



Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

---

Instituto de Física y Matemáticas

---



Modelos cosmológicos de reconstrucción de la energía de intercambio  
entre las componentes oscuras del universo usando datos  
observacionales.

Tesis presentada al

Instituto de Física y Matemáticas

como requisito parcial para la obtención del grado de

**Doctor en Ciencias en el Área de Física**

por

**Freddy Cueva Solano**

asesorado por

**Dr. Ulises Nucamendi Gómez**  
(IFM-UMSNH)

Morelia, Michoacán, México

Junio de 2013

## AGRADECIMIENTOS

Expreso mi mas fraternal gratitud al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) del gobierno mexicano por haber financiado el desarrollo de todas las investigaciones que he realizado y que están presentes en esta tesis de doctorado.

Expeso un cordial agradecimiento al Dr. Ulises Nucamendi Gómez por haber aceptado ser mi asesor, permitiéndome trabajar en diversos tópicos actuales de la Cosmología.

Manifiesto mi agradecimiento al Dr. Arturo Avelino Huerta por su colaboración y por las interesantes discusiones acerca de algunas técnicas de simulación numérica empleadas actualmente en la Cosmología.

Agradezco a las autoridades del Instituto de Física y Matemáticas (IFM) de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo (UMSNH), por haberme permitido trabajar en sus instalaciones.

Como resultado de nuestras investigaciones sobre la reconstrucción del término de interacción entre las componentes oscuras del universo, presentamos las siguientes publicaciones:

- F. Cueva**, 2010 *AIP Conf. Proc. of the VIII Mexican School on Gravitation and Mathematical Physics, Cancun, México, Jul, 7* **1256**, pp.256-261 [arXiv:1007.2459]  
<http://dx.doi.org/10.1063/1.3473862>
- F. Cueva Solano and U. Nucamendi**, *Reconstruction of the interaction term between dark matter and dark energy using SNe Ia, JCAP* **04** (2012) 011 [arXiv:1109.1303v2]
- F. Cueva Solano and U. Nucamendi**, *Reconstruction of the interaction term between dark matter and dark energy using SNe Ia, BAO, CMB,  $H(z)$  and X-ray gas mass fraction* **07** (2012) 02 [arXiv:1207.0250]

# Introducción

En los últimos tiempos la expansión acelerada del universo ha sido confirmada por diferentes e independientes pruebas observacionales, incluyendo datos de supernovas del tipo Ia (SNIa) de alto corrimiento al rojo ( $z \leq 1.4$ ) a distancias cosmológicas [1, 2, 3]. Esto ha sido verificado por la detección del espectro de potencia de las galaxias y el pico acústico bariónico en la función de correlación a grandes escalas de galaxias rojas luminosas en el experimento “Sloan Digital Sky Survey” (SDSS) [4, 5, 6, 7] y por las medidas precisas del espectro de potencias de las anisotropías (fluctuaciones en la temperatura) del fondo cósmico de microondas (CMB) [4], [8, 9, 10].

Para explicar estas observaciones, se ha postulado la existencia de una nueva y enigmática componente del universo llamada energía oscura (DE por sus siglas en inglés) [11, 12] cuyo modelo teórico más simple es la constante cosmológica ( $\Lambda$  por sus siglas en inglés), la cual se la interpreta como la densidad de energía del vacío cuántico [13, 21, 24]. Observaciones recientes [3, 7, 10]-[25, 26] muestran que si asumimos un parámetro de ecuación de estado (EOS por sus siglas en inglés) para la DE constante  $w = P_{DE}/\rho_{DE}$ , entonces quedan pocas posibilidades para las desviaciones desde la constante cosmológica. Estas observaciones indican que nuestro universo es plano y está compuesto aproximadamente 73 % de DE en la forma de constante cosmológica, 23 % de materia oscura (DM por sus siglas en inglés) y 4 % de materia bariónica (BM por sus siglas en inglés).

En el modelo estándar de la Cosmología ( $\Lambda$ CDM por sus siglas en inglés) se define la densidad de energía de  $\Lambda$  como:  $\rho_\Lambda \equiv \Lambda/8\pi G$  donde  $G$  es la constante gravitacional de Newton y los datos observacionales dan un valor del orden de  $\rho_\Lambda \leq (10^{-12}Gev)^4$ . Sin embargo, la manera de calcular teóricamente la densidad de energía del vacío cuántico no está aún bien establecida actualmente. A continuación citamos las contribuciones de algunas teorías: i) Según la Teoría de Campos Cuánticos (TCC), un campo cuántico libre es considerado como un sistema de infinitos osciladores armónicos y la energía de su estado fundamental será infinita. Suponiendo que la TCC es válida y confiable sólo hasta ciertas energías, se especula que este límite es la escala de Planck,  $K_{Pl} \equiv (8\pi G)^{-1/2} \approx 10^{18}Gev$ . Con esto se puede hacer un corte de los momentos ultravioleta, con lo cual la densidad de energía del estado fundamental es finita y del orden  $\rho_v^{Pl} \approx (K_{Pl})^4 \approx (10^{18}Gev)^4$  [13, 14, 21, 23, 24], [27, 28]. ii) La Teoría Electrodébil de Weinberg-Salam (TED), estima que la densidad de energía del vacío cuántico hoy en día es del orden  $\rho_v^{TED} \approx (200Gev)^4$  [21, 23]. iii) Similarmente, la Teoría de las interacciones fuertes (TIF) estima que la densidad de energía del vacío cuántico es  $\rho_v^{TIF} \approx (0.3Gev)^4$  [21, 23].

Las densidades de energía  $\rho_\Lambda$ ,  $\rho_v^{Pl}$ ,  $\rho_v^{TED}$ ,  $\rho_v^{TIF}$  muestran una discrepancia de valores, con una diferencia de 120, 56, y 44 órdenes de magnitud respectivamente. A esto se le llama el “Problema de la Constante Cosmológica”. Este problema surge del conflicto de considerar que  $\rho_\Lambda = \rho_v^{Pl}$  ( $\rho_\Lambda = \rho_v^{TED}$  o  $\rho_\Lambda = \rho_v^{TIF}$ ), esto es sólo una especulación.

Además el modelo cosmológico  $\Lambda$ CDM presenta un segundo problema, llamado “Problema de Coincidencia Cósmica” [12]-[29], el cual consiste en ¿Porqué en el presente, los parámetros de densidad de energía de las componentes oscuras son del mismo orden, siendo la energía oscura subdominante durante casi toda la evolución pasada del universo.?

En la última década, para resolver el “Problema de Coincidencia Cósmica”, varios investigadores han considerado la existencia de una posible interacción fenomenológica entre las componentes oscuras [30, 31]. Sabemos que los primeros modelos de energía oscura interactuando con materia oscura fueron propuestos por Wetterich [32, 34] en el marco de un campo escalar con un potencial exponencial (llamado El Cosmón) interactuando con la materia. Algunos años más tarde, con el descubrimiento de la reciente expansión acelerada del universo [1, 2, 3] y para resolver el “Problema de Coincidencia Cósmica”, muchos autores propusieron la idea de un campo escalar interactuando con materia oscura llamado: “Quintaesencia acoplada” [30]-[35], [36, 37, 39, 44, 45, 55].

Por otro lado, la teoría de sistemas dinámicos ha sido aplicadas a diferentes modelos de interacción de energía oscura para aclarar la evolución cosmológica de las soluciones de cada modelo, poniendo énfasis en el estudio de los puntos críticos [56, 57].

Algunos estudios recientes han afirmado que, para elecciones razonables y apropiadas del término de interacción, el “Problema de Coincidencia Cósmica” puede ser significativamente aliviado en el sentido que el cociente de densidades  $r \equiv \rho_{DM}/\rho_{DE}$ , tiende a ser constante o varía más lentamente que el factor de escala,  $a(t)$ , en tiempos recientes [39, 49]. Sin embargo, la existencia o no de alguna forma de interacción entre componentes oscuras debería ser observacionalmente determinada. Para lograr esto, se han puesto restricciones en las intensidades de tales interacciones usando diferentes pruebas observacionales [58, 59].

Recientemente, se ha encontrado que un término de interacción  $Q(z)$  que depende del corrimiento al rojo cruza la línea de no-interacción  $Q(z) = 0$  [59, 60]. En [60], esta conclusión ha sido obtenida usando datos observacionales en el rango  $z \in [0, 1.8]$ . Para tal modelo, el rango total de datos (muestra) de corrimientos al rojo fue dividido en un número determinado de bins (submuestras) y el término de interacción se fijó como constante (la misma interacción) en cada bin. Estos investigadores encontraron un comportamiento oscilatorio del término de interacción  $Q(z)$  cambiando su signo varias veces durante la evolución del universo. Por otro lado, He-Zhang en [59] reportaron un cruce de la línea de no-interacción  $Q(z) = 0$  desde valores negativos en el pasado (transferencia de energía desde materia oscura hacia energía oscura) hasta valores positivos en el presente (transferencia de energía desde energía oscura hacia materia oscura) en  $z \simeq 0.2 - 0.3$ , bajo la suposición de que el término de interacción  $Q(z)$  es una función linealmente dependiente del factor de escala con dos parámetros libres a ser estimados.

No está totalmente claro si un término de interacción podría resolver el “Problema de Coincidencia Cósmica” y si tal cruce realmente existe. Podemos poner restricciones en la forma de un término general de interacción asumida y sobre la probabilidad de existencia de tal cruce usando datos cosmológicos. Para lograr esto, postulamos la existencia de un término general de interacción no-gravitacional entre las dos componentes oscuras. Para ello, introducimos fenomenológicamente este término general de interacción  $Q$  en las ecuaciones de movimiento de la energía oscura y materia oscura respectivamente. Dicho término describe un intercambio de energía entre estas componentes oscuras [30, 31] y será una función del corrimiento al rojo. Ella se reconstruirá haciendo una expansión en términos de los polinomios de Chebyshev. Estos polinomios constituyen una base ortonormal completa en el intervalo  $[-1,1]$  y pertenecen al espacio de Hilbert de valores reales  $L^2[-1,1]$ . Su producto escalar en  $L^2[-1,1]$  está definido en términos de la función  $w(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$  [61] y sus normas son finitas (Ver Capítulo 2). Además estos polinomios también tienen la propiedad de ser “Polinomios de Mínima Aproximación” (Esta técnica fue aplicada en la reconstrucción del potencial de la energía oscura [62, 63]). Al final, haremos la reconstrucción usando pruebas observacionales tales como: La muestra “Union2” de datos de luminosidad aparente de supernovas del tipo Ia (SNe Ia por sus siglas en inglés) compuesta de 557 datos obtenidos desde el Proyecto de Cosmología de Supernovas (SCP por sus siglas en inglés) (2010)[2], también la muestra actual de supernovas del tipo Ia “Union 2.1” compuesta de 580 datos (2012)[3], oscilaciones acústicas bariónicas (BAO) [4, 5, 6, 7] y las anisotropías de la radiación cósmica de fondo (CMB) [4], [8, 9, 10] respectivamente.

Por otra parte, en nuestro trabajo de tesis se analizaron y clasificaron tres posibles Ensayos (1, 2 y 3) para reconstruir el término de interacción  $Q$  y se estudiaron sus efectos en la reconstrucción de las variables cosmológicas de cada uno de los Ensayos. De estos análisis, se encontró que los Ensayos que mejor describen al universo observado y que son capaces de aliviar el “Problema de Coincidencia Cósmica” son aquellos donde  $Q$  es proporcional a la densidad de energía de la materia oscura ( $\rho_{DM}$ ). Estos Ensayos predicen un período de expansión desacelerada del universo en tiempos tempranos, con una transición suave a un período de expansión acelerada en tiempos tardíos, además son favorecidos por las observaciones cosmológicas, es decir, al realizar sus análisis estadísticos con las tres pruebas observacionales “Union 2.1 SNeIa + CMB + BAO” se encontró que los mejores estimados de sus parámetros fueron (Ver Capítulo 6):

- Ensayo 2
  - $\lambda_0 = [+4.08, +4.64] \times 10^{-3}$ ,  $\lambda_1 = [+2.49, +2.49] \times 10^{-3}$ ,  $\lambda_2 = [-4.38, -4.37] \times 10^{-5}$ ,
  - $\Omega_{DM,0} = +0.227$ ,  $W_0 = -0.981$ ,  $H_0 = +70.985(km/s)Mpc^{-1}$ .
- Ensayo 3
  - Caso I ( $\alpha_{DM}^e < \alpha_{DM}^o < \alpha_{DM}^f$ )
    - $\alpha_{DM}^e = [3.26, 5.44] \times 10^{-3}$ ,  $\alpha_{DM}^o = [5.44, 5.66] \times 10^{-3}$ ,  $\alpha_{DM}^f = [10.8, 13.2] \times 10^{-3}$ ,
    - $\Omega_{DM,0} = +0.227$ ,  $W_0 = -0.983$ ,  $H_0 = +70.974(km/s)Mpc^{-1}$ .
  - Caso II ( $\alpha_{DM}^f < \alpha_{DM}^o < \alpha_{DM}^e$ )
    - $\alpha_{DM}^e = [5.66, 7.59] \times 10^{-3}$ ,  $\alpha_{DM}^o = [5.44, 5.66] \times 10^{-3}$ ,  $\Omega_{DM,0} = +0.227$ ,
    - $\alpha_{DM}^f = ([0.0, 0.069]U[0.90, 1.15]U[2.0, 2.25]) \times 10^{-3}$ ,
    - $W_0 = -0.983$ ,  $H_0 = +70.974(km/s)Mpc^{-1}$ .

De los resultados obtenidos, concluimos que los Ensayos 2 y 3 pueden ser modelos cosmológicos viables para explicar una interacción no-gravitacional entre las componentes oscuras del universo, y cuyos resultados son consistentes con las observaciones cosmológicas actuales.

Finalmente, presentamos los principales objetivos de nuestra tesis

- Actualmente no existe una evidencia observacional que nos impida suponer la existencia de una forma de interacción entre las componentes oscuras del universo. En consecuencia, vamos a desarrollar un formalismo teórico para la reconstrucción de un término general de interacción  $Q$  entre DM y DE. Esperamos que el método teórico propuesto sea capaz de resolver o al menos aliviar el “Problema de Coincidencia Cósmica”.
- Analizar y establecer las consecuencias de la dinámica de la evolución del término general de interacción  $Q$  reconstruido durante las etapas cosmológicas del universo, a partir de los datos observacionales convencionales, permitiéndonos establecer fuertes restricciones sobre los parámetros libres que la definen como tal en cada uno de nuestros modelos cosmológicos propuestos. Es decir, descubrir como la reconstrucción de  $Q$  afecta la reconstrucción de los demás parámetros cosmológicos.
- Acumular la experiencia y las habilidades necesarias y suficientes, para trabajar modelos cosmológicos de varios parámetros libres, empleando las técnicas estadísticas y numéricas más favorables permitiéndonos obtener resultados precisos y hacer interpretaciones físicas que estén dentro del contexto esperado.

La organización del presente trabajo de tesis es la siguiente. El Capítulo 1 describe los fundamentos teóricos necesarios de la Cosmología para el estudio de los modelos cosmológicos en interacción. En el Capítulo 2 se describe las ecuaciones generales y cosmológicas de movimiento de la energía oscura interactuando con la materia oscura. En este Capítulo también desarrollamos algunos esquemas de reconstrucción general del término de interacción  $Q$  entre las componentes oscuras del universo. El capítulo 3 muestra una descripción de las pruebas cosmológicas actuales y las técnicas estadísticas de reducción del número de parámetros utilizadas para probar observacionalmente los modelos cosmológicos. En el Capítulo 4 se describe el modelo  $\Lambda$ CDM, el descubrimiento de la DE, la edad del universo y el problema de coincidencia cósmica. En el Capítulo 5 presentamos los valores escogidos de los parámetros del modelo  $\Lambda$ CDM que serán utilizados para reconstruir las curvas de sus variables cosmológicas. En el Capítulo 6 presentamos tres “Ensayos” diferentes para efectuar una reconstrucción general del término de interacción  $Q$  y discutimos los resultados de cada uno de ellos. Finalmente, en el Capítulo 7 presentamos las conclusiones de los resultados obtenidos.

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>III</b>
<b>1. Cosmología</b>	<b>1</b>
1.1. Principio cosmológico. . . . .	1
1.2. La métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker . . . . .	2
1.3. Las componentes del universo . . . . .	3
1.4. Fluido perfecto y el tensor de energía-momento . . . . .	5
1.4.1. Ecuación de conservación local de la materia-energía . . . . .	6
1.4.2. Ecuaciones de estado . . . . .	7
1.5. Ecuaciones de Friedmann . . . . .	7
1.5.1. El parámetro de desaceleración $q(t)$ . . . . .	12
<b>2. Dinámica del proceso de interacción entre las componentes oscuras del universo</b>	<b>15</b>
2.1. Ecuaciones generales de movimiento de la energía oscura interactuando con la materia oscura. . . . .	15
2.2. Ecuaciones cosmológicas de movimiento de la energía oscura interactuando con materia oscura. . . . .	17
2.3. Reconstrucción general de la interacción. . . . .	18
2.3.1. Usando polinomios de Chebyshev. . . . .	19
2.3.2. Usando una función racional. . . . .	22
<b>3. La distancia de luminosidad, la distancia modular y las pruebas observacionales</b>	<b>25</b>
3.1. Relación entre el corrimiento al rojo y el factor de escala . . . . .	25
3.2. La distancia de luminosidad . . . . .	28
3.3. Luminosidad y flujo. . . . .	29
3.4. La distancia modular. . . . .	31
3.5. Prueba observacional de supernovas tipo Ia. . . . .	32
3.6. Prueba observacional de las oscilaciones acústicas bariónicas . . . . .	34
3.6.1. La función de correlación $\xi(\vec{r})$ y el espectro de potencia $P(\vec{k})$ . . . . .	34
3.6.2. Detección del pico acústico de los bariones en la función de correlación a grandes escalas usando galaxias rojas luminosas . . . . .	36
3.6.3. Oscilaciones acústicas bariónicas en la muestra de datos de galaxias de la exploración digital del espacio sloan . . . . .	39
3.7. Radiación cósmica de microondas y su evidencia observacional . . . . .	45

3.7.1.	Siete años de observaciones de prueba Wilkinson de las anisotropías de microondas (WMAP) . . . . .	45
3.7.2.	Aplicación de los “priors” de distancia . . . . .	48
3.8.	Técnicas estadísticas de reducción del número de parámetros de un modelo teórico. . . . .	55
3.8.1.	Técnica de la marginalización sobre la función de densidad de probabilidad total ( <b>Pdf</b> ) de <b>parámetros independientes</b> . . . . .	55
3.8.2.	Técnica de la marginalización sobre la función de densidad de probabilidad total ( <b>Pdf</b> ) con <b>algunos parámetros dependientes</b> . . . . .	57
<b>4.</b>	<b>El modelo estándar de la cosmología <math>\Lambda</math>CDM, la energía oscura y la expansión acelerada del universo.</b>	<b>59</b>
4.1.	El modelo estándar de la cosmología $\Lambda$ CDM . . . . .	59
4.2.	La energía oscura y la expansión acelerada del universo. . . . .	60
4.2.1.	Descubrimiento de la energía oscura. . . . .	60
4.2.2.	La energía oscura y la edad del universo. . . . .	63
4.3.	El problema de la coincidencia cósmica . . . . .	64
<b>5.</b>	<b>Tablas de valores para los parámetros del modelo <math>\Lambda</math>CDM.</b>	<b>65</b>
5.1.	Valores escogidos para los parámetros del modelo $\Lambda$ CDM . . . . .	65
<b>6.</b>	<b>Resultados de la reconstrucción del término de interacción <math>Q(z)</math>.</b>	<b>67</b>
6.1.	Ensayo 1: Reconstrucción de $Q(z) \equiv \rho_{c,0} \cdot (1+z)^3 \cdot H(z) \cdot I_Q(z)$ . . . . .	67
6.2.	Ensayo 2: Reconstrucción de $Q(z) = H(z) \cdot \rho_{DM}(z) \cdot I_Q(z)$ . . . . .	82
6.3.	Ensayo 3: Reconstrucción de $Q(z) = 3H(z) \cdot \rho_{DM}(z) \cdot g(z)$ . . . . .	92
<b>7.</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>103</b>
<b>A.</b>	<b>Elementos de la métrica de FLRW</b>	<b>105</b>
<b>B.</b>	<b>Cálculo de las integrales <math>K_n(x, w)</math> y <math>J_n(x, w)</math>.</b>	<b>107</b>
B.1.	Cálculo de las integrales $J_n(x, w)$ . . . . .	107
B.2.	Cálculo de las integrales $K_n(x, w)$ . . . . .	108
B.3.	Reconstrucción de la función $I_Q(z)$ usando polinomios de Chebyshev hasta el orden $N = 5$ . . . . .	109
B.4.	Cálculo de las integrales $R_n(x)$ . . . . .	112
B.5.	Cálculo de los promedios $l_n(\tilde{x})$ . . . . .	113
<b>C.</b>	<b>Medidas de distancia en Cosmología.</b>	<b>115</b>
C.1.	Distancia comóvil $D_C$ . . . . .	115
C.2.	Distancia comóvil transversal $D_M$ . . . . .	115
C.3.	Distancia diametral angular $D_A$ . . . . .	116
C.4.	Distancia de luminosidad $D_L$ . . . . .	117



# Capítulo 1

## Cosmología

Definimos la Cosmología como la ciencia que se encarga del estudio del universo, su origen, estructura, composición, forma, evolución, destino y de las leyes físicas que la gobiernan a grandes escalas de espacio y de tiempo. Ella se centra en el estudio de la estructura global del universo, considerando para ello, todas las estructuras locales que la componen: tales como las galaxias, estrellas, nebulosas, agujeros negros, planetas y otros, las cuales representan sus “partículas” constituyentes, y que al estudiar el comportamiento global de todas ellas, se pueden entender las características del universo a gran escala. A grandes escalas, la interacción gravitacional gobierna la dinámica del universo y es dominante en comparación con las otras tres interacciones fundamentales que existen. Actualmente, los modelos cosmológicos están basados sobre la Teoría de la Relatividad General de Einstein (TRG), la cual estudia el origen de la gravedad, su comportamiento y efectos que produce. La Cosmología representa una aplicación de esta teoría (TRG) en donde la mayoría de los modelos cosmológicos consideran al universo como un espacio-tiempo 4-dimensional, con tres dimensiones para la parte espacial y una para la temporal.

### 1.1. Principio cosmológico.

De acuerdo a la TRG, el universo es un espacio-tiempo que matemáticamente es representado por una variedad diferencial  $\mathcal{M}$  sobre la cual se define una métrica Lorentziana  $g$ , la que se denota de forma compacta como  $(\mathcal{M}, g)$ . Definamos formalmente los conceptos de “homogeneidad e isotropía espacial” del universo. Consideremos una familia de hipersuperficies tipo-espacio  $\Sigma_\eta$  que folian todo el espacio-tiempo. Cada uno de los elementos de esta familia (es decir, cada una de estas hipersuperficies) está etiquetado a través de un parámetro continuo  $\eta \in \mathbb{R}$ , de tal forma que para cada valor de  $\eta$ , se está eligiendo una hipersuperficie  $\Sigma_\eta$  en particular (Ver Figura 1.1). Luego, un espacio-tiempo es espacialmente homogéneo si existe una familia de hipersuperficies tipo-espacio  $\Sigma_\eta$  que folian todo el espacio-tiempo de tal forma que para cada  $\eta$  y para cualesquiera dos puntos  $P, Q \in \Sigma_\eta$ , existe una isometría de la métrica del espacio-tiempo,  $g$ , la cual lleva  $P$  a  $Q$ . Para definir lo que es un espacio-tiempo espacialmente isotrópico, considere primero una congruencia de curvas tipo-temporal en  $\mathcal{M}$ , es decir, una familia de curvas que llenan a toda la variedad  $\mathcal{M}$ , y tales que a través de cada punto  $P \in \mathcal{M}$  pasa una curva de esta familia. En cada punto  $P$  de estas curvas tipo-temporal se puede definir un vector tangente, que denotaremos como  $U$ . Podemos definir un conjunto

$V_P(U)$  formado por vectores ortogonales a  $U$  en el punto  $P$ . También definimos cierto tipo especial de observadores que tiene la característica de ver siempre un universo homogéneo e isotrópico, llamados “observadores comóviles” y siguen justamente la congruencia de curvas tipo-temporal en la variedad  $\mathcal{M}$ , es decir, las trayectorias de estos observadores coinciden con las líneas tipo-temporal de la congruencia. Por lo tanto, un espacio-tiempo es espacialmente isotrópico en cada punto del mismo, si este espacio-tiempo es llenado por una congruencia de curvas tipo-tiempo (con vectores tangentes  $U$  en cada punto de cada curva), que satisfacen la propiedad de que dado cualquier punto  $P$  y dados cualesquiera dos vectores unitarios tangentes espaciales  $s_1, s_2 \in V_P(U)$ , existe una isometría de  $g$  la cual deja a  $P$  y al vector  $U$  (situado en  $P$ ) fijos, pero rota  $s_1$  hacia  $s_2$  (Ver Figura 1.1). La “*isotropía espacial*” significa

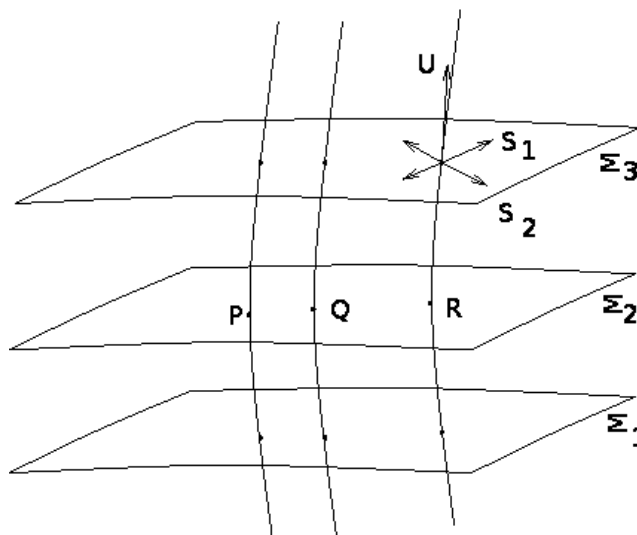


Figura 1.1: Hipersuperficies tipo espacio  $\Sigma_\eta$  y curvas tipo tiempo que llenan la variedad  $\mathcal{M}$  [64].

que el universo tiene el mismo aspecto y propiedades en cualquier dirección espacial, visto por un observador comóvil situado en un punto  $P$  arbitrario del universo. “Homogeneidad espacial” se refiere a que el espacio tiene las mismas características, medidas por un observador comóvil, sin importar el lugar en el universo en el que se encuentre. “Escala cosmológica” se refiere a que en el universo se observa esta homogeneidad e isotropía sólo cuando se le estudia a grandes escalas (del orden de megaparsecs<sup>1</sup>). Las anisotropías del fondo cósmico de microondas (CMB) es una prueba observacional que sustenta fuertemente este principio cosmológico. Actualmente esta radiación tiene una temperatura promedio  $T_o \approx 2.72$  K y sus variaciones son aproximadamente de  $10^{-5}$  K [9].

## 1.2. La métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

La métrica propuesta por Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) es la única compatible con el principio cosmológico. El elemento de línea  $ds^2$  en coordenadas esféricas

<sup>1</sup>Un megaparsec se denota como “Mpc” y equivale a  $3.0856776 \times 10^{19}$  km.

$(r, \theta, \phi)$  se representa como

$$ds^2 = -(cdt)^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (1.1)$$

en donde a la función  $a(t)$  se le llama factor de escala y  $k$  es una constante asociada a la curvatura espacial del universo [se define  $\Omega_k \equiv -(k/a^2)/H^2$ , ver ecuación (1.31)]. Según el valor de  $k$  el universo puede ser *cerrado*, *abierto* o *plano*, de acuerdo a si la curvatura espacial es *positiva*, *negativa* o *nula*, respectivamente.

$k$	Densidad crítica	Curvatura espacial	Tipo universo
$k > 0$	$\rho > \rho_c$	positiva	cerrado
$k < 0$	$\rho < \rho_c$	negativa	abierto
$k = 0$	$\rho = \rho_c$	nula	plano

Cuadro 1.1: Dependiendo del valor del factor de curvatura espacial  $k$  y de la densidad crítica  $\rho_c$  tendremos diferentes geometrías.

Dependiendo de la abundancia de cada una de las componentes del universo se determinará la curvatura espacial de éste. De acuerdo a las observaciones cosmológicas realizadas por WMAP7 [10] se ha determinado que el parámetro actual de la curvatura espacial  $\Omega_{k,0} = -0.0023_{-0.0056}^{+0.0054}$ , es decir, que la geometría espacial del universo es plana.

### 1.3. Las componentes del universo

Actualmente se considera que las principales componentes del Universo son:

**Materia bariónica.** Es toda forma de materia constituida por bariones (neutrones y protones), antibariones, leptones (electrón, muon, tau, neutrino electrónico, neutrino muónico, neutrino tauónico) y antileptones. Es decir, es la materia que forma todo lo que nos rodea y podemos ver.

Nuestro universo observado es eléctricamente neutro, por lo que se considera que hay igual cantidad de protones y de electrones. Sin embargo, el protón y el neutrón son aproximadamente 2000 veces más pesados <sup>2</sup> que el electrón, por tanto su contribución a la cantidad total de materia bariónica domina por encima de la contribución del electrón. Podemos encontrar materia bariónica en las estructuras que forman el universo tales como estrellas, planetas, galaxias, cúmulos de galaxias, nebulosas, polvo interestelar, etc. Actualmente se ha establecido que el porcentaje total de materia bariónica en el universo es  $\sim 4.5\%$  [65], valor calculado a partir del proceso de nucleosíntesis primordial y de las anisotropías del CMB respectivamente.

**Radiación.** También se denomina CMB y es una forma de radiación electromagnética que llena el universo por completo. Su distribución espectral corresponde, a la radiación de cuerpo negro con una temperatura de 2.725 K [9] y su frecuencia pertenece al rango de las microondas con una frecuencia de 160.2GHz, correspondiendo a una longitud de

---

<sup>2</sup>Masas. protón: 938.272 MeV/c<sup>2</sup>; neutrón: 939.565 MeV/c<sup>2</sup>; electrón: 0.510 MeV/c<sup>2</sup>.

onda de 1.9mm. Muchos cosmólogos sostienen que esa radiación es la prueba primordial del modelo del Big Bang. Actualmente, se estima que su abundancia es  $\sim 0.005\%$  de la densidad de materia-energía presente en el universo.

**Materia oscura o materia que no emite radiación electromagnética.** Se denomina materia oscura a la hipotética materia que no emite suficiente radiación electromagnética para ser detectada con los medios técnicos actuales, pero cuya existencia se puede deducir a partir de los efectos gravitacionales que causa en la materia visible tales como las galaxias y cúmulos de galaxias, así como en las anisotropías del fondo cósmico de microondas presente en el universo. Esta materia se ha podido medir a través de sus efectos gravitacionales en los halos de galaxias y cúmulos de galaxias, usando las curvas de rotación galácticas y las velocidades de las galaxias dentro de los cúmulos de galaxias. De la masa total medida en una galaxia a través de efectos gravitacionales, el  $\sim 90\%$  es materia oscura. La estimación actual de la abundancia de la materia oscura  $\sim 23.3\%$  de la proporción total de materia en el universo actual [9]. La naturaleza y composición de esta materia se desconoce, pero puede incluir neutrinos ordinarios y pesados, partículas elementales recientemente postuladas como los WIMPs y los axiones, cuerpos astronómicos como las estrellas enanas, los planetas y las nubes de gases no luminosos.

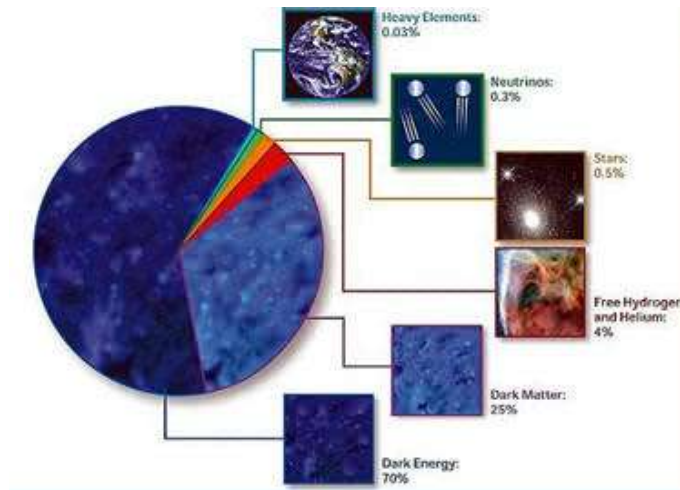


Figura 1.2: Gráfica de las componentes cosmológicas del Universo [66].

**Energía oscura.** Es una forma de materia [67, 68] o energía [69] que estaría presente en todo el universo produciendo una presión negativa que tiende a acelerar su expansión, resultando en una fuerza gravitacional repulsiva [13]. Considerar la existencia de la energía oscura es la manera más frecuente de explicar las observaciones recientes de que el universo parece estar en expansión acelerada. La naturaleza de la energía oscura es materia de debate. Se presume que es muy homogénea y sólo interactúa a través de la fuerza gravitacional. El término de energía oscura fue acuñado por Michael Turner en 1998 [70]. En ese tiempo, el problema de la masa perdida de la nucleosíntesis primordial en la estructura a gran escala del universo fue establecida y algunos cosmólogos habían empezado a teorizar que había una componente adicional en el universo. La primera prueba directa de la energía oscura provino de las observaciones de supernovas, por

Adam Riess et al. [1] en 1998 y confirmada después por Perlmutter et al. [1]. En el modelo  $\Lambda$ CDM (Ver Sección 4.1), su abundancia se estima del orden de  $\sim 72\%$  de la densidad total de materia-energía presente en el universo [9] siendo actualmente la componente dominante.

## 1.4. Fluido perfecto y el tensor de energía-momento

En Cosmología, usualmente para estudiar el contenido material del universo se considera a cada una de las componentes que lo forman como fluidos, los cuales están caracterizadas por cantidades físicas macroscópicas tales como densidad de energía, presión, temperatura, entropía, energía interna, velocidad y otros.

Por ejemplo, un fluido de materia bariónica estaría formado por estructuras conocidas tales como: galaxias, cúmulos de galaxias, supercúmulos de galaxias y otros, las cuales se verían a grandes distancias cosmológicas, como partículas del fluido de materia bariónica. Cada una de estas partes del fluido tiene su propia velocidad y el fluido como un todo (a grandes distancias) tendrá su propio campo global de velocidades. Entonces para caracterizar las propiedades físicas macroscópicas de estos fluidos convencionalmente se define un tensor de energía-momento  $T^{\mu\nu}$  para cada una de las componentes del universo. Estos tensores contienen toda la información física relativa al fluido.

En el tensor  $T^{\mu\nu}$ , la componente  $T^{00}$  corresponden a la densidad de energía  $\rho$  y la componente  $T^{ii}$  (con  $i = 1, 2, 3$ ) está asociado a la presión  $p^k$  del fluido respectivamente. El superíndice  $k$  sobre la presión denota a la componente de la presión en la dirección  $\hat{k}$  (con  $k = 1, 2, 3$ ).  $T^{0i}$  corresponde a la densidad de momento, y los elementos  $T^{ij}$  (con  $i, j = 1, 2, 3$ ) son el flujo de momento, que caracterizan por ejemplo, la viscosidad, el intercambio de calor, etc. que pueda haber en el fluido.

En Cosmología, un caso especial de fluidos son los llamado fluidos perfectos. Un fluido perfecto se define como aquel en el cual un observador que se mueve con el fluido (un observador comóvil) verá que el fluido que está a su alrededor tiene sólo dos componentes, su densidad de energía  $\rho$  y su presión  $p$ . La presión medida por un observador comóvil es la misma en cualquier dirección. Debido a esta isotropía de la presión, todos los términos  $T^{ii}$  son iguales a  $p$ , es decir  $T^{11} = T^{22} = T^{33} = p$ , implicando además que no hay flujo de partículas, entonces los elementos  $T^{ij}$  son cero (con  $i \neq j$ ). Por lo tanto, el tensor de energía-momento para un fluido perfecto tiene la forma:

$$T^{\mu\nu} = \rho U^\mu U^\nu + p(g^{\mu\nu} + U^\mu U^\nu), \quad (1.2)$$

donde  $g_{\mu\nu}$  es el tensor métrico y  $U^\mu$  es la cuadrivelocidad de un observador comóvil que se define como:

$$U^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau}, \quad (1.3)$$

donde  $\tau$  es el tiempo propio del observador. Los observadores comóviles u observadores fundamentales son aquellos que se mueven junto con la contracción o expansión del fluido de tal forma que siempre tienen sus mismas coordenadas comóviles, es decir, ellos son los que ven al universo isotrópico y homogéneo a gran escala.

Escogemos la siguiente condición de normalización para las cuadrivelocidades comóviles

$$U^\nu U_\nu = -1$$

$$U^\mu = (1, 0, 0, 0), \quad U_\nu = (-1, 0, 0, 0), \quad (1.4)$$

en el sistema de referencia comóvil. La traza  $T$  de  $T^{\mu\nu}$  es:

$$T = \text{Tr}(T^\mu{}_\mu) = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = T^\mu{}_\mu = 3p - \rho. \quad (1.5)$$

Cada componente del universo es tratada como un fluido, en particular un fluido perfecto, la cual será caracterizada por un tensor de energía-momento para cada uno de ellas las que tendrán su propia densidad  $\rho_l$  y presión  $p_l$  (donde el subíndice  $l = 1, 2, 3, 4$  denota cada una de las componentes del universo).

### 1.4.1. Ecuación de conservación local de la materia-energía

Usando tanto el tensor de energía-momento (1.2) y la identidad de Bianchi encontramos la “ecuación de conservación *local* de la materia-energía”. Es decir:

$$\nabla_\mu T^\mu{}_\nu = 0. \quad (1.6)$$

La denominación de “ecuación de conservación local” resulta del hecho de que en un marco de referencia inercial local, a partir de la relación (1.6) se obtiene la forma convencional de una ecuación de conservación local de la materia-energía.

La componente temporal de (1.6) permite tener una ecuación de conservación de materia que relaciona la evolución temporal de  $\rho$  con su presión  $p$  y la expansión del universo caracterizada por el factor de escala  $a$ . Luego, tomando la componente temporal  $t$  de la ecuación (1.6), o sea,  $\nabla_\mu T^\mu{}_t = 0$ . Hallamos la siguiente derivada covariante

$$\partial_\mu T^\mu{}_t + \Gamma^\mu_{\mu\lambda} T^\lambda{}_t - \Gamma^\lambda_{\mu t} T^\mu{}_\lambda = 0, \quad (1.7)$$

donde  $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$  son los símbolos de Christoffel usuales. Considerando que el tensor  $T^\mu{}_\nu$  de un fluido perfecto es diagonal en el sistema de referencia comóvil, los únicos términos diferentes de cero de  $T^\mu{}_\nu$  son los elementos de la diagonal. Debido a esto, la ecuación (1.7) será

$$\partial_t T^t{}_t + \Gamma^\mu_{\mu t} T^t{}_t - \Gamma^r_{rt} T^r{}_r - \Gamma^\theta_{\theta t} T^\theta{}_\theta - \Gamma^\phi_{\phi t} T^\phi{}_\phi = 0. \quad (1.8)$$

A partir del tensor métrico de FLRW (A.2) podemos calcular las expresiones matemáticas para los símbolos de Christoffel (Ver Apéndice A en donde se muestran todos los elementos distintos de cero para dicha métrica). Entonces, para la ecuación (1.8) los símbolos de Christoffel importantes son

$$\Gamma^r_{rt} = \Gamma^\theta_{\theta t} = \Gamma^\phi_{\phi t} = \frac{\dot{a}}{a} \quad \text{y} \quad \Gamma^t_{tt} = 0, \quad (1.9)$$

donde el punto sobre “ $a$ ” indica derivada temporal. Usando estos valores en la ecuación (1.8) y tomando los elementos de  $T^\mu{}_\nu$  de la matriz (A.4), hallamos:

$$\begin{aligned} -\partial_t \rho + \Gamma^r_{rt}(3T^t{}_t - T^r{}_r - T^\theta{}_\theta - T^\phi{}_\phi) &= 0, \\ \Rightarrow -\dot{\rho} + \frac{\dot{a}}{a}(-3\rho - 3p) &= 0. \end{aligned}$$

Finalmente, encontramos la expresión matemática denominada la “ecuación de conservación local de la materia-energía” en el espacio-tiempo de FLRW:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0. \quad (1.10)$$

Esta ecuación es satisfecha individualmente por cada uno de los diferentes fluidos que componen el universo.

Por otro lado, tomando la componente espacial  $\nu = j = 1, 2, 3$  de la ecuación (1.6), o sea,  $\nabla_{\mu} T^{\mu}_j = 0$ , encontramos

$$\partial_{\mu} T^{\mu}_j + \Gamma^{\mu}_{\mu\lambda} T^{\lambda}_j - \Gamma^{\lambda}_{\mu j} T^{\mu}_{\lambda} = 0, \quad (1.11)$$

de donde hallamos las ecuaciones de Euler

$$\partial_j p = 0. \quad (1.12)$$

En la ecuación anterior, si la presión  $p$  depende únicamente del tiempo cósmico “ $t$ ” entonces la igualdad se satisface y no produce ninguna nueva ecuación.

#### 1.4.2. Ecuaciones de estado

Observacionalmente se ha encontrado que cada una de las componentes presentes en el universo satisface una ecuación de estado barotrópica lineal que relaciona su presión con su densidad de energía de la siguiente manera

$$p = w \rho, \quad (1.13)$$

donde el factor  $w$  es una constante de proporcionalidad adimensional. Cada uno de los constituyentes del universo tiene su propia ecuación de estado dada por (1.13) y una componente se diferencia de las otras a través del valor de  $w$ . A continuación vea la siguiente tabla

<i>tipo de materia</i>	<i>w</i>
Materia bariónica y oscura	0
Radiación	1/3
Constante cosmológica	-1

Para el caso de las componentes de materia bariónica y oscura, se ha establecido que la presión de estas componentes es tan pequeña comparado con su densidad que puede considerarse cero (Esto no implica que su densidad sea cero). Estos fluidos que tienen la característica de  $p = 0$  son llamados “polvo”, puesto que  $w = 0$ . Por otro lado, para el caso de la constante cosmológica, su ecuación de estado es  $p = -\rho$  (es decir,  $w = -1$ ).

## 1.5. Ecuaciones de Friedmann

La Cosmología está fundamentada en las ecuaciones de Friedmann. Ellas nos dan la información necesaria para estudiar de manera cuantitativa la evolución, composición, geometría

y dinámica del universo. Para ello, partiremos de las ecuaciones de Einstein para deducirlas,

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right), \quad (1.14)$$

donde  $R_{\mu\nu}$  es el tensor de Ricci,  $T$  es la traza de  $T_{\mu\nu}$ ,  $G$  es la constante gravitacional de Newton y  $T_{\mu\nu}$  es el tensor de energía-momento *total* del universo, que resulta de la suma de todos los tensores de energía-momento individuales de cada una de las componentes de materia-energía que un modelo cosmológico dado considere que están presentes en el universo, es decir,

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{\text{b}} + T_{\mu\nu}^{\text{DM}} + T_{\mu\nu}^{\text{r}} + T_{\mu\nu}^{\Lambda} + \dots, \quad (1.15)$$

donde los superíndices “b”, “DM”, “r”, “ $\Lambda$ ” denotan “materia bariónica”, “materia oscura”, “radiación” y “energía oscura (como constante cosmológica)” respectivamente. Los puntos suspensivos indican cualquier otro tipo de materia o energía adicional que algún modelo cosmológico pudiera proponer. A continuación, calculamos sólo la componente temporal de la ecuación (1.14). Para lograr esto usamos las componentes del tensor  $T_{\mu\nu}$  dada por (A.4), los elementos de la matriz (A.2) para  $g_{\mu\nu}$  y traza (A.5) para  $T$ . Sustituimos todos ellos en la ecuación (1.14) y hallamos:

$$R_{tt} = 8\pi G \left[ \rho + \frac{1}{2}(3p - \rho) \right] = 4\pi G(3p + \rho), \quad (1.16)$$

donde  $\rho$  y  $p$  denotan la densidad y presión total del conjunto de fluidos que conforman al universo, esto es,

$$\rho = \rho_{\text{b}} + \rho_{\text{DM}} + \rho_{\text{r}} + \rho_{\Lambda} + \dots \quad (1.17)$$

$$p = p_{\text{b}} + p_{\text{DM}} + p_{\text{r}} + p_{\Lambda} + \dots \quad (1.18)$$

Sustituyendo la ecuación (A.20) del Apéndice A en (1.16) tenemos

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(3p + \rho). \quad (1.19)$$

Esta ecuación es llamada la segunda ecuación de Friedmann.

Ahora podemos derivar la primera ecuación de Friedmann. Para ello tomamos la componente radial de la ecuación (1.14), además usando la ecuación (1.19), así como las componentes radiales de las matrices (A.2) y  $T^{\mu\nu}$  hallamos

$$R_{rr} = 8\pi G \frac{a^2}{1 - kr^2} \left[ p - \frac{1}{2}(3p - \rho) \right], \quad (1.20)$$

donde  $k$  el factor de la curvatura espacial.

Nuevamente usando la ecuación (A.20) encontramos que

$$R_{rr} = \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{1 - kr^2}, \quad (1.21)$$

igualando estas dos últimas ecuaciones llegamos a

$$\frac{\ddot{a}}{a} + 2 \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{2k}{a^2} = 4\pi G(\rho - p). \quad (1.22)$$



Sustituyendo la segunda ecuación de Friedmann (1.19) en esta última ecuación encontramos,

$$\begin{aligned}
 2 \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{2k}{a^2} &= 4\pi G(\rho - p) + \frac{4\pi G}{3}(3p + \rho), \\
 &= \frac{4\pi G}{3}(3\rho - 3p + \rho + 3p), \\
 &= \frac{4\pi G}{3}4\rho, \\
 \Rightarrow \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} &= \frac{8\pi G}{3}\rho. \tag{1.23}
 \end{aligned}$$

Se define el **parámetro de Hubble** como:

$$H(t) \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}, \tag{1.24}$$

donde “ $t$ ” representa el tiempo cósmico. Con esto, la ecuación (1.23) llega a ser

$$H^2(t) = \frac{8\pi G}{3}\rho(t) - \frac{k}{a^2(t)}. \tag{1.25}$$

Esta es la Primera ecuación de Friedmann, o simplemente la Ecuación de Friedmann. De las otras dos componentes del tensor de Ricci (es decir,  $R_{\theta\theta}, R_{\phi\phi}$ ) se obtiene la misma expresión (1.22), mientras que las otras componentes mezcladas son nulas, es decir:

$$R_{r\theta} = R_{r\phi} = R_{\theta\phi} = R_{tr} = R_{t\theta} = R_{t\phi} = 0. \tag{1.26}$$

Definimos los parámetros de densidad  $\Omega_i$  para cada una de las componentes de materia presentes en el universo

$$\Omega_i \equiv \frac{\rho_i}{\rho_c}, \tag{1.27}$$

donde  $\rho_i$  es la densidad de materia-energía de la  $i$ -ésima componente de materia del universo (por ejemplo, materia bariónica, materia oscura, etc.) y  $\rho_c$  es densidad crítica definida como

$$\rho_c(t) \equiv \frac{3H^2(t)}{8\pi G}, \tag{1.28}$$

que proviene de asumir que la curvatura espacial del universo es cero ( $k = 0$ ) en la ecuación (1.25). Cuando  $\rho = \rho_c$  se dice que el universo es espacialmente plano, si  $\rho > \rho_c$  es cerrado, y si  $\rho < \rho_c$  es abierto ( Cuadro 1.1).

Vamos a distinguir el tiempo cósmico  $t$ , así como cualquier otra cantidad cosmológica evaluada en el presente con un subíndice o superíndice cero. Entonces, definimos el valor de la densidad crítica en el presente como

$$\rho_{c,0} \equiv \rho_c(t_0) = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \simeq 1.16 \times 10^{-27} \text{kg/m}^3, \tag{1.29}$$

donde  $H_0 \equiv H(t_0)$  es llamada la constante de Hubble.

A continuación dividimos ambos lados de la ecuación (1.25) por  $H^2$  y empleando la ecuación (1.28) obtenemos,

$$1 = \frac{\rho}{\rho_c} - \frac{k}{a^2 H^2}. \tag{1.30}$$

Luego definimos el parámetro densidad asociado a la curvatura espacial del universo  $\Omega_k$  como:

$$\Omega_k \equiv -\frac{k}{a^2 H^2}, \quad (1.31)$$

ahora usando la ecuación (1.28) en la ecuación (1.30) encontramos

$$1 = \Omega_{\text{total}} + \Omega_k. \quad (1.32)$$

O también reescribimos esta ecuación como

$$1 = \Omega_b + \Omega_{\text{DM}} + \Omega_r + \Omega_\Lambda + \Omega_k, \quad (1.33)$$

donde se definió:

$$\Omega_{\text{total}} = \Omega_0 \equiv \frac{\rho}{\rho_c} = \Omega_b + \Omega_{\text{DM}} + \Omega_r + \Omega_\Lambda. \quad (1.34)$$

La ecuación (1.33) es la forma usual de expresar la primera ecuación de Friedmann y debe satisfacerse para cualquier tiempo.

Analicemos la dependencia de la densidad  $\rho_i$  para cada una de las componentes del universo con respecto al factor de escala  $a(t)$ . Comencemos con la componente de materia bariónica. De la la sección (1.4.2), notamos que la presión asociada al fluido de materia bariónica es cero, es decir,  $p_b = 0$ . Entonces, la ecuación de conservación local de materia (1.10) para esta componente tomará la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_b + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho_b &= 0, & (1.35) \\ \Rightarrow \frac{\dot{\rho}_b}{\rho_b} &= -3\frac{\dot{a}}{a}, \\ \Rightarrow \frac{d \ln \rho_b}{dt} &= -3\frac{d \ln a}{dt}, \\ \Rightarrow \int_{\rho_{b,0}}^{\rho_b} d \ln \rho_b &= -3 \int_{a_0}^a d \ln a, \\ \Rightarrow \ln \left( \frac{\rho_b}{\rho_{b,0}} \right) &= \ln \left( \frac{a_0}{a} \right)^3, \\ \Rightarrow \rho_b(a) &= \frac{\rho_{b,0}}{a^3}, & (1.36) \end{aligned}$$

donde normalizamos el factor de escala de tal modo que en el presente  $a_0 = 1$ .

Procediendo de manera similar podemos mostrar que para la materia oscura encontramos la misma expresión que para la materia bariónica, es decir:

$$\rho_{\text{DM}}(a) = \frac{\rho_{\text{DM},0}}{a^3}, \quad (1.37)$$

donde  $\rho_{\text{DM},0}$  es el valor en el presente de la densidad de materia oscura. Algunas veces por simplicidad, se suele agrupar estas dos componentes, es decir, materia bariónica y materia oscura, en una misma expresión y se acostumbra llamarlas simplemente como “materia” y la denotamos como  $\rho_M(a)$ . La cual se define de la siguiente manera

$$\rho_M(a) \equiv \rho_b(a) + \rho_{\text{DM}}(a), \quad \rho_{M,0} \equiv \rho_{b,0} + \rho_{\text{DM},0}, \quad (1.38)$$

y su ecuación de evolución será

$$\rho_M(a) = \frac{\rho_{M,0}}{a^3}. \quad (1.39)$$

La ecuación de estado para la radiación, puede calcularse a partir del tensor de energía-momento del campo electromagnético  $F_{\mu\nu}$ , así:

$$T_{\mu\nu} = F_{\mu\alpha}F_{\nu}^{\alpha} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}, \quad (1.40)$$

en donde  $F_{\mu\nu}$  es el Tensor de Faraday ( $F_{\mu\nu} \equiv \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}$  donde  $A_{\mu} = (-\phi, \mathbf{A})$ ,  $\phi$  y  $\mathbf{A}$  son los potenciales eléctrico y magnético respectivamente.) cuya traza es:

$$T^{\mu}_{\mu} = F_{\mu\alpha}F^{\mu\alpha} - F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}, \quad \Rightarrow \quad T^{\mu}_{\mu} = 0. \quad (1.41)$$

Usando las ecuaciones (A.5 [Ver Apéndice A]) y (1.41) hallamos  $T^{\mu}_{\mu} = 0 = 3p_r - \rho_r$ , de donde obtenemos

$$p_r = \frac{1}{3}\rho_r. \quad (1.42)$$

Sustituyendo la ecuación anterior en la ecuación (1.10) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_r}{dt} + 4\frac{\dot{a}}{a}\rho_r &= 0, \\ \Rightarrow \frac{1}{\rho_r} \frac{d\rho_r}{dt} &= -4\frac{\dot{a}}{a}, \\ \Rightarrow \frac{d \ln \rho_r}{dt} &= -4\frac{d \ln a}{dt}, \\ \Rightarrow \int_{\rho_{r,0}}^{\rho_r} d \ln \rho_r &= -4 \int_1^a d \ln a, \\ \Rightarrow \ln \left( \frac{\rho_r}{\rho_{r,0}} \right) &= \ln \left( \frac{1}{a} \right)^4, \\ \Rightarrow \rho_r(a) &= \frac{\rho_{r,0}}{a^4}. \end{aligned} \quad (1.43)$$

Esta última relación representa la ecuación de evolución de la radiación y  $\rho_{r,0}$  es el valor de la densidad de radiación en el presente.

Asumiendo que la componente de energía oscura, es la constante cosmológica, entonces tenemos una ecuación de estado de la forma  $p_{\Lambda} = -\rho_{\Lambda}$ . Reemplazando esta ecuación en (1.10) obtenemos

$$\frac{d\rho_{\Lambda}}{dt} = 0, \quad (1.44)$$

esta ecuación, implica que la densidad de energía de la constante cosmológica siempre es una constante, es decir:

$$\rho_{\Lambda} = \rho_{\Lambda,0} = \text{cte}. \quad (1.45)$$

Sustituyendo las ecuaciones (1.36, 1.37, 1.43, 1.45) en la ecuación de Friedmann tenemos

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left( \frac{\rho_{b,0}}{a^3} + \frac{\rho_{DM,0}}{a^3} + \frac{\rho_{r,0}}{a^4} + \rho_{\Lambda,0} \right) - \frac{k}{a^2}, \quad (1.46)$$

y dividiendo por  $H_0^2$  cada término e identificando la definición de la densidad crítica hoy, hallamos

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \left( \frac{\rho_{b,0}}{\rho_{c,0}} \frac{1}{a^3} + \frac{\rho_{DM,0}}{\rho_{c,0}} \frac{1}{a^3} + \frac{\rho_{r,0}}{\rho_{c,0}} \frac{1}{a^4} + \frac{\rho_{\Lambda,0}}{\rho_{c,0}} \right) - \frac{k}{a^2 H_0^2}. \quad (1.47)$$

Usando las definiciones del parámetro de densidad (1.27) evaluadas hoy ( $\Omega_{i,0} \equiv \rho_{i,0}/\rho_{c,0}$ ), así como la definición del parámetro de la curvatura espacial (1.31) hoy ( $\Omega_{k,0} \equiv -k/H_0^2$ ), logramos lo siguiente

$$H(a) = H_0 \left( \frac{\Omega_{b,0}}{a^3} + \frac{\Omega_{DM,0}}{a^3} + \frac{\Omega_{r,0}}{a^4} + \Omega_{\Lambda,0} + \frac{\Omega_{k,0}}{a^2} \right)^{1/2}. \quad (1.48)$$

En astronomía comúnmente se estudian las distancias a escalas cosmológicas en términos del corrimiento al rojo del espectro de luz emitido por un objeto debido a su velocidad de recesión con respecto a un observador que mide la luz emitida por dicho objeto. Dado que el universo se está expandiendo, todas las estructuras que la componen (galaxias, cúmulos de galaxias, etc.), se están alejando unas de las otras lo que se interpreta como un corrimiento al rojo de la luz que emiten y que es medida por algún observador. Por convención se denota el corrimiento al rojo con la letra “ $z$ ” y se define como:

$$z \equiv \frac{\lambda_o - \lambda_e}{\lambda_e}, \quad (1.49)$$

donde  $\lambda_e$  es la longitud de onda que emite la fuente y  $\lambda_o$  es la longitud de onda medida por un observador en reposo. Por otro lado, existe una relación entre  $z$  y el factor de escala, que aparece en la métrica de FLRW, ésta es  $a = 1/(1+z)$  (Esta ecuación será demostrada en el Capítulo 3). Esto nos permite reescribir la expresión para el parámetro de Hubble (1.48) como

$$H(z) = H_0 \left[ \Omega_{b,0}(1+z)^3 + \Omega_{DM,0}(1+z)^3 + \Omega_{r,0}(1+z)^4 + \Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{k,0}(1+z)^2 \right]^{1/2}. \quad (1.50)$$

Esta forma del parámetro de Hubble es muy útil para restringir los valores de los parámetros libres de un modelo cosmológico dado, usando datos observacionales.

Para determinar el valor de  $k$  a partir del parámetro de curvatura  $\Omega_{k,0}$  se debe utilizar la ecuación de Friedmann (1.30), en el modelo  $\Lambda$ CDM (Ver Sección 4.1), obteniendose

$$\text{Cerrado } k > 0 \quad \Rightarrow \quad \Omega_{k,0} < 0 \quad \Rightarrow \quad \Omega_0 = \Omega_{b,0} + \Omega_{DM,0} + \Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{r,0} > 1.$$

$$\text{Plano } k = 0 \quad \Rightarrow \quad \Omega_{k,0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Omega_0 = \Omega_{b,0} + \Omega_{DM,0} + \Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{r,0} = 1.$$

$$\text{Abierto } k < 0 \quad \Rightarrow \quad \Omega_{k,0} > 0 \quad \Rightarrow \quad \Omega_0 = \Omega_{b,0} + \Omega_{DM,0} + \Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{r,0} < 1.$$

Por lo tanto, hallando los valores de  $\Omega_{DM,0}$ ,  $\Omega_{b,0}$ ,  $\Omega_{\Lambda,0}$ , y  $\Omega_{r,0}$  quedará determinada la geometría espacial del universo.

### 1.5.1. El parámetro de desaceleración $q(t)$

El parámetro de desaceleración es una cantidad que describe la tasa de disminución de la expansión del universo.

