abelianos sobre un espacio topológico X y sea U un conjunto abierto de X . Se sigue que los grupos de gérmenes de la pregavilla restricción de $\mathcal{F}$ a U son exactamente los grupos de gérmenes de $\mathcal{F}$ en p , para cada punto p de U .*

Proposición 1.14. *Sean $(X, \mathcal{O}_X)$ un espacio anillado y sea I un conjunto no vacío que parametriza a una cubierta abierta $(U_i)_{i \in I}$ de X . Si $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ es un morfismo entre los $\mathcal{O}_X$ -módulos $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ sobre X , entonces f es un isomorfismo si, y sólo si, el morfismo $f|_{U_i} : \mathcal{F}|_{U_i} \rightarrow \mathcal{G}|_{U_i}$ entre los $\mathcal{O}_X|_{U_i}$ -módulos $\mathcal{F}|_{U_i}$ y $\mathcal{G}|_{U_i}$ es un isomorfismo, para cada $i \in I$.*

Aquí, para un elemento i de I , el morfismo $f|_{U_i}$ de $\mathcal{O}_X|_{U_i}$ -módulos es precisamente el que resulta de restringir la familia de homomorfismos locales $(f_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U))_{U \in \mathcal{T}_X}$ que define f , a los subconjuntos abiertos de U_i . Esto es, el morfismo $f|_{U_i}$ queda definido por la familia $(f_\delta : \mathcal{F}(\delta) \rightarrow \mathcal{G}(\delta))_{\delta \in \mathcal{T}_{U_i}}$.

Demostración. Sea $i \in I$, y supongamos que el morfismo $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ es un isomorfismo, se sigue que $f_p : \mathcal{F}_p \rightarrow \mathcal{G}_p$ es un isomorfismo de $\mathcal{O}_{X,p}$ -módulos, para cada punto p de X ; en particular, para todo q de U_i el morfismo $(f|_{U_i})_q : (\mathcal{F}|_{U_i})_q \rightarrow (\mathcal{G}|_{U_i})_q$ es un isomorfismo. Luego, siendo i un elemento arbitrario de I , se sigue que $f|_{U_i} : \mathcal{F}|_{U_i} \rightarrow \mathcal{G}|_{U_i}$ es un isomorfismo para cada abierto U_i de la cubierta de X .

Recíprocamente, si para todo $i \in I$ el morfismo $f|_{U_i} : \mathcal{F}|_{U_i} \rightarrow \mathcal{G}|_{U_i}$ es un isomorfismo de $\mathcal{O}_X|_{U_i}$ -módulos, entonces dado $p \in X$ existirá $\gamma \in I$ tal que $p \in U_\gamma$ y por consiguiente, tendremos que $(f|_{U_\gamma})_p : (\mathcal{F}|_{U_\gamma})_p \rightarrow (\mathcal{G}|_{U_\gamma})_p$ es un isomorfismo de $(\mathcal{O}_X|_{U_\gamma})_p$ -módulos. Es decir, para cada $p \in X$, el morfismo $f_p : \mathcal{F}_p \rightarrow \mathcal{G}_p$ es un isomorfismo de $\mathcal{O}_{X,p}$ -módulos. Así, en vista de la Proposición 1.10, $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ es un isomorfismo. $\square$

1.3. Suma Directa y Producto Tensorial de $\mathcal{O}_X$ -módulos

Hemos visto que para cada módulo M sobre un anillo A , existe un $\mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}$ -módulo denotado por $\tilde{M}$ y algunas de sus propiedades. Ahora, si consideramos la colección de todos los módulos sobre A y la colección de todos los $\mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}$ -módulos vemos que $\sim$ es una función bien definida salvo isomorfismo entre ambas colecciones. A esta función la llamaremos el *operador tilde* y probaremos que conmuta con la *suma directa* finita o arbitraria de A -módulos y con el *producto tensorial* de un número finito de módulos sobre A , ver el Teorema 1.15. De mayor impacto para nuestro objetivo en este capítulo es el hecho de que la gavilla estructural $\mathcal{O}_Z$ de un espacio anillado $(Z, \mathcal{O}_Z)$ resulta neutral cuando se calcula su producto tensorial con cualquier otro $\mathcal{O}_Z$ -módulo, ver la Proposición 1.16.

Para dar este resultado estableceremos en esta sección primeramente la suma directa y el producto tensorial de gavillas de módulos sobre un espacio anillado. Por tanto, sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ gavillas de $\mathcal{O}_X$ -módulos sobre un espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$, la suma directa de $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$, denotada usualmente por $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$, es la gavilla de $\mathcal{O}_X$ -módulos sobre X definida por la asignación $U \mapsto \mathcal{F}(U) \oplus \mathcal{G}(U)$ para cada conjunto abierto U de X , junto con las aplicaciones restricción de $\mathcal{F}$ y de $\mathcal{G}$ en cada coordenada. Sus grupos de gérmenes están dados por $(\mathcal{F} \oplus \mathcal{G})_x \cong \mathcal{F}_x \oplus \mathcal{G}_x$, para cada $x \in X$.

Por cierto, de manera trivial, este concepto de suma directa se generaliza a un número arbitrario de $\mathcal{O}_X$ -módulos, esto es, si J es un conjunto no vacío y $(\mathcal{F}_j)_{j \in J}$ es una familia de $\mathcal{O}_X$ -módulos sobre un espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$, entonces su suma directa definida por la asignación $U \mapsto \bigoplus_{j \in J} \mathcal{F}_j(U)$ para cada conjunto abierto U de X , y denotada por $\bigoplus_{j \in J} \mathcal{F}_j$, es un $\mathcal{O}_X$ -módulo sobre X y sus grupos de gérmenes $(\bigoplus_{j \in J} \mathcal{F}_j)_x$, para cada $x \in X$, están dados por $\bigoplus_{j \in J} \mathcal{F}_{j,x}$. Esta construcción es una de las maneras más inmediatas de obtener nuevos $\mathcal{O}_X$ -módulos de mismos ya dados. Otra es el producto tensorial.

El producto tensorial de $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$, denotado por $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$, es la gavilla de $\mathcal{O}_X$ -módulos sobre X asociada a la pregavilla $U \mapsto \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U)$ para cada $U \in \mathcal{T}_X$, de aplicaciones restricción las usuales para funciones; y cuyos grupos de gérmenes $(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})_x$ para cada $x \in X$, están dados por $\mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{G}_x$.

En contraste con la suma directa, el producto tensorial solo se generaliza a un número finito de $\mathcal{O}_X$ -módulos. No obstante, lo que si podemos generalizar es el hecho de que si $\mathcal{F}$ es una pregavilla de $\mathcal{O}_X$ -módulos sobre un espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$, entonces la gavilla asociada a $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{O}_X$ -módulo.

La conmutatividad del operador tilde con la suma directa y el producto tensorial de $\mathcal{O}_X$ -módulos tomando en cuenta los resultados de la Sección 1.2 nos la da el siguiente:

Teorema 1.15. *Si A es un anillo, J es un conjunto no vacío, M y N son A -módulos y $(M_j)_{j \in J}$ es una familia de módulos sobre A , entonces las gavillas $\widetilde{M \otimes_A N}$ y $\widetilde{\bigoplus_{j \in J} M_j}$ de $\mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}$ -módulos asociadas a los A -módulos $M \otimes_A N$ y $\bigoplus_{j \in J} M_j$ son respectivamente isomorfas a los $\mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}$ -módulos $\tilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}} \tilde{N}$ y $\bigoplus_{j \in J} \tilde{M}_j$.*

Demostración. Para probar este teorema nos apoyaremos en la Proposición 1.14 y en el Teorema 1.5, en atención a lo cual, sea U un conjunto abierto de $\text{Spec}(A)$ no vacío. Comenzaremos por definir un morfismo entre $\widetilde{M \otimes_A N}$ y $\tilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}} \tilde{N}$. Para ello, consideremos la aplicación $\mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}(U)$ -lineal

$$(1.3.1) \quad \begin{aligned} \varphi_{1U} : \tilde{M}(U) \otimes_{\mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}(U)} \tilde{N}(U) &\rightarrow (\widetilde{M \otimes_A N})(U) \\ s \otimes t &\mapsto \varphi_{1U}(s \otimes t) = \varphi_{0U}(s, t) \end{aligned}$$

definida a partir de la aplicación $\mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}(U)$ -bilineal

$$(1.3.2) \quad \begin{aligned} \varphi_{0U} : \tilde{M}(U) \oplus \tilde{N}(U) &\rightarrow (\widetilde{M \otimes_A N})(U) \\ (s, t) &\mapsto \varphi_{0U}(s, t), \end{aligned}$$

donde $\varphi_{0U}(s, t) \in (\widetilde{M \otimes_A N})(U)$, está dada por $\varphi_{0U}(s, t)(r) = \phi_r(s(r) \otimes t(r)) \in (M \otimes_A N)_r$ para cada $r \in U$, siendo ϕ_r el isomorfismo canónico entre $M_r \otimes_{A_r} N_r$ y $(M \otimes_A N)_r$. De manera que si $V^s \in {}^r\mathcal{T}_{\text{Spec}(A)}^U$, $m^r \in M$ y $g^r \in A$ son los dados por la membresía de s como un elemento de $\tilde{M}(U)$, y si $V^t \in {}^r\mathcal{T}_{\text{Spec}(A)}^U$, $n^r \in N$ y $h^r \in A$ son los correspondientes dados por t como elemento de $\tilde{N}(U)$ para cada $r \in U$, entonces $V^s \cap V^t \in {}^r\mathcal{T}_{\text{Spec}(A)}^U$ y los elementos $m^r \otimes n^r \in M \otimes_A N$ y $g^r h^r \in A$ son los que verifican la pertenencia de $\varphi_{0U}(s, t)$ en $(\widetilde{M \otimes_A N})(U)$. En seguida, ponderando todos los conjuntos abiertos de $\text{Spec}(A)$ obtenemos la familia $(\varphi_{1U})_{U \in \mathcal{T}_{\text{Spec}(A)}}$ que es compatible con las aplicaciones restricción de su dominio y codominio respectivas. En efecto, sean $(U, V) \in \mathcal{T}_{\text{Spec}(A)} \times \mathcal{T}_{\text{Spec}(A)}$ tales que $V \subseteq U$, la conmutatividad del siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{M}(U) \otimes_{\mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}(U)} \tilde{N}(U) & \xrightarrow{\varphi_{1U}} & (\widetilde{M \otimes_A N})(U) \\ (\rho_{\tilde{M}V}^U, \rho_{\tilde{N}V}^U) \downarrow & & \downarrow \rho_{\widetilde{M \otimes_A N}V}^U \\ \tilde{M}(V) \otimes_{\mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}(V)} \tilde{N}(V) & \xrightarrow{\varphi_{1V}} & (\widetilde{M \otimes_A N})(V) \end{array}$$

se cumple. Sea $s \otimes t \in \tilde{M}(U) \otimes_{\mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}(U)} \tilde{N}(U)$, se tiene que $\varphi_{1U}(s \otimes t)|_V = \varphi_{0U}(s, t)|_V$. Luego, si $r \in V$, entonces $\varphi_{0U}(s, t)|_V(r) = \phi_r(s(r) \otimes t(r))$. Por otro lado, si primero restringimos $s \otimes t$ a V y después aplicamos φ_{1V} , tenemos que $\varphi_{1V}((s \otimes t)|_V) = \varphi_{1V}(s|_V \otimes t|_V) = \varphi_{0V}(s|_V, t|_V)$.

Así, para cada $r \in V$ se sigue que $\varphi_{0_V}(s|_V, t|_V)(r) = \phi_r(s|_V(r) \otimes t|_V(r)) = \phi_r(s(r) \otimes t(r))$. Es decir, $\varphi_{1_U}(s \otimes t)|_V = \varphi_{1_V}((s \otimes t)|_V)$ y por lo tanto el diagrama conmuta. De igual modo, podemos verificar que la familia $(\varphi_{1_U})_{U \in \mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}}$, que en lo sucesivo la llamaremos simplemente φ_1 , es compatible con las estructuras de $\mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}(\mathcal{E})$ -módulos de su dominio y codominio para cada conjunto abierto $\mathcal{E}$ de $\text{Spec}(A)$. De manera que φ_1 induce un morfismo φ de $\mathcal{O}_X$ -módulos entre $\tilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}} \tilde{N}$ y $\widetilde{M \otimes_A N}$. Ahora bien, en vista de la Proposición 1.14, lo que sigue es considerar la cubierta abierta $\{D(f) | f \in A\}$ de $\text{Spec}(A)$ y observar que, dado $f \in A$, se tiene que $\varphi|_{D(f)}$ es un isomorfismo. Por lo tanto, sea $f \in A$, puesto que φ se definió a partir de φ_1 , basta notar que el morfismo de pregavillas $\varphi_1|_{D(f)}$ es un isomorfismo. Así, sea $p \in D(f)$ se sigue que $(\varphi_1|_{D(f)})_p$ se reduce a la identidad $M_p \otimes_{A_p} N_p \cong (M \otimes_A N)_p$, la cual es válida, por cierto, para todo ideal primo de A . Por consiguiente, en virtud de la Proposición 1.10, el morfismo $\varphi_1|_{D(f)}$ es un isomorfismo y por lo tanto, podemos concluir que $\varphi|_{D(f)}$ es un isomorfismo para cada abierto básico $D(f)$ de $\text{Spec}(A)$. Finalmente, por la Proposición 1.14 φ es un isomorfismo.

Para el isomorfismo restante, procedemos de manera parecida, sea U un conjunto abierto de $\text{Spec}(A)$ y supongamos que no es vacío. Sea $j \in J$, bastará definir una familia de aplicaciones ${}_j\psi_U : \tilde{M}_j(U) \rightarrow \oplus_{i \in J} \tilde{M}_i(U)$ que sean $\mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}(U)$ -lineales. Por lo tanto, sea s una sección local de $\tilde{M}_j$ sobre U , definiremos ${}_j\psi_U(s) \in \oplus_{i \in J} \tilde{M}_i(U)$ como la función entre U y $\prod_{p \in U} (\oplus_{i \in J} M_i)_p$, que a cada $r \in U$, asigna el valor ${}_j\psi_U(s)(r) = \phi_r(m_{j,r}(s(r)))$, donde ϕ_r es el isomorfismo canónico $\oplus_{i \in J} (M_i)_r \cong (\oplus_{i \in J} M_i)_r$ y $m_{j,r}$ es la inyección natural $(M_j)_r \rightarrow \oplus_{i \in J} (M_i)_r$. Es claro que ${}_j\psi_U(s)(p) \in (\oplus_{i \in J} M_i)_p$ para todo $p \in U$. Por lo tanto, para verificar por completo que ${}_j\psi_U(s)$ es un elemento de $\widetilde{\oplus_{i \in J} M_i(U)}$, dado $r \in U$, es suficiente determinar un abierto contenido en U entorno a r y elementos de $\oplus_{i \in J} M_i$ y de A tales que su cociente sea el valor constante de ${}_j\psi_U(s)$ en cada punto de dicho abierto. Como $s \in \tilde{M}_j(U)$, sabemos que existen $V \in {}^r\mathcal{T}_{\text{Spec}(A)}^U$ y elementos $m \in M_j$ y $g \in A$ tales que $V \subseteq D(g)$ y $s(q) = m/g \in (M_j)_q$ para todo $q \in V$. Así, basta considerar el abierto V y los elementos $g \in A$ y $(x_i)_{i \in J} \in \oplus_{i \in J} M_i$ donde $x_i = 0_{M_i}$ para todo $i \in J \setminus \{j\}$ y $x_j = m$, y notar que ${}_j\psi_U(s)(q) = \frac{(x_i)_{i \in J}}{g} \in (\oplus_{i \in J} M_i)_q$ para cada $q \in V$. En efecto, sea q un elemento de V , se sigue que ${}_j\psi_U(s)(q)$ es igual a $\phi_q(m_{j,q}(s(q))) = \phi_q(m_{j,q}(m/g)) = (x_i)_{i \in J}/g$. Por lo tanto, ${}_j\psi_U$ cae bien en su codominio y además, para cualesquiera s y s' en $\tilde{M}_j(U)$ tales que $s = s'$, se cumple que ${}_j\psi_U(s) = {}_j\psi_U(s')$, por lo que ${}_j\psi_U$ está bien definida. Más aún, no es difícil verificar que es una aplicación $\mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}(U)$ -lineal.

Notamos que para cada $U \in \mathcal{T}_{\text{Spec}(A)}$, la propiedad universal de la suma directa nos garantiza la existencia de un homomorfismo $\psi_U : \oplus_{j \in J} \tilde{M}_j(U) \rightarrow \widetilde{\oplus_{i \in J} M_i(U)}$ lineal sobre $\mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}(U)$. Por lo que, al ponderar todos los abiertos de $\text{Spec}(A)$ obtenemos una familia $(\psi_U)_{U \in \mathcal{T}_{\text{Spec}(A)}}$

de homomorfismos $\mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}(U)$ -lineales compatibles con las aplicaciones restricción de sus dominios y codominios como lo muestra la conmutatividad del diagrama:

$$\begin{array}{ccc} (\oplus_{j \in J} \tilde{M}_j)(U) & \xrightarrow{\psi_U} & \widetilde{\oplus_{i \in J} M_i}(U) \\ \rho_{\oplus_{j \in J} \tilde{M}_j}^U \downarrow & & \downarrow \rho_{\widetilde{\oplus_{i \in J} M_i}}^U \\ (\oplus_{j \in J} \tilde{M}_j)(V) & \xrightarrow{\psi_V} & \widetilde{\oplus_{i \in J} M_i}(V) \end{array}$$

para cada par $(U, V) \in \mathcal{T}_{\text{Spec}(A)} \times \mathcal{T}_{\text{Spec}(A)}$ con $V \subseteq U$. En efecto, sea $(s_j)_{j \in J}$ un elemento de $(\oplus_{j \in J} \tilde{M}_j)(U)$, esto es, $(s_j)_{j \in J}$ es una familia casi nula de secciones $s_j \in \tilde{M}_j(U)$, para cada $j \in J$. Se sigue que $\varphi_U((s_j)_{j \in J})|_V(r)$ es igual a $\sum_{j \in J} \psi_U(s_j)|_V(r) = \sum_{j \in J} \phi_r(m_{j,r}(s_j(r)))$. Mientras que, por otro lado,

$$\varphi_V((s_j)_{j \in J}|_V)(r) = \sum_{j \in J} \psi_V(s_j|_V)(r) = \sum_{j \in J} \phi_r(m_{j,r}(s_j|_V(r))) = \sum_{j \in J} \phi_r(m_{j,r}(s_j(r))).$$

Es decir, $\varphi_U((s_j)_{j \in J})|_V = \varphi_V((s_j)_{j \in J}|_V)$. De manera que la familia $(\psi_U)_{U \in \mathcal{T}_{\text{Spec}(A)}}$ constituye un morfismo de $\mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}$ -módulos entre $(\oplus_{j \in J} \tilde{M}_j)$ y $\widetilde{\oplus_{i \in J} M_i}$. Este morfismo se reduce a la identidad $\oplus_{j \in J} (M_j)_p \cong (\oplus_{j \in J} \tilde{M}_j)_p$ para cada $p \in \text{Spec}(A)$, y por tanto determina un isomorfismo entre $\oplus_{j \in J} \tilde{M}_j$ y $\oplus_{j \in J} M_j$. $\square$

De gran importancia es la siguiente:

Proposición 1.16. *Sea $(Z, \mathcal{O}_Z)$ un espacio anillado y $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_Z$ -módulo, se sigue que los módulos $\mathcal{O}_Z \otimes_{\mathcal{O}_Z} \mathcal{F}$ y $\mathcal{F}$ son isomorfos como $\mathcal{O}_Z$ -módulos.*

Demostración. Sea U un conjunto abierto de Z y sin pérdida de generalidad supongamos que no es vacío. Sabemos que existe una aplicación $\mathcal{O}_Z(U)$ -lineal dada por

$$(1.3.3) \quad \begin{aligned} \varphi_U : \mathcal{O}_Z(U) \otimes_{\mathcal{O}_Z(U)} \mathcal{F}(U) &\rightarrow \mathcal{F}(U) \\ s \otimes r &\mapsto \varphi_U(s \otimes r) = s \cdot r \end{aligned}$$

la cual, es un isomorfismo de $\mathcal{O}_Z(U)$ -módulos. Más aún, para cualquier subconjunto abierto V de U , la conmutatividad del siguiente diagrama se cumple

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_Z(U) \otimes_{\mathcal{O}_Z(U)} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\varphi_U} & \mathcal{F}(U) \\ (\rho_{\mathcal{O}_Z(U)}^U, \rho_{\mathcal{F}(U)}^U) \downarrow & & \downarrow \rho_{\mathcal{F}(U)}^U \\ \mathcal{O}_Z(V) \otimes_{\mathcal{O}_Z(V)} \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\varphi_V} & \mathcal{F}(V) \end{array}$$

En efecto, sean s una sección local de $\mathcal{O}_Z$ sobre U y sea r una sección local de $\mathcal{F}$ sobre U , se sigue que $\varphi_U(s \otimes r)|_V = (s \cdot r)|_V = s|_V \cdot r|_V$. Mientras que por otro lado, $\varphi_V(s|_V \otimes r|_V) = s|_V \cdot r|_V$. Por lo tanto, utilizando la propiedad universal de la gavilla asociada, la familia $(\varphi_U)_{U \in \mathcal{T}_X}$

define un morfismo φ entre $\mathcal{O}_Z \otimes_{\mathcal{O}_Z} \mathcal{F}$ y $\mathcal{F}$. Finalmente como φ_U es un isomorfismo para cada abierto U de Z , se sigue que φ es un isomorfismo entre $\mathcal{O}_Z \otimes_{\mathcal{O}_Z} \mathcal{F}$ y $\mathcal{F}$. $\square$

1.4. Gavilla hom: $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$

En esta sección retomamos el estudio de los grupos de morfismos de $\mathcal{O}_Z$ -módulos sobre un espacio anillado $(Z, \mathcal{O}_Z)$ para definir una gavilla de $\mathcal{O}_Z$ -módulos especial (Definición 1.17) misma que apremiará más adelante la construcción del grupo de Picard de Z .

Si U es un conjunto abierto no vacío de Z , entonces considerando a U con su topología subespacio resulta que la gavilla restricción de $\mathcal{O}_Z$ a U es una gavilla de anillos sobre U . Por consiguiente el par $(U, \mathcal{O}_Z|_U)$ es un espacio anillado. Más aún, si $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son gavillas de $\mathcal{O}_Z$ -módulos sobre Z , entonces las gavillas restricción $\mathcal{F}|_U$ y $\mathcal{G}|_U$ de $\mathcal{F}$ y de $\mathcal{G}$ son gavillas de $\mathcal{O}_Z|_U$ -módulos sobre $(U, \mathcal{O}_Z|_U)$, por lo que podemos hablar del grupo de morfismos $Hom_{\mathcal{O}_Z|_U}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$. Observemos que si $U = \emptyset$, entonces tanto $\mathcal{F}|_{\emptyset}$ como $\mathcal{G}|_{\emptyset}$ son la gavilla nula 0, de lo cual el único morfismo posible es el homomorfismo nulo, esto es, $Hom_{\mathcal{O}_Z|_{\emptyset}}(\mathcal{F}|_{\emptyset}, \mathcal{G}|_{\emptyset})$ es igual a $\{0\}$. Claramente $\{0\}$ es un grupo abeliano, así, para este caso ratificamos la afirmación del Lema 1.9. Tomando en cuenta esta información definimos la pregavilla $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Z}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ de grupos abelianos sobre Z , mediante la asignación:

$$U \mapsto \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Z}(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U) := Hom_{\mathcal{O}_Z|_U}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U), \text{ para cada } U \in \mathcal{T}_Z.$$

Junto con las aplicaciones restricción definidas de manera obvia: si U y V son conjuntos abiertos de Z , con $V \subseteq U$, entonces

$$\begin{aligned} \rho_V^U : \quad \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Z}(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U) &\rightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Z}(\mathcal{F}, \mathcal{G})(V) \\ (\varphi_W : \mathcal{F}(W) \rightarrow \mathcal{G}(W))_{W \in \mathcal{T}_U} &\mapsto (\varphi_{\mathcal{E}} : \mathcal{F}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{G}(\mathcal{E}))_{\mathcal{E} \in \mathcal{T}_V}. \end{aligned}$$

Esto es, si φ es la familia $\varphi_W : \mathcal{F}(W) \rightarrow \mathcal{G}(W)$ parametrizada por los subconjuntos abiertos W de U , de homomorfismos $\mathcal{O}_Z(W)$ -lineales compatibles con las aplicaciones restricción de $\mathcal{F}$ y de $\mathcal{G}$, entonces $\rho_V^U(\varphi)$ es la subfamilia de φ formada únicamente por los homomorfismos $\varphi_{\mathcal{E}} : \mathcal{F}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{G}(\mathcal{E})$, cuyo parámetro $\mathcal{E}$ es un subconjunto abierto de U que está contenido en el subconjunto V de U . Desde luego, ρ_V^U , para cada par $(U, V) \in \mathcal{T}_Z^{(2)}$ con $V \subseteq U$, cae bien en su codominio y es un homomorfismo de grupos abelianos.

Probaremos que el par $(\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Z}(\mathcal{F}, \mathcal{G}), \rho)$, donde ρ representa las aplicaciones restricción definidas anteriormente, es una pregavilla de grupos abelianos que satisface las dos condiciones locales de una gavilla.

Ya vimos que $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})(\emptyset) = \{0\}$. Luego, necesitamos probar que si U es un conjunto abierto no vacío de Z , entonces ρ_U^U debe ser igual a $id_{\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Z}(\mathcal{F}, \mathcal{G})}$. Sin embargo, es claro que $\rho_U^U : \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Z}(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U) \rightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Z}(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U)$ envía un morfismo $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ en $\rho_U^U(\varphi) : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$, donde $\rho_U^U(\varphi)$ es la familia de homomorfismos $\varphi_W : \mathcal{F}(W) \rightarrow \mathcal{G}(W)$ parametrizada por los abiertos W contenidos en U , es decir, la misma familia de homomorfismos que definen $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$. Por lo tanto, $\rho_U^U = id_{\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Z}(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U)}$. Así, las primeras dos condiciones de pregavilla se cumplen. Finalmente, sean U, V y W subconjuntos abiertos de Z con $W \subseteq V \subseteq U$, queremos probar que la igualdad $\rho_W^U = \rho_W^V \circ \rho_V^U$ se cumple. Para ello, antes que nada notemos que $W \subseteq V \subseteq U$ implica $\mathcal{T}_W \subseteq \mathcal{T}_V \subseteq \mathcal{T}_U$. Ahora, sea $\psi \in \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Z}(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U) = Hom_{\mathcal{O}_Z}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, esto es, ψ es una familia de homomorfismos $(\psi_\delta : \mathcal{F}(\delta) \rightarrow \mathcal{G}(\delta))_{\delta \in \mathcal{T}_U}$ y su restricción a W , $\rho_W^U(\psi)$, es la familia $(\psi_\mathcal{E} : \mathcal{F}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{G}(\mathcal{E}))_{\mathcal{E} \in \mathcal{T}_W}$. A continuación, veamos que ésta familia es la misma que se obtiene mediante la restricción iterada de ψ hasta V y finalmente hasta W : si restringimos ψ hasta V , lo que obtenemos es la familia de homomorfismos $(\psi_\Gamma : \mathcal{F}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{G}(\Gamma))_{\Gamma \in \mathcal{T}_V}$, la cual al restringirla hasta W nos da $(\psi_\beta : \mathcal{F}(\beta) \rightarrow \mathcal{G}(\beta))_{\beta \in \mathcal{T}_W}$. Y claramente

$$(\psi_\mathcal{E} : \mathcal{F}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{G}(\mathcal{E}))_{\mathcal{E} \in \mathcal{T}_W} = (\psi_\beta : \mathcal{F}(\beta) \rightarrow \mathcal{G}(\beta))_{\beta \in \mathcal{T}_W}.$$

En otras palabras, $\rho_W^U(\psi) = \rho_W^V(\rho_V^U(\psi))$ para todo $\psi \in \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Z}(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U)$. Y podemos concluir que $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Z}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ es una pregavilla de grupos abelianos sobre Z .

Sin embargo, hemos declarado más, hemos dicho que ésta pregavilla satisface las condiciones locales de una gavilla. En efecto, sean U un conjunto abierto de Z no vacío y $(U_i)_{i \in I}$ una cubierta abierta de U parametrizada por un conjunto I no vacío.

Condición G1: Si ψ es una sección local de $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Z}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ sobre el abierto U tal que para todo $i \in I$, $\rho_{U_i}^U(\psi) = 0_{\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Z}(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U_i)}$, entonces $\psi = 0_{\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Z}(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U)}$.

Sea $i \in I$, en primer lugar analizaremos lo que significa la igualdad $\rho_{U_i}^U(\psi) = 0_{\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Z}(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U_i)}$. Si $\psi \in \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Z}(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U)$ es la familia de homomorfismos $(\psi_\Gamma : \mathcal{F}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{G}(\Gamma))_{\Gamma \in \mathcal{T}_U}$ compatibles con las aplicaciones restricción de $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$, entonces $\rho_{U_i}^U(\psi)$ es igual a la familia de homomorfismos $(\psi_\delta : \mathcal{F}(\delta) \rightarrow \mathcal{G}(\delta))_{\delta \in \mathcal{T}_{U_i}}$. Por otro lado, el morfismo $0_{\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Z}(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U_i)}$ entre las gavillas $\mathcal{F}|_{U_i}$ y $\mathcal{G}|_{U_i}$ es el morfismo nulo definido por la familia de homomorfismos $(0_{Hom_{\mathcal{O}_Z}(\mathcal{F}(\mathcal{E}), \mathcal{G}(\mathcal{E}))})_{\mathcal{E} \in \mathcal{T}_{U_i}}$. Por lo tanto, nuestra hipótesis significa que $\psi_\delta = 0_{Hom_{\mathcal{O}_Z}(\mathcal{F}(\delta), \mathcal{G}(\delta))}$ para todo subconjunto abierto δ de U_i , para todo $i \in I$. En otras palabras, $\psi_\delta(t) = 0_{\mathcal{G}(\delta)}$ para cualesquiera $t \in \mathcal{F}(\delta)$ y $\delta \in \mathcal{T}_{U_i}$, para todo $i \in I$.

Para probar que $\psi = 0_{\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Z}(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U)}$ probaremos que para cualesquiera Γ subconjunto abierto de U y t sección local de la gavilla $\mathcal{F}$ sobre el abierto Γ se tiene que $\psi_\Gamma(t) = 0_{\mathcal{G}(\Gamma)}$. Para verificar esta igualdad, dado que $\psi_\Gamma(t)$ es una sección local de la gavilla $\mathcal{G}$ sobre el abierto Γ

que podemos escribir como $\Gamma = \cup_{\ell \in I} \Gamma \cap U_\ell$, bastará demostrar que para todo abierto $\Gamma \cap U_\ell$ de Γ se cumple que $\psi_\Gamma|_{\Gamma \cap U_\ell}(t) = 0_{\mathcal{G}(\Gamma \cap U_\ell)}$. Por lo tanto, sean $\ell \in I$ y $t \in \mathcal{F}(\Gamma)$, entonces desde el hecho que ψ es un morfismo se tiene que $\psi_\Gamma|_{\Gamma \cap U_\ell}(t) = \psi_{\Gamma \cap U_\ell}(t|_{\Gamma \cap U_\ell})$. Por otro lado, dado que $\Gamma \cap U_\ell$ es un subconjunto abierto de U_ℓ , la hipótesis de la Condición **G1** nos da la igualdad $\psi_{\Gamma \cap U_\ell}(t|_{\Gamma \cap U_\ell}) = 0_{\mathcal{G}(\Gamma \cap U_\ell)}$. Así, la Condición **G1** se cumple.

Condición G2: Si $(\varphi_i)_{i \in I}$ es una familia de secciones locales de la pregavilla $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Z}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ con $\varphi_i \in \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Z}(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U_i)$, para cada $i \in I$, tal que para cualesquiera índices $i, j \in I$ se tiene que $\varphi_i|_{U_i \cap U_j} = \varphi_j|_{U_i \cap U_j}$, entonces existe una sección $\varphi \in \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Z}(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U)$ con la propiedad de que $\rho_{U_i}^U(\varphi) = \varphi_i$, para cada $i \in I$.

Construiremos el morfismo φ . Esto significa definir un homomorfismo de grupos abelianos $\varphi_\delta : \mathcal{F}(\delta) \rightarrow \mathcal{G}(\delta)$ para cada subconjunto abierto δ de U , obteniendo así una familia de homomorfismos $(\varphi_\delta)_{\delta \in \mathcal{T}_U}$ tal que satisfaga las condiciones de compatibilidad con las aplicaciones restricción de $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$, y con sus estructuras de $\mathcal{O}_Z$ -módulos. Por tanto, sea δ un subconjunto abierto de U , necesitamos establecer la regla de asignación de φ_δ para cada elemento t de $\mathcal{F}(\delta)$. Ahora bien, ya que $\varphi_\delta(t)$ será una sección local de la gavilla $\mathcal{G}$ sobre el abierto δ y $\delta = \cup_{i \in I} \delta \cap U_i$ para determinar tal sección apoyados en el hecho de que $\mathcal{G}$ es una gavilla extenderemos la familia $(\varphi_{i, \delta \cap U_i}(t|_{\delta \cap U_i}))_{i \in I}$ de secciones de $\mathcal{G}$ definidas sobre los abiertos de la cubierta de δ . Para realizar esto será suficiente verificar que

$$\varphi_{i, \delta \cap U_i}(t|_{\delta \cap U_i})|_{\delta \cap U_i \cap U_j} = \varphi_{j, \delta \cap U_j}(t|_{\delta \cap U_j})|_{\delta \cap U_i \cap U_j}$$

para cada par de índices $i, j \in I$. Por tanto, sean $i, j \in I$, se sigue que

$$\varphi_{i, \delta \cap U_i}(t|_{\delta \cap U_i})|_{\delta \cap U_i \cap U_j} = \varphi_{i, \delta \cap U_i \cap U_j}(t|_{\delta \cap U_i}|_{\delta \cap U_i \cap U_j}) = \varphi_{i, \delta \cap U_i \cap U_j}(t|_{\delta \cap U_i \cap U_j}).$$

De igual forma,

$$\varphi_{j, \delta \cap U_j}(t|_{\delta \cap U_j})|_{\delta \cap U_i \cap U_j} = \varphi_{j, \delta \cap U_i \cap U_j}(t|_{\delta \cap U_j}|_{\delta \cap U_i \cap U_j}) = \varphi_{j, \delta \cap U_i \cap U_j}(t|_{\delta \cap U_i \cap U_j}).$$

Ahora bien, nuestra hipótesis $\varphi_i|_{U_i \cap U_j} = \varphi_j|_{U_i \cap U_j}$, para cada par $i, j \in I$, significa que para cualesquiera $i, j \in I$ y para todo abierto $\mathcal{E} \in \mathcal{T}_{U_i \cap U_j}$ los homomorfismos $\varphi_{i, \mathcal{E}} : \mathcal{F}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{G}(\mathcal{E})$ y $\varphi_{j, \mathcal{E}} : \mathcal{F}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{G}(\mathcal{E})$ son iguales, es decir, para cada $t \in \mathcal{F}(\mathcal{E})$ se cumple $\varphi_{i, \mathcal{E}}(t) = \varphi_{j, \mathcal{E}}(t)$. Por lo tanto, siendo $\delta \cap U_i \cap U_j$ un subconjunto abierto de $U_i \cap U_j$, se sigue que

$$\varphi_{i, \delta \cap U_i \cap U_j}(t|_{\delta \cap U_i \cap U_j}) = \varphi_{j, \delta \cap U_j \cap U_j}(t|_{\delta \cap U_i \cap U_j}),$$

y consecuentemente, $\varphi_{i, \delta \cap U_i}(t|_{\delta \cap U_i})|_{\delta \cap U_i \cap U_j} = \varphi_{j, \delta \cap U_j}(t|_{\delta \cap U_j})|_{\delta \cap U_i \cap U_j}$. De esta forma, existe $\varphi_\delta(t) \in \mathcal{G}(U)$ con la propiedad de que

$$(1.4.1) \quad \varphi_\delta(t)|_{\delta \cap U_i} = \varphi_{i, \delta \cap U_i}(t|_{\delta \cap U_i}), \text{ para todo } i \in I.$$

Más aún, si L es otro subconjunto abierto de U , entonces

$$(1.4.2) \quad \varphi_\delta(t)|_{\delta \cap L \cap U_i} = \varphi_{i, \delta \cap L \cap U_i}(t|_{\delta \cap L \cap U_i}), \text{ para todo } i \in I.$$

Estas propiedades de $\varphi_\delta(t)$ enumeradas como (1.4.1) y (1.4.2) las utilizaremos más adelante. Con lo anterior podemos definir

$$\begin{aligned} \varphi_\delta : \mathcal{F}(\delta) &\rightarrow \mathcal{G}(\delta) \\ t &\mapsto \varphi_\delta(t) \end{aligned}$$

para cada subconjunto abierto δ de U . Así, obtenemos una familia de homomorfismos de grupos abelianos $(\varphi_\delta : \mathcal{F}(\delta) \rightarrow \mathcal{G}(\delta))_{\delta \in \mathcal{T}_U}$ posible morfismo que requerimos. Lo único que falta mostrar es que esta familia, que llamaremos φ , es en efecto una sección de $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Z}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ sobre el abierto U y que su restricción $\rho_{U_i}^U(\varphi)$ a cada abierto U_i de la cubierta de U es igual al morfismo $\varphi_i \in \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Z}(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U_i)$, para cada índice $i \in I$. La pertenencia o no de la familia de homomorfismos $(\varphi_\delta : \mathcal{F}(\delta) \rightarrow \mathcal{G}(\delta))_{\delta \in \mathcal{T}_U}$ en $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Z}(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U)$ está condicionada a la conmutatividad de los siguientes diagramas

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(T) & \xrightarrow{\varphi_T} & \mathcal{G}(T) \\ \rho_{\mathcal{F}_R}^T \downarrow & & \downarrow \rho_{\mathcal{G}_R}^T \\ \mathcal{F}(R) & \xrightarrow{\varphi_R} & \mathcal{G}(R) \end{array}$$

para todo par $(R, T) \in \mathcal{T}_U^{(2)}$ con $R \subseteq T$, y

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_Z(\delta) \times \mathcal{F}(\delta) & \xrightarrow{\cdot|_\delta} & \mathcal{F}(\delta) \\ (id_{\mathcal{O}_Z(\delta)}, \varphi_\delta) \downarrow & & \downarrow \varphi_\delta \\ \mathcal{O}_Z(\delta) \times \mathcal{G}(\delta) & \xrightarrow{\cdot|_\delta} & \mathcal{G}(\delta) \end{array}$$

para todo $\delta \in \mathcal{T}_U$. Sea $t \in \mathcal{F}(T)$, demostraremos que $\rho_{\mathcal{G}_R}^T \circ \varphi_T(t)$ es igual a $\varphi_R \circ \rho_{\mathcal{F}_R}^T(t)$ en $\mathcal{G}(R)$. Puesto que R es un subconjunto abierto de U podemos escribirlo como $R = \cup_{\ell \in I} R \cap U_\ell$. Así, para probar la igualdad que necesitamos bastará demostrarla sobre los abiertos de esta cubierta de R . Es decir, demostraremos que $(\varphi_T(t)|_R)|_{R \cap U_\ell} = \varphi_R(t|_R)|_{R \cap U_\ell}$ para todo $\ell \in I$. Por tanto, sea $\ell \in I$, como $\mathcal{G}$ es en particular una pregavilla y $\varphi_T(t)$ es una sección local de $\mathcal{G}$, utilizando las propiedades tercera de pregavilla y (1.4.2) de φ_T obtenemos que

$$\begin{aligned} (\varphi_T(t)|_R)|_{R \cap U_\ell} &= \varphi_T(t)|_{R \cap U_\ell} \\ &= \varphi_T(t)|_{T \cap R \cap U_\ell} \\ &= \varphi_{\ell, T \cap R \cap U_\ell}(t|_{T \cap R \cap U_\ell}) \\ &= \varphi_{\ell, R \cap U_\ell}(t|_{R \cap U_\ell}). \end{aligned}$$

De igual modo, utilizando la propiedad (1.4.1) de φ_R seguida de la compatibilidad del morfismo φ_ℓ con las aplicaciones restricción, se tiene que

$$\varphi_R(t|_R)|_{R \cap U_\ell} = \varphi_{\ell, R \cap U_\ell}(t|_R|_{R \cap U_\ell}) = \varphi_{\ell, R \cap U_\ell}(t|_{R \cap U_\ell}).$$

Por lo tanto, logramos la igualdad solicitada y el primer diagrama conmuta. Verifiquemos ahora la conmutatividad del segundo diagrama. Sea $(\lambda, s) \in \mathcal{O}_Z(\delta) \times \mathcal{F}(\delta)$ probaremos que $\cdot|_\delta \circ id_{\mathcal{O}_Z(\delta)} \times \varphi_\delta(\lambda, s)$ es igual a $\varphi_\delta \circ \cdot|_\delta(\lambda, s)$ en $\mathcal{G}(\delta)$. Para esto, notemos que como δ es un subconjunto abierto de U la familia $(\delta \cap U_i)_{i \in I}$ de subconjuntos de U forma una cubierta abierta para δ y como $\mathcal{G}$ es una gavilla para probar la igualdad bastará demostrarla en los abiertos de dicha cubierta. Por tanto, sea $i \in I$ y $\delta \cap U_i$ el abierto correspondiente, utilizando las propiedades (1.4.1) de φ_δ y las de φ_i como elemento de $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Z}(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U_i)$, se tiene que

$$\begin{aligned} \varphi_\delta(\lambda \cdot s)|_{\delta \cap U_i} &= \varphi_{i, \delta \cap U_i}(\lambda \cdot s|_{\delta \cap U_i}) \\ &= \varphi_{i, \delta \cap U_i}(\lambda|_{\delta \cap U_i} \cdot s|_{\delta \cap U_i}) \\ &= \lambda|_{\delta \cap U_i} \cdot \varphi_{i, \delta \cap U_i}(s|_{\delta \cap U_i}) \\ &= \lambda|_{\delta \cap U_i} \cdot \varphi_\delta(s)|_{\delta \cap U_i} \\ &= \lambda \cdot \varphi_\delta(s)|_{\delta \cap U_i}, \end{aligned}$$

es decir, $\varphi_\delta(\lambda \cdot s) = \lambda \cdot \varphi_\delta(s)$, o equivalentemente, $\varphi_\delta \circ \cdot|_\delta(\lambda, s) = \cdot|_\delta \circ id_{\mathcal{O}_Z(\delta)} \times \varphi_\delta(\lambda, s)$. De modo que el segundo diagrama también es conmutativo. Por lo tanto, φ es una sección de $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Z}(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U)$. Finalmente, sea i un elemento de I , demostraremos que $\rho_{U_i}^U(\varphi) = \varphi_i$. Esto es, probaremos que para cada $\mathcal{E} \in \mathcal{T}_{U_i}$ los homomorfismos $\varphi_\mathcal{E} : \mathcal{F}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{G}(\mathcal{E})$ y $\varphi_{i, \mathcal{E}} : \mathcal{F}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{G}(\mathcal{E})$ son iguales. Por tanto, sean $\mathcal{E} \in \mathcal{T}_{U_i}$ y $t \in \mathcal{F}(\mathcal{E})$, debemos probar que $\varphi_\mathcal{E}(t) = \varphi_{i, \mathcal{E}}(t)$. Puesto que $\mathcal{E} \subseteq U_i \subseteq U$ es un subconjunto abierto de U tenemos $\mathcal{E} = \cup_{\ell \in I} \mathcal{E} \cap U_\ell$, es decir $(\mathcal{E} \cap U_\ell)_{\ell \in I}$ es una cubierta abierta de $\mathcal{E}$. Más aún, $\mathcal{G}$ es una gavilla, así, para probar la igualdad de las secciones $\varphi_\mathcal{E}(t)$ y $\varphi_{i, \mathcal{E}}(t)$ bastará verificar que

$$(1.4.3) \quad \varphi_\mathcal{E}(t)|_{\mathcal{E} \cap U_\ell} = \varphi_{i, \mathcal{E}}(t)|_{\mathcal{E} \cap U_\ell}$$

para cada abierto $\mathcal{E} \cap U_\ell$ de la cubierta de $\mathcal{E}$. Sea $\ell \in I$, si $\ell = i$, entonces utilizando directamente la propiedad (1.4.1) de $\varphi_\mathcal{E}$ resulta que $\varphi_\mathcal{E}(t)|_{\mathcal{E} \cap U_i} = \varphi_{i, \mathcal{E} \cap U_i}(t|_{\mathcal{E} \cap U_i})$. Por otro lado, la compatibilidad con las aplicaciones restricción de los homomorfismos que definen φ_i nos da $\varphi_{i, \mathcal{E}}(t)|_{\mathcal{E} \cap U_i} = \varphi_{i, \mathcal{E} \cap U_i}(t|_{\mathcal{E} \cap U_i})$. Consecuentemente, $\varphi_\mathcal{E}(t)|_{\mathcal{E} \cap U_i} = \varphi_{i, \mathcal{E}}(t)|_{\mathcal{E} \cap U_i}$. Así, en este caso se tiene la igualdad (1.4.3). Ahora, si $\ell \neq i$, entonces la situación no es tan inmediata como en el caso anterior, sin embargo, dado que $\mathcal{E} \cap U_\ell$ es un subconjunto abierto de U , lo podemos escribir como $\mathcal{E} \cap U_\ell = \cup_{k \in I} \mathcal{E} \cap U_\ell \cap U_k$. Luego, usando la misma técnica de prueba para la igualdad $\varphi_\mathcal{E}(t)|_{\mathcal{E} \cap U_\ell} = \varphi_{i, \mathcal{E}}(t)|_{\mathcal{E} \cap U_\ell}$, probaremos que $\varphi_\mathcal{E}(t)|_{\mathcal{E} \cap U_\ell} = \varphi_{i, \mathcal{E}}(t)|_{\mathcal{E} \cap U_\ell}$ para cada abierto $\mathcal{E} \cap U_\ell \cap U_k$ de la cubierta de $\mathcal{E} \cap U_\ell$. Esta igualdad ahora es fácil de probar

dadas: la propiedad (1.4.1), la hipótesis $\varphi_i|_{U_i \cap U_j} = \varphi_j|_{U_i \cap U_j}$ sobre la familia de morfismos $(\varphi_i)_{i \in I}$ y la compatibilidad de cada uno de ellos con las aplicaciones restricción. En efecto, primero notemos que

$$\begin{aligned}
 \varphi_{\mathcal{E}}(t)|_{\mathcal{E} \cap U_{\ell}}|_{\mathcal{E} \cap U_{\ell} \cap U_k} &= \varphi_{\ell, \mathcal{E} \cap U_{\ell}}(t|_{\mathcal{E} \cap U_{\ell}})|_{\mathcal{E} \cap U_{\ell} \cap U_k} \\
 &= \varphi_{\ell, \mathcal{E} \cap U_{\ell} \cap U_k}(t|_{\mathcal{E} \cap U_{\ell} \cap U_k}) \\
 &= \varphi_{k, \mathcal{E} \cap U_{\ell} \cap U_k}(t|_{\mathcal{E} \cap U_{\ell} \cap U_k}) \\
 &= \varphi_{k, \mathcal{E} \cap U_{\ell}}(t|_{\mathcal{E} \cap U_{\ell}})|_{\mathcal{E} \cap U_{\ell} \cap U_k} \\
 &= \varphi_{k, \mathcal{E}}(t)|_{\mathcal{E} \cap U_{\ell}}|_{\mathcal{E} \cap U_{\ell} \cap U_k},
 \end{aligned}$$

esto es, para cada $k \in I$ se tiene que $\varphi_{\mathcal{E}}(t)|_{\mathcal{E} \cap U_{\ell}} = \varphi_{k, \mathcal{E}}(t)|_{\mathcal{E} \cap U_{\ell}}$. Así, en particular, si $k = i$, entonces obtenemos la igualdad requerida. Esto implica que $\varphi_{\mathcal{E}}(t) = \varphi_{i, \mathcal{E}}(t)$ para todo $\mathcal{E} \in \mathcal{T}_{U_i}$ y $t \in \mathcal{F}(\mathcal{E})$. Por lo tanto, $\rho_{U_i}^U(\varphi) = \varphi_i$ para todo $i \in I$, la Condición G2 se cumple y en definitiva, $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Z}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ es una gavilla de grupos abelianos sobre Z .

