



**UNIVERSIDAD MICHOACANA DE
SAN NICOLÁS DE HIDALGO**

Instituto de Física y Matemáticas

**Implementación numérica de la acreción de un
gas ideal en hoyos negros**

T E S I S

**PARA OBTENER EL TÍTULO DE
DOCTOR EN CIENCIAS EN EL ÁREA DE FÍSICA**

**PRESENTA
FABIO DUVAN LORA CLAVIJO**

**ASESOR
DR. FRANCISCO S. GUZMÁN MURILLO**

MORELIA, MICH., FEBRERO 2013.



**IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA
DE LA ACRECIÓN DE UN GAS IDEAL
EN
HOYOS NEGROS**

por

FABIO DUVAN LORA CLAVIJO

Maestro en Física



GRUPO DE INVESTIGACIÓN EN RELATIVIDAD

INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

MORELIA, MICHOACÁN, MÉXICO.

**IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA
DE LA ACRECIÓN DE UN GAS IDEAL
EN**

**HOYOS NEGROS
FABIO DUVAN LORA CLAVIJO**

Maestro en Física

TÉSIS DIRIGIDA POR
Dr. FRANCISCO S. GUZMÁN



TÉSIS SOMETIDA COMO CUMPLIMIENTO PARCIAL DE LOS REQUISITOS
PARA OBTENER EL GRADO DE DOCTOR EN CIENCIAS – FÍSICA

A mi Mamá Eugenia, mi Hermana Dunia y mi tío Orlando por estar siempre a mi lado. Su amor, apoyo y atención constante nunca serán olvidados.

TÍTULO : IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA DE LA ACRECIÓN DE UN GAS IDEAL EN HOYOS NEGROS ¹.

AUTOR : LORA CLAVIJO, Fabio Duvan

ASESOR : GUZMÁN MURILLO, Francisco Siddhartha. Investigador titular C del instituto de física y matemáticas de la UMSNH.

PALABRAS CLAVES: Hidrodinámica numérica, métodos numéricos, acreción de materia y hoyos negros .

DESCRIPCIÓN: En este trabajo se presenta la evolución de un fluido perfecto entorno al espacio-tiempo de un hoyo negro fijo. Las ecuaciones que se utilizan para describir la dinámica de este proceso, son las ecuaciones de Euler relativistas, las cuales se obtienen a partir de la conservación local del tensor de energía momento y de la conservación local de la densidad de corriente, haciendo uso de la formulación 3+1 de la relatividad general. Es usual, que en este tipo de ecuaciones, aparezcan discontinuidades (choques) en las variables de estado del fluido. Por esta razón, los métodos numéricos que se utilizan para resolver este sistema de ecuaciones, están basados en los métodos de alta resolución para la captura de choques.

La perspectiva de este trabajo, presenta una formulación general sin simetrías, la cual, en tono ascendente, va desde los casos menos difíciles hasta los casos más complicados. Esto es, se estudia el caso de gases en el espacio-tiempo de Minkowski en una dimensión cartesiana, posteriormente la acreción radial de gas en un hoyo negro esféricamente simétrico y después la acreción de gas con simetrías axial y ecuatorial en hoyos negros. Durante este proceso se presentan diferentes pruebas numéricas y físicas para validar los resultados obtenidos. Por otra parte, en cada uno de estos pasos, se presenta una aplicación física a un problema en específico. En el caso de simetría esférica, se presenta un

¹Tesis de Doctorado.

modelo de acreción de materia oscura colisionante; en el caso de acreción con simetrías axial y ecuatorial, se estudia la acreción de Bondi-Hoyle relativista y sus posibles aplicaciones en astrofísica. Por otra parte, aunque no se muestran de forma muy específica, se presentan dos trabajos académicos. El primero de éstos, está relacionado con la solución exacta del problema de Riemann relativista 1D, en un espacio-tiempo de Minkowski y el segundo con la implementación de dos ejemplos clásicos en hidrodinámica relativista, el problema de la onda explosiva y el modelo de estrellas de Tolman-Oppenheimer-Volkoff. Finalmente, es bueno recalcar, que este trabajo es el resultado de varias etapas, las cuales incluyen trabajos de acreción de materia oscura escalar y materia exótica.

CONTENIDO

1. INTRODUCCIÓN	1
2. ECUACIONES DE EULER RELATIVISTAS EN UN ESPACIO-TIEMPO CURVO	6
2.1. Introducción	6
2.2. Formulación 3+1	7
2.3. Foliación del espacio-tiempo	8
2.4. Hoyos negros esféricamente simétricos	12
2.5. Hoyos negros axialmente simétricos	18
2.6. Ecuaciones de Euler Relativistas: Formulación Conservativa Euleriana .	24
2.7. Estructura característica de las Ecuaciones de Euler Relativistas	32
3. MÉTODOS NUMÉRICOS	39
3.1. Introducción	39

3.2. Volúmenes Finitos	40
3.3. Problema de Riemann	43
3.4. Reconstrucción de las variables de estado en las inter-celdas	50
3.5. Resolvedor de Riemann aproximado	56
3.6. Recuperación de variables	58
3.7. Método de Líneas	60
3.8. Integrador en el tiempo	61
3.9. Condiciones de Frontera	62
3.10. Convergencia	63
3.11. Normas L_2 del error	65
3.12. Pruebas Numéricas	66
4. ACRECIÓN ESFÉRICAMENTE SIMÉTRICA DE GÁS EN HOYOS NEGROS	78
4.1. Acreción Esféricamente simétrica de un fluido perfecto	78
4.2. Ondas explosivas esféricas	80
4.3. Acreción de Bondi y Michel Relativista	88
4.4. Acreción de materia oscura en hoyos negros supermasivos de Schwarzschild	92

5. ACRECIÓN DE FLUJOS 2-DIMENSIONALES EN HOYOS NEGROS	123
5.1. Acreción de Bondi-Hoyle relativista	123
5.2. Acreción de flujos no axialmente simétricos en el plano ecuatorial	148
6. CONCLUSIONES	166
A. Apéndice	170
A.1. Matrices Jacobianas \mathcal{A}^0 y \mathcal{A}^i	170
REFERENCIAS	175

LISTA DE FIGURAS

2.1. Foliación del espacio-tiempo siguiendo la descomposición 3+1.	9
2.2. Ingredientes geométricos de una región dada del espacio-tiempo contenida entre dos hipersuperficies espaciales.	10
2.3. Estructura de conos de luz del espacio-tiempo de Schwarzschild en coordenadas de Schwarzschild	14
2.4. Espacio-tiempo de Schwarzschild en coordenadas de Eddington-Finkelstein	18
2.5. Figura esquemática del espacio-tiempo de Kerr	22
3.1. Discretización de espacio-tiempo usando volúmenes finitos	41
3.2. Datos iniciales del problema de Riemann para la ecuación de Burgers .	43
3.3. Estructura característica para las ondas de choque	45
3.4. Estructura característica para las ondas de rarefacción	47
3.5. Caso particular al problema de Riemann relativista unidimensional . .	49
3.6. Reconstructor de variables constante por pedazos	52

3.7. Reconstructor de variables lineal por pedazos	53
3.8. Aproximación de los diferentes reconstructores de variables	55
3.9. Resolvedor aproximado al problema de Riemann HLLE	58
3.10. Tubo de choque clásico	70
3.11. Explosión relativista en una dimensión cartesiana	72
3.12. Explosión relativista fuerte en una dimensión cartesiana	74
3.13. Colisión de dos fluidos ultrarelativistas en una dimensión	77
4.1. Onda explosiva esférica débil	84
4.2. Onda explosiva esférica fuerte	85
4.3. Onda explosiva esférica: choque en reversa	86
4.4. Convergencia del problema de las ondas explosivas esféricas	87
4.5. Acreción de Bondi relativista	93
4.6. Convergencia de la acreción de Bondi relativista	94
4.7. Acreción de Michel relativista	95
4.8. Convergencia de la acreción de Michel relativista	96
4.9. Razón de masa acretada por un fluido sin presión	101
4.10. Razón de masa acretada por un fluido con presión	106

4.11. Razón de masa acretaada por un fluido con presión y para diferentes valores de la energía interna específica	107
4.12. Razón de masa acretaada para diferentes valores de Γ	111
4.13. Auto-convergencia de la densidad de masa en reposo en la acreción de materia oscura colisionante y no colisionante	112
4.14. Perfiles de densidad de materia oscura	113
4.15. Figura que muestra los valores de κ con $\epsilon_0 = 0,2$ para los perfiles de materia oscura	117
4.16. Valores de κ en términos del índice adiabático y la energía interna inicial, para los diferentes perfiles de densidad de materia oscura (Región (I)) .	119
4.17. Valores de κ en términos del índice adiabático y la energía interna inicial, para los diferentes perfiles de densidad de materia oscura (Región (II))	120
4.18. Pruebas de auto-convergencia de las simulaciones numéricas usadas para el estudio de los perfiles de materia oscura	122
5.1. Morfología de los conos de choque en el proceso de acreción de un viento supersónico axialmente simétrico	137
5.2. Acreción de Bondi-Holye relativista: Razón de masa acretaada	138
5.3. Oscilaciones de la densidad de masa en reposo adentro del cono de choque para vientos supersónicos	139
5.4. Auto-convergencia de la norma L_2 del error en la acreción de Bondi-Holye relativista axialmente simétrica	140

5.5. Espectro de las oscilaciones en la acreción de Bondi-Hoyle relativistas axialmente simétricas	143
5.6. Frecuencias medidas de las oscilaciones del cono de choque en la acreción de Bondi-Hoyle relativista axialmente simétrica	144
5.7. Modelos astrofísicos de las oscilaciones cuasi-periódicas	147
5.8. Morfología de la acreción de Bondi-Hoyle relativista para flujos no axialmente simétricos	156
5.9. Acreción de Bondi-Hoyle relativista no axialmente simétrica: razón de masa acretada	157
5.10. Morfología en diferentes tiempos que muestra el fenómeno de <i>flip-flop</i> en coordenadas de Boyer-Lindquist	159
5.11. Morfología en diferentes tiempos en coordenadas de Kerr-Schild	160
5.12. Figura que compara la posición del máximo de la densidad de masa en reposo a lo largo de la coordenada angular ϕ	161
5.13. Auto-convergencia de la densidad de masa en reposo para el caso de la acreción de Bondi-Hoyle no axialmente simétrica en coordenadas de Kerr-Schild	162
5.14. Amplitud de las vibraciones en coordenadas de Kerr-Schild para dos resoluciones diferentes	163
5.15. Amplitud de las vibraciones en coordenadas Boyer-Lindquist para dos resoluciones diferentes	165

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

Hoy en día, una descripción correcta de los flujos relativistas que involucran choques fuertes está relacionada con un gran número de problemas importantes en física y astrofísica. Los flujos relativistas se encuentran en *jets* galácticos y estelares, en colisiones de iones a altas energías y posiblemente en escenarios en los que objetos acretores se desplazan a velocidades supersónicas en un gas, como los hoyos negros super-pateados resultantes de una colisión de dos hoyos negros.

De particular importancia es la evolución de materia alrededor de objetos compactos, que aparece como el modelo más común para explicar los estallidos de alta energía, ya sea en sistemas binarios con objetos de masas estelares, o los hoyos negros supermasivos, que se considera que pueden ser los responsables de activar los núcleos de muchas galaxias. En otro tenor, incluso el colapso nuclear de supernovas es otro escenario en el que el campo gravitacional fuerte juega un papel importante sobre el desarrollo del material del sistema.

En particular, la astrofísica de altas energías está en buena parte asociada a los procesos

de acreción de gas en hoyos negros. Los hoyos negros son objetos teóricos fruto de una de las más elegantes teorías de las que dispone la física moderna: La relatividad general. Pero la pregunta en cuestión es: ¿existen realmente estos objetos en el universo? y en caso de existir, ¿pueden ser observados a pesar de que ningún tipo de radiación puede escapar de ellos?. La respuesta es que no pueden ser observados directamente, pero su presencia y propiedades (como momento angular, masa y carga) se pueden inferir a partir de los efectos que provocan a su alrededor. Los sistemas binarios son un escenario que permite determinar si uno de los componentes es un hoyo negro, debido a la masa inferida obtenida de las órbitas del sistema, o sistemas como Sgr A*, que es una región en la que las estrellas presentan trayectorias muy peculiares que permiten inferir la presencia de un hoyo negro supermasivo.

Por otra parte, las observaciones indican que hay procesos en regiones localizadas del cielo, cuya causa ha de ser la presencia de un objeto compacto, en particular si se asume la presencia de un hoyo negro. Tales procesos involucran el estudio o modelado del comportamiento de gas alrededor del objeto, que debido al campo gravitacional y campos magnéticos que pueden desarrollarse en esa región, sufren procesos termodinámicos que eventualmente podrían ser responsables de las emisiones de estallidos de rayos X y γ .

Un escenario común supone que en torno a los hoyos negros hay discos de acreción compuestos por gas, que debido a las altas temperaturas producidas por su viscosidad, emiten en rayos X y rayos γ en un rango de energías de 10KeV y unos cientos de KeV. El espectro cotejado entre el modelo y las observaciones depende, por supuesto, de las propiedades del hoyo negro, del gas y del campo magnético generado posiblemente por el gas o debido al hoyo negro.

En otros escenarios, se considera que el gas evoluciona de una manera menos simétrica que en las configuraciones discoidales, y en su lugar se considera que actúa como viento, cuya extensión es enorme comparada con el tamaño del hoyo negro, y que se desplaza con cierta velocidad con respecto a éste. Se espera que este escenario, al igual que el de los

discos, sea un ingrediente que permita asociar algunas observaciones y potencialmente permita inferir propiedades del sistema.

El estudio de la evolución del gas, se convierte así en un ingrediente importante en este tipo de modelos. El punto es que su evolución estará dictada no solamente por las ecuaciones que describen a los gases, sino que éstas deberán estar acopladas al campo gravitacional del objeto acretor. La teoría Newtoniana es, en muchos casos, suficiente para el análisis del sistema. Sin embargo, si la masa del objeto compacto es mayor que la masa máxima posible para una estrella de neutrones ($\sim 3M_{\odot}$), entonces estamos ante la necesidad de considerar la teoría de la relatividad general, diseñada para atender los problemas asociados a los sistemas con campos gravitacionales fuertes.

Por ello, se considera que es de gran importancia formular de manera sólida la evolución de gas en espacio-tiempos curvos y para ello, en este trabajo, se estudia la acreción de vientos en hoyos negros bajo distintas circunstancias.

Como un primer paso sólido, en este trabajo se presenta la acreción de Bondi-Hoyle relativista como potencial candidato para el estudio de hoyos negros interactuando con la materia. Dicha acreción consiste en la evolución de un gas homogéneamente distribuido moviéndose uniformemente hacia un hoyo negro. Una característica esencial en este trabajo es que cuando el gas es inyectado con velocidad supersónica, el sistema se aproxima a un estado cuasiestacionario caracterizado por la formación de un cono de choque, el cual, puede vibrar u oscilar. Dichas oscilaciones son comparadas con las emisiones de rayos X y rayos γ que pueden ser emitidas de un sistema binario, en el cual se hospeda un hoyo negro, lo que se puede comparar con algunas observaciones y posiblemente inferir algunas propiedades de la fuente, ya sea del hoyo negro o del gas que lo rodea.

En este trabajo se presenta la evolución de gases neutros en el espacio-tiempo curvo de un hoyo negro, como parte de un proyecto que involucra a futuro la inclusión de

efectos magnetohidrodinámicos y procesos radiativos. Dichos gases son modelados con la ecuación de estado para un gas ideal, en el cual todas partículas son bariones que tienen la misma masa. Por otra parte, se asume que el fluido es adecuadamente descrito estudiando las propiedades de un colectivo de partículas dentro de pequeños volúmenes del fluido. El tamaño de estos elementos del fluido es mucho más grande que el camino libre promedio de cada partícula, lo cual sugiere que cada elemento de volumen del fluido está en equilibrio térmico.

Con estas condiciones, en este trabajo, se presenta la descripción de la implementación numérica necesaria para resolver las ecuaciones de Euler relativistas en un espacio-tiempo curvo fijo, la cual está basada en los métodos numéricos de alta resolución para la captura de choques *HRSC* (siglas en inglés). La razón para usar estos métodos es que, por lo general, las ecuaciones de Euler desarrollan choques y discontinuidades en las variables de estado, los cuales no pueden ser tratadas con métodos más convencionales para resolver ecuaciones diferenciales parciales, cómo lo son las diferencias finitas. Los esquemas *HRSC* están basados en los métodos de volúmenes finitos, en los que se considera que el problema está definido en una malla de puntos que definen una estructura de celdas sobre el espacio-tiempo. Por otra parte, estos métodos consisten en discretizar la forma integral de las ecuaciones de Euler, para así obtener una solución débil de ellas. Vale la pena mencionar que en esta formulación se escoge un marco de referencia fijo desde el cual se observa el fluido, a diferencia de otras formulaciones donde los observadores se mueven con las partículas del fluido (formulación lagrangiana); como un ejemplo de un método Lagrangiano está el método hidrodinámico de partículas suavizadas *SPH* (siglas en inglés).

La perspectiva de este trabajo presenta una formulación general sin simetrías, la cual, en tono ascendente, va desde los casos menos difíciles hasta los casos más complicados. Esto es, se estudia el caso de gases en el espacio-tiempo de Minkowski en una dimensión cartesiana, posteriormente la acreción radial de gas en un hoyo negro esféricamente

simétrico y después la acreción de gas con simetrías axial y ecuatorial en hoyos negros para finalmente llegar al caso tres dimensional sin simetrías. Durante este proceso se presentan diferentes pruebas numéricas y físicas para validar los resultados obtenidos. En cada uno de los pasos que se siguen para la elaboración de este trabajo doctoral, se describen las sutilezas propias de cada simetría o sistema coordenado. De hecho, la experiencia indica que siempre es mucho mejor programar el caso general, debido a que éste conforma un sistema con menos problemas. Sin embargo, con el afán de satisfacer un aspecto formativo de un trabajo doctoral, se decidió anteponer los casos más sencillos para ir mostrando los distintos grados de dificultad en cada etapa.

Capítulo 2

ECUACIONES DE EULER RELATIVISTAS EN UN ESPACIO-TIEMPO CURVO

SECCIÓN 2.1

Introducción

El propósito principal de este capítulo es básicamente describir cómo determinar la evolución de un fluido, el cual es gobernado por las ecuaciones de Euler, en un espacio-tiempo curvo fijo. Dichas soluciones no existen de manera analítica, por lo cual las ecuaciones deben ser resueltas de forma numérica, haciendo uso de los computadores. Para construir dichas soluciones, es necesario reformular las ecuaciones de Euler relativistas de manera adecuada para que sean integradas numéricamente.

SECCIÓN 2.2**Formulación 3+1**

La formulación 3+1 fue originalmente propuesta por [York, Jr 1979], con el fin de evolucionar el campo gravitacional producido por una fuente en relatividad general, en la cual se proponen las ecuaciones de Einstein como un problema bien planteado de valores iniciales, ver [Alcubierre 2008], [Baumgarte & Shapiro 2010]. El problema de valores iniciales, es un problema fundamental bien planteado en las ecuaciones diferenciales parciales y en la dinámica clásica, donde la evolución de un sistema está determinada únicamente por la posición y las componentes de la velocidad en un tiempo inicial. Análogamente, se hizo para la evolución del campo gravitacional en relatividad general. Una de las consecuencias que ésto trajo es que al intentar escribir las ecuaciones de Einstein como un problema de Cauchy, se rompe la forma covariante de la ecuaciones. Esta covariancia es elegante desde el punto de vista teórico, pero no permite pensar claramente en la evolución en el tiempo del campo gravitacional, ya que la covariancia en relatividad general establece que las leyes de la física deben tomar la misma forma en todos los marcos de referencia; no hay distinción entre las coordenadas que se utilicen para describir un fenómeno gravitacional. En este trabajo, aunque no se resuelven las ecuaciones de Einstein para la geometría, se utilizan los conceptos de la descomposición 3+1 para escribir las ecuaciones de la hidrodinámica en un espacio-tiempo curvo fijo, esto quiere decir que el espacio-tiempo no evoluciona de forma acoplada con las ecuaciones de Euler relativistas.

SECCIÓN 2.3

Foliación del espacio-tiempo

Para empezar, es necesario aclarar que durante todo este trabajo se considera que el espacio-tiempo es fijo. Por esta razón, durante esta sección solo se describirán los elementos básicos asociados a la descomposición 3+1 del espacio-tiempo y no se tendrá en cuenta la evolución de la geometría asociada a éste.

Como punto de partida, se considera un espacio-tiempo con métrica $g_{\alpha\beta}$, el cual es descompuesto en hipersuperficies tridimensionales espaciales Σ a lo largo de la dirección temporal. Dichas hipersuperficies son variedades, cuyos campos de vectores tangentes son tipo espacio. En la Figura 2.1 se muestra la foliación del espacio-tiempo donde \mathbf{n} es un vector normal a las hipersuperficies. De esta forma, la geometría de una región del espacio-tiempo contenida entre dos de estas hipersuperficies es determinada por los siguientes ingredientes, ver Figura 2.2:

- El lapso de tiempo propio $d\tau = \alpha(t, x^i)dt$ entre dos hipersuperficies medido por observadores que se mueven en la dirección normal a dichas hipersuperficies, donde α es conocida como la función lapso y dichos observadores son comúnmente llamados “observadores Eulerianos”.
- La velocidad relativa β^i entre los observadores Eulerianos y la línea de coordenada espacial x^i constante es comúnmente llamado vector desplazamiento y viene dado por la relación $x^i_{t+\delta t} = x^i_t - \beta^i dt$. Dicho vector es tridimensional y es tangente a la hipersuperficie Σ .
- La métrica γ_{ij} inducida por la métrica $g_{\alpha\beta}$ sobre las hipersuperficies espaciales Σ . El elemento de línea asociado a ésta, mide las distancias propias dentro de dichas hipersuperficies, $dl = \gamma_{ij}dx^i dx^j$. Los índices i, j corren de 1 hasta 3.

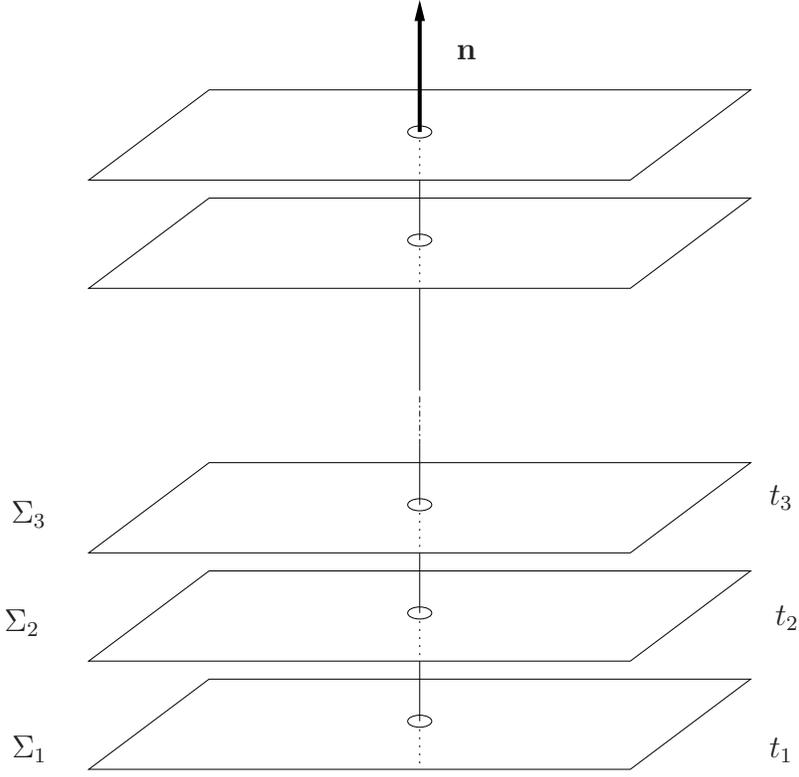


Figura 2.1: Foliación del espacio-tiempo siguiendo la descomposición 3+1.

- Finalmente, la curvatura extrínseca se define en términos de lo que le ocurre al vector normal \mathbf{n} al ser transportado paralelamente de un sitio a otro de la hipersuperficie. Específicamente, el tensor de curvatura extrínseca $K_{\alpha\beta}$, es una medida del cambio del vector normal bajo transporte paralelo.

Por otra parte, el vector normal a las hipersuperficies \mathbf{n} , es un vector tipo-tiempo que permite conectar éstas mediante las funciones α y β^i . Las componentes de dicho vector vienen dadas por el gradiente normalizado de una función global t asociada a la foliación

$$n^\mu = -\frac{\nabla^\mu t}{\sqrt{-\nabla_\mu t \nabla^\mu t}}, \quad (2.1)$$

donde $\sqrt{-\nabla_\mu t \nabla^\mu t} = 1/\alpha$ es la norma de $\nabla_\mu t$, las componentes de la 1-forma asociada son $n_\mu = g_{\mu\nu} n^\nu$, garantizando que \mathbf{n} es un vector tipo-tiempo, esto es, el vector \mathbf{n}

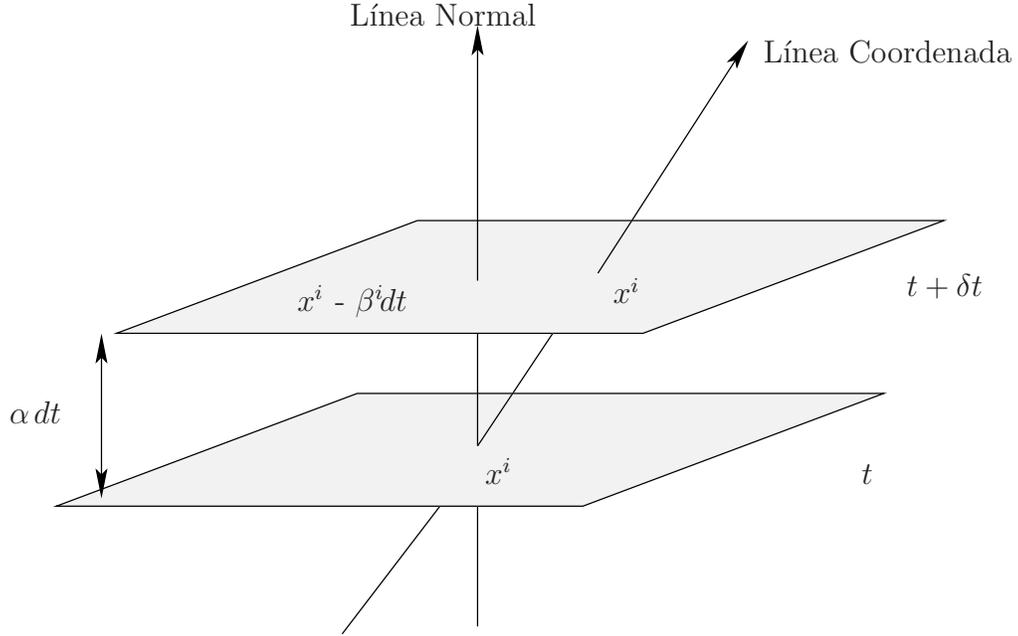


Figura 2.2: Ingredientes geométricos de una región dada del espacio-tiempo contenida entre dos hipersuperficies espaciales.

satisface la relación $n^\mu n_\mu = -1$.

Otra cantidad importante es el operador proyección espacial P_ν^μ , definido por la siguiente expresión

$$P_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu + n^\mu n_\nu, \quad (2.2)$$

donde δ_ν^μ es la delta de Kronecker. La métrica espacial inducida $\gamma_{\mu\nu}$ se encuentra aplicando este operador a la 4-métrica del espacio-tiempo $g_{\mu\nu}$:

$$\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu. \quad (2.3)$$

Es importante recalcar que $\gamma_{\mu\nu}$ es totalmente espacial, lo cual quiere decir que está definida como una 2-forma sobre la hipersuperficie Σ , de tal forma que $n^\mu \gamma_{\mu\nu} = 0$.

Con estos ingredientes el elemento de línea 4-dimensional puede escribirse en términos

de las funciones $\alpha, \beta^i, \gamma_{ij}$ como

$$ds^2 = -\alpha^2 dt^2 + \gamma_{ij}(dx^i + \beta^i dt)(dx^j + \beta^j dt), \quad (2.4)$$

donde las componentes covariantes y contravariantes del tensor métrico están dadas por las siguientes expresiones

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\alpha^2 + \beta_k \beta^k & \beta_i \\ \beta_j & \gamma_{ij} \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\alpha^2} & \frac{\beta^j}{\alpha^2} \\ \frac{\beta^i}{\alpha^2} & \gamma^{ij} - \frac{\beta^i \beta^j}{\alpha^2} \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

De aquí en adelante, los índices de los vectores y tensores espaciales, serán subidos y bajados con la métrica espacial γ_{ij} , ejemplo, $\beta_i = \gamma_{ij}\beta^j$. Por otra parte, de (2.4) se obtiene que

$$\sqrt{g} = \alpha\sqrt{\gamma}, \quad (2.7)$$

donde g y γ son los determinantes de $g_{\mu\nu}$ y γ_{ij} respectivamente. Específicamente, las componentes del vector \mathbf{n} vienen dadas por

$$n^\mu = \frac{1}{\alpha}(1, -\beta^i), \quad n_\mu = \alpha(-1, 0), \quad (2.8)$$

donde el signo menos de la componente temporal de la 1-forma establece que \mathbf{n} apunta hacia el futuro. Nótese que este vector unitario corresponde a la 4-velocidad de los observadores Eulerianos. Además, asociado a este observador, se puede definir una base adaptada de vectores

$$\mathbf{e}_{(\mu)} = \{\mathbf{n}, \partial_i\}, \quad (2.9)$$

donde ∂_i son los tres vectores coordenados tangentes a la hipersuperficie $t = \text{constante}$, que se pueden escribir como

$$(\partial_j)_\mu = (\beta_j, \gamma_{ij}). \quad (2.10)$$

Nótese que $\mathbf{n} \cdot \partial_i = 0$, es decir, el vector \mathbf{n} es ortogonal a los tres vectores base ∂_i .

SECCIÓN 2.4

Hoyos negros esféricamente simétricos

Una de las soluciones más simples de las ecuaciones de Einstein en el vacío corresponde a un espacio-tiempo que describe el exterior de un campo gravitatorio estático, esféricamente simétrico, sin carga y sin rotación. La métrica asociada a dicho espacio-tiempo se conoce como el espacio-tiempo de Schwarzschild, en honor a Karl Schwarzschild quien la calculó en 1916 [Schwarzschild 1916]. El elemento de línea de Schwarzschild, en su forma original, está dado por la siguiente expresión

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (2.11)$$

donde M es la masa del objeto central, en nuestro caso un hoyo negro, y las coordenadas (t, r, θ, ϕ) se conocen como “coordenadas de Schwarzschild”. En particular, la coordenada radial se llama el “radio de área” debido a que en estas coordenadas el área de una esfera es siempre $4\pi r^2$.

Entre las propiedades de la métrica anterior podemos notar el hecho de que es asintóticamente plana, es decir, en el límite $r \rightarrow \infty$ la métrica es la métrica del espacio-tiempo de Minkowski. Esto último era de esperarse, ya que el campo gravitacional de un objeto disminuye a medida que uno se aleja de éste. Por otra parte, se puede observar que cuando $r = 0$ y $r = 2M$ las componentes de la métrica son singulares. Es bien conocido de la literatura [Schutz 2009], que la singularidad en $r = 0$ es física, lo cual quiere decir que el campo gravitacional ahí es infinito. Sin embargo, la singularidad

en $r = 2M$ es ocasionada por un problema en el sistema de coordenadas utilizado. A la distancia $r = 2M$ se le conoce como “radio de Schwarzschild” o “radio del horizonte de eventos”. El horizonte de eventos es una 3-superficie nula ($S^2 \times \mathbb{R}$), entre dos regiones desconectadas causalmente. En palabras más técnicas, si se considera el futuro infinito nulo y se mira a su pasado causal, la frontera del pasado causal es conocida como horizonte de eventos.

Por otra parte, tener un entendimiento local del espacio-tiempo es muy ilustrativo ¹, ya que es posible ver cómo los conos de luz asociados a un espacio-tiempo se orientan cuando llegan al hoyo negro. Para ésto último, las geodésicas radiales nulas (trayectorias que sigue la luz en un espacio-tiempo curvo) con θ y ϕ constantes, sirven para visualizar la estructura causal, (conos de luz), del espacio-tiempo de Schwarzschild. De esta forma, si se toma $ds^2 = 0$, es decir, la condición que cumplen las 2-esferas nulas del espacio-tiempo, se tiene que

$$\frac{dt}{dr} = \pm \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}, \quad (2.12)$$

lo cual corresponde a la pendiente de las curvas que definen los conos de luz en cada punto de cada 2-esfera de radio r . Como se puede observar en la Figura 2.3, cuando $r \rightarrow \infty$ los conos de luz se encuentran a 45° como en el espacio-tiempo de Minkowski $\left(\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{dt}{dr} = \pm 1\right)$. Por otro lado, al aproximarse a la superficie $r = 2M$, los conos de luz tienen una pendiente que diverge $\left(\lim_{r \rightarrow 2M} \frac{dt}{dr} = \pm \infty\right)$. De esta forma, los conos de luz se cierran al acercarnos a $r = 2M$, lo cual muestra la naturaleza singular de las coordenadas de Schwarzschild en el horizonte de eventos, tal como se muestra en la

¹Es bueno y saludable hacer mención que se han realizado trabajos que contienen el futuro infinito nulo dentro del dominio numérico. Esto se lleva a cabo vía técnicas de compactificación, las cuales pueden ser estudiadas en detalle, con sus diversas aplicaciones, por ejemplo en las siguientes referencias [Malec & Murchadha 2003, Moncrief & Rinne 2009, Zenginoglu 2008, González et al. 2009, Cruz-Osorio et al. 2010, Lora-Clavijo et al. 2010, Cruz-Osorio et al. 2011].

Figura 2.3.

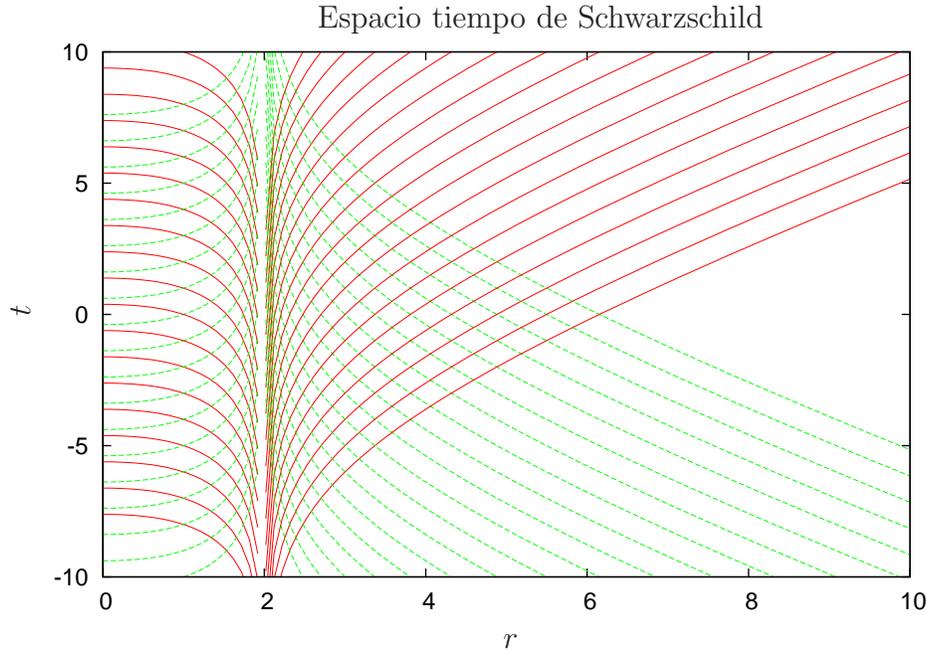


Figura 2.3: Estructura de conos de luz del espacio-tiempo de Schwarzschild en coordenadas de Schwarzschild, donde t y r están en unidades de M . Las líneas continuas rojas, corresponden a las geodésicas nulas salientes, mientras que las líneas punteadas verdes, corresponden a las geodésicas nulas entrantes.

Finalmente, la naturaleza singular de las coordenadas Schwarzschild no es muy satisfactoria, ya que ds^2 en el horizonte de eventos es singular y siendo el elemento de línea y las componentes de la métrica $g_{\mu\nu}$ los ingredientes esenciales para describir la geometría del espacio-tiempo, todo se daña. Por esta razón, se considera un nuevo sistema de coordenadas que no tiene el problema y permite que los conos de luz se orienten de manera natural hacia el hoyo negro. De hecho, uno de los propósitos de este trabajo para mejorar lo que se ha hecho hasta ahora con coordenadas singulares, es considerar estas coordenadas no singulares para el estudio de problemas astrofísicos,

ya que en muchos de los trabajos realizados en la actualidad, se usan las coordenadas de Schwarzschild, ver por ejemplo [Font & Ibáñez 1998, Donmez et al. 2011].

Coordenadas de Eddington-Finkelstein

Otro sistema de coordenadas usado en la literatura es el sistema de coordenadas de Eddington-Finkelstein, el cual, a diferencia del sistema de coordenadas de Schwarzschild, no es singular en el horizonte de eventos. Dicho sistema de coordenadas fue propuesto por Eddington en 1924 [Eddington 1924], y re-descubierto por Finkelstein en 1958 [Finkelstein 1958]. Estas coordenadas pueden derivarse considerando las trayectorias radiales nulas, las cuales se pueden obtener de la métrica (2.11) como:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 = 0, \quad (2.13)$$

lo cual implica, casi de manera directa, la ecuación (2.12). Esta ecuación puede integrarse fácilmente para obtener:

$$t = r^* + cte, \quad (2.14)$$

donde

$$r^* = r + 2M \ln \left| \frac{r}{2M} - 1 \right|. \quad (2.15)$$

El signo + corresponde a geodésicas nulas que se mueven hacia afuera (“salientes”), y el signo – a geodésicas nulas que se mueven hacia adentro (“entrantes”). La función r^* se conoce en la literatura como el “radio de tortuga”. Consideremos ahora una coordenada U definida por

$$U = t + r^*, \quad (2.16)$$

y definamos una transformación de las coordenadas de (t, r) a las nuevas coordenadas (U, r) . Nótese que dicha transformación de coordenadas es singular en $r = 2M$, pero esto es precisamente lo que se requiere si se desea eliminar la singularidad que las coordenadas originales tienen en el horizonte de eventos. En términos de estas nuevas coordenadas, la métrica de Schwarzschild se transforma en:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dU^2 + 2dU dr + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.17)$$

Esta es la métrica de Schwarzschild en las llamadas coordenadas de Eddington-Finkelstein. Las trayectorias de geodésicas nulas en estas coordenadas cumplen con las condiciones

$$\frac{dU}{dr} = 0 \quad \rightarrow \quad (\text{entrantes}), \quad (2.18)$$

$$\frac{dU}{dr} = \frac{2}{1 - \frac{2M}{r}} \quad \rightarrow \quad (\text{salientes}), \quad (2.19)$$

donde U es una coordenada nula. Finalmente, considerando la transformación de coordenadas $(U, r) \rightarrow (\tilde{t}, r)$, donde

$$\tilde{t} = U - r = t + 2M \ln \left| \frac{r}{2M} - 1 \right|, \quad (2.20)$$

se tiene que la forma final de la métrica de Schwarzschild en coordenadas de Eddington-Finkelstein es:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) d\tilde{t}^2 + \frac{4M}{r} d\tilde{t} dr + \left(1 + \frac{2M}{r}\right) dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.21)$$

De esta forma, haciendo nuevamente $ds^2 = 0$ para θ y ϕ constantes, se obtiene que las esferas nulas de radio r vienen dadas por las ecuaciones

$$\frac{dr}{d\tilde{t}} = -1 \quad \rightarrow \quad (\text{entrantes}), \quad (2.22)$$

$$\frac{dr}{d\tilde{t}} = \frac{1 - \frac{2M}{r}}{1 + \frac{2M}{r}} \quad \rightarrow \quad (\text{salientes}). \quad (2.23)$$

En este sistema de coordenadas, las geodésicas nulas entrantes en cada punto de la 2-esfera tienen pendiente constante $dr/d\tilde{t} = -1$, como en el espacio-tiempo de Minkowski y cruzan el radio de Schwarzschild sin ningún problema, con los conos de luz abiertos. Las geodésicas “salientes”, en cambio, tienen pendiente positiva para $r > 2M$, tienen pendiente infinita para $r = 2M$ y tienen pendiente negativa (es decir, entran en vez de salir) para $r < 2M$. Como todas las geodésicas nulas entran para $r < 2M$, debemos concluir que esta región no puede tener ninguna influencia causal sobre el exterior, es decir, está causalmente desconectada del exterior. Estas propiedades de la métrica se ilustran en la Figura 2.4, donde se muestra la estructura de los conos de luz del espacio-tiempo de un hoyo negro de Schwarzschild.

Finalmente, a partir de (2.4), las funciones α , β^i y γ_{ij} , en la versión 3 + 1 del espacio-tiempo son:

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2M}{r}}}, \quad (2.24)$$

$$\beta^i = \left(\frac{2M}{r} \frac{1}{1 + \frac{2M}{r}}, 0, 0 \right), \quad (2.25)$$

$$\gamma_{ij} = \text{diag} \left(1 + \frac{2M}{r}, r^2, r^2 \sin^2 \theta \right). \quad (2.26)$$

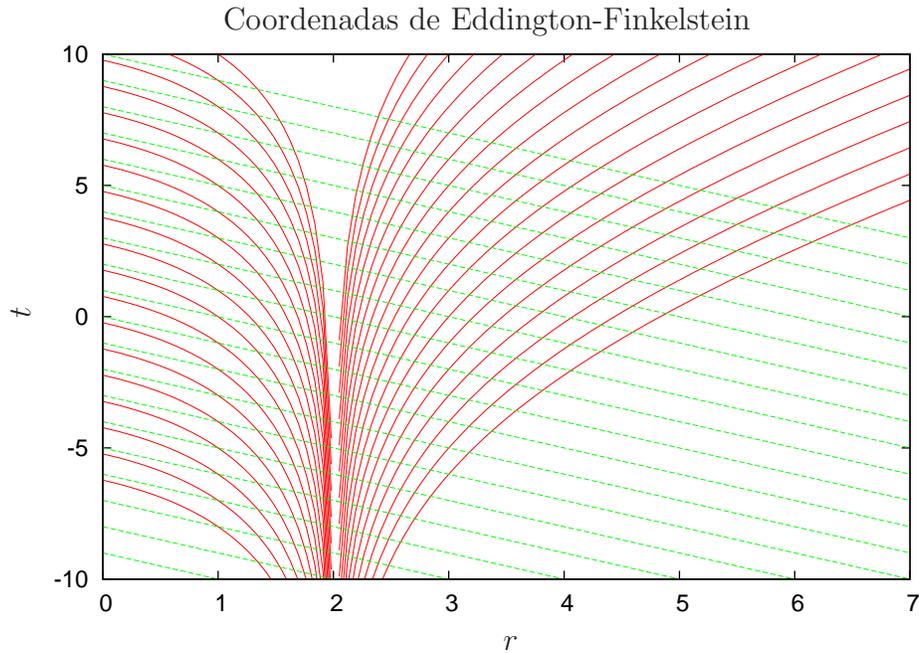


Figura 2.4: Espacio-tiempo de Schwarzschild en coordenadas de Eddington-Finkelstein. Las trayectorias nulas salientes del espacio-tiempo (geodésicas nulas salientes) van al futuro infinito nulo \mathcal{J}^+ . Como en el caso anterior, las líneas rojas continuas, corresponden a las geodésicas nulas salientes, mientras que las líneas punteadas verdes, corresponden a las geodésicas nulas entrantes. t y r están en unidades de M .

SECCIÓN 2.5

Hoyos negros axialmente simétricos

La solución para un hoyo negro con mometo angular fue encontrada por Kerr en 1963 y a diferencia del caso de Schwarzschild, la solución de Kerr es axialmente simétrica [Kerr 1963]. Existen dos sistemas de coordenadas comúnmente usados para describir este espacio-tiempo: las coordenadas de Boyer-Lindquist y las coordenadas de Kerr-Schild.

Coordenadas de Boyer-Lindquist

Las coordenadas de Boyer-Lindquist son una generalización de las coordenadas de Schwarzschild para un espacio-tiempo estacionario, con simetría axial y asintóticamente plano. El elemento de línea escrito en dichas coordenadas es de la forma:

$$ds^2 = -\left(\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma}\right) dt^2 - 4\frac{aMr \sin^2 \theta}{\Sigma} dt d\phi + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 \\ + \left[\frac{(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta}{\Sigma}\right] \sin^2 \theta d\phi^2,$$

con

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad (2.27)$$

y

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2, \quad (2.28)$$

donde M y a son parámetros libres que tienen una interpretación física directa: M es la masa de hoyo negro, como en el caso de Schwarzschild, y $J = aM$ es su momento angular. Como en el caso de la solución de Schwarzschild, que es la única solución esféricamente simétrica de las ecuaciones de Einstein en el vacío (teorema de Birkhoff), la solución de Kerr es la única solución estacionaria con simetría axial de las ecuaciones de Einstein en el vacío.

Como se puede observar, la métrica de Kerr es singular en $\Sigma = 0$ y en $\Delta = 0$. Análogamente al caso de Schwarzschild, la singularidad en $\Sigma = 0$ es real, pero la estructura de esta singularidad es mucho más compleja que en el caso de Schwarzschild, y en el caso de Kerr, resulta tener la estructura de un anillo. Por otra parte, la singularidad

en $\Delta = 0$ no es real y es posible demostrar que esta singularidad se debe al sistema de coordenadas usado.

Específicamente para el caso en el que $\Delta = 0$, se tiene la siguiente estructura:

- La singularidad no existe si $a > M$, pues en este caso no existen soluciones de la ecuación $r^2 - 2Mr + a^2 = 0$. De hecho cuando esto sucede, se dice que la singularidad gravitacional no tiene horizonte de eventos (singularidad desnuda) y consecuentemente la métrica no representa un hoyo negro de Kerr.
- De esto último se tiene que el valor máximo permitido para el valor del parámetro de rotación a es $a = M$, correspondiente a un hoyo negro con momento angular $J = M^2$. Un hoyo negro con este momento angular se conoce como hoyo negro extremo.
- Finalmente, en el caso en que $a \leq M$, la solución de la ecuación es:

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}. \quad (2.29)$$

La superficie r_+ resulta ser el horizonte de eventos y en estas coordenadas ds^2 es singular ahí. Por otra parte, la superficie r_- es una singularidad de coordenadas dentro del horizonte de eventos del hoyo negro.

Otra propiedad muy importante de la estructura de los hoyos negros de Kerr que los diferencia de los hoyos negros de Schwarzschild, es la presencia de una región llamada ergósfera. Consideremos la componente g_{00} de la métrica (2.27):

$$g_{00} = -\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma}. \quad (2.30)$$

Es directo ver que la componente g_{00} de la métrica de Kerr se vuelve cero siempre que:

$$\Delta - a^2 \sin^2 \theta = r^2 + a^2 \cos^2 \theta - 2Mr = 0, \quad (2.31)$$

cuyas soluciones están dadas por:

$$r = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta}. \quad (2.32)$$

Parte de la región delimitada por esta solución siempre está fuera del hoyo negro. A dicha región

$$r_+ < r < M + \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta}, \quad (2.33)$$

se le conoce como la ergósfera del hoyo negro. Como se puede ver, la ergósfera tiene su máxima extensión en el ecuador y se reduce a cero en los polos. Por otra parte, el significado de que g_{00} sea mayor que cero es que un objeto físico no puede permanecer en reposo en esa región, pues eso sería equivalente a moverse más rápido que la luz. Entonces, los objetos materiales dentro de la ergósfera del espacio-tiempo de Kerr deben rotar en la dirección de rotación del hoyo negro. Esto se conoce como el arrastre de marcos inerciales. Los objetos dentro de la ergósfera aún pueden escapar al infinito, pero no pueden evitar rotar. La Figura 2.5 ilustra las diferentes regiones del espacio-tiempo de Kerr.

Coordenadas de Kerr-Schild

Otro sistema de coordenadas importante, en el cual los conos de luz no son singulares en el horizonte de eventos y permite que las hipersuperficies espaciales penetren dicho horizonte de eventos de manera natural, es el sistema de coordenadas de Kerr-Schild. Dichas coordenadas tienen la propiedad importante, como en el caso de coordenadas de Eddington-Finkelstein, que en el horizonte de eventos ds^2 no es singular. Las coordenadas de Kerr-Schild se pueden relacionar con las coordenadas de Boyer-Lindquist por medio de las siguientes transformaciones:

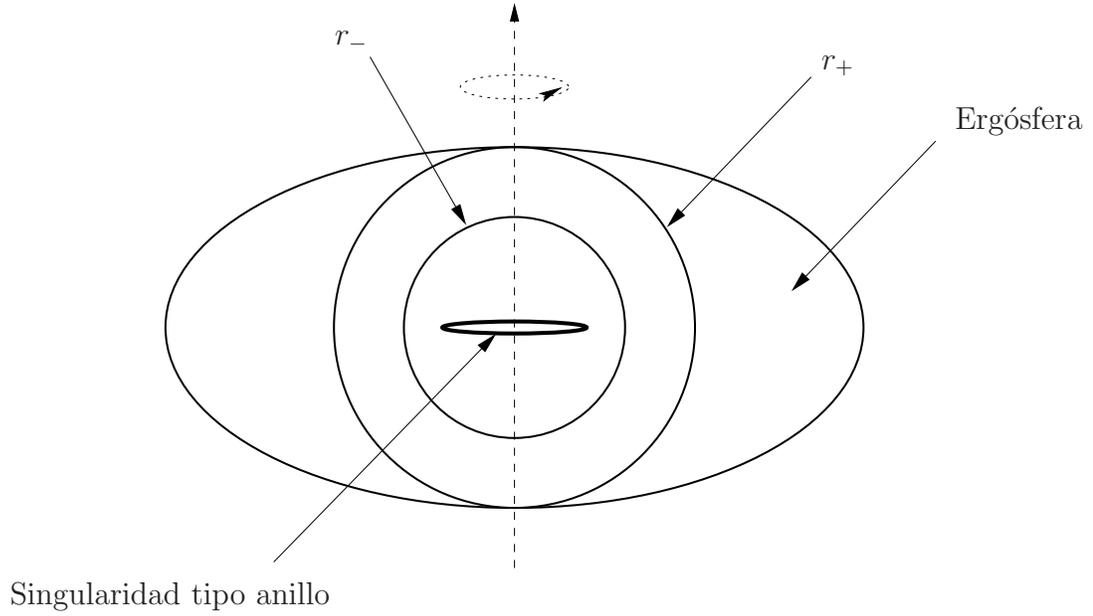


Figura 2.5: Figura esquemática del espacio-tiempo de Kerr que ilustra las diferentes regiones de un hoyo negro rotante, estacionario y axialmente simétrico.

$$\tilde{t} = U - r, \quad (2.34)$$

$$x + iy = (r - ia)e^{i\phi} \sin \theta, \quad (2.35)$$

$$z = r \cos \theta. \quad (2.36)$$

Algunas veces es conveniente escribir las anteriores relaciones de forma mas explícita como:

$$x = (r \cos \phi + a \sin \phi) \sin \theta = \sqrt{r^2 + a^2} \cos \left[\phi - \arctan \left(\frac{a}{r} \right) \right] \sin \theta, \quad (2.37)$$

$$y = (r \sin \phi - a \cos \phi) \sin \theta = \sqrt{r^2 + a^2} \sin \left[\phi - \arctan \left(\frac{a}{r} \right) \right] \sin \theta, \quad (2.38)$$

de donde se puede deducir que:

$$\frac{x^2 + y^2}{\sin^2 \theta} - \frac{z^2}{\cos^2 \theta} = a^2, \quad (2.39)$$

lo cual es equivalente a:

$$\frac{x^2 + y^2}{r^2 + a^2} + \frac{z^2}{r^2} = 1. \quad (2.40)$$

En términos de las coordenadas de Kerr-Schild (\tilde{t}, x, y, z) , el elemento de línea de Kerr toma la siguiente forma:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \left(\eta_{\mu\nu} + \frac{2Mr^3}{r^4 + a^2 z^2} l_\mu l_\nu \right) dx^\mu dx^\nu, \quad (2.41)$$

donde $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ es la métrica de Minkowski y

$$l_\mu = \left(1, \frac{rx + ay}{r^2 + a^2}, \frac{ry - ax}{r^2 + a^2}, \frac{z}{r} \right), \quad (2.42)$$

es un vector nulo con respecto a $g_{\mu\nu}$ y $\eta_{\mu\nu}$. Por otra parte, las componentes contravariantes de la métrica toman la forma

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \frac{2Mr^3}{r^4 + a^2 z^2} l^\mu l^\nu, \quad (2.43)$$

con

$$l^\mu = \left(-1, \frac{rx + ay}{r^2 + a^2}, \frac{ry - ax}{r^2 + a^2}, \frac{z}{r} \right). \quad (2.44)$$

Cabe aclarar que el valor de la coordenada r en términos de las coordenadas (x, y, z) puede obtenerse de resolver la ecuación algebraica (2.40), de tal forma que:

$$r(x, y, z) = \sqrt{\frac{R^2 - a^2 + \sqrt{(R^2 - a^2)^2 + 4a^2 z^2}}{2}}, \quad (2.45)$$

donde $R^2 = x^2 + y^2 + z^2$ y las raíces positivas se escogen de tal manera que lejos del hoyo negro, $r \rightarrow R$.

Finalmente, es posible identificar las funciones de la descomposición 3+1 para la métrica de Kerr en coordenadas de Kerr-Schild como:

$$\alpha = \frac{1}{1 + 2H}, \quad (2.46)$$

$$\beta^i = \frac{2Hl^i}{1 + 2H}, \quad (2.47)$$

$$\beta_i = 2Hl_i, \quad (2.48)$$

$$\gamma_{ij} = \delta_{ij} + 2Hl_i l_j, \quad (2.49)$$

$$\gamma^{ij} = \delta^{ij} - 2Hl^i l^j \left(1 - \frac{2H}{1 + 2H} \right), \quad (2.50)$$

donde $H = \frac{Mr^3}{r^4 + a^2 z^2}$.

SECCIÓN 2.6

Ecuaciones de Euler Relativistas: Formulación Conservativa Euleriana

La mayoría de los enfoques que se usan para la solución numérica de las ecuaciones de Euler relativistas en un espacio-tiempo curvo fijo están basadas en la formulación 3 + 1, del espacio-tiempo. Especialmente, este trabajo está enfocado en la formulación relativista general de las ecuaciones de Euler introducida por Martí, Ibáñez y Miralles en 1991 [Martí et al. 1991].