Es imposible medir como varía el factor de escala  $a(t)$  desde el Big Bang, pero sí podemos

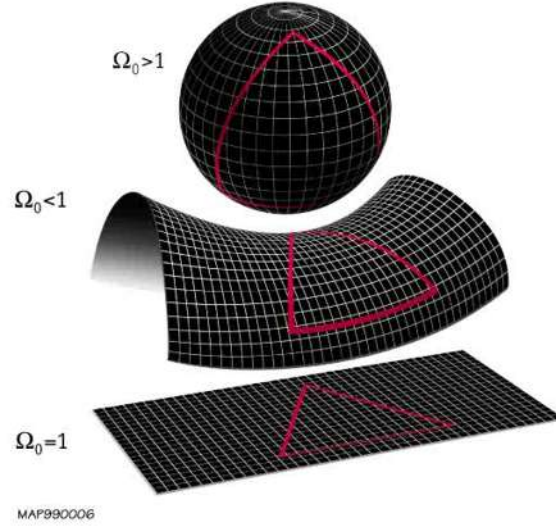


Figura 1.3: Clases de geometría espacial [66].

hacer mediciones que nos permitan determinar su valor para épocas cercanas a  $t_0$ . Para esto efectuamos una expansión de Taylor alrededor de  $t_0$  (época actual) del factor de escala, así:

$$a(t) = a(t_0) + \dot{a}(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}\ddot{a}(t_0)(t - t_0)^2 + \dots \quad (1.51)$$

Dividiendo por  $a(t_0)$  y utilizando la definición de la constante de Hubble  $H(t_0) \equiv \dot{a}(t_0)/a(t_0)$ , reescribimos lo anterior como

$$\frac{a(t)}{a(t_0)} = 1 + H_0(t - t_0) - \frac{1}{2}q_0H_0^2(t - t_0)^2 + \dots \quad (1.52)$$

en donde se definió el parámetro de desaceleración

$$q_0(t_0) \equiv -\frac{a(t_0)\ddot{a}(t_0)}{\dot{a}^2(t_0)} = -\frac{\ddot{a}(t_0)}{H^2(t_0)a(t_0)}. \quad (1.53)$$

Interpretemos la aceleración del universo  $\ddot{a}(t)$  en términos de  $q(t)$

$$\ddot{a} > 0 \quad \Rightarrow \quad q(t) < 0 \quad \text{Expansión acelerada del universo,}$$

$$\ddot{a} < 0 \quad \Rightarrow \quad q(t) > 0 \quad \text{Expansión desacelerada del universo.}$$

Similarmente, usando la definición del parámetro de Hubble

$$H(t) > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Expansión del universo,}$$

$$H(t) < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Contracción del universo.}$$

Consideremos que la ecuación de estado de un fluido de energía oscura satisface la ecuación (1.13) y empleando las ecuaciones (1.33), (1.19) y (1.53) en la representación del corrimiento al rojo “ $z$ ”, asumiendo un universo espacialmente plano, encontramos

$$q(z) = \frac{4\pi G}{3H^2(z)} (\rho_{\text{DM}}(z) + \rho_{\text{b}}(z) + \rho_{\text{r}}(z) + \rho_{\text{DE}}(z) + 3P_{\text{DE}}(z) + 3P_{\text{r}}(z)). \quad (1.54)$$

Utilizando la ecuación (1.28) reescribimos la ecuación (1.54) como

$$2q(z) = \left( \frac{\rho_{DM}(z)}{\rho_c(z)} + (1 + 3 \cdot w) \cdot \frac{\rho_{DE}(z)}{\rho_c(z)} + \frac{\rho_b(z)}{\rho_c(z)} + \frac{2\rho_r(z)}{\rho_c(z)} \right), \quad (1.55)$$

usando la ecuación (1.27) en la ecuación (1.55), entonces logramos

$$2q(z) = (\Omega_{DM}(z) + (1 + 3 \cdot w) \cdot \Omega_{DE}(z) + \Omega_b(z) + 2\Omega_r(z)). \quad (1.56)$$

Haciendo uso de la ecuación (1.33) en la ecuación (1.56) tenemos

$$2q(z) = (1 + 3w \cdot \Omega_{DE}(z) + \Omega_r(z)), \quad (1.57)$$

a partir del cual llegamos a

$$q(z) = \left( \frac{1}{2} + \frac{3}{2}w \cdot \Omega_{DE}(z) + \frac{1}{2}\Omega_r(z) \right). \quad (1.58)$$

Esta última ecuación nos será muy útil, pues conociendo los parámetros  $w$ ,  $\Omega_{DE}(z)$  y  $\Omega_r(z)$  podremos calcular el parámetro de desaceleración  $q(z)$ .

## Capítulo 2

# Dinámica del proceso de interacción entre las componentes oscuras del universo

La motivación para considerar la existencia de una interacción directa no-gravitacional entre las componentes oscuras del universo, es proponer y explorar algunos modelos cosmológicos que den resultados consistentes con las observaciones cosmológicas y que sean realistas y alternativos al modelo  $\Lambda$ CDM, el cual representa una idealización teórica formada por componentes que no intercambian energía entre sí.

En este Capítulo presentaremos las ecuaciones generales y cosmológicas de movimiento de la DE interactuando con la DM. Además, desarrollamos algunos esquemas de reconstrucción general del término de interacción  $Q$  entre estas componentes oscuras.

### 2.1. Ecuaciones generales de movimiento de la energía oscura interactuando con la materia oscura.

Consideramos un universo formado por cuatro componentes: El fluido de materia bariónica ( $b$ ), el fluido de radiación ( $r$ ), el fluido de materia oscura ( $DM$ ) y el fluido de energía oscura ( $DE$ ). Todas estas constituyentes están interactuando gravitacionalmente entre sí y adicionalmente las componentes oscuras están interactuando no-gravitacionalmente a través de un intercambio de energía entre ellas, mediada por un término de interacción que lo definiremos posteriormente. Las ecuaciones gravitacionales de movimiento son las ecuaciones de campo de Einstein

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G \left[ T_{\mu\nu}^b + T_{\mu\nu}^r + T_{\mu\nu}^{DM} + T_{\mu\nu}^{DE} \right], \quad (2.1)$$

mientras que las ecuaciones de movimiento para cada fluido son:

$$\nabla^\nu T_{\mu\nu}^b = 0, \quad (2.2)$$

$$\nabla^\nu T_{\mu\nu}^r = 0, \quad (2.3)$$

$$\nabla^\nu T_{\mu\nu}^{DM} = -F_\mu, \quad (2.4)$$

**CAPÍTULO 2. DINÁMICA DEL PROCESO DE INTERACCIÓN ENTRE  
LAS COMPONENTES OSCURAS DEL UNIVERSO**  
2.1. ECUACIONES GENERALES DE MOVIMIENTO DE LA ENERGÍA OSCURA  
INTERACTUANDO CON LA MATERIA OSCURA.

---

$$\nabla^\nu T_{\mu\nu}^{DE} = F_\mu, \quad (2.5)$$

donde el respectivo tensor de energía-momento para el fluido  $i$  está definido como: ( $i = b, r, DM, DE$ )

$$T_{\mu\nu}^i = \rho_i U_\mu U_\nu + (g_{\mu\nu} + U_\mu U_\nu) P_i, \quad (2.6)$$

aquí  $U_\mu$  es la velocidad de los fluidos (asumimos por simplicidad que sea el mismo para cada uno) donde  $\rho_i$  y  $P_i$  son respectivamente la densidad y la presión del fluido  $i$  medido por un observador con velocidad  $U^\mu$ . Sea  $F_\mu$  el cuadri-vector de interacción entre las componentes oscuras y su forma matemática aún no es conocida, porque en general no existe una teoría fundamental.

Proyectamos las ecuaciones (2.2)-(2.5) en una dirección paralela a la velocidad  $U^\mu$ ,

$$U^\mu \nabla^\nu T_{\mu\nu}^b = 0, \quad (2.7)$$

$$U^\mu \nabla^\nu T_{\mu\nu}^r = 0, \quad (2.8)$$

$$U^\mu \nabla^\nu T_{\mu\nu}^{DM} = -U^\mu F_\mu, \quad (2.9)$$

$$U^\mu \nabla^\nu T_{\mu\nu}^{DE} = U^\mu F_\mu, \quad (2.10)$$

y otra en una dirección ortogonal a la velocidad  $U^\mu$ , usando para esto el proyector  $h^{\mu\beta} = g^{\mu\beta} + U^\mu U^\beta$ , el cual actúa sobre la hipersuperficie ortogonal a la velocidad  $U^\mu$

$$h^{\mu\beta} \nabla^\nu T_{\mu\nu}^b = 0, \quad (2.11)$$

$$h^{\mu\beta} \nabla^\nu T_{\mu\nu}^r = 0, \quad (2.12)$$

$$h^{\mu\beta} \nabla^\nu T_{\mu\nu}^{DM} = -h^{\mu\beta} F_\mu, \quad (2.13)$$

$$h^{\mu\beta} \nabla^\nu T_{\mu\nu}^{DE} = h^{\mu\beta} F_\mu. \quad (2.14)$$

Reemplazando la ecuación (2.6) en cada una de las ecuaciones (2.7)-(2.10), obtenemos las ecuaciones de conservación materia-energía para cada uno de los fluidos,

$$U^\mu \nabla_\mu \rho_b + (\rho_b + P_b) \nabla_\mu U^\mu = 0, \quad (2.15)$$

$$U^\mu \nabla_\mu \rho_r + (\rho_r + P_r) \nabla_\mu U^\mu = 0, \quad (2.16)$$

$$U^\mu \nabla_\mu \rho_{DM} + (\rho_{DM} + P_{DM}) \nabla_\mu U^\mu = U^\mu F_\mu, \quad (2.17)$$

$$U^\mu \nabla_\mu \rho_{DE} + (\rho_{DE} + P_{DE}) \nabla_\mu U^\mu = -U^\mu F_\mu. \quad (2.18)$$

Por otro lado, introduciendo (2.6) en (2.11)-(2.14), nos permite encontrar las ecuaciones de Euler para cada fluido,

$$h^{\mu\beta} \nabla_\mu P_b + (\rho_b + P_b) U^\mu \nabla_\mu U^\beta = 0, \quad (2.19)$$

$$h^{\mu\beta} \nabla_\mu P_r + (\rho_r + P_r) U^\mu \nabla_\mu U^\beta = 0, \quad (2.20)$$

$$h^{\mu\beta} \nabla_\mu P_{DM} + (\rho_{DM} + P_{DM}) U^\mu \nabla_\mu U^\beta = -h^{\mu\beta} F_\mu, \quad (2.21)$$



**CAPÍTULO 2. DINÁMICA DEL PROCESO DE INTERACCIÓN ENTRE  
LAS COMPONENTES OSCURAS DEL UNIVERSO**  
2.2. ECUACIONES COSMOLÓGICAS DE MOVIMIENTO DE LA ENERGÍA OSCURA  
INTERACTUANDO CON MATERIA OSCURA.

---

$$h^{\mu\beta}\nabla_{\mu}P_{DE} + (\rho_{DE} + P_{DE})U^{\mu}\nabla_{\mu}U^{\beta} = h^{\mu\beta}F_{\mu}. \quad (2.22)$$

Finalmente, completamos el sistema de ecuaciones asumiendo las siguientes ecuaciones de estado para cada una de las componentes del universo,

$$P_b = 0, \quad (2.23)$$

$$P_{DM} = 0, \quad (2.24)$$

$$P_r = \frac{1}{3}\rho_r, \quad (2.25)$$

mientras que para la energía oscura, asumimos un parámetro de ecuación de estado constante  $w$ ,

$$P_{DE} = w\rho_{DE}. \quad (2.26)$$

## 2.2. Ecuaciones cosmológicas de movimiento de la energía oscura interactuando con materia oscura.

Asumimos que la métrica de fondo está descrita por la métrica plana de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (Ver ecuación 1.1) escrita en un sistema de referencia comóvil y sustentada por las anisotropías de la radiación del fondo cósmico de microondas (CMB), la cual fue medida por el experimento WMAP [9].

$$ds^2 = -(cdt)^2 + a^2(t)(dr^2 + r^2d\Omega^2), \quad (2.27)$$

donde  $a(t)$  es el factor de escala y  $t$  es el tiempo cósmico. En estas coordenadas, escogemos la forma de la velocidad normalizada  $U^{\mu}$ ,

$$U^{\mu} = (1, 0, 0, 0), \quad (2.28)$$

a partir del cual encontramos

$$\nabla_{\mu}U^{\mu} = 3\frac{\dot{a}}{a} \equiv 3H, \quad (2.29)$$

$$U^{\mu}\nabla_{\mu}U^{\beta} = 0, \quad (2.30)$$

donde  $H$  es el parámetro de Hubble y el punto significa derivada con respecto al tiempo cósmico. En concordancia con las simetrías de isotropía espacial y homogeneidad del espacio-tiempo de FLRW, las densidades y presiones de los fluidos dependen solamente del tiempo cósmico,  $\rho_i(t)$ ,  $P_i(t)$ . Asimismo las componentes paralelas y ortogonales del cuadri-vector de interacción con respecto a la velocidad  $U^{\mu}$  son respectivamente

$$U^{\mu}F_{\mu} = Q, \quad (2.31)$$

$$h^{\mu\beta}F_{\mu} = 0, \quad (2.32)$$

donde la función  $Q$  representa el término de interacción. La introducción de las ecuaciones de estado (2.23)-(2.26), la métrica (2.27) y las expresiones (2.28)-(2.32) en las ecuaciones de conservación local de materia-energía para los fluidos (2.15)-(2.18) nos permite encontrar

$$\dot{\rho}_b + 3H\rho_b = 0, \quad (2.33)$$

**CAPÍTULO 2. DINÁMICA DEL PROCESO DE INTERACCIÓN ENTRE  
LAS COMPONENTES OSCURAS DEL UNIVERSO**  
2.3. RECONSTRUCCIÓN GENERAL DE LA INTERACCIÓN.

---

$$\dot{\rho}_r + 4H\rho_r = 0, \quad (2.34)$$

$$\dot{\rho}_{DM} + 3H\rho_{DM} = Q, \quad (2.35)$$

$$\dot{\rho}_{DE} + 3(1+w)H\rho_{DE} = -Q. \quad (2.36)$$

Notemos también que, las ecuaciones de Euler (2.19)-(2.22) son idénticamente satisfechas y no producen alguna nueva ecuación. Desde las ecuaciones de Einstein (2.1) completamos las ecuaciones de movimiento con la primera ecuación de Friedmann,

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} (\rho_b + \rho_r + \rho_{DM} + \rho_{DE}). \quad (2.37)$$

Es conveniente definir los siguientes parámetros adimensionales de densidad de energía  $\Omega_i^*$ , para  $i = b, r, DM, DE$ , como las densidades normalizadas de energía entre la densidad crítica en la época actual,

$$\Omega_i^* \equiv \frac{\rho_i}{\rho_{c,0}}, \quad (2.38)$$

y los parámetros adimensionales de densidad de energía hoy,

$$\Omega_{i,0} \equiv \frac{\rho_{i,0}}{\rho_{c,0}}, \quad (2.39)$$

donde  $\rho_{c,0} \equiv 3H_0^2/8\pi G$  es la densidad crítica hoy y  $H_0$  es la constante de Hubble.

Resolviendo (2.33) y (2.34) en términos del corrimiento al rojo “ $z$ ”, obtenemos las soluciones conocidas para los parámetros de densidad de la materia bariónica y radiación respectivamente:

$$\Omega_b^*(z) = \Omega_{b,0}(1+z)^3, \quad (2.40)$$

$$\Omega_r^*(z) = \Omega_{r,0}(1+z)^4. \quad (2.41)$$

Las ecuaciones de conservación local (2.35) y (2.36) para ambas componentes oscuras son reescritas en términos del corrimiento al rojo como:

$$\frac{d\rho_{DM}}{dz} - \frac{3}{1+z}\rho_{DM} = -\frac{Q(z)}{(1+z) \cdot H(z)}, \quad (2.42)$$

$$\frac{d\rho_{DE}}{dz} - \frac{3(1+w)}{1+z}\rho_{DE} = \frac{Q(z)}{(1+z) \cdot H(z)}. \quad (2.43)$$

Fenomenológicamente, una forma conveniente de describir el intercambio de energía entre los dos fluidos oscuros es escoger un término de interacción proporcional al parámetro de Hubble.

### 2.3. Reconstrucción general de la interacción.

En esta tesis hemos analizado tres diferentes “Ensayos” para reconstruir el término de interacción; una manera es empleando polinomios ortogonales tales como los polinomios de Chebyshev (utilizado en los Ensayos 1 y 2) y la otra manera es a través de una función racional (utilizado en el Ensayo 3).

**CAPÍTULO 2. DINÁMICA DEL PROCESO DE INTERACCIÓN ENTRE  
LAS COMPONENTES OSCURAS DEL UNIVERSO**  
2.3. RECONSTRUCCIÓN GENERAL DE LA INTERACCIÓN.

---

**2.3.1. Usando polinomios de Chebyshev.**

Los polinomios de Chebyshev forman una base ortonormal y completa en el intervalo de  $[-1, 1]$  y además tienen la propiedad de ser polinomios de minimal aproximación, es decir, que tienen la menor desviación desde su valor verdadero para algún orden dado [61, 62, 63]. Consideremos dos polinomios de Chebyshev  $T_n(x), T_m(x) \in L^2[-1, 1]$  (Espacio de Hilbert de valores reales), donde  $T_n(x)$  y  $T_m(x)$  denotan a los polinomios de orden  $n$  y  $m$  con  $n, m \in [0, N]$  y  $N$  es un entero positivo. El producto escalar  $\in L^2[-1, 1]$  está definido en términos de la función  $w(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$ ,  $x \in [-1, 1]$  como [61]:

$$\langle T_n, T_m \rangle_w \equiv \int_{-1}^1 T_n(x)T_m(x)(1 - x^2)^{-1/2}dx = \delta_{nm} \begin{cases} \pi & \text{Si } n = 0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{Si } n > 0. \end{cases} \quad (2.44)$$

y sus normas  $\|T_n\| = \sqrt{\langle T_n, T_n \rangle}$  y  $\|T_m\| = \sqrt{\langle T_m, T_m \rangle}$  son finitas.

Mediante la siguiente relación podemos pasar (mapear) de la representación “ $x$ ” a la representación del corrimiento al rojo “ $z$ ”

$$x = \frac{2z}{z_{max}} - 1, \quad (2.45)$$

donde  $z_{max}$  es el máximo valor del corrimiento al rojo en el cual las observaciones son posibles. Sin pérdida de generalidad, podemos expandir la función  $I_Q(z)$  en la representación del corrimiento al rojo “ $z$ ” como:

$$I_Q(z) \equiv \sum_{n=0}^N \lambda_n \cdot T_n(z), \quad (2.46)$$

donde  $T_n(z)$  denota a los polinomios de Chebyshev de orden  $n$  en la representación del corrimiento al rojo “ $z$ ”, con  $n \in [0, N]$  y  $N$  es un entero positivo.

Por otro lado, los coeficientes de la expansión polinomial  $\lambda_n$  son parámetros libres adimensionales. Además  $z$  es una variable independiente y su dominio estará determinado por el intervalo de las pruebas cosmológicas que se considere.

Con la finalidad de mantener un orden y una mejor visualización de los términos de interacción  $Q(z)$ , escribiremos  $Q(z)$  en términos de la función  $I_Q(z)$ . Esta última función nos informará a cerca de la intensidad de la interacción entre las componentes oscuras del universo.

**Ensayo 1:**  $Q(z) \equiv \rho_{c,0} \cdot (1 + z)^3 \cdot H(z) \cdot I_Q(z)$

En los últimos años diversos investigadores para resolver o aminorar el “Problema de Coincidencia Cósmica” han propuesto términos de interacción  $Q(z)$  proporcionales a la densidad de energía de la DM  $\rho_D M(z)$  y al parámetro de Hubble  $H(z)$ , las cuales para ser viables, deben imponerse limitaciones muy restrictivas sobre los coeficientes de interacción. Como consecuencia de lo expresado, la motivación para proponer un Ensayo 1, es proponer y explorar parametrizaciones que sean alternativas a la parametrización convencional del término de interacción  $Q(z)$  haciéndola ahora proporcional a la densidad crítica hoy  $\rho_{c,0}$ , al término  $(1 + z)^3$ , al parámetro de Hubble  $H(z)$  y a una expansión de los polinomios de Chebyshev. Estamos interesados en analizar las consecuencias físicas que produce tal parametrización de  $Q(z)$  en las variables cosmológicas.

Definimos el intercambio de energía entre los fluidos oscuros como:

$$Q(z) \equiv \rho_{c,0} \cdot (1 + z)^3 \cdot H(z) \cdot I_Q(z). \quad (2.47)$$

**CAPÍTULO 2. DINÁMICA DEL PROCESO DE INTERACCIÓN ENTRE  
LAS COMPONENTES OSCURAS DEL UNIVERSO**  
2.3. RECONSTRUCCIÓN GENERAL DE LA INTERACCIÓN.

---

Reemplazando la ecuación (2.46) en la ecuación anterior obtenemos

$$Q(z) = \rho_{c,0} \cdot (1+z)^3 \cdot H(z) \cdot \sum_{n=0}^N \lambda_n \cdot T_n(z). \quad (2.48)$$

donde  $(1+z)^3$  ha sido introducido por conveniencia para imitar el comportamiento una densidad de materia sin interacción (Ver ecuación 1.50). Llamaremos a la función  $I_Q(z)$  “función de interacción”, ella es adimensional y la vamos a reconstruir.

Usando las ecuaciones (2.38) y (2.47) reescribimos las ecuaciones para los fluidos oscuros (2.42)-(2.43) como:

$$\frac{d\Omega_{DM}^*}{dz} - \frac{3}{1+z} \Omega_{DM}^* = -(1+z)^2 \cdot I_Q(z), \quad (2.49)$$

$$\frac{d\Omega_{DE}^*}{dz} - \frac{3(1+w)}{1+z} \Omega_{DE}^* = (1+z)^2 \cdot I_Q(z). \quad (2.50)$$

Introducimos (2.46) en (2.49)-(2.50) e integramos ambas ecuaciones, obteniendo lo siguiente

$$\Omega_{DM}^*(z) = (1+z)^3 \left[ \Omega_{DM,0} - \frac{z_{max}}{2} \sum_{n=0}^N \lambda_n \cdot K_n(x, 0) \right], \quad (2.51)$$

$$\Omega_{DE}^*(z) = (1+z)^{3(1+w)} \left[ \Omega_{DE,0} + \frac{z_{max}}{2} \sum_{n=0}^N \lambda_n \cdot K_n(x, w) \right], \quad (2.52)$$

donde definimos la integral

$$K_n(x, w) \equiv \int_{-1}^x \frac{T_n(\tilde{x})}{(a + b\tilde{x})^{(1+3w)}} d\tilde{x}, \quad (2.53)$$

y las cantidades

$$a \equiv 1 + \frac{z_{max}}{2}, \quad (2.54)$$

$$b \equiv \frac{z_{max}}{2}. \quad (2.55)$$

Aquí debemos considerar la ecuación (2.45), admeás  $z_{max}$  es el máximo valor del corrimiento al rojo en el cual las observaciones son posibles tal que  $x \in [-1, 1]$  y  $|T_n(x)| \leq 1$ , para todo  $n \in [0, N]$ . Para alcanzar una reconstrucción general en (2.51)-(2.52) debemos tomar  $N \rightarrow \infty$  y obtener las soluciones en una forma compacta. Los detalles del cálculo de integrales  $K_n(x, w)$  en el lado derecho de (2.51)-(2.52), son presentados en el Apéndice B, el cual muestra las formas compactas (B.9)-(B.10) para las integrales con sub-índice entero par e impar  $n$ , y válido para  $w \neq n/3$  donde  $n \geq 0$ .

**CAPÍTULO 2. DINÁMICA DEL PROCESO DE INTERACCIÓN ENTRE  
LAS COMPONENTES OSCURAS DEL UNIVERSO**  
2.3. RECONSTRUCCIÓN GENERAL DE LA INTERACCIÓN.

---

**Ensayo 2:**  $Q(z) = H(z) \cdot \rho_{DM}(z) \cdot I_Q(z)$

La motivación para proponer un Ensayo 2, es proponer una generalización de la parametrización convencional del término de interacción  $Q(z)$  haciéndola ahora proporcional a la densidad de energía de la DM,  $\rho_{DM}(z)$ , al parámetro de Hubble  $H(z)$  y a una expansión de los polinomios de Chebyshev. Estamos interesados en analizar las consecuencias físicas que produce tal parametrización de  $Q(z)$  en las variables cosmológicas y si es capaz de resolver o aminorar el “Problema de Coincidencia Cósmica”.

Sustituyendo la expresión para  $Q(z)$  y la ecuación (2.46) en (2.42) y (2.43), encontramos las ecuaciones de los fluidos oscuros para este Ensayo

$$\frac{d\rho_{DM}}{dz} - \frac{3}{1+z} \rho_{DM} = -\frac{\rho_{DM} \cdot I_Q(z)}{(1+z)}, \quad (2.56)$$

$$\frac{d\rho_{DE}}{dz} - \frac{3(1+w)}{1+z} \rho_{DE} = \frac{\rho_{DM} \cdot I_Q(z)}{(1+z)}. \quad (2.57)$$

Empleando la ecuación (2.38) reescribimos las ecuaciones anteriores (2.56)-(2.57) como

$$\frac{d\Omega_{DM}^*}{dz} - \frac{3}{1+z} \Omega_{DM}^* = -\frac{\Omega_{DM}^* \cdot I_Q(z)}{1+z}, \quad (2.58)$$

$$\frac{d\Omega_{DE}^*}{dz} - \frac{3(1+w)}{1+z} \Omega_{DE}^* = \frac{\Omega_{DM}^* \cdot I_Q(z)}{1+z}. \quad (2.59)$$

Introducimos (2.46) en (2.58)-(2.59) e integramos ambas ecuaciones, obteniendo lo siguiente

$$\Omega_{DM}^*(z) = (1+z)^3 \Omega_{DM,0} \cdot \exp\left(-\frac{z_{max}}{2} \left[ \sum_{n=0}^N \lambda_n \cdot R_n(z) \right]\right), \quad (2.60)$$

$$\Omega_{DE}^*(z) = (1+z)^{3(1+w)} \left[ \Omega_{DE,0} + \frac{z_{max}}{2} \Omega_{DM}^*(z) \sum_{n=0}^N \lambda_n \cdot S_n(z, w) \right]. \quad (2.61)$$

Aquí hemos definido el promedio de la siguiente integral

$$\int_0^z \frac{T_n(\tilde{x}) \cdot \exp\left(-\frac{z_{max}}{2} \left[ \sum_{n=0}^N \lambda_n \cdot l_n(\tilde{x}) \right]\right)}{(1+\tilde{x})^{(1+3w)}} d\tilde{x} \equiv \frac{z_{max}}{2} \int_{-1}^x \frac{T_n(\tilde{x}) \cdot \exp\left(-\frac{z_{max}}{2} \left[ \sum_{n=0}^N \lambda_n \cdot \tilde{l}_n(\tilde{x}) \right]\right)}{(a+b \cdot \tilde{x})^{(1+3w)}} d\tilde{x}, \quad (2.62)$$

en donde también definimos las integrales (Ver Apéndice B.4)

$$R_n(z) \equiv \int_{-1}^x \frac{T_n(\tilde{x})}{(a+b\tilde{x})} d\tilde{x}, \quad (2.63)$$

$$S_n(z, w) \equiv \frac{z_{max}}{2} \int_{-1}^x \frac{T_n(\tilde{x}) \cdot \exp\left(-\frac{z_{max}}{2} \left[ \sum_{n=0}^N \lambda_n \cdot \tilde{l}_n(\tilde{x}) \right]\right)}{(a+b \cdot \tilde{x})^{(1+3w)}} d\tilde{x}, \quad (2.64)$$

**CAPÍTULO 2. DINÁMICA DEL PROCESO DE INTERACCIÓN ENTRE  
LAS COMPONENTES OSCURAS DEL UNIVERSO**  
2.3. RECONSTRUCCIÓN GENERAL DE LA INTERACCIÓN.

---

y las cantidades,

$$a \equiv 1 + \frac{z_{max}}{2}, \quad (2.65)$$

$$b \equiv \frac{z_{max}}{2}. \quad (2.66)$$

Similarmente, debemos considerar la ecuación (2.45), admeás  $z_{max}$  es el máximo valor del corrimiento al rojo en el cual las observaciones son posibles tal que  $x \in [-1, 1]$  y  $|T_n(x)| \leq 1$ , para todo  $n \in [0, N]$ . De la misma manera como en el Ensayo 1, para alcanzar una reconstrucción general en (2.60)-(2.61) debemos tomar  $N \rightarrow \infty$  y obtener las soluciones en una forma compacta. Los detalles del cálculo de integrales  $K_n(x, 0)$  del Apéndice B, nos servirán para construir los resultados para los primeros seis polinomios de Chebyshev (Ver Apéndice B.4).

### 2.3.2. Usando una función racional.

**Ensayo 3:**  $Q(z) = 3H(z) \cdot \rho_{DM}(z) \cdot g(z)$

La motivación para proponer un Ensayo 3, es proponer una parametrización alternativa a la parametrización convencional del término de interacción  $Q(z)$  haciéndola ahora proporcional a la densidad de energía de la DM,  $\rho_{DM}(z)$ , al parámetro de Hubble  $H(z)$  y a una función racional  $g(z)$  con coeficientes de interacción dinámicos. Estamos interesados en analizar las consecuencias físicas que produce tal parametrización de  $Q(z)$  en las variables cosmológicas. Tal parametrización ha sido trabajada extensamente en la “Teoría de Sistemas Dinámicos”, encontrándose que es capaz de aminorar el “Problema de Coincidencia Cósmica” [64].

Definimos el intercambio de energía entre los fluidos oscuros como:

$$Q(z) = 3H(z)\rho_{DM}(z)g(z). \quad (2.67)$$

Además, definimos la función  $g(z)$  del siguiente modo

$$g(z) = \frac{A + Bz}{C + Dz}, \quad (2.68)$$

donde  $A, B, C$  y  $D$  son constantes reales a determinar.

Analizando los siguientes límites

$$\lim_{z \rightarrow \infty} g(z) = \frac{B}{D} \equiv \alpha_{DM}^e \Rightarrow B = \alpha_{DM}^e D, \quad (2.69)$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} g(z) = \frac{A}{C} \equiv \alpha_{DM}^0 \Rightarrow A = \alpha_{DM}^0 C, \quad (2.70)$$

$$\lim_{z \rightarrow -1.0} g(z) = \frac{A - B}{C - D} \equiv \alpha_{DM}^f, \quad (2.71)$$

y definiendo  $E \equiv D/C$ , entonces reescribimos la función  $g(z)$  como

$$g(z) = \frac{\alpha_{DM}^0 + zE\alpha_{DM}^e}{1 + zE}. \quad (2.72)$$

**CAPÍTULO 2. DINÁMICA DEL PROCESO DE INTERACCIÓN ENTRE  
LAS COMPONENTES OSCURAS DEL UNIVERSO**  
2.3. RECONSTRUCCIÓN GENERAL DE LA INTERACCIÓN.

---

A partir de la siguiente relación

$$\lim_{z \rightarrow -1.0} g(z) = \lim_{z \rightarrow -1.0} \frac{\alpha_{DM}^0 + zE\alpha_{DM}^e}{1 + zE} = \frac{\alpha_{DM}^0 - E\alpha_{DM}^e}{1 - E} \equiv \alpha_{DM}^f, \quad (2.73)$$

encontramos que

$$E = \frac{\alpha_{DM}^0 - \alpha_{DM}^f}{\alpha_{DM}^e - \alpha_{DM}^f}. \quad (2.74)$$

A continuación reescribimos la ecuación (2.72) en términos del factor de escala

$$g(a) = \frac{a\alpha_{DM}^0 + (1-a)E\alpha_{DM}^e}{a + (1-a)E}, \quad (2.75)$$

analizamos el denominador de  $g(a)$  e imponemos la restricción de que sea siempre positivo para cualquier  $a$ , es decir:

$$a + (1-a)E = E + a(1-E) > 0 \Rightarrow 0 < E < 1. \quad (2.76)$$

La ecuación (2.76) nos permite encontrar dos casos, dependiendo de la combinación de los parámetros  $\alpha$ 's. Es decir:

$$\alpha_{DM}^e > \alpha_{DM}^0 > \alpha_{DM}^f \quad \text{y} \quad \alpha_{DM}^f > \alpha_{DM}^0 > \alpha_{DM}^e. \quad (2.77)$$

Reemplazando las ecuaciones (2.67) y (2.74) en (2.42) y (2.43), hallamos las ecuaciones para estos fluidos oscuros

$$\frac{d\rho_{DM}}{dz} - \frac{3}{1+z}\rho_{DM} = -\frac{3g(z) \cdot \rho_{DM}}{(1+z)}, \quad (2.78)$$

$$\frac{d\rho_{DE}}{dz} - \frac{3(1+w)}{1+z}\rho_{DE} = \frac{3g(z) \cdot \rho_{DM}}{(1+z)}. \quad (2.79)$$

Podemos reescribir las ecuaciones para los fluidos oscuros (2.78)-(2.79) como,

$$\frac{d\Omega_{DM}^*}{dz} - \frac{3}{1+z}\Omega_{DM}^* = -\frac{3g(z) \cdot \Omega_{DM}^*}{(1+z)}, \quad (2.80)$$

$$\frac{d\Omega_{DE}^*}{dz} - \frac{3(1+w)}{1+z}\Omega_{DE}^* = \frac{3g(z) \cdot \Omega_{DM}^*}{(1+z)}. \quad (2.81)$$

A partir de las ecuaciones anteriores, encontramos sus soluciones generales

$$\Omega_{DM}^*(z) = \Omega_{DM,0} \cdot (1+z)^{3(1-\alpha_{DM}^e)} \cdot \left[ \frac{(1-E)}{1+z} + E \right]^{3(\alpha_{DM}^f - \alpha_{DM}^e)}. \quad (2.82)$$

$$\Omega_{DE}^*(z) = (1+z)^{3(1+w)} \cdot \left\{ \Omega_{DE,0} + 3\Omega_{DM,0} \cdot \int_0^z (1+y)^{-3(\alpha_{DM}^e + w) - 1} \cdot \left[ \frac{\alpha_{DM}^f \cdot (1-E)}{1+y} + E \cdot \alpha_{DM}^e \right] \cdot \left[ \frac{(1-E)}{1+y} + E \right]^{3(\alpha_{DM}^f - \alpha_{DM}^e) - 1} \cdot dy \right\}. \quad (2.83)$$

**CAPÍTULO 2. DINÁMICA DEL PROCESO DE INTERACCIÓN ENTRE  
LAS COMPONENTES OSCURAS DEL UNIVERSO**  
2.3. RECONSTRUCCIÓN GENERAL DE LA INTERACCIÓN.

---

La solución explícita de la ecuación (2.83) será hallada numéricamente.

En general, usando las ecuaciones (2.40)-(2.41), (2.51)-(2.52), (2.60)-(2.61) y (2.82)-(2.83) reescribimos la ecuación de Friedmann (2.37) como:

$$H^2(z) = H_0^2 \left[ \Omega_{b,0}(1+z)^3 + \Omega_{r,0}(1+z)^4 + \Omega_{DM}^*(z) + \Omega_{DE}^*(z) \right]. \quad (2.84)$$

El parámetro de Hubble depende de los parámetros  $(H_0, \Omega_{b,0}, \Omega_{r,0}, \Omega_{DM,0}, \Omega_{DE,0}, w)$  y de los coeficientes adicionales  $\lambda_n$  (o  $\alpha$ 's). Evaluando la ecuación de Friedmann en el presente, encontramos que uno de los parámetros depende de los otros

$$\Omega_{DE,0} = 1 - \Omega_{b,0} - \Omega_{r,0} - \Omega_{DM,0}. \quad (2.85)$$

Cabe mencionar que, para la reconstrucción de la función de interacción  $I_Q(z)$  de los Ensayos 1 y 2 (o  $g(z)$  del Ensayo 3) presentados, siempre tendremos cinco parámetros  $(H_0, \Omega_{b,0}, \Omega_{r,0}, \Omega_{DM,0}, w)$  y los coeficientes adicionales  $\lambda_n$  (o los tres parámetros  $\alpha$ 's del Ensayo 3).



## Capítulo 3

# La distancia de luminosidad, la distancia modular y las pruebas observacionales

En este capítulo describiremos brevemente tres pruebas cosmológicas, las cuales serán usadas para probar la validez, descubrir las bondades y restringir nuestros modelos cosmológicos, usando los datos observacionales actualmente disponibles. Estas pruebas observacionales son: (1) Datos de Supernova tipo Ia (SCP Union 2 y Union 2.1), (2) Oscilaciones acústicas bariónicas, (3) Anisotropías de la radiación cósmica de microondas.

### 3.1. Relación entre el corrimiento al rojo y el factor de escala

Supongamos que un universo está caracterizado por la métrica de FLRW. Consideremos una fuente luminosa distante (por ejemplo, una supernova Ia o una galaxia) con coordenadas espaciales comóviles ( $r = r^*, \theta = 0, \phi = 0$ ), y un observador ubicado en ( $r = 0, \theta = 0, \phi = 0$ ) (Ver Figura 3.1). Hemos elegido ( $\theta = 0, \phi = 0$ ) por simplicidad y sin pérdida de generalidad. Consideremos que la fuente luminosa emite dos fotones de la misma frecuencia  $\omega_e$ . Un fotón es emitido en el tiempo  $t_e$  y el otro en el tiempo  $t_e + \delta t_e$ . El subíndice “e” indica “emitido”. Los fotones siguen una curva nula caracterizada por

$$ds^2 = 0 = -(cdt)^2 + a^2(t) \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} \right), \quad (3.1)$$

de donde tenemos

$$cdt = \pm a(t) \cdot \left( \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \right). \quad (3.2)$$

El signo “+” indica que el fotón se mueve hacia el futuro y el signo “-” hacia el pasado. El primer fotón emitido, entre el tiempo  $t_e$  y  $t_o$  viajó la distancia  $D^*$ , la cual se puede calcular integrando la ecuación (3.2)

$$D^* = \int_{r^*}^0 \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = \int_{t_e}^{t_o} \frac{cdt}{a(t)}. \quad (3.3)$$

**CAPÍTULO 3. LA DISTANCIA DE LUMINOSIDAD, LA DISTANCIA MODULAR Y LAS PRUEBAS OBSERVACIONALES**  
**3.1. RELACIÓN ENTRE EL CORRIMIENTO AL ROJO Y EL FACTOR DE ESCALA**

---

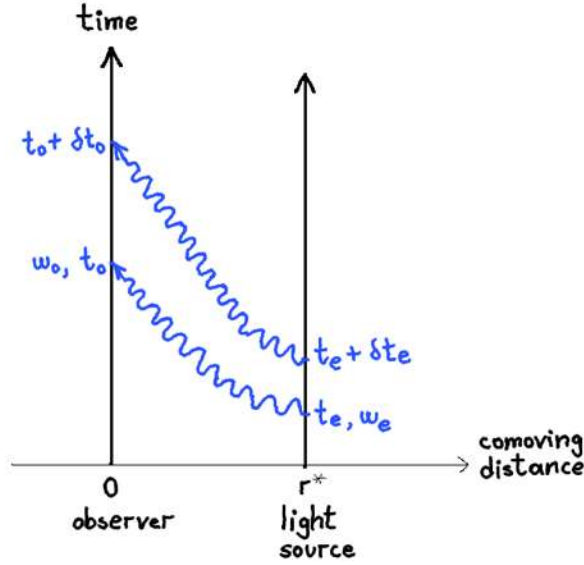


Figura 3.1: La gráfica muestra las líneas temporales y las coordenadas comóviles de una fuente luminosa y un observador en un universo en expansión. La fuente, que se encuentra a una distancia comóvil  $r^*$  alejada del observador, emite dos fotones con frecuencia  $\omega_e$  iguales, el primero en el tiempo  $t_e$  y el segundo en el tiempo  $t_e + \delta t_e$ . El observador detecta los dos fotones con una frecuencia  $\omega_o$  en los tiempos  $t_o$  y  $t_o + \delta t_o$  respectivamente. La frecuencia de los fotones sufre un corrimiento al rojo cosmológico debido a la expansión del universo. En este tipo de gráfica, las líneas temporales, del observador y de la fuente, son paralelas debido a que su distancia  $r^*$  es comóvil, y las trayectorias de ambos fotones se curvan al viajar de la fuente al observador debido a la expansión [71].

Note que la magnitud de  $D^*$  se fijó desde el inicio, al momento de establecer las posiciones de la fuente con respecto al observador. Además, su magnitud no cambia en el tiempo ya que es una coordenada comóvil, por lo tanto es una constante. De la misma manera para el segundo fotón emitido, la distancia que recorre es igual  $D^*$ , la cual se calcula como:

$$D^* = \int_{D^*}^0 \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = \int_{t_e + \delta t_e}^{t_o + \delta t_o} \frac{cdt}{a(t)}. \quad (3.4)$$

Igualando las ecuaciones (3.3) y (3.4) obtenemos

$$\int_{t_e}^{t_o} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_e + \delta t_e}^{t_o + \delta t_o} \frac{dt}{a(t)}, \quad (3.5)$$

desarrollamos la integral del lado derecho de la igualdad anterior como

$$\int_{t_e + \delta t_e}^{t_o + \delta t_o} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_e + \delta t_e}^{t_e} \frac{dt}{a(t)} + \int_{t_e}^{t_o} \frac{dt}{a(t)} + \int_{t_o}^{t_o + \delta t_o} \frac{dt}{a(t)}. \quad (3.6)$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación (3.5) vemos que se elimina el término del lado izquierdo de la igualdad con uno de los términos que se obtienen de la expresión (3.6), entonces

**CAPÍTULO 3. LA DISTANCIA DE LUMINOSIDAD, LA DISTANCIA  
MODULAR Y LAS PRUEBAS OBSERVACIONALES**

**3.1. RELACIÓN ENTRE EL CORRIMIENTO AL ROJO Y EL FACTOR DE ESCALA**

---

la expresión (3.5) llega a ser

$$\int_{t_e}^{t_e+\delta t_e} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_o}^{t_o+\delta t_o} \frac{dt}{a(t)}. \quad (3.7)$$

A continuación, asumimos que los incrementos  $\delta t_e$  y  $\delta t_o$  son muy pequeños, y que el intervalo de tiempo transcurrido entre  $t_e$  y  $t_e + \delta t_e$  es infinitesimal, similar análisis para  $t_o$  y  $t_o + \delta t_o$ , comparados con las escalas de tiempo cosmológicas. De esto, se puede suponer que el factor de escala es aproximadamente constante o no cambia durante los intervalos de tiempo  $[t_e, t_e + \delta t_e]$  y  $[t_o, t_o + \delta t_o]$ , es decir,  $a(t_e) \approx a(t_e + \delta t_e)$  y  $a(t_o) \approx a(t_o + \delta t_o)$  respectivamente. Con este argumento, podemos extraer el factor de escala  $a(t)$  de la integral en la ecuación (3.7), obteniendo

$$\frac{1}{a(t_e)} \cdot \int_{t_e}^{t_e+\delta t_e} dt = \frac{1}{a(t_o)} \cdot \int_{t_o}^{t_o+\delta t_o} dt. \quad (3.8)$$

integrando ambos lados de la igualdad anterior tenemos

$$\frac{\delta t_e}{a(t_e)} = \frac{\delta t_o}{a(t_o)}. \quad (3.9)$$

La fuente luminosa emite un conjunto de fotones (no sólo emite dos fotones), que son emitidos con un período igual a  $\delta t_e$ , y observados con un período  $\delta t_o$ . La frecuencia angular  $\omega$  de estos fotones es

$$\omega_e = \frac{2\pi}{\delta t_e}, \quad \omega_o = \frac{2\pi}{\delta t_o}. \quad (3.10)$$

reemplazando estas expresiones en la ecuación (3.9) obtenemos

$$\frac{a(t_o)}{a(t_e)} = \frac{\omega_e}{\omega_o}. \quad (3.11)$$

luego, usando la definición del corrimiento al rojo  $z$  en término de la frecuencia angular

$$z \equiv \frac{\omega_e - \omega_o}{\omega_o}. \quad (3.12)$$

podemos reescribir la ecuación (3.11) como

$$1 + z = \frac{a(t_o)}{a(t_e)}. \quad (3.13)$$

donde  $a(t_o)$  es el valor que tiene el factor de escala hoy y  $a(t)$  el valor que tuvo o tendrá en algún otro momento. La teoría no dice cual debe ser el valor de  $a(t_o)$ , así que por simplicidad se elige  $a(t_o) = 1$ , de donde encontramos

$$1 + z = \frac{1}{a(t)}. \quad (3.14)$$

A partir de la ecuación (3.14), una vez que se mide el corrimiento al rojo  $z$  de una fuente lejana se puede determinar a que época de la evolución corresponde esa fuente a través de  $a(t)$ .

### 3.2. La distancia de luminosidad

Consideremos de nuevo las líneas de mundo de un observador ubicado en las coordenadas comóviles ( $r = 0, \theta = 0, \phi = 0$ ) y una explosión de supernova (o alguna otra fuente luminosa) ubicada en ( $r = r^*, \theta = 0, \phi = 0$ ), la cual emite fotones que llegan hasta el observador (Ver Figura 3.1). Para calcularla distancia de luminosidad debemos hallar la distancia comóvil  $r^*$ .

A partir de la métrica de FLRW, la trayectoria nula que siguen los fotones entre la fuente y el observador esta dada por las ecuaciones (3.1) y (3.2), de donde obtenemos

$$\int_0^{r^*} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = \int_{t_e}^{t_o} \frac{cdt}{a(t)}. \quad (3.15)$$

Observe que se han invertido los límites de integración de la ecuación (3.3). Esto es posible debido a que nos interesa calcular la magnitud de  $r^*$ . Integrando el lado izquierdo de la igualdad (3.15) hallamos

$$\int_0^{r^*} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = \frac{1}{\sqrt{|k|}} \operatorname{sinn}^{-1}(\sqrt{|k|}r) \Big|_0^{r^*} = \frac{1}{\sqrt{|k|}} \operatorname{sinn}^{-1}(\sqrt{|k|}r^*), \quad (3.16)$$

donde para simplificar la notación se ha definido la función  $\operatorname{sinn}$  como:

$$\operatorname{sinn}(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x) & \text{Si } k > 0 \ (\Omega_k < 0), \\ x & \text{Si } k = 0 \ (\Omega_k = 0), \\ \operatorname{senh}(x) & \text{Si } k < 0 \ (\Omega_k > 0). \end{cases} \quad (3.17)$$

Por otro lado, la integral del lado izquierdo de la igualdad de la ecuación (3.15) puede reescribirse como

$$\int_{t_e}^{t_o} \frac{dt}{a(t)} = \int_{a(t_e)}^{a(t_o)} \frac{da}{a(t)(da/dt)} = \int_{a(t_e)}^{a(t_o)} \frac{da}{a^2(t)H(t)}, \quad (3.18)$$

donde hemos usado la definición del parámetro de Hubble. Luego, utilizando la ecuación (3.14), lo cual implica que  $da = -dz/(1+z)^2$ , donde  $a(t_e) \Rightarrow z$  y  $a(t_o) \Rightarrow z = 0$ . Haciendo el cambio de variable  $a(t) \Rightarrow z$ , la ecuación (3.18) puede reescribirse como

$$\int_{t_e}^{t_o} \frac{dt}{a(t)} = - \int_z^0 \frac{dz'}{H(z')}. \quad (3.19)$$

Utilizando las ecuaciones (3.16) y (3.19), entonces la ecuación (3.15) puede reescribirse como

$$\frac{1}{\sqrt{|k|}} \operatorname{sinn}^{-1}(\sqrt{|k|} \frac{r^*}{c}) = \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}. \quad (3.20)$$

Resolviendo la ecuación (3.20) hallamos  $r^*$

$$r^*(z) = \frac{c}{\sqrt{|k|}} \operatorname{sinn} \left[ \sqrt{|k|} \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \right]. \quad (3.21)$$

A continuación, escribimos las unidades de los factores:  $[k] = \text{distancia}^{-2}$  y  $[H] = \text{tiempo}^{-1}$ . Por otro lado, la distancia efectiva  $d_{eff}$  entre el observador y la fuente está dada por  $d_{eff}$ ,

---

**CAPÍTULO 3. LA DISTANCIA DE LUMINOSIDAD, LA DISTANCIA MODULAR Y LAS PRUEBAS OBSERVACIONALES**

**3.3. LUMINOSIDAD Y FLUJO.**

además se cumple que  $d_{eff} = r^*(z)$ .

En astronomía se define la distancia de luminosidad en términos de la distancia efectiva como

$$d_L \equiv d_{eff}(1+z). \quad (3.22)$$

De las ecuaciones (3.21) y (3.22) obtenemos:

$$d_L(z) = \frac{c(1+z)}{\sqrt{|k|}} \operatorname{sinn} \left[ \sqrt{|k|} \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \right], \quad (3.23)$$

reescribimos en forma explícita la ecuación anterior como (Ver Apéndice C)

$$d_L(z) \equiv \begin{cases} \frac{c(1+z)}{\sqrt{|k|}} \operatorname{senh} \left[ \sqrt{|k|} \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \right] & \text{Si } k < 0 \ (\Omega_k > 0), \\ c(1+z) \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} & \text{Si } k = 0 \ (\Omega_k = 0), \\ \frac{c(1+z)}{\sqrt{k}} \operatorname{sen} \left[ \sqrt{k} \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \right] & \text{Si } k > 0 \ (\Omega_k < 0), \end{cases} \quad (3.24)$$

La forma para  $H(z)$  estará determinada por el modelo cosmológico en estudio.

### 3.3. Luminosidad y flujo.

- **Luminosidad (L):** Se define como la cantidad de energía por unidad de tiempo emitida en todas las direcciones por un cuerpo celeste.
- **Flujo (f):** Es la cantidad de energía radiada por una fuente, por unidad de tiempo, por unidad de área, en todas las direcciones en forma isotrópica, es decir, que el flujo medido es el mismo en cualquier dirección.

L y f están relacionados de la siguiente manera

$$L = \int_{S^2} f dA = 4\pi r^2 f \Rightarrow f = \frac{L}{4\pi r^2}. \quad (3.25)$$

Consideremos una fuente luminosa en el universo (por ejemplo una supernova) cuya luminosidad emitida deseamos calcular, a una frecuencia particular  $\omega_e$  de los fotones. El subíndice “e” indica “emitidos” por la fuente luminosa. Describamos los siguientes términos:

- $n_e$  denota el número de fotones emitidos por unidad de tiempo.
- $N_e$  denota el número total de fotones emitidos. Lo cual significa que  $n_e = N_e/\delta t_e$ , donde  $\delta t_e$  es el intervalo de tiempo infinitesimal durante el cual la fuente luminosa emite fotones.
- $E_e$  denota la energía de un fotón con frecuencia  $\omega_e$ , es decir,  $E_e = \hbar\omega_e$ .

La luminosidad emitida se expresa como

$$L_e = E_e \frac{N_e}{\delta t_e} = E_e n_e = \hbar\omega_e n_e. \quad (3.26)$$

**CAPÍTULO 3. LA DISTANCIA DE LUMINOSIDAD, LA DISTANCIA MODULAR Y LAS PRUEBAS OBSERVACIONALES**

**3.3. LUMINOSIDAD Y FLUJO.**

La fuente luminosa emite un conjunto de fotones, en un período igual a  $\delta t_e$ , y observados en un período  $\delta t_o$ . Supongamos que la fuente se encuentra ubicada en las coordenadas espaciales comóviles ( $r = 0, \theta = 0, \phi = 0$ ). Consideremos además un observador ubicado en ( $r = r^*, \theta = 0, \phi = 0$ ) que mide desde su ubicación la luminosidad de la fuente (Ver Figura 3.2). De manera análoga a la expresión (3.26), la luminosidad observada de la fuente se expresa como:

$$L_o = E_o \frac{N_o}{\delta t_o} = E_o n_o = \hbar \omega_o n_o \quad (3.27)$$

donde el subíndice “o” indica “observada”. Asumiendo que todos los fotones emitidos por la fuente en  $r = 0$  llegan a una esfera de radio  $r = r^*$ , al cabo de un cierto intervalo de tiempo tenemos

$$N_e = N_o, \quad (3.28)$$

lo cual significa que ningún fotón ha sido absorbido por algún tipo de materia durante su recorrido hasta el observador. Usando las ecuaciones (3.9) y (3.13) en la expresión (3.28) encontramos

$$\begin{aligned} N_e = N_o \Rightarrow n_e \delta t_e = n_o \delta t_o \Rightarrow n_o = n_e \frac{\delta t_e}{\delta t_o} \Rightarrow \\ n_o = \frac{n_e}{1+z}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Sustituyendo la ecuación (3.29) en la ecuación (3.27) encontramos que

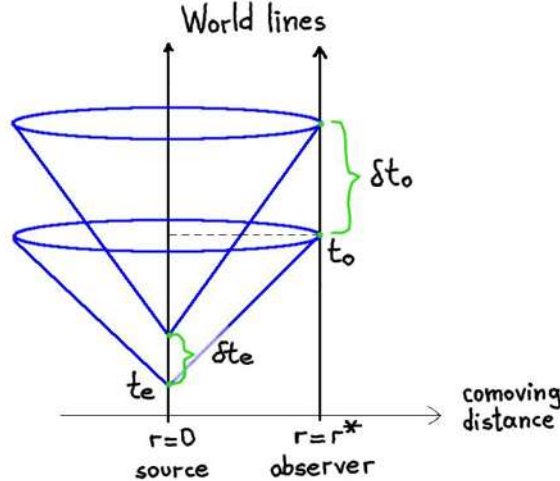


Figura 3.2: Una fuente luminosa localizada en  $r = 0$  emite luz en todas direcciones durante un intervalo de tiempo  $\delta t_e$ . Después de un cierto tiempo, un observador situado a una distancia comóvil  $r^*$  mide un flujo de luz proveniente de la fuente, durante un intervalo de tiempo  $\delta t_o$  [71].

$$\begin{aligned} L_o = \hbar \omega_o n_o = \hbar \left( \frac{\omega_e}{1+z} \right) \left( \frac{n_e}{1+z} \right) \Rightarrow \\ L_o = \frac{L_e}{(1+z)^2}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

**CAPÍTULO 3. LA DISTANCIA DE LUMINOSIDAD, LA DISTANCIA MODULAR Y LAS PRUEBAS OBSERVACIONALES**

**3.4. LA DISTANCIA MODULAR.**

Por otro lado, consideremos que  $f_o$  [Ver ecuación (3.25)] representa el flujo de energía que el observador mide de la fuente, desde su ubicación.

Por lo tanto, el flujo observado puede expresarse como:

$$f_o = \frac{L_o}{4\pi \cdot d_{eff}^2}. \quad (3.31)$$

Usando la ecuación (3.30) en (3.31) obtenemos

$$f_o = \frac{L_e}{4\pi \cdot d_{eff}^2 \cdot (1+z)^2}. \quad (3.32)$$

Esta es la expresión matemática del flujo medido por el observador.

### 3.4. La distancia modular.

En base a múltiples observaciones, los astrónomos han determinado una expresión matemática para la magnitud absoluta de la luminosidad de una supernova tipo Ia

$$M \equiv -2.5 \log_{10} \left( \frac{L_e}{L_{sun}} \right) + 4.74, \quad (3.33)$$

donde el subíndice “sun” indica la luminosidad total del Sol, y que se usa como medida de referencia y calibración en la ecuación (3.33). La magnitud de esta luminosidad es:  $L_{sun} = 3.85 \times 10^{33} \text{ erg/s}$ . Los astrónomos han determinado un valor de  $M = -19.31 \pm 0.03 + 5 \log_{10} \cdot h_{70}$  [72] para las supernovas, donde  $h_{70} = 0.7$ . [73]. La magnitud  $M$  de una SNe Ia significa que es  $5 \times 10^9$  veces más brillante que el Sol.

Del mismo modo, la magnitud aparente u observada de la luminosidad se define como

$$m \equiv -2.5 \log_{10} \left( \frac{f_o}{f_{sun,10pc}} \right) + 4.74, \quad (3.34)$$

donde el subíndice “sun,10pc” indica que es el flujo del Sol medido a una distancia de 10 parsecs. La magnitud de este flujo es:  $f_{sun,10pc} = 3.21 \times 10^{-7} \text{ erg/(cm}^2\text{s)}$ . Usando estas magnitudes, se define la distancia modular como:

$$\mu \equiv m - M. \quad (3.35)$$

Empleando las ecuaciones (3.33)-(3.34) en (3.35), expresamos la distancia modular como

$$\begin{aligned} \mu &= 2.5 \left[ \log_{10} \left( \frac{L_e}{L_{sun}} \right) - \log_{10} \left( \frac{f_o}{f_{sun,10pc}} \right) \right], \\ &= 2.5 \left[ \log_{10} \left( \frac{L_e \cdot f_{sun,10pc}}{L_{sun} \cdot f_o} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Sustituyendo la expresión (3.32) en (3.36) obtenemos

$$\mu = 2.5 \log_{10} \left( \frac{f_{sun,10pc}}{L_{sun}} \cdot 4\pi \cdot d_{eff}^2 \cdot (1+z)^2 \right). \quad (3.37)$$

**CAPÍTULO 3. LA DISTANCIA DE LUMINOSIDAD, LA DISTANCIA MODULAR Y LAS PRUEBAS OBSERVACIONALES**

**3.5. PRUEBA OBSERVACIONAL DE SUPERNOVAS TIPO IA.**

---

Usando otra vez la expresión (3.32), podemos escribir el flujo para el Sol como

$$f_{sun,10pc} = \frac{L_{sun}}{4\pi \cdot d_{eff,sun}^2 \cdot (1 + z_{sun})^2}. \quad (3.38)$$

Considerando que el corrimiento al rojo cosmológico para el Sol,  $z_{sun}$ , es prácticamente cero, lo cual es muy razonable porque la distancia entre la Tierra y el Sol es muy pequeña en comparación a las escalas cosmológicas y el efecto de la expansión del Universo es totalmente despreciable. Debido a esto la ecuación (3.38) llega a ser

$$f_{sun,10pc} = \frac{L_{sun}}{4\pi(10pc)^2}. \quad (3.39)$$

Sustituyendo la ecuación anterior en la ecuación (3.37) encontramos

$$\mu = 5\log_{10} \left( \frac{d_{eff}(1+z)}{10pc} \right). \quad (3.40)$$

Por conveniencia para medir distancias en Cosmología se acostumbra usar unidades de “megaparsecs” (Mpc) en lugar de parsecs. Utilizando la ecuación (3.22) y la siguiente relación  $10pc = 1Mpc/10^5$ , podemos reescribir la ecuación (3.40) como:

$$\mu = 5\log_{10} \left( \frac{d_L(z)}{1Mpc} \cdot 10^5 \right) = 5\log_{10} \left( \frac{d_L(z)}{1Mpc} \right) + 5\log_{10}(10^5), \quad (3.41)$$

a partir del cual encontramos

$$\mu = 5\log_{10} \left( \frac{d_L(z)}{1Mpc} \right) + 25. \quad (3.42)$$

Esta última expresión representa la magnitud teórica (calculada a partir de un modelo cosmológico) de la distancia modular de un objeto luminoso, ubicado a una distancia  $z$  de nosotros. Por otro lado, los astrónomos miden esta magnitud para diversos objetos brillantes, en particular, miden la magnitud de  $\mu(z)$  para las supernovas Ia. Entonces, empleando la ecuación (3.42) podemos confrontar las predicciones de un modelo teórico, contra un conjunto de datos observacionales (por ejemplo supernovas tipo Ia u otras muestras de datos) y estudiar las ventajas y restricciones de él, a través de  $\mu(z)$ .

