



---

UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN  
NICOLÁS DE HIDALGO

INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

MEMBRANAS GRUESAS GENERADAS POR UN  
CAMPO ESCALAR NO MÍNIMAMENTE ACOPLADO  
A LA GRAVEDAD Y EL TÉRMINO DE  
GAUSS-BONNET

TESIS PARA OBTENER EL GRADO DE:

DOCTOR EN CIENCIAS EN EL ÁREA DE FÍSICA

PRESENTA

DAGOBERTO MALAGÓN MOREJÓN

ASESOR

DR. ALFREDO HERRERA AGUILAR

COASESOR

DR. ULISES NUCAMENDI GÓMEZ

MORELIA, MICHOACÁN, JULIO DE 2012

---



*A mis padres, Dagoberto y Magdalena y a mi esposa Dianet*

# Agradecimientos

Un inmenso agradecimiento a mis padres y a mi esposa por la comprensión y confianza que siempre me han brindado.

Un agradecimiento especial a mis asesores, Dr. Alfredo Herrera Aguilar y Dr. Ulises Nucamendi Gómez, por el gran apoyo recibido a lo largo del doctorado.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) y a la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo (UMSNH) por haberme brindado una beca de tesista.

Agradezco a todo el personal docente y administrativo del Instituto de Física y Matemáticas perteneciente a la UMSNH.

## Resumen

Consideramos una membrana gruesa constituida por un campo escalar no mínimamente acoplado a la gravedad y el término de Gauss–Bonnet en el bulto. Se calcula la masa de Planck efectiva y las condiciones de regularidad del espacio–tiempo para una clase de geometrías deformadas que poseen invarianza de Poincaré en cuatro dimensiones. Se estudian las propiedades de localización para los modos tensoriales, escalares y vectoriales asociados a las fluctuaciones de la geometría y la materia de fondo cuando la masa de Planck cuatridimensional es finita y el espacio-tiempo no posee singularidades. En el caso en el que están presentes los efectos del acoplamiento no mínimo y/o el término de Gauss–Bonnet, se muestra que si la masa de Planck es finita, el gravitón no masivo se localiza sobre la membrana. En contraste, para una membrana ancha que contemple el acoplamiento no mínimo o el término de Gauss–Bonnet se obtiene que los modos cero correspondientes a las fluctuaciones escalares y vectoriales se deslocalizan de esta. Para una métrica asintóticamente  $AdS_5$  se encuentran varias soluciones para las ecuaciones que describen el comportamiento de la materia del fondo gravitatorio. Para ello se emplea el método de perturbaciones singulares con capas de frontera cuyo parámetro pequeño caracteriza la intensidad del acoplamiento no mínimo. El análisis de las fluctuaciones correspondiente a estas soluciones reproduce de manera explícita los resultados generales mencionados con anterioridad; nuevamente existe un gravitón no masivo localizado, mientras que los modos sin masa asociados a los sectores escalar y vectorial se desacoplan de la membrana.

# Índice general

0.1. Convenio . . . . .	III
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Ideas iniciales sobre las dimensiones extra . . . . .	1
1.2. Cuerdas y D-branas . . . . .	5
1.3. Mundos membrana . . . . .	7
1.3.1. El problema de la jerarquía . . . . .	8
1.3.2. Mecanismo ADD . . . . .	9
1.4. Dimensiones extra deformadas . . . . .	17
1.4.1. Modelo RS-1 . . . . .	18
1.4.2. Modelo RS-2 . . . . .	24
1.5. Membranas gruesas . . . . .	28
1.5.1. Acoplamiento no mínimo entre la materia escalar y la gravedad . . . . .	31
1.5.2. Término de Gauss-Bonnet . . . . .	33
1.6. Descripción de la tesis . . . . .	35
<b>2. Física del fondo</b>	<b>38</b>
2.1. Ecuaciones de campo . . . . .	38

2.2. Masa de Planck cuatridimensional . . . . .	41
2.3. Regularidad de la geometría . . . . .	45
<b>3. Fluctuaciones gravitacionales: localización de la gravedad</b>	<b>47</b>
3.1. Ecuaciones generales de las fluctuaciones . . . . .	49
3.2. Variables invariantes de norma . . . . .	50
3.3. Localización de la gravedad . . . . .	56
3.3.1. Modos tensoriales . . . . .	56
3.3.2. Modos escalares . . . . .	59
3.3.3. Modos vectoriales . . . . .	67
<b>4. Soluciones aproximadas para las ecuaciones de campo</b>	<b>70</b>
4.1. Teoría de perturbaciones singulares: capa de frontera . . . . .	74
<b>5. Conclusiones</b>	<b>101</b>
<b>A. Cantidades geométricas útiles</b>	<b>107</b>
<b>B. Transformación conforme sobre el término de Gauss–Bonnet</b>	<b>109</b>
<b>C. Deducción de las ecuaciones para las fluctuaciones</b>	<b>112</b>
C.1. Fluctuaciones tensoriales . . . . .	113
C.2. Fluctuaciones escalares . . . . .	117
C.3. Fluctuaciones vectoriales . . . . .	121

## 0.1. Convenio

En esta tesis las coordenadas correspondientes a un espacio-tiempo de  $(4+n)$  dimensiones se denotan por  $X^N = \{x^\mu, w^n\}$ , donde  $N = 0, 1, \dots, 3+n$ . Los índices griegos caracterizan las coordenadas de nuestro universo cuatri-dimensional, esto es,  $\mu = 0, 1 \dots 3$  y los símbolos  $w^n$  definen las coordenadas del bulto. En el caso en el que solo exista una dimensión extra,  $n = 1$ , su coordenada asociada se denota por  $w$ . En cantidades que poseen subíndices y superíndices entre paréntesis, estos representarán la dimensionalidad de la variedad, por ejemplo,  $R^{(4+n)}$  es el escalar de Ricci en  $(4+n)$  dimensiones. Cuando no cause confusión, en el caso de cinco dimensiones tales etiquetas se omitirán.

En este trabajo, para un espacio tiempo plano usamos la métrica de Minkowski con la siguiente signatura

$$\eta_{AB} = \text{diag}(1, -1, \dots, -1).$$

Por otra parte, el operador de d'Alembert en  $(4+n)$  dimensiones se representa por  $\square^{(4+n)} = g^{CD} \nabla_C \nabla_D$ , donde  $g^{CD}$  es la métrica en  $(4+n)$  dimensiones y  $\nabla_C$  es su operador derivación asociado; en el caso de  $n = 1$ , simplemente se denota por  $\square$ ; asimismo, para el espacio tiempo de Minkowski en cuatro dimensiones, este se escribe como sigue  $\square^\eta$ . La simetrización y antisimetrización sobre un tensor  $V_{AB}$  dado se denota por  $V_{(AB)} = \frac{1}{2}(V_{AB} + V_{BA})$  y  $V_{[AB]} = \frac{1}{2}(V_{AB} - V_{BA})$ , respectivamente.

La constante  $M_P \sim \frac{1}{\sqrt{\kappa_4}}$  es la masa de Planck en cuatro dimensiones, mientras que  $M_* \sim \frac{1}{\kappa^{1/(n+2)}}$  define a la masa de Planck fundamental en  $(4+n)$  dimensiones. A lo largo de la tesis se utilizará el sistema natural de unidades, excepto en las secciones 3.3.2, 3.3.3 y en los apéndices C.2 y C.3, donde se hará uso del sistema de unidades de Planck.

Para finalizar esta sección, es oportuno mencionar que esta tesis se rige

por las normas de la nueva edición de la *Ortografía de la lengua española* (2010).

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Ideas iniciales sobre las dimensiones extra

La historia de las dimensiones extra en la física surge un poco antes del advenimiento de la Teoría General de la Relatividad. Alrededor del año 1914 Nordström trató de unificar la gravedad con el electromagnetismo agregando una nueva dimensión espacial a nuestro universo [1]. Motivado por la formulación de las ecuaciones de Maxwell en el marco de la Relatividad Especial, consideró una teoría puramente electromagnética en un espacio-tiempo de Minkowski de cinco dimensiones (5D), caracterizada por el 5-vector  $A^N = \{A^\mu, A^5\}$ . Al igual que en la gravedad newtoniana, su modelo mantiene el carácter escalar del campo gravitatorio, el cual identifica con la componente  $A^5$ .

Con este modelo, él fue capaz de recuperar la electrodinámica de Maxwell en cuatro dimensiones (4D) y obtener una generalización relativista de la ecuación de Poisson. Para lograr estas predicciones, Nordström impuso que las variables dinámicas de la teoría no dependieran de la coordenada extra,

condición que hace que los campos del modelo no se puedan propagar sobre la dimensión extra. La interpretación que él le atribuyó a este hecho es que es posible unificar la gravedad y el electromagnetismo si se considera que nuestro mundo de cuatro dimensiones es una hipersuperficie inmersa en un espacio-tiempo plano pentadimensional. En la terminología moderna, esta es la idea básica detrás del concepto de mundo membrana.

Posteriormente, con la formulación de Einstein sobre la Relatividad General y el correspondiente carácter tensorial del campo gravitatorio, las ideas de Nordström perdieron temporalmente el interés de la comunidad científica. No fue hasta 1921 cuando de manera independiente Kaluza [2] despertó nuevamente el interés por las teorías multidimensionales.

Al igual que Nordström su objetivo era unificar la gravedad con el electromagnetismo, solo que esta vez el enfoque era inverso. Su formulación se basaba en extender la Relatividad General a cinco dimensiones. Nuevamente, eliminando la dependencia con respecto a la quinta dimensión, la cual denominó “condición cilíndrica”, Kaluza mostró que su modelo contiene el electromagnetismo de Maxwell y la Relatividad General en cuatro dimensiones. El modelo también predice la existencia de un campo escalar no masivo, el cual es actualmente conocido como dilatón y juega un importante rol en la Teoría de Cuerdas.

La idea en su forma básica, fue completada de manera independiente en 1926 por Klein [3], quien introdujo las ideas de la recién creada Mecánica Cuántica a la teoría. Él mostró que la gravedad y el electromagnetismo se unifican en cinco dimensiones si la dimensión extra tiene topología circular, en otras palabras, se logra la unificación si la quinta coordenada es periódica. De esta manera, la condición cilíndrica no es estrictamente necesaria. La invarianza ante transformaciones de coordenadas de la teoría en cinco dimensiones combinada con la periodicidad de la coordenada extra, origina el electromagnetismo en 4D y su correspondiente grupo de simetría,  $U(1)$ . Lue-

go, el modelo de Kaluza y Klein sugiere una posible interpretación geométrica de la invarianza de norma.

Una vez lograda la unificación entre la gravedad y el electromagnetismo en el modelo de Kaluza y Klein, se descubre lo que se conoce como el mecanismo de Kaluza–Klein (KK). La idea principal de este mecanismo es obtener la física cuatridimensional y explicar la inobservabilidad de la dimensión extra cuando se estudian fenómenos cuyas longitudes características son mayores que el radio de compactificación. Debido a su importancia, estudiemos los rasgos generales de este mecanismo.

En la terminología moderna, el espacio–tiempo del modelo de Klein es descrito por una variedad  $M_{Klein} = M^4 \times S^1$  donde  $M^4$  es el espacio–tiempo de Minkowski en cuatro dimensiones y  $S^1$  es un círculo parametrizado por la coordenada angular  $0 \leq w \leq r$ , véase Fig. 1.1.

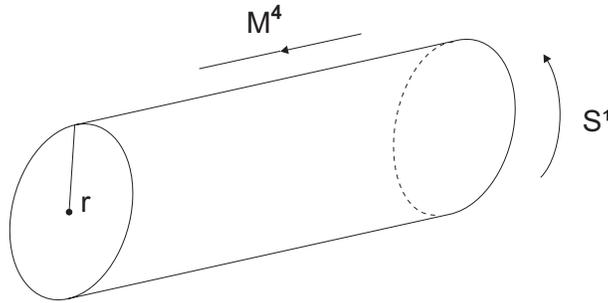


Figura 1.1: En el escenario de Kaluza–Klein la dimensión adicional se encuentra compactificada en un círculo de radio  $r$ .

Los campos de la teoría están definidos sobre el cilindro. Para un campo escalar real sin masa  $\Phi$  tenemos la siguiente acción

$$S = - \int dx^5 g^{AB} \nabla_A \Phi \nabla_B \Phi.$$

A consecuencia de la topología de la dimensión extra, se tiene que  $\Phi(x^\mu, w) =$

$\Phi(x^\mu, w + r)$ . Esto permite desarrollar el campo en series de Fourier. En este contexto, tal desarrollo es conocido como expansión en modos KK:

$$\Phi(x^\mu, w) \sim \sum_{k=0, \pm 1, \dots} \varphi^k(x^\mu) e^{\frac{i}{r} k \cdot w}. \quad (1.1)$$

Los coeficientes de la expansión  $\varphi^k(x^\mu)$  no dependen de la coordenada extra y comúnmente se les denomina modos KK. Como veremos en breve, el modo cero ( $k = 0$ ) juega un importante papel. La ecuación de onda para el campo  $\Phi$  toma la siguiente forma

$$\square^{(5)} \Phi = 0, \quad \text{donde} \quad \square^{(5)} = \eta^{AB} \partial_A \partial_B.$$

Sustituyendo la expansión (1.1) en la ecuación anterior podemos ver que cada modo satisface la ecuación de onda en cuatro dimensiones

$$\left( \square^\eta + \frac{k^2}{r^2} \right) \varphi^k(x^\mu) = 0, \quad k = 0, 1, \dots$$

Desde el punto de vista de un observador sobre la variedad  $M^4$ ,  $\Phi$  se percibe como un conjunto infinito de campos  $\varphi^k(x^\mu)$  que se propagan sobre el espacio-tiempo cuatridimensional, tal conjunto es conocido como torre KK.

El modo  $k = 0$  es el modo menos energético (modo sin masa). Las masas de los modos restantes son del orden de la escala de compactificación  $1/r$ . Si  $r$  es lo suficientemente pequeño, la energía que portan los modos KK masivos es muy grande y por tanto es difícil excitarlos. Consecuentemente, para energías menores que  $1/r$  (longitudes mayores que  $r$ ) únicamente se producen partículas KK sin masa y percibimos nuestro mundo como de cuatro dimensiones. Solamente cuando las energías toman valores del orden de  $1/r$  se producen modos KK masivos y se pueden detectar algunos efectos de la dimensión extra.

A pesar de su éxito inicial, el modelo de Kaluza–Klein no ofreció una explicación del por qué la dimensión adicional difiere marcadamente de las

demás. Tampoco había una interpretación clara sobre el grado de libertad escalar que surge en la métrica pentadimensional. Estos elementos, junto con el gran desarrollo que adquirió la teoría cuántica en esos tiempos, hicieron que temporalmente se perdiera el interés por la teoría de Kaluza–Klein.

Tras un largo período de hibernación, la teoría de Kaluza–Klein resurge, esta vez generalizada a más de cinco dimensiones. En 1964, DeWitt [4] sugiere que es posible unificar el campo de Yang–Mills con la gravedad en el contexto de teorías de Kaluza–Klein extendidas a dimensiones superiores. La idea fue elaborada por Kerner [5] en 1968, quien aportó la métrica multidimensional, mientras que en 1975 Cho y Freund [6, 7] obtuvieron la gravedad en 4D, el campo de Yang–Mills y un campo escalar, partiendo de un modelo con covarianza general y dimensiones extra compactas. Posteriormente versiones más sofisticadas de la teoría de Kaluza–Klein surgieron en el ámbito de la Teoría de Cuerdas.

## 1.2. Cuerdas y D–branas

Un gran interés en los modelos multidimensionales surge en 1984 cuando ocurre lo que posteriormente se denominó, primera revolución de la Teoría de Cuerdas. En este año, Green y Schwarz [8] lograron establecer un método para cancelar ciertas inconsistencias matemáticas de la Teoría Cuántica de Cuerdas. La principal consecuencia de este hecho es que solo existen cinco teorías de supercuerdas consistentes, cada una formulada en diez dimensiones espacio–temporales. En particular dos de ellas, las teorías de cuerdas heteróticas con grupos de norma  $E_8 \otimes E_8$  y  $SO(32)$ , poseen un interés fenomenológico, pues ambas contienen el grupo de norma del Modelo Estándar  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ .

El problema de la alta dimensionalidad del espacio–tiempo se reconcilia

con nuestro mundo de cuatro dimensiones a través de un mecanismo de compactificación tipo Kaluza–Klein. Las seis dimensiones espaciales extra forman una variedad compacta de volumen muy pequeño, de tal manera que sus efectos no se manifiesten en la fenomenología de bajas energías. La dinámica de la teoría hace que la variedad de 6D sea de tipo Calabi–Yau [9]. La escala lineal típica de esta complicada variedad es del orden de la longitud de Planck, lo que hace que sea prácticamente imposible verificar experimentalmente su existencia.

A pesar del avance que conllevó la primera revolución de la Teoría de Cuerdas, todavía quedaban algunas cuestiones por resolver, una de ellas, consistía en lograr unificar las cinco teorías existentes en un solo modelo.

En 1989 Dai, Leigh y Polchinski [10] descubrieron las membranas de Dirichlet o D–branas. Tales entidades *fundamentales* son objetos extendidos (defectos topológicos) de mayor dimensionalidad que las cuerdas y con la propiedad de que los extremos de las cuerdas abiertas (las cuales definen los campos de norma) terminan en las D–branas. Esta propiedad corresponde al fenómeno de localizar los campos de norma en la D–brana.

El advenimiento de las dualidades en Teoría de Cuerdas [11]–[16] junto con el desarrollo alcanzado en el formalismo de las D–branas permiten que en 1995, Witten proponga que las cinco diferentes versiones de dicha teoría, en realidad representen distintos aspectos de una sola teoría en 11 dimensiones, denominada Teoría M [17]–[19].

Por otra parte, el límite de bajas energías de la nueva teoría es la supergravedad en 11D [20]. En [21] Horava y Witten estaban interesados en el comportamiento del límite de bajas energías de la cuerda heterótica  $E_8 \otimes E_8$ . Para ello propusieron tomar la Teoría M de 11 dimensiones y eliminar seis dimensiones compactificándolas en una variedad de Calabi–Yau. La variedad de cinco dimensiones resultante admite compactificar una dimensión sobre un

orbifoldo  $S^1/Z_2$ , creando un par de D-branas de cuatro dimensiones espacio-temporales sobre los extremos del orbifoldo. Si consideramos que una de estas dos D-branas puede ser identificada como nuestro universo, el hecho de que las cuerdas abiertas estén atadas a estos objetos garantiza un mecanismo de localización de los campos de norma. Este último punto es una de las motivaciones de los modelos fenomenológicos de mundos membrana como los escenarios de Arkani-Hamed, Dimopoulos y Dvali (ADD) [22] y Randall y Sundrum (RS-1) [23].

### 1.3. Mundos membrana

Por largo tiempo se pensó que las dimensiones extra debían ser compactificadas sobre una variedad de volumen muy pequeño, para de esta manera, ocultar sus efectos a bajas energías ( $E \approx 10^2 - 10^3$  GeV). Este enfoque cambia con el surgimiento de algunos modelos fenomenológicos en los cuales las dimensiones extra pueden ser grandes o incluso infinitas sin entrar en contradicción con la física de bajas energías. En muchos de estos modelos, nuestro universo es imaginado como una 3-brana sumergida en un espacio-tiempo de dimensión superior, de ahí el nombre de mundos membrana. Las partículas del Modelo Estándar están confinadas a la hipersuperficie, mientras que la gravedad puede propagarse por todo el espacio-tiempo.

Aunque el nombre de mundo membrana es una invención relativamente reciente, la idea de que las partículas pueden ser confinadas a una subvariedad sumergida en un espacio-tiempo de mayor dimensión se remonta a inicios de los años 80 del siglo pasado. En modelos fenomenológicos como el de Akama [24] y Rubakov [25], nuestro universo de 4D espacio-temporales se puede interpretar como un defecto topológico producido por cierto campo de materia exótico que reside en una variedad multidimensional. Dicha materia

exótica crea un mecanismo natural de confinamiento para las partículas de la materia ordinaria. A efectos de un observador sobre la pared de dominio, se produce una reducción efectiva de la dimensionalidad inicial del espacio-tiempo, todo esto, sin necesidad de compactificar a mano las dimensiones extra.

Diferentes propuestas para localizar materia en ciertas regiones dentro de la variedad multidimensional fueron investigadas en años posteriores. En 1985, Matt Visser [26] introdujo la idea de que el campo gravitatorio acoplado a materia multidimensional puede crear un mecanismo de confinación para las partículas. Posteriormente Gibbons y Wiltshire [27] lograron localizar fermiones sin masa en una pared de dominio de  $n - 2$  dimensiones, partiendo de una teoría con gravedad y electromagnetismo en  $n$  dimensiones.

Las ideas esenciales de estos modelos fenomenológicos y el desarrollo de la teoría de cuerdas y D-branas unido al deseo de explicar el problema de la jerarquía, fueron los ingredientes primordiales que originaron los modelos de mundos membrana. En las referencias [28, 29, 30, 31] se exponen las principales características de estos escenarios.

### 1.3.1. El problema de la jerarquía

La escala típica de los fenómenos electrodébiles es  $M_W \approx 10^2$  GeV, mientras que la escala fundamental de la gravedad es la escala de Planck  $M_P \approx 10^{19}$  GeV, por lo que tenemos una diferencia de 17 órdenes de magnitud entre dos interacciones fundamentales de la naturaleza. Encontrar el origen de esta diferencia es lo que se denomina el Problema de la Jerarquía. En otras palabras, la pregunta es: ¿por qué la gravedad es tan débil comparada con las otras fuerzas descritas por el Modelo Estándar? Esta jerarquía entre la gravedad y el resto de las interacciones refuerza la idea de que tanto el Modelo Estándar como la Relatividad General son solo teorías efectivas y

suguiere que existe nueva física por encima de la escala electrodébil, la cual podría resolver algunos problemas del Modelo Estándar y eventualmente unificar la gravedad con las demás interacciones.

Por otra parte, aunque no la investigaremos a profundidad, es importante comentar que existe otra formulación del problema de la jerarquía la cual es extensamente utilizada en física de partículas y consiste en que la masa del escalar “fundamental” es cuadráticamente divergente respecto a correcciones cuánticas. Esto tiene como consecuencia que al extender el Modelo Estándar varios órdenes de magnitud por encima de la escala electrodébil, los parámetros del modelo necesitan ser cuidadosamente ajustados orden por orden en la teoría de perturbaciones para poder obtener la masa del escalar “fundamental” del orden de unos cientos de GeV. Aunque esto es en principio consistente, hace que la teoría sea poco “natural”.

Existen varios enfoques para resolver el problema de la jerarquía, uno de los más populares en física de partículas consiste en proteger la masa del campo escalar “fundamental” de correcciones cuánticas utilizando supersimetría. Otra manera de abordar el problema es en el contexto de teorías de mundos membrana los cuales estudiaremos detalladamente a lo largo de la tesis.

### **1.3.2. Mecanismo ADD**

Al estudiar teorías con dimensiones extra se remueve el carácter fundamental de la física en 4D, pasando este rol al nuevo modelo multidimensional. Esto abre nuevas posibilidades en el estudio del problema de la jerarquía, pues ahora la escala fundamental no es la masa de Planck  $M_P$  asociada al modelo cuatridimensional. Luego, es posible ajustar el valor de la nueva masa de Planck fundamental  $M_*$  y los ingredientes del modelo con dimensiones extra de tal manera que no haya jerarquía entre el Modelo Estándar y la teoría

multidimensional o en todo caso esclarecer el origen de la jerarquía entre  $M_P$  y  $M_W$ .

Dado que los modelos fundamental y efectivo en general se encuentran a escalas energéticas diferentes, es necesario aplicar un mecanismo de reducción dimensional para saber la relación entre las constantes de acoplamiento que se observan en el experimento y las “constantes fundamentales”. En este trabajo, la manera de implementar dicho mecanismo será integrando la acción del modelo multidimensional por las coordenadas extra.

Por otra parte, hasta ahora (junio de 2012) no hay evidencias experimentales concluyentes sobre la existencia de las dimensiones extra. En consecuencia, si al igual que en las teorías de Kaluza–Klein suponemos que las dimensiones extra son *compactas*, solo es posible establecer cotas superiores para sus tamaños. Tales límites cambian drásticamente si la materia del Modelo Estándar se propaga o no sobre ellas. Cuando la materia accede a todo el espacio–tiempo, el límite superior para las dimensiones extra  $r$  está dado por la escala electrodébil  $r \leq 1/\text{TeV} \approx 10^{-19}\text{m}$ , pues a energías menores los efectos de estos modelos multidimensionales no se observan experimentalmente en los colisionadores de partículas. Si imponemos que solamente la gravedad puede propagarse sobre las dimensiones extra, el sector de la materia no estará presente en la física multidimensional. De esta manera, únicamente los experimentos puramente gravitatorios determinarán el límite para el “tamaño” de las dimensiones extra. La distancia más pequeña a la cual la ley de Newton es experimentalmente válida es del orden de  $10^{-4}\text{m}$  [32, 33, 34]. Luego, en este caso se tiene que  $r \leq 10^{-4}\text{m}$ .

Para comprender algunas de las características de los modelos multidimensionales con dimensiones extra compactas, estudiemos una generalización de la teoría de Kaluza–Klein. Sea un espacio–tiempo de  $(4 + n)$  dimensiones, cada una de las  $n \geq 1$  coordenadas del bulto está compactificada en un círculo de radio  $r$ . Por simplicidad, consideremos que la variedad que define

al espacio–tiempo es de la forma  $M = M^4 \times T^n$  donde  $M^4$  representa nuestra variedad  $4D$  y  $T^n$  es un toro de  $n$  dimensiones.

El modelo a estudiar es una extensión de la Relatividad General a  $(4+n)$  dimensiones con un sector gravitatorio dado por la siguiente acción:

$$S_{4+n}^{grav} = -M_*^{n+2} \int dx^{4+n} \sqrt{g^{(4+n)}} R^{(4+n)}, \quad (1.2)$$

la constante de acoplamiento  $M_*$  es la escala de Planck fundamental.

Análogamente, la parte gravitatoria de la teoría efectiva de cuatro dimensiones está dada por la acción de Einstein–Hilbert

$$S_4^{grav} = -M_P^2 \int dx^4 \sqrt{g^{(4)}} R^{(4)},$$

donde  $M_P$  es la masa de Planck efectiva cuatridimensional.

Si se quiere obtener la relación entre los parámetros de los dos sectores gravitatorios, es suficiente con estudiar como está contenido el límite de campo débil del modelo efectivo en el multidimensional. Una manera simple de realizar tal propósito es extraer de (1.2) la acción asociada al gravitón no masivo que surge en la aproximación lineal de la Teoría de la Relatividad. Para ello, estudiemos el caso donde la geometría es una pequeña perturbación de un espacio–tiempo plano, en otras palabras

$$ds^2 = g_{AB} dx^A dx^B = (\eta_{AB} + h_{AB}) dx^A dx^B,$$

en la expresión anterior  $\eta_{AB}$  es la métrica de Minkowski en  $(4+n)$  dimensiones y  $h_{AB}$  define sus fluctuaciones.

El espacio–tiempo de fondo  $\eta_{AB}$  posee invarianza de Poincaré en  $(4+n)$  dimensiones por lo que en particular también contiene dicha simetría en cuatro dimensiones. Esta última simetría es útil, pues nos permite clasificar las fluctuaciones gravitatorias en modos escalares, vectoriales y tensoriales respecto a las transformaciones de Poincaré en cuatro dimensiones, siendo

los modos tensoriales los que contienen al gravitón no masivo que surge en el límite de campo débil de la Teoría de la Relatividad. En consecuencia, para obtener la relación entre las escalas de Planck y el radio de las dimensiones extra, solo es necesario estudiar el sector tensorial, el cual toma el siguiente aspecto

$$ds_T^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) dx^\mu dx^\nu,$$

donde  $h_{\mu\nu}$  satisface las siguientes condiciones de norma

$$\partial^\mu h_{\mu\nu} = 0 \quad \text{y} \quad \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu} = h = 0.$$

Tales ligaduras surgen a consecuencia de la libertad de norma de las fluctuaciones respecto a la transformación

$$h_{AB} \rightarrow h_{AB} + \nabla_A \zeta_B + \nabla_B \zeta_A, \quad (1.3)$$

donde  $\zeta_A$  es un vector arbitrario multidimensional.

Cuando el campo gravitatorio que produce la materia del modelo es tal que no cambia sensiblemente la geometría del fondo, la ecuación que describe la propagación de los modos tensoriales se puede escribir como sigue

$$\square^{(4+n)} h_{\mu\nu} = 0. \quad (1.4)$$

El comportamiento de los modos asociados a la ecuación anterior depende de la topología de las dimensiones extra. En nuestro caso particular, estas están compactificadas en un toro, lo que hace posible desarrollar  $h_{\mu\nu}$  en series de Fourier:

$$h_{\mu\nu} \sim \sum_{\vec{k}} \frac{\hat{h}_{\mu\nu}^{(\vec{k})}(x)}{r^{n/2}} e^{\frac{i}{r} \vec{k} \cdot \vec{w}},$$

donde  $\vec{k} = \{k^1, \dots, k^n\}$  y cada componente de  $\vec{k}$  toma todos los valores enteros posibles.

Sustituyendo este desarrollo en (1.4), se obtiene

$$\left( \square^\eta + \frac{k^2}{r^2} \right) \hat{h}_{\mu\nu}^{(\vec{k})} = 0.$$

De aquí se tiene que de manera similar a los modelos de Kaluza–Klein, tenemos un modo cero que no depende de las coordenadas extra más una torre de modos masivos.

En el límite de campo débil solo nos interesa el modo sin masa, por lo que  $\sqrt{g^{(4+n)}} \approx \sqrt{g_0^{(4)}}$  y  $R^{(4+n)} \approx R_0^{(4)}$ , donde el subíndice 0 indica que las cantidades se tomaron respecto al modo no masivo. Integrando por las dimensiones extra tenemos el siguiente resultado

$$S_{4+n}^{grav} = -M_*^{n+2} V(T^n) \int dx^4 \sqrt{g_0^{(4)}} R_0^{(4)} + \dots,$$

donde  $V(T^n) = (2\pi r)^n$  es el volumen del toro  $T^n$  y los puntos suspensivos representan los modos restantes del modelo. Al comparar la expresión anterior con (1.2) se obtiene

$$M_P^2 \sim M_*^{n+2} r^n. \quad (1.5)$$

Por otra parte, para entender la conveniencia de introducir los mundos membrana, inicialmente no consideraremos la existencia de una región o hipersuperficie donde la materia tenga un comportamiento diferente al resto del espacio–tiempo, por lo que no habrá ninguna restricción sobre la propagación de los campos de materia sobre la variedad multidimensional. Hecho esto y considerando la relación (1.5), veamos de qué orden de magnitud es el radio de las dimensiones extra y si dicho valor puede arrojar efectos experimentalmente observables en un futuro cercano.

Supongamos que tenemos un caso simple donde la materia es descrita por un campo escalar real  $(4+n)$ –dimensional sin masa

$$S_{4+n}^{mat} = -\frac{1}{g_*^2} \int dx^{4+n} \sqrt{g^{(4+n)}} g^{AB} \nabla_A \Phi \nabla_B \Phi, \quad (1.6)$$

donde  $g_*$  es la constante de acoplamiento fundamental.

De manera análoga al caso de las fluctuaciones gravitacionales, es suficiente extraer el modo sin masa del campo escalar para hallar la relación entre  $g_*$  y la constante de acoplamiento  $g_{ef}$  del modelo efectivo de cuatro dimensiones. Aplicando el mismo procedimiento que en el sector gravitatorio tenemos que

$$S_{4+n}^{mat} = -\frac{1}{g_*^2} V(T^n) \int dx^4 \sqrt{g_0^{(4)}} g_0^{\mu\nu} \nabla_\mu \Phi_0 \nabla_\nu \Phi_0 + \dots, \quad (1.7)$$

donde  $\Phi_0$  es el modo no masivo del campo escalar. Luego, de (1.6) y la relación anterior, tenemos que

$$\frac{1}{g_{ef}^2} \sim \frac{r^n}{g_*^2}. \quad (1.8)$$

Por otra parte, es deseable que no haya jerarquías entre los sectores gravitatorio y de materia de la teoría fundamental. Esto nos lleva a considerar el caso más simple en el que solamente hay una escala fundamental en el modelo multidimensional, en otras palabras, las constantes de acoplamiento  $g_*$  y  $M_*$  están relacionadas de la siguiente manera

$$g_*^2 \sim \frac{1}{M_*^n},$$

donde la potencia en  $M_*$  aparece por la necesidad de que la relación sea dimensionalmente correcta.

En este punto, estamos en condiciones de hallar el valor del radio de las dimensiones extra en función de los parámetros efectivos. Combinando (1.5), (1.8) y la expresión anterior, obtenemos el siguiente resultado

$$r \sim \frac{1}{M_P} g_{ef}^{\frac{n+2}{n}}.$$

Aunque la relación anterior se obtuvo bajo la suposición de que la materia es un campo escalar multidimensional, esta sigue siendo válida para campos

de norma. Luego, si a modo de ejemplo tomamos que  $g_{ef}$  corresponde a la constante de acoplamiento de la Electrodinámica o la Cromodinámica Cuántica, el valor de  $r$  será aproximadamente  $r \sim \frac{1}{M_P} \approx 10^{-35}\text{m}$ , lo que implica que  $M_* \approx M_P$ . Esto nos dice que cuando las dimensiones extra son *compactas* y consideramos que la materia habita en todo el espacio-tiempo, la escala “natural” del modelo multidimensional es la escala de Planck. Esto hace que en un futuro cercano sea poco probable poder validar o descartar experimentalmente tal modelo. Veamos qué sucede cuando imponemos que la materia del Modelo Estándar esté confinada a una región del espacio  $(3+n)$ -dimensional.

A finales de los años 90 del siglo pasado Arkani-Hamed *et al.* [22] motivados por los recientes resultados en la teoría M, propusieron un modelo posteriormente conocido como mecanismo ADD donde los campos correspondientes a las interacciones electromagnéticas, débiles y fuertes son confinados a ciertas hipersuperficies (membranas finas) que, a su vez, están inmersas en un espacio multidimensional denominado bulto, como se muestra en la Fig. 1.2. A diferencia de la materia estándar, la gravedad puede acceder al bulto. En este marco se supone que nuestro mundo es uno de esos entes membrana.

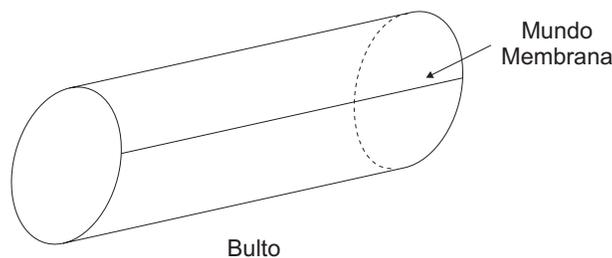


Figura 1.2: En esta figura nuestro mundo cuatridimensional es representado esquemáticamente por una línea, mientras que el círculo caracteriza al bulto.

Como mencionamos anteriormente, en este caso, solo el sector gravitatorio

es relevante en la teoría multidimensional lo que hace que la relación entre los parámetros del modelo esté dada únicamente por la ecuación (1.5).

Dado que ahora tenemos libres los parámetros  $M_*$  y  $r$ , existen más posibilidades de ajustar sus valores de tal manera que la teoría pueda ser experimentalmente verificable en un futuro cercano. Por otra parte, es deseable que la escala de energías de la teoría fundamental (1.2) sea cercana a la escala electrodébil, pues este sería un modo de resolver el problema de la jerarquía. Para ello tomemos el caso extremo donde  $M_* \approx 10^3$  GeV, de esta manera, tenemos la siguiente expresión para el radio de las dimensiones extra

$$r \approx 2 \cdot 10^{\frac{32}{n}-19} \text{ m},$$

donde se utilizó el hecho de que en unidades naturales  $1 \text{ GeV} \approx 5 \cdot 10^{15} \text{ m}^{-1}$ .