De esta manera, con la finalidad de probar que $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Z}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ es un $\mathcal{O}_Z$ -módulo, la información reciente acerca de $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Z}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ junto con el hecho de que para cada conjunto abierto U de Z , $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Z|_U}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$ es un módulo sobre $\mathcal{O}_Z|_U$, nos sugiere averiguar si para esta familia de módulos su multiplicación escalar es compatible con las aplicaciones restricción. Por lo tanto, sean $(U, V) \in \mathcal{T}_Z \times \mathcal{T}_Z$ con $V \subseteq U$, verificaremos que el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{O}_Z(U) \times \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Z}(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U) & \xrightarrow{\cdot|_U} & \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Z}(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U) \\
 (\rho_{\mathcal{O}_Z|_V}^U, \rho_{\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Z}(\mathcal{F}, \mathcal{G})|_V}^U) \downarrow & & \downarrow \rho_{\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Z}(\mathcal{F}, \mathcal{G})|_V}^U \\
 \mathcal{O}_Z(V) \times \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Z}(\mathcal{F}, \mathcal{G})(V) & \xrightarrow{\cdot|_V} & \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Z}(\mathcal{F}, \mathcal{G})(V)
 \end{array}$$

conmuta. En efecto, si $(\lambda, \phi) \in \mathcal{O}_Z(U) \times \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Z}(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U)$, entonces $(\lambda \cdot \phi)|_V$ es la familia de homomorfismos $\mathcal{O}_Z(\Gamma)$ -lineales $((\lambda \cdot \phi)_{\Gamma} : \mathcal{F}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{G}(\Gamma))_{\Gamma \in \mathcal{T}_V}$, definidos explícitamente por $(\lambda \cdot \phi)_{\Gamma}(t) = \lambda|_{\Gamma} \cdot \phi_{\Gamma}(t)$ para cada $t \in \mathcal{F}(\Gamma)$, para todo $\Gamma \in \mathcal{T}_V$. Por otro lado, $\lambda|_V \cdot \phi|_V$ es igual a la familia de homomorfismos $((\lambda|_V \cdot \phi|_V)_{\beta} : \mathcal{F}(\beta) \rightarrow \mathcal{G}(\beta))_{\beta \in \mathcal{T}_V}$ donde para cada $\beta \in \mathcal{T}_V$ y cada $s \in \mathcal{F}(\beta)$ se define $(\lambda|_V \cdot \phi|_V)_{\beta}(s) = \lambda|_{V|_{\beta}} \cdot \phi|_{V|_{\beta}}(s) = \lambda|_{\beta} \cdot \phi_{\beta}(s)$. Esto es, $(\lambda \cdot \phi)|_V = \lambda|_V \cdot \phi|_V$.

Así, hemos definido por completo un $\mathcal{O}_Z$ -módulo $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Z}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ para cada par $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ de $\mathcal{O}_Z$ -módulos sobre un espacio anillado $(Z, \mathcal{O}_Z)$. Por simplicidad en base a la construcción anterior formulamos la siguiente:

Definición 1.17. Si $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son $\mathcal{O}_X$ -módulos sobre un espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$ la gavilla hom de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{G}$ es el $\mathcal{O}_X$ -módulo $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$.

Un resultado que utilizaremos más adelante acerca de esta gavilla es el siguiente:

Lema 1.18. *Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un espacio anillado, y sean $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ y $\mathcal{F}$ gavillas de $\mathcal{O}_X$ -módulos, se tiene que $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{G}_2)$ es isomorfo a $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}_1) \oplus \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}_2)$, como $\mathcal{O}_X$ -módulos.*

Demostración. Sea U un conjunto abierto de X , estableceremos un isomorfismo φ_U entre $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{G}_2)(U)$ y $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}_1) \oplus \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}_2)(U)$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que U no es vacío, por lo tanto, sea $f \in \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{G}_2)(U)$ dado por la familia de homomorfismos $\mathcal{O}_X(\mathcal{E})$ -lineales $(f_{\mathcal{E}} : \mathcal{F}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{G}_1(\mathcal{E}) \oplus \mathcal{G}_2(\mathcal{E}))_{\mathcal{E} \in \mathcal{T}_U}$. Definimos $\varphi_U(f) \in \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}_1)(U) \oplus \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}_2)(U)$ como el único par $(\varphi_U(f)_1, \varphi_U(f)_2)$, con $\varphi_U(f)_{i\mathcal{E}} = (\pi_i \circ f)_{\mathcal{E}} = \pi_{i\mathcal{E}} \circ f_{\mathcal{E}}$, para cada $i \in \{1, 2\}$, donde π_1 y π_2 son los morfismos proyección entre $\mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{G}_2$ y $\mathcal{G}_i$, para $i = 1$ y 2 , respectivamente, dados por $\pi_{i\delta}(s_1, s_2) = s_i$, para cualesquiera $\delta \in \mathcal{T}_U$, y $(s_1, s_2) \in \mathcal{G}_1(\delta) \oplus \mathcal{G}_2(\delta)$. Por otro lado, consideremos la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} \psi_U : \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}_1|_U) \oplus \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X|_U}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}_2|_U) &\rightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X|_U}(\mathcal{F}|_U, (\mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{G}_2)|_U) \\ (g_1, g_2) &\mapsto \psi_U(g_1, g_2) \end{aligned}$$

con $\psi_U(g_1, g_2)_{\mathcal{E}} = (g_1_{\mathcal{E}}, g_2_{\mathcal{E}})$ para cada $\mathcal{E} \in \mathcal{T}_X$. Se sigue que $\psi_U \circ \varphi_U$ y $\varphi_U \circ \psi_U$ son iguales a la identidad de $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{G}_2)(U)$ y de $(\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}_1) \oplus \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}_2))(U)$, respectivamente. Por lo tanto, una vez que verifiquemos la conmutatividad del siguiente diagrama se tendrá que el morfismo φ que define la familia $(\varphi_U)_{U \in \mathcal{T}_X}$ es un isomorfismo de $\mathcal{O}_X$ -módulos. Necesitamos probar que para cualquier subconjunto abierto V de U , el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{G}_2)(U) & \xrightarrow{\varphi_U} & (\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}_1) \oplus \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}_2))(U) \\ \rho_{\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{G}_2)_V^U} \downarrow & & \downarrow \rho_{\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}_1) \oplus \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}_2)_V^U} \\ \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{G}_2)(V) & \xrightarrow{\varphi_V} & (\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}_1) \oplus \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}_2))(V) \end{array}$$

es conmutativo. En efecto, sea $f \in \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{G}_2)(U)$, se sigue que $\varphi_U(f)|_V$ es igual a $(\varphi_U(f)_1, \varphi_U(f)_2)|_V = (\varphi_U(f)_1|_V, \varphi_U(f)_2|_V)$, donde $\varphi_U(f)_i|_{V\Gamma} : \mathcal{F}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{G}_i(\Gamma)$ están definidos por $\varphi_U(f)_i|_{V\Gamma}(s) = \pi_{i\Gamma}(f_{\Gamma}(s))$, para cualesquiera $s \in \mathcal{F}(\Gamma)$, $\Gamma \in \mathcal{T}_V$ y $i \in \{1, 2\}$. Por otro lado, $\varphi_V(f|_V)$ es igual a $(\varphi_V(f|_V)_1, \varphi_V(f|_V)_2)$, donde $\varphi_V(f|_V)_{i\beta} : \mathcal{F}(\beta) \rightarrow \mathcal{G}_i(\beta)$ están definidos por $\varphi_V(f|_V)_{i\beta}(s) = \pi_{i\beta}(f|_{V\beta}(s)) = \pi_{i\beta}(f_{\beta}(s))$, para cualesquiera $s \in \mathcal{F}(\beta)$, $\beta \in \mathcal{T}_V$ y $i \in \{1, 2\}$. Por lo tanto, $\varphi_U(f)|_V = \varphi_V(f|_V)$ y el diagrama conmuta. $\square$

Ahora, si en $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ especificamos el $\mathcal{O}_X$ -módulo $\mathcal{F}$ por $\mathcal{O}_X$, entonces lo que obtenemos es la gavilla de $\mathcal{O}_X$ -módulos $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{G})$, la cual, como veremos a continuación,

es isomorfa a $\mathcal{G}$. Consecuentemente, sus secciones locales $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{G})(U)$ para cada abierto U de X estarán determinadas por las secciones locales de $\mathcal{G}$ sobre U y en particular, cada sección global de $\mathcal{G}$ será un morfismo de $\mathcal{O}_X$ -módulos entre las gavillas $\mathcal{O}_X$ y $\mathcal{G}$.

En efecto, definiremos un isomorfismo de $\mathcal{O}_X$ -módulos Φ entre $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{G})$ y $\mathcal{G}$. Primero que nada, notemos que si U es un conjunto abierto de X y $\varphi \in \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{G})(U)$, entonces $\varphi \in Hom_{\mathcal{O}_X|_U}(\mathcal{O}_X|_U, \mathcal{G}|_U)$. Así, a cada elemento φ de $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{G})(U)$ le podemos asociar la sección local $\varphi_U(1_{\mathcal{O}_X(U)})$ de $\mathcal{G}$ sobre U . En otras palabras, para cada abierto U de X tenemos definida una aplicación

$$\begin{aligned} \Phi_U : Hom_{\mathcal{O}_X|_U}(\mathcal{O}_X|_U, \mathcal{G}|_U) &\rightarrow \mathcal{G}(U) \\ \varphi &\mapsto \varphi_U(1_{\mathcal{O}_X(U)}). \end{aligned}$$

Esta aplicación por la naturaleza de los elementos del $\mathcal{O}_X(U)$ -módulo $Hom_{\mathcal{O}_X|_U}(\mathcal{O}_X|_U, \mathcal{G}|_U)$ es obviamente un homomorfismo de $\mathcal{O}_X(U)$ -módulos. Por lo tanto, al recorrer todos los subconjuntos abiertos de X obtenemos una familia de $\mathcal{O}_X(U)$ -homomorfismos que claramente son $\mathcal{O}_X(U)$ -lineales y compatibles con las aplicaciones restricción. Esta familia será la que definirá nuestro morfismo Φ . Para lo cual, solo falta demostrar que para cada par $(U, V) \in \mathcal{T}_X \times \mathcal{T}_X$ con $V \subseteq U$ y $W \in \mathcal{T}_X$ la conmutatividad de los siguientes diagramas:

$$\begin{array}{ccc} Hom_{\mathcal{O}_X|_U}(\mathcal{O}_X|_U, \mathcal{G}|_U) & \xrightarrow{\Phi_U} & \mathcal{G}(U) \\ \rho_{\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{G})_V^U} \downarrow & & \downarrow \rho_{\mathcal{G}_V^U} \\ Hom_{\mathcal{O}_X|_V}(\mathcal{O}_X|_V, \mathcal{G}|_V) & \xrightarrow{\Phi_V} & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

y

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X(W) \times Hom_{\mathcal{O}_X|_W}(\mathcal{O}_X|_W, \mathcal{G}|_W) & \xrightarrow{\cdot|_W} & Hom_{\mathcal{O}_X|_W}(\mathcal{O}_X|_W, \mathcal{G}|_W) \\ (id_{\mathcal{O}_X(W)}, \Phi_W) \downarrow & & \downarrow \Phi_W \\ \mathcal{O}_X(W) \times \mathcal{G}(W) & \xrightarrow{\cdot|_W} & \mathcal{G}(W) \end{array}$$

se cumple. Consideremos φ un elemento de $Hom_{\mathcal{O}_X|_U}(\mathcal{O}_X|_U, \mathcal{G}|_U)$ y (λ, φ) un elemento de $\mathcal{O}_X(W) \times Hom_{\mathcal{O}_X|_W}(\mathcal{O}_X|_W, \mathcal{G}|_W)$, se sigue que $\rho_V^U(\Phi_U(\varphi)) = \varphi_U(1_{\mathcal{O}_X(U)})|_V$ es igual a $\varphi_V(1_{\mathcal{O}_X|_V}) = \varphi_V(1_{\mathcal{O}_X(V)}) = \varphi|_V(1_{\mathcal{O}_X(V)}) = \Phi_V(\varphi|_V) = \Phi_V(\rho_V^U(\varphi))$ y $\cdot|_W \circ (id_{\mathcal{O}_X(W)}, \Phi_W)$ aplicado en (λ, φ) es igual a $\cdot|_W(\lambda, \varphi_W(1_{\mathcal{O}_X(W)})) = \lambda \cdot \varphi_W(1_{\mathcal{O}_X(W)}) = (\lambda \cdot \varphi)_W(1_{\mathcal{O}_X(W)})$ que a su vez es igual a $\Phi_W(\lambda \cdot \varphi) = \Phi_W(\cdot|_W(\lambda, \varphi))$ como queríamos.

El morfismo Φ es un isomorfismo y su morfismo inverso lo definimos mediante la familia de homomorfismos

$$\begin{aligned}\Phi_U^{-1} : \mathcal{G}(U) &\rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_X|_U}(\mathcal{O}_X|_U, \mathcal{G}|_U) \\ \alpha &\mapsto \psi_\alpha\end{aligned}$$

parametrizada por los abiertos U de X , donde el morfismo de $\mathcal{O}_X|_U$ -módulos ψ_α , está dado por la familia

$$\begin{aligned}\psi_{\alpha, \mathcal{E}} : \mathcal{O}_X(\mathcal{E}) &\rightarrow \mathcal{G}(\mathcal{E}) \\ r &\mapsto r \cdot \alpha|_{\mathcal{E}}\end{aligned}$$

parametrizada por los subconjuntos abiertos $\mathcal{E}$ de U . Es claro que Φ^{-1} está bien definido, es compatible con las aplicaciones restricción y con la multiplicación escalar subyacente. Así, lo único que falta demostrar son las igualdades $\Phi \circ \Phi^{-1} = id_{\mathcal{G}}$ y $\Phi^{-1} \circ \Phi = id_{\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{G})}$. Sea U un subconjunto abierto de X y sea $\alpha \in \mathcal{G}(U)$, se sigue que $\Phi^{-1}(\alpha) = \psi_\alpha$ es el morfismo definido por la familia

$$\begin{aligned}\psi_{\alpha, \mathcal{E}} : \mathcal{O}_X(\mathcal{E}) &\rightarrow \mathcal{G}(\mathcal{E}) \\ r &\mapsto r \cdot \alpha|_{\mathcal{E}}\end{aligned}$$

cuya imagen bajo el morfismo Φ , es la sección de $\mathcal{G}$ dada por

$$\psi_{\alpha, U}(1_{\mathcal{O}_X(U)}) = 1_{\mathcal{O}_X(U)} \cdot \alpha|_U = 1_{\mathcal{O}_X(U)} \cdot \alpha = \alpha.$$

Esto es, $\Phi_U \circ \Phi_U^{-1} = id_{\mathcal{G}(U)}$ para cada conjunto abierto U de X , por lo tanto, $\Phi \circ \Phi^{-1} = id_{\mathcal{G}}$. De igual manera, si $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{O}_X|_U}(\mathcal{O}_X|_U, \mathcal{G}|_U)$, entonces este morfismo es exactamente el morfismo $\psi_{\varphi_U(1_{\mathcal{O}_X(U)})}$ definido por la familia de homomorfismos

$$\begin{aligned}\psi_{\varphi_U(1_{\mathcal{O}_X(U)}), \mathcal{E}} : \mathcal{O}_X(\mathcal{E}) &\rightarrow \mathcal{G}(\mathcal{E}) \\ r &\mapsto r \cdot \varphi_U(1_{\mathcal{O}_X(U)})|_{\mathcal{E}}\end{aligned}$$

para todo $\mathcal{E} \in \mathcal{T}_U$. Ya que para cada subconjunto abierto $\mathcal{E}$ de U y todo $r \in \mathcal{O}_X(\mathcal{E})$ tenemos

$$\psi_{\varphi_U(1_{\mathcal{O}_X(U)}), \mathcal{E}}(r) = r \cdot \varphi_U(1_{\mathcal{O}_X(U)})|_{\mathcal{E}} = r \cdot \varphi_{\mathcal{E}}(1_{\mathcal{O}_X(U)}|_{\mathcal{E}}) = r \cdot \varphi_{\mathcal{E}}(1_{\mathcal{O}_X(\mathcal{E})}) = \varphi_{\mathcal{E}}(r).$$

En otras palabras, $\Phi_U^{-1} \circ \Phi_U(\varphi) = \varphi$ para cada $U \in \mathcal{T}_X$ y por lo tanto $\Phi^{-1} \circ \Phi = id_{\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{G})}$.

En conclusión tenemos que $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{G}) \cong \mathcal{G}$. Y en particular, para sus secciones globales se cumple que $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{G})(X) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{G}) \cong \mathcal{G}(X)$.

Similarmente, si $\mathcal{F}$ es la gavilla $\mathcal{O}_X^n$, entonces llegamos a que $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X^n, \mathcal{G}) \cong \mathcal{G}^n$, donde los $\mathcal{O}_X$ -módulos $\mathcal{O}_X^n$ y $\mathcal{G}^n$ son respectivamente $\mathcal{O}_X^n = \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}_X$ y $\mathcal{G}^n = \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{G}$. Además, al igual que en el caso anterior, observamos que sus secciones globales quedan determinadas por $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X^n, \mathcal{G}) \cong \mathcal{G}(X)^n$.

Por otro lado, si especificamos el $\mathcal{O}_X$ -módulo $\mathcal{G}$ por $\mathcal{O}_X$, entonces lo que obtenemos es el $\mathcal{O}_X$ -módulo $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)$ cuyas secciones locales, para los abiertos de U de X ,

están dadas por $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)(U) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_X|_U}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{O}_X|_U)$. Así, un elemento φ de $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)(U)$ será una familia de homomorfismos $(\varphi_{\mathcal{E}} : \mathcal{F}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{O}_X(\mathcal{E}))_{\mathcal{E} \in \mathcal{T}_U}$ parametrizada por los abiertos $\mathcal{E}$ de U . Ahora bien, recordando de la teoría de módulos que si A es un anillo y M un A -módulo, entonces la colección de las aplicaciones A -lineales de M en A recibe un nombre particular y una notación específica, denominaremos a $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)$ la *gavilla dual* de $\mathcal{F}$ y la denotaremos por $\mathcal{F}^\vee$. Esto es, $\mathcal{F}^\vee = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)$.

Respecto a este $\mathcal{O}_X$ -módulo $\mathcal{F}^\vee$ tenemos el siguiente resultado.

Proposición 1.19. *Si $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son gavillas de $\mathcal{O}_X$ -módulos sobre un espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$, entonces existe un morfismo de $\mathcal{O}_X$ -módulos de $\mathcal{F}^\vee \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ en $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$.*

Demostración. De acuerdo con la propiedad universal de la gavilla asociada, para definir este morfismo de gavillas bastará definir un morfismo entre las pregavillas

$$U \mapsto \mathcal{F}^\vee(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U) \quad \text{y} \quad U \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{O}_X|_U}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$$

donde $U \in \mathcal{T}_X$. Ahora bien, definir un morfismo de esta naturaleza, significa definir un homomorfismo de $\mathcal{O}_X(U)$ -módulos

$$\theta_U : \mathcal{F}^\vee(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U) \rightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U)$$

para cada conjunto abierto U de X , los cuales deberán ser compatibles con las aplicaciones restricción de dichas pregavillas.

Sea U un conjunto abierto de X , si U es vacío, entonces los $\mathcal{O}_X(U)$ -módulos en cuestión son simplemente el $\mathbb{Z}$ -módulo $\{0\}$, de modo que en este caso θ_U es la aplicación nula. Luego, en conformidad con la propiedad universal del producto tensorial de la teoría de módulos (Proposición 2.12 de [1] página 24), para definir un homomorfismo $\mathcal{O}_X(U)$ -lineal de $\mathcal{F}^\vee(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U)$ en $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U)$ bastará definir una aplicación $\mathcal{O}_X(U)$ -bilineal de $\mathcal{F}^\vee(U) \oplus \mathcal{G}(U)$ en $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U)$. Para realizar esto, consideremos la siguiente regla de asignación,

$$\begin{aligned} \theta'_U : \mathcal{F}^\vee(U) \oplus \mathcal{G}(U) &\rightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U) \\ (s, t) &\mapsto \theta'_U(s, t) \end{aligned}$$

donde el morfismo $\theta'_U(s, t)$ entre las gavillas $\mathcal{F}|_U$ y $\mathcal{G}|_U$ está dado por

$$\begin{aligned} \theta'_U(s, t)_\mathcal{E} : \mathcal{F}(\mathcal{E}) &\rightarrow \mathcal{G}(\mathcal{E}) \\ r &\mapsto \theta'_U(s, t)_\mathcal{E}(r) = s_\mathcal{E}(r) \cdot t|_\mathcal{E} \end{aligned}$$

para cada subconjunto abierto $\mathcal{E}$ de U . Claramente, para todo $\mathcal{E} \in \mathcal{T}_U$, el homomorfismo $\theta'_U(s, t)_\mathcal{E}$ está bien definido. Pues $s_\mathcal{E}(r) \cdot t|_\mathcal{E} \in \mathcal{G}(\mathcal{E})$, para cada $r \in \mathcal{F}(\mathcal{E})$ y si $r, r' \in \mathcal{F}(\mathcal{E})$ son

tales que $r = r'$, entonces $s_{\mathcal{E}}(r) \cdot t|_{\mathcal{E}} = s_{\mathcal{E}}(r') \cdot t|_{\mathcal{E}}$, pues el homomorfismo $s_{\mathcal{E}}$ y la multiplicación escalar en el $\mathcal{O}_X(\mathcal{E})$ -módulo $\mathcal{G}(\mathcal{E})$ están bien definidos.

Esta familia de homomorfismos que definen $\theta'_U(s, t)$ es también compatible con las aplicaciones restricción correspondientes y con las estructuras de $\mathcal{O}_X|_U$ -módulos de $\mathcal{F}|_U$ y $\mathcal{G}|_U$, de modo que el morfismo que definen es en realidad un morfismo de $\mathcal{O}_X|_U$ -módulos entre $\mathcal{F}|_U$ y $\mathcal{G}|_U$, por lo que $\theta'_U(s, t)$ es un elemento de $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U)$, esto es, θ'_U cae bien en el codominio.

En efecto, sean R, T subconjuntos abiertos de U , tales que $R \subseteq T$ y sea también $\mathcal{E}$ un subconjunto abierto de U , necesitamos probar que los siguientes diagramas

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(T) & \xrightarrow{\theta'_U(s, t)_T} & \mathcal{G}(T) \\ \rho_{\mathcal{F}}^T \downarrow & & \downarrow \rho_{\mathcal{G}}^T \\ \mathcal{F}(R) & \xrightarrow{\theta'_U(s, t)_R} & \mathcal{G}(R) \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X(\mathcal{E}) \times \mathcal{F}(\mathcal{E}) & \xrightarrow{\cdot|_{\mathcal{E}}} & \mathcal{F}(\mathcal{E}) \\ (id_{\mathcal{O}_X(\mathcal{E})}, \theta'_U(s, t)_{\mathcal{E}}) \downarrow & & \downarrow \theta'_U(s, t)_{\mathcal{E}} \\ \mathcal{O}_X(\mathcal{E}) \times \mathcal{G}(\mathcal{E}) & \xrightarrow{\cdot|_{\mathcal{E}}} & \mathcal{G}(\mathcal{E}) \end{array}$$

son conmutativos. Sea $r \in \mathcal{F}(T)$, debemos verificar la igualdad $\theta'_U(s, t)_T(r)|_R = \theta'_U(s, t)_R(r|_R)$. Por un lado tenemos que $\theta'_U(s, t)_T(r)|_R = (s_T(r) \cdot t|_T)|_R = s_T(r)|_R \cdot t|_T|_R = s_R(r|_R) \cdot t|_R$. Mientras que por otro lado $\theta'_U(s, t)_R(r|_R) = s_R(r|_R) \cdot t|_R$. Por lo tanto, el primer diagrama conmuta. Consideremos ahora un elemento (λ, σ) de $\mathcal{O}_X(\mathcal{E}) \times \mathcal{F}(\mathcal{E})$ probaremos que $(\theta'_U(s, t)_{\mathcal{E}} \circ \cdot|_{\mathcal{E}})(\lambda, \sigma)$ es igual a $((\cdot|_{\mathcal{E}}) \circ (id_{\mathcal{O}_X(\mathcal{E})}, \theta'_U(s, t)_{\mathcal{E}}))(\lambda, \sigma)$. En una dirección tenemos que

$$(\cdot|_{\mathcal{E}}) \circ (id_{\mathcal{O}_X(\mathcal{E})}, \theta'_U(s, t)_{\mathcal{E}})(\lambda, \sigma) = \cdot|_{\mathcal{E}}(\lambda, \theta'_U(s, t)_{\mathcal{E}}(\sigma)) = \lambda \cdot s_{\mathcal{E}}(\sigma) \cdot t|_{\mathcal{E}}.$$

Mientras que para la otra dirección resulta que

$$\theta'_U(s, t)_{\mathcal{E}} \circ \cdot|_{\mathcal{E}}(\lambda, \sigma) = \theta'_U(s, t)_{\mathcal{E}}(\lambda \cdot \sigma) = s_{\mathcal{E}}(\lambda \cdot \sigma) \cdot t|_{\mathcal{E}} = \lambda \cdot s_{\mathcal{E}}(\sigma) \cdot t|_{\mathcal{E}}$$

Por lo tanto, el segundo diagrama también conmuta. Lo que sigue, es probar que θ'_U es $\mathcal{O}_X(U)$ -bilineal. Una vez que logremos esto como consecuencia tendremos una aplicación de $\mathcal{O}_X(U)$ -módulos bien definida y explícitamente determinada por

$$\begin{aligned} \theta_U : \mathcal{F}^{\vee}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U) &\rightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U) \\ s \otimes t &\mapsto \theta_U(s \otimes t) = \theta'_U(s, t), \end{aligned}$$

De esta manera, para cada conjunto abierto U de X , no vacío habremos construido un morfismo de $\mathcal{O}_X$ -módulos. En realidad lo que tendremos será una familia de homomorfismos $\mathcal{O}_X(U)$ -lineales

$$(1.4.4) \quad (\theta_U : \mathcal{F}^{\vee}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U) \rightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U))_{U \in \mathcal{T}_X},$$

los cuales definirán el morfismo de pregavillas buscado. La última afirmación quedará condicionada solamente a la conmutatividad del siguiente diagrama:

$$(1.4.5) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{F}^\vee(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U) & \xrightarrow{\theta_U} & \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U) \\ \downarrow (\rho_{\mathcal{F}^\vee}^T, \rho_{\mathcal{G}}^T)_R & & \downarrow \rho_{\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})}^T \\ \mathcal{F}^\vee(V) \otimes_{\mathcal{O}_X(V)} \mathcal{G}(V) & \xrightarrow{\theta_V} & \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})(V) \end{array}$$

para cada par $(U, V) \in \mathcal{T}_X^{(2)}$ con $V \subseteq U$. Lo cual nos dice que la familia (1.4.4) es compatible con las aplicaciones restricción.

En esta dirección, demostremos que θ'_U es $\mathcal{O}_X(U)$ -bilineal. Ya tenemos que θ'_U cae bien en el codominio. Por tanto, sean (s, t) y (s', t') en $\mathcal{F}^\vee(U) \oplus \mathcal{G}(U)$ tales que $(s, t) = (s', t')$, consecuentemente, para cada subconjunto abierto $\mathcal{E}$ de U se sigue que $s_\mathcal{E} = s'_\mathcal{E}$ y $t|_\mathcal{E} = t'|_\mathcal{E}$. Así, para cada sección $r \in \mathcal{F}(\mathcal{E})$ resulta que $s_\mathcal{E}(r) \cdot t|_\mathcal{E} = s'_\mathcal{E}(r) \cdot t'|_\mathcal{E}$. Por lo tanto, para todo subconjunto abierto $\mathcal{E} \in \mathcal{T}_U$, se tiene que los homomorfismos $\theta'_U(s, t)_\mathcal{E} : \mathcal{F}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{G}(\mathcal{E})$ y $\theta'_U(s', t')_\mathcal{E} : \mathcal{F}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{G}(\mathcal{E})$ son iguales, es decir $\theta'_U(s, t) = \theta'_U(s', t')$. Así, θ'_U está bien definida.

Probaremos ahora que θ'_U es $\mathcal{O}_X(U)$ -bilineal. Sean $s, s' \in \mathcal{F}^\vee(U)$ y $t \in \mathcal{G}(U)$ demostraremos para la primer coordenada que $\theta'_U(s + s', t) = \theta'_U(s, t) + \theta'_U(s', t)$ y que $\theta'_U(\lambda s, t) = \lambda \theta'_U(s, t)$ para cada $\lambda \in \mathcal{O}_X(U)$. Análogamente para la segunda coordenada. Ahora bien, la igualdad de morfismos $\theta'_U(s + s', t) = \theta'_U(s, t) + \theta'_U(s', t)$ significa que para cada subconjunto abierto $\mathcal{E}$ de U y para toda sección $r \in \mathcal{F}(\mathcal{E})$, se cumple que $\theta'_U(s + s', t)_\mathcal{E}(r) = (\theta'_U(s, t) + \theta'_U(s', t))_\mathcal{E}(r)$. Por lo tanto, sean $\mathcal{E} \in \mathcal{T}_U$ y $r \in \mathcal{F}(\mathcal{E})$, por las definiciones que hemos dado se sigue que

$$\begin{aligned} \theta'_U(s + s', t)_\mathcal{E}(r) &= (s + s')_\mathcal{E}(r) \cdot t|_\mathcal{E} \\ &= (s_\mathcal{E} + s'_\mathcal{E})(r) \cdot t|_\mathcal{E} \\ &= (s_\mathcal{E}(r) + s'_\mathcal{E}(r)) \cdot t|_\mathcal{E} \\ &= s_\mathcal{E}(r) \cdot t|_\mathcal{E} + s'_\mathcal{E}(r) \cdot t|_\mathcal{E}. \end{aligned}$$

Mientras que por el otro lado

$$\begin{aligned} (\theta'_U(s, t) + \theta'_U(s', t))_\mathcal{E}(r) &= (\theta'_U(s, t)_\mathcal{E} + \theta'_U(s', t)_\mathcal{E})(r) \\ &= \theta'_U(s, t)_\mathcal{E}(r) + \theta'_U(s', t)_\mathcal{E}(r) \\ &= s_\mathcal{E}(r) \cdot t|_\mathcal{E} + s'_\mathcal{E}(r) \cdot t|_\mathcal{E}. \end{aligned}$$

Así, la igualdad se cumple. En seguida, tomemos un escalar $\lambda \in \mathcal{O}_X(U)$ y sean $\mathcal{E}$ un subconjunto abierto de U y $r \in \mathcal{F}(\mathcal{E})$ una sección, entonces

$$\theta'_U(\lambda.s, t)_\mathcal{E}(r) = (\lambda.s)_\mathcal{E}(r) \cdot t|_\mathcal{E} = \lambda|_\mathcal{E}.s_\mathcal{E}(r) \cdot t|_\mathcal{E} = \lambda|_\mathcal{E}.\theta'_U(s, t)_\mathcal{E}(r).$$

Por lo tanto, $\theta'_U(\lambda s, t) = \lambda \theta'_U(s, t)$. La linealidad en la segunda entrada se sigue de manera similar por ejemplo, si $s \in \mathcal{F}^\vee(U)$ y $t, t' \in \mathcal{G}(U)$, entonces para cada subconjunto abierto $\mathcal{E}$ de U y sección $r \in \mathcal{F}(\mathcal{E})$, se tiene que

$$\begin{aligned} \theta'_U(s, t + t')|_{\mathcal{E}}(r) &= s_{\mathcal{E}}(r) \cdot (t + t')|_{\mathcal{E}} \\ &= s_{\mathcal{E}}(r) \cdot (t|_{\mathcal{E}} + t'|_{\mathcal{E}}) \\ &= s_{\mathcal{E}}(r) \cdot t|_{\mathcal{E}} + s_{\mathcal{E}}(r) \cdot t'|_{\mathcal{E}} \\ &= \theta'_U(s, t)|_{\mathcal{E}}(r) + \theta'_U(s, t')|_{\mathcal{E}}(r). \end{aligned}$$

Esto es, $\theta'_U(s, t + t') = \theta'_U(s, t) + \theta'_U(s, t')$. La multiplicación por escalar también es clara.

De acuerdo a lo que mencionamos, existe un homomorfismo de $\mathcal{O}_X(U)$ -módulos que llamamos θ_U (ahora sin el apóstrofe) entre $\mathcal{F}^\vee(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U)$ y $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U)$ para cada conjunto abierto U de X . Estos homomorfismos θ_U parametrizados por los abiertos de X definirán el morfismo de pregavillas que buscamos, que nos dará nuestro morfismo de gavillas deseado.

Así pues, verifiquemos la compatibilidad de los homomorfismos θ_U con las aplicaciones restricción. Sean U y V conjuntos abiertos de X con $V \subseteq U$, y sea $s \otimes t \in \mathcal{F}^\vee(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U)$, entonces para cada subconjunto abierto $\mathcal{E} \in \mathcal{T}_V$ y sección $r \in \mathcal{F}(\mathcal{E})$, se tiene que

$$\begin{aligned} (\theta_U(s \otimes t)|_V)|_{\mathcal{E}}(r) &= \theta_U(s \otimes t)|_{\mathcal{E}}(r) \\ &= s_{\mathcal{E}}(r) \cdot t|_{\mathcal{E}} \\ &= (s|_V)_{\mathcal{E}}(r) \cdot (t|_V)|_{\mathcal{E}} \\ &= \theta_V(s|_V \otimes t|_V)|_{\mathcal{E}}(r) \\ &= \theta_V((s \otimes t)|_V)|_{\mathcal{E}}(r) \end{aligned}$$

Es decir, los morfismos $\theta_U(s \otimes t)|_V$ y $\theta_V((s \otimes t)|_V)$ elementos de $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})(V)$ son iguales, esto es, el diagrama (1.4.5) es conmutativo. De esta forma la familia de homomorfismos $(\theta_U)_{U \in \mathcal{T}_X}$ definen un morfismo de gavillas entre $\mathcal{F}^\vee \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ y $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, mejor aún, definen un morfismo de $\mathcal{O}_X$ -módulos entre $\mathcal{F}^\vee \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ y $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ y la prueba de la proposición queda completada. $\square$

1.5. $\mathcal{O}_X$ -módulos Localmente Libres de Rango Finito

Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un espacio anillado, una vez definido el dual de un $\mathcal{O}_X$ -módulo $\mathcal{F}$ sobre el espacio topológico X una inquietud que surge de manera natural es averiguar si se cumple

$\mathcal{F}^{\vee\vee} \cong \mathcal{F}$, pues en analogía con la teoría de módulos tal propiedad se verifica, por ejemplo, para el caso de módulos libres de rango finito, o más particularmente, para el caso de espacios vectoriales de dimensión finita. Esta inquietud es una de las motivaciones que nos conducen directamente a introducir el concepto de $\mathcal{O}_X$ -módulo *localmente libre de rango finito*, pues para esta clase de gavillas la validez de dicha propiedad se satisface. Sin embargo, las principales motivaciones para introducir estas gavillas son otras dos: la primera es que si por lo menos una de las gavillas de la Proposición 1.19 es un $\mathcal{O}_X$ -módulo de este tipo, entonces el morfismo dado en dicha proposición resulta ser un isomorfismo de $\mathcal{O}_X$ -módulos y tal isomorfismo juega un papel primordial en la construcción del grupo de Picard de X . Finalmente la segunda motivación principal es que las gavillas de $\mathcal{O}_X$ -módulos localmente libres de rango uno son las piezas clave que definen $\text{Pic}(X)$. Por ello en esta sección estudiaremos los $\mathcal{O}_X$ -módulos localmente libres de rango finito y en particular aquellos cuyo rango es igual a uno.

Ahora bien, definir el concepto de $\mathcal{O}_X$ -módulo localmente libre de rango finito nos lleva primeramente a establecer las nociones de $\mathcal{O}_X$ -módulo *libre* y *libre de rango finito* que haremos a continuación.

Definición 1.20. Sean $(X, \mathcal{O}_X)$ un espacio anillado y $\mathcal{F}$ una gavilla de $\mathcal{O}_X$ -módulos. $\mathcal{F}$ es libre si es isomorfa a una suma directa de copias de la gavilla estructural de X . Más aún, es libre de rango finito si el número de copias de $\mathcal{O}_X$ en la suma directa es un número finito; este número se denomina el rango de $\mathcal{F}$.

En otras palabras, un $\mathcal{O}_X$ -módulo $\mathcal{F}$ es libre sí, y sólo, si existe un conjunto J no vacío tal que $\mathcal{F} \cong \bigoplus_{i \in J} \mathcal{O}_X$, suma directa que denotaremos por $\mathcal{O}_X^{(J)}$. Mientras que $\mathcal{F}$ es libre de rango n , si es isomorfo a $\bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}_X$, para algún $n \in \mathbb{N}$. Al $\mathcal{O}_X$ -módulo $\bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}_X$ lo denotaremos por $\mathcal{O}_X^n$. Sistemáticamente podemos ver que estos conceptos no son vacíos, ya que, para cada espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$ su gavilla estructural $\mathcal{O}_X$ constituye por excelencia un $\mathcal{O}_X$ -módulo libre de rango 1.

Lo siguiente que nos interesa conocer sobre los $\mathcal{O}_X$ -módulos libres de rango finito son sus grupos de gérmenes. Para lo cual tenemos la siguiente:

Proposición 1.21. Si $(X, \mathcal{O}_X)$ es un espacio anillado y $\mathcal{G}$ es un $\mathcal{O}_X$ -módulo libre de rango s , con $s \in \mathbb{N}$, entonces $\mathcal{G}_p$ es un $\mathcal{O}_{X,p}$ -módulo libre de rango s para cada $p \in X$.

Demostración. Sea p un punto de X , como $\mathcal{G}$ es un $\mathcal{O}_X$ -módulo libre de rango s , se sigue que $\mathcal{G} \cong \mathcal{O}_X^s$, de modo que $\mathcal{G}_p \cong (\mathcal{O}_X^s)_p$. Por otro lado, se cumple que $(\mathcal{O}_X^s)_p \cong (\mathcal{O}_{X,p})^s$. Pues de manera general para cada $p \in X$ el grupo de gérmenes en p de una suma directa

de gavillas sobre un espacio topológico X es isomorfo a la suma directa de los grupos de gérmenes en p de las gavillas. $\square$

Definimos ahora los conceptos de $\mathcal{O}_X$ -módulo *localmente libre* y de $\mathcal{O}_X$ -módulo *localmente libre de rango finito*.

Definición 1.22. Sea $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$ -módulo sobre un espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$. $\mathcal{F}$ es *localmente libre* si existen un conjunto J no vacío y una cubierta abierta $(U_j)_{j \in J}$ de X tal que la restricción de $\mathcal{F}$ a U_j es un $\mathcal{O}_X|_{U_j}$ -módulo libre, para cada $j \in J$.

Equivalentemente, una gavilla de $\mathcal{O}_X$ -módulos $\mathcal{F}$ es localmente libre si localmente es isomorfo a una suma directa de copias de la gavilla estructural de un espacio anillado. Esto es, $\mathcal{F}$ es localmente libre si para cada punto x de X es posible encontrar un conjunto abierto $V \subseteq X$, tal que $x \in V$ y la restricción $\mathcal{F}|_V$ de $\mathcal{F}$ a V es isomorfa a $\mathcal{O}_X|_V^{(I)}$ como $\mathcal{O}_X|_V$ -módulos, para cierto conjunto I no vacío. Este conjunto I que depende del abierto V , puede tener cardinalidad finita o infinita; su cardinalidad es el *rango* de $\mathcal{F}|_V$, es decir el número de copias de $\mathcal{O}_X|_V$ necesarias en la suma directa isomorfa a $\mathcal{F}|_V$. Si X es conexo y $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{O}_X$ -módulo localmente libre, entonces el rango de $\mathcal{F}|_V$ es el mismo en cada conjunto abierto V de X .

La propiedad de ser localmente libre junto con la finitud del conjunto I descrito arriba, la podemos exigir a $\mathcal{F}$ como en la siguiente:

Definición 1.23. Sean $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$ -módulo sobre un espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$ y n un entero positivo no nulo. $\mathcal{F}$ es *localmente libre de rango n* si existen un conjunto no vacío J que parametriza a una cubierta abierta $(U_j)_{j \in J}$ de X tal que la restricción de $\mathcal{F}$ a U_j es un $\mathcal{O}_X|_{U_j}$ -módulo libre de rango n , para todo $j \in J$.

En esta definición enfatizamos el valor constante de la función rango de $\mathcal{F}|_{U_j}$ para cada $j \in J$. Si relajamos esta condición obtenemos la siguiente:

Definición 1.24. Un $\mathcal{O}_X$ -módulo $\mathcal{F}$ sobre un espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$ es *localmente libre de rango finito* si existen un conjunto J no vacío que parametriza a una cubierta abierta $(U_j)_{j \in J}$ de X y enteros $(n_j)_{j \in J}$ tales que $\mathcal{F}|_{U_j}$ es localmente libre de rango n_j para cada $j \in J$.

Observamos que si $i, j \in J$ son índices distintos esta definición no dice que el rango de $\mathcal{F}|_{U_i}$ sea igual al rango de $\mathcal{F}|_{U_j}$, estos números dependen de cada conjunto abierto de la cubierta de X , en este sentido es en el que relajamos la finitud del número de copias de la gavilla estructural necesarias para el isomorfismo correspondiente. Al instante, vemos que

para este tipo de $\mathcal{O}_X$ -módulos sus grupos de gérmenes son módulos libres de rango finito sobre $\mathcal{O}_{X,p}$, para todo $p \in X$.

Proposición 1.25. *Sea $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$ -módulo localmente libre de rango n sobre un espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$, donde $n \in \mathbb{N}$. Se sigue que los grupos de gérmenes de $\mathcal{F}$ en los puntos p de X son $\mathcal{O}_{X,p}$ -módulos libres de rango n .*

Demostración. Como $\mathcal{F}$ es localmente libre de rango n , existe una cubierta abierta $(U_j)_{j \in J}$ de X tal que $\mathcal{F}|_{U_j}$ es un $\mathcal{O}_X|_{U_j}$ -módulo localmente libre de rango n . Y, el resultado se sigue de la Proposición 1.21. $\square$

Notemos que cada $\mathcal{O}_X$ -módulo libre de rango finito es localmente libre de rango finito, más aún, observemos que para cada número natural n existen ejemplos de $\mathcal{O}_X$ -módulos localmente libres de rango finito y localmente libres de rango n .

Ejemplo 1.26.

- 1.- La gavilla estructural $\mathcal{O}_Z$ de un espacio anillado $(Z, \mathcal{O}_Z)$ es libre de rango 1, en particular, localmente libre de rango 1.
- 2.- Sea I un conjunto no vacío y consideremos el $\mathcal{O}_X$ -módulo $\mathcal{O}_X^{(I)}$ sobre un espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$, se sigue que $\mathcal{O}_X^{(I)}$ es localmente libre.
- 3.- Por último, si n es un número natural, entonces el $\mathcal{O}_X$ -módulo $\mathcal{O}_X^n$ es localmente libre de rango n .

Los resultados que mencionamos al inicio de esta sección como motivaciones para introducir las gavillas de $\mathcal{O}_X$ -módulos localmente libres de rango finito los demostramos ahora.

Proposición 1.27. *Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un espacio anillado y $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$ -módulo localmente libre de rango finito, se sigue que el $\mathcal{O}_X$ -módulo $\mathcal{F}^{\vee\vee}$ es isomorfo a $\mathcal{F}$.*

Demostración. Dado que toda gavilla de $\mathcal{O}_X$ -módulos libre de rango finito es localmente libre de rango finito, realizaremos esta demostración mediante los siguientes pasos: primero mostraremos el resultado para el caso en el que $\mathcal{F}$ es libre de rango finito e inmediatamente después utilizando la Proposición 1.14 probaremos el caso general. Por tanto, supongamos que $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{O}_X$ -módulo libre de rango r ($r \in \mathbb{N}$), se cumple que $\mathcal{F} \cong \mathcal{O}_X^r$. Luego, en vista del isomorfismo entre $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X^r, \mathcal{G})$ y $\mathcal{G}^r$ para cada $\mathcal{O}_X$ -módulo $\mathcal{G}$ de X se tiene que $\mathcal{F}^\vee = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X^r, \mathcal{O}_X) \cong \mathcal{O}_X^r$. En particular, la gavilla dual de un $\mathcal{O}_X$ -módulo libre de rango finito es libre de rango finito, más aún del mismo rango. Por lo tanto, $\mathcal{F}^{\vee\vee} \cong \mathcal{F}$.

Consideremos ahora el caso general en el que $\mathcal{F}$ es una gavilla de $\mathcal{O}_X$ -módulos localmente libre de rango finito. Es decir, supongamos que existen una cubierta abierta $(U_i)_{i \in I}$ de X y una familia de enteros positivos $(r_i)_{i \in I}$ parametrizadas por un conjunto I no vacío, tales que $\mathcal{F}|_{U_i} \cong \mathcal{O}_X|_{U_i}^{r_i}$, para cada $i \in I$. Puesto que nos apoyaremos en la Proposición 1.14, primero que nada, definiremos un morfismo $\mathcal{O}_X$ -lineal entre $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}^{\vee\vee}$. Sea $U \in \mathcal{T}_X$, definamos $\varphi_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}^{\vee\vee}(U)$ mediante la regla que a cada $s \in \mathcal{F}(U)$ asigna el morfismo $\varphi_U(s)$ entre $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X|_U}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{O}_X|_U)$ y $\mathcal{O}_X|_U$, dado por la familia de aplicaciones $\mathcal{O}_X(\mathcal{E})$ -lineales

$$(\varphi_U(s))_{\mathcal{E}} : \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X|_U|_{\mathcal{E}}}(\mathcal{F}|_U|_{\mathcal{E}}, \mathcal{O}_X|_U|_{\mathcal{E}}) \rightarrow \mathcal{O}_X(\mathcal{E})_{\mathcal{E} \in \mathcal{T}_U}$$

que a cada f en $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X|_{\mathcal{E}}}(\mathcal{F}|_{\mathcal{E}}, \mathcal{O}_X|_{\mathcal{E}})$ le asignan la sección local $\varphi_U(s)_{\mathcal{E}}(f) = f_{\mathcal{E}}(s|_{\mathcal{E}})$ de $\mathcal{O}_X(\mathcal{E})$, para cada $\mathcal{E} \in \mathcal{T}_U$. No es difícil verificar que la familia $(\varphi_U)_{U \in \mathcal{T}_X}$ de homomorfismos $\mathcal{O}_X(U)$ -lineales que denotaremos simplemente por φ determina un morfismo entre $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}^{\vee\vee}$.

Una vez teniendo un morfismo entre $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}^{\vee\vee}$ lo siguiente es considerar cualquier conjunto abierto U_i de la cubierta de X y mostrar que el morfismo $\varphi|_{U_i} : \mathcal{F}|_{U_i} \rightarrow \mathcal{F}^{\vee\vee}|_{U_i}$ es un isomorfismo de $\mathcal{O}_X|_{U_i}$ -módulos. Por lo tanto, sea $i \in I$, se sigue que $\mathcal{F}|_{U_i} \cong \mathcal{O}_X|_{U_i}^{r_i}$. En otras palabras, $\mathcal{F}|_{U_i}$ es un $\mathcal{O}_X$ -módulo libre de rango r_i . Luego, por lo desarrollado al inicio de la demostración se sigue que $\mathcal{F}|_{U_i} \cong \mathcal{F}^{\vee\vee}|_{U_i}$. Por lo tanto, de la Proposición 1.14 concluimos que $\mathcal{F}^{\vee\vee} \cong \mathcal{F}$. $\square$

Proposición 1.28. *Si $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son gavillas de $\mathcal{O}_X$ -módulos sobre un espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$ tal que una de ellas es localmente libre de rango finito, entonces los $\mathcal{O}_X$ -módulos $\mathcal{F}^{\vee} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ y $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ son isomorfos.*

Demostración. En primer lugar consideremos a $\mathcal{F}$ como un $\mathcal{O}_X$ -módulo libre de rango n , para cierto $n \in \mathbb{N}$, entonces $\mathcal{F}$ es de la forma $\mathcal{O}_X^n$ y su dual, en este caso, también es libre de rango n . De modo que, $\mathcal{F}^{\vee} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G} \cong \mathcal{O}_X^n \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G} \cong (\mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})^n \cong \mathcal{G}^n$. Mientras que por otro lado, $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X^n, \mathcal{G}) \cong \mathcal{G}^n$. Así, $\mathcal{F}^{\vee} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ y $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ son isomorfos. Ahora, si $\mathcal{G}$ es de la forma $\mathcal{O}_X^m$, para algún $m \in \mathbb{N}$. Resulta que $\mathcal{F}^{\vee} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ es isomorfo a $(\mathcal{F}^{\vee} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X)^m \cong (\mathcal{F}^{\vee})^m$. Asimismo, se sigue que $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ es isomorfo a $(\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X))^m \cong (\mathcal{F}^{\vee})^m$. Luego, $\mathcal{F}^{\vee} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ es isomorfo a $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$. En definitiva, si $\mathcal{F}$ ó $\mathcal{G}$ es un $\mathcal{O}_X$ -módulo libre de rango finito, entonces el isomorfismo entre $\mathcal{F}^{\vee} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ y $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ es una consecuencia directa.