### 3.5. Prueba observacional de supernovas tipo Ia.

Una supernova de tipo Ia es una subcategoría de estrellas variables (sistema binario conformado por una estrella enana blanca y una gigante roja) que se produce después de la violenta explosión termonuclear de una enana blanca. Las enanas blancas son los restos de estrellas que han completado su ciclo normal de vida y han cesado su fusión nuclear. Sin embargo, las enanas blancas de oxígeno y carbono son capaces de desencadenar fusiones adicionales que liberan una gran cantidad de energía si su temperatura es lo suficientemente alta [74]. Físicamente, las enanas blancas con una tasa baja de rotación están limitadas a una masa que está por debajo del límite de Chandrasekhar alrededor de 1.38 masas solares [75]. Esta es la masa máxima que puede ser soportada por la presión de electrones. Más allá de estos límites,



**CAPÍTULO 3. LA DISTANCIA DE LUMINOSIDAD, LA DISTANCIA MODULAR Y LAS PRUEBAS OBSERVACIONALES**  
**3.5. PRUEBA OBSERVACIONAL DE SUPERNOVAS TIPO IA.**

---

la enana blanca ganará poco a poco masa de su compañera y su núcleo alcanzará la temperatura de ignición produciendo una explosión termonuclear de toda su masa por la fusión del carbono al acercarse a los límites. La explosión desintegrará a la enana blanca y emitirá un destello lumínico, liberándose mucha energía ( $1.2 \times 10^{44} J$ ) [76]. En cambio la gigante roja saldrá disparada en la dirección en la que se movía en el momento de la explosión [77].

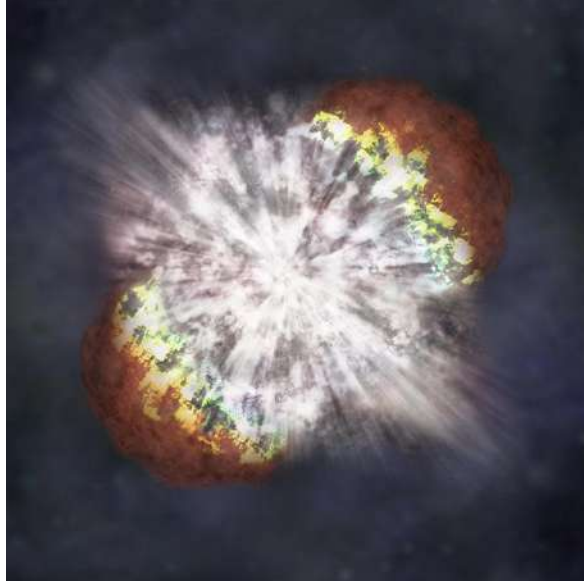


Figura 3.3: La explosión de una estrella enana blanca origina una supernova [66].

Probamos y restringimos el término de interacción  $I_Q(z)$  usando tanto el conjunto de datos de supernovas “Union2” de tipo Ia obtenidos desde el SCP compuesto de 557 datos [2], así como la muestra más actual de supernovas compuesta de 580 datos [3], denominada “Union2.1”. Usando la ecuación 3.24 hallamos la distancia de luminosidad  $d_L$  ([1]) para una cosmología espacialmente plana,

$$d_L(z, \mathbf{X}) = c(1+z) \int_0^z \frac{dz'}{H(z', \mathbf{X})}, \quad (3.43)$$

donde  $H(z, \mathbf{X})$  es el parámetro de Hubble (2.84), “ $c$ ” es la velocidad de la luz dada en unidades de km/s y  $\mathbf{X}$  representa los parámetros del modelo,

$$\mathbf{X} \equiv (H_0, \Omega_{b,0}, \Omega_{r,0}, \Omega_{DM,0}, w, \lambda_1, \dots, \lambda_N). \quad (3.44)$$

Utilizando la ecuación (3.42), definimos la distancia modular teórica para la  $k$ -ésima supernova con corrimiento al rojo  $z_k$  como:

$$\mu^{\text{th}}(z_k, \mathbf{X}) \equiv m(z) - M = 5 \log_{10} \left[ \frac{d_L(z_k, \mathbf{X})}{\text{Mpc}} \right] + 25, \quad (3.45)$$

donde  $m$  y  $M$  son las magnitudes aparente y absoluta de la supernovas tipo Ia respectivamente, y el superíndice “th” denota “teórica”.

**CAPÍTULO 3. LA DISTANCIA DE LUMINOSIDAD, LA DISTANCIA MODULAR Y LAS PRUEBAS OBSERVACIONALES**  
**3.6. PRUEBA OBSERVACIONAL DE LAS OSCILACIONES ACÚSTICAS BARIÓNICAS**

---

A partir de (3.45), construimos la función estadística  $\chi_{\text{SN}}^2$  como

$$\chi_{\text{SN}}^2(\mathbf{X}) \equiv \sum_{k=1}^{N_T} \frac{[\mu^{\text{th}}(z_k, \mathbf{X}) - \mu_k]^2}{\sigma_k^2}, \quad (3.46)$$

donde  $N_T$  representa el número de datos de la muestra,  $\mu_k$  es el valor observacional de la distancia modular para la  $k$ -th supernova,  $\sigma_k^2$  es la desviación estándar de la observación. Con esta función  $\chi_{\text{SN}}^2$ , definimos la función densidad de probabilidad (**pdf**) de la siguiente forma

$$\text{pdf}_{\text{SN}}(\mathbf{X}) \equiv A_1 \cdot e^{-\chi_{\text{SN}}^2(\mathbf{X})/2}, \quad (3.47)$$

donde  $A_1$  es una constante de integración. Esta definición es la más simple y los resultados teóricos que produce concuerdan con las observaciones.

### 3.6. Prueba observacional de las oscilaciones acústicas bariónicas

En esta sección presentaremos los experimentos que confirman la existencia de las oscilaciones acústicas bariónicas y su utilidad para restringir los parámetros libres de los modelos cosmológicos, a través de expresiones matemáticas que reflejan su naturaleza.

#### 3.6.1. La función de correlación $\xi(\vec{r})$ y el espectro de potencia $P(\vec{k})$

Consideremos que  $\rho(\vec{x})$  representa la densidad de materia en un punto específico dado por el vector posición  $\vec{x}$  con respecto a algún origen arbitrario y  $\langle \rho \rangle$  denota la densidad media de la materia en un volumen  $V$  del universo.

Definimos la amplitud de las fluctuaciones de la materia como:

$$\delta(\vec{x}) \equiv \frac{\delta\rho}{\langle \rho \rangle} = \frac{[\rho(\vec{x}) - \langle \rho \rangle]}{\langle \rho \rangle}. \quad (3.48)$$

Podemos expresar  $\delta(\vec{x})$  como una serie de Fourier:

$$\delta(\vec{x}) = \sum_{\vec{k}} \delta_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} = \sum_{\vec{k}} \delta_{\vec{k}}^* e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}, \quad (3.49)$$

donde  $\delta(\vec{x})$ , satisface las condiciones de periodicidad

$$\begin{aligned} \delta(L, y, z) &= \delta(0, y, z), \\ \delta(x, L, z) &= \delta(x, 0, z), \\ \delta(x, y, L) &= \delta(x, y, 0), \end{aligned} \quad (3.50)$$

y las componentes del vector número de onda  $\vec{k}$  son:

$$k_x = n_x \frac{2\pi}{L}, \quad k_y = n_y \frac{2\pi}{L}, \quad k_z = n_z \frac{2\pi}{L}, \quad (3.51)$$

$n_x$ ,  $n_y$  y  $n_z$  son números enteros. Los coeficientes de Fourier  $\delta_{\vec{k}}$  son cantidades complejas y pueden ser calculadas a través de

**CAPÍTULO 3. LA DISTANCIA DE LUMINOSIDAD, LA DISTANCIA  
MODULAR Y LAS PRUEBAS OBSERVACIONALES**  
3.6. PRUEBA OBSERVACIONAL DE LAS OSCILACIONES ACÚSTICAS BARIÓNICAS

---

$$\delta_{\vec{k}} = \frac{1}{V} \int_V \delta(\vec{x}) e^{(-i\vec{k}\cdot\vec{x})} d^3\vec{x}; \quad (3.52)$$

como  $\delta_{\vec{k}}$  es compleja, entonces se cumple que  $\delta_{\vec{k}}^* = \delta_{-\vec{k}}$ .

La ecuación (3.48) nos permite definir la función de correlación de dos puntos en términos de  $\delta(\vec{x})$

$$\xi(\vec{r}) \equiv \frac{\langle [\rho(\vec{x}) - \langle \rho \rangle][\rho(\vec{x} + \vec{r}) - \langle \rho \rangle] \rangle}{\langle \rho \rangle^2} = \langle \delta(\vec{x}) \delta(\vec{x} + \vec{r}) \rangle, \quad (3.53)$$

donde la media es tomada sobre todos los puntos  $\vec{x}$  del volumen  $V$ . Utilizando la ecuación (3.49) en la ecuación (3.53) tenemos

$$\xi(\vec{r}) = \frac{1}{V} \int_V \sum_{\vec{k}} \delta_{\vec{k}} e^{(i\vec{k}\cdot\vec{x})} \sum_{\vec{k}'} \delta_{\vec{k}'}^* e^{(-i\vec{k}'\cdot(\vec{x}+\vec{r}))} d^3\vec{x} = \sum_{\vec{k}} \langle |\delta_{\vec{k}}|^2 \rangle e^{(-i\vec{k}\cdot\vec{r})}. \quad (3.54)$$

En el límite cuando  $V \rightarrow \infty$ , entonces la ecuación (3.54) llega a ser

$$\xi(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int P(\vec{k}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} d^3\vec{k}. \quad (3.55)$$

donde se define  $P(\vec{k}) \equiv \langle |\delta_{\vec{k}}|^2 \rangle / V$ . Esta función es conocida como el espectro de potencia de las fluctuaciones de la materia en la representación de Fourier. Calculando la transformada inversa de Fourier de la ecuación (3.54) hallamos

$$\langle |\delta_{\vec{k}}|^2 \rangle = \frac{1}{V} \int \xi(\vec{r}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} d^3\vec{r}. \quad (3.56)$$

Pasando al límite  $V \rightarrow \infty$  la ecuación anterior obtenemos

$$P(\vec{k}) = \int \xi(\vec{r}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} d^3\vec{r}. \quad (3.57)$$

Si  $\vartheta$  es el ángulo entre  $\vec{k}$  y  $\vec{r}$ , entonces

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = kr \cos(\vartheta), \quad (3.58)$$

$$d^3k = k^2 dk d\Omega = k^2 dk \sin(\vartheta) d\vartheta d\varphi, \quad (3.59)$$

$$\vartheta \in (0, \pi), \quad \varphi \in (0, 2\pi), \quad k \in (0, \infty). \quad (3.60)$$

luego la integral en todas las direcciones de  $\vec{r}$  da

$$\int_{\Omega} e^{-ikr \cos(\vartheta)} d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 e^{-ikr \cos(\vartheta)} d\vartheta = 4\pi \frac{\text{sen}(kr)}{kr}. \quad (3.61)$$

Considerando que el universo es isotrópico y homogéneo, entonces la  $\xi(\vec{r})$  no depende de la dirección de  $\vec{r}$ , pero depende sólo de su magnitud, es decir,  $\xi(\vec{r}) = \xi(\|\vec{r}\|) = \xi(r)$  (similarmemente  $P(\vec{k}) = P(\|\vec{k}\|) = P(k)$ ) considerando esta condición y sustituyendo la ecuación (3.61) en (3.55) hallamos

$$\xi(r) = \frac{1}{2(\pi)^2} \int_0^{\infty} P(k) \frac{\text{sen}(kr)}{kr} \cdot k^2 dk, \quad (3.62)$$

**CAPÍTULO 3. LA DISTANCIA DE LUMINOSIDAD, LA DISTANCIA  
MODULAR Y LAS PRUEBAS OBSERVACIONALES**

**3.6. PRUEBA OBSERVACIONAL DE LAS OSCILACIONES ACÚSTICAS BARIÓNICAS**

---

y cuya transformada de Fourier será

$$P(k) = 4\pi \int_0^\infty \xi(r) \frac{\text{sen}(kr)}{kr} r^2 dr. \quad (3.63)$$

Las funciones  $\xi(r)$  y  $P(k)$  especifican las propiedades estadísticas de las fluctuaciones de la materia y contienen la misma cantidad de información física.

**3.6.2. Detección del pico acústico de los bariones en la función de correlación a grandes escalas usando galaxias rojas luminosas**

La función de correlación a grandes escalas medida desde la muestra espectroscópica de 46,748 galaxias rojas luminosas del SDSS (La región de la muestra cubre  $0.72 h^{-3} \text{ Gpc}$  sobre  $0.16 < z < 0.47$ .) muestra un pico alrededor de  $100h^{-1} \text{ Mpc}$  donde  $h \equiv \frac{H_0}{100}$ . Este pico fue identificado con el aumento de ondas esféricas de las fluctuaciones bariónicas producidas por las oscilaciones acústicas en la época de la recombinación en los cúmulos de materia con bajos corrimientos al rojo. Esta detección demuestra el crecimiento lineal de estructura debido a la inestabilidad gravitacional entre  $z \approx 1000$  y  $z \approx 0$ . Para calcular la función de correlación en el espacio del corrimiento al rojo  $\xi(z)$  se asumió una cosmología plana con  $\Omega_{M,0} = 0.30$  y  $\Omega_\Lambda = 0.70$  y se utilizó el estimador Landy-Szalay. La muestra de datos observados se separó inicialmente en 5 bins de  $4h^{-1} \text{ Mpc}$  de ancho desde  $10h^{-1} \text{ Mpc}$  hasta  $30h^{-1} \text{ Mpc}$ , luego se dividió otra vez la muestra en 20 bins desde  $10h^{-1} \text{ Mpc}$  hasta  $180h^{-1} \text{ Mpc}$ . Cada dato medido de la función  $\xi(z)$  en el espacio del corrimiento al rojo fue transformado en su correspondiente valor en el espacio de distancias, esta conversión estaba basada en el valor del corrimiento al rojo de cada punto observado y en el cálculo de la separación comóvil entre dos puntos usando el vector de diferencia. La escala de distancia característica de la muestra SDSS con un corrimiento al rojo típico de  $z = 0.35$  puede ser relacionado con el parámetro de Hubble  $H(z)$  de la siguiente manera: Consideremos una capa esférica (Ver Figura 3.4) de radio  $R_o$ ,  $z$  en esta Figura representa el corrimiento al rojo de los puntos “C” y “D” respectivamente vistos por un observador en el punto “O” y  $\Delta z$  denota la diferencia de corrimientos al rojo entre los puntos “A” y “B”.

Midiendo la escala angular  $\Delta\theta$ , los corrimientos al rojo  $z$ ,  $\Delta z$ , fijando un modelo cosmológico para calcular  $H(z)$  y usando la métrica de FLRW se pueden hallar las escalas comoóviles  $CD$  y  $AB$

$$CD = x\Delta\theta = \Delta\theta \int_{t_i}^{t_o} \frac{cdt}{a} = \frac{\Delta\theta}{H_0} \int_0^z \frac{cdz}{E(z)}, \quad (3.64)$$

donde  $E(z) \equiv H(z)/H_0$  y

$$AB = \Delta x = \frac{c\Delta t}{a} = \frac{c}{H_0} \frac{\Delta z}{E(z)}. \quad (3.65)$$

Las ecuaciones (3.64) y (3.65) pueden ser generalizadas para una esfera deformada ( $AB \neq CD$ ), definiendo una escala única llamada “escala de dilatación”  $D_v(z)$  [5]-[7]

$$D_v(z) \equiv \left[ \left( \frac{CD}{\Delta\theta} \right)^2 (AB) \right]^{1/3} = \left[ (1+z)^2 D_A^2 \frac{c\Delta z}{H(z)} \right] = \left[ \left( \frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{dz}{E(z)} \right)^2 \frac{c}{H_0} \frac{\Delta z}{E(z)} \right]^{1/3},$$

**CAPÍTULO 3. LA DISTANCIA DE LUMINOSIDAD, LA DISTANCIA MODULAR Y LAS PRUEBAS OBSERVACIONALES**  
**3.6. PRUEBA OBSERVACIONAL DE LAS OSCILACIONES ACÚSTICAS BARIÓNICAS**

---

$$D_v(z) \equiv c \cdot \left( \left( \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \right)^2 \frac{z}{H(z)} \right)^{1/3}, \quad (3.66)$$

donde se definió  $CD/\Delta\theta \equiv (1+z)D_A$  en términos de la distancia diametral angular  $D_A$  para una geometría espacialmente plana (Ver Apéndice C).

Por conveniencia se asumió que la “escala de dilatación”  $D_v(z)$  debería ser la escala que represente a toda la muestra SDSS (escala teórica para SDSS  $z_{BAO} = 0.35$ ). Dejando que la esfera se extienda desde el observador “O” (A → O) hasta  $z \simeq 0.35$  ( $z_{BAO} \simeq 0.35$ ), entonces  $\Delta z \simeq z_{BAO} \simeq 0.35$ .

Para muestras con bajos corrimientos al rojo ( $z_{BAO} = 0.35$ ), se asumió que la escala de dilatación  $D_v(z)$  debería registrar toda la información necesaria para convertir los valores de corrimientos al rojo en distancias. Para el modelo  $\Lambda$ CDM con  $\Omega_{M,0} = 0.30$ ,  $\Omega_\Lambda = 0.70$  y  $h = 0.7$  la escala de dilatación en  $z = 0.35$ , es  $D_v^{LCDM}(0.35) = 1334$  Mpc.

Construyendo una función  $\chi^2$  como una función de  $D_v(z)$  y  $\Omega_{M,0}h^2$  se encontró que su mejor estimado era  $\chi_{min}^2 = 16.1$  con 17 grados de libertad (20 datos y tres parámetros:  $\Omega_{M,0}h^2$ ,  $D_v(0.35)$  y la amplitud  $A \equiv D_v(0.35)(\sqrt{\Omega_{M,0}H_0^2}/0.35c)$ . Los valores mejores estimados fueron:  $\Omega_{M,0}h^2 = 0.13 \pm 0.01$ ,  $D_v(0.35) = 1370 \pm 64$  Mpc y  $A = 0.469 \pm 0.017$ .

La identificación de la escala comóvil donde el pico de correlación fue observado con el horizonte de sonido en recombinación requiere conocer la forma correcta de  $H(z)$  para un modelo cosmológico dado. Además, se necesita convertir los valores de corrimiento al rojo observados ( $z$ ) a distancias reales (Mpc). Una precisa determinación del mejor estimado de  $H(z)$  correspondería a usar un modelo general o una parametrización general de  $H(z)$ .

A continuación mostraremos una manera simple de como hacer la aproximación. Consider-

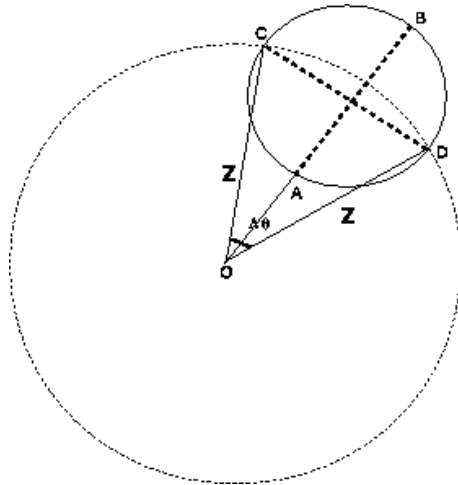


Figura 3.4: Una capa esférica en el espacio del corrimiento al rojo [5].

emos como modelo teórico al modelo  $\Lambda$ CDM para construir la función de correlación desde los valores de corrimiento al rojo observados y luego identificar las escalas de distancias  $r_{pico}$  donde el pico del BAO aparece. Comparando este valor de  $r_{pico}$  con el observado  $r'_{pico}$  del CMB necesitamos un factor de corrimiento de escala  $\alpha$ :  $r'_{pico} = \alpha r_{pico}$ . Este factor  $\alpha$  se aproxima como el cociente de la escala de distancia requerida  $D_V(z_{BAO})$  de la muestra con

**CAPÍTULO 3. LA DISTANCIA DE LUMINOSIDAD, LA DISTANCIA MODULAR Y LAS PRUEBAS OBSERVACIONALES**  
**3.6. PRUEBA OBSERVACIONAL DE LAS OSCILACIONES ACÚSTICAS BARIÓNICAS**

---

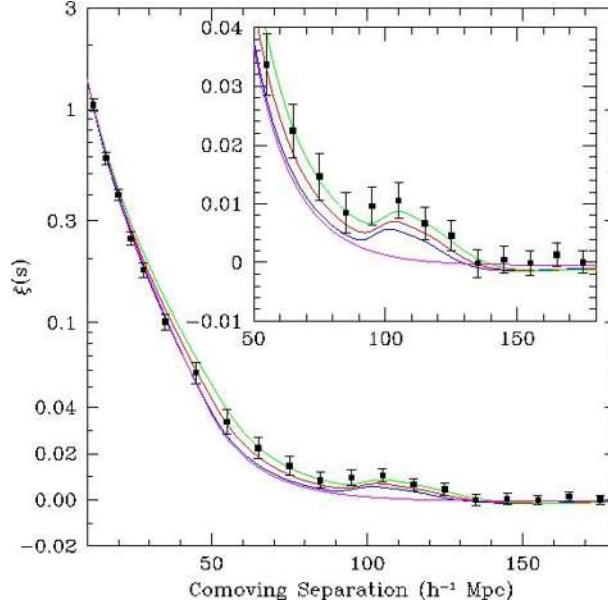


Figura 3.5: **Oscilaciones acústicas bariónicas.** Observe la existencia de un pico ubicado alrededor de  $100 h^{-1}$  Mpc. La existencia de este pico y su valor observacional permite crear una prueba cosmológica para confrontar modelos teóricos [5].

la escala de distancia  $D_V^{LCDM}(z_{BAO})$  correspondiente al modelo teórico  $\Lambda$ CDM

$$\alpha = \frac{r'_{pico}}{r_{pico}} = \frac{D_V(z_{BAO})}{D_V^{LCDM}(z_{BAO})}. \quad (3.67)$$

En este experimento se determinó por primera vez una de las medidas de distancia más fuertes que se podían derivar a partir de las escalas acústicas, es decir, el cociente de la distancia de dilatación en  $z = 0.35$  dividido por la distancia diametral angular en  $z = 1089$  (desacople de los fotones), el cual se definió como:

$$R_{0.35} \equiv \frac{D_V(0.35)}{D_A(1089)}. \quad (3.68)$$

Para el modelo  $\Lambda$ CDM con  $\Omega_{M,0} = 0.3$ ,  $\Omega_\Lambda = 0.7$  y  $h = 0.7$  y usando los datos de las galaxias rojas luminosas se encontró que  $D_A(1089) = 13700$  Mpc, entonces  $R_{0.35} = 0.0979 \pm 0.0036$ .

La detección del pico acústico del BAO confirman dos aspectos de la teoría: primero, que las oscilaciones ocurren en  $z \geq 1000$ , y segundo que ellas han sobrevivido al paso del tiempo y son detectadas en bajos corrimientos al rojo.

La pequeña amplitud del pico del BAO requiere que debió existir materia (DM) en  $z \approx 1000$  y que no interactuó con el fluido barión-fotón. Estos resultados confirman la aplicabilidad de la teoría de perturbaciones cosmológicas lineales a grandes escalas. La estrechez del pico acústico en el espacio real (Mpc) ofrece una oportunidad para medir distancias en corrimientos al rojo más grandes. El tamaño de la escala acústica es la distancia comóvil que una onda de sonido puede viajar entre la generación de las perturbaciones y la época de la recombinación. En el modelo  $\Lambda$ CDM, el tamaño de la escala acústica depende solamente de la densidad de la

**CAPÍTULO 3. LA DISTANCIA DE LUMINOSIDAD, LA DISTANCIA MODULAR Y LAS PRUEBAS OBSERVACIONALES**  
**3.6. PRUEBA OBSERVACIONAL DE LAS OSCILACIONES ACÚSTICAS BARIÓNICAS**

---

**Resumen de los mejores estimados usando datos de galaxias rojas luminosas**

Parámetro	Restricción
$\Omega_{M,0}h^2$	$0.130(n/0.98)^{1.2} \pm 0.011$
$D_V(0.35)$	$1370 \pm 64 Mpc$
$R_{0.35}$	$0.0979 \pm 0.0036$
$A$	$0.469(n/0.98)^{-0.35} \pm 0.017$

Cuadro 3.1: Resumen de los mejores estimados y sus errores a  $1\sigma$  de los parámetros del modelo. Se fijó  $\Omega_{b,0}h^2 = 0.024$  y  $n = 0.98$  respectivamente [5].

materia  $\Omega_{M,0}h^2$ .

Finalmente, una vez fijado  $z > 1000$ , la escala acústica puede ser usada en pequeños corrimientos al rojo como “regla de nivel” para medir distancias.

**3.6.3. Oscilaciones acústicas bariónicas en la muestra de datos de galaxias de la exploración digital del espacio sloan**

La publicación de la muestra de datos de galaxias de la exploración digital del espacio sloan (SDSS) representa el conjunto final de galaxias observadas usando los criterios de selección del original SDSS. Dentro de esta muestra se analizó un cúmulo de galaxias, incluyendo las galaxias rojas luminosas (GRL) y las muestras de galaxias principales, combinadas con los datos de la exploración de los corrimientos al rojo de la galaxias en un campo de dos grados (2dFGRS). Esta muestra comprendió 669,905 galaxias principales con un corrimiento al rojo promedio de  $z < 0.12$ , también incluyó 80,046 de GRL con corrimientos al rojo en  $0.2 < z < 0.5$  y se adicionó 143,368 galaxias de la muestra de 2dFGRS. En total esta muestra estuvo formada por 893,319 galaxias medidas en 9100 grados. Oscilaciones acústicas bariónicas fueron observadas en espectros de potencia medidos en diferentes cortes en los corrimientos al rojo, esto permitió restringir la relación distancia (Mpc)-corrimiento al rojo ( $z$ ) para diferentes épocas.

En este experimento para  $z = 0.275$  se midió el cociente,  $r_s(z_d)/D_V(0.275) = 0.1390 \pm 0.0037$ , donde  $r_s(z_d)$  es la escala comóvil del horizonte de sonido en la época de arrastre de los bariones y se define en términos de su factor de escala como:

$$r_s(a_d) \equiv c \int_0^{a_d} \frac{c_s(a) da}{a^2 H(a)}, \quad (3.69)$$

siendo  $c_s(a)$  la velocidad del sonido

$$c_s^2(a) = \frac{\delta P}{\delta \rho} = \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{1 + (3\Omega_b/4\Omega_r)a} \right]. \quad (3.70)$$

Considerando las ecuaciones (3.69) y (3.70) hallamos la siguiente expresión

$$r_s(z_d) = \frac{c}{\sqrt{3}} \int_0^{1/(1+z_d)} \frac{da}{a^2 \cdot H(a) \sqrt{1 + (3\Omega_{b,0}/4\Omega_{\gamma,0}) \cdot a}}. \quad (3.71)$$

El corrimiento al rojo en la época de arrastre de los bariones  $z_d$ , puede ser obtenido a partir de la siguiente fórmula de ajuste [4, 5]:

$$z_d = \frac{1291(\Omega_{M,0} \cdot h^2)^{0.251}}{1 + 0.659(\Omega_{M,0} \cdot h^2)^{0.828}} \left[ 1 + b_1(\Omega_{b,0} \cdot h^2)^{b_2} \right], \quad (3.72)$$

**CAPÍTULO 3. LA DISTANCIA DE LUMINOSIDAD, LA DISTANCIA MODULAR Y LAS PRUEBAS OBSERVACIONALES**  
**3.6. PRUEBA OBSERVACIONAL DE LAS OSCILACIONES ACÚSTICAS BARIÓNICAS**

---

**Muestra SDSS + 2dFGRS.**

Sub-muestras (bines)	$z_{min}$	$z_{max}$	$N_{galaxia}$
1	0.0	0.5	895, 834
2	0.0	0.4	874, 330
3	0.0	0.3	827, 760
4	0.1	0.5	505, 355
5	0.1	0.4	483, 851
6	0.2	0.5	129, 045
7	0.3	0.5	68, 074

Cuadro 3.2: Intervalos de los corrimientos al rojo analizados, indicando el número de galaxias en cada uno de ellos.

donde hemos definido:

$$\Omega_{M,0} \equiv \Omega_{DM,0} + \Omega_{b,0}. \quad (3.73)$$

$$b_1 = 0.313(\Omega_{M,0} \cdot h^2)^{-0.419} [1 + 0.607(\Omega_{M,0} \cdot h^2)^{0.674}], \quad (3.74)$$

$$b_2 = 0.238(\Omega_{M,0} \cdot h^2)^{0.223}. \quad (3.75)$$

En este experimento se encontró una restricción casi independiente en el cociente de distancias  $D_V(0.35)/D_V(0.2) = 1.736 \pm 0.065$ , mientras que para el modelo  $\Lambda$ CDM su valor fue  $D_V(0.35)/D_V(0.2) = 1.67$ . Entre las técnicas de medida actual para estudiar la expansión del universo, las oscilaciones acústicas bariónicas tienen el nivel más bajo de errores sistemáticos. BAO son una serie de picos y mínimos, con un número de onda de  $0.06 h\text{Mpc}^{-1}$  que están presentes en el espectro de potencias  $P(k)$  de las fluctuaciones de la materia después, de la época de la recombinación y a grandes escalas. Esto se origina porque las perturbaciones cosmológicas primordiales presentes en el plasma relativista del universo temprano excitaron a las ondas de sonido. La presión de la radiación conduce al material bariónico lejos de las semillas de las perturbaciones hasta que el material ionizado se recombina para un  $z \simeq 1100$  ( $\simeq 380,000$  años). El movimiento de los bariones continua por un intervalo de tiempo corto después de la época de la recombinación, hasta una época conocida como época de arrastre de los bariones  $z \simeq 1021$ . BAO ocurre a grandes escalas pero ha sido detectado en bajos valores de corrimiento al rojo.

Para probar la relación distancia-corrimento al rojo, la muestra total (*SDSS + 2dFGRS*) que contenía las medidas del BAO fueron divididas convenientemente en siete sub-muestras (bines), de tal manera que se podían recuperar las señales originales del BAO con suficiente exactitud (Ver Cuadro 3.2). Un modelo teórico del BAO fue construido ajustando un espectro de potencia teórico de la materia  $P_{teo}(k)$  y resolviendo numéricamente la ecuación de Boltzman. Describiendo de esta manera el proceso físico anterior a la época de arrastre de los bariones y se usó una interpolación cúbica para el parámetro  $D_V(z)$ , de este modo se eliminó la forma del ancho de su espectro de potencia, dejando las oscilaciones libres. Este modelo BAO permitió ajustar el espectro de potencia observado  $P_{obs}(k)$  y hacerlo coincidir con la forma de  $P_{teo}(k)$ . Cada espectro de potencia del modelo fue combinado con una función “ventana” que mapeó para ambos la geometría y la diferencia entre el modelo  $\Lambda$ CDM (usado para convertir corrimientos al rojo en distancias) y el modelo cosmológico a ser probado.



**CAPÍTULO 3. LA DISTANCIA DE LUMINOSIDAD, LA DISTANCIA MODULAR Y LAS PRUEBAS OBSERVACIONALES**  
**3.6. PRUEBA OBSERVACIONAL DE LAS OSCILACIONES ACÚSTICAS BARIÓNICAS**

---

Usando el catálogo “Log-Normal (LN)” de las galaxias se reconstruyó los espectros de potencia de las galaxias contenidas en cada una de las sub-muestras del Cuadro 3.2 y se comparó con sus respectivos espectros de potencia observados (Ver Figura 3.6) utilizando el método de Feldman en el intervalo de  $0.02h\text{Mpc}^{-1} < k < 0.3h\text{Mpc}^{-1}$  [5]-[7].

De la Figura 3.6 se nota que los espectros de potencia reconstruidos desde el catálogo LN coinciden con los observados. Los espectros de potencia  $P_{obs}(k)$  decrecen a pequeñas escalas ( $k > 0.1$ ), lo cual era consistente con el comportamiento de las funciones  $P(k)$ . Esta Figura también muestra las oscilaciones acústicas bariónicas observadas en cada uno de los espectros de potencia reconstruidos desde las sub-muestras de corrimiento al rojo (Ver Cuadro 3.2), donde se grafica el  $P_{obs}(k)$  dividido por el  $P_{teo}(k)$  ( $P_{smooth}$ ). Estos espectros de potencia mejores estimados para cada una de las sub-muestras 2 – 7 fueron construidas usando una interpolación cúbica en el parámetro  $D_V(z)$  con dos nodos en  $z = 0.2$  y  $z = 0.35$ . La medida de distancia más fuerte que se encontró en este experimento es el cociente de las distancias  $r_s(z_d)$  y  $D_V(z)$ , el cual se define como [5]-[7]:

$$d_z \equiv \frac{r_s(z_d)}{D_V(z)}, \quad (3.76)$$

donde  $r_s(z_d)$  representa la escala comóvil del horizonte de sonido comóvil en la época de arrastre de bariones y  $D_V(z)$  es la escala de dilatación. La Figura 3.7 muestra la superficie de probabilidad resultante como una función de  $D_V(z)/\text{Mpc}$ , para un valor fijo de  $r_s(z_d) = 154.7\text{Mpc}$ . Esta Figura también revela una máxima probabilidad dominante cercana a los parámetros del modelo  $\Lambda\text{CDM}$  con valores  $\Omega_{M,0} = 0.25$ ,  $h = 0.72$   $\Omega_{b,0}h^2 = 0.0223$ . Se hizo coincidir la superficie de confianza que contiene al máximo valor de probabilidad con el mejor estimado de un modelo gaussiano multivariable y se encontró los mejores estimados para los parámetros  $d_z$  fueron:

$$d_{0.2}^{obs} = 0.1905 \pm 0.0061, \quad (3.77)$$

$$d_{0.35}^{obs} = 0.1097 \pm 0.0036. \quad (3.78)$$

Estos resultados están correlacionados con un coeficiente de correlación  $r = 0.337$ .

Para un modelo cosmológico con  $d_z^{th}$  donde el supraíndice “th” indica teórico, su probabilidad es aproximada con una función densidad de probabilidad gaussiana multivariable cuya matriz de covarianza es

$$C_{\text{BAO}} = \begin{pmatrix} \langle \Delta d_{0.2} \Delta d_{0.2} \rangle & \langle \Delta d_{0.2} \Delta d_{0.35} \rangle \\ \langle \Delta d_{0.35} \Delta d_{0.2} \rangle & \langle \Delta d_{0.35} \Delta d_{0.35} \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +3.7436 \times 10^{-5} & +7.4158 \times 10^{-6} \\ +7.4158 \times 10^{-6} & +1.2966 \times 10^{-5} \end{pmatrix}, \quad (3.79)$$

donde  $\Delta d_z \equiv d_z^{obs} - d_z^{th}$ . La inversa de la matriz de covarianza  $C_{\text{BAO}}$  está dada por [7]

$$C_{\text{BAO}}^{-1} = \begin{pmatrix} +30124 & -17227 \\ -17227 & +86977 \end{pmatrix}, \quad (3.80)$$

Los resultados presentados muestran la importancia de las oscilaciones acústicas bariónicas

---

**CAPÍTULO 3. LA DISTANCIA DE LUMINOSIDAD, LA DISTANCIA  
MODULAR Y LAS PRUEBAS OBSERVACIONALES**

**3.6. PRUEBA OBSERVACIONAL DE LAS OSCILACIONES ACÚSTICAS BARIÓNICAS**

---

como un método clave para investigar la aceleración cósmica del universo y pueda proveer importantes restricciones cosmológicas.

Usando las ecuaciones (3.77) y (3.80), construimos la función  $\chi^2$  de los datos del BAO

$$\chi_{\mathbf{BAO}}^2(\mathbf{X}) = \left( d_i^{th}(\mathbf{X}) - d_i^{obs} \right)^T (C_{\mathbf{BAO}}^{-1})_{ij} \left( d_j^{th}(\mathbf{X}) - d_j^{obs} \right), \quad (3.81)$$

donde  $(d^{th} - d^{obs})$  es un vector columna formado por los valores teóricos menos los correspondientes datos observacionales,

$$d_i^{th}(\mathbf{X}) - d_i^{obs} = \begin{pmatrix} d_{0.20}(\mathbf{X}) - 0.1905 \\ d_{0.35}(\mathbf{X}) - 0.1097 \end{pmatrix}, \quad (3.82)$$

y “T” denota la traspuesta. A partir de esta función  $\chi_{\mathbf{BAO}}^2$ , definimos la función densidad de probabilidad (**pdf**) de la siguiente manera

$$\mathbf{pdf}_{\mathbf{BAO}}(\mathbf{X}) \equiv A_2 \cdot e^{-\chi_{\mathbf{BAO}}^2(\mathbf{X})/2}, \quad (3.83)$$

donde  $A_2$  es una constante de integración. Esta definición es la más simple y los resultados teóricos que produce concuerdan con las observaciones.

**CAPÍTULO 3. LA DISTANCIA DE LUMINOSIDAD, LA DISTANCIA MODULAR Y LAS PRUEBAS OBSERVACIONALES**  
**3.6. PRUEBA OBSERVACIONAL DE LAS OSCILACIONES ACÚSTICAS BARIÓNICAS**

---

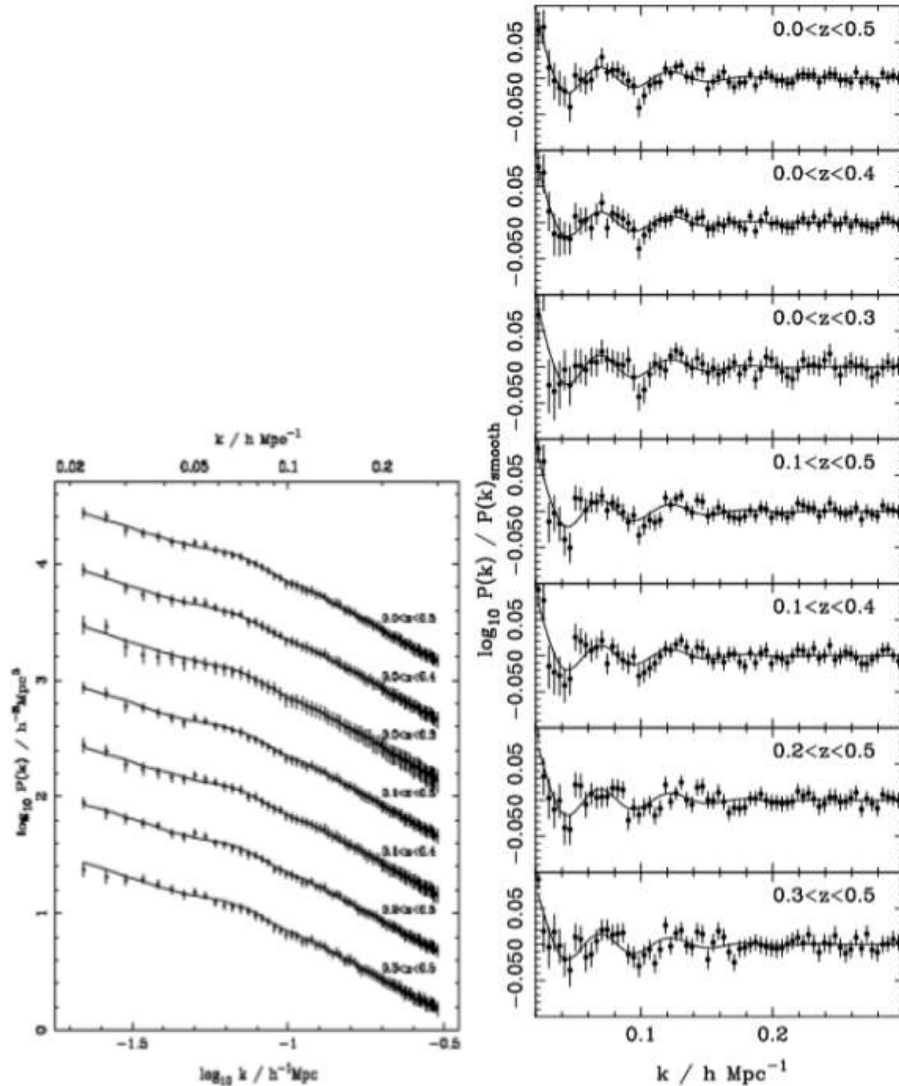


Figura 3.6: La Figura (a), muestra los espectros de potencia reconstruido desde el catálogo “Log-Normal” (líneas sólidas) comparados con los espectros de potencia de los datos (círculos sólidos) a  $1\sigma$  para seis sub-muestras de la Tabla 3.2. Los errores en los datos fueron calculados usando los elementos de la diagonal de la matriz de covarianza. Esta matriz fue construida a partir de los datos del catálogo “Log-Normal”. La Figura (b), muestra los espectros de potencia para cada una de las siete sub-muestras de datos (círculos sólidos con un error a  $1\sigma$ ). Estas curvas son comparadas con sus correspondientes del modelo  $\Lambda\text{CDM}$  (líneas sólidas) [7].

**CAPÍTULO 3. LA DISTANCIA DE LUMINOSIDAD, LA DISTANCIA  
MODULAR Y LAS PRUEBAS OBSERVACIONALES**

**3.6. PRUEBA OBSERVACIONAL DE LAS OSCILACIONES ACÚSTICAS BARIÓNICAS**

---

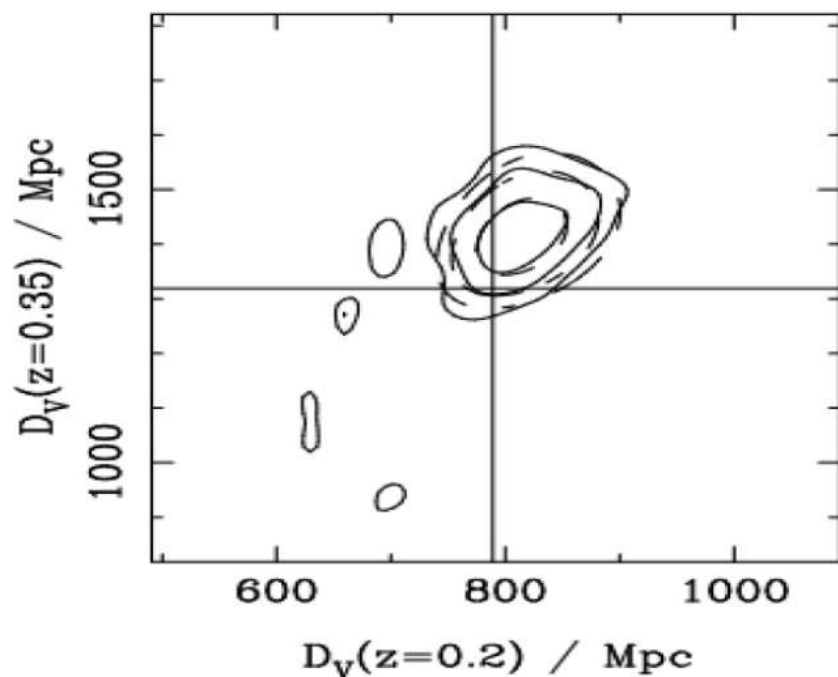


Figura 3.7: La Figura muestra las superficies de probabilidad en términos de la escala de dilatación  $D_V(z)$  en dos puntos  $z = 0.2$  y  $z = 0.35$ , calculados para todos los datos observados y usando seis sub-muestras. Los contornos sólidos son graficados para una distribución Gaussiana multivariable con dos grados de libertad a  $1\sigma$ ,  $2\sigma$  y  $3\sigma$  respectivamente. Las probabilidades fueron ajustadas para que coincidan con los intervalos de confianza Gaussiano. Los contornos punteados muestra un ajuste Gaussiano multivariable. Los valores de  $D_V$  para el modelo  $\Lambda\text{CDM}$  con  $\Omega_{M,0} = 0.25$ ,  $h = 0.72$   $\Omega_{b,0} h^2 = 0.0223$  son mostrados por líneas sólidas vertical y horizontal [7].

### 3.7. Radiación cósmica de microondas y su evidencia observacional

En esta sección presentaremos brevemente el experimento que confirma la existencia de la radiación cósmica de microondas y sus principales expresiones matemáticas que nos ayudarán a restringir los parámetros libres de los modelos cosmológicos.

#### 3.7.1. Siete años de observaciones de prueba Wilkinson de las anisotropías de microondas (WMAP)

Los fotones del CMB son bosones vectoriales y para una temperatura dada, ellos pueden oscilar en una dirección transversal. Esto es conocido como polarización. El CMB está polarizado con un nivel de unos cuantos microkelvins. Los vectores de polarización de los fotones dependen de la orientación de nuestro sistema de coordenadas y por conveniencia se acostumbra descomponer el campo vectorial de polarización en dos partes: la primera parte es llamada “Polarización eléctrica (Modos E)” y la segunda parte es denominada “Polarización magnética (Modos B)”. Los modos E aparecen de forma natural a partir de la dispersión de Thomson en un plasma heterogéneo, mientras que la detección de los modos B es extremadamente difícil, se cree que son determinados partir de la densidad de las ondas gravitacionales primigenias. La dispersión electrón-fotón en la época del desacople de los fotones ( $z_* \approx 1090$ ) convierte las anisotropías cuadrupolares de la temperatura ( $l = 2$ ) del CMB en una polarización lineal, el cual produce una correlación entre la temperatura y la polarización. Las fluctuaciones escalares adiabáticas producen una polarización radial alrededor de lugares de temperatura fría y una polarización tangencial alrededor de lugares de temperatura caliente en escalas angulares más grandes que el tamaño del horizonte en la época de desacople de los fotones,  $\geq 2^\circ$ . Para escalas angulares más pequeñas que el tamaño del horizonte en la época de desacople de los fotones, ambas polarizaciones son formadas alrededor de lugares calientes y fríos.

En este experimento los datos de las polarizaciones radiales y tangenciales se expresan en términos de los parámetros de Stokes  $Q$  y  $U$ . La polarización que es paralela al meridiano galáctico es  $Q > 0$  y  $U = 0$ . Partiendo de aquí, la polarización que es rotada  $45^\circ$  de “este” a “oeste” (en el sentido de las agujas del reloj, visto por un observador en tierra) tiene  $Q = 0$  y  $U > 0$ , la polarización perpendicular al meridiano galáctico tiene  $Q < 0$  y  $U = 0$ , y luego rotando  $45^\circ$  de “este” a “oeste” se tiene  $Q = 0$  y  $U < 0$ . Con una rotación adicional regresamos a  $Q > 0$  y  $U = 0$ . Esto se muestra en la Figura 3.8. Es más conveniente trabajar con los parámetros transformados de Stokes  $Q_r$  y  $U_r$  definidos con respecto a un nuevo sistema de coordenadas y que está rotado por un ángulo  $\phi$  [10].

$$Q_r(\theta) = -Q(\theta)\cos(2\phi) - U(\theta)\sin(2\phi), \quad (3.84)$$

$$U_r(\theta) = +Q(\theta)\sin(2\phi) - U(\theta)\cos(2\phi). \quad (3.85)$$

Estos parámetros son definidos con respecto a la línea que conecta el lugar de temperatura en el centro del sistema de coordenadas y la polarización a una distancia angular  $\theta$  desde el centro (Ver Figura 3.8). En este experimento por simplicidad algebraica se usó la aproximación de ángulos pequeños, esta aproximación se justificó usando escalas angulares pequeñas,  $\theta < 5^\circ$ . Con la aproximación de ángulos pequeños,  $Q$  y  $U$  están relacionados a los modos de

**CAPÍTULO 3. LA DISTANCIA DE LUMINOSIDAD, LA DISTANCIA  
MODULAR Y LAS PRUEBAS OBSERVACIONALES**

**3.7. RADIACIÓN CÓSMICA DE MICROONDAS Y SU EVIDENCIA OBSERVACIONAL**

---

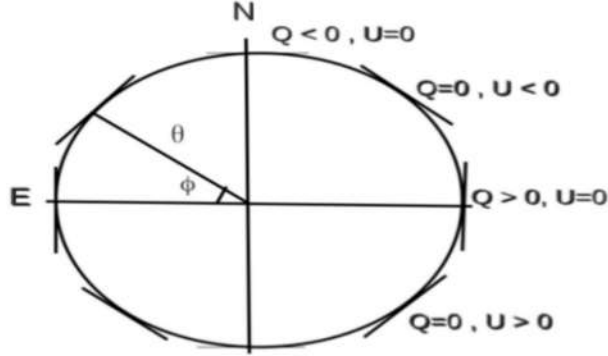


Figura 3.8: Sistema de coordenadas para los parámetros de Stokes  $Q$  y  $U$ . Se usó coordenadas galácticas con un “norte” hacia arriba y un “este” hacia la izquierda. En este ejemplo,  $Q_r$  es siempre negativa, y  $U_r$  siempre es cero. Cuando  $Q_r > 0$  y  $U_r = 0$ , la polarización es radial [10].

polarización  $E$  y  $B$  en el espacio de Fourier como:

$$Q(\theta) = - \int \frac{d^2 \vec{l}}{(2\pi)^2} [E_{\vec{l}} \cos(2\varphi) - B_{\vec{l}} \sin(2\varphi)] e^{i\vec{l} \cdot \theta}, \quad (3.86)$$

$$U(\theta) = - \int \frac{d^2 \vec{l}}{(2\pi)^2} [E_{\vec{l}} \sin(2\varphi) + B_{\vec{l}} \cos(2\varphi)] e^{i\vec{l} \cdot \theta}. \quad (3.87)$$

donde  $\varphi$  es el ángulo entre  $\vec{l}$  y la línea de latitud galáctica,  $\vec{l} = (l \cos \varphi, l \sin \varphi)$ . Sustituyendo las ecuaciones (3.86)-(3.87) en (3.84)-(3.85) encontramos

$$Q_r(\theta) = \int \frac{d^2 \vec{l}}{(2\pi)^2} [E_{\vec{l}} \cos(2(\phi - \varphi)) + B_{\vec{l}} \sin(2(\phi - \varphi))] e^{i\vec{l} \cdot \theta}, \quad (3.88)$$

$$U_r(\theta) = - \int \frac{d^2 \vec{l}}{(2\pi)^2} [E_{\vec{l}} \sin(2(\phi - \varphi)) - B_{\vec{l}} \cos(2(\phi - \varphi))] e^{i\vec{l} \cdot \theta}. \quad (3.89)$$

Usando la estadística de picos de campos gaussianos relacionamos el promedio de la localización de picos de temperatura  $\langle Q_r \rangle$  con el modo  $E$  de polarización a través del espectro de potencia  $C_l^{TE}$ , el promedio de la localización de picos de temperatura  $\langle U_r \rangle$  con el modo  $B$  de polarización a través del espectro de potencia  $C_l^{TB}$ , y el perfil de las fluctuaciones de la temperatura,  $\langle T \rangle$ , con el espectro de potencia de la temperatura [10], se halló

$$\langle Q_r \rangle(\theta) = - \int \frac{l dl}{2\pi} W_l^T W_l^P (b_\nu + b_\zeta l^2) C_l^{TE} J_2(l\theta), \quad (3.90)$$

$$\langle U_r \rangle(\theta) = - \int \frac{l dl}{2\pi} W_l^T W_l^P (b_\nu + b_\zeta l^2) C_l^{TB} J_2(l\theta), \quad (3.91)$$

$$\langle T \rangle(\theta) = - \int \frac{l dl}{2\pi} (W_l^T)^2 (b_\nu + b_\zeta l^2) C_l^{TT} J_0(l\theta), \quad (3.92)$$

donde  $W_l^T$  y  $W_l^P$  son las transformadas armónicas de las funciones ventanas, las cuales son una combinación de datos observacionales de temperatura y polarización, respectivamente,

**CAPÍTULO 3. LA DISTANCIA DE LUMINOSIDAD, LA DISTANCIA  
MODULAR Y LAS PRUEBAS OBSERVACIONALES**

**3.7. RADIACIÓN CÓSMICA DE MICROONDAS Y SU EVIDENCIA OBSERVACIONAL**

---

**Resultados estadísticos obtenidos de los análisis de polarización**

Combinacion de datos <sup>a</sup>	$\chi^2$ <sup>b</sup>	Amplitud del mejor estimado <sup>c</sup>	$\Delta\chi^2$
Caliente, $Q, V + W$	661.9	$0.57 \pm 0.21$	-7.3
Caliente, $U, V + W$	661.1	$1.07 \pm 0.21$	-24.7
Caliente, $Q_r, V + W$	694.2	$0.82 \pm 0.15$	-29.2
Caliente, $U_r, V + W$	629.2	$-0.13 \pm 0.15$	-0.18
Frío, $Q, V + W$	668.3	$0.89 \pm 0.21$	-18.2
Frío, $U, V + W$	682.7	$0.86 \pm 0.21$	-16.7
Frío, $Q_r, V + W$	682.2	$0.90 \pm 0.15$	-36.2
Frío, $U_r, V + W$	657.8	$0.20 \pm 0.15$	-0.46
Caliente, $Q, V - W$	559.8		
Caliente, $U, V - W$	629.8		
Caliente, $Q_r, V - W$	662.2		
Caliente, $U_r, V - W$	567.0		
Frío, $Q, V - W$	584.0		
Frío, $U, V - W$	668.2		
Frío, $Q_r, V - W$	616.0		
Frío, $U_r, V - W$	636.9		

Cuadro 3.3: (a) “Caliente y frío” denota los lugares de temperatura caliente y fría respectivamente. (b) Calculado con respecto a una señal nula. El dof es 625. (c) Amplitud mejor estimada predicha por el modelo teórico. Los errores son dados a  $1\sigma$  [10].

y  $b_\nu + b_\zeta l^2$  es el “bias (relación)” de los picos. Para analizar los datos y encontrar picos de temperatura se usó el mapa de temperaturas reducido al primer plano  $V + M$ . Usando el software “hotspot” se encontró y seleccionó los lugares de temperaturas caliente y fría. Los lugares de temperatura caliente fueron 12, 387 y los de temperatura fría fueron 12, 628. La *r.m.s.* de las fluctuaciones de la temperatura fue  $\sigma = 83.9\mu K$ .

Para analizar los datos de polarización se empleó los mapas de polarización en las bandas  $V$  y  $W$  y se analizó en analizar los datos observacionales para pequeñas escalas angulares  $\theta \leq 2^\circ$ . Para tal fin, se dividió la muestra de datos en dos conjuntos: (i)  $V, W$  y  $V + W$  con una resolución común de  $0.5^\circ$  y seleccionando los datos, y (ii)  $V, W$  y  $V + W$  sin alguna selección de datos. El primer conjunto de datos es usado para visualización, mientras que el segundo conjunto es usado para el análisis de  $\chi^2$ . Usando las ecuaciones (3.84)-(3.85) y las imagenes de Stokes  $Q$  y  $U$  podemos calcular  $Q_r$  y  $U_r$ .

Las Figuras 3.10 y 3.11, muestran las imagenes de los parámetros  $T, Q, U, Q_r, U_r$  alrededor de lugares de temperatura fría y temperatura caliente, respectivamente. Una disminución de temperatura en  $\theta \simeq 1^\circ$  es visible en los datos. Las imagenes más nítidas son de  $Q$  y  $T$  respectivamente. La fase de la compresión se produce en  $1.2^\circ$  y la expansión en  $0.6^\circ$  para  $Q_r$ : las direcciones de polarización alrededor de lugares de temperatura fría son radiales en  $0.6^\circ$  y tangenciales en  $1.2^\circ$ , y aquellos alrededor de lugares de temperatura caliente son contrarias a lo mencionado. Se comparó los parámetros  $Q_r$  y  $U_r$  usando los mapas de la suma  $(V + W)/2$  y la diferencia  $(V - W)/2$ . El mapa de  $Q_r$ , el cual debe ser diferente de cero para una señal cosmológica, muestra una clara diferencia entre los mapas de la suma y diferencia, mientras que el mapa para  $U_r$  es cero en los mapas de la suma y diferencia

**CAPÍTULO 3. LA DISTANCIA DE LUMINOSIDAD, LA DISTANCIA  
MODULAR Y LAS PRUEBAS OBSERVACIONALES**

**3.7. RADIACIÓN CÓSMICA DE MICROONDAS Y SU EVIDENCIA OBSERVACIONAL**

---

(esto es consistente con la conservación de la paridad global del universo a menos que un error sistemático rote el plano de polarización). La segunda columna de la Tabla 3.3 muestra los valores medidos de  $\chi^2$ , siendo el número de grados de libertad (dof) 625. Para cada combinación de mapas, se ajustó los datos para calcular la amplitud mejor estimada. Los aumentos más grandes en  $\chi^2$  son observados para  $Q_r$  y sus amplitudes mejores estimadas son  $0.82 \pm 0.15$  y  $0.90 \pm 0.15$  alrededor de lugares de temperatura caliente y fría respectivamente. Se detectó la polarización esperada alrededor de los lugares calientes y fríos en el nivel de  $5.4\sigma$  y  $6\sigma$ , respectivamente. Por otro lado, no se encontró evidencia para  $U_r$ . Los valores de  $\chi^2$  por dof son  $629.2/625 = 1.00672$  (lugares fríos) y  $657.8/625 = 1.05248$  (lugares calientes) respectivamente. El modelo  $\Lambda$ CDM predice  $C_l^{TB} = 0$  y de aquí  $\langle U_r \rangle = 0$ .