Sustituyendo el valor  $n = 1$  vemos que se predice un valor astronómico para  $r$ , por lo que queda descartado, mientras que para  $n = 2$  tenemos que  $r \approx (0.1 - 1 \text{ mm})$  lo cual hace este caso interesante debido a la cercanía al límite de los experimentos gravitatorios. De esta manera, en este escenario surgen nuevas posibilidades para explorar la existencia de dimensiones extra mediante experimentos gravitatorios.

En el modelo ADD un observador en la membrana fina percibe la gravedad débil comparada con las demás interacciones como consecuencia de que la primera se escapa hacia las dimensiones extra diluyendo su fortaleza sobre el bulto, mientras que las partículas del Modelo Estándar están confinadas a la membrana. Por otra parte, en este modelo la escala fundamental de la gravedad  $M_*$  se unifica con la escala característica del Modelo Estándar ( $10^2 - 10^3$  GeV), lo que hace que desaparezca la jerarquía entre la gravedad en  $(4+n)$  dimensiones y el resto de las interacciones del Modelo Estándar<sup>1</sup>. El precio

---

<sup>1</sup>Recientemente, en [35] se establecieron cotas para la masa de Planck fundamental  $M_*$  en el escenario ADD, estas fueron  $2.27 \text{ TeV} < M_* < 3.53 \text{ TeV}$ , mientras que en [36] se obtuvo que  $2.5 \text{ TeV} < M_* < 3.8 \text{ TeV}$ .

a pagar por haber eliminado esta jerarquía es el surgimiento de otra nueva, ahora entre el radio de compactificación  $r \approx 10^{-4}\text{m}$  y la escala electrodébil  $r_W = \frac{1}{M_W} \approx 10^{-19}\text{m}$ . Entonces, más que una solución al problema de la jerarquía es solo una reformulación geométrica de este.

## 1.4. Dimensiones extra deformadas

En el modelo ADD, el campo gravitatorio producido por la materia que reside en la membrana juega un papel pobre en las predicciones del modelo. Esto es una buena aproximación cuando la densidad de energía de la membrana es pequeña. Sin embargo, pueden surgir situaciones interesantes si este no es el caso.

La consecuencia más evidente de considerar la densidad de energía de la membrana es que el bulto deja de ser plano, el espacio–tiempo se curva. En adición a esto, la gravedad inducida por la membrana favorece el mecanismo de confinamiento de las partículas que la definen.

En [28], Rubakov y Shaposhnikov hicieron una importante observación sobre este tipo de escenarios. Ellos sugieren que si se tiene una membrana de 4D inmersa en un bulto multidimensional, en principio, se pueden balancear los efectos gravitacionales sobre la membrana introduciendo una constante cosmológica negativa en el bulto, de forma tal que la constante cosmológica efectiva de nuestro universo de 4D desaparezca. Esto hace que nuestro universo, aún se perciba plano y estático por un observador sobre la membrana. Fuera de la membrana tal cancelación no existe, en consecuencia, el espacio–tiempo es curvo sobre bulto. A las dimensiones extra con estas propiedades usualmente se les denomina dimensiones deformadas.

En el trabajo de Rubakov y Shaposhnikov el análisis se realizó en términos generales; realmente fue Gogberashvili [37] quien introdujo el primer modelo

que contiene una métrica deformada. La popularidad de los modelos con dimensiones extra deformadas, inicia con los trabajos de Randall y Sundrum (RS). En un primer artículo [23], estudiaron el problema de la jerarquía sobre el espacio–tiempo propuesto por Gogberashvili. Este primer modelo se denomina RS–1. Los resultados de [23] sugirieron la posibilidad de eliminar el mecanismo de compactificación en el contexto de dimensiones deformadas (RS–2) [38]. Al conjunto de estas dos propuestas se le denomina Modelo de Randall–Sundrum. Estudiemos algunas de sus características.

### 1.4.1. Modelo RS–1

El modelo de RS–1 consiste en una realización simple de un mundo membrana en cinco dimensiones con dos membranas finas de cuatro dimensiones, ubicadas en posiciones fijas sobre el bulto. En este escenario, el bulto es curvo debido a la existencia de una constante cosmológica  $\Lambda_5$  sobre bulto. La dinámica del sistema está integrada por la acción del bulto más dos términos que definen las membranas finas, tales términos los designaremos por  $S_{\pm}$ .

$$S_{total} = S_{bulto} + S_+ + S_-, \quad (1.9)$$

donde

$$\begin{aligned} S_{bulto} &= - \int d^4x dw \sqrt{g_{(5)}} (2M_*^3 R_5 + \Lambda_5), \\ S_{\pm} &= - \int d^4x dw \sqrt{g_{ind}^{\pm}} \delta(w - w_{\pm}) \sigma_{\pm}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

En las expresiones anteriores,  $g_{ind}^{\pm}$  representa los determinantes de las métricas inducidas sobre las membranas,  $\sigma_{\pm}$  caracteriza las tensiones de dichas membranas y  $w_{\pm}$  define sus posiciones sobre el bulto. El motivo de usar los signos + y – para etiquetar las membranas se esclarecerá posteriormente. En este caso hemos considerado que el ancho de las membranas es despreciable

comparado con sus tensiones  $\sigma_{\pm}$ , hecho que se refleja matemáticamente en la aparición de la delta de Dirac en  $S_{\pm}$ .

En el modelo de RS-1 se respeta la invarianza de Poincaré en cuatro dimensiones sobre las membranas, en otras palabras, las membranas son planas. Bajo estas restricciones sobre la geometría, es plausible escoger un sistema coordenado donde la métrica del espacio-tiempo se puede escribir como sigue

$$ds^2 = g_{AB}dx^A dx^B = e^{2A(w)}\eta_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} - dw^2. \quad (1.11)$$

Esta geometría preserva explícitamente la simetría de Poincaré en cuatro dimensiones. El coeficiente  $e^{2A(w)}$  solamente depende de la coordenada extra y caracteriza el grado de deformación respecto al espacio-tiempo plano en cinco dimensiones. Por esta razón, la función  $A(w)$  es conocida como factor de deformación. Por otra parte, la dimensión extra posee la topología de un orbifolio  $S^1/Z_2$ . Como se ilustra en la Fig. 1.3, un orbifolio  $S^1/Z_2$  es un círculo donde se identifican los puntos con simetría de espejo respecto a dos puntos fijos. En términos de las coordenadas definidas en (1.11), la topología  $S^1$  hace

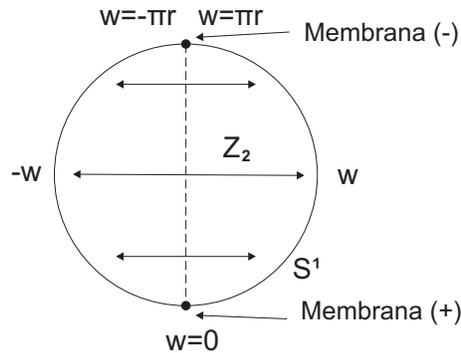


Figura 1.3: Orbifolio  $S^1/Z_2$ . Las membranas finas con tensiones positiva y negativa se ubican en los puntos fijos  $w = 0$  y  $w = \pi r$ , respectivamente.

que la coordenada  $w$  sea periódica y definida en el intervalo  $-\pi r \leq w \leq \pi r$ ,

donde,  $r$  es el radio del círculo  $S^1$ . En adición a esto, los puntos  $(x^\mu, w)$  y  $(x^\mu, -w)$  se identifican como consecuencia de la simetría  $Z_2$ . Luego, en estas coordenadas, el intervalo de variación de la dimensión extra se reduce a  $0 \leq w \leq \pi r$ .

En este escenario las membranas se sitúan en los puntos fijos del orbifolio ( $w = 0$  y  $w = \pi r$ ). La membrana definida por  $S_+$  se ubica en  $w = w_+ = 0$ , mientras que la correspondiente a  $S_-$  se sitúa en  $w = w_- = \pi r$ . La membrana  $S_-$  es llamada visible y representa nuestro universo. En contraste,  $S_+$  es conocida como membrana oculta. Nuevamente, la gravedad es el único campo que habita en el bulto. Los campos del Modelo Estándar están confinados a la membrana visible.

Teniendo en cuenta (1.10) y la simetría  $Z_2$  de la geometría, se obtiene la siguiente expresión para el factor de deformación

$$A(w) = -k|w|. \quad (1.12)$$

Esta relación muestra que el espacio-tiempo de cinco dimensiones es la unión de dos parches  $AdS_5$  pegados en  $w = 0$ .

Por otro lado, la presencia de la delta de Dirac en (1.10) induce ciertas condiciones de juntura [39, 40] sobre las membranas; haciendo uso de estas se obtienen las siguientes relaciones de consistencia

$$\sigma_+ = -\sigma_- = 24kM_*^3, \quad \text{y} \quad \Lambda_5 = -24k^2M_*^3. \quad (1.13)$$

En la expresión anterior se observa que  $\sigma_+ > 0$  y  $\sigma_- < 0$ , de ahí, las etiquetas  $+$  y  $-$ , utilizadas para designarlas. El deseo de mantener las membranas planas inmersas en un bulto curvo, origina un ajuste fino entre la  $\Lambda_5$  y las tensiones de las membranas ( $\Lambda_5 = -\frac{\sigma_+^2}{24M_*^3}$ ), el cual es equivalente a la cancelación de la constante cosmológica en cuatro dimensiones.

De este modelo se pueden extraer resultados interesantes si se estudia su descripción cuatridimensional efectiva. Como un primer paso, estudiemos

lo que fue una de las causas principales del advenimiento de los mundos membrana, la búsqueda de una explicación al problema de la jerarquía.

Antes que todo, es deseable tener una teoría fundamental donde no haya una gran jerarquía entre las escalas de sus parámetros. Así, en el marco del modelo RS-1, supondremos que  $k \approx M_*$ . Veamos cómo la distancia entre las membranas  $r$  influye en la solución del problema de la jerarquía. Primeramente, asumiremos que  $r$  adquiere un valor fijo como consecuencia de algún mecanismo estabilización<sup>2</sup>.

Las métricas inducidas sobre las membranas toman el siguiente aspecto

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}^+ &= g_{\mu\nu}^{oc} = g_{\mu\nu}(x^\alpha, w = 0) = \eta_{\mu\nu}, \\ g_{\mu\nu}^- &= g_{\mu\nu}^{vis} = g_{\mu\nu}(x^\alpha, w = \pi r) = e^{-2k\pi r} \eta_{\mu\nu}, \\ g_{A5}^\pm &= 0. \end{aligned} \tag{1.14}$$

A diferencia de escenarios con dimensiones extra planas, las expresiones anteriores muestran un cambio de escala entre la membrana visible y la oculta, respecto a las mediciones de longitud y tiempo, ver Fig. 1.4. Esto induce un comportamiento análogo sobre los campos que residen en las membranas. Los valores para las masas y los acoplamientos de las partículas del Modelo Estándar que percibe un observador en nuestro universo, dependen de la membrana en la que este se encuentre ubicado. El punto clave para entender el problema de la jerarquía en el contexto del modelo RS-1 consiste en localizar la materia estándar sobre la membrana visible.

Consideremos el caso simple de un campo escalar masivo  $\chi^-$  sobre la membrana  $S_-$ :

$$S_{mat} = -\frac{1}{2} \int dx^4 \sqrt{g_-} \left( g_-^{\alpha\beta} \partial_\alpha \chi^- \partial_\beta \chi^- - m_5^2 (\chi^-)^2 \right), \tag{1.15}$$

---

<sup>2</sup>Una de las soluciones más simples a este problema es el mecanismo de estabilización del radión de Goldberger-Wise [41].

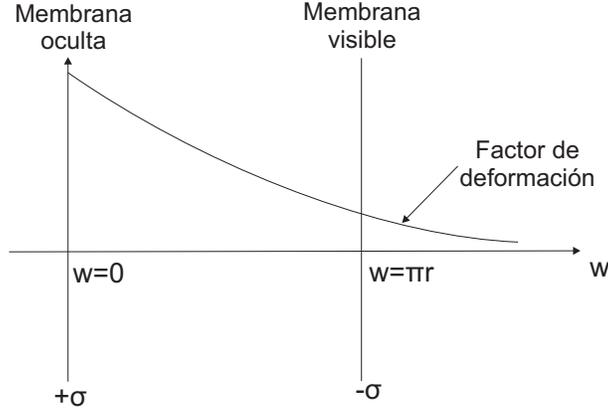


Figura 1.4: En esta figura se muestra el decaimiento exponencial del factor de deformación.

donde  $m_5$  representa la masa fundamental del campo escalar.

Debido al factor  $e^{-2k\pi r}$  en la métrica inducida (1.14) sobre la membrana visible, la acción efectiva del campo escalar no está canónicamente normalizada. Redefiniendo el campo

$$\chi^{ef} = e^{-k\pi r} \chi^-,$$

y su masa

$$m_{ef} = m_5 e^{-k\pi r},$$

la acción efectiva normalizada se puede escribir de la siguiente manera

$$S_{mat} = -\frac{1}{2} \int dx^4 (\eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \chi^{ef} \partial_\beta \chi^{ef} - m_{ef}^2 (\chi^{ef})^2). \quad (1.16)$$

Luego, la masa efectiva  $m_{ef}$  del campo escalar  $\chi_{ef}$  en cuatro dimensiones está suprimida exponencialmente con respecto a  $m_5$ .

Contrariamente a un observador en la membrana visible, sobre la membrana oculta no ocurre este escalamiento exponencial. En este caso, la masa efectiva del campo coincide con la fundamental. Por consiguiente, para explicar la jerarquía deseada entre los modelos fundamental y efectivo no es

muy útil el considerar la membrana oculta como nuestro universo. Esta es la razón por la cual le asignamos la membrana visible a nuestro universo.

Como mencionamos anteriormente, consideraremos que no existen grandes diferencias entre los valores numéricos de los parámetros de la teoría fundamental. De esta manera, tomemos que  $m_5 \approx M_*$  lo que implica la siguiente igualdad

$$m_{ef} = M_* e^{-k\pi r}. \quad (1.17)$$

El factor exponencial en la relación anterior permite generar valores de  $m_{ef}$  del orden de la escala electrodébil sin necesidad de introducir una gran jerarquía entre  $k$  y  $1/r$ . A modo de ejemplo, para el caso extremo donde  $M_* \approx M_P$ , se tiene que  $m_{eff} \approx 10^3$  GeV, si  $kr \approx 12$ .

Para completar el análisis, consideremos las fluctuaciones gravitacionales no masivas alrededor de la métrica (1.11). Dado que suponemos despreciables las fluctuaciones de las posiciones de las membranas, el tratamiento es similar al realizado en la sección (1.3.2).

Consideremos una generalización de la métrica (1.11)

$$ds^2 = e^{-2k|w|} g_{\mu\nu}^{(4)}(x^\alpha) dx^\mu dx^\nu - dw^2,$$

donde  $g_{\mu\nu}^{(4)}$  describe la dinámica del subespacio 4-dimensional. Para esta métrica, la acción de Einstein–Hilbert  $S_{EH}$  en cinco dimensiones adquiere la siguiente forma

$$S_{bulto} \supset S_{EH} \supset -2M_*^3 \int d^4x \int_{-\pi r}^{\pi r} dw e^{-2k|w|} \sqrt{g_{(4)}} R_{(4)}.$$

De este modo, tenemos que

$$M_P^2 = \frac{M_*^3}{k} (1 - e^{-2k\pi r}) \approx M_*^2 (1 - e^{-2k\pi r}). \quad (1.18)$$

La fórmula anterior es un importante resultado del modelo de Randall–Sundrum, pues, proporciona la escala efectiva  $M_P$  en función de la escala

fundamental  $M_*$  y muestra que  $M_P$  depende marginalmente del radio de compactificación, aún para valores no muy grandes de  $kr$ . A diferencia del mecanismo ADD, en este escenario la relación entre las escalas efectiva y fundamental del sector gravitatorio no se basa en efectos provenientes de dimensiones extra grandes.

Teniendo en cuenta, (1.17), (1.18) y  $m_{ef} \approx 10^3 \text{ GeV} \ll M_P$ , se obtiene que  $M_* \approx M_P$ , luego,  $kr \approx 12$ . Esto implica que la escala de la teoría en cinco dimensiones es del orden de la masa de Planck  $M_P$ . En el escenario RS-1, es posible lograr la jerarquía observada entre la gravedad y la escala electrodébil sin necesidad de introducir una nueva jerarquía entre las constantes fundamentales  $m_5$ ,  $k$ ,  $M_*$  y  $1/r$ . Nuevamente, hay un precio a pagar y este es el surgimiento de un ajuste fino entre  $\Lambda_5$  y las tensiones de las membranas. Este fenómeno no es más que el problema de la constante cosmológica reformulado en el ámbito de los mundos membrana.

### 1.4.2. Modelo RS-2

En el escenario RS-1,  $M_P$  depende del radio de la dimensión extra. Esta dependencia se torna débil cuando  $kr$  es grande, y se reduce a  $M_P^2 = M_*^3/k$  para  $r \rightarrow \infty$ . Paralelamente a esto, la solución (1.12), los valores de  $\Lambda_5$  y de las tensiones de las membranas no dependen de la distancia  $r$ , y se determinan completamente al resolver las ecuaciones de Einstein junto con las condiciones de juntura sobre la membrana de tensión positiva. Estas circunstancias sugieren la posibilidad de obtener un modelo consistente de mundos membrana, para una dimensión extra infinita.

El modelo RS-2 [38] es una modificación del primero (RS-1), en el cual las etiquetas visible y oculta se intercambian y la dimensión extra junto con la nueva membrana oculta (membrana de tensión negativa) se mueven al infinito. En este enfoque, se elimina la necesidad de un mecanismo de com-

pactificación y en consecuencia, la membrana de tensión negativa desaparece de la teoría (véase Fig. 1.5). En contraste con RS-1, ahora la materia estándar

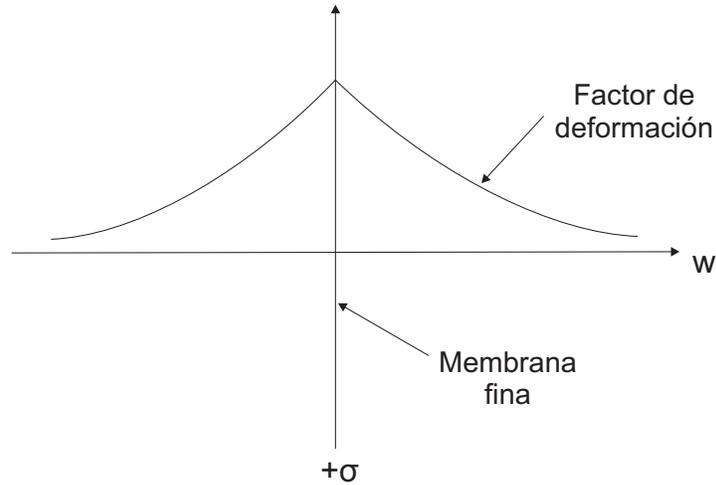


Figura 1.5: Factor de deformación para el modelo RS-2.

reside en la membrana con tensión positiva. Luego, la jerarquía entre las escalas de Planck y electrodébil no se explica por la existencia de dimensiones extra deformadas. A pesar de ello, este modelo es interesante desde el punto de vista de sus predicciones a bajas energías, así como su conexión con la correspondencia *AdS/CFT* [42, 43].

En los modelos de mundos membrana que hemos estudiado, la gravedad multidimensional accede a toda la variedad. Independientemente de la dimensionalidad del bulto y de la topología de este, para que estos escenarios sean viables debemos recuperar la física conocida sobre la membrana que define nuestro universo. En particular, es necesario extraer la gravedad de Einstein en cuatro dimensiones de la teoría de dimensiones extra. El espectro de las fluctuaciones gravitatorias del modelo RS-2 debe contener un modo sin masa localizado sobre la membrana, que se pueda identificar con el gravitón de

cuatro dimensiones.

Consideremos las fluctuaciones gravitacionales más generales asociadas al modelo RS-2:

$$ds^2 = e^{-2k|w|} [\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x, w)] dx^\mu dx^\nu + h_{\mu 5}(x, w) dx^\mu dw - h_{55}(x, w) dw^2.$$

La simplicidad de la materia que reside en la membrana permite escoger la norma axial, transversa y sin traza para las fluctuaciones. En otras palabras,  $h_{\mu 5} = h_{55} = 0$ ,  $\partial_\mu h_\nu^\mu = 0$  y  $h_\mu^\mu = h = 0$ . Bajo esta norma, solo el sector tensorial es no trivial. Después de eliminar  $S_-$  en (1.9), las ecuaciones de Einstein a primer orden en las fluctuaciones  $h_{\mu\nu}$ , se reducen a una sola ecuación

$$[\partial_w^2 - 4k^2 + e^{-2k|w|} \square^{(4)} - 4k\delta(w)] h_{\mu\nu} = 0. \quad (1.19)$$

La estructura de la igualdad anterior admite la descomposición de  $h_{\mu\nu}$  en modos KK

$$h_{\mu\nu} = \sum_m \chi_{\mu\nu}^m(x) \psi^m(w), \quad \text{donde} \quad \square^{(4)} \chi_{\mu\nu}^m = -m^2 \chi_{\mu\nu}^m.$$

El modo  $\chi_{\mu\nu}^m(x)$  se puede asociar a un gravitón masivo cuatridimensional de masa  $m$ , mientras que  $\psi^m(w)$  es su perfil sobre la quinta dimensión.

Con el propósito de simplificar el análisis del espectro de  $\psi^m(w)$ , introduzcamos el cambio de variables  $dw = e^{-k|w|} dz$  y redefinamos el campo  $\psi^m(w) = e^{3k|w|/2} \Psi^m(z)$ . De este modo, se tiene

$$\left( -\frac{d^2}{dz^2} + V(z) \right) \Psi^m(z) = m^2 \Psi^m(z), \quad (1.20)$$

donde

$$V(z) = \frac{15}{4} \frac{k^2}{(1 + k|z|)^2} - 3k\delta(z). \quad (1.21)$$

Esta ecuación es tipo Schrödinger con un potencial  $V(z)$ . El espacio de Hilbert asociado al problema de autovalores (1.20) es el de las funciones cuadrado integrables sobre el intervalo  $-\infty < z < \infty$ . Su norma es

$$\langle \psi | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^2 dz. \quad (1.22)$$

En este escenario y a lo largo de la tesis, un modo de masa  $m$  está localizado sobre la membrana si su norma es finita.

Es bien conocido de la Mecánica Cuántica que el potencial de volcán definido en (1.21) posee un modo cero localizado seguido de una torre continua de modos masivos no ligados a la membrana. Como mencionamos anteriormente, este modo sin masa es identificado con nuestro gravitón en cuatro dimensiones y es el responsable de reproducir la Teoría General de la Relatividad sobre la membrana.

Aunque en RS-2 existen modos KK ligeros, estos están débilmente acoplados a la materia de la membrana, de manera que su producción a bajas energías es pequeña [28, 29, 30]. Esto protege al modelo de efectos no observados a bajas energías. Una muestra de ello son las correcciones a la ley de Newton provenientes del intercambio de modos KK masivos entre dos masas puntuales unitarias sobre la membrana

$$U(R) = -\frac{G_4}{R} \left( 1 + \frac{C}{(kR)^2} \right),$$

donde  $R$  es la distancia entre las partículas,  $C \approx 1$  y  $G_4 \sim 1/\kappa_4$  es la constante gravitatoria cuatridimensional. En esta relación, el primer sumando es la contribución del gravitón no masivo usual, y el segundo término surge de los modos KK masivos. La gravedad estándar se recupera para  $R \gg 1/k$ , en este límite, los modos KK masivos tienen poca influencia sobre la gravedad en 4D. Solo cuando la distancia entre las masas unitarias es del orden de  $1/k$  o menor se esperan desviaciones de la ley de Newton. Los experimentos gravitatorios [32, 33, 34] confirman la ley de Newton a escalas del orden de  $10^{-4}$  m, de aquí se tiene que  $1/k \leq 10^{-4}$  m o equivalentemente  $k \geq 10^{-2}$  eV, luego,  $M_* \geq 10^8$  GeV.

Entre los principales méritos del modelo RS-2, está el hecho de eliminar la compactificación de la dimensión extra de manera consistente con la física de bajas energías. Este escenario introduce lo que se puede denominar: “com-

compactificación efectiva”, pues, si en la expresión (1.5) del mecanismo ADD, hacemos  $n = 1$  y sustituimos  $r \rightarrow 1/k$  se obtiene la relación  $M_P^2 = M_*^3/k$ . Bajo esta perspectiva,  $1/k$  toma el rol de un radio de compactificación efectivo. Adicionalmente, RS-2 proporciona un modo natural de atrapar la gravedad en un subespacio contenido en el bulto, el cual es uno de los temas principales de este trabajo.

## 1.5. Membranas gruesas

Tras el éxito del modelo de RS en sus dos versiones, se origina un gran interés en el estudio de sus aplicaciones y generalizaciones. Tales investigaciones cubren diversas áreas de la física, abarcando desde la cosmología y la astrofísica [44]–[51] hasta la física de partículas [52]–[57]. En el presente trabajo nos centraremos en algunas generalizaciones del modelo RS-2 donde se tiene en cuenta el ancho de la membrana.

El considerar que la materia ordinaria está confinada a una hipersuperficie de ancho nulo, es solamente una aproximación. La fenomenología del Modelo Estándar está bien establecida a energías del orden de la escala electrodébil. Luego, aunque las partículas del Modelo Estándar no pueden moverse libremente sobre las dimensiones extra, sí es posible que accedan a distancias  $r \leq 1/M_W \approx 10^{-19}$  m sobre las dimensiones adicionales, sin afectar las predicciones del Modelo Estándar [22].

Por otra parte, la gravedad en el modelo RS-2 es multidimensional. No obstante, un observador sobre la membrana la percibe como cuatridimensional a consecuencia de la localización del gravitón sin masa sobre la propia membrana. Motivado por el trabajo de Rubakov y Shaposhnikov [25], es natural interpretar las partículas del Modelo Estándar como los modos ligeros de ciertos campos fundamentales sobre el bulto [58, 59], de manera tal que

estos modos se localicen mediante un mecanismo similar al de la gravedad. Esta formulación es consistente con la posibilidad de que las partículas residan en una región de ancho  $\Delta \leq 1/M_W$  sobre las dimensiones extra (véase Fig. 1.6).

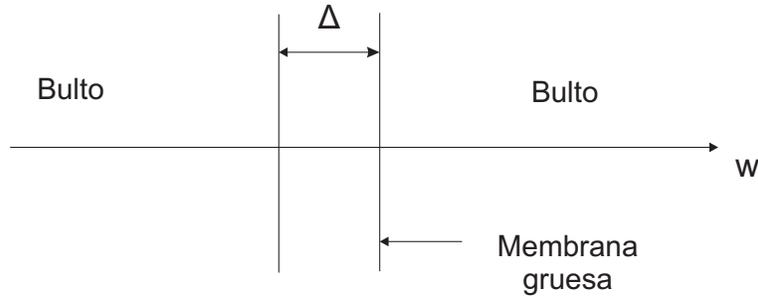


Figura 1.6: Membrana gruesa de ancho  $\Delta$ .

Evidentemente, los efectos físicos asociados al ancho de la membrana poseen mayor probabilidad de manifestarse a energías  $E \geq 1/\Delta$ . A energías menores, no es estrictamente necesario el considerar escenarios de mundos membrana con ancho no trivial. A pesar de ello, independientemente del sector de energías que estemos estudiando, en ocasiones es más simple abordar los escenarios de membranas anchas.

Las membranas finas se modelan con la introducción de la delta de Dirac, lo que requiere el cumplimiento de las condiciones de juntura de Israel-Lanczos [39] sobre la hipersuperficie que define la membrana. Básicamente, estas ligaduras dictan la manera en que la membrana es sumergida en el bulto de modo que la materia ordinaria que esta contiene quede atrapada sobre la hipersuperficie [40, 60, 61]. En nuestro caso, al introducir términos de curvatura de grado superior a uno en la acción de la teoría, estas condiciones de juntura se complican [62] con respecto a un escenario de membranas anchas donde tales condiciones no existen. Esta es otra de las razones por las que

en esta tesis estudiaremos el caso de mundos membrana gruesos.

En los escenarios con membranas finas se omiten los detalles de la dinámica que origina tales objetos. En contraste, las membranas anchas se crean de la dinámica resultante de ciertos campos y entes geométricos sobre el bulto.

Uno de los modos más simples de generar versiones suaves del modelo de Randall–Sundrum es mediante la utilización de campos escalares penta-dimensionales. Como se hizo en [63], un campo escalar real mínimamente acoplado a la gravedad crea una pared de dominio que permite ser identificado como una membrana gruesa, mientras que la métrica asociada a esta configuración se torna asintóticamente  $AdS_5$ .

Al igual que en los modelos de membranas de ancho nulo, es importante localizar la gravedad cuatridimensional, esta vez, sobre la membrana gruesa. Además, las correcciones a la ley de Newton provenientes de los modos de KK masivos deben ser pequeñas. En el trabajo [63] se describen algunos aspectos generales sobre la localización de la gravedad en membranas anchas inmersas en un bulto pentadimensional, así como las correcciones a la ley de Newton asociadas a estos escenarios. La estabilidad de las membranas gruesas construidas mediante campos escalares mínimamente acoplados a la gravedad es estudiada en [64], mientras que en [65, 66] se investiga la ocurrencia y naturaleza de algunas singularidades desnudas que emergen en estos modelos.

El uso de campos escalares no es exclusivo de las membranas anchas. En el contexto del modelo RS–1, existe el mecanismo de Goldberger-Wise [41], el cual permite estabilizar la distancia entre las membranas mediante la introducción de un campo escalar masivo denominado radión. Una generalización de este mecanismo se obtiene en [67], en este caso, los autores tienen en cuenta los efectos del campo escalar sobre la geometría.

Independientemente de si la membrana es gruesa o no, el principal pro-

blema asociado al empleo de campos escalares es la presencia de soluciones que contienen singularidades desnudas sobre el bulto [65, 66, 68, 69, 70, 71]. Afortunadamente, en el marco de estos modelos, es posible evitar este tipo de patologías de varias maneras. Un método consiste en cortar la variedad original y posteriormente compactificarla de modo que la singularidad inicial no pertenezca al nuevo bulto. Otro procedimiento es elegir cuidadosamente el potencial de autointeracción de manera que prevenga la formación de singularidades. Este segundo criterio es el que utilizaremos en este trabajo. Alternativamente, la existencia de soluciones que presentan singularidades pueden disminuir si se agregan al modelo términos de curvatura de grado superior a uno.

### 1.5.1. Acoplamiento no mínimo entre la materia escalar y la gravedad

Puesto que los escenarios de mundos membrana están inspirados en aspectos de Teoría de Cuerdas, es natural importar algunos de sus elementos a este marco. Particularmente, en esta tesis, examinaremos los siguientes temas: acoplamiento no mínimo entre la materia y la gravedad, y la incorporación del término de Gauss–Bonnet en el bulto. Primeramente, enfoquémonos en el caso del acoplamiento no mínimo.

El interés en este tipo de interacciones entre la materia y la gravedad se incrementa con el nacimiento de la teoría escalar–tensorial de Brans y Dicke (BD) [72]. A diferencia de la Relatividad General, en el modelo de BD la constante gravitacional cuatridimensional  $\kappa_4 \sim 1/M_P^2$  es remplazada por una función que depende del campo escalar y que puede ser interpretada como una “constante gravitacional efectiva”.

En la teoría escalar–tensorial de BD la acción toma el siguiente aspecto

$$S = S_{EH} + S_{BD}, \quad (1.23)$$

donde el primer sumando es el término usual de Einstein–Hilbert y  $S_{BD}$  es la acción de BD

$$S_{BD} = \int dx^4 \sqrt{-g} \left( \frac{1}{2\kappa_4} \frac{1}{2} \xi \varphi^2 R + \sigma (\nabla \varphi)^2 - L_{mat}(\Psi_{mat}) \right). \quad (1.24)$$

En la relación anterior  $\sigma = \pm 1$  y  $L_{mat}$  es el lagrangiano de materia, la cual es representada colectivamente por el campo  $\Psi_{mat}$ . El factor  $\frac{1}{2} \xi \varphi^2$  indica un acoplamiento no mínimo entre el campo escalar y la curvatura, cuya intensidad es caracterizada por el parámetro  $\xi$ . Teniendo en cuenta (1.23) y (1.24), la constante gravitacional efectiva  $k_{ef}(x)$  puede ser escrita de este modo:

$$\frac{1}{\kappa_{ef}(x)} = \frac{1 - \frac{1}{2} \xi \varphi^2}{\kappa_4}.$$

Para más detalles sobre la teoría escalar-tensorial de BD y sus generalizaciones, ver [73, 74].

Aunque la teoría escalar–tensorial de BD está definida en cuatro dimensiones, esta se puede extender a espacio–tiempos con más dimensiones. El acoplamiento no mínimo entre la materia y la gravedad emerge en diferentes escenarios dentro del marco de las teorías multidimensionales. En los modelos del tipo KK, el radio de las dimensiones extra puede ser interpretado como un campo escalar no mínimamente acoplado a la gravedad [74, 75]. De manera similar, en Teoría de Cuerdas surge el dilatón, el cual es un grado de libertad escalar que interactúa con la gravedad mediante un acoplamiento no mínimo.

En el ámbito de los mundos membrana existen varios trabajos que tratan esta clase de interacción entre la materia y la gravedad. En [76] se obtienen soluciones de las ecuaciones de Einstein en membranas finas y anchas; en

este artículo, el campo escalar está acoplado a la gravedad por medio de un término del tipo  $\frac{1}{2}\xi\varphi^2R$ . Utilizando este mismo acoplamiento, en el trabajo [77] se obtienen algunas soluciones exactas para ambos tipos de membranas, mientras que en [78, 79] se exploran varias soluciones numéricas en membranas finas y se estudia el espectro de masas de un campo escalar no autogravitante<sup>3</sup>. La localización de los modos tensoriales de la gravedad y las correcciones a la ley de Newton para estos modelos, es investigada en [80]. Por otro lado, en [81] se estudia la localización de diferentes campos de materia no autogravitantes sobre membranas gruesas construidas mediante un campo escalar no mínimamente acoplado a la gravedad.

Al igual que en el caso de acoplamiento mínimo, la presencia de un campo escalar sobre el bulto introduce modos escalares y vectoriales en las ecuaciones de las fluctuaciones [64, 82]. Modos que no pueden ser completamente eliminados por medio de una elección de la norma de las fluctuaciones. Por consiguiente, en principio estos influyen en la física efectiva en cuatro dimensiones.

En el marco de una membrana ancha no mínimamente acoplada a la gravedad, en [83] se estudia la estabilidad de esta ante fluctuaciones escalares, vectoriales y tensoriales, para distintas elecciones de la norma de las fluctuaciones.

### 1.5.2. Término de Gauss–Bonnet

Al igual que el fenómeno de acoplamiento no mínimo, los términos de curvatura de orden mayor a uno son motivados por la teoría de cuerdas [84, 85, 86]. A consecuencia de ello, es natural incluirlos en escenarios de mundos membrana. Un caso interesante es cuando al término usual de Einstein–

---

<sup>3</sup>La materia se le llama no autogravitante si su presencia no modifica significativamente el fondo gravitatorio en el cual se propaga.

