



Universidad Michoacana  
de San Nicolás de Hidalgo

Instituto de Física y Matemáticas

**Oscilaciones acústicas en flujos radiales  
de materia acreta por  
un agujero negro**

Tesis  
que para obtener el título de

**Doctor en Ciencias en el área de Física**

presenta:

**Eliana Yanet Chaverra Sánchez**

Bajo la asesoría de:  
Dr. Olivier Charles-Albert Sarbach,  
Instituto de Física y Matemáticas, UMSNH

Morelia, Michoacán. Agosto de 2015.

*A Hannelore y a Max.  
A mi padre y a Fernando donde quiera que se encuentren.*

*Agradezco a México,  
y en particular a la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo,  
por brindarme los medios para realizar este trabajo.  
Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología agradezco la beca No. 238758.*

*A los profesores Thomas Zannias y Olivier Sarbach doy gracias  
por enseñarme a pensar de manera científica.*

# Índice general

|  |           |
|--|-----------|
| <b>1. Resumen y abstract</b>   | <b>5</b>  |
| 1.1. Resumen . . . . .   | 5         |
| 1.2. Abstract . . . . .  | 6         |
| <b>2. Introducción</b>   | <b>9</b>  |
| <b>3. Fluidos perfectos relativistas</b>   | <b>15</b> |
| 3.1. Dinámica del fluido perfecto . . . . .  | 16        |
| 3.2. Flujos potenciales . . . . .  | 16        |
| 3.3. Principio variacional de los flujos potenciales . . . . .   | 17        |
| 3.4. Potencial perturbado . . . . .  | 18        |
| 3.4.1. Segunda variación de la acción . . . . .  | 20        |
| 3.5. Ecuaciones de estado . . . . .  | 21        |
| 3.5.1. Gas ideal . . . . .   | 22        |
| 3.5.2. Índice adiabático $\gamma$ . . . . .  | 22        |
| <b>4. Flujo de Michel</b>  | <b>25</b> |
| 4.1. Flujos de acreción . . . . .  | 26        |
| 4.1.1. Suposiciones sobre la métrica . . . . .   | 26        |
| 4.1.2. Flujos radiales de fluidos perfectos . . . . .  | 28        |
| 4.1.3. Suposiciones sobre la ecuación de estado del fluido . . . . .   | 29        |
| 4.2. Espacio de fase . . . . .   | 33        |
| 4.2.1. Cantidades adimensionales y resultados preliminares . . . . .   | 34        |
| 4.2.2. Definición del sistema dinámico y de los puntos críticos . . . . .                                      | 35        |
| 4.2.3. Extensión de las variedades locales estable e inestable y las propiedades del espacio de fase . . . . . | 37        |
| 4.2.4. El problema de correspondencia . . . . .  | 42        |
| 4.3. Ejemplo y contra-ejemplos . . . . .   | 43        |
| 4.3.1. Acreción de polvo . . . . .   | 44        |
| 4.3.2. Acreción de un fluido "rígido" . . . . .  | 44        |
| 4.3.3. Acreción con una ecuación de estado politrópica . . . . .   | 45        |
| 4.3.4. Expansiones para la velocidad del sonido $v_\infty \ll 1$ . . . . .                                     | 48        |

|  |            |
|--|------------|
| <b>5. Modos cuasi-normales</b>   | <b>55</b>  |
| 5.1. Barrera rectangular de potencial . . . . .  | 58         |
| 5.2. Modos cuasi-normales de Schwarzschild . . . . .   | 65         |
| 5.3. Modos cuasi-normales para problemas más generales . . . . .                                 | 68         |
| 5.3.1. Solución de Jost y función de Jost . . . . .  | 70         |
| 5.3.2. Soluciones locales y el determinante de Wronski . . . . .                                 | 72         |
| 5.4. Continuación analítica para $\text{Re}(s) < 0$ . . . . .                                    | 76         |
| 5.4.1. Potenciales analíticos . . . . .  | 76         |
| 5.4.2. Continuación analítica de las soluciones para el caso de<br>agujeros negros . . . . .     | 80         |
| <b>6. Modos cuasi-normales acústicos</b>   | <b>85</b>  |
| 6.1. Breve revisión del flujo de Michel y sus propiedades relevantes . .                         | 86         |
| 6.2. Oscilaciones cuasi-normales desde un análisis de modos . . . . .                            | 87         |
| 6.2.1. Geometría de la métrica acústica . . . . .  | 87         |
| 6.2.2. Reducción a una ecuación tipo Schrödinger . . . . .                                       | 89         |
| 6.3. Resultados para las frecuencias cuasi-normales . . . . .                                    | 92         |
| 6.3.1. Frecuencias fundamentales . . . . .   | 92         |
| 6.3.2. Sobretonos . . . . .  | 94         |
| 6.3.3. Límite Eikonal . . . . .  | 95         |
| 6.4. Conclusiones para las perturbaciones acústicas . . . . .                                    | 97         |
| <b>7. Conclusión</b>   | <b>99</b>  |
| <b>A. Justificación de las condiciones (M1)–(M4) en la métrica</b>                               | <b>103</b> |
| <b>B. Lemas Capítulo 3</b>   | <b>107</b> |
| B.1. Prueba del Lema 1 . . . . .   | 107        |
| B.2. Prueba del Lema 2 . . . . .   | 108        |
| B.3. Prueba Lema 3 . . . . .   | 109        |
| <b>C. Método de Leaver</b>   | <b>111</b> |
| C.1. Teoría punto singular regular . . . . .   | 121        |
| <b>D. Fracciones continuas y relaciones de recurrencia</b>                                       | <b>123</b> |
| D.1. Definición y propiedades básicas de las fracciones continuas . . .                          | 123        |
| D.2. Soluciones minimales . . . . .  | 123        |
| D.3. Solución minimal y el teorema de Pincherle . . . . .  | 127        |
| <b>E. Criterios de convergencia en series</b>  | <b>131</b> |
| <b>F. Expansión en el infinito</b>   | <b>135</b> |
| F.1. Expansión formal de la solución en el infinito . . . . .                                    | 135        |
| F.2. Radio de convergencia . . . . .   | 136        |
| <b>G. Continuación analítica de las funciones <math>\mathcal{N}</math> y <math>V_\ell</math></b> | <b>141</b> |

# Capítulo 1

## Resumen y abstract

### 1.1. Resumen

El primer objetivo de este trabajo es el estudio de la acreción radial estacionaria de materia por un agujero negro no rotante. Modelamos la materia alrededor del agujero negro como un fluido relativista y despreciamos la auto-gravedad de la materia acretada, considerando un fondo métrico fijo. Proveemos resultados rigurosos sobre la existencia y unicidad del flujo de acreción. Generalizamos estos resultados con una ecuación de estado más general que la simple ecuación de estado politrópica, y con un fondo métrico más general que el fondo de Schwarzschild. Como consecuencia de esto, nuestros resultados también aplican para agujeros no rotantes predichos por teorías alternativas de gravedad, y también aplican para agujeros distorsionados en gravedad de Einstein en la presencia de campos externos, como materia oscura. Bajo suposiciones bastante generales sobre la ecuación de estado del fluido, y reformulando el problema de acreción como un sistema dinámico, determinamos el comportamiento cualitativo local y global de su flujo de fase. Basado en nuestro análisis, y generalizando trabajos previos de Michel, probamos que para cualquier densidad positiva del número de partículas en el infinito, existe un único flujo de acreción radial estacionario que es regular en el horizonte.

En la segunda parte de la presente tesis, estudiamos perturbaciones lineales acústicas (esféricas y no esféricas) del flujo de Michel. La dinámica de estas perturbaciones es gobernada por una ecuación de onda escalar en una geometría efectiva de fondo curvo. Esta geometría es determinada por la métrica acústica, la cual se construye a partir de la métrica del espacio-tiempo, la densidad de partículas y la cuadri-velocidad del fluido. Para el problema bajo consideración, la métrica acústica tiene las mismas características como un agujero negro asintóticamente plano, estático y esféricamente simétrico. La métrica acústica, al igual que en un agujero negro, también posee un horizonte, llamado horizonte sónico. En este horizonte, a diferencia de un agujero negro verdadero, la materia puede escapar de la región interior. Lo que *no puede* escapar son las

perturbaciones acústicas, una vez que hayan cruzado el horizonte sónico. Por lo anterior, la métrica acústica representa un agujero negro análogo astrofísico natural.

Para un campo escalar propagándose en un fondo de Schwarzschild se encuentran oscilaciones cuasi-normales. Nosotros mostramos, que las perturbaciones acústicas del flujo de Michel también exhiben tales oscilaciones cuasi-normales. Calculamos las frecuencias complejas  $s$  asociadas a los modos cuasi-normales, mediante un nuevo método numérico llamado "matching", el cual se basa en iteraciones de Banach. Analizamos la dependencia de estas frecuencias con la masa del agujero negro, el radio del horizonte sónico, y el número de momento angular. Mostramos que cuando el radio del horizonte sónico es mucho mayor que el del horizonte de eventos, las frecuencias cuasi-normales escalan aproximadamente como la gravedad superficial del horizonte sónico.

Los resultados obtenidos en esta tesis podrían ofrecer oportunidades para verificar la teoría general de la gravedad de Einstein en el límite de campo fuerte.

**Palabras claves:** relatividad general, acreción, modos cuasi-normales, agujero negro, flujo de Michel

## 1.2. Abstract

The first goal of this work is the study of stationary, radial accretion of matter onto a non-rotating black hole. We model the matter in the vicinity of the black hole as a relativistic fluid and neglect the self-gravity of the accreting matter, thus keeping our metric background fixed. We provide rigorous results on the existence and uniqueness of the accretion flow. We generalize these results with an equation of state more general than the polytropic one, and with a metric background more general than Schwarzschild. As a consequence, our results also apply for non-rotating black holes predicted by alternative theories of gravity, and for deformed black holes in Einstein gravity in the presence of external fields like dark matter. Under rather general assumptions about the equation of state of the fluid, and rewriting the accretion problem as a dynamical system, we determine the qualitative local and global behaviour of the phase flow. Based on our analysis and generalizing previous work by Michel, we prove that for any positive particle density at infinity, there exists a unique stationary radial accretion flow that is regular on the horizon.

In the second part of the present thesis, we study linear acoustic perturbations (spherical and non-spherical) of the Michel flow. The dynamics of these perturbations are governed by a scalar wave equation in an effective geometry describing a curved background. The geometry is determined by the acoustic metric, which is constructed from the spacetime metric, the particle density and the four-velocity of the fluid. For the problem under consideration, the acoustic metric has the same characteristics as an asymptotically flat, static and spherically symmetric black hole. The acoustic metric also has an horizon called sonic

horizon. At this sonic horizon, unlike a true event horizon, matter could still escape the region. However, the acoustic perturbations cannot escape once they have crossed the sonic horizon. Therefore, the sonic metric represents a natural analog astrophysical black hole.

For a scalar field propagating on a Schwarzschild background, one finds quasi-normal oscillations. Likewise, we show that the acoustic perturbations of the Michel flow also exhibit quasi-normal oscillations. We compute the complex frequencies  $s$  associated with these quasi-normal modes, using a new numerical matching method based on Banach iterations. We analyze the dependence of these frequencies with the black hole's mass, the radius of the sonic horizon, and the angular momentum number. We show that when the sonic horizon's radius is much larger than the radius of the event horizon, the quasi-normal frequencies scale approximately with the surface gravity of the sonic horizon.

The results obtained in this thesis might offer opportunities for verify Einstein's General Relativity in its strong field regime.



## Capítulo 2

# Introducción

Los agujeros negros han sido objeto de estudio durante años. Estos objetos despiertan el interés tanto a nivel científico como en el medio popular. Los agujeros negros, nombrados así por ser regiones finitas del espacio-tiempo del cual no puede escapar ningún rayo la luz, son una predicción de la relatividad general y la pregunta es entonces ¿cómo detectar estos objetos negros que viven ahí afuera? Una de las maneras para detectarlo, es la acreción de materia. Donde la acreción, es el proceso por el cual materia cae hacia un objeto, en este caso a un agujero negro, por efectos del campo gravitacional. Cuando la materia cae en el agujero negro, la región afuera del espacio-tiempo emite luz brillante. Esto se debe a los efectos de compresión o fricción las cuales dan origen a la emisión de radiación electromagnética. Es aquí entonces donde entra la motivación para estudiar la acreción. Esta materia que acreta el agujero negro puede venir del medio interestelar o, de gas de polvo proveniente de una estrella que se desintegra debido a las fuerzas de marea producidas por el campo gravitacional del agujero negro. En una situación astrofísica realista, el agujero negro o la materia están rotando. Esta rotación hace que el agujero negro arrastre materia de sus alrededores formando un disco de acreción. Entonces, la acreción de gas en un agujero negro juega un papel muy importante en la relatividad general y la astrofísica. Por lo tanto, este proceso físico ha sido estudiado extensivamente en la literatura. Desde que esta radiación pueda llevar información acerca de la geometría del espacio tiempo cercana al agujero negro, esto ofrece una oportunidad para testear la teoría general de la gravedad de Einstein en el límite de campo fuerte. El espectro de la radiación puede ser observado y comparado con modelos teóricos [1]. Una etiqueta característica de la acreción en el agujero negro (a diferencia de acreción en una estrella) es la presencia de un horizonte de eventos actuando como una membrana en una sola dirección a través de la cual la acreción de gas desaparece. Esto tiene varias implicaciones importantes. Primero, el horizonte provee una condición de frontera natural interna para la ecuación de movimiento que describe el gas, y por lo tanto las complicaciones o incertidumbres para encontrar las condiciones de frontera correctas como en la superficie de la estrella son evitadas. Luego, la radiación emitida en la vecindad

del agujero negro experimenta un fuerte efecto lente, dando como resultado una imagen que muestra la sombra del agujero negro rodeado por un anillo de luz brillante. De hecho, conjuntos de interferometría de base muy larga de longitud de onda de milímetros como el Event Horizon Telescope [2] son capaces de resolver la región alrededor de Sagittarius A\*, (el agujero supermasivo en el centro de nuestra galaxia) para escalas menores que su radio gravitacional [3]. Por lo tanto, estas observaciones pueden conducir a nuevas pruebas de la relatividad general en el régimen de campo fuerte, mirar por ejemplo Ref. [4]. Claramente, las etiquetas de las señales electromagnéticas observadas dependen de las propiedades y dinámica del flujo, y por lo tanto, es de considerable interés a estudiar la dinámica del gas acretao e identificar propiedades dinámicas como los modos de oscilación.

Organización de la tesis:

El primer objetivo del estudio de este trabajo es la acreción radial estacionaria de materia por un agujero negro no rotante. Modelamos la materia alrededor del agujero negro como un fluido perfecto relativista. Despreciando la auto-gravedad de la materia acretao, consideramos un fondo de Schwarzschild o más general. Como consecuencia de esto, nuestros resultados también aplican para agujeros no rotantes predichos por teorías alternativas de gravedad y para agujeros distorsionados en gravedad de Einstein en la presencia de campos externos, como por ejemplo materia oscura. El problema de acreción esférica de un fluido hacia un centro de gravedad ha sido abordado primeramente por Bondi [5] en el límite Newtoniano, y luego generalizado al caso relativista por Michel[6], el cual describe la acreción estacionaria de un fluido perfecto en un agujero negro no rotante. Este problema es discutido con más detalle en [1]. Situaciones físicas donde ocurre la acreción, es por ejemplo, la acreción debida al agujero negro supermasivo en el centro de nuestra galaxia, en una estrella de neutrones, en la formación de galaxias o sistemas solares, y en estrellas binarias que intercambian materia donde una es mucho más masiva que la otra.

El objetivo del estudio de este trabajo, es proveer resultados rigurosos sobre la existencia y unicidad del flujo de Michel, y generalizar este con una ecuación de estado más general que la simple ecuación de estado politrópica y un fondo métrico más general que un fondo de Schwarzschild. Bajo suposiciones bastante generales sobre la ecuación de estado del fluido y reformulando el problema de acreción como un sistema dinámico, determinamos el comportamiento cualitativo local y global de su flujo de fase. Basados en nuestro análisis y generalizando trabajos previos de Michel [6], probamos que para cualquier densidad positiva del número de partículas en el infinito, existe un único flujo de acreción radial en estado estacionario el cual es regular en el horizonte. La estabilidad del flujo de Michel en la región subsónica afuera de la esfera sónica ha sido probada por Moncrief [7]. Donde la esfera sónica es la región donde la velocidad radial del flujo (medido por observadores estáticos) pasa de subsónica a supersónica. Determinaremos los parámetros físicos de este flujo, tales como las tasas de acreción y de compresión y analizamos su dependencia en el fondo métrico. Lo nuevo de este trabajo respecto al trabajo de Michel, es que tomamos un fluido y

una métrica más generales que las que usa Michel en su trabajo y se demuestran resultados rigurosos.

Es de gran interés el estudio de la dinámica del gas acretado y de identificar sus propiedades, como por ejemplo sus modos oscilatorios. Este interés viene motivado por el hecho que las características de las señales electromagnéticas observadas (que mencionamos antes) dependen de las propiedades y dinámicas del flujo. Es por esto entonces que en la segunda parte de la presente tesis, estudiamos las perturbaciones del flujo de Michel.

En el estudio de las perturbaciones lineales acústicas esféricas y no esféricas del flujo de Michel, la dinámica de estas perturbaciones es gobernada por una ecuación de onda escalar en una geometría efectiva de fondo curvado. Esta geometría es determinada por la métrica sónica, la cual se construye a partir del espacio-tiempo métrico, la densidad de partículas y la quadri-velocidad del fluido. Para este problema que estamos considerando, la métrica acústica tiene las mismas características como un agujero negro asintóticamente plano, estático y esféricamente simétrico. La métrica acústica, al igual que en un agujero negro, también posee un horizonte, llamado horizonte sónico. En este horizonte, a diferencia del agujero negro, la materia puede escapar de esta región. Lo que no puede escapar son las perturbaciones acústicas. Por lo anterior, la métrica acústica representa un agujero negro análogo astrofísico natural.

En el caso donde un campo escalar se propaga en un fondo de Schwarzschild, se encuentran oscilaciones cuasi-normales. Estas oscilaciones son caracterizadas por frecuencias complejas  $s = \sigma + i\omega$  donde la parte real  $\sigma < 0$  describe la tasa de decaimiento y la parte imaginaria  $\omega$  es la frecuencia de oscilación. De igual forma, nosotros vamos a mostrar que las perturbaciones acústicas del flujo de Michel también exhiben oscilaciones cuasi-normales. Recordemos que para los modos normales sólo se tienen frecuencias oscilatorias.

Para calcular las frecuencias  $s = \sigma + i\omega$ , nos basamos en un nuevo método para determinar la solución a la ecuación de onda. Este método consiste en hacer el "matching" de dos soluciones locales  $\psi_{\pm}$  (en el horizonte de eventos y en la región asintóticamente plana) a la ecuación de onda. Para  $\text{Re}(s) > 0$ , estas soluciones satisfacen condiciones específicas en las regiones asintóticas, dependen analíticamente de  $s$  y vamos a mostrar, que son linealmente independientes. El nuevo ingrediente de nuestro método consiste en determinar la *continuación analítica* de  $\psi_{+}$  y  $\psi_{-}$  para  $\text{Re}(s) < 0$ . En esta región,  $\psi_{+}$  y  $\psi_{-}$  pueden ser linealmente dependientes y, los valores de  $s$  para los cuales esto ocurre describen las frecuencias cuasi-normales. Por lo tanto, es en esta región donde se encuentran las frecuencias  $s$  asociadas a los modos cuasi-normales.

Este método lo describimos y verificamos en la Sección 5.4.2. Nuestros resultados para las frecuencias fundamentales se van a comparar con los resultados obtenidos de manera independiente desde una evolución numérica de Cauchy (trabajo hecho por Manuel D. Morales). Este método completamente diferente al anterior, para calcular las frecuencias cuasi-normales, se basa en la evolución numérica de Cauchy de la ecuación de onda. En este método, se especifica una perturbación inicial para el potencial acústico del fluido, se resuelve numérica-

mente la ecuación de onda, y se registran las señales recibidos por un observador estático afuera del horizonte sónico. Al comparar ambos resultados de las frecuencias para los diferentes métodos, se encuentra una buena correspondencia entre los dos enfoques para la frecuencia fundamental.

Una vez tenemos los modos, calculamos las frecuencias asociadas y analizamos su dependencia con la masa del agujero negro, el radio del horizonte sónico y el número de momento angular. Vamos a ver que cuando el radio del horizonte sónico es mucho mayor que el radio del horizonte de eventos, estas frecuencias cuasi-normales escalan aproximadamente como la gravedad superficial asociada con el horizonte sónico. Esto es interesante ya que la gravedad superficial tiene información sobre propiedades del agujero negro análogo, tales como la masa y el horizonte de sónico. Y a su vez, el horizonte sónico se relaciona con la densidad de partículas en este punto. Si se pudieran medir estas frecuencias, quizás se pueda obtener información sobre el fondo métrico. En el caso de un agujero negro de Schwarzschild, la masa y el horizonte de eventos están relacionados uno a uno. En nuestro caso, tenemos dos parámetros que son la masa del agujero negro y el horizonte sónico.

Esta forma de escalar las frecuencias cuasi-normales con la gravedad superficial se puede demostrar en el límite Newtoniano. De hecho, en un trabajo que está en preparación, analizamos el límite Newtoniano de la solución de Michel y sus perturbaciones acústicas y demostramos este reescalamiento. Lo cual comprueba lo que encontramos de forma empírica. Además vimos que en este límite, el flujo afuera del horizonte sónico se reduce al flujo de Bondi transónico y la métrica acústica se reduce a la métrica introducida por Unruh [8] en el contexto del experimento del agujero negro de evaporación.

Esta tesis está organizada de la siguiente manera: En el capítulo 1 damos el resumen y el abstract del contenido de la tesis. En el capítulo 2 la introducción. En el capítulo 3, vamos a dar la descripción general de los fluidos perfectos relativistas. En el capítulo 4 analizaremos la acreción de materia en simetría esférica en un agujero negro basados en el trabajo de Michel [6]. Describimos nuestra métrica y las condiciones que imponemos sobre esta. Luego, vamos a ver las condiciones que imponemos sobre la ecuación de estado y los resultados principales<sup>1</sup>. En el capítulo 5, calculamos las frecuencias asociadas a los modos cuasi-normales para el problema de una barrera de potencial rectangular en la mecánica cuántica y para un agujero negro de Schwarzschild en el cual se propaga un campo escalar. Estudiaremos modos cuasi-normales más generales que los ejemplos que acabamos de mencionar y la continuación analítica de las soluciones a la ecuación de onda para  $\text{Re}(s) < 0$ . Por último, en el capítulo 6 estudiaremos la dinámica de las perturbaciones acústicas esféricas y no esféricas del flujo de Michel. Vemos la ecuación de onda que describe las perturbaciones acústicas y las propiedades de la métrica acústica. Calculamos numéricamente las frecuencias cuasi-normales asociados a los modos cuasi-normales. Analizamos la dependencia de las frecuencias cuasi-normales con las propiedades asociadas

---

<sup>1</sup>Los resultados de este capítulo se publicarán en *Class. Quantum Grav.*, 32:155006 (2015).

a la métrica acústica<sup>2</sup>. En el capítulo 7 presentamos las conclusiones del trabajo. Finalmente, en el apéndice A y B justificamos las condiciones impuestas sobre la métrica y demostramos los lemas del capítulo 4, respectivamente. En el apéndice C describimos el método de Leaver para calcular las frecuencias cuasi-normales del agujero negro de Schwarzschild del capítulo 5. En el apéndice D, estudiamos las fracciones continuas que se requieren en el método de Leaver. En el apéndice E, vemos los criterios de convergencia de series para las demostraciones en los apéndices C y D. En el apéndice F, estudiamos la expansión formal de la solución en el infinito para la solución a la ecuación de onda y por último, en el apéndice G demostramos la continuación analítica de las funciones, que se requieren para calcular las frecuencias cuasi-normales, en la ecuación de modos del capítulo 6.

---

<sup>2</sup>Los resultados de este capítulo se publicaron en Phys. Rev. D 91, 104012 (2015).



## Capítulo 3

# Descripción de los fluidos perfectos relativistas

Un fluido (líquidos y gases) se considera como un medio continuo. Esta descripción es válida siempre y cuando el camino medio libre entre las colisiones de las partículas es pequeña comparado con la escala típica del problema (ver por ejemplo [9]). En este caso, podemos considerar elementos de volumen pequeños (comparado a la escala típica del problema) que contiene un número muy elevado de moléculas. Entonces para un fluido perfecto se puede asociar a cada punto del espacio-tiempo una velocidad  $u$ , de tal manera que un observador en movimiento con esta velocidad ve el flujo alrededor en reposo.

En un fluido perfecto, se desprecian los efectos de viscosidad y de transporte de calor. Asumimos que en cada punto del espacio tiempo, el fluido puede ser descrito por  $n$  la densidad de partículas,  $\varepsilon$  la densidad de energía,  $p$  la presión,  $s$  la entropía y  $T$  la temperatura medidos por un observador que se encuentra en movimiento con el fluido a quadri-velocidad  $u$ . Suponemos que el fluido es relativista y se propaga en un fondo fijo cuya métrica es  $g$ . Esto es, despreciamos la auto-gravedad del fluido<sup>1</sup>. Los escalares  $n$ ,  $\varepsilon$ ,  $p$ ,  $s$  y  $T$  son funciones en el espacio-tiempo  $(M, g)$  y  $u = u^\mu \partial_\mu$  es un campo vectorial sobre  $M$ , y normalizada tal que  $u^\mu u_\mu = -c^2$ . Lo anterior da lugar a,  $J^\mu = nu^\mu$ , la quadri-corriente y  $T^{\mu\nu} = \varepsilon u^\mu u^\nu + p\gamma^{\mu\nu}$ ,  $\gamma^{\mu\nu} := g^{\mu\nu} + u^\mu u^\nu$ , el tensor energía-momento.

En este trabajo, requerimos equilibrio termodinámico local, es decir, cada elemento (volumen infinitesimal) del fluido se encuentra en equilibrio termodinámico. Por lo tanto, asumimos la existencia de una ecuación de estado  $\varepsilon = \varepsilon(n, s)$ , la cual satisface la primera ley de la termodinámica

$$d\left(\frac{\varepsilon}{n}\right) = Tds - pd\left(\frac{1}{n}\right). \quad (3.1)$$

Reemplazando la densidad de energía  $\varepsilon$  por la entalpía por partícula  $h(n) :=$

---

<sup>1</sup>Para tomar en cuenta la auto-gravedad del fluido hay que acoplar las ecuaciones de Euler a las ecuaciones de Einstein.

$\frac{\varepsilon+p}{n}$ , tenemos que  $dh = Tds + dp/n$ .

### 3.1. Dinámica del fluido perfecto

La dinámica del fluido perfecto se describe a partir de las ecuaciones de movimiento dadas por

$$\nabla_\mu J^\mu = 0, \quad (3.2)$$

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (3.3)$$

donde la ecuación (3.2) describe la conservación del número de partículas y la ecuación (3.3) viene de la generalización covariante del

$\nabla$  se refiere a la derivada covariante con respecto a la métrica.

Con la notación anterior y bajo las suposiciones las ecuaciones del fluido (3.2) y (3.3) dan

$$\nabla_{\mathbf{u}} s = 0 \quad (\text{Conservación de la entropía}), \quad (3.4)$$

$$\nabla_{\mathbf{u}} n + \theta n = 0 \quad (\text{Conservación del número de partículas}), \quad (3.5)$$

$$ha_\mu + D_\mu h - TD_\mu s = 0 \quad (\text{Ecuaciones de Euler relativistas}), \quad (3.6)$$

donde  $\theta := \nabla_\mu u^\mu$  y  $a_\mu := \nabla_{\mathbf{u}} u_\mu$  denotan la expansión y la aceleración del fluido, respectivamente.  $D_\mu h := \gamma_\mu^\nu \nabla_\nu h$ , denote la diferencial de  $h$  proyectada sobre el espacio orthogonal a  $\mathbf{u}$ . Las ecuaciones (3.4)-(3.6) junto con la ecuación de estado forman un sistema cerrado para las cantidades  $s$ ,  $n$  y  $\mathbf{u}$ . La ecuación (3.4) implica que no hay transferencia de calor entre los diferentes elementos del flujo ya que  $Tds = 0$  a lo largo de las líneas de flujo (sin embargo, la entropía  $s$  puede variar de una a otra línea de flujo).

### 3.2. Flujos potenciales

En términos de la 1-forma  $\mathbf{v} := hu_\mu dx^\mu$  y de la vorticidad  $\Omega_{\mu\nu} := \gamma_\mu^\alpha \gamma_\nu^\beta \nabla_{[\alpha} u_{\beta]}$ , del fluido, las ecuaciones de Euler (3.6) son equivalentes a

$$F_{\mu\nu} := \nabla_\mu v_\nu - \nabla_\nu v_\mu = 2(h\Omega_{\mu\nu} - Tu_{[\mu} D_{\nu]} s). \quad (3.7)$$

Por lo tanto, la 1-forma  $\mathbf{v}$  es cerrada (su diferencial es cero) si y sólo si el flujo es irrotacional ( $\Omega_{\mu\nu} = 0$ ) e isentrópico ( $s = \text{const}$ ). En este caso, existe (al menos localmente) un potencial  $\psi$  tal que  $\mathbf{v} = d\psi$ . En este caso, la ley de conservación del número de partículas, (3.5), queda

$$\nabla_\mu \left( \frac{n}{h} \nabla^\mu \psi \right) = 0. \quad (3.8)$$

Aquí, consideramos  $n$  como función  $h$  obtenida por invertir la relación de  $h = h(n)$  y  $h$  es obtenida de la condición  $v^\mu v_\mu = h^2 u^\mu u_\mu = -h^2$ , la cual da

$$h = \sqrt{-\nabla^\mu \psi \cdot \nabla_\mu \psi}. \quad (3.9)$$

Para el caso de una ecuación de estado "rígido", en donde  $h$  es proporcional a  $n$ , la ecuación (3.8) se reduce a la ecuación de onda estándar  $\square_{\mathbf{g}}\psi = 0$  en  $(M, \mathbf{g})$  para el potencial  $\psi$ . Sin embargo, (3.8) es en general una ecuación de onda no lineal cuyas características dependen del gradiente de  $\psi$ . (3.8) y el tensor de momento-energía asociado  $T^{\mu\nu} = nh^{-1}(\nabla^\mu\psi)(\nabla^\nu\psi) + p(h)g^{\mu\nu}$  también pueden ser obtenidos, como vamos a ver en la siguiente subsección, desde una simple acción funcional,

$$S[\psi, \mathbf{g}] := \int p(h)\sqrt{|g|}d^4x, \quad (3.10)$$

donde  $h$  es dado por la ecuación (3.9) y  $p(h)$  obedece la primera ley  $dp = ndh$ .

### 3.3. Principio variacional de los flujos potenciales

Consideremos la acción

$$S[\psi, g] = \int_{\Omega} \mathcal{L}(h)\sqrt{|g|}d^4x \quad (3.11)$$

con  $\mathcal{L}$  una función de  $h = \sqrt{-\nabla^\mu\psi\nabla_\mu\psi}$ . Aquí  $\Omega$  es un subconjunto compacto de  $M$ . Ahora vamos a variar  $\mathcal{L}(h)$  y determinar los puntos estacionarios  $\delta S(\psi) = 0$ ,

$$0 = \delta S[\psi, g] = \int_{\Omega} \delta\mathcal{L}\sqrt{|g|}d^4x \quad (3.12)$$

variando en  $\psi$ , dejando la métrica fija. Entonces

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial(\partial_\mu\psi)} \delta\partial_\mu\psi$$

donde  $\frac{\partial h}{\partial(\partial_\mu\psi)} = -\frac{1}{h}\nabla^\mu\psi$ , teniendo que

$$\delta S[\psi, g] = - \int_{\Omega} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial h} \frac{1}{h} \nabla^\mu\psi \cdot \nabla_\mu\delta\psi \sqrt{|g|}d^4x = \int_{\Omega} \nabla_\mu \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial h} \frac{1}{h} \nabla^\mu\psi \right) \sqrt{|g|}\delta\psi d^4x$$

donde usamos el teorema de Gauss y supusimos que  $\psi$  es fijo ( $\delta\psi = 0$ ) en la frontera de  $\Omega$ . Entonces como para todo  $\delta\psi$  tenemos que en un punto estacionario  $\delta S[\psi] = 0$  llegamos a la ecuación

$$\nabla_\mu \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial h} \frac{1}{h} \nabla^\mu\psi \right) = 0. \quad (3.13)$$

Comparando (3.13) con (3.8) llegamos a que

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial h} = n. \quad (3.14)$$

De la primera ley de la termodinámica sabemos que:

$$n(h) = \frac{\partial p}{\partial h},$$

entonces

$$\mathcal{L} = p(h).$$

Vemos entonces que para el flujo potencial de un fluido perfecto, la acción tiene una forma natural.

$$S[\psi, g] = \int_{\Omega} p(h) \sqrt{|g|} d^4x, \quad \text{con } h = \sqrt{-\nabla^\mu \psi \cdot \nabla_\mu \psi}. \quad (3.15)$$

Si variamos la acción  $S[\psi, g]$  con respecto a la métrica  $g$ ,

$$\delta_g S[\psi, g] = \int_{\Omega} [\delta_g \mathcal{L}(h) \sqrt{|g|} + \mathcal{L}(h) \delta \sqrt{|g|}] d^4x, \quad (3.16)$$

obtenemos

$$\delta_g S[\psi, g] = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{h} \frac{\partial \mathcal{L}(h)}{\partial h} (\nabla^\mu \psi \cdot \nabla^\nu \psi) + \mathcal{L}(h) g^{\mu\nu} \right] \sqrt{|g|} d^4x, \quad (3.17)$$

donde el término entre corchetes, es la definición del tensor momento-energía  $T^{\mu\nu}$ .

$$T^{\mu\nu} := 2 \frac{\delta S_\mu}{\delta g_{\mu\nu}} = \left[ \frac{1}{h} \frac{\partial \mathcal{L}(h)}{\partial h} (\nabla^\mu \psi \cdot \nabla^\nu \psi) + \mathcal{L}(h) g^{\mu\nu} \right]. \quad (3.18)$$

Entonces, dado que  $\mathcal{L}(h) = p$  y  $\nabla^\mu \psi \cdot \nabla^\nu \psi = hu^\mu u^\nu$  llegamos a que el tensor energía-momento es

$$T^{\mu\nu} = (\varepsilon + p)u^\mu u^\nu + pg^{\mu\nu}.$$

### 3.4. Potencial perturbado

La linealización de la ecuación (3.8) da como resultado la ecuación [7]

$$\square_{\mathfrak{G}} \delta\psi = 0 \quad (3.19)$$

para el potencial perturbado  $\delta\psi$ , donde  $\square_{\mathfrak{G}}$  es el operador de onda asociado a la *métrica sónica*  $\mathfrak{G}$ , definida por

$$\mathfrak{G}_{\mu\nu} := \frac{n}{h} \frac{1}{v_s} [g_{\mu\nu} + (1 - v_s^2) u_\mu u_\nu], \quad v_s^2 := \frac{\partial p}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial \log(h)}{\partial \log(n)}, \quad (3.20)$$

donde  $v_s$  denote la velocidad del sonido (en unidades para la cual  $c = 1$ ).<sup>2</sup> Asumiendo que la velocidad del sonido satisface que  $0 < v_s \leq 1$ , la métrica

<sup>2</sup>Expresiones para la inversa de la métrica sónica y su determinante :

$$\mathfrak{G}^{\mu\nu} = \frac{h}{n} v_s \left[ g^{\mu\nu} + \left(1 - \frac{1}{v_s^2}\right) u^\mu u^\nu \right], \quad \sqrt{|\mathfrak{G}|} = \sqrt{|g|} \left(\frac{n}{h}\right)^2 \frac{1}{v_s}.$$

sónica  $\mathfrak{G}$  es Lorentziana, y el *cono sónico se encuentra en el interior del cono de luz*, como se ve en la Figura 3.1, o si ( $v_s = 1$ ) coincide con el cono de  $\mathfrak{g}$ . Además,  $\mathfrak{G}$  hereda la simetría del fondo  $\mathfrak{g}$  y del fluido. Es decir, si existe un campo vectorial de Killing  $k$  tal que  $\mathcal{L}_k g = 0$ ,  $\mathcal{L}_k u = 0$ ,  $\mathcal{L}_k \psi = 0$  entonces,  $\mathcal{L}_k \mathfrak{G} = 0$ . Donde  $\mathcal{L}$  es la derivada de Lie. Como vamos a ver, la métrica sónica juega un papel fundamental en la segunda parte de esta tesis.

La métrica sónica  $\mathfrak{G}$  también se puede derivar de la segunda variación de la acción (3.15). La función  $\psi$  en la acción ahora dependerá de dos parámetros de la forma  $\psi(\lambda, \mu)$ , como veremos en la sección 3.4.1. En el límite Newtoniano, la métrica sónica se reduce a la métrica introducida por Unruh en el contexto de experimento de evaporación del agujero negro. Unruh [8] muestra que los mismos argumentos que conducen a la evaporación del agujero negro también predicen el espectro térmico de ondas de sonido. Estas podrían ocurrir afuera del horizonte sónico en el flujo de un fluido transónico. La métrica sónica en este caso, es de la forma:

$$\mathfrak{G} = \frac{\rho}{v_s} [-v_s^2 dt^2 + \delta_{ij}(dx^i - v^i dt)(dx^j - v^j dt)].$$

con  $\rho$  la densidad de masa y  $v^i$  la tres-velocidad del fluido.

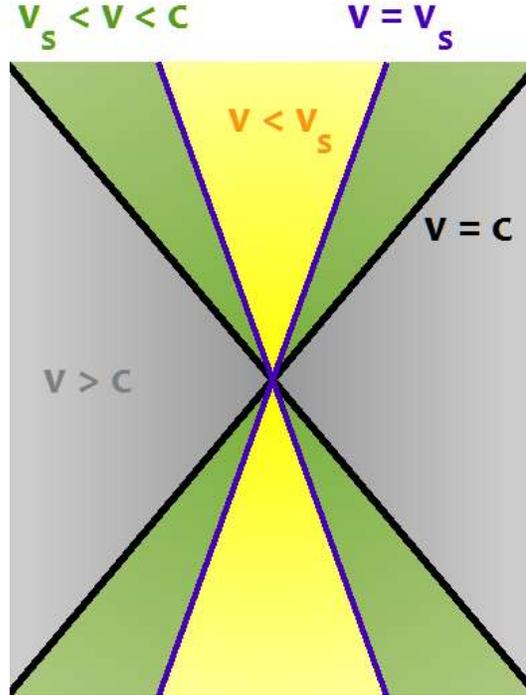


Figura 3.1: Cono sónico contenido en interior del cono de luz.

### 3.4.1. Segunda variación de la acción

Para calcular la segunda variación del funcional  $S[\psi, g]$  en (3.15), suponemos ahora que la función  $\psi$  depende de dos parámetros  $(\lambda, \mu)$ . Primero variamos la acción  $S[\psi(\lambda, \mu), g]$  respecto al parámetro  $\mu$  y donde suponemos la métrica  $g$  es fija,

$$\begin{aligned} \delta_\mu S[\psi(\lambda, \mu)] &= \int \frac{\partial p}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial \mu} \sqrt{|g|} d^4x \Big|_{\mu=0}, \text{ donde } \delta_\mu = \frac{\partial}{\partial \mu} \Big|_{\mu=0} \\ &= \int n \left( -\frac{1}{h} \nabla^\nu \psi \cdot \nabla_\nu \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \right) \sqrt{|g|} d^4x \Big|_{\mu=0} \\ &= - \int \frac{n}{h} \nabla^\nu \psi \cdot \nabla_\nu \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \sqrt{|g|} d^4x \Big|_{\mu=0}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Ahora variamos la ecuación (3.21) con respecto a  $\lambda$ , obteniendo

$$\begin{aligned} \delta_\lambda \delta_\mu S[\psi(\lambda, \mu)] &= \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial \mu} S[\psi(\lambda, \mu)] \Big|_{\substack{\mu=0 \\ \lambda=0}} \\ &= - \frac{\partial}{\partial \lambda} \int \frac{n}{h} \nabla^\mu \psi(\lambda, \mu) \cdot \nabla_\mu \frac{\partial}{\partial \lambda} \psi(\lambda, \mu) \sqrt{|g|} d^4x \Big|_{\substack{\mu=0 \\ \lambda=0}} \\ &= - \int \left[ \left( \frac{1}{h} \frac{dn(h)}{dh} - \frac{n}{h^2} \right) \delta_\lambda h \nabla^\nu \psi \cdot \nabla_\nu \delta_\mu \psi \right. \\ &\quad \left. + \frac{n}{h} (\nabla^\nu \delta_\lambda \psi \cdot \nabla_\nu \delta_\mu \psi + \nabla^\nu \psi \cdot \nabla_\nu \delta_\lambda \delta_\mu \psi) \right] \sqrt{|g|} d^4x \\ &= - \int \left[ \left( \frac{1}{h} \frac{dn(h)}{dh} - \frac{n}{h^2} \right) \delta_\lambda h \nabla^\nu \psi \cdot \nabla_\nu \delta_\mu \psi + \frac{n}{h} (\nabla^\nu \delta_\lambda \psi \cdot \nabla_\nu \delta_\mu \psi) \right] \sqrt{|g|} d^4x \\ &\quad - \int \frac{n}{h} \nabla^\nu \psi \cdot \nabla_\nu \delta_\lambda \delta_\mu \psi \sqrt{|g|} d^4x, \end{aligned} \quad (3.22)$$

donde  $\delta_\lambda \delta_\mu = \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial \mu} \Big|_{\substack{\mu=0 \\ \lambda=0}}$ . De la ecuación (3.22), la integral

$$\begin{aligned} \int \frac{n}{h} \nabla^\nu \psi \cdot \nabla_\nu \delta_\lambda \delta_\mu \psi \sqrt{|g|} d^4x &= \int \nabla_\nu \cdot \left( \frac{n}{h} \nabla^\nu \psi \delta_\lambda \delta_\mu \psi \right) \sqrt{|g|} d^4x \\ &\quad - \int \nabla_\nu \cdot \left( \frac{n}{h} \nabla^\nu \psi \right) \delta_\lambda \delta_\mu \psi \sqrt{|g|} d^4x, \end{aligned} \quad (3.23)$$

donde ambas integrales se cancelan. La primera es cero por el teorema de Gauss y porque  $\delta\psi$  es fijo en la frontera y la segunda, en virtud de la ecuación de continuidad (3.8). Entonces tenemos que

$$\begin{aligned}
\delta_\lambda \delta_\mu S[\psi(\lambda, \mu)] &= - \int \frac{n}{h} \left[ \left( 1 - \frac{1}{v_s^2} \right) u^\alpha u^\nu + g^{\alpha\nu} \right] \nabla_\alpha \delta_\lambda \psi \cdot \nabla_\nu \delta_\mu \psi \sqrt{|g|} d^4x \\
&= - \int \frac{h}{n} \left[ \left( 1 - \frac{1}{v_s^2} \right) u^\alpha u^\nu + g^{\alpha\nu} \right] v_s \sqrt{|G|} \nabla_\alpha \delta_\lambda \psi \cdot \nabla_\nu \delta_\mu \psi d^4x \\
&= - \int \mathfrak{G}^{\alpha\nu} \nabla_\alpha \delta_\lambda \psi \cdot \nabla_\nu \delta_\mu \psi \sqrt{|\mathfrak{G}|} d^4x, \tag{3.24}
\end{aligned}$$

donde  $\mathfrak{G}^{\alpha\nu}$  es la métrica sónica inversa definida por

$$\mathfrak{G}^{\alpha\nu} := \frac{h}{n} v_s \left[ \left( 1 - \frac{1}{v_s^2} \right) u^\alpha u^\nu + g^{\alpha\nu} \right], \quad v_s^2 := \frac{\partial p}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial \log(h)}{\partial \log(n)},$$

$v_s$  denota la velocidad del sonido y donde, la raíz cuadrada del valor absoluto de la determinante de  $\mathbf{g}$  es

$$\begin{aligned}
\sqrt{|g|} &= v_s \sqrt{|\mathfrak{G}|} \left( \frac{h}{n} \right)^2, \\
\delta_\lambda h &= -\frac{1}{h} \nabla^\alpha \psi \cdot \nabla_\alpha \delta_\lambda \psi, \quad \frac{dn}{dh} = \frac{n}{h} \frac{1}{v_s^2}, \quad \nabla^\alpha \psi = h u^\alpha,
\end{aligned}$$

teniendo entonces que, la métrica sónica  $\mathfrak{G}$  se obtiene a partir de la segunda variación del funcional  $S[\psi, g]$  en (3.15).

### 3.5. Ecuaciones de estado

El problema que vamos a estudiar es la acreción de materia en simetría esférica y pequeñas perturbaciones de la materia que está siendo acretada. La materia acretada es materia del medio interestelar. Suponemos esta materia está en equilibrio termodinámico entonces se puede modelar (localmente) por la ecuación de estado del gas ideal.

Lo que estamos mirando son elementos de volumen pequeños a nivel macroscópicos pero grande a nivel microscópico pues en cada elemento de volumen se tiene del orden de  $10^{23}$  moléculas. Suponemos que el número de partículas permanece constante. La densidad de partículas puede variar de acuerdo a su volumen más no a su número de partículas. Estos elementos de volumen se encuentran en equilibrio termodinámico durante su evolución (descrito por variables termodinámicas).

Para los ejemplos que veremos de acreción, consideramos las siguientes ecuaciones de estado: la ecuación de estado para el polvo, la ecuación de estado para un fluido "rígido" y, la ecuación de estado para un fluido politrópico. Estos son:

- Para el polvo, no hay energía interna. La presión es cero. Entonces, la ecuación de estado toma la forma  $h(n) = e_0$ , es decir, la entalpía es igual a la energía de partículas en reposo.

- Para el caso de un fluido "rígido", la ecuación de estado es  $h(n) = kn$  para alguna constant positiva  $k$ .
- Para el caso de un fluido politrópico, la ecuación de estado es  $p = kn^\gamma$ , con  $\gamma$  el indice adiabático.

A continuación, derivamos la ecuación de estado politrópica a partir de la ecuación del gas ideal.

### 3.5.1. Gas ideal

En esta sección vamos a ver la relación entre el indice adiabático y las capacidades caloríficas a presión y volumen contante (ver [10]). Para esto, primero veamos la ecuación que describe un gas ideal (un gas que esta lo suficientemente diluido). Esta es,

$$pV = Nk_B T, \quad N : \text{número de partículas.} \quad (3.25)$$

Como lo que estamos viendo son volúmenes infinitesimales entonces la ecuación toma la forma

$$p = nk_B T, \quad n = \frac{N}{V} : \text{densidad del número de partículas.} \quad (3.26)$$

A continuación calculamos la relación entre el indice adiabático y las capacidades caloríficas.

### 3.5.2. Indice adiabático $\gamma$

Para un gas ideal se tiene que la capacidad calorífica a volumen y presión constantes están dadas, respectivamente, por (ver [10])

$$\begin{aligned} C_V &= \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = \frac{dU}{dT}, \\ C_p &= \left( \frac{\partial H}{\partial T} \right)_p = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_p + \left( \frac{\partial(pV)}{\partial T} \right)_p = \frac{dU}{dT} + p \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p, \end{aligned} \quad (3.27)$$

donde  $U$  es la energía interna del gas ideal, que depende solamente de la temperatura  $T$ . Y  $H$  es la entalpía. Entonces, haciendo la diferencias entre  $C_p$  y  $C_V$

$$C_p - C_V = p \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = Nk_B, \quad (3.28)$$

donde usamos la ecuación (3.25). Además, para un gas ideal en un proceso adiabático, se tiene que

$$dU = -pdV, \quad (Tds = 0), \quad (3.29)$$

entonces

$$C_V = \frac{dU}{dT} = -p \frac{dV}{dT}, \quad (3.30)$$

lo que es equivalente a,

$$\left( \frac{dT}{dV} \right)_{ad} = -\frac{p}{C_V} = -\frac{Nk_B T}{C_V V}, \quad (3.31)$$

donde de nuevo usamos (3.25). De las ecuaciones (3.31) y (3.28), tenemos

$$\left( \frac{dT}{T} \right)_{ad} = -\frac{C_p - C_V}{C_V} \left( \frac{dV}{V} \right)_{ad}. \quad (3.32)$$

Definiendo  $\gamma := C_p/C_V$  tenemos de (3.32)

$$d \ln T = -(\gamma - 1)(d \ln V). \quad (3.33)$$

Integrando la anterior ecuación, donde se asume  $\gamma$  es contante, se llega a

$$TV^{\gamma-1} = c_1, \quad c_1 = \text{const.}$$

Reemplazando  $T$  de la ecuación (3.26) en la ecuación anterior, se llega a que

$$p = c_2 n^\gamma, \quad c_2 = \text{const} = c_1 k_B \frac{N}{N^\gamma}, \quad (3.34)$$

obteniendo la ecuación de estado politrópico con  $\gamma = C_p/C_V$ .



## Capítulo 4

# Flujo de Michel

El flujo de Michel, describe la acreción estacionaria y esféricamente simétrica de un fluido perfecto relativista hacia un agujero negro no rotante, asumiendo que la densidad del flujo es suficientemente baja tal que su autogravedad es despreciable.

En este capítulo vamos a estudiar la acreción radial de materia hacia un agujero negro no rotante y donde el flujo es radial y estacionario. Proveeremos resultados rigurosos sobre la existencia y unicidad del flujo de Michel, y generalizaremos este a ecuaciones de estado más generales que la ecuación de estado politrópica y una métrica de fondo más general que la métrica de Schwarzschild. De hecho, consideramos una clase de métrica estática, con simetría esférica y asintóticamente plana más general la cual tiene un horizonte de Killing regular y cuyos coeficientes métricos obedecen algunas condiciones de monotonicidad. Como consecuencia, nuestros resultados también son aplicables a agujeros negros no rotantes predichos por teorías alternativas de la gravedad o por agujeros negros deformados en la gravedad de Einstein en presencia de un campo externo, como por ejemplo materia oscura. Para ello, consideramos el caso simple en el cual el agujero negro no está rotando y el flujo es radial y estacionario. Despreciando la auto-gravedad de la materia acretada, consideramos una clase de métrica y un ecuación de estado mas general que Schwarzschild y la politrópica, respectivamente. Primero especificamos las condiciones que imponemos sobre la métrica y la ecuación de estado del fluido. Después, presentamos nuestros resultados sobre la existencia y propiedades principales de dichos fluidos.

Basados en nuestro análisis y generalizando trabajos anteriores de Michel, probaremos que dado una ecuación de estado del fluido y la temperatura del gas en el infinito, existe una única solución del flujo de acreción radial y estacionaria que es regular en el horizonte de eventos del agujero negro y que resulta ser transónica. La esfera sónica describe la transición de la velocidad del flujo radial, de subsónico a supersónico, la cual es medida por un observador estático situado fuera del horizonte. Además, determinaremos los parámetros físicos del flujo, donde incluimos las tasas de acreción y compresión, y discutimos su dependencia con el fondo métrico.

Asumiendo una ecuación de estado politrópica con índice adiabático  $\gamma$  dentro del rango  $1 < \gamma \leq 5/3$  y centrándose en el caso donde la velocidad sónica del fluido en el infinito  $v_\infty$  es mucho menor que la velocidad de la luz  $c$ , calculamos la tasa de acreción como una función de la densidad de partículas en el infinito y las tasas de compresión del fluido en el horizonte y en la esfera sónica. Para un gas con  $1 < \gamma < 5/3$  encontramos que la tasa de compresión en la esfera sónica no depende de los detalles de la métrica de fondo a primer orden en  $v_\infty/c$ , aunque sí aparece como una dependencia no trivial al siguiente orden. Sin embargo, la tasa de compresión en el horizonte de eventos depende cuadráticamente de la razón  $\sigma_1 = r_s/r_H$ , donde  $r_s = 2GM/c^2$  es el radio del agujero negro de Schwarzschild y  $r_H$  es el radio del horizonte de eventos ( $\sigma_1 = 1$  en el caso de Schwarzschild). Para el caso donde el índice adiabático es  $\gamma = 5/3$  ambas tasas de compresión en la esfera sónica y en el horizonte dependen de los detalles de la métrica a primer orden en  $v_\infty/c$ . De otro lado, la tasa de acreción es independiente de los detalles de la métrica de fondo y es dado por la fórmula de Bondi  $\dot{M} = CM^2(v_\infty/c)^{-3}\rho_\infty$  la cual sólo depende de la masa total  $M$  del agujero negro, la densidad de partículas en el infinito y en primer orden de  $v_\infty/c$ . Con  $C$  una constante.

## 4.1. Flujos de acreción radial y estacionarios en un agujero negro y resultados principales

En esta sección, especificamos nuestras suposiciones sobre la métrica de fondo del agujero negro y en la ecuación de estado del fluido, revisaremos las ecuaciones relevantes que describen el flujo relativista radial y estacionario, y declaramos nuestros resultados principales en cuanto a la existencia y las propiedades principales de tales flujos.

### 4.1.1. Suposiciones sobre la métrica

La métrica de fondo en la que estudiamos la acreción es modelada por una métrica esféricamente simétrica de la forma

$$ds^2 = -\alpha(r)^2 N(r) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{N(r)} + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2), \quad (4.1)$$

donde  $\alpha$  y  $N$  son funciones suaves del radio de área  $r$  las cuales son independientes de la coordenada de tiempo  $t$  y de las coordenadas esféricas  $(\vartheta, \varphi)$ . Por lo tanto, el espacio tiempo descrito por la métrica (4.1) es invariante con respecto al flujo definido por el campo vectorial de Killing  $\mathbf{k} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}$  y con respecto a la rotación en la dos-esfera. La interpretación geométrica de la función  $\alpha$  y  $N$  es la siguiente: el campo vectorial de Killing  $\mathbf{k}$  y la diferencial del radio de área  $dr$  dan lugar a dos cantidades escalares  $\sigma := -\mathbf{g}(\mathbf{k}, \mathbf{k}) = -g_{\mu\nu} k^\mu k^\nu$  y  $\mathbf{g}(dr, dr) = g^{\mu\nu} (\nabla_\mu r)(\nabla_\nu r)$ . En términos de estos campos escalares,  $N = \mathbf{g}(dr, dr)$  y  $\alpha = \sqrt{\sigma/N}$ . Para la métrica de Schwarzschild,  $\alpha = 1$  y  $N(r) = \sigma(r) = 1 - r_H/r$ , y el horizonte

de eventos es localizado en  $r = r_H$ , donde  $r_H = 2GM/c^2$  con  $M$  la masa del agujero negro y  $G$  la constante de Newton.

Consideramos una clase de agujero negro estático, esféricamente simétrico más general, el cual es caracterizado por los siguientes requisitos sobre las funciones regulares  $\alpha, N : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ :

- (M1) **Asintóticamente plana con masa total positiva:**  
Mientras  $r \rightarrow \infty$ ,  $\alpha(r) \rightarrow 1$ ,  $N(r) \rightarrow 1$ , y  $r^2\sigma'(r) \rightarrow 2m$  para alguna constante positiva  $m > 0$ .
- (M2) **Horizonte de Killing regular:**  
Existe un radio  $r_H > 0$  tal que  $\sigma(r_H) = 0$ ,  $\sigma'(r_H) > 0$  y  $\alpha(r_H) > 0$ .
- (M3) **Condición de monotonicidad:**  
Las funciones  $\alpha$ ,  $\sigma$  y  $\sigma'$  son estrictamente positivas en el intervalo  $r > r_H$ .
- (M4) **Proximidad a la métrica de Schwarzschild:**  
La siguiente desigualdad se cumple para todo  $r > r_H$ :

$$-3 < \frac{(r^2\sigma')'}{r\sigma'} < \frac{m}{r} \frac{9}{8 + \frac{m}{r}}. \quad (4.2)$$

Estas condiciones tienen el siguiente significado. (Para más detalles ver el Apéndice A). La condición (M1) garantiza que el espacio tiempo descrito por la métrica (4.1) es asintóticamente plano en el sentido que esta métrica se aproxima a la métrica de Minkowski cuando  $r \rightarrow \infty$ , y la masa total de Komar  $M = mc^2/G > 0$ . La siguiente condición (M2), implica que la métrica posee un horizonte de Killing<sup>1</sup> en  $r = r_H$ , donde el campo vectorial de Killing  $\mathbf{k}$  es nulo. La gravedad superficial asociada es

$$\kappa = \frac{c^2}{2} \frac{\sigma'(r_H)}{\alpha(r_H)} > 0, \quad (4.3)$$

lo que implica que el horizonte es no degenerado. Luego, la condición (M3) es motivada como sigue: Consideramos el tensor efectivo de energía-momento obtenido por introducir la métrica Eq. (4.1) en la ecuación de Einstein. Entonces (M3) corresponde a requerir que este tensor satisfaga las condiciones de energía débil y fuerte. Por último, para el significado de la condición (M4) notamos que para la métrica de Schwarzschild,  $\sigma(r) = 1 - r_H/r$  tal que  $r^2\sigma' = r_H$  es constante, implicando que la desigualdad en Eq. (4.2) se satisface de forma trivial. Por lo tanto, la condición (M4) puede ser interpretada como una restricción a la deformación de la función  $\sigma$  relativa al valor de Schwarzschild. Un ejemplo explícito de tal deformación es dado en el apéndice A.

<sup>1</sup>En palabras, un horizonte de Killing es una hipersuperficie nula, donde la hipersuperficie nula consiste de todos los puntos del espacio-tiempo donde el vector de Killing tiene norma cero (es tipo luz) con respecto a la métrica  $\mathbf{g}$  (ver [11]).

### 4.1.2. Flujos radiales de fluidos perfectos

Después de especificar nuestras suposiciones sobre la geometría de fondo, ahora vemos las propiedades del flujo radial que consideramos en este trabajo. Modelamos el flujo por un fluido perfecto relativista donde la dinámica del flujo de fluidos es descrita por las ecuaciones 3.3 y 3.2. Para el caso particular del flujo radial, la cuadri-velocidad  $\mathbf{u}$  tiene componentes angulares cero, entonces  $\mathbf{u} = u^t \partial_t + u^r \partial_r = u^0 \mathbf{k} + u^r \partial_r$ , con  $u^0 = cu^t$ . La componente radial de la cuadri-velocidad  $u^r = dr(\mathbf{u})$  es negativa en el caso de acreción. La componente radial de la tres velocidad del fluido  $v$  medido por un observador estático es definido por

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (c\mathbf{e}_0 + v\mathbf{e}_1), \quad \beta := \frac{v}{c}, \quad (4.4)$$

donde  $\mathbf{e}_0 := \mathbf{k}/\sqrt{\sigma}$  es la cuadri-velocidad del observador estático y  $\mathbf{e}_1 := \sqrt{N}\partial_r$  es un campo vectorial radial unitario ortogonal a este. En consecuencia, las dos velocidades  $u^r$  y  $v$  se relacionan entre sí a través de

$$u^r = \sqrt{N(r)} \frac{v}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (4.5)$$

Mientras que  $u^r$  está bien definida en todas partes, la velocidad  $v$  es definida solamente *afuera* del horizonte, donde  $N(r)$  es positive, ya que no hay observadores estáticos dentro del agujero negro. Una tercera velocidad la cual jugará un papel muy importante en la descripción del flujo del fluido es la velocidad del sonido local  $v_s$ , definida como

$$\frac{v_s^2}{c^2} := \left. \frac{\partial p}{\partial \epsilon} \right|_s = \left. \frac{\partial \log h}{\partial \log n} \right|_s. \quad (4.6)$$

Después de estas observaciones, derivamos las ecuaciones de movimiento que describen el flujo radial estacionario en el agujero negro estático y esféricamente simétrico descrito por la ecuación (4.1). Desde que el fluido sea radial y estacionario, las cantidades  $u^r$ ,  $n$ ,  $h$ ,  $v_s$ ,  $p$ ,  $s$  que describen el fluido sólo dependen del radio de área  $r$ . La ecuación (3.4) implica inmediatamente que  $s = \text{const}$ ; por lo tanto, cada elemento de fluido tiene la misma entropía y es suficiente considerar la ecuación de estado de la forma  $h(n)$ . Entonces, la ley de la conservación de partículas, (3.2), es

$$\frac{d}{dr} (\alpha r^2 n u^r) = 0, \quad (4.7)$$

de donde se sigue que el flujo de partículas a través de una esfera de radio de área constante  $r$ ,

$$j_n := 4\pi\alpha r^2 n u^r = \text{const.}, \quad (4.8)$$

es independiente de  $r$ . (Notar que  $j_n < 0$  es negative para la acreción.) Otra ley de conservación se obtiene por la contractión de Eq. (3.3) con  $k_\nu$  y usando la

ecuación de Killing  $\nabla_\mu k_\nu + \nabla_\nu k_\mu = 0$ . Esto resulta

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{\alpha r^2}{c} T^r_t \right) = 0, \quad (4.9)$$

el cual implica que el flujo de energía  $j_\varepsilon := -4\pi\alpha r^2 T^r_t/c$  es constante a través de la esfera de constante  $r$ . Usando  $T^r_t = nh u^r u_t$  y la consición de normalización de  $\mathbf{u}$ , obtenemos

$$j_\varepsilon = 4\pi\alpha^2 r^2 nh u^r \sqrt{N + \left(\frac{u^r}{c}\right)^2} = \text{const.} \quad (4.10)$$

En resumen,<sup>2</sup> las ecuaciones de movimiento que describen el flujo radial y estacionario de un fluido perfecto en una fondo estático y esféricamente simétrico consiste de las dos leyes de conservación (4.8,4.10), junto con una ecuación de estado  $h = h(n)$ .

Tomando el coeficiente de las ecuaciones (4.8) y (4.10), y eliminando  $u^r$  de la ecuación (4.8) llegamos al siguiente problema implícito:

$$F(r, n) := h(n)^2 \left[ \sigma(r) + \frac{\mu^2}{r^4 n^2} \right] = \left( \frac{j_\varepsilon}{j_n} \right)^2 = \text{const.}, \quad \mu := \frac{j_n}{4\pi c}, \quad (4.11)$$

para la densidad de partículas  $n$ , donde recordamos que la función  $\sigma(r) = \alpha(r)^2 N(r)$  es dado por los campos métricos y está sujeto a las condiciones (M1)–(M4). Por lo tanto, el problema que determina el flujo se reduce al problema de encontrar una curva de nivel apropiada de la función  $F$  la cual asocia a cada valor de  $r$  un único valor de la densidad de partículas  $n(r)$ . Una vez que  $n(r)$  ha sido determinada, podemos obtener la velocidad radial  $u^r$  de la ecuación (4.8),

$$\frac{u^r(r)}{c} = \frac{\mu}{\alpha(r)r^2 n(r)}, \quad (4.12)$$

y la componente radial de la 3-velocidad medida por un observador estático es

$$\frac{v(r)}{c} = \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + r^4 \sigma(r) n(r)^2}}. \quad (4.13)$$

### 4.1.3. Suposiciones sobre la ecuación de estado del fluido

Hasta ahora, la función  $h(n)$ , que describe la ecuación del fluido no se ha especificado. Ahora formularemos nuestras condiciones en  $h$  y nuestros resultados principales a las soluciones de la ecuación (4.11). Donde las pruebas se dan en la siguiente sección.

Asumimos que la entalpía  $h(n)$ , que es la función que describe la ecuación de estado, donde  $h : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ , es una función suave satisfaciendo las siguientes propiedades:

<sup>2</sup>Notar que es suficiente considerar (3.3) y las components de (3.2) a lo largo de  $\mathbf{u}$  and  $\mathbf{k}$ , ya que las componentes angulares de (3.2) son triviales como una consecuencia de la simetría esférica.

**(F1) Positividad de la energía en reposo :**

Como  $n \rightarrow 0$ ,  $h(n) \rightarrow e_0$  converge a un número positivo  $e_0 > 0$ .

**(F2) Velocidad del sonido positivo y subluminal:**

$0 < v_s(n) < c$  para todo  $n > 0$ .

**(F3) Restricción técnica en la derivada de  $v_s(n)$ :**

$0 \leq W(n) := \frac{\partial \log v_s}{\partial \log n} \leq \frac{1}{3}$  para todo  $n > 0$ .

Mientras las primeras dos condiciones son bien motivadas físicamente, el significado de la tercera condición no es inmediatamente obvia. En principio, la condición (F3) se requirió para tener flujos de acreción con índice politrópico  $1 < \gamma \leq 5/3$ . En las secciones 4.2 y 4.3 vamos a ver que esta se requiere para asegurar la existencia de un único punto crítico del flujo de fase.

Cuando se viola la condición  $W(n) \leq \frac{1}{3}$ , se obtienen orbitas homoclínicas y, para una ecuación de estado politrópica existe un flujo de acreción, con índice adiabático entre  $5/3 < \gamma \leq 2$ , el cual tiene las mismas propiedades cualitativas como en el caso de la politrópica con  $1 < \gamma \leq 5/3$  (ver [12]).

Para el caso particular de una ecuación de estado politrópica,

$$p = kn^\gamma, \quad (4.14)$$

con  $k$  constante positiva y  $\gamma$  índice adiabático, integrando la primera ley,  $dh = Tds + dp/n$ , con  $ds = 0$  da

$$h(n) = e_0 + \frac{\gamma k}{\gamma - 1} n^{\gamma-1} \quad (4.15)$$

con  $e_0$  la energía en reposo de las partículas. En el anterior caso, las condiciones (F1)–(F3) se satisfacen siempre que  $e_0 > 0$  y  $1 < \gamma \leq 5/3$ . Para los casos con ecuación de estado más general con índice adiabático variable  $\gamma$  también están contenidas en nuestras suposiciones (F1)–(F3).

Antes de establecer nuestros principales resultados respecto a la solución de la ecuación (4.11), hacemos la siguiente observación: asumimos que existe una solución suave  $n(r)$  de la ecuación (4.11) la cual es bien definida en el intervalo  $[r_H, \infty)$  incluyendo el horizonte de eventos  $r = r_H$  y el cual converge a un valor finito y positivo  $n_\infty$  en el infinito. Diferenciando  $F(r, n(r)) = \text{const.}$  con respecto a  $r$  obtenemos

$$\frac{\partial F}{\partial r}(r, n(r)) + \frac{\partial F}{\partial n}(r, n(r))n'(r) = 0. \quad (4.16)$$

El teorema de función implícita garantiza la existencia local y la unicidad de  $n(r)$  mientras

$$\frac{\partial F}{\partial n}(r, n) = \frac{2h(n)^2}{n} \left[ \frac{v_s^2}{c^2} \sigma(r) - \left( 1 - \frac{v_s^2}{c^2} \right) \frac{\mu^2}{r^4 n^2} \right] \quad (4.17)$$

sea diferente de cero. De acuerdo con nuestras suposiciones, el lado derecho es negativo en el horizonte (donde  $\sigma = 0$ ) y positivo para  $r$  grandes (donde  $\sigma$  es cercano a uno). Por lo tanto, mientras la hipótesis del teorema de la función implícita se satisfacen cerca del horizonte y en la región asintótica, estas hipótesis se violan en algún punto intermedio  $r = r_c$ , donde  $\partial F / \partial n(r_c, n_c) = 0$ ,  $n_c := n(r_c)$ . En vista de la ecuación (4.16) la única posibilidad para  $n(r)$  de tener una primera derivada bien definida en  $r = r_c$  es que la derivada parcial de  $F$  con respecto a  $r$  también se anule en  $(r_c, n_c)$ . En otras palabras, una condición necesaria para obtener una curva de nivel diferenciable  $n(r)$  de la ecuación (4.11) la cual se extienda desde el horizonte al infinito y tienen un límite, finito positivo  $n_\infty$  como  $r \rightarrow \infty$  es que esta curva pase a través de un punto crítico de  $F$ .

Nuestro resultado principal tiene que ver con la existencia y unicidad del punto crítico  $(r_c, n_c)$  de  $F$  y la estructura de las curvas de nivel que pasan a través de esta.

**Teorema 1 (Punto crítico y curvas de nivel que pasan a través de este)**

Bajo nuestras suposiciones (M1)–(M4) en la métrica de fondo y (F1)–(F3) en la ecuación de estado del fluido, la función  $F : [r_H, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(r, n) \mapsto F(r, n)$  definida por (4.11) posee un punto crítico  $(r_c, n_c)$  para cada valor lo suficientemente grande de  $|\mu|$ . El punto crítico (cuando este existe) es único y describe un punto de silla de  $F$  en el cual las dos curvas de nivel de  $F$  se cruzan. Estas curvas de nivel pueden ser parametrizadas por  $(r, n_+(r))$  y  $(r, n_-(r))$ ,  $r > r_H$ , respectivamente, con la función  $n_\pm$  satisfaciendo las siguientes propiedades:

- (a)  $n_+ : (r_H, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  es la única función diferenciable satisfaciendo  $n_+(r_c) = n_c$  y  $F(r, n_+(r)) = F(r_c, n_c)$  para todo  $r > r_H$  el cual tiene límite regular cuando  $r \rightarrow r_H$  y  $r \rightarrow \infty$ . Además,  $n_\infty := \lim_{r \rightarrow \infty} n_+(r) > 0$ .
- (b)  $n_- : (r_H, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  es la única función diferenciable satisfaciendo  $n_-(r_c) = n_c$  y  $F(r, n_-(r)) = F(r_c, n_c)$  para todo  $r > r_H$  tal que  $\lim_{r \rightarrow \infty} n_-(r) = 0$ .

Ambas funciones  $n_\pm$  son monótonamente decrecientes.

La función  $n_+$  describe el flujo de Michel, un flujo de acreción radial estacionario el cual se extiende desde el horizonte del agujero negro hasta la región asintótica y la cual tiene velocidad radial que desvanece y una densidad de partículas finita  $n_\infty$  en el infinito. Un ejemplo gráfico mostrando las curvas de nivel de la función  $F$  y las curvas de nivel  $(r, n_\pm(r))$  para el caso particular de una politrópica en un fondo de Schwarzschild se muestran a continuación en la figura 4.2.

Como quedará claro a partir de la demostración en la siguiente sección, el flujo es subsónico para  $r > r_c$  y supersónico para  $r < r_c$  y el radio crítico  $r_c$  representa la esfera sónica. En contraste con esto, como veremos, la función  $n_-$  diverge como  $r \rightarrow r_H$  por lo que no está bien definida en el horizonte de eventos. El flujo correspondiente es subsónico para  $r_H < r < r_c$ , supersónico para  $r > r_c$ , y en el infinito la densidad de partículas desvanece y la velocidad

radial es positiva. Cuando el agujero negro es reemplazado por una estrella esférica compacta, esta solución juega un papel importante en la descripción de los vientos solares relativistas [13].

La función  $n_{\pm}$  en el Teorema 1 parametriza el conjunto de curvas de nivel  $F(r, n) = F(r_c, n_c)$  correspondientes al punto crítico  $(r_c, n_c)$  dependen del parámetro de la tasa de acreción  $\mu$ , ver ecuación (4.11). En lugar de parametrizar el flujo de Michel por  $\mu$  también se puede parametrizar en términos de la densidad de partículas en el infinito  $n_{\infty}$ . El enunciado de nuestro segundo resultado principal es:

**Teorema 2** *Sean las condiciones (M1)–(M4) en el fondo métrico y (F1)–(F3) en la ecuación de estado del fluido las cuales se satisfacen. Entonces, dado cualquier  $n_{\infty} > 0$ , existe un único valor de  $|\mu|$  tal que la función  $F$  tiene un punto crítico con la propiedad que la función  $n_+$  definida en el Teorema 1 satisface  $\lim_{r \rightarrow \infty} n_+(r) = n_{\infty}$ .*

El valor de de la densidad de partículas en el infinito  $n_{\infty}$  puede determinarse por la densidad de partículas de la materia en el medio ambiente lejos del agujero negro. Para el escenario particular de un agujero negro acreitando materia desde el medio interestelar, es común ajustar la temperatura del flujo  $T_{\infty}$  a la temperatura del medio interestelar, que a su vez se relaciona con la velocidad de sonido en el infinito  $v_{\infty}$  mediante la ecuación de estado. Por ejemplo, para bariones no relativistas se tiene [1]

$$nk_B T = p = kn^{5/3},$$

el cual, toma en cuenta la masa de los protones en reposo  $m_p = 938 \text{ MeV}/c^2$ , conduciendo a

$$v_{\infty} = \left( \frac{5}{3} \frac{k_B T_{\infty}}{m_p} \right)^{1/2} \simeq 11,7 \left( \frac{T_{\infty}}{10^4 K} \right)^{1/2} \frac{km}{s},$$

la cual es considerablemente más pequeño que la velocidad de la luz para una temperatura típica de  $T_{\infty} \simeq 10^4 K$ . Cuando  $v_{\infty}/c \ll 1$  mostramos que la esfera sónica esta localizada lejos del horizonte de eventos,  $r_c \gg r_H$ .

En el caso donde asumimos una ecuación de estado politrópica con induce adiabático  $\gamma = 5/3$  encontramos las tasas de acreción en términos de  $v_{\infty}/c$ :

$$\frac{n_c}{n_{\infty}} \simeq \left( \frac{2}{3\ell} \right)^{3/2} \left( \frac{v_{\infty}}{c} \right)^{-3/2} \simeq 2,224 \times 10^6 \ell^{-3/2} \left( \frac{T_{\infty}}{10^4 K} \right)^{-3/4}, \quad (4.18)$$

$$\frac{n_H}{n_{\infty}} \simeq \left( \frac{2}{3} \right)^{3/2} z_{H0} \left( \frac{v_{\infty}}{c} \right)^{-3} \simeq 1,334 \times 10^{12} \left( \frac{z_{H0}}{0,14677} \right) \left( \frac{T_{\infty}}{10^4 K} \right)^{-3/2} \quad (4.19)$$

donde  $\ell$  y  $z_{H0}$  son cantidades que dependen del parámetro  $\sigma_1 = 2m/r_H$  y  $\sigma_2$  en la expansión asintótica

$$\sigma(r) = 1 - \sigma_1 \frac{r_H}{r} - \sigma_2 \frac{r_H^2}{r^2} + \mathcal{O} \left( \frac{r_H^3}{r^3} \right)$$

de la función métrica  $\sigma$ . Para el caso del agujero negro de Schwarzschild,  $l = 1$  y  $z_{H0} \simeq 0,14677$ . En este caso, las tasas de compresión de las ecuaciones (4.18,4.19) se reducen a resultados conocidos en la literatura [6, 1]. Sin embargo, estos valores pueden ser significativamente diferentes para agujeros negros deformados. La tasa de acreción es dada en términos de  $v_\infty/c$  por:

$$\begin{aligned} j_\varepsilon &\simeq \pi m_p c^3 \left( \frac{GM}{c^2} \right)^2 \left( \frac{v_\infty}{c} \right)^{-3} n_\infty \\ &\simeq 5,158 \times 10^{24} \left( \frac{M}{M_\odot} \right)^2 \left( \frac{T_\infty}{10^4 K} \right)^{-3/2} \left( \frac{n_\infty}{1 \text{cm}^{-3}} \right) \frac{J}{s}, \end{aligned} \quad (4.20)$$

y sólo depende de la masa total  $M$  del agujero negro, no de los detalles de la métrica.

En la siguiente sección, demostraremos los teoremas 1 y 2 reformulando el problema implícito de la ecuación (4.11) como un sistema dinámico Hamiltoniano (ficticio) en el espacio de fase  $(r, n)$ . La demostración generaliza nuestro trabajo anterior [14] (ver también [15, 16]) para el caso particular de un fluido politrópico acretado por un agujero negro de Schwarzschild.

## 4.2. Análisis del espacio de fase

El resultado principal de esta sección es demostrar los Teoremas 1 y 2. En un primer paso, reescribimos la ecuación fundamental (4.11) en términos de cantidades dimensionales y enunciaremos algunos resultados preliminares con respecto al comportamiento de los campos métricos y la función de entalpía específica en la sección 4.2.1. Después, en la sección 4.2.2 reformulamos el problema en términos de un sistema dinámico en el espacio de fase  $(r, n)$ , donde el campo vectorial que describe la dinámica es el campo vectorial Hamiltoniano asociado con la función  $F$  definido en (4.11). Por construcción,  $F$  es constante a lo largo de las trayectorias de fase y por lo tanto este último describe sus curvas de nivel. La principal ventaja de formular el problema en un sistema dinámico se basa en el hecho de que el comportamiento de  $F$  cerca del punto crítico (donde la hipótesis del teorema de la función implícita se rompe) se puede analizar usando herramientas estándar de la teoría de sistemas dinámicos [17, 18]. Usando análisis local, mostramos en la sección 4.2.2 que para un valor de  $|\mu|$  lo suficientemente grande el flujo Hamiltoniano posee un único punto crítico hiperbólico con variedades locales unidimensional estable e inestables. Estos son definidos como el conjunto de puntos que se encuentran en una vecindad del punto crítico que convergen a este en el futuro y en el pasado, respectivamente, a lo largo del flujo de fase. En la sección 4.2.3 examinamos las extensiones de estas variedades y demostramos que la rama inestable se extiende desde el horizonte hasta la región asintótica, y por lo tanto describe la solución física relevante. En nuestro análisis en la sección 4.2.3 también demostramos la estructura global del espacio de fase, y en particular demostramos el Teorema 1. Por último, el enunciado

del Teorema 2 se demuestra en la sección 4.2.4. Las pruebas de algunos Lemas técnicos necesarios para nuestro análisis se encuentran en el Apéndice B.

### 4.2.1. Cantidades adimensionales y resultados preliminares

Introducimos las siguientes cantidades adimensionales:

$$x := \frac{r}{r_H}, \quad u := \alpha \frac{u^r}{c}, \quad z := \frac{n}{n_0}, \quad \bar{\mu} := \frac{j_n}{4\pi cr_H^2 n_0}, \quad (4.21)$$

$$f(z) := \frac{h(n)}{e_0}, \quad \nu^2(z) := \frac{\partial \log f(z)}{\partial \log z}, \quad w(z) := \frac{\partial \log \nu(z)}{\partial \log z}. \quad (4.22)$$

Aquí,  $n_0$  denote una densidad típica (la cual puede ser definida, por ejemplo, como la densidad de partículas en el infinito),  $\bar{\mu}$  es la tasa de acreción adimensional,  $\nu$  es la velocidad local del sonido dividida por  $c$ , y  $f$  denota la entalpía específica. Nótese que en el caso de acreción, ambos  $\bar{\mu}$  y  $u$  son negativos. Para simplificar la notación quitamos la barra de  $\bar{\mu}$  para lo que sigue. En términos de estas cantidades, la ecuación (4.11), puede ser escrita como

$$F_\mu(x, z) = \left( \frac{j_\varepsilon}{j_n e_0} \right)^2 = \text{const.}, \quad (4.23)$$

donde  $F_\mu : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  es una función en  $\Omega := (0, \infty) \times (0, \infty)$  definida por

$$F_\mu(x, z) := f(z)^2 \left[ \sigma(x) + \frac{\mu^2}{x^4 z^2} \right], \quad (x, z) \in \Omega. \quad (4.24)$$

Para el análisis del flujo Hamiltoniano asociado con la función  $F_\mu$  necesitaremos dos lemas técnicos. El primero está relacionado con al comportamiento del campo métrico  $\sigma$ .

**Lema 1** *La función*

$$a(x) := \frac{\sigma(x)}{x\sigma'(x)}, \quad x \geq 1,$$

*es una función monótonamente creciente satisfaciendo  $a(1) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} a(x)/x = r_H/(2m)$  y las desigualdades*

$$0 < a(x) < \frac{r_H}{2m} x, \quad \frac{(4a+1)^2}{16a+1} < xa' < 1+4a, \quad (4.25)$$

*para todo  $x > 1$ .*

**Prueba.** Ver Apéndice B. □

El segundo lema, el cual es una consecuencia de las suposiciones (F1)–(F3) en la ecuación de estado del fluido, da información acerca de las propiedades asintóticas de la entalpía específica  $f$  y de la velocidad adimensional del sonido  $\nu$  cuando  $z \rightarrow 0$  y  $z \rightarrow \infty$ .

**Lema 2** (a) Dada  $z_1 > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que las siguientes desigualdades son válidas para todo  $0 \leq z \leq z_1$ :

$$\nu(z) \geq \delta z^{1/3}, \quad f(z) \geq \exp \left[ \frac{3}{2} \delta^2 z^{2/3} \right]. \quad (4.26)$$

(b)  $\nu$  es una función monótona estrictamente creciente satisfaciendo

$$\lim_{z \rightarrow 0} \nu(z) = 0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \nu(z) = \nu_1$$

para alguna constante  $0 < \nu_1 \leq 1$ .

(c) Dada  $z_0 > 0$  existe una constante  $q > 0$  tal que para todo  $z \geq z_0$ ,

$$f(z) \geq f(z_0) \left( \frac{z}{z_0} \right)^q. \quad (4.27)$$

En particular,  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$ .

**Prueba.** Ver Apéndice B. □

#### 4.2.2. Definición del sistema dinámico y de los puntos críticos

El campo vectorial Hamiltoniano con respecto a la función  $F_\mu$  es definido por

$$X_F(x, z) := (\nabla F_\mu(x, z))^\perp = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_\mu(x, z)}{\partial z} \\ -\frac{\partial F_\mu(x, z)}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad (x, z) \in \Omega. \quad (4.28)$$

El flujo Hamiltoniano asociado se determina por las curvas integrales de  $X_F$ , que se obtiene por resolver el sistema diferencial ordinario

$$\frac{d}{d\lambda} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = X_F(x, z) = f(z)^2 \begin{pmatrix} \frac{2}{z} [\nu(z)^2 (\sigma(x) + u^2) - u^2] \\ -\sigma'(x) + \frac{4u^2}{x} \end{pmatrix} \Big|_{u=\frac{\mu}{x^2 z}}, \quad (4.29)$$

con  $\lambda$  un parámetro de tiempo ficticio. Por construcción, estas curvas dejan el conjunto de nivel de  $F_\mu$  invariante, entonces el problema de encontrar soluciones implícitas de la ecuación  $F_\mu(x, z) = \text{const.}$  puede ser entendido por determinar las propiedades cualitativas del flujo de fase.

Los puntos críticos  $(x_c, z_c)$  del sistema son determinados por los puntos en los cuales  $X_F$  desvanece, esto es

$$\nu(z)^2 (\sigma(x) + u^2) - u^2 = 0, \quad (4.30)$$

$$\sigma'(x) - \frac{4u^2}{x} = 0, \quad (4.31)$$

donde  $u^2 = \mu^2/(x^4 z^2)$ . Eliminando  $z$ , la solución de este sistema es equivalente a encontrar los ceros de la función auxiliar

$$\mathcal{F}_\mu(x) := \nu(z(x))^2 [1 + 4a(x)] - 1, \quad z(x) := \frac{2|\mu|}{\sqrt{x^5 \sigma'(x)}}, \quad x \geq 1, \quad (4.32)$$

donde  $a(x) = \sigma(x)/(x\sigma'(x))$  es la función definida en el Lema 1. Primero, mostramos la existencia de un cero analizando los límites  $x \rightarrow 1$  y  $x \rightarrow \infty$ . Para  $x \rightarrow 1$ ,

$$\mathcal{F}_\mu(1) = \nu \left( 2|\mu|/\sqrt{\sigma'(1)} \right)^2 - 1 < 0,$$

donde hemos usado las suposiciones (M2) y (F2). Con el fin de analizar el comportamiento asintótico de  $\mathcal{F}_\mu(x)$  para  $x$  muy grande, primero notamos que para un valor fijo de  $\mu$ ,  $z(x) \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow \infty$  ya que de acuerdo a la suposición (M1),  $x^2 \sigma'(x) \rightarrow \sigma_1 = 2m/r_H$ . A continuación, fijamos las constantes  $z_1$  y  $\delta$  en el Lema 2(a) que sólo dependerá de la ecuación de estado. Para cualquier valor fijo  $\mu$  y un  $x$  lo suficientemente grande tenemos entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\mu(x) &\geq \delta^2 z(x)^{2/3} [1 + 4a(x)] - 1 \\ &= \delta^2 \frac{(2|\mu|)^{2/3}}{(x^2 \sigma'(x))^{1/3}} \left[ \frac{1}{x} + \frac{4\sigma(x)}{x^2 \sigma'(x)} \right] - 1 \\ &\rightarrow 4\delta^2 \left( \frac{2|\mu|}{\sigma_1^2} \right)^{2/3} - 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos garantizar que  $\mathcal{F}_\mu(x)$  es positiva para  $x$  grande si elegimos  $|\mu|$  lo suficientemente grande tal que  $|\mu| > \sigma_1^2/(16\delta^3)$ . En este caso, la función suave  $\mathcal{F}_\mu$  es negativa para  $x = 1$  y positiva para  $x$  grandes. Por lo tanto,  $\mathcal{F}_\mu$  debe tener un cero por el teorema del valor intermedio.

A continuación, mostramos que este cero debe ser único. Para esto, consideramos la derivada de  $\mathcal{F}_\mu$ :

$$\mathcal{F}'_\mu(x) = \nu(z(x))^2 \left\{ \frac{w(z(x))}{xa(x)} [1 + 4a(x)][xa'(x) - 1 - 4a(x)] + 4a'(x) \right\}. \quad (4.33)$$

Se sigue desde nuestras suposiciones (M4) y (F3) que el lado derecho es siempre positiva. De hecho, cuando  $w = 0$  la expresión dentro del corchete se reduce a  $4a'(x) > 0$ , mientras en el otro extremo,  $w = 1/3$ , se reduce a

$$\frac{1}{3xa} [(1 + 4a)(xa' - 1 - 4a) + 12xaa'] = \frac{1}{3xa} [(1 + 16a)xa' - (1 + 4a)^2],$$

el cual también es positivo como consecuencia del Lema 1. Por consiguiente, la función  $\mathcal{F}_\mu$  es estrictamente monótona creciente, y, como consecuencia, los puntos críticos del sistema dinámico son únicos.

Luego de haber determinado el punto crítico analizamos el flujo en la vecindad de este. Para esto, linealizamos el campo vectorial Hamiltoniano  $X_F$  en el punto crítico  $(x_c, z_c)$ . La linealización está dada por la matrix

$$\begin{aligned} DX_F(x_c, z_c) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F_\mu(x_c, z_c)}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 F_\mu(x_c, z_c)}{\partial z^2} \\ -\frac{\partial^2 F_\mu(x_c, z_c)}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2 F_\mu(x_c, z_c)}{\partial x \partial z} \end{pmatrix} \\ &= \sigma'(x_c) \frac{f(z_c)^2}{z_c} \begin{pmatrix} 2 & \frac{\eta}{\Lambda} \\ \frac{\Lambda}{a(x_c)} [x_c a'(x_c) - 1 - 4a(x_c)] & -2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.34)$$

donde  $\Lambda := z_c/x_c$  y  $\eta := 1 - \nu(z_c)^2 + w(z_c) > 0$ . Un cálculo corto, el cual aprovecha el hecho de que  $\nu(z_c)^2[1 + 4a(x_c)] = 1$ , muestra que la determinante es

$$\det [DX_F(x_c, z_c)] = -x_c \sigma'(x_c)^2 \frac{f(z_c)^4}{z_c^2} \mathcal{F}'_\mu(x_c) < 0. \quad (4.35)$$

Dado que  $DX_F(x_c, z_c)$  tiene traza cero, se sigue que sus eigenvalores son reales y tienen diferente signo; en particular  $(x_c, z_c)$  es hiperbólico<sup>3</sup> y el teorema de linealización de Hartman-Grobman [17] es aplicable,<sup>4</sup>. Por otra parte, los eigenvalores positivos y negativos de  $DX_F(x_c, z_c)$  dan lugar a variedades locales unidimensional estable e inestable. Estas corresponden, respectivamente, al conjunto de puntos  $(x, z)$  convergiendo al punto crítico cuando  $\lambda \rightarrow \infty$  y  $\lambda \rightarrow -\infty$ . En consecuencia, la función  $F_\mu$  tiene un punto de silla en  $(x_c, z_c)$ , ya que el determinante de  $DX_F(x_c, z_c)$  es igual al Hessiano de  $F_\mu$  en  $(x_c, z_c)$ . En una vecindad de  $(x_c, z_c)$ , el punto crítico junto con las variedades estable e inestable describen el conjunto de niveles de  $F_\mu$  a través del punto crítico. En lo que sigue, estudiamos las extensiones de las variedades estable e inestable en todo el espacio de fase  $\Omega$ .

### 4.2.3. Extensión de las variedades locales estable e inestable y las propiedades del espacio de fase

En la subsección anterior, mostramos que para un  $|\mu|$  suficientemente grande existe un punto crítico del sistema dinámico (4.29), y además mostramos que un punto crítico siempre es único e hiperbólico, con correspondientes variedades locales unidimensionales estable e inestable  $\Gamma_-$  y  $\Gamma_+$ . En esta subsección, discutimos las extensiones de estas variedades hacia el horizonte ( $x = 1$ ) y hacia la región asintótica  $x \rightarrow \infty$ . También discutimos el comportamiento global cualitativo del flujo de fase. Analizamos las dos curvas  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$ , correspondiente a los puntos  $(x, z)$  en los que la derivada parcial de  $F_\mu(x, z)$  desvanece con respecto

<sup>3</sup>Un punto de equilibrio  $(x_c, z_c) \in U$  se llama punto de equilibrio hiperbólico de (4.28) si ninguno de los eigenvalores de la matrix (4.34) tienen parte real cero, (ver [18], página 102).

<sup>4</sup>En palabras, el teorema de Hartman-Grobman dice que el comportamiento de un sistema dinámico cerca de un punto de equilibrio hiperbólico localmente tiene el mismo comportamiento de su linealización cerca del punto de equilibrio. Por lo tanto, cuando se trata del punto crítico hiperbólico se puede usar la linealización del sistema y ver el comportamiento de éste al menos localmente en el sistema no linealizado.

a  $x$  y con respecto a  $z$ . Usando las ecuaciones (4.30,4.31), estas dos curvas son, por lo tanto, parametrizadas por

$$z_1(x) := \frac{2|\mu|}{\sqrt{x^5\sigma'(x)}}, \quad z_2(x) := H^{-1}(x^4\sigma(x)), \quad x > 1, \quad (4.36)$$

con la función de  $H : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  definida como

$$H(z) := \frac{\mu^2}{z^2} \left( \frac{1}{\nu(z)^2} - 1 \right), \quad z > 0. \quad (4.37)$$

Nótese que  $H$  es invertible:  $H(z) \rightarrow \infty$  como  $z \rightarrow 0$  y  $H(z) \rightarrow 0$  como  $z \rightarrow \infty$ , y desde

$$\frac{dH(z)}{dz} = -\frac{2\mu^2}{z^3\nu^2(z)} [1 - \nu^2(z) + w(z)] < 0,$$

lo que demuestra que  $H(z)$  es monótonamente decreciente. Además, usando el Lema 1,

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{dx}(x) &= \frac{z_1(x)}{2x} \frac{xa'(x) - 4a(x) - 1}{a(x)} < 0, \\ \frac{dz_2}{dx}(x) &= \frac{x^3}{\frac{dH}{dz}(H^{-1}(x^4\sigma(x)))} [x\sigma'(x) + 4\sigma(x)] < 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $z_1(x)$  y  $z_2(x)$  son funciones monótonamente decrecientes. Las curvas  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  se intersectan así mismas sólo en el único punto crítico  $(x_c, z_c)$ , y por lo tanto, dividen el espacio de fase en cuatro regiones, ver Figura 4.1 abajo. En cada una de estas cuatro regiones, el flujo tiene una dirección particular que se indica por las flechas en la figura. Notemos de paso que la curva  $\Gamma_2$  tiene una bonita interpretación física: esta divide el espacio de fase en dos regiones donde el flujo es sub y supersónico, respectivamente. Para ver esto, recordemos la expresión (4.13) para la velocidad radial del fluido medida por un observador estático. En términos de cantidades adimensionales,

$$\frac{|v|}{c} = \frac{|\mu|}{\sqrt{\mu^2 + x^4\sigma'(x)z^2}}.$$

Comparando esta expresión con

$$\nu(z_2(x)) = \frac{|\mu|}{\sqrt{\mu^2 + x^4\sigma'(x)z_2(x)^2}},$$

lo cual sigue desde la definición de  $z_2(x)$ , y usando la monotonidad de  $\nu(z)$ , esto implica que  $|v|/c < \nu$  para los puntos  $(x, z)$  que se encuentran por encima de la curva  $\Gamma_2$ , mientras que  $|v|/c > \nu$  para los puntos que están por debajo de esta curva. Dado que  $z_2(x) \rightarrow \infty$  como  $x \rightarrow 1$ , una conclusión importante es que cualquier solución diferenciable  $z(x)$  de la ecuación implícita (4.23) que se

extiende desde el horizonte de eventos hasta  $x \rightarrow \infty$  debe ser transónica. Como discutimos en la sección 4.1 esta solución debe cruzar la curva  $\Gamma_2$  exactamente en el punto crítico, y por lo tanto debe coincidir o con la variedad local estable o la inestable.

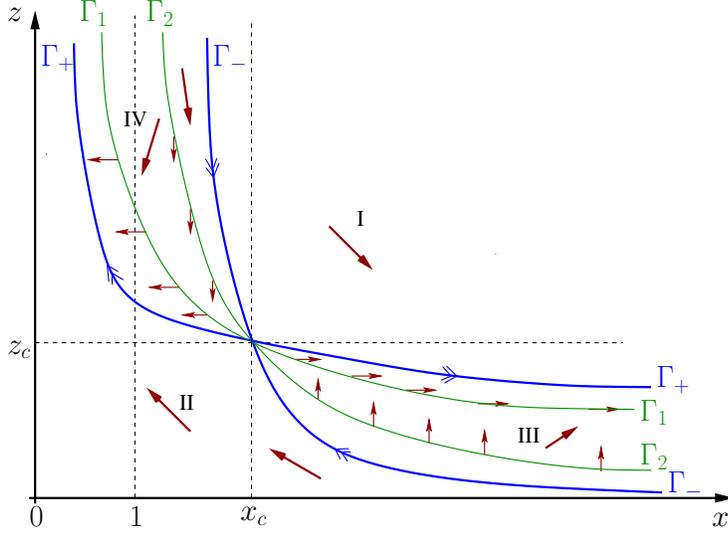


Figura 4.1: (de arXiv:1501.01641 (2015)) Gráfica del espacio de fase, donde se muestra el punto crítico  $(x_c, z_c)$ , las variedades estable ( $\Gamma_-$ ) y la inestable ( $\Gamma_+$ ), y las curvas  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  las cuales delimitan las cuatro regiones I–IV. También se muestra la dirección del flujo en cada región y a lo largo de las curvas  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$ . La velocidad radial del flujo medido por un observador estático es subsónico en la región arriba de la curva  $\Gamma_2$  y supersónico en la región por debajo de  $\Gamma_2$ .

Para continuar comparamos la ubicación de las variedades locales estable ( $\Gamma_-$ ) e inestable ( $\Gamma_+$ ) con la ubicación de las curvas  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  en el espacio de fase  $\Omega$ . Para esto, primero calculamos las derivadas de estas cuatro curvas en el punto crítico. Las pendientes de  $\Gamma_{\pm}$  en el punto crítico son determinadas por los eigenvectores de la linealización de  $DX_F(x_c, z_c)$ . De la ecuación (4.34) uno encuentra los eigenvectores

$$e_{\pm} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2\Lambda}{\eta}(1 \mp k) \end{pmatrix}.$$

correspondiendo a los eigenvalores  $\pm 2\sigma'(x_c)f(z_c)^2k/z_c$ , donde

$$k = \sqrt{1 + \frac{\eta}{4a_c} [x_c a'(x_c) - 1 - 4a(x_c)]}.$$

Dado que  $DX_F(x_c, z_c)$  tiene determinante negativa,  $k$  es real y podemos tomar la raíz positiva, y de acuerdo al Lema 1,  $k < 1$ . Por lo tanto, las pendientes de las variedades locales estable e inestable son dadas por

$$l_- = -\frac{2\Lambda}{\eta}(1+k), \quad l_+ = -\frac{2\Lambda}{\eta}(1-k), \quad (4.38)$$

respectivamente. Las pendientes de  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  se pueden obtener mediante el cálculo directo; el resultado es

$$l_1 := \frac{dz_1}{dx}(x_c) = -\frac{2\Lambda}{\eta}(1-k)(1+k), \quad (4.39)$$

y

$$l_2 := \frac{dz_2}{dx}(x_c) = -\frac{2\Lambda}{\eta}. \quad (4.40)$$

Las ecuaciones (4.38,4.39,4.40) y el hecho que  $0 < k < 1$  implican las desigualdades

$$l_- < l_2 < l_1 < l_+ < 0. \quad (4.41)$$

Por lo tanto, cerca del punto crítico, la ubicación relativa de  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$ ,  $\Gamma_+$  and  $\Gamma_-$  es como se muestra en la Figura 4.1. En particular, las curvas  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  se encuentran entre las variedades locales estable e inestable, al menos en una vecindad del punto crítico. A continuación, mostramos que esto también se cumple globalmente, es decir,  $\Gamma_{\pm}$  no cruza las curvas  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  en otros puntos diferentes al punto crítico. Para demostrar esto, hacemos las siguientes observaciones generales:

- (I) Consideremos la región I, la cual se encuentra por encima de de la curva  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$ . Aquí,  $\frac{\partial F}{\partial x} > 0$  y  $\frac{\partial F}{\partial z} > 0$ , implicando que  $x$  incrementa y  $z$  decrece a lo largo del flujo del sistema dinámico (4.29). Por otra parte, en los puntos de frontera  $x > x_c$ ,  $z = z_1(x)$ , es flujo apunta hacia *adentro* implicando que este no puede salir la región I en esos puntos. Como consecuencia, la variedad inestable  $\Gamma_+$  debe extenderse hasta  $x \rightarrow \infty$ , ya que de acuerdo a la ecuación (4.28)  $x$  incrementa y  $z$  decrece pero está acotada desde abajo por  $z > z_1(x)$ . Usando argumentos similares para el flujo de tiempo inverso, se concluye que la variedad estable  $\Gamma_-$  se extiende desde  $(x_c, z_c)$  hasta  $z \rightarrow \infty$  en el interior de la región I, con  $x$  decreciendo monótonamente.
- (II) A continuación, consideramos la región II la cual se encuentra debajo de las curvas  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$ . Aquí,  $\frac{\partial F}{\partial x} < 0$  y  $\frac{\partial F}{\partial z} < 0$ , implicando que  $x$  decrece y  $z$  incrementa a lo largo del flujo del sistema dinámico (4.29). En los puntos de frontera  $x < x_c$ ,  $z = z_1(x)$  el flujo apunta *adentro*, implicando que  $\Gamma_+$  no puede salir de la región II en esos puntos. Dado que  $x$  decrece y  $z$  crece, y puesto que la curva  $\Gamma_1$  cruza el horizonte en  $x = 1$ , se sigue que  $\Gamma_+$  se extiende desde  $(x_c, z_c)$  hasta un punto  $(1, z_h)$  donde cruza el horizonte, con  $z_c < z_h < z_1(1)$ .

Por un argumento similar, puede mostrarse que la variedad estable  $\Gamma_-$  se extiende en el pasado desde  $(x_c, z_c)$  hasta  $x \rightarrow \infty, z \rightarrow 0$ , ya que debe estar entre el eje  $x$  y la curva  $\Gamma_2$ .

En conclusión, hemos mostrado que la variedad *inestable* se extiende desde la región asintótica  $x \rightarrow \infty$  a través del punto crítico hasta el horizonte, donde  $z(1) = z_h$  tiene un valor finito. El flujo correspondiente es *subsónico* para  $x > x_c$  y *supersónico* para  $x < x_c$ . Al contrario, la variedad *estable* se extiende desde  $x \rightarrow \infty$  a través del punto crítico, pero  $z(x)$  diverge cuando  $x \rightarrow 1$  se acerca al horizonte. El flujo correspondiente es *supersónico* para  $x > x_c$  y *subsónico* para  $x < x_c$ . Otros posibles flujos están dados por las curvas integrales las cuales se encuentran por debajo de las curvas  $\Gamma_+$  y  $\Gamma_-$ , cuyo flujo correspondiente es supersónico, y las curvas integrales que se encuentran por encima de las curvas  $\Gamma_+$  y  $\Gamma_-$ , cuyo flujo es subsónico. En todos los casos,  $z$  incrementa como  $x$  disminuye y por lo tanto, puede asociarse a cada valor de radio adimensional  $x = r/r_H$  un único valor de la densidad de partículas  $n(r) = n_0 z(x)$ , la cual es una función monótonamente decreciente de  $r$ .

A fin de concluir la demostración del Teorema 1 falta analizar el comportamiento de las funciones  $z_{\pm}$ , parametrizando las variedades  $\Gamma_{\pm}$ , para  $x \rightarrow \infty$ . Comencemos con  $z_+$ . Dado que  $z_+$  monótonamente decreciente y puesto que  $z_+(x) > z_1(x)$  para todo  $x > x_c$  el límite

$$z_{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} z_+(x)$$

existe. Como argumentamos ahora, este límite no puede ser cero. De hecho,  $z_+(x) > z_1(x)$  para todo  $x > x_c$  implicando que a lo largo de  $\Gamma_+$  la velocidad radial es acotada por

$$|u| = \frac{|\mu|}{x^2 z_+} < \frac{|\mu|}{x^2 z_1(x)} = \frac{\sqrt{x^2 \sigma'(x)}}{2\sqrt{x}}$$

en la región asintótica. De acuerdo a la suposición (M1), el numerador converge a una constante positiva para  $x \rightarrow \infty$ , lo que implica que  $u \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow \infty$ . Por consiguiente, ya que  $F_{\mu}$  es constante a lo largo de  $\Gamma_+$ ,

$$F_{\mu}(x_c, z_c) = F_{\mu}(x_c, z_+(x_c)) = \lim_{x \rightarrow \infty} F_{\mu}(x, z_+(x)) = f(z_{\infty})^2, \quad (4.42)$$

donde hemos utilizado la ecuación (4.24) en el último paso. El Lema 3 muestra que  $F_{\mu}(x_c, z_c) > 1$ , lo que implica que  $z_{\infty}$  debe ser positiva. Por lo tanto, a lo largo de  $\Gamma_+$  la densidad de partículas  $n(r) = n_0 z(x)$  converge a un valor finito positivo y la componente radial de la cuadrivelocidad  $u^r$  y la velocidad del fluido  $v$  medidos por observadores estáticos convergen a cero cuando  $r \rightarrow \infty$ , como se esperaba.

En contraste con esto, a lo largo de la variedad estable  $\Gamma_-$  debemos tener

$$\lim_{x \rightarrow \infty} z_-(x) = 0,$$

ya que  $0 < z_-(x) < z_2(x) \rightarrow 0$  como  $x \rightarrow \infty$ , lo que implica que

$$1 < F_\mu(x_c, z_c) = \lim_{x \rightarrow \infty} F_\mu(x, z_-(x)) = 1 + u_\infty^2,$$

y mientras la densidad de partículas  $n(r) = n_0 z(x)$  converge a cero,  $u^r$  y  $v$  convergen a un valor diferente de cero cuando  $r \rightarrow \infty$ . Esto concluye la demostración del Teorema 1.

#### 4.2.4. El problema de correspondencia

En las subsecciones anteriores, discutimos las propiedades locales y globales del flujo dado un valor de la tasa de acreción  $\mu$  adimensional. En esta subsección, demostramos el Teorema 2, el cual afirma que para cualquier valor positivo dado de la densidad de partículas  $n_\infty > 0$  en el infinito, existe un único valor de  $\mu$  tal que la función  $F_\mu$  tiene un punto crítico cuya función  $n_+$  parametriza a la variedad inestable que satisface

$$\lim_{r \rightarrow \infty} n_+(r) = n_\infty.$$

Entonces deja  $z_\infty > 0$ . De acuerdo a la ecuación (4.42) necesitamos encontrar un  $\mu$  y un punto crítico  $(x_c, z_c)$  de  $F_\mu$  tal que

$$F_\mu(x_c, z_c) = f(z_c)^2 \frac{\sigma(x_c)}{1 - \nu(z_c)^2} = f(z_\infty)^2,$$

donde hemos usado la ecuación (4.30) en la primera igualdad. En lugar de  $\mu$ , parametrizamos el punto crítico con  $z_c$  y usamos el hecho que  $\nu(z_c)^2[1 + 4a(x_c)] = 1$  (ver Eq. (4.32)) con el fin de expresar  $z_c$  como una función de  $x_c$ . Por lo tanto, introducimos una función auxiliar  $\mathcal{L} : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definida como

$$\mathcal{L}(z) := f(z)^2 \frac{\sigma(x_c(z))}{1 - \nu(z)^2}, \quad z > 0, \quad (4.43)$$

con la función  $x_c : (0, \infty) \rightarrow (1, \infty)$  dada por

$$x_c(z) := a^{-1} \left( \frac{1}{4} [\nu(z)^{-2} - 1] \right), \quad z > 0. \quad (4.44)$$

donde la función inversa  $a : (1, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  existe de acuerdo al Lema 1. Nuestra meta es demostrar la existencia de un único  $z_c > 0$  tal que

$$\mathcal{L}(z_c) = F_\mu(x_c, z_c) = f(z_\infty)^2. \quad (4.45)$$

De acuerdo con el resultado del Lema 2(a), el lado derecho es estrictamente mayor que uno. El resultado sigue entonces:

**Lema 3** *La función  $\mathcal{L} : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definida en la ecuación (4.43) es estrictamente monótona creciente y satisface*

$$\lim_{z \rightarrow 0} \mathcal{L}(z) = 1, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \mathcal{L}(z) = \infty \quad (4.46)$$

*En particular, existe para cualquier  $f_\infty > 1$  un único  $z_c > 0$  tal que  $\mathcal{L}(z_c) = f_\infty^2$ .*

**Prueba.** Ver Apéndice B. □

Como consecuencia del Lema 3, dado un  $z_\infty > 0$ , existe un único  $z_c > 0$  tal que  $\mathcal{L}(z_c) = f(z_\infty)^2$ . Definiendo  $(x_c, z_c) := (x_c(z_c), z_c)$  y  $\mu := \pm \sqrt{x_c^5 \sigma'(x_c) z_c / 2}$  no es difícil verificar que la función  $F_\mu$  definida en (4.24) tiene un punto crítico en  $(x_c, z_c)$ . Dado que  $|\mu|$  depende únicamente de  $x_c$  y  $z_c$ , y  $x_c$  depende únicamente de  $z_c$ ,  $|\mu|$  es única. De acuerdo al Teorema 1 existe una única función diferenciable  $z_+ : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $z_+(x_c) = z_c$ ,  $F_\mu(x, z_+(x)) = F_\mu(x_c, z_c)$  para todo  $x > 1$ , el cual tiene límites regular cuando  $x \rightarrow 1$  y  $x \rightarrow \infty$ . Dado que

$$f\left(\lim_{x \rightarrow \infty} z_+(x)\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} F_\mu(x, z_+(x)) = F_\mu(x_c, z_c) = \mathcal{L}(z_c) = f(z_\infty)^2,$$

se sigue por la monotonicidad de  $f$  que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} z_+(x) = z_\infty,$$

como se esperaba.

### 4.3. Ejemplo y contra-ejemplos

En esta sección, discutimos varios ejemplos del flujos de acreción. Comenzamos con el estudio de dos casos límites en la condición (F2), que corresponden a un fluido perfecto con velocidad de sonido  $v_s = 0$  y  $v_s = c$ , respectivamente. En el primer caso,  $h = e_0$  es constante lo que implica que el gas no tiene energía interna ni presión, y la materia en este caso es polvo. El segundo caso describe un fluido "rígido", para el cual la entalpía es proporcional a la densidad de partículas,  $h(n) = kn$  para alguna constante positiva  $k$ . Aunque en ambos casos la función  $F$  definida en (4.11) no posee ningún punto crítico, aún existen soluciones no triviales, globalmente definidas las cuales discutiremos abajo. Luego consideramos tres ejemplos numéricos acerca de la acreción radial de un fluido politrópico. Los primeros dos ejemplos son para un fondo de Schwarzschild y con índice adiabático  $\gamma = 4/3$  y  $\gamma = 1.99$ , respectivamente. En el primer caso se obtiene la solución de Michel estándar mientras que en el segundo caso el cual viola la condición (F3) no hay una solución global. El tercer ejemplo tiene índice adiabático  $\gamma = 5/3$  y describe un flujo en un agujero negro deformado el cual viola la condición (M4). Aunque aún se tiene un flujo global, este tiene propiedades las cuales difieren del caso estándar donde todas nuestras suposiciones se cumplen. Finalmente, analizamos el fluido radial politrópico con  $1 < \gamma \leq 5/3$  en un agujero negro estático y esféricamente simétrico arbitrario satisfaciendo las condiciones (M1)–(M4). En este último caso, asumimos que la velocidad del sonido en el infinito  $v_\infty$  es mucho menor que la velocidad de la luz. En este caso, la esfera sónica está localizada lejos del horizonte de eventos del agujero negro,  $r_c \gg r_H$ , y los parámetros que caracterizan el flujo, como la tasa de acreción, tasas de compresión etc. pueden ser expandidas en potencias de  $v_\infty/c$ .

### 4.3.1. Acreción de polvo

Para el polvo, no hay energía interna entonces  $h(n) = e_0$  es igual a la energía de partículas en reposo, y en este caso la ecuación (4.11) y (4.13) dan la relación simple

$$\frac{\sigma(r)}{1 - \frac{v(r)^2}{c^2}} = \left( \frac{j_\varepsilon}{e_0 j_n} \right)^2 = \text{const.} \quad (4.47)$$

Tomando el límite  $r \rightarrow \infty$  y demandando que  $v(r) \rightarrow 0$  y  $\sigma(r) \rightarrow 1$  en este límite, los flujos de energía y partículas están relacionados entre sí por  $j_\varepsilon = e_0 j_n$ . Entonces, (4.47) da la siguiente expresión para la velocidad del fluido medida por un observador estacionario:

$$v(r) = -c\sqrt{1 - \sigma(r)}, \quad (4.48)$$

o  $v(r) = -\sqrt{2GM/r}$  para un agujero negro de Schwarzschild de masa  $M$ , la cual es justamente la expresión Newtoniana de una partícula libre cayendo radialmente con velocidad cero en el infinito. La densidad de partículas puede ser obtenida usando (4.13),

$$n(r) = \frac{|j_n|}{4\pi c r^2 \sqrt{1 - \sigma(r)}}, \quad (4.49)$$

o  $n(r) = |j_n|/(4\pi\sqrt{2GM}r^3)$  en el caso de Schwarzschild. La condición (M1) para la existencia de una masa positiva en el infinito implica que  $n(r) \rightarrow 0$  cuando  $r \rightarrow \infty$ , entonces la densidad de partículas en el infinito va a cero. De hecho, no hay soluciones de (4.47) con  $n_\infty > 0$ : la suposición  $n_\infty > 0$  lleva a  $j_\varepsilon/(e_0 j_n) = 1$  cuando se toma el límite  $r \rightarrow \infty$  en (4.11), y de esto se sigue que  $n(r)$  es de nuevo de la forma (4.49), llegando a una contradicción. Por lo tanto, la existencia de un flujo de acreción radial y estacionario de un fluido en un agujero negro no rotante requiere que la presión sea diferente de cero para una densidad de partículas positiva en el infinito.

También se puede ver de la ecuación (4.49) que no existe ninguna solución global si  $\sigma$  no es estrictamente menor que uno en cada punto.

### 4.3.2. Acreción de un fluido "rígido"

En este caso,  $h(n) = kn$  para alguna constant positive  $k$  y (4.11) resulta

$$n^2 \sigma(r) + \frac{\mu^2}{r^4} = \left( \frac{j_\varepsilon}{k j_n} \right)^2 = \text{const}, \quad (4.50)$$

donde  $\mu = j_n/(4\pi c)$ . Tomando el límite  $r \rightarrow \infty$  y asumiendo de nuevo que  $\sigma(r) \rightarrow 1$  en este límite  $n_\infty = j_\varepsilon/(k j_n)$ , el cual fija la relación entre los flujos de energía y partículas. Después, tomando el límite  $r \rightarrow r_H$  en (4.50) da  $\mu = -r_H^2 n_\infty$ , la cual determina los flujos de energía y partículas como

$$j_n = -4\pi c r_H^2 n_\infty, \quad j_\varepsilon = -4\pi c k (r_H n_\infty)^2. \quad (4.51)$$

Con estas contantes (4.50) da la expresión

$$n(r) = n_\infty \sqrt{\frac{1 - \frac{r_H^4}{r^4}}{\sigma(r)}}. \quad (4.52)$$

para la densidad de partículas. Usando la regla de l'Hôpital, obtenemos la tasa de compresión

$$\frac{n(r_H)}{n_\infty} = \frac{2}{\sqrt{r_H \sigma'(r_H)}} \quad (4.53)$$

entre las densidades de partículas en el horizonte y en el infinito, la cual es finita si se impone la condición (M2). Para el caso de Schwarzschild,

$$n(r) = n_\infty \sqrt{\left(1 + \frac{2m}{r}\right) \left(1 + \frac{4m^2}{r^2}\right)}, \quad (4.54)$$

y la tasa de compresión es 2. Sin embargo, esta podría ser considerablemente menor o mayor para agujeros negros que exhiben un comportamiento diferente cerca del horizonte de eventos. Finalmente, la velocidad medida por un observador estático es obtenida de (4.13) y (4.52):

$$v(r) = -c \frac{r_H^2}{r^2}, \quad (4.55)$$

la cual decae como  $r^{-2}$  (a diferencia de  $r^{-1/2}$  en el caso de polvo).

### 4.3.3. Acreción con una ecuación de estado politrópica

Como último ejemplo, consideramos la ecuación de estado politrópica, para la cual

$$h(n) = e_0 + \frac{\gamma k}{\gamma - 1} n^{\gamma-1} \quad (4.56)$$

con  $k > 0$  una constante positiva,  $e_0$  la energía en reposo de las partículas y el índice adiabático  $\gamma > 1$ . En este caso, la condición (F1) se satisface siempre que  $e_0 > 0$ . La velocidad del sonido es

$$v_s(n) = c \sqrt{\frac{\partial \log h}{\partial \log n}} = c \sqrt{\gamma - 1} \sqrt{\frac{n^{\gamma-1}}{n^{\gamma-1} + \frac{(\gamma-1)e_0}{\gamma k}}}, \quad (4.57)$$

la cual satisface la condición (F2) siempre que  $1 < \gamma \leq 2$ . La derivada del logaritmo de la velocidad es

$$W(n) = \frac{\partial \log v_s}{\partial \log n} = \frac{\gamma - 1}{2} \frac{1}{1 + \frac{\gamma k}{(\gamma-1)e_0} n^{\gamma-1}}, \quad (4.58)$$

que satisface el requerimiento en (F3), siempre que  $1 < \gamma \leq 5/3$ . Definiendo

$$n_0 := \left[ \frac{(\gamma - 1)e_0}{\gamma k} \right]^{1/(\gamma-1)} \quad (4.59)$$

obtenemos, en términos de cantidades adimensionales,  $z = n/n_0$ , y

$$f(z) = \frac{h(n)}{e_0} = 1 + z^{\gamma-1}, \quad (4.60)$$

$$\nu(z) = \frac{v_s(n)}{c} = \sqrt{\gamma-1} \sqrt{\frac{z^{\gamma-1}}{1+z^{\gamma-1}}}, \quad (4.61)$$

$$w(z) = \frac{\gamma-1}{2(1+z^{\gamma-1})}. \quad (4.62)$$

Ahora, proveemos tres ejemplos que muestran el conjunto de curvas de nivel de la función  $F_\mu$  definida en (4.24). Los primeros dos ejemplos se muestran en la figura 4.2 y se refieren al fondo de un agujero negro de Schwarzschild. En el primer ejemplo,  $\mu = -2$  y  $\gamma = 4/3$ , y hay un único punto crítico hiperbólico localizado en  $(x_c, z_c) = (2, 20, 1, 23)$  a través del cual las curvas de nivel de  $F_\mu$  se cruzan una con otra. Sólo una de estas dos curvas se extiende desde el horizonte hasta el infinito, y describe el flujo de acreción físico. En el segundo ejemplo,  $\mu = -0,33$  y  $\gamma = 1,99$ , el cual viola la condición (F3). En este caso, hay dos puntos críticos, uno correspondiente al punto de silla y el otro a un extremo local de  $F_\mu$ . El lado derecho de la figura 4.2 sugiere que las curvas de nivel de  $F_\mu$  a través del punto de silla conectan entre sí en lugar de extenderse a la región asintótica  $x \rightarrow \infty$ . Entonces, no hay un flujo global para este caso. Recientemente, tales soluciones del flujo de acreción tipo “homoclínicas” han sido encontradas en el contexto cosmológico, ver las referencias [19, 20].

El tercer ejemplo, que se muestra en la figura 4.3, tiene valores de parámetros  $\mu = -1$  y  $\gamma = 5/3$  y con un fondo métrico descrito por un agujero negro deformado, tal que

$$\sigma(x) = 1 - \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{8}{x^3} - \frac{4}{x^4}, \quad x \geq 1. \quad (4.63)$$

En este caso, las condiciones (M1)–(M3) en la métrica se satisfacen, sin embargo se viola la condición (M4) sobre la métrica. Un análisis de la función  $\mathcal{F}_\mu(x)$  definida en (4.32) muestra la existencia de tres puntos críticos, dos correspondientes a un punto de silla de  $F_\mu$  y un extremo local. A diferencia del caso anterior con  $\gamma = 2$  existe un flujo global de acreción; sin embargo, debido a la presencia del valor extremo, las características de este flujo son diferentes de la situación estándar donde todas las condiciones (M1)–(M4) se satisfacen. Por ejemplo, la densidad de partículas deja de ser una función monótona creciente en  $r$ .

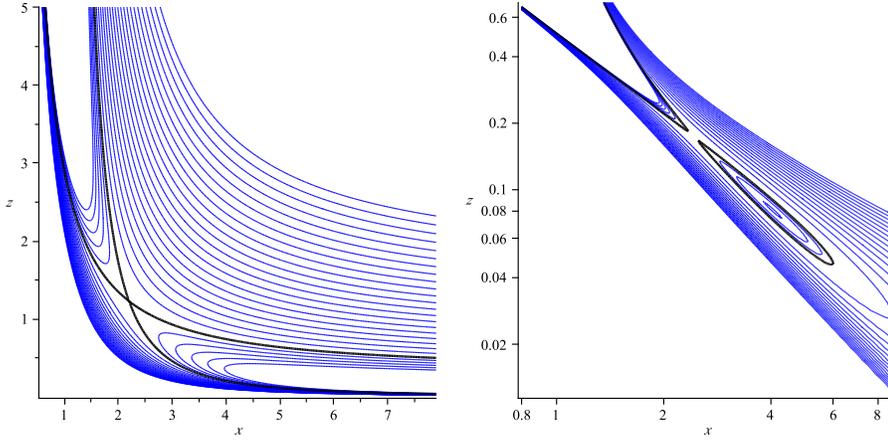


Figura 4.2: (de arXiv:1501.01641 (2015)) El conjunto de curvas de nivel de  $F_\mu$  para un fluido politrópico acretado por un agujero negro de Schwarzschild. El conjunto de curvas de nivel correspondientes al punto crítico se muestra con una línea negra gruesa. Gráfica izquierda: En este caso,  $\gamma = 4/3$  y existe un único punto crítico ubicado en  $(x_c, z_c) = (2, 20, 1, 23)$  correspondiente al valor del parámetro  $\mu = -2$ . La curva negra gruesa es la unión de las curvas de nivel  $(r, n_+(r))$  y  $(r, n_-(r))$  descritas en el Teorema 1, y la primera curva la cual se extiende desde el horizonte ( $x = 1$ ) hasta la región asintótica ( $x \rightarrow +\infty$ ) describe el flujo de Michel. Gráfica derecha: En este caso,  $\gamma = 1,99$  y existen dos puntos críticos para  $\mu = -0,33$ , uno correspondiente al punto de silla de  $F_\mu$  y esta localizado en  $(x_c, z_c) = (2,50, 0,17)$ , mientras que el otro es un extremo local de  $F_\mu$  el cual está en  $(x, z) = (3,7, 0,09)$ . En este caso, las dos curvas de nivel a través del punto de silla no se extienden hasta el infinito. En lugar de ello, se envuelven alrededor del extremo local y se conectan una con la otra. En este caso, no existe una solución global definida de flujo radial.

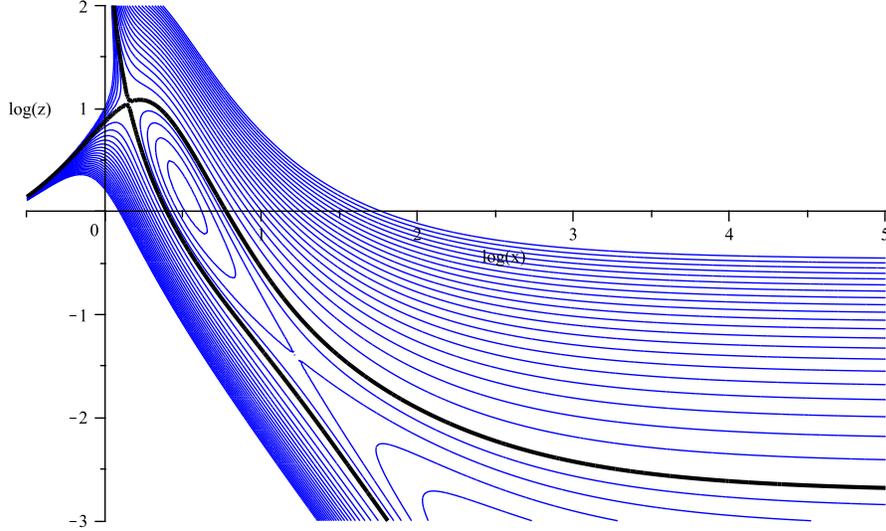


Figura 4.3: (de arXiv:1501.01641 (2015)) Curvas de nivel de la función  $F_\mu$  para un fluido politrópico con índice adiabático  $\gamma = 5/3$  y  $\mu = -1$  acretado por un agujero negro bastante deformado descrito por (4.63). En este caso, hay tres puntos críticos, dos de los cuales están localizados en  $(x, z) = (1,16, 2,88)$  y  $(x, z) = (3,42, 0,24)$ , respectivamente, y corresponde a puntos de silla, y uno localizado en  $(x, z) = (1,66, 1,19)$  el cual corresponde a un extremo local de  $F_\mu$ . La curva de nivel correspondiente al punto de silla más cercana al horizonte se muestra con la línea negra gruesa. La rama que se extiende desde el horizonte hasta el infinito describe un flujo de acreción radial transónico. Sin embargo, como se puede ver de la gráfica, contrario al caso estándar donde la condición (M4) se cumple, en este caso la densidad de partículas no decae monótonamente en  $r$ , pero alcanza un valor máximo justo antes de que el flujo pase a través del punto crítico y se vuelva supersónico.

#### 4.3.4. Expansiones para la velocidad del sonido $v_\infty \ll 1$

En esta subsección, consideramos la situación donde la esfera sónica se encuentra en la región donde el campo gravitacional es débil, esto es,  $r_c \gg r_H$ . Además, asumimos que en la región asintótica la velocidad del sonido  $v_\infty$  es mucho menor que la velocidad de la luz, tal que  $\nu_\infty := v_\infty/c \ll 1$ . Por último, asumimos que el fluido está descrito por una ecuación de estado politrópica, como en la subsección anterior. Con estas suposiciones, podemos expandir la función métrica

$$\sigma(x) = 1 - \frac{\sigma_1}{x} - \frac{\sigma_2}{x^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^3}\right), \quad \sigma_1 = \frac{2m}{r_H}, \quad (4.64)$$

para  $x \geq x_c$ , y también podemos expandir las cantidades del fluido en términos de parámetros pequeños  $\nu_\infty$ . Nuestro primer objetivo es expresar las cantidades  $x_c$ ,  $z_c$ ,  $\nu_c$ , y  $\mu$  caracterizando el flujo en términos de  $\nu_\infty$ .

Empezamos con la densidad de partículas  $z_c$  en el punto crítico y la velocidad del sonido  $\nu_\infty$  en el infinito. Esta relación está determinada por las ecuaciones (4.43,4.45), es decir,

$$\mathcal{L}(z_c) = f(z_c)^2 \frac{\sigma(x_c(z_c))}{1 - \nu(z_c)^2} = f(z_\infty)^2, \quad (4.65)$$

con las funciones  $f$  y  $\nu$  dadas por (4.60) y (4.61), y la función  $x_c$  definida en (4.44). Usando la expansión en (4.64) encontramos la siguiente expansión para  $x_c(z_c)$ :

$$\frac{\sigma_1}{x_c(z_c)} = 4(\gamma - 1)z_c^{\gamma-1} \left\{ 1 - \left[ 3\gamma - 2 + 8(\gamma - 1) \frac{\sigma_2}{\sigma_1^2} \right] z_c^{\gamma-1} + \mathcal{O}\left(z_c^{2(\gamma-1)}\right) \right\}. \quad (4.66)$$

Sustituyendo estos resultados en (4.65) encontramos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(z_c) &= 1 + (5 - 3\gamma)z_c^{\gamma-1} + \left[ 1 + 3(\gamma - 1)(3\gamma - 4) + 16(\gamma - 1)^2 \frac{\sigma_2}{\sigma_1^2} \right] z_c^{2(\gamma-1)} \\ &+ \mathcal{O}\left(z_c^{3(\gamma-1)}\right). \end{aligned} \quad (4.67)$$

De otro lado, a partir de (4.61) obtenemos

$$z_\infty = \left( \frac{\nu_\infty^2}{\gamma - 1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \left[ 1 + \frac{\nu_\infty^2}{(\gamma - 1)^2} + \mathcal{O}(\nu_\infty^4) \right] \quad (4.68)$$

para  $\nu_\infty \ll 1$ , y aquí

$$\begin{aligned} f(z_\infty)^2 &= (1 + z_\infty^{\gamma-1})^2 = \left( 1 + \frac{\nu_\infty^2}{\gamma - 1 - \nu_\infty^2} \right)^2 = 1 + 2 \frac{\nu_\infty^2}{\gamma - 1} + 3 \frac{\nu_\infty^4}{(\gamma - 1)^2} \\ &+ \mathcal{O}(\nu_\infty^6). \end{aligned} \quad (4.69)$$

Comparando (4.67) con (4.69) concluimos que para  $1 < \gamma \leq 5/3$  la solución  $z_c$  de la ecuación  $\mathcal{L}(z_c) = f(z_\infty)^2$ , la cual es única por la monotonicidad de  $\mathcal{L}$ , debe satisfacer  $z_c \ll 1$ . Dependiendo de si  $1 < \gamma < 5/3$  o  $\gamma = 5/3$  obtenemos el siguiente comportamiento para las cantidades  $z_c$ ,  $x_c$ ,  $\nu_c$ ,  $z_H$ ,  $z_\infty$  y  $\mu$  en términos de  $\nu_\infty \ll 1$ :

■ Caso I ( $1 < \gamma < 5/3$ ):

$$z_c = \left[ \frac{2\nu_\infty^2}{(5-3\gamma)(\gamma-1)} \right]^{\frac{1}{\gamma-1}} [1 + A\nu_\infty^2 + \mathcal{O}(\nu_\infty^4)], \quad (4.70)$$

$$x_c = \frac{5-3\gamma}{8} \frac{\sigma_1}{\nu_\infty^2} [1 + B\nu_\infty^2 + \mathcal{O}(\nu_\infty^4)], \quad (4.71)$$

$$\nu_c = \sqrt{\frac{2}{5-3\gamma}} \nu_\infty [1 + C\nu_\infty^2 + \mathcal{O}(\nu_\infty^4)], \quad (4.72)$$

$$|\mu| = \frac{\sigma_1^2}{4} \lambda \left( \frac{\nu_\infty^{5-3\gamma}}{\gamma-1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} [1 + D\nu_\infty^2 + \mathcal{O}(\nu_\infty^4)], \quad (4.73)$$

$$z_H = \frac{\sigma_1^2}{4} \lambda \left( \frac{\nu_\infty^{5-3\gamma}}{\gamma-1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \left[ 1 + \left( D - \frac{1}{\gamma-1} \right) \nu_\infty^2 + \mathcal{O}(\nu_\infty^4) \right] \quad (4.74)$$

con

$$\lambda = 2^{\frac{9-7\gamma}{2(\gamma-1)}} (5-3\gamma)^{-\frac{5-3\gamma}{2(\gamma-1)}}$$

y donde los coeficientes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  son definidos por

$$A := \frac{1}{(5-3\gamma)^2(\gamma-1)^2} \left[ 12 - \frac{1}{2}(3\gamma+1)^2 - 32(\gamma-1)^2 \frac{\sigma_2}{\sigma_1^2} \right], \quad (4.75)$$

$$B := \frac{2}{(5-3\gamma)(\gamma-1)} \left[ 3\gamma - 2 + 8(\gamma-1) \frac{\sigma_2}{\sigma_1^2} \right] - (\gamma-1)A \quad (4.76)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{(5-3\gamma)^2} \left[ 9(7-3\gamma) + 32(3-\gamma) \frac{\sigma_2}{\sigma_1^2} \right], \quad (4.77)$$

$$C := \frac{1}{2}(\gamma-1)A - \frac{1}{(5-3\gamma)(\gamma-1)} \quad (4.78)$$

$$= -\frac{1}{4} \frac{1}{(5-3\gamma)^2} \left[ 3(3\gamma+1) + 64(\gamma-1) \frac{\sigma_2}{\sigma_1^2} \right], \quad (4.79)$$

$$D := A + \frac{3}{2}B + \frac{8}{5-3\gamma} \frac{\sigma_2}{\sigma_1^2} \quad (4.80)$$

$$= \frac{1}{4} \frac{1}{(5-3\gamma)(\gamma-1)^2} \left[ 27\gamma^2 - 66\gamma + 47 + 64(\gamma-1)^2 \frac{\sigma_2}{\sigma_1^2} \right] \quad (4.81)$$

Aquí,  $x_c := x_c(z_c)$  y  $\nu_c := \nu(z_c)$  han sido calculadas sustituyendo la expansión de  $z_c$  dentro de (4.66) y (4.61), respectivamente. La tasa de acreción adimensional es obtenida sustituyendo la expansión para  $x_c$  y  $z_c$  dentro de la expresión  $2|\mu| = \sqrt{x_c^5 \sigma'(x_c) z_c}$ . La densidad  $z_H$  en el horizonte es calculada desde la relación entre  $z_H$  y  $z_\infty$  la cual se sigue de

$$(1 + z_H^{\gamma-1})^2 \frac{\mu^2}{z_H^2} = F_\mu(1, z_H) = f(z_\infty)^2 = (1 + z_\infty^{\gamma-1})^2,$$

que conduce a la ecuación

$$\frac{|\mu|}{z_H} (1 + z_H^{\gamma-1}) = 1 + z_\infty^{\gamma-1} = 1 + \frac{\nu_\infty^2}{\gamma-1} + \frac{\nu_\infty^4}{(\gamma-1)^2} + \mathcal{O}(\nu_\infty^6). \quad (4.82)$$

Dado que la tasa de acreción adimensional  $|\mu|$  converge a cero tan rápido como  $\nu_\infty^{(5-3\gamma)/(\gamma-1)}$  para  $\nu_\infty \rightarrow 0$ ,  $z_H$  debe converger a cero a la misma tasa. Con esta observaciones en mente, la expansión de  $z_H$  en términos de  $\nu_\infty$  se sigue fácilmente de (4.82).

- Caso II ( $\gamma = 5/3$ ):

$$z_c = \left(\frac{\nu_\infty}{l}\right)^{3/2} [1 + \mathcal{O}(\nu_\infty)], \quad (4.83)$$

$$x_c = \frac{3}{8}\sigma_1 \frac{l}{\nu_\infty} [1 + \mathcal{O}(\nu_\infty)], \quad (4.84)$$

$$\nu_c = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{\nu_\infty}{l}} [1 + \mathcal{O}(\nu_\infty)], \quad (4.85)$$

$$|\mu| = \frac{\sigma_1^2}{2} \left(\frac{3}{8}\right)^{3/2} [1 + \mathcal{O}(\nu_\infty)], \quad (4.86)$$

$$z_H = z_{H0} [1 + \mathcal{O}(\nu_\infty)], \quad (4.87)$$

donde

$$l := \sqrt{1 + \left(\frac{4}{3}\right)^3 \frac{\sigma_2}{\sigma_1^2}}, \quad (4.88)$$

y  $z_{H0}$  es determinada únicamente por

$$z_{H0} - 3\beta(z_{H0}^{2/3} + 1) = 0, \quad \beta := \frac{\sigma_1^2}{6} \left(\frac{3}{8}\right)^{3/2} \quad (4.89)$$

cuya solución puede ser escrita explícitamente por

$$z_{H0} = \left(\beta + w + \frac{\beta^2}{w}\right)^3, \quad w = \beta^{1/3} \left(\beta^2 + \frac{3}{2} + \sqrt{3}\sqrt{\beta^2 + \frac{3}{4}}\right)^{1/3}. \quad (4.90)$$

Una gráfica de  $z_{H0}$  en función de  $\sigma_1$  se muestra en la Figura 4.4. En contraste al caso I, aquí la tasa de acreción converge a un valor finito positivo como  $\nu_\infty \rightarrow 0$  y, en consecuencia, se sigue de (4.82) que  $z_H$  también debe converger a un valor finito positivo  $z_{H0}$  cuando  $\nu_\infty \rightarrow 0$ . Este valor es determinado por la ecuación (4.89) la cual se sigue de (4.82) tomando el límite  $\nu_\infty \rightarrow 0$ . En el caso de Schwarzschild,  $\ell = 1$  y  $z_{H0} \simeq 0,14677$ .

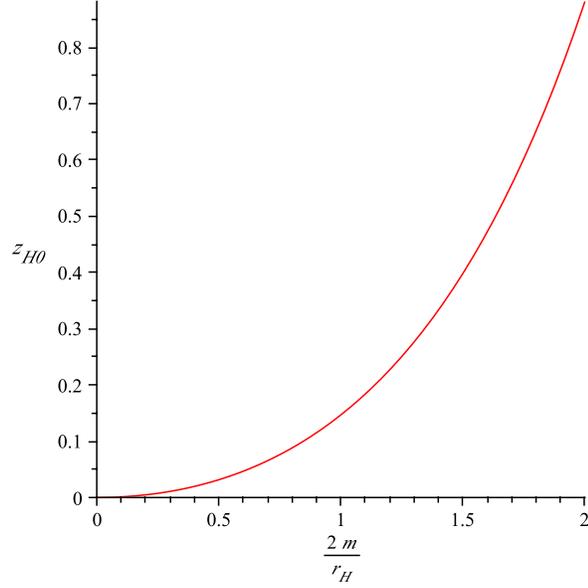


Figura 4.4: (de arXiv:1501.01641 (2015)) El parámetro  $z_{H0}$  vs.  $\sigma_1 = 2m/r_H$ .

Vemos que en ambos casos el punto crítico está localizado muy lejos del horizonte de eventos,  $r_c \gg r_H$  cuando  $\nu_\infty \ll 1$ , lo cual es consistente con nuestras hipótesis de que el punto crítico se encuentra en la región de campo débil. Por último, calculamos la tasa de acreción  $j_\varepsilon$  y las tasas de compresión  $n_c/n_\infty$  y  $n_H/n_\infty$  que sufre el gas cuando cae desde el infinito a través del punto crítico en el agujero negro. Estas cantidades se pueden obtener mediante la combinación de las expansiones anteriores para  $\mu$ ,  $z_c$  y  $z_H$  con (4.68). El resultado es

- Caso I ( $1 < \gamma < 5/3$ ):

$$j_\varepsilon = 4\lambda\pi c e_0 \left(\frac{GM}{c^2}\right)^2 n_\infty \nu_\infty^{-3} \left[1 + \left(D + \frac{\gamma-2}{(\gamma-1)^2}\right) \nu_\infty^2 + \mathcal{O}(\nu_\infty^4)\right], \quad (4.91)$$

$$\frac{z_c}{z_\infty} = \left(\frac{2}{5-3\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \left[1 + \left(A - \frac{1}{(\gamma-1)^2}\right) \nu_\infty^2 + \mathcal{O}(\nu_\infty^4)\right], \quad (4.92)$$

$$\frac{z_H}{z_\infty} = \lambda \frac{\sigma_1^2}{4} \nu_\infty^{-3} \left[1 + \left(D + \frac{\gamma-2}{(\gamma-1)^2}\right) \nu_\infty^2 + \mathcal{O}(\nu_\infty^4)\right]. \quad (4.93)$$

- Caso II ( $\gamma = 5/3$ ):

$$j_\varepsilon = \pi c e_0 \left( \frac{GM}{c^2} \right)^2 n_\infty \nu_\infty^{-3} [1 + \mathcal{O}(\nu_\infty)], \quad (4.94)$$

$$\frac{z_c}{z_\infty} = \left( \frac{2}{3l} \right)^{3/2} \nu_\infty^{-3/2} [1 + \mathcal{O}(\nu_\infty)], \quad (4.95)$$

$$\frac{z_H}{z_\infty} = \left( \frac{2}{3} \right)^{3/2} z_{H0} \nu_\infty^{-3} [1 + \mathcal{O}(\nu_\infty)], \quad (4.96)$$

donde hemos usado  $r_H \sigma_1 = 2GM/c^2$  con  $M$  la masa del agujero negro. Vemos que en ambos casos la tasa de acreción escalan como la fórmula de Bondi  $\dot{M} = CM^2 n_\infty \nu_\infty^{-3}$  y que  $z_H$  es mayor que  $z_\infty$  por un factor que es proporcional a  $\nu_\infty^{-3}$ , lo que implica que tasas de compresión significativas se alcanzan durante el proceso de acreción. Por otro lado, en el caso I la tasa de compresión en la esfera sónica es también independiente de  $\nu_\infty$  para valores pequeños de  $\nu_\infty$ , mientras que escala como  $\nu_\infty^{-3/2}$  en el caso II. En ambos casos la tasa de compresión en el horizonte se vuelve más grande como  $\sigma_1 = 2m/r_H$  aumenta. Este resultado es de esperar ya que, entre más cercana se encuentre la materia del agujero negro, su presión va a ser mayor. En otras palabras, la materia que está siendo acretada se encuentra confinada en una esfera de radio de área menor, por lo que su volumen disminuye.

En resumen, en este capítulo estudiamos el caso más ideal de acreción de materia en un agujero negro no rotante, el flujo de Michel. Aquí, el flujo es radial y estacionario y la materia es acretada radialmente. Asumimos que la densidad del fluido es suficientemente baja tal que su auto-gravedad es despreciable. Una diferencia con el trabajo hecho por Michel, es que Michel en su trabajo asume la existencia de un punto crítico, nosotros en este trabajo demostramos la existencia de este punto crítico.

Nuestro resultado principal es el siguiente: dada una ecuación de estado y una métrica que cumplan los requerimientos que asumimos, existe para cada densidad de partículas positiva  $n_\infty > 0$  en el infinito una única solución esférica y estacionaria de las ecuaciones de Euler relativistas. Esta solución es regular en y afuera del horizonte. Esta solución describe un flujo transónico, el cual es supersónico cerca del agujero y subsónico en la región asintótica. También calculamos las tasas de acreción y de compresión del fluido en el horizonte de eventos y en la esfera sónica y su dependencia, si es el caso, con la métrica de fondo. Para esto, asumimos una ecuación de estado politrópica y que la velocidad del sonido  $v_\infty$  del fluido en el infinito es mucho más pequeña que la velocidad de la luz  $c$ .

En lo que sigue, vamos a ir un paso más adelante. Vamos a analizar pequeñas perturbaciones acústicas esféricas y no esféricas del flujo de Michel, y mostramos que estas exhiben oscilaciones cuasi-normales. Estas oscilaciones cuasi-normales, son las frecuencias asociadas a los modos cuasi-normales. Los modos cuasi-normales son soluciones particulares a la ecuación de onda que describe la propagación de las perturbaciones acústicas.



## Capítulo 5

# Modos cuasi-normales

En la mecánica, conocemos los modos normales de un sistema cerrado que está oscilando. Estos modos se refieren a un patrón de movimiento en el que todas las partes del sistema se mueven con la misma frecuencia, y donde no hay pérdida de energía. Un ejemplo de estos sistemas, son las vibraciones de las cuerdas en una guitarra, donde se supone la fricción se puede despreciar. Un segundo ejemplo, es una partícula cuántica en una caja (pozo de potencial infinito) donde se supone que la evolución es unitaria. En estos sistemas la solución total a la ecuación de evolución, la cual describe la perturbación lineal inicial del sistema, se puede expresar como la superposición de los modos normales. En este caso, las frecuencias asociadas a los modos normales son puramente oscilatorias.

En el caso donde se tienen sistemas abiertos, que son sistemas que pierden energía, se tiene como consecuencia que las frecuencias ahora son complejas porque los modos decaen en el tiempo. Esto es similar o se puede ver como las vibraciones que emite una campana al ser golpeada. Otro ejemplo de estos sistemas abiertos es, un campo escalar propagándose sobre un agujero negro de Schwarzschild. La energía para estos sistemas se pierde por medio de la radiación tanto en el infinito nulo<sup>1</sup> como en el horizonte de eventos. Para este problema, la solución a la ecuación de onda no se puede expresar como una superposición de los modos. Lo que ocurre aquí cuando se modela numéricamente es: Se evoluciona un campo escalar sobre un fondo de Schwarzschild, es decir, se especifica una perturbación inicial. Un observador estático que registra la señal emitida con respecto al tiempo, primero observa un pulso inicial y luego le sigue un "ringdown" (en el cual la amplitud de las oscilaciones baja continuamente) con una frecuencia que oscila en el tiempo y una frecuencia de decaimiento, las cuales forman la frecuencia compleja. Estas frecuencias complejas (las frecuencias durante el "ringdown") asociadas a los modos, describen la fase del "ringdown" después del cual sigue, para tiempos largos, un decaimiento del "ringdown" más lento descrito por un decaimiento polinomial en el tiempo.

---

<sup>1</sup>En palabras, el infinito nulo es la región asintótica donde llegan las geodésicas nulas salientes.

Entonces, se definen los modos cuasi-normales, como modos que oscilan en el tiempo con una amplitud que decae exponencialmente. Es justo el decaimiento polinomial en el tiempo el que no permite ver la solución como una superposición de modos. Esto es, el tail (de las amplitudes de las oscilaciones) que queda después del ringdown" la que no permite expresar la solución de tal forma (como la superposición de modos). Para más detalles sobre modos cuasi-normales, ver [21, 22, 23, 24, 25, 26, 27].

Para explicar el contexto en el cual pueden ocurrir los modos cuasi-normales, empezamos con un modelo muy sencillo: la ecuación de onda en una dimensión con una barrera de potencial  $U(x)$ ,

$$[\partial_t^2 - \partial_x^2 + U(x)] \Phi = 0, \quad (5.1)$$

donde  $U(x) \geq 0$  es un potencial positivo,  $L^1$ -integrable, que decae a cero rápidamente cuando  $x \rightarrow \pm\infty$ . Por ejemplo,  $0 < U(x) \leq k/(1+x^2)$ ,  $k = \text{const}$ .

Consideramos ahora la ecuación de modos correspondiente a la ecuación (5.1), la cual es obtenida por considerar soluciones particulares de la forma  $\Phi(t, x) = e^{st}\phi(s, x)$ :

$$[s^2 - \partial_x^2 + U(x)] \phi = 0, \quad (5.2)$$

la cual se puede ver como la "ecuación de Schrödinger" independiente del tiempo con energía  $E = -s^2$ . Aquí  $s$  es una frecuencia compleja dada por  $s = \sigma + i\omega$ , con  $\sigma$  la tasa de decaimiento exponencial y  $\omega$  la frecuencia oscilatoria.

Para  $x \rightarrow +\infty$  la ecuación (5.2) se reduce a

$$-\partial_x^2 \phi(x) \approx -s^2 \phi(x),$$

$$\begin{aligned} \text{con solución} \quad \phi(x) &\approx Ae^{-sx} + Be^{sx} \\ \text{correspondiente a} \quad \Phi(t, x) &\approx Ae^{s(t-x)} + Be^{s(t+x)} \end{aligned} \quad (5.3)$$

donde  $A$  y  $B$  son constantes. Vemos que la solución  $\Phi(t, x)$  en (5.3), tienen una onda saliente y una onda entrante en la región asintótica  $x \rightarrow +\infty$ . Donde la solución saliente va como  $e^{s(t-x)}$ .

De manera similar, para  $x \rightarrow -\infty$  la ecuación (5.2) se reduce a

$$-\partial_x^2 \phi(x) \approx -s^2 \phi(x),$$

$$\begin{aligned} \text{con solución} \quad \phi(x) &\approx Ce^{-sx} + De^{sx} \\ \text{correspondiente a} \quad \Phi(t, x) &\approx Ce^{s(t-x)} + De^{s(t+x)} \end{aligned} \quad (5.4)$$

donde  $C$  y  $D$  son constantes, y onda saliente  $e^{s(t+x)}$  en la región asintótica  $x \rightarrow -\infty$ . Fijando los coeficientes  $B = 0$  y  $C = 0$  obtenemos las soluciones salientes a la ecuación (5.2) en las regiones asintóticas.  $\phi$  satisface las siguientes condiciones de frontera para  $\text{Re}(s) > 0$ :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{sx} \phi(s, x) = 1, \quad (5.5)$$

y

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{sx} \phi'(s, x) = -s, \quad (5.6)$$

y para cada  $x \in \mathbb{R}$  fija las funciones  $\phi(\cdot, x)$  y  $\phi'(\cdot, x)$  son analíticas en el dominio  $\text{Re}(s) > 0$  [28]. Entonces, las soluciones locales  $\Phi$  en  $x \rightarrow \pm\infty$  a la ecuación (5.1), son dadas por  $\Phi_{\pm}(t, x) \approx e^{st} \phi_{\pm}(s, x) \approx e^{s(t \mp x)}$ .

Antes de definir qué son los modos cuasi-normales, primero definamos el determinante de Wronski, el cual es independiente de  $x$ : el Wronskiano de dos funciones  $\psi_+$  y  $\psi_-$  que son soluciones a una misma ecuación se define como<sup>2</sup>

$$W(s, \psi_+, \psi_-) := \det \begin{pmatrix} \psi_+ & \psi_- \\ \psi_+' & \psi_-' \end{pmatrix}. \quad (5.7)$$

A continuación, definimos los modos cuasi-normales:

**Definición 1** *Un modo cuasi-normal es una solución  $\phi(s, x)$  de (5.2) tal que*

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{sx} \phi(s, x) &= \alpha \neq 0, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-sx} \phi(s, x) &= \beta \neq 0, \end{aligned} \quad (5.8)$$

esto es,

$$\phi(s, x) = \begin{cases} \alpha \phi_+(s, x) = \alpha e^{-sx} & x \rightarrow +\infty \\ \beta \phi_-(s, x) = \beta e^{+sx} & x \rightarrow -\infty, \end{cases} \quad (5.9)$$

es decir,  $\phi$  es saliente tanto en  $x \rightarrow +\infty$  como  $x \rightarrow -\infty$ .

Nota: Entonces, *modo cuasi-normales* ocurren para valores particulares de la frecuencia  $s$  para los cuales  $\phi_+(s, x)$  es proporcional a  $\phi_-(s, x)$  salientes tanto en el horizonte de eventos y en el infinito espacial. Esto no puede ocurrir para  $\text{Re}(s) = \sigma > 0$ . Para  $\text{Re}(s) > 0$ , se tendrían modos que crecen exponencialmente en el tiempo, y debido a que el potencial  $U(x) \geq 0$  en (5.2), se puede demostrar, esto lleva a una contradicción con la conservación de la energía<sup>3</sup>.

Para decaimiento, necesitamos  $\sigma < 0$ . Entonces, hay que hacer *la continuación analítica* desde  $\sigma \geq 0$  hacia  $\sigma < 0$ .

<sup>2</sup>Notar que  $w(s)$  es independiente de  $x$  ya que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} W[\phi_+, \phi_-](s) &= \phi_+(s, x) \phi_-''(s, x) - \phi_+''(s, x) \phi_-(s, x) \\ &= \phi_+(s, x)(s^2 + U(x)) \phi_-(s, x) - (s^2 + U(x)) \phi_+(s, x) \phi_-(s, x) = 0 \end{aligned}$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ , implicando que  $W[\phi_+, \phi_-](s)$  es constante en  $x$ .

<sup>3</sup>Para este problema con  $U(x) \geq 0$  la energía  $E(t)$  se conserva. Donde la energía es dada por:

$$E(t) := \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \left| \frac{\partial \phi(t, x)}{\partial t} \right|^2 + \left| \frac{\partial \phi(t, x)}{\partial x} \right|^2 + U(x) |\phi(t, x)|^2 \right] dx$$

Entonces,  $W(s)$  también posee una continuación analítica para  $\text{Re}(s) < 0$ . Por lo anterior, de la ecuación (5.9), un modo cuasi-normal es tal que  $W(s, \phi_+, \phi_-) = 0$ , es decir, donde  $\phi_+$  y  $\phi_-$  son linealmente dependientes y entonces, se obtiene una solución  $\phi$  a la ecuación (5.2). Esto ocurre,  $W(s, \phi_+, \phi_-) = 0$ , sólo para  $\text{Re}(s) < 0$ .

Como vamos a ver en la sección 5.4, para calcular las frecuencias  $s = \sigma + i\omega$  asociadas a los modos cuasi-normales vamos a usar un nuevo método. Este método consiste en hacer el "matching" de dos soluciones locales  $\phi_+(s, x)$  y  $\phi_-(s, x)$  de la ecuación (5.2). Para  $\text{Re}(s) > 0$ , estas soluciones satisfacen las condiciones (5.8) en  $x \rightarrow \pm\infty$  y dependen analíticamente de  $s$ .

El nuevo ingrediente de nuestro método consiste en determinar la *continuación analítica* de  $\phi_+(s, x)$  y  $\phi_-(s, x)$  para  $\text{Re}(s) < 0$  y entonces, encontrar las frecuencias complejas  $s$  para las cuales  $\phi_+(s, r)$  y  $\phi_-(r)$  son linealmente dependientes. Obteniendo entonces, una solución a la ecuación (5.2). Ejemplos donde esto se cumple es en la barrera de potencial sección 5.1 y, el caso de un campo escalar propagándose en un fondo de Schwarzschild 5.2.

Nótese que para el caso de la ecuación de Schrödinger la parte real de  $s$  es igual a cero  $\sigma = 0$ . En este caso sólo se tiene la parte oscilatoria de las frecuencias.

Veamos ahora el primer ejemplo de cómo encontrar las frecuencias asociadas a los modos cuasi-normales en un problema dado. Consideramos primeramente el problema de la barrera de potencial cuadrada que se estudia en la mecánica cuántica. Donde en la mecánica cuántica, la energía  $E = \omega\hbar$ , con  $\omega \in \mathbb{R}$ . Para nuestro problema,  $E = -s^2$  con  $s \in \mathbb{C}$ .

## 5.1. Barrera rectangular de potencial

En esta sección calculamos las frecuencias asociadas a los modos cuasi-normales para el problema de la barrera de potencial rectangular. Para ello, consideramos un problema de propagación de onda que se puede escribir de la siguiente forma

$$s^2\psi - \partial_x^2\psi + V(x)\psi = 0, \quad s = \eta + i\alpha. \quad (5.10)$$

Consideremos ahora un proceso de dispersión en el cual una onda incidente desde  $x \rightarrow -\infty$  se dispersa en la barrera del potencial  $V(x)$ . Parte se refleja y parte se transmite. En este caso, como en los problemas de modos cuasi-normales, las condiciones de frontera (5.8) en  $x \rightarrow \pm\infty$  se deben cumplir. El hecho de que la función de onda pueda extenderse más allá de los límites clásicos del movimiento da lugar a un importante fenómeno llamado penetración de la barrera de potencial (efecto túnel). Recordemos que este fenómeno no ocurre en la mecánica clásica.

Consideremos el caso donde la energía de las partículas es menor que la energía de la barrera de potencial. Lo que ocurre clásicamente es que una partícula proveniente de la izquierda con energía  $E < V_0$  se refleje en  $x = -a/2$  (ver Figura 5.1). No es capaz de atravesar la barrera de potencial (nada se

transmite). En el caso cuántico en cambio, la partícula tiene una probabilidad no cero de atravesar la barrera de potencial. Las partículas, en el caso cuántico, han pasado de la primera región I a la tercera región III a través de la región intermedia II, la cual es clásicamente prohibida. Este efecto es llamado, el efecto túnel. Un segundo caso se da cuando la energía de las partículas es mayor que la energía de la barrera de potencial. Algo que sorprende aquí, al igual que el caso anterior, es que en el caso cuántico la partícula puede ser reflejada desde la barrera de potencial con una probabilidad no cero. Clásicamente esto tampoco ocurre porque todo se transmite (no hay reflexión).

Ahora, calculamos las frecuencias asociadas a los modos cuasi-normales. Para ello, consideremos el potencial representado en la figura 5.1 denominado barrera de potencial de altura  $V_0$  y anchura  $a$ . Donde  $\psi_{IN}$ ,  $\psi_R$  y  $\psi_T$  son la onda incidente, reflejada y transmitida, respectivamente, y  $\psi_{DE}$  y  $\psi_{IZ}$  onda incidente y reflejada, respectivamente, dentro del potencial. La solución a la ecuación (5.10) en las tres regiones I, II y III tiene la siguiente forma

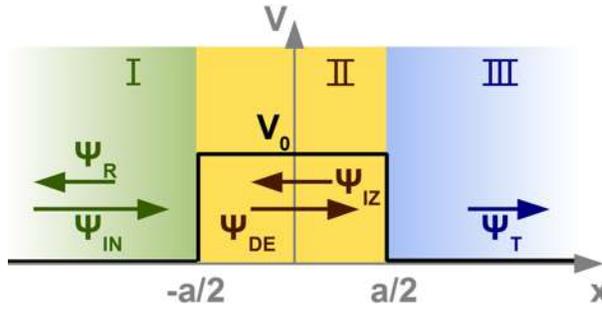


Figura 5.1: Potencial rectangular.

- Región (I): función onda con la parte incidente más la parte reflejada en el potencial

$$\psi_I(x) = Re^{sx} + e^{-sx}$$

- Región (II) : función en la región con potencial

$$\psi_{II}(x) = Ae^{\sqrt{s^2+v_0}x} + Be^{-\sqrt{s^2+v_0}x}$$

- Región (III): función onda transmitida en el potencia

$$\psi_{III}(x) = Te^{-sx}$$

- Con,  $\psi_{IN} = e^{-sx}$ ,  $\psi_R = Re^{sx}$ ,  $\psi_T = Te^{-sx}$ ,  $\psi_+ = Ae^{\sqrt{s^2+v_0}x}$ ,  
 $\psi_- = Be^{-\sqrt{s^2+v_0}x}$

donde  $R$  y  $T$  son los coeficientes de reflexión y de transmisión, respectivamente. Con estas funciones  $\psi_I$ ,  $\psi_{II}$  y  $\psi_{III}$ , vamos a encontrar las cantidades desconocidas  $T, R, A, B$  a partir de las condiciones en la frontera. Esto es, aplicando las

condiciones de continuidad de la función de onda y de su primera derivada en los puntos  $x = -a/2$ , y  $x = a/2$ ,

$$\begin{aligned}\psi_I(-a/2) &= \psi_{II}(-a/2), & \psi'_I(-a/2) &= \psi'_{II}(-a/2), \\ \psi_{II}(a/2) &= \psi_{III}(a/2), & \psi'_{II}(a/2) &= \psi'_{III}(a/2)\end{aligned}\quad (5.11)$$

donde  $' := d/dx$ . Obtenemos

$$\begin{aligned}A(s) &= \frac{2s(s-k)e^{\frac{a}{2}s}}{(s-k)^2e^{-\frac{a}{2}k} - (s+k)^2e^{\frac{3}{2}k}} \\ B(s) &= -\frac{2s(s+k)e^{\frac{a}{2}s}}{(s-k)^2e^{-\frac{3a}{2}k} - (s+k)^2e^{\frac{a}{2}k}} \\ R(s) &= \frac{V_0(e^{2ak} - 1)e^{as}}{(s-k)^2 - e^{2ak}(s+k)^2} \\ T(s) &= -\frac{4sk}{(s-k)^2e^{-ak} - (s+k)^2e^{ak}}\end{aligned}\quad (5.12)$$

donde  $k = \sqrt{s^2 + V_0}$ .

Notar que:  $T(s^*) = T(s)^*$ ,  $R(s^*) = R(s)^*$ ,  $T(s)$  y  $R(s)$  son funciones analíticas en  $s$  y cumplen

$$T(s)T(-s) + R(s)R(-s) = 1.$$

Entonces, para  $s = i\omega$ , con  $\omega \in \mathbb{R}$ ,

$$|T(i\omega)|^2 + |R(i\omega)|^2 = 1,$$

lo que significa que la partícula puede ser reflejada o transmitida desde la barrera de potencial con probabilidad diferente de cero. También puede verse como consecuencia de la conservación de la densidad de corriente del sistema. Con estos coeficientes buscamos los modos cuasi-normales. Esto es equivalente a buscar los ceros del Wronski  $W(s)$  (5.7). Para calcular  $W(s)$  partimos de lo siguiente.

Consideramos un proceso de dispersión en el cual una onda incidente desde  $x < -a/2$  se dispersa en el potencial. Parte se refleja y parte se transmite. Entonces tenemos

$$\psi_+(s, x) = \begin{cases} \frac{1}{T_+(s)}e^{-sx} + \frac{R_+(s)}{T_+(s)}e^{sx} & x < -a/2 \\ e^{-sx} & x > a/2, \end{cases}\quad (5.13)$$

con coeficientes de reflexión  $R_+(s)$  y de transmisión  $T_+(s)$ . Entonces la solución  $\psi_+(s, x)$  describe un proceso de dispersión. Donde los coeficientes  $R_+(s)$  y  $T_+(s)$  se obtienen calculando los coeficientes de  $e^{-sx}$  y  $e^{sx}$  para  $x \rightarrow \pm a/2$ . De manera similar, la función

$$\psi_-(s, x) = \begin{cases} e^{sx} & x < -a/2 \\ \frac{1}{T_-(s)}e^{sx} + \frac{R_-(s)}{T_-(s)}e^{-sx} & x > a/2, \end{cases}\quad (5.14)$$

describe un proceso de dispersión con onda incidente desde  $x > a/2$ . Donde  $R_-(s)$  y  $T_-(s)$  son los coeficientes de reflexión y de transmisión respectivamente.

Ahora, calculamos el Wronski  $W(s)$  de  $\psi_+$  y  $\psi_-$  donde obtenemos para  $x > a/2$  y  $x < -a/2$ , respectivamente que

$$W(s, \psi_+, \psi_-) = \frac{2s}{T_-(s)},$$

y

$$W(s, \psi_+, \psi_-) = \frac{2s}{T_+(s)}.$$

Dado que  $W(s, \psi_+, \phi_-)$  es constante

$$\frac{2s}{T_-(s)} = \frac{2s}{T_+(s)} = \frac{2s}{T(s)} = W(s, \psi_+, \phi_-).$$

Entonces, encontrar los ceros del Wronskiano  $W(s)$ , es equivalente a buscar los polos del coeficiente de transmisión  $T$  ya que

$$W(s) = \frac{2s}{T(s)}.$$

En este caso, las funciones  $\psi_{\pm}$  de la ecuación (5.10) que satisfacen las condiciones de frontera (5.8) en  $x > a/2$  y  $x < -a/2$  son linealmente dependientes. Por lo tanto, son una solución (un modo cuasi-normal) a la ecuación (5.10).

Ahora, calculamos los modos cuasi-normales para este problema. Para esto, los coeficientes en término de las funciones hiperbólicas  $\cosh$  y  $\sinh$  son

$$\begin{aligned} T(s) &= \frac{2sk}{(s^2 + k^2) \sinh(ak) + 2sk \cosh(ak)}, \\ R(s) &= -\frac{V_0 e^{as} \sinh(ak)}{(s^2 + k^2) \sinh(ak) + 2sk \cosh(ak)}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Para encontrar los modos cuasi-normales buscamos los polos de  $T$  como se dijo antes. Esto ocurre cuando su denominador es cero,

$$(s^2 + k^2) \sinh(ak) + 2sk \cosh(ak) = 0.$$

Expresando el término anterior en exponenciales y multiplicando por  $e^{ak}$  obtenemos

$$e^{ak}(s+k)^2 - e^{-ak}(s-k)^2 = 0 \rightarrow e^{ak} = \pm \frac{s-k}{s+k}.$$

Antes de continuar introducimos las cantidades adimensionales:

$$\beta := \frac{ak}{2}, \quad z := \frac{as}{2}, \quad q := \frac{a}{2} \sqrt{V_0}, \quad (5.16)$$

y notamos que

$$\beta = \sqrt{z^2 + q^2}, \quad ak = \sqrt{z^2 + q^2}, \quad \frac{(s-k)^2}{(s+k)^2} = \frac{(z-\beta)^2}{(z+\beta)^2}, \quad \beta = \sqrt{z^2 + q^2}.$$

Quedando que la ecuación  $e^{ak} = \pm \frac{s-k}{s+k}$  en estas nuevas cantidades se ve

$$e^{4\sqrt{z^2+q^2}} = \frac{(z-\beta)^2}{(z+\beta)^2},$$

o lo que es equivalente,

$$e^{4z\sqrt{1+(\frac{q}{z})^2}} = \frac{\left(z - z\sqrt{1+(\frac{q}{z})^2}\right)^2}{\left(z + z\sqrt{1+(\frac{q}{z})^2}\right)^2} = \frac{\left(1 - \sqrt{1+(\frac{q}{z})^2}\right)^2}{\left(1 + \sqrt{1+(\frac{q}{z})^2}\right)^2} \quad (5.17)$$

Para tener una idea de las soluciones de (5.17), debido a que no se puede resolver analíticamente, consideramos el límite de altas frecuencias  $|q/z| \ll 1$  y expandimos alrededor de  $|q/z| = 0$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{q}{z}\right)^2} = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{q}{z}\right)^2 + O(q/z)^4.$$

Tomando la raíz cuadrada de (5.17) obtenemos

$$e^{2z\left[1+O\left(\frac{q^2}{z^2}\right)\right]} = e^{2z} \left[1 + O\left(\frac{q^2}{z^2}\right)\right] = \pm \left(\frac{q}{2z}\right)^2 + O\left(\frac{q^4}{z^4}\right).$$

Finalmente a primer orden de  $q/z$

$$e^{2z} \approx \pm \left(\frac{q}{2z}\right)^2.$$

Sacamos la raíz de ambos lados de la ecuación anterior

$$e^z \approx \pm \sqrt{\pm 1} \frac{q}{2z},$$

donde tenemos 4 casos, estos son:  $(+\sqrt{+1} = +, +\sqrt{-1} = i, -\sqrt{+1} = -, -\sqrt{-1} = -i)$ . Todos los casos se pueden resumir en la siguiente expresión

$$ze^z = e^{i\bar{k}\frac{\pi}{2}} \frac{q}{2}, \quad \bar{k} = 0, 1, 2, 3. \quad (5.18)$$

La inversa de la ecuación anterior se puede expresar como la función  $W$  de Lambert [29], dada por

$$z_k = W_k \left( e^{i\bar{k}\frac{\pi}{2}} \frac{q}{2} \right), \quad \bar{k} = 0, 1, 2, 3, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (5.19)$$

donde  $k$  indica en que rama está la solución. Hay infinitas soluciones a esta ecuación. Esta función es además, similar a invertir la función  $\cos(x)$ , para la cual hay varias ramas, por ejemplo, entre  $-\pi/2$  y  $\pi/2$ .

Para calcular las frecuencias cuasi-normales  $s$ , que es equivalente a calcular las frecuencias adimensionales  $z$ , ver (5.16), regresemos a la ecuación (5.18). Sea  $z = x + iy$ , donde  $x, y \in \mathbb{R}$ . Reemplazando  $z$  en (5.18), obtenemos

$$e^{x+iy} = e^{i\bar{k}\frac{\pi}{2}\frac{q}{2}} \frac{1}{x+iy}, \quad (5.20)$$

o lo que es equivalente

$$\begin{aligned} e^{x+iy} &= e^{i\bar{k}\frac{\pi}{2}\frac{q}{2}} \frac{x-iy}{x^2+y^2} \\ &= \frac{q}{2} \frac{x-iy}{x^2+y^2} [\cos(\bar{k}\frac{\pi}{2}) + i \operatorname{sen}(\bar{k}\frac{\pi}{2})] \end{aligned} \quad (5.21)$$

donde la parte real e imaginaria, respectivamente son

$$\begin{aligned} e^x \cos(y) &= \frac{q}{2} \frac{1}{x^2+y^2} [x \cos(\bar{k}\frac{\pi}{2}) + y \operatorname{sen}(\bar{k}\frac{\pi}{2})], \\ e^x \sin(y) &= \frac{q}{2} \frac{1}{x^2+y^2} [x \operatorname{sen}(\bar{k}\frac{\pi}{2}) - y \cos(\bar{k}\frac{\pi}{2})]. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Dividiendo  $\sin(y)/\cos(y)$

$$\frac{\sin(y)}{\cos(y)} = \frac{x \operatorname{sen}(\bar{k}\frac{\pi}{2}) - y \cos(\bar{k}\frac{\pi}{2})}{x \cos(\bar{k}\frac{\pi}{2}) + y \operatorname{sen}(\bar{k}\frac{\pi}{2})},$$

teniendo dos casos,

$$\frac{\sin(y)}{\cos(y)} = \begin{cases} -y/x, & \bar{k} = 0, 2, \\ x/y, & \bar{k} = 1, 3. \end{cases} \quad (5.23)$$

Tomando el modulo de  $e^{x+iy}$  en (5.20) obtenemos

$$e^x = \frac{q}{2} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad (5.24)$$

Haciendo la  $x \approx 0$  debido a que en la ecuación (5.24) la parte real  $x$  no puede dominar. Esto se ve porque un lado de la ecuación crecería exponencialmente y el otro lado decrece. Por lo tanto, debe dominar la parte imaginaria  $y$ .

Tomando la aproximación que  $y \gg x$ , obtenemos de la ecuación (5.23) las siguientes términos para  $\bar{k} = 1, 3$  y  $\bar{k} = 0, 2$ , respectivamente

$$\begin{aligned} \frac{\sin(y)}{\cos(y)} \approx 0, & \quad \rightarrow \quad y_n = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ \frac{\sin(y)}{\cos(y)} \approx 0, & \quad \rightarrow \quad y_n = n\pi + \frac{\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Para encontrar a  $x$  usamos de nuevo la aproximación  $y \gg x$  en (5.24)

$$\begin{aligned} e^x &\approx \frac{q}{2} \frac{1}{|y|} = \frac{q}{2} \frac{1}{|n\pi|} \quad \rightarrow \quad x_n = \log\left(\frac{q}{2}\right) - \log(|n|\pi), \quad \bar{k} = 1, 3, \\ e^x &\approx \frac{q}{2} \frac{1}{|y|} = \frac{q}{2} \frac{1}{|n\pi| + \frac{\pi}{2}} \quad \rightarrow \quad x_n = \log\left(\frac{q}{2}\right) - \log\left(|n|\pi + \frac{\pi}{2}\right), \quad \bar{k} = 0, 2. \end{aligned} \quad (5.26)$$

De las ecuaciones (5.25) y (5.26) llegamos entonces a que existen infinitos modos cuasi-normales  $z = as/2$  que son de la forma:

$$z_n = x_n + iy_n \approx \log\left(\frac{q}{2}\right) - \log\left(|n|\frac{\pi}{2}\right) + in\frac{\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (5.27)$$

lo cual generaliza los dos casos anteriores. En términos de  $s$  obtenemos

$$s_n \approx \frac{2}{a} \log\left(\frac{q}{2}\right) - \frac{2}{a} \log\left(|n|\frac{\pi}{2}\right) + i\frac{n\pi}{a}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (5.28)$$

En el límite de altas frecuencias, es decir, donde  $|n| \gg 1$ , vemos de (5.28) que la parte que domina es la parte imaginaria, mientras la parte real diverge logarítmicamente.

- Observación: para el cálculo de los modos cuasi-normales que acabamos de ver hay dos niveles de aproximación. La primera es suponer el límite de altas frecuencias. Esto es  $q/z \ll 1$ , donde recordemos que  $z$  está directamente relacionado con las frecuencias complejas  $s = \sigma + i\mu$ . La segunda aproximación es cuando asumimos  $y \gg x$ .

Ahora calculamos unas frecuencias particulares. Estas frecuencias son para el caso donde  $T = 1$ , es decir, para el caso donde no hay reflexión, todo se transmite. Por lo tanto, las frecuencias son puramente oscilatorias y no se obtienen modos cuasi-normales ya que la parte de decaimiento es cero. De la ecuación (5.15) obtenemos

$$(s^2 + k^2) \sinh(ak) + 2sk \cosh(ak) - 2sk = 0,$$

y esto se cumple para  $\cosh(ak) = \cos(iak) = \pm 1$ . Lo que implica que

$$ak = 0 \quad \text{o} \quad ika = n\pi, \quad \rightarrow \quad k^2 = s^2 + V_0, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Teniendo entonces que  $s$  es

$$s_n = \pm \sqrt{k^2 - V_0} = \pm \sqrt{-\frac{n^2\pi^2}{a^2} - V_0}, \quad \rightarrow \quad s_n = \pm i\sqrt{V_0 + \frac{(n)^2\pi^2}{a^2}}.$$

Bajo la aproximación  $n^2 \gg V_0 a^2 / \pi^2$ ,  $s_n \approx \pm in\pi/2$ . De donde tenemos que es igual a la parte imaginaria en el caso anterior (5.28). Vemos que las frecuencias particulares  $s$  para  $T = 1$  son puramente imaginarias como se esperaba. No hay modos cuasi-normales pues la parte que decae exponencialmente es cero.

## 5.2. Modos cuasi-normales de Schwarzschild

En esta sección, calculamos las frecuencias cuasi-normales asociadas a los modos cuasi-normales que exhibe un agujero negro de Schwarzschild al ser perturbado ya sea por un campo escalar, electromagnético o gravitacional linealizado. Estos modos se calculan mediante el método de Leaver (ver apéndice C para una exposición sobre este método). El método de Leaver contiene una fracción continua cuyas raíces son las frecuencias cuasi-normales. Esta fracción se construye a partir de lo siguiente: primero, la solución local del problema en el horizonte de eventos se expanden en series alrededor de este punto. Esta expansión viene porque la ecuación que describe la propagación de las perturbaciones tiene dos puntos singulares regulares (ver C.1), uno en el horizonte de eventos y el otro en  $r = 0$ . Además, tiene una singularidad irregular en la región asintóticamente plana. Como el problema que nos interesa es afuera del horizonte de evento, entonces no tenemos en cuenta el punto regular en  $r = 0$ . Luego de la expansión, obtenemos una relación de recurrencia de tres términos a partir de los coeficientes de las series. Esto es, dado un coeficiente inicial de la expansión podemos obtener el siguiente y así sucesivamente. Esta relación de recurrencia depende de la frecuencias  $s$ . Y es a partir de estas relaciones de recurrencia como se obtiene la fracción continua en términos de  $s$ .

A continuación, analizaremos el problema que describe la propagación de las perturbaciones de la métrica de Schwarzschild en el sector impar. Para este caso, el problema esta descrito por la ecuación de Regge-Wheeler ver [30] dada por

$$[\partial_t^2 - \partial_{r_*}^2 + U(r)] \Phi = 0, \quad (5.29)$$

donde  $r_*$  es la coordenada tortuga, que viene de  $dr_* = (dr)/N(r)$ ,  $\Phi$  representa el campo que se propaga sobre la métrica de fondo y  $U(r)$  es el potencial efectivo (ver por ejemplo [30])

$$U(r) = N(r) \left[ \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - (S^2 - 1) \frac{2M}{r^3} \right], \quad N(r) = 1 - \frac{2M}{r},$$

$$\ell \geq 2, \quad S = 0, 1, 2. \quad (5.30)$$

La ecuación (5.29) describe, a partir del espín  $S$ , la propagación de campos escalares, electromagnéticas y perturbaciones gravitacionales linealizadas, en un fondo de Schwarzschild. Con  $S = 2$  para las perturbaciones gravitacionales linealizadas,  $S = 0$  para campos escalares y  $S = 1$  para campos electromagnéticos.

Las frecuencias asociadas a los modos cuasi-normales que calculamos numéricamente mediante el método de Leaver son dadas en el cuadro 5.1. Estas frecuencias son para los casos campo escalar y el campo gravitacional con  $S = 0$  y  $S = 2$ , respectivamente. Además, en la figura 5.2 vemos los comportamientos de la parte real e imaginaria de las frecuencias  $s = \sigma + i\omega$  medidas en unidades de  $2Ms$ . Las Figuras 5.2 muestran el comportamiento de las componentes de la frecuencia  $s$  para el caso monopolar  $\ell = 0$  y cuadrupolar  $\ell = 2$ . Donde  $n = 0, 1, 2, \dots$  etiqueta el estado de excitación de las frecuencia.  $n = 0$  para la frecuencia fundamental y  $n \geq 1$  para las frecuencias excitadas.

| $n_0$ | $2Ms (\ell = 0)$        | $2Ms (\ell = 2)$        |
|-------|-------------------------|-------------------------|
| 0     | $-0,209791 + 0,220909i$ | $-0,177925 + 0,747343i$ |
| 1     | $-0,696105 + 0,172234i$ | $-0,547829 + 0,693422i$ |
| 2     | $-1,20216 + 0,151483i$  | $-0,956554 + 0,602107i$ |
| 3     | $-1,70735 + 0,14082i$   | $-1,41029 + 0,503009i$  |
| 4     | $-2,21126 + 0,134149i$  | $-1,89369 + 0,415029i$  |
| 5     | $-2,71428 + 0,129483i$  | $-2,39122 + 0,338599i$  |
| 6     | $-3,21668 + 0,125988i$  | $-2,89582 + 0,266505i$  |
| 7     | $-3,71872 + 0,123762i$  | $-3,40768 + 0,185645i$  |
| 8     | $-4,22032 + 0,121022i$  | $-3,98655 + 0,000000i$  |
| 9     | $-4,72172 + 0,119154i$  | $-4,60529 + 0,126527i$  |
| 10    | $-5,22294 + 0,117575i$  | $-5,12165 + 0,153107i$  |
| 11    | $-5,72402 + 0,11621i$   | $-5,63088 + 0,165196i$  |

Cuadro 5.1: Frecuencias cuasi-normales monopolar  $\ell = 0$  y cuadrupolar  $\ell = 2$  de las perturbaciones de la métrica de Schwarzschild. Donde  $n = 0, 1, 2, \dots$  etiqueta el estado de excitación de las frecuencias

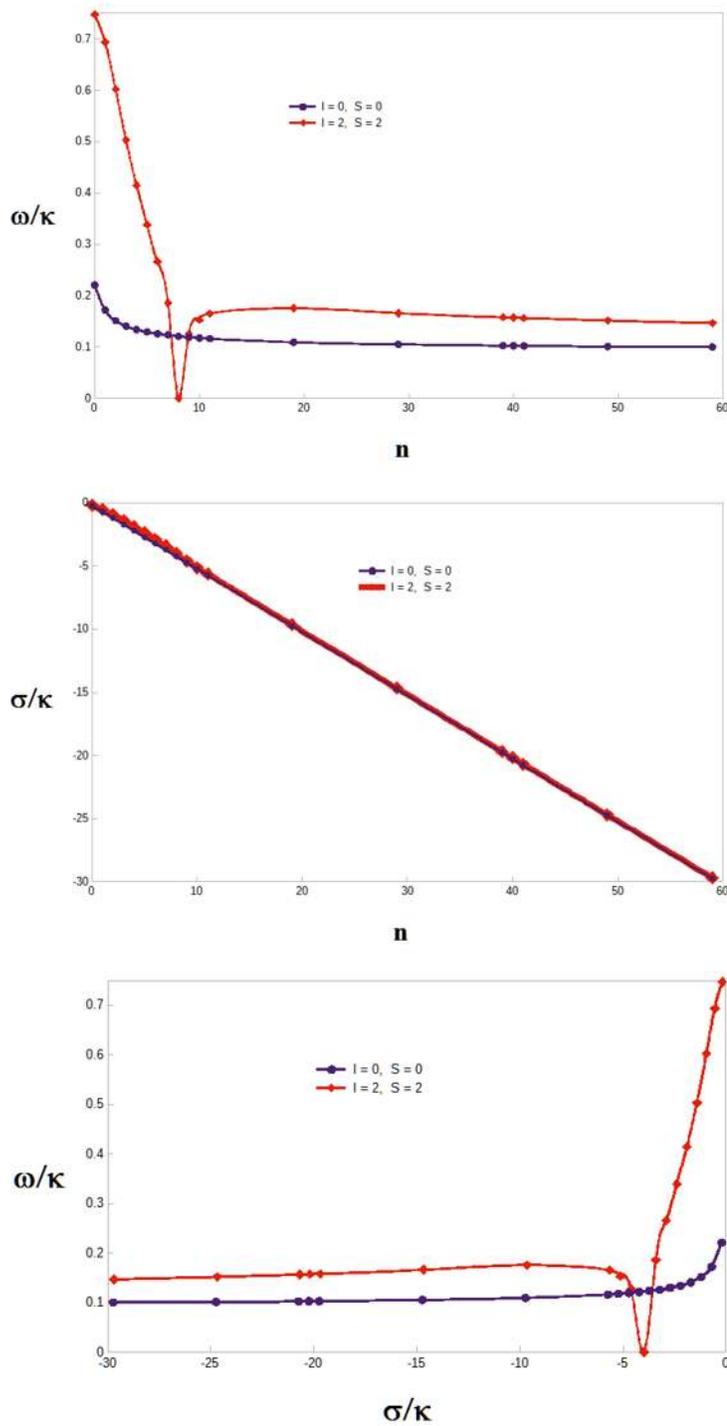


Figura 5.2: Gráficas donde se muestran la parte real e imaginaria de la frecuencias  $s = \sigma + i\omega$  para los números de momento angular  $\ell = 0$  y  $\ell = 2$  en el caso de Schwarzschild. Ver sección 5.2.

El método de Leaver para calcular las frecuencias en el caso de Schwarzschild funciona muy bien porque el potencial en este problema se conoce explícitamente. Lo que ocurre en nuestro caso, es que para el problema que vamos a analizar (el cual vamos a ver en la sección siguiente), el potencial efectivo que aparece en nuestra ecuación radial *no se puede* expresar de forma explícita. Esta complicación ocurre porque la solución de Michel (que describe la densidad de partículas como función del radio de área) sólo se conoce de forma implícita. Por consecuencia, los coeficientes de la métrica acústica y el potencial efectivo en la ecuación radial sólo se pueden describir mediante funciones implícitas. Por esta razón el problema es más difícil que en el caso de Schwarzschild. Métodos analíticos populares basados en expansiones de series como el método de Leaver [26] no parecen aplicables. Esto nos ha motivado de reconsiderar el problema de calcular las frecuencias cuasi-normales basándonos en un nuevo método numérica que se llama "matching" (coincidencia). En este método, las soluciones locales de la ecuación radial que hacemos coincidir se calculan mediante un método de iteraciones de Banach. Describimos y verificamos este método en la sección 5.4.

De otro lado, en el método de Leaver, se expresa la solución local en el horizonte de eventos como una serie de potencias. Esta solución local está bien definida en este punto, es decir, su radio de convergencia es finito. Por lo tanto, se puede mostrar que la serie converge. Caso contrario, es para la región asintóticamente plana. En este caso, cuando se expande la solución local en una serie de potencias no se puede saber si la serie converge o no.

Los inconvenientes mencionados antes, fueron parte de la motivación y necesidad de un nuevo método numérico para calcular las frecuencias cuasi-normales, el cual se explica en la siguiente sección.

### 5.3. Modos cuasi-normales para problemas más generales

En esta sección analizamos el problema de los modos cuasi-normales para problemas más generales que los ejemplos expuestos anteriormente<sup>4</sup>.

Para ello, comenzamos con la solución de Jost y función de Jost como vemos en lo que sigue.

Para este trabajo, comenzamos con una ecuación de onda lineal para un campo escalar  $\Psi$  de la forma

$$\square_g \Psi = 0 \tag{5.31}$$

en el fondo de un agujero negro estático y esféricamente simétrico del espacio-tiempo  $(\mathcal{M}, g)$ , donde  $\mathcal{M} = \mathbb{R} \times (0, \infty) \times S^2$  y

$$g = \Omega(r)^2 \left( -N(r) dt^2 + \frac{dr^2}{N(r)} \right) + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2). \tag{5.32}$$

---

<sup>4</sup>Las pruebas que vamos a escribir en esta sección no son completas. Solamente ponemos la idea. Las pruebas se encontrarán en un trabajo en preparación [31].

### 5.3. MODOS CUASI-NORMALES PARA PROBLEMAS MÁS GENERALES 69

Las funciones  $\Omega, N : (0, \infty) \rightarrow \infty$  se asumen son suaves.  $\Omega$  y  $N$  se definen geoméricamente por  $-\Omega^2 N = g(k, k)$  y  $\Omega^2/N = g^{-1}(dr, dr)$ ,  $k = \partial/\partial_t$  campo vectorial de Killing tipo-tiempo asintóticamente y  $dr$  la diferencial de la función radio de área. Introduciendo un nuevo campo  $\Phi := r\Psi$ , la ecuación (5.31) toma la forma explícita

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - N(r) \frac{\partial}{\partial r} N(r) \frac{\partial \Phi}{\partial r} + N(r) V(r) \Phi = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad r > 0, \quad (5.33)$$

con potencial efectivo

$$V(r) := -\frac{\hat{\Delta}}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{dN}{dr}(r),$$

con  $\hat{\Delta}$  el laplaciano esférico. Después de hacer una descomposición en armónicos esféricos el primer término del lado derecho es justamente  $\ell(\ell+1)/r^2$  y  $V$  se vuelve un operador local. Para un agujero negro de Schwarzschild, por ejemplo,  $\Omega = 1$  y  $N(r) = 1 - 2M/r$  con  $M > 0$  la masa del agujero negro, y el potencial efectivo se reduce a

$$V(r) = \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3}.$$

En lo que sigue, consideramos la ecuación de modos correspondiente a la ecuación (5.33), la cual se obtiene considerando una soluciones particulares de la forma  $\Phi(t, r) = e^{st}\phi(s, r)$ :

$$s^2 \phi - N(r) \frac{\partial}{\partial r} N(r) \frac{\partial \phi}{\partial r} + N(r) V(r) \phi = 0, \quad s \in \mathbb{C}, \quad r > 0. \quad (5.34)$$

Para lo que viene a continuación, hacemos las siguientes suposiciones específicas sobre las funciones  $N$  y  $V$ :

- (i)  $N$  y  $V$  poseen continuaciones analíticas  $\bar{N}, \bar{V} : H_+ \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  en el dominio  $H_+ := \{r \in \mathbb{C} : \text{Re}(r) > 0\}$ .
- (ii)  $\bar{N}$  tiene un cero (aislado) en  $r = r_h$ , es diferente de cero para todo  $r \in H_+$  con  $\text{Re}(r) > r_h$  y satisface

$$\lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ r \in H_+}} \bar{N}(r) = 1.$$

En particular,  $1/\bar{N}$  es una función holomorfa en  $H_+$  con un polo en  $r = r_h$  y otros posible polos  $r$  con  $0 < \text{Re}(r) \leq r_h$ .

- (iii) Existe una constante  $K > 0$  tal que

$$|\bar{V}(r)| \leq \frac{K}{|r|^2}$$

para todo  $r \in H_+$  con  $\text{Re}(r) \geq r_h$ .

Estas suposiciones se satisfacen claramente en el caso de Schwarzschild  $\bar{N}(r) = 1 - r_h/r$  y el potencial de Regge-Wheeler  $\bar{V}(r) = \ell(\ell + 1)/r^2 - (S^2 - 1)r_h/r^3$ . Para lo que sigue, por simplicidad en la notación, quitamos la línea sobre  $N$  y  $V$ . La coordenada tortuga compleja  $x$  va a jugar un importante papel en lo que sigue. Si  $Z \subset H_+$  denota el conjunto de puntos para los cuales  $N$  es cero, la coordenada  $x$  se define como

$$x := f(r; \gamma) := \int_{\gamma} \frac{dr'}{N(r')}, \quad (5.35)$$

donde  $\gamma$  es una curva suave en  $H_+^0 := H_+ \setminus Z$  la cual conecta  $2r_h$  a los puntos  $r \in H_+^0$ . Notamos que en general  $x$  es una función multivaluada.

### 5.3.1. Solución de Jost y función de Jost

En esta sección comenzamos con un análisis de la ecuación de modos (5.34) en el intervalo real  $r \in (1, \infty)$ . Si nos restringimos a este intervalo, la coordenada tortuga tiene un solo valor y es definida por

$$x = f(r) = \int_2^r \frac{dr'}{N(r')}, \quad r > 1. \quad (5.36)$$

Debido a las suposiciones (i) y (ii), la función  $f : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  es suave, invertible satisfaciendo <sup>5</sup>

$$\lim_{r \downarrow 1} f(r) = -\infty, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{f(r)}{r} = 1.$$

Expresando la ecuación (5.34) en términos de la coordenada tortuga  $x$  obtenemos

$$s^2 \phi - \phi'' + U(x)\phi = 0, \quad s \in \mathbb{C}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (5.37)$$

con  $U(x) := N(f^{-1}(x))V(f^{-1}(x))$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , y la prima denota la derivada parcial con respecto a  $x$ . Debido a la suposición (iii),

$$\int_{-\infty}^{\infty} |U(x)| dx = \int_1^{\infty} |V(r)| dr \leq K,$$

entonces la función  $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es suave y  $L^1$ -integrable.

Comenzamos con el siguiente resultado estándar (ver, por ejemplo, [28], section XI.8)

<sup>5</sup> Dado que  $N$  es analítica y cero en  $r = 1$  existe una constante  $\alpha > 0$  tal que  $N(r) \leq \alpha(r-1)$  para todo  $1 < r \leq 2$ . En consecuencia, para  $1 < r \leq 2$ ,

$$f(r) = - \int_r^2 \frac{dr'}{N(r')} \leq -\frac{1}{\alpha} \int_r^2 \frac{dr'}{r'-1} = \frac{1}{\alpha} \log(r-1)$$

la cual tiende a  $-\infty$  como  $r \downarrow 1$ .

**Teorema 3** *Supongamos  $U \in L^1(\mathbb{R})$ . Entonces, para cada  $s \in \mathbb{C}$  con  $\operatorname{Re}(s) \geq 0$  y  $s \neq 0$ , existe una única función continuamente diferenciable  $\phi(s, \cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  satisfaciendo la ecuación (5.37) para casi todos los  $x \in \mathbb{R}$  y la condición asintótica*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{sx} \phi(s, x) = 1. \quad (5.38)$$

Además,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{sx} \phi'(s, x) = -s, \quad (5.39)$$

y para cada  $x \in \mathbb{R}$  fijo las funciones  $\phi(\cdot, x)$  y  $\phi'(\cdot, x)$  son analíticas en el dominio  $\operatorname{Re}(s) > 0$ .

En lo que sigue, sólo damos una idea de la prueba. Para una demostración completa, ver [31].

**Idea de la prueba:** Sea  $s \in \mathbb{C}$  tal que  $\operatorname{Re}(s) \geq 0$  y  $s \neq 0$ , y fijar  $\phi(s, x) = e^{-sx} \xi_s(x)$ . Si es que  $\phi$  satisface (5.37) y (5.38) entonces  $\xi = \xi_s$  satisface la ecuación (5.40)

$$\xi'' - 2s\xi' - U(x)\xi = 0, \quad (5.40)$$

y nuestro trabajo es mostrar que existe una única función continuamente diferenciable  $\xi_s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  satisfaciendo la ecuación (5.40) en casi todas partes y la condición  $\lim_{x \rightarrow \infty} \xi_s(x) = 1$ . La idea de la prueba es reescribir la ecuación (5.40) como una ecuación integral

$$\xi(x) = T_s \xi(x) := 1 + A_s \xi(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (5.41)$$

con el operador  $A_s$  definido formalmente como

$$A_s \xi(x) := \frac{1}{2s} \int_x^\infty (1 - e^{-2s(y-x)}) U(y) \xi(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (5.42)$$

Luego, probamos que dentro de la clase  $X$  de funciones continuas y acotadas  $\xi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  esta ecuación integral tiene una única solución  $\xi_s$  la cual puede ser construida por iteración:

$$\xi_s(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} (T_s^k 1)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (A_s^k 1)(x), \quad (5.43)$$

con la convergencia en el espacio  $X$ . Finalmente, demostramos que esta función  $\xi_s$  tiene las propiedades requeridas.

En lo que sigue, mostramos la convergencia de (5.43). Introducimos la función  $h_s(z)$  definida

$$h_s(z) := \frac{1 - e^{-2sz}}{2s}, \quad z \in \mathbb{R}. \quad (5.44)$$

Con la notación anterior, reescribimos el operador  $A_s : X \rightarrow X$  como

$$A_s \xi(x) = \int_x^\infty h_s(y-x) U(y) \xi(y) dy, \quad \xi \in X, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (5.45)$$

para lo cual,

$$A_s^k \xi(x) = \int_x^\infty \int_{y_1}^\infty \cdots \int_{y_{k-1}}^\infty h_s(y_1-x) h_s(y_2-y_1) \cdots h_s(y_k-y_{k-1}) U(y_1) U(y_2) \cdots U(y_k) \xi(y_k) d^k y.$$

Por lo tanto, se sigue que

$$|A_s^k \xi(x)| \leq \frac{1}{|s|^k} \beta_k(x) \sup_{y \geq x} |\xi(y)|,$$

con

$$\begin{aligned} \beta_k(x) &= \int_x^\infty \int_{y_1}^\infty \cdots \int_{y_{k-1}}^\infty |U(y_1)| |U(y_2)| \cdots |U(y_k)| d^k y \\ &= \int_{y_k > y_{k-1} > \cdots > y_1 > x} |U(y_1)| |U(y_2)| \cdots |U(y_k)| d^k y \\ &= \frac{1}{k!} \int_{(x, \infty)^k} |U(y_1)| |U(y_2)| \cdots |U(y_k)| d^k y \\ &= \frac{1}{k!} \beta(x)^k, \quad \beta(x) = \int_x^\infty |U(y)| dy \end{aligned}$$

donde en el tercer paso usamos el hecho que  $|U(y_1)| |U(y_2)| \cdots |U(y_k)|$  es simétrico en  $(y_1, y_2, \dots, y_k)$  y hay  $k!$  permutaciones de  $k$  elementos. Entonces,  $\sum_{k=0}^\infty (A_s^k 1)(x)$  converge y se puede mostrar que  $\xi_s$  satisface la ecuación (5.40) y  $\lim_{x \rightarrow \infty} \xi_s(x) = 1$ .

### 5.3.2. Soluciones locales y el determinante de Wronski

En esta sección, vamos a resumir y a discutir algunas consecuencias directas para la ecuación

$$s^2 \phi - \phi'' + U(x) \phi = 0, \quad s \in \mathbb{C}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (5.46)$$

asumiendo por el momento únicamente que  $U \in L^1(\mathbb{R})$ . Sea  $s \in \mathbb{C}$ ,  $\operatorname{Re}(s) \geq 0$  y  $s \neq 0$ . De acuerdo con el Teorema 3 existe una única solución  $\phi_+(s, \cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  continuamente diferenciable satisfaciendo

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{+sx} \phi_+(s, x) = 1.$$

Por otra parte, podemos construir la solución iterativamente:

$$\phi_+(s, x) = e^{-sx} \xi_+(s, x), \quad \xi_+(s, x) = \sum_{k=0}^{\infty} (A_s^k 1)(x),$$

### 5.3. MODOS CUASI-NORMALES PARA PROBLEMAS MÁS GENERALES 73

con  $A_s$  el operador lineal definido en (5.45). Debido a la estimación

$$\|A_s^k \mathbf{1}\|_\infty \leq \frac{1}{k!} \left( \frac{b}{|s|} \right)^k, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad b = \int_{-\infty}^{\infty} |U(y)| dy, \quad (5.47)$$

la serie converge absolutamente para  $x \in \mathbb{R}$  y

$$\|\xi_+(s, \cdot) - \sum_{k=0}^N A_s^k \mathbf{1}\|_\infty \leq \frac{1}{(N+1)!} \left( \frac{b}{|s|} \right)^{N+1} e^{b/|s|} \quad (5.48)$$

para todo  $N \in \mathbb{N}_0$  y todo  $\operatorname{Re}(s) \geq 0$  con  $s \neq 0$ , lo que muestra que la serie converge rápidamente para  $N \rightarrow \infty$ .

En un camino completamente análogo, existe una única solución  $\phi_-(s, \cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  continuamente diferenciable de la ecuación (5.46) satisfaciendo

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-sx} \phi_-(s, x) = 1,$$

lo cual puede ser construido iterativamente de la siguiente forma:

$$\phi_-(s, x) = e^{+sx} \xi_-(s, x), \quad \xi_-(s, x) = \sum_{k=0}^{\infty} (B_s^k \mathbf{1})(x),$$

con

$$B_s \xi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1 - e^{-2s(x-y)}}{2s} U(y) \xi(y) dy, \quad \xi \in X, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (5.49)$$

y

$$\|\xi_-(s, \cdot) - \sum_{k=0}^N B_s^k \mathbf{1}\|_\infty \leq \frac{1}{(N+1)!} \left( \frac{b}{|s|} \right)^{N+1} e^{b/|s|} \quad (5.50)$$

para todo  $N \in \mathbb{N}_0$  y todo  $\operatorname{Re}(s) \geq 0$  con  $s \neq 0$ .

A continuación damos condiciones suficientes para que las dos soluciones  $\phi_\pm(s, \cdot)$  en la ecuación (5.46) sean linealmente independientes.

**Lema 4** *Sea  $U \geq 0$ , entonces*

- (i) *Para todo  $\operatorname{Re}(s) > 0$  y  $s \in \mathbb{C}$ ,  $\phi_+(s, \cdot)$  y  $\phi_-(s, \cdot)$  son linealmente independientes.*
- (ii) *Para todo  $\operatorname{Re}(s) > 0$  y  $\operatorname{Im}(s) \neq 0$ ,  $\phi_+(s, \cdot)$  y  $\phi_-(s, \cdot)$  son linealmente independientes.*

**Prueba.** Sea  $s \in \mathbb{C}$ ,  $\operatorname{Re}(s) > 0$  es tal que  $\phi_+(s, \cdot)$  y  $\phi_-(s, \cdot)$  son linealmente dependientes. Fijando  $\phi := \phi_+(s, \cdot)$  e integrando la identidad

$$\overline{s\phi(x)} [-\phi''(x) + s^2\phi(x) + U(x)\phi(x)] = 0$$

sobre  $\mathbb{R}$  obtenemos, después de usar integración por partes y notando que los términos de frontera desvanecen como consecuencia de las condiciones de frontera que satisfacen  $\phi_{\pm}(s, \cdot)$ ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\bar{s}|\phi'(x)|^2 + s|s|^2|\phi(x)|^2 + \bar{s}U(x)|\phi(x)|^2] dx = 0.$$

Tomando la parte real e imaginaria de ambos lados llegamos a

$$\operatorname{Re}(s) \int_{-\infty}^{\infty} [|\phi'(x)|^2 + (|s|^2 + U(x))|\phi(x)|^2] dx = 0 \quad (5.51)$$

y

$$\operatorname{Im}(s) \int_{-\infty}^{\infty} [-|\phi'(x)|^2 + (|s|^2 - U(x))|\phi(x)|^2] dx = 0, \quad (5.52)$$

respectivamente.

Si  $\operatorname{Re}(s) > 0$  la ecuación (5.51) implica que

$$\int_{-\infty}^{\infty} [|\phi'(x)|^2 + (|s|^2 + U(x))|\phi(x)|^2] dx = 0,$$

como tenemos una suma de términos positivos igual a cero, la única forma que se cumpla la igualdad es que  $\phi_+ = 0$ , lo cual nos lleva a una contradicción pues supusimos  $\phi_+ \neq 0$ . Por lo tanto,  $\phi_+(s, \cdot)$  y  $\phi_-(s, \cdot)$  y esto prueba el inciso (i).

Si  $\operatorname{Im}(s) \neq 0$  y  $\operatorname{Re}(s) > 0$ , las ecuaciones (5.51) y (5.52) implican que

$$|s|^2 \int_{-\infty}^{\infty} |\phi(x)|^2 dx = 0,$$

y  $\phi = \phi_+(s, \cdot) = 0$ , llegando a una contradicción. Por lo tanto,  $\phi_+(s, \cdot)$  y  $\phi_-(s, \cdot)$  son linealmente independientes y esto prueba el inciso (ii).  $\square$

El Teorema 3 implica además que para cualquier  $x \in \mathbb{R}$  fijo las funciones  $\phi_{\pm}(s, x)$  y  $\phi'_{\pm}(s, x)$  son analíticas en el dominio  $\operatorname{Re}(s) > 0$ . Como consecuencia, el determinante de Wronski,

$$\begin{aligned} w(s) &= W[\phi_+, \phi_-](s) := \det \begin{pmatrix} \phi_+(s, x) & \phi_-(s, x) \\ \phi'_+(s, x) & \phi'_-(s, x) \end{pmatrix} \\ &= \phi_+(s, x)\phi'_-(s, x) - \phi'_+(s, x)\phi_-(s, x), \end{aligned} \quad (5.53)$$

es analítico en el semiplano derecho  $\operatorname{Re}(s) > 0$ . A continuación resumimos algunas propiedades de la función  $w$ . Sea  $U \in L^1(\mathbb{R})$ . Entonces, la función  $w : H_+ \rightarrow \mathbb{C}$  definida por (5.53) satisface:

5.3. MODOS CUASI-NORMALES PARA PROBLEMAS MÁS GENERALES 75

(i)  $w : H_+ \rightarrow \mathbb{C}$  es analítica. Donde  $H_+ = \{\text{Re}(s) > 0\}$ .

(ii) Para todo  $s \in H_+$  se tiene

$$w(s) = 2s + \int_{-\infty}^{\infty} U(x)\xi_+(x)dx = 2s + \sum_{k=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(x)A_s^k 1(x)dx, \quad (5.54)$$

$$w(s) = 2s + \int_{-\infty}^{\infty} U(x)\xi_-(x)dx = 2s + \sum_{k=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(x)B_s^k 1(x)dx \quad (5.55)$$

**Prueba.** La prueba de (i) y (ii) son las siguientes. La primera afirmación es una consecuencia directa del Teorema 3. Para la segunda afirmación, sea  $s \in H_+$  y primero notamos que con  $\phi_{\pm}(s, x) = e^{\mp sx}\xi_{\pm}(s, x)$ ,

$$w(s) = \xi_+(s, x)\xi'_-(s, x) - \xi'_+(s, x)\xi_-(s, x) + 2s\xi_+(s, x)\xi_-(s, x)$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Tomando el límite  $x \rightarrow -\infty$  de ambos lados y usando el hecho que  $\xi_+(s, \cdot)$  y  $\xi'_+(s, \cdot)$  son acotados siempre y que  $\xi_-(s, x) \rightarrow 1$ ,  $\xi'_-(s, x) \rightarrow 0$ , encontramos

$$w(s) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [-\xi'_+(s, x) + 2s\xi_+(s, x)].$$

Luego, usando  $\xi_+ = 1 + A_s\xi_+$  y la definición del operador  $A_s$  en la ecuación (5.45), encontramos que

$$\begin{aligned} w(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2s(x-y)}U(y)\xi_+(y)dy + 2s + \int_{-\infty}^{\infty} (1 - e^{2s(x-y)})U(y)\xi_+(y)dy \\ &= 2s + \int_{-\infty}^{\infty} U(y)\xi_+(y)dy. \end{aligned}$$

La segunda identidad se sigue análogamente.

Las identidades (5.54, 5.55) son útiles cuando estudiamos el comportamiento de la función  $w$  en el límite de altas frecuencias  $|s| \rightarrow \infty$ . Combinando estas

identidades con las ecuaciones (5.48) y (5.50) obtenemos para todo  $N \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} \frac{w(s)}{2s} = & 1 + \frac{1}{2s} \int_{-\infty}^{\infty} U(x) dx + \frac{1}{2s} \int_{-\infty}^{\infty} U(x) A_s 1(x) dx \\ & + \dots + \frac{1}{2s} \int_{-\infty}^{\infty} U(x) A_s^N 1(x) dx + \mathcal{R}_{+N}(s), \end{aligned} \quad (5.56)$$

$$\begin{aligned} \frac{w(s)}{2s} = & 1 + \frac{1}{2s} \int_{-\infty}^{\infty} U(x) dx + \frac{1}{2s} \int_{-\infty}^{\infty} U(x) B_s 1(x) dx \\ & + \dots + \frac{1}{2s} \int_{-\infty}^{\infty} U(x) B_s^N 1(x) dx + \mathcal{R}_{-N}(s), \end{aligned} \quad (5.57)$$

donde los términos restantes  $\mathcal{R}_{\pm N}(s)$  satisfacen

$$|\mathcal{R}_{\pm N}(s)| \leq \frac{1}{2(N+1)!} \left( \frac{b}{|s|} \right)^{N+2} e^{b/|s|}, \quad \operatorname{Re}(s) \geq 0, s \neq 0,$$

y la serie converge rápidamente cuando  $N \rightarrow \infty$ .

En particular,  $w(s)/2s \rightarrow 1$  como  $|s| \rightarrow \infty$ , lo que implica que  $w(s)$  no puede tener ceros con frecuencia alta arbitraria en el semi plano derecho. La aproximación

$$\frac{w(s)}{2s} = 1 + \frac{1}{2s} \int_{-\infty}^{\infty} U(x) dx + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|s|^2}\right), \quad \operatorname{Re}(s) \geq 0, s \neq 0,$$

es llamada la primera aproximación de Born.

## 5.4. Continuación analítica para $\operatorname{Re}(s) < 0$

En esta sección discutiremos la continuación analítica de la función  $\phi_+(s, x)$  en el semiplano izquierdo  $\operatorname{Re}(s) < 0$ . Para esto, necesitamos adicionar suposiciones fuertes sobre la función  $U$  (hasta ahora, sólo asumimos que  $U \in L^1(\mathbb{R})$ ).

### 5.4.1. Potenciales analíticos

Consideramos una función  $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la cual, en adición de ser  $L^1$ -integrable, satisface las siguientes propiedades:

- (a) Existe un ángulo  $\vartheta \in (0, \pi/2]$  y una función analítica  $\bar{U} : G_\vartheta \rightarrow \mathbb{C}$  en el dominio

$$G_\vartheta := \{x = re^{i\alpha} : r > 0, |\alpha| < \vartheta\}$$

tal que  $\bar{U}(x) = U(x)$  para todo  $x > 0$ . Ver Figura 5.3

(b) Existe una constante  $K > 0$  tal que

$$|\bar{U}(x)| \leq \frac{K}{1 + |x|^2}, \quad x \in G_\vartheta.$$

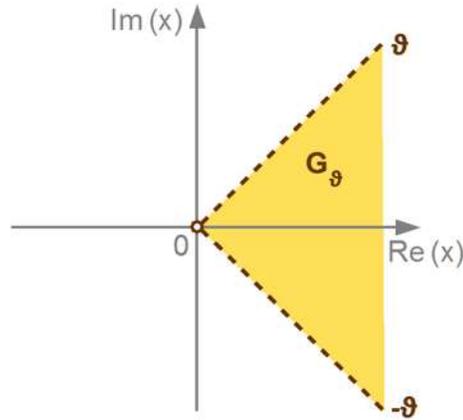


Figura 5.3: Región  $G_\vartheta$ .

El resultado principal en esta sección es el siguiente:

**Teorema 4** Sea  $U \in L^1(\mathbb{R})$  satisfaciendo las suposiciones anteriores (a) y (b). Entonces, la única solución  $\phi_+(s, x)$  de (5.46) que satisface  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{sx} \phi_+(s, x) = 1$  para todo  $\text{Re}(s) > 0$  posee para cada  $x \in \mathbb{R}$  una única continuación analítica en el dominio  $s \in C_\vartheta$ , donde

$$C_\vartheta := \left\{ \rho e^{i\varphi} \in \mathbb{C} : \rho > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2} + \vartheta \right\} \supset H_+. \text{ Ver Figura 5.4}$$

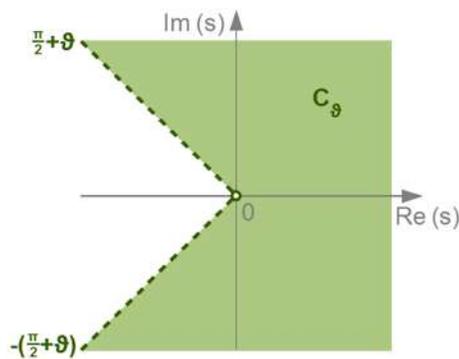


Figura 5.4: Región  $C_\vartheta$ .

**Idea de la prueba.** Como antes, fijamos  $\phi_+(s, x) = e^{-sx}\xi(s, x)$  donde  $\xi$  satisface la condición  $\lim_{x \rightarrow \infty} \xi(s, x) = 1$  para cada  $\operatorname{Re}(s) > 0$  y la ecuación

$$\xi'' - 2s\xi' - \bar{U}(x)\xi = 0, \quad (5.58)$$

pero ahora consideramos esta ecuación en  $x \in G_\vartheta$ . Introducimos el espacio de Banach

$$X_\vartheta := \{\xi : G_\vartheta \rightarrow \mathbb{C} : \xi \text{ continuas y acotadas}\}$$

con norma

$$\|\xi\|_\infty := \sup_{x \in G_\vartheta} |\xi(x)|, \quad \xi \in X_\vartheta,$$

y para cada  $\xi \in X_\vartheta$  y  $s \in C_\vartheta$  definimos

$$A_s \xi(x) := \int_{\gamma_x} h_s(y-x) \bar{U}(y) \xi(y) dy = \int_0^\infty h_s(re^{i\alpha}) \bar{U}(x+re^{i\alpha}) \xi(x+re^{i\alpha}) e^{i\alpha} dr, \quad (5.59)$$

$x \in G_\vartheta$ ,

donde  $\gamma_x$  es el rayo en  $G_\vartheta$  parametrizado por  $x+re^{i\alpha}$ ,  $r \geq 0$ , para algún  $|\alpha| \leq \vartheta$  fijo. La función  $h_s : G_\vartheta \rightarrow \mathbb{C}$  es definida por

$$h_s(z) := \frac{1 - e^{-2sz}}{2s}, \quad z \in G_\vartheta,$$

y para  $s = \rho e^{i\varphi} \in C_\vartheta$ ,  $z = re^{i\alpha} \in G_\vartheta$  satisface la estimación

$$|h_s(z)| \leq \frac{1 + e^{-2\rho r \cos(\alpha+\varphi)}}{2|s|} \leq \frac{1}{|s|}, \quad (5.60)$$

siempre que  $|\alpha + \varphi| \leq \pi/2$ . De estas observaciones, tenemos que si  $\xi \in X_\vartheta$  es analítica,  $A_s \xi$  es independiente de la elección de  $\alpha$  en la integral de línea (5.59). A partir de (5.59), construimos la serie  $A_s^k \xi$  aplicando  $k$ -veces el operador  $A_s$  a la función  $\xi$  obteniendo

$$A_s^k \xi(x) = \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty h_s(r_1 e^{i\alpha}) \cdots h_s(r_k e^{i\alpha}) \bar{U}(x+r_1 e^{i\alpha}) \cdots \bar{U}(x+(r_1+\dots+r_k)e^{i\alpha}) \xi(x+(r_1+\dots+r_k)e^{i\alpha}) e^{ik\alpha} dr_1 \cdots dr_k,$$

la cual da

$$\begin{aligned} |A_s^k \xi(x)| &\leq \frac{1}{|s|^k} \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty |\bar{U}(x+r_1 e^{i\alpha})| \cdots |\bar{U}(x+(r_1+\dots+r_k)e^{i\alpha})| dr_1 \cdots dr_k \sup_{y \in \gamma_x} |\xi(y)| \\ &\leq \frac{1}{|s|^k} \int_{y_k > y_{k-1} > \dots > y_1 > 0} \frac{K}{1+|x+y_1 e^{i\alpha}|^2} \cdots \frac{K}{1+|x+y_k e^{i\alpha}|^2} d^k y \sup_{y \in \gamma_x} |\xi(y)| \\ &= \frac{1}{k!} \frac{\beta_\alpha(x)^k}{|s|^k} \sup_{y \in \gamma_x} |\xi(y)|, \quad \beta_\alpha(x) := \int_0^\infty \frac{K dr}{1+|x+re^{i\alpha}|^2}, \end{aligned}$$

donde tenemos que si  $|x + re^{i\alpha}| \geq ||x| - r|$  se tiene una cota uniforme

$$\beta_\alpha(x) \leq \int_0^\infty \frac{Kdr}{1 + (r - |x|)^2} = \int_{-|x|}^\infty \frac{Kdr}{1 + r^2} \leq K\pi,$$

la cual implica que  $A_s : X_\vartheta \rightarrow X_\vartheta$  es un operador lineal acotado. Como una consecuencia de lo anterior, tenemos para cada  $s \in C_\vartheta$  la estimación

$$\|A_s^k 1\|_\infty \leq \frac{1}{k!} \left( \frac{K\pi}{|s|} \right)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.61)$$

Consecuentemente, la serie

$$\xi_s := \sum_{k=0}^\infty A_s^k 1 \quad (5.62)$$

converge en  $(X_\vartheta, \|\cdot\|_\infty)$  a una función  $\xi_s \in X_\vartheta$  que satisface  $1 + A_s \xi_s = \xi_s$ <sup>6</sup>. Es decir, tenemos una única solución  $\xi = \xi_s \in X_\vartheta$  que satisface la ecuación (5.58)  $\square$

**Observaciones:** En la demostración del teorema, obtuvimos mucho más que una continuación analítica de  $\phi_+(s, x)$  para cada  $x \in \mathbb{R}$  fijo para  $s \in C_\vartheta$ . Es decir, también obtuvimos para cada  $s \in C_\vartheta$  fijo una continuación analítica de  $\phi_+(s, x)$  en el dominio  $x \in G_\vartheta$ . Para cada  $(s, x) \in C_\vartheta \times G_\vartheta$ , la función  $\phi_+(s, x)$  puede ser construida por iteración,

$$\begin{aligned} \phi_+(s, x) &= e^{-sx} \lim_{k \rightarrow \infty} (1 + A_s)^k 1(x) = e^{-sx} \sum_{k=0}^\infty A_s^k 1(x), \\ \text{con } A_s \xi(x) &= \frac{1}{2s} \int_{\gamma_x} \left(1 - e^{-2s(y-x)}\right) \bar{U}(y) \xi(y) dy, \end{aligned} \quad (5.63)$$

donde  $\gamma_x$  es el rayo parametrizado por  $x + re^{i\alpha}$ ,  $r \geq 0$ , para algún  $|\alpha| \leq \vartheta$  fijo satisfaciendo la condición  $|\alpha + \varphi| \leq \pi/2$  y para  $s = \rho e^{i\varphi}$ . Si restringimos a  $s \in C_\vartheta$  que vive en plano imaginario superior ( $0 \leq \varphi < \pi/2 + \vartheta$ ) una elección natural para el ángulo  $\alpha$  en el rayo  $\gamma_x$  es  $\alpha = -\vartheta$ . Por construcción,  $\phi_+(s, \cdot)$  es una solución analítica de la ecuación diferencial (5.46) satisfaciendo la condición de frontera

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ x \in G_\vartheta}} e^{sx} \phi_+(s, x) = 1. \quad (5.64)$$

<sup>6</sup>En el caso real, la propiedad que  $\xi_s$  es un punto fijo del operador  $1 + A_s$  era suficiente para asegurar que  $\xi_s$  es una función continuamente diferenciable satisfaciendo la ecuación diferencial requerida. Sin embargo, en el caso del plano complejo, la ecuación  $1 + A_s \xi_s = \xi_s$  sola no implica una afirmación similar en el caso complejo. En este caso, se requiere que  $\xi_s$  sea, además, analítica.

### 5.4.2. Continuación analítica de las soluciones para el caso de agujeros negros

Ahora regresamos al problema (5.34), es decir, la ecuación

$$-N(r) \frac{\partial}{\partial r} \left[ N(r) \frac{\partial \phi}{\partial r} \right] + [s^2 + N(r)V_\ell(r)] \phi = 0, \quad r \geq 1, \quad (5.65)$$

donde las funciones  $N$  y  $V_\ell = V$  satisfacen las condiciones (i)–(iii) de la sección 5.3. Como demostramos en la sección 5.3.1, para  $\text{Re}(s) > 0$  esta ecuación admite precisamente dos soluciones  $\phi_\pm(s, r)$  satisfaciendo las condiciones de frontera [32]

$$\lim_{r_* \rightarrow \infty} e^{sr_*} \phi_+(s, r) = 1, \quad \lim_{r_* \rightarrow -\infty} e^{-sr_*} \phi_-(s, r) = 1, \quad (5.66)$$

en la región asintótica y en horizonte de eventos, respectivamente.

Como mostramos en la sección 5.3.2 las soluciones  $\phi_\pm$  dependen analíticamente de  $s$  y son linealmente independientes para  $\text{Re}(s) > 0$ . La pregunta es cómo obtener la continuación analítica de  $\phi_\pm$  para  $\sigma < 0$ . Para aplicar la teoría de la sección anterior 5.4 necesitamos controlar bien la coordenada tortuga  $r_*$  como función de  $r$  y su continuación analítica para  $r$  complejo. Esto lleva a problemas porque  $r_*(r)$  es multivaluada (ver (5.36) en sección 5.3.1, donde  $r_* = x$ ). Más precisamente se requiere la continuación analítica de la inversa de  $r = r(r_*)$ . Para el caso de la métrica de Schwarzschild ver [33].

Para evitar los problemas mencionados arriba, la idea es entonces, usar la variable física  $r$  en vez de la coordenada tortuga  $r_*$ . Como demostramos en la sección 5.3.1, para  $\text{Re}(s) > 0$  las soluciones  $\phi_\pm$  pueden ser construidas usando el siguiente esquema de iteración,

$$\phi_\pm(s, r) = e^{\mp sr_*} \lim_{k \rightarrow \infty} (T_{\pm s}^k 1)(r), \quad (5.67)$$

donde los operadores  $T_{\pm s}$ , actuando sobre funciones continuas y acotadas  $\xi$ , son definidos como

$$(T_{+s}\xi)(r) = 1 + \frac{1}{2s} \int_r^\infty \left(1 - e^{-2s(r'_* - r_*)}\right) V_\ell(r') \xi(r') dr', \quad (5.68)$$

$$(T_{-s}\xi)(r) = 1 + \frac{1}{2s} \int_{r_c}^r \left(1 - e^{+2s(r'_* - r_*)}\right) V_\ell(r') \xi(r') dr', \quad (5.69)$$

para  $r_c < r < \infty$ , con  $r'$  la variable de integración y  $r'_*$  la coordenada tortuga asociada. Nótese que las integrales en estas expresiones están bien definidas para  $\sigma = \text{Re}(s) \geq 0$ , porque  $|e^{-2s(r'_* - r_*)}| = e^{-2\sigma(r'_* - r_*)} \leq 1$  con  $r'_* \geq r_*$  y porque el potencial  $V_\ell(r)$  decae al menos tan rápido como  $1/r^2$  para  $r \rightarrow \infty$ . Con estas observaciones en mente no es difícil de verificar que la secuencia  $T_{\pm s}^k 1(r)$  obtenida al aplicar  $k$  veces el operador  $T_{\pm s}$  en la función constante  $\xi = 1$ , converge para todo  $\text{Re}(s) \geq 0$  con  $s \neq 0$  y todos los  $r > r_c$ , uniformemente en intervalos compactos, y que  $\phi_\pm(s, \cdot)$  son soluciones de la ecuación (5.65)

satisfaciendo las condiciones de frontera requeridas (5.66). Además, las funciones  $\phi_{\pm}(s, r)$  son analíticas en  $s$  para cualquier  $r > r_c$  fijo. Para más detalles sobre estas afirmaciones remitimos al lector a la referencia [34], sección XI.8 en [28] o sección 5.3.

A continuación, discutimos la continuación analítica de la función  $\phi_+(s, r)$  para  $\text{Re}(s) < 0$ . En este caso, la integral en la ecuación (5.68) no converge a menos que  $V_{\ell}(r)$  decaiga exponencialmente rápido. Sin embargo, si el potencial efectivo  $V_{\ell}$  y la función  $N$  en la definición de la coordenada tortuga  $r_*$  (5.36) poseen continuaciones analíticas apropiadas en el plano complejo  $r$ ,  $\phi_+(s, r)$  puede ser continuada analíticamente para  $\text{Re}(s) < 0$  deformando el camino de integración en la definición de  $T_{+s}\xi$  en (5.68). La idea básica, la cual ha sido usada en [35] en el contexto de la ecuación Regge-Wheeler, se basa en la siguiente observación: para  $s = |s|e^{i\varphi}$  y  $r'_* - r_* = \rho e^{i\alpha}$ ,  $\rho \geq 0$ , todavía tenemos  $|e^{-2s(r'_* - r_*)}| \leq 1$  siempre que  $\text{Re}(s(r'_* - r_*)) = |s|\rho \cos(\varphi + \alpha) \geq 0$ . Para el camino de integración en (5.68),  $r'_*$  y  $r_*$  son reales y  $r'_* > r_*$  y, en consecuencia,  $\alpha = 0$  lo que implica que sólo las frecuencias  $s = \rho e^{i\varphi}$  comprendidas entre  $|\varphi| \leq \pi/2$  (es decir,  $\text{Re}(s) \geq 0$ ) son admisibles. Sin embargo, eligiendo un nuevo camino de integración tal que  $\alpha = -\pi/2$  se encuentre en el rango admisible  $0 \leq \varphi \leq \pi$ , de modo que la integral en (5.68) converge para todo  $\text{Im}(s) > 0$  siempre que la continuación analítica de  $V_{\ell}$  decaiga suficientemente rápido a lo largo del camino (decae igual o más rápido que  $1/|r|^2$  es suficiente). Debido al teorema de integración de Cauchy el nuevo camino de integración da el mismo valor para  $(T_{+s}\xi)(r)$  como el calculado usando el camino original en la intersección de los dos dominios  $\text{Re}(s) > 0$  y  $\text{Im}(s) > 0$ , entonces mediante la deformación de la trayectoria de esta forma obtenemos la continuación analítica requerida de  $\phi_+(s, r)$  en la mitad superior del plano  $\text{Im}(s) > 0$ .<sup>7</sup>

En nuestros cálculos, elegimos el siguiente camino de integración para  $T_{+s}$ :

$$\gamma_{\alpha}(\lambda) = r + e^{i\alpha}\lambda, \quad \lambda \geq 0,$$

con ángulo  $\alpha$  ligeramente mayor que  $-\pi/2$ , y estableciendo

$$(T_{+s}\xi)(r) = 1 + \frac{1}{2s} \int_{\gamma_{\alpha}} \left[ 1 - \exp \left( -2s \int_r^{r'} \frac{dr''}{N(r'')} \right) \right] V_{\ell}(r') \xi(r') dr', \quad \text{Re}(r) > r_c, \quad (5.70)$$

donde se entiende que la integral desde  $r$  hasta  $r'$  en la exponencial se lleva a cabo a lo largo del camino  $\gamma_{\alpha}$ . La continuación analítica de las funciones  $N$  y  $V_{\ell}$  para  $r$  complejo y sus propiedades se discuten en el apéndice. Para  $|r|$  grande y  $\text{Re}(r) > r_c$ ,  $V_{\ell}$  decae al menos tan rápido como  $1/|r|^2$  y  $N$  converge a una constante real positiva, de modo que  $r'_* - r'$  es aproximadamente proporcional a  $r' - r$  para  $|r'|$  grande. Por lo tanto la integral converge para todo  $\text{Im}(s) > 0$ , como se explicó anteriormente.

<sup>7</sup>Una continuación analítica similar se puede obtener en el semiplano inferior eligiendo  $\alpha = +\pi/2$ . Sin embargo, debido a que las funciones  $N$  y  $V_{\ell}$  en (5.65) son reales las frecuencias cuasi-normales  $s$  vienen en pares conjugados complejos, y es suficiente considerar la mitad del plano superior.

La continuación analítica de la función  $\phi_-(s, r)$  para  $\text{Re}(s) < 0$  se puede obtener usando ideas similares,

$$(T_{-s}\xi)(r) = 1 - \frac{1}{2s} \int_{\Gamma} \left[ 1 - \exp \left( 2s \int_r^{r'} \frac{dr''}{N(r'')} \right) \right] V_\ell(r') \xi(r') dr', \quad (5.71)$$

con  $\Gamma$  un camino de integración que conecta  $r$  con  $r_c$ .<sup>8</sup> Elegimos el camino de integración

$$\Gamma_\beta(\lambda) = r_c + (r - r_c) \exp(-e^{i\beta} \lambda), \quad \lambda \geq 0$$

con  $\beta$  ligeramente mayor que  $-\pi/2$ , el cual gira en espiral en sentido antihorario alrededor del punto  $r = r_c$ , ver Figura 5.5. A lo largo de este camino tenemos, para  $s = |s|e^{i\varphi}$ ,

$$\exp \left( 2s \int_r^{r'} \frac{dr''}{N(r'')} \right) \simeq \exp \left( \frac{2s}{N'(r_c)} \int_0^{\lambda'} (-e^{i\beta}) d\lambda \right) = \exp \left( -2|s|e^{i(\beta+\varphi)} \frac{\lambda'}{N'(r_c)} \right),$$

la cual es acotada siempre que  $|\beta + \varphi| \leq \pi/2$ . Por lo tanto, la elección de  $\beta = -\pi/2 + \delta$  con  $\delta > 0$  pequeño garantiza la convergencia de la integral en (5.71) para todo  $0 < \varphi < \pi - \delta$ , entonces eligiendo  $\delta > 0$  suficientemente pequeño podemos cubrir todo el plano superior  $\text{Im}(s) > 0$ . Más detalles y justificaciones rigurosas de nuestro método serán proporcionados en otra parte [31].

---

<sup>8</sup>En el caso particular que vamos a estudiar en el Capítulo 6 sobre las perturbaciones acústicas, hay que tener especial cuidado con respecto a la relación entre la coordenada tortuga y el radio físico cercano al horizonte sónico  $r = r_c$ , donde la función  $1/N$  tiene un polo. Con el fin de motivar nuestra elección para el camino de integración  $\Gamma$ , aproximamos

$$\frac{1}{N(r)} \simeq \frac{1}{N'(r_c)} \frac{1}{r - r_c}$$

para  $r$  cerca a  $r_c$ . Notar que  $N'(r_c) > 0$  es positivo ya que la gravedad superficial asociada con el horizonte sónico es positiva. Como consecuencia del teorema del residuo, la integral sobre  $1/N$  incrementa un factor de  $2\pi i/N'(r_c)$  después de cada revolución a lo largo del camino cerrado que se enrolla contrario a las agujas del reloj alrededor de  $r = r_c$ . En la exponencial en la integral del lado derecho de la ecuación (5.71) esto daría lugar a un factor multiplicativo  $\exp(4\pi i s/N'(r_c))$ , es cual es acotado para todo  $\text{Im}(s) \geq 0$ . Las funciones  $N(r)$  y  $V_\ell(r)$  se calculan a partir de (6.10),(6.11), donde  $n(r)$  se determina numéricamente resolviendo (4.11) a través de un algoritmo de Newton estándar [36].

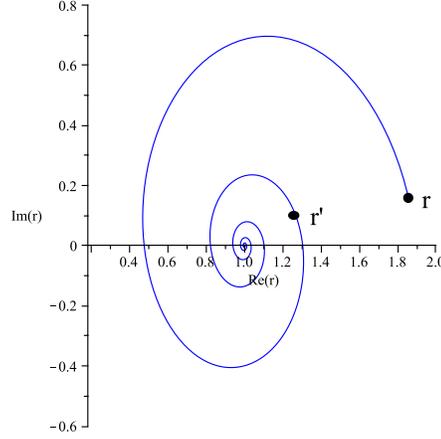


Figura 5.5: (de Phys. Rev. D 91, 104012 (2015)) Integración del camino  $\Gamma_\beta$  en el plano complejo  $r$  para el caso  $r_c = 1$ .

Para un  $\text{Im}(s) > 0$  dado calculamos numéricamente las funciones  $\phi_\pm(s, r)$  y sus primeras derivadas  $\phi'_\pm(s, r)$  truncando la iteración de la ecuación (5.67) en algún  $k$  finito y calculamos los operadores  $T_{\pm s}$  usando (5.70) y (5.71), donde discretizamos las integrales usando la regla trapezoidal. Elegimos  $\alpha = -1,57$  y  $\beta = -1,5$ , y encontramos que en la práctica sólo se requieren alrededor de  $k \sim 10$  iteraciones para una buena precisión. A fin de encontrar las frecuencias cuasi-normales hacemos coincidir las dos soluciones  $\phi_+$  y  $\phi_-$  encontrando los ceros de su Wronskiano,

$$W(s) := \det \begin{pmatrix} \phi_+(s, r) & \phi_-(s, r) \\ N\phi'_+(s, r) & N\phi'_-(s, r) \end{pmatrix} = \xi_+(s, r)N\xi'_-(s, r) - N\xi'_+(s, r)\xi_-(s, r) + 2s\xi_+(s, r)\xi_-(s, r), \quad (5.72)$$

donde  $\xi_\pm(s, r) = \lim_{k \rightarrow \infty} (T_{\pm s}^k 1)(r)$ , en algún punto intermedio el cual típicamente elegimos cerca de  $r_m \simeq 1,5r_c$ . Los ceros de  $W$  son obtenidos numéricamente usando el algoritmo de Newton estándar [36], donde la derivada de  $W(s)$  con respecto a  $s$  se aproxima mediante un operador de diferencia finita simple.

Para probar nuestro algoritmo, lo hemos aplicado para el cálculo de las frecuencias cuasi-normales de Schwarzschild, como vimos arriba. Esto es, para la paridad impar de las perturbaciones gravitacionales linealizadas en un agujero negro de Schwarzschild, en cuyo caso las funciones  $N$  y  $V_\ell$  son  $N(r) = 1 - r_H/r$  y  $V_\ell(r) = \ell(\ell + 1)/r^2 - 3r_H/r^3$ , respectivamente. En el caso cuadrupolar encontramos las frecuencias  $s \cdot r_H$ , que se muestran en el cuadro 5.2, las cuales están de acuerdo a alta precisión (ver cuadro 5.1 para  $\ell = 2$ ) con las obtenidas a partir del método de Leaver de fracciones continuas [26]. Para producir estos resultados hemos escogido  $r_m = 1,5r_H$ , discretizamos las integrales en (5.70,5.71) usando

40,000 puntos y realizado 14 iteraciones de Banach. Variamos estos números a fin de obtener cinco cifras significativas en todas las frecuencias.

| $n_0$ | $s \cdot r_H (\ell = 2)$ |
|-------|--------------------------|
| 0     | $-0,17792 + 0,74734i$    |
| 1     | $-0,54783 + 0,69342i$    |
| 2     | $-0,95656 + 0,60211i$    |
| 3     | $-1,4103 + 0,50301i$     |
| 4     | $-1,8937 + 0,41503i$     |
| 5     | $-2,3912 + 0,33859i$     |
| 6     | $-2,8958 + 0,2665i$      |

Cuadro 5.2: Frecuencias cuasi-normales cuadrupolar  $\ell = 2$  de las perturbaciones gravitacionales linealizadas en un agujero negro de Schwarzschild. Donde  $n = 0, 1, 2, \dots$  etiqueta el estado de excitación de las frecuencias.

## Capítulo 6

# Modos cuasi-normales acústicos

El objetivo de este capítulo es estudiar los modos oscilatorios de un modelo simple de acreción: el flujo radial de un fluido perfecto hacia un agujero negro no rotante (ver capítulo 4). Configuraciones estacionarias esféricamente simétricas (para cuales la densidad no desvanece en el infinito y la materia esta en reposo) han sido estudiados en este modelo hace muchos años por Michel [6], generalizando trabajo previo de Bondi [5] acerca del caso Newtoniano. Recordemos que el flujo de Michel, describe un flujo transónico donde la velocidad radial medida por observadores estáticos es subsónica en la región asintótica y supersónica cerca del horizonte de eventos.

En este capítulo estudiamos perturbaciones acústicas lineales (esféricas y no esféricas) del flujo de Michel, asumiendo un fondo fijo de Schwarzschild. La perturbación del flujo potencial (3.4) se puede describir de una manera elegante mediante una ecuación de onda sobre una geometría efectiva curva descrita por la *métrica acústica/sónica*, la cual se construye a partir de la métrica del espaciotiempo, la cuadrivelocidad y densidad del flujo de fondo (ver Capítulo 3). Además, tiene un horizonte llamado horizonte sónico y es definido como la frontera de la región que puede mandar señales acústicas a un observador a larga distancia donde la materia es casi en reposo. Resulta que esta frontera coincide con la esfera sónica, donde la velocidad radial del flujo (medido por observadores estáticos) pasa de subsónica a supersónica.

Considerando entonces la propagación de ondas acústicas, la geometría acústica del flujo de Michel tiene exactamente las mismas propiedades cualitativas como la geometría de un agujero negro estático esféricamente simétrico (sobre la que se propaga la radiación electromagnética). El horizonte sónico en la geometría acústica tiene el mismo papel que el horizonte de eventos. Por consecuencia, la geometría acústica del flujo de Michel constituye un "agujero negro análogo" astrofísico natural.

Podemos interpretar la propagación de perturbaciones acústicas como un

problema de evolución en una geometría efectiva.

En este capítulo usamos dicha interpretación de agujero negro análogo. Así como en el capítulo (5) vimos que el agujero negro de Schwarzschild, al ser perturbado, exhibe modos cuasi-normales, en este capítulo mostramos que para pequeñas perturbaciones del flujo de Michel también se generan oscilaciones acústicas cuasi-normales, que son caracterizados por frecuencias complejas  $s = \sigma + i\omega$ . Lo cual se espera ya que, el agujero negro análogo tiene las mismas etiquetas de un agujero negro. La parte real  $\sigma < 0$  describe la tasa de decaimiento y la parte imaginaria  $\omega$  es la frecuencia de la oscilación. En ambos casos (en Schwarzschild y en el fluido), estas frecuencias complejas describen la fase del "ringdown" (en el cual la amplitud de las oscilaciones baja exponencialmente) después del cual sigue para tiempos largos un decaimiento más lento descrito por una ley de potencia el cual llamamos "cola". Calculamos numericamente las frecuencias cuasi-normales durante el "ringdown" (y en algunos casos incluso el exponente del decaimiento para la "cola" (después del "ringdown")) como función del radio  $r_H$  del horizonte de eventos,  $r_c$  del horizonte sónico y del número de momento angular  $\ell$  de la perturbación.

## 6.1. Breve revisión del flujo de Michel y sus propiedades relevantes

En el capítulo 4 estudiamos el flujo de Michel para una métrica más general (4.1) que la métrica de Schwarzschild, donde nuestro resultado fue demostrar que bajo las suposiciones (F1),(F2),(F3) en el fluido, para  $|\mu|$  suficientemente grande, existe un único punto crítico de  $F(r, n)$  y una única solución  $n(r)$  de la ecuación (4.11) la cual se extiende desde  $r_H$  hasta  $r = \infty$  y satisface  $n(r_c) = n_c$ . Además, dada  $n_\infty > 0$  el valor de  $|\mu|$  (y por tanto la posición del punto crítico) es fijo. Para este capítulo, como se dijo en la introducción, asumimos un fondo fijo de Schwarzschild. En este caso,  $\alpha = 1$  y  $N(r) = \sigma(r) = 1 - r_H/r$  en la ecuación (4.1).

Físicamente, el punto crítico corresponde a la esfera sónica  $r = r_c$ , la cual describe la transición de la velocidad radial del flujo, medida por un observador estático, de sub- a supersónica. La ubicación de la esfera sónica está determinada por las ecuaciones

$$\frac{r_c}{r_H} = \frac{1}{4} \left( 3 + \frac{1}{\nu_c^2} \right), \quad n_c = \frac{2|\mu|}{\sqrt{r_c^3 r_H}}, \quad \nu_c := \frac{v_s}{c}, \quad (6.1)$$

la cual se sigue de la ecuación (4.16). De acuerdo a la suposición (F2),  $\nu_c^{-2}$  es siempre mayor que uno, y de (6.1) implica que el horizonte sónico está localizado afuera del horizonte.

Para uso posterior necesitamos la derivada de la densidad de partículas  $n'_c := n'(r_c)$  en el punto crítico. Para esto, diferenciamos la ecuación (4.16)

con respecto a  $r$  y evaluamos en  $r = r_c$ , obteniendo

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r_c, n_c) + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial n}(r_c, n_c) n'_c + \frac{\partial^2 F}{\partial n^2}(r_c, n_c) (n'_c)^2 = 0. \quad (6.2)$$

Usando la siguiente expresión para el Hessiano de  $F$  en  $(r_c, n_c)$ ,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r_c, n_c) & \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial n}(r_c, n_c) \\ \frac{\partial^2 F}{\partial n \partial r}(r_c, n_c) & \frac{\partial^2 F}{\partial n^2}(r_c, n_c) \end{pmatrix} = \frac{h_c^2}{n_c^2} \frac{r_H}{r_c} \begin{pmatrix} 3 \frac{n_c^2}{r_c^2} & 2 \frac{n_c}{r_c} \\ 2 \frac{n_c}{r_c} & 1 - \nu_c^2 + W_c \end{pmatrix},$$

con  $h_c = n(r_c)$  y  $W_c = W(r_c)$ , encontramos dos soluciones

$$\frac{n'_c}{n_c} = -\frac{3}{r_c} \frac{1}{2 \pm \sqrt{1 + 3(\nu_c^2 - W_c)}}, \quad (6.3)$$

las cuales parametrizan las dos ramas de las líneas de nivel de  $F$  a través de  $(r_c, n_c)$ . En el Capítulo 4 demostramos que la rama correspondiente a la solución global para  $n(r)$  extiende desde el horizonte hasta el infinito es la que tiene el signo  $+$  en (6.3). En el apéndice G, demostramos que la función  $n(r)$  admite una continuación analítica para  $r$  complejo. Esta continuación se requiere para el cálculo de los modos cuasi-normales que vamos a ver más adelante.

## 6.2. Oscilaciones cuasi-normales desde un análisis de modos

La propagación de las perturbaciones acústicas en cualquier fluido perfecto relativista, como se estudio en el capítulo 3, se describen por la ecuación de onda (3.19), dada por  $\square_{\mathfrak{G}} \Psi = 0$ . Donde el campo escalar  $\Psi$  determina las perturbaciones de la entalpía  $\delta h$  y de la cuadri-velocidad  $\delta u_\mu$ , las cuales usando  $u^\mu \delta u_\mu = 0$  se obtiene

$$\delta h = -u^\mu \nabla_\mu \Psi, \quad \delta u_\mu = \frac{1}{h} [\nabla_\mu \Psi + u_\mu u^\nu \nabla_\nu \Psi].$$

El operador  $\square_{\mathfrak{G}}$ , es el operador de onda respecto a la *métrica acústica*  $\mathfrak{G}$ , definida en la ecuación (3.20).

### 6.2.1. Geometría de la métrica acústica

Por simplicidad, a partir de ahora usamos unidades en las cuales la velocidad de la luz es uno,  $c = 1$ . Para el caso particular del flujo de Michel en la métrica de Schwarzschild la métrica acústica es

$$\mathfrak{G} = \frac{n}{h} \frac{1}{v_s} \left[ -N dt^2 + \frac{dr^2}{N} + (1 - v_s^2) (u_t dt + u_r dr)^2 + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \right], \quad (6.4)$$

o

$$\mathfrak{G} = -A(r)dt^2 + 2B(r)dtdr + C(r)dr^2 + R(r)^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2), \quad (6.5)$$

con

$$\begin{aligned} A(r) &= \frac{n}{h} \frac{1}{v_s} [v_s^2 N - (1 - v_s^2)(u^r)^2], \\ B(r) &= -\frac{n}{h} \frac{1 - v_s^2}{v_s} \frac{\sqrt{N + (u^r)^2} u^r}{N}, \\ C(r) &= \frac{n}{h} \frac{1}{v_s} \frac{1}{N^2} [N + (1 - v_s^2)(u^r)^2], \\ R(r) &= \sqrt{\frac{n}{h} \frac{1}{v_s}} r, \end{aligned}$$

donde hemos usado la ecuación  $u_t^2 - (u^r)^2 = N$  y  $u_t < 0$  para eliminar  $u_t$  y donde  $n$ ,  $h$ ,  $v_s$  y  $u^r$  son dadas para la solución del flujo de Michel discutidas en el capítulo 4. La métrica acústica (6.4) es esféricamente simétrica y posee un campo vectorial de Killing

$$k = \frac{\partial}{\partial t}$$

que satisface  $\mathfrak{G}(k, k) = -A(r)$ . Dado que  $A(r)$  es positiva para  $r > r_c$  y negativa para  $r < r_c$  (ver (4.17) y las observaciones que siguen a esta ecuación) el campo vectorial  $k$  es tipo tiempo para  $r > r_c$ , tipo espacio para  $0 < r < r_c$  y nulo en  $r = r_c$ , y la superficie  $r = r_c$  es un horizonte de Killing [11, 37]. Notar que las coordenadas  $(t, r)$  son regulares en todas partes afuera del horizonte de eventos  $r > r_H$ ; en particular estas son regulares en el horizonte sónico  $r = r_c$ . Introduciendo una nueva coordenada de tiempo

$$T := t - \int \frac{B(r)}{A(r)} dr,$$

la métrica acústica puede ser escrita en forma diagonal afuera del horizonte sónico,

$$\mathfrak{G} = \frac{n}{h} \frac{1}{v_s} \left[ -X(r)v_s(r)^2 dT^2 + \frac{dr^2}{X(r)} + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \right], \quad (6.6)$$

donde

$$X(r) := N(r) - \left( \frac{1}{v_s^2} - 1 \right) (u^r)^2. \quad (6.7)$$

Nótese que  $X(r) \rightarrow 1$  cuando  $r \rightarrow \infty$ , y en este límite la métrica acústica se reduce a una constante por la métrica de Minkowski con coordenada de tiempo  $v_\infty T$ , con  $v_\infty := \lim_{r \rightarrow \infty} v_s(r)$  la velocidad del sonido en el infinito.

De esto se deduce que la geometría descrita por la métrica acústica (6.4) es la misma como en un agujero negro estático, esféricamente simétrico y asintóticamente plano. El horizonte sónico  $r = r_c$  juega el papel de evento de horizonte

en este agujero negro análogo. Su gravedad superficial  $\kappa$ , la cual va a jugar un papel importante más tarde, puede ser calculada usando (6.1) y (6.3). El resultado es

$$\kappa = \frac{A'(r_c)}{2B(r_c)} = \frac{1}{4v_c} \frac{r_H}{r_c^2} \sqrt{1 + 3(\nu_c^2 - W_c)}. \quad (6.8)$$

Campos escalares que se propagan en agujeros negros estáticos y esféricamente simétricos (como los agujeros negros de Schwarzschild y Reissner-Nordström) exhiben oscilaciones cuasi-normales. Puesto que el flujo potencial  $\Psi$  satisface la ecuación de onda en un fondo de agujero negro análogo, es natural esperar que las perturbaciones acústicas en el flujo de Michel también experimentan oscilaciones cuasi-normales. En lo que sigue, mostramos que en efecto tales oscilaciones existen y calculamos las frecuencias asociadas basados en dos métodos numéricos. Estos métodos consisten de lo siguiente: Un nuevo método que se llama "matching" (coincidencia). En este método, las soluciones locales de la ecuación radial que hacemos coincidir se calculan mediante un método de iteraciones de Banach. Este método comparte unas propiedades con la aproximación WKB en coordenada compleja, vease [25] y las referencias contenidas en este. Este nuevo método está motivado por lo siguiente: en el capítulo 5, vimos que los modos cuasi-normales para el caso de Schwarzschild pueden ser calculados por métodos analíticos populares basados en expansiones de series como el método de Leaver [26]. En nuestro caso, estos métodos no parecen ser aplicables debido a lo siguiente. Un punto importante es que el potencial efectivo que aparece en nuestra ecuación radial *no se puede* expresar de forma explícita (cuando la métrica de fondo es Schwarzschild, entonces sí se puede). Esta complicación ocurre porque la solución de Michel (que describe la densidad de partículas como función del radio de área) solo se conoce de forma implícita. Por consecuencia, los coeficientes de la métrica acústica y el potencial efectivo en la ecuación radial solo se pueden describir mediante funciones implícitas. El segundo método (por M. D. Morales) para calcular las frecuencias cuasi-normales, completamente diferente al primero, se basa en la evolución numérica de Cauchy de la ecuación de onda. En este método, se especifica una perturbación inicial para el potencial acústico del fluido, se resuelve numéricamente la ecuación de onda, y se registran las señales recibidos por un observador estático afuera del horizonte sónico. Este segundo método valida nuestro procedimiento del "matching", al menos, para el caso de las frecuencias fundamentales.

### 6.2.2. Reducción a una ecuación tipo Schrödinger

Modos cuasi-normales son soluciones particulares de la ecuación (3.19) las cuales son de la forma

$$\Psi = \frac{1}{R} e^{sT} \psi(s, r) Y^{\ell m}(\vartheta, \varphi),$$

para alguna frecuencia compleja  $s = \sigma + i\omega \in \mathbb{C}$  y una función de valores complejos  $\psi(s, r)$  por determinar. Aquí,  $\sigma$  denota la tasa de decaimiento,  $\omega$  la

frecuencia de oscilación, y  $Y^{\ell m}$  los esféricos armónicos estándares con número de momento angular  $\ell m$ . Introduciendo el ansatz dentro de (3.19) y usando la parametrización diagonal (6.7) de la métrica acústica, obtenemos la siguiente ecuación:

$$-\mathcal{N}(r) \frac{\partial}{\partial r} \left[ \mathcal{N}(r) \frac{\partial \psi}{\partial r} \right] + [s^2 + \mathcal{N}(r)V_\ell(r)] \psi = 0, \quad (6.9)$$

donde las funciones  $\mathcal{N}(r)$  y  $V_\ell(r)$  son dadas explícitamente por

$$\mathcal{N}(r) = v_s X = v_s \left[ 1 - \frac{r_H}{r} - \left( \frac{1}{v_s^2} - 1 \right) (u^r)^2 \right], \quad (6.10)$$

$$\begin{aligned} V_\ell(r) &= \frac{1}{r^2 v_s} \left\{ -(1 - v_s^2 + 5W)E - \frac{r n'}{2n} \left[ 4W + 3W^2 + (1 - v_s^2)^2 - 2 \frac{dW}{d \log n} \right] E \right. \\ &\quad \left. + \frac{r_H}{4r} \left[ 1 + 3v_s^2 + 3W + 4W r \frac{n'}{n} \right] \right\} + v_s \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}, \end{aligned} \quad (6.11)$$

con  $E := r_H/(4r) - (u^r)^2$ ,  $u^r = \mu/(r^2 n)$  y  $W = \partial \log v_s / \partial \log n$ . Lejos del punto crítico  $n'/n$  puede calcularse usando la ecuación (4.16), la cual da

$$\frac{n'}{n} = -\frac{2}{r} \frac{E}{v_s^2 X}, \quad (6.12)$$

mientras que para  $r = r_c$ , (6.3) se puede usar para calcular  $n'/n$ .

Para  $r$  grandes el potencial efectivo  $V_\ell(r)$  se comporta como  $v_\infty \ell(\ell+1)/r^2 + O(r^{-3})$ , donde domina el término centrífugo. En el horizonte sónico  $\mathcal{N}(r_c)$  es cero, pero  $V_\ell(r_c)$  es positivo. Introduciendo la coordenada tortuga  $r_* = \int dr/\mathcal{N}(r)$  que va desde  $-\infty$  hasta  $+\infty$  la ecuación (6.9) puede ser simplificada y es formalmente equivalente a la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo  $\mathcal{H}\psi = -s^2\psi$  con Hamiltoniano

$$\mathcal{H} := -\frac{d^2}{dr_*^2} + \mathcal{N}(r)V_\ell(r).$$

Un gráfica del potencial efectivo  $\mathcal{N}(r)V_\ell(r)$  para  $\ell = 0$  se muestra en la Figura 6.1, la cual indica que es una barrera de potencial, incluso para el caso monopolar  $\ell = 0$ .

Las frecuencias fundamentales también fueron calculadas por Manuel D. Morales [38] con un método independiente del nuestro. Al comparar ambas frecuencias fundamentales vimos que pegan bastante bien. En la Figura 6.2 tomada de [38], muestra la evolución temporal de las perturbaciones acústicas medidas por un observador estático localizado en  $r = 50r_H$  afuera del horizonte sónico  $r_c = 7r_H$ .

En la Figura 6.2 se muestra la evolución en el tiempo de las perturbaciones acústicas medidas por un observador que está en  $r = 50r_H$  afuera del horizonte sónico  $r_c = 7r_H$ .

## 6.2. OSCILACIONES CUASI-NORMALES DESDE UN ANÁLISIS DE MODOS 91

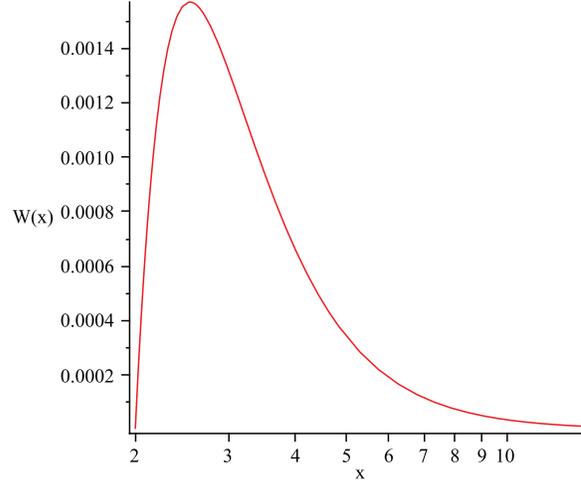


Figura 6.1: (de Phys. Rev. D 91, 104012 (2015)) Potencial efectivo adimensional  $W(x) := r_H^2 \mathcal{N}(r) V_0(r)$  del Hamiltoniano  $\mathcal{H}$  como función de  $x := r/r_H$  se muestra aquí para el caso del flujo de Michel para una politrópica con índice adiabático  $\gamma = 4/3$  y horizonte sónico localizado en  $r_c = 2r_H$ .

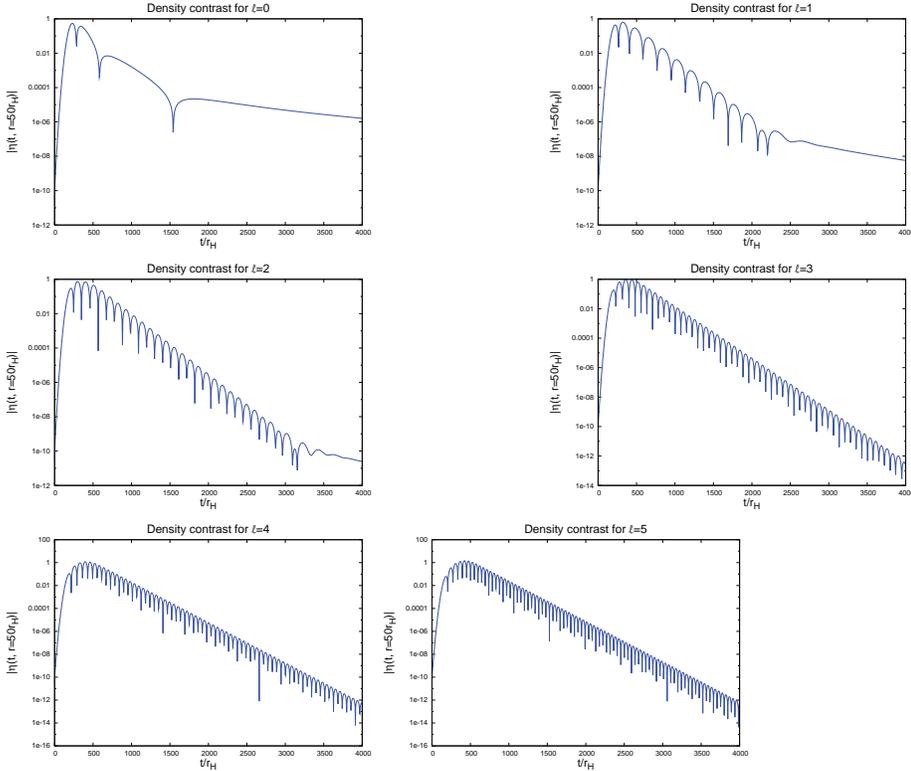


Figura 6.2: (de Phys. Rev. D 91, 104012 (2015)) Contraste del parámetro de densidad  $\eta$  vs. tiempo  $t$  medido por un observador estático en  $r = 50r_H$  para diferentes valores del parámetro de momento angular  $\ell$ . En todas las gráficas, el horizonte sónico está localizado en  $r_c = 7r_H$ . Nótese que sólo aparecen unas pocas oscilaciones en el caso monopolar  $\ell = 0$ , impidiendo la lectura de las frecuencias cuasi-normales en este caso. Para  $\ell = 0, 1, 2$  el tiempo de decaimiento tardío de la ley de potencias también es visible. Simulaciones hechas por M. D. Morales.

### 6.3. Resultados para las frecuencias cuasi-normales

En esta sección, presentamos y analizamos los resultados de los cálculos de las frecuencias acústicas cuasi-normales, como una función del radio sónico  $r_c$  y de su momento angular  $\ell$ . Todos los cálculos en esta sección se refieren al flujo de Michel en un fondo de Schwarzschild para un fluido politrópico con índice adiabático  $\gamma = 1,3333$ . En la Sección 6.3.1, discutimos las frecuencias fundamentales para valores de  $r_c$  en el intervalo  $[2r_H, 30r_H]$  y  $\ell = 0, 1, \dots, 7$ . En la sección 6.3.2, también discutimos las frecuencias cuasi-normales correspondientes a los primeros sobretonos.

#### 6.3.1. Frecuencias fundamentales

En la tabla 6.1 mostramos las frecuencias fundamentales monopolar, dipolar y cuadrupolar para diferentes valores de  $r_c$ . Estas frecuencias fueron calculadas usando el método de empalme descrito en la Sección 6.2, y en los casos dipolar y cuadrupolar con  $r_c/r_H = 2, 7, 10, 20, 30$  también se usó la evolución numérica de Cauchy (por Manuel D. Morales). Como se puede ver en la tabla, los dos enfoques dan resultados que son consistentes en sus errores numéricos. También se muestra en la tabla 6.1 los valores para la gravedad superficial  $\kappa$  de la métrica acústica, calculada usando (6.8). Resulta que  $\kappa$  juega un papel importante para entender el comportamiento de las frecuencias cuasi-normales, como una función de la posición del horizonte sónico  $r_c$ . De hecho,  $\kappa$  tiene unidades de frecuencia (en unidades geométricas) y por lo tanto es natural analizar las frecuencias cuasi-normales en unidades de  $\kappa$ . En la Figura 6.3 mostramos las gráficas de  $s/\kappa$  vs.  $r_c$  para las frecuencias fundamentales cuasi-normales  $s = \sigma + i\omega$  para diferentes valores de  $\ell$ . Como se deduce de estas gráficas, el valor de  $s/\kappa$  parece ser casi independiente de  $r_c$  para valores grandes de  $r_c/r_H$ . Específicamente hemos encontrado que la forma empírica

$$\frac{s}{\kappa} \simeq -0,387 + (0,21 + 0,606\ell)i, \quad 10 \leq \frac{r_c}{r_H} \leq 30, \quad \ell = 1, 2, \dots, 7, \quad (6.13)$$

da un ajuste de la frecuencia fundamental de una precisión relativa mejor que 2%. Nótese que en el caso monopolar  $\ell = 0$  el comportamiento de  $\sigma$  como una función de  $r_c$  es diferente a la de multipolos mayores  $\ell \geq 1$ .

| $r_c/r_H$ | $\kappa \cdot r_H$ | $s \cdot r_H (\ell = 0)$ | $s \cdot r_H (\ell = 1)$                             | $s \cdot r_H (\ell = 2)$                              |
|-----------|--------------------|--------------------------|--|---|
| 2         | 0,16536            | $-0,05947 + 0,02661i$    | $-0,06174 + 0,1398i$<br>( $-0,06 + 0,14i$ )          | $-0,06203 + 0,2416i$<br>( $-0,062 + 0,242i$ )         |
| 3         | 0,08334            | $-0,02932 + 0,008119i$   | $-0,03144 + 0,06813i$                                | $-0,03162 + 0,1191i$                                  |
| 4         | 0,05182            | $-0,01805 + 0,003508i$   | $-0,01965 + 0,04204i$                                | $-0,01977 + 0,07381i$                                 |
| 5         | 0,03606            | $-0,01249 + 0,001812i$   | $-0,01372 + 0,02920i$                                | $-0,01380 + 0,05138i$                                 |
| 6         | 0,02690            | $-0,009286 + 0,001042i$  | $-0,01026 + 0,02178i$                                | $-0,01032 + 0,03838i$                                 |
| 7         | 0,02104            | $-0,007250 + 0,0006431i$ | $-0,008036 + 0,01704i$<br>( $-0,0080 + 0,0170i$ )    | $-0,008086 + 0,03006i$<br>( $-0,0081 + 0,0301i$ )     |
| 8         | 0,01703            | $-0,005858 + 0,0004166i$ | $-0,006513 + 0,01381i$                               | $-0,006553 + 0,02436i$                                |
| 9         | 0,01414            | $-0,004861 + 0,0002792i$ | $-0,005416 + 0,01148i$                               | $-0,005449 + 0,02026i$                                |
| 10        | 0,01199            | $-0,004118 + 0,0001913i$ | $-0,004595 + 0,009736i$<br>( $-0,0046 + 0,0097i$ )   | $-0,004623 + 0,01720i$<br>( $-0,00462 + 0,0172i$ )    |
| 20        | 0,00410            |                          | $-0,001577 + 0,003344i$<br>( $-0,0016 + 0,0033i$ )   | $-0,001586 + 0,005914i$<br>( $-0,0016 + 0,00591i$ )   |
| 30        | 0,00220            |                          | $-0,0008493 + 0,001803i$<br>( $-0,00085 + 0,0018i$ ) | $-0,0008546 + 0,003190i$<br>( $-0,00085 + 0,00319i$ ) |

Cuadro 6.1: (de Phys. Rev. D 91, 104012 (2015)) Frecuencias fundamentales cuasi-normales para perturbaciones acústicas en el flujo de Michel para diferentes valores de  $r_c$  y  $\ell$ . Las frecuencias en la primera línea de cada entrada para  $r_c/r_H$  son las obtenidas a partir del procedimiento de empalme discutido en la Sección 6.2. Se muestran cuatro cifras significativas. Las frecuencias entre paréntesis se refieren a las obtenidas a partir del código de evolución de Cauchy (por Manuel D. Morales), y se muestran para comparar. En el caso monopolar  $\ell = 0$  no se pudo obtener las frecuencias desde la evolución de Cauchy. Para  $\ell = 0$  y  $r_c > 15r_H$  no hemos podido calcular las frecuencias de una forma fiable usando el método de empalme; su cálculo parece requerir una precisión mayor que la que está disponible en el código actual.

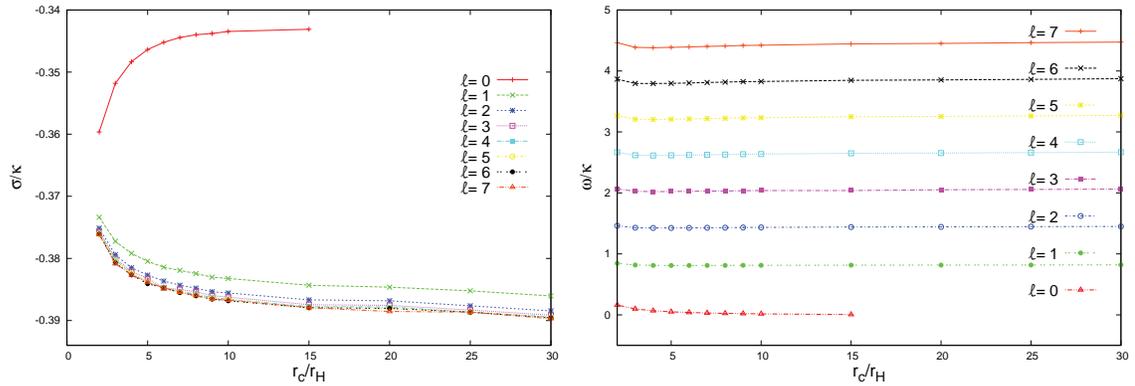


Figura 6.3: (de Phys. Rev. D 91, 104012 (2015)) Las frecuencias fundamentales cuasi-normales en unidades de  $\kappa$  en función de  $r_c$ . Panel izquierdo: parte real  $\sigma/\kappa$  dividida por la gravedad superficial  $\kappa$  para  $\ell = 0, 1, 2, \dots, 7$ . Como se deduce de la gráfica, para  $\ell \neq 0$  y  $r_c/r_H \geq 10$  estos valores son casi independientes de  $\ell$  y  $r_c$ , y pueden ser aproximados por  $-0,387$  alrededor de 1% de precisión. Panel derecho: parte imaginaria  $\omega/\kappa$  dividida por la gravedad superficial para  $\ell = 0, 1, 2, \dots, 7$ . Estos valores son casi independientes de  $r_c$ , y encontramos que para  $\ell \neq 0$  se puede aproximar bastante bien por la fórmula  $0,21 + 0,606\ell$ .

### 6.3.2. Sobretonos

Usando el procedimiento de empalme descrito en la Sección 6.2 también hemos calculado las frecuencias cuasi-normales de los primeros modos excitados. En la tabla 6.2 presentamos dos ejemplos para el espectro cuasinormal, haciendo referencia a las perturbaciones acústica dipolar y cuadrupolar, respectivamente, con  $r_c = 10r_H$ .

| $n_o$ | $s \cdot r_H(\ell = 1)$ | $s \cdot r_H(\ell = 2)$ |
|-------|-------------------------|-------------------------|
| 1     | $-0,01503 + 0,007955i$  | $-0,01437 + 0,01590i$   |
| 2     | $-0,02691 + 0,006537i$  | $-0,02526 + 0,01408i$   |
| 3     | $-0,03907 + 0,005732i$  | $-0,03699 + 0,01257i$   |
| 4     | $-0,05123 + 0,005219i$  | $-0,04905 + 0,01149i$   |
| 5     | $-0,06336 + 0,004855i$  | $-0,06120 + 0,01071i$   |
| 6     |                         | $-0,07336 + 0,01012i$   |
| 7     |                         | $-0,08551 + 0,009659i$  |
| 8     |                         | $-0,09764 + 0,009281i$  |
| 9     |                         | $-0,1098 + 0,008965i$   |

Cuadro 6.2: (de Phys. Rev. D 91, 104012 (2015)) Espectro de frecuencias cuasi-normales dipolar y cuadrupolar para las perturbaciones acústicas del flujo de Michel con horizonte sónico en  $r_c = 10r_H$ .  $n_o = 1$  denota el primer sobretono,  $n_o = 2$  el segundo sobretono, etc. Se muestran cuatro cifras significativas. Modos con número de excitación  $n_o > 5$  para  $\ell = 1$  y  $n_o > 9$  para  $\ell = 2$  no se pudieron obtener de manera fiable con la versión actual de nuestro código, ya que el cálculo de sus frecuencias parece que requiere un método del algoritmo de Newton más potente o mayor precisión.

En la Figura 6.4 mostramos las gráficas del espectro cuasinormal dipolar y cuadrupolar en unidades de la gravedad superficial  $\kappa$  para diferentes valores de  $r_c$ . Como en el caso de las frecuencias fundamentales, apreciamos de estas gráficas que el espectro de frecuencias cuasi-normales excitadas, parece ser casi independiente de  $r_c$ , indicando que las frecuencias escalan como  $\kappa$ .

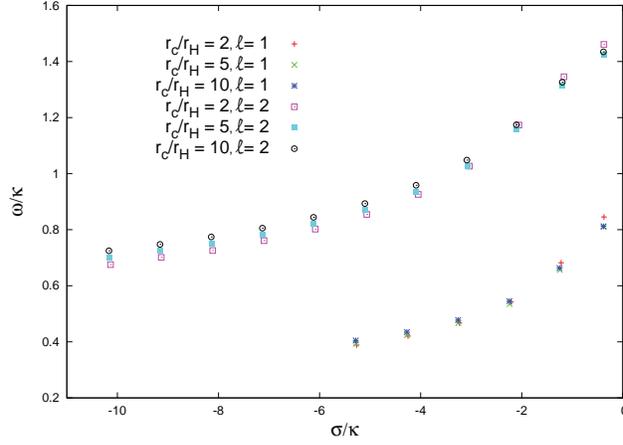


Figura 6.4: (de Phys. Rev. D 91, 104012 (2015)) El espectro de las excitaciones acústicas cuasi-normales. Se muestra la parte imaginaria vs. la parte real de las frecuencias  $s/\kappa$  dividida por la gravedad superficial para  $r_c/r_H = 2, 5, 10$  y  $\ell = 1, 2$ . Como se deduce de la gráfica, el espectro es aproximadamente independiente de  $r_c$ .

### 6.3.3. Límite Eikonal

En el límite de altas frecuencias, las oscilaciones cuasi-normales, pueden ser interpretadas en términos de paquetes de onda las cuales se concentran a lo largo de una geodésica nula circular y decae porque la geodésica nula circular es inestable, ver las referencias [39, 21] y las referencias allí para más detalles. Por lo tanto, se espera que en este límite las frecuencias cuasi-normales  $s$  están relacionadas con las propiedades de la geodésica nula circular inestable. Como se muestra en [39] la parte imaginaria  $\omega = \text{Im}(s)$  de  $s$ , describiendo el comportamiento oscilatorio, está directamente relacionada con la velocidad angular de la geodésica nula circular inestable, mientras que la parte real  $\sigma = \text{Re}(s)$  es igual a su exponente Lyapunov.

Como puede deducirse del análisis en [39] una métrica estática, esféricamente simétrica y asintóticamente plana arbitraria de la forma

$$ds^2 = -f(r)dT^2 + \frac{dr^2}{g(r)} + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \quad (6.14)$$

con coordenada temporal  $T$  y las funciones positivas suaves  $f(r)$  y  $g(r)$  poseen una geodésica nula circular inestable en  $r = r_{circ}$  si y sólo si la función  $H(r) := f(r)/r^2$  tiene un máximo local en  $r = r_{circ}$ , y en este caso la velocidad angular asociada y el exponente de Lyapunov están dadas por

$$\Omega_{circ} = \sqrt{H(r_{circ})}, \quad \lambda_{circ} = \sqrt{\frac{f(r)g(r)}{2}} \sqrt{-\frac{1}{H(r)} \frac{d^2}{dr^2} H(r)} \Big|_{r=r_{circ}}. \quad (6.15)$$

Para valores grandes de  $\ell$ , estos parámetros determinan las frecuencias cuasi-normales de acuerdo a la fórmula

$$s = -(n_o + 1/2)\lambda_{circ} + i\ell \Omega_{circ}, \quad (6.16)$$

con  $n_o$  el número de los sobretonos, ver [39]. Comparando la ecuación (6.14) con la forma de la métrica acústica (6.7) y descartando el factor conforme  $n/(hv_s)$  el cual no afecta las trayectorias de las geodésicas nulas en el espacio tiempo, encontramos en nuestro caso que  $f(r) = X(r)v_s^2$  y  $g(r) = X(r)$ , tal que

$$H(r) = \frac{X(r)v_s^2}{r^2}, \quad \sqrt{f(r)g(r)} = X(r)v_s.$$

Una gráfica de la función  $H(r)$  para el caso  $r_c/r_H = 10$  es dada en la Figura 6.5, la cual muestra que la métrica acústica para el flujo de Michel admite geodésicas nulas circulares inestables. Numéricamente, encontramos los valores  $r_{circ}/r_H = 14,158$ ,  $\Omega_{circ}/\kappa = 0,59159$  y  $\lambda_{circ}/(2\kappa) = 0,38637$  los cuales coinciden bastante bien con los valores correspondientes a la fórmula empírica (6.13) que describe las frecuencias fundamentales. Hemos repetido el análisis para valores más altos de  $r_c/r_H$  que varía entre 10 y 30, encontrando valores similares para  $\Omega_{circ}/\kappa$  y  $\lambda_{circ}/(2\kappa)$  (la diferencia es menos que 1%).

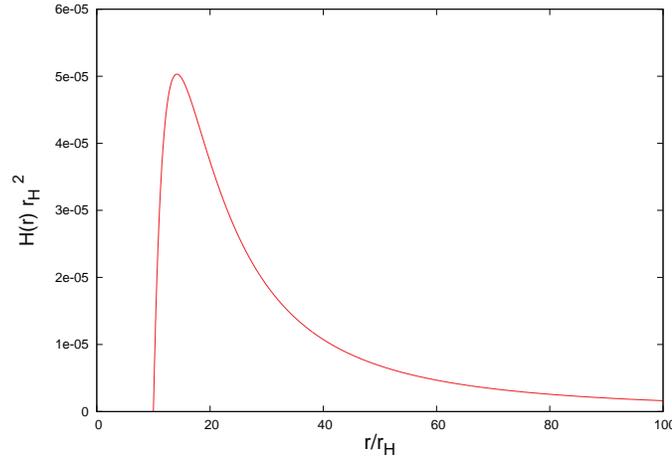


Figura 6.5: (de Phys. Rev. D 91, 104012 (2015)) Gráfica de la función  $H(r)$  para el caso donde el horizonte sónico se encuentra en  $r_c/r_H = 10$ . Como es claramente visible desde la gráfica, la función tiene un máximo donde la métrica acústica tiene una geodésica nula circular inestable. Este máximo se determina numéricamente está localizado en  $r_{circ}/r_H = 14,158$ .

## 6.4. Conclusiones para las perturbaciones acústicas

Hemos analizado perturbaciones acústicas esféricas y no esféricas del flujo de Michel, que describe un fluido perfecto cayendo radialmente hacia un agujero Schwarzschild. Como mostrado por Moncrief [7], las ecuaciones de movimiento para tales perturbaciones se pueden escribir como una ecuación de onda en una geometría curva de fondo que es descrita por la métrica acústica. Para el caso del flujo de Michel, la métrica acústica tiene las mismas propiedades cualitativas como un espaciotiempo agujero negro. Por lo tanto describe un agujero negro análogo natural.

Usando este agujero análogo astrofísico, hemos mostrado mediante cálculos numéricos, que cuando se perturba el flujo de Michel, entonces exhibe oscilaciones acústicas cuasi-normales. Hemos calculado las frecuencias asociadas  $s = \sigma + i\omega$  usando dos métodos diferentes. El primer método es nuevo según nuestros conocimientos. Consiste en el "matching" de dos soluciones locales  $\psi_+(s, r)$  y  $\psi_-(r)$  de la ecuación radial. Para  $\text{Re}(s) > 0$ , estas soluciones decaen de manera exponencialmente para  $r \rightarrow \infty$  respectivamente  $r \rightarrow r_c$ . Un reto común para calcular modos causinormales consiste en determinar la continuación analítica de estas funciones para  $\text{Re}(s) < 0$ , y de encontrar las frecuencias complejas  $s$  para cuales  $\psi_+$  y  $\psi_-$  son linealmente dependientes. En algunos casos las soluciones  $\psi_{\pm}$  pueden ser representados por expansiones de series simples, y las frecuencias cuasi-normales se pueden hallar usando técnicas de fracciones continuadas [26]. Pero en nuestro problema el potencial efectivo que aparece en la ecuación de modos ni siquiera se conoce de forma cerrada, y entonces se requieren métodos mas generales. El nuevo ingrediente de nuestro método consiste en calcular la continuación analítica de  $\psi_{\pm}$  mediante una técnica de iteraciones de Banach, donde cada iteración da una aproximación mejor de la solución. Cada iteración involucra calcular una integral de línea en el plano complejo de  $r$ , que converge para todos  $\omega = \text{Im}(s) > 0$ . Mientras que la integral de cada iteración debe ser calculado de manera precisa, hemos encontrado que se necesitan solamente pocas iteraciones para alcanzar una alta precisión. Las dos soluciones  $\psi_{\pm}$  después se pueden emparejar/pegar encontrando los ceros de su Wronskiano mediante un algoritmo de Newton estándar.

Nuestro método es bien general y no depende de los detalles del potencial efectivo excepto por el hecho de que debería poseer una continuación analítica suficientemente bien comportada en el plano complejo de  $r$ . Lo que significa suficientemente bien comportada se explicará en detalle en otro trabajo [31]. El método parece suficientemente flexible para cubrir muchos potenciales efectivos de relatividad general (incluyendo el potencial de Regge-Wheeler y su generalización al caso de Reissner-Nordström). Otra ventaja de nuestro método es que no requiere una forma cerrada del potencial efectivo. Para el caso de perturbaciones acústicas del flujo de Michel que consideramos en este trabajo, el potencial solo se conoce de forma implícita, aunque es analítico en  $1/r$  como hemos mostrado en el apéndice. En los casos que hemos analizados aquí, nuestro método parece

funcionar muy bien para encontrar las frecuencias fundamentales y las primeras excitadas. Sin embargo, hasta ahora nuestro código falla para encontrar excitaciones altas. La razón de esto probablemente consiste en nuestro sencillo algoritmo de Newton y nuestra aproximación gruesa de diferencias finitas para la derivada del Wronskiano.

Usando nuestro método hemos calculados las frecuencias cuasi-normales acústicas del flujo de Michel para valores diferentes de  $r_c$  y  $r_H$  del horizonte sónico y del de eventos y para valores diferentes del número de momento angular  $\ell$ . Mediante el código de Cauchy descrito en [38], hemos verificado la validez de la frecuencia fundamental para  $\ell > 0$ . También hemos calculado la tasa de decaimiento de la ley de potencias para tiempos largos en algunos casos. Aunque en general el espectro de frecuencias depende de dos parámetros  $r_H$  y  $r_c$  (o equivalentemente de  $r_H$  y la gravedad superficial  $\kappa$  del agujero acústico), encontremos que para  $r_c \gg r_H$  las frecuencias cuasi-normales  $s$  escalan como  $\kappa$  y el parámetro  $r_H$  ya no importa. Además, para  $r_c \gg r_H$  la parte real de  $s$  que describe la tasa de decaimiento es casi independiente de  $\ell$  para  $\ell \geq 1$ . En específico hemos encontrado la siguiente fórmula empírica para las frecuencias fundamentales:

$$s\kappa^{-1} \simeq -0,387 + (0,21 + 0,606\ell)i \quad (6.17)$$

para  $\ell = 1, 2, \dots, 7$  con  $r_c$  en el intervalo entre  $10r_H$  y  $30r_H$ , con  $r_H$  el radio del horizonte de eventos. En el límite donde la velocidad del sonido  $v_\infty \ll c$  en el infinito es mucho menor que la velocidad de la luz,  $\kappa$  se puede expresar mediante una simple fórmula analítica. De Ec. (6.8) y expresiones estándares en  $\nu_\infty := v_\infty/c$  de [1, 40], sigue que

$$\kappa \simeq \frac{8\nu_\infty^3}{r_H} \simeq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{r_H}{2r_c^3}}, \quad (6.18)$$

para una ecuación de estado politrópica con  $\gamma = 4/3$ . Para un agujero negro de masa  $M$  esto nos da (con  $M_\odot$  la masa solar):

$$\kappa \simeq 8 \times 10^5 \left( \frac{M_\odot}{M} \right) \frac{\nu_\infty^3}{s}. \quad (6.19)$$

Aunque en este trabajo nos hemos restringido a un fluido politrópico con índice adiabático  $\gamma = 1,3333 \simeq 4/3$ , flujos de otros fluidos podrían ser analizados con el método descrito aquí, provisto que sean descritos por una ecuación de estado analítica que satisfaga condiciones (F1)–(F3) listadas en Sección 4.1.3. Además, basados en nuestros resultados generales en Ref. [40], no debería ser difícil de generalizar nuestros cálculos para agujeros negros no rotantes mas generales, y de analizar la dependencia de las frecuencias cuasi-normales acústicas de la métrica de fondo. Sería interesante de estudiar el impacto de estas oscilaciones acústicas a la emisión de radiación electromagnética y gravitacional.

# Capítulo 7

## Conclusión

En esta tesis, hemos estudiado el flujo de Michel que describe un fluido perfecto cayendo radialmente hacia un agujero de Schwarzschild. Derivamos resultados rigurosos para su descripción matemática y estudiamos sus pequeñas oscilaciones en el sector acústico.

En nuestro estudio del flujo de Michel, no asumimos una ecuación de estado politrópica ni una geometría de fondo de Schwarzschild. En vez de esto, requerimos condiciones bastante generales para la ecuación de estado del fluido y consideramos una amplia clase de agujeros negros estáticos, esféricamente simétricos y asintóticamente planos con horizonte regular. Por consecuencia, nuestros resultados también aplican para ciertos agujeros de Schwarzschild deformados, los cuales podrían ocurrir en teorías alternativas de gravedad o en relatividad general clásica en presencia de campos externos como por ejemplo, materia oscura. Nuestro resultado principal de este estudio es: dada una ecuación de estado y una métrica, que cumplan las suposiciones que impusimos sobre la métrica y la ecuación de estado, existe para cada densidad de partículas positiva  $n_\infty > 0$  en el infinito una única solución esférica y estacionaria de las ecuaciones de Euler relativistas, la cual es regular en y afuera del horizonte. Esta solución describe un flujo transónico, el cual es supersónico cerca del agujero y subsónico en la región asintótica. Además, calculamos las tasas de acreción y de compresión del fluido en el horizonte de eventos y en la esfera sónica. Para estos cálculos de las tasas, asumimos una ecuación de estado politrópica y que la velocidad del sonido  $v_\infty$  del fluido en el infinito es mucho más pequeña que la velocidad de la luz  $c$ . Encontramos que a primer orden en  $v_\infty/c$  la tasa de acreción es descrita por la fórmula de Bondi, y sólo depende de la métrica de fondo a través de su masa total  $M$ . La tasa de compresión en el horizonte depende de los detalles de la métrica del agujero negro, en particular depende del cociente  $r_s/r_H$  entre su radio Schwarzschild  $r_s = 2m$  y el radio  $r_H$  de su horizonte. En el caso de Schwarzschild se tiene que  $r_s = r_H$  y la razón es uno pero, para un agujero estático esféricamente simétrico en presencia de campos externos que cumplen la condición de energía débil tenemos  $r_H < r_s$ , lo que causa tasas de compresión más altas. También, dimos varios ejemplos para el problema de flujo de acreción,

donde usamos diferentes métricas de fondo y ecuaciones de estado. Analizamos casos donde no se cumplen algunas de nuestras suposiciones. En el caso de que se viole alguna de los requerimientos por la ecuación de estado, encontramos que la presencia de un punto crítico no es suficiente para garantizar la existencia de acreción entonces, hay que hacer un análisis más detallado en estos casos.

En el análisis de las perturbaciones esféricas y no esféricas del flujo de Michel, las ecuaciones de movimiento para las perturbaciones lineales acústicas se pueden escribir como una ecuación de onda en una geometría curva de fondo que es descrita por la métrica acústica como fue demostrado por Moncrief [7]. Moncrief demostró que estas perturbaciones quedan acotados fuera de la esfera sónica, lo que establece la estabilidad lineal del flujo de Michel en la región subsónica. En este caso, la métrica acústica tiene las mismas propiedades cualitativas como el espacio-tiempo de un agujero negro. Por lo tanto, describe un agujero negro análogo natural. Usando este agujero análogo astrofísico, mostramos mediante cálculos numéricos, que cuando se perturba el flujo de Michel, exhibe oscilaciones acústicas cuasi-normales. Calculamos las frecuencias  $s = \sigma + i\omega$  usando dos métodos diferentes. El primer método es nuevo según nuestros conocimientos. Este método consiste en hacer el "matching" de dos soluciones locales  $\psi_+(s, r)$  y  $\psi_-(s, r)$  de la ecuación radial. Para  $\text{Re}(s) > 0$ , estas soluciones decaen de manera exponencial para  $r \rightarrow \infty$  y  $r \rightarrow r_c$ , respectivamente, donde  $r_c$  es el radio del horizonte sónico. Un problema común para calcular modos cuasi-normales consiste en determinar la continuación analítica de estas funciones  $\psi_{\pm}(s, r)$  para  $\text{Re}(s) < 0$ , y de encontrar las frecuencias complejas  $s$  para cuales  $\psi_+$  y  $\psi_-$  son linealmente dependientes. En algunos casos las soluciones  $\psi_{\pm}$  pueden ser representados por expansiones de series simples, y las frecuencias cuasi-normales se pueden hallar usando técnicas de fracciones continuas como en el método de Leaver (ver [26] y apéndice C). Dado que en nuestro problema el potencial efectivo que aparece en la ecuación de modos no se conoce de forma cerrada entonces, se requieren métodos mas generales. El nuevo ingrediente de nuestro método consiste en calcular la continuación analítica de  $\psi_{\pm}$  mediante una técnica de iteraciones de Banach, donde cada iteración da una aproximación mejor de la solución. Cada iteración involucra calcular una integral de línea en el plano complejo de  $r$ , que converge para todos  $\omega = \text{Im}(s) > 0$ . Mientras que la integral de cada iteración debe ser calculada de manera precisa, encontramos que se necesitan solamente pocas iteraciones para alcanzar una alta precisión. Después, las dos soluciones  $\psi_{\pm}$  se pueden empalmar encontrando los ceros de su Wronskiano mediante un algoritmo de Newton estándar. Usando este método numérico, calculamos las frecuencias cuasi-normales acústicas del flujo de Michel para valores diferentes del horizonte sónico  $r_c$  y del horizonte de eventos  $r_H$  y, para valores diferentes de número de momento angular  $\ell$ . Este método numérico lo corroboramos, primeramente, calculando las frecuencias cuasi-normales para el caso de Schwarzschild (que ya se conocen) y las comparamos con los valores de las frecuencias calculadas con el método de Leaver [26] y pegan bastante bien. Mediante el código de Cauchy (ver [38]), se pudo verificar la validez de la frecuencia fundamental para  $\ell > 0$ . También, calculamos la tasa de decaimiento de la ley de potencias para tiempos largas en algunos casos. En general, el espectro

de frecuencias depende de dos parámetros  $r_H$  y  $r_c$  (o equivalentemente de  $r_H$  y la gravedad superficial  $\kappa$  del agujero acústico). Para  $r_c \gg r_H$  encontramos que las frecuencias cuasi-normales  $s$  escalan como  $\kappa$  y el parámetro  $r_H$  ya no importa. Este comportamiento fue verificado por un trabajo en preparación (que estamos haciendo actualmente), en el límite Newtoniano del flujo de Michel y sus perturbaciones. Además, para  $r_c \gg r_H$  la parte real de  $s$  que describe la tasa de decaimiento no depende fuertemente de  $\ell$  para  $\ell \geq 1$ . Específicamente, encontramos la siguiente fórmula empírica para las frecuencias fundamentales:

$$s\kappa^{-1} \simeq -0,387 + (0,21 + 0,606\ell)i \quad (7.1)$$

para  $\ell = 1, 2, \dots, 7$  con  $r_c$  en el intervalo entre  $10r_H$  y  $30r_H$ , con  $r_H$  el radio del horizonte de eventos. La fórmula (7.1), como mencionamos antes, la demostramos en el límite Newtoniano de la solución de Michel. Por lo tanto, la fórmula vale para todo  $r_c > 10r_H$ . En el límite donde la velocidad del sonido  $v_\infty \ll c$  en el infinito es mucho más pequeña que la velocidad de la luz,  $\kappa$  se puede expresar mediante una simple fórmula analítica. De la ecuación (6.8) y las expresiones estándares en  $\nu_\infty := v_\infty/c$  de [1, 40], se sigue que

$$\kappa \simeq \frac{8\nu_\infty^3}{r_H} \simeq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{r_H}{2r_c^3}}, \quad (7.2)$$

para una ecuación de estado politrópica con  $\gamma = 4/3$ . Para un agujero negro de masa  $M$  esto nos da (con  $M_\odot$  la masa solar):

$$\kappa \simeq 8 \times 10^5 \left( \frac{M_\odot}{M} \right) \frac{\nu_\infty^3}{s}. \quad (7.3)$$

Quedan varias cuestiones interesantes para estudiar. Por ejemplo, deseamos considerar fluidos más realistas, donde se toman en cuenta efectos de viscosidad y radiación. Sería interesante extender el resultado de Moncrief, sobre la estabilidad lineal del flujo de Michel en la región subsónica, a la región entre el horizonte del agujero y la esfera sónica.

Aunque en el análisis de pequeñas perturbaciones acústicas esféricas y no esféricas del flujo de Michel nos restringimos a un fluido politrópico con índice adiabático  $\gamma = 1,3333 \approx 4/3$ , flujos de otros fluidos podrían ser analizados con el método descrito aquí, provisto que sean descritos por una ecuación de estado analítica que satisfaga condiciones (F1)–(F3) listadas en Sección 4.1. Además, basados en nuestros resultados generales en [40], no debería ser difícil de generalizar nuestros cálculos para agujeros negros no rotantes más generales, y de analizar la dependencia de las frecuencias cuasi-normales acústicas de la métrica de fondo. Sería interesante de estudiar el impacto de estas oscilaciones acústicas en la emisión de radiación electromagnética y gravitacional.

¿Cómo podrían los resultados de esta tesis contribuir a observaciones concretas sobre agujeros negros? Para esto, veamos un comentario sobre las escalas de las frecuencias asociadas con las oscilaciones dadas por (7.3). Expresando (7.3) en unidades  $Hz$ ,

$$\kappa \approx 10^3 \left( \frac{M_\odot}{M} \right) \left( \frac{v_\infty}{c} \right)^3 kHz.$$

Comparamos esta expresión con la escala de frecuencias cuasi-normales fundamentales de un agujero negro de Schwarzschild

$$f_{\text{SCH}} \approx 10 \left( \frac{M_{\odot}}{M} \right) \text{kHz},$$

para el caso cuadrupolar (ver [21]). Vemos entonces, que las frecuencias de oscilación del fluido son despreciables comparadas con las frecuencias del agujero negro por un factor  $100(v_{\infty}/c)^3$ . Para el caso donde la materia acretada es un gas que viene del medio interestelar, tenemos una velocidad del sonido  $v_{\infty} \approx 10 \text{km/s}$ . Entonces, el factor  $(v_{\infty}/c)^3$  es extremadamente pequeño. Esto lleva a que las oscilaciones del fluido tienen un período bastante grande incluso para agujeros negros pequeños con masa  $M$  estelar (unas masas solares  $M_{\odot}$ ).

Si se toman en cuenta los efectos del fluido sobre la métrica de fondo, las oscilaciones acústicas cuasi-normales con número de momento angular  $\ell \geq 2$  deberían producir radiación gravitacional. Entonces, la dinámica de este problema podría ser modelado aproximadamente mediante perturbaciones lineales de un agujero negro de Schwarzschild [41]. Pero, debido a que solo consideramos pequeñas perturbaciones del flujo, no se puede esperar que la radiación gravitacional sea significativa. Por otro lado, este trabajo de flujos de acreción se puede generalizar a casos más realistas. Entre otras, se puede analizar la producción de ondas gravitacionales, lo que podría llevar a una posible forma de detectar agujeros negros.

## Apéndice A

# Justificación de las condiciones (M1)–(M4) en la métrica

En este apéndice proporcionamos algunos detalles adicionales con respecto a la motivación física para las condiciones (M1)–(M4) dadas en la sección 4.1. Para las definiciones y discusiones de la masa de Komar, el horizonte de Killing, la gravedad superficial y las condiciones de energía que usaremos abajo, remitimos al lector a las referencias [11, 37].

Condición (M1) implica que la métrica es asintóticamente plana y que su masa de Komar es bien definida y positiva. La masa de Komar se define como

$$M_{Komar} = \lim_{r \rightarrow \infty} -\frac{c^2}{8\pi G} \int_{S_r} \star d\mathbf{k} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{c^2}{2G} \frac{r^2 \sigma'(r)}{\alpha(r)},$$

donde  $S_r$  denota la esfera de radio  $r$ ,  $\mathbf{k} = \mathbf{g}(\mathbf{k}, \cdot) = g_{\mu\nu} k^\mu dx^\nu = -\sigma c dt$  es la uno-forma asociada con el vector de Killing  $\mathbf{k}$ , y  $\star$  denota el dual de Hodge. De acuerdo con nuestras suposiciones en (M1) el límite existe y  $M_{Komar} = c^2 m/G$ . Luego, la condición (M2) implica que el campo vectorial de Killing  $\mathbf{k}$  es nulo en la superficie  $\mathcal{H} := \{r = r_H\}$ . Dado que  $\alpha(r_H) > 0$  también tenemos que  $N(r_H) = 0$  lo que demuestra que la superficie  $\mathcal{H}$  es nula. Por lo tanto,  $\mathcal{H}$  es un horizonte de Killing, y su gravedad superficial asociada  $\kappa$ , definida por  $d\sigma|_{\mathcal{H}} = -2c^{-2}\kappa \mathbf{k}|_{\mathcal{H}}$  está dada por

$$\kappa = \frac{c^2}{2} \frac{\sigma'(r_H)}{\alpha(r_H)},$$

la cual es estrictamente positiva de acuerdo con nuestras suposiciones.

Luego, proporcionamos la justificación para la condición (M3), asumiendo que el tensor momento-energía  $T_{\mu\nu}^{(0)}$  asociado con la métrica en la ecuación (4.1) a través de las ecuaciones de Einstein satisfacen las condiciones de energía

adecuadas. Las componentes  $tt$ ,  $rr$  y  $\vartheta\vartheta$  de las ecuaciones de Einstein dan, respectivamente,

$$m' = \frac{4\pi G}{c^4} r^2 \varepsilon^{(0)}, \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{N}{r} \frac{\sigma'}{\sigma} = \frac{2m}{r^3} + \frac{8\pi G}{c^4} p_r^{(0)}, \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{1}{2\alpha r^2} \frac{d}{dr} \left( \frac{r^2}{\alpha} \sigma' \right) - \frac{N}{r} \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{8\pi G}{c^4} p_t^{(0)}, \quad (\text{A.3})$$

donde  $m(r)$  es la función de masa de Misner-Sharp, definida por  $N = 1 - 2m/r$ , y  $\varepsilon^{(0)}$ ,  $p_r^{(0)}$  y  $p_t^{(0)}$  se refieren a la densidad de energía, la presión radial y la presión tangencial del tensor efectivo de energía-momento  $T_{\mu\nu}^{(0)}$ . (El superíndice  $(0)$  indica que estas cantidades se refieren al tensor de energía-momento  $T_{\mu\nu}^{(0)}$  definido con respecto al fondo métrico a diferencia del tensor energía-momento  $T_{\mu\nu}$  del flujo de acreción.) Combinando las ecuaciones (A.1), (A.2), (A.3) también obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\frac{N}{r} \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{4\pi G}{c^4} (\varepsilon^{(0)} + p_r^{(0)}), \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{1}{\alpha r^2} \frac{d}{dr} \left( \frac{r^2}{\alpha} \sigma' \right) = \frac{8\pi G}{c^4} (\varepsilon^{(0)} + p_r^{(0)} + 2p_t^{(0)}). \quad (\text{A.5})$$

La *condición de energía débil*, indica que todos los observadores físicos deben medir una densidad de energía no negativa, lo que implica que  $\varepsilon^{(0)} \geq 0$  y  $\varepsilon^{(0)} + p_r^{(0)} \geq 0$ . Por consiguiente, bajo estas condiciones, la ecuación (A.1) y el hecho que  $m(r_H) = r_H/2 > 0$  implican que la función de masa  $m(r)$  es positiva para todo  $r \geq r_H$ , y la ecuación (A.4) y  $\alpha \rightarrow 1$  para  $r \rightarrow \infty$  da lugar a que  $\alpha(r) > 0$  para todo  $r \geq r_H$ . Bajo la suposición adicional que la presión radial es no negativa, la ecuación (A.2) también implica que la función  $\sigma$  es estrictamente monótona creciente, lo que justifica la condición (M3). En lugar de asumir  $p_r^{(0)} \geq 0$ , también es posible recurrir a la *condición de energía fuerte*, la cual establece que  $\varepsilon^{(0)} + p_r^{(0)} + 2p_t^{(0)} \geq 0$ . La ecuación (A.5) implica entonces que la función  $J(r) := r^2 \sigma'(r)/\alpha(r)$  es monótona no decreciente, la cual, junto con  $J(r_H) = 2r_H^2 \kappa/c^2 > 0$  implican que  $\sigma'(r) > 0$  para todo  $r \geq r_H$ .

Finalmente, hacemos algunos comentarios sobre la condición (M4). En primer lugar, señalamos que las condiciones de energía débil y fuerte y las ecuaciones (A.4), (A.5) implican que  $(r^2 \sigma')' \geq 0$ , tal que la desigualdad en la ecuación (4.2) se satisface automáticamente. Después, consideramos el ejemplo simple en el cual  $\sigma$  es un polinomio de segundo orden en  $1/r$ ,

$$\sigma(r) = 1 - \frac{2m}{r} + \frac{em^2}{r^2},$$

con parámetro  $e < 1$ . El horizonte está localizado en  $r_H = m[1 + \sqrt{1-e}]$  y

$$r^2 \sigma'(r) = 2m - \frac{2em^2}{r} \geq 0$$

para todo  $r \geq r_H$ . La condición (M4) es equivalente a

$$2e - 3\frac{r}{m} < 0 < \frac{9}{8 + \frac{m}{r}} \left(1 - e\frac{m}{r}\right) - e, \quad r > r_H,$$

el cual se satisface para todo valor negativo de  $e$  y todos los valores positivos suficientemente pequeños tal que

$$e < \frac{9\sqrt{1-e}}{9 + 8\sqrt{1-e}}(1 + \sqrt{1-e}).$$



## Apéndice B

# Demostración de los Lemas 1, 2 y 3 del Capítulo 4

En este apéndice demostramos las pruebas de los resultados técnicos descritos en los Lemas 1, 2 y 3 en el Capítulo 4.

### B.1. Prueba del Lema 1

La afirmación del lema 1 es:

La función

$$a(x) := \frac{\sigma(x)}{x\sigma'(x)}, \quad x \geq 1,$$

es una función monótonamente creciente satisfaciendo  $a(1) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} a(x)/x = r_H/(2m)$  y las desigualdades

$$0 < a(x) < \frac{r_H}{2m}x, \quad \frac{(4a+1)^2}{16a+1} < xa' < 1+4a, \quad (\text{B.1})$$

para todo  $x > 1$ .

**Prueba.** Con el fin de demostrar el Lema 1, primero notamos que las condiciones (M1)–(M3) implican que  $a$  es una función bien definida, no negativa satisfaciendo  $a(1) = 0$  y  $\lim_{x \rightarrow \infty} a(x)/x = \lim_{x \rightarrow \infty} \sigma(x)/(x^2\sigma'(x)) = r_H/2m$ . Luego, un cálculo corto muestra que

$$x^2 \frac{d}{dx} \left( \frac{a}{x} \right) = 1 - \frac{(x^2\sigma')'}{x\sigma'} a.$$

Usando la condición (M4) concluimos de lo anterior que

$$1+3a > x^2 \frac{d}{dx} \left( \frac{a}{x} \right) > 1 - \frac{9\bar{m}}{8 + \frac{\bar{m}}{x}} \frac{a}{x}, \quad (\text{B.2})$$

donde hemos puesto  $\bar{m} := m/r_H$ . La primera desigualdad es equivalente a  $xa' < 1+4a$ . Afirmamos que, como una consecuencia de la segunda desigualdad,  $a(x) < x/(2\bar{m})$  para todo  $x > 1$ . De lo contrario, debe existir un punto  $x^* > 1$  para el cual  $1/(2\bar{m}) \leq a(x^*)/x^* \leq 2/(3\bar{m})$  y  $d(a(x^*)/x^*)/dx \leq 0$  ya que  $a(x)/x \rightarrow 1/(2\bar{m})$  como  $x \rightarrow \infty$ . No obstante, se sigue de la segunda desigualdad en (B.2) que

$$x^2 \frac{d}{dx} \left( \frac{a}{x} \right) \Big|_{x=x^*} > 1 - \frac{9\bar{m}}{8} \frac{a(x^*)}{x^*} \geq \frac{1}{4} > 0,$$

llegando a una contradicción. Por consiguiente,  $a(x) < x/(2\bar{m})$  para todo  $x > 1$ . Usando este resultado y de nuevo la desigualdad en (B.2) encontramos

$$xa' > 1 + \frac{8a - 8a\frac{\bar{m}}{x}}{8 + \frac{\bar{m}}{x}} > 1 + \frac{8a - 8a\frac{1}{2a}}{8 + \frac{1}{2a}} = \frac{(4a+1)^2}{16a+1} > 0,$$

y el lema queda demostrado.

## B.2. Prueba del Lema 2

La afirmación del lema 2 es:

- (a) Dada  $z_1 > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que las siguientes desigualdades son válidas para todo  $0 \leq z \leq z_1$ :

$$\nu(z) \geq \delta z^{1/3}, \quad f(z) \geq \exp \left[ \frac{3}{2} \delta^2 z^{2/3} \right]. \quad (\text{B.3})$$

- (b)  $\nu$  es una función monótona estrictamente creciente satisfaciendo

$$\lim_{z \rightarrow 0} \nu(z) = 0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \nu(z) = \nu_1$$

para alguna constante  $0 < \nu_1 \leq 1$ .

- (c) Dada  $z_0 > 0$  existe una constante  $q > 0$  tal que para todo  $z \geq z_0$ ,

$$f(z) \geq f(z_0) \left( \frac{z}{z_0} \right)^q. \quad (\text{B.4})$$

En particular,  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$ .

### Prueba.

- (a) Por la condición (F3),  $w = \frac{\partial \log \nu(z)}{\partial \log z} \leq 1/3$ . Integrando en ambos lados de esta última desigualdad, desde  $z$  hasta  $z_1$  con  $0 < z \leq z_1$ , obtenemos

$$\log \left( \frac{\nu(z_1)}{\nu(z)} \right) \leq \frac{1}{3} \log \left( \frac{z_1}{z} \right) = \log \left( \frac{z_1}{z} \right)^{1/3},$$

a partir de lo cual tenemos, de (B.3), que la primera desigualdad se sigue si  $\delta := \nu(z_1)/z_1^{1/3}$ . Para la segunda desigualdad en (B.3), usamos el resultado,  $\nu(z) \geq \delta z^{1/3}$ , y la definición de la velocidad del sonido adimensional:

$$\frac{\partial \log f(z)}{\partial \log z} = \nu(z)^2 \geq \delta^2 z^{2/3}, \quad 0 < z \leq z_1.$$

Integrando ambos lados desde  $z_0$  hasta  $z$  con  $0 < z_0 < z \leq z_1$  obtenemos

$$\log \left( \frac{f(z)}{f(z_0)} \right) \geq \frac{3}{2} \delta^2 z^{2/3} \Big|_{z_0}^z.$$

Tomando el límite  $z_0 \rightarrow 0$  y observando que  $f(z_0) \rightarrow 1$  como consecuencia de (F1), se sigue la segunda desigualdad.

- (b) De (a) tenemos  $f(z) \geq e^{\frac{3}{2}\nu(z_1)^2(z/z_1)^{2/3}}$  para todo  $0 < z < z_1$ . Tomando el límite  $z_1 \rightarrow z$  tenemos que  $f(z) \geq e^{\frac{3}{2}\nu(z)^2} \geq 1$  para todo  $z > 0$ . Dado que  $f(z) \rightarrow 1$  cuando  $z \rightarrow 0$ , se sigue que

$$\lim_{z \rightarrow 0} \nu(z) = 0,$$

como se afirmó. A continuación, se sigue de (F3) que  $\nu$  es una función monótonamente creciente que está acotada por encima de acuerdo a la condición (F2). Por lo tanto, cuando  $z \rightarrow \infty$ ,  $\nu$  converge a un valor finito el cual es menor que o igual a uno.

- (c) Por la definición de  $\nu$  y su monotonía, tenemos para todo  $z \geq z_0 > 0$ ,

$$\frac{\partial \log f(z)}{\partial \log z} = \nu^2(z) \geq \nu^2(z_0).$$

Integrando, obtenemos

$$f(z) \geq f(z_0) \left( \frac{z}{z_0} \right)^q, \quad z > z_0,$$

donde  $q := \nu(z_0)^2$ , el cual completa la prueba del lema.

### B.3. Prueba del Lema 3

La afirmación del lema 3 es:

La función  $\mathcal{L} : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definida en la ecuación (4.43) es estrictamente monótona creciente y satisface

$$\lim_{z \rightarrow 0} \mathcal{L}(z) = 1, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \mathcal{L}(z) = \infty \quad (\text{B.5})$$

En particular, existe para cualquier  $f_\infty > 1$  un único  $z_c > 0$  tal que  $\mathcal{L}(z_c) = f_\infty^2$ .

**Prueba.** Cuando  $z \rightarrow 0$ ,  $f(z) \rightarrow 1$  y  $\nu(z) \rightarrow 0$  según la suposición (F1) y el Lema 2(b), lo que implica en particular que  $x_c(z) \rightarrow \infty$ . Como una consecuencia de la condición (M1) obtenemos  $\sigma(x_c(z)) \rightarrow 1$ , y  $\mathcal{L}(z) \rightarrow 1$ . Por otro lado, cuando  $z \rightarrow \infty$  tenemos que  $f(z) \rightarrow \infty$  y  $\nu(z) \rightarrow \nu_1 \leq 1$  de acuerdo al Lema 2(c y b). Si  $\nu_1 < 1$ ,  $x_c(z)$  converge a un valor mayor que uno, implicando que  $\sigma(x_c(z))$  converge a un valor mayor que cero. En consecuencia,  $\mathcal{L}(z) \rightarrow \infty$  cuando  $z \rightarrow \infty$ . Si  $\nu_1 = 1$  tenemos que  $x_c(z) \rightarrow 1$  y  $\sigma(x_c(z)) \rightarrow 0$ . Sin embargo, en este caso podemos usar la regla de L'Hôpital y la relación

$$z \frac{dx_c}{dz}(z) = -\frac{1}{2a'(x_c(z))} \frac{w(z)}{\nu(z)^2} \quad (\text{B.6})$$

para concluir que

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\sigma(x_c(z))}{1 - \nu(z)^2} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\sigma'(x_c(z))}{4a'(x_c(z))} \frac{1}{\nu(z)^4} = \frac{\sigma'(1)}{4} > 0.$$

Junto con  $f(z) \rightarrow \infty$  esto implica de nuevo que  $\mathcal{L}(z) \rightarrow \infty$ .

Con el fin de probar la afirmación de monotonicidad calculamos la derivada de  $\mathcal{L}(z)$ . Usando las definiciones  $\nu$  y  $w$  y la relación (B.6) y

$$\frac{x_c(z)\sigma'(x_c(z))}{\sigma(x_c(z))} = \frac{1}{a(x_c(z))} = \frac{4\nu(z)^2}{1 - \nu(z)^2},$$

obtenemos

$$\frac{d\mathcal{L}}{dz}(z) = 2\sigma(x_c(z)) \frac{f(z)^2}{z} \left( \frac{\nu(z)}{1 - \nu(z)^2} \right)^2 \left[ 1 - \nu(z)^2 + w(z) - \frac{1}{x_c(z)a'(x_c(z))} \frac{w(z)}{\nu(z)^2} \right], \quad z > 0. \quad (\text{B.7})$$

Usando el Lema 1 y  $4a(x_c(z)) = \nu(z)^{-2} - 1$  encontramos

$$w(z) - \frac{1}{x_c(z)a'(x_c(z))} \frac{w(z)}{\nu(z)^2} > w(z) - \frac{16a(x_c(z)) + 1}{[4a(x_c(z)) + 1]^2} \frac{w(z)}{\nu(z)^2} = -3(1 - \nu(z)^2)w(z).$$

Dado que  $\nu(z)^2 \leq 1$  y  $0 \leq w \leq 1/3$  se sigue que la derivada de  $\mathcal{L}(z)$  es estrictamente positiva, lo que implica su estricta monotonicidad.

## Apéndice C

# El método de Leaver para encontrar los modos cuasi-normales de Schwarzschild

En este capítulo estudiaremos el método de Leaver (ver E. W. Leaver, [26]) para calcular las frecuencias asociadas a los modos cuasi-normales para el agujero negro de Schwarzschild perturbado. Los modos cuasi-normales son soluciones salientes, tanto en el horizonte de eventos como en el infinito, a la ecuación de onda de Regge-Wheeler [42]. Esta ecuación describe la propagación de las perturbaciones lineales gravitacionales del problema.

Estudiamos este método de forma analítica expresado como un problema de valores en la frontera. La ecuación de onda diferencial de Regge-Wheeler está dada a continuación:

$$[\partial_t^2 - \partial_{z_*}^2 + U(z)] \Phi = 0, \quad (\text{C.1})$$

donde

$$z_* = \frac{r}{2M} + \log\left(\frac{r}{2M} - 1\right) = z + \log(z - 1), \quad z := \frac{r}{2M}, \quad z \in [1, \infty)$$

y,

$$U(z) = \left(1 - \frac{1}{z}\right) \left[ \frac{\ell(\ell+1)}{z^2} - (S^2 - 1) \frac{1}{z^3} \right] = \frac{1}{z} e^{z_* - z} \left[ \frac{\ell(\ell+1)}{z^2} - (S^2 - 1) \frac{1}{z^3} \right],$$

$r$  es el radio de área,  $M$  la masa del agujero negro,  $\ell$  el momento angular y  $S$  el espín. Para campos escalares  $S = 0$ , electromagnético  $S = 1$  o gravitacional linealizado  $S = 2$ .

Supongamos ahora que la solución a la ecuación (C.1) es de la forma  $\Phi(t, r) = e^{st}\Psi(r)$ , donde  $s = \sigma + i\omega$ , con  $\sigma$  y  $\omega \in \mathbb{R}$ , es una frecuencia compleja. Reemplazando la función  $\Phi$  en (C.1) obtenemos que el problema de valores en la frontera se puede expresar como la ecuación diferencial

$$-\partial_{z_*}^2 \Psi + \left[ s^2 + \frac{z-1}{z^3} \left( \ell(\ell+1) - (S^2-1)\frac{1}{z} \right) \right] \Psi = 0, \quad (\text{C.2})$$

o lo que es equivalente

$$z(z-1)\partial_z^2 \Psi + \partial_z \Psi - \left[ \frac{s^2 z^3}{z-1} + \ell(\ell+1) - (S^2-1)\frac{1}{z} \right] \Psi = 0. \quad (\text{C.3})$$

Para encontrar la solución  $\Psi$  a la ecuación anterior analizemos los comportamientos asintóticos ( $z \rightarrow 1$  y  $z \rightarrow \infty$ ) de la ecuación (C.3).

- Para  $z \rightarrow 1$ , la ecuación (C.3) es aproximadamente

$$(z-1)^2 \partial_z^2 \Psi + (z-1) \partial_z \Psi - s^2 \Psi \approx 0. \quad (\text{C.4})$$

Como en  $z = 1$  tenemos un punto regular singular entonces la teoría (ver sección C.1 en este apéndice) nos dice que la solución a la ecuación (C.4) es de la forma

$$\Psi = (z-1)^\lambda,$$

que al reemplazarla en (C.4) obtenemos el polinomio característico:

$$\lambda(\lambda-1) + \lambda - s^2 = 0,$$

de donde tenemos que  $\lambda = \pm s$ . Como queremos que las soluciones sean modos cuasi-normales, es decir, soluciones salientes tanto en el horizonte de eventos como en la región asintótica,  $e^{st}\Psi$  debe ser proporcional a  $e^{s(t+z_*)}$  cerca del horizonte. Entonces, elegimos  $\lambda = +s$ . Obteniendo que la solución es

$$\Psi \approx (z-1)^s = e^{s(z_*-z)}. \quad (\text{C.5})$$

Notamos que para  $\text{Re}(s) < 0$  la solución  $\Psi$  diverge para  $z \rightarrow 1$ , esta es una propiedad de los modos cuasi-normales.

La solución local (C.5), en  $z = 1$ , a la ecuación (C.3) las podemos multiplicar por  $1/z^s$ . Esto no afecta la solución local y sirve para que la solución total tenga un buen comportamiento en  $z \rightarrow \infty$  ya que en este límite,  $(1 - 1/z)^s \rightarrow 1$ . Por lo tanto, la solución local en  $z \rightarrow \infty$  no se modifica. Entonces cerca de  $z = 1$ ,

$$\Psi \approx \frac{1}{z^s} (z-1)^s = \left( 1 - \frac{1}{z} \right)^s = (z-1)^s z^{-s}. \quad (\text{C.6})$$

- Para  $z \rightarrow \infty$ , tenemos un punto singular, la ecuación (C.3) es aproximadamente

$$s^2\Psi - \partial_{z^*}^2\Psi \approx 0,$$

dado que  $U(z) \rightarrow 0$  cuando  $z \rightarrow \infty$ . La solución de esta ecuación la conocemos y es de la forma

$$\Psi = Ae^{sz^*} + Be^{-sz^*}.$$

Como estamos buscando los modos cuasi-normales solo nos interesa la solución saliente y entonces despreciamos la parte entrante. Obteniendo

$$\Psi \approx Be^{-sz^*} = Be^{-s(z+\ln(z-1))} = Be^{-sz}(z-1)^{-s}. \quad (C.7)$$

Cuando  $z \rightarrow \infty$  podemos aproximar  $z-1 \approx z$  y tenemos que

$$\Psi \approx Be^{-s(z-1)}z^{-s}. \quad (C.8)$$

- Las consideraciones anteriores motiva el siguiente ansatz para  $\Psi$ :

$$\Psi = (z-1)^s z^{-2s} e^{-s(z-1)} h(z), \quad (C.9)$$

es el producto de las soluciones (C.5) y (C.8) en las regiones asintóticas con la función  $h(z)$ , donde  $h(z)$  satisface la ecuación

$$\begin{aligned} & [4s^2(1-z^2) - 4s(z-1) - \ell(\ell+1)z(z-1) + (1-S^2)(z-1)] h(z) \\ & + [1 + 2s(2-z^2)]z(z-1)h'(z) \\ & + z^2(z-1)^2h''(z) = 0, \end{aligned} \quad (C.10)$$

con  $'$  la derivada. Además,  $h(z)$  debe satisfacer las siguientes condiciones en la frontera:

$$\lim_{z \rightarrow 1} h(z) = \text{const} = 1, \quad \text{y} \quad \lim_{z \rightarrow \infty} h(z) = \text{const} = 1.$$

Haciendo un cambio de variable

$$h(z) = g(\zeta) \quad \text{con} \quad \zeta = 1 - \frac{1}{z}, \quad \zeta \in (0, 1)$$

tenemos que  $g(\zeta)$  satisface la ecuación

$$\begin{aligned} & [-8s^2 - 4s - \ell(\ell+1) + \epsilon + (4s^2 + 4s - \epsilon)\zeta]g(\zeta) \\ & + [1 + 2s - 4(1+2s)\zeta + (3+4s)\zeta^2]g'(\zeta) \\ & + \zeta(1-\zeta)^2g''(\zeta) = 0, \end{aligned} \quad (C.11)$$

donde  $g'(\zeta) = \partial_\zeta g(\zeta)$ .

Notamos que  $\zeta = 0$  en el horizonte de eventos, mientras que  $\zeta \rightarrow 1$  en la región asintótica  $z \rightarrow \infty$ .

- Buscamos la solución  $g(\zeta)$  como una serie de potencias dada por

$$g(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n, \quad (\text{C.12})$$

con  $a_0 = 1$  y,

$$g'(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n \zeta^{n-1}, \quad g''(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n \zeta^{n-2},$$

donde se requiere que  $g(\zeta)$  sea bien comportada en las regiones asintóticas. Es decir, que va a una constante en estas regiones al igual que  $h(z)$ . Entonces la solución  $\Psi$  queda de la forma

$$\begin{aligned} \Psi &= (z-1)^s z^{-2s} e^{-s(z-1)} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left( \frac{z-1}{z} \right)^n \\ &= \zeta^s (1-\zeta)^s e^{s\left(\frac{\zeta}{\zeta-1}\right)} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n. \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

Por construcción, esta función se comporta bien en el horizonte de eventos ya que la serie  $\sum a_n$  converge a  $a_0 = 1$  para  $\zeta = 0$ . En la región asintótica  $\zeta \rightarrow 1$  la función  $g(\zeta)$  va como  $g(\zeta \rightarrow 1) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  y en este caso no sabemos si  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge o no.

Las condiciones que se requieren para que  $g(\zeta)$  tenga un buen comportamiento en  $\zeta = 1$ , es decir que la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converga, se da para frecuencias particulares que son las frecuencias correspondientes a los modos cuasi-normales. Para esto entonces se va hacer uso de la siguiente teoría.

Reemplazando (C.13) en (C.3) obtenemos de los coeficientes de expansión  $a_n$ , con  $n = 0, 1, 2, \dots$  las siguientes relaciones de recurrencia

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ \alpha_0 a_1 + \beta_0 a_0 &= 0 \\ \alpha_n a_{n+1} + \beta_n a_n + \gamma_n a_{n-1} &= 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \\ \text{o lo que es equivalente} \\ a_{n+1} + \tilde{\beta}_n a_n + \tilde{\gamma}_n a_{n-1} &= 0, \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

donde los coeficientes de recurrencia  $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$  son funciones de  $n$  y  $s$ :

$$\begin{aligned} \alpha_n &= n^2 + 2(1+s)n + 2s + 1, \\ \beta_n &= -[2n^2 + (8s+2)n + 8s^2 + 4s + \ell(\ell+1) + S^2 - 1], \\ \gamma_n &= n^2 + 4sn + 4s^2 + S^2 - 2, \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

y donde  $\tilde{\beta}_n$  y  $\tilde{\gamma}_n$  son definidos<sup>1</sup>

$$\tilde{\beta}_n := \frac{\beta_n}{\alpha_n}, \quad \tilde{\gamma}_n := \frac{\gamma_n}{\alpha_n}, \quad (\text{C.16})$$

con los siguientes límites para  $n \rightarrow \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\beta}_n = -2, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\gamma}_n = 1. \quad (\text{C.17})$$

La convergencia de la serie  $\sum a_n$  en (C.13) se justifica a partir del teorema de (Kooman y Tijdeman 1990, [43]). Antes de enunciar el teorema anterior, primero vamos a ver cómo se define el polinomio característico, el cual será útil en este teorema.

**Polinomio característico:**

- Motivación del polinomio característico:

de la ecuación de recurrencia (C.14) tenemos

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \frac{a_n}{a_{n-1}} + \frac{a_n}{a_{n-1}} \tilde{\beta}_n + \tilde{\gamma}_n = 0. \quad (\text{C.18})$$

- La idea es entonces: si existe el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r,$$

y si existen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\beta}_n = \beta \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\gamma}_n = \gamma, \quad \beta \text{ y } \gamma \in \mathbb{C}$$

entonces  $r$  satisface el polinomio característico:

$$r^2 + \beta r + \gamma = 0, \quad (\text{C.19})$$

cuya solución es  $r_{\pm} = -\frac{\beta}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\beta^2 - 4} \in \mathbb{C}$ . En nuestro caso,  $\beta = -2$  y  $\gamma = 1$  para  $n \rightarrow \infty$ . Entonces, las raíces  $r_{\pm}$  del polinomio (C.19) son  $r_{\pm} = 1$ .

El teorema de Kooman y Tijdeman dice lo siguiente:

**Teorema 5** Sean  $\tilde{\beta}_n$  y  $\tilde{\gamma}_n$  funciones racionales de  $n$  con  $\tilde{\gamma}_n \neq 0$ . Suponer que la relación de recurrencia

$$a_{n+1} + \tilde{\beta}_n a_n + \tilde{\gamma}_n a_{n-1} = 0, \quad (n = N + 1, N + 2, \dots), \quad N \in \mathbb{N} \quad (\text{C.20})$$

---

<sup>1</sup>Notamos que

$$\begin{aligned} \alpha_n \neq 0 & \quad \text{si} \quad s \notin -\frac{n+1}{n}, \\ \gamma_n \neq 0 & \quad \text{si} \quad s \notin \frac{-2n \pm \sqrt{10-n^2}}{5}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

tiene un polinomio característico  $(r - r_+)(r - r_-)$  con  $r_+, r_- \in \mathbb{C}$ . Entonces existen dos soluciones linealmente independientes  $\{a_{n-1}^{(1)}\}_{n \geq N+1}$  y  $\{a_{n-1}^{(2)}\}_{n \geq N+1}$  de (C.20) tales que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^{(1)}}{a_{n-1}^{(1)}} = r_+, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^{(2)}}{a_{n-1}^{(2)}} = r_-.$$

**Lema 5** Dado los coeficientes de expansión  $a_n$ , los cuales satisfacen (C.14), el comportamiento para  $n$  grande es:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 \pm \frac{\sqrt{2s}}{\sqrt{n}} + \frac{2s - \frac{3}{4}}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right). \quad (\text{C.21})$$

**Prueba.** Expandiendo la fracción  $a_{n+1}/a_n$  como sigue

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = t + \frac{t_1}{\sqrt{n}} + \frac{t_2}{n} + \frac{t_3}{n^{\frac{3}{2}}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad (\text{C.22})$$

y

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = t + \frac{t_1}{\sqrt{n-1}} + \frac{t_2}{n-1} + \frac{t_3}{(n-1)^{\frac{3}{2}}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(n-1)^2}\right), \quad (\text{C.23})$$

donde la expansión de los siguientes términos

$$\frac{1}{\sqrt{n-1}}, \quad \frac{1}{n-1} \quad \text{y} \quad \frac{1}{(n-1)^{\frac{3}{2}}}$$

en  $n \rightarrow \infty$  son:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n-1}} &= \frac{1}{\sqrt{n}} \left[ 1 + \frac{1}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \right], \\ \frac{1}{n-1} &= \frac{1}{n} \left[ 1 + \frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \right], \\ \frac{1}{(n-1)^{\frac{3}{2}}} &= \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \left[ 1 + \frac{3}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.24})$$

Reemplazando las expansiones (C.24) en (C.23) obtenemos

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = t + t_1 \left[ \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}} \right] + \frac{t_2}{n} + \frac{t_3}{n^{\frac{3}{2}}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right). \quad (\text{C.25})$$

Expandiendo también  $\tilde{\beta}_n$  y  $\tilde{\gamma}_n$  como sigue

$$\tilde{\beta}_n = B + \frac{B_1}{n} + \mathcal{O}(1/n^2), \quad \tilde{\gamma}_n = C + \frac{C_1}{n} + \mathcal{O}(1/n^2),$$

que en nuestro caso (ver (C.16, C.15) ) es

$$\tilde{\beta}_n = -2 \left[ 1 + \frac{2s-1}{n} + \mathcal{O}(1/n^2) \right], \quad \tilde{\gamma}_n = 1 + \frac{2s-2}{n} + \mathcal{O}(1/n^2). \quad (\text{C.26})$$

Reemplazando (C.22), (C.25) y (C.26) en la ecuación (C.18) llegamos a

$$\begin{aligned} & t^2 + Bt + C + \frac{1}{\sqrt{n}}[2tt_1 + Bt_1] + \frac{1}{n}[t_1^2 + 2tt_2 + B_1t + Bt_2 + C_1] \\ & + \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}[t(2t_3 + t_1/2) + 2t_1t_2 + B(t_3 + t_1/2) + B_1t_1] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) = 0, \end{aligned}$$

obteniendo que

$$t = 1, \quad t_1 = \pm\sqrt{2s} \quad y \quad t_2 = 2s - 3/4,$$

donde usamos que  $t^2 + Bt + C = 0$ , por el polinomio característico.  $\square$

**Lema 6** *Dada la serie  $\sum a_n$  tenemos que si  $Re(\sqrt{2s}) > 0$  en (C.21), la suma diverge para el signo positivo y converge para el signo negativo.*

**Prueba.**

- tomamos el valor absoluto de (C.21) a orden  $1/\sqrt{n}$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \left| 1 \pm \frac{\sqrt{2s}}{\sqrt{n}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) \right|. \quad (\text{C.27})$$

1) Primero vemos el caso con signo positivo +.

Sea  $\sqrt{2s} = c + ib$ ,  $c > 0$  entonces de (C.27)

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \left| 1 + \frac{c + ib}{\sqrt{n}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) \right|$$

$$\begin{aligned} \frac{|a_{n+1}|^2}{|a_n|^2} &= \left( 1 + \frac{c}{\sqrt{n}} \right)^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= 1 + \frac{2c}{\sqrt{n}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= 1 + \frac{c}{\sqrt{n}} \left( 2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right) \\ &\geq 1 + \frac{c}{\sqrt{n}} > 1, \end{aligned}$$

para  $n$  suficientemente grande, tal que  $2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \geq 1$ . Como

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1, \quad (\text{C.28})$$

entonces para el signo positivo en (C.27) la serie  $\sum a_n$  diverge. Se puede ver que la serie diverge ya que cada término  $|a_n|$  es mayor que el anterior y así sucesivamente.

- 2) Para el caso con signo negativo  $-$ . Al igual que en el caso anterior elegimos  $\sqrt{s} = c + ib$ ,  $c > 0$ , y obtenemos

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \left| 1 - \frac{c + ib}{\sqrt{n}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) \right|.$$

Elevando al cuadrado el lado derecho de la anterior igualdad

$$\begin{aligned} \frac{|a_{n+1}|^2}{|a_n|^2} &= \left| 1 - \frac{c + ib}{\sqrt{n}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) \right|^2 \\ &= 1 - \frac{2c}{\sqrt{n}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= 1 - \frac{c}{\sqrt{n}} \left( 2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right) \\ &\leq 1 - \frac{c}{\sqrt{n}}, \end{aligned}$$

para  $n$  suficientemente grandes, de donde

$$|a_{n+1}| \leq \sqrt{1 - \frac{c}{\sqrt{n}}} |a_n| \leq \left( 1 - \frac{c}{2\sqrt{n}} \right) |a_n|. \quad (\text{C.29})$$

En este caso no es tan directo asegurar que la serie converge. Se necesita dar un argumento más fuerte. Usamos entonces la teoría del cálculo para las pruebas de convergencia de series de términos no negativos, ver página 402 del Apostol [44] y lema 9 del apéndice E<sup>2</sup>.

---

2

**Lema 7** Sea  $\{a_n\}$  y  $\{b_n\}$  dos secuencias con  $a_n > 0$  y  $b_n > 0$  para todo  $n \geq N$  y sea  $c_n = b_n - b_{n+1}(a_{n+1}/a_n)$

a) si existe una constante positiva  $r$  tal que  $c_n \geq r > 0$  para todo  $n \geq N$  entonces la serie  $\sum a_n$  converge. Pista: mostrar que

$$\sum_{k=N}^n a_k \leq \frac{a_N b_N}{r}.$$

b) Si  $c_n \leq 0$  para  $n \geq N$  y si  $\sum 1/b_n$  diverge entonces la serie  $\sum a_n$  diverge. Pista: mostrar que

$$\sum a_n \text{ domina } \sum 1/b_n.$$

- 3) Veamos ahora del lema 5 el caso donde  $\sqrt{2s}$  es puramente imaginario, esto es,  $\sqrt{2s} = ib$ ,  $c = 0$ . Primero tomamos al cuadrado del valor absoluto de (C.21)

$$\frac{|a_{n+1}|^2}{|a_n|^2} = \left| 1 \pm \frac{\sqrt{2s}}{\sqrt{n}} + \frac{2s - \frac{3}{4}}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right) \right|^2,$$

como  $c = 0$  los términos que sobreviven son

$$\frac{|a_{n+1}|^2}{|a_n|^2} = \left[ 1 - \frac{1}{n}(2b^2 + 3/2) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right) \right]$$

tomando la raíz cuadrada

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1 - \frac{1}{n}(b^2 + 3/4) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right).$$

Sea  $k = b^2 + 3/4$  y reemplazando en la ecuación anterior

$$\begin{aligned} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= 1 - \frac{k}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right) \\ &= 1 - \frac{k - \delta}{n} \left[ \frac{k}{k - \delta} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right], \end{aligned}$$

como  $k/(k - \epsilon) > 1$ ,  $k > 0$  y

$$\frac{k}{k - \delta} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \geq 1,$$

para  $n$  suficientemente grande, tenemos

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq 1 - \frac{k - \delta}{n}. \quad (\text{C.30})$$

Para que la serie  $\sum a_n$  converga (ver lema 10 apéndice E) necesitamos que  $k - \delta > 1$ . Si  $k > 1 + \delta \geq 1$ , entonces  $b^2 + 3/4 > 1$ . Como de  $\sqrt{2s} = ib$  tenemos que  $b^2 = -2s$ , y usando la desigualdad anterior llegamos a

si  $k \geq 1$  entonces  $s < -1/4$  y la serie  $\sum a_n$  converge,

si  $k \leq 1$  y  $s \geq -1/4$  la serie  $\sum a_n$  diverge.

El problema ahora es que si fijamos la frecuencia  $s$ , el lema 5 no dice si el signo que se obtiene es el positivo o el negativo. Entonces no se puede decir si la serie  $\sum a_n$  con  $a_n > 0$  converge o diverge. Queremos un criterio de cuándo ocurre el signo positivo o el signo negativo. Para solucionar la incertidumbre del signo positivo o negativo fijando una  $s$  vamos a introducir las fracción continuas y la definición de solución minimal. Esto se debe a que el teorema de R. Pincherle (1894) relaciona la convergencia de la fracción continua con la solución minimal de la relación de recurrencia (C.14). Ver W. Gautschi (1967 [45]).

- Fracción continua (ver justificación en el apéndice D): a partir de la relación de recursión  $a_{n+1} + \tilde{\beta}_n a_n + \tilde{\gamma}_n a_{n-1} = 0$ , dividimos por  $a_n$ ,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} + \tilde{\beta}_n = -\tilde{\gamma}_n \frac{a_{n-1}}{a_n}.$$

queremos despejar  $a_n/a_{n-1}$  y para eso invertimos la ecuación anterior y obtenemos

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = -\frac{\tilde{\gamma}_n}{\tilde{\beta}_n + \frac{a_{n+1}}{a_n}}, \quad (\text{C.31})$$

donde

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = -\frac{\tilde{\gamma}_{n+1}}{\tilde{\beta}_{n+1} + \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}},$$

y reemplazando en (C.31) obtenemos

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = -\frac{\tilde{\gamma}_n}{\tilde{\beta}_n - \frac{\tilde{\gamma}_{n+1}}{\tilde{\beta}_{n+1} + \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}}}. \quad (\text{C.32})$$

El término

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = -\frac{\tilde{\gamma}_{n+2}}{\tilde{\beta}_{n+2} + \frac{a_{n+3}}{a_{n+2}}},$$

reemplazando en (C.32)

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = -\frac{\tilde{\gamma}_n}{\tilde{\beta}_n - \frac{\tilde{\gamma}_{n+1}}{\tilde{\beta}_{n+1} - \frac{\tilde{\gamma}_{n+2}}{\tilde{\beta}_{n+2} + \frac{a_{n+3}}{a_{n+2}}}}}, \quad (\text{C.33})$$

y continuando la iteración sucesivamente obtenemos la fracción continua

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = -\frac{\tilde{\gamma}_{n+1}}{\tilde{\beta}_{n+1} - \frac{\tilde{\gamma}_{n+2}}{\tilde{\beta}_{n+2} - \frac{\tilde{\gamma}_{n+3}}{\tilde{\beta}_{n+3} - \dots}}}, \quad (\text{C.34})$$

donde cambiamos  $n$  por  $n + 1$  en (C.33).

Por notación (C.34) se puede escribir como

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = -\frac{\tilde{\gamma}_{n+1}}{\tilde{\beta}_{n+1} - \frac{\tilde{\gamma}_{n+2}}{\tilde{\beta}_{n+2} - \frac{\tilde{\gamma}_{n+3}}{\tilde{\beta}_{n+3} - \dots}}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{C.35})$$

donde tenemos que en el límite cuando  $n \rightarrow \infty$  la fracción continua (D.1) converge para el signo negativo. Para concluir lo anterior, usamos el teorema de Pincherle 7 y el segundo ejemplo después de la definición de la solución minimal

(ver definición 3 en el apéndice D). En este ejemplo mostramos que la relación de recursión (C.14) posee una solución minimal, la cual se requiere para la convergencia de (D.1) (ver teorema 7 en el apéndice D.3).

De la fracción continua (D.1) se obtienen las ecuaciones características las cuales se utilizan para calcular numéricamente las frecuencia de los modos cuasi-normales. De (C.14) y de (D.1) en  $n = 0$  tenemos respectivamente que

$$\frac{a_1}{a_0} = -\tilde{\beta}_0, \quad \frac{a_1}{a_0} = -\frac{\tilde{\gamma}_1}{\tilde{\beta}_1-} \frac{\tilde{\gamma}_2}{\tilde{\beta}_2-} \frac{\tilde{\gamma}_3}{\tilde{\beta}_3-} \dots$$

Igualando ambas ecuaciones obtenemos

$$0 = \tilde{\beta}_0 - \frac{\tilde{\gamma}_1}{\tilde{\beta}_1-} \frac{\tilde{\gamma}_2}{\tilde{\beta}_2-} \frac{\tilde{\gamma}_3}{\tilde{\beta}_3-} \dots, \quad (\text{C.36})$$

que es la ecuación característica para las frecuencias cuasi-normales. Donde  $\tilde{\beta}_n$  y  $\tilde{\gamma}_n$  son funciones de  $s$ . Definiendo

$$f(s) := \tilde{\beta}_0 - \frac{\tilde{\gamma}_1}{\tilde{\beta}_1-} \frac{\tilde{\gamma}_2}{\tilde{\beta}_2-} \frac{\tilde{\gamma}_3}{\tilde{\beta}_3-} \dots, \quad (\text{C.37})$$

donde  $f(s)$  es la función a la que deseamos encontrar los ceros. Tenemos entonces que el problema se reduce a buscar las frecuencias buscando los ceros de (C.37). Los ceros de  $f(s)$  son las frecuencias  $s$  de los modos cuasi-normales para la cual la serie  $\sum a_n$  converge.

La ecuación (C.36) puede ser invertida un número arbitrario de veces  $n$  y entonces es equivalente a una igualdad entre dos fracciones continuas, una infinita como en (C.37) y otra finita

$$\tilde{\beta}_n - \frac{\tilde{\gamma}_n}{\tilde{\beta}_{n-1}-} \frac{\tilde{\gamma}_{n-1}}{\tilde{\beta}_{n-2}-} \dots \frac{\tilde{\gamma}_1}{\tilde{\beta}_0} = \frac{\tilde{\gamma}_{n+1}}{\tilde{\beta}_{n+1}-} \frac{\tilde{\gamma}_{n+2}}{\tilde{\beta}_{n+2}-} \frac{\tilde{\gamma}_{n+3}}{\tilde{\beta}_{n+3}-} \dots \quad (\text{C.38})$$

De otro lado, la relación de recursión para el caso de Schwarzschild visto es a tres términos. Esto pasa porque el potencial se conoce explícitamente. Pero, en el caso de potenciales más complicados o que no se pueden conocer explícitamente, se podría tener una relación de recursión de muchos términos. Esto puede complicar bastante los cálculos a la hora de querer encontrar la fracción continua con la cual se calculan las frecuencias.

## C.1. Teoria punto singular regular

Consideramos la siguiente ecuación de segundo orden (ver [46])

$$-\frac{d^2 u}{dz^2} + 2 \frac{b(z)}{z} \frac{du}{dz} + \frac{c(z)}{z^2} u = 0 \quad (\text{C.39})$$

con  $b(z)$  y  $c(z)$  funciones regulares en  $z = 0$ . Entonces,  $z = 0$  es punto singular regular si

$$b_0 := b(0), \quad \text{o} \quad c_0 := c(0), \quad \text{o} \quad c_1 := \frac{dc}{dz}(0) \quad \text{son diferentes de cero.}$$

En este caso, (C.39) se reduce a

$$-\frac{d^2u}{dz^2} + 2\frac{b_0}{z}\frac{du}{dz} + \frac{c_0}{z^2}u = 0 \quad (\text{C.40})$$

La teoría dice que hay dos soluciones que se comportan como  $u \sim z^\lambda$ , donde  $\lambda$  se obtiene al sustituir el ansatz  $z^\lambda$  en (C.40):

$$\begin{aligned} \lambda(\lambda - 1) - 2b_0\lambda - c_0 &= 0, \\ \lambda^2 - 2(b_0 + 1/2)\lambda - c_0 &= 0. \end{aligned}$$

Entonces los dos eigenvalores son

$$\lambda_{\pm} = b_0 + 1/2 \pm \sqrt{(b_0 + 1/2)^2 - c_0}.$$

Obteniendo entonces dos soluciones para la ecuación diferencial (C.40). Estos son:

$$u_+(z) = z^{\lambda_+}(1 + h_+(z)), \quad (\text{C.41})$$

y

$$u_-(z) = z^{\lambda_-}(1 + h_-(z)). \quad (\text{C.42})$$

Si la diferencia entre los eigenvalores pertenecen a un entero, esto es si

$$\lambda_+ - \lambda_- = 2\sqrt{(b_0 + 1/2)^2 - c_0} \in 0, 1, 2, \dots$$

pueden haber términos logarítmicos en  $z$  en las expansiones de  $u_-$ .

## Apéndice D

# Fracciones continuas y relaciones de recurrencia

En este capítulo, vamos a dar la justificación de la fracción continua (C.38) que vimos en el apéndice C. A partir de esta fracción se calculan los modos cuasi-normales, para el caso de Schwarzschild, a partir del método de Leaver (ver apéndice C).

### D.1. Definición y propiedades básicas de las fracciones continuas

**Definición 2** Dada una relación de recursión  $a_{n+1} + \tilde{\beta}_n a_n + \tilde{\gamma}_n a_{n-1} = 0$ , dividimos por  $a_n$ , y despejamos  $a_n/a_{n-1}$ . Haciendo una iteración de los

$$a_{n+j}/a_{n+i}, \quad i < j, \quad j = 0, 1, 2, \dots, i, j \in \mathbb{Z},$$

obtenemos la fracción continua:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = -\frac{\tilde{\gamma}_{n+1}}{\tilde{\beta}_{n+1}-} \frac{\tilde{\gamma}_{n+2}}{\tilde{\beta}_{n+2}-} \frac{\tilde{\gamma}_{n+3}}{\tilde{\beta}_{n+3}-} \dots, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{D.1})$$

### D.2. Soluciones minimales

A continuación, damos la definición de solución minimal que se va a requerir más adelante en la demostración del teorema de Pincherle. En 1894 Pincherle probó una relación entre la existencia de una solución minimal de la relación de recurrencia de tres términos con la convergencia de la fracción continua.

**Definición 3** *Solución minimal*: dado una ecuación de recursión como (C.14), se dice que una solución  $f_n$  de (C.14) es minimal si cumple

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n}{y_n} = 0,$$

para cualquier otra solución  $y_n$  de la ecuación (C.14) que es diferente de cero y que no es proporcional a  $f_n$ .

**Lema 8** La solución minimal  $f_n$  es única excepto por un factor multiplicativo.

**Prueba.** Demostración por contradicción: supongamos que existe otra solución minimal  $\tilde{f}_n$  de (C.14) que es linealmente independiente de  $f_n$ . Entonces por definición de solución minimal tenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n}{\tilde{f}_n} = 0,$$

pero por la misma definición de función minimal se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{f}_n}{f_n} = 0, \quad \text{pero también} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{f}_n}{f_n} = \infty,$$

tendiendo entonces una contradicción. Por lo tanto, tenemos que la solución minimal  $f_n$  es única. □

Veamos ahora un par de ejemplos de solución minimal para el caso que estamos analizando:

- (1) Primer ejemplo: de la ecuación (C.14), una versión simplificada es en el límite cuando  $n \rightarrow \infty$ , de tal manera que

$$a_{n+1} - 2a_n + a_{n-1} = 0. \quad (\text{D.2})$$

Dos soluciones linealmente independientes de (D.2) son la solución trivial  $a_n = 1$  y la solución  $a_n = n$ . Dado que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n}{g_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0,$$

$f_n = 1$  es solución minimal de (D.2).

- (2) Segundo ejemplo: es a partir de (C.28) y (C.29)

$$|a_{n+1}^+| > |a_n^+|, \quad |a_{n+1}^-| \leq \left(1 - \frac{c}{2\sqrt{n}}\right) |a_n^-|.$$

Cambiando  $n \rightarrow n + m - 1$ , donde  $n$  ahora es fijo y  $m = 1, 2, 3, \dots$  tenemos

$$|a_{n+m}^+| > |a_n^+|, \quad |a_{n+m}^-| \leq \left(1 - \frac{c}{2\sqrt{n+m-1}}\right) |a_{n+m-1}^-|.$$

Iteramos ahora el término  $|a_{n+m-1}^-|$  de

$$|a_{n+m}^-| \leq \left(1 - \frac{c}{2\sqrt{n+m-1}}\right) |a_{n+m-1}^-|,$$

obtenemos<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} |a_{n+m}^-| &\leq \left(1 - \frac{c}{2\sqrt{n+m-1}}\right) \left(1 - \frac{c}{2\sqrt{n+m-2}}\right) \cdots \left(1 - \frac{c}{2\sqrt{n}}\right) |a_n^-| \\ &\leq \left(1 - \frac{k}{\sqrt{m}}\right) \left(1 - \frac{k}{\sqrt{m-1}}\right) \cdots \left(1 - \frac{k}{\sqrt{1}}\right) |a_n^-|, \end{aligned} \quad (D.5)$$

<sup>1</sup>Veamos la justificación del término  $k$  en (D.5). Iterando el término  $|a_{n+m-1}^-|$  de

$$|a_{n+m}^-| \leq \left(1 - \frac{c}{2\sqrt{n}}\right) |a_{n+m-1}^-|, \quad (D.3)$$

esto es,

$$\begin{aligned} |a_{n+m-1}^-| &\leq \left(1 - \frac{c}{2\sqrt{m+n-2}}\right) |a_{n+m-2}^-|, \\ |a_{n+m-2}^-| &\leq \left(1 - \frac{c}{2\sqrt{m+n-3}}\right) |a_{n+m-3}^-|, \dots \end{aligned} \quad (D.4)$$

reemplazando (D.4) en (D.3)

$$\begin{aligned} |a_{n+m}^-| &\leq \left(1 - \frac{c}{2\sqrt{n}}\right) |a_{n+m-1}^-| \\ &\leq \left(1 - \frac{c}{2\sqrt{n+m-1}}\right) \left(1 - \frac{c}{2\sqrt{m+n-2}}\right) \cdots \left(1 - \frac{c}{2\sqrt{n}}\right) |a_n^-|. \end{aligned}$$

Nos preguntamos ahora si existe un  $k$  tal que el término  $1 - c/(2\sqrt{n+m-1})$  se pueda acotar por  $1 - k/\sqrt{m}$ , esto es si

$$1 - \frac{c}{2\sqrt{n+m-1}} \stackrel{?}{\leq} 1 - \frac{k}{\sqrt{m}}.$$

La anterior desigualdad es equivalente a

$$\begin{aligned} -\frac{c}{2\sqrt{n+m-1}} &\leq -\frac{k}{\sqrt{m}} \\ \Leftrightarrow \\ \frac{k}{\sqrt{m}} &\leq \frac{c}{2\sqrt{n+m-1}} \\ \Leftrightarrow \\ \sqrt{m + \frac{n-1}{m}} &\leq \frac{c}{2k}, \end{aligned}$$

eligiendo ahora,  $k := c/(2\sqrt{n})$ , tenemos que

$$\sqrt{n+m-1} \leq \sqrt{n},$$

y esto se cumple para  $m = 1, 2, 3, \dots$ . Por lo tanto tenemos

$$\begin{aligned} |a_{n+m}^-| &\left(1 - \frac{c}{2\sqrt{n+m-1}}\right) \left(1 - \frac{c}{2\sqrt{m+n-2}}\right) \cdots \left(1 - \frac{c}{2\sqrt{n}}\right) |a_n^-| \\ &\leq |a_{n+m}^-| \left(1 - \frac{k}{\sqrt{m}}\right) \left(1 - \frac{k}{\sqrt{m-1}}\right) \cdots \left(1 - \frac{k}{\sqrt{1}}\right) |a_n^-|. \end{aligned}$$

lo cual justifica el término  $k$  en la desigualdad (D.5).

donde  $k = \text{const.}$  Entonces

$$\left| \frac{a_{n+m}^-}{a_{n+m}^+} \right| \leq \left(1 - \frac{k}{\sqrt{m}}\right) \left(1 - \frac{k}{\sqrt{m-1}}\right) \cdots \left(1 - \frac{k}{\sqrt{1}}\right) \left| \frac{a_n^-}{a_n^+} \right|,$$

tomando el límite cuando  $m \rightarrow \infty$ ,

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+m}^-}{a_{n+m}^+} \right| &\leq \lim_{m \rightarrow \infty} \left[ \left(1 - \frac{k}{\sqrt{m}}\right) \left(1 - \frac{k}{\sqrt{m-1}}\right) \cdots \left(1 - \frac{k}{\sqrt{1}}\right) \right] \left| \frac{a_n^-}{a_n^+} \right| \\ &\leq \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{k}{\sqrt{m}}\right)^m, \quad \sqrt{m-1} \leq \sqrt{m}, \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left[ \left(1 - \frac{k}{\sqrt{m}}\right)^{\sqrt{m}} \right]^{\sqrt{m}}, \\ &\leq \lim_{m \rightarrow \infty} \left[ \left(1 - \frac{k}{\sqrt{m}}\right)^{\sqrt{m}} \right]^{\sqrt{m_0}}, \quad \text{para todo } m \geq m_0 \\ &= e^{-k\sqrt{m_0}}, \quad k > 0. \end{aligned}$$

Dado que  $m_0 \in \mathbb{N}$  arbitrario, entonces el límite es cero. Tenemos entonces que  $|a_{n+m}^-|$  es una solución minimal de (C.14).

**Definición 4** Dado sucesiones  $\gamma_n$  y  $\beta_n$  de números complejos, definimos como

$$c_k = \frac{\tilde{\gamma}_1}{\tilde{\beta}_1 -} \frac{\tilde{\gamma}_2}{\tilde{\beta}_2 -} \frac{\tilde{\gamma}_3}{\tilde{\beta}_3 -} \cdots \frac{\tilde{\gamma}_k}{\tilde{\beta}_k} = \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}. \quad (\text{D.6})$$

El valor de la fracción continua, si existe, se define como

$$\lim_{k \rightarrow \infty} c_k = \text{const.}$$

La relación de las fracciones continuas con las relaciones de recursión se dan en el siguiente teorema:

**Teorema 6** Si  $p_n$  y  $q_n$  satisfacen la ecuación de recursión

$$a_{n+1} + \tilde{\beta}_n a_n + \tilde{\gamma}_n a_{n-1} = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (\text{D.7})$$

con

$$p_0 = 1, \quad p_1 = 0, \quad q_0 = 0, \quad q_1 = 1,$$

entonces

$$c_n = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}.$$

**Prueba.** La demostración es por inducción en  $n$ . De la ecuación (\*) tenemos que,

- $n = 1$ ,  $c_1 = \frac{p_2}{q_2} = \frac{\tilde{\gamma}_1}{\tilde{\beta}_1}$ ,  $p_2 = -\tilde{\gamma}_1$ ,  $q_2 = -\tilde{\beta}_1$
- $n = 2$ ,  $c_2 = \frac{p_3}{q_3} = \frac{\tilde{\gamma}_1 \tilde{\beta}_2}{\tilde{\beta}_1 \tilde{\beta}_2 - \tilde{\gamma}_2}$ ,  $p_3 = \tilde{\gamma}_1 \tilde{\beta}_2$ ,  $q_3 = \tilde{\beta}_1 \tilde{\beta}_2 - \tilde{\gamma}_2$ ,
- $n \rightarrow n + 1$  tenemos de la definición

$$c_{n+1} = \frac{\tilde{\gamma}_1}{\tilde{\beta}_1 - \tilde{\beta}_2 - \dots - \tilde{\beta}_n - \tilde{\beta}_{n+1}} \frac{\tilde{\gamma}_2}{\tilde{\beta}_2 - \dots - \tilde{\beta}_n - \tilde{\beta}_{n+1}} \dots \frac{\tilde{\gamma}_n}{\tilde{\beta}_n - \tilde{\beta}_{n+1}} \frac{\tilde{\gamma}_{n+1}}{\tilde{\beta}_{n+1}},$$

donde el término  $\frac{\tilde{\gamma}_n}{\tilde{\beta}_n - \tilde{\beta}_{n+1}} \frac{\tilde{\gamma}_{n+1}}{\tilde{\beta}_{n+1}}$  por notación se puede escribir

$$\frac{\tilde{\gamma}_n}{\tilde{\beta}_n - \tilde{\beta}_{n+1}} \frac{\tilde{\gamma}_{n+1}}{\tilde{\beta}_{n+1}} = \frac{\tilde{\gamma}_n}{\tilde{\beta}_n - \frac{\tilde{\gamma}_{n+1}}{\tilde{\beta}_{n+1}}} = \frac{\tilde{\gamma}_n \tilde{\beta}_{n+1}}{\tilde{\beta}_n \tilde{\beta}_{n+1} - \tilde{\gamma}_{n+1}} =: \frac{\tilde{\gamma}'_n}{\tilde{\beta}'_n}$$

con  $\tilde{\gamma}'_n = \tilde{\gamma}_n \tilde{\beta}_{n+1}$  y  $\tilde{\beta}'_n = \tilde{\beta}_n \tilde{\beta}_{n+1} - \tilde{\gamma}_{n+1}$ . Entonces por la definición  $c_{n+1}$  se puede escribir como

$$c_{n+1} = \frac{\tilde{\gamma}_1}{\tilde{\beta}_1 - \tilde{\beta}_2 - \dots - \tilde{\beta}'_n} \frac{\tilde{\gamma}_2}{\tilde{\beta}_2 - \dots - \tilde{\beta}'_n} \dots \frac{\tilde{\gamma}'_n}{\tilde{\beta}'_n} = \frac{p'_{n+1}}{q'_{n+1}},$$

por la hipótesis de inducción tenemos que

$$\begin{aligned} p'_{n+1} &= -\tilde{\beta}'_n p_n - \tilde{\gamma}'_n p_{n-1} \\ &= -(\tilde{\beta}_n \tilde{\beta}_{n+1} - \tilde{\gamma}_{n+1}) p_n - \tilde{\gamma}_n \tilde{\beta}_{n+1} p_{n-1} \\ &= -\tilde{\beta}_{n+1} (\tilde{\beta}_n p_n + \tilde{\gamma}_n p_{n-1}) + \tilde{\gamma}_{n+1} p_n \\ &= -\tilde{\beta}_{n+1} p_{n+1} + \tilde{\gamma}_{n+1} p_n = -p_{n+2}, \end{aligned}$$

haciendo lo mismo para  $q'_{n+1}$  encontramos  $q'_{n+1} = -q_{n+2}$ . Entonces,

$$\frac{p'_{n+1}}{q'_{n+1}} = \frac{p_{n+2}}{q_{n+2}},$$

y podemos escribir

$$c_{n+1} = \frac{p_{n+2}}{q_{n+2}}.$$

lo cual prueba el teorema 6.

### D.3. Solución minimal y el teorema de Pincherle

A continuación se enuncia el teorema de Pincherle y su demostración.

**Teorema 7** (Pincherle 1894, página 827 [47]) *La fracción continua ,*

$$\frac{\tilde{\gamma}_1}{\tilde{\beta}_1 - \tilde{\beta}_2 - \tilde{\beta}_3 - \dots} \tag{D.8}$$

converge si y sólo si la relación de recurrencia

$$a_{n+1} + \tilde{\beta}_n a_n + \tilde{\gamma}_n a_{n-1} = 0, \quad \tilde{\gamma}_n \neq 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{D.9})$$

posee una solución minimal  $f_n$ , con  $f_0 \neq 0$ . En el caso de convergencia se tiene además que

$$\frac{f_n}{f_{n-1}} = \frac{-\tilde{\gamma}_n}{\tilde{\beta}_n - \tilde{\beta}_{n+1}} \frac{\tilde{\gamma}_{n+1}}{\tilde{\beta}_{n+1} - \tilde{\beta}_{n+2}} \dots, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{D.10})$$

siempre que  $f_n \neq 0$  para  $n = 0, 1, 2, \dots$

### Prueba.

a) Asumamos que la fracción continua (D.10) converge. Entonces,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n} = c, \quad (\text{D.11})$$

donde  $c = \text{const}$  y  $p_n$  y  $q_n$  son soluciones de (D.9) definidas por los valores iniciales  $p_0 = 1$ ,  $p_1 = 0$ ,  $q_0 = 0$ ,  $q_1 = 1$ . Sea  $f_n = p_n - cq_n$ , donde  $f_n$  es solución de (D.9) y tomamos otra solución linealmente independiente  $y_n = ap_n + bq_n$  de (D.9). Entonces, dado que  $y_n$  no es proporcional a  $f_n$  tenemos que  $ac + b \neq 0$  y

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n}{y_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n - cq_n}{ap_n + bq_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n/q_n - c}{ap_n/q_n + b} \\ &= 0, \end{aligned} \quad (\text{D.12})$$

donde usamos (D.11) y la suposición  $ac + b \neq 0$ . Esto muestra que  $f_n$  es solución minimal de (D.9), con  $f_0 = p_0 \neq 0$ .

b) Asumimos ahora que (D.9) posee una solución minimal, digamos  $f_n$ , para la cual  $f_0 \neq 0$ . Entonces  $f_n = f_0 p_n + f_1 q_n$ , donde  $q_n$  es linealmente independiente de  $f_n$  porque  $f_0 \neq 0$ . Como  $f_n$  es solución minimal entonces

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n}{q_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_0 p_n + f_1 q_n}{q_n} \\ &= f_0 \lim_{n \rightarrow \infty} p_n/q_n + f_1, \end{aligned}$$

donde obtenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n} = -\frac{f_1}{f_0}, \quad (\text{D.13})$$

lo cual establece la convergencia para  $n = 1$  de la fracción continua (D.8)

$$\frac{f_1}{f_0} = \frac{\tilde{\gamma}_1}{\tilde{\beta}_1 - \tilde{\beta}_2} \dots$$

- c) Prueba más general de (D.10) para  $n > 1$ . Necesitamos observar solamente que  $z_m = f_{n+m-1}$ , donde  $n \rightarrow n + m - 1$ , con  $n$  fija y  $m = 1, 2, 3, \dots$ , considerada como una función de  $m$ , es una solución de

$$a_{m+1} + \tilde{\beta}_{n+m-1}a_m + \tilde{\gamma}_{n+m-1}a_{m-1} = 0,$$

con  $z_0 = f_{n-1} \neq 0$ . Sea  $z_m = z_0 p_{n+m-1} + z_1 q_{n+m-1}$ , donde  $q_{n+m-1}$  es linealmente independiente de  $z_m$ . Entonces

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{z_m}{q_{n+m-1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_0 p_{n+m-1} + z_1 q_{n+m-1}}{q_{n+m-1}} \\ &= z_0 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{n+m-1}}{q_{n+m-1}} + z_1 - 1 \\ &= 0, \end{aligned}$$

de donde obtenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{n+m-1}}{q_{n+m-1}} = -\frac{z_1}{z_0},$$

y por la parte del teorema que ya se probó

$$-\frac{z_1}{z_0} = -\frac{f_n}{f_{n-1}}, \quad (\text{D.14})$$

con lo cual se termina la demostración y se prueba el teorema 7.

□



## Apéndice E

# Criterios de convergencia en series

En este apéndice, demostramos algunos ejercicios, sobre convergencias o divergencias de series, de la página 402 del libro [44]. Estas pruebas se requieren para las demostraciones en el apéndice C sobre el método de Leaver. Este método, en este apéndice, se usa para calcular los modos cuasi-normales de Schwarzschild.

**Lema 9** Sea  $\{a_n\}$  y  $\{b_n\}$  dos secuencias con  $a_n > 0$  y  $b_n > 0$  para todo  $n \geq N$  y sea  $c_n = b_n - b_{n+1}(a_{n+1}/a_n)$

a) si existe una constante positiva  $r$  tal que  $c_n \geq r > 0$  para todo  $n \geq N$  entonces la serie  $\sum a_n$  converge. Pista: mostrar que

$$\sum_{k=N}^n a_k \leq \frac{a_N b_N}{r}.$$

b) Si  $c_n \leq 0$  para  $n \geq N$  y si  $\sum 1/b_n$  diverge entonces la serie  $\sum a_n$  diverge. Pista: mostrar que

$$\sum a_n \text{ domina } \sum 1/b_n.$$

**Prueba.** multiplicando la serie  $\sum a_n$  por  $c_n$

$$\begin{aligned} \sum_{n=N}^M a_n c_n &= \sum_{n=N}^M (a_n b_n - a_{n+1} b_n) \\ &= a_N b_N - a_{N+1} b_{N+1} + a_{N+1} b_{N+1} - a_{N+2} b_{N+2} + \dots + a_M b_M - a_{M+1} b_{M+1} \\ &= a_N b_N - a_{M+1} b_{M+1} \\ &\leq a_N b_N. \end{aligned}$$

- Veamos el inciso a):

$$\sum_{n=N}^M a_n c_n \leq a_N b_N$$

de otro lado,

$$\sum_{n=N}^M a_n r \leq \sum_{n=N}^M a_n c_n \leq a_N b_N, \quad c_n \geq r$$

dividiendo por  $r$

$$0 < \sum_{n=N}^M a_n \leq \frac{1}{r} \sum_{n=N}^M a_n c_n \leq \frac{a_N b_N}{r},$$

y esto implica que

$$0 < \sum_{n=N}^M a_n \leq \frac{a_N b_N}{r}, \quad a_N b_N = \text{const},$$

entonces  $\sum_{n=N}^M a_n$  converge.

- Veamos el inciso b): Si  $c_n \leq 0$  entonces

$$a_N b_N - a_M b_M \leq 0, \quad \text{para } M > N,$$

entonces

$$a_M \geq \frac{b_N}{b_M} a_N,$$

y esto implica que

$$\sum_{M \geq N}^n a_M \geq b_N a_N \sum_{M \geq N}^n \frac{1}{b_M}$$

viendo entonces que

$$\sum_{M \geq N}^n a_M \text{ domina } \sum_{M \geq N}^n \frac{1}{b_M}.$$

**Lema 10** Sea  $\sum a_n$  una serie de términos positivos. Si existe un  $r > 0$  y un  $N \geq 1$  tal que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 - \frac{1}{n} - \frac{r}{n} = 1 - \frac{1+r}{n}, \quad \text{para todo } n \geq N,$$

entonces  $\sum a_n$ , converge. La serie  $\sum a_n$  diverge si

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 - \frac{1}{n}, \quad \text{para todo } n \geq N.$$

**Prueba.** para la demostración de este lema, se hace uso del inciso anterior a) en el lema 9 con  $b_{n+1} = n$  y con la hipótesis que  $a_{n+1}/a_n \leq 1 - (1+r)/n$ . Con esto se llega a que  $r > c_n$ , donde  $c_n > 0$ .

**Lema 11** Sea  $\sum a_n$  una serie de términos positivos. Si existe un  $N \geq 1$ , y  $s > 1$ , y  $M > 0$  tal que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{A}{n} + \frac{f(n)}{n^s}, \text{ para todo } n \geq N,$$

donde  $|f(n)| \leq M$  para todo  $n$ , entonces  $\sum a_n$  converge si  $A > 1$  y diverge si  $A \leq 1$ .

**Prueba.** para la demostración de este lema si  $A \neq 1$  se hace uso del lema (6) y si  $A = 1$  se usa el numeral a) del lema (9) con  $b_{n+1} = n \log n$ .

En nuestro caso para  $a_n > 0$  tenemos lo siguiente :

- Inciso a) del lema (9)

hipótesis:  $\sum a_n$  converge si

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 - \frac{1+\varepsilon}{n}, \quad n \geq N_\varepsilon.$$

**Prueba.:** sea  $b_n = n - 1$  entonces

$$\begin{aligned} c_n &= n - 1 - n \frac{a_{n+1}}{a_n} \\ &\geq n - 1 - n \left( 1 - \frac{1+\varepsilon}{n} \right) \\ &= \varepsilon > 0 \end{aligned}$$

y como  $r = \varepsilon > 0$  existe la constante positiva que se requiere para que la serie converga.

- Inciso b) del lema (9)

hipótesis:  $\sum a_n$  diverge si

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 - \frac{1}{n}, \quad n \geq N.$$

**Prueba.:** sea  $b_n = n - 1$  entonces

$$\begin{aligned} c_n &= n - 1 - n \frac{a_{n+1}}{a_n} \\ &\leq n - 1 - n \left( 1 - \frac{1}{n} \right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

entonces  $c_n < 0$  y además,

$$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n-1} = \infty,$$

para lo cual, queda demostrado la parte b).



## Apéndice F

# Expansión formal de la solución en el infinito

### F.1. Expansión formal de la solución en el infinito

En este capítulo queremos ver la expansión de la función  $g(\zeta)$ , que cumple la ecuación (F.1), alrededor de  $\zeta = 1$ . Es decir, en la región asintótica  $r \rightarrow \infty$ . Recordamos que  $\zeta = 1 - \frac{1}{z}$ ,  $\zeta \in (0, 1)$ , donde  $z \in [1, \infty)$ .

Partimos de la ecuación que satisface  $g(\zeta)$

$$\begin{aligned} & [-8s^2 - 4s - \ell(\ell + 1) + \epsilon + (4s^2 + 4s - \epsilon)\zeta]g(\zeta) \\ & + [1 + 2s - 4(1 + 2s)\zeta + (3 + 4s)\zeta^2]g'(\zeta) \\ & + \zeta(1 - \zeta)^2g''(\zeta) = 0. \end{aligned} \tag{F.1}$$

Definiendo  $x = 1 - \zeta = \frac{1}{z}$ ,  $\lambda = \ell(\ell + 1)$  y

$$g = \sum_{n=0}^{\infty} g_n x^n, \tag{F.2}$$

tenemos que (F.1) toma la forma

$$[4s^2 + \lambda + (4s^2 + 4s - \epsilon)x]g + [-2s - 2x + (3 + 4s)x^2]g_x + (x^3 - x^2)g_{xx} = 0. \tag{F.3}$$

A partir de (F.3) encontramos las relaciones de recursión dadas por

$$\text{orden cero : } g_1 = -\frac{A_0}{B_0}g_0$$

orden  $n + 1$

$$g_{n+1} = -\frac{1}{(n+1)B_0} \{ [A_0 + nB_1 - n(n-1)]g_n + [A_1 + (n-1)B_2 + (n-1)(n-2)]g_{n-1} \},$$

$$n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{F.4})$$

Con

$$A_0 = 4s^2 + \lambda, \quad A_1 = 4s^2 + 4s - \epsilon, \quad B_0 = -2s, \quad B_1 = -2, \quad B_2 = 3 + 4s.$$

O lo que es equivalente,

$$\alpha_n g_{n+1} + \beta_n g_n + \gamma_n g_{n-1} = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{F.5})$$

con

$$\begin{aligned} \alpha_n &= -2s(n+1) \\ \beta_n &= 4s^2 + \lambda - n(n+1) \\ \gamma_n &= 4s^2 - \epsilon - 1 + n^2 + 4sn = (2s+n)^2 + s^2 - 2. \end{aligned} \quad (\text{F.6})$$

## F.2. Radio de convergencia

Pregunta: ¿Cuál es el radio de convergencia de la serie (F.2)? Para contestar a esta, definimos  $g_n := n!h_n$  en (F.5) y dividiendo por  $(n-1)!$  tenemos que los coeficientes  $\alpha_{hn}, \beta_{hn}, \gamma_{hn}$  de

$$\alpha_{hn}h_{n+1} + \beta_{hn}h_n + \gamma_{hn}h_{n-1} = 0, \quad (\text{F.7})$$

son

$$\begin{aligned} \alpha_{hn} &= -2sn(n+1)^2, \\ \beta_{hn} &= n[4s^2 + \lambda - n(n+1)], \\ \gamma_{hn} &= (2s+n)^2 + s^2 - 2. \end{aligned} \quad (\text{F.8})$$

Definiendo los coeficientes  $\tilde{\beta}_{hn}$  y  $\tilde{\gamma}_{hn}$  como

$$\tilde{\beta}_{hn} := \frac{\beta_{hn}}{\alpha_{hn}} = \frac{4s^2 + \lambda - n(n+1)}{-2s(1+n)^2}, \quad \tilde{\gamma}_{hn} := \frac{\gamma_{hn}}{\alpha_{hn}} = \frac{4s^2 - \epsilon - 1 + 4sn + n^2}{-2sn(1+n)^2},$$

obtenemos la ecuación

$$h_{n+1} + \tilde{\beta}_{hn}h_n + \tilde{\gamma}_{hn}h_{n-1} = 0, \quad (\text{F.9})$$

con los siguientes límites de  $\tilde{\beta}_{h_n}$  y  $\tilde{\gamma}_{h_n}$  para  $n \rightarrow \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\beta}_{h_n} = \frac{1}{2s}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\gamma}_{h_n} = 0. \quad (\text{F.10})$$

Por el teorema 5 del capítulo C, tenemos que el

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h_{n+1}}{h_n} = t_r, \quad r = 1, 2,$$

donde el polinomio característico es:  $t^2 + \frac{1}{2s}t = 0$ . Teniendo entonces que sus raíces son  $t_1 = 0$  y  $t_2 = \frac{1}{2s}$ . Donde la relación  $\frac{h_{n+1}}{h_n}$  esta directamente relacionada con el radio de convergencia siguiente:

Radio de convergencia para la serie  $g_n = n!h_n$ . Tenemos

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{g_{n+1}}{g_n} \right|} \\ &= \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)!h_{n+1}}{n!h_n} \right|} \\ &= \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{h_{n+1}}{h_n} \right|} \\ &= \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) \left| \frac{1}{2s} \right|} = 0. \end{aligned} \quad (\text{F.11})$$

Ahora, como el radio de convergencia es cero, se tiene que la serie  $g_n = n!h_n$  diverge excepto en  $x = 0$ . Encontrando que la serie en (F.2)  $\sum_{n=0}^{\infty} g_n$  converge.

$$\begin{aligned} t_2 &\rightarrow \text{diverge} \quad (R = 0) \\ t_1 &\rightarrow ? \quad \text{¿Qué pasa en este caso?} \end{aligned}$$

Vemos ahora el caso  $t = 0$ . Expandimos los siguientes términos hasta orden  $1/n^2$

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_{h_n} &= B + \frac{B_1}{n} + \frac{B_2}{n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ \tilde{\gamma}_{h_n} &= C + \frac{C_1}{n} + \frac{C_2}{n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right) \end{aligned} \quad (\text{F.12})$$

$$\frac{h_{n+1}}{h_n} = t + \frac{t_1}{\sqrt{n}} + \frac{t_2}{n} + \frac{t_3}{n^{\frac{3}{2}}} + \frac{t_4}{n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{\frac{5}{3}}}\right), \quad (\text{F.13})$$

y

$$\begin{aligned} \frac{h_n}{h_{n-1}} &= t + \frac{t_1}{\sqrt{n-1}} + \frac{t_2}{n-1} + \frac{t_3}{(n-1)^{\frac{3}{2}}} + \frac{t_4}{(n-1)^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(n-1)^{\frac{5}{3}}}\right) \\ &= t + t_1 \left[ \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}} \right] + t_2 \left[ \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right] + \frac{t_3}{n^{\frac{3}{2}}} + \frac{t_4}{n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{\frac{5}{3}}}\right), \end{aligned} \quad (\text{F.14})$$

Y reemplazando en

$$\frac{h_{n+1}}{h_n} \frac{h_n}{h_{n-1}} + \frac{h_n}{h_{n-1}} \tilde{\beta}_{hn} + \tilde{\gamma}_{hn} = 0. \quad (\text{F.15})$$

En el caso donde  $t = 1/(2s)$  el radio de convergencia es cero (como vimos), y tenemos que la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} g_n x^n$  diverge salvo en  $x = 0$ . Por lo anterior, vamos a tomar el caso donde  $t = 0$ . Con esto obtenemos que

$$\begin{aligned} t &= 0 \\ t_1 &= 0 \\ t_2 &= -C_1/B = 1 \\ t_3 &= 0 \\ t_4 &= -\frac{1}{B}[C_2 + (B_1 + B)t_2 + t_2^2] = 2s - 2 \end{aligned} \quad (\text{F.16})$$

donde  $B, B_1, B_2, C, C_1, C_2$  vienen de

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_{hn} &= \frac{1}{2s} \left[ 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}(4s^2 + \lambda - 1) \right] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ \tilde{\gamma}_{hn} &= \frac{1}{2s} \left[ -\frac{1}{n} + \frac{2-4s}{n^2} \right] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right) \end{aligned} \quad (\text{F.17})$$

Teniendo entonces que

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{2s} \\ B_1 &= -\frac{1}{2s} \\ B_2 &= \frac{1}{2s}(1 - 4s^2 - \lambda) \\ C &= 0 \\ C_1 &= -\frac{1}{2s} \\ C_2 &= \frac{2-4s}{2s} \end{aligned} \quad (\text{F.18})$$

Obtenemos entonces que

$$\frac{h_{n+1}}{h_n} = \frac{1}{n} + \frac{2s-2}{n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{\frac{5}{3}}}\right), \quad (\text{F.19})$$

y de  $g_n = n!h_n$  tenemos

$$\frac{h_{n+1}}{h_n} = \frac{n!}{(n+1)!} \frac{g_{n+1}}{g_n} = \frac{1}{n+1} \frac{g_{n+1}}{g_n}.$$

De donde

$$\frac{g_{n+1}}{g_n} = (n+1) \left[ \frac{1}{n} + \frac{2s-2}{n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{\frac{5}{3}}}\right) \right],$$

entonces, el radio de convergencia  $R$  es igual a  $R = 1$ .

Ahora, ¿converge también en  $x = 1$  (horizonte)? llegamos a

$$\frac{g_{n+1}}{g_n} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{2s}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad (\text{F.20})$$

$$\frac{|g_{n+1}|^2}{|g_n|^2} = \left| 1 - \frac{1}{n}(1-2s) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \right|^2$$

Si hacemos  $s = c + ib$  entonces

$$\begin{aligned} \frac{|g_{n+1}|^2}{|g_n|^2} &= \left| 1 - \frac{1}{n}[1-2(c+ib)] - \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \right|^2 \\ &= 1 - \frac{2(1-2c)}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Tomando la raíz cuadrada

$$\frac{|g_{n+1}|}{|g_n|} = 1 - \frac{1}{n}(1-2c) - \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right). \quad (\text{F.21})$$

- De (F.21) (ver lema 11 en apéndice E) tenemos que la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} g_n$

converge para

$1 - 2c > 1 \rightarrow c = \text{Re}(s) < 0$  esto quiere decir que en este caso

la serie converge en todos lados del horizonte al infinito

y diverge para

$1 - 2c \leq 1 \rightarrow c = \text{Re}(s) \geq 0$ .

En resumen tenemos que: o la serie para  $g$ , es decir  $\sum_{n=0}^{\infty} g_n x^n$ , tiene radio de convergencia cero en el caso ( $t = -1/(2s)$ ), y diverge para todo  $x$  (salvo en  $x = 0$ ), o la serie tiene radio de convergencia uno ( $t = 0$ ) y en este caso converge para todo  $x$  entre  $[0, 1]$  incluyendo  $x = 1$  (horizonte). Los modos cuasi-normales corresponden al segundo caso.

Sería interesante investigar si se puede reformular el problema de encontrar las frecuencias cuasi-normales a través de una fracción continua basada en los

coeficientes  $\tilde{\beta}_{h_n}$  y  $\tilde{\gamma}_{h_n}$  definidos en (F.17).

**PREGUNTA:** Sea  $h_n^{(0)}$  una solución tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h_{n+1}^{(0)}}{h_n^{(0)}} \rightarrow 0.$$

¿Es  $h_n^{(0)}$  solución minimal?

## Apéndice G

# Continuación analítica de las funciones $\mathcal{N}$ y $V_\ell$

En este apéndice, demostramos que las funciones  $\mathcal{N}(r)$  y  $V_\ell(r)$  en la ecuación de modos (6.9) admite una continuación analítica en el dominio  $\text{Re}(r) > r_H$  con las propiedades

$$\lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ \text{Re}(r) > r_H}} \mathcal{N}(r) = v_\infty, \quad \lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ \text{Re}(r) > r_H}} r^2 V_\ell(r) = v_\infty \ell(\ell + 1), \quad (\text{G.1})$$

donde  $v_\infty := v_s(n_\infty) > 0$  es la velocidad del sonido en el infinito. Para esto, necesitamos asumir que, además de las propiedades (F1)–(F3) la entalpía específica  $h(n)$  es una función analítica de  $n$ . Como ejemplo concreto podemos considerar el caso donde  $h(n) = e_0 + \frac{\gamma k}{\gamma - 1} n^{\gamma - 1}$  es la ecuación de estado politrópica, la cual es analítica en el dominio  $\text{Re}(n) > 0$ .

Bajo estas suposiciones, primero demostramos que la solución del flujo de Michel  $n(r)$ , la cual es implícitamente determinada por (4.11), posee una continuación analítica en el dominio  $\text{Re}(r) > r_H$  y satisface

$$\lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ \text{Re}(r) > r_H}} n(r) = n_\infty, \quad (\text{G.2})$$

donde  $n_\infty > 0$  es la densidad de partículas en el infinito. A fin de demostrar esta afirmación, siguiendo [40] introducimos cantidades adimensionales  $x := r/r_H$ ,  $z := n/n_0$ ,  $n_0 := (e_0/K)^{1/(\gamma - 1)}$ , en términos de las cuales (4.11) se puede escribir como

$$F_\mu(x, z) := f(z)^2 \left[ 1 - \frac{1}{x} + \frac{\mu^2}{x^4 z^2} \right] = f_\infty^2 = \text{const.}, \quad (\text{G.3})$$

donde  $f(z) = 1 + z^{\gamma - 1} = 1 + e^{(\gamma - 1) \log(z)}$  es la función de entalpía adimensional y  $f_\infty = f(z_\infty)$ ,  $z_\infty > 0$ , su valor en el infinito. La función  $F_\mu$  definida por (G.3), es analítica en el dominio  $\Omega_c := \{(x, z) \in \mathbb{C}^2 : \text{Re}(x) > 0, \text{Re}(z) > 0\}$ .

En [40] demostramos que existe una única función diferenciable con valor real  $z_0 : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  (la solución de Michel), definida en y fuera del horizonte de eventos, tal que  $F_\mu(x, z_0(x)) = f_\infty^2$  para todo  $x \geq 1$  y  $\lim_{x \rightarrow \infty} z_0(x) = z_\infty$ . Esta solución tiene la propiedad que la derivada parcial de  $F_\mu$  con respecto a  $z$ ,

$$\frac{\partial F_\mu}{\partial z}(x, z) = \frac{2f(z)^2}{z} \nu(z)^2 \left[ 1 - \frac{1}{x} - \left( \frac{1}{\nu(z)^2} - 1 \right) \frac{\mu^2}{x^4 z^2} \right], \quad \nu := \frac{v_s}{c}, \quad (\text{G.4})$$

es diferente de cero para todo  $x \geq 1$ , excepto en la posición del punto crítico  $x = x_c$ . Por continuidad,  $\partial F_\mu / \partial z$  también es diferente de cero en una vecindad abierta  $U \subset \Omega_c$  en la gráfica  $G := \{(x, z_0(x)) : x \geq 1, x \neq x_c\}$ . Por lo tanto, se sigue del teorema de función implícita que para una vecindad abierta  $V \subset U$  de  $G$  en  $\Omega_c$ ,  $z_0(x)$  admite una única continuación analítica  $z(x)$  cuyo gráfica vive en  $V$  y tal que  $F_\mu(x, z(x)) = f_\infty^2$  para todo  $(x, z(x)) \in V$ .

Queda por demostrar que  $z(x)$  puede extenderse además hasta una vecindad de  $x = \infty$  y una vecindad de un abierto del punto crítico. Para el primer caso, introducimos una variable nueva  $y := 1/x$  y reescribimos (G.3) como

$$\tilde{F}_\mu(y, z) := F_\mu\left(\frac{1}{y}, z\right) = f(z)^2 \left[ 1 - y + \frac{\mu^2}{z^2} y^4 \right] = f_\infty^2.$$

La función  $\tilde{F}_\mu$  es analítica en el dominio  $y \in \mathbb{C}$ ,  $\text{Re}(z) > 0$ , y satisface  $\tilde{F}_\mu(0, z_\infty) = f_\infty^2$  y

$$\frac{\partial \tilde{F}_\mu}{\partial z}(0, z_\infty) = \frac{2f_\infty^2}{z_\infty} \nu(z_\infty)^2 \neq 0.$$

Por consiguiente, se deduce del teorema de función implícita que existe una vecindad abierta  $\tilde{V}$  de  $(0, z_\infty)$  y una única función  $\tilde{z}(y)$  cuya gráfica este contenida en  $\tilde{V}$  tal que  $\tilde{z}(0) = z_\infty$  y  $\tilde{F}_\mu(y, \tilde{z}(y)) = f_\infty^2$  para todo  $(y, \tilde{z}(y)) \in \tilde{V}$ . Por unicidad de la continuación analítica,  $z(x) = \tilde{z}(1/x)$  para un  $|x|$  suficientemente grande, la cual prueba que la extensión analítica de  $z(x)$  existe para un  $|x|$  suficientemente grande. Además,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ \text{Re}(x) > 0}} z(x) = \lim_{y \rightarrow 0} \tilde{z}(y) = z_\infty.$$

A continuación, analizamos la continuación analítica de  $z_0(x)$  en una vecindad abierta del punto crítico  $x = x_c$ . Para esto, primero notamos que en una vecindad del punto crítico  $(x_c, z_c = z_0(x_c))$  la función  $F_\mu$  tiene la representación de Taylor

$$F_\mu(x_c + \xi, z_c + \zeta) = F_\mu(x_c, z_c) + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x^2}(x_c, z_c) \xi^2 + 2 \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x \partial z}(x_c, z_c) \xi \zeta + \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial z^2}(x_c, z_c) \zeta^2 \right] + R_3(\xi, \zeta),$$

donde el término de error  $R_3(\xi, \zeta)$  es al menos cúbico en  $(\xi, \zeta)$ . Sea  $z'_c \in \mathbb{R}$  una de las dos raíces del polinomio de segundo grado y

$$\frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x^2}(x_c, z_c) + 2 \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x \partial z}(x_c, z_c) z'_c + \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial z^2}(x_c, z_c) (z'_c)^2 = 0,$$

e introduciendo la función

$$H_\mu(\xi, \eta) := \begin{cases} \frac{1}{\xi^2} [F(x_c + \xi, z_c + z'_c \xi \eta) - F(x_c, z_c)] & \text{para } \xi \neq 0, \\ \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x^2}(x_c, z_c) + 2 \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x \partial z}(x_c, z_c) z'_c \eta + \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial z^2}(x_c, z_c) (z'_c)^2 \eta^2 \right] & \text{para } \xi = 0. \end{cases}$$

Entonces,  $H_\mu$  es analítica en una vecindad abierta de  $(\xi, \eta) = (0, 1)$  en  $\mathbb{C}^2$ , satisfaciendo  $H_\mu(0, 1) = 0$  y

$$\frac{\partial H_\mu}{\partial \eta}(0, 1) = \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x \partial z}(x_c, z_c) z'_c + \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial z^2}(x_c, z_c) (z'_c)^2 = \mp 3 \frac{h_c^2}{x_c^3} \frac{\sqrt{1 + 3(\nu_c^2 - W_c)}}{2 \pm \sqrt{1 + 3(\nu_c^2 - W_c)}} \neq 0.$$

Por lo tanto, usando de nuevo el teorema de función implícita, se sigue la existencia de una vecindad abierta  $Z$  de  $(0, 1)$  en  $\mathbb{C}^2$  y una única función analítica  $\eta(\xi)$  cuya gráfica este contenida en  $Z$  tal que  $\eta(0) = 1$  y  $H_\mu(\xi, \eta(\xi)) = 0$  para todo  $(\xi, \eta(\xi)) \in Z$ . Por construcción  $z(x) := z_c + z'_c(x - x_c)\eta(x - x_c)$  es analítica y satisface  $F_\mu(x, z(x)) = F(x_c, z_c) = f_\infty^2$ . Esto demuestra la existencia de la continuación analítica de  $z(x)$  en una vecindad del punto crítico.

Con este resultado, se sigue directamente de (6.10, 6.11, 6.12) que las funciones  $\mathcal{N}(r)$  y  $V_\ell(r)$  tienen una continuación analítica para  $r$  compleja, y estas continuaciones satisfacen la ecuación (G.1).



# Bibliografía

- [1] S.L. Shapiro and S.A. Teukolsky. *Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars*. John Wiley & Sons, New York, 1983.
- [2] Event horizon telescope, <http://www.eventhorizontelescope.org>.
- [3] S. Doeleman and et al. Event-horizon-scale structure in the supermassive black hole candidate at the galactic centre. *Nature*, 455:78, 2008.
- [4] A.E. Broderick, T. Johannsen, A. Loeb, and D. Psaltis. Testing the no-hair theorem with event horizon telescope observations of Sagittarius A\*. *Astrophys. J.*, 784:7, 2014.
- [5] H. Bondi. On spherically symmetrical accretion. *Monthly Notices Roy Astronom. Soc.*, 112:195–204, 1952.
- [6] F.C. Michel. Accretion of matter by condensed objects. *Astrophysics and Space Science*, 15:153–160, 1972.
- [7] V. Moncrief. Stability of stationary, spherical accretion onto a Schwarzschild black hole. *Astrophys. J.*, 235:1038–1046, 1980.
- [8] W.G. Unruh. Experimental black hole evaporation. *Phys. Rev. Lett.*, 46:1351–1353, 1981.
- [9] S. Weinberg. *Gravitación and cosmology*. John Wiley & Sons, New York, 1972.
- [10] K. Huang. *Statistical Mechanics*. John Wiley-Sons, Inc., 1987.
- [11] M. Heusler. *Black Hole Uniqueness Theorems*. Cambridge University Press, Cambridge, England, 1996.
- [12] E. Chaverra, Patryk Mach, and O. Sarbach. *In preparation*, 2015.
- [13] E.N. Parker. Dynamical properties of stellar coronas and stellar winds. IV. The separate existence of subsonic and supersonic solutions. *Astrophys. J.*, 141:1463–1478, 1965.
- [14] E. Chaverra and O. Sarbach. Polytropic spherical accretion flows on Schwarzschild black holes. *AIP Conf.Proc.*, 1473:54–58, 2012.

- [15] E. Malec. Fluid accretion onto a spherical black hole: Relativistic description versus Bondi model. *Phys. Rev. D*, 60:104043, 1999.
- [16] E. Chaverra. *Accretion of Matter in Spherical Symmetry (Master Thesis)*. UMSNH, Mexico, 2011.
- [17] P. Hartman. *Ordinary Differential Equations (2nd ed.)*. SIAM Classics in Applied Mathematics 38, Philadelphia, 2002.
- [18] L. Perko. *Differential Equations and Dynamical Systems (3rd ed.)*. Springer-Verlag, New York, 2001.
- [19] P. Mach, E. Malec, and J. Karkowski. Spherical steady accretion flows: Dependence on the cosmological constant, exact isothermal solutions, and applications to cosmology. *Phys.Rev. D*, 88:084056, 2013.
- [20] P. Mach. Homoclinic accretion solutions in the Schwarzschild-anti-de Sitter spacetime. *Phys. Rev. D*, 91:084016, 2015.
- [21] E. Berti, V. Cardoso, and A.O. Starinets. Quasinormal modes of black holes and black branes. *Class. Quantum Grav.*, 26:163001, 2009.
- [22] K.D. Kokkotas and B.G. Schmidt. Quasi-normal modes of stars and black holes. *Living Reviews in Relativity*, 2(2), 1999.
- [23] H.-P. Nollert. TOPICAL REVIEW: Quasinormal modes: the characteristic ‘sound’ of black holes and neutron stars. *Class. Quantum Grav.*, 16:R159–R216, 1999.
- [24] A. Zimmerman, H. Yang, Z. Mark, Y. Chen, and L. Lehner. Quasinormal modes beyond Kerr. *Astrophys. Space Sci. Proc.*, 40:217, 2015.
- [25] N. Andersson and C.J. Howls. The asymptotic quasinormal mode spectrum of nonrotating black holes. *Class. Quantum Grav.*, 21:1623–1642, 2004.
- [26] E. W. Leaver. An analytic representation for the quasi-normal modes of Kerr black holes. *Proc. R. Soc Lond. A*, 402:285–29, 1985.
- [27] S.R. Dolan, L.A. Oliveira, and Luis L.C.B. Crispino. Quasinormal modes and regge poles of the canonical acoustic hole. *Phys.Rev.*, D82:084037, 2010.
- [28] M. Reed and B. Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. III: Scattering Theory*. Academic Press, San Diego, 1979.
- [29] On the lambert w function. *Advances in Comp. Math*, 5:329-359., page 39, 1996.
- [30] E. Chaverra, N. Ortiz, and O. Sarbach. Linear perturbations of self-gravitating spherically symmetric configurations. *Phys. Rev. D.*, 87:044015–(1–24), 2013.

- [31] E. Chaverra and O. Sarbach. *In preparation*, 2015.
- [32] H.-P. Nollert and B.G. Schmidt. Quasinormal modes of Schwarzschild black holes: Defined and calculated via laplace transformation. *Phys. Rev. D*, 45:2617–2627, 1992.
- [33] A. Bachelot and A. Motet-Bachelot. Les résonances d'un trou noir de Schwarzschild. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, 59:3–68, 1993.
- [34] R.G. Newton. Analytic properties of radial wave functions. *J. Math. Phys.*, 1:319–347, 1960.
- [35] B.P. Jensen and P. Candelas. The Schwarzschild radial functions. *Phys. Rev. D*, 33:1590–1595, 1986.
- [36] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Watterling, and B. P. Flannery. *Numerical Recipes in Fortran*. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- [37] R.M. Wald. *General Relativity*. The University of Chicago Press, Chicago, London, 1984.
- [38] E. Chaverra, M.D. Morales, and O. Sarbach. Quasi-normal acoustic oscillations in the Michel flow. *Phys. Rev. D*, 91:104012, 2015.
- [39] V. Cardoso, A.S. Miranda, E. Berti, H. Witek, and V. Zanchin. Geodesic stability, Lyapunov exponents and quasinormal modes. *Phys. Rev. D*, 79:064016, 2009.
- [40] E. Chaverra and O. Sarbach. Radial accretion flows on static, spherically symmetric black holes. *Class. Quantum Grav.*, 32:155006, 2015.
- [41] J.C. Degollado, V. Gualajara, C. Moreno, and D. Núñez. Electromagnetic partner of the gravitational signal during accretion onto black holes. *Gen.Rel.Grav.*, 46(11):1819, 2014.
- [42] T. Regge and J. Wheeler. Stability of a Schwarzschild singularity. *Phys. Rev.*, 108:1063–1069, 1957.
- [43] R.J. Kooman and R. Tijdeman. Convergence properties of linear recurrence sequences. 1990.
- [44] Tom M. Apostol. *Calculus: One-Variable Calculus, with an Introduction to Linear Algebra*. John Wiley-Sons, Inc., New York, 1967.
- [45] W. Gautschi. Computational aspects of three-term recurrence relation. *SIAM*, 9,No.1, 1967.
- [46] W. A. Strauss. *Partial Differential Equations, an introduction*. John Wiley-Sons, Inc., 1992.
- [47] V. P. Maslov. *Mathematical Notes, Vol. 78, No. 6, 2005, pp 827-840*. Springer, 2005.