Universidad Nacional Autónoma de México

y

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas
UNAM-UMSNH

Códigos Algebraico Geométricos en Dimensión Superior y La Finitud de los Anillos de Cox de Superficies Racionales

---

T E S I S

Que para obtener el grado de Doctora en Ciencias Matemáticas
Presenta:

Brenda Leticia De La Rosa Navarro

Director: Dr. Mustapha Lahyane
Instituto de Física y Matemáticas
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Morelia, Michoacán - Septiembre, 2013.

Índice general

Agradecimientos

A mi familia y amigos por su apoyo incondicional.

A mi asesor Mustapha Lahyane por todas sus enseñanzas durante mi trabajo de tesis.

Introducción General

Este trabajo de tesis consta de dos partes. En la primera parte se muestra la existencia de familias de códigos algebraico geométricos construidos a partir de superficies de Hirzebruch, además, probamos que algunos de estos códigos mejoran ciertos códigos lineales ya existentes. Más aún, presentamos dos familias de códigos de máxima distancia de separación. Los resultados principales de esta parte son los Teoremas 5.3.2, 5.3.5 y 5.3.6, y los Corolarios 5.3.3 y 5.3.7.

En la segunda parte se da un criterio para la finitud de los anillos de Cox de superficies extremales, y dos caracterizaciones de la finitud de los anillos de Cox de superficies racionales anticanónicas y superficies fraccionalmente un lápiz. Estos resultados están en los Teoremas 8.1.2, 8.2.6 y 8.3.3.

Para mayor información del contenido de las dos partes ver las introducciones de cada una.

Notaciones y Terminología

A lo largo de esta tesis, si X es un espacio topológico, entonces denotaremos por τ_X al conjunto de los conjuntos abiertos de X.

$\mathbb{A}^n_k$ y $\mathbb{P}^n_k$ denotarán el espacio afín y proyectivo, respectivamente, sobre un campo k de dimensión n.

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}_+$ denotarán los conjuntos de los números naturales, enteros y enteros no negativos, respectivamente.

Los anillos considerados en este trabajo son anillos conmutativos unitarios.

Parte 1

Códigos Algebraico Geométricos en Dimensión Superior

Introducción

El problema a solucionar en esta parte es el de construir códigos algebraico geométicos $(X, \mathcal{P}, D)$, donde la superficie X será una superficie de Hirzebruch definida sobre un campo finito, el conjunto $\mathcal{P}$ será la superficie de Hirzebruch menos los puntos del soporte de un divisor D sobre dicha superficie. A lo largo de esta primera parte estudiaremos algunas herramientas necesarias para la construcción de códigos algebraico geométricos, algunas de ellas son las superficies de Hirzebruch y sus geometrías.

En los años sesentas, se desarrollaron una familia de códigos conocida actualmente como códigos BCH y códigos de Reed-Solomon (ver por ejemplo [23]), el éxito de dichos códigos fue espectacular, en efecto, el método algebraico llamado el *síndrome de la decodificación*, permite una decodificación muy sencilla, y por otro lado, en el año 1977 se implementaron en el programa Voyager, y en el año 1982 en el uso de los discos compactos. En la actualidad, el uso de estos sigue siendo de gran interés, por ejemplo en la producción de DVDs.

En 1981, Valerii Denisovich Goppa descubrió una generalización de los códigos de Reed-Solomon y los códigos BCH a partir de curvas algebraicas definidas sobre campos finitos (ver las referencias [12], [13] y [14]). Esta clase de códigos es conocida como *códigos algebraico geométricos*. Luego, en 1982 en el trabajo de Tsfasman, Vlădut y Zink [30] fueron usadas curvas modulares, para construir una secuencia de códigos con mejores parámetros que algunos códigos conocidos.

Así surge la siguiente pregunta: ¿Es posible construir códigos algebraico geométricos utilizando variedades proyectivas de dimensión mayor o igual a dos?

Esto ha dado pie al desarrollo de trabajos cuando la variedad es de dimensión dos, es decir una superficie, como por ejemplo, el trabajo realizado por Failla, Lahyane y Molica [15] donde se construyen códigos algebraicos geométricos con buenos parámetros, usando la geometría de superficies fibradas, y en el trabajo de tesis de maestría [6] se construyó una familia de códigos algebraico geométricos usando la geometría del plano proyectivo sobre un campo finito con técnicas de la geometría algebraica. Más trabajos recientes se pueden hallar en [2], [3], [9], [10] y [25], por mencionar algunos.

A continuación se procederá a dar la descripción del contenido de esta parte de la tesis, la cual consta de cinco capítulos.

Capítulo 1: Este capítulo consiste en revisar algunas herramientas necesarias para estudiar un esquema y el grupo de Picard. Dicho capítulo está formado por tres secciones, las cuales decribiremos enseguida: en la Sección 1.1 realizaremos un recordatorio de ciertos conceptos básicos que permitirán introducir la noción de un esquema. En breve, la Sección 1.2 presenta ciertos conceptos elementales y propiedades útiles relacionadas con el estudio de los O_X-módulos y sus morfismos. Finalmente, en la Sección 1.3 asociaremos a un espacio anillado dado un grupo abeliano conocido como el grupo de Picard.

Capítulo 2: Aquí definiremos los grupos de cohomología de una gavilla. Además enunciaremos el teorema de Riemann-Roch para una superficie proyectiva racional lisa definida sobre un campo arbitrario. Este capítulo está dividido en tres secciones: en la Sección 2.1 se dará la noción de la resolución fofa canónica de una gavilla. Enseguida, en la Sección 2.2 se definirán los grupos de cohomología de una gavilla, y se mostrará que el grupo cero de cohomología de una gavilla coincide con las secciones globales de dicha gavilla. Por último, en la Sección 2.3 enunciaremos el teorema de Riemann-Roch para superficies proyectivas lisas definidas sobre cualquier campo.

Capítulo 3: Este capítulo contiene dos secciones: en la Sección 3.1 mostraremos el concepto de una explosión de un esquema con respecto a un subesquema cerrado, y en la Sección 3.2 se mostrará la noción de un diagrama decorado de Enriques, dicho concepto permitirá conocer mejor la explosión.

Capítulo 4: El propósito de este capítulo es de introducir las superficies de Hirzebruch y asociar dos monoides a las superficies proyectivas definidas sobre un campo arbitrario. En la Sección 4.1 se presentarán los divisores primos de cierto esquema, y a partir de estos se definirán los divisores de Weil de dicho esquema. Luego, en la Sección 4.2 introduciremos el número de intersección entre divisores sobre cierto esquema, después daremos una relación entre divisores, y a partir de esta definiremos el grupo de Nerón-Severi, el monoide efectivo y el monoide *Nef*. Por último, en la Sección 4.3 se estudiarán algunas nociones básicas asociadas a una superficie reglada para dar lugar a la definición de una superficie de Hirzebruch.

Capítulo 5: Aquí se presentan los resultados principales de la primera parte de esta tesis. Utilizando la geometría de las superficies de Hirzebruch se generarán códigos algebraico geométricos con muy buenos parámetros. En la Sección 5.1 definiremos los códigos lineales y algunos ingredientes necesarios para su estudio. Por otro lado, en la Sección 5.2 se presentará una construcción de un código lineal a partir de una superficie racional proyectiva lisa definida sobre un campo finito. Enseguida, en la Sección 5.3 mostraremos la existencia de familias de códigos algebraico geométricos utilizando las superficies de Hirzebruch (ver los Teoremas 5.3.2, 5.3.5 y 5.3.6, y los Corolarios 5.3.3 y 5.3.7). Para finalizar este capítulo, en la Sección 5.4 daremos una serie de cuadros donde se muestra que algunos de los códigos algebraico geométricos con muy buenos parámetros obtenidos de las familias de la Sección 5.3 mejoran notablemente a algunos códigos lineales ya existentes.

Capítulo 1

Esquemas y el Grupo de Picard

Este capítulo consiste en recordar ciertos conceptos básicos como son un esquema y el Grupo de Picard. Nuestras referencias son principalmente [17], [31] y [32].

1.1. Esquemas

Un esquema es un objeto geométrico que generaliza a las variedades algebraicas clásicas. Dicho objeto constituye un caso especial de un espacio anillado que definiremos a continuación:

Definición 1.1.1. Un espacio anillado es una pareja $(X, \mathcal{O}_X)$ donde X es un espacio topológico y $\mathcal{O}_X$ es una gavilla de anillos sobre X.

Enseguida, presentamos un ejemplo estándar y clásico de un espacio anillado que es bien conocido como el espectro de un anillo (ver [17, Proposición 2.3 (a), p. 73]).

Ejemplo 1.1.2. Dado un anillo A se tiene que $(Spec(A), \mathcal{O}_{Spec(A)})$, donde $\mathcal{O}_{Spec(A)}$ es la gavilla estructural de $Spec(A)$, es un espacio anillado.

Aquí viene la noción de un morfismo entre espacios anillados.

Definición 1.1.3. Sean $(X, \mathcal{O}_X)$ y $(Y, \mathcal{O}_Y)$ espacios anillados. Un morfismo de espacios anillados entre $(X, \mathcal{O}_X)$ y $(Y, \mathcal{O}_Y)$ es una pareja $(f, f^\sharp)$, donde $f : X \longrightarrow Y$ es una aplicación continua y $f^\sharp : \mathcal{O}_Y \longrightarrow f_*\mathcal{O}_X$ es un morfismo de gavillas sobre Y.

Un ejemplo natural de un morfismo entre espacios anillados es el siguiente:

Ejemplo 1.1.4. Sean A y B anillos, un morfismo de espacios anillados entre $(Spec(B), \mathcal{O}_{Spec(B)})$ y $(Spec(A), \mathcal{O}_{Spec(A)})$ es simplemente un homomorfismo de anillos entre A y B (ver [17, Proposición 2.3 (b) y (c), p. 73]).

Un caso especial de un espacio anillado es un espacio localmente anillado que definiremos a continuación:

Definición 1.1.5. Un espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$ es localmente anillado si para cada elemento p de X, el anillo de gérmenes $\mathcal{O}_{X,p}$ de $\mathcal{O}_X$ en p es local.

Un claro ejemplo de un espacio localmente anillado es (ver [17, Proposición 2.3 (a), p. 73]):

Ejemplo 1.1.6. El espectro $(Spec(A), \mathcal{O}_{Spec(A)})$ de un anillo A es un espacio localmente anillado. En particular para cada entero positivo n, el espacio afín $\mathbb{A}^n_k$ de dimensión n sobre un campo k es un espacio localmente anillado pues es el espectro del anillo $k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, donde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son variables sobre k.

Una correspondencia entre espacios localmente anillados está dada como sigue:

Definición 1.1.7. Sean $(X, \mathcal{O}_X)$ y $(Y, \mathcal{O}_Y)$ espacios localmente anillados. Un morfismo de espacios localmente anillados entre $(X, \mathcal{O}_X)$ y $(Y, \mathcal{O}_Y)$ es un morfismo de espacios anillados

$$(f, f^\sharp) : (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y),$$

tal que para cualquier elemento p de X, se tiene que

$$f^\sharp_p : \mathcal{O}_{Y,f(p)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,p},$$

es un homomorfismo local, es decir,

$$f^{\sharp\,-1}_p(\mathfrak{M}_{X,p}) = \mathfrak{M}_{Y,f(p)},$$

donde $\mathfrak{M}_{X,p}$ y $\mathfrak{M}_{Y,f(p)}$ denotan los ideales maximales de los anillos locales $\mathcal{O}_{X,p}$ y $\mathcal{O}_{Y,f(p)}$, respectivamente.

Ejemplo 1.1.8. El morfismo del Ejemplo 1.1.4 es un morfismo entre espacios localmente anillados.

Observación 1.1.9. En lo sucesivo, si no existe confusión nos referiremos a un morfismo entre espacios localmente anillados $(f, f^\sharp) : (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$, solo como $f : X \longrightarrow Y$.

Un caso muy especial de un espacio localmente anillado es el siguiente:

Definición 1.1.10. Un espacio localmente anillado $(X, \mathcal{O}_X)$ es un esquema afín si existe un anillo A tal que los espacios localmente anillados $(X, \mathcal{O}_X)$ y $(Spec(A), \mathcal{O}_{Spec(A)})$ son isomorfos.

Otro caso particular y de gran interés de un espacio localmente anillado está dado a continuación:

Definición 1.1.11. Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un espacio localmente anillado. $(X, \mathcal{O}_X)$ es un esquema si X tiene una cubierta abierta $(U_i)_{i\in I}$, tal que el espacio localmente anillado $(U_j, \mathcal{O}_X|_{U_j})$ es un esquema afín para cada $j \in I$. Además, si V es un conjunto abierto de X que satisface que $(V, \mathcal{O}_X|_V)$ es un esquema afín, entonces V será llamado un abierto afín.

Observación 1.1.12. Si no existe confusión, en ciertas ocasiones, sustituiremos la notación de un esquema $(X, \mathcal{O}_X)$ únicamente por X.

Ejemplo 1.1.13. Para cada entero positivo r, el espacio afín $\mathbb{A}^r_k$ y el espacio proyectivo $\mathbb{P}^r_k$ de dimensión r sobre un campo k son obviamente esquemas.

A continuación daremos el concepto de un morfismo entre esquemas:

Definición 1.1.14. Un morfismo de esquemas es un morfismo de espacios localmente anillados.

Ciertas clases de gran interés de esquemas son las siguientes:

Definición 1.1.15. Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un esquema. $(X, \mathcal{O}_X)$ es Noetheriano si X tiene una cubierta abierta finita $(U_i)_{i\in I}$ tal que U_j es un abierto afín y $\mathcal{O}_X(U_j)$ es un anillo Noetheriano para cada $j \in I$.

Ejemplo 1.1.16. El espectro de un anillo A es un esquema Noetheriano si y solo si A es un anillo Noetheriano (ver [17, Proposición 3.2, p. 83]).

Definición 1.1.17. Un esquema $(X, \mathcal{O}_X)$ es irreducible si X es un espacio topológico irreducible.

El siguiente ejemplo muestra una caracterización de la irreducibilidad de un esquema afín.

Ejemplo 1.1.18. El espectro de un anillo A es un esquema irreducible si y solo si el nilradical $Nil(A)$ de A es un ideal primo. En efecto, es claro que $Nil(A)$ es un subconjunto propio de A. Ahora, supongamos que $Spec(A)$ es irreducible. Sean $a, b \in A$ tales que $ab \in Nil(A)$, se sigue que $ab \in P$ para cada $P \in Spec(A)$, así el abierto básico $D(ab)$ asociado al elemento ab es vacío. Luego,

$$Spec(A) = Spec(A) \setminus D(ab) = Spec(A) \setminus (D(a) \cap D(b)) = (Spec(A) \setminus D(a)) \cup (Spec(A) \setminus D(b)).$$

Por la irreducibilidad tenemos que $Spec(A) \setminus D(a) = Spec(A)$ o $Spec(A) \setminus D(b) = Spec(A)$, y esto implica que $a \in Nil(A)$ o $b \in Nil(A)$, así, $Nil(A) \in Spec(A)$. Recíprocamente, supongamos que existen I y J ideales de A tales que $Spec(A) = V(I) \cup V(J)$, donde $V(Q) = \{P \in Spec(A) \mid Q \subseteq P\}$ para cualquier ideal Q de A, de modo que $Nil(A) \in V(I)$ o $Nil(A) \in V(J)$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $Nil(A) \in V(I)$. Por otro lado, si $P \in Spec(A)$, entonces $Nil(A) \subseteq P$, lo cual implica que $I \subseteq P$, y consecuentemente $P \in V(I)$. Por lo tanto, $Spec(A) = V(I)$.

Definición 1.1.19. Un esquema $(X, \mathcal{O}_X)$ es reducido si para cada conjunto abierto U de X, el anillo $\mathcal{O}_X(U)$ es reducido (es decir, no tiene elementos nilpotentes no nulos).

A continuación presentamos un criterio para determinar si un esquema afín es reducido.

Ejemplo 1.1.20. Con las notaciones del Ejemplo 1.1.18, el espectro de un anillo A es un esquema reducido si y solo si el nilradical de A es el ideal cero. En efecto, si $Spec(A)$ es reducido, entonces $\mathcal{O}_{Spec(A)}(Spec(A))$ es reducido, lo que implica que A no tiene elementos nilpotentes no nulos, pues sabemos que $\mathcal{O}_{Spec(A)}(Spec(A))$ es isomorfo a A. Recíprocamente, sea U un conjunto abierto no vacío de $Spec(A)$ y sea $s \in Nil(\mathcal{O}_{Spec(A)}(U))$ tal que existe un entero positivo n con $s^n = 0_{\mathcal{O}_{Spec(A)}(U)}$. Consideremos una cubierta abierta de U formada por abiertos básicos, $U = \cup_{f\in I} D(f)$ para cierto ideal I. Si $f \in I$, entonces las secciones $(\rho_{\mathcal{O}_{Spec(A)}}{}^{U}_{D(f)}(s))^n$ y $0_{\mathcal{O}_{Spec(A)}(D(f))}$ son iguales. Puesto que A_f no tiene elementos nilpontentes, se sigue que $\rho_{\mathcal{O}_{Spec(A)}}{}^{U}_{D(f)}(s) = 0_{\mathcal{O}_{Spec(A)}(D(f))}$. Por lo tanto, $s = 0_{\mathcal{O}_{Spec(A)}(U)}$.

Definición 1.1.21. Un esquema $(X, \mathcal{O}_X)$ es entero si para cada conjunto abierto U de X, el anillo $\mathcal{O}_X(U)$ es un dominio entero.

Observación 1.1.22. Se puede ver que un esquema es entero si y solo si es reducido e irreducible.

Definición 1.1.23. Un esquema $(X, \mathcal{O}_X)$ es regular en codimensión uno si para cada elemento p de X, el anillo local $\mathcal{O}_{X,p}$ de dimensión uno es regular.

Lo que sigue es definir un *esquema separado*, sin embargo, para ello necesitaremos introducir los conceptos de *producto fibrado de esquemas, morfismo diagonal* e *inmersión cerrada entre esquemas*.

Definición 1.1.24. Sean $(X, \mathcal{O}_X)$ y $(S, \mathcal{O}_S)$ esquemas. X es un $S-$esquema o es un esquema sobre S, si existe un morfismo de esquemas $\varphi : X \longrightarrow S$.

Teorema 1.1.25. *Sean $(X, \mathcal{O}_X)$ y $(Y, \mathcal{O}_Y)$ esquemas sobre un esquema $(S, \mathcal{O}_S)$. Existe un $S-$esquema, denotado por $X \times_S Y$, con morfismos $p_1 : X \times_S Y \longrightarrow X$ y $p_2 : X \times_S Y \longrightarrow Y$ que hacen que el siguiente diagrama conmute:*

$$\begin{array}{ccc} X \times_S Y & \xrightarrow{p_2} & Y \\ {\scriptstyle p_1}\downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & S \end{array}$$

y se satisface la siguiente propiedad universal: Para cualquier $S-$esquema Z y para cualesquier morfismos $f : Z \longrightarrow X$ y $g : Z \longrightarrow Y$ de modo que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{g} & Y \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & S \end{array}$$

se cumple que existe un único morfismo $(f, g) : Z \longrightarrow X \times_S Y$ tal que $f = p_1 \circ (f, g)$ y $g = p_2 \circ (f, g)$.

Demostración. Ver [17, Teorema 3.3, p. 87]. ❑

Definición 1.1.26. Con las notaciones del Teorema 1.1.25, el esquema $X \times_S Y$ es el producto fibrado de X y Y sobre S.

Definición 1.1.27. Sean X y Y esquemas, y sea $f : X \longrightarrow Y$ un morfismo. El morfismo diagonal es el único morfismo $\Delta_f : X \longrightarrow X \times_Y X$ cuya composición con los morfismos $p_1 : X \times_Y X \longrightarrow X$ y $p_2 : X \times_Y X \longrightarrow X$ es el morfismo identidad sobre X.

Definición 1.1.28. Un morfismo de esquemas $(f, f^\sharp) : (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ es una inmersión cerrada si cumple las dos propiedades siguientes:

1. f es un homeomorfismo entre X y un conjunto cerrado de Y, y
2. para cada elemento p de X, el homomorfismo $f_p^\sharp : \mathcal{O}_{Y,f(p)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,p}$ es sobreyectivo.

Un ejemplo clásico de una inmersión cerrada es el siguiente:

Ejemplo 1.1.29. Sea I un ideal de un anillo A, y sea r un entero positivo. El morfismo natural entre $Spec(A/I^r)$ y $Spec(A)$ es una inmersión cerrada.

Definición 1.1.30. Un morfismo $f : X \longrightarrow Y$ de esquemas es separado si el morfismo diagonal Δ_f es una inmersión cerrada. En este caso, X es un esquema separado sobre Y. Más aún, un esquema X es separado si es separado sobre $Spec(\mathbb{Z})$.

Para finalizar esta sección, definiremos un subesquema cerrado. Dicho concepto será utilizado en la Sección 4.1 del Capítulo 4.

Definición 1.1.31. Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un esquema y sea D un subconjunto cerrado de X. D es un subesquema cerrado de X si $(D, \mathcal{O}_X|_D)$ es un esquema, y existe una inmersión cerrada

$$(i, i^\sharp) : (D, \mathcal{O}_X|_D) \longrightarrow (X, \mathcal{O}_X),$$

tal que i es la inclusión.

1.2. Algunas Propiedades de los $\mathcal{O}_X-$módulos y sus Morfismos

El objetivo principal de esta sección es revisar ciertas nociones elementales y propiedades útiles relacionadas con el estudio de los $\mathcal{O}_X-$módulos y sus morfismos.

Definición 1.2.1. Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un espacio anillado. Una gavilla de $\mathcal{O}_X-$módulos es una gavilla de grupos abelianos $\mathcal{F}$ sobre X tal que para cada conjunto abierto U de X el grupo abeliano $\mathcal{F}(U)$ es un $\mathcal{O}_X(U)-$módulo, y para cualesquiera conjuntos abiertos U y V de X con $V \subseteq U$, el homomorfismo restricción $\rho_{\mathcal{F}}{}_V^U : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(V)$ es compatible con la estructura de módulo via el homomorfismo restricción $\rho_{\mathcal{O}_X}{}_V^U : \mathcal{O}_X(U) \longrightarrow \mathcal{O}_X(V)$, esto es, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X(U) \times \mathcal{F}(U) & \longrightarrow & \mathcal{F}(U) \\ \downarrow{\scriptstyle \rho_{\mathcal{O}_X}{}_V^U \times \rho_{\mathcal{F}}{}_V^U} & & \downarrow{\scriptstyle \rho_{\mathcal{F}}{}_V^U} \\ \mathcal{O}_X(V) \times \mathcal{F}(V) & \longrightarrow & \mathcal{F}(V) \end{array}$$

En la definición anterior lo que nos dice el diagrama es que para cada sección λ de $\mathcal{O}_X$ sobre U, y para cada sección s de $\mathcal{F}$ sobre U se tiene que $\rho_{\mathcal{F}}{}_V^U(\lambda \cdot s) = \rho_{\mathcal{O}_X}{}_V^U(\lambda) \cdot \rho_{\mathcal{F}}{}_V^U(s)$.

De ahora en adelante, algunas veces al hablar de una gavilla de $\mathcal{O}_X-$módulos solo diremos que es un $\mathcal{O}_X-$módulo. Con esto, pasamos a la siguiente definición:

Definición 1.2.2. Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ gavillas de $\mathcal{O}_X-$módulos sobre un espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$. Un morfismo de $\mathcal{O}_X-$módulos $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ es un morfismo de gavillas tal que para cada conjunto abierto U de X el homomorfismo de grupos φ_U es una aplicación $\mathcal{O}_X(U)-$lineal.

A continuación se mostrará que el conjunto de morfismos entre los $\mathcal{O}_X-$módulos $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$, denotado por $Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, tiene una estructura algebraica de un módulo sobre el anillo $\mathcal{O}_X(X)$.

Lema 1.2.3. *Si $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son gavillas de $\mathcal{O}_X-$módulos sobre un espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$, entonces $Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ es un $\mathcal{O}_X(X)-$módulo.*

Demostración. Equipemos al conjunto $Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ con la operación adición definida por

$$\begin{array}{rccc} + : & Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \times Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) & \longrightarrow & Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \\ & (\varphi, \psi) & \longmapsto & \varphi + \psi, \end{array}$$

donde para cada conjunto abierto U de X, $(\varphi + \psi)_U = \varphi_U + \psi_U$, y con la multiplicación por un escalar está definida por

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & \mathcal{O}_X(X) \times Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) & \longrightarrow & Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \\ & (\lambda, \varphi) & \longmapsto & \lambda \cdot \varphi, \end{array}$$

donde para cada conjunto abierto U de X, $(\lambda\cdot\varphi)_U = \rho_{\mathcal{O}_X}{}^X_U(\lambda)\cdot\varphi_U$. Con estas operaciones el conjunto $Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ tendrá una estructura algebraica de $\mathcal{O}_X(X)-$módulo. Enseguida, vamos a probar que dichas operaciones están bien definidas.

Sean φ y ψ elementos de $Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G})$, probaremos que $\varphi+\psi \in Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G})$. Tenemos que para cada conjunto abierto U de X, $(\varphi+\psi)_U = \varphi_U+\psi_U$ es una aplicación $\mathcal{O}_X(U)-$lineal, pues φ y ψ son morfismos de $\mathcal{O}_X-$módulos. Sean U y V conjuntos abiertos de X tal que $V \subseteq U$. Falta mostrar que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{(\varphi+\psi)_U} & \mathcal{G}(U) \\ {\scriptstyle \rho_{\mathcal{F}}{}^U_V}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho_{\mathcal{G}}{}^U_V} \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{(\varphi+\psi)_V} & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

Sea $s \in \mathcal{F}(U)$, puesto que φ y ψ son morfismos de $\mathcal{O}_X-$módulos, se sigue que

$$\begin{aligned} \rho_{\mathcal{G}}{}^U_V \circ (\varphi+\psi)_U(s) &= \rho_{\mathcal{G}}{}^U_V(\varphi_U(s)+\psi_U(s)) \\ &= \rho_{\mathcal{G}}{}^U_V \circ \varphi_U(s) + \rho_{\mathcal{G}}{}^U_V \circ \psi_U(s) \\ &= \varphi_V \circ \rho_{\mathcal{F}}{}^U_V(s) + \psi_V \circ \rho_{\mathcal{F}}{}^U_V(s) \\ &= (\varphi_V+\psi_V)\circ \rho_{\mathcal{F}}{}^U_V(s) \\ &= (\varphi+\psi)_V \circ \rho_{\mathcal{F}}{}^U_V(s). \end{aligned}$$

Así, $\varphi+\psi$ es un elemento de $Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G})$. Ahora, sean φ,ψ,φ' y ψ' elementos de $Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ tales que $(\varphi,\psi) = (\varphi',\psi')$. Si U es un conjunto abierto de X, entonces

$$(\varphi+\psi)_U = \varphi_U+\psi_U = \varphi'_U+\psi'_U = (\varphi'+\psi')_U.$$

Por tanto, la operación adición + está bien definida.

Por otro lado, sean $\lambda \in \mathcal{O}_X(X)$ y $\varphi \in Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G})$. Para un conjunto abierto U de X, se tiene que $(\lambda\cdot\varphi)_U = \rho_{\mathcal{O}_X}{}^X_U(\lambda)\cdot\varphi_U$ es una aplicación $\mathcal{O}_X(U)-$lineal, pues φ_U lo es. Luego, sean U y V conjuntos abiertos de X con $V \subseteq U$, se probará que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{(\lambda\cdot\varphi)_U} & \mathcal{G}(U) \\ {\scriptstyle \rho_{\mathcal{F}}{}^U_V}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho_{\mathcal{G}}{}^U_V} \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{(\lambda\cdot\varphi)_V} & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

En efecto, sea $s \in \mathcal{F}(U)$,

$$\begin{aligned}
\rho_{\mathcal{G}V}^{U} \circ (\lambda \cdot \varphi)_U(s) &= \rho_{\mathcal{G}V}^{U} \circ (\rho_{O_X U}^{X}(\lambda) \cdot \varphi_U)(s) \\
&= \rho_{\mathcal{G}V}^{U}(\rho_{O_X U}^{X}(\lambda) \cdot \varphi_U(s)) \\
&= \rho_{O_X V}^{X}(\lambda) \cdot \rho_{\mathcal{G}V}^{U}(\varphi_U(s)) \\
&= \rho_{O_X V}^{X}(\lambda) \cdot \varphi_V(\rho_{\mathcal{F}V}^{U}(s)) \\
&= (\lambda \cdot \varphi)_V \circ \rho_{\mathcal{F}V}^{U}(s).
\end{aligned}$$

Por consiguiente, $\lambda \cdot \varphi \in Hom_{O_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$. Ahora, sean $\lambda, \lambda' \in O_X(X)$ y $\varphi, \varphi' \in Hom_{O_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ tales que $(\lambda, \varphi) = (\lambda', \varphi')$. Sea U un conjunto abierto de X y sea $s \in \mathcal{F}(U)$, se tiene que

$$\begin{aligned}
(\lambda \cdot \varphi)_U(s) &= \rho_{O_X U}^{X}(\lambda) \cdot \varphi_U(s) \\
&= \rho_{O_X U}^{X}(\lambda') \cdot \varphi'_U(s) \\
&= (\lambda' \cdot \varphi')_U(s).
\end{aligned}$$

De esto se sigue que la multiplicación por un escalar $\cdot$ está bien definida.