Hilbert se le adicionan correcciones cuadráticas respecto a los invariantes de curvatura, de forma tal que las ecuaciones que describen la dinámica del sistema sean a lo sumo de segundo orden respecto a las derivadas de la métrica. La combinación que cumple esta propiedad es conocida como: término de Gauss–Bonnet

$$\mathcal{R}_{\text{GB}}^2 = R^2 - 4R_{AB}R^{AB} + R_{ABCD}R^{ABCD}. \quad (1.25)$$

Adicionalmente, este nuevo término satisface todas las características deseadas para las ecuaciones de Einstein. En efecto, las ecuaciones de campo no poseen derivadas de la métrica de tercer orden o mayor y tales ecuaciones tienen divergencia nula. Luego, existe conservación del tensor de energía–momento asociado a la materia [87, 88, 89]. Otra característica importante del término de Gauss–Bonnet es la ausencia de estados de norma negativa (estados fantasma) en el *vacío* [90]. En cuatro dimensiones  $R_{\text{GB}}^2$  es un término topológico y no contribuye a las ecuaciones dinámicas clásicas<sup>4</sup>, por lo que usualmente es ignorado. En dimensiones superiores esto no ocurre, su aporte a las ecuaciones de movimiento es importante.

El término de Gauss–Bonnet ha sido extensivamente estudiado en el contexto de los mundos membrana. En [92, 93, 94] se obtienen algunas soluciones a las ecuaciones de Einstein en cinco dimensiones para modelos de membranas finas con un bulto que contiene correcciones del tipo Gauss–Bonnet. Por otra parte, en [95, 96, 97] se muestra la existencia de un gravitón no masivo localizado sobre la membrana, en adición a esto, si la constante de acoplamiento del término de Gauss–Bonnet es pequeña, las correcciones a la ley de Newton son similares a las obtenidas en el modelo de RS.

Las características generales de mundos membrana finos con campos escalares y el término de Gauss–Bonnet en el bulto son estudiados en [98]–[107].

---

<sup>4</sup>No obstante, en el estudio de la gravedad en la geometría  $AdS_4$  este término produce resultados no triviales en las corrientes conservadas de la teoría [91].

A diferencia del espacio–tiempo plano, en fondos gravitatorios con geometrías deformadas en presencia del término de Gauss–Bonnet, se generan algunas configuraciones inestables respecto a fluctuaciones tensoriales [108].

En el marco de modelos de membranas gruesas con el término  $\mathcal{R}_{GB}^2$  en el bulto, en [109] se examinan las propiedades de localización. Específicamente, se estudian los modos escalares, vectoriales y tensoriales de la teoría en un formalismo que no depende de la elección de la norma de las fluctuaciones. En estos trabajos se muestra que para fondos geométricos regulares, el gravitón de cuatro dimensiones usual se localiza sobre la membrana, mientras que los modos cero escalares y vectoriales se encuentran deslocalizados de esta. En otras palabras, estos dos últimos modos desaparecen de la fenomenología cuatridimensional.

## 1.6. Descripción de la tesis

Como hemos mencionado en varias ocasiones, una de las principales características que debe poseer un escenario de mundo membrana ancho es la posibilidad de recuperar la gravedad cuatridimensional usual. En presencia de un acoplamiento no mínimo, es posible localizar el gravitón sin masa sobre la membrana y paralelamente eliminar los efectos no deseados provenientes de los modos escalares y vectoriales asociados a las fluctuaciones de la membrana misma (ver el trabajo [83]). De igual manera, al incorporar el término de Gauss–Bonnet al bulto, se logra reproducir la gravedad en cuatro dimensiones, pues, nuevamente, el modo cero tensorial reside en la membrana, mientras que las fluctuaciones de carácter escalar y vectorial se desacoplan de esta [109].

El propósito fundamental de este trabajo es el explorar las condiciones que posibilitan la obtención de la gravedad cuatridimensional para una membrana

gruesa con geometría regular donde *coexisten* los efectos del acoplamiento no mínimo y el término de Gauss–Bonnet. Para ello, es indispensable el estudio de las fluctuaciones gravitacionales de este modelo.

En el capítulo 2 se considera una membrana ancha en cinco dimensiones con una geometría deformada que presenta invarianza de Poincaré cuatridimensional. Se calcula la masa de Planck efectiva del modelo y se investigan las condiciones de regularidad de la geometría para una clase importante de soluciones.

Utilizando un formalismo invariante de norma, en el capítulo 3 se estudian las fluctuaciones de la física del fondo gravitatorio y sus propiedades de localización, bajo las suposiciones de tener una masa de Planck cuatridimensional finita y un espacio–tiempo que carece de singularidades. Para el sector tensorial se tienen en cuenta de manera simultánea la contribución del acoplamiento no mínimo y el término de Gauss–Bonnet. Este estudio, unido a los resultados del capítulo 2, fue publicado en [110]. En lo referente a los sectores escalar y vectorial, desafortunadamente la complejidad de las ecuaciones para las fluctuaciones dificulta el análisis conjunto de los efectos del acoplamiento no mínimo y el término de Gauss–Bonnet. De este modo, para estos sectores, solo se estudia cada caso por separado. La circunstancia donde únicamente se encuentra presente el término de Gauss–Bonnet fue estudiada en [109] (aunque en esta tesis se utiliza una norma para las fluctuaciones diferente a la de ese artículo). En el caso en el que solo está presente el acoplamiento no mínimo se investigan las propiedades de localización de los modos escalares y vectoriales mediante la utilización de técnicas conformes (en [83] se hace un estudio similar usando un procedimiento distinto al nuestro).

Haciendo uso del método de perturbaciones singulares con capas de frontera, en el capítulo 4 se obtienen algunas soluciones particulares de las ecuaciones que describen la física del fondo. Además, se estudian las propiedades

de localización asociadas a tales perfiles y se analizan las condiciones para que estos sean físicamente admisibles [110]. Finalmente, en el capítulo 5 se presentan las conclusiones del trabajo.

Esta tesis se basa fundamentalmente en el artículo [110]. Específicamente, los resultados de este se encuentran expuestos en el capítulo 2, la sección (3.3.1) y en el capítulo 4.

# Capítulo 2

## Física del fondo

En este capítulo presentamos una membrana gruesa modelada por un campo escalar real pentadimensional no mínimamente acoplado a la gravedad más el término de Gauss–Bonnet en el bulto. Se muestran las ecuaciones de campo para una métrica deformada con invarianza de Poincaré cuatridimensional.

Además, se obtiene la masa de Planck en cuatro dimensiones en función de los parámetros de la teoría. Para una clase importante de configuraciones de la geometría, se estudian las condiciones que permiten tener un modelo donde los escalares de curvatura son regulares y la masa de Planck cuatridimensional es finita.

### 2.1. Ecuaciones de campo

Consideremos la siguiente acción

$$S = \int_{M_5} d^5x \sqrt{|g|} \left\{ -\frac{L(\varphi)}{2\kappa} R + \frac{1}{2} (\nabla\varphi)^2 - V(\varphi) - \alpha \mathcal{R}_{GB}^2 \right\}, \quad (2.1)$$

donde  $M_5$  es una variedad espacio–temporal de cinco dimensiones. En la expresión anterior  $\varphi$  es el campo escalar que modela la membrana ancha. La función  $L(\varphi)$  caracteriza el acoplamiento no mínimo entre la materia escalar y la gravedad. La función  $L(\varphi)$  es positiva [80], pues, en caso contrario, se obtiene que la gravedad newtoniana es repulsiva, lo cual es físicamente inaceptable. El segundo término en (2.1) describe la parte cinética del campo escalar, mientras que  $V(\varphi)$  es su potencial de autointeracción. Por otra parte, la constante de acoplamiento  $\alpha$  tiene dimensiones de masa y describe la intensidad de los efectos asociados al término de Gauss–Bonnet. En principio, el signo de  $\alpha$  es arbitrario. A pesar de ello, al igual que en [109], en nuestro trabajo principalmente nos centraremos en el caso  $\alpha > 0$ , pues este presenta mayores dificultades relacionadas con la consistencia física del modelo, de modo que necesita un estudio más cuidadoso.

Al variar la acción (2.1) con respecto a la métrica obtenemos las ecuaciones de Einstein<sup>1</sup>, las cuales pueden ser expresadas de la siguiente manera

$$L R_{AB} = \kappa \tau_{AB} + \nabla_A \nabla_B L + \frac{1}{3} g_{AB} \square L - \epsilon \mathcal{Q}_{AB}, \quad (2.2)$$

donde  $\epsilon = 2\alpha\kappa$  y el contenido de materia escalar del bulto es descrito por el tensor de energía–momento

$$\tau_{AB} = \partial_A \varphi \partial_B \varphi - \frac{2}{3} g_{AB} V(\varphi). \quad (2.3)$$

La contribución del acoplamiento no mínimo entre la materia y la gravedad a las ecuaciones de Einstein (2.2) está dado por los términos que contienen la función  $L(\varphi)$ . La cantidad  $\mathcal{Q}_{AB}$  es denominado tensor de Lanczos y representa la corrección del término de Gauss–Bonnet a las ecuaciones de Einstein, el

---

<sup>1</sup>La derivación de las ecuaciones de Einstein para el caso de acoplamiento no mínimo y/o con el término de Gauss–Bonnet en el bulto se puede encontrar en la referencia [111].

cual adopta la forma

$$\mathcal{Q}_{AB} = \frac{1}{3} g_{AB} \mathcal{R}_{\text{GB}}^2 - 2 R R_{AB} + 4 R_{AC} R^C_B + 4 R^{CD} R_{ACBD} - 2 R_{ACDE} R_B{}^{CDE}.$$

Como hemos comentado anteriormente, la introducción del término de Gauss–Bonnet no produce ecuaciones de campo con derivadas de la métrica superiores al segundo orden. Esto se puede comprobar directamente de la expresión anterior, pues esta solo contiene sumandos que dependen de la métrica y de las contracciones del tensor de Riemann.

La ecuación de Klein–Gordon asociada a la acción (2.1) adquiere la forma

$$\square\varphi + \frac{1}{2\kappa} R L_\varphi + \frac{\partial V}{\partial\varphi} = 0, \quad \text{donde} \quad L_\varphi = \frac{dL}{d\varphi}. \quad (2.4)$$

El acoplamiento no mínimo entre el campo escalar y la gravedad se refleja en la presencia del segundo término en la ecuación anterior. Por otro lado, no existe una contribución explícita del término de Gauss–Bonnet a la ecuación de Klein–Gordon. Esto es consecuencia de la inexistencia de un acoplamiento directo entre el campo escalar y  $\mathcal{R}_{\text{GB}}^2$ .

De modo similar al escenario de RS, estudiemos una geometría que respete la invarianza de Poincaré en cuatro dimensiones. Para ello, propongamos el siguiente *ansatz*

$$ds^2 = a^2(w) [\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - dw^2]. \quad (2.5)$$

Esta métrica es una generalización suave de la utilizada en el modelo de RS, ahora expresada en coordenadas conformes. El rol del factor de deformación lo adquiere la función  $a(w)$ .

La existencia de la simetría de Poincaré cuatridimensional ocasiona que el perfil de la pared de dominio solo dependa de la dimensión extra, luego, el campo escalar hereda esta dependencia simple. De este modo, para la geometría dada en (2.5) las ecuaciones de Einstein se pueden escribir de la

siguiente manera

$$2\kappa a^2 V + 6\mathcal{H}L' + L'' + 3[2L\mathcal{H}^2 + q(\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)] = 0, \quad (2.6)$$

$$L'' - 2\mathcal{H}L' + \kappa\varphi'^2 + 3q(\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2) = 0, \quad (2.7)$$

donde la  $(')$  denota derivada con respecto a  $w$ . Además:

$$q = L - 4\epsilon\frac{\mathcal{H}^2}{a^2}, \quad \text{mientras que} \quad \mathcal{H} = \frac{a'}{a}.$$

Por otra parte, la ecuación de Klein–Gordon asociada al campo escalar es

$$\varphi'' + 3\mathcal{H}\varphi' - \frac{2L_\varphi}{\kappa}(3\mathcal{H}^2 + 2\mathcal{H}') - \frac{dV}{d\varphi}a^2 = 0. \quad (2.8)$$

Aunque hemos obtenido tres ecuaciones de campo, es de destacar que sólo dos son independientes. Esto se puede mostrar del modo siguiente: si derivamos (2.6) respecto a  $w$  y usamos (2.8), obtenemos (2.7). Este resultado no es una sorpresa si tenemos en cuenta las identidades de Bianchi.

El sistema de ecuaciones (2.6)–(2.8) es no lineal. En adición a esto, la presencia del acoplamiento no mínimo y el término de Gauss–Bonnet dificultan la búsqueda de soluciones exactas para tal sistema. En el capítulo 4 examinaremos algunas soluciones de estas ecuaciones de campo utilizando el método de perturbaciones singulares.

## 2.2. Masa de Planck cuatridimensional

Se puede obtener la relación entre las masas de Planck de cuatro y cinco dimensiones  $M_P$  y  $M_*$ , respectivamente, mediante una reducción dimensional de la acción (2.1). Específicamente, para obtener esta relación es suficiente con extraer el término de Einstein–Hilbert cuatridimensional efectivo de la acción en cinco dimensiones.

Al igual que en el modelo de RS, consideremos una generalización del espacio–tiempo inicial (2.5):

$$ds^2 = g_{AB}dx^A dx^B = a^2(w)[\widehat{g}_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu - dw^2], \quad (2.9)$$

donde  $\widehat{g}_{\mu\nu}(x)$  es una métrica cuatridimensional arbitraria. En términos de esta geometría, la acción de Einstein–Hilbert efectiva en cuatro dimensiones toma el siguiente aspecto

$$S_{EH}^{(4)} \sim -M_P^2 \int d^4x \sqrt{|\widehat{g}_4|} \widehat{R}^{(4)}.$$

En la expresión anterior, las cantidades con el superíndice 4 son calculadas respecto a la métrica  $\widehat{g}_{\mu\nu}(x)$ .

A diferencia de los escenarios ADD y RS, la presencia del acoplamiento no mínimo y el sumando  $\mathcal{R}_{\text{GB}}^2$  en la acción pentadimensional (2.1), complican la extracción de  $S_{EH}^{(4)}$  de esta. En nuestro caso, la función de acoplamiento  $L(\varphi)$  solo depende de la dimensión extra vía el campo escalar  $\varphi$ . Luego, el sumando  $\frac{-L(\varphi)R}{2\kappa}$  tiene una aportación no trivial a la acción de Einstein–Hilbert cuatridimensional. De igual manera, el término  $\alpha\mathcal{R}_{\text{GB}}^2$  añade una nueva contribución a la acción  $S_{EH}^{(4)}$ .

Un método para encontrar  $S_{EH}^{(4)}$  consiste en interpretar al factor de deformación  $a(w)$  como una transformación conforme entre la métrica  $g_{AB}$  definida en (2.9) y cierta métrica  $\widehat{g}_{AB}$

$$g_{AB} = a^2(w)\widehat{g}_{AB} = a^2(w) \begin{pmatrix} \widehat{g}_{\mu\nu}(x) & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Puesto que después de la reducción dimensional de (2.1) solo necesitamos identificar al factor  $\sqrt{|\widehat{g}_4|} \widehat{R}^{(4)}$ , es suficiente estudiar la parte geométrica de esta

$$S_{geom} = - \int_{M_5} d^5x \sqrt{|g|} \left\{ \frac{L(\varphi)}{2\kappa} R + \alpha\mathcal{R}_{\text{GB}}^2 \right\}. \quad (2.11)$$

Bajo la transformación conforme (2.10) el escalar de Ricci  $R$  adquiere la siguiente forma

$$R = a^{-2} \left( \widehat{R} - 8\widehat{\square}f - 12(\widehat{\nabla}f)^2 \right), \quad (2.12)$$

donde  $f = \ln a$  y las cantidades con sombrero están definidas con respecto a la métrica  $\widehat{g}_{AB}$ .

Por otra parte, en el apéndice B se obtiene el término de Gauss–Bonnet expresado en el lenguaje de las cantidades geométricas asociadas a la métrica  $\widehat{g}_{AB}$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{GB}^2 = & \widehat{C}^2 + \frac{1}{3a^4} \left[ -8\widehat{R}_{AB}\widehat{R}^{AB} + \frac{5}{2}\widehat{R}^2 - 12\widehat{R}(\widehat{\nabla}f)^2 - 24\widehat{R}\widehat{\square}f \right. \\ & + 48\widehat{R}^{AB}\widehat{\nabla}_A\widehat{\nabla}_Bf - 48\widehat{R}^{AB}\widehat{\nabla}_A f\widehat{\nabla}_B f + 72(\widehat{\square}f)^2 + 72(\widehat{\nabla}f)^4 \\ & \left. - 72(\widehat{\nabla}_A\widehat{\nabla}_Bf)(\widehat{\nabla}^A\widehat{\nabla}^Bf) + 144(\widehat{\nabla}_A\widehat{\nabla}_Bf)(\widehat{\nabla}^A f)(\widehat{\nabla}^B f) + 144(\widehat{\nabla}f)^2\widehat{\square}f \right]. \end{aligned} \quad (2.13)$$

En la relación anterior  $\widehat{C}^2 = \widehat{C}^{ABCD}\widehat{C}_{ABCD}$ , donde  $\widehat{C}_{ABCD}$  es el tensor de Weyl correspondiente a la métrica  $\widehat{g}_{AB}$ .

Dada la simplicidad del espacio–tiempo  $\widehat{g}_{AB}$ , el tensor de Ricci  $\widehat{R}_{AB}$  toma el siguiente aspecto

$$\begin{aligned} \widehat{R}_{A5} &= 0, \\ \widehat{R}_{\mu\nu} &= \widehat{R}_{\mu\nu}^{(4)}. \end{aligned}$$

Luego, el escalar de Ricci asociado a  $\widehat{g}_{AB}$  es

$$\widehat{R} = \widehat{R}^{(4)}.$$

La expresión anterior implica que en (2.13) únicamente los sumandos lineales en  $\widehat{R}$  contribuyen a la acción de Einstein–Hilbert en cuatro dimensiones. De esta manera, en virtud de las expresiones

$$\begin{aligned} (\widehat{\nabla}f)^2 &= -\mathcal{H}^2, \\ \widehat{\square}f &= -\mathcal{H}', \end{aligned}$$

y de las fórmulas (2.11)–(2.13), se tiene que la masa de Planck en cuatro dimensiones adquiere la siguiente forma [110]

$$\begin{aligned} M_P^2 &= 2M^3 \int_{-\infty}^{\infty} a^3(w) \left[ L(\varphi) + \frac{4\epsilon}{a^2} (\mathcal{H}^2 + 2\mathcal{H}') \right] dw \\ &= 2M^3 \int_{-\infty}^{\infty} a^3(w) q dw + 16 M^3 \epsilon a' \Big|_{-\infty}^{+\infty}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Como era de esperar, la relación entre las masas de Planck dependen del acoplamiento no mínimo y del término de Gauss–Bonnet.

Por otra parte, nuestro modelo es consistente si  $M_P^2$  es finita y positiva. En el caso donde  $L(\varphi) = 1$  y  $\epsilon = 0$ , se recupera el escenario donde tenemos un campo escalar mínimamente acoplado a la gravedad más el término usual de Einstein–Hilbert sobre el bulto. En este límite se tiene que  $M_P^2 > 0$ . Cuando se encuentra presente el acoplamiento no mínimo y/o el término de Gauss–Bonnet, no se puede garantizar una masa de Planck cuatridimensional positiva para todas las configuraciones de la geometría y de los parámetros del modelo. Para entender mejor este último punto consideremos un ejemplo.

Supongamos que tenemos un escenario donde  $L(\varphi) > 0$  y  $a' \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0$ , en este caso, el signo de  $M_P^2$  depende del parámetro  $\epsilon$  y del factor de deformación. Si  $\epsilon < 0$  se tiene que  $M_P^2 > 0$  independientemente del factor de deformación. En cambio, en el caso  $\epsilon > 0$  el signo de  $M_P^2$  depende del perfil de  $a(w)$ . Este ejemplo nos sugiere que en presencia del término de Gauss–Bonnet, no todas las soluciones de las ecuaciones de campo (2.6)–(2.8) arrojan un valor positivo de  $M_P^2$ . Luego, en el estudio de una solución particular dada es imprescindible comprobar si esta arroja un valor positivo para el cuadrado de la masa de Planck cuatridimensional.

## 2.3. Regularidad de la geometría

Además de las condiciones de consistencia mencionadas en la sección anterior, es deseable que nuestro escenario no posea singularidades en la geometría. En este trabajo se estudian modelos de membranas gruesas. Esto garantiza que los escalares de curvatura sean suaves en la posición de la membrana. Sin embargo, como comentamos en la sección (1.5.1), la existencia de un ancho no trivial en la membrana no previene la formación de singularidades de los escalares de curvatura en  $w = \pm\infty$ .

Los invariantes de curvatura del espacio-tiempo (2.5) toman el siguiente aspecto

$$\begin{aligned} R &= \frac{4}{a^2} \left( 2\mathcal{H}' + 3\mathcal{H}^2 \right), \\ R^{AB}R_{AB} &= \frac{4}{a^4} \left( 5\mathcal{H}'^2 + 9\mathcal{H}^4 + 6\mathcal{H}'\mathcal{H}^2 \right), \\ R^{ABCD}R_{ABCD} &= \frac{4}{a^4} \left( 4\mathcal{H}'^2 + 6\mathcal{H}^4 \right). \end{aligned}$$

Para un factor de deformación arbitrario, es difícil caracterizar las condiciones que permiten una geometría regular en todo el dominio de variación de  $w$ . Por consiguiente, en lugar de abordar el problema general, estudiemos las condiciones de regularidad para una clase particular de soluciones. Asumamos que  $a(w)$  es una función par<sup>2</sup> y analítica para todo  $w$ , excepto en  $w = \pm\infty$  donde esta posee el siguiente comportamiento

$$a(w \rightarrow \infty) \sim \frac{1}{|w|^\gamma}, \quad (2.15)$$

siendo positivo el exponente  $\gamma$ .

Sobre la región asintótica se tiene que:

$$\mathcal{H} \sim -\text{sgn}(w) \frac{\gamma}{|w|}, \quad \text{y} \quad \mathcal{H}' \sim \frac{\gamma}{|w|^2},$$

---

<sup>2</sup>La paridad del factor de deformación puede interpretarse como una versión suave de la simetría  $Z_2$  del modelo de RS.

donde  $\text{sgn}(w)$  es la función signo. Esto implica el siguiente comportamiento para los escalares de curvatura

$$R \simeq |w|^{2(\gamma-1)}, \quad R^{AB}R_{AB} \simeq R^{ABCD}R_{ABCD} \simeq |w|^{4(\gamma-1)}.$$

Entonces, si imponemos regularidad en infinito los valores de  $\gamma$  se encuentran limitados al intervalo  $0 < \gamma \leq 1$ . Bajo esta condición, la cantidad  $M_{\text{P}}^2$  se puede escribir como sigue

$$M_{\text{P}}^2 \sim M^3 \int_{-\infty}^{\infty} a^3 q, \quad (2.16)$$

pues,  $a'|_{-\infty}^{+\infty} = 0$ .

En resumen, las geometrías asociadas a la clase de soluciones definidas en (2.15) son regulares cuando  $0 < \gamma \leq 1$ . En esta región del parámetro  $\gamma$  la masa de Planck cuatridimensional (2.15) se reduce a la expresión dada en (2.16).

Un modelo de mundo membrana físicamente consistente no se basa solamente en poseer una geometría regular y una masa de Planck efectiva que sea finita y positiva. Como mencionamos anteriormente, es imprescindible la existencia de un gravitón sin masa localizado sobre la membrana. Por este motivo, en el siguiente capítulo exploraremos las propiedades de localización de las fluctuaciones de la geometría y la materia escalar.

## Capítulo 3

# Fluctuaciones gravitacionales: localización de la gravedad

El estudio de las propiedades de localización de la gravedad en mundos membrana se lleva a cabo mediante el análisis de las pequeñas fluctuaciones de la geometría y del campo escalar asociadas a tales objetos. En estos escenarios este estudio puede ser complicado, pues, para una membrana ancha caracterizada por un ancho y un perfil determinado, las fluctuaciones de la geometría necesariamente se acoplan a las de la materia.

Por otra parte, al igual que en la Relatividad General, la covarianza de la teoría induce cierta invarianza de norma sobre las fluctuaciones de la métrica y la materia. Estos grados de libertad de norma se combinan con las fluctuaciones físicas produciendo interpretaciones espurias de los resultados. Entonces, es necesario un mecanismo que permita diferenciar los efectos asociados a la libertad de norma de los independientes de esta.

Existen dos formas de tratar con las ambigüedades relacionadas con la libertad de norma de la teoría. La primera consiste en fijar completamente la norma, mientras que la segunda es estudiar las fluctuaciones en función

de variables invariantes ante transformaciones de norma. En este trabajo principalmente utilizaremos el segundo método.

Con el objetivo de estudiar las fluctuaciones de la geometría y la materia de nuestro modelo, utilizaremos una generalización del *formalismo de Bardeen* [112] empleado en la cosmología. La idea fundamental es parametrizar las fluctuaciones de la métrica mediante una definición conveniente de las variables invariantes de norma de modo que estas no cambien bajo una transformación infinitesimal de coordenadas (transformación de norma). Una de las ventajas del formalismo de Bardeen es su efectividad en la identificación del sistema coordinado donde las variables invariantes de norma adquieren una forma simple.

En la cosmología estándar de cuatro dimensiones las fluctuaciones de la métrica pueden ser clasificadas en modos escalares, vectoriales y tensoriales respecto al grupo de rotaciones en tres dimensiones [112, 113]. Este hecho facilita el estudio de las fluctuaciones, esencialmente por dos razones. Primeramente, las ecuaciones dinámicas que describen la evolución de los modos escalares, vectoriales y tensoriales se desacoplan a orden lineal de las perturbaciones. Una segunda ventaja de explotar la simetría de la métrica es que esta facilita la construcción de variables invariantes de norma.

En nuestro caso procederemos de manera similar a la cosmología estándar, aunque esta vez el grupo de simetría que permite la descomposición de las fluctuaciones en sectores escalares, vectoriales y tensoriales es distinto. La geometría descrita en (2.5) rompe la simetría de Poincaré en 5D a consecuencia de la existencia de la membrana gruesa. A pesar de ello, al igual que en el escenario de RS, sobre nuestra membrana se preserva la simetría de Poincaré en 4D la cual permite la clasificación de las fluctuaciones respecto a esta.

### 3.1. Ecuaciones generales de las fluctuaciones

Consideremos las fluctuaciones de la métrica y el campo escalar alrededor del fondo gravitatorio especificado por medio de la métrica (2.5) y las ecuaciones de campo (2.6)–(2.8). En otras palabras, las fluctuaciones de la geometría adquieren el siguiente aspecto

$$ds_p^2 = (a^2(w)\eta_{AB} + H_{AB}) dx^A dx^B,$$

mientras que las del campo escalar se pueden escribir como sigue

$$\varphi_p = \varphi + \chi.$$

En las dos últimas expresiones el subíndice  $p$  denota a las magnitudes perturbadas. Las cantidades  $g_{AB} = a^2(w)\eta_{AB}$  y  $\varphi$  representan a la métrica y a la materia de fondo, respectivamente. En principio, las fluctuaciones  $H_{AB}$  y  $\chi$  dependen de todas las coordenadas.

La existencia del acoplamiento no mínimo y el término de Gauss–Bonnet en la teoría, torna más complicado el estudio de las ecuaciones de las fluctuaciones si lo comparamos con un modelo donde solamente existe el término de Einstein–Hilbert y un campo escalar mínimamente acoplado a la gravedad. Bajo estas circunstancias las perturbaciones de las ecuaciones de Einstein toman el siguiente aspecto

$$\begin{aligned} L\delta R_A^B &= -R_A^B\delta L + \kappa\delta\tau_A^B - \epsilon\delta Q_A^B - H^{BC}\nabla_C\nabla_A L + \nabla^B\nabla_A\delta L \\ &\quad - g^{BC}\delta\Gamma_{CA}^K\nabla_K L - \frac{1}{3}\delta_A^B (H^{CD}\nabla_C\nabla_D L - \square\delta L \\ &\quad + g^{CD}\delta\Gamma_{CD}^K\nabla_K L), \end{aligned} \quad (3.1)$$

donde la  $\delta$  en las cantidades anteriores denota variación a primer orden respecto a la métrica y la materia, mientras que el operador  $\nabla$  es tomado con respecto a la métrica de fondo  $g_{AB}$ . Las fluctuaciones del tensor de energía–momento se pueden escribir como sigue

$$\delta\tau_A^B = \nabla_A\varphi\nabla^B\chi + \nabla_A\chi\nabla^B\varphi - \frac{2}{3}\delta_A^B\frac{\partial V}{\partial\varphi}\chi. \quad (3.2)$$

El tensor de Lanczos perturbado adquiere la forma que mostramos a continuación

$$\begin{aligned}\delta Q_A^B &= \frac{1}{3}\delta\mathcal{R}_{GB}^2\delta_A^B - 2R\delta R_A^B - 2\delta R R_A^B + 4\delta R_{AC} R^{CB} \\ &\quad + 4R_{AC}\delta R^{CB} + 4\delta R_{CD} R_A^{CBD} + 4R_{CD}\delta R_A^{CBD} \\ &\quad - 2\delta R_{ACDE}R^{BCDE} - 2R_{ACDE}\delta R^{BCDE},\end{aligned}\quad (3.3)$$

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{R}_{GB}^2 &= 2R\delta R - 4R_{CD}\delta R^{CD} - 4\delta R_{CD}R^{CD} \\ &\quad + R_{ABCD}\delta R^{ABCD} + \delta R_{ABCD}R^{ABCD},\end{aligned}\quad (3.4)$$

donde

$$\delta R = -R_{CD}H^{CD} + g^{CD}\delta R_{CD}.\quad (3.5)$$

Por otra parte, la ecuación de Klein–Gordon perturbada toma el siguiente aspecto

$$\begin{aligned}-H^{AB}\nabla_A\nabla_B\varphi + g^{AB}\square\chi - g^{AB}\delta\Gamma_{AB}^C\nabla_C\varphi \\ + \frac{1}{2\kappa}(L_\varphi\delta R + \chi RL_\varphi\varphi) + \frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}\chi = 0.\end{aligned}\quad (3.6)$$

## 3.2. Variables invariantes de norma

Como mencionamos anteriormente, nuestro modelo, al igual que la Teoría General de la Relatividad, es una teoría covariante; por lo que las ecuaciones de la teoría se escriben en términos de igualdades tensoriales. En otras palabras, las ecuaciones de campo pueden ser escritas equivalentemente en un sistema de coordenadas  $x^A$  o en otro arbitrario  $\tilde{x}^A$  difeomorfo al primero. Esta equivalencia entre los distintos sistemas coordenados puede ser interpretada como una libertad de norma de la teoría. Para analizar este último punto asumamos, al igual que en las Referencias [114, 115, 116], una transformación infinitesimal de coordenadas dada por:

$$\tilde{x}^A = x^A + \lambda^A,\quad (3.7)$$

donde  $\lambda^A$  es un vector infinitesimal arbitrario que parametriza la transformación de coordenadas.

Se puede mostrar [117] que bajo esta transformación las fluctuaciones lineales de un tensor arbitrario  $Q$  se transforman de la siguiente manera

$$\delta\tilde{Q}(x^A) = \delta Q(x^A) - \mathcal{L}_\lambda Q(x^A), \quad (3.8)$$

donde  $\mathcal{L}_\lambda Q$  es la derivada de Lie del tensor  $Q$  respecto al vector de norma  $\lambda^A$ . La identidad (3.8) nos muestra que una teoría covariante que involucre cantidades tensoriales  $Q$  puede ser escrita de manera equivalente en términos de los campos  $Q(x^A)$  o de los campos  $\tilde{Q}(x^A)$ .

Para el caso en que  $Q$  es igual a nuestra métrica de fondo, se tiene que

$$\tilde{H}_{AB}(x^C) = H_{AB}(x^C) - \nabla_A \lambda_B(x^C) - \nabla_B \lambda_A(x^C), \quad (3.9)$$

donde la derivada covariante se calcula usando la métrica de fondo. Igualmente, las fluctuaciones del campo escalar se transforman del siguiente modo

$$\tilde{\chi}(x^C) = \chi(x^C) - \lambda_A(x^C) \nabla^A \varphi(x^C). \quad (3.10)$$

La cantidad  $H_{AB}$  puede ser percibida como una matriz simétrica. En consecuencia, esta posee quince grados de libertad, de los cuales cinco están asociados a la elección de la norma (elección del vector  $\lambda^A$ ), de modo que realmente solo existen diez grados de libertad independientes.

Por otra parte, debido a que la métrica pentadimensional de fondo es invariante ante transformaciones de Poincaré cuatridimensionales, las fluctuaciones de la geometría pueden ser descompuestas en modos escalares, vectoriales y tensoriales respecto a esta simetría subyacente [82, 118, 119, 120]

$$H_{AB} = H_{AB}^{(S)} + H_{AB}^{(V)} + H_{AB}^{(T)},$$

donde

$$H_{AB}^{(S)} = a^2(w) \begin{pmatrix} 2(\eta_{\mu\nu}\psi + \partial_\mu\partial_\nu E) & \partial_\mu C \\ \partial_\mu C & 2\xi \end{pmatrix}, \quad (3.11)$$

$$H_{AB}^{(V)} = a^2(w) \begin{pmatrix} (\partial_\mu f_\nu + \partial_\nu f_\mu) & D_\mu \\ D_\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.12)$$

$$H_{AB}^{(T)} = a^2(w) \begin{pmatrix} 2h_{\mu\nu} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

En la última expresión el tensor  $h_{\mu\nu}$  es transversal y sin traza respecto a la métrica de Minkowski  $\eta_{\mu\nu}$ . Dicho de otro modo

$$h_\mu^\mu = 0, \quad \partial_\nu h_\mu^\nu = 0. \quad (3.14)$$

Además, los vectores  $f_\mu$  y  $D_\mu$  tienen divergencia nula

$$\partial^\mu f_\mu = 0, \quad \partial^\mu D_\mu = 0. \quad (3.15)$$

Las cuatro funciones restantes son escalares bajo las transformaciones de Poincaré cuatridimensionales.

De las restricciones (3.11)-(3.15) se puede apreciar que las fluctuaciones de la geometría tienen quince grados de libertad: cinco tensoriales, seis vectoriales y cuatro escalares. No obstante, como comentamos anteriormente, solo diez de estas cantidades son independientes.

Veamos como se transforman los sectores escalar, vectorial y tensorial bajo la transformación de norma (3.9). Para ello escribamos el vector  $\lambda_A$  de la siguiente forma

$$\lambda_A = a^2(w)(\lambda_\mu, -\lambda_w).$$

Nuevamente es útil recurrir a la simetría de Poincaré en cuatro dimensiones de nuestra métrica de fondo; esta vez nos permite descomponer la parte cuatridimensional del vector de norma de la siguiente manera

$$\lambda_\mu = \partial_\mu \lambda + \rho_\mu,$$

donde  $\lambda$  es un escalar y  $\partial^\mu \rho_\mu = 0$ .

Usando la expresión (3.9) y la relación anterior, se pueden encontrar las leyes de transformación para las componentes de las fluctuaciones de la geometría. El tensor  $h_{\mu\nu}$  es invariante ante transformaciones de norma, en otras palabras

$$\tilde{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}, \quad (3.16)$$

mientras que el sector vectorial se transforman como sigue

$$\tilde{f}_\mu = f_\mu - \rho_\mu, \quad (3.17)$$

$$\tilde{D}_\mu = D_\mu - \rho'_\mu. \quad (3.18)$$

Finalmente las fluctuaciones escalares se transforman de la siguiente manera

$$\tilde{E} = E - \lambda, \quad (3.19)$$

$$\tilde{\psi} = \psi - \mathcal{H}\lambda_w, \quad (3.20)$$

$$\tilde{C} = C - \lambda' + \lambda_w, \quad (3.21)$$

$$\tilde{\xi} = \xi + \mathcal{H}\lambda_w + \lambda'_w. \quad (3.22)$$

De aquí se tiene que las fluctuaciones escalares y tensoriales no son invariantes ante cambios de norma. Es posible construir variables invariantes de norma haciendo uso de un procedimiento similar al formalismo de Bardeen, esta vez en cinco dimensiones [82, 109, 119]. Puesto que las fluctuaciones de la geometría de fondo contienen dos vectores sin divergencia y un vector de norma  $\rho_\mu$ , solamente es posible construir un vector invariante ante transformaciones de norma. Una posible elección de la variable vectorial invariante de norma es

$$\tilde{V}_\mu = \tilde{D}_\mu - \tilde{f}'_\mu. \quad (3.23)$$

En virtud de (3.17) y (3.18) es fácil demostrar que  $\tilde{V}_\mu = V_\mu$ .