Consideremos ahora el caso en el que $\mathcal{F}$ ó $\mathcal{G}$ es una gavilla de $\mathcal{O}_X$ -módulos localmente libre de rango finito. Apoyados en la Proposición 1.14 mostraremos que el morfismo $\mathcal{O}_X$ -lineal entre $\mathcal{F}^{\vee} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ y $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ dado por la Proposición 1.19 es un isomorfismo. Supongamos que $\mathcal{F}$ (o resp. $\mathcal{G}$) es localmente libre de rango finito, esto es, supongamos

que existe una cubierta abierta $(U_i)_{i \in I}$ de X tal que $\mathcal{F}|_{U_i}$ (o resp. $\mathcal{G}|_{U_i}$) es libre de rango r_i , para algún $r_i \in \mathbb{N}$; para todo $i \in I$. Por lo desarrollado anteriormente se sigue que $\mathcal{F}|_{U_i}^\vee \otimes_{\mathcal{O}_X|_{U_i}} \mathcal{G}|_{U_i}$ es isomorfo a $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X|_{U_i}}(\mathcal{F}|_{U_i}, \mathcal{G}|_{U_i})$, para cada $i \in I$. De manera que el morfismo de $\mathcal{O}_X$ -módulos de la Proposición 1.19 restringido a cada elemento U_i de $(U_i)_{i \in I}$ es un $\mathcal{O}_X|_{U_i}$ -isomorfismo. Por lo tanto, en vista de la Proposición 1.14 el morfismo global es un isomorfismo. Esto es, $\mathcal{F}^\vee \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G} \cong \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$. $\square$

La siguiente definición establece el nombre de los $\mathcal{O}_X$ -módulos localmente libres de rango uno.

Definición 1.29. Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un espacio anillado. Un $\mathcal{O}_X$ -módulo $\mathcal{F}$ es invertible si es localmente libre de rango uno.

Luego, el ejemplo por excelencia de una gavilla invertible sobre un espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$ es su gavilla estructural. Ahora bien, si $\mathcal{F}$ es una gavilla invertible y $(U_\ell)_{\ell \in \Gamma}$ es una cubierta abierta de X tal que $\mathcal{F}|_{U_\ell} \cong \mathcal{O}_X|_{U_\ell}$, entonces diremos que la cubierta $(U_\ell)_{\ell \in \Gamma}$ de X trivializa a $\mathcal{F}$. No es difícil ver que si $(U_\ell)_{\ell \in \Gamma}$ trivializa a $\mathcal{F}$, entonces trivializa también a $\mathcal{F}^\vee$. En otras palabras, si $\mathcal{F}$ es una gavilla invertible, entonces su dual también es invertible.

El siguiente resultado especifica los grupos de gérmenes de una gavilla invertible.

Proposición 1.30. Si $\mathcal{F}$ es una gavilla invertible sobre un espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$, entonces para cada punto p de X sus grupos de gérmenes $\mathcal{F}_p$ son $\mathcal{O}_{X,p}$ -módulos libres de rango uno.

Demostración. Es una consecuencia inmediata de la Proposición 1.25. $\square$

De acuerdo al resultado anterior un $\mathcal{O}_X$ -módulo $\mathcal{H}$ tal que para un punto q de X su grupo de gérmenes $\mathcal{H}_q$ es un $\mathcal{O}_{X,q}$ -módulo libre de rango mayor o igual que 2, no puede ser invertible. Por ejemplo, $\mathcal{O}_X^2$ no es invertible.

En vista de los resultados anteriores, un hecho que podemos mostrar es el siguiente: si $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{O}_X$ -módulo localmente libre de rango uno sobre un espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$, entonces

$$(1.5.1) \quad \mathcal{F}^\vee \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F} \cong \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{F}) \cong \mathcal{O}_X.$$

En efecto, el primer isomorfismo es trivial dada la Proposición 1.28. Por lo tanto, probaremos el isomorfismo $\mathcal{F}^\vee \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F} \cong \mathcal{O}_X$. Sea U un conjunto abierto de X y consideremos el morfismo

de $\mathcal{O}_X$ -módulos $\varphi : \mathcal{F}^\vee \oplus \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{O}_X$, definido por la familia de $\mathcal{O}_X(U)$ -homomorfismos

$$\begin{aligned} \varphi_U : \text{Hom}_{\mathcal{O}_X|_U}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{O}_X|_U) \oplus \mathcal{F}(U) &\rightarrow \mathcal{O}_X(U) \\ (f, s) &\mapsto f_U(s), \end{aligned}$$

donde $f_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{O}_X(U)$ es el homomorfismo correspondiente al abierto U de la familia

$$(f_{\mathcal{E}} : \mathcal{F}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{O}_X(\mathcal{E}))_{\mathcal{E} \in \mathcal{T}_U}$$

que define a f como elemento de $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X|_U}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{O}_X|_U)$. Es claro que φ_U es un morfismo de $\mathcal{O}_X(U)$ -módulos bilineal para cada $U \in \mathcal{T}_X$. Por lo tanto, φ es un morfismo de $\mathcal{O}_X$ -módulos bilineal y como tal, por la propiedad universal de la gavilla asociada, define un morfismo de $\mathcal{O}_X$ -módulos $\tilde{\varphi} : \mathcal{F}^\vee \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{O}_X$. Este morfismo es el isomorfismo que necesitábamos, ya que al ser $\mathcal{F}$ localmente libre de rango uno, luego de tomar gérmenes, dicho morfismo se reduce a la identidad $\mathcal{O}_{X,p} \otimes_{\mathcal{O}_{X,p}} \mathcal{O}_{X,p} \rightarrow \mathcal{O}_{X,p}$, para cada punto p de X .

Un resultado que nos interesa afirma que el producto tensorial finito de $\mathcal{O}_X$ -módulos invertibles es invertible. Para su demostración primero probaremos el siguiente:

Lema 1.31. *Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ $\mathcal{O}_X$ -módulos sobre un espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$ y sea U un conjunto abierto de X , se sigue que $(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})|_U$ es isomorfo a $\mathcal{F}|_U \otimes_{\mathcal{O}_X|_U} \mathcal{G}|_U$.*

Demostración. Desde la construcción del producto tensorial $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ se tiene de manera natural un morfismo de $\mathcal{O}_X$ -módulos bilineal $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$. Por lo tanto, al restringirlo al abierto U producimos un morfismo de $\mathcal{O}_X$ -módulos bilineal entre $\mathcal{F}|_U \oplus \mathcal{G}|_U$ y $(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})|_U$. A su vez, este último por la propiedad universal de la gavilla asociada induce el morfismo requerido

$$\mathcal{F}|_U \otimes_{\mathcal{O}_X|_U} \mathcal{G}|_U \rightarrow (\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})|_U.$$

El cual es un isomorfismo ya que al tomar gérmenes para cada punto p de X , dicho morfismo se reduce a la identidad $\mathcal{F}_p \otimes_{\mathcal{O}_{X,p}} \mathcal{G}_p \rightarrow \mathcal{F}_p \otimes_{\mathcal{O}_{X,p}} \mathcal{G}_p$. $\square$

Proposición 1.32. *Si $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son invertibles sobre un espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$, entonces $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ es invertible.*

Demostración. Construiremos una cubierta abierta para X en cuyos miembros la restricción del $\mathcal{O}_X$ -módulo $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ a ellos sea libre de rango 1. Siguiendo la Definición 1.29 para $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ existen sendas cubiertas abiertas $(U_i)_{i \in I}$ y $(V_j)_{j \in J}$ de X tales que respectivamente

$$\mathcal{F}|_{U_i} \cong \mathcal{O}_X|_{U_i} \quad \text{y} \quad \mathcal{G}|_{V_j} \cong \mathcal{O}_X|_{V_j},$$

para todo $i \in I$ y para todo $j \in J$. De modo que si fijamos $i \in I$ y $j \in J$, entonces la intersección $U_i \cap V_j$ resulta ser un conjunto abierto y la unión de todos estos conjuntos cubre a X . Más aún, para cada par de índices $(i, j) \in I \times J$, se sigue que $\mathcal{F}|_{U_i \cap V_j} \cong \mathcal{O}_X|_{U_i \cap V_j}$ y $\mathcal{G}|_{U_i \cap V_j} \cong \mathcal{O}_X|_{U_i \cap V_j}$. Por lo tanto, aplicando el resultado del Lema 1.31 obtenemos

$$(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})|_{U_i \cap V_j} \cong \mathcal{F}|_{U_i \cap V_j} \otimes_{\mathcal{O}_X|_{U_i \cap V_j}} \mathcal{G}|_{U_i \cap V_j} \cong \mathcal{O}_X|_{U_i \cap V_j} \otimes_{\mathcal{O}_X|_{U_i \cap V_j}} \mathcal{O}_X|_{U_i \cap V_j} \cong \mathcal{O}_X|_{U_i \cap V_j}$$

Así, la familia $(U_i \cap V_j)_{(i,j) \in I \times J}$ es la cubierta abierta de X que trivializa a $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$. $\square$

Las gavillas invertibles sobre un espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$ son las piezas clave para definir el grupo de Picard de X . La Proposición 1.32 y la relación (1.5.1), como veremos en la siguiente sección, constituirán los ingredientes esenciales para la construcción de dicho grupo.

1.6. Grupo de Picard de un Espacio Anillado

El objetivo principal de este capítulo lo alcanzamos en esta última sección definiendo finalmente el grupo de Picard de un espacio anillado arbitrario.

Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un espacio anillado y consideremos el conjunto Ω de todas las gavillas invertibles sobre X , esto es, $\Omega = \{\mathcal{F} \mid \mathcal{F} \text{ es un } \mathcal{O}_X\text{-módulo localmente libre de rango 1 sobre } X\}$. Naturalmente, este conjunto no es vacío pues $\mathcal{O}_X$ es uno de sus elementos. Así, para cada par $(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \in \Omega \times \Omega$ podemos definir

$$\mathcal{F} \sim \mathcal{G} \iff \mathcal{F} \cong \mathcal{G} \text{ como } \mathcal{O}_X\text{-módulos.}$$

Esta relación es una relación de equivalencia y como tal define el conjunto cociente $\Omega / \sim$, mismo que equipamos con una operación entre sus elementos obteniendo así un grupo abeliano al que denominamos el grupo de Picard de X y denotamos por $\text{Pic}(X)$. Precisamente, definimos

$$(1.6.1) \quad \begin{aligned} + : \text{Pic}(X) \times \text{Pic}(X) &\longrightarrow \text{Pic}(X) \\ ([\mathcal{F}], [\mathcal{G}]) &\mapsto [\mathcal{F}] + [\mathcal{G}] = [\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}]. \end{aligned}$$

Esta operación está bien definida pues el producto tensorial de dos gavillas invertibles es una gavilla invertible (Proposición 1.32), y si $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{F}'$ y $\mathcal{G}' \in \Omega$ son tales que $\mathcal{F} \sim \mathcal{F}'$ y $\mathcal{G} \sim \mathcal{G}'$, entonces $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G} \sim \mathcal{F}' \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}'$. En efecto, los isomorfismos $\mathcal{F} \cong \mathcal{F}'$ y $\mathcal{G} \cong \mathcal{G}'$, implican que $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G} \cong \mathcal{F}' \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}'$, lo cual significa que $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G} \sim \mathcal{F}' \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}'$. A partir de estos resultados es claro que si $([\mathcal{F}], [\mathcal{G}])$ es un elemento de $\text{Pic}(X) \times \text{Pic}(X)$, entonces $[\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}]$ es un elemento de $\text{Pic}(X)$. De manera que la operación (1.6.1) es cerrada. Más aún, está bien definida ya que si los elementos $([\mathcal{F}], [\mathcal{G}])$ y $([\mathcal{F}'], [\mathcal{G}'])$ de $\text{Pic}(X) \times \text{Pic}(X)$ son iguales, entonces $[\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}]$ y $[\mathcal{F}' \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}']$ también son iguales, es decir, $[\mathcal{F}] + [\mathcal{G}] = [\mathcal{F}'] + [\mathcal{G}']$.

Lo siguiente que probaremos será el hecho de que la operación (1.6.1) proporciona a $\text{Pic}(X)$ la estructura algebraica de un grupo abeliano. Esto es, mostraremos que dicha operación es asociativa, conmutativa, que admite un elemento neutro y que a cada miembro de $\text{Pic}(X)$ le corresponde un inverso respecto a $+$. Así, nos referiremos a tal operación como la *adición* del grupo de Picard de X , diremos que el elemento neutro respecto a $+$ es el *neutro aditivo* de $\text{Pic}(X)$ y al inverso de un elemento de $\text{Pic}(X)$ le llamaremos su *inverso aditivo*.

La asociatividad de la adición de $\text{Pic}(X)$ se sigue directamente de la asociatividad del producto tensorial para $\mathcal{O}_X$ -módulos. En efecto, sean $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ y $\mathcal{H}$ gavillas invertibles sobre X , se tiene que

$$\begin{aligned} [\mathcal{F}] + ([\mathcal{G}] + [\mathcal{H}]) &= [\mathcal{F}] + [\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{H}] \\ &= [\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} (\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{H})] \\ &= [(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{H}] \\ &= [\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}] + [\mathcal{H}] \\ &= ([\mathcal{F}] + [\mathcal{G}]) + [\mathcal{H}] \end{aligned}$$

La conmutatividad de la adición de $\text{Pic}(X)$ es similar, notese que

$$[\mathcal{F}] + [\mathcal{G}] = [\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}] = [\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}] = [\mathcal{G}] + [\mathcal{F}].$$

La gavilla estructural $\mathcal{O}_X$ de X es el neutro aditivo del grupo de Picard de X , pues para cada gavilla invertible $\mathcal{F}$ sobre X se tiene que $[\mathcal{O}_X] + [\mathcal{F}] = [\mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}] = [\mathcal{F}]$.

Finalmente, lo que resta mostrar es que para cada gavilla invertible sobre X es posible determinar su gavilla inversa respecto a la adición de $\text{Pic}(X)$. Esta propiedad sobre las gavillas de $\mathcal{O}_X$ -módulos localmente libres de rango uno origina su nombre de invertibles. Si $\mathcal{F}$ es una gavilla invertible su dual $\mathcal{F}^\vee = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)$ también es una gavilla invertible. Así, a cada miembro de $\text{Pic}(X)$ asociamos otro elemento de $\text{Pic}(X)$ cuyo representante es el dual o isomorfo al dual de un representante del primero. Dado un $\mathcal{O}_X$ -módulo $\mathcal{F}$ localmente libre de rango uno, la clase de isomorfía de $\mathcal{F}^\vee$ es la que consideraremos como el inverso aditivo de $[\mathcal{F}]$. En efecto, notese que

$$[\mathcal{F}] + [\mathcal{F}^\vee] = [\mathcal{F}^\vee \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}] = [\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{F})] = [\mathcal{O}_X].$$

Por lo tanto, para cada gavilla invertible $\mathcal{F}$ de X diremos que su inversa aditiva es $\mathcal{F}^\vee$. Culminamos así con la:

Definición 1.33. Si $(X, \mathcal{O}_X)$ es un espacio anillado, el grupo de Picard de X , $\text{Pic}(X)$ es el grupo de las clases de isomorfía de las gavillas invertibles sobre X bajo la operación (1.6.1).

Algunos ejemplos concretos son: $\text{Pic}(\text{Spec}(A)) = \{0\}$ si A es un anillo local o un dominio de factorización única, $\text{Pic}(\text{Spec}(k[x_1, x_2, \dots, x_n])) = \{0\}$ para k un campo, $n \in \mathbb{N}$ y por último, $\text{Pic}(\text{Proj}(k[x_1, x_2, \dots, x_n])) = \mathbb{Z}$.

Capítulo 2

Superficies Projectivas Racionales en Breve

El objetivo principal de este capítulo es el de recordar algunas de las nociones y propiedades básicas de las superficies proyectivas racionales no singulares que utilizaremos de manera sistemática a lo largo del resto de este trabajo de tesis. De hecho es aquí donde concentramos el soporte matemático y las herramientas fundamentales que nos permitirán el desarrollo de nuestro propósito. Iniciamos recordando la relación que guardan el grupo de Picard y los divisores de Cartier de un espacio anillado (no necesariamente un esquema). Luego, nos restringimos a una clase específica de esquemas para comenzar a hablar de los divisores de Weil y la relación que estos tienen con el grupo de Picard y por ende con los divisores de Cartier. Después, introducimos la noción de gavilla canónica y de divisor canónico para estos esquemas. Enseguida, abordamos un breve recorrido sobre los principales resultados generales acerca de las superficies racionales, como lo son su forma de intersección, el teorema de Riemann-Roch y la fórmula de adjunción. Por último, recordamos las principales ideas acerca de las explosiones puntuales de una superficie.

2.1. Divisores y la Equivalencia Lineal

En esta sección revisaremos la relación que hay entre los divisores de Cartier módulo la equivalencia lineal y el grupo de Picard de un espacio anillado. Más aún, especificando el espacio anillado hasta un esquema con ciertas condiciones necesarias recordaremos también la relación que los grupos mencionados guardan con el grupo de los divisores de Weil de estos esquemas.

Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un espacio anillado y U un subconjunto abierto no vacío de X , definimos $\mathcal{R}(U)$ como el conjunto $\{s \in \mathcal{O}_X(U) \mid s_x \text{ no es un divisor de cero de } \mathcal{O}_{X,x}, \forall x \in U\}$. Este conjunto resulta ser un subconjunto multiplicativo de $\mathcal{O}_X(U)$, por medio del cual podemos construir el anillo local $\mathcal{R}(U)^{-1}\mathcal{O}_X(U)$. Observamos que esto lo podemos realizar para cada $U \in \mathcal{T}_X \setminus \{\emptyset\}$. Por otro lado, gracias a la naturaleza de los elementos de $\mathcal{R}(U)$ no es difícil verificar que para cualesquiera U y V en $\mathcal{T}_X$ con $V \subseteq U$, la imagen de $\mathcal{R}(U)$ bajo la aplicación restricción $\rho_{\mathcal{O}_X^U}^U : \mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_X(V)$ está contenida en $\mathcal{R}(V)$. Por consiguiente, en virtud de la propiedad universal de la localización de anillos, para cada par $(U, V) \in \mathcal{T}_X \times \mathcal{T}_X$

con $V \subseteq U$, las aplicaciones restricción de la gavilla estructural de X compuestas con el homomorfismo canónico $\mathcal{O}_X(V) \rightarrow \mathcal{R}(V)^{-1}\mathcal{O}_X(V)$ nos permiten definir explícitamente sendos homomorfismos de anillos $\mathcal{R}(U)^{-1}\mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{R}(V)^{-1}\mathcal{O}_X(V)$. Tal información, por lo tanto, define llanamente una pregavilla de anillos sobre X , cuya gavilla asociada la denotamos por $\mathcal{Q}_X$ y denominamos la *gavilla de cocientes totales* de X . Las propiedades de $\mathcal{Q}_X$ como se observará más adelante constituyen la clave para definir los *divisores de Cartier* sobre X . Una de estas propiedades es que $\mathcal{Q}_X$ contiene a $\mathcal{O}_X$ como una subgavilla. Hecho que expresaremos mediante la sucesión exacta $0 \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{Q}_X$. Ahora bien, si $\mathcal{O}_X^*$ y $\mathcal{Q}_X^*$ denotan las gavillas de grupos abelianos (multiplicativos) de los elementos unidades de $\mathcal{O}_X$ y $\mathcal{Q}_X$ respectivamente, entonces la exactitud de la sucesión $0 \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{Q}_X$, implica la exactitud de la sucesión $0 \rightarrow \mathcal{O}_X^* \rightarrow \mathcal{Q}_X^*$. Mediante la cual, podemos visualizar también a $\mathcal{O}_X^*$ como una subgavilla de $\mathcal{Q}_X^*$ y finalmente, considerar la gavilla cociente $\mathcal{Q}_X^*/\mathcal{O}_X^*$ cuyas secciones globales etiquetamos de acuerdo a la siguiente:

Definición 2.1. *Un divisor de Cartier sobre un espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$ es una sección global de $\mathcal{Q}_X^*/\mathcal{O}_X^*$. Por su parte, un divisor de Cartier es principal si pertenece a la imagen del homomorfismo $\mathcal{Q}_X^*(X) \rightarrow (\mathcal{Q}_X^*/\mathcal{O}_X^*)(X)$.*

En vista de las propiedades de definición de una gavilla cociente, a cada divisor de Cartier D de X lo podemos describir como una familia $(U_i, f_i)_{i \in I}$, parametrizada por un conjunto no vacío I , constituida de una cubierta abierta $(U_i)_{i \in I}$ de X y de elementos $f_i \in \mathcal{Q}_X^*(U_i)$ tales que $D(p) = (f_\ell \mathcal{O}_X^*(U_\ell))_p$ para cada $p \in U_\ell$ y $f_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} (f_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta})^{-1} \in \mathcal{O}_X^*(U_\alpha \cap U_\beta)$, para cualesquiera índices α y β en I . Por lo tanto, dado un divisor de Cartier D sobre X diremos que está representado por la familia $(U_i, f_i)_{i \in I}$, si dicha familia lo describe como una sección global de $\mathcal{Q}_X^*/\mathcal{O}_X^*$. Consecuentemente, si D es un divisor principal de Cartier, entonces D es representado por una familia unitaria (X, f) con $f \in \mathcal{Q}_X^*(X)$. Asimismo, dos divisores de Cartier D y E representados por $(U_i, f_i)_{i \in I}$ y $(V_j, g_j)_{j \in J}$ respectivamente, son iguales si, y sólo si, $f_i|_{U_i \cap V_j} (g_j|_{U_i \cap V_j})^{-1} \in \mathcal{O}_X^*(U_i \cap V_j)$ para todo $(i, j) \in I \times J$. En efecto, la relación $f_i|_{U_i \cap V_j} (g_j|_{U_i \cap V_j})^{-1} \in \mathcal{O}_X^*(U_i \cap V_j)$ válida para cada par de índices (i, j) en $I \times J$, implica la igualdad $f_i|_{U_i \cap V_j} \mathcal{O}_X^*(U_i \cap V_j) = g_j|_{U_i \cap V_j} \mathcal{O}_X^*(U_i \cap V_j)$ para todo $(i, j) \in I \times J$, misma que a su vez, garantiza la igualdad de gérmenes $D(p) = E(p)$ para todo $p \in X$.

Si bien, la operación de $\mathcal{Q}_X^*$ es la multiplicación, se utiliza la terminología aditiva para las operaciones del grupo abeliano (multiplicativo) de las secciones globales de $\mathcal{Q}_X^*/\mathcal{O}_X^*$. Así, por ejemplo, la suma de dos divisores de Cartier D y D' dados por $(U_i, f_i)_{i \in I}$ y $(V_j, g_j)_{j \in J}$ respectivamente, se define como el divisor de Cartier representado por $(U_i \cap V_j, f_i|_{U_i \cap V_j} g_j|_{U_i \cap V_j})_{(i, j) \in I \times J}$. Mientras que el inverso aditivo de D , denotado por $-D$, queda determinado por $(U_i, f_i^{-1})_{i \in I}$.

Con ello, decimos que dos divisores de Cartier E y F son *linealmente equivalentes* si su diferencia $E - F$ es un divisor principal de Cartier.

A continuación recordamos como podemos asociar una gavilla invertible a un divisor de Cartier. En primer lugar, observamos que si F es un divisor de Cartier sobre X representado por $(U_i, f_i)_{i \in I}$, entonces para todo par $(i, j) \in I \times I$ se verifica que $f_i|_{U_i \cap U_j} (f_j|_{U_i \cap U_j})^{-1} = g_{ij}$, para ciertos $g_{ij} \in \mathcal{O}_X^*(U_i \cap U_j)$, y para cada terna $(i, j, k) \in I \times I \times I$, con $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$, se cumple que $g_{ij}|_{U_i \cap U_j \cap U_k} g_{jk}|_{U_i \cap U_j \cap U_k}$ es igual a $g_{ik}|_{U_i \cap U_j \cap U_k}$. De modo que, definiendo $\mathcal{O}_X(F)_i$ igual a $\mathcal{O}_{U_i}$ sobre U_i para cada $i \in I$ e isomorfismos $g^{ij} : \mathcal{O}_{U_i}|_{U_i \cap U_j} \rightarrow \mathcal{O}_{U_j}|_{U_i \cap U_j}$ para cualesquiera i y j en I , con $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, mediante la asignación $s \mapsto (g_{ij}|_V)s$ para cada $s \in \mathcal{O}_{U_i}(V)$ para todo subconjunto abierto V de $U_i \cap U_j$, obtenemos una familia de gavillas $(\mathcal{O}_X(F)_i)_{i \in I}$ sobre los abiertos U_i de la cubierta $(U_i)_{i \in I}$ de X y una familia de isomorfismos $(g^{ij})_{(i,j) \in I \times I}$ satisfaciendo que $g^{ii} = id_{\mathcal{O}_X(F)_i}$ para todo $i \in I$ y $g^{ik} = g^{jk}g^{ij}$ para cada terna (i, j, k) de índices en I , con $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$. Dicha familia $(\mathcal{O}_X(F)_i)_{i \in I}$ por lo tanto tiene asociada una gavilla $\mathcal{O}_X(F)$ definida sobre todo X tal que $\mathcal{O}_X(F)|_{U_i} \cong \mathcal{O}_X(F)_i$ para cada $i \in I$ (Ejer. 1.22 de [39] página 69). Lo que significa que $\mathcal{O}_X(F)$ es invertible. Finalmente, dado $i \in I$ mostramos que $\mathcal{O}_X(F)_i$ es isomorfa como $\mathcal{O}_{U_i}$ -módulo al $\mathcal{O}_X$ -submódulo $f_i^{-1}\mathcal{O}_{U_i}$ de $\mathcal{Q}_X$ asociado a la subpregavilla de $\mathcal{O}_X$ -módulos $\mathcal{O}_X(F)_i^-$ de $\mathcal{Q}_X|_{U_i}$ sobre U_i definida a partir de $f_i^{-1} \in \mathcal{Q}_X^*(U_i)$ con los siguientes datos:

1. $\mathcal{O}_X(F)_i^-(V) = \{g \in \mathcal{Q}_X(V) \mid g \in f_i|_V^{-1}\mathcal{O}_X(V)\}$ para cada $V \in \mathcal{T}_{U_i} \setminus \{\emptyset\}$,
2. $\mathcal{O}_X(F)_i^-(\emptyset) = \{0\}$ y
3. las aplicaciones restricción de $\mathcal{O}_X(F)_i^-$ son las restricciones usuales de funciones, inducidas por $\mathcal{Q}_X$.

Definimos $\mu_i : \mathcal{O}_{U_i} \rightarrow f_i^{-1}\mathcal{O}_{U_i}$ mediante la familia $(\mu_{iV} : \mathcal{O}_{U_i}(V) \rightarrow f_i^{-1}\mathcal{O}_{U_i}(V))_{V \in \mathcal{T}_{U_i}}$ de homomorfismos dados por $s \mapsto (f_i|_V^{-1})s$ para cada $s \in \mathcal{O}_{U_i}(V)$ y $V \in \mathcal{T}_{U_i}$. Donde $(f_i|_V^{-1})s$ es la función $(f_i|_V^{-1})s : V \rightarrow \prod_{p \in V} (f_i|_V^{-1})_p \mathcal{O}_{X,p}$ definida por $q \mapsto (f_i|_V^{-1})_q s_q$. Sea V un subconjunto abierto de U_i y sea $s \in \mathcal{O}_X(V)$ tal que $\mu_{iV}(s) = 0_{f_i^{-1}\mathcal{O}_{U_i}(V)}$, se sigue que $(f_i|_V^{-1})_q s_q = 0_{\mathcal{O}_{X,q}}$ para todo $q \in V$. Luego, siendo $\mathcal{O}_X$ una gavilla concluimos que s es la sección nula de $\mathcal{O}_X(V)$ y por lo tanto que μ_i es un morfismo inyectivo. Por último, dado $x \in X$, se tiene que $\mu_{ix} : \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow (f_i^{-1}\mathcal{O}_{U_i})_x$ es sobreyectiva, ya que f_{ix} es una unidad del anillo local $\mathcal{O}_{X,x}$. En definitiva, para cada $i \in I$, el morfismo μ_i es un isomorfismo y por lo tanto la familia de gavillas $(f_i^{-1}\mathcal{O}_{U_i})_{i \in I}$ se extiende hasta una gavilla invertible de X , misma que también denotamos por $\mathcal{O}_X(F)$. De esta manera, a cada divisor de Cartier le corresponde un elemento de $\text{Pic}(X)$, asignación que en realidad es una biyección entre los divisores de Cartier de X y los submódulos invertibles de $\mathcal{Q}_X$. Más aún, no es difícil ver que

salvo isomorfismo $\mathcal{O}_X(F)$ depende solamente de la clase de equivalencia lineal de F , esto es, $\mathcal{O}_X(F)$ es isomorfa a $\mathcal{O}_X(E)$ como $\mathcal{O}_X$ -módulos para cada divisor de Cartier E sobre X si, y sólo si, $F - E$ es un divisor principal. Por otro lado, se tiene que $\mathcal{O}_X(E + F) = \mathcal{O}_X(E)\mathcal{O}_X(F)$ como submódulos de $\mathcal{Q}_X$ y $\mathcal{O}_X(E + F) \cong \mathcal{O}_X(E) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(F)$ como $\mathcal{O}_X$ -módulos, de modo que la asignación $F \mapsto \mathcal{O}_X(F)$ entre $(\mathcal{Q}_X^*/\mathcal{O}_X)(X)$ y $\text{Pic}(X)$ induce un homomorfismo inyectivo entre los grupos $\text{CaCl}(X)$ de los *divisores de Cartier módulo la equivalencia lineal* y $\text{Pic}(X)$. Dicho homomorfismo de grupos queda lejos de ser sobreyectivo ya que pueden existir gavillas invertibles sobre X que no sean isomorfas a ningún submódulo invertible de $\mathcal{Q}_X$ (Observación 6.14.1 de [39] página 144). No obstante, bajo ciertas condiciones impuestas al espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$ se puede probar que es un isomorfismo. Por ejemplo,

Proposición 2.2. *Si $(X, \mathcal{O}_X)$ es un esquema entero, entonces la asignación $F \mapsto \mathcal{O}_X(F)$ descrita anteriormente determina un isomorfismo entre $\text{CaCl}(X)$ y $\text{Pic}(X)$.*

Ver la Proposición 6.15 de la página 145 de [39]. Si además añadimos al esquema X las hipótesis de ser entero, Noetheriano, separado y localmente factorial (en particular *regular en codimensión uno*), entonces podemos hablar de los *divisores de Weil* de X y demostrar que en tal caso los grupos de los divisores de Weil y de Cartier son isomorfos. Así como también, que $\text{Pic}(X)$, $\text{CaCl}(X)$ y $\text{Cl}(X)$ son todos isomorfos, donde $\text{Cl}(X)$ denota el *grupo de las clases* de Weil de X (definido en el siguiente parrafo). En efecto, la veracidad de lo que acabamos de afirmar la desarrollaremos en dos partes: primero mostraremos que mediante un isomorfismo natural a cada divisor de Cartier lo podemos identificar con un divisor de Weil de X , y observaremos que bajo este isomorfismo cada divisor principal de Cartier se corresponde con un divisor principal de Weil. Finalmente, veremos que a cada gavilla invertible de X es posible asociar un divisor de Weil de X de tal modo que la clase de isomorfía de dicha gavilla invertible queda correspondida a la clase de equivalencia de un divisor principal de Weil.

Puesto que X es entero, en particular es irreducible ([66, Proposición 2.35, pág. 91]) y el anillo local $\mathcal{O}_{X,\eta}$ de su punto genérico $\eta \in X$ resulta ser un campo. A dicho campo se le denomina el *campo de funciones* o campo de las funciones racionales de X , nosotros lo denotaremos por $K(X)$. En este caso, además la gavilla de cocientes totales $\mathcal{Q}_X$ de X es justamente la gavilla constante de valor $K(X)$, ver por ejemplo [67, Ejer. 4.10 pág. 15]. Por otro lado, la irreducibilidad de X nos asegura la inyectividad del homomorfismo natural $\mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \mathcal{O}_{X,\eta}$ para todo $x \in X$. De modo que, si η_Y es el punto genérico de un *divisor primo* Y de X , es decir, de un subesquema cerrado Y de X , entero de codimensión uno, entonces $\mathcal{O}_{X,\eta_Y}$ es un subanillo de $K(X)$ tal que $\text{Frac}(\mathcal{O}_{X,\eta_Y}) = K(X)$ y $\dim(\mathcal{O}_{X,\eta_Y}) = 1$. Por lo tanto, siendo X regular en codimensión uno, se sigue que el anillo local $\mathcal{O}_{X,\eta_Y}$ es un anillo de valoración

discreta. Adicionalmente, si denotamos por v_Y a la correspondiente valoración discreta de $K(X)^*$ asociada al divisor primo Y , entonces el hecho de que X sea separado nos garantiza que tanto v_Y como Y se determinan mutuamente de manera única. Así, dado $f \in K(X) \setminus \{0\}$ podemos definir la suma $(f) = \sum_{Y \in \mathfrak{D}} v_Y(f)Y$ donde $\mathfrak{D}$ es el conjunto de los divisores primos de X y $v_Y(f)$ es igual al único entero n tal que $f = ut^n$ para algún $u \in \mathcal{O}_{X,\eta_Y}^*$, siendo $t \in \mathcal{O}_{X,\eta_Y}$ el generador del ideal maximal $\mathfrak{m}_{X,\eta_Y}$ de $\mathcal{O}_{X,\eta_Y}$. Tal suma asociada a f es una suma finita, ya que, en virtud de que X es un esquema Noetheriano, se tiene que $v_Y(f) = 0$ para todo $Y \in \mathfrak{D} \setminus \Gamma$ con Γ un subconjunto finito de $\mathfrak{D}$. Ahora bien, si denotamos por $\text{Div}(X)$ al $\mathbb{Z}$ -módulo libre generado por $\mathfrak{D}$, entonces (f) es por construcción uno de sus elementos y podemos decir con cierta seguridad que hemos definido así una aplicación entre $K(X)^*$ y $\text{Div}(X)$. Más aún, tomando en cuenta las propiedades de una valoración discreta vemos que dicha aplicación es en realidad un homomorfismo de grupos abelianos. Los elementos de $\text{Div}(X)$ son precisamente los objetos que denominamos *divisores de Weil* de X , de los cuales hablamos en los párrafos anteriores. Si D es un divisor de Weil de X , entonces D es de la forma $D = n_1Y_1 + n_2Y_2 + \cdots + n_rY_r$, para ciertos $r \in \mathbb{N}$, $n_1, n_2, \dots, n_r \in \mathbb{Z}$ y $Y_1, Y_2, \dots, Y_r \in \mathfrak{D}$. El *grado* de D lo definimos como el entero $gr(D) = n_1 + n_2 + \cdots + n_r$. Cuando cada uno de los coeficientes n_i de D es no negativo decimos que D es un divisor *efectivo*. En particular, si todos son iguales a 1 diremos que D es *reducido*. Por otro lado, si D es igual a un divisor de la forma (f) para algún $f \in K(X)^*$, entonces decimos que D es un divisor *principal* de Weil de X . Ahora bien, considerando la aplicación $f \mapsto (f)$ entre $K(X) \setminus \{0\}$ y $\text{Div}(X)$ vemos que su imagen determina un subgrupo de $\text{Div}(X)$. Al cociente de $\text{Div}(X)$ entre este subgrupo lo denominamos el *grupo de las clases de Weil* de X y lo denotamos por $\text{Cl}(X)$. Un elemento de $\text{Cl}(X)$ es por lo tanto una clase de equivalencia de divisores de Weil cuya diferencia es un divisor principal de Weil de X . Esto es, $D, D' \in \text{Div}(X)$ satisfacen $D \sim D'$ si y solo si $D - D' = (f)$ para algún $f \in K(X)^*$.

Una de las hipótesis que requerimos para nuestro esquema X es la de ser localmente factorial, ya que con ella garantizamos la regularidad en codimensión uno para X . En efecto, si X es un esquema entero, Noetheriano, localmente factorial, entonces para cada $x \in X$ el anillo local $\mathcal{O}_{X,x}$ es un dominio de factorización única y por lo tanto integralmente cerrado. Por consiguiente, si además $\dim(\mathcal{O}_{X,x}) = 1$, entonces $\mathcal{O}_{X,x}$ es regular (ver [39] Teorema 6.2A página 40). Al instante, observamos también que X resulta ser un esquema normal. De manera que se tiene gran control sobre cada anillo local de X . Por ejemplo, un resultado que podemos aplicar en cada uno de tales anillos es el siguiente:

Lema 2.3. *Sea A un dominio entero Noetheriano. Se sigue que A es un dominio de factorización única si, y sólo si, $\text{Spec}(A)$ es normal y $\text{Cl}(\text{Spec}(A)) = \{0\}$.*

Demostración. (Ver [39] Proposición 6.2 página. 131) $\square$

La correspondencia entre los divisores de Cartier y de Weil de X la establecemos ahora. Consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} \varphi : (\mathcal{Q}_X^*/\mathcal{O}_X^*)(X) &\rightarrow \text{Div}(X) \\ F &\mapsto \varphi(F) = \sum_{D \in \mathfrak{D}} v_D(f_i)D, \end{aligned}$$

donde el divisor de Cartier F es representado por la familia $(U_i, f_i)_{i \in I}$ y el divisor de Weil $\sum_{D \in \mathfrak{D}} v_D(f_i)D$ asociado a F está determinado de la siguiente manera: a cada $f_i \in \mathcal{Q}_X^*(U_i)$ lo identificamos como un elemento de $K(X) \setminus \{0\}$ mediante el isomorfismo $\mathcal{Q}_X(U_i) \cong K(X)$, y para cada divisor primo D de X con $D \cap U_i \neq \emptyset$, calculamos su coeficiente como el entero $v_D(f_i)$. Este valor para D es independiente del índice i , ya que si $j \in I$ es otro índice tal que $D \cap U_j \neq \emptyset$, entonces puesto que $f_i|_{U_i \cap U_j} (f_j|_{U_i \cap U_j})^{-1} \in \mathcal{O}_X^*(U_i \cap U_j)$ su imagen en $K(X) \setminus \{0\}$ también es invertible y por consiguiente $v_D(f_i) = v_D(f_i|_{U_i \cap U_j}) = v_D(f_j|_{U_i \cap U_j}) = v_D(f_j)$. Por último, la suma corre sobre todos los divisores primos de X y es finita puesto que X es Noetheriano. Así, $\sum_{D \in \mathfrak{D}} v_D(f_i)D$ es un divisor de Weil bien definido y la aplicación φ cae bien en su codominio. Más aún, φ está bien definida y determina un homomorfismo de grupos abelianos. Dicho homomorfismo evidentemente envía un divisor principal de Cartier en un divisor principal de Weil. Y determina un isomorfismo entre $(\mathcal{Q}_X^*/\mathcal{O}_X^*)(X)$ y $\text{Div}(X)$ como lo muestra la existencia de su homomorfismo inverso cuya construcción mostramos enseguida.

Sea ψ la siguiente aplicación

$$\begin{aligned} \psi : \text{Div}(X) &\rightarrow (\mathcal{Q}_X^*/\mathcal{O}_X^*)(X) \\ D &\mapsto \psi(D) = (U_x, f_{(x)})_{x \in X} \end{aligned}$$

donde $(U_x, f_{(x)})_{x \in X}$ es el divisor de Cartier sobre X definido a partir de D , como sigue: para cada $x \in X$ distinto de su punto genérico, definimos D_x como el divisor de Weil del esquema afin $\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ asociado al divisor de Weil de X que resulta de eliminar de D aquellos divisores primos que no pasan por x , mediante la asignación $\Gamma \rightarrow \alpha^{-1}(\Gamma)$ para cada divisor primo Γ de X , donde α es el morfismo canónico $\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) \rightarrow X$. Dicho divisor de Weil D_x necesariamente es un divisor principal ya que al ser X un esquema localmente factorial, se tiene que $\mathcal{O}_{X,x}$ es un dominio de factorización única. Así, para cada $x \in X$ distinto de su punto genérico, existe $f_{(x)} \in K(X) \setminus \{0\}$ tal que $D_x = (f_{(x)})$. Más aún, por construcción $(f_{(x)})$ visto como divisor principal de Weil de X y D tienen los mismos valores sobre cada divisor primo que contiene a x . Equivalentemente, los divisores primos (vistos como subconjuntos cerrados de X) en los que difieren $(f_{(x)})$ y D son un número finito y no contienen a x , luego, si llamamos U_x al complemento de su unión en X , obtenemos un

entorno abierto de x tal que $D|_{U_x} = (f_{(x)})|_{U_x}$. Naturalmente la familia $(U_x, f_{(x)})_{x \in X}$ consta de una cubierta abierta para X y elementos $f_{(x)} \in \mathcal{Q}_X^*(U_x)$ que determinan un divisor de Cartier sobre X , ya que para cualesquiera puntos x y y de X , con $U_x \cap U_y \neq \emptyset$, se cumple que $(f_{(x)})|_{U_x \cap U_y} = D|_{U_x \cap U_y} = (f_{(y)})|_{U_x \cap U_y}$. En otras palabras, $v_E(f_{(x)}) = v_E(f_{(y)})$ para todo $E \in \mathfrak{D}$ con $E \cap U \neq \emptyset$. De manera que, siendo X un esquema normal se sigue que $f_{(x)} = g_{xy}f_{(y)}$, para cierto $g_{xy} \in \mathcal{O}_X^*(U_x \cap U_y)$. En definitiva, la correspondencia $D \mapsto \psi(D)$ cae bien en su codominio y no es difícil probar que establece un homomorfismo de grupos abelianos inverso a φ y que identifica a los divisores principales de Weil de X con los divisores principales de Cartier. En resumen hemos probado la siguiente proposición.

Proposición 2.4. *Sea X un esquema entero, Noetheriano, separado y localmente factorial, se sigue que los grupos $(\mathcal{Q}_X^*/\mathcal{O}_X^*)(X)$ y $\text{Div}(X)$ son isomorfos. Más aún, $\text{CaCl}(X)$ y $\text{Cl}(X)$ también son isomorfos.*

Lo siguiente que haremos será demostrar que bajo las mismas hipótesis impuestas sobre X , es posible asociar un divisor de Weil a cada gavilla invertible de X . Asignación con la cual mostraremos que $\text{Pic}(X)$ es isomorfo a $\text{Cl}(X)$. Para ello, apoyados en el hecho de que a cada divisor de Cartier de X le corresponde un divisor de Weil, solo mostraremos como asociar un divisor de Cartier a una gavilla invertible dada sobre X . Sea $\mathcal{F}$ una gavilla invertible sobre X , desde la definición de $\mathcal{F}$ se tiene que existe una cubierta abierta $(V_\alpha)_{\alpha \in \Gamma}$ de X que trivializa a $\mathcal{F}$. Por otro lado, puesto que X es Noetheriano podemos cambiar dicha cubierta por una cubierta abierta afín que también trivialize a $\mathcal{F}$. Sea $(U_i)_{i \in I}$ tal cubierta, se sigue que existen $\mathcal{O}_{U_i}$ -isomorfismos $\varphi_i : \mathcal{F}|_{U_i} \rightarrow \mathcal{O}_X|_{U_i}$ para cada $i \in I$. Con los cuales, realizando composición de morfismos obtenemos sendos isomorfismos $g^{ij} = \varphi_i|_{U_i \cap U_j} \circ \varphi_j^{-1}|_{U_i \cap U_j}$ entre $\mathcal{O}_{U_i \cap U_j}$ y $\mathcal{O}_{U_i \cap U_j}$ para todo par (i, j) de índices en $I \times I$. Ahora bien, puesto que g^{ij} es un isomorfismo, su regla de asignación está dada necesariamente como la multiplicación por un elemento invertible de $\mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)$, digamos g_{ij} . Este elemento, sabiendo que $0 \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{Q}_X$ es exacta y que X es entero, lo podemos considerar como miembro de $K(X) \setminus \{0_{K(X)}\}$. En seguida, si fijamos un índice $i_0 \in I$ y para cada $i \in I$ definimos $f_i = g_{ii_0} \in K(X)$, entonces obtenemos una familia $(U_i, f_i)_{i \in I}$ que se extiende hasta un divisor de Cartier de X . En efecto, por definición se sigue que $f_i = g_{ii_0} = g_{ij}g_{ji_0} = g_{ij}f_j$ con $g_{ij} \in \mathcal{O}_X^*(U_i \cap U_j)$. Como podemos ver, esta asignación depende de la elección del índice i_0 , sin embargo, esto no es un problema ya que en realidad lo que buscamos es establecer un isomorfismo entre $\text{Pic}(X)$ y $\text{Cl}(X)$. Notamos, por ejemplo, que si $i_1 \in I$ es otro índice, entonces haciendo $g_i = g_{ii_1}$ obtenemos un divisor de Cartier $(U_i, g_i)_{i \in I}$ tal que para cada $i \in I$ se verifica que cada divisor principal (g_i) satisface $(g_i) = (g_{ii_1}) = (g_{ii_0}g_{i_0i_1}) = (f_jg_{i_0i_1}) = (f_j) + (g_{i_0i_1})$ con $g_{i_0i_1} \in \mathcal{O}_X^*(U_{i_0} \cap U_{i_1})$. Por tanto, si D es el elemento de $\text{Div}(X)$ asignado a $(U_i, f_i)_{i \in I}$, se sigue que $D + (g_{i_0i_1})$ es el divisor de Weil

asignado a $(U_i, g_i)_{i \in I}$. Esto es, la diferencia de ambos divisores es principal. Luego, puesto que gavillas invertibles isomorfas definirán el mismo divisor de Weil, obtenemos finalmente la:

Proposición 2.5. *Sea X un esquema entero, Noetheriano, separado y localmente factorial, se sigue que $\text{Pic}(X)$ y $\text{Cl}(X)$ son isomorfos. Más aún, los divisores de Cartier y de Weil de X son indistinguibles.*

2.2. La gavilla Canónica

Consideremos un esquema X entero, Noetheriano, separado, de tipo finito sobre un campo algebraicamente cerrado k , tal que cada uno de sus anillos locales sea regular. En otras palabras, supongamos que X es una *variedad no singular* sobre k . En esta sección recordaremos rápidamente las nociones de la gavilla canónica de X y de su correspondiente clase equivalencia de divisores.

De manera general, si $f : X \rightarrow Y$ es un morfismo de esquemas, entonces existe una única gavilla *casicoherente* $\Omega_{X/Y}$ sobre X tal que para cada abierto afín U de X y cada abierto afín V de Y , con $U \subseteq f^{-1}(V)$, satisface que $\Omega_{X/Y}|_U$ es isomorfa como $\mathcal{O}_U$ -módulos a la gavilla tilde sobre U asociada al $\mathcal{O}_X(U)$ -módulo $\Omega_{\mathcal{O}_X(U)/\mathcal{O}_Y(V)}$ de los diferenciales de Kähler de $\mathcal{O}_X(U)$ respecto a $\mathcal{O}_Y(V)$ y $(\Omega_{X/Y})_p \cong \Omega_{\mathcal{O}_{X,p}/\mathcal{O}_{Y,f(p)}}$ para todo $p \in X$. A dicho $\mathcal{O}_X$ -módulo $\Omega_{X/Y}$ sobre X se le denomina la *gavilla de diferenciales de Kähler* de f (o de X sobre Y).