Una vez con esto no es difícil verificar que $Hom_{O_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ es un $O_X(X)-$módulo. ❑

La siguiente definición nos ayudará a mostrar algunas propiedades interesantes de los O_X-módulos.

Definición 1.2.4. Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ gavillas de O_X-módulos sobre un espacio anillado (X, O_X), y sea $\varphi \in Hom_{O_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$. El morfismo φ es un isomorfismo de O_X-módulos si para cada elemento p de X el morfismo inducido φ_p es un isomorfismo de $O_{X,p}-$módulos.

Proposición 1.2.5. *Si $\mathcal{F}$ es un O_X-módulo sobre un espacio anillado (X, O_X), entonces los O_X-módulos $O_X \otimes_{O_X} \mathcal{F}$ y $\mathcal{F}$ son isomorfos.*

Demostración. Necesitamos construir un morfismo $O_X \otimes_{O_X} \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$, para esto debemos construir una familia de aplicaciones lineales parametrizada por los conjuntos abiertos de X. Enseguida, sea U un conjunto abierto de X, consideremos la asignación σ dada por:

$$\begin{aligned}
\sigma : \ O_X(U) \times \mathcal{F}(U) &\longrightarrow \mathcal{F}(U) \\
(\alpha, s) &\longmapsto \alpha \cdot s.
\end{aligned}$$

De forma inmediata se verifica que σ es una aplicación $O_X(U)-$bilineal. Así, existe una aplicación $O_X(U)-$lineal $\varphi_U : O_X(U) \otimes_{O_X(U)} \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(U)$ tal que

$$\begin{array}{ccc}
O_X(U) \times \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\ \sigma\ } & \mathcal{F}(U) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \phi} & \nearrow_{\varphi_U} & \\
O_X(U) \otimes_{O_X(U)} \mathcal{F}(U) & &
\end{array}$$

es un diagrama conmutativo, donde ϕ es la aplicación natural dada por:

$$\begin{array}{rccc} \phi: & \mathcal{O}_X(U)\times\mathcal{F}(U) & \longrightarrow & \mathcal{O}_X(U)\otimes_{\mathcal{O}_X(U)}\mathcal{F}(U) \\ & (\alpha, s) & \longmapsto & \alpha\otimes s. \end{array}$$

Por otro lado, sean U y V conjuntos abiertos de X con $V\subseteq U$, se tiene que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X(U)\otimes_{\mathcal{O}_X(U)}\mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\varphi_U} & \mathcal{F}(U) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \rho_V^U} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \rho_{\mathcal{F}V}^{U}} \\ \mathcal{O}_X(V)\otimes_{\mathcal{O}_X(V)}\mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\varphi_V} & \mathcal{F}(V) \end{array}$$

Con lo anterior, la familia $(\varphi_U)_{U\in\tau_X}$ define un morfismo de pregavillas $\varphi:(\mathcal{O}_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{F})^-\longrightarrow\mathcal{F}$. De la propiedad universal de la gavilla asociada existe un morfismo de gavillas $\varphi^+:\mathcal{O}_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{F}\longrightarrow\mathcal{F}$ tal que hace que el siguiente diagrama conmute:

(1.2.1)
$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{O}_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{F})^- & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{F} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle\theta} & \nearrow{\scriptstyle\varphi^+} & \\ \mathcal{O}_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{F} & & \end{array}$$

donde $\theta:(\mathcal{O}_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{F})^-\longrightarrow\mathcal{O}_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{F}$ es el morfismo canónico. Lo que sigue es mostrar que el morfismo inducido φ_p^+ es un isomorfismo para todo $p\in X$. Sea $p\in X$, en primer lugar probaremos que φ_p^+ es inyectivo. Sea $\gamma\in(\mathcal{O}_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{F})_p$ tal que $\varphi_p^+(\gamma)=0_{\mathcal{F}_p}$. Sabemos que existe un conjunto abierto V de X que contiene a p y existe $\sum_{i=1}^{\ell}\alpha_i\otimes s_i$ un elemento de $\mathcal{O}_X(V)\otimes_{\mathcal{O}_X(V)}\mathcal{F}(V)$ con $\theta_p([(V,\sum_{i=1}^{\ell}\alpha_i\otimes s_i)])=\gamma$ para algún $\ell\in\mathbb{N}$, pues θ_p es sobreyectivo. Del Diagrama 1.2.1 se tiene que $\varphi_p([(V,\sum_{i=1}^{\ell}\alpha_i\otimes s_i)])=0_{\mathcal{F}_p}$, así $[(V,\sum_{i=1}^{\ell}\alpha_i\cdot s_i)]=0_{\mathcal{F}_p}$, y consecuentemente existe un conjunto abierto W de X que contiene a p y está contenido en V tal que $(\sum_{i=1}^{\ell}\alpha_i\cdot s_i)|_W=0_{\mathcal{F}(W)}$, luego,

$$[(V,\sum_{i=1}^{\ell}\alpha_i\otimes s_i)]=[(V,1_{\mathcal{O}_X(V)}\otimes\sum_{i=1}^{\ell}\alpha_i\cdot s_i)]=[(W,1_{\mathcal{O}_X(W)}\otimes(\sum_{i=1}^{\ell}\alpha_i\cdot s_i)|_W)]=0_{(\mathcal{O}_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{F})_p^-}.$$

Esto implica que $\gamma=0_{(\mathcal{O}_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{F})_p}$, de lo cual concluimos que φ_p^+ es inyectivo. Para la sobreyectividad, sea $t\in\mathcal{F}(U)$ con U cierto conjunto abierto de X que contiene a p. Tenemos que

$$\varphi_p^+(\theta_p([(U,1_{\mathcal{O}_X(U)}\otimes t)]))=\varphi_p([(U,1_{\mathcal{O}_X(U)}\otimes t)])=[(U,\varphi_U(1_{\mathcal{O}_X(U)}\otimes t))]=[(U,t)].$$

❏

Ahora continuaremos con la construcción de una gavilla especial que servirá para definir el grupo de Picard. Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un espacio anillado, y sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ gavillas de $\mathcal{O}_X-$módulos. Consideremos la aplicación $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ dada como sigue: Para un conjunto abierto U de X,

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G})(U) = \begin{cases} \{0\}, & \text{si } U = \emptyset, \text{ y} \\ Hom_{\mathcal{O}_X|_U}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U), & \text{si } U \neq \emptyset. \end{cases}$$

Enseguida, para conjuntos abiertos U y V de X con $V \subseteq U$, el homomorfismo restricción es dado por:

$$\begin{array}{rccc} \rho_{\mathcal{H}om}{}_V^U : & \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G})(U) & \longrightarrow & \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G})(V) \\ & \varphi & \longmapsto & \varphi|_V, \end{array}$$

donde $\varphi|_V$ denota la restricción usual de morfismos.

Lema 1.2.6. *Con las notaciones anteriores, $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ es un $\mathcal{O}_X-$módulo.*

Demostración. Empezaremos con probar que $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ es una pregavilla. Tenemos que el conjunto $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G})(U)$ es un $\mathcal{O}_X(U)-$módulo para cada conjunto abierto U de X. Por otro lado, la primera condición de pregavilla se satisface inmediatamente, ya que por construcción $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G})(\emptyset) = \{0\}$. Para la segunda condición de pregavilla, sea U un conjunto abierto de X, se sigue que $\rho_{\mathcal{H}om}{}_U^U = id_{\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G})(U)}$. Por último, sean U, V y W conjuntos abiertos de X tales que $W \subseteq V \subseteq U$ y sea $\varphi \in \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G})(U)$, luego,

$$\rho_{\mathcal{H}om}{}_W^V \circ \rho_{\mathcal{H}om}{}_V^U(\varphi) = \rho_{\mathcal{H}om}{}_W^V(\varphi|_V) = (\varphi|_V)|_W = \varphi|_W = \rho_{\mathcal{H}om}{}_W^U(\varphi).$$

Por tanto, $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ es una pregavilla.

Continuemos con la prueba de que $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ es una gavilla. Sea U un conjunto abierto de X y sea $(U_i)_{i\in I}$ una cubierta abierta de U para cierto conjunto I. Para la primera condición de gavilla, sea $\varphi \in \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G})(U)$ tal que $\varphi|_{U_i} = 0_{\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G})(U_i)}$. Mostraremos que $\varphi = 0_{\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G})(U)}$. Sea W un conjunto abierto de U, verificaremos que φ_W es igual a la aplicación $\mathcal{O}_X(W)-$lineal nula. Por tanto, sea $p \in W$, así, se tiene que existe $i \in I$ tal que $p \in U_i$, luego, como $\varphi|_{U_i} = 0_{\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G})(U_i)}$, y para cualquier sección s de $\mathcal{F}$ sobre W, se sigue que

$$\begin{aligned} (\varphi_W(s))_p &= (\rho_{\mathcal{G}}{}_{W\cap U_i}^W(\varphi_W(s)))_p \\ &= (\varphi_{W\cap U_i}(\rho_{\mathcal{F}}{}_{W\cap U_i}^W(s)))_p \\ &= (0_{\mathcal{G}(W\cap U_i)})_p \\ &= 0_{\mathcal{G}_p}. \end{aligned}$$

De modo que, $\varphi_W(s) = 0_{\mathcal{G}(W)}$, y así, $\varphi = 0_{\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G})(U)}$. Para la segunda condición de gavilla, sea $\{\varphi_i \in \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G})(U_i) \mid i \in I\}$ una colección de morfimos de modo que para cada par $(i,j) \in I^2$, $\varphi_i|_{U_i\cap U_j} = \varphi_j|_{U_i\cap U_j}$. Probaremos que existe $\psi \in \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G})(U)$ tal que $\psi|_{U_i} = \varphi_i$.

A continuación construiremos la aplicación $\psi : \mathcal{F}|_U \longrightarrow \mathcal{G}|_U$. Sea V un conjunto abierto U y sea $s \in \mathcal{F}(V)$, tenemos que $(V \cap U_i)_{i\in I}$ es una cubierta abierta de V. De esto, consideremos la colección $\{\varphi_{i,V\cap U_i}(\rho_{\mathcal{F}}{}^{V}_{V\cap U_i}(s)) \in \mathcal{G}(V \cap U_i) \mid i \in I\}$ de secciones de $\mathcal{G}$. Ahora, sea $(i, j) \in I^2$, se tiene que

$$\begin{aligned}\rho_{\mathcal{G}}{}^{V\cap U_i}_{V\cap U_i\cap U_j}(\varphi_{i,V\cap U_i}(\rho_{\mathcal{F}}{}^{V}_{V\cap U_i}(s))) &= \varphi_{i,V\cap U_i\cap U_j}(\rho_{\mathcal{F}}{}^{V}_{V\cap U_i\cap U_j}(s)) \\ &= \varphi_{j,V\cap U_i\cap U_j}(\rho_{\mathcal{F}}{}^{V}_{V\cap U_i\cap U_j}(s)) \\ &= \rho_{\mathcal{G}}{}^{V\cap U_j}_{V\cap U_i\cap U_j}(\varphi_{j,V\cap U_j}(\rho_{\mathcal{F}}{}^{V}_{V\cap U_j}(s))).\end{aligned}$$

Puesto que $\mathcal{G}$ es una gavilla, se sigue que existe $\gamma^s \in \mathcal{G}(V)$ tal que $\rho_{\mathcal{G}}{}^{V}_{V\cap U_i}(\gamma^s) = \varphi_{i,V\cap U_i}(\rho_{\mathcal{F}}{}^{V}_{V\cap U_i}(s))$ para todo $i \in I$, con esto $\psi : \mathcal{F}|_U \longrightarrow \mathcal{G}|_U$ está definida de la siguiente manera: Para cada conjunto abierto V de U,

$$\begin{array}{rccc}\psi_V : & \mathcal{F}(V) & \longrightarrow & \mathcal{G}(V) \\ & s & \mapsto & \psi_V(s) := \gamma^s.\end{array}$$

Veamos que ψ_V es una aplicación $\mathcal{O}_X(V)-$lineal. En efecto, sean s y t secciones de $\mathcal{F}$ sobre V tales que $s = t$. Si $p \in V$, entonces existe $i \in I$ tal que $p \in U_i$, de manera que

$$(\gamma^s)_p = (\rho_{\mathcal{G}}{}^{V}_{V\cap U_i}(\gamma^s))_p = (\varphi_{i,V\cap U_i}(\rho_{\mathcal{F}}{}^{V}_{V\cap U_i}(s)))_p = (\varphi_{i,V\cap U_i}(\rho_{\mathcal{F}}{}^{V}_{V\cap U_i}(t)))_p = (\rho_{\mathcal{G}}{}^{V}_{V\cap U_i}(\gamma^t))_p = (\gamma^t)_p,$$

por tanto, ψ_V está bien definida. Ahora, sean s y t elementos de $\mathcal{F}(V)$, y sea $p \in V$, así existe $i \in I$ tal que $p \in U_i$, luego

$$\begin{aligned}(\gamma^{s+t})_p &= (\rho_{\mathcal{G}}{}^{V}_{V\cap U_i}(\gamma^{s+t}))_p \\ &= (\varphi_{i,V\cap U_i}(\rho_{\mathcal{F}}{}^{V}_{V\cap U_i}(s+t)))_p \\ &= (\varphi_{i,V\cap U_i}(\rho_{\mathcal{F}}{}^{V}_{V\cap U_i}(s)))_p + (\varphi_{i,V\cap U_i}(\rho_{\mathcal{F}}{}^{V}_{V\cap U_i}(t)))_p \\ &= (\rho_{\mathcal{G}}{}^{V}_{V\cap U_i}(\gamma^s))_p + (\rho_{\mathcal{G}}{}^{V}_{V\cap U_i}(\gamma^t))_p \\ &= (\gamma^s)_p + (\gamma^t)_p,\end{aligned}$$

por consiguiente, $\psi_V(s + t) = \psi_V(s) + \psi_V(t)$. Enseguida, sean $\alpha \in \mathcal{O}_X(V)$, $s \in \mathcal{F}(V)$, y $p \in V$, así existe $i \in I$ tal que $p \in U_i$. De esto,

$$\begin{aligned}(\gamma^{\alpha\cdot s})_p &= (\rho_{\mathcal{G}}{}^{V}_{V\cap U_i}(\gamma^{\alpha\cdot s}))_p \\ &= (\varphi_{i,V\cap U_i}(\rho_{\mathcal{F}}{}^{V}_{V\cap U_i}(\alpha\cdot s)))_p \\ &= (\varphi_{i,V\cap U_i}(\rho_{\mathcal{O}_X}{}^{V}_{V\cap U_i}(\alpha)\cdot\rho_{\mathcal{F}}{}^{V}_{V\cap U_i}(s)))_p \\ &= (\rho_{\mathcal{O}_X}{}^{V}_{V\cap U_i}(\alpha)\cdot\varphi_{i,V\cap U_i}(\rho_{\mathcal{F}}{}^{V}_{V\cap U_i}(s)))_p \\ &= (\rho_{\mathcal{O}_X}{}^{V}_{V\cap U_i}(\alpha)\cdot\rho_{\mathcal{G}}{}^{V}_{V\cap U_i}(\gamma^s))_p \\ &= (\rho_{\mathcal{G}}{}^{V}_{V\cap U_i}(\alpha\cdot\gamma^s))_p \\ &= (\alpha\cdot\gamma^s)_p.\end{aligned}$$

Así que, $\psi_V(\alpha \cdot s) = \alpha \cdot \psi_V(s)$, y por lo tanto ψ_V es una aplicación $\mathcal{O}_X(V)-$lineal. Más aún, ψ es un elemento de $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U)$. Ahora bien, sea $i \in I$, vamos a mostrar que $\psi|_{U_i} = \varphi_i$. Para esto,

sean W un conjunto abierto de U_i, $p \in W$ y $s \in \mathcal{F}(W)$, luego

$$(\psi_W(s))_p = (\gamma^s)_p = (\rho_{\mathcal{G}\,W\cap U_i}^{\,W}(\gamma^s))_p = (\varphi_{i,W\cap U_i}(\rho_{\mathcal{F}\,W\cap U_i}^{\,W}(s)))_p = (\varphi_{i,W}(s))_p,$$

de manera que, $\psi|_{U_i} = \varphi_i$.

Para terminar, sean U y V conjuntos abiertos de X con $V \subseteq U$, lo que sigue es mostrar que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X(U) \times \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G})(U) & \longrightarrow & \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G})(U) \\ \downarrow{\scriptstyle \rho_{\mathcal{O}_X\,V}^{\,U} \times \rho_{\mathcal{H}om\,V}^{\,U}} & & \downarrow{\scriptstyle \rho_{\mathcal{H}\mathrm{om}\,V}^{\,U}} \\ \mathcal{O}_X(V) \times \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G})(V) & \longrightarrow & \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G})(V) \end{array}$$

conmuta. En efecto, sean $\alpha \in \mathcal{O}_X(U)$ y $\varphi \in \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G})(U)$, veamos que $(\alpha \cdot \varphi)|_V = \rho_{\mathcal{O}_X\,V}^{\,U}(\alpha) \cdot \varphi|_V$. Sea W un conjunto abierto de V y sea $s \in \mathcal{F}(W)$, así tenemos que

$$(\alpha \cdot \varphi)_W(s) = \rho_{\mathcal{O}_X\,W}^{\,U}(\alpha) \cdot \varphi_W(s) = (\rho_{\mathcal{O}_X\,V}^{\,U}(\alpha) \cdot \varphi|_V)_W(s).$$

Por lo tanto, $(\alpha \cdot \varphi)|_V = \rho_{\mathcal{O}_X\,V}^{\,U}(\alpha) \cdot \varphi|_V$, y en definitiva, $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ es un $\mathcal{O}_X-$módulo. ❑

A continuación daremos algunas propiedades de la gavilla $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G})$.

Proposición 1.2.7. *Sea $(X,\mathcal{O}_X)$ un espacio anillado y sea $\mathcal{G}$ un $\mathcal{O}_X-$módulo. Se tiene que el $\mathcal{O}_X-$módulo $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X,\mathcal{G})$ es isomorfo a $\mathcal{G}$.*

Demostración. Consideremos la asignación $\psi : \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X,\mathcal{G}) \longrightarrow \mathcal{G}$ dada de la siguiente manera: Si U es un conjunto abierto de X, entonces

$$\begin{array}{rccc} \psi_U : & \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X,\mathcal{G})(U) & \longrightarrow & \mathcal{G}(U) \\ & f & \longmapsto & f_U(1_{\mathcal{O}_X(U)}). \end{array}$$

Sean f y g elementos de $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X,\mathcal{G})(U)$ tales que $f = g$, luego,

$$\psi_U(f) = f_U(1_{\mathcal{O}_X(U)}) = g_U(1_{\mathcal{O}_X(U)}) = \psi_U(g),$$

así, ψ_U está bien definida. Por otro lado, sean $f, g \in \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X,\mathcal{G})(U)$, se sigue que

$$\psi_U(f+g) = (f+g)_U(1_{\mathcal{O}_X(U)}) = f_U(1_{\mathcal{O}_X(U)}) + g_U(1_{\mathcal{O}_X(U)}) = \psi_U(f) + \psi_U(g).$$

Enseguida, sean $\alpha \in \mathcal{O}_X(U)$ y $f \in \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X,\mathcal{G})(U)$, tenemos que

$$\psi_U(\alpha \cdot f) = (\alpha \cdot f)_U(1_{\mathcal{O}_X(U)}) = \alpha \cdot f_U(1_{\mathcal{O}_X(U)}) = \alpha \cdot \psi_U(f).$$

Por lo tanto, ψ_U es una aplicación $\mathcal{O}_X(U)-$lineal. Ahora, sean U y V conjuntos abiertos de X con $V \subseteq U$, mostraremos que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{G})(U) & \xrightarrow{\psi_U} & \mathcal{G}(U) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \rho_{\mathcal{H}om}{}_V^U} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \rho_{\mathcal{G}}{}_V^U} \\ \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{G})(V) & \xrightarrow{\psi_V} & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

Sea $f \in \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{G})(U)$, luego, $\rho_{\mathcal{G}}{}_V^U \circ \psi_U(f) = \rho_{\mathcal{G}}{}_V^U(f_U(1_{\mathcal{O}_X(U)})) = f_V(1_{\mathcal{O}_X(V)}) = \psi_V \circ \rho_{\mathcal{H}om}{}_V^U(f)$, de modo que ψ es un morfismo de $\mathcal{O}_X-$módulos.

Ahora, sea $p \in X$, vamos a probar que ψ_p es un isomorfismo. Sean U un conjunto abierto de X que contiene a p y $f \in \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{G})(U)$ tales que $\psi_p([(U, f)]) = 0_{\mathcal{G}_p}$. De esto, existe un conjunto abierto V de X contenido en U y que contiene a p tal que $f_V(1_{\mathcal{O}_X(V)}) = 0_{\mathcal{G}(V)}$. Si W es un conjunto abierto de V, y si s es un elemento de $\mathcal{O}_X(W)$, entonces $f_W(s) = s \cdot f_W(1_{\mathcal{O}_X(W)}) = 0_{\mathcal{G}(W)}$. Así que,

$$[(U, f)] = [(V, f|_V)] = 0_{\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{G})_p},$$

mostrando con esto que ψ_p es una aplicación inyectiva. Para la sobreyectividad, sea U un conjunto abierto de X con $p \in U$, y sea $t \in \mathcal{G}(U)$. Consideremos la asignación $f : \mathcal{O}_X|_U \longrightarrow \mathcal{G}|_U$ dada como sigue: Si V es un conjunto abierto de U, entonces

$$\begin{array}{rccc} f_V : & \mathcal{O}_X(V) & \longrightarrow & \mathcal{G}(V) \\ & s & \longmapsto & s \cdot \rho_{\mathcal{G}}{}_V^U(t). \end{array}$$

Se tiene que f_V es una aplicación $\mathcal{O}_X(V)-$lineal. En efecto, sean $s, s' \in \mathcal{O}_X(V)$ tales que $s = s'$, se satisface que $f_V(s) = s \cdot \rho_{\mathcal{G}}{}_V^U(t) = s' \cdot \rho_{\mathcal{G}}{}_V^U(t) = f_V(s')$, de esto, f_V está bien definida. Luego, sean α, α', s y s' elementos de $\mathcal{O}_X(V)$, por tanto,

$$f_V(\alpha \cdot s + \alpha' \cdot s') = (\alpha \cdot s + \alpha' \cdot s') \cdot \rho_{\mathcal{G}}{}_V^U(t) = \alpha \cdot (s \cdot \rho_{\mathcal{G}}{}_V^U(t)) + \alpha' \cdot (s' \cdot \rho_{\mathcal{G}}{}_V^U(t)) = \alpha \cdot f_V(s) + \alpha' \cdot f_V(s'),$$

esto implica que f_V es una aplicación $\mathcal{O}_X(V)-$lineal. Por otro lado, sean V y W conjuntos abiertos de U con $W \subseteq V$, se sigue que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X(V) & \xrightarrow{f_V} & \mathcal{G}(V) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \rho_{\mathcal{O}_X}{}_W^V} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \rho_{\mathcal{G}}{}_W^V} \\ \mathcal{O}_X(W) & \xrightarrow{f_W} & \mathcal{G}(W) \end{array}$$

es conmutativo pues para $s \in \mathcal{O}_X(V)$, tenemos que

$$\rho_{\mathcal{G}}{}_W^V \circ f_V(s) = \rho_{\mathcal{G}}{}_W^V(s \cdot \rho_{\mathcal{G}}{}_V^U(t)) = \rho_{\mathcal{O}_X}{}_W^V(s) \cdot \rho_{\mathcal{G}}{}_W^U(t) = f_W(\rho_{\mathcal{O}_X}{}_W^V(s)) = f_W \circ \rho_{\mathcal{O}_X}{}_W^V(s),$$

de modo que, f es un morfismo. Por lo tanto,

$$\psi_p([(U, f)]) = [(U, \psi_U(f))] = [(U, f_U(1_{\mathcal{O}_X(U)}))] = [(U, t)].$$

Finalmente, de la Definición 1.2.4 se sigue que ψ es un isomorfismo. ❑

1.3. Grupo de Picard

Dado un espacio anillado le podemos asociar un grupo abeliano bien conocido como el *Grupo de Picard* del espacio anillado. A continuación, intentaremos introducir suavemente dicho grupo y lo determinaremos para ciertos espacios anillados. Enseguida daremos tres conceptos que serán de utilidad para nuestra construcción.

Definición 1.3.1. Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un espacio anillado y sea $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X-$módulo. La gavilla dual de $\mathcal{F}$ es la gavilla $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)$, y será denotada por $\mathcal{F}^\vee$.

Definición 1.3.2. Sea $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X-$módulo sobre un espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$. $\mathcal{F}$ es localmente libre de rango n, con n un entero no negativo, si para cada $p \in X$ existe un conjunto abierto U de X con $p \in U$ tal que $\mathcal{F}|_U \cong \mathcal{O}_X^n|_U$.

Definición 1.3.3. Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un espacio anillado. Una gavilla de $\mathcal{O}_X-$módulos es invertible si es localmente libre de rango uno.

Observación 1.3.4. En el caso de que $(X, \mathcal{O}_X)$ es un esquema Noetheriano, entero, separado y localmente factorial se tiene que para cada divisor sobre X existe una gavilla invertible sobre X (ver [17, Corolario 6.16, p. 145]).

Enseguida, mostraremos que la propiedad de que una gavilla sea invertible es preservada por la dualidad.