De modo similar, el sector escalar posee cuatro funciones que caracterizan las fluctuaciones escalares de la métrica y dos funciones de norma ( $\lambda$  y  $\lambda_w$ ).

Luego, es posible construir dos variables escalares invariantes de norma:

$$\tilde{\Psi} = \tilde{\psi} - \mathcal{H}(\tilde{E}' - \tilde{C}), \quad (3.24)$$

$$\tilde{\Xi} = \tilde{\xi} - \frac{1}{a}[a(\tilde{C} - \tilde{E}')]' \quad (3.25)$$

Una vez más, es sencillo mostrar la invarianza de norma de las variables anteriores. De las fórmulas (3.19)-(3.22) se obtiene que  $\tilde{\Xi} = \Xi$  y  $\tilde{\Psi} = \Psi$ .

También es posible crear una variable invariante de norma para las fluctuaciones del campo escalar. Teniendo en cuenta (2.5) y (3.10),  $\chi$  se transforma de la siguiente manera

$$\tilde{\chi} = \chi - \varphi' \lambda_w.$$

La variable invariante de norma asociada se puede escribir como sigue

$$\tilde{X} = \tilde{\chi} - \varphi'(\tilde{E}' - \tilde{C}). \quad (3.26)$$

En total tenemos once variables invariantes de norma, diez asociadas al sector geométrico y una al campo escalar de fondo. Estas se encuentran distribuidas de la siguiente manera: cinco variables tensoriales ( $h_{\mu\nu}$ ), tres vectoriales ( $V_\mu$  con  $\partial^\mu V_\mu = 0$ ) y tres escalares ( $\Psi$ ,  $\Xi$  y  $X$ ). Existen infinitas variables invariantes de norma, pues cualquier combinación de ellas es también invariante de norma. Una de las ventajas de nuestra elección de las variables invariantes de norma consiste en que las ecuaciones para las fluctuaciones lineales asociadas a estas adquieren una forma simple.

Aunque la teoría de las fluctuaciones se formule en un formalismo invariante de norma, en ocasiones es conveniente escoger un sistema coordinado particular (una norma) en el cual los cálculos a realizar sean más simples. El carácter covariante de nuestro escenario nos garantiza poder regresar a nuestras variables invariantes de norma de manera consistente. Si la norma se fija completamente, cinco de los quince grados de libertad que aparecen

en la métrica perturbada son eliminados. Existen muchas maneras de fijar la norma, veamos dos de ellas. La primera consiste en escoger las funciones de norma  $\lambda$ ,  $\lambda_w$  and  $\rho_\mu$  de modo que

$$\tilde{E} = 0, \quad \tilde{f}_\mu = 0, \quad \tilde{\psi} = 0,$$

lo que implica las siguientes igualdades

$$\lambda = E, \quad \lambda_w = \frac{\psi}{\mathcal{H}}, \quad f_\mu = \rho_\mu.$$

Por otra parte, una norma especialmente útil es la conocida como norma longitudinal

$$\tilde{E} = 0, \quad \tilde{C} = 0, \quad \tilde{f}_\mu = 0. \quad (3.27)$$

Sobre esta norma se tiene que

$$\lambda = E, \quad \lambda_w = (E' - C), \quad \rho_\mu = f_\mu.$$

En la norma longitudinal, las variables invariantes de norma adquieren el siguiente aspecto

$$\tilde{\Psi} = \tilde{\psi}, \quad \tilde{\Xi} = \tilde{\xi}, \quad \tilde{X} = \tilde{\chi}, \quad \tilde{V}_\mu = \tilde{D}_\mu. \quad (3.28)$$

Luego, para obtener las ecuaciones de las fluctuaciones en términos de las variables invariantes de norma anteriormente definidas, es conveniente separar el procedimiento en dos etapas. Una primera consiste en pasar inicialmente a la norma longitudinal, pues, esta elección simplifica los cálculos asociados a la variación lineal de los tensores de curvatura. Finalmente, utilizando (3.28) y el hecho de que nuestra teoría solamente involucra cantidades tensoriales, podemos reescribir las ecuaciones de las fluctuaciones en función de nuestras variables invariantes de norma en un sistema coordenado arbitrario ( $\lambda_A$  arbitrario).

### 3.3. Localización de la gravedad

En la teoría de perturbaciones cosmológicas estándar las ecuaciones que describen la evolución de los modos escalares, vectoriales y tensoriales se desacoplan a nivel lineal [112, 114, 121]. Un fenómeno similar ocurre en nuestro caso [82, 83, 118, 119], hecho que posibilita el estudio de cada sector de las fluctuaciones por separado. Como hemos expresado en repetidas ocasiones, es indispensable investigar la existencia y localización del gravitón no masivo cuatridimensional, de ahí que sea necesario estudiar los modos tensoriales de nuestro modelo.

De la Relatividad General es conocido que un espacio–tiempo de fondo del tipo Minkowski no soporta la propagación de modos escalares y vectoriales<sup>1</sup>. En nuestro escenario la simetría de Poincaré pentadimensional está rota. En adición a esto, en virtud de la existencia del campo escalar y el término de Gauss–Bonnet en el bulto, pareciera inevitable la propagación de los modos escalares y vectoriales sobre la membrana. Una manera de eliminar estos efectos no observados en nuestro universo consiste en que estos se deslocalicen de la membrana, pues en ese caso desaparecen de la fenomenología cuatridimensional.

#### 3.3.1. Modos tensoriales

Las fluctuaciones del campo escalar  $\chi$  (equivalentemente  $X$ ) no aparecen en las ecuaciones de las fluctuaciones tensoriales y vectoriales, pues, como consecuencia del desacoplamiento entre los diferentes sectores de las fluctuaciones, estas pertenecen al sector escalar. Luego, las ecuaciones de las fluctuaciones (3.1) y (3.6) se simplifican en los sectores tensorial y vectorial.

Sustituyendo (3.13) en las ecuaciones perturbadas a primer orden (3.1)

---

<sup>1</sup>Pueden ser *completamente* removidos mediante una transformación de norma.

se obtiene la siguiente ecuación de evolución para los modos tensoriales (ver el apéndice C.1 para más detalles)

$$qh_{\mu}^{\nu''} + (3\mathcal{H}q + q')h_{\mu}^{\nu'} - \left[ q + \frac{(q-L)'}{2\mathcal{H}} \right] \square^{\eta} h_{\mu}^{\nu} = 0, \quad (3.29)$$

donde  $\square^{\eta} = \eta^{\mu\nu} \nabla_{\mu} \nabla_{\nu}$ .

Para estudiar el espectro de masas de la ecuación anterior es conveniente eliminar el sumando que contiene  $h_{\mu}^{\nu'}$ . Esto se puede hacer mediante la introducción del campo tensorial  $\Psi_{\mu\nu} = \sqrt{s(w)} h_{\mu\nu}$  donde  $s(w) = a^3 q$ . Bajo esta nueva redefinición de  $h_{\mu}^{\nu}$  la ecuación (3.29) adquiere el siguiente aspecto

$$\Psi_{\mu\nu}'' - \frac{(\sqrt{s})''}{\sqrt{s}} \Psi_{\mu\nu} - \frac{r}{s} \square^{\eta} \Psi_{\mu\nu} = 0. \quad (3.30)$$

En la relación anterior  $r(w) = a^3 \left( q + \frac{(q-L)'}{2\mathcal{H}} \right)$ .

Con el propósito de explorar el espectro de masas de las fluctuaciones tensoriales, consideremos la separación de variables  $\Psi_{\mu\nu} = \vartheta(w) \epsilon_{\mu\nu}(x)$ . En términos de estas nuevas variables la ecuación (3.30) se divide en dos ecuaciones

$$\square^{\eta} \epsilon_{\mu\nu}^m + m^2 \epsilon_{\mu\nu}^m = 0, \quad (3.31)$$

$$\vartheta_m'' - \frac{(\sqrt{s})''}{\sqrt{s}} \vartheta_m + m^2 \frac{r}{s} \vartheta_m = 0, \quad (3.32)$$

donde el campo  $\epsilon_{\mu\nu}^m(x)$  describe un modo tensorial cuatridimensional de masa  $m$ , mientras que  $\vartheta_m(w)$  es la amplitud del campo dinámico  $\epsilon_{\mu\nu}^m(x)$  y define las propiedades de localización del campo pentadimensional  $\Psi_{\mu\nu}$ . La ecuación diferencial (3.32) puede ser interpretada como un problema de autovalores de Sturm–Liouville con la norma asociada

$$\langle \vartheta | \vartheta \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r}{s} \vartheta^2 dw. \quad (3.33)$$

Por otra parte, el modo cero  $\epsilon_{\mu\nu}^0(x)$  corresponde al gravitón cuatridimensional sin masa que surge en la Relatividad General. Este modo está localizado sobre

la membrana si su "función de onda"  $\vartheta_0$  es normalizable, en otras palabras, la norma de  $\vartheta_0$  debe ser finita

$$\langle \vartheta_0 | \vartheta_0 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r}{s} \vartheta_0^2 dw < \infty.$$

No es difícil mostrar que  $\vartheta_0 = \sqrt{s}$ , luego, la condición de normalización anterior se transforma en:

$$\langle \vartheta_0 | \vartheta_0 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} a^3 q dw - 4\epsilon [a']_{-\infty}^{\infty} + 8\epsilon \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a'^2}{a} dw. \quad (3.34)$$

Para la clase de soluciones descritas en (2.15) se tiene que  $a'|_{-\infty}^{+\infty} = 0$  y  $\frac{a'^2}{a} \sim \frac{\gamma^2}{|w|^{\gamma+2}}$  en  $w \rightarrow \infty$ , esto garantiza la convergencia de  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a'^2}{a} dw$ . A consecuencia de ello, el gravitón no masivo se encuentra localizado sobre la membrana si la primera integral en (3.34) es finita. Esta integral es proporcional al cuadrado de la masa de Planck en cuatro dimensiones. De esta manera, cuando la geometría es regular, una masa de Planck finita es equivalente a tener el gravitón cuatridimensional localizado sobre la membrana.

Para el caso en que solamente tenemos el término de Gauss–Bonnet en el bulto se tiene que

$$a^3 q \sim \frac{1}{|w|^{3\gamma}} - \frac{4\epsilon\gamma^2}{|w|^{\gamma+2}}, \quad \text{cuando } w \rightarrow \infty.$$

Esto implica que la convergencia de la norma depende del integrando  $\frac{1}{|w|^{3\gamma}}$ . Luego, para tener el modo cero localizado es necesario que los posibles valores del exponente  $\gamma$  se reduzcan al intervalo  $1/3 < \gamma \leq 1$ . Por otra parte, en el caso en el que solamente se tiene acoplamiento no mínimo se obtienen resultados idénticos si consideramos que la función de acoplamiento  $L(\varphi)$  es acotada y no es nula en el infinito<sup>2</sup>. Uniendo estos dos casos llegamos a la conclusión de que bajo pocos requisitos sobre  $L(\varphi)$  y tomando en consideración todos los ingredientes de nuestro modelo, la condición de localización

---

<sup>2</sup>Cuando  $L(\varphi)$  tiende a cero en infinito, la restricción para  $\gamma$  puede tornarse menos restrictiva.

para el modo cero continúa siendo  $1/3 < \gamma \leq 1$ . De aquí se deduce que el hecho de agregar el acoplamiento no mínimo y/o el término de Gauss–Bonnet no modifica cualitativamente las propiedades de localización del gravitón no masivo respecto al escenario donde ninguno de estos dos efectos se encuentra presente.

### 3.3.2. Modos escalares

En el apéndice C.2 se calcula en la norma longitudinal un grupo de cantidades útiles para obtener las ecuaciones de las fluctuaciones escalares. Debido a las igualdades descritas en (3.28), sobre esta norma es sencillo reescribir estas magnitudes en función de las variables invariantes de norma  $\Psi$ ,  $\Xi$  y  $X$ . Ahora, la dependencia funcional de estas cantidades respecto a las variables invariantes de norma en la norma longitudinal se mantiene idéntica en cualquier sistema coordenado (cualquier  $\lambda_A$ ); esto, debido al carácter tensorial de la teoría.

Haciendo uso de las igualdades (C.27)–(C.51) y evocando el comentario del párrafo anterior podemos obtener las ecuaciones de Einstein y Klein–Gordon perturbadas en términos de las variables invariantes de norma. La componente  $(w, w)$  de (3.1) arroja la siguiente ecuación<sup>3</sup>

$$\begin{aligned}
& 4q\Psi'' + 4\Psi' \left[ q + \frac{q'}{\mathcal{H}} + \frac{\varphi' L_\varphi}{3} \right] + 4\Xi' \left[ \frac{\varphi' L_\varphi}{3} + \mathcal{H}q \right] \\
& + 8\Xi \left[ \mathcal{H}'L + \frac{\varphi'^2}{8} - \frac{4\epsilon\mathcal{H}^2}{a^2}(2\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2) + \frac{(\varphi' L_\varphi)'}{3} \right] + q\Box^\eta\Xi \\
& + \frac{8\epsilon}{a^2}(\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2)\Box^\eta\Psi + \varphi'X' + \frac{1}{3}\frac{dV}{d\varphi}a^2X \\
& + 4\mathcal{H}'XL_\varphi + \frac{1}{3} \left[ 4(XL_\varphi)'' - \Box^\eta(XL_\varphi) \right] = 0.
\end{aligned} \tag{3.35}$$

---

<sup>3</sup>Con el ánimo de no sobrecargar las ecuaciones, en esta sección y en el apéndice C.2 usaremos el sistema de unidades de Planck, de ahí que  $2\kappa = 1$ .

Para el caso ( $\mu = \nu$ ) en (3.1) tenemos que

$$\begin{aligned}
& q\Psi'' + \Psi' \left[ 7\mathcal{H}L - \frac{4\epsilon\mathcal{H}}{a^2} (2\mathcal{H}' + 5\mathcal{H}^2) + \frac{7\varphi' L_\varphi}{3} \right] + \Xi' \left[ \frac{\varphi' L_\varphi}{3} + \mathcal{H}q \right] \\
& + 2\Xi \left[ (3\mathcal{H}^2 + \mathcal{H}')L - \frac{8\epsilon\mathcal{H}^2}{a^2} (\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2) + 2\mathcal{H}\varphi' L_\varphi + \frac{(\varphi' L_\varphi)'}{3} \right] - q\Box^\eta \Psi \\
& + 2\mathcal{H}(XL_\varphi)' + \frac{1}{3} \frac{dV}{d\varphi} a^2 X \\
& + (\mathcal{H}' + 3\mathcal{H}^2)XL_\varphi + \frac{1}{3} \left[ (XL_\varphi)'' - \Box^\eta(XL_\varphi) \right] = 0, \tag{3.36}
\end{aligned}$$

mientras que si ( $\mu \neq \nu$ ) se tiene la siguiente relación

$$q\Xi - 2\Psi \left[ L - \frac{4\epsilon\mathcal{H}'}{a^2} \right] - XL_\varphi = 0. \tag{3.37}$$

Finalmente, para la componente ( $\mu, w$ ) de (3.1) se tiene que

$$\frac{\varphi' X}{2} + 3q(\Psi' + \mathcal{H}\Xi) + (XL_\varphi)' - \mathcal{H}XL_\varphi + \varphi' L_\varphi \Xi = 0. \tag{3.38}$$

Reescribiendo la ecuación (C.52) en función de las variables invariantes de norma obtenemos:

$$\begin{aligned}
& X'' + 3\mathcal{H}X' - \Box^\eta X + \varphi'[4\Psi' + \Xi'] + 2\Xi(\varphi'' + 3\mathcal{H}\varphi') \\
& - \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} a^2 X - \frac{1}{2} \left\{ 2(2\mathcal{H}' + 3\mathcal{H}^2)XL_{\varphi\varphi} + L_\varphi [\Box^\eta \Xi - 3\Box^\eta \Psi \right. \\
& \left. + 4\Xi(2\mathcal{H}' + 3\mathcal{H}^2) + 4(\Psi'' + \mathcal{H}[4\Psi' + \Xi'])] \right\} = 0. \tag{3.39}
\end{aligned}$$

Debido a las ecuaciones (3.37) y (3.38) solamente existe un grado de libertad escalar independiente. Esto hace más sencillo el estudio de las propiedades de localización de los modos escalares.

Por otra parte, a diferencia de sector tensorial, en este caso la presencia simultánea del acoplamiento no mínimo y del término de Gauss–Bonnet dificulta la obtención de la ecuación que describe la dinámica de los modos escalares. Por este motivo, solamente estudiaremos cada efecto por separado.

**Caso (a) Modos escalares en presencia del término de Gauss–Bonnet**

Aunque este caso fue estudiado en [109], es provechoso explorar algunos de sus detalles. Haciendo  $L(\varphi) = 1$  y combinando las ecuaciones (3.35)–(3.39) se puede encontrar la ecuación para el campo  $\Psi$ , la cual adquiere la siguiente forma

$$\begin{aligned} \Psi'' - \left[ 1 + \frac{q'}{\mathcal{H}q} \right] \partial_\alpha \partial^\alpha \Psi + \Psi' \left[ 3\mathcal{H} + 2\frac{q'}{q} - 2\frac{\varphi''}{\varphi'} \right] \\ + \Psi \left[ \frac{q''}{q} + \frac{q'}{q} \frac{\mathcal{H}'}{\mathcal{H}} + 2\mathcal{H} \frac{q'}{q} - 4\mathcal{H} \frac{\varphi''}{\varphi'} - 2\frac{\varphi''}{\varphi'} \frac{q'}{q} + 4\mathcal{H}' \right] = 0. \end{aligned}$$

Con la finalidad de eliminar el sumando que contiene la primera derivada de la fluctuación redefinamos el campo  $\Psi$

$$\Phi = \frac{a^{3/2}q}{\varphi'} \Psi. \quad (3.40)$$

En función de este nuevo campo la ecuación para los modos escalares toma el siguiente aspecto

$$\Phi'' - z \left( \frac{1}{z} \right)'' \Phi - \left( 1 + \frac{q'}{\mathcal{H}q} \right) \square^\eta \Phi = 0, \quad (3.41)$$

donde

$$z(w) = \frac{a^{3/2}\varphi'}{\mathcal{H}}. \quad (3.42)$$

Con el propósito de estudiar el espectro de masas del campo escalar  $\Phi$ , proponemos la siguiente condición para este

$$\square^\eta \Phi = -m^2 \Phi.$$

Luego, la ecuación (3.41) se puede expresar como sigue

$$\Phi'' - z \left( \frac{1}{z} \right)'' \Phi + \left( 1 + \frac{q'}{\mathcal{H}q} \right) m^2 \Phi = 0. \quad (3.43)$$

La norma asociada al problema de autovalores anterior es

$$\langle \Phi | \Phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \left( 1 + \frac{q'}{\mathcal{H}q} \right) \Phi^2 dw. \quad (3.44)$$

De este modo, la condición de normalización para la autofunción de masa nula, adquiere la siguiente forma

$$\langle \Phi_0 | \Phi_0 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \left( 1 + \frac{q'}{\mathcal{H}q} \right) \Phi_0^2 dw, \quad (3.45)$$

donde  $\Phi_0 = \frac{1}{z}$ .

Examinemos qué ocurre con las propiedades de localización del modo cero  $\Phi_0$  para la clase de soluciones definidas en (2.15). Primeramente, en ausencia de acoplamiento no mínimo ( $L(\varphi) = 1$ ) tenemos que

$$\varphi'^2 = 6(\mathcal{H}^2 - \mathcal{H}')q(w).$$

En adición a esto, utilizando la relación (2.15) y la definición de  $q$  se tienen los siguientes comportamientos asintóticos

$$\begin{aligned} \frac{q'}{\mathcal{H}q} &\sim \frac{8\epsilon\gamma(\gamma-1)}{w^2 - 4\epsilon\gamma^2 w^{2\gamma}} \rightarrow 0, \quad \text{cuando } w \rightarrow \infty, \\ \frac{\mathcal{H}^2}{\mathcal{H}^2 - \mathcal{H}'} &\sim \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - 1}, \quad \text{cuando } w \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.46)$$

En consecuencia, si  $\gamma \neq 1$ <sup>4</sup> la convergencia de la integral que define a  $\langle \Phi_0 | \Phi_0 \rangle$  se encuentra determinada por el comportamiento del integrando  $\frac{1}{a^3 q}$ . En la sección anterior mostramos que el requisito para poseer un gravitón sin masa localizado sobre la membrana y una masa de Planck finita es que la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} a^3 q < \infty.$$

Esto ocasiona que (3.45) sea divergente lo que implica que el modo cero asociado a la fluctuación escalar  $\Phi$  se encuentra deslocalizado de la membrana.

---

<sup>4</sup>El caso  $\gamma = 1$  lo estudiaremos en el capítulo 4.

### Caso (b) Modos escalares en presencia de acoplamiento no mínimo

Incluso en el caso en que no exista la contribución del término de Gauss–Bonnet, las ecuaciones de ligadura (3.37) y (3.38) no poseen una estructura simple, lo que entorpece la obtención de la ecuación para las fluctuaciones escalares. Para un modelo donde el campo escalar se acopla mínimamente a la gravedad y el término de Gauss–Bonnet está ausente, es posible obtener tal ecuación sin demasiadas complicaciones. Para ello, es suficiente con hacer  $q = 1$  en la igualdad (3.41). Esto nos sugiere que podríamos resolver nuestro problema de perturbaciones si logramos convertir el escenario inicial (2.1) con la restricción  $\alpha = 0$ , en otro donde la nueva geometría y el campo escalar se enlacen mediante un acoplamiento mínimo.

Un modo de realizar esta tarea es utilizando una transformación conforme cuyo factor conforme dependa de la materia escalar inicial<sup>5</sup> [73, 74]. En otras palabras, partimos de la acción que representa los efectos del acoplamiento no mínimo (marco de Jordan)

$$S_{JF} = \int_{M_*} d^5x \sqrt{|g|} \left\{ -L(\varphi)R + \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 - V(\varphi) \right\},$$

aplicamos la transformación conforme

$$\bar{g}_{AB} = \Omega^2 g_{AB}, \quad \text{donde} \quad \Omega = L^{1/3},$$

y reescribimos la acción original  $S_{JF}$  sobre lo que se denomina marco de Einstein:

$$S_{JF} \rightarrow S_{EF} = \int_{M_*} d^5x \sqrt{|\bar{g}|} \left\{ -\bar{R} + \frac{1}{2}(\bar{\nabla}\sigma)^2 - \bar{V}(\sigma) \right\}, \quad (3.47)$$

donde  $\sigma$  es el nuevo campo escalar, esta vez acoplado mínimamente a la gravedad, mientras que  $\bar{V}$  es su potencial de autointeracción. La relación

---

<sup>5</sup>Otro manera de obtener las ecuaciones para las fluctuaciones en este tipo de escenarios es estudiado en [83].

entre las cantidades nuevas y viejas está dada por las siguientes igualdades<sup>6</sup>

$$d\sigma = \sqrt{\frac{1}{L} + \frac{8}{3} \left(\frac{L_\varphi}{L}\right)^2} d\varphi, \quad (3.48)$$

$$\bar{V} = \frac{V}{L^{5/3}}.$$

Veamos cómo es el vínculo entre las fluctuaciones de ambos marcos. En primer lugar, para la métrica de fondo tenemos que

$$\bar{g}_{AB} = \bar{a}^2 \eta_{AB} = (aL^{1/3})^2 \eta_{AB},$$

donde  $\bar{a}$  es el factor de deformación en el marco de Einstein. Variando la expresión anterior, se tiene la siguiente igualdad para las fluctuaciones de la métrica  $\bar{g}_{AB}$

$$\delta\bar{g}_{AB} = \bar{H}_{AB} = \frac{2a^2}{3L^{1/3}} \chi L_\varphi \eta_{AB} + L^{2/3} H_{AB}. \quad (3.49)$$

En este marco, el sector escalar sobre la norma longitudinal toma el siguiente aspecto

$$\bar{H}_{AB} = 2\bar{a}^2 \begin{pmatrix} \eta_{\mu\nu} \bar{\psi} & 0 \\ 0 & \bar{\xi} \end{pmatrix}. \quad (3.50)$$

Haciendo uso de las expresiones (3.11) y (3.49) se tiene que

$$\begin{aligned} \bar{\psi} &= \psi + \frac{\chi L_\varphi}{3L}, \\ \bar{\xi} &= \xi - \frac{\chi L_\varphi}{3L}, \\ \bar{\chi} &= \sqrt{\frac{1}{L} + \frac{8}{3} \left(\frac{L_\varphi}{L}\right)^2} \chi. \end{aligned} \quad (3.51)$$

En esta formulación la estructura de las variables invariantes de norma (3.24), (3.25) y (3.26) quedan intactas, salvo que las nuevas cantidades se definen respecto a las variables escalares  $\bar{\psi}$ ,  $\bar{\xi}$ ,  $\bar{\chi}$ ,  $\bar{E}$  y  $\bar{C}$ . Adicionalmente, las ecuaciones

---

<sup>6</sup>Para que el nuevo campo esté bien definido, la aplicación entre  $\varphi$  y  $\sigma$  de ser biyectiva.

que describen la dinámica de estos entes son estructuralmente equivalentes a (3.35)–(3.39) si hacemos  $\epsilon = 0$  y  $L(\varphi) = 1$ . Luego, la ecuación análoga a (3.43) toma el siguiente aspecto

$$\bar{\Phi}'' - \bar{z} \left( \frac{1}{\bar{z}} \right)'' \bar{\Phi} + m^2 \bar{\Phi} = 0, \quad (3.52)$$

donde

$$\bar{\Phi} = \frac{\bar{a}^{3/2}}{\sigma'} \bar{\Psi}, \quad \bar{z} = \frac{\bar{a}^{3/2} \sigma'}{\bar{\mathcal{H}}} \quad \text{y} \quad \bar{\mathcal{H}} = \frac{\bar{a}'}{\bar{a}} = \mathcal{H} + \frac{1}{3} \frac{L_\varphi}{L} \varphi'.$$

La norma asociada al modo cero es

$$\langle \bar{\Phi}_0 | \bar{\Phi}_0 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\Phi}_0^2 dw = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\bar{z}^2} dw. \quad (3.53)$$

La función  $\bar{z}$  expresada en términos de las cantidades de fondo, toma la siguiente forma

$$\frac{1}{\bar{z}^2} = \frac{1}{a^3} \frac{\left( \frac{\mathcal{H}}{\varphi'} + \frac{L_\varphi}{3L} \right)^2}{1 + \frac{8}{3} \frac{L_\varphi^2}{L}}. \quad (3.54)$$

Para estudiar las propiedades de localización del autoestado  $\bar{\Phi}_0$  consideremos una forma específica para la función de acoplamiento

$$L = 1 - \frac{\zeta}{2} \varphi^2, \quad (3.55)$$

donde  $\zeta$  es un parámetro positivo que caracteriza la intensidad del acoplamiento no mínimo.

Investiguemos la convergencia de la integral (3.53). Para ello supondremos que la geometría y la materia de fondo son regulares en todos los puntos de la variedad. De este modo, la localización del modo cero se encuentra determinada por el comportamiento de  $\bar{z}$  en el infinito. Para determinar dicho comportamiento necesitamos conocer  $\varphi$  y su primera derivada en  $w = \infty$ .

Combinando las igualdades (2.6) y (2.7) se obtiene la siguiente ecuación

$$\varphi'^2 - 16\mathcal{H}\varphi' L_\varphi - 24\mathcal{H}^2 L - 2a^2 V = 0.$$

Con ayuda de la expresión anterior y suponiendo que el campo escalar y el potencial de autointeracción son acotados en infinito y este último es positivo asintóticamente <sup>7</sup>, se tiene que

$$\varphi' \sim \frac{1}{w^\gamma}, \quad \text{cuando } w \rightarrow \infty,$$

si nos limitamos a la clase de métricas definidas por (2.15). De aquí que la convergencia de (3.53) se determina por el comportamiento asintótico de  $1/a^3$ . Luego, al igual que el caso anterior el modo cero escalar no se encuentra localizado en la membrana si  $M_P$  es finita.

Para finalizar, comprobemos que el campo escalar  $\sigma$  se encuentra bien definido sobre el marco de Einstein. Haciendo uso de (3.48) y (3.55) se tiene

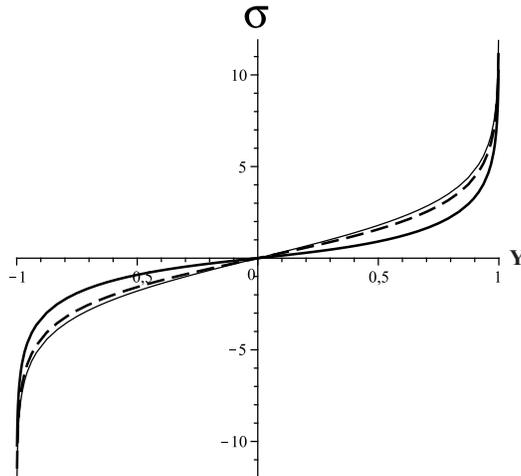


Figura 3.1: En esta figura sobre la línea fina  $\zeta = \frac{3}{16}$ , la línea discontinua denota el caso  $\zeta = \frac{1}{4}$  y  $\zeta = 1$  le corresponde a la línea gruesa.

---

<sup>7</sup>En el próximo capítulo veremos un caso donde el potencial de autointeracción es negativo en infinito.

la siguiente relación entre los campos escalares de ambos marcos

$$\sigma = \sqrt{\frac{2}{\zeta}} \int \sqrt{\frac{1}{1-Y^2} \left( 1 + \frac{16\zeta}{3} \frac{Y^2}{1-Y^2} \right)} dY, \quad (3.56)$$

donde  $Y = \sqrt{\frac{\zeta}{2}}\varphi$ . Aunque esta integral se puede expresar en términos de funciones numéricas estándares, por su extensión no escribiremos el resultado. En su defecto incluimos la Fig. 3.1. Esta muestra que la relación entre los campos escalares  $\varphi$  y  $\sigma$  es biyectiva. Además,  $\sigma \approx \varphi$  cuando  $\varphi \approx 0$ , mientras que  $\sigma \rightarrow \pm\infty$  cuando  $\varphi \rightarrow \pm\sqrt{\frac{2}{\zeta}}$ .

### 3.3.3. Modos vectoriales

En esta sección al igual que en el sector escalar, separaremos el estudio de las fluctuaciones en dos casos.

#### Caso (a) Modos vectoriales en presencia del término de Gauss–Bonnet

En términos de la variable invariante de norma (3.23), las ecuaciones para los modos vectoriales (C.68) y (C.69) toman el siguiente aspecto

$$(V^\nu)' + \left( \frac{q'}{q} + 3\mathcal{H} \right) V^\nu = 0, \quad (3.57)$$

$$\square^\eta V_\mu = 0, \quad (3.58)$$

donde la primera ecuación es de ligadura y define el perfil de  $V_\mu$  sobre la dimensión extra. Por otra parte, la segunda igualdad implica que solo tenemos un modo para las fluctuaciones vectoriales y este no tiene masa.

Para este caso, definir la norma es menos directo que en los otros dos sectores, pues no tenemos un problema de autovalores. De ahí que sea más apropiado hacer uso de la acción (2.1) perturbada hasta segundo orden respecto a las fluctuaciones vectoriales  $\delta^{(2)}S_V$  (ver detalles en [82, 109]); después

de efectuar los cálculos pertinentes se obtiene que

$$\delta^{(2)}S_V = \int d^4x dw \frac{1}{2} (\eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \mathcal{V}^\mu \partial_\beta \mathcal{V}_\mu), \quad (3.59)$$

donde a  $\mathcal{V}_\mu = a^{3/2} \sqrt{q} V_\mu$  se le denomina modo canónico normal. El modo cero asociado a (3.58) es normalizado si  $\delta^{(2)}S_V$  es finita. Al resolver las ecuaciones (3.57) y (3.58) se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^\mu &= \frac{v^\mu(x)}{a^{3/2} \sqrt{q}}, \\ \square^\eta v^\mu(x) &= 0. \end{aligned}$$

El modo cero vectorial está localizado sobre la membrana si la siguiente cantidad es finita

$$\langle \mathcal{V}^\mu | \mathcal{V}_\mu \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dw}{a^3 q}. \quad (3.60)$$

Pero,  $a^3 q \rightarrow 0$  cuando  $w \rightarrow \infty$ , en virtud de que la masa de Planck (2.16) es finita. En consecuencia, el modo  $\mathcal{V}^\mu$  se encuentra deslocalizado de la membrana.

### **Caso (b) Modos vectoriales en presencia de acoplamiento no mínimo**

Sobre el sector vectorial las fluctuaciones de la geometría (3.49) se reducen a

$$\bar{H}_{AB} = L^{2/3} H_{AB}. \quad (3.61)$$

De esta manera, los modos vectoriales en el marco de Einstein coinciden con sus homólogos en el marco de Jordan. Dicho en otros términos

$$\bar{D}_\mu = D_\mu,$$

resultado que es posible verificar al emplear (C.53) y (3.61). De aquí se tiene que las ecuaciones para las fluctuaciones vectoriales toman la siguiente forma

$$(\bar{V}^\nu)' + 3\bar{\mathcal{H}} \bar{V}^\nu = 0, \quad (3.62)$$

$$\square^\eta \bar{V}_\mu = 0. \quad (3.63)$$

Siguiendo el mismo procedimiento que en el caso del sector escalar en presencia del término de Gauss–Bonnet, se obtiene

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{V}}^\mu &= \frac{\bar{v}^\mu(x)}{\bar{a}^{3/2}}, \\ \square^\eta \bar{v}^\mu(x) &= 0,\end{aligned}$$

donde  $\bar{\mathcal{V}}_\mu = \bar{a}^{3/2} \bar{V}_\mu$ .

La norma asociada al modo cero vectorial toma el siguiente aspecto

$$\langle \bar{\mathcal{V}}^\mu | \bar{\mathcal{V}}_\mu \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dw}{\bar{a}^3} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dw}{a^3 L}.$$

Nuevamente, el hecho de tener una masa de Planck finita ocasiona que el modo cero se deslocalice de la membrana.

# Capítulo 4

## Soluciones aproximadas para las ecuaciones de campo

Encontrar soluciones para el sistema de ecuaciones (2.6)–(2.8) es una tarea complicada debido a la presencia simultánea del acoplamiento no mínimo y del término de Gauss–Bonnet. En [122] se estudian varias soluciones numéricas para estos escenarios. En nuestro trabajo también exploraremos algunas soluciones aproximadas para la física del fondo, pero el enfoque será distinto al utilizado en [122], pues haremos uso de un método perturbativo.

Sobre lo que al acoplamiento no mínimo respecta, en este capítulo asumiremos que  $L(\varphi)$  toma el siguiente aspecto [78]

$$L = 1 - \frac{\zeta}{2}\varphi^2. \quad (4.1)$$

Como hemos mencionado anteriormente,  $\zeta$  es el parámetro que define la intensidad del acoplamiento no mínimo y  $L > 0$ .

