



Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Instituto de Física y Matemáticas

IPA: Un código en SPH-Relativista con buscador eficiente de vecinos paralizado, ad hoc para el estudio de fluidos de prueba al rededor de espacios tiempos curvos

Tesis
que para obtener el grado de

Doctor en Ciencias en el área de Física

presenta

Juan Pablo Cruz Pérez

Morelia, Michoacán. Agosto del 2014

Director de tesis José Antonio González

Instituto de Física y Matemáticas,
UMSNH.

Índice general

Abstract	1
Resumen	1
1. Introducción	3
2. Hidrodinámica en espacio-tiempo plano y curvo	5
2.1. Primera ley de la termodinámica:	5
2.2. Tensor de Energía-Momento:	6
2.3. Fluidos Perfectos.	7
2.4. Las leyes de conservación.	9
2.5. Hidrodinámica en el espacio tiempo curvo	9
3. Descripción Lagrangiana de las ecuaciones de Movimiento de un fluido	13
3.1. Formalismo 3+1	13
3.2. La conservación del número bariónico	16
3.3. La conservación del tensor de energía-momento	16
3.3.1. La ecuación para el momento relativista	17
3.3.2. La ecuación de la energía relativista	17
3.4. Modificaciones para el método de SPH	18
4. Discretización de las Ecuaciones de SPH	21
4.1. Discretización de la Conservación del número bariónico	25
4.2. Discretización del momento relativista	25
4.3. Discretización de la energía relativista.	27
4.4. Viscosidad Artificial	28
4.4.1. La forma de la viscosidad artificial	28
5. Implementación del Método	31
5.1. Datos Iniciales	31
5.2. Evolución de las ecuaciones discretas a la SPH	31
5.3. Recobrando las variables primitivas	32
6. Buscador Eficiente de Vecinos	35
6.1. Búsqueda Eficiente de Vecinos	35
6.2. Clasificación	35
6.3. Caminata sobre todas las celdas.	37
6.3.1. Aplicación del Ordenador	38
6.4. Censo	39
6.4.1. Búsqueda	39
6.4.2. Acceso directo a los vecinos próximos	40
6.4.3. Partículas de Frontera	40
6.4.4. Búsqueda con fronteras periódicas	40
6.5. Implementación	43
7. Paralelización del BEV (MPI)	49

7.1. Caja Máxima	49
7.1.1. División de la Caja Máxima Global	50
7.2. Asignación de coordenadas enteras	50
7.3. Ordenador de Raíz	51
7.4. Censo	52
7.5. Búsqueda	53
8. Estrellas Relativistas en equilibrio tipo Oppenheimer-Volkoff	55
8.1. Polítropas	57
8.1.1. Datos iniciales para la OV	57
8.2. Resultados Numéricos	59
8.3. Pruebas con Viscosidad Artificial y sin Viscosidad Artificial	59
8.4. Pruebas con diferentes resoluciones(VA)	60
8.5. Criterio de Convergencia	72
9. Acreción Radial de Michel	79
9.1. Resultados Numéricos	82
10. Tubos de Choque	93
11. Inestabilidad de Kelvin-Helmholtz	99
12. Conclusiones	107
Appendices	109
A. Ordenador de Raíz	111
B. Big O-Notation	113

Abstract

In this work we have developed a code for solving numerically the relativistic hydrodynamic equations on a fixed curved space-time. We have used a lagrangian free mesh method named Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH). With this code we can explore physical systems such that the curved space-time is negligible affected by the presence of the fluid and the dynamics of the fluid. On the other hand we can work with stationary or static solutions for the hydrodynamic equations on a certain curved space-time. This kind of methods are slow when the resolution is increased, however we have implemented a method in order to deal with this issue: an efficient neighbour searcher. This method improves the time of processing from $O(N^2)$ to $O(N)$. We also suggest a criterion for convergence of the SPH simulations. At the end of this work we show two physical applications on a curved space-time and other two on a flat space-time in order to calibrate the IPA code.

Keywords: SPH, Numerical Relativity, Relativistic Hydrodynamics.

Resumen

En este trabajo de tesis hemos desarrollado un código que aproxima la solución a las ecuaciones de la hidrodinámica relativista en el espacio tiempo curvo fijo, mediante un método numérico lagrangiano no estructurado llamado Hidrodinámica Suavizada de Partículas o SPH de sus siglas en inglés. De tal manera que podemos hacer simulaciones de materia que no afecte a la curvatura del espacio tiempo considerablemente. Estos métodos son muy lentos cuando aumentamos la resolución numérica del problema, por lo que hemos implementado un método que agiliza el cálculo de los promedios a la SPH, dicho método se llama Buscador Eficiente de Vecinos. Reduciendo el tiempo de cálculo de un tiempo del orden $O(N^2)$ a un tiempo de $O(N)$. Sugerimos una criterio para probar si el método esta haciendo una buen aproximación numérica a la solución exacta mediante el análisis de la norma L_1 del error. Mostramos también dos pruebas hidrodinámicas en el espacio tiempo curvo y otras dos en el espacio tiempo plano, de tal forma que nos ayudan a calibrar el código IPA.

Palabras clave: SPH, Relatividad Numérica, Hidrodinámica Relativista.

Capítulo 1

Introducción

En la naturaleza suceden procesos muy interesantes a nivel astrofísico en los cuales se pueden encontrar fluidos acretaados en agujeros negros. De los más comentados se encuentran los procesos de acreción de materia alrededor de objetos compactos que se encuentran en el centro de las galaxia, y que son fuentes potenciales de rayos X y de otras partículas energéticas que existen en el universo. También se encuentra el colapso de una estrella para formar un agujero negro o un agujero negro en un sistema binario. En todas estas situaciones la materia posee momento angular, en particular, una estrella rotante que colapsa en un agujero negro puede dejar atrás mucho material con gran cantidad de momento angular formando un disco y siendo acretaado posteriormente por el objeto compacto recién formado.

Para poder simular correctamente este tipo de procesos, varios fenómenos han de ser considerados para su correcto tratamiento. Sin embargo, algo que no se puede descartar es que en el estudio de las ecuaciones de Einstein se encuentran acopladas a las ecuaciones de movimiento de un fluido.

Este tipo de problemas puede ser simplificado si se supone que la masa total de la materia que se está acertando es pequeña, comparada con la masa del agujero negro. Entonces podemos calcular la dinámica del fluido en un espacio tiempo fijo.

Aún así, el problema no es trivial para resolverse de forma analítica, por lo que el uso de los recursos numéricos se vuelve indispensable para aproximar soluciones en este tipo de sistemas.

Nosotros hemos explorado una herramienta numérica que resulta ser no estructurada, es decir, que no necesita de una malla fija como Diferencias Finitas. La Hidrodinámica de Partículas Suavizadas (SPH) es un método Lagrangiano porque a cada nodo de evaluación se le asigna el carácter de partícula de fluido, y sobre él se calculan todas las propiedades físicas que necesitamos para la evolución.

A mayor acumulación de partículas en una región del espacio, le corresponderá un mayor valor de la densidad, y viceversa. Esta es una de las principales propiedades de SPH, que es un método autoadaptativo.

Sin embargo, el método SPH de forma primitiva es muy lento al momento de su ejecución. Esto se debe a que para construir un valor físico, como la densidad en un nodo, el proceso requiere del orden de $O(N)$ operaciones donde N es el número total de partículas. Para llevar a cabo este proceso sobre todas las partículas, se deben realizar del orden $O(N^2)$ operaciones.

Existen trabajos previos a este que usan estructuras de árbol para encontrar los vecinos más cercanos que son los que realmente afectan en el cálculo de los promedios en los entornos de una partícula. Estos han logrado ser del orden de $O(N \log N)$ [1].

En este trabajo mostramos la implementación de un método que se usa en otras disciplinas tales como la computación gráfica o animación de fluidos para juegos de computadora. Resulta en la teoría ser de orden lineal $O(N)$ [2].

Además, se muestra la idea que está detrás de la paralización del código que hemos llamado IPA (Arreglo de partículas con Índices), el cual se ha realizado con la biblioteca de MPI.

Con el fin de evitar la evolución de las ecuaciones de Einstein, hemos realizado pruebas en espacio tiempo curvo que presenten perfiles estacionarios y estáticos para poder estudiar como es que el ruido numérico debido a la forma que SPH coloca inicialmente la posición de las partículas

afecta en la simulación numérica.

Sugerimos técnicas para rastrear que tan confiable es una simulación SPH dependiendo del número de partículas que se usan para la simulación. Mostramos algunas gráficas que sustentan estas suposiciones acerca de los errores medios en cada uno de los procesos. Las pruebas físicas que se muestran en este trabajo están íntimamente relacionados con el comportamiento de la materia alrededor de objetos compactos: la configuración en equilibrio hidrostático modela una estrella como una configuración de gas esféricamente simétrico mediante un fluido con una ecuación de estado politrópica, esta no representa acreción pero simula una autogravitación [3] [4]. La acreción de materia alrededor de un objeto compacto de Schwarzschild descrito por la métrica de Eddington-Finkelstein es un perfil estacionario que simula un fluido en caída radial [5] [6]. Por último, se muestran las simulaciones en espacio tiempo plano: el tubo de choque, que representa la solución numérica del problema de Riemann [7]. Por otra parte, también se muestra una inestabilidad de Kelvin-Helmholtz.

Esta tesis se presenta de la siguiente forma: en el capítulo 2 se describen como son las ecuaciones que rigen la hidrodinámica en espacio tiempo plano y curvo. En el capítulo 3 reescribimos las ecuaciones de movimiento para el fluido desde un punto de vista lagrangiano en su forma conservativa. En el capítulo 4 mostramos una formal discretización de las ecuación de movimiento usando la aproximación estándar de SPH y en el 5 mostramos como se implementa el método. En el 6 se describe el buscador eficiente de vecinos y en el 7 la paralelización del mismo. Mientras tanto en el 8 la configuración hidrostática de una estrella, 9 se muestran las pruebas de acreción de materia alrededor de un agujero negro de Schwarzschild. En el capítulo 10 se muestran los resultados de los tubos de choque y en el 11 una aplicación que muestra una inestabilidad de Kelvin-Helmholtz. Finalizamos con las conclusiones en el capítulo 12.

Capítulo 2

Hidrodinámica en espacio-tiempo plano y curvo

Podemos considerar un fluido como aquel en el que además de considerar el movimiento de sí como un todo, se toman en cuenta las velocidades de cada partícula que lo conforma y que considera las fuerzas entre ellas que modifican la energía potencial del mismo.

Para definir las cantidades macroscópicas de un fluido, nos fijaremos en un elemento de fluido visto desde el marco de referencia comóvil al fluido (MRCF). Es decir, consideraremos un sistema de coordenadas que viaja junto con el fluido. Ya que en general el fluido puede estar acelerado, el MRCF será comóvil a él solo momentáneamente. Además, dos elementos de fluido diferentes poseen en general, diferentes MRCF.

Una cantidad escalar asociada con un elemento de fluido en relatividad especial tal como la densidad de número bariónico, densidad de energía y temperatura, tomarán sus valores desde un MRCF. A continuación presentamos una tabla de cantidades macroscópicas de los fluidos que describen a un fluido.

Nombre	Definición :: Símbolo
4 – <i>velocidad</i> de un elemento de fluido	4 – <i>velocidad</i> del MRCF :: \vec{U}
densidad de número	número de partículas por unidad de volumen :: n
vector de flujo	$\vec{N} := n\vec{U} :: \vec{N}$
densidad de energía	densidad de masa-energía total :: ρ
densidad de energía en reposo	$\rho_o := mn :: \rho_o$
temperatura	definición usual termodinámica en MRCF :: T
presión	definición usual en MRCF :: P
entropía específica	entropía por partícula :: S

2.1. Primera ley de la termodinámica:

Cada elemento de fluido puede caracterizarse por las cantidades mostradas anteriormente pero para saber como cambian de acuerdo a la dinámica es necesario aplicar la primera ley de la termodinámica a cada elemento, estableciendo que cada uno puede intercambiar energía con sus alrededores de dos formas:

- por conducción de calor, es decir, absorbiendo una cantidad dQ y
- por el trabajo hecho sobre sus entornos, $dW = pdV$ donde V es el volumen.

Podemos establecer que el cambio total en la energía de un elemento de fluido puede ser escrito como

$$dE = dQ - pdV. \quad (2.1)$$

Ya que la densidad de número n es la cantidad de partículas por unidad de volumen, podemos escribir la siguiente expresión

$$V = \frac{N}{n}, \quad dV = -\frac{N}{n^2}dn, \quad (2.2)$$

N es el número de partículas dentro del elemento de volumen V . Usando la definición de la densidad de masa-energía medida desde el MRCF tenemos

$$E = \rho V = \rho \frac{N}{n}. \quad (2.3)$$

Diferenciando la energía E y usando (2.2)

$$dE = \rho dV + V d\rho = -\rho \frac{N}{n^2} dn + \frac{N}{n} d\rho. \quad (2.4)$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (2.1), obtenemos una expresión para dQ

$$dQ = dE + p dV = \frac{N}{n} d\rho - N(\rho + p) \frac{dn}{n^2}. \quad (2.5)$$

Aquí hemos usado nuevamente la expresión para dV de la ecuación (2.2). Definiendo la cantidad de calor absorbida por partícula como $q \equiv Q/N$ obtenemos

$$ndq = n \frac{dQ}{N} = d\rho - \frac{\rho + p}{n} dn, \quad (2.6)$$

donde hemos usado directamente dQ de la ecuación (2.5). Estableceremos sin demostrar que el estado de un fluido puede describirse completamente mediante dos parámetros, por ejemplo ρ y n y decir que toda función depende de estas dos variables, por ejemplo que $p := p(\rho, n)$. Así, el uso de la teoría de ecuaciones diferenciales de primer orden muestra que el lado derecho de la ecuación (2.6) siempre posee un factor integrante, es decir, que existen dos funciones $A \equiv A(\rho, n)$ y $B \equiv B(\rho, n)$ tales que

$$d\rho - \frac{\rho + p}{n} dn \equiv A dB. \quad (2.7)$$

Si relacionamos *a priori* $dq = T dS$ (recordando la segunda ley de la termodinámica), podemos ver que resulta muy natural tomar la temperatura T como A/n y la entropía específica dS como B . No siendo esto una demostración de la segunda ley de la termodinámica, sino una elección matemáticamente conveniente, dando la ecuación:

$$d\rho - \frac{\rho + p}{n} dn = nT dS, \text{ o bien} \quad (2.8)$$

$$dq = T dS. \quad (2.9)$$

Dicho en otras palabras, el calor absorbido por un elemento de fluido es proporcional al incremento de su entropía.

2.2. Tensor de Energía-Momento:

El flujo de energía o momento a través de una superficie puede ser escrito mediante la ayuda del tensor de energía-momento para algún sistema de referencia arbitrario $\{x^\alpha\}$:

$$T(\tilde{d}x^\alpha, \tilde{d}x^\beta) = T^{\alpha\beta}, \quad (2.10)$$

donde cada $\alpha - \beta$ -componente representa el flujo del α momento, p^α , a través de la superficie de x^β constante del elemento de fluido en el observador.

Definición 2.1 (α -momento). *Se define el α -momento de un elemento de fluido como el par natural dado por su momento \vec{p} y la 1-forma dx^α :*

$$p^\alpha \equiv \langle \tilde{d}x^\alpha, \vec{p} \rangle. \quad (2.11)$$

A continuación mostramos una tabla con las cantidades físicas que representa cada componente de este tensor:

Componente	Definición
T^{00}	densidad de energía
T^{0i}	flujo de energía através de la superficie $x^i = constante$
T^{i0}	flujo del i momento através de la superficie de $t = constante$
T^{ij}	flujo del i momento através de la j superficie

Si damos las componentes en un sistema de referencia en particular en el MRCF, el tensor puede expresarse en cualquier otro sistema inercial.

Describamos a continuación el caso del *polvo* en el MRCF, donde solamente $U^0 \neq 0$ y entonces no hay momento de las partículas. De este modo los $p^i = 0$ donde $i = 1, 2, 3$ son todos nulos y todos los flujos espaciales son cero también, obteniendo que las componentes se escriben como:

$$T_{polvo,MRCF}^{00} = \rho = mn, \quad (2.12)$$

$$T_{polvo,MRCF}^{0i} = T_{polvo,MRCF}^{i0} = T_{polvo,MRCF}^{ij} = 0, \quad (2.13)$$

donde m es la masa por barión y n , como en casos anteriores es la densidad de número.

Para un fluido en general, podemos calcular el tensor en el MRCF. De aquí que la corriente del fluido es nula, así como el momento espacial en las partículas. Entonces podemos decir que en este sistema de referencia:

- la densidad de energía dado por T^{00} es ρ ,
- el flujo de energía T^{0i} , aunque no existe movimiento la energía se puede transmitir por una conducción de calor. Así, en este sistema de referencia T^{0i} es un término de conducción de calor,
- la componente T^{i0} se ve como la densidad de momento, y nuevamente sabemos que las partículas no tienen momento, pero sabemos que conducen calor, como sabemos el calor es una forma de energía. Tenemos que $T^{i0} = T^{0i}$.
- por último, calculamos el flujo de momento T^{ij} : esto es el flujo del i momento através de la j -superficie.

2.3. Fluidos Perfectos.

Un fluido perfecto en relatividad está definido como aquel que no posee viscosidad y que no tiene conducción de calor en el MRCF. Este se puede ver como una generalización del gas ideal que tratamos en la teoría de la termodinámica. Lo único más simple que él es el polvo.

Veamos como estas suposiciones simplifican en tensor de energía momento en un MRCF:

- Ya que la energía solamente puede fluir si es que existe flujo de partículas, entonces aquella parte del tensor que transmitía el calor o energía se anula, es decir, $T^{0i} = T^{i0} = 0$.
- La viscosidad es una fuerza paralela a la interface entre partículas. Si decimos que esta no existe, entonces T^{ij} es idénticamente cero salvo para T^{ii} . Por lo cual obtenemos que las componentes espaciales del tensor de energía momento T^{ii} es una matriz diagonal y más aún es una matriz diagonal en todos los MRCF, ya que el hecho de que no exista viscosidad es independiente del los ejes espaciales.

La única matriz diagonal en todos los marcos de referencia es un múltiplo de la identidad y entonces todos los elementos de la diagonal tienen el mismo valor. Es un resultado natural tomar a este parámetro como la presión, p . Entonces $T^{ij} = p\delta^{ij}$.

La forma del tensor en el MRCF tiene las componentes:

$$(T^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

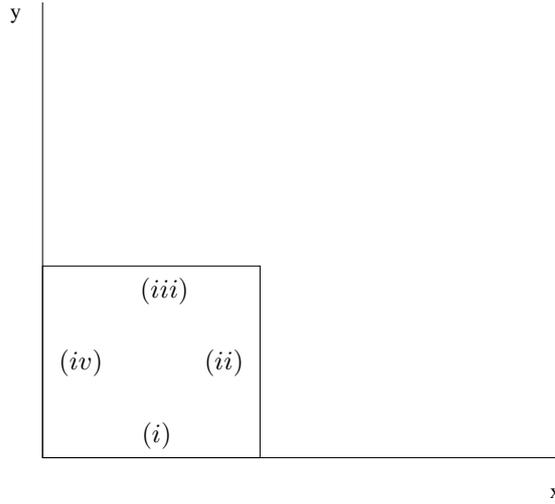


Figura 2.1: Una sección $z = \text{constante}$ de un elemento cúbico de fluido

, o bien, si la escribimos en términos del cuadri-vector de velocidad del MRCF así como de la métrica de espacio tiempo plano:

$$T^{\alpha\beta} = (\rho + p)U^\alpha U^\beta + p\eta^{\alpha\beta}. \quad (2.14)$$

Ya que este tensor representa la energía y el momento del fluido, debe existir una forma de usarlo de tal forma que nos permita expresar una ley de conservación de energía y momento. Podemos apreciar esto de considerando un elemento cúbico de fluido, como en la figura (2.1) donde apreciamos solamente una sección transversal del corte.

La energía puede fluir en cada una de las caras del cubo. El cambio del flujo sobre la cara (iv) es $l^2 T^{0x}(x=0)$, y sobre (ii) es $-l^2 T^{0x}(x=l)$, este término posee el signo menos ya que T^{0x} representa la energía fluyendo en la dirección positiva de x que es hacia fuera de la cara (ii). Análogamente, la energía fluyendo en la dirección y es $l^2 T^{0y}(y=0) - l^2 T^{0y}(y=l)$. La suma de estos cambios debe ser el cambio en la energía dentro del elemento, es decir, $\partial(T^{00}l^3)/\partial t$ debido a la conservación de la energía. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} l^3 T^{00} &= l^2 [T^{0x}(x=0) - T^{0x}(x=l) + T^{0y}(y=0) \\ &- T^{0y}(y=l) + T^{0z}(z=0) - T^{0z}(z=l)]. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Al dividir entre el volumen del elemento l^3 y tomando el límite cuando $l \rightarrow 0$, tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial t} T^{00} = -\frac{\partial}{\partial x} T^{0x} - \frac{\partial}{\partial y} T^{0y} - \frac{\partial}{\partial z} T^{0z}. \quad (2.16)$$

Esto se puede reescribir como

$$T^{0\alpha}_{,\alpha} = 0. \quad (2.17)$$

Con esto se establece la conservación de la energía. Para la conservación del momento las mismas operaciones aplican cuando cambiamos la componente cero por el índice espacial correspondiente. Entonces, la ley de conservación de forma general es

$$T^{\alpha\beta}_{,\beta} = 0. \quad (2.18)$$

En un elemento de volumen se puede considerar que el número de partículas que lo ocupan varía de acuerdo a los flujos que existen en cada una de sus fronteras. Podemos escribir esto como

$$\partial_t N^0 = -\partial_x N^x - \partial_y N^y - \partial_z N^z, \quad (2.19)$$

o bien

$$N^\alpha_{,\alpha} = 0. \quad (2.20)$$

2.4. Las leyes de conservación.

Ya que el tensor de energía-momento contiene toda la información física del fluido, entonces es natural pensar que a partir de él, se puede obtener la conservación de todas y cada una de sus cantidades. Esta se puede expresar de la siguiente forma

$$T^{\alpha\beta}_{,\beta} = 0. \quad (2.21)$$

Como podemos ver, β es un índice que se suma bajo la convención de Einstein, y por tanto, tenemos cuatro ecuaciones, una para cada α . De aquí podremos obtener una ley de conservación para la energía relativista así como para el momento relativista.

Considerando (2.21) así como la conservación del número bariónico y la identidad $U^\alpha U_\alpha = -1$, tenemos que

$$nU^\beta \left(\frac{\rho + p}{n} U^\alpha \right)_{,\beta} + p_{,\beta} \eta^{\alpha\beta} = 0. \quad (2.22)$$

La contracción de esta ecuación con U_α es lo mismo que considerar la componente cero, de esta algebra se obtiene

$$\frac{d\rho}{d\tau} - \frac{\rho + p}{n} \frac{dn}{d\tau} = 0, \quad (2.23)$$

mientras que para las otras componentes necesitamos tomar la misma ecuación restringida en los índices $\alpha = i = 1, 2, 3$ en la ecuación mostrada anteriormente

$$nU^\beta \left(\frac{\rho + p}{n} U^i \right)_{,\beta} + p_{,\beta} \eta^{i\beta} = 0. \quad (2.24)$$

Ya que en el MRCF $U^i = 0$, más no las derivadas parciales $U^i_{,\beta}$, al desarrollar la expresión anterior obtenemos

$$(\rho + p)U^i_{,\beta} U^\beta + p_{,i} = 0. \quad (2.25)$$

De la definición de la 4-aceleración $a_i := U_{i,\beta} U^\beta$ la ecuación anterior resulta

$$(\rho + p)a_i + p_{,i} = 0. \quad (2.26)$$

2.5. Hidrodinámica en el espacio tiempo curvo

Como hemos visto, las ecuaciones anteriores son aquellas que gobiernan el movimiento de un fluido perfecto en el espacio tiempo plano. Sin embargo, gracias al postulado de la equivalencia fuerte, el cual establece que cualquier ley física expresada en la notación tensorial en relatividad especial tiene exactamente la misma forma en cualquier sistema de coordenadas locales de un espacio tiempo curvo.

Podemos extraer de aquí la versión que formará parte principal para el estudio de fluidos relativistas en espacios tiempo curvos. Entonces, podemos enunciar que las ecuaciones de movimiento para fluidos viene descrita por la conservación del tensor de energía momento:

$$T^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0, \quad (2.27)$$

donde hemos pasado de tener solamente la β derivada parcial, a una derivada covariante compatible con la métrica del espacio tiempo en el que se encuentra inmerso el fluido. Obviamente,

siguiendo el mismo postulado, podemos pasar de la conservación de número bariónico en relatividad especial a la equivalente en relatividad general. Así tenemos

$$(nU^\beta)_{;\beta} = 0. \quad (2.28)$$

Las ecuaciones (2.27) y (2.28) son leyes de conservación locales, ya que no existe un sistema de coordenadas que cubra globalmente un espacio tiempo curvo.

Entonces el tensor de energía momento para un fluido perfecto, gracias al principio de equivalencia fuerte, se puede escribir de la forma

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)U^\mu U^\nu + pg^{\mu\nu}. \quad (2.29)$$

De la ecuación de conservación del tensor de energía momento tenemos que

$$0 = T^\nu_{\mu;\nu} = [(\rho + p)u^\nu u_\mu]_{;\nu} + [pg^{\mu\nu}]_{;\nu}. \quad (2.30)$$

De aquí obtenemos al aplicar la ν derivada covariante

$$(\rho + p)_{,\nu} u^\nu u_\mu + (\rho + p)u^\nu_{;\nu} u_\mu + (\rho + p)u^\nu u_{\mu;\nu} + p_{,\mu} = 0, \quad (2.31)$$

donde hemos usado que para una función escalar, la derivada covariante se toma como una derivada parcial. Ahora, para obtener la componente de esta ecuación a lo largo de la 4-velocidad, tenemos que contraer con u :

$$0 = (\rho + p)_{,\nu} U^\nu U_\mu U^\mu + (\rho + p)U^\nu_{;\nu} U_\mu U^\mu + (\rho + p)U^\nu U_{\mu;\nu} U^\mu + p_{,\nu} U^\nu, \quad (2.32)$$

de donde podemos usar que la 4-velocidad está normalizada $U_\mu U^\mu = -1$ y además de hacer algunas operaciones sobre esta identidad, se puede obtener que $U^\beta U_{\beta;\alpha} = 0$ y así la ecuación anterior se reduce a la siguiente expresión

$$0 = -(\rho + p)_{,\nu} U^\nu - (\rho + p)U^\nu_{;\nu} + p_{,\mu} U^\mu, \quad (2.33)$$

de donde las derivadas de la presión se cancelan

$$0 = -\rho_{,\nu} U^\nu - (\rho + p)U^\nu_{;\nu}. \quad (2.34)$$

Esta ecuación es la misma en esencia que la que se obtuvo para el espacio tiempo plano en la sección anterior. Haciendo uso de la conservación del número bariónico en el espacio tiempo curvo, tenemos que

$$0 = (nU^\nu)_{;\nu} = n_{,\nu} U^\nu + nU^\nu_{;\nu}, \quad (2.35)$$

de donde obtenemos que

$$0 = \frac{\rho + p}{n} U^\mu n_{,\mu} - U^\mu \rho_{,\nu}. \quad (2.36)$$

Definiendo para cualquier función $A(x^\mu)$ tenemos $\frac{dA}{d\tau} := U^\mu A_{;\mu}$ tenemos que la ecuación anterior

$$-\frac{d\rho}{d\tau} + \frac{\rho + p}{n} \frac{dn}{d\tau} = 0. \quad (2.37)$$

Notemos que es la primera ley de la termodinámica aplicada sobre la línea del flujo. Si a esto añadimos la suposición de que la entropía por barión es conservada, tenemos

$$\frac{ds}{d\tau} = 0. \quad (2.38)$$

Para las tres componentes espaciales de la ecuación de conservación de momento, usaremos el tensor de proyección

$$P^{\alpha\beta} := g^{\alpha\beta} + U^\alpha U^\beta, \quad (2.39)$$

aplicado sobre las componentes de la 4-velocidad tenemos que $P_\sigma^\mu U_\mu = 0$. Además tenemos que $P_\sigma^\mu U_{\mu;\sigma} = U_{\sigma;\nu} + U_\sigma U_{\mu;\nu}^\mu$, donde usando $U^\mu U_{\mu;\nu} = 0$ obtenemos que

$$P_\sigma^\mu U_{\mu;\sigma} = U_{\sigma;\nu}. \quad (2.40)$$

Obtenemos de la ecuación

$$0 = (\rho + p) U_{\sigma;\nu} + p_{,\mu} P_\sigma^\mu, \quad (2.41)$$

aplicando el proyector a la μ derivada parcial

$$(\rho + p) U^\nu U_{\sigma;\nu} + p_{,\sigma} + U_\sigma U^\mu p_{,\mu} = 0, \quad (2.42)$$

de la definición de aceleración $a_\sigma := U^\nu U_{\sigma;\nu}$,

$$(\rho + p) a_\sigma + U p_{,\sigma} + U_\sigma U^\mu p_{,\mu} = 0. \quad (2.43)$$

Esta ecuación es similar a la que se encontró para el caso de espacio tiempo plano. Sin embargo, tiene término extra que son la contribución de la curvatura del espacio tiempo.

Capítulo 3

Descripción Lagrangiana de las ecuaciones de Movimiento de un fluido

Nuestro punto de partida son las formulaciones covariantes de las ecuaciones de la hidrodinámica relativista para un fluido perfecto, éstas son la conservación del número bariónico

$$(\rho_o U^\mu)_{;\mu} = 0, \quad (3.1)$$

y la conservación de la energía y momento, dada por

$$T_{;\nu}^{\mu\nu} = (\rho_o h) U^\mu U^\nu + p g^{\mu\nu}. \quad (3.2)$$

Aquí ρ_o es nuevamente densidad de masa en reposo, U^μ es la 4-velocidad del fluido, p es la presión termodinámica y $h = 1 + \epsilon + p/\rho_o$ es la entalpía específica relativista con ϵ como la energía específica interna. Aquí $g_{\mu\nu}$ es la métrica del espacio tiempo fijo.

Todas las cantidades termodinámicas en el tensor de energía momento vienen medidas con respecto al sistema de referencia comóvil al fluido.

Para una formulación Lagrangiana de las ecuaciones hidrodinámicas relativistas que sean adecuadas para SPH, uno debe romper la unidad del espacio-tiempo que hereda la formulación covariante. Esto puede ser logrado aplicando el formalismo ADM [9], donde el espacio tiempo es descompuesto en una foliación infinita de hipersuperficies espaciales Σ_t de coordenada tiempo constante.

3.1. Formalismo 3+1

En relatividad general y especial, la diferencia entre las dimensiones espaciales y la dimensión temporal no está del todo claro. Esto depende del observador que realice cierta medición. Así que, debido a esta ambigüedad desearíamos tener un método para describir un sistema que está evolucionando en el tiempo como cuando lo percibimos habitualmente en nuestra vida cotidiana en la naturaleza [8].

Una forma de realizar esto es construir rebanadas hipersuperficies espaciales 3-dimensionales de tiempo constante t . En otras palabras, el espacio tiempo es foliado en una familia uniparamétrica de hipersuperficies separadas por desplazamientos diferenciales en la coordenada temporal.

Un formalismo que nos permite realizar este tipo de foliaciones ha sido ampliamente estudiado por Arnowitt, Desner y Misner, de donde dicho formalismo ha tomado el nombre de *ADM* o formalismo (3 + 1)[3] [9].

Sobre cada hipersuperficie de t constante podemos definir un vector unitario temporal normal a ella \vec{n} con el cual definimos una 3-métrica que sirve para medir los sobre la hipersuperficie Σ_t

$$\gamma_{ij} = g_{ij} + n_i n_j. \quad (3.3)$$

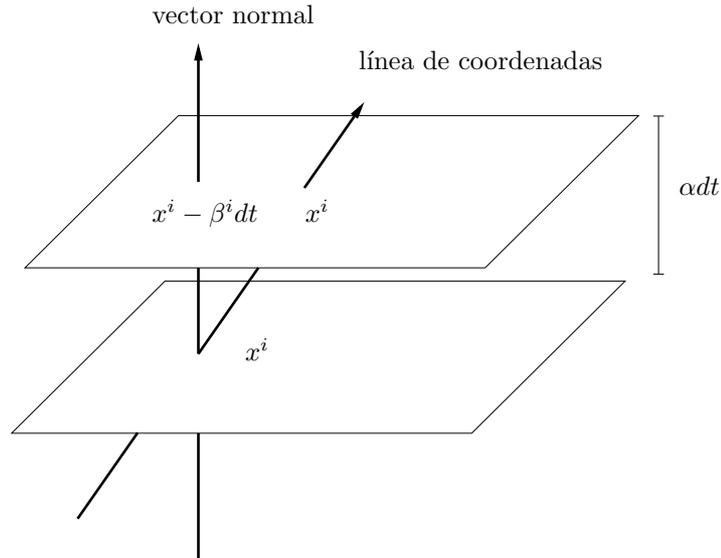


Figura 3.1: Acomodo de las partículas para la prueba de Kevin-Hemholtz, donde la relación entre las densidades es de 2 : 1.

La distancia entre dos puntos sobre Σ_t está dado por

$$dl^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j. \quad (3.4)$$

El tiempo propio de un observador euleriano, aquel que se mueve en dirección de la normal a Σ_t viene dado por

$$d\vec{\tau} = dt \vec{n}. \quad (3.5)$$

El formalismo *ADM* da la libertad de vincular el punto \vec{x} sobre Σ_t con otro punto en la hipersuperficie contigua Σ_{t+dt} , \vec{y} . La posición del observador euleriano en general que está en \vec{x} en Σ_t no es coincidente con \vec{y} en Σ_{t+dt} .

Definición 3.1 (Observador coordenado). *Cuando tenemos que $\vec{y} = \vec{x}$ en Σ_{t+dt} decimos que el observador adquiere el carácter de observador coordenado. Esto se puede lograr usando*

$$y^i = x^i + \beta^i. \quad (3.6)$$

aquí β^i son las componentes del vector de desplazamiento.

Definición 3.2 (Métrica ADM). *El teorema de Pitágoras 4-dimensional adopta la siguiente forma*

$$ds^2 = \gamma_{ij} (dx^i + \beta^i dt)(dx^j + \beta^j dt) - (\alpha dt)^2. \quad (3.7)$$

Esto es la distancia propia en base a la geometría 3-dimensional al cuadrado menos el tiempo propio entre la geometría 3-dimensional inferior Σ_t y la superior Σ_{t+dt} . O de la forma que es más familiar en la literatura

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -(\alpha^2 - \beta_i \beta^i) dt^2 + 2\beta_i dx^i dt + \gamma_{ij} dx^i dx^j, \quad (3.8)$$

donde hemos usado que $\beta_i = \eta_{ij} \beta^j$.

En su forma matricial y como es conveniente para el desarrollo de este trabajo podemos ver que la métrica se escribe como

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\alpha^2 + \beta_k \beta^k & \beta_i \\ \beta_j & \gamma_{ij} \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

y que la inversa viene dada por la métrica

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1/\alpha^2 & \beta_i/\alpha^2 \\ \beta_j/\alpha^2 & \gamma^{ij} - \beta^i\beta^j/\alpha^2 \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Podemos observar que el determinante de la métrica 4-dimensional se puede escribir como

$$\sqrt{-g} = \alpha\sqrt{\gamma}, \quad (3.11)$$

donde g es el determinante de la métrica 4-dimensional y γ el determinante de la métrica 3-dimensional.

Sin embargo, existe otro observador que se puede construir y que será de gran utilidad en el formalismo lagrangiano.

Definición 3.3 (Observador Lagrangiano). *Aquel observador que tiene como 4-velocidad la del elemento de fluido \vec{U} . Es decir, que mide los cambios usando un marco de referencia comóvil al fluido.*

El método de hidrodinámica de partículas suavizadas es un método no estructurado, y los cambios de las variables física de interés se siguen montados en sistemas de referencia móviles que siguen un observador lagrangiano.

A continuación describiremos una formulación lagrangiana de las ecuaciones de movimiento para los fluidos en espacio tiempo curvo. Para esto, tomamos en cuenta la conservación del número bariónico y del tensor de energía momento. Al igual que en el espacio tiempo plano, de este desarrollo obtendremos un conjunto de 3 ecuaciones para cada una de las componentes del momento relativista, y una para la conservación de la energía.

Es necesario para esto construir la derivada lagrangiana o advectiva. Para ello, como lo mencionamos anteriormente, queda definida para un observador lagrangiano.

En la base formada por $\{\vec{n}, \partial_i\}$ la 4-velocidad se representa como

$$\vec{U} = W (\vec{n} + \bar{v}^i \partial_i), \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.12)$$

junto con la descripción de la coordenada temporal

$$\partial_t = \alpha \vec{n} + \vec{\beta} = \alpha \vec{n} + \beta^i \partial_i, \quad (3.13)$$

tenemos que la 4-velocidad

$$\vec{U} = U^\mu \partial_\mu = \frac{W}{\alpha} (\partial_t + v^i \partial_i) \quad (3.14)$$

con

$$v^i = \alpha \bar{v}^i - \beta^i. \quad (3.15)$$

Usando la condición de normalización de la 4-velocidad, $U^\mu U_\mu = -1$, tenemos que el factor de Lorentz generalizado es

$$W = \frac{1}{\sqrt{1 - \gamma_{ij} \bar{v}^i \bar{v}^j}}. \quad (3.16)$$

Con ayuda de la 4-velocidad del observador comóvil al fluido, construimos la derivada lagrangiana o advectiva

$$\frac{d}{dt} = \frac{\alpha}{W} U^\mu \partial_\mu = \partial_t + v^i \partial_i. \quad (3.17)$$

De aquí en adelante nos encargaremos de reescribir la ley de conservación del número bariónico y las ecuaciones de conservación del tensor de energía-momento en su formulación lagrangiana, pero además de forma conservativa.

3.2. La conservación del número bariónico

Haciendo uso de $(V^\mu)_{;\mu} = \sqrt{-g}\partial_\mu(\sqrt{-g}V^\mu)$ podemos aplicarlo a la ley de conservación del número bariónico, haciendo $V^\mu \equiv \rho_o U^\mu$ y por lo tanto tenemos

$$0 = \partial_\mu(\sqrt{-g}\rho_o U^\mu) = \partial_t(\sqrt{-g}\rho_o U^0) + \partial_i(\sqrt{-g}\rho_o U^i). \quad (3.18)$$

Sabemos por definición que $U^0 = \frac{W}{\alpha}$ y que $U^i = \frac{W}{\alpha}v^i$, y haciendo un despeje de (3.17) tenemos que $\partial_t = \frac{d}{dt} - v^i\partial_i$

$$\frac{d}{dt}D^* + D^*\partial_i v^i = 0, \quad (3.19)$$

donde hemos definido la *densidad relativista* como

$$D^* = \sqrt{-g}\frac{W}{\alpha}\rho_o = \sqrt{\gamma}W\rho_o. \quad (3.20)$$

En algunos artículos se usa como variable de evolución a $D = W\rho_o$ en vez de D^* . Sin embargo, nosotros tomamos a D^* ya que como veremos más adelante, esta cantidad es la que al integrarse sobre una hipersuperficie de t constante determina la masa en reposo que se conserva a través de la evolución.

Hemos visto que la ley del número bariónico ha sido expresada en términos de la derivada lagrangiana en la parte izquierda de la ecuación (3.19) mientras que la parte derecha ha sido escrita en términos de función y/o derivadas espaciales de ellas. Esto es fundamental cuando en las siguientes secciones encontremos la versión discreta a la SPH.

Continuamos escribiendo en términos de la derivada lagrangiana la energía relativista y las tres componentes del momento relativista.

3.3. La conservación del tensor de energía-momento

Primeramente escribiremos la versión lagrangiana de la ecuación de conservación correspondiente. Para esto, tenemos que desarrollar la ley de conservación del tensor de energía momento

$$T^\nu_{\mu;\nu} = \rho U^\nu (hu_\mu)_{;\nu} + \partial_\mu p. \quad (3.21)$$

En esta ecuación podemos ver que el primer término que la con la ν -derivada covariante se puede escribir como

$$U^\nu (hu_\mu)_{;\nu} = \frac{\gamma}{\alpha} \frac{d}{dt} (hu_\mu) - \frac{1}{2} h g_{\alpha\beta,\mu} U^\alpha U^\beta. \quad (3.22)$$

Entonces la ecuación (3.21) se puede escribir como

$$\frac{d}{dt} (hu_\mu) = \frac{\alpha}{nW} \left[\partial_\mu p - \frac{1}{2} n W U^\alpha u^\beta g_{\alpha\beta,\mu} \right]. \quad (3.23)$$

Haciendo uso de la identidad $\partial_\mu(\sqrt{-g})/\sqrt{-g} = g^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta,\mu}/2$, podemos completar el término del tensor de energía momento en el segundo término del lado derecho de la ecuación anterior

$$\frac{d}{dt} (hu_\mu) = \frac{1}{D^*} \left\{ \partial_\mu(\sqrt{-g}p) - \frac{\sqrt{-g}}{2} T^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta,\mu} \right\}. \quad (3.24)$$

Como veremos a continuación, cuando a partir de esta ecuación tomemos las componentes espaciales $\mu = i = 1, 2, 3$ el propósito de que del lado izquierdo existan derivadas temporales, mientras que al lado izquierdo sean puras derivadas espaciales se ha cumplido. Más no es así para el caso cuando se toma $\mu = 0$, ya que aparece la derivada temporal del lado derecho de la ecuación. Esto requerirá de trabajo extra que describiremos en las siguientes secciones.

3.3.1. La ecuación para el momento relativista

Como lo anunciamos previamente, tomamos las componentes $\mu = 1, 2, 3 =: i$, así tenemos que

$$U_i = g_{i\mu}U^\mu = g_{i0}U^0 + \gamma_{il}U^l, \quad (3.25)$$

$g_{i0} = \beta_i$, $g_{il} = \gamma_{il}$ y por otra parte $U^0 = W/\alpha$ y $U^l = Wv^j/\alpha$ por lo que las componentes espaciales

$$U_i = \beta_i \frac{W}{\alpha} + \gamma_{ij} \frac{W}{\alpha} v^j = W \gamma_{ij} \frac{(\beta^j + v^j)}{\alpha} = W \gamma_{ij} \bar{v}^j. \quad (3.26)$$

Entonces podemos definir el *momento relativista* como

$$S_i \equiv hU_i = hW \gamma_{ij} \bar{v}^j, \quad (3.27)$$

y por lo tanto, la ecuación de evolución para el momento relativista viene en términos de la derivada advectiva es

$$\frac{dS_i}{dt} = \frac{1}{D^*} \left\{ \partial_i (\sqrt{-gp}) - \frac{\sqrt{-g}}{2} T^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta,i} \right\}. \quad (3.28)$$

Esta ecuación tiene del lado derecho las derivadas espaciales, mientras que el lado izquierdo posee la derivada temporal advectiva. Procederemos con la componente temporal que nos definirá la energía relativista.