Proposición 1.3.5. *Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un espacio anillado. Si $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{O}_X-$módulo invertible, entonces $\mathcal{F}^\vee$ también lo es.*

Demostración. Sea $p \in X$, tenemos que existe un conjunto abierto U de X con $p \in U$ tal que $\mathcal{F}|_U \cong \mathcal{O}_X|_U$, luego,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^\vee|_U &= \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)|_U \\ &= \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X|_U}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{O}_X|_U) \\ &\cong \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X|_U}(\mathcal{O}_X|_U, \mathcal{O}_X|_U) \\ &\cong \mathcal{O}_X|_U. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathcal{F}^\vee$ es invertible. ❑

Una de las propiedades agradables de la gavilla dual es el siguiente resultado:

Proposición 1.3.6. *Sea $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X-$módulo invertible sobre un espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$, se satisface que $\mathcal{F}^\vee \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}$ es isomorfo a $\mathcal{O}_X$.*

Demostración. Debemos construir un morfismo $\psi : \mathcal{F}^\vee \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{O}_X$ y mostrar que el morfismo inducido ψ_p es un isomorfismo para cada $p \in X$. Para esto, sea U un conjunto abierto de X, ahora consideremos la siguiente aplicación $\mathcal{O}_X(U)-$bilineal:

$$\begin{array}{rccc} \phi: & \mathcal{F}^\vee(U) \times \mathcal{F}(U) & \longrightarrow & \mathcal{O}_X(U) \\ & (f, s) & \longmapsto & f_U(s). \end{array}$$

De la propiedad universal del producto tensorial existe una aplicación $\mathcal{O}_X(U)-$lineal

$$\varphi_U : \mathcal{F}^\vee(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{O}_X(U),$$

tal que hace que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}^\vee(U) \times \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{O}_X(U) \\ \downarrow & \nearrow_{\varphi_U} & \\ \mathcal{F}^\vee(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{F}(U) & & \end{array}$$

Enseguida, sean U y V conjuntos abiertos de X con $V \subseteq U$, tenemos que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}^\vee(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\varphi_U} & \mathcal{O}_X(U) \\ {\scriptstyle \rho_{(\mathcal{F}^\vee \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F})^-}{}^U_V}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho_{\mathcal{O}_X}{}^U_V} \\ \mathcal{F}^\vee(V) \otimes_{\mathcal{O}_X(V)} \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\varphi_V} & \mathcal{O}_X(V) \end{array}$$

En efecto, sea $\sum_{i=1}^{\ell} f_i \otimes s_i$ un elemento de $\mathcal{F}^\vee(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{F}(U)$, luego,

$$\begin{array}{rcl} \rho_{\mathcal{O}_X}{}^U_V \circ \varphi_U(\sum_{i=1}^{\ell} f_i \otimes s_i) & = & \rho_{\mathcal{O}_X}{}^U_V(\sum_{i=1}^{\ell} f_{i,U}(s_i)) \\ & = & \sum_{i=1}^{\ell} f_{i,V}(\rho_{\mathcal{F}}{}^U_V(s_i)) \\ & = & \varphi_V(\sum_{i=1}^{\ell} (\rho_{\mathcal{F}^\vee}{}^U_V(f_i)) \otimes \rho_{\mathcal{F}}{}^U_V(s_i)) \\ & = & \varphi_V \circ \rho_{(\mathcal{F}^\vee \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F})^-}{}^U_V(\sum_{i=1}^{\ell} f_i \otimes s_i). \end{array}$$

Con lo anterior, la familia $(\varphi_U)_{U \in \tau_X}$ de aplicaciones lineales define un morfismo de pregavillas

$$\varphi : (\mathcal{F}^\vee \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F})^- \longrightarrow \mathcal{O}_X.$$

Utilizando la propiedad universal de la gavilla asociada existe un morfismo $\psi : \mathcal{F}^\vee \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{O}_X$ de gavillas tal que el siguiente diagrama conmuta:

(1.3.1)
$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{F}^\vee \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F})^- & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{O}_X \\ \downarrow{\scriptstyle\theta} & \nearrow{\scriptstyle\psi} & \\ \mathcal{F}^\vee \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F} & & \end{array}$$

donde θ es el morfismo canónico.

A continuación, sea $p \in X$, se mostrará que ψ_p es inyectivo. Sea $\lambda \in (\mathcal{F}^\vee \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F})_p$ tal que $\psi_p(\lambda) = 0_{\mathcal{O}_{X,p}}$. Sabemos que existe un conjunto abierto U de X que contiene a p y existe $\sum_{i=1}^{\ell} f_i \otimes s_i$ un elemento de $\mathcal{F}^\vee(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{F}(U)$ tales que $\lambda = \theta_p([(U, \sum_{i=1}^{\ell} f_i \otimes s_i)])$. Por tanto, usando el Diagrama 1.3.1 obtenemos que $\varphi_p([(U, \sum_{i=1}^{\ell} f_i \otimes s_i)]) = 0_{\mathcal{O}_{X,p}}$, así, existe un conjunto abierto W de X con $W \subseteq U$ y $p \in W$ tal que $\varphi_W(\sum_{i=1}^{\ell}(\rho_{\mathcal{F}^\vee}{}^U_W(f_i)) \otimes (\rho_{\mathcal{F}}{}^U_W(s_i))) = 0_{\mathcal{O}_X(W)}$, de lo cual se tiene que $\sum_{i=1}^{\ell} f_{i,W}(\rho_{\mathcal{F}}{}^U_W(s_i)) = 0_{\mathcal{O}_X(W)}$. Por otro lado, puesto que $\mathcal{F}$ es invertible existe un conjunto abierto Γ de X, con $p \in \Gamma$, tal que $\sigma : \mathcal{O}_X|_\Gamma \longrightarrow \mathcal{F}|_\Gamma$ es un isomorfismo. Luego, existe $\alpha_i \in \mathcal{O}_X(W \cap \Gamma)$ tal que $\rho_{\mathcal{F}}{}^U_{W\cap\Gamma}(s_i) = \sigma_{W\cap\Gamma}(\alpha_i)$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \rho_{(\mathcal{F}^\vee\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{F})^-}{}^U_{W\cap\Gamma}(\sum_{i=1}^{\ell} f_i \otimes s_i) &= \sum_{i=1}^{\ell}(\rho_{\mathcal{F}^\vee}{}^U_{W\cap\Gamma}(f_i)) \otimes (\sigma_{W\cap\Gamma}(\alpha_i)) \\ &= (\sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i \cdot \rho_{\mathcal{F}^\vee}{}^U_{W\cap\Gamma}(f_i)) \otimes \sigma_{W\cap\Gamma}(1_{\mathcal{O}_X(W\cap\Gamma)}). \end{aligned}$$

Veamos que $\sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i \cdot \rho_{\mathcal{F}^\vee}{}^U_{W\cap\Gamma}(f_i) = 0_{\mathcal{F}^\vee(W\cap\Gamma)}$, para esto sea Y un conjunto abierto de X, con $Y \subseteq W \cap \Gamma$, y sea $r \in \mathcal{O}_X(Y)$, se sigue que,

$$\begin{aligned} (\sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i \cdot \rho_{\mathcal{F}^\vee}{}^U_{W\cap\Gamma}(f_i))_Y(\sigma_Y(r)) &= \sum_{i=1}^{\ell} \rho_{\mathcal{O}_X}{}^{W\cap\Gamma}_Y(\alpha_i) \cdot f_{i,Y}(\sigma_Y(r)) \\ &= \sum_{i=1}^{\ell} f_{i,Y}(\sigma_Y(\rho_{\mathcal{O}_X}{}^{W\cap\Gamma}_Y(\alpha_i) r)) \\ &= r \cdot \sum_{i=1}^{\ell} f_{i,Y}(\sigma_Y(\rho_{\mathcal{O}_X}{}^{W\cap\Gamma}_Y(\alpha_i))) \\ &= r \cdot \sum_{i=1}^{\ell} f_{i,Y}(\rho_{\mathcal{F}}{}^U_Y(s_i)) \\ &= 0_{\mathcal{O}_X(Y)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $[(U, \sum_{i=1}^{\ell} f_i \otimes s_i)] = 0_{(\mathcal{F}^\vee\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{F})^-_p}$, y así, $\lambda = 0_{(\mathcal{F}^\vee\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{F})_p}$. Continuemos con la prueba de que ψ_p es sobreyectivo. Sean U un conjunto abierto de X que contiene a p y $r \in \mathcal{O}_X(U)$, consideremos el elemento $[(U \cap \Gamma, \sigma^{-1}_{U\cap\Gamma} \otimes \sigma_{U\cap\Gamma}(\rho_{\mathcal{O}_X}{}^U_{U\cap\Gamma}(r)))]$ de $(\mathcal{F}^\vee \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F})^-_p$, luego,

$$\begin{aligned} \psi_p(\theta_p([(U \cap \Gamma, \sigma^{-1}_{U\cap\Gamma} \otimes \sigma_{U\cap\Gamma}(\rho_{\mathcal{O}_X}{}^U_{U\cap\Gamma}(r)))])) &= \varphi_p([(U \cap \Gamma, \sigma^{-1}_{U\cap\Gamma} \otimes \sigma_{U\cap\Gamma}(\rho_{\mathcal{O}_X}{}^U_{U\cap\Gamma}(r)))]) \\ &= [(U \cap \Gamma, \varphi_{U\cap\Gamma}(\sigma^{-1}_{U\cap\Gamma} \otimes \sigma_{U\cap\Gamma}(\rho_{\mathcal{O}_X}{}^U_{U\cap\Gamma}(r))))] \\ &= [(U \cap \Gamma, \rho_{\mathcal{O}_X}{}^U_{U\cap\Gamma}(r))] \\ &= [(U, r)]. \end{aligned}$$

Finalmente, $\mathcal{F}^\vee \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}$ es isomorfo a $\mathcal{O}_X$ como $\mathcal{O}_X-$módulos. ❏

El siguiente resultado muestra que la propiedad de que una pareja de gavillas sea invertible es preservada por el producto tensorial.

Proposición 1.3.7. *Si $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son $\mathcal{O}_X-$módulos invertibles sobre un espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$, entonces $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ es un $\mathcal{O}_X-$módulo invertible.*

Demostración. Sea $p \in X$, existen conjuntos abiertos U y V de X con $p \in U \cap V$ de tal manera que $\mathcal{F}|_U \cong \mathcal{O}_X|_U$ y $\mathcal{G}|_V \cong \mathcal{O}_X|_V$. Enseguida,

$$\begin{aligned}(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})|_{U\cap V} &\cong \mathcal{F}|_{U\cap V} \otimes_{\mathcal{O}_X|_{U\cap V}} \mathcal{G}|_{U\cap V},\\ &\cong \mathcal{O}_X|_{U\cap V} \otimes_{\mathcal{O}_X|_{U\cap V}} \mathcal{O}_X|_{U\cap V},\\ &\cong \mathcal{O}_X|_{U\cap V}.\end{aligned}$$

Por tanto, $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ es invertible. ❑

Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un espacio anillado, consideremos el conjunto

$$\Delta = \{\mathcal{F} \mid \mathcal{F} \text{ es un } \mathcal{O}_X - \text{módulo invertible}\}.$$

Observemos que Δ es un conjunto no vacío, pues $\mathcal{O}_X$ es un elemento de él. Tomando en cuenta esto podemos definir una relación sobre este conjunto como sigue: Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ $\mathcal{O}_X-$módulos invertibles, diremos que $\mathcal{F} \sim \mathcal{G}$ si y solo si $\mathcal{F} \cong \mathcal{G}$. Se tiene que $\sim$ es una relación de equivalencia. En efecto, sea $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X-$módulo invertible, luego $\mathcal{F} \sim \mathcal{F}$, pues $\mathcal{F} \cong \mathcal{F}$. Luego, sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ $\mathcal{O}_X-$módulos invertibles tales que $\mathcal{F} \sim \mathcal{G}$, se sigue que $\mathcal{G} \sim \mathcal{F}$, ya que $\mathcal{G} \cong \mathcal{F}$. Por último sean $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ y $\mathcal{H}$ $\mathcal{O}_X-$módulos invertibles tales que $\mathcal{F} \sim \mathcal{G}$ y $\mathcal{G} \sim \mathcal{H}$, de este modo, $\mathcal{F} \sim \mathcal{H}$ pues $\mathcal{F} \cong \mathcal{G}$ y $\mathcal{G} \cong \mathcal{H}$.

Proposición 1.3.8. *Con las notaciones anteriores, $\dfrac{\Delta}{\sim}$ es un grupo abeliano.*

Demostración. Consideremos la operación + definida por:

$$\begin{array}{rccc} + : & \dfrac{\Delta}{\sim} \times \dfrac{\Delta}{\sim} & \longrightarrow & \dfrac{\Delta}{\sim} \\ & ([\mathcal{F}], [\mathcal{G}]) & \mapsto & [\mathcal{F}] + [\mathcal{G}] = [\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}]. \end{array}$$

Vamos a probar que + está bien definida: Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ gavillas invertibles de $\mathcal{O}_X-$módulos, se tiene que $[\mathcal{F}] + [\mathcal{G}]$ es un elemento de $\dfrac{\Delta}{\sim}$, pues $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ es invertible. Ahora, sean $\mathcal{F}, \mathcal{F}', \mathcal{G}$ y $\mathcal{G}'$ $\mathcal{O}_X-$módulos invertibles tales que $[\mathcal{F}] = [\mathcal{F}']$ y $[\mathcal{G}] = [\mathcal{G}']$, luego,

$$[\mathcal{F}] + [\mathcal{G}] = [\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}] = [\mathcal{F}' \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}'] = [\mathcal{F}'] + [\mathcal{G}'],$$

ya que $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G} \cong \mathcal{F}' \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}'$.

[Asociatividad] Sean $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ y $\mathcal{H}$ $\mathcal{O}_X-$módulos invertibles, tenemos que

$$\begin{aligned}[\mathcal{F}] + ([\mathcal{G}] + [\mathcal{H}]) &= [\mathcal{F}] + [\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{H}] \\ &= [\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} (\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{H})] \\ &= [(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{H}] \\ &= [\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}] + [\mathcal{H}] \\ &= ([\mathcal{F}] + [\mathcal{G}]) + [\mathcal{H}].\end{aligned}$$

[Conmutatividad] Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ gavillas de $\mathcal{O}_X-$módulos invertibles, luego,

$$[\mathcal{F}] + [\mathcal{G}] = [\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}] = [\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}] = [\mathcal{G}] + [\mathcal{F}].$$

[Elemento neutro] El elemento neutro de $\frac{\Delta}{\sim}$ es $[\mathcal{O}_X]$, pues $[\mathcal{O}_X] + [\mathcal{F}] = [\mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}] = [\mathcal{F}]$, para cada $[\mathcal{F}] \in \frac{\Delta}{\sim}$.

[Inverso] Sea $[\mathcal{F}] \in \frac{\Delta}{\sim}$, tenemos que $[\mathcal{F}^\vee]$ es el inverso de $[\mathcal{F}]$, ya que

$$[\mathcal{F}] + [\mathcal{F}^\vee] = [\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}^\vee] = [\mathcal{O}_X].$$

Así, concluimos que $\frac{\Delta}{\sim}$ es un grupo abeliano. ❑

La proposición anterior permite dar la siguiente definición:

Definición 1.3.9. Con las notaciones de la Proposición 1.3.8, el grupo de Picard de X es el grupo abeliano $\frac{\Delta}{\sim}$, y será denotado por $Pic(X)$.

Ejemplo 1.3.10. El grupo de Picard $Pic(\mathbb{P}^r_k)$ de espacio proyectivo de dimensión r sobre un campo k es isomorfo a $\mathbb{Z}$ pues $Pic(\mathbb{P}^r_k) = \{(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r_k}(1))^{\otimes n} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ (ver [17, Corolario 6.17, p. 145]).

Observación 1.3.11. No es difícil probar que si dos espacios anillados son isomorfos, entonces sus grupos de Picard también lo son. Sin embargo, el recíproco es falso (ver Ejemplo 1.3.10).

Capítulo 2

Cohomología

El propósito de este capítulo es definir los grupos de cohomología de una gavilla (ver Definición 2.2.1). Para llevarlo a cabo, presentaremos los conceptos de *gavilla fofa* y *resolución fofa* (ver Defiinciones 2.1.1 y 2.1.3). Para finalizar el capítulo enunciaremos el teorema de Riemann-Roch para una superficie proyectiva racional lisa definida sobre un campo arbitrario (ver Teorema 2.3.3), la importancia de dicho teorema se verá reflejada en la Sección 5.2 del Capítulo 5.

2.1. Resolución Fofa

En esta sección daremos la noción de la *resolución fofa canónica* de una gavilla, para ello defiremos en primer lugar una *gavilla fofa* como sigue:

Definición 2.1.1. Una gavilla de grupos abelianos $\mathcal{F}$ sobre un espacio topológico X es fofa, si para cada conjunto abierto U de X la aplicación restricción $\rho_{\mathcal{F}}{}^{X}_{U} : \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{F}(U)$ es sobreyectiva.

Veamos un ejemplo de una gavilla fofa.

Ejemplo 2.1.2 (La gavilla rascacielos es una gavilla fofa)**.** Sea G un grupo abeliano, y sea X un espacio topológico no vacío. Fijemos un punto p de X, la gavilla rascacielos $G_X^{(p)}$ asociada a G en p está definida de la siguiente manera:

Para cada conjunto abierto U de X, el grupo abeliano $G_X^{(p)}(U)$ es igual a:

$$G_X^{(p)}(U) = \begin{cases} G, & \text{si } p \in U, \text{ y} \\ \{0_G\}, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Para cualesquiera conjuntos abiertos U y V de X con $V \subseteq U$, la aplicación restricción $\rho_{G_X^{(p)}}{}^{U}_{V}$ está dada por:

$$\rho_{G_X^{(p)}}{}^{U}_{V} = \begin{cases} id_G, & \text{si } p \in V, \text{ y} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde id_G denota la aplicación identidad en G y 0 denota la aplicación nula.

Es claro que ${\rho_{G_X^{(p)}}}_U^X$ es sobreyectiva para cualquier conjunto abierto U de X. Por lo tanto, $G_X^{(p)}$ es una gavilla fofa.

A continuación, sea $\mathcal{F}$ una gavilla sobre un espacio topológico X, a partir de $\mathcal{F}$ vamos a construir una gavilla fofa. Así, fijemos un conjunto abierto U de X, y consideremos el conjunto:

$$C_{\mathcal{F}}(U) = \left\{ s : U \longrightarrow \prod_{p\in U} \mathcal{F}_p \mid s(p) \in \mathcal{F}_p \text{ para cada } p \in U \right\}$$

este conjunto tiene una estructura de grupo abeliano. Más aún, se tiene que la familia de grupos abelianos $(C_{\mathcal{F}}(U))_{U\in\tau_X}$ junto con cierta aplicación restricción definen una gavilla de grupos abelianos sobre X, la cual denotaremos por $C_{\mathcal{F}}$, esto es, $C_{\mathcal{F}}$ asigna a cada conjunto abierto U de X el grupo abeliano $C_{\mathcal{F}}(U)$, y la aplicación restricción $\rho_{C_{\mathcal{F}}}$ está dada por:

$$\begin{array}{rccc} {\rho_{C_{\mathcal{F}}}}_V^U : & C_{\mathcal{F}}(U) & \longrightarrow & C_{\mathcal{F}}(V) \\ & s & \longmapsto & s|_V, \end{array}$$

donde $s|_V$ es la aplicación definida de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rccc} s|_V : & V & \longrightarrow & \prod_{q\in V} \mathcal{F}_q \\ & p & \longmapsto & s(p), \end{array}$$

para cualesquiera conjuntos abiertos U y V de X con $V \subseteq U$. Cabe mencionar que $C_{\mathcal{F}}$ es una gavilla fofa, pues, sea U un conjunto abierto de X, y sea t una sección de $C_{\mathcal{F}}$ sobre U. Consideremos la siguiente asignación:

$$\begin{array}{rccc} s : & X & \longrightarrow & \prod_{p\in X} \mathcal{F}_p \\ & q & \longmapsto & \begin{cases} t(q), & \text{si } q \in U, \text{ y} \\ 0_{\mathcal{F}_q}, & \text{en otro caso.} \end{cases} \end{array}$$

Es claro que, s es una sección de $C_{\mathcal{F}}$ sobre X tal que $s|_U = t$. Por lo tanto, $C_{\mathcal{F}}$ es una gavilla fofa.

Enseguida, definiremos una *resoloción fofa* de una gavilla:

Definición 2.1.3. Sea $\mathcal{F}$ una gavilla sobre un espacio topológico X, una resolución fofa de $\mathcal{F}$ es una sucesión exacta de gavillas de la forma:

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}^0 \longrightarrow \mathcal{G}^1 \longrightarrow \mathcal{G}^2 \longrightarrow \cdots$$

donde $\mathcal{G}^j$ es una gavilla fofa para cada $j \in \mathbb{Z}_+$.

A cada gavilla se le puede asociar de una manera natural una resolución fofa que llamaremos la resolución fofa canónica. Antes de hacer la construcción de la resolución fofa canónica de una gavilla $\mathcal{F}$ sobre un espacio topológico X, observemos que podemos ver a $\mathcal{F}$ como una subgavilla de

$C_{\mathcal{F}}$, es decir, existe un morfismo inyectivo entre las gavillas $\mathcal{F}$ y $C_{\mathcal{F}}$. En efecto, para cada conjunto abierto U de X consideremos la asignación i_U definida como:

$$\begin{array}{rccc} i_U: & \mathcal{F}(U) & \longrightarrow & C_{\mathcal{F}}(U) \\ & s & \longmapsto & i_U(s), \end{array}$$

donde $i_U(s)$ está dada por:

$$\begin{array}{rccc} i_U(s): & U & \longrightarrow & \prod_{p\in U}\mathcal{F}_p \\ & q & \longmapsto & s_q. \end{array}$$

De forma inmediata se tiene que i_U es un homomorfismo de grupos. Ahora bien, sean U y V conjuntos abiertos de X con $V \subseteq U$, se tiene que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{i_U} & C_{\mathcal{F}}(U) \\ {\scriptstyle \rho_{\mathcal{F}}{}^{U}_{V}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho_{C_{\mathcal{F}}}{}^{U}_{V}} \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{i_V} & C_{\mathcal{F}}(V) \end{array}$$

lo cual implica que la familia $(i_U)_{U\in\tau_X}$ define un morfismo de gavillas, y será denotado por $i_{\mathcal{F}}$. Enseguida, vamos a mostrar que $i_{\mathcal{F}}$ es un morfismo inyectivo. Sea U un conjunto abierto de X, y sea $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $i_U(s) = 0_{C_{\mathcal{F}}(U)}$, esto es, $s_q = 0_{\mathcal{F}_q}$ para cada $q \in U$. Por tanto, $s = 0_{\mathcal{F}(U)}$, y así, tenemos que $ker\,(i_U) = \{0_{\mathcal{F}(U)}\}$. Luego, i_U es un homomorfismo inyectivo, y en conclusión, $i_{\mathcal{F}}$ es un morfismo inyectivo. De esto, tenemos que

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{i_{\mathcal{F}}} C_{\mathcal{F}}$$

es una sucesión exacta de gavillas sobre X. Ahora, si $\mathcal{F}_1 = \dfrac{C_{\mathcal{F}}}{i_{\mathcal{F}}(\mathcal{F})}$, entonces la siguiente sucesión es exacta:

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{i_{\mathcal{F}}} C_{\mathcal{F}} \xrightarrow{\eta_1} \mathcal{F}_1 \longrightarrow 0,$$

De manera analoga, se sigue que la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_1 \xrightarrow{i_{\mathcal{F}_1}} C_{\mathcal{F}_1} \xrightarrow{\eta_2} \mathcal{F}_2 \longrightarrow 0,$$

es exacta, donde $\mathcal{F}_2 = \dfrac{C_{\mathcal{F}_1}}{i_{\mathcal{F}_1}(\mathcal{F}_1)}$, y así, tenemos la exactitud en la siguiente sucesión:

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{i_{\mathcal{F}}} C_{\mathcal{F}} \xrightarrow{i_{\mathcal{F}_1}\circ\eta_1} C_{\mathcal{F}_1},$$

Siguiendo este proceso, obtenemos que

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{i_{\mathcal{F}}} C_{\mathcal{F}} \xrightarrow{\delta^0} C_{\mathcal{F}_1} \xrightarrow{\delta^1} \cdots \xrightarrow{\delta^{n-1}} C_{\mathcal{F}_n} \xrightarrow{\delta^n} \cdots, \tag{2.1.1}$$

es una sucesión exacta, donde $\mathcal{F}_n = \dfrac{C_{\mathcal{F}_{n-1}}}{i_{\mathcal{F}_{n-1}}(\mathcal{F}_{n-1})}$ y $\delta^n = i_{\mathcal{F}_{n+1}} \circ \eta_{n+1}$ para $n \in \mathbb{N}$, donde $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$. De esto, la sucesión exacta (2.1.1) es una resolución fofa y será llamada la *resolución fofa canónica* de $\mathcal{F}$.

2.2. Grupos de Cohomología

Aquí definiremos los grupos de cohomología de una gavilla, y mostraremos que el grupo cero de cohomología de una gavilla siempre coincide con las secciones globales de dicha gavilla (ver Lema 2.2.4).

Sea $\mathcal{F}$ una gavilla sobre un espacio topológico X. Consideremos una resolución fofa de $\mathcal{F}$ como sigue:

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{i} \mathcal{G}^0 \xrightarrow{\delta^0} \mathcal{G}^1 \xrightarrow{\delta^1} \mathcal{G}^2 \xrightarrow{\delta^2} \cdots \tag{2.2.1}$$

Por consiguiente, sabemos que $\delta^{n+1} \circ \delta^n = 0_{\mathcal{G}^{n+2}}$ para cada $n \in \mathbb{Z}_+$. Así que, $\delta_X^{n+1} \circ \delta_X^n = 0_{\mathcal{G}^{n+2}(X)}$ para todo $n \in \mathbb{Z}_+$.

Definición 2.2.1. Con notaciones anteriores, el $n-$ésimo grupo de cohomología de $\mathcal{F}$ es:

$$H^n(X, \mathcal{F}) = \frac{ker(\delta_X^n)}{im(\delta_X^{n-1})},$$

para cada $n \in \mathbb{Z}_+$, donde δ_X^{-1} es la aplicación nula.

El siguiente resultado nos muestra que los grupos de cohomología pueden ser calculados para cualquier resolución fofa.

Teorema 2.2.2. *Sea $\mathcal{F}$ una gavilla sobre un espacio topológico X. Los grupos de cohomología de $\mathcal{F}$ son únicamente determinados por $\mathcal{F}$ y X, independientemente de la elección de la resolución fofa de $\mathcal{F}$.*

Demostración. Ver [31, Teorema 6.8, p. 120]. ❑

El siguiente ejemplo muestra los grupos de cohomología de una gavilla rascacielos.

Ejemplo 2.2.3 (Grupos de cohomología de la gavilla rascacielos)**.** Con las notaciones del Ejemplo 2.1.2, consideremos una resolución fofa de $G_X^{(p)}$ de la siguiente manera:

$$0 \longrightarrow G_X^{(p)} \xrightarrow{i} G_X^{(p)} \xrightarrow{\delta^0} 0 \xrightarrow{\delta^1} 0 \longrightarrow \cdots,$$

Se sigue que,

$$0 \longrightarrow G_X^{(p)}(X) \xrightarrow{i_X} G_X^{(p)}(X) \xrightarrow{\delta_X^0} 0 \xrightarrow{\delta_X^1} 0 \longrightarrow \cdots,$$

es una sucesión exacta, pues $G_X^{(p)}$ es una gavilla fofa. Más aún, tenemos que

$$H^0(X, G_X^{(p)}) = ker(\delta_X^0) = G.$$

Ahora, para $n \in \mathbb{N}$ se satisface que $H^n(X, G_X^{(p)}) = \{0\}$, pues $ker(\delta_X^n) = im(\delta_X^{n-1})$.

En el próximo resultado determinaremos el grupo cero de cohomología de cualquier gavilla.

Lema 2.2.4. *Si $\mathcal{F}$ es una gavilla sobre un espacio topológico X, entonces el grupo cero de cohomología $H^0(X, \mathcal{F})$ de $\mathcal{F}$ es isomorfo a las secciones globales de $\mathcal{F}$.*

Demostración. Observemos que $H^0(X, \mathcal{F}) = ker(\delta_X^0)$, y de la resolución fofa (2.2.1) tenemos que $0 \longrightarrow \mathcal{F}(X) \xrightarrow{i_X} \mathcal{G}^0(X) \xrightarrow{\delta_X^0} \mathcal{G}^1(X)$ es una sucesión exacta de grupos abelianos. Por tanto, $im(i_X)$ es igual a $ker(\delta_X^0)$, y así podemos considerar la siguiente asignación:

$$\begin{array}{rccc} \phi: & H^0(X, \mathcal{F}) & \longrightarrow & \mathcal{F}(X) \\ & s & \longmapsto & t, \end{array}$$

donde $i_X(t) = s$. Luego, debido a que i_X es inyectivo, y a que $im(i_X) = ker(\delta_X^0)$, se sigue que ϕ es un homomorfismo de grupos biyectivo. Finalmente, $H^0(X, \mathcal{F}) \cong \mathcal{F}(X)$. ❏

Observación 2.2.5. Aquí hemos definido los grupos de cohomología de una gavilla de grupos abelianos sobre un espacio topológico, y por construcción estos son grupos abelianos. Ahora bien, si tomamos una gavilla de $\mathcal{O}_X-$módulos coherente sobre un esquema proyectivo $(X, \mathcal{O}_X)$ definido sobre un campo k, entonces los grupos de cohomología tienen naturalmente una estructura de $k-$espacio vectorial de dimensión finita sobre k (ver [17, Teorema 5.2 (a), p.228]).