Cuando X es un esquema con las hipótesis declaradas al inicio se tiene un único morfismo $f : X \rightarrow \text{Spec}(k)$ cuya gavilla de diferenciales de Kähler denotamos simplemente por $\Omega_{X/k}$. En este caso, puesto que f es de tipo finito observamos además que $\Omega_{X/k}$ es una gavilla *coherente*. Es con esta gavilla que damos la siguiente:

Definición 2.6. *Sea X una variedad no singular sobre un campo algebraicamente cerrado k . La gavilla canónica de X denotada por ω_X es la gavilla de $\mathcal{O}_X$ -módulos $\bigwedge_{i=1}^{\dim(X)} \Omega_{X/k}$, donde $\dim(X)$ es la dimensión de X sobre k .*

Ahora bien, puesto que X es una variedad no singular sobre k , se sigue que $\Omega_{X/k}$ es localmente libre de rango $\dim(X)$ (ver [39] Teorema 8.15 página 177). De manera que ω_X resulta ser una gavilla invertible sobre X . Consecuentemente, en vista de la Proposición 2.5, existe un divisor de Weil de X tal que su imagen bajo la aplicación $\mathcal{O}_X : \text{Div}(X) \rightarrow \text{Pic}(X)$ es igual a ω_X . A tal divisor lo llamaremos un *divisor canónico* de X y lo denotaremos por K_X . Así, observamos que $\mathcal{O}_X(K_X) \cong \omega_X$. Como $\text{Cl}(X)$ es isomorfo a $\text{Pic}(X)$, en realidad, K_X es solo un representante de la clase de equivalencia de divisores de Weil de X asociada a la clase

de isomorfía de ω_X en $\text{Pic}(X)$. A la clase de equivalencia lineal de K_X la denominaremos la *clase canónica* de X y la denotaremos por $\mathcal{K}_X$. Si la variedad X es además proyectiva y no singular, entonces definimos el *género geométrico* p_g de X como la dimensión sobre k del grupo de las secciones globales de la gavilla canónica ω_X , esto es, $p_g = \dim_k H^0(X, \omega_X)$. Este número entero no negativo es uno de los invariantes birracionales de las variedades proyectivas no singulares, y nos servirá para establecer algunos resultados en las secciones posteriores.

Una excelente referencia para la construcción de las gavillas de los diferenciales de Kähler y canónica de X la encontramos en [56] páginas 145 y 151. En la misma referencia, pero en la página 152 se encuentra en detalle el cálculo explícito de la gavilla canónica de $\mathbb{P}_k^2$, que sabemos es isomorfa a $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^2}(-3)$ y cuya clase en $\text{Pic}(X)$ corresponde a $-3\mathcal{E}_0$, siendo $\mathcal{E}_0$ la clase de una línea general en $\mathbb{P}_k^2$.

2.3. Superficies Racionales

Para nosotros, una *superficie* será una variedad proyectiva no singular de dimensión dos sobre un campo algebraicamente cerrado k . Una *curva* de X , por su parte, será cualquier divisor efectivo, es decir, cada combinación lineal entera no negativa de subesquemas cerrados enteros de codimensión uno de X . En particular, ésta podrá ser singular o tener múltiples componentes. En esta sección damos la definición de una superficie racional, formulamos el teorema de Riemann-Roch, la fórmula de adjunción, damos algunas propiedades de las superficies racionales y recopilamos algunos conceptos y resultados bien conocidos sobre explosiones.

Una superficie X es *racional* si es *birracionalmente equivalente* al plano proyectivo, esto es, si su campo de funciones $K(X)$ es isomorfo como k -álgebra al campo de funciones $K(\mathbb{P}_k^2)$ de $\mathbb{P}_k^2$. Por ejemplo, toda superficie obtenida mediante sucesivas explosiones puntuales del plano proyectivo es una superficie racional. Por otro lado, un criterio numérico de Guido Castelnuovo (ver [39] Teorema 6.2 página 422), afirma que una superficie X es racional sí, y sólo si ambos su *género aritmético* $p_a = \chi(\mathcal{O}_X) - 1$ y su *segundo plurigénero* $P_2 = \dim_k H^0(X, \omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X)$ son iguales a cero. En donde para toda gavilla coherente $\mathcal{F}$ sobre una superficie X , la *característica de Euler* $\chi(\mathcal{F})$ de $\mathcal{F}$ se define como la suma $\chi(\mathcal{F}) = \sum_{i=0}^2 (-1)^i \dim_k H^i(X, \mathcal{F})$, siendo $H^i(X, \mathcal{F})$ el i -ésimo grupo de cohomología de $\mathcal{F}$, para cada i recorriendo los valores 0, 1 y 2 en virtud del Teorema de anulación de Grothendieck (Teorema 2.7 de [39], página 208) y el de Serre (Teorema 5.2 de [39], página 228) que nos garantiza que dicha suma es un número entero. Ahora bien, recordando que para toda superficie proyectiva X sobre un campo algebraicamente cerrado k el teorema de la

dualidad de Serre (Corolario 7.7 de [39] página 244), establece que para cada $0 \leq i \leq 2$, $H^i(X, \mathcal{G})$ es isomorfo a $H^{2-i}(X, \mathcal{G}^\vee \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X)^\vee$, para toda gavilla invertible $\mathcal{G}$ sobre X . Notamos que el género geométrico de X es igual a $\dim_k H^2(X, \mathcal{O}_X)$ y que $H^2(X, \omega_X)$ es isomorfo al grupo de las secciones globales de la gavilla estructural de X , que es isomorfo a k . Esto es, $p_g = \dim_k H^2(X, \mathcal{O}_X)$ y $\dim_k H^2(X, \omega_X) = \dim_k H^0(X, \mathcal{O}_X) = 1$. Por consiguiente, podemos escribir el género aritmético de X simplemente como $p_a = p_g - q$, siendo $q = \dim_k H^1(X, \mathcal{O}_X)$ la *irregularidad* de X . De este modo, sabiendo que la anulación del segundo plurigénero de X implica la anulación del género geométrico de X (Observación V.2 de [3] página 55). El criterio de Castelnuovo para la racionalidad de X implicará la anulación del segundo plurigénero de X y de su irregularidad, si X es racional. Mientras que la anulación de estos números garantizará que X es racional.

Por otro lado, haciendo alusión al homomorfismo de la Proposición 2.5 una expresión agradable para el segundo plurigénero de X es obtenida, a saber, $P_2 = \dim_k H^0(X, \mathcal{O}_X(2K_X))$. Del mismo modo, para cada $n \in \mathbb{N}$ escribimos el n -ésimo *plurigénero* de la superficie X como $P_n = \dim_k H^0(X, \mathcal{O}_X(nK_X))$. Luego, notando que $P_1 = p_g$ tenemos que $P_2 = 0$ implica $P_1 = 0$ y que X es racional si, y sólo si $P_2 = q = 0$.

El siguiente resultado establece la teoría de intersección de superficies que nos va a interesar. Dicho resultado constituye uno de los primeros pasos al estudio geométrico de las superficies y hace patente la importancia que tiene el grupo de Picard en ellas.

Teorema 2.7. *Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ gavillas invertibles sobre una superficie X , el número de intersección $\mathcal{F}.\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ se define como el entero*

$$(\mathcal{F}.\mathcal{G}) = \chi(\mathcal{O}_X) - \chi(\mathcal{F}^{-1}) - \chi(\mathcal{G}^{-1}) + \chi(\mathcal{F}^{-1} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}^{-1}),$$

el cual depende únicamente de las clases de isomorfía de $\mathcal{F}$ y de $\mathcal{G}$. Más aún, $(\mathcal{F}.\mathcal{G}) = (\mathcal{G}.\mathcal{F})$ y $(\mathcal{F}.\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{H}) = (\mathcal{F}.\mathcal{G}) + (\mathcal{F}.\mathcal{H})$, y particularmente $(\mathcal{O}_X.\mathcal{F}) = 0$ y $(\mathcal{F}^{-1}.\mathcal{G}) = -(\mathcal{F}.\mathcal{G})$. En otras palabras, la aplicación $(.) : \text{Pic}(X) \times \text{Pic}(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ definida por $(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \mapsto (\mathcal{F}.\mathcal{G})$ es una forma bilineal simétrica sobre el grupo de Picard de X .

Este teorema, cuya demostración la podemos encontrar en [59] página 85 o en [56] página 165, junto con la Proposición 2.5 que vimos en la Sección 2.1 de este capítulo motivan los siguiente conceptos.

Definición 2.8. *Sean D y E cualesquiera divisores de una superficie X . El número de intersección de D y E es el número $D.E = (\mathcal{O}_X(D).\mathcal{O}_X(E))$. En particular, el número de autointersección de una gavilla invertible $\mathcal{F}$, respectivamente de un divisor F , sobre X es $\mathcal{F}^2 = (\mathcal{F}.\mathcal{F})$, respectivamente $F^2 = F.F$.*

Notese en la definición anterior que si D y D' son divisores linealmente equivalentes sobre X , entonces $D.E = D'.E$ para todo divisor E sobre X . Alternativamente, en conformidad con la Proposición 1.4 y el Lema 1.3 de la Sección I del Capítulo V de [39], dados D_1 y D_2 cualesquiera divisores efectivos sobre X sin componentes irreducibles en común, utilizando el Teorema de Bertini (Teorema 8.18 de [39] página 179) definimos

$$D_1.D_2 = \sum_{x \in X} \dim_k \mathcal{O}_{X,x}/(f_x, g_x)$$

donde $f_x = 0$ y $g_x = 0$ son sendas ecuaciones locales respectivamente, para D_1 y D_2 en el punto x de X . Con lo establecido anteriormente podemos mostrar, por ejemplo, el Teorema de Bézout para el plano proyectivo.

Teorema 2.9. *Sean C y C' curvas proyectivas planas de grados d y d' , para ciertos enteros positivos d y d' . El número de puntos de intersección de C y C' , denotado por $C.C'$ pertenece al conjunto $\{dd', \infty\}$. Dicho número es ∞ si, y sólo, si C y C' tienen una componente irreducible en común, y es igual a dd' si, y sólo, si C y C' no tienen componentes irreducibles en común.*

Demostración. Sea $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^2}(1)$ la gavilla torcida de Serre, es suficiente mostrar que el número de autointersección de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^2}(1)$ es igual a uno. En efecto, sean x_0, x_1 y x_2 las coordenadas homogéneas de $\mathbb{P}_k^2$ y consideremos las líneas ℓ_0 y ℓ_1 definidas por las ecuaciones homogéneas $x_0 = 0$ y $x_1 = 0$, se sigue que $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^2}(1) \cong \mathcal{O}_X(\ell_0) \cong \mathcal{O}_X(\ell_1)$ y $\ell_0 \cap \ell_1 = \{(0 : 0 : 1)\}$. De manera que $f = x_0/x_2$ y $g = x_1/x_2$ inducen sendas ecuaciones locales para ℓ_0 y ℓ_1 en $p = (0 : 0 : 1)$, consecuentemente

$$(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^2}(1). \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^2}(1)) = (\mathcal{O}_X(\ell_0). \mathcal{O}_X(\ell_1)) = \ell_0.\ell_1 = \dim_k \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^2,p}/(f, g) = 1.$$

Por lo tanto, siendo $C \sim d\ell$ y $C' \sim d'\ell$ para alguna línea ℓ del plano proyectivo resulta que $C.C' = d\ell.d'\ell = dd'$. $\square$

Una vez establecida la teoría de intersección sobre superficies adquirimos una gran gama de posibilidades para la obtención de nuevos resultados. Por ejemplo, si ω_X es la gavilla conónica de una superficie X y $\mathcal{F}$ es una gavilla invertible sobre X , entonces

$$(\mathcal{F}^{-1}.\mathcal{F} \otimes \omega_X) = \chi(\mathcal{O}_X) - \chi(\mathcal{F}^{-1}) - \chi(\omega_X \otimes \mathcal{F}^{-1}) + \chi(\mathcal{F} \otimes \omega_X \otimes \mathcal{F}^{-1}).$$

Más aún, utilizando las propiedades dadas en el Teorema 2.7 acerca de $(.)$, obtenemos que $(\mathcal{F}^{-1}.\mathcal{F} \otimes \omega_X) = -(\mathcal{F}.\mathcal{F}) + (\mathcal{F}.\omega_X) = -\mathcal{F}^2 + \mathcal{F}.\omega_X$. Por otro lado, utilizando el hecho de que $\chi(\mathcal{G}) = \chi(\omega_X \otimes \mathcal{G}^{-1})$ para toda gavilla invertible $\mathcal{G}$ sobre X . La cual es una igualdad garantizada por el Teorema de la dualidad de Serre (Teorema I.11 de [3] página 7), resulta

que $\chi(\mathcal{O}_X) - \chi(\mathcal{F}^{-1}) - \chi(\omega_X \otimes \mathcal{F}^{-1}) + \chi(\omega_X) = 2(\chi(\mathcal{O}_X) - \chi(\mathcal{F}))$. Que podemos escribir como $\chi(\mathcal{F}) = \chi(\mathcal{O}_X) + \frac{1}{2}(\mathcal{F}^2 - \mathcal{F} \cdot \omega_X)$, obteniendo así el Teorema de Riemann-Roch para superficies.

Teorema 2.10. *Si D es un divisor sobre una superficie X y K_X es un divisor canónico de X , entonces*

$$\chi(D) = 1 + p_a(X) + \frac{1}{2}D \cdot (D - K_X),$$

donde $\chi(D)$ denota la característica de Euler de la gavilla invertible $\mathcal{O}_X(D)$ asociada a D .

Usualmente se escribe $\ell(D) - s(D) + \ell(K - D)$, en el lado derecho de la igualdad, en lugar de $\chi(D) = \dim_k H^0(X, \mathcal{O}_X(D)) - \dim_k H^1(X, \mathcal{O}_X(D)) + \dim_k H^2(X, \mathcal{O}_X(D))$, denotando por $\ell(D)$ la dimensión del grupo de las secciones globales de $\mathcal{O}_X(D)$, por $s(D)$ la *superabundancia* de D que se define como la dimensión del grupo $H^1(X, \mathcal{O}_X(D))$ y por $\ell(K - D)$ la dimensión de $H^0(X, \mathcal{O}_X(K - D))$ que es igual a $\dim_k H^2(X, \mathcal{O}_X(D))$ por el Teorema de la dualidad de Serre.

Particularmente, recordando que una superficie racional satisface que $p_a = 0$, el Teorema de Riemann-Roch para esta clase de superficies toma la forma

$$(2.3.1) \quad \chi(D) = 1 + \frac{1}{2}D \cdot (D - K_X),$$

para todo divisor D sobre X y K_X un divisor canónico de X .

La *fórmula de adjunción* es otro de los resultados importantes que debemos mencionar y como veremos se puede deducir directamente del teorema de Riemann-Roch. En efecto, si D es cualquier divisor sobre X y K_X es un divisor canónico de X , entonces aplicando dicho teorema a $-D$, obtenemos $\chi(\mathcal{O}_X(-D)) = \frac{1}{2}D \cdot (D + K_X) + 1 - p_a(X)$. Finalmente, recordando que $p_a(D)$ está definido como $\chi(\mathcal{O}_X(-D)) - p_a(X)$, obtenemos el siguiente:

Corolario 2.11. *Sea D cualquier divisor sobre una superficie X y K_X un divisor canónico, la fórmula de adjunción se cumple para D y establece que*

$$2p_a(D) - 2 = D \cdot (D + K_X).$$

En particular si Γ es una curva entera sobre una superficie proyectiva no singular X , entonces $\Gamma^2 + \Gamma \cdot K_X = 2p_a(\Gamma) - 2$, donde $p_a(\Gamma)$ es el género aritmético de la curva Γ . Otras aplicaciones del Teorema de Riemann-Roch son el Teorema del índice de Hodge y el criterio de amplitud de Nakai (ver [2] Corolario 2.4, Capítulo 2 y Teorema 1.22, Capítulo 1, respectivamente, o bien [39] Teoremas 1.9 y 1.10 Capítulo V), ambos teoremas los presentamos a continuación en el orden mencionado.

Teorema 2.12. *Si H es un divisor sobre X tal que $H^2 > 0$, entonces para cada divisor D sobre X tal que $H.D = 0$ tenemos $D^2 \leq 0$, y además $D^2 = 0$ si, y sólo si, $D \equiv 0$.*

Aquí $D \equiv 0$ significa que el divisor D es numéricamente equivalente a cero, relación de equivalencia que definimos más a bajo.

Teorema 2.13. *Un divisor D sobre una superficie X es amplio si, y sólo si, $D^2 > 0$ y $D.C > 0$ para cada curva irreducible C de X .*

Se dice que un divisor D sobre una superficie X es numéricamente equivalente a cero y lo denotamos por $D \equiv 0$, si $D.\Gamma = 0$ para toda curva entera Γ sobre X . Con ello, podemos definir una relación de equivalencia sobre $Div(X)$, diremos que un divisor $D_1 \in Div(X)$ es numéricamente equivalente a un divisor $D_2 \in Div(X)$ y lo denotaremos por $D_1 \equiv D_2$ si, y sólo si, $D_1 - D_2 \equiv 0$.

Una tercer relación de equivalencia que se define sobre $Div(X)$ es la *equivalencia algebraica* de divisores denotada por $\approx$ (ver [39] Capítulo V), a partir de la cual se define el grupo de Néron-Severi $NS(X)$ de X como el grupo cociente $Div(X)/\approx$. Por otro lado, un resultado conocido establece que sobre una superficie racional las relaciones de equivalencia lineal, numérica y algebraica son la misma. Por lo tanto, en esta situación definiremos el grupo de Néron Severi como el cociente $Div(X)/\sim$, es decir como $Pic(X)$. Un teorema primeramente probado por Severi en característica cero y más tarde por Néron en característica arbitraria (ver [53]) establece que $NS(X)$ para cada variedad proyectiva X no singular en codimensión uno es finitamente generado. Su rango, denotado por ρ , se conoce como el *número de Picard* de X . Una prueba de dicho teorema es dada en la Sección 5 del Apéndice B de [39]. Las superficies racionales con números de Picard menor que 11 y cuyos monoides efectivos son finitamente generados son bien conocidas en la actualidad, ver por ejemplo [60], [61], [6], [55], [30], [29], [31] [32], [33], [34], [35], [46], [47], [48] y [49]. Aquí el *monoide efectivo* de una superficie proyectiva racional no singular X , denotado por $M(X)$, es el conjunto de las clases α de divisores sobre X modulo la equivalencia lineal, i.e. $M(X) \subset NS(X)$, tales que α es efectiva, en el sentido de la Definición 2.14. Por el contrario el estudio de aquellas superficies cuyos números de Picard son mayores que o iguales a 11 continua siendo abierto. En este trabajo de tesis construiremos una familia de superficies proyectivas racionales no singulares cuyos números de Picard son muy grandes y cuyos monoides efectivos son finitamente generados y estudiaremos algunas otras de sus propiedades ver el Capítulo 4.

Enseguida, formularemos algunos resultados acerca de las superficies racionales que serán de utilidad. Ver por ejemplo los artículos [34],[33], [29], [52], [46], [47], [50], [51] por mencionar solo algunos. Comenzaremos con una definición.

Definición 2.14. *Sea X una superficie racional. Un elemento $\mathcal{F} \in \text{NS}(X)$ es efectivo si es la clase de equivalencia de algún divisor efectivo sobre X , esto es, si $\mathcal{F} \cong \mathcal{O}_X(D)$ para algún divisor D efectivo de X .*

Lema 2.15. *Sea X una superficie racional. Un elemento $\mathcal{F} \in \text{NS}(X)$ es efectivo si, y sólo si, la dimensión sobre k del espacio vectorial $H^0(X, \mathcal{F})$ es distinta de cero. Más aún, si D es un divisor efectivo sobre una superficie racional X entonces el entero $\dim_k H^2(X, \mathcal{O}_X(D))$ es igual a cero.*

Ver [33] Lema 2(b) página 728.

Definición 2.16. *Sea X una superficie racional. Un divisor D de X es numéricamente efectivo (o nef por brevedad), si $D \cdot \Gamma \geq 0$ para toda curva entera Γ sobre X . Asimismo, un elemento de $\text{NS}(X)$ es nef si es la clase de equivalencia de algún divisor nef sobre X .*

Una curva entera sobre una superficie X con autointersección no negativa es un ejemplo típico de un divisor nef. Un ejemplo más lo proporciona la clase del *pullback* de una línea de $\mathbb{P}_k^2$ por la explosión π del plano proyectivo a lo largo de un número finito de puntos. Por el contrario, los divisores excepcionales de π no son nef. Si bien, aún no hemos definido todavía que es una explosión de una superficie a lo largo de un punto, lo haremos en la siguiente sección.

Proposición 2.17. *Sea $\mathcal{F}$ un elemento del grupo de Nerón-Severi de una superficie racional X . La efectividad o la efectividad numérica de $\mathcal{F}$ implica la no-efectividad de $\omega_X - \mathcal{F}$. Más aún, la efectividad numérica de $\mathcal{F}$ implica también que el número de autointersección de $\mathcal{F}$ es mayor que o igual a cero.*

Ver [51] Lema 2.3 página 1035.

Proposición 2.18. *Sea $f : X \rightarrow Y$ un morfismo de variedades proyectivas y sea D un divisor de Cartier de X . Si D es nef, entonces f^*D también es nef. Asimismo, si $D \equiv 0$, entonces $f^*D \equiv 0$. Por su parte, si f es sobreyectivo, entonces D es nef si, y sólo si, f^*D es nef. Mientras que $D \equiv 0$ si y sólo si $f^*D \equiv 0$.*

Ver [45] Sección 4 del Capítulo I página 303.

2.4. Explosiones

En esta sección recopilaremos algunos conceptos y resultados bien conocidos sobre explosiones, seguiremos las notaciones del libro de Hartshorne [39] y daremos referencias para los resultados recopilados.

Sea X un esquema Noetheriano y sea Y un subesquema cerrado de X , se sigue que Y define una gavilla de ideales coherente $\mathcal{I}$ sobre X , para la cual es posible definir la gavilla graduada de $\mathcal{O}_X$ -álgebras $\mathfrak{J} = \bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{I}^d$, donde $\mathcal{I}^0 = \mathcal{O}_X$, $\mathcal{I}^1 = \mathcal{I}$ y $\mathcal{I}^d$ es la d -ésima potencia del ideal $\mathcal{I}$. Por tanto, siguiendo la construcción dada en la Sección 7 del Capítulo II de [39] (pág. 160), obtenemos el par $(\tilde{X}, \pi)$ constituido por el esquema $\tilde{X} = \text{Proj}(\mathfrak{J})$ y el morfismo proyección $\pi : \text{Proj}(\mathfrak{J}) \rightarrow X$, tal que para cada subconjunto U abierto afín de X , se tiene que $\pi^{-1}(U) \cong \text{Proj}(\bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{I}(U)^d)$. Al morfismo π lo definimos como la *explosión de X en Y* . Usualmente al par $(\tilde{X}, \pi)$ lo denotaremos por $\text{Bl}_Y(X)$ o simplemente por $\tilde{X}$. Sin embargo, cuando Y sea igual a $\{p\}$ para algún punto cerrado p de X , escribiremos $\text{Bl}_p(X)$ en lugar de $\text{Bl}_Y(X)$.

Puesto que π es un morfismo de esquemas, naturalmente se tiene un morfismo de gavillas $\pi^\# : \mathcal{O}_X \rightarrow \pi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}}$, que a su vez induce un morfismo $\pi^{-1} \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_{\tilde{X}}$, por medio del cual se define la *gavilla imagen inversa* de $\mathcal{I}$, $\pi^* \mathcal{I} = \pi^{-1} \mathcal{I} \otimes_{\pi^{-1} \mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{\tilde{X}}$. La cual es evidentemente un $\mathcal{O}_{\tilde{X}}$ -módulo. Por otro lado, la composición de los morfismos $\mathcal{I} \rightarrow \mathcal{O}_X$ y $\pi^\#$ nos permite considerar la gavilla imagen del morfismo $\pi^{-1} \mathcal{I} \otimes_{\pi^{-1} \mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{\tilde{X}} \rightarrow \pi^{-1} \mathcal{O}_X \otimes_{\pi^{-1} \mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{\tilde{X}}$ como un submódulo de $\mathcal{O}_{\tilde{X}}$. A dicha gavilla de $\mathcal{O}_{\tilde{X}}$ -módulos se le llama *gavilla de ideales imagen inversa* de $\mathcal{I}$ y se le denota por $\pi^{-1} \mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{\tilde{X}}$. La Proposición 7.13, Capítulo II de [39] muestra que esta gavilla es invertible (de hecho isomorfa a $\mathcal{O}_{\tilde{X}}(1)$), y más aún, que la restricción del morfismo π a $\pi^{-1}(X \setminus Y)$ determina un isomorfismo entre $\pi^{-1}(X \setminus Y)$ y $X \setminus Y$. Por consiguiente, el divisor efectivo de Cartier E de $\tilde{X}$ asociado a $\pi^{-1} \mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{\tilde{X}}$ determina un subesquema cerrado localmente principal $\pi^{-1}Y$ (ver la Observación 6.17.1 de [39]) al que denominamos *divisor excepcional* de la explosión π .

De igual modo, si Γ es cualquier subesquema cerrado de X , entonces definimos el *transformado total* de Γ como el esquema asociado a la gavilla de ideales imagen inversa de $\mathcal{I}_\Gamma$, $\pi^{-1} \mathcal{I}_\Gamma \cdot \mathcal{O}_{\tilde{X}}$, y lo denotamos por $\pi^{-1} \Gamma$. Si Γ es un esquema localmente principal, entonces $\pi^{-1} \Gamma$ también lo será y esto nos permite definir el transformado total de un divisor efectivo de Cartier sobre X . De modo que si D es un divisor de Cartier efectivo sobre X y Γ_D es el subesquema cerrado localmente principal asociado a la gavilla de ideales $\mathcal{O}_X(-D)$ de D , entonces el transformado total de D respecto a la explosión π se define como el único divisor efectivo de Cartier D^* de $\tilde{X}$ tal que $\mathcal{O}_X(-D^*) = \pi^{-1} \mathcal{O}_X(-D) \cdot \mathcal{O}_{\tilde{X}}$. Por cierto, la clase en

$\text{Pic}(\tilde{X})$ del transformado total de un divisor de efectivo de Cartier D de X coincide con el pullback π^*D de la clase de D en $\text{Pic}(X)$ por el morfismo π . En estas condiciones si D_1 y D_2 son divisores de X linealmente equivalentes, entonces sus transformados totales D_1^* y D_2^* también son linealmente equivalentes (ver Proposición 2.15 de [42]). Por su parte, el *transformado estricto* de un subesquema cerrado Z de X se define como el subesquema cerrado de $\tilde{X}$ correspondiente a la inmersión cerrada $\tilde{i} : \tilde{Z} \rightarrow \tilde{X}$ dada a partir de la inclusión $i : Z \rightarrow X$ por el Corolario 7.15 del Capítulo II de [39]; siendo $\tilde{Z}$ la explosión de $\tilde{X}$ a lo largo de la gavilla de ideales imagen inversa $\mathcal{I}' = \pi^{-1}\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{\tilde{X}}$, esto es, $\tilde{Z} = \text{Proj}(\oplus_{e \geq 0} \mathcal{I}'^e)$. Mientras que si D es un divisor efectivo de Cartier de X cuyo subesquema cerrado localmente principal de X es Z_D , entonces definimos su transformado estricto como el único divisor efectivo de Cartier $\tilde{D}$ de $\tilde{X}$ tal que $\mathcal{O}_X(-\tilde{D})$ es la gavilla de ideales del transformado estricto $\tilde{Z}_D$ de Z_D .

Si Y es una subvariedad cerrada propia de una superficie X , entonces $\pi : \text{Bl}_Y(X) \rightarrow X$ es un morfismo proyectivo, birracional, propio y sobreyectivo, mediante el cual $\text{Bl}_Y(X)$ resulta ser también una variedad proyectiva no singular de dimensión dos (ver la Proposición 7.16, Capítulo II de [39]). En particular, si Y es un punto cerrado de X , entonces $\text{Bl}_p(X)$ satisface las condiciones anteriores y podemos relacionar los transformados estricto y total de cualquier divisor efectivo de Cartier mediante una fórmula agradable.

Proposición 2.19. *Sea C un divisor efectivo de Cartier sobre una superficie X , p un punto cerrado de multiplicidad r sobre C y $\pi : \text{Bl}_p(X) \rightarrow X$ la explosión de X a lo largo de p , se sigue que $\pi^*C = \tilde{C} + rE$, donde E es el divisor excepcional de π .*

Considerando el transformado estricto $\tilde{C}$ de C como la cerradura de $\pi^-(C \cap (X \setminus \{p\}))$ en $\tilde{X}$ notamos que $\tilde{C}$ puede obtenerse a partir de π^*C eliminando E tantas veces como la multiplicidad que el punto p tiene con C . Por ejemplo, si p es un punto doble de una cónica de $\mathbb{P}_k^2$, entonces $\tilde{C} = \pi^*C - 2E$.

Esta observación, sabiendo que una explosión de una superficie X está cercanamente relacionada con X , nos da pie a preguntarnos como se relacionan las teorías de intersección de X y de $\tilde{X}$. El siguiente teorema, ver las Proposiciones 3.1, 3.2 y 3.3 del Capítulo V y la Proposición 8.24 del Capítulo II de [39], establece la teoría de intersección de $\text{Bl}_p(X)$, la forma que tiene un divisor canónico en $\tilde{X}$ y su grupo de Picard.

Proposición 2.20. *Sean X una superficie y $p \in X$ un punto no singular, si E es el divisor excepcional asociado a la explosión $\pi : \text{Bl}_p(X) \rightarrow X$, entonces $E \cong \mathbb{P}_k^1$ y $\mathcal{O}_X(-E)|_E \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^1}(1)$ y por lo tanto $E^2 = -1$. Más aún:*

1. *Existe un isomorfismo entre $\text{Pic}(X) \oplus \mathbb{Z}$ y $\text{Pic}(\text{Bl}_p(X))$, dado por $(D, n) \mapsto \pi^*D + nE$.*

2. Si $C, D \in \text{Pic}(X)$, entonces $\pi^*C \cdot \pi^*D = C \cdot D$.
3. Si $C \in \text{Pic}(X)$, entonces $\pi^*C \cdot E = 0$.
4. Si K_X es un divisor canónico de X , entonces $K_{\tilde{X}} = \pi^*K_X + E$ es un divisor canónico de $\text{Bl}_p(X)$ y por lo tanto, se cumple que $K_{\tilde{X}}^2 = K_X^2 - 1$.

Finalmente, si π_* es la proyección $\text{Pic}(X) \times \mathbb{Z} \rightarrow \text{Pic}(X)$ en el primer factor y $C \in \text{Pic}(X)$ y $D \in \text{Pic}(\tilde{X})$, entonces $\pi^*C \cdot D = C \cdot \pi_*D$.

Si bien, solo hemos considerado la explosión de X a lo largo de un solo punto, no obstante, podemos ver que el número de autointersección de un divisor canónico de una superficie no es un invariante birracional. Por otro lado, una observación más que se desprende de la proposición anterior y de la Proposición 2.19 es que el número de intersección $\tilde{C} \cdot E$ de un divisor efectivo C sobre X y del divisor excepcional E de $\text{Bl}_p(X)$ es igual a la multiplicidad $\mu_p(C)$ del punto p en C , que recordamos, se define como el entero mayor r tal que $f \in \mathfrak{m}_{X,p}^r$ donde $\mathfrak{m}_{X,p}$ es el ideal maximal de $\mathcal{O}_{X,p}$ y f es una ecuación local para C en el punto p . Una cosa adicional que podemos deducir de la Proposición 2.20 es el género aritmético $p_a(\tilde{C})$ de la transformada estricta $\tilde{C}$ de cada curva entera C sobre X . En efecto, en vista del Corolario 2.11 se tiene que $2p_a(\tilde{C}) - 2 = \tilde{C} \cdot (\tilde{C} + K_{\tilde{X}}) = (\pi^*C - rE) \cdot (\pi^*C - rE + \pi^*K_X - rE)$ que es igual a $2p_a(C) - 2 - r(r-1)$. Es decir, $p_a(\tilde{C}) = p_a(C) - \frac{1}{2}r(r-1)$. Con esta iniciativa, podemos preguntarnos que ocurre con el género aritmético de X y de $\tilde{X}$. La Proposición 3.4 del Capítulo V de [39], nos garantiza que los grupos de cohomología de las gavillas estructurales de X y de $\tilde{X}$ son isomorfos. Por consiguiente, debemos de tener que $\chi(\mathcal{O}_X)$ y $\chi(\mathcal{O}_{\tilde{X}})$ son iguales, y por lo tanto que $p_a(X) = p_a(\tilde{X})$. En otras palabras, el género aritmético de una superficie X resulta ser un invariante birracional.

Hasta ahora solamente hemos hablado de explosiones de X centradas en un solo punto. Sin embargo, podemos rápidamente generalizar todos los resultados vistos a superficies $\tilde{X}$ obtenidas mediante sucesivas explosiones puntuales de X . De hecho el resultado que nos va a interesar es el siguiente:

Proposición 2.21. Sean $\pi : Y \rightarrow X$ un morfismo birracional de superficies proyectivas no singulares, $\pi^* : \text{Pic}(X) \rightarrow \text{Pic}(Y)$ el correspondiente homomorfismo entre los grupos de Picard de X y de Y y $\mathcal{F}$ un elemento de $\text{Pic}(X)$. Se cumple que:

1. El homomorfismo π^* es inyectivo y preserva la forma de intersección.
2. π^* preserva la dimensión de los grupos de cohomología, esto es, para cada $i \geq 0$ se cumple que $\dim_k H^i(X, \mathcal{F}) = \dim_k H^i(X, \pi^*\mathcal{F})$.

3. π^* *preserva la efectividad*, esto es, $\mathcal{F}$ es la clase de un divisor efectivo si, y sólo si, $\pi^*\mathcal{F}$ lo es.
4. π^* *preserva la efectividad numérica*, esto es, $\mathcal{F}.F \geq 0$ para cada divisor efectivo F sobre X si, y sólo si, $\pi^*\mathcal{F}.F' \geq 0$ para cada divisor efectivo F' de Y .

Una versión para este resultado la podemos hallar en [52] Lema 16 página 1222.

Capítulo 3

Configuración Armónica

El objetivo de este capítulo consiste en establecer la configuración de puntos en el plano proyectivo que habremos de utilizar para obtener nuestras superficies proyectivas racionales. Comenzamos recordando la noción de una *homografía* del espacio proyectivo de dimensión n . Enseguida partiendo de la noción de la *razón cruzada* de puntos en $\mathbb{P}_k^n$ y de algunas de sus propiedades establecemos una configuración de puntos en el plano proyectivo. Observamos que cada una de estas configuraciones de puntos de $\mathbb{P}_k^2$ determinan de manera única una cúbica constituida por tres líneas distintas. Asimismo, introducimos el concepto de campo de característica genérica con respecto a tres parámetros y damos una forma efectiva de construir una familia de dichas configuraciones de puntos en el plano proyectivo. La configuración de los puntos que explotaremos será una muy particular, ella misma nos garantizará, por ejemplo, que el *monoide efectivo* asociado a nuestras superficies es finitamente generado. Por tanto, a dicha configuración de puntos la denominaremos *configuración armónica* y a la posición de sus puntos la definiremos como *posición armónica*.

3.1. Homografías

Los intentos de comprender de una manera sistemática las propiedades geométricas que tienen los dibujos y pinturas en perspectiva marcaron a mediados del siglo XVII el inicio de la geometría proyectiva. El uso de puntos al infinito y nociones como las de homografía y *razón cruzada* de puntos fueron consecuentemente empleados por primera vez por esa época. En esta sección revisamos brevemente las homografías del espacio proyectivo y establecemos un resultado que nos permitirá determinar homografías entre puntos colineales.

Las propiedades proyectivas del espacio n -dimensional $\mathbb{P}_k^n$ ($n \in \mathbb{N}$) definido sobre un campo algebraicamente cerrado k de cualquier característica son aquellas propiedades que permanecen invariantes bajo la acción del grupo de las transformaciones lineales no singulares de k^{n+1} módulo múltiplos no nulos, dicho grupo se denota usualmente por $PGL(n+1, k)$ y sus elementos reciben el nombre de *homografías* de $\mathbb{P}_k^n$. Si L es una transformación lineal no singular de k^{n+1} , entonces indistintamente por la misma letra L denotaremos a la homografía de $\mathbb{P}_k^n$ que define su clase de equivalencia. Un elemento de $PGL(n+1, k)$ es por tanto una

aplicación $\varphi : \mathbb{P}_k^n \rightarrow \mathbb{P}_k^n$ tal que $\varphi([p]) = [Lp^t]$ para alguna transformación lineal no singular L de k^{n+1} , para todo $p \in k^{n+1}$, denotando por $[p]$ al punto de $\mathbb{P}_k^n$ cuyo representante es el vector $p \in k^{n+1}$ y por p^t al vector transpuesto de p . En otras palabras, fijando el sistema de referencia canónico de $\mathbb{P}_k^n$, el cual está dado por $(1 : 0 : \cdots : 0), (0 : 1 : 0 : \cdots : 0), \dots, (0 : \cdots : 0 : 1)$ y $(1 : 1 : \cdots : 1)$, tenemos que $[p]$ es el punto $(p_0 : p_1 : \cdots : p_n)$ definido por el vector p cuyas coordenadas en la base canónica de k^{n+1} están dadas por $(p_0, p_1, \dots, p_n)$ y p^t es simplemente un vector columna con entradas las coordenadas de p . Por cierto, a menos de que se indique lo contrario siempre consideraremos el mismo sistema de referencia para $\mathbb{P}_k^n$ y a un punto $[p]$ de $\mathbb{P}_k^n$ cuyo representante sea el vector $p \in k^{n+1}$ lo denotaremos por la mayúscula P de p . Asimismo, si L es una transformación no singular de k^{n+1} , entonces al punto $[Lp^t]$ de $\mathbb{P}_k^n$ lo denotaremos simplemente por $L(P)$. Algunas de las propiedades invariantes bajo el efecto de una homografía de $\mathbb{P}_k^n$ son la *colinealidad* y la *conurrencia* de puntos, así como la *incidencia* de puntos en líneas y viceversa. La invariancia de dichas propiedades se debe básicamente al hecho de que toda transformación lineal no singular de k^{n+1} transforma un subespacio lineal en otro subespacio lineal de la misma dimensión. Una homografía del plano proyectivo en particular resulta ser la multiplicación de una matriz no singular de tamaño 3×3 con entradas en k . Más aún, una homografía de $\mathbb{P}_k^2$ es una biyección φ tal que si ℓ es una recta de $\mathbb{P}_k^2$ y $\ell' = \varphi(\ell)$, entonces la restricción de φ a ℓ , $\varphi|_\ell : \ell \rightarrow \ell'$ es una transformación de Möbius de $\mathbb{P}_k^1$ (ver por ejemplo [43], página 316). Un resultado importante acerca de las homografías del plano proyectivo es el siguiente resultado (Teorema 75, [44]).

Lema 3.1. *Si P_1, P_2 y P_3 son tres puntos colineales del plano proyectivo $\mathbb{P}_k^2$, y P'_1, P'_2 y P'_3 son otros tres puntos colineales de $\mathbb{P}_k^2$, entonces existe una única homografía L de $\mathbb{P}_k^2$ tal que $L(P_1) = P'_1, L(P_2) = P'_2$ y $L(P_3) = P'_3$.*

Este resultado es conocido comúnmente como la *propiedad 3-transitiva* de las homografías de $\mathbb{P}_k^2$ (ver [5] Teorema 9.8, pág 61).

Por último, recordamos que para el espacio proyectivo n -dimensional además de las homografías los automorfismos de k completan, en el sentido del siguiente teorema, la colección de todas las transformaciones de $\mathbb{P}_k^n$ en sí mismo que preservan sus propiedades proyectivas.

Teorema 3.2. *Con las notaciones anteriores, si $n \geq 2$, entonces cada transformación de $\mathbb{P}_k^n$ en sí mismo que preserva las propiedades proyectivas de incidencia y conurrencia de $\mathbb{P}_k^n$ es la composición de un automorfismo del campo k con una homografía de $\mathbb{P}_k^n$.*

Ver [25] Teoremas 3.5.5 y 3.5.6. Las transformaciones de $\mathbb{P}_k^n$ que estudia el teorema anterior se conocen usualmente como *colineaciones* de $\mathbb{P}_k^n$, y el conjunto que forman dichas

transformaciones tiene la estructura algebraica de un grupo bajo la composición, al cual se le denomina el *grupo de colineaciones* de $\mathbb{P}_k^n$. En otras palabras el grupo de colineaciones de $\mathbb{P}_k^n$ no es más que el grupo de automorfismos $\text{Aut}(\mathbb{P}_k^n)$ de $\mathbb{P}_k^n$. Y, toda homografía es una colineación. Una observación inevitable es el hecho de que para $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ el recíproco también se cumple.

3.2. Posición Armónica

Dados tres puntos colineales del plano proyectivo, se sigue que los puntos imágenes de ellos bajo una homografía de $\mathbb{P}_k^2$ son siempre colineales (Lema 3.1). Otro invariante del plano proyectivo bajo tales transformaciones es la *razón cruzada*, cantidad en la geometría proyectiva comparada con la noción de distancia en la geometría afín ([64] Capítulo II Sección 3). En esta sección exploramos esta cantidad que, en su generalidad, definida para cuatro puntos situados de manera ordenada en una línea proyectiva, determina un elemento de k cuyos algunos valores sugerirán ciertas posiciones de los puntos.

Si bien, el plano proyectivo es el lugar donde situaremos la *configuración armónica* de puntos que nos interesa. Fijaremos gran parte de nuestras nociones en el ambiente más general $\mathbb{P}_k^n$. Por ejemplo, establecidos un campo k y un entero n mayor o igual que 2, la razón cruzada de cuatro puntos colineales de $\mathbb{P}_k^n$ la concretamos de acuerdo a la siguiente:

Definición 3.3. Sean P_1, P_2, P_3 y P_4 puntos colineales distintos del espacio proyectivo $\mathbb{P}_k^n$. La razón cruzada de P_1, P_2, P_3 y P_4 , denotada por $(P_1, P_2; P_3, P_4)$, es el elemento $\lambda \in k$ que satisface las igualdades $p_3 = p_1 + p_2$ y $p_4 = \lambda p_1 + p_2$ para ciertos vectores p_1, p_2, p_3 y p_4 de k^{n+1} que representan los puntos dados.

En otras palabras la razón cruzada de cuatro subespacios 1-dimensionales considerados ordenadamente en un subespacio de dimensión dos del espacio vectorial k^{n+1} , es el único elemento de k que satisface las igualdades que establece la definición. Tal elemento es diferente de 0_k y de 1_k . Más aún, es independiente de los representantes de cada punto. En efecto, en primer lugar demostraremos la existencia de dicho elemento. Sean p'_1 y p'_2 vectores no nulos del espacio vectorial k^{n+1} representantes de los puntos P_1 y P_2 . Recordemos que un punto P de $\mathbb{P}_k^n$ es una clase de equivalencia de vectores no nulos de k^{n+1} , de modo tal que un vector $p \in k^{n+1} \setminus \{0\}$ es un representante de P sí, y sólo si, cada múltiplo no nulo de p , también es un representante de dicho punto. Más aún, recordemos que dos vectores linealmente independientes de un espacio vectorial constituyen siempre una base del subespacio de dimensión dos que los contiene. Así, puesto que P_1 y P_2 son colineales, los vectores p'_1 y p'_2 generan tal línea proyectiva que los contiene y, por lo tanto, siendo p_3 un representante

del punto P_3 , resulta que p_3 es una combinación lineal de p'_1 y de p'_2 , esto es $p_3 = \mu p'_1 + \eta p'_2$, para ciertos μ y η en k no nulos. Lo mismo ocurre para un representante vectorial p'_4 del punto P_4 colineal a P_1 y P_2 . Ahora bien, cambiando los representantes de P_1 y de P_2 por los vectores cuya suma dan p_3 , podemos escribir $p_3 = p_1 + p_2$. Enseguida, si el representante p'_4 de P_4 fuese la combinación lineal $p'_4 = \xi p'_1 + \delta p'_2$ con $\xi, \delta \in k \setminus \{0_k\}$, entonces podemos escribir $(\eta/\delta)p'_4 = (\eta\xi/\delta)p'_1 + \eta p'_2 = (\eta\xi/\delta)(1/\mu)\mu p'_1 + \eta p'_2$. Por tanto, cambiando el representante de P_4 por este último vector, obtenemos $p_4 = \lambda p_1 + p_2$, con $\lambda = (\eta\xi/\delta)(1/\mu) \in k \setminus \{0_k\}$. Es evidente ahora notar que λ es diferente de 0_k y de 1_k , ya que los puntos desde el inicio son distintos. Probaremos por último la unicidad de λ , supongamos que p''_1, p''_2, p''_3 y p''_4 son otros representantes de los puntos P_1, P_2, P_3 y P_4 , y que $\lambda' \in k \setminus \{0_k, 1_k\}$ es tal que $p''_3 = p''_1 + p''_2$ y $p''_4 = \lambda' p''_1 + p''_2$. Se sigue que $p''_1 = rp_1, p''_2 = sp_2, p''_3 = tp_3$ y $p''_4 = up_4$, para ciertos $r, s, t, u \in k \setminus \{0_k\}$. Por lo tanto $tp_3 = rp_1 + sp_2$ y $up_4 = r(\lambda' p_1 + p_2)$, consecuentemente $(t-r)p_1 + (t-s)p_2 = 0_{k^{n+1}}$ y $(u\lambda - r\lambda')p_1 + (u-r)p_2 = 0_{k^{n+1}}$. Así, siendo p_1 y p_2 linealmente independientes se tiene que $\lambda' = \lambda$.

Una de las ventajas de nuestra definición es la obtención inmediata de la propiedad proyectiva de invariancia que presenta dicho elemento bajo una homografía de $\mathbb{P}_k^n$.

Lema 3.4. Sean P_1, P_2, P_3 y P_4 puntos distintos y colineales de $\mathbb{P}_k^n$. Si $L \in PGL(n+1, k)$, entonces la razón cruzada $(L(P_1), L(P_2); L(P_3), L(P_4))$ es igual a $(P_1, P_2; P_3, P_4)$.

Demostración. Sea $\lambda \in k$ tal que $p_3 = p_1 + p_2$ y $p_4 = \lambda p_1 + p_2$ para ciertos vectores p_1, p_2, p_3 y p_4 de k^{n+1} que representan los puntos dados. Aplicando la transformación L a estos vectores resulta que $Lp_3^t = Lp_1^t + Lp_2^t$ y $Lp_4^t = \lambda Lp_1^t + Lp_2^t$, por lo que es evidente la igualdad deseada.

□

Como caso particular, para el plano proyectivo, tenemos el efecto de una *proyección perspectiva* (ver Figura 3.1, donde el círculo (E) representa el punto $E \in \mathbb{P}_k^2$ y los círculos (i) y por (i') representan respectivamente los puntos P_i y $T(P_i)$, para cada $i = 1, 2, 3, 4$). Recordemos que una *proyección perspectiva* de $\mathbb{P}_k^2$ de una línea ℓ_1 en otra línea ℓ_2 de $\mathbb{P}_k^2$ con centro en un punto E fuera de ℓ_1 y ℓ_2 es una transformación p_E de ℓ_1 sobre ℓ_2 cuya regla de asignación es como sigue: si $P \in \ell_1$, entonces $p_E(P) = \ell_{EP} \cap \ell_2$, donde ℓ_{EP} es la línea en $\mathbb{P}_k^2$ que une los puntos E y P .

Lema 3.5. Sean P_1, P_2, P_3 y P_4 , respectivamente P'_1, P'_2, P'_3 y P'_4 , puntos colineales distintos en dos líneas ℓ_1 y ℓ_2 de $\mathbb{P}_k^2$, tales que las líneas $\ell_{P_1P'_1}, \ell_{P_2P'_2}, \ell_{P_3P'_3}$ y $\ell_{P_4P'_4}$ todas concurren en un punto $E \in \mathbb{P}_k^2$ fuera de $\ell_1 \cup \ell_2$, se cumple que $(P_1, P_2; P_3, P_4)$ y $(P'_1, P'_2; P'_3, P'_4)$ son iguales.

