UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
Y
UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO
INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS.

POSGRADO CONJUNTO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
UNAM-UMSNH

Aplicaciones de Combinatoria Infinita a Espacios de Banach.

TESIS

Que para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas
Presenta:

EDUARDO ABDÓN CALDERÓN GARCÍA

Director: Dr. Salvador García Ferreira

MORELIA, MICHOACÁN - MAYO DE 2016.

Índice general

Agradecimientos

A mi familia y amigos por apoyarme.

A CONACyT por el apoyo financiero para mis estudios de doctorado.

Al Dr. Salvador García Ferreira por su ayuda durante estos cuatro años.

RESUMEN

Esta tesis se divide en dos partes:

La primera es la solución a una pregunta del área sobre la posibilidad de la construcción de un espacio de Banach cuya estructura asintótica no contenga ningún espacio hereditariamente bloque homogéneo. Para lograr esto se introduce el concepto de modelos asintóticos de orden alto como herramienta principal para obtener la solución.

La segunda parte se concentra en la construcción y estudio de un espacio de Banach con norma implícitamente definida con un único modelo spreading, el cual es isomorfo al espacio de Banach de las sucesiones acotadas de números reales cuyas entradas tienden a cero.

[1]

[1]Banach, asintoticidad, distorsión, normas, recursividad.

ABSTRACT

This Thesis is divided in two parts:

The first is the solution of a question in the field which refers to the possibility of constructing a Banach space whose asymptotic structure doesn't contain any of space hereditarily block homogeneous. In order to do this the concept of an asymptotic model of high order is introduced as the main tool to obtain the solution.

The second part focuses in the construction and study of a Banach space with implicitly defined norm with a single spreading model, which is isomorphic to the Banach space of bounded sequences of real number whose entries tend to zero.

INTRODUCCIÓN

En el estudio de los espacios de Banach los espacios ℓ_p para $1 \leq p \leq \infty$ y c_0 han jugado siempre un papel principal tanto por la simplicidad de su definición como por la íntima relación que mantienen con el resto de estos espacios, un ejemplo claro de esta sería el célebre resultado de J.L. Krivine [**23**] sobre la representabilidad finita de alguno de estos en cualquier espacio sucesión básica, en particular, dentro de cualquier espacio de Banach. En este contexto la siguiente pregunta tuvo particular importancia:

Pregunta 0.1. *Dado un espacio de Banach X, ¿Es posible encontrar un subespacio de Banach Y de X, tal que este sea isomorfo o a ℓ_p para $1 \leq p < \infty$ o a c_0?*

Esta fue formulada explícitamente en Lindenstrauss [**24**], Milman [**30**] y en la última página del artículo [**25**]. Lindenstrauss y Tzafriri [**26**], p. 95, la describen como "a long standing open problem going back to Banach's book" [**8**], aunque en este solo es posible encontrar preguntas relacionadas pero no idénticas.

La respuesta a esta pregunta fue dada, de manera negativa, por Tsirelson [**40**], en el año 1974, quien diseño una nueva técnica de construcción de espacios de Banach con propiedades no clásicas. Ese mismo año, Figiel y Johnson (1974) en [**17**] publicaron una artículo donde usaron la notación T para el espacio dual al de Tsirelson y demostraron que ese espacio es también un contraejemplo de esta pregunta dando una descripción analítica de la norma en este. Estos ejemplos y algunas generalizaciones se pueden encontrar, por ejemplo, en [**13**]. Hoy en día, la letra T es la notación estándar para el dual del espacio original, mientras que el espacio original se denota por T^*. Ambos espacios son ahora conocidos y ampliamente estudiados.

La ingeniosa nueva construcción de Tsirelson ha sido la base de varios nuevos avances en la teoría de Espacios de Banach tales como: El espacio arbitrariamente distorsionable de T. Schlumprecht en [**39**], que a su vez se encuentra como punto inicial tanto de la solución del "distortion problem" dada por E. Odell y T. Schlumprecht en [**32**], como en la solución debida a W. T. Gowers y T. Maurey al problema "unconditional basic sequence problem" [**19**] y cuya construcción motiva parcialmente la solución, también de W. T. Gowers, del "Banach's Hyperplane Problem" [**18**].

Además de esto, varios resultados de S.A. Argyros et al. están basados en refinamientos ordinales de la construcción de Tsirelson, culminando en la solución de este junto con R.G. Haydon del “scalar plus compact problem” [**4**].

Por otro lado versiones mas débiles de la pregunta 0.1, fundamentadas en el Teorema de Brunel-Sucheston [**11**], han sido estudiadas tanto por L. Halbeisen y E. Odell en [**20**] como por S. A. Argyros, V. Kanellopoulos y K. Tyros en [**5**]. El Teorema de Brunel-Sucheston es una muy conocida aplicación del Teorema de Ramsey a la teoría de espacios de Banach. A grandes rasgos, dice que toda sucesión básica normalizada dentro de un espacio de Banach tiene una subsucesión “asintóticamente” subsimétrica que, de hecho, produce lo que ahora se conoce como un spreading model. Estos son sucesiones básicas en, posiblemente, otro espacio de Banach que mantienen una estrecha relación con la sucesión inicial a través de la cual son construidos. Una de las propiedades mas importantes de estos es que son finitamente bloque representables en la sucesion inicial y, de hecho, es a través de ellos que se obtiene el resultado de J.L. Krivine previamente mencionado.

Estudiaremos la construcción de modelos del tipo asintótico, como los modelos spreading, pero con propiedades de convergencia distintas. Una de estas generalizaciones son los modelos asintóticos. Estos modelos fueron introducidos en [**20**] para producir una extensión de los modelos spreading con la característica extra de que todas las sucesiones bloque de un modelo asintótico generado por una matriz dentro de un espacio X son también generadas por alguna matriz como modelos asintóticos del mismo espacio. Esto, junto con el Teorema de Zippin [**41**], les permitió a los autores demostrar que si todas las matrices bloque dentro de un espacio de Banach generan un único modelo asintótico hasta equivalencia, entonces ese único modelo asintótico debe forzosamente ser un ℓ_p. La pregunta análoga para el caso de modelos spreading permanece abierta y es objeto de investigación en el área, dada su cercanía a una pregunta de H. P. Rosenthal [**15**]. Estos modelos asintóticos serán de importancia primordial en la primera parte de ésta tesis al juntarlos con un proceso introducido en [**6**] que considera un tipo de convergencia diferente, relacionado con el proceso iterado de obtener modelos spreading de subsucesiones bloque de un modelo spreading previamente obtenido, a los cuales se les conoce como “modelos spreading de orden alto”. En el segundo capítulo seguimos esta idea iterativa en el contexto de modelos asintóticos para introducir el concepto de “modelo asintótico de orden alto” y extendemos algunos resultados conocidos del caso spreading. En particular se resolverá en este capítulo un caso particular, el caso en el que cada elemento de la cadena es un modelo asintótico bloque de su respectivo espacio, de la siguiente pregunta del artículo [**20**]:

Pregunta 0.2. *Dado un espacio de Banach X, existe una cadena finita de modelos asintóticos $X = X_0, X_1, \cdots, X_n$, tal que X_{i+1} es un modelo asintótico de X_i, para cada $i = 0, \cdots, n$, y X_n es isomorfo a c_0 o ℓ_p para algún $1 \leq p < \infty$?*

En la tercera parte de esta tesis se estudia una nueva forma de definir espacios de Banach con una variación nueva del proceso de Tsirelson, produciendo espacios de Banach con propiedades interesantes que difieren a las conocidas tradicionalmente de este tipo de espacios y que están relacionadas íntimamente con preguntas abiertas importantes dentro del área. Para ahondar en el interés sobre ésta construcción es necesario considerar la siguiente pregunta:

Pregunta 0.3. *Sea $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión básica tal que es toda subsucesión bloque $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ contiene una subsucesión $(y_i)_{i\in M}$ de tal manera que $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ y $(y_i)_{i\in M}$ son equivalentes. ¿Es $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ equivalente a c_0 o a ℓ_p para algún $p \in [1,\infty)$?*

A una base que satisface la condición de ésta pregunta se le conoce como una "Base de Rosenthal". De tener una solución afirmativa proporcionaría una versión más fuerte del Teorema de Zippin arriba mencionado. Una debilitación aún mayor de éste teorema es la siguiente conocida pregunta sobre modelos spreading:

Pregunta 0.4. *Sea $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión básica tal que todos los spreading models generados por una subsucesión bloque $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ son equivalentes. ¿Es ese único spreading model equivalente a c_0 o a ℓ_p para algún $p \in [1,\infty)$?*

Se sabe que la respuesta positiva si todos los modelos spreading son uniformemente equivalentes. También es postitiva si la sucesión tiene la propiedad de ser subbloque-homogéneo o si el número 1 se encuentra en su conjunto de Krivine. El espacio dual al espacio de Tsirelson (y la simetrización de éste) son ejemplos importantes de espacios de Banach sin ninguna de éstas propiedades. La norma introducida en el capítulo tres intenta presentar un espacio similar, posiblemente equivalente, definido por un conjunto normante recursivo. La expectativa siendo que el control extra sobre la construcción de un espacio que aporta tener una norma definida implícitamente permita ahondar en la investigación de estos y apoyar en la resolución de la pregunta anterior.

Para el entendimiento de estos conceptos y construcciones el estudio de los libros "Ramsey Methods in Analysis" [**7**] y "Teoría de Ramsey y Espacios de Banach" [**14**] fue fundamental. En estos se manejan tanto las bases para la construcción de normas en el espacio vectorial c_{00}, usando familias de conjuntos finitos de $\mathbb{N}$, como un gran número de aplicaciones de la teoría de barreras y frentes de Nash-Williams a los espacios de Banach.

Los resultados obtenidos en esta tesis motivaron nuevos proyectos de investigación a los que estoy actualmente dedicado pero por los tiempos no ha sido posible más que comentar brevemente al final de este trabajo, de estas sobresale la posible aplicación de las herramientas desarrolladas en el último capítulo a espacios tipo Tsirelson más complejos que el presentado y una investigación más profunda sobre la relación de este con el espacio dual del espacio de Tsirelson.

Capítulo 1

Preliminares

El símbolo FIN denotará la familia de todos los subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$. Cuando N sea un subconjunto infinito de los números naturales, denotaremos $[N]^\infty$ al conjunto de todos los subconjuntos infinitos de N. Para especificar los elementos de un $s \in FIN$ escribiremos $s = \{s(1), \cdots, s(|s|)\}$ y, en esta notación, asumiremos siempre que $s(1) < s(2) < \cdots . < s(|s|)$. Si $s, t \in FIN$ diremos que "s es menor que t", escrito $s < t$ cuando $\max supp(s) < \min supp(t)$, (es decir, $s(|s|) < t(1)$). En el caso que $s = \{n\}$ escribiremos simplemente $n < t$. Además $s \sqsubseteq t$ significará que s es un segmento inicial de t, y cuando $s < t$ denotaremos por $s^\frown t = s \cup t$. Si $s \in FIN$ y $A \in [\mathbb{N}]^\infty$, $s \sqsubseteq A$ también significará que s es un segmento inicial de A. Si $A \in [\mathbb{N}]^\infty$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces $A/n = \{m \in A : n < m\}$. Denotamos por $\mathcal{F} \subset FIN$, $\mathcal{F}/k = \{s \in \mathcal{F} : \min(s) > k\}$. Si $\mathcal{F} \subseteq FIN$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces $\mathcal{F}_{\{n\}} = \{s \in FIN : n < s$ and $\{n\}^\frown s \in \mathcal{F}\}$. Si $N \in [\mathbb{N}]^\infty$, entonces $\{n_1, n_2, \cdots .\}$ será la enumeración creciente del subconjunto N. Dado un $\mathcal{F} \subseteq FIN$ y un conjunto infinito $M \subseteq \mathbb{N}$, $\mathcal{F} \restriction_M$ denota el conjunto $\{s \in \mathcal{F} : s \subseteq M\}$.

Nuestros espacios de Banach serán siempre separables, infinito dimensionales y reales. La esfera de un espacio de Banach X se denotará por $S(X)$ y a su bola unitaria por $B_1(X)$. El espacio dual de un espacio de Banach X se escribirá X^*. En caso que varios espacios de Banach estén involucrados en un mismo argumento, para especificar la norma de cada espacio escribiremos $\|\cdot\|_X$. Todos los espacios de Banach que tendremos en cuenta tendrán una base de Schauder. Así, por conveniencia, identificaremos un espacio de Banach X con su base de Schauder $(e_n^X)_{n\in\mathbb{N}}$. Si $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es base de Schauder para X, entonces $e_i^*(\sum_{n=1}^\infty a_n e_n) = a_i$ es un funcional lineal continuo en X y $\{(e_n, e_n^*)\}_{n\in\mathbb{N}}$ un sistema biortogonal. Para X un espacio de Banach y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X, la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ será llamada *normalizada* si $\|x_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

1. Bases de Schauder

Una base de Schauder es un concepto similar al usual de base (de Hamel) de un espacio de vectorial; la diferencia es que la base de Hamel usa combinaciones lineales finitas, mientras que las bases de Schauder permiten sumas infinitas mientras éstas converjan dentro de la topología del espacio. Esto ha hecho a las bases de Schauder mas utilizadas en el análisis de espacios vectoriales topológicos incluyendo a los espacios de Banach. Estas fueron introducidas en 1927 por J. Schauder, aunque ejemplos de estas bases fueron discutidos previamente, por ejemplo, la base de Haar fue encontrada en 1909, y G. Faber presentó en 1910 una base para las funciones continuas en el intervalo unitario, a veces llamada el sistema de Faber-Schauder. La definición formal de estas es la siguiente:

Definición 1.1. Dado un espacio de Banach X, una sucesión de vectores $(e_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq X$ se llama una **base de Schauder** si para todo elemento x dentro de X se tiene que existe una única sucesión de números reales $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tales que:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i = x.$$

El siguiente teorema es un resultado clásico que nos da una caracterización útil de las bases de Schauder.

Teorema 1.2. *Dada una sucesión $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en un espacio de Banach X, las siguientes dos propiedades son equivalentes:*

1. *El subespacio generado por $\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$ es denso en X.*
2. *Existe un $C \in \mathbb{R}$ tal que:*

$$\|\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\| \leq C \|\sum_{i=1}^{m} a_i e_i\|$$

para todo $n \leq m$ y $(a_i)_{i=1}^m \in [-1, 1]^m$.

De esto se sigue que cualquier sucesión de vectores que cumple la propiedad (2) es base de Schauder de la cerradura de su espacio generado, nos referiremos a sucesiones que cumplen ésta propiedad como **sucesiones C-básicas**, y simplmente por **sucesiones básicas** cuando cumplan la propiedad (2) para algún $C \in \mathbb{R}$. Al ínfimo de las constantes C que cumplan la propiedad (2) se le conoce como la **constante de base** de la sucesión y se le denotará como $bc(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Propiedades más fuertes que la propiedad (2) definen tipos más específicos de bases de Schauder dentro de las que sobresale por su utilidad el presentado en la siguiente definición.