A consecuencia de que en la definición para  $M_P$  dada en (2.15) algunos sumandos contribuyen con signo negativo a la masa de Planck es indispensable verificar que para la configuración de la materia y la geometría de interés

la cantidad  $M_P$  sea positiva. Paralelamente a esto, es necesario que la norma de las fluctuaciones no sea negativa, de lo contrario el espectro de estas no es unitario. En resumen, en adición a las condiciones de regularidad de la geometría y la localización del gravitón sin masa, nuestro escenario debe cumplir los siguientes requisitos

$$L(\varphi) > 0, \quad \langle \psi | \psi \rangle > 0 \quad \text{y} \quad M_P > 0. \quad (4.2)$$

Por otro lado, consideraremos una métrica regular que interpole entre dos espacio-tiempos asintóticamente  $AdS_5$  cuyo factor de deformación es descrito como sigue [109]

$$a = \frac{a_0}{\sqrt{1 + (bw)^2}}, \quad (4.3)$$

donde  $\frac{1}{b}$  caracteriza el ancho de la membrana suave. Cuando  $w \rightarrow \infty$  se tiene que  $a \rightarrow \frac{a_0}{b|w|}$ . De este modo,  $\frac{a_0}{b}$  corresponde al radio de curvatura de  $AdS_5$ . Para esta geometría, los invariantes de curvatura cuadráticos son regulares y asintóticamente constantes como se muestra en la Fig. 4.1. Puesto que solo dos ecuaciones de campo son independientes, el campo escalar  $\varphi$  y el potencial de autointeracción  $V(\varphi)$  pueden ser determinados usando las primeras dos ecuaciones del sistema (2.6)–(2.8). En este punto es conveniente reemplazar la variable  $w$  por la variable adimensional  $x = bw$ . En términos de esta nueva variable, la igualdad (2.7) puede ser escrita como sigue:

$$\begin{aligned} \zeta \varphi \varphi'' + \frac{2\zeta x}{1+x^2} \varphi \varphi' + \varphi'^2 (\zeta - \kappa) - \frac{3}{2} \zeta \frac{\varphi^2}{(1+x^2)^2} = \\ - \frac{3}{(1+x^2)^2} + \frac{4\epsilon b^2}{a_0^2} \frac{3x^2}{(1+x^2)^3}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Abusando de la notación, en este capítulo denotaremos la derivación con respecto a  $x$  con el símbolo ( $'$ ).

En general, si  $\zeta \neq 0$  es difícil resolver esta ecuación. Una forma de abordar el problema consiste en suponer que el parámetro  $\zeta$  es una pequeña perturba-

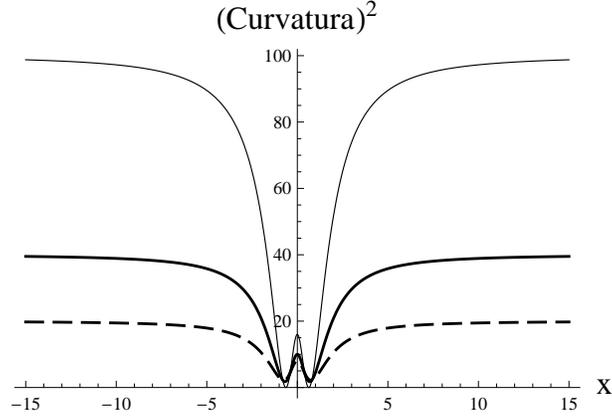


Figura 4.1: Comportamiento de los diferentes invariantes de curvatura con respecto a la dimensión extra ( $a_0 = b = 1$ ). La línea delgada representa el comportamiento de  $R^2$ , la línea discontinua corresponde a  $R^{AB}R_{AB}$ , mientras que la línea gruesa denota el comportamiento del escalar de Kretschmann  $R^{ABCD}R_{ABCD}$ .

ción. Con la finalidad de hacer más sencillo y transparente nuestro análisis, separemos la búsqueda de la solución de la ecuación anterior en tres casos que corresponden a diferentes escenarios para la física del fondo:

I) El término de Gauss-Bonnet más un campo escalar mínimamente acoplado a la gravedad ( $\zeta = 0$ ) [109].

II) Un campo escalar acoplado no mínimamente a la gravedad sin el término de Gauss-Bonnet ( $\epsilon = 0$ ).

III) El caso general,  $\epsilon \neq 0$  y el parámetro pequeño  $\zeta \neq 0$ .

**Caso I) La teoría mínimamente acoplada en presencia del término de Gauss-Bonnet**

Si hacemos  $\zeta = 0$  y consideramos el caso en que  $a_0 = 2\sqrt{\epsilon}b$ , la solución de fondo adopta la forma siguiente:

$$\varphi(x) = \pm\varphi_0 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \varphi_1^\pm, \quad (4.5)$$

$$V(\varphi) = V_0 \left[ 3 \left( \frac{\varphi - \varphi_1^\pm}{\varphi_0} \right)^4 - 6 \left( \frac{\varphi - \varphi_1^\pm}{\varphi_0} \right)^2 + 1 \right], \quad (4.6)$$

donde  $\varphi_0 = \sqrt{\frac{3}{\kappa}}$  y  $V_0 = \frac{3}{8\kappa\epsilon}$ . El signo  $\pm$  describe dos soluciones posibles del campo  $\varphi$  con las constantes  $\varphi_1^\pm$ . La igualdad (4.6) nos muestra que el potencial de autointeracción del campo escalar  $V(\varphi)$  interpola entre dos valores constantes idénticos, resultado razonable si tenemos en cuenta que nuestra geometría es asintóticamente  $AdS_5$ .

En este caso la masa de Planck en 4D no depende explícitamente de los parámetros del campo escalar. Además, de la definición (2.15) se tiene que cuando  $\epsilon > 0$  la adición del término de Gauss-Bonnet a un modelo con el campo escalar mínimamente acoplado a la gravedad reduce ligeramente el valor de la masa de Planck en 4D. Dicho de manera explícita:

$$M_P^2 \sim \frac{4 M_*^3 a_0^3}{3 b} \quad (4.7)$$

en presencia del término de Gauss-Bonnet, mientras que

$$M_P^2 \sim \frac{2M_*^3 a_0^3}{b}$$

cuando este está ausente. Por otro lado, para esta solución se tiene que

$$\frac{r}{s} = 2, \quad q = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{y} \quad 1 + \frac{1}{\mathcal{H}} \frac{q'}{q} = 3.$$

Además,

$$\frac{1}{z^2} \sim |x|^7 \quad \text{cuando} \quad x \rightarrow \infty.$$

Luego, de (3.34) y (4.7) el gravitón no masivo se encuentra localizado sobre la membrana y la masa de Planck cuatridimensional es finita y positiva. Adicionalmente, los modos cero escalar y vectorial se deslocalizan de la membrana. En virtud de las cuatro últimas expresiones anteriores es sencillo mostrar que los modos tensoriales, vectoriales y escalares poseen normas positivas.

## 4.1. Teoría de perturbaciones singulares: capa de frontera

Más adelante, en los casos II y III, investigaremos soluciones de la ecuación (4.4) en los que el acoplamiento no mínimo es pequeño comparado con las contribuciones de los términos de Gauss–Bonnet y de Einstein–Hilbert a la acción (2.1), estos últimos, caracterizados por los parámetros  $\epsilon$  y  $\kappa$ , respectivamente. Al trabajar de manera perturbativa sobre la ecuación (4.4) es conveniente utilizar cantidades adimensionales, puesto que de este modo el parámetro pequeño es independiente de la elección de las unidades de medida. Para ello definamos las siguientes cantidades:  $\varphi = \frac{\phi}{\sqrt{\kappa}}$  y  $\varepsilon = \frac{\zeta}{\kappa} \ll 1$ . Bajo estas redefiniciones la ecuación de campo (4.4) adopta la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \varepsilon\phi\phi'' + \frac{2\varepsilon x}{1+x^2}\phi\phi' + \phi'^2(\varepsilon-1) - \frac{3}{2}\varepsilon\frac{\phi^2}{(1+x^2)^2} = \\ -\frac{3}{(1+x^2)^2} + \frac{4\epsilon b^2}{a_0^2}\frac{3x^2}{(1+x^2)^3}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

En estos dos casos (II y III) supondremos que la solución puede ser expandida en potencias de  $\varepsilon$ . Por ejemplo, si se quiere que el desarrollo de  $\phi$  sea hasta  $n$ -ésimo orden de pequeñez con respecto a  $\varepsilon$ , este toma el siguiente aspecto

$$\phi = \phi_0(x) + \varepsilon\phi_1(x) + \cdots + \varepsilon^n\phi_n(x) + o(\varepsilon^n\phi_n(x)), \quad (4.9)$$

donde la  $o$  posee el significado usual utilizado en el cálculo infinitesimal estándar y  $\phi_k(x)$  con  $k = 0, 1, \dots, n$  es la aproximación de orden  $k$  para

$\phi$ .

Para que la teoría de perturbación tenga sentido a medida que agregamos correcciones de mayor potencia para  $\varepsilon$  la contribución de estas a la expansión se torna más pequeña. En otras palabras,

$$\varepsilon^{k+1}\phi_{k+1}(x) = o(\varepsilon^k\phi_k(x)), \quad \text{cuando } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (4.10)$$

Si la relación anterior es válida sobre todo el dominio de variación del campo<sup>1</sup>, el cual denotaremos por  $\mathfrak{R}$ ; el desarrollo (4.9) es denominado expansión asintótica de orden  $n$  [123]. En caso contrario el desarrollo es singular y este solo tiene sentido en cierta región del dominio de variación del campo.

Aún en la situación en la que existe una región donde no se cumple la condición (4.10) es posible utilizar métodos perturbativos para representar al campo, puesto que es admisible emplear una expansión asintótica diferente de (4.9) sobre dicha región. El procedimiento que permite hallar tales expansiones y posteriormente crear un nuevo desarrollo uniformemente válido sobre todo el dominio de variación de la magnitud de interés es conocido como *Teoría de Perturbaciones Singulares* [123]–[127]. En esta tesis examinaremos las soluciones de (4.8) hasta primer orden respecto a  $\varepsilon$ , es decir

$$\phi = \phi_0(x) + \varepsilon\phi_1(x) + o(\varepsilon\phi_1(x)). \quad (4.11)$$

Al sustituir la expansión anterior en (4.8) surgen algunos inconvenientes. Primeramente, el sumando que contiene la segunda derivada del campo se encuentra multiplicado por el parámetro de la perturbación. Esto produce ecuaciones diferenciales para  $\phi_0(x)$  y  $\phi_1(x)$  de primer orden en las derivadas. Es fácil verificar este resultado para la aproximación de orden cero, pues al hacer  $\varepsilon = 0$  se obtiene una ecuación diferencial de primer orden para  $\phi_0(x)$ .

---

<sup>1</sup>Cuando esto sucede se dice que la condición (4.10) es uniformemente válida sobre el dominio de variación de  $\phi$ .

La solución de (4.8) tiene dos constantes arbitrarias, mientras que las aproximaciones de orden cero y primer orden poseen una constante cada una. Luego, si deseamos estudiar un campo escalar que sea finito sobre nuestro espacio-tiempo (4.3) y que este posea ciertos valores de interés en  $\pm\infty$ , tenemos un dilema sobre la aproximación de orden cero debido a que existe solo una constante arbitraria asociada a  $\phi_0(x)$ , pero hay dos condiciones de frontera fijas que se deben satisfacer. De igual manera, la ecuación para  $\phi_1(x)$  también es de primeras derivadas. Luego, el problema persiste a este orden de la perturbación.

En algunas situaciones, este suceso no invalida completamente el empleo global del desarrollo (4.11) sobre  $\mathfrak{R}$ , solo restringe el análisis perturbativo a una clase de soluciones donde las condiciones de frontera para  $\phi$  no son independientes<sup>2</sup>. En otras palabras, las constantes arbitrarias asociadas a la ecuación no perturbada (4.8) poseen una relación específica entre ellas. En este trabajo estudiaremos un ejemplo de ello. Como veremos posteriormente, si se quieren explorar soluciones aproximadas más generales es necesario el uso de varias expansiones asintóticas diferentes sobre  $\mathfrak{R}$ .

Una segunda sutileza relacionada con la presencia de  $\varepsilon$  enfrente de las derivadas del campo es que aunque este sea finito pueden existir regiones donde  $\phi$  y/o su primera derivada varíe rápidamente de manera que este fenómeno cambie el comportamiento del término  $\varepsilon\phi\phi'$  y/o  $\varepsilon\phi\phi''$ . Por ejemplo, es posible que  $\phi'' \sim \frac{g(x)}{\varepsilon}$ , donde  $g(x)$  es cierta función; esto implica que sobre dicha región este término no sea despreciable a orden cero. Tal comportamiento conduce a lo que generalmente se conoce como *problema de la capa de frontera* [123]–[127] y es común en la formulación perturbativa de ecuaciones diferenciales donde el parámetro pequeño multiplica al sumando de mayor orden en las derivadas.

---

<sup>2</sup>Una situación similar ocurre en el problema de Cauchy. Esta vez surge una ligadura sobre las “condiciones iniciales” del campo.

En este tipo de situaciones, en general, no es posible hallar un desarrollo asintótico único uniformemente válido para el campo que concuerde con dos condiciones de frontera arbitrarias. De ahí que sea conveniente proponer dos expansiones diferentes sobre las regiones que contienen a las fronteras  $x = -\infty$  y  $x = \infty$ , tales que cada una de ellas sea uniformemente válida en la región correspondiente. Además, es necesario investigar la existencia de capas de frontera y proponer expansiones asintóticas adecuadas sobre estas regiones. En nuestro caso no es suficiente con los dos desarrollos asintóticos sobre la frontera, pues en el origen de coordenadas surge una capa de frontera que requiere una nueva expansión asintótica sobre una vecindad de  $x = 0$ . Para tener una mejor comprensión sobre el problema de la capa de frontera examinemos algunos de sus detalles.

Supongamos que tenemos una capa de frontera localizada en  $x_c$  y con un ancho caracterizado por la función  $\delta(\varepsilon)$ . A consecuencia de la rápida variación de la función incógnita sobre una vecindad de  $x_c$ , es adecuado magnificar esta región mediante un escalamiento de  $x$ . Para ello definamos la siguiente variable

$$\ell = \frac{x - x_c}{\delta(\varepsilon)}, \quad \text{donde } \delta(\varepsilon) = o(1) \quad \text{cuando } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (4.12)$$

A esta nueva cantidad la denominaremos variable de la capa de frontera o estirada.

En términos de  $\ell$  el campo se transforma como sigue

$$\phi(x) = \phi(x_c + \delta(\varepsilon)\ell) = \Theta(\ell). \quad (4.13)$$

El siguiente paso consiste en considerar una expansión para  $\Theta(\ell)$  que sea uniformemente válida en la región de la capa de frontera

$$\Theta = \Theta_0(\ell) + \varepsilon\Theta_1(\ell) + \dots. \quad (4.14)$$

Más adelante, mediante un ejemplo, discutiremos el procedimiento para determinar  $\delta(\varepsilon)$ .

Debido a la coexistencia de varios desarrollos asintóticos definidos en diferentes regiones pertenecientes a  $\mathfrak{R}$ , es necesario aplicar algún mecanismo que permita la construcción de una aproximación global uniformemente válida sobre todo el dominio de variación del campo. La *hipótesis* fundamental de este método de perturbaciones consiste en suponer que los dominios de uniformidad adyacentes asociados a un par de expansiones asintóticas diferentes poseen una subregión común en la cual tales desarrollos arrojan un mismo resultado. Cuando esta suposición se cumple, es posible construir la solución global perturbativa. Primeramente, veamos como empalmar dos expansiones asintóticas contiguas.

Un modo de realizar esta tarea consiste en definir una nueva variable estirada  $\ell_0$ , centrada en la capa de frontera y de un ancho asociado  $\delta_0(\varepsilon)$  tal que este contenga al subdominio intermedio donde ambas expansiones son equivalentes. Expresado de manera más precisa

$$\ell_0 = \frac{x - x_c}{\delta_0(\varepsilon)}, \quad (4.15)$$

donde  $\delta_0(\varepsilon) = o(1)$  y  $\delta(\varepsilon) = o(\delta_0(\varepsilon))$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Posteriormente, cada expansión se reescribe en función de  $\ell_0$  hasta cierto orden<sup>3</sup> y se exige su equivalencia sobre la subregión común para una  $\delta_0(\varepsilon)$  arbitraria. Adicionalmente, este mecanismo de empalme nos sirve para fijar las constantes que surgen en el desarrollo de  $\Theta(\ell)$  sobre dominios que no poseen condiciones de frontera.

Finalmente, un método para construir la solución global uniformemente válida sobre  $\mathfrak{R}$  es el siguiente. Supongamos que tenemos los dominios contiguos  $\mathfrak{R}_1$  y  $\mathfrak{R}_2$  asociados a dos desarrollos asintóticos diferentes. Además asumamos que  $\mathfrak{R}_1 \cap \mathfrak{R}_2 \neq \emptyset$  por lo que el empalme entre tales desarrollos está garantizado. Bajo estas condiciones, es posible crear una sola expansión

---

<sup>3</sup>No necesariamente el mismo orden para los dos desarrollos asintóticos.

asintótica<sup>4</sup> sobre la región  $\mathfrak{R}_T = \mathfrak{R}_1 \cup \mathfrak{R}_2$ . Esto se lleva a cabo reescribiendo los desarrollos en términos de una sola variable independiente. Hecho esto, se suman y luego se sustrae la parte común a ambos [123]–[127]. Posteriormente exploraremos varios ejemplos donde se aplicará este procedimiento. La solución global aproximada se construye aplicando este método a cada par de expansiones asintóticas con dominios de uniformidad adyacentes.

### Caso II) Teoría con acoplamiento no mínimo sin el término de Gauss-Bonnet

En este caso la ecuación (4.8) puede ser expresada como sigue

$$\varepsilon\phi\phi'' + \frac{2\varepsilon x}{1+x^2}\phi\phi' + \phi'^2(\varepsilon - 1) - \frac{3}{2}\varepsilon\frac{\phi^2}{(1+x^2)^2} = -\frac{3}{(1+x^2)^2}, \quad (4.16)$$

mientras que las condiciones de consistencia (4.2) se reducen al siguiente par de restricciones:

$$L(\phi) = 1 - \frac{\varepsilon}{2}\phi^2 > 0 \quad \text{y} \quad M_P^2 > 0. \quad (4.17)$$

Para facilitar el estudio de las soluciones perturbativas de (4.16) es conveniente dividir este caso en dos subcasos.

#### IIa) Caso sin condiciones de frontera

Iniciemos estudiando la clase de soluciones aproximadas generadas por (4.11). Al sustituir esta expansión en (4.16) no es difícil obtener las ecuaciones para la aproximaciones de orden cero y uno,  $\phi_0(x)$  y  $\phi_1(x)$ , respectivamente

$$\phi_0'^2 - \frac{3}{(1+x^2)^2} = 0, \quad (4.18)$$

$$2\phi_0'\phi_1' - \frac{2x}{1+x^2}\phi_0\phi_1' - \phi_0\phi_0'' - \phi_0'^2 + \frac{3}{2}\frac{\phi_0^2}{(1+x^2)^2} = 0. \quad (4.19)$$

---

<sup>4</sup>A este desarrollo se le denomina *expansión compuesta*.

Estas ecuaciones poseen las siguientes soluciones

$$\phi_0^\pm = \pm\sqrt{3} \arctan(x) + A_0^\pm, \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} \phi_1^\pm &= \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \arctan(x) \mp \frac{\sqrt{3}}{4} (A_0^\pm)^2 \arctan(x) \mp \frac{\sqrt{3}}{4} \arctan^3(x) \\ &\quad - \frac{3}{4} A_0^\pm \arctan^2(x) + A_1^\pm, \end{aligned} \quad (4.21)$$

donde los signos  $\pm$  denotan dos posibles soluciones para cada orden de perturbación, y  $A_0^\pm$  y  $A_1^\pm$  son constantes arbitrarias. Puesto que las expresiones anteriores son finitas sobre  $\Re = (-\infty, \infty)$ , estas generan dos expansiones asintóticas sobre este dominio, esto es

$$\phi^+ = \phi_0^+ + \varepsilon\phi_1^+,$$

$$\phi^- = \phi_0^- + \varepsilon\phi_1^-.$$

En la Fig. 4.2 se muestran configuraciones del campo escalar con un comportamiento tipo escalón. Es interesante señalar que en contraste con el potencial de autointeracción (4.6) del caso anterior, en presencia de acoplamiento no mínimo el potencial interpola entre dos valores negativos diferentes como se muestra en la Fig. 4.3. Escritos explícitamente, el potencial de autointeracción toma los siguientes valores asintóticos

$$\begin{aligned} V^+(\pm\infty) &\sim \frac{3b^2}{4a_0^2\kappa} \left[ -8 + \varepsilon \left( 2A_0^+ \pm \sqrt{3}\pi \right)^2 \right], \\ V^-(\pm\infty) &\sim \frac{3b^2}{4a_0^2\kappa} \left[ -8 + \varepsilon \left( 2A_0^- \mp \sqrt{3}\pi \right)^2 \right], \end{aligned}$$

donde  $V^+$  y  $V^-$  corresponden a las soluciones  $\phi^+$  y  $\phi^-$ , respectivamente. Esta asimetría en el comportamiento asintótico de  $V(\phi(x))$  puede parecer sorprendente si uno toma en cuenta el hecho de que la geometría es par respecto a la coordenada extra. Sin embargo, el carácter desigual de la distribución de

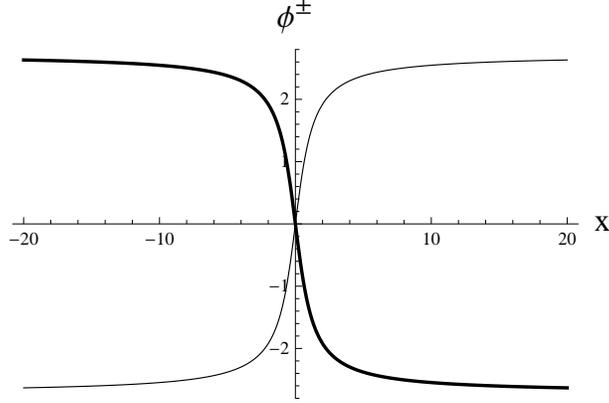


Figura 4.2: Gráfica de la función  $\phi(x)$  a primer orden en  $\varepsilon$  para el caso IIa). En la figura hemos fijado  $\varepsilon = 0.01$  y  $A_0^\pm = A_1^\pm = 0$ . La línea delgada representa  $\phi^+ = \phi_0^+ + \varepsilon\phi_1^+$  y la gruesa describe  $\phi^- = \phi_0^- + \varepsilon\phi_1^-$ .

la energía asociada a la materia escalar en  $-\infty$  y  $+\infty$  se ve compensada por un efecto análogo del acoplamiento no mínimo, arrojando un espacio-tiempo par con respecto a la quinta dimensión y asintóticamente  $AdS_5$ . Expresado en términos equivalentes, las ecuaciones de Einstein (2.2) pueden reescribirse de modo que los efectos asociados al acoplamiento no mínimo se interpreten como una corrección efectiva al tensor de energía-impulso proveniente de la materia escalar, esto es

$$R_{AB} = \kappa \tau_{AB}^{ef} = \frac{\kappa}{L} (\tau_{AB} + \nabla_A \nabla_B L + \frac{1}{3} g_{AB} \square L).$$

Al enfocar de esta forma la presencia del acoplamiento no mínimo, se hace natural la existencia de este tipo de asimetrías sobre la materia escalar.

Por otra parte, utilizando (2.15), (4.3), (4.20) y (4.21) se obtiene el valor de  $M_P$  hasta primer orden en  $\varepsilon$

$$M_P^2 \sim \frac{a_0^3 M_*^3}{b} \left\{ 2 - \varepsilon \left[ \frac{3}{4} \pi^2 + (A_0^\pm)^2 - 6 \right] \right\}.$$

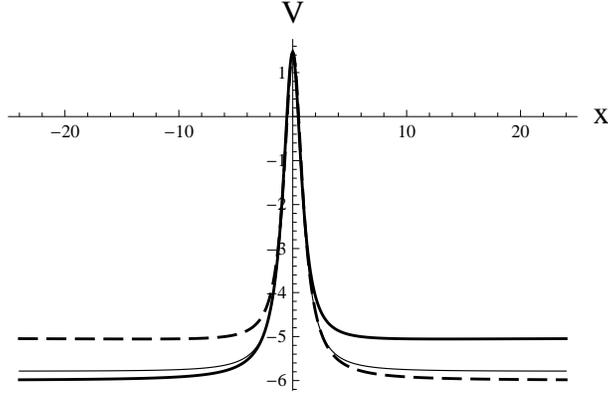


Figura 4.3: El potencial de autointeracción  $V(\phi(x))$  a primer orden en  $\varepsilon$  para el caso IIa) (en todas las gráficas hemos elegido  $\kappa = 1$ ,  $a_0 = 1$ ,  $b = 1$  y  $\varepsilon = 0.01$ ).  $\phi^+$  con  $A_0^+ = 0$  corresponde a la línea delgada, mientras que  $A_0^+ = 3$  está asociada a la línea gruesa. La línea discontinua representa a la solución  $\phi^-$  donde  $A_0^- = 3$ .

La expresión anterior muestra de manera manifiesta que el efecto del acoplamiento no mínimo entre el campo escalar y la gravedad reduce el valor de la masa de Planck en 4D comparado con su valor cuando solo existe acoplamiento mínimo. En adición a esto, al tomar en cuenta las restricciones (4.17), se obtiene que los valores de  $\varepsilon$  se encuentran acotados

$$\varepsilon < \frac{2}{(\sqrt{3}\frac{\pi}{2} + |A_0^\pm|)^2}.$$

En la Fig. 4.4 se muestra la función  $L(\phi(x)) = 1 - \frac{\varepsilon}{2}\phi^2$  para varios valores de los parámetros. Como se puede apreciar, la condición  $L(\phi) > 0$  se satisface.

El hecho de poseer una masa de Planck finita garantiza la localización del gravitón no masivo sobre la membrana e implica que el modo cero vectorial se desacopla de esta. Por otra parte, haciendo uso de (3.54), (4.3), (4.20) y

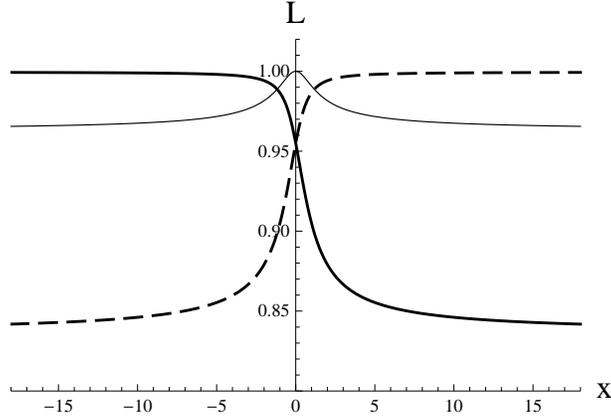


Figura 4.4: Comportamiento de la función  $L(\phi(x))$  a primer orden en  $\varepsilon$  para el caso IIa). En esta figura hemos elegido  $\varepsilon = 0.01$ . La línea delgada representa a  $\phi_0^\pm$  con  $A_0^\pm = 0$ , mientras que  $\phi_0^+$  con  $A_0^+ = 3$  se encuentra asociada a la línea gruesa. Finalmente, la línea discontinua corresponde al caso  $\phi_0^-$  con  $A_0^- = 3$ .

(4.21) se tiene que

$$\frac{1}{z^2} \sim |x|^5, \quad \text{cuando } x \rightarrow \infty.$$

Luego, para esta solución el modo cero escalar se deslocaliza de la membrana.

Como mencionamos anteriormente, las ecuaciones (4.18) y (4.19) son de primer orden en las derivadas. Luego, sus soluciones (4.20) y (4.21) describen una clase limitada de soluciones para la ecuación (4.16). De esta forma, para condiciones de frontera o iniciales arbitrarias no es posible resolver la ecuación (4.16) mediante un solo desarrollo asintótico.

Los requisitos de consistencia (4.17) no restringen los posibles valores del campo en  $\pm\infty$ . A pesar de ello, es difícil resolver la ecuación (4.16) cuando estos son arbitrarios. Por esta razón, en este trabajo exploraremos las configuraciones de campo para el caso en que este desaparece en  $x = \pm\infty$ . Aunque tal elección aparentemente carece de motivación, el interés en su

estudio radica en que esta surgirá de forma natural cuando  $\epsilon \neq 0$  y  $\zeta \neq 0$ .

### **IIb) Caso con condiciones de frontera**

A continuación consideremos la ecuación (4.16) bajo las siguientes condiciones de frontera:

$$\phi(-\infty) = \phi(\infty) = 0. \quad (4.22)$$

Antes que todo, cabe señalar que si  $\phi(x)$  es una solución de la ecuación (4.16) bajo (4.22), entonces,  $\phi(-x)$  también es una solución de la ecuación de campo con las mismas condiciones de frontera. Esto implica que la solución a las ecuaciones de campo bajo las condiciones de frontera (4.22) constituya una función par.

El desarrollo fuera de la capa de frontera (4.11) es descrito por las soluciones (4.20) y (4.21). Como se puede observar, no es posible construir una expansión única que satisfaga ambas condiciones de frontera al mismo tiempo. Entonces, necesitamos hallar expansiones asintóticas válidas en las fronteras. En general, esta es una tarea complicada, puesto que en ocasiones surge un comportamiento del tipo capa de frontera en los extremos del dominio del campo. Afortunadamente, en nuestro caso no sucede esto (al menos en la frontera), pues, si se elige cualquiera de las expansiones  $\phi^+$  o  $\phi^-$  para el dominio que contenga la frontera  $x = +\infty$ , y la solución restante para la región que contenga el punto  $x = -\infty$ , se pueden fijar las constantes que aparecen en las soluciones de modo que (4.22) se satisfaga completamente.

A partir de este momento denotemos con el índice  $\alpha$  el caso en que  $\phi^-$  está definido sobre la región que contiene la frontera  $x = -\infty$  y  $\phi^+$  sobre la región que contiene la frontera  $x = +\infty$ , mientras que para la situación inversa utilizaremos el subíndice  $\beta$ . Comencemos con la discusión detallada del caso  $\alpha$ . La elección opuesta es similar y, por tanto, solo presentaremos los resultados finales.

La condición  $\phi(\pm\infty) = 0$  tiene como consecuencia la siguiente cadena de

igualdades  $A_0^+ = A_0^- = A_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$  y  $A_1^+ = A_1^- = A_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}\pi \left(\frac{\pi^2}{8} - 1\right)$ . De aquí se tiene que sobre las regiones que contienen las fronteras la solución aproximada para la ecuación (4.16) bajo las restricciones (4.22) se puede escribir como sigue

$$\begin{aligned} \phi_-^\alpha &= -\sqrt{3} \arctan(x) + A_0 + \varepsilon A_1 - \frac{\sqrt{3}}{4} \varepsilon [2 \arctan(x) - A_0^2 \arctan(x) \\ &\quad - \arctan^3(x) + \sqrt{3} A_0 \arctan^2(x)], \quad x \in \mathfrak{R}_-, \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} \phi_+^\alpha &= \sqrt{3} \arctan(x) + A_0 + \varepsilon A_1 + \frac{\sqrt{3}}{4} \varepsilon [2 \arctan(x) - A_0^2 \arctan(x) \\ &\quad - \arctan^3(x) - \sqrt{3} A_0 \arctan^2(x)], \quad x \in \mathfrak{R}_+, \end{aligned} \quad (4.24)$$

donde los dominios  $\mathfrak{R}_-$  y  $\mathfrak{R}_+$  contienen los puntos  $x = -\infty$  y  $x = +\infty$ , respectivamente.

Puesto que las funciones contenidas en (4.23) y (4.24) son acotadas sobre  $\mathfrak{R}$ , el dominio de uniformidad para  $\phi_-^\alpha$  y  $\phi_+^\alpha$  se encuentra descrito por las regiones  $\mathbb{R} - \{+\infty\}$  y  $\mathbb{R} - \{-\infty\}$ , respectivamente, donde  $\mathbb{R}$  representa al eje real. No obstante, la igualdad de estos desarrollos en  $x = 0$  sugiere que es suficiente tomar una subregión sobre cada dominio de uniformidad, de modo que estos se extiendan desde la frontera hasta  $x = 0$ , esto es

$$\mathfrak{R}_- = (-\infty, 0],$$

$$\mathfrak{R}_+ = [0, \infty).$$

De esta manera, aparentemente se cubre todo el dominio de variación del campo mediante dos expansiones asintóticas. El próximo paso consiste en explorar la posible existencia de una capa de frontera sobre la región común ( $x = 0$ ) a ambos desarrollos.

Supongamos hipotéticamente la ausencia de dicha capa de frontera, entonces, la solución aproximada para  $\phi$  es la unión de los desarrollos  $\phi_-^\alpha$  y  $\phi_+^\alpha$

sobre sus respectivas regiones. En otras palabras,  $\phi$  toma el siguiente aspecto

$$\begin{aligned} \phi^\alpha = & \sqrt{3} \arctan(|x|) + A_0 + \varepsilon A_1 + \frac{\sqrt{3}}{4} \varepsilon [2 \arctan(|x|) - A_0^2 \arctan(|x|) \\ & - \arctan^3(|x|) - \sqrt{3} A_0 \arctan^2(x)], \quad x \in \mathfrak{R} = \mathbb{R} = \mathfrak{R}_- \cup \mathfrak{R}_+. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Como se puede apreciar de la igualdad anterior, esta aproximación para el campo es continua en el origen de coordenadas pero su derivada no lo es. En otras palabras, en una vecindad del origen la primera derivada del campo evoluciona “rápidamente” de valores positivos a valores negativos. Luego, se origina un comportamiento del tipo capa de frontera en una vecindad del punto  $x = 0$ . De aquí se tiene que la conjetura inicial acerca de la ausencia de una capa de frontera intermedia es falsa, lo que implica que la expresión (4.25) no es válida en vecindades centradas en  $x = 0$ . En otras palabras, el dominio de validez de  $\phi^\alpha$  es  $\mathbb{R} - \{0\}$ . Por consiguiente, es necesario introducir una expansión asintótica adicional sobre una región  $\mathfrak{R}_0$  que contenga al origen de coordenadas.

Como se mencionó con anterioridad, en este caso es conveniente definir una variable estirada

$$\ell = \frac{x}{\delta(\varepsilon)}, \quad \text{donde} \quad \delta(\varepsilon) = o(1) \quad \text{cuando} \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (4.26)$$

y realizar una nueva expansión para  $\phi(x) = \Theta(\ell)$  sobre  $\mathfrak{R}_0$

$$\Theta(\ell) = \Theta_0(\ell) + \varepsilon \Theta_1(\ell). \quad (4.27)$$

En términos de la nueva variable (4.26), la ecuación (4.16) se puede escribir como se indica a continuación

$$\begin{aligned} \varepsilon \Theta \frac{d^2 \Theta}{d\ell^2} + 2\varepsilon \delta^2 \frac{\ell}{1 + (\delta\ell)^2} \Theta \frac{d\Theta}{d\ell} + (\varepsilon - 1) \left( \frac{d\Theta}{d\ell} \right)^2 \\ - \frac{3}{2} \varepsilon \delta^2 \frac{\Theta^2}{(1 + (\delta\ell)^2)^2} = - \frac{3\delta^2}{(1 + (\delta\ell)^2)^2}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Al sustituir (4.27) en esta última igualdad, obtenemos

$$\begin{aligned} & \left( \frac{d\Theta_0}{d\ell} \right)^2 - \varepsilon \left[ \Theta_0 \frac{d^2\Theta_0}{d\ell^2} - 2 \frac{d\Theta_0}{d\ell} \frac{d\Theta_1}{d\ell} + \left( \frac{d\Theta_0}{d\ell} \right)^2 \right] - \varepsilon \delta^2 \left[ 2\ell \Theta_0 \frac{d\Theta_0}{d\ell} - \frac{3}{2} (\Theta_0)^2 \right] \\ & - \varepsilon^2 \left[ \Theta_0 \frac{d^2\Theta_1}{d\ell^2} + 2 \frac{d\Theta_0}{d\ell} \frac{d\Theta_1}{d\ell} + \Theta_1 \frac{d^2\Theta_0}{d\ell^2} - \left( \frac{d\Theta_1}{d\ell} \right)^2 \right] + \dots = 3\delta^2 + \dots, \quad (4.29) \end{aligned}$$

donde los puntos suspensivos indican términos de orden superior en  $\varepsilon$  y  $\delta(\varepsilon)$ . En este trabajo estudiaremos la teoría de perturbaciones hasta primer orden, por lo que solo es necesario considerar los términos escritos anteriormente.