El siguiente resultado es de gran interés, ya que nos dice en cierto sentido que las dimensiones de los grupos de cohomología sobre un campo y sobre su cerradura algebraica son iguales:

Proposición 2.2.6. *Sea $f : X \longrightarrow Spec(k)$ un morfismo separado y casicompacto, donde k es un campo. Sea $X_{\bar{k}} = X \times_{Spec(k)} Spec(\bar{k})$ y sea π_1 el morfismo proyección (ver Teorema 1.1.25). Si $\bar{k}$ es una $k-$álgebra plana, $\mathcal{F}$ es una gavilla casicoherente sobre X y si $m \in \mathbb{Z}_+$, entonces*

$$H^m(X, \mathcal{F}) \otimes_k \bar{k} \cong H^m(X_{\bar{k}}, \pi_1^*(\mathcal{F})),$$

donde $\bar{k}$ denota la cerradura algebraica de k. En particular, la dimensión de $H^m(X, \mathcal{F})$ sobre k es igual a la dimensión de $H^m(X_{\bar{k}}, \pi_1^*(\mathcal{F}))$ sobre $\bar{k}$ para todo $m \in \mathbb{Z}_+$.

Demostración. Ver [24, Corolario 2.27, p. 189]. ❏

2.3. El Teorema de Riemann-Roch

En está sección enunciaremos el teorema de Riemann-Roch para superficies proyectivas lisas definidas sobre cualquier campo. En primer lugar tenemos la siguiente definición:

Definición 2.3.1. Sea Z una variedad proyectiva lisa definida sobre un campo k, y sea $\mathcal{F}$ una gavilla de $\mathcal{O}_Z-$módulos coherente. La característica de Euler-Poincaré de $\mathcal{F}$ es:

$$\mathcal{X}(\mathcal{F}) = \sum_{i\in\mathbb{Z}_+}(-1)^i dim_k(H^i(Z,\mathcal{F})).$$

Para enunciar el teorema de Riemann-Roch, necesitaremos el concepto del grupo de Néron-Severi de una superficie proyectiva lisa X y la noción del número de intersección entre divisores sobre X, los cuales están definidos en la Sección 4.2 del Capítulo 4.

Teorema 2.3.2. *Sea X una superficie proyectiva lisa definida sobre un campo k. Si D es un divisor sobre X, entonces*

$$h^0(X,\mathcal{O}_X(D)) - h^1(X,\mathcal{O}_X(D)) + h^2(X,\mathcal{O}_X(D)) = \mathcal{X}(\mathcal{O}_X) + \frac{1}{2}\left(\mathcal{O}_X(D)^2 - \mathcal{K}_X.\mathcal{O}_X(D)\right),$$

donde $\mathcal{K}_X$ es la clase de un divisor canónico en el grupo de Néron-Severi de X, y $h^j(X,\mathcal{O}_X(D))$ es igual a $dim_k(H^j(X,\mathcal{O}_X(D)))$ para cada $j \in \{0,1,2\}$.

Demostración. Ver el Teorema 1.6 de [17], página 362. ▭

En el caso cuando tenemos una superficie proyectiva lisa racional definida sobre un campo el teorema de Riemann-Roch es el siguiente:

Teorema 2.3.3. *Sea X una superficie proyectiva lisa racional definida sobre un campo. Si D es un divisor sobre X, entonces*

$$h^0(X,\mathcal{O}_X(D)) - h^1(X,\mathcal{O}_X(D)) + h^2(X,\mathcal{O}_X(D)) = 1 + \frac{1}{2}\left(\mathcal{O}_X(D)^2 - \mathcal{K}_X.\mathcal{O}_X(D)\right).$$

Demostración. La demostración se sigue del Teorema 2.3.2 y del hecho de que $\mathcal{X}(\mathcal{O}_X) = 1$, pues $h^0(X,\mathcal{O}_X) = 1$, y $h^1(X,\mathcal{O}_X) = h^2(X,\mathcal{O}_X) = 0$. ▭

Capítulo 3

Explosiones y Diagramas Decorados de Enriques

El propósito de este capítulo es de introducir de manera breve el concepto de una explosión de un esquema con respecto a un subesquema cerrado, asimismo, revisaremos algunas de sus propiedades clásicas. Además, el concepto de los diagramas decorados de Enriques será exhibido en la segunda sección de este capítulo, dicho concepto permitirá conocer mejor la explosión, para mayor información ver [20]. Ambos conceptos serán utilizados implícitamente en capítulos posteriores.

3.1. Explosiones

Consideremos una gavilla $\mathcal{L}$ de $\mathcal{O}_X-$módulos casicoherente sobre un esquema Noetheriano $(X, \mathcal{O}_X)$, la cual tiene una estructura de una gavilla graduada de $\mathcal{O}_X-$álgebras, con graduación $\bigoplus_{d\in\mathbb{Z}_+} \mathcal{L}_d$, donde $\mathcal{L}_d$ es la parte homogénea de $\mathcal{L}$ de grado d. Además, asumiremos lo siguiente:

1. $\mathcal{L}_0 = \mathcal{O}_X$,
2. $\mathcal{L}_1$ es un $\mathcal{O}_X-$módulo coherente, y
3. $\mathcal{L}$ es localmente generada por $\mathcal{L}_1$ como una $\mathcal{O}_X-$álgebra.

Ahora bien, sea U un abierto afín de X, así, podemos tomar $Proj(\mathcal{L}(U))$ y su morfismo natural $\pi_U : Proj(\mathcal{L}(U)) \to U$. Por consiguiente, si $f \in \mathcal{O}_X(U)$, entonces $Proj(\mathcal{L}(U_f)) \cong \pi_U^{-1}(U_f)$, donde $U_f = Spec(\mathcal{O}_X(U)_f)$, ya que $\mathcal{L}$ es casicoherente. Enseguida, si U y V son abiertos afines de X, se tiene que $\pi_U^{-1}(U \cap V) \cong \pi_V^{-1}(U \cap V)$. De esto, pegando los esquemas $Proj(\mathcal{L}(U))$ obtenemos un esquema $Proj(\mathcal{L})$ junto con un morfismo $\pi : Proj(\mathcal{L}) \to X$ tal que para cada abierto afín U de X, $\pi^{-1}(U) \cong Proj(\mathcal{L}(U))$. Con esta construcción tenemos el siguiente concepto:

Definición 3.1.1. Sean $(X, \mathcal{O}_X)$ un esquema Noetheriano e $\mathcal{I}$ una gavilla coherente de ideales sobre X. Consideremos la gavilla $\mathcal{L}_\mathcal{I} = \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}_+} \mathcal{I}^d$, donde $\mathcal{I}^d$ es la $d-$ésima potencia del ideal $\mathcal{I}$, y sea $\mathcal{I}^0 = \mathcal{O}_X$. La explosión de X con respecto a la gavilla coherente de ideales $\mathcal{I}$ es el esquema $Proj(\mathcal{L}_\mathcal{I})$ y será denotada por $Bl(X)$. Si Y es el subesquema cerrado de X correspondiente a $\mathcal{I}$, entonces el esquema $Proj(\mathcal{L}_\mathcal{I})$ será llamado la explosión de X a lo largo de Y, y será denotado por $Bl_Y(X)$.

En algunas ocasiones, si no causa confusión, diremos que la explosión de un esquema Noetheriano X es el morfismo $\pi : Bl(X) \longrightarrow X$.

Ejemplo 3.1.2 (La explosión del espacio afín $\mathbb{A}^n_k$ de dimensión n sobre un campo k)**.** La explosión del espacio afín $\mathbb{A}^n_k$ de dimensión n sobre un campo k en el origen está constituida por un espacio proyectivo de dimensión $n-1$ y de una copia de $\mathbb{A}^n_k \setminus \{0_{\mathbb{A}^n_k}\}$.

Ahora bien, si $f : X \to Y$ es un morfismo de esquemas y si $\mathcal{I}$ es una gavilla de ideales de $\mathcal{O}_Y$, entonces $f^{-1}(\mathcal{I})$ es una gavilla de ideales en la gavilla de anillos $f^{-1}(\mathcal{O}_Y)$ sobre X. Además, existe un morfismo natural $\varphi : f^{-1}(\mathcal{O}_Y) \to \mathcal{O}_X$ de gavillas de anillos sobre X. Esto nos sugiere la siguiente definición:

Definición 3.1.3. Con notaciones anteriores, la gavilla ideal generada por la imagen de $f^{-1}(\mathcal{I})$ bajo φ es la gavilla de ideales imagen inversa de $\mathcal{I}$ sobre X, y será denotada por $f^{-1}(\mathcal{I}) \cdot \mathcal{O}_X$.

En el siguiente resultado, se muestran algunas propiedades de una gavilla de ideales imagen inversa para el caso de la explosión $\pi : Bl(X) \longrightarrow X$ de un esquema Noetheriano con respecto a una gavilla coherente de ideales $\mathcal{I}$ sobre X.

Proposición 3.1.4. *Sea X un esquema Noetheriano, y sean $\mathcal{I}$ una gavilla coherente de ideales y $\pi : Bl(X) \to X$ la explosión de X con respecto a $\mathcal{I}$. Se satisface que:*

1. *La gavilla de ideales imagen inversa $\pi^{-1}(\mathcal{I}) \cdot \mathcal{O}_{Bl(X)}$ es una gavilla invertible sobre $Bl(X)$.*
2. *Si Y es el subesquema cerrado correspondiente a $\mathcal{I}$ y si $U = X \setminus Y$, entonces el morfismo $\pi|_{\pi^{-1}(U)} : \pi^{-1}(U) \to U$ es un isomorfismo.*

Demostración. Ver [17, Propisición 7.13, p.164]. ❑

Enseguida tenemos la propiedad universal de la explosión:

Proposición 3.1.5 (Propiedad Universal de la Explosión)**.** *Sean X un esquema Noetheriano, $\mathcal{I}$ una gavilla de ideales coherente, y $\pi : Bl(X) \to X$ la explosión con respecto a $\mathcal{I}$. Si $f : Z \to X$ es cualquier morfismo tal que $f^{-1}(\mathcal{I}) \cdot \mathcal{O}_Z$ es una gavilla invertible de ideales sobre Z, entonces existe un único morfismo $g : Z \to Bl(X)$ factorizando f.*

$$\begin{array}{ccc} Z & \overset{g}{\dashrightarrow} & Bl(X) \\ & {\scriptstyle f}\searrow & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ & & X \end{array}$$

DEMOSTRACIÓN. Ver [17, Proposición 7.14, p.164]. ☐

COROLARIO 3.1.6. *Sean $f : Y \to X$ un morfismo de esquemas Noetherianos, e $\mathcal{I}$ una gavilla coherente de ideales sobre X. Si $Bl(X)$ es la explosión de X con respecto a $\mathcal{I}$ y si $Bl(Y)$ es la explosión de Y con respecto a la gavilla de ideales imagen inversa $f^{-1}(\mathcal{I}) \cdot \mathcal{O}_Y$ sobre Y, entonces existe un único morfismo $\tilde{f} : Bl(Y) \to Bl(X)$ tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{array}{ccc} Bl(Y) & \overset{\tilde{f}}{\dashrightarrow} & Bl(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

Más aún, si f es una inmersión cerrada, entonces $\tilde{f}$ también lo es.

DEMOSTRACIÓN. Ver [17, Corolario 7.15, p. 165]. ☐

DEFINICIÓN 3.1.7. Con la notaciones del Corolario 3.1.6, si Y es un subesquema cerrado de X, el subesquema cerrado $Bl(Y)$ de $Bl(X)$ será llamado la transformada estricta de Y bajo la explosión $\pi : Bl(X) \longrightarrow X$.

PROPOSICIÓN 3.1.8. *Sea X una variedad sobre un campo k y sea $\mathcal{I}$ una gavilla coherente de ideales de $\mathcal{O}_X$ no trivial. Si $\pi : Bl(X) \longrightarrow X$ es la explosión de X con respecto a $\mathcal{I}$, entonces:*

1. *$Bl(X)$ es también una variedad sobre k.*
2. *π es un morfismo birracional, propio y sobreyectivo.*
3. *Si X es casiproyectiva (respectivamente, proyectiva) sobre k, entonces $Bl(X)$ también lo es, y π es un morfismo proyectivo.*

DEMOSTRACIÓN. Ver [17, Proposición 7.16, p. 166]. ☐

3.2. Diagramas Decorados de Enriques

Sea X una superficie proyectiva no singular definida sobre un campo algebraicamente cerrado de cualquier característica y sea η un punto de X.

DEFINICIÓN 3.2.1. La *primera vecindad infinitesimal* de η es el soporte del divisor excepcional de η en la explosión $Bl_\eta(X)$ de X en η.

Definición 3.2.2. Una constelación C con origen η de X es una unión finita de conjuntos $C = \bigcup_{i=0}^{n} C_i$, para algún $n \in \mathbb{Z}_+$, donde $C_0 = \{\eta\}$, C_1 es un subconjunto finito de la primera vecindad infinitesimal de η, C_2 es un subconjunto finito de las primeras vecindades infinitesimales de puntos de C_1, y de una manera recursiva, C_{i+1} es un subconjunto finito de las primeras vecindades infinitesimales de puntos de C_i para cada $i \in \{3, ..., n-1\}$. En particular, si $|C_i| = 1$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, la constelación C se llama cadena con origen η.

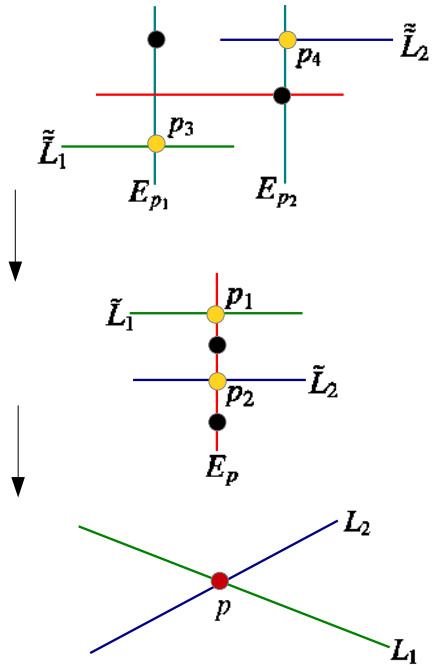

Figura 1. Los puntos amarillos, negros y el punto rojo forman una constelación con origen p de $\mathbb{P}^2_k$.

Si C es una constelación con origen η de X y si D es un divisor efectivo no nulo sobre X, entonces la multiplicidad de D en un punto de C es igual a la multiplicidad de la transformada estricta de D (correspondiente) en dicho punto.

Definición 3.2.3. Con la notación anterior, una $D-$constelación con origen η de X es una constelación C con origen η de X tal que la multiplicidad de D en cada punto de C es diferente de cero.

Ejemplo 3.2.4. Los puntos amarillos y el punto rojo de la Figura 1 forman una $(L_1+L_2)-$constelación con origen p de $\mathbb{P}^2_k$, sin embargo, observemos que los puntos negros y el punto rojo no constituyen una $(L_1 + L_2)-$constelación con origen p.

En la siguiente figura mostramos un ejemplo de una $L-$constelación:

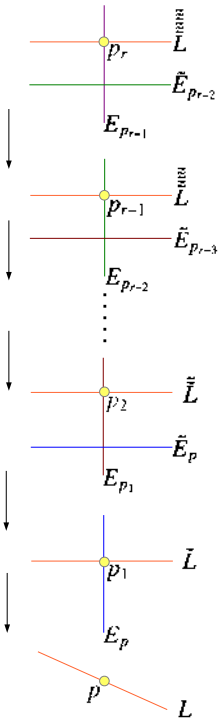

FIGURA 2. Los puntos amarillos forman una $L-$constelación con origen p de $\mathbb{P}^2_k$.

DEFINICIÓN 3.2.5. Sea C una $D-$constelación con origen η. El diagrama decorado de Enriques asociado a C es el árbol, es decir, es una gráfica acíclica, con raíz η, cuyos vértices son los puntos de C y cuyas aristas están determinadas como sigue: Sean p y q elementos de C,

1. Si p está en la primera vecindad infinitesimal de q, entonces hay una arista que conecta a q con p. Esta arista es un segmento de recta que une a p con q etiquetada con la letra D.
2. Si p no está en la primera vecindad infinitesimal de q, entonces p y q no se conectan.

EJEMPLO 3.2.6 (El diagrama decorado de Enriques de una $L-$constelación con origen un punto del plano proyectivo)**.** Sea L una recta de $\mathbb{P}^2_k$ que pasa a través de un punto p de $\mathbb{P}^2_k$. El siguiente dibujo muestra el diagrama decorado de Enriques de una $L-$constelación con origen de p:

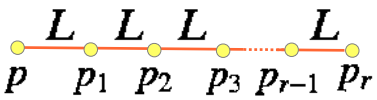

FIGURA 3. Diagrama decorado de Enriques de la $L-$constelación de la Figura 2.

EJEMPLO 3.2.7 (El diagrama decorado de Enriques de una $D-$constelación con origen un punto del plano proyectivo, donde D no es curva entera sobre el plano proyectivo)**.** Si L_1 y L_2 son dos rectas de $\mathbb{P}^2_k$ y si p es el punto de intersección de L_1 y L_2, entonces el siguiente dibujo muestra el diagrama decorado de Enriques de una $(L_1 + L_2)-$constelación con origen p:

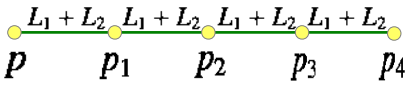

FIGURA 4. Diagrama decorado de Enriques de la $(L_1 + L_2)-$constelación de la Figura 1.

Capítulo 4

Forma de Intersección

El objetivo primordial de este capítulo es de introducir las *superficies de Hirzebruch* y los monoides efectivos y *Nef* de una superficie proyectiva lisa definida sobre un campo. Estas herrramientas serán utilizadas en la construcción de códigos algebraico geométricos con muy buenos parámetros en el capítulo posterior.

4.1. Divisores de Weil

En lo concerniente a esta sección, X será un esquema Noetheriano, entero, separado y regular en codimensión uno. Para dicho esquema vamos a presentar una clase de subesquemas cerrados, conocidos como *divisores primos* (ver Definición 4.1.1), y a partir de estos definiremos los *divisores de Weil* sobre X (ver Definición 4.1.3), estos últimos formarán un conjunto que tendrá una estructura de $\mathbb{Z}-$módulo, este módulo será denotado por $Div(X)$. Además, a cada función racional no nula sobre X se le asignará un divisor de Weil (ver Definición 4.1.7).

Definición 4.1.1. Un divisor primo sobre X es un subesquema cerrado Γ de X que satisface lo siguiente:

1. $(\Gamma, \mathcal{O}_X|_\Gamma)$ es un esquema entero, y
2. $dim(\Gamma) = dim(X) - 1$.

Ejemplo 4.1.2. Un divisor primo sobre $\mathbb{P}^2_k$ es nada más que una curva entera sobre $\mathbb{P}^2_k$.

Una vez definidos los divisores primos se presenta el siguiente concepto:

Definición 4.1.3. Un divisor de Weil sobre X es un elemento del $\mathbb{Z}-$módulo libre generado por los divisores primos sobre X. Denotaremos dicho módulo por $Div(X)$.

En ocasiones, al referirnos a un divisor de Weil sobre X solo diremos que es un divisor sobre X.

Ejemplo 4.1.4. Si L y C son una recta y una cónica entera sobre $\mathbb{P}^2_k$, respectivamente, entonces $3L - 7C$ es un divisor de Weil sobre $\mathbb{P}^2_k$.

Ahora fijemos el conjunto $\Omega = \{\Gamma \mid \Gamma \text{ es un divisor primo sobre } X\}$. Observemos que para cada divisor de Weil D sobre X existen $\ell \in \mathbb{N}$, $n_1, n_2, \ldots, n_\ell \in \mathbb{Z}$ y $\Gamma_i \in \Omega$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, \ell\}$ tales que $D = n_1\Gamma_1 + n_2\Gamma_2 + \cdots + n_\ell\Gamma_\ell$. Con esta descripción tenemos la siguiente definición:

Definición 4.1.5. Con las notaciones anteriores, un divisor D sobre X es efectivo si $n_i \in \mathbb{Z}_+$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, \ell\}$.

Ejemplo 4.1.6 (Divisor efectivo)**.** Con las notaciones del Ejemplo 4.1.4, el divisor $5L + 3C$ es un divisor efectivo sobre $\mathbb{P}^2_k$.

Enseguida, si $\Gamma \in \Omega$ y si p es el punto genérico de Γ, entonces $\mathcal{O}_{X,p}$ es un anillo de valoración discreta. De esta forma, podemos considerar una valoración discreta ν_Γ asociada a Γ. De esto tenemos la siguiente definición:

Definición 4.1.7. Sea f un elemento del campo de funciones racionales sobre X no nulo. El divisor asociado a f es:

$$(f) := \sum_{\Gamma \in \Omega} \nu_\Gamma(f)\Gamma.$$

Ejemplo 4.1.8. Consideremos la función racional $\dfrac{x_1}{x_2}$ sobre $\mathbb{P}^2_k$. El divisor asociado a $\dfrac{x_1}{x_2}$ es igual a:

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = V(x_1) - V(x_2),$$

donde $V(p(x_0, x_1, x_2))$ es el conjunto de ceros del polinomio homogéneo $p(x_0, x_1, x_2)$ de $k[x_0, x_1, x_2]$ con x_0, x_1 y x_2 variables sobre k.

El siguiente resultado nos dice que un divisor asociado a un elemento del campo de funciones racionales no nulo es un divisor de Weil.

Lema 4.1.9. *Sea f un elemento del campo de funciones racionales sobre X no nulo. Se sigue que $\nu_\Gamma(f) = 0$, para casi todo divisor primo sobre X.*

Demostración. Ver [17, Lema 6.1, p. 131]. ❑

Para concluir la sección presentaremos un conjunto de divisores sobre X que serán de interés más adelante.

Definición 4.1.10. Un divisor D sobre X es un divisor principal si existe una función racional f sobre X no nula tal que $D = (f)$.

4.2. Forma de Intersección

A lo largo de esta sección, X será una superficie proyectiva lisa definida sobre un campo algebraicamente cerrado k. En lo siguiente definiremos el *número de intersección* entre divisores sobre X (ver Definición 4.2.1). A partir de esto, daremos una relación entre divisores (ver Definición 4.2.2), lo que dará lugar a unos conjuntos especiales asociados a X, estos son el grupo de *Néron-Severi*, el *monoide efectivo* y el *monoide Nef* (ver Definiciones 4.2.9, 4.2.16 y 4.2.22).

Definición 4.2.1. Sean C y D divisores sobre X, y sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ las gavillas invertibles correspondientes (ver Observación 1.3.4). El número de intersección de C y D es:

$$C.D = \chi(\mathcal{O}_X) - \chi(\mathcal{F}^{-1}) - \chi(\mathcal{G}^{-1}) + \chi(\mathcal{F}^{-1} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}^{-1}),$$

donde $\chi(\mathcal{H})$ es la característica de Euler-Poincaré de una gavilla invertible $\mathcal{H}$. Más aún, $D.D$ es el número de autointersección de D y es denotado por D^2.

Ahora bien, si C_1, C_2 y D son divisores sobre X, entonces se satisfacen los siguientes enunciados (ver [17, Teorema 1.1, p. 357]):

1. $C_1.D = D.C_1$.
2. $(C_1 + C_2).D = C_1.D + C_2.D$.
3. Si C_1 es linealmente equivalente a C_2 (ver Definición 6.1.1), entonces $C_1.D = C_2.D$.

Una vez definido el número de intersección entre divisores podemos definir una relación entre ellos como sigue:

Definición 4.2.2. Sean D y E divisores sobre X. D es numéricamente equivalente a E si $D.\Gamma = E.\Gamma$ para todo divisor Γ sobre X, y denotemos este hecho por $D \equiv E$.

En la siguiente observación tenemos que si dos curvas enteras sobre $\mathbb{P}^2_k$ son numéricamente equivalentes, entonces sus grados son iguales:

Observación 4.2.3. Sean C_1 y C_2 curvas enteras sobre $\mathbb{P}^2_k$. Si $C_1 \equiv C_2$, entonces $deg(C_1) = deg(C_2)$, donde $deg(C)$ denota el grado de una curva C sobre $\mathbb{P}^2_k$. En efecto, sea L una recta sobre $\mathbb{P}^2_k$ de tal manera que $C_1 \neq L$ y $C_2 \neq L$. Por tanto, $C_1.L = C_2.L$, y aplicando el Teorema de Bézout (ver [17, Corolario 7.8, p. 54]) se sigue que $deg(C_1) = deg(C_2)$.

Ahora determinemos el número de intersección de dos curvas enteras sobre $\mathbb{P}^2_k$.

Lema 4.2.4. *Si C_1 y C_2 son curvas enteras sobre $\mathbb{P}^2_k$, entonces $C_1.C_2 = deg(C_1)deg(C_2)$.*

Demostración. Supongamos que $C_1 \neq C_2$, así que por el Teorema de Bézout (ver [17, Corolario 7.8, p. 54]) tenemos que $C_1.C_2 = deg(C_1)deg(C_2)$. Por otro lado, si $C_1 = C_2$, consideremos una curva entera D sobre $\mathbb{P}^2_k$ distinta a C_1 tal que $C_1 \equiv D$, de esto $C_1.C_2 = D.C_2$, y del caso anterior se puede concluir que $D.C_2 = deg(D)deg(C_2)$. Finalmente, de la Observación 4.2.3 se sigue que $C_1.C_2 = deg(C_1)deg(C_2)$. ❏

La siguiente definición nos brinda otra clase de divisores:

Definición 4.2.5. Sea D un divisor sobre X. D es numéricamente efectivo si $D.C \geq 0$ para cada curva entera C sobre X.

De ahora en adelante, si D es un divisor numéricamente efectivo sobre X, diremos que es *nef*. En los siguientes ejemplos mostraremos la existencia de divisores *nef* y que también existe un divisor que no es *nef*.

Ejemplo 4.2.6 (Un divisor que es *nef*)**.** Sean L_1 y L_2 dos rectas distintas sobre $\mathbb{P}^2_k$. El divisor $L_1 - L_2$ es *nef*. En efecto, sea C una curva entera sobre $\mathbb{P}^2_k$, luego, $(L_1 - L_2).C = L_1.C - L_2.C$. Del Lema 4.2.4, tenemos que $(L_1 - L_2).C = 0$, y por lo tanto, $L_1 - L_2$ es *nef*.

Ejemplo 4.2.7 (Un divisor que no es *nef*)**.** Sean L y D una recta y una cónica entera sobre $\mathbb{P}^2_k$, respectivamente. El divisor $L - D$ no es *nef* pues

$$(L - D).L = L.L - D.L = -1.$$

El siguiente resultado nos muestra una caracterización de los divisores *nef*.

Proposición 4.2.8. *Sea $D \in Div(X)$. El divisor D es nef si y solo si $D.C \geq 0$ para cualquier divisor efectivo C sobre X.*

Demostración. Supongamos que D es *nef*. Sea C un divisor efectivo sobre X, luego, C es de la forma $C = n_1\Gamma_1 + n_2\Gamma_2 + \cdots + n_r\Gamma_r$ para cierto $r \in \mathbb{N}$, donde n_i es un entero no negativo y Γ_i es una curva entera sobre X, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$. De esto, $D.C = n_1D.\Gamma_1 + n_2D.\Gamma_2 + \cdots + n_rD.\Gamma_r$, además, $D.\Gamma_i \geq 0$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, pues D es *nef*. Así, $D.C \geq 0$. Recíprocamente, sea E una curva entera sobre X, en particular E es un divisor efectivo, esto implica que $D.E \geq 0$, y por lo tanto, D es *nef*. ❏

Por otro lado, la relación $\equiv$ de la Defincón 4.2.2 es una relación de equivalencia en $Div(X)$ y será llamada la equivalencia numérica. Esta relación es compatible con la estructura algebraica de

$Div(X)$, así, podemos construir el grupo cociente $Div(X)$ módulo la equivalencia numérica, lo cual da paso a la siguiente definición:

Definición 4.2.9. El grupo de Néron-Severi de X es el grupo cociente $Div(X)$ módulo la equivalencia numérica, y es denotado por $NS(X)$.

A continuación, daremos dos ejemplos donde calculamos el grupo de Néron-Severi de ciertas superficies.