Esta formulación se diseñó principalmente para tomar ventaja del carácter hiperbólico

y conservativo de las ecuaciones de Euler relativistas. Desde el punto de vista numérico, la naturaleza hiperbólica y conservativa de dichas ecuaciones permite el uso de esquemas basados en los campos característicos del sistema, brindando así a la hidrodinámica relativista el uso de herramientas computacionales ya conocidas en dinámica de fluidos clásica. Además, este procedimiento se aparta de los enfoques donde los términos disipativos eran usados para lidiar con soluciones discontinuas.

Las ecuaciones que describen la evolución de un fluido relativista en relatividad general, provienen de la conservación local del tensor energía momento $T^{\mu\nu}$ (identidades de Bianchi) y de la conservación local de la densidad de corriente de materia J^μ (ecuación de continuidad):

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad (2.51)$$

$$\nabla_\mu J^\mu = 0. \quad (2.52)$$

Como es usual, ∇_μ es la derivada covariante asociada a la métrica 4-dimensional $g_{\mu\nu}$ del espacio-tiempo. La densidad de corriente de materia está dada por $J^\mu = \rho_0 u^\mu$, donde u^μ representa la cuatro-velocidad del fluido y ρ_0 la densidad de masa en reposo del fluido.

Durante este trabajo, se considera que el tensor energía momento es el de un fluido perfecto, es decir, dentro del marco de fluido, no se consideran efectos de transferencia de calor ni efectos de viscosidad. Las componentes de dicho tensor, están dadas por

$$T^{\mu\nu} = \rho_0 h u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu}, \quad (2.53)$$

donde p es la presión y h es la entalpía interna específica del fluido

$$h = 1 + \epsilon + \frac{p}{\rho_0}. \quad (2.54)$$

En esta última expresión, ϵ representa la energía interna específica de dicho fluido. Por

otra parte, de las relaciones obtenidas anteriormente para los observadores Eulerianos, específicamente de las ecuaciones (2.8), se puede expresar la cuatro-velocidad u^μ de la siguiente manera:

$$u^0 = \frac{W}{\alpha}, \quad u^i = W \left(v^i - \frac{\beta^i}{\alpha} \right), \quad (2.55)$$

donde se ha definido el factor de Lorentz W como

$$W = \frac{1}{\sqrt{1 - \gamma_{ij}v^iv^j}}, \quad (2.56)$$

y las v^i son las componentes de la velocidad del gas medidas por un observador Euleriano.

La primera de las ecuaciones de la hidrodinámica relativista, como se mencionó antes, puede ser obtenida a partir de la conservación local de la densidad de corriente de materia, (2.52). Dicha ecuación puede ser reformulada como:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}\rho_0u^\mu) = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_0(\sqrt{-g}\rho_0u^0) + \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_i(\sqrt{-g}\rho_0u^i), \quad (2.57)$$

donde g es el determinante de la métrica $g_{\mu\nu}$. Ahora, sustituyendo las expresiones (2.55) y (2.7) en esta última ecuación se obtiene

$$\partial_0(\sqrt{\gamma}\rho_0W) + \partial_i \left[\alpha\sqrt{\gamma}\rho_0W \left(v^i - \frac{\beta^i}{\alpha} \right) \right] = 0, \quad (2.58)$$

la cual constituye la primera de las ecuaciones de Euler. Por otra parte, las ecuaciones restantes son obtenidas de proyectar la conservación local del tensor energía-momento (2.51), sobre la base Euleriana (2.10). Dicha proyección puede escribirse de la siguiente forma

$$\nabla_\mu(T^{\mu\nu}e_{(\sigma)\nu}) = T^{\mu\nu}\nabla_\mu(e_{(\sigma)\nu}), \quad (2.59)$$

donde se ha tenido en cuenta que $(\nabla_\mu T^{\mu\nu}) = 0$.

La primera de estas cuatro ecuaciones corresponde al índice $\sigma = 0$ de la base euleriana, esto es

$$\nabla_{\mu}(T^{\mu\nu}e_{(0)\nu}) = T^{\mu\nu}\nabla_{\mu}(e_{(0)\nu}), \quad (2.60)$$

donde $e_{(0)\nu} = n_{\nu}$. Específicamente, esta última expresión corresponde a proyectar la conservación local del tensor energía momento a lo largo del vector normal a las hipersuperficies de $t = \text{constante}$. Esta ecuación, análogamente a la primera ecuación de Euler, puede ser reescrita de la siguiente forma

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_{\mu}(\sqrt{-g}T^{\mu\nu}n_{\nu}) = T^{\mu\nu}\nabla_{\mu}n_{\nu}. \quad (2.61)$$

A partir de la definición (2.8) y después de cierto cálculo algebraico, es posible mostrar que la anterior ecuación se puede escribir como

$$-\partial_0(\alpha^2\sqrt{\gamma}T^{00}) - \partial_i(\alpha^2\sqrt{\gamma}T^{0i}) = \sqrt{-g}T^{\mu\nu}\nabla_{\mu}n_{\nu}. \quad (2.62)$$

Ahora, considerando que las componentes del tensor energía momento pueden ser escritas en términos de la velocidad medida por los observadores Eulerianos, ver (2.55)

$$T^{00} = \frac{\rho_0 h W^2 - p}{\alpha^2}, \quad (2.63)$$

$$T^{0i} = \frac{\rho_0 h W^2}{\alpha} \left(v^i - \frac{\beta^i}{\alpha} \right) + p \frac{\beta^i}{\alpha^2}, \quad (2.64)$$

la ecuación (2.62) toma la siguiente forma

$$\begin{aligned} -\partial_0[\sqrt{\gamma}(\rho_0 h W^2 - p)] - \partial_i \left\{ \alpha \sqrt{\gamma} \left[\left(v^i - \frac{\beta^i}{\alpha} \right) (\rho_0 h W^2 - p) + v^i p \right] \right\} \\ = \alpha \sqrt{\gamma} T^{\mu\nu} \nabla_{\mu} n_{\nu}. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Finalmente, para obtener la segunda de las ecuaciones de Euler en un espacio-tiempo curvo, de forma explícita, se debe reescribir el término de la fuente $T^{\mu\nu}\nabla_\mu n_\nu$. Para esto se considera la definición de la derivada covariante [Schutz 2009, Wald 1984]

$$\nabla_\mu n_\nu = \partial_\mu n_\nu - n_\delta \Gamma_{\mu\nu}^\delta, \quad (2.66)$$

donde $\Gamma_{\mu\nu}^\delta$ son los símbolos de Christoffel. Haciendo uso de esta definición y tomando en cuenta que $n_\mu = (-\alpha, 0, 0, 0)$, se encuentra que el término de fuente, en la ecuación (2.65), toma la forma final

$$T^{\mu\nu}\nabla_\mu n_\nu = -T^{\mu 0}\partial_\mu \alpha + \alpha T^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu}^0. \quad (2.67)$$

Con esto último, la expresión para la segunda ecuación de Euler es:

$$\begin{aligned} \partial_0[\sqrt{\gamma}(\rho_0 h W^2 - p - \rho_0 W)] + \partial_i \left\{ \alpha \sqrt{\gamma} \left[\left(v^i - \frac{\beta^i}{\alpha} \right) (\rho_0 h W^2 - p - \rho_0 W) + v^i p \right] \right\} \\ = \alpha \sqrt{\gamma} (T^{\mu 0} \partial_\mu \alpha - \alpha T^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^0), \end{aligned} \quad (2.68)$$

donde se ha restado la ecuación de conservación de la masa (2.58) para dar la forma final de esta última ecuación.

Las restantes tres ecuaciones corresponden al índice $\sigma = j$

$$\nabla_\mu (T^{\mu\nu} e_{(j)\nu}) = T^{\mu\nu} \nabla_\mu (e_{(j)\nu}), \quad (2.69)$$

donde $e_{(j)\nu} = (\partial_j)_\nu = (\beta_j, \gamma_{ij})$ son las componentes de los tres vectores coordenados tangentes a las hipersuperficies espaciales. De igual forma que en los casos anteriores, esta última ecuación puede reescribirse de la siguiente manera

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} T^{\mu\nu} \partial_{(i)\nu}) = T^{\mu\nu} \nabla_\mu (\partial_{(i)\nu}), \quad (2.70)$$

que después de cierto cálculo algebraico, se reescribe como

$$\begin{aligned} \partial_0 [\alpha\sqrt{\gamma} (T^{00}\beta_i + T^{0j}\gamma_{ij})] + \partial_k [\alpha\sqrt{\gamma} (T^{k0}\beta_i + T^{kj}\gamma_{ij})] \\ = \alpha\sqrt{\gamma} T^{\mu\nu} \nabla_\mu (\partial_{(i)\nu}). \end{aligned} \quad (2.71)$$

Ahora, tomando en cuenta que la componente T^{kj} puede ser escrita como (ver 2.55)

$$T^{kj} = \rho_0 h W^2 \left(v^k - \frac{\beta^k}{\alpha} \right) \left(v^j - \frac{\beta^j}{\alpha} \right) + p \left(\gamma^{kj} - \frac{\beta^k \beta^j}{\alpha^2} \right), \quad (2.72)$$

y además haciendo uso de las ecuaciones (2.63, 2.64), es posible mostrar que la ecuación (2.71) adquiere la forma

$$\begin{aligned} \partial_0 (\sqrt{\gamma} \rho_0 h W^2 v_i) + \partial_k \left\{ \alpha\sqrt{\gamma} \left[\rho_0 h W^2 v_i \left(v^k - \frac{\beta^k}{\alpha} \right) + p \delta_i^k \right] \right\} \\ = \alpha\sqrt{\gamma} T^{\mu\nu} \nabla_\mu (\partial_{(i)\nu}). \end{aligned} \quad (2.73)$$

Por otra parte, el término de fuente $T^{\mu\nu} \nabla_\mu (\partial_{(i)\nu})$, haciendo uso de la definición de la derivada covariante, es

$$T^{\mu\nu} \nabla_\mu (\partial_{(i)\nu}) = T^{\mu\nu} (\partial_\mu g_{i\nu} - g_{i\delta} \Gamma_{\mu\nu}^\delta), \quad (2.74)$$

dando así formal final a las ecuaciones de Euler restantes para un espacio-tiempo curvo

$$\begin{aligned} \partial_0 (\sqrt{\gamma} \rho_0 h W^2 v_i) + \partial_k \left\{ \alpha\sqrt{\gamma} \left[\rho_0 h W^2 v_i \left(v^k - \frac{\beta^k}{\alpha} \right) + p \delta_i^k \right] \right\} \\ = \alpha\sqrt{\gamma} T^{\mu\nu} (\partial_\mu g_{i\nu} - g_{i\delta} \Gamma_{\mu\nu}^\delta). \end{aligned} \quad (2.75)$$

El sistema de ecuaciones de Euler relativistas (2.58, 2.68, 2.75), puede escribirse de manera compacta como un sistema de ecuaciones conservativo de primer orden [Font et al. 2000]

$$\partial_0 \vec{\mathcal{U}} + \partial_i \vec{\mathcal{F}}^i = \vec{\mathcal{S}}, \quad (2.76)$$

donde el vector de estado a evolucionar $\vec{\mathcal{U}}$ está dado en términos del conjunto de variables primitivas $\vec{\mathcal{W}} = (\rho_0, v^i, \epsilon, p)$ como:

$$\vec{\mathcal{U}} = \begin{bmatrix} \tilde{D} \\ \tilde{S}_j \\ \tilde{\tau} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\gamma} \rho_0 W \\ \sqrt{\gamma} \rho_0 h W^2 v_j \\ \sqrt{\gamma} (\rho_0 h W^2 - p - \rho_0 W) \end{bmatrix}, \quad (2.77)$$

mientras que estas cantidades son los argumentos de la parte temporal de las ecuaciones (2.58, 2.68) y (2.75). Además, los tres flujos vectoriales $\vec{\mathcal{F}}^i$ están dados por

$$\vec{\mathcal{F}}^i = \begin{bmatrix} \alpha \left(v^i - \frac{\beta^i}{\alpha} \right) \tilde{D} \\ \alpha \left(v^i - \frac{\beta^i}{\alpha} \right) \tilde{S}_j + \alpha \sqrt{\gamma} p \delta_j^i \\ \alpha \left(v^i - \frac{\beta^i}{\alpha} \right) \tilde{\tau} + \alpha \sqrt{\gamma} v^i p \end{bmatrix}, \quad (2.78)$$

y finalmente, el vector fuente $\vec{\mathcal{S}}$ es

$$\vec{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \sqrt{\gamma} (T^{\mu\nu} \partial_\mu g_{j\nu} - T^{\mu\nu} g_{j\delta} \Gamma_{\mu\nu}^\delta) \\ \alpha \sqrt{\gamma} (T^{\mu 0} \partial_\mu \alpha - \alpha T^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^0) \end{bmatrix}, \quad (2.79)$$

donde de nuevo, $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ son los símbolos de Christoffel usuales [Schutz 2009, Wald 1984]. Es importante mencionar que las cantidades \tilde{D} , \tilde{S}_i y $\tilde{E} = \tilde{\tau} + \tilde{D}$ pueden ser escritas como

$$\tilde{D} = \sqrt{\gamma} D, \quad \tilde{S}_i = \sqrt{\gamma} S_i, \quad \tilde{E} = \sqrt{\gamma} E, \quad (2.80)$$

donde D , S_i y $E = \tau + D$ son la densidad de masa en reposo relativista, la densidad de momento en la i -ésima dirección y la densidad de energía total medidas por un observa-

dor Euleriano, respectivamente. Dichas cantidades pueden ser obtenidas de proyectar la densidad de corriente de materia y el tensor de energía momento de la siguiente forma

$$D = -n_\nu J^\nu, \quad (2.81)$$

$$S_i = \gamma_{\mu i} n_\nu T^{\mu\nu}, \quad (2.82)$$

$$E = n_\mu n_\nu T^{\mu\nu}, \quad (2.83)$$

y son llamadas las variables conservativas del sistema.

Como se puede observar, el sistema de ecuaciones (2.76, 2.77, 2.78, 2.79) es un conjunto de cinco ecuaciones para las seis variables $\vec{W} = (\rho_0, v^i, \epsilon, p)$. Por lo tanto es necesario cerrar este sistema de ecuaciones, para lo cual se requiere una ecuación de estado (EOS) (siglas en inglés) que relaciona normalmente la presión p , con la densidad de masa en reposo, ρ_0 , y la energía interna específica, ϵ

$$p = p(\rho_0, \epsilon). \quad (2.84)$$

Hoy en día, las ecuaciones de estado son tan sofisticadas que tienen en cuenta procesos físicos y químicos tales como interacciones moleculares, cuantización, efectos relativistas, física nuclear, entre otros. Sin embargo, las EOS más usadas en simulaciones astrofísicas, debido a su simplicidad, son la de un gas ideal

$$p = (\Gamma - 1)\rho_0\epsilon, \quad (2.85)$$

donde Γ es comúnmente llamado el índice adiabático y la EOS politrópica

$$p = K\rho_0^\Gamma, \quad (2.86)$$

usualmente utilizada para construir configuraciones de estrellas en equilibrio, donde K es llamada la constante politrópica.

Una cantidad muy importante, que se puede derivar dada una ecuación de estado, es la velocidad del sonido relativista c_s . En particular esta velocidad puede ser escrita de la siguiente forma para una ecuación de estado como la presentada en (2.84) (ver [Font et al. 2000])

$$c_s^2 = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s = \frac{\chi}{h} + \frac{p}{\rho_0^2} \frac{\kappa}{h}, \quad (2.87)$$

donde

$$\chi = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho_0} \right|_\epsilon, \quad \kappa = \left. \frac{\partial p}{\partial \epsilon} \right|_{\rho_0}, \quad (2.88)$$

y s es la entropía por partícula y ρ es la densidad total de energía en reposo, $\rho = \rho_0(1+\epsilon)$. Para el caso de una gas ideal regido por la ecuación de estado (2.85), la expresión para la velocidad del sonido relativista reduce a

$$c_s = \sqrt{\frac{\Gamma p}{h \rho_0}}. \quad (2.89)$$

De aquí en adelante, ésta última expresión, será utilizada para todas las simulaciones numéricas.

SECCIÓN 2.7

Estructura característica de las Ecuaciones de Euler Relativistas

Como se mencionó en la sección anterior, los esquemas numéricos utilizados para tratar con problemas hidrodinámicos usan la estructura característica del sistema hiperbólico de ecuaciones anteriormente visto. El cálculo de dicha estructura se lleva a cabo ignorando temporalmente la parte no homogénea del sistema de ecuaciones (2.76). Por otra

parte, la forma de proceder para la obtención de los valores y vectores propios asociados al sistema de ecuaciones de Euler relativista, es la propuesta por [Banyuls et al. (1996)].

Expandiendo el término de divergencia y tomando la parte principal ($\vec{\mathcal{S}} = 0$) del sistema de ecuaciones (2.76), se obtiene lo siguiente

$$\partial_0 \vec{\mathcal{U}} + \frac{\partial \vec{\mathcal{F}}^i}{\partial \vec{\mathcal{U}}} \partial_i \vec{\mathcal{U}} = 0. \quad (2.90)$$

Esta forma de escribir las ecuaciones es conocida como la forma cuasi-lineal de las ecuaciones de balance, debido al hecho de que este conjunto de ecuaciones diferenciales parciales son lineales en sus primeras derivadas; sin embargo, el término $\frac{\partial \vec{\mathcal{F}}^i}{\partial \vec{\mathcal{U}}}$ es dependiente de las variables $\vec{\mathcal{U}}$ y es por sí mismo no lineal. La expresión $\frac{\partial \vec{\mathcal{F}}^i}{\partial \vec{\mathcal{U}}}$ es conocida como la matriz Jacobiana del sistema (2.90)

$$\mathcal{B}^i = \frac{\partial \vec{\mathcal{F}}^i}{\partial \vec{\mathcal{U}}}. \quad (2.91)$$

De esta forma la ecuación cuasi-lineal (2.90) se convierte en

$$\partial_0 \vec{\mathcal{U}} + \mathcal{B}^i \partial_i \vec{\mathcal{U}} = 0. \quad (2.92)$$

Este último sistema de ecuaciones se dice que es hiperbólico si cada una de las matrices Jacobianas tienen valores propios reales distintos de cero, esto es, que las matrices \mathcal{B}^i son diagonalizables. De hecho, la naturaleza de los valores propios asociados a cada matriz, permite la definición de varias clases de hiperbolicidad [Thomas 1995]:

- Sistema fuertemente hiperbólico: Cada una de las matrices Jacobianas son diagonalizables.
- Sistema simétrico hiperbólico: Cada una de las matrices Jacobianas son diagonalizables y además los valores propios asociados a cada matriz son distintos.

- Sistema estrictamente hiperbólico: Cada una de las matrices Jacobianas son diagonalizables y además los vectores propios asociados a cada matriz son linealmente independientes.

Por otra parte, si la matriz Jacobiana es fuertemente hiperbólica, la evolución del vector de estado $\vec{\mathcal{U}}$ constituye un problema de evolución bien planteado, en el cual la solución es única y depende continuamente de los datos iniciales.

Los valores y vectores propios de cada una de las matrices \mathcal{B}^i vienen dados por la solución del siguiente problema algebraico

$$\begin{aligned} \det(\mathcal{B}^i - \lambda^i \mathcal{I}) &= 0, \\ (\mathcal{B}^i - \lambda^i \mathcal{I})\mathbf{r}^i &= 0, \end{aligned} \tag{2.93}$$

donde λ^i denota las velocidades características en la dirección i -ésima (valores propios), \mathbf{r}^i los vectores propios correspondientes e \mathcal{I} es la matriz identidad. Debido a que en general los flujos (2.78) dependen tanto de las variables primitivas $\vec{\mathcal{W}}$, como de las variables conservativas $\vec{\mathcal{U}}$, es necesario escribir de forma explícita las variables primitivas en términos de las conservativas, así los flujos dependenderían sólo del vector de estado $\vec{\mathcal{U}}$. Sin embargo, en general no es posible expresar las variables primitivas en términos de las conservativas de manera analítica, ya que la ecuación algebraica resultante a resolver es una ecuación trascendental, incluso para los casos relativistas más simples. Por esta razón, el problema de calcular los valores y vectores propios en términos de las variables conservativas $\vec{\mathcal{U}}$ se convierte en un problema difícil de resolver.

El método a seguir, para calcular la estructura característica del sistema de ecuaciones (2.76), es analizar el problema en términos de las variables primitivas [Font et al. 1994], en lugar de las variables conservativas. De hecho, la elección adecuada de dichas variables, tal que el problema de la estructura característica pueda ser resuelto, es de gran

valor práctico. Con una elección del vector de estado primitivo $\vec{\mathcal{W}}$, el sistema cuasilíneoal (2.92), puede ser reformulado como

$$\mathcal{A}^0 \partial_0 \vec{\mathcal{W}} + \mathcal{A}^i \partial_i \vec{\mathcal{W}} = 0, \quad (2.94)$$

donde

$$\mathcal{A}^0 = \frac{\partial \vec{\mathcal{U}}}{\partial \vec{\mathcal{W}}}, \quad \mathcal{A}^i = \frac{\partial \vec{\mathcal{F}}^i}{\partial \vec{\mathcal{W}}}, \quad (2.95)$$

son las nuevas matrices Jacobianas. De esta forma, el nuevo sistema algebraico a resolver es

$$\begin{aligned} \det(\mathcal{A}^i - \tilde{\lambda}^i \mathcal{A}^0) &= 0, \\ (\mathcal{A}^i - \bar{\lambda}^i \mathcal{A}^0) \tilde{\mathbf{r}}^i &= 0. \end{aligned} \quad (2.96)$$

Aquí $\tilde{\lambda}^i$ y $\tilde{\mathbf{r}}^i$ son los valores y vectores propios del anterior sistema, respectivamente. Después de algo de álgebra, es posible mostrar que se cumplen las siguientes relaciones entre los dos sistemas

$$\begin{aligned} \lambda^i &= \tilde{\lambda}^i, \\ \mathbf{r}^i &= \mathcal{A}^0 \tilde{\mathbf{r}}^i, \end{aligned} \quad (2.97)$$

donde las matrices \mathcal{B}^i pueden ser obtenidas a partir de la siguiente expresión

$$\mathcal{B}^i = \frac{\partial \vec{\mathcal{F}}^i}{\partial \vec{\mathcal{W}}} \frac{\partial \vec{\mathcal{W}}}{\partial \vec{\mathcal{U}}} = \mathcal{A}^i (\mathcal{A}^0)^{-1}. \quad (2.98)$$

Ahora, se procede a la diagonalización de este sistema, con la elección de las variables primitivas $\vec{\mathcal{W}} = (\rho_0, v^i, \epsilon)$ y considerando el caso de un fluido perfecto con ecuación de estado $p = p(\rho_0, \epsilon)$, como se vió en la sección anterior. Como se puede ver, las variables

conservativas sí están dadas en términos de las primitivas, por lo tanto los flujos pueden ser escritos en términos del vector de estado primitivo totalmente, haciendo posible el cálculo de las matrices \mathcal{A} , ver Apéndice A.

Finalmente, se resuelve el sistema (2.96) para obtener los valores y vectores propios y posteriormente se recurre a las relaciones (2.97), para así obtener el sistema característico asociado al problema original (2.93). De esta forma, los valores y vectores propios finales para cada matriz \mathcal{A}^i son:

1. Matriz \mathcal{A}^1

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \alpha v^1 - \beta^1, \quad (2.99)$$

$$\lambda_{\pm} = \frac{\alpha}{1 - \mathcal{V}^2 c_s^2} \left[v^1 (1 - c_s^2) \pm \sqrt{c_s^2 (1 - \mathcal{V}^2) [\gamma^{11} (1 - \mathcal{V}^2 c_s^2) - v^1 v^1 (1 - c_s^2)]} \right] - \beta^1,$$

$$\mathbf{r}^1 = \left[\frac{\kappa}{hW(\kappa - \rho_0 c_s^2)}, v_1, v_2, v_3, 1 - \frac{\kappa}{hW(\kappa - \rho_0 c_s^2)} \right]^T, \quad (2.100)$$

$$\mathbf{r}^2 = \begin{bmatrix} Wv_2 \\ h(\gamma_{12} + 2W^2 v_1 v_2) \\ h(\gamma_{22} + 2W^2 v_2 v_2) \\ h(\gamma_{23} + 2W^2 v_2 v_3) \\ v_2 W(2Wh - 1) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}^3 = \begin{bmatrix} Wv_3 \\ h(\gamma_{13} + 2W^2 v_1 v_3) \\ h(\gamma_{23} + 2W^2 v_2 v_3) \\ h(\gamma_{33} + 2W^2 v_3 v_3) \\ v_3 W(2Wh - 1) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{r}_{\pm} = \left[1, hW \left(v_1 - \frac{v^1 - \frac{(\lambda_{\pm} + \beta^1)}{\alpha}}{\gamma^{11} - v^1 \frac{(\lambda_{\pm} + \beta^1)}{\alpha}} \right), hWv_2, hWv_3, \frac{hW(\gamma^{11} - v^1 v^1)}{\gamma^{11} - v^1 \frac{(\lambda_{\pm} + \beta^1)}{\alpha}} \right]^T.$$

2. Matriz \mathcal{A}^2

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \alpha v^2 - \beta^2, \quad (2.101)$$

$$\lambda_{\pm} = \frac{\alpha}{1 - \mathcal{V}^2 c_s^2} \left[v^2 (1 - c_s^2) \pm \sqrt{c_s^2 (1 - \mathcal{V}^2) [\gamma^{22} (1 - \mathcal{V}^2 c_s^2) - v^2 v^2 (1 - c_s^2)]} \right] - \beta^2.$$

$$\mathbf{r}^1 = \left[\frac{\kappa}{hW(\kappa - \rho_0 c_s^2)}, v_1, v_2, v_3, 1 - \frac{\kappa}{hW(\kappa - \rho_0 c_s^2)} \right]^T, \quad (2.102)$$

$$\mathbf{r}^2 = \begin{bmatrix} Wv_1 \\ h(\gamma_{11} + 2W^2 v_1 v_1) \\ h(\gamma_{21} + 2W^2 v_2 v_1) \\ h(\gamma_{13} + 2W^2 v_1 v_3) \\ v_1 W(2Wh - 1) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}^3 = \begin{bmatrix} Wv_3 \\ h(\gamma_{13} + 2W^2 v_1 v_3) \\ h(\gamma_{23} + 2W^2 v_2 v_3) \\ h(\gamma_{33} + 2W^2 v_3 v_3) \\ v_3 W(2Wh - 1) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{r}_\pm = \left[1, hWv_1, hW \left(v_2 - \frac{v^2 - \frac{(\lambda_\pm + \beta^2)}{\alpha}}{\gamma^{22} - v^2 \frac{(\lambda_\pm + \beta^2)}{\alpha}} \right), hWv_3, \frac{hW(\gamma^{22} - v^2 v^2)}{\gamma^{22} - v^2 \frac{(\lambda_\pm + \beta^2)}{\alpha}} \right]^T.$$

3. Matriz \mathcal{A}^3

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \alpha v^3 - \beta^3, \quad (2.103)$$

$$\lambda_\pm = \frac{\alpha}{1 - \mathcal{V}^2 c_s^2} \left[v^3 (1 - c_s^2) \pm \sqrt{c_s^2 (1 - \mathcal{V}^2) [\gamma^{33} (1 - \mathcal{V}^2 c_s^2) - v^3 v^3 (1 - c_s^2)]} \right] - \beta^3.$$

$$\mathbf{r}^1 = \left[\frac{\kappa}{hW(\kappa - \rho_0 c_s^2)}, v_1, v_2, v_3, 1 - \frac{\kappa}{hW(\kappa - \rho_0 c_s^2)} \right]^T, \quad (2.104)$$

$$\mathbf{r}^2 = \begin{bmatrix} Wv_2 \\ h(\gamma_{21} + 2W^2 v_2 v_1) \\ h(\gamma_{22} + 2W^2 v_2 v_2) \\ h(\gamma_{32} + 2W^2 v_3 v_2) \\ v_2 W(2Wh - 1) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}^3 = \begin{bmatrix} Wv_1 \\ h(\gamma_{11} + 2W^2 v_1 v_1) \\ h(\gamma_{21} + 2W^2 v_2 v_1) \\ h(\gamma_{31} + 2W^2 v_3 v_1) \\ v_1 W(2Wh - 1) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{r}_\pm = \left[1, hWv_1, hWv_2, hW \left(v_3 - \frac{v^3 - \frac{(\lambda_\pm + \beta^3)}{\alpha}}{\gamma^{33} - v^3 \frac{(\lambda_\pm + \beta^3)}{\alpha}} \right), \frac{hW(\gamma^{33} - v^3 v^3)}{\gamma^{33} - v^3 \frac{(\lambda_\pm + \beta^3)}{\alpha}} \right]^T.$$

Donde $v^i = (v^1, v^2, v^3)$ y $\mathcal{V}^2 = \gamma_{ij} v^i v^j$. Para el cálculo de los valores y vectores propios de las matrices \mathcal{A} , se utilizaron las herramientas de cálculo simbólico *Mathematica* 8 y *Maple* 14.

Cada una de las matrices tiene un conjunto de tres valores propios degenerados y otros dos que no lo son; además, cada matriz tiene un conjunto de vectores propios linealmente independientes. Esto último establece que el sistema de ecuaciones de Euler relativistas es un conjunto de ecuaciones estrictamente hiperbólico.

En el próximo capítulo, se estudiarán los métodos numéricos que se implementarán en este trabajo, los cuales están basados en la formulación conservativa anteriormente descrita.

Capítulo 3

MÉTODOS NUMÉRICOS

SECCIÓN 3.1

Introducción

El sistema de ecuaciones de Euler relativista presenta soluciones que generalmente tienen discontinuidades, aún cuando los datos iniciales son suaves. Por esta razón, los métodos numéricos basados en la continuidad de las funciones, como las diferencias finitas, están destinados a fallar cuando dichas discontinuidades aparecen, a menos que se le agreguen términos disipativos, los cuales cambian el sistema original de ecuaciones a resolver, y por lo tanto su comportamiento dinámico. Por esta razón, se requiere un tratamiento especial a la hora de discretizar estas ecuaciones de movimiento, el cual se enfoque en técnicas menos disipativas y que sirva a su vez para lidiar con las discontinuidades presentes [Banyuls et al. (1996)].

En este capítulo se presentan los métodos numéricos usados para tratar con las discontinuidades, sin perder ningún tipo de información debido a términos disipativos. Estos métodos son comunmente llamados métodos de alta resolución para la captura de choques, y están basados en el método de volúmenes finitos para ecuaciones diferenciales parciales tipo balance.

SECCIÓN 3.2

Volúmenes Finitos

Uno de los métodos comúnmente más usados es el método de volúmenes finitos. Este método considera que el problema está definido en una malla de puntos que definen una estructura de celdas sobre el espacio-tiempo, esto es, el tiempo se restringe a tener un conjunto de valores discretos $t^n = n\Delta t$ y el espacio se discretiza con celdas cuyos centros están definidos en $x_i = i\Delta x$. Por otra parte, los métodos numéricos para las ecuaciones de flujo tipo balance, consisten en discretizar su forma integral para así obtener una solución débil a dichas ecuaciones. Para ilustrar de una mejor forma el método de volúmenes finitos, se considera el problema en una dimensión espacial, ver la Figura 3.1, donde la ecuación de balance puede ser escrita en forma genérica de la siguiente manera

$$\partial_0 \mathbf{q} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{q}) = \mathbf{s}. \quad (3.1)$$

Aquí \mathbf{q} es un vector de variables conservativas, $\mathbf{f}(\mathbf{q})$ es un vector cuyas componentes son los flujos, los cuales dependen de las variables \mathbf{q} , y \mathbf{s} es un vector de fuentes. De esta forma, el primer paso para discretizar la forma integral de la ecuación (3.1) es tomar el promedio sobre cada una de las celdas del espacio-tiempo, centradas en $C_i^{n+1/2}$

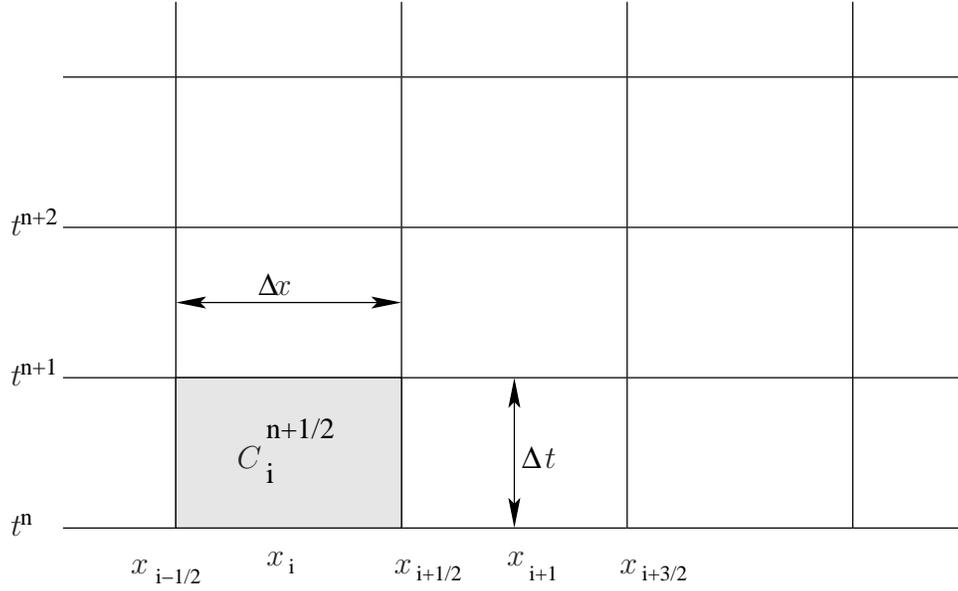


Figura 3.1: En esta figura se presenta la discretización y la estructura del espacio-tiempo usando el método numérico de volúmenes finitos, en una dimensión espacial. Aquí el centro de las celdas $C_i^{n+1/2}$ está localizado en $(t^{n+1/2}, x_i)$ y el volumen espacio temporal de estas es $\Delta V = \Delta t \Delta x$. Ahora, en términos de un problema de evolución, el paso de tiempo y la resolución espacial son $\Delta t = t^{n+1} - t^n$, $\Delta x = x_{i+1/2} - x_{i-1/2} = x_{i+1} - x_i$, respectivamente, para un malla homogénea.

$$\frac{1}{\Delta V} \int \partial_0 \mathbf{q} dV + \frac{1}{\Delta V} \int \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{q}) dV = \frac{1}{\Delta V} \int \mathbf{s} dV, \quad (3.2)$$

donde $\Delta V = \Delta t \Delta x$ es el volumen de la celda $C_i^{n+1/2}$, cuyo dominio es $(t^n, t^{n+1}) \times (x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$. La ecuación resultante puede ser reescrita como

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t \Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \partial_0 \mathbf{q} dt dx + \frac{1}{\Delta t \Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{q}) dt dx \\ = \frac{1}{\Delta t \Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{s} dt dx, \end{aligned} \quad (3.3)$$

que después de hacer uso del teorema de Gauss, sobre la superficie de la celda, se obtiene

la forma discreta de la ecuación de balance (3.1)

$$\bar{\mathbf{q}}_i^{n+1} = \bar{\mathbf{q}}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\mathbf{F}_{i+1/2}^{n+1/2} - \mathbf{F}_{i-1/2}^{n+1/2} \right) + \bar{\mathbf{s}}_i^{n+1/2}. \quad (3.4)$$

Las funciones $\bar{\mathbf{q}}_i^n$ son los promedios espaciales de las variables conservativas

$$\bar{\mathbf{q}}_i^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{q}(t^n, x) dx, \quad (3.5)$$

las funciones $\mathbf{F}_{i+1/2}^{n+1}$ son los promedios temporales de los flujos

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{f}(\mathbf{q}(t, x_{i+1/2})) dt, \quad (3.6)$$

y finalmente $\bar{\mathbf{s}}$ es el promedio espacial y temporal de las fuentes

$$\bar{\mathbf{s}}_i^{n+1/2} = \frac{1}{\Delta t \Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{s} dt dx. \quad (3.7)$$

La principal idea de todo esto, es hacer uso de la ecuación (3.4) para calcular las expresiones explícitas de los promedios en un tiempo posterior $\bar{\mathbf{q}}_i^{n+1}$, asumiendo que se conocen los valores de $\bar{\mathbf{q}}_i^n$. Sin embargo, los métodos numéricos basados en la discretización de la forma integral de las ecuaciones de balance no parecen ser tan directos. Esto último debido a que los flujos (3.6) no son solubles en general, ya que dichos flujos son promedios en el tiempo. Uno de los primeros enfoques, orientados hacia la solución de esta clase de problemas, es el método de Godunov [Godunov 1959], el cual consiste en calcular los flujos de forma numérica, reemplazando la función $\mathbf{q}(t^n, x)$ con una función constante por pedazos $\tilde{\mathbf{q}}(t^n, x)$. Finalmente, la idea básica del método de Godunov es definir en cada inter-celda un problema local de Riemann de valores iniciales.

SECCIÓN 3.3

Problema de Riemann

Uno de los problemas fundamentales en la evolución de discontinuidades, es el conocido problema de Riemann. Dicho problema, está determinado por una ecuación tipo balance, y datos iniciales definidos por una función constante por pedazos asociados a una discontinuidad simple, ver Figura 3.2,

$$\mathbf{q}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{q}_L, & x < 0 \\ \mathbf{q}_R, & x > 0 \end{cases}, \quad (3.8)$$

donde \mathbf{q}_L (izquierda) y \mathbf{q}_R (derecha) son dos estados constantes. Nótese que el valor inicial tiene una discontinuidad localizada en $x = 0$.

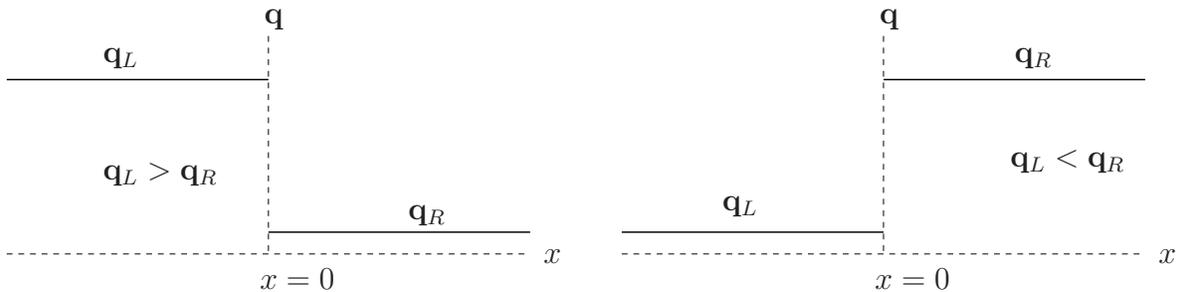


Figura 3.2: datos iniciales del problema de Riemann para la ecuación de Burgers.

Para una mejor ilustración de este problema, considérese una discontinuidad inicial que evoluciona según la ecuación escalar unidimensional de Burgers

$$\partial_t q + \partial_x f(q) = 0, \quad f(q) = \frac{q^2}{2}, \quad (3.9)$$

la cual es una ecuación diferencial de primer orden y es importante en la mecánica de fluidos. La forma de la solución depende de la relación que existe entre los dos estados iniciales q_L y q_R . El caso trivial ocurre cuando los valores iniciales de los estados constantes son iguales y los otros dos casos corresponden a $q_L > q_R$ y $q_L < q_R$.

Caso 1. $q_L > q_R$ (Ondas de choque): Una clase de soluciones al problema de Riemann son conocidas como las ondas de choque, las cuales son definidas como lugares donde las velocidades características (valores propios del sistema de ecuaciones) convergen, ver la Figura 3.3. Para el caso de la ecuación de Burgers, donde se considera que el estado constante a izquierda es mayor que el estado constante a derecha, la única solución débil está dada por la siguiente expresión

$$q(x, t) = \begin{cases} q_L, & x < st \\ q_R, & x > st \end{cases}, \quad (3.10)$$

donde

$$s = \frac{q_L + q_R}{2}, \quad (3.11)$$

es conocida como la velocidad de la onda de choque; específicamente la velocidad a la cual se mueve la discontinuidad. Estas velocidades pueden ser calculadas a partir de las llamadas condiciones de salto de Rankine-Hugoniot

$$f(q_L) - f(q_R) = s(q_L - q_R), \quad (3.12)$$

las cuales relacionan los flujos asociados con las variables de estado a través de la discontinuidad, ver [Leveque 1992]. Un ejemplo de una onda de choque formándose a partir de la discontinuidad inicial puede ser visto en la Figura 3.3, donde la onda de choque se origina en $x = 0$ con una pendiente de $s = 0,55$.

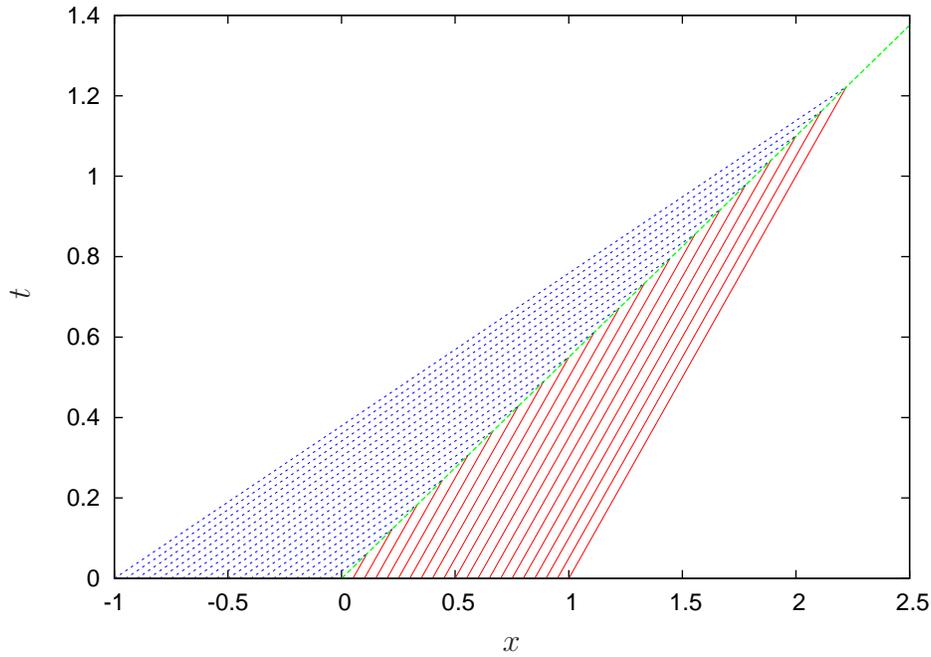


Figura 3.3: Estructura característica para las ondas de choque.

Caso 2. $q_L < q_R$ (Ondas de Rarefacción): Otra clase de solución débil al problema de Riemann es conocida como onda de rarefacción. En este caso, dicha onda surge de la discontinuidad extendiéndose, como se ilustra en la Figura 3.4. Para este caso de ondas de rarefacción, los datos iniciales (3.8), satisfacen la relación $q_L < q_R$ y como se puede observar en la Figura 3.4, el campo de velocidades características de la izquierda es más lento que el de la derecha, haciendo que las velocidades características diverjan. Por otra parte, las soluciones para las ondas de rarefacción son soluciones auto-similares [Leveque 1992], esto último en el sentido de que las cantidades dependen de la variable $\xi = x/t$. De esta forma, la solución débil, de una onda de rarefacción, a la ecuación de Burgers puede escribirse como

$$q(x, t) = \begin{cases} q_L & x < q_L t \\ q(\xi) = q(x/t) & q_L t \leq x \leq q_R t \\ q_R & x > q_R t \end{cases} . \quad (3.13)$$

donde $q(\xi)$ es una función suave. Usando esta solución, es posible reescribir la ecuación de Burgers de la siguiente forma

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{dq}{d\xi} + q \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{dq}{d\xi} = 0, \quad (3.14)$$

donde las derivadas de ξ con respecto a x y a t son obtenidas teniendo en cuenta que $\xi = x/t$. De esta manera, esta última ecuación queda escrita como

$$\frac{dq}{d\xi} \left(-\frac{x}{t^2} + \frac{q}{t} \right) = 0, \quad (3.15)$$

donde las dos únicas posibles soluciones son

$$q(\xi) = \text{constante}, \quad (3.16)$$

ó

$$q(\xi) = \frac{x}{t}. \quad (3.17)$$

Esta última ecuación, corresponde a la solución en la zona de rarefacción. De esta forma, la solución total de la ecuación de Burgers, para el presente caso es

$$q(x, t) = \begin{cases} q_L & x < q_L t \\ q(\xi) = x/t & q_L t \leq x \leq q_R t \\ q_R & x > q_R t \end{cases} . \quad (3.18)$$

En otro tipo de problemas, como es el caso de las ecuaciones de la hidrodinámica clásica (ecuaciones de Euler) o las ecuaciones que determinan la dinámica de los fluidos relativistas en un fondo plano o curvo, se involucran otro tipo de ondas llamadas ondas de contacto. Desde el punto de vista de la dinámica de los fluidos, una discontinuidad de contacto se define por un salto abrupto en la densidad donde no hay gradientes

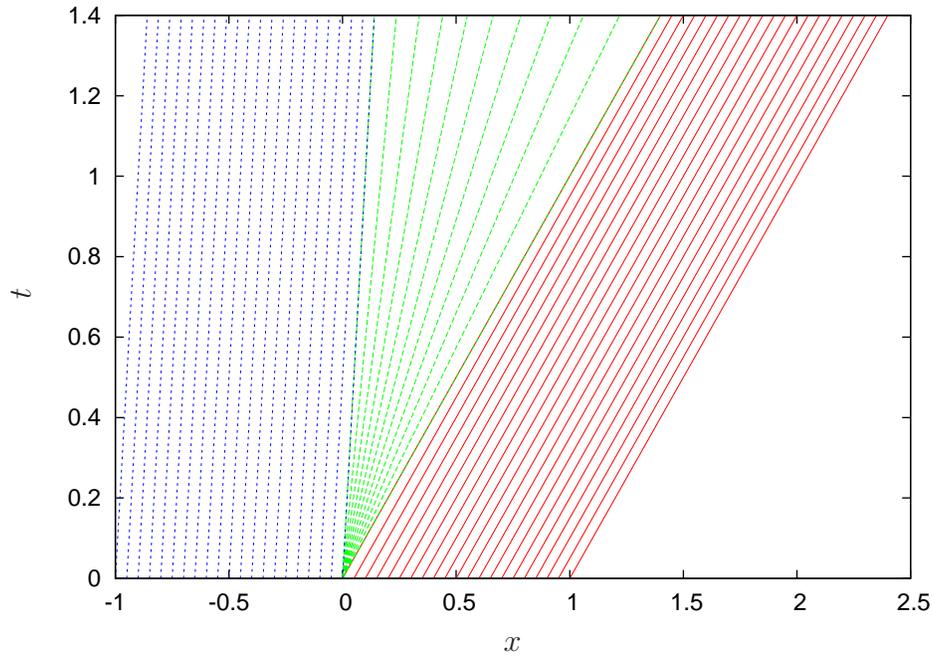


Figura 3.4: Estructura característica para las ondas de rarefacción.

de presión a través del salto. Además, en las discontinuidades de contacto las curvas características son paralelas, separando regiones que tienen diferente valor entrópico, por lo cual son llamadas ondas de entropía.

En especial, la solución exacta al problema de valores iniciales de Riemann, para las ecuaciones de Euler relativista fue encontrado por [Martí y Müller 1994], en la cual aparecen los tres tipos de ondas mencionados anteriormente. Dichas ecuaciones en 1-dimensión cartesiana son

$$\partial_t \vec{\mathcal{U}} + \partial_x \vec{\mathcal{F}}^x = 0, \quad (3.19)$$

donde

$$\vec{\mathcal{U}} = \begin{bmatrix} \tilde{D} \\ \tilde{S}_x \\ \tilde{\tau} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_0 W \\ \rho_0 h W^2 v_x \\ \rho_0 h W^2 - p - \rho_0 W \end{bmatrix}, \quad \vec{\mathcal{F}}^x = \begin{bmatrix} v^x \tilde{D} \\ v^x \tilde{S}_x + p \\ v^x (\tilde{\tau} + p) \end{bmatrix}. \quad (3.20)$$

Dichas ecuaciones pueden ser obtenidas, de forma directa del sistema de ecuaciones (2.76) haciendo $\alpha = 1$, $\beta^i = (0, 0, 0)$ y $\gamma_{ij} = \text{diag}(1, 1, 1)$, las cuales corresponden a la descripción del espacio-tiempo de Minkowski en coordenadas cartesianas. Asociado a este sistema de ecuaciones, los valores propios de la matriz Jacobiana son

$$\lambda^o = v_x, \quad \lambda^\pm = \frac{v_x \pm c_s}{1 \pm v_x c_s}, \quad (3.21)$$

donde c_s , como se mencionó antes, es la velocidad del sonido relativista. Cada uno de estos valores propios está asociado con alguna de las posibles ondas que pueden presentarse aquí. Estas son: Ondas de contacto, ondas de rarefacción y ondas de choque. Similarmente al caso de la ecuación de Burgers, dependiendo de los datos iniciales, es posible obtener este tipo de ondas propagándose en las diferentes direcciones. Como ejemplo ilustrativo, se considera el problema de Riemann en el cual las componentes del vector de estado inicial a la izquierda son mayores que las componentes del vector de estado a la derecha. Para este caso, propagándose hacia la derecha aparece una onda de choque y propagándose hacia la izquierda, una onda de rarefacción, como se describió en cada uno de los casos para la ecuación de Burgers, pero de manera simultánea. Además, en medio de estas dos ondas aparece una onda de contacto, la cual separa dos estados constantes. En la Figura 3.5, se muestra un diagrama ilustrativo de este caso particular y de las diferentes regiones asociadas. La región 1 corresponde al estado inicial constante izquierdo, la región 2 a la región donde se desarrolla la onda de rarefacción, las regiones 3 y 4, separadas por la onda de contacto, son regiones constantes, la región 5, que en realidad no es una región porque abarca una línea recta, corresponde a la onda de choque y finalmente la región 6 es el estado inicial constante a la derecha. Este problema es conocido en la mecánica de los fluidos como el problema del tubo de choque, el cual

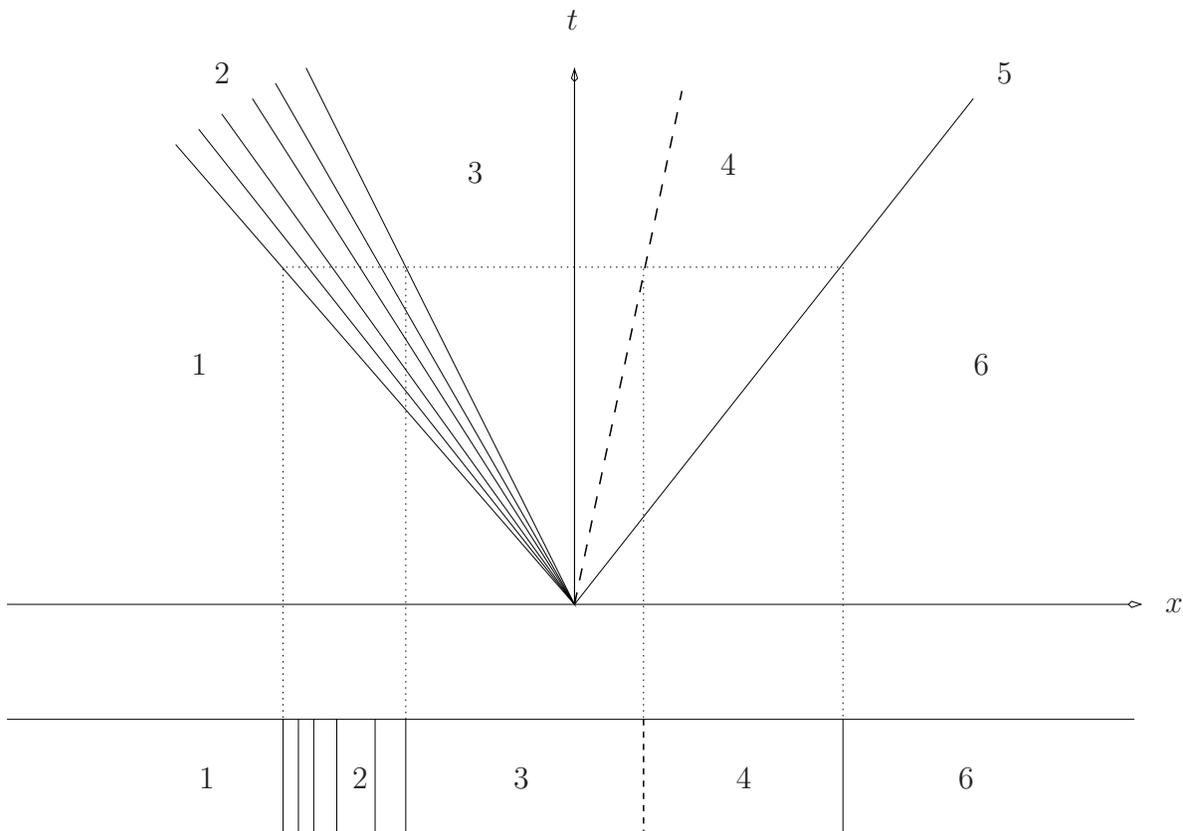


Figura 3.5: En esta gráfica se describen las diferentes regiones, separadas por las diferentes ondas en el problema particular de Riemann, en el cual el estado inicial constante a la izquierda es mayor que el estado inicial constante a la derecha.

es una idealización del problema de Riemann y se describe con detalle en la sección de pruebas numéricas. Otro tipo de configuraciones posibles son:

- Onda de rarefacción a la derecha y onda de choque a la izquierda.
- Onda de choque a la izquierda y onda de choque a la derecha.
- Onda de rarefacción a la izquierda y onda de rarefacción a la derecha.

En general, en el caso de un espacio-tiempo curvo fijo, no se conoce ningún tipo de solución exacta al problema de Riemann. Por esta razón hay que recurrir a resolvedores

de Riemann aproximados (ver Sección 3.5), los cuales están basados en la estructura característica del sistema de ecuaciones tipo balance. Para comprobar cómo se comportan dichos resolvedores aproximados al momento de tratar con choques, las soluciones exactas a este problema son de gran ayuda. En este trabajo, se implementó un resolvedor exacto, siguiendo la receta formulada en la referencia [Martí y Müller 1994], para comparar los métodos numéricos basados en resolvedores de Riemann aproximados. Además de implementar dicho resolvedor, se escribió de forma bastante explícita cómo obtener dicha solución y cómo implementarla en un código numérico; para más detalles ver la referencia [Lora-Clavijo et al. 2012]. En el caso de problemas mas complejos, como lo es el caso de la magnetohidrodinámica en un espacio-tiempo de Minkowski en coordenadas cartesianas, la solución fue encontrada por [Giacomazzo 2006].