Para determinar  $\Theta_0$  y  $\Theta_1$  necesitamos conocer cómo elegir  $\delta(\varepsilon)$ . La idea consiste en hacer una elección balanceada de la función  $\delta(\varepsilon)$ , de tal modo que las ecuaciones para las aproximaciones  $\Theta_0$  y  $\Theta_1$  contengan la máxima información posible (la mayor cantidad de términos). Dicha elección es denominada *límite distinguido* de la expansión (4.27) [123]–[127]. Expresemos esta idea de manera diferente: si hacemos una elección de  $\delta(\varepsilon)$  distinta del límite distinguido, todos los sumandos que surgen en las ecuaciones para  $\Theta_0$  y  $\Theta_1$  sobre esta elección, estarán contenidos en las ecuaciones para tales funciones en el límite distinguido.

Veamos el procedimiento para hallar el límite distinguido para la igualdad (4.29). Independientemente de la forma funcional de  $\delta(\varepsilon)$ , la ecuación de orden cero toma el siguiente aspecto

$$\frac{d\Theta_0}{d\ell} = 0.$$

Luego, (4.29) se puede reescribir como sigue

$$-\frac{3}{2}\varepsilon\delta^2\Theta_0^2 + \varepsilon^2 \left[ \left( \frac{d\Theta_1}{d\ell} \right)^2 - \Theta_0 \frac{d^2\Theta_1}{d\ell^2} \right] + \dots = 3\delta^2 + \dots \quad (4.30)$$

Al comparar cada par de sumandos en la igualdad anterior se obtienen las

posibles relaciones entre  $\varepsilon$  y  $\delta(\varepsilon)$ , esto es

$$\begin{aligned} \text{a1) } \varepsilon &= o(\delta^2), & \text{a2) } \delta^2 &= o(\varepsilon), & \text{a3) } \varepsilon &= \delta^2, \\ \text{b1) } \varepsilon &= o(\delta), & \text{b2) } \delta &= o(\varepsilon), & \text{b3) } \varepsilon &= \delta. \end{aligned}$$

La condición a1) implica que  $\delta^2 > \varepsilon$ , cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , de aquí se tiene que  $\delta^2 = \varepsilon^\alpha$ , donde  $0 < \alpha < 1$ . Esta opción queda descartada debido a que no es posible equiparar el término  $3\delta^2$  presente en el segundo miembro de la ecuación (4.30). Para el caso a2) resulta que  $\delta^2 = \varepsilon^{1+\alpha}$ , donde  $\alpha \geq 1$ , pues, si  $0 < \alpha < 1$ , nuevamente el sumando  $3\delta^2$  se encuentra desbalanceado. Utilizando los mismos argumentos que en el caso a1) se muestra que la situación descrita en a3) no es admisible. La opción b1) conlleva a que  $\delta = \varepsilon^\beta$ , donde  $0 < \beta < 1$ , por tanto, el sumando del lado derecho de (4.30) se encuentra desbalanceado. En el caso b2) se tiene que  $\delta = \varepsilon^{1+\beta}$  con  $\beta > 0$ , luego, esta condición arroja la siguiente ecuación para  $\Theta_1$

$$\Theta_0 \frac{d^2 \Theta_1}{d\ell^2} - \left( \frac{d\Theta_1}{d\ell} \right)^2 = 0.$$

Finalmente, cuando  $\delta = \varepsilon$  ( $\alpha = 1$  en el caso a2)) se obtiene que

$$\Theta_0 \frac{d^2 \Theta_1}{d\ell^2} - \left( \frac{d\Theta_1}{d\ell} \right)^2 = -3.$$

Este análisis nos permite concluir que  $\delta = \varepsilon$  corresponde al límite distinguido de (4.29). De esta manera, las ecuaciones asociadas a dicho límite toman el siguiente aspecto

$$\frac{d\Theta_0}{d\ell} = 0, \quad (4.31)$$

$$\Theta_0 \frac{d^2 \Theta_1}{d\ell^2} - \left( \frac{d\Theta_1}{d\ell} \right)^2 = -3. \quad (4.32)$$

Al resolver este sistema de ecuaciones, el campo  $\Theta(\ell)$  adopta la siguiente forma sobre capa de frontera:

$$\Theta(\ell) = \Theta_0 + \varepsilon \left[ c_2 - \Theta_0 \ln \cosh \left( \frac{\sqrt{3}}{\Theta_0} (\ell + c_1) \right) \right], \quad (4.33)$$

donde  $c_1$ ,  $c_2$  y  $\Theta_0$  son constantes arbitrarias. Los valores de estas constantes se determinan al hacer coincidir el desarrollo (4.25) hasta a cierto orden en  $\varepsilon$  con la expansión (4.33) sobre una *vecindad* que contenga a la región  $\mathfrak{R}_0$ . Como comentamos en la sección (4.1), es apropiado definir una nueva variable estirada

$$\ell_0 = \frac{x}{\delta_0(\varepsilon)}, \text{ donde } \delta_0(\varepsilon) = o(1) \text{ y } \varepsilon = o(\delta_0(\varepsilon)) \text{ cuando } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (4.34)$$

Al expandir en términos de  $\delta_0(\varepsilon)$ , la aproximación de orden cero<sup>5</sup> de (4.25) y la solución de la capa de frontera (4.33), se obtiene que

$$\begin{aligned} \phi^\alpha &= \sqrt{3}\delta_0|\ell_0| - \sqrt{3}\frac{\pi}{2}, \\ \Theta &= \Theta_0 + \sqrt{3}\delta_0|\ell_0| + \varepsilon(\sqrt{3}c_1\text{sgn}(\ell_0) + c_2 + \Theta_0 \ln 2). \end{aligned} \quad (4.35)$$

Al igualar estos desarrollos sobre la región de ancho  $\delta_0$  se obtienen los siguientes valores para las constantes  $\Theta_0$ ,  $c_1$  y  $c_2$

$$\begin{aligned} \Theta_0 &= -\sqrt{3}\frac{\pi}{2}, \\ c_1 &= 0, \\ c_2 &= \sqrt{3}\frac{\pi}{2} \ln 2. \end{aligned}$$

Cabe señalar que, hasta este punto, la descripción de nuestra solución aproximada se realiza mediante dos expansiones asintóticas (4.25) y (4.33), las cuales pueden ser unidas para construir una solución que sea uniformemente válida en  $\mathfrak{R} = \mathbb{R}$ . Como se mencionó con anterioridad, la expansión compuesta en cierta región se obtiene sumando los desarrollos asintóticos definidos sobre dicha región, todos ellos expresados en términos de la misma variable, y sustrayendo posteriormente la parte que es común a ambas. En nuestro

---

<sup>5</sup>Para incluir la aproximación de primer orden de  $\phi^\alpha(x)$  (ver ecuación (4.25)), es necesario calcular la contribución de  $\varepsilon^2\Theta_2(\ell)$  a la expansión (4.27). Sin embargo, este caso es más complejo y, por tanto, no va a ser considerado en este trabajo.

caso particular, la expansión compuesta puede ser expresada como sigue

$$\phi_c^\alpha(x) = \phi_0^\alpha(x) + \Theta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \phi_{com}(x),$$

donde  $\phi_{com}(x)$  es la parte común a ambas expansiones asintóticas.

En virtud de (4.35), la parte común de los desarrollos (4.25) y (4.33) sobre una vecindad del origen de coordenadas toma la siguiente forma

$$\phi_{com}(x) = \sqrt{3} \left( |x| - \frac{\pi}{2} \right).$$

De este modo, se tiene que

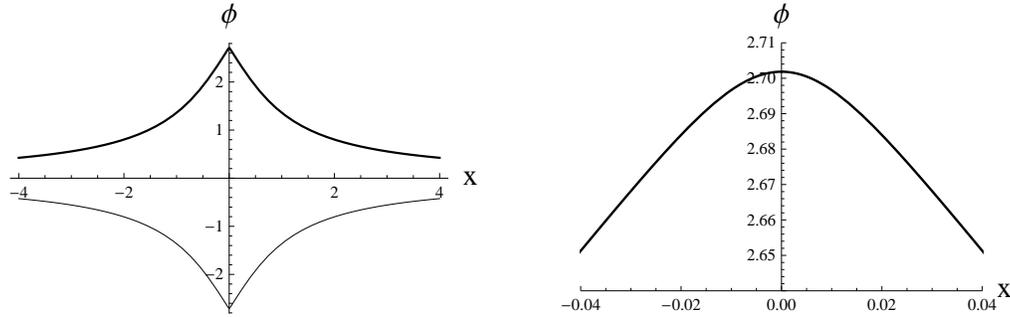


Figura 4.5: La gráfica de la izquierda muestra las soluciones para el campo  $\phi$  en el caso IIIb); la línea delgada representa  $\phi_c^\alpha(x)$  mientras que la línea gruesa denota  $\phi_c^\beta(x)$ . Ambos perfiles tienden a cero asintóticamente. En la gráfica de la derecha se representa una ampliación del perfil  $\phi_c^\beta(x)$  sobre una región que contiene a  $x = 0$ . En estas figuras hemos fijado  $\varepsilon = 0.01$ .

$$\phi_c^\alpha(x) = \phi(x) = \sqrt{3} \left\{ \arctan(|x|) - |x| - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \varepsilon \ln \left[ 2 \cosh \left( \frac{2x}{\pi \varepsilon} \right) \right] \right\}. \quad (4.36)$$

Utilizando el mismo procedimiento anterior es posible mostrar que  $\phi_c^\alpha(x) = -\phi_c^\beta(x)$ .

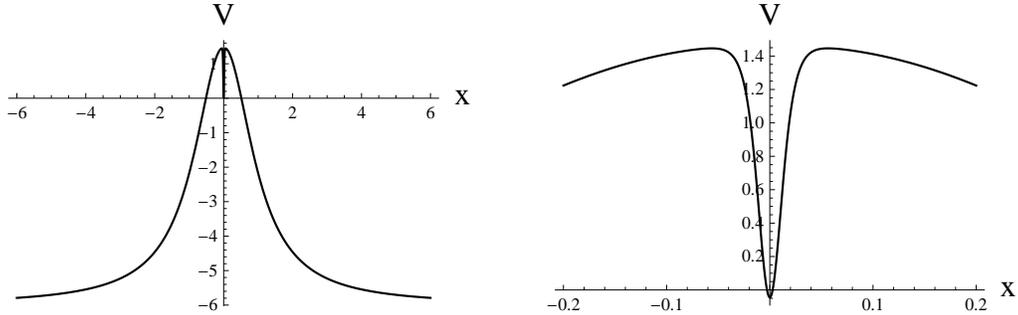


Figura 4.6: La gráfica izquierda muestra el potencial de autointeracción con respecto a la variable  $x$  para el caso IIb). En la gráfica de la derecha hemos realizado un acercamiento del potencial de autointeracción en una vecindad del punto  $x = 0$ . En estas figuras hemos fijado  $\kappa = 1$ ,  $a_0 = 1$ ,  $b = 1$  y  $\varepsilon = 0.01$ .

La parte izquierda de la Fig. 4.5 refleja el carácter par de ambas soluciones, además se puede observar que estas son acotadas, continuas y con derivadas continuas en todo el dominio de variación del campo. En la parte derecha de la Fig. 4.5 hemos realizado un acercamiento de  $\phi^\beta(x)$  en una región cercana al origen de coordenadas para apreciar de manera más evidente el comportamiento suave de dicho perfil. Al igual que en el caso I), el potencial de autointeracción interpola entre dos valores constantes negativos e idénticos (véase Fig. 4.6) los cuales toman el siguiente aspecto

$$V(\infty) \sim -\frac{6b^2}{a_0^2\kappa}.$$

Por otro lado, la masa de Planck en 4D es

$$M_P^2 \sim \frac{a_0^3 M^3}{b} \{2 - 3\varepsilon(\pi - 2)\}. \quad (4.37)$$

Nuevamente, el efecto del acoplamiento no mínimo disminuye el valor de  $M_P^2$  con respecto al modelo donde el campo se encuentra mínimamente acoplado

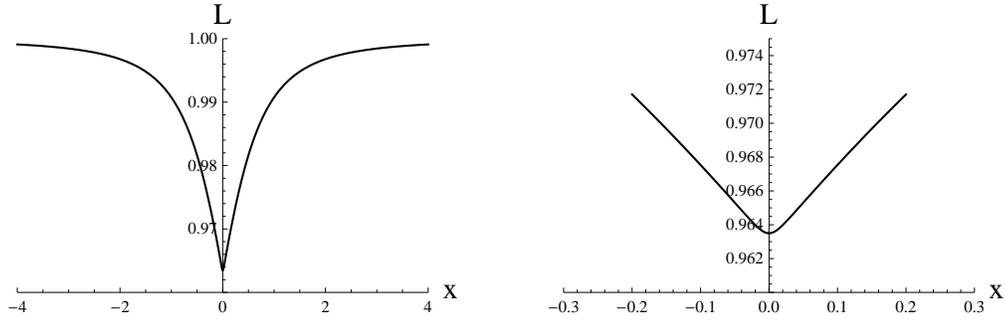


Figura 4.7: La gráfica de la izquierda muestra la función  $L(\phi)$  con respecto a la variable  $x$  para el caso IIb). En la gráfica de la derecha hemos realizado una ampliación de esta función en una zona que contiene al origen de coordenadas. En estas figuras hemos fijado  $\varepsilon = 0.01$ .

a la gravedad y no existe el término de Gauss-Bonnet. Mediante el uso de la condición  $L(\varphi) > 0$  y el carácter positivo del cuadrado de la masa de Planck, la restricción para los valores del parámetro  $\varepsilon$  adopta la siguiente forma

$$\varepsilon < \frac{8}{3\pi^2}.$$

En la Fig. 4.7 a se muestra la función  $L(\phi)$  para ambas soluciones. Como se puede observar, la condición  $L(\phi) > 0$  se satisface.

Puesto que  $M_P^2$  es finita, el modo cero tensorial es localizado mientras que su homólogo vectorial se deslocaliza de la membrana. En lo que se refiere a los modos escalares, utilizando (4.3) y (4.36) se muestra que

$$\frac{1}{z^2} \sim |x|^5, \quad \text{cuando } x \rightarrow \infty.$$

Luego, el modo cero escalar no está normalizado, en consecuencia, este no se localiza sobre la membrana.

### Caso III) Acoplamiento no mínimo y término de Gauss-Bonnet

Si al igual que en el primer caso, imponemos la relación  $a_0^2 = 4\epsilon b^2$ , la ecuación de campo (4.8) toma el siguiente aspecto

$$\epsilon\phi\phi'' + \frac{2\epsilon x}{1+x^2}\phi\phi' + \phi'^2(\epsilon - 1) - \frac{3}{2}\epsilon\frac{\phi^2}{(1+x^2)^2} = -\frac{3}{(1+x^2)^3}. \quad (4.38)$$

En este caso, por motivos de simplicidad, modificaremos la condición  $\langle\psi|\psi\rangle > 0$  por otra más simple y restrictiva donde la función de peso  $r/s$  asociada a la norma de los modos tensoriales no es negativa. Bajo esta redefinición de (4.2), los perfiles admisibles para  $\phi$  satisfacen la siguiente relación

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{\epsilon}{2}\phi^2 \geq 0. \quad (4.39)$$

En virtud de la restricción anterior se tiene que el campo debe ser nulo cuando  $x \rightarrow \infty$ . Luego, a la ecuación diferencial (4.38) se le adicionan las condiciones de frontera

$$\phi(-\infty) = \phi(\infty) = 0. \quad (4.40)$$

De manera similar al caso anterior, estudiaremos la solución de la ecuación (4.38) bajo los requisitos presentados en (4.40), mediante el uso de la Teoría de Perturbaciones Singulares.

Sobre el dominio exterior a la posible capa de frontera, proponemos la siguiente expansión

$$\phi = \phi_0(x) + \epsilon\phi_1(x) + o(\epsilon\phi_1(x)). \quad (4.41)$$

Al sustituir esta expansión en (4.38), las ecuaciones para las aproximaciones a orden cero y primer orden adquieren la forma:

$$\begin{aligned} \phi_0'^2 - \frac{3}{(1+x^2)^3} &= 0, \\ 2\phi_0'\phi_1' - \phi_0'^2 - \phi_0\phi_0'' - \frac{2x\phi_0\phi_0'}{1+x^2} + \frac{3}{2}\frac{\phi_0^2}{(1+x^2)^2} &= 0, \end{aligned}$$

y poseen las siguientes soluciones:

$$\begin{aligned}\phi_0^\pm &= \pm\sqrt{3}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + B_0^\pm, \\ \phi_1^\pm &= \frac{1}{4\sqrt{3}}\left\{\frac{\pm 21x}{\sqrt{1+x^2}} \mp 3[5 + (B_0^\pm)^2] \operatorname{arcsinh}(x) - \right. \\ &\quad \left. 4\sqrt{3}B_0^\pm \ln(1+x^2)\right\} + B_1^\pm.\end{aligned}\quad (4.42)$$

En las expresiones anteriores  $B_0^\pm$  y  $B_1^\pm$  representan constantes arbitrarias. Nuevamente, el signo  $\pm$  indica dos soluciones para cada orden de las perturbaciones.

Una vez seleccionado el signo de la solución a estudiar, para cada orden se tiene una constante a fijar y dos condiciones sobre ella. En consecuencia, utilizando solamente una solución no es posible satisfacer ambas condiciones de frontera simultáneamente. Por consiguiente, dada la similitud de la igualdad (4.38) y las condiciones (4.40) con el problema de frontera presentado en el caso IIb) procederemos de manera similar a este. Una primera opción consiste en escoger a  $\phi^- = \phi_0^- + \varepsilon\phi_1^-$  como el desarrollo uniformemente válido sobre una región que contenga  $x = -\infty$ , y asociar la expansión  $\phi^+ = \phi_0^+ + \varepsilon\phi_1^+$  a una región que contenga  $x = +\infty$ . En esta parte usaremos la misma notación del caso IIb) y al igual que este caracterizaremos esta elección con el índice  $\alpha$ . La elección inversa se denotará por el índice  $\beta$ . De esta manera,  $\phi^\alpha$  toma el siguiente aspecto

$$\begin{aligned}\phi^\alpha &= \frac{\sqrt{3}|x|}{\sqrt{1+x^2}} + B_0 + \varepsilon B_1 + \frac{\varepsilon}{4\sqrt{3}}\left\{\frac{21|x|}{\sqrt{1+x^2}} - 3[5 + B_0^2] \operatorname{arcsinh}(|x|) - \right. \\ &\quad \left. 4\sqrt{3}B_0 \ln(1+x^2)\right\}, \quad x \in \mathfrak{R}_- \cup \mathfrak{R}_+, \end{aligned}\quad (4.43)$$

donde  $\mathfrak{R}_-$  y  $\mathfrak{R}_+$  corresponden a los dominios que contienen los “puntos”  $x = -\infty$  y  $x = +\infty$ , respectivamente. Por otra parte, las condiciones de frontera (4.40) se satisfacen si las constantes definidas en (4.42) adquieren los valores:  $B_0^\pm = B_0 = -\sqrt{3}$  y  $B_1^\pm = B_1 = -\frac{7\sqrt{3}}{4}$ .

Nuevamente, en (4.43) se tiene una capa de frontera sobre una vecindad del origen. Luego, es conveniente repetir el mismo procedimiento que aplicamos en el caso IIb); para ello, consideremos el cambio de variable (4.26) y expresemos la ecuación (4.38) en términos de esta

$$\begin{aligned} \varepsilon \Theta \frac{d^2 \Theta}{d\ell^2} + 2\varepsilon \delta^2 \frac{\ell}{1 + (\delta\ell)^2} \Theta \frac{d\Theta}{d\ell} + (\varepsilon - 1) \left( \frac{d\Theta}{d\ell} \right)^2 - \\ \frac{3}{2} \varepsilon \delta^2 \frac{\Theta^2}{(1 + (\delta\ell)^2)^2} = - \frac{3\delta^2}{(1 + (\delta\ell)^2)^3}, \end{aligned} \quad (4.44)$$

donde  $\Theta(\ell)$  es el campo expresado en términos de la variable  $\ell$ .

La igualdad (4.44) es similar a la ecuación (4.29), la única diferencia surge en el segundo miembro de estas ecuaciones. No obstante, después de expandir (4.27) en la región de la capa de frontera, solo se tendrán en cuenta los sumandos hasta segundo orden en  $\delta$ . De este modo, las ecuaciones para las primeras dos aproximaciones del campo en la región de la capa de frontera coinciden con las que hemos obtenido en el caso anterior. Luego, la solución adopta la siguiente forma

$$\Theta(\ell) = \Theta_0 + \varepsilon \left\{ d_2 - \Theta_0 \ln \cosh \left[ \frac{\sqrt{3}}{\Theta_0} (\ell + d_1) \right] \right\}, \quad (4.45)$$

donde  $\Theta_0$  es constante y describe la aproximación a orden cero para  $\phi$ , mientras que  $d_1$ ,  $d_2$  representan constantes arbitrarias. Estas constantes se obtienen, primeramente expresando los desarrollos asintóticos (4.43) y (4.45), en términos de la variable estirada (4.34), una vez realizadas las operaciones algebraicas pertinentes se halla que

$$\begin{aligned} \phi^\alpha &= \sqrt{3} \delta_0 |\ell_0| - \sqrt{3}, \\ \Theta &= \Theta_0 + \sqrt{3} \delta_0 |\ell_0| + \varepsilon (\sqrt{3} d_1 \operatorname{sgn}(\ell_0) + d_2 + \Theta_0 \ln 2). \end{aligned} \quad (4.46)$$

El siguiente paso consiste en igualar los resultados anteriores. Hecho esto, los

valores para las constantes toman el siguiente aspecto

$$\begin{aligned}\Theta_0 &= -\sqrt{3}, \\ d_1 &= 0, \\ d_2 &= \sqrt{3} \ln 2.\end{aligned}$$

Finalmente, utilizando el procedimiento aplicado en el caso anterior pa-

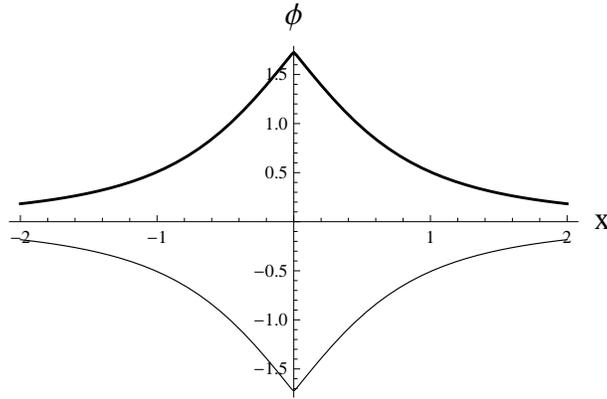


Figura 4.8: Las soluciones para el campo  $\phi$  en el caso III; la línea delgada representa  $\phi^\alpha(x)$  y la línea gruesa denota  $\phi^\beta(x)$ . Ambos perfiles tienden asintóticamente a cero. En la figura hemos elegido  $\varepsilon = 0.01$ .

ra construir la expansión compuesta se obtiene fácilmente que el desarrollo asintótico global se puede escribir como sigue

$$\phi_c^\alpha(x) = \phi(x) = \sqrt{3} \left\{ \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} - 1 - |x| + \varepsilon \ln \left[ 2 \cosh \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right] \right\}. \quad (4.47)$$

Al reproducir el mismo método anteriormente expuesto para  $\phi_\beta$  se muestra que  $\phi_c^\alpha(x) = -\phi_c^\beta(x)$ .

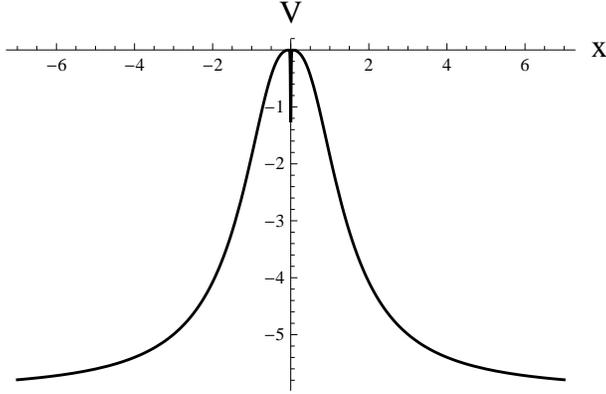


Figura 4.9: El potencial de autointeracción con respecto a la variable  $x$  para el caso III ( $\kappa = 1$ ,  $a_0 = 1$ ,  $b = 1$  y  $\varepsilon = 0.01$ ).

De la Fig. 4.8 se observa que ambos perfiles del campo representan funciones acotadas, pares y continuas sobre el dominio de variación del campo. Además, en virtud de (4.47), es posible mostrar que su derivada es continua. El valor asintótico del potencial de autointeracción es:

$$V(\infty) \sim -\frac{6b^2}{a_0^2\kappa},$$

y su perfil es mostrado en la Fig. 4.9; el comportamiento del potencial es similar al ilustrado en la Fig. 4.6a. Por otro lado, el valor de  $M_P^2$  está dado por

$$M_P^2 \sim \frac{a_0^3 M^3}{b} \left( \frac{4}{3} - \varepsilon \right).$$

Mediante la comparación de la expresión anterior con (4.7) se aprecia el efecto del acoplamiento no mínimo: este reduce el valor de la masa de Planck en 4D comparado con su valor en el modelo en que el campo escalar está mínimamente acoplado a la gravedad y el término de Gauss-Bonnet reside en el bulto. El hecho de poseer una masa de Planck cuatridimensional finita implica la localización del modo cero tensorial. Como mencionamos en las

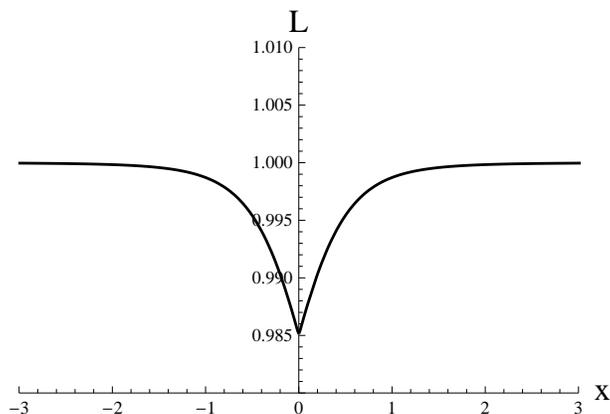


Figura 4.10: Función de acoplamiento  $L$  para el caso III. En la figura hemos elegido  $\varepsilon = 0.01$ .

secciones (3.3.2) y (3.3.3), el estudio de los modos cero de las fluctuaciones escalares y vectoriales asociadas a este caso se torna más complejo, por lo que no lo consideraremos en esta tesis.

Por otro lado, las condiciones de consistencia (4.2) junto con la modificación (4.39) implican que

$$\varepsilon < \frac{2}{3}.$$

Como se puede observar a partir de las Figs. 4.10 y 4.11, las funciones  $L$  y  $f(x)$  se mantienen positivas para estos valores restringidos de  $\varepsilon$ .

Con el fin de comparar los casos II y III se muestra la solución  $\phi_c^\beta(x)$  y su potencial de autointeracción para ambos casos en las Figs. 4.12 y 4.13, respectivamente. Como se observa, existen algunas pequeñas diferencias en estas cantidades cerca del origen de la coordenada extra, mientras que para valores diferentes de cero esta diferencia entre las soluciones disminuye con el aumento de  $|x|$ , resultado que concuerda cualitativamente con estudios

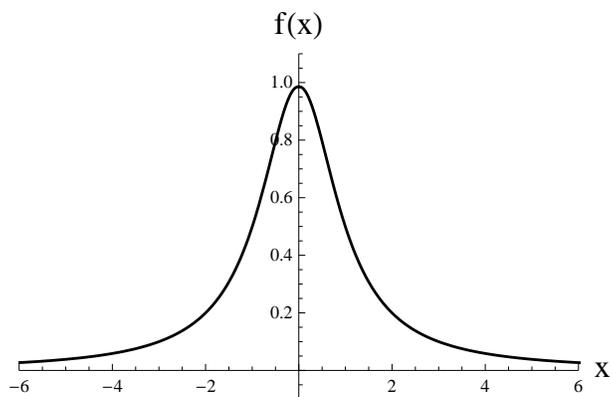


Figura 4.11: La figura muestra el cumplimiento de la condición de consistencia (4.39). Al igual que antes, se ha elegido  $\varepsilon = 0.01$ .

numéricos realizados en [122].

Para finalizar, en el próximo capítulo haremos una síntesis de los resultados obtenidos a lo largo de la tesis.

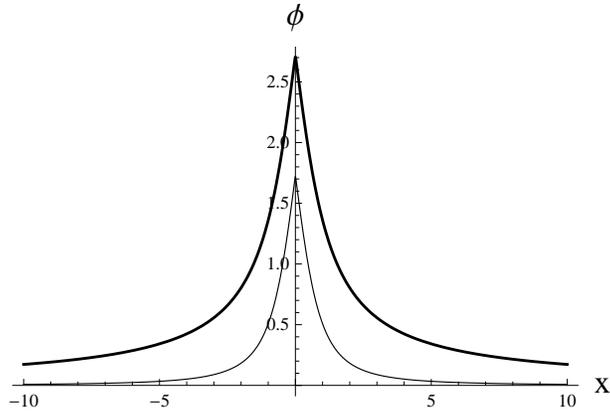


Figura 4.12: Comparación de las soluciones. La línea delgada representa  $\phi_c^\beta(x)$  para el caso IIb) y la línea gruesa,  $\phi_c^\beta(x)$  para el caso III. En ambos perfiles hemos fijado arbitrariamente  $\varepsilon = 0.01$ .

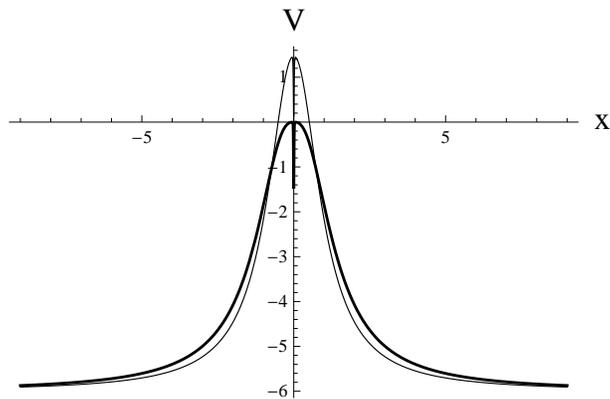


Figura 4.13: Comparación de los potenciales de autointeracción. La línea delgada representa el potencial de autointeracción para el caso IIb) y la línea gruesa denota el potencial de autointeracción para el caso III ( $\kappa = 1$ ,  $a_0 = 1$ ,  $b = 1$  y  $\varepsilon = 0.01$ ).

# Capítulo 5

## Conclusiones

En este trabajo se ha explorado un modelo de mundo membrana donde la materia escalar se encuentra no mínimamente acoplada a la gravedad y adicionalmente se tiene la presencia del término de Gauss-Bonnet en el bulto. Para este modelo, se calcula la masa de Planck cuatridimensional en términos de la masa fundamental pentadimensional y las cantidades asociadas tanto a la materia como a la geometría. En contraste con los escenarios donde el campo escalar está mínimamente acoplado al término de Einstein-Hilbert, en nuestro modelo la masa de Planck en cuatro dimensiones depende explícitamente del contenido de materia en el bulto en virtud del acoplamiento no mínimo entre el campo escalar y la gravedad. Además, para las geometrías deformadas (2.5), la adición del acoplamiento no mínimo definido en (3.55) y el término de Gauss-Bonnet al escenario constituido por un campo escalar mínimamente acoplado al término de Einstein-Hilbert, reduce ligeramente el valor de la masa de Planck efectiva. Esto es consecuencia de que tales efectos contribuyen con signo negativo al valor de  $M_p^2$ . Un efecto adverso relacionado con este último hecho es que no es posible garantizar una masa de Planck cuatridimensional positiva para todas las configuraciones de la geometría y de los parámetros del modelo. Para cada configuración de la

física del fondo es forzoso verificar si esta arroja un valor finito y positivo de  $M_P^2$ .

Por otro lado, se estudiaron las condiciones de regularidad de la geometría de fondo para una clase importante de soluciones donde el factor de deformación se aproxima a cero en infinito mediante una ley de potencia. Para este tipo de perfil, se obtuvo que el exponente  $\gamma$  se encuentra limitado al intervalo  $(0, 1]$ .

Para que nuestro modelo sea físicamente viable, uno de los requisitos que este debe satisfacer es la posibilidad de recuperar la gravedad cuatridimensional estándar sobre la membrana. Con tal objetivo, en el capítulo 3 se investigó la localización de las fluctuaciones gravitacionales sobre geometrías de fondo que poseen invarianza de Poincaré en cuatro dimensiones. El uso de dicha simetría permitió la clasificación de las fluctuaciones en modos tensoriales, vectoriales y escalares, cuya evolución se estudió mediante un formalismo invariante de norma.

En lo referente al sector tensorial, se obtuvo que para la clase de soluciones regulares analizadas en el capítulo 2, la existencia del gravitón sin masa localizado sobre la membrana es equivalente a poseer una masa de Planck efectiva finita. En adición a esto, si la función  $L(\varphi)$  es acotada y asintóticamente no nula, la condición de normalización del modo cero reduce el intervalo para  $\gamma$ , inicialmente obtenido en el capítulo 2, al siguiente  $(1/3, 1]$ .

Para los sectores escalar y vectorial, los resultados fueron menos generales, pues la presencia simultánea del acoplamiento no mínimo y el término de Gauss–Bonnet introdujo dificultades adicionales en el estudio de las ecuaciones para las fluctuaciones. Como consecuencia de ello, el análisis de los modos escalares y vectoriales se separó en dos casos. En el primero de ellos no se tuvieron en cuenta los efectos asociados al acoplamiento no mínimo, mientras que en el segundo caso se descartó el término de Gauss–Bonnet.

Cuando se elimina el acoplamiento no mínimo de la acción de la teoría (2.1), tanto el modo cero asociado a las fluctuaciones escalares como su análogo en el sector vectorial se deslocalizan de la membrana si nos restringimos a la clase de soluciones regulares descritas anteriormente y asumimos que la masa de Planck en cuatro dimensiones es finita (gravitón no masivo localizado). Conclusiones idénticas se obtienen cuando se remueve el término de Gauss–Bonnet de nuestro modelo.

La localización del gravitón no masivo, así como la deslocalización de los modos cero asociados a los sectores escalar y vectorial, unida a la existencia de una masa de Planck efectiva finita, no son garantía de que nuestro modelo sea físicamente consistente. Otro de los requisitos que debe cumplir un escenario de mundo membrana es poseer una norma definida positiva para las fluctuaciones gravitacionales. Para el estudio de estas restricciones, aunado al de la condición  $L(\varphi) > 0$ , no basta con conocer el comportamiento asintótico de la materia y la geometría, es imprescindible conocer estas cantidades sobre todo el espacio–tiempo.

En el capítulo 3 se exploran las propiedades de localización y las condiciones de consistencia (4.2) para un espacio–tiempo regular y asintóticamente  $AdS_5$  (ver la expresión (4.3)). Debido a que  $M_P$ ,  $L(\varphi)$  y las condiciones de normalización (3.33) y (3.44) dependen explícitamente del perfil del campo escalar, es importante resolver la ecuación para  $\varphi$  y revisar cuidadosamente si las condiciones (4.2) se satisfacen, pues en tales cantidades se tienen sumandos que presentan contribuciones de signo negativo. Con el fin de dilucidar los efectos físicos asociados a la inclusión del acoplamiento no mínimo y el término de Gauss-Bonnet, en el proceso de resolución de la ecuación diferencial para el campo se han considerado tres casos en que incluimos/excluimos sus parámetros correspondientes.