Ejemplo 4.2.10 (El grupo de Néron-Severi de $\mathbb{P}^2_k$)**.** El grupo de Néron-Severi del plano proyectivo $\mathbb{P}^2_k$ sobre k es igual a $\mathbb{Z}\mathcal{E}_0$, donde $\mathcal{E}_0$ es la clase de una recta sobre $\mathbb{P}^2_k$ módulo la equivalencia numérica. Esto es debido a que $\mathcal{E}_0$ es un elemento de $NS(X)$, y por otro lado, si Γ es la clase de una curva entera sobre $\mathbb{P}^2_k$ módulo la equivalencia numérica, entonces Γ es igual a $d\mathcal{E}_0$ donde d es el grado de la curva entera.

Ejemplo 4.2.11 (El grupo de Néron-Severi de una superficie racional básica)**.** Una superficie racional básica Y es la explosión del plano proyectivo $\mathbb{P}^2_k$ en r puntos, con r un entero natural. Se tiene que $NS(Y)$ es un $\mathbb{Z}-$módulo libre de rango $r+1$, pues es una consecuencia del resultado de [17, Proposición 3.2, p. 386] y del hecho que la equivalencia numérica sobre Y coincide con la equivalencia lineal.

Enseguida definamos el número de intersección entre los elementos del grupo de Néron-Severi de X.

Definición 4.2.12. Sean $\mathcal{D}$ y $\mathcal{E}$ elementos de $NS(X)$, el número de intersección de $\mathcal{D}$ y $\mathcal{E}$ es igual a $D.E$, donde D y E son ciertos representantes de $\mathcal{D}$ y $\mathcal{E}$, respectivamente, y será denotado por $\mathcal{D}.\mathcal{E}$.

Ahora definamos un elemento efectivo y un elemento *nef* del grupo de Néron-Severi de X.

Definición 4.2.13. Un elemento γ de $NS(X)$ es efectivo (respectivamente, *nef*) si existe un divisor efectivo Γ sobre X (respectivamente, *nef*) tal que γ es la clase de Γ en $NS(X)$.

En los siguientes ejemplos mostramos algunos elementos del grupo de Néron-Severi de ciertas superficies que son *nef*.

Ejemplo 4.2.14 (Un divisor *nef* de $NS(\mathbb{P}^2_k)$)**.** La clase de una recta de $\mathbb{P}^2_k$ es *nef*.

Ejemplo 4.2.15 (Divisores *nef* de $NS(Bl_p(\mathbb{P}^2_k))$)**.** Tenemos que $\mathcal{E}_0$ y $\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1$ son *nef*, pues son las clases de la transformada estricta de una recta de $\mathbb{P}^2_k$ que no pasa a través de p y de la trasformada estricta de una recta de $\mathbb{P}^2_k$ que pasa a través de p, respectivamente.

Del hecho de que el conjunto de todas las clases de divisores efectivos sobre X de $NS(X)$ tiene una estructura de un monoide, se tiene el siguiente concepto:

Definición 4.2.16. El monoide efectivo de X es el conjunto de todas las clases de divisores efectivos sobre X, y se denotará por $M(X)$. Más aún, un elemento de $M(X)$ es una clase efectiva de $NS(X)$.

Ejemplo 4.2.17 (El monoide efectivo de $\mathbb{P}^2_k$)**.** Con las notaciones del Ejemplo 4.2.10, tenemos que $M(\mathbb{P}^2_k) = \mathbb{Z}_+\mathcal{E}_0$.

En los siguientes ejemplos vamos a determinar el monoide efectivo de la explosión del plano proyectivo en un número finito de puntos. Antes de esto, fijemos algunas notaciones. El grupo de Néron-Severi de la explosión del plano proyectivo en r puntos es igual a $\mathbb{Z}\mathcal{E}_0 - \sum_{i=1}^r \mathbb{Z}\mathcal{E}_i$, donde $\mathcal{E}_0$ es la clase de la transformada estricta de una recta L en $\mathbb{P}^2_k$ que no pasa a través de los r puntos y $\mathcal{E}_j$ es la clase del divisor excepcional del $j-$ésimo punto para cada $j \in \{1, 2, \ldots, r\}$ con $\mathcal{E}_0^2 = 1$, $\mathcal{E}_j^2 = -1$ para todo $j \in \{1, 2, \ldots, r\}$ y $\mathcal{E}_\ell.\mathcal{E}_j = 0$ para ℓ y j elementos de $\{0, 1, 2, \ldots, r\}$ con $\ell \neq j$.

Ejemplo 4.2.18 (El monoide efectivo de la explosión del plano proyectivo en un número finito de puntos colineales y ordinarios)**.** Con notaciones anteriores. Si Y es la explosión del plano proyectivo en r puntos colineales y ordinarios con $r \in \mathbb{N}$, entonces

$$M(Y) = \mathbb{Z}_+\left(\mathcal{E}_0 - \sum_{i=1}^r \mathcal{E}_i\right) + \sum_{i=1}^r \mathbb{Z}_+\mathcal{E}_i.$$

En efecto, es evidente que $\mathcal{E}_0 - \sum_{i=1}^r \mathcal{E}_i$ y $\mathcal{E}_j$ son clases efectivas para todo $j \in \{1, 2, \ldots, r\}$. Así, concluimos que $\mathbb{Z}_+(\mathcal{E}_0 - \sum_{i=1}^r \mathcal{E}_i) + \sum_{i=1}^r \mathbb{Z}_+\mathcal{E}_i \subseteq M(Y)$. Por otro lado, sea z un elemento de $M(Y)$, de esto, existen enteros a_j para cada $j \in \{0, 1, \ldots, r\}$ tal que $z = a_0\mathcal{E}_0 - \sum_{i=1}^r a_i\mathcal{E}_i$. Luego, tenemos que $z = a_0(\mathcal{E}_0 - \sum_{i=1}^r \mathcal{E}_i) + \sum_{i=1}^r (a_0 - a_i)\mathcal{E}_i$. Solo falta mostrar que a_0 y $a_0 - a_j$ son enteros no negativos para cada $j \in \{1, 2, \ldots, r\}$. Puesto que $\mathcal{E}_0$ y $\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_j$ son *nef* con $j \in \{1, 2, \ldots, r\}$, se sigue que $z.\mathcal{E}_0 \geq 0$ y $z.(\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_j) \geq 0$ para cualquier $j \in \{1, 2, \ldots, r\}$, y por lo tanto, a_0 y $a_0 - a_j$ son enteros no negativos para cada $j \in \{1, 2, \ldots, r\}$. En definitiva, $M(Y) \subseteq \mathbb{Z}_+(\mathcal{E}_0 - \sum_{i=1}^r \mathcal{E}_i) + \sum_{i=1}^r \mathbb{Z}_+\mathcal{E}_i$.

Ejemplo 4.2.19 (El monoide efectivo de la explosión del plano proyectivo en dos puntos donde uno es infinitamente cercano al otro)**.** Sea Y la explosión del plano proyectivo en los puntos p_1 y p_2, donde p_2 es infinitamente cercano al punto ordinario p_1. Se tiene que,

$$M(Y) = \mathbb{Z}_+(\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2) + \mathbb{Z}_+(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2) + \mathbb{Z}_+\mathcal{E}_2.$$

Es claro que, $\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2$, $\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2$ y $\mathcal{E}_2$ son clases efectivas, pues son las clases de la transformada estricta de una recta en $\mathbb{P}^2_k$ que pasa a través de p_1 y p_2, de la transformada estricta del divisor excepcional de p_1 y del divisor excepcional de p_2, respectivamente. Así,

$$\mathbb{Z}_+(\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2) + \mathbb{Z}_+(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2) + \mathbb{Z}_+\mathcal{E}_2 \subseteq M(Y).$$

Por otro lado, es suficiente mostrar que cada elemento irreducible de $M(Y)$ diferente a $\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2$ es un elemento de $\mathbb{Z}_+(\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2) + \mathbb{Z}_+(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2) + \mathbb{Z}_+\mathcal{E}_2$. Sea z un elemento irreducible de $M(Y)$ distinto a $\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2$, luego, existen enteros a_0, a_1 y a_2 tales que $z = a_0\mathcal{E}_0 - a_1\mathcal{E}_1 - a_2\mathcal{E}_2$. De esto, se sigue que $z = a_0(\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2) + (a_0 - a_1)(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2) + (2a_0 - a_1 - a_2)\mathcal{E}_2$. Los enteros $a_0, (a_0 - a_1)$ y $(2a_0 - a_1 - a_2)$ son no negativos ya que $\mathcal{E}_0$ y $\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1$ son *nef*, y $z.(\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2) \geq 0$. Finalmente, $z \in \mathbb{Z}_+(\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2) + \mathbb{Z}_+(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2) + \mathbb{Z}_+\mathcal{E}_2$.

Ejemplo 4.2.20 (El monoide efectivo de la explosión del plano proyectivo en tres puntos en posición general)**.** Si Y es la explosión del plano proyectivo en 3 puntos en posición general, entonces

$$M(Y) = \mathbb{Z}_+(\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2) + \mathbb{Z}_+(\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3) + \mathbb{Z}_+(\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3) + \mathbb{Z}_+\mathcal{E}_1 + \mathbb{Z}_+\mathcal{E}_2 + \mathbb{Z}_+\mathcal{E}_3.$$

Claramente, $\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3, \mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3, \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ y $\mathcal{E}_3$ son clases efectivas, pues $\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2$ es la clase de la transformada estricta de una recta en $\mathbb{P}^2_k$ que pasa a través de p_1 y p_2, $\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3$ es la clase de la transformada estricta de una recta en $\mathbb{P}^2_k$ que pasa a través de p_1 y p_3, y $\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3$ es la clase de la transformada estricta de una recta en $\mathbb{P}^2_k$ que pasa a través de p_2 y p_3. Por consiguiente,

$$\mathbb{Z}_+(\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2) + \mathbb{Z}_+(\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3) + \mathbb{Z}_+(\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3) + \mathbb{Z}_+\mathcal{E}_1 + \mathbb{Z}_+\mathcal{E}_2 + \mathbb{Z}_+\mathcal{E}_3 \subseteq M(Y).$$

Enseguida, sea z un elemento de $M(Y)$, luego, $z = a_0\mathcal{E}_0 - a_1\mathcal{E}_1 - a_2\mathcal{E}_2 - a_3\mathcal{E}_3$ para ciertos enteros a_0, a_1, a_2 y a_3. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que z es irreducible, y además, z no pertenece a $\{\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3, \mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3, \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_3\}$. Se sigue que,

$$z = a_1(\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2) + a_3(\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3) + (a_0 - a_1 - a_3)(\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3) + a_3\mathcal{E}_1 + (a_0 - a_2 - a_3)\mathcal{E}_2 + (a_0 - a_1 - a_3)\mathcal{E}_3.$$

Ahora, tenemos que $z.(\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2) \geq 0$, $z.(\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3) \geq 0$, $z.\mathcal{E}_1 \geq 0$ y $z.\mathcal{E}_3 \geq 0$, lo que implica que $a_1, a_3, (a_0 - a_1 - a_3), (a_3, a_0 - a_2 - a_3)$ y $(a_0 - a_1 - a_3)$ son enteros no negativos, y por lo tanto,

$$z \in \mathbb{Z}_+(\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2) + \mathbb{Z}_+(\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3) + \mathbb{Z}_+(\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3) + \mathbb{Z}_+\mathcal{E}_1 + \mathbb{Z}_+\mathcal{E}_2 + \mathbb{Z}_+\mathcal{E}_3.$$

Ejemplo 4.2.21 (El monoide efectivo de la explosión del plano proyectivo en tres puntos donde un punto es infinitamente cercano a otro)**.** Sea Y la explosión del plano proyectivo en los puntos p_1, p_2 y p_3, donde p_3 es infinitamente cercano a p_2, y los puntos p_1 y p_2 son ordinarios. El monoide efectivo de Y es igual a

$$\mathbb{Z}_+(\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2) + \mathbb{Z}_+(\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3) + \mathbb{Z}_+\mathcal{E}_1 + \mathbb{Z}_+(\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3) + \mathbb{Z}_+\mathcal{E}_3.$$

Se verifica de inmediato que $\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3$ y $\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3$ son clases efectivas, pues $\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2$ es la clase de la transformada estricta de una recta en $\mathbb{P}^2_k$ que pasa a través de p_1 y p_2, $\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3$ es la clase de la transformada estricta de una recta en $\mathbb{P}^2_k$ que pasa a través de p_2 y p_3, y $\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3$ es la clase de la transformada estricta de E_2. Esto implica que,

$$\mathbb{Z}_+(\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2) + \mathbb{Z}_+(\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3) + \mathbb{Z}_+\mathcal{E}_1 + \mathbb{Z}_+(\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3) + \mathbb{Z}_+\mathcal{E}_3 \subseteq M(Y).$$

Por otro lado, sea $z \in M(Y)$ y sean a_0, a_1, a_2 y a_3 enteros tales que $z = a_0\mathcal{E}_0 - a_1\mathcal{E}_1 - a_2\mathcal{E}_2 - a_3\mathcal{E}_3$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que z es irreducible y que z es distinto de $\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3$, más aún, tenemos que

$$z = a_0(\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2) + (a_0 - a_1)\mathcal{E}_1 + (a_0 - a_2)(\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3) + (a_0 - a_2 - a_3)\mathcal{E}_3.$$

Puesto que, $\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_2$ y $\mathcal{E}_0$ son *nef*, se tiene que $a_0, (a_0 - a_1), (a_0 - a_2)$ y $(a_0 - a_2 - a_3)$ son enteros no negativos. Así,

$$z \in \mathbb{Z}_+(\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2) + \mathbb{Z}_+(\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3) + \mathbb{Z}_+\mathcal{E}_1 + \mathbb{Z}_+(\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3) + \mathbb{Z}_+\mathcal{E}_3.$$

Puesto que el conjunto de todas las clases de divisores *nef* de $NS(X)$ tiene obviamente una estructura algebraica de un monoide, se sugiere la siguiente definición:

Definición 4.2.22. El monoide *Nef* de X es el conjunto de todas las clases de divisores *nef* de $NS(X)$, y será denotado por $Nef(X)$.

En los siguientes ejemplos se determinará el monoide *Nef* de algunas superficies.

Ejemplo 4.2.23 (El monoide $Nef(\mathbb{P}^2_k)$)**.** El monoide $Nef(\mathbb{P}^2_k)$ es igual a $\mathbb{Z}_+\mathcal{E}_0$. Del Ejemplo 4.2.14 se sigue que $\mathcal{E}_0$ es *nef*, esto implica que $\mathbb{Z}_+\mathcal{E}_0 \subseteq Nef(\mathbb{P}^2_k)$. Por otro lado, sea $z \in Nef(\mathbb{P}^2_k)$, así, existe un entero m tal que $z = m\mathcal{E}_0$. Luego, como $\mathcal{E}_0$ es efectivo, se sigue que $z.\mathcal{E}_0 \geq 0$, y por consiguiente, $m \in \mathbb{Z}_+$.

Ejemplo 4.2.24 (El monoide *Nef* de la explosión del plano proyectivo en un número finito de puntos colineales y ordinarios)**.** Sea Y la explosión del plano proyectivo en r puntos colineales y ordinarios con $r \in \mathbb{N}$. Con las notaciones del Ejemplo 4.2.18, se tiene que

$$Nef(Y) = \mathbb{Z}_+\mathcal{E}_0 + \sum_{j=1}^{r} \mathbb{Z}_+(\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_j).$$

En efecto, es evidente que $\mathcal{E}_0$ y $\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_j$ para cada $j \in \{1, 2, \ldots, r\}$ son elementos de $Nef(Y)$. Por otro lado, sea $z \in Nef(Y)$, así, existen enteros a_0 y a_j con $j \in \{1, 2, \ldots, r\}$ tales que $z = a_0\mathcal{E}_0 - \sum_{i=1}^{r} a_i\mathcal{E}_i$. Por tanto, $z = (a_0 - \sum_{i=1}^{r} a_i)\mathcal{E}_0 + \sum_{i=1}^{r} a_i(\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_i)$. Como z es *nef* se sigue que los enteros $(a_0 - \sum_{i=1}^{r} a_i)$ y a_j para cualquier $j \in \{1, 2, \ldots, r\}$ son no negativos. Consecuentemente, obtenemos que $Nef(Y)$ está contenido en $\mathbb{Z}_+\mathcal{E}_0 + \sum_{j=1}^{r} \mathbb{Z}_+(\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_j)$.

Ejemplo 4.2.25 (El monoide *Nef* de la explosión del plano proyectivo en dos puntos donde un punto es infinitamente cercano a un punto ordinario)**.** Si Y es la explosión del plano proyectivo en los puntos p_1 y p_2, donde p_2 es infinitamente cercano al punto ordinario p_1, entonces

$$Nef(Y) = \mathbb{Z}_+\mathcal{E}_0 + \mathbb{Z}_+(\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1) + \mathbb{Z}_+(2\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2).$$

En efecto, $\mathcal{E}_0$, $\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1$ y $2\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2$ son *nef*, de esto, $\mathbb{Z}_+\mathcal{E}_0 + \mathbb{Z}_+(\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1) + \mathbb{Z}_+(2\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2)$ está contenido en $Nef(Y)$. Por otro lado, sea $z \in Nef(Y)$, así, $z = a_0\mathcal{E}_0 - a_1\mathcal{E}_1 - a_2\mathcal{E}_2$ para ciertos enteros a_0, a_1 y a_2. Luego, $z = (a_0 - a_1 - a_2)\mathcal{E}_0 + (a_1 - a_2)(\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1) + a_2(\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_2)$. Del Ejemplo 4.2.19 se tiene que $\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2$ y $\mathcal{E}_2$ son efectivos. De esto, $z.(\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2) \geq 0, z.(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2) \geq 0$ y $z.\mathcal{E}_2 \geq 0$, y esto implica que, $(a_0 - a_1 - a_2), (a_1 - a_2)$ y a_2 son enteros no negativos. Finalmente, $Nef(Y)$ es un subconjunto de $\mathbb{Z}_+\mathcal{E}_0 + \mathbb{Z}_+(\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1) + \mathbb{Z}_+(2\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2)$.

Ejemplo 4.2.26 (El monoide *Nef* de la explosión en tres puntos en posición general)**.** Si Y es la explosión del plano proyectivo de tres puntos en posición general, entonces

$$Nef(Y) = \mathbb{Z}_+\mathcal{E}_0 + \mathbb{Z}_+(\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1) + \mathbb{Z}_+(\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_2) + \mathbb{Z}_+(\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_3) + \mathbb{Z}_+(2\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3).$$

En efecto, es claro que $\mathbb{Z}_+\mathcal{E}_0 + \mathbb{Z}_+(\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1) + \mathbb{Z}_+(\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_2) + \mathbb{Z}_+(\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_3) + \mathbb{Z}_+(2\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3)$ es un subconjunto de $Nef(Y)$. Por otro lado, sea $z \in Nef(Y)$, con $z = a_0\mathcal{E}_0 - a_1\mathcal{E}_1 - a_2\mathcal{E}_2 - a_2\mathcal{E}_3$ para ciertos enteros a_0, a_1, a_2 y a_3. Así, tenemos que

$$z = (a_0 - a_1 - a_2 - a_3 - \alpha)\mathcal{E}_0 + (a_1 - \alpha)(\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1) + (a_2 - \alpha)(\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_2) + (a_3 - \alpha)(\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_3) + \alpha(2\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3),$$

donde $\alpha = min\{a_1, a_2, a_3\}$. Luego, como $\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3, \mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3, \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ y $\mathcal{E}_3$ son efectivos (ver Ejemplo 4.2.20), tenemos que $(a_0 - a_1 - a_2 - a_3 - \alpha), (a_1 - \alpha), (a_2 - \alpha), (a_3 - \alpha)$ y α son enteros no negativos. De esto, podemos concluir que

$$Nef(Y) \subseteq \mathbb{Z}_+\mathcal{E}_0 + \mathbb{Z}_+(\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1) + \mathbb{Z}_+(\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_2) + \mathbb{Z}_+(\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_3) + \mathbb{Z}_+(2\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3).$$

Ejemplo 4.2.27 (El monoide *Nef* de la explosión en tres puntos donde uno de ellos es infinitamente cercano a otro)**.** Sea Y la explosión del plano proyectivo en los puntos p_1, p_2 y p_3 donde p_3 es infinitamente cercano a p_2, y los puntos p_1 y p_2 son ordinarios. Tenemos que

$$Nef(Y) = \mathbb{Z}_+\mathcal{E}_0 + \mathbb{Z}_+(\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1) + \mathbb{Z}_+(\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_2) + \mathbb{Z}_+(2\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3) + \mathbb{Z}_+(2\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3).$$

En efecto, $\mathbb{Z}_+\mathcal{E}_0 + \mathbb{Z}_+(\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1) + \mathbb{Z}_+(\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_2) + \mathbb{Z}_+(2\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3) + \mathbb{Z}_+(2\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3)$ es un subconjunto de $Nef(Y)$. A continuación, sea $z \in Nef(Y)$, existe enteros a_0, a_1, a_2 y a_3 tales que $z = a_0\mathcal{E}_0 - a_1\mathcal{E}_1 - a_2\mathcal{E}_2 - a_3\mathcal{E}_3$. Luego, podemos reescribir a z como:

$$(a_0 - a_1 - a_2 - a_3 + \alpha)\mathcal{E}_0 + (a_1 - \alpha)(\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1) + (a_2 - a_3)(\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_2) + (a_3 - \alpha)(2\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3) + \alpha(2\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3),$$

donde $\alpha = min\{a_1, a_3\}$. Enseguida, los enteros $(a_0 - a_1 - a_2 - a_3 + \alpha), (a_1 - \alpha), (a_2 - a_3), (a_3 - \alpha)$ y α son no negativos pues $z.(\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2) \geq 0$, $z.(\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3) \geq 0$, $z.\mathcal{E}_1 \geq 0$, $z.(\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3) \geq 0$ y $z.\mathcal{E}_3 \geq 0$ (ver Ejemplo 4.2.21). Por lo tanto,

$$z \in \mathbb{Z}_+\mathcal{E}_0 + \mathbb{Z}_+(\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1) + \mathbb{Z}_+(\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_2) + \mathbb{Z}_+(2\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3) + \mathbb{Z}_+(2\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3).$$

4.3. Superficies de Hirzebruch

El propósito de esta sección es definir una superficie de Hirzebruch (ver Definición 4.3.5), para ello definiremos una *una superficie reglada sobre una curva* (ver Definición 4.3.1). Además, se determinará el monoide efectivo y el monoide *Nef* de una superficie de Hirzebruch (ver Lema 4.3.7).

A lo largo de esta sección C será una curva proyectiva lisa definida sobre un campo k.

Definición 4.3.1. Una superficie reglada sobre C es una superficie X proyectiva lisa definida sobre k junto con un morfismo sobreyectivo $\pi : X \to C$, tal que la fibra X_y asociada a y es isomorfa a $\mathbb{P}^1_k$, para cualquier elemento y de C, y de tal manera que existe un morfismo $\sigma : C \to X$ con $\pi \circ \sigma = id_C$.

La existencia del morfismo σ en el Definición 4.3.1 se va a traducir en decir que el morfismo π admite una sección o que la superficie X tiene una sección. En este caso dicha sección se refiere a $\sigma(C)$. Además, nos referiremos a una fibra del morfismo π como una fibra de X. Ahora veamos un ejemplo.

Ejemplo 4.3.2. La superficie $C \times \mathbb{P}^1_k$ junto con el morfismo dado por:

$$\begin{array}{rccc} \pi_1 : & C \times \mathbb{P}^1_k & \longrightarrow & C \\ & (\alpha, \beta) & \longmapsto & \alpha, \end{array}$$

donde π_1 es la primer proyección, es reglada. En efecto, π_1 es un morfismo sobreyectivo, además, la fibra $(C \times \mathbb{P}^1_k)_z$ es isomorfa a $\mathbb{P}^1_k$ para cualquier $z \in C$, y π_1 admite una sección σ, por ejemplo, dada por:

$$\begin{array}{rccc} \sigma : & C & \longrightarrow & C \times \mathbb{P}^1_k \\ & \alpha & \longmapsto & (\alpha, (1:0)). \end{array}$$

Los siguientes resultados nos ayudarán a definir una superficie de Hirzebruch.

Proposición 4.3.3. *Con las notaciones de la Definición 4.3.1, sea X una superficie reglada, y sean C_0 y f una sección y una fibra de X, respectivamente. Se tiene que $Pic(X) = \mathbb{Z}C_0 \oplus \pi^*(Pic(C))$. Más aún, se satisface que $C_0.f = 1$ y $f^2 = 0$.*

Demostración. Ver [17, Proposición 2.3, p. 370]. ❏

Proposición 4.3.4. *Con las notaciones de la Definición 4.3.1, si X es una superficie reglada, entonces existe una gavilla localmente libre $\mathcal{L}$ de rango 2 sobre C tal que $X \cong \mathbb{P}(\mathcal{L})$[1] sobre C. Inversamente, $\mathbb{P}(\mathcal{L})$ es una superficie reglada.*

[1] $\mathbb{P}(\mathcal{L})$ denota el espacio proyectivo asociado a $\mathcal{L}$.

Demostración. Ver [17, Proposición 2.2, p. 370]. ❑

Enseguida consideremos $\Sigma_n := \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}(-n))$, con $n \in \mathbb{Z}_+$. De la Proposición 4.3.4 tenemos que Σ_n es una superficie reglada sobre $\mathbb{P}^1_k$ para cada $n \in \mathbb{Z}_+$. Ahora, para $n \in \mathbb{Z}_+$ la sección excepcional de Σ_n es $C_n := \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}(-n))$.

Definición 4.3.5. Con las notaciones anteriores, Σ_n es la $n-$ésima superficie de Hirzebruch.

El grupo de Néron-Severi de Σ_n es un $\mathbb{Z}-$módulo libre generado por la clase C_n de C_n módulo la equivalencia numérica y por la clase $\mathcal{F}$ de una fibra f de Σ_n módulo la equivalencia numérica, esto es, $NS(\Sigma_n) = \mathbb{Z}C_n + \mathbb{Z}\mathcal{F}$. Además, se tiene que $C_n^2 = -n$, $\mathcal{F}^2 = 0$ y $C_n.\mathcal{F} = 1$. El siguiente ejemplo muestra algunas clases *nef* de Σ_n.

Ejemplo 4.3.6 ($C_n + n\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}$ son *nef*)**.** Con las notaciones anteriores, los elementos $C_n + n\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}$ de $NS(\Sigma_n)$ son *nef*. En efecto, sea Γ una curva entera sobre Σ_n, en los siguientes casos vamos a verificar que $(C_n + n\mathcal{F}).[\Gamma] \geq 0$ y $\mathcal{F}.[\Gamma] \geq 0$:

1. Si Γ es distinta de C_n y f, entonces obviamente $(C_n + n\mathcal{F}).[\Gamma] \geq 0$, y $\mathcal{F}.[\Gamma] \geq 0$.
2. Si $\Gamma = f$, entonces $(C_n + n\mathcal{F}).\mathcal{F} = 1$, y sabemos que $\mathcal{F}^2 = 0$.
3. Si $\Gamma = C_n$, entonces $(C_n + n\mathcal{F}).C_n = 0$.

Ahora determinemos el monoide efectivo y el monoide *nef* de la $n-$ésima superficie de Hirzebruch.

Lema 4.3.7. *Con notaciones anteriores, se satisfacen las siguientes afirmaciones:*

1. *El monoide efectivo de* Σ_n *es igual a* $\mathbb{Z}_+C_n + \mathbb{Z}_+\mathcal{F}$.
2. *El monoide Nef de* Σ_n *es igual a* $\mathbb{Z}_+(C_n + n\mathcal{F}) + \mathbb{Z}_+\mathcal{F}$.

Demostración.