SECCIÓN 3.4

Reconstrucción de las variables de estado en las inter-celdas

Retomando la idea propuesta por Godunov, en la que los flujos pueden ser calculados aproximando la función $\mathbf{q}(t^n, x)$ con una función constante por pedazos $\tilde{\mathbf{q}}(t^n, x)$ y finalmente tratando cada inter-celda como un problema local de Riemann de valores iniciales, el proceso para aplicar este método es:

- De la función promedio $\bar{\mathbf{q}}(t^n, x)$, se construye una función constante por pedazos $\tilde{\mathbf{q}}(t^n, x)$, con el fin de aproximar la función en las celdas espacio temporales C_i .
- El problema de Riemann asociado a esta última aproximación, debe ser resuelto en cada inter-celda para así obtener la solución para la función promedio $\bar{\mathbf{q}}(t, x)$ en $t^n < t \leq t^{n+1}$.

- Finalmente, la solución se promedia en cada celda C_i para así obtener el promedio en un tiempo avanzado, $\bar{\mathbf{q}}_i^{n+1}$.

El método de Godunov tiene propiedades muy interesantes. En particular, este método está basado en el sistema de ecuaciones tipo balance, lo cual permite la evolución estable de choques hidrodinámicos muy fuertes. Sin embargo, el esquema original tiene un deficiencia: la aproximación es de primer orden.

La precisión del método de Godunov puede ser mejorada introduciendo reconstructores de variables más sofisticados, los cuales en lugar de aproximar la función $\mathbf{q}(t^n, x)$, con funciones constantes por pedazos, la aproximan con líneas rectas por pedazos. Estas formas de reconstruir las funciones constituyen los llamados métodos de alta resolución para la captura de choques [Toro 2009]. Por otra parte, estos reconstructores son mejores que los reconstructores constantes por pedazos ya que introducen menos disipación y aproximan mucho mejor la forma del choque.

Reconstructor constante por pedazos

El método de reconstrucción de funciones constantes por pedazos es el método más simple para reconstruir los flujos a través de cada inter-celda. Considere la inter-celda localizada en $x_{i+1/2}$ en la Figura 3.1; el estado inmediatamente a la izquierda es definido como $\tilde{\mathbf{q}}_{i+1/2}^L$, mientras que el estado inmediatamente a la derecha es $\tilde{\mathbf{q}}_{i+1/2}^R$. De esta forma, como se puede ver en la Figura 3.6, la reconstrucción constante por pedazos a cada lado de cada una de las inter-celdas queda definido por

$$\tilde{\mathbf{q}}_{i+1/2}^L = \bar{\mathbf{q}}_i, \quad (3.22)$$

$$\tilde{\mathbf{q}}_{i+1/2}^R = \bar{\mathbf{q}}_{i+1}. \quad (3.23)$$

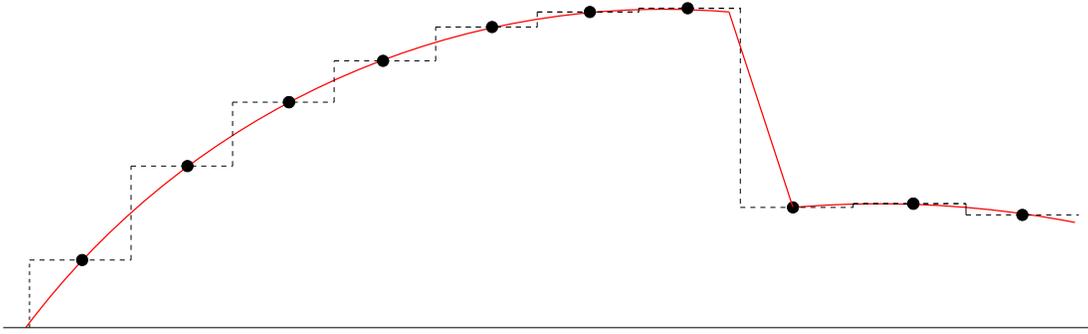


Figura 3.6: Figura esquemática de cómo se aproximan las funciones cuando se utiliza un reconstructor de variables constante por pedazos. Como se observa, aproximar la función de esta forma define una sucesión de problemas de Riemann locales.

Como ya se mencionó antes, en esta idea, a pesar de las buenas propiedades que ésta presenta, las soluciones son precisas a primer orden, debido a que las funciones que se utilizan para aproximar las soluciones, son funciones constantes por pedazos.

Reconstructor lineal por pedazos

La precisión puede ser mejorada usando una aproximación lineal por pedazos, la cual provee un error de segundo orden. En este trabajo se consideran dos casos para este tipo de reconstructores: caso 1. limitador *minmod*, caso 2. limitador *MC*.

Limitador Minmod:

Para el caso del limitador minmod, introducido por [B. van Leer 1979], las funciones $\tilde{\mathbf{q}}$ son reconstruidas a ambos lados de la inter-celda localizada en $x_{i+1/2}$ como

$$\tilde{\mathbf{q}}_{i+1/2}^L = \bar{\mathbf{q}}_i + \sigma_i(x_{i+1/2} - x_i), \quad (3.24)$$

$$\tilde{\mathbf{q}}_{i+1/2}^R = \bar{\mathbf{q}}_{i+1} - \sigma_{i+1}(x_{i+1} - x_{i-1/2}), \quad (3.25)$$

donde, como en el caso anterior, L y R indican las funciones a la izquierda y derecha de dicha inter-celda, respectivamente. Las funciones σ_i y σ_{i+1} están definidas como

$$\sigma_i = \minmod(m_{i-1/2}, m_{i+1/2}), \quad (3.26)$$

$$\sigma_{i+1} = \minmod(m_{i+1/2}, m_{i+3/2}). \quad (3.27)$$

La función $m_{i+1/2}$ es la derivada de la variable $\bar{\mathbf{q}}$, centrada en la inter-celda localizada en $x_{i+1/2}$

$$m_{i+1/2} = \frac{\bar{\mathbf{q}}_{i+1} - \bar{\mathbf{q}}_i}{x_{i+1} - x_i}, \quad (3.28)$$

y la función \minmod está definida, para dos números a , b , por

$$\minmod(a, b) = \begin{cases} 0 & \text{si } ab \leq 0 \\ a & \text{si } |a| < |b| \\ b & \text{si } |a| > |b| \end{cases} . \quad (3.29)$$

La ilustración del resultado de este tipo de reconstrucción se muestra en la Figura 3.7.

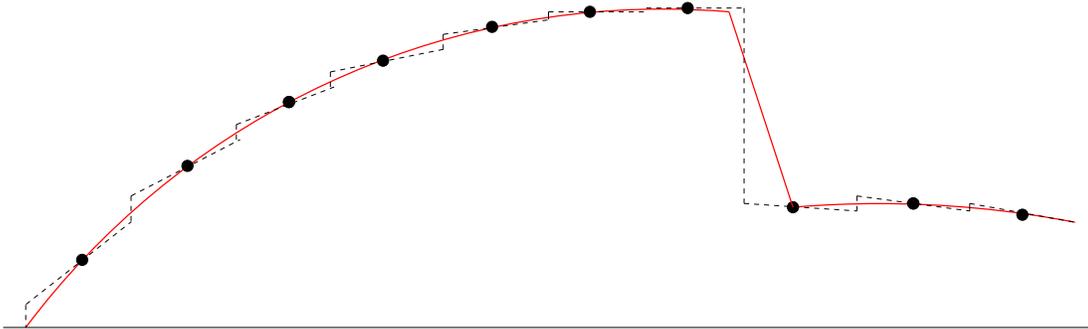


Figura 3.7: Figura esquemática de cómo se aproximan las funciones cuando se utiliza un reconstructor de variables lineal por pedazos.

Como se puede observar, este limitador hace que las funciones $\tilde{\mathbf{q}}$ sean monótonas cerca de las discontinuidades. Debido a esto último, el algoritmo de *minmod* devuelve una pendiente cero, la cual indica que la reconstrucción se reduce a una función constante por pedazos como la descrita por el método de Godunov. De esto último, se tiene que cerca de las discontinuidades la precisión de la solución es solo de primer orden.

En pocas palabras, este tipo de algoritmos numéricos basados en los métodos de alta resolución para la captura de choques, tienen una aproximación *aparentemente* de segundo orden donde las funciones son suaves, y primer orden, donde los efectos del limitador se vuelven importantes, o sea en las discontinuidades. Por otra parte, es de esperar que la aproximación sea de primer orden cerca de un máximo o mínimo de la función $\tilde{\mathbf{q}}$, ya que en estos tipos de puntos la pendiente cambia de signo y el limitador *minmod* arroja una reconstrucción constante por pedazos para $\tilde{\mathbf{q}}$.

Algo para remarcar es: como en los choques las soluciones convergen a primer orden, con el tiempo el error numérico contamina todo el dominio, generando como resultado que la convergencia global sea de primer orden también. Por otra parte a la hora de capturar los choques (forma del choque), el limitador *minmod* introduce menos disipación que en el caso de un reconstructor constante por pedazos, haciendo que la forma de este choque sea mucho mejor. Finalmente, como se puede observar, es necesario introducir los resolvedores de Riemann aproximados, los cuales se describen en la siguiente sección, debido a que el problema entre celdas ya no es un problema de Riemann de estados constantes, sino lineales, ver la Figura 3.7.

Limitador Monotónico Centrado (MC)

Por completez, otro reconstructor de variables es el limitador monotónico centrado *MC*. Este método actúa en forma similar al método de *minmod*, con la modificación de que *MC* no reduce de manera dramática las pendientes como lo hace el método de *minmod*.

$$MC(a, b) = \begin{cases} 0 & \text{si } ab \leq 0 \\ 2a & \text{si } |a| < |b| \text{ y } 2|a| < |c| \\ 2b & \text{si } |b| < |a| \text{ y } 2|b| < |c| \\ c & \text{si } |c| < 2|a| \text{ y } |c| < 2|b| \end{cases}, \quad (3.30)$$

donde $c = \frac{a+b}{2}$. De forma ilustrativa, en la Figura 3.8, se muestra una comparación de cómo capturan los choques los diferentes reconstructores de variables. Como se puede ver en esta figura, el reconstructor MC tiende más a la forma del choque, que los otros dos. Sin embargo, el reconstructor MC , debido a que aproxima mucho mejor la forma del choque (introduce menos disipación), puede eventualmente desarrollar oscilaciones no físicas, es por eso que durante el trabajo se usa el reconstructor *minmod*.

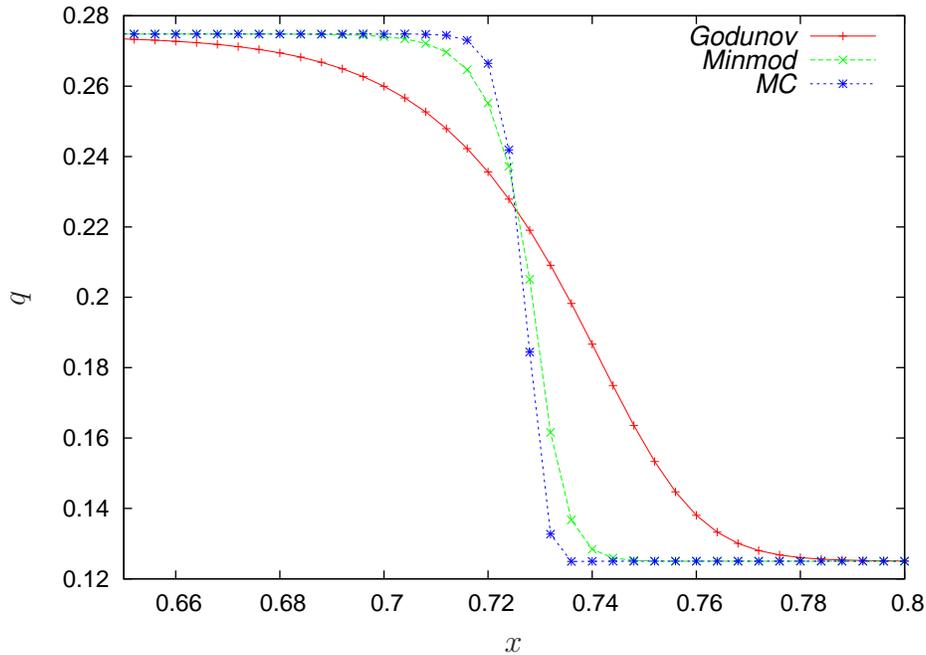


Figura 3.8: Figura esquemática que muestra cómo aproximan los choques los diferentes reconstructores de variables: *Godunov*, *Minmod* y *MC*.

SECCIÓN 3.5

Resolvidor de Riemann aproximado

Por otra parte, como se mencionó anteriormente, el reconstructor *minmod* aproxima las funciones con rectas por pedazos, lo cual no constituye un problema de Riemann exacto. Por esta razón, se utilizan resolvidores al problema de Riemann aproximados [Roe 1981, Harten et al. 1983], los cuales hacen el sistema más simple y están basados en la estructura característica del sistema de ecuaciones tipo balance. En la actualidad, para el estudio de la dinámica de fluidos clásica, se han desarrollado muchos resolvidores de Riemann aproximados, los cuales han sido extendidos a los fluidos relativistas.

Existen varias técnicas para calcular de forma aproximada los flujos (3.6), en lugar de resolver el problema de Riemann exacto. Entre las técnicas más usadas y robustas, a la hora de implementar numéricamente, se encuentran el resolvidor de Riemann aproximado *Roe* [Roe 1981] y el resolvidor de Riemann aproximado *HLLC* [Harten et al. 1983]. Estos métodos requieren de diferente información característica de la matriz Jacobiana asociada al sistema de ecuaciones tipo balance (3.1). Por ejemplo, en el caso del resolvidor aproximado *Roe*, se requiere tanto de los valores propios como de los vectores propios de dicha matriz.

Una de las características atractivas del método *HLLC* es que solamente requiere de los valores propios de la matriz Jacobiana y se usan solamente las dos velocidades características más altas del sistema, ver Figura 3.9, de tal manera que el dominio localmente queda separado en tres regiones. La información acerca de las otras ondas, asociadas a la estructura característica de las ecuaciones tipo balance, no se usa para esta aproximación.

$$\tilde{\mathbf{q}}(x, t) = \begin{cases} \tilde{\mathbf{q}}^L & si & x < \lambda^L t \\ \tilde{\mathbf{q}}^{HLL E} & si & \lambda^L t \leq x \leq \lambda^R t \\ \tilde{\mathbf{q}}^R & si & x > \lambda^R t, \end{cases} \quad (3.31)$$

donde $\tilde{\mathbf{q}}^{HLL E}$ es un vector de estado constante y está dado por la siguiente expresión

$$\tilde{\mathbf{q}}^{HLL E} = \frac{\lambda^R \tilde{\mathbf{q}}^R - \lambda^L \tilde{\mathbf{q}}^L + \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}}^L) - \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}}^R)}{\lambda^R - \lambda^L}, \quad (3.32)$$

y las velocidades λ^L y λ^R se definen como

$$\lambda^R = \max(0, \lambda_{(i)}^R, \lambda_{(i)}^L), \quad (3.33)$$

$$\lambda^L = \min(0, \lambda_{(i)}^R, \lambda_{(i)}^L), \quad (3.34)$$

donde λ^R es el valor característico asociado a una onda que va hacia la derecha, y λ^L es el valor característico asociado a una onda que va hacia la izquierda; y además $\lambda_{(i)}^R$ y $\lambda_{(i)}^L$ son todos los valores propios de la matriz Jacobiana asociada, evaluados en los estados derecho e izquierdo de la reconstrucción, respectivamente. Por otra parte, el cero se incluye para permitir el caso en que no hay ondas moviéndose hacia la derecha o hacia la izquierda, por ejemplo, el caso en que todas las ondas y discontinuidades viajan en la misma dirección.

Haciendo uso de estas velocidades características, los flujos numéricos (3.6), HLL E en cada intercelda se expresan como [Toro 2009]

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^{HLL E} = \frac{\lambda^R \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}}_{i+1/2}^L) - \lambda^L \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}}_{i+1/2}^R) + \lambda^L \lambda^R (\tilde{\mathbf{q}}_{i+1/2}^R - \tilde{\mathbf{q}}_{i+1/2}^L)}{\lambda^R - \lambda^L}. \quad (3.35)$$

En la Figura 3.9, se muestra la estructura de esta solución aproximada al problema de Riemann. Básicamente ésta consiste en tres estados separados por dos ondas. La región intermedia consiste en un estado simple *HLL E*, en donde todos los posibles estados que puedan aparecer, son agrupados dentro de esta región. Esto quiere decir que la

información de las ondas que puedan aparecer en este estado intermedio no se usan en la aproximación.

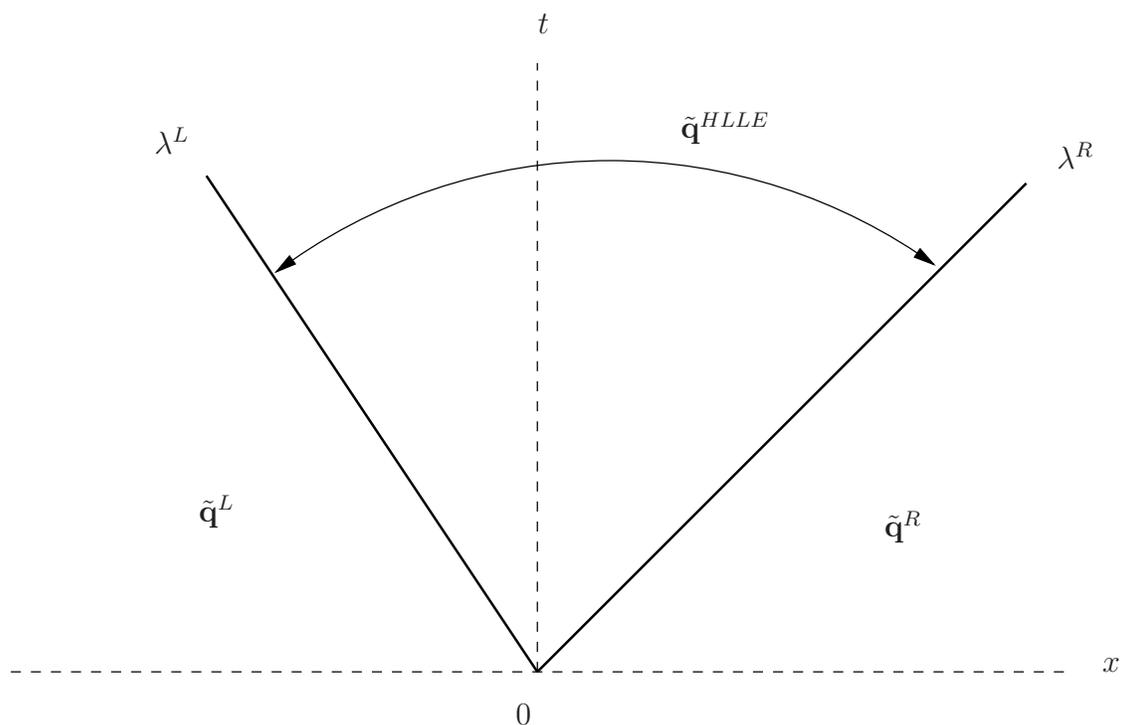


Figura 3.9: Resolvedor aproximado al problema de Riemann HLLE. La solución en la región interior consiste en un estado simple separado por dos ondas que se mueven a velocidades λ^R (derecha) y λ^L (izquierda).

SECCIÓN 3.6

Recuperación de variables

Hasta el momento, solo se ha considerado el caso en que los flujos dependen del conjunto de variables a saber, las variables conservativas. Sin embargo, en el sistema de

ecuaciones de Euler relativista los flujos dependen tanto de las variables conservativas \vec{U} (variables a integrar) como de las primitivas \vec{W} . Como se puede ver de la expresión (2.77), las variables conservativas están dadas en términos de las primitivas y en primera instancia, debería poderse calcular el caso contrario en el cual las variables primitivas están en términos de las conservativas, para de ésta manera escribir los flujos en términos unicamente del conjunto de variables conservativas y poder integrar en el tiempo.

El inconveniente en esto último es que, en general, no es posible expresar el conjunto de variables conservativas en términos del conjunto de variables primitivas, debido a que la ecuación resultante a resolver es una ecuación algebraica trascendental, la cual no puede ser resuelta de forma exacta, y por lo tanto, se tiene que recurrir a métodos numéricos que encuentran raíces de ecuaciones, por ejemplo el algoritmo de Newton-Raphson.

Para expresar las variables primitivas se procede de la siguiente forma: primero de la expresión (2.77) se resuelve para dos de las variables primitivas

$$\rho_0 = \frac{\tilde{D}}{\sqrt{\gamma}W}, \quad (3.36)$$

$$\mathcal{V}^2 = \frac{\tilde{S}^2}{(\tilde{\tau} + \sqrt{\gamma} + \tilde{D})^2}. \quad (3.37)$$

Por otra parte, la variable conservativa $\tilde{\tau}$ se puede escribir como

$$\tilde{\tau} = \sqrt{\gamma}\rho_0\epsilon W^2 + \sqrt{\gamma}p(W^2 - 1) + \tilde{D}(W - 1). \quad (3.38)$$

Para el caso de un gas ideal con ecuación de estado $p = (\Gamma - 1)\rho_0\epsilon$, la ecuación final para la presión es

$$p = \frac{\tilde{\tau} + \sqrt{\gamma}p(1 - W^2) + \tilde{D}(1 - W)}{\sqrt{\gamma}W^2}(\Gamma - 1), \quad (3.39)$$

donde $W = W(\mathcal{V}(p))$. Esto define una ecuación trascendental para la presión, la cual tiene que ser resuelta en cada punto del dominio numérico. Una vez conocida la presión se calcula $\mathcal{V}(p)$, después $W = W(\mathcal{V}(p))$ y enseguida ρ_0 . De ahí que calcular la presión es un punto bastante relevante en la implementación.

SECCIÓN 3.7

Método de Líneas

La integración en el tiempo de las ecuaciones de tipo balance, se lleva a cabo usando un método explícito, donde se dividen las diferencias espaciales y temporales. El método de líneas (*MoL* por sus siglas en inglés), que consiste en discretizar solamente la parte espacial del sistema de ecuaciones diferenciales parciales tipo balance,

$$\frac{d\bar{\mathbf{q}}}{dt} = \mathcal{L}(\bar{\mathbf{q}}) \quad (3.40)$$

donde \mathcal{L} es el operador espacial. De esta forma, este sistema queda redefinido como un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

$$\frac{d\bar{\mathbf{q}}_i}{dt} = -\frac{\mathbf{F}_{i+1/2}^{HLL E} - \mathbf{F}_{i-1/2}^{HLL E}}{\Delta x} + \mathbf{s}_i, \quad (3.41)$$

para cada celda, el cual puede ser resuelto con un integrador estándar de ecuaciones diferenciales ordinarias. Específicamente en este trabajo se utiliza el método de Runge-Kutta de segundo y tercer orden. Aquí, $\bar{\mathbf{q}}$ son los promedios espaciales, $\mathbf{F}_{i+1/2}$ son los flujos numéricos que se calculan con el resolvidor aproximado de Riemann *HLL E*.

Para el caso general de tres dimensiones, específicamente para el caso del sistema de ecuaciones (2.76), la discretización usando el método de líneas, para la celda etiquetada por los índices i, j, k , es

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\mathbf{U}}_{i,j,k}}{dt} = & - \left(\frac{\mathbf{F}_{i+1/2,j,k}^x - \mathbf{F}_{i-1/2,j,k}^x}{\Delta x} \right) - \left(\frac{\mathbf{F}_{i,j+1/2,k}^y - \mathbf{F}_{i,j-1/2,k}^y}{\Delta y} \right) \\ & - \left(\frac{\mathbf{F}_{i,j,k+1/2}^z - \mathbf{F}_{i,j,k-1/2}^z}{\Delta z} \right) + \mathbf{S}_{i,j,k}, \end{aligned} \quad (3.42)$$

donde $\bar{\mathbf{U}}_{i,j,k}$ son los promedios espaciales de la función $\vec{\mathcal{U}}$, en las correspondientes celdas tridimensionales, los flujos $\mathbf{F}_{i\pm 1/2,j,k}^x$, $\mathbf{F}_{i,j\pm 1/2,k}^y$ y $\mathbf{F}_{i,j,k\pm 1/2}^z$ son los flujos numéricos en las inter-celdas, los cuales se calculan con *HLLC* y están asociados a los flujos $\vec{\mathcal{F}}^i$ y $\mathbf{S}_{i,j,k}$ es el promedio total de las fuentes $\vec{\mathcal{S}}$, en las celdas.

SECCIÓN 3.8

Integrador en el tiempo

En este escenario, el sistema de ecuaciones tipo balance, es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias para cada i, j, k , el cual se puede integrar con diversos algoritmos con distintas propiedades de estabilidad y precisión. En este trabajo se ha escogido el método de Runge-Kutta de [Shu y Osher 1989], el cual puede ser de segundo (RK2) y tercer orden (RK3) en el tiempo. La forma explícita de estos algoritmos es (la notación de subíndices (i) se omite por claridad)

1. Paso de predicción (Común para RK2 y RK3)

$$\bar{\mathbf{q}}^{(1)} = \bar{\mathbf{q}}^n + \Delta t \mathcal{L}(\bar{\mathbf{q}}^n) \quad (3.43)$$

2. Dependiendo del orden

- RK2 ($\alpha = 2$ y $\beta = 1$):

$$\bar{\mathbf{q}}^{n+1} = \frac{1}{\alpha} (\beta \bar{\mathbf{q}}^n + \bar{\mathbf{q}}^{(1)} + \Delta t \mathcal{L}(\bar{\mathbf{q}}^{(1)})). \quad (3.44)$$

- RK3 ($\alpha = 4$ y $\beta = 3$):

$$\bar{\mathbf{q}}^{(2)} = \frac{1}{\alpha} (\beta \bar{\mathbf{q}}^n + \bar{\mathbf{q}}^{(1)} + \Delta t \mathcal{L}(\bar{\mathbf{q}}^{(1)})), \quad (3.45)$$

$$\bar{\mathbf{q}}^{n+1} = \frac{1}{\beta} (\beta \bar{\mathbf{q}}^n + 2\bar{\mathbf{q}}^{(2)} + 2\Delta t \mathcal{L}(\bar{\mathbf{q}}^{(2)})). \quad (3.46)$$

Finalmente, se tiene un tiempo constante dado por $\Delta t = Cdx$, donde C es el factor de Courant, el cual es fijo y constante. Para el caso de más de una dimensión, el paso de tiempo se escoge como: $\Delta t = C \min(dx, dy, dz)$. Esta forma de escoger el Δt es apropiada para probar los criterios de convergencia y autoconvergencia, ya que el paso de tiempo se mantiene uniforme.

SECCIÓN 3.9

Condiciones de Frontera

Las condiciones de frontera deben ser tratadas como casos especiales. Primero que todo, se utiliza puntos extras alrededor del dominio, comúnmente llamados puntos fantasma. Los puntos fantasma no son parte del dominio físico, y son introducidos para la simplicidad del algoritmo. Las cantidades \mathbf{q}_0 y \mathbf{q}_N , denotan las cantidades en los bordes del dominio numérico, mientras que \mathbf{q}_{-1} y \mathbf{q}_{N+1} denotan las cantidades en los puntos fantasma.

1. *Condiciones de frontera de flujo saliente:*

$$\mathbf{q}_{N+1} = \mathbf{q}_N, \quad (3.47)$$

$$\mathbf{q}_{-1} = \mathbf{q}_0 \quad (3.48)$$

Estas condiciones son impuestas, cuando se espera que el flujo salga del dominio y no regrese.

2. *Condiciones de frontera de flujo entrante:*

$$\mathbf{q}_{N+1} = \text{constante}, \quad (3.49)$$

$$\mathbf{q}_{-1} = \text{constante} \quad (3.50)$$

Aquí, las funciones en los puntos de la frontera, permanecen constantes durante toda la evolución.

3. *Condiciones de frontera periódicas:*

$$\mathbf{q}_{N+1} = \mathbf{q}_0, \quad (3.51)$$

$$\mathbf{q}_{-1} = \mathbf{q}_N \quad (3.52)$$

Estas condiciones no son realmente condiciones de frontera y consisten en empalmar los valores de las funciones de los puntos fantasma a los valores del lado opuesto del dominio.

Todas estas condiciones de frontera, son suficientes para todos los problemas físicos atacados en esta tesis.

SECCIÓN 3.10

Convergencia

Como se ha mostrado, las aproximaciones de los métodos numéricos, son solamente una aproximación con un error asociado de cierto orden. Cuanto mayor sea la resolución con que se construya la malla (valores más pequeños de Δx y Δt), cuanto menor será el error con que se están aproximando los operadores a sus contrapartes en el continuo, y por tanto la aproximación con volúmenes finitos, en este caso, de una ecuación diferencial es más precisa. Siendo que se resuelve la versión aproximada de la forma integral de

una ecuación diferencial parcial, es necesario verificar si dicha solución converge a la solución de la ecuación en el continuo.

Para ilustrar el concepto de convergencia de manera más general, se considera una función f_l que es solución numérica de una ecuación diferencial parcial a un tiempo dado, y que ha sido construida bajo la discretización de dicha ecuación con una aproximación de segundo orden. Suponiendo además que se conoce la solución exacta $f_0(x)$, el resultado numérico puede escribirse en la forma $f(x) = f_0(x) + E(x)\Delta x^2 + O(\Delta x^3)$, donde E denota un coeficiente del error. Dado que se conoce la solución exacta, es posible conocer el error con que se calcula la solución numérica usando distintos valores de Δx . Sean f_1 y f_2 dos soluciones numéricas calculadas usando las resoluciones Δx y $\Delta x/2$ respectivamente. La razón entre los errores es la siguiente:

$$\frac{f_1 - f_0}{f_2 - f_0} = \frac{\Delta x^2 + O(\Delta x^3)}{\frac{1}{4}\Delta x^2 + O(\Delta x^3)} = 4 + O(\Delta x). \quad (3.53)$$

El número cuatro en (3.53) se llama factor de convergencia y debe ser evaluado en cada punto de la malla donde se ha calculado la función f . Cuando en un cálculo numérico que se ha llevado a cabo a partir de una aproximación de segundo orden el factor de convergencia es $4 = 2^2$, se dice que la solución converge con segundo orden. De manera análoga, es posible mostrar que si la aproximación es de cuarto orden, el factor será $16 = 2^4$.

Para el caso en que se desconoce la solución exacta es posible hacer un estudio de convergencia usando los resultados numéricos calculados con tres distintas resoluciones llamado estudio de autoconvergencia. Para ilustrar el concepto de autoconvergencia, se consideran tres funciones f_1 , f_2 y f_3 que son solución numérica de una ecuación diferencial parcial a un tiempo dado, calculadas usando las resoluciones Δx , $\Delta x/2$ y $\Delta x/4$ y que han sido construidas bajo la discretización de dicha ecuación con una aproximación de cierto orden. Una vez obtenidas estas soluciones numéricas, se puede

calcular las siguiente razón:

$$\begin{aligned} \frac{f_1 - f_2}{f_2 - f_3} &= \frac{\Delta x^2 - \frac{1}{4}\Delta x^2 + O(\Delta x^3)}{\frac{1}{4}\Delta x^2 - \frac{1}{16}\Delta x^2 + O(\Delta x^3)} \\ &= \frac{\Delta x^2 + O(\Delta x^3)}{\frac{1}{4}\Delta x^2 + O(\Delta x^3)} = 4 + O(\Delta x), \end{aligned} \quad (3.54)$$

donde una vez más el resultado se llama factor de convergencia.

SECCIÓN 3.11

Normas L_2 del error

Para calcular los errores, los cuales son usados en los criterios de convergencia y autoconvergencia, se usa la norma L_2 del error. La norma L_2 , es bien conocida como la norma euclidiana, la cual se utiliza como una cantidad estándar para medir una diferencia vectorial.

$$L_2(\text{error}) = \sqrt{\sum_i \Delta x_i (\text{error}_i)^2}, \quad (3.55)$$

donde Δx es el tamaño de la celda numérica, la cual es todos estos casos es uniforme.

SECCIÓN 3.12

Pruebas Numéricas

En esta sección se presenta un conjunto de pruebas numéricas, las cuales están diseñadas para mostrar la capacidad que tiene el resolvidor de Riemann aproximado HLLE y el reconstructor de variables minmod a la hora de preservar la forma de las discontinuidades. Estas pruebas numéricas son descritas en el espacio-tiempo de Minkowski en una dimensión espacial. Dichas pruebas son conocidas en la dinámica de fluidos como pruebas de tubos de choque.

Un tubo de choque es una realización particular del problema de Riemann. Físicamente, consiste en un tubo lleno con gas, el cual es dividido en dos compartimientos que están separados por una membrana removible. Inicialmente el gas en uno de los compartimientos tiene densidad y presión mayor que en el otro compartimiento. Además, el gas tiene velocidad cero en todo lugar del tubo. En el tiempo inicial la membrana se remueve y el gas empieza a fluir del compartimiento donde hay más presión al compartimiento donde hay menor presión. Una vez la membrana se remueve, la discontinuidad inicial decae en dos ondas que se propagan en direcciones opuestas. Estas ondas son: una onda de choque que se mueven en la región donde hay menos presión y una onda de rarefacción que se mueve en la región de mayor presión. Por otra parte, entre la cola de la onda de rarefacción y la onda de choque, aparecen dos nuevos estados constantes, los cuales están separados por una tercera onda, conocida con discontinuidad de contacto. Esta onda de contacto se define como un cambio abrupto de la densidad, en la cual no hay gradientes de presión.

En la Tabla 3.1, aparecen diferentes datos iniciales asociados con el problema del tubo de choque versión relativista. Como pruebas numéricas para verificar la habilidad de

Caso	p^L	ρ_0^L	v_x^L	p^R	ρ_0^R	v_x^R
1	1.0	1.0	0.0	0.1	0.125	0.0
2	13.33	10.0	0.0	0.1	1.0	0.0
3	1000	1.0	0.0	0.01	1.0	0.0

Cuadro 3.1: En esta tabla se muestran tres casos diferentes de datos iniciales del tubo de choque relativista, en los que las diferencias de presión de los dos compartimientos cambia. Los índices L y R corresponden a la izquierda y a la derecha, respectivamente. El índice adiabático en esta prueba es $4/3$.

los métodos numéricos que se usan en este trabajo, todos los modelos que se presentan a continuación son comparados con la solución exacta al problema de Riemann, de las ecuaciones de la hidrodinámica relativista en fondo plano (espacio-tiempo de Minkowski) [Lora-Clavijo et al. 2012, Martí y Müller 1994]. El problema particular que se considera corresponde al caso en que el compartimiento de la izquierda tiene mayor presión y densidad que el compartimiento de la derecha.

En la Figura 3.10, se muestra el tubo de choque relativista, en el cual la diferencia de presiones entre los dos compartimientos, es solo de un orden de magnitud. Como lo descrito anteriormente, aparecen dos ondas propagándose a la derecha y a la izquierda, las cuales se asocian a ondas de choque y rarefacción respectivamente. Por otro lado, aparece la tercera onda asociada a la discontinuidad de contacto. Como se puede observar, dicha onda solo aparece en la densidad en reposo del fluido, ya que a través de ésta la presión es constante. Por otra parte, la solución numérica (línea punteada azul), empalma muy bien con la solución exacta (línea roja).

En las Figuras 3.11 y 3.12, se muestra la aparición de una explosión debida al aumento en la diferencia de presiones en los datos iniciales, en el problema del tubo de choques

	p	ρ_0	v_x
Izq.	3×10^{-9}	9×10^{-4}	0.9999995
Der.	3×10^{-9}	9×10^{-4}	-0.9999995

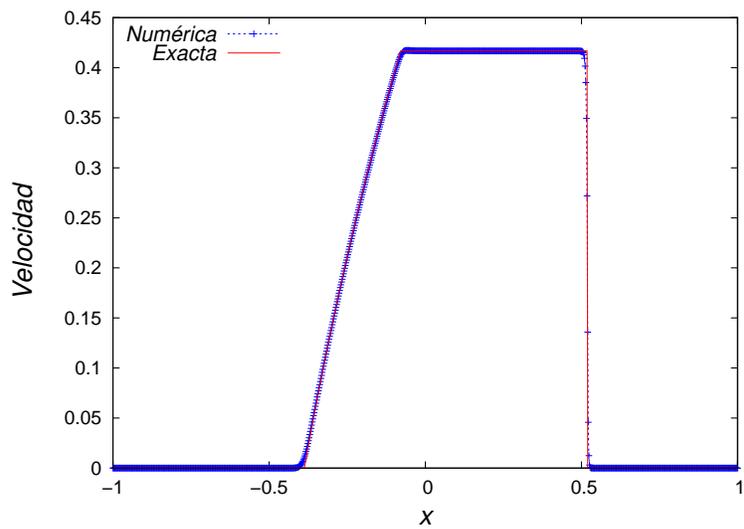
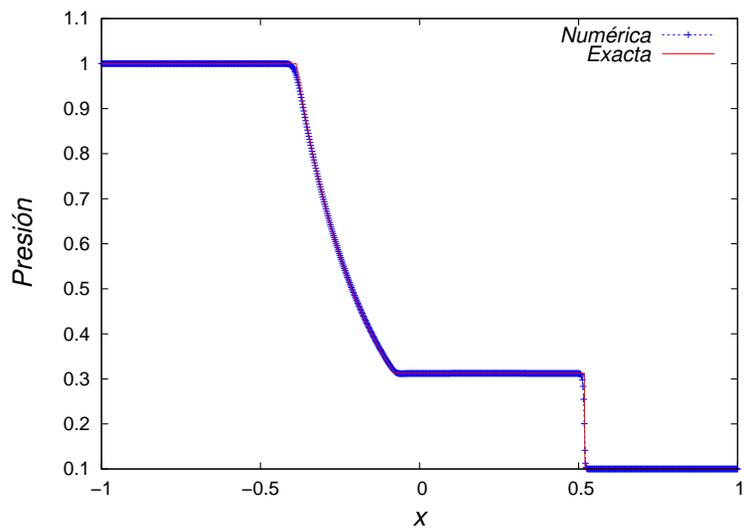
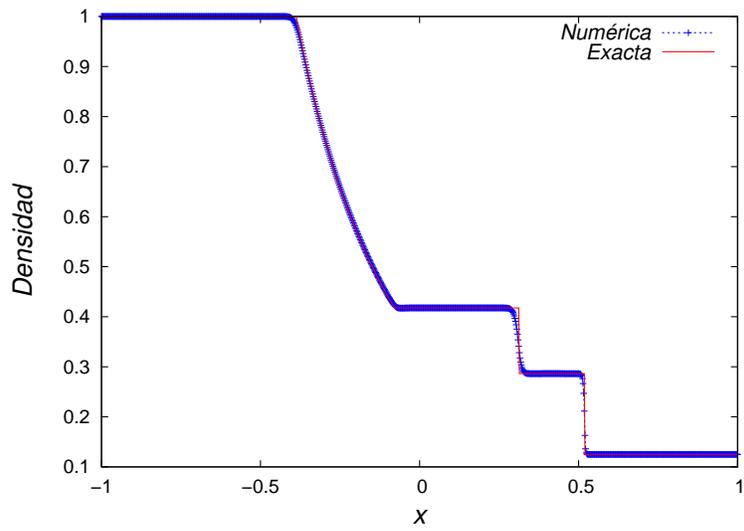
Cuadro 3.2: En esta tabla se muestran los datos iniciales correspondientes al caso de dos fluidos ultrarelativistas chocando en un dimensión cartesiana.

(modelos 2 y 3 en la Tabla 3.1). Como se puede observar en ambos casos, dicha explosión se ve representada como un aumento de la densidad que antecede a la onda de choque. En el caso de la Figura 3.12 dicha explosión es más remarcada debido a que la diferencia de presiones es de cinco ordenes de magnitud, dejando así choques que viajan a velocidades relativistas. Esto último puede observarse en la gráfica correspondiente al factor de Lorentz, la cual para el caso 3, dicho factor alcanza valores hasta casi de 4.

De nuevo en estos dos casos la solución numérica se empalma muy bien a la solución exacta, aún cuando los choques son extremadamente fuertes. Esto muestra finalmente, la habilidad de los métodos numéricos para tratar con este tipo de choques.

Otro caso que se considera como prueba numérica, aparte del caso del tubo de choque, es el caso en el que dos fluidos totalmente ultrarelativistas, con factores de Lorentz de 1000, chocan, ver Figura 3.13. Los datos iniciales para este caso en particular pueden ser vistos en la Tabla 3.2.

En este caso, la presión y la densidad de los fluidos ultrarelativistas en los dos compartimientos son los mismos. Sin embargo, las velocidades en cada compartimiento son diferentes. En particular, los dos gases se mueven uno hacia el otro con velocidades muy cercanas a la de la luz. Este caso corresponde a la situación en la cual dos choques se propagan en direcciones encontradas. Esto muestra finalmente, que los métodos numéricos además de lidiar con choques fuertes, manejan choques que se mueven a velocidades ultrarelativistas.



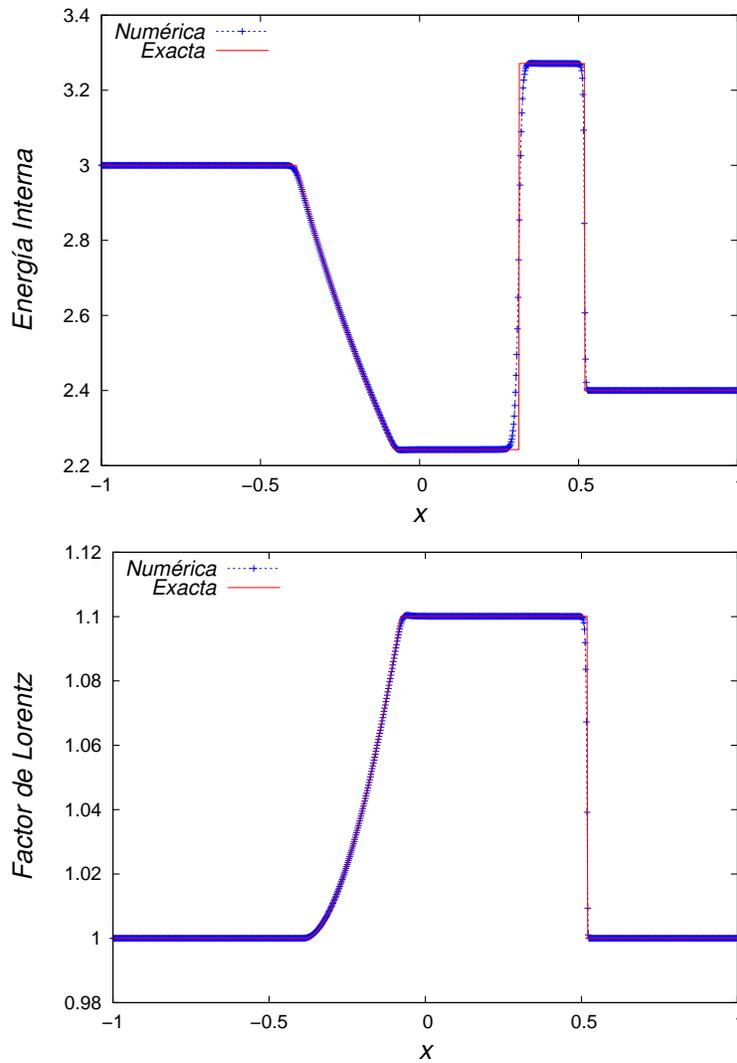
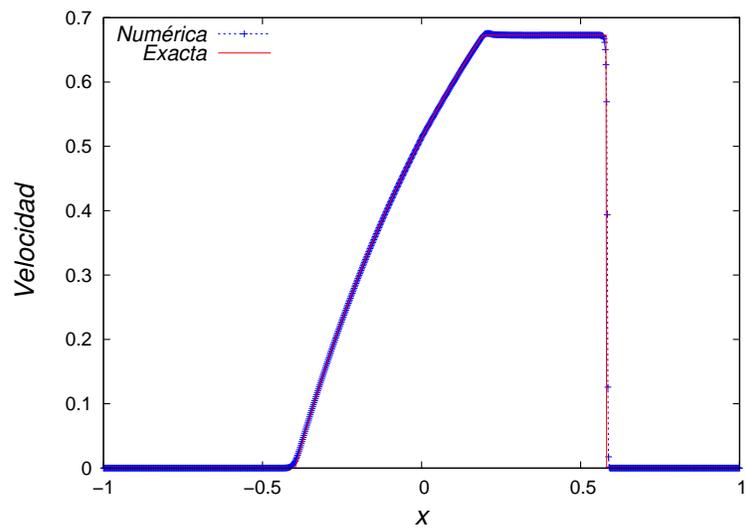
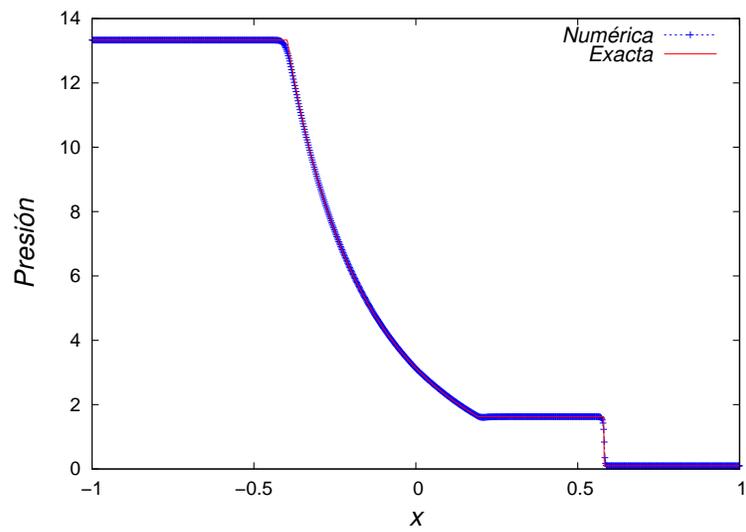
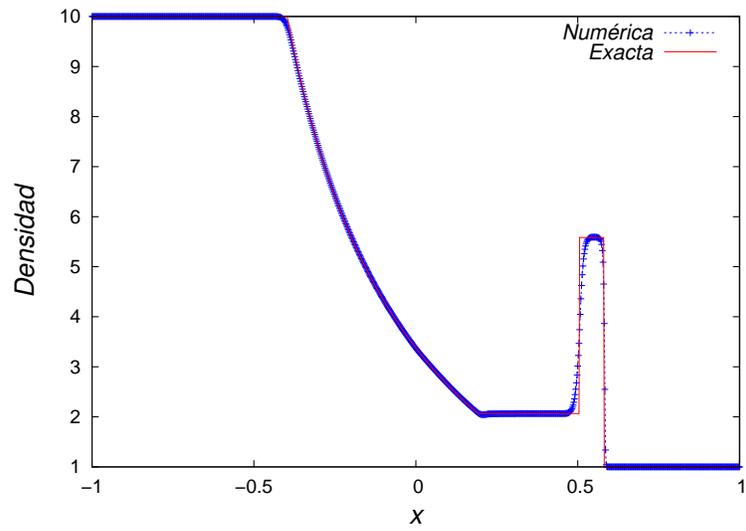


Figura 3.10: Gráfica que respresenta el tubo de choque relativista cuando la diferencia de presión entre los dos compartimientos es de solo un orden de magnitud, caso 1 en la Tabla 3.1. El dominio donde se llevó a cabo esta simulación numérica es $x \in [-1, 1]$, con $N = 1000$ y con un factor de Courant de 0,25. Por otra parte la figura se muestra en un tiempo $t = 0,75$.



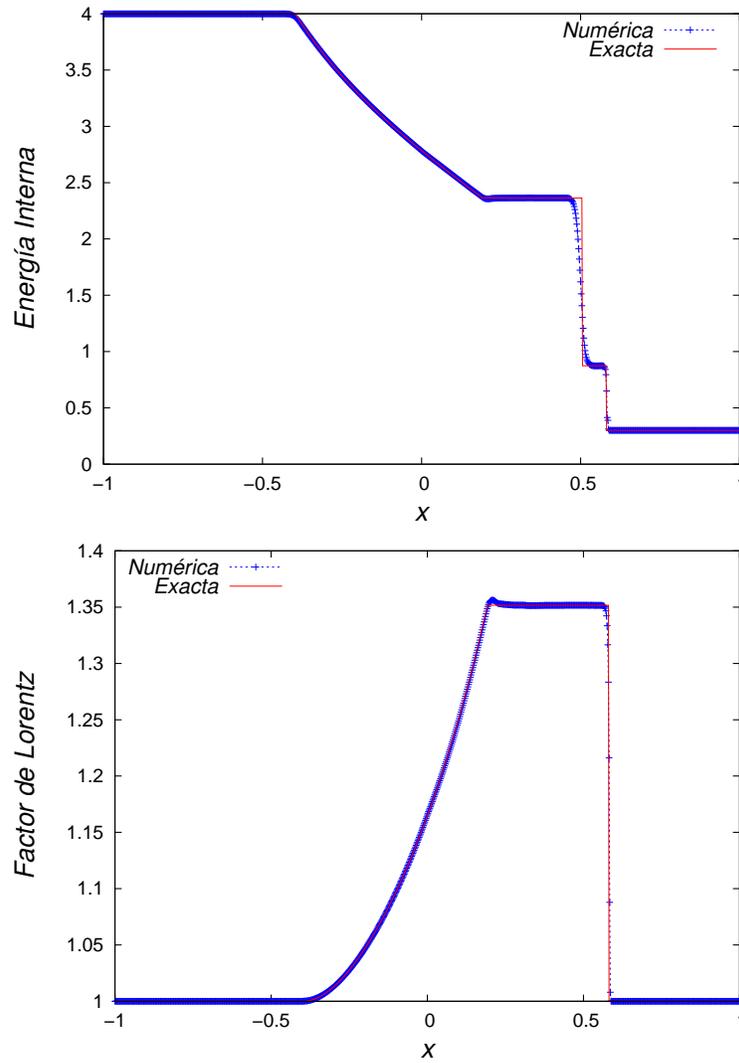
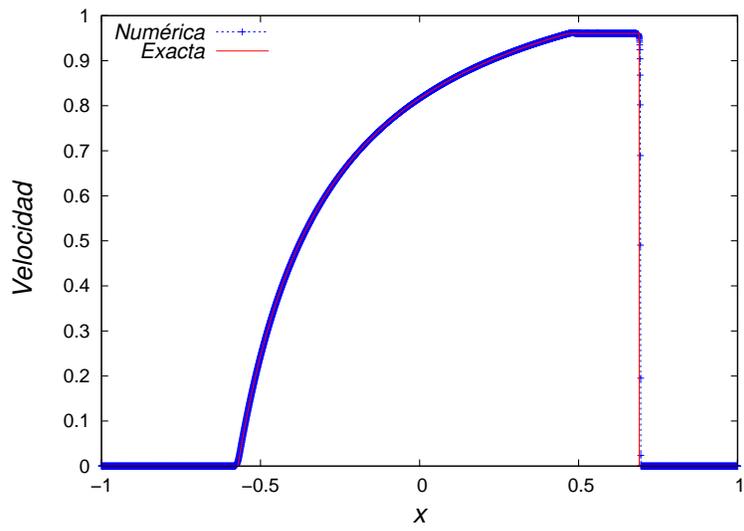
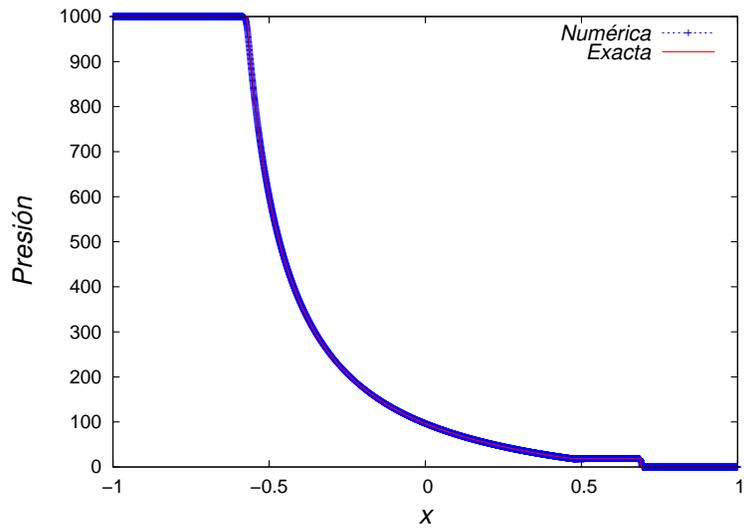
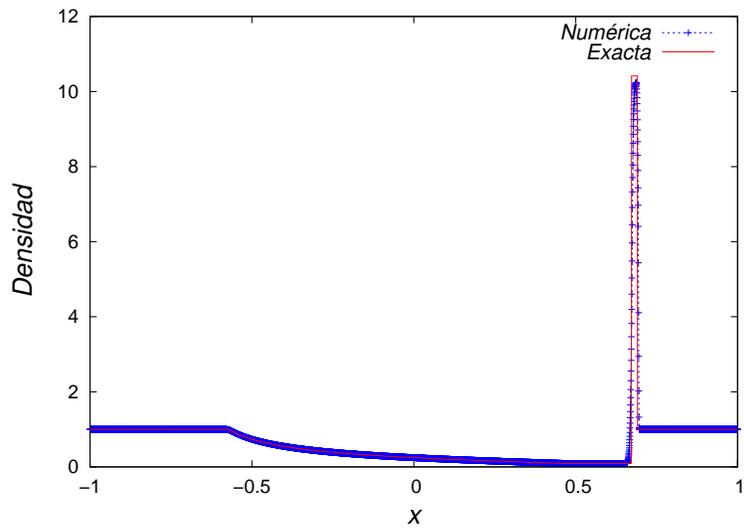


Figura 3.11: Explosión relativista en una dimensión cartesiana, caso 2. Los parámetros numéricos: dominio, número de puntos y factor de Courant son los mismos que en el caso de la Figura 3.10. El tiempo en que se muestra la figura es $t = 0,75$.