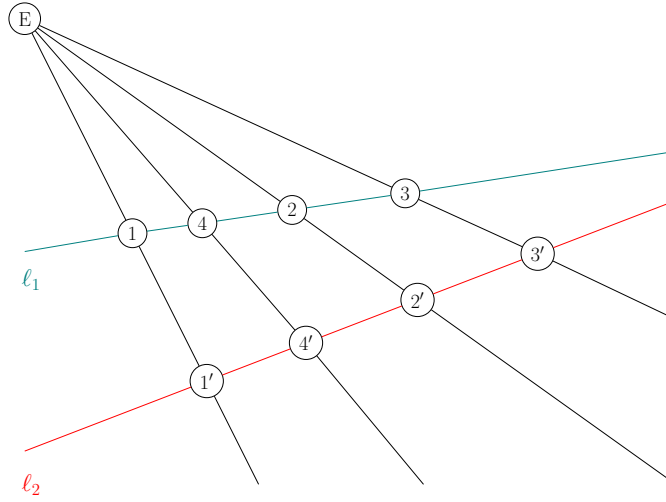


FIGURA 3.1. Perspectiva desde un punto.

Demostración. (del Lema 3.5) Sea ϵ un vector de k^3 representante del punto E y sean $p_1, p_2, p_1 + p_2$ y $\lambda p_1 + p_2$ representantes de P_1, P_2, P_3 y P_4 respectivamente, como en la Definición 3.3. Enseguida, sean μ y $\nu \in k$ tales que $p_1 + \mu\epsilon$ sea el representante de P'_1 y $p_2 + \nu\epsilon$ sea el de P'_2 . Se sigue que $(p_1 + p_2) + (\mu + \nu)\epsilon$ es un vector tanto de la línea $\ell_{P'_1 P'_2}$ como de la línea $\ell_{E P_3}$, por lo tanto, es un representante del punto P'_3 . Del mismo modo el vector $\lambda(p_1 + \mu\epsilon) + (p_2 + \nu\epsilon)$ representa al punto P'_4 . Finalmente, los vectores $p'_1 = p_1 + \mu\epsilon, p'_2 = p_2 + \nu\epsilon, p'_3 = p'_1 + p'_2$ y $p'_4 = \lambda p'_1 + p'_2$ representantes de los puntos P'_1, P'_2, P'_3 y P'_4 dan $(P'_1, P'_2; P'_3, P'_4) = \lambda$. $\square$

Notemos que si remplazamos P'_i por $p_E(P_i)$ para cada $i = 1, 2, 3, 4$, entonces la conclusión del Lema 3.5 expresa la igualdad $(p_E(P_1), p_E(P_2); p_E(P_3), p_E(P_4)) = (P_1, P_2; P_3, P_4)$. Asimismo, observemos que el orden de los cuatro puntos es importante, por ejemplo, $(P_1, P_2; P_3, P_4)$ y $(P_1, P_2; P_4, P_3)$ generalmente no son iguales. El número de disposiciones de cuatro puntos a lo largo de una línea es el factorial de 4, de modo que, en teoría debiésemos tener dicha cantidad de valores para la razón cruzada de cuatro puntos colineales. Sin embargo, considerando diferentes arreglos de los puntos vemos que algunas razones cruzadas son iguales entre sí. Por ejemplo, $(P_1, P_2; P_3, P_4)$ y $(P_4, P_3; P_2, P_1)$ tienen el mismo valor, de igual modo, $(P_1, P_2; P_4, P_3)$ y $(P_2, P_1; P_3, P_4)$ son iguales. La siguiente proposición reúne todas las posibilidades haciendo una partición en seis valores posibles.

Proposición 3.6. Sean P_1, P_2, P_3 y P_4 puntos colineales de $\mathbb{P}_k^n$ y sea λ su razón cruzada. Se sigue que:

1. $(P_1, P_2; P_3, P_4) = (P_2, P_1; P_4, P_3) = (P_3, P_4; P_1, P_2) = (P_4, P_3; P_2, P_1) = \lambda$,
2. $(P_1, P_2; P_4, P_3) = 1/\lambda$,
3. $(P_1, P_3; P_2, P_4) = 1 - \lambda$,
4. $(P_1, P_3; P_4, P_2) = 1/(P_1, P_3; P_2, P_4) = 1/(1 - \lambda)$,
5. $(P_1, P_4; P_2, P_3) = 1 - (P_1, P_2; P_4, P_3) = 1 - 1/\lambda$,
6. $(P_1, P_4; P_3, P_2) = 1 - (P_1, P_3; P_4, P_2) = 1 - 1/(1 - \lambda) = -\lambda/(1 - \lambda)$.

Demostración. Probaremos solamente los casos 2 y 3, los casos restantes se prueban de la misma forma. Sean p_1 y p_2 vectores de k^{n+1} sendos representantes de los puntos P_1 y P_2 . Como P_3 y P_4 son colineales a P_1 y P_2 , existen elementos μ, ν, η y δ no nulos de k tales que los vectores $\mu p_1 + \nu p_2$ y $\eta p_1 + \delta p_2$ representan respectivamente a los puntos P_3 y P_4 . Por lo que cambiando los representantes de P_1 y de P_2 por μp_1 y νp_2 , de manera inmediata vemos que $(P_1, P_2; P_3, P_4) = \nu\eta/\mu\delta$. De igual modo notamos que $(P_1, P_2; P_4, P_3) = \mu\delta/\nu\eta$, es decir, $(P_1, P_2; P_4, P_3)$ es igual a $1/(P_1, P_2; P_3, P_4)$, en este caso los representantes adecuados para los puntos P_1 y P_2 son los vectores ηp_1 y δp_2 . Similarmente, considerando el vector $-\mu p_1$ como representante del punto P_1 , vemos que los vectores $-\mu p_1 + \mu p_1 + \nu p_2 = -\mu p_1 + (\mu p_1 + \nu p_2)$ y $(-\nu\eta/\mu\delta)(-\mu p_1) + \nu\delta/\delta\nu(\nu p_2) + \mu p_1 - \mu p_1 = (1 - \nu\eta/\delta\mu)(-\mu p_1) + (\mu p_1 + \nu p_2)$ representan a P_2 y a P_4 por lo que $(P_1, P_3; P_2, P_4) = 1 - (P_1, P_2; P_3, P_4)$. $\square$

Lo siguiente que observaremos, antes de llegar a la noción de armonicidad, es el hecho de que nuestra definición generaliza la definición clásica de la razón cruzada, ver [14, pág. 118 y 119].

Proposición 3.7. Sean a, b, c y d elementos distintos de k y sean P_1, P_2, P_3 y P_4 los puntos de $\mathbb{P}_k^n$ cuyos representantes en k^{n+1} son los vectores $(a, 0, \dots, 0, 1)$, $(b, 0, \dots, 0, 1)$, $(c, 0, \dots, 0, 1)$ y $(d, 0, \dots, 0, 1)$ respectivamente. Se sigue que

$$(P_1, P_2; P_3, P_4) = \frac{(a - c)(b - d)}{(a - d)(b - c)}.$$

Demostración. Debemos encontrar en k elementos r y s tales que

$$(c, 0, \dots, 0, 1) = r(a, 0, \dots, 0, 1) + s(b, 0, \dots, 0, 1).$$

Es decir, elementos r y s en k tales que $r + s = 1$ y $ra + sb = c$. Resolviendo obtenemos que $r = \frac{c-b}{a-b}$ y $s = \frac{c-a}{b-a}$. Ahora, bajo la misma idea escribimos

$$(d, 0, \dots, 0, 1) = u(a, 0, \dots, 0, 1) + v(b, 0, \dots, 0, 1),$$

para ciertos elementos u y v de k a determinar. Resolviendo para u y v se tiene que $u = \frac{d-b}{a-b}$ y $v = \frac{d-a}{b-a}$. Finalmente escribiendo P_4 en la forma

$$\frac{s}{v}(d, 0, \dots, 0, 1) = \frac{su}{rv}r(a, 0, \dots, 0, 1) + s(b, 0, \dots, 0, 1),$$

obtenemos que $(P_1, P_2; P_3, P_4)$ es igual a $\frac{(a-c)(b-d)}{(a-d)(b-c)}$, lo que había que demostrar. $\square$

La proposición anterior en analogía con la geometría afín (o euclidiana) nos permite establecer la siguiente:

Definición 3.8. Sean P_1, P_2, P_3 y P_4 puntos colineales distintos de $\mathbb{P}_k^n$. Los puntos P_1, P_2, P_3 y P_4 son armónicos si $(P_1, P_2; P_3, P_4) = -1$.

En otras palabras, cuatro puntos colineales P_1, P_2, P_3 y P_4 del espacio proyectivo n -dimensional están en posición armónica, si existen sendos vectores p_1 y p_2 de k^{n+1} tales que los puntos P_1 y P_2 se representan por p_1 y p_2 respectivamente y los puntos P_3 y P_4 mediante los vectores $p_1 + p_2$ y $p_2 - p_1$. En dicho caso, también diremos que los puntos P_1, P_2, P_3 y P_4 están en posición armónica sobre la recta que los contiene, o bien, que la cuaterna ordenada $(P_1, P_2; P_3, P_4)$ es colineal y armónica.

Ejemplos concretos de puntos armónicos en el espacio proyectivo n -dimensional $\mathbb{P}_k^n$, donde k es un campo de característica diferente de dos, siempre existen basta considerar un elemento a del campo k distinto de 1_k , de -1_k y de 0_k ; y apoyarnos en la Proposición 3.7, para corroborar que los puntos colineales $(1 : 0 : \dots : 1)$, $(a^2 : 0 : \dots : 1)$; $(a : 0 : \dots : 1)$ y $(-a : 0 : \dots : 1)$ de $\mathbb{P}_k^n$, considerados en este orden son armónicos. En particular, los puntos colineales $(1 : 0 : 1)$, $(a^2 : 0 : 1)$; $(a : 0 : 1)$ y $(-a : 0 : 1)$ de $\mathbb{P}_k^2$ satisfacen

$$((1 : 0 : 1), (a^2 : 0 : 1); (a : 0 : 1), (-a : 0 : 1)) = -1.$$

Ahora bien, con la finalidad de proporcionar más ejemplos concretos y mostrar la abundancia que hay de puntos armónicos en el plano proyectivo $\mathbb{P}_k^2$, introduciremos una cierta noción *genérica* que especificará el tipo de campos por utilizar para brindar una familia suficiente de ejemplos de cuaternas armónicas de puntos. Sea k un campo infinito no necesariamente algebraicamente cerrado de cualquier característica y sean x, y y z las coordenadas afines de k^3 , si $P_1 = (a_1 : a_2 : a_3)$, $P_2 = (b_1 : b_2 : b_3)$ y $P_3 = (c_1 : c_2 : c_3)$ son tres puntos colineales de $\mathbb{P}_k^2$, entonces mediante un cambio de coordenadas es posible determinar tres elementos α, β y γ de k tales que $P_1 = (\alpha : 0 : 1)$, $P_2 = (\beta : 0 : 1)$ y $P_3 = (\gamma : 0 : 1)$, a partir de lo cual, en vista de la Proposición 3.7, vemos que para determinar un cuarto punto P_4 tal que $(P_1, P_2; P_3, P_4) = -1$, de coordenadas homogéneas $(\delta : 0 : 1)$ donde $\delta \in k$, es necesario

que la terna $(\alpha, \beta, \gamma) \in K^3$ de parámetros que determinan los puntos P_1, P_2 y P_3 , satisfagan $(\alpha, \beta, \gamma) \in D(2z - y - x)$, donde $D(2z - y - x)$ es el abierto básico de k^3 definido por el polinomio $2z - y - x$ (ver la Sección 1.1 del Capítulo 1). Más aún, de ser así, tenemos que $\delta = \frac{\gamma(\alpha + \beta) - 2\alpha\beta}{2\gamma - \beta - \alpha}$. Esto nos lleva a formular el siguiente concepto.

Definición 3.9. *Sea k un campo infinito no necesariamente algebraicamente cerrado de cualquier característica y sean tres elementos α, β y γ de k . k es de característica genérica con respecto a α, β y γ si $(\alpha, \beta, \gamma) \in D(2z - y - x)$.*

En particular, dado un entero $n \geq 2$ y un campo k de característica diferente de 2, se sigue que k es de característica genérica con respecto a $-1, 1$ y n si, y sólo si, $ch(k) \nmid n$. Esta observación, nos provee de una basta familia de ejemplos de cuaternas de puntos armónicos en $\mathbb{P}_k^2$.

Ejemplo 3.10. Si n es un entero positivo mayor o igual que 2 y k es un campo de característica genérica con respecto a $-1, 1$ y n , entonces los cuatro puntos colineales

$$(-1 : 0 : 1), (1 : 0 : 1); (n : 0 : 1) \text{ y } \left(\frac{1}{n} : 0 : 1\right),$$

constituyen una cuaterna de puntos armónicos en $\mathbb{P}_k^2$.

Es útil observar los valores que especifica la Proposición 3.6 para la razón cruzada de una cuaterna de puntos de $\mathbb{P}_k^n$, ya que, en el caso de puntos armónicos, los diferentes valores de dicha proposición son únicamente tres. A saber $-1, 2$ y $\frac{1}{2}$ cuando $ch(k) \neq 2$. En particular, los arreglos $(P_1, P_2; P_3, P_4)$ y $(P_1, P_2; P_4, P_3)$ son ambos iguales a -1 y los seis arreglos restantes que toman tal valor son: $(P_2, P_1; P_4, P_3)$, $(P_3, P_4; P_1, P_2)$, $(P_4, P_3; P_2, P_1)$, $(P_2, P_1; P_3, P_4)$, $(P_4, P_3; P_1, P_2)$ y $(P_3, P_4; P_2, P_1)$. De esta manera la cuaterna $(P_1, P_2; P_3, P_4)$ de la Definición 3.8 puede ser remplazada por cualquiera de las cuaternas mencionadas.

La igualdad entre los arreglos ordenados $(P_1, P_2; P_3, P_4)$ y $(P_1, P_2; P_4, P_3)$ nos servirá como criterio para garantizar si puntos P_1, P_2, P_3 y P_4 dados en este orden, distintos dos a dos y colineales son o no armónicos. Pues, en vista de la Proposición 3.6 la igualdad $(P_1, P_2; P_3, P_4) = (P_1, P_2; P_4, P_3)$, implica $\lambda^2 = 1$, que a su vez nos da $\lambda = -1$. Recíprocamente, si $\lambda = -1$, entonces $1/\lambda = -1$.

El siguiente resultado fija los nueve puntos que habremos de utilizar como orígenes de una cierta constelación de puntos infinitamente cercanos de $\mathbb{P}_k^2$ o como las raíces de cierto grafo de bosque que definiremos en el siguiente capítulo. Este mismo resultado también determina la configuración de puntos de $\mathbb{P}_k^2$ que buscamos. Básicamente establece que para cada terna

de puntos colineales distintos del plano proyectivo siempre es posible construir un punto colineal a los tres primeros y distinto de ellos de tal manera que su posición se realice de forma armónica con los demás. Precisamente:

Teorema 3.11. *Sean k un campo algebraicamente cerrado de característica arbitraria y $\mathbb{P}_k^2$ el plano proyectivo sobre k . Sean P_1, P_2 y P_3 puntos distintos y colineales de $\mathbb{P}_k^2$ y sean P_5, P_6 y P_7 puntos de $\mathbb{P}_k^2$ tales que $P_5 \notin \ell_{P_1P_2}$, $P_6 \in \ell_{P_1P_5}$ y $P_7 \in \ell_{P_2P_5} \cap \ell_{P_3P_6}$, donde $\ell_{P_iP_j}$ es la línea de $\mathbb{P}_k^2$ que pasa por los puntos P_i y P_j . Si P_8 y P_4 son las intersecciones de las líneas $\ell_{P_1P_7}$ y $\ell_{P_2P_6}$; y de las líneas $\ell_{P_5P_8}$ y $\ell_{P_1P_2}$, respectivamente, entonces $(P_1, P_2; P_3, P_4) = -1$. Más aún, si P_9 es la intersección de las líneas $\ell_{P_3P_6}$ y $\ell_{P_4P_5}$, entonces $(P_6, P_7; P_3, P_9)$ y $(P_5, P_8; P_4, P_9)$ también son iguales a -1 .*

Antes de dar la demostración verificaremos que tales hipótesis siempre se cumplen en el plano proyectivo. Consideremos la Figura 3.2, donde el círculo (P_i) es el punto P_i para $1 \leq i \leq 9$.

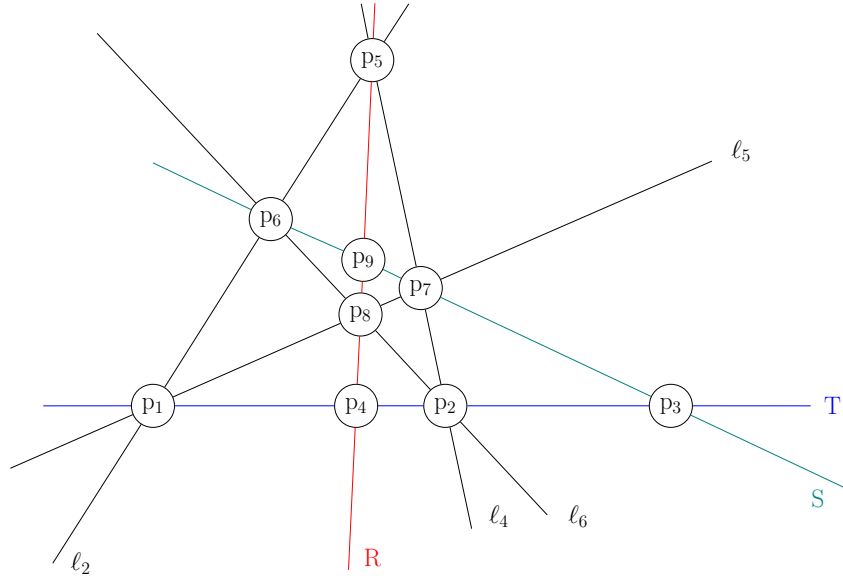


FIGURA 3.2. Configuración Armónica.

Notemos que el punto P_5 siempre existe. En efecto, sea $\mathbf{T}$ la línea que pasa por los puntos P_1, P_2 y P_3 ; sin pérdida de generalidad podemos suponer que tal recta tiene por ecuación, la ecuación homogénea $y = 0$ (donde las variables x, y y z son las coordenadas homogéneas de $\mathbb{P}_k^2$), de esta forma el punto proyectivo cuyo representante es el vector $(0, 1, 0) \in k^3$, satisface $(0 : 1 : 0) \notin \mathbf{T}$. Otra manera de proceder es la siguiente, supongamos que $\mathbf{T} = V(f(x, y, z))$ para cierto polinomio $f(x, y, z) \in k[x, y, z]$ homogéneo e irreducible de grado uno, si ocurriera que $\mathbb{P}_k^2 \subseteq \mathbf{T}$, entonces suponiendo al menos que k es infinito tendríamos que el grado de $f(x, y, z)$ sería igual a cero lo cual es absurdo. Puesto que k es algebraicamente cerrado esto siempre se cumple. Por lo tanto, el punto P_5 siempre lo podemos escoger. Ahora bien, la existencia del punto P_6 distinto de P_1 y de P_5 sobre la recta ℓ_2 que pasa por P_1 y P_5 , se sigue inmediatamente al considerar el vector $p_1 + p_5$ para sendos vectores p_1 y p_5 de k^3 representantes de los puntos P_1 y P_5 respectivamente. Por otro lado, el punto P_7 donde se intersectan $\mathbf{S}$ (la recta que pasa por los puntos P_6 y P_3) y ℓ_4 que pasa por P_2 y P_5 , nos lo da el teorema de Bézout (Teorema 2.9). Este mismo teorema nos garantiza la existencia de los puntos restantes P_8, P_9 y P_4 que se obtienen al considerar las líneas ℓ_5 y ℓ_6 que pasan por los puntos P_1 y P_7 ; y P_2 y P_6 ; junto con las líneas $\mathbf{T}$ y $\mathbf{R}$, siendo esta última la línea que pasa por los puntos P_5 y P_8 .

Demostración. (del Teorema 3.11) Siguiendo las hipótesis consideradas podemos siempre elegir vectores p_1 y p_2 de k^3 representantes de los puntos P_1 y P_2 , tales que $p_1 + p_2$ sea un representante de $P_3 \in \ell_{P_1 P_2}$. De igual forma, podemos escoger un vector p_8 de k^3 representante de P_8 tal que el punto $P_6 \in \ell_{P_2 P_8}$ tenga como representante el vector $p_2 + p_8$. Enseguida, notando que el vector $p_1 - p_8$ se puede escribir como $p_1 - p_8 = (p_1 + p_2) - (p_2 + p_8)$, se sigue que el punto proyectivo que representa $p_1 - p_8$ es el único elemento de $\ell_{P_1 P_8} \cap \ell_{P_3 P_6}$. De modo que $p_1 - p_8$ es un representante para el punto P_7 . Análogamente, tomando en cuenta que $p_1 - (p_2 + p_8) = -p_2 + (p_1 - p_8)$ se tiene que $p_1 - (p_2 + p_8)$ es un representante de P_5 . Finalmente, dadas las coordenadas del punto P_5 , es claro que $-p_1 + p_2 = -(p_1 - (p_2 + p_8)) - p_8$. Por lo tanto, un representante para el punto $P_4 \in \ell_{P_1 P_2} \cap \ell_{P_5 P_8}$ es el vector $-p_1 + p_2$. De esta manera $(P_1, P_2; P_3, P_4) = -1$.

En seguida, para mostrar que $(P_6, P_7; P_3, P_9) = -1$, basta observar que $p_6 = p_2 + p_8$ y $p_7 = p_1 - p_8$ nos dan $p_3 = p_6 + p_7$ y $p_9 = -p_6 + p_7$. En efecto, $p_3 = p_1 + p_2 = (p_2 + p_8) + (p_1 - p_8) = p_6 + p_7$ y $p_9 = -p_6 + p_7 = -(p_2 + p_8) + (p_1 - p_8) = p_1 - (p_2 + p_8) - p_8$. De modo que $p_9 \in \ell_{P_5 P_8} \cap \ell_{P_6 P_7} = \ell_{P_4 P_5} \cap \ell_{P_3 P_6}$. Por último para probar que $(P_5, P_8; P_4, P_9) = -1$, basta considerar $p_5 = -p_1 + (p_2 + p_8)$ y $p_8 = -p_8$. $\square$

Observación 3.12. Es importante notar la validez del Teorema 3.11 sin la necesidad de que el campo k sea de característica genérica con respecto a ciertos parámetros. Sin embargo, si adicionalmente exigimos que todos los puntos de dicho teorema pertenezcan a una carta afín de $\mathbb{P}_k^2$ (por ejemplo a la determinada por $z \neq 0$), entonces, en conformidad con lo desarrollado previamente a la Definición 3.9, vemos que nuestra restricción obliga un pago por parte de la característica de k , a saber, el de ser genérica con respecto a un número finito de parámetros, que después de todo no es muy costosa.

Un bosquejo gráfico para la prueba del Teorema 3.11, suponiendo que los puntos y las rectas se sitúan en alguna carta afín de $\mathbb{P}_k^2$ y tomando en cuenta la notación utilizada en la Figura 3.2, puede darse considerando primeramente la proyección perspectiva con centro en P_5 de la recta **T** en **S** y finalmente la proyección perspectiva con centro en P_8 de la recta **S** en **T**, ver la Figura 3.2. En efecto, la primera perspectiva mencionada nos garantiza la igualdad $(P_1, P_2; P_3, P_4) = (p_{P_5}(P_1), p_{P_5}(P_2); p_{P_5}(P_3), p_{P_5}(P_4)) = (P_6, P_7; P_3, P_9)$. Finalmente, la última proyección perspectiva centrada en el punto P_8 de la recta **S** en **T** nos da la igualdad $(P_6, P_7; P_3, P_9) = (p_{P_8}(P_6), p_{P_8}(P_7); p_{P_8}(P_3), p_{P_8}(P_9)) = (P_2, P_1; P_3, P_4)$, que nos permite obtener la igualdad $(P_1, P_2; P_3, P_4) = (P_1, P_2; P_4, P_3)$. De manera tal que $\lambda = (P_1, P_2; P_3, P_4)$ es la raíz cuadrada de la unidad (Proposición 3.6), y su única posibilidad es -1 , ya que desde la definición de la razón cruzada, $\lambda = 1$ no puede ocurrir, pues los puntos P_3 y P_4 son distintos. Así que, $\lambda = -1$ y los cuatro puntos P_1, P_2, P_3 y P_4 son armónicos. Siguiendo este desarrollo cabe destacar que los cuatro puntos P_5, P_8, P_4 y P_9 situados sobre la recta **R** también son armónicos, basta considerar la proyección perspectiva con centro en P_1 de la línea **S** en **R**, la cual nos da $(P_6, P_7; P_3, P_9) = (P_5, P_8; P_4, P_9)$.

Corolario 3.13. Sean $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8$ y P_9 los diferentes puntos de $\mathbb{P}_k^2$ y $\ell_{P_s P_r}$, $(s, r) \in \{(1, 2), (1, 5), (1, 7), (2, 5), (2, 6), (3, 6), (5, 8)\}$ las rectas distintas del plano proyectivo dados por el Teorema 3.11, se sigue que $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \ell_{P_1 P_2}$, $P_3, P_6, P_7, P_9 \in \ell_{P_3 P_6}$ y $P_4, P_5, P_8, P_9 \in \ell_{P_5 P_8}$. Más aún, $P_4 \in \ell_{P_1 P_2} \cap \ell_{P_5 P_8}$, $P_3 \in \ell_{P_1 P_2}$ y $P_9 \in \ell_{P_3 P_6} \cap \ell_{P_5 P_8}$.

El concepto que sigue tomará un papel primordial en el siguiente capítulo.

Definición 3.14. Una configuración armónica de puntos y rectas de $\mathbb{P}_k^2$ es un par $(\mathcal{A}, D)$ que consiste de un conjunto de nueve puntos $\mathcal{A} = \{P_1, P_2, \dots, P_9\}$ y de una cúbica D de $\mathbb{P}_k^2$ formada por tres líneas distintas que pasan por los puntos de $\mathcal{A}$ de tal forma que las cuaternas ordenadas $(P_1, P_2; P_3, P_4)$, $(P_6, P_7; P_3, P_9)$ y $(P_5, P_8; P_4, P_9)$ son colineales y armónicas.

Enseguida, para evitar alguna posible ambigüedad con respecto a la unicidad de dicha cúbica nos aseguraremos que la curva proyectiva que pasa por los nueve puntos de una configuración armónica es única.

Proposición 3.15. *Con las notaciones utilizadas anticipadamente, existe una única cúbica que pasa por $P_i \in \mathcal{A}$, para cada $i \in \{1, 2, \dots, 9\}$; dicha cúbica es exactamente $\mathbf{T} \cup \mathbf{S} \cup \mathbf{R}$.*

Demostración. Supongamos que C es una cúbica de $\mathbb{P}_k^2$ tal que para cada índice $i \in \{1, 2, \dots, 9\}$ se tiene que P_i es un elemento de C . Se sigue que P_1, P_2, P_3 y P_4 están en la intersección de $\mathbf{T}$ con C . Por consiguiente, del Teorema de Bézout se deduce que las curvas $\mathbf{T}$ y C tienen una componente irreducible en común. Luego, siendo $\mathbf{T}$ por sí misma una curva irreducible resulta que ésta componente en común es exactamente $\mathbf{T}$ y por lo tanto $\mathbf{T} \subseteq C$. Por otro lado, mediante un razonamiento similar, resulta que $\mathbf{S}$ y $\mathbf{R}$ están contenidas en C . En definitiva obtenemos que $\mathbf{T} \cup \mathbf{S} \cup \mathbf{R} \subseteq C$. Ahora, observando que los grados de C y de $\mathbf{T} \cup \mathbf{S} \cup \mathbf{R}$ son iguales concluimos que $C = \mathbf{T} \cup \mathbf{S} \cup \mathbf{R}$. $\square$

En conformidad con la proposición anterior, en lo que sigue, para referirnos a una configuración armónica $(\mathcal{A}, D)$ de $\mathbb{P}_k^2$ solamente mencionaremos el conjunto $\mathcal{A}$.

Por otro lado, basados en el hecho de que el plano proyectivo admite una descomposición de la forma $\mathbb{P}_k^2 = k^2 \cup \mathbb{P}_k^1$, donde destacamos la parte afín k^2 , podemos especificar las coordenadas homogéneas de los nueve puntos de una configuración armónica utilizando primordialmente las herramientas analíticas de la geometría afín y el proceso de homogenización de polinomios de la geometría algebraica clásica. En efecto, suponiendo que la característica de nuestro campo k es diferente de 3, 5, y 7, y genérica con respecto a $-1, 0$ y 1 , veremos que la configuración armónica de la Figura 3.3 siempre es realizable. Calculemos pues, las coordenadas homogéneas de los 9 puntos de la configuración armónica mostrada en la figura mencionada. Sean $P_1 = (-1 : 0 : 1)$, $P_2 = (0 : 0 : 1)$ y $P_3 = (1 : 0 : 1)$ puntos del plano proyectivo, es claro que estos tres puntos son colineales de hecho la recta que pasa por ellos es $\mathbf{T} = V(y)$. Para la determinación del punto P_4 que es armónico a P_1, P_2 y P_3 , el Teorema 3.11 nos solicita un punto P_5 fuera de $\mathbf{T}$. Ahora bien, en vista de la ecuación homogénea para $\mathbf{T}$, es claro que $(0 : 1 : 1) \notin V(y)$, por lo tanto podemos elegir $P_5 = (0 : 1 : 1)$. Luego, las ecuaciones de las líneas en el plano afín que pasan por $(-1, 0)$ y $(0, 1)$, respectivamente por $(0, 0)$ y $(0, 1)$ son $y = x + 1$, respectivamente $x = 0$. De modo que las líneas que pasan por P_1 y P_5 ; y por P_2 y P_5 resultan ser $\ell_2 = V(y - x - z)$ y $\ell_4 = V(x)$. Posteriormente, suponiendo que la característica del campo k es genérica con respecto a $-1, 0$ y 1 , podemos elegir el punto $P_7 = (0 : \frac{1}{2} : 1) \in \ell_4$ de forma tal que la línea que pase por P_3 y P_7 sea $\mathbf{S} = V(y + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}z)$

y el punto $P_6 \in \mathbf{T} \cap \mathbf{S}$ en coordenadas homogéneas sea el punto $(-\frac{1}{3} : \frac{2}{3} : 1)$. Considerando ahora los pares de puntos P_1 y P_7 , y P_2 y P_6 ; podemos determinar las ecuaciones homogéneas de las líneas que pasan por estos puntos, el cálculo respectivo nos da que $\ell_5 = V(y - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}z)$ y $\ell_6 = V(y + 2x)$. Por último, en vista de que la característica de k es genérica, efectuamos los cálculos de las coordenadas homogéneas del punto $P_8 \in \ell_5 \cap \ell_6$, la ecuación homogénea de la línea $\mathbf{R}$ que pasa por los puntos P_5 y P_8 y las coordenadas homogéneas de los puntos $P_9 \in \mathbf{R} \cap \mathbf{S}$ y $P_4 \in \mathbf{S} \cap \mathbf{T}$. Los valores que se derivan son $P_8 = (-\frac{1}{5} : \frac{2}{5} : 1)$, $\mathbf{R} = V(y - 3x - z)$; $P_9 = (-\frac{1}{7} : \frac{4}{7} : 1)$ y $P_4 = (-\frac{1}{3} : 0 : 1)$. Sólo nos resta verificar que los puntos P_1, P_2, P_3 y P_4 son armónicos. Es suficiente observar que

$$(1, 0, 1) = (1, 0, -1) + (0, 0, 2) \text{ y } 3(-\frac{1}{3}, 0, 1) = -1(1, 0, -1) + (0, 0, 2).$$

Así, tomando los vectores $p_1 = (-1, 0, 1)$, $p_2 = (0, 0, 2)$, $p_3 = (1, 0, 1)$ y $p_4 = (-1, 0, 3)$ de k^3 como los representantes de los puntos P_1, P_2, P_3 y P_4 ; vemos que $p_3 = p_1 + p_2$ y $p_4 = -p_1 + p_2$ y por lo tanto $(P_1, P_2; P_3, P_4) = -1$.

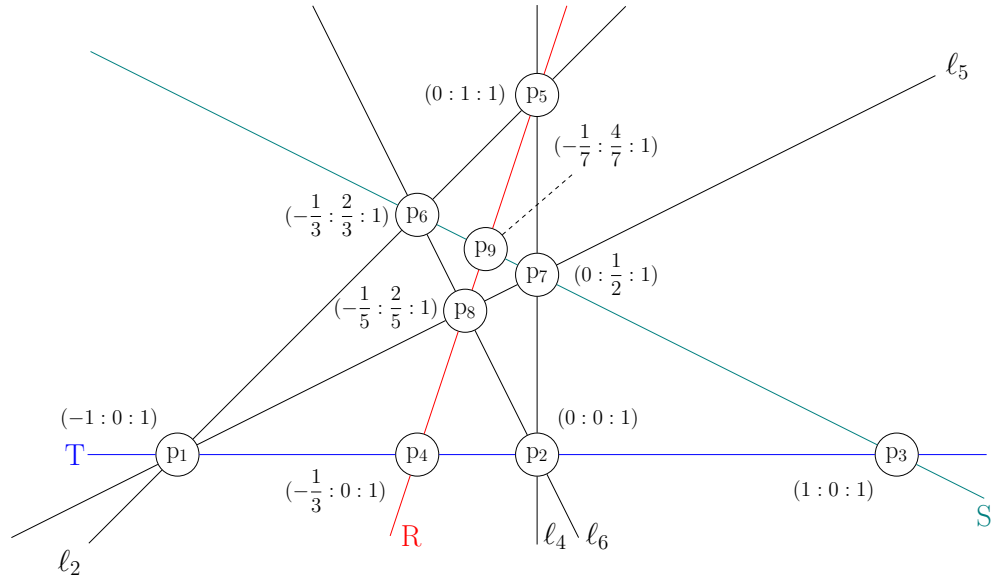


FIGURA 3.3. Coordenadas Homogéneas de una Configuración Armónica Realizable.

En el ejemplo que acabamos de desarrollar los nueve puntos P_i ($i \in \{1, \dots, 9\}$) que forman el conjunto $\mathcal{A}$ caen en la cúbica $D = V(y) \cup V(y + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}z) \cup V(y - 3x - z)$, que sabemos es la única cúbica que los contiene (Proposición 3.15). Es muy importante que ésta cúbica sea la única curva que pasa por estos nueve puntos ya que conociendo su unicidad resulta que la dimensión del sistema lineal completo de curvas planas proyectivas que pasan por estos puntos es igual a cero.

Un ejemplo más de una configuración armónica *efectiva* o *realizable* en el plano proyectivo con coordenadas homogéneas específicas, basado en el Ejemplo 3.10, es la siguiente: Sean $P_1 = (-1 : 0 : 1)$, $P_2 = (1 : 0 : 1)$ y $P_3 = (2 : 0 : 1)$ puntos de $\mathbb{P}_k^2$, con k de característica genérica con respecto a $-1, 1$ y 2 ; y tal que $ch(k) \neq 3, 5, 7$; es claro que estos tres puntos son colineales, pues se encuentran en la línea $\mathbf{T} = V(y)$. El cuarto punto P_4 colineal a los tres puntos dados, según el Teorema 3.11, requiere de un punto P_5 fuera de $\mathbf{T}$. Por tanto podemos elegir $P_5 = (0 : 1 : 1)$, asimismo seleccionamos $P_7 = (\frac{1}{2} : \frac{1}{2} : 1)$ en la línea $\ell_4 = V(y + x - z)$ que es la que pasa por los puntos P_5 y P_2 . Luego, las ecuaciones de las líneas que pasan por los puntos P_1 y P_5 , por P_3 y P_7 y por P_1 y P_7 ; respectivamente denotadas por ℓ_2 , $\mathbf{S}$ y ℓ_5 son $V(y - x - z)$, $V(y + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}z)$ y $V(y - \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}z)$. De modo que $P_6 \in \ell_2 \cap \mathbf{S}$ queda determinado por las coordenadas homogéneas $(-\frac{1}{4} : \frac{3}{4} : 1)$ y la línea que pasa por los puntos P_2 y P_6 resulta ser $\ell_6 = V(y + \frac{3}{5}x - \frac{3}{5}z)$. Enseguida el punto P_8 determinado por el cruce de las líneas ℓ_5 y ℓ_6 tiene las coordenadas $(\frac{2}{7} : \frac{3}{7} : 1)$. Finalmente, la línea $\mathbf{R}$ cuyas intersecciones con las líneas $\mathbf{T}$ y $\mathbf{S}$ determinan los puntos $P_4 = (\frac{1}{2} : 0 : 1)$ y $P_9 = (\frac{1}{5} : \frac{3}{5} : 1)$ respectivamente, queda especificada por $V(y + 2x - z)$. Desde el Ejemplo 3.10 sabemos que P_1, P_2, P_3 y P_4 son armónicos, no obstante notemos que $(2, 0, 1) = (\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}) + (\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2})$ y $2(\frac{1}{2}, 0, 1) = -1(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}) + (\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2})$. Por lo que tomando los vectores $p_1 = (\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2})$, $p_2 = (\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2})$, $p_3 = (2, 0, 1)$ y $p_4 = 2(\frac{1}{2}, 0, 1)$ como representantes de los puntos P_1, P_2, P_3 y P_4 , evidentemente $p_3 = p_1 + p_2$ y $p_4 = -p_1 + p_2$ y por lo tanto $(P_1, P_2; P_3, P_4) = -1$. En definitiva los nueve puntos P_i para $i \in \{1, \dots, 9\}$ y las líneas $\mathbf{T}, \ell_2, \mathbf{S}, \ell_4, \ell_5, \ell_6, \mathbf{R}$ constituyen una configuración armónica.

Si en lugar de elegir P_3 igual a $(2 : 0 : 1)$ consideramos P_3 igual a $(3 : 0 : 1)$ junto con los puntos $P_1 = (-1 : 0 : 1)$ y $P_2 = (1 : 0 : 1)$, entonces suponiendo que el campo k es de característica genérica con respecto a $-1, 1$ y 3 , y siguiendo el mismo razonamiento lo que obtenemos es la cuaterna armónica $(-1 : 0 : 1), (1 : 0 : 1), (3 : 0 : 1)$ y $(\frac{1}{3} : 0 : 1)$, asimismo obtenemos que las coordenadas homogéneas de los cinco puntos restantes son: $P_5 = (0 : 1 : 1)$, $P_6 = (-\frac{1}{3} : \frac{2}{3} : 1)$, $P_7 = (\frac{1}{2} : \frac{1}{2} : 1)$, $P_8 = (\frac{1}{5} : \frac{2}{5} : 1)$ y $P_9 = (\frac{1}{7} : \frac{4}{7} : 1)$. Mientras que las líneas $\mathbf{T}, \ell_2, \mathbf{S}, \ell_4, \ell_5, \ell_6, \mathbf{R}$ son respectivamente: $V(y)$, $V(y - x - z)$, $V(y + \frac{1}{5}x - \frac{3}{5}z)$, $V(y + x - z)$, $V(y - \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}z)$, $V(y + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}z)$ y $V(y + 3x - z)$.

Por último, suponiendo que la característica del campo k es diferente de un número finito de parámetros y genérica con respecto a $-1, 1$ y n ; la generalización de los dos últimos ejemplos indica que la cuaterna $P_1 = (-1 : 0 : 1)$, $P_2 = (1 : 0 : 1)$; $P_3 = (n : 0 : 1)$ y $P_4 = (\frac{1}{n} : 0 : 1)$ de puntos de $\mathbb{P}_k^2$ es armónica. De hecho, a nivel de representantes vemos que

$$(n, 0, 1) = (\frac{n-1}{2}, 0, -\frac{n-1}{2}) + (\frac{n+1}{2}, 0, \frac{n+1}{2}) \text{ y } n(\frac{1}{n}, 0, 1) = -1(\frac{n-1}{2}, 0, -\frac{n-1}{2}) + (\frac{n+1}{2}, 0, \frac{n+1}{2}).$$

De modo que, $(P_1, P_2; P_3, P_4) = -1$. Más aún, gracias al tipo de característica de k , los cálculos nos dan fácilmente las coordenadas homogéneas los puntos que completan la configuración armónica correspondiente: $P_5 = (0 : 1 : 1)$, $P_6 = (\frac{1-n}{2n} : \frac{1+n}{2n} : 1)$, $P_7 = (\frac{1}{2} : \frac{1}{2} : 1)$, $P_8 = (\frac{2}{1+3n} : \frac{1+n}{1+3n} : 1)$ y $P_9 = (\frac{1-n}{1+n-2n^2} : \frac{1-n^2}{1+n-2n^2} : 1)$; así como también las ecuaciones específicas de las líneas [T](#), ℓ_2 , [S](#), ℓ_4 , ℓ_5 , ℓ_6 y [R](#), a saber $V(y)$, $V(y-x-z)$, $V(y-\frac{1}{1-2n}x+\frac{n}{1-2n}z)$, $V(y+x-z)$, $V(y-\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}z)$, $V(y-\frac{1+n}{1-3n}x+\frac{1+n}{1-3n}z)$ y $V(y+nx-z)$ respectivamente. De manera que si fijamos un entero n mayor o igual a 2 y denotamos por $\mathcal{A}_n$ al conjunto $\{P_1, P_2, \dots, P_9\}$ obtenido anteriormente; y por D_n a la cúbica $T \cup S \cup R$, entonces el conjunto de los enteros n mayores o iguales a 2 parametriza una familia de configuraciones armónicas $(\mathcal{A}_n, D_n)$ de $\mathbb{P}_k^2$ construibles para cierto campo k de característica genérica con respecto a cierta terna no nula de elementos de k localizada fuera de un hiperplano de k^3 . A dicha familia le llamaremos *familia genéricamente estándar* de configuraciones armónicas de $\mathbb{P}_k^2$.

Capítulo 4

Superficies Projectivas Armónicas

Las superficies proyectivas racionales no singulares cuyos números de Picard son muy grandes y cuyos monoïdes efectivos son finitamente generados no han sido estudiadas completamente, en contraste con aquellas cuyos números de Picard son menores que o iguales a 10 que son bien conocidas, ver por ejemplo [60], [61], [6], [55], [30], [29], [31] [32], [33], [34], [35], [46], [47], [48] y [49]. En este capítulo presentamos la parte original de esta tesis construyendo una nueva clase de superficies proyectivas racionales no singulares tales que $M(X)$ es finitamente generado y en general sus números de Picard satisfacen $\rho(X) \geq 11$.

Puntualizamos los objetivos principales de este capítulo como los siguientes:

1. construir sobre un campo algebraicamente cerrado de cualquier característica las *superficies proyectivas armónicas* y mostrar que forman una clase de superficies proyectivas racionales anticanónicas, cuyos sistemas anticanónicos son de dimensión cero, y cuyos números de Picard son muy grandes.
2. Asimismo, probar que el monoïde efectivo de cada superficie proyectiva armónica es finitamente generado. Más aún, observar que cada divisor canónico de dichas superficies tiene generalmente número de autointersección muy grande negativamente, por ejemplo, para cada $N \in \mathbb{Z}_+$ existe una superficie proyectiva armónica X tal que $K_X^2 = -N$.

Comenzamos en la Sección 4.1 con una breve reseña de conceptos de la Teoría de Grafos mismos que nos servirán para introducir los diagramas decorados de Enriques. Posteriormente, en la Sección 4.2 desarrollamos la construcción de las superficies proyectivas armónicas y estudiamos algunas de sus propiedades, ver la Proposición 4.12 y el Corolario 4.14. Luego, con la finalidad de probar que el monoïde efectivo $M(X)$ de una superficie proyectiva armónica X es finitamente generado mostramos, respectivamente en las Secciones 4.3 y 4.4, que los conjuntos de las (-1) -curvas y de las (-2) -curvas de X son finitos.

4.1. Diagramas Decorados de Enriques

Iniciamos esta sección con algunas nociones de la Teoría de Grafos y posteriormente, dada una superficie X proyectiva no singular definida sobre un campo algebraicamente cerrado k , de característica arbitraria, introducimos los conceptos de constelación y de una D -constelación, para cualquier divisor efectivo D no nulo sobre X . Así como sus diagramas decorados de Enriques.

Definición 4.1. *Un grafo G es un par ordenado $(V(G), E(G))$ que consiste de un conjunto no vacío $V(G)$ cuyos elementos son llamados vértices y un subconjunto $E(G)$ del conjunto de pares no ordenados de $V(G)$, a los que se les denomina aristas de G .*

Puesto que solo consideraremos grafos finitos establecemos que los conjuntos $V(G)$ y $E(G)$ son finitos. Más aún, evitando la posibilidad de tener *lazos* convenimos en que cada arista es incidente en exactamente dos vértices distintos, llamados sus *extremos*. Asimismo, un *camino* C de longitud k ($k \in \mathbb{N}$) lo definimos como una secuencia finita $C = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \cdots e_k v_k$ cuyos términos son alternadamente vértices y aristas tal que los extremos de la arista e_i son v_{i-1} y v_i , donde $v_1, v_2, \dots, v_{k-1}$ son todos distintos y $(v_0, v_k) \notin \{v_1, v_2, \dots, v_{k-1}\} \times \{v_1, v_2, \dots, v_{k-1}\}$. A los vértices v_0 y v_k de un camino C les llamaremos respectivamente el *inicio* y el *final* de C y diremos que C es un camino entre ellos. Notemos que un camino de longitud 1 entre dos vértices u y v es simplemente una arista e de G , en dicho caso sus extremos se dice que son *adyacentes* y escribimos $e = uv$. Un camino entre dos vértices *conecta* dichos vértices y un grafo es *conexo* si cualesquiera dos de sus vértices están conectados. Por el contrario, si en un grafo G hay por lo menos dos vértices para los cuales no existe ningún camino entre ellos, entonces diremos que G es un grafo *disconexo*. Por su parte, cuando el inicio y el final de un camino sean iguales diremos que el camino es *cerrado*. En particular, un camino cerrado de longitud 2 será llamado *camino paralelo*. Mientras que a un camino cerrado de longitud k , mayor o igual que 3, lo denominaremos *ciclo* de longitud k . Un grafo G' tal que sus conjuntos de vértices y aristas satisfacen $V(G') \subseteq V(G)$ y $E(G') \subseteq E(G)$, para algún grafo $G = (V(G), E(G))$ recibe el nombre de *subgrafo* de G . Por su parte, una *componente* de un grafo G es un subgrafo conexo maximal de G , en el sentido de que si $v \in V(G) \setminus V(G')$, entonces $G'' = (V(G') \cup \{v\}, E(G'))$ es disconexo. Finalmente, un grafo acíclico sin caminos paralelos es llamado *bosque* y un bosque conexo es llamado *árbol*. Un árbol *trivial* consta de un solo vértice. En otras palabras, un bosque es un grafo cuyas componentes son árboles. Un vértice destacado (por algún interés particular) de un árbol T se denomina *raíz* de T . Si además, definimos la *distancia* entre un vértice de un árbol T y su raíz como la longitud del

camino entre ellos, entonces los vértices de T a una distancia ℓ de la raíz de T forman el *nivel* ℓ de T .

Finalizamos esta revisión con un resultado que caracteriza a los árboles, ver el Teorema 6, Sección 1, Capítulo 1 de [4], página 10.

Proposición 4.2. *Sea T un grafo, los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. T es un árbol.
2. Cualesquiera dos vértices de T están conectados.
3. T es minimal con respecto a la conexidad, en el sentido de que el subgrafo T' de T , cuyos vértices son los vértices de T , pero sus aristas son el conjunto $E(T) \setminus \{e\}$ para alguna arista e de T , es desconexa.
4. T es acíclico maximal, en el sentido de que T no contiene ciclos pero el grafo T'' cuyos vértices son los vértices de T y cuyas aristas son el conjunto $E(T) \cup \{uv\}$ para cualesquiera vértices no adyacentes u y v en T , si contiene un ciclo.