En este experimento se ajustó las medidas de  $U_r$  a las predichas de  $Q_r$ , encontrándose un resultado nulo. Todos los valores de  $\chi^2$  medidos desde los diferentes mapas son consistentes con una señal nula para  $U_r$ . Las fluctuaciones de temperatura del CMB obedecen estadísticas Gaussianas y la simetría de paridad global es respetada en escalas cosmológicas.

El modo de polarización  $E$  cruza el espectro de potencia,  $C_l^{TE}$ , contiene toda la información a cerca de la correlación entre la polarización y la temperatura. Este modo de polarización fue detectado, medido y utilizado para encontrar las polarizaciones alrededor de los lugares de temperatura fría y caliente.

Se demostró también que se puede escribir los perfiles de las polarizaciones alrededor de la temperatura de un lugar en términos de una integral de  $C_l^{TE}$ .

Los parámetros de Stokes  $Q$  y  $U$  ayudan a entender la física en la época del desacople (materia-radiación) en la forma de polarizaciones radial y tangencial en dos escalas angulares características que son importantes para la física de oscilaciones acústicas: la fase de compresión en  $\theta = 2\theta_A = 1.2^\circ$  y la fase de expansión  $\theta = \theta_A = 0.6^\circ$ . Cualquier experimento que mide ambos temperatura y polarización debería ser capaz de reproducir las imagenes de los parámetros  $Q$ ,  $U$ ,  $Q_r$ ,  $U_r$  y  $T$ .

Finalmente se combinó los datos de WMAP 7, los datos del espectro de potencia del CMB, los datos de los espectro de potencias del experimento ACBAR (Arcminute Cosmology Bolometer Array Receiver), y del experimento QUaD (Quest at Dasi) para reconstruir el espectro de potencia de las fluctuaciones de temperatura del CMB (Ver Figura 3.12) para pequeñas escalas angulares ( $l \leq 2000$ ).

### 3.7.2. Aplicación de los “priors” de distancia

La prueba cosmológica del CMB es una prueba de gran precisión y que toma en cuenta tiempos muy tempranos del Universo (hasta un corrimiento al rojo de  $z_* = 1091.3$ ). Esta basada en la ubicación del primer pico del espectro de las anisotropías en la temperatura del CMB  $l_1^{TT} = 220$ , el cual ha sido obtenido observacionalmente. Los “priors” de distancia dados por los siete años de observación del WMAP [10] y que serán empleados para restringir los parámetros de los modelos cosmológicos son el “parámetro de corrimiento”  $R$ , la “escala acústica”  $l_A$ , y el “corrimiento al rojo del desacople de los fotones”  $z_*$ .



**CAPÍTULO 3. LA DISTANCIA DE LUMINOSIDAD, LA DISTANCIA  
MODULAR Y LAS PRUEBAS OBSERVACIONALES**

**3.7. RADIACIÓN CÓSMICA DE MICROONDAS Y SU EVIDENCIA OBSERVACIONAL**

---

Para eliminar la dependencia del modelo incluida en la calculación de la escala angular del horizonte de sonido en la época de la última dispersión  $\theta_1^{TT}$  un parámetro independiente del modelo puede ser definido dividiendo la escala angular  $\theta_1^{TT} \sim \frac{1}{l_1^{TT}}$  por la correspondiente escala angular  $\theta_1'^{TT} \sim \frac{1}{l_1'^{TT}}$  de un modelo de referencia. Este parámetro es conocido como el parámetro de corrimiento del CMB “ $\tilde{R}$ ”, la cual se define como [8]:

$$\tilde{R} = \frac{l_1'^{TT}}{l_1^{TT}}, \quad (3.93)$$

donde  $l_1^{TT}$  corresponde a la predicción de la ubicación del primer pico acústico del CMB de acuerdo al modelo cosmológico que se desea probar, con  $(\omega_m \equiv \Omega_{M,0}h^2 = (\Omega_{DM,0} + \Omega_{b,0})h^2, \omega_b \equiv \Omega_{b,0}h^2, h)$  fijos y  $l_1'^{TT}$  es la predicción de un modelo de referencia, que se denota como “SCDM”, que consiste en asumir una geometría espacialmente plana, con  $(\Omega'_{M,0} = 1.0)$  y asumiendo que  $(\omega_M, \omega_b, h)$  son los mismos valores que el modelo a probar.

El corrimiento al rojo  $z_*$  (época de desacople de los fotones) es calculada usando la fórmula de ajuste [4]

$$z_* = 1048 [1 + 0.00124(\Omega_{b,0} \cdot h^2)^{-0.738}] [1 + g_1(\Omega_{M,0} \cdot h^2)^{g_2}], \quad (3.94)$$

donde  $\Omega_{M,0} = \Omega_{DM,0} + \Omega_{b,0}$  y las funciones  $g_1$  y  $g_2$  son:

$$g_1 = \frac{0.0783(\Omega_{b,0} \cdot h^2)^{-0.238}}{1 + 39.5(\Omega_{b,0} \cdot h^2)^{0.763}}, \quad (3.95)$$

$$g_2 = \frac{0.560}{1 + 21.1(\Omega_{b,0} \cdot h^2)^{1.81}}. \quad (3.96)$$

La distancia diametral angular del horizonte de sonido en la época de la última dispersión  $D_A(z_*)$  se define para una geometría espacialmente plana como (Ver Apéndice C):

$$D_A(z_*) = \frac{c}{(1 + z_*)} \int_0^{z_*} \frac{dz'}{H(z')}. \quad (3.97)$$

Evaluando la ecuación (3.71) en  $z_*$ , encontramos escala comóvil del horizonte del sonido en la época de la última dispersión

$$r_s(z_*) = \frac{c}{\sqrt{3}} \int_0^{1/(1+z_*)} \frac{da}{a^2 \cdot H(a) \sqrt{1 + (3\Omega_{b,0}/4\Omega_{\gamma,0}) \cdot a}}. \quad (3.98)$$

El cálculo teórico de la localización del primer pico acústico  $l_1^{TT}$  está relacionado con la distancia diametral angular en la época de la última dispersión  $D_A(z_*)$  y con su escala comóvil del horizonte de sonido en la época de la última dispersión  $r_s(z_*)$  de la siguiente forma:

$$l_1^{TT} = l_A(D_A, r_s)(1 - \psi(\omega_M, \omega_b)). \quad (3.99)$$

Definimos la escala angular  $\theta_1^{TT}$  del horizonte de sonido en la época de la última dispersión como:

$$\theta_1^{TT} \equiv \frac{r_s(z_*)}{D_A(z_*)}, \quad (3.100)$$

**CAPÍTULO 3. LA DISTANCIA DE LUMINOSIDAD, LA DISTANCIA MODULAR Y LAS PRUEBAS OBSERVACIONALES**  
**3.7. RADIACIÓN CÓSMICA DE MICROONDAS Y SU EVIDENCIA OBSERVACIONAL**

---

también definimos la “escala acústica”  $l_A$  como:

$$l_A(D_A, r_s) \equiv (1 + z_*) \frac{\pi}{\theta_1^{TT}} = (1 + z_*) \frac{\pi D_A(z_*)}{r_s(z_*)}, \quad (3.101)$$

y el parámetro de corrimiento de fase  $\psi(\omega_{DM}, \omega_b) \simeq 0.27$  depende débilmente de los parámetros cosmológicos.

Por otro lado, usando la ecuación (3.97) encontramos la distancia diametral angular para el

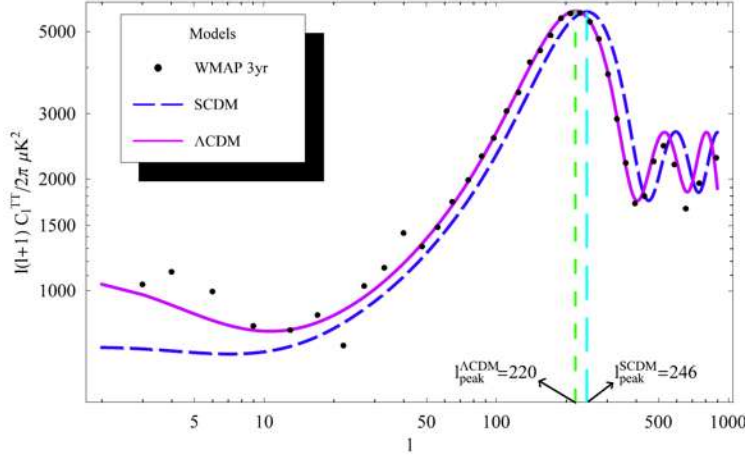


Figura 3.9: Derivación del parámetro de corrimiento al rojo. Los bins de datos de los tres años de WMAP para un modelo  $\Lambda$ CDM de geometría plana ( $\omega_m = 0.14$ ,  $\omega_{0.022}$ ,  $h = 0.72$ ) y para un modelo SCDM ( $\omega_m = 0.14$ ,  $\omega_{0.022}$ ,  $h = 0.37$ ). Para el modelo  $\Lambda$ CDM el primer pico está en  $l_1^{TT} = 220$  mientras que para el modelo SCDM está en  $l_1^{TT} = 246$  [88].

modelo cosmológico de referencia SCDM, el cual será denota por una prima  $D'_A$

$$\begin{aligned} D'_A(z_*) &= \frac{a_*}{H_0} \int_0^{z_*} \frac{dz}{\left[ \Omega'_{M,0} (1+z)^3 + \Omega'_r (1+z)^4 \right]} \\ &= \frac{2a_*}{H_0} \left[ (\Omega'_r + 1)^{1/2} - (a_* \Omega'_r + 1)^{1/2} \right]. \end{aligned} \quad (3.102)$$

donde hemos considerado que  $\Omega'_{M,0} = 1$ , para el modelo de referencia SCDM. Definimos el factor de corrección  $q(\Omega'_r, a_*)$  para  $D'_A$  como:

$$q(\Omega'_r, a_*) \equiv (\Omega'_r + 1)^{1/2} - (a_* \Omega'_r + 1)^{1/2}, \quad (3.103)$$

entonces reescribimos la distancia diametral angular para el modelo de referencia SCDM como

$$D'_A(z_*) = \frac{a_*}{H_0} q(\Omega'_r, a_*). \quad (3.104)$$

Utilizando las ecuaciones (3.99)-(3.104) en la ecuación (3.93) y asumiendo una geometría espacialmente plana, hallamos

$$\tilde{R} = \frac{l_1'^{TT}}{l_1^{TT}} = \frac{l'_A (1 - \psi')}{l_A (1 - \psi)} = \frac{r_s D'_A(z_*)}{r_s D_A(z_*)} = \frac{2}{\sqrt{\Omega_{M,0}}} \frac{q(\Omega'_r, a_*)}{\chi(z_*)}, \quad (3.105)$$

**CAPÍTULO 3. LA DISTANCIA DE LUMINOSIDAD, LA DISTANCIA  
MODULAR Y LAS PRUEBAS OBSERVACIONALES**  
3.7. RADIACIÓN CÓSMICA DE MICROONDAS Y SU EVIDENCIA OBSERVACIONAL

---

$l_A(z_*)$	$302.09 \pm 0.76$
$R(z_*)$	$1.725 \pm 0.018$
$z_*$	$1091.3 \pm 0.91$

Cuadro 3.4: Datos observacionales del CMB [10].

donde definimos

$$\chi(z) \equiv \int_0^{z_*} \frac{H_0 d\tilde{z}}{H(\tilde{z})}. \quad (3.106)$$

y hemos considerado que  $\psi = \psi'$ , (debido a que  $\omega_b = \omega'_b$  y  $\omega_M = \omega'_M$ ), y  $a_*(\omega_b, \omega_M) = a'_*(\omega'_b, \omega'_M)$  [88]. La principal ventaja de usar el “parámetro de corrimiento” es que depende débilmente de los valores de otros parámetros cosmológicos que no sean a través de  $H(z)$ . La dependencia con otros parámetros es a través de  $\Omega_{M,0}^{-1/2}$  y  $q(\Omega'_r, a_*) = q(\omega_r/h^2, a_*(\omega_M, \omega_b))$ . Los valores para  $\Omega'_r$  y  $z_*$  están dados por

$$\omega'_r \equiv \Omega'_r h^2 \simeq 2.47 \times 10^{-5}. \quad (3.107)$$

Es importante comentar que aún no ha sido demostrado de manera explícita que tanto depende el parámetro de corrimiento de los valores de  $(\omega_M, \omega_b)$ , y que afectaría a  $\tilde{R}$  a través de  $q(\Omega'_r, a_*)$ . Para no correr riesgos de una posible dependencia fuerte, por conveniencia se define un parámetro  $R$  que pueda ser equivalente a  $\tilde{R}$ , que no contenga al término  $q(\Omega'_r, a_*)$  pero que tenga la misma utilidad que  $\tilde{R}$ .

Usualmente se define en la literatura el “parámetro de corrimiento” como:

$$R(z_*) \equiv \sqrt{\Omega_{M,0}} \chi(z) = \sqrt{\Omega_{M,0}} \int_0^{z_*} \frac{H_0 d\tilde{z}}{H(\tilde{z})}. \quad (3.108)$$

Para un valor fijo de  $\Omega_{M,0} = 0.27$ ,  $\Omega_{b,0} = 0.043$  y  $0.5 \leq h \leq 0.9$ ,  $q(\Omega'_r, a_*)$  permanece en el rango de  $0.964 \leq q \leq 0.968$  y por lo tanto  $q(\Omega'_r, a_*)$  depende muy débilmente del parámetro de Hubble  $H(z)$ .

De la ecuación (3.93) (o 3.108) notamos que para calcular el valor de  $\tilde{R}$  (o  $R$ ), es necesario conocer el valor de  $l_1'^{TT}$  y luego hacer el cociente con el valor de  $l_1^{TT}$ . Sin embargo, para calcular  $l_1'^{TT}$  es preciso asumir el modelo de referencia SCDM. Por eso se acostumbra usar el modelo  $\Lambda$ CDM, debido a que ajusta mejor la localización primer pico del CMB. Se utiliza el modelo  $\Lambda$ CDM no como el modelo de referencia, sino como el modelo con el cual se calcula teóricamente el valor  $l_1^{TT} = 220$ , no para calcular el valor de 220, ya que este valor se conoce de manera observacional, sino por el contrario para determinar los valores de los parámetros  $(\omega_M, \omega_b, h)$  que se necesitan conocer para usarlos en el modelo de referencia SCDM.

Los valores que mejor ajustan la ubicación del primer pico del CMB usando  $\Lambda$ CDM son  $(\omega_M = 0.14, \omega_b = 0.022, h = 0.72)$ , produciendo  $l_1^{TT} = 220 \pm 0.08$ . Con estos resultados se encuentra que los valores para SCDM deben ser  $(\omega_M = 0.14, \omega_b = 0.022, h = 0.37)$ , esto nos permite obtener el valor de  $l_1'^{TT} = 247$ .

**CAPÍTULO 3. LA DISTANCIA DE LUMINOSIDAD, LA DISTANCIA  
MODULAR Y LAS PRUEBAS OBSERVACIONALES**  
**3.7. RADIACIÓN CÓSMICA DE MICROONDAS Y SU EVIDENCIA OBSERVACIONAL**

---

De los resultados anteriores y usando la ecuación (3.93) encontramos

$$\tilde{R} = \frac{l_1'^{\text{TT}}}{l_1^{\text{TT}}} = 1.123 \pm 0.03. \quad (3.109)$$

Utilizando las ecuaciones (3.105)-(3.108) y sumiendo un valor de  $q = 0.965$  hallamos

$$R(z_*) \equiv \sqrt{\Omega_{M,0}}\chi(z) = 1.71 \pm 0.05. \quad (3.110)$$

El actual valor de  $R$  está dado por el experimento de WMAP 7 [10]. Los datos observacionales de los siete años de WMAP 7 [10] están dados en el Cuadro (3.4).

Siguiendo [10], la función  $\chi^2$  para los datos del CMB es

$$\chi_{\text{CMB}}^2(\mathbf{X}) = \left(x_i^{\text{th}}(\mathbf{X}) - x_i^{\text{obs}}\right)^T (C_{\text{CMB}}^{-1})_{ij} \left(x_j^{\text{th}}(\mathbf{X}) - x_j^{\text{obs}}\right), \quad (3.111)$$

donde  $(x^{\text{th}} - x^{\text{obs}})$  es un vector columna formado desde los valores teóricos menos los correspondientes datos observacionales,

$$x_i^{\text{th}}(\mathbf{X}) - x_i^{\text{obs}} = \begin{pmatrix} l_A(z_*) - 302.09 \\ R(z_*) - 1.725 \\ z_* - 1091.3 \end{pmatrix}, \quad (3.112)$$

“ $T$ ” denota la transpuesta y  $(C_{\text{CMB}}^{-1})_{ij}$  es la matriz inversa de covarianza del CMB. En [10], la matriz inversa de covarianza está definida como:

$$C_{\text{CMB}}^{-1} \equiv \begin{pmatrix} +2.3050 & +29.6980 & -1.3330 \\ +29.698 & +6825.27 & -113.18 \\ -1.3330 & -113.180 & +3.4140 \end{pmatrix}. \quad (3.113)$$

Con esta función  $\chi_{\text{CMB}}^2$ , definimos la función densidad de probabilidad (**pdf**) como:

$$\mathbf{pdf}_{\text{CMB}}(\mathbf{X}) \equiv A_3 \cdot e^{-\chi_{\text{CMB}}^2(\mathbf{X})/2}, \quad (3.114)$$

donde  $A_3$  es una constante de integración. Esta definición es la más simple y los resultados teóricos que produce concuerdan con las observaciones.

Luego, usando las ecuaciones (3.47), (3.83), (3.114) construimos la función de densidad de probabilidad total para estas tres muestras observacionales

$$\mathbf{Pdf} = \mathbf{pdf}_{\text{SN}} \cdot \mathbf{pdf}_{\text{BAO}} \cdot \mathbf{pdf}_{\text{CMB}}. \quad (3.115)$$

Podemos reescribir la ecuación anterior del siguiente modo

$$\mathbf{Pdf}(\mathbf{X}) = A \cdot e^{-\chi^2(\mathbf{X})/2}. \quad (3.116)$$

A partir de la ecuación anterior, definimos la función  $\chi^2$  total como:

$$\chi^2 \equiv \chi_{\text{SN}}^2 + \chi_{\text{BAO}}^2 + \chi_{\text{CMB}}^2. \quad (3.117)$$

Por lo tanto las restricciones estadísticas sobre los parámetros de los modelos cosmológicos, pueden ser obtenidas minimizando la ecuación (3.117).

**CAPÍTULO 3. LA DISTANCIA DE LUMINOSIDAD, LA DISTANCIA  
MODULAR Y LAS PRUEBAS OBSERVACIONALES**  
3.7. RADIACIÓN CÓSMICA DE MICROONDAS Y SU EVIDENCIA OBSERVACIONAL

---

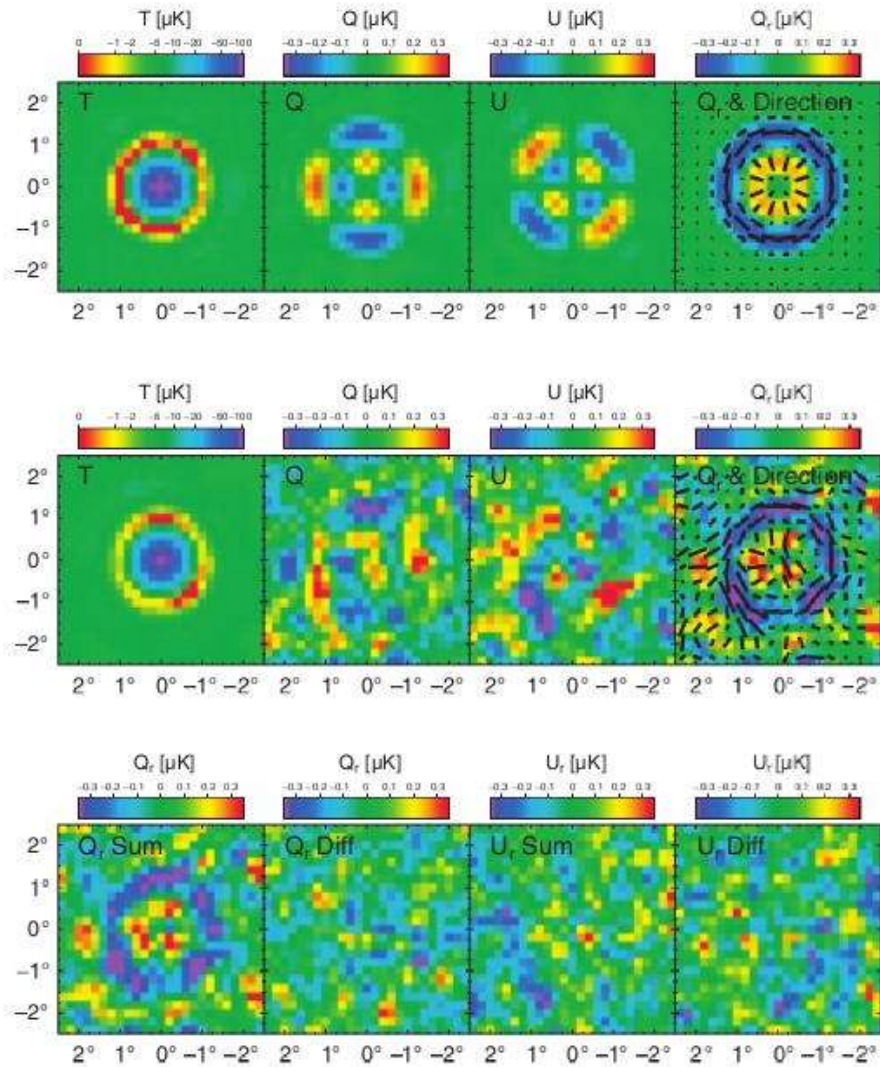


Figura 3.10: Imágenes de los datos de temperatura y polarización alrededor de lugares de temperatura fría. Cada panel muestra una región de  $5^\circ \times 5^\circ$  con el norte hacia arriba y el este a la izquierda. Los paneles superiores de izquierda a derecha muestran imágenes simuladas de la temperatura y de los parámetros de Stokes superpuestas con las direcciones de polarización. Los paneles del medio muestran imágenes de la temperatura y de los parámetros de Stokes superpuestas con las direcciones de polarización usando los datos observacionales de WMAP 7  $V + W$ . En el mapa observado de  $Q_r$  la fase de compresión está en  $1.2^\circ$  y la expansión está en  $0.6^\circ$  son claramente visibles. Los paneles inferiores de izquierda a derecha muestran las imágenes de los parámetros  $Q_r$  y  $U_r$  obtenidos a partir de la suma de mapas  $(V + W)/2$  y de la diferencia de mapas  $(V - W)/2$  respectivamente y producen pruebas nulas. Note que  $U_r$ , el cual prueba la correlación  $TB$  (Ver ecuación 3.91), es nulo como una consecuencia de la conservación de paridad en el universo.[10].

**CAPÍTULO 3. LA DISTANCIA DE LUMINOSIDAD, LA DISTANCIA MODULAR Y LAS PRUEBAS OBSERVACIONALES**  
**3.7. RADIACIÓN CÓSMICA DE MICROONDAS Y SU EVIDENCIA OBSERVACIONAL**

---

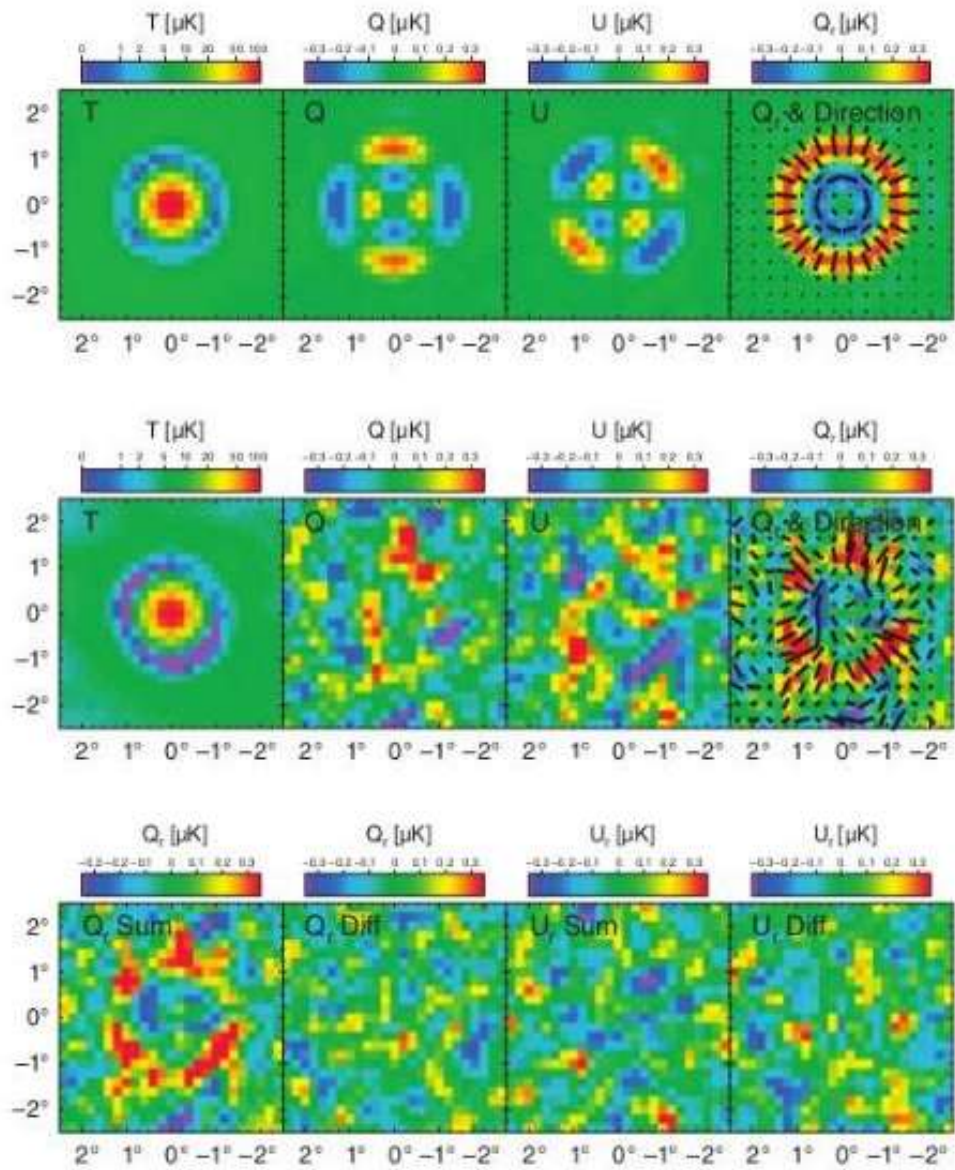


Figura 3.11: El mismo comentario de la Figura 3.10 pero para lugares de temperatura caliente [10].

**CAPÍTULO 3. LA DISTANCIA DE LUMINOSIDAD, LA DISTANCIA MODULAR Y LAS PRUEBAS OBSERVACIONALES**  
**3.8. TÉCNICAS ESTADÍSTICAS DE REDUCCIÓN DEL NÚMERO DE PARÁMETROS DE UN MODELO TEÓRICO.**

---

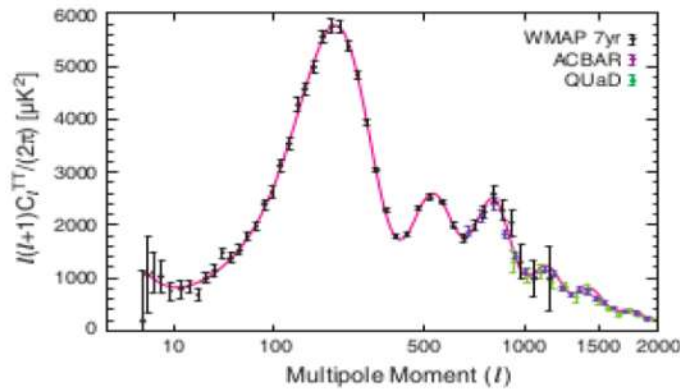


Figura 3.12: Las anisotropías (fluctuaciones) de la temperatura usualmente se definen como:  $\Delta T(\theta, \phi)/T \equiv (T(\theta, \phi) - T_o)/T_o$ , donde  $T(\theta, \phi)$  representa la temperatura en una posición angular de la esfera celeste (cielo) y  $T_o = 2.72$  K es la temperatura promedio. Para relacionar las observaciones de  $\Delta T(\theta, \phi)/T$  con la teoría, se expande estas fluctuaciones de la temperatura en términos de los armónicos esféricos  $Y_{l,m}$  (base ortonormal y completa en el espacio de Hilbert):  $\Delta T(\theta, \phi)/T = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} a_{lm} Y_{l,m}(\theta, \phi)$ , siendo  $\theta$  y  $\phi$  los ángulos esféricos usuales. Los números  $a_{lm}$  son complejos y satisfacen las siguientes condiciones:

i)  $\langle a_{l'm'}^*, a_{lm} \rangle = C_l \delta_{ll'} \delta_{mm'}$  y ii) Se define el espectro de potencias de las fluctuaciones angulares como:  $C_l \equiv \langle |a_{lm}|^2 \rangle$ .

La Figura muestra el espectro de potencia de las fluctuaciones de la temperatura obtenido usando los datos de los experimentos WMAP 7, ACBAR y QUaD. Los datos de los experimentos ACBAR y QUaD se muestran para  $l \simeq 690$ , donde los errores en el espectro de potencia de WMAP 7 son dominados por ruido. Las líneas sólidas muestra el mejor estimado para el modelo  $\Lambda$ CDM usando los datos de WMAP 7 [10].

### 3.8. Técnicas estadísticas de reducción del número de parámetros de un modelo teórico.

En esta sección presentaremos dos técnicas estadísticas que son muy útiles para reducir el número de parámetros de nuestros modelos cosmológicos, lo cual nos permitirá trabajar las simulaciones numéricas con un menor número de ellos, permitiéndonos invertir menos tiempo para la obtención de sus mejores estimados.

#### 3.8.1. Técnica de la marginalización sobre la función de densidad de probabilidad total (Pdf) de parámetros independientes.

Esta técnica esta basada en la Estadística Bayesiana (Ver Capítulo 3 de [71]) y consiste en escoger una función de probabilidad (priors) para cada uno de los parámetros del modelo que se desean excluir de la función de densidad de probabilidad total (Pdf) de un modelo cosmológico. Para lograr esto, integramos sobre todos los valores posibles de estos parámetros (proceso de Marginalización), resulta una nueva función de densidad de probabilidad total

**CAPÍTULO 3. LA DISTANCIA DE LUMINOSIDAD, LA DISTANCIA  
MODULAR Y LAS PRUEBAS OBSERVACIONALES**  
3.8. TÉCNICAS ESTADÍSTICAS DE REDUCCIÓN DEL NÚMERO DE PARÁMETROS  
DE UN MODELO TEÓRICO.

---

con un menor número de parámetros.

Consideremos un sistema cosmológico con los siguientes “S” parámetros libres e independientes definidos por

$$\mathbf{X} \equiv (p_1, p_2, p_3, p_4, \dots, p_m, \dots, p_S), \quad m < S, \quad (3.118)$$

entonces marginalizamos los parámetros  $\mathbf{Y} = (p_1, p_2, p_3, p_4, \dots, p_m)$  en el **Pdf**, escogiendo “priors” sobre ellos. Por tanto, debemos calcular la siguiente integral

$$\mathbf{Pdf}(\mathbf{V}) = \int \int \int \int \dots \int \mathbf{Pdf}(\mathbf{X}) \mathbf{Pdf}(\mathbf{Y}) dp_1 dp_2 dp_3 dp_4 \dots dp_m, \quad (3.119)$$

donde  $\mathbf{V} = (p_{m+1}, p_{m+2}, \dots, p_S)$  representa los parámetros no-marginalizados y cuya función de densidad de probabilidad la denotamos como **Pdf**(**V**). Los límites de integración son escogidos convenientemente para cada parámetro.

**Pdf**(**X**) es la función de densidad de probabilidad total del sistema cosmológico en estudio y **Pdf**(**Y**) es la función distribución de probabilidad de los parámetros marginalizados (**Y**), a las cuales convencionalmente se las llama “priors” y son escogidos convenientemente pudiendo ser funciones gaussianas, funciones delta de Dirac o funciones constantes. En consecuencia, sustituyendo estos “priors” en (3.119) hallamos **Pdf**(**V**) que depende solamente de los parámetros “**V**”. Podemos expresar **Pdf**(**V**) en términos de una función exponencial, en donde su nueva  $\tilde{\chi}^2$  depende solamente de los parámetros **V**,

$$\mathbf{Pdf}(\mathbf{V}) = A \cdot e^{-\tilde{\chi}^2(\mathbf{V})/2}, \quad (3.120)$$

donde hemos definido

$$\tilde{\chi}^2(\mathbf{V}) \equiv \sum_{k=1}^{N_T} \frac{[\mu^{\text{th}}(z_k, \mathbf{V}) - \mu_k]^2}{\sigma_k^2}, \quad (3.121)$$

y  $N_T$  representa el número total de datos observacionales de la muestra que se utiliza.

El mínimo valor de la función  $\tilde{\chi}^2$  dará los mejores estimados de los parámetros **V** y él medirá la calidad del ajuste del modelo teórico confrontado con los datos observacionales.

Una aplicación de esta técnica ha sido empleada en los modelos II y III del Ensayo 1 [Ver (2.3) y (6.1)], en donde se consideró “priors” delta de Dirac entorno a valores específicos  $\tilde{\mathbf{Y}} = (\tilde{H}_0, \tilde{\Omega}_{DM,0}, \tilde{\Omega}_{b,0}, \tilde{\Omega}_{r,0})$  medidos para alguna observación independiente

$$\mathbf{Pdf}(\mathbf{Y}) = \delta(H_0 - \tilde{H}_0) \cdot \delta(\Omega_{DM,0} - \tilde{\Omega}_{DM,0}) \cdot \delta(\Omega_{b,0} - \tilde{\Omega}_{b,0}) \cdot \delta(\Omega_{r,0} - \tilde{\Omega}_{r,0}). \quad (3.122)$$

Los valores específicos escogidos para los “priors” delta de Dirac son:

- $\tilde{H}_0 = 72.0 \text{ (km/s)Mpc}^{-1}$  sugerido por las observaciones del Telescopio Espacial Hubble (HST) [78].
- $\tilde{\Omega}_{DM,0} = 0.2338$ ,
- $\tilde{\Omega}_{b,0} = 0.0462$ ,



**CAPÍTULO 3. LA DISTANCIA DE LUMINOSIDAD, LA DISTANCIA  
MODULAR Y LAS PRUEBAS OBSERVACIONALES**

3.8. TÉCNICAS ESTADÍSTICAS DE REDUCCIÓN DEL NÚMERO DE PARÁMETROS  
DE UN MODELO TEÓRICO.

---

- $\tilde{\Omega}_{r,0} = 4.620 \times 10^{-5}$ .

Con estos se han trabajado los modelos II y III del Ensayo 1 para la reconstrucción de la función de interacción  $I_Q(z)$  hasta el orden  $N = 5$  en la expansión polinomial en términos de los polinomios de Chebyshev. En cambio, para el modelo IV, se escogieron los mismos “priors” delta de Dirac (3.122) con los mismos valores ya descritos, pero se dejó el parámetro  $\Omega_{DM,0}$  libre, para que sea estimado a través de la minimización de la función  $\tilde{\chi}^2(\mathbf{V})$  (3.125), haciendo también una reconstrucción de la función de interacción  $I_Q(z)$  hasta el orden  $N = 5$ .

**3.8.2. Técnica de la marginalización sobre la función de densidad de probabilidad total (Pdf) con algunos parámetros dependientes.**

De manera similar a la subsección anterior (3.8.1), tomemos un sistema cosmológico con los siguientes “S” (ver ecuación 3.118) parámetros libres, donde algunos de ellos no son independientes, es decir, supongamos que los siguientes parámetros  $\mathbf{D} = (p_2, p_3, p_4, \dots, p_{m-1})$  dependen del parámetro  $p_1$ . Esto nos permitirá reducir el número de parámetros libres de nuestro modelo teórico en estudio y en consecuencia reducir también el número de “priors” que debemos escoger para los parámetros independientes que se marginalizan en la función de densidad de probabilidad total **Pdf**.

Consideremos que  $\mathbf{Y} = (p_1, p_m, p_{m+1}, p_{m+2}, \dots, p_u)$  denota a los parámetros que se van a marginalizar en el **Pdf**, escogiendo convenientemente “priors” sobre ellos. Del mismo modo  $\mathbf{V} = (p_{u+1}, p_{u+2}, \dots, p_S)$  denota a los parámetros no-marginalizados y cuya función de densidad de probabilidad la denotamos como **Pdf**( $\mathbf{V}$ ). Entonces debemos encontrar la siguiente integral

$$\mathbf{Pdf}(\mathbf{V}) = \int \int \int \int \dots \int \mathbf{Pdf}(\mathbf{X}) \mathbf{Pdf}(\mathbf{Y}) dp_1 dp_m dp_{m+1} dp_{m+2} \dots dp_u. \quad (3.123)$$

Donde **Pdf**( $\mathbf{X}$ ) representa la función de densidad de probabilidad total del sistema cosmológico en estudio y **Pdf**( $\mathbf{Y}$ ) es la función distribución de probabilidad de los parámetros marginalizados  $\mathbf{Y}$ . Los límites de integración son escogidos adecuadamente para cada parámetro. Del mismo modo para esta segunda técnica, los “priors” son escogidos convenientemente pudiendo ser funciones gaussianas, funciones delta de Dirac o funciones constantes. En forma similar a las ecuaciones (3.120) y (3.125) definimos la función de densidad de probabilidad de los parámetros no-marginalizados

$$\mathbf{Pdf}(\mathbf{V}) = A' \cdot e^{-\tilde{\chi}^2(\mathbf{V})/2}, \quad (3.124)$$

en donde también definimos una nueva función  $\tilde{\chi}^2$  dependiendo solamente de los parámetros no-marginalizados  $\mathbf{V}$

$$\tilde{\chi}^2(\mathbf{V}) \equiv \sum_{k=1}^{N_T} \frac{[\mu^{\text{th}}(z_k, \mathbf{V}) - \mu_k]^2}{\sigma_k^2}, \quad (3.125)$$

y  $N_T$  representa el número total de datos observacionales de la muestra que se emplea. El mínimo valor de la función  $\tilde{\chi}^2$  dará los valores más probables de los parámetros  $\mathbf{V}$ .

Una aplicación de esta técnica ha sido empleada en el modelo cosmológico del Ensayo 2

**CAPÍTULO 3. LA DISTANCIA DE LUMINOSIDAD, LA DISTANCIA  
MODULAR Y LAS PRUEBAS OBSERVACIONALES**

3.8. TÉCNICAS ESTADÍSTICAS DE REDUCCIÓN DEL NÚMERO DE PARÁMETROS  
DE UN MODELO TEÓRICO.

---

(3)[Ver (2.3) y (6.2)(6.3)], cuyos parámetros son:  $\mathbf{X} = (H_0, \Omega_{DM,0}, \Omega_{b,0}, \Omega_{r,0}, w, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$  ( $\mathbf{X} = [H_0, \Omega_{DM,0}, \Omega_{b,0}, \Omega_{r,0}, w, \alpha_{DM}^e, \alpha_{DM}^o, \alpha_{DM}^f]$ ) en donde se fijó los parámetros de densidad de materia bariónica  $\Omega_{b,0}$  y radiación  $\Omega_{r,0}$  en términos de la constante de Hubble  $H_0$ , es decir [59]:

$$\Omega_{b,0} = 0.02246h^{-2} = \frac{224.6}{H_0^2}, \quad (3.126)$$

$$\Omega_{r,0} = 4.17356 \times 10^{-5}h^{-2} = \frac{0.417356}{H_0^2}. \quad (3.127)$$

Luego escogiendo como “priors” funciones constantes sobre cinco parámetros del siguiente conjunto  $\mathbf{V} = (H_0, \Omega_{DM,0}, w, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ , obtendremos una distribución de probabilidad de  $\tilde{\chi}^2$  para el parámetro libre del modelo. Repitiendo este proceso para cada uno de los parámetros independientes del modelo construimos sus respectivas distribuciones de probabilidad.

Un proceso similar fue hecho para el Ensayo 3.

## Capítulo 4

# El modelo estándar de la cosmología $\Lambda$ CDM, la energía oscura y la expansión acelerada del universo.

### 4.1. El modelo estándar de la cosmología $\Lambda$ CDM

Es el modelo cosmológico más simple que está de acuerdo con todas las observaciones actuales y explica consistentemente las observaciones cósmicas sobre las anisotropías de la radiación cósmica de fondo, la estructura a gran escala del universo, las observaciones realizadas sobre las supernovas, así como la expansión acelerada del universo. Este modelo cosmológico propone un universo constituido por:

**Constante cosmológica.** El modelo asume que existe la energía oscura y que ésta tiene exactamente el comportamiento de una constante cosmológica, con una ecuación de estado:  $p = -\rho$ . La constante cosmológica se describe en términos de  $\Omega_{\Lambda,0}$ . En la actualidad,  $\Omega_{\Lambda,0} \sim 0.73$  lo que implica que vale 73 % de la densidad total de materia-energía presente en el universo.

**Materia oscura fría.** Es una forma de materia no bariónica (puede estar formada por neutrinos, partículas supersimétricas, axiones y agujeros negros), que no colisiona y se comporta como polvo. Esta componente representa 23 % de la densidad total de materia-energía presente en el universo.

**Materia bariónica.** Es toda forma de materia constituida de bariones y leptones (excepto determinados tipos de neutrinos). Se asume que ella tiene un comportamiento de polvo. Según cálculos recientes, esta forma de materia constituye solamente el 4 % de la densidad total de materia-energía presente en el universo.

**Radiación.** También se toma en cuenta la existencia de radiación en el universo, manifestada como radiación cósmica de fondo. Esta componente representa 0.005 % de la densidad total de materia-energía presente en el universo.

Las observaciones más recientes de WMAP7 indican que el universo es espacialmente plano [9]. Entonces para el modelo  $\Lambda$ CDM, la expresión del parámetro de Hubble tiene la forma

**CAPÍTULO 4. EL MODELO ESTÁNDAR DE LA COSMOLOGÍA  $\Lambda$ CDM, LA ENERGÍA OSCURA Y LA EXPANSIÓN ACELERADA DEL UNIVERSO.**  
**4.2. LA ENERGÍA OSCURA Y LA EXPANSIÓN ACELERADA DEL UNIVERSO.**

---

dada por la expresión (2.84):

$$H^2(z) = H_0^2 \left[ \Omega_{b,0}(1+z)^3 + \Omega_{r,0}(1+z)^4 + \Omega_{DM,0}(1+z)^3 + \Omega_{\Lambda,0} \right]. \quad (4.1)$$

Por otro lado, la componente de radiación hoy en día es muy pequeña, por lo que su contribución en tiempos recientes del universo es despreciable. Debido a esto, los cosmólogos por simplicidad acostumbran despreciar  $\Omega_{r,0}$ . Al probar el modelo  $\Lambda$ CDM usando las tres pruebas cosmológicas, “Union 2.1 SNeIa + CMB + BAO”, se encuentra que los valores de los parámetros de densidad y de la constante de Hubble son:  $H_0 = 70.99540 (Km/s)Mpc^{-1}$ ,  $\Omega_{b,0} = 0.04456$ ,  $\Omega_{DM,0} = 0.22690$ ,  $\Omega_{\Lambda,0} = 0.72853$ ,  $\Omega_{r,0} = 0.00005$  respectivamente (Ver Capítulo 5.1).

## 4.2. La energía oscura y la expansión acelerada del universo.

### 4.2.1. Descubrimiento de la energía oscura.

En el año de 1998 las observaciones de supernovas del tipo Ia muy lejanas, realizadas por parte del Supernova Cosmology Project en el Laboratorio Nacional Lawrence Berkeley y el equipo de búsqueda de supernovas en alto corrimiento al rojo, encabezados por Adam G. Riess de la Universidad de California en Berkeley, publicaron un artículo titulado “**Observational evidence from supernovae for an accelerating Universe and a cosmological constant**” [1] en el que indicaban la posible evidencia de que el universo se está expandiendo aceleradamente, hoy en día.

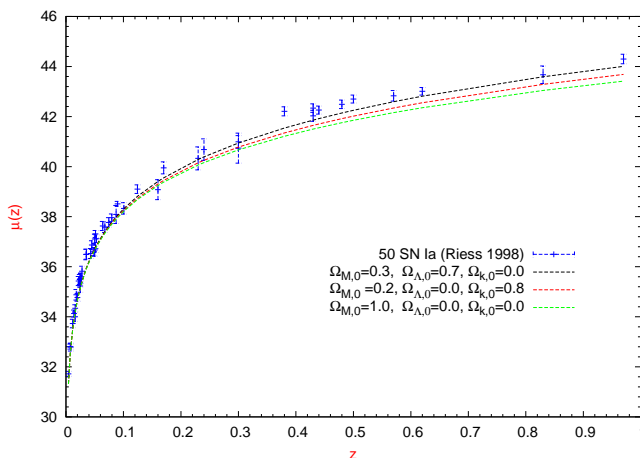


Figura 4.1: Gráfica de la distancia modular  $\mu(z)$  de los 50 datos de supernovas tipo Ia, utilizados por Riess et al. [1] y que sirvieron para mostrar la aceleración presente del universo y la posible existencia de una constante cosmológica no nula. En esta figura se grafican los datos medidos con sus barras de error así como las curvas generadas por tres modelos cosmológicos diferentes. En aquel momento, el modelo cosmológico con  $\Omega_{M,0} = 1.0$  y  $\Omega_{\Lambda,0} = \Omega_{k,0} = 0.0$  era el de mayor aceptación científica en la comunidad internacional de cosmólogos; antes del descubrimiento del grupo de Riess. Esta gráfica fue construída asumiendo  $\Omega_{r,0} = 0.0$  y  $H_0 = 70.40 (Km/s)Mpc^{-1}$  respectivamente.

## CAPÍTULO 4. EL MODELO ESTÁNDAR DE LA COSMOLOGÍA $\Lambda$ CDM, LA ENERGÍA OSCURA Y LA EXPANSIÓN ACELERADA DEL UNIVERSO.

### 4.2. LA ENERGÍA OSCURA Y LA EXPANSIÓN ACELERADA DEL UNIVERSO.

Este grupo realizó un estudio sobre una muestra de 50 supernovas tipo Ia (SNe Ia) que se encontraban a diversas distancias cosmológicas (corrimiento al rojo entre  $0 \leq z \leq 0.62$  esta muestra era la más numerosa y de mayor corrimiento al rojo que se tenían hasta ese momento). Del análisis descubrieron que las supernovas tipo Ia parecían tener una luminosidad aparente menor de la que predecía el modelo cosmológico más aceptado en aquel tiempo caracterizado por:  $\Omega_{M,0} = 1.0$  y  $\Omega_{r,0} = 0.00005, \Omega_{\Lambda,0} = \Omega_{k,0} = 0.0$ . Revisaron las posibles razones que atenuaban su luminosidad, tales como errores sistemáticos en las mediciones, polvo interestelar o intergaláctico, evolución de la metalicidad, perturbaciones locales en la razón de expansión, lentes gravitacionales, etc. y a pesar de tomar en cuenta estos fenómenos, la luminosidad era de cualquier forma notablemente menor a lo esperado y sin que sus contribuciones lograran explicar el atenuamiento (Ver Figura 4.1).

De aquí se concluyó que el atenuamiento era debido a que las supernovas se encontraban a una distancia mayor de la esperada, es decir, que las supernovas de alto corrimiento al rojo estaban en promedio 10 % – 15 % más distantes que lo que predecía el modelo cosmológico más aceptado de aquel momento, el que suponía además un universo en expansión desacelerada. Al realizar un análisis estadístico con las supernovas para determinar y acotar los valores de  $\Omega_{M,0}$  y  $\Omega_{\Lambda,0}$  encontraron que el modelo cosmológico favorecido (que mejor ajustaba a los datos de supernovas) era el de una constante cosmológica positiva,  $\Omega_{\Lambda,0} > 0$ , con un 99.9 % de nivel de confianza de ( $4\sigma$ ), asumiendo también que  $\Omega_{M,0}$  era positiva con un 99.9 % de nivel de confianza y un universo en expansión acelerada [1](Ver Figura 4.1). Concluyeron que el aparente atenuamiento de la magnitud aparente de las supernovas, o bien, el hecho de que estuvieran más distantes de lo predicho por el modelo cosmológico más aceptado en su tiempo, podría explicarse con la presencia de una constante cosmológica positiva ( $\Omega_{\Lambda,0} \approx 0.7$ , asumiendo  $\Omega_{k,0} = 0.0$ ) y con un universo en una etapa de expansión acelerada [1].

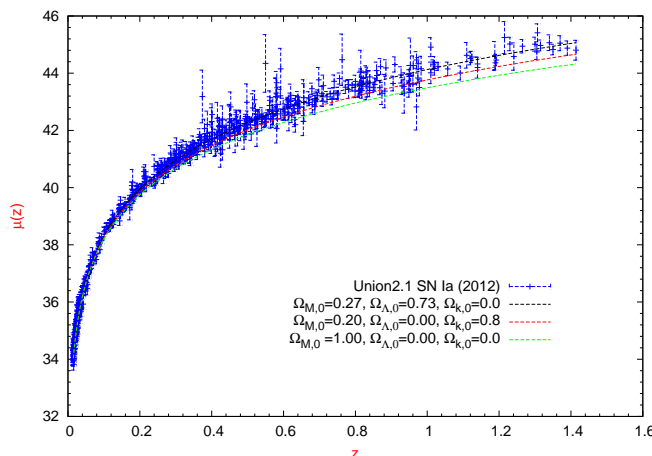


Figura 4.2: Gráfica de la distancia modular  $\mu(z)$  de la muestra de datos de supernovas tipo Ia más reciente y llamada “Union 2.1” del SCP (2012) [3], consta de 580 supernovas. En esta figura se grafican los datos medidos con sus barras de error así como las curvas generadas por tres modelos cosmológicos diferentes. Estas gráficas fueron construídas asumiendo  $\Omega_{r,0} = 0.0$  y  $H_0 = 70.40 (Km/s)Mpc^{-1}$  respectivamente.

# CAPÍTULO 4. EL MODELO ESTÁNDAR DE LA COSMOLOGÍA $\Lambda$ CDM, LA ENERGÍA OSCURA Y LA EXPANSIÓN ACELERADA DEL UNIVERSO.

## 4.2. LA ENERGÍA OSCURA Y LA EXPANSIÓN ACELERADA DEL UNIVERSO.

---

En el mismo año, un grupo liderado por Saul Perlmutter del Lawrence Berkeley National Laboratory, en Berkeley, California, realizó un estudio semejante al de Riess, pero usando sus propias formas de manejar los datos de supernovas y sus propias formas de calibración de los mismos, llega a la misma conclusión: un universo en expansión acelerada y la presencia de una constante cosmológica con una contribución del orden de  $\Omega_{\Lambda,0} \approx 0.7$  [1]. Entre todos los modelos cosmológicos teóricos existentes hoy en día para explicar la expansión acelerada del universo destaca el llamado  $\Lambda$ CDM (Lambda Cold Dark Matter). Este modelo es el que mejor explica las observaciones cosmológicas. El propone que el universo está constituido principalmente por materia oscura fría y una constante cosmológica que se comporta como energía oscura.

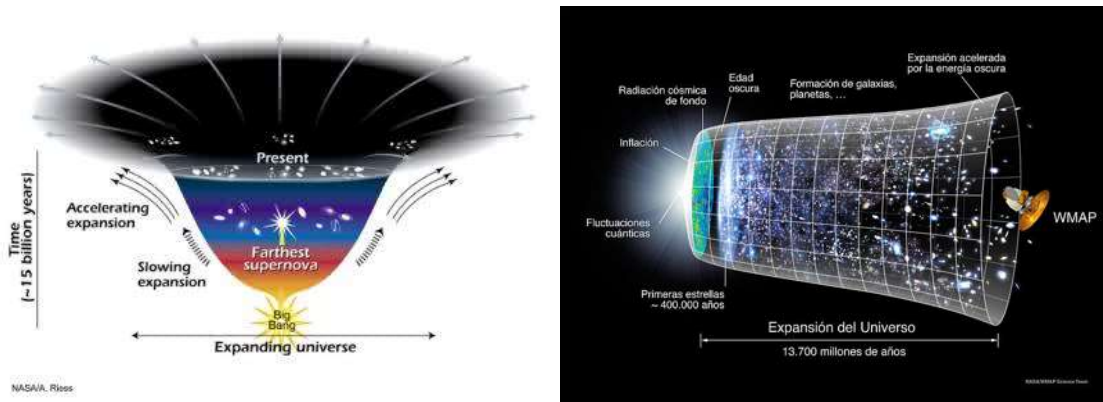


Figura 4.3: Gráfica de la expansión del universo [66].

En general, la existencia de la energía oscura depende del modelo cosmológico que se postule. Por otro lado, la Figura 4.1 muestra los datos observacionales de 580 SNe Ia que forman la llamada muestra “Union 2.1” del SCP (2012) [3], la cual es la más reciente con la que se cuenta hasta hoy en día (Mayo de 2013). En esta figura también se muestra las gráficas de tres modelos cosmológicos particulares, que son  $(\Omega_{M,0} = 0.27, \Omega_{\Lambda,0} = 0.73, \Omega_{k,0} = 0.0)$ ,  $(\Omega_{M,0} = 0.2, \Omega_{\Lambda,0} = 0.0, \Omega_{k,0} = 0.8)$  y  $(\Omega_{M,0} = 1.0, \Omega_{\Lambda,0} = 0.0, \Omega_{k,0} = 0.0)$ . De aquí notamos que los modelos  $(\Omega_{M,0} = 1.0, \Omega_{\Lambda,0} = 0.0, \Omega_{k,0} = 0.0)$  y  $(\Omega_{M,0} = 0.2, \Omega_{\Lambda,0} = 0.0, \Omega_{k,0} = 0.8)$  no ajustan tan finamente los datos de supernovas en comparación al modelo  $(\Omega_{M,0} = 0.27, \Omega_{\Lambda,0} = 0.73, \Omega_{k,0} = 0.0)$ . Es decir, asumiendo un universo constituido únicamente de materia bariónica y oscura (Modelos:  $\Omega_{M,0} = 1.0, \Omega_{\Lambda,0} = 0.0, \Omega_{k,0} = 0.0$  y  $\Omega_{M,0} = 0.2, \Omega_{\Lambda,0} = 0.0, \Omega_{k,0} = 0.8$ ) notamos entonces que las distancias modulares de las supernovas no pueden explicarse satisfactoriamente, esto debido a que el valor observacional de  $\mu$  es mayor que el valor predicho por estos modelos. El análisis estadístico de los datos de supernovas y asumiendo el modelo cosmológico  $\Lambda$ CDM, da como resultado que los valores más probables (que mejor ajustan a los datos) son  $(\Omega_{M,0} = 0.27, \Omega_{\Lambda,0} = 0.73, \Omega_{k,0} = 0.0)$  asumiendo un universo espacialmente plano. Este tipo de análisis estadístico nos permite concluir que efectivamente éste es el modelo que mejor ajusta a los datos de SNe. Entonces, el modelo  $\Lambda$ CDM, indica que el universo está constituido en un 73 % por energía oscura (constante cosmológica).

## CAPÍTULO 4. EL MODELO ESTÁNDAR DE LA COSMOLOGÍA $\Lambda$ CDM, LA ENERGÍA OSCURA Y LA EXPANSIÓN ACELERADA DEL UNIVERSO.

### 4.2. LA ENERGÍA OSCURA Y LA EXPANSIÓN ACELERADA DEL UNIVERSO.

#### 4.2.2. La energía oscura y la edad del universo.

La consecuencia más directa de la existencia de la energía oscura y la aceleración del universo, la analizamos en base a las curvas de edades del universo  $t(z)$  para los siguientes modelos:  $(\Omega_{M,0} = 0.2714, \Omega_{\Lambda,0} = 0.7285, \Omega_{k,0} = 0.0)$  y  $(\Omega_{M,0} = 1.0, \Omega_{\Lambda,0} = 0.0, \Omega_{k,0} = 0.0)$  respectivamente. Estas curvas de edades están definidas como [79]:

$$t(z) = \int_z^{\infty} \frac{d\tilde{z}}{(1 + \tilde{z}) \cdot H(\tilde{z})}. \quad (4.2)$$

En la Figura 4.4[17], notamos que la edad del universo  $t(z = 0)$  predicha por el modelo  $(\Omega_{M,0} = 0.2714, \Omega_{\Lambda,0} = 0.7285, \Omega_{k,0} = 0.0)$  es de unos  $13.7188 \times 10^9$  años, lo cual está en concordancia con los datos del satélite WMAP 7 [10]. Por otro lado, el modelo  $(\Omega_{M,0} = 1.0, \Omega_{\Lambda,0} = 0.0, \Omega_{k,0} = 0.0)$  predice una edad de  $10.1320 \times 10^9$  años. Este resultado está en desacuerdo con la edad de las estrellas más viejas que son posibles de observar en los cúmulos globulares y cuya edad se estima en  $(12.9 \pm 2.9) \times 10^9$  años [80]. Entonces el universo es más antiguo de lo que se creía. Según el modelo  $(\Omega_{M,0} = 1.0, \Omega_{\Lambda,0} = 0.0, \Omega_{k,0} = 0.0)$ , los cosmólogos pensaban que la expansión del universo era desacelerada, debido a la influencia atractiva de la materia (oscura y bariónica). Este modelo tuvo que ser abandonado debido a la paradoja de la edad de las estrellas más antiguas. La densidad de materia oscura en un universo en expansión desaparece más rápidamente que la energía oscura y finalmente domina la energía oscura, es decir, cuando el volumen del universo se dobla, la densidad de materia oscura se divide a la mitad pero la densidad de energía oscura casi permanece sin cambio (exactamente es constante).