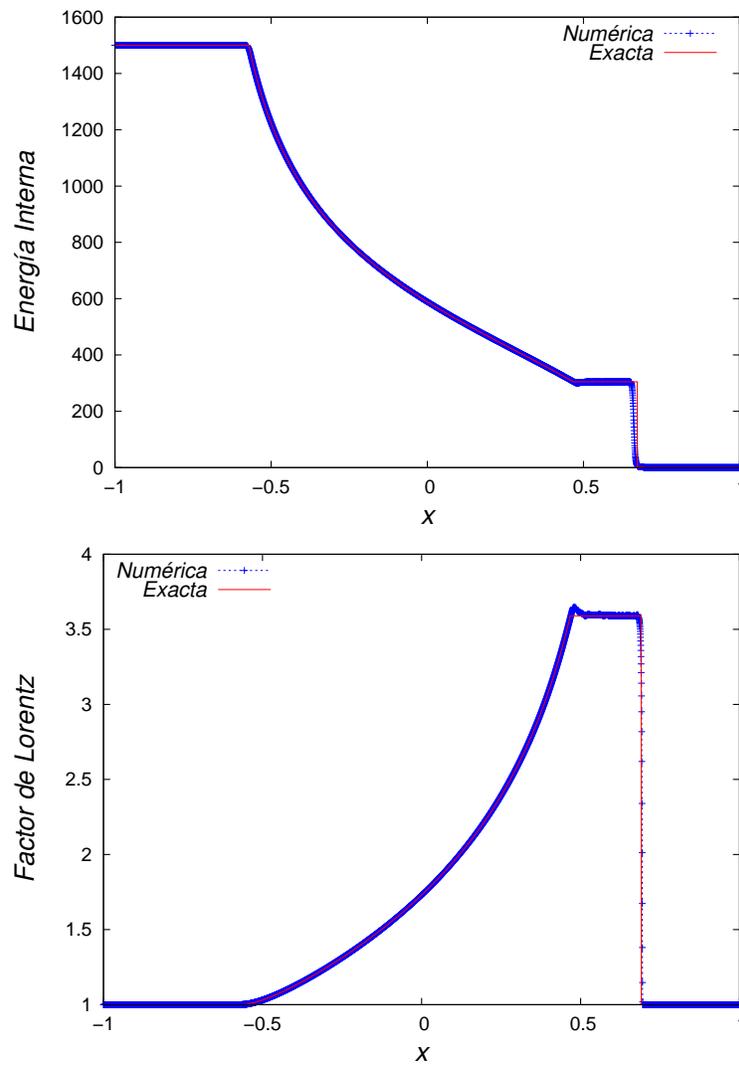
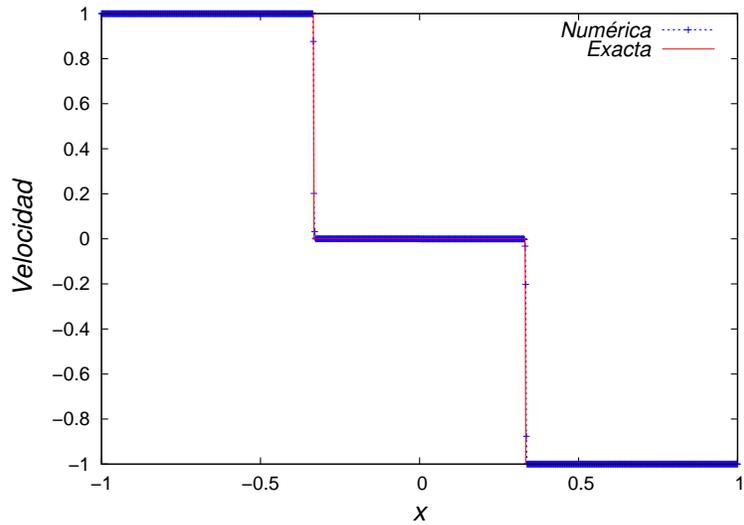
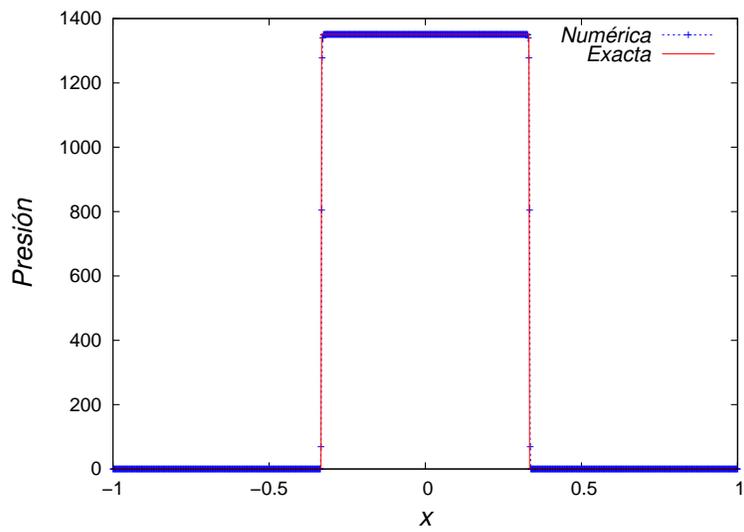
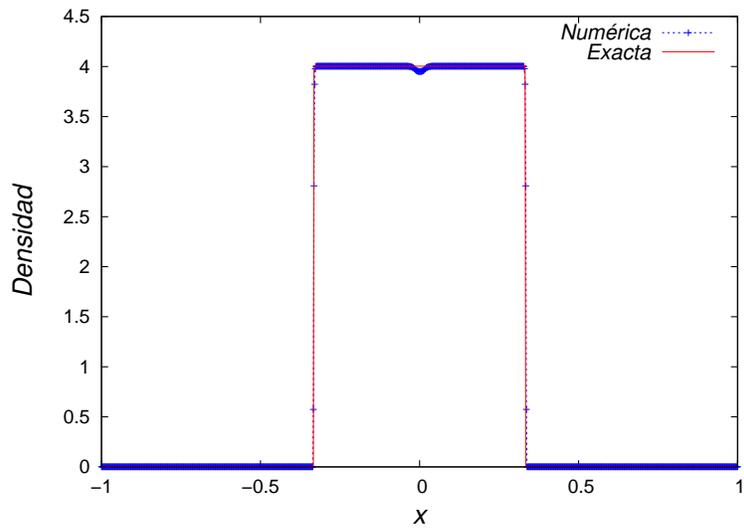


Figura 3.12: Explosión fuerte en una dimensión cartesiana, caso 3. El dominio numérico y el factor de Courant son los mismos que en los casos anteriores. Sin embargo el número de puntos usado es de $N = 2000$ debido a que la explosión genera un aumento en la densidad bastante grande, por lo cual se necesita más resolución. La gráfica corresponde al tiempo $t = 0,85$.

En los dos siguientes capítulos, como aplicación de los métodos numéricos estudiados, se analizan dos casos particulares: 1. fluido relativista en un espacio-tiempo curvo esféricamente simétrico y 2. fluido relativista en un espacio-tiempo curvo axialmente simétrico. Específicamente, se hacen aplicaciones concernientes a la acreción de materia oscura colisionante y la acreción de Bondi-Hoyle relativista como fuente potencial de oscilaciones tipo *flip-flop* y cuasi periódicas.



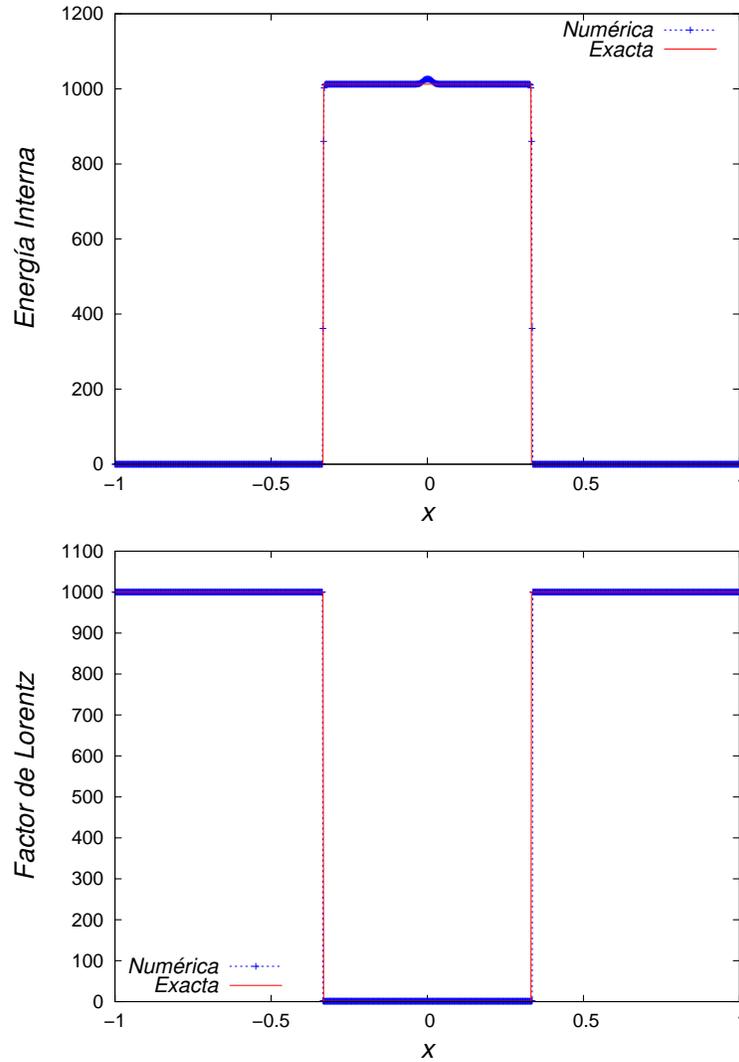


Figura 3.13: Colisión de dos fluidos ultrarelativistas en una dimensión. El valor del índice adiabático es $\Gamma = 4/3$. El dominio numérico es el mismo que en los anteriores casos, con un número de celdas de la malla de $N = 1000$. El tiempo en que se muestra la presente figura corresponde a $t = 1$, con un factor de Courant de 0,25.

Capítulo 4

ACRECIÓN ESFÉRICAMENTE SIMÉTRICA DE GÁS EN HOYOS NEGROS

SECCIÓN 4.1

Acreción Esféricamente simétrica de un fluido perfecto

Las ecuaciones de Euler relativistas en un espacio-tiempo curvo esféricamente simétrico, se obtienen a partir del sistema de ecuaciones (2.76)

$$\partial_i \vec{\mathcal{U}} + \partial_r \vec{\mathcal{F}}^r = \vec{\mathcal{S}}, \quad (4.1)$$

donde

$$\begin{aligned}
\vec{u} &= \begin{bmatrix} \tilde{D} \\ \tilde{S}_r \\ \tilde{\tau} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\gamma}\rho_0 W \\ \sqrt{\gamma}\rho_0 h W^2 v_r \\ \sqrt{\gamma}(\rho_0 h W^2 - p - \rho_0 W) \end{bmatrix}, \\
\vec{F}^r &= \begin{bmatrix} \alpha \left(v^r - \frac{\beta^r}{\alpha}\right) \tilde{D} \\ \alpha \left(v^r - \frac{\beta^r}{\alpha}\right) \tilde{S}_r + \alpha \sqrt{\gamma} p \\ \alpha \left(v^r - \frac{\beta^r}{\alpha}\right) \tilde{\tau} + \sqrt{\gamma} \alpha v^r p \end{bmatrix}, \\
\vec{S} &= \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \sqrt{\gamma} T^{\mu\nu} g_{\nu\sigma} \Gamma^\sigma_{\mu r} \\ \alpha \sqrt{\gamma} (T^{\mu 0} \partial_\mu \alpha - \alpha T^{\mu\nu} \Gamma^0_{\mu\nu}) \end{bmatrix}. \tag{4.2}
\end{aligned}$$

Para el caso del espacio-tiempo de Schwarzschild en coordenadas de Eddington-Finkelstein, las funciones α , β^r y γ_{ij} son:

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2M}{r}}}, \tag{4.3}$$

$$\beta^i = \left(\frac{2M}{r} \frac{1}{1 + \frac{2M}{r}}, 0, 0 \right), \tag{4.4}$$

$$\gamma_{ij} = \text{diag} \left(1 + \frac{2M}{r}, r^2, r^2 \sin^2 \theta \right), \tag{4.5}$$

donde M es la masa del hoyo negro esféricamente simétrico. Finalmente, por simplicidad, se considera que el fluido obedece la ecuación de estado de un gas ideal (2.85), en la cual la presión está dada en términos de la densidad de masa en reposo y la energía interna específica por

$$p = (\Gamma - 1)\rho_0 \epsilon, \tag{4.6}$$

y como se mencionó antes, Γ es el índice adiabático.

A continuación se presentan como pruebas numéricas tres problemas conocidos en la literatura, los cuales ayudan a validar los algoritmos numéricos para un espacio-tiempo con simetría esférica. Estas pruebas son: las ondas explosivas en un espacio-tiempo de Minkowski con simetría esférica, la acreción de un fluido de polvo en un hoyo negro de Schwarzschild (acreción de Bondi) [Bondi 1952], y la acreción de un gas ideal con presión en un hoyo negro de Schwarzschild (Acreción de Michel) [Michel 1972]. Para estas dos últimas pruebas, se utilizan las coordenadas de Eddington-Finkelstein, las cuales tienen la propiedad de que no son singulares en el horizonte de eventos, lo cual permite que no haya la necesidad de poner una frontera artificial por fuera de éste, como tendría que hacerse para el caso de coordenadas de Schwarzschild y como de hecho suele considerarse [Font & Ibánñez 1998].

SECCIÓN 4.2

Ondas explosivas esféricas

Para este caso en particular, en el cual el espacio-tiempo es el de Minkowski en coordenadas esféricas, los valores de las funciones de norma asociadas a la descomposición $3 + 1$ son:

$$\alpha = 1, \quad \beta^i = (0, 0, 0) \quad \text{y} \quad \gamma_{ij} = \text{diag}(1, r^2, r^2 \sin^2 \theta). \quad (4.7)$$

Usando estas funciones las ecuaciones de Euler (4.1) pueden ser escritas como:

$$\partial_t \vec{U} + \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \vec{F}^r) = \vec{S}, \quad (4.8)$$

donde las variables conservativas, los flujos y los términos de fuente (4.2), se reducen a:

$$\begin{aligned}
\vec{\mathcal{U}} &= \begin{bmatrix} D \\ S_r \\ \tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_0 W \\ \rho_0 h W^2 v_r \\ \rho_0 h W^2 - p - \rho_0 W \end{bmatrix}, \\
\vec{\mathcal{F}}^r &= \begin{bmatrix} v^r D \\ v^r S_r + p \\ v^r (\tau + p) \end{bmatrix}, \\
\vec{\mathcal{S}} &= \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2p}{r} \\ 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Como se puede observar, el término de fuente $2p/r$, diverge en $r = 0$. Para regularizar las ecuaciones en este punto, es posible separar los flujos de las ecuaciones de tal forma que dicho término no aparece

[Neilsen & Choptuik 2000, Millmore & Hawke 2010, Guzmán & Lora-Clavijo 2012]:

$$\partial_t \vec{\mathcal{U}} + \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \vec{\mathcal{F}}_1^r) + \partial_r \vec{\mathcal{F}}_2^r = 0, \tag{4.10}$$

donde

$$\vec{\mathcal{F}}_1^r = \begin{bmatrix} v^r D \\ v^r S_r \\ v^r (\tau + p) \end{bmatrix}, \quad \vec{\mathcal{F}}_2^r = \begin{bmatrix} 0 \\ p \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{4.11}$$

Existe un ingrediente más cuando se tratan problemas de simetría esférica en coordenadas esféricas, este es, la singularidad coordenada $r = 0$ de la derivada en la ecuación (4.10). Este problema es usualmente resuelto sustituyendo el término $(\partial_r (r^2 \vec{\mathcal{F}}_1^r))/r^2$ por $3\partial_{r,3} (r^2 \vec{\mathcal{F}}_1^r)$, donde la derivada ahora es con respecto a r^3 . Una vez regularizadas las

Caso	p^i	p^e	ρ_0^i	ρ_0^e	$(v^r)^i$	$(v^r)^e$
Explosión débil	1.0	0.1	1.0	0.125	0.0	0.0
Explosión fuerte	133.33	0.125	10.0	1.0	0.0	0.0

Cuadro 4.1: Configuraciones de datos iniciales para el problema de la onda explosiva en simetría esférica. El subíndice “ i ” se usa para representar las variables de estado primitivas en la cámara interior de radio 0,5, mientras que el subíndice “ e ” se usa para representar las variables de estado primitivas en la cámara exterior $r \in [0,5 : 1]$.

ecuaciones se procede a definir el problema asociado a la onda explosiva esféricamente simétrica.

El problema de la onda explosiva esférica, también es una particularización del problema de Riemann. Sin embargo, en este caso de simetría esférica, no existe solución exacta. Físicamente, éste problema consiste en un gas distribuido en dos cámaras separadas por una membrana removible esférica, la cual está localizada en $r = r_0$. Inicialmente, el gas en la cámara de adentro tiene una densidad y presión más altas que en la cámara de afuera; además, las velocidades – como en el caso plano unidimensional – son cero en todo lugar. Una vez la membrana es removida, una onda de choque esférica se mueve de la región con más alta presión a la región con menor presión. También, una onda de rarefacción viaja en dirección opuesta. Estrictamente hablando, existen varias ondas propagándose en el espacio: una onda de choque moviéndose hacia afuera, una onda de rarefacción moviéndose hacia adentro y entre la onda de choque y la cola de la onda de rarefacción, aparecen dos nuevos estados, los cuales son separados por una discontinuidad de contacto. Para ilustrar la física del problema de la onda explosiva, se desarrollan diferentes simulaciones numéricas, para las cuales, los parámetros que se usan están en la Tabla 4.1.

En el caso de la explosión débil, Figura 4.1, la diferencia de presiones es de un orden de magnitud, mientras que en el caso de la explosión fuerte, Figura 4.2, la diferencia de presiones en la discontinuidad inicial es de tres ordenes de magnitud. Como se puede observar, la presencia de una onda explosiva es mucho más apreciable cuando la diferencia de presiones es más grande, generando velocidades más cercanas a la velocidad de la luz y regiones donde el fluido es supersónico. En el caso de la onda explosiva fuerte, hay regiones donde el factor de Lorentz se acerca a un valor de 4, lo cual muestra la naturaleza relativista de este proceso. En la Figura 4.3, se presenta un caso interesante, en el cual, debido a la simetría del problema, se desarrolla una onda de choque en reversa [Yokosawa 1984]. A diferencia del caso explosivo en una dimensión cartesiana, aquí los dos estados separados por la discontinuidad de contacto no son constantes. Básicamente lo que sucede es que en algunas regiones localizadas la presión es más alta afuera que adentro, produciendo un choque que se mueve en reversa. Las velocidades alcanzadas por dicho choque moviéndose en reversa son muy cercanas a la velocidad de la luz.

Finalmente, para analizar la precisión de la evolución numérica de la onda explosiva esférica, se implementa una prueba de autoconvergencia para una de las variables de estado. En la Figura 4.4, se muestra una serie de gráficas a diferentes tiempos *snapshots* de la autoconvergencia de una una de las variables primitivas. Para ejemplificar dicha autoconvergencia, se escogió la presión para dos casos específicos: la onda explosiva débil y la onda explosiva fuerte. Como se mencionó anteriormente en la sección de métodos numéricos, cuando se usan los métodos de alta resolución para la captura de choques, la precisión de las soluciones es de segundo orden en las regiones donde las funciones son suaves y de primer orden en las discontinuidades. Por esta razón, lo que se debe esperar acerca de la convergencia es que sea de primer orden, debido a que la discontinuidad inicial contamina el dominio numérico. Por otra parte, la autoconvergencia solo se considera en la zona de rarefacción, porque en las regiones donde los estados son constantes, el error es cero.

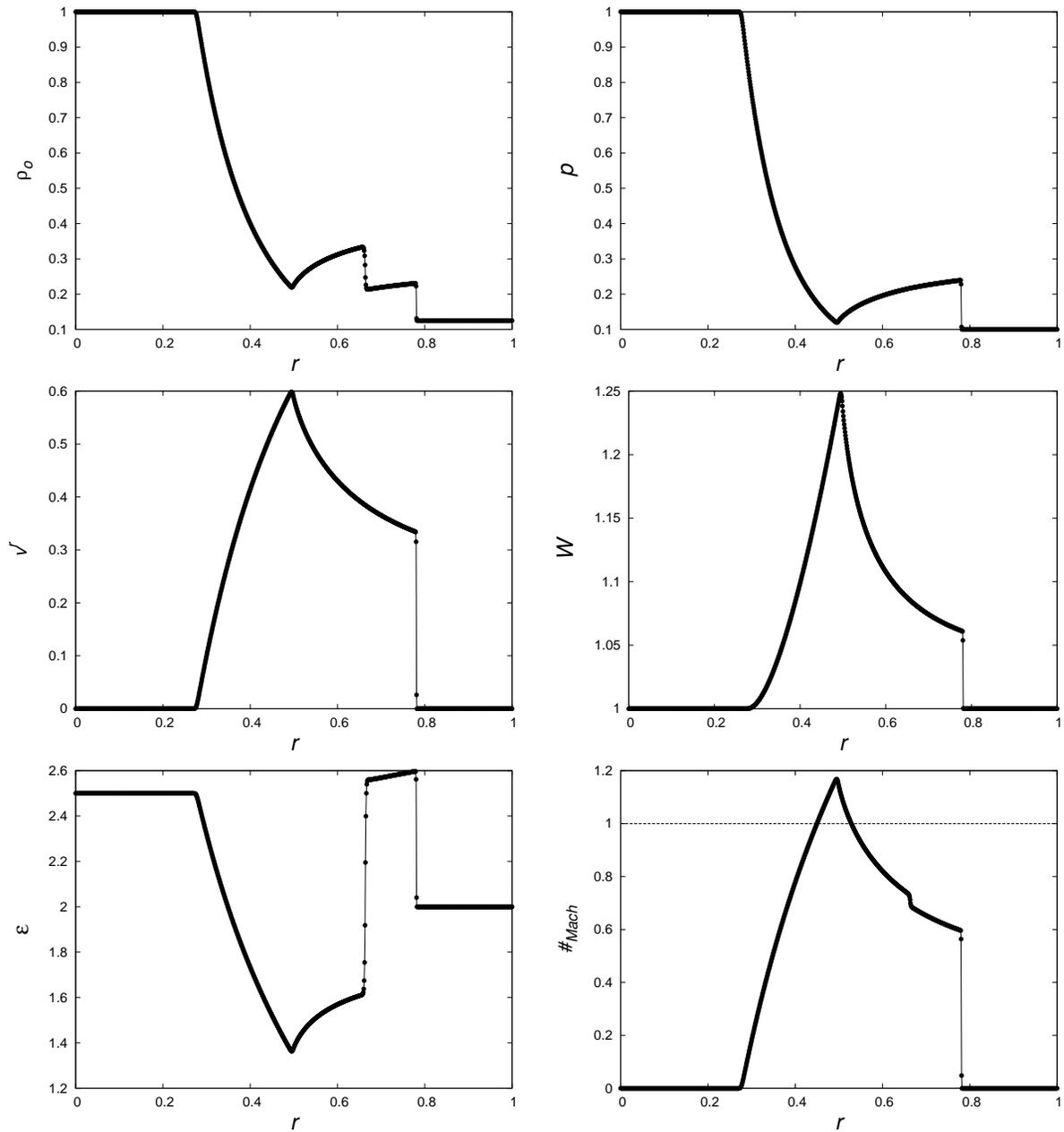


Figura 4.1: Modelo de la onda explosiva débil en $t = 0,4$. La discontinuidad inicial está localizada en $r = 0,5$ y el índice adiabático es $\Gamma = 1,4$. La resolución espacial usada para llevar a cabo esta simulación numérica es $\Delta r = 2 \times 10^{-4}$, con un factor de Courant de $\Delta t/\Delta r = 0,25$. Como se puede observar, existe un pequeña región donde el número de Mach es más grande que uno, lo cual indica que el fluido es supersónico.

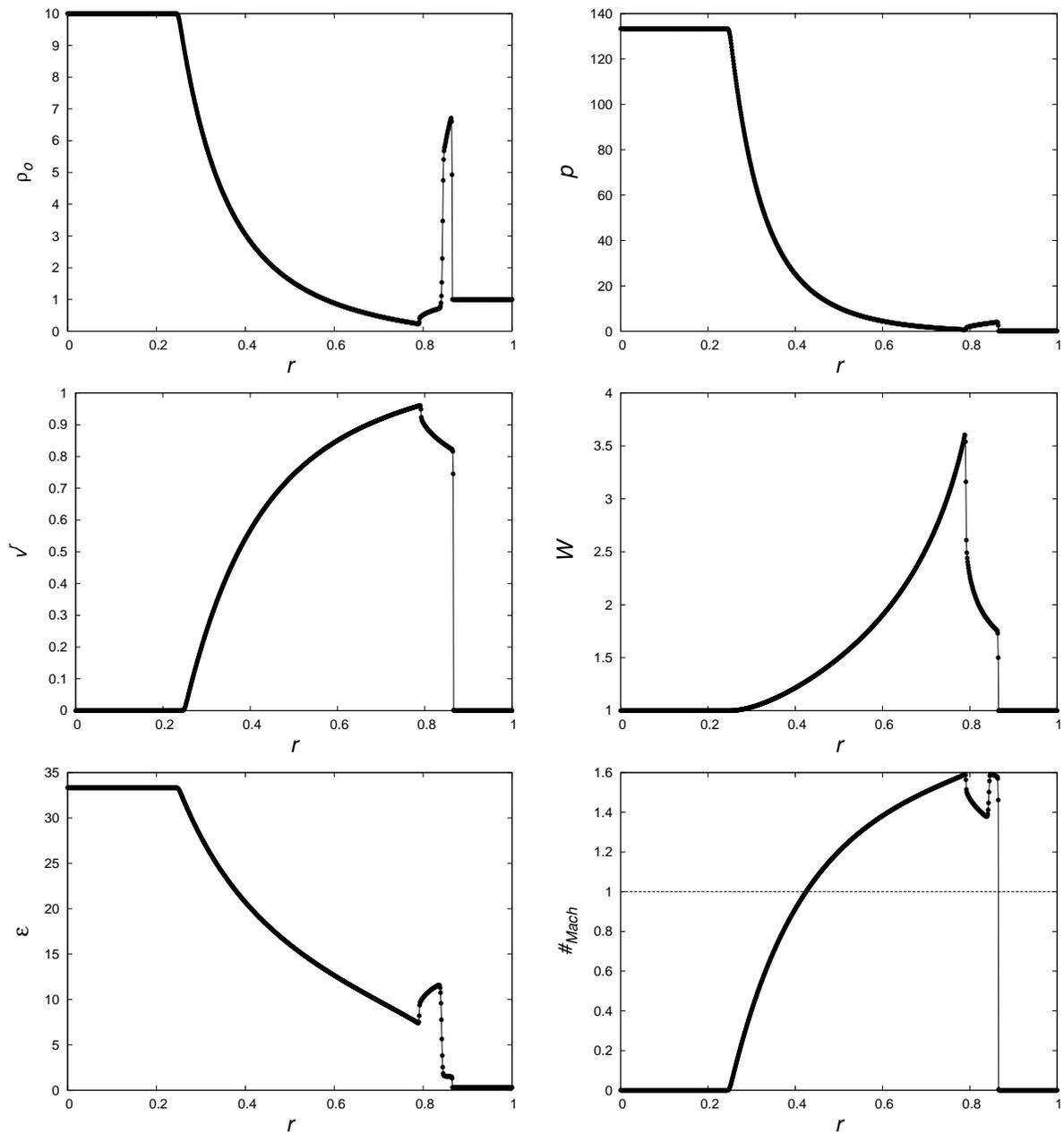


Figura 4.2: Modelo de la onda explosiva fuerte. Los parámetros numéricos: dominio, resolución, factor de Courant e índice adiabático, son los mismos que en el caso de la onda explosiva débil. En este caso el factor de Lorentz alcanza un valor cercano a 3.5. Por otra parte, la región donde la velocidad del fluido es supersónica es más amplia que en el caso anterior.

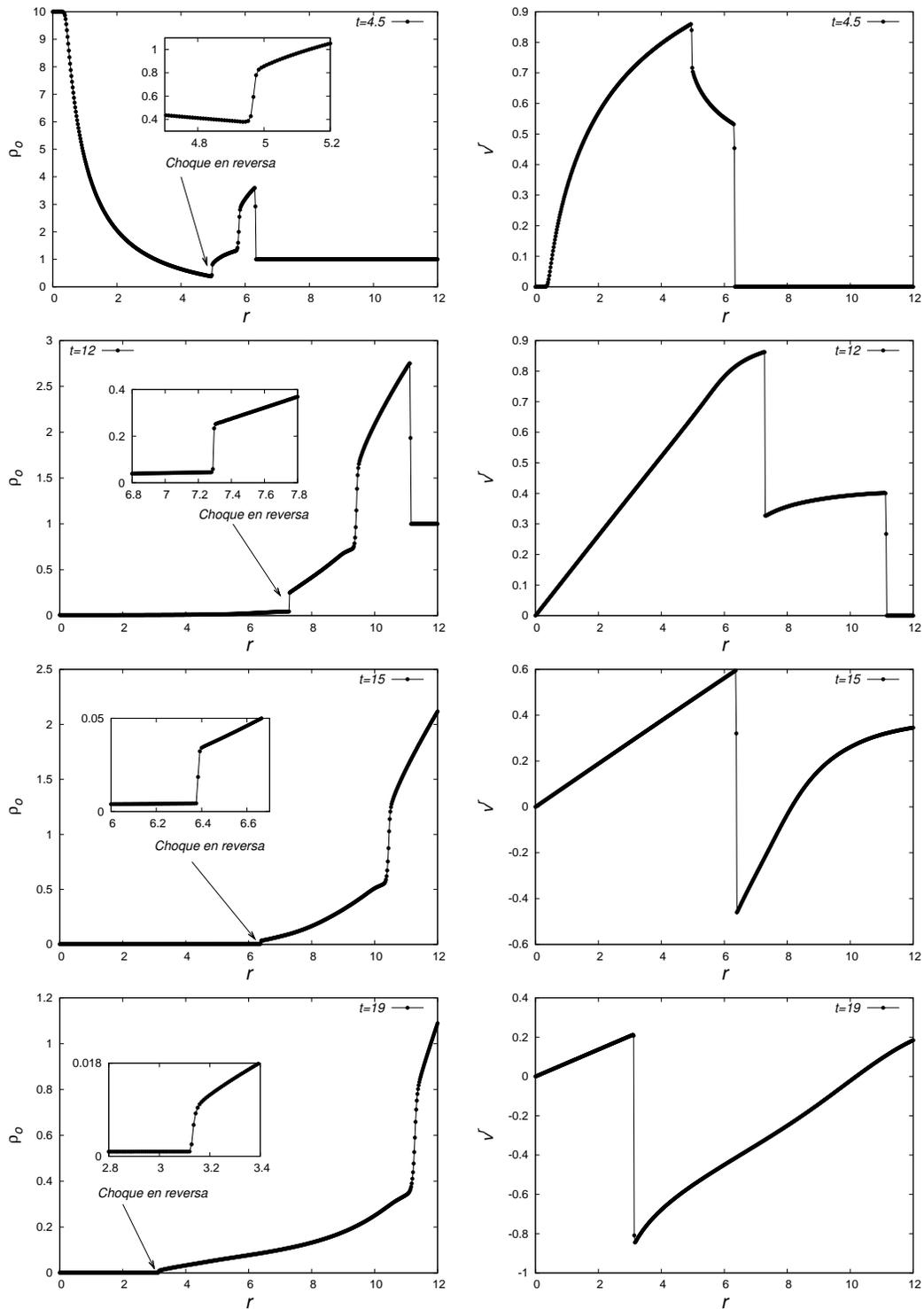


Figura 4.3: En esta figura, se muestra la presencia de un choque en reversa en el problema de la onda explosiva esférica. Los parámetros que se usan son: $r \in [0, 12]$, $\Delta r = 0,004$, factor de Courant 0,25, $\Gamma = 1,4$, $r_0 = 3,0$ y las variables primitivas iniciales $p_i = 13,33$, $p_e = 0,1$, $\rho_i = 10$, $\rho_e = 1$ and $v_i = v_e = 0$.

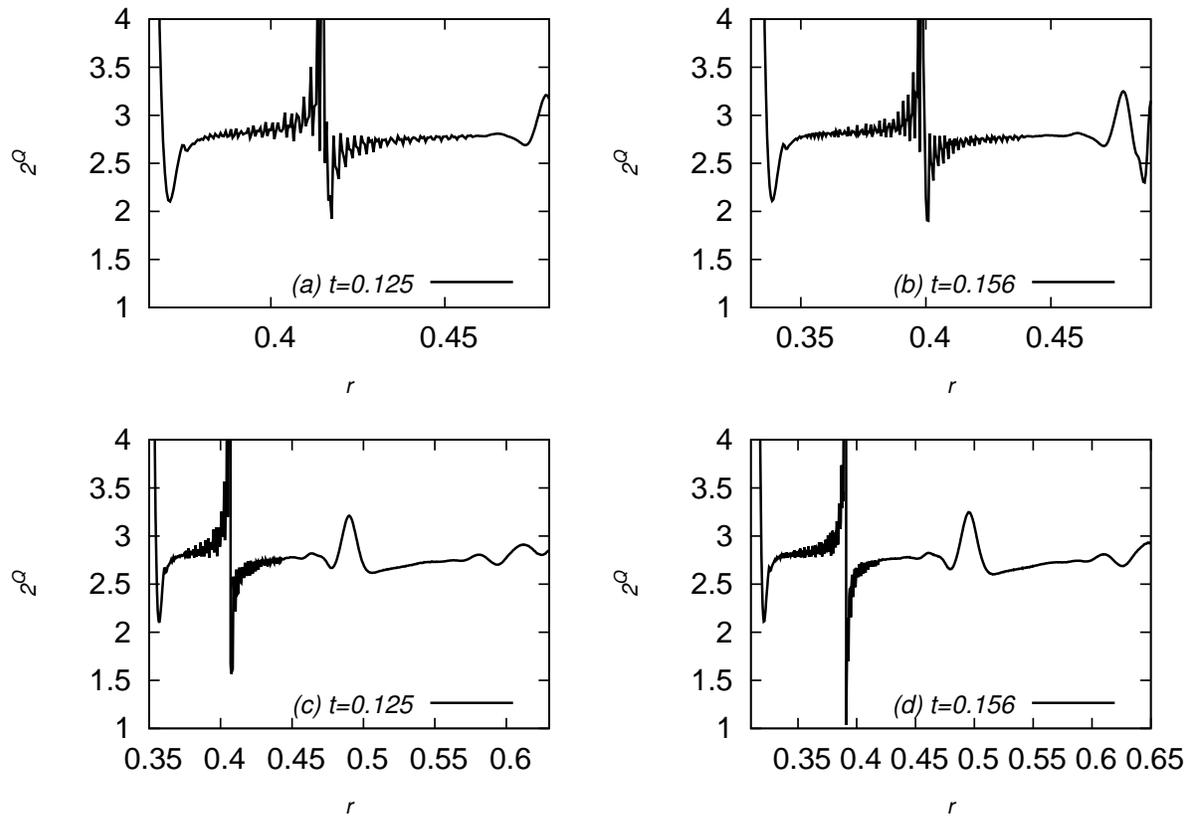


Figura 4.4: En esta figura se muestran una serie de gráficas a diferentes tiempos *snapshots* de la autoconvergencia de una de las variables primitivas, específicamente la presión p , para los dos casos considerados aquí, en dos valores del tiempo diferentes. Las resoluciones usadas son: $\Delta r_1 = 2,5 \times 10^{-4}$, $\Delta r_2 = \Delta r_1/2$ y $\Delta r_3 = \Delta r_1/4$. Las figuras (a) y (b) corresponden a la onda explosiva débil, mientras que las figuras (c) y (d) a la onda explosiva fuerte. Para ambos casos, la autoconvergencia se analiza en la zona de rarefacción, donde no se desarrollan choques. El factor de convergencia se calcula como $2^Q = (p_1 - p_2)/(p_2 - p_3)$, donde p_1 , p_2 y p_3 representan la presión calculada con las tres resoluciones arriba mencionadas. La conclusión de esto es que el orden de convergencia está entre primer y segundo orden. Las simulaciones se llevaron a cabo con un RK3, como el descrito en el capítulo anterior.

SECCIÓN 4.3

Acreción de Bondi y Michel Relativista

Para probar la precisión de los métodos numéricos en un espacio-tiempo curvo con simetría esférica, existen dos soluciones exactas, calculadas en el régimen estacionario, que corresponden a la acreción de polvo [Bondi 1952] y la acreción de un fluido perfecto [Michel 1972]. Para el cálculo de estas soluciones en coordenadas de Eddington-Finkelstein, se sigue el procedimiento presentado en [Papadopoulos & Font 1998].

Siguiendo la idea original de Michel, las ecuaciones de movimiento en simetría esférica, que corresponden a la conservación del flujo de corriente de masa (2.52) y a la conservación del tensor energía momento (2.51), en el régimen estacionario son:

$$\frac{d(\sqrt{-g}J^r)}{dr} = 0, \quad (4.12)$$

$$\frac{d(\sqrt{-g}T_t^r)}{dr} = 0, \quad (4.13)$$

donde g es el determinante de la métrica $g_{\mu\nu}$, el cual para el espacio-tiempo de Schwarzschild en coordenadas de Eddington-Finkelstein satisface la siguiente relación: $\sqrt{-g} = \alpha\sqrt{\gamma} = r^2 \sin \theta$. Como se puede observar de estas dos últimas relaciones, la dependencia de θ no aparece en las ecuaciones. Para el caso de un fluido perfecto, cuyo tensor energía momento está dado por la ecuación (2.53), estas dos ecuaciones toman la siguiente forma:

$$r^2 \rho_0 u^r = C_1, \quad (4.14)$$

$$r^2 \rho_0 h u^r u_t = C_2, \quad (4.15)$$

donde C_1 y C_2 son constantes de integración. De este último sistema de ecuaciones, se pueden obtener los dos casos de interés: polvo y gas con presión diferente de cero.

1. Caso 1. Fluido de polvo, $p = 0$.

Para este caso, debido a que cuando la presión es cero, la energía interna específica es cero y por lo tanto la entalpía interna específica (2.54) toma el valor de uno, el sistema de ecuaciones (4.14, 4.15) reduce a

$$u_t = \frac{C_2}{C_1} = C_3. \quad (4.16)$$

Ahora, una vez dado el valor de la componente u_t de la 4-velocidad, es posible calcular la forma para u^r , utilizando la condición de normalización $u^\mu u_\mu = -1$ y las siguientes definiciones: $u^t = g^{tt}u_t + g^{tr}u_r$, $u_r = g_{tr}u^t + g_{rr}u^r$. Haciendo el álgebra correspondiente, se puede encontrar que

$$(u^r)^2 = (u_t)^2 + g_{tt}, \quad (4.17)$$

$$u_r = \frac{g_{tr}g^{tt}u_t + g_{rr}u^r}{1 - g_{tr}g^{tr}}, \quad (4.18)$$

$$u^t = g^{tt}u_t + g^{tr}u_r. \quad (4.19)$$

Como se puede observar, estas relaciones son independientes de si es un fluido con presión o no. Ahora, la velocidad Euleriana puede ser obtenida de la expresión (2.55) como

$$v^r = \frac{u^r}{\alpha u^t} + \frac{\beta^r}{\alpha}. \quad (4.20)$$

De esta forma, reemplazando los coeficientes métricos para el espacio-tiempo de Schwarzschild en coordenadas de Eddington-Finkelstein, se obtiene la expresión final para v^r

$$v^r = -\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{r}{2M}} \left(1 + \sqrt{\frac{2M}{r} + \frac{2M}{r}}\right)}, \quad (4.21)$$

donde se ha fijado el valor de $C_3 = -1$, como en la referencia [Papadopoulos & Font 1998]. Finalmente la densidad se obtiene de la expresión (4.14)

$$\rho_0 = -\frac{C_1}{r^2 \sqrt{\frac{2M}{r}}}. \quad (4.22)$$

Aquí, M es la masa del hoyo negro esféricamente simétrico. Esta solución es válida para todo el dominio, incluso adentro del horizonte de eventos, esto último es gracias al sistema de coordenadas de Eddington Finkelstein.

2. Caso 2. Fluido con presión, $p \neq 0$.

Este caso es mucho más complejo que el anterior, ya que la entropía interna específica no es uno, como en el caso de polvo. Del sistema de ecuaciones (4.14, 4.15) se obtiene

$$hu_t = \frac{C_2}{C_1} = C_3, \quad (4.23)$$

donde ahora el término constante no es u_t , sino hu_t . Tomando los diferenciales de las expresiones (4.14) y (4.15) se tiene que

$$2\frac{dr}{r} + \frac{d\rho_0}{\rho_0} + \frac{du^r}{u^r} = 0, \quad (4.24)$$

$$\frac{d(\rho_0 h)}{\rho_0 h} + \frac{2}{r}dr + \frac{du^r}{u^r} + \frac{du_t}{u_t} = 0, \quad (4.25)$$

respectivamente. Ahora, sustrayendo estas dos expresiones se obtiene lo siguiente

$$\left[\frac{d \ln(\rho_0 h)}{d \ln \rho_0} - 1 \right] d \ln \rho_0 + \frac{du_t}{u_t} = 0. \quad (4.26)$$

Como se mencionó anteriormente, las expresión (4.17), no depende de si el fluido es de polvo o no. Entonces, desarrollando esta expresión, se tiene que

$$\frac{du_t}{u_t} = \frac{u^r}{u_t^2} du^r - \frac{1}{2u_t^2} \frac{dg_{tt}}{dr} dr. \quad (4.27)$$

Finalmente, sustituyendo esta expresión en la ecuación (4.26) y haciendo uso de la expresión (4.24), se obtiene lo siguiente

$$\frac{du^r}{u^r} \left[V^2 - \left(\frac{u^r}{u_t} \right)^2 \right] + \frac{dr}{r} \left[2V^2 - \frac{M}{ru_t^2} \right], \quad (4.28)$$

donde $V^2 = d \ln(\rho_0 h) / d \ln \rho_0 - 1$ y se ha reemplazado la función métrica g_{tt} para el caso de un espacio-tiempo de Schwarzschild en coordenadas de Eddington-Finkelstein. Esta última ecuación es conocida como la ecuación de viento y es importante porque su solución describe un fluido que cae radialmente en un agujero negro esféricamente simétrico. Un análisis más profundo de esta ecuación, concerniente a la existencia y estabilidad de sus soluciones, puede ser visto en la referencia [Chaverra & Sarbach 2012].

Es evidente que si cualquiera de los paréntesis de la ecuación (4.28) se hace cero, se tiene un punto de retorno en el espacio de fases, y las soluciones son doble-valoradas, ya sea para r o u^r . Solamente las soluciones que pasan a través de un punto crítico corresponden a material cayendo al hoyo negro. Los puntos críticos se encuentran cuando los términos de ambos parentesis son cero, de esta forma se obtienen las siguientes relaciones

$$\left(u_c^r \right)^2 = \frac{M}{2r_c}, \quad V_c^2 = \frac{\left(u_c^r \right)^2}{\left(u_c^r \right)^2 - \left(g_{tt} \right)_c}, \quad (4.29)$$

donde estas cantidades quedan determinadas una vez conocido el valor del radio crítico r_c . Por otro lado, se considera que el fluido obedece la ecuación de estado de un gas politrópico (2.86), esto es: $p = K \rho_0^\Gamma$. Entonces, dado un valor de la densidad crítica $(\rho_0)_c$ y la constante adiabática Γ , es posible determinar el valor de la constante politrópica K .

Para calcular los valores de las constantes C_1 y C_2 se utilizaron los valores para los puntos críticos r_c y $(\rho_0)_c$, sugeridos en la referencia [Papadopoulos & Font 1998], conjuntamente con las ecuaciones (4.14, 4.15). Una vez calculadas estas constantes, se resuelve ese mismo sistema de ecuaciones, para así obtener la solución.

Hay que aclarar que la solución no puede ser encontrada de manera exacta, ya que aparece una ecuación trascendental algebraica, la cual tiene que ser resuelta numéricamente con algún encontrador de raíces.

En las Figuras 4.5 y 4.7 se muestra la acreción radial de polvo ($p = 0$) y un gas ($p \neq 0$). Los datos iniciales que se consideran corresponden a las soluciones exactas obtenidas en el régimen estacionario. Por otra parte, los dominios numéricos corresponden, en unidades de masa del hoyo negro, a: $r \in [0,5, 50]$ para los dos casos. En el caso de la Figura 4.7, se graficó hasta un dominio de $15M$, para detallar mejor el comportamiento cerca del hoyo negro. El número de celdas de la malla numérica homogénea es $N = 100$, en ambos casos, con un factor de Courant de 0,25. Como se puede observar, después de mucho tiempo, el sistema sigue estable, mostrando así la capacidad que tienen los métodos numéricos para evolucionar problemas hidrodinámicos en espacio-tiempos curvos.

Por otra parte, en las Figuras 4.6 y 4.8, se muestran las gráficas de convergencia para los dos casos. Como es de esperar, donde no hay presencia de choques y donde las funciones no tienen máximos ni mínimos; la convergencia de la norma L_2 del error de la densidad en reposo, es aproximadamente de segundo orden, ya que se está utilizando el reconstructor de variables *minmod*. Finalmente, se usaron condiciones de frontera de flujo entrante, las cuales están descritas en el capítulo de métodos numéricos.

SECCIÓN 4.4

Acreción de materia oscura en hoyos negros supermasivos de Schwarzschild

Como una aplicación de la acreción de gas en un espacio-tiempo fijo de Schwarzschild, en esta sección se compara la acreción radial de materia oscura colisionante y no colisio-

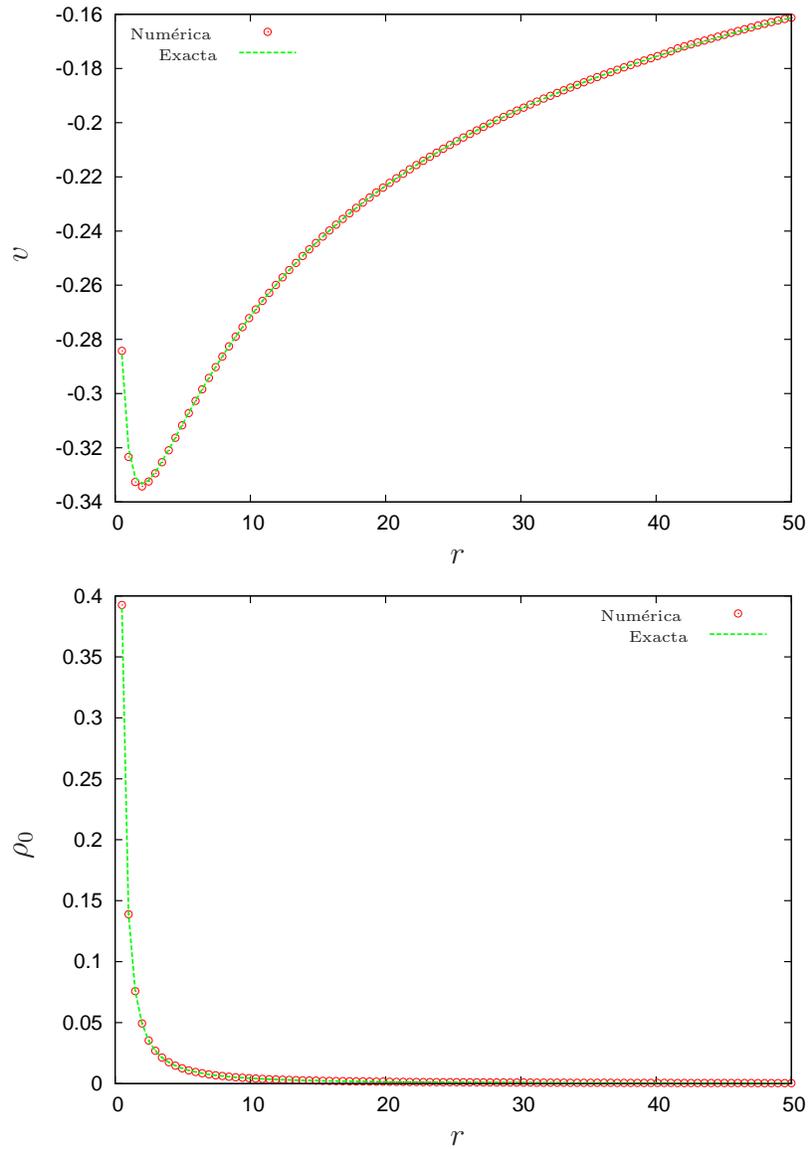


Figura 4.5: En esta gráfica se presenta la solución exacta y numérica de la acreción de Bondi relativista en coordenadas de Eddington-Finkelstein en el régimen estacionario. La curva de arriba corresponde a la velocidad radial, mientras que la curva de abajo muestra la densidad de masa en reposo, como función de la coordenada radial y medidas en $t = 100M$. El valor usado de la constante C_1 fue $C_1 = -0,195$. Como se puede observar, la solución numérica ajusta muy bien a la solución exacta. Las evoluciones numéricas se llevaron a cabo con un RK3, como el mencionado en el capítulo anterior.

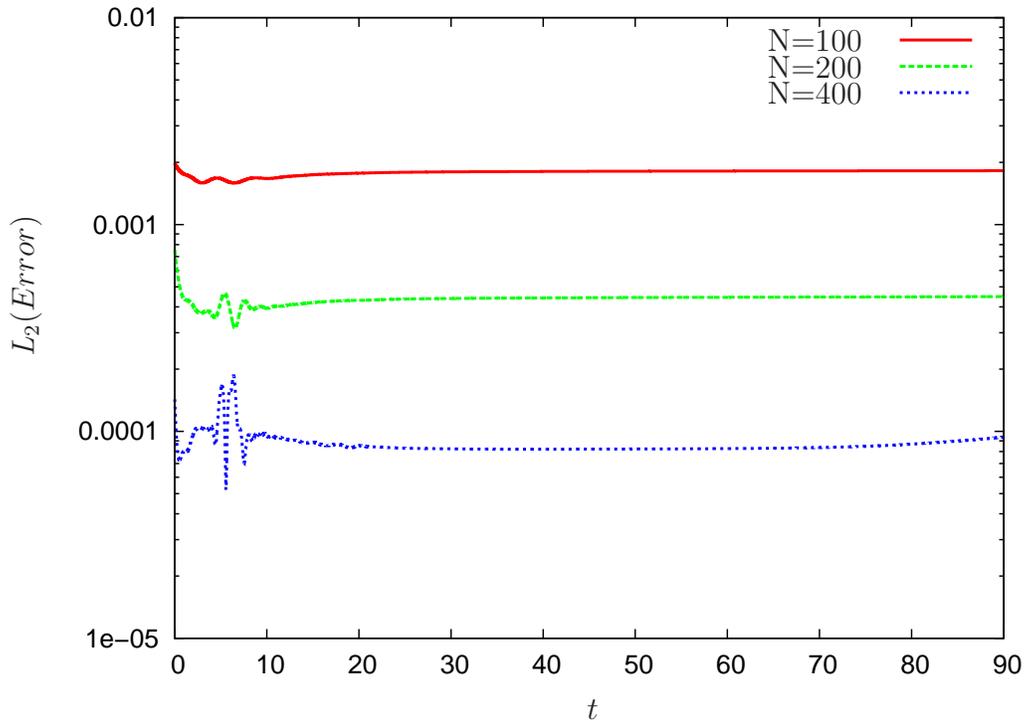


Figura 4.6: En esta figura se muestra la convergencia de la norma L_2 del error. Como se puede observar la convergencia es aproximadamente de segundo orden. En esta gráfica, a tiempos iniciales, se presentan unas oscilaciones debidas a que los datos iniciales con que se empieza la evolución corresponden a la solución exacta. Por otra parte, las líneas no están igualmente espaciadas debido a que la convergencia no es perfectamente de segundo orden.

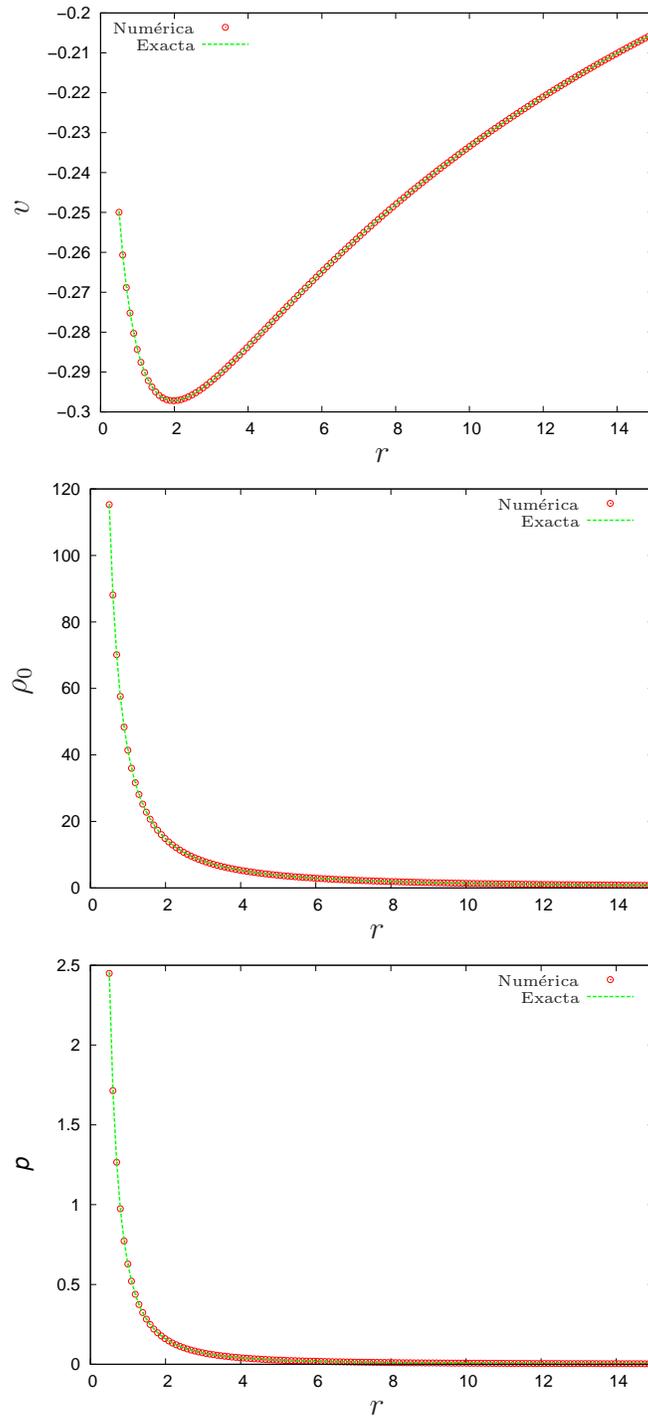


Figura 4.7: En esta gráfica se presenta la solución exacta y numérica de la acreción de Michel relativista, correspondiente a la velocidad, densidad en reposo y presión. Los valores críticos son: $r_c = 400M$ y $(\rho_0)_c = 10^{-2}$ y el tiempo en que se muestra la gráfica es $t = 100M$.