1. Puesto que C_n y $\mathcal{F}$ son clases efectivas, se sigue que $\mathbb{Z}_+C_n + \mathbb{Z}_+\mathcal{F}$ está contenido en $M(\Sigma_n)$. Ahora bien, sea z un elemento de $M(\Sigma_n)$, así, existen enteros α y β tales que $z = \alpha C_n + \beta\mathcal{F}$. Como $C_n + n\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}$ son *nef* (ver Ejemplo 4.3.6), tenemos que α y β son enteros no negativos pues $\alpha = z.\mathcal{F}$ y $\beta = z.(C_n + n\mathcal{F})$. Con lo anterior, concluimos que $M(\Sigma_n)$ es un subconjunto de $\mathbb{Z}_+C_n + \mathbb{Z}_+\mathcal{F}$.
2. Del Ejemplo 4.3.6 tenemos que $\mathbb{Z}_+(C_n + n\mathcal{F}) + \mathbb{Z}_+\mathcal{F} \subseteq Nef(\Sigma_n)$. Ahora, sea $z \in Nef(\Sigma_n)$, si $z = \alpha C_n + \beta\mathcal{F}$ para ciertos enteros α y β, entonces $z = \alpha(C_n + n\mathcal{F}) + (\beta - n\alpha)\mathcal{F}$. Luego,

como $\mathcal{F}$ y C_n son clases efectivas, y $\alpha = z.\mathcal{F}$ y $\beta - n\alpha = z.C_n$, tenemos que α y $(\beta - n\alpha)$ son enteros no negativos. En definitiva, $Nef(\Sigma_n) = \mathbb{Z}_+(C_n + n\mathcal{F}) + \mathbb{Z}_+\mathcal{F}$. ❏

Para finalizar esta sección calcularemos el monoide efectivo y el monoide *Nef* de la explosión de una superficie de Hirzebruch en cierto punto.

Ejemplo 4.3.8 ($C_n + n\mathcal{F}$, $\mathcal{F}$ y $C_n + n\mathcal{F} - \mathcal{E}$ son *nef*)**.** Si Y es la explosión de la $n-$ésima supeficie de Hirzebruch en un punto p que no pasa a través de C_n, entonces $C_n + n\mathcal{F}$, $\mathcal{F}$ y $C_n + n\mathcal{F} - \mathcal{E}$ son elementos del monoide *Nef* de Y, donde $\mathcal{E}$ es la clase del divisor excepcional E de p en $NS(Y)$. En efecto, $C_n + n\mathcal{F}$ es *nef* pues es la clase de la transformada estricta de $C_n + nf$ con $p \notin Supp(C_n + nf)$ en $NS(Y)$. Luego, $\mathcal{F}$ es *nef* ya que es la clase de la transformada estricta de una fibra f de Σ_n en $NS(Y)$ tal que $p \notin Supp(f)$, y por último, $C_n + n\mathcal{F} - \mathcal{E}$ es *nef* pues es la clase de la transformada estricta de $C_n + nf$ en $NS(Y)$ tal que $p \in Supp(C_n + nf)$.

Ejemplo 4.3.9 (El monoide efectivo de la explosión de una superficie de Hirzebruch en cierto punto)**.** Con notaciones anteriores, sea Y la explosión de la $n-$ésima superficie de Hirzebruch Σ_n en un punto p que no pasa a través de C_n, para cierto $n \in \mathbb{N}$. Tenemos que el grupo de Néron-Severi de Y es igual a $\mathbb{Z}C_n + \mathbb{Z}\mathcal{F} - \mathbb{Z}\mathcal{E}$, donde $\mathcal{E}$ es la clase del divisor excepcional de p en $NS(Y)$. Vamos a probar que $M(Y) = \mathbb{Z}_+C_n + \mathbb{Z}_+(\mathcal{F} - \mathcal{E}) + \mathbb{Z}_+\mathcal{E}$. Se sigue que C_n y $\mathcal{F} - \mathcal{E}$ son clases efectivas en $NS(Y)$ pues son las clases de las trasformadas estrictas de C_n y f, respectivamente, tal que $p \in Supp(f)$, y, obviamente $\mathcal{E}$ una clase efectiva en $NS(Y)$. Así, $\mathbb{Z}_+C_n + \mathbb{Z}_+(\mathcal{F} - \mathcal{E}) + \mathbb{Z}_+\mathcal{E}$ está contenido en $M(Y)$. Por otro lado, si $z \in M(Y)$, entonces $z = a_0C_n + a_1\mathcal{F} - a_2\mathcal{E}$ para algunos enteros a_0, a_1 y a_2. De esto, $z = a_0C_n + a_1(\mathcal{F} - \mathcal{E}) + (a_1 - a_2)\mathcal{E}$. Ahora, el Ejemplo 4.3.8 implica que los enteros a_0, a_1 y $(a_1 - a_2)$ son no negativos, ya que $a_0 = z.\mathcal{F}$, $a_1 = z.(C_n + n\mathcal{F})$ y $(a_1 - a_2) = z.(C_n + n\mathcal{F} - \mathcal{E})$. En definitiva, $M(Y)$ es un subconjunto de $\mathbb{Z}_+C_n + \mathbb{Z}_+(\mathcal{F} - \mathcal{E}) + \mathbb{Z}_+\mathcal{E}$.

Ejemplo 4.3.10 (El monoide *Nef* de la explosión de una superficie de Hirzebruch en cierto punto)**.** Si Y es la explosión de la $n-$ésima superficie de Hirzebruch Σ_n en un punto p que no pasa a través de C_n, para cierto $n \in \mathbb{N}$, entonces $Nef(Y)$ es igual a $\mathbb{Z}_+(C_n + n\mathcal{F}) + \mathbb{Z}_+\mathcal{F} + \mathbb{Z}_+(C_n + n\mathcal{F} - \mathcal{E})$. En efecto, se satisface de inmediato que $\mathbb{Z}_+(C_n + n\mathcal{F}) + \mathbb{Z}_+\mathcal{F} + \mathbb{Z}_+(C_n + n\mathcal{F} - \mathcal{E}) \subseteq Nef(Y)$ (ver Ejemplo 4.3.8). Ahora, sea $z \in Nef(Y)$ con $z = a_0C_n + a_1\mathcal{F} - a_2\mathcal{E}$ para ciertos enteros a_0, a_1 y a_2. Se tiene que $z = (a_0 - a_2)(C_n + n\mathcal{F}) + (a_1 - na_0)\mathcal{F} + a_2(C_n + n\mathcal{F} - \mathcal{E})$. Luego, $z.C_n \geq 0$, $z.(\mathcal{F} - \mathcal{E}) \geq 0$ y $z.\mathcal{E} \geq 0$ (ver Ejemplo 4.3.9). Así, $(a_0 - a_2), (a_1 - na_0)$ y a_2 son enteros no negativos, y finalmente, $Nef(Y) \subseteq \mathbb{Z}_+(C_n + n\mathcal{F}) + \mathbb{Z}_+\mathcal{F} + \mathbb{Z}_+(C_n + n\mathcal{F} - \mathcal{E})$.

Capítulo 5

Códigos Algebraico Geométricos

En este capítulo utilizaremos la geometría de las superficies de Hirzebruch para generar códigos algebraico geométricos con muy buenos parámetros. Nuestros resultados principales se encuentran en los Teoremas 5.3.2, 5.3.5 y 5.3.6, y en los Corolarios 5.3.3 y 5.3.7.

5.1. Códigos Lineales

El propósito de esta sección es definir códigos lineales y algunos ingredientes necesarios para el estudio de ellos (ver por ejemplo la Definición 5.1.1 y la Definición 5.1.6). Además, daremos una relación entre los ingredientes, esta relación es llamada la *cota de Singleton* (ver Proposición 5.1.8).

Enseguida, sea $\mathbb{F}_q$ un campo finito con q elementos. Una *palabra* sobre $\mathbb{F}_q$ es un elemento de $\mathbb{F}_q^n$ para algún entero positivo n, dicho entero será conocido como la *longitud* de la palabra. Con esto tenemos la siguiente definición:

Definición 5.1.1. Sea m un entero positivo. Un código lineal C de longitud m es un subespacio vectorial de $\mathbb{F}_q^m$, y sus elementos serán llamados palabras código.

A continuación presentaremos algunos ejemplos estándares.

Ejemplo 5.1.2 (Código lineal de longitud 3)**.** El conjunto $\{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(0,1,1)\}$ es un código lineal de longitud 3 sobre el campo finito de 2 elementos.

Ejemplo 5.1.3 (Código Reed-Solomon)**.** Consideremos la recta afín $\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_q}$ sobre el campo finito $\mathbb{F}_q$ de q elementos, y sea $\mathcal{P} = \mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_q} \setminus \{0_{\mathbb{F}_q}\}$. Para un entero positivo ℓ con $\ell \leq q-1$, tenemos que el conjunto

$$E_\ell = \{f \in \mathbb{F}_q[x] \mid deg(f) \leq \ell - 1\},$$

es un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}_q$ de dimensión ℓ. Ahora, sea σ la aplicación $\mathbb{F}_q-$lineal dada por:

$$\begin{array}{rccc} \sigma: & E_\ell & \longrightarrow & \mathbb{F}_q^{q-1} \\ & f & \longmapsto & (f(\alpha_1), f(\alpha_2), \ldots, f(\alpha_{q-1})), \end{array}$$

donde $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{q-1}\} = \mathcal{P}$. De esto, se sigue que la imagen de σ es un código lineal de longitud $q-1$. Este código lineal es conocido como código Reed-Solomon.

Luego, a un código lineal C de longitud m le vamos a asociar ciertos parámetros, uno de ellos es la *dimensión* de C que será denotada por κ. Para caracterizar el código lineal C sobre $\mathbb{F}_q$ de longitud m y dimensión κ, diremos que es un $(m, \kappa)-$código lineal.

Ejemplo 5.1.4. La dimensión del código del Ejemplo 5.1.2 es igual a 2. Así, tenemos un $(3, 2)-$código lineal.

Ejemplo 5.1.5. Con notaciones del Ejemplo 5.1.3, tenemos que un código Reed-Solomon tiene dimensión ℓ, pues la aplicación σ es inyectiva. En definitiva, se tiene que un código Reed-Solomon es un $(q-1, \ell)-$código lineal.

Ahora definiremos otro parámetro de un código lineal. Como $\mathbb{F}_q^m$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}_q$, podemos definir una función ω llamada el *peso de Hamming* de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rccc} \omega: & \mathbb{F}_q^m & \longrightarrow & \mathbb{Z}_+ \\ & (c_1, c_2, \ldots, c_m) & \longmapsto & |\{i \in \{1, 2, \ldots, m\} \mid c_i \neq 0_{\mathbb{F}_q}\}|, \end{array}$$

esta función da pie a la siguiente definición:

Definición 5.1.6. Sean n y κ enteros no negativos. Sea C un $(n, \kappa)-$código lineal. La distancia mínima de C es el entero:

$$d = \begin{cases} 0, & \text{si } C = \{0_{\mathbb{F}_q^n}\} \\ min\{\omega(u) \mid u \in C \setminus \{0_{\mathbb{F}_q^n}\}\}, & \text{si } C \neq \{0_{\mathbb{F}_q^n}\}. \end{cases}$$

Ejemplo 5.1.7. La distancia mínima del Ejemplo 5.1.2 es igual a 1.

Si tenemos un $(n, \kappa)-$código lineal con distancia mínima d, entonces el código será codificado como un $(n, \kappa, d)-$código lineal. La importancia de la distancia mínima radica en que un $(n, \kappa, d)-$código lineal puede detectar hasta $d-1$ errores y corregir hasta $\lfloor (d-1)/2 \rfloor$ errores (ver [23, Teoremas 2.5.6 y 2.5.10, p. 12-13]).

En general, los parámetros de un código lineal no son arbitrarios, por ejemplo la dimensión del código lineal es menor o igual a su longitud y también se tiene que la distancia mínina es menor o igual a la longitud. Sin embargo, existen algunas otras restricciones entre ellos, una de ellas es la *Cota de Singleton* la cual presentamos enseguida:

Proposición 5.1.8 (Cota de Singleton)**.** *Sean n, κ y d enteros no negativos y sea C un $(n, \kappa, d)-$código lineal. Se satisface que κ es menor o igual a $(n - d + 1)$.*

Demostración. Consideremos la proyección π entre los $\mathbb{F}_q-$módulos $\mathbb{F}_q^n$ y $\mathbb{F}_q^{n-d+1}$, luego, $\pi|_C$ es una aplicación inyectiva, así, el código lineal $\pi|_C(C)$ es isomorfo al código lineal C. Por tanto, la dimensión de $\pi|_C(C)$ es igual a la dimensión de C. Consecuentemente, $\kappa \leq n - d + 1$. ❑

En el siguiente ejemplo utilizaremos la cota de Singleton para calcular la distancia mínima de un código Reed-Solomon.

Ejemplo 5.1.9. Con notaciones del Ejemplo 5.1.3, sea f un elemento de E_ℓ no nulo, enseguida vamos a determinar una cota para el peso de Hamming de la palabra código $(f(\alpha_1), f(\alpha_2), \ldots, f(\alpha_{q-1}))$:

$$\begin{aligned}
\omega(f(\alpha_1), f(\alpha_2), \ldots, f(\alpha_{q-1})) &= |\{i \in \{1, 2, \ldots, q-1\} \mid f(\alpha_i) \neq 0_{\mathbb{F}_q}\}| \\
&= (q-1) - |\{i \in \{1, 2, \ldots, q-1\} \mid f(\alpha_i) = 0_{\mathbb{F}_q}\}| \\
&\geq (q-1) - (\ell - 1) \\
&\geq q - \ell.
\end{aligned}$$

Así que, la distancia mínima d del código Reed-Solomon es mayor o igual a $q - \ell$. Por otro lado, la cota de Singleton nos dice que $\ell \leq q - d$, por tanto, $d \leq q - \ell$. Finalmente, la distancia mínima es igual a $q - \ell$. De esto, un código Reed-Solomon es un $(q-1, \ell, q-\ell)-$código lineal.

Los códigos lineales tales que sus parámetros satisfacen la igualdad de la cota de Singleton son llamados códigos de *máxima distancia de separación* (MDS). Un ejemplo de estos es el código

$$\{(a, a, \ldots, a) \in \mathbb{F}_q^n \mid a \in \mathbb{F}_q\},$$

con n un entero positivo, este es un $(n, 1, n)-$código lineal. También, los códigos Reed-Solomon son MDS (ver Ejemplo 5.1.9).

5.2. Códigos Algebraico Geométricos

En esta sección, se presentará una construcción de un código lineal a partir de una superficie racional proyectiva lisa definida sobre $\mathbb{F}_q$ (ver por ejemplo [18], [29] y [33]). Antes de dar dicha construcción, se recordarán algunos conceptos y notaciones asociados a una superficie proyectiva lisa racional X definida sobre $\mathbb{F}_q$, para un estudio amplio de estos se puede consultar el libro [17]:

1. $K(X)$ es el campo de funciones racionales sobre X.
2. $X(\mathbb{F}_q)$ es el conjunto de los $\mathbb{F}_q-$puntos racionales de X.
3. $Div(X)$ es el $\mathbb{Z}-$módulo libre generado por los divisores primos sobre X.

4. $H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$ es el subespacio vectorial de $K(X)$ asociado a un elemento D de $Div(X)$, donde

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(D)) = \{f \in K(X)^* \mid (f) + D \text{ es un divisor efectivo}\} \cup \{0_{K(X)}\},$$

y (f) denota el divisor asociado al elemento f no nulo de $K(X)$ (ver la Definición 4.1.7).
5. $Bs(|D|)$ es el conjunto de los *puntos base* de $|D|$, donde $|D|$ denota el sistema lineal completo asociado a un divisor D sobre X (ver las Definiciones 7.1.1 y 7.1.3).

Ahora, supongamos que $X(\mathbb{F}_q)$ es un conjunto no vacío. Luego, consideremos un subconjunto finito $\mathcal{P}$ no vacío de $X(\mathbb{F}_q)$ y un elemento D de $Div(X)$ tales que $Bs(|D|) \cap \mathcal{P}$ es vacío. Sea $\varphi_{\mathcal{P}}$ la aplicación dada por:

$$\begin{array}{rccc} \varphi_{\mathcal{P}}: & H^0(X, \mathcal{O}_X(D)) & \longrightarrow & \mathbb{F}_q^n, \\ & f & \longmapsto & (f(P_1), f(P_2), \ldots, f(P_n)), \end{array}$$

donde $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$, con $n \in \mathbb{N}$. Algebraicamente, $\varphi_{\mathcal{P}}$ es una aplicación $\mathbb{F}_q-$lineal, de tal manera que su imagen es un código lineal, y será denotado por $(X, \mathcal{P}, \mathcal{O}_X(D))$.

Definición 5.2.1. Con las notaciones anteriores, un código algebraico geométrico es un código lineal de la forma $(X, \mathcal{P}, \mathcal{O}_X(D))$.

Observemos que si la aplicación $\varphi_{\mathcal{P}}$ es inyectiva, entonces la dimensión del código $(X, \mathcal{P}, \mathcal{O}_X(D))$ será la dimensión de $H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$. Esto nos sugiere elegir X, $\mathcal{P}$ y D adecuadamente, de forma que $\varphi_{\mathcal{P}}$ sea una aplicación inyectiva y que se pueda determinar la dimensión de $H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$. Estos son los principales problemas que se encuentrán en la construcción de los códigos algebraico geométricos.

En el Capítulo 6 de [6] se mostró que existe una familia de códigos algebraico geométricos construidos a partir del plano proyectivo sobre un campo finito, donde el divisor asociado son dos rectas.

5.3. Nuevas Familias de Códigos Algebraico Geométricos

Aquí mostraremos la existencia de familias de códigos algebraico geométricos utilizando las superficies de Hirzebruch (ver los Teoremas 5.3.2, 5.3.5 y 5.3.6, y los Corolarios 5.3.3 y 5.3.7), para ello, se considerarán ciertos divisores efectivos sobre dichas superficies, y se utilizará una herramienta muy importante para encontrar uno de los parámetros de estos códigos, la cual será el teorema de Riemann-Roch.

En la siguiente proposición se determinará la dimensión de las secciones globales de cierto elemento del grupo de Néron-Severi de la $n-$ésima superficie de Hirzebruch Σ_n (definida sobre el campo finito de q elementos) con n un entero positivo.

Proposición 5.3.1. *Sea q la pontencia de algún número primo. Si a, b y n son enteros no negativos tales que $b \geq an$, entonces,*

$$h^0(\Sigma_n, aC_n + b\mathcal{F}) = 1 + a + ab + b - \frac{1}{2}na(a+1),$$

donde C_n es la clase de la sección excepcional C_n en $NS(\Sigma_n)$ y $\mathcal{F}$ es la clase de una fibra f de Σ_n en $NS(\Sigma_n)$.

Demostración. Consideremos el divisor $aC_n + bf$ sobre Σ_n Puesto que $b \geq an$, se sigue que $aC_n + b\mathcal{F}$ es *nef*, así, de [16, Lema II.2 c), p. 1193] podemos concluir que $h^2(\Sigma_n, aC_n + b\mathcal{F}) = 0$. Más aún, se satisface que $-\mathcal{K}_{\Sigma_n}.(aC_n + b\mathcal{F}) \geq 1$, donde $\mathcal{K}_{\Sigma_n}$ es la clase de un divisor canónico sobre Σ_n en el grupo de Néron-Severi de Σ_n de la forma $-2C_n - (n+2)\mathcal{F}$, lo cual implica que $h^1(\Sigma_n, aC_n + b\mathcal{F}) = 0$ (ver [16, Teorema III.1, p. 1197]). Por lo tanto, del teorema de Riemann-Roch se tiene que

$$h^0(\Sigma_n, aC_n + b\mathcal{F}) = 1 + \frac{1}{2}\left((aC_n + b\mathcal{F})^2 - \mathcal{K}_{\Sigma_n}.(aC_n + b\mathcal{F})\right),$$

Finalmente,

$$h^0(\Sigma_n, aC_n + b\mathcal{F}) = 1 + a + ab + b - \frac{1}{2}na(a+1).$$

❏

A continuación se presentan los resultados principales de la primera parte de este trabajo:

Teorema 5.3.2. *Sea q la potencia de algún número primo y sea n un entero positivo menor o igual a $(q-1)$. Existe un código algebraico geométrico de longitud $q(q+1)$, de dimensión $n+2$, y de distancia mínima igual a (q^2-1).*

Demostración. Consideremos la $n-$ésima superficie de Hirzebruch Σ_n definida sobre el campo finito $\mathbb{F}_q$ de q elementos, y sean C_n la sección excepcional y f una fibra de Σ_n. Luego, fijemos el conjunto $\mathcal{P} = \Sigma_n \setminus Supp(C_n)$, y tomemos el divisor $C_n + nf$ sobre Σ_n. Una vez fijado lo anterior, lo que sigue es determinar los parámetros del código algebraico geométrico $(\Sigma_n, \mathcal{P}, C_n + nf)$. Observemos que la cardinalidad del conjunto $\mathcal{P}$ es igual a $q(q+1)$, de esto, tenemos que la aplicación $\mathbb{F}_q-$lineal dada como sigue:

$$\begin{array}{rccc} \varphi_{\mathcal{P}}: & H^0(\Sigma_n, C_n + n\mathcal{F}) & \longrightarrow & \mathbb{F}_q^{q(q+1)} \\ & g & \longmapsto & (g(\alpha_1), g(\alpha_2), \ldots, g(\alpha_{q(q+1)})), \end{array}$$

donde $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{q(q+1)}\} = \mathcal{P}$, es inyectiva pues la cardinalidad de $Supp(C_n + nf) \cap \mathcal{P}$ es igual a $q+1$. Así, se sigue que el código $(\Sigma_n, \mathcal{P}, C_n + nf)$ tiene longitud $q(q+1)$ y dimensión igual a la dimensión de $H^0(\Sigma_n, C_n + n\mathcal{F})$ sobre $\mathbb{F}_q$. Por tanto, de la Proposición 5.3.1 se sigue que la dimensión del código es igual a $(n+2)$. Lo que falta es determinar la distancia mínima: Sea g un elemento de $H^0(\Sigma_n, C_n + n\mathcal{F})$ no nulo, el peso de Hamming de la palabra código $(g(\alpha_1), g(\alpha_2), \ldots, g(\alpha_{q(q+1)}))$ es:

$$\begin{aligned}
\omega(g(\alpha_1), g(\alpha_2), \ldots, g(\alpha_{q(q+1)})) &= |\{i \in \{1, 2, \ldots, q(q+1)\} \mid g(\alpha_i) \neq 0_{\mathbb{F}_q}\}| \\
&= q(q+1) - |\{i \in \{1, 2, \ldots, q(q+1)\} \mid g(\alpha_i) = 0_{\mathbb{F}_q}\}| \\
&= q(q+1) - (q+1) \\
&= q^2 - 1.
\end{aligned}$$

Finalmente, la distancia mínima es igual a $q^2 - 1$. ❏

Corolario 5.3.3. *Sea q la potencia de algún número primo. Existe un código algebraico geométrico de longitud $q(q+1)$, de dimensión $q+1$, y de distancia mínima igual a $q^2 - 1$.*

Demostración. Si $n = q - 1$ en el Teorema 5.3.2, entonces el resultado se cumple. ❏

Observación 5.3.4. Los códigos algebraico geométricos obtenidos en el corolario anterior no pueden ser MDS, sin embargo, es imposible mejorar sus parámetros, ya que no existen códigos MDS con longitud $q(q+1)$ y dimensión $q+1$ (ver [28, Teorema 5.3.8, p. 237]).

Teorema 5.3.5. *Sea q la potencia de un número primo. Si s es un entero positivo menor o igual que q, entonces existe un código algebraico geométrico de longitud $q(q+1)$, de dimensión $s+1$, y de distancia mínima igual a $q(q+1-s)$.*

Demostración. Consideremos la $n-$ésima superficie de Hirzebruch Σ_n definida sobre el campo finito $\mathbb{F}_q$ de q elementos, y sean C_n la sección excepcional y f una fibra de Σ_n. Lo que sigue es determinar los parámetros del código algebraico geométrico $(\Sigma_n, \mathcal{P}, sf)$, donde $\mathcal{P} = \Sigma_n \setminus Supp(C_n)$. Ahora, observemos que la cardinalidad del conjunto $\mathcal{P}$ es igual a $q(q+1)$, de esto, obtenemos que la aplicación $\mathbb{F}_q-$lineal dada como sigue:

$$\begin{array}{rccc}
\varphi_{\mathcal{P}}: & H^0(\Sigma_n, s\mathcal{F}) & \longrightarrow & \mathbb{F}_q^{q(q+1)} \\
& g & \longmapsto & (g(\alpha_1), g(\alpha_2), \ldots, g(\alpha_{q(q+1)})),
\end{array}$$

donde $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{q(q+1)}\} = \mathcal{P}$, es inyectiva pues la cardinalidad de $Supp(sf) \cap \mathcal{P}$ es igual a sq, y $s \leq q$, ya que $(q+1)f$ no es un divisor sobre Σ_n. De modo que, el código $(\Sigma_n, \mathcal{P}, sf)$ tiene longitud $q(q+1)$ y dimensión igual a la dimensión de $H^0(\Sigma_n, s\mathcal{F})$ sobre $\mathbb{F}_q$. Así, de la Proposición 5.3.1 se sigue que la dimensión del código es igual a $(s+1)$. A continuación, vamos a determinar la

distancia mínima: Sea g un elemento de $H^0(\Sigma_n, s\mathcal{F})$ no nulo, el peso de Hamming de la palabra código $(g(\alpha_1), g(\alpha_2), \ldots, g(\alpha_{q(q+1)}))$ es:

$$\begin{aligned}\omega(g(\alpha_1), g(\alpha_2), \ldots, g(\alpha_{q(q+1)})) &= |\{i \in \{1, 2, \ldots, q(q+1)\} \mid g(\alpha_i) \neq 0_{\mathbb{F}_q}\}| \\ &= q(q+1) - |\{i \in \{1, 2, \ldots, q(q+1)\} \mid g(\alpha_i) = 0_{\mathbb{F}_q}\}| \\ &= q(q+1) - sq \\ &= q(q+1-s).\end{aligned}$$

De esto, la distancia mínima es igual a $q(q+1-s)$. ❑

Teorema 5.3.6. *Sea q la potencia de algún número primo mayor o igual a cuatro. Si n y t son enteros no negativos tales que satisfacen lo siguiente:*

1. $1 \leq t \leq \lfloor (q-1)/3 \rfloor$, *y*
2. $n \leq q - 3t - 1$.

Entonces existe un código algebraico geométrico de longitud $q(q+1)$, de dimensión $2t+n+2$, y de distancia mínima igual a $q^2 + t - 1$.

Demostración. Consideremos la $n-$ésima superficie de Hirzebruch Σ_n definida sobre el campo finito $\mathbb{F}_q$ de q elementos, y sean C_n la sección excepcional y f una fibra de Σ_n. Lo que sigue es determinar los parámetros del código algebraico geométrico $(\Sigma_n, \mathcal{P}, C_n + (n+t)f)$, donde $\mathcal{P} = \Sigma_n \setminus Supp(C_n)$. Observemos que la cardinalidad del conjunto $\mathcal{P}$ es igual a $q(q+1)$, de esto, la aplicación $\mathbb{F}_q-$lineal dada como sigue:

$$\begin{array}{rccc}\varphi_{\mathcal{P}}: & H^0(\Sigma_n, C_n + (n+t)\mathcal{F}) & \longrightarrow & \mathbb{F}_q^{q(q+1)} \\ & g & \longmapsto & (g(\alpha_1), g(\alpha_2), \ldots, g(\alpha_{q(q+1)})),\end{array}$$

donde $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{q(q+1)}\} = \mathcal{P}$ es inyectiva pues la cardinalidad de $Supp(C_n + (n+t)f) \cap \mathcal{P}$ es igual a $(q+1-t)$, y por hipótesis $1 \leq t \leq \lfloor (q-1)/3 \rfloor$. Así, tenemos que el código $(\Sigma_n, \mathcal{P}, C_n + (n+t)f)$ tiene longitud $q(q+1)$ y dimensión igual a la dimensión de $H^0(\Sigma_n, C_n + (n+t)\mathcal{F})$ sobre $\mathbb{F}_q$. Así, de la Proposición 5.3.1 se sigue que la dimensión del código es igual a $2t+n+2$. A continuación, vamos a determinar la distancia mínima: Sea g un elemento de $H^0(\Sigma_n, C_n + (n+t)\mathcal{F})$ no nulo, el peso de Hamming de la palabra código $(g(\alpha_1), g(\alpha_2), \ldots, g(\alpha_{q(q+1)}))$ es:

$$\begin{aligned}\omega(g(\alpha_1), g(\alpha_2), \ldots, g(\alpha_{q(q+1)})) &= |\{i \in \{1, 2, \ldots, q(q+1)\} \mid g(\alpha_i) \neq 0_{\mathbb{F}_q}\}| \\ &= q(q+1) - |\{i \in \{1, 2, \ldots, q(q+1)\} \mid g(\alpha_i) = 0_{\mathbb{F}_q}\}| \\ &= q(q+1) - (q+1-t) \\ &= q^2 + t - 1.\end{aligned}$$

De esto, la distancia mínima es igual a $(q^2 + t - 1)$. ❑

Corolario 5.3.7. *Sea q la potencia de algún número primo mayor o igual a cuatro. Sea t igual a $\lfloor (q-1)/3 \rfloor$, existe un código algebraico geométrico de longitud $q(q+1)$, de dimensión $q-t+1$, y de distancia mínima igual a q^2+t-1.*

Demostración. El corolario se satisface para $n = q - 3t - 1$ en el Teorema 5.3.6. ❏

5.4. Aplicaciones

A continuación, daremos una serie de cuadros donde mostramos códigos con muy buenos parámetros, obtenidos de los resultados de la Sección 5.3 de este capítulo (ver los Teoremas 5.3.2, 5.3.5 y 5.3.6, y los Corolarios 5.3.3 y 5.3.7), los cuales mejoran algunos códigos ya existentes y aportan parámetros de códigos que, a nuestro saber, no se han publicado. Los parámetros de los códigos ya existentes se encuentran en la siguiente liga www.codetables.de.