Cuando la membrana gruesa está constituida por un campo escalar mínimamente acoplado a la gravedad y presenta el término de Gauss-Bonnet en

el bulto, la solución se puede obtener de manera exacta y  $\varphi$  tiene la forma de un *kink/anti-kink*. El potencial de autointeracción es constante y negativo en  $x = \infty$ , resultado que no es una sorpresa dado que nuestra métrica es asintóticamente  $AdS_5$ . El modo cero tensorial representa el gravitón sin masa y se encuentra localizado sobre la membrana, en contraste, los modos cero escalar y vectorial se deslocalizan de esta. En este caso las condiciones de consistencia (4.2) se satisfacen de forma trivial.

Por otra parte, la dificultad de la ecuación para  $\phi$  se incrementa al considerar el acoplamiento no mínimo. Por tal razón la obtención de las soluciones se realizó mediante métodos perturbativos. Específicamente, los efectos asociados a la presencia del acoplamiento no mínimo se interpretaron como una pequeña corrección a un mundo membrana constituido por un campo escalar mínimamente acoplado a la gravedad más el término de Gauss–Bonnet sobre el bulto. Para ello se definió un parámetro adimensional pequeño  $\varepsilon$  cuya intensidad caracterizaba al acoplamiento no mínimo. Para resolver esta ecuación fue necesario aplicar el método de perturbaciones singulares puesto que resultó que el campo escalar tenía diferentes escalas de variación en distintas regiones de su dominio, una situación conocida en la literatura matemática como el problema de la capa de frontera.

En un segundo caso se remueve el término de Gauss–Bonnet de la acción (2.1) que define el mundo membrana. El análisis de esta situación se dividió en dos subcasos. Primeramente no se impuso ninguna condición de frontera particular sobre el campo. A primer orden en  $\varepsilon$  se obtuvieron soluciones con un comportamiento tipo *kink* y con una masa de Planck finita, lo que implicó la existencia de un modo cero tensorial localizado. Nuevamente, los modos cero de los sectores de las fluctuaciones restantes están deslocalizados de la membrana. En adición a esto, las condiciones de consistencia (4.2) restringieron los posibles valores del parámetro de perturbación, situación que también se mantuvo en todos los casos que presentaron acoplamiento no

mínimo.

Para este subcaso se observa un efecto interesante: existen algunas configuraciones donde el potencial de autointeracción del campo escalar adopta diferentes valores asintóticos en  $-\infty$  y  $+\infty$ . Hecho que pareciera inesperado dado que la geometría es par respecto a  $x$ . En presencia de un acoplamiento mínimo entre el campo escalar y la gravedad, una simetría par del espacio-tiempo de fondo induce cierta paridad sobre la derivada del campo y su potencial de autointeracción, en virtud de las ecuaciones de Einstein. Al introducir materia no mínimamente acoplada a la gravedad, este resultado no siempre es cierto, puesto que en configuraciones donde el campo y su potencial de autointeracción no poseen un paridad definida, los efectos del acoplamiento no mínimo pueden corregir tales asimetrías (vía ecuaciones de Einstein), de modo que la geometría permanezca par respecto al cambio  $x \rightarrow -x$ .

Posteriormente, en el segundo subcaso se impusieron condiciones de frontera nulas sobre el campo y se estudió la solución correspondiente mediante el método de perturbaciones singulares con capas de frontera. La configuración del campo obtenida resultó ser par y continua junto con sus derivadas. Además, presentó una capa de frontera sobre una región que contenía al origen de coordenadas. De nuevo se obtuvo una masa de Planck cuatridimensional finita, un gravitón sin masa localizado sobre la membrana y los modos cero de los sectores escalar y vectorial no se localizaron sobre esta. Al igual que en el subcaso anterior las condiciones de consistencia del modelo restringieron los posibles valores de  $\varepsilon$ .

En el último caso se tuvieron en cuenta todos los ingredientes del escenario descrito en (2.1). Esta vez se exigió que la función de peso asociada a la norma de los modos tensoriales fuera no negativa. Bajo este requisito, se investigó la solución de la ecuación para  $\phi$  con condiciones de frontera nulas. Utilizando el mismo procedimiento que en el subcaso anterior se obtuvo un

perfil para el campo, par, continuo y con derivadas continuas, el cual presentó una capa de dominio en  $x = 0$ . La masa de Planck efectiva resultó finita, luego, el modo cero tensorial es normalizable. Nuevamente, las condiciones de consistencia unidas a la nueva restricción sobre la función de peso de la norma de los modos tensoriales, arrojaron una cota para los valores del parámetro de perturbación.

Finalmente, al comparar la solución del segundo subcaso con el tercer caso, en el que además del acoplamiento no mínimo se tiene la contribución del término de Gauss-Bonnet, se encontró que ambas soluciones poseen un comportamiento similar.

# Apéndice A

## Cantidades geométricas útiles

Dado el elemento de línea

$$ds^2 = a^2(w) [\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - dw^2], \quad (\text{A.1})$$

los símbolos de Christoffel no nulos asociados a esta métrica toman el siguiente aspecto

$$\Gamma_{Bw}^A = \mathcal{H} \delta_B^A \quad \text{y} \quad \Gamma_{\mu\nu}^w = \mathcal{H} \eta_{\mu\nu}, \quad (\text{A.2})$$

donde  $\mathcal{H} = \frac{a'}{a}$ .

Las componentes no triviales del tensor de Riemann se pueden escribir como sigue

$$\begin{aligned} R^w{}_{\mu w \nu} &= \mathcal{H}' \eta_{\mu\nu}, \\ R^\mu{}_{\alpha\nu\beta} &= [\delta_\nu^\mu \eta_{\alpha\beta} - \delta_\beta^\mu \eta_{\alpha\nu}] \mathcal{H}^2. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Además, las componentes del tensor de Ricci adquieren la siguiente forma

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= (\mathcal{H}' + 3\mathcal{H}^2) \eta_{\mu\nu}, \\ R_{\mu w} &= 0, \\ R_{ww} &= -4\mathcal{H}'. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

El término de Gauss–Bonnet correspondiente a la métrica (C.1) es

$$\mathcal{R}_{GB}^2 = \frac{24\mathcal{H}^2}{a^4} (4\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2). \quad (\text{A.5})$$

La contribución del acoplamiento no mínimo a las ecuaciones de Einstein está dado por el tensor:

$$N_{AB} = \nabla_A \nabla_B L + \frac{1}{3} g_{AB} \square L,$$

cuyas componentes tienen el siguiente aspecto

$$\begin{aligned} N_{\mu\nu} &= -\frac{1}{3} \eta_{\mu\nu} (L'' + 6\mathcal{H}L'), \\ N_{\mu w} &= 0, \\ N_{ww} &= \frac{4}{3} L''. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

El tensor de energía–momento definido en (2.3) se puede escribir como sigue

$$\begin{aligned} \tau_{\mu\nu} &= -\frac{2}{3} \eta_{\mu\nu} a^2 V(\varphi), \\ \tau_{\mu w} &= 0, \\ \tau_{ww} &= \varphi'^2 + \frac{2}{3} a^2 V(\varphi). \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Las componentes del tensor de Lanczos toman el siguiente aspecto

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{\mu\nu} &= -\frac{4\mathcal{H}^2}{a^2} \eta_{\mu\nu} (\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2), \\ \mathcal{Q}_{\mu w} &= 0, \\ \mathcal{Q}_{ww} &= \frac{8\mathcal{H}^2}{a^2} (2\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2). \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

## Apéndice B

# Transformación conforme sobre el término de Gauss–Bonnet

Consideremos un espacio–tiempo pentadimensional caracterizado por la métrica  $g_{AB}$ . Veamos cómo se modifica el término de Gauss–Bonnet

$$\mathcal{R}_{GB}^2 = R^2 - 4R_{AB}R^{AB} + R_{ABCD}R^{ABCD}, \quad (\text{B.1})$$

ante la siguiente transformación conforme

$$g_{AB} = \Omega^2 \hat{g}_{AB}. \quad (\text{B.2})$$

Primeramente, expresemos  $\mathcal{R}_{GB}^2$  de modo que los cálculos a realizar sean más sencillos. El cuadrado del tensor de Weyl en cinco dimensiones toma el siguiente aspecto [111]

$$C^2 = \frac{R^2}{6} - \frac{4}{3}R_{AB}R^{AB} + R_{ABCD}R^{ABCD}. \quad (\text{B.3})$$

Al combinar la expresión anterior con (B.1), se puede eliminar el sumando  $R_{ABCD}R^{ABCD}$ . Luego, el término de Gauss–Bonnet se puede reescribir como sigue

$$\mathcal{R}_{GB}^2 = C^2 - \frac{8}{3}R_{AB}R^{AB} + \frac{5}{6}R^2. \quad (\text{B.4})$$

Por otra parte, el tensor de Weyl es invariante ante una transformación conforme, de aquí que:

$$C^2 = \widehat{C}^2,$$

donde la cantidad con sombrero está calculada con respecto a la métrica  $\widehat{g}_{AB}$ . De esta manera, al aplicar una transformación conforme sobre  $\mathcal{R}_{GB}^2$ , solamente es necesario conocer cómo se transforma  $R_{AB}R^{AB}$  y  $R^2$  ante esta.

En una variedad pentadimensional, (B.2) induce las siguientes transformaciones sobre el tensor y el escalar de Ricci [73]

$$R_{AB} = \widehat{R}_{AB} + 3\widehat{\nabla}_A f \widehat{\nabla}_B f - 3\widehat{\nabla}_A \widehat{\nabla}_B f - 3\widehat{g}_{AB} (\widehat{\nabla} f)^2 - \widehat{g}_{AB} \square f, \quad (\text{B.5})$$

$$R = \Omega^{-2} \left( \widehat{R} - 8\square f - 12(\widehat{\nabla} f)^2 \right), \quad (\text{B.6})$$

donde  $f = \ln \Omega$ .

Ahora, el tensor de Ricci contravariante en el marco conforme, adquiere el siguiente aspecto

$$R^{AB} = g^{AC} g^{BD} R_{CD} = \frac{1}{\Omega^4} \widehat{g}^{AC} \widehat{g}^{BD} R_{CD}.$$

Escrito de manera explícita,

$$R^{AB} = \frac{1}{\Omega^4} \left[ \widehat{R}^{AB} + 3\widehat{\nabla}^A f \widehat{\nabla}^B f - 3\widehat{\nabla}^A \widehat{\nabla}^B f - 3g^{AB} (\widehat{\nabla} f)^2 - g^{AB} \square f \right]. \quad (\text{B.7})$$

En virtud de (B.5) y la relación anterior, se tiene que:

$$\begin{aligned} R^{AB} R_{AB} = \frac{1}{\Omega^4} & \left[ \widehat{R}_{AB} \widehat{R}^{AB} + 6\widehat{R}^{AB} \widehat{\nabla}_A f \widehat{\nabla}_B f - 6\widehat{R}^{AB} \widehat{\nabla}_A \widehat{\nabla}_B f - 6\widehat{R} (\widehat{\nabla} f)^2 \right. \\ & - 2\widehat{R} \square f + 9(\widehat{\nabla}_A \widehat{\nabla}_B f)(\widehat{\nabla}^A \widehat{\nabla}^B f) - 18(\widehat{\nabla}^A f \widehat{\nabla}^B f)(\widehat{\nabla}_A \widehat{\nabla}_B f) \\ & \left. + 42(\square f)(\widehat{\nabla} f)^2 + 36(\widehat{\nabla} f)^4 + 11(\square f)^2 \right], \quad (\text{B.8}) \end{aligned}$$

donde  $(\widehat{\nabla} f)^4 = (\widehat{g}^{AB} \widehat{\nabla}_A f \widehat{\nabla}_B f)^2$ .

Elevando al cuadrado el escalar de Ricci (B.6), se obtiene la siguiente expresión

$$\begin{aligned} R^2 = \Omega^{-4} & \left[ \widehat{R}^2 - 24\widehat{R}(\widehat{\nabla} f)^2 - 16\widehat{R}(\square f) \right. \\ & \left. + 192(\widehat{\nabla} f)^2(\square f) + 144(\widehat{\nabla} f)^4 + 64(\square f)^2 \right]. \quad (\text{B.9}) \end{aligned}$$

Finalmente, de (B.8) y (B.4) y la fórmula anterior se obtiene el término de Gauss–Bonnet en el marco conforme

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{GB}^2 = & \widehat{C}^2 + \frac{1}{3a^4} \left[ -8\widehat{R}_{AB}\widehat{R}^{AB} + \frac{5}{2}\widehat{R}^2 - 12\widehat{R}(\widehat{\nabla}f)^2 - 24\widehat{R}\widehat{\square}f \right. \\
& + 48\widehat{R}^{AB}\widehat{\nabla}_A\widehat{\nabla}_Bf - 48\widehat{R}^{AB}\widehat{\nabla}_Af\widehat{\nabla}_Bf + 72(\widehat{\square}f)^2 + 72(\widehat{\nabla}f)^4 \quad (\text{B.10}) \\
& \left. - 72(\widehat{\nabla}_A\widehat{\nabla}_Bf)(\widehat{\nabla}^A\widehat{\nabla}^Bf) + 144(\widehat{\nabla}_A\widehat{\nabla}_Bf)(\widehat{\nabla}^Af)(\widehat{\nabla}^Bf) + 144(\widehat{\nabla}f)^2\widehat{\square}f \right].
\end{aligned}$$

# Apéndice C

## Deducción de las ecuaciones para las fluctuaciones

Para el cálculo de la variación lineal de los símbolos de Christoffel asociados a la métrica de fondo

$$ds^2 = g_{AB}dx^A dx^B = a^2(w)\eta_{AB}dx^A dx^B, \quad (\text{C.1})$$

es conveniente interpretar el factor de deformación como la función conforme que enlaza a  $\eta_{AB}$  con una métrica  $g_{AB}$ . Bajo este enfoque se tiene que

$$\Gamma_{BC}^A = \hat{\Gamma}_{BC}^A + \left( \delta_B^A \hat{\nabla}_C f + \delta_C^A \hat{\nabla}_B f - \eta_{BC} \hat{\nabla}^A f \right),$$

donde  $f = \ln a$  y las cantidades con gorro están asociadas a la métrica  $\eta_{AB}$ . Esto implica la siguiente relación para la variación de  $\Gamma_{BC}^A$

$$\delta\Gamma_{BC}^A = \delta\hat{\Gamma}_{BC}^A - \hat{H}_{BC} \hat{\nabla}^A f + \eta_{BC} \hat{H}^{AD} \hat{\nabla}_D f. \quad (\text{C.2})$$

En la expresión anterior hemos considerado que  $H_{AB} = a^2 \hat{H}_{AB}$ .

Por otra parte, el tensor de Riemann asociado a la métrica  $g_{AB}$  se puede

escribir de la siguiente manera [73]

$$R_{BCD}^A = \widehat{R}_{BCD}^A - 2\eta^{AE}\eta_{B[D}\widehat{\nabla}_{C]}\widehat{\nabla}_E f + 2\widehat{\nabla}_{[D}f\delta_{C]}^A\widehat{\nabla}_B f \\ + 2\delta_{[D}^A\widehat{\nabla}_{C]}\widehat{\nabla}_B f - 2\widehat{\nabla}_{[D}f\eta_{C]B}\widehat{\nabla}_A f - 2\eta_{B[D}\delta_{C]}^A(\widehat{\nabla}f)^2.$$

Al variar  $R_{BCD}^A$  se tiene que

$$\delta R_{BCD}^A = \delta\widehat{R}_{BCD}^A - 2\delta_{[D}^A\delta\widehat{\Gamma}_{C]B}^E\widehat{\nabla}_E f + 2\widehat{H}^{AE}\eta_{B[D}\widehat{\nabla}_{C]}\widehat{\nabla}_E f - 2\eta^{AE}\widehat{H}_{B[D}\widehat{\nabla}_{C]}\widehat{\nabla}_E f \\ + 2\eta^{AE}\eta_{B[D}\delta\widehat{\Gamma}_{C]E}^F\widehat{\nabla}_F f - 2\widehat{\nabla}_{[D}fH_{C]B}\widehat{\nabla}^A f \quad (C.3) \\ + 2\widehat{\nabla}_{[D}f\eta_{C]B}\widehat{H}^{AE}\widehat{\nabla}_E f - 2\widehat{H}_{B[D}\delta_{C]}^A(\widehat{\nabla}f)^2 + 2\eta_{B[D}\delta_{C]}^A\widehat{H}^{EF}\widehat{\nabla}_E f\widehat{\nabla}_F f,$$

donde

$$\delta\widehat{R}_{BCD}^A = \widehat{\nabla}_C\delta\widehat{\Gamma}_{BD}^A - \widehat{\nabla}_D\delta\widehat{\Gamma}_{BC}^A.$$

De manera similar, la variación del tensor de Ricci toma el siguiente aspecto

$$\delta R_{AB} = \delta\widehat{R}_{AB} + 3\delta\widehat{\Gamma}_{AB}^C\widehat{\nabla}_C f - \widehat{H}_{AB}\widehat{\square}f + \eta_{AB}\widehat{H}^{CD}\widehat{\nabla}_C\widehat{\nabla}_D f \\ - 3\widehat{H}_{AB}(\widehat{\nabla}f)^2 + 3\eta_{AB}\widehat{H}^{CD}\widehat{\nabla}_C f\widehat{\nabla}_D f, \quad (C.4)$$

con

$$\delta\widehat{R}_{AB} = \widehat{\nabla}_C\delta\widehat{\Gamma}_{AB}^C - \widehat{\nabla}_B\delta\widehat{\Gamma}_{AC}^C.$$

## C.1. Fluctuaciones tensoriales

Para el caso de las fluctuaciones tensoriales se tiene que la variación de la métrica  $H_{AB}$  toma la siguiente forma

$$H_{AB} = a^2(w)\widehat{H}_{AB} = a^2(w) \begin{pmatrix} 2h_{\mu\nu} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (C.5)$$

donde  $\partial^\mu h_{\mu\nu} = 0$  y  $h_\mu^\mu = 0$ .

A continuación se muestran las componentes no nulas de la variación de los símbolos de Christoffel asociados a la métrica de fondo  $\eta_{AB}$ :

$$\begin{aligned}\delta\widehat{\Gamma}_{\mu\nu}^{\alpha} &= \partial_{\mu}h_{\nu}^{\alpha} + \partial_{\nu}h_{\mu}^{\alpha} - \partial^{\alpha}h_{\mu\nu}, \\ \delta\widehat{\Gamma}_{\mu w}^{\alpha} &= h_{\mu}^{\alpha'}, \\ \delta\widehat{\Gamma}_{\mu\nu}^w &= h'_{\mu\nu}.\end{aligned}\tag{C.6}$$

Utilizando (C.2) y las relaciones anteriores se obtiene que

$$\begin{aligned}\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} &= \partial_{\mu}h_{\nu}^{\alpha} + \partial_{\nu}h_{\mu}^{\alpha} - \partial^{\alpha}h_{\mu\nu}, \\ \delta\Gamma_{\mu w}^{\alpha} &= h_{\mu}^{\alpha'}, \\ \delta\Gamma_{\mu\nu}^w &= h'_{\mu\nu} + 2\mathcal{H}h_{\mu\nu}.\end{aligned}\tag{C.7}$$

Por otra parte, haciendo uso de (C.3), (C.4), (C.5) y las relaciones anteriores se obtienen las componentes no triviales de la variación de los tensores de Riemann y de Ricci

$$\delta R^{\nu}_{w\mu w} = -(h_{\mu}^{\nu''} + \mathcal{H}h_{\mu}^{\nu'}),\tag{C.8}$$

$$\begin{aligned}\delta R^{\alpha}_{\mu\beta\nu} &= \partial_{\beta}[-\partial^{\alpha}h_{\mu\nu} + \partial_{\mu}h_{\nu}^{\alpha} + \partial_{\nu}h_{\mu}^{\alpha}] - \partial_{\nu}[-\partial^{\alpha}h_{\mu\beta} + \partial_{\mu}h_{\beta}^{\alpha} + \partial_{\beta}h_{\mu}^{\alpha}] \\ &\quad + \mathcal{H}[\eta_{\mu\nu}h_{\beta}^{\alpha'} - \eta_{\mu\beta}h_{\nu}^{\alpha'}] + \mathcal{H}[\delta_{\beta}^{\alpha}(h'_{\mu\nu} + 2\mathcal{H}h_{\mu\nu}) \\ &\quad - \delta_{\nu}^{\alpha}(h'_{\mu\beta} + 2\mathcal{H}h_{\mu\beta})],\end{aligned}\tag{C.9}$$

$$\delta R^{\alpha}_{\beta w\gamma} = \partial_{\beta}h_{\gamma}^{\alpha'} - \partial^{\alpha}h_{\beta\gamma}',\tag{C.10}$$

$$\delta R^{\alpha}_{w\beta\gamma} = \partial_{\beta}h_{\gamma}^{\alpha'} - \partial_{\gamma}h_{\beta}^{\alpha'},\tag{C.11}$$

$$\delta R^w_{\alpha\beta\gamma} = \partial_{\beta}h'_{\alpha\gamma} - \partial_{\gamma}h'_{\alpha\beta},\tag{C.12}$$

$$\delta R^w_{\alpha\beta w} = -(h''_{\alpha\beta} + \mathcal{H}h'_{\alpha\beta} + 2\mathcal{H}'h_{\alpha\beta}),\tag{C.13}$$

$$\delta R^{\nu}_{\mu} = \frac{1}{a^2}(h_{\mu}^{\nu''} + 3\mathcal{H}h_{\mu}^{\nu'} - \partial_{\alpha}\partial^{\alpha}h_{\mu}^{\nu}).\tag{C.14}$$

Primeramente, examinemos la ecuación de Klein-Gordon perturbada. La fluctuación del campo escalar  $\chi$  no pertenece al sector tensorial. Luego, (3.6) se

reduce a la siguiente ecuación

$$-H^{AB}\nabla_A\nabla_B\varphi - g^{AB}\delta\Gamma_{AB}^C\nabla_C\varphi + \frac{1}{2\kappa}L_\varphi\delta R = 0.$$

El aporte de la ecuación anterior a las fluctuaciones tensoriales es trivial. Para argumentar esta afirmación desarrollemos el primer término de la expresión anterior

$$H^{AB}\nabla_A\nabla_B\varphi = \frac{2h^{\mu\nu}}{a^2}\Gamma_{\mu\nu}^w\varphi'.$$

En virtud de la condición  $h^\mu_\mu = 0$ , la expresión anterior es cero. De manera similar, si se tienen en cuenta (C.6), (C.14) y la condición de traza nula para las fluctuaciones tensoriales de la geometría, se puede demostrar que

$$\begin{aligned} g^{AB}\delta\Gamma_{AB}^C\nabla_C\varphi &= g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\nu}^w\varphi' = 0, \\ \delta R &= 0. \end{aligned}$$

Luego, de aquí se concluye que la ecuación de Klein–Gordon perturbada no contribuye a la evolución de los modos tensoriales.

Investiguemos qué sucede con las ecuaciones de Einstein perturbadas (3.1). Sobre el sector tensorial estas adquieren la siguiente forma

$$L\delta R_A^B = -\left(\epsilon\delta\mathcal{Q}_A^B + \delta N_A^B + \frac{1}{3}\delta_A^B N\right), \quad (\text{C.15})$$

donde

$$\begin{aligned} \delta N_A^B &= H^{BC}\nabla_C\nabla_AL + g^{BC}\delta\Gamma_{CA}^K\nabla_KL, \\ N &= \delta N_D^D = H^{CD}\nabla_C\nabla_DL + g^{CD}\delta\Gamma_{CD}^K\nabla_KL. \end{aligned}$$

Haciendo uso de (C.5), (C.7) y la condición de traza nula para  $h_{\mu\nu}$ , se tiene que

$$N = H^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu L + g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\nu}^w\nabla_w L = (-2h^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu}^w + \eta^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\nu}^w)\frac{\nabla_w L}{a^2} = 0.$$

Además, contrayendo la ecuación (C.15) se obtiene que  $\delta\mathcal{R}_{GB}^2 = 0$ , de este modo la variación del tensor de Lanczos adquiere el siguiente aspecto

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{Q}_A^B &= 2\left(-R\delta R_A^B + 2\delta R_{AC}R^{CB}\right. \\ &\quad + 2R_{AC}\delta R^{CB} + 2\delta R_{CD}R_A^{CBD} + 2R_{CD}\delta R_A^{CBD} \\ &\quad \left. - \delta R_{ACDE}R^{BCDE} - R_{ACDE}\delta R^{BCDE}\right).\end{aligned}\quad (\text{C.16})$$

Utilizando repetidamente (C.5)–(C.14) y las condiciones  $h_\nu^\nu = \partial^\nu h_{\nu\mu} = 0$ , es posible mostrar que

$$\begin{aligned}\delta N_w^w &= 0, & \delta N_\mu^w &= 0, & \delta N_w^\mu &= 0, \\ \delta\mathcal{Q}_w^w &= 0, & \delta\mathcal{Q}_\mu^w &= 0, & \delta\mathcal{Q}_w^\mu &= 0.\end{aligned}$$

Luego, la ecuación que describe la dinámica de los modos tensoriales es la siguiente

$$L\delta R_\mu^\nu = -(\epsilon\delta\mathcal{Q}_\mu^\nu + \delta N_\mu^\nu).\quad (\text{C.17})$$

La contribución del acoplamiento no mínimo a la relación anterior toma el siguiente aspecto

$$\delta N_\mu^\nu = \frac{1}{a^2}(2h^{\nu\alpha}\nabla_\alpha\nabla_\mu L + \eta^{\nu\alpha}\delta\Gamma_{\alpha\mu}^w\nabla_w L) = -\frac{L'}{a^2}h_\mu^{\nu'}.\quad (\text{C.18})$$

Además, tenemos que

$$\begin{aligned}[L - 2\epsilon R]\delta R_\mu^\nu &= \frac{1}{a^2}\left\{L - \frac{8\epsilon}{a^2}\mathcal{H}'\right\}(h_\mu^{\nu''} + 3\mathcal{H}h_\mu^{\nu'} - \square^\eta h_\mu^\nu), \\ 4\epsilon[\delta R_{\mu\alpha}R^{\alpha\nu} + R_{\mu\alpha}\delta R^{\alpha\nu}] &= \frac{4\epsilon}{a^4}\left\{h_\mu^{\nu''}[4\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2] + 3\mathcal{H}h_\mu^{\nu'}[2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2]\right. \\ &\quad \left. - [\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2]\square^\eta h_\mu^\nu\right\}, \\ 2\epsilon[2\delta R_{\alpha\beta}R_\mu^{\alpha\nu\beta} + 2R_{\alpha\beta}\delta R_\mu^{\alpha\nu\beta} + 2R_{ww}\delta R_\mu^{w\nu w} - \delta R_{\mu CDE}R^{\nu CDE} \\ &\quad - R_{\mu CDE}\delta R^{\nu CDE}] &= -\frac{8\epsilon}{a^4}\left\{\mathcal{H}'h_\mu^{\nu''} + \mathcal{H}h_\mu^{\nu'}[\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2] - \mathcal{H}^2\square^\eta h_\mu^\nu\right\}.\end{aligned}$$

Sustituyendo (C.18) y las expresiones anteriores en (C.17) obtenemos la ecuación para las fluctuaciones tensoriales

$$qh_\mu^{\nu''} + (3\mathcal{H}q + q')h_\mu^{\nu'} - \left[ q + \frac{(q-L)'}{2\mathcal{H}} \right] \square^\eta h_\mu^\nu = 0.$$

## C.2. Fluctuaciones escalares

En la norma longitudinal (3.27), las fluctuaciones escalares de la métrica toman el siguiente aspecto

$$H_{AB} = a^2(w) \widehat{H}_{AB} = 2a^2(w) \begin{pmatrix} \eta_{\mu\nu}\psi & 0 \\ 0 & \xi \end{pmatrix}. \quad (\text{C.19})$$

La variación de los símbolos de Christoffel asociados al sector escalar pueden escribirse como sigue

$$\begin{aligned} \delta\Gamma_{ww}^w &= -\xi', \\ \delta\Gamma_{\mu w}^w &= -\partial_\mu \xi, \\ \delta\Gamma_{\mu\nu}^w &= \eta_{\mu\nu}[\psi' + 2\mathcal{H}\psi + 2\mathcal{H}\xi], \\ \delta\Gamma_{\alpha\beta}^\mu &= \delta_\beta^\mu \partial_\alpha \psi + \delta_\alpha^\mu \partial_\beta \psi - \eta_{\alpha\beta} \partial^\mu \psi, \\ \delta\Gamma_{ww}^\mu &= -\partial^\mu \xi, \\ \delta\Gamma_{w\alpha}^\mu &= \delta_\alpha^\mu \psi'. \end{aligned}$$

Por otra parte, haciendo uso de (C.3), (C.4) y las relaciones anteriores obtenemos tanto la variación de los tensores de Riemann y de Ricci, como del escalar de Ricci

$$\delta R^w_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}[\psi'' + \mathcal{H}(\psi' + \xi') + 2\mathcal{H}'(\psi + \xi)] + \partial_\mu \partial_\nu \xi, \quad (\text{C.20})$$

$$\delta R^\mu_{\alpha w\beta} = [\delta_\beta^\mu \partial_\alpha \psi' - \eta_{\alpha\beta} \partial^\mu \psi'] - \mathcal{H}[\partial^\mu \xi \eta_{\alpha\beta} - \delta_\beta^\mu \partial_\alpha \xi], \quad (\text{C.21})$$

$$\begin{aligned} \delta R^\alpha_{\mu\beta\nu} &= \delta_\nu^\alpha \partial_\mu \partial_\beta \psi - \delta_\beta^\alpha \partial_\mu \partial_\nu \psi - \eta_{\mu\nu} \partial_\beta \partial^\alpha \psi + \eta_{\mu\beta} \partial_\nu \partial^\alpha \psi \\ &\quad + [2\mathcal{H}\psi' + 2\mathcal{H}^2(\psi + \xi)][\eta_{\mu\nu} \delta_\beta^\alpha - \eta_{\mu\beta} \delta_\nu^\alpha], \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

$$\delta R_w^w = \frac{1}{a^2} (\square^\eta \xi + 4[\psi'' + \mathcal{H}\psi'] + 4\mathcal{H}\xi' + 8\mathcal{H}'\xi), \quad (\text{C.23})$$

$$\delta R_\mu^w = \frac{3}{a^2} \partial_\mu (\mathcal{H}\xi + \psi'), \quad (\text{C.24})$$

$$\delta R_\mu^\nu = \frac{1}{a^2} (\delta_\mu^\nu [\psi'' + 7\mathcal{H}\psi' - \square^\eta \psi + \mathcal{H}\xi' + 2(\mathcal{H}' + 3\mathcal{H}^2)\xi] + \partial_\mu \partial^\nu [\xi - 2\psi]), \quad (\text{C.25})$$

$$\delta R = \frac{2}{a^2} (\square^\eta \xi - 3\square^\eta \psi + 4\xi[2\mathcal{H}' + 3\mathcal{H}^2] + 4[\psi'' + \mathcal{H}(4\psi' + \xi')]). \quad (\text{C.26})$$

Las ecuaciones de Einstein perturbadas toman el siguiente aspecto

$$\mathcal{M}_A^B + \frac{1}{3}\delta_A^B \mathcal{K} + \mathcal{U}_A^B + \mathcal{O}_A^B + \mathcal{S}_A^B + \mathcal{T}_A^B = \mathcal{J}_A^B, \quad (\text{C.27})$$

donde

$$\mathcal{K} = \epsilon \delta \mathcal{R}_{GB}^2, \quad (\text{C.28})$$

$$\mathcal{J}_A^B = \mathcal{N}_A^B + \frac{1}{3} \mathcal{N} \delta_A^B, \quad (\text{C.29})$$

$$\mathcal{N}_A^B = -H^{BC} \nabla_C \nabla_A L + \nabla^B \nabla_A (\chi L_\varphi) - g^{BC} \delta \Gamma_{CA}^K \nabla_K L, \quad (\text{C.30})$$

$$\mathcal{M}_A^B = L \delta R_A^B + \chi L_\varphi R_A^B - \frac{1}{2} \delta \tau_A^B, \quad (\text{C.31})$$

$$\mathcal{U}_A^B = -2\epsilon \left\{ R \delta R_A^B + R_A^B \delta R \right\}, \quad (\text{C.32})$$

$$\mathcal{O}_A^B = 4\epsilon \left\{ \delta R_{AC} R^{BC} + R_{AC} \delta R^{BC} \right\}, \quad (\text{C.33})$$

$$\mathcal{S}_A^B = 4\epsilon \left\{ \delta R_{CD} R_A^{CBD} + R_{CD} \delta R_A^{CBD} \right\}, \quad (\text{C.34})$$

$$\mathcal{T}_A^B = -2\epsilon \left\{ R_{ACDE} \delta R^{BCDE} + \delta R_{ACDE} R^{BCDE} \right\}. \quad (\text{C.35})$$