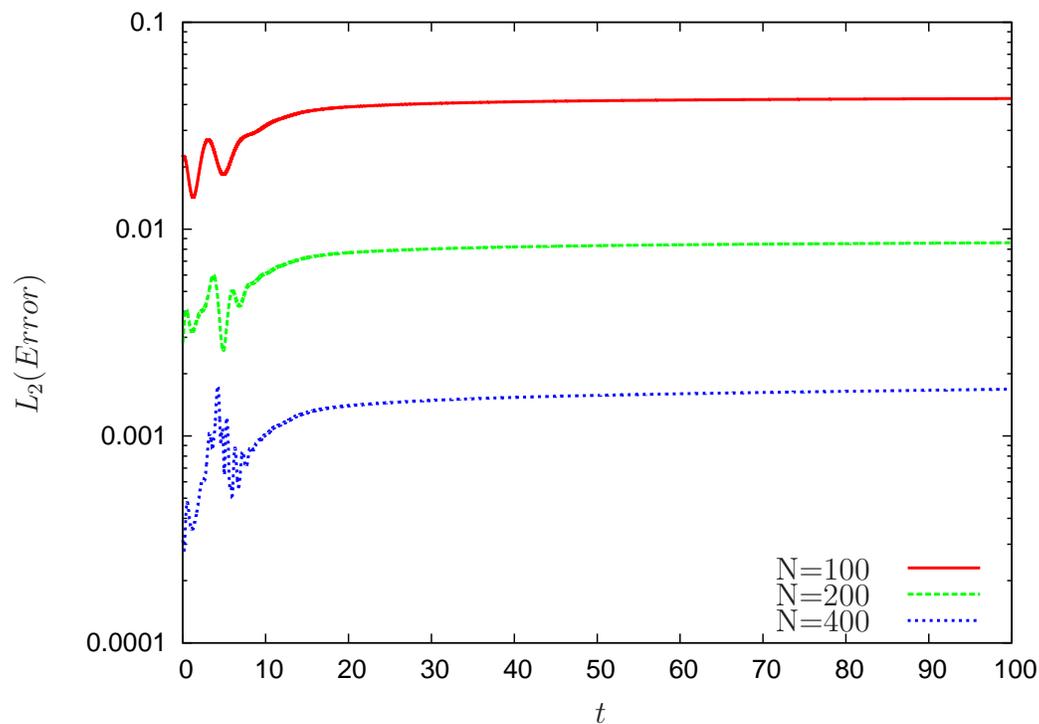


Figura 4.8: En esta figura se muestra la norma L_2 de error, la cual es calculada con tres resoluciones diferentes, guardando una convergencia aproximada de segundo orden. Como el caso anterior, las oscilaciones al principio se deben a que los datos iniciales con que se comienza la evolución, corresponden a la solución exacta.

nante en la vecindad de un hoyo negro supermasivo. El modelo consiste en la solución de las ecuaciones de Euler relativistas dependientes del tiempo de un gas ideal sobre el espacio-tiempo de un hoyo negro de Schwarzschild, donde el fluido juega el papel de la materia oscura. La materia oscura colisionante y no colisionante se modela como un gas ideal con y sin presión, respectivamente, con el fin de estudiar la posibilidad de que la presión sea suficiente para parar el proceso de acreción descontrolado y poner el sistema en un régimen estacionario, que permita a un hoyo negro – en este caso un hoyo negro supermasivo – tener las masas observadas hoy en día. Por otra parte, una vez el proceso de acreción alcance dicho régimen estacionario, se analiza el perfil de densidad resultante con el fin de verificar si dicho perfil es consistente con las distribuciones de materia oscura en escalas muy locales cercanas al hoyo negro supermasivo.

Materia oscura colisionante y no colisionante

El problema de la formación y evolución de hoyos negros supermasivos (SMBH por sus siglas en inglés) en el centro de galaxias elípticas y tipo discoidal aún permanece incierto. Por otra parte, el crecimiento de un hoyo negro está relacionado usualmente a su coexistencia con la materia que lo circunda; ésta puede ser, tanto materia bariónica como materia oscura. Algunos modelos consideran que los HNSM pueden ser el resultado de la evolución de hoyos negros semilla que pueden crecer mediante el proceso de acreción. Por ejemplo, uno de estos modelos considera que los hoyos negros semilla pueden ser el resultado del colapso de nubes de gas primordial en la evolución temprana de las galaxias. Estos hoyos negros semilla podrían tener masas del orden de 10^3 a 10^4 masas solares [Eisenstein & Loeb 1995]. Por otra parte, cuando se considera que los hoyos negros semilla provienen del resultado del colapso de estrellas masivas relativistas, los órdenes con que estos deben empezar son de cientos de masas solares [Heger et al. 2003]; también los modelos combinados del colapso de gas primordial y materia oscura consideran que los hoyos negros semilla deberían tener masas intermedias

[Umeda et al. 2009]. Otros estudios, como el de la función de luminosidad bolométrica a varias distancias indica que la masa acretada por los SMBH debería ser bariónica [Small & Blandford 1992, Hopkins et al. 2007]. Sin embargo no hay una respuesta final acerca de la cantidad de materia oscura acretada por un SMBH, en la referencia [Peirani & Freitas-Pacheco 2008], por ejemplo, se muestra que la materia oscura contribuye con al menos 10 % de la masa total acretada.

Algunos modelos no comunes consideran que los SMBH crecen a través de la acreción directa de materia oscura colisionante o auto-interactuante [Ostriker 2000, Hu et al. 2006]. Dicha materia ha sido estudiada a escalas galácticas como una posible solución al problema del núcleo (cusp core problem) galáctico [Spergel & Steinhardt 2000] y al correspondiente colapso gravitacional [Moore et al. 2000]. Por otra parte, la materia oscura colisionante también tiene sus candidatos en el modelo estándar de partículas, por ejemplo los singletes [Holz & Zee 2001], los cuales hacen referencia a una representación unidimensional, por ejemplo, una partícula en la cual el spin es cero. Finalmente, en este trabajo se presentan resultados de modelos de materia oscura colisionante y no colisionante y su posible aporte al crecimiento de los SMBH.

Resultados

Condiciones iniciales y diagnóstico:

Con el fin de resolver las ecuaciones de Euler relativistas (4.1), se tiene que proporcionar los datos iniciales en $t = 0$ para la densidad en reposo ρ_0 , la velocidad Euleriana v^r y la energía interna específica ϵ . En principio, no existe prescripción alguna para los valores de estas cantidades y pueden ser arbitrarias. Uno de los intereses de este trabajo es buscar estados de equilibrio, lo cual nos permite determinar si hay materia oscura hoy en día o toda fué acretada por el hoyo negro. Por esta razón, se comienza con configuraciones completamente fuera del equilibrio, con el fin de ver si los sistemas

se relajan y alcanzan una especie de solución atractora en el tiempo. Para el caso de la densidad, se considera un dato inicial constante, el cual corresponde a una condición fuera del equilibrio y a su vez produce un comportamiento dinámico. También, se encuentra que la velocidad radial solamente está restringida en el sentido de que para velocidades iniciales grandes, el fluido podría alcanzar velocidades ultrarelativistas cuando se aproxima al horizonte de eventos. Un parámetro inicial para el cual no existe prescripción alguna es la energía interna específica. Su valor inicial determina la presión en el tiempo inicial con la propiedad de que cuando se aproxima a cero la condición inicial corresponde al caso de materia oscura no colisionante $p = 0$.

Ahora, con el fin de hacer algo de diagnóstico sobre la simulación, se implementan una serie de detectores localizados a diferentes radios sobre en dominio numérico, específicamente, se definen esferas donde se calculan cantidades escalares. En particular, se calcula la razón de masa acretada, dada por

$$\dot{M}_{acc} = -4\pi r^2 \rho_0 W \left(v^r - \frac{\beta^r}{\alpha} \right), \quad (4.30)$$

en distintas superficies esféricas, incluyendo en el horizonte de eventos. Esta cantidad proviene de considerar la masa invariante de norma, la cual puede obtenerse a partir de la integral de volumen de la densidad relativista en un volumen propio dado. Luego haciendo uso de la ecuación de continuidad y el teorema de la divergencia de Gauss se obtiene esta expresión para la masa acretada. Finalmente, se utilizan unidades geométricas $G = c = 1$, donde el tiempo y el espacio están en unidades de M ; una densidad de materia oscura típica $\rho_{DM} \sim 100 M_\odot / pc^3$ corresponde a $\rho_{DM} \sim 10^{-26} M^{-2}$ y $10^{-30} M^{-2}$ para hoyos negros semilla de masas de 10^6 y $10^4 M_\odot$, respectivamente. Sin embargo, debido a las restricciones numéricas que aparecen asociadas a la diferencia de ordenes de magnitud que hay entre la masa del hoyo negro y las densidades ultrabajas en el fluido, como las correspondientes para la materia oscura, aquí se estudia la acreción de un fluido numéricamente manejable y después se extrapolan los resultados numéricos para la densidad correspondiente a la materia oscura. Esto es, se llevan a cabo varias

simulaciones numéricas con diferentes densidades, manejables computacionalmente, y con éstas se hace un estudio para extrapolar a las densidades correspondientes a la materia oscura.

Caso $p = 0$:

En la Figura 4.9, se muestran los resultados numéricos de la razón de masa acretada por diferentes valores la velocidad inicial con un perfil de densidad constante $\rho_0 = 10^{-8}$; la razón de masa acretada está medida en tres superficies esféricas diferentes localizadas en $r = 2M$, $r = 14M$ y $r = 29M$, con el fin de asegurar que la tendencia de dicha razón de acreción no es un artificio numérico.

En todos los casos, la razón de masa acretada incrementa rápidamente y nunca las evoluciones numéricas aquí mostradas alcanzan el régimen estacionario. Con el fin de medir qué tan rápido crece la masa, se ajusta la masa acretada de todas las simulaciones con el anzats $M = At^B$. También se extrapolan los parámetros A y B a dos valores razonables correspondientes a la densidad para la materia oscura, para hoyos negros semilla de 10^4 y 10^6 masas solares. Todos estos resultados se resumen en la Tabla 4.2, donde las dos últimas columnas corresponden a la extrapolación a densidades de $100M_\odot/pc^3$ alrededor de hoyos negros de 10^4 and 10^6M_\odot . El dominio usado en estas simulaciones numéricas es de $M < r < 1001M$ y las condiciones de frontera corresponden a las condiciones de flujo entrante.

Una vez hecha la extrapolación, con el fin de explorar la posibilidad de que un fluido sin presión pueda ser la materia oscura, se consideran dos experimentos particulares:

1. El sistema se escoge de tal forma que empieza a acretar hace 10 Giga años, con una densidad de materia oscura inicial de $100M_\odot/pc^3$ alrededor de un hoyo negro semilla de 10^4M_\odot
2. El segundo sistema empieza acretando también hace 10 Giga años alrededor de

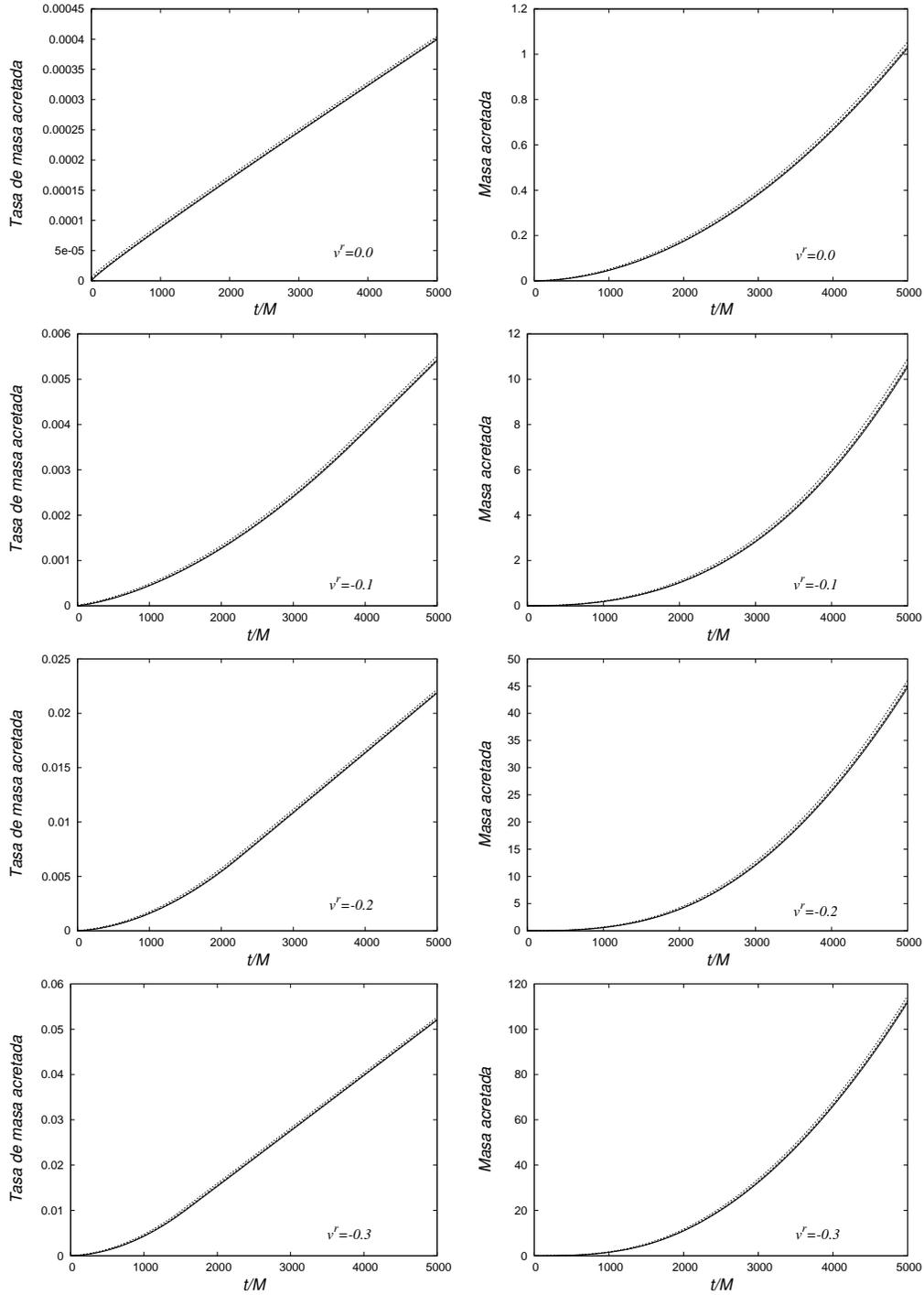


Figura 4.9: En esta figura se presentan la tasa de masa acretada y la masa acretada, para un gas sin presión para diferentes valores de la velocidad inicial $v^r = 0,0, -0,1, -0,2, -0,3$. En todos los casos, el valor inicial de la densidad que se usa es $\rho = 10^{-8}$. Los diferentes tipos de líneas indican que la acreción está siendo medida en diferentes detectores esféricos localizados en $r = 2M$, $r = 14M$ y $r = 29M$.

un hoyo negro semilla de $10^6 M_\odot$.

Los parámetros de ajuste están en la Tabla 4.2, mientras los resultados para estos dos experimentos se encuentran en la Tabla 4.3, donde se muestra que los hoyos negros acretan demasiada materia oscura, tanta que en el caso más conservativo después de 10 Giga años la masa que el hoyo negro alcanza es de $10^{11} M_\odot$ o incluso en el peor de los casos el hoyo negro alcanzaría masas de $10^{22} M_\odot$. Hay que recordar que como solo se considera acreción radial, estos casos funcionan como límites superiores para modelos mas realistas de la materia oscura.

		Extrapolando la masa acretada (fluido de polvo)							
	$\rho = 10^{-2}$	$\rho = 10^{-4}$	$\rho = 10^{-6}$	$\rho = 10^{-8}$	$\rho = 10^{-10}$ (Floor)	...	$\rho = 10^{-26}$...	$\rho = 10^{-30}$
$v^r = 0,0$	$A = 0,062506 \pm 0,000103$ $B = 1,9506 \pm 0,0001769$	$A = (0,062506 \pm 0,000103) * 10^{-2}$ $B = 1,9506 \pm 0,0001769$	$A = (0,062506 \pm 0,000103) * 10^{-4}$ $B = 1,9506 \pm 0,0001769$	$A = (0,062506 \pm 0,000103) * 10^{-6}$ $B = 1,9506 \pm 0,0001769$	$A = (0,062506 \pm 0,000103) * 10^{-8}$ $B = 1,9506 \pm 0,0001769$...	$A = (0,062506 \pm 0,000103) * 10^{-24}$ $B = 1,9506 \pm 0,0001769$...	$A = (0,062506 \pm 0,000103) * 10^{-28}$ $B = 1,9506 \pm 0,0001769$
$v^r = -0,1$	$A = 0,00423575 \pm 8,719 * 10^{-3}$ $B = 2,53978 \pm 0,002341$	$A = (0,00423575 \pm 8,719 * 10^{-3}) * 10^{-2}$ $B = 2,53978 \pm 0,002341$	$A = (0,00423575 \pm 8,719 * 10^{-3}) * 10^{-4}$ $B = 2,53978 \pm 0,002341$	$A = (0,00423575 \pm 8,719 * 10^{-3}) * 10^{-6}$ $B = 2,53978 \pm 0,002341$	$A = (0,00423575 \pm 8,719 * 10^{-3}) * 10^{-8}$ $B = 2,53978 \pm 0,002341$...	$A = (0,00423575 \pm 8,719 * 10^{-3}) * 10^{-24}$ $B = 2,53978 \pm 0,002341$...	$A = (0,00423575 \pm 8,719 * 10^{-3}) * 10^{-28}$ $B = 2,53978 \pm 0,002341$
$v^r = -0,2$	$A = 0,173486 \pm 0,006026$ $B = 2,27724 \pm 0,003729$	$A = (0,173486 \pm 0,006026) * 10^{-2}$ $B = 2,27724 \pm 0,003729$	$A = (0,173486 \pm 0,006026) * 10^{-4}$ $B = 2,27724 \pm 0,003729$	$A = (0,173486 \pm 0,006026) * 10^{-6}$ $B = 2,27724 \pm 0,003729$	$A = (0,173486 \pm 0,006026) * 10^{-8}$ $B = 2,27724 \pm 0,003729$...	$A = (0,173486 \pm 0,006026) * 10^{-24}$ $B = 2,27724 \pm 0,003729$...	$A = (0,173486 \pm 0,006026) * 10^{-28}$ $B = 2,27724 \pm 0,003729$
$v^r = -0,3$	$A = 0,832518 \pm 0,02417$ $B = 2,19968 \pm 0,00342$	$A = (0,832518 \pm 0,02417) * 10^{-2}$ $B = 2,19968 \pm 0,00342$	$A = (0,832518 \pm 0,02417) * 10^{-4}$ $B = 2,19968 \pm 0,00342$	$A = (0,832518 \pm 0,02417) * 10^{-6}$ $B = 2,19968 \pm 0,00342$	$A = (0,832518 \pm 0,02417) * 10^{-8}$ $B = 2,19968 \pm 0,00342$...	$A = (0,832518 \pm 0,02417) * 10^{-24}$ $B = 2,19968 \pm 0,00342$...	$A = (0,832518 \pm 0,02417) * 10^{-28}$ $B = 2,19968 \pm 0,00342$

Cuadro 4.2: En esta tabla se muestra el ajuste de los parámetros que describen la función de crecimiento de la masa para un amplio conjunto de valores de la densidad inicial y de la velocidad inicial del fluido de prueba para el caso de presión nula. También se muestran los valores de la extrapolación correspondientes a la densidad de materia oscura $\rho = 10^{-26}$ y $\rho = 10^{-30}$ en unidades geométricas, que corresponden a los casos analizados.

	semilla $M_{(i)} = 10^4 M_{\odot}$	semilla $M_{(ii)} = 10^6 M_{\odot}$
$v^r = 0,0$	$3,04 \times 10^7 M_{(i)}$	$3,82 \times 10^7 M_{(ii)}$
$v^r = -0,1$	$2,49 \times 10^{17} M_{(i)}$	$2,07 \times 10^{16} M_{(ii)}$
$v^r = -0,2$	$1,17 \times 10^{14} M_{(i)}$	$3,28 \times 10^{13} M_{(ii)}$
$v^r = -0,3$	$1,96 \times 10^{13} M_{(i)}$	$7,82 \times 10^{12} M_{(ii)}$

Cuadro 4.3: En esta tabla, se muestra la masa acretada por un hoyo negro semilla desde hace 10 Giga años hasta hoy en día para el caso de dos hoyos semilla. El perfil inicial de materia oscura es $\rho = 100 M_{\odot} pc^{-3}$, el cual en unidades geométricas, para hoyos negros semillas de masas $M_{(i)} = 10^4 M_{\odot}$ y $M_{(ii)} = 10^6 M_{\odot}$, corresponde a $\rho = 1,17 \times 10^{-30}$ y $\rho = 1,17 \times 10^{-26}$. Los valores de la masa acretada para estas densidades son tomados de la extrapolación en la Tabla 4.2.

Caso $p \neq 0$:

En este caso, el espacio de parámetros se expande debido a que aparecen dos nuevas cantidades: el índice adiabático Γ y la energía interna específica ϵ a tiempos iniciales. Con el fin de explorar este amplio espacio de parámetros, se consideran los siguientes casos:

1. De nuevo, se escogen varios valores de la densidad inicial $\rho_0 = 10^{-4}, 10^{-6}, 10^{-8}, 10^{-10}$.
2. Solamente se estudian dos casos de la velocidad inicial $v^r = -0,1, -0,2$.
3. Se escogen dos valores del índice adiabático, $\Gamma = 1,1, 1,2$.
4. Finalmente, se escogen dos valores para la energía interna específica, $\epsilon = 0,5, 1$, debido a que desafortunadamente no hay una prescripción de este parámetro, a menos que, por ejemplo, se asuma inicialmente una ecuación de estado politrópica, en la cual la constante politrópica sería otro parámetro libre.

En todas las combinaciones de estos parámetros, se encuentra que los procesos de acreción alcanzan un régimen estacionario. En la Figura 4.10 se muestran diferentes ejemplos de los resultados que indican que, después de un periodo transitorio, hay una acreción de masa lineal, donde la configuración inicial, fuera del equilibrio, alcanza una solución estacionaria. Por completez, en la Figura 4.11, se muestra como un ejemplo, la razón de masa acretada para dos valores diferentes de la energía interna específica inicial. Esta figura muestra el papel que juega esta cantidad, esto es, en el límite cuando ϵ tiende a cero, la presión tiende a cero también, recuperando de esta forma el caso de un fluido con presión cero.

Los resultados de razón de masa acretada por el hoyo negro, se encuentran en la Tabla 4.4, donde, como en el caso del fluido sin presión, también se extrapolan los resultados ajustados a densidades ultrabajas correspondientes a materia oscura. El dominio numérico usado para las simulaciones es de $M < r < 1001M$. Con estos parámetros extrapolados, se estima la masa acretada durante 10Giga años, la cual puede encontrarse en la Tabla 4.5.

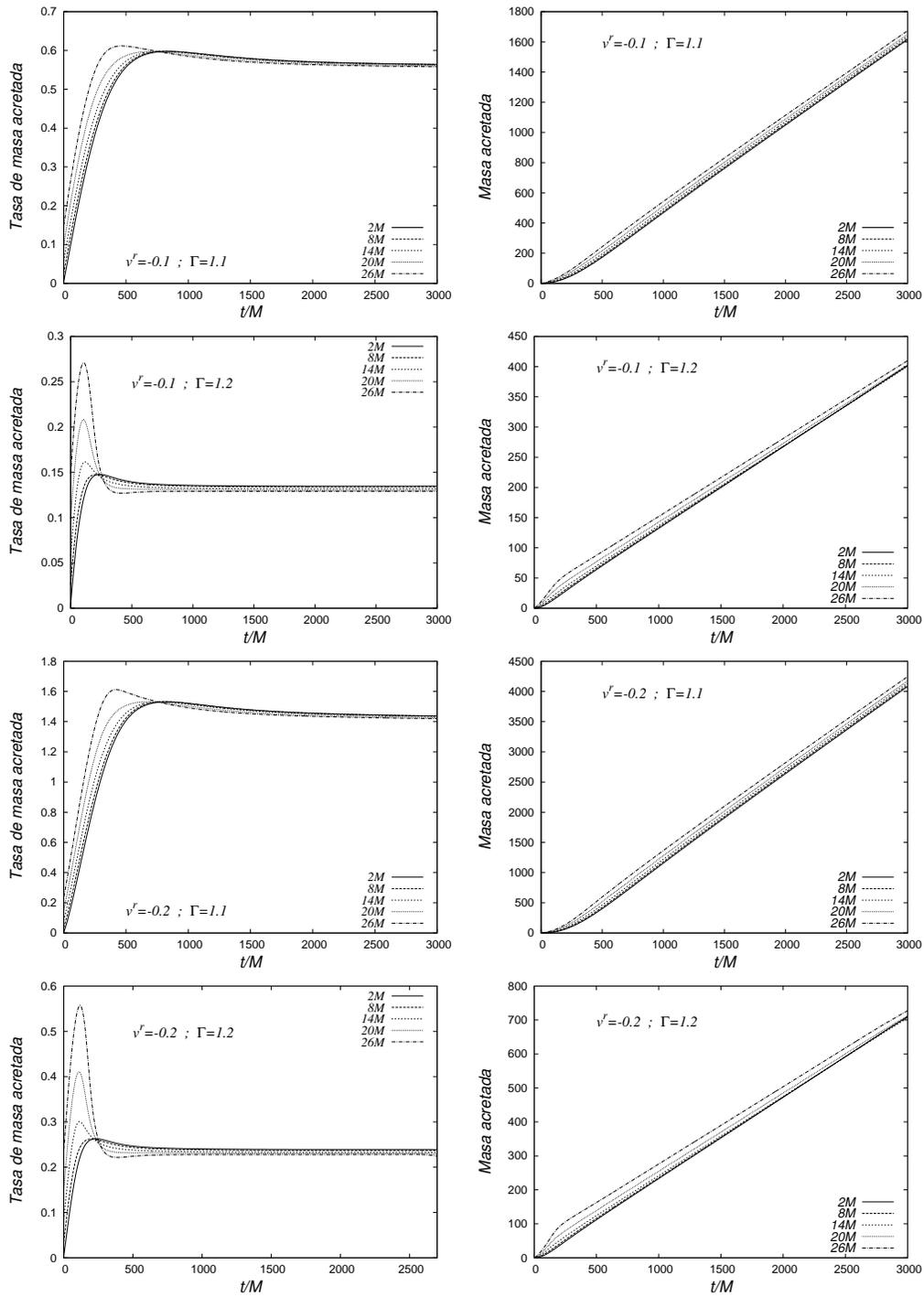


Figura 4.10: En esta figura se presenta la razón de masa acretada y la masa acretada, para un gas ideal, para dos valores de la velocidad coordenada v^r y dos valores del índice adiabático Γ . En todos los casos, la densidad inicial y la energía interna específica usadas son $\rho = 10^{-4}$ y $\epsilon = 0,5$, respectivamente. Los diferentes tipos de líneas indican que la acreción se está midiendo en varias superficies esféricas.

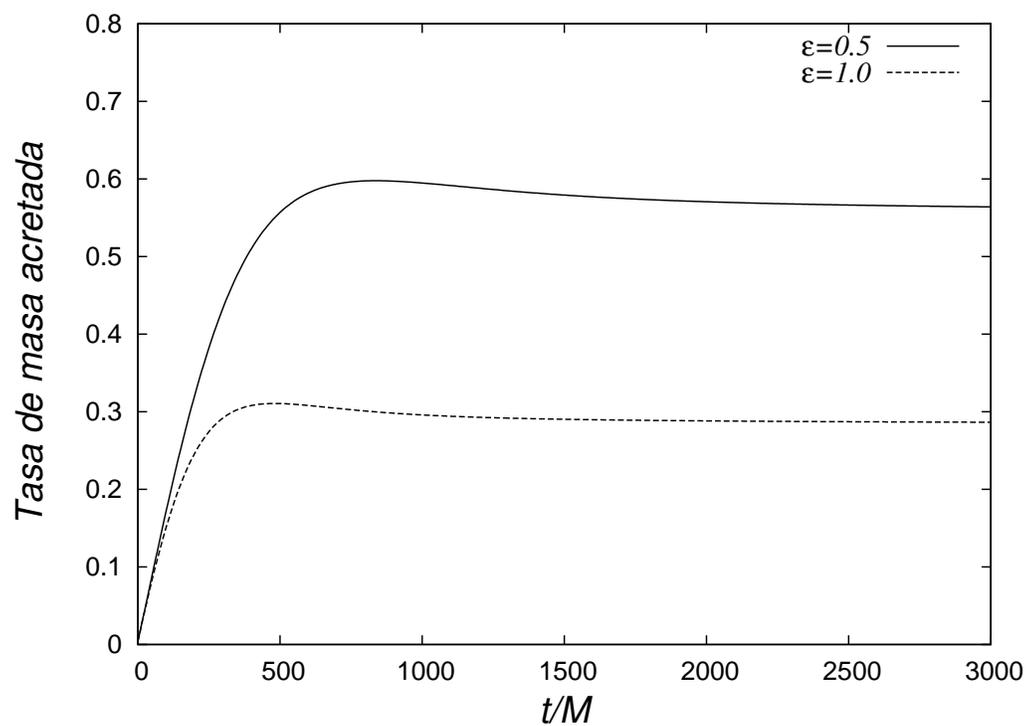


Figura 4.11: En esta figura se presenta la tasa de acreción de un gas ideal, para dos valores de la energía interna específica $\epsilon = 0,5, 1,0$. Por otra parte, los valores de la densidad, velocidad inicial y índice adiabático son: $\rho_0 = 10^{-4}$, $v^r = -0,1$ y $\Gamma = 1,1$.

	$\rho = 10^{-4}$	$\rho = 10^{-6}$	$\rho = 10^{-8}$	$\rho = 10^{-10}$ (Floor)	...	$\rho = 10^{-26}$...	$\rho = 10^{-30}$
Extrapolando la masa acretaada (Ecuación de estado de un gas ideal con $\Gamma = 1,1$ y $\epsilon = 0,5$)								
$v^r = -0,1$	$A = 0,808384 \pm 0,001781$ $B = 0,96003 \pm 0,0002526$ $C = -145,048 \pm 0,3033$	$A = (0,808384 \pm 0,001781) * 10^{-2}$ $B = 0,96003 \pm 0,0002526$ $C = (-145,048 \pm 0,3033) * 10^{-2}$	$A = (0,808384 \pm 0,001781) * 10^{-4}$ $B = 0,96003 \pm 0,0002526$ $C = (-145,048 \pm 0,3033) * 10^{-4}$	$A = (0,808384 \pm 0,001781) * 10^{-6}$ $B = 0,96003 \pm 0,0002526$ $C = (-145,048 \pm 0,3033) * 10^{-6}$...	$A = (0,808384 \pm 0,001781) * 10^{-22}$ $B = 0,96003 \pm 0,0002526$ $C = (-145,048 \pm 0,3033) * 10^{-22}$...	$A = (0,808384 \pm 0,001781) * 10^{-26}$ $B = 0,96003 \pm 0,0002526$ $C = (-145,048 \pm 0,3033) * 10^{-26}$
$v^r = -0,2$	$A = 2,22404 \pm 0,006492$ $B = 0,951153 \pm 0,0003345$ $C = -430,184 \pm 1,041$	$A = (2,22404 \pm 0,006492) * 10^{-2}$ $B = 0,951153 \pm 0,0003345$ $C = (-430,184 \pm 1,041) * 10^{-2}$	$A = (2,22404 \pm 0,006492) * 10^{-4}$ $B = 0,951153 \pm 0,0003345$ $C = (-430,184 \pm 1,041) * 10^{-4}$	$A = (2,22404 \pm 0,006492) * 10^{-6}$ $B = 0,951153 \pm 0,0003345$ $C = (-430,184 \pm 1,041) * 10^{-6}$...	$A = (2,22404 \pm 0,006492) * 10^{-22}$ $B = 0,951153 \pm 0,0003345$ $C = (-430,184 \pm 1,041) * 10^{-22}$...	$A = (2,22404 \pm 0,006492) * 10^{-26}$ $B = 0,951153 \pm 0,0003345$ $C = (-430,184 \pm 1,041) * 10^{-26}$
Extrapolando la masa acretaada (Ecuación de estado de un gas ideal con $\Gamma = 1,2$ y $\epsilon = 0,5$)								
$v^r = -0,1$	$A = 0,145753 \pm 0,0002368$ $B = 0,990879 \pm 0,0001922$ $C = -4,70678 \pm 0,04092$	$A = (0,145753 \pm 0,0002368) * 10^{-2}$ $B = 0,990879 \pm 0,0001922$ $C = (-4,70678 \pm 0,04092) * 10^{-2}$	$A = (0,145753 \pm 0,0002368) * 10^{-4}$ $B = 0,990879 \pm 0,0001922$ $C = (-4,70678 \pm 0,04092) * 10^{-4}$	$A = (0,145753 \pm 0,0002368) * 10^{-6}$ $B = 0,990879 \pm 0,0001922$ $C = (-4,70678 \pm 0,04092) * 10^{-6}$...	$A = (0,145753 \pm 0,0002368) * 10^{-22}$ $B = 0,990879 \pm 0,0001922$ $C = (-4,70678 \pm 0,04092) * 10^{-22}$...	$A = (0,145753 \pm 0,0002368) * 10^{-26}$ $B = 0,990879 \pm 0,0001922$ $C = (-4,70678 \pm 0,04092) * 10^{-26}$
$v^r = -0,2$	$A = 0,260364 \pm 0,0004783$ $B = 0,990018 \pm 0,0002173$ $C = -10,0288 \pm 0,08219$	$A = (0,260364 \pm 0,0004783) * 10^{-2}$ $B = 0,990018 \pm 0,0002173$ $C = (-10,0288 \pm 0,08219) * 10^{-2}$	$A = (0,260364 \pm 0,0004783) * 10^{-4}$ $B = 0,990018 \pm 0,0002173$ $C = (-10,0288 \pm 0,08219) * 10^{-4}$	$A = (0,260364 \pm 0,0004783) * 10^{-6}$ $B = 0,990018 \pm 0,0002173$ $C = (-10,0288 \pm 0,08219) * 10^{-6}$...	$A = (0,260364 \pm 0,0004783) * 10^{-22}$ $B = 0,990018 \pm 0,0002173$ $C = (-10,0288 \pm 0,08219) * 10^{-22}$...	$A = (0,260364 \pm 0,0004783) * 10^{-26}$ $B = 0,990018 \pm 0,0002173$ $C = (-10,0288 \pm 0,08219) * 10^{-26}$
Extrapolando la masa acretaada (Ecuación de estado de un gas ideal con $\Gamma = 1,1$ y $\epsilon = 1,0$)								
$v^r = -0,1$	$A = 0,396444 \pm 0,001466$ $B = 0,963098 \pm 0,0004361$ $C = -39,3563 \pm 0,2112$	$A = (0,396444 \pm 0,001466) * 10^{-2}$ $B = 0,963098 \pm 0,0004361$ $C = (-39,3563 \pm 0,2112) * 10^{-2}$	$A = (0,396444 \pm 0,001466) * 10^{-4}$ $B = 0,963098 \pm 0,0004361$ $C = (-39,3563 \pm 0,2112) * 10^{-4}$	$A = (0,396444 \pm 0,001466) * 10^{-6}$ $B = 0,963098 \pm 0,0004361$ $C = (-39,3563 \pm 0,2112) * 10^{-6}$...	$A = (0,396444 \pm 0,001466) * 10^{-22}$ $B = 0,963098 \pm 0,0004361$ $C = (-39,3563 \pm 0,2112) * 10^{-22}$...	$A = (0,396444 \pm 0,001466) * 10^{-26}$ $B = 0,963098 \pm 0,0004361$ $C = (-39,3563 \pm 0,2112) * 10^{-26}$
$v^r = -0,2$	$A = 0,891524 \pm 0,003389$ $B = 0,961579 \pm 0,0004483$ $C = -100,255 \pm 0,4835$	$A = (0,891524 \pm 0,003389) * 10^{-2}$ $B = 0,961579 \pm 0,0004483$ $C = (-100,255 \pm 0,4835) * 10^{-2}$	$A = (0,891524 \pm 0,003389) * 10^{-4}$ $B = 0,961579 \pm 0,0004483$ $C = (-100,255 \pm 0,4835) * 10^{-4}$	$A = (0,891524 \pm 0,003389) * 10^{-6}$ $B = 0,961579 \pm 0,0004483$ $C = (-100,255 \pm 0,4835) * 10^{-6}$...	$A = (0,891524 \pm 0,003389) * 10^{-22}$ $B = 0,961579 \pm 0,0004483$ $C = (-100,255 \pm 0,4835) * 10^{-22}$...	$A = (0,891524 \pm 0,003389) * 10^{-26}$ $B = 0,961579 \pm 0,0004483$ $C = (-100,255 \pm 0,4835) * 10^{-26}$
Extrapolando la masa acretaada (Ecuación de estado de un gas ideal con $\Gamma = 1,2$ y $\epsilon = 1,0$)								
$v^r = -0,1$	$A = 0,0891933 \pm 0,0003314$ $B = 0,987067 \pm 0,0004521$ $C = -1,86548 \pm 0,04307$	$A = (0,0891933 \pm 0,0003314) * 10^{-2}$ $B = 0,987067 \pm 0,0004521$ $C = (-1,86548 \pm 0,04307) * 10^{-2}$	$A = (0,0891933 \pm 0,0003314) * 10^{-4}$ $B = 0,987067 \pm 0,0004521$ $C = (-1,86548 \pm 0,04307) * 10^{-4}$	$A = (0,0891933 \pm 0,0003314) * 10^{-6}$ $B = 0,987067 \pm 0,0004521$ $C = (-1,86548 \pm 0,04307) * 10^{-6}$...	$A = (0,0891933 \pm 0,0003314) * 10^{-22}$ $B = 0,987067 \pm 0,0004521$ $C = (-1,86548 \pm 0,04307) * 10^{-22}$...	$A = (0,0891933 \pm 0,0003314) * 10^{-26}$ $B = 0,987067 \pm 0,0004521$ $C = (-1,86548 \pm 0,04307) * 10^{-26}$
$v^r = -0,2$	$A = 0,135829 \pm 0,0001597$ $B = 0,997385 \pm 0,0001416$ $C = -1,54871 \pm 0,02557$	$A = (0,135829 \pm 0,0001597) * 10^{-2}$ $B = 0,997385 \pm 0,0001416$ $C = (-1,54871 \pm 0,02557) * 10^{-2}$	$A = (0,135829 \pm 0,0001597) * 10^{-4}$ $B = 0,997385 \pm 0,0001416$ $C = (-1,54871 \pm 0,02557) * 10^{-4}$	$A = (0,135829 \pm 0,0001597) * 10^{-6}$ $B = 0,997385 \pm 0,0001416$ $C = (-1,54871 \pm 0,02557) * 10^{-6}$...	$A = (0,135829 \pm 0,0001597) * 10^{-22}$ $B = 0,997385 \pm 0,0001416$ $C = (-1,54871 \pm 0,02557) * 10^{-22}$...	$A = (0,135829 \pm 0,0001597) * 10^{-26}$ $B = 0,997385 \pm 0,0001416$ $C = (-1,54871 \pm 0,02557) * 10^{-26}$

Cuadro 4.4: En esta tabla se muestra el ajuste de la masa acretaada para los valores de la energía interna específica $\epsilon = 0,5, 1,0$ y el índice adiabático $\Gamma = 1,1, 1,2$. También se muestra la extrapolación del valor correspondiente a la densidad de materia oscura $\rho = 10^{-26}$ y $\rho = 10^{-30}$ en unidades geométricas, la cual corresponde a dos casos particulares analizados abajo. El *anzats* usado para ajustar la masa acretaada es $M_{acc} = At^B + C$.

Algo que llama la atención en estos resultados, es que el régimen estacionario en los diferentes procesos de acreción es muy sensible al parámetro Γ . Como se puede observar en las Tablas 4.3 y 4.5, la masa acretada puede cambiar hasta 15 ordenes de magnitud cuando el parámetro Γ va de 1 a 1,1. Con el fin de mostrar que esto último no es error de los algoritmos numéricos usados, se muestra en la Figura 4.12 que el proceso de acreción cambia monótonamente con Γ desde el caso $\Gamma = 1$ hasta el caso $\Gamma = 1,1$.

Como conclusión se encuentra que para hoyos negros semilla de $10^6 M_\odot$, la masa acretada durante $10Gyr$ es del orden de masas solares. Esto implica que la materia oscura podría obedecer una ecuación de estado con presión diferente de cero, o en un caso más conservativo, la acreción de materia oscura en un hoyo negro supermasivo contribuye con una pequeña fracción comparada con la posible acreción de materia bariónica, como se sugiere en la referencia [Peirani & Freitas-Pacheco 2008], donde un límite del 10 % de la acreción de materia es debido a materia oscura. Estos resultados han sido presentados en [Guzmán & Lora-Clavijo 2011a]

Hay que aclarar que el modelo de acreción esféricamente simétrica es un primer paso hacia un estudio más detallado del sistema SMBH y materia oscura, el cual, en una versión completa, debería involucrar cosas como por ejemplo: componentes del momento angular del fluido, evolución de la geometría del espacio-tiempo, transferencia de momento angular del hoyo negro al fluido, etc.

Finalmente, con el fin de validar los resultados de las simulaciones, se presenta como prueba numérica la auto-convergencia de la densidad de masa en reposo para dos de las simulaciones, ver la Figura 4.13. Lo que se encuentra en estos casos es que la auto-convergencia es de primer orden, lo cual es consistente con el reconstructor constante por pedazos usado para llevar acabo dichas simulaciones.

	semilla $M_{(i)} = 10^4 M_{\odot}$	semilla $M_{(ii)} = 10^6 M_{\odot}$
$\Gamma = 1,1$, $\epsilon = 0,5$		
$v^r = -0,1$	$9,21 \times 10^{-9} M_{(i)}$	$1,11 \times 10^{-6} M_{(ii)}$
$v^r = -0,2$	$1,72 \times 10^{-8} M_{(i)}$	$2,16 \times 10^{-6} M_{(ii)}$
$\Gamma = 1,2$, $\epsilon = 0,5$		
$v^r = -0,1$	$6,31 \times 10^{-9} M_{(i)}$	$6,59 \times 10^{-7} M_{(ii)}$
$v^r = -0,2$	$1,1 \times 10^{-8} M_{(i)}$	$1,14 \times 10^{-6} M_{(ii)}$
$\Gamma = 1,1$, $\epsilon = 1,0$		
$v^r = -0,1$	$5,2 \times 10^{-9} M_{(i)}$	$6,11 \times 10^{-7} M_{(ii)}$
$v^r = -0,2$	$1,1 \times 10^{-8} M_{(i)}$	$1,29 \times 10^{-6} M_{(ii)}$
$\Gamma = 1,2$, $\epsilon = 1,0$		
$v^r = -0,1$	$3,28 \times 10^{-9} M_{(i)}$	$3,48 \times 10^{-7} M_{(ii)}$
$v^r = -0,2$	$7,80 \times 10^{-9} M_{(i)}$	$7,90 \times 10^{-7} M_{(ii)}$

Cuadro 4.5: En esta tabla se muestra la masa acretada por el hoyo negro desde hace 10 Giga años hasta el presente, para dos hoyos negros semilla. El valor inicial del perfil de densidad de materia oscura es $\rho = 100 M_{\odot} pc^{-3}$, el cual en unidades geométricas, para hoyos negros semilla de masas $M_{(i)} = 10^4 M_{\odot}$ y $M_{(ii)} = 10^6 M_{\odot}$, corresponde a $\rho = 1,17 \times 10^{-30}$ y $\rho = 1,17 \times 10^{-26}$ en unidades geométricas respectivamente. Los valores de la masa acretada por estas densidades son tomados de la extrapolación en la Tabla 4.4.

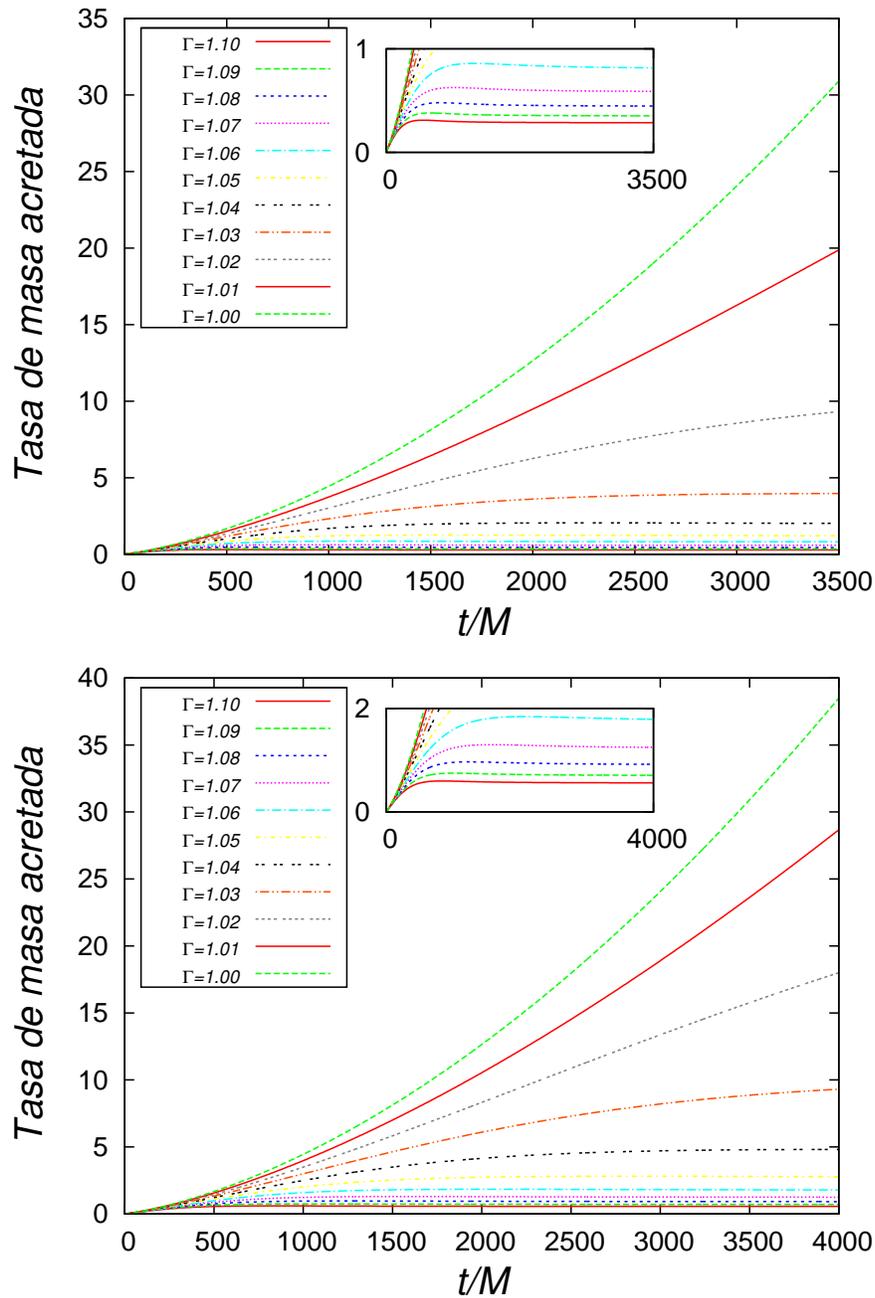


Figura 4.12: En esta gráfica se muestra la razón de masa acretada para diferentes valores de Γ , para configuraciones correspondientes a los siguientes parámetros iniciales $\rho = 10^{-4}$, $v^r = -0,1$, $\epsilon = 0,5,1$. En la gráfica insertada, se muestra una ampliación de la razón de masa acretada que ilustra varios comportamientos en el estado inicial transitorio que depende de Γ .

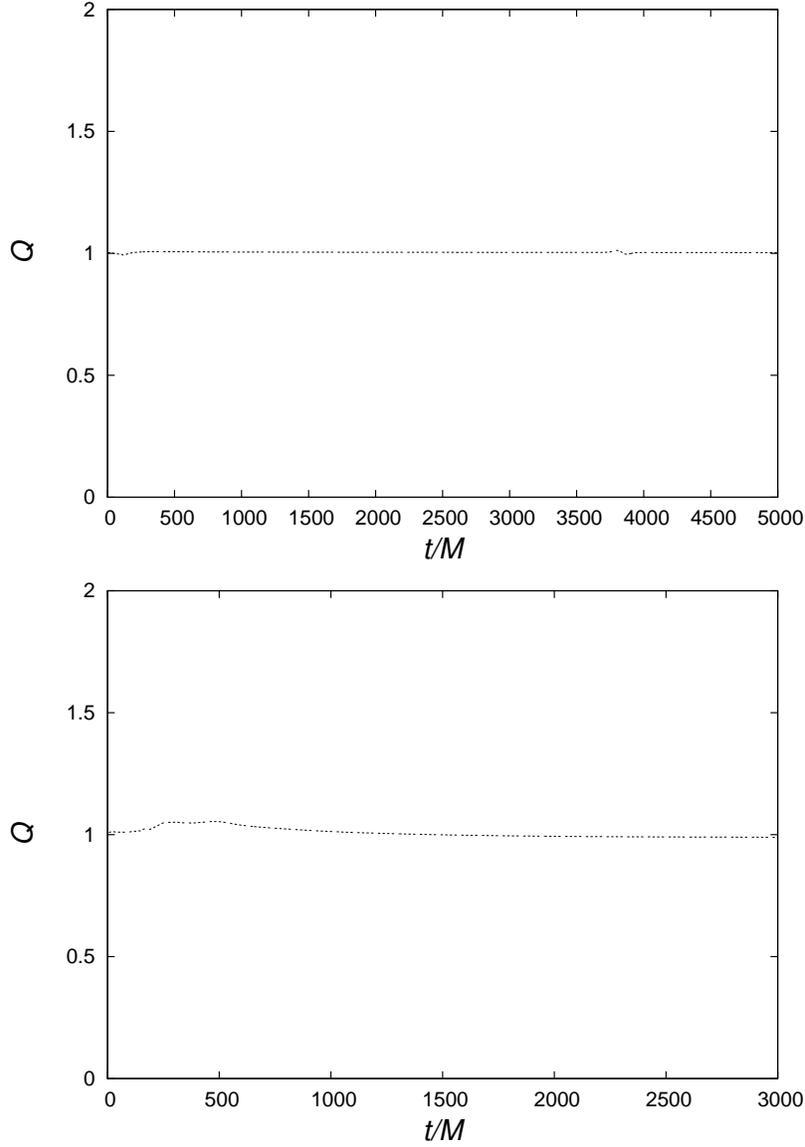


Figura 4.13: En esta figura se muestra el orden de la auto-convergencia de ρ_0 , para dos casos físicos diferentes, 1) (panel de arriba) $p = 0$, $\rho = 10^{-4}$ y $v^r = -0,1$ y, 2) (panel de abajo) $\Gamma = 1,2$, $\rho = 10^{-4}$ $v^r = -0,1$, $\epsilon = 0,5$. Aquí se calcula la convergencia usando la norma L_1 de las diferencias entre el valor de la densidad para tres resoluciones diferentes $\Delta x_1 = 0,1$, $\Delta x_2 = \Delta x_1/2$ y $\Delta x_3 = \Delta x_2/2$. El factor de auto-convergencia Q , para estas resoluciones se calcula de la siguiente expresión $2^{Q_{sc}} = \Delta E_1/\Delta E_2$ donde $\Delta E_1 = L_1(\rho_1 - \rho_2)$ y $\Delta E_2 = L_1(\rho_2 - \rho_3)$. La aproximación dominante es la que corresponde a la reconstrucción de las variables en cada inter-celda, la cual es una reconstrucción constante por pedazos, de tal forma que el factor de convergencia es a primer orden.

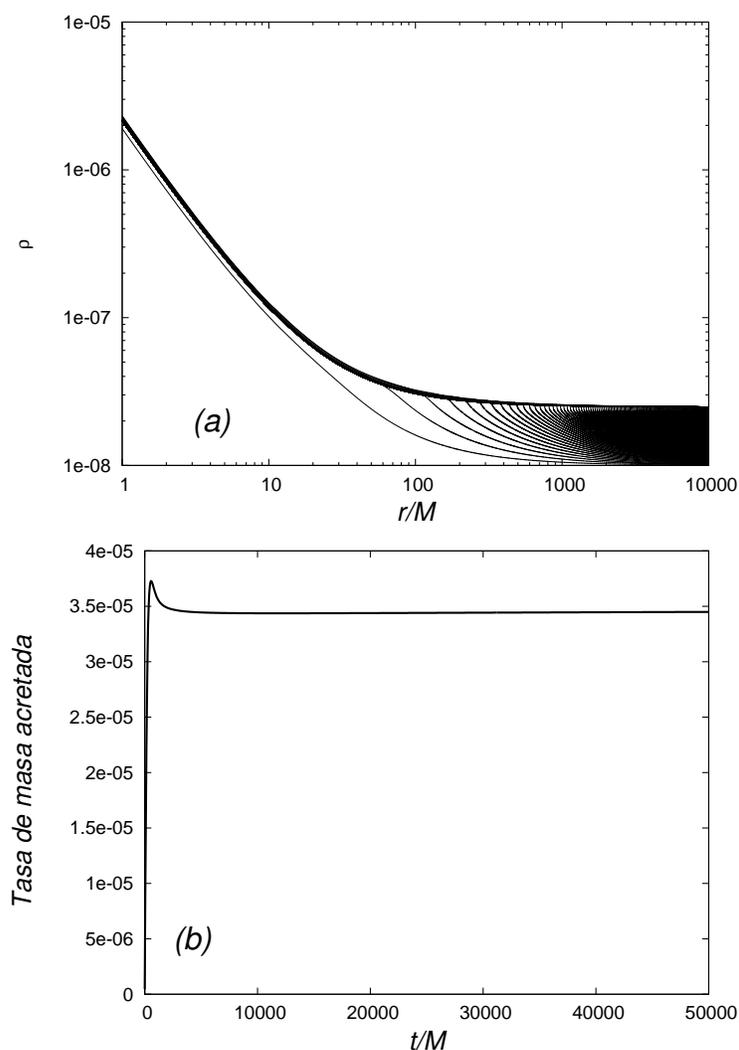


Figura 4.14: (a) Se muestra el perfil de densidad a diferentes tiempos desde $t = 0$ a $t = 50000M$ cada $250M$; los tiempos tempranos corresponden a las líneas en la parte de abajo de la figura y los tiempos lejanos corresponden a las líneas de la parte de arriba, acercándose a la línea negra gruesa. La línea negra gruesa corresponde a una superposición de varios tiempos los cuales muestran un estado estacionario. Por otra parte el perfil de densidad muestra claramente dos regiones: una cerca del hoyo negro hasta $r \sim 50M$, la cual muestra un forma polinomial y una segunda región después de $r \sim 500M$, la cual es constante; Estos son los dos dominios que se usan para ajustar el perfil de densidad de la solución en el régimen estacionario. (b) También se muestra la razón de masa acretada medida en el horizonte de eventos; esta muestra cómo se alcanza un régimen estacionario. Los datos iniciales corresponden a $\rho_0 = 10^{-8}$, $v_0^r = -0,1$, $\Gamma = 1,1$ y $\epsilon = 0,8$.