3.3.2. La ecuación de la energía relativista

De forma análoga ahora tenemos que tomar la componente $\mu = 0$ y por tanto

$$u_0 = g_{0\mu}U^\mu = g_{00}U^0 + g_{0i}U^i, \quad (3.29)$$

y haciendo uso de $g_{00} = -(\alpha^2 - \beta_i\beta^i)$, $g_{0i} = g_{i0} = \beta_i$ y $U^0 = \frac{\gamma}{\alpha}$, $U^i = \frac{Wv^i}{\alpha}$, podemos escribir

$$u_0 = (\beta_i\beta^i - \alpha^2) \frac{W}{\alpha} + \beta_i \frac{W}{\alpha} v^i = W (\gamma_{ij}\beta^i\bar{v}^j - \alpha) = \beta^i S_i/h - \alpha W. \quad (3.30)$$

Así tenemos que la componente hu_o se ve como

$$hu_o = -\alpha hW + \beta^i S_i, \quad (3.31)$$

$$\frac{d}{dt} (hu_o) = -\frac{1}{D^*} \left\{ \partial_t (\sqrt{-gp}) - \frac{\sqrt{-g}}{2} T^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta,0} \right\} \quad (3.32)$$

Como podemos observar, en el lado izquierdo de la ecuación tenemos la derivada euleriana con respecto al tiempo, la cual se debe escribir en términos de la advertida, para esto, tenemos

$$\partial_t (\sqrt{-gp}) = \frac{d}{dt} (\sqrt{-gp}) - v^i \partial_i (\sqrt{-gp}), \quad (3.33)$$

y entonces tenemos que

$$\frac{1}{D^*} \partial_t (\sqrt{-gp}) = \frac{1}{D^*} \frac{d}{dt} (\sqrt{-gp}) - \frac{1}{D^*} v^i \partial_i (\sqrt{-gp}), \quad (3.34)$$

el término que contiene la derivada advectiva se puede modificar usando

$$\frac{d}{dt} \left(\sqrt{-g} \frac{p}{D^*} \right) = \frac{1}{D^*} \frac{d}{dt} (\sqrt{-gp}) - \sqrt{-gp} \frac{1}{D^{*2}} \frac{dD^*}{dt} = \frac{1}{D^*} \frac{d}{dt} (\sqrt{-gp}) + \sqrt{-gp} \frac{1}{D^*} \partial_i v^i. \quad (3.35)$$

En la última igualdad se uso (3.19), la ley de conservación del número bariónico en términos de la derivada lagrangiana. Haciendo uso de esta información en la ecuación anterior,

$$\frac{1}{D^*} \partial_t (\sqrt{-g}p) = \frac{d}{dt} \left(\sqrt{-g} \frac{p}{D^*} \right) + \frac{1}{D^*} [\sqrt{-g}p \partial_i v^i + v^i \partial_i (\sqrt{-g}p)], \quad (3.36)$$

podemos ubicar rápidamente en la última suma la derivada de un producto que nos permite reescribir el término de la derivada temporal como

$$\frac{1}{D^*} \partial_t (\sqrt{-g}p) = \frac{d}{dt} \left(\sqrt{-g} \frac{p}{D^*} \right) + \frac{1}{D^*} \partial_i (\sqrt{-g}p v^i). \quad (3.37)$$

Sustituyendo en la ecuación para la evolución de la coordenada temporal, tenemos

$$\frac{d}{dt} \left(hu_0 + \sqrt{-g} \frac{p}{D^*} \right) = -\frac{1}{D^*} \left\{ \partial_i (\sqrt{-g}p v^i) + \frac{\sqrt{-g}}{2} T^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta,0} \right\}. \quad (3.38)$$

Reescribiendo el término que se está derivando en la parte izquierda de la ecuación anterior, tenemos

$$hu_0 + \sqrt{-g} \frac{p}{D^*} = -\alpha hW + \beta^i S_i + \frac{\alpha}{\rho W} p = -\alpha \left[hW - \frac{p}{\rho W} \right] + \beta^i S_i, \quad (3.39)$$

y aquí podemos definir la *energía relativista específica total* como

$$E = hW - \frac{p}{D}, \quad D = \rho W, \quad (3.40)$$

por lo que tenemos que la ecuación se escribe como

$$\frac{d\bar{E}}{dt} = -\frac{1}{D^*} \left\{ \partial_i (\sqrt{-g}p v^i) + \frac{\sqrt{-g}}{2} T^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta,0} \right\}, \quad (3.41)$$

donde $\bar{E} = \alpha E - \beta^i S_i$.

La componente del tensor energía momento $T(\vec{n}, \partial_i) = -DS_i$ es la densidad de momento relativista. Por otra parte tenemos que $DE = T(\vec{n}, \vec{n})$ es la densidad de energía relativista. Para cerrar el sistema de ecuaciones dado por la ecuación de conservación de número bariónica, las cuatro provenientes de la conservación del tensor de energía-momento, tenemos que añadir una ecuación de estado $p = p(\rho_o, \varepsilon)$. En nuestro trabajo nos reduciremos a la ecuación de estado de un gas ideal

$$p = (\Gamma - 1)\rho_o \varepsilon, \quad (3.42)$$

donde Γ es la constante de un gas ideal para un proceso adiabático.

3.4. Modificaciones para el método de SPH

Antes que pasar a la discretización de las ecuaciones para el método numérico SPH, debemos mostrar como es que la viscosidad artificial puede introducirse desde el tensor de energía momento, simplemente sustituyendo

$$p \rightarrow p + q, \quad (3.43)$$

donde q es la viscosidad artificial necesaria para trabajar con discontinuidades en cada una de las variables macroscópicas del fluido de estudio. Esta forma de tratar el fluido es un modelo que aproxima la teoría de fluidos viscosos que se muestra en el libro cuya referencia es [10]. Así, el tensor de energía momento resulta

$$T^{\mu\nu} = (\rho h + q)U^\mu U^\nu + (p + q)g^{\mu\nu}. \quad (3.44)$$

Como una receta general en las ecuaciones principales, aparte del cambio de p por $p + q$ cuando aparece la entalpía específica h , cambia por $h + q/\rho$.

Más adelante definiremos la viscosidad artificial para lidiar con discontinuidades. Podremos evolucionar cada una de las cantidades relativistas definidas con anterioridad: D^* (3.40), S_i (3.27) y E o \bar{E} (3.40).

Para un Σ_{t_o} inicial, tenemos las cantidades hidrodinámicas genéricas ρ , \bar{v}^i y p , con estas definimos las cantidades relativistas D^* , S_i y E y podremos evolucionar hasta Σ_{t_o+dt} , de estas nuevas cantidades relativistas habremos de obtener las variables primitivas. Esto lo mencionaremos más adelante cuando expliquemos la discretización de las ecuaciones de movimiento. Ahí también daremos la forma explícita de la viscosidad artificial que se usa en este trabajo.

Capítulo 4

Discretización de las Ecuaciones de SPH

Existen dos formas de llegar a las ecuaciones de movimiento discretizadas. Una forma procede del trabajo realizado por [11] [12], donde se discretiza un Lagrangiano y se aplican las ecuaciones de Euler-Lagrange.

En este trabajo tomaremos un camino que consiste básicamente de dos aproximaciones: (1) la representación integral y (2) el cambio de la integral por una suma discreta. A continuación escribimos de forma más precisa en que consisten estas dos aproximaciones:

Sea $f : V \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ podemos usar

- El remplazo de la delta de Dirac en la identidad por una aproximación

$$f(\vec{x}) = \int_V f(\vec{x}') \delta(\vec{x} - \vec{x}') d^3x' = \int_{\Omega(h)} f(\vec{x}') W(|\vec{x} - \vec{x}'|, h) d^3x + O(h^2), \quad (4.1)$$

de aquí tenemos que la primera aproximación se puede escribir como

$$\langle f(\vec{x}) \rangle = \int_{\Omega(h)} f(\vec{x}') W(|\vec{x} - \vec{x}'|, h) d^3x. \quad (4.2)$$

donde W es la función de suavizado o Kernel y $\Omega(h) \subset V \subset \mathbb{R}^3$ es su dominio de definición. El Kernel W es una función de soporte compacto y que en el límite cuando $h \rightarrow 0$, la función aproxima de delta de Dirac.

Existen diferentes formas para el Kernel que se usan en la literatura. Más adelante mencionaremos cual es el que nosotros usaremos en nuestras simulaciones.

- La segunda aproximación consiste en aproximar la integral por una suma

$$\langle f(\vec{x}) \rangle \approx \sum_b f(\vec{x}_b) W(\vec{x} - \vec{x}_b) \Delta V_b. \quad (4.3)$$

Esta aproximación es fácilmente deducible del hecho de sustituir en la representación integral a la densidad de número [1]

$$\langle n(\vec{x}) \rangle = \sum_b \delta(\vec{x} - \vec{x}_b), \quad (4.4)$$

entonces al multiplicar y dividir por $\langle n(\vec{x}) \rangle$ tenemos

$$\begin{aligned}
\langle f(\vec{x}) \rangle &= \int_{\Omega(h)} f(\vec{x}') \frac{\sum_b \delta(\vec{x}' - \vec{x}_b)}{\langle n(\vec{x}') \rangle} W(|\vec{x} - \vec{x}'|, h) d^3 x' \\
&= \sum_b \int_{\Omega(h)} f(\vec{x}') \frac{\delta(\vec{x}' - \vec{x}_b)}{\langle n(\vec{x}') \rangle} W(|\vec{x} - \vec{x}'|, h) d^3 x' \\
&\approx \sum_b \frac{f(\vec{x}_b)}{\langle n(\vec{x}_b) \rangle} W(|\vec{x} - \vec{x}_b|, h). \tag{4.5}
\end{aligned}$$

Por otra parte, la densidad de número se puede escribir usando el marco de referencia computacional [12] como

$$\langle n(\vec{x}_b) \rangle = n_b = N/\Delta V_b, \tag{4.6}$$

al sustituir la densidad de número en la última línea de la ecuación anterior obtenemos en consecuencia la expresión (4.3).

De aquí en adelante debemos observar que si hablamos de una aproximación $\langle f \rangle$ la integral ya no es sobre el volumen del fluido sino sobre el volumen definido por el dominio de definición del Kernel W .

La aproximación para la derivada de una función escalar se obtiene de forma similar

$$\langle \nabla f(\vec{x}) \rangle = \int [\nabla' f(\vec{x}')] W(|\vec{x} - \vec{x}'|, h) d^3 x', \tag{4.7}$$

aquí usaremos que $\nabla' [f(\vec{x}')W(|\vec{x} - \vec{x}'|, h)] = W(|\vec{x} - \vec{x}'|, h)\nabla' f(\vec{x}') + f(\vec{x}')\nabla' W(|\vec{x} - \vec{x}'|, h)$, de donde al despejar el término del integrando, obtenemos que

$$\langle \nabla f(\vec{x}) \rangle = \int \nabla' [f(\vec{x}')W(|\vec{x} - \vec{x}'|, h)] d^3 x' - \int f(\vec{x}')\nabla' W(|\vec{x} - \vec{x}'|, h) d^3 x'. \tag{4.8}$$

La primera integral del lado derecho de esta ecuación se anula usando el teorema de Gauss, ya que el kernel sobre todos los términos de la frontera son nulos (esto debido a que W es de soporte compacto). Mientras que usando que el kernel es esférico, es fácil ver que $\nabla' W(|\vec{x} - \vec{x}'|, h) = -\nabla W(|\vec{x} - \vec{x}'|, h)$ y por tanto la derivada puede salir de la integral

$$\langle \nabla f(\vec{x}) \rangle = \nabla \int f(\vec{x}')W(|\vec{x} - \vec{x}'|, h) d^3 x' = \nabla \langle f(\vec{x}) \rangle. \tag{4.9}$$

Al realizar la segunda aproximación tenemos

$$\langle \nabla f(\vec{x}) \rangle \approx \sum_b \frac{f_b}{n_b} \nabla_x W(\vec{x} - \vec{x}_b, h). \tag{4.10}$$

Existen otras aproximaciones que se obtiene de forma similar, tal como la divergencia del un campo vectorial definido sobre el espacio Euclideo tres dimensional

$$\langle \nabla \cdot \vec{f} \rangle_a = \sum_b \vec{f}_b \cdot \nabla_a W_{ab}. \tag{4.11}$$

Nos dedicaremos a la discretización de las ecuaciones de movimiento en el espacio tiempo curvo, aplicando las dos aproximaciones al lado derecho de las ecuaciones que contienen operadores con derivadas de funciones.

La misma aproximación es posible de realizar cuando hablamos de una hipersuperficie espacial de t constante Σ_t . Entonces, sea una función $\psi : V \subset \Sigma_t \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces, podemos usar las mismas dos aproximaciones que en con el espacio tiempo plano

- La representación integral puede escribirse como

$$\psi(\vec{x}) = \int_V \psi(\vec{x}') W(\vec{x}, \vec{x}'; h) \sqrt{\eta'} d^3 x' + O(h^2). \quad (4.12)$$

Siguiendo [13], podemos definir para el espacio curvo una función de normalización para el Kernel W que permite escribirlo como una modificación del Kernel esférico w :

$$W(\vec{x}, \vec{x}'; h) = K(\vec{x}') w(v), \quad (4.13)$$

donde $w(v)$ es de spline cúbico definido por primera vez en Lattanzio (1985) [14], y se escribe como

$$w(v) = \alpha_d \begin{cases} \frac{2}{3} - v^2 + \frac{1}{2}v^3 & \text{si } 0 \leq v < 1, \\ \frac{1}{6}(2-v)^3 & \text{si } 1 \leq v < 2, \\ 0 & \text{si } v \geq 2, \end{cases} \quad (4.14)$$

donde $v = |\vec{x} - \vec{x}'|/h$ y $\alpha_d = 1/h, 15/17\pi h^2, 3/2\pi h^3$ para $d = 1, 2, 3$ dimensiones. Es importante mencionar que si tomamos $K = \sqrt{f/\eta}$ en donde \sqrt{f} es el determinante del espacio tiempo plano, entonces se cumple que:

$$\int_{\Omega \subset V \subset \Sigma_t} W(\vec{x}, \vec{x}'; h) \sqrt{\eta'} d^3 x' = \int_{\Omega \subset V \subset \Sigma_t} w(v) \sqrt{f'} d^3 x' = 1, \quad (4.15)$$

por lo que W estará normalizado en Ω una región esférica en las coordenadas $\{x^\alpha\}$ sobre Σ_t siempre que w esté normalizado en espacio plano del marco computacional Euclidiano, donde medimos la distancia entre dos puntos con la norma euclidiana.

- La segunda aproximación proviene de usar la aproximación de Benz [13] que relaciona un número de puntos finitos N con la densidad de número usando la expresión

$$\langle n(\vec{x}) \rangle = \sum_{b=1}^N \frac{1}{\sqrt{\eta}} \delta(\vec{x} - \vec{x}_b). \quad (4.16)$$

Al sustituir esta en la representación integral, tenemos que

$$\begin{aligned} \langle \psi(\vec{x}) \rangle^W &= \int_V \psi(\vec{x}') W(\vec{x}, \vec{x}'; h) \frac{\sum_{b=1}^N \sqrt{\eta'}^{-1} \delta(\vec{x} - \vec{x}_b)}{\langle n(\vec{x}') \rangle} \sqrt{\eta'} d^3 x' \\ &\approx \sum_{b=1}^N \frac{\psi(\vec{x}_b)}{\langle n(\vec{x}_b) \rangle} W(\vec{x}, \vec{x}_b; h). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Por otra parte, si tomamos la definición del kernel $W = \sqrt{f/\eta} w$ tenemos

$$\begin{aligned} \langle \psi(\vec{x}) \rangle^W &= \int_V \psi(\vec{x}') \left[\sqrt{\frac{f'}{\eta'}} w(\vec{x}, \vec{x}'; h) \right] \sqrt{\eta'} d^3 x' \\ &= \int_V \psi(\vec{x}') w(\vec{x}, \vec{x}'; h) \sqrt{f'} d^3 x' = \langle \psi(\vec{x}) \rangle^w. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Sabemos que en un espacio plano, la densidad de número queda definida por la distribución de Benz en el caso particular cuando $\sqrt{\eta} = 1$

$$\langle \bar{n}(\vec{x}) \rangle = \sum_b \delta(\vec{x} - \vec{x}_b), \quad (4.19)$$

de aquí que la relación entre esta densidad de número en el marco computacional y el sistema de coordenadas vienen dado por $\langle \bar{n}(\bar{x}) \rangle = \sqrt{\eta} \langle n(\bar{x}) \rangle$. Por lo tanto, podemos escribir que

$$\begin{aligned} \langle \psi(\bar{x}) \rangle^W &= \int_V \psi(\bar{x}') \sqrt{\frac{f'}{\eta'}} w(\bar{x}, \bar{x}'; h) \sqrt{\eta'} d^3 x' \\ &= \int_V \psi(\bar{x}') w(\bar{x}, \bar{x}'; h) \sqrt{f'} d^3 x' \\ &= \int_V \psi(\bar{x}') w(\bar{x}, \bar{x}'; h) \frac{\sum_b \delta(\bar{x} - \bar{x}_b)}{\langle \bar{n}' \rangle} \sqrt{f'} d^3 x' \approx \sum_b \frac{\psi_b}{\bar{n}_b} w(\bar{x}, \bar{x}_b). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Para la derivada de una función escalar, el proceso es similar que en el Euclideo. Sin embargo, existen modificaciones fundamentales si se toma un Kernel que no es simétrico, $W = Kw$. Para observar esto en detalle, consideremos la derivada de la misma función y calculemos su primera aproximación

$$\begin{aligned} \langle \nabla \psi \rangle^W &= \int \nabla' \psi' W(x, x'; h) \sqrt{\eta'} d^3 x' \\ &= \int \nabla' [\psi' W(x, x'; h)] \sqrt{\eta'} d^3 x' - \int \psi' \nabla' W(x, x'; h) \sqrt{\eta'} d^3 x'. \end{aligned} \quad (4.21)$$

La primera integral de la segunda línea es nula gracias al soporte compacto del Kernel cuando se usa el teorema de Gauss. Sin embargo, aquí a pesar de su enorme parecido con el caso del espacio plano, no podemos decir que $\nabla' W(x, x'; h) = -\nabla W(x, x'; h)$. Es necesario desarrollar el kernel y observar los términos que aparecen

$$\begin{aligned} \langle \nabla \psi \rangle^W &= - \int \psi' \nabla' [K(x') w(x, x'; h)] \sqrt{\eta'} d^3 x', \\ &= - \int \psi' \nabla' K' w(x, x'; h) \sqrt{\eta'} d^3 x' - \int \psi' K' \nabla' w(x, x'; h) \sqrt{\eta'} d^3 x' \\ &= - \int \psi' \nabla' \ln K' w(x, x'; h) \sqrt{\eta'} d^3 x' + \nabla \left[\int \psi' W(x, x'; h) \sqrt{\eta'} d^3 x' \right] \end{aligned} \quad (4.22)$$

En esta última línea hemos usado el hecho de que el kernel w es esférico y por tanto que es válida la expresión $\nabla' w(x, x'; h) = -\nabla w(x, x'; h)$. De aquí, podemos escribir la aproximación para la derivada de una función escalar como la suma de dos aproximaciones,

$$\langle \nabla \psi \rangle^W = - \langle \psi \nabla \ln K \rangle + \nabla \langle \psi \rangle^W. \quad (4.23)$$

Sin embargo, si expresamos todo en términos del kernel esférico w en vez de W obtenemos

$$\begin{aligned} \langle \nabla \psi \rangle^W &= \int \nabla' \psi' W(x, x'; h) \sqrt{\eta'} d^3 x' = \int \nabla' \psi' \sqrt{\frac{f'}{\eta'}} w(x, x'; h) \sqrt{\eta'} d^3 x' \\ &= \int \nabla' [\psi' w(x, x'; h)] \sqrt{f'} d^3 x' - \int \psi' \nabla' w(x, x'; h) \sqrt{f'} d^3 x'. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Usando nuevamente el teorema de Gauss para la primera integral y la propiedad de soporte compacto del Kernel, tenemos que la primera integral de la segunda línea es nula. Usando la propiedad esférica del Kernel $\nabla' w(x, x'; h) = -\nabla w(x, x'; h)$

$$\langle \nabla \psi \rangle^W = \nabla \left[\int \psi' w(x, x'; h) \sqrt{f'} d^3 x' \right] = \nabla \langle \psi \rangle^w. \quad (4.25)$$

La diferencia de esta aproximación con respecto a la obtenida en (4.23) es el Kernel que se usa para expresar las aproximaciones. Escrito de forma explícita en la suma tenemos que

$$\langle \nabla \psi \rangle^W = \nabla \langle \psi \rangle^w \approx \sum_b \frac{\psi_b}{\bar{n}_b} \nabla_x w(x, x_b; h), \quad (4.26)$$

mientras que la ecuación (4.23) se escribe en términos de la suma como

$$\langle \nabla \psi \rangle^W = -\psi_a \nabla \ln K_a + \sum_b \frac{\psi_b}{n_b} \nabla_x W(x, x_b; h). \quad (4.27)$$

4.1. Discretización de la Conservación del número bariónico

Aplicaremos ahora las dos aproximaciones de SPH para obtener la versión discreta de las ecuaciones de movimiento representadas en términos de un kernel esférico. Para esto escribiremos la aproximación de la ecuación de conservación del número bariónico en el punto \vec{x}_a de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dD^*}{dt} \right\rangle_a &= \langle D^* \partial_i v^i \rangle_a = \langle \partial_i (D^* v^i) \rangle_a - \langle v^i \partial_i D^* \rangle_a \\ &= \langle \partial_i (D^* v^i) \rangle_a - \langle v^i \rangle_a \langle \partial_i D^* \rangle_a \\ &= \partial_{i,a} \langle D^* v^i \rangle_a - v_a^i \partial_{i,a} \langle D^* \rangle_a \\ &= \partial_{i,a} \left[\sum_b \frac{D_b^* v_b^i}{\bar{n}_b} w_{ab} \right] - v_a^i \partial_{i,a} \left[\sum_b \frac{D_b^*}{\bar{n}_b} w_{ab} \right] \\ &= - \sum_b \frac{D_b^*}{\bar{n}_b} (v_a^i - v_b^i) \partial_{i,a} w_{ab} \\ &= - \sum_b m_b (v_a^i - v_b^i) \partial_{i,a} w_{ab}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

donde en la última línea se ha usado la aproximación $D^* = \sqrt{\eta} D$ y la definición de la masa en reposo $m_b = D_b/n_b = D_b^*/\bar{n}_b$. Con esto se cumple lo sugerido en el artículo [15], donde conjeturan que existe una gran ventaja en tomar a D^* en lugar de D en la formulación de Laguna y que es posible encontrar un puente natural entre ambos trabajos.

También se puede concebir la integral de la densidad relativista D^* sustituyendo $\psi = D^*$ en la ecuación (4.20) dando como resultado

$$\langle D^*(\vec{x}_a) \rangle^W = \sum_{b=1}^N \frac{D_b^*}{\bar{n}_b} w(\vec{x}_a, \vec{x}_b) = \sum_{b=1}^N m_b w(\vec{x}_a, \vec{x}_b) = \sum_{b=1}^N m_b w_{ab}, \quad (4.29)$$

donde se hace uso de la definición de que $m_b = D_b^*/\bar{n}_b$.

4.2. Discretización del momento relativista

Para derivar la ecuación a la SPH del momento relativista, vamos a reescribir la siguiente expresión

$$\frac{1}{D^*} \partial_i [\sqrt{-g} p] = \sqrt{-g} \left[\partial_i \left(\frac{p}{D^*} \right) + \frac{p}{D^{*2}} \partial_i D^* \right] \quad (4.30)$$

$$+ \frac{p}{D^*} \partial_i \sqrt{-g}. \quad (4.31)$$

Aplicando a esta ecuación la primera aproximación tenemos:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{D^*} \partial_i [\sqrt{-g} p] \right\rangle_a &= \langle \sqrt{-g} \rangle_a \left[\left\langle \partial_i \left(\frac{p}{D^*} \right) \right\rangle_a + \frac{\langle p \rangle_a}{\langle D^* \rangle_a^2} \langle \partial_i D^* \rangle_a \right] \\ &+ \frac{\langle p \rangle_a}{\langle D^* \rangle_a} \partial_i \sqrt{-g}_a \\ &= \langle \sqrt{-g} \rangle_a \left[\partial_{i,a} \left\langle \frac{p}{D^*} \right\rangle_a + \frac{\langle p \rangle_a}{\langle D^* \rangle_a^2} \partial_{i,a} \langle D^* \rangle_a \right] \\ &+ \frac{\langle p \rangle_a}{\langle D^* \rangle_a} \partial_i \sqrt{-g}_a \\ &= \langle \sqrt{-g} \rangle_a \left[\sum_b \frac{p_b}{D_b^* \bar{n}_b} \partial_{i,a} w_{ab} + \frac{\langle p \rangle_a}{\langle D^* \rangle_a^2} \sum_b \frac{D_b^*}{\bar{n}_b} \partial_{i,a} w_{ab} \right] \\ &+ \frac{\langle p \rangle_a}{\langle D^* \rangle_a} \partial_i \sqrt{-g}_a. \end{aligned} \quad (4.32)$$

De aquí es fácil ver que usando la descripción de $D_b^* = \bar{n}_b m_b$ obtenemos que la expresión anterior se reduce a

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{D^*} \partial_i [\sqrt{-g} p] \right\rangle_a &= \langle \sqrt{-g} \rangle_a \left[\sum_b m_b \frac{p_b}{D_b^{*2}} \partial_{i,a} w_{ab} + \frac{\langle p \rangle_a}{\langle D^* \rangle_a^2} \sum_b m_b \partial_{i,a} w_{ab} \right] \\ &+ \frac{\langle p \rangle_a}{\langle D^* \rangle_a} \partial_i \sqrt{-g}_a. \\ &= \langle \sqrt{-g} \rangle_a \left[\sum_b m_b \left(\frac{p_b}{D_b^{*2}} + \frac{p_a}{D_b^{*2}} \right) \partial_{i,a} w_{ab} \right] \\ &+ \frac{\langle p \rangle_a}{\langle D^* \rangle_a} \partial_i \sqrt{-g}_a. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Ahora estamos en posición de obtener la versión discreta de la ecuación de momento relativista (3.28)

$$\left\langle \frac{dS_i}{dt} \right\rangle_a = \left\langle \frac{1}{D^*} \partial_i [\sqrt{-g} p] \right\rangle_a - \frac{1}{D_a^*} \frac{\sqrt{-g}_a}{2} T_a^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta,i,a}, \quad (4.34)$$

al remplazar el valor de la aproximación de la derivada y tomando en cuenta que $\partial_i, a \sqrt{-g}_a / \sqrt{-g}_a = \partial_{i,a} (\ln \sqrt{-g}_a)$ y por tanto la expresión anterior se escribe como

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dS_i}{dt} \right\rangle_a &= \sqrt{-g}_a \left[\sum_b m_b \left(\frac{p_b}{D_b^{*2}} + \frac{p_a}{D_b^{*2}} \right) \partial_{i,a} w_{ab} \right] \\ &- \frac{\sqrt{-g}_a}{D_a^*} \left[p_a \partial_i \ln(\sqrt{-g}_a) - \frac{1}{2} T_a^{\alpha\beta} \partial_{i,a} g_{\alpha\beta,a} \right]. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Nótese que se he realizado la aproximación básica para una función escalar (vectorial) $\langle f \rangle_a \equiv f_a$ ($\langle \vec{f} \rangle_a \equiv \vec{f}_a$).

4.3. Discretización de la energía relativista.

Para la discretización de la ecuación de la evolución de la energía relativista retomamos la expresión (4.36) y comenzamos aplicando la primera aproximación:

$$\left\langle \frac{d\bar{E}}{dt} \right\rangle_a = - \left\langle \frac{1}{D^*} \partial_i \sqrt{-g} p v^i \right\rangle_a + \frac{\sqrt{-g}_a}{2D_a^*} T_a^{\alpha\beta} \partial_t g_{\alpha\beta a}. \quad (4.36)$$

Con el fin de simetrizar el primer término al igual que con las ecuaciones anteriores notamos que

$$\frac{1}{D^*} \partial_i [\sqrt{-g} p v^i] = \frac{\sqrt{-g}}{D^*} \partial_i (p v^i) + \frac{p}{D^*} v^i \partial_i \sqrt{-g}, \quad (4.37)$$

aquí podemos trabajar con el primer término de la derecha de esta identidad

$$\begin{aligned} \frac{1}{D^*} \partial_i (p v^i) &= \frac{1}{D^*} v^i \partial_i p + \frac{p}{D^*} \partial_i v^i \\ &= v^i \left[\partial_i \left(\frac{p}{D^*} \right) + \frac{p}{D^{*2}} \partial_i D^* \right] \\ &+ \frac{1}{2} \left\{ \partial_i \left(\frac{p v^i}{D^*} \right) - v^i \partial_i \left(\frac{p}{D^*} \right) \right\} \\ &+ \frac{p}{D^{*2}} [\partial_i (D^* v^i) - v^i \partial_i D^*]. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Procedemos a aplicar la primera aproximación de este término en el punto \vec{x}_a tenemos

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{D^*} \partial_i (p v^i) \right\rangle_a &= v_a^i \left[\partial_{i,a} \left\langle \frac{p}{D^*} \right\rangle_a + \frac{p_a}{D_a^{*2}} \partial_{i,a} \langle D^* \rangle_a \right] \\ &+ \frac{1}{2} \left\{ \partial_{i,a} \left\langle \frac{p v^i}{D^*} \right\rangle_a - v_a^i \partial_{i,a} \left\langle \frac{p}{D^*} \right\rangle_a \right. \\ &\left. + \frac{p_a}{D_a^{*2}} [\partial_{i,a} \langle D^* v^i \rangle_a - v_a^i \partial_{i,a} \langle D^* \rangle_a] \right\}. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Al realizar la segunda aproximación por la suma, obtenemos

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{D^*} \partial_i (p v^i) \right\rangle_a &= v_a^i \left[\sum_b \frac{p_b}{D_b^* \bar{n}_b} \partial_{i,a} w_{ab} + \frac{p_a}{D_a^{*2}} \sum_b \frac{D_b^*}{\bar{n}_b} \partial_{i,a} w_{ab} \right] \\ &+ \frac{1}{2} \left\{ \sum_b \frac{p_b v_b^i}{D_b^* \bar{n}_b} \partial_{i,a} w_{ab} - v_a^i \sum_b \frac{p_b}{D_b^* \bar{n}_b} \partial_{i,a} w_{ab} \right. \\ &\left. + \frac{p_a}{D_a^{*2}} \left[\sum_b \frac{D_b^* v_b^i}{\bar{n}_b} \partial_{i,a} w_{ab} - v_a^i \sum_b \frac{D_b^*}{\bar{n}_b} \partial_{i,a} w_{ab} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Aquí podemos tomar la definición de la masa en reposo en términos de \bar{n} y D^* y encontramos al factorizar la suma que

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{D^*} \partial_i (p v^i) \right\rangle_a &= \sum_b m_b \left[\frac{v_a^i p_b}{D_b^{*2}} + \frac{v_a^i p_a}{D_a^{*2}} + \frac{p_b v_b^i}{2D_b^{*2}} - \frac{v_a^i p_b}{2D_b^{*2}} + \frac{p_a v_b^i}{2D_a^{*2}} - \frac{p_a v_a^i}{2D_a^{*2}} \right] \partial_{i,a} w_{ab}, \\ &= \sum_b m_b \left[2 \frac{v_a^i}{2} \left(\frac{p_b}{D_b^{*2}} + \frac{p_a}{D_a^{*2}} \right) + \frac{v_b^i}{2} \left(\frac{p_b}{D_b^{*2}} + \frac{p_a}{D_a^{*2}} \right) \right. \\ &- \left. \frac{v_a^i}{2} \left(\frac{p_b}{D_b^{*2}} + \frac{p_a}{D_a^{*2}} \right) \right] \partial_{i,a} w_{ab} \\ &= \frac{1}{2} \sum_b m_b \left(\frac{p_a}{D_a^{*2}} + \frac{p_b}{D_b^{*2}} \right) (v_a^i + v_b^i) \partial_{i,a} w_{ab}. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Con esta expresión podemos retomar la ecuación (4.37)

$$\left\langle \frac{1}{D^*} \partial_i [\sqrt{-g} p v^i] \right\rangle_a = \sqrt{-g_a} \left\langle \frac{1}{D^*} \partial_i (p v^i) \right\rangle_a + \frac{p_a}{D_a^*} v_a^i \partial_{i,a} \sqrt{-g_a}. \quad (4.42)$$

Al sustituir la expresión para el primer término encontramos la ecuación discretizada a la SPH para la energía relativista

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d\bar{E}}{dt} \right\rangle_a &= -\frac{\sqrt{g_a}}{2} \sum_b m_b \left(\frac{p_a}{D_a^{*2}} + \frac{p_b}{D_b^{*2}} \right) (v_a^i + v_b^i) \partial_{i,a} w_{ab} \\ &\quad - \frac{\sqrt{-g_a}}{D_a^*} \left[p_a v_a^i \partial_{i,a} \ln(\sqrt{g_a}) + \frac{1}{2} T_a^{\alpha\beta} \partial_t g_{\alpha\beta} \right]. \end{aligned} \quad (4.43)$$

4.4. Viscosidad Artificial

Al conjunto de ecuaciones discretizadas para el método SPH solo basta añadirles el término de viscosidad artificial que ayudará a tratar los choques que aparecen debido a la no linealidad de las ecuaciones de Euler relativistas. Para esto, como se mencionó, se necesita añadir un término extra a la presión $p \rightarrow p + q$. Por tanto solamente las dos ecuaciones de movimiento en las que aparecen los términos de presión se verán afectadas por la viscosidad artificial.

Cuando en las ecuaciones de la energía y el momento aparece la presión p_a , necesitamos sumar un término extra debido a la viscosidad artificial. Esto se puede hacer usando el remplazo $p_a \rightarrow p_a + q_{ab}$, y para $p_b \rightarrow p_b + q_{ba}$. Esto se debe a que $q_{ab} \neq q_{ba}$ en general. Por lo tanto, en la primera sustitución estamos considerando todas las aportaciones de viscosidad artificial sobre la presión de la a -ésima partícula debido a las b -ésimas, mientras que para cuando se tiene el segundo remplazo se toman las correcciones a la presión de la b -ésima partícula.

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dS_i}{dt} \right\rangle_a &= \sqrt{-g_a} \left[\sum_b m_b \left(\frac{p_b + q_{ba}}{D_b^{*2}} + \frac{p_a + q_{ab}}{D_b^{*2}} \right) \partial_{i,a} w_{ab} \right] \\ &\quad - \frac{\sqrt{-g_a}}{D_a^*} \left[(p_a + q_a) \partial_i \ln(\sqrt{-g_a}) - \frac{1}{2} T_a^{\alpha\beta} \partial_{i,a} g_{\alpha\beta} \right]. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Por otra parte, la ecuación de la energía relativista queda expresada como

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d\bar{E}}{dt} \right\rangle_a &= -\frac{\sqrt{g_a}}{2} \sum_b m_b \left(\frac{p_a + q_{ab}}{D_a^{*2}} + \frac{p_b + q_{ba}}{D_b^{*2}} \right) (v_a^i + v_b^i) \partial_{i,a} w_{ab} \\ &\quad - \frac{\sqrt{-g_a}}{D_a^*} \left[(p_a + q_a) v_a^i \partial_{i,a} \ln(\sqrt{g_a}) + \frac{1}{2} T_a^{\alpha\beta} \partial_t g_{\alpha\beta} \right]. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Como podemos notar, en los términos donde no existe suma el valor de q_a se tiene que calcular con el promedio, pero como $q_{ab} \neq q_{ba}$, es necesario definir el siguiente promedio

$$q_a = \frac{1}{2} \sum_b m_b \left(\frac{q_{ab}}{D_a^*} + \frac{q_{ba}}{D_b^*} \right). \quad (4.46)$$

4.4.1. La forma de la viscosidad artificial

En este trabajo hemos propuesto trabajar con la viscosidad artificial que se usa de forma estándar para SPH [15]. Aunque existen otras formulaciones basadas en la solución del problema de Riemann para las ecuaciones de Euler relativistas, estas requieren de más costo computacional, por lo que hemos optado por usar esta versión estándar en los métodos de SPH.

Definimos la viscosidad artificial sobre la a -ésima partícula debido a su vecina b como

$$q_{ab} = \begin{cases} \rho_a h_a \left[-\tilde{\alpha} c_a h_a \mu_{ab} + \tilde{\beta} h_a^2 \mu_{ab}^2 \right] & \text{si } \mu_{ab} < 0, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases} \quad (4.47)$$

donde el término $\mu_{ab} = (\nabla \cdot v)_{ab}$ la cual se puede aproximar como

$$(\nabla \cdot v)_{ab} \approx \frac{\vec{v}_{ab} \cdot \vec{r}_{ab}}{|\vec{r}_{ab}|^2 + \tilde{\epsilon} \bar{h}_{ab}^2}, \quad (4.48)$$

donde $c_a = \sqrt{\Gamma p_a / (\rho_a h_a)}$ es la velocidad relativista del sonido, $\vec{v}_{ab} = \vec{v}_a - \vec{v}_b$ y $\vec{r}_{ab} = \vec{r}_a - \vec{r}_b$, $\bar{h}_{ab} = (h_a + h_b)/2$. Por otra parte, aparecen parámetros que son elegidos al momento de realizar las pruebas numéricas: $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ y $\tilde{\epsilon}$. Para este trabajo, hemos fijado para todos los casos $\tilde{\alpha} = 1,0$, $\tilde{\beta} = 2,0$ y $\tilde{\epsilon} = 0,01$.

El término que acompaña a $\tilde{\alpha}$ que es lineal en la divergencia de las velocidades, es similar a una viscosidad de volumen y a la viscosidad de cizalla. Mientras que el término que acompaña a $\tilde{\beta}$ es la viscosidad artificial estándar de von Neumann-Richtmyer usado en diferencias finitas para tratar con choques a velocidades de varios números de Mach. [14]

Este tipo de viscosidad artificial genera en los choques cierta viscosidad artificial espúrea, ya que el término responsable de encenderla es $\vec{v}_{ab} \cdot \vec{r}_{ab}$, siempre que este es menor que cero, es decir, cuando detecta aproximación frontal de partículas. Sin embargo, cuando dos partículas se mueven en planos paralelos a velocidades diferentes este término también se enciende y esto puede dar una viscosidad artificial espúrea.

Aunque existen términos que pretender disminuir estos resultados las formulaciones están estudiadas para fluidos clásicos [1] [16], así que por el momento dejaremos fuera este tipo de términos.

Capítulo 5

Implementación del Método

5.1. Datos Iniciales

Para conocer los datos iniciales, es necesario calcular la posición de cierto número de nodos N , que de ahora en adelante llamaremos *partículas*. Estas partículas se encuentran ordenadas de tal forma que al hacer el cálculo de la densidad en reposo con los promedios a la SPH, estos tienen de forma inicial, un error relativo del orden de $O(1/\sqrt{N_{local}})$, donde N_{local} es el número de partículas que son efectivas dentro del dominio de Kernel W .

El método que se usa de forma estándar para generar la distribución de partículas que obedece a la densidad de número es el método de Aceptación-Rechazo. Uno de los procesos más complicados para nosotros ha sido el de la correcta colocación de las partículas en el marco de referencia computacional, en cada una de las secciones de las aplicaciones físicas que mostraremos en este trabajo describimos de forma breve el método que usamos para generar la posición inicial de las partículas en un sistema computacional cartesiano.

En este trabajo, para las simulaciones con densidad de materia constantes se han usado distribuciones tipo cristal y también se han desarrollado distribuciones de configuraciones que se relajaron para disminuir el error relativo con un método que también se ha paralizado modificando *IPA*.

Ahora que tenemos las ecuaciones discretas de movimiento a la SPH para un espacio tiempo fijo, debemos escribir la métrica $g_{\mu\nu}$ en términos de las funciones de lapso α y del vector de desplazamiento β^i , además de la 3-métrica γ_{ij} tal y como lo demanda (3 + 1).

Una vez que se genera la posición de las partículas \vec{x}_a , de tal forma que obedece a la densidad de número $\langle \bar{n} \rangle_a$, se les asigna la densidad en reposo $\rho_{o,a}$, la energía interna ϵ_a , la velocidad \vec{v}_a mientras que la presión se calcula con la ecuación de gas ideal $p = (\Gamma - 1)\rho_{o,a}\epsilon_a$.

Es posible construir a partir de estos datos las variables relativistas correspondientes al momento momento y la energía específicas:

$$S_{i,a} = \left(h_a + \frac{q_a}{\rho_a} \right) W_a \gamma_{ij,a} \bar{v}_a^j, \quad (5.1)$$

$$E_a = \left(h_a + \frac{q_a}{\rho_a} \right) W_a - \frac{p_a + q_a}{D_a}, \quad (5.2)$$

donde $\bar{E}_a = \alpha_a E_a - \beta_a^i S_{i,a}$. El subíndice a significa nuevamente que estamos evaluando las cantidades la partícula con coordenadas \vec{x}_a .

5.2. Evolución de las ecuaciones discretas a la SPH

Una vez que tenemos las variables relativistas $S_{i,a}$, $E_a(\bar{E}_a)$ y D_a^* así como la posición de las partículas \vec{x}_a podemos generar los miembros derechos de las ecuaciones discretas a la SPH para el momento relativista y para la energía relativistas, mientras que la posición de las partículas sigue

la ecuación $dx_a^i/dt = v_a^i$. Tanto los datos iniciales como los miembros derechos de las ecuaciones discretas están evaluados en Σ_t .

Para obtener los datos sobre la siguiente hipersuperficie $\Sigma_{t_o+\Delta t}$ es necesario usar un integrador. En este trabajo hemos usado un Runge-Kutta de cuarto orden, para obtener los valores de $x_a^i(t + \Delta t)$, $S_{i,a}(t + \Delta t)$ y $E_a(t + \Delta t)$.

Es posible encontrar $D^*(t + \Delta t)$ usando la expresión de la suma, o haciendo uso de la ecuación discreta para su evolución.

La viscosidad artificial carece de una ecuación de evolución de la cual podamos obtener los nuevos valores para la hipersuperficie en $t + \Delta t$. Por lo que se usarán los valores de Σ_t para construir su valor las cantidades de la hipersuperficie actual $\Sigma_{t+\Delta t}$.

5.3. Recobrando las variables primitivas

Una vez que se tienen todos los valores de las cantidades relativistas en $\Sigma_{t+\Delta t}$, es necesario recobrar las cantidades primitivas, para esto seguimos el método sugerido en ???. Es necesario remarcar que es necesario una vez modificada la posición de las partículas volver a calcular los elementos de la métrica.

Usando la expresión $h = 1 + p/(G\rho)$ donde $G = 1 - 1/\Gamma$ para la entalpía específica relativista, tenemos que la energía relativista E puede ser escrita como

$$E = hW - (h-1)\frac{G}{W} + \left(W - \frac{1}{W}\right)\frac{q}{\rho} \quad (5.3)$$

$$= \left(W - \frac{G}{W}\right) + \frac{G}{W} + \left(W - \frac{1}{W}\right)\frac{q}{\rho}. \quad (5.4)$$

Resolviendo la ecuación anterior para la entalpía h y sumando el término q/ρ , obtenemos

$$h + \frac{q}{\rho} = \frac{\tilde{E}W - G}{W^2 - G}, \quad (5.5)$$

donde la variable \tilde{E} está dada por

$$\tilde{E} = E + \frac{q}{\Gamma D}. \quad (5.6)$$

Usando ahora la magnitud al cuadrado del momento relativista

$$S^2 = \gamma^{ij}S_iS_j = \left(h + \frac{q}{\rho}\right)^2 (W^2 - 1), \quad (5.7)$$

e insertando la ecuación (5.5) en la ecuación anterior, el factor de Lorentz puede ser determinado explícitamente de la solución a la ecuación de cuarto orden

$$0 = (S^2 - \tilde{E}^2)W^4 + 2G\tilde{E}W^3 + (\tilde{E}^2 - 2GS^2 - G^2)W^2 \quad (5.8)$$

$$-2G\tilde{E}W + G^2(1 + S^2). \quad (5.9)$$

En [15] muestran que la raíz de esta ecuación de cuarto grado existe y es única.