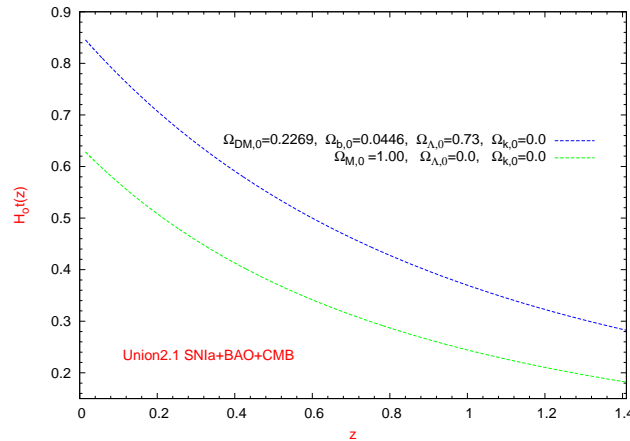


Figura 4.4: Gráfica de las edades del universo usando datos de Union 2.1 SNIa + BAO + CMB. Aquí notamos que el modelo  $\Lambda$ CDM predice una edad de  $13.7188 \times 10^9$  años, lo cual está en concordancia con los datos del satélite WMAP 7. Por el contrario el modelo  $(\Omega_{M,0} = 1.0, \Omega_{\Lambda,0} = 0.0, \Omega_{k,0} = 0.0)$  predice una edad de  $10.1320 \times 10^9$  años, esto está lejos de lo observado. Estas gráficas fueron construídas asumiendo  $\Omega_{r,0} = 0.0$  y  $H_0 = 70.9954 (Km/s)Mpc^{-1}$  respectivamente.

### 4.3. El problema de la coincidencia cósmica

De acuerdo a las predicciones del modelo  $\Lambda$ CDM, el problema de la coincidencia cósmica consiste en el hecho de que los parámetros de densidad de energía de las componentes oscuras son del mismo orden (comparables) hoy en día.

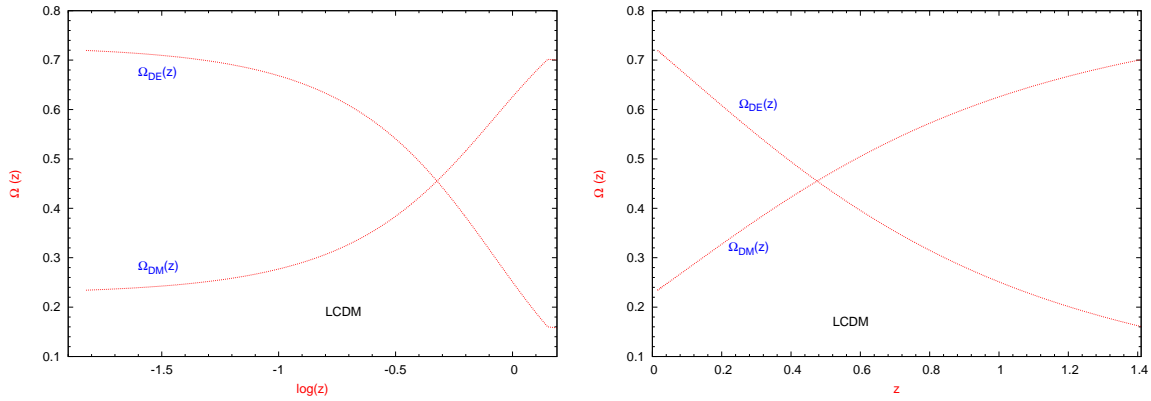


Figura 4.5: La Figura, muestra que para tiempos tempranos ( $z$  grandes) la diferencia entre los parámetros de densidades de las componentes oscuras era mucho mayor ( $\Omega_{DM,0} \gg \Omega_{\Lambda,0}$ ) de lo que es en tiempos tardíos ( $z$  pequeños). La coincidencia de que justamente en tiempos tardíos los parámetros de densidad de energía del sector oscuro son del mismo orden, es decir, que estamos viviendo en una época privilegiada en la cual sucede esta cercanía de valores.



## Capítulo 5

# Tablas de valores para los parámetros del modelo $\Lambda$ CDM.

En este Capítulo vamos a presentar las tablas de valores de los parámetros del modelo  $\Lambda$ CDM (No interactivo) que han sido utilizados para efectuar las reconstrucciones de sus variables cosmológicas, las cuales serán comparadas con las correspondientes variables cosmológicas de los Ensayos 1, 2 y 3 respectivamente.

### 5.1. Valores escogidos para los parámetros del modelo $\Lambda$ CDM

El Cuadro 5.1, muestra los valores escogidos “priors” delta de Dirac para los parámetros del modelo  $\Lambda$ CDM, las cuales nos permitirán reconstruir sus variable cosmológicas tales como: el parámetro de desaceleración  $q(z)$  y los parámetros de densidad de energía de las componentes oscuras ( $\Omega_{DM}$  y  $\Omega_{DE}$ ). Para analizar los efectos de la interacción entre las componentes oscuras, comparamos las curvas reconstruídas del modelo  $\Lambda$ CDM con las correspondientes curvas de las variables cosmológicas del Ensayo 1.

El Cuadro 5.2 muestra los mejores estimados para los parámetros del modelo  $\Lambda$ CDM, los cuales fueron calculados usando tres pruebas observacionales: Union 2.1 SNIa + BAO + CMB, la técnica descrita en la Subsección 3.8.2 y las ecuaciones (3.126-3.127). Los valores mejor ajustados nos servirán para reconstruir sus variables cosmológicas tales como: el parámetro de desaceleración  $q(z)$  y los parámetros de densidad de energía de las componentes oscuras ( $\Omega_{DM}$  y  $\Omega_{DE}$ ). Para analizar los efectos de la interacción entre las componentes oscuras, comparamos las curvas reconstruídas del modelo  $\Lambda$ CDM con las correspondientes curvas de las variables cosmológicas de los Ensayos 2 y 3 respectivamente. Al final de esta tabla, también mostramos los mejores estimados de los parámetros  $\Omega_{b,0}$  y  $\Omega_{r,0}$  con sus respectivos errores a  $1\sigma$ .

**CAPÍTULO 5. TABLAS DE VALORES PARA LOS PARÁMETROS DEL  
MODELO  $\Lambda$ CDM.**

5.1. VALORES ESCOGIDOS PARA LOS PARÁMETROS DEL MODELO  $\Lambda$ CDM

**Tabla del modelo  $\Lambda$ CDM**

Valores escogidos para los parámetros  $\Omega_{DM,0}, w$  y  $H_0$ .

Parámetros del Modelo	Prior delta de Dirac
$\Omega_{DM,0}$	+0.2338
$\Omega_{b,0}$	+0.0462
$\Omega_{r,0}$	$+4.62 \times 10^{-5}$
$w$	-1.0
$H_0(km/s)Mpc^{-1}$	+72.0
$\tilde{\chi}_{min}^2$	541.8588

Cuadro 5.1: Resumen de valores de los “priors” delta de Dirac escogidos para los parámetros del modelo  $\Lambda$ CDM.

**Tabla del modelo  $\Lambda$ CDM, usando Union 2.1 SNIa+ BAO+ CMB**

Mejores estimados de los parámetros  $\Omega_{DM,0}, w_0$  y  $H_0$ .

Parámetros del Modelo	Mejores estimados	$\pm 1\sigma$	$\pm 2\sigma$
$\Omega_{DM,0}$	0.2269	+0.0024 -0.0025	+0.0066 -0.0126
$H_0(km/s)Mpc^{-1}$	70.9954	+1.4384 -0.4879	+2.4446 -1.4654
$\tilde{\chi}_{min}^2$	567.5023	—	—

Cuadro 5.2: Resumen de los mejores estimados de los parámetros del modelo  $\Lambda$ CDM, así como de sus errores a  $1\sigma$  y  $2\sigma$ . Usando la técnica descrita en la Subsección 3.8.2 y las ecuaciones (3.126)-(3.127) hemos encontrado que  $\Omega_{b,0} = 0.0446^{+0.0018}_{-0.0010}$  y  $\Omega_{r,0} = 8.2803 \times 10^{-5} {}^{+3.355 \times 10^{-6}}_{-1.138 \times 10^{-6}}$  respectivamente.

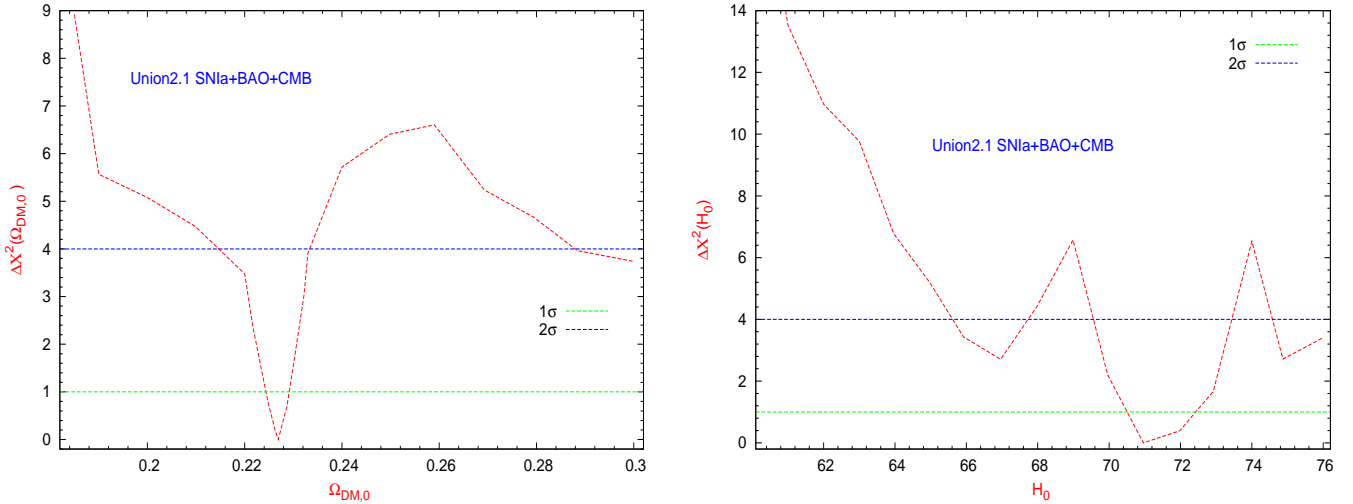


Figura 5.1: Mejores estimados y sus intervalos de confianza a  $1\sigma$  y  $2\sigma$  de los parámetros  $\Omega_{DM,0}$  y  $H_0$  del modelo  $\Lambda$ CDM.

## Capítulo 6

# Resultados de la reconstrucción del término de interacción $Q(z)$ .

En este Capítulo presentaremos los resultados numéricos obtenidos de las simulaciones realizadas para cada uno de los “Ensayos” estudiados en el Capítulo 2. Cabe mencionar que el Ensayo 1 es el más extenso porque se trabajó cuatros modelos teóricos diferentes, en cambio para los Ensayos 2 y 3 se trabajó un solo modelo respectivamente.

### 6.1. Ensayo 1: Reconstrucción de $Q(z) \equiv \rho_{c,0} \cdot (1+z)^3 \cdot H(z) \cdot I_Q(z)$ .

En esta parte, presentamos una tabla de los modelos cosmológicos estudiados I, II, III y IV. Para el modelo I sin interacción, el único parámetro libre a ser estimado es  $\theta = \{w\}$ , mientras que para los modelos con interacción II, III y IV los parámetros libres son  $\theta = \{\lambda_0, \dots, \lambda_N\}$ ,  $\theta = \{w, \lambda_0, \dots, \lambda_N\}$  y  $\theta = \{w, \Omega_{DM,0}, \lambda_0, \dots, \lambda_N\}$  respectivamente, donde  $N$  toma los valores  $N = 1, 2, 3, 4, 5$ . En estos últimos modelos, la función de interacción  $I_Q(z)$  se reconstruyó usando una expansión de los polinomios de Chebyshev, así como los datos observacionales de supernovas del tipo Ia “Union2” [2] y los “priors” descritos en la Subsección 3.8.1. En cada uno de los modelos teóricos de este Ensayo 1, hemos obtenido los mejores estimados de los parámetros y sus correspondientes  $\tilde{\chi}_{min}^2$ .

En la Figura 6.1 para el Modelo II graficamos los errores a  $1\sigma$  y  $2\sigma$  sobre todos los pares de parámetros tomados desde el conjunto  $\{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2\}$  y marginalizando sobre uno de

**Modelos**

Modelos	$\Omega_{DM,0}$	Parámetro $w$	Función de interacción
Modelo I	0.233 (fijo)	constante	$I_Q(z) \equiv 0$
Modelo II	0.233 (fijo)	-1	$I_Q(z) \neq 0$
Modelo III	0.233 (fijo)	constante	$I_Q(z) \neq 0$
Modelo IV	parámetro libre	constante	$I_Q(z) \neq 0$

Cuadro 6.1: Resumen de los modelo estudiados. En los modelos II, III y IV la función de interacción  $I_Q(z)$  será reconstruída. En cambio para el modelo I no existe interacción.

## CAPÍTULO 6. RESULTADOS DE LA RECONSTRUCCIÓN DEL TÉRMINO DE INTERACCIÓN $Q(Z)$ .

### 6.1. ENSAYO 1: RECONSTRUCCIÓN DE $Q(Z) \equiv \rho_{C,0} \cdot (1 + Z)^3 \cdot H(Z) \cdot I_Q(Z)$ .

---

ellos. Lo mismo es graficado en la Figura 6.2 para el modelo III pero con los parámetros tomados desde el conjunto  $\{w, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2\}$  y marginalizando sobre dos de ellos. Además, en la Figura 6.3, un similar procedimiento es aplicado para el modelo IV con los parámetros tomados desde el conjunto  $\{w, \Omega_{DM,0}, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2\}$  y marginalizando sobre tres de ellos.

La Figura 6.4 muestra la reconstrucción de la función de interacción adimensional  $I_Q(z)$  como una función del corrimiento al rojo para los modelos II (correspondiendo a un parámetro de ecuación de estado de energía oscura (EOS)  $w = -1$ ), III (correspondiendo a un parámetro de ecuación de estado de energía oscura (EOS)  $w = \text{constante}$  y  $\Omega_{DM,0}$  fijo) y IV (correspondiendo a un parámetro de ecuación de estado de energía oscura (EOS)  $w = \text{constant}$  y  $\Omega_{DM,0}$  como un parámetro libre a ser estimado) respectivamente.

En la Figura 6.4, notamos que para todos los modelos en interacción, los mejores estimados de la función de interacción  $I_Q(z)$  cruzan marginalmente la línea  $I_Q(z) = 0$  durante la evolución cosmológica presente (alrededor  $z \approx 0.08$ ) cambiando de signo desde valores positivos en el pasado (energía transferida desde la energía oscura hacia la materia oscura) a valores negativos en el presente (energía transferida desde la materia oscura hacia la energía oscura). Sin embargo, tomando en cuenta los errores correspondientes para el ajuste con tres parámetros ( $N = 2$ ), notamos que, dentro de los errores a  $1\sigma$  y  $2\sigma$ , existe la posibilidad de cruzar la línea de no interacción en el pasado reciente en el rango  $z \in (0.04, 0.16)$ .

Cruces de la línea de no-interacción  $Q(z) = 0$  han sido recientemente reportados por [60] (con un término de interacción  $Q(z)$  proporcional al parámetro de Hubble) y [59] (donde se asume que el término de interacción  $Q(z)$  no sea proporcional al parámetro de Hubble), aunque la dirección del cambio encontrado en nuestro trabajo es contraria a los resultados publicados por Li y Zhang [59], donde un cruce (desde valores negativos en el pasado hasta valores positivos en el presente) fue encontrada en  $z \simeq 0.2 - 0.3$  con un término de interacción que depende linealmente del factor de escala y con dos parámetros. Por otro lado, no encontramos el comportamiento oscilatorio del término de interacción encontrado por Cai y Su [60] quienes, usando datos observacionales en el rango  $z \in [0, 1.8]$ , ajustaron un esquema en el cual el rango total del corrimiento al rojo está dividido en un determinado número de bins y la función de interacción se fijó como constante en cada bin.

Recientemente, se ha encontrado que un cruce de la línea de no-interacción ( $Q(z) = 0$ ) cuando la transferencia de energía va desde DM a DE, puede estar en conflicto con la segunda ley de la termodinámica [81]. Además, en el contexto de los escenarios de rebote “bouncing” de energía oscura, una posible inversión del flujo de energía desde DM a DE ha sido encontrado en términos de un cambio de signo del gradiente de un campo escalar [82], el cual no ha sido considerado aquí.

Asimismo, en esta Figura 6.4 apreciamos que en el intervalo  $z \in [0, 1.4]$ , la función de interacción está en el rango  $I_Q \in [-0.02, 0.4]$  correspondiendo a un error  $2\sigma$ . El orden de magnitud de esta interacción está en concordancia con las restricciones locales halladas con la intensidad de una interacción adimensional constante derivada de una muestra de masas viriales de cúmulos de galaxias, obtenida usando lentes gravitacionales débiles, rayos X y datos ópticos [83] ([58]-[59]) respectivamente.

## CAPÍTULO 6. RESULTADOS DE LA RECONSTRUCCIÓN DEL TÉRMINO DE INTERACCIÓN $Q(Z)$ .

### 6.1. ENSAYO 1: RECONSTRUCCIÓN DE $Q(Z) \equiv \rho_{C,0} \cdot (1 + Z)^3 \cdot H(Z) \cdot I_Q(Z)$ .

#### Modelo I: $w = \text{constante}$ .

Mejor estimado del parámetro  $w$ .

Errores	$\pm 1\sigma$	$\pm 2\sigma$
$\omega$	$-1.243^{+0.031}_{-0.037}$	$-1.243^{+0.064}_{-0.072}$

Cuadro 6.2: Mejor estimado del parámetro  $w$  del modelo I. Estos valores fueron calculados a través de un Análisis de Estadística Bayesiana, usando datos de supernovas del tipo Ia “Union2”. Dando  $\tilde{\chi}_{min}^2 = 562.51$ .

Sin embargo, usando el reciente estudio de los ajustes de datos de la muestra Constitución de supernovas del tipo Ia [1], de las medidas de distancia de BAO [7], de la prueba de las anisotropías de la radiación cósmica de fondo (CMB) [10] y de las restricciones actuales de la constante cosmológica, así como las restricciones actuales de la constante cosmológica, se ha logrado poner fuertes restricciones para las magnitudes de tales intensidades adimensionales, siendo ellas del orden de  $\xi \approx [10^{-4} - 10^{-2}]$  [84] (restricciones más recientes pueden ser vistas en [85]-[86]).

La Figura 6.5 muestra que, para todos los modelos con interacción presentados en este Ensayo 1, los mejores estimados de los parámetros densidad de energía oscura  $\Omega_{DE}^*(z)$  llegan a ser positivos en todo el rango del corrimiento al rojo considerado. Esta declaración es definitiva, el cual muestra que dentro de los errores  $1\sigma$  y  $2\sigma$  para el ajuste con tres parámetros ( $N = 2$ ), el  $\Omega_{DE}^*(z)$  llega a ser también positivo en todo ese rango (recuerde que hemos trabajado aquí solamente con datos de supernova del tipo Ia, las cuales son caracterizadas por sus errores sistemáticos [87]-[89]). No obstante, mencionamos que el error  $1\sigma$  llegará a ser más grande si el número de parámetros libres para el ajuste se incrementa; un hecho ya descrito en [90] como “el costo de la compresión”.

La Figura 6.6 muestra la reconstrucción del parámetro de desaceleración  $q(z)$  para el ajuste con  $N = 2$  parámetros y sus errores a  $1\sigma$  y  $2\sigma$  respectivamente. Esta Figura también muestra que, en todos los modelos de este Ensayo, existe una transición desde una era de desaceleración en tiempos tempranos dominada por la materia bariónica hasta una era de aceleración en tiempos tardíos correspondiendo a un dominio de la energía oscura en el presente. En esta última época, el parámetro densidad de energía oscura llega a ser  $\Omega_{DE,0}(z) \approx 0.7$  como puede verse en la Figura 6.5, el cual es suficientemente grande para generar una función de interacción adimensional no despreciable del orden de  $I_Q^0 \approx -10^{-2}$ , como se muestra en la Figura 6.4.

Para estudiar el “Problema de Coincidencia Cósmica”, en la Figura 6.7, graficamos el cociente de los mejores estimados de los parámetros de densidad de energía de las componentes oscuras  $\Omega_{DE}^*(z)/\Omega_{DM}^*(z)$  de los modelos II (panel superior izquierdo), III (panel superior derecho) y IV (panel inferior izquierdo) respectivamente. De todos los gráficos de esta Figura 6.7 vemos que el “Problema de Coincidencia Cósmica” no se resuelve ni se alivia.

**CAPÍTULO 6. RESULTADOS DE LA RECONSTRUCCIÓN DEL TÉRMINO DE INTERACCIÓN  $Q(Z)$ .**

**6.1. ENSAYO 1: RECONSTRUCCIÓN DE  $Q(Z) \equiv \rho_{C,0} \cdot (1 + Z)^3 \cdot H(Z) \cdot I_Q(Z)$ .**

**Modelo II:  $w = -1$ .**

Mejores estimados de los parámetros  $\lambda_n$ .

	$N = 1$	$N = 2$	$N = 3$	$N = 4$	$N = 5$
$\lambda_0$	$-1.46 \times 10^{-2}$	$-1.43 \times 10^{-2}$	$-1.40 \times 10^{-2}$	$-1.37 \times 10^{-2}$	$-1.32 \times 10^{-2}$
$\lambda_1$	$2.47 \times 10^{-1}$	$2.48 \times 10^{-1}$	$2.50 \times 10^{-1}$	$2.51 \times 10^{-1}$	$2.52 \times 10^{-1}$
$\lambda_2$	0.0	$1.810 \times 10^{-3}$	$1.800 \times 10^{-3}$	$2.0 \times 10^{-3}$	$1.801 \times 10^{-3}$
$\lambda_3$	0.0	0.0	$1.07 \times 10^{-5}$	$2.60 \times 10^{-5}$	$4.98 \times 10^{-5}$
$\lambda_4$	0.0	0.0	0.0	$1.07 \times 10^{-6}$	$3.29 \times 10^{-6}$
$\lambda_5$	0.0	0.0	0.0	0.0	$1.0 \times 10^{-7}$
$\tilde{\chi}_{min}^2$	544.80	544.72	544.58	544.48	544.36

Cuadro 6.3: Resumen de los mejores estimados de los coeficientes adimensionales  $\lambda_n$  de la expansión de la función de interacción del modelo II correspondiendo a un parámetro de ecuación de estado de energía oscura interactuante  $w = -1$ . Los mejores estimados fueron calculados a través de un Análisis de Estadística Bayesiana usando datos de supernovas tipo Ia. El número  $N$  en lo alto de cada columna indica el número máximo de polinomios de Chebyshev usados en la expansión (2.46) de la función de acoplamiento  $I_Q(z)$  partiendo desde  $N = 1$ . Las Figuras 6.4, 6.5 y 6.6 (paneles superiores izquierdo), muestran las reconstrucciones de las diferentes variables cosmológicas usando los mejores estimados desde  $N = 1$  hasta  $N = 5$ . Además, ellas también muestran las reconstrucciones de las variables cosmológicas usando los mejores estimados para  $N = 2$  y sus intervalos de confianza correspondientes a  $1\sigma$  y  $2\sigma$ .

**Modelo II:  $w = -1$ .**

Marginalización sobre  $\lambda_2$ .

$\lambda_0$	-0.0123
$\lambda_1$	+0.210
$\tilde{\chi}_{min}^2$	554.2195

Marginalización sobre  $\lambda_0$ .

$\lambda_1$	+0.2296
$\lambda_2$	-0.0011
$\tilde{\chi}_{min}^2$	554.1864

Cuadro 6.4: Resumen de los mejores estimados de los coeficientes adimensionales  $\lambda_n$ ,  $n = 0, 1, 2$  obtenidos en la marginalización. Hemos considerado intervalos de integración lo suficientemente amplios de manera que contengan a las densidades de probabilidad de cada uno de los parámetros marginalizados.

**Modelo II:  $w = -1$ .**

Errores	$\pm 1\sigma$	$\pm 2\sigma$
$\lambda_0$	$-1.43 \times 10^{-2} {}^{+0.0142}_{-0.0820}$	$-1.43 \times 10^{-2} {}^{+0.0189}_{-0.0883}$
$\lambda_1$	$+2.48 \times 10^{-1} {}^{+0.1872}_{-0.0728}$	$+2.48 \times 10^{-1} {}^{+0.2063}_{-0.097}$
$\lambda_2$	$+1.81 \times 10^{-3} {}^{+0.0018}_{-0.0194}$	$+1.81 \times 10^{-3} {}^{+0.0035}_{-0.0195}$

Cuadro 6.5: Resumen de los errores a  $1\sigma$  y  $2\sigma$  de los mejores estimados para  $N = 2$ .

## CAPÍTULO 6. RESULTADOS DE LA RECONSTRUCCIÓN DEL TÉRMINO DE INTERACCIÓN $Q(Z)$ .

### 6.1. ENSAYO 1: RECONSTRUCCIÓN DE $Q(Z) \equiv \rho_{C,0} \cdot (1 + Z)^3 \cdot H(Z) \cdot I_Q(Z)$ .

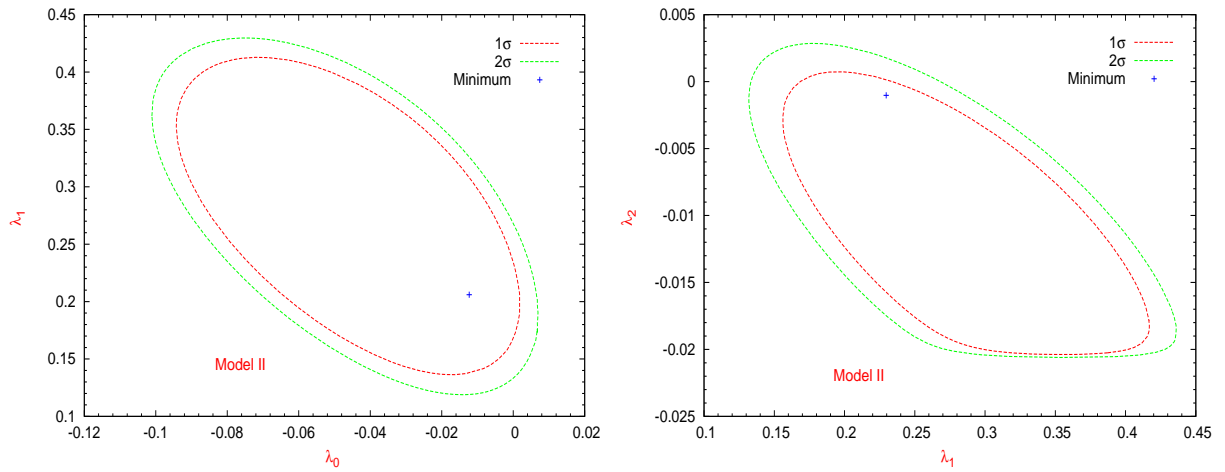


Figura 6.1: Mejores estimados y sus intervalos de confianza a  $1\sigma$  y  $2\sigma$  de la densidad de probabilidad marginalizada del modelo II usando una expansión en términos de los primeros polinomios de Chebyshev  $N = 2$ . Antes de la marginalización, tenemos tres parámetros libres ( $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ ). En cada figura, marginalizamos en uno de los dos parámetros restantes.

Debemos mencionar que, en el modelo III, la Figura 6.2, muestra que la región preferida por el parámetro de ecuación de estado  $w$  está totalmente contenida en la región fantasma. Esto es debido al hecho que hemos considerado solamente para nuestro ajuste de parámetros datos de supernovas, las cuales están afectadas por errores sistemáticos [87]-[88], [89]. En efecto, algunos estudios muestran que existe la posibilidad de un cruce de la línea fantasma [91]. Por el contrario, para el modelo IV, los paneles superiores de la Figura 6.3 muestran que los errores a  $1\sigma$  y  $2\sigma$  del parámetro de ecuación de estado  $w$  tiene una alta probabilidad de existir en la región de quintaesencia.

**CAPÍTULO 6. RESULTADOS DE LA RECONSTRUCCIÓN DEL TÉRMINO DE INTERACCIÓN  $Q(Z)$ .**

**6.1. ENSAYO 1: RECONSTRUCCIÓN DE  $Q(Z) \equiv \rho_{C,0} \cdot (1 + Z)^3 \cdot H(Z) \cdot I_Q(Z)$ .**

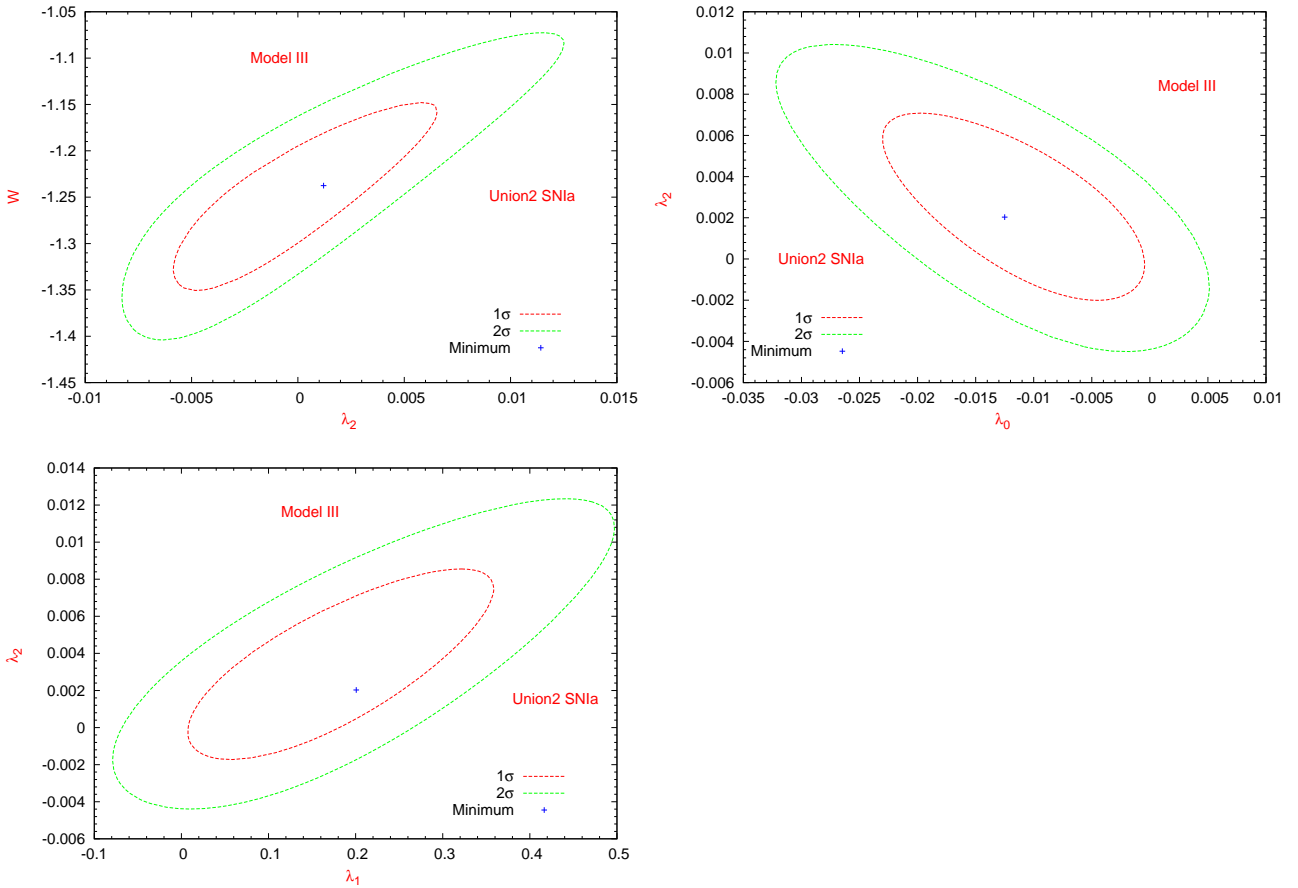


Figura 6.2: Mejores estimados y los intervalos de confianza a  $1\sigma$  y  $2\sigma$  de la densidad de probabilidad marginalizada del modelo III usando una expansión en términos de los primeros polinomios de Chebyshev  $N = 2$ . Antes de la marginalización, tenemos cuatro parámetros libres ( $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, w$ ). En cada figura, marginalizamos en los últimos dos parámetros restantes. Note que la región preferida por el parámetro de ecuación de estado  $w$  está en la región fantasma.



**CAPÍTULO 6. RESULTADOS DE LA RECONSTRUCCIÓN DEL TÉRMINO DE INTERACCIÓN  $Q(Z)$ .**

6.1. ENSAYO 1: RECONSTRUCCIÓN DE  $Q(Z) \equiv \rho_{C,0} \cdot (1 + Z)^3 \cdot H(Z) \cdot I_Q(Z)$ .

**Modelo III:  $w = \text{constante}$ .**

Mejores estimados de los parámetros  $\lambda_n$  and  $w$ .

	$N = 1$	$N = 2$	$N = 3$	$N = 4$	$N = 5$
$\lambda_0$	$-2.32 \times 10^{-2}$	$-1.85 \times 10^{-2}$	$-1.80 \times 10^{-2}$	$-1.70 \times 10^{-2}$	$-1.58 \times 10^{-2}$
$\lambda_1$	$2.46 \times 10^{-1}$	$2.48 \times 10^{-1}$	$2.49 \times 10^{-1}$	$2.50 \times 10^{-1}$	$2.51 \times 10^{-1}$
$\lambda_2$	0.0	$1.80 \times 10^{-3}$	$1.78 \times 10^{-3}$	$1.70 \times 10^{-3}$	$1.62 \times 10^{-3}$
$\lambda_3$	0.0	0.0	$1.06 \times 10^{-5}$	$1.07 \times 10^{-5}$	$1.05 \times 10^{-5}$
$\lambda_4$	0.0	0.0	0.0	$1.0 \times 10^{-6}$	$1.19 \times 10^{-6}$
$\lambda_5$	0.0	0.0	0.0	0.0	$1.0 \times 10^{-7}$
$w$	-1.080	-1.068	-1.065	-1.064	-1.063
$\tilde{\chi}_{min}^2$	543.52	543.42	543.40	543.38	543.36

Cuadro 6.6: Resumen de los mejores estimados de los parámetros del modelo III, correspondiendo a un parámetro de energía oscura interactuante  $w = \text{constant}$  y  $\Omega_{DM,0} = 0.233$ . Las Figuras 6.4, 6.5 y 6.6, muestran las reconstrucciones de las diferentes variables cosmológicas usando los mejores estimados hasta  $N = 5$ . Además, ellas también muestran las reconstrucciones de las variables cosmológicas usando los mejores estimados para  $N = 2$  y sus intervalos de confianza a  $1\sigma$  y  $2\sigma$  respectivamente.

**Modelo III:  $w = \text{constante}$ .**

Marginalización sobre  $\lambda_1$  y  $w$ .

$\lambda_0$	-0.0125
$\lambda_2$	+0.0021
$\tilde{\chi}_{min}^2$	556.3626

Marginalización sobre  $\lambda_0$  y  $w$ .

$\lambda_1$	+0.2007
$\lambda_2$	+0.0020
$\tilde{\chi}_{min}^2$	556.3441

Marginalización sobre  $\lambda_0$  y  $\lambda_1$ .

$\lambda_2$	+0.0012
$w$	-1.2370
$\tilde{\chi}_{min}^2$	553.7487

Cuadro 6.7: Resumen de los mejores estimados de los coeficientes adimensionales  $\lambda_n$ ,  $n = 0, 1, 2$  y  $w$  obtenidos en la marginalización. Hemos considerado intervalos de integración lo suficientemente amplios de manera que contengan a las densidades de probabilidad de cada uno de los parámetros marginalizados.

**Modelo III:  $w = \text{constante}$ .**

Errores	$\pm 1\sigma$	$\pm 2\sigma$
$\lambda_0$	$-1.85 \times 10^{-2} \begin{smallmatrix} +0.0119 \\ -0.0104 \end{smallmatrix}$	$-1.85 \times 10^{-2} \begin{smallmatrix} +0.0172 \\ -0.0195 \end{smallmatrix}$
$\lambda_1$	$+2.48 \times 10^{-1} \begin{smallmatrix} +0.1581 \\ -0.1923 \end{smallmatrix}$	$+2.48 \times 10^{-1} \begin{smallmatrix} +0.2972 \\ -0.2788 \end{smallmatrix}$
$\lambda_2$	$+1.80 \times 10^{-3} \begin{smallmatrix} +0.0051 \\ -0.0041 \end{smallmatrix}$	$+1.80 \times 10^{-3} \begin{smallmatrix} +0.0084 \\ -0.0066 \end{smallmatrix}$
$w$	$-1.068 \begin{smallmatrix} +0.0894 \\ -0.1130 \end{smallmatrix}$	$-1.068 \begin{smallmatrix} +0.1775 \\ -0.1668 \end{smallmatrix}$

Cuadro 6.8: Resumen de los errores a  $1\sigma$  y  $2\sigma$  de los mejores estimados para  $N = 2$ .

**CAPÍTULO 6. RESULTADOS DE LA RECONSTRUCCIÓN DEL TÉRMINO DE INTERACCIÓN  $Q(Z)$ .**

**6.1. ENSAYO 1: RECONSTRUCCIÓN DE  $Q(Z) \equiv \rho_{C,0} \cdot (1 + Z)^3 \cdot H(Z) \cdot I_Q(Z)$ .**

**Modelo IV:  $w = \text{constante}$  y  $\Omega_{DM,0} = \text{constante}$**   
Mejores estimados de los parámetros  $\lambda_n$ ,  $w$  y  $\Omega_{DM,0}$ .

	$N = 1$	$N = 2$	$N = 3$	$N = 4$	$N = 5$
$\lambda_0$	$-1.0041 \times 10^{-2}$	$-1.0045 \times 10^{-2}$	$-1.0050 \times 10^{-2}$	$-1.0046 \times 10^{-2}$	$-1.0042 \times 10^{-2}$
$\lambda_1$	$2.41 \times 10^{-1}$	$2.38 \times 10^{-1}$	$2.351 \times 10^{-1}$	$2.3509 \times 10^{-1}$	$2.3500 \times 10^{-1}$
$\lambda_2$	0.0	$2.17 \times 10^{-3}$	$2.25 \times 10^{-3}$	$2.292 \times 10^{-3}$	$2.294 \times 10^{-3}$
$\lambda_3$	0.0	0.0	$1.06 \times 10^{-5}$	$1.06 \times 10^{-5}$	$1.90 \times 10^{-5}$
$\lambda_4$	0.0	0.0	0.0	$1.0 \times 10^{-6}$	$1.80 \times 10^{-6}$
$\lambda_5$	0.0	0.0	0.0	0.0	$1.0 \times 10^{-7}$
$w$	-0.979	-0.973	-0.968	-0.964	-0.96
$\Omega_{DM,0}$	0.21	0.207	0.205	0.204	0.202
$\tilde{\chi}_{min}^2$	542.77	542.73	542.71	542.70	542.69

Cuadro 6.9: Resumen de los mejores estimados de los parámetros del modelo IV correspondiendo a un parámetro de ecuación de estado  $w = \text{constante}$  y  $\Omega_{DM,0}$  como un parámetro libre a ser estimado. Las Figuras 6.4, 6.5 y 6.6, muestran las reconstrucciones de las diferentes variables cosmológicas usando los mejores estimados hasta  $N = 5$ . Además, ellas también muestran las reconstrucciones de las variables cosmológicas usando los mejores estimados para  $N = 2$  y sus intervalos de confianza a  $1\sigma$  y  $2\sigma$  respectivamente.

La Figura 6.8 muestra la superposición de los mejores estimados de la función de interacción adimensional  $I_Q(z)$  (panel superior izquierdo), los parámetros de densidad de energía de las componentes oscuras  $\Omega_{DM}^*(z)$ ,  $\Omega_{DE}^*(z)$  (panel superior derecho) y los parámetros de desaceleración  $q(z)$  (panel inferior izquierdo) como una función del corrimiento al rojo para los modelos I, II, III, IV y comparados con el modelo  $\Lambda$ CDM respectivamente.

Finalmente, hacemos hincapié que todas las Figuras muestran la superposición de los mejores estimados de cada variable cosmológica usando una expansión de la función de interacción  $I_Q(z)$  en términos de los parámetros  $\lambda_n$  y de los correspondientes polinomios de Chebyshev (2.46) desde  $N = 1$  hasta  $N = 5$ . Las Tablas 6.3, 6.6 y 6.9, muestran los valores de los mejores ajustes de los parámetros y el mínimo de la función  $\tilde{\chi}_{min}^2$  para los modelos II, III y IV respectivamente. En estas tablas, notamos también la rápida convergencia de los mejores estimados cuando el número de parámetros  $N$  es incrementado en la expansión (2.46).

**CAPÍTULO 6. RESULTADOS DE LA RECONSTRUCCIÓN DEL TÉRMINO DE INTERACCIÓN  $Q(Z)$ .**

**6.1. ENSAYO 1: RECONSTRUCCIÓN DE  $Q(Z) \equiv \rho_{C,0} \cdot (1 + Z)^3 \cdot H(Z) \cdot I_Q(Z)$ .**

---

**Modelo IV:  $w = \text{constante}$  y  $\Omega_{DM,0} = \text{constante}$ .**  
Marginalización sobre  $\lambda_0, \lambda_1$  y  $\lambda_2$ .

$\Omega_{DM,0}$	+0.2078
$w$	-0.9982
$\tilde{\chi}_{min}^2$	538.0036
Marginalización sobre $\lambda_1, \Omega_{DM,0}$ y $w$ .	
$\lambda_2$	+0.0022
$\lambda_0$	-0.0098
$\tilde{\chi}_{min}^2$	553.3908
Marginalización sobre $\lambda_2, \Omega_{DM,0}$ y $w$ .	
$\lambda_0$	+0.0118
$\lambda_1$	+0.2223
$\tilde{\chi}_{min}^2$	523.7919

Cuadro 6.10: Resumen de los mejores estimados de los coeficientes adimensionales  $\lambda_n$ ,  $n = 0, 1, 2$ ,  $w$  y  $\Omega_{DM,0}$  obtenidos en la marginalización. Hemos considerado intervalos de integración lo suficientemente amplios de manera que contengan a las densidades de probabilidad de cada uno de los parámetros marginalizados.

**Modelo IV:  $w = \text{constante}$  y  $\Omega_{DM,0} = \text{constante}$ .**

Errores	$\pm 1\sigma$	$\pm 2\sigma$
$\lambda_0$	$-1.00 \times 10^{-2} \begin{smallmatrix} +0.0068 \\ -0.0286 \end{smallmatrix}$	$-1.00 \times 10^{-2} \begin{smallmatrix} +0.0123 \\ -0.0433 \end{smallmatrix}$
$\lambda_1$	$+2.38 \times 10^{-1} \begin{smallmatrix} +0.2434 \\ -0.2415 \end{smallmatrix}$	$+2.38 \times 10^{-1} \begin{smallmatrix} +0.3997 \\ -0.3978 \end{smallmatrix}$
$\lambda_2$	$+2.17 \times 10^{-3} \begin{smallmatrix} +0.0119 \\ -0.0028 \end{smallmatrix}$	$+2.17 \times 10^{-3} \begin{smallmatrix} +0.0173 \\ -0.0069 \end{smallmatrix}$
$w$	$-0.973 \begin{smallmatrix} +0.0619 \\ -0.416 \end{smallmatrix}$	$-0.973 \begin{smallmatrix} +0.1038 \\ -0.6087 \end{smallmatrix}$
$\Omega_{DM,0}$	$+0.207 \begin{smallmatrix} +0.1352 \\ -0.0454 \end{smallmatrix}$	$+0.207 \begin{smallmatrix} +0.1668 \\ -0.0827 \end{smallmatrix}$

Cuadro 6.11: Resumen de los errores a  $1\sigma$  y  $2\sigma$  de los mejores estimados para  $N = 2$ .

**CAPÍTULO 6. RESULTADOS DE LA RECONSTRUCCIÓN DEL TÉRMINO  
DE INTERACCIÓN  $Q(Z)$ .**

6.1. ENSAYO 1: RECONSTRUCCIÓN DE  $Q(Z) \equiv \rho_{C,0} \cdot (1 + Z)^3 \cdot H(Z) \cdot I_Q(Z)$ .

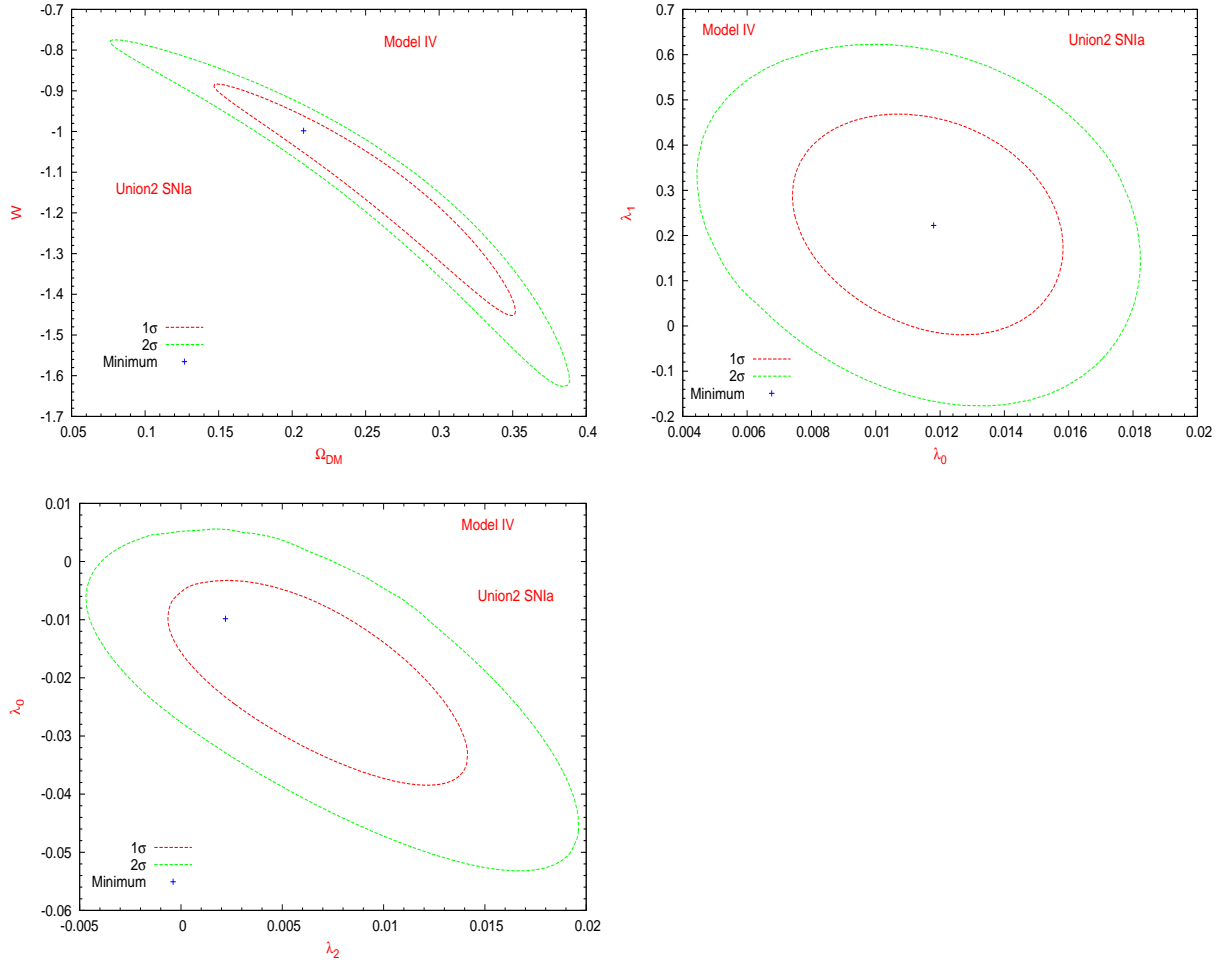


Figura 6.3: Mejores estimados y sus intervalos de confianza a  $1\sigma$  y  $2\sigma$  de la densidad de probabilidad marginalizada del modelo IV usando una expansión en términos de los primeros polinomios de Chebyshev  $N = 2$ . Antes de la marginalización, tenemos cinco parámetros libres ( $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, w, \Omega_{DM,0}$ ). En cada figura, marginalizamos en los últimos tres parámetros restantes.

## CAPÍTULO 6. RESULTADOS DE LA RECONSTRUCCIÓN DEL TÉRMINO DE INTERACCIÓN $Q(Z)$ .

### 6.1. ENSAYO 1: RECONSTRUCCIÓN DE $Q(Z) \equiv \rho_{C,0} \cdot (1 + Z)^3 \cdot H(Z) \cdot I_Q(Z)$ .

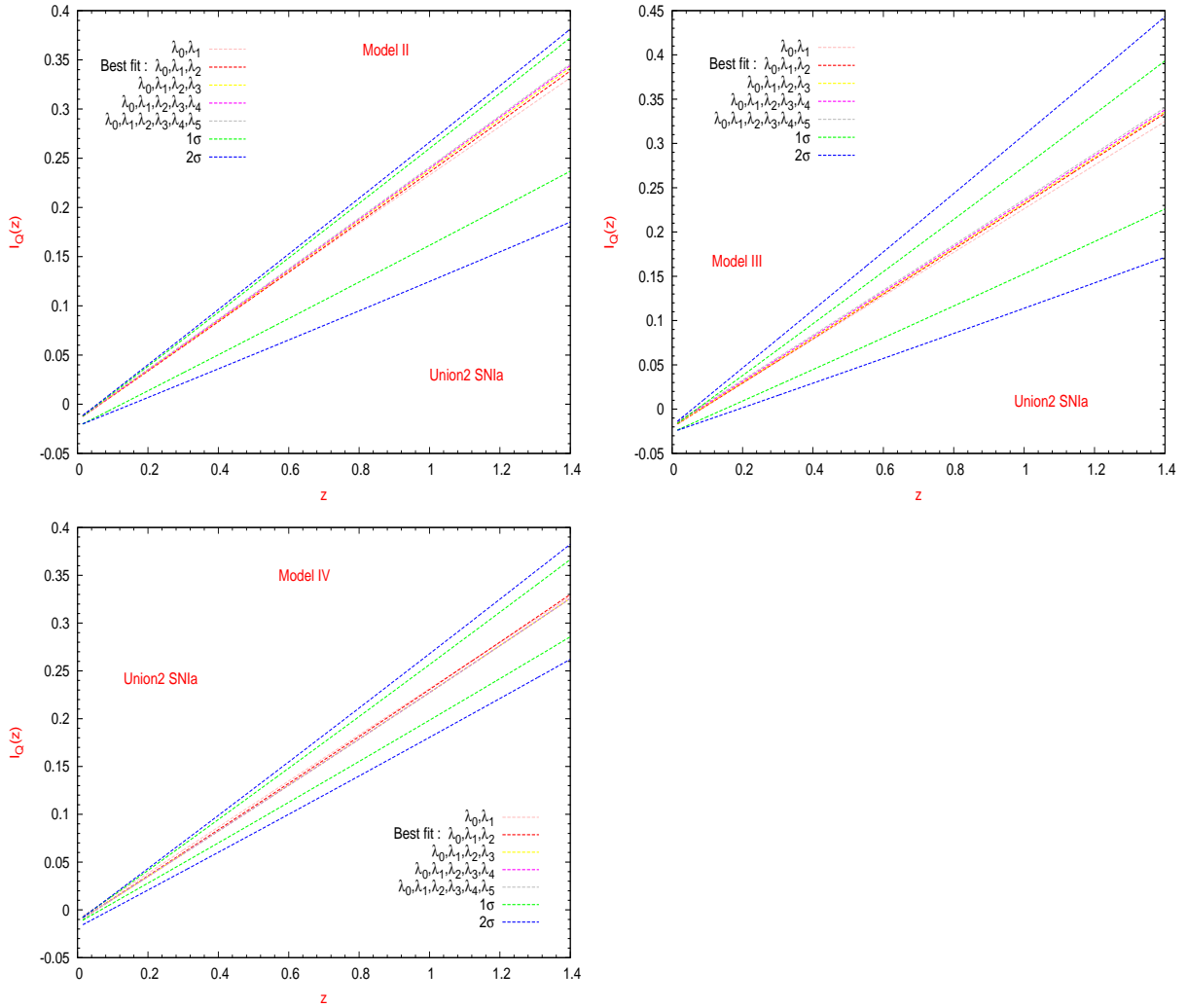


Figura 6.4: Reconstrucción de la función de interacción  $I_Q(z)$  como una función del corrimiento al rojo de los modelos II (panel superior izquierdo), III (panel superior derecho) y IV (panel inferior izquierdo) correspondiendo a un parámetro de ecuación de estado (II)  $w = -1$ , (III)  $w = \text{constante}$  (ambos con  $\Omega_{DM,0} = 0.233$ ) y (IV)  $w = \text{constante}$ ,  $\Omega_{DM,0} = \text{constante}$ , respectivamente. Las curvas con diferentes colores muestran los mejores estimados usando la expansión de  $I_Q(z)$  en términos de los parámetros  $\lambda_n$  correspondiendo a una expansión de polinomios de Chebyshev en el rango de  $N = 1$  hasta  $N = 5$ . Note la rápida convergencia de las curvas cuando el número de polinomios  $N$  tomados en la expansión se incrementa. También, mostramos los mejores estimados (líneas rojas), los errores a  $1\sigma$  (líneas verdes) y  $2\sigma$  (líneas blue) de la función de interacción  $I_Q(z)$  como una función del corrimiento al rojo. Notamos que los mejores estimados de la intensidad de la interacción cruzan marginalmente la línea de no-interacción  $I_Q(z) = 0$  solamente en el presente cambiando el signo desde valores positivos en el pasado (energía transferida desde energía oscura a materia oscura) hasta valores negativos en el presente (energía transferida desde materia oscura a energía oscura). Además, notamos que dentro de los errores  $1\sigma$  y  $2\sigma$  habría la posibilidad que el cruce de la línea de no-interacción  $I_Q(z) = 0$  suceda antes del presente.

## CAPÍTULO 6. RESULTADOS DE LA RECONSTRUCCIÓN DEL TÉRMINO DE INTERACCIÓN $Q(Z)$ .

### 6.1. ENSAYO 1: RECONSTRUCCIÓN DE $Q(Z) \equiv \rho_{C,0} \cdot (1 + Z)^3 \cdot H(Z) \cdot I_Q(Z)$ .

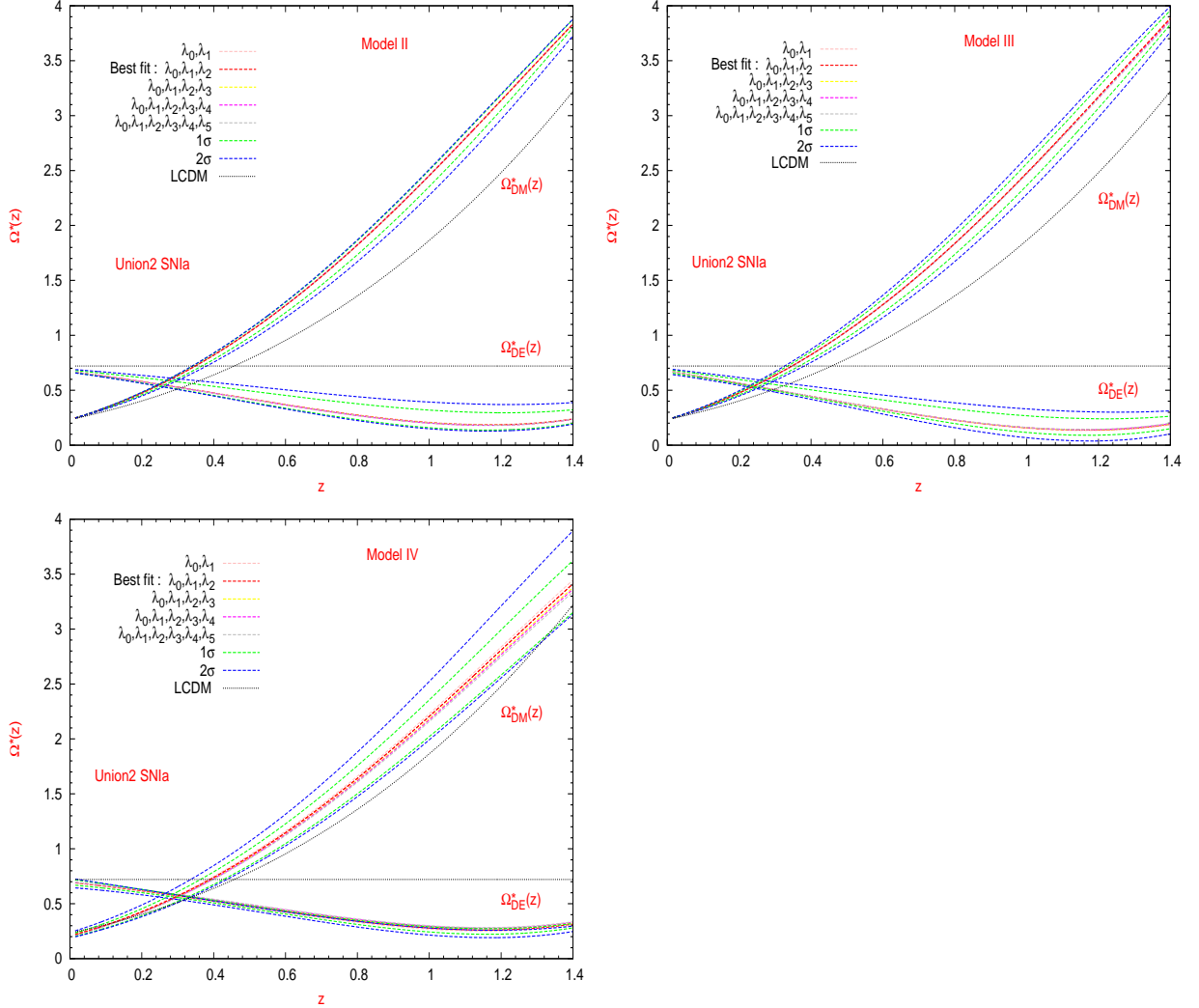


Figura 6.5: Similar comentario a la Figura 6.4. Aquí mostramos para la reconstrucción de los parámetros de densidad de energía del sector oscuro,  $\Omega_{DM}^*(z)$ ,  $\Omega_{DE}^*(z)$ , en función del corrimiento al rojo de los modelos II (panel superior izquierdo), III (panel superior derecho) y IV (panel inferior izquierdo) respectivamente. Estas curvas también muestra los mejores estimados (líneas rojas) y sus errores a  $1\sigma$  (líneas verdes) y  $2\sigma$  (líneas azules) respectivamente para estos parámetros, obtenidos a partir de una expansión en términos de los primeros  $N = 2$  polinomios de Chebyshev y comparadas con la correspondiente curva del modelo cosmológico  $\Lambda$ CDM. Note que el parámetro densidad de energía oscura es definido positivo en todo el rango del corrimiento al rojo.