Perfiles de densidad de materia oscura colisionante

Uno de los temas más importantes relacionados con el problema de la materia oscura es el de los perfiles de densidad en las galaxias. La mayoría de los análisis involucran el estudio de estos perfiles basados en simulaciones numéricas de la formación de estructura y el colapso de materia oscura no colisionante (materia oscura fría (CDM por sus siglas en inglés)).

Dos de los modelos más estudiados en la literatura son el modelo de Navarro-Frenk-White (NFW) [Navarro et al. 1996] y el modelo de Moore [Moore et al. 1999]. Dentro del estudio de los perfiles de densidad, es particularmente interesante entender la distribución de materia oscura en la región central del halo, donde diferentes modelos se han ajustado a la función $\sim 1/r^\kappa$; en particular, los perfiles de NFW y Moore muestran diferentes comportamientos; estos son: $\kappa = 1$ (NFW) y $\kappa = 1,5$ (Moore). Diversos estudios numéricos han proporcionado diferentes valores de κ , la cual, en el lenguaje de los especialistas de la materia oscura, es llamada pendiente. Por ejemplo en [Klypin et al. 2001], basados en simulaciones de halo desde el punto de vista del espacio de fases, el valor de la pendiente es $\kappa = 1,5$, mientras que en [Taylor & Navarro 2001], el perfil de densidad encontrado es de $\kappa = 0,75$ en lugar de $\kappa = 1$, y se parece al perfil de NFW en la región exterior de halo. En [Colín et al. 2004], basados en estudios de halos de baja masa, encontraron que el resultado es $\kappa = 1$, el cual corresponde al mismo límite como en NFW. En el caso de [Diemand et al. 2005], la conclusión es que los halos tienen pendiente $\kappa = 1,2$, mientras que en [Navarro et al. 2004] se encontraron perfiles de densidad con pendiente $\kappa = 0,7$ en radios del orden de $r \sim 0,01$ kpc. En el trabajo de [Stoher 2006] se encontró que dentro de un radio de $r \sim 1$ kpc la pendiente corresponde a $\kappa \sim 1$. También en [Navarro et al. 2010] se encuentra que, dependiendo de la escala radial considerada, aparecen diferentes pendientes, por ejemplo, para $r \sim 0,1$ kpc $\kappa \sim 0,85$, y para $r \sim 1$ kpc $\kappa = 1,4$.

Por otra parte, las observaciones sugieren, dependiendo del tipo de galaxia que se considere, por ejemplo galaxias enanas y galaxias de bajo brillo superficial (LSB por sus siglas en inglés), que los perfiles de densidad son mejor descritos por un modelo de densidad constante [Burkert 1995, Walter et al. 2008]. Específicamente, el perfil de densidad de masa de las galaxias enanas muestra promedios del orden de $\kappa \sim 0,29$ [Oh et al. 2010], mientras que las galaxias LSB muestran perfiles con $\kappa \sim 0,2$ [de Blok et al. 2001]. Otros análisis que incluyen los efectos de los bariones concluyen que $\kappa \sim 0,4$ [Oh et al. 2010]. Esto muestra que el problema de la distribución de materia oscura en el centro de las galaxias está aún en debate, y no hay respuesta clara en este momento. Sin embargo, en este trabajo se mira en una escala aún más pequeña que la del halo de materia oscura, esto es, se estudia la distribución de materia oscura en la vecindad de un hoyo negro supermasivo no rotante, con el fin de entender si algún modelo particular para el perfil de densidad de materia oscura es mejor que otro. Este modelo de acreción esféricamente simétrico, representa un primer paso hacia un estudio más realista del sistema SMBH-materia oscura, el cual en una versión más completa, debe involucrar la intriducción de las componentes del momento angular del fluido, las cuales estarían asociadas con la sección eficaz del hoyo negro, la cual a su vez, restringiría las razones de acreción de materia oscura.

El dominio espacial usado para las simulaciones numéricas es $M \leq r \leq 10000M$, esto es, desde el interior del horizonte de eventos, localizado en $r = M$, hasta la frontera externa localizada muy lejos del horizonte; la frontera exterior en unidades físicas para un hoyo negro de masa $M = 10^9 M_\odot$ corresponde a $0,5pc$, el cual es una escala bastante pequeña comparada con los análisis anteriormente mencionados sobre los perfiles de materia oscura, los cuales manejan la escala del tamaño de los halos galácticos. Cabe mencionar que en todas las corridas llevadas a cabo, la frontera externa está causalmente desconectada, de tal forma que dicha frontera no pueda influenciar en los resultados obtenidos.

Por otra parte, al tiempo inicial se consideran diferentes valores de la densidad de masa en reposo ρ_0 , la energía interna específica $\epsilon_0 = \epsilon(t = 0)$ y el índice adiabático Γ . Una vez el sistema alcanza el régimen estacionario, esto es, la razón de masa acretada es constante y las variables de estado independientes del tiempo, se ajusta al perfil de densidad resultante con una función del tipo A/r^κ , donde κ es el parámetro que determina la pendiente del perfil de densidad de la solución estacionaria. Los resultados que se muestran en la Figura 4.14 sugieren dos regiones diferentes para ajustar el perfil de densidad:

1. La región (I) va desde el horizonte de eventos hasta $\sim 50M$ donde la ley de potencias es evidente.
2. Para la región (II) los dominios van desde aproximadamente $800M$ hacia la frontera exterior, la cual es del orden de un décimo de parsec.

La región (I) está relacionada con la región de campo fuerte, mientras que la región (II) es la que eventualmente podría ajustar con la escala de kpc y así los resultados podrían ser comparados con los resultados a escalas galácticas. Estas regiones varían de una simulación a otra porque el rango de parámetros es muy diverso. Sin embargo, a partir de estas simulaciones, se encuentra que $50M$ es una cota superior para la región (I) en todos los casos que aquí se tienen en cuenta. Por otra parte, para la región (II), el dominio usado es $800 - 1500M$. Uno de los primeros resultados y quizá uno de los más importantes es que para un conjunto de valores dados de Γ y ϵ_0 y diferentes valores ρ_0 a tiempo inicial, el parámetro κ es el mismo, como se puede ver en la Figura 4.15 para la región (I). Esto significa que el valor del exponente κ no depende de el valor inicial del perfil de densidad constante usado para inicializar las simulaciones numéricas. Esto último permite considerar solo el espacio de parámetros iniciales $\Gamma - \epsilon_0$ para un valor dado de ρ_0 . En particular, se está interesado en extrapolar el comportamiento de ρ_0 que corresponda a valores razonables de densidad de materia oscura. Dicha extrapolación se ilustra también en la Figura 4.15.

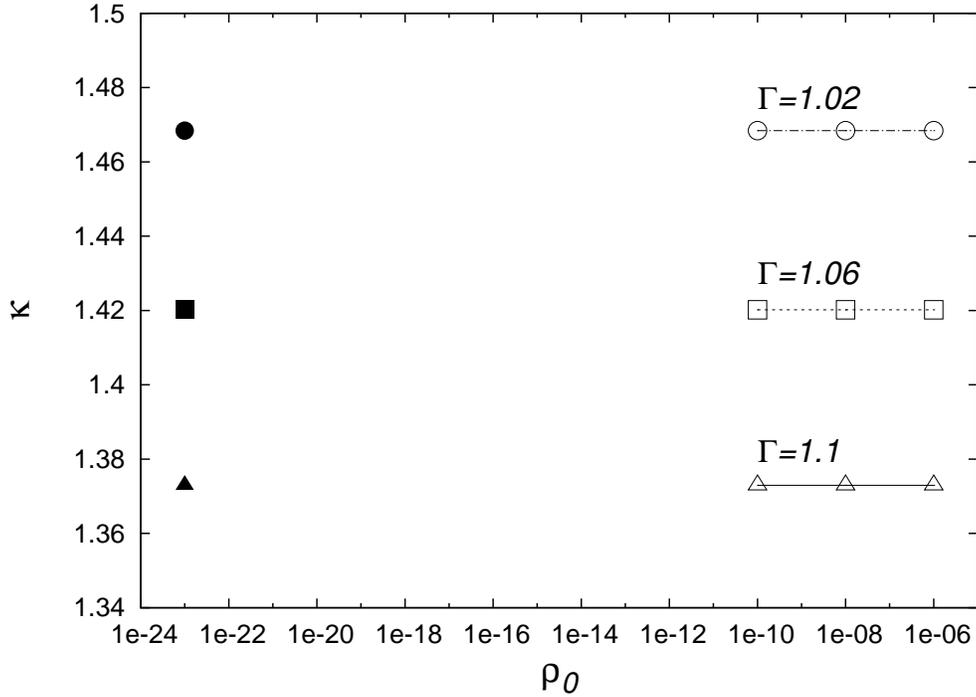


Figura 4.15: En esta gráfica se muestran los valores de κ con $\epsilon = 0,2$ para diferentes valores de ρ_0 y Γ para la región (I). Estos resultados muestran la independencia de κ con ρ_0 para una combinación dada de ϵ_0 y Γ . Esto fue comprobado para todas las simulaciones. También se muestra la extrapolación correspondiente a la densidad de materia oscura en unidades geométricas $\rho_0 = 10^{-23}$, la cual es equivalente a $\rho_0 \sim 100M_\odot/pc^3$, para un hoyo negro de masa $M = 10^9M_\odot$. Los puntos sin relleno, corresponden a los resultados de las simulaciones numéricas mientras los puntos llenos corresponden a los resultados de la extrapolación de los resultados para los perfiles de densidad de materia oscura. Resultados similares se encuentran para la región (II).

La extrapolación de los parámetros resultantes indica que κ depende monótonamente de Γ y ϵ . Estos resultados pueden ser observados en la Figura 4.16 para la región (I) y en la Figura 4.17 para la región (II). Para cada valor de ϵ_0 se encuentran diferentes valores de κ dependiendo del valor de Γ . De esta forma, si el fluido representa la materia oscura, esto implica que la pendiente preferida, una vez la solución alcanza el régimen estacionario para la materia oscura colisionante, depende de la energía interna inicial y del índice adiabático solamente.

Estos resultados indican que, con el fin de obtener un perfil con menos pendiente – valores de κ pequeños – se necesita un valor más alto del índice adiabático, lo cual significa que la materia oscura debe ser más colisionante (debe tener mayor presión). Además, en la región (I), los resultados muestran que en el límite $\Gamma \rightarrow 1$, caso no colisionante (CDM), la aproximación prefiere el exponente $\kappa \sim 1,5$, independientemente del valor inicial de la energía interna como se observa en la Figura 4.16. También se puede ver que para valores grandes de Γ los valores de κ son más pequeños.

Por otra parte, en la región (II), los resultados son menos coincidentes que en el caso anterior, donde aparece una tendencia para el valor de κ cuando se aproxima al límite de polvo. Lo primero que puede observarse de estos resultados es que en el límite $\Gamma \rightarrow 1$, el valor de κ depende de las diferentes condiciones iniciales como se ve en la Figura 4.17, y ninguna cota superior puede ser estimada dentro de dichos resultados. Sin embargo, se puede observar que con la presión, es suficiente para proveer valores muy pequeños de κ . Incluso es posible obtener valores de κ más pequeños que 0,1 para $\Gamma \geq 1,1$, lo cual es un resultado consistente con los perfiles de densidad planos observados y relacionados con el núcleo del halo. Estos resultados han sido presentados en [Guzmán & Lora-Clavijo 2011b]

Como en la sub-sección anterior, en la Figura 4.18 se ilustra la autoconvergencia de la densidad en reposo para una de la corridas, lo cual indica que la implementación es consistente con los métodos numéricos y que los resultados son confiables.

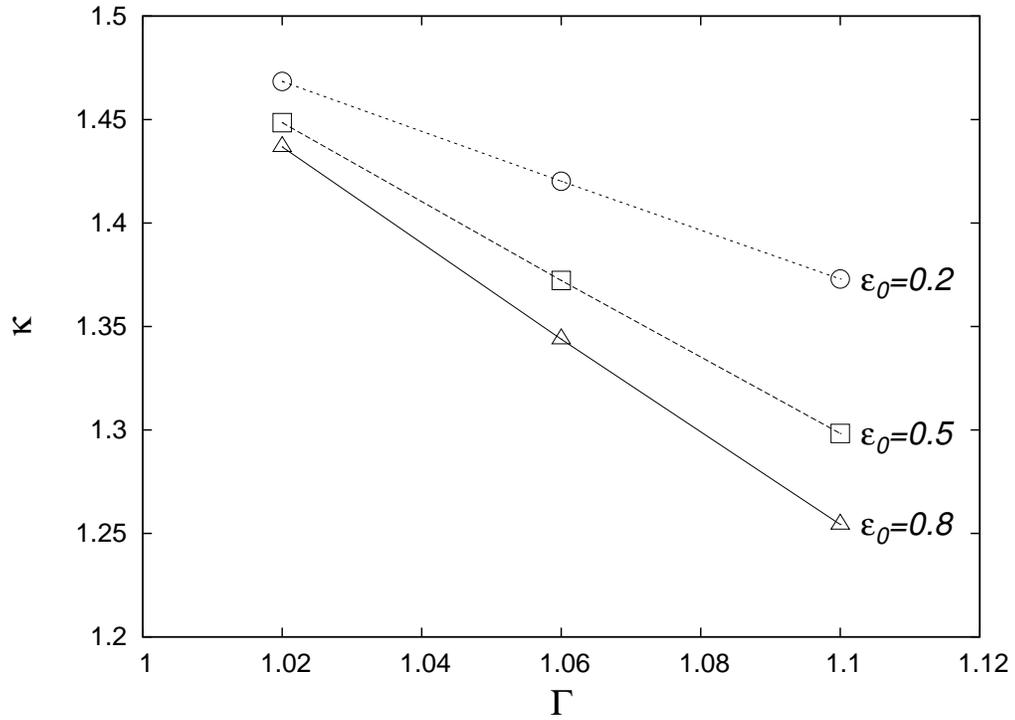


Figura 4.16: En esta figura se muestran los valores de κ en términos del índice adiabático y la energía interna inicial para la región (I). El exponente depende fuertemente de la energía interna inicial. Sin embargo, en el límite cuando Γ se aproxima a uno, esto es, en el caso no colisionante, el exponente se aproxima a 1.5 independientemente de ϵ_0 .

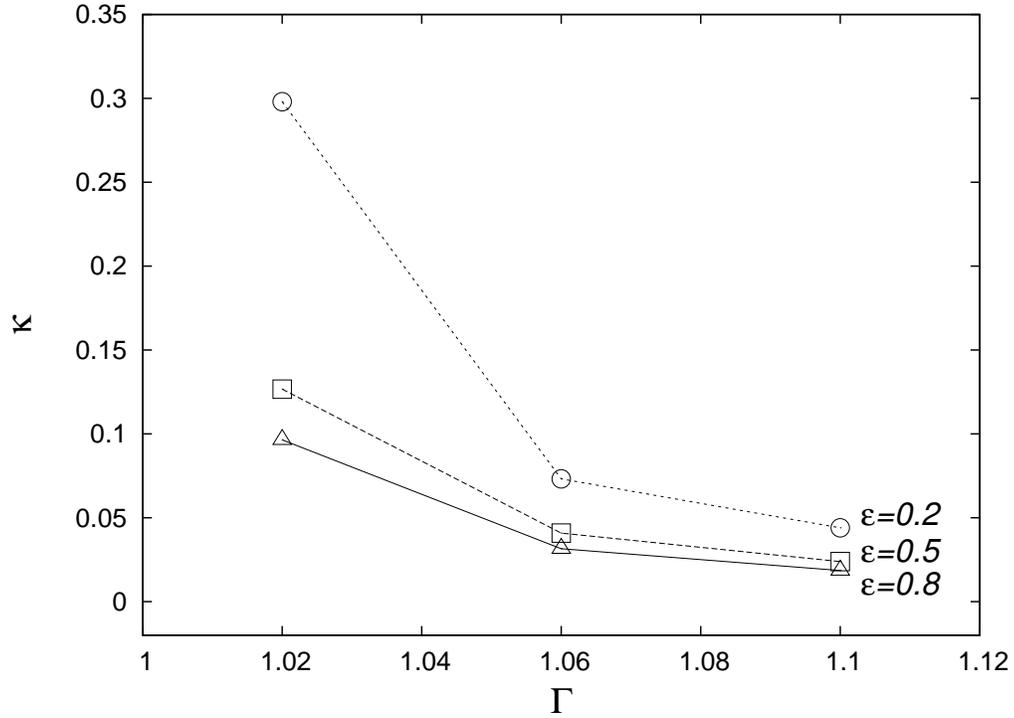


Figura 4.17: En esta figura se presentan los valores de κ en términos del índice adiabático y la energía interna inicial. El dominio donde se ajusta la densidad corresponde a $800 \leq r/M \leq 1500$. Como se puede ver, para valores grandes de Γ se obtienen valores pequeños de κ , lo cual es consistente con las observaciones que predicen que el perfil de materia oscura en el centro de las galaxias es plano.

Finalmente, la principal conclusión de esta sección, es que si el perfil de densidad que se encontró en la región más cercana, prevalece a escalas más grandes que las usadas en este trabajo, la densidad de materia oscura no muestra un perfil *cuspy*. Esto significa que un perfil de materia oscura, casi constante en el centro de las galaxias, es consistente con la presencia de un hoyo negro. Todo esto con el precio de adicionar un monto de presión a la materia oscura.

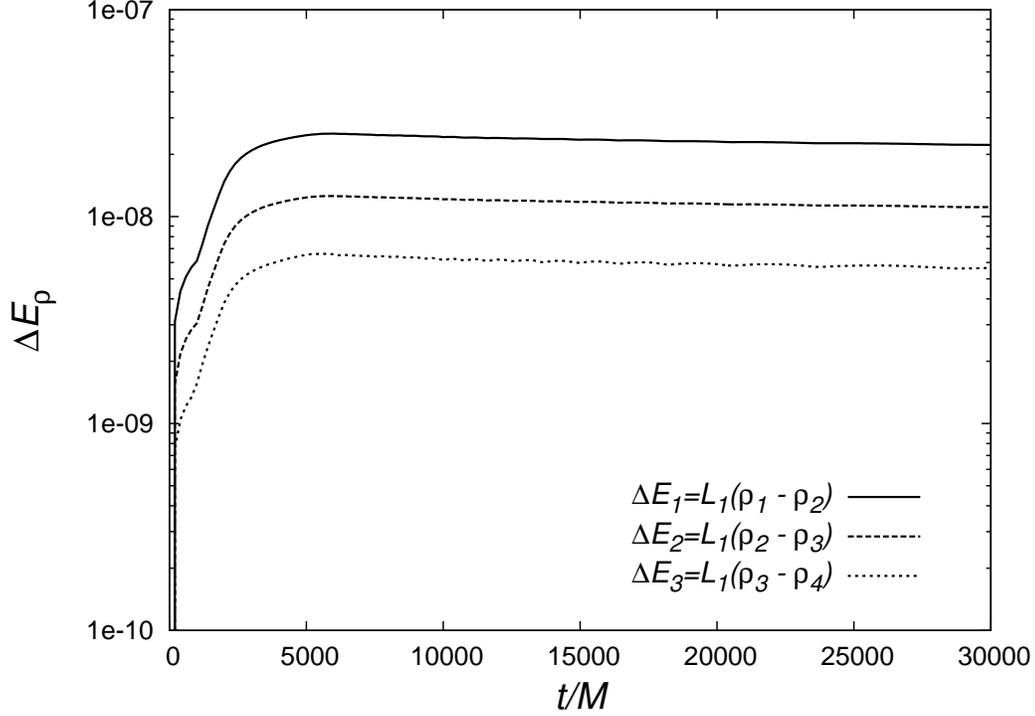


Figura 4.18: Para ilustrar la veracidad de los cálculos numéricos, se muestra el orden de la auto-convergencia de la densidad de masa en reposo ρ_0 , para el caso inicial correspondiente a: $\rho_0 = 10^{-8}$, $\Gamma = 1,06$, $v_0^r = -0,1$ y $\epsilon_0 = 0,5$. La convergencia se calcula usando la norma L_1 de la diferencias del valor de la densidad para cuatro diferentes resoluciones $\Delta x_1 = 0,4$, $\Delta x_2 = \Delta x_1/2$, $\Delta x_3 = \Delta x_2/2$ y $\Delta x_4 = \Delta x_3/2$, correspondientes al cálculo numérico de la densidad ρ_1 , ρ_2 , ρ_3 y ρ_4 respectivamente. El factor de convergencia de estas cuatro resoluciones se calcula como: $2^{Q_{sc}} = \Delta E_1/\Delta E_2$ donde $\Delta E_1 = L_1(\rho_1 - \rho_2)$, $\Delta E_2 = L_1(\rho_2 - \rho_3)$ y $\Delta E_3 = L_1(\rho_3 - \rho_4)$. El error dominante corresponde al reconstructor de las variables en cada inter-celda constante por pedazos, de tal forma que la convergencia es de primer orden.

Capítulo 5

ACRECIÓN DE FLUJOS 2-DIMENSIONALES EN HOYOS NEGROS

SECCIÓN 5.1

Acreción de Bondi-Hoyle relativista

La acreción de Bondi-Hoyle consiste en el proceso de evolución de un viento de gas uniformemente (homogéneamente) distribuido moviéndose cerca de un objeto central, o bien un objeto compacto moviéndose en un gas con velocidad constante [Bondi & Hoyle 1944]. Este sistema está relacionado a varios fenómenos asociados con procesos del gas cerca de estrellas u objetos compactos, como lo son las estrellas de neutrones y los hoyos negros. Dentro del régimen Newtoniano y relativista, se han reportado muchas propiedades interesantes, las cuales han sido exploradas basándose en diversos estudios numéricos . En caso del régimen clásico gobernado por la gravedad Newtonia-

na¹ [Shima et al. 1985, Matsuda et al. 1987, Fryxell & Taam 1988, Sawada et al. 1989, Matsuda et al. 1991, Matsuda et al. 1992], [Ruffert & Arnett 1994, Ruffert 1994a, Ruffert 1994b, Ruffert 1996, Ruffert 1997], [Benensohn et al. 1997, Nagaie et al. 2004, Blondin & Raymer 2012], el objetivo más importante son las consecuencias sobre la morfología de los vientos y los choques supersónicos que se desarrollan; un resumen de todos estos resultados asumiendo gravedad Newtoniana puede ser encontrado en [Foglizzo et al. 2005].

A diferencia del régimen Newtoniano, el régimen relativista permite estudiar la acreción de Bondi-Hoyle en regiones donde el campo gravitacional es fuerte, por ejemplo, cerca del horizonte de eventos de un hoyo negro. Algunos estudios han sido impulsados en esta dirección. El primero de estos fue desarrollado en [Petrich et al. 1989]; en este trabajo se llevaron a cabo simulaciones numéricas axialmente simétricas con el fin de estudiar los diferentes patrones de acreción desarrollados por el gas durante el proceso de acreción en un hoyo negro. Más tarde [Font & Ibánñez 1998, Font et al. 2000, Font et al. 1994, Font & Ibánñez 1998] revisaron estos resultados usando esquemas numéricos de alta resolución para la captura de choques, los cuales han mostrado ser mucho más eficientes que los métodos usados en el pasado donde un término de viscosidad artificial se agrega para lidiar con las discontinuidades que se forman. Vale la pena mencionar que en todos estos trabajos, el objetivo más importante es la morfología asociada a procesos supersónicos y subsónicos; cuando el proceso es supersónico, se forma un cono de choque de alta densidad en el lado opuesto de donde se está inyectando el viento. Además, dicho cono presenta propiedades importantes como vibraciones resonantes o movimiento tipo flip-flop, el cual consiste en la oscilación de la orientación del cono de choque. Por otra parte, en el contexto astrofísico, un trabajo reciente hecho en [Donmez et al. 2011] dedica esfuerzos importantes para estudiar una potencial relación entre las oscilaciones

¹Por gravedad Newtoniana se refieren a aproximar el campo gravitacional producido por un hoyo negro, utilizando un potencial pseudo Newtoniano de Paczynski-Wiita

cuasi-periódicas observadas en diversos lugares, donde se cree que hay un hoyo negro, y el comportamiento del gas en la acreción de Bondi-Hoyle relativista.

Dentro del régimen relativista, existen algunos trabajos asociados a este proceso de acreción. En el caso de la relatividad general, la acreción de Bondi-Hoyle se presenta en [Farris et al. 2010] en el contexto de hoyos negros binarios supermasivos fusionándose. También este proceso ha sido considerado teniendo en cuenta los efectos de los campos magnéticos [Penner 2010]. Por otra parte, en [Zanotti et al. 2011] se estudia el caso de la acreción de Bondi-Hoyle relativista considerando procesos radiativos y el caso de la acreción de Bondi-Hoyle ultrarelativista fue recientemente considerado en [Penner 2012].

En este trabajo, se presenta un estudio relativista de la acreción de Bondi-Hoyle axialmente simétrica de un gas supersónico en un hoyo negro esféricamente simétrico descrito en coordenadas penetrantes. También se asume la condición de que el gas es un fluido de prueba y que no distorsiona la geometría del espacio-tiempo. En los trabajos previos de este tema, se utilizan coordenadas que son singulares en el horizonte de eventos, y en las cuales el problema de evolución tiene que ser llevado a cabo en un dominio que requiere la implementación de una frontera artificial interior afuera del horizonte de eventos del hoyo negro. Esto requiere la implementación de una condición de frontera muy eficiente en este lugar, especialmente cuando esta frontera es muy cercana al horizonte de eventos, donde las variables de estado tienden a diverger y probablemente los errores se puedan propagar hacia el dominio numérico. Lo que ofrece el uso de coordenadas penetrantes es la posibilidad de definir una frontera interior dentro del horizonte de eventos del hoyo negro y además evitar la implementación de condiciones de frontera, porque los conos de luz cuando se usan coordenadas penetrantes, permanecen abiertos dentro del horizonte de eventos y apuntan hacia adentro, mientras que la materia se mueve naturalmente hacia el interior del hoyo negro.

Por otra parte, aunque este enfoque representa una mejora para el estudio completo

de la acreción de Bondi-Hoyle, esto es solo una alternativa para resolver el problema en la frontera interior relacionada con la longitud de escala del acretor. En una escala diferente, el radio de acreción r_{ac} se define de manera aproximada para decidir cuándo una partícula cae o no dentro de un objeto compacto, y tal escala es determinada por la velocidad del viento y la ecuación de estado del gas. Tradicionalmente, el problema de Bondi-Hoyle es tratado en esta segunda escala asumiendo que el acretor es puntual, mientras en este trabajo se está haciendo exactamente lo contrario. Numéricamente, parece que se tiene que escoger entre estos dos regímenes, esto es, es posible aplicar la acreción de un viento a procesos astrofísicos si se consideran velocidades de los vientos realistas, y consecuentemente la longitud de la escala del acretor es suficientemente pequeña como para considerar una fuente puntual, pues no puede ser resuelta con suficientes celdas; por otro lado, si se quiere resolver el acretor (como en este caso) la longitud del radio de acreción no se puede resolver a menos que la velocidad del viento sea alta. Esta dificultad de estudiar ambas escalas al mismo tiempo es la principal razón por la cual la acreción relativista de un viento no ha sido totalmente resuelta en el momento.

La asociación de los resultados numéricos de la acreción de Bondi-Hoyle en un hoyo negro con observaciones astrofísicas involucran una serie de parámetros que, en principio, deberían ser motivados astrofísicamente. Por ejemplo, el índice adiabático, la energía interna específica del gas y la velocidad del viento si se quiere inferir la masa y el momento angular del hoyo negro, o viceversa. Además, algunas propiedades del gas asociadas a transferencia de calor o procesos de enfriamiento se espera que sucedan. Esto último genera un conjunto extra de parámetros que también deberían ser motivados observacionalmente. Probablemente las cotas más sólidas de todos estos parámetros son sobre la velocidad relativa entre el acretor y el viento, la cual es del orden de 100-1000 km/s en sistemas binarios y pueden alcanzar desde miles de km/s [González et al. 2007] en hoyos negros *superkicked* resultantes de la colisión de dos hoyos negros con emisión colimada de radiación gravitacional hasta recientes resultados numéricos que indican

que pueden alcanzar 15000 km/s [Sperhake et al. 2011] en escenarios similares.

A continuación, se presentan las ecuaciones de Euler relativistas axialmente simétricas, las cuales se usan para describir la dinámica de la acreción de Bondi-Hoyle en torno al espacio-tiempo de un hoyo negro de Schwarzschild.

Acreción de flujos axialmente simétricos en hoyos negros sin rotación

Para un espacio-tiempo curvo fijo, las ecuaciones de Euler relativistas axialmente simétricas pueden ser escritas en coordenadas esféricas a partir del sistema de ecuaciones (2.76) como

$$\partial_t \vec{U} + \partial_r(\alpha \vec{F}^r) + \partial_\theta(\alpha \vec{F}^\theta) = \alpha \vec{S} - \frac{\partial_r \sqrt{\gamma}}{\sqrt{\gamma}}(\alpha \vec{F}^r) - \frac{\partial_\theta \sqrt{\gamma}}{\sqrt{\gamma}}(\alpha \vec{F}^\theta), \quad (5.1)$$

donde \vec{U} es un vector de variables conservativas, \vec{F}^r y \vec{F}^θ son los flujos en las direcciones espaciales r y θ respectivamente, y \vec{S} es un vector de fuentes. Estas cantidades son definidas en términos de las variables primitivas y las conservativas de la siguiente forma

$$\vec{U} = \begin{bmatrix} D \\ S_r \\ S_\theta \\ S_\phi \\ \tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_0 W \\ \rho_0 h W^2 v_r \\ \rho_0 h W^2 v_\theta \\ \rho_0 h W^2 v_\phi \\ \rho_0 h W^2 - p - \rho_0 W \end{bmatrix}, \quad (5.2)$$

$$\vec{\mathcal{F}}^r = \begin{bmatrix} (v^r - \frac{\beta^r}{\alpha}) D \\ (v^r - \frac{\beta^r}{\alpha}) S_r + p \\ (v^r - \frac{\beta^r}{\alpha}) S_\theta \\ (v^r - \frac{\beta^r}{\alpha}) S_\phi \\ (v^r - \frac{\beta^r}{\alpha}) \tau + v^r p \end{bmatrix}, \quad \vec{\mathcal{F}}^\theta = \begin{bmatrix} v^\theta D \\ v^\theta S_r \\ v^\theta S_\theta + p \\ v^\theta S_\phi \\ v^\theta (\tau + p) \end{bmatrix}, \quad (5.3)$$

$$\vec{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 0 \\ T^{\mu\nu} g_{\nu\sigma} \Gamma_{\mu r}^\sigma \\ T^{\mu\nu} g_{\nu\sigma} \Gamma_{\mu\theta}^\sigma \\ T^{\mu\nu} g_{\nu\sigma} \Gamma_{\mu\phi}^\sigma \\ T^{\mu 0} \partial_\mu \alpha - \alpha T^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^0 \end{bmatrix}. \quad (5.4)$$

Los valores de las funciones α , β^r y $\sqrt{\gamma}$, dependen del espacio-tiempo asumido. Al igual que en el caso anterior, se considera que el fluido obedece la ecuación de estado de un gas ideal (2.85).

Como se puede observar, estas ecuaciones son singulares en el eje de simetría, por esta razón para regularizarlas se realiza un desfase en la malla numérica, esto es, se define la malla de tal forma que el eje de simetría no coincide con ningún punto de dicha malla. Específicamente la malla se define como

$$r = r_{min} + idr, \quad (5.5)$$

$$\theta = jd\theta - \frac{d\theta}{2}, \quad (5.6)$$

donde $dr = (r_{max} - r_{min})/Nr$ y $d\theta = \pi/(N_\theta - 1)$ son las resoluciones en las direcciones r y θ respectivamente. Aquí i es un número entero que va desde 0 hasta Nr y j es un número entero que va desde 0 hasta N_θ .

Por otra parte y para terminar todo el proceso de regularización, en esta región se

aproxima la función $\cos \theta / \sin \theta$ como

$$\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \sim -\frac{\delta \sin \theta}{\delta \cos \theta}. \quad (5.7)$$

donde δ es el operador derivada.

Datos iniciales, condiciones de frontera y diagnóstico

Datos iniciales: Como primer paso, la velocidad se prepara de tal forma que se mueva el fluido en la dirección z , con densidad y presión constantes. El campo de velocidades v^i se caracteriza en términos del valor inicial asintótico de la velocidad v_∞ ,

$$v_r = \frac{1}{\sqrt{\gamma^{rr}}} v_\infty \cos \theta, \quad (5.8)$$

$$v_\theta = -\frac{1}{\sqrt{\gamma^{\theta\theta}}} v_\infty \sin \theta, \quad (5.9)$$

$$v_\phi = 0, \quad (5.10)$$

que satisface la relación $v^2 = v_i v^i = v_\infty^2$. Con estas condiciones, el gas inicialmente con densidad en reposo constante se mueve a lo largo de la dirección z llenando todo el dominio numérico.

Los perfiles de densidad y presión iniciales se escogen de tal forma que se satisface la siguiente relación para la velocidad del sonido c_s ,

$$c_s^2 = \frac{p\Gamma(\Gamma - 1)}{p\Gamma + \rho_0(\Gamma - 1)}, \quad (5.11)$$

la cual se puede obtener de forma casi directa a partir de la ecuación de estado (2.85). Entonces, con el fin de calcular los perfiles de densidad y presión, se fija la densidad inicial de tal forma que sea constante ρ_{ini} y se da el valor asintótico de la velocidad del sonido $c_{s\infty}$. Así, usando la ecuación (5.11), la presión inicial se puede obtener como

$$p_{ini} = \frac{c_{s\infty}^2 \rho_{ini} (\Gamma - 1)}{(\Gamma(\Gamma - 1) - c_{s\infty}^2 \Gamma)}. \quad (5.12)$$

Un punto de cuidado aquí, es que se escoge el valor de $c_{s\infty}$ para construir la presión inicial con la única condición de que la presión sea positiva, lo que implica que se debe satisfacer la condición

$$c_{s\infty} < \sqrt{\Gamma - 1}. \quad (5.13)$$

Finalmente, se utiliza la ecuación de estado (2.85) $p = \rho_0 \epsilon (\Gamma - 1)$, para calcular el valor inicial de la energía interna específica.

En este punto v_∞ y $c_{s\infty}$ son dos parámetros importantes para inicializar el campo de velocidades. Por otra parte, es muy útil definir el número de Mach relativista con el fin de parametrizar los datos iniciales

$$\mathcal{M}_\infty^R = \frac{W v_\infty}{W_s c_{s\infty}} = \frac{W}{W_s} \mathcal{M}_\infty, \quad (5.14)$$

donde W es el factor de Lorentz del gas, W_s es el factor de Lorentz de la velocidad del sonido y \mathcal{M}_∞ es el valor asintótico Newtoniano del número de Mach, el cual se usa para parametrizar las configuraciones iniciales. Cuando este número es más grande que uno, se dice que el flujo es supersónico, de otra forma el flujo es subsónico. En el caso supersónico, se forma un cono de choque donde la densidad es grande comparada con la densidad por fuera del cono de choque, y además la materia oscila.

Una escala muy importante es el radio de acreción, definido por

$$r_{ac} = \frac{M}{v_\infty^2 + c_{s\infty}^2}, \quad (5.15)$$

el cual se define de manera aproximada para decidir cuándo una partícula cae o no dentro de un objeto compacto. Este radio es esencial, ya que es posible que todo el gas en el dominio pueda eventualmente ser acretado. Esto último quiere decir que si

el dominio numérico es del mismo tamaño que el radio de acreción, toda la materia está destinada a ser acretada por el hoyo negro. Este radio es el radio de acreción de Bondi, donde M es la masa del acretor, el cual en este caso es un hoyo negro de masa $M = 1$ [Petrich et al. 1989].

Como se puede observar, el espacio de parámetros para el estudio de la acreción de Bondi-Hoyle es enorme y los parámetros libres son la densidad de masa en reposo del viento ρ_{ini} , el valor de Γ , v_∞ , $c_{s\infty}$ o equivalentemente la energía interna ϵ_{ini} del gas o \mathcal{M} . Para todos estos casos, se fija la densidad de masa en reposo a $\rho_{ini} = 10^{-6}$ en unidades donde la masa del hoyo negro es $M = 1$. Sin embargo, existen algunos precedentes donde se usan energías mucho más grandes [Donmez et al. 2011], en los cuales ya no es claro que la aproximación del gas sea válida. En la Tabla 5.1, se presenta el espacio de parámetros que se explora en este trabajo. Otro posible parámetro podría ser la masa del hoyo negro. Sin embargo, se está trabajando con unidades, en las cuales, las medidas espaciales y temporales están en términos de M . De esta forma, los resultados son independientes de la masa del hoyo negro. Con el fin de especializarse a un caso astrofísico en particular donde M está dada en unidades de masas solares, solamente se necesita reescalar las unidades del espacio y el tiempo apropiadamente. Hay que enfatizar que en este trabajo se usan parámetros que permiten trazar numéricamente el proceso de acreción, el cual es restringido principalmente por el tamaño del dominio numérico; explícitamente, si se asume que el gas o el hoyo negro se mueven con velocidad del orden de $v_\infty \gtrsim c_{s\infty} \sim 100\text{km/s}$, entonces $r_{acc}/M \sim 10^6$. Así, asumiendo que la frontera exterior del dominio numérico está en $r_{max} \sim 10r_{acc}$, esto sería $\sim 10^7$ veces el tamaño del radio del hoyo negro. En el caso más optimista, cuando un hoyo negro se mueve con una velocidad del orden de 10^4km/s como resultado de un superkick debido a la emisión colimada de radiación gravitacional [Sperhake et al. 2011], el radio de acreción sería del orden de $r_{acc} \sim 100M$ y $r_{max} \sim 1000M$. El tamaño del dominio es, por el momento, una restricción para llevar a cabo cálculos numéricos en dicho escenario. Lo que se hace en este trabajo es considerar velocidades más grandes del gas,

que implican valores más pequeños del radio de acreción y por lo tanto los valores de r_{max} .

Condiciones de frontera: El gas se evoluciona en el dominio $([r_{exc}, r_{max}] \times [0, \pi]) \times [0, 2\pi]$ en coordenadas esféricas, usando un código axialmente simétrico, con una malla uniformemente espaciada a lo largo de las coordenadas r y θ , como el visto en la ecuación (5.5). Por otra parte, r_{exc} define una frontera esférica la cual se escoge dentro del horizonte de eventos del hoyo negro; dicha frontera es llamada frontera de excisión y fué implementada originalmente para estudiar la evolución de hoyos negros [Seidel & Suen 1992] y recientemente revisada para el estudio de procesos hidrodinámicos [Hawke et al. 2005]. El proceso de excisión consiste en remover un pedazo del dominio numérico dentro del horizonte de eventos del hoyo negro desde $0 < r \leq r_{exc}$, con el fin de evitar la singularidad y los gradientes de las funciones métricas cerca de ésta. Ahora, como los conos de luz dentro del horizonte de eventos apuntan hacia la singularidad, no es necesario imponer condiciones de frontera en $r = r_{exc}$. En lugar de esto, el fluido simplemente sale del dominio a través de la frontera de excisión. Para los resultados numéricos que se presentan más adelante, se escoge el radio de excisión en $r_{exc} = 1,5M$, el cual está suficientemente lejos de la singularidad y provee una zona de colchón $1,5M < r < 2M$ para que el fluido adentro del horizonte de eventos se mueva suavemente hacia la frontera de excisión. Esta implementación es mucho mejor comparada con resultados previos, donde se utilizan coordenadas de Schwarzschild y la frontera de excisión está afuera del horizonte de eventos del hoyo negro (ya que estas coordenadas son singulares ahí), en una región tipo tiempo que requiere la implementación de condiciones de frontera.

Por otra parte, r_{max} define una frontera esférica exterior y se distinguen dos hemisferios llamados fronteras con *downstream* y con *upstream* [Matsuda et al. 1987]. El hemisferio *upstream* se define como la parte de la esfera donde el gas está entrando al dominio numérico y el hemisferio *downstream* es el hemisferio a través del cual el gas sale del dominio. En el hemisferio *downstream* se imponen condiciones de frontera de flujo sa-

Modelo	Γ	v_∞	\mathcal{M}_∞	r_{acc}
$c_{s_\infty} = 0,1$				
M_{1a}	4/3	0,5	5	3,84615
M_{1b}	5/3	0,5	5	3,84615
M_{2a}	4/3	0,4	4	5,88235
M_{2b}	5/3	0,4	4	5,88235
M_{3a}	4/3	0,3	3	10
M_{3b}	5/3	0,3	3	10
M_{4a}	4/3	0,2	2	20
M_{4b}	5/3	0,2	2	20
M_5	4/3	0,1	1	50
$c_{s_\infty} = 0,08$				
M_6	4/3	0,4	5	6,00926
M_7	4/3	0,32	4	9,19118
M_8	4/3	0,24	3	15,625
M_9	4/3	0,16	2	31,25
M_{10}	4/3	0,08	1	78,125
$c_{s_\infty} = 0,05$				
M_{11}	4/3	0,25	5	15,3846
M_{12}	4/3	0,2	4	23,5294
M_{13}	4/3	0,15	3	40
M_{14}	4/3	0,1	2	80
M_{15}	4/3	0,05	1	200

Cuadro 5.1: Conjunto de parámetros que se usan para las simulaciones numéricas. En esta tabla, se usan diferentes valores de c_{s_∞} para una densidad inicial de $\rho_{ini} = 10^{-6}$ en todos los casos. El modelo M_{15} no es resuelto numéricamente debido a las limitaciones numéricas descritas en el texto. En lugar de esto, $\rho_{ini} = 10^{-6}$ se realizó mediante un extrapolación. Por otra parte, se usan dos valores de Γ para probar la formación del choque y la acreción, solamente se usa $\Gamma = 4/3$ para el modelo de oscilaciones cuasi-periódicas.

liente, mientras que en la frontera *upstream* se imponen condiciones de flujo entrante, esto es, se considera que todas las variables de estado a cada paso de tiempo tienen el mismo valor asintótico que el inicial. Otro asunto importante es que r_{max} tiene que ser mucho más grande que el radio de acreción si se quiere que se forme el cono de choque. En este caso, la experiencia indica que usando valores de $r_{max} \sim 10r_{acc}$ se tiene un comportamiento adecuado del cono del choque hasta que alcanza un régimen estacionario.

En el eje de simetría definido por $\theta = 0, \pi$, las variables de estado se extrapolan con la celda más cercana imponiendo la condición de que v^θ sea impar. También, se implementa una atmósfera para la densidad en reposo, que evita que la entalpía específica diverja y que los errores se propaguen a las otras variables. En este caso, la atmósfera utilizada es de $\rho_{atm} = 10^{-10}$, la cual permite la consistencia de los resultados numéricos. Aunque en los resultados no se mide qué tan pequeña puede llegar a ser la densidad en reposo, la atmósfera se implementa de forma preventiva. Es bueno mencionar que los resultados numéricos no dependen de esta atmósfera.

Diagnóstico: Con el fin de diagnosticar las cantidades físicas del sistema en las simulaciones numéricas, se implementan detectores localizados en distintos radios sobre el dominio numérico. Esto es, se definen esferas donde se calculan cantidades escalares. En particular, se calcula la razón de masa acretada como una función del tiempo

$$\dot{M}_{acc} = -2\pi \int Dr^2 \left(v^r - \frac{\beta^r}{\alpha} \right) \sin \theta d\theta, \quad (5.16)$$

en varias superficies esféricas, incluyendo el horizonte de eventos. La razón de masa acretada ayuda a diagnosticar cuándo la acreción alcanza un régimen estacionario.

Otra cantidad importante que se mide en este trabajo es la densidad de masa en reposo del gas a lo largo del eje dentro del cono de choque, o sea, en $\theta = 0$ y para diferentes detectores. Este escalar se usa para medir cómo la densidad oscila dentro del cono de

choque.

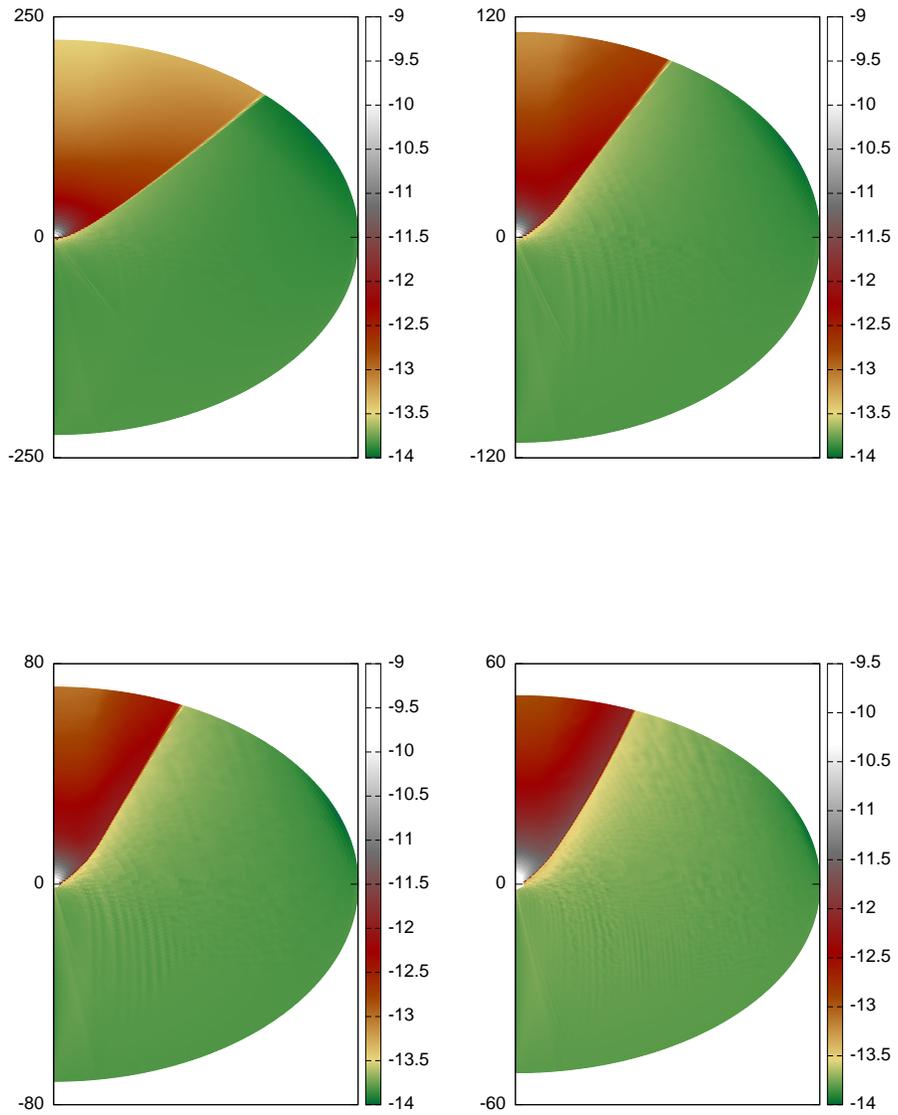
Propiedades del cono de choque y razones de masa acretada

Dependiendo de las propiedades del flujo de gas, un cono de choque aparece cuando el viento es supersónico. Este cono de choque es una región donde la densidad es significativamente más grande que la densidad del viento inicialmente y se forma detrás del hoyo negro en el lado opuesto de donde se está inyectado el gas.

En la Figura 5.1, se muestra la morfología para algunos de los modelos que se han considerado en la Tabla 5.1. Como el espacio de parámetros es muy grande, solo se escogieron dos valores del índice adiabático $\Gamma = 4/3, 5/3$. Por otra parte, solo se consideran cuatro valores iniciales de la velocidad supersónica del gas en el infinito correspondientes a 2, 3, 4, 5 Mach. El uso de coordenadas penetrantes no cambia la morfología encontrada en trabajos relativistas previos, donde se usan fronteras internas tipo tiempo. Dicha morfología muestra que cuando el número de Mach es más grande, el ángulo del cono de choque es más pequeño, y cuando el valor del índice adiabático crece, el ángulo del cono de choque crece.

En la Figura 5.2 se presenta la razón de masa acretada para diferentes valores del número de Mach y Γ . Como se puede observar, cuando el número de Mach y el índice adiabático crecen, el sistema alcanza el régimen estacionario más rápido. Esto ha sido estudiado en gran detalle por [Font & Ibánñez 1998] y para este trabajo representa una prueba más.

Ahora, una vez descritas algunas de las propiedades del cono de choque, se mide la densidad en varios detectores como función del tiempo. Como se puede observar, dicha densidad vibra, ver Figura 5.3. El hecho de que las vibraciones del cono de choque no estén asociadas a artificios numéricos, permite explorar, como un modelo de juguete



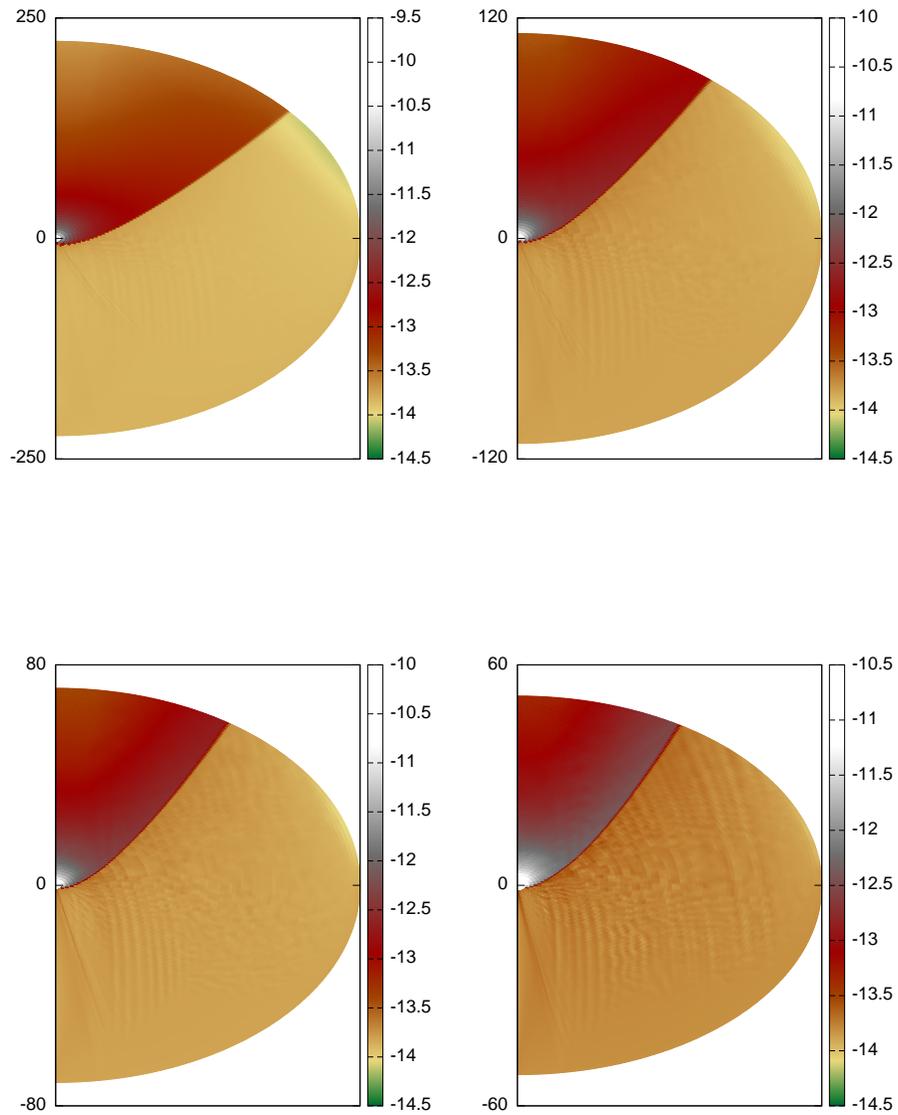


Figura 5.1: Logaritmo de la densidad que ilustra la morfología del cono de choque en diversos escenarios, cuando el sistema alcanza un régimen estacionario. En los paneles de arriba (dos primeras filas), se presentan los casos para los modelos de viento (de izquierda a derecha) M_{4a} , M_{3a} , M_{2a} y M_{1a} , mientras en los paneles de abajo (dos últimas filas), para los modelos M_{4b} , M_{3b} , M_{2b} y M_{1b} descritos en la Tabla 5.1.