Enseguida, en los Cuadros 1, 2 y 3 se determinan los parámetros de algunos códigos algebraico geométricos de los Teoremas 5.3.2, 5.3.5 y 5.3.6. Además, compararemos los datos de dichos cuadros con los parámetros de códigos lineales ya existentes (ver los Cuadros 4, 5 y 6). Observemos que los parámetros de los códigos algebraico geométricos dados en los Cuadros 1, 2 y 3 mejoran a los parámetros de algunos códigos lineales existentes, por ejemplo, en el Cuadro 4 el $(182, 9, 168)$−código algebraico geométrico sobre $\mathbb{F}_{13}$ mejora al $(182, 9, 123)$−código lineal sobre $\mathbb{F}_4$, el primero puede detectar 167 errores y corregir 83 errores, mientras el segundo detecta 122 errores y corrige 61 errores.

q	n	*Longitud* $q(q+1)$	*Dimensión* $n+2$	*Distancia Mínima* q^2-1	*Cota de Singleton*	*Detecta Errores*	*Corrige Errores*
4	2	20	4	15	17	14	7
5	3	30	5	24	26	23	11
7	4	56	6	48	51	47	23
8	6	72	8	63	65	62	31
9	4	90	6	80	85	79	39
11	6	132	8	120	125	119	59
13	7	182	9	168	174	167	83
23	19	552	21	528	532	527	263
29	27	870	29	840	842	839	419

Cuadro 1. Datos obtenidos del Teorema 5.3.2.

q	s	*Longitud* $q(q+1)$	*Dimensión* $s+1$	*Distancia Mínima* $q(q+1-s)$	*Cota de Singleton*	*Detecta Errores*	*Corrige Errores*
4	1	20	2	16	19	15	7
5	1	30	2	25	29	24	12
7	2	56	3	42	54	41	20
8	2	72	3	56	70	55	27
9	1	90	2	81	89	80	40
11	2	132	3	110	130	109	54
13	1	182	2	169	181	168	84
23	11	552	12	299	541	298	149
29	5	870	6	725	865	724	362

CUADRO 2. Datos obtenidos del Teorema 5.3.5.

q	t	n	*Longitud* $q(q+1)$	*Dimensión* $2t+n+2$	*Distancia Mínima* q^2+t-1	*Cota de Singleton*	*Detecta Errores*	*Corrige Errores*
5	1	0	30	4	25	27	24	12
7	1	1	56	5	49	52	48	24
8	1	0	72	4	64	69	63	31
9	1	1	90	5	81	86	80	40
11	2	2	132	8	122	125	121	60
13	2	3	182	9	170	174	169	84
23	5	4	552	16	533	537	532	266
29	6	5	870	19	846	852	845	422

CUADRO 3. Datos obtenidos del Teorema 5.3.6.

Por otro lado, en los Cuadros 7 y 8 presentaremos algunos de nuestros códigos algebraico geométricos, obtenidos de los Corolarios 5.3.3 y 5.3.7, cuyos parámetros son muy buenos, ya que no pueden ser mejorados.

Comparando los parárametros de los códigos algebraico geométricos de los Cuadros 7 y 8 confirmamos que no pueden ser mejorados. Esto lo podemos ver en los Cuadros 9 y 10.

Códigos Algebraico Geométricos obtenidos del Teorema 5.3.2	Códigos Lineales según www.codetables.de
$(20, 4, 15)-$código AG sobre $\mathbb{F}_4$	$(20, 4, 15)-$código lineal sobre $\mathbb{F}_9$
$(30, 5, 24)-$código AG sobre $\mathbb{F}_5$	$(30, 5, 22)-$código lineal sobre $\mathbb{F}_9$
$(56, 6, 48)-$código AG sobre $\mathbb{F}_7$	$(56, 6, 43)-$código lineal sobre $\mathbb{F}_9$
$(72, 8, 63)-$código AG sobre $\mathbb{F}_8$	$(72, 8, 53)-$código lineal sobre $\mathbb{F}_9$
$(90, 6, 80)-$código AG sobre $\mathbb{F}_9$	$(90, 6, 71)-$código lineal sobre $\mathbb{F}_9$
$(132, 8, 120)-$código AG sobre $\mathbb{F}_{11}$	$(132, 8, 90)-$código lineal sobre $\mathbb{F}_4$
$(182, 9, 168)-$código AG sobre $\mathbb{F}_{13}$	$(182, 9, 123)-$código lineal sobre $\mathbb{F}_4$
$(552, 21, 528)-$código AG sobre $\mathbb{F}_{23}$	No existe
$(870, 29, 840)-$código AG sobre $\mathbb{F}_{29}$	No existe

CUADRO 4. Comparando los datos del Cuadro 1 con códigos existentes.

Códigos Algebraico Geométricos obtenidos del Teorema 5.3.5	Códigos Lineales según www.codetables.de
$(20, 2, 16)-$código AG sobre $\mathbb{F}_4$	$(20, 2, 15)-$código lineal sobre $\mathbb{F}_3$
$(30, 2, 25)-$código AG sobre $\mathbb{F}_5$	$(30, 2, 22)-$código lineal sobre $\mathbb{F}_3$
$(56, 3, 42)-$código AG sobre $\mathbb{F}_7$	$(56, 3, 38)-$código lineal sobre $\mathbb{F}_3$
$(72, 3, 56)-$código AG sobre $\mathbb{F}_8$	$(72, 3, 49)-$código lineal sobre $\mathbb{F}_3$
$(90, 2, 81)-$código AG sobre $\mathbb{F}_9$	$(90, 2, 67)-$código lineal sobre $\mathbb{F}_3$
$(132, 3, 110)-$código AG sobre $\mathbb{F}_{11}$	$(132, 3, 100)-$código lineal sobre $\mathbb{F}_4$
$(182, 2, 169)-$código AG sobre $\mathbb{F}_{13}$	$(182, 2, 145)-$código lineal sobre $\mathbb{F}_4$
$(552, 12, 299)-$código AG sobre $\mathbb{F}_{23}$	No existe
$(870, 6, 725)-$código AG sobre $\mathbb{F}_{29}$	No existe

CUADRO 5. Comparando los códigos del Cuadro 2 con códigos existentes.

Códigos Algebraico Geométricos obtenidos del Teorema 5.3.6	Códigos Lineales según www.codetables.de
$(30,4,25)-$código AG sobre $\mathbb{F}_5$	$(30,4,24)-$código lineal sobre $\mathbb{F}_9$
$(56,5,49)-$código AG sobre $\mathbb{F}_7$	$(56,5,45)-$código lineal sobre $\mathbb{F}_9$
$(72,4,64)-$código AG sobre $\mathbb{F}_8$	$(72,4,62)-$código lineal sobre $\mathbb{F}_9$
$(90,5,81)-$código AG sobre $\mathbb{F}_9$	$(90,5,74)-$código lineal sobre $\mathbb{F}_9$
$(132,8,122)-$código AG sobre $\mathbb{F}_{11}$	$(132,8,90)-$código lineal sobre $\mathbb{F}_4$
$(182,9,170)-$código AG sobre $\mathbb{F}_{13}$	$(182,9,123)-$código lineal sobre $\mathbb{F}_4$
$(552,16,533)-$código AG sobre $\mathbb{F}_{23}$	No existe
$(870,19,846)-$código AG sobre $\mathbb{F}_{29}$	No existe

CUADRO 6. Comparando los códigos del Cuadro 3 con códigos existentes.

q	*Longitud* $q(q+1)$	*Dimensión* $q+1$	*Distancia Mínima* q^2-1	*Cota de Singleton*	*Detecta Errores*	*Corrige Errores*
4	20	5	15	16	14	7
5	30	6	24	25	23	11
7	56	8	48	49	47	23
8	72	9	63	64	62	31
9	90	10	80	81	79	39
11	132	12	120	121	119	59
13	182	14	168	169	167	83
23	552	24	528	529	527	263
29	870	30	840	841	839	419

CUADRO 7. Datos obtenidos del Corolario 5.3.3.

q	t	*Longitud* $q(q+1)$	*Dimensión* $2t+n+2$	*Distancia Mínima* q^2+t-1	*Cota de Singleton*	*Detecta Errores*	*Corrige Errores*
5	1	30	5	25	26	24	12
7	2	56	6	50	51	49	24
8	2	72	7	65	66	64	32
9	2	90	8	82	83	81	40
11	3	132	9	123	124	122	61
13	4	182	10	172	173	171	85
23	7	552	17	535	536	534	267
29	9	870	21	849	850	848	424

CUADRO 8. Datos obtenidos del Corolario 5.3.7.

Códigos Algebraico Geométricos obtenidos del Corolario 5.3.3	Códigos Lineales según www.codetables.de
$(20, 5, 15)-$código AG sobre $\mathbb{F}_4$	$(20, 5, 14)-$código lineal sobre $\mathbb{F}_9$
$(30, 6, 24)-$código AG sobre $\mathbb{F}_5$	$(30, 6, 21)-$código lineal sobre $\mathbb{F}_9$
$(56, 8, 48)-$código AG sobre $\mathbb{F}_7$	$(56, 8, 39)-$código lineal sobre $\mathbb{F}_9$
$(72, 9, 63)-$código AG sobre $\mathbb{F}_8$	$(72, 9, 52)-$código lineal sobre $\mathbb{F}_9$
$(90, 10, 80)-$código AG sobre $\mathbb{F}_9$	$(90, 10, 63)-$código lineal sobre $\mathbb{F}_9$
$(132, 12, 120)-$código AG sobre $\mathbb{F}_{11}$	$(132, 12, 80)-$código lineal sobre $\mathbb{F}_4$
$(182, 14, 168)-$código AG sobre $\mathbb{F}_{13}$	$(182, 14, 110)-$código lineal sobre $\mathbb{F}_4$
$(552, 24, 528)-$código AG sobre $\mathbb{F}_{23}$	No existe
$(870, 30, 840)-$código AG sobre $\mathbb{F}_{29}$	No existe

CUADRO 9. Comparando los códigos del Cuadro 7 con códigos existentes.

Códigos Algebraico Geométricos obtenidos del Corolario 5.3.7	Códigos Lineales según www.codetables.de
$(30, 5, 25)-$código AG sobre $\mathbb{F}_5$	$(30, 5, 22)-$código lineal sobre $\mathbb{F}_9$
$(56, 6, 50)-$código AG sobre $\mathbb{F}_7$	$(56, 6, 43)-$código lineal sobre $\mathbb{F}_9$
$(72, 7, 65)-$código AG sobre $\mathbb{F}_8$	$(72, 7, 56)-$código lineal sobre $\mathbb{F}_9$
$(90, 8, 82)-$código AG sobre $\mathbb{F}_9$	$(90, 8, 68)-$código lineal sobre $\mathbb{F}_9$
$(132, 9, 123)-$código AG sobre $\mathbb{F}_{11}$	$(132, 9, 87)-$código lineal sobre $\mathbb{F}_4$
$(182, 10, 172)-$código AG sobre $\mathbb{F}_{13}$	$(182, 10, 119)-$código lineal sobre $\mathbb{F}_4$
$(552, 20, 533)-$código AG sobre $\mathbb{F}_{23}$	No existe
$(870, 22, 849)-$código AG sobre $\mathbb{F}_{29}$	No existe

CUADRO 10. Comparando los códigos del Cuadro 8 con códigos existentes.

Parte 2

La Finitud de los Anillos de Cox de Superficies Racionales

Introducción

Esta parte de la tesis se refiere a los anillos de Cox de variedades proyectivas lisas. La idea es dar una introducción breve de la noción de anillo de Cox, que es un tema de interés actual. Los anillos de Cox fueron considerados primero por David A. Cox en su artículo [5] para variedades tóricas, probando en particular, que el anillo de Cox, denotado por $Cox(X)$, de X es una $k-$álgebra finitamente generada, donde k es el campo de definición de la variedad tórica X.

Posteriormente, este concepto se extendió a cualquier variedad Z por Hu-Keel (ver [19]) en donde plantean el problema sobre la finitud de $Cox(Z)$ como una $k-$álgebra, esto es, ¿para cuáles Z se satisface que $Cox(Z)$ es finitamente generado? Se puede utilizar un ejemplo de Nagata para mostrar que si X es la explosión de $\mathbb{P}^2_k$ en r puntos en posición general, con $r \geq 9$, entonces $Cox(X)$ no es finitamente generado, dejando abierto el problema de clasificar las superficies racionales proyectivas lisas Y tales que $Cox(Y)$ es finitamente generado. Un trabajo muy significativo se encuentra en [11, Teorema 1, p. 94]. Más trabajos de interés son [4] y [8].

Hasta ahora se sabía que si Y es la explosión de r puntos en posición general con $r \leq 8$, entonces $Cox(Y)$ es finitamente generado (este tipo de superficies se conocen usualmente como superficies de Del Pezzo), quedando aparentemente pendiente el problema de las superficies que son explosiones de r puntos no necesariamente en posición general, con $r \leq 8$. Ahora, este último problema ha quedado resuelto como consecuencia inmediata del Teorema 8.1.2.

Esta segunda parte de la tesis está divida en tres capítulos que describiremos a continuación.

Capítulo 6: En este capítulo asociaremos a cada variedad proyectiva lisa definida sobre un campo una álgebra conocida como el anillo de Cox de dicha variedad. Dicho capítulo tiene tres secciones: la Sección 6.1 relaciona cada elemento del grupo de Picard con un espacio vectorial. Ahora bien, en la Sección 6.2 se definirá el anillo de Cox de cierta variedad, y se comprobará que es una álgebra. Por último, en la Sección 6.3 se determinará el anillo de Cox del espacio proyectivo de dimensión n.

Capítulo 7: El objetivo de este capítulo es de definir una superficie extremal, para lograr esto necesitaremos introducir los conceptos de dos monoides especiales. Cabe mencionar, que

el interés de las superficies extremales se verá reflejado claramente en el capítulo posterior. En la Sección 7.1 daremos las nociones de un sistema lineal completo, de un sistema lineal y del conjunto de los puntos base de un sistema lineal. Finalmente, en la Sección 7.2 mostraremos los conceptos de monoide característico y de monoide fraccional de las clases efectivas sin puntos base asociados a cierta superficie, y estos permitirán definir una superficie extremal.

Capítulo 8: Los resultados principales de esta segunda parte de la tesis (ver los Teoremas 8.1.2, 8.2.6 y 8.3.3) se presentarán en este capítulo que consta de tres secciones. En la Sección 8.1 presentamos un criterio para la finitud de los anillos de Cox de superficies extremales. Luego, en la Sección 8.2 aplicaremos el criterio de la sección anterior para dar una caracterización geométrica para la finitud de los anillos de Cox de las superficies racionales anticanónicas. Por último, en la Sección 8.3 mostraremos una caracterización de la finitud de los anillos de Cox de superficies racionales fraccionalmente un lápiz.

Capítulo 6

Anillos de Cox

En este capítulo asociaremos a cada variedad proyectiva lisa definida sobre un campo k una $k-$álgebra bien conocida como el anillo de Cox de dicha variedad, ciertos autores también la llaman el anillo de coordenadas totales o el anillo de coordenadas homogéneas, esta álgebra fue introducida por primera vez en [5]. Uno de los problemas que hasta el día de hoy es abierto es el de clasificar las variedades cuyos anillos de Cox son finitamente generados. En el Capítulo 8 daremos una respuesta favorable a dicha clasificación en el caso de superficies racionales (ver los Teoremas 8.2.6 y 8.3.1).

Durante este capítulo vamos a suponer que el esquema X es una variedad proyectiva lisa definida sobre un campo algebraicamente cerrado k.

6.1. Equivalencia Lineal

El objetivo principal de esta sección es asociar a cada elemento del grupo de Picard $Pic(X)$ de X un espacio vectorial sobre k. Para lograr dicho objetivo vamos a definir una relación de equivalencia, conocida como equivalencia lineal, en el $\mathbb{Z}-$módulo de divisores $Div(X)$ sobre X.

Definición 6.1.1. Sean D y D' divisores sobre X. Los divisores D y D' son linealmente equivalentes si $D - D'$ es un divisor principal (ver Definición 4.1.10).

No es difícil verificar que la relación de la Definición 6.1.1 es una relación de equivalencia $\sim$ en $Div(X)$, llamada *relación de equivalencia lineal* .

Más aún, dicha relación es compatible con la estructura algebraica de $Div(X)$ y así, se puede construir de una manera natural el grupo cociente de $Div(X)$ módulo la relación de equivalencia lineal. Luego, observemos que dicho grupo coincide con el grupo de Picard de X (ver [17, Corolario 6.16, p. 145]). De ahora en adelante no haremos una diferencia entre estos dos grupos abelianos, es decir,

$$Pic(X) = \frac{Div(X)}{\sim}.$$

Notemos que si D es un elemento de $Div(X)$, entonces la clase de D en $Pic(X)$ será denotada por $\mathcal{O}_X(D)$. Además, recordemos que la estructura de grupo en $Pic(X)$ está dada bajo la operación de

producto tensorial, esto es

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_X(D_1 + D_2) &= \mathcal{O}_X(D_1) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(D_2), \\ \mathcal{O}_X(-D_1) &= \mathcal{O}_X(D_1)^{-1}, \\ \mathcal{O}_X(0_{Div(X)}) &= \mathcal{O}_X, \end{aligned}$$

para cualesquier divisores D_1 y D_2 sobre X.

Por otro lado, consideremos el siguiente conjunto asociado a un divisor D sobre X :

$$E_D = \{0_k\} \cup \{f \in K(X)^* \mid \text{el divisor } D + (f) \text{ es efectivo}\}.$$

El siguiente lema muestra que E_D tiene un estructura de espacio vectorial sobre k.

Lema 6.1.2. *Con notaciones anteriores, si D es un divisor sobre X, entonces E_D es un espacio vectorial sobre k.*

Demostración. E_D es un espacio vectorial sobre k, pues E_D es un subespacio vectorial de $K(X)$ sobre k. En efecto, por construcción tenemos que $0_k \in E_D$. Ahora, consideremos a D como $\sum_{\Gamma\in\Omega} a_\Gamma \Gamma$, donde $a_\Gamma = 0$ para casi todo $\Gamma \in \Omega$ (ver Definición 4.1.3). Sean f y g elementos de E_D, sin pérdida de generalidad podemos suponer que f, g y $f + g$ no son nulos, así, se sigue que

$$D + (f + g) = \sum_{\Gamma\in\Omega} (a_\Gamma + \nu_\Gamma(f + g))\Gamma.$$

Como $a_\Gamma + \nu_\Gamma(f + g) \geq a_\Gamma + min\{\nu_\Gamma(f), \nu_\Gamma(g)\}$, tenemos que $D + (f + g)$ es un divisor efectivo. Por otro lado, si $\alpha \in k^*$, entonces $(\alpha f) = (f)$ (ver la página 94 de [1]), y de esto concluimos que $\alpha f \in E_D$. ❑

Ahora bien, si los divisores D y D' son linealmente equivalentes, entonces los espacios vectoriales E_D y $E_{D'}$ son isomorfos sobre k, pues la siguiente aplicación es un isomorfismo:

$$\begin{aligned} \varphi : \ E_D &\longrightarrow E'_D \\ f &\longmapsto gf, \end{aligned}$$

donde g es un elemento de $K(X)^*$ tal que $D - D' = (g)$.

Esto suguiere la siguiente definición:

Definición 6.1.3. Sea $\mathcal{D} \in Pic(X)$. Las secciones globales de $\mathcal{D}$ sobre X es el espacio vectorial sobre k dado por:

$$H^0(X, \mathcal{D}) := \{0_k\} \cup \{f \in K(X)^* \mid \text{el divisor } D + (f) \text{ es efectivo}\},$$

donde $D \in Div(X)$ es un representante de $\mathcal{D}$.

6.2. Anillo de Cox

En esta sección se definirá el anillo de Cox de X, y comprobaremos que efectivamente es una $k-$álgebra.

Utilizando las secciones globales de los elementos de $Pic(X)$ vamos a definir el siguiente $\mathbb{Z}-$módulo:

$$Cox(X) = \bigoplus_{\mathcal{D}\in Pic(X)} H^0(X, \mathcal{D}).$$

Más aún, el siguiente lema asegura que $Cox(X)$ tiene una estructura algebraica de un anillo.

Lema 6.2.1. *El $\mathbb{Z}-$módulo $Cox(X)$ es una $k-$subálgebra de $K(X)$, y será llamado el anillo de Cox de X.*

Demostración. Es obvio que $Cox(X)$ es un $\mathbb{Z}-$submódulo de $K(X)$, ya que las secciones globales de cada elemento de $Pic(X)$ es un $\mathbb{Z}-$submódulo de $K(X)$.

Enseguida, sean $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$ elementos de $Pic(X)$, y sea $f_i \in H^0(X, \mathcal{D}_i)$, donde D_i es un representante de $\mathcal{D}_i$, con $i \in \{1, 2\}$ tal que $f_1 f_2$ no es nulo, así, tenemos que

$$D_1 + D_2 + (f_1 f_2) = (D_1 + (f_1)) + (D_2 + (f_2)).$$

Puesto que, $(D_1 + (f_1))$ y $(D_2 + (f_2))$ son divisores efectivos, inmediatamente se sigue que el divisor $D_1+D_2+(f_1 f_2)$ es efectivo. Por lo tanto, $f_1 f_2$ es un elemento de $H^0(X, \mathcal{D}_1 \otimes_{O_X} \mathcal{D}_2)$. Como $k \subseteq Cox(X)$ se concluye que $Cox(X)$ es una $k-$subálgebra de $K(X)$. ❏

6.3. Anillo de Cox del Espacio Proyectivo

Lo siguiente es determinar el anillo de Cox del espacio proyectivo de dimensión n. Por definición sabemos que

$$Cox(\mathbb{P}^n_k) = \bigoplus_{\mathcal{D}\in Pic(\mathbb{P}^n_k)} H^0(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{D}).$$

Esto sugiere que antes debemos calcular el $Pic(\mathbb{P}^n_k)$. Sea $\mathcal{D} \in Pic(\mathbb{P}^n_k)$, existe $D \in Div(X)$ tal que $\mathcal{D} = O_{\mathbb{P}^n_k}(D)$. Supongamos que $D = \sum_{i=1}^{r} a_i \Gamma_i$ para ciertos $r \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2, \ldots, a_r \in \mathbb{Z}$, y en este caso cada divisor primo Γ_i es el conjunto de ceros de un polinomio homogéneo irreducible f_i de $k[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ de grado d_i para cada $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$. Luego, sea $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, así, se sigue que

$V(f_i) \sim d_i V(x_0)$, pues $V(f_i) - d_i V(x_0) = \left(\frac{f_i}{x_0^{d_i}}\right)$. Por lo tanto,

$$\mathcal{D} = \sum_{i=1}^{r} a_i \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(d_i V(x_0)) = \sum_{i=1}^{r} a_i d_i \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(V(x_0)) = (\sum_{i=1}^{r} a_i d_i)\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(V(x_0)).$$

Sea $\mathcal{L}$ la gavilla invertible $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(V(x_0))$, de lo anterior, se concluye que para cada elemento $\mathcal{D}$ de $Pic(\mathbb{P}^n_k)$ existe un entero m tal que $\mathcal{D} = m\mathcal{L}$. Por otro lado, es claro que $m\mathcal{L} \in Pic(\mathbb{P}^n_k)$ para todo $m \in \mathbb{Z}$. Finalmente, $Pic(\mathbb{P}^n_k) = \mathbb{Z}\mathcal{L}$.

Usando lo anterior, tenemos que para cada $\mathcal{D} \in Pic(\mathbb{P}^n_k)$ existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $\mathcal{D} = m\mathcal{L}$, con esto podemos denotar a $\mathcal{D}$ como $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(m)$, así se puede reescribir el anillo de Cox de $\mathbb{P}^n_k$ de la siguiente manera:

$$Cox(\mathbb{P}^n_k) = \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} H^0(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(m)).$$

A continuación, el siguiente resultado muestra que las secciones globales de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(m)$ son triviales para cualquier entero no positivo m.

Lema 6.3.1. *Se satisface los siguientes enunciados:*

1. $H^0(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}) \cong k$.
2. *Si* $m < 0$, *entonces* $H^0(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(m)) = \{0_k\}$.

Demostración.

1. La dimensión del sistema lineal completo asociado al divisor $0_{Div(\mathbb{P}^n_k)}$ sobre k es igual a 0, de modo que $dim_k(H^0(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k})) = 1$. Así, $H^0(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}) \cong k$.
2. Tenemos que el sistema lineal completo asociado al divisor $mV(x_0)$ es vacío. Por lo tanto, $dim_k(H^0(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(m))) = 0$. Con esto concluimos que $H^0(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(m)) = \{0_k\}$.

❏

Para concluir el capítulo determinaremos de manera explícita el anillo de Cox del espacio proyectivo de dimensión n.

Proposición 6.3.2. *El anillo de Cox del espacio proyectivo de dimensión n sobre k es isomorfo al anillo de polinomios de* $n + 1$ *variables sobre k.*

Demostración. El resultado es una consecuencia del hecho de que para cada entero no negativo m existe un isomorfismo dado por:

$$\begin{array}{ccc} H^0(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(m)) & \longrightarrow & k[x_0, x_1, \ldots, x_n]^h_m \\ f & \longmapsto & x_0^m f, \end{array}$$

donde $k[x_0, x_1, \ldots, x_n]^h_m$ denota el espacio vectorial de polinomios homogéneos de grado m sobre k. ❑

Corolario 6.3.3. *$Cox(\mathbb{P}^2_k)$ es isomorfo a $k[x_0, x_1, x_2]$.*

Capítulo 7

Superficies Extremales y Característicamente Extremales

A lo largo de este capítulo, S será una superficie proyectiva lisa definida sobre un campo algebraicamente cerrado k de característica arbitraria. Recordemos que $Nef(S)$ es el monoide de las clases de divisores numéricamente efectivos en el grupo de Néron-Severi $NS(S)$ de S. Además, en este capítulo veremos que se puede asociar a S, de una manera natural, otros dos monoides $Char(S)$ y $[Char(S) : Nef(S)]$ (ver Definiciones 7.2.1 y 7.2.6). En el Lema 7.2.7 vamos a mostrar que $[Char(S) : Nef(S)]$ es un submonoide de $Nef(S)$, y en el caso de que $[Char(S) : Nef(S)] \cap M(S)$ sea igual a $Nef(S) \cap M(S)$, S será llamada *extremal* (ver Definición 7.2.12), se ofrecerán algunos ejemplos de ellas. También, se mostrará que no toda superficie es extremal (ver Observación 7.2.14). Cabe mencionar, que el interés de las superficies extremales se verá reflejado claramente en el Teorema 8.1.2 del siguiente capítulo.

7.1. Sistemas Lineales y sus Puntos Base

El propósito de esta sección es definir el conjunto de puntos base de un sistema lineal (ver Definición 7.1.3). Asimismo, ilustraremos en algunos ejemplos que este conjunto puede ser vacío, finito o infinito.

Definición 7.1.1. Un sistema lineal completo $|D|$ asociado a un divisor D sobre S es el conjunto dado por:

$$|D| = \{\Gamma \in Div(S) \mid \Gamma \text{ es un divisor efectivo, y } \Gamma \sim D\},$$

donde $\sim$ es la relación de equivalencia lineal definida en la Sección 6.1 del Capítulo 6.