## CAPÍTULO 6. RESULTADOS DE LA RECONSTRUCCIÓN DEL TÉRMINO DE INTERACCIÓN $Q(Z)$ .

### 6.1. ENSAYO 1: RECONSTRUCCIÓN DE $Q(Z) \equiv \rho_{C,0} \cdot (1 + Z)^3 \cdot H(Z) \cdot I_Q(Z)$ .

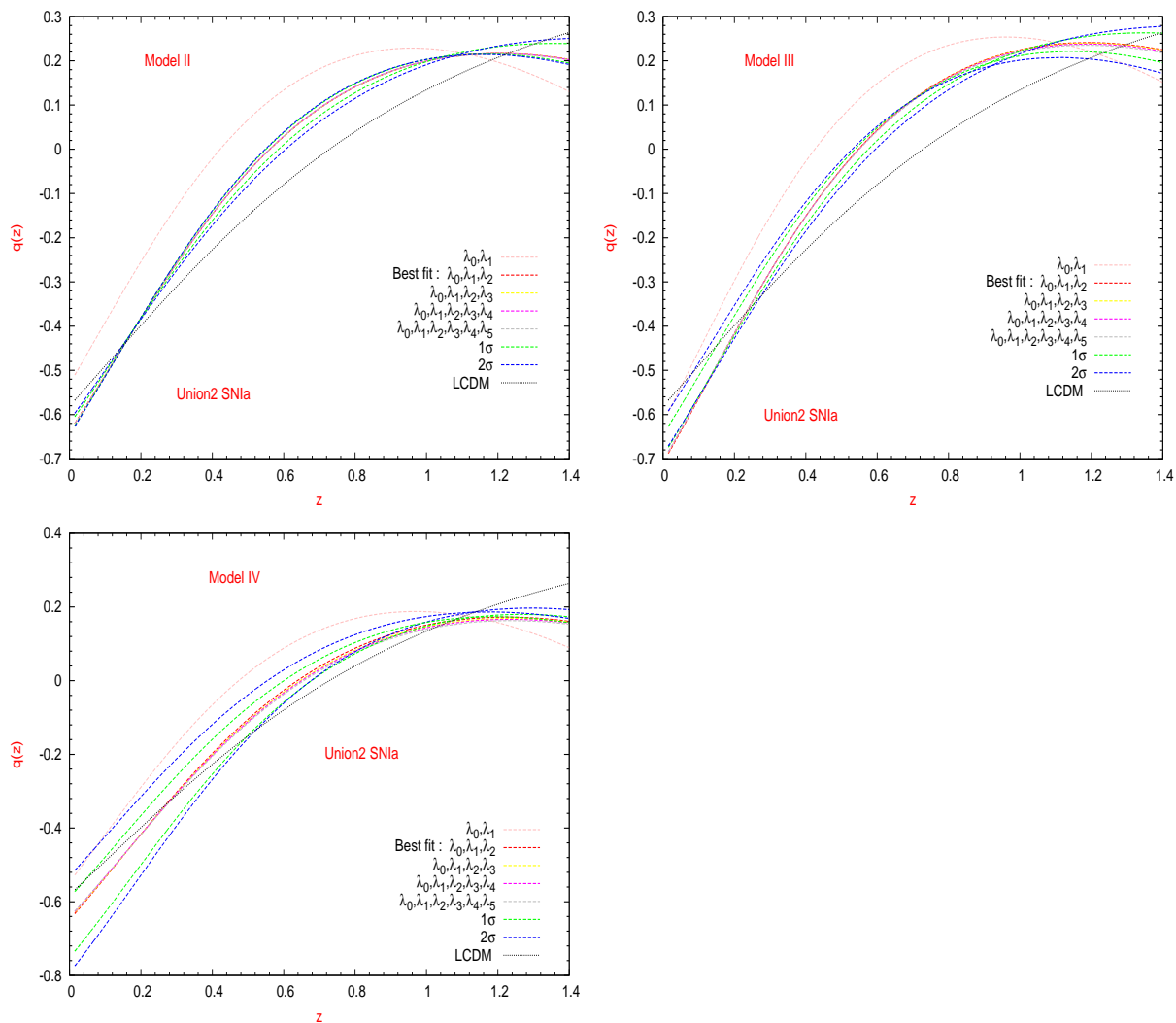


Figura 6.6: Similar comentario a la Figura 6.4. Aquí mostramos la reconstrucción del parámetro de desaceleración  $q(z)$  en función del corrimiento al rojo de los modelos II (panel superior izquierdo), III (panel superior derecho) y IV (panel inferior izquierdo) respectivamente. Estas curvas también muestran los mejores estimados (líneas rojas) y sus errores  $1\sigma$  (líneas verdes) y  $2\sigma$  (líneas azul) del parámetro de desaceleración  $q(z)$ , obtenidos a partir de una expansión en términos de los primeros  $N = 2$  polinomios de Chebyshev y comparadas con la correspondiente curva del modelo  $\Lambda$ CDM.

# CAPÍTULO 6. RESULTADOS DE LA RECONSTRUCCIÓN DEL TÉRMINO DE INTERACCIÓN $Q(Z)$ .

## 6.1. ENSAYO 1: RECONSTRUCCIÓN DE $Q(Z) \equiv \rho_{C,0} \cdot (1 + Z)^3 \cdot H(Z) \cdot I_Q(Z)$ .

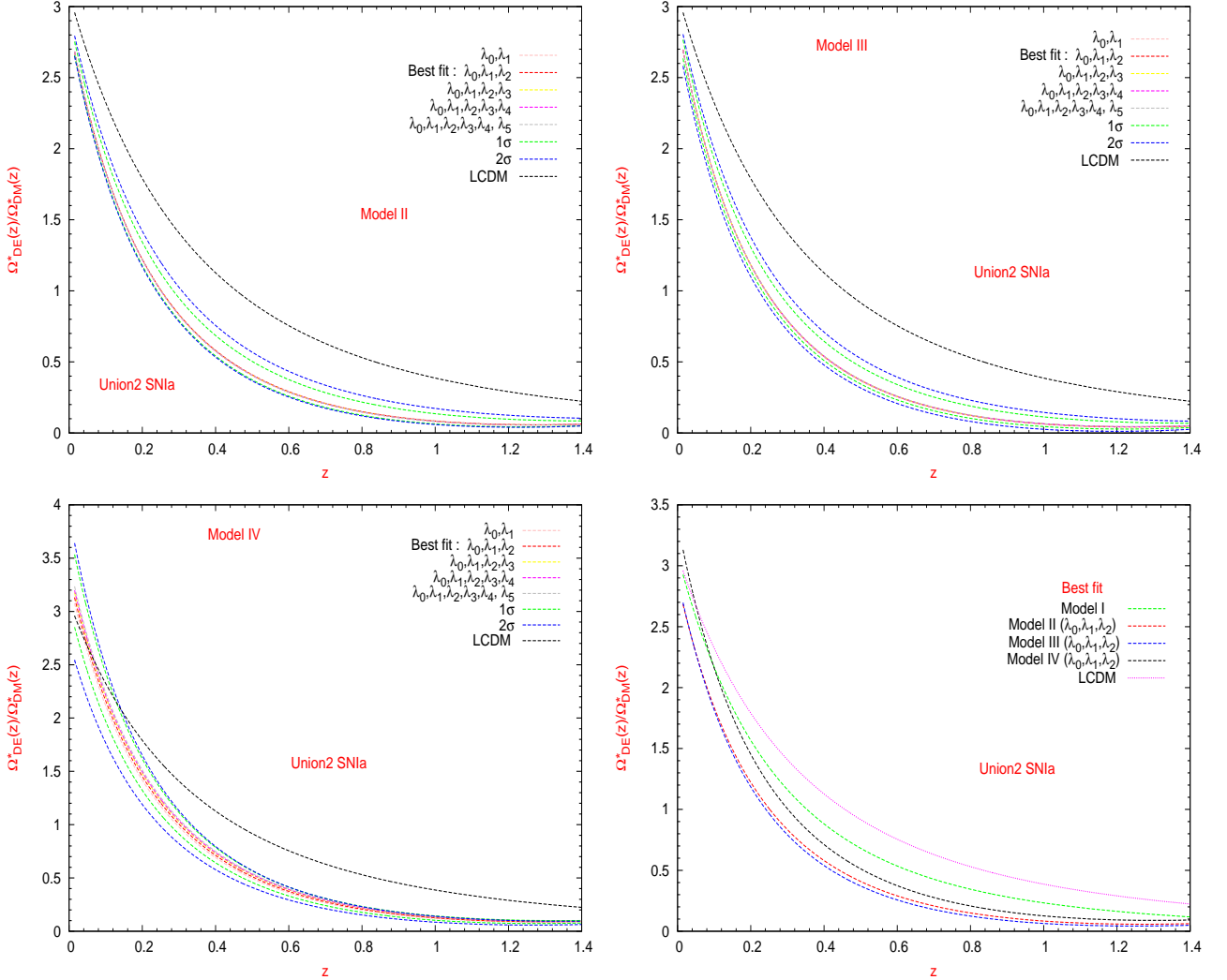


Figura 6.7: Superposición del cociente de los mejores estimados de los parámetros de densidad de energía del sector oscuro  $\Omega_{DE}^*(z)/\Omega_{DM}^*(z)$  de los modelos II (panel superior izquierdo), III (panel superior derecho), IV (panel inferior izquierdo) respectivamente. En estas figuras, las diferentes curvas de colores muestran los estimados (línea roja) y sus correspondientes errores a  $1\sigma$  (líneas verde) y  $2\sigma$  (líneas azul). La figura del panel inferior derecho muestra también una superposición de este cociente de los mejores estimados de los modelos I, II, III y IV respectivamente, obtenidas a partir de una expansión en términos de los primeros  $N = 2$  polinomios de Chebyshev y comparadas con la correspondiente curva del modelo  $\Lambda$ CDM.



## CAPÍTULO 6. RESULTADOS DE LA RECONSTRUCCIÓN DEL TÉRMINO DE INTERACCIÓN $Q(Z)$ .

### 6.1. ENSAYO 1: RECONSTRUCCIÓN DE $Q(Z) \equiv \rho_{C,0} \cdot (1 + Z)^3 \cdot H(Z) \cdot I_Q(Z)$ .

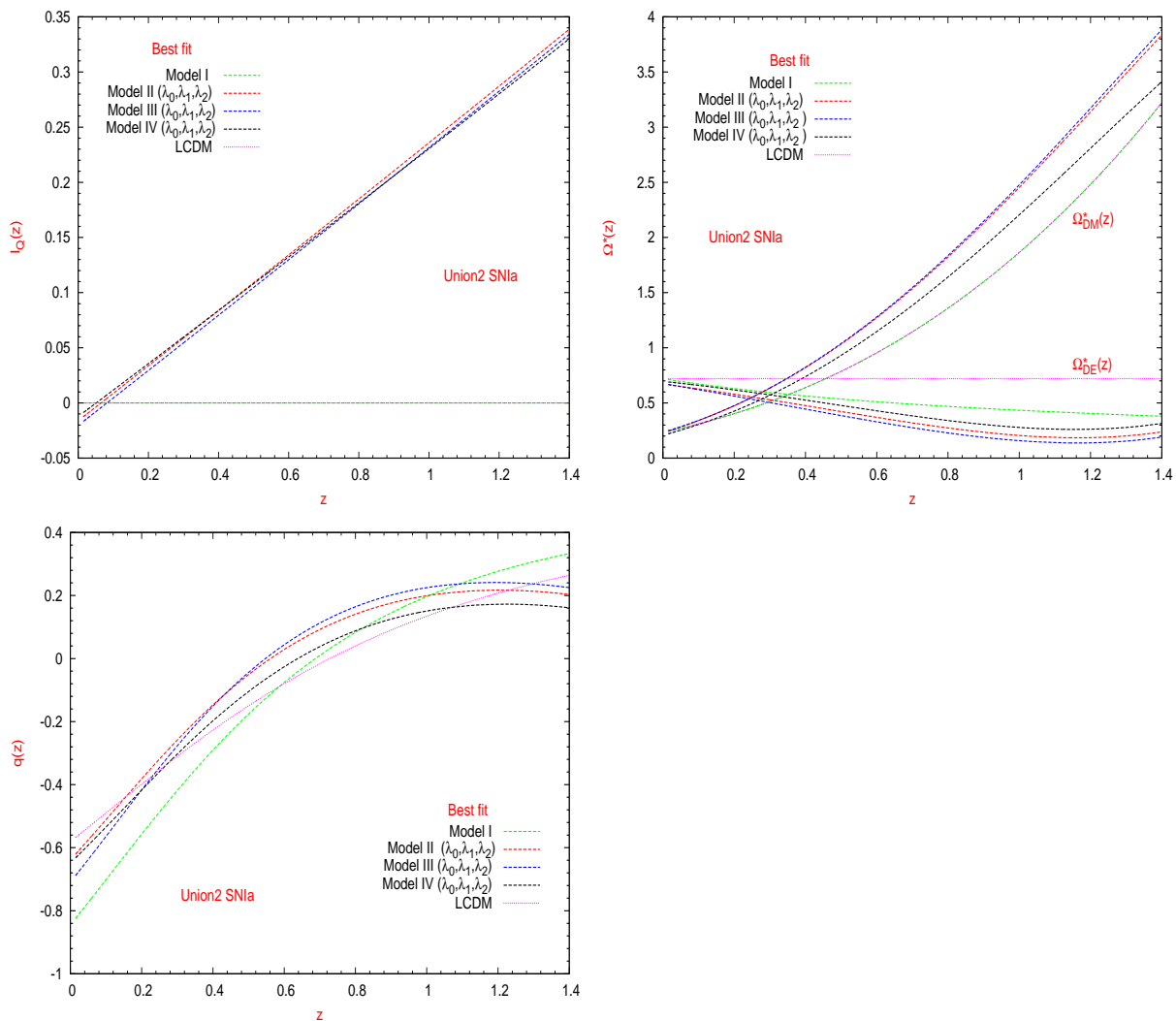


Figura 6.8: Superposición de los mejores estimados de las funciones de interacción  $I_Q(z)$  (panel superior izquierdo), los parámetros de densidad de energía del sector oscuro  $\Omega_{DM}^*(z)$ ,  $\Omega_{DE}^*(z)$  (panel superior derecho) y los parámetro de desaceleración  $q(z)$  (panel inferior izquierdo) en función del corrimiento al rojo de los modelos I (línea verde), II (línea roja), III (línea azul) y IV (línea negra) obtenidos a partir de una expansión de los tres primeros  $N = 2$  polinomios de Chebyshev respectivamente y comparados con el modelo  $\Lambda$ CDM (línea rosada).

## CAPÍTULO 6. RESULTADOS DE LA RECONSTRUCCIÓN DEL TÉRMINO DE INTERACCIÓN $Q(Z)$ .

### 6.2. ENSAYO 2: RECONSTRUCCIÓN DE $Q(Z) = H(Z) \cdot \rho_{DM}(Z) \cdot I_Q(Z)$ .

---

#### 6.2. Ensayo 2: Reconstrucción de $Q(z) = H(z) \cdot \rho_{DM}(z) \cdot I_Q(z)$ .

Similarmente al Ensayo 1, presentamos una segunda forma para reconstruir el término de interacción. En este modelo de interacción los parámetros libres son  $\theta = \{W_0, \Omega_{DM,0}, H_0, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2\}$ . Nuevamente, aquí la función de interacción  $I_Q(z)$  se reconstruyó usando la ecuación (2.46) y los datos observacionales de supernovas del tipo Ia “Union2.1” (SNIa) [3], oscilaciones acústicas bariónicas (BAO) [4, 5, 6, 7], anisotropías de la radiación cósmica de fondo (CMB) [4], [8, 9, 10], y los “priors” descritos en la Subsección (3.8.2). En este Ensayo, hemos obtenido los mejores estimados de los parámetros y el correspondiente  $\tilde{\chi}_{min}^2$ .

La Figura 6.9 muestra la región donde se encuentra los mejores estimados del parámetro  $\lambda_0$  y sus correspondientes errores a  $1\sigma$  y  $2\sigma$  respectivamente. El panel superior derecho representa una amplificación de esa región de mayor probabilidad, en donde los mejores estimados están confinados en un intervalo continuo bien definido y con la misma probabilidad. Note que sus errores a  $1\sigma$  y  $2\sigma$  son extremadamente pequeños resultando imperceptibles.

La Figura 6.10 muestra la región donde se encuentra los mejores estimados del parámetro  $\lambda_1$  y sus correspondientes errores a  $1\sigma$  y  $2\sigma$  respectivamente. Notemos que en la distribución de probabilidad del parámetro  $\lambda_1$ , existen pequeños saltos cada cierto intervalo como resultado de la naturaleza estadística de este parámetro y también debido a la fluctuación numérica. Similarmente a la Figura 6.9, el panel superior derecho nos muestra una amplificación de esa región de mayor probabilidad. Note que sus errores a  $1\sigma$  y  $2\sigma$  también son valores muy pequeños.

La Figura 6.11 muestra la distribución de probabilidad del parámetro  $\lambda_2$ , indicándonos las regiones donde se encuentran los mejores estimados de este parámetro y sus correspondientes errores a  $1\sigma$  y  $2\sigma$  respectivamente (Vea el panel superior izquierdo). Mientras que el panel superior derecho representan una amplificación de la región de mayor probabilidad. Observe que los errores  $1\sigma$  y  $2\sigma$  para los mejores estimados de este parámetro son también muy pequeños.

Asimismo, de la Figura 6.12 notamos los mejores estimados y sus correspondientes errores a  $1\sigma$  y  $2\sigma$  de los parámetros  $W_0$ ,  $\Omega_{DM,0}$  y  $H_0$  respectivamente. Estos mejores estimados de los parámetros, se encuentran contenidos en la región de  $1\sigma$ , lo cual implica que nuestros resultados son consistentes con el modelo  $\Lambda$ CDM a  $1\sigma$ .

Todas las Figuras anteriores han sido construídas utilizando los criterios presentados en la publicación de M. Abroe [92], permitiéndonos reconstruir la distribución de probabilidad para cada uno de los parámetros de este Ensayo 2.

La Figura 6.13 muestra la reconstrucción del término de interacción adimensional  $(Q(z)/H_0)\rho_{c,0}^{-1}$  en función del corrimiento al rojo. En esta Figura notamos que para los cuatro paneles, el mejor estimado del término de interacción  $Q(z)$  y sus errores a  $1\sigma$  y  $2\sigma$ , cruzan marginalmente la línea de nointeracción  $Q(z) = 0$  durante la evolución cosmológica, cambiando de signo desde valores negativos en el pasado (energía transferida desde la materia

## CAPÍTULO 6. RESULTADOS DE LA RECONSTRUCCIÓN DEL TÉRMINO DE INTERACCIÓN $Q(Z)$ .

### 6.2. ENSAYO 2: RECONSTRUCCIÓN DE $Q(Z) = H(Z) \cdot \rho_{DM}(Z) \cdot I_Q(Z)$ .

---

oscura hacia la energía oscura) hasta valores positivos en el presente (energía transferida desde la energía oscura hacia la materia oscura). Este cruce del mejor estimado y sus errores se producen aproximadamente en  $z \approx 1.4$ .

Para valores de corrimiento al rojo próximas a cero las curvas de los mejores estimados y sus errores coinciden siendo muy pequeñas en magnitud y próximas a  $(Q(z)/H_0)\rho_{c,0}^{-1} \approx 0.002$ . Estos últimos paneles también muestran que la intensidad del intercambio de energía en el intervalo de  $0 < z < 1.41$ , será mayor cuando  $z > 0.5$ . Los mejores estimados y sus errores a  $1\sigma$  y  $2\sigma$  convergen a  $z \approx 0.0$ . Estos cruces de la línea de no-interacción  $Q(z) = 0$  ya han sido reportados por [60] (con un término de interacción  $Q(z)$  proporcional al parámetro de Hubble) y [59] (donde la suposición de que el término de interacción  $Q(z)$  sea proporcional al parámetro de Hubble es abandonada). La dirección del cruce encontrado en nuestro trabajo está en concordancia con los resultados publicados en la referencia [59] donde un cruce (desde valores negativos en el pasado hasta valores positivos en el presente) fue encontrada en  $z \simeq 0.2 - 0.3$  con un término de interacción que depende linealmente del factor de escala y con dos parámetros libres.

Por otro lado, no encontramos el comportamiento oscilatorio del término de interacción encontrado por Cai and Su [60] quienes, usando datos observacionales en el rango  $z \in [0, 1.8]$ , ajustaron un esquema en el cual el rango total del corrimiento al rojo está dividido en un determinado número de bins y la función de interacción se fijó como constante en cada bin.

En la Figura 6.14 notamos la reconstrucción de la función de interacción  $I_Q(z)$  en función del corrimiento al rojo. En ella, tanto los paneles superior izquierdo y superior derecho muestran la curva mejor estimada de  $I_Q(z)$  en los rangos de  $z \in (0.0, 1.41]U1091.3$ . Vemos que el intercambio de energía entre las componentes oscuras es más intensa en magnitud, a partir de  $z > 1.4$ , en épocas del pasado, en cambio para épocas de  $z < 1.4$ , su magnitud va disminuyendo hasta llegar a ser muy pequeñas del orden de  $I_Q \approx 0.0047$  en épocas cercanas al presente. En esta misma Figura, mencionemos que, los paneles inferior izquierdo e inferior derecho muestran la curva mejor estimada, y sus respectivos errores a  $1\sigma$  y  $2\sigma$ . En estos últimos paneles notamos que los errores a  $+1\sigma$  y  $+2\sigma$  coinciden con la curva mejor estimada, esto es resultado de la pequeñez de la función de interacción. Los errores a  $-1\sigma$  y  $-2\sigma$  coinciden entre sí, pero no con la curva mejor estimada. Notemos que el orden de magnitud de la interacción está en concordancia con las restricciones locales halladas en la intensidad de una interacción adimensional constante derivada de una muestra de masas viriales de cúmulos de galaxias, obtenida usando lentes gravitacionales débiles, rayos X y datos ópticos [83] ([58]-[59]) respectivamente.

En base a los ajustes de datos de la muestra Constitución de supernovas del tipo Ia [1], de las medidas de distancia de BAO [7], de la prueba de las anisotropías de la radiación cósmica de fondo (CMB) [10] y de las restricciones actuales de la constante cosmológica y otras más, se han puesto fuertes restricciones en la magnitud de tales intensidades adimensionales, siendo ellas del orden de  $\xi \approx [10^{-4} - 10^{-2}]$  [84] ([85]-[86]). Por lo tanto, nuestros resultados son consistentes con los resultados encontrados por estos investigadores que estudiaron el fenómeno de interacción en el sector oscuro.

---

## CAPÍTULO 6. RESULTADOS DE LA RECONSTRUCCIÓN DEL TÉRMINO DE INTERACCIÓN $Q(Z)$ .

### 6.2. ENSAYO 2: RECONSTRUCCIÓN DE $Q(Z) = H(Z) \cdot \rho_{DM}(Z) \cdot I_Q(Z)$ .

**Tabla de Modelos**

Mejores estimados de los parámetros  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \Omega_{DM,0}, W_0$  and  $H_0$ .

Parámetros del Modelo	$\Lambda$ CDM	Modelo Interactivo
$\lambda_0$	--	$[+4.0830, +4.6441] \times 10^{-3}$
$\lambda_1$	--	$[+2.4910, +2.4919] \times 10^{-3}$
$\lambda_2$	--	$[-4.3806, -4.3744] \times 10^{-5}$
$\Omega_{DM,0}$	+0.2269	+0.2270
$W_0$	-1.0	-0.9811
$H_0(km/s)Mpc^{-1}$	+70.9954	+70.9847
$\tilde{\chi}_{min}^2$	567.5023	555.8927

Cuadro 6.12: Resumen de los mejores estimados de los parámetros del modelo. Estos fueron calculadas usando un Análisis de Estadística Bayesiana, y los datos observacionales de Union2.1 SNeIa + BAO + CMB.

La Figura 6.15 muestra que, para los paneles superior izquierdo y superior derecho las curvas mejores estimadas de los parámetros de densidad de energía del sector oscuro siempre están debajo de sus correspondientes curvas del modelo  $\Lambda$ CDM. Esto indica que nuestro ensayo de  $Q(z)$  alivia el “Problema de Coincidencia Cósmica”. Los paneles inferior izquierdo e inferior derecho corresponden a los errores a  $1\sigma$  y  $2\sigma$  respectivamente. De todos los paneles vemos que el parámetro densidad de energía oscura  $\Omega_{DE}(z)$  y sus respectivos errores a  $1\sigma$  y  $2\sigma$ , llegan a ser siempre positivos en todo el rango del corrimiento al rojo considerado. En esta misma Figura, vemos que para corrimientos al rojo cercanas al presente los mejores estimados de  $\Omega_{DM,0} \approx 0.23$  y  $\Omega_{DE,0} \approx 0.72$  respectivamente.

La Figura 6.16 muestra la reconstrucción del parámetro de desaceleración  $q(z)$  del mejor ajuste, así como sus errores a  $1\sigma$  y  $2\sigma$  respectivamente y comparados al mismo tiempo con el modelo  $\Lambda$ CDM. Todos estos paneles muestran una transición desde una era de desaceleración en tiempos tempranos dominada por la materia bariónica hasta una era de aceleración en tiempos tardíos correspondiendo a un dominio de la energía oscura en el presente. En esta última época, el parámetro densidad de energía oscura llega a ser  $\Omega_{DE,0}(z) \approx 0.72$  como puede verse en la Figura 6.15, el cual es suficientemente grande para generar una función de interacción adimensional no despreciable del orden de  $I_Q \approx 0.0047$ , como se muestra en la Figura 6.14.

Para analizar el “Problema de Coincidencia Cósmica”, usamos la Figura 6.17. En donde notamos que los paneles superior izquierdo y superior derecho muestran el cociente de las curvas mejores estimadas de los parámetros de densidad de energía de las componentes oscuras  $\Omega_{DE}(z)/\Omega_{DM}(z)$ , así como sus errores a  $1\sigma$  y  $2\sigma$  respectivamente y comparado con el modelo  $\Lambda$ CDM. Las curvas de estos cocientes están por encima de la correspondiente al modelo  $\Lambda$ CDM, indicándonos que el “Problema de Coincidencia Cósmica” se alivia para este Ensayo. Es decir, que en tiempos tempranos este modelo se comporta como  $\Lambda$ CDM y que en tiempos tardes este cociente tiende a un valor constante.

CAPÍTULO 6. RESULTADOS DE LA RECONSTRUCCIÓN DEL TÉRMINO DE INTERACCIÓN  $Q(Z)$ .

6.2. ENSAYO 2: RECONSTRUCCIÓN DE  $Q(Z) = H(Z) \cdot \rho_{DM}(Z) \cdot I_Q(Z)$ .

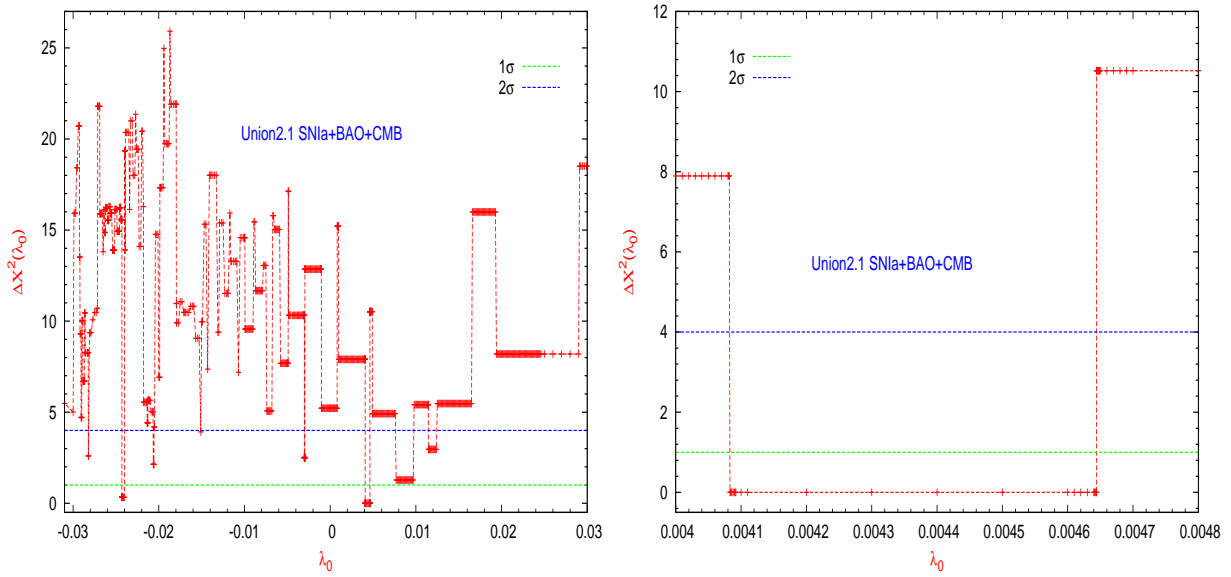


Figura 6.9: Mejores estimados y sus intervalos de confianza a  $1\sigma$  y  $2\sigma$  del parámetro  $\lambda_0$ .

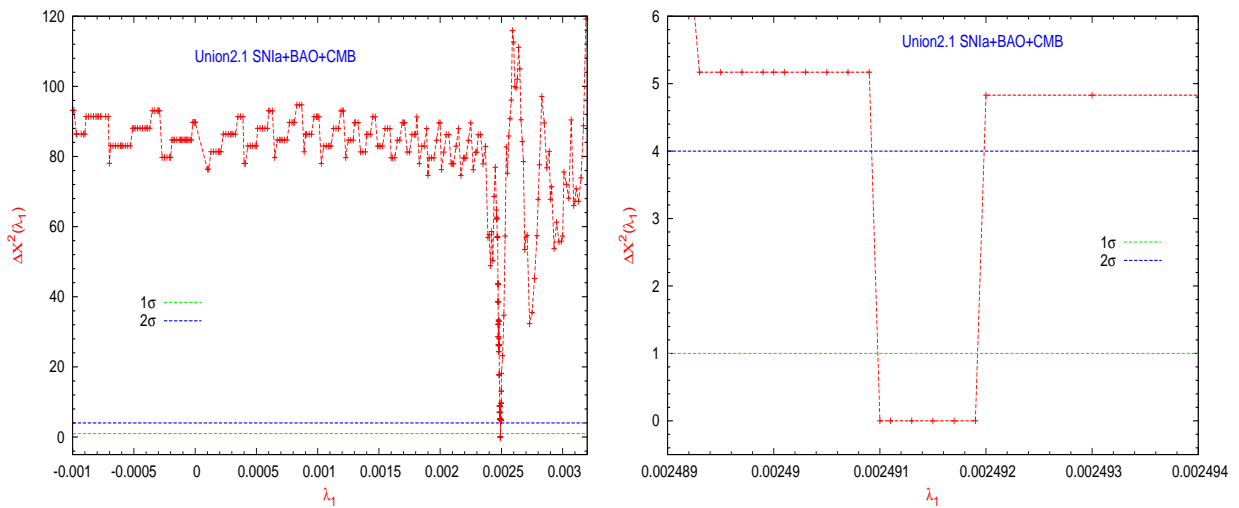


Figura 6.10: Mejores estimados y sus intervalos de confianza a  $1\sigma$  y  $2\sigma$  del parámetro  $\lambda_1$ .

**CAPÍTULO 6. RESULTADOS DE LA RECONSTRUCCIÓN DEL TÉRMINO DE INTERACCIÓN  $Q(Z)$ .**

**6.2. ENSAYO 2: RECONSTRUCCIÓN DE  $Q(Z) = H(Z) \cdot \rho_{DM}(Z) \cdot I_Q(Z)$ .**

**Tabla de errores**

Parámetros del Modelo	Mejores estimados	$\pm 1\sigma$	$\pm 2\sigma$
$\lambda_0$	$[+4.0830, +4.6441] \times 10^{-3}$	$+0.00071 \times 10^{-3}$ $-0.00072 \times 10^{-3}$	$+0.00135 \times 10^{-3}$ $-0.00214 \times 10^{-3}$
$\lambda_1$	$[+2.4910, +2.4919] \times 10^{-3}$	$+0.00002 \times 10^{-3}$ $-0.00003 \times 10^{-3}$	$+0.0001 \times 10^{-3}$ $-0.0001 \times 10^{-3}$
$\lambda_2$	$[-4.3806, -4.3744] \times 10^{-5}$	$+0.00009 \times 10^{-5}$ $-0.00004 \times 10^{-5}$	$+0.00022 \times 10^{-5}$ $-0.00028 \times 10^{-5}$
$\Omega_{DM,0}$	+0.2270	+0.0035 -0.0051	+0.0091 -0.0120
$W_0$	-0.9811	+0.0031 -0.0226	+0.0103 -0.0363
$H_0(km/s)Mpc^{-1}$	+70.9847	+0.2053 -0.7086	+0.8778 -1.5535

Cuadro 6.13: Resumen de los errores a  $1\sigma$  y  $2\sigma$  de los mejores estimados del modelo. Usando la técnica descrita en la Subsección 3.8.2 y las ecuaciones (3.126)-(3.127) hemos encontrado que  $\Omega_{b,0} = 0.0446^{+0.00026}_{-0.00089}$  y  $\Omega_{r,0} = 8.2828 \times 10^{-5+4.79 \times 10^{-7}}_{-1.654 \times 10^{-6}}$  respectivamente.

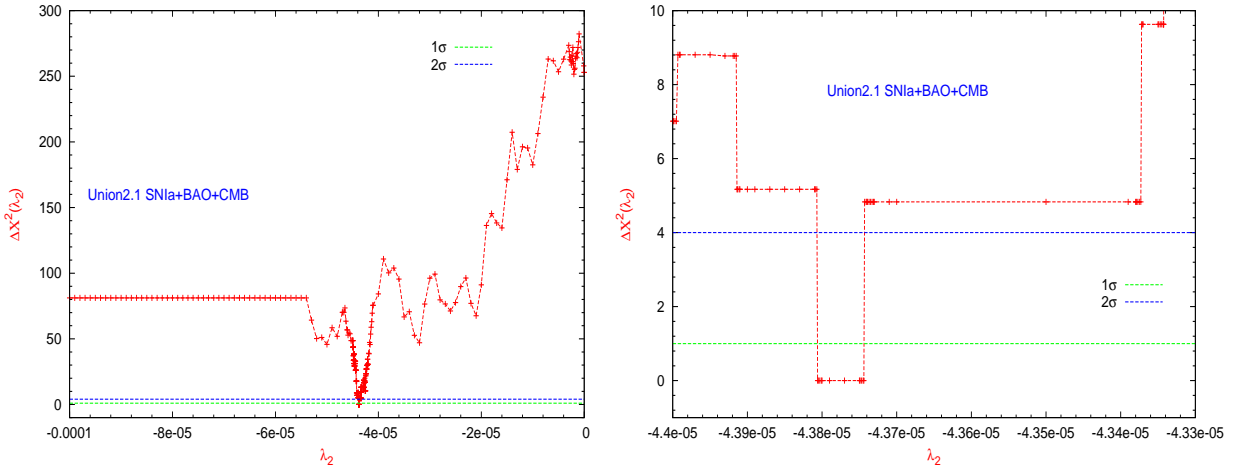


Figura 6.11: Mejores estimados y sus intervalos de confianza a  $1\sigma$  y  $2\sigma$  del parámetro  $\lambda_2$ .

CAPÍTULO 6. RESULTADOS DE LA RECONSTRUCCIÓN DEL TÉRMINO DE INTERACCIÓN  $Q(Z)$ .

6.2. ENSAYO 2: RECONSTRUCCIÓN DE  $Q(Z) = H(Z) \cdot \rho_{DM}(Z) \cdot I_Q(Z)$ .

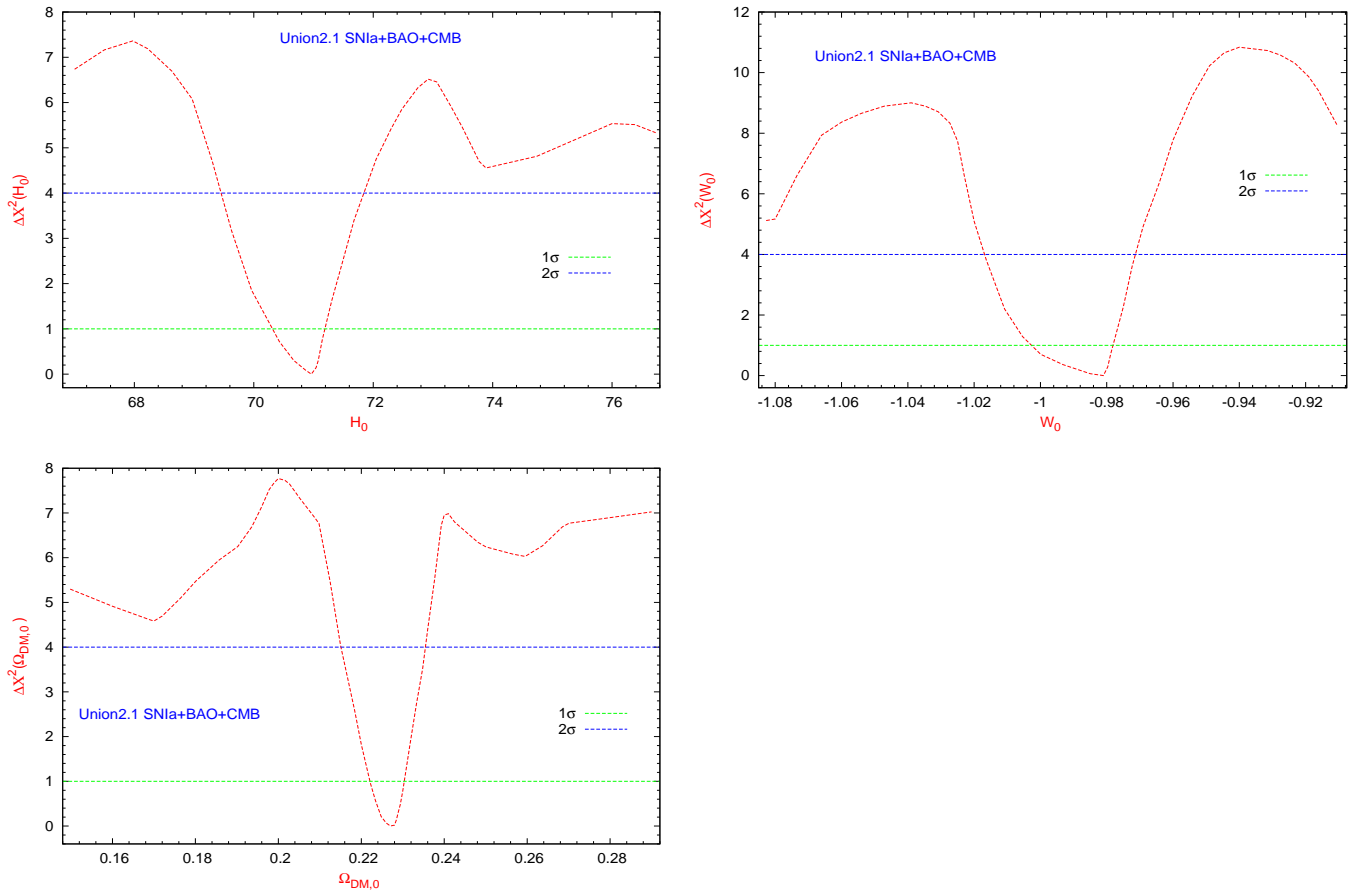


Figura 6.12: Mejores estimados y sus intervalos de confianza a  $1\sigma$  y  $2\sigma$  de los parámetros  $W_0$ ,  $\Omega_{DM,0}$  y  $H_0$  respectivamente.

CAPÍTULO 6. RESULTADOS DE LA RECONSTRUCCIÓN DEL TÉRMINO DE INTERACCIÓN  $Q(Z)$ .

6.2. ENSAYO 2: RECONSTRUCCIÓN DE  $Q(Z) = H(Z) \cdot \rho_{DM}(Z) \cdot I_Q(Z)$ .

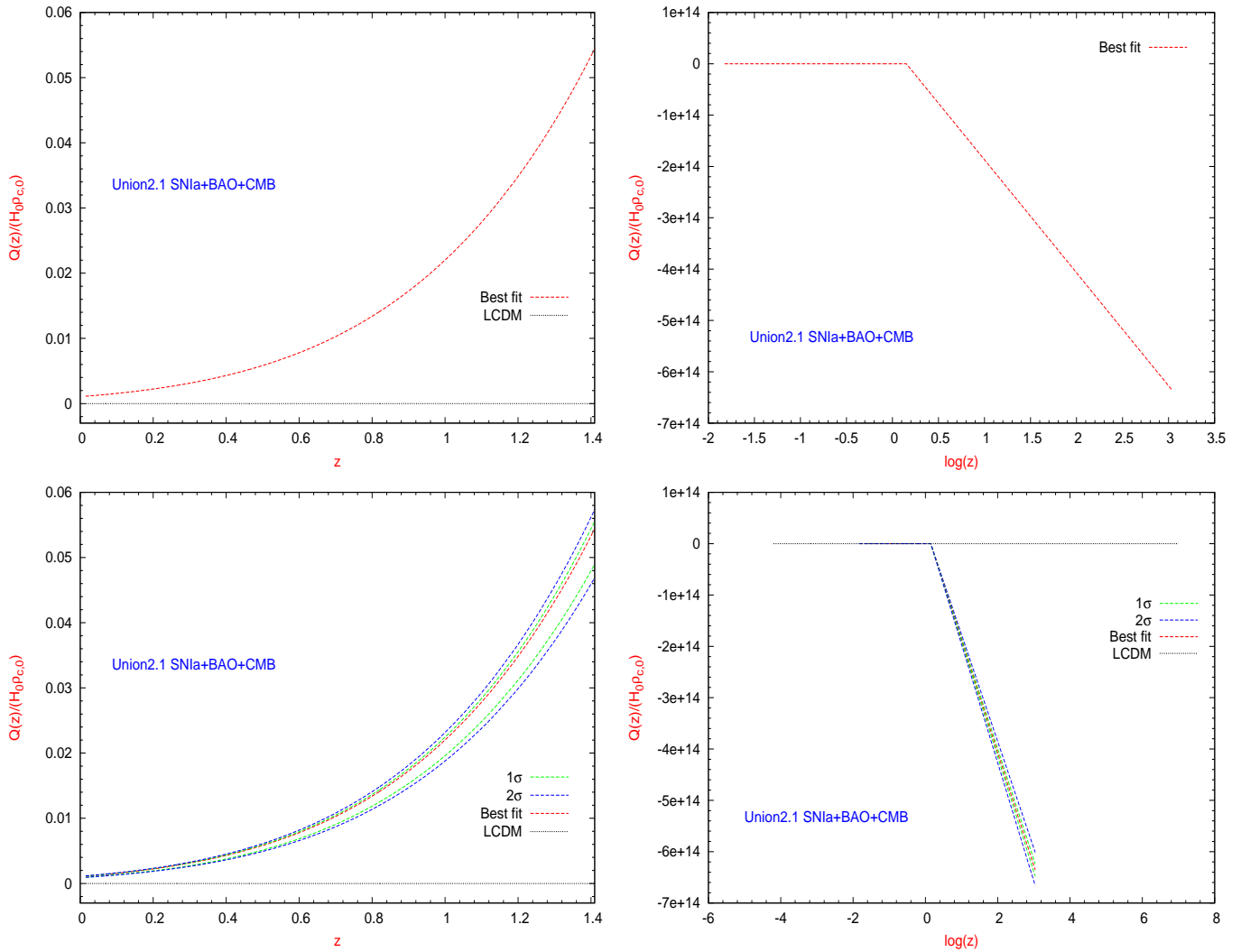


Figura 6.13: Muestra la reconstrucción del término de interacción adimensional  $\frac{Q(z)}{H_0\rho_{c,0}}$ , en función del corrimiento al rojo de su mejor estimado, así como sus errores respectivos a  $1\sigma$  y  $2\sigma$ .



**CAPÍTULO 6. RESULTADOS DE LA RECONSTRUCCIÓN DEL TÉRMINO DE INTERACCIÓN  $Q(Z)$ .**

**6.2. ENSAYO 2: RECONSTRUCCIÓN DE  $Q(Z) = H(Z) \cdot \rho_{DM}(Z) \cdot I_Q(Z)$ .**

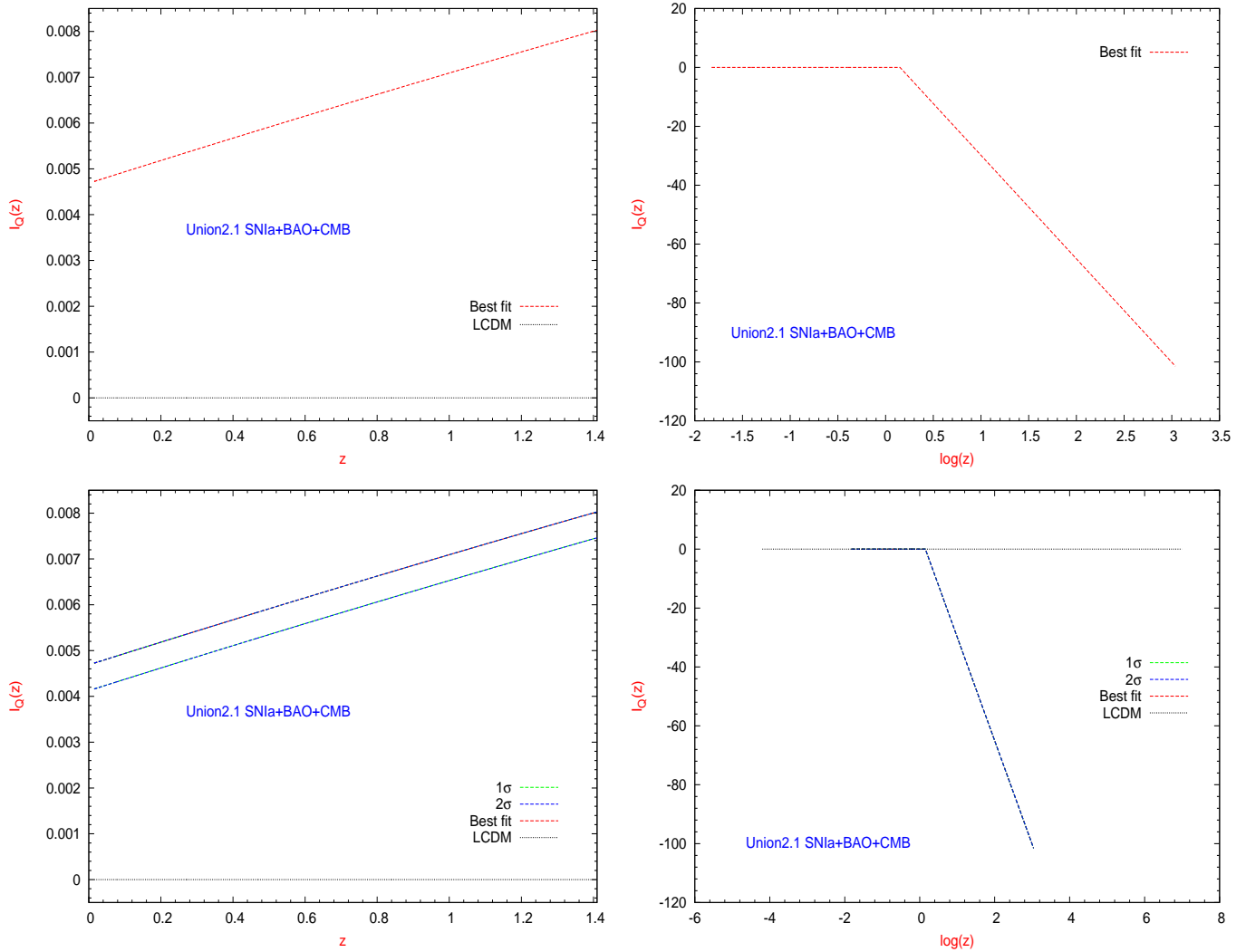


Figura 6.14: Muestra la reconstrucción de la función de interacción  $I_Q(z)$  en función del corrimiento al rojo de su mejor estimado, así como sus errores respectivos a  $1\sigma$  y  $2\sigma$ .

CAPÍTULO 6. RESULTADOS DE LA RECONSTRUCCIÓN DEL TÉRMINO DE INTERACCIÓN  $Q(Z)$ .

6.2. ENSAYO 2: RECONSTRUCCIÓN DE  $Q(Z) = H(Z) \cdot \rho_{DM}(Z) \cdot I_Q(Z)$ .

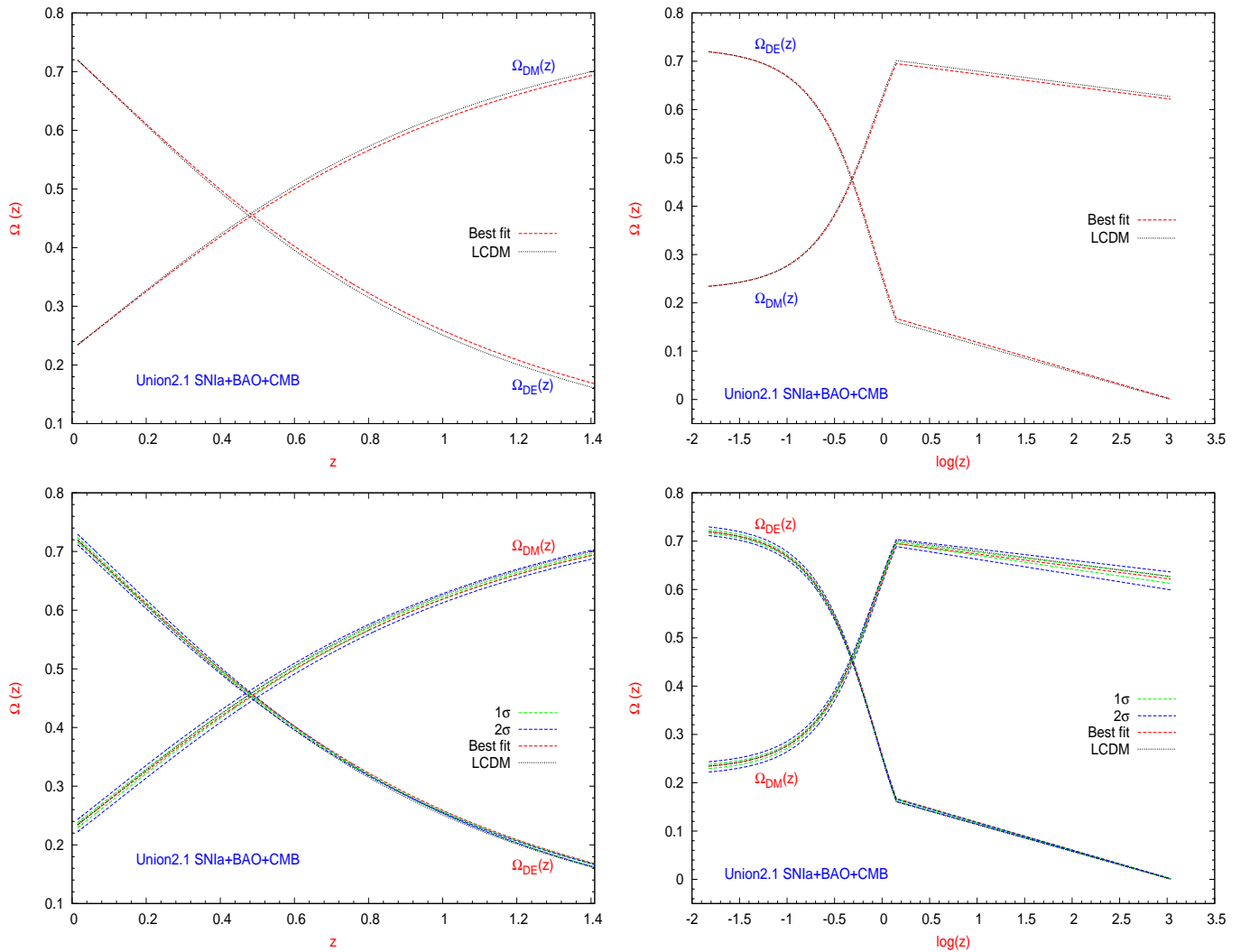


Figura 6.15: Muestra la reconstrucción de los parámetros de densidad de energía  $\Omega(z)$  del sector oscuro, en función del corrimiento al rojo para su mejor estimado, así como sus errores respectivos a  $1\sigma$  y  $2\sigma$ . Observe que se alivia el “Problema de Coincidencia Cósmica”.

## CAPÍTULO 6. RESULTADOS DE LA RECONSTRUCCIÓN DEL TÉRMINO DE INTERACCIÓN $Q(Z)$ .

### 6.2. ENSAYO 2: RECONSTRUCCIÓN DE $Q(Z) = H(Z) \cdot \rho_{DM}(Z) \cdot I_Q(Z)$ .

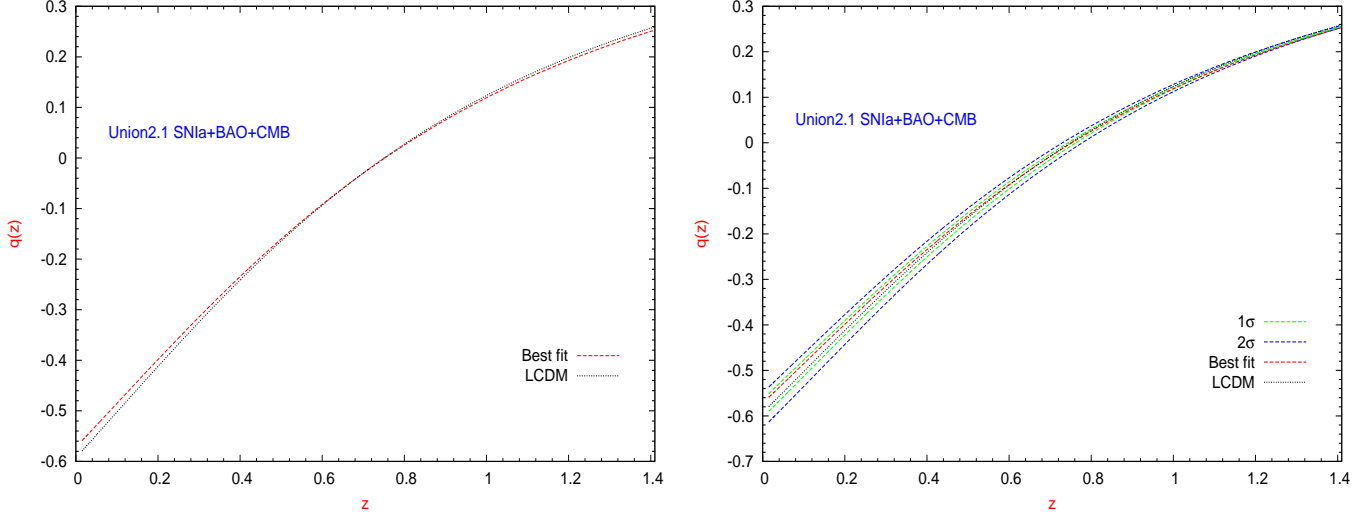


Figura 6.16: Muestra la reconstrucción del parámetro desaceleración  $q(z)$  en función del corrimiento al rojo para su mejor estimado, así como sus errores respectivos a  $1\sigma$  y  $2\sigma$ . Observe que se produce un cambio de signo en  $q(z)$ .

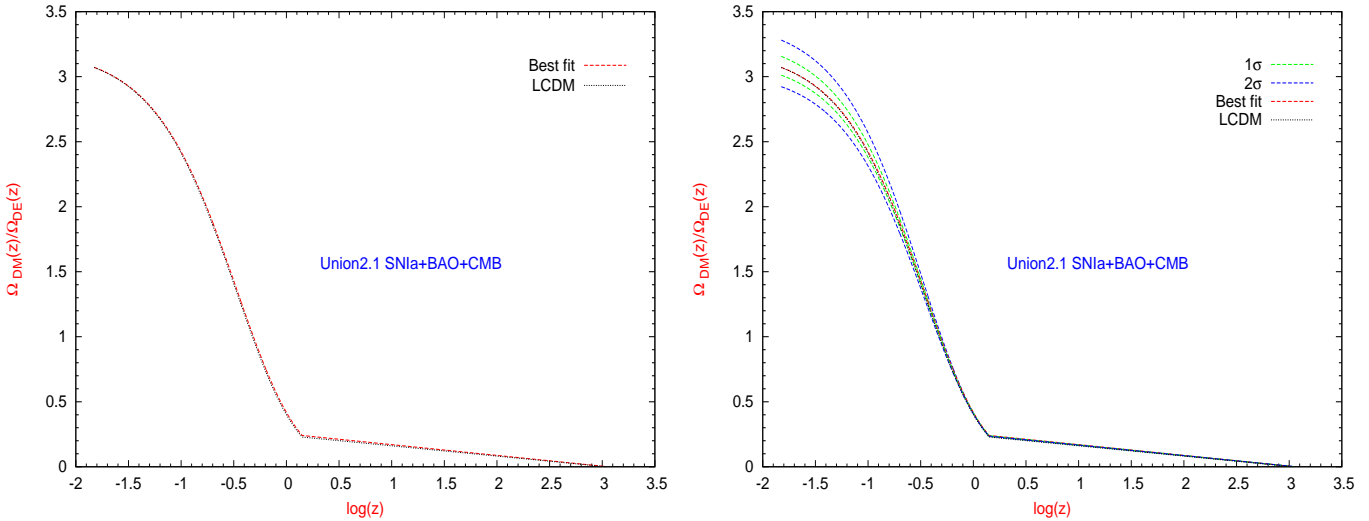


Figura 6.17: Muestran el cociente de las curvas mejores estimadas de los parámetros de densidad de energía de las componentes oscuras  $\Omega_{DE}(z)/\Omega_{DM}(z)$ , así como sus errores respectivos a  $1\sigma$  y  $2\sigma$  y comparados con la correspondiente curva del modelo  $\Lambda$ CDM. Estas están por encima de la correspondiente curva de  $\Lambda$ CDM, indicándonos que el “Problema de Coincidencia Cósmica” se alivia.