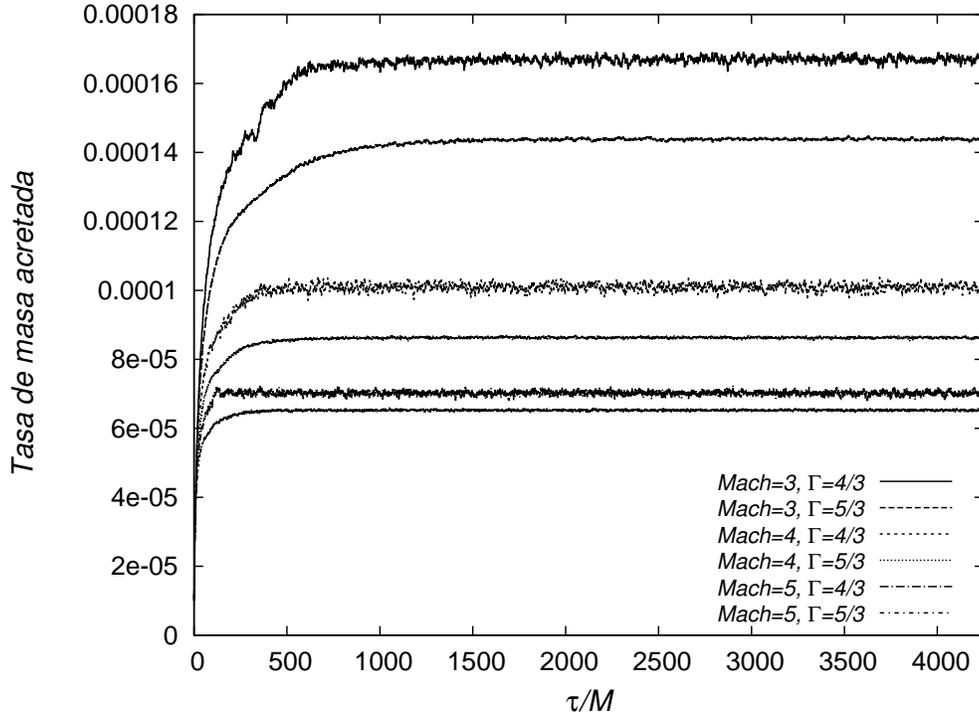


Figura 5.2: En esta figura se muestra la razón de masa acretada \dot{M}_{acc} con respecto al tiempo propio para diferentes valores del número de Mach y Γ . Como se espera, la acreción se estabiliza más rápido cuando el número de Mach y Γ son más grandes. Esta cantidad se calcula en un detector localizado en $r = 2,1M$, cerca al horizonte de eventos.

astrofísico, una posible relación entre tales oscilaciones adentro del cono de choque y las frecuencias de las oscilaciones cuasi-periódicas observadas para diferentes fuentes astronómicas, como es el caso de *SgrA**.

Modelo de Oscilaciones Cuasi-periódicas (QPOs)

Una aplicación potencial bastante atractiva de las oscilaciones de la densidad del gas dentro del cono de choque está relacionada con la emisión de tipo oscilación cuasi-periódica. En el caso de la acreción de Bondi-Hoyle relativista, el primer trabajo en esta dirección, fué presentado en [Donmez et al. 2011], donde se estudia dicha relación de frecuencias. Algunas diferencias del presente trabajo con el realizado en [Donmez et al. 2011] es que aquí se utilizan coordenadas penetrantes para la descripción del hoyo negro, mientras que en [Donmez et al. 2011] se usan coordenadas singulares en el horizonte de eventos. Por otro lado, aquí se usan flujos axialmente simétricos, mientras que en [Donmez et al. 2011] se usa simetría slab (simetría ecuatorial).

Ahora, se analizan las oscilaciones medidas a varias distancias de hoyo negro. En la Figura 5.3, se muestran varios aspectos de tales oscilaciones. Primero se muestran las oscilaciones medidas por un detector localizado a una distancia de $12,1M$ en tiempo propio; de aquí se puede observar que después de cierto tiempo, la densidad de masa en reposo se aproxima a un régimen estacionario. Segundo, se presenta una ventana de tiempo que muestra la señal medida por varios detectores localizados a varias distancias, desde $2,1M$ hasta $16,1M$; de esta figura se puede aprender que los detectores más cercanos al hoyo negro miden señales dominadas por modos de alta frecuencia, mientras que para los detectores lejanos al hoyo negro se miden señales dominadas por oscilaciones de baja frecuencia. Sin embargo, esta figura muestra que las señales entre los diferentes detectores están bien correlacionadas y que no estamos midiendo solamente ruido numérico. Para esto, se soportan los cálculos numéricos con una prueba de auto-convergencia de la densidad en reposo, en la Figura 5.4.

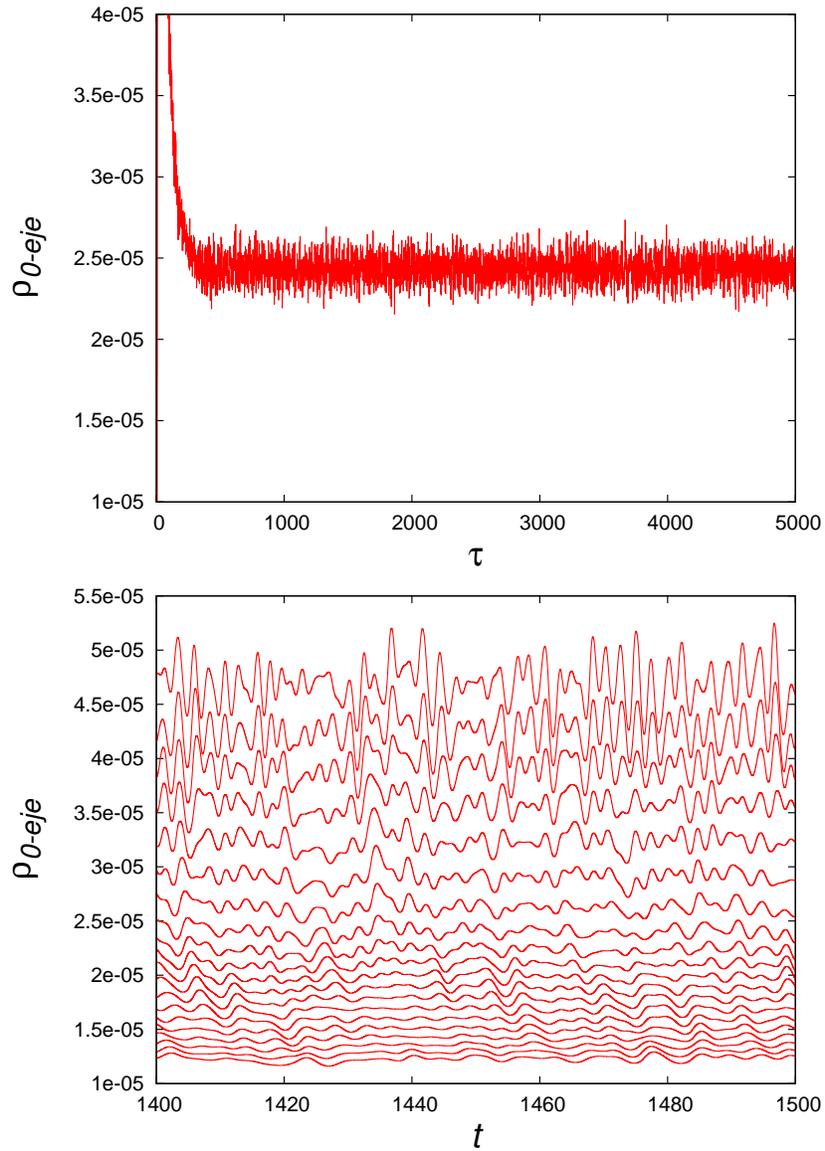


Figura 5.3: En la figura de arriba se muestran las oscilaciones de la densidad adentro del cono de choque, medidas por un detector localizado en $12,1M$. En la figura de abajo se muestra una ventana en el tiempo que muestra las señales medidas en varios detectores igualmente espaciados, estando el primero de estos localizado en $2,1M$ y el más lejando en $16,1M$. Como se puede observar, existe una correlación entre todas las señales medidas por los diferentes detectores. Esto también muestra que existen modos de alta frecuencia medidos por detectores cercanos al hoyo negro.

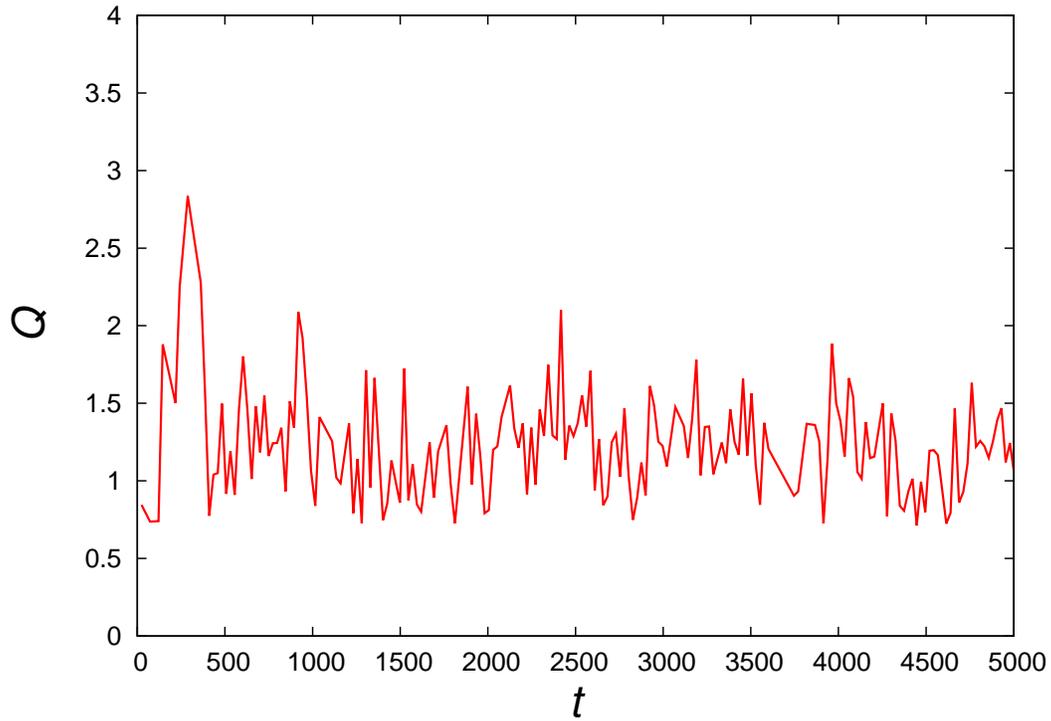


Figura 5.4: En esta figura se muestra la auto-convergencia de la norma L_2 del error para la densidad a lo largo del eje z , cuando el choque está formado. El radio entre resoluciones sucesivas es 1.5, y el factor de convergencia es $1,5^Q$. La precisión de los algoritmos es de primer orden, debido al desarrollo de discontinuidades. Las oscilaciones se deben a que una vez el sistema alcanza el régimen estacionario, la densidad adentro del cono de choque queda vibrando. Por otra parte, los valores grandes de estas oscilaciones al comienzo de la evolución, pueden ser debidos a que en esos tiempos iniciales, el sistema no se ha estacionado.

Con el fin de interpretar las oscilaciones de la densidad, se calcula la transformada de Fourier de las señales medidas por los diferentes detectores, como los de la Figura 5.3 usando el tiempo propio de cada detector. Dichos resultados aparecen en la Figura 5.5, donde se muestra que modos de alta frecuencia dominan cerca del hoyo negro y no aparecen lejos de éste. Este trabajo se concentra en los modos que podrían ser globales y que puedan ser detectados en una gran parte del dominio. Como caso particular, se señala con una flecha en la Figura 5.5 un pico de frecuencia que aparece en todos los detectores. Ahora, que aparezca en todos los detectores indica que este modo es posiblemente global y por esta razón se escoge la frecuencia correspondiente a este modo para realizar el análisis. En todos los casos considerados del espacio de parámetros, el espectro muestra la presencia de este modo. Esta es la razón del por qué en todos los casos estudiados se considera el espectro medido por un detector localizado en $r = 12,1M$, donde el espectro es mucho más limpio y el pico más poderoso corresponde precisamente a éste modo global.

Una vez definido el enfoque para realizar el análisis, se procede a explorar la posibilidad de que tales frecuencias se encuentren dentro del rango de frecuencias medidas para las fuentes de QPOs. El espacio de parámetros cubre todos los modelos descritos en la Tabla 5.1 para diferentes valores de la velocidad del sonido y la velocidad del viento. Para cada caso, se localiza el pico más poderoso para un detector localizado en $12,1M$ y se obtiene una frecuencia propia de oscilación del gas dentro del cono de choque. En este trabajo, se empuja la velocidad del viento al menor valor posible (numéricamente), es decir, hasta valores de $0,05c$, en los límites de nuestros recursos computacionales, donde se considera que la velocidad más pequeña que un viento requiere para formar un cono de choque es la velocidad del sonido. Sin embargo, cuando la velocidad del sonido es pequeña, el radio de acreción es muy grande en términos de la escala de longitud del hoyo negro (ver modelo M_{15} de la Tabla 5.1 y la ecuación (5.15)), y esto impone una limitación computacional sobre el conjunto de parámetros que pueden ser usado para llevar a cabo una simulación, porque no solamente se requiere un dominio

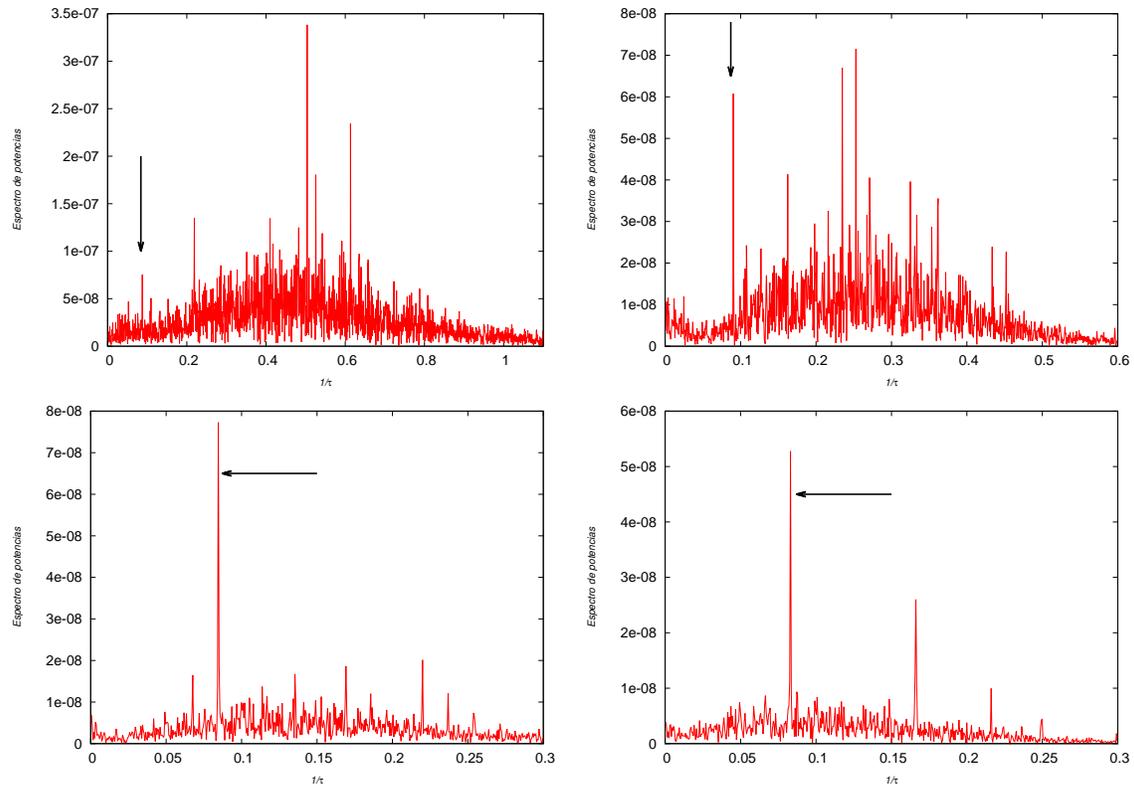


Figura 5.5: En esta figura se mide el espectro de las oscilaciones de la densidad en tiempo propio para el modelo M_{1b} medida en diferentes detectores localizados en (arriba-izquierda) $r = 2,1M$, (arriba-derecha) $r = 6,1M$, (abajo-izquierda) $r = 12,1M$ y (abajo-derecha) $r = 16,1M$.

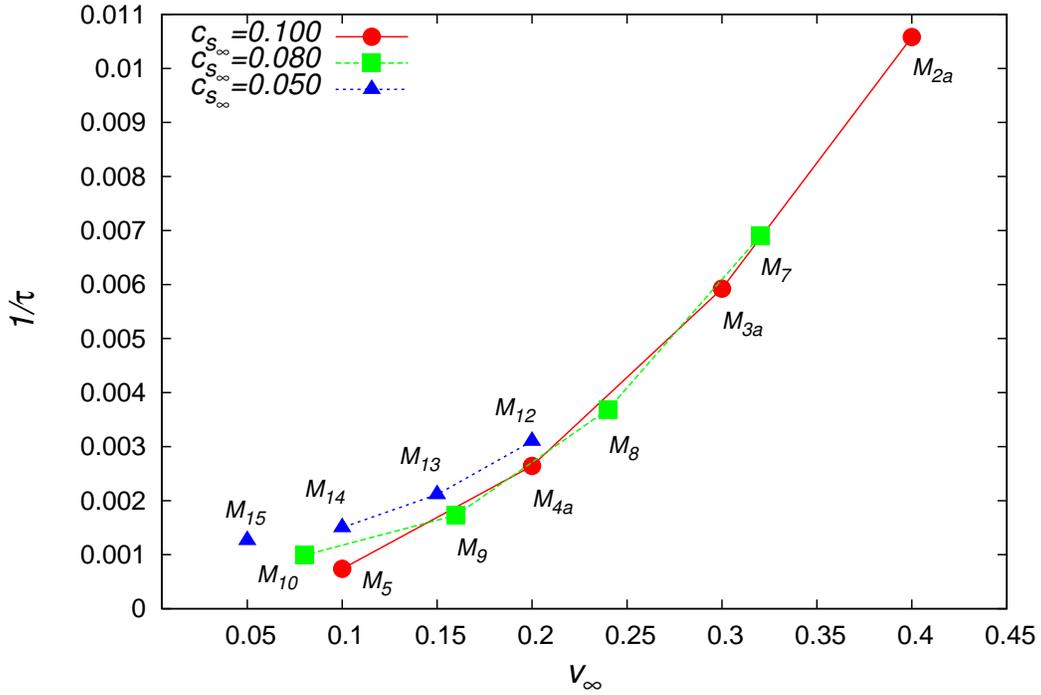


Figura 5.6: En esta figura se muestran las frecuencias de oscilación de la densidad de masa en reposo dentro del cono de choque en términos de la velocidad del viento para diferentes valores de la velocidad del sonido.

espacial grande, sino que también se necesita suficiente resolución cerca del hoyo negro.

En la Figura 5.6 se muestran las frecuencias obtenidas de las simulaciones para cada uno de los modelos de la Tabla 5.1. Los círculos corresponden a los resultados obtenidos de la simulaciones considerando una velocidad del sonido de $c_{s_\infty} = 0,1$. Análogamente, los cuadros y los triángulos indican los resultados con $c_{s_\infty} = 0,08$ y $c_{s_\infty} = 0,05$, respectivamente. Por otra parte, el modelo M_{15} corresponde a un extrapolación a Mach 1, debido a la restricción del dominio numérico descrita anteriormente.

En la Figura 5.7 se compara la ventana de frecuencias de las simulaciones numéricas con los resultados observacionales. La pregunta que se realiza es sobre el valor de los parámetros para que las frecuencias obtenidas estén dentro del rango de la frecuencias

observadas para las fuentes de oscilaciones cuasi-periódicas. Cada punto en cada línea de la diagonal define una frecuencia propia del pico mas poderoso del espectro en términos de la masa del hoyo negro. Además, cada línea corresponde a valores diferentes de la velocidad del viento en unidades de la velocidad del sonido. Estas líneas se obtienen simplemente escalando los resultados a partir de nuestros resultados usando $M = 1$

En la figura se muestran las frecuencias en términos de la masa del hoyo negro para varios valores de $c_{s\infty}$. Para cada valor de la velocidad del sonido (cada gráfica en la Figura 5.7) se puede observar que para velocidades del viento grandes, las frecuencias también son grandes. Por otra parte, los tres paneles muestran que cuando el valor de la velocidad del sonido es más grande, la frecuencia también lo es.

Con el fin de comparar las observaciones, se incluyen en la Figura 5.7 las masas y las frecuencias correspondientes al caso de Sgr A*, donde la masa de hoyo negro supermasivo es $M = 4,1 \pm 0,6 \times 10^6 M_{\odot}$ [Ghez et al. 2008] y el rango de frecuencias fue reportado en [Aschenbach et al. 2004, Abramowicz et al. 2004]. También se muestra una región sombreada correspondiente al rango de frecuencias asociadas a *high mass X-ray binaries* (HMXBs) y las posibles masas para el hoyo negro que podría estar alojado en tales regiones.

Por otra parte, a partir de los resultados numéricos en la Figura 5.7, se puede notar que para el rango de velocidades analizado, para el modelo con $\Gamma = 4/3$ y para varias velocidades del viento, las frecuencias de las oscilaciones de la densidad y la masa del hoyo negro para Sgr A* se encuentran parcialmente dentro de las observaciones. La tendencia que se observa entre los paneles en la Figura 5.7 indica que cuando $c_{s\infty}$ aumenta, un mayor rango de los parámetros contienen a Sgr A*.

En la Figura 5.7 también se muestra una caja sombreada correspondiente a oscilaciones cuasi-periódicas entre $1mHz$ a $400mHz$, las cuales son observadas en el espectro de HMXBs. Algunas de estas medidas están asociadas con regiones donde se cree que existe

un hoyo negro, por ejemplo Cyg X-1 [Liu et al. 2004]. Como se puede observar, esta figura predice una variedad de posibles configuraciones para las frecuencias observadas. Por ejemplo, la masa permitida para el hoyo negro que probablemente podría ser alojado en esta región puede ser de cientos de millones de masas solares para todos los modelos que se presentan. Otro caso corresponde a la línea vertical punteada en la Figura 5.7, la cual corresponde a otra fuente de oscilaciones cuasi-periódicas de $1,27Hz$ [Kaur et al. 2007]. Las masas de los hoyos negros consistentes con estas observaciones serían de 10^2 a $10^3 M_{\odot}$. Estos resultados han sido presentados en [Lora-Clavijo & Guzmán 2013].

Finalmente, un estudio más exhaustivo del espacio de parámetros podría incluir información acerca de la ecuación de estado, agregando ingredientes que involucran procesos no adiabáticos y radiativos como en [Zanotti et al. 2011, Roedig et al. 2012], pero en modelos más realistas que permitan el flujo natural de materia dentro del hoyo negro. Sin embargo, antes de todo esto, sería más interesante, como primer paso, el uso de velocidades del viento más realistas en las simulaciones, las cuales podrían involucrar el uso de coordenadas tipo fish-eyed (ojo de pez) para describir el espacio-tiempo de fondo o usar coordenadas compactificadas con condiciones especiales en las rebanadas del espacio-tiempo que penetren el horizonte de eventos y que se aproximen al infinito al mismo tiempo. Esto permitiría estudiar dominios mucho más grandes en términos del radio de acreción, usando recursos computacionales más modestos, y así poder asociar la resolución más grande en las regiones cercanas al hoyo negro, como en los otros casos ya estudiados de la propagación de campos escalares en el espacio-tiempo de un hoyo negro donde el futuro infinito nulo está contenido en el dominio numérico [Cruz-Osorio et al. 2011].

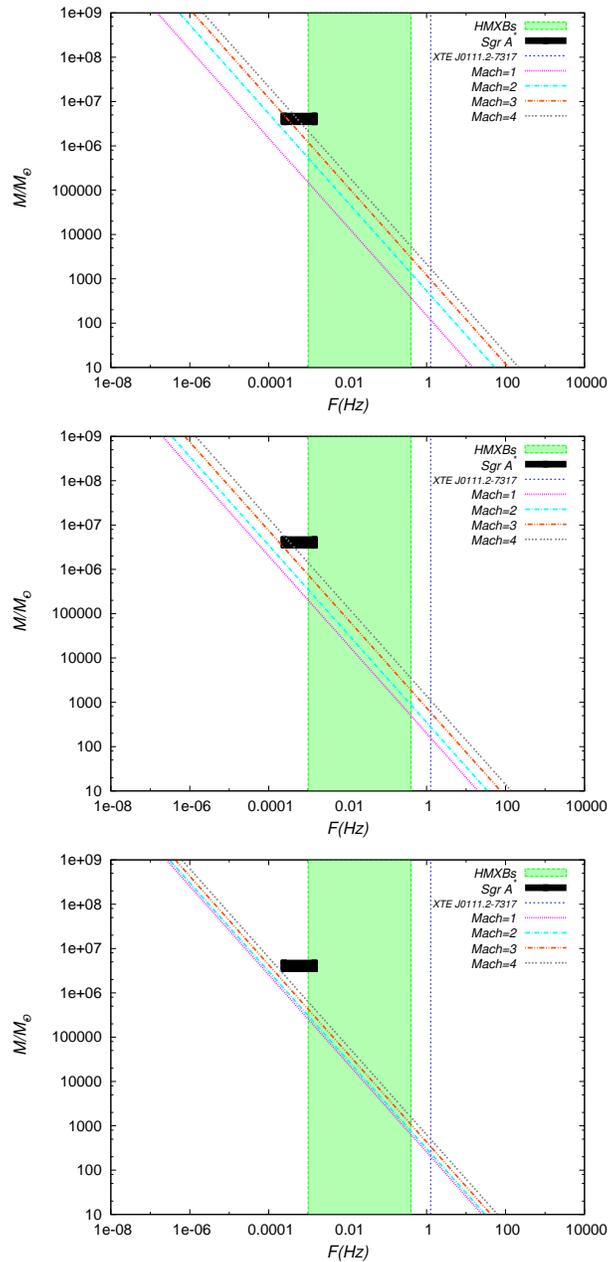


Figura 5.7: En esta figura se resume el estudio del espacio de parámetros utilizado. De arriba hacia abajo, la velocidad del sonido es $c_{s\infty} = 0,1, 0,08, 0,05$. También se muestra una línea vertical que indica una frecuencia especial observada de 1.27Hz , asociada a HMXBs. Por otra parte, la región sombreada corresponde a HMXBS en el rango de $1\text{mHz} - 400\text{mHz}$. La cajita negra corresponde a un hoyo negro de masa y rangos de frecuencia observadas en Sgr A*. En estos casos, el índice adiabático es $4/3$.

SECCIÓN 5.2

Acreción de flujos no axialmente simétricos en el plano ecuatorial

Como en el caso axialmente simétrico, anteriormente presentado, para un espacio-tiempo curvo fijo, las ecuaciones de Euler relativistas con simetría slab (ecuatorial), pueden ser escritas en coordenadas esféricas a partir del sistema de ecuaciones (2.76) como

$$\partial_t \vec{U} + \partial_r(\alpha \vec{F}^r) + \partial_\phi(\alpha \vec{F}^\phi) = \alpha \vec{S} - \frac{\partial_r \sqrt{\gamma}}{\sqrt{\gamma}}(\alpha \vec{F}^r), \quad (5.17)$$

donde de nuevo, \vec{U} es un vector de variables conservativas, \vec{F}^r y \vec{F}^ϕ son los flujos en las direcciones espaciales r y ϕ respectivamente, y \vec{S} es un vector de fuentes. Estas cantidades son definidas en términos de las variables primitivas y las conservativas de la siguiente forma

$$\vec{U} = \begin{bmatrix} D \\ S_r \\ S_\phi \\ \tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_0 W \\ \rho_0 h W^2 v_r \\ \rho_0 h W^2 v_\phi \\ \rho_0 h W^2 - p - \rho_0 W \end{bmatrix}, \quad (5.18)$$

$$\vec{F}^r = \begin{bmatrix} \left(v^r - \frac{\beta^r}{\alpha}\right) D \\ \left(v^r - \frac{\beta^r}{\alpha}\right) S_r + p \\ \left(v^r - \frac{\beta^r}{\alpha}\right) S_\phi \\ \left(v^r - \frac{\beta^r}{\alpha}\right) \tau + v^r p \end{bmatrix}, \quad \vec{F}^\phi = \begin{bmatrix} \left(v^\phi - \frac{\beta^\phi}{\alpha}\right) D \\ \left(v^\phi - \frac{\beta^\phi}{\alpha}\right) S_r \\ \left(v^\phi - \frac{\beta^\phi}{\alpha}\right) S_\phi + p \\ \left(v^\phi - \frac{\beta^\phi}{\alpha}\right) \tau + v^\phi p \end{bmatrix}, \quad (5.19)$$

$$\vec{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 0 \\ T^{\mu\nu} g_{\nu\sigma} \Gamma_{\mu r}^{\sigma} \\ T^{\mu\nu} g_{\nu\sigma} \Gamma_{\mu\phi}^{\sigma} \\ T^{\mu 0} \partial_{\mu} \alpha - \alpha T^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^0 \end{bmatrix}. \quad (5.20)$$

Los valores de las funciones α , β^i y γ_{ij} , dependen del espacio-tiempo asumido. En este caso de simetría slab se considera el espacio-tiempo de Kerr en dos sistemas de coordenadas: coordenadas de Brill-Lindquist (BL) y coordenads de Kerr-Schild (KS). Esto con el fin de comparar los procesos de acreción en ambos sistemas de coordenadas. Para el primero de los dos casos, o sea las coordenadas de BL las funciones métricas son:

$$\begin{aligned} \alpha &= \left(\frac{r^2 \Delta}{\Sigma} \right)^{1/2}, \\ \beta^i &= \left(0, 0, -\frac{2Mar}{\Sigma} \right), \\ \gamma_{ij} &= \begin{pmatrix} \frac{r^2}{\Delta} & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Sigma}{r^2} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donde

$$\Delta \equiv r^2 - 2Mr + a^2, \quad (5.21)$$

$$\Sigma \equiv (r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta, \quad (5.22)$$

y M , a son la masa y el momento angular del hoy negro respectivamente. Por otra parte, en coordenadas de KS las funciones métricas toman la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \left(1 + \frac{2M}{r}\right)^{-1/2}, \\
\beta^i &= \left[\frac{2M}{r} \left(1 + \frac{2M}{r}\right)^{-1}, 0, 0\right], \\
\gamma_{ij} &= \begin{pmatrix} 1 + \frac{2M}{r} & 0 & -a \left(1 + \frac{2M}{r}\right) \\ 0 & r^2 & 0 \\ -a \left(1 + \frac{2M}{r}\right) & 0 & r^2 + a^2 \left(1 + \frac{2M}{r}\right) \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{5.23}$$

En todas estas ecuaciones se ha asumido que el sistema tiene simetría cilíndrica. Esto significa que la evolución del gas se lleva a cabo sobre el plano ecuatorial en $\theta = \pi/2$, lo cual no significa, como usualmente se hace, que esto sea una especie de aproximación infinitesimalmente delgada. Otra vez, en este caso, se considera que el fluido obedece la ecuación de estado de un gas ideal (2.85).

Acreción de Bondi-Hoyle relativista

En este caso también se estudia el caso de la acreción de un viento uniformemente distribuido que se mueve hacia un hoyo negro. Sin embargo, dicho viento se mueve de manera ortogonal al spin de rotación del hoyo negro, generando así otro tipo de comportamientos en la morfología del sistema. Específicamente, cuando un objeto compacto está rotando y la velocidad del viento es supersónica, un fenómeno interesante, llamado *flip-flop* puede aparecer [Matsuda et al. 1987]. Este efecto consiste en la oscilación de la orientación del cono de choque. Para el estudio de este fenómeno, se han llevado a cabo diferentes estudios bajo diferentes condiciones y para diferentes propósitos. Por ejemplo, en gravedad Newtoniana, considerando que la densidad y el campo de velocidades no son uniformes, se encontró que el cono de choque debería tener una topología tipo disco [Fryxell & Taam 1988]; por otro lado, también se ha estudiado la aparición de este tipo de comportamiento en términos del tamaño de objeto [Sawada et al. 1989, Matsuda et al. 1991].

La relevancia astrofísica del fenómeno de *flip flop* del cono de choque está asociado, por ejemplo, con las fluctuaciones observadas en la emisión de rayos X de sistemas pulsantes tales como Vela-x1 y EXO 2030+375, que no están asociados al periodo orbital del sistema binario [Taam & Fryxell 1988].

El efecto de *flip-flop* también puede suceder dentro del escenario relativista, en el caso en que el objeto compacto es un hoyo negro. Este caso fue recientemente reportado en [Donmez et al. 2011] y se considera realmente importante para ser estudiado en detalle, porque las oscilaciones del gas alrededor del hoyo negro podrían explicar el comportamiento oscilatorio de fuentes de alta energía, como las oscilaciones cuasi-periódicas o los estallidos de rayos X cuando el cono de choque es inestable. Por otra parte, se considera como un paso importante la inclusión de un espacio-tiempo curvo, el cual usa verdaderamente el espacio-tiempo de un hoyo negro, en lugar de usar los potenciales pseudo-Newtonianos tipo Paczyński-Wiita.

Con el uso de las coordenadas penetrantes, ahora se está en la posición de analizar el caso donde el gas verdaderamente entra al horizonte de eventos del hoyo negro. En la acreción de Bondi-Hoyle relativista en el plano ecuatorial, la inestabilidad tipo *flip-flop* fue reportada brevemente por [Donmez et al. 2011]. Sin embargo, las coordenadas que se usaron para describir el espacio-tiempo del hoyo rotante no fueron las apropiadas, y como consecuencia de esto, es necesario – como en los casos pseudo-Newtonianos – aplicar condiciones de frontera interiores afuera del horizonte de eventos del hoyo negro.

Por esta razón, en este trabajo, también se estudia el proceso de acreción de Bondi-Hoyle relativista usando coordenadas penetrantes de Kerr-Schild sobre el plano ecuatorial. También se estudia el caso de coordenadas singulares de Boyer-Lindquist, con el fin de reproducir los efectos del *flip-flop* su amplitud y fase. Se reproduce el comportamiento morfológico encontrado en [Donmez et al. 2011], y se mide la amplitud de las oscilaciones usando coordenadas de BL. Sin embargo, cuando se usan coordenadas de KS, existen algunas oscilaciones que no son comparables a las oscilaciones que se observan

cuando se utilizan coordenadas de BL. Se observa, posteriormente, que las oscilaciones de coordenadas de KS son debido a artificios numéricos, porque la amplitud converge a cero cuando la resolución se incrementa. De hecho, existe un precedente dentro del régimen Newtoniano donde se ha encontrado que las inestabilidades numéricas del cono de choque pueden ser asociadas con la implementación de las condiciones de fronteras en la superficie del acretor [Foglizzo et al. 2005].

Datos iniciales y diagnóstico

A diferencia del caso anterior, aquí se quieren describir los datos iniciales asociados de un viento relativista en un espacio-tiempo curvo rotante. Entonces, como datos iniciales, se considera un viento homogéneo, que uniformemente llena todo el dominio, moviéndose sobre el plano ecuatorial a lo largo de la dirección x con densidad y presión constantes. El campo de velocidad inicial v^i puede ser expresado, como en el caso anterior, en términos de la velocidad asintótica v_∞ , como sigue

$$v^r = F_1 v_\infty \cos \phi + F_2 v_\infty \sin \phi, \quad (5.24)$$

$$v^\phi = -F_3 v_\infty \sin \phi + F_4 v_\infty \cos \phi, \quad (5.25)$$

donde

$$F_1 = \frac{1}{\sqrt{\gamma_{rr}}}, \quad (5.26)$$

$$F_2 = \frac{F_3 F_4 \gamma_{\phi\phi} + F_1 F_3 \gamma_{r\phi}}{F_1 \gamma_{rr} + F_4 \gamma_{r\phi}}, \quad (5.27)$$

$$F_3 = \frac{F_1 \gamma_{rr} + F_4 \gamma_{r\phi}}{\sqrt{(\gamma_{rr} \gamma_{\phi\phi} - \gamma_{r\phi}^2)(F_1^2 \gamma_{rr} + F_4^2 \gamma_{\phi\phi} + 2F_1 F_4 \gamma_{r\phi})}}, \quad (5.28)$$

$$F_4 = -\frac{2\gamma_{r\phi}}{\sqrt{\gamma_{rr} \gamma_{\phi\phi}}}, \quad (5.29)$$

y se satisface la relación $v^2 = v_i v^i = v_\infty^2$. Especialmente en el caso de coordenadas de BL, las anteriores expresiones para el campo de velocidades se reducen a

$$v^r = \sqrt{\gamma^{rr}} v_\infty \cos \phi, \quad (5.30)$$

$$v^\phi = -\sqrt{\gamma^{\phi\phi}} v_\infty \sin \phi. \quad (5.31)$$

Las demás condiciones iniciales sobre la densidad y presión se asumen de la misma forma que en el caso axialmente simétrico. Por otra parte, también las condiciones de frontera exteriores y en la excisión son iguales al caso axial, salvo que en el caso de coordenadas de BL se deben poner condiciones de frontera de flujo saliente en la frontera interior, afuera del horizonte de eventos, ya que éste es singular. Vale la pena mencionar que en este caso también la frontera exterior se parametriza con el radio de acreción, $r_{max} \sim 10r_{acc}$. Finalmente en la Tabla 5.2 se muestra el conjunto de parámetros que se consideran en este análisis.

Para verificar las simulaciones, se usa la razón de masa acretada a través de un círculo en el plano ecuatorial

$$\dot{M} = - \int_0^{2\pi} \alpha \sqrt{\gamma} D \left(v^r - \frac{\beta^r}{\alpha} \right) d\phi, \quad (5.32)$$

como un indicador del proceso de acreción durante la evolución.

Morfología

Durante el desarrollo de este trabajo, se han encontrado resultados morfológicos bastante similares a los realizados en el pasado. Particularmente, en el caso supersónico, en la parte posterior del hoyo negro, aparece un cono de choque caracterizado por una zona de alta densidad. Además, la evolución presenta un comportamiento atractor, ya que la solución alcanza un régimen estacionario. Con el fin de comparar con las investi-

Modelo	\mathcal{M}_∞	Γ	a	r_{EH}	r_{acc}	r_{exc}	r_{max}
BL1	3	4/3	0.5	1.87	10	2	100
BL2	4	4/3	0.5	1.87	5.88	2	60
BL3	5	4/3	0.5	1.87	3.84	2	40
BL4	3	4/3	0.9	1.43	10	1.6	100
BL5	4	4/3	0.9	1.43	5.88	1.6	60
BL6	5	4/3	0.9	1.43	3.84	1.6	40
BL7	3	5/3	0.5	1.87	10	2	100
BL8	4	5/3	0.5	1.87	5.88	2	60
BL9	5	5/3	0.5	1.87	3.84	2	40
BL10	3	5/3	0.9	1.43	10	1.6	100
BL11	4	5/3	0.9	1.43	5.88	1.6	60
BL12	5	5/3	0.9	1.43	3.84	1.6	40
KS1	3	4/3	0.5	1.87	10	1.2	100
KS2	4	4/3	0.5	1.87	5.88	1.2	60
KS3	5	4/3	0.5	1.87	3.84	1.2	40
KS4	3	4/3	0.9	1.43	10	0.9	100
KS5	4	4/3	0.9	1.43	5.88	0.9	60
KS6	5	4/3	0.9	1.43	3.84	0.9	40
KS7	3	5/3	0.5	1.87	10	1.2	100
KS8	4	5/3	0.5	1.87	5.88	1.2	60
KS9	5	5/3	0.5	1.87	3.84	1.2	40
KS10	3	5/3	0.9	1.43	10	0.9	100
KS11	4	5/3	0.9	1.43	5.88	0.9	60
KS12	5	5/3	0.9	1.43	3.84	0.9	40

Cuadro 5.2: En esta tabla se presentan los modelos estudiados en este trabajo, donde dichos modelos son etiquetados con BL y KS, dependiendo del sistema de coordenadas utilizado. En todos estos modelos, la densidad inicial se fija a $\rho_0 = 10^{-6}$ y el valor asintótico de la velocidad del sonido a $c_{s\infty} = 0,1$.

gaciones anteriores, se muestran algunos ejemplos. Como caso ilustrativos, se muestran en la Figura 5.8 dos ejemplos de la morfología del cono de choque usando coordenadas de KS, para dos valores diferentes del índice adiabático $\Gamma = 4/3$ and $\Gamma = 5/3$. Muchos más casos fueron estudiados cambiando la velocidad del viento y el parámetro de rotación del hoyo negro, ver la Tabla 5.2. Esta morfología es consistente con análisis previos hechos en [Petrich et al. 1989, Font & Ibánñez 1998, Font & Ibánñez 1998a].

Por otra parte, se mide la razón de masa acretada por el hoyo negro en términos del tiempo propio para un detector dado. En la Figura 5.9 se muestra la tasa de acreción para tres de los diferentes valores iniciales del gas, con el fin de ilustrar la dependencia que tiene la razón de masa acretada de la velocidad del viento. Estos cálculos son llevados a cabo en un detector localizado en $r = 2,1M$ para los tres modelos considerados. La figura muestra que cuando la velocidad del viento es más alta, la razón de masa acretada es más pequeña, lo cual es consistente con los resultados previos realizados por diferentes autores.

Comportamiento tipo *flip-flop*

El movimiento tipo *flip-flop* del cono de choque consiste en la oscilación del cono mismo a lo largo de la dirección angular. En la Figura 5.10 se ilustra este fenómeno a diferentes tiempos para el modelo BL2. Se puede observar claramente que el cono de choque oscila considerablemente en la dirección angular. Algunos resultados muy similares fueron reportados recientemente en el régimen relativista [Donmez et al. 2011].

Algo que llama la atención es la posibilidad de que el comportamiento tipo *flip-flop* se deba a la implementación numérica de las condiciones de frontera cerca del horizonte

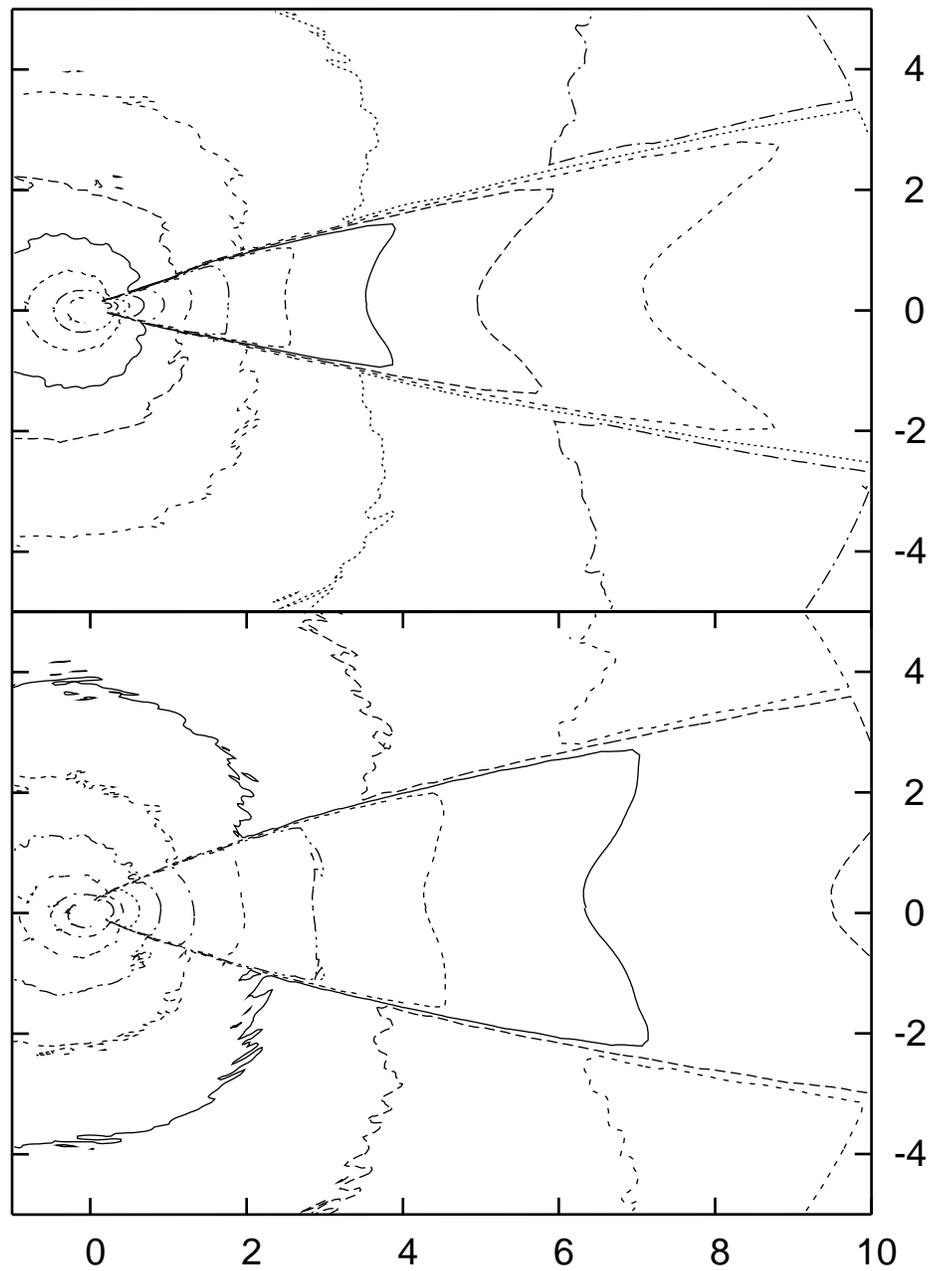


Figura 5.8: En esta figura se muestra la morfología de la densidad de masa en reposo para dos de los modelos presentados en la anterior tabla. Las gráficas corresponden a un tiempo de $t = 10000M$. La coordenada radial está en unidades del radio de acreción r_{acc} .

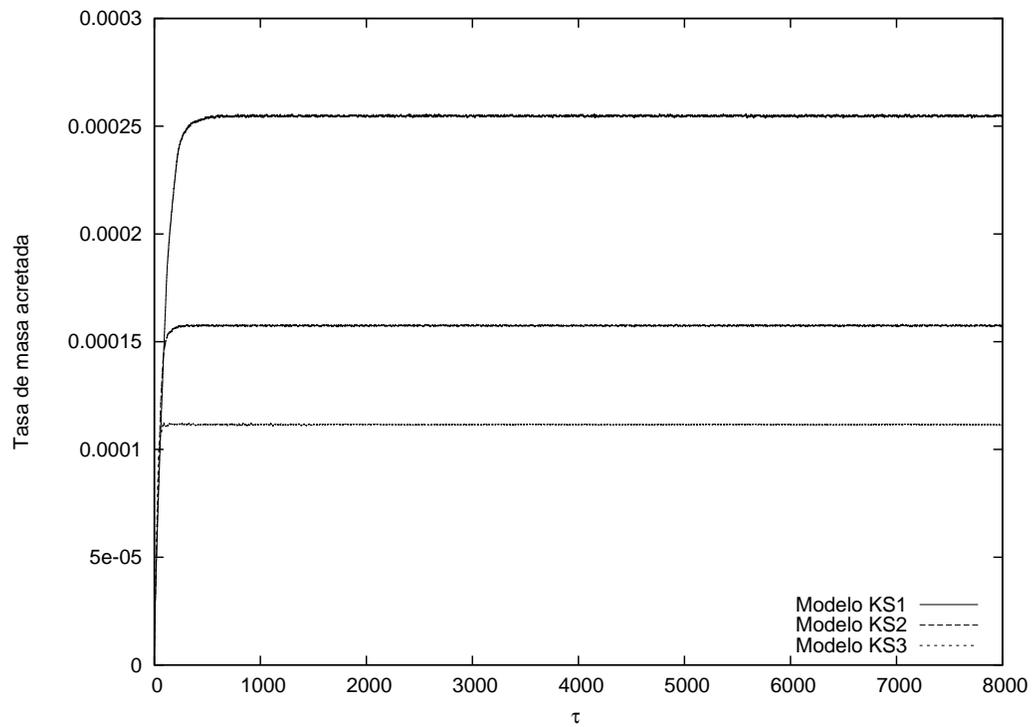


Figura 5.9: En esta figura se muestra la razón de masa acretada por los modelos KS1,KS2,KS3 en función del tiempo propio para un detector localizado en $r = 2,1M$. Se muestra además cómo el proceso de acreción depende de la velocidad del gas, correspondiendo la acreción más grande a la más baja velocidad del gas, como es de esperarse.

de eventos, porque en ambos casos, en [Donmez et al. 2011] y en la Figura 5.10, se usaron coordenadas de BL, las cuales son singulares en el horizonte de eventos. Algo particularmente importante es que con el fin de simular estos procesos de acreción, es necesario usar un dominio numérico tal que $r \in [r_{exc}, r_{max}]$ con $r_{exc} > r_{EH}$ (r_{EH} radio del horizonte de eventos), lo cual implica que la frontera interior es tipo tiempo. Por otra parte, si se desea estudiar la evolución del gas en regiones cercanas al hoyo negro, las funciones métricas en coordenadas no penetrantes tienden a diverger y los gradientes de las variables hidrodinámicas son muy altos. Entonces, estos errores provenientes de la implementación de una frontera artificial cerca del horizonte de eventos podrían eventualmente ser responsables de contaminar el dominio donde se llevan a cabo las simulaciones numéricas y eventualmente desestabilizar el cono de choque.

Con el fin de estudiar esto, se miden las oscilaciones a lo largo de la dirección angular del cono de choque usando coordenadas de KS. En la Figura 5.11 se muestran la evolución numérica del modelo KS2 a diferentes tiempos, la cual es físicamente equivalente a la Figura 5.10. En este caso, las oscilaciones son mucho más pequeñas comparadas con las observadas cuando se usan coordenadas de BL. En la Figura 5.12, se muestra la amplitud de dichas oscilaciones usando los dos sistemas de coordenadas. Lo que se mide en esta figura es la posición del máximo de la densidad de masa en reposo a lo largo de la dirección angular en radianes sobre un círculo de radio $10M$. El máximo está localizado dentro del cono de choque, de tal forma que sea una buena cantidad para monitorear, y la cual es medida en tiempo propio.

Con el fin de verificar la precisión del código numérico, en la Figura 5.13 se muestra la auto-convergencia de la densidad de masa en reposo, usando tres resoluciones para el caso de coordenadas de KS. La auto-convergencia es calculada para un ángulo fijo dentro del cono de choque. Este es una prueba muy fuerte, porque a lo largo de esta línea, el cono de choque vibra. Como se puede observar, la auto-convergencia es mejor que primer orden cuando el cono de choque se aproxima al régimen estacionario.

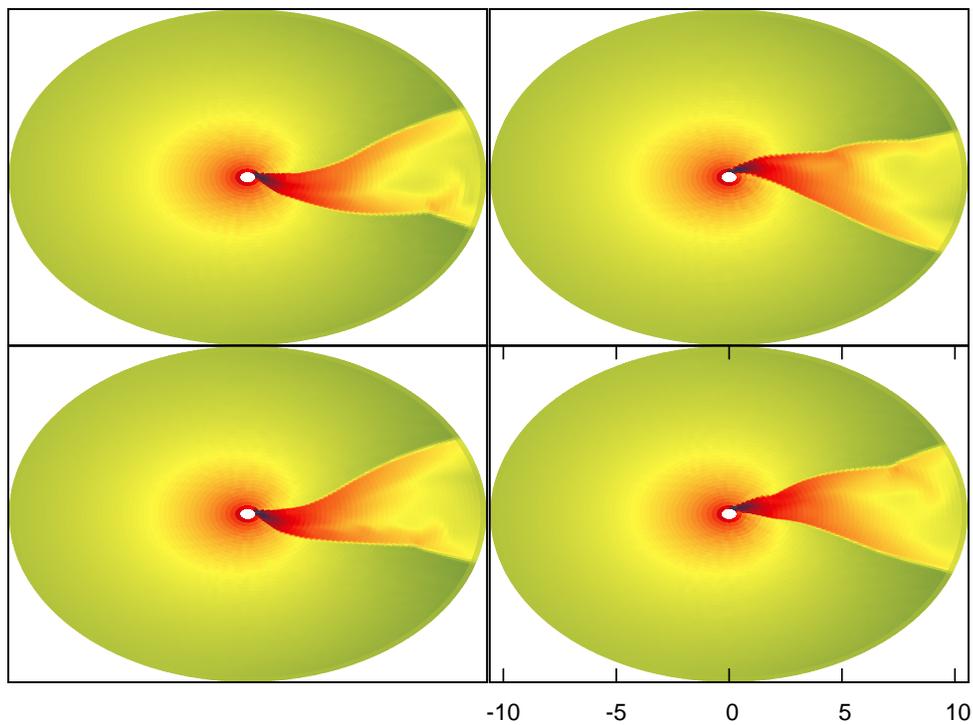


Figura 5.10: En estas figuras se muestra la densidad de masa en reposo para el modelo BL2 para diferentes valores de la coordenada temporal (panel arriba-izquierda $t = 7686$, panel arriba-derecha $t = 8062$, panel abajo-izquierda $t = 8308$ y panel abajo-derecha $t = 8670$). El movimiento del choque a lo largo de la coordenada angular es llamado *flip-flop*.

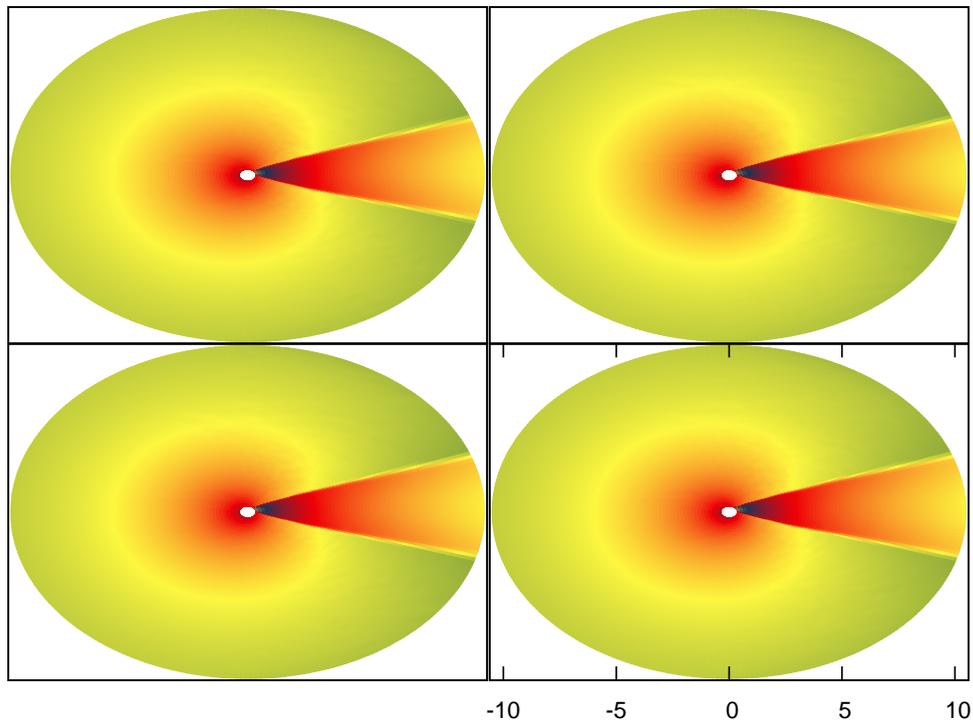


Figura 5.11: En estas figuras se muestra la densidad de masa en reposo para el modelo KS2 para diferentes valores de la coordenada temporal (panel arriba-izquierda $t = 7686$, panel arriba-derecha $t = 8062$, panel abajo-izquierda $t = 8308$ y panel abajo-derecha $t = 8670$). Como se puede ver, el movimiento de cono de choque es muy pequeño comparado con el caso de las coordenadas de BL.