Consideremos ahora una superficie X proyectiva, no singular, definida sobre un campo algebraicamente cerrado de cualquier característica y sea η un punto de X , procedemos a definir los diagramas decorados de Enriques asociados a ciertas superficies birracionalmente equivalentes a X . Al soporte del divisor excepcional E_η asociado a la explosión de X en η lo llamaremos *primera vecindad infinitesimal* de η . Inductivamente, si ξ_1 es un punto de la primera vecindad infinitesimal de η , entonces $\xi_1 \in E_\eta$, en particular $\xi_1 \in \text{Bl}_\eta(X)$ y podemos realizar la explosión de $\text{Bl}_\eta(X)$ en ξ_1 para obtener así la primera vecindad infinitesimal de ξ_1 , etc. No obstante, si ξ_2 es otro punto de la primera vecindad infinitesimal de η distinto de ξ_1 podemos proceder del mismo modo y obtener la primera vecindad infinitesimal de ξ_2 , etc. De hecho lo mismo podemos hacer para un número finito de puntos de la primera vecindad infinitesimal de η y repetir este proceso para cada primera vecindad infinitesimal obtenida en esta secuencia de pasos. El punto de lo cual es notar que si ξ pertenece a alguna de dichas primeras vecindades infinitesimales, entonces su imagen bajo una sucesión finita de explosiones es igual a η . Motivando el siguiente concepto (ver la Sección 2.1 de [9]).

Definición 4.3. *Con las notaciones anteriores. Un punto ξ es infinitamente cercano a $\eta \in X$ si η es la imagen de ξ bajo la composición de un número finito de explosiones de X .*

En este sentido los puntos infinitamente cercanos a algún punto de X se llamarán puntos infinitamente cercanos a X . Luego, para distinguir los puntos de X de los que son infinitamente cercanos a X , diremos que los primeros son *puntos propios* de X .

Una *constelación* con origen η es simplemente la unión del singletón $\{\eta\}$ con un conjunto finito de puntos infinitamente cercanos a η . Más precisamente, una constelación $\mathcal{C}$ con origen el punto propio $\eta \in X$ se define con los siguientes datos: $\mathcal{C} = \cup_{j=0}^n \mathcal{C}_j$ para cierto $n \in \mathbb{Z}_+$, donde $\mathcal{C}_0 = \{\eta\}$, $\mathcal{C}_1$ es un subconjunto finito no vacío de la primera vecindad infinitesimal de η , mientras que $\mathcal{C}_2$ es un subconjunto finito no vacío de la unión de los divisores excepcionales de la superficie X_2 obtenida de la explosión de $\text{Bl}_\eta(X)$ en los puntos de $\mathcal{C}_1$, y de manera recursiva, para cada $j = 3, \dots, n-1$, el conjunto no vacío $\mathcal{C}_{j+1}$ se define como un subconjunto finito de puntos de la unión de los divisores excepcionales obtenidos de la explosión de la superficie X_j en los puntos de $\mathcal{C}_j$.

Como caso particular tenemos el de una constelación $\mathcal{C} = \cup_{j=0}^n \mathcal{C}_j$ con origen η tal que $|\mathcal{C}_j| = 1$ para todo $j \in \{1, \dots, n\}$ a la cual se le llama *cadena* con origen η de longitud n . Otra constelación particular que nos va a interesar es la dada por la unión de dos cadenas distintas de longitudes n y m con orígenes iguales, digamos el punto $\xi \in X$, constelación a la cual llamaremos *bicadena* con origen ξ de longitud (n, m) . Por otro lado, la unión de dos constelaciones con diferentes orígenes la denominaremos constelación con dos orígenes, y asimismo para un número finito de orígenes.

Sea $\mathcal{C}$ una constelación con origen un punto η de una superficie proyectiva no singular X definida sobre un campo algebraicamente cerrado, y sea D un divisor efectivo no nulo de X , acordando que la *multiplicidad* de D en un punto de $\mathcal{C}$ es igual a la multiplicidad del transformado estricto de D en dicho punto, formulamos la siguiente definición.

Definición 4.4. *Con las notaciones anteriores, una D -constelación con origen η sobre X es una constelación $\mathcal{C}$ tal que la multiplicidad de D en cada punto de $\mathcal{C}$ es diferente de cero.*

Por último, definimos el *diagrama decorado de Enriques* de una D -constelación $\mathcal{C}$ con origen η como el grafo de árbol cuyo conjunto de vértices es el conjunto $\mathcal{C}$ y cuyas aristas son definidas como sigue:

1. Sean p y q elementos de $\mathcal{C}$. Si q está en la primera vecindad infinitesimal de p , entonces los vértices p y q son adyacentes y la arista incidente en ellos es un segmento de recta que une p con q , con peso D , esto es, la letra D etiqueta a dicha arista.
2. Si q no pertenece a la primera vecindad infinitesimal de p , entonces los vértices p y q no son adyacentes. Tal situación ocurre cuando p y q son dos puntos propios diferentes de la misma superficie, o cuando q está en la primera vecindad de algún punto infinitamente cercano al punto p .

Evidentemente cualesquiera dos vértices distintos del diagrama decorado de Enriques de una D -constelación están conectados por un camino, de manera que el inciso 2 de la Proposición 4.2 nos garantiza efectivamente que dicho diagrama es un árbol. Más aún, es un árbol con raíz η , pues es a partir de η que se define cada arista del grafo.

La superficie Y obtenida como la explosión de X en los puntos de una D -constelación $\mathcal{C}$ es llamada la *superficie asociada a $\mathcal{C}$* o al diagrama decorado de Enriques de $\mathcal{C}$. Comunmente se le denomina el *cielo* de la constelación $\mathcal{C}$.

4.2. La Construcción

En esta sección, desarrollaremos una forma de construir una cierta familia de superficies proyectivas racionales a las que denominaremos *superficies proyectivas armónicas*, partiremos de una configuración armónica de puntos en el plano proyectivo y consideraremos una cierta constelación $\mathcal{C}$ de $\mathbb{P}_k^2$ definida a partir de esta configuración.

Sea $\mathcal{A} = \{p_1, p_2, \dots, p_9\}$ una configuración armónica de puntos de $\mathbb{P}_k^2$ donde k es un campo algebraicamente cerrado de cualquier característica, como sabemos (Proposición 3.15) la configuración $\mathcal{A}$ determina naturalmente una única cúbica degenerada Γ constituida por tres líneas distintas, digamos denotadas por las letras R, S y T tales que $p_1, p_2, p_3, p_4 \in T$, $p_3, p_6, p_7, p_9 \in S$ y $p_4, p_5, p_8, p_9 \in R$ (ver la Figura 3.2 del Capítulo 3). Enseguida, sea $(n_{T3}, n_{S3}, n_{T4}, n_{R4}, n_{S9}, n_{R9}) \in \mathbb{Z}_+^6$ una 6-tupla ordenada dada y consideremos la constelación $\mathcal{C}$ definida por:

$$(4.2.1) \quad \mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3 \cup \mathcal{C}_4 \cup \mathcal{C}_5 \cup \mathcal{C}_6 \cup \mathcal{C}_7 \cup \mathcal{C}_8 \cup \mathcal{C}_9,$$

donde $\mathcal{C}_i = \{p_i\}$ para $i \in \{1, 2, \dots, 9\} \setminus \{3, 4, 9\}$ y las constelaciones restantes $\mathcal{C}_3$, $\mathcal{C}_4$ y $\mathcal{C}_9$ de cardinalidades respectivamente $n_{T3} + n_{S3} + 1$, $n_{T4} + n_{R4} + 1$ y $n_{S9} + n_{R9} + 1$, están definidas como sigue:

1. $\mathcal{C}_3 = \{p_3, p_3^{T_1}, \dots, p_3^{T_{n_{T3}}}, p_3^{S_1}, \dots, p_3^{S_{n_{S3}}}\}$, donde $p_3^{T_1}$ es la intersección de la primera vecindad infinitesimal de p_3 con el transformado estricto $\tilde{T}$ de la recta T , y recursivamente, para cada $2 \leq i \leq n_{T3}$, el punto $p_3^{T_i}$ es la intersección de la primera vecindad del punto $p_3^{T_{i-1}}$ y del transformado estricto de T correspondiente. De la misma manera, el punto $p_3^{S_1}$ corresponde a la intersección de la primera vecindad infinitesimal de p_3 con el transformado estricto $\tilde{S}$ de la recta S , e inductivamente $p_3^{S_j}$ es el punto de la primera vecindad del punto $p_3^{S_{j-1}}$ que pertenece al transformado estricto respectivo de S , para cada $2 \leq j \leq n_{S3}$.

2. $\mathcal{C}_4 = \{p_4, p_4^{T_1}, \dots, p_4^{T_{n_{T_4}}}, p_4^{R_1}, \dots, p_4^{R_{n_{R_4}}}\}$ donde $p_4^{T_1}$ es la intersección de la primera vecindad infinitesimal de p_4 con el transformado estricto $\tilde{T}$ de la recta T , y recursivamente, para cada $2 \leq i \leq n_{T_4}$, el punto $p_4^{T_i}$ es la intersección de la primera vecindad del punto $p_4^{T_{i-1}}$ y del transformado estricto de T correspondiente. Similarmente, el punto $p_4^{R_1}$ corresponde a la intersección de la primera vecindad infinitesimal de p_4 con el transformado estricto $\tilde{R}$ de la recta R , e inductivamente $p_4^{R_j}$ es el punto de la primera vecindad del punto $p_4^{R_{j-1}}$ que pertenece al transformado estricto respectivo de R , para cada $2 \leq j \leq n_{R_4}$, y finalmente,
3. $\mathcal{C}_9 = \{p_9, p_9^{R_1}, \dots, p_9^{R_{n_{R_9}}}, p_9^{S_1}, \dots, p_9^{S_{n_{S_9}}}\}$ donde $p_9^{R_1}$ es la intersección de la primera vecindad infinitesimal de p_9 con el transformado estricto $\tilde{R}$ de la recta R , y recursivamente, para cada $2 \leq i \leq n_{R_9}$, el punto $p_9^{R_i}$ es la intersección de la primera vecindad del punto $p_9^{R_{i-1}}$ y del transformado estricto de R correspondiente. Análogamente, el punto $p_9^{S_1}$ corresponde a la intersección de la primera vecindad infinitesimal de p_9 con el transformado estricto $\tilde{S}$ de la recta S y recursivamente $p_9^{S_j}$ es el punto de la primera vecindad del punto $p_9^{S_{j-1}}$ que pertenece a la transformado estricto respectivo de S , para cada $2 \leq j \leq n_{S_9}$.

Así, la configuración armónica $\mathcal{A}$ establece los nueve orígenes de la constelación $\mathcal{C}$, seis de los cuales definen cada uno una constelación de un solo punto y tres de ellos definen cada uno una bicadena de longitudes inicialmente establecidas por la 6-tupla ordenada $(n_{T_3}, n_{S_3}, n_{T_4}, n_{R_4}, n_{S_9}, n_{R_9})$. Misma que nos da también la cardinalidad de la constelación $\mathcal{C}$, esto es, dicha tupla determina que $|\mathcal{C}| = 9 + (n_{T_3} + n_{S_3}) + (n_{T_4} + n_{R_4}) + (n_{S_9} + n_{R_9})$.

Ejemplo 4.5. Si la 6-tupla ordenada $(n_{T_3}, n_{S_3}, n_{T_4}, n_{R_4}, n_{S_9}, n_{R_9})$ es $(0, 0, 0, 0, 0, 0)$, entonces la unión de los puntos de $\mathcal{A}$ forman la constelación $\mathcal{C}$ y $|\mathcal{C}| = 9$.

Ahora bien, dada la constelación $\mathcal{C}$ definida en (4.2.1) podemos asociarle un grafo de bosque cuyos árboles no triviales son precisamente los diagramas decorados de Enriques asociados a las constelaciones $\mathcal{C}_3$, $\mathcal{C}_4$ y $\mathcal{C}_9$ que la constituyen. Evidentemente, dicho bosque tiene sus raíces en los puntos propios de $\mathbb{P}_k^2$ que definen a $\mathcal{A}$. Consecuentemente, si $\mathcal{C}$ es una constelación definida como en (4.2.1) correspondiente a una 6-tupla $(n_{T_3}, n_{S_3}, n_{T_4}, n_{R_4}, n_{S_9}, n_{R_9}) \in \mathbb{Z}_+^6$, cuyos orígenes son los puntos de una configuración armónica $\mathcal{A}$, entonces $\mathcal{C}$ es una constelación especial que nos sugiere la siguiente:

Definición 4.6. Con las notaciones anteriores, una constelación armónica sobre $\mathcal{A}$, o simplemente una constelación armónica si no hay confusión con respecto a la configuración

armónica $\mathcal{A}$, es una constelación $\mathcal{C}$ cuyos orígenes son los puntos de $\mathcal{A}$ y que corresponde a alguna 6-tupla ordenada $(n_{T3}, n_{S3}, n_{T4}, n_{R4}, n_{S9}, n_{R9})$ de números no negativos.

Un ingrediente numérico asociado a una constelación armónica $\mathcal{C}$ es su grado que definimos a continuación:

Definición 4.7. Con las notaciones anteriores, el grado de una constelación armónica $\mathcal{C}$ es la suma $n_{T3} + n_{S3} + n_{T4} + n_{R4} + n_{S9} + n_{R9}$ y se denotará por $gr(\mathcal{C})$.

La siguiente observación nos da un criterio para saber que tan lejos se encuentra una constelación armónica de una configuración armónica.

Observación 4.8. Sea $\mathcal{C}$ una constelación armónica. Se tiene que el grado de $\mathcal{C}$ es nulo si, y sólo si, la cardinalidad de $\mathcal{C}$ es igual a 9.

Ejemplo 4.9. Sean n y m enteros no negativos, una ilustración para el diagrama decorado de Enriques asociado a la constelación armónica $\mathcal{C}$ correspondiente a la 6-tupla ordenada $(0, 0, n, m, 0, 0)$, cuyo grado $gr(\mathcal{C}) = n + m$ y $|\mathcal{C}| = 9 + n + m$, la muestra la Figura 4.1.

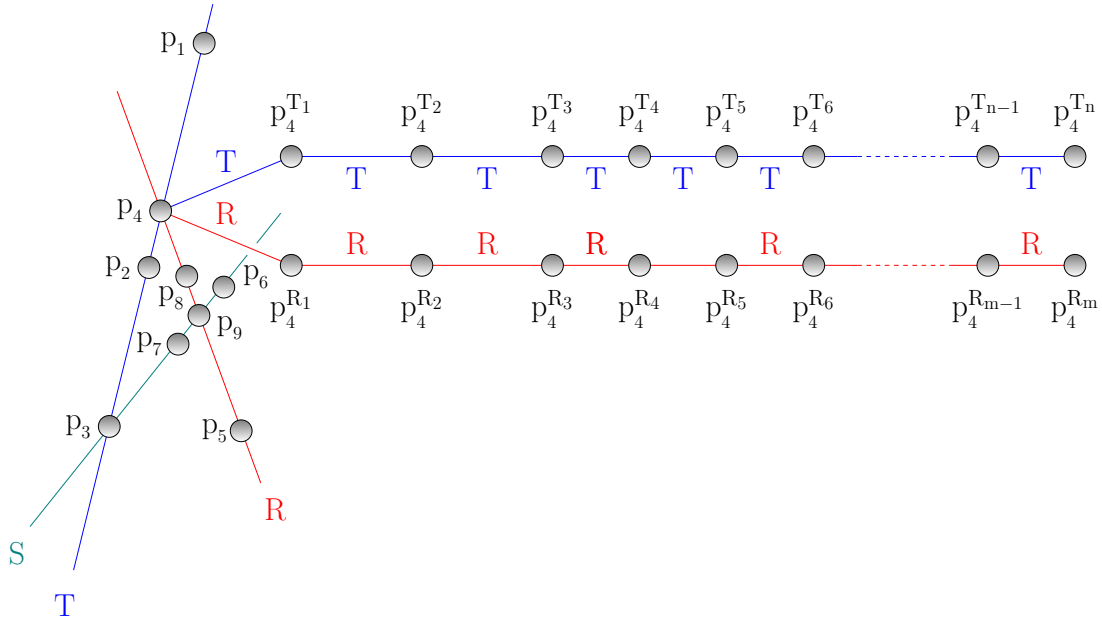


FIGURA 4.1. Diagrama decorado de Enriques del Ejemplo 4.9.

Ahora bien, si $\mathcal{C}$ es una constelación armónica correspondiente a una 6-tupla ordenada $(n_{T3}, n_{S3}, n_{T4}, n_{R4}, n_{S9}, n_{R9})$ de enteros no negativos, entonces a $\mathcal{C}$ podemos asociarle una superficie proyectiva racional no singular, tal como lo mencionamos al final de la Sección 4.1. Dicha superficie será etiquetada de acuerdo a la siguiente:

Definición 4.10. *Una superficie proyectiva armónica X es la superficie proyectiva racional no singular asociada a una constelación armónica $\mathcal{C}$ sobre alguna configuración armónica $\mathcal{A}$, que corresponde a una cierta 6-tupla ordenada $(n_{T3}, n_{S3}, n_{T4}, n_{R4}, n_{S9}, n_{R9})$ de enteros no negativos.*

Se sigue que el diagrama decorado de Enriques asociado a una superficie proyectiva armónica X es el dado por el bosque de la Figura 4.2, donde observamos las bicadenas arriba de los puntos (vértices) p_3, p_4 y p_9 . Nótese que los puntos propios (vértices) $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7, p_8$ y p_9 que definen la configuración armónica $\mathcal{A}$ no son adyacentes.

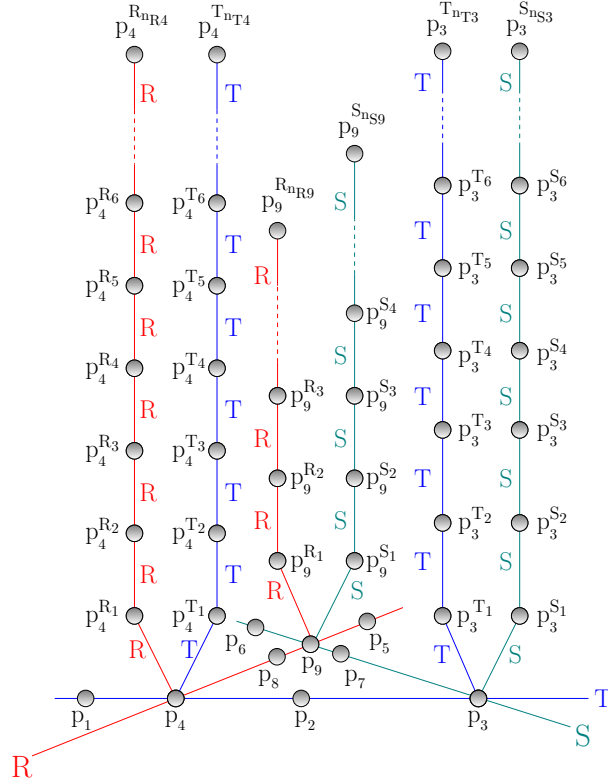


FIGURA 4.2. Superficie Proyectiva Armónica asociada a $(n_{T3}, n_{S3}, n_{T4}, n_{R4}, n_{S9}, n_{R9})$.

Ejemplo 4.11. Sea $\mathcal{A}$ una configuración armónica de puntos en el plano proyectivo y sea $\mathcal{C}$ la constelación armónica sobre $\mathcal{A}$ correspondiente a $(4, 5, 4, 5, 4, 4)$, la Figura 4.3 ilustra el diagrama decorado de Enriques de la superficie proyectiva armónica X asociada a $\mathcal{C}$. Dicho grafo es un bosque que consta de seis árboles triviales de vértices los puntos 1, 2, 5, 6, 7 y 8, y de tres árboles no triviales con raíces en los puntos 3, 4 y 9. Las líneas punteadas no forman parte del conjunto de aristas. Este dibujo es una forma alternativa al presentado en la Figura 4.2.

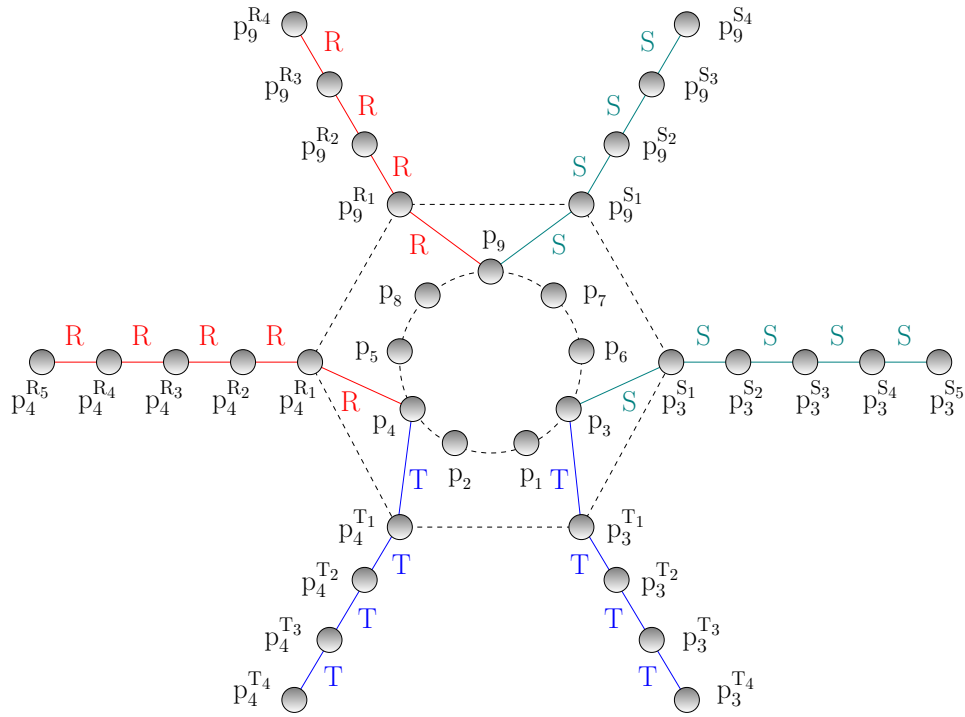


FIGURA 4.3. Superficie Proyectiva Armónica asociada a $(4, 5, 4, 5, 4, 4)$.

Puesto que una superficie proyectiva armónica X es obtenida mediante la explosión del plano proyectivo en los puntos de una constelación armónica $\mathcal{C}$ correspondiente a una 6-tupla ordenada $(n_{T3}, n_{S3}, n_{T4}, n_{R4}, n_{S9}, n_{R9}) \in \mathbb{Z}_+^6$, se sigue que el grupo de Picard $\text{Pic}(X)$

de X es un $\mathbb{Z}$ -módulo libre de rango igual a $1 + |\mathcal{C}|$, que a su vez, es igual a $10 + gr(\mathcal{C})$. A partir de lo cual podemos observar que los números de Picard de una superficie proyectiva armónica son muy grandes, tanto como lo deseemos. De hecho, en vista de que las superficies proyectivas racionales no singulares cuyos números de Picard son menores o iguales a 10 son bien conocidas, casos como los del Ejemplo 4.5 no serán considerados.

Con la notación anterior, una base para $\text{Pic}(X)$ es la dada por la siguiente tupla ordenada:

$$(4.2.2) \quad (\mathcal{E}_0, -\mathcal{E}_{p_1}, -\mathcal{E}_{p_2}, -\mathcal{E}_{p_3}, -\mathcal{E}_{p_4}, -\mathcal{E}_{p_5}, -\mathcal{E}_{p_6}, -\mathcal{E}_{p_7}, -\mathcal{E}_{p_8}, -\mathcal{E}_{p_9}, \\ -\mathcal{E}_{p_3}^{\mathcal{T}_1}, \dots, -\mathcal{E}_{p_3}^{\mathcal{T}_{n_{\mathcal{T}3}}}, -\mathcal{E}_{p_3}^{\mathcal{S}_1}, \dots, -\mathcal{E}_{p_3}^{\mathcal{S}_{n_{\mathcal{S}3}}}, \\ -\mathcal{E}_{p_4}^{\mathcal{T}_1}, \dots, -\mathcal{E}_{p_4}^{\mathcal{T}_{n_{\mathcal{T}4}}}, -\mathcal{E}_{p_4}^{\mathcal{R}_1}, \dots, -\mathcal{E}_{p_4}^{\mathcal{R}_{n_{\mathcal{R}4}}}, \\ -\mathcal{E}_{p_9}^{\mathcal{S}_1}, \dots, -\mathcal{E}_{p_9}^{\mathcal{S}_{n_{\mathcal{S}9}}}, -\mathcal{E}_{p_9}^{\mathcal{R}_1}, \dots, -\mathcal{E}_{p_9}^{\mathcal{R}_{n_{\mathcal{R}9}}})$$

definida por:

1. $\mathcal{E}_0$ es la clase de una línea del plano proyectivo que no pasa por los puntos de $\mathcal{A}$,
2. $\mathcal{E}_{p_t}$ es la clase del divisor excepcional de la explosión en el punto p_t , para cada índice $t \in \{1, \dots, 9\}$, y
3. $\mathcal{E}_{p_3}^{\mathcal{T}_i}$ (respectivamente, $\mathcal{E}_{p_3}^{\mathcal{S}_j}$, $\mathcal{E}_{p_4}^{\mathcal{T}_k}$, $\mathcal{E}_{p_4}^{\mathcal{R}_\ell}$, $\mathcal{E}_{p_9}^{\mathcal{S}_u}$ y $\mathcal{E}_{p_9}^{\mathcal{R}_v}$) es la clase del divisor excepcional de la explosión en el punto $p_3^{\mathcal{T}_i}$ (respectivamente en los puntos $p_3^{\mathcal{S}_j}$, $p_4^{\mathcal{T}_k}$, $p_4^{\mathcal{R}_\ell}$, $p_9^{\mathcal{S}_u}$ y $p_9^{\mathcal{R}_v}$), para cada $i = 1, \dots, n_{\mathcal{T}3}$, (respectivamente $j = 1, \dots, n_{\mathcal{S}3}$, $k = 1, \dots, n_{\mathcal{T}4}$, $\ell = 1, \dots, n_{\mathcal{R}4}$, $u = 1, \dots, n_{\mathcal{S}9}$ y $v = 1, \dots, n_{\mathcal{R}9}$).

Dicha base satisface además las siguientes propiedades que determinan la forma de intersección en $\text{Pic}(X)$:

1. $\mathcal{E}_0^2 = 1 = -(\mathcal{E}_{p_t})^2 = -(\mathcal{E}_{p_3}^{\mathcal{T}_i})^2 = -(\mathcal{E}_{p_3}^{\mathcal{S}_j})^2 = -(\mathcal{E}_{p_4}^{\mathcal{T}_k})^2 = -(\mathcal{E}_{p_4}^{\mathcal{R}_\ell})^2 = -(\mathcal{E}_{p_9}^{\mathcal{S}_u})^2 = -(\mathcal{E}_{p_9}^{\mathcal{R}_v})^2$ para cada $t = 1, \dots, 9$, $i = 1, \dots, n_{\mathcal{T}3}$, $j = 1, \dots, n_{\mathcal{S}3}$, $k = 1, \dots, n_{\mathcal{T}4}$, $\ell = 1, \dots, n_{\mathcal{R}4}$, $u = 1, \dots, n_{\mathcal{S}9}$ y $v = 1, \dots, n_{\mathcal{R}9}$.
2. $\mathcal{E}_0 \cdot \mathcal{E}_{p_t} = \mathcal{E}_0 \cdot \mathcal{E}_{p_3}^{\mathcal{T}_i} = \mathcal{E}_0 \cdot \mathcal{E}_{p_3}^{\mathcal{S}_j} = \mathcal{E}_0 \cdot \mathcal{E}_{p_4}^{\mathcal{T}_k} = \mathcal{E}_0 \cdot \mathcal{E}_{p_4}^{\mathcal{R}_\ell} = \mathcal{E}_0 \cdot \mathcal{E}_{p_9}^{\mathcal{S}_u} = \mathcal{E}_0 \cdot \mathcal{E}_{p_9}^{\mathcal{R}_v} = 0$ para todo $t = 1, \dots, 9$, $i = 1, \dots, n_{\mathcal{T}3}$, $j = 1, \dots, n_{\mathcal{S}3}$, $k = 1, \dots, n_{\mathcal{T}4}$, $\ell = 1, \dots, n_{\mathcal{R}4}$, $u = 1, \dots, n_{\mathcal{S}9}$ y $v = 1, \dots, n_{\mathcal{R}9}$.
3. $\mathcal{E}_{p_t} \cdot \mathcal{E}_{p_3}^{\mathcal{T}_i} = \mathcal{E}_{p_t} \cdot \mathcal{E}_{p_3}^{\mathcal{S}_j} = \mathcal{E}_{p_t} \cdot \mathcal{E}_{p_4}^{\mathcal{T}_k} = \mathcal{E}_{p_t} \cdot \mathcal{E}_{p_4}^{\mathcal{R}_\ell} = \mathcal{E}_{p_t} \cdot \mathcal{E}_{p_9}^{\mathcal{S}_u} = \mathcal{E}_{p_t} \cdot \mathcal{E}_{p_9}^{\mathcal{R}_v} = 0$ para todo $t = 1, \dots, 9$, $i = 1, \dots, n_{\mathcal{T}3}$, $j = 1, \dots, n_{\mathcal{S}3}$, $k = 1, \dots, n_{\mathcal{T}4}$, $\ell = 1, \dots, n_{\mathcal{R}4}$, $u = 1, \dots, n_{\mathcal{S}9}$ y $v = 1, \dots, n_{\mathcal{R}9}$.
4. $\mathcal{E}_{p_3}^{\mathcal{T}_i} \cdot \mathcal{E}_{p_3}^{\mathcal{S}_j} = \mathcal{E}_{p_3}^{\mathcal{T}_i} \cdot \mathcal{E}_{p_4}^{\mathcal{T}_k} = \mathcal{E}_{p_3}^{\mathcal{T}_i} \cdot \mathcal{E}_{p_4}^{\mathcal{R}_\ell} = \mathcal{E}_{p_3}^{\mathcal{T}_i} \cdot \mathcal{E}_{p_9}^{\mathcal{S}_u} = \mathcal{E}_{p_3}^{\mathcal{T}_i} \cdot \mathcal{E}_{p_9}^{\mathcal{R}_v} = 0$ para todo $i = 1, \dots, n_{\mathcal{T}3}$, $j = 1, \dots, n_{\mathcal{S}3}$, $k = 1, \dots, n_{\mathcal{T}4}$, $\ell = 1, \dots, n_{\mathcal{R}4}$, $u = 1, \dots, n_{\mathcal{S}9}$ y $v = 1, \dots, n_{\mathcal{R}9}$.

5. $\mathcal{E}_{p_3}^{S_j} \cdot \mathcal{E}_{p_4}^{T_k} = \mathcal{E}_{p_3}^{S_j} \cdot \mathcal{E}_{p_4}^{R_\ell} = \mathcal{E}_{p_3}^{S_j} \cdot \mathcal{E}_{p_9}^{S_u} = \mathcal{E}_{p_3}^{S_j} \cdot \mathcal{E}_{p_9}^{R_v} = 0$
para todo $j = 1, \dots, n_{S3}$, $k = 1, \dots, n_{T4}$, $\ell = 1, \dots, n_{R4}$, $u = 1, \dots, n_{S9}$ y $v = 1, \dots, n_{R9}$.
6. $\mathcal{E}_{p_4}^{T_k} \cdot \mathcal{E}_{p_4}^{R_\ell} = \mathcal{E}_{p_4}^{T_k} \cdot \mathcal{E}_{p_9}^{S_u} = \mathcal{E}_{p_4}^{T_k} \cdot \mathcal{E}_{p_9}^{R_v} = 0$
para todo $k = 1, \dots, n_{T4}$, $\ell = 1, \dots, n_{R4}$, $u = 1, \dots, n_{S9}$ y $v = 1, \dots, n_{R9}$.
7. $\mathcal{E}_{p_4}^{R_\ell} \cdot \mathcal{E}_{p_9}^{S_u} = \mathcal{E}_{p_4}^{R_\ell} \cdot \mathcal{E}_{p_9}^{R_v} = 0$
para todo $\ell = 1, \dots, n_{R4}$, $u = 1, \dots, n_{S9}$ y $v = 1, \dots, n_{R9}$.
8. $\mathcal{E}_{p_9}^{S_u} \cdot \mathcal{E}_{p_9}^{R_v} = 0$
para todo $u = 1, \dots, n_{S9}$ y $v = 1, \dots, n_{R9}$.

Así, considerando los elementos de $\mathcal{C}$ no solamente como puntos sino también como índices, la clase en $\text{Pic}(X)$ de cualquier divisor sobre X se puede escribir como una tupla ordenada de la forma

$$(4.2.3) \quad (a_0, a_{p_1}, a_{p_2}, \dots, a_{p_9}, a_{p_3}^{T_1}, \dots, a_{p_3}^{T_{n_{T3}}}, a_{p_3}^{S_1}, \dots, a_{p_3}^{S_{n_{S3}}}, a_{p_4}^{T_1}, \dots, a_{p_4}^{T_{n_{T4}}}, \\ a_{p_4}^{R_1}, \dots, a_{p_4}^{R_{n_{R4}}}, a_{p_9}^{S_1}, \dots, a_{p_9}^{S_{n_{S9}}}, a_{p_9}^{R_1}, \dots, a_{p_9}^{R_{n_{R9}}}),$$

con entradas enteras. Más aún, como una consecuencia directa de la Proposición 2.20 obtenemos el siguiente resultado:

Proposición 4.12. *Con las notaciones anteriores, la clase anticanónica $-\mathcal{K}_X$ de un divisor canónico K_X de X en $\text{Pic}(X)$ es*

$$\begin{aligned} -\mathcal{K}_X = & (\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_{p_1} - \mathcal{E}_{p_2} - \mathcal{E}_{p_3} - \mathcal{E}_{p_4} - \sum_{i=1}^{n_{T3}} \mathcal{E}_{p_3}^{T_i} - \sum_{k=1}^{n_{T4}} \mathcal{E}_{p_4}^{T_k}) \\ & + (\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_{p_3} - \mathcal{E}_{p_6} - \mathcal{E}_{p_7} - \mathcal{E}_{p_9} - \sum_{j=1}^{n_{S3}} \mathcal{E}_{p_3}^{S_j} - \sum_{u=1}^{n_{S9}} \mathcal{E}_{p_9}^{S_u}) \\ & + (\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_{p_4} - \mathcal{E}_{p_5} - \mathcal{E}_{p_8} - \mathcal{E}_{p_9} - \sum_{\ell=1}^{n_{R4}} \mathcal{E}_{p_4}^{R_\ell} - \sum_{v=1}^{n_{R9}} \mathcal{E}_{p_9}^{R_v}) \\ & + (\mathcal{E}_{p_3} - \mathcal{E}_{p_3}^{T_1} - \mathcal{E}_{p_3}^{S_1}) + (\mathcal{E}_{p_4} - \mathcal{E}_{p_4}^{T_1} - \mathcal{E}_{p_4}^{R_1}) + (\mathcal{E}_{p_9} - \mathcal{E}_{p_9}^{S_1} - \mathcal{E}_{p_9}^{R_1}) \\ & + (\mathcal{E}_{p_3}^{T_1} - \mathcal{E}_{p_3}^{T_2}) + (\mathcal{E}_{p_3}^{T_2} - \mathcal{E}_{p_3}^{T_3}) + \dots + (\mathcal{E}_{p_3}^{T_{n_{T3}-1}} - \mathcal{E}_{p_3}^{T_{n_{T3}}}) + \mathcal{E}_{p_3}^{T_{n_{T3}}} \\ & + (\mathcal{E}_{p_3}^{S_1} - \mathcal{E}_{p_3}^{S_2}) + (\mathcal{E}_{p_3}^{S_2} - \mathcal{E}_{p_3}^{S_3}) + \dots + (\mathcal{E}_{p_3}^{S_{n_{S3}-1}} - \mathcal{E}_{p_3}^{S_{n_{S3}}}) + \mathcal{E}_{p_3}^{S_{n_{S3}}} \\ & + (\mathcal{E}_{p_4}^{T_1} - \mathcal{E}_{p_4}^{T_2}) + (\mathcal{E}_{p_4}^{T_2} - \mathcal{E}_{p_4}^{T_3}) + \dots + (\mathcal{E}_{p_4}^{T_{n_{T4}-1}} - \mathcal{E}_{p_4}^{T_{n_{T4}}}) + \mathcal{E}_{p_4}^{T_{n_{T4}}} \\ & + (\mathcal{E}_{p_4}^{R_1} - \mathcal{E}_{p_4}^{R_2}) + (\mathcal{E}_{p_4}^{R_2} - \mathcal{E}_{p_4}^{R_3}) + \dots + (\mathcal{E}_{p_4}^{R_{n_{R4}-1}} - \mathcal{E}_{p_4}^{R_{n_{R4}}}) + \mathcal{E}_{p_4}^{R_{n_{R4}}} \\ & + (\mathcal{E}_{p_9}^{S_1} - \mathcal{E}_{p_9}^{S_2}) + (\mathcal{E}_{p_9}^{S_2} - \mathcal{E}_{p_9}^{S_3}) + \dots + (\mathcal{E}_{p_9}^{S_{n_{S9}-1}} - \mathcal{E}_{p_9}^{S_{n_{S9}}}) + \mathcal{E}_{p_9}^{S_{n_{S9}}} \\ & + (\mathcal{E}_{p_9}^{R_1} - \mathcal{E}_{p_9}^{R_2}) + (\mathcal{E}_{p_9}^{R_2} - \mathcal{E}_{p_9}^{R_3}) + \dots + (\mathcal{E}_{p_9}^{R_{n_{R9}-1}} - \mathcal{E}_{p_9}^{R_{n_{R9}}}) + \mathcal{E}_{p_9}^{R_{n_{R9}}}. \end{aligned}$$

Puesto que una superficie racional anticanónica X es aquella cuya clase en $\text{Pic}(X)$ de $-\mathcal{K}_X$ es la clase de un divisor efectivo, una consecuencia directa de la proposición anterior es el:

Corolario 4.13. *Con las notaciones anteriores, X es una superficie racional anticanónica. Además, se cumple la igualdad $\text{gr}(\mathcal{C}) + K_X^2 = 0$, donde $\text{gr}(\mathcal{C})$ es el grado de la constelación $\mathcal{C}$.*

Otra particularidad de las superficies proyectivas armónicas es:

Corolario 4.14. *Con las notaciones anteriores, la dimensión del sistema lineal completo anticanónico $| -K_X |$ de X es igual a cero.*

Ahora, introducimos el concepto de una $(-n)$ -curva de una superficie proyectiva no singular para cada valor $n \in \mathbb{N}$.

Definición 4.15. *Sea Z una superficie proyectiva no singular y sea n un entero positivo. Una $(-n)$ -curva de Z es una curva racional no singular tal que su número de autointersección es $-n$.*

Una consecuencia de la fórmula de Adjunción (Corolario 2.11) nos da la siguiente caracterización numérica para este tipo de curvas.

Lema 4.16. *Sean $n \in \mathbb{N}$, Γ una curva de una superficie proyectiva no singular Z definida sobre un campo algebraicamente cerrado de característica arbitraria y K_Z un divisor canónico de Z . Se sigue que: Γ es una $(-n)$ -curva de Z si, y sólo si, $\Gamma^2 = -n$ y $\Gamma.K_Z = n - 2$.*

Particularmente, si $n \leq 2$ tenemos el siguiente:

Corolario 4.17. *Sea C una curva de una superficie proyectiva no singular Y definida sobre un campo algebraicamente cerrado de característica arbitraria. Se tiene lo siguiente, C es una (-1) -curva (respectivamente, (-2) -curva) si, y sólo si, $C^2 = -1$ (respectivamente, -2) y $C.K_Y = -1$ (respectivamente, 0), siendo K_Y un divisor canónico de Y .*

Por otro lado, si X es una superficie proyectiva armónica, introducimos la siguiente etiqueta:

Definición 4.18. *Con la notación anterior, una curva W de X es vertical si, y sólo si, su clase $\mathcal{W}$ en $\text{Pic}(X)$ satisface $\mathcal{W}.\mathcal{E}_0 = 0$.*

En 2005 Lahyane y Harbourne dieron una condición necesaria y suficiente para que el monoide efectivo de una superficie racional anticanónica sea finitamente generado. Dicha caracterización es:

Lema 4.19. *El monoide efectivo de una superficie proyectiva no singular racional anticanónica X es finitamente generado si, y sólo si, X tiene solamente un número finito de (-1) -curvas y (-2) -curvas.*

Demostración. Ver [50] Corolario 4.2 página 109. $\square$

Por consiguiente, para probar que el monoide efectivo $M(X)$, de una superficie proyectiva armónica X , es finitamente generado hemos de probar que la cantidad de (-1) -curvas y (-2) -curvas de X es finita.

4.3. Finitud del conjunto de las (-1) -curvas

Sea X una superficie proyectiva armónica asociada a una constelación armónica $\mathcal{C}$ correspondiente a la 6-tupla ordenada $(n_{T3}, n_{S3}, n_{T4}, n_{R4}, n_{S9}, n_{R9})$ y W una (-1) -curva de X , se sigue que la clase $\mathcal{W}$ de W en $\text{Pic}(X)$ está dada por una tupla ordenada de la forma

$$(a_0, a_{p_1}, a_{p_2}, \dots, a_{p_9}, \quad a_{p_3}^{T_1}, \dots, a_{p_3}^{T_{n_{T3}}}, a_{p_3}^{S_1}, \dots, a_{p_3}^{S_{n_{S3}}}, a_{p_4}^{T_1}, \dots, a_{p_4}^{T_{n_{T4}}}, \\ a_{p_4}^{R_1}, \dots, a_{p_4}^{R_{n_{R4}}}, a_{p_9}^{S_1}, \dots, a_{p_9}^{S_{n_{S9}}}, a_{p_9}^{R_1}, \dots, a_{p_9}^{R_{n_{R9}}}),$$

con entradas enteras. Mientras que la clase $\mathcal{K}_X$ del divisor canónico de X es $(-3, -1, \dots, -1)$.

Ahora bien, puesto que cada entrada de la tupla ordenada que define $\mathcal{W}$ satisface ser menor o igual que $\mathcal{W} \cdot \mathcal{E}_0$, se sigue que acotar a_0 es suficiente para probar que solo hay un número finito de (-1) -curvas.

Supongamos por el momento que W es una curva *vertical* (Definición 4.18) de X , más aún, supongamos también que todas las entradas de $(n_{T3}, n_{S3}, n_{T4}, n_{R4}, n_{S9}, n_{R9})$ satisfacen $n_{T3}, n_{S3}, n_{T4}, n_{R4}, n_{S9}, n_{R9} \in \mathbb{Z}_+ \setminus \{0\}$, situación respecto a las entradas de la 6-tupla ordenada que define la constelación armónica $\mathcal{C}$ más interesante y general para la superficie proyectiva armónica X . Resolviendo el sistema de ecuaciones

$$(4.3.1) \quad \begin{aligned} \mathcal{W}^2 &= -1 \\ \mathcal{W} \cdot \mathcal{K}_X &= -1. \end{aligned}$$

Obtenemos el siguiente:

Lema 4.20. *Con la notación previa, sea $\mathfrak{V}_{(-1)}$ el conjunto de las clases de $\text{Pic}(X)$ de las (-1) -curvas verticales de X cuya 6-tupla ordenada $(n_{T3}, n_{S3}, n_{T4}, n_{R4}, n_{S9}, n_{R9})$ que la define satisface $n_{T3}, n_{S3}, n_{T4}, n_{R4}, n_{S9}, n_{R9} \in \mathbb{Z}_+ \setminus \{0\}$, se sigue que*

$$\mathfrak{V}_{(-1)} = \{\mathcal{E}_{p_1}, \mathcal{E}_{p_2}, \mathcal{E}_{p_5}, \mathcal{E}_{p_6}, \mathcal{E}_{p_7}, \mathcal{E}_{p_8}, \mathcal{E}_{p_3}^{T_{n_{T3}}}, \mathcal{E}_{p_3}^{S_{n_{S3}}}, \mathcal{E}_{p_4}^{T_{n_{T4}}}, \mathcal{E}_{p_4}^{R_{n_{R4}}}, \mathcal{E}_{p_9}^{S_{n_{S9}}}, \mathcal{E}_{p_9}^{R_{n_{R9}}}\}.$$

Demostración. Los elementos de dicho conjunto son evidentemente (-1) -curvas verticales de X . Recíprocamente, si W es una (-1) -curva vertical de X , entonces el sistema de ecuaciones (4.3.1) nos da las siguientes igualdades:

$$a_{p_1}^2 + \cdots + a_{p_9}^2 + \sum_{i=1}^{n_{T3}} (a_{p_3^{T_i}})^2 + \sum_{j=1}^{n_{S3}} (a_{p_3^{S_j}})^2 + \sum_{k=1}^{n_{T4}} (a_{p_4^{T_k}})^2 + \sum_{\ell=1}^{n_{R4}} (a_{p_4^{R_\ell}})^2 + \sum_{u=1}^{n_{S9}} (a_{p_9^{S_u}})^2 + \sum_{v=1}^{n_{R9}} (a_{p_9^{R_v}})^2 = 1$$

y

$$a_{p_1} + \cdots + a_{p_9} + \sum_{i=1}^{n_{T3}} a_{p_3^{T_i}} + \sum_{j=1}^{n_{S3}} a_{p_3^{S_j}} + \sum_{k=1}^{n_{T4}} a_{p_4^{T_k}} + \sum_{\ell=1}^{n_{R4}} a_{p_4^{R_\ell}} + \sum_{u=1}^{n_{S9}} a_{p_9^{S_u}} + \sum_{v=1}^{n_{R9}} a_{p_9^{R_v}} = -1,$$

que implican la existencia de un índice α en $\mathcal{C}$ tal que $(a_\alpha)^2 = 1$ y, teniendo en cuenta la segunda ecuación, esto nos permite asegurar que existe $\alpha \in \mathcal{C}$ tal que $a_\alpha = -1$ y $a_\beta = 0$ para todo $\beta \in \mathcal{C} \setminus \{\alpha\}$. Por lo tanto, las posibilidades para $\mathcal{W}$ son todos los elementos de la base de $\text{Pic}(X)$ excepto $\mathcal{E}_0$, sin embargo, las clases $\mathcal{E}_{p_3}$, $\mathcal{E}_{p_4}$ y $\mathcal{E}_{p_9}$ no pueden ocurrir ya que su número de autointersección es -3 . De la misma manera, las clases $\mathcal{E}_{p_3^{T_i}}$ (respectivamente, $\mathcal{E}_{p_3^{S_j}}$, $\mathcal{E}_{p_4^{T_k}}$, $\mathcal{E}_{p_4^{R_\ell}}$, $\mathcal{E}_{p_9^{S_u}}$ y $\mathcal{E}_{p_9^{R_v}}$) para cada $i = 1, \dots, n_{T3} - 1$ (respectivamente $j = 1, \dots, n_{S3} - 1$, $k = 1, \dots, n_{T4} - 1$, $\ell = 1, \dots, n_{R4} - 1$, $u = 1, \dots, n_{S9} - 1$ y $v = 1, \dots, n_{R9} - 1$), no suceden por que su autointersección es igual a -2 . $\square$

Sin pretender ser exhaustiva la siguiente lista destaca algunos de los casos particulares posibles en conformidad con los distintos valores que pueden tomar las entradas de $(n_{T3}, n_{S3}, n_{T4}, n_{R4}, n_{S9}, n_{R9})$.