Después de realizar un extenso trabajo algebraico, se obtienen las componentes  $(w, w)$  y  $(\mu, \nu)$  de los tensores anteriores

$$\mathcal{J}_w^w = -\frac{1}{3a^2} \left\{ 8\varphi'^2 \xi L_{\varphi\varphi} + 8\varphi'' \xi L_\varphi + 4(\chi L_\varphi)'' - \square^\eta (\chi L_\varphi) + 4\varphi' L_\varphi (\psi' + \xi') \right\}, \quad (\text{C.36})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_w^w &= \frac{1}{a^2} \left\{ 4\mathcal{H}\chi L_\varphi + L[\square^\eta \xi + 4\psi'' + 4\mathcal{H}(\psi' + \xi')] \right. \\ &\quad \left. + 2\xi[4\mathcal{H}'L + \frac{1}{2}\varphi'^2] + \varphi'X' + \frac{1}{3}\frac{\partial V}{\partial \varphi}a^2X \right\}, \end{aligned} \quad (\text{C.37})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_w^w &= -\frac{8\epsilon}{a^4} \left\{ (4\mathcal{H}' + 3\mathcal{H}^2)\square^\eta \xi - 6\mathcal{H}'\square^\eta \psi + 16\mathcal{H}'(2\mathcal{H}' + 3\mathcal{H}^2)\xi \right. \\ &\quad \left. + 4[4\mathcal{H}' + 3\mathcal{H}^2](\psi'' + \mathcal{H}\xi') + 4\mathcal{H}[10\mathcal{H}' + 3\mathcal{H}^2]\psi' \right\}, \end{aligned} \quad (\text{C.38})$$

$$\mathcal{O}_w^w = \frac{32\epsilon}{a^4} \mathcal{H}' \left\{ \square^\eta \xi + 4[\psi'' + \mathcal{H}(\psi' + \xi')] + 8\mathcal{H}'\xi \right\}, \quad (\text{C.39})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_w^w &= \frac{4\epsilon}{a^4} \left\{ 4[3\mathcal{H}^2 + 2\mathcal{H}']\psi'' + 4[8\mathcal{H}' + 3\mathcal{H}^2]\mathcal{H}\psi' + 16\mathcal{H}'(\mathcal{H}' + 3\mathcal{H}^2)\xi \right. \\ &\quad \left. - 6\mathcal{H}'\square^\eta \psi + 4[2\mathcal{H}' + 3\mathcal{H}^2]\mathcal{H}\xi' + (2\mathcal{H}' + 3\mathcal{H}^2)\square^\eta \xi \right\}, \end{aligned} \quad (\text{C.40})$$

$$\mathcal{T}_w^w = -\frac{8\epsilon}{a^4} \mathcal{H}' \left\{ 4[\psi'' + \mathcal{H}(\psi' + \xi')] + 2\mathcal{H}'\xi + \square^\eta \xi \right\}, \quad (\text{C.41})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_\mu^\nu &= \frac{1}{a^2} \left\{ \partial^\nu \partial_\mu (\chi L_\varphi) - \delta_\mu^\nu \left[ 2\mathcal{H}(\chi L_\varphi)' + 4\mathcal{H}\varphi' L_\varphi \xi + \frac{7}{3}\varphi' L_\varphi \psi' \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{(\chi L_\varphi)'' - \square^\eta (\chi L_\varphi)}{3} + \frac{1}{3}(2\xi(\varphi' L_\varphi)' + \varphi' L_\varphi \xi') \right] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{C.42})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\mu^\nu &= \frac{1}{a^2} \left\{ \delta_\mu^\nu \left[ L(\psi'' + 7\mathcal{H}\psi' + \mathcal{H}\xi' + 2\xi(\mathcal{H}' + 3\mathcal{H}^2) - \square^\eta \psi) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \chi L_\varphi(\mathcal{H}' + 3\mathcal{H}^2) + \frac{1}{3}a^2 \frac{dV}{d\varphi} \chi \right] + \partial_\mu \partial^\nu (\xi - 2\psi) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{C.43})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_\mu^\nu &= -\frac{2\epsilon}{a^4} \left\{ \delta_\mu^\nu \left[ 4(22\mathcal{H}' + 45\mathcal{H}^2)\mathcal{H}\psi' + 4(4\mathcal{H}' + 9\mathcal{H}^2)\psi'' \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 16(2\mathcal{H}'^2 + 9\mathcal{H}^4 + 9\mathcal{H}'\mathcal{H}^2)\xi + 4(4\mathcal{H}' + 9\mathcal{H}^2)\mathcal{H}\xi' \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (14\mathcal{H}' + 30\mathcal{H}^2)\square^\eta \psi + 2(\mathcal{H}' + 3\mathcal{H}^2)\square^\eta \xi \right] \right. \\ &\quad \left. + 4(2\mathcal{H}' + 3\mathcal{H}^2)\partial_\mu \partial^\nu (\xi - 2\psi) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{C.44})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_\mu^\nu &= \frac{8\epsilon}{a^4} \left\{ \delta_\mu^\nu (\mathcal{H}' + 3\mathcal{H}^2) \left[ \psi'' + 7\mathcal{H}\psi' + \mathcal{H}\xi' \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2(\mathcal{H}' + 3\mathcal{H}^2)\xi - \square^\eta \psi \right] + (\mathcal{H}' + 3\mathcal{H}^2)\partial_\mu \partial^\nu (\xi - 2\psi) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{C.45})$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_\mu^\nu = & \frac{4\epsilon}{a^4} \left\{ \delta_\mu^\nu \left[ (8\mathcal{H}' + 3\mathcal{H}^2)\psi'' + (14\mathcal{H}' + 39\mathcal{H}^2)\mathcal{H}\psi' \right. \right. \\
& + (\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\square^\eta \xi + (16\mathcal{H}'^2 + 12\mathcal{H}'\mathcal{H}^2 + 36\mathcal{H}^4)\xi \\
& \left. \left. - (8\mathcal{H}^2 + \mathcal{H}')\square^\eta \psi + (3\mathcal{H}^2 + 8\mathcal{H}')\mathcal{H}\xi' \right] \right. \\
& \left. + \partial_\mu \partial^\nu \left[ \xi \left( 4\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2 \right) - 2 \left( 2\mathcal{H}^2 + \mathcal{H}' \right) \psi \right] \right\}, \quad (\text{C.46})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_\mu^\nu = & -\frac{8\epsilon}{a^4} \left\{ \delta_\mu^\nu \left[ \mathcal{H}'\psi'' + \mathcal{H}\mathcal{H}'(\psi' + \xi') + 2(\mathcal{H}'^2 + 3\mathcal{H}^4)\xi \right. \right. \\
& \left. \left. - \mathcal{H}^2\square^\eta \psi + 6\mathcal{H}^3\psi' \right] + \partial_\mu \partial^\nu \left[ \mathcal{H}'\xi - 2\mathcal{H}^2\psi \right] \right\}. \quad (\text{C.47})
\end{aligned}$$

De igual manera, tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{K} = & \frac{24\epsilon}{a^4} \left( \mathcal{H}^2\square^\eta \xi - [\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2]\square^\eta \psi + 4\mathcal{H}^2[4\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2]\xi \right. \\
& \left. + 4\mathcal{H}^2[\psi'' + \mathcal{H}\xi'] + 8\mathcal{H}\psi'[\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2] \right), \quad (\text{C.48})
\end{aligned}$$

$$\mathcal{J}_w^\nu = \frac{1}{a^2} \left\{ \partial^\nu (\chi L_\varphi)' - \mathcal{H}\partial^\nu (\chi L_\varphi) + \varphi' L_\varphi \partial^\nu \xi \right\}, \quad (\text{C.49})$$

$$\mathcal{M}_w^\nu = -\frac{1}{a^2} \left\{ 3L\partial^\nu (\psi' + \mathcal{H}\xi) + \frac{1}{2}\varphi' \partial^\nu \chi \right\}, \quad (\text{C.50})$$

$$\mathcal{M}_w^\nu + \mathcal{U}_w^\nu + \mathcal{J}_w^\nu + \mathcal{S}_w^\nu + \mathcal{T}_w^\nu = -\frac{1}{a^2} \partial^\nu \left\{ \frac{\varphi' \chi}{2} + 3q(\psi' + \mathcal{H}\xi) \right\}. \quad (\text{C.51})$$

La ecuación de Klein–Gordon perturbada (3.6) toma la siguiente forma sobre el sector escalar

$$\begin{aligned}
& \chi'' + 3\mathcal{H}\chi' - \square^\eta \chi + \varphi'[4\psi' + \xi'] + 2\xi(\varphi'' + 3\mathcal{H}\varphi') \\
& - \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} a^2 \chi - \frac{1}{2} \left\{ 2(2\mathcal{H}' + 3\mathcal{H}^2)\chi L_{\varphi\varphi} + L_\varphi [\square^\eta \xi - 3\square^\eta \psi \right. \\
& \left. + 4\xi(2\mathcal{H}' + 3\mathcal{H}^2) + 4(\psi'' + \mathcal{H}[4\psi' + \xi']) \right\} = 0. \quad (\text{C.52})
\end{aligned}$$

### C.3. Fluctuaciones vectoriales

Este caso es más sencillo comparado con los otros dos sectores por lo que omitiremos algunos detalles relacionados con la obtención de las ecuaciones perturbadas. Adicionalmente, en este apéndice solamente estudiaremos el caso  $L(\varphi) = 1$ . Sobre la norma longitudinal, las fluctuaciones vectoriales de la métrica toman el siguiente aspecto

$$H_{AB} = a^2(w)\widehat{H}_{AB} = a^2(w) \begin{pmatrix} 0 & D_\mu \\ D_\mu & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.53})$$

La variación de los símbolos de Christoffel es

$$\begin{aligned} \delta\Gamma_{\mu w}^w &= \mathcal{H}D_\mu, \\ \delta\Gamma_{\mu\nu}^w &= -\partial_{(\mu}D_{\nu)}, \\ \delta\Gamma_{\alpha\beta}^\mu &= -\eta_{\alpha\beta}\mathcal{H}D^\mu, \\ \delta\Gamma_{ww}^\mu &= D^{\mu'} + \mathcal{H}D^\mu, \\ \delta\Gamma_{w\alpha}^\mu &= \frac{1}{2}(\partial_\alpha D^\mu - \partial^\mu D_\alpha). \end{aligned} \quad (\text{C.54})$$

Por otro lado, la variación lineal de los tensores de Riemann y de Ricci tiene la siguiente forma<sup>1</sup>

$$\delta R^\mu{}_{w\nu w} = \frac{1}{2} \left\{ \partial_\nu [D^{\mu'} + \mathcal{H}D^\mu] + \partial^\mu [D'_\nu + \mathcal{H}D_\nu] \right\}, \quad (\text{C.55})$$

$$\delta R^\mu{}_{\alpha w \nu} = \eta_{\alpha\nu}(\mathcal{H}^2 - \mathcal{H}')D^\mu - \delta_\nu^\mu \mathcal{H}^2 D_\alpha + \frac{1}{2} \partial_\nu [\partial^\mu D_\alpha - \partial_\alpha D^\mu], \quad (\text{C.56})$$

$$\begin{aligned} \delta R^\alpha{}_{\mu\beta\nu} &= \mathcal{H} \left\{ \eta_{\mu\beta} \partial_\nu D^\alpha - \eta_{\mu\nu} \partial^{(\alpha} D_{\beta)} - \delta_\beta^\alpha \partial_{(\mu} D_{\nu)} \right. \\ &\quad \left. - \eta_{\mu\beta} \partial_{[\nu} D^{\alpha]} + \delta_\nu^\alpha \partial_{(\mu} D_{\beta)} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{C.57})$$

$$\delta R_\mu^w = \frac{1}{2a^2} \square^\eta D_\mu, \quad (\text{C.58})$$

---

<sup>1</sup>Hemos usado la siguiente notación:  $\partial_{(\mu} D^{\nu)} = \frac{1}{2}(\partial_\mu D^\nu + \partial^\nu D_\mu)$  y  $\partial_{[\mu} D^{\nu]} = \frac{1}{2}(\partial_\mu D^\nu - \partial^\nu D_\mu)$ .

$$\delta R_\mu^\nu = -\frac{1}{a^2} \left\{ (\partial_{(\mu} D^{\nu)})' + 3\mathcal{H}(\partial_{(\mu} D^{\nu)}) \right\}. \quad (\text{C.59})$$

Haciendo uso de (C.53) y (C.54) se puede mostrar que la ecuación de Klein-Gordon perturbada (3.6) es trivial. Además, utilizando (C.58), (C.59) y la condición de divergencia nula para  $D_\mu$  se obtiene que  $\delta R = 0$ . Al hallar la traza de (3.1) se deriva que  $\delta \mathcal{R}_{GB}^2 = 0$ . Al igual que el caso tensorial, en este sector tenemos que

$$\delta \mathcal{Q}_w^w = 0.$$

Luego, la dinámica de los modos vectoriales es descrita por las componentes  $(\mu, \nu)$  y  $(w, \mu)$  de las ecuaciones de Einstein perturbadas. En otras palabras, por las igualdades

$$\delta R_\mu^\nu = -\epsilon \delta \mathcal{Q}_\mu^\nu, \quad (\text{C.60})$$

$$\delta R_\mu^w = -\epsilon \delta \mathcal{Q}_\mu^w, \quad (\text{C.61})$$

donde

$$\begin{aligned} [1 - 2\epsilon R] \delta R_\mu^\nu &= -\frac{1}{a^2} \left[ 1 - \frac{8\epsilon}{a^2} (2\mathcal{H}' + 3\mathcal{H}^2) \right] \left\{ [\partial_{(\mu} D^{\nu)})' \right. \\ &\left. + 3\mathcal{H}[\partial_{(\mu} D^{\nu)}] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{C.62})$$

$$\begin{aligned} 4\epsilon [\delta R_{\mu\alpha} R^{\alpha\nu} + R_{\mu\alpha} \delta R^{\alpha\nu}] &= -\frac{8\epsilon}{a^4} (\mathcal{H}' + 3\mathcal{H}^2) \left\{ [\partial_{(\mu} D^{\nu)})' \right. \\ &\left. + 3\mathcal{H} \partial_{(\mu} D^{\nu)} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{C.63})$$

$$\begin{aligned} 2\epsilon [2\delta R_{\alpha\beta} R_\mu^{\alpha\nu\beta} + 2R_{\alpha\beta} \delta R_\mu^{\alpha\nu\beta} + 2R_{ww} \delta R_\mu^{w\nu w} \\ - \delta R_{\mu CDE} R^{\nu CDE} - R_{\mu CDE} \delta R^{\nu CDE}] &= \\ \frac{4\epsilon}{a^4} \left\{ (\mathcal{H}^2 - 2\mathcal{H}') [\partial^{(\nu} D_{\mu)}]' + \mathcal{H}(\mathcal{H}^2 - 4\mathcal{H}') [\partial^{(\nu} D_{\mu)}] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{C.64})$$

Para la componente  $(w, \mu)$  se tiene que

$$[1 - 2\epsilon R] \delta R_\mu^w = \frac{1}{2a^2} \left\{ 1 - \frac{8\epsilon}{a^2} (2\mathcal{H}' + 3\mathcal{H}^2) \right\} \square^\eta D_\mu, \quad (\text{C.65})$$

$$4\epsilon [\delta R_{\mu w} R^{ww} + R_{\mu\alpha} \delta R^{\alpha w}] = \frac{2\epsilon}{a^4} \left\{ 3\mathcal{H}^2 + 5\mathcal{H}' \right\} \square^\eta D_\mu, \quad (\text{C.66})$$

$$2\epsilon [2\delta R_{CD} R_\mu^{CD} + 2R_{CD} \delta R_\mu^{CD} - \delta R_{\mu CDE} R^{\nu CDE} - R_{\mu CDE} \delta R^{\nu CDE}] = \frac{2\epsilon}{a^4} \left\{ 2\mathcal{H}^2 - \mathcal{H}' \right\} \square^\eta D_\mu. \quad (\text{C.67})$$

De este modo, las igualdades (C.60) y (C.61) pueden escribirse de la siguiente manera

$$q[\partial_{(\mu} D^{\nu)}]' + (q' + 3\mathcal{H}q)[\partial_{(\mu} D^{\nu)}] = 0, \quad (\text{C.68})$$

$$\square^\eta D_\mu = 0. \quad (\text{C.69})$$

# Bibliografía

- [1] G. Nordström, *On the possibility of unifying the electromagnetic and the gravitational fields*, Phys. Z. **15** (1914) 504, physics/0702221.
- [2] T. Kaluza, *On the problem of unity in physics*, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.) **1921** (1921) 966.
- [3] O. Klein, *Quantum theory and five-dimensional theory of relativity*, Z. Phys. **37** (1926) 895; Surveys High Energ. Phys. **5** (1986) 241.
- [4] B.S. DeWitt, *Relativity, Groups and Topology*, in C. DeWitt and B.S. DeWitt (Eds.), (Gordon and Breach, New York, 1964).
- [5] R. Kerner, *Generalization of the Kaluza–Klein Theory for an Arbitrary Nonabelian Gauge Group*, Ann. Poincaré Phys. Theor. **9** (1968) 143.
- [6] Y.M. Cho and P.G.O. Freund, *Nonabelian Gauge Fields in Nambu–Goldstone Fields*, Phys. Rev. D **12** (1975) 1711.
- [7] Y. M. Cho, *Higher-dimensional unifications of gravitation and gauge theories*, J. Math. Phys. **16** (1975) 2029.
- [8] M.B. Green and J.H. Schwarz, *Anomaly Cancellation in Supersymmetric  $D = 10$  Gauge Theory and Superstring Theory*, Phys. Lett. B **149** (1984) 117.

- [9] P. Candelas, G.T. Horowitz, A. Strominger and E. Witten, *Vacuum Configurations for Superstrings*, Nucl. Phys. B **258** (1985) 46.
- [10] J. Dai, R.G. Leigh, and J. Polchinski, *New Connections Between String Theories*, Mod. Phys. Lett. A **4** (1989) 2073.
- [11] M.J. Duff, *Strong/weak coupling duality from the dual string*, Nucl. Phys. B **442** (1995) 47, hep-th/9501030.
- [12] M.J. Duff and J.X. Lu, *Loop expansions and string/five-brane duality*, Nucl. Phys. B **357** (1991) 534.
- [13] M.J. Duff and R.R. Khuri, *Four-dimensional string/string duality*, Nucl. Phys. B **411** (1994) 473, hep-th/9305142.
- [14] M.J. Duff and J.X. Lu, *Black and super  $p$ -branes in diverse dimensions*, Nucl. Phys. B **416** (1994) 301, hep-th/9306052.
- [15] M.J. Duff and R. Minasian, *Putting string/string duality to the test*, Nucl. Phys. B **436** (1995) 507, hep-th/9406198.
- [16] C.M. Hull and P.K. Townsend, *Unity of superstring dualities*, Nucl. Phys. B **438** (1995) 109, hep-th/9410167.
- [17] E. Witten, *String theory dynamics in various dimensions*, Nucl. Phys. B **443** (1995) 85, hep-th/9503124.
- [18] J. H. Schwarz, *The power of  $M$  theory*, Phys. Lett. B **367** (1996) 97, hep-th/9510086.
- [19] M. J. Duff,  *$M$  theory (The theory formerly known as strings)*, Int. J. Mod. Phys. A **11** (1996) 5623, hep-th/9608117.
- [20] E. Cremmer, B. Julia and J. Scherk, *Supergravity theory in 11 dimensions*, Phys. Lett. B **76** (1978) 409.

- [21] P. Horava and E. Witten, *Eleven-Dimensional Supergravity on a Manifold with Boundary*, Nucl. Phys. B **475** (1996) 94, hep-th/9603142.
- [22] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. Dvali, *The Hierarchy problem and new dimensions at a millimeter*, Phys. Lett. B **429** (1998) 263, hep-ph/9803315.
- [23] L. Randall and R. Sundrum, *A large mass hierarchy from a small extra dimension*, Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 3370, hep-ph/9905221.
- [24] K. Akama, *An early proposal of brane world*, Lect. Notes Phys. **176** (1982) 267, hep-th/0001113.
- [25] V.A. Rubakov and M.E. Shaposhnikov, *Do We Live Inside a Domain Wall?*, Phys. Lett. B **125** (1983) 136.
- [26] M. Visser, *An Exotic Class of Kaluza-Klein Models*, Phys. Lett. B **159** (1985) 22, hep-th/9910093.
- [27] G.W. Gibbons and D.L. Wiltshire, *Space-Time as a Membrane in Higher Dimensions*, Nucl. Phys. B **287** (1987) 717, hep-th/0109093.
- [28] V.A. Rubakov, *Large and infinite extra dimensions*, Phys. Usp. **44** (2001) 871, hep-ph/0104152.
- [29] C. Csaki, *TASI lectures on extra dimensions and branes*, in M. Shifman *et al.* (Eds.), *From fields to strings*, **2** (2002) 967, hep-ph/0404096.
- [30] A. Pérez-Lorenzana, *An introduction to extra dimensions*, J. Phys. Conf. Ser. **18** (2005) 224, hep-ph/0503177.
- [31] M. Shifman, *Large Extra Dimensions: Becoming acquainted with an alternative paradigm*, Int. J. Mod. Phys. A **25** (2010) 199, hep-ph/0907.3074.

- [32] C.D. Hoyle, U. Schmidt, B.R. Heckel, E.G. Adelberger, J.H. Gundlach, D.J. Kapner and H.E. Swanson, *Sub-millimeter tests of the gravitational inverse-square law: a search for “large” extra dimensions*, Phys. Rev. Lett. **86** (2001) 1418, hep-ph/0011014.
- [33] E.G. Adelberger, B.R. Heckel, A.E. Nelson, *Tests of the Gravitational Inverse-Square Law*, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **53** (2003) 77, hep-ph/0307284.
- [34] C.D. Hoyle, D.J. Kapner, B.R. Heckel, E.G. Adelberger, J.H. Gundlach, U. Schmidt and H.E. Swanson, *Sub-millimeter Tests of the Gravitational Inverse-square Law*, hep-ph/0405262.
- [35] G. Aad *et al.* (ATLAS Collaboration), *Search for Extra Dimensions using diphoton events in 7 TeV proton-proton collisions with the ATLAS detector*, Phys. Lett. B **710** (2012) 538, arxiv:1112.2194 [hep-ex].
- [36] S. Chatrchyan *et al.* (CMS Collaboration), *Search for large extra dimensions in dimuon and dielectron events in pp collisions at  $\sqrt{s} = 7$  TeV*, Phys. Lett. B **711** (2012) 15, arxiv:1202.3827 [hep-ex].
- [37] M. Gogberashvili, *Hierarchy problem in the shell universe model*, Int. J. Mod. Phys. D **11** (2002) 1635, hep-ph/9812296.
- [38] L. Randall y R. Sundrum, *An alternative to compactification*, Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 4690, hep-th/9906064.
- [39] W. Israel, *Singular hypersurfaces and thin shells in general relativity*, Nuovo Cim. B **44** (1966) 1; *Erratum-ibid.* B **48** (1967) 463.
- [40] R. Maartens and K. Koyama, *Brane-world gravity*, Living Rev. Rel. **13** (2010) 5, arXiv:1004.3962 [hep-th].

- [41] W.D. Goldberger and M.B. Wise, *Modulus Stabilization with Bulk Fields*, Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 4922, hep-ph/9907447.
- [42] S.S. Gubser, *AdS/CFT and gravity*, Phys. Rev. D **63** (2001) 084017, hep-th/9912001.
- [43] S.B. Giddings, E. Katz and L. Randall, *Linearized Gravity in Brane Backgrounds*, JHEP **0003** (2000) 023, hep-th/0002091.
- [44] P. Binetruy, C. Deffayet, U. Ellwanger and D. Langlois, *Brane cosmological evolution in a bulk with cosmological constant*, Phys. Lett. B **477** (2000) 285, hep-th/9910219.
- [45] E.E. Flanagan, S.-H Henry Tye, and I. Wasserman, *Cosmological Expansion in the Randall-Sundrum Brane World Scenario*, Phys. Rev. D **62** (2000) 044039, hep-ph/9910498.
- [46] D. Ida, *Brane-world cosmology*, JHEP **0009** (2000) 014, gr-qc/9912002.
- [47] P. Binetruy, C. Deffayet and D. Langlois, *Non-conventional cosmology from a brane-universe*, Nucl. Phys. B **565** (2000) 269, hep-th/9905012.
- [48] A. Kehagias and E. Kiritsis, *Mirage Cosmology*, JHEP **11** (1999) 022, hep-th/9910174.
- [49] D. Langlois, *Brane cosmology: an introduction*, Prog. Theor. Phys. Suppl. **148** (2003) 181, hep-th/0209261.
- [50] P. Brax and C. Bruck, *Cosmology and Brane Worlds: A Review*, Class. Quant. Grav. **20** (2003) 201, hep-th/0303095.  
P. Brax, C. Bruck and A.-C Davis, *Brane World Cosmology*, Rept. Prog. Phys. **67** (2004) 2183, hep-th/0404011.

- [51] D. Langlois, *Is our Universe brany?*, Prog. Theor. Phys. Suppl. **163** (2006) 258, hep-th/0509231.
- [52] N. Mohapatra, S. Nandi and A. Pérez–Lorenzana, *Neutrino masses and oscillations in models with large extra dimensions*, Phys. Lett. B **466** (1999) 115, hep-ph/9907520.
- [53] A. Ioannisian and A. Pilaftsis, *Cumulative non–decoupling effects of Kaluza–Klein neutrinos in electroweak processes*, Phys. Rev. D **62** (2000) 066001, hep-ph/9907522.
- [54] A. Delgado, A. Pomarol and M. Quiros, *Electroweak and Flavor Physics in Extensions of the Standard Model with Large Extra Dimensions*, JHEP **0001** (2000) 030, hep-ph/9911252.
- [55] A. Lukas, P. Ramond, A. Romanino and G.G. Ross, *Neutrino Masses and Mixing in Brane–World Theories*, JHEP **0104** (2001) 010, hep-ph/0011295.
- [56] G.F. Giudice, R. Rattazzi and J.D. Wells, *Graviscalars from higher–dimensional metrics and curvature–Higgs mixing*, Nucl. Phys. B **595** (2001) 250, hep-ph/0002178.
- [57] R. Durrer, M. Ruser, *The dynamical Casimir effect in braneworlds*, Phys. Rev. Lett. **99** (2007) 071601, hep-th/0704.0756.
- [58] W.D. Goldberger and M.B. Wise, *Bulk Fields in the Randall–Sundrum Compactification Scenario*, Phys. Rev. D **60** (1999) 107505, hep-ph/9907218.
- [59] T. Gherghetta and A. Pomarol, *Bulk Fields and Supersymmetry in a Slice of AdS*, Nucl. Phys. B **586** (2000) 141, hep-ph/0003129.

- [60] T. Shiromizu, K. Maeda and M. Sasaki, *The Einstein Equations on the 3-Brane World*, Phys. Rev. D **62** (2000) 024012, gr-qc/9910076.
- [61] P.D. Mannheim, *Brane-localized Gravity*, (World Scientific, Singapore, 2005).
- [62] K. Maeda and T. Torii, *Covariant Gravitational Equations on Brane World with Gauss-Bonnet term*, Phys. Rev. D **69** (2004) 024002, hep-th/0309152.
- [63] C. Csaki, J. Erlich, T. Hollowood and Y. Shirman, *Universal aspects of gravity localized on thick branes*, Nucl. Phys. B **581** (2000) 309, hep-th/0001033.
- [64] S. Kobayashi, K. Koyama, J. Soda, *Thick Brane Worlds and Their Stability*, Phys. Rev. D **65** (2002) 064014, hep-th/0107025.
- [65] M. Gremm, *Four-dimensional gravity on a thick domain wall*, Phys. Lett. B **478** (2000) 434, hep-th/9912060; *Thick domain walls and singular spaces*, Phys. Rev. D **62** (2000) 044017, hep-th/0002040.
- [66] A. Wang, *Thick de Sitter 3 branes, dynamic black holes and localization of gravity*, Phys. Rev. D **66** (2002) 024024, hep-th/0201051.
- [67] O. De Wolfe, D.Z. Freedman, S.S. Gubser and A. Karch, *Modeling the fifth dimension with scalars and gravity*, Phys. Rev. D **62** (2000) 046008, hep-th/9909134.
- [68] Z. Kakushadze, *Localized (Super)Gravity and Cosmological Constant*, Nucl. Phys. B **589** (2000) 75, hep-th/0005217.
- [69] C. Csaki, J. Erlich, C. Grojean and T. Hollowood, *General Properties of the Self-tuning Domain Wall Approach to the Cosmological Constant Problem*, Nucl. Phys. B **584** (2000) 359, hep-th/0004133.

- [70] E.E. Flanagan, S.-H. Henry Tye and I. Wasserman, *Brane World Models With Bulk Scalar Fields*, Phys. Lett. B **522** (2001) 155, hep-th/0110070.
- [71] A. Herrera-Aguilar, D. Malagón-Morejón, R. R. Mora-Luna and U. Nucamendi, *Aspects of thick brane worlds: 4D gravity localization, smoothness, and mass gap*, Mod. Phys. Lett. A **25** (2010) 2089, arxiv:0910.0363 [hep-th].
- [72] C. Brans and R.H. Dicke, *Mach's principle and a relativistic theory of gravitation*, Phys. Rev. **124** (1961) 925.
- [73] V. Faraoni, E. Gunzig and P. Nardone, *Conformal transformations in classical gravitational theories and in cosmology*, Fund. Cosmic Phys. **20** (1999) 121, gr-qc/9811047.
- [74] Y. Fujii and K. Maeda, *The Scalar–Tensor Theory of Gravitation*, (Cambridge University Press, Cambridge, 2003).
- [75] S.M. Carroll, *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*, (Addison–Wesley, San Francisco, 2004).
- [76] A.S. Mikhailov, Y.S. Mikhailov, M.N. Smolyakov and I.P. Volobuev, *Constructing stabilized brane world models in five–dimensional Brans–Dicke theory*, Class. Quant. Grav. **24** (2007) 231, hep-th/0602143.
- [77] C. Bogdanos, A. Dimitriadis and K. Tamvakis, *Brane Models with a Ricci–Coupled Scalar Field*, Phys. Rev. D **74** (2006) 045003, hep-th/0604182.
- [78] K. Farakos, P. Pasipoularides, *Brane world scenario in the presence of a non–minimally coupled bulk scalar field*, J. Phys. Conf. Ser. **68** (2007) 012041, hep-th/0609089.

- [79] K. Farakos, P. Pasipoularides, *Second Randall–Sundrum brane world scenario with a nonminimally coupled bulk scalar field*, Phys. Rev. D **73** (2006) 084012, hep-th/0602200.
- [80] K. Farakos, G. Koutsoumbas and P. Pasipoularides, *Graviton localization and Newton’s law for brane models with a non–minimally coupled bulk scalar field*, Phys. Rev. D **76** (2007) 064025, arxiv:0705.2364 [hep-th].
- [81] H. Guo, Y.-X Liu, Z.-H Zhao, F.-W Chen, *Thick branes with a non–minimally coupled bulk–scalar field*, (2010), arxiv:1008.3686 [hep-th].
- [82] M. Giovannini, *Gauge–invariant fluctuations of scalar branes*, Phys. Rev. D **64** (2001) 064023, hep-th/0106041.
- [83] A.A. Andrianov and L. Vecchi, *On the stability of thick brane worlds non–minimally coupled to gravity*, Phys. Rev. D **77** (2008) 044035, arxiv:0711.1955 [hep-th].
- [84] D.G. Boulware and S. Deser, *String Generated Gravity Models*, Phys. Rev. Lett. **55** (1985) 2656.
- [85] R.R. Metsaev and A.A. Tseytlin, *Order  $\alpha'$  (two-loop) equivalence of the string equations of motion and the  $\sigma$ –model Weyl invariance conditions: Dependence on the dilaton and the antisymmetric tensor*, Nucl. Phys. B **293** (1987) 385.
- [86] D.J. Gross and J.H. Sloan, *The quartic effective action for the heterotic string*, Nucl. Phys. B **291** (1987) 41.
- [87] D. Lovelock, *The Einstein Tensor and its Generalizations*, J. Math. Phys. **12** (1971) 498.

- [88] J. Madore, *Kaluza–Klein Theory with the Lanczos Lagrangian*, Phys. Lett. A **110** (1985) 289.
- [89] J. Madore, *On the Nature of the Initial Singularity in a Lanczos Cosmological Model*, Phys. Lett. A **111** (1985) 283.
- [90] B. Zwiebach, *Curvature squared terms and string theories*, Phys. Lett. B **156** (1985) 315.
- [91] R. Aros, M. Contreras, R. Olea, R. Troncoso and J. Zanelli, *Conserved Charges for Gravity with Locally Anti–de Sitter Asymptotics*, Phys. Rev. Lett. **84** (2000) 1647, gr-qc/9909015.
- [92] J.-E. Kim, B. Kyae and H.-M Lee, *Effective Gauss–Bonnet interaction in Randall–Sundrum compactification*, Phys. Rev. D **62** (2000) 045013, hep-ph/9912344.
- [93] J.-E. Kim, B. Kyae and H.-M Lee, *Various Modified Solutions of the Randall–Sundrum Model with the Gauss–Bonnet Interaction*, Nucl. Phys. B **582** (2000) 296, hep-th/0004005.
- [94] H. Collins and B. Holdom, *The Cosmological Constant and Warped Extra Dimensions*, Phys. Rev. D **63** (2001) 084020, hep-th/0009127.
- [95] Y.M. Cho, I.P. Neupane and P.S. Wesson, *No ghost state of Gauss–Bonnet interaction in warped backgrounds*, Nucl. Phys. B **621** (2002) 388, hep-th/0104227.
- [96] Y.M. Cho and I.P. Neupane, *Warped brane–world compactification with Gauss–Bonnet term*, Int. J. Mod. Phys. A **18** (2003) 2703, hep-th/0112227.
- [97] I.P. Neupane, *Gravitational potential correction with Gauss–Bonnet interaction*, Phys. Lett. B **512** (2001) 137, hep-th/0104226.

- [98] N.M. Mavromatos and J. Rizos, *String-inspired higher-curvature terms and the Randall-Sundrum scenario*, Phys. Rev. D **62** (2000) 124004, hep-th/0008074.
- [99] N.M. Mavromatos and J. Rizos, *Exact Solutions and the Cosmological Constant Problem in Dilatonic Domain Wall Higher Curvature String Gravity*, Int. J. Mod. Phys. A **18** (2003) 57, hep-th/0205299.
- [100] I.P. Neupane, *Consistency of Higher Derivative Gravity in the Brane Background*, JHEP **0009** (2000) 040, hep-th/0008190.
- [101] P. Binetruy, C. Charmousis, S.C. Davis and J.-F Dufaux, *Avoidance of Naked Singularities in Dilatonic Brane World Scenarios with a Gauss-Bonnet Term*, Phys. Lett. B **544** (2002) 183, hep-th/0206089.
- [102] C. Charmousis, S.C. Davis, J.-F Dufaux, *Scalar brane backgrounds in higher order curvature gravity*, JHEP **0312** (2003) 029, hep-th/0309083.
- [103] N. Deruelle and T. Dolezel, *Brane versus shell cosmologies in Einstein and Einstein-Gauss-Bonnet theories*, Phys. Rev. D **62** (2000) 103502, gr-qc/0004021.
- [104] O. Corradini and Z. Kakushadze, *Localized Gravity and Higher Curvature Terms*, Phys. Lett. B **494** (2000) 302, hep-th/0009022.
- [105] O. Corradini, A. Iglesias, Z. Kakushadze and P. Langfelder, *Gravity on a 3-brane in 6D Bulk*, Phys. Lett. B **521** (2001) 96, hep-th/0108055.
- [106] K.A. Meissner and M. Olechowski, *Domain walls without cosmological constant in higher order gravity*, Phys. Rev. Lett. **86** (2001) 3708, hep-th/0009122.

- [107] K.A. Meissner and M. Olechowski, *Brane localization of gravity in higher derivative theory*, Phys. Rev. D **65** (2002) 064017, hep-th/0106203.
- [108] S.C. Davis, *Scalar tensor gravity on a Gauss–Bonnet brane world*, (2004), hep-th/0402151.
- [109] M. Giovannini, *Thick branes and Gauss–Bonnet self–interactions*, Phys. Rev. D **64** (2001) 124004, hep-th/0107233.
- [110] A. Herrera-Aguilar, D. Malagón-Morejón, R.R. Mora-Luna and I. Quiros, *Thick braneworlds generated by a non–minimally coupled scalar field and a Gauss–Bonnet term: conditions for localization of gravity*, Class. Quant. Grav. **29** (2012) 035012, arxiv:1105.5479 [hep-th].
- [111] I.P. Neupane, *Consistency of Higher Derivative Gravity in the Brane Background*, JHEP **0009** (2000) 040, hep-th/0008190.
- [112] J.M. Bardeen, *Gauge–invariant cosmological perturbations*, Phys. Rev. D **22** (1980) 1882.
- [113] J.M. Stewart, *Perturbations of Friedmann–Robertson–Walker cosmological models*, Class. Quant. Grav. **7** (1990) 1169.
- [114] R.H. Brandenberger, *Lectures on the theory of cosmological perturbations*, Lect. Notes Phys. **646** (2004) 127, hep-th/0306071.
- [115] K. Nakamura, *“Gauge” in general relativity: Second–order general relativistic gauge–invariant perturbation theory*, (2007), arxiv:0711.0996 [gr-qc].
- [116] L.R.W. Abramo, *The back reaction of gravitational perturbations and applications in cosmology*, Ph.D. Thesis, Brown University (2007), gr-qc/9709049.

- [117] D. Malagón–Morejón, *Perturbaciones en membranas gruesas*, Tesis de Maestría, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo (2009).
- [118] S. Mukohyama and L. Kofman, *Brane Gravity at Low Energy*, Phys. Rev. D **65** (2002) 124025, hep-th/0112115.
- [119] M. Giovannini, *Localization of metric fluctuations on scalar branes*, Phys. Rev. D **65** (2002) 064008, hep-th/0106131.
- [120] C. Charmousis, R. Gregory, N. Kaloper, A. Padilla, *DGP Spectroscopy*, JHEP **0610** (2006) 066, hep-th/0604086.
- [121] H. Kodama and M. Sasaki, *Cosmological Perturbation Theory*, Prog. Theor. Phys. Suppl. **78** (1984) 1.
- [122] K. Farakos and P. Pasipoularides, *Gauss–Bonnet gravity, brane world models, and non–minimal coupling*, Phys. Rev. D **75** (2007) 024018, hep-th/0610010.
- [123] W. Eckhaus, *Asymptotic Analysis of Singular Perturbations*, (North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1979).
- [124] F. Verhulst, *Methods and Applications of Singular Perturbations: Boundary Layers and Multiple Timescale Dynamics*, (Springer, New York, 2005).
- [125] J. Cousteix and J. Mauss, *Asymptotic Analysis and Boundary Layers*, (Springer, Berlin, 2007).
- [126] J.A. Murdock, *Perturbations: Theory and Methods*, (John Wiley and Sons, New York, 1991).
- [127] M.H. Holmes, *Introduction to Perturbation Methods*, (Springer, New York, 1995).