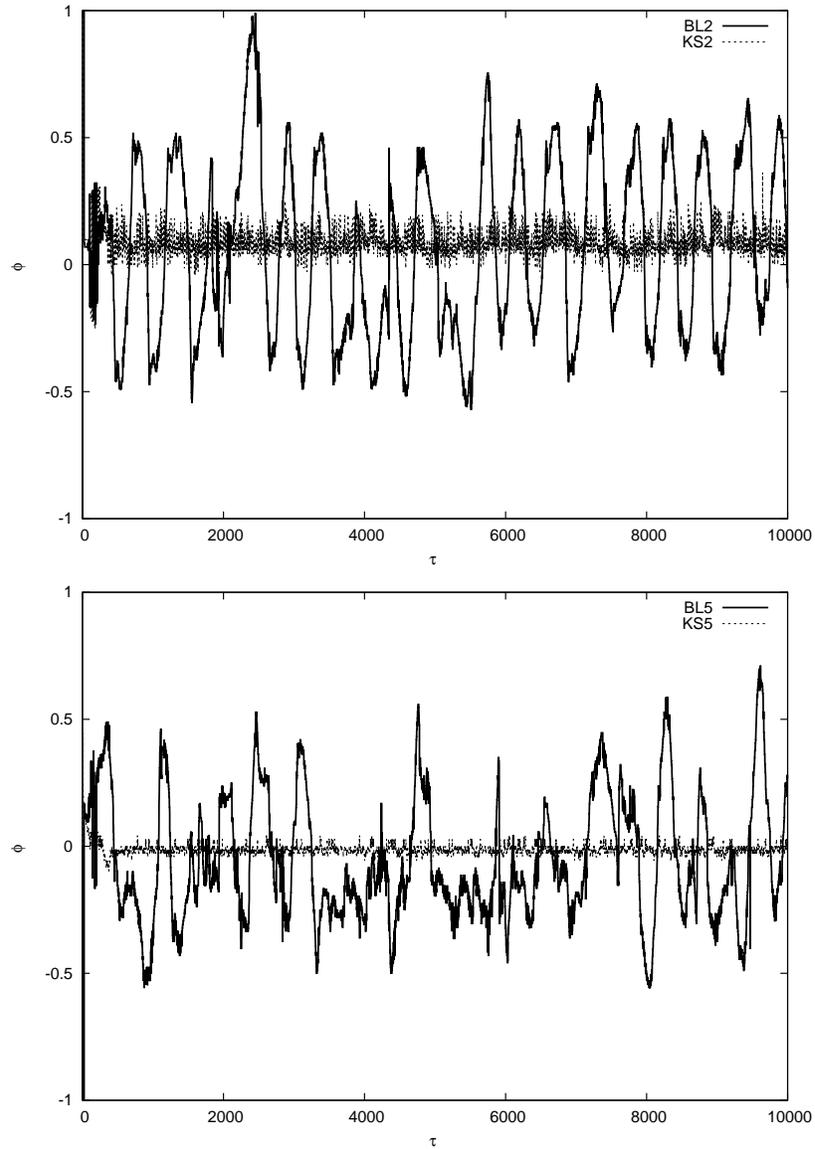


Figura 5.12: En esta figura se compara la posición del máximo de la densidad de masa en reposo a lo largo de la coordenada angular ϕ durante la evolución en términos del tiempo propio. Los modelos que se consideran aquí son: panel de arriba BL2 vs KS2 y panel de abajo BL5 vs KS5. En ambos casos, el máximo de ρ_0 es medido por un detector localizado en $r = 10M$. De estas gráficas se ve claramente que cuando se consideran coordenadas de BL, la amplitud de las oscilaciones es muy grande, a diferencia del caso de las coordenadas de KS.

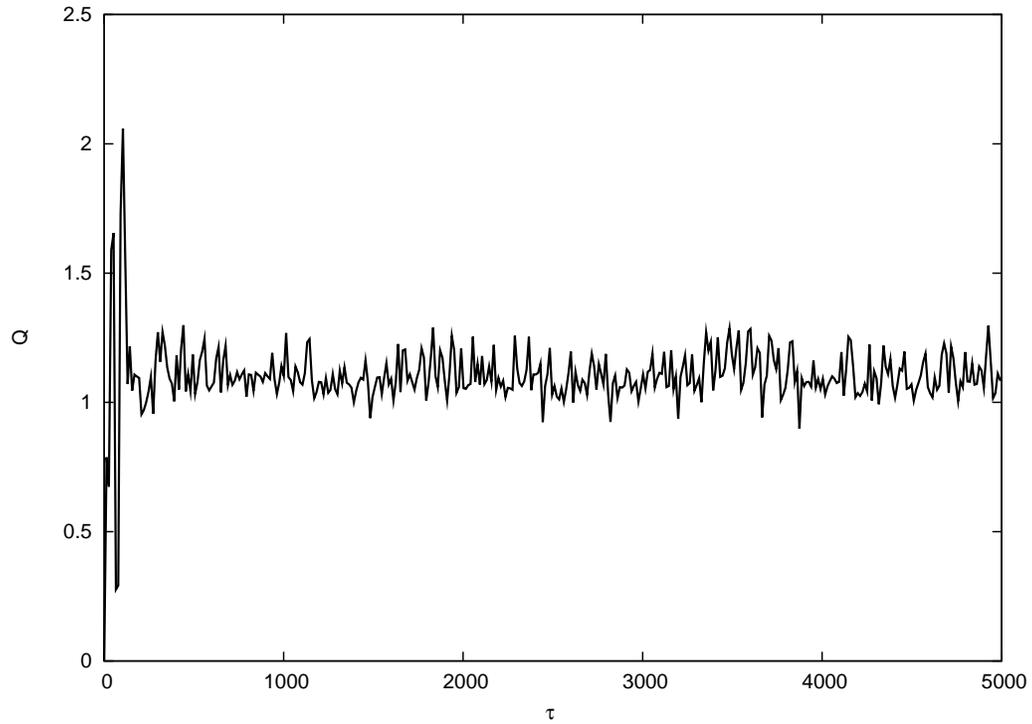


Figura 5.13: En esta figura se muestra la auto-convergencia Q de ρ_0 para un ángulo fijo centrado en el cono de choque. Aquí se calcula la norma L_2 de la diferencia entre los valores de la densidad para varias resoluciones: $(\Delta r_1, \Delta \phi_1) = (0,033, 0,014)$, $(\Delta r_2, \Delta \phi_2) = (\Delta r_1, \Delta \phi_1)/1,5$, and $(\Delta r_3, \Delta \phi_3) = (\Delta r_1, \Delta \phi_1)/(1,5)^2$. Como en el caso anterior, las oscilaciones se deben a que cuando el sistema alcanza el régimen estacionario, la densidad adentro de cono de choque oscila.

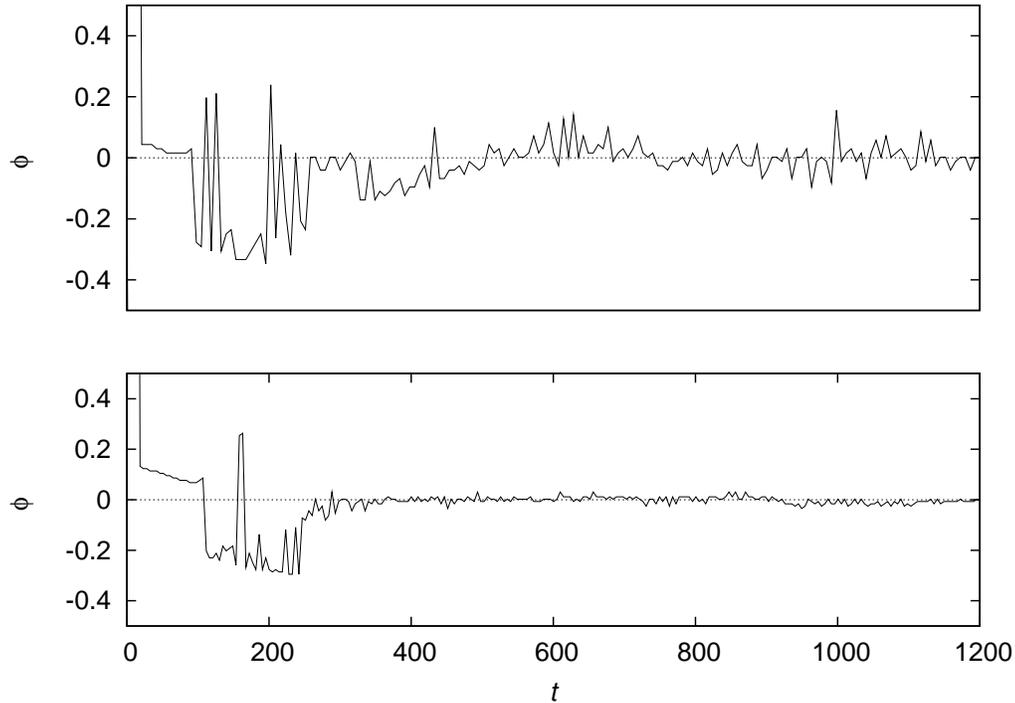


Figura 5.14: En esta figura se muestra la amplitud de las oscilaciones alrededor del promedio; como se observa, dicha amplitud disminuye con la resolución. De hecho, la oscilación se desfasa con la resolución, lo cual es un claro indicio de que las condiciones de frontera fuera del hoyo negro, cuando se usan coordenadas singulares en el horizonte, no funcionan bien, y vale la aclaración de que se ha implementado al pie de la letra lo que se ha presentado en trabajos de otros autores.

En la Figura 5.12 se muestra que cuando se usan las coordenadas de KS, las oscilaciones del cono de choque no son de tipo *flip-flop*. En lugar de esto, dichas oscilaciones parecen ser vibraciones. En la Figura 5.14 se muestra una tendencia de la amplitud de las oscilaciones en términos de la resolución. Con el fin de tener idea de qué podría pasar en el límite continuo, se calcula el promedio de la amplitud de las vibraciones para dos resoluciones y se mide dicha amplitud con respecto a tal promedio. El resultado es que la amplitud alrededor del promedio es $2.789\text{e-}2$ para $(\Delta r = 0,022, \Delta \phi = 0,0093)$ y $1.08\text{e-}2$ para la resolución $(\Delta r = 0,0146, \Delta \phi = 0,0062)$.

Finalmente, con el fin de estudiar los efectos de la resolución en el sistema que usa coordenadas de BL, se muestra en la Figura 5.15 la posición del máximo de la densidad dentro del cono choque. Lo que se encuentra es que el comportamiento tipo *flip-flop* del sistema no depende de la resolución, como se esperaría cuando se aproxima al continuo. De hecho, es preocupante que las oscilaciones presenten fases que dependen de la resolución. Este es un indicio de que el uso de coordenadas singulares y excisión por fuera del hoyo negro no es una buena combinación, y preocupa que aún se siga implementado esta combinación.

Los resultados presentados con el uso de coordenadas de KS están avalados por la convergencia y la consistencia de los resultados numéricos, y desafortunadamente no hemos encontrado una referencia que muestre convergencia cuando se usan coordenadas BL. Estos resultados han sido presentados en [Cruz-Osorio et al. 2012]

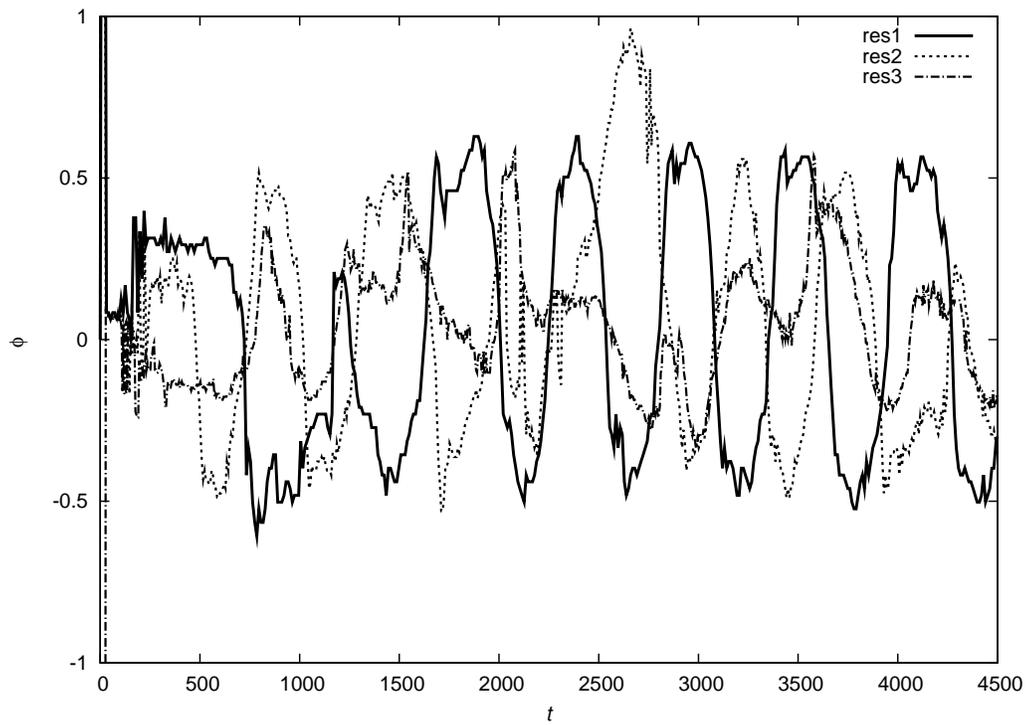


Figura 5.15: En esta figura se muestra la amplitud de las oscilaciones alrededor del promedio; como se observa, dicha amplitud no disminuye con la resolución.

Capítulo 6

CONCLUSIONES

1. Se estudió de forma detallada el sistema de ecuaciones de Euler relativista en un espacio-tiempo curvo fijo, esto es: 1) Se mostró cómo obtener dichas ecuaciones usando la formulación 3+1 propuesta originalmente para la relatividad numérica, con la ventaja de que en el momento que se empieza a tener en cuenta la evolución de la geometría, las ecuaciones de la hidrodinámica relativista pueden ser fácilmente acopladas. 2) Se calculó la estructura característica asociada al sistema de ecuaciones de Euler relativista, la cual es de vital importancia para los métodos numéricos que se usaron en este trabajo.
2. Se estudiaron los métodos numéricos usados para la solución numérica de las ecuaciones de Euler relativistas, con el fin de generar una serie de códigos numéricos que sirven para describir diferentes escenarios físicos y astrofísicos, en los que la dinámica del sistema se describe mediante las ecuaciones de Euler relativistas.
3. Para probar los métodos numéricos usados a la hora de capturar choques, se llevaron a cabo una serie de pruebas clásicas en las que se involucran choques

fuertes a velocidades ultrarelativistas y para las cuales existe una solución exacta. Específicamente, se resolvió el problema de Riemann relativista en una dimensión de forma numérica y se comparó con la solución exacta [Martí y Müller 1994]. En este punto, también se construyó, siguiendo el trabajo de [Martí y Müller 1994], dicha solución exacta de forma detallada [Lora-Clavijo et al. 2012], de tal forma que funcione como un trabajo educativo para que los estudiantes que deseen o estén interesados en estudiar procesos físicos que involucren la solución numérica de las ecuaciones de Euler, tanto clásicas como relativistas, puedan implementarla en un código numérico para realizar las pruebas pertinentes.

4. Se construyó un código numérico en simetría esférica, para estudiar la acreción de un fluido perfecto en un espacio-tiempo fijo de Schwarzschild en coordenadas que penetran el horizonte de eventos. Los resultados fueron soportados con pruebas de convergencia y auto-convergencia.

Como un primer paso, se estudió de forma educativa el problema de la explosión esféricamente simétrica en un fondo de Minkowski [Guzmán & Lora-Clavijo 2012]. En este caso, ya que no hay solución exacta, se mostró la auto-convergencia a diferentes tiempos; aquí es importante notar que la convergencia para datos iniciales discontinuos es delicada en el sentido que se puede estimar solamente en las regiones donde no hay discontinuidades, es este caso solamente en la zona de rarefacción.

Como una aplicación del código, se presentó un modelo de materia oscura colisionante, donde se estudiaron los efectos de la presión [Guzmán & Lora-Clavijo 2011a], en la acreción de materia y donde se dio un primer paso para la solución del problema “*core-cups*” de la materia oscura [Guzmán & Lora-Clavijo 2011b]. Específicamente, para el espacio de parámetros considerados, se ha encontrado que cuando la presión de la materia oscura es cero, no existen soluciones estacionarias y que eventualmente las masas de los agujeros negros supermasivos deberían ser mucho más grandes que las observadas si se supone que dichos hoyos negros son

alimentados con materia oscura que está siendo acretada radialmente. Sin embargo, para el caso de presión diferente de cero, se ha encontrado en todos los experimentos que se han analizado, que siempre el proceso de acreción alcanza un régimen estacionario, tal que la solución es un tipo de solución atractora, la cual, para valores grandes del índice adiabático, alcanza dicho régimen más rápido. Por otra parte, también se encontró que para hoyos negros semilla de alrededor de ($10^6 M_{\odot}$), la masa acretada en 10Gyr es del orden de unas cuantas masas solares. Esto implica que la materia oscura debería obedecer una ecuación de estado con presión diferente de cero, o en un caso conservativo, la acreción de materia oscura contribuye con una pequeña fracción comparada con la posible acreción de materia bariónica como sugiere [Peirani & Freitas-Pacheco 2008], donde solamente un 10% de la masa de los hoyos negros supermasivos hoy día es debida a acreción de materia oscura.

Por otra parte, estos resultados proveen algunas indicaciones importantes. El perfil de densidad es “*cuspy*” solamente en la región cerca al hoyo negro, mientras que la densidad se estabiliza alrededor de un perfil de densidad constante en una región relativamente lejana al hoyo negro. Este resultado implica, por ejemplo, que para un hoyo negro de masa de $10^9 M_{\odot}$, el perfil de densidad es plano, no “*cuspy*”, para distancias de $1000M \sim 0,05$ pc en adelante. La principal conclusión es que el perfil de densidad que se encontró aquí en la región más allá de $\sim 0,1$ pc prevalece para distancias más lejanas que las utilizadas en este trabajo. Esto quiere decir que dicho perfil de densidad tiene un perfil que no es “*cuspy*” y que es consistente con la presencia de un hoyo negro; todo esto con el precio de agregar algo de presión a la materia oscura.

5. Se contruyó un código axialmente simétrico para estudiar numéricamente la acreción de Bondi-Hoyle relativista de un gas que es inyectado de manera supersónica en el espacio-tiempo de un hoyo negro de Schwarzschild, el cual es descrito en coordenadas que penetran el horizonte de eventos. Los resultados reproducen la

morfología de la densidad de masa en reposo del gas obtenida en el régimen Newtoniano y en algunos trabajos previos relativistas, en los cuales se forma un cono de choque estable. Una de las propiedades importantes de la acreción supersónica de un viento relativista es que la densidad dentro del cono de choque vibra. En este trabajo se exploró la posibilidad de que tales vibraciones tengan frecuencias dentro del rango de frecuencias de las oscilaciones cuasi periódicas observadas para diferentes escenarios astrofísicos. Este enfoque es el primero para flujos que son axialmente simétricos, en el régimen estacionario, sobre un espacio-tiempo de un hoyo negro, el cual es descrito en coordenadas que penetran el horizonte de eventos [Lora-Clavijo & Guzmán 2013].

Por otra parte, también se construyó un código en simetría slab (simetría ecuatorial), el cual se utilizó para estudiar el mismo fenómeno físico, la acreción de Bondi-Hoyle. Sin embargo, en este caso, los flujos no son axialmente simétricos y el espacio-tiempo corresponde al de un hoyo negro rotante de Kerr. Este análisis se enfocó en el movimiento del cono de choque de un gas supersónico que está siendo acretado por un hoyo negro. En particular, se estudió dicho movimiento usando dos sistemas de coordenadas: Boyer-Lindquist (BL) (coordenadas que no penetran el horizonte de eventos) y Kerr-Schild (KS) (coordenadas que penetran el horizonte de eventos). Se encontró que cuando se usan coordenadas de BL, el cono de choque oscila de una manera llamada flip-flop, con una amplitud del orden de un radian, mientras que cuando se usan coordenadas de KS, tal comportamiento no aparece. En lugar de esto, en el caso de coordenadas de KS aparecen unas oscilaciones dentro del cono de choque que se interpretan como vibraciones. Además, usando varias resoluciones de los cálculos numéricos, se muestra que la amplitud de las vibraciones adentro del cono de choque disminuyen cuando se usan coordenadas de KS. En este trabajo, se concluye finalmente que permitir que la materia entre realmente en el hoyo negro es el procedimiento correcto que se debe seguir en este tipo de procesos [Cruz-Osorio et al. 2012].

A

Apéndice

SECCIÓN A.1

Matrices Jacobianas \mathcal{A}^0 y \mathcal{A}^i

En este apéndice se muestran las matrices Jacobianas \mathcal{A}^0 y \mathcal{A}^i , para el caso de las ecuaciones de Euler relativistas en un espacio-tiempo curvo arbitrario. Dichas matrices, proveen la estructura de valores y vectores propios de este sistema de ecuaciones, los cuales son de vital importancia en los métodos numéricos que en este trabajo se usan.

$$\mathbf{A}^0 = \sqrt{\gamma} \begin{pmatrix} W & \rho W^3 v_1 & \rho W^3 v_2 & \rho W^3 v_3 & 0 \\ hW^2 v_1 (1 + \epsilon + \chi) & \rho hW^2 (2W^2 v_1^2 + \gamma_{11}) & \rho hW^2 (2W^2 v_1 v_2 + \gamma_{12}) & \rho hW^2 (2W^2 v_1 v_3 + \gamma_{13}) & W^2 v_1 (\rho + \kappa) \\ hW^2 v_2 (1 + \epsilon + \chi) & \rho hW^2 (2W^2 v_2 v_1 + \gamma_{21}) & \rho hW^2 (2W^2 v_2^2 + \gamma_{22}) & \rho hW^2 (2W^2 v_2 v_3 + \gamma_{23}) & W^2 v_2 (\rho + \kappa) \\ hW^2 v_3 (1 + \epsilon + \chi) & \rho hW^2 (2W^2 v_3 v_1 + \gamma_{31}) & \rho hW^2 (2W^2 v_3 v_2 + \gamma_{32}) & \rho hW^2 (2W^2 v_3^2 + \gamma_{33}) & W^2 v_3 (\rho + \kappa) \\ W^2 (1 + \epsilon + \chi) - \chi - W & \rho W^3 v_1 (2hW - 1) & \rho W^3 v_2 (2hW - 1) & \rho W^3 v_3 (2hW - 1) & W^2 (\rho + \kappa) - \kappa \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^1 = \alpha\sqrt{\gamma} \begin{pmatrix} W(v^1 - \frac{\beta^1}{\alpha}) & \rho W \left[1 + W^2 v_1 (v^1 - \frac{\beta^1}{\alpha}) \right] & \rho W^3 v_2 (v^1 - \frac{\beta^1}{\alpha}) & \rho W^3 v_3 (v^1 - \frac{\beta^1}{\alpha}) & 0 \\ \left[W^2 v_1 (1 + \epsilon + \chi) (v^1 - \frac{\beta^1}{\alpha}) + \chi \right] & \rho h W^2 \left[(2W^2 v_1^2 + \gamma_{11}) (v^1 - \frac{\beta^1}{\alpha}) + v_1 \right] & \rho h W^2 (2W^2 v_1 v_2 + \gamma_{12}) (v^1 - \frac{\beta^1}{\alpha}) & \rho h W^2 (2W^2 v_1 v_3 + \gamma_{13}) (v^1 - \frac{\beta^1}{\alpha}) & \left[W^2 v_1 (\rho + \kappa) (v^1 - \frac{\beta^1}{\alpha}) + \kappa \right] \\ \left[W^2 v_2 (1 + \epsilon + \chi) (v^1 - \frac{\beta^1}{\alpha}) + \chi \right] & \rho h W^2 \left[(2W^2 v_2 v_1 + \gamma_{21}) (v^1 - \frac{\beta^1}{\alpha}) + v_2 \right] & \rho h W^2 (2W^2 v_2^2 + \gamma_{22}) (v^1 - \frac{\beta^1}{\alpha}) & \rho h W^2 (2W^2 v_2 v_3 + \gamma_{23}) (v^1 - \frac{\beta^1}{\alpha}) & W^2 v_2 (\rho + \kappa) (v^1 - \frac{\beta^1}{\alpha}) \\ \left[W^2 v_3 (1 + \epsilon + \chi) (v^1 - \frac{\beta^1}{\alpha}) + \chi \right] & \rho h W^2 \left[(2W^2 v_3 v_1 + \gamma_{31}) (v^1 - \frac{\beta^1}{\alpha}) + v_3 \right] & \rho h W^2 (2W^2 v_3 v_2 + \gamma_{32}) (v^1 - \frac{\beta^1}{\alpha}) & \rho h W^2 (2W^2 v_3^2 + \gamma_{33}) (v^1 - \frac{\beta^1}{\alpha}) & W^2 v_3 (\rho + \kappa) (v^1 - \frac{\beta^1}{\alpha}) \\ \left[\{W^2(1 + \epsilon + \chi) - \chi - W\} (v^1 - \frac{\beta^1}{\alpha}) + \chi v^1 \right] & \rho \left[(2hW^4 - W^3) (v^1 - \frac{\beta^1}{\alpha}) v_1 + hW^2 - W \right] & \rho (2hW^4 - W^3) (v^1 - \frac{\beta^1}{\alpha}) v_2 & \alpha \rho (2hW^4 - W^3) (v^1 - \frac{\beta^1}{\alpha}) v_3 & \left[\{W^2(\rho + \kappa) - \kappa\} (v^1 - \frac{\beta^1}{\alpha}) + \kappa v^1 \right] \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^2 = \alpha\sqrt{\gamma} \begin{pmatrix} W(v^2 - \frac{\beta^2}{\alpha}) & \rho W^3 v_1 (v^2 - \frac{\beta^2}{\alpha}) & \rho W [1 + W^2 v_2 (v^2 - \frac{\beta^2}{\alpha})] & \rho W^3 v_3 (v^2 - \frac{\beta^2}{\alpha}) & 0 \\ \left[W^2 v_1 (1 + \epsilon + \chi) (v^2 - \frac{\beta^2}{\alpha}) + \chi \right] & \rho h W^2 (2W^2 v_1^2 + \gamma_{11}) (v^2 - \frac{\beta^2}{\alpha}) & \rho h W^2 \left[(2W^2 v_1 v_2 + \gamma_{12}) (v^2 - \frac{\beta^2}{\alpha}) + v_1 \right] & \rho h W^2 (2W^2 v_1 v_3 + \gamma_{13}) (v^2 - \frac{\beta^2}{\alpha}) & W^2 v_1 (\rho + \kappa) (v^2 - \frac{\beta^2}{\alpha}) \\ \left[W^2 v_2 (1 + \epsilon + \chi) (v^2 - \frac{\beta^2}{\alpha}) + \chi \right] & \rho h W^2 (2W^2 v_2 v_1 + \gamma_{21}) (v^2 - \frac{\beta^2}{\alpha}) & \rho h W^2 \left[(2W^2 v_2^2 + \gamma_{22}) (v^2 - \frac{\beta^2}{\alpha}) + v_2 \right] & \rho h W^2 (2W^2 v_2 v_3 + \gamma_{23}) (v^2 - \frac{\beta^2}{\alpha}) & \left[W^2 v_2 (\rho + \kappa) (v^2 - \frac{\beta^2}{\alpha}) + \kappa \right] \\ \left[W^2 v_3 (1 + \epsilon + \chi) (v^2 - \frac{\beta^2}{\alpha}) + \chi \right] & \rho h W^2 (2W^2 v_3 v_1 + \gamma_{31}) (v^2 - \frac{\beta^2}{\alpha}) & \rho h W^2 \left[(2W^2 v_2 v_3 + \gamma_{32}) (v^2 - \frac{\beta^2}{\alpha}) + v_3 \right] & \rho h W^2 (2W^2 v_3^2 + \gamma_{33}) (v^2 - \frac{\beta^2}{\alpha}) & W^2 v_3 (\rho + \kappa) (v^2 - \frac{\beta^2}{\alpha}) \\ \left[\{W^2(1 + \epsilon + \chi) - \chi - W\} (v^2 - \frac{\beta^2}{\alpha}) + \chi v^2 \right] & \rho(2hW^4 - W^3)(v^2 - \frac{\beta^2}{\alpha})v_1 & \rho \left[(2hW^4 - W^3)(v^2 - \frac{\beta^2}{\alpha})v_2 + hW^2 - W \right] & \rho(2hW^4 - W^3)(v^2 - \frac{\beta^2}{\alpha})v_3 & \left[\{W^2(\rho + \kappa) - \kappa\} (v^2 - \frac{\beta^2}{\alpha}) + \kappa v^2 \right] \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^3 = \alpha\sqrt{\gamma} \begin{pmatrix} W(v^3 - \frac{\beta^3}{\alpha}) & \rho W^3 v_1 (v^3 - \frac{\beta^3}{\alpha}) & \rho W^3 v_2 (v^3 - \frac{\beta^3}{\alpha}) & \rho W [1 + W^2 v_3 (v^3 - \frac{\beta^3}{\alpha})] & 0 \\ W^2 v_1 (1 + \epsilon + \chi)(v^3 - \frac{\beta^3}{\alpha}) & \rho h W^2 (2W^2 v_1^2 + \gamma_{11})(v^3 - \frac{\beta^3}{\alpha}) & \rho h W^2 (2W^2 v_1 v_2 + \gamma_{12})(v^3 - \frac{\beta^3}{\alpha}) & \rho h W^2 [(2W^2 v_1 v_3 + \gamma_{13})(v^3 - \frac{\beta^3}{\alpha}) + v_1] & W^2 v_1 (\rho + \kappa)(v^3 - \frac{\beta^3}{\alpha}) \\ W^2 v_2 (1 + \epsilon + \chi)(v^3 - \frac{\beta^3}{\alpha}) & \rho h W^2 (2W^2 v_2 v_1 + \gamma_{21})(v^3 - \frac{\beta^3}{\alpha}) & \rho h W^2 (2W^2 v_2^2 + \gamma_{22})(v^3 - \frac{\beta^3}{\alpha}) & \rho h W^2 [(2W^2 v_2 v_3 + \gamma_{23})(v^3 - \frac{\beta^3}{\alpha}) + v_2] & W^2 v_2 (\rho + \kappa)(v^3 - \frac{\beta^3}{\alpha}) \\ [W^2 v_3 (1 + \epsilon + \chi)(v^3 - \frac{\beta^3}{\alpha}) + \chi] & \rho h W^2 (2W^2 v_3 v_1 + \gamma_{31})(v^3 - \frac{\beta^3}{\alpha}) & \rho h W^2 (2W^2 v_3 v_2 + \gamma_{32})(v^3 - \frac{\beta^3}{\alpha}) & \rho h W^2 [(2W^2 v_3^2 + \gamma_{33})(v^3 - \frac{\beta^3}{\alpha}) + v_3] & [W^2 v_3 (\rho + \kappa)(v^3 - \frac{\beta^3}{\alpha}) + \kappa] \\ [\{W^2(1 + \epsilon + \chi) - \chi - W\} (v^3 - \frac{\beta^3}{\alpha}) + \chi v^3] & \rho(2hW^4 - W^3)(v^3 - \frac{\beta^3}{\alpha})v_1 & \rho(2hW^4 - W^3)(v^3 - \frac{\beta^3}{\alpha})v_2 & \rho [(2hW^4 - W^3)(v^3 - \frac{\beta^3}{\alpha})v_3 + hW^2 - W] & [\{W^2(\rho + \kappa) - \kappa\} (v^3 - \frac{\beta^3}{\alpha}) + \kappa v^3] \end{pmatrix}$$

REFERENCIAS

- [Abramowicz et al. 2004] Abramowicz, M. A., Kluźniak, W., McClintock, J. E., Remillard, R. A., “*The Importance of discovering a 3:2 twin-peak quasi-periodic oscillation in an ultraluminous X-ray source, or how to solve the puzzle of intermediate-mass black holes*”, *ApJL* **609**, (2004) L63.
- [Alcubierre 2008] Alcubierre, M., “*Introduction to 3+1 Numerical Relativity*”, Oxford University Press, (2008)
- [Aschenbach et al. 2004] Aschenbach, B., Grosso, N., Porquet, D., Predehl, P., “*X-ray flares reveal mass and angular momentum of the Galactic Center black hole*”, *A&A* **417**, (2004) 71.
- [Banyuls et al. (1996)] Banyuls, F., Font, J.A., Ibáñez, J. M., Martí, J. M., Miralles, J. A., “*Numerical 3+1 General Relativistic Hydrodynamics: A Local Characteristic Approach*.” *ApJ* **D. 476**, (1996), 221-231.
- [Baumgarte & Shapiro 2010] Baumgarte, T. W., and Shapiro, S. L., “*Numerical Relativity: Solving Einstein’s equations on the computer*”, Cambridge University Press, (2010)
- [Benensohn et al. 1997] Benensohn, J. S., Lamb, D. Q., Taam, R. E., “*Hydrodynamical studies of wind accretion onto compact objects: Two-dimensional calculations*”, *ApJ* **478**, (1997) 723.

-
- [Berger & Olinger 1984] Berger, M. J., Olinger J., “*Adaptative mesh refinement for hyperbolic partial differential equations*” J.Comp.Phys. **53** (1984) 484.
- [de Blok et al. 2001] de Blok, W. J. G, McGaugh, S. S., Bosma, A. and Rubin, V. C., “*Mass density profiles of low surface brightness galaxies*”, ApJ **552** (2001), 23.
- [Blondin & Raymer 2012] Blondin, J. M., Raymer, E., “*Holye-Lyttleton accretion in Three dimensions*” arXiv:1204.0717v1 [astro-ph.SR].
- [Bondi & Hoyle 1944] Bondi, H., Hoyle, F., “*On mechanism of accretion by stars*”, MNRAS **104**, (1944) 273.
- [Bondi 1952] Bondi, H., “*On spherically symmetrical accretion*” MNRAS, **112** (1952), 195.
- [Burkert 1995] Burkert, A., “*The structure of dark matter haloes in dwarf galaxies*”, ApJL **447** (1995), L25.
- [Chaverra & Sarbach 2012] Chaverra, E., Sarbach, O., “*Polytropic spherical accretion flows on Schwarzschild black holes*” AIP Conf. Proc., **1473** (2012), 54.
- [Colín et al. 2004] Colín, P., Klypin, A., Valenzuela, O., Gottlöber, S., “*Dwarf dark matter halos*”, ApJ **612** (2004), 50.
- [Cruz-Osorio et al. 2010] Cruz-Osorio, A., González-Juárez, A., Guzmán, F. S., Lora-Clavijo, F. D., “*Numerical solution of the wave equation on particular space-times using CMC slices and scri-fixing conformal compactification*”, Rev. Mex. Fis. **56** (2010) 456-468.
- [Cruz-Osorio et al. 2011] Cruz-Osorio, A., Guzmán, F. S., Lora-Clavijo, F. D., “*Scalar filed dark matter: behavior around black holes*”, JCAP **06** (2011) 029.
- [Cruz-Osorio et al. 2012] , Cruz-Osorio, A., Lora-Clavijo, F. D., Guzmán, F. S., “*Is the flip-flop behaviour of accretion shock cones on to black holes an effect of coordinates?*”, MNRAS **426** (2012) 732-738.

-
- [Diemand et al. 2005] Diemand, J., Zemp, M., Moore, B., Stadel, J., Carollo, C. M., “*Cusps in cold dark matter haloes*”, MNRAS **364** (2005), 625.
- [Donmez et al. 2011] Donmez, O., Zanotti, O., Rezzolla, L., “*On the development of QPOs in Bondi-Hoyle accretion flows*” MNRAS, **412**(2011), 1659.
- [Eddington 1924] Eddington, A. S., “*A comparison of whiteheads and einsteins formulas*”, **Nature** (1924) 113:192.
- [Eisenstein & Loeb 1995] Eisenstein D. J., Loeb, A., “*Origin of quasar progenitors from the collapse of low-spin cosmological perturbations*”, ApJ **443** (1995), 11.
- [Farris et al. 2010] Farris, B. D., Liu, T. Y., Shapiro, S. L., “*Binary black hole mergers in gaseous environments: Binary Bondi and binary Bondi-Hoyle-Lyttleton accretion*”, Phys. Rev. D **81**, (2010) 084008.
- [Finkelstein 1958] D. Finkelstein., “*Past-future asymmetry of the gravitational field of a point particle*”, Phys. Rev. (1958) ,110-965.
- [Foglizzo et al. 2005] Foglizzo, T., Galleti, P., Ruffert, M., “*A fresh look at the unstable simulations of Bondi-Hoyle-Lyttleton accretion*”, A&A **435**, (2005) 397.
- [Font & Ibáñez 1998] Font, J. A., Ibáñez, J. M., “*A numerical study of relativistic Bondi-Hoyle accretion on to a moving black hole: Axisymmetric computations in a Schwarzschild background*” ApJ, **494** (1998), 297-316.
- [Font & Ibáñez 1998] Font, J. A., Ibáñez, J. M., “*A numerical study of relativistic Bondi-Hoyle accretions onto a moving black hole: Axisymmetric computations in a Schwarzschild background*”, ApJ **494**, (1998b) 297-316.
- [Font et al. 1994] Font, J. A., Ibáñez, J. M., Marquina, A., Martí, J. M., “*Multidimensional Relativistic Hydrodynamics: Characteristic Fields and Modern High-Resolution Shock Capturing Schemes*.” Astron. Astrophys. **282** (1994), 304-314.

-
- [Font & Ibánñez 1998a] Font, J. A., Ibánñez, J. M., “*Non-axisymmetric relativistic Bondi-Hoyle accretion on to a Schwarzschild black hole*” MNRAS **298**, (1998a) 835.
- [Font et al. 2000] Font, J. A., Miller, M., Suen, W., Tobias, M., “*Three-dimensional Numerical General Relativistic Hydrodynamics: Formulations, Methods, and Code Tests*” Phys. Rev. **D. 61**, (2000), 044011.
- [Fryxell & Taam 1988] Fryxell, B. A., Taam, R. E., “*Numerical simulation of non-axisymmetric adiabatic accretion flow*”, ApJ **335**, (1988) 862.
- [Ghez et al. 2008] Ghez, A. M., Salim, S., Weinberg N. N., Lu, J. R., Do, T., Dunn, J. K., Matthews, K., Morris, M. R., Yelda, S., Beckin, E. E., Kremenek, T., Milosavljevic, M., Naiman, J., “*Measuring distance and properties of the milky way’s central supermassive black hole with stellar orbits*”, ApJ **689**, (2008) 1044.
- [Giacomazzo 2006] Giacomazzo, B., Rezzolla, L., “*The exact solution of the Riemann problem in relativistic magnetohydrodynamics*” J. Fluid Mech., **562** (2006), 223-259.
- [Godunov 1959] Godunov, S. K., “*A difference method for numerical calculation of discontinuous solutions of the equations of hydrodynamics*” Math. Sb (N.S.), **47(89)**:3 (1959), 271-306.
- [González et al. 2009] González, J. A., Guzmán, F. S., Sarbach, O., “*Instability of charged wormholes supported by a ghost scalar field*” Phys. Rev. **D. 80**, (2009) 024023.
- [González et al. 2007] González, J. A., Hannam, M.D., Sperhake, U., Bruegmann, B., Husa, S., “*Supermassive Recoil velocities for binary black-hole mergers with anti-aligned spins*”, Phys.Rev.Lett.98:231101,2007.
- [Guzmán & Lora-Clavijo 2011a] , Guzmán, F. S., Lora-Clavijo, F. D., “*Exploring the effects of pressure on the radial accretion of dark matter by a Schwarzschild supermassive black hole*”, MNRAS **415** (2011) 225-234.

-
- [Guzmán & Lora-Clavijo 2011b] , Guzmán, F. S., Lora-Clavijo, F. D., “*Collisional dark matter density profiles around supermassive black holes*”, MNRAS **416** (2011) 3083-3088.
- [Guzmán & Lora-Clavijo 2012] Guzmán, F. S., Lora-Clavijo, F. D., “*Revisiting spherically symmetric relativistic hydrodynamics*”, Rev. Mex. Fis. E. **58** (2012), 84-98.
- [Heger et al. 2003] Heger, A., Fryer, C. L. et al., “*How massive single stars end thier life*” ApJ **591** (2003), 288.
- [Harten et al. 1983] Harten, P., Lax, P. D., van Leer, B., “*On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws*” SIAM review, **25**(1) (1983), 35-61. Einfeldt, B., “*On Godunov-type methods for gas dynamics*” SIAM, J. Numer. Anal., **25**(2) (1988), 294-318.
- [Hawke et al. 2005] Hawke, I., Löffler, F., Nerozzi, A. “*Excision methods for hig resolution shock capturing schemes applied to general relativistic hydrodynamics*”, Phys. Rev. **D 71** (2005), 104006.
- [Holz & Zee 2001] Holz, D. E., Zee, A., “*Collisional dark matter and scalar phantoms*”, Phys. Lett. **B 517** (2001) 239-242.
- [Hopkins et al. 2007] Hopkins, P.F., Richards, G.T., Hernquist, L., “*An observational determination of the bolometric quasar luminosity function*”, ApJ **654** (2007), 731.
- [Hu et al. 2006] Hu, J., Shen, Y., Lou, Y-Q & Zhang, “*Forming supermassive black holes by accreting dark and barion matter*”, Mon. Not. R. Astron. Soc. **365** (2006), 345-351.
- [Kaur et al. 2007] Kaur, R., Paul, B., Raichur, H., Sagar, R., “*Quasi-periodic oscillations in XTE J0111.2-7317: highest frequency among the HMXB pulsars*”, ApJ **660**, (2007) 1409.

-
- [Kerr 1963] Kerr, R. P., “*Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics*”, Phys. Rev. Lett., **11** (1963) 237-238.
- [Klypin et al. 2001] Klypin, A., Kravtsov, A. V., Bullock, J. S., Primack, J. R., “*Resolving the structure of cold dark matter halos*”, ApJ **554** (2001), 903.
- [Leveque 1992] Leveque, R. J., “*Numerical methods for conservation laws*”, Lectures in Mathematics ETH Zürich, Birkhäuser (1992).
- [Liu et al. 2004] Liu, J., Bregman, J. N., Seitzer, P., “*The Optical Counterpart of an Ultraluminous X-Ray Source in NGC 5204*” ApJ **602**, (2004) 249.
- [Lora-Clavijo et al. 2010] Lora-Clavijo, F. D., Cruz-Osorio, A., Guzmán, F. S., “*Evolution of a massless test scalar field on boson star space-times*”, Phys. Rev. D **82** (2010) 023005.
- [Lora-Clavijo et al. 2012] Lora-Clavijo, F. D., Cruz-Pérez, J. P., Guzmán, F. S., González, J. A., “*Exact solution of the 1D shock-tube problem in Newtonian and relativistic hydrodynamics*” Sometido a la revista Mexicana de física E (trabajo educativo).
- [Lora-Clavijo & Guzmán 2013] , Lora-Clavijo, F. D., Guzmán, F. S., “*Axisymmetric Bondi-Hoyle accretion onto a Schwarzschild Black Hole: shock cone vibrations*”, MNRAS in press. E-print: arXiv:1212.2139 [astro-ph.HE].
- [Malec & Murchadha 2003] Malec, E., Murchadha, N. O., “*Constant mean curvature slices in the extended Schwarzschild solution and the collapse of the lapse*”, Phys. Rev. D. **68** (2003), 124019.
- [Martí et al. 1991] Martí, J.M., Ibáñez, J.M., and Miralles, J.A., “*Numerical relativistic hydrodynamics: Local characteristic approach*”, Phys. Rev. D, **43** (1991), 3794-3801.

-
- [Martí y Müller 1994] Martí, J. M., Müller, E., “*The Analytical Solution of the Riemann Problem in Relativistic Hydrodynamics*” J. Fluid Mech., **258** (1994), 317-333.
- [Matsuda et al. 1987] Matsuda, T., Inoue, M., Sawada, K., “*Spin-up and spin-down of accreting compact object*”, MNRAS **226**, (1987) 785.
- [Matsuda et al. 1991] Matsuda, T., Sekino, N., Sawada, K., Shima, E., Livio, M., Anzer, U., Börner, G., “*On the stability of wind accretion*”, A&A **248**, (1991) 301.
- [Matsuda et al. 1992] Matsuda, T., Ishii, T., Sekino, N., Sawada, K., Shima, E., Livio, M., Anzer, U., “*Numerical simulations of two-dimensional and three-dimensional accretion flows*”, MNRAS **255**, (1992) 183.
- [Michel 1972] Michel, F. C., “*Accretion of matter by condensed objects*” Astrophysics and Space Science , **15** (1972), 153-160.
- [Millmore & Hawke 2010] Millmore, S. T., Hawke, I., Class. Quantum Grav. **27** (2010) 015007.
- [Moncrief & Rinne 2009] Moncrief, V., Rinne, O., *Regularity of the Einstein equations at future null infinity*, Class. Quantum Grav. **26** (2009), 125010.
- [Moore et al. 1999] Moore, B., Quinn, T., Governato, F., Lake, G., “*Cold collapse and the core catastrophe*”, MNRAS **310** (1999), 1147.
- [Moore et al. 2000] Moore, B., Gelato, S., Jenkins, A., Pearce, F. R., Quilis, V., “*Collisional vs collisionless dark matter*”, ApJL **535** (2000), L21-L24.
- [Nagae et al. 2004] Nagae, T., Oka, K., Matsuda, T., Fujiwara, H., Hachisu, I., Boffin, H. M. J., “*Wind accretion in binary stars. I. Mass accretion radio*”, A&A **419**, (2004) 335.
- [Navarro et al. 1996] Navarro, J. F., Frenk, C. S., White, S. D. M., “*The structure of cold dark matter halos*”, ApJ **462** (1996), 563.

-
- [Navarro et al. 1997] Navarro, J. F., Frenk, C. S., White, S. D. M., “*A universal density profile from hierarchical clustering*”, *ApJ* **490** (1997), 493.
- [Navarro et al. 2004] Navarro, J. F. et al., “*The inner structure of Λ CDM haloes-III. Universality and asymptotic slopes*”, *MNRAS* **349** (2004), 1039.
- [Navarro et al. 2010] Navarro, J. F. et al., “*The diversity and similarity of simulated cold dark matter haloes*”, *MNRAS* **402** (2010), 21-34.
- [Neilsen & Choptuik 2000] Neilsen, D. W., Choptuik, M. W., *Class. Quantum Grav.* **17** (2000) 733-759.
- [Oh et al. 2010] Oh, S-H., de Blok W. J. G., Brinks, E., Walter, F., Kennicutt, R. C., “*Dark and luminous matter in THINGS dwarf galaxies*”, arXiv:1011.0899 (2010).
- [Oh et al. 2010] Oh, S-H., Brook, C., Governato, F., Brinks, E. Mayer, L., de Blok W.J.G., Brooks, A., Walter, F., “*The central slope of dark matter cores in dwarf galaxies: Simulations vs. THINGS*”, arXiv:1011.2777 (2010).
- [Ostriker 2000] Ostriker, J. P., “*Collisional dark matter and the origin of massive black holes*”, *Phys. Rev. Lett*, **84** (2000), 5258-5260.
- [Papadopoulos & Font 1998] Papadopoulos, P., Font, J. A., “*Relativistic Hydrodynamics around Black Holes and Horizon Adapted Coordinate Systems*” *Phys. Rev. D.* **58**, (1998), 024005.
- [Peirani & Freitas-Pacheco 2008] Peirani, S., de Freitas-Pacheco, J. A., “*Dark matter accretion into supermassive black holes*”, *Phys. Rev. D* **77** (2008), 064023.
- [Penner 2010] Penner, A. J., “*General relativistic magnetohydrodynamic Bondi-Hoyle accretion*”, arXiv:1011.2976v2 [astro-ph.HE]
- [Penner 2012] Penner, A. J., “*Ultrarelativistic Bondi-Hoyle accretion I: Axisymmetry*”, arXiv:1205.4957v2 [astro-ph.HE]

-
- [Petrich et al. 1989] Petrich, L. I., Shapiro, S. L., Stark, R. F., Teukolsky, S. A., “*Accretion onto a moving black hole - A fully relativistic treatment*”, *ApJ* **336**, (1989) 313.
- [Press et al. 1992] Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., Flannery, B. P., “*Numerical Recipes in Fortran 77, The Art of Scientific Computing*”, second edition, Cambridge University Press (1992).
- [Pretorius & Choptuik 2006] Pretorius, F., Choptuik, M. W., “*Adaptive Mesh Refinement for Coupled Elliptic-Hyperbolic Systems*” *J. Comput. Phys.* **218** (2006) 246-274. arXiv:gr-qc/0508110.
- [Roe 1981] Roe, P. L., “*Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes*” *J. Comput Phys.*, **43** (1981), 357-372.
- [Roedig et al. 2012] Roedig, C., Zanotti, O., Alic, D., “*General relativistic radiation hydrodynamics of accretion flows: II. Treating stiff source terms and exploring physical limitations*”, arXiv:1206.6662[astro-ph.HE].
- [Ruffert & Arnett 1994] Ruffert, M., Arnett, D., “*Three-dimensional hydrodynamics Bondi-Hoyle accretion. 2: Homogenous medium at Mach 3 with $\gamma = 5/3$* ”, *ApJ* **427**, (1994) 351.
- [Ruffert 1994a] Ruffert, M., “*Three-dimensional hydrodynamic Bondi-Hoyle accretion. 1: Code validation and stationary accretor*”, *ApJ* **427**, (1994a) 342.
- [Ruffert 1994b] Ruffert, M., “*Three-dimensional hydrodynamic Bondi-Hoyle accretion. III. Mach 0.6, 1.4 and 10; $\gamma=5/3$* ”, *A&AS* **106**, (1994b) 505.
- [Ruffert 1996] Ruffert, M., “*Three-dimensional hydrodynamic Bondi-Hoyle accretion. V. Specific heat ratio 1.01, nearly isothermal flow*”, *A&A* **311**, (1996) 817.
- [Ruffert 1997] Ruffert, M., “*Non-axisymmetric wind-accretion simulations. I. Velocity gradients of 3% and 20% over one accretion radius*”, *A&A* **317**, (1997) 793.

-
- [Schutz 2009] Schutz, B., “*A first course in general relativity*”, Cambridge University Press, second edition, (2009).
- [Schwarzschild 1916] Schwarzschild, K., “*Über das gravitationsfeld eines massenpunktes nach der einsteinischen theorie*” Sitzungsber. Dtsch. Akad. Wiss Berlin, Kl. Math. Phys. Tech., 1916.
- [Seidel & Suen 1992] Seidel, E. & Suen, W-M, “*Towards a singularity-proof scheme in numerical relativity*”, Phys. Rev. Lett. **69** (1992), 1845.
- [Small & Blandford 1992] Small, T. A., Blandford, R. D., “*Quasar evolution and the growth of black holes*”, Mon. Not. R. Astron. Soc. **259** (1992), 725.
- [Shima et al. 1985] Shima, E., Matsuda, T., Takeda, H., Sawada, K., “*Hydrodynamic calculations of axisymmetric accretion flow*” MNRAS **217**, (1985) 367.
- [Shu y Osher 1989] Shu, C. W., Osher, S. J. “*Efficient Implementation of Essentially Non-Oscillatory Shock-Capturing Schemes, I*” J. Comput. Phys, **83** (1989), 32-78.
- [Sperhake et al. 2011] Sperhake, U., Berti, E., Cardoso, V., Pretorius, F., Yunes, N., “*Superkicks in ultrarelativistic encounters of spinning black holes*, Phys.Rev.D **83** (2011), 024037.
- [Spergel & Steinhardt 2000] Spergel, D. N., Steinhardt, P. J., “*Observational evidence for self-interacting cold dark matter*”, Phys. Rev. Lett. **84** (2000), 3760-3763.
- [Sawada et al. 1989] Sawada, K., Matsuda, T., Anzer, U., Börner, G., Livio, M., “*Inhomogeneous wind accretion - comparison between 3D a 2D computations*”, A&A **221**, (1989) 263.
- [Stoher 2006] Stoehr, F., “*Circular velocity profiles of dark matter haloes*”, MNRAS **365** (2006), 147.
- [Taam & Fryxell 1988] Taam, R. E., Fryxell, B. A., “*On nonsteady accretion in stellar wind-fed X-ray sources*”, ApJ **327**, (1988) L73.

-
- [Taylor & Navarro 2001] Taylor, J. E., Navarro, J. F., “*The phase-space density profiles of cold dark matter halos*”, *ApJ* **563** (2001), 483.
- [Thomas 1995] Thomas, J. W., “*Numerical Partial Differential Equations: Finite difference Methods*”, Springer (1995).
- [Toro 2009] Toro, F. E., “*Riemann solvers and Numerical methods for fluid dynamics*” Springer, third edition, (2009).
- [Umeda et al. 2009] Umeda, H., Yoshida, N. et al. “*Early black hole formation by accretion of gas and dark matter*”, *JCAP* **8** (2009), 24.
- [B. van Leer 1979] van Leer, B., “*Towards the ultimate conservative difference scheme V. A second order sequel to Godunov’s method*” *J. Comput. Phys.* **32** (1979), 101-136.
- [Wald 1984] Wald, R., “*General relativity*”, The University of Chicago Press, (1984).
- [Walter et al. 2008] Walter, F., Brinks, E. et al., “*THINGS: The H I nearby galaxy survey*”, *AJ* **136** (2008), 2563.
- [Yokosawa 1984] Yokosawa, M., *Astrophys. Space Sci.* 107 (1984) 109-123.
- [York, Jr 1979] York, J. W., “*Kinematics and dynamics of general relativity*”, (1979) in L. L. Smarr (Ed.), *Sources of gravitational radiation*, pp. 83-126. Cambridge University Press, Cambridge.
- [Zanotti et al. 2011] Zanotti O., Roedig, C., Rezzolla L., Del Zanna, L., “*General relativistic radiation hydrodynamics of accretion flows. I: Bondi-Hoyle accretion*”, *MNRAS* **417**, (2011) 2899.
- [Zenginoglu 2008] Zenginoglu, A., “*Hyperboloidal foliations and scri-fixing*”, *Class. Quantum Grav.* **25** (2008) 145002.