## CAPÍTULO 6. RESULTADOS DE LA RECONSTRUCCIÓN DEL TÉRMINO DE INTERACCIÓN $Q(Z)$ .

### 6.3. ENSAYO 3: RECONSTRUCCIÓN DE $Q(Z) = 3H(Z) \cdot \rho_{DM}(Z) \cdot G(Z)$ .

---

#### 6.3. Ensayo 3: Reconstrucción de $Q(z) = 3H(z) \cdot \rho_{DM}(z) \cdot g(z)$ .

De la misma manera como en el Ensayo 1, presentamos una tercera forma para reconstruir el término de interacción. Para este modelo los parámetros libres son  $\theta = \{W_0, \Omega_{DM,0}, H_0, \alpha_{DM}^e, \alpha_{DM}^0\}, \alpha_{DM}^f$ . La función de interacción  $g(z)$  se reconstruyó usando la ecuación (2.68) y los datos observacionales de supernovas del tipo Ia “Union2.1” (SNIa) [3], oscilaciones acústicas bariónicas (BAO) [4, 5, 6, 7], anisotropías de la radiación cósmica de fondo (CMB) [4], [8, 9, 10], y los “priors” descritos en la Subsección (3.8.2). En este Ensayo, hemos obtenido los mejores estimados de los parámetros y el correspondiente  $\tilde{\chi}_{min}^2$ . En la ecuación (2.77) del Capítulo 2, hemos encontrado dos casos, dependiendo de la combinación de los parámetros  $\alpha$ 's.

- Caso I:  $\alpha_{DM}^e > \alpha_{DM}^0 > \alpha_{DM}^f$
- Caso II:  $\alpha_{DM}^f > \alpha_{DM}^0 > \alpha_{DM}^e$

La Figura 6.18 muestra la región donde se encuentra los mejores estimados del parámetro  $\alpha_{DM}^e$  y sus correspondientes errores a  $1\sigma$  y  $2\sigma$  respectivamente. El panel superior derecho representa una amplificación de esa región de mayor probabilidad, en donde los mejores estimados están confinados en un intervalo continuo bien definido y con la misma probabilidad. Note que sus errores a  $1\sigma$  y  $2\sigma$  son próximas a cero.

La Figura 6.19 muestra la región donde se encuentran los mejores estimados del parámetro  $\alpha_{DM}^0$  y sus correspondientes errores a  $1\sigma$  y  $2\sigma$  respectivamente. La distribución de probabilidad del parámetro  $\alpha_{DM}^0$ , muestra pequeños saltos cada cierto intervalo como resultado de la fluctuación numérica y de la naturaleza estadística del parámetro. Similarmente a la Figura 6.18, el panel superior derecho nos muestra una amplificación de esa región de mayor probabilidad. Note que sus errores a  $1\sigma$  y  $2\sigma$  también son valores muy pequeños.

La Figura 6.20 muestra la distribución de probabilidad del parámetro  $\alpha_{DM}^f$ , señalándonos las regiones donde se encuentran los mejores estimados del parámetro  $\alpha_{DM}^f$  y sus correspondientes errores a  $1\sigma$  y  $2\sigma$  respectivamente. Los paneles superior derecho e inferior izquierdo representan una amplificación de algunas regiones. Del panel inferior izquierdo notamos que el parámetro  $\alpha_{DM}^f$  puede tomar valores muy próximos a cero e incluso ser cero. Observe que los errores a  $1\sigma$  y  $2\sigma$  de los mejores estimados de este parámetro son también próximas a cero.

Del mismo modo, de la Figura 6.21 notamos los mejores estimados y sus correspondientes errores a  $1\sigma$  y  $2\sigma$  de los parámetros  $W_0$ ,  $\Omega_{DM,0}$  y  $H_0$  respectivamente. Vea que los mejores estimados de estos parámetros se encuentran en la región de  $1\sigma$ , lo cual implica que nuestros resultados son consistentes con el modelo  $\Lambda$ CDM a  $1\sigma$ .

La Figura 6.22 muestra las reconstrucciones de los términos de interacción adimensionales  $(Q(z)/H_0)\rho_{c,0}^{-1}$  en función del corrimiento al rojo para los Casos I y II respectivamente. En esta misma Figura tanto los paneles superior izquierdo y superior derecho muestran las curvas mejores estimadas de  $(Q(z)/H_0)\rho_{c,0}^{-1}$  de los Casos I y II en  $z \in (0.0, 1.41]U1091.3$  respectivamente. También notamos que el intercambio de energía entre las componentes oscuras para el Caso II es mayor que el Caso I. En el intervalo de  $0 < z \leq 1.41$ , este

## CAPÍTULO 6. RESULTADOS DE LA RECONSTRUCCIÓN DEL TÉRMINO DE INTERACCIÓN $Q(Z)$ .

### 6.3. ENSAYO 3: RECONSTRUCCIÓN DE $Q(Z) = 3H(Z) \cdot \rho_{DM}(Z) \cdot G(Z)$ .

---

intercambio energético será mayor cuando  $z > 0.5$ , pero para corrimientos al rojo próximas a cero las curvas de ambos casos se superponen siendo muy pequeñas en magnitud y próximas a 0.004. Cabe mencionar que los paneles inferior izquierdo e inferior derecho muestran las curvas mejores estimadas de los Casos I y II y sus respectivos errores a  $1\sigma$  y  $2\sigma$ . Estos últimos paneles también muestran los mejores estimados de estos casos y sus errores a  $1\sigma$  y  $2\sigma$ .

Todas las Figuras anteriores han sido construídas utilizando los criterios presentados en la publicación de M. Abroe [92], permitiéndonos reconstruir la distribución de probabilidad para cada uno de los parámetros de este Ensayo 3.

Cabe agregar que para los cuatro paneles de la Figura 6.22, notamos que tanto para los Casos I y II, los mejores estimados de los términos de interacción adimensionales  $(Q(z)/H_0)\rho_{c,0}^{-1}$  y sus respectivos errores, no cruzan marginalmente la línea de no interacción  $Q(z) = 0$  durante la evolución cosmológica predicha por este modelo. Es decir, no existe el cambio de signo de la función  $(Q(z))$  desde valores positivos (en tiempos tempranos) a valores negativos (en tiempos mas tarde). Por lo tanto, no existe posibilidad de cruzar la línea de no interacción en  $z \in (0.0, 1.41]U1091.3$ , en consecuencia “No existe la posibilidad de la violación de la entropía local”.

La Figura 6.23 muestra las reconstrucciones de las funciones de interacción  $g(z)$  en función del corrimiento al rojo para los Casos I y II respectivamente. En esta misma Figura tanto los paneles superior izquierdo y superior derecho muestran las curvas mejores estimadas de  $g(z)$  en la región de  $z \in (0.0, 1.41]U1091.3$  respectivamente. Vemos también que el intercambio de energía entre las componentes oscuras para el Caso II es mayor que el Caso I y más intensa a partir de  $z > 0.1$ , pero para épocas cercanas al presente  $z < 0.1$ , la curva del Caso I representa un intercambio de energía mayor que el Caso II.

Note que los valores de estas intensidades son muy pequeñas en magnitud y próximas a 0.00565 (Caso I) y 0.00545 (Caso II) respectivamente. Mencionemos que, los paneles inferior izquierdo e inferior derecho muestran las curvas mejores estimadas de los Casos I y II con sus respectivos errores a  $1\sigma$  y  $2\sigma$ . También observamos que los errores a  $+1\sigma$  y  $+2\sigma$  para los Casos I y II se superponen en  $z \in (0.0, 1.41]$  respectivamente, como consecuencia de la pequeñez de la función de interacción. Además para el Caso II, las curvas de errores a  $-1\sigma$  y  $-2\sigma$  se superponen a su respectiva curva mejor estimada.

Mencionemos que, en esta Figura 6.23, el orden de magnitud de la interacción está en concordancia con las restricciones locales halladas en la intensidad de una interacción adimensional constante derivada de una muestra de masas viriales de cúmulos de galaxias, obtenida usando lentes gravitacionales débiles, rayos X y datos ópticos [83] ([58]-[59]) respectivamente.

Sin embargo, en base a los ajustes de datos de la muestra Constitución de supernovas del tipo Ia [1], de las medidas de distancia de BAO [7], de la prueba de las anisotropías de la radiación cósmica de fondo (CMB) [10] y de las restricciones actuales de la constante cosmológica, se han puesto fuertes restricciones en la magnitud de tales intensidades adimensionales, siendo ellas del orden de  $\xi \approx 10^{-4} - 10^{-2}$  [84] ([85]-[86]). Por tanto, nuestros resultados encontrados en este modelo (Casos I y II) son consistente con los resultados encontrados por estos investigadores que estudiaron el fenómeno de interacción entre componentes oscuras.

En la Figura 6.24 notamos que para los paneles superiores izquierdo y derecho las

---

## CAPÍTULO 6. RESULTADOS DE LA RECONSTRUCCIÓN DEL TÉRMINO DE INTERACCIÓN $Q(Z)$ .

### 6.3. ENSAYO 3: RECONSTRUCCIÓN DE $Q(Z) = 3H(Z) \cdot \rho_{DM}(Z) \cdot G(Z)$ .

**Tabla de Modelos**

Mejores estimados de los parámetros  $\alpha_{DM}^{e,o,f}$ ,  $\Omega_{DM,0}$ ,  $W_0$  y  $H_0$ .

Parámetros del Modelo	$\Lambda$ CDM	Caso I ( $\alpha_{DM}^e < \alpha_{DM}^o < \alpha_{DM}^f$ )	Caso II ( $\alpha_{DM}^f < \alpha_{DM}^o < \alpha_{DM}^e$ )
$\alpha_{DM}^e$	--	$[3.264, 5.440] \times 10^{-3}$	$[5.661, 7.590] \times 10^{-3}$
$\alpha_{DM}^o$	--	$[5.440, 5.660] \times 10^{-3}$	$[5.440, 5.660] \times 10^{-3}$
$\alpha_{DM}^f$	--	$[10.8, 13.2] \times 10^{-3}$	$[0.0, 0.069] \times 10^{-3} \cup [0.90, 1.15] \times 10^{-3}$ $\cup [2.0, 2.25] \times 10^{-3}$
$\Omega_{DM,0}$	0.2269	0.2271	0.2271
$W_0$	-1.0	-0.9832	-0.9832
$H_0(km/s)Mpc^{-1}$	70.9954	70.9742	70.9742
$\tilde{\chi}_{min}^2$	567.5023	552.9744	553.1360

Cuadro 6.14: Resumen de los mejores estimados de los parámetros del modelo. Ellos fueron calculados usando un Análisis de Estadística Bayesiana, y los datos observacionales de Union2.1 SNeIa + BAO + CMB.

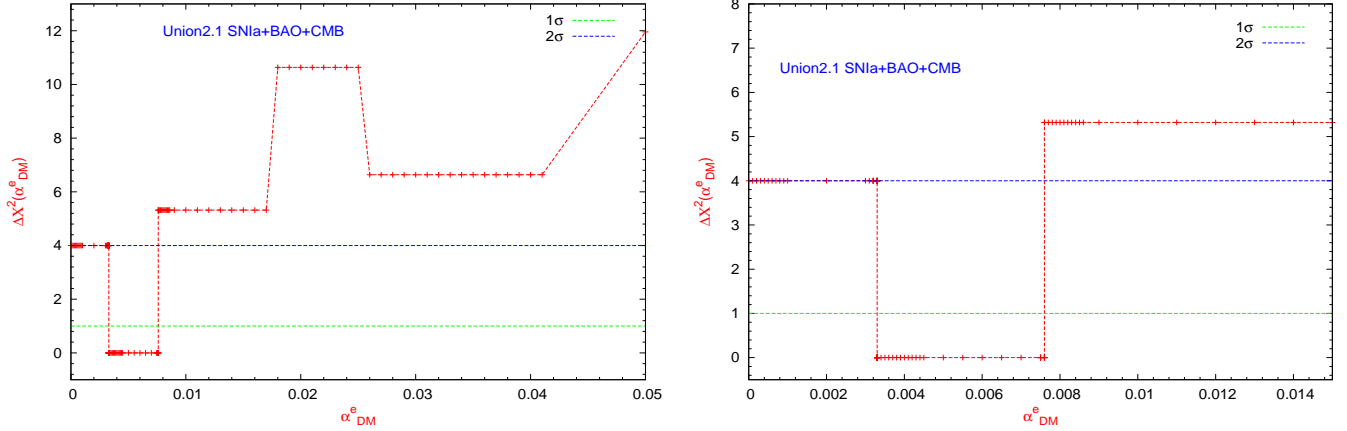


Figura 6.18: Mejores estimados y sus intervalos de confianza a  $1\sigma$  y  $2\sigma$  del parámetro  $\alpha_{DM}^e$ .

curvas mejores estimadas de los parámetros densidad de energía de las componentes oscuras siempre están dentro sus correspondientes curvas del modelo  $\Lambda$ CDM. Esto indica que nuestro ensayo de  $Q(z)$  alivia el “Problema de Coincidencia Cósmica”. También observamos que estos dos paneles superiores izquierdo y derecho las curvas mejores estimadas para los Casos I y II son muy próximas. Los parámetros densidad de energía oscura  $\Omega_{DE}(z)$  y sus respectivos errores a  $1\sigma$  y  $2\sigma$  para ambos casos, llegan a ser positivos en todo el rango del corrimiento al rojo. Los paneles medios izquierdo y derecho corresponden al Caso I con sus errores respectivos a  $1\sigma$  y  $2\sigma$  mientras que los paneles inferior izquierdo y derecho corresponden al Caso II con sus errores a  $1\sigma$  y  $2\sigma$  respectivamente.

**CAPÍTULO 6. RESULTADOS DE LA RECONSTRUCCIÓN DEL TÉRMINO DE INTERACCIÓN  $Q(Z)$ .**

**6.3. ENSAYO 3: RECONSTRUCCIÓN DE  $Q(Z) = 3H(Z) \cdot \rho_{DM}(Z) \cdot G(Z)$ .**

**Caso I ( $\alpha_{DM}^e < \alpha_{DM}^o < \alpha_{DM}^f$ )**

Parámetros del Modelo	Mejores estimados	$\pm 1\sigma$	$\pm 2\sigma$
$\alpha_{DM}^e$	$[3.264, 5.440] \times 10^{-3}$	0.0	0.0
$\alpha_{DM}^o$	$[5.440, 5.660] \times 10^{-3}$	0.0	0.0
$\alpha_{DM}^f$	$[10.80, 13.20] \times 10^{-3}$	0.0	0.0
$\Omega_{DM,0}$	0.2271	+0.0309 -0.0139	+0.0491 -0.0440
$W_0$	-0.9832	+0.0090 -0.0203	+0.0270 -0.0311
$H_0(km/s)Mpc^{-1}$	70.9742	+1.0145 -0.7847	+1.9205 -2.5118

Cuadro 6.15: Resumen de los errores a  $1\sigma$  y  $2\sigma$  de los mejores estimados del Caso I. Usando las ecuaciones (3.126)-(3.127) y el error a  $1\sigma$  del parámetro  $H_0$  encontramos los errores a  $1\sigma$  para  $\Omega_{b,0} = 0.0446_{-0.0010}^{+0.0012}$  y  $\Omega_{r,0} = 8.2852 \times 10^{-5+2.369 \times 10^{-6}}_{-1.832 \times 10^{-6}}$  respectivamente.

**Caso II ( $\alpha_{DM}^f < \alpha_{DM}^o < \alpha_{DM}^e$ )**

Parámetros del Modelo	Mejores estimados	$\pm 1\sigma$	$\pm 2\sigma$
$\alpha_{DM}^e$	$[5.661, 7.590] \times 10^{-3}$	0.0	0.0
$\alpha_{DM}^o$	$[5.440, 5.660] \times 10^{-3}$	0.0	0.0
$\alpha_{DM}^f$	$[0.0, 0.069] \times 10^{-3}$	0.0	0.0
$\Omega_{DM,0}$	0.2271	+0.0309 -0.0139	+0.0491 -0.0440
$W_0$	-0.9832	+0.0090 -0.0203	+0.0270 -0.0311
$H_0(km/s)Mpc^{-1}$	70.9742	+1.0145 -0.7847	+1.9205 -2.5118

Cuadro 6.16: Resumen de los errores a  $1\sigma$  y  $2\sigma$  de los mejores estimados del Caso II. Usando las ecuaciones (3.126)-(3.127) y el error a  $1\sigma$  del parámetro  $H_0$  encontramos los errores a  $1\sigma$  para  $\Omega_{b,0} = 0.0446_{-0.0010}^{+0.0012}$  y  $\Omega_{r,0} = 8.2852 \times 10^{-5+2.369 \times 10^{-6}}_{-1.832 \times 10^{-6}}$  respectivamente.

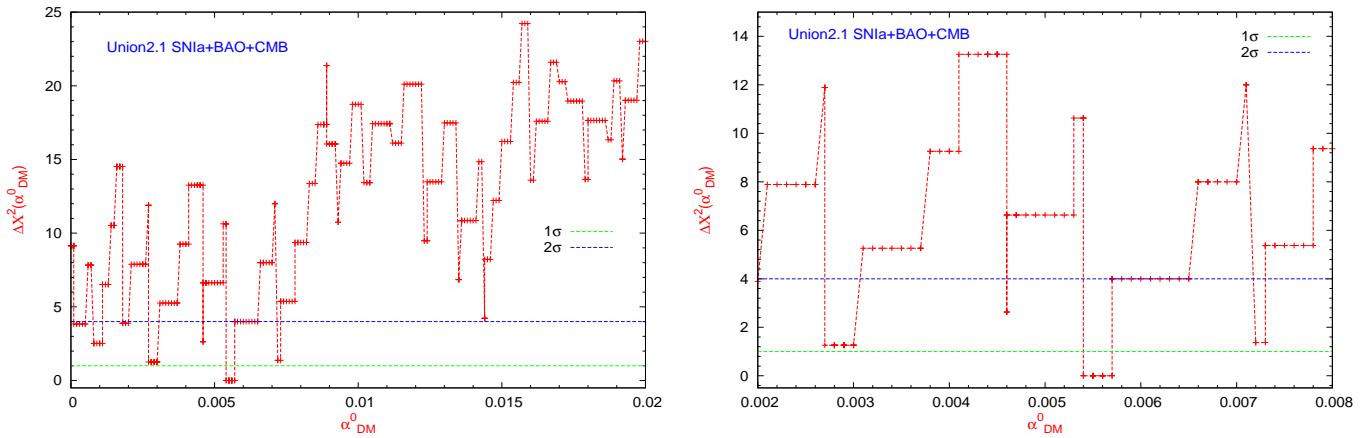


Figura 6.19: Mejores estimados y sus intervalos de confianza a  $1\sigma$  y  $2\sigma$  del parámetro  $\alpha_{DM}^0$ .

## CAPÍTULO 6. RESULTADOS DE LA RECONSTRUCCIÓN DEL TÉRMINO DE INTERACCIÓN $Q(Z)$ .

### 6.3. ENSAYO 3: RECONSTRUCCIÓN DE $Q(Z) = 3H(Z) \cdot \rho_{DM}(Z) \cdot G(Z)$ .

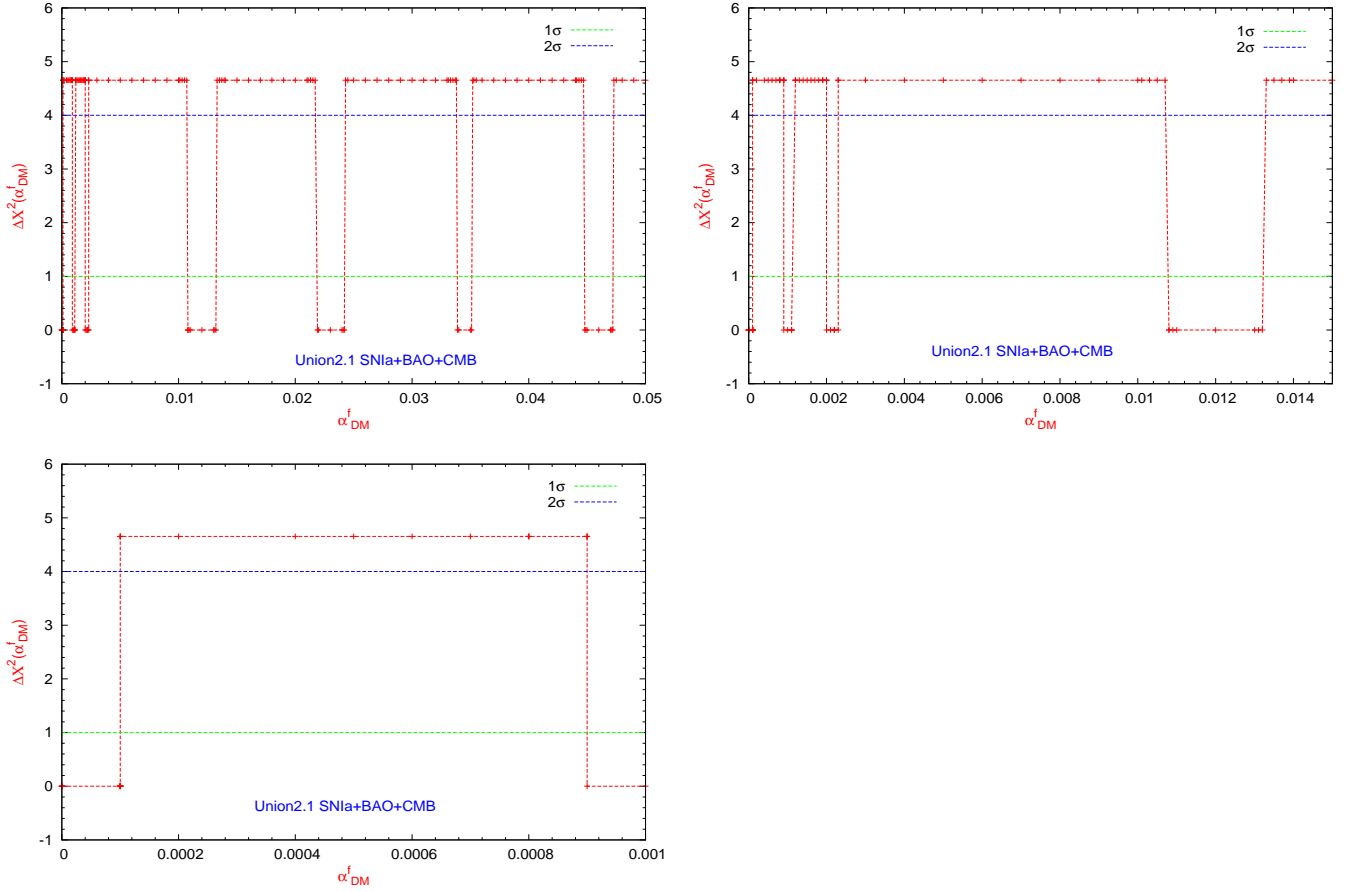


Figura 6.20: Mejores estimados y sus intervalos de confianza a  $1\sigma$  y  $2\sigma$  del parámetro  $\alpha_{DM}^f$ .

La Figura 6.25 muestra las reconstrucciones de los parámetros de desaceleración  $q(z)$  para los mejores ajustes de los Casos I y II, así como sus errores a  $1\sigma$  y  $2\sigma$  y comparados con la correspondiente curva del modelo  $\Lambda$ CDM. Todos estos paneles muestran, una transición desde una era de desaceleración en tiempos tempranos dominada por la materia bariónica a una era de aceleración en tiempos más tardíos correspondiendo a un dominio de la energía oscura en el presente. En esta época, el parámetro densidad de energía oscura llega a ser  $\Omega_{DE,0}(z) \approx 0.7$  como puede verse desde la Figure 6.24, el cual es suficientemente grande para generar una función de interacción adimensional no despreciable del orden de  $g \approx 0.006$ , como se muestra en la Figure 6.23.

Para analizar el “Problema de Coincidencia Cósmica”, usamos la Figura 6.26. En esta Figura observamos que los paneles superior izquierdo y superior derecho muestran el cociente de las curvas mejores estimadas de los parámetros de densidad de energía de las componentes oscuras  $\Omega_{DE}(z)/\Omega_{DM}(z)$  de los Casos I y II respectivamente y comparadas con la correspondiente curva del modelo  $\Lambda$ CDM. Estas curvas mejores estimadas están por encima de la correspondiente al modelo  $\Lambda$ CDM, indicándonos que el “Problema de Coincidencia Cósmica” se alivia en ambos casos. Es decir, que en tiempos tempranos este modelo se comporta como



CAPÍTULO 6. RESULTADOS DE LA RECONSTRUCCIÓN DEL TÉRMINO DE INTERACCIÓN  $Q(Z)$ .

6.3. ENSAYO 3: RECONSTRUCCIÓN DE  $Q(Z) = 3H(Z) \cdot \rho_{DM}(Z) \cdot G(Z)$ .

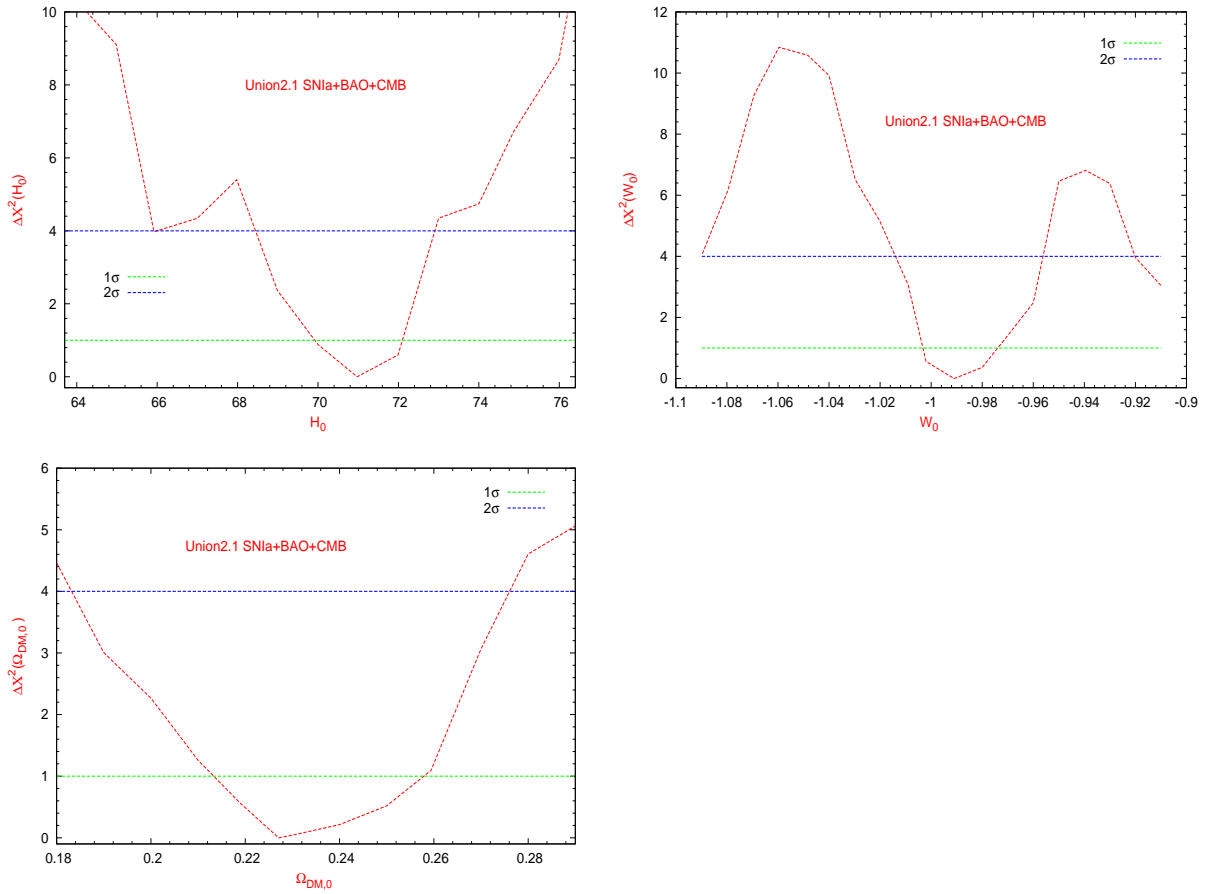


Figura 6.21: Mejores estimados y sus intervalos de confianza a  $1\sigma$  y  $2\sigma$  de los parámetros  $W_0$ ,  $\Omega_{DM,0}$  y  $H_0$  respectivamente.

$\Lambda$ CDM y para tiempos tardíos este cociente tiende a un valor constante. Los paneles inferior izquierdo e inferior derecho, muestran los errores a  $1\sigma$  y  $2\sigma$  para cada caso.

CAPÍTULO 6. RESULTADOS DE LA RECONSTRUCCIÓN DEL TÉRMINO DE INTERACCIÓN  $Q(Z)$ .

6.3. ENSAYO 3: RECONSTRUCCIÓN DE  $Q(Z) = 3H(Z) \cdot \rho_{DM}(Z) \cdot G(Z)$ .

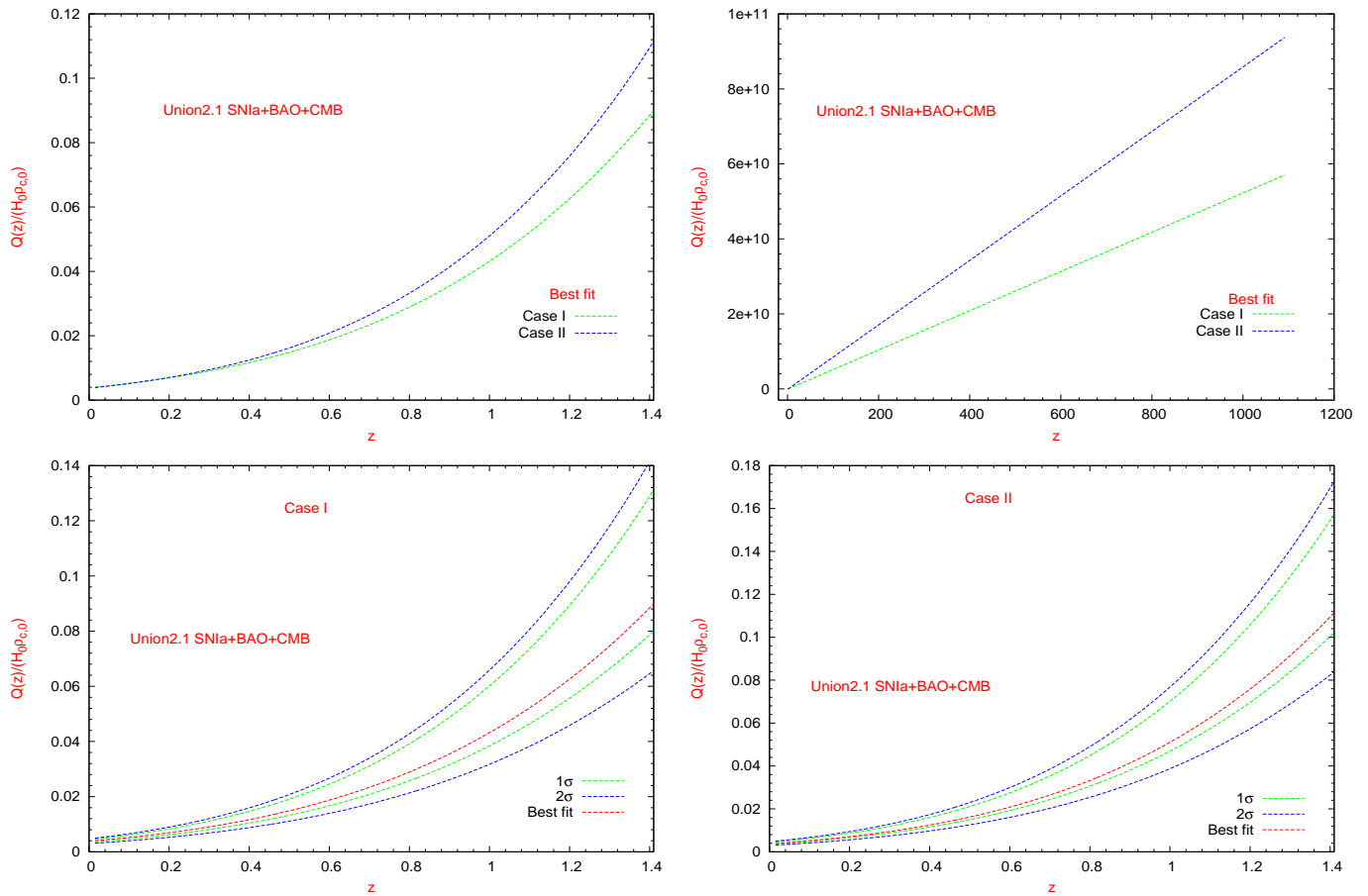


Figura 6.22: Muestra la reconstrucción del término de interacción adimensional  $Q(z)/H_0\rho_{c,0}$ , en función del corrimiento al rojo para los Casos I y II, así como sus errores respectivos a  $1\sigma$  y  $2\sigma$ .

CAPÍTULO 6. RESULTADOS DE LA RECONSTRUCCIÓN DEL TÉRMINO DE INTERACCIÓN  $Q(Z)$ .

6.3. ENSAYO 3: RECONSTRUCCIÓN DE  $Q(Z) = 3H(Z) \cdot \rho_{DM}(Z) \cdot G(Z)$ .

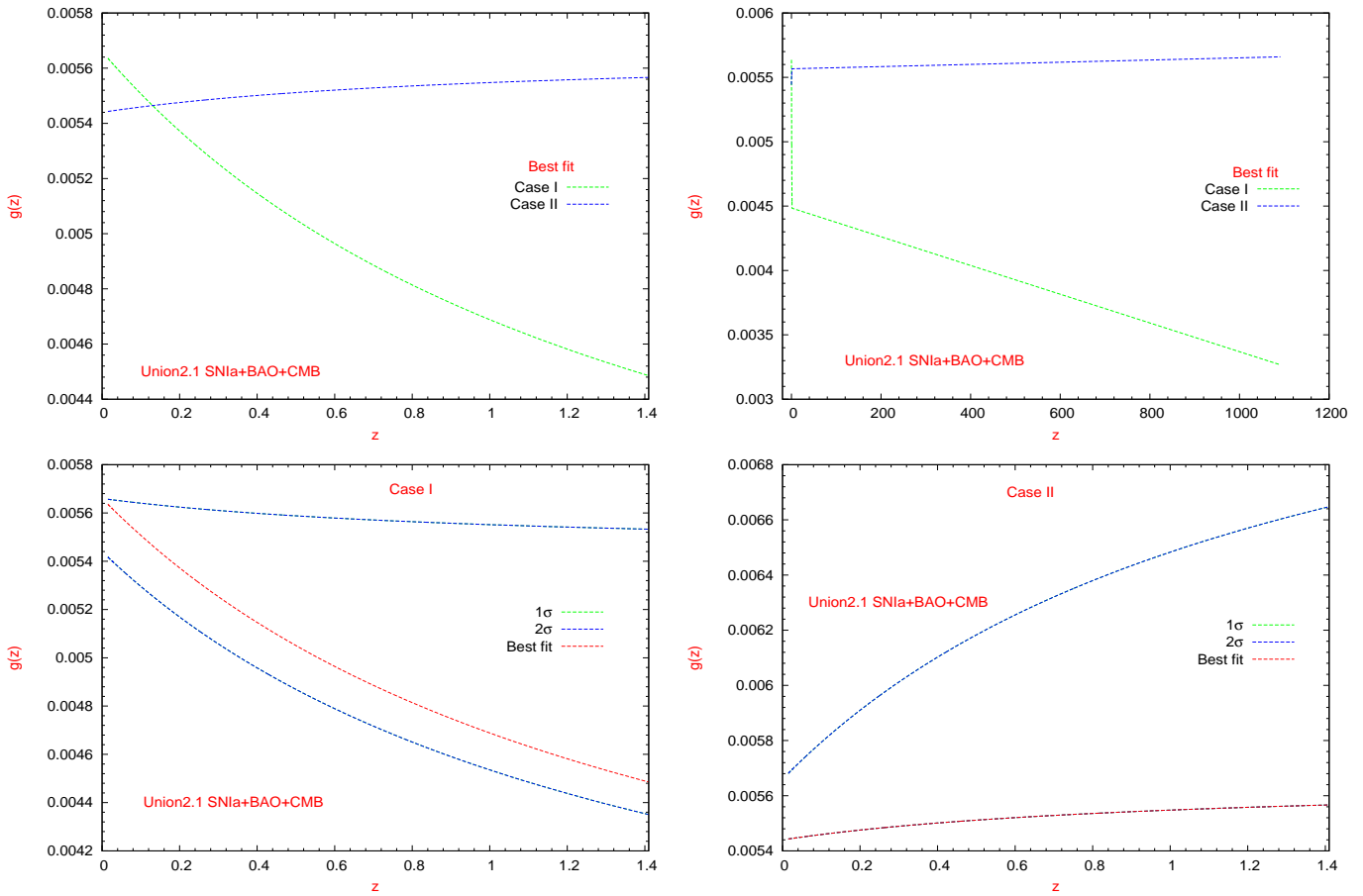


Figura 6.23: Muestra la reconstrucción de la función de interacción  $g(z)$  en función del corrimiento al rojo para los Casos I y II, así como sus errores respectivos a  $1\sigma$  y  $2\sigma$ .

# CAPÍTULO 6. RESULTADOS DE LA RECONSTRUCCIÓN DEL TÉRMINO DE INTERACCIÓN $Q(Z)$ .

## 6.3. ENSAYO 3: RECONSTRUCCIÓN DE $Q(Z) = 3H(Z) \cdot \rho_{DM}(Z) \cdot G(Z)$ .

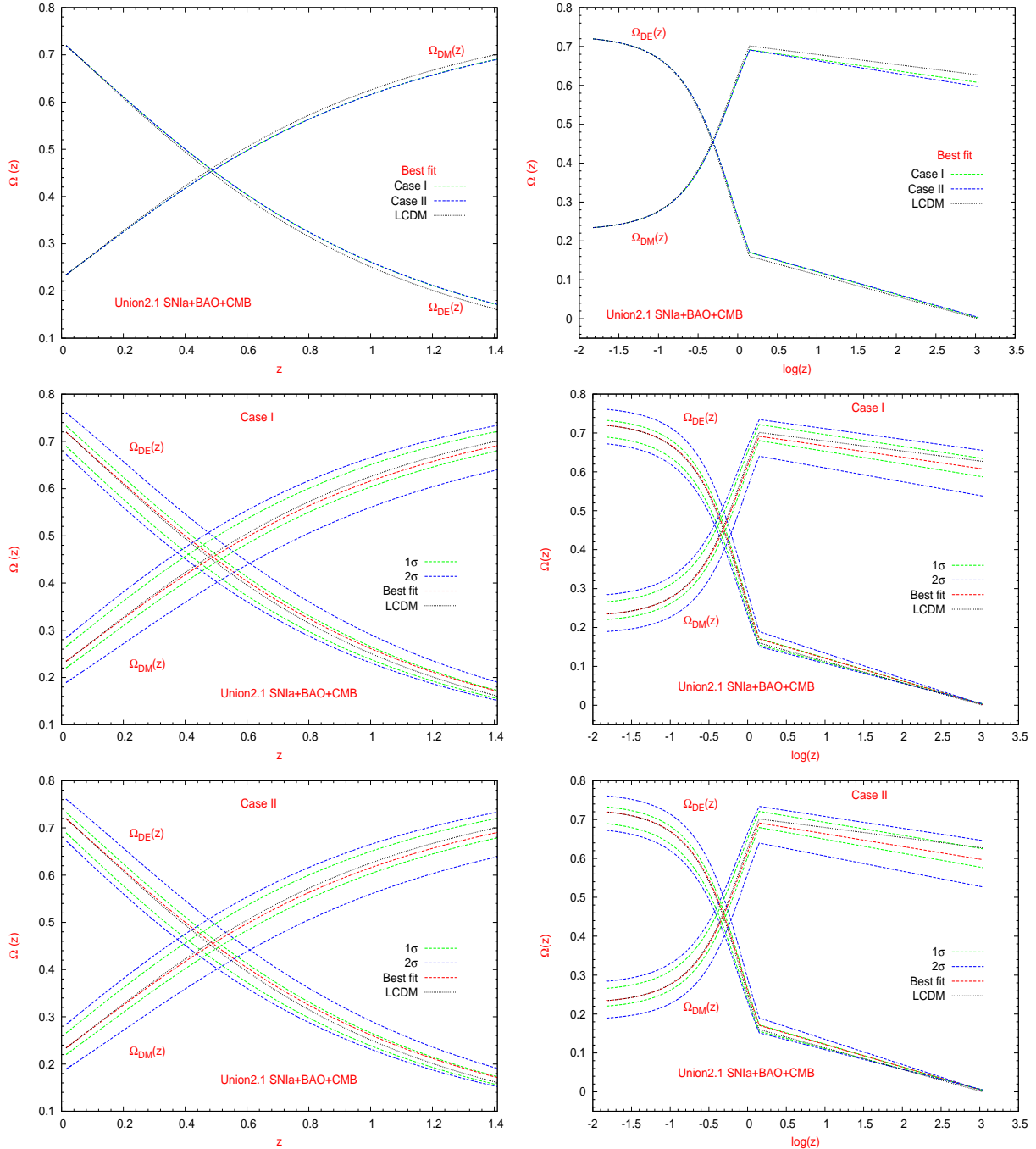


Figura 6.24: Muestra la reconstrucción de los parámetros de densidad  $\Omega(z)$  del sector oscuro, como una función del corrimiento al rojo para los Casos I y II, así como sus errores respectivos a  $1\sigma$  y  $2\sigma$ . Observe que para los Casos I y II se alivia el “Problema de Coincidencia Cósmica”.

**CAPÍTULO 6. RESULTADOS DE LA RECONSTRUCCIÓN DEL TÉRMINO  
DE INTERACCIÓN  $Q(Z)$ .**  
6.3. ENSAYO 3: RECONSTRUCCIÓN DE  $Q(Z) = 3H(Z) \cdot \rho_{DM}(Z) \cdot G(Z)$ .

---

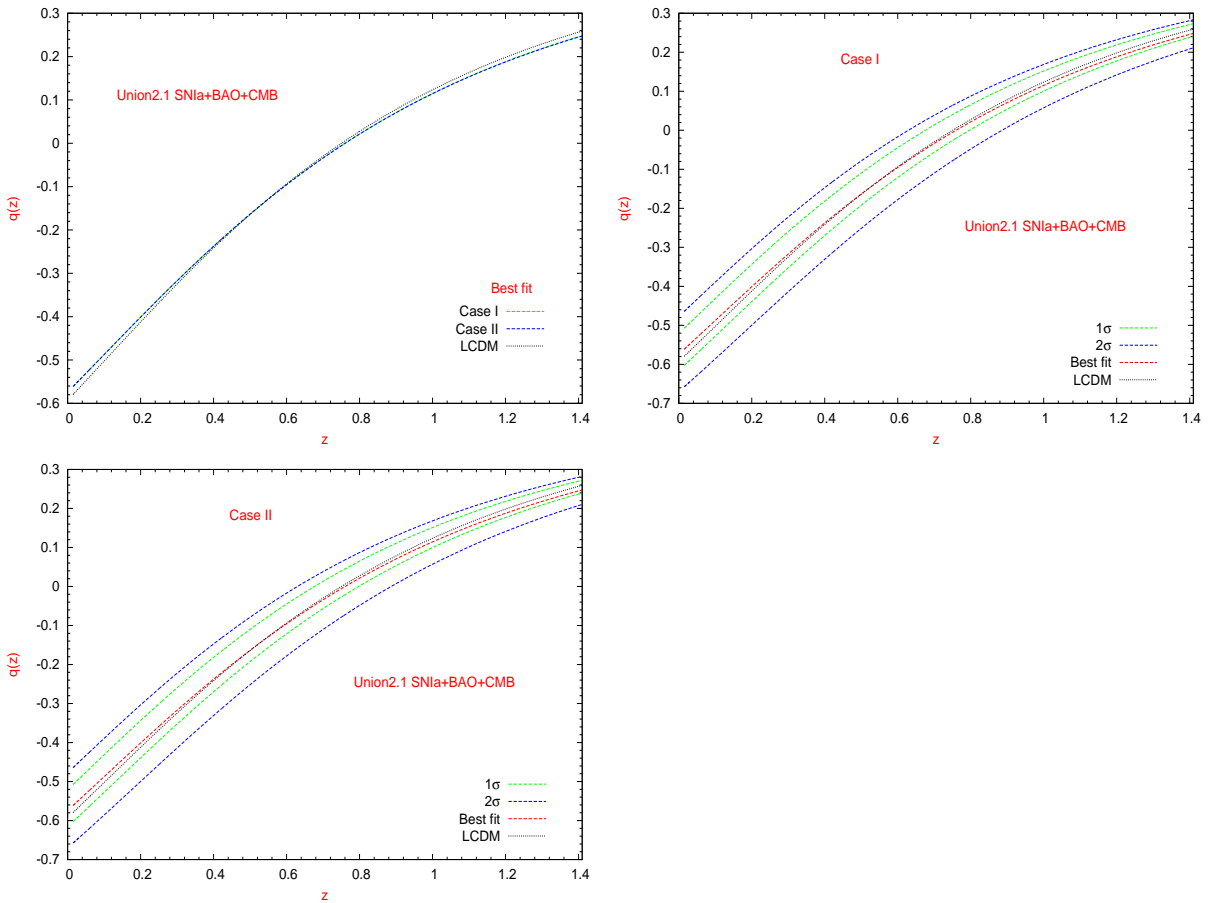


Figura 6.25: Muestra la reconstrucción del parámetro desaceleración  $q(z)$  en función del corrimiento al rojo para los Casos I y II, así como sus errores respectivos a  $1\sigma$  y  $2\sigma$ . Observe que para ambos casos se produce un cambio de signo de  $q(z)$ .

## CAPÍTULO 6. RESULTADOS DE LA RECONSTRUCCIÓN DEL TÉRMINO DE INTERACCIÓN $Q(Z)$ .

### 6.3. ENSAYO 3: RECONSTRUCCIÓN DE $Q(Z) = 3H(Z) \cdot \rho_{DM}(Z) \cdot G(Z)$ .

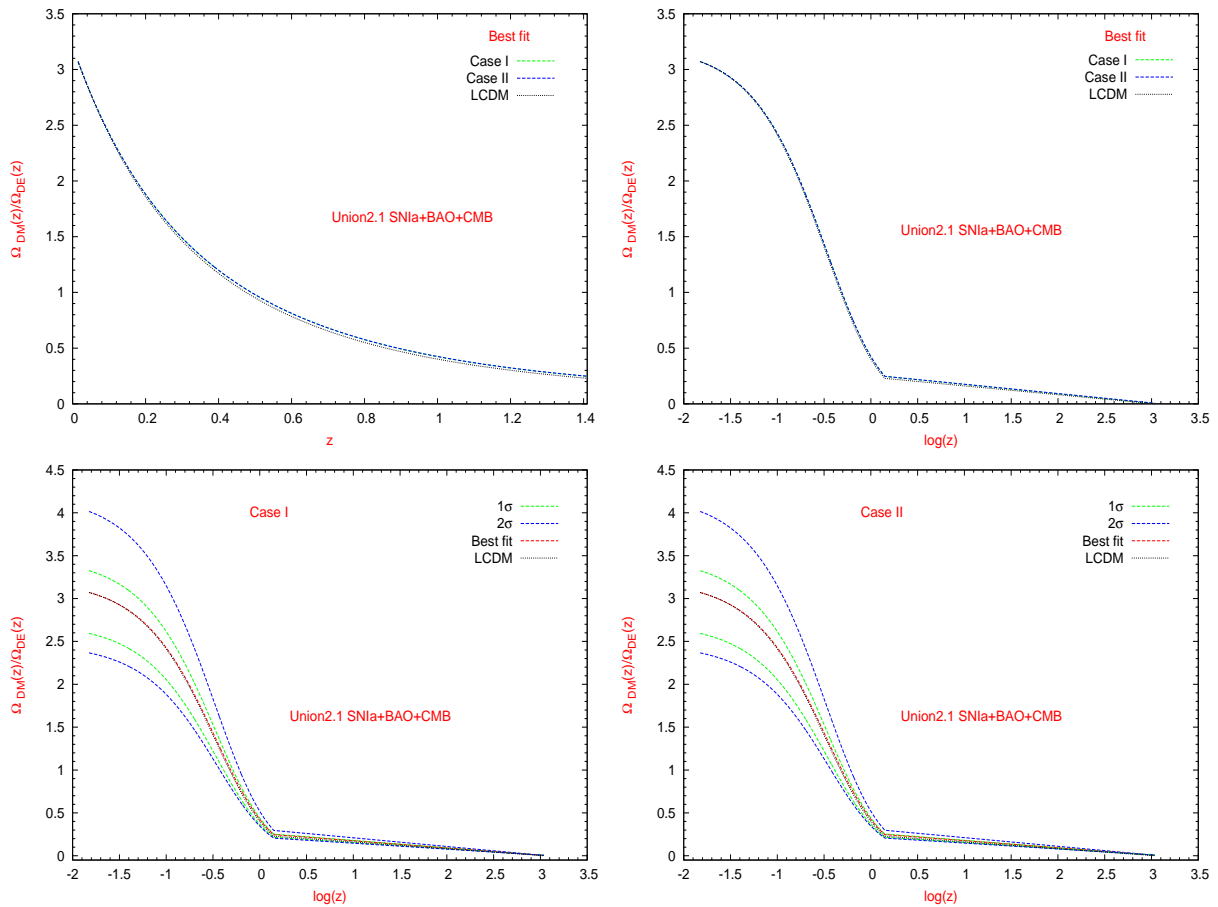


Figura 6.26: Muestra el cociente de las curvas mejores estimadas de los parámetros de densidad de energía de las componentes oscuras  $\Omega_{DE}(z)/\Omega_{DM}(z)$ , así como sus errores respectivos a  $1\sigma$  y  $2\sigma$  y comparados con la correspondiente curva del modelo  $\Lambda$ CDM. Estas están por encima de la correspondiente curva de  $\Lambda$ CDM, indicándonos que el “Problema de Coincidencia Cósmica” se alivia en ambos casos.

# Capítulo 7

## Conclusiones

En esta capítulo, presentamos las conclusiones de los resultados obtenidos en nuestros modelos cosmológicos.

1. Nuestros mejores estimados del Ensayo 1, muestran una rápida convergencia (las  $\lambda_N$ 's toman valores más pequeños,  $w$  y  $\Omega_{DM,0}$  disminuyen ligeramente) de los diferentes parámetros cosmológicos, cuando el número de parámetros  $N$  es incrementado en la expansión (2.46).
2. En el Ensayo 1, los mejores estimados de la función de interacción  $I_Q(z)$  prefieren cruzar la línea de no interacción  $I_Q(z) = 0$  durante la actual evolución cosmológica. Esta conclusión es independiente del número de coeficientes ( $N = 5$ ) usados en la expansión de  $I_Q(z)$ . Este cruce implica un cambio de signo de  $I_Q(z)$  desde valores positivos en el pasado (energía transferida desde DE a DM) hasta valores negativos en el presente (energía transferida desde DM a DE). La dirección del decaimiento es contraria a los resultados encontrados en la publicación de [59] y está en desacuerdo con el comportamiento oscilatorio reportado en [60]. También es posible la existencia del cruce de la línea de no interacción en algún momento del pasado reciente y está totalmente contenida dentro de los errores a  $1\sigma$  y  $2\sigma$  dadas por las observaciones de las supernovas del tipo Ia. Esto se debe a la forma elegida para parametrizar el término de interacción  $Q(z)$  y a los tipos de “priors” elegidos.
3. Los modelos cosmológicos estudiados en los Ensayos 1, 2 y 3, muestran que los mejores estimados del parámetro de densidad de energía oscura  $\Omega_{DE}^*(z)$  ( $\Omega_{DE}(z)$ ), así como sus errores a  $1\sigma$  y  $2\sigma$  llegan a ser siempre positivos en todo el rango del corrimiento al rojo considerado. Estos resultados son consistentes con el modelo  $\Lambda$ CDM.
4. Para el Ensayo 1, hemos encontrado que los intervalos de confianza a  $1\sigma$  y  $2\sigma$ , del parámetro de ecuación de estado de la energía oscura  $w$  considerados en el modelo III marginalizado, están totalmente contenidas en la región fantasma ( $w < -1$ ) mientras que para el modelo IV, encontramos que existen regiones de alta probabilidad en donde el parámetro  $w$  puede coexistir en la región fantasma o en la región de quintaesencia. Una explicación para ello, está basada en que hemos efectuado el ajuste de nuestros parámetros usando solamente datos de supernovas del tipo Ia, las cuales prefieren ajustar los parámetros en la región fantasma [87]-[88], [89]. Esta última dificultad puede ser

corregida si usamos otras pruebas observacionales tales como: las oscilaciones acústicas bariónicas (BAO) y las anisotropías de la radiación cósmica de fondo (CMB). Ellas nos permitirán realizar mejores ajustes estadísticos de nuestros parámetros de tal modo que nos permitan efectuar una mejor interpretación de los resultados. Por esta razón, en los Ensayos 2 y 3, hemos utilizado estas pruebas observacionales adicionales, encontrando que los correspondientes mejores estimados de los parámetros de ecuación de estado de la energía oscura  $w$  y sus errores a  $1\sigma$  y  $2\sigma$  están totalmente contenidas en la región de quintaesencia. Esto implica que nuestros resultados para el parámetro  $w$  sean consistentes con el modelo  $\Lambda$ CDM a  $2\sigma$ .

5. De acuerdo a las reconstrucciones hechas de la funciones de interacción de los Ensayos 1, 2 y 3 respectivamente, hemos encontrado que la energía oscura interactúa con la materia oscura vía un pequeño pero calculable acoplamiento, el cual es consistente con las observaciones dentro de un error de  $2\sigma$ . En este aspecto, la prueba observacional de CMB provee una restricción más rigurosa para el acoplamiento entre las componentes del sector oscuro del Universo, en comparación con la prueba observacional de supernovas tipo Ia.

las anisotropías de la radiación cósmica de fondo (CMB) proveen restricciones rigurosas para el acoplamiento.

6. De los Ensayos 1, 2 y 3, confirmamos que adicionando muestras observacionales tales como oscilaciones acústicas bariónicas (BAO) y anisotropías de la radiación cósmica de fondo (CMB), podemos reducir fuertemente el rango permitido de los parámetros de los modelos estudiados en cada Ensayo. Es decir, los rangos donde están definidos los parámetros son fuertemente reducidos en sus órdenes de magnitud.
7. De los Ensayos 2 y 3, se muestra que las parametrizaciones del término de interacción  $Q(z)$  proporcional al parámetro de materia oscura permiten aliviar el “Problema de Coincidencia Cósmica”. El cociente de los parámetros de densidad de energía de las componentes oscuras  $R = \Omega_{DM}/\Omega_{DE}$  en el pasado se comportan como el modelo  $\Lambda$ CDM y en el presente este cociente tiende a un valor constante.
8. De acuerdo a las Figuras 6.6, 6.16 y 6.25, nuestros resultados confirman que existe una fuerte evidencia que el universo está en una etapa de expansión acelerado en el pasado reciente, el cual es consistente con los estudios hechos por [93], [94].
9. Por último, concluimos que los modelos cosmológicos de los Ensayos 2 y 3, son totalmente consistentes con las propiedades de las variables cosmológicas y sus resultados son también coherentes con el modelo  $\Lambda$ CDM dentro de un error de  $2\sigma$ .

Finalmente, hacemos hincapié de la importancia y necesidad de medidas más precisas. Estas observaciones proveerán una herramienta complementaria para probar la realidad de las variables cosmológicas actuales, del término de interacción entre las componentes oscuras y de la existencia del cruce de la línea de no interacción  $I_Q(z) = 0$ , las cuales permitan poner restricciones rigurosas sobre ellos y en consecuencia, podremos distinguir entre los múltiples modelos alternativos de energía oscura. Creemos que los análisis, combinado con los resultados nos darán la posibilidad de entender todo ello.