Observación 4.21. Bajo las notaciones anteriores, se tienen los siguientes casos:

1. Si $n_{T3} = n_{S3} = n_{T4} = n_{R4} = n_{S9} = n_{R9} = 0$, entonces

$$\mathfrak{V}_{(-1)} = \{\mathcal{E}_{p_1}, \mathcal{E}_{p_2}, \mathcal{E}_{p_5}, \mathcal{E}_{p_6}, \mathcal{E}_{p_7}, \mathcal{E}_{p_8}, \mathcal{E}_{p_3}, \mathcal{E}_{p_4}, \mathcal{E}_{p_9}\}.$$

2. Si $n_{T3} \in \mathbb{Z}_+ \setminus \{0\}$ y $n_{S3} = n_{T4} = n_{R4} = n_{S9} = n_{R9} = 0$, entonces

$$\mathfrak{V}_{(-1)} = \{\mathcal{E}_{p_1}, \mathcal{E}_{p_2}, \mathcal{E}_{p_5}, \mathcal{E}_{p_6}, \mathcal{E}_{p_7}, \mathcal{E}_{p_8}, \mathcal{E}_{p_3^{T_{n_{T3}}}}, \mathcal{E}_{p_4}, \mathcal{E}_{p_9}\}.$$

3. Si $n_{T3}, n_{S3} \in \mathbb{Z}_+ \setminus \{0\}$ y $n_{T4} = n_{R4} = n_{S9} = n_{R9} = 0$, entonces

$$\mathfrak{V}_{(-1)} = \{\mathcal{E}_{p_1}, \mathcal{E}_{p_2}, \mathcal{E}_{p_5}, \mathcal{E}_{p_6}, \mathcal{E}_{p_7}, \mathcal{E}_{p_8}, \mathcal{E}_{p_3^{T_{n_{T3}}}}, \mathcal{E}_{p_3^{S_{n_{S3}}}}, \mathcal{E}_{p_4}, \mathcal{E}_{p_9}\}.$$

4. Si $n_{T3}, n_{S3}, n_{T4} \in \mathbb{Z}_+ \setminus \{0\}$ y $n_{R4} = n_{S9} = n_{R9} = 0$, entonces

$$\mathfrak{V}_{(-1)} = \{\mathcal{E}_{p_1}, \mathcal{E}_{p_2}, \mathcal{E}_{p_5}, \mathcal{E}_{p_6}, \mathcal{E}_{p_7}, \mathcal{E}_{p_8}, \mathcal{E}_{p_3^{T_{n_{T3}}}}, \mathcal{E}_{p_3^{S_{n_{S3}}}}, \mathcal{E}_{p_4^{T_{n_{T4}}}}, \mathcal{E}_{p_9}\}.$$

5. Si $n_{T3}, n_{S3}, n_{T4}, n_{R4} \in \mathbb{Z}_+ \setminus \{0\}$ y $n_{S9} = n_{R9} = 0$, entonces

$$\mathfrak{V}_{(-1)} = \{\mathcal{E}_{p_1}, \mathcal{E}_{p_2}, \mathcal{E}_{p_5}, \mathcal{E}_{p_6}, \mathcal{E}_{p_7}, \mathcal{E}_{p_8}, \mathcal{E}_{p_3^{T_{nT3}}}, \mathcal{E}_{p_3^{S_{nS3}}}, \mathcal{E}_{p_4^{T_{nT4}}}, \mathcal{E}_{p_4^{R_{nR4}}}, \mathcal{E}_{p_9}\}.$$

6. Si $n_{T3}, n_{S3}, n_{T4}, n_{R4}, n_{S9} \in \mathbb{Z}_+ \setminus \{0\}$ y $n_{R9} = 0$, entonces

$$\mathfrak{V}_{(-1)} = \{\mathcal{E}_{p_1}, \mathcal{E}_{p_2}, \mathcal{E}_{p_5}, \mathcal{E}_{p_6}, \mathcal{E}_{p_7}, \mathcal{E}_{p_8}, \mathcal{E}_{p_3^{T_{nT3}}}, \mathcal{E}_{p_3^{S_{nS3}}}, \mathcal{E}_{p_4^{T_{nT4}}}, \mathcal{E}_{p_4^{R_{nR4}}}, \mathcal{E}_{p_9^{S_{nS9}}}\}.$$

□

Como consecuencia del Lema 4.20 y de la Observación 4.21 tenemos el siguiente resultado.

Corolario 4.22. *Con las notaciones anteriores, si todas las entradas de la 6-tupla ordenada $(n_{T3}, n_{S3}, n_{T4}, n_{R4}, n_{S9}, n_{R9})$ son iguales a cero excepto 1 de ellas (respectivamente 2 y 3, respectivamente 4 y 5), entonces $|\mathfrak{V}_{(-1)}| = 9$ (respectivamente igual a 10 y a 11). Más aún, es igual a 12 si todas las entradas son distintas de cero.*

Supongamos ahora que $\mathcal{W}.\mathcal{E}_0 = 1$, en este caso el resultado que obtenemos es el siguiente:

Lema 4.23. *Con las notaciones anteriores. Sea $\mathfrak{W}$ el conjunto de las clases $\mathcal{W}$ de (-1) -curvas W de X que satisfacen $\mathcal{W}.\mathcal{E}_0 = 1$. Se sigue que $\mathfrak{W}$ es igual al conjunto*

$$\{\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_{p_1} - \mathcal{E}_{p_9}, \mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_{p_2} - \mathcal{E}_{p_9}, \mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_{p_3} - \mathcal{E}_{p_5}, \mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_{p_3} - \mathcal{E}_{p_8}, \mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_{p_4} - \mathcal{E}_{p_6}, \mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_{p_4} - \mathcal{E}_{p_7}\}.$$

Demostración. Claramente cada elemento del conjunto en cuestión es la clase de una (-1) -curva en $\text{Pic}(X)$ cuya primer entrada en la tupla ordenada que la define es igual a 1. Por otro lado, las ecuaciones $\mathcal{W}^2 = -1$, $\mathcal{W}.\mathcal{K}_X = -1$ y $\mathcal{W}.\mathcal{E}_0 = 1$, implican la existencia de α y β y en $\mathcal{C}$ tales que $(a_\alpha)^2 + (a_\beta)^2 = 2$ y $a_\alpha + a_\beta = 2$. De modo que la clase de W en $\text{Pic}(X)$ es de la forma $\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_\alpha - \mathcal{E}_\beta$. Por tanto, las posibilidades se reducen a las clases enlistadas en el conjunto. □

Ahora desarrollamos en su generalidad la demostración de que una superficie proyectiva armónica X tiene solamente un número finito de (-1) -curvas. Sea W una (-1) -curva de X y supongamos que su clase en $\text{Pic}(X)$ está dada por la tupla ordenada

$$(a_0, a_{p_1}, a_{p_2}, \dots, a_{p_9}, a_{p_3^{T_1}}, \dots, a_{p_3^{T_{nT3}}}, a_{p_3^{S_1}}, \dots, a_{p_3^{S_{nS3}}}, a_{p_4^{T_1}}, \dots, a_{p_4^{T_{nT4}}}, a_{p_4^{R_1}}, \dots, a_{p_4^{R_{nR4}}}, a_{p_9^{S_1}}, \dots, a_{p_9^{S_{nS9}}}, a_{p_9^{R_1}}, \dots, a_{p_9^{R_{nR9}}}).$$

Puesto que el conjunto $\mathfrak{V}_{(-1)}$ es un conjunto finito podemos suponer además que $\mathcal{W} \notin \mathfrak{V}_{(-1)}$. Lo cual junto con la Proposición 4.12 y la ecuación $(-\mathcal{K}_X).\mathcal{W} = 1$ implican los siguientes casos:

Caso I.

$$\begin{aligned}
(4.3.2) \quad 1 &= a_0 - a_{p_1} - a_{p_2} - a_{p_3} - a_{p_4} - \sum_{i=1}^{n_{T3}} a_{p_3}^{T_i} - \sum_{k=1}^{n_{T4}} a_{p_4}^{T_k}, \\
0 &= a_0 - a_{p_3} - a_{p_6} - a_{p_7} - a_{p_9} - \sum_{j=1}^{n_{S3}} a_{p_3}^{S_j} - \sum_{u=1}^{n_{S9}} a_{p_9}^{S_u}, \\
0 &= a_0 - a_{p_4} - a_{p_5} - a_{p_8} - a_{p_9} - \sum_{\ell=1}^{n_{R4}} a_{p_4}^{R_\ell} - \sum_{v=1}^{n_{R9}} a_{p_9}^{R_v}, \\
0 &= a_{p_3} - a_{p_3}^{T_1} - a_{p_3}^{S_1}, \\
0 &= a_{p_4} - a_{p_4}^{T_1} - a_{p_4}^{R_1}, \\
0 &= a_{p_9} - a_{p_9}^{S_1} - a_{p_9}^{R_1}, \\
0 &= a_{p_3}^{T_i} - a_{p_3}^{T_{i+1}}, \text{ para todo } i = 1, \dots, n_{T3} - 1, \\
0 &= a_{p_3}^{S_j} - a_{p_3}^{S_{j+1}}, \text{ para todo } j = 1, \dots, n_{S3} - 1, \\
0 &= a_{p_4}^{T_k} - a_{p_4}^{T_{k+1}}, \text{ para todo } k = 1, \dots, n_{T4} - 1, \\
0 &= a_{p_4}^{R_\ell} - a_{p_4}^{R_{\ell+1}}, \text{ para todo } \ell = 1, \dots, n_{R4} - 1, \\
0 &= a_{p_9}^{S_u} - a_{p_9}^{S_{u+1}}, \text{ para todo } u = 1, \dots, n_{S9} - 1, \\
0 &= a_{p_9}^{R_v} - a_{p_9}^{R_{v+1}}, \text{ para todo } v = 1, \dots, n_{R9} - 1, \\
0 &= a_{p_3}^{T_{n_{T3}}} = a_{p_3}^{S_{n_{S3}}} = a_{p_4}^{T_{n_{T4}}} = a_{p_4}^{R_{n_{R4}}} = a_{p_9}^{S_{n_{S9}}} = a_{p_9}^{R_{n_{R9}}}.
\end{aligned}$$

Caso II.

$$\begin{aligned}
(4.3.3) \quad 0 &= a_0 - a_{p_1} - a_{p_2} - a_{p_3} - a_{p_4} - \sum_{i=1}^{n_{T3}} a_{p_3}^{T_i} - \sum_{k=1}^{n_{T4}} a_{p_4}^{T_k}, \\
1 &= a_0 - a_{p_3} - a_{p_6} - a_{p_7} - a_{p_9} - \sum_{j=1}^{n_{S3}} a_{p_3}^{S_j} - \sum_{u=1}^{n_{S9}} a_{p_9}^{S_u}, \\
0 &= a_0 - a_{p_4} - a_{p_5} - a_{p_8} - a_{p_9} - \sum_{\ell=1}^{n_{R4}} a_{p_4}^{R_\ell} - \sum_{v=1}^{n_{R9}} a_{p_9}^{R_v}, \\
0 &= a_{p_3} - a_{p_3}^{T_1} - a_{p_3}^{S_1}, \\
0 &= a_{p_4} - a_{p_4}^{T_1} - a_{p_4}^{R_1}, \\
0 &= a_{p_9} - a_{p_9}^{S_1} - a_{p_9}^{R_1}, \\
0 &= a_{p_3}^{T_i} - a_{p_3}^{T_{i+1}}, \text{ para todo } i = 1, \dots, n_{T3} - 1, \\
0 &= a_{p_3}^{S_j} - a_{p_3}^{S_{j+1}}, \text{ para todo } j = 1, \dots, n_{S3} - 1, \\
0 &= a_{p_4}^{T_k} - a_{p_4}^{T_{k+1}}, \text{ para todo } k = 1, \dots, n_{T4} - 1, \\
0 &= a_{p_4}^{R_\ell} - a_{p_4}^{R_{\ell+1}}, \text{ para todo } \ell = 1, \dots, n_{R4} - 1, \\
0 &= a_{p_9}^{S_u} - a_{p_9}^{S_{u+1}}, \text{ para todo } u = 1, \dots, n_{S9} - 1, \\
0 &= a_{p_9}^{R_v} - a_{p_9}^{R_{v+1}}, \text{ para todo } v = 1, \dots, n_{R9} - 1, \\
0 &= a_{p_3}^{T_{n_{T3}}} = a_{p_3}^{S_{n_{S3}}} = a_{p_4}^{T_{n_{T4}}} = a_{p_4}^{R_{n_{R4}}} = a_{p_9}^{S_{n_{S9}}} = a_{p_9}^{R_{n_{R9}}}.
\end{aligned}$$

Caso III.

$$\begin{aligned}
(4.3.4) \quad 0 &= a_0 - a_{p_1} - a_{p_2} - a_{p_3} - a_{p_4} - \sum_{i=1}^{n_{T3}} a_{p_3}^{T_i} - \sum_{k=1}^{n_{T4}} a_{p_4}^{T_k}, \\
0 &= a_0 - a_{p_3} - a_{p_6} - a_{p_7} - a_{p_9} - \sum_{j=1}^{n_{S3}} a_{p_3}^{S_j} - \sum_{u=1}^{n_{S9}} a_{p_9}^{S_u}, \\
1 &= a_0 - a_{p_4} - a_{p_5} - a_{p_8} - a_{p_9} - \sum_{\ell=1}^{n_{R4}} a_{p_4}^{R_\ell} - \sum_{v=1}^{n_{R9}} a_{p_9}^{R_v}, \\
0 &= a_{p_3} - a_{p_3}^{T_1} - a_{p_3}^{S_1}, \\
0 &= a_{p_4} - a_{p_4}^{T_1} - a_{p_4}^{R_1}, \\
0 &= a_{p_9} - a_{p_9}^{S_1} - a_{p_9}^{R_1}, \\
0 &= a_{p_3}^{T_i} - a_{p_3}^{T_{i+1}}, \text{ para todo } i = 1, \dots, n_{T3} - 1, \\
0 &= a_{p_3}^{S_j} - a_{p_3}^{S_{j+1}}, \text{ para todo } j = 1, \dots, n_{S3} - 1, \\
0 &= a_{p_4}^{T_k} - a_{p_4}^{T_{k+1}}, \text{ para todo } k = 1, \dots, n_{T4} - 1, \\
0 &= a_{p_4}^{R_\ell} - a_{p_4}^{R_{\ell+1}}, \text{ para todo } \ell = 1, \dots, n_{R4} - 1, \\
0 &= a_{p_9}^{S_u} - a_{p_9}^{S_{u+1}}, \text{ para todo } u = 1, \dots, n_{S9} - 1, \\
0 &= a_{p_9}^{R_v} - a_{p_9}^{R_{v+1}}, \text{ para todo } v = 1, \dots, n_{R9} - 1, \\
0 &= a_{p_3}^{T_{n_{T3}}} = a_{p_3}^{S_{n_{S3}}} = a_{p_4}^{T_{n_{T4}}} = a_{p_4}^{R_{n_{R4}}} = a_{p_9}^{S_{n_{S9}}} = a_{p_9}^{R_{n_{R9}}}.
\end{aligned}$$

Caso IV.

$$\begin{aligned}
(4.3.5) \quad 0 &= a_0 - a_{p_1} - a_{p_2} - a_{p_3} - a_{p_4} - \sum_{i=1}^{n_{T3}} a_{p_3}^{T_i} - \sum_{k=1}^{n_{T4}} a_{p_4}^{T_k}, \\
0 &= a_0 - a_{p_3} - a_{p_6} - a_{p_7} - a_{p_9} - \sum_{j=1}^{n_{S3}} a_{p_3}^{S_j} - \sum_{u=1}^{n_{S9}} a_{p_9}^{S_u}, \\
0 &= a_0 - a_{p_4} - a_{p_5} - a_{p_8} - a_{p_9} - \sum_{\ell=1}^{n_{R4}} a_{p_4}^{R_\ell} - \sum_{v=1}^{n_{R9}} a_{p_9}^{R_v}, \\
1 &= a_{p_3} - a_{p_3}^{T_1} - a_{p_3}^{S_1}, \\
0 &= a_{p_4} - a_{p_4}^{T_1} - a_{p_4}^{R_1}, \\
0 &= a_{p_9} - a_{p_9}^{S_1} - a_{p_9}^{R_1}, \\
0 &= a_{p_3}^{T_i} - a_{p_3}^{T_{i+1}}, \text{ para todo } i = 1, \dots, n_{T3} - 1, \\
0 &= a_{p_3}^{S_j} - a_{p_3}^{S_{j+1}}, \text{ para todo } j = 1, \dots, n_{S3} - 1, \\
0 &= a_{p_4}^{T_k} - a_{p_4}^{T_{k+1}}, \text{ para todo } k = 1, \dots, n_{T4} - 1, \\
0 &= a_{p_4}^{R_\ell} - a_{p_4}^{R_{\ell+1}}, \text{ para todo } \ell = 1, \dots, n_{R4} - 1, \\
0 &= a_{p_9}^{S_u} - a_{p_9}^{S_{u+1}}, \text{ para todo } u = 1, \dots, n_{S9} - 1, \\
0 &= a_{p_9}^{R_v} - a_{p_9}^{R_{v+1}}, \text{ para todo } v = 1, \dots, n_{R9} - 1, \\
0 &= a_{p_3}^{T_{n_{T3}}} = a_{p_3}^{S_{n_{S3}}} = a_{p_4}^{T_{n_{T4}}} = a_{p_4}^{R_{n_{R4}}} = a_{p_9}^{S_{n_{S9}}} = a_{p_9}^{R_{n_{R9}}}.
\end{aligned}$$

Caso V.

$$\begin{aligned}
(4.3.6) \quad 0 &= a_0 - a_{p_1} - a_{p_2} - a_{p_3} - a_{p_4} - \sum_{i=1}^{n_{T3}} a_{p_3}^{T_i} - \sum_{k=1}^{n_{T4}} a_{p_4}^{T_k}, \\
0 &= a_0 - a_{p_3} - a_{p_6} - a_{p_7} - a_{p_9} - \sum_{j=1}^{n_{S3}} a_{p_3}^{S_j} - \sum_{u=1}^{n_{S9}} a_{p_9}^{S_u}, \\
0 &= a_0 - a_{p_4} - a_{p_5} - a_{p_8} - a_{p_9} - \sum_{\ell=1}^{n_{R4}} a_{p_4}^{R_\ell} - \sum_{v=1}^{n_{R9}} a_{p_9}^{R_v}, \\
0 &= a_{p_3} - a_{p_3}^{T_1} - a_{p_3}^{S_1}, \\
1 &= a_{p_4} - a_{p_4}^{T_1} - a_{p_4}^{R_1}, \\
0 &= a_{p_9} - a_{p_9}^{S_1} - a_{p_9}^{R_1}, \\
0 &= a_{p_3}^{T_i} - a_{p_3}^{T_{i+1}}, \text{ para todo } i = 1, \dots, n_{T3} - 1, \\
0 &= a_{p_3}^{S_j} - a_{p_3}^{S_{j+1}}, \text{ para todo } j = 1, \dots, n_{S3} - 1, \\
0 &= a_{p_4}^{T_k} - a_{p_4}^{T_{k+1}}, \text{ para todo } k = 1, \dots, n_{T4} - 1, \\
0 &= a_{p_4}^{R_\ell} - a_{p_4}^{R_{\ell+1}}, \text{ para todo } \ell = 1, \dots, n_{R4} - 1, \\
0 &= a_{p_9}^{S_u} - a_{p_9}^{S_{u+1}}, \text{ para todo } u = 1, \dots, n_{S9} - 1, \\
0 &= a_{p_9}^{R_v} - a_{p_9}^{R_{v+1}}, \text{ para todo } v = 1, \dots, n_{R9} - 1, \\
0 &= a_{p_3}^{T_{n_{T3}}} = a_{p_3}^{S_{n_{S3}}} = a_{p_4}^{T_{n_{T4}}} = a_{p_4}^{R_{n_{R4}}} = a_{p_9}^{S_{n_{S9}}} = a_{p_9}^{R_{n_{R9}}}.
\end{aligned}$$

Caso VI.

$$\begin{aligned}
(4.3.7) \quad 0 &= a_0 - a_{p_1} - a_{p_2} - a_{p_3} - a_{p_4} - \sum_{i=1}^{n_{T3}} a_{p_3}^{T_i} - \sum_{k=1}^{n_{T4}} a_{p_4}^{T_k}, \\
0 &= a_0 - a_{p_3} - a_{p_6} - a_{p_7} - a_{p_9} - \sum_{j=1}^{n_{S3}} a_{p_3}^{S_j} - \sum_{u=1}^{n_{S9}} a_{p_9}^{S_u}, \\
0 &= a_0 - a_{p_4} - a_{p_5} - a_{p_8} - a_{p_9} - \sum_{\ell=1}^{n_{R4}} a_{p_4}^{R_\ell} - \sum_{v=1}^{n_{R9}} a_{p_9}^{R_v}, \\
0 &= a_{p_3} - a_{p_3}^{T_1} - a_{p_3}^{S_1}, \\
0 &= a_{p_4} - a_{p_4}^{T_1} - a_{p_4}^{R_1}, \\
1 &= a_{p_9} - a_{p_9}^{S_1} - a_{p_9}^{R_1}, \\
0 &= a_{p_3}^{T_i} - a_{p_3}^{T_{i+1}}, \text{ para todo } i = 1, \dots, n_{T3} - 1, \\
0 &= a_{p_3}^{S_j} - a_{p_3}^{S_{j+1}}, \text{ para todo } j = 1, \dots, n_{S3} - 1, \\
0 &= a_{p_4}^{T_k} - a_{p_4}^{T_{k+1}}, \text{ para todo } k = 1, \dots, n_{T4} - 1, \\
0 &= a_{p_4}^{R_\ell} - a_{p_4}^{R_{\ell+1}}, \text{ para todo } \ell = 1, \dots, n_{R4} - 1, \\
0 &= a_{p_9}^{S_u} - a_{p_9}^{S_{u+1}}, \text{ para todo } u = 1, \dots, n_{S9} - 1, \\
0 &= a_{p_9}^{R_v} - a_{p_9}^{R_{v+1}}, \text{ para todo } v = 1, \dots, n_{R9} - 1, \\
0 &= a_{p_3}^{T_{n_{T3}}} = a_{p_3}^{S_{n_{S3}}} = a_{p_4}^{T_{n_{T4}}} = a_{p_4}^{R_{n_{R4}}} = a_{p_9}^{S_{n_{S9}}} = a_{p_9}^{R_{n_{R9}}}.
\end{aligned}$$

Caso VII.

$$\begin{aligned}
(4.3.8) \quad 0 &= a_0 - a_{p_1} - a_{p_2} - a_{p_3} - a_{p_4} - \sum_{i=1}^{n_{T3}} a_{p_3}^{T_i} - \sum_{k=1}^{n_{T4}} a_{p_4}^{T_k}, \\
0 &= a_0 - a_{p_3} - a_{p_6} - a_{p_7} - a_{p_9} - \sum_{j=1}^{n_{S3}} a_{p_3}^{S_j} - \sum_{u=1}^{n_{S9}} a_{p_9}^{S_u}, \\
0 &= a_0 - a_{p_4} - a_{p_5} - a_{p_8} - a_{p_9} - \sum_{\ell=1}^{n_{R4}} a_{p_4}^{R_\ell} - \sum_{v=1}^{n_{R9}} a_{p_9}^{R_v}, \\
0 &= a_{p_3} - a_{p_3}^{T_1} - a_{p_3}^{S_1}, \\
0 &= a_{p_4} - a_{p_4}^{T_1} - a_{p_4}^{R_1}, \\
0 &= a_{p_9} - a_{p_9}^{S_1} - a_{p_9}^{R_1}, \\
1 &= a_{p_3}^{T_{i'}} - a_{p_3}^{T_{i'+1}}, \text{ para alg\'un } 1 \leq i' \leq n_{T3} - 1 \text{ y} \\
0 &= a_{p_3}^{T_i} - a_{p_3}^{T_{i+1}}, \text{ para todo } i \in \{1, \dots, n_{T3} - 1\} \setminus \{i'\}, \\
0 &= a_{p_3}^{S_j} - a_{p_3}^{S_{j+1}}, \text{ para todo } j = 1, \dots, n_{S3} - 1, \\
0 &= a_{p_4}^{T_k} - a_{p_4}^{T_{k+1}}, \text{ para todo } k = 1, \dots, n_{T4} - 1, \\
0 &= a_{p_4}^{R_\ell} - a_{p_4}^{R_{\ell+1}}, \text{ para todo } \ell = 1, \dots, n_{R4} - 1, \\
0 &= a_{p_9}^{S_u} - a_{p_9}^{S_{u+1}}, \text{ para todo } u = 1, \dots, n_{S9} - 1, \\
0 &= a_{p_9}^{R_v} - a_{p_9}^{R_{v+1}}, \text{ para todo } v = 1, \dots, n_{R9} - 1, \\
0 &= a_{p_3}^{T_{n_{T3}}} = a_{p_3}^{S_{n_{S3}}} = a_{p_4}^{T_{n_{T4}}} = a_{p_4}^{R_{n_{R4}}} = a_{p_9}^{S_{n_{S9}}} = a_{p_9}^{R_{n_{R9}}}.
\end{aligned}$$

Caso VIII.

$$\begin{aligned}
(4.3.9) \quad 0 &= a_0 - a_{p_1} - a_{p_2} - a_{p_3} - a_{p_4} - \sum_{i=1}^{n_{T3}} a_{p_3}^{T_i} - \sum_{k=1}^{n_{T4}} a_{p_4}^{T_k}, \\
0 &= a_0 - a_{p_3} - a_{p_6} - a_{p_7} - a_{p_9} - \sum_{j=1}^{n_{S3}} a_{p_3}^{S_j} - \sum_{u=1}^{n_{S9}} a_{p_9}^{S_u}, \\
0 &= a_0 - a_{p_4} - a_{p_5} - a_{p_8} - a_{p_9} - \sum_{\ell=1}^{n_{R4}} a_{p_4}^{R_\ell} - \sum_{v=1}^{n_{R9}} a_{p_9}^{R_v}, \\
0 &= a_{p_3} - a_{p_3}^{T_1} - a_{p_3}^{S_1}, \\
0 &= a_{p_4} - a_{p_4}^{T_1} - a_{p_4}^{R_1}, \\
0 &= a_{p_9} - a_{p_9}^{S_1} - a_{p_9}^{R_1}, \\
0 &= a_{p_3}^{T_i} - a_{p_3}^{T_{i+1}}, \text{ para todo } i = 1, \dots, n_{T3} - 1, \\
1 &= a_{p_3}^{S_{j'}} - a_{p_3}^{S_{j'+1}}, \text{ para alg\'un } 1 \leq j' \leq n_{S3} - 1 \text{ y} \\
0 &= a_{p_3}^{S_i} - a_{p_3}^{S_{i+1}}, \text{ para todo } i \in \{1, \dots, n_{S3} - 1\} \setminus \{j'\}, \\
0 &= a_{p_4}^{T_k} - a_{p_4}^{T_{k+1}}, \text{ para todo } k = 1, \dots, n_{T4} - 1, \\
0 &= a_{p_4}^{R_\ell} - a_{p_4}^{R_{\ell+1}}, \text{ para todo } \ell = 1, \dots, n_{R4} - 1, \\
0 &= a_{p_9}^{S_u} - a_{p_9}^{S_{u+1}}, \text{ para todo } u = 1, \dots, n_{S9} - 1, \\
0 &= a_{p_9}^{R_v} - a_{p_9}^{R_{v+1}}, \text{ para todo } v = 1, \dots, n_{R9} - 1, \\
0 &= a_{p_3}^{T_{n_{T3}}} = a_{p_3}^{S_{n_{S3}}} = a_{p_4}^{T_{n_{T4}}} = a_{p_4}^{R_{n_{R4}}} = a_{p_9}^{S_{n_{S9}}} = a_{p_9}^{R_{n_{R9}}}.
\end{aligned}$$

Caso IX.

$$\begin{aligned}
(4.3.10) \quad 0 &= a_0 - a_{p_1} - a_{p_2} - a_{p_3} - a_{p_4} - \sum_{i=1}^{n_{T3}} a_{p_3}^{T_i} - \sum_{k=1}^{n_{T4}} a_{p_4}^{T_k}, \\
0 &= a_0 - a_{p_3} - a_{p_6} - a_{p_7} - a_{p_9} - \sum_{j=1}^{n_{S3}} a_{p_3}^{S_j} - \sum_{u=1}^{n_{S9}} a_{p_9}^{S_u}, \\
0 &= a_0 - a_{p_4} - a_{p_5} - a_{p_8} - a_{p_9} - \sum_{\ell=1}^{n_{R4}} a_{p_4}^{R_\ell} - \sum_{v=1}^{n_{R9}} a_{p_9}^{R_v}, \\
0 &= a_{p_3} - a_{p_3}^{T_1} - a_{p_3}^{S_1}, \\
0 &= a_{p_4} - a_{p_4}^{T_1} - a_{p_4}^{R_1}, \\
0 &= a_{p_9} - a_{p_9}^{S_1} - a_{p_9}^{R_1}, \\
0 &= a_{p_3}^{T_i} - a_{p_3}^{T_{i+1}}, \text{ para todo } i = 1, \dots, n_{T3} - 1, \\
0 &= a_{p_3}^{S_j} - a_{p_3}^{S_{j+1}}, \text{ para todo } j = 1, \dots, n_{S3} - 1, \\
1 &= a_{p_4}^{T_{k'}} - a_{p_4}^{T_{k'+1}}, \text{ para algún } 1 \leq k' \leq n_{T4} - 1 \text{ y} \\
0 &= a_{p_4}^{T_k} - a_{p_4}^{T_{k+1}}, \text{ para todo } k \in \{1, \dots, n_{T4} - 1\} \setminus \{k'\}, \\
0 &= a_{p_4}^{R_\ell} - a_{p_4}^{R_{\ell+1}}, \text{ para todo } \ell = 1, \dots, n_{R4} - 1, \\
0 &= a_{p_9}^{S_u} - a_{p_9}^{S_{u+1}}, \text{ para todo } u = 1, \dots, n_{S9} - 1, \\
0 &= a_{p_9}^{R_v} - a_{p_9}^{R_{v+1}}, \text{ para todo } v = 1, \dots, n_{R9} - 1, \\
0 &= a_{p_3}^{T_{n_{T3}}} = a_{p_3}^{S_{n_{S3}}} = a_{p_4}^{T_{n_{T4}}} = a_{p_4}^{R_{n_{R4}}} = a_{p_9}^{S_{n_{S9}}} = a_{p_9}^{R_{n_{R9}}}.
\end{aligned}$$

Caso X.

$$\begin{aligned}
(4.3.11) \quad 0 &= a_0 - a_{p_1} - a_{p_2} - a_{p_3} - a_{p_4} - \sum_{i=1}^{n_{T3}} a_{p_3}^{T_i} - \sum_{k=1}^{n_{T4}} a_{p_4}^{T_k}, \\
0 &= a_0 - a_{p_3} - a_{p_6} - a_{p_7} - a_{p_9} - \sum_{j=1}^{n_{S3}} a_{p_3}^{S_j} - \sum_{u=1}^{n_{S9}} a_{p_9}^{S_u}, \\
0 &= a_0 - a_{p_4} - a_{p_5} - a_{p_8} - a_{p_9} - \sum_{\ell=1}^{n_{R4}} a_{p_4}^{R_\ell} - \sum_{v=1}^{n_{R9}} a_{p_9}^{R_v}, \\
0 &= a_{p_3} - a_{p_3}^{T_1} - a_{p_3}^{S_1}, \\
0 &= a_{p_4} - a_{p_4}^{T_1} - a_{p_4}^{R_1}, \\
0 &= a_{p_9} - a_{p_9}^{S_1} - a_{p_9}^{R_1}, \\
0 &= a_{p_3}^{T_i} - a_{p_3}^{T_{i+1}}, \text{ para todo } i = 1, \dots, n_{T3} - 1, \\
0 &= a_{p_3}^{S_j} - a_{p_3}^{S_{j+1}}, \text{ para todo } j = 1, \dots, n_{S3} - 1, \\
0 &= a_{p_4}^{T_k} - a_{p_4}^{T_{k+1}}, \text{ para todo } k = 1, \dots, n_{T4} - 1, \\
1 &= a_{p_4}^{R_{\ell'}} - a_{p_4}^{R_{\ell'+1}}, \text{ para algún } 1 \leq \ell' \leq n_{R4} - 1 \text{ y} \\
0 &= a_{p_4}^{R_\ell} - a_{p_4}^{R_{\ell+1}}, \text{ para todo } \ell \in \{1, \dots, n_{R4} - 1\} \setminus \{\ell'\}, \\
0 &= a_{p_9}^{S_u} - a_{p_9}^{S_{u+1}}, \text{ para todo } u = 1, \dots, n_{S9} - 1, \\
0 &= a_{p_9}^{R_v} - a_{p_9}^{R_{v+1}}, \text{ para todo } v = 1, \dots, n_{R9} - 1, \\
0 &= a_{p_3}^{T_{n_{T3}}} = a_{p_3}^{S_{n_{S3}}} = a_{p_4}^{T_{n_{T4}}} = a_{p_4}^{R_{n_{R4}}} = a_{p_9}^{S_{n_{S9}}} = a_{p_9}^{R_{n_{R9}}}.
\end{aligned}$$

Caso XI.

$$\begin{aligned}
(4.3.12) \quad 0 &= a_0 - a_{p_1} - a_{p_2} - a_{p_3} - a_{p_4} - \sum_{i=1}^{n_{T3}} a_{p_3}^{T_i} - \sum_{k=1}^{n_{T4}} a_{p_4}^{T_k}, \\
0 &= a_0 - a_{p_3} - a_{p_6} - a_{p_7} - a_{p_9} - \sum_{j=1}^{n_{S3}} a_{p_3}^{S_j} - \sum_{u=1}^{n_{S9}} a_{p_9}^{S_u}, \\
0 &= a_0 - a_{p_4} - a_{p_5} - a_{p_8} - a_{p_9} - \sum_{\ell=1}^{n_{R4}} a_{p_4}^{R_\ell} - \sum_{v=1}^{n_{R9}} a_{p_9}^{R_v}, \\
0 &= a_{p_3} - a_{p_3}^{T_1} - a_{p_3}^{S_1}, \\
0 &= a_{p_4} - a_{p_4}^{T_1} - a_{p_4}^{R_1}, \\
0 &= a_{p_9} - a_{p_9}^{S_1} - a_{p_9}^{R_1}, \\
0 &= a_{p_3}^{T_i} - a_{p_3}^{T_{i+1}}, \text{ para todo } i = 1, \dots, n_{T3} - 1, \\
0 &= a_{p_3}^{S_j} - a_{p_3}^{S_{j+1}}, \text{ para todo } j = 1, \dots, n_{S3} - 1, \\
0 &= a_{p_4}^{T_k} - a_{p_4}^{T_{k+1}}, \text{ para todo } k = 1, \dots, n_{T4} - 1, \\
0 &= a_{p_4}^{R_\ell} - a_{p_4}^{R_{\ell+1}}, \text{ para todo } \ell = 1, \dots, n_{R4} - 1, \\
1 &= a_{p_9}^{S_{u'}} - a_{p_9}^{S_{u'+1}}, \text{ para alg\'un } 1 \leq u' \leq n_{S9} - 1 \text{ y} \\
0 &= a_{p_9}^{S_u} - a_{p_9}^{S_{u+1}}, \text{ para todo } u \in \{1, \dots, n_{S9} - 1\} \setminus \{u'\}, \\
0 &= a_{p_9}^{R_v} - a_{p_9}^{R_{v+1}}, \text{ para todo } v = 1, \dots, n_{R9} - 1, \\
0 &= a_{p_3}^{T_{n_{T3}}} = a_{p_3}^{S_{n_{S3}}} = a_{p_4}^{T_{n_{T4}}} = a_{p_4}^{R_{n_{R4}}} = a_{p_9}^{S_{n_{S9}}} = a_{p_9}^{R_{n_{R9}}}.
\end{aligned}$$

Caso XII.

$$\begin{aligned}
(4.3.13) \quad 0 &= a_0 - a_{p_1} - a_{p_2} - a_{p_3} - a_{p_4} - \sum_{i=1}^{n_{T3}} a_{p_3}^{T_i} - \sum_{k=1}^{n_{T4}} a_{p_4}^{T_k}, \\
0 &= a_0 - a_{p_3} - a_{p_6} - a_{p_7} - a_{p_9} - \sum_{j=1}^{n_{S3}} a_{p_3}^{S_j} - \sum_{u=1}^{n_{S9}} a_{p_9}^{S_u}, \\
0 &= a_0 - a_{p_4} - a_{p_5} - a_{p_8} - a_{p_9} - \sum_{\ell=1}^{n_{R4}} a_{p_4}^{R_\ell} - \sum_{v=1}^{n_{R9}} a_{p_9}^{R_v}, \\
0 &= a_{p_3} - a_{p_3}^{T_1} - a_{p_3}^{S_1}, \\
0 &= a_{p_4} - a_{p_4}^{T_1} - a_{p_4}^{R_1}, \\
0 &= a_{p_9} - a_{p_9}^{S_1} - a_{p_9}^{R_1}, \\
0 &= a_{p_3}^{T_i} - a_{p_3}^{T_{i+1}}, \text{ para todo } i = 1, \dots, n_{T3} - 1, \\
0 &= a_{p_3}^{S_j} - a_{p_3}^{S_{j+1}}, \text{ para todo } j = 1, \dots, n_{S3} - 1, \\
0 &= a_{p_4}^{T_k} - a_{p_4}^{T_{k+1}}, \text{ para todo } k = 1, \dots, n_{T4} - 1, \\
0 &= a_{p_4}^{R_\ell} - a_{p_4}^{R_{\ell+1}}, \text{ para todo } \ell = 1, \dots, n_{R4} - 1, \\
0 &= a_{p_9}^{S_u} - a_{p_9}^{S_{u+1}}, \text{ para todo } u = 1, \dots, n_{S9} - 1, \\
1 &= a_{p_9}^{R_{v'}} - a_{p_9}^{R_{v'+1}}, \text{ para alg\'un } 1 \leq v' \leq n_{R9} - 1 \text{ y} \\
0 &= a_{p_9}^{R_v} - a_{p_9}^{R_{v+1}}, \text{ para todo } v \in \{1, \dots, n_{R9} - 1\} \setminus \{v'\}, \\
0 &= a_{p_3}^{T_{n_{T3}}} = a_{p_3}^{S_{n_{S3}}} = a_{p_4}^{T_{n_{T4}}} = a_{p_4}^{R_{n_{R4}}} = a_{p_9}^{S_{n_{S9}}} = a_{p_9}^{R_{n_{R9}}}.
\end{aligned}$$

Consideremos el Caso I. Las igualdades (4.3.2) establecidas en este caso implican que

$$\begin{aligned} a_{p_3}^{T_1} &= a_{p_3}^{T_2} = \cdots = a_{p_3}^{T_{n_{T3}-1}} = a_{p_3}^{T_{n_{T3}}} = a_{p_3}^{S_1} = a_{p_3}^{S_2} = \cdots = a_{p_3}^{S_{n_{S3}-1}} = a_{p_3}^{S_{n_{S3}}} = 0 \text{ y } a_{p_3} = 0, \\ a_{p_4}^{T_1} &= a_{p_4}^{T_2} = \cdots = a_{p_4}^{T_{n_{T4}-1}} = a_{p_4}^{T_{n_{T4}}} = a_{p_4}^{R_1} = a_{p_4}^{R_2} = \cdots = a_{p_4}^{R_{n_{R4}-1}} = a_{p_4}^{R_{n_{R4}}} = 0 \text{ y } a_{p_4} = 0, \\ a_{p_9}^{S_1} &= a_{p_9}^{S_2} = \cdots = a_{p_9}^{S_{n_{S9}-1}} = a_{p_9}^{S_{n_{S9}}} = a_{p_9}^{R_1} = a_{p_9}^{R_2} = \cdots = a_{p_9}^{R_{n_{R9}-1}} = a_{p_9}^{R_{n_{R9}}} = 0 \text{ y } a_{p_9} = 0. \end{aligned}$$

De modo que la tupla ordenada de $\mathcal{W}$ en la base prefijada de $\text{Pic}(X)$ se reduce a una de la forma $(a_0, a_{p_1}, a_{p_2}, 0, 0, a_{p_5}, a_{p_6}, a_{p_7}, a_{p_8}, 0, \dots, 0)$. Por lo tanto, el sistema (4.3.1) nos da las igualdades

$$(4.3.14) \quad \begin{aligned} 3a_0 - 1 &= a_{p_1} + a_{p_2} + a_{p_5} + a_{p_6} + a_{p_7} + a_{p_8} \\ a_0^2 + 1 &= a_{p_1}^2 + a_{p_2}^2 + a_{p_5}^2 + a_{p_6}^2 + a_{p_7}^2 + a_{p_8}^2. \end{aligned}$$

Luego, introduciendo el siguiente cambio de parámetros

$$(4.3.15) \quad \begin{aligned} \alpha_{p_1} &= a_{p_1} - \left(\frac{a_0}{2}\right) \\ \alpha_{p_2} &= a_{p_2} - \left(\frac{a_0}{2}\right) \\ \alpha_{p_5} &= a_{p_5} - \left(\frac{a_0}{2}\right) \\ \alpha_{p_6} &= a_{p_6} - \left(\frac{a_0}{2}\right) \\ \alpha_{p_7} &= a_{p_7} - \left(\frac{a_0}{2}\right) \\ \alpha_{p_8} &= a_{p_8} - \left(\frac{a_0}{2}\right) \end{aligned}$$

obtenemos que

$$\alpha_{p_1}^2 + \alpha_{p_2}^2 + \alpha_{p_5}^2 + \alpha_{p_6}^2 + \alpha_{p_7}^2 + \alpha_{p_8}^2 + 2\left(\frac{a_0}{2}\right)\left(\alpha_{p_1} + \alpha_{p_2} + \alpha_{p_5} + \alpha_{p_6} + \alpha_{p_7} + \alpha_{p_8}\right) + 6\left(\frac{a_0}{2}\right)^2$$

es igual a $a_0^2 + 1$, y que

$$\alpha_{p_1} + \alpha_{p_2} + \alpha_{p_5} + \alpha_{p_6} + \alpha_{p_7} + \alpha_{p_8} = (3a_0 - 1) - 6\left(\frac{a_0}{2}\right).$$

De manera que

$$a_0^2 + 1 - a_0 - \left(\frac{3}{2}\right)a_0^2 \geq 0.$$

Acotando finalmente a a_0 por la desigualdad $a_0 \leq \sqrt{3} + 1$.

Caso II. Las igualdades (4.3.3) establecidas en este caso implican que $a_{p_3}^{T_i} = a_{p_3}^{S_j} = 0$ para

todo $i = 1, \dots, n_{T3}$ y $j = 1, \dots, n_{S3}$,

$$a_{p_4}^{T_k} = a_{p_4}^{R_\ell} = 0 \text{ para todo } k = 1, \dots, n_{T4} \text{ y } \ell = 1, \dots, n_{R4},$$

$$a_{p_9}^{T_u} = a_{p_9}^{R_v} = 0 \text{ para todo } u = 1, \dots, n_{T9} \text{ y } v = 1, \dots, n_{R9},$$

de modo que también se cumple $a_{p_3} = a_{p_4} = a_{p_9} = 0$, junto con:

$$a_0 - a_{p_1} - a_{p_2} = 0, \quad a_0 - a_{p_6} - a_{p_7} = 1 \quad \text{y} \quad a_0 - a_{p_5} - a_{p_8} = 0.$$

Por lo que la tupla ordenada de $\mathcal{W}$ adquiere la forma $(a_0, a_{p_1}, a_{p_2}, 0, 0, a_{p_5}, a_{p_6}, a_{p_7}, a_{p_8}, 0, 0, \dots, 0)$.

Consecuentemente, las ecuaciones (4.3.1) en términos de las entradas de dicha tupla nos da las igualdades

$$(4.3.16) \quad \begin{aligned} 3a_0 - 1 &= a_{p_1} + a_{p_2} + a_{p_5} + a_{p_6} + a_{p_7} + a_{p_8} \\ a_0^2 + 1 &= a_{p_1}^2 + a_{p_2}^2 + a_{p_5}^2 + a_{p_6}^2 + a_{p_7}^2 + a_{p_8}^2. \end{aligned}$$

Así, considerando la familia de escalares (4.3.15) obtenemos la relación

$$\alpha_{p_1} + \alpha_{p_2} + \alpha_{p_5} + \alpha_{p_6} + \alpha_{p_7} + \alpha_{p_8} = -1,$$

la cual implica que

$$a_0^2 + 1 - a_0 - \left(\frac{3}{2}\right)a_0^2 \geq \alpha_{p_1}^2 + \alpha_{p_2}^2 + \alpha_{p_5}^2 + \alpha_{p_6}^2 + \alpha_{p_7}^2 + \alpha_{p_8}^2$$

Acotando a a_0 como se pedia.

Caso III. En este caso las igualdades (4.3.4) establecidas implican que

$$a_{p_3}^{T_i} = a_{p_3}^{S_j} = 0 \text{ para todo } i = 1, \dots, n_{T3} \text{ y } j = 1, \dots, n_{S3},$$

$$a_{p_4}^{T_k} = a_{p_4}^{R_\ell} = 0 \text{ para todo } k = 1, \dots, n_{T4} \text{ y } \ell = 1, \dots, n_{R4},$$

$$a_{p_9}^{T_u} = a_{p_9}^{R_v} = 0 \text{ para todo } u = 1, \dots, n_{T9} \text{ y } v = 1, \dots, n_{R9},$$

por lo que también se cumple $a_{p_3} = a_{p_4} = a_{p_9} = 0$, junto con:

$$a_0 - a_{p_1} - a_{p_2} = 0, \quad a_0 - a_{p_6} - a_{p_7} = 0 \quad \text{y} \quad a_0 - a_{p_5} - a_{p_8} = 1.$$

De modo que la tupla ordenada de $\mathcal{W}$ es $(a_0, a_{p_1}, a_{p_2}, 0, 0, a_{p_5}, a_{p_6}, a_{p_7}, a_{p_8}, 0, 0, \dots, 0)$. Por consiguiente, el sistema de ecuaciones (4.3.1) en términos de las entradas de dicha tupla nos da

$$(4.3.17) \quad \begin{aligned} 3a_0 - 1 &= a_{p_1} + a_{p_2} + a_{p_5} + a_{p_6} + a_{p_7} + a_{p_8} \\ a_0^2 + 1 &= a_{p_1}^2 + a_{p_2}^2 + a_{p_5}^2 + a_{p_6}^2 + a_{p_7}^2 + a_{p_8}^2. \end{aligned}$$

Así, considerando el cambio de escalares (4.3.15) obtenemos que

$$\alpha_{p_1} + \alpha_{p_2} + \alpha_{p_5} + \alpha_{p_6} + \alpha_{p_7} + \alpha_{p_8} = -1,$$

lo cual implica que

$$a_0^2 + 1 - a_0 - \left(\frac{3}{2}\right)a_0^2 \geq \alpha_{p_1}^2 + \alpha_{p_2}^2 + \alpha_{p_5}^2 + a_{p_6}^2 + \alpha_{p_7}^2 + \alpha_{p_8}^2$$

Acotando una vez más a a_0 .

Consideremos ahora el Caso IV. La ecuación $a_{p_3} - a_{p_3}^{\tau_1} - a_{p_3}^{s_1} = 1$ junto con las demás ecuaciones (4.3.5) establecidas por la igualdad $(-\mathcal{K}_X).\mathcal{W} = 1$, implican que la tupla ordenada para $\mathcal{W}$ tiene la forma

$$(a_0, a_{p_1}, a_{p_2}, 1, 0, a_{p_5}, a_{p_6}, a_{p_7}, a_{p_8}, 0, 0, \dots, 0),$$

de manera que

$$a_{p_1} + a_{p_2} + a_{p_5} + a_{p_6} + a_{p_7} + a_{p_8} = 3a_0 - 2 \text{ y } a_{p_1}^2 + a_{p_2}^2 + a_{p_5}^2 + a_{p_6}^2 + a_{p_7}^2 + a_{p_8}^2 = a_0^2.$$

Luego, considerando los escalares (4.3.15) obtenemos $\alpha_{p_1} + \alpha_{p_2} + \alpha_{p_5} + \alpha_{p_6} + \alpha_{p_7} + \alpha_{p_8} = -2$, asimismo obtenemos que

$$a_0^2 + 2a_0 - \frac{3a_0^2}{2} \geq a_{p_1}^2 + a_{p_2}^2 + a_{p_5}^2 + a_{p_6}^2 + a_{p_7}^2 + a_{p_8}^2$$

y por tanto, tenemos la desigualdad $a_0 \leq 4$ que acota a a_0 .