Se sabe que un sistema lineal completo es un espacio proyectivo (ver la página 157 de [17]), en particular, el sistema lineal completo $|D|$ asociado a un divisor D sobre S está en biyección con el conjunto $\dfrac{H^0(S, \mathcal{O}_S(D)) \setminus \{0_k\}}{k^*}$ (ver [17, Proposición 7.7, p. 157]).

Definición 7.1.2. Sea D un divisor sobre S. Un subespacio proyectivo $\mathfrak{d}$ del espacio proyectivo $|D|$ es un sistema lineal.

Ahora, lo que sigue es definir el concepto de puntos base de un sistema lineal.

Definición 7.1.3. Sea D un divisor sobre S. Un elemento p de S es un punto base de un sistema lineal δ del sistema lineal completo $|D|$, si p es un elemento del soporte $Supp(D')$ de D', para cada $D' \in \delta$, donde $Supp(E)$ denota la unión de los divisores primos de un divisor E sobre S. El conjunto de los puntos base de δ será denotado por $Bs(\delta)$.

A continuación mostraremos que el conjunto de los puntos base de algún sistema lineal puede ser vacío, finito o infinito.

Ejemplo 7.1.4 (Un sistema lineal completo sin puntos base)**.** Sea L una recta en el plano proyectivo $\mathbb{P}^2_k$ sobre k. El conjunto $Bs(|L|)$ es vacío, pues si $p \in \mathbb{P}^2_k$ fuera un punto base de $|L|$ esto implicaría que todas las rectas de $\mathbb{P}^2_k$ pasan a través de p, lo cual es una contradicción ya que p puede estar en el plano afín $\mathbb{A}^2_k$ y la recta al infinito no pasa a través de p.

Ejemplo 7.1.5 (Un sistema lineal con un número finito de puntos base)**.** Sea δ el conjunto de rectas de $\mathbb{P}^2_k$ que pasan a través de un punto $p \in \mathbb{P}^2_k$, se tiene que $Bs(\delta) = \{p\}$.

Ejemplo 7.1.6 (Un sistema lineal completo con un número infinito de puntos base)**.** Sea $q \in \mathbb{P}^2_k$ y sea E_q el divisor excepcional de la explosión de $\mathbb{P}^2_k$ en q. Luego, el sistema lineal completo $|E_q|$ asociado al divisor efectivo E_q es igual a $\{E_q\}$, así, la cardinalidad de $Bs(|E_q|)$ es infinita.

El siguiente concepto es bien conocido, y será utlizado para mostrar el Lema 7.2.7:

Definición 7.1.7. Sea D un divisor efectivo sobre S, y sea $\mathfrak{d}$ un sistema lineal del sistema lineal completo $|D|$. Una componente fija E de $\mathfrak{d}$ es un divisor efectivo sobre S tal que $D' - E$ es efectivo para cada $D' \in \mathfrak{d}$. En caso de que $\mathfrak{d}$ tenga una componente fija, siempre existirá una componente fija C de $\mathfrak{d}$ tal que $C - E$ es efectivo, para cualquier componente fija E de $\mathfrak{d}$, y dicha componente fija C será llamada la componente fija de $\mathfrak{d}$.

Ejemplo 7.1.8 (Componente fija de $|E_p|$)**.** Con la notaciones del Ejemplo 7.1.6 tenemos que E_p es una componente fija de $|E_p|$. Más aún, E_p es la componente fija de $|E_p|$.

7.2. Superficies Extremales y Característicamente Extremales

Ahora definiremos los conjuntos $Char(S)$ y $[Char(S) : Nef(S)]$ asociados a S, como habíamos mencionado en la introducción de este capítulo, los cuales darán lugar a definir ciertas superficies especiales (ver las Definiciones 7.2.8 y 7.2.12).

Definición 7.2.1. El monoide característico $Char(S)$ de S es el conjunto de elementos $\mathcal{D}$ en $NS(S)$ tal que existe un divisor efectivo D sobre S con $\mathcal{D} = [D]$, y $Bs(|D|) = \emptyset$.

A continuación, daremos un resultado que nos será de gran utilidad en lo sucesivo.

Lema 7.2.2. *Con notaciones anteriores, el monoide característico de S es un subconjunto de $Nef(S)$.*

Demostración. Sea $z \in Char(S)$, de este modo, existe un divisor efectivo Γ sobre S tal que $z = [\Gamma]$ y $Bs(|\Gamma|) = \emptyset$. En particular, esto implica que $|\Gamma|$ no tiene componentes fijas, de lo contrario existiría una componente fija E de $|\Gamma|$, y sin pérdida de generalidad podríamos suponer que E es una curva entera sobre S. Así, todos los puntos de E serían puntos base de $|\Gamma|$. Por consiguiente, sea H una curva entera sobre S, y sea $\Gamma = \alpha_1\Gamma_1 + \alpha_2\Gamma_2 + \cdots + \alpha_r\Gamma_r$ para ciertos $r \in \mathbb{N}$, $\alpha_i \in \mathbb{Z}_+$, donde Γ_i es un divisor primo sobre S para cualquier $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$. Se puede suponer que H es diferente de Γ_j para cada $j \in \{1, 2, \ldots, r\}$ (pues $|\Gamma|$ no tiene componentes fijas), por tanto, la desigualdad $\Gamma.H \geq 0$ es obvia ver [17, Proposición 1.4, p. 360]). En definitiva, z es un elemento de $Nef(S)$. ❑

Ejemplo 7.2.3 (El monoide característico de $\mathbb{P}^2_k$)**.** Sabemos que $Char(\mathbb{P}^2_k)$ es un subconjunto de $M(\mathbb{P}^2_k)$, y del Ejemplo 4.2.17 tenemos que $M(\mathbb{P}^2_k) = \mathbb{Z}_+\mathcal{E}_0$, donde $\mathcal{E}_0$ es la clase de una recta L sobre $\mathbb{P}^2_k$ en $NS(\mathbb{P}^2_k)$. Puesto que, $Bs(|L|)$ es un conjunto vacío (ver Ejemplo 7.1.4), se concluye que $\mathcal{E}_0 \in Char(\mathbb{P}^2_k)$. Por lo tanto, $Char(\mathbb{P}^2_k)$ es igual a $\mathbb{Z}_+\mathcal{E}_0$.

Ejemplo 7.2.4 (El monoide característico de la explosión del plano proyectivo en un número finito de puntos colineales y ordinarios)**.** Con las notaciones del Ejemplo 4.2.24, mostraremos que el monoide característico de Y es igual al monoide Nef de Y. En efecto, solo basta mostrar que $\mathcal{E}_0$ y $\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_j$ para cada $j \in \{1, 2, \ldots, r\}$ son elementos de $Char(Y)$, pues $Char(Y) \subseteq Nef(Y)$ (ver Lema 7.2.2). Tenemos que $\mathcal{E}_0$ es la transformada estricta L de una recta de $\mathbb{P}^2_k$ que no pasa a través los r puntos colineales y ordinarios, y $\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_j$ es la clase de la transformada estricta C_j de una recta en $\mathbb{P}^2_k$ que pasa a través del j–ésimo punto con $j \in \{1, 2, \ldots, r\}$. Más aún, los conjuntos $Bs(|L|)$ y $Bs(|C_j|)$ son vacíos, para cualquier $j \in \{1, 2, \ldots, r\}$. Por lo tanto, $Char(Y)$ es igual a $\mathbb{Z}_+\mathcal{E}_0 + \sum_{i=1}^{r} \mathbb{Z}_+(\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_i)$.

Ejemplo 7.2.5 (El monoide característico de una superficie de Hirzebruch)**.** Sea Σ_n la superficie de Hirzebruch asociada al entero no negativo n. Del inciso 2 del Lema 7.2.2 tenemos que $Char(\Sigma_n)$ es un subconjunto de $Nef(\Sigma_n)$, y recordemos que $Nef(\Sigma_n)$ es igual a $\mathbb{Z}_+(C_n + n\mathcal{F}) + \mathbb{Z}_+\mathcal{F}$ (ver Lema 4.3.7), donde C_n y f son "la" sección excepcional y una fibra de Σ_n, respectivamente. Solo debemos mostar que $C_n + n\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}$ son elementos de $Char(\Sigma_n)$, para esto, observemos que $C_n + nf$ y f son divisores efectivos sobre Σ_n, donde sus clases módulo la equivalencia numérica son $C_n + n\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}$, respectivamente. De [17, Teorema 2.17 b), p. 379] se tiene que $Bs(|C_n + nf|) = \emptyset$. Además, $Bs(|f|) = \emptyset$, pues dos fibras distintas de Σ_n no se intersectan. Con esto concluimos que $C_n + n\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}$ son elementos de $Char(S)$.

Enseguida, asociaremos otro monoide a S.

Definición 7.2.6. El monoide fraccional de las clases efectivas sin puntos base $[Char(S) : Nef(S)]$ de S es el conjunto de elementos $\mathcal{D}$ de $NS(S)$ tal que existe un entero positivo m de manera que $m\mathcal{D}$ es un elemento de $Char(S)$.

El siguiente resultado muestra que los conjuntos $Char(S)$ y $[Char(S) : Nef(S)]$ son submonoides de $Nef(S)$.

Lema 7.2.7. *Se satisfacen los siguientes enunciados:*

1. *El monoide característico $Char(S)$ de S es un subconjunto del monoide fraccional de las clases efectivas sin puntos base $[Char(S) : Nef(S)]$ de S.*
2. *$Char(S)$ es un submonoide de $Nef(S)$.*
3. *$[Char(S) : Nef(S)]$ es un submonoide de $Nef(S)$.*

Demostración.

1. Se sigue inmediatamente de las Definiciones 7.2.1 y 7.2.6.
2. Sabemos que $Char(S)$ es un subconjunto de $Nef(S)$ (ver Lema 7.2.2). Ahora, verifiquemos que $Char(S)$ es un submonoide de $Nef(S)$. Es claro que $[0_{Div(S)}]$ es un elemento de $Char(S)$. Luego, sean x y z elementos de $Char(S)$, se requiere probar que $x + z$ es un elemento de $Char(S)$. En efecto, se puede escribir $x+z = [\Gamma_x+\Gamma_z]$, donde Γ_x y Γ_z son divisores efectivos sobre S tales que $x = [\Gamma_x]$, $z = [\Gamma_z]$, y $Bs(|\Gamma_x|) = Bs(|\Gamma_z|) = \emptyset$. Observemos que $\Gamma_x + \Gamma_z$ es un divisor efectivo, más aún, $Bs(|\Gamma_x + \Gamma_z|) = \emptyset$. Finalmente, $x + z \in Char(S)$.
3. Sea $\mathcal{D} \in NS(S)$ tal que $\mathcal{D} \in [Char(S) : Nef(S)]$, queremos mostrar que $\mathcal{D}$ es *nef*. Por definición, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $m\mathcal{D} \in Char(S)$, en particular, $m\mathcal{D}$ es *nef*. Luego, sea E un divisor efectivo sobre S, por tanto, $mD.E \geq 0$ donde D es un representante de $\mathcal{D}$. Por consiguiente, $D.E \geq 0$, y así, $[Char(S) : Nef(S)] \subseteq Nef(S)$. Ahora mostremos que $[Char(S) : Nef(S)]$ es un submonoide de $Nef(S)$. Evidentemente, $[0_{Div(S)}]$ pertenece a $[Char(S) : Nef(S)]$. Por otro lado, sean $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$ elementos de $[Char(S) : Nef(S)]$, de esto, existen m_1 y m_2 enteros positivos tales que $m_1\mathcal{D}_1$ y $m_2\mathcal{D}_2$ pertenecen a $Char(S)$. No es difícil ver que $m_1m_2(\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2)$ es un elemento de $Char(S)$, y por lo tanto, $\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2 \in [Char(S) : Nef(S)]$. En conclusión, $[Char(S) : Nef(S)]$ es un submonoide de $Nef(S)$.

❏

Como consecuencia del Lema 7.2.7 se tienen las siguientes contenciones de monoides:

$$Char(S) \subseteq [Char(S) : Nef(S)] \subseteq Nef(S). \tag{7.2.1}$$

Esto sugiere estudiar las superficies que satisfacen la igualdad de las contenciones de (7.2.1). Las superficies que satisfacen $[Char(S) : Nef(S)] \cap M(S) = Nef(S) \cap M(S)$ serán excelentes candidatas de superficies con anillos de Cox finitamente generados (ver Teorema 8.1.2). Por ende, las superficies que satisfagan la igual de los extremos también serán excelentes candidatas para la finitud de sus anillos de Cox. Estas ideas motivan la siguiente definición:

Definición 7.2.8. Sea Y una superficie proyectiva lisa definida sobre un campo algebraicamente cerrado. Y es característicamente extremal si su monoide característico $Char(Y)$ es igual a $Nef(Y)$.

A continuación ofrecemos algunos ejemplos de superficies característicamente extremales:

Ejemplo 7.2.9 ($\mathbb{P}^2_k$ es una superficie característicamente extremal)**.** Del Ejemplo 4.2.23 sabemos que $Nef(\mathbb{P}^2_k)$ es igual a $\mathbb{Z}_+\mathcal{E}_0$, así, $Char(\mathbb{P}^2_k) = Nef(\mathbb{P}^2_k)$ (ver Ejemplo 7.2.3). Por lo tanto, $\mathbb{P}^2_k$ es una superficie característicamente extremal.

Ejemplo 7.2.10 (La explosión del plano proyectivo en un número finito de puntos es una superficie característicamente extremal)**.** Si Y es la explosión del plano proyectivo en un número finito de puntos, entonces Y es una superficie característicamente extremal (ver Ejemplo 7.2.4).

El siguiente ejemplo generaliza el resultado del Ejemplo 7.2.10 cuando solo consideramos un punto:

Ejemplo 7.2.11 (Las superficies de Hirzebruch son característicamente extremales)**.** Del Ejemplo 7.2.5, tenemos que toda superficie de Hirzebruch es característicamente extremal.

Lo siguiente por introducir es el concepto de las *superficies extremales*:

Definición 7.2.12. Sea Y una superficie proyectiva lisa definida sobre un campo algebraicamente cerrado. Y es extremal si $[Char(Y) : Nef(Y)] \cap M(Y)$ es igual a $Nef(Y) \cap M(Y)$.

Ejemplo 7.2.13. Toda superficie característicamente extremal es extremal.

Observación 7.2.14. Las contenciones de (7.2.1) pueden ser estrictas. En efecto, sea Y una superficie proyectiva lista definida sobre un campo algebraicamente cerrado tal que Y es minimal (es decir, no contiene ninguna curva de autointersección igual a -1), no es birracionalmente equivalente a una supeficie reglada, y el sistema lineal completo $|K_Y|$ tiene puntos base con $K_Y^2 > 0$, donde K_Y es un divisor canónico sobre Y. Así, del Teorema en [34, p. 613] se sigue que para cierto entero natural r mayor que dos, el sistema lineal completo $|rK_Y|$ no tiene puntos base. Por tanto, $Char(Y)$ está contenido estrictamente en $[Char(Y) : Nef(Y)]$. Por otro lado, existe una superficie que no es extremal, en efecto, si Z es la explosión del plano proyectivo en ocho puntos en posición casi general (ver [7, Definición 1, p. 39]), entonces Z no es extremal (ver [7, Proposición 2, p. 40]).

Capítulo 8

Finitud de los Anillos de Cox de Superficies Proyectivas

En este capítulo daremos un criterio para la finitud de los anillos de Cox de superficies proyectivas (ver Teorema 8.1.2), y aplicaremos este criterio para mostrar la finitud de los anillos de Cox de superficies racionales anticanónicas y superficies racionales fraccionalmente un lápiz (ver Definiciones 8.2.1 y 8.3.1).

8.1. Un Criterio para la Finitud de los Anillos de Cox de Superficies

En esta sección presentaremos un criterio para la finitud de los anillos de Cox de superficies proyectivas usando la noción de las superficies extremales.

A continuación, el siguiente resultado será muy útil para la prueba del Teorema 8.1.2.

Lema 8.1.1. *Sea S una superficie proyectiva lisa definida sobre un campo algebraicamente cerrado de característica arbitraria. Si el monoide efectivo de S es finitamente generado, entonces el monoide Nef de S es finitamente generado.*

Demostración. Supongamos que existen elementos $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \ldots, \mathcal{L}_r$ de $NS(S)$ para cierto $r \in \mathbb{N}$ tales que $M(S) = \mathbb{Z}_+\mathcal{L}_1 + \mathbb{Z}_+\mathcal{L}_2 + \cdots + \mathbb{Z}_+\mathcal{L}_r$. Luego, sabemos que

$$Nef(S) = \{z \in NS(S) \mid z.\mathcal{L}_j \geq 0 \text{ para cada } j \in \{1, 2, \ldots, r\}\}.$$

Así, de [7, Proposición 3, p. 250] se sigue que existen elementos $x_1, x_2, \ldots, x_m$ de $NS(S)$ para algún $m \in \mathbb{N}$ tales que $Nef(S) = \mathbb{Z}_+x_1 + \mathbb{Z}_+x_2 + \cdots + \mathbb{Z}_+x_m$. ❑

Enseguida tenemos el criterio para la finitud de los anillos de Cox de superficies extremales:

Teorema 8.1.2. *Sea S una superficie proyectiva lisa definida sobre un campo algebraicamente cerrado de característica arbitraria. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *El anillo de Cox de S es finitamente generado.*
2. *S satisface las siguientes dos propiedades:*
   a) S es extremal, y
   b) el monoide efectivo de S es finitamente generado.
3. *S satisface las siguientes dos propiedades:*

a) *S es extremal, y*

b) *el monoide Nef de S es finitamente generado.*

DEMOSTRACIÓN. Vamos a mostrar que el inciso 1 implica el inciso 2. Si el anillo de Cox de S es finitamente generado, entonces el monoide efectivo de S es finitamente generado pues el conjunto de los divisores primos sobre S de autointersección negativa es finito, de lo contrario $Cox(S)$ contendría una $k-$subálgebra de grado de trascendencia infinito, a saber, esta $k-$subálgebra sería $k \oplus (\bigoplus_{D \in \Upsilon} H^0(S, \mathcal{O}_S(D)))$, donde Υ es el conjunto de los divisores primos sobre S de autointersección negativa. Enseguida, sea z un elemento de $Nef(S) \cap M(S)$, si el sistema lineal completo $|z|$ de z no tiene puntos base, no hay nada que probar, de lo contrario existe un entero positivo m tal que mz pertenece a $Char(S)$. Así, S es una superficie extremal.

Luego, del Lema 8.1.1 se sigue que el inciso 2 implica el inciso 3.

Ahora prosigamos con la prueba de que el inciso 3 implica el inciso 1. Si S es una superficie extremal y $Nef(S)$ es finitamente generado, entonces $Cox(S)$ es finitamente generado (ver el trabajo de Carlos Galindo y Francisco Monserrat en [11]). ❑

8.2. Superficies Racionales Anticanónicas

En esta sección, con la ayuda del Teorema 8.1.2, daremos una caracterización geométrica para la finitud de los anillos de Cox de superficies racionales anticanónicas, estas superficies son introducidas como sigue:

DEFINICIÓN 8.2.1. Sea S una superficie proyectiva lisa definida sobre un campo algebraicamente cerrado. S es una superficie racional anticanónica si S es racional y si el sistema lineal completo $|-K_S|$ de $-K_S$ no es vacío, donde K_S denota a un divisor canónico sobre S.

Enseguida ofrecemos algunos ejemplos de superficies racionales anticanónicas.

EJEMPLO 8.2.2. Las superficies de Hirzebruch son superficies racionales anticanónicas.

EJEMPLO 8.2.3. La explosión del plano proyectivo sobre un campo en un número finito de puntos colineales (pueden ser infinitamente cercanos) es una superficie racional anticanónica.

EJEMPLO 8.2.4. La explosión del plano proyectivo sobre un campo en un número finito de puntos de una cónica del plano proyectivo es una superficie racional anticanónica.

LEMA 8.2.5. *Sea S una superficie racional anticanónica. El monoide efectivo $M(S)$ de S es finitamente generado si, y solo si hay un número finito de curvas sobre S de autointersección igual a -1 y de autointersección igual a -2.*

DEMOSTRACIÓN. Ver [22, Corolario 4.2, p. 109]. ❏

Una aplicación del Teorema 8.1.2 es el siguiente resultado, el cual caracteriza geométricamente la finitud de los anillos de Cox de las superficies racionales anticanónicas:

TEOREMA 8.2.6. *Sea S una superficie racional anticanónica. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *El anillo de Cox de S es finitamente generado.*
2. *El monoide efectivo de S es finitamente generado.*
3. *Existen un número finito de curvas sobre S de autointersección igual a -1 y de autointersección igual a -2.*

DEMOSTRACIÓN. Es una consecuencia inmediata del Teorema 8.1.2 y del Lema 8.2.5. ❏

COROLARIO 8.2.7. *El anillo de Cox de una superficie de Hirzebruch es finitamente generado.*

COROLARIO 8.2.8. *El anillo de Cox de la explosión del plano proyectivo sobre un campo en un número finito de puntos que pertenecen a una curva plana entera de grado menor o igual a dos es finitamente generado.*

8.3. Superficies Racionales Fraccionalmente un Lápiz

Un caso especial de las superficies racionales es el de las superficies racionales tal que el sistema lineal completo de un divisor anticanónico es de dimensión proyectiva uno, estas últimas superficies son estudiadas en [26] y en [21]. A continuación presentamos un concepto más general.

DEFINICIÓN 8.3.1. Sea S una superficie racional proyectiva lisa definida sobre un campo algebraicamente cerrado. S es fraccionalmente un lápiz si existe un entero positivo r tal que el sistema lineal completo $|-rK_S|$ es un lápiz (es decir, es de dimensión proyectiva uno), donde K_S es un divisor canónico sobre S.

EJEMPLO 8.3.2. La explosión del plano proyectivo en la intersección de dos cúbicas planas enteras es una superficie racional anticanónica y fraccionalmente un lápiz. La clasificación de estas superficies se puede encontrar en [26].

Aquí mostramos una caracterización de la finitud de los anillos de Cox de superficies racionales fraccionalmente un lápiz.

Teorema 8.3.3. *Sea S una superficie racional fraccionalmente un lápiz. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *$Cox(S)$ es finitamente generado.*
2. *Existe un número finito de curvas sobre S de autointersección -1.*

Demostración. Aplicando el Teorema 8.1.2 y observando que S tiene un número finito de curvas de autointersección igual a -2, el resultado se satisface. ❑

Bibliografía

[1] Atiyah, Michael F.; Macdonald, Ian G. *Introduction to Commutative Algebra.* Addison-Wesley Publishing Co., Mass.-London-Don Mills, 1969.

[2] Borges-Quintana, Mijail; Borges-Trenard, Miguel A.; Galindo, Carlos. *Improved evaluation codes defined by plane valuations*. Finite Fields and Their Applications, Vol. 16, no. 4, 265-276, 2010.

[3] Campillo, Antonio; Farrán, José I.; Pisabarro, María J. *Evaluation codes at singular points of algebraic differential equations*. Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing, Vol. 18, no. 1-2, 191-203, 2007.

[4] Chen, Xi; Elizondo, Javier; Yang, Yanhong. *Rationality of Euler-Chow series and finite generation of Cox rings.* arXiv:1302.3926 [math.AG].

[5] Cox, David A. *The homogeneous coordinate ring of a toric variety.* Journal of Algebraic Geometry, Vol. 4, no. 1, 17-50, 1995.

[6] De La Rosa Navarro, Brenda Leticia. *Sobre los Parámetros de los Códigos y los Anillos de Cox de Superficies Racionales*. Tesis de Maestría (13 de Agosto de 2009). Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas UNAM-UMSNH. Asesor: M. Lahyane. Coasesor: I. Moreno Mejía.

[7] Demazure, Michel.; Pinkham, Henry C.; Teissier, Bernard. *Séminaire sur les Singularités des Surfaces.* Lecture Notes in Mathematics. Springer, 1980.

[8] Elizondo, Javier; Kurano, Kazuhiko; Watanabe, Kei-ichi. *The total coordinate ring of a normal projective variety.* Journal of Algebra, Vol. 276, no. 2, 625-637, 2004.

[9] Galindo, Carlos. *Evaluation codes defined by valuations*. New advances in cryptography and information coding, 63-75, 2009.

[10] Galindo, Carlos; Monserrat, Francisco. *$\delta-$sequences and evaluation codes defined by plane valuations at infinity*. Proceedings of The London Mathematical Society, Vol. 98, no.3, 714-740, 2009.

[11] Galindo, Carlos; Monserrat, Francisco. *The total coordinate ring of a smooth projective surface*. Journal of Algebra, Vol. 284, 91-101, 2005.

[12] Goppa, Valerii D. *Codes on algebraic curves*. Soviet Mathematics Doklady, Vol. 24, 170-172, 1981.

[13] Goppa, Valerii D. *Algebraico-geometric codes*. Math. USSR Izvestiya, Vol. 21, 75-91, 1983.

[14] Goppa, Valerii D. *Codes and information*. Russ. Math. Surveys, Vol. 39, 87-141, 1984.

[15] Failla, Gioia; Lahyane, Mustapha; Molica Bisci, Giovanni. *Some applications of the set of curves on fibred surfaces to coding theory*. Communications to SIMAI Congress, Vol. 2, 2007.

[16] Harbourne, Brian. *Anticanonical rational surfaces.* Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 349, no.3, 1191 - 1208, 1997.

[17] Hartshorne, Robin. *Algebraic Geometry*. Springer-Verlag, New York, 1977.

[18] Høholdt, Tom.; van Lint, Jack H.; Pellikaan, Ruud. *Algebraic Geometry Codes*. Handbook of Coding Theory, Vol.1, 871-961.

[19] Hu, Yi; Keel, Sean. *Mori dream spaces and GIT.* Dedicated to William Fulton on the occasion of his 60th birthday. Michigan Math. J., Vol. 48, 331-348, 2000.

[20] Lahyane, Mustapha. *On the finite generation of the effective monoid of rational surfaces.* Journal of Pure and Applied Algebra, Vol. 214, no. 7, 1217-1240, 2010.

[21] Lahyane, Mustapha. *Rational surfaces having only a finite number of exceptional curves.* Mathematische Zeitschrift, Vol. 247, no. 1, 213-221, 2004.

[22] Lahyane, Mustapha; Harbourne, Brian. *Irreducibility of* -1*-clases on anticanonical rational surfaces and dfinite generation of the effective monoid*. Pacific J. Math., Vol. 218, no. 1, 101-114, 2005.

[23] Ling, San; Xing, Chaoping. *Coding Theory: A First Course*. Cambridge University Press, 2004.

[24] Liu, Qing. *Algebraic Geometry and Arithmetic Curves.* Oxford University Press, Oxford, 2002.

[25] Maharaj, Hirem. *Explicit constructions of algebraic-geometric codes*. IEEE Transactions on Information Theory, Vol. 51, 714-722, 2005.

[26] Miranda, Rick; Persson, Ulf. *On extremal rational elliptic surfaces.* Mathematische Zeitschrift, Vol. 193, no. 4, 537-558, 1986.

[27] Pretzel, Oliver. *Error-Correcting Codes and Finite Fields*. Oxford University Press, 1996.

[28] Roman, Steven. *Coding and Information Theory*. Springer-Verlag, 1992.

[29] Tsfasman, Michael A.; Vlădut, Serge G. *Algebraic-Geometric Codes*. Kluwer Academic Publishers, 1991.

[30] Tsfasman, Michael A.; Vlădut, Serge G.; Zink, Thomas. *Modular curves, Shimura curves and Goppa codes, better than Vashamov-Gilbert bound*. Math. Nachrichten, Vol. 109, 21-28, 1982.

[31] Ueno, Kenji. *Algebraic Geometry 2: Sheaves and Cohomology*. American Mathematical Society, 1997.

[32] Ueno, Kenji. *Algebraic Geometry 3: Further Study of Schemes*. American Mathematical Society, 1998.

[33] Walker, Judy L. *Algebraic geometric codes over rings*. Journal of Pure and Applied Algebra, Vol. 144, no. 1, 91-110, 1999.

[34] Zariski, Oscar. *The theorem of Riemann-Roch for high multiples of an effective divisor on an algebraic surface*. Annals of Mathematics Second Series, Vol. 76, no. 3, 560-615, 1962.

Índice alfabético