Definición 1.3. Dada una sucesión $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en un espacio de Banach X. Decimos que $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una base de Schauder C-incondicional si

$$\|\sum_{i\in s} a_i e_i\| \leq C \|\sum_{i\in t} a_i e_i\|$$

para todo $s \subseteq t \in FIN$ y $(a_i)_{i=1}^m \in [-1, 1]^m$.

A continuación, enunciamos unos ejemplos clásicos de bases de Schauder.

Ejemplo 1.4.

- *Dado $p \in [1, \infty)$, consideramos el espacio de Banach $\ell_p = \{x = (x_i)_{i=1}^{\infty} : \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty\}$ con la norma*
$$\|x\|_p = (\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}.$$
Para cada $i \in \mathbb{N}$ definimos el vector e_i dado por la función característica del conjunto $\{i\}$. Sabemos que $(e_i)_{i=1}^{\infty}$ es una base de Schauder con constante de base uno.

- *El espacio de Banach $c_0 = \{(x_i)_{i=1}^{\infty} : sup\{|x_i| : i \in \mathbb{N}\} < \infty\}$ con la norma*
$$\|x\|_\infty = sup\{|x_i| : i \in \mathbb{N}\}.$$
Es también conocido que $(e_i)_{i=1}^{\infty}$ es una base de Schauder con constante de base uno.

No es difícil ver que todo espacio de Banach con base de Schauder debe ser forzosamente separable, sin embargo, que no todo espacio de Banach posee una base de Schauder fue demostrado por Enflo, el lector puede enconntrar una excelente descripción de éste ejemplo en [**36**].

En el contexto de sucesiones básicas la siguiente definición es de suma importancia.

Definición 1.5. Sean $(X, \|\cdot\|_X)$ y $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espacios de Banach, $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ una sucesión básica en X y $(y_i)_{i=1}^{\infty}$ una sucesión básica en Y . Diremos que $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ y $(y_i)_{i=1}^{\infty}$ son K-equivalentes si
$$\frac{1}{K}\|\sum_{i=1}^{N} a_i y_i\|_Y \leq \|\sum_{i=1}^{N} a_i x_i\|_X \leq K\|\sum_{i=1}^{N} a_i y_i\|_Y,$$
para toda sucesión $(a_i) \in [-1, 1]^N$ y toda $N \in \mathbb{N}$.

Notemos que en la definición anterior ambas sucesiones generarían espacios isomorfos como espacios de Banach pero que la equivalencia entre las bases es una propiedad más fuerte. Dado un vector dentro de un espacio de Banach con base de Schauder es natural asignar a este, el conjunto de índices con coeficiente no cero de su única representación en esta base. Esto nos ayudará además a presentar una cierta clase de sucesiones que juega un papel principal en el estudio de este tipo de bases. Este es el contenido de las siguientes definiciones.

Definición 1.6. Dado un espacio de Banach X con base de Schauder $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ y un vector $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i$ dentro de este, el **soporte** de x (con respecto a la base $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$) es el conjunto:
$$supp(x) := \{i \in \mathbb{N} : a_i \neq 0\}.$$

DEFINICIÓN 1.7. Una sucesión de vectores $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ se denomina una **subsucesión bloque** de $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ si se tiene:

1. Para cada $i \in \mathbb{N}$, x_i tiene soporte finito.
2. Dados $i \leq j \in \mathbb{N}$, se tiene que $supp(x_i) < supp(x_j)$.

La utilidad de estos conceptos se puede ver ejemplificada dentro de los siguientes dos teoremas que nos permiten en cierto sentido restringirnos al estudio de espacios generados por subsucesiones bloque. El primero nos dice que, aunque no todo espacio de Banach posee una base de Schauder, siempre es posible encontrar una sucesión básica de vectores dentro de cualquier espacio de Banach.

TEOREMA 1.8 (Banach, Mazur). *Sea X espacio de Banach, entonces existe $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq X$ sucesión básica.*

TEOREMA 1.9 (Bessaga, Pelscynski). *Sea X un espacio de Banach con base de Schauder $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ y $Y \subseteq X$ un subespacio de Banach. Entonces, para todo $\epsilon > 0$ existen $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Y$ y $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ subsucesión bloque de $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tal que:*

$$\frac{1}{1+\epsilon}\|\sum_{i=1}^{N} a_i x_i\| \leq \|\sum_{i=1}^{N} a_i y_i\| \leq (1+\epsilon)\|\sum_{i=1}^{N} a_i x_i\|, \tag{1.1}$$

para toda sucesión $(a_i) \in [-1,1]^N$ y toda $N \in \mathbb{N}$. Es decir, tal que ambas sucesiones son $(1+\epsilon)$-equivalentes.

Esto nos dice que dentro del contexto de propiedades que se respeten de manera "hereditaria", es decir, propiedades que una vez que se cumplen para un espacio se cumplen automáticamente para todos sus subespacios. Por lo que en la construcción de espacios de Banach con propiedades de ésta índole siempre es posible restringirnos, primero a espacios con bases de Schauder y después al estudio de sus subespacios generados por subsucesiones bloque. Un ejemplo de este tipo de propiedad es, por ejemplo, ser un espacio Hereditaria Indescomponible [**19**] o contener un subespacio isomorfo a algún espacio de Banach ℓ_p para $1 \leq p \leq \infty$ o c_0.

2. Conjuntos Normantes y Barreras

En esta sección definimos el concepto de conjunto normante, así como el concepto de barrera, ambos útiles en la construcción de espacios de Banach con propiedades buscadas. Además, presentamos breves ejemplos de estos conceptos que testifican la importancia que han tenido en la teoría de espacios de Banach.

Definición 1.10. Dado un espacio de Banach X con norma $\|\cdot\|_X$, un **conjunto normante** F es un subconjunto de $B_1(X^*)$, de tal manera que

$$\|x\|_X = sup\{f(x) : f \in F\}$$

para cada $x \in X$.

Como conjunto base para la construcción de espacios de Banach es necesario tomar el conocido espacio vectorial de la siguiente definición.

Definición 1.11. Denotaremos por c_{00} a la familia de sucesiones de elementos de $\mathbb{R}$ con soporte finito.

En general lo que se intenta es definir un subconjunto de este espacio, el conjunto normante, construido de alguna manera ventajosa. Estos vectores son posteriormente vistos como funcionales sobre el mismo c_{00} usando el producto punto, lo cual nos permite definir una norma. El espacio normado resultante es luego completado a un espacio de Banach que usualemente tiene la característica de tener como base de Schauder la base canónica de c_{00}. Todo esto será aclarado y discutido a profundidad en los párrafos siguientes.

Aunque no es difícil ver que todo espacio de Banach con base de Schauder es isométrico a la completación de alguna norma definida sobre el espacio vectorial c_{00}, añadimos una demostración sencilla.

Proposición 1.12. *Sea X un espacio de Banach con base de Schauder. Entonces existe una norma* $|||\cdot|||$ *en* c_{00}*, de tal manera que la completación del espacio* $(c_{00}, |||\cdot|||)$ *es isométricamente isomorfo a* $(X, \|\cdot\|_X)$*. De hecho, la base canónica de* c_{00} *es base de Schauder de esta completación.*

Demostración. Denotamos por $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ a la base de Schauder de X y por $(e_i)_{i=1}^{\infty}$ a la base canónica de c_{00}. La norma $|||\cdot|||$ se define de la siguiente manera:

$$|||\sum_{i=1}^{n} a_i e_i||| = \|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\|_X$$

para cada elemento $\sum_{i=1}^{n} a_i e_i \in c_{00}$. Usando el Teorema 1.2 es fácil ver que la base canónica de c_{00} es una base de Schauder de la completación $\overline{c_{00}}$. Notemos ahora que $\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i$ converge en $\overline{c_{00}}$ si y sólo si $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ converge en X. Juntando este hecho con la siguiente serie de igualdades

$$|||\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i||| = lim_{n\to\infty}|||\sum_{i=1}^{n} a_i e_i||| = lim_{n\to\infty}\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\|_X = \|\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\|,$$

se sigue la isometría. ❑

Dado que uno de nuestros objetivos principales es la construcción de normas dentro de c_{00} es necesario introducir algunos conceptos y técnicas para definir normas con propiedades determinadas. Empezamos por recordar el siguiente concepto básico que nos será de gran utilidad.

Definición 1.13. El **producto punto** es de dos elementos $x, y \in c_{00}$ es el número $< x, y >= \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$. Notemos que con este producto cada elemento $f \in c_{00}$ nos da una funcional definida precisamente como

$$< f, \_ >: c_{00} \to \mathbb{R}$$
$$x \to < f, x > .$$

Por este motivo tomaremos la convención de denotar a los elementos de c_{00} con letras como f, g, etc. cuando los vemos como funcionales y por letras como x, y, etc. cuando los veamos como vectores. Adicionalmente denotaremos $\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$ como la base canónica de c_{00} vistos estos como vectores y por $\{e_i^* : i \in \mathbb{N}\}$ a la misma base vista como los respectivos funcionales.

Una forma usual de definir normas en c_{00} es elegir $W \subseteq c_{00}$ (o, posiblemente, en ℓ_∞) tal que $G_0 = \{\pm e_i^* : i \in \mathbb{N}\} \subseteq W$, y considerar:

$$\|x\|_W = sup\{< f, x >: f \in W\},$$

para todo $x \in c_{00}$. Finalmente denotamos por X_W a la completación de c_{00} con esta norma. Al conjunto W le llamaremos, claro está, el **conjunto normante** de X_W o simplemente el conjunto normante cuando sea claro el espacio de Banach en cuestión. Hay una forma sencilla de describir éste tipo de completaciones siempre que la norma inicial tenga una propiedad adicional.

Teorema 1.14. *Sea $\|\cdot\|$ una norma definida en c_{00} tal que la base canónica es C-básica para algún $C \in \mathbb{R}$. Entonces la completación de $(c_{00}, \|\cdot\|)$ es el espacio*

$$\{(a_i)_{i=1}^{\infty} : (\sum_{i=1}^{n} a_i e_i)_{n=1}^{\infty} \text{ es una sucesión de Cauchy}\},$$

con la norma dada por

$$\|(a_i)_{i=1}^{\infty}\| = \text{lím sup}\left\{\|\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\| : n \in \mathbb{N}\right\}$$

Demostración. Se sigue directamente del Teorema 1.2. ❑

Es necesario pedir que la base canónica sea C-básica en el teorema anterior, un contraejemplo para este teorema con una norma que no cumple ésta propiedad se puede obtener con el siguiente conjunto normante:

$$W = \{\sum_{i=1}^{\infty} e_i^*\} \cup \{e_i^* : 2 \leq i \in \mathbb{N}\}.$$

A continuación mostramos una ejemplos simples de espacios de Banach que se pueden obtener de ésta manera con su respectivo conjunto normante. Estos ejemplos nos permiten incluir espacios clásicos dentro de éste mismo marco teórico.

Ejemplo 1.15.

- *Si $W = G_0$, entonces el espacio X_W es isométrico a c_0.*
- *Si $W = \{\sum_{i\in s} \pm e_i^* \ : s \in FIN\}$, entonces X_W es isométrico a ℓ_1.*
- *Si $W = \{\sum_{i=n}^{\infty} e_i^* \ : n \in \mathbb{N}\}$, entonces X_W es, nuevamente, c_0 con la diferencia que la base canónica de X_W, $\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$, representa ahora la base sumante de c_0.*

Para mostrar ejemplos más complicados será útil tener en cuenta el siguiente comentario. Dado $s \in FIN$ es posible asignarle el siguiente conjunto de funcionales:

$$\{\sum_{i\in s} \pm e_i^*\}.$$

Así, el primer conjunto normante en los ejemplos previos se vuelve la unión de la familia de todos estos conjuntos para los conjuntos de cardinalidad uno, y el segundo conjunto la misma unión considerando todo elemento de FIN. Esta intuición se mantiene dentro de la teoría, sólo que tomando como base el conjunto de todos los arboles con hojas en G_0, donde estos ejemplos previos se vuelven simplemente arboles de altura cero y altura (uniforme) uno, respectivamente. Para avanzar en ésta dirección los conceptos presentados en la siguiente sección son esenciales.

3. Subconjuntos de FIN

Definición 1.16. Sea $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subseteq FIN$.

- $\mathcal{B}$ es llamada *thin* si $s \not\sqsubseteq t$ para distintos elementos $s, t \in \mathcal{B}$.
- $\mathcal{B}$ es llamada *barrera* si:
  - Para cada $M \subseteq \mathbb{N}$ subconjunto infinito, existe un $s \in \mathcal{B}$ tal que $s \sqsubseteq M$.
  - Para cada $s, t \in \mathcal{B}$ si $t \neq s$ entonces $s \not\subseteq t$ y $t \not\subseteq s$.

  $\mathcal{B}$ es una barrera *spreading* si, además, cumple los siguiente:
  - Si $s \in \mathcal{B}$ y $r \in FIN$ son tales que $s(i) \leq r(i)$, para cada $i \leq |s|$, entonces existe $t \in \mathcal{B}$ tal que $r \sqsubseteq t$.
- Definimos $\mathcal{B} \oplus \mathcal{C} = \{s \cup t : s \in \mathcal{B}, t \in \mathcal{C} \text{ y } s < t\}$.
- Definimos $\mathcal{B} \otimes \mathcal{C} = \{\cup_{i=1}^{n} t_i$: para $i \leq n$ se tiene $t_i \in \mathcal{C}$, $t_1 < t_2 \cdots t_n$ y $\{min(t_i) : i \leq n\} \in \mathcal{B}\}$.

No es difícil ver que si $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subseteq FIN$ son ambas barreras, entonces tanto $\mathcal{B} \oplus \mathcal{C}$ como $\mathcal{B} \otimes \mathcal{C}$ son también barreras. Los ejemplos más simples de barreras son

$$\mathbb{N}^{[k]} = \{s \in FIN : |s| = k\},$$

para cada $k \in \mathbb{N}$ y la barrera de Schreier

$$\mathcal{S} = \{s \in FIN : |s| = \text{mín}(s)\}.$$

Para dar una primera muestra de la utilidad de las barreras en el estudio de las bases de Schauder en espacios de Banach, a continuación incluimos la siguiente construcción por B. Maurey y H. Rosenthal [**29**] de una sucesión débilmente nula sin subsucesiones incondicionales. Esta definición se puede considerar un primer paso hacia el ejemplo de T. Gowers y B. Maurey, introducido en [**19**], de un espacio de Banach sin sucesiones incondicionales.

Definición 1.17 (Maurey, Rosenthal). Fijando un $\epsilon > 0$ y una sucesión de números naturales $\{m_i : i \in \mathbb{N}\}$ tal que:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j \neq i} \text{mín}\{(\frac{m_i}{m_j})^{\frac{1}{2}}, (\frac{m_j}{m_i})^{\frac{1}{2}}\} \leq \epsilon.$$

Ahora, denotamos por $FIN^{[<\infty]}$ al conjunto de todas las sucesiones $(s_i)_{i=1}^n \subseteq FIN$ con la propiedad de que $i < j \leq n$ implica $\text{máx}\, s_i < \text{mín}\, s_j$. Fijemos una función

$$\sigma : FIN^{[<\infty]} \to \{m_i : i \in \mathbb{N}\}$$

tal que $\sigma((s_i)_{i=1}^n) > \text{máx}\, s_n$ para cada $(s_i)_{i=1}^n$. Con esto, definimos la barrera de Maurey-Rosenthal $(\mathcal{B}_{MR})$ como $\bigcup_{i=1}^n s_i \in \mathcal{B}_{MR}$ para cada elemento $(s_i)_{i=1}^n \in FIN^{[<\infty]}$ que cumple:

1. $s_1 = \{n\}$.
2. $|s_{k+1}| = \sigma((s_i)_{i=1}^k)$ para cada $k < n$.