Caso V. En este caso la ecuación $a_{p_4} - a_{p_4}^{\tau_1} - a_{p_4}^{R_1} = 1$ junto con las demás ecuaciones nulas (4.3.6) establecidas por la relación $(-\mathcal{K}_X).\mathcal{W} = 1$, implican en particular que las entradas a_{p_3}, a_{p_4} y a_{p_9} son iguales respectivamente a 0, 1 y 0, y la tupla ordenada de $\mathcal{W}$ es

$$(a_0, a_{p_1}, a_{p_2}, 0, 1, a_{p_5}, a_{p_6}, a_{p_7}, a_{p_8}, 0, 0, \dots, 0).$$

Luego, el sistema (4.3.1) se simplifica en

$$a_{p_1} + a_{p_2} + a_{p_5} + a_{p_6} + a_{p_7} + a_{p_8} = 3a_0 - 2 \text{ y } a_{p_1}^2 + a_{p_2}^2 + a_{p_5}^2 + a_{p_6}^2 + a_{p_7}^2 + a_{p_8}^2 = a_0^2.$$

Por tanto, considerando el sistema de escalares (4.3.15) resulta que $\alpha_{p_1} + \alpha_{p_2} + \alpha_{p_5} + \alpha_{p_6} + \alpha_{p_7} + \alpha_{p_8} = -2$, así como también que

$$a_0^2 + 2a_0 - \frac{3a_0^2}{2} \geq 0$$

lo cual acota a a_0 .

Caso VI. Para este caso la ecuación $a_{p_9} - a_{p_9}^{s_1} - a_{p_9}^{R_1} = 1$ junto con las ecuaciones nulas (4.3.7) establecidas por la relación $(-\mathcal{K}_X).\mathcal{W} = 1$, implican que la tupla ordenada de $\mathcal{W}$ es

$$(a_0, a_{p_1}, a_{p_2}, 0, 0, a_{p_5}, a_{p_6}, a_{p_7}, a_{p_8}, 1, 0, \dots, 0).$$

Así, el sistema (4.3.1) se simplifica en

$$a_{p_1} + a_{p_2} + a_{p_5} + a_{p_6} + a_{p_7} + a_{p_8} = 3a_0 - 2 \text{ y } a_{p_1}^2 + a_{p_2}^2 + a_{p_5}^2 + a_{p_6}^2 + a_{p_7}^2 + a_{p_8}^2 = a_0^2.$$

De modo que introduciendo el sistema de parámetros (4.3.15) resulta que $\alpha_{p_1} + \alpha_{p_2} + \alpha_{p_5} + \alpha_{p_6} + \alpha_{p_7} + \alpha_{p_8} = -2$, asimismo, obtenemos que

$$a_0^2 + 2a_0 - \frac{3a_0^2}{2} \geq 0$$

lo cual acota a a_0 una vez más.

Consideremos ahora el Caso VII. Esto es, sea $i' \in \{1, \dots, n_{T3} - 1\}$ tal que $a_{\frac{T_{i'}}{p_3}} - a_{\frac{T_{i'+1}}{p_3}} = 1$. De acuerdo a las igualdades adicionales (4.3.8) establecidas por la ecuación $(-\mathcal{K}_X) \cdot \mathcal{W} = 1$ se sigue que

$$a_{p_3} = a_{\frac{T_1}{p_3}} = a_{\frac{T_2}{p_3}} = \dots = a_{\frac{T_{i'}}{p_3}} = 1 \quad \text{y} \quad a_{\frac{T_{i'+1}}{p_3}} = a_{\frac{T_{i'+2}}{p_3}} = \dots = a_{\frac{T_{n_{T3}}}{p_3}} = 0.$$

Además

$$a_{p_4} = a_{p_9} = a_{\frac{S_j}{p_3}} = a_{\frac{T_k}{p_4}} = a_{\frac{R_\ell}{p_4}} = a_{\frac{S_u}{p_9}} = a_{\frac{R_v}{p_9}} = 0,$$

para todos los valores

$$j = 1, \dots, n_{S3}, k = 1, \dots, n_{T4}, \ell = 1, \dots, n_{R4}, u = 1, \dots, n_{S9}, v = 1, \dots, n_{R9}.$$

De modo que la tupla ordenada que define $\mathcal{W}$ tiene la forma

$$(a_0, a_{p_1}, a_{p_2}, 1, 0, a_{p_5}, a_{p_6}, a_{p_7}, a_{p_8}, 0, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{i' \text{-veces}}, 0, \dots, 0).$$

A partir de lo cual se sigue que

$$a_{p_1} + a_{p_2} + a_{p_5} + a_{p_6} + a_{p_7} + a_{p_8} = 3a_0 - 2 - i' \quad \text{y} \quad a_{p_1}^2 + a_{p_2}^2 + a_{p_5}^2 + a_{p_6}^2 + a_{p_7}^2 + a_{p_8}^2 = a_0^2 - i'.$$

Por lo tanto, considerando el cambio de escalares (4.3.15) introducido en el Caso I, obtenemos la ecuación $\alpha_{p_1} + \alpha_{p_2} + \alpha_{p_5} + \alpha_{p_6} + \alpha_{p_7} + \alpha_{p_8} + (2 + i') = 0$ que implica la desigualdad

$$a_0^2 - \frac{3a_0^2}{2} + a_0(i' + 2) - i' \geq 0$$

acotando finalmente a a_0 por $a_0 \leq \frac{3i'+2}{2}$.

Caso VIII. Sea $j' \in \{1, 2, \dots, n_{S3} - 1\}$ tal que $a_{\frac{S_{j'}}{p_3}} - a_{\frac{S_{j'+1}}{p_3}} = 1$. En conformidad con las igualdades adicionales (4.3.9) determinadas por $(-\mathcal{K}_X) \cdot \mathcal{W} = 1$ se sigue que

$$a_{p_3} = a_{\frac{S_1}{p_3}} = a_{\frac{S_2}{p_3}} = \dots = a_{\frac{S_{j'}}{p_3}} = 1 \quad \text{y} \quad a_{\frac{S_{j'+1}}{p_3}} = a_{\frac{S_{j'+2}}{p_3}} = \dots = a_{\frac{S_{n_{S3}}}{p_3}} = 0.$$

Asimismo

$$a_{p_4} = a_{p_9} = a_{\frac{T_i}{p_3}} = a_{\frac{T_k}{p_4}} = a_{\frac{R_\ell}{p_4}} = a_{\frac{S_u}{p_9}} = a_{\frac{R_v}{p_9}} = 0,$$

para todos los valores

$$i = 1, \dots, n_{T3}, k = 1, \dots, n_{T4}, \ell = 1, \dots, n_{R4}, u = 1, \dots, n_{S9}, v = 1, \dots, n_{R9}.$$

De modo que la tupla ordenada que define $\mathcal{W}$ tiene la forma

$$(a_0, a_{p_1}, a_{p_2}, 1, 0, a_{p_5}, a_{p_6}, a_{p_7}, a_{p_8}, 0, 0, \dots, 0, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{j' \text{ veces}}, 0, \dots, 0).$$

A partir de lo cual se sigue que

$$a_{p_1} + a_{p_2} + a_{p_5} + a_{p_6} + a_{p_7} + a_{p_8} = 3a_0 - 2 - j' \quad \text{y} \quad a_{p_1}^2 + a_{p_2}^2 + a_{p_5}^2 + a_{p_6}^2 + a_{p_7}^2 + a_{p_8}^2 = a_0^2 - j'.$$

Por lo tanto, considerando el cambio de escalares (4.3.15) introducido en el Caso I, obtenemos la ecuación $\alpha_{p_1} + \alpha_{p_2} + \alpha_{p_5} + \alpha_{p_6} + \alpha_{p_7} + \alpha_{p_8} + (2 + j') = 0$ que implica la desigualdad

$$a_0^2 - \frac{3a_0^2}{2} + a_0(j' + 2) - j' \geq 0$$

acotando a a_0 por $a_0 \leq \frac{3j'+2}{2}$.

Caso IX. Sea $k' \in \{1, \dots, n_{T4} - 1\}$ tal que $a_{p_4}^{T_{k'}} - a_{p_4}^{T_{k'+1}} = 1$ y las demás ecuaciones nulas (4.3.10). Se sigue que

$$a_{p_4} = a_{p_4}^{T_1} = a_{p_4}^{T_2} = \dots = a_{p_4}^{T_{k'}} = 1 \quad \text{y} \quad a_{p_4}^{T_{k'+1}} = a_{p_4}^{T_{k'+2}} = \dots = a_{p_4}^{T_{n_{T4}}} = 0.$$

Asimismo

$$a_{p_3} = a_{p_9} = a_{p_3}^{T_i} = a_{p_3}^{S_j} = a_{p_4}^{R_\ell} = a_{p_9}^{S_u} = a_{p_9}^{R_v} = 0,$$

para todos los valores

$$i = 1, \dots, n_{T3}, j = 1, \dots, n_{S3}, \ell = 1, \dots, n_{R4}, u = 1, \dots, n_{S9}, v = 1, \dots, n_{R9}.$$

De manera que la tupla ordenada de $\mathcal{W}$ tiene la forma

$$(a_0, a_{p_1}, a_{p_2}, 0, 1, a_{p_5}, a_{p_6}, a_{p_7}, a_{p_8}, 0, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{k' \text{ veces}}, 0, \dots, 0).$$

De lo cual se tiene que

$$a_{p_1} + a_{p_2} + a_{p_5} + a_{p_6} + a_{p_7} + a_{p_8} = 3a_0 - 2 - k' \quad \text{y} \quad a_{p_1}^2 + a_{p_2}^2 + a_{p_5}^2 + a_{p_6}^2 + a_{p_7}^2 + a_{p_8}^2 = a_0^2 - k'.$$

Así, considerando la familia de escalares (4.3.15), obtenemos la ecuación

$$\alpha_{p_1} + \alpha_{p_2} + \alpha_{p_5} + \alpha_{p_6} + \alpha_{p_7} + \alpha_{p_8} = -(2 + k')$$

que implica la desigualdad

$$a_0^2 - \frac{3a_0^2}{2} + a_0(k' + 2) - k' \geq 0$$

acotando a a_0 .

Caso X. Sea $\ell' \in \{1, \dots, n_{R4} - 1\}$ tal que $a_{p_4}^{R_{\ell'}} - a_{p_4}^{R_{\ell'+1}} = 1$ y las demás ecuaciones nulas (4.3.11). Se sigue que

$$a_{p_4} = a_{p_4}^{R_1} = a_{p_4}^{R_2} = \dots = a_{p_4}^{R_{\ell'}} = 1 \quad \text{y} \quad a_{p_4}^{R_{\ell'+1}} = a_{p_4}^{R_{\ell'+2}} = \dots = a_{p_4}^{R_{n_{R4}}} = 0.$$

Asimismo

$$a_{p_3} = a_{p_9} = a_{p_3}^{T_i} = a_{p_3}^{S_j} = a_{p_4}^{T_k} = a_{p_9}^{S_u} = a_{p_9}^{R_v} = 0,$$

para todos los valores

$$i = 1, \dots, n_{T3}, j = 1, \dots, n_{S3}, k = 1, \dots, n_{T4}, u = 1, \dots, n_{S9}, v = 1, \dots, n_{R9}.$$

De manera que la tupla ordenada de $\mathcal{W}$ tiene la forma

$$(a_0, a_{p_1}, a_{p_2}, 0, 1, a_{p_5}, a_{p_6}, a_{p_7}, a_{p_8}, 0, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{\ell' \text{ veces}}, 0, \dots, 0).$$

De lo cual se tiene que

$$a_{p_1} + a_{p_2} + a_{p_5} + a_{p_6} + a_{p_7} + a_{p_8} = 3a_0 - 2 - \ell' \quad \text{y} \quad a_{p_1}^2 + a_{p_2}^2 + a_{p_5}^2 + a_{p_6}^2 + a_{p_7}^2 + a_{p_8}^2 = a_0^2 - \ell'.$$

Por lo tanto, considerando el cambio de parámetros (4.3.15), obtenemos la ecuación

$$\alpha_{p_1} + \alpha_{p_2} + \alpha_{p_5} + \alpha_{p_6} + \alpha_{p_7} + \alpha_{p_8} + (2 + \ell') = 0$$

que implica la desigualdad

$$a_0^2 - \frac{3a_0^2}{2} + a_0(\ell' + 2) - \ell' \geq 0$$

acotando a a_0 .

Caso XI. Sea $u' \in \{1, \dots, n_{S9} - 1\}$ tal que $a_{p_9}^{S_{u'}} - a_{p_9}^{S_{u'+1}} = 1$ y las demás ecuaciones nulas (4.3.12). Se sigue que

$$a_{p_9} = a_{p_9}^{S_1} = a_{p_9}^{S_2} = \dots = a_{p_9}^{S_{u'}} = 1 \quad \text{y} \quad a_{p_9}^{S_{u'+1}} = a_{p_9}^{S_{u'+2}} = \dots = a_{p_9}^{S_{n_{S9}}} = 0.$$

Asimismo

$$a_{p_3} = a_{p_4} = a_{p_3}^{T_i} = a_{p_3}^{S_j} = a_{p_4}^{T_k} = a_{p_4}^{R_\ell} = a_{p_9}^{R_v} = 0,$$

para todos los valores

$$i = 1, \dots, n_{T3}, j = 1, \dots, n_{S3}, k = 1, \dots, n_{T4}, \ell = 1, \dots, n_{R4}, v = 1, \dots, n_{R9}.$$

De manera que la tupla ordenada de $\mathcal{W}$ tiene la forma

$$(a_0, a_{p_1}, a_{p_2}, 0, 0, a_{p_5}, a_{p_6}, a_{p_7}, a_{p_8}, 1, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{u' \text{ veces}}, 0, \dots, 0).$$

De lo cual se tiene que

$$a_{p_1} + a_{p_2} + a_{p_5} + a_{p_6} + a_{p_7} + a_{p_8} = 3a_0 - 2 - u' \quad \text{y} \quad a_{p_1}^2 + a_{p_2}^2 + a_{p_5}^2 + a_{p_6}^2 + a_{p_7}^2 + a_{p_8}^2 = a_0^2 - u'.$$

Por lo tanto, considerando el cambio de parámetros (4.3.15), obtenemos la ecuación

$$\alpha_{p_1} + \alpha_{p_2} + \alpha_{p_5} + \alpha_{p_6} + \alpha_{p_7} + \alpha_{p_8} + (2 + u') = 0$$

que implica la desigualdad

$$a_0^2 - \frac{3a_0^2}{2} + a_0(u' + 2) - u' \geq 0$$

acotando a a_0 por $a_0 \leq \frac{3u'+2}{2}$.

Y, por último tenemos el Caso XII. En el que escogemos $v \in \{1, \dots, n_{R9} - 1\}$ tal que $a_{p_9}^{R_{v'}} - a_{p_9}^{R_{v'+1}} = 1$ junto con las igualdades nulas (4.3.13). Se sigue que

$$a_{p_9} = a_{p_9}^{R_1} = a_{p_9}^{R_2} = \dots = a_{p_9}^{R_{v'}} = 1 \quad \text{y} \quad a_{p_9}^{R_{v'+1}} = a_{p_9}^{R_{v'+2}} = \dots = a_{p_9}^{R_{n_{R9}}} = 0.$$

Además

$$a_{p_3} = a_{p_4} = a_{p_3}^{T_i} = a_{p_3}^{S_j} = a_{p_4}^{T_k} = a_{p_4}^{R_\ell} = a_{p_9}^{S_u} = 0,$$

para todos los valores

$$i = 1, \dots, n_{T3}, j = 1, \dots, n_{S3}, k = 1, \dots, n_{T4}, \ell = 1, \dots, n_{R4}, u = 1, \dots, n_{S9}.$$

De modo que la tupla ordenada de $\mathcal{W}$ tiene la forma

$$(a_0, a_{p_1}, a_{p_2}, 0, 0, a_{p_5}, a_{p_6}, a_{p_7}, a_{p_8}, 1, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{u'-\text{veces}}, 0, \dots, 0).$$

A partir de lo cual se sigue que

$$a_{p_1} + a_{p_2} + a_{p_5} + a_{p_6} + a_{p_7} + a_{p_8} = 3a_0 - 2 - v' \quad \text{y} \quad a_{p_1}^2 + a_{p_2}^2 + a_{p_5}^2 + a_{p_6}^2 + a_{p_7}^2 + a_{p_8}^2 = a_0^2 - v'.$$

Por lo que, considerando el cambio de escalares (4.3.15), obtenemos la ecuación

$$\alpha_{p_1} + \alpha_{p_2} + \alpha_{p_5} + \alpha_{p_6} + \alpha_{p_7} + \alpha_{p_8} + (2 + v') = 0$$

que implica la desigualdad

$$a_0^2 - \frac{3a_0^2}{2} + a_0(v' + 2) - v' \geq 0$$

acotando a a_0 .

Así, en todos los casos, hallamos que a_0 está acotado y por lo tanto hemos de tener un número finito de (-1) -curvas en X .

4.4. Finitud del conjunto de las (-2) -curvas

Sea X una superficie proyectiva armónica asociada a una constelación armónica $\mathcal{C}$ correspondiente a la 6-tupla ordenada $(n_{T3}, n_{S3}, n_{T4}, n_{R4}, n_{S9}, n_{R9})$ y V una (-2) -curva de X , se sigue que la clase $\mathcal{V}$ de V en $\text{Pic}(X)$ está dada por una tupla ordenada de la forma

$$(a_0, a_{p_1}, a_{p_2}, \dots, a_{p_9}, \quad a_{p_3}^{T_1}, \dots, a_{p_3}^{T_{n_{T3}}}, a_{p_3}^{S_1}, \dots, a_{p_3}^{S_{n_{S3}}}, a_{p_4}^{T_1}, \dots, a_{p_4}^{T_{n_{T4}}}, \\ a_{p_4}^{R_1}, \dots, a_{p_4}^{R_{n_{R4}}}, a_{p_9}^{S_1}, \dots, a_{p_9}^{S_{n_{S9}}}, a_{p_9}^{R_1}, \dots, a_{p_9}^{R_{n_{R9}}}),$$

con entradas enteras. Por lo tanto, el Corolario 4.17 implica que

$$\sum_{t=1}^9 a_{p_t} + \sum_{i=1}^{n_{T3}} (a_{p_3}^{T_i})^2 + \sum_{j=1}^{n_{S3}} (a_{p_3}^{S_j})^2 + \sum_{k=1}^{n_{T4}} (a_{p_4}^{T_k})^2 + \sum_{\ell=1}^{n_{R4}} (a_{p_4}^{R_\ell})^2 + \sum_{u=1}^{n_{S9}} (a_{p_9}^{S_u})^2 + \sum_{v=1}^{n_{R9}} (a_{p_9}^{R_v})^2 = a_0^2 + 2$$

y

$$\sum_{t=1}^9 a_{p_t} + \sum_{i=1}^{n_{T3}} a_{p_3}^{T_i} + \sum_{j=1}^{n_{S3}} a_{p_3}^{S_j} + \sum_{k=1}^{n_{T4}} a_{p_4}^{T_k} + \sum_{\ell=1}^{n_{R4}} a_{p_4}^{R_\ell} + \sum_{u=1}^{n_{S9}} a_{p_9}^{S_u} + \sum_{v=1}^{n_{R9}} a_{p_9}^{R_v} = 3a_0.$$

De la misma manera que probamos, en la sección anterior, que solo hay un número finito de (-2) -curvas en X probaremos que el entero $\mathcal{V}\mathcal{E}_0$ es acotado.

Por el momento, supongamos que $a_0 = 0$, situación que sucede cuando V es una curva *vertical* (Definición 4.18), resolviendo el sistema de ecuaciones anterior obtenemos el:

Lema 4.24. *Con las notaciones previas. La lista de las clases en $\text{Pic}(X)$ de las (-2) -curvas verticales de X es:*

1. $\emptyset$ si $n_{T3}, n_{S3}, n_{T4}, n_{R4}, n_{S9}, n_{R9} \in \{0, 1\}$,
2. $(\mathcal{E}_{p_3}^{T_i} - \mathcal{E}_{p_3}^{T_{i+1}})$ para todo $i = 1, \dots, (n_{T3} - 1)$, si $n_{T3} \geq 2$,
3. $(\mathcal{E}_{p_3}^{S_j} - \mathcal{E}_{p_3}^{S_{j+1}})$ para todo $j = 1, \dots, (n_{S3} - 1)$, si $n_{S3} \geq 2$,
4. $(\mathcal{E}_{p_4}^{T_k} - \mathcal{E}_{p_4}^{T_{k+1}})$ para todo $k = 1, \dots, (n_{T4} - 1)$, si $n_{T4} \geq 2$,
5. $(\mathcal{E}_{p_4}^{R_\ell} - \mathcal{E}_{p_4}^{R_{\ell+1}})$ para todo $\ell = 1, \dots, (n_{R4} - 1)$, si $n_{R4} \geq 2$,
6. $(\mathcal{E}_{p_9}^{S_u} - \mathcal{E}_{p_9}^{S_{u+1}})$ para todo $u = 1, \dots, (n_{S9} - 1)$, si $n_{S9} \geq 2$,
7. $(\mathcal{E}_{p_9}^{R_v} - \mathcal{E}_{p_9}^{R_{v+1}})$ para todo $v = 1, \dots, (n_{R9} - 1)$, si $n_{R9} \geq 2$.

Demostración. Evidentemente, cada una de las clases enlistadas es la clase de una (-2) -curva vertical de X en $\text{Pic}(X)$. Por otro lado, si V es una (-2) -curva vertical, entonces la solución al sistema de ecuaciones

$$\sum_{t=1}^9 a_{p_t} + \sum_{i=1}^{n_{T3}} (a_{p_3}^{T_i})^2 + \sum_{j=1}^{n_{S3}} (a_{p_3}^{S_j})^2 + \sum_{k=1}^{n_{T4}} (a_{p_4}^{T_k})^2 + \sum_{\ell=1}^{n_{R4}} (a_{p_4}^{R_\ell})^2 + \sum_{u=1}^{n_{S9}} (a_{p_9}^{S_u})^2 + \sum_{v=1}^{n_{R9}} (a_{p_9}^{R_v})^2 = 2$$

y

$$\sum_{t=1}^9 a_{p_t} + \sum_{i=1}^{n_{T3}} a_{p_3^{T_i}} + \sum_{j=1}^{n_{S3}} a_{p_3^{S_j}} + \sum_{k=1}^{n_{T4}} a_{p_4^{T_k}} + \sum_{\ell=1}^{n_{R4}} a_{p_4^{R_\ell}} + \sum_{u=1}^{n_{S9}} a_{p_9^{S_u}} + \sum_{v=1}^{n_{R9}} a_{p_9^{R_v}} = 0.$$

implica que existen índices α y β en $\mathcal{C}$ tales que $\mathcal{V}$ es de la forma $\mathcal{E}_\alpha - \mathcal{E}_\beta$. Por tanto, las posibilidades para $\mathcal{V}$ se reducen a las enlistadas en el enunciado. $\square$

Como consecuencia directa del Lema 4.24 se tiene el:

Corolario 4.25. *Con las notaciones anteriores. Si $\mathfrak{V}_{(-2)}$ denota el conjunto de las clases de las (-2) -curvas verticales de X , entonces $\mathfrak{V}_{(-2)}$ es un conjunto finito y su cardinalidad $|\mathfrak{V}_{(-2)}|$ satisface la desigualdad $|\mathfrak{V}_{(-2)}| + 6 \leq gr(\mathcal{C})$.*

Por otro lado, suponiendo que $\mathcal{V} \cdot \mathcal{E}_0 = 1$, obtenemos el siguiente:

Lema 4.26. *Con las notaciones anteriores. Sea $\mathfrak{U}$ el conjunto de las clases $\mathcal{V}$ de (-2) -curvas V de X tales que $\mathcal{V} \cdot \mathcal{E}_0 = 1$. Se sigue que $\mathfrak{U}$ es igual al conjunto*

$$\{\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_{p_1} - \mathcal{E}_{p_7} - \mathcal{E}_{p_8}, \mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_{p_2} - \mathcal{E}_{p_6} - \mathcal{E}_{p_8}, \mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_{p_4} - \mathcal{E}_{p_5} - \mathcal{E}_{p_6}\}.$$

Demostración. Claramente cada elemento del conjunto en cuestión es la clase en $\text{Pic}(X)$ de una (-2) -curva de X y la primer entrada de la tupla ordenada que la define es igual a 1, es decir, un elemento de Λ . Por otro lado, si $\mathcal{V}$ es la clase de una (-2) -curva V de X , entonces las ecuaciones $\mathcal{V}^2 = -2$, $\mathcal{V} \cdot \mathcal{K}_X = 0$ y $\mathcal{V} \cdot \mathcal{E}_0 = 1$, implican la existencia de α, β y $\gamma \in \mathcal{C}$ tales que $a_\alpha = a_\beta = a_\gamma = 1$ y $a_\delta = 0$ para todo $\delta \in \mathcal{C} \setminus \{\alpha, \beta, \gamma\}$. De modo que la clase $\mathcal{V}$ de V es de la forma $\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_\alpha - \mathcal{E}_\beta - \mathcal{E}_\gamma$. Por consiguiente, en vista de la configuración armónica que establece los orígenes de $\mathcal{C}$ las posibilidades se reducen a las clases consideradas en el conjunto explícito del enunciado. $\square$

Enseguida, probemos que en general el conjunto de las (-2) -curvas de una superficie proyectiva armónica X es finito. Sea V una (-2) -curva de X cuya clase $\mathcal{V}$ en $\text{Pic}(X)$ esté dada por una tupla ordenada de la forma

$$(a_0, a_{p_1}, a_{p_2}, \dots, a_{p_9}, a_{p_3^{T_1}}, \dots, a_{p_3^{T_{n_{T3}}}}, a_{p_3^{S_1}}, \dots, a_{p_3^{S_{n_{S3}}}}, a_{p_4^{T_1}}, \dots, a_{p_4^{T_{n_{T4}}}}, a_{p_4^{R_1}}, \dots, a_{p_4^{R_{n_{R4}}}}, a_{p_9^{S_1}}, \dots, a_{p_9^{S_{n_{S9}}}}, a_{p_9^{R_1}}, \dots, a_{p_9^{R_{n_{R9}}}}).$$

Adicionalmente, supongamos que $\mathcal{V} \notin \mathfrak{V}_{(-2)}$. Luego, la ecuación $(-\mathcal{K}_X) \cdot \mathcal{V} = 0$ en conformidad con la Proposición 4.12 implican que:

$$\begin{aligned}
a_{p_3}^{T_i} &= a_{p_3}^{S_j} = 0 \text{ para todo } i = 1, \dots, n_{T3} \text{ y } j = 1, \dots, n_{S3}, \\
a_{p_4}^{T_k} &= a_{p_4}^{R_\ell} = 0 \text{ para todo } k = 1, \dots, n_{T4} \text{ y } \ell = 1, \dots, n_{R4}, \\
a_{p_9}^{T_u} &= a_{p_9}^{R_v} = 0 \text{ para todo } u = 1, \dots, n_{T9} \text{ y } v = 1, \dots, n_{R9},
\end{aligned}$$

de modo que también se cumple $a_{p_3} = a_{p_4} = a_{p_9} = 0$, junto con:

$$a_0 - a_{p_1} - a_{p_2} = 0, \quad a_0 - a_{p_6} - a_{p_7} = 0 \quad \text{y} \quad a_0 - a_{p_5} - a_{p_8} = 0.$$

Igualdades y ecuaciones a partir de las cuales es inmediato concluir: que la tupla correspondiente a $\mathcal{V}$ se reduce a $(a_0, a_{p_1}, a_{p_2}, 0, 0, a_{p_5}, a_{p_6}, a_{p_7}, a_{p_8}, 0, 0, \dots, 0)$ y que las ecuaciones diofánticas $(-\mathcal{K}_X) \cdot \mathcal{V} = 0$ y $\mathcal{V}^2 = -2$ se simplifican en

$$a_{p_1} + a_{p_2} + a_{p_5} + a_{p_6} + a_{p_7} + a_{p_8} = 3a_0 \quad \text{y} \quad a_{p_1}^2 + a_{p_2}^2 + a_{p_5}^2 + a_{p_6}^2 + a_{p_7}^2 + a_{p_8}^2 = a_0^2 + 2.$$

Por consiguiente, si introducimos la familia de escalares $(\alpha_\delta)_{\delta \in \{p_1, p_2, p_5, p_6, p_7, p_8\}}$ definida por $\alpha_\delta = a_\delta - \frac{a_0}{2}$, para todo $\delta \in \{p_1, p_2, p_5, p_6, p_7, p_8\}$, entonces la suma de dichos escalares $\alpha_{p_1} + \alpha_{p_2} + \alpha_{p_5} + \alpha_{p_6} + \alpha_{p_7} + \alpha_{p_8}$ es igual a cero y por consiguiente la suma de sus cuadrados $\alpha_{p_1}^2 + \alpha_{p_2}^2 + \alpha_{p_5}^2 + \alpha_{p_6}^2 + \alpha_{p_7}^2 + \alpha_{p_8}^2$ es $a_0^2 + 2 - \left(\frac{3}{2}\right)a_0^2$. De modo que $-\left(\frac{a_0^2}{2}\right) + 2 \geq 0$ probando así que a_0 está acotada.

Por lo tanto tenemos el siguiente:

Teorema 4.27. *El monoide efectivo de una superficie proyectiva armónica es finitamente generado.*

4.5. Aplicaciones a los Anillos de Cox

Recientemente (ver [15, Teorema 1, pág. 2]) se ha demostrado la equivalencia que existe entre la generación finita de $M(Z)$ y $\text{Cox}(Z)$ de superficies proyectivas racionales anticanónicas Z definidas sobre cualquier campo algebraicamente cerrado de característica arbitraria. Así, se obtiene el siguiente resultado.

Corolario 4.28. *El anillo de Cox de una superficie proyectiva armónica X es finitamente generado.*

Cabe mencionar que Damiano Testa et. al. (ver [65, Ejemplo 1, Inciso (e)]) han considerado una cierta configuración de r ($r \leq 13$) puntos propios del plano proyectivo subyacentes en una cúbica degenerada constituida por tres líneas distintas y han demostrado que la superficie X obtenida como explosión de $\mathbb{P}_k^2$ en esos r puntos tiene anillo de Cox finitamente generado, la hipótesis principal bajo la cual obtienen este resultado es suponer que un divisor

anticanónico de esta superficie es muy grande, i.e. tal que $\dim \varphi_{|-nK_X|}(X) = 2$ para n suficientemente grande, siendo $\varphi_{|-nK_X|} : X \rightarrow \mathbb{P}^N$ el mapeo racional asociado al sistema lineal $|-mK_X|$ y $\varphi_{|-mK_X|}(X)$ la imagen de $\varphi_{|-mK_X|}$. A diferencia de ellos, en mi trabajo considero tanto puntos propios como infinitamente cercanos a $\mathbb{P}_k^2$ y resto importancia a los casos $|\mathcal{C}| = 9$ considerando constelaciones armónicas cuyos grados $gr(\mathcal{C})$ satisfacen $gr(\mathcal{C}) > 0$.

4.6. Solución al Problema de los Sistemas lineales Completos

En esta sección daremos una respuesta definitiva al problema de D. Mumford [59, pág. 4] de los sistemas lineales completos cuando las superficies son armónicas. Problema que como mencionamos en la introducción, consiste en determinar explícitamente o al menos estimar el valor de la dimensión de cualquier sistema lineal completo de divisores sobre una superficie proyectiva racional no singular dada. La siguiente proposición muestra que siempre podemos calcular la dimensión de las secciones globales de cualquier divisor numéricamente efectivo sobre cualquier superficie proyectiva armónica, ver Corolario 4.30.

Proposición 4.29. *Sea X una superficie proyectiva armónica. El primer grupo de cohomología de cualquier divisor numéricamente efectivo sobre X es trivial.*

Demostración. Sea D un divisor numéricamente efectivo sobre X , como X es anticánónica se sigue $D \cdot (-K_X) \geq 0$. Si $D \cdot (-K_X) > 0$, entonces $h^1(X, \mathcal{O}_X(D)) = 0$, ver [34, Teorema III.1]. Ahora bien, si $D \cdot K_X = 0$, resulta que también $h^1(X, \mathcal{O}_X(D)) = 0$. En efecto, se tiene que $D = 0$ y por lo tanto $h^1(X, \mathcal{O}_X(D)) = h^1(X, \mathcal{O}_X) = q(X) = 0$. $\square$

Corolario 4.30. *Sea D un divisor numéricamente efectivo sobre una superficie proyectiva armónica, se tiene que $h^0(X, \mathcal{O}_X(D)) = 1 + \frac{1}{2}(D^2 - D \cdot K_X)$, donde K_X es un divisor canónico de X .*

Demostración. Se sigue de la Proposición 4.29 y del Teorema de Riemann-Roch 2.10. $\square$

Así, obtenemos el siguiente resultado:

Teorema 4.31. *Sea D un divisor sobre una superficie proyectiva armónica X , se tiene que la dimensión sobre k del espacio vectorial de las secciones globales de $\mathcal{O}_X(D)$ es menor que 2 o igual a $1 + \frac{1}{2}(M^2 - M \cdot K_X)$, donde M es la parte no fija del sistema lineal completo $|D|$ y K_X es un divisor canónico de X .*

Demostración. Podemos suponer que $h^0(X, \mathcal{O}_X(D)) \geq 2$. Así, consideremos la parte no fija de $|D|$ que denotaremos por M , por lo tanto M es nef. Esto implica utilizando el Corolario 4.30 que $h^0(X, \mathcal{O}_X(D)) = h^0(X, \mathcal{O}_X(M)) = 1 + \frac{1}{2}(M^2 - M.K_X)$. $\square$

Bibliografía

- [1] Atiyah, M. F. and Macdonald, I. G., Introduction to Commutative Algebra, Addison-Wesley Pub. Co. (1969). ISBN 0-201-00361-9.
- [2] Bădescu, L., Algebraic Surfaces, Universitext, Springer-Verlag, New York, 2001, ISBN 0-387-98668-5.
- [3] Beauville, A., Complex Algebraic Surfaces, Second Edition, Cambridge University Press, (1996). ISBN 0-521-49510-5.
- [4] Bollobás, B. Modern Graph Theory, Springer GTM 184 (1998). ISBN 0387984887.
- [5] Buekenhout F., Handbook of Incidence Geometry: buildings and foundations, Elsevier, Amsterdam 1995, ISBN 0 444 88355 X.
- [6] Campillo, A., González-Sprinberg G. On characteristic cones, clusters and chains of infinitely near points. In Brieskorn Conference Volume, in Progr. Math., vol 162, Birkhäuser 1998.
- [7] Campillo, A., Piltant, O., Reguera, A. Curves and divisors on surfaces associated to plane curves with one place at infinity. Proc. London Math. Society 84(3), 559-580 (2002).
- [8] Campillo, A., Piltant, O., Reguera, A. Cones of curves and of line bundles at infinity. Journal of Algebra. 293, 503-542 (2005).
- [9] Campillo, A., González-Sprinberg G., Monserrat, F. Configurations of infinitely near points. Sao Paulo J. Math. Sci. 3, 1, 2009, 115-160.
- [10] Cerda Rodríguez, J. A., De La Rosa Navarro, B. L. Complete Linear Systems on Rational Surfaces, Int. J. Contemp. Math. Sciences, Vol. 4, 2009, no. 25, 1215 - 1218.
- [11] Cerda Rodríguez J. A., De La Rosa Navarro B. L., Lahyane M., Una Introducción Suave a la Teoría de Gavillas. Prepublicación (2011)
- [12] Cerda Rodríguez J. A., Failla G., Lahyane M., Osuna-Castro, O. Fixed Loci of the Anticanonical Complete Linear Systems of Anticanonical Rational Surfaces, (2012) Prepublicación arXiv:1201.4881v1 [math.AG].
- [13] Ciliberto, C., Miranda, R. Linear systems of plane curves with base points of equal multiplicity, Transactions of the American Mathematical Society 352 (2000) 4037-4050.
- [14] Coxeter H. S. M., Projective Geometry, 2n ed. Springer-Verlag, New York, 1987, ISBN 0-387-96532-7.
- [15] De La Rosa Navarro, B., Lahyane, M., Moreno-Mejía, I. Osuna-Castro, O. A geometric criterion for the finite generation of the Cox ring of projective surfaces. (2012) prepublicación arXiv:1201.3694v1 [math.AG].
- [16] Failla, G., Lahyane, M., Molica Bisci, G. On the finite generation of the monoid of effective divisor classes on rational surfaces of type (n, m) , Atti dell' Accademia Peloritana dei Pericolanti Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali Vol. LXXXIV, C1A0601001 (2005) Adunanza del 28 novembre 2005, 1-9.

- [17] Fitchett, S., Harbourne, B., Holay, S. Resolutions of fat point ideals involving eight general points of $\mathbb{P}^2$, *Journal of Algebra* 244 (2001) 684-705.
- [18] Galindo, C., Monserrat, F. The cone of curves of line bundles of a rational surface. *International Journal of Mathematics* 4 (15), 393-407 (2004).
- [19] Galindo, C., Monserrat, F. The cone of curves associated to a plane configuration. *Comment. Math. Helvetici* 80, 75-93. (2005).
- [20] Geramita, A. V., Migliore, J., Sabourin, L. On the first infinitesimal neighborhood of a linear configuration of points in $\mathbb{P}^2$, *Journal of Algebra* 298 (2006), 563-611.
- [21] Geramita, A. V., Harbourne, B., Migliore, J. Classifying Hilbert functions of fat point subschemes in $\mathbb{P}^2$, *Collectanea Mathematica* 60 (2) (2009) 159-192.
- [22] Gimigliano, A., On linear systems of plane curves, Ph.D. Thesis, Queen's University, Kingston, 1987.
- [23] Gimigliano, A. Our thin knowledge of fat points, in: *Curves Seminar at Queen's VI*, in: *Queen's Papers in Pure and Applied Mathematics*, vol. 83, 1989.
- [24] Gimigliano, A. Regularity of linear systems of plane curves, *Journal of Algebra* 124 (1989), 447-460.
- [25] Gruenberg, K. W., Weir, A. J. *Linear Geometry* 2nd Ed. Graduate Texts in Mathematics. 49. Springer-Verlag, New York (1977).
- [26] Guardo, E., Harbourne, B. Resolutions of ideals of any six fat points in $\mathbb{P}^2$, *Journal of Algebra* 318 (2007), 619-640.
- [27] Guardo, E., Harbourne, B. Configuration types and cubic surfaces, *Journal of Algebra* 320 (2008) 3519-3533.
- [28] Harbourne, B. Blowings-up of $\mathbb{P}^2$ and their blowings-down, *Duke Mathematical Journal* 52 (1) (1985) 129-148.
- [29] Harbourne, B. Complete linear systems on rational surfaces, *Transactions of the American Mathematical Society* 289 (1) (1985) 231-226.
- [30] Harbourne, B. The geometry of rational surfaces and Hilbert functions of points in the plane, in: *Proceedings of the 1984 Vancouver Conference in Algebraic Geometry*, 95-111, CMS Conference Proceedings, 6, American Mathematical Society, Providence, RI, 1986.
- [31] Harbourne, B., Miranda, R. Exceptional curves on rational numerically elliptic surfaces, *Journal of Algebra* 128 (1990) 405-433.
- [32] Harbourne, B. Points in good position in $\mathbb{P}^2$, Zero-dimensional schemes, in: *Proceedings of the International Conference held in Ravello, Italy, June 8-13, 1992*, De Gruyter, Berlin, 1994.
- [33] Harbourne, B. Rational surfaces with $K^2 > 0$, *Proceedings of the American Mathematical Society* 124 (3) (1996).
- [34] Harbourne, B. Anticanonical Rational Surfaces. *Transactions of the American Mathematical Society*, 349, (1997), páginas 1191-1208.
- [35] Harbourne, B. Free resolutions of fat point ideals on $\mathbb{P}^2$, *Journal of Pure and Applied Algebra* 125 (1998) 213-234.
- [36] Harbourne, B. The ideal generation problem for fat points, *Journal of Pure and Applied Algebra* 145 (2000) 165-182.
- [37] Harbourne, B., Roé, J. Linear systems with multiple base points in $\mathbb{P}^2$, *Advances in Geometry* 4 (2004) 41-59.

- [38] Harbourne, B. Global aspects of the geometry of surfaces, (2009) prepublicación arXiv:0907.4151v2 [math.AG].
- [39] Hartshorne, R., Algebraic Geometry, Springer-Verlag, New York (1977). ISBN 0-387-90244-9.
- [40] Hirschowitz, A. La méthode d'Horace pour l'interpolation à plusieurs variables, *Manuscripta Mathematica* 50 (1985) 337-388.
- [41] Hirschowitz, A. Une conjecture pour la cohomologie des diviseurs sur les surfaces rationnelles génériques, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 397 (1989) 208-213.
- [42] Itaka, S. Algebraic Geometry, Graduate Texts in Mathematics, No. 76, Springer (1982).
- [43] Jürgen, R. G. Perspectives on Projective Geometry, A Guided Tour Through Real and Complex Geometry. Springer-Verlag Berlin (2011). ISBN 978-3-642-17285-4.
- [44] Kaplansky, I. Linear Algebra and Geometry, A Second Course. Chelsea Publishing Company (1969). 2nd Ed. ISBN 0-8284-0279-5.
- [45] Kleiman, S. Toward a numerical Theory of Ampleness, *Annals of Math.* 84, (1966). pág 293-344.
- [46] Lahyane, M. Exceptional curves on rational surfaces having $K^2 \geq 0$, *Comptes Rendus Académie des Sciences. Paris, Ser. I* 338 (2004) 873-878.
- [47] Lahyane, M. Rational surfaces having only a finite number of exceptional curves, *Mathematische Zeitschrift* 247 (1) (2004) 213-221.
- [48] Lahyane, M. Exceptional curves on smooth rational surfaces with $-K$ not nef and of self-intersection zero, *Proceedings of the American Mathematical Society* 133 (6) (2005) 1593-1599.
- [49] Lahyane, M. Irreducibility of the (-1) -classes on smooth rational surfaces, *Proceedings of the American Mathematical Society* 133 (2005) 2219-2224.
- [50] Lahyane, M., Harbourne, B., Irreducibility of -1 -classes on anticanonical rational surfaces and finite generation of the effective monoid. *Pacific Journal of Mathematics*, 218, (1), (2005) páginas 101-114.
- [51] Lahyane, M., Failla, G., Moreno-Mejía, I. On the vanishing of cohomology of divisors on nonsingular rational surfaces, *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences* 3 (2008) 1031-1040.
- [52] Lahyane, M., On the finite generation of the effective monoid of rational surfaces. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 214 (2010) páginas 1217-1240.
- [53] Lang, S., Néron, A. Rational Points of abelian varieties over function fields. *Amer. J. Math.* (1959), páginas 95-118.
- [54] Looijenga, E. Rational surfaces with an anticanonical cycle, *Annals of Mathematics* (2) 114 (2) (1981) 267-322.
- [55] Miranda, R., Persson, U. On extremal rational elliptic surfaces, *Mathematische Zeitschrift* 193 (1986) 537-558.
- [56] Miyanishi, M. Algebraic Geometry, Translations of Mathematical Monographs, Vol 136, American Mathematical Society, (1990). ISBN 0-8218-4615-9.
- [57] Monserrat, F. J. El cono de curvas asociado a una superficie racional, Poliedricidad. Ph. D. Tesis (2003)
- [58] Mori, S. Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective, *Annals of Mathematics* (2) 116 (1) (1982) 133-176.
- [59] Mumford, D. Lectures on curves on an Algebraic Surface, *Annals of Math. Studies* 59, Princeton U. Press, Princeton (1966).

- [60] Nagata, M. On rational surfaces, II, Memoirs of the College of Science, University of Kyoto, Series A 33 (2) (1960) 271-293.
- [61] Rosoff, J. Effective divisor classes and blowings-up of $\mathbb{P}^2$, Pacific Journal of Mathematics 89 (2) (1980) 419-429.
- [62] Roé, J. On the existence of plane curves with imposed multiple points, Journal of Pure and Applied Algebra 156 (2001) 115-126.
- [63] Roé, J. Linear systems of plane curves with imposed multiple points, Illinois Journal of Mathematics 45 (3) (2001) 895-906.
- [64] Semple J. G., Kneebone G. T., Algebraic Projective Geometry, Oxford University Press, New York 1952. ISBN 0-19-8503636.
- [65] Testa, D., Várilly-Alvarado, A., Velasco, M. Big rational surfaces; Mathematische Annalen, 351 (2011) 95-107.
- [66] Ueno, K. Algebraic Geometry 1 From Algebraic Varieties to Schemes, American Mathematical Society, (1999). ISBN 0-8218-0862-1.
- [67] Ueno, K. Algebraic Geometry 2 Sheaves and Cohomology, American Mathematical Society, (2001). ISBN 0-8218-1357-9.

Índice alfabético

- $(-n)$ -curva, 90
- D -Constelación, 82
- $\mathcal{O}_X$ -módulo 6
 - Libre, 36
 - Libre de Rango Finito, 36
 - Localmente Libre, 37
 - Localmente Libre de Rango n , 37
 - Localmente Libre de Rango Finito, 37
- Árbol, 80
- Arista, 80
- Bicadena, 82
- Bosque, 80
- Cadena, 82
- camino, 80
- Campo de Funciones de X , 48
- Característica
 - de Euler, 53
 - Genérica con respecto a, 70
- Cielo de una Constelación, 83
- Clase
 - Canónica, 53
 - Efectiva en $\text{NS}(X)$, 58
 - Numéricamente efectiva en $\text{NS}(X)$, 58
- Colineación de $\mathbb{P}_k^n$, 65
- Componente, 80
- Configuración Armónica, 73
- Constelación, 82
 - Armónica, 84
- Criterio de Castelnuovo, 54
- Curva, 53
- Entera, 58
- Vertical, 90
- Diagrama Decorado de Enriques, 82
- Divisor
 - Amplio, 57
 - Canónico, 52
 - de Cartier, 46
 - de Weil, 49
 - Efectivo, 49
 - Excepcional, 59
 - Numéricamente Efectivo, 58
 - Primo, 48
 - Principal de Cartier, 46
 - Principal de Weil, 49
 - Reducido, 49
- Dual de un $\mathcal{O}_X$ -módulo, 32
- Dualidad de Serre, 54
- Equivalencia
 - Algebraica, 57
 - Birracional, 53
 - Lineal, 47
 - Numérica, 57
- Explosión
 - en un punto, 59
 - en un Subesquema, 59
- Fórmula de Adjunción, 56
- Familia Genéricamente Estándar, 77
- Género
 - Aritmético, 53

- Geométrico, [53](#)
- Gavilla
 - $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ de $\mathcal{O}_Z$ -módulos, [23](#)
 - $\tilde{M}$ de $\mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}$ -módulos, [2](#), [6](#)
 - Canónica, [52](#)
 - de Cocientes Totales de X , [46](#)
 - de Diferenciales de Kähler, [52](#)
 - de Ideales
 - Imagen Inversa, [59](#)
 - Imagen Inversa, [59](#)
 - Invertible, [40](#)
 - Producto Tensorial de $\mathcal{O}_X$ -módulos, [19](#)
 - Suma Directa de $\mathcal{O}_X$ -módulos, [19](#)
 - Torcida de Serre, [55](#)
- Grado
 - de un Divisor de Weil, [49](#)
 - de una Constelación, [85](#)
- Grafo, [80](#)
- Grupo
 - de las Clases de Weil, [49](#)
 - de Nerón-Severi, [57](#)
 - de Picard, $\text{Pic}(X)$, [43](#)
- Homografía
 - de $\mathbb{P}_k^2$, [64](#)
- Irregularidad, [54](#)
- Isomorfismo de $\mathcal{O}_X$ -módulos, [17](#)
- Monoide Efectivo $M(X)$, [57](#)
- Multiplicación Escalar, [6](#), [e](#)
- Número
 - de Autointersección, [54](#)
 - de Intersección, [54](#)
 - de Picard, [57](#)
- Posición Armónica, [69](#)
- Pregavilla Restricción, [17](#)
- Proyección Persectiva, [66](#)
- Puntos
 - Armónicos, [69](#)
 - Infinitamente Cercanos a X , [81](#)
- Propios, [81](#)
- Razón Cruzada, [65](#)
- Segundo Plurigénero, [53](#)
- Subgrafo, [80](#)
- Superabundancia, [56](#)
- Superficie, [53](#)
 - Proyectiva Armónica, [86](#)
 - Racional, [53](#)
- Teorema
 - de Anulación de Grothendieck, [53](#)
 - de Bézout, [55](#)
 - de Bertini, [55](#)
 - de Riemann-Roch, [56](#)
 - del índice de Hodge, [56](#)
- Transformado
 - Estricto, [60](#)
 - Total, [59](#)
- Vértice, [80](#)
- Variedad no singular, [52](#)