## Apéndice A

# Elementos de la métrica de FLRW

El elemento de línea  $ds^2$  en coordenadas esféricas viene dado por

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (\text{A.1})$$

y una representación matricial de la métrica será

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2/(1 - kr^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (\text{A.2})$$

y el determinante de  $g_{\mu\nu}$  toma la siguiente forma

$$g \equiv \det g_{\mu\nu} = -\frac{a^6 r^4 \sin^2 \theta}{1 - kr^2}. \quad (\text{A.3})$$

En el sistema de referencia comóvil las componentes del tensor  $T_{\mu\nu}$  son

$$T^\mu{}_\nu = g^{\mu\alpha} T_{\alpha\nu} = \begin{pmatrix} -\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}, \quad (\text{A.4})$$

cuya traza  $T$  es

$$T = \text{Tr}(T^\mu{}_\mu) = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = T^\mu{}_\mu = 3p - \rho. \quad (\text{A.5})$$

Los símbolos de Christoffel no nulos para la métrica de FLRW son:

$$\Gamma_{rr}^t = \frac{a\dot{a}}{1 - kr^2}, \quad \Gamma_{rr}^r = \frac{kr}{1 - kr^2}, \quad (\text{A.6})$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^t = a\dot{a}r^2, \quad \Gamma_{\phi\phi}^t = a\dot{a}r^2 \sin^2 \theta, \quad (\text{A.7})$$

$$\Gamma_{tr}^r = \Gamma_{t\theta}^\theta = \Gamma_{t\phi}^\phi = \frac{\dot{a}}{a}, \quad (\text{A.8})$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = -r(1 - kr^2), \quad \Gamma_{\phi\phi}^r = -r(1 - kr^2) \sin^2 \theta, \quad (\text{A.9})$$

$$\Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{r\phi}^\phi = \frac{1}{r}, \quad (\text{A.10})$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^\theta = -\sin \theta \cos \theta, \quad \Gamma_{\theta\phi}^\phi = \cot \theta. \quad (\text{A.11})$$

## APÉNDICE A. ELEMENTOS DE LA MÉTRICA DE FLRW

---

El tensor de Riemann  $R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}$  se define como:

$$R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda, \quad (\text{A.12})$$

y los términos distintos de cero para la métrica de FLRW son:

$$R^t{}_{rtr} = \frac{a\ddot{a}}{1 - kr^2}, \quad (\text{A.13})$$

$$R^t{}_{\theta t\theta} = a\ddot{a}r^2, \quad (\text{A.14})$$

$$R^t{}_{\phi t\phi} = a\ddot{a}r^2 \sin^2(\theta), \quad (\text{A.15})$$

$$R^r{}_{ttr} = R^\theta{}_{t\theta t} = R^\phi{}_{t\phi t} = \frac{\ddot{a}}{a}, \quad (\text{A.16})$$

$$R^r{}_{\theta r\theta} = -R^\phi{}_{\theta\theta\phi} = r^2(\dot{a}^2 + k), \quad (\text{A.17})$$

$$R^r{}_{\phi r\phi} = R^\theta{}_{\phi\theta\phi} = r^2(\dot{a}^2 + k) \sin^2(\theta), \quad (\text{A.18})$$

$$R^\theta{}_{rr\theta} = R^\phi{}_{rr\phi} = -\frac{\dot{a}^2 + k}{1 - kr^2}. \quad (\text{A.19})$$

Los términos distintos de cero del tensor de Ricci  $R_{\mu\nu} \equiv R^\lambda{}_{\mu\lambda\nu}$  son:

$$\begin{aligned} R_{tt} &= -3\frac{\ddot{a}}{a}, \\ R_{rr} &= \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{1 - kr^2}, \\ R_{\theta\theta} &= r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k), \\ R_{\phi\phi} &= r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k) \sin^2 \theta, \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

y de que la contracción del tensor de Ricci consigo mismo resulta

$$R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} = 12 \left[ \left( \frac{\ddot{a}}{a} \right)^2 + \frac{\ddot{a}}{a^3} (\dot{a}^2 + k) + \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^4 + 2k \left( \frac{\dot{a}}{a^2} \right)^2 + \left( \frac{k}{a^2} \right)^2 \right]. \quad (\text{A.21})$$

El escalar de curvatura  $R \equiv R^\alpha{}_\alpha = R_{\beta\alpha} g^{\beta\alpha}$  se escribe como

$$R = 6 \left[ \frac{\ddot{a}}{a} + \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right]. \quad (\text{A.22})$$

Del tensor de Einstein  $G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ , se tiene que los únicos términos distintos de cero son los que están en la diagonal, es decir:

$$\begin{aligned} G_{tt} &= \frac{3}{a^2}(\dot{a}^2 + k)G_{rr} \\ &= \frac{2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k}{-1 + kr^2}, \\ G_{\theta\theta} &= -r^2(2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k), \\ G_{\phi\phi} &= -r^2(2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k)\sin^2\theta. \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

## Apéndice B

# Cálculo de las integrales $K_n(x, w)$ y $J_n(x, w)$ .

### B.1. Cálculo de las integrales $J_n(x, w)$ .

Para calcular las integrales  $K_n(x, w)$  definidas en (2.53), necesitamos obtener para  $m \geq 0$ , expresiones compactas

$$J_m(x, w) \equiv \int_{-1}^x \frac{\tilde{x}^m}{(a + b\tilde{x})^{(1+3w)}} d\tilde{x}. \quad (\text{B.1})$$

Ahora, usamos una relación de recurrencia válida para los enteros  $m \geq 1$  y  $m \neq 3w$ ,

$$J_m(x, w) = \frac{1}{(m - 3w)b} \cdot \left\{ \left[ \frac{x^m}{(a + bx)^{3w}} - (-1)^m \right] - amJ_{m-1}(x, w) \right\}, \quad (\text{B.2})$$

en donde fijamos para las integrales iniciales  $J_0(x, w)$ ,

$$J_0(x, w) = \begin{cases} \frac{1}{b} \ln(a + bx) & \text{Si } w = 0, \\ \frac{1}{3wb} \left[ 1 - \frac{1}{(a+bx)^{3w}} \right] & \text{Si } w \neq 0. \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

De (B.2) podemos construir la serie para  $J_m(x, w)$  en términos de  $J_0(x, w)$  y  $m \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} J_m(x, w) &= \frac{1}{b} \cdot \sum_{l=1}^m (-1)^{(m-l)} \cdot \frac{m!}{l!} \cdot \left( \frac{a}{b} \right)^{(m-l)} \cdot \left[ \prod_{k=l}^m \frac{1}{(k-3w)} \right] \cdot \\ &\quad \cdot \left[ \frac{x^l}{(a+bx)^{3w}} - (-1)^l \right] \\ &\quad + (-1)^m \cdot \left( \frac{a}{b} \right)^m \cdot \left[ \prod_{k=1}^m \frac{k}{(k-3w)} \right] \cdot J_0(x, w). \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

**APÉNDICE B. CÁLCULO DE LAS INTEGRALES  $K_N(X, W)$  Y  $J_N(X, W)$ .**  
**B.2. CÁLCULO DE LAS INTEGRALES  $K_N(X, W)$ .**

---

Para el caso  $w = 0$ , la fórmula anterior se reduce a

$$J_m(x, 0) = \sum_{l=1}^m \frac{(-1)^{(m-l)}}{lb} \left(\frac{a}{b}\right)^{(m-l)} \left[ x^l - (-1)^l \right] + (-1)^m \left(\frac{a}{b}\right)^m \cdot J_0(x, 0). \quad (\text{B.5})$$

## B.2. Cálculo de las integrales $K_n(x, w)$ .

A continuación calculamos las integrales  $K_n(x, w)$  definidas en (2.53) por

$$K_n(x, w) \equiv \int_{-1}^x \frac{T_n(\tilde{x})}{(a + b\tilde{x})^{(1+3w)}} d\tilde{x}. \quad (\text{B.6})$$

Para lograr esto, empleamos la siguiente representación de los polinomios de Chebyshev con subíndice entero par e impar

$$T_{2m+1}(\tilde{x}) = \frac{2m+1}{2} \cdot \sum_{l=0}^m \frac{(-1)^{(m+l)}(m+l)!}{(m-l)! \cdot (2l+1)!} \cdot (2\tilde{x})^{2l+1} \quad \text{Para } m \geq 0, \quad (\text{B.7})$$

$$T_{2m}(\tilde{x}) = m \cdot \sum_{l=0}^m (-1)^{(m+l)} \cdot \frac{(m+l+1)!}{(m-l)! \cdot (2l)!} \cdot (2\tilde{x})^{2l} \quad \text{Para } m \geq 1. \quad (\text{B.8})$$

Introduciendo (B.7) y (B.8) en (B.6), luego haciendo una integración explícita encontramos las expresiones finales para las integrales con subíndice entero par e impar, válidos para  $n \geq 0$  y  $w \neq (n+1)/3$ ,

$$\begin{aligned} K_{2n+1}(x, w) &= \frac{(2n+1)}{2b} \cdot \sum_{m=0}^n \sum_{l=1}^{2m+1} (-1)^{(n+3m-l+1)} \cdot \frac{(n+m)! \cdot (2)^{2m+1}}{(n-m)! \cdot l!} \cdot \\ &\quad \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{(2m+1-l)} \cdot \left[ \prod_{k=l}^{2m+1} \frac{1}{(k-3w)} \right] \cdot \\ &\quad \cdot \left[ \frac{x^l}{(a+bx)^{3w}} - (-1)^l \right] \\ &+ \frac{(2n+1)}{2} \cdot \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^{(n+3m+1)} \cdot (n+m)! \cdot (2)^{2m+1}}{(n-m)! \cdot (2m+1)!} \left(\frac{a}{b}\right)^{(2m+1)} \\ &\quad \cdot \left[ \prod_{k=1}^{2m+1} \frac{k}{(k-3w)} \right] \cdot K_0(x, w), \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

**APÉNDICE B. CÁLCULO DE LAS INTEGRALES  $K_N(X, W)$  Y  $J_N(X, W)$ .**  
**B.3. RECONSTRUCCIÓN DE LA FUNCIÓN  $I_Q(Z)$  USANDO POLINOMIOS DE**  
**CHEBYSHEV HASTA EL ORDEN  $N = 5$ .**

---

mientras que las integrales con subíndice entero par, válido para  $n \geq 1$ ,  $w \neq n/3$ , son:

$$\begin{aligned}
 K_{2n}(x, w) &= \frac{n}{b} \cdot \sum_{m=1}^n \sum_{l=1}^{2m} (-1)^{(n+3m-l)} \cdot \frac{(n+m-1)!(2)^{2m}}{(n-m)!l!} \left(\frac{a}{b}\right)^{(2m-l)} \\
 &\quad \cdot \left[ \prod_{k=l}^{2m} \frac{1}{(k-3w)} \right] \cdot \left[ \frac{x^l}{(a+bx)^{3w}} - (-1)^l \right] \\
 &\quad + \left[ 1 + n \sum_{m=1}^n \frac{(-1)^{3m}(n+m-1)!(2)^{2m}}{(n-m)!(2m)!} \left(\frac{a}{b}\right)^{2m} \cdot \prod_{k=1}^{2m} \frac{k}{(k-3w)} \right] \\
 &\quad \cdot (-1)^n \cdot K_0(x, w), \tag{B.10}
 \end{aligned}$$

donde la función inicial  $K_0(x, w)$  está dada por

$$K_0(x, w) = \begin{cases} \frac{1}{b} \ln(a + bx) & \text{Si } w = 0, \\ \frac{1}{3wb} \left[ 1 - \frac{1}{(a+bx)^{3w}} \right] & \text{Si } w \neq 0. \end{cases} \tag{B.11}$$

**B.3. Reconstrucción de la función  $I_Q(z)$  usando polinomios de Chebyshev hasta el orden  $N = 5$ .**

Para simplificar nuestro análisis y mostrar como trabaja el método, entonces hacemos la reconstrucción tomando una expansion en términos de los polinomios de Chebyshev hasta el orden  $N = 5$ . Nuestro primer paso será calcular las primeras cinco integrales  $J_n(x, w)$ :

$$J_1(x, w) = \frac{1}{b(1-3w)} \left\{ \left[ \frac{x}{(a+bx)^{3w}} + 1 \right] - aJ_0(x, w) \right\}, \tag{B.12}$$

$$\begin{aligned}
 J_2(x, w) &= \frac{1}{b(2-3w)} \left[ \frac{x^2}{(a+bx)^{3w}} - 1 \right] + \\
 &\quad \frac{2a}{b^2(2-3w)(1-3w)} \left\{ aJ_0(x, w) - \left[ \frac{x}{(a+bx)^{3w}} + 1 \right] \right\}, \tag{B.13}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_3(x, w) &= \frac{1}{b(3-3w)} \left[ \frac{x^3}{(a+bx)^{3w}} + 1 \right] - \\
 &\quad \frac{3a}{b^2(3-3w)(2-3w)} \left[ \frac{x^2}{(a+bx)^{3w}} - 1 \right] + \\
 &\quad \frac{6a^2}{b^3(3-3w)(2-3w)(1-3w)} \cdot \\
 &\quad \left\{ \left[ \frac{x}{(a+bx)^{3w}} + 1 \right] - aJ_0(x, w) \right\}, \tag{B.14}
 \end{aligned}$$

**APÉNDICE B. CÁLCULO DE LAS INTEGRALES  $K_N(X, W)$  Y  $J_N(X, W)$ .**  
**B.3. RECONSTRUCCIÓN DE LA FUNCIÓN  $I_Q(Z)$  USANDO POLINOMIOS DE**  
**CHEBYSHEV HASTA EL ORDEN  $N = 5$ .**

---

$$\begin{aligned}
 J_4(x, w) = & \frac{1}{b(4-3w)} \left[ \frac{x^4}{(a+bx)^{3w}} - 1 \right] - \\
 & \frac{4a}{b^2(4-3w)(3-3w)} \left[ \frac{x^3}{(a+bx)^{3w}} + 1 \right] + \\
 & \frac{12a^2}{b^3(4-3w)(3-3w)(2-3w)} \left[ \frac{x^2}{(a+bx)^{3w}} - 1 \right] + \\
 & \frac{24a^3}{b^4(4-3w)(3-3w)(2-3w)(1-3w)} \cdot \\
 & \left\{ aJ_0(x, w) - \left[ \frac{x}{(a+bx)^{3w}} + 1 \right] \right\}, \tag{B.15}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_5(x, w) = & \frac{1}{b(5-3w)} \left[ \frac{x^5}{(a+bx)^{3w}} + 1 \right] - \\
 & \frac{5a}{b^2(5-3w)(4-3w)} \left[ \frac{x^4}{(a+bx)^{3w}} - 1 \right] + \\
 & \frac{20a^2}{b^3(5-3w)(4-3w)(3-3w)} \left[ \frac{x^3}{(a+bx)^{3w}} + 1 \right] - \\
 & \frac{60a^3}{b^4(5-3w)(4-3w)(3-3w)(2-3w)} \left[ \frac{x^2}{(a+bx)^{3w}} - 1 \right] + \\
 & \frac{120a^4}{b^5(5-3w)(4-3w)(3-3w)(2-3w)(1-3w)} \cdot \\
 & \left\{ \left[ \frac{x}{(a+bx)^{3w}} + 1 \right] - aJ_0(x, w) \right\}, \tag{B.16}
 \end{aligned}$$

en donde hemos definido

$$b = \frac{z_{max}}{2}, \tag{B.17}$$

$$a = 1 + \frac{z_{max}}{2}, \tag{B.18}$$

$$x = \frac{2z}{z_{max}} - 1, \tag{B.19}$$

$$a + bx = 1 + z. \tag{B.20}$$

Por otro lado, los primeros cinco polinomios de Chebyshev son:

$$T_0(x) = 1, \tag{B.21}$$

$$T_1(x) = x, \tag{B.22}$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1, \tag{B.23}$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x, \tag{B.24}$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1, \tag{B.25}$$

$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x. \tag{B.26}$$

**APÉNDICE B. CÁLCULO DE LAS INTEGRALES  $K_N(X, W)$  Y  $J_N(X, W)$ .**  
**B.3. RECONSTRUCCIÓN DE LA FUNCIÓN  $I_Q(Z)$  USANDO POLINOMIOS DE**  
**CHEBYSHEV HASTA EL ORDEN  $N = 5$ .**

---

Usando estos polinomios, encontramos la siguiente relación entre las integrales (B.1) and (B.6)

$$K_0(x, w) = J_0(x, w), \quad (\text{B.27})$$

$$K_1(x, w) = J_1(x, w), \quad (\text{B.28})$$

$$K_2(x, w) = 2J_2(x, w) - J_0(x, w), \quad (\text{B.29})$$

$$K_3(x, w) = 4J_3(x, w) - 3J_1(x, w), \quad (\text{B.30})$$

$$K_4(x, w) = 8J_4(x, w) - 8J_2(x, w) + J_0(x, w), \quad (\text{B.31})$$

$$K_5(x, w) = 16J_5(x, w) - 20J_3(x, w) + 5J_1(x, w). \quad (\text{B.32})$$

Las soluciones generales del Ensayo 1: (2.51)-(2.52) hasta el orden  $N$  pueden ser escritas como

$$\Omega_{DM}^*(z) = (1+z)^3 \left[ \Omega_{DM,0} - \frac{z_{max}}{2} \sum_{n=0}^N \lambda_n \cdot K_n(x, 0) \right], \quad (\text{B.33})$$

$$\Omega_{DE}^*(z) = (1+z)^{3(1+w)} \left[ \Omega_{DE,0} + \frac{z_{max}}{2} \sum_{n=0}^N \lambda_n \cdot K_n(x, w) \right]. \quad (\text{B.34})$$

### B.4. Cálculo de las integrales $R_n(x)$ .

Para calcular las integrales  $R_n(z)$  definidas en (2.63), necesitamos usar las primeras seis integrales (B.12) y (B.27) simultáneamente, así:

$$R_0(z) = K_0(z) = \frac{2}{z_{max}} \cdot \left\{ \ln(1+z) \right\}, \quad (\text{B.35})$$

$$R_1(z) = K_1(z) = \frac{2}{z_{max}} \cdot \left\{ \frac{2z}{z_{max}} - \frac{(2+z_{max})}{z_{max}} \cdot \ln(1+z) \right\}, \quad (\text{B.36})$$

$$R_2(z) = K_2(z) = \frac{2}{z_{max}} \cdot \left\{ \frac{4z}{z_{max}} \cdot \left[ \frac{z}{z_{max}} - \frac{2}{z_{max}} - 2 \right] + \left( 1 + \frac{6.828427}{z_{max}} \right) \cdot \left( 1 + \frac{1.171572}{z_{max}} \right) \cdot \frac{\ln(1+z)}{z_{max}} \right\}, \quad (\text{B.37})$$

$$R_3(z) = K_3(z) = \frac{2}{z_{max}} \cdot \left\{ \frac{2}{z_{max}^3} \cdot \left\{ 10.66665 \cdot \left[ (z - 0.75)^2 + 2.4375 \right] + \right. \right. \\ \left. \left. -(2+z_{max}) \cdot (z_{max} + 14.928203) \cdot (z_{max} + 1.071796) \ln(1+z) + \right. \right. \\ \left. \left. -6z \cdot z_{max} \cdot \left[ 4z - 3z_{max} - 8 \right] \right\} \right\}, \quad (\text{B.38})$$

$$R_4(z) = K_4(z) = \frac{2}{z_{max}} \cdot \left\{ \frac{8}{z_{max}^4} \cdot \left( [z - 2z_{max}] \cdot [2z + z_{max}] \cdot [2z - z_{max}] + 5z \cdot z_{max}^2 \right) + \right. \\ \left. \left[ 1.33333 \cdot ((z + 1.5)^2 + 0.75) + 3 \cdot (2 + z_{max}) \cdot (z_{max} - z) \right] \cdot \right. \\ \left. \cdot \frac{16z \cdot (2+z_{max})}{z_{max}^4} - (z - 2z_{max} - 2) \cdot \frac{16z}{z_{max}^2} + \left( 1 - 8 \left( 1 + \frac{2}{z_{max}} \right)^2 + 8 \left( 1 + \frac{2}{z_{max}} \right)^4 \right) \cdot \ln(1+z) \right\}, \quad (\text{B.39})$$

$$R_5(z) = K_5(z) = \frac{2}{z_{max}} \cdot \left\{ \frac{16}{z_{max}^5} \cdot \left[ (z - 2z_{max}) \cdot (2z - z_{max}) \cdot (3.2z^3 - (2 + z_{max}) \cdot (2z + z_{max})) \right] + \right. \\ \left[ 2(2z - z_{max})^2 + 5(2 - z_{max}) + (0.4z + 4.472135) \cdot (0.4z - 4.472135) \right] \frac{16z}{z_{max}^5} + \\ \left( \frac{8(2 + z_{max})^2}{z_{max}^5} - \frac{10}{z_{max}^3} \right) \cdot (5.3333z \cdot ((z + 1.5)^2 + 0.75) + 12z \cdot (2 + z_{max}) \cdot (z_{max} - z)) + \\ \left. \left[ \frac{20(2 + z_{max})^3}{z_{max}^3} - \frac{16(2 + z_{max})^5}{z_{max}^5} - \frac{5(2 + z_{max})}{z_{max}} \right] \cdot \ln(1+z) + \frac{10z}{z_{max}} \right\}. \quad (\text{B.40})$$



### B.5. Cálculo de los promedios $l_n(\tilde{x})$ .

A continuación, mostramos los promedios de las primeras seis funciones  $l_n(\tilde{x})$

$$\tilde{l}_0(\tilde{x}) = \frac{2}{z_{max}} \cdot \left\{ \ln(1 + 0.5z_{max} \cdot (1 + \tilde{x})) \right\}, \quad (\text{B.41})$$

$$\tilde{l}_1(\tilde{x}) = \frac{2}{z_{max}} \cdot \left\{ 1 + \tilde{x} - \left( \frac{2 + z_{max}}{z_{max}} \right) \cdot \ln(1 + 0.5z_{max} \cdot (1 + \tilde{x})) \right\}, \quad (\text{B.42})$$

$$\tilde{l}_2(\tilde{x}) = \frac{2}{z_{max}} \cdot \left\{ (1 + \tilde{x}) \cdot \left( \tilde{x} - \frac{4}{z_{max}} - 3 \right) + \left( 1 + \frac{6.828427}{z_{max}} \right) \cdot \left( 1 + \frac{1.171572}{z_{max}} \right) \cdot \frac{\ln(1 + 0.5z_{max} \cdot (1 + \tilde{x}))}{z_{max}} \right\}, \quad (\text{B.43})$$

$$\tilde{l}_3(\tilde{x}) = \frac{2}{z_{max}} \cdot \left\{ \frac{1}{z_{max}^3} \cdot \left[ 10.666665 \cdot [0.5z_{max} + 0.5x \cdot z_{max} - 0.75]^2 + 25.9999995 + (3z_{max}^2 \cdot (1 + \tilde{x}) \cdot z_{max} - 2\tilde{x}z_{max} + 8) - (2 + z_{max}) \cdot (z_{max} + 14.928203) \cdot (z_{max} + 1.071796) \cdot \ln(1 + 0.5z_{max} \cdot (1 + \tilde{x})) \right] \right\}, \quad (\text{B.44})$$

$$\begin{aligned} \tilde{l}_4(\tilde{x}) = \frac{2}{z_{max}} \cdot & \left\{ \frac{4}{z_{max}^4} \cdot (\tilde{x} \cdot [\tilde{x} - 2] \cdot [\tilde{x} - 3] + 5[\tilde{x} + 1]) - \frac{[2 + z_{max}]}{z_{max}^3} \cdot \right. \\ & \cdot \left[ 2.666666(1 + \tilde{x}) \cdot [(z_{max} + z_{max}\tilde{x} + 3) + 3] - 24(2 + z_{max}) \cdot \right. \\ & \cdot (1 + \tilde{x}) \cdot (\tilde{x} - 0.5z_{max}) \left. \right] - \frac{4}{z_{max}}(1 + \tilde{x}) \cdot (z_{max}\tilde{x} - 4 - 3z_{max}) + \\ & \left. \left( 1 - 8\left(1 + \frac{2}{z_{max}}\right)^2 + 8\left(1 + \frac{2}{z_{max}}\right)^4 \right) \cdot \ln[1 + 0.5z_{max}(1 + \tilde{x})] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{B.45})$$

$$\tilde{l}_5(\tilde{x}) = \frac{2}{z_{max}} \cdot \left\{ 5(1 + \tilde{x}) + \frac{8\tilde{x} \cdot (\tilde{x} - 3)}{z_{max}^2} (0.4z_{max}^2 \cdot (1 + \tilde{x})^3 - (2 + \tilde{x}) \cdot (2 + z_{max})) + \right.$$

$$\left. \left( \frac{8(2 + z_{max})^2}{z_{max}^4} - \frac{10}{z_{max}^2} \right) \cdot \left[ 2.666666 \cdot (1 + \tilde{x}) [0.5z_{max} \cdot (1 + \tilde{x}) + 1.5]^2 + 0.75 + 3z_{max} \cdot (2 + z_{max}) \cdot (1 - \tilde{x}^2) \right] \right\}$$

**APÉNDICE B. CÁLCULO DE LAS INTEGRALES  $K_N(X, W)$  Y  $J_N(X, W)$ .**  
**B.5. CÁLCULO DE LOS PROMEDIOS  $L_N(\tilde{X})$ .**

---

$$\begin{aligned}
 & + \frac{8(1+x)}{z_{max}^4} \cdot \left[ 2z_{max}^2 \tilde{x}^2 - 5z_{max} + 10 + (0.2z_{max}(1+\tilde{x}) + 4.472135) \cdot (0.2z_{max}(1+\tilde{x}) - 4.472135) \right] \\
 & + \left( \frac{20(2+z_{max})^2}{z_{max}^2} - \frac{16(2+z_{max})^4}{z_{max}^4} - 5 \right) \cdot \frac{(2+z_{max})}{z_{max}} \cdot \ln [1 + 0.5z_{max} \cdot (1+\tilde{x})] \Big\}. \quad (B.46)
 \end{aligned}$$

Las soluciones generales del Ensayo 2: (2.60)-(2.61) hasta el orden  $N$  son reescritas como:

$$\Omega_{DM}^*(z) = (1+z)^3 \Omega_{DM,0} \cdot \exp \left( -\frac{z_{max}}{2} \left[ \sum_{n=0}^N \lambda_n \cdot R_n(z) \right] \right), \quad (B.47)$$

$$\Omega_{DE}^*(z) = (1+z)^{3(1+w)} \left[ \Omega_{DE,0} + \frac{z_{max}}{2} \Omega_{DM}^*(z) \sum_{n=0}^N \lambda_n \cdot S_n(z, w) \right]. \quad (B.48)$$

# Apéndice C

## Medidas de distancia en Cosmología.

En este Apéndice presentamos las principales medidas de distancia utilizadas en Cosmología [95].

### C.1. Distancia comóvil $D_C$

Es una medida de distancia fundamental en Cosmología y todas las demás distancias cosmológicas serán expresadas en términos de ella.

$$D_C \equiv D_H \int_0^z \frac{dz'}{E(z')}, \quad (\text{C.1})$$

en donde  $D_H$  es la distancia de Hubble y está definida como:

$$D_H \equiv \frac{c}{H_0} = 3000h^{-1}Mpc. \quad (\text{C.2})$$

### C.2. Distancia comóvil transversal $D_M$

La distancia comóvil entre dos eventos con el mismo corrimiento al rojo pero separados en el cielo por un ángulo  $\delta\theta$  es  $D_M\delta\theta$ . La distancia comóvil transversal  $D_M$  se define en términos de  $D_C$  como:

$$D_M(z) \equiv \begin{cases} \frac{D_H}{\sqrt{\Omega_k}} \operatorname{senh}\left(\sqrt{\Omega_k} \frac{D_C(z)}{D_H}\right) & \text{Si } \Omega_k > 0, \\ D_C(z) & \text{Si } \Omega_k = 0, \\ \frac{D_H}{\sqrt{|\Omega_k|}} \operatorname{sen}\left(\sqrt{|\Omega_k|} \frac{D_C(z)}{D_H}\right) & \text{Si } \Omega_k < 0, \end{cases} \quad (\text{C.3})$$

donde las funciones trigonométricas  $\operatorname{senh}$  y  $\operatorname{sen}$  indican el tipo de geometría espacial del universo. La distancia comóvil transversal es graficada en la Figura C.1.

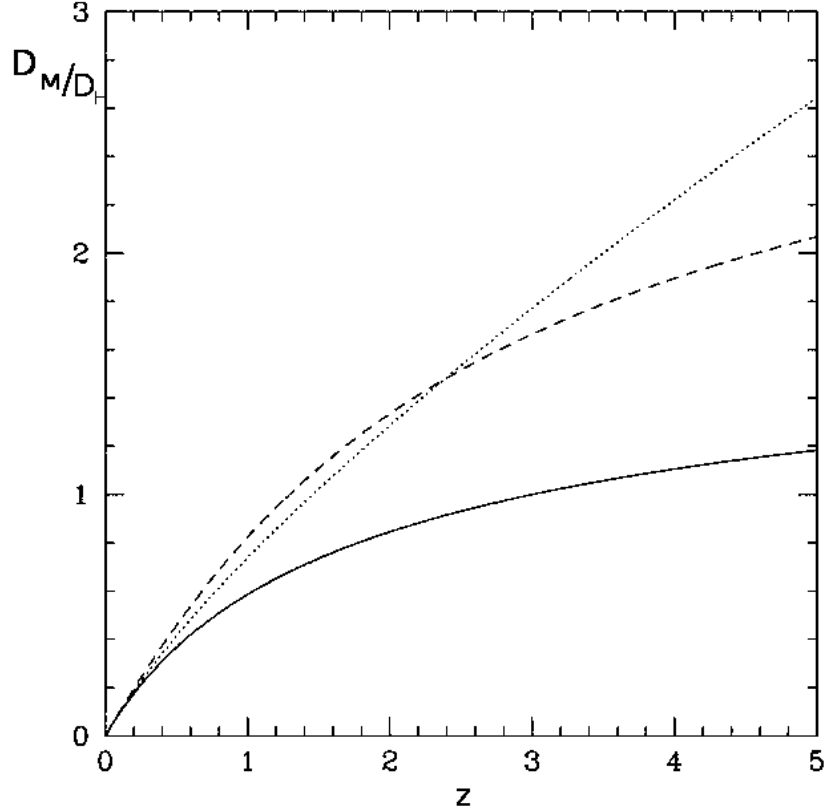


Figura C.1: La distancia comóvil transversal adimensional  $D_M/D_H$ . Las tres curvas son para tres modelos,  $(\Omega_M, \Omega_\Lambda) = (1, 0)$ , línea sólida;  $(0.05, 0)$ , línea punteada; y  $(0.2, 0.8)$ , línea con guiones [95].

### C.3. Distancia diametral angular $D_A$

Es definida como el cociente del tamaño transversal de un objeto físico a su tamaño angular (en radianes). La distancia diametral angular  $D_A$  se define en términos de la distancia comóvil transversal  $D_M$  como:

$$D_A(z) \equiv \frac{D_M}{1+z} = \begin{cases} \frac{D_H}{(1+z)\sqrt{\Omega_k}} \sinh\left(\sqrt{\Omega_k} \frac{D_C(z)}{D_H}\right) & \text{Si } \Omega_k > 0, \\ \frac{D_C(z)}{1+z} & \text{Si } \Omega_k = 0, \\ \frac{D_H}{(1+z)\sqrt{|\Omega_k|}} \text{sen}\left(\sqrt{|\Omega_k|} \frac{D_C(z)}{D_H}\right) & \text{Si } \Omega_k < 0, \end{cases} \quad (\text{C.4})$$

donde las funciones trigonométricas  $\sinh$  y  $\text{sen}$  indican el tipo de geometría espacial del universo. Esta distancia no se incrementa indefinidamente cuando  $z \rightarrow \infty$ ; ella gira en  $z \sim 1$  y los objetos más distantes parecen tener mayor tamaño angular. La distancia diametral angular es graficada en la Figura C.2.

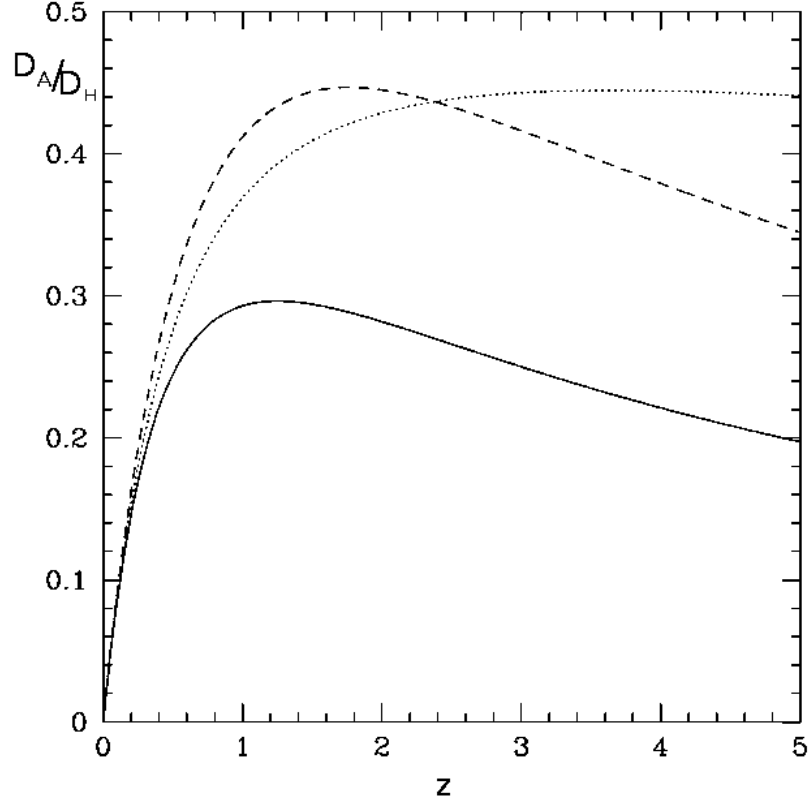


Figura C.2: La distancia diametral angular adimensional  $D_A/D_H$ . Las tres curvas son para tres modelos,  $(\Omega_M, \Omega_\Lambda) = (1, 0)$ , línea sólida;  $(0.05, 0)$ , línea punteada; y  $(0.2, 0.8)$ , línea con guiones [95].

#### C.4. Distancia de luminosidad $D_L$

La distancia de luminosidad  $D_L$  se define en términos de la distancia comóvil transversal  $D_M$  como:

$$D_L(z) \equiv (1+z)D_M = \begin{cases} \frac{(1+z)D_H}{\sqrt{\Omega_k}} \sinh(\sqrt{\Omega_k} \frac{D_C(z)}{D_H}) & \text{Si } \Omega_k > 0, \\ \frac{(1+z)D_C(z)}{D_H} & \text{Si } \Omega_k = 0, \\ \frac{(1+z)D_H}{\sqrt{|\Omega_k|}} \text{sen}(\sqrt{|\Omega_k|} \frac{D_C(z)}{D_H}) & \text{Si } \Omega_k < 0, \end{cases} \quad (\text{C.5})$$

donde las funciones trigonométricas  $\sinh$  y  $\text{sen}$  indican el tipo de geometría espacial del universo. La distancia de luminosidad es graficada en la Figura C.3.

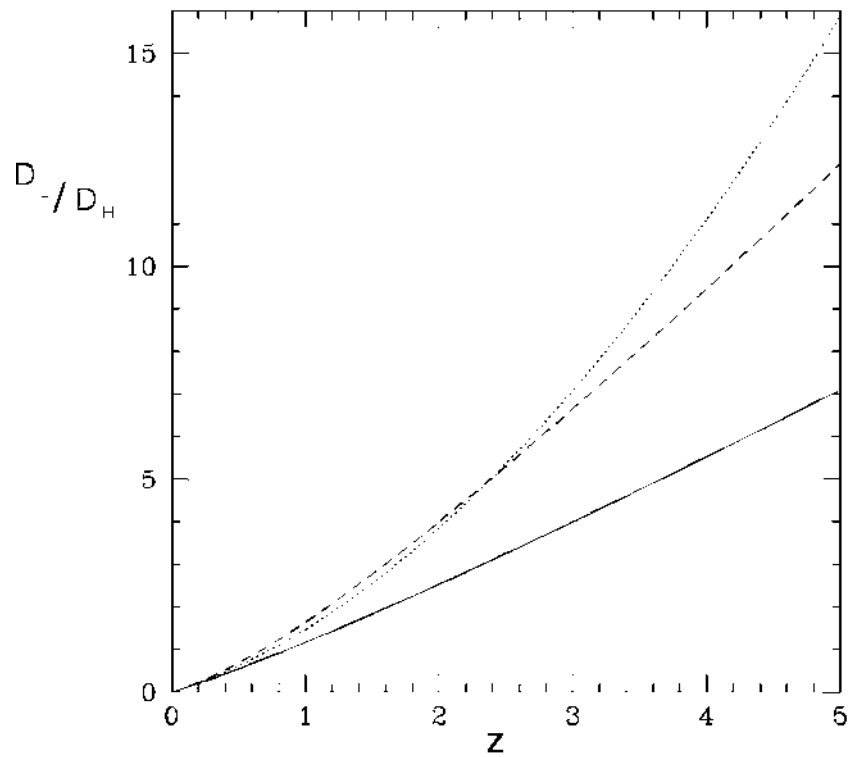


Figura C.3: La distancia de luminosidad adimensional  $D_L/D_H$ . Las tres curvas son para tres modelos,  $(\Omega_M, \Omega_\Lambda) = (1, 0)$ , línea sólida;  $(0.05, 0)$ , línea punteada; y  $(0.2, 0.8)$ , línea con guiones [95].

# Bibliografía

- [1] SUPERNOVA SEARCH TEAM collaboration, A.G. Riess et al., *Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant*, *Astron. J.* **116** (1998) 1009 [astro-ph/9805201] [SPIRES];  
SUPERNOVA COSMOLOGY PROJECT collaboration, S. Perlmutter et al., *Measurements of  $\Omega$  and  $\Lambda$  from 42 high-redshift supernovae*, *Astrophys. J.* **517** (1999) 565 [astro-ph/9812133] [SPIRES];  
SUPERNOVA SEARCH TEAM collaboration, J.L. Tonry et al., *Cosmological results from high- $z$  supernovae*, *Astrophys. J.* **594** (2003) 1 [astro-ph/0305008] [SPIRES];  
SUPERNOVA SEARCH TEAM collaboration, A.G. Riess et al., *Type Ia supernova discoveries at  $z > 1$  from the Hubble space telescope: evidence for past deceleration and constraints on dark energy evolution*, *Astrophys. J.* **607** (2004) 665 [astro-ph/0402512] [SPIRES];  
SNLS collaboration, P. Astier et al., *The supernova legacy survey: measurement of  $\Omega_M$ ,  $\Lambda$  and  $w$  from the first year data set*, *Astron. Astrophys.* **447** (2006) 31 [astro-ph/0510447] [SPIRES];  
A.G. Riess et al., *New Hubble space telescope discoveries of type Ia supernovae at  $z > 1$ : narrowing constraints on the early behavior of dark energy*, *Astrophys. J.* **659** (2007) 98 [astro-ph/0611572] [SPIRES];  
T.M. Davis et al., *Scrutinizing exotic cosmological models using ESSENCE supernova data combined with other cosmological probes*, *Astrophys. J.* **666** (2007) 716 [astro-ph/0701510] [SPIRES];  
ESSENCE collaboration, W.M. Wood-Vasey et al., *Observational constraints on the nature of the dark energy: first cosmological results from the ESSENCE supernova survey*, *Astrophys. J.* **666** (2007) 694 [astro-ph/0701041] [SPIRES];  
M. Kowalski et al., *Improved cosmological constraints from new, old and combined supernova datasets*, *Astrophys. J.* **686** (2008) 749 [arXiv:0804.4142] [SPIRES].
- [2] R. Amanullah et al., *Spectra and light curves of six type Ia supernovae at  $0.511 < z < 1.12$  and the Union2 compilation*, *Astrophys. J.* **716** (2010) 712 [arXiv:1004.1711] [SPIRES].
- [3] N. Suzuki et al., *The Hubble space telescope cluster supernova survey v. improving the dark energy constraints above  $z > 1$  and building an early type hosted supernova sample*, *Astrophys. J.* **85** (2012) 746 [arXiv:1105.3470] [SPIRES].
- [4] W. Hu and N. Sugiyama, *Small scale cosmological perturbations: An Analytic approach*, *Astrophys. J.* **471** (1996) 542 [astro-ph/9510117][SPIRES].

- [5] D. J. Eisenstein, W. Hu, *Baryon Features in the Matter Transfer Function*, *Astrophys. J.* **496** (1998) 605 [astro-ph/9709112] [SPIRES].
- [6] SDSS collaboration, K. Abazajian et al., *The First data release of the Sloan digital sky survey*, *Astron. J.* **126** (2003) 2081 [astro-ph/0305492] [SPIRES].  
 SDSS collaboration, K. Abazajian et al., *The Second data release of the Sloan digital sky survey*, *Astron. J.* **128** (2004) 502 [astro-ph/0403325] [SPIRES].  
 SDSS collaboration, K. Abazajian et al., *The Third Data Release of the Sloan Digital Sky Survey*, *Astron. J.* **129** (2005) 1755 [astro-ph/0410239] [SPIRES].  
 SDSS collaboration, M. Tegmark et al., *Cosmological parameters from SDSS and WMAP*, *Phys. Rev. D* **69** (2004) 103501 [astro-ph/0310723] [SPIRES].  
 SDSS collaboration, D. J. Eisenstein et al., *Detection of the baryon acoustic peak in the large-scale correlation function of SDSS luminous red galaxies*, *Astrophys. J.* **633** (2005) 560 [astro-ph/0501171] [SPIRES].  
 SDSS collaboration, M. Tegmark et al., *Cosmological Constraints from the SDSS Luminous Red Galaxies*, *Phys. Rev. D* **74** (2006) 123507 [astro-ph/0608632] [SPIRES].  
 SDSS collaboration, K. Abazajian et al., *The Seventh Data Release of the Sloan Digital Sky Survey*, *Astrophys. J. Suppl.* **182** (2009) 543 [astro-ph/0812.0649] [SPIRES].
- [7] SDSS collaboration, W. J. Percival et al., *Baryon Acoustic Oscillations in the Sloan Digital Sky Survey Data Release 7 Galaxy Sample*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **401** (2010) 2148 [astro-ph.CO/0907.1660] [SPIRES].  
 SDSS collaboration, B. A. Reid et al., *Cosmological Constraints from the Clustering of the Sloan Digital Sky Survey DR7 Luminous Red Galaxies*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **404** (2010) 60 [astro-ph.CO/0907.1659] [SPIRES].
- [8] J. R. Bond, G. Efstathiou and M. Tegmark, *Forecasting Cosmic parameter Error from Microwave Background Anisotropy Experiments*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **291** (1997) L33 [astro-ph/9702100][SPIRES].
- [9] WMAP collaboration, C.L. Bennett et al., *First year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: preliminary maps and basic results*, *Astrophys. J. Suppl.* **148** (2003) 1 [astro-ph/0302207] [SPIRES];  
 WMAP collaboration, D.N. Spergel et al., *First year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: Determination of cosmological parameters*, *Astrophys. J. Suppl.* **148** (2003) 175 [astro-ph/0302209] [SPIRES];  
 WMAP collaboration, D.N. Spergel et al., *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) three year results: implications for cosmology*, *Astrophys. J. Suppl.* **170** (2007) 377 [astro-ph/0603449][SPIRES].  
 WMAP collaboration, G. Hinshaw et al., *Five-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: data processing, sky maps, basic results*, *Astrophys. J. Suppl.* **180** (2009) 225 [arXiv:0803.0732] [SPIRES].  
 WMAP collaboration, E. Komatsu et al., *Five-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Interpretation*, *Astrophys. J. Suppl.* **180** (2009) 330 [arXiv:0803.0547] [SPIRES].



- [10] WMAP collaboration, E. Komatsu et al., *Seven-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Interpretation*, *Astrophys. J. Suppl.* **192** (2011) 18 [arXiv:1001.4538] [SPIRES].
- [11] P. J. E. Peebles and B. Ratra, *Cosmology with a Time Variable Cosmological Constant*, *Astrophys. J.* **325** (1988) L17.
- [12] E. J. Copeland, M. Sami and S. Tsujikawa, *Dynamics of dark energy*, *Int. J. Mod. Phys. D* **15** (2006) 1753 [hep-th/0603057].
- [13] P. J. E. Peebles and B. Ratra, *The Cosmological constant and dark energy*, *Rev. Mod. Phys.* **75** (2003) 559 [astro-ph/0207347].
- [14] P. J. Steinhardt, *A quintessential introduction to dark energy*, *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A* **361** (2003) 2497.
- [15] P. S. Corasaniti and E. J. Copeland, *A Model independent approach to the dark energy equation of state*, *Phys. Rev. D* **67** (2003) 063521 [astro-ph/0205544].
- [16] V. Sahni, *Dark matter and dark energy*, *Lect. Notes Phys.* **653** (2004) 141 [astro-ph/0403324].
- [17] U. Alam, V. Sahni and A. A. Starobinsky, *Is there supernova evidence for dark energy metamorphosis?*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **354** (2004) 275 [astro-ph/0311364].
- [18] U. Alam, V. Sahni and A. A. Starobinsky, *The Case for dynamical dark energy revisited*, *JCAP* **06** (2004) 008 [astro-ph/0403687].
- [19] P. S. Corasaniti, M. Kunz, D. Parkinson, E. J. Copeland and B. A. Bassett, *The Foundations of observing dark energy dynamics with the Wilkinson Microwave Anisotropy Probe*, *Phys. Rev. D* **70** (2004) 083006 [astro-ph/0406608].
- [20] M. Li, X.-D. Li, S. Wang and Y. Wang, *Dark Energy*, *Commun. Theor. Phys.* **56** (2011) 525 [astro-ph.CO/1103.5870].
- [21] S. Weinberg, *The Cosmological Constant Problem*, *Rev. Mod. Phys.* **61** (1989) 1.
- [22] S. M. Carroll, W. H. Press and E. L. Turner, *The Cosmological constant*, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **30** (1992) 499.
- [23] S. M. Carroll, *The Cosmological constant*, *Living Rev. Rel.* **4** (2001) 1 [astro-ph/0004075].
- [24] T. Padmanabhan, *Cosmological constant: The Weight of the vacuum*, *Phys. Rept.* **380** (2003) 235 [hep-th/0212290].
- [25] A. Vikhlinin et al., *Chandra Cluster Cosmology Project III: Cosmological Parameter Constraints*, *Astrophys. J.* **692** (2009) 1060 [astro-ph/0812.2720].
- [26] E. Rozo et al., *Cosmological Constraints from the SDSS maxBCG Cluster Catalog*, *Astrophys. J.* **708** (2010) 645 [astro-ph.CO/0902.3702].

- [27] V. Sahni, *The Cosmological constant problem and quintessence*, *Class. Quant. Grav.* **19** (2002) 3435 [astro-ph/0202076].
- [28] P. S. Corasaniti and E. J. Copeland, *Constraining the quintessence equation of state with *SnIa* data and CMB peaks*, *Phys. Rev.* **D 65** (2002) 043004 [astro-ph/0107378].
- [29] P. J. Steinhardt, *Cosmological Challenges for the 21th century*, in *Critical Problems in Physics*, V. L. Fitch and D. R. Marlow eds., Princeton University Press, Princeton U.S.A. (1997), pg. 123.
- [30] L. Amendola, *Coupled quintessence*, *Phys. Rev.* **D 62** (2000) 043511 [astro-ph/9908023] [SPIRES].
- [31] S. Z. W. Lip, *Interacting Cosmological Fluids and the Coincidence Problem*, *Phys. Rev.* **D 83** (2011) 023528 [gr-qc/1009.4942].
- [32] C. Wetterich, *Cosmology and the Fate of Dilatation Symmetry*, *Nucl. Phys.* **B 302** (1988) 668.
- [33] B. Ratra and P. J. E. Peebles, *Inflation in an open universe*, *Phys. Rev.* **D 52** (1995) 1837.
- [34] C. Wetterich, *The cosmon model for an asymptotically vanishing time dependent cosmological constant*, *Astron. Astrophys.* **301** (1995) 321 [hep-th/9408025].
- [35] L. Amendola, *Linear and non-linear perturbations in dark energy models*, *Phys. Rev.* **D 69** (2004) 103524 [astro-ph/0311175].
- [36] S. Campo, R. Herrera, G. Olivares and D. Pavon, *Interacting models of soft coincidence*, *Phys. Rev.* **D 74** (2006) 023501 [astro-ph/0606520].
- [37] G. Olivares, F. Atrio-Barandela and D. Pavon, *Matter density perturbations in interacting quintessence models*, *Phys. Rev.* **D 74** (2006) 043521 [astro-ph/0607604].
- [38] G. Huey and B. D. Wandelt, *Interacting quintessence. The Coincidence problem and cosmic acceleration*, *Phys. Rev.* **D 74** (2006) 023519 [astro-ph/0407196].
- [39] S. Campo, R. Herrera and D. Pavon, *Toward a solution of the coincidence problem*, *Phys. Rev.* **D 78** (2008) 021302(R) [astro-ph/0806.2116].
- [40] P. S. Corasaniti, *Slow-Roll Suppression of Adiabatic Instabilities in Coupled Scalar Field-Dark Matter Models*, *Phys. Rev.* **D 78** (2008) 083538 [astro-ph/0808.1646].
- [41] R. Bean, E. E. Flanagan and M. Trodden, *Adiabatic instability in coupled dark energy-dark matter models*, *Phys. Rev.* **D 78** (2008) 023009 [astro-ph/0709.1128].
- [42] M. S. Berger and H. Shojaei, *Possible Equilibria of Interacting Dark Energy Models*, *Phys. Rev.* **D 77** (2008) 123504 [gr-qc/0712.2450].
- [43] A. W. Brookfield, C. van de Bruck and L. M. H. Hall, *New interactions in the dark sector mediated by dark energy*, *Phys. Rev.* **D 77** (2008) 043006 [astro-ph/0709.2297].

- [44] J. F. Jesus, R. C. Santos, J. S. Alcaniz and J. A. S. Lima, *New coupled quintessence cosmology*, *Phys. Rev. D* **78** (2008) 063514 [astro-ph/0806.1366].
- [45] V. Pettorino and C. Baccigalupi, *Coupled and Extended Quintessence: theoretical differences and structure formation*, *Phys. Rev. D* **77** (2008) 103003 [astro-ph/0802.1086].
- [46] J. Valiviita, E. Majerotto and R. Maartens, *Instability in interacting dark energy and dark matter fluids*, *JCAP* **07** (2008) 020 [astro-ph/0804.0232].
- [47] M. Quartin, M. O. Calvao, S. E. Joras, R. R. R. Reis and I. Waga, *Dark Interactions and Cosmological Fine-Tuning*, *JCAP* **05** (2008) 007 [astro-ph/0802.0546].
- [48] J.-H. He, B. Wang, E. Abdalla, *Stability of the curvature perturbation in dark sectors' mutual interacting models*, *Phys. Lett. B* **671** (2009) [gr-qc/0807.3471].
- [49] S. Campo, R. Herrera and D. Pavon, *Interacting models may be key to solve the cosmic coincidence*, *JCAP* **01** (2009) 020 [gr-qc/0812.2210].
- [50] L. P. Chimento, M. I. Forte, G. M. Kremer, *Cosmological model with interactions in the dark sector*, *Gen. Rel. Grav.* **41** (2009) 1125 [astro-ph/0711.2646].
- [51] L. P. Chimento, *linear and nonlinear interactions in the dark sector*, *Phys. Rev.*, **D81** (2010) 043525. [astro-ph.CO/0911.5687].
- [52] S. Micheletti, E. Abdalla, B. Wang, *A Field Theory Model for Dark Matter and Dark Energy in Interaction*, *Phys. Rev. D* **79** (2009) 123506 [gr-qc/0902.0318] [SPIRES].
- [53] G. Caldera-Cabral, R. Maartens and B. M. Schaefer, *The Growth of Structure in Interacting Dark Energy Models*, *JCAP* **07** (2009) 027 [astro-ph.CO/0905.0492].
- [54] M. B. Gavela, D. Hernandez, L. Lopez Honorez, O. Mena and S. Rigolin, *Dark coupling*, *JCAP* **07** (2009) 034 [astro-ph/0901.1611].
- [55] L. Lopez Honorez, O. Mena and G. Panotopoulos, *Higher-order coupled quintessence*, *Phys. Rev. D* **82** (2010) 123525 [astro-ph.CO/1009.5263].
- [56] R. Curbelo, T. Gonzalez and I. Quiros, *Interacting phantom energy and avoidance of the big rip singularity*, *Class. Quant. Grav.* **23** (2006) 1585 [astro-ph/0502141].
- [57] C. G. Boehmer, G. Caldera-Cabral, N. Chan, R. Lazkoz and R. Maartens, *Quintessence with quadratic coupling to dark matter*, *Phys. Rev. D* **81** (2010) 083003 [gr-qc/0911.3089].
- [58] L. Amendola, C. Quercellini, D. T. Valentini and A. Pasqui, *Constraints on the interaction and selfinteraction of dark energy from cosmic microwave background*, *Astrophys. J.* **583** (2003) L53 [astro-ph/0205097].
- [59] Y.-H. Li and X. Zhang, *Running coupling: Does the coupling between dark energy and dark matter change sign during the cosmological evolution?*, *Eur. Phys. J. C* **71** (2011) 1700 [astro-ph.CO/1103.3185] [SPIRES].
- [60] R. G. Cai and Q. Su, *On the Dark Sector Interactions*, *Phys. Rev. D* **81** (2010) 103514 [astro-ph.CO/0912.1943] [SPIRES].

- [61] O. Sarbach and M. Tiglio, *Continuum and Discrete Initial-Boundary-Value Problems and Einstein's Field Equations*, *Liv. Rev. Rel.* **15** (2012) [gr-qc/1203.6443v1] [SPIRES]
- [62] J. Simon, L. Verde and R. Jimenez, *Constraints on the redshift dependence of the dark energy potential*, *Phys. Rev. D* **71** (2005) 123001 [astro-ph/0412269].
- [63] E. F. Martinez and L. Verde, *Prospects in Constraining the Dark Energy Potential*, *JCAP* **08** (2008) 023 [astro-ph/0806.1871].
- [64] De Arcia Solís R. C., *Modelo de energía oscura interactuante con materia oscura*, Instituto de Física-Matemática (IFM), UMSNH (2012)
- [65] Matthias Bartelmann, 2010, *The Dark Universe*, *Rev. Mod. Phys.*, **82**, 331-382.
- [66] <http://map.gsfc.nasa.gov/>
- [67] Ostriker, Jeremiah P., and Paul Steinhardt 2001, *The Quintessential Universe*, Scientific American, vol. **284**, no. 1, pp 46-53.
- [68] Weinberg Steven, 2008 *Cosmology*, Oxford University Press. p. v ISBN **978-0-19-852682-7**.
- [69] Altarelli Guido, 2008 *Elementary Particles*, Springer. p. 9-6 ISBN **978-3-54-074202-9**.
- [70] Huterer D. Turner M. S., *Phys. Rev. D* **60** (1999) 081301.
- [71] Avelino A., *Modelos cosmológicos dominados por materia con viscosidad volumétrica para explicar la expansión acelerada del Universo*, Instituto de Física-Matemática (IFM), UMSNH (2010)
- [72] Astier P., et al, 2006, *The Supernova Legacy Survey: measurement of  $\Omega_M, \Omega_\Lambda$  and  $w$  from the first year data set*, *Astron. & Astrophys.* **447** 31-48
- [73] Hillebrandt, W.; Niemeyer, J. C., 2000, *Type IA Supernova Explosion Models*, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* **38**: 191-230.
- [74] Yoon, S.-C.; Langer, L., 2004, *Presupernova Evolution of Accreting White Dwarfs with Rotation*, *Astron. & Astrophys.*, **419** (2): 623-644.
- [75] Mazzali, P. A.; Ropke, F. K.; Benetti, S.; Hillebrandt, W. 2006, *A Common Explosion Mechanism for Type Ia Supernovae*, *Science.*, vol. **315**, no.5813 : 825-828.
- [76] Khokhlov, A.; Muller, E.; Hoefflich, P. 1993, *Light curves of Type IA supernova models with different explosion mechanism*, *Astron. & Astrophys.*, **270** (1-2): 223-248.
- [77] Staff(07-09-2006) *Introduction to Supernova Remnants* NASA Goddard/SAO
- [78] HST Collaboration, W. L. Freedman et al, *Final results from the Hubble Space Telescope key project to measure the Hubble constant*, *Astrophys. J.* **553** (2001) 47 [astro-ph/0012376].
- [79] T. D. Saini, S. Raychaudhury, V. Sahni and A. A. Starobinsky, *Reconstructing the Cosmic Equation of State from Supernova distance*, *Phys. Rev. Lett.* **85** (2000) 6.

- [80] E. Carretta, R. G. Gratton, G. Clementini and F. Fusi Pecci, 2000*Astrophys. J.* **533** 215
- [81] D. Pavon and B. Wang, *Le Chatelier-Braun principle in cosmological physics, Gen. Rel. Grav.*, **41** (2009) 1 [gr-qc/0712.0565].
- [82] M. Baldi, *Early massive clusters and the bouncing coupled dark energy, MNRAS*, **420** (2011) 430 [astro-ph.CO/1107.5049].
- [83] E. Abdalla, L. R. Abramo and J. C. C. de Souza, *Signature of the interaction between dark energy and dark matter in observations, Phys. Rev. D* **82** (2010) 023508 [gr-qc/0910.5236] [SPIRES].
- [84] J. He, B. Wang and E. Abdalla, *Testing the interaction between dark energy and dark matter via latest observations, Phys. Rev. D* **83** (2011) 063515 [astro-ph.CO/1012.3904] [SPIRES].
- [85] J. Valiviita, R. Maartens and E. Majerotto, *Observational constraints on an interacting dark energy model, Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **402** (2010) 2355 [astro-ph.CO/0907.4987].
- [86] S. Cao, N. Liang and Z.-H. Zhu, *Interaction between dark energy and dark matter: observational constraints from  $H(z)$ , BAO, CMB and SNe Ia, [astro-ph.CO/1105.6274].*
- [87] S. Nesseris and L. Perivolaropoulos, *Tension and systematics in the Gold06 SnIa dataset, JCAP* **02** (2007) 025 [astro-ph/0612653] [SPIRES].
- [88] S. Nesseris and L. Perivolaropoulos, *Crossing the phantom divide: theoretical implications and observational status, JCAP* **01** (2007) 018 [astro-ph/0610092] [SPIRES].
- [89] H. Wei, *Tension in the recent type Ia supernovae datasets, Phys. Lett. B* **687** (2010) 286 [astro-ph.CO/0906.0828] [SPIRES].
- [90] B. A. Bassett, P. S. Corasaniti, M. Kunz, *The Essence of quintessence and the cost of compression. Astrophys. J.* **617** (2004) L1-L4 [astro-ph/0407364] [SPIRES].
- [91] J. C. Bueno Sanchez, S. Nesseris and L. Perivolaropoulos, *Comparison of recent SnIa datasets, JCAP* **11** (2009) 029 [astro-ph.CO/0908.2636] [SPIRES].
- [92] M. E. Abroe et al., *Frequentist estimation of cosmological parameters from the MAXIMA-1 cosmic microwave background anisotropy data, Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **334** (2002) 11-19
- [93] C. A. Shapiro and M. S. Turner, *What Do We Really Know about Cosmic Acceleration?, Astrophys. J.* **649** (2006) 563.
- [94] Y. G. Gong, and A. Wang, *Observational constraints of the acceleration of the universe, Phys. Rev. D* **73** (2006) 083506.
- [95] D. W. Hogg, 2000, Distance measures in cosmology, [astro-ph/9905116v4].