De aquí obtenemos nuestro conjunto normante que resulta ser:

$$W_{\mathcal{B}_{MR}} = \{f_{(s_i)_{i=1}^n} = \sum_{i=1}^n \frac{\chi_{s_i}}{|s_i|^{\frac{1}{2}}} : \bigcup_{i=1}^n s_i \in \mathcal{B}_{MR}\},$$

en donde χ_t denota la función característica del conjunto finito de naturales t.

Las barreras están clasificadas mediante un número ordinal numerable de acuerdo a una cierta propiedad uniforme que presentamos acontinuación.

Definición 1.18. Sea $\mathcal{F} \subseteq FIN$ y $\alpha < \omega_1$. De manera inductiva, Decimos que $\mathcal{F}$ es *α-uniforme* si:

- $\alpha = 0$ y $\mathcal{F} = \{\emptyset\}$.

- $\alpha = \beta + 1$ y $\mathcal{F}_{\{n\}}$ is β-uniforme para cada $n \in \mathbb{N}$.
- α es un ordinal limite y existe $\alpha_n \nearrow \alpha$ tal que $\mathcal{F}_{\{n\}}$ es α_n-uniforme para cada $n \in \mathbb{N}$.

Decimos que $\mathcal{F}$ es uniforme si es α-uniforme para algún $\alpha < \omega_1$.

Nótese que de esta forma las barreras $\mathbb{N}^{[k]}$ son k-uniformes y la barrera de Schreier es un ejemplo de una barrera ω-uniforme. Es sabido que existen barreras de toda uniformidad $\alpha < \omega_1$.

Para finalizar ésta sección incluimos ejemplos importantes de construcciones de conjuntos normantes usando barreras en FIN. Para poder construir estos espacios es necesaria la siguiente definición.

Definición 1.19. Dada un barrera $\mathcal{B} \subseteq FIN$, decimos que una sucesión bloque $(x_i)_{i=1}^n \subseteq c_{00}$ es $\mathcal{B}$-admisible si existe $s \in B$ de tal manera que:

1. $s(1) \leq min(supp(x_1))$.
2. $max(supp(x_{i-1})) < s(i) \leq min(supp(x_i))$ para cada $1 < i \leq \text{mín}\{|s|, n\}$.

Empezamos con el espacio de Tsirelson que es, como ya hemos dicho, el primer ejemplo conocido de un espacio de Banach sin subespacios isomorfos a algún ℓ_p para $1 \leq p \leq \infty$ o a c_0.

Ejemplo 1.20 (B. Tsirelson). *El conjunto normante del espacio de Tsirelson se define como la unión de los siguientes conjuntos construidos de manera recursiva:*

1. $W_0 := G_0$.
2. *Si* $(f_i)_{i=1}^n \subseteq W_k$ *es una sucesión bloque que además satisface* $min(supp(f_1)) \geq n$ *(es decir es $\mathcal{S}$-admisible, donde $\mathcal{S}$ denota la barrera de Schreier), entonces* $f = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n f_i \in W_{k+1}$.

Finalmente definimos $W_{\mathcal{T}} = \bigcup_{k=0}^{\infty} W_k$. *En lo sucesivo este espacio será denotado por* $\mathcal{T}$.

A la operación de una sucesion bloque de funcionales que se puede apreciar en la última relación de (2) del ejemplo previo (sumar y multiplicar por un medio) se le conoce como la Tsirelson-operación.

El espacio de Schlumprecht toma esta misma idea pero usando una cantidad numerable de barreras uniformes, este espacio fue el primer espacio conocido con la propiedad de ser arbitrariamente distorsionable, una propiedad cuya definición daremos en el capítulo tres.

Ejemplo 1.21 (T. Schlumprecht). *El conjunto normante del espacio de Schlumprecht se define, de nuevo recursivamente, de la siguiente manera:*

1. $W_0 := G_0$.

2. *Si* $(f_i)_{i=1}^n \subseteq W_k$ *es una sucesión bloque (aqui quiseramos hacer hincapié en que esta sucesión es* $\mathbb{N}^{[n]}$*-admisible), entonces* $f = \frac{1}{log_2(n+1)} \sum_{i=1}^n f_i \in W_{k+1}$.

Finalmente definimos $W_{\mathcal{S}} = \bigcup_{k=0}^{\infty} W_k$.

El espacio $X_{W_{\mathcal{S}}}$ es considerado un ejemplo de lo que ahora se conoce como “Espacio de Tsirelson Mixto” por combinar varias barreras en una misma construcción. Por esta razón este espacio es frecuentemente denotado por

$$\mathcal{T}[(\mathbb{N}^{[n]}, \frac{1}{log_2(n+1)})_n]$$

En esta notación el espacio de Tsirelson se escribe de la siguiente manera $\mathcal{T}[\mathcal{S}, \frac{1}{2}]$. Es natural preguntarse sobre las propiedades de los espacios $\mathcal{T}[\mathbb{N}^{[n]}, \theta]$ para $0 < \theta \leq 1$. En el caso que θ es uno es fácil ver que el espacio resultante es isométricamente isomorfo a ℓ_1. En los otros casos cada uno de estos espacios es equivalente a un ℓ_p o c_0, tal y como lo demostró S. A. Argyros en [**7**]:

Teorema 1.22 (S.A. Argyros). *Sea* $0 < \theta < 1$ *y* $n \in \mathbb{N}$.

1. *Si* $\frac{1}{n} \geq \theta$*, entonces* $\mathcal{T}[\mathbb{N}^{[n]}, \theta]$ *es isomorfo a* c_0.
2. *Si* $\frac{1}{n} < \theta$*, entonces* $\mathcal{T}[\mathbb{N}^{[n]}, \theta]$ *es isomorfo a* ℓ_p *donde* $\theta = \frac{1}{n^{\frac{1}{q}}}$ *y se tiene que* $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$.

Esto nos ayuda a estudiar tanto los espacios “tipo Tsirelson” como estos espacios clásicos dentro de un mismo marco de investigación.

4. Propiedades Tipo Ramsey

El teorema de Ramsey dice que siempre es posible encontrar subgráficas completas monocromáticas en la coloración de las aristas de una gráfica completa suficientemente grande. Este teorema es un resultado fundamental en combinatoria. Probado inicialmente por F. P. Ramsey en 1930, de este se desprendió lo que ahora se conoce como “Teoría de Ramsey”, teoría que se podría describir, a grandes rasgos, como la búsqueda de regularidad dentro del desorden; es decir, condiciones generales para obtener subestructuras regulares dentro de estructuras arbitrarias. En el caso presentado a continuación (que demostraremos por autocontención), es el más comúnmente referido como el Teorema de Ramsey. El objetivo de este es encontrar subconjuntos infinitos monocromáticos dentro de una coloración arbitraria de las k-adas de los numeros naturales.

Teorema 1.1. **[Ramsey]**
Para cada coloración finita $C : N^{[k]} \longrightarrow q$ *existe un* $M \in N^{[\infty]}$ *monocromático.*

Demostración. La demostración será por inducción sobre k. Para $k = 0$ el resultado es trivial. Ahora suponemos que el teorema se satisface para cierta k. Demostraremos que es posible obtener el caso $k + 1$. Para esto consideramos una coloración arbitraria

$$C : N^{[k+1]} \longrightarrow q.$$

Partiremos esta coloración en una cantidad numerable de estas, definiendo para cada $n \in \mathbb{N}$

$$C_{\{n\}} : N^{[k]}/n \longrightarrow q$$

como $C_{\{n\}}(s) = C(s \cup \{n\})$ para cada $s \in N^{[k]}/n$. Ahora, tomando $m_0 = \text{mín}(N)$ y considerando la coloración

$$C_{\{m_0\}} : N^{[k]}/m_0 \longrightarrow q,$$

concluimos por hipótesis de inducción que existe un conjunto $M_1 \in (N/m_0)^{[\infty]}$ monocromático bajo la coloración $C_{\{m_0\}}$. Sea $m_1 = \text{mín}(M_1)$ y $q_{m_0} \in q$ el color elegido por el conjunto monocromático $M_1^{[k]}$ bajo $C_{\{m_0\}}$.

Para el paso de recursión suponemos construidos m_i, M_i y $q_{m_{i-1}}$ como en el caso anterior y tomamos

$$C_{\{m_i\}} : M_i^{[k]}/m_i \longrightarrow q.$$

Aplicando la hipótesis de inducción, obtenemos ahora $M_{i+1} \in M_i^{[\infty]}$ con $M_{i+1}^{[k]}$ monocromático bajo $C_{\{m_i\}}$. Definimos $m_{i+1} = \text{mín}(M_{i+1})$ y $q_{m_{i+1}} \in q$ el color elegido por el conjunto $M_{i+1}^{[k]}$.

Por el principio del palomar existe un conjunto $M \in \{m_i : i \in \mathbb{N}\}^{[\infty]}$ tal que para cualesquiera dos elementos $l, r \in M$ se tiene $q_r = q_l$. Finalmente observemos que para todo $s, t \in M^{[k+1]}$ tenemos, por construcción,

$$C(s) = C_{\{\text{mín}(s)\}}(s \setminus \{\text{mín}(s)\}) = q_{\text{mín}(s)} = q_{\text{mín}(t)} = C_{\{\text{mín}(t)\}}(t \setminus \{\text{mín}(t)\}) = C(t).$$

Así concluimos que $M^{[k+1]}$ es monocromático base la coloración original C, que es lo que se quería demostrar. ❏

Para entender la relación de estos conceptos con las barreras presentadas en la sección anterior, la teoría de Nash-Williams de fronteras y barreras es inescapable. Además, ésta ha sido una herramienta importante en el estudio de modelos asintóticos, los cuales serán el tema principal del capítulo dos y punto central en esta tesis. A continuación añadimos una lista de la terminología y herramienta estándar en esta teoría:

Definición 1.23. [Nash-Williams] Sea $\mathcal{B} \subseteq FIN$. Decimos que $\mathcal{B}$ tiene la *Propiedad de Ramsey* si para cada $N \in [\mathbb{N}]^\infty$ y cada para cada partición $\mathcal{B} \restriction_N = \mathcal{P}_0 \restriction_N \cup \cdots \cup \mathcal{P}_k \restriction_N$ existe $M \in [N]^\infty$ tal que a lo más uno de los siguiente conjuntos $\mathcal{P}_0 \restriction_M, \cdots, \mathcal{P}_k \restriction_M$ es no vacío.

La relación de la definición previa con el teorema de Ramsey se vuelve aparente cuando uno considera la coloración de un conjunto una partición de este en colores. Uno de los resultados principales de Nash-Williams, el cual se puede encontrar en ([**7**, Lemma II.2.7]), es el siguiente:

TEOREMA 1.24 (Nash-Williams). *Toda familia thin es Ramsey.*

La utilidad de este resultado en la teoría de espacios de Banach se puede percibir en el siguiente resultado, el cual será utilizado constantemente en lo sucesivo. Este teorema es comúnmente llamado en la literatura "Teorema de Ramsey para el Análisis":

TEOREMA 1.25. **[Teorema de Ramsey para el Análisis]** *Sea (X, d) un espacio topológico métrico compacto y $\mathcal{F} \subseteq FIN$ una familia con la propiedad de Ramsey. Entonces para cada función $G : \mathcal{F} \to X$ y para cada sucesión $\epsilon_j \searrow 0$ existen $M = \{m_1, m_2, \cdots\} \in [\mathbb{N}]^\infty$ y $x \in X$ tal que*

$$d(G(s), x) < \epsilon_{i_1},$$

para cada $s = \{m_{i_1}, m_{i_2}, \cdots, m_{i_{|s|}}\} \in \mathcal{F} \restriction_M$.

DEMOSTRACIÓN. Usando la compacidad del espacio topológico (X, d), tomamos una partición disjunta $\mathcal{A}_1 = \{A_i : 1 \leq i \leq N\}$ de X hecha a base de conjuntos de diámetro menor que ϵ_1. Es fácil ver que la siguiente función

$$\begin{aligned} \phi :& \mathcal{F} \to N \\ & s \to i, \end{aligned}$$

donde $i \in N$ es el único elemento que cumple $G(s) \in A_i$, define una partición de $\mathcal{F}$ en una cantidad finita de conjuntos. Aplicando la propiedad de Ramsey obtenemos un $M_1 \in [N]^\infty$, de tal manera que cada dos elementos $s, t \in \mathcal{F} \restriction_M$ cumplen $\phi(s) = \phi(t)$, de donde se sigue inmediatamente que $d(G(s), G(t)) < \epsilon_1$.

Construido M_k, tomamos una partición $\mathcal{A}_{k+1}$ de X ahora en conjuntos de diámetro menor que ϵ_{k+1}. Aplicamos ahora la propiedad de Ramsey a $\mathcal{B} \restriction_{M_k \setminus min\{M_k\}}$, usando la partición $\mathcal{A}_{k+1}$ de manera análoga al paso anterior, y así obtenemos M_{k+1} tal que su imagen bajo G está contenida en uno de los elementos de $\mathcal{A}_{k+1}$.

Es fácil ver que definiendo $m_i = min(M_i)$ para cada $i \in \mathbb{N}$ se tiene que $M = \{m_i : i \in \mathbb{N}\}$ cumple la propiedad deseada. ❑

Basándonos en el teorema previo introducimos las siguientes dos definiciones:

Definición 1.26. Sea (X, d) un espacio topológico métrico y $\mathcal{F} \subseteq FIN$ y $G : \mathcal{F} \to X$. Diremos que *G es Cauchy* en M si para todo $\epsilon > 0$ existe un $l \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(G(s), G(t)) < \epsilon,$$

para todo $s, t \in \mathcal{F}/l$.

Definición 1.27. Sea (X, d) un espacio topológico métrico y $\mathcal{F} \subseteq FIN$ y $G : \mathcal{F} \to X$. Decimos que G *converge* a $x \in X$ en M si existen $\epsilon_j \searrow 0$ tal que $d(G(s), x) < \epsilon_{min(s)}$ para cada $s \in \mathcal{F} \upharpoonright_M$. Esto es equivalente a que para todo $\epsilon > 0$ existe un $l \in \mathbb{N}$ tal que para todo $s \in \mathcal{F}/l$ se tiene

$$d(G(s), x) < \epsilon.$$

Denotaremos a esto como

$$\lim_{\substack{s \in \mathcal{F}/l \\ l \longrightarrow \infty}} G(s) = x.$$

Remarcamos que si G *converge* a $x \in X$ en M y $N \in [\mathbb{N}]^\infty$ satisface que $N/m \subseteq M$ para algún $m \in \mathbb{N}$, es decir N está casi contenido en M, entonces también es cierto que G converge a x sobre N.