Ahora bien, una vez obtenido el valor de W , podemos calcular densidad de masa en reposo de la expresión $\rho = D^*/(\sqrt{\gamma}W)$. La presión puede ser despejada de la ecuación (5.5) y de $p = G\rho(h-1)$. Finalmente, la velocidad \bar{v}^i se obtiene de la ecuación de la definición del momento relativista y usando $\gamma^{ij}S_j = (h + q/\rho)W\bar{v}^i$. En la práctica será necesario actualizar los valores de los componentes de la métrica para tener consistencia con los nuevos valores del momento, energía y densidad relativistas.

Uno de los factores que afectan una buena implementación del método es la actualización de la longitud de suavizado. En este trabajo se han probado dos técnicas básicamente. La primera de acuerdo al esquema

$$h_a = (h_o)_a \left[\frac{D_o^*}{D_a^*} \right]^{\frac{1}{d}}, \quad (5.10)$$

donde d denota la dimensión espacial de la hipersuperficie Σ_t . Para la implementación se puede usar el subíndice cero de esta expresión como el valor de la densidad relativistas anterior a la actual. Así por ejemplo, para el inicio de la simulación numérica tenemos que $D_o^* = D^*$ en $t = 0$ y trivialmente obtenemos que $h_a = (h_o)_a$.

Otra técnica que puede usarse para las evoluciones es tomar simplemente

$$h_a = \eta \left(\frac{1}{\bar{n}_a} \right)^{\frac{1}{d}}, \quad (5.11)$$

donde el número bariónico $n_a = D_a^*/m_a$. Para este ansatz de h_a se usará la densidad de número del paso del tiempo inmediato anterior. Sin embargo, esta resulta una buena aproximación.

Capítulo 6

Buscador Eficiente de Vecinos

El estudio de sistemas físicos, requiere la solución de ecuaciones diferenciales parciales que nos permitan extraer y analizar las cantidades físicas en las que estamos interesados. Dependiendo de la complejidad del sistema, las ecuaciones pueden ser muy complicadas para resolverlas analíticamente. Es por esto que normalmente utilizamos herramientas numéricas que nos permitan resolver dichas ecuaciones. Uno de los métodos más utilizados para estudiar sistemas que contienen fluidos es el conocido como Hidrodinámica de Partículas Suavizadas también conocido como SPH por sus siglas en inglés (Smoothed Particle Hydrodynamics). Aunque este es un método muy poderoso para resolver las ecuaciones de evolución de los fluidos, en su forma más sencilla, resulta ser un método muy ineficiente, ya que para un sistema discretizado en N partes, requiere de $O(N^2)$ operaciones para obtener los valores actualizados de las cantidades que describen al fluido. Con esto en mente, se han desarrollado varios métodos que permiten reducir el número de operaciones. Por ejemplo, los métodos de árbol requieren aproximadamente $O(N \log N)$ operaciones. En este capítulo de la tesis, retomamos otro método que permite reducir el número de operaciones a aproximadamente $O(N)$.

6.1. Búsqueda Eficiente de Vecinos

El método que usamos para hacer la búsqueda de vecinos más eficiente es conocido como *Indexado de Celdas* [2]. Dicho método requiere la creación de una malla virtual sobre una caja que contiene a todas las partículas. Las dimensiones de esta malla están calculadas de acuerdo al problema físico que queremos resolver, pero por ningún motivo el número de celdas debe exceder el número de partículas, sino que es mejor evitar que las celdas estén vacías.

La filosofía del método consiste en etiquetar las celdas que contienen las cajas con coordenadas enteras (i, j, k) una por cada dirección. Estas tres coordenadas enteras nos permiten hacer una encriptación a una sola *clave* entera, q . Estas claves carecen de algún orden cuando se hace una tabla con los datos índice de partículas a vs. clave entera de la partícula q .

Si logramos ordenar las claves entonces esto ayudará fuertemente a la búsqueda de vecinos.

El método de Indexado de Celdas se compone de cuatro pasos: *clasificación*, *ordenamiento*, *censo* y *búsqueda* ([2]).

6.2. Clasificación

Construimos a continuación la caja máxima que contiene a todas las partículas. Para esto es necesario encontrar 6 coordenadas: $(x_{\min}, y_{\min}, z_{\min})$ y $(x_{\max}, y_{\max}, z_{\max})$. Estos son solo dos de los vértices de la caja que contiene todas las partículas, pero son suficientes para obtener los otros seis vértices combinándolos de forma adecuada.

Como datos para esta operación, tenemos el conjunto de partículas en coordenadas cartesianas:

$$\{\vec{r}_a\}_{a=1,\dots,N} = \{(x_a, y_a, z_a) | a = 1, \dots, N\}, \quad (6.1)$$

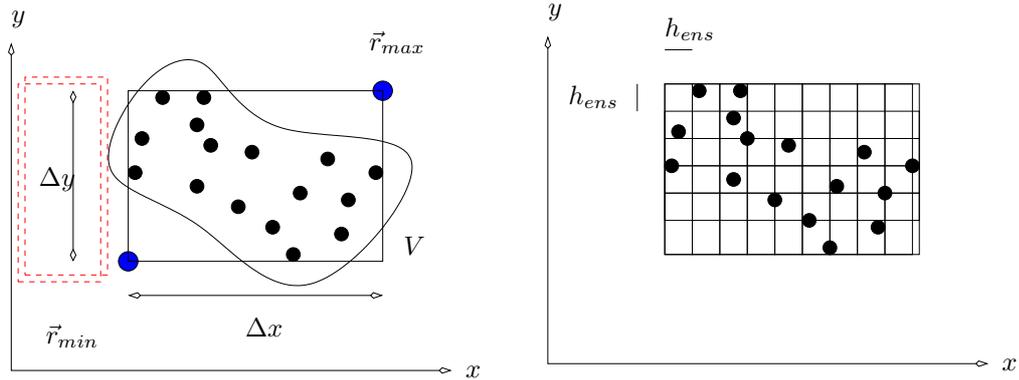


Figura 6.1: **Izq.:** En esta figura mostramos en (2D) como se calcula $\Delta x = x_{max} - x_{min}$ y $\Delta y = y_{max} - y_{min}$, comparando ambos se escoge el menor y se divide en N_p partes. **Der.** En este caso $h_{ens} = \frac{\Delta y}{N_p}$, podemos ver que se forman cuadrados de dimension h_{ens} .

aquí a es el *índice de memoria*, que nos indica el lugar donde hemos guardado en el arreglo de la computadora. Aquí puede comenzar a verse la importancia del buscador eficiente de vecinos, ya que la posición de la partícula con el índice de memoria 1 puede no tener ninguna cercanía con la posición de la partícula con índice de memoria 2. En otras palabras, estos índices no me ofrecen ninguna relación con la colocación de las partículas en el dominio numérico.

Realizamos las siguientes operaciones para encontrar los valores máximos y mínimos de las coordenadas en cada eje

$$x_{m\acute{a}x} = \max_{a=1,\dots,N} \{x_a\},$$

de forma análoga para $y_{m\acute{a}x}$ y $z_{m\acute{a}x}$

$$x_{m\acute{i}n} = \min_{a=1,\dots,N} \{x_a\},$$

así mismo para $y_{m\acute{i}n}$ y $z_{m\acute{i}n}$.

Con estos datos podemos obtener las medidas de cada una de las aristas de la caja en forma de prisma rectangular (véase que en la figura (6.1) hemos descrito un ejemplo de dos dimensiones para una mejor ilustración) y vienen dados por

$$\Delta_x = x_{m\acute{a}x} - x_{m\acute{i}n}, \Delta_y = y_{m\acute{a}x} - y_{m\acute{i}n}, \Delta_z = z_{m\acute{a}x} - z_{m\acute{i}n}. \quad (6.2)$$

Mediante un criterio que hemos realizado de forma experimental para seleccionar h_{ens} dividimos la caja usando

$$n_x = \Delta_x / h_{ens}, n_y = \Delta_y / h_{ens}, n_z = \Delta_z / h_{ens}. \quad (6.3)$$

Una vez que se ha dividido la caja en cubos de dimensión h_{ens} , que llamamos *celdas*, podemos ver que cada una de las partículas queda dentro de una de ellas. Definimos una *clase* como el conjunto de partículas dentro de una celda.

Como es de esperarse existen clases que están vacías, pero todas las demás forzosamente por construcción tienen una o más partículas dentro de ellas. El criterio mencionado para escoger h_{ens} considera que el número total de celdas en las que se divide la cada no exceda el número de partículas, ya que esto volvería ineficiente el buscador.

Posteriormente a cada clase le asignamos una triada de números enteros (i_a, j_a, k_a) que indica la posición de la celda mediante

$$i_a = 1 + \left\lfloor \frac{x_a - x_{m\acute{i}n}}{h_{ens}} \right\rfloor, j_a = 1 + \left\lfloor \frac{y_a - y_{m\acute{i}n}}{h_{ens}} \right\rfloor, k_a = 1 + \left\lfloor \frac{z_a - z_{m\acute{i}n}}{h_{ens}} \right\rfloor, \quad (6.4)$$

donde la operación $[x/y]$ está definida como la parte entera de la división entre dos números reales x e y .

El índice i_a puede tomar valores enteros desde 1 hasta n_x donde $n_x = 1 + \left\lceil \frac{x_{\text{máx}} - x_{\text{mín}}}{h_{\text{ens}}} \right\rceil$, análogamente para n_y y n_z . De aquí podemos deducir que el número total de celdas en las que se han dividido la caja máxima será

$$N_{\text{celdas}} = n_x \cdot n_y \cdot n_z. \quad (6.5)$$

A continuación enciptamos las tres coordenadas enteras (i_a, j_a, k_a) en un solo valor dado por

$$q_a := \text{clave}(a) = i_a + n_x \cdot j_a + n_x \cdot n_y \cdot k_a, \quad (6.6)$$

esta posee una inversa que mostraremos en las secciones siguientes y nos permiten que al conocer la clave de una partícula saber de forma inmediata cual es la celda que está ocupando al obtener con q_a los índices (i_a, j_a, k_a) .

Nótese que todas las partículas que tienen la misma clase, automáticamente, poseen la misma clave puesto que tienen las mismas coordenadas enteras. Por ejemplo la celda que tiene coordenadas $(i, j, k) = (1, 1, 1)$ tiene la clave única $\text{clave}_{(1,1,1)} = 1 + n_x \cdot 1 + n_x \cdot n_y \cdot 1$.

6.3. Caminata sobre todas las celdas.

Otro aspecto importante es la enumeración de las celdas de tal forma que esta numeración nos ayude al momento de realizar la búsqueda de vecinos. Para esto describimos la forma de recorrer las celdas en un espacio tres dimensional (para el caso 2D véase la figura (6.2)): la idea es bastante sencilla: restringimos la caminata sobre todas las celdas que tienen índice $k = 1$, podemos movernos libremente sobre todo (i, j) para recorrer todas sus celdas ($n_x \cdot n_y$ en total) pero lo haremos de tal forma que, nos restringimos a movernos en dirección creciente del índice i comenzando con $i = 1$ hasta llegar a n_x . Una vez alcanzado $i = n_x$ volvemos a $i = 1$ y subimos $j = 2$. Este proceso se repite hasta alcanzar $j = n_y$ e $i = n_x$. Así hemos recorrido apenas todo el plano de cubos donde $k = 1$. Repetiremos este proceso hasta que lleguemos a recorrer todos los cubos donde $k = n_z$.

La función clave es una función monótonamente creciente mientras las celdas se recorran de las siguiente forma:

Iniciamos con $i = 1$, $j = 1$ y $k = 1$

1. El índice i aumenta de 1 hasta n_x .
2. El índice j aumenta en una unidad.
3. Se repite (1) y (2), hasta que j es igual a n_y .
4. Una vez que $j = n_y$ aumentamos k en una unidad.
5. Se repite de (1) a (4) hasta que $k = n_z$. Ver (6.2)

La función número de celda que tiene como argumento la posición entera de las celdas (i, j, k) está definida de la siguiente forma

$$\#(i, j, k) = i_a + n_x \cdot (j_a - 1) + n_x \cdot n_y \cdot (k_a - 1). \quad (6.7)$$

Podemos observar que entre la función clave y $\#$ existe solamente una constante de diferencia y por lo tanto la relación es uno a uno:

$$\#(i, j, k) = i + n_x \cdot (j - 1) + n_x \cdot n_y \cdot (k - 1) = i + n_x \cdot j + n_x \cdot k - n_x - n_x \cdot n_y \quad (6.8)$$

$$= \text{clave}(i, j, k) - n_x(1 + n_y). \quad (6.9)$$

De aquí tenemos, que si ordenamos las claves de forma creciente $q_1 \leq q_2 \leq q_3 \leq \dots \leq q_N$ la función número de cada una de sus coordenadas enteras también guardará el mismo orden, es decir, $\#_1 \leq \#_2 \leq \#_3 \leq \dots \leq \#_N$ ($\#_a = \#(i_a, j_a, k_a)$). Este hecho es importante y fundamental

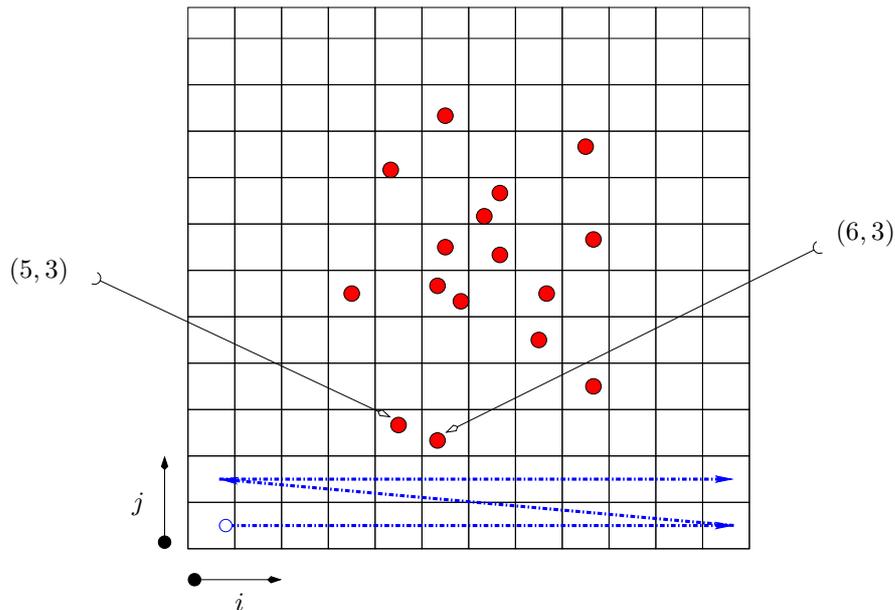


Figura 6.2: Las claves que se generan para las partículas serían: para la partícula 1 con coordenadas $(5, 3)$, $clave(1) = 5 + n_x \cdot 3$ y para la partícula 2 con coordenadas $(6, 3)$, $clave(2) = 6 + n_x \cdot 3$, si conocemos n_x y n_y clave arroja un entero. La línea azul describe gráficamente para $(2D)$ como se recorren los índices para que la función clave sea monótonamente creciente. Se puede apreciar en la línea punteada el recorrido que realiza la función $\#$ para enumerar las claves de acuerdo a la caminata descrita en esta sección.

del método ya que si tenemos ordenadas las claves q 's estas aparecerán en orden también según el recorrido mencionado anteriormente.

Para realizar de forma eficiente el ordenamiento de la lista de partículas por celdas usaremos un método llamado método de *ordenamiento de raíz*, el cual presume ser de orden lineal con respecto del número de elementos que ordena. Este es el punto clave del método de Indexado de Celdas (IC) ya que *ordenamiento de raíz* ha mostrado ser de orden N heredando esta propiedad a (IC). Ver apéndices A y B.

6.3.1. Aplicación del Ordenador

Los datos que necesitamos para usar el *ordenador de raíz* son la lista de claves enteras desordenadas q_a y un arreglo $\bar{a} = a$, donde $a = 1, \dots, N$. Una vez que se aplica el ordenador de raíz en *IPA* el código regresa simplemente una nueva lista de claves q_a de tal forma que $q_1 \leq q_2 \leq \dots \leq q_N$ y además modifica el arreglo \bar{a} de tal forma que ya contiene la permutación final que relaciona el *índice de memoria* inicial de q con el actual, ver figura (??).

Esta información es de suma importancia ya que cuando queramos referirnos a alguna de las partículas ordenadas, digamos la primera de todas q_1 , tendremos que $\bar{1}$ guardará el valor del índice de memoria que la partícula con clave q_1 tenía antes de ser ordenada, así

$$(\bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{N}) = \text{permutación de los índices de memoria.} \quad (6.10)$$

tal que la N -upla (a_1, a_2, \dots, a_N) es una permutación de los índices originales. Como un ejemplo podría suceder que $\bar{1} = a_1 = 133$ y $\bar{N} = a_N = 5$.

Nos referiremos a este índice barrado \bar{a} como el *índice espacial*, ya que éste guarda información concisa acerca del orden parcial de las partículas. Los primeros índices de las partículas ocupan las primeras celdas y los últimos índices de las partículas los de las últimas celdas, respectivamente.

En siguiente sección veremos como es necesario construir una lista de *partículas de referencia* de tal forma que se sepamos que si estamos sobre una celda con número dado $\#$, entonces sepamos

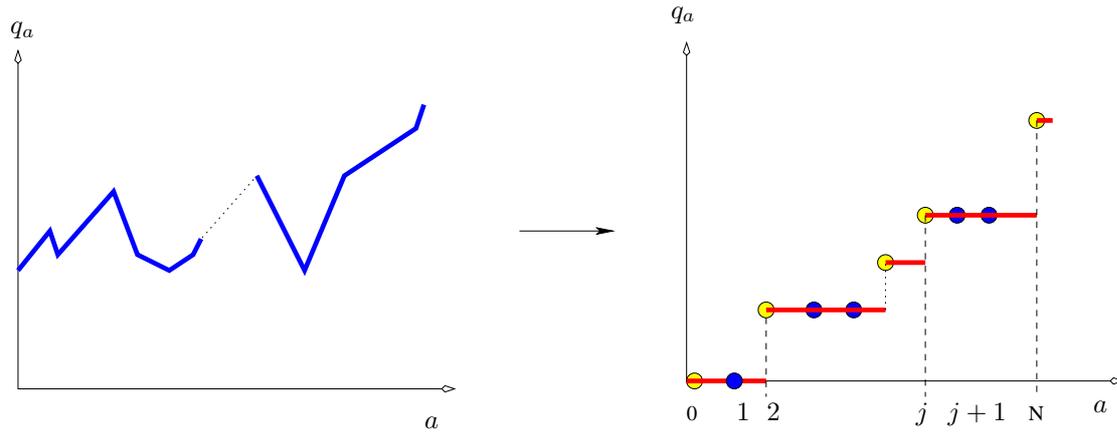


Figura 6.3: **Izq.:** Ya que las partículas que tenemos para cierta configuración pueden venir de un método que elija la posición de las partículas de forma aleatoria, algo similar a esta gráfica puede ser el resultado. **Der.:** Después de realizar el orden, es importante guardar información de las partículas que encabezan a su clase según el orden de aparición, estas son las partículas de *referencia* (amarillas).

si dicha celda está ocupada y de ser así con qué índice espacial comienza cada celda y con cual índice espacial termina.

6.4. Censo

Para realizar el censo debemos explorar todas las N_{clases} de acuerdo a la caminata que recorre todas las celdas existentes, y sobre cada una de ellas hacer las siguientes preguntas:

- ¿La celda está ocupada? Esto se puede realizar comparando los elementos de la lista (\bar{a}, q_a) creciendo el índice \bar{a} y se comparan con la clave de la celda actual $clave(i, j, k)$. Por lo tanto, si sucede que $q_a = clave(i, j, k)$, la celda estará ocupada por la partícula \bar{a} . De ser así entonces debemos guardar el índice de la partícula de referencia en un arreglo $inicio(I)$ y $fin(I)$ donde I es el número de la celda $\#(i, j, k) = I$:
 - En el elemento del arreglo $inicio(I)$ se guarda el índice espacial \bar{a} de la partícula donde $q_a = clave(i, j, k)$.
 - Para obtener elemento del arreglo $fin(I)$ se guarda el índice espacial $\bar{a} - 1$ donde $q_a \neq clave(i, j, k)$.
- Si la celda no está ocupada se debe proseguir con la caminata hasta encontrar la siguiente celda ocupada, este proceso se realiza hasta cubrir todas las celdas o hasta terminar con las partículas \bar{a} . Ver figura (6.4).

6.4.1. Búsqueda

Para realizar los promedios es necesario saber con cuantos vecinos cuenta cada partícula. Los pasos anteriores (*clasificación, ordenamiento y censo*) se han realizado con el fin de agilizar esta parte del proceso. Entonces tenemos que realizar el proceso de búsqueda sobre cada una de las N partículas.

Dada la \bar{a} -ésima partícula del total de N , sabemos que tiene una clave asociada q_a , podemos encontrar cual es la celda que ocupa esta partícula haciendo uso de la inversa de la ecuación (6.6) dada por

$$i = \text{mod}(q, n_x), i = 0, \dots, n_x - 1, \quad (6.11)$$

$$j = \text{mod}\left(\frac{q-i}{n_x}, n_y\right), j = 0, \dots, n_y - 1, \quad (6.12)$$

$$k = \frac{q-i-n_x \cdot j}{n_x \cdot n_y}, k = 0, \dots, n_z - 1. \quad (6.13)$$

Si los índices de las celdas (i, j, k) comienzan en 1 y no en 0, entonces tenemos que hacer un reajuste en el cálculo dado por las ecuaciones anteriores, haciendo $i = 0 \rightarrow n_x, j = 0 \rightarrow n_y$.

Una vez que tenemos las coordenadas $(i_{\bar{a}}, j_{\bar{a}}, k_{\bar{a}})$ de la \bar{a} -ésima partícula, obtenemos el conjunto de las celdas vecinas donde debemos de buscar a los vecinos más cercanos:

$$\mathbf{N}_{\text{celdas}}(\bar{a}) = \{(i_c, j_c, k_c) | i_c = i_{\bar{a}} + s, j_c = j_{\bar{a}} + t, k_c = k_{\bar{a}} + w, i_c, j_c, k_c = [-l, l]\}, \quad (6.14)$$

donde l es el valor dado por el cociente entre dos veces la longitud de suavizado, $2 \cdot h_{\bar{a}}$

$$l = \left\lceil \frac{2h_{\bar{a}}}{h_{\text{ens}}} \right\rceil + 1. \quad (6.15)$$

Esto nos da un total de $N_l = (2 \cdot l + 1)^3$ cubos en los que buscaremos los vecinos de la partícula \bar{a} .

6.4.2. Acceso directo a los vecinos próximos

Para acceder de forma eficiente a los datos de las partículas que forman las $\mathbf{N}_{\text{celdas}}$ es necesario hacer una caminata sobre cada uno de los N_l cubos y de acuerdo a la función número dada por $\#(i_c, j_c, k_c) = I$ acceder al arreglo $\text{inicio}(I)$ y $\text{fin}(I)$. De esta forma caminando para todas las celdas que componen $\mathbf{N}_{\text{celdas}}$ tendremos los vecinos más cercanos al rededor de la partícula \bar{a} que se encuentra en la celda $(i_{\bar{a}}, j_{\bar{a}}, k_{\bar{a}})$. Ver figura 6.4.

Así hemos descrito en su totalidad el proceso de búsqueda eficiente de vecinos. Con este proceso sabemos cuales son los índices espaciales \bar{j} tal que se encuentran al rededor de una partícula \bar{a} . Una prueba de la eficiencia del código se presenta en la gráfica de la figura ?? la cual muestra cuatro corridas para el mismo sistema de un proceso de relajación de partículas donde hemos implementado el buscador eficiente de vecinos, esta es una subrutina que forma parte de IPA.

6.4.3. Partículas de Frontera

Debemos considerar ciertos casos donde la partícula a -ésima está cercana a las fronteras. Entonces no podremos explorar los N_l cubos vecinos ya que no existen, para esto tenemos que confirmar para (i, j, k) de las $\mathbf{N}_{\text{celdas}}$ que

$$i \leq n_x, j \leq n_y, k \leq n_z, \quad (6.16)$$

$$i \geq 1, j \geq 1, k \geq 1. \quad (6.17)$$

6.4.4. Búsqueda con fronteras periódicas

Puede ser interesante para procesos astrofísicos donde se asignan propiedades de frontera periódica, especificar la generalización del proceso de búsqueda. Para esto podemos notar que si se cumplen la igualdad previstas en (6.16) y (6.17) esto significa que la celda forma parte de la frontera, en dos dimensiones diríamos que sería parte de los lados del rectángulo o sería una esquina del dominio.

Sea el conjunto de $\mathbf{N}_{\text{celdas}}$ etiquetadas con (i_c, j_c, k_c) , entonces para cuando sean celdas frontera debemos realizar las siguientes acciones:

- Si $i_c \leq 0$ entonces cambiamos i_c por $n_x + i_c$

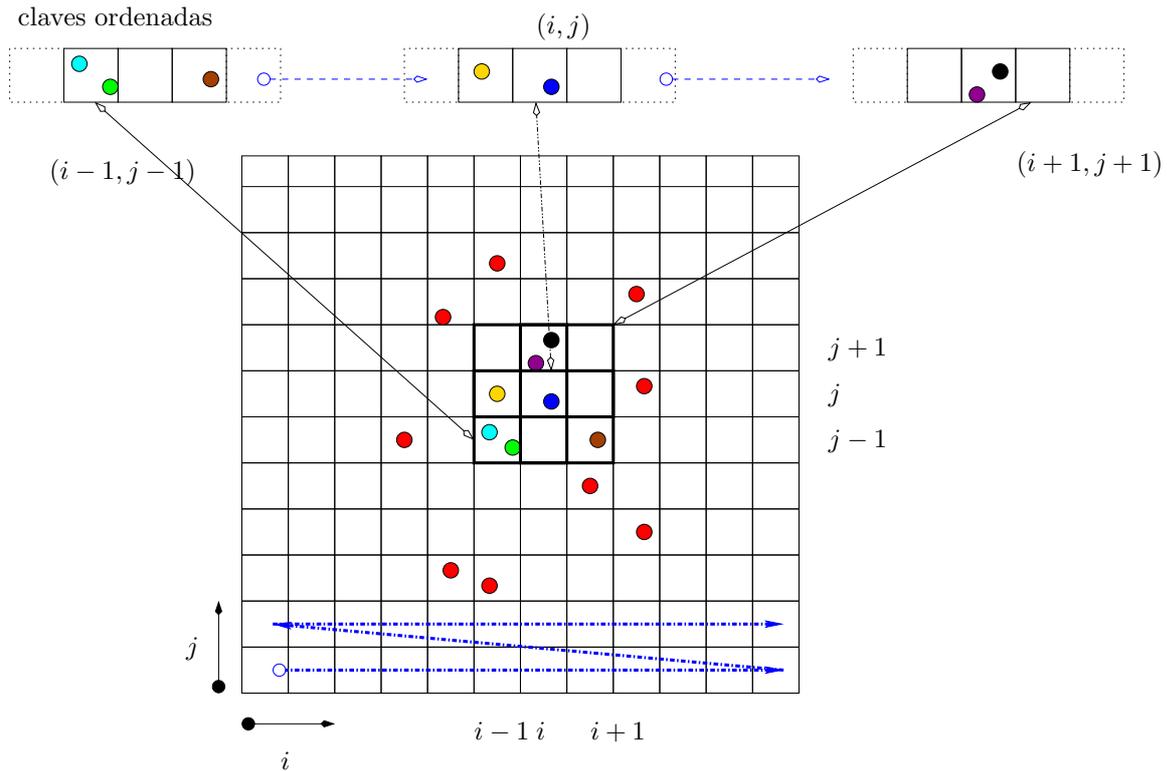


Figura 6.4: En esta figura mostramos la búsqueda para una partícula con coordenadas (i, j) , de donde podemos apreciar que solo buscaremos en las celdas contiguas: $(i + s, j + t)$ donde $s, t = -1, 0, 1$ (9 celdas en total). Para todas las celdas excepto $(i - 1, j - 1)$, $(i - 1, j + 1)$ y $(i + 1, j + 1)$ obtendremos de la búsqueda en las *claves ordenadas* una partícula de referencia, así como la cantidad de partículas que están en esa clase. Por otra parte, las celdas $(i - 1, j - 1)$, $(i - 1, j + 1)$ y $(i + 1, j + 1)$ no obtendremos información alguna. El arreglo unidimensional de celdas, en la parte superior, representa la verdadera función de (6.6): cambiar el problema de asignar un orden a las partículas en $(2D)$ o $(3D)$ por el orden en $(1D)$.

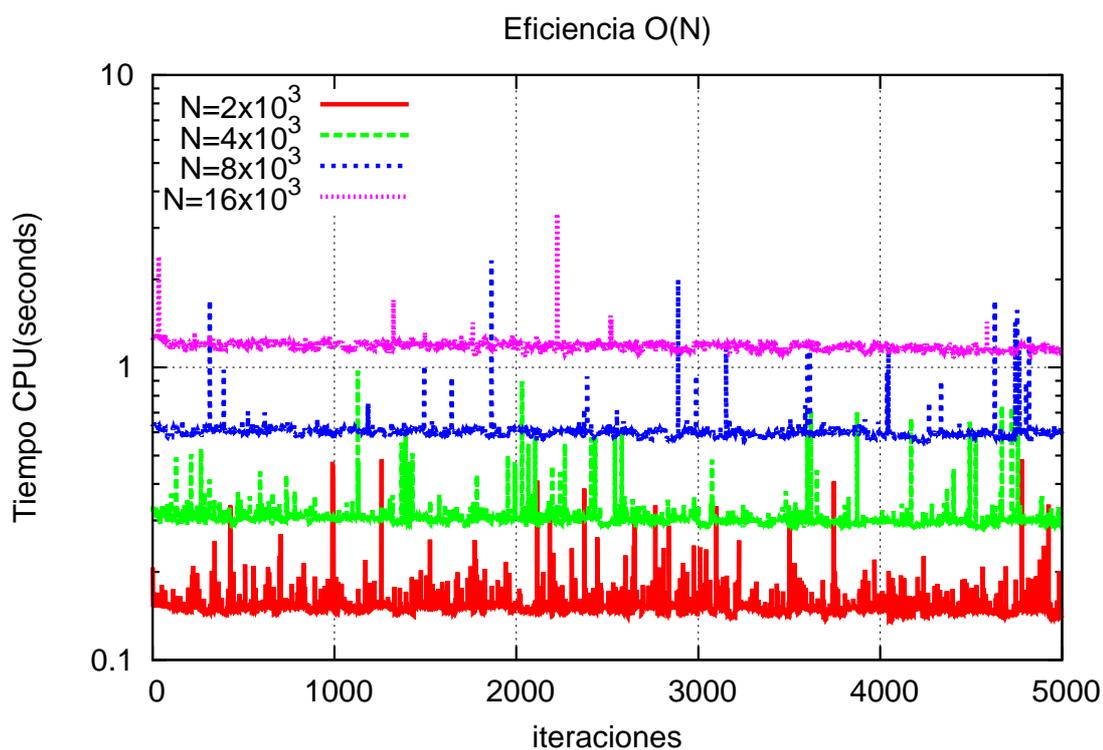


Figura 6.5: En esta gráfica mostramos la eficiencia del buscador eficiente de vecinos implementada para un proceso de relajación de partículas usado para obtener los datos iniciales de Kelvin-Helmholtz. Este proceso de relajación es de vital importancia porque reduce el ruido del dato inicial permitiéndonos tener simulaciones con menor error. Para esta gráfica comparamos corridas duplicando las resoluciones $N = 2, 4, 8, 16 \times 10^3$ partículas y ya que la escala es logarítmica podemos apreciar como el factor de escala entre ellos es aproximadamente constante.

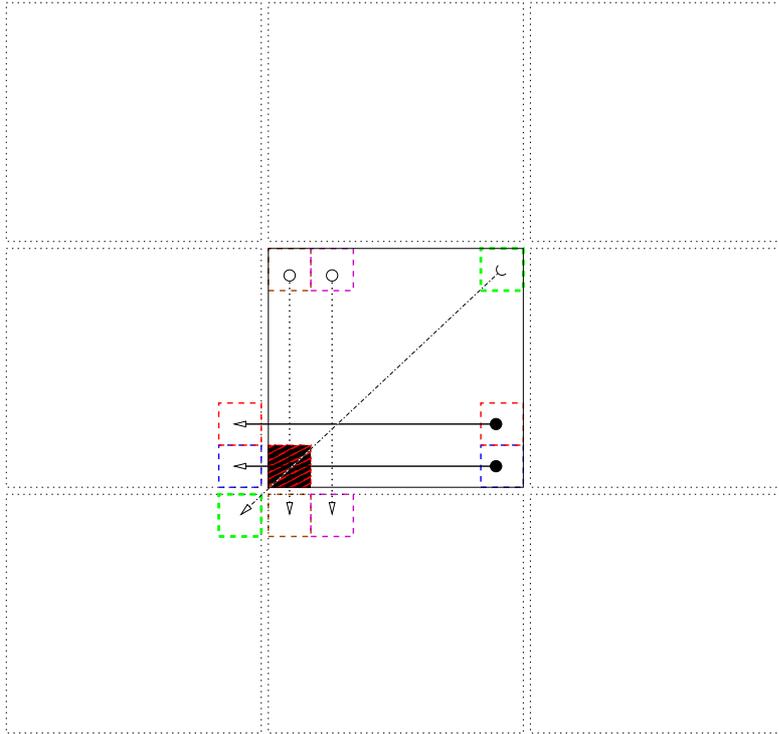


Figura 6.6: En esta gráfica se muestra como es el hecho de buscar adecuadamente las celdas, simula una duplicación hasta 8 veces según lo requiera la celda de la frontera. Lo único que se hace es tomar una celda del extremo contrario a la ubicación de la celda que contiene las partículas involucradas en el promedio.

- Si $j_c \leq 0$ entonces cambiamos j_c por $n_y + i_c$
- Si $k_c \leq 0$ entonces cambiamos k_c por $n_z + i_c$

Por otra parte si:

- Si $i_c \geq n_x$ entonces cambiamos i_c por $i_c + n_x$
- Si $j_c \geq n_y$ entonces cambiamos j_c por $j_c + n_y$
- Si $k_c \geq n_z$ entonces cambiamos k_c por $k_c + n_z$

Con estas consideraciones se ha implementado los tests físicos que se muestran en los capítulos posteriores correspondientes a las inestabilidades de Kelvin-Helmholtz, así como el Shock-Tube.

6.5. Implementación

Como un ejemplo de la eficiencia en la implementación tomaremos en cuenta la ecuación de SPH clásico para calcular la densidad de una partícula usando la ecuación [14]

$$\rho_a = \sum_{b=1}^N m_b W_{ab}, \quad (6.18)$$

donde $\rho_a = \rho(\vec{x}_a)$ y $W_{ab} = W(\vec{x}_a - \vec{x}_b, h_b)$ entonces para cada a se tienen que realizar N sumas, y por lo tanto al realizar este promedio sobre las N partículas tendremos un método de orden N^2 . Ya que aunque solo cierto número de partículas contribuyan debido a que el Kernel es

distinto de cero solo para unas cuantas partículas al rededor del punto donde se está calculando, se siguen realizando operaciones y esto hace muy lento este procedimiento.

Sin embargo, al usar el método de Indexado de Celdas, se conoce la celda donde se encuentra el punto a evaluar, así como sus celdas vecinas y entonces el calculo de los promedios es ágil. El algoritmo que se sigue es :

1. Construcción de la caja virtual $\rightarrow h_{ens}$,
2. Construcción de la malla e Indexado de Partículas $\rightarrow (i_a, j_a, k_a)$, $a = 1, \dots, N$.
3. Clasificación $\rightarrow clave(a) = i_a + n_x j_a + n_x n_y k_a$ y ordenamiento,
4. Censo $\rightarrow incio(i), fin(i)$, $i = 1, \dots, N_{clases}$.
5. Para cada una de las N partículas
 - a) Se toma su clave y se calculan las coordenadas correspondientes (i_a, j_a, k_a)
 - b) Se calculan las coordenadas de sus celdas vecinas $\mathbf{N}_{celdas}(a)$ y sus claves correspondientes
 - c) Se buscan en las listas generadas en el *Censo*
 - d) A este subconjunto de partículas se les usa para calcular los promedios al rededor de la partícula a -ésima.

Con este algoritmo básicamente se construyeron los datos generados para el siguiente ejemplo de una distribución de partículas obedeciendo un perfil radial ([1])

$$\rho(r) = \frac{M}{2\pi R^2 r} \quad (6.19)$$

usando el método de aceptación y rechazo, donde M es la masa de la configuración total y R es su radio. Entonces las tres distribuciones de probabilidad que tienen que satisfacen para colocar las partículas son:

$$\int f_r(r) dr = 1, \int f_\theta(\theta) d\theta = 1, \int f_\phi(\phi) d\phi = 1, \quad (6.20)$$

$$f_r(r) = \frac{4\pi\rho(r)}{M} r^2, f_\theta(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{2}, f_\phi(\phi) = \frac{1}{2\pi}. \quad (6.21)$$

Entonces al encontrar con el método de Aceptación y Rechazo tres números (r, θ, ϕ) que satisfagan f_r , f_θ y f_ϕ , repitiendo este proceso N veces, encontramos las posiciones para realizar los promedios mediante el *Indexado de Celdas*.

La primera prueba que mostramos es aumentando el número de partículas N , ver Fig.6 resoluciones $N = 10^3, 10^4, 10^5$, la dispersión de los valores promediados con respecto al valor analítico $\rho(r)$ se vuelve cada vez menor. Esto indica que el método de aceptación y rechazo mejora en cuanto más partículas tenemos para representar el perfil requerido.

La segunda prueba que realizamos es sobre el tiempo de procesamiento que tarda el código en realizar los promedios usando dos métodos: uno a fuerza bruta de orden N^2 y el de Indexado de Celdas (*IC*) de orden N .

En la Fig.7 se muestran los tiempos obtenidos para diferentes números de partículas N (escala *log-log*), $N = 10^2, 10^3, 5 \cdot 10^3, 8 \cdot 10^3, 10^4, 15 \cdot 10^3, 17 \cdot 10^3, 10^5, 10^6$. Podemos notar de esta serie de cálculos que para $N = 100$ no existe comparación entre ambos métodos, aquí el método (FB) es más rápido que el (IC). Las comparaciones y funcionalidad del (IC) se hacen notables a partir de $N = 10^3$, en este caso el tiempo para (FB) es de $T = 0,16$, y el tiempo para (IC) es $t = 0,13$, ligeramente menor a T . Esta ventaja se vuelve evidente conforme aumentamos el número de partículas y se puede constatar hasta $N = 17 \times 10^3$ hasta donde (FB) nos permite hacer uso de la memoria de la computadora (obviamente esto varia dependiendo de la capacidad de almacenamiento) donde $T = 133 s$ y $t = 8,15 s$. Entonces el método (FB) es aproximadamente 16 veces más rápido en el cálculo.

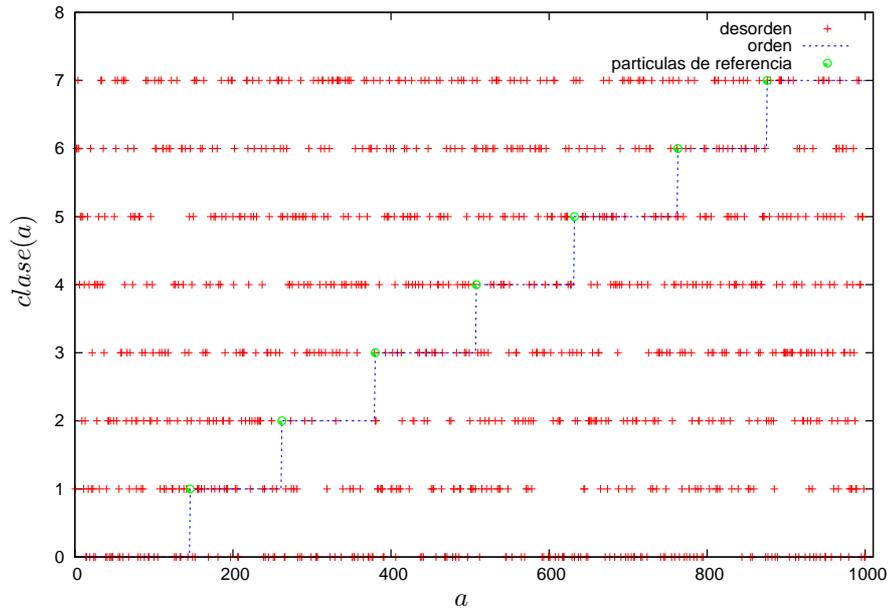


Figura 6.7: Los puntos rojos son la gráfica de las claves generadas para un conjunto de partículas, y la línea azul representa las claves una vez ordenadas usando *Ordenamiento de Raiz*. Mostramos las partículas de referencia en verde.

En una gráfica log-log la pendiente de la recta de ajuste para ambos métodos representa m en $O(N^m)$, encontrando que la pendiente de $f1(x)$ es aproximadamente $m \approx 2$ mientras que para $f2(x)$ es $m \approx 1$. El método que se implementa es así de orden N .

Se pueden hacer varias inclusiones al algoritmo, como reportar no solamente los elementos en las celdas vecinas sino también aquellas que se encuentran en una vecindad de radio h_{ens} , también volver a hacer la pregunta a la lista de partículas censadas solo cuando se cambie de clase en el paso (5).

Como un ejemplo para la implementación de las condiciones de frontera periódica, hicimos una prueba de un cubo de dimensión uno. En el cual la densidad es constante y también igual a uno $\rho(x, y, z) = 1,0$. Se hicieron aproximaciones para ρ usando $N = 10^4, 10^5$ y 10^6 , donde se observa que el la dispersión del valor conocido disminuye a medida que el número de partículas va en aumento. Además observamos que las las condiciones de frontera cooperan de buena forma al no dejar que el valor de la densidad caiga a valores muy por debajo de 1,0.

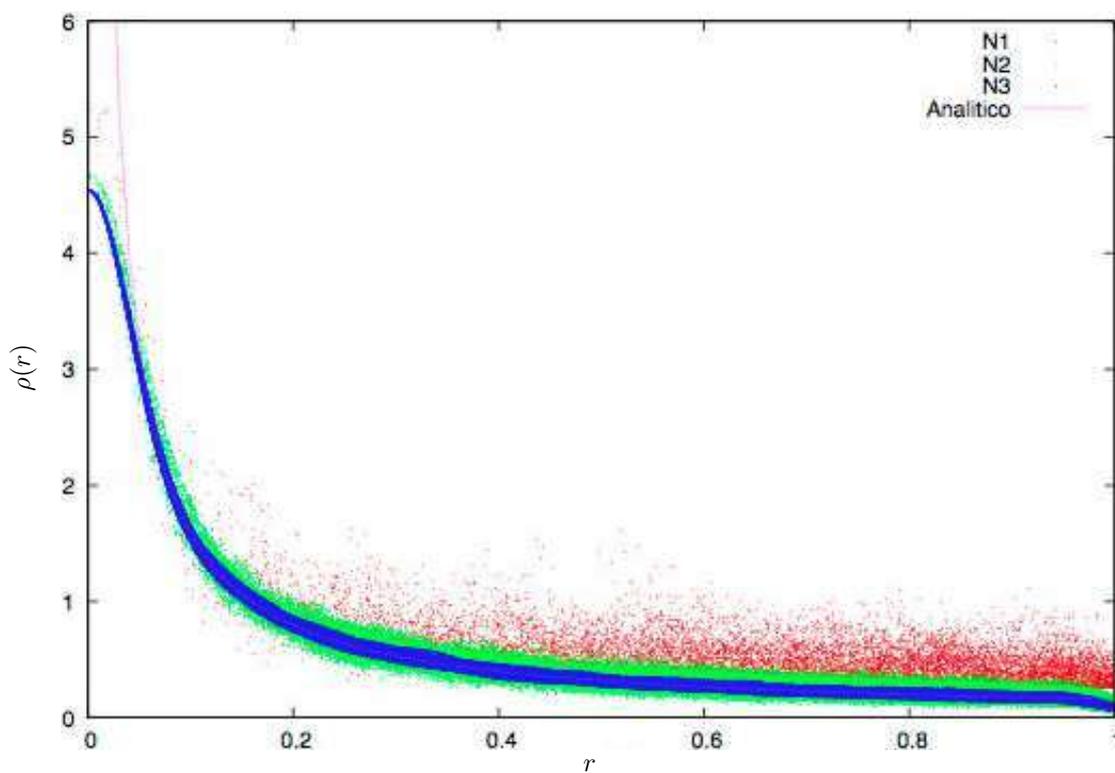


Figura 6.8: La línea $N1$ es aquella que aproxima el perfil analítico con 10^4 partículas, $N2$ usa 10^5 y $N3$, 10^6 . Podemos observar el perfil aproxima más al analítico entre más partículas usa.

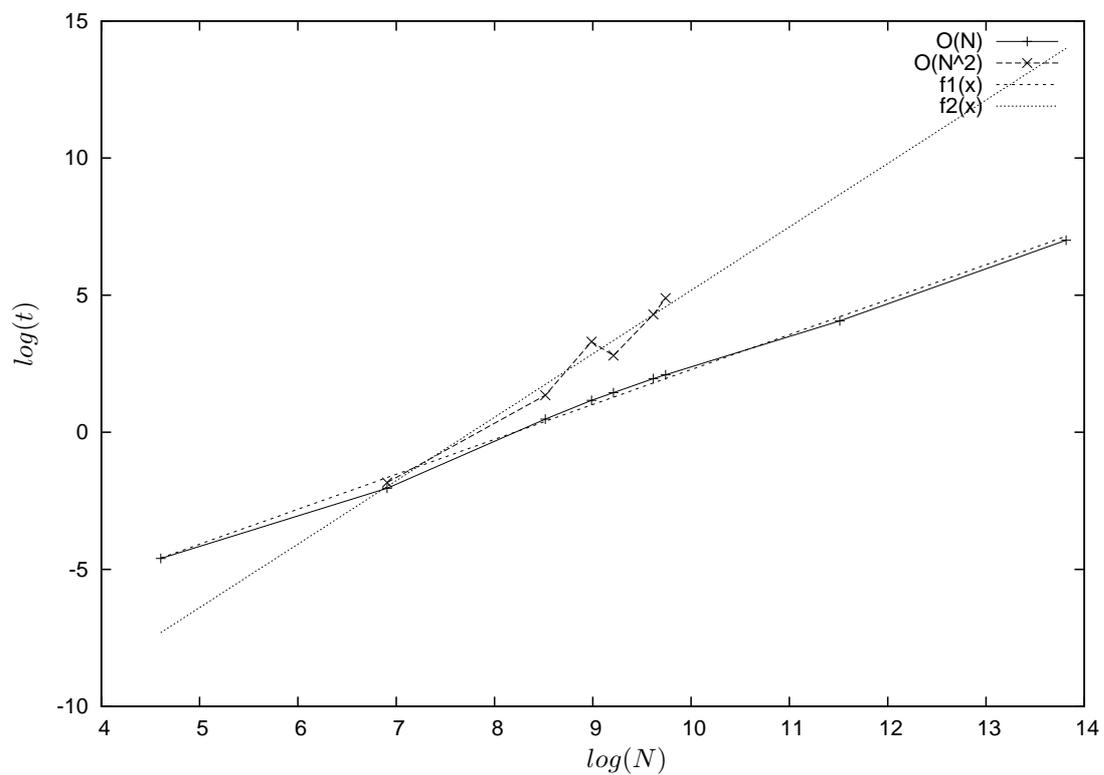


Figura 6.9: Se muestran los tiempos que tarda en realizar $\rho_a = \sum_b m_b W_{ab}$ para $a = 1, \dots, N$. La pendiente m de la recta corresponde al exponente del orden $O(N^m)$. Se usan para estos datos $N = 10^2, 10^3, 5 \cdot 10^3, 8 \cdot 10^3, 10^4, 15 \cdot 10^3, 17 \cdot 10^3, 10^5, 10^6$. Para $N = 17 \cdot 10^3$, $t_{ens} = 8,15 \text{seg}$ y $T = 133,06 \text{seg}$

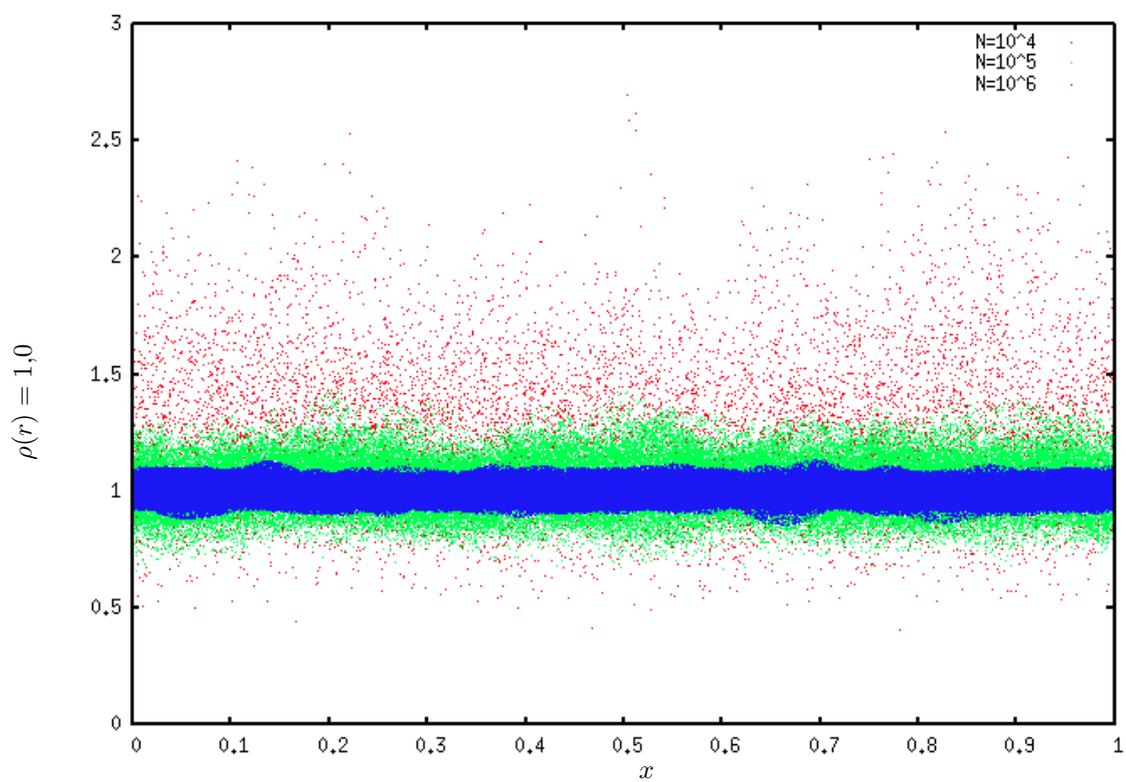


Figura 6.10: Se muestra los resultados para la implementación debido a una densidad constante usando $N = 10^4, 10^5$ y 10^6 partículas.

Capítulo 7

Paralelización del BEV (MPI)

La programación en paralelo nos permite distribuir el trabajo en varios procesadores de un equipo de cómputo construido y configurado para esta tarea. En este trabajo hemos realizado nuestras simulaciones con un código en paralelo con las bibliotecas MPI (de sus siglas en inglés: Message Passing Interface) llamadas MPICH.

La programación en paralelo que hemos desarrollado para este código consiste en distribuir la carga de trabajo debida al número total de partículas N_p^{obl} entre los n_{proc} procesos diferentes de forma equitativa, es decir, que cada procesador o proceso llevará a cabo la carga de N_p^{lcl} partículas.

En este trabajo hemos usado la restricción $N_p^{obl} = n_{proc} \cdot N_p^{lcl}$ de tal forma que cada uno de los procesadores contenga el mismo número de partículas.

Con esta forma de distribución donde cada proceso/procesador verá solamente un subconjunto del total de partículas, es necesario entender que en algún momento los procesos tienen que comunicarse para requerir/transmitir la información a los otros procesos. Esto se realiza mediante funciones de MPICH.

A continuación mostraremos como se ha programado en paralelo la construcción de la caja máxima.

7.1. Caja Máxima

Cada procesador contiene un subconjunto de las partículas del problema global. Debemos proceder de forma cuidadosa para poder encontrar la caja máxima del sistema global. En este punto cada procesador puede realizar un proceso serial (no paralelo sino en cada procesador por separado) para encontrar $x_{máx}, y_{máx}, z_{máx}$ y $x_{mín}, y_{mín}, z_{mín}$.

Para distinguirlas entre cada procesador usaremos el superíndice J donde $J = 1, \dots, n_{proc}$, entonces tenemos que al finalizar las operaciones descritos en el capítulo para el buscador de vecinos se obtiene en cada proceso los datos

$$\vec{r}_{máx}^J = (x_{máx}^J, y_{máx}^J, z_{máx}^J), \vec{r}_{mín}^J = (x_{mín}^J, y_{mín}^J, z_{mín}^J). \quad (7.1)$$

En esta parte tienen que comunicarse los procesos para calcular la caja global del problema: Sea $X_{máx}$ el valor máximo entre todas las $x_{máx}^J$ de todos los procesos, este valor se puede calcular haciendo uso de las funciones de MPI, el cual nos permite comparar entre todos los procesos obteniendo el valor máximo de los $x_{máx}^J$ valores $X_{máx}$ y comunicarlo posteriormente a todos los procesos.

$$\{x_{máx}^J\}_{J=1, \dots, n_{proc}} \rightarrow MPI_ALL_REDUCE(\dots, MPI_MAX, \dots) \rightarrow X_{máx}. \quad (7.2)$$

donde el modificador MPI_MAX nos permite encontrar el máximo entre los valores dados como entrada de cada uno de los procesos. De la misma forma podemos encontrar las otras dos coordenadas máximas $Y_{máx}$ y $Z_{máx}$.

Por otra parte para calcular X_{\min} se busca el valor máximo entre cada uno de los x_{\min}^J en cada J proceso.

$$\{x_{\min}^J\}_{J=1,\dots,n_{proc}} \rightarrow MPI_ALL_REDUCE(\dots, MPI_MIN, \dots) \rightarrow X_{\min}. \quad (7.3)$$

Entonces para las coordenada mínimas restantes procedemos de forma análoga para obtener y_{\min}^J y z_{\min}^J .

Con estos seis datos ($X_{\max}, Y_{\max}, Z_{\max}$) y ($X_{\min}, Y_{\min}, Z_{\min}$) se puede construir la caja máxima virtual que contiene a las N_p^{obl} partículas, y dicha información ahora estará presente en cada uno de los procesadores.

Podemos calcular la dimension de las aristas de la caja usando las expresiones, ver figura (7.1):

$$\Delta X = X_{\max} - X_{\min}, \Delta Y = Y_{\max} - Y_{\min}, \Delta Z = Z_{\max} - Z_{\min}, \quad (7.4)$$

En este momento, para que el código serial esté bien programado deberíamos obtener el mismo resultado que cuando se realizó en un solo procesador con el código serial.

7.1.1. División de la Caja Máxima Global

Cada uno de los J procesos tiene una colección de longitudes de suavizado, h_a^J , tal que $a = 1, \dots, N_{lcl}^p$. Mediante algún algoritmo realizado sobre este conjunto se escoge un valor o un promedio de estos valores y al resultado se le llama h_{ens}^J . Para desarrollar el valor global H_{ens} análogo al h_{ens}^J es necesario usar comunicaciones entre los procesadores nuevamente con la misma función MPI_ALL_REDUCE .

Ahora con este nuevo H_{ens} podemos dividir ΔX , ΔY y ΔZ en celdas de la siguiente forma

$$N_x = \left\lceil \frac{\Delta X}{H_{ens}} \right\rceil + 1, N_y = \left\lceil \frac{\Delta Y}{H_{ens}} \right\rceil + 1, N_z = \left\lceil \frac{\Delta Z}{H_{ens}} \right\rceil + 1. \quad (7.5)$$

Sabiendo que en la dirección del eje x tendrá N_x cajas, en y tendrá N_y y en z tendrá N_z , podemos calcular de forma exacta el número de celdas de tres dimensiones que habrá en la caja máxima $N_{clases} = N_x \cdot N_y \cdot N_z$.

7.2. Asignación de coordenadas enteras

En este momento haremos uso de las coordenadas de las partículas que cada procesador tiene. Puesto que todos los procesos tienen la misma caja virtual que contiene a todas las partículas y además el mismo H_{ens} podemos calcular las coordenadas enteras, Ver figura (7.2). Recordemos que aunque cada procesador solamente ve sus partículas la caja máxima virtual está construida, gracias a la comunicación entre procesadores, considerando las partículas que existen en los otros procesadores.

Construiremos las coordenadas enteras i_a^J, j_a^J y k_a^J usando las fórmulas

$$i_a^J = \left\lceil \frac{x_a^J - X_{\min}}{H_{ens}} \right\rceil + 1, j_a^J = \left\lceil \frac{y_a^J - Y_{\min}}{H_{ens}} \right\rceil + 1, k_a^J = \left\lceil \frac{z_a^J - Z_{\min}}{H_{ens}} \right\rceil + 1. \quad (7.6)$$

Entonces, hasta este punto hemos hecho una malla virtual que es la misma en cada uno de los procesadores y sobre cada uno de ellos hemos identificado que partículas están en cada una de las cajas. Construiremos una clave para cada una de las a -partículas en cada uno de los J -procesos de tal forma que, aunque están en diferente procesador están relacionadas todas por compartir la misma caja virtual dividida de la misma forma, de donde

$$q_a^J := clave(i_a^J, j_a^J, k_a^J) = i_a^J + N_x j_a^J + N_x \cdot N_y \cdot k_a^J. \quad (7.7)$$

De la misma forma la función número puede construirse rápidamente

$$\#(i_a^J, j_a^J, k_a^J)^J = i_a^J + N_x(j_a^J - 1) + N_x \cdot N_y \cdot (k_a^J - 1). \quad (7.8)$$

Estos procesos al realizarse en cada procesador por separado no requieren el uso de funciones de transmisión entre procesadores.

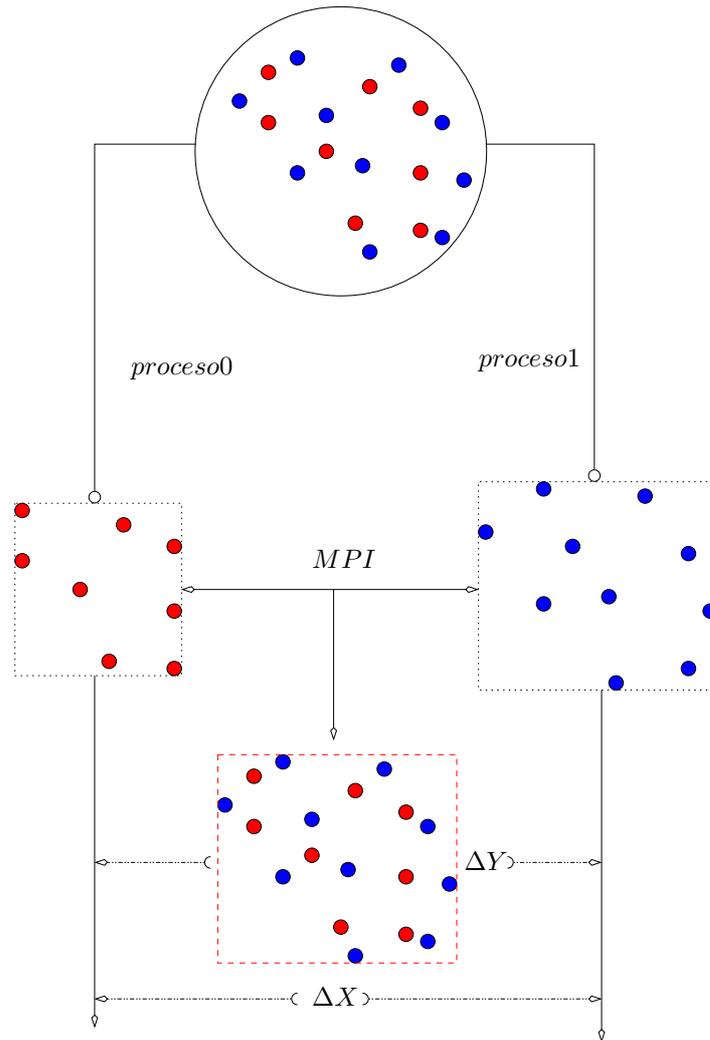


Figura 7.1: En esta gráfica mostramos un ejemplo donde dividimos un conjunto de partículas en dos procesos diferentes. Cada proceso contiene el mismo número de partículas pero todas tienen, en general, diferente información física tal como la posición, densidad, longitud de suavizado, etc. Una vez que se asigna a cada procesador el mismo número de partículas el problema se divide en dos, ya que los problemas aunque separados no son independientes entre sí. En algunas ocasiones se deberán comunicar los procesos para transferir la información de forma sincronizada para dar un resultado correcto. Como ejemplo simple podemos ver que en esta gráfica se divide las celdas y una vez que cada procesador tiene sus partículas, mediante funciones *MPI* se transfieren la información para obtener de forma correcta las dimensiones de la caja máxima que contiene a las partículas de ambos procesadores.

7.3. Ordenador de Raíz

Como en general las partículas están desordenadas es necesario usar el ordenador de raíz para organizar las partículas, sin embargo solamente necesitamos la información de las partículas que están en cada procesador de forma local, ordenando la lista de claves de las partículas contenidas en cada procesador. El resultado de este proceso nos dará la lista de índices permutados \bar{a}^J y la colección de claves ordenadas $q_a^J = \text{clave}^J a$ en cada J proceso.

El uso de funciones de transferencia de datos entre procesadores con *MPI*, tampoco es necesario. Por tanto, todo esto se realiza de forma serial en cada procesador.

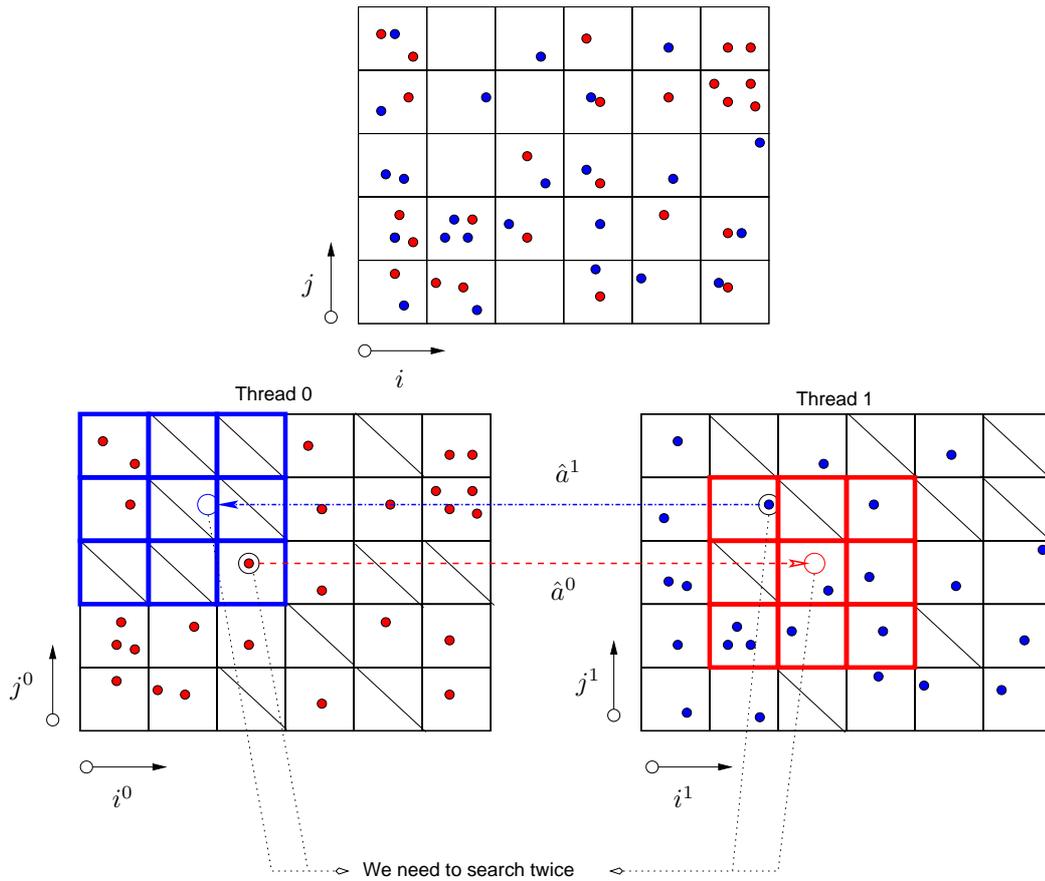


Figura 7.2: Mostramos en la parte superior de esta gráfica un conjunto completo de partículas. Entonces distribuimos el mismo número de partículas en cada procesador. Para esquematizar aquí solo usamos dos procesadores. Una vez que las partículas han sido distribuidas y que se ha encontrado la caja máxima para cada procesador a través de comunicaciones MPI usaremos el mismo número de celdas en cada dirección. Para estar listos y realizar la búsqueda de vecinos (así como el cálculo de los promedios a la SPH) necesitamos realizar en cada procesador un ordenador de raíz. Al momento de buscar vemos que es preferente traer la información de la partícula sobre la cual está haciendo la búsqueda en otro procesador a la par, en lugar de llevar la información de las partículas del actual hacia otro proceso. Por ejemplo, en esta figura traemos llevamos la información de la partícula azul al 1-proceso y enviamos la información de la roja al 0-proceso. En esta figura la información que se transmitiría sería la longitud de suavizado. La información de \hat{a}^0 se envía al 1-proceso, mientras que la de \hat{a}^1 se envía al 0-proceso. Ahora que saben cual es la longitud de suavizado y que a su vez se transfiere la posición de las partículas podemos hacer la búsqueda de vecinos. Los promedios parciales que se calculan en el 0-proceso son dos el de la partícula que vive en dicho proceso y el de la partícula virtual de 1-proceso. Ahora es necesario enviar de vuelta esta información para que se completen los promedios en el proceso de origen.

7.4. Censo

Una vez que cada J proceso ha organizado las claves, tenemos una lista en cada procesador (\bar{a}^J, q_a^J) donde $a = 1, \dots, N_p^{cl}$. Este proceso se puede realizar de forma serial en cada procesador al igual que se realizó el ordenador de raíz. De éste, se espera recabar la información de que celdas están ocupadas y de aquellas que lo estén de acuerdo a las claves q_a^J encontrar las listas de los censos en cada procesador dadas por los arreglos $inicio^J(I)$ y $fin^J(I)$ donde I es nuevamente el índice que enumera cada una de las celdas de la malla virtual con número total de celdas $N_{clases} = N_x \cdot N_y \cdot N_z$. La numeración de esta tenemos que recordar que está relacionada con la función número $\#$ al igual que en el caso serial. Por construcción esta función es exactamente la

misma para todos los procesos y por eso podemos realizar el censo en cada procesador sin tener que transferir información alguna entre ellos.

Para todos los procesos una vez que se formó la caja máxima virtual, no se ha requerido más que la información que cada J -proceso contiene, por lo que se puede decir que la *Asignación de Coordenadas*, *Ordenador de Raíz* y el *Censo*, son procesos que se llevan de forma serial. El siguiente proceso de *Búsqueda* si necesita nuevamente de la sincronía de los procesadores.

7.5. Búsqueda

Esta parte tiene que realizarse de forma paralela entre los n_{proc} procesos. Cada uno de los procesos buscará alrededor de una partícula \bar{a}^J de sus N_p^{lcl} partículas como se hizo para el código serial. Sin embargo, al realizar esta búsqueda en cada proceso obtendrá información parcial ya que solo puede ver los vecinos que estarán en su procesador.

Es necesario enviar la información de esta partícula a los otros procesadores y esto en programación en paralelo significa estar listo para recibir el mismo tipo de información de los otros procesadores de forma sincronizada. Del tal forma que si solo pretendiéramos conocer cuantos vecinos tenemos al rededor de la \bar{a}^J -partícula, bastaría con transmitir la posición de la partícula, pero si requerimos calcular promedios a la SPH, debemos observar que datos de la partícula al rededor de la cual estoy haciendo la búsqueda debo enviar hacia otros procesadores (y cual debo recibir).

En este código hemos usando nuevamente una función de *MPI* para enviar/recibir la información necesaria dependiendo del promedio a la SPH que queremos calcular.

Cuando el procesador termina de realizar la búsqueda y los promedios sobre la partícula que existe en su procesador actual, deberá después buscar y hacer promedios sobre la información de las partículas que otros procesadores le enviaron. Una vez que obtiene estos resultados parciales tiene que enviarlos de regreso a sus procesos de origen y estar listo para recibir lo que otros procesos le enviarán. Por tanto, una vez que tiene la información del promedio a la SPH que realizó en su procesador actual y la de los otros procesadores debe realizar la operaciones pertinentes para fusionar esta información parcial en solo un promedio real.

En este momento el código termina la aplicación en paralelo y puede seguir con las rutinas seriales habituales tales como la integración numérica, ya que de estos procesos debemos calcular los lados derechos de las ecuaciones discretizadas a la SPH.

Capítulo 8

Estrellas Relativistas en equilibrio tipo Oppenheimer-Volkoff

Una métrica esféricamente simétrica puede depender solamente de las coordenadas radiales y temporales t y r respectivamente, así como de los ángulos bajo las siguientes combinaciones

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2. \quad (8.1)$$

La métrica más general puede ser escrita de la siguiente forma

$$ds^2 = -A(t, r)dt^2 + B(t, r)dr^2 + 2C(t, r)dtdr + D(t, r)d\Omega^2. \quad (8.2)$$

Haciendo álgebra y cambios de variables que se pueden seguir en [10], se obtiene

$$ds^2 = -e^{2\Phi} dt^2 + e^{2\lambda} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (8.3)$$

donde Φ y λ son funciones de t y r en general.

El teorema de Birkhoff afirma que el único campo gravitacional esféricamente simétrico en el vacío es estático. Con la palabra vacío denotamos la región del espacio-tiempo donde el efecto del campo gravitacional sobre cualquier materia presente es despreciable. Dicha solución del campo gravitacional es llamada la métrica de Schwarzschild

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (8.4)$$

Aquí M es una constante que representa la masa de la fuente. La métrica de Schwarzschild aplica para todos los puntos fuera de la estrella esférica, es decir, para cuando $r \geq R$, donde R es el radio de la estrella.

La métrica (8.3) también describe el campo gravitacional dentro de la estrella esférica. Tenemos que para una estrella en equilibrio hidrostático, Φ y λ independientes del tiempo t .

La descripción del material de la estrella estará dado por un fluido perfecto y para este tendríamos que especificar una ecuación de estado

$$\rho = \rho(n, s). \quad (8.5)$$

De la primera ley de la termodinámica $d\rho = \frac{\rho+p}{n} dn$ se puede escribir

$$d\left(\frac{\rho}{n}\right) = \frac{P}{n^2} dn. \quad (8.6)$$

Aunque el fluido es adiabático, es decir, la entropía s de un elemento de fluido permanece constante, no es necesariamente isentrópica, lo cual significa que s no necesariamente tiene el mismo valor en todas partes.

Entonces, podemos hacer uso de una ecuación de estado de la forma

$$P = P(\rho). \quad (8.7)$$

Primero, definimos una nueva función métrica $m(r)$ por

$$e^{2\lambda} = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}. \quad (8.8)$$

Entonces las ecuaciones de Einstein se escriben como un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho, \quad (8.9)$$

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{\rho m}{r^2} \left(1 + \frac{P}{\rho}\right) \left(1 + \frac{4\pi P r^3}{m}\right) \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}, \quad (8.10)$$

$$\frac{d\Phi}{dr} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} \left(1 + \frac{P}{\rho}\right)^{-1}. \quad (8.11)$$

Aquí tenemos que (8.10) es el llamado *equilibrio hidrostática de Oppenheimer-Volkoff (OV)*. Al integrar la ecuación (8.9) nos da una función $m(r)$ que tiene interpretación de *masa dentro del radio r* . Esto se escribe como

$$M = \int_0^R 4\pi r^2 \rho dr, \quad (8.12)$$

donde M es la masa total de la estrella de radio R . Esta ecuación también incluye una contribución global de la energía potencial gravitacional negativa de la estrella.

La cantidad $m(r)$ debe ser igual a M tal que el coeficiente de la métrica interior coincide exactamente con la métrica exterior de Schwarzschild.

El elemento de línea, en general, está descrito entonces por

$$ds^2 = \begin{cases} -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2m}{r}} dr^2 + r^2 d\Omega^2 & \text{si } r \leq R, \\ -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} dr^2 + r^2 d\Omega^2 & \text{si } r > R, \end{cases} \quad (8.13)$$

para $r \leq R$ llamamos *métrica interior* y para $r > R$ le llamamos *métrica exterior*.

Para resolver las ecuaciones de la *OV* se realiza de forma fácil con un cálculo numérico mediante la siguiente receta:

Construimos una discretización numérica unidimensional en r sobre un dominio $[0, R_{ex}]$, donde $R_{ex} > R$ donde R_{ex} se toma inicialmente de forma arbitraria, ya que R es el radio de la estrella es un valor desconocido.:

- Escogemos una densidad central ρ_c . La ecuación de un estado da una presión central P_c y usando como condición de frontera $m(r=0) = 0$.
- Integrando las ecuaciones (8.9), (8.10) y (8.11) usando un integrador numérico Runge-Kutta de orden cuatro para $r = j \cdot \Delta r$, comenzando con $j = 1$. Así una vez que se resuelve para $j = 1$ se repite este proceso aumentando $j \leftarrow j + 1$ hasta que se obtienen las condiciones del siguiente paso.
- El valor de $r = R$ en el que $P = 0$ es el radio de la estrella y $m(R) = M$.
- Al integrarse con el Runge-Kutta la función escalar Φ debe ser reajustada para coincidir con la solución de Schwarzschild para $r > R$ de donde tenemos la condición:

$$\Phi(r = R) = \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{2M}{R}\right). \quad (8.14)$$

8.1. Polítropas

Una ecuación de estado que solo depende de la densidad en reposo ρ para modelos de estrellas en equilibrio están contruidos de la ecuación de estado isentrópica de la forma

$$P = K\rho^\Gamma, \quad (8.15)$$

donde la constante K es la constante politrópica del gas y n , el índice politrópico, está definida por $\Gamma = 1 + 1/n$. A los modelos estelares contruidos de esta forma se les llama *Polítropas*. Para estos sistemas podemos deducir de la primera ley de la termodinámica $d\rho - \frac{\rho+P}{n}dn = 0$ que

$$d\left(\frac{\rho}{n}\right) = \frac{P}{n^2}dn. \quad (8.16)$$

De aquí, del lado derecho de la ecuación usando la definición de la densidad de masa-energía $\rho = \rho_o(1 + \epsilon) = nm_o(1 + \epsilon)$ usando la ecuación politrópica de lado derecho de la igualdad $P = K\rho^\Gamma = K(nm_o)^\Gamma = Km_o^\Gamma n^\Gamma$ obtenemos que

$$d(m_o(1 + \epsilon)) = \frac{Km_o^\Gamma n^\Gamma}{n^2}dn, \quad (8.17)$$

diferenciando el segundo término de la igualdad e integrando tenemos

$$\rho_o\epsilon = \frac{P}{\Gamma - 1}. \quad (8.18)$$

Podemos apreciar que entonces en un proceso adiabático e isentrópico como lo es el modelo de polítropa tenemos que la ecuación de estado arroja la expresión para un gas ideal

$$P = (\Gamma - 1)\rho_o\epsilon. \quad (8.19)$$

8.1.1. Datos iniciales para la OV

Es una cuestión primordial encontrar el acomodo adecuado de las partículas de tal forma que reproduzcan la densidad de número bariónico. En el proceso del doctorado dedicamos grandes esfuerzos a tratar este problema, ver [17], ya que en la literatura habitual el acomodo de partículas de igual masa que sea capaz de reproducir una perfil de densidad se puede resolver usando un método de aceptación y rechazo. Sin embargo, estos métodos dejan muy disperso el perfil de densidad con respecto al perfil exacto. A continuación describimos brevemente el proceso de transformación de coordenadas usado para los casos en espacios tiempos curvos.

Para esto, consideremos que todas la cantidades físicas dependen solamente de r y no de las variables angulares θ y ϕ , tenemos que de la integral de masa en reposo podemos desarrollar la forma de usar el método de aceptación y rechazo o bien de la transformación de coordenadas [18].

Para tal conveniencia tomaremos la definición de masa en reposo dada por [10] [19] para una hipersuperficie Σ_t

$$M_o = \int_{\Sigma} \sqrt{-g}U^t \rho_o dV, \quad (8.20)$$

de donde $\sqrt{-g}$ es el determinante de la métrica 4-dimensional U^t es la coordenada temporal de la 4-velocidad y ρ_o es la densidad de la masa en reposo. De la formulación 3+1 tenemos que $\sqrt{-g} = \alpha\sqrt{\gamma}$, tomando además el vector de desplazamiento como $\beta^j = 0$ tenemos que $\alpha^2 = e^{2\Phi}$, mientras que el determinante de la 3-métrica viene dado por $\sqrt{\eta} = \sqrt{e^{2\lambda}r^4 \sin^2 \theta} = e^\lambda r^2 \sin \theta$. Es también conocido que $U^t = W/\alpha$ por lo que al sustituir en el integrando tenemos que

$$M_o = \int_{V \subset \Sigma_t} \alpha\sqrt{\gamma} \frac{W}{\alpha} dV = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R e^\lambda r^2 \sin \theta \rho_o dr d\theta d\phi. \quad (8.21)$$

En la última igualdad hemos usado el hecho de que la velocidad del fluido es cero y que por lo tanto $W = 1$. En esta integral tenemos que R es el radio de la estrella (recordemos que éste

se encuentra de la condición donde la presión de la estrella es cero), ρ_o la densidad medida en reposo es una función de la coordenada radial al igual que todas los elementos que en esta integral sobreviven.

La integral anterior se puede partir en tres integrales diferentes:

$$\int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi, \int_0^\pi \sin \theta d\theta = 2, \int_0^R e^\lambda \rho_o r^2 dr = M/4\pi. \quad (8.22)$$

Con estas tres integrales podemos construir para cada coordenada (r, θ, ϕ) tres distribuciones de números aleatorios que sigan las siguientes densidades de probabilidad

$$f_\phi(\phi) = \frac{1}{2\pi}, f_\theta(\theta) = \frac{\sin \theta}{2}, f_r(r) = \frac{4\pi}{M} e^\lambda \rho_o r^2. \quad (8.23)$$

Podemos notar que estas cumplen con una propiedad de normalización, y por lo tanto podemos construir la respectiva función acumulativa:

$$\int_0^{X_1} f_\phi(\phi) d\phi = F(X_1), \int_0^{X_2} f_\theta(\theta) d\theta = F(X_2), \int_0^{X_3} f_r(r) dr = F(X_3). \quad (8.24)$$

De aquí las integrales de ϕ y θ la integral se resuelve de forma analítica y tenemos que

$$F(X_1) = X_1/2\pi, \text{ donde } X_1 \in (0, 2\pi), \quad (8.25)$$

$$F(X_2) = \frac{1}{2} (1 - \cos X_2) \text{ donde } X_2 \in (0, \pi). \quad (8.26)$$

La última integral de (8.22) es la parte más interesante ya que λ se encuentra de forma numérica mediante el proceso descrito anteriormente y por tanto esta integral se encuentra también mediante un método de integración por trapecios. Así, si el dominio $[0, R]$ se discretizó en $n_r + 1$ puntos equidistantes podemos definir r_i , tal que $i = 0, \dots, n_r$, donde $r_0 = 0$ y se incrementa en $\Delta r = R/n_r$ mediante $r_i = i * \Delta r$ con $r_{n_r} = R$. Se pueden generar n_r integrales parciales que harán las veces de una función cumulativa numérica para r :

$$F(X_3^i) = \frac{4\pi}{M} \int_0^{r_i} e^\lambda(r) \rho_o(r) r^2 dr, \quad (8.27)$$

remarcamos que esta integral es realizada de forma numérica para conformar la función cumulativa numérica mediante $(r_i, F(X_3^i))$ donde $i = 0, \dots, n_r$.

Dado una función cumulativa $F(X)$ podemos igualarla a y , número que proviene de una distribución uniforme de números aleatorios y así podemos encontrar X en función de y como $X = F^{-1}(y)$ por lo que encontramos

- $X_1 =: \tilde{\theta} = 2\pi \cdot y_1,$
- $X_2 =: \tilde{\phi} = \cos^{-1} (1 - 2y_2),$

donde y_1 e y_2 representan números que provienen de distribuciones uniformes.

Para \tilde{r} : una vez que se genera computacionalmente el número aleatorio y_3 , es necesario encontrar dentro de los valores discretos de la función cumulativa el índice k tal que $y_3 \in (F(X_3^k), F(X_3^{k+1}))$ con esto sabemos que el radio de posición que se busca \tilde{r} estará entre (r_k, r_{k+1}) , despejando de la ecuación

$$\frac{F(X_3^k) - F(X_3^{k+1})}{r_k - r_{k+1}} = \frac{y_3 - F(X_3^{k+1})}{\tilde{r} - r_{k+1}}, \quad (8.28)$$

con set estamos generando numéricamente la inversa de la coordenada radial, lo cual nos permite encontrar las posiciones $(\tilde{r}, \tilde{\theta}, \tilde{\phi})$.

Y una vez que se tienen las posiciones en coordenadas esféricas podemos hacer el cambio a coordenadas cartesianas que son las que hemos programado para nuestro código IPA.

8.2. Resultados Numéricos

Para realizar las pruebas sobre el código numérico en 3 dimensiones hemos reescrito la métrica de la OV de coordenadas esféricas a unas coordenadas pseudo-cartesianas mediante la transformación

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad (8.29)$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi, \quad (8.30)$$

$$z = r \cos \theta \quad (8.31)$$

Los elementos de la métrica se escriben en términos de las coordenadas pseudo-cartesianas y se usan en el código IPA.

Una vez que hemos descrito el espacio-tiempo en el que vamos a estar trabajando y que hemos descrito cómo hemos discretizado el fluido a través de un proceso de transformación de coordenadas. Estamos en posición de describir los valores usados para dichas pruebas, con el fin de realizar los tests propuestos en el libro [3], hemos elegido el índice politrópico $n = 1$, la densidad central $\rho_c = 0,420$, el cual da como resultado una constante $\Gamma = 2$. Con estos datos resolvemos de forma numérica el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (8.9), (8.10) y (8.11).

Una vez que se tiene la solución numérica, calculamos la posición cada una de las partículas de masa $m_i = M/N_p$ donde N_p es el número total de partículas usadas para discretizar el fluido que compone la estrella. Para las simulaciones numéricas que mostramos en este trabajo hemos usado tres diferentes números de partículas $N_p = 8 \times 10^3, 16 \times 10^3, 32 \times 10^3$. La longitud de suavizado que se ha escogido de acuerdo a $h = \eta (m_i/\rho_{oi})^{1/3}$, donde η ha sido tomado como $\eta = 1,5$.

Cuando el número de partículas aumenta en cierta proporción f , la longitud de suavizado disminuye en la proporción $f^{-1/3}$. Para esto, hemos visto, mediante un conteo que el número de vecinos que abarca este radio es aproximadamente el mismo para cada partícula aún cuando aumenta la resolución N y que h disminuye por tal causa.

A continuación, mostramos dos tipos de simulaciones que nos ayudaron a estudiar qué tan bien se comporta el código *IPA* con viscosidad artificial (*VA*) y sin viscosidad artificial. En el primer par de gráficos que presentamos para el cual se usa la solución exacta contrastada con la densidad en reposo calculada mediante la suma, es decir, $D^* = \sum_j m_j W_{ij}$ y luego usando $D^* = \sqrt{\gamma} W \rho_o$ despejamos ρ_o .

8.3. Pruebas con Viscosidad Artificial y sin Viscosidad Artificial

Como podemos observar de las gráficas del cuadro (8.1), ambas aproximaciones son casi las mismas con y sin VA inicialmente. Ahora cuando proseguimos en la evolución de la configuración de la estrella podemos observar que existe mucho ruido básicamente por dos razones: el error en la colocación de las partículas, al provenir de una transformación de coordenadas (y de un proceso de relajación realizado como tratamiento previo a la densidad uniforme) y debido a que no se le ha dado ningún tratamiento especial a las fronteras donde las partículas que están cercanas a ellas carecen de partículas. Mientras que en el centro existe un exceso de ellas y por eso observamos un pico en la cerca de $r = 0$, cerca de la frontera de la estrella existe una deficiencia de partículas.

En las gráficas posteriores mostramos el perfil de densidad en función del radio en los cuadros (8.2), (8.3), (8.4) y (8.5) para los tiempos $t = 5,0, 10,0, 15,0$ y $t = 20$, respectivamente. Podemos ver como para los tiempos entre $t = 0$ y $t = 15,0$ la gráfica de la densidad parece que se acerca más al perfil exacto denotado por las líneas verdes, mientras que para $t = 20$ la dispersión de las partículas se vuelve más evidente. Aún así el perfil donde se maneja la viscosidad artificial estándar guarda más la forma del perfil deseado que las otras configuraciones sin viscosidad artificial.

Nos ocupamos de la densidad principalmente ya que hemos tratado siempre de medir el error que se comete con la distribución inicial de las partículas y su evolución, teniendo influencia directa sobre el perfil de densidad. Sin embargo no se descarta hacer un análisis sobre otras variables como la velocidad o la energía interna.

En el orden de aparición podemos notar como del radio de la estrella calculado de forma numérica para las simulaciones que manejan viscosidad artificial el número de partículas que se encuentran más allá son menores que para aquellas sin viscosidad artificial, por ejemplo compare las gráficas en (8.3) y (8.5).

Al fin de la evolución numérica, ambas simulaciones presentan una taxonomía parecida más la que mejor conserva el perfil es la que tiene viscosidad artificial. En la que no maneja viscosidad artificial se puede observar un crecimiento de la densidad y una línea más densa cerca de la frontera inicial de la estrella, lo cual indica que los errores que maneja esta simulación le han hecho oscilar mucho más que a su semejante con VA.

De acuerdo con la formulación de SPH en sistemas clásicos la viscosidad artificial emula que cada una de las partículas tengan un volumen significativo y además en los choques (que aquí no aparecen) las oscilaciones se vean amortiguadas. Esto previene la interpenetración de partículas y permite guardar una configuración más real, como hemos visto en esta simulación esto coincide con la última gráfica.

8.4. Pruebas con diferentes resoluciones(VA)

Con las observaciones realizadas sobre las gráficas de los cuadros con VA y sin VA, decidimos que la estructura de la estrella se preserva por más tiempo con la Viscosidad Artificial. Entonces, mostramos la evolución de una *OV* en el intervalo de tiempo de $t = 0$ a $t = 20$, para tres diferentes resoluciones para después poder realizar estudios numéricos sobre una propuesta de un criterio de convergencia.

Mostramos en las figuras sobre la evolución para las tres resoluciones correspondientes a $N_p = 8 \times 10^3, 16 \times 10^3, 32 \times 32 \times 10^3$, para la simulación que tiene viscosidad artificial a diferentes tiempos. En el cuadro (8.6) mostramos las gráficas del tiempo $t = 5,0$, (8.7) mostramos las gráficas de $t = 10,0$ y por último (8.8) para $t = 20,0$.

En estas simulaciones podemos observar como las gráficas muestran para todas las resoluciones, menos dispersión de partículas para los tiempos de $t = 0$ a $t = 10$ mientras que para los últimos, en especial para $t = 20$ existe una dispersión mayor de las partículas alrededor del valor analítico.

Con el fin de observar a mayor profundidad los aspectos físicos de la simulaciones hemos desarrollado dos integrales numéricas que nos permiten calcular la masa total de la estrella en cada iteración, así como la energía interna total de la estrella [10] [3] [19].

De aquí obtenemos que la *masa-energía total* $m(r)$ de la estrella viene dado mediante la siguiente relación

$$m(r) = m_o(r) + U(r) + \Omega(r) \quad (8.32)$$

donde $m_o(r)$ es la *masa en reposo*, $U(r)$ es la *energía interna* y $\Omega(r)$ es la *energía potencial gravitacional*.

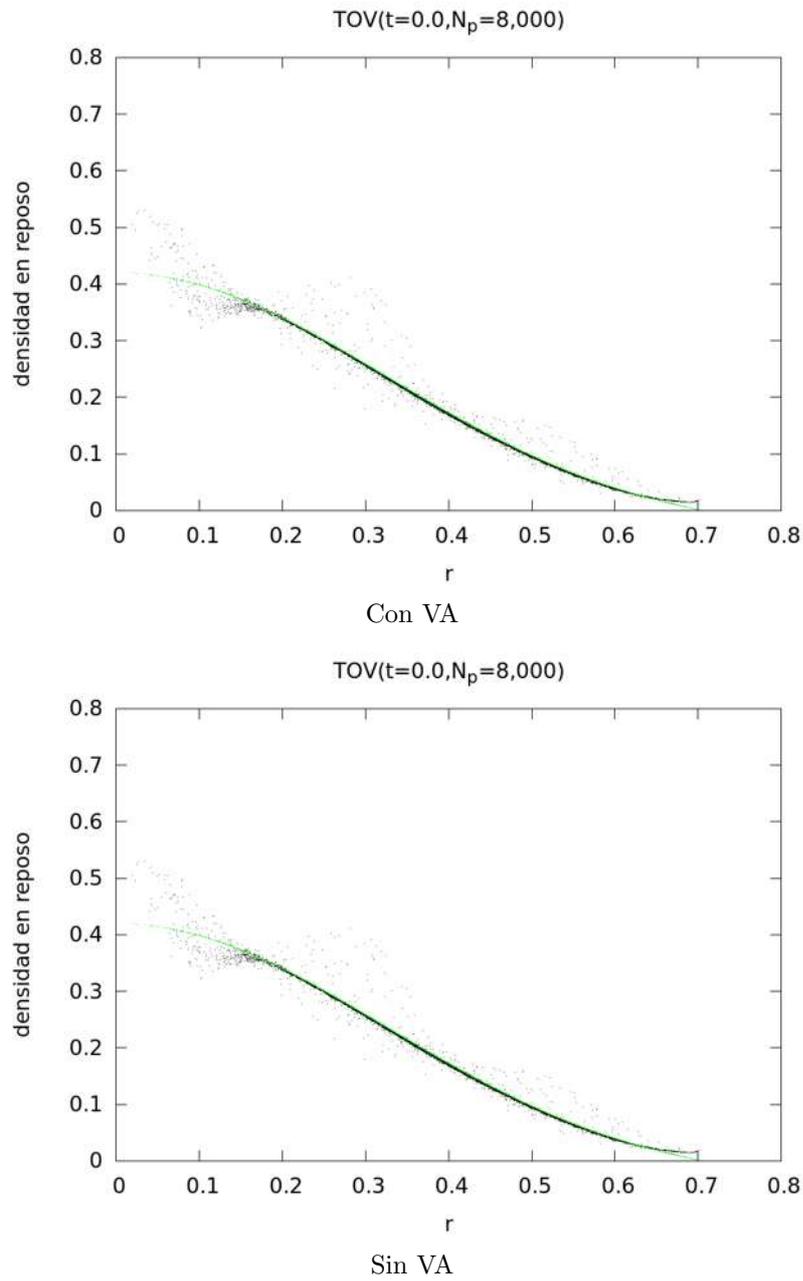
En el caso de una *OV* tenemos que para la masa en reposo:

$$m_o(r) = 4\pi \int_0^r (1 - 2m/r)^{-1/2} \rho_o dr, \quad (8.33)$$

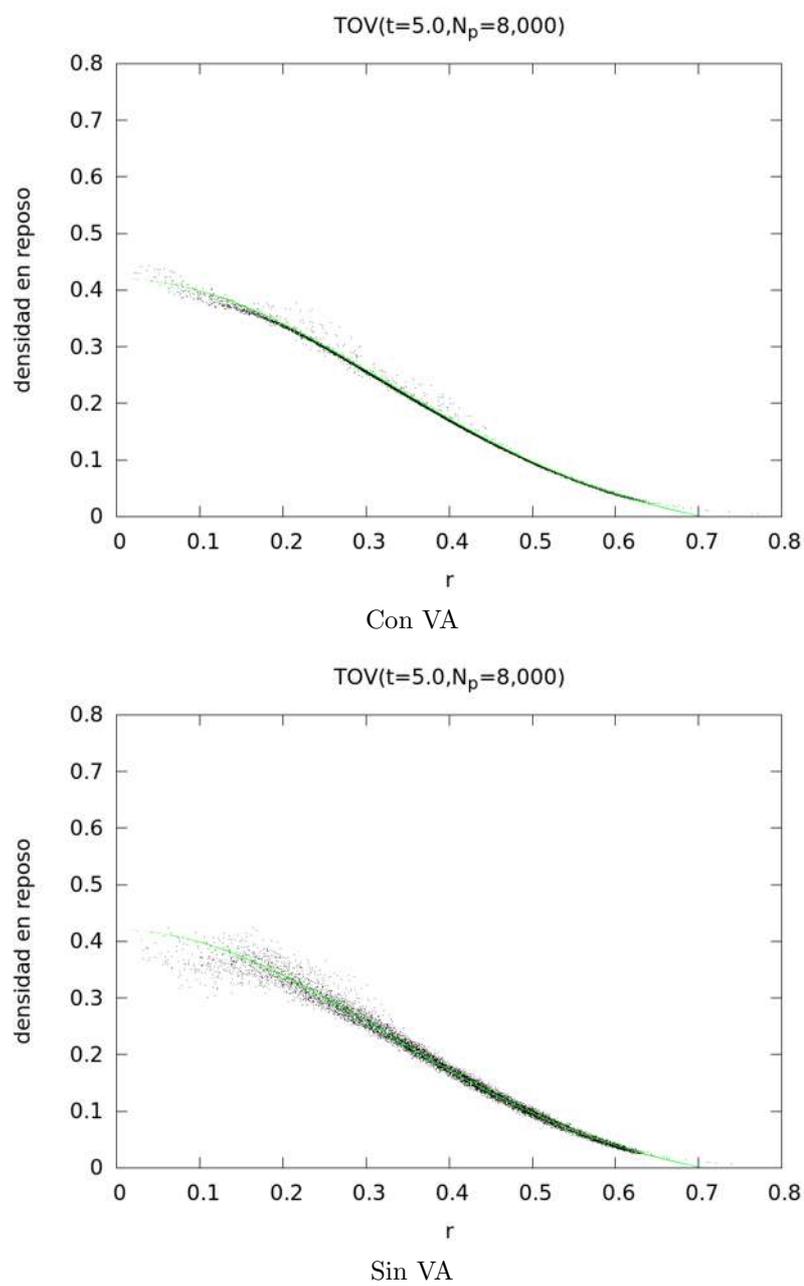
y la energía total interna:

$$U(r) = 4\pi \int_0^r (1 - 2m/r)^{-1/2} \epsilon dr, \quad (8.34)$$

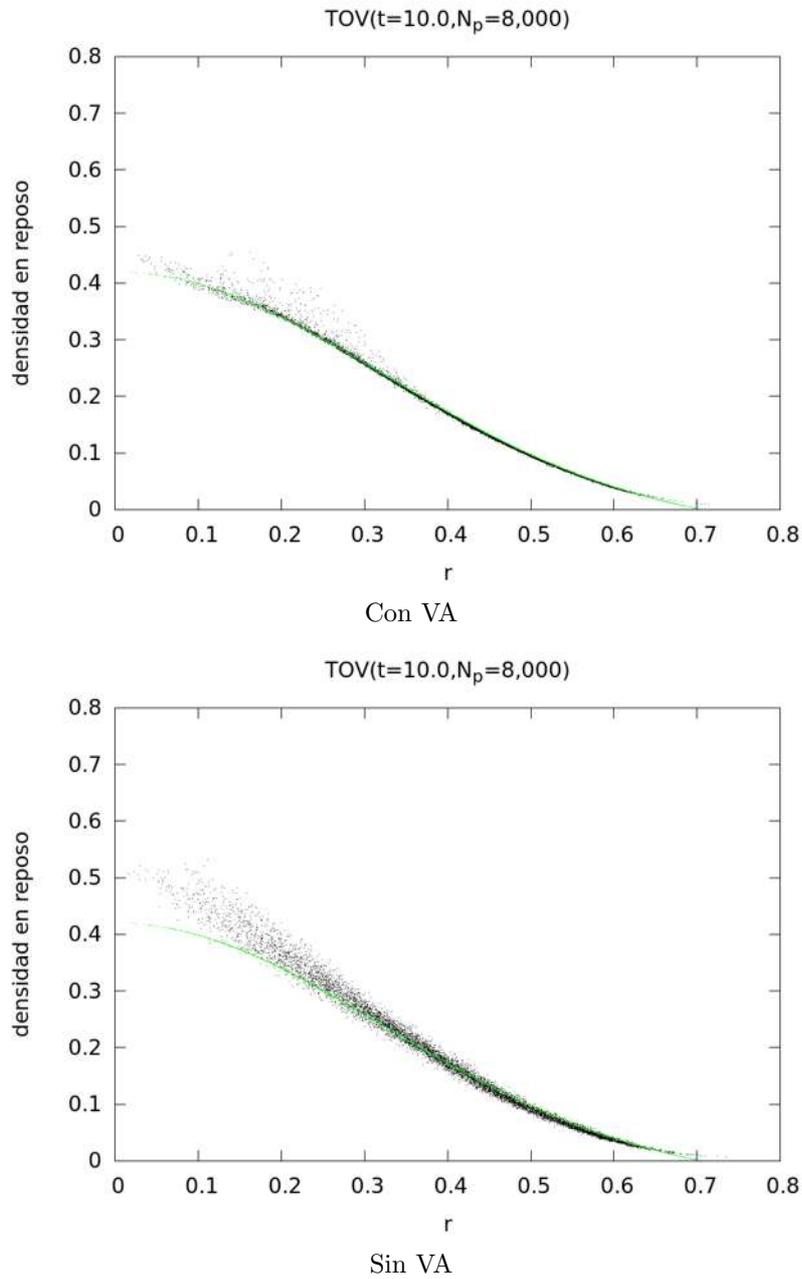
Para nuestras simulaciones tenemos conocemos del dato inicial tanto la masa-energía total $m(r)$ de la estrella así como la masa en reposo $m_o(r)$. Esta última se puede conocer del dato inicial o también de su calculo en cada iteración usando



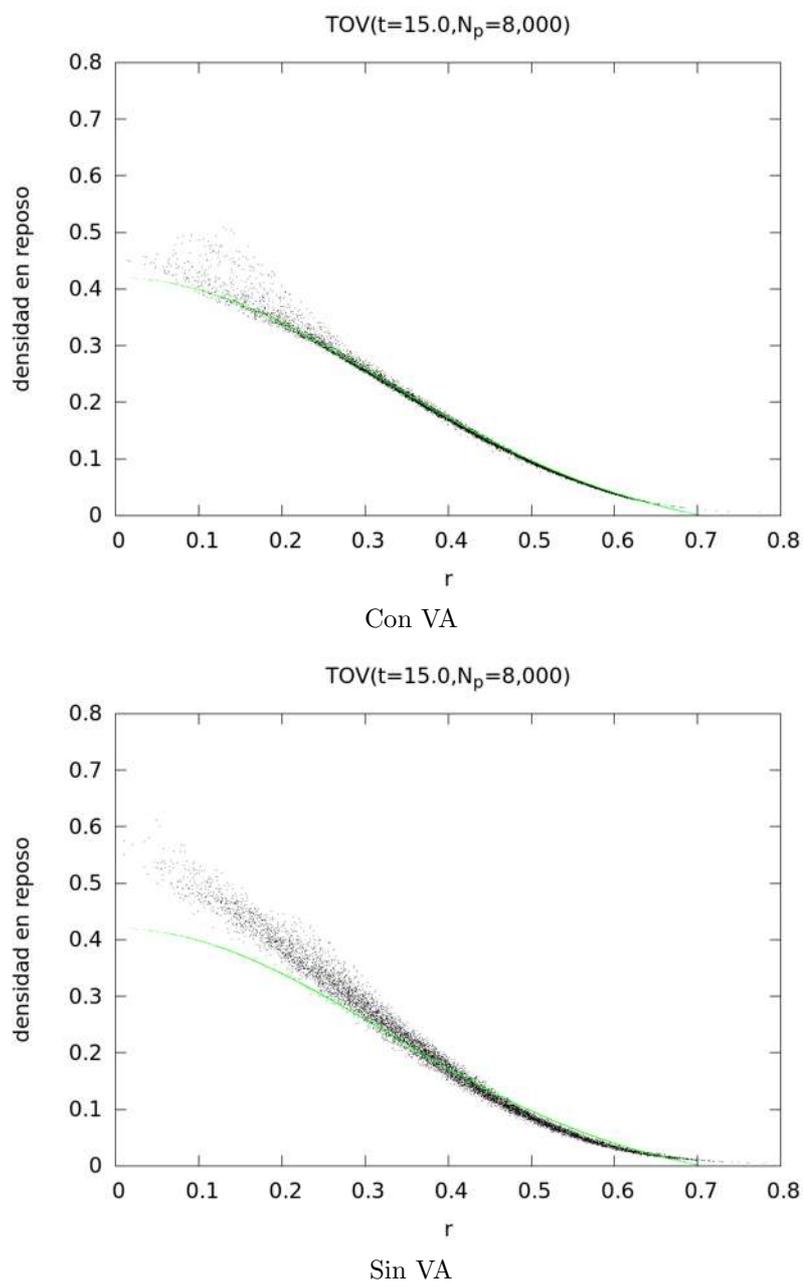
Cuadro 8.1: Aquí mostramos la solución exacta en una línea continua, mientras que los datos iniciales colocados mediante la transformación de coordenadas antes mencionado aparece mediante finos puntos negros.



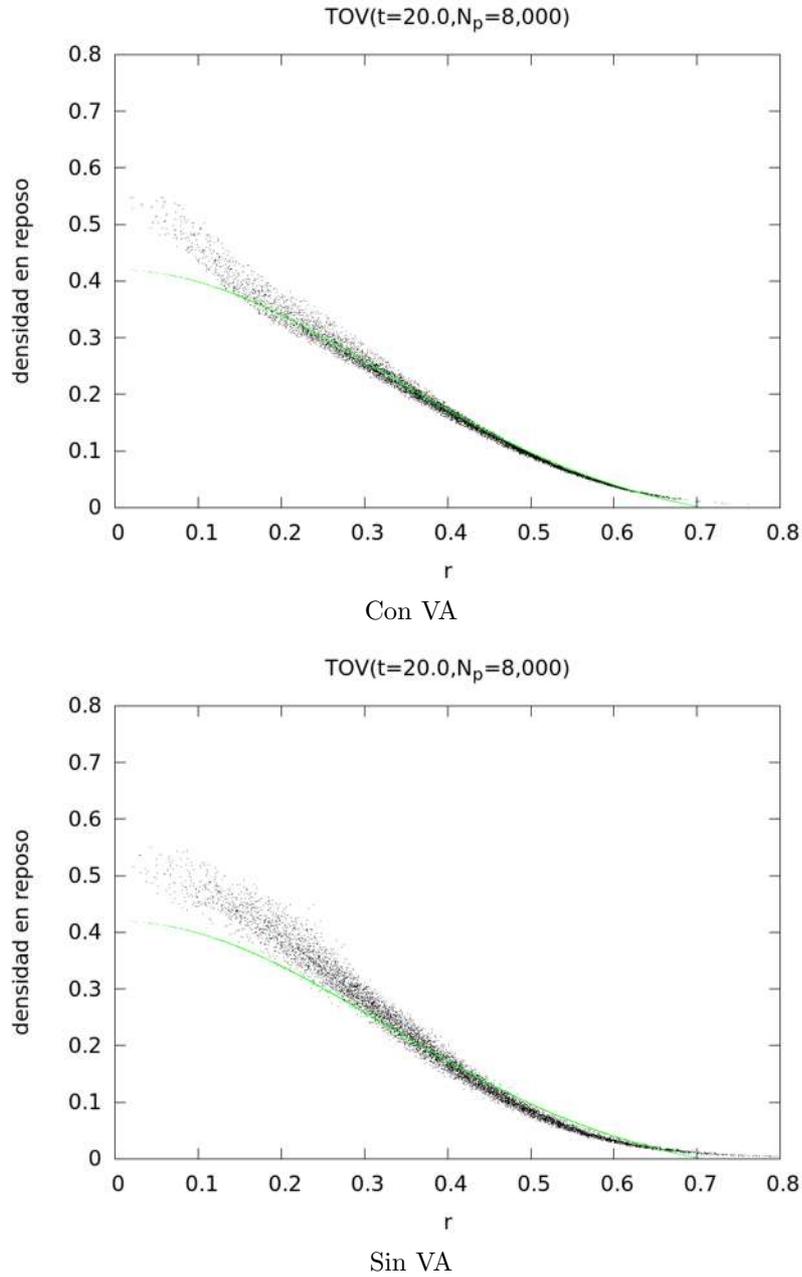
Cuadro 8.2: Podemos observar como para tiempos posteriores como en este caso $t = 5,0$ tenemos una diferencia en la configuración de la *OV*, mientras que para aquella que tiende a conservar al configuración de la solución exacta, la correspondiente a la que le falta la viscosidad artificial tenemos una deformación hacia las zonas internas de la estrella donde la densidad comienza a aumentar.



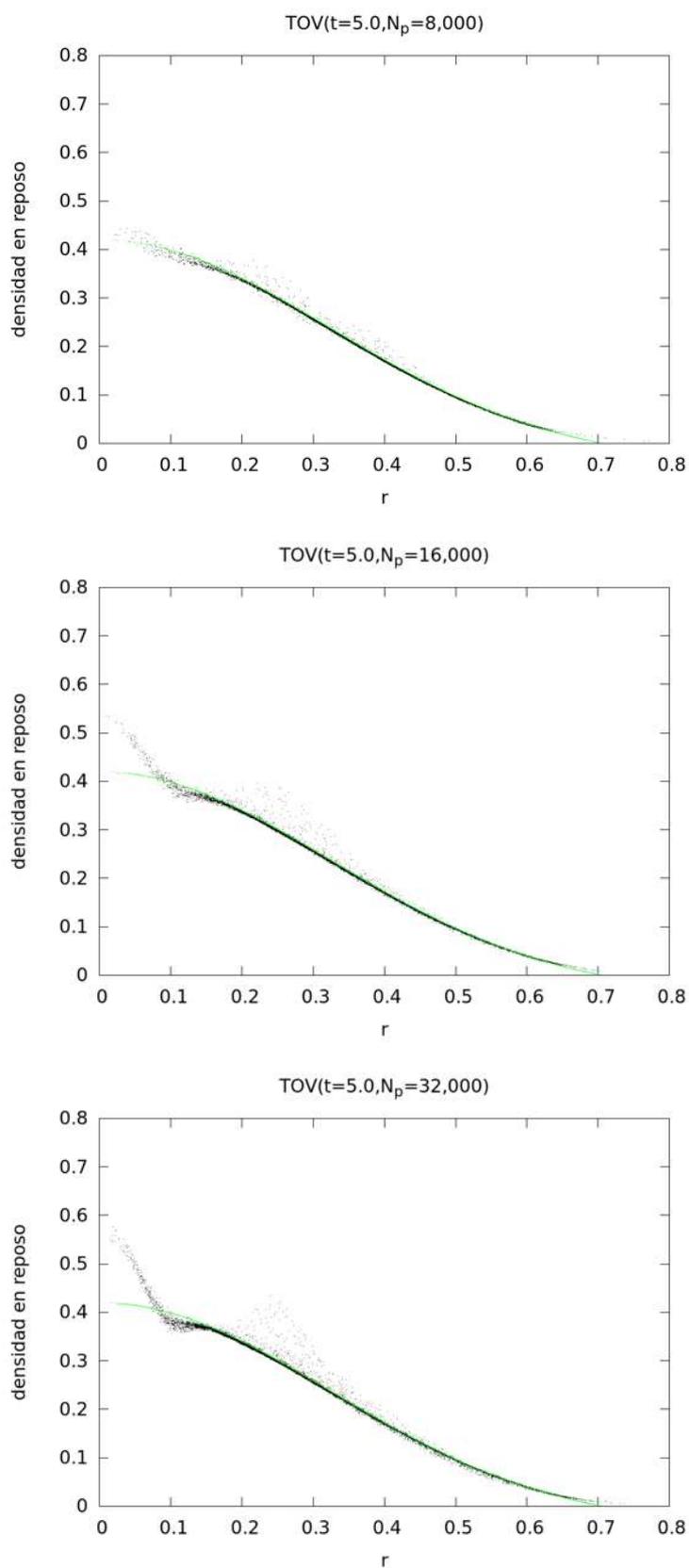
Cuadro 8.3: En este par de gráficas en las que se muestra el tiempo $t = 10,0$ se puede observar una clara diferencia entre la simulación que posee la viscosidad artificial y la que no. Mientras que la que tiene viscosidad artificial presenta una forma que imita la condición inicial, vemos que la que no tiene viscosidad artificial se ve bastante deformada en las partes más internas donde la densidad es más alta.



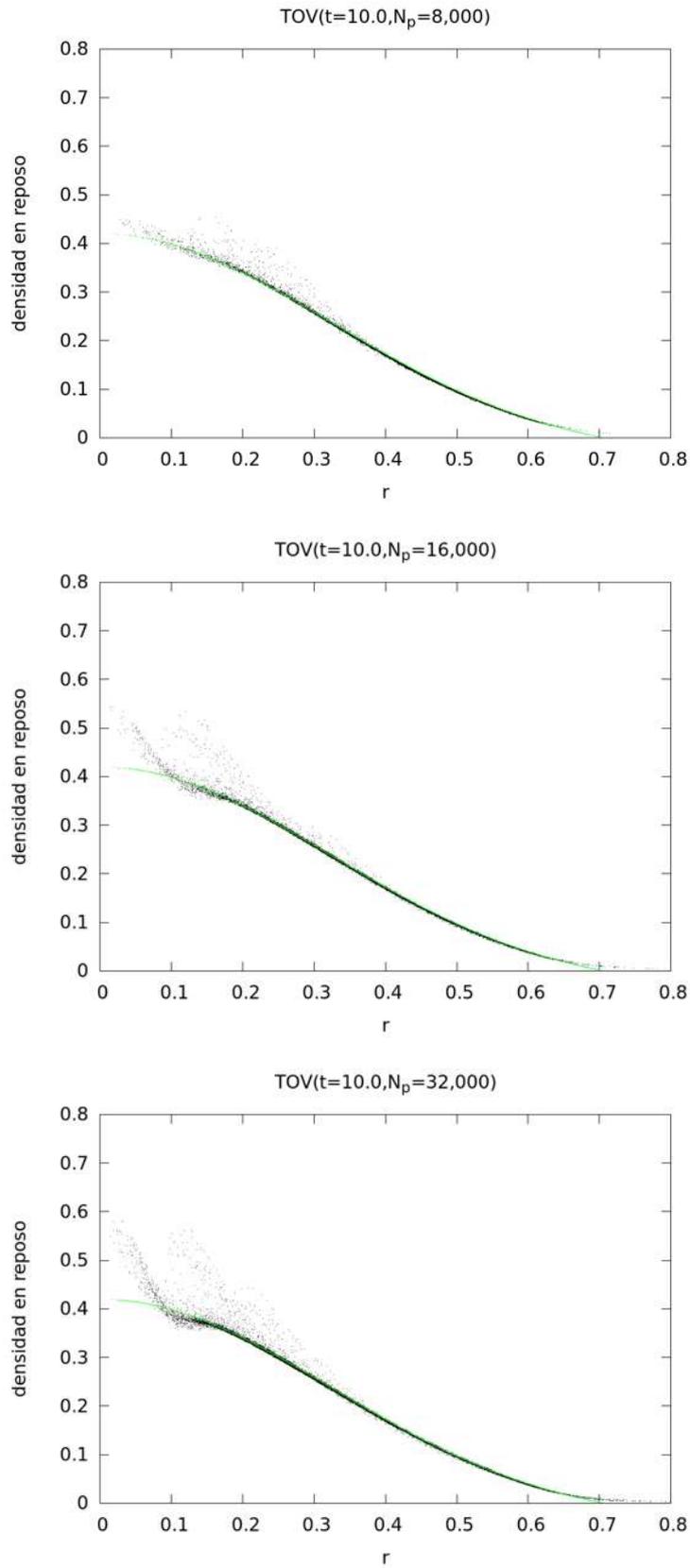
Cuadro 8.4: En este par de gráficas en las que se muestra el tiempo $t = 15,0$, se observa que al mismo radio ambas simulaciones tienen el problema de describir la densidad, sin embargo, el que no maneja VA se ve más afectado para mantener la correcta descripción.



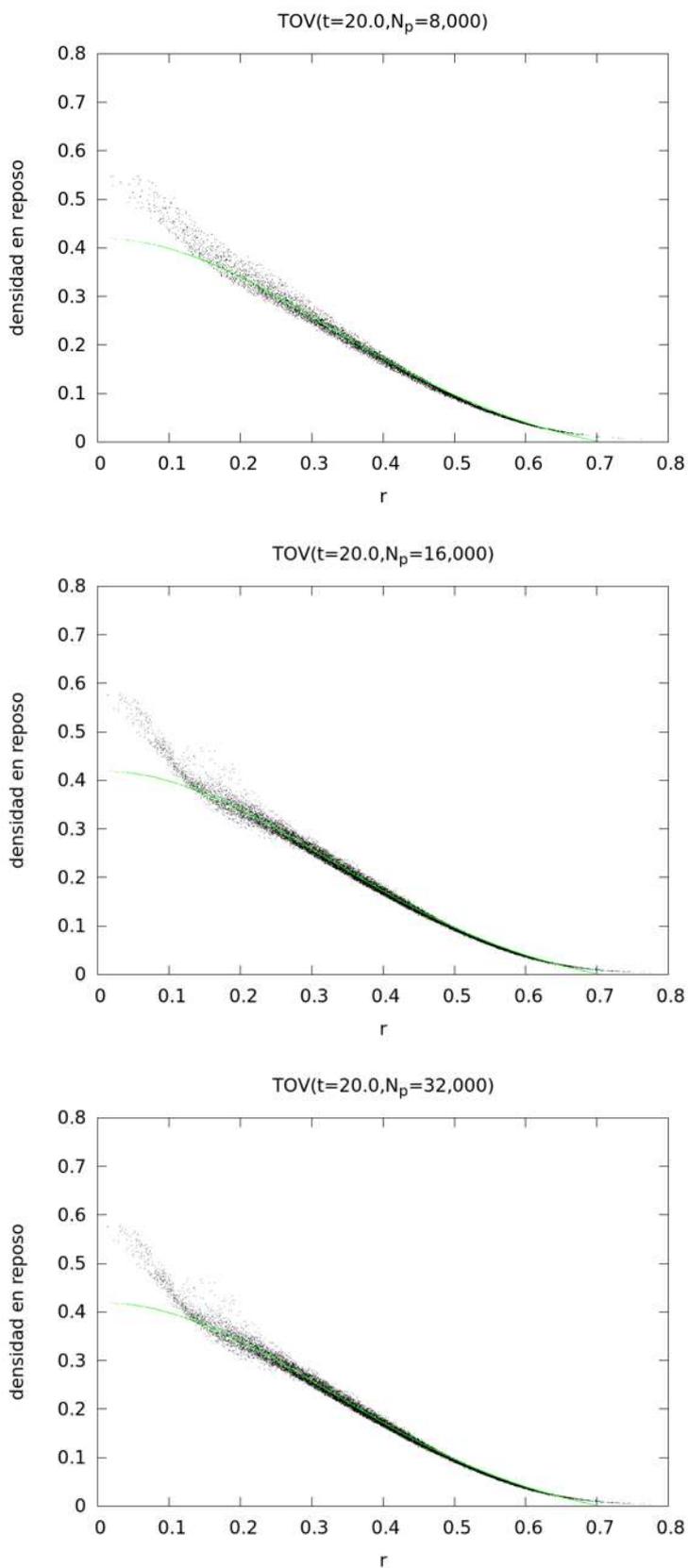
Cuadro 8.5: En este par de gráficas en las que se muestra el tiempo $t = 20,0$. Aquí le cuesta más trabajo al termino con viscosidad artificial mantener la forma inicial y al presentar una desviación más grande del dato inicial el error debido a la colocación inicial comienza a cobrar factura. Mientras que aquella que se no tiene viscosidad artificial en contraste, ya ha perdido el valor inicial en la mayoría de las partículas.



Cuadro 8.6: OV para $t = 5,0$. En el primer renglón se muestra, para ambas columnas, $N = 8,000$ partículas, en el segundo renglón se muestra $N = 16,000$ partículas y para el último $N = 32,000$. Es importante notar como es que el exceso de partículas cerca de $r = 0$ se disipa un poco durante la evolución.



Cuadro 8.7: En este cuadro vemos tres resoluciones: en el primer renglón vemos $N = 8,000$, en el segundo renglón vemos $N = 16,000$ y en el tercero $N = 32,000$ partículas. Se muestran los perfiles de densidad para el tiempo $t = 10$.



Cuadro 8.8: Por renglones vemos nuevamente tres resoluciones: en el primer renglón vemos $N = 8,000$, en el segundo renglón vemos $N = 16,000$ y en el tercero $N = 32,000$ partículas. Mostramos los perfiles de densidad para $t = 20,0$.

$$m_o(r) = \sum_j m_j, \quad (8.35)$$

donde j corre sobre el índice de las partículas que se encuentran dentro del radio de interés r . De la misma forma para hacer el cálculo de la energía interna usamos la distribución de Benz y esta da como resultado que

$$U(r) = \sum_j m_j \epsilon_j, \text{ con } j\text{-partícula tal que están dentro del radio } r. \quad (8.36)$$

Ya que podemos conocer tres de las cuatro cantidades, la $\Omega(r)$ la energía de confinamiento se encontrará de la diferencia $\Omega(r) = m(r) - m_o(r) - U(r)$. Esta deberá ser negativa mientras que la estrella represente un estado confinado en su totalidad.

Por otra parte y para confirmar el efecto que la viscosidad artificial tiene, mostraremos una gráfica de la energía de confinamiento para las simulaciones con y sin viscosidad artificial. En la Figura (8.1) podemos observar las gráficas correspondientes a las simulaciones sin viscosidad artificial tienen un crecimiento de la energía de confinamiento, marcando una línea de tendencia a ser cada vez más positiva. Mientras tanto para la simulación con viscosidad artificial aunque las oscilaciones siguen presentes esta parece ofrecer un cierto grado de atenuación de las oscilaciones así como de una valor promedio al rededor del cual la energía de confinamiento pueda estar, el cual en esta gráfica esta muy cerca del valor inicial. Esto nos indica que el sistema OV sin viscosidad artificial tiende a destruirse mientras que el que si posee viscosidad artificial permanece más tiempo en el equilibrio.

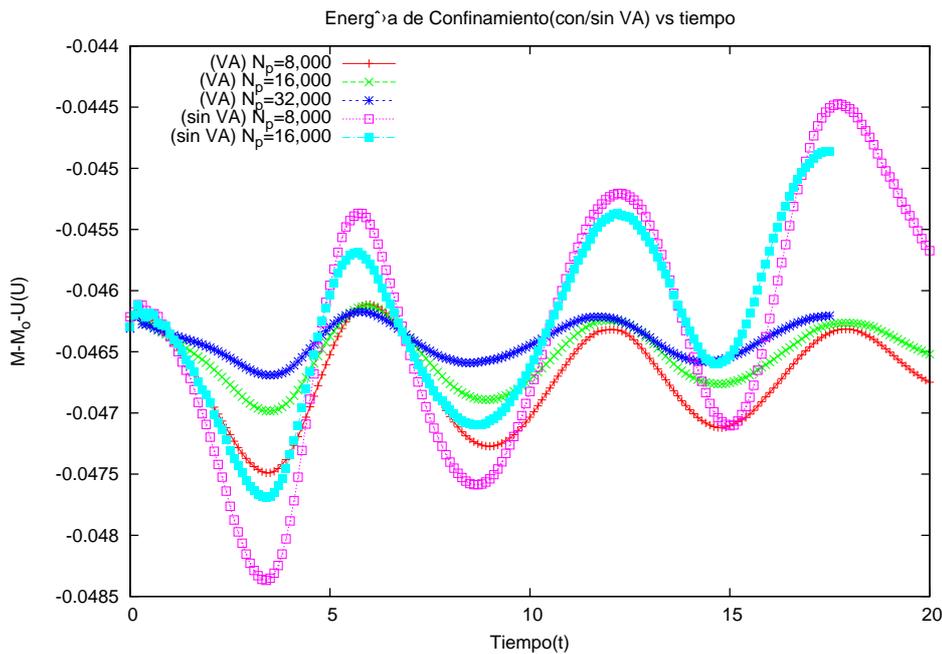
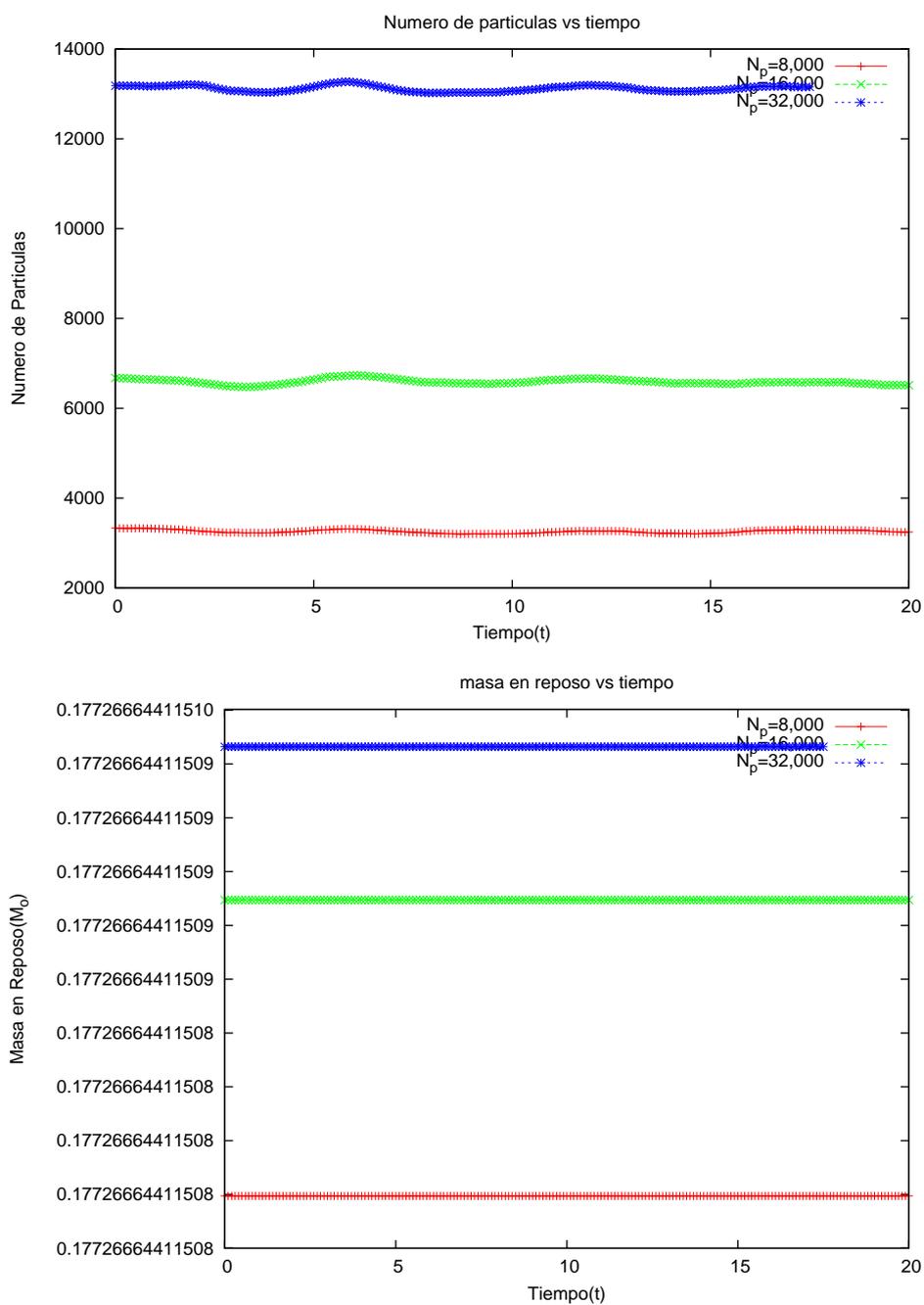
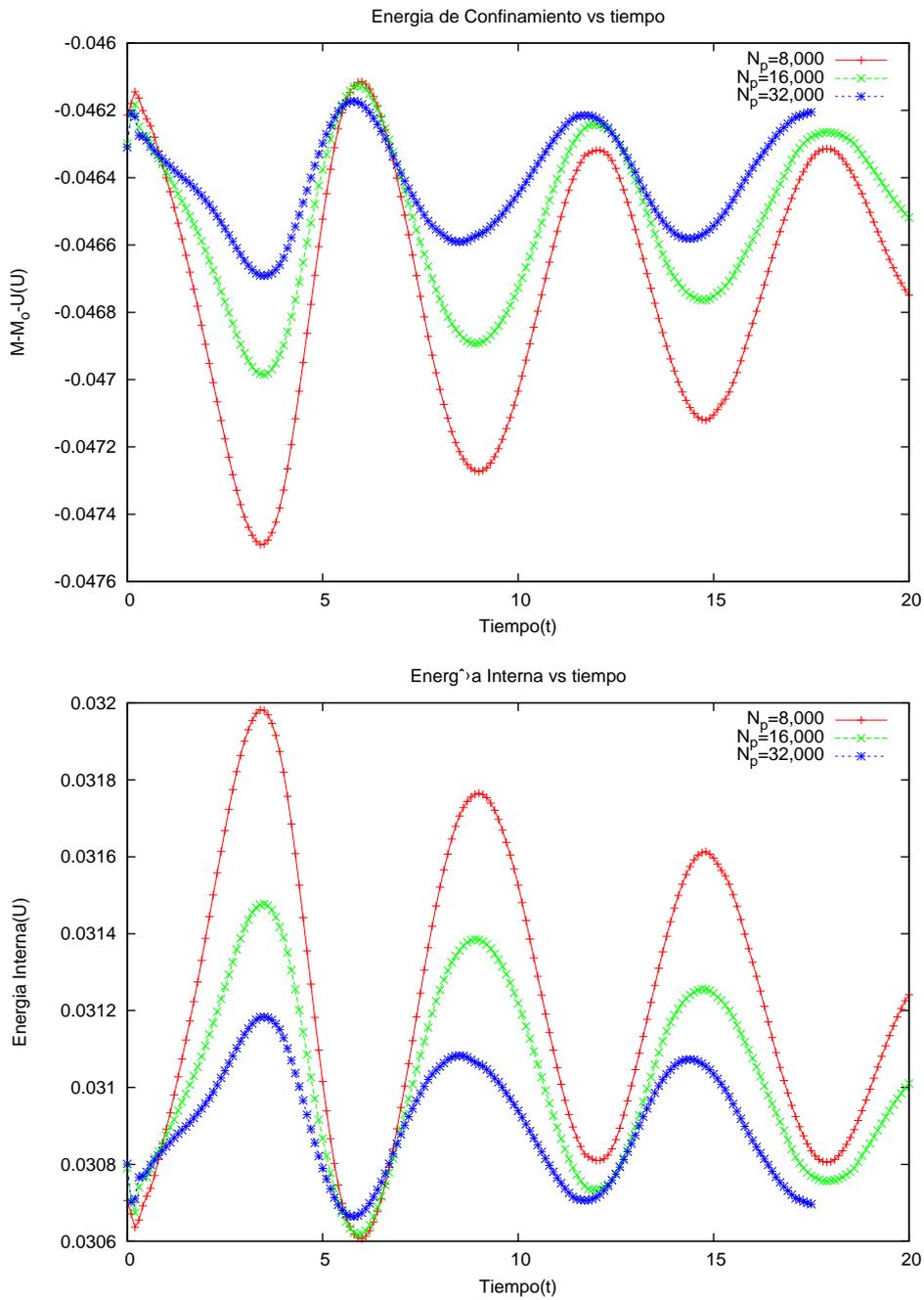


Figura 8.1: En esta figura mostramos al energía de confinamiento para tres diferentes resoluciones. Con VA mostramos $N_p = 8, 16, 32 \times 10^3$ y para las simulaciones sin VA, $N_p = 8, 16, 32 \times 10^3$. Aquí podemos ver la importancia de forma radical, de los términos de viscosidad artificial añadidos a la ecuaciones de SPH.

En las gráficas de los cuadros (8.13) podemos apreciar diferentes cortes en los planos de la esfera, donde podemos apreciar que las velocidades son irregulares para cada uno de ellos, pero su magnitud a su vez es del orden 10^{-2} . Esto se debe a que inicialmente las partículas no están del todo bien acomodadas debido a que su posición proviene de un método tipo Monte Carlo, esto a su vez tiene un efecto sobre la dispersión de las velocidades iniciales y hace que las



Cuadro 8.9: En la parte superior de este cuadro se muestra el número de partículas involucradas para obtener las integrales numéricas de la masa en reposo de la estrella, así como la gráfica de la energía interna. Con este número de partículas se calculará también las sumas parciales S_1 tanto para la energía interna de la estrella así como para la densidad en reposo. En la parte inferior, se muestra el calculo numérico de la masa en reposo de la partícula. Se muestran tres resoluciones $N = 8, 16, 32 \times 10^3$ partículas.



Cuadro 8.10: Se muestran tres resoluciones $N = 8, 16, 32 \times 10^3$. **Parte superior:** la gráfica de la energía de confinamiento de la OV. **Parte inferior:** La energía interna calculada mediante la integral numérica descrita en el cuerpo del texto. En ambas se puede apreciar que entra mayor número de partículas la oscilación del sistema disminuye y permanece durante más tiempo con las amplitudes de las oscilaciones casi constantes.

partículas comiencen a moverse de sus lugar con estas velocidades que aun así ayudan mantener la configuración en equilibrio, tal y como se pude apreciar en las gráficas de los cuadros (8.11) para los tiempos $t = 0$ y $t = 5$ y para los tiempos $t = 10,0$ y $t = 15,0$ en las gráficas de los cuadros (8.12).

8.5. Criterio de Convergencia

El criterio de convergencia en SPH no se puede establecer de la misma forma que se ha establecido para los métodos eulerianos como diferencias finitas, donde el orden de los errores proviene de las aproximaciones de las series de Taylor, básicamente.

A continuación sugerimos una forma en la que se establece un criterio que nos indicaría cuando un método SPH está funcionado de forma adecuada durante la evolución. Para tales efectos, recordemos que el método SPH consiste de dos aproximaciones básicamente: el error de la aproximación debido a la sustitución de la delta de Dirac $\delta(\vec{r} - \vec{r}')$ por el kernel $W(\vec{r} - \vec{r}', h)$ es del orden $O(h^2)$, mientras que la segunda aproximación, cuando se remplaza la integral sobre el soporte compacto, nos da el error de orden $O(1/\sqrt{N_{local}})$, donde N_{local} es el número de partículas que se encuentran alrededor de la partícula que se está realizando la aproximación.

En otras palabras, decimos que para una función escalar A aproximada en la posición \vec{r}_i ,

$$\langle A \rangle_i - A(\vec{r}_i) \sim O(h^2) + O(1/\sqrt{N_{local}}). \quad (8.37)$$

Definiendo el error relativo como

$$e_i = \langle A \rangle_i - A(\vec{r}_i), \quad (8.38)$$

podemos definir la norma L_1 como

$$L_1 := \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e_j. \quad (8.39)$$

Para obtener el criterio de convergencia, trabajaremos con $N \cdot L_1 = \sum_{j=1}^N e_j$. Este número representa solamente la suma, sin dividirse por número de partículas que se encuentran en cierta región, N .

Debido al número de partículas en el que estamos aptos para trabajar de acuerdo a la velocidad de procesamiento de nuestros equipos de computo, así como de memoria RAM, el error predominante es $O(1/\sqrt{N_{local}})$. de tal forma que orden de $O(h^2)$ se ve dominado por el de la segunda aproximación. Así que al realizar la suma de los errores relativos tenemos que

$$S_1 = N \cdot L_1 = \sum_{j=1}^N e_j \sim O(N/\sqrt{N_{local}}). \quad (8.40)$$

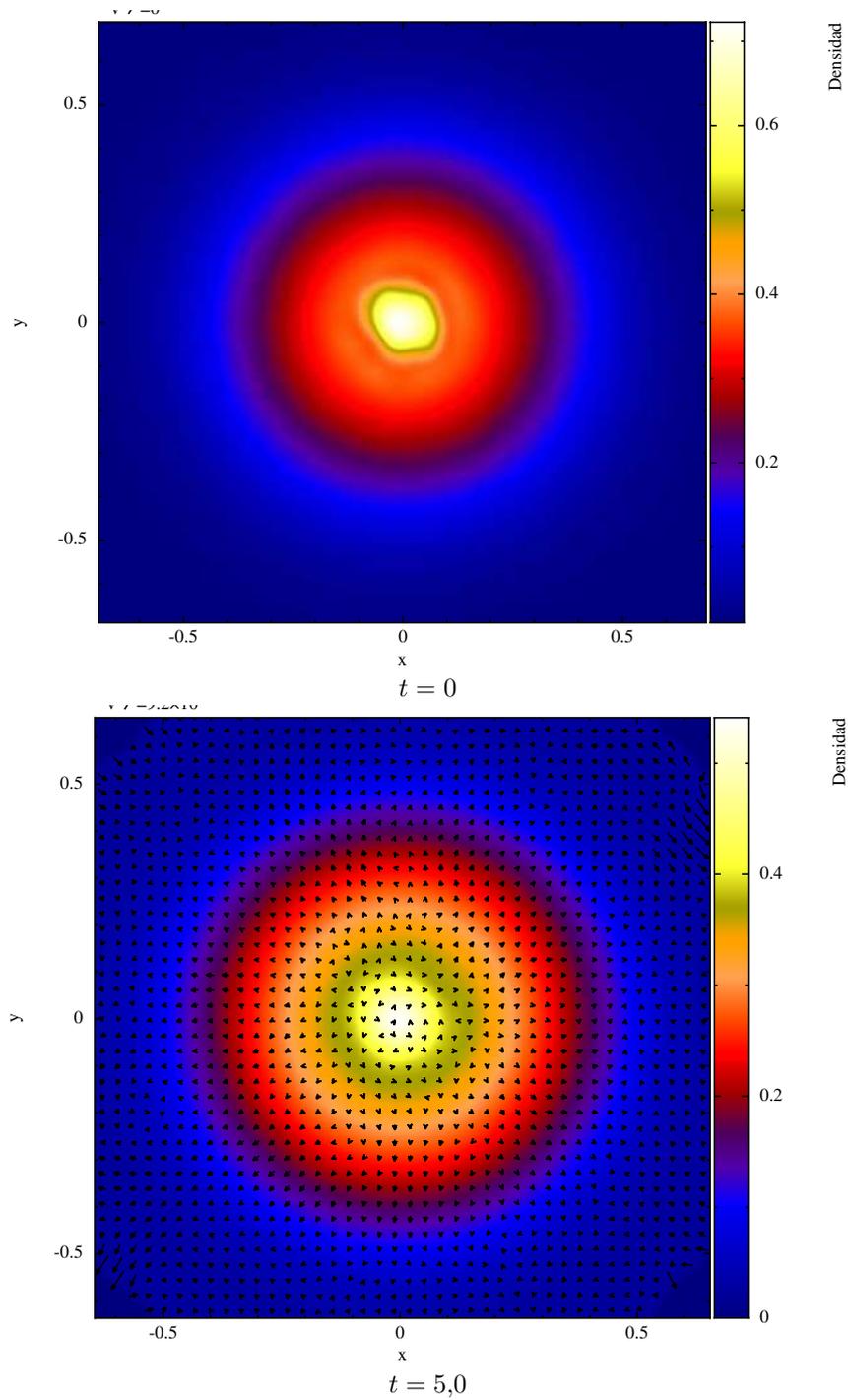
Para diferentes números de partículas, tenemos que el h cambia de acuerdo a la regla $h = \eta(m/\rho)^{1/3}$. Cuando se aumenta el número de partículas, la masa m disminuye, ya que $m = M/N$ donde M es la masa total del sistema y N el número total de partículas. Se tienen que esta forma de disminuir h arroja que para diferentes números de partículas el h se reduce de tal forma que N_{local} para todos ellos es aproximadamente le mismo, y por tanto, podemos conjeturar que $N \cdot L_1$ solamente depende de N .

Podemos decir que la suma S_1 de errores relativos viene dada por

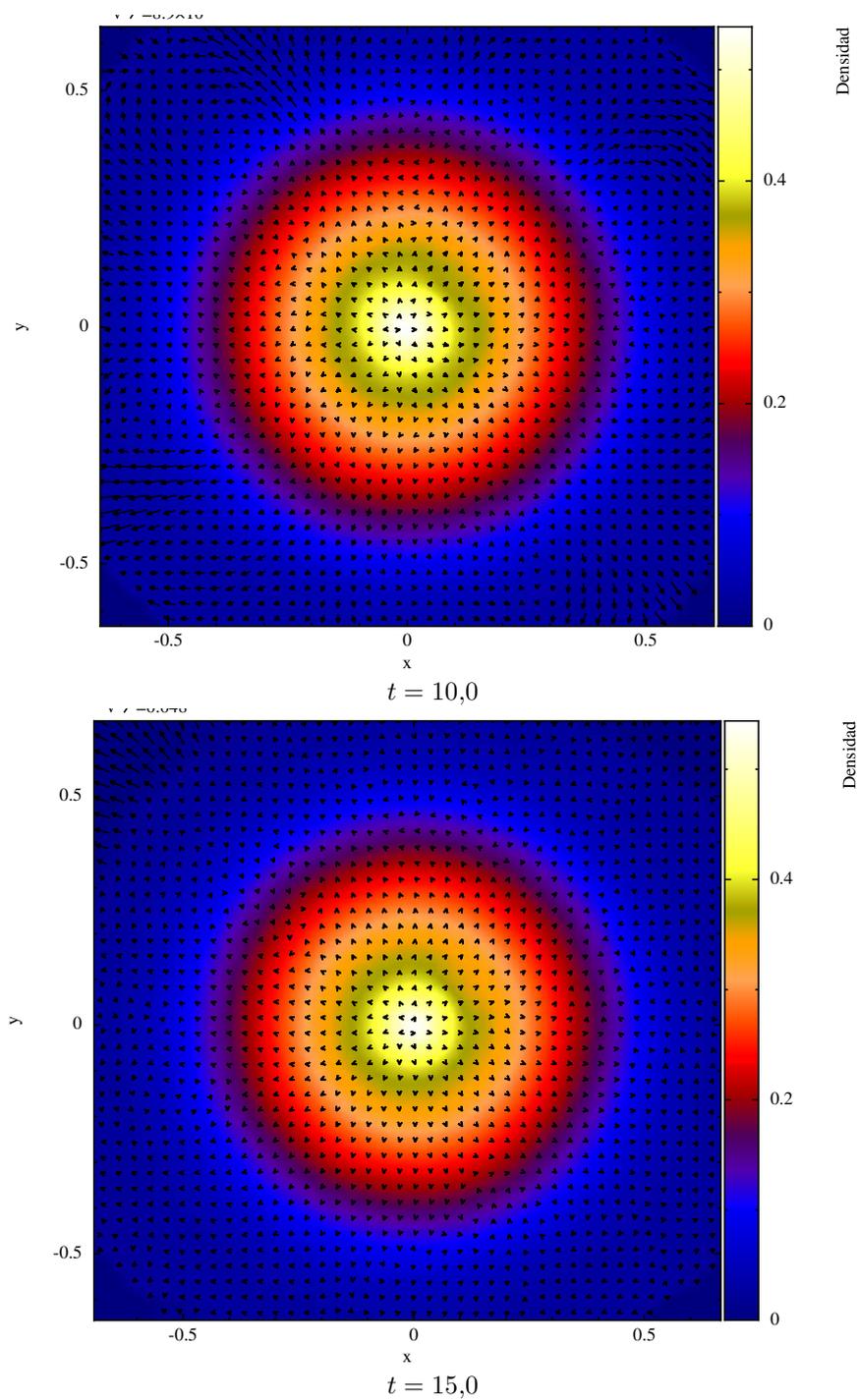
$$S_1 \approx k \frac{N}{\sqrt{N_{local}}}, \quad (8.41)$$

donde k es alguna constante de proporcionalidad tal que

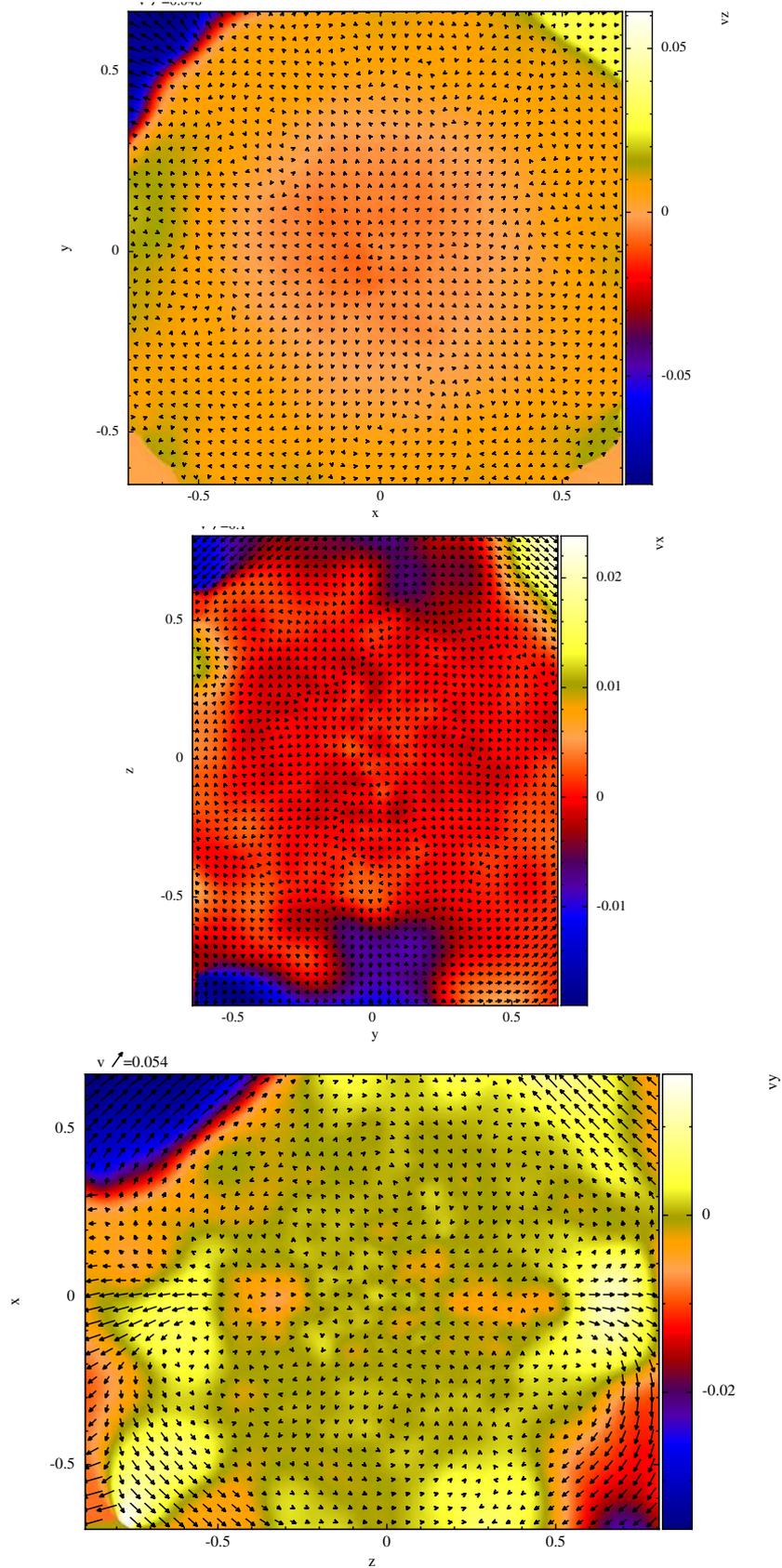
$$\alpha := k^{-2} N_{local} \approx \left(\frac{N}{S_1} \right)^2. \quad (8.42)$$



Cuadro 8.11: Aquí mostramos una gráfica donde se muestra que inicialmente el sistema no tenía ningún tipo de velocidad en ninguna de sus partes, sin embargo al ir evolucionando en el tiempo la distribución se vuelve cada vez más esférica y regular.



Cuadro 8.12: Continuamos con la evolución de la OV para un sistema con VA donde mostramos una distribución más esférica y con el perfil de densidad muy similar para los últimos tiempo.



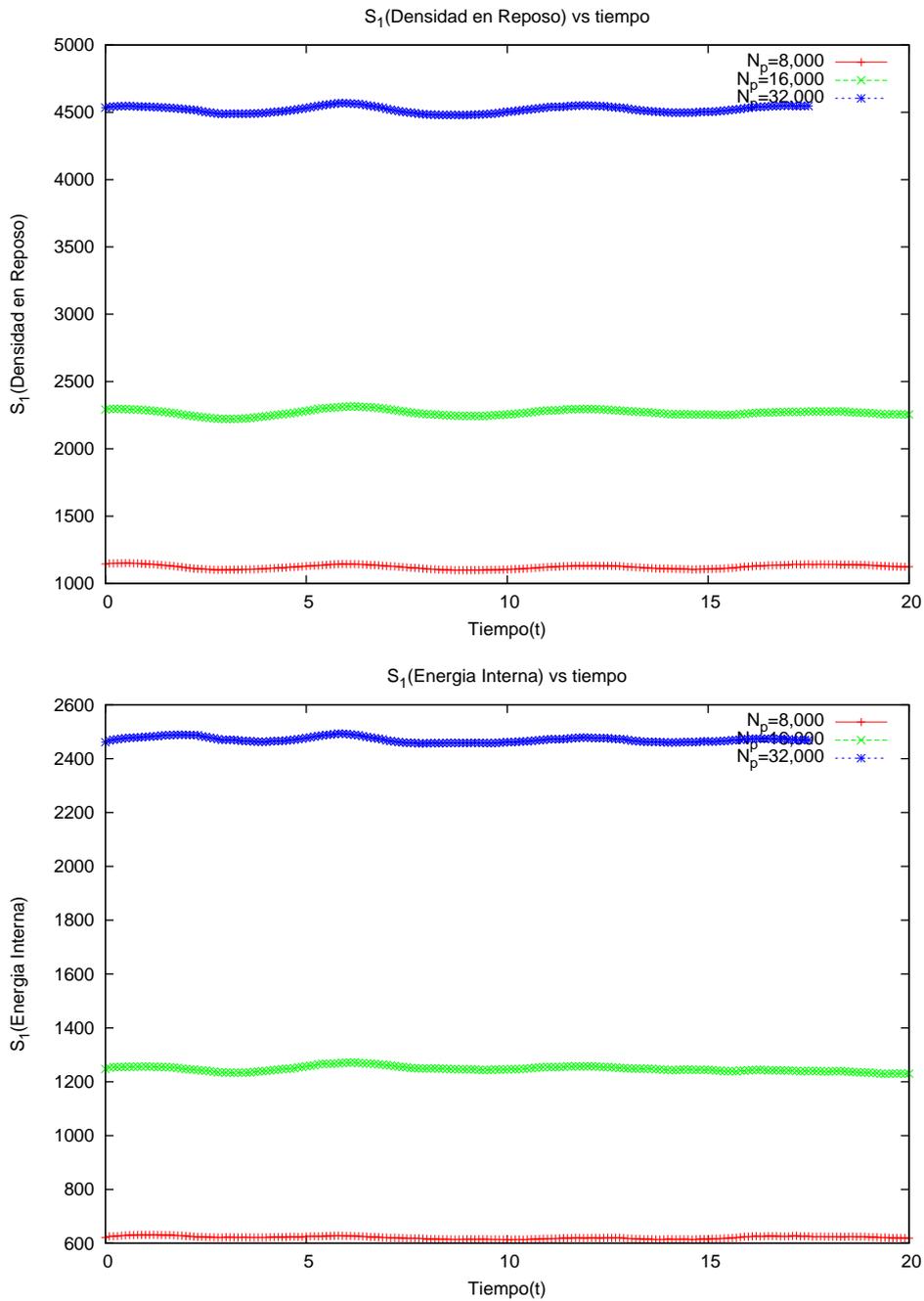
Cuadro 8.13: En las gráficas de este cuadro mostramos diferentes cortes de diferentes planos al tiempo $t = 15$. En la parte superior tenemos el plano xy con la velocidad en v_z . En la parte media tenemos el plano yz con la velocidad v_x . En la parte inferior tenemos el plano zx con la velocidad v_y . Mostramos estos para hacer notar que cada una de las velocidades es del orden $1,0 \times 10^{-2}$.

Numéricamente, nosotros conocemos, por un análisis de datos, la suma de los errores relativos para diferentes resoluciones S_1 . Conocemos el número de partículas global del sistema N y por tanto, podemos estimar, salvo la constante k , el número N_{local} que a decir de la construcción del h para diferentes resoluciones debería ser el mismo, ver cuadro (8.14)

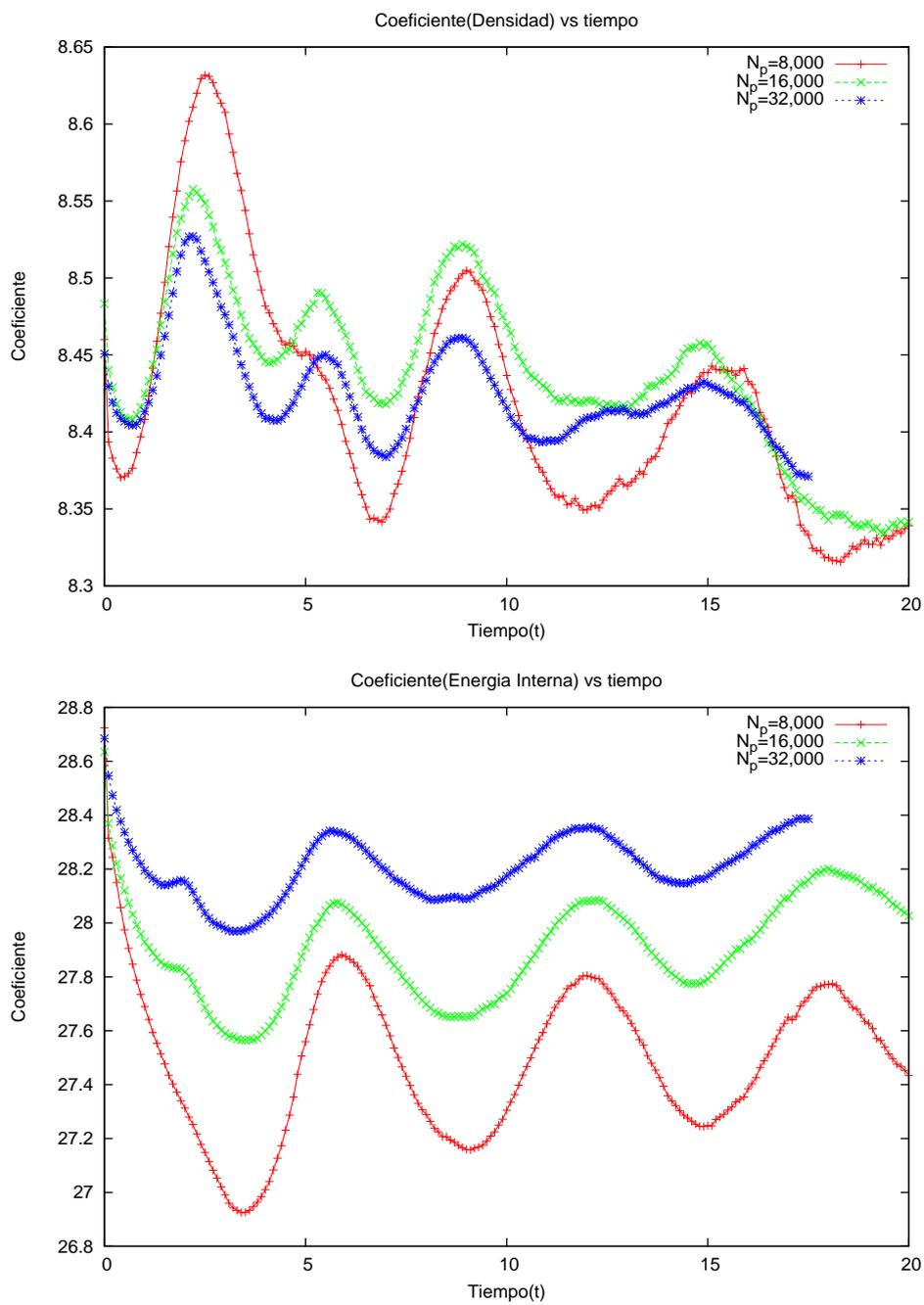
Se realiza el cálculo de α -criterio de convergencia para la densidad, así como para la energía de la OV durante toda la evolución, ver cuadro (8.15). Al analizar la gráfica que muestra el α -criterio para la densidad pudimos observar que durante toda la evolución, para las tres diferentes resoluciones todos son del mismo orden y hasta parecen tener la misma forma. Esto parece estar de acuerdo con la construcción del criterio.

Luego, al calcular el α -criterio para la energía interna obtenemos algo que resulta más limpio aún. Se puede observar como al incrementar la resolución, se observa que el valor de α oscila en torno al dato inicial. Y para las tres resoluciones parece existir una disminución por algún factor.

Con esto podemos mostrar que la conjetura de que α puede ser un buen indicador de que la simulación numérica está funcionando de forma consistente con los errores esperados.



Cuadro 8.14: Aquí se muestran dos gráficas de las sumas parciales S_1 para la densidad y para la energía interna de las partículas que se encuentran dentro de una región en la OV. Podemos apreciar que ambas tienen el mismo contenido y crecen conforme crece también el número de partículas que se usan en la simulación



Cuadro 8.15: Aquí mostramos dos gráficas del α criterio para la densidad así como para energía interna. En ambos casos podemos notar como el valor α trata de mantenerse constante, pero mientras que para la densidad las líneas se cruzan intermitentemente y tratan de mantenerse en un mismo valor, para la energía interna sus líneas no se cruzan y tratan de oscilar en un valor constante.

Capítulo 9

Acreción Radial de Michel

En el artículo realizado por Michel en [5] las ecuaciones de movimiento de un fluido para el flujo esféricamente simétrico en estado estacionario cayendo en un objeto compacto como una estrella de neutrones, agujeros negros, etc, fue desarrollado para gases politrópicos. La versión no relativista de esta modelo fue realizada antes por Bondi en 1951.

En el artículo de [6] se discute ampliamente sobre la acreción radial de Michel, haciendo uso de la métrica de Eddington-Finkelstein por ser de coordenadas penetrantes, la cual se describe como

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{4M}{r} dt dr + \\
 &+ \left(1 + \frac{2M}{r}\right) dr^2 + r^2 d\Omega^2,
 \end{aligned} \tag{9.1}$$

y a esta le corresponden en la formulación 3+1: una función lapso $\alpha = [r/(r+2M)]^{1/2}$, un vector de desplazamiento $\beta_r = 2M/R$ y la 3-métrica $\gamma_{ij} = \text{diag}(1 + 2M/r, r^2, r^2 \sin^2 \theta)$.

Las ecuaciones básicas de movimiento son la conservación del número bariónico

$$J^k_{;k} = 0, \tag{9.2}$$

y el flujo de energía

$$T^k_{0;k} = 0, \tag{9.3}$$

donde $_{;k}$ es la derivada covariante. Usando el hecho de que estamos en simetría esférica y que estamos bajo las condiciones de estado estacionario del fluido, encontramos que las ecuaciones anteriores se ven reducidas a

$$\frac{d}{dr} (\sqrt{-g} J^r) = 0, \tag{9.4}$$

y por otra parte

$$\frac{d}{dr} (\sqrt{-g} T^r_t) = 0. \tag{9.5}$$

Si $T^{\mu}_{\nu} = \rho_o h u^{\mu} u_{\nu} + p \delta^{\mu}_{\nu}$ esto implica que la componente $T^r_t = \rho_o h u^r u_t$ y por tanto la integración de las ecuaciones anteriores se ve como

$$\sqrt{-g} J^r = C_1, \tag{9.6}$$

$$\sqrt{-g} (P + \mu) u_t u^r = C_2, \tag{9.7}$$

donde $\mu := \rho_o(1 + \epsilon)$. Notemos que para una métrica escrita en la forma

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + 2g_{tr}dtdr + g_{rr}dr^2 + r^2d\Omega^2, \quad (9.8)$$

el determinante de dicha métrica se puede escribir como

$$g = (g_{tt}g_{rr} - g_{tr}^2)r^4 \sin^2 \theta. \quad (9.9)$$

Así, para la métrica de Eddington-Finkelstein tenemos que el determinante se escribe como

$$\frac{g}{r^4 \sin^2 \theta} = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{2M}{r}\right) - \frac{4M^2}{r^2} = -1, \quad (9.10)$$

y por tanto, la raíz del determinante se escribe como

$$\sqrt{-g} = r^2 \sin \theta. \quad (9.11)$$

Al hacer el cociente de las ecuaciones (9.7) sobre (9.6), tenemos otra constante c_3 dada por

$$\left(\frac{p + \mu}{\rho_o}\right)^2 U_t^2 = \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 = c_3. \quad (9.12)$$

Se puede mostrar que para las métrica de forma (9.8) que

$$U_t^2 = (U^r)^2 - g_{tt}. \quad (9.13)$$

Haciendo uso de ésta en la ecuación para c_3 dada por (9.14) tenemos que

$$\left(\frac{p + \mu}{\rho_o}\right)^2 [(U^r)^2 - g_{tt}] = c_3. \quad (9.14)$$

Diferenciando la ecuación (9.14) así como (9.6) obtenemos,¹:

$$\left[V^2 - \frac{U^2}{U^2 - g_{tt}}\right] \frac{dU}{U} + \left[2V^2 + \frac{r g_{tt,r}}{2(U^2 - g_{tt})}\right] \frac{dr}{r} = 0, \quad (9.15)$$

donde V queda definido en el proceso de la diferenciación como

$$V^2 \equiv \frac{d \ln(P + \mu)}{d \ln \rho_o} - 1. \quad (9.16)$$

Si uno u otro de los factores dentro de los paréntesis cuadrados en (9.15) es cero, tenemos un punto de retorno, y las soluciones serán doble valuadas tanto en r como en u . Solamente soluciones que pasen a través de un punto crítico corresponden a material cayendo dentro del objeto con velocidad que se incrementa de forma monotónica a lo largo de la partícula de la trayectoria.

El punto crítico está localizado donde ambos factores entre los paréntesis cuadrados de (9.15) son cero. Así

$$V^2 - \frac{U^2}{U^2 - g_{tt}} = 0 \Rightarrow V_c^2 = \frac{U_c^2}{U_c^2 - g_{tt}(r_c)}, \quad (9.17)$$

donde r_c es el radio crítico.

La condición del otro paréntesis cuadrado es

$$2V_c^2 + \frac{r_c g_{tt,r}(r_c)}{2(U_c^2 - g_{tt}(r_c))} = 0. \quad (9.18)$$

Al hacer uso en esta ecuación de la anterior, obtenemos que

$$U_c^2 = -\frac{1}{4} r_c g_{tt,r}(r_c). \quad (9.19)$$

¹ de aquí en adelante usaremos indistintamente a U^r o a U como la misma variable

Por otra parte, de la métrica de Eddington-Finkelstein, tenemos que $g_{tt} = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)$ y de aquí se deduce la derivada con respecto a r , $g_{tt,r}(r_c) = -2M/r_c^2$. Obteniendo al sustituir en la expresión para U_c^2 que

$$U_c^2 = \frac{M}{2r_c}, \quad (9.20)$$

y al sustituir en la expresión para V_c^2 que

$$V_c^2 = \frac{U_c^2}{1 - 3U_c^2}. \quad (9.21)$$

Entonces, no existen soluciones físicamente aceptables para V_c^2 si $U_c^2 > 1/3$.

Por otra parte, si consideramos una ecuación para gases politrópicos $P = K\rho_o^\Gamma$, tenemos que para Γ constante que $p = (\Gamma - 1)\rho_o\epsilon$ y definiendo una temperatura como $T = P/\rho_o$, obtenemos que

$$T^n U r^2 = c_4, \text{ con } n = \frac{1}{\Gamma - 1}. \quad (9.22)$$

Por otra parte, al reescribir $(P + \mu)/\rho_o = P/\rho_o + \mu/\rho_o = T + \mu/\rho_o = T + 1 + \epsilon = T + nT + 1 = (1 + n)T + 1$, y de aquí, la ecuación restante nos dice que

$$[1 + (n + 1)T]^2 (U^2 - g_{tt}) = c_5. \quad (9.23)$$

Es posible mostrar que V^2 en términos de T se escribe como

$$V^2 = \frac{(1 + n)T}{n[(1 + n)T + 1]}. \quad (9.24)$$

Si elegimos un radio crítico r_c así como una densidad crítica $\rho_{o,c}$, entonces podemos encontrar la integral c_4 dada por (9.22), ya que T_c se puede despejar de la igualdad entre (9.24) (evaluada en r_c) y (9.21). Además, de la definición de la temperatura, encontramos que $K = T_c/\rho_{o,c}^{1/n}$. También, hemos recopilado todos los elementos para encontrar la integral c_5 de la ecuación al evaluar en el punto crítico en la ecuación (9.23).

La solución del sistema (9.22) y (9.23) para u en función de r se debe realizar de forma numérica, aplicando un método de Newton-Raphson. Una vez que se realiza dicha solución, se despeja T de (9.22) y haciendo uso de $T = P/\rho_o$ y de $P = K\rho^\Gamma$ encontramos $T = K\rho^{\Gamma-1}$ y de aquí $\rho_o = (T/K)^{1/(\Gamma-1)}$.

de ahí se encuentra el valor de ρ_o para el mismo r .

Tenemos, por otra parte, que

$$\bar{v}^r = \frac{U^r}{\alpha U^t} + \frac{\beta^r}{\alpha}, \quad (9.25)$$

donde podemos escribir $v^r = U^r/U^t$. Además, haciendo uso de que las únicas componentes del 4-vector de velocidad son U^r y U^t , tenemos

$$U^t U_t + U^r U_r = -1, \quad (9.26)$$

$$U_r = g_{rt} U^t + g_{rr} U^r, \quad (9.27)$$

de donde vemos que U^t se puede escribir como

$$U^t = -\frac{1 + g_{rr}(U^r)^2}{U_t + g_{tr}U^r}. \quad (9.28)$$

Con estas variables: ρ , v^r , $P = K\rho_o^\Gamma$, $\epsilon = P/[(\Gamma - 1)\rho_o]$ tendremos una solución numérica, tal como en el caso de la estrella en equilibrio y mediante un método similar podemos generar las posición para un cierto número de partículas N .

9.1. Resultados Numéricos

A continuación mostramos las gráficas correspondientes a la acreción de materia alrededor de un objeto compacto descrito por la métrica de Eddington-Finkelstein. En nuestro caso, hemos configurado una métrica aún más general en coordenadas pseudo-cartesianas: la métrica de Kerr-Schild, la cual se puede escribir en la forma 3+1 con las componentes siguientes:

$$\alpha^2 = \frac{1}{1 + 2H}, \quad (9.29)$$

$$\beta^i = \frac{2Hl_*^i}{1 + 2H}, \quad \beta_i = 2Hl_i \quad (9.30)$$

$$\gamma_{ij} = \delta_{ij} + 2Hl_i l_j \quad \gamma^{ij} = \delta^{ij} - 2Hl_*^i l_*^j \left(1 - \frac{2H}{1+2H}\right), \quad (9.31)$$

$$(9.32)$$

con $l_*^i = \delta^{ij} l_j$, donde los componentes H y l_μ vienen descritos por

$$H = \frac{rM - Q^2/2}{r^2 + a^2 z^2/r^2}, \quad l_\mu = \left(1, \frac{rx + ay}{r^2 + a^2}, \frac{ry - ax}{r^2 + a^2}, \frac{z}{r}\right). \quad (9.33)$$

Aquí, vemos que, en general, r queda determinada de forma implícita en la ecuación

$$\frac{x^2 + y^2}{r^2 + a^2} + \frac{z^2}{r^2} = 1. \quad (9.34)$$

Sin embargo, cuando para esta métrica $Q = 0$ y $a = 0$, recobramos la métrica de Eddington-Finkelstein con la correspondiente conversión entre coordenadas cartesianas y polares estándar.

En el cuadro (9.1) podemos observar dos diferentes resoluciones la primera con $N = 8 \times 10^3$ y la segunda $N = 16 \times 10^3$ partículas. Las gráficas de este cuadro muestran la acreción vs. el tiempo, la cual se calcula con la suma de la masa m_i de partículas que se encuentran fuera de una 2-esfera de radio R :

$$M_{fuera}(R) = \sum_{j=1}^{N_{fuera}} m_j. \quad (9.35)$$

Para cada una de las simulaciones numéricas, hemos colocado un total de 10 detectores a diferentes radios $R_1 = 0,1$, $R_2 = 1,0$, $R_3 = 2,0$, $R_4 = 3,0$, $R_5 = 4,0$, $R_6 = 5,0$, $R_7 = 6,0$, $R_8 = 7,0$, $R_9 = 8,0$ y $R_{10} = 9,0$. Podemos colocar detectores dentro de $r = 2M$ con $M = 1$ ya que las coordenadas de *Kerr-Schild* son coordenadas penetrantes.

Cuando vemos ambas gráficas, podemos apreciar que el fenómeno de que el fluido es estacionario se hace presente en la pendiente de las curvas de acreción. Ya que al ajustar una línea de tendencia de tipo lineal $f(R) = a + b \cdot R$ a cada una de las gráficas, apreciamos que la pendiente ronda un valor que coincide con el valor de $\dot{M} = constante$.

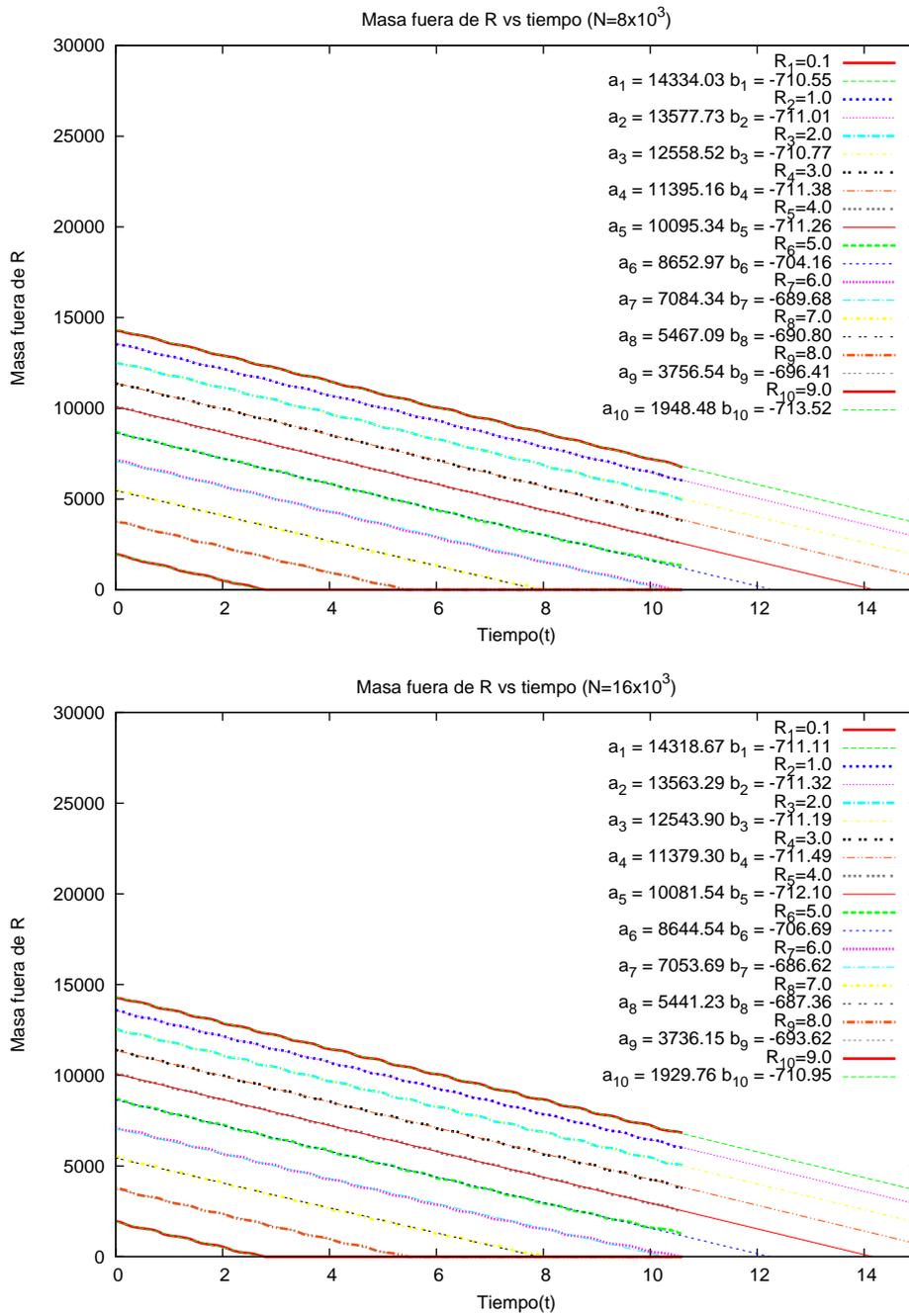
El valor de \dot{M} se puede encontrar haciendo uso de la masa libre de norma []. Esta cantidad se puede encontrar de la integral de volumen de la densidad relativista

$$M_o(t) = \int_{\Sigma \subset V} \sqrt{-g} D dV. \quad (9.36)$$

Si diferenciamos con respecto al tiempo y hacemos uso de la conservación del número bariónico, obtenemos

$$\frac{dM_o(t)}{dt} = \dot{M}_o = \int_{V \subset \Sigma} \partial_t (\sqrt{-g} D) dV = \int_{V \subset \Sigma} \partial_i (\sqrt{-g} D v^i) dV = \int_{\partial V} \sqrt{-g} D v^i dS_i, \quad (9.37)$$

donde en la última igualdad hemos usado el teorema de Gauss. Así para el baño de materia que se extiende hasta $r \rightarrow \infty$ en el caso de la acreción de Michel la integral tiene que ser calculada para $r \rightarrow \infty$. Esta última integral es la que podemos aproximar de forma numérica, ya que la



Cuadro 9.1: En estas gráficas mostramos la acreción de materia, contando las partículas que permanecen fuera de una 2-esfera de radio R_i con $i = 1, \dots, 10$. Entonces la pendiente de la acreción es negativa, ya que el sistema pierde materia. Sin embargo, como podemos ver, las líneas de tendencia $f_i(R) = a_i + b_i \cdot R$ que se han ajustado a los datos numéricos presentan un valor cercano a $b_i = 700$, mientras que, como es de esperarse, tenemos que $a_1 > a_2 > \dots > a_{10}$.

solución de para la acreción de Michel, viene dada por una integración numérica, esta se muestra en la figura (9.1). Haciendo r , digamos, mucho mayor que M , podemos especular si la pendiente de las acreciones numéricas coincide con la integral numérica. En esta gráfica mostramos para los diferentes detectores a diferentes radios cómo es que las pendientes de acreción son muy aproximados a un valor que toma \dot{M}_o para $r = 50$.

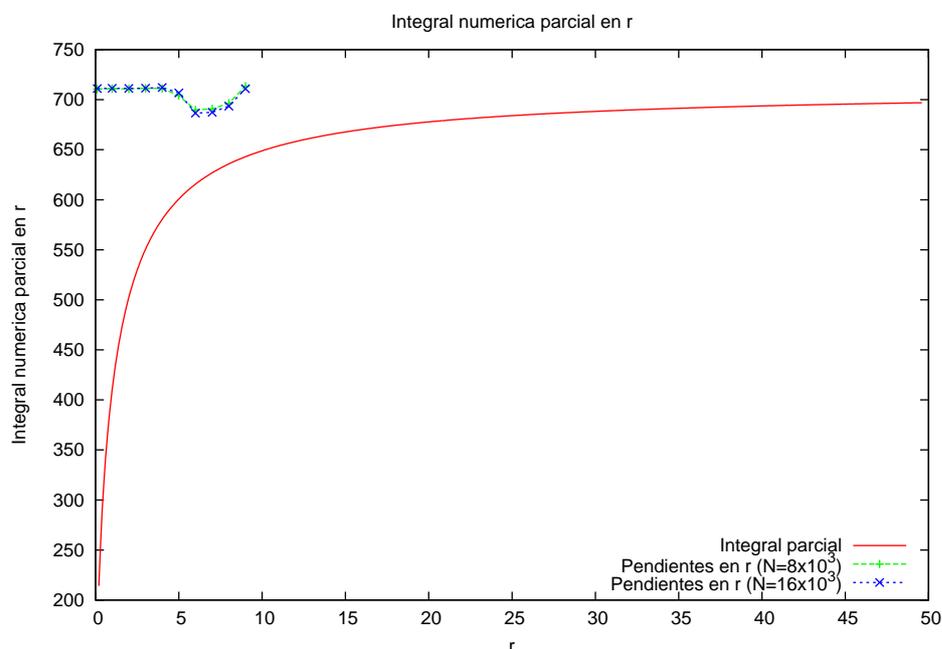


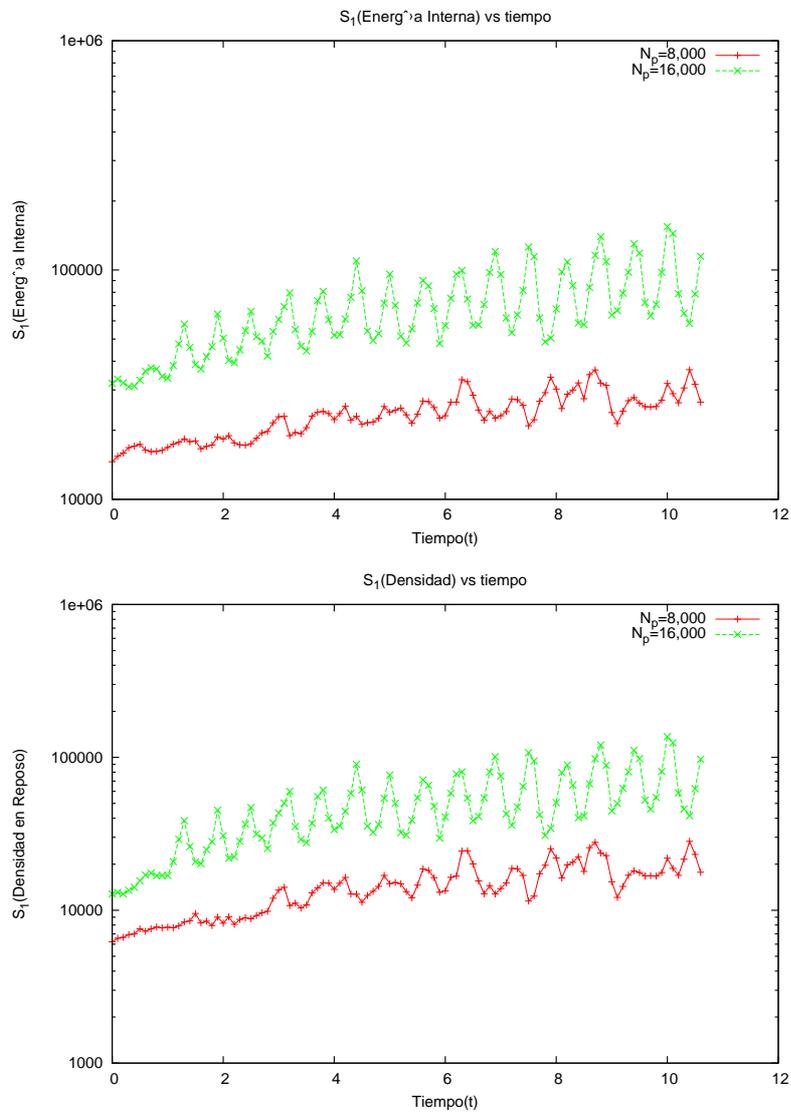
Figura 9.1: En esta gráfica mostramos la integral parcial de \dot{M} a diferentes radios r de tal forma que podemos apreciar cómo el valor comienza a estabilizarse alrededor de un valor de $\dot{M}(r) \approx 700$ para valores grandes de r . De la misma forma, mostramos los valores de las pendientes calculadas mediante el ajuste de líneas hecho en las gráficas del cuadro (9.1), y podemos apreciar que el valor de $\dot{M}(r)$ cuando r comienza a alejarse de cero parece coincidir con los valores de las pendinetes.

En la gráfica (9.2), podemos observar como el sistema va perdiendo partículas dentro de la zona de integración. Esto está fuertemente vinculado al crecimiento de las sumas S_1 para la energía interna y para la densidad, donde se ve que la norma no se mantiene constante. Esto es contrario a lo que sucede en un sistema que conserva todas sus partículas tal y como la solución del capítulo anterior, la *OV*.

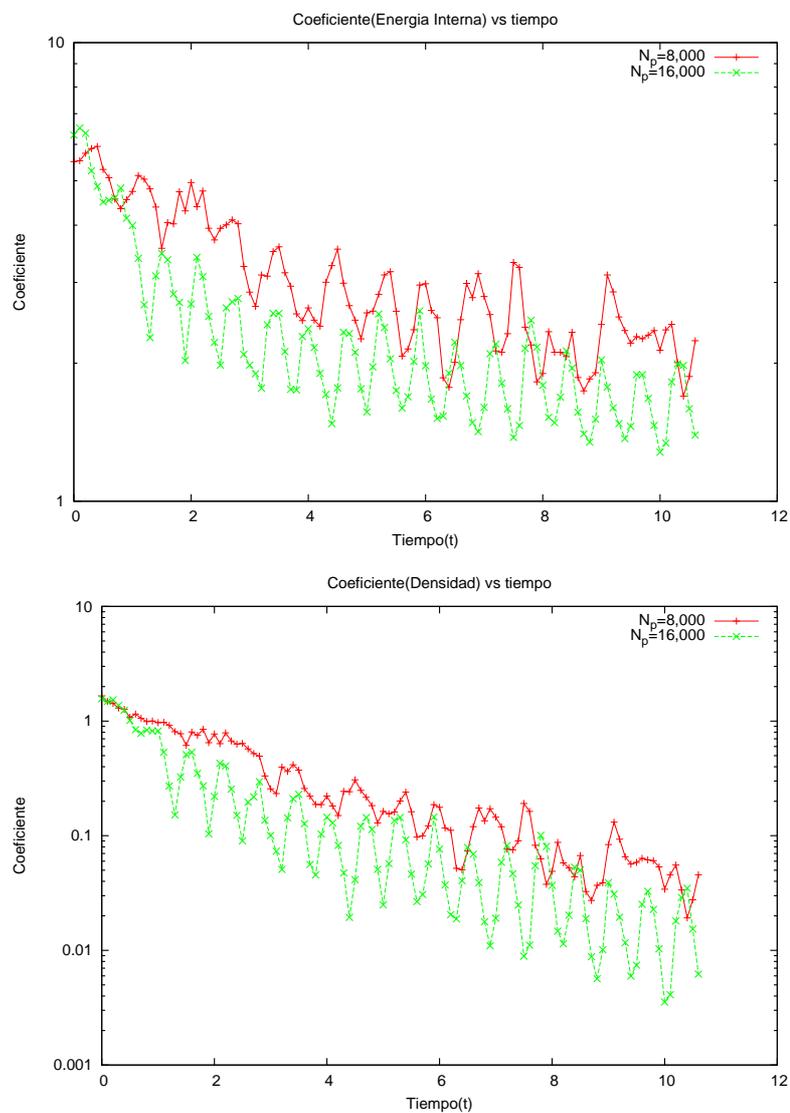
En el cuadro (??), podemos observar un corte del plano xy y una representación en un mapa de colores de la componente v_z de la velocidad del fluido para los tiempos $t = 5,0$ y $t = 10,0$. De aquí podemos apreciar como en toda la región de la simulación esta es cero, mientras que para diferentes valores del tiempo existe una ligera perturbación debido a la excisión numérica.

Para el cuadro (9.6) podemos apreciar la componente v_x en el plano xy y la componente v_y . Para esta podemos ver que sobre los ejes y y x respectivamente, las componentes de las velocidades son cero. Mientras que para las otras regiones las velocidades son distintas de cero y de acuerdo a sus valores muestran que la dirección del fluido es hacia el centro del sistema de coordenadas.

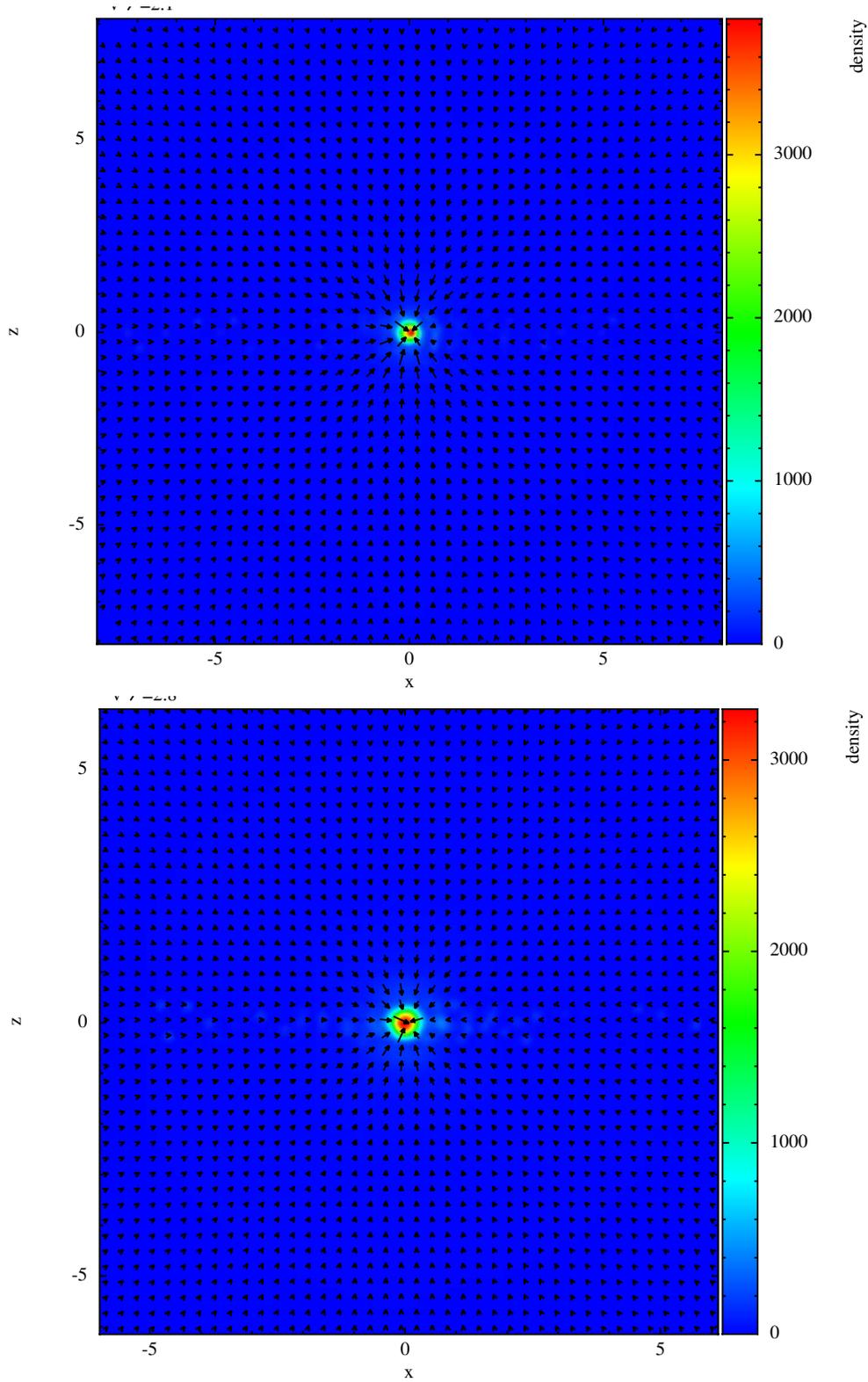
Para el cuadro (9.7) podemos apreciar la componente v_x en el plano xy y la componente v_y , nuevamente. Se observa que se guarda el mismo perfil que para el $t = 5,0$ del cuadro de gráficas anterior.



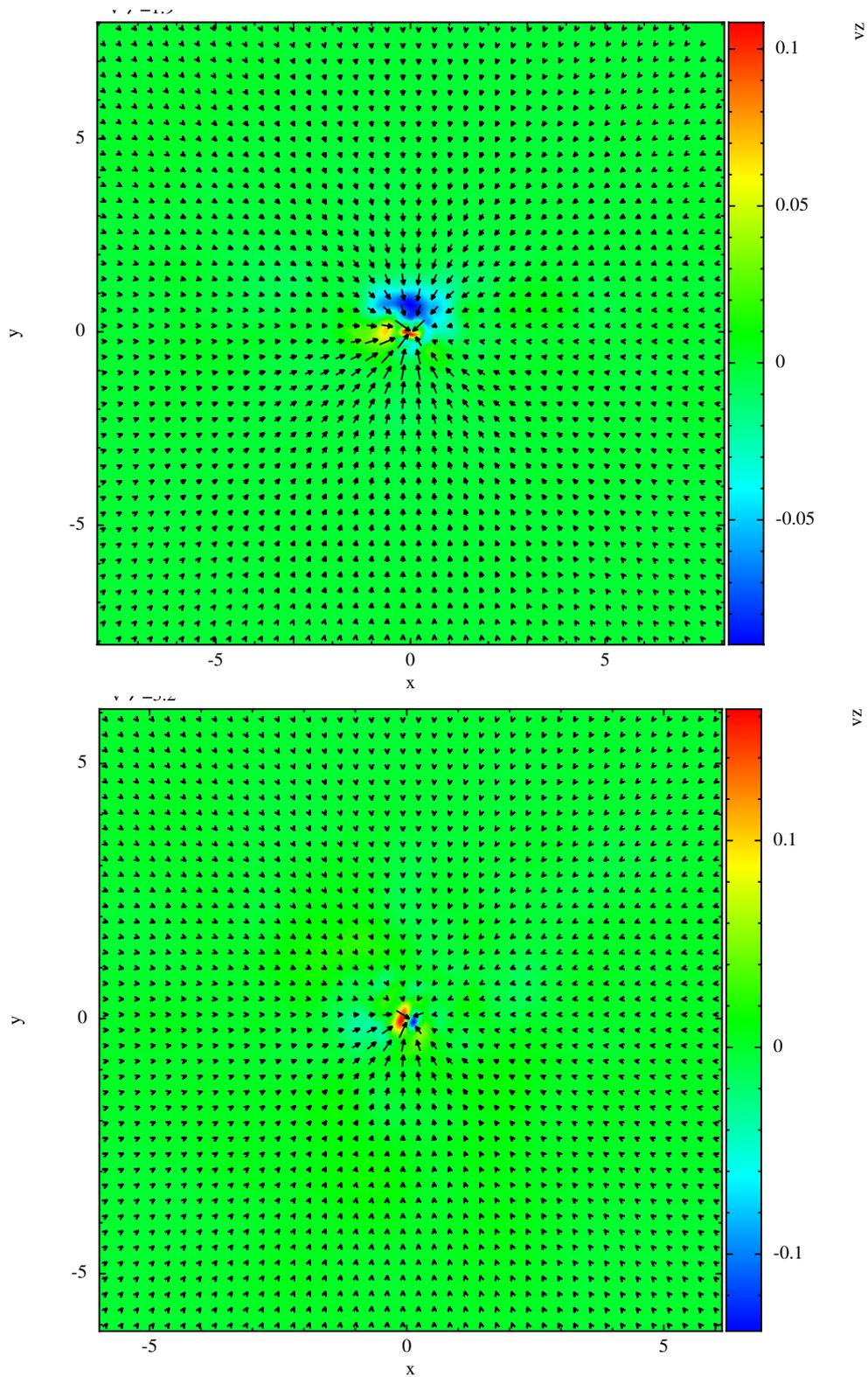
Cuadro 9.2: Al igual que para la OV también calculamos las sumas parciales para la energía interna y para la densidad en reposo, aquí muestra un comportamiento diferente, existe un crecimiento de la norma. Debido a la excisión existe una pérdida de partículas y que además la frontera externa va entrando en la zona de integración. Todo esto es causante de que el error aumente de forma considerable.



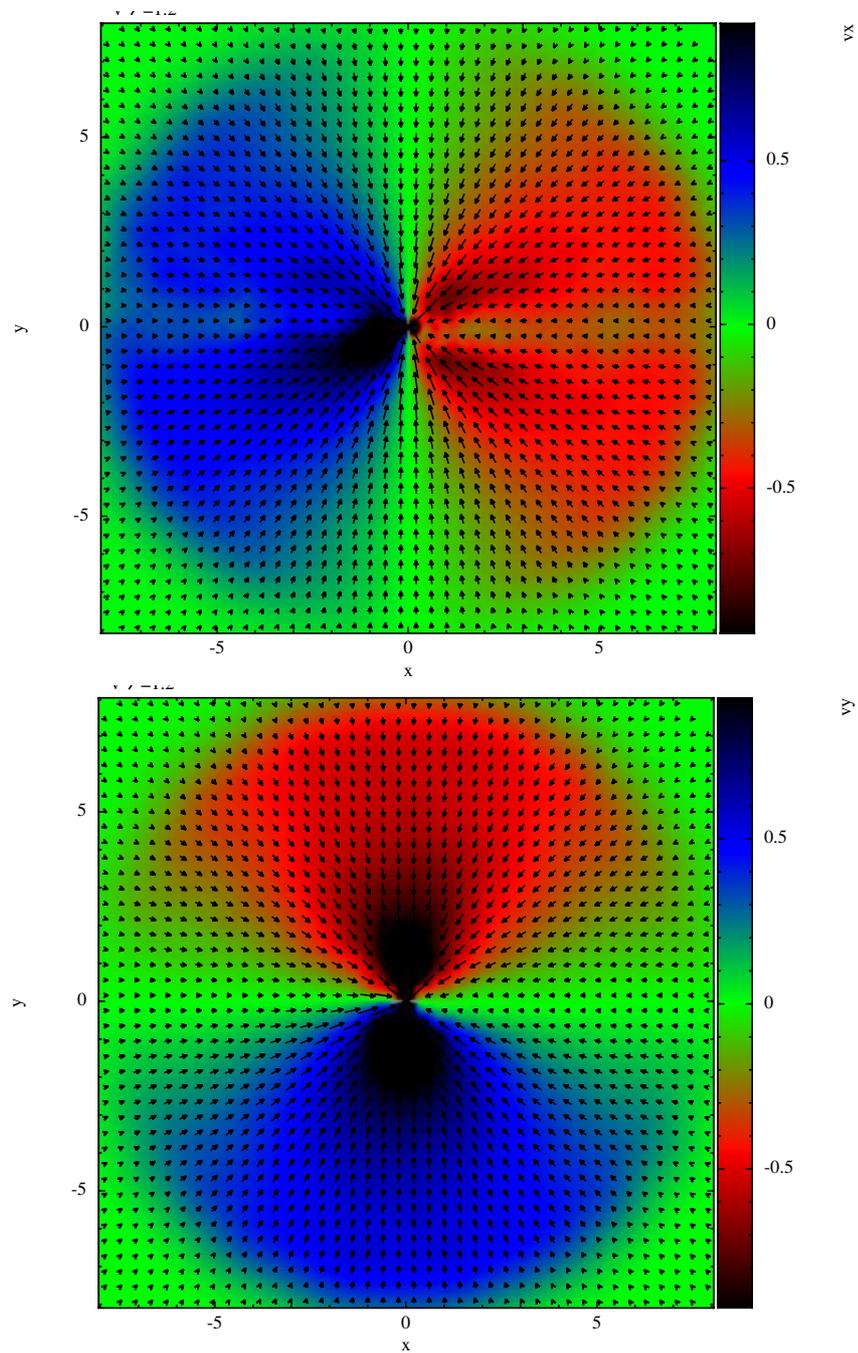
Cuadro 9.3: En este cuadro mostramos los α -criterio de convergencia, donde podemos apreciar que a pesar de estar perdiendo partículas el valor de α son del mismo orden para ambas gráficas: densidad y energía interna.



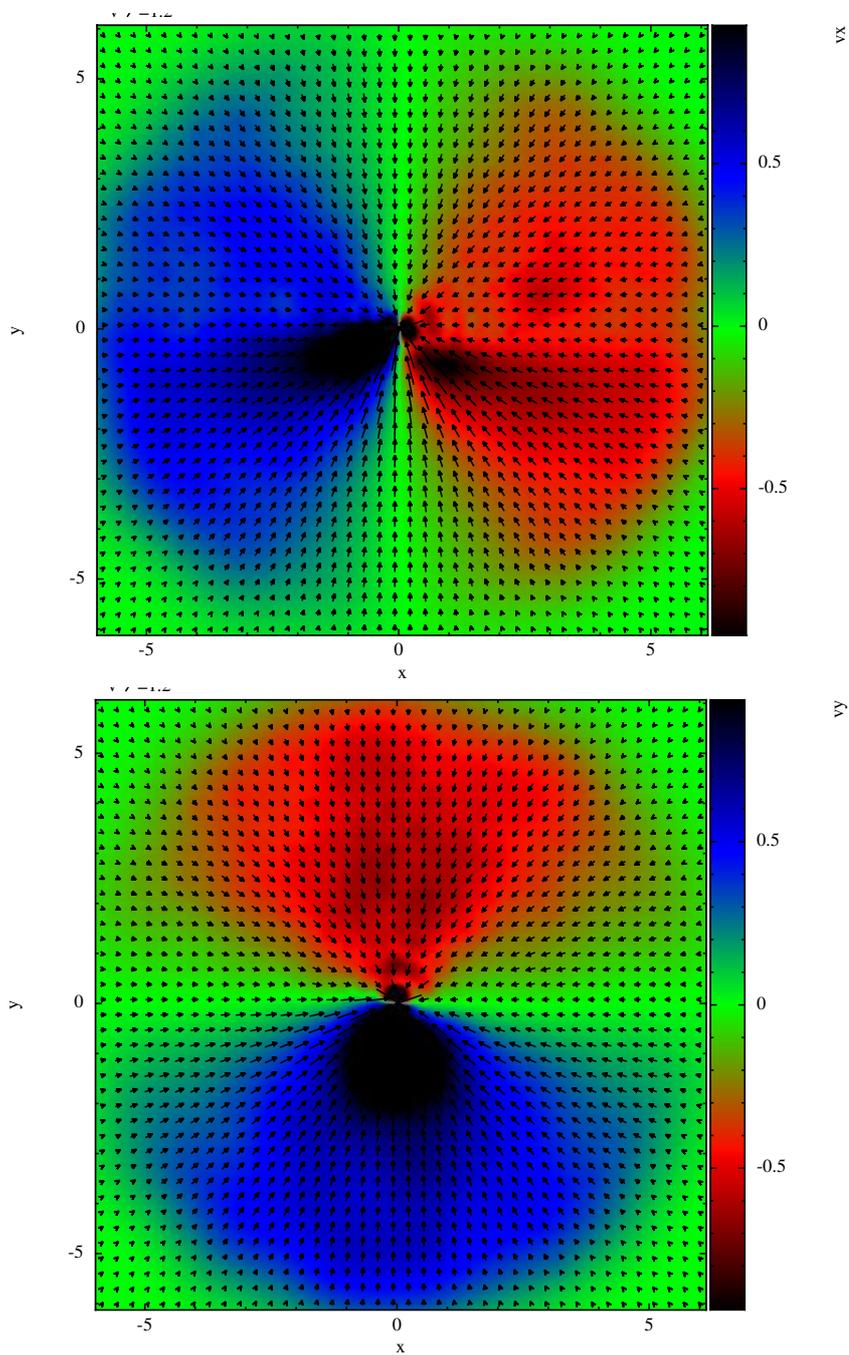
Cuadro 9.4: Cuadro en el que se muestran dos perfiles de densidad para los tiempos $t = 5,0$ y $t = 10,0$. Se puede apreciar que la información cambia básicamente solo al centro donde las densidades son más altas y donde existe la excisión numérica. En estas regiones estamos perdiendo partículas y por esta pérdida de resolución el sistema se ve afectado. Además las fronteras externas de la configuración van caminando hacia el centro de la configuración con lo que también esto afecta a la configuración en general.



Cuadro 9.5: En este cuadro se muestra la componente transversal al plano xy , es decir, la v_z . En todas partes es aproximadamente, excepto en la vecindad donde drásticamente quitamos mediante una excisión partículas que caen dentro de cierto radio, aquí existe una pequeña distorsión del las componentes de las velocidades pero se puede observar que dicha información no se mueva hacia fuera sino que es solamente al rededor de la excisión numérica.



Cuadro 9.6: En esta gráfica mostramos componentes de la velocidad v_x (superior), v_y (inferior) para $t = 5,0$. Nuevamente es importante notar como el sistema trata de mantener la simetría a pesar de que esta perdiendo resolución casi a cada iteración en el tiempo.



Cuadro 9.7: En esta gráfica mostramos componentes de la velocidad v_x (superior), v_y (inferior) para $t = 10$. Nuevamente es importante notar como el sistema trata de mantener la simetría a pesar de que esta perdiendo resolución casi a cada iteración en el tiempo.

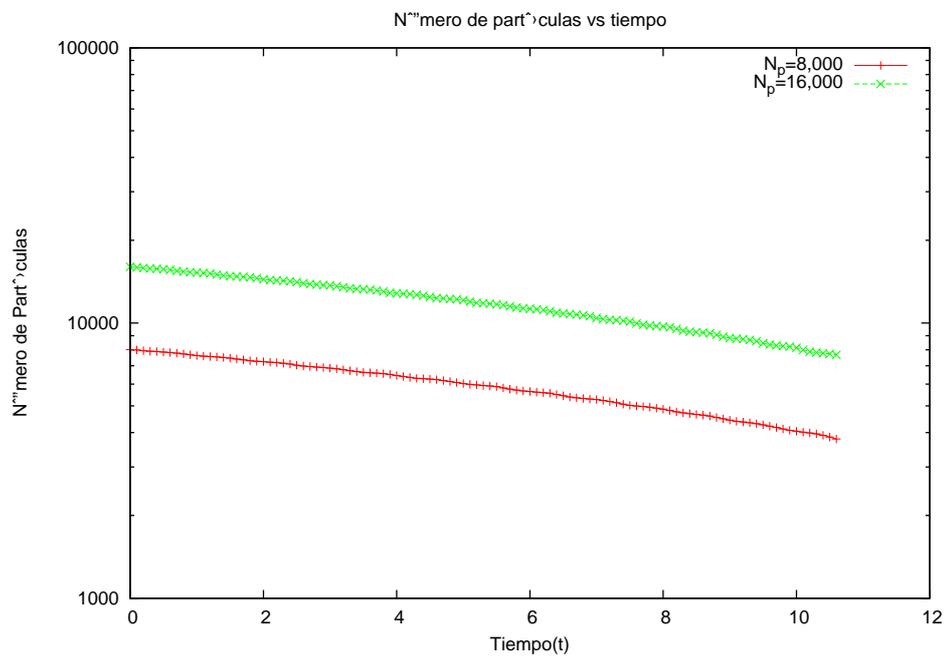


Figura 9.2: Esta gráfica como disminuye las partículas en la region de interés, en esta región se han medidos las sumas parciales y el α -criterio para la convergencia mostrado en el cuadro de gráficas anterior.

Capítulo 10

Tubos de Choque

Uno de las pruebas más importantes en el espacio tiempo plano que tuvo que realizarse para el código, es el de los tubos de choque. Este es el problema de Riemann para las Ecuaciones de la Hidrodinámica Relativista. Problema fundamental para los que realizamos simulaciones de fluidos (relativistas/clásicos) ya que debido a la naturaleza de la ecuaciones de la hidrodinámica nos enconfraremos con fenómenos que se pueden representar por cambios abruptos en las cantidades físicas que se pueden ver como una discontinuidad.

El tubo de choque se puede ver como la configuración de un fluido caliente y denso a la izquierda l está separado por una membrana de un fluido frío y menos denso de la derecha r . A tiempo $t = 0$ la membrana es removida y el fluido l empuja el fluido r hacia la derecha, causando una onda de rarefacción que se mueve hacia la izquierda del fluido l . El movimiento del fluido l hacia el fluido r provoca una onda de choque que viaja a la derecha a través del fluido r .

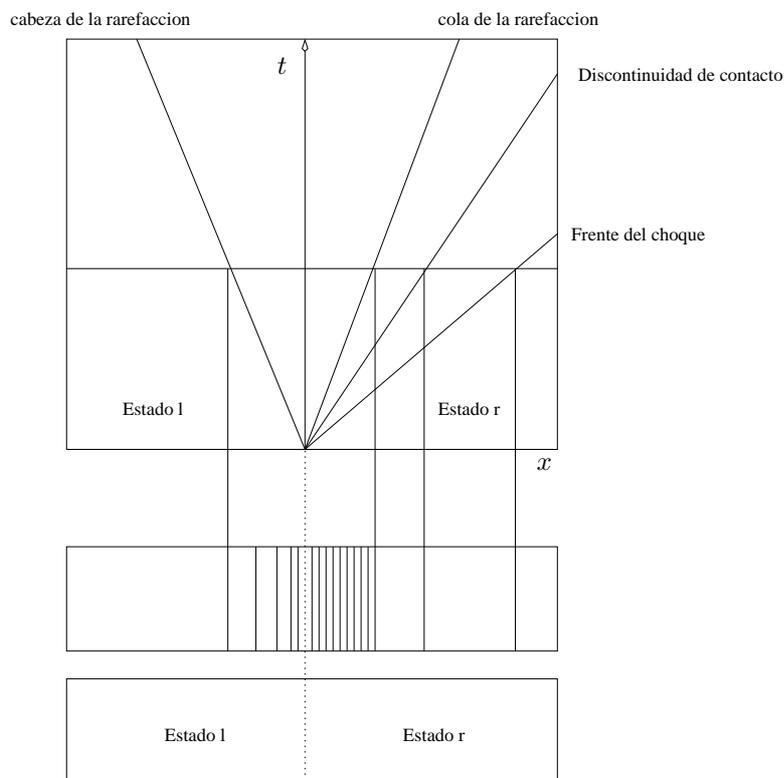


Figura 10.1: Diagrama espacio temporal de problema de Riemann; las líneas de mundo muestran la localización de la cabeza y el tallo de la onda de rarefacción, la discontinuidad de contacto, y el choque. Existen entonces, cinco diferentes estado del fluido en el tubo de choque.

Existen entonces, cinco distintas regiones en el fluido. De la izquierda hacia la derecha tenemos: fluido que no ha sido modificado l , una onda de *rarefacción*, una región de velocidad y presión constantes que cuenta con una discontinuidad separando las regiones con diferente densidad, después el choque y finalmente el fluido de la derecha r sin alterar.

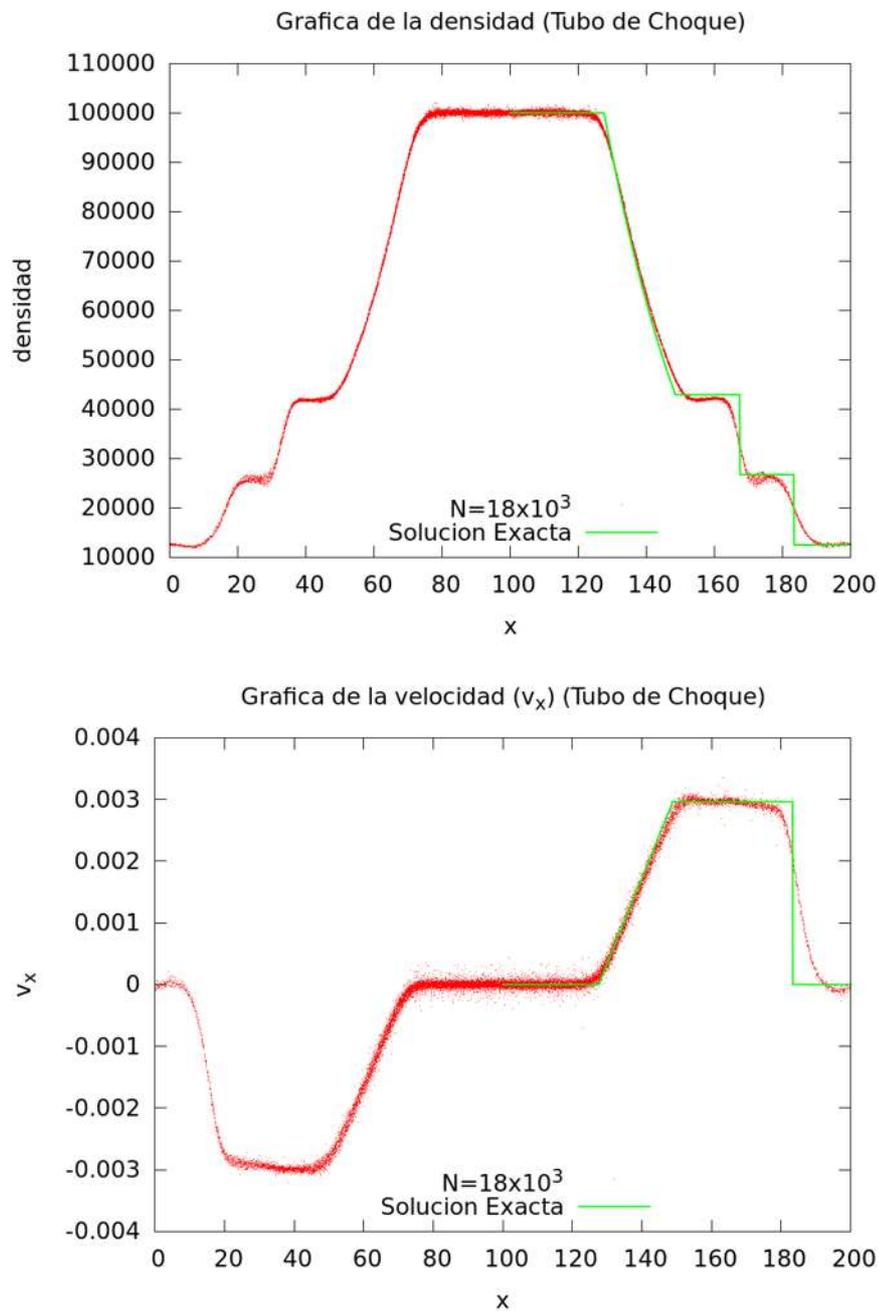
La solución analítica de este problema se puede encontrar en [7]. Según [20] este tipo de pruebas pueden mostrar de que forma un esquema numérico advecta una onda no lineal y si las cantidades conservadas son realmente conservadas. También puede mostrar que tan bien se comporta la viscosidad artificial para tratar el salto de las discontinuidades a través del choque.

El arreglo para el código IPA es un poco diferente. Para este hemos un arreglo doble ya que estamos en el espacio tiempo plano hemos usado fronteras periódicas. Así que hemos construido un prisma rectangular de dimensiones $0 < x < L_x$, $0 < y < L_y$, $0 < z < L_z$, de tal forma que dividimos distribuimos partículas dentro de esta región de acuerdo a dos densidades ρ_l (energía interna ϵ_l) en la región $50 < x < 150$ para todo y y z . Por otra parte, en la región restante se distribuye fluido de acuerdo a ρ_r (energía interna ϵ_r). Esta configuración, gracias a las propiedades periódicas, debería presentar como resultado un doble tubo de choque.

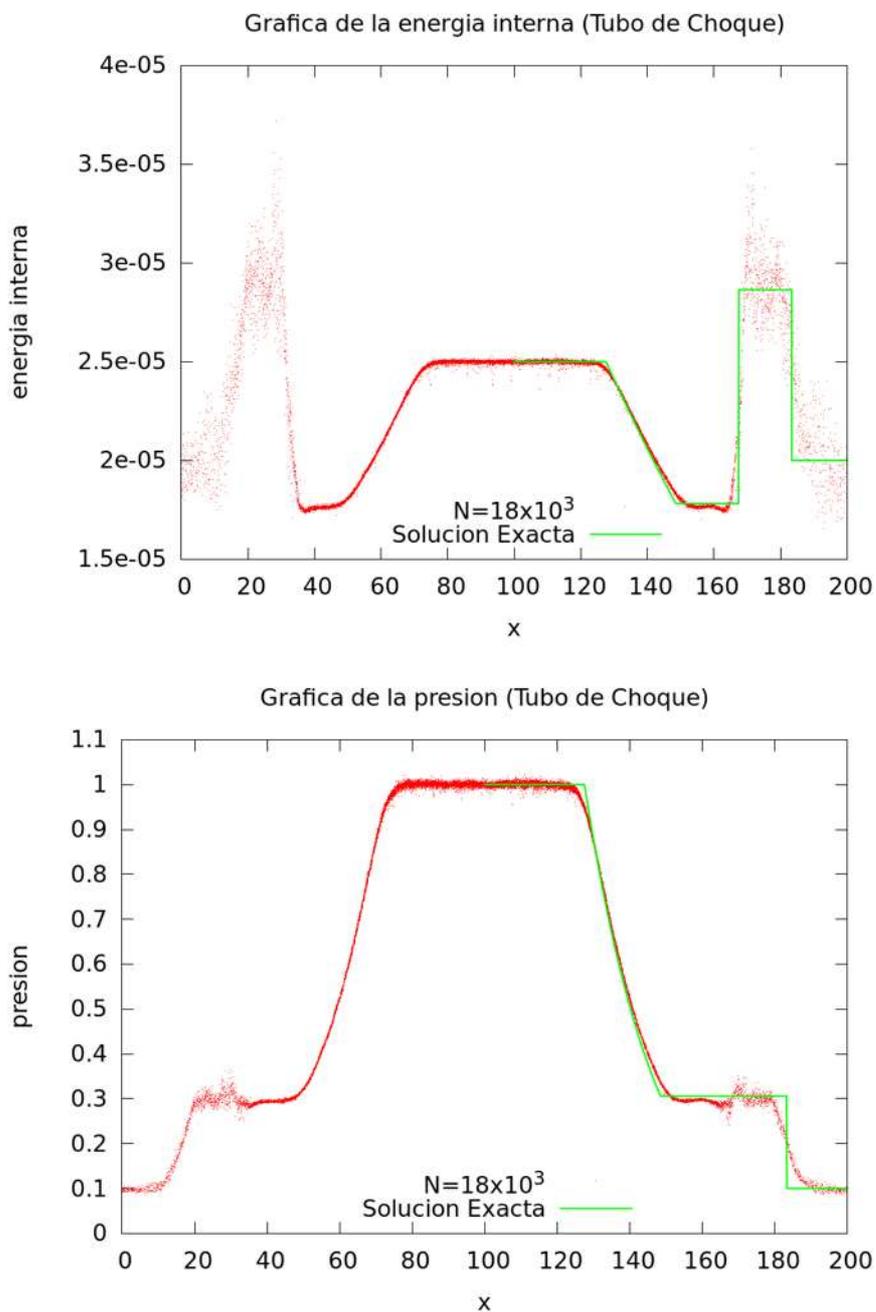
Para la primera prueba tomamos: $L_x = 200$, $\rho_l = 1 \times 10^5$, $\epsilon_l = 2,5 \times 10^{-5}$ mientras que $\rho_r = 0,125 \times 10^5$, $\epsilon_r = 2 \times 10^5$, las velocidades iniciales para ambos fluidos es igual a cero y la constante $\Gamma = 1,4$. Los resultados de los perfiles de densidad, presión, energía y velocidad en x están dados en las gráficas de los cuadros (10.1) y (10.2). Donde se muestra la evolución de un perfil doble de tubo de choque, vemos que para $t = 6000$ todos los perfiles muestran una concordancia con la solución exacta [7]. En este caso hemos usado $N_p = 18 \times 10^3$ partículas, y en zona efectiva para comparar con la solución exacta solamente se usan 9×10^3 .

Como segunda prueba tenemos las mismas dimensiones espaciales pero con $\rho_l = 10$, $\epsilon_l = 2$ y $\rho_r = 1$, $\epsilon_r = 10^{-6}$. Aquí consideramos a $\Gamma = 5/3$. Mostramos la evolución para $t = 45$. En este caso, mostramos que el código tuvo dificultades para capturar el choque. Esto nos refiere a realizar cambios significativos y mejoras en cuanto a los términos de viscosidad artificial, o simplemente a aumentar la resolución, ya que para esta se usaron $N_p = 44 \times 10^3$ en toda la región, mientras que para describir la parte comparable con la solución exacta solamente usa la mitad. Podemos ver todas las gráficas que pudo haber existido el fenómeno de interpenetración, es decir, las partículas que estaban en la región l pueden haber ignorado la presencia de las partículas de la región r debido a errores en los cálculos.

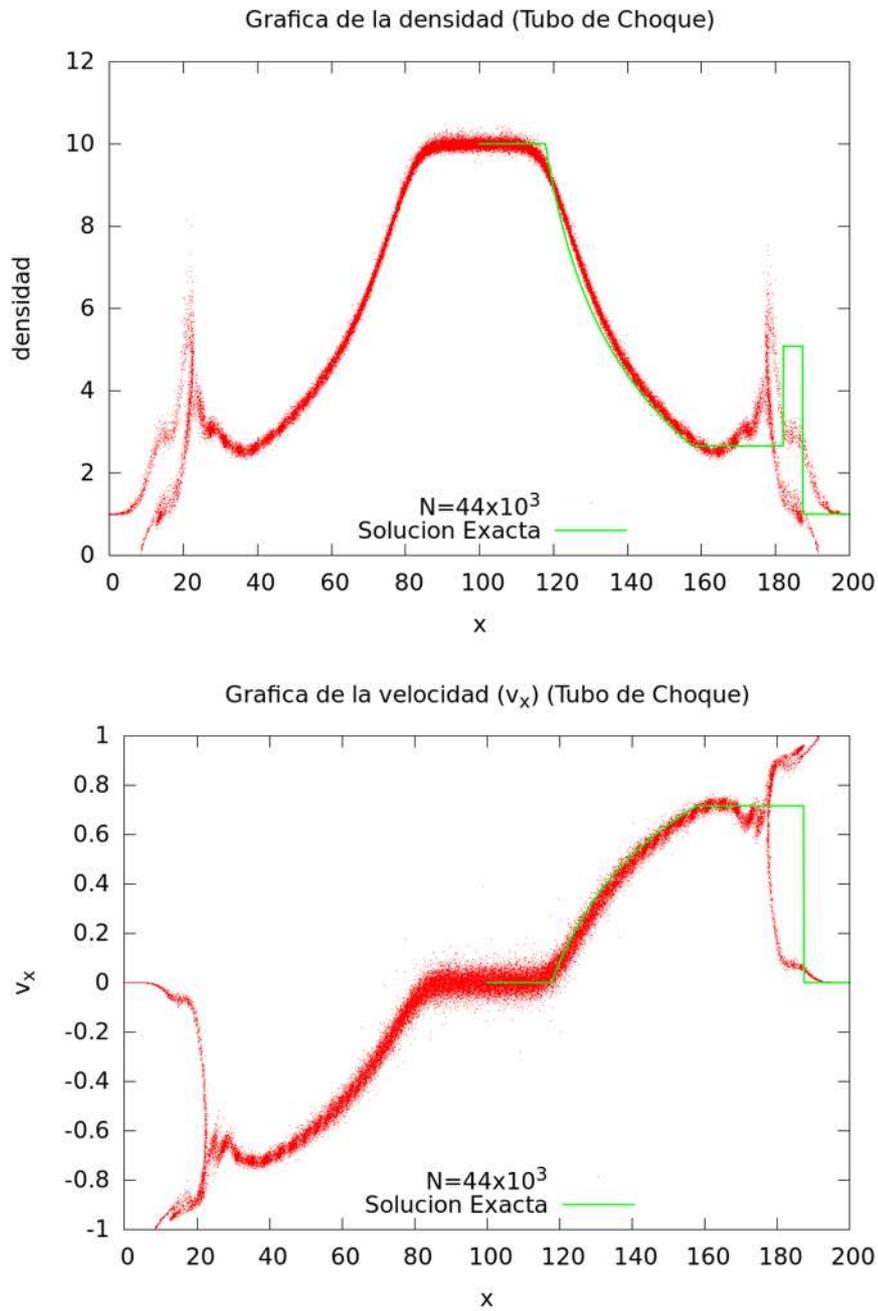
Sin embargo, para problemas de espacio tiempo plano existen grandes avances para los términos disipativos que se puedan agregar [16], [21]. Los términos de viscosidad artificial por si solos generan en algunos casos mucha contaminación numérica, se han sugerido varios disparadores para corregir este tipo de problemas [22], sin embargo, todo esto se encuentra realizado en su mayor parte para espacios tiempos planos y en regímenes de hidrodinámica clásica.



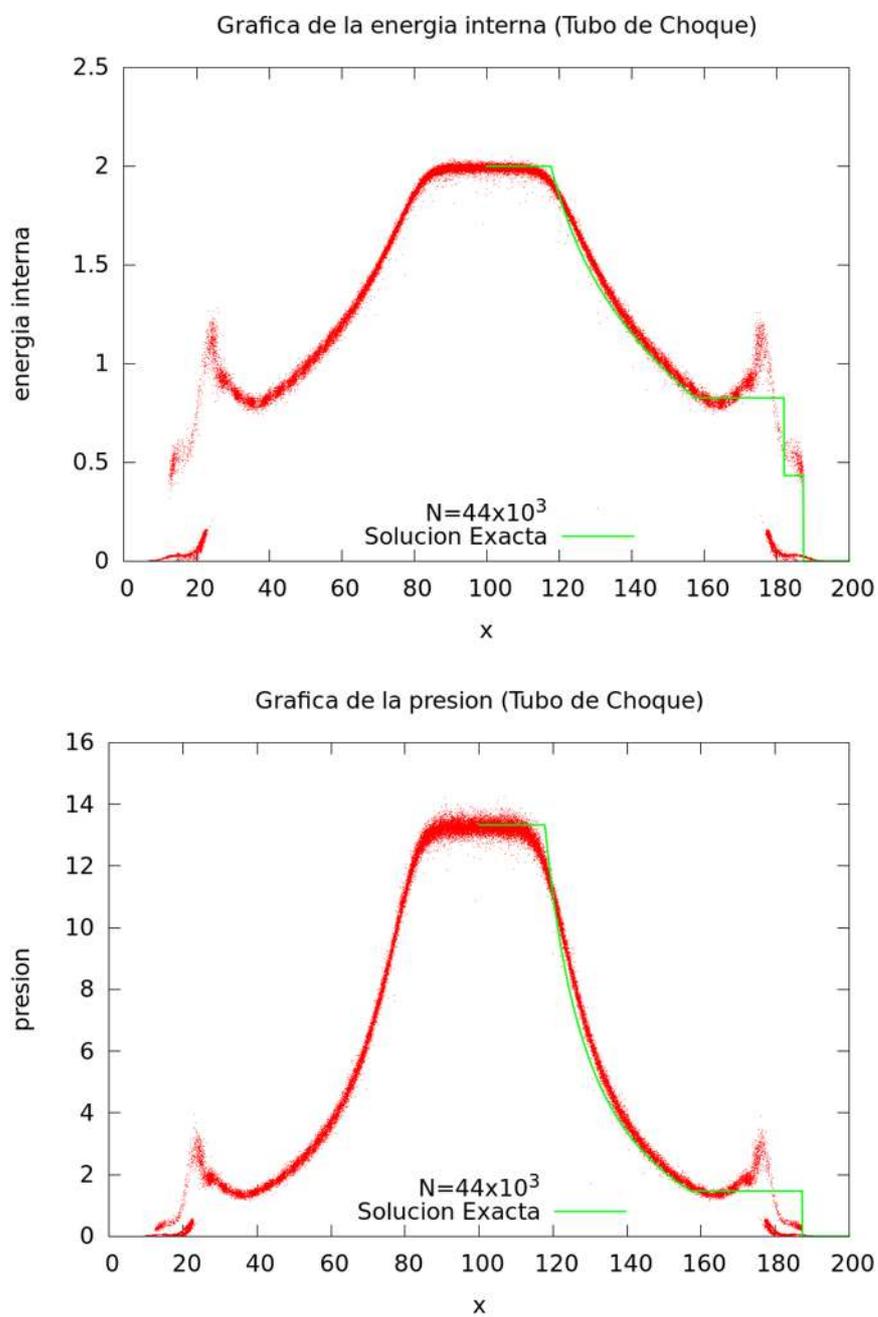
Cuadro 10.1: En estas gráficas se muestra que la solución numérica con $N_p = 18 \times 10^3$ partículas para el tubo de choque describe con mucho detalle la solución exacta del problema de Riemann para las ecuaciones de Euler relativistas, vemos además como las 5 regiones aparecen, por lo que la viscosidad artificial para este caso no tiene mayor problema en reproducir y tratar el choque. Aquí mostramos la grafica de densidad y velocidad en la dirección x a un tiempo de $t = 6000$.



Cuadro 10.2: En estas gráficas se complementan con las del cuadro anterior, mostrando la energía interna y la presión. Aquí, podemos ver que en la gráfica de la presión existe una región que al igual de la velocidad permanece constante, esta se ve separada por una discontinuidad en la densidad que distingue la discontinuidad de contacto.



Cuadro 10.3: En este cuadro se muestran las gráficas para el segundo test del tubo de choque para la densidad en reposo así como para la velocidad en x . Aunque para la zona de rarefacción se ve muy bien aproximado, cuesta trabajo distinguirlo así para las otras zonas. Se puede apreciar una falla en la viscosidad artificial al tratar de evitar la interpenetración de partículas. Se muestra también el perfil de la solución exacta en cada una de ellas a tiempo $t = 45,0$



Cuadro 10.4: Cuadro en el que se muestran las gráficas complementarias de la energía interna y de la presión a tiempos $t = 45$.

Capítulo 11

Inestabilidad de Kelvin-Hemholtz

SPH tiene algunas publicaciones donde tratan en el caso clásico la inestabilidad de Kelvin-Hemholtz [23] [16] probando para diferentes tipos de viscosidad artificial. Sin embargo, aquí no hacemos ninguna modificación de ese tipo, sino que seguimos usando la misma viscosidad propuesta en [15].

En esta sección mostramos un modelado de una inestabilidad tipo Kelvin-Hemholtz [23]. Inicialmente, tenemos un prisma rectangular con propiedades periódicas. En el código IPA usamos las propiedades periódicas del buscado eficiente de vecinos. En nuestro sistema cartesiano, el prisma tiene las dimensiones $0 < x < 1$, $0 < y < 2,0 \times 10^{-1}$, y $0 < z < 1,0$. Dentro de la caja se configura un fluido a diferentes densidades. Para $0,25 < z < 0,5$ el fluido posee una densidad $\rho_2 = 2,0$ mientras que para el resto $\rho_1 = 1,0$. La presión en ambas regiones del fluido se dispone con el mismo valor $p = 2,5$. La constante $\Gamma = 5/3$ y lo modelamos usando la ecuación de gas ideal $p = (\Gamma - 1)\rho_o\epsilon$ de donde podemos encontrar la energía interna.

La masa total del sistema es la suma de las masas en cada una de las regiones: $M_{1,2} = \rho_{o,1,2}W_{1,2}V_{1,2}$ donde el subíndice indica la región 1 o 2. Para encontrar este resultado volvemos a la integral de la masa en reposo:

$$M_o = \int_V \sqrt{-g}\rho_o U^t \alpha d^3x = \int_V \alpha \sqrt{\gamma} \rho_o \frac{W}{\alpha} d^3x, \quad (11.1)$$

para esto vemos que ρ_o es una constante por la construcción del sistema y que $\sqrt{\gamma} = 1$ por tratarse del espacio tiempo plano, así solamente sobrevive el factor de Lorentz $W = 1/\sqrt{1-v^2}$. Pero como inicialmente las velocidades de cada una de las regiones son tal que una se mueven en sentido contrario una de la otra ($v_x = -0,5, v_y = 0, v_z = 0$) y ($v_x = 0,5, v_y = 0, v_z = 0$), para nuestro ejemplo este factor también es una constante.

La integral se simplifica y tenemos

$$M_o = \rho_o W \int_V d^3x = \rho_o W V. \quad (11.2)$$

Así podemos conocer la masa en cada una de las regiones: $M_{o,1} = V_1\rho_1/\sqrt{1-v_x^2}$ y $M_{o,2} = V_2\rho_2/\sqrt{1-v_x^2}$.

El valor de cada una de las masas asignadas a las partículas viene dado por $m_i = M_o/N$. Sin embargo la colocación de estas partículas no deja de ser un reto. Para nuestro ejemplo hemos hecho un arreglo de $N = 75000$ partículas en total de tal forma que son tipo cristal. No están perfectamente colocadas en una malla rectangular sino que presentan un desplazamiento como el que se muestra en la figura (11.1).

La masa de ambas regiones da un valor aproximado de $M_o = 3,4641016151378 \times 10^{-1}$, lo cual concuerda con la integral de la masa durante toda la evolución numérica. Al calcular la energía interna del sistema, vemos cómo al inicio el sistema comienza a perder energía interna globalmente tal y como se muestra en la figura (11.2). Sin embargo después de la aparición de la inestabilidad esta comienza a aumentar de forma considerable.

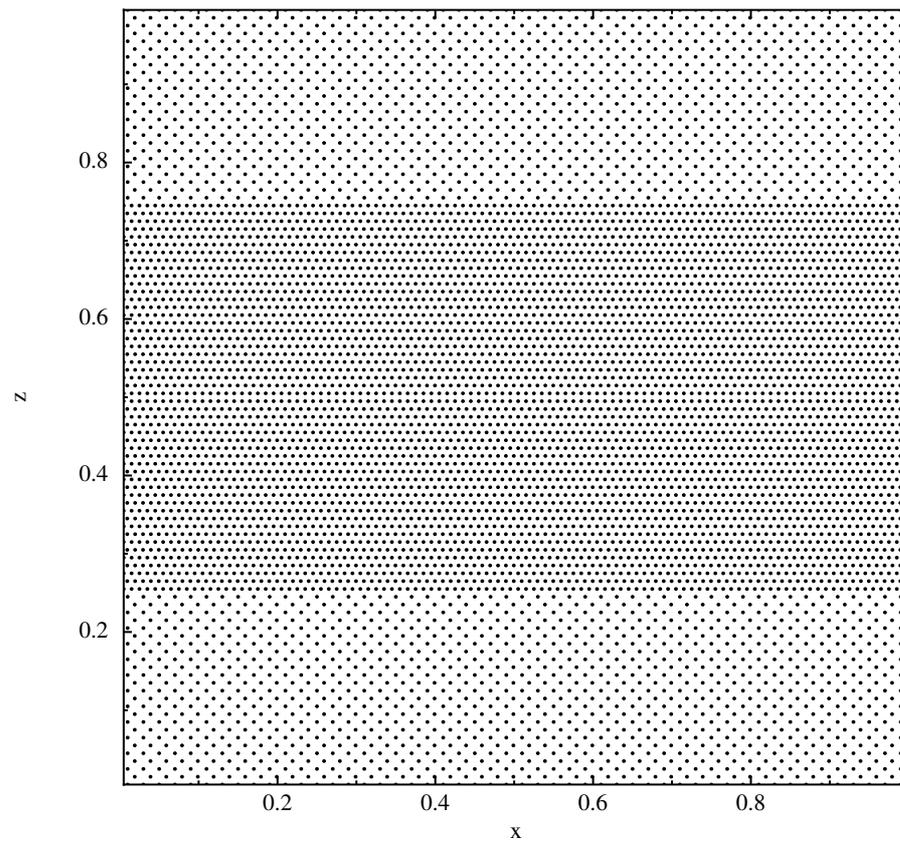


Figura 11.1: Acomodo de las partículas para la prueba de Kelvin-Hemholtz, donde la relación entre las densidades es de 2 : 1.

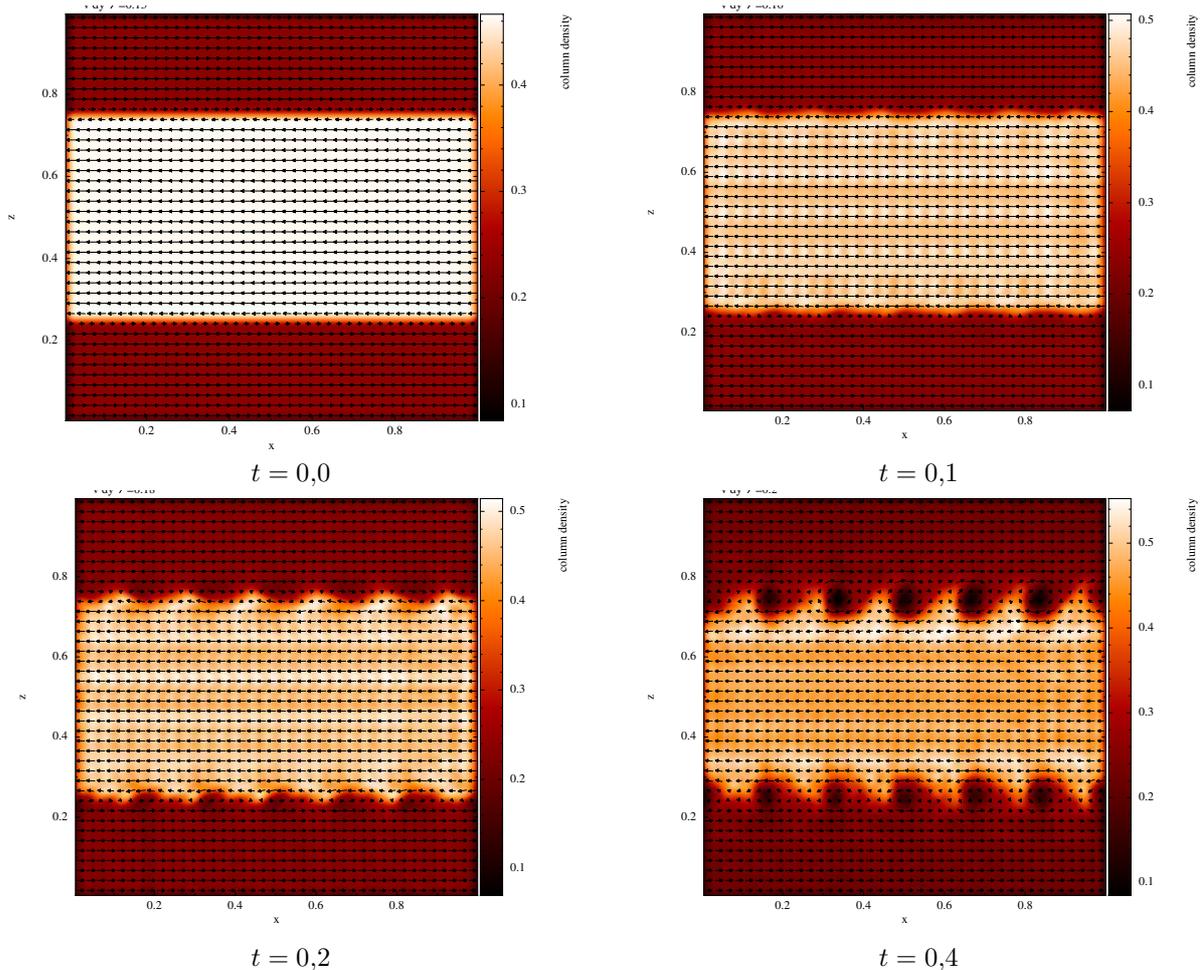
La semilla de la inestabilidad de Kelvin-Hemholtz [16] se escribe como

$$v_z = A \sin(2,0 \sin(-2\pi x + 0,5)/\lambda), \text{ donde } |z - z_o - 0,25| < 0,025 \quad (11.3)$$

y por otra parte

$$v_z = A \sin(2,0 \sin(2\pi x + 0,5)/\lambda), \text{ donde } |z - z_o + 0,25| < 0,025 \quad (11.4)$$

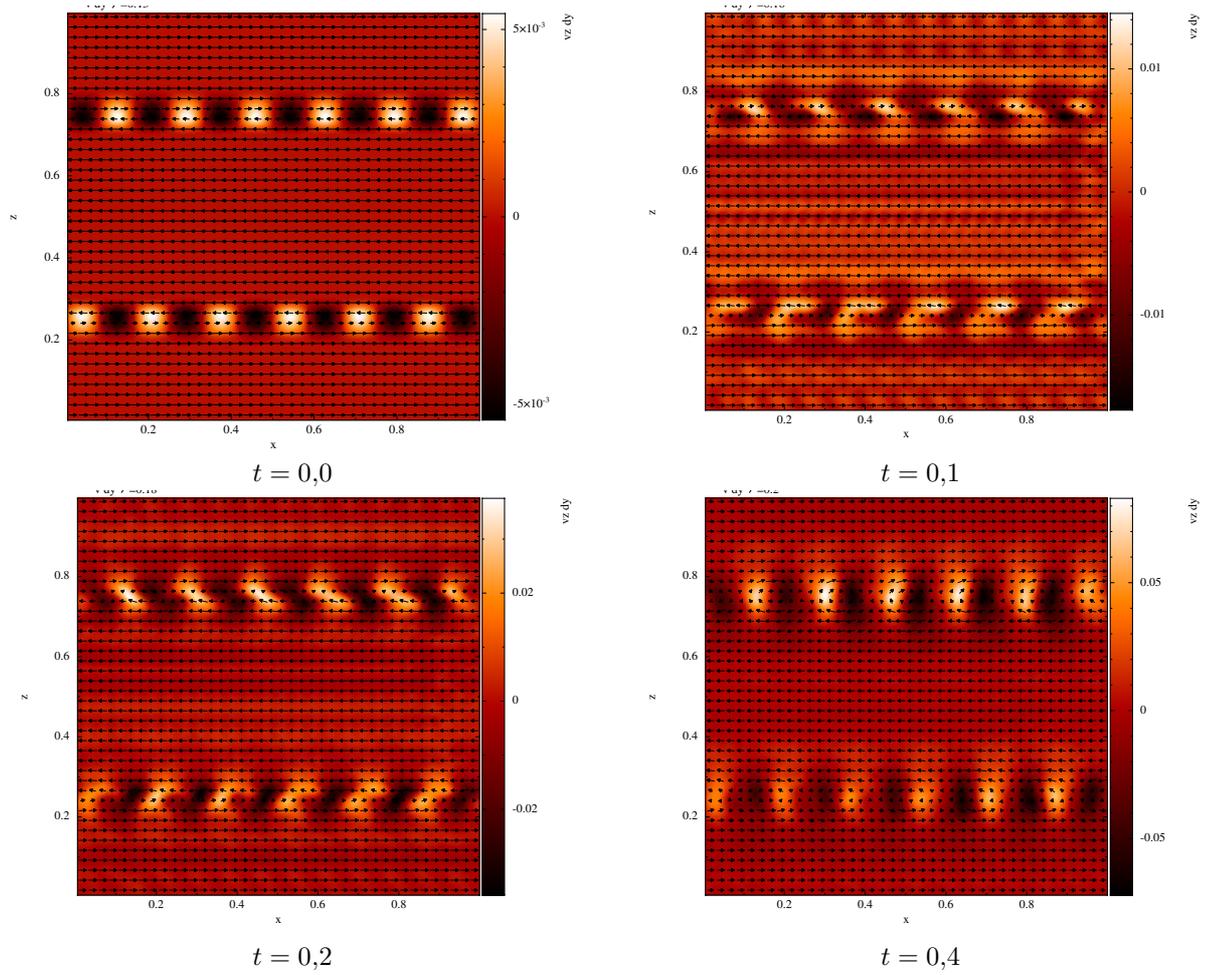
aquí el $z_o = 0,5$ ya que nuestra configuración no esta centrada en el origen, $A = 0,025$ y $\lambda = 1/6$ [16].



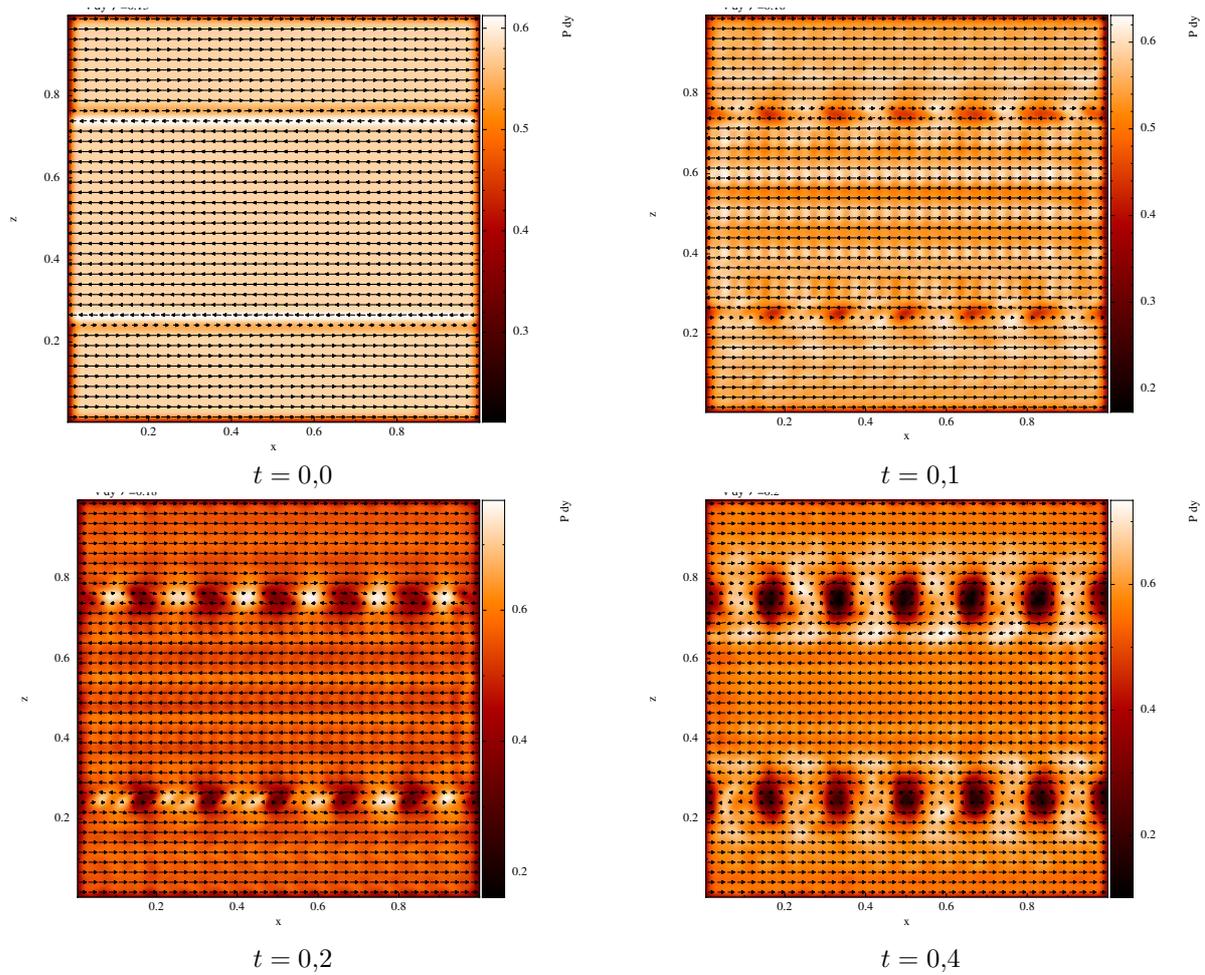
Cuadro 11.1: Diferentes tiempos para un perfil de densidad de la inestabilidad de Kelvin-Hemholtz, donde podemos ver la configuración inicial a tiempo $t = 0$, la parte que de acuerdo con la gráfica de energía total coincide con un mínimo $t = 0,2$, así como la parte que corresponde uno de los tiempos con valor energético más alto en $t = 0,4$ y para tiempos posteriores, donde el sistema comienza a relajarse.

Al igual que para el caso de la estrella en equilibrio, aquí podemos calcular la masa y energía totales del sistema de forma numérica. Sin embargo como la masa en reposo se conserva por tener una caja con propiedades periódicas, una cantidad que resulta muy eficaz para el análisis de la inestabilidad es la energía interna. En la figura (11.2) mostramos la integral en toda la región de la energía interna. Aquí podemos observar que la energía toma un mínimo al rededor de $t = 0,2$ y que al rededor de $t = 0,4$ existe una rodilla seguida de una zona un tanto estable.

Estos valores parecen coincidir con los que se encuentran con su contraparte clásica al hacer



Cuadro 11.2: En este cuadro se muestra el valor de la semilla de Kelvin-Hemholtz, podemos ver la velocidad v_z para diferentes valores de tiempo. Notamos que para $t = 0,4$ las flechas del campo vectorial forman vórtices alrededor de estas semillas.



Cuadro 11.3: La presión es una zona muy importante, ya que inicialmente fue colocada de tal forma que fuera uniforme en todas partes. En esta configuración, debido a que la velocidad es distinta de cero en todas las regiones, la viscosidad artificial comienza a actuar recién iniciada la simulación y coadyuva a crear la inestabilidad.

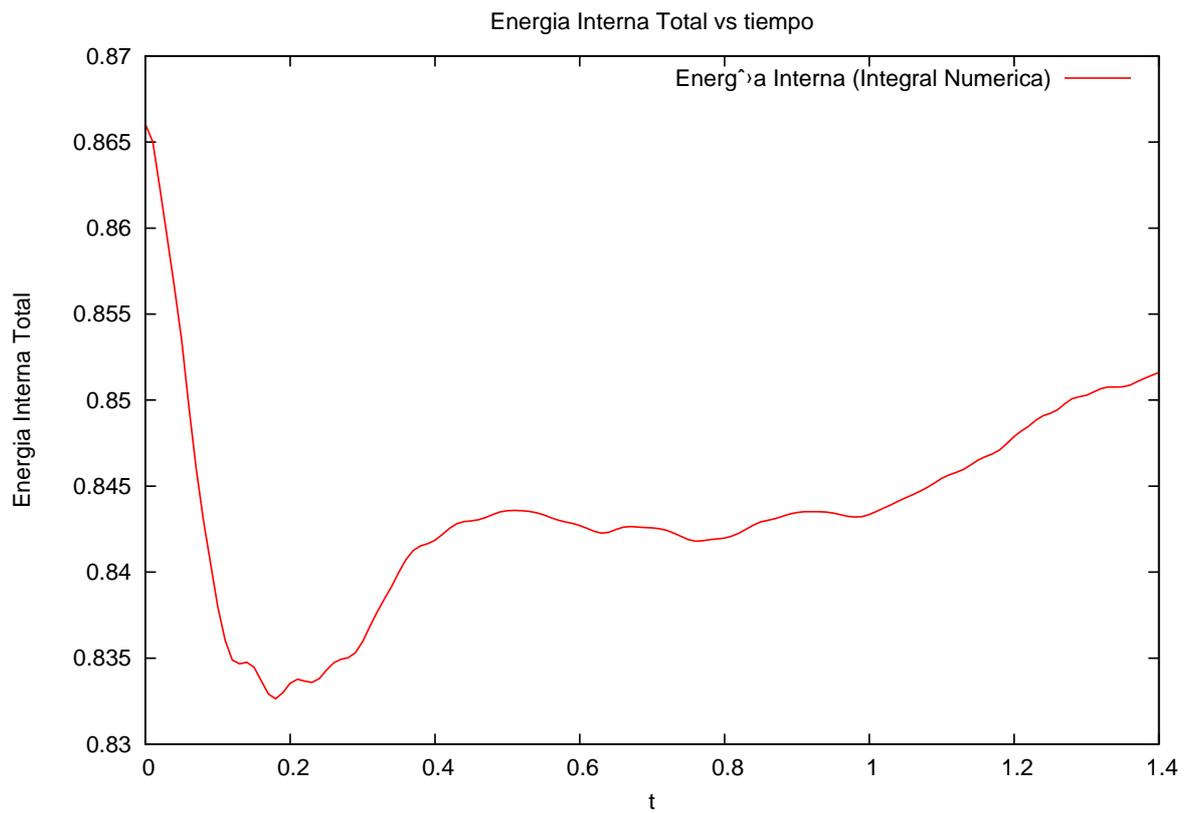


Figura 11.2: Se hizo el cálculo numérico de la energía interna del sistema, y se observa que aproximadamente donde el sistema comienza a realizar las inestabilidades de forma más notables coincide con un mínimo, después de esto la energía comienza a crecer nuevamente.

uso de la fórmula $\tau_{kh} = 2\pi/\omega$, donde

$$\omega = \frac{2\pi}{\lambda} (\rho\rho')^{1/2} \frac{|v_x - v'_x|}{\rho + \rho'}$$

. Al sustituir aquí todos los valores usados en esta simulación para la semilla $\rho = 1$, $\rho' = 2$, $v_x = 0,5$, $v'_x = -0,5$ y $\lambda = 1,6$, obtenemos que $\tau_{kh} = 0,35$. Sorprende a la vista como este puede coincidir también con el punto de inflexión mostrado en la gráfica para la energía interna del sistema en la figura (11.2).

Aunque aquí no se muestran otros tests donde las partículas han sido colocadas de forma uniforme en un grid rectangular, podemos decir que este acomodo, ver figura (11.1) ha favorecido en la aparición de la inestabilidad de Kelvin-Hemholtz.

Capítulo 12

Conclusiones

Uno de los procesos más complicados de todo el trabajo de tesis fue el de la colocación de partículas en los datos iniciales [17]. Este proceso es claro para espacios tiempos planos. Sin embargo, no existe mucha documentación acerca de la colocación para espacio tiempo curvo. En este trabajo logramos entender como se colocan las partículas de la misma masa en reposo mediante una transformación de coordenadas para configuraciones esféricamente simétricas en un espacio curvo.

Para distribuciones con simetría axial, como por ejemplo formaciones toroidales alrededor de agujeros negros descritos por la métrica de Kerr-Schild, se pretende realizar estudios posteriores de qué método sería el más eficiente para realizar este tipo de distribuciones.

Observamos que IPA resulta ser de orden lineal $O(N)$, y que la carga de trabajo esta bien repartida en cada uno de los procesadores cuando se paraleliza. Esto habla de que la forma de paralelizar ha resultado ser eficiente y coherente con la idea que se tiene sobre el método para buscar partículas de repartir de en partes iguales el número de partículas en cada procesador.

En cuanto a los proceso de acreción de un agujero negro, generado por la solución exacta de la acreción de Michel, pudimos ver que cada detector colocado a lo largo de la coordenada radial muestra que la velocidad de acreción es consistente con \dot{M}_o . Esto habla de que el fenómeno de acreción, del cual nace la configuración inicial, se mantiene durante el tiempo de evolución del código, ya que para un estado estacionario \dot{M} tiene un valor constante para cualquier lugar donde se coloque un detector [24].

Por otra parte uno de los retos fue corroborar que la configuración de la estrella politrópica se mantiene estable. Aquí podemos ver como el efecto de la viscosidad artificial ayuda a simular la física real en un problema de hidrodinámica, sin embargo, no podemos descartar otros tipos de mejoras que se han hecho a la viscosidad artificial. Para aplicar estas mejoras es necesario encontrar el puente que nos lleva de la formulación de las ecuaciones discretas de [15] a otro tipo de formulaciones [12].

La parte que sostiene que la viscosidad artificial sostiene de forma adecuada la estructura de la OV se puede apreciar de la *energía de confinamiento*. Aquí se observaba que mientras no existía la viscosidad artificial la energía de confinamiento tendía a hacerse más positiva, era posible que para un futuro la estrella se destruyera. Sin embargo, para la configuración con viscosidad artificial, existían las oscilaciones pero estas se comienzan a amortiguar al rededor de un valor inicial.

Tema importante en este trabajo, fue el de cómo establecer un criterio de convergencia de las soluciones numéricas. En diferencias finitas esto se cumple esta tarea con el factor de convergencia y esto tiene muchos años de estudio. Como mostramos en ambas simulaciones, para la acreción radial y para la configuración en equilibrio, tenemos que el α -criterio nos ayuda a mostrar que el error esta siendo tratado consistentemente con el esperado de la teoria, ya que para tres resoluciones diferentes este factor oscila en al rededor del mismo valor para tres diferentes resoluciones. Aún cuando se tiene fuga de partículas debido a la excisión numérica, en el caso de la acreción de Michel, el α -factor es aproximadamente el mismo par diferentes resoluciones.

Las posible aplicaciones de este trabajo no se cierran sino que dejan muchas posibilidades de investigación abiertas, desde el punto de vista de mejoras que se pueden realizar sobre el código

como la variación de la forma de la viscosidad artificial, hasta la implementación de las ideas de High Resolution Shock Capturing para el método de SPH [25].

Otro campo de gran interés es agregar a el SPH relativista modelos con Magneto Hidrodinámica, para tener eventos astrofísicos más realistas. Por ejemplo, agregar campos magnéticos a las configuraciones toroidales [?]

Con esto poseemos una herramienta cuyo límite a simple vista parece ser la capacidad del equipo de cómputo que se usa. Ya que para estas simulaciones usamos computadoras con ocho procesadores y como se mostró en las gráficas para cada simulación hablamos de un minuto (en promedio) de procesamiento por paso. Hipotéticamente hablando podríamos aumentar sin problema el número de partículas para realizar simulaciones con alta resolución en un cluster que contara con cientos de procesadores a su disposición.

Appendices

Apéndice A

Ordenador de Raíz

El ordenamiento de raíz para números enteros ([26]) consiste en considerar la expresión binaria de los números enteros que vamos a ordenar. Consideremos la representación binaria de cuatro números: 23,48,25 y 6:

```
010111 23
110000 48
011001 25
000110 6
```

Como primer paso observemos el primer dígito de derecha a izquierda: El número 23 presenta 1, el 48 a 0, el 25 a 1 y el 6 a 0. Tomamos todos los elementos de la lista que presentan 0 y los guardamos en orden de aparición, después realizamos lo mismo para formar una lista con todos los que tienen 1, como último paso pegamos ambas listas comenzando por la de 0. El resultado debe ser el siguiente:

```
110000 48
000110 6
010111 23
011001 25
```

El siguiente paso es hacer lo mismo con el lugar correspondiente al segundo dígito. El 48 presenta a 0, 6 a 1, 23 a 1 y 25 a 0. Después de ordenarlos como se realizó en el paso anterior, el resultado es:

```
110000 48
011001 25
000110 6
010111 23
```

Notemos como el orden de la cifra anterior se altera sin importarnos. Procedemos así hasta terminar con las 6 cifras de esta lista:

paso 3		paso 4		paso 5		paso 6	
110000	48	110000	48	000110	6	000110	6
011001	25	000110	6	110000	48	010111	23
000110	6	010111	23	010111	23	011001	25
010111	23	011001	25	011001	25	110000	48

El resultado final es el esperado: 6, 23, 25 y 48. Hemos visto que el proceso se ha realizado básicamente en 6 pasos de acuerdo con la representación binaria lo cual es independiente del tamaño de la lista; las operaciones internas al guardar en las listas de *ceros* y *unos* son las únicas que varían con el tamaño de los elementos a ordenar. Este ejemplo representaría a enteros de *6-bits*, si necesitáramos usar enteros de *32-bits* o más, entonces el número de operaciones aumentaría a 32.

Apéndice B

Big O-Notation

Para determinar el costo característico de tiempo que se lleva al algoritmo realizar los calculos, usamos la Notación O.

1. **Clasificación:** En el primer paso de la implementación tenemos que para calcular x_{\min} , y_{\min} y z_{\min} encontraremos que esto se realiza en un tiempo $T_{\min} = \alpha_{\min}N$, análogamente para x_{\max} , y_{\max} y z_{\max} tenemos $T_{\max} = \alpha_{\max}N$. Para encontrar (i, j, k) tenemos $T_{indices} = \alpha_{indices}N$ y por último $T_{claves} = \alpha_{claves}N$. Como este proceso solamente se hace una vez el tiempo total empleado en la construcción de la caja virtual es

$$T_{clasificacion} = (\alpha_{\min} + \alpha_{\max} + \alpha_{indices} + \alpha_{claves})N = \alpha_{clasificacion}N \quad (\text{B.1})$$

esto implica que el orden de tiempo es

$$O(T_{clasificacion}) = O(\alpha_{clasificacion}N) = O(N). \quad (\text{B.2})$$

2. **Ordenamiento de Raíz:** Para este proceso sabemos que tenemos una lista de N enteros que se forman usando n -bits, entonces como $n \ll N$ tenemos que el tiempo que tarda en ordenar todos los números es $T = n\alpha_{bit}N$, donde $\alpha_{bit}N$ es el tiempo que tarda en ordenar los N datos. Así tenemos

$$T_{radix} = \alpha_{radix}N \rightarrow O(T_{radix}) = O(N) \quad (\text{B.3})$$

3. **Censo:** En el censo para cada uno de los N datos realiza dos tareas básicamente: preguntar si su clase es igual o diferente del siguiente, y de acuerdo a la respuesta realiza guarda un dato o pasa al siguiente. Entonces podemos decir que el proceso se realiza en un tiempo

$$T_{censo} = \alpha_{censo}N \rightarrow O(T_{censo}) = O(N) \quad (\text{B.4})$$

4. **Búsqueda:** Supongamos un $a = a_o$ tal que $a_o \in [1, N]$. Se calculan los índices (i_a, j_a, k_a) dada una $clave(a)$, esto toma un tiempo de T_{clave} . Después calculan N_{celdas} , T_{celdas} . Por último se buscan entre las N_{clases} tomando un tiempo estimado de $T_{clases} = \alpha_{clases}N_{clases}$. Entonces tenemos en total para este proceso:

$$T_{busqueda} = T_{clave} + T_{celdas} + \alpha_{clases}N_{clases}, \quad (\text{B.5})$$

de donde tenemos

$$O(T_{busqueda}) = O(T_{clave}) + O(T_{celdas}) + O(N_{clases}), \quad (\text{B.6})$$

Al sumar todos los órdenes estimados tenemos

$$O(T_{total}) = O(T_{clasificacion}) + O(T_{radix}) + O(T_{censo}) + N \cdot O(T_{busqueda}), \quad (\text{B.7})$$

donde $N > N_{clases}$ (hemos multiplicado por N ya que para cada partícula se tiene que emitir un proceso de búsqueda de vecinos). Podemos reducir la estimación anterior considerando que en la suma aparecen $O(T_{clave}) \ll O(N)$ y $O(T_{censo}) \ll O(N)$ y por lo tanto

$$O(T_{total}) = O(N) + O(N) + O(N) + N \cdot O(N_{clases}) = O(N). \quad (\text{B.8})$$

Bibliografía

- [1] Lars Hernquist and Neal Katz. Treesph: A unification of sph with the hierarchical tree method. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, (70):419–446, June 1989.
- [2] Juraj Onderik and Roman Durikovic. Efficient neighbor search for particle-based fluids. *Journal of Applied Mathematics, Statistics and Informatics (JAMSI)*, 2(3), (2007).
- [3] T. Baumgarte and S. Shapiro. *Numerical Relativity: Solving Einstein's Equations on the Computer*. Cambridge University Press, 2010.
- [4] Stuart L. Shapiro and Saul A. Teukolsky. *Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars*. John Wiley and Sons, 1983.
- [5] F. Curtis Michel. Accretion of matter by condensed objects. *Astrophysics and Space Science*, (15):153–160, 1972.
- [6] Philipos Papadopoulos and José A. Font. Relativistic hydrodynamics around black holes and horizon adapted coordinate systems. *Physical Review D*, 58(024005).
- [7] F. D. Lora-Clavijo, J. P. Cruz-Pérez, F. Siddhartha Guzmán, and J. A. González. Exact solution of the 1d riemann problem in newtonian and relativistic hydrodynamics. *Revista mexicana de física E*, 59(1), 2013.
- [8] James R. Wilson and Grant J. Mathews. *Relativistic Numerical Hydrodynamics*. Cambridge University Press, 2003.
- [9] Miguel Alcubierre. *Introduction to 3+1 Numerical Relativity*. Oxford Science Publications, 2008.
- [10] Charles W. Misner, Kip S. Thorne, and John A. Wheeler. *Gravitation*. W. H. Freeman and Company, 1970.
- [11] Stephan Rosswog. Conservative, special-relativistic smoothed particle hydrodynamics. *Journal of Computational Physics*, 229:8591–8612, 2010.
- [12] Stephan Rosswog. Astrophysical smooth particle hydrodynamics. *Elsevier*, 2009.
- [13] Pablo Laguna, Warner A. Miller, and Wojchec H. Zurek. Smoothed particle hydrodynamics near a black hole. *The Astrophysical Journal*, (404):678–685, Febrero, 20 1993.
- [14] G.R. Liu and M.B. Liu. *Smoothed Particle Hydrodynamics: a meshfree particle method*. World Scientific, 2009.
- [15] S. Siegler and H. Riffert. Smoothed particle hydrodynamics simulations of ultrarelativistic shocks with artificial viscosity. *The Astrophysical Journal*, 531:1053–1066, Marzo, 10 2000.
- [16] Daniel J. Price. Modelling discontinuities and kelvin-helmholtz instabilities in sph. *arXiv:0709.2772*, 2008.

-
- [17] J. P. Cruz Pérez and J.A González Cervera. Initial data for general relativistic sph. In Luis A. Ureña-López, Ricardo Becerril-Bárceñas, and Román Linares-Romero, editors, *IX MEXICAN SCHOOL ON GRAVITATION AND MATHEMATICAL PHYSICS: COSMOLOGY FOR THE XXIST CENTURY: Gravitation and Mathematical Physics Division of the Mexican Physical Society (DGFMSMF)*, volume 1548, July 2013.
- [18] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B.P. Flannery. *Numerical Recipes in Fortran*. Cambridge University Press.
- [19] Robert M. Wald. *General Relativity*. The University Chicago Press, 1984.
- [20] John F. Hawley and Larry L. Smarr. A numerical study of nonspherical black hole accretion. i. equation and test problems. *The Astrophysical Journal*, 277:296–311, 1984.
- [21] E. Chow and J. J. Monaghan. Ultrarelativistic sph. *Journal of Computational Physics*, 134:296–305, 1997.
- [22] J. P. Morris and J. J. Monaghan. A switch to reduce sph viscosity. *Journal of Computational Physics*, 136:41–50, 1997.
- [23] Volker Springel. Smoothed particle hydrodynamics in astrophysics. *arxiv: 1109.2219v1*, 2011.
- [24] José A. Font and J. M^Áa. Ibáñez. A numerical study of relativistic bondi-hoyle accretion onto a moving black hole: Axisymmetric computations in an schwarzschild background. *The Astrophysical Journal*, 494:297–316, Febrero 1998.
- [25] J. J. Monaghan. Sph and riemann solvers. *JOURNAL OF COMPUTATIONAL PHYSICS*, 1997.
- [26] Pierre Terdiman. Radix sort revisited.