Dado que nuestro objetivo es aplicar éste teorema para la obtención de distintas estructuras asintóticas es tentador usar (como (X, d) en 1.25), para cada $k \in \mathbb{N}$, el espacio métrico

$$\mathcal{M}_k = \{\|\cdot\| : \mathbb{R}^k \to [0, \infty) : \|\cdot\| \text{ es una norma y } \forall i = 1, \cdots, k(\|e_i\| = 1)\}$$

con la métrica dada por

$$d_n(\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2) = \sup\{\big|\|a\|_1 - \|a\|_2\big| : a \in [-1, 1]^k\}.$$

para cada par de normas $(\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2)$ en $\mathcal{M}_k$, pero estos espacios no son compactos. De hecho, un ejemplos simple de esto, cuando $k = 2$, es la sucesión de normas $\mathbb{R}^2$ definida por lo conjuntos $W_n = \{e_1^* - e_2^*, e_2^* - e_1^*, \frac{1}{n}e_2^*, \} \subseteq c_{00}(2)$. Es fácil ver que cada uno de estos conjuntos define una norma en $\mathcal{M}_2$ y es tal que la sucesion es Cauchy y, sin embargo, no converge a una norma (dado que el vector $(1, 1)$ tendría necesariamente “norma” 0). La afirmación se vuelve cierta si reemplazamos “norma” por “seminorma” de la siguiente manera

$$\mathcal{N}_k = \{\rho : \mathbb{R}^k \to [0, \infty) : \rho \text{ es una seminorma y } \forall i = 1, \cdots, k(\rho(e_i) = 1)\},$$

donde $\{e_i : 1 \leq i \leq n\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

Lema 1.28. *Para cada número natural k, el espacio $(\mathcal{N}_k, d_k)$ es compacto y métrico.*

Demostración. Demostraremos que el espacio es completo y totalmente acotado. No es difícil ver que es completo pues al tomar una sucesión de Cauchy en $(\mathcal{N}_k, d_k)$ simplemente tomar el límite puntual determina una seminorma en $\mathbb{R}^k$. Para ver que es totalmente acotado fijemos $\epsilon > 0$ y tomemos una $\frac{\epsilon}{4}$-red finita B en $([-1,1]^k, \|\cdot\|_{\ell_1})$ y A una $\frac{\epsilon}{4}$-red finita en $[0,k]$. Para cada función $f : B \to A$ definimos

$$C_f = \{\rho \in \mathcal{N}_k : \forall b \in B(|\rho(b) - f(b)| < \frac{\epsilon}{4})\}.$$

Notemos que cada dos elementos $\rho_1, \rho_2 \in C_f$ satisfacen que $d_k(\rho_1, \rho_2) < \epsilon$. Para ver esto tomamos $x \in [-1,1]^n$ y $b \in B$ tal que $\|x - b\|_{\ell_1} < \frac{\epsilon}{4}$. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned}|\rho_1(x) - \rho_2(x)| &\leq |\rho_1(x) - \rho_1(b)| + |\rho_1(b) - f(b)| \\ &+ |f(b) - \rho_2(b)| + |\rho_2(b) - \rho_2(x)| \\ &\leq 2\|x - b\|_1 + 2(\frac{\epsilon}{4}) < \epsilon.\end{aligned}$$

Ahora para cada C_f no vacío fijamos $\rho_f \in C_f$. Afirmamos que $\{\rho_f : f : B \to A\}$ es una ϵ-red en $\mathcal{N}_n$. Ciertamente, para ρ en $\mathcal{N}_n$ consideramos la función $f : B \to A$ definida por

$$f(b) = \text{mín}\{a \in A : |\rho(b) - a| < \frac{\epsilon}{4}\},$$

Este conjunto es no vacío ya que $0 \leq \rho(b) \leq \|b\|_{\ell_1} \leq k$ y por la definición de A. Es claro que ρ es un elemento de C_f lo cual implica, por nuestra afirmación, que $d_n(\rho_f, \rho) < \epsilon$. ❑

Rermarcamos que, por la desigualdad del triángulo, para toda $\rho \in \mathcal{N}_k$ se tiene que $|\rho(x)| \leq \|x\|_{\ell_1}$ para cada $x \in \mathbb{R}^k$. El Teorema 1.25 es frecuentemente aplicado de manera implícita, o su prueba es repetida explícitamente dentro de varios subconjuntos cerrados de $\mathcal{N}_k$, para obtener estructuras asintóticas. Para garantizar que las seminormas obtenidas por el Teorema de Ramsey para el análisis sean normas es posible usar los siguientes subconjuntos cerrados de $\mathcal{N}_k$:

$$\{\|\cdot\| : \mathbb{R}^k \to [0,\infty) : \|\cdot\| \text{ es una norma y } \forall i = 1, \cdots, k(\|e_i\| = 1)$$

$$\text{con } bc(e_i)_{i=1}^k \leq 2\}$$

y

$$\{\|\cdot\| : \mathbb{R}^k \to [0,\infty) : \|\cdot\| \text{ es una norma y } \forall i = 1, \cdots, k(\|e_i\| = 1)$$

$$\text{con } (e_i)_{i=1}^k \text{ 2-incondicional}\}.$$

Un caso particularmente útil de la Definición 1.27 es cuando la familia de conjuntos finitos es $[\mathbb{N}]^n$, el espacio métrico $(\mathcal{N}_n, d_n)$ y la función $G : [\mathbb{N}]^n \to \mathcal{N}_n$ es definida a través de una sucesión

$(x_i)_{i=1}^{\infty}$ en un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|_X)$ de la siguiente manera:

$$G(\{i_1, \cdots, i_n\})(\sum_{i=1}^{n} a_i e_i) = \|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\|_X.$$

Entonces si G converge a ρ en $[\mathbb{N}]^n$ será denotado de la siguiente manera

$$\lim_{i_1\to\infty} \lim_{i_2\to\infty} \cdots . \lim_{i_n\to\infty} \|\sum_{j=1}^{n} a_j x_{i_j}\|_X = \rho. \tag{4.1}$$

Ahora, demostraremos que el teorema de coloración de Ramsey es equivalente a la siguiente noción de estabilidad en espacios de Banach:

Definición 1.29. Sea $k \in \mathbb{N}$ y X un espacio de Banach. Decimos que una sucesión de vectores normalizada $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en X es *k-oscilación estable* si para cada $\epsilon > 0$ existe $M \in \mathbb{N}^{[\infty]}$ tal que para cada $n_1, n_2, \cdots, n_k, m_1, m_2, \cdots, m_k \in M$, tenemos

$$\Big|\|\sum_{i=1}^{k} a_i e_{n_i}\| - \|\sum_{i=1}^{k} a_i e_{m_i}\|\Big| < \epsilon,$$

para todo $(a_i)_{i=1}^{k} \in [-1, 1]^k$. Remarcamos que, si consideramos G definida como en los párrafos anteriores, esto es equivalente a decir

$$d_k(G(\{n_1, n_2, \cdots, n_k\}), G(\{m_1, m_2, \cdots, m_k\})) < \epsilon.$$

Es importante entender el porque del nombre de la noción introducida en la definición 1.29. En [**7**, Def. III.5.4], una función $f : S(X) \to \mathbb{R}$ es llamada *oscilación estable* sobre X si para todo subespacio de Banach infinito dimensional Y de X y cada $\epsilon > 0$ existe un subespacio de Banach infinito dimensional Z de Y tal que

$$\sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in S(Z)\} < \epsilon.$$

Ahora, dada una sucesión normalizada $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$, es posible definir la función $\Phi_k : [N]^k \to \mathcal{N}_k$ que lleva $F \in \mathcal{N}_k$ a la seminorma generada por $< \{e_i : i \in F\} >$. Dado que $\mathcal{N}_k$ es compacto y métrico, por analogía, obtenemos el concepto de k-oscilación estable para una sucesión normalizada.

Teorema 1.30. *Dado $k \in \mathbb{N}$, los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *Para toda función $C : [\mathbb{N}]^k \to 2$ existe $i < 2$ y $M \in [\mathbb{N}]^{\infty}$ tal que $[M]^k \subseteq C^{-1}(i)$.*
2. *Teorema de Ramsey para el análisis para $[\mathbb{N}]^k$.*
3. *Dado un espacio de Banach X, para cada $\epsilon > 0$ y para cada sucesión normalizada $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en X existe $M \in [\mathbb{N}]^{\infty}$ tal que $(e_i)_{i\in M}$ es k-oscilación estable.*

Demostración. Sólo es necesario demostrar la implicación (3) $\Rightarrow$ (1). Dada $C : [\mathbb{N}]^k \to 2$ una función, definimos el siguiente conjunto normante

$$W = G_0 \cup \{\sum_{i \in s} \pm e_i^* : s \in [\mathbb{N}]^k (C(s) = 0)\}.$$

Notemos que $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ es una sucesión normalizada. Afirmamos que si $C(t) = 1$, entonces $\| \sum_{j \in t} e_j \|_W \leq k - 1$. Para ver esto, supongamos que $C(t) = 1$ y fijemos $f \in W$. Si $f \in G_0$, entonces es evidente que $f(\sum_{j \in t} e_j) \leq 1$. Si $f \in W \setminus G_0$, entonces existe un $u \in [\mathbb{N}]^k$ con $C(u) = 0$ tal que $supp(f) = u$. Esto significa que $u \neq t$. Ya que $|t| = |u|$, existe un $j_0 \in t \setminus u$. Así,

$$f(\sum_{j \in t} e_j) = f(\sum_{j \in t, j \neq j_0} e_j) \leq k - 1.$$

Entonces se sigue de la definición de la norma $\| \cdot \|_W$ que $\| \sum_{j \in t} e_j \|_W \leq k - 1$. Aplicando la hipótesis a $\epsilon = \frac{1}{2}$, existe una subsucesión k-oscilación estable $(e_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$. Denotemos $M = \{n_i : i \in \mathbb{N}\}$. Entonces, tenemos que

$$\left| \| \sum_{i \in s} e_i \|_W - \| \sum_{j \in t} e_j \|_W \right| \leq \frac{1}{2},$$

para cada $s, t \in [M]^k$. Si $C(s) = 1$ para cada $s \in [M]^k$ entonces hemos conluido. Supongamos que este no es el caso. Entonces, elijamos $s \in [M]^k$ tal que $C(s) = 0$. Notemos que $\| \sum_{i \in s} e_i \|_W = |s| = k$. Así, tomando $t \in [M]^k$, se sigue que

$$\begin{aligned} \left| \| \sum_{i \in s} e_i \|_W - \| \sum_{j \in t} e_j \|_W \right| &\leq \frac{1}{2} \\ k - \| \sum_{j \in t} e_j \|_W &\leq \frac{1}{2} \\ k - \frac{1}{2} &\leq \| \sum_{j \in t} e_j \|_W. \end{aligned}$$

Usando la afirmación previa obtenemos que $C(t) = 0$ para cada $t \in [M]^k$. $\square$

Capítulo 2

Asintoticidad en Espacios de Banach

En este capítulo definiremos las familias plegma, que fueron introducidas por conocidos autores en el artículo [**6**]. Dichas familias tienen como elementos sucesiones finitas de elementos de FIN. Esto nos ayudará a extender los conceptos estudiados en la última parte del capítulo anterior. Las principales nociones en éste capítulo son los de modelo spreading y de modelo asintótico. En particular, con estas nuevas herramientas, ahondaremos en el estudio de la iteración bloque de los segundos culminando en una respuesta parcial a una pregunta en el área.

1. Modelos Spreading y Modelos Asintóticos

Las siguientes dos nociones son básicas en el estudio y entendimiento del concepto de convergencia asintótica dentro de un espacio de Banach.

- *Isometría asintótica*: Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones básicas normalizadas dentro de espacios de Banach X y Y, respectivamente. Decimos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son *asintóticamente isométricas* si existe $\epsilon_n \searrow 0$ tal que para todos $s, t \in FIN$ con $s(1) \geq |s| = n = |t| \leq t(1)$ se tiene que

$$\Big| \|\sum_{j=1}^{n} a_j x_{s(j)}\|_X - \|\sum_{j=1}^{n} a_j y_{t(j)}\|_Y \Big| < \epsilon_{\text{mín}\{s(1),t(1)\}},$$

para cada $(a_i)_{i=1}^n \in [-1, 1]^n$.

- *Modelo spreading*: Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión básica normalizada en un espacio de Banach X. Un espacio de Banach E con base de Schauder $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es llamado el *modelo spreading* de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si exite $\epsilon_n \searrow 0$ tal que para todo $s = \{s(1), \cdots ., s(n)\} \in FIN$ con $s(1) \geq |s| = n$ se tiene que

$$\Big| \|\sum_{j=1}^{n} a_j x_{s(j)}\|_X - \|\sum_{j=1}^{n} a_j e_j\|_E \Big| < \epsilon_{s(1)}.$$

para cada $(a_i)_{i=1}^n \in [-1, 1]^n$. En este caso, decimos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genera $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (or E) como *modelo spreading*. Notemos que, en términos de la notación introducida en el capítulo pasado, de acuerdo a la identidad 4.1, se tiene que

$$\lim_{i_1\to\infty} \lim_{i_2\to\infty} \cdots . \lim_{i_n\to\infty} \|\sum_{j=1}^{n} a_j x_{i_j}\|_X = \|\sum_{j=1}^{n} a_j e_j\|_E$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

En ambas definiciones se habla de una especie de convergencia en el comportamiento de la norma generada por una cantidad finita de elementos de la sucesión, siempre y cuando estos sean tomados "suficientemente arriba". A. Brunel y L. Sucheston [**11**] demostraron el siguiente teorema:

Teorema 2.1. *Sean X un espacio de Banach y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión básica normalizada dentro de X. Existe $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que genera modelo spreading.*

La demostración de este teorema involucra el teorema de Ramsey. Por el momento omitimos la prueba ya que más adelante demostraremos un caso mas general en las secciones siguientes, pero el lector interesado puede encontrar una demostración moderna usando ultrafiltros de Ramsey en el libro [**7**]. Tomando esto en cuenta, y recordando el Teorema 1.30 del capítulo anterior, obtenemos el siguiente corolario:

Corolario 2.2. *Los siguientes enunciados son equivalentes*

1. *Teorema de Ramsey.*
2. *Teorema de Ramsey para el análisis.*
3. *Teorema de Brunel-Sucheston.*

En el artículo [**20**], los autores generalizan el concepto de spreading model introduciendo los llamados modelos asintóticos cuya definición añadimos a continuación.

- *Matriz básica*: Una matriz $(x_m^n)_{n,m\in\mathbb{N}}$ de elementos de X es llamada *matriz básica* si $(x_m^n)_{m\in\mathbb{N}}$ es una sucesión básica normalizada X para cada $n \in \mathbb{N}$. Por una *submatriz* de una matriz $(x_m^n)_{n,m\in\mathbb{N}}$ entenderemos una matriz de la forma $(x_m^n)_{n\in\mathbb{N},m\in M}$ para algún $M \in N^{[\infty]}$.
- *Modelo asintótico*: Sea $(x_m^n)_{n,m\in\mathbb{N}}$ una matriz básica en un espacio de Banach X. Decimos que un espacio de Banach E con base de Schauder normalizada $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es un *modelo asintótico* de $(x_m^n)_{n,m\in\mathbb{N}}$ si existe $\epsilon_n \searrow 0$ tal que para todo $s = \{s(1), \cdots, s(n)\} \in FIN$ con $s(1) \geq |s| = n$ se tiene que

$$\Big| \| \sum_{j=1}^{n} a_j x_{s(j)}^j \|_X - \| \sum_{j=1}^{n} a_j e_j \|_E \Big| < \epsilon_{s(1)},$$

para cada $(a_i)_{i=1}^n \in [-1, 1]^n$. Cuando esto pase diremos que $(x_m^n)_{n,m\in\mathbb{N}}$ genera a $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (or X) como un *modelo asintótico*.

La demostración del siguiente teorema que extiende el de Brunel-Sucheston se puede encontrar en el mismo artículo previamente citado ([**20**]), el cual tampoco demostraremos dado que éste será también un caso especial de un teorema general que demostraremos más adelante.

Teorema 2.3. *Sea* $(x_m^n)_{n,m\in\mathbb{N}}$ *una matriz básica en un espacio de Banach* X *y* $\epsilon_n \searrow 0$*, entonces existe una sucesión* $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *en* $\mathbb{N}$ *tal que para todo* $s,t \in FIN$ *con* $s(1) \le |s| = n = |t| \ge t(1)$ *se tiene que*

$$\Big| \| \sum_{j=1}^{n} a_j x^j_{k_{s(j)}} \| - \| \sum_{j=1}^{n} a_j x^j_{k_{t(j)}} \| \Big| < \epsilon_{\text{mín}\{s(1),t(1)\}},$$

para cada $(a_i)_{i=1}^n \in [-1,1]^n$.

Para poder demostrar el caso general necesitaremos varias herramientas de combinatoria que serán tratadas en la siguiente sección.

2. Familias Plegma

Empezamos por presentar la definición del concepto de familia plegma, introducido en [**6**], con una modificación menor:

Definición 2.4. Sea $n \in \mathbb{N}$. Una sucesión finita $(s_i)_{i=1}^n$ de FIN es llamada *plegma* si las siguientes condiciones son satisfechas:

1. $|s_1| \le |s_2| \le \cdots \le |s_n|$, y
2. $s_i(k) < s_{i+1}(k) < \cdots < s_n(k) < s_j(k+1)$ para cada $i, j = 1, \cdots, n$ y para cada $0 < k \le \text{mín}\{|s_i|, |s_j|\}$.

Para $\mathcal{B} \subseteq FIN$ y $n \in \mathbb{N}$, la *n-familia plegma* de $\mathcal{B}$ es la familia

$$PL^n(\mathcal{B}) = \{(s_i)_{i=1}^n \in \mathcal{B}^n : (s_i)_{i=1}^n \textit{ es plegma } \}.$$

Remarcamos que ésta definición de plegma permite ser vacíos a los conjuntos finitos . Por ejemplo, la sucesión $(\emptyset, \emptyset, \cdots, \emptyset)$ es siempre una familia plegma de acuerdo a nuestra definición. Esto es muy útil para algunas demostraciones inductivas de esta sección.

Teorema 2.5 (Argyros S.A, Kanellopoulos V. , Tyros K. [**6**]). *Si* $\mathcal{B}$ *es una barrera, entonces* $PL^n(\mathcal{B})$ *tiene la propiedad de Ramsey para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Primero, definimos la función

$$\Phi : PL^n(\mathcal{B}) \to FIN$$
$$(s_i)_{i=1}^n \mapsto \bigcup_{i=1}^n s_i.$$

Demostraremos que ésta función es inyectiva y cumple que $\Phi(PL^n(\mathcal{B}))$ es una familia thin en FIN, así concluiremos usando el Teorema 1.24 . Para esto probaremos, por inducción sobre n, que si $(s_i)_{i=1}^n, (t_i)_{i=1}^n \in PL^n(\mathcal{B})$ y $\bigcup_{i=1}^n s_i \sqsubseteq \bigcup_{i=1}^n t_i$ entonces $s_i = t_i$ para cada $1 \leq i \leq n$.

El caso $n = 1$ es trivial ya que $\Phi(PL^1(\mathcal{B})) = \mathcal{B}$. Para el caso $n = k + 1$ sean $(s_i)_{i=1}^{k+1}, (t_i)_{i=1}^{k+1} \in PL^{k+1}(\mathcal{B})$ como en la hipótesis, ahora tomamos $\{p_1, p_2, \cdots, p_N\} = \bigcup_{i=1}^{k+1} t_i$. Recordando que las sucesiones plegma son crecientes en cardinalidad (ver Definición 2.4), tenemos que tanto s_1 como t_1 son segmentos iniciales de

$$\{p_i : i \equiv 1[\text{mod } (k+1)]\}.$$

Por lo tanto $s_1 \sqsubseteq t_1$ o $t_1 \sqsubseteq s_1$, usando que $\mathcal{B}$ es barrera tenemos que $s_1 = t_1$. La conclusión se sigue de aplicar hipótesis de inducción a $(s_i)_{i=2}^{k+1}, (t_2)_{i=1}^{k+1} \in PL^k(\mathcal{B})$. $\square$

En los siguientes lemas demostramos que para una cantidad finita de barreras uniformes con uniformidad creciente podemos siempre encontrar sucesiones plegma con propiedades relacionadas a cada barrera dada. En particular obtendremos que las familias $PL^n(\mathcal{B})$ son Ramsey en el sentido que podriamos llamar no nulo. Es decir, no solamente a lo más una de las restricciones es no vacía, sino que exactamente una de las restricciones es no vacía (veáse Definición 1.23).

Lema 2.6. *Sea $n \in \mathbb{N}$ y $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \cdots, \mathcal{B}_n$ barreras uniformes sobre $\mathbb{N}$ de uniformidades $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$, respectivamente, tal que $0 < \gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \cdots \leq \gamma_n$. Entonces para cada $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ existen $m_1 < m_2 \cdots < m_n \in M$ tal que $\mathcal{B}_{1\{m_1\}}, \mathcal{B}_{2\{m_2\}}, \cdots, \mathcal{B}_{n\{m_n\}}$ tienen uniformidad $\lambda_1 \leq \lambda_2 \cdots \leq \lambda_n$, respectivamente, y $\lambda_n < \gamma_n$.*

Demostración. Fijamos primero $m_1 \in \mathbb{N}$ tomado de manera arbitraria y notamos que $\mathcal{B}_{1\{m_1\}}$ tiene uniformidad $\lambda_1 < \gamma_1$. Since $\gamma_1 \leq \gamma_2$, afirmamos que existe un $m_2 \in M$ con $m_2 > m_1$ tal que $\mathcal{B}_{2\{m_2\}}$ tiene uniformidad λ_2 y $\lambda_1 \leq \lambda_2 < \gamma_2$. Para hacer esto, en el caso que γ_2 es un ordinal límite, tenemos por definición de uniformidad que $sup\{unif(\mathcal{B}_{2\{j\}}) : j \in \mathbb{N}\} = \gamma_2$. En el caso que γ_2 es un ordinal sucesor, de nuevo por definición de uniformidad, se sigue que $unif(\mathcal{B}_{2\{j\}}) = \gamma_2 - 1$ para cada $j \in \mathbb{N}$. En ambos casos elegir m_2 apropiado es simple. Aplicando este argumento recursivamente, definimos numeros naturales $m_1 < m_2 < \cdots < m_n$ in M y barreras $\mathcal{B}_{1\{m_1\}}, \mathcal{B}_{2\{m_2\}}, \cdots, \mathcal{B}_{n\{m_n\}}$ de uniformidad $\lambda_1 \leq \lambda_2 \cdots \leq \lambda_n$, respectivamente, tal que$\lambda_n < \gamma_n$. $\square$

Lema 2.7. *Sean $n \in \mathbb{N}$ y $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \cdots, \mathcal{B}_n$ barreras uniformes sobre $\mathbb{N}$ de uniformidades $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$, respectivamente, satisfaciendo $\gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \cdots \leq \gamma_n$. Entonces para cada conjunto $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ existen $s_1 \in \mathcal{B}_1 \restriction_M, s_2 \in \mathcal{B}_2 \restriction_M, \cdots, s_n \in \mathcal{B}_n \restriction_M$ tal que la sucesión $(s_i)_{i=1}^n$ es plegma.*

Demostración. La prueba será por inducción sobre γ_n. Para el caso $\gamma_n < \omega$. Sabemos $[M]^{\gamma_j}$ es la única barrera γ_j uniforme sobre $M = \{m_i : i \in \mathbb{N}\}$ para cada $1 \leq j \leq n$. Así, para cada $1 \leq j \leq n$, tomamos $s_j \in \mathcal{B}_j$ de tal manera que

$$s_j \sqsubseteq M_j := \{m_i : i \equiv j \bmod(n)\}.$$

Notemos que $|s_j| = \gamma_j$ para cada $1 \leq j \leq n$. Así, por hipótesis, obtenemos $|s_1| \leq |s_2| \leq \cdots \leq |s_n|$. No es difícil ver que $(s_j)_{j=1}^n$ tiene las propiedades deseadas. Ahora, asumimos el teorema demostrado para barreras de uniformidades $\lambda_1 \leq \lambda_2, \cdots, \leq \lambda_n$, respectivamente, donde $\lambda_n < \gamma_n$. Aplicando el Lema 2.6 a M y las barreras $\mathcal{B}_{i_0}, \mathcal{B}_{i_0+1}, \cdots, \mathcal{B}_n$, donde $i_0 \in \mathbb{N}$ es el primer elemento que satisface $\gamma_{i_0} > 0$ podemos encontrar $m_{i_0} < m_{i_0+1} \cdots < m_n \in M$ tal que $\mathcal{B}_{i_0\{m_{i_0}\}}, \mathcal{B}_{i_0+1\{m_{i_0+1}\}}, \cdots, \mathcal{B}_{n\{m_n\}}$ tienen uniformidad $\lambda_{i_0} \leq \lambda_{i_{i_0+1}} \cdots \leq \lambda_n$, respectivamente, y $\lambda_n < \gamma_n$. Ahora, we aplicamos la hipótesis de inducción a estas barreras junto con $M' = M/\{m_n\}$ para encontrar $s'_i \in \mathcal{B}_{i\{m_i\}} \upharpoonright_{M'}$, para cada $i_0 \leq i \leq n$, satisfaciendo las propiedades (1) y (2) de la Definición 2.4. Es fácil ver que la sucesión $s_j = \emptyset$ para $j < i_0$ y $s_{i_0} = \{m_{i_0}\} \cup s'_{i_0}, s_{i_0+1} = \{m_{i_0+1}\} \cup s'_{i_0+1}, \cdots, s_n = \{m_n\} \cup s'_n$ es plegma. ❏

Ahora, juntamos los resultados previos para obtener una "versión analista" del Teorema 2.5:

Teorema 2.8. *Sea (X, d) un espacio métrico compacto, $\mathcal{B}$ una barrera y $n \in \mathbb{N}$. Para cada función $F : PL^n(\mathcal{B}) \to X$ y cada sucesión $\epsilon_i \searrow 0$ existe un $M = \{m_i : i \in \mathbb{N}\} \in [\mathbb{N}]^\infty$ y $x \in X$ tal que*

$$\forall l \in \mathbb{N} \forall s \in PL^n(\mathcal{B} \upharpoonright_{M/m_l})(d(F(s), x) < \epsilon_l) \tag{2.1}$$

Demostración. Se sigue de aplicar el Teorema 1.25 a $\Phi(PL^n(\mathcal{B}))$ donde Φ es la función definida en el Teorema 2.5. ❏

Nuestro último propósito de esta sección es aplicar el Teorema 2.8 para obtener modelos asintóticos de orden alto. Seguimos la idea básica de modelos asintótico presentada en [**20**] y la de modelos spreading de orden alto presentada en [**6**].

Definición 2.9. Sea X un espacio de Banach y $\mathcal{F} \subseteq FIN$. Una *$\mathcal{F}$-sucesión* en X es una sucesión $(x_s)_{s\in\mathcal{F}}$ en $S(X)$ indexada por elementos de $\mathcal{F}$. Una sucesión de $\mathcal{F}$-sucesiones $(x_s^i)_{s\in\mathcal{F}, i\in\omega}$ será llamada una *$\mathcal{F} \times \mathbb{N}$-matriz.*

Siguiendo la definicion análoga en [**6**] para modelos spreading, presentamos el concepto de modelos asintóticos de orden alto.

Definición 2.10. Sea X un espacio de Banach, $\mathcal{B}$ una barrera y $(x_s^i)_{s\in\mathcal{B}, i\in\omega}$ una $\mathcal{B}\times\mathbb{N}$-matriz en X. Decimos que un espacio de Banach E con una base de Schauder normalizada $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es un *modelos* *asintótico* de $(x_s^i)_{s\in\mathcal{B},i\in\omega}$ si existen $\epsilon_m \searrow 0$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\forall m \in \mathbb{N}/n \forall s \in (PL^n(\mathcal{B}/m))\Big(\Big|\|\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\|_E - \|\sum_{i=1}^{n} a_i x_{s_i}^i\|_X\Big| < \epsilon_m\Big),$$

para todo $(a_i)_{i=1}^n \in [-1,1]^n$. Si $\mathcal{B}$ es una ξ-barrera uniforme, entonces decimos que la $\mathcal{B}\times\mathbb{N}$-matriz $(x_s^i)_{s\in\mathcal{B},i\in\omega}$ genera $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ como *modelo asintótico de orden* ξ. En el caso de que E no sea un espacio de Banach, sino simplemente un espacio seminormado, diremos que $\mathcal{B}\times\mathbb{N}$-matriz $(x_s^i)_{s\in\mathcal{B},i\in\omega}$ genera un *modelo asintótico seminormado*.

Nótese que la definición usual de modelo asintótico es fácilmente recuperada usando la barrera $\mathbb{N}$ en la definición previa.

Dado un espacio de Banach X, denotamos por $AM_\xi(X)$ al conjunto de todos los modelos asintóticos de orden ξ y nos referiremos a los elementos de $AM_\xi(X)$ como los modelos ξ-asintóticos de X. Generalizando la noción de subsucesión en el contexto de $\mathcal{B}\times\mathbb{N}$-matrices tenemos lo siguiente:

Definición 2.11. Sea $(x_s^i)_{s\in\mathcal{B},i\in\omega}$ una $\mathcal{B}\times\mathbb{N}$ -matriz. Una *submatriz* de $(x_s^i)_{s\in\mathcal{B},i\in\omega}$ es una matriz de la forma $(x_s^i)_{s\in\mathcal{B}\upharpoonright_M,i\in\omega}$ donde $M \in [\mathbb{N}]^\infty$.

Nuestro siguiente objetivo es demostrar que si $\mathcal{B}$ es una barrera uniforme, entonces toda $\mathcal{B}\times\mathbb{N}$-matriz tiene una submatriz que, de alguna manera, converge a una seminorma en c_{00}. Para hacer esto introducimos la siguiente función.

Definición 2.12. Sea X un espacio de Banach y $\mathcal{B}$ una barrera. Para una $\mathcal{B}\times\mathbb{N}$-matriz $(x_s^i)_{s\in\mathcal{B},i\in\omega}$, definimos

$$\begin{aligned} \Xi^n : PL^n(\mathcal{B}) &\to \mathcal{N}_n \\ s &\to \Xi^n(s) \end{aligned}$$

donde $\Xi^n(s)(\sum_{i\leq n} a_i e_i) = \|\sum_{i\leq n} a_i x_{s_i}^i\|$ para todo $a_1,\cdots,a_n \in \mathbb{R}$.

Que esta seminorma $\Xi^n(s)$ es realmente un elemento de $\mathcal{N}_n$ para cada $s \in PL^n(\mathcal{B})$ se sigue de la condición de normalidad en las entradas de la matriz. Obsérvese que la función Ξ^n depende de la matriz dada pero ya que ésta será siempre clara del contexto escribiremos simplemente Ξ^n sin mencionar la matriz.

Antes del siguiente lema, recordamos que dos seminormas $\rho_n \in \mathcal{N}_n$ y $\rho_m \in \mathcal{N}_m$, con $m > n$ se llaman compatibles si $\rho_m \upharpoonright_{\mathbb{R}^n} = \rho_n$.

Teorema 2.13. *Sea X un espacio de Banach, $\mathcal{B}$ una barrera y $(x_s^i)_{s\in\mathcal{B},i\in\omega}$ una $\mathcal{B}\times\mathbb{N}$-matriz en X. Para cada $N \in [\mathbb{N}]^\infty$ existen $M \in [N]^\infty$ y $\rho_n \in \mathcal{N}_n$, para $n \in \mathbb{N}$, tal que las seminormas $\{\rho_n : n \in \mathbb{N}\}$ son compatibles a pares y la función $\Xi^n : PL^n(\mathcal{B} \upharpoonright_M) \to \mathcal{N}_n$ converge a ρ_n, para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. El conjunto M será construido a base de aplicaciones recursivas del Teorema 2.8. Para $n = 1$ obtenemos $M_1 \in [N]^\infty$ y una seminorma ρ_1 tal que la función Ξ^1 converge a ρ_1 en M_1. Ahora, para $1 < n \in \mathbb{N}$, obtenemos recursivamente $M_n \in [M_{n-1}]^\infty$ y una seminorma ρ_n tal que la función Ξ^n converge a ρ_n en M_n. Definimos ahora $m_1 = \text{mín}(M_1)$ y $m_{n+1} = \text{mín}(M_{n+1}/m_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y después tomamos $M = \{m_n : n \in \mathbb{N}\}$. Se sigue de la definición que Ξ^n converge a ρ_n en M para todo $n \in \mathbb{N}$. Para ver que las seminormas $\{\rho_n : n \in \mathbb{N}\}$ son realmente compatibles por pares notemos que si $n < m$, entonces $(s_i)_{i=1}^n \in PL^n(\mathcal{B} \upharpoonright_M)$ para cada $(s_i)_{i=1}^m \in PL^m(\mathcal{B} \upharpoonright_M)$. De esto obtenemos que

$$\begin{aligned} d_n(\rho_n, \rho_m \upharpoonright_{\mathbb{R}^n}) &\leq d_n(\rho_n, \Psi^n((s_i)_{i=1}^n)) + d_n(\Psi^m((s_i)_{i=1}^m)) \upharpoonright_{\mathbb{R}^n}, \rho_m \upharpoonright_{\mathbb{R}^n}) \\ &\leq d_n(\rho_n, \Psi^n((s_i)_{i=1}^n)) + d_m(\Psi^m((s_i)_{i=1}^m)), \rho_m), \end{aligned}$$

para cada $(s_i)_{i=1}^m \in PL^m(\mathcal{B} \upharpoonright_M)$. La conclusión se sigue de que las funciones Ψ^n y Ψ^m convergen a ρ_n y ρ_m, respectivamente, en M y del Lema 2.7. ❑

Corolario 2.14. *Sea X un espacio de Banach, $\mathcal{B}$ una barrera y $(x_s^i)_{s\in\mathcal{B},i\in\omega}$ una $\mathcal{B}\times\mathbb{N}$-matriz en X. Para cada $N \in [\mathbb{N}]^\infty$ existe $M \in [N]^\infty$ tal que $(x_s^i)_{s\in\mathcal{B}\upharpoonright_M,i\in\omega}$ genera un modelo asintótico seminormado.*

Demostración. De acuerdo al Teorema 2.13, si $(x_s^i)_{s\in\mathcal{B},i\in\omega}$ es una $\mathcal{B}\times\mathbb{N}$-matriz en un espacio de Banach X, entonces existe un submatriz $(x_s^i)_{s\in\mathcal{B}\upharpoonright_M,i\in\omega}$ y una sucesión $(\rho_i)_{i\in\omega}$ de seminormas compatibles tal que la función Ξ^n converge a ρ_n en M, para todo $n \in \mathbb{N}$. el hecho de que estas seminormas son compatibles nos permite definir una seminorma $\rho = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \rho_n$ en el espacio vectorial $c_{00}(\mathbb{N})$. Es fácil ver que $(x_s^i)_{s\in\mathcal{B}\upharpoonright_M,i\in\omega}$ genera a $(c_{00}(\mathbb{N}), \rho)$ como modelo asintótico seminormado a través de la base vectorial canónica de éste. ❑

Corolario 2.15 (Brunel-Sucheston). *Sea X un espacio de Banach y $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq X$ una sucesión básica normalizada. Existe $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ tal que $(x_i)_{i\in M}$ genera un modelo spreading.*

Demostración. Usando el corolario anterior con $\mathcal{B} = \mathbb{N}$ y la matriz definida por

$$x_i^j = x_i$$

para $i, j \in \mathbb{N}$. Que genera un espacio de Banach, y no solamente una seminorma, se sigue de que es una sucesión básica y del comentario después del Lema 1.28 sobre subconjuntos cerrados dentro de $\mathcal{N}_k$. $\square$

3. Iteración de Modelos Asintóticos

Empezaremos con algunos resultados técnicos que serán fundamentales para el entendimiento de la iteración finita de modelos asintóticos.

Dado $M = \{m_k : k \in \mathbb{N}\}, N = \{n_k : k \in \mathbb{N}\} \in [\mathbb{N}]^\infty$, denotamos por $T_{M,N}$ a la función $m_k \to n_k$, y para $s = \{m_{k_1}, \cdots, m_{k_l}\} \in [M]^{<\infty}$, entonces escribimos $T_{N,M}(s) = \{n_{k_1}, \cdots, n_{k_l}\}$. Observése que dada una barrera uniforme $\mathcal{F}$ sobre M, $T_{M,N}(\mathcal{F})$ es una barrera uniforme sobre N con la misma uniformidad de $\mathcal{F}$. Omitimos la prueba del siguiente lema sencillo.

Lema 2.16. *Para $M, N \in [\mathbb{N}]^\infty$ y $k \in \mathbb{N}$, tenemos que*

$$T_{M/\{m_k\},N/\{n_k\}}(s) = T_{M,N}(s),$$

para cada $s \in [M]^{<\infty}$ con $s > m_k$.

Teorema 2.17. *Sean $\mathcal{F}, \mathcal{G} \subseteq FIN$ barreras uniformes tales que $\mathcal{G}$ es spreading y $o(\mathcal{F}) \leq o(\mathcal{G})$. Entonces para cada $M, N \in [\mathbb{N}]^\infty$ existe un $L_0 \in [N]^\infty$ tal que*

$$\forall L \in [L_0]^\infty (T_{M,L}(\mathcal{F} \restriction_M) \subseteq \overline{\mathcal{G} \restriction_L}^{\sqsubseteq}).$$

Demostración. La demostración sera por inducción sobre $o(\mathcal{G})$. El caso cuando $o(\mathcal{G}) < \omega$ es directo. Ahora, sea $\alpha < \omega_1$ y asumamos el resultado demostrado para cada barrera con uniformidad$< \alpha$. Sean $\mathcal{F}, \mathcal{G} \subseteq FIN$ barreras uniformes con $o(\mathcal{F}) \leq o(\mathcal{G}) = \alpha$. Fijando $M, N \in [\mathbb{N}]^\infty$. Recursivamente, para cada $k \in \mathbb{N}$ definiremos $L'_k \in [N]^\infty$ y $l_k \in \mathbb{N}$ de tal manera que

1. $L'_0 = N$ y $l_0 = 0$.
2. $l_{k+1} \in L'_k$ para cada $k \in \mathbb{N}$.
3. Para cada $k \in \mathbb{N}$, $L'_{k+1} \in [L'_k/\{l_{k+1}\}]^\infty$ y

$$\forall L \in [L'_{k+1}]^\infty (T_{M/\{m_k\},L}(\mathcal{F}_{\{m_k\}} \restriction_{M/\{m_k\}}) \subseteq \overline{\mathcal{G}_{\{l_k\}} \restriction_L}^{\sqsubseteq}).$$

Para hacer ésta construcción tomamos $n \in \mathbb{N}$ y asumimos que L_i y l_i han sido definidos para todo $i \leq n$. Por definicion de uniformidad debe existir un $l_{n+1} \in L'_n$ tal que $o(\mathcal{F}_{\{m_{n+1}\}}) \leq o(\mathcal{G}_{\{l_{n+1}\}}) < \alpha$. Ahora, aplicamos la hipotesis de induccion a estas barreras con $M/\{m_{n+1}\}$ y $L'_n/\{l_{n+1}\}$ para obtener $L'_{n+1} \in [N]^\infty$ tal que cumpla la conclusión. Veamos que el conjunto $L_0 = \{l_k : k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ satisface la conclusión del teorema. Para hacer esto fijamos $L \in [L_0]^\infty$ y notamos que $L/\{l_k\} \subseteq L'_k$, para todo

$k \in \mathbb{N}$. Después, tomamos $s = \{m_{k_1}, \cdots, m_{k_s}\} \in \mathcal{F} \restriction_M$. Definamos $s' = s/\{m_{k_1}\} \in \mathcal{F}_{\{m_{k_1}\}}$ y denotemos el k_1-ésimo elemento de L por l. Es claro que $l \geq l_{k_1}$. Del lema previo y la clausula (3), se sigue que

$$T_{M,L}(s') = T_{M/\{m_{k_1}\},L/\{l\}}(s') \in \overline{\mathcal{G}_{\{l_{k_1}\}}}^{\sqsubseteq}.$$

Así, $\{l_{k_1}\} \cup T_{M,L}(s') \in \overline{\mathcal{G}}^{\sqsubseteq}$ y, dado que$\mathcal{G}$ es spreading y $l \geq l_{k_1}$, obtenemos

$$T_{M,L}(s) = \{l\} \cup T_{M,L}(s') \in \overline{\mathcal{G}}^{\sqsubseteq}.$$

Lo cual concluye la demostración. ❑

Corolario 2.18. *Sean $\mathcal{F}, \mathcal{G} \subseteq FIN$ barreras uniformes tales que $\mathcal{G}$ es spreading y $o(\mathcal{F}) \leq o(\mathcal{G})$. Si $M, N \in [\mathbb{N}]^\infty$ son tales que $L_0 \in [N]^\infty$ satisface la conclusión del Teorema 2.17, entonces, para cada $L \in [L_0]^\infty$ y cada $s \in \mathcal{G} \restriction_L$ existe un único elemento de $\mathcal{F} \restriction_M$, denotado por $\psi_{L,M}(s)$, que satisface $T_{M,L}(\psi_{L,M}(s)) \sqsubseteq s$.*

Demostración. Fijemos $s \in \mathcal{G} \restriction_L$. Dado que $T_{M,L}(\mathcal{F} \restriction_M)$ es una barrera sobre L_0 existe un $t \in \mathcal{F} \restriction_M$ tal que o $T_{M,L}(t) \sqsubseteq s$ o $s \sqsubset T_{M,L}(t)$. Supongamos que la segunda opción se satisface, entonces por la conclusión del Teorema 2.17 se sigue que existe $s' \in \mathcal{G} \restriction_L$ tal que $s \sqsubset T_{M,L}(t) \sqsubseteq s'$ lo que es imposible dado que $\mathcal{G} \restriction_L$ es una barrera. Por lo tanto, $T_{M,L}(t) \sqsubseteq s$. ❑

Se sigue del Corolario 2.18 que

$$\psi_{L,M} : \mathcal{G} \restriction_L \to \mathcal{F} \restriction_M$$

es una función bien definida, y del Teorema 2.17 resulta que es suprayectiva.

A continuación, veremos que siempre es posible reemplazar una submatriz indexada por una barrera uniforme y generando un cierto modelos asintótico por una indexada por una barrera spreading con la misma uniformidad que genera el mismo modelo. Para hacer esto, primero establecemos algunos resultado preeliminares.

Lema 2.19. *Sea $n \in \mathbb{N}$. Si $L \in [\mathbb{N}]^\infty$ y $M \in [L]^\infty$ satisfacen que*

$$|(m, m') \cap L| \geq n,$$

para cada m, m' en M con $m < m'$, entonces para cada plegma $(t_i)_{i=1}^n$ en M existe un plegma $(t'_i)_{i=1}^n \in [[L]^{<\infty}]^n$ tal que

- *$t'_i \subseteq L/\{max\{j \in M : j < min \bigcup_{i=1}^n t_i\}\}$, para cada $i = 1, \cdots, n$.*
- *$t_i \sqsubseteq t'_i$, para cada $i = 1, \cdots, n$.*
- *$|t'_1| = |t'_2| = \cdots = |t'_n| = |t_n|$.*

Demostración. La demostración es por inducción sobre $|t_n|$. En el caso donde $|t_n| = 1$ tomamos $A = \{1 \leq i \leq n : t_i = \emptyset\}$ y $B = \{1 \leq i \leq n : t_i \neq \emptyset\}$. Para cada $i \in A$ fijamos $l_i \in L \cap (max\{j \in M : j < min \bigcup_{i=1}^{n} t_i\}, min \bigcup_{i=1}^{n} t_i)$ tal que $i < j$ implique $l_i < l_j$. Esto siempre es posible por hipótesis sobre el tamaño de la intersección. Es claro que $t'_i = \{l_i\}$ para cada $i \in A$ y $t'_i = t_i$ para cada $i \in B$ satisfacene la conclusión. Ahora supongamos el resultado demostrado para todo plegma $(t_i)_{i=1}^{n}$ donde $|t_n| = k$ y fijemos un plegma $(r_i)_{i=1}^{n}$ con $|r_n| = k + 1$. Definimos primero $(s_i)_{i=1}^{n}$ de la siguiente manera $s_i = \emptyset$ si $r_i = \emptyset$ y $s_i = r_i \setminus \{min(r_i)\}$ si $r_i \neq \emptyset$. Dado que $|s_n| = k$ podemmos aplicar la hipótesis de indección para obtener $(s'_i)_{i=1}^{n}$ que satisface la conclusión del lema. No es difícil ver que $(r'_i)_{i=1}^{n}$, donde $r'_i = s'_i$ si $r_i = \emptyset$ y $r'_i = s'_i \cup \{min(r_i)\}$ si no, posee las propiedades deseadas. ❑

Antes de enunciar el siguiente lema añadimos este comentario.

Sea $M \in [\mathbb{N}]^{\infty}$ y $n \in \mathbb{N}$. Partimos a M en n subconjuntos infinitos de la siguiente manera:

$$M_j = \{m_i : i \equiv j \text{ mod } n\},$$

para cada $1 \leq j \leq n$. Es fácil ver que si $\mathcal{B}$ sobre M es una barrera spreading y $s_j \in \mathcal{B}$ es el único elemento tal que $s_j \sqsubseteq M_j$, para cada $1 \leq j \leq n$, entonces $(s_j)_{j=1}^{n} \in PL^n(\mathcal{B} \upharpoonright_M)$.

Lema 2.20. *Sean $\mathcal{F}, \mathcal{G} \subseteq FIN$ barreras uniformes tal que $\mathcal{G}$ es spreading y $o(\mathcal{F}) \leq o(\mathcal{G})$ y sean $M, N \in [\mathbb{N}]^{\infty}$. Si $L_0 \in [N]^{\infty}$ satisface la conclusión del Corolario 2.18, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ y para cada $L \in [L_0]^{\infty}$ existe $(s_i)_{i=1}^{n} \in PL^n(\mathcal{G} \upharpoonright L)$ tal que $(\psi_{L_0,M}(s_i))_{i=1}^{n} \in PL^n(\mathcal{F} \upharpoonright M)$.*

Demostración. Primero tomamos $L' = \{l_i : i \equiv 0 \text{ mod n}\}$ donde $L = \{l_i : i \in \mathbb{N}\}$. De acuerdo al Lema 2.7, podemos tomar $(t_i)_{i=1}^{n} \in PL^n(T_{M,L_0}(\mathcal{F} \upharpoonright M) \upharpoonright L')$. Aplicando el Lema 2.19 a $(t_i)_{i=1}^{n}$ obtenemos un plegma $(t'_i)_{i=1}^{n}$ tal que $|t'_1| = |t'_2| = \cdots = |t'_n|$ y $t'_i \in [L]^{<\infty}$, para cada $1 \leq i \leq n$. Ahora, tomando $L'' = L/t'_n = \{l_i : i \geq max(t'_n)\}$ y, para cada $1 \leq i \leq n$, definimos un conjunto

$$L''_i = \{l_j : j - max(t'_n) \equiv i \text{ mod n}\}.$$

Como $\mathcal{G}$ es una barrera, podemos elegir $s_i \in \mathcal{G} \upharpoonright L$ tal que $s_i \sqsubseteq t'_i \cup L''_i$. Dado que $\mathcal{G}$ es spreading se sigue que $(s_i)_{i=1}^{n} \in PL^n(\mathcal{G} \upharpoonright L)$. Afirmamos que $\psi_{L_0,M}(s_i) = T^{-1}_{M,L_0}(t_i)$ para cada $1 \leq i \leq n$. Para ver esto, fijamos $1 \leq i \leq n$. Es suficiente, por definición de$\psi_{L_0,M}$, demostrar que $T_{M,L_0}(T^{-1}_{M,L_0}(t_i)) = t_i \sqsubseteq s_i$. Notando por la construcción que $s_i \sqsubseteq t'_i \cup L''_i$ y $t_i \sqsubseteq t'_i$. Por esto, se sigue que ó $s_i \sqsubset t_i$ ó $t_i \sqsubseteq s_i$. La primera relación es imposible debido a que, por hipótesis, siempre podemos encontrar $s'_i \in \mathcal{G} \upharpoonright L_0$ tal que $t_i \sqsubseteq s'_i$, pero esto implicaría que $s_i \sqsubset s'_i$ lo cual es completamente imposible debido a que $\mathcal{G}$ es una barrera. ❑

Teorema 2.21. *Sea X un espacio de Banach, $\mathcal{F}$ una barrera uniforme y $(x^i_s)_{s \in \mathcal{F} \upharpoonright_M, i \in \omega}$ una $\mathcal{F} \times \mathbb{N}$-submatriz que genera $(e_i)_{i=1}^{\infty}$ como modelo asintótico. Entonces existe una barrera spreading $\mathcal{B}$ con* *la misma uniformidad que $\mathcal{F}$, una $\mathcal{B}\times\mathbb{N}$-matriz $(y_s^i)_{s\in\mathcal{B},i\in\omega}$ y un $N\in[\mathbb{N}]^\infty$ tal que $(y_s^i)_{s\in\mathcal{B}\restriction_N,i\in\omega}$ genera $(e_i)_{i=1}^\infty$ como modelo asintótico.*

Demostración. Es conocido que es posible encontrar una barrera $\mathcal{B}$ con la misma uniformidad que $\mathcal{F}$ (veáse, por ejemplo [**14**]) y sea $L_0\in[\mathbb{N}]^\infty$ dado por el Teorema 2.17. Considerando la función $\psi_{L_0,M}:\mathcal{B}\restriction_{L_0}\to\mathcal{F}$ dada por el Corolario 2.18. Usando ésta función, definimos la $\mathcal{B}\times\mathbb{N}$-submatriz tal que $y_s^i=x^i_{\psi_{L_0,M}(s)}$ para cada $s\in\mathcal{B}\restriction_{L_0}$ y para cada $i\in\mathbb{N}$. Para encontrar N primero fijamos un conjunto arbitrario $N_0\in[L_0]^\infty$ y, usando el Lema 2.20 recursivamente, es posible elegir, para cada $i\in\mathbb{N}$, un subconjunto $N_{i+1}\in[N_i]^\infty$ tal que $\psi_{L_0,M}\restriction_{N_{i+1}}$ manda un elemnto $(s_j)_{j=1}^{i+1}\in PL^{i+1}(\mathcal{B}\restriction_{N_{i+1}})$ a $(\psi_{L_0,M}(s_j))_{j=1}^{i+1}\in PL^{i+1}(\mathcal{F}\restriction_M)$. Ahora tomamos N como una pseudointersección de los N_i's. Notemos que, por definición, para cada $(s_i)_{i=1}^n\in PL^n(\mathcal{B}\restriction_N)$ tenemos

$$\|\sum_{i=1}^n a_i x^i_{\psi_{L_0,M}(s_i)}\|=\|\sum_{i=1}^n a_i y^i_{s_i}\|,$$

para todo $(a_i)_{i=1}^n\in[-1,1]^n$. De esto se sigue fácilmente que la submatriz $(y_s^i)_{s\in\mathcal{B}\restriction_N,i\in\mathbb{N}}$ genera $(e_i)_{i=1}^\infty$ como modelo asintótico. ❑

Como mencionamos después de ésta sección, dada una barrera uniforme $\mathcal{B}$ y $M\in[\mathbb{N}]^\infty$, la función $T_{M,\mathbb{N}}:\mathcal{B}\to FIN$ preserva sucesiones plegma y manda $\mathcal{B}$ a una barrera uniforme con el mismo orden de uniformidad. Por esto, es posible obtener modelos ξ-asintóticos utilizando matrices en lugar de submatrices.

Nótese que cada sucesión básica de X es un elemento de $AM_\xi(X)$ para todo ordinal no cero $\xi<\omega_1$; por esto, muchos espacios de Banach con base de Schauder admiten más modelos asintóticos que modelos spreading. Ahora, denotando por $SP_\xi(X)$ al conjunto de los modelos ξ-asintóticos generados por $\mathcal{B}\times\mathbb{N}$-matrices con la propiedad de $x_s^n=x_s^m$ para $s\in\mathcal{B}$ y $n,m\in\mathbb{N}$. Es fácil ver que $SP_\xi(X)$ es exactamente el conjunto de los modelos ξ-spreading definidos en el artículo [**6**].

En el siguiente teorema, veremos que los modelos spreading y los modelos asintóticos están cercanamente relacionados.

Lema 2.22. *Sea X un espacio de Banach y $0<\xi<\omega_1$. Si $(f_i)_{i\in\omega}\in AM_\xi(X)$, entonces $(f_i)_{i\in M}\in AM_\xi(X)$ para cada $M\in[\mathbb{N}]^\infty$.*

Demostración. Primero tomamos una submatriz $(x_s^i)_{s\in\mathcal{B}\restriction_N,i\in\omega}$ de una $\mathcal{B}\times\mathbb{N}$-matriz en X que genere $(f_i)_{i\in\omega}$ como un modelo ξ-asintótico. Ahora, considerando la $\mathcal{B}\times\mathbb{N}$-matriz $(y_s^i)_{s\in\mathcal{B},i\in\mathbb{N}}$ con entradas $y_s^i=x_s^{m_i}$ si $s\in\mathcal{B}$ y $i\in\mathbb{N}$, donde $\{m_i:i\in\mathbb{N}\}$ ies la numeración creciente de M. No es difícil ver que la submatriz $(y_s^i)_{s\in\mathcal{B}\restriction_N,i\in\omega}$ genera $(f_i)_{i\in M}$ como un modelo asintótico. ❑

TEOREMA 2.23. *Para cualquier ordinal no cero ξ se tienen las siguientes propiedades:*

1. $SP_\xi(X) \subseteq AM_\xi(X)$.
2. *Si $(e_i)_{i\in\omega}$ es un modelo spreading generado por una subsucesión de un elemento de $AM_\xi(X)$, entonces $(e_i)_{i\in\omega} \in SP_{\xi+1}(X)$.*

DEMOSTRACIÓN. (1). Esto se sigue de la definición de modelo ξ-spreading.

(2). En virtud del Lema 2.22, podemos empezar tomando $(f_i)_{i\in\omega} \in AM_\xi(X)$ que genere a $(e_i)_{i\in\omega}$ como un modelo spreading sin necesidad de ir a una sucesión. Adicionalmente, elegimos una $\mathcal{B}\times\mathbb{N}$-submatriz $(x^i_s)_{s\in\mathcal{B}\restriction_N, i\in\omega}$ que genere a $(f_i)_{i\in\omega}$ como un modelo ξ-asintótico donde $\mathcal{B}$ es una barrera ξ-uniforme y $N \in [\mathbb{N}]^\infty$. Ahora, definiendo la $(\mathbb{N}\oplus\mathcal{B})\times\mathbb{N}$-matriz tal que $x^i_{l^\frown s} = x^l_s$ para $i \in \mathbb{N}$ y $l^\frown s \in \mathbb{N}\oplus\mathcal{B}$ y aplicando el Teorema 2.13, sabemos que existe un $M \in [N]^\infty$ tal que Ξ^n converge en M, para cada $n \in \mathbb{N}$, y denotamos el correspondiente modelo spreading por $(h_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Mostraremos que este modelo $(\xi+1)$-spreading es igual a $(e_i)_{i\in\omega}$. De hecho, esto se sigue de la siguiente afirmación:

Afirmación: Para cada $k \in \mathbb{N}$, $m \in M$ y $\epsilon > 0$ existe una sucesión plegma $(n_i^\frown s_i)_{i=1}^k \in PL^k(\mathcal{B}\restriction_{M/m})$ tal que

$$\left| \|\sum_{i\leq k} a_i e_i\|_E - \|\sum_{i=1}^k a_i x^i_{n_i^\frown s_i}\|_X \right| < \epsilon,$$

para todo $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$.

Demostración de la Afirmación: Fijamos $k \in \mathbb{N}$, $m \in M$ y $\epsilon > 0$. Elegimos $\{n_1, n_2, ..., n_k\} \in [M/m]^k$ tal que

$$\left| \|\sum_{i=1}^k a_i e_i\|_E - \|\sum_{i=1}^k a_i f_{n_i}\|_F \right| < \frac{\epsilon}{2},$$

para cada $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$. Ahora, usando la convergencia asintótica y el Lema 2.7, es posible obtener una sucesión plegma $(s_i)_{i=1}^{n_k} \in PL^{n_k}(\mathcal{B}\restriction_{M/n_k})$ tal que

$$\left| \|\sum_{j=1}^{n_k} b_j f_j\|_F - \|\sum_{j=1}^{n_k} b_j x^j_{s_j}\|_X \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

para todo $(b_j)_{j=1}^{n_k} \in [-1,1]^{n_k}$. Fijando $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$ y considerando la sucesión $b_{n_i} = a_i$, para cada $1 \leq i \leq k$, y $b_j = 0$ para $j \notin \{n_1, ..., n_k\}$. Entonces, $(n_i^\frown s_{n_i})_{i=1}^k \in PL^k((\mathbb{N}\oplus\mathcal{B})\restriction_M)$ satisface que

$$
\begin{aligned}
&\left| \|\sum_{i\le k} a_i e_i\|_E - \|\sum_{i=1}^{k} a_i x^i_{n_i^\frown s_i}\|_X \right| \\
&= \left| \|\sum_{i\le k} a_i e_i\|_E - \|\sum_{i\le k} a_i x^{n_i}_{s_i}\|_X \right| \\
&\le \left| \|\sum_{i\le k} a_i e_i\|_E - \|\sum_{i\le k} a_i f_{n_i}\|_F \right| + \left| \|\sum_{i\le k} a_i f_{n_i}\|_F - \|\sum_{i\le k} a_i x^{n_i}_{s_i}\|_X \right| \\
&\le \left| \|\sum_{i\le k} a_i e_i\|_E - \|\sum_{i\le k} a_i f_{n_i}\|_F \right| + \left| \|\sum_{j=1}^{n_k} b_j f_j\|_F - \|\sum_{j=1}^{n_k} b_j x^{j}_{s_j}\|_X \right| \\
&\le \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
\end{aligned}
$$

El resultado se sigue de la desigualdad:

$$
\left| \|\sum_{i\le k} a_i e_i\|_E - \|\sum_{i\le k} a_i h_i\|_H \right| \le
$$

$$
\left| \|\sum_{i\le k} a_i e_i\|_E - \|\sum_{i=1}^{k} a_i x^i_{n_i^\frown s_i}\|_X \right| - \left| \|\sum_{i=1}^{k} a_i x^i_{n_i^\frown s_i}\|_X - \|\sum_{i\le k} a_i h_i\|_H \right|
$$

Además de usando y la Afirmación y la convergencia de$(x^i_{l^\frown s})_{l^\frown s\in(\mathbb{N}\oplus\mathcal{B})/M, i\in N}$ para elegir una sucesión plegma apropiada $(n_i^\frown s_i)_{i=1}^k \in PL^k(\mathcal{B}\restriction_M)$. ❏

Ahora, generalizamos el concepto de una sucesión bloque, en el contexto de $\mathcal{B}\times\mathbb{N}$-matrices, siguiendo las ideas en [**5**].

Definición 2.24. Sea X un espacio de Banach con base de Schauder $(e_i)_{i\in\omega}$. Una $\mathcal{B}\times\mathbb{N}$-matriz $(x^i_s)_{s\in\mathcal{B},i\in\omega}$ en X se llama *matriz plegma bloque* $\mathcal{B}\times\mathbb{N}$ si todas sus entradas son vectores bloque de $(e_i)_{i\in\omega}$ y para cada $n\in\mathbb{N}$ existe una $m\in\mathbb{N}$ tal que para todo $(s_i)_{i=1}^n \in PL^n(\mathcal{B}/m)$ la sucesión $(x^i_{s_i})_{i=1}^n$ es una sucesión bloque de $(e_i)_{i\in\omega}$.

La versión asintótica del Teorema 42 en [**5**] es enunciada en el próximo teorema. Para la demostración necesitaremos los siguiente dos lemas.

Definición 2.25. Sea $\mathcal{B}$ una barrera uniforme, $n\in\mathbb{N}$ y $s\in\mathcal{B}$ tal que $n < s$. Una sucesión $(r_i)_{i=1}^n \in [[\mathbb{N}]^{<\infty}]^n$ se llama $PL^n(\mathcal{B})$*-descomposición* de s si r_i es el único elemento de $\mathcal{B}$ que satisface $r_i \sqsubseteq s-(n-i)$, para todo $1\le i\le n$, y $(r_i)_{i=1}^n \in PL^n(\mathcal{B})$.

En el siguiente lema veremos siempre es posible encontrar familias plegma cuyos elementos tienen descomposiciones con propiedades combinatorias muy fuertes.

Lema 2.26. *Sean $\mathcal{B}$ una barrera spreading uniforme $l, n, m_1, m_2, \cdots, m_n$ elementos de $\mathbb{N}$. Entonces para cada $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ existe $N \in [M]^\infty$ tal que cada $(s_i)_{i=1}^n \in PL^n(\mathcal{B} \restriction_N)$ satisface que s_i tiene una $PL^{m_i}(\mathcal{B})$-descomposición $(r_j^i)_{j=1}^{m_i}$, para todo $1 \leq i \leq n$, y*

$$l < (r_j^1)_{j=1}^{m_1} {}^\frown \cdots {}^\frown (r_j^n)_{j=1}^{m_n} \in PL^{\sum_{i=1}^n m_i}(\mathcal{B}).$$

Demostración. Tomando $k > max\{m_1, m_2, \cdots, m_n\}$ y

$$N = \{m_i : i \equiv 0 \text{ mod } k\}/\{l + k\}.$$

No es difícil ver que N satisface la conclusión. ❑

Teorema 2.27. *Sea $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y $\xi < \omega_1$. Si $(e_i)_{i\in\omega}$ es un modelo k-asintótico generado por una submatriz-$\mathbb{N}^{[k]} \times \mathbb{N}$ plegma bloque en el espacio generado por $(f_i)_{i\in\omega} \in AM_\xi(X)$, entonces $(e_i)_{i\in\omega} \in AM_{\xi+k}(X)$.*

Demostración. Sean $(x_s^i)_{s\in\mathcal{B}, i\in\omega}$ una matriz plegma bloque generando $(f_i)_{i\in\omega}$ como un modelo ξ-asintótico y$(y_t^j)_{t\in[\mathbb{N}]^k, j\in\mathbb{N}}$ una $[\mathbb{N}]^k \times \mathbb{N}$-matriz plegma bloque en $(f_i)_{i\in\omega}$ generando $(e_i)_{i\in\omega}$ como un modelo k-asintótico. Primero, Dado que esta última es una matriz plegma bloque, cada entrada se puede expresar como $y_t^j = \sum_{i=1}^{F_{(t,j)}} a_i^{(t,j)} f_i$, donde $a_i^{(t,j)} \in \mathbb{R}$ para cada $t \in [\mathbb{N}]^k$ y para cada $j \in \mathbb{N}$. Ahora definiremos una $([\mathbb{N}]^k \oplus \mathcal{B}) \times \mathbb{N}$-matriz en X que contendrá una submatriz generando $(e_i)_{i\in\omega}$ como un modelo asintótico. Para hacer esto, tomamos para cada $t^\frown s \in [\mathbb{N}]^k \oplus \mathcal{B}$

$$z_{t^\frown s}^j = \frac{\sum_{i=1}^{F_{(t,j)}} a_i^{(t,j)} x_{r_i}^i}{\| \sum_{i=1}^{F_{(t,j)}} a_i^{(t,j)} x_{r_i}^i \|} \text{ si } \text{máx} F_{(t,j)} \leq s$$

y $(r_i)_{i \leq \text{máx} F_{(t,j)}} \in PL^{\text{máx} F_{(t,j)}}(\mathcal{B})$.

$$z_{t^\frown s}^j = \text{cualquier elemento (fijo) de } S(X) \text{ si no se satisface la condición de arriba,}$$

donde $(r_i)_{i\leq maxF_{(t,j)}}$ es la $PL^{\text{máx} F_{(t,j)}}(\mathcal{B})$-descomposición de s. Por el Teorema 2.13 existe un conjunto infinito $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ tal que la matriz restringida a M converge a una seminorma. Afirmamos que este espacio seminormado es realmente $(e_i)_{i\in\omega}$. De ahí que $(z_{t^\frown s}^j)_{t^\frown s\in\mathcal{B}\restriction M, j\in\mathbb{N}}$ genere $(e_i)_{i\in\omega}$ como un modelo $(\xi + k)$-asintótico. Para empezar a demostrar nuestra afirmación fijamos $\epsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$, y después elegimos $(t_i)_{i=1}^n \in PL^n([\mathbb{N}]^k)$ tal que

$$\left| \| \sum_{i\leq n} b_i e_i \| - \| \sum_{i\leq n} b_i y_{t_i}^i \| \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

para cada $(b_i)_{i=1}^n \in [-1,1]^n$. Ahora, aplicamos el Lema 2.26 con n, $\mathcal{B}$, $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ y los números naturales $\max F_{(t_1,1)}, \max F_{(t_2,2)}, \cdots, \max F_{(t_n,n)}$ para obtener $N \in [\mathbb{N}]$ tal que cada $(s_i)_{i=1}^n \in PL^n(\mathcal{B} \restriction_N)$ satisface:

1. La $PL^{\max F_{(t_i,i)}}(\mathcal{B})$-descomposición de s_i,
$$(r_{(i,v)})_{v \leq \max F_{(t_i,i)}} \in PL^{\max F_{(t_i,i)}}(\mathcal{B}),$$
para cada $i \leq n$.
2. $(r_{(0,v)})^\frown_{v\leq \max F_{(t_0,0)}}(r_{(1,v)})^\frown_{v\leq \max F_{(t_1,1)}} \cdots {}^\frown (r_{(n,v)})_{v\leq \max F_{(t_n,n)}}$ es un elemento de $PL^{\sum_{i\leq n} \max F_{(t_i,i)}}(\mathcal{B})$.
3. $l < r_{(0,v)}$ for $l \in \mathbb{N}$.

Notemos también que $(t_i{}^\frown s_i)_{i=1}^n \in PL^n([\mathbb{N}]^k \oplus \mathcal{B})$. Por esto, al tomar $l \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, obtenemos que

$$\left| \|\sum_{i\leq n} b_i e_i\| - \|\sum_{i=1}^n b_i z^i_{t_i{}^\frown s_i}\| \right| \leq$$
$$\left| \|\sum_{i\leq n} b_i e_i\| - \|\sum_{i\leq n} b_i y^i_{t_i}\| \right| + \left| \|\sum_{i\leq n} b_i y^i_{t_i}\| - \|\sum_{i=1}^n b_i z^i_{t_i{}^\frown s_i}\| \right|$$
$$\leq \frac{\epsilon}{2} + \left| \|\sum_{i=1}^n b_i \sum_{j\in F_{(t_i,i)}} a_j^{(t_i,i)} f_j\| - \|\sum_{i=1}^n b_i \frac{\sum_{j\in F_{(t_i,i)}} a_j^{(t_i,i)} x^j_{r_{(i,j)}}}{\|\sum_{j\in F_{(t_i,i)}} a_j^{(t_i,i)} x^j_{r_{(i,j)}}\|}\| \right|$$

para todo $(b_i)_{i=1}^n \in [-1,1]^n$. Podemos hacer el segundo sumando menor que $\frac{\epsilon}{2}$. Para esto, tomando $(s_i)_{i=1}^n \in PL^n(\mathcal{B})$ con l suficientemente grande, obtenemos:

$$\left| \|\sum_{j\in F_{(t_i,i)}} a_j^{(t_i,i)} x^j_{r_{(i,j)}}\| - 1 \right| = \left| \|\sum_{j\in F_{(t_i,i)}} a_j^{(t_i,i)} x^j_{r_{(i,j)}}\| - \|\sum_{j\in F_{(t_i,i)}} a_j^{(t_i,i)} f_j\| \right| \leq \frac{\epsilon}{4n}$$

para cada $1 \leq i \leq n$. Lo que nos da,

$$\left| \|\sum_{i=1}^n b_i \sum_{j\in F_{(t_i,i)}} a_j^{(t_i,i)} f_j\| - \|\sum_{i=1}^n b_i \frac{\sum_{j\in F_{(t_i,i)}} a_j^{(t_i,i)} x^j_{r_{(i,j)}}}{\|\sum_{j\in F_{(t_i,i)}} a_j^{(t_i,i)} x^j_{r_{(i,j)}}\|}\| \right|$$
$$\leq \left| \|\sum_{i=1}^n b_i \sum_{j\in F_{(t_i,i)}} a_j^{(t_i,i)} f_j\| - \|\sum_{i=1}^n b_i \sum_{j\in F_{(t_i,i)}} a_j^{(t_i,i)} x^j_{r_{(i,j)}}\| \right|$$
$$+ \left| \|\sum_{i=1}^n b_i \sum_{j\in F_{(t_i,i)}} a_j^{(t_i,i)} x^j_{r_{(i,j)}}\| - \|\sum_{i=1}^n b_i \frac{\sum_{j\in F_{(t_i,i)}} a_j^{(t_i,i)} x^j_{r_{(i,j)}}}{\|\sum_{j\in F_{(t_i,i)}} a_j^{(t_i,i)} x^j_{r_{(i,j)}}\|}\| \right|$$

Dado que $(y_t^j)_{t\in[\mathbb{N}]^k, j\in\mathbb{N}}$ es una matriz plegma bloque, se sigue que

$$F_{(t_0,0)} < F_{(t_1,1)} < \cdots < F_{(t_n,n)}.$$

Así, “cortando” algunos de los elementos en (2), consideramos r definido como

$$(r_{(0,v)})^\frown_{v\leq \text{máx}\, F_{(t_0,0)}}(r_{(1,v)})^\frown_{\text{máx}\, F_{(t_0,0)}v\leq \text{máx}\, F_{(t_1,1)}}\cdots^\frown(r_{(n,v)})_{\text{máx}\, F_{(t_{n-1},n-1)}v\leq \text{máx}\, F_{(t_n,n)}}$$

el cual es un elemento de $PL^{\text{máx}\, F_{(t_n,n)}}(\mathcal{B})$. Entonces, concluimos que el primer sumando de la desigualdad previa está acotado por

$$d_{\text{máx}\, F_{(t_n,n)}}(< f_i >_{i=1}^{\text{máx}\, F_{(t_n,n)}}, \Phi(r))$$

, donde $< f_i >_{i=1}^{\text{máx}\, F_{(t_n,n)}}$ denota el elemento de $\mathcal{N}_{\text{máx}\, F_{(t_n,n)}}$ que herada su norma, yesto se puede hacer menor que $\frac{\epsilon}{4}$ aplicando la hipótesis de convergencia de $(x_s^i)_{s\in\mathcal{B},i\in\omega}$. Usando este hecho, nuestra desigualdad previa se transforma en:

$$\begin{aligned}
&< \frac{\epsilon}{4} + \|\sum_{i=1}^{n} b_i \sum_{j\in F_{(t_i,i)}} a_j^{(t_i,i)} x^j_{r_{(i,j)}} - \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\sum_{j\in F_{(t_i,i)}} a_j^{(t_i,i)} x^j_{r_{(i,j)}}}{\|\sum_{j\in F_{(t_i,i)}} a_j^{(t_i,i)} x^j_{r_{(i,j)}}\|}\| \\
&< \frac{\epsilon}{4} + \|\sum_{i=1}^{n} b_i \sum_{j\in F_{(t_i,i)}} a_j^{(t_i,i)} x^j_{r_{(i,j)}} [1 - \frac{1}{\|\sum_{j\in F_{(t_i,i)}} a_j^{(t_i,i)} x^j_{r_{(i,j)}}\|}]\| \\
&< \frac{\epsilon}{4} + n\left|\|\sum_{j\in F_{(t_i,i)}} a_j^{(t_i,i)} x^j_{r_{(i,j)}}\| - 1\right| \leq \frac{\epsilon}{4} + n\frac{\epsilon}{4n} = \frac{\epsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Para cada $(b_i)_{i=1}^n \in [-1,1]^n$. ❑

Fue demostrado en [**5**, Th. 68] que existe un espacio de Banach X sin ningún ℓ_p como modelo spreading de ningún orden. Así, podemos concluir del Teorema 2.23 que X no tiene ℓ_p como modelos asintótico de ningún orden. Además, del Teorema 2.27 se desprende que si tenemos una cadena $(e_j^{i+1})_{j\in\mathbb{N}} \in AM(\overline{(e_j^i)_{j\in\mathbb{N}}})$, para cada $i \leq n$, entonces $(e_j^n)_{j\in\mathbb{N}} \in AM_n(\overline{(e_j^0)_{j\in\mathbb{N}}})$. Juntando estas dos observaciones podemos concluir el resultado parcial anunciado al inicio de éste capítulo, es decir:

Corolario 2.28. *Existe un espacio de Banach X tal que para cada cadena finita de modelos asintóticos $X = X_0, X_1, \cdots, X_n$, con X_{i+1} modelo asintótico bloque de X_i, se tiene que X_n no es isomorfo ni a c_0, ni a ℓ_p para $p \in [1,\infty)$.*

4. Matrices Débilmente Nulas

Es bien sabido que, en un espacio de Banach con base de Schauder, cada modelo spreading generado por una sucesión débilmente nula puede ser generado también por una sucesión bloque de la base. Esta situación se puede extender al caso de los modelos asintóticos como es mostrado en el siguiente teorema, para lograr esto primero recordamos una definición en [**20**]:

Definición 2.29. Una matriz $(x_i^n)_{i\in\mathbb{N},n\in\mathbb{N}}$ se llama *matriz débilmente nula* si:

$$(x_i^n)_{i\in\mathbb{N}}$$

es una sucesión débilmente nula, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 2.30. *Sea $(x_i^n)_{i\in\mathbb{N},n\in\mathbb{N}}$ una matriz débilmente nula generando $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ como un modelos asintótico. Entonces existe una matriz plegma bloque $(y_i^n)_{i\in\mathbb{N},n\in N}$ que genera $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ como modelo asintótico.*

Demostración. Usando una estrategia clásica, comúnmente llamada "gliding hump" en la literatura, podemos obtener sucesiones bloque $(y_i^n)_{i\in\mathbb{N}}$ y $(k_i^{n+1})_{i\in\mathbb{N}}$ (cada una subsucesión bloque de la anterior) tal que

$$\|y_i^{n+1} - x_{k_i^{n+1}}^{n+1}\| \leq \frac{1}{2^{(n+1)+i+1}},$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Veamos que $(y_i^n)_{i\in\mathbb{N},n\in\mathbb{N}}$ genera $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ como modelo asintótico. Esto se sigue de la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned}
&\left| \| \sum_{i=1}^{l} a_i f_i \| - \| \sum_{i=1}^{l} a_i y_{s(i)}^i \| \right| \\
&\leq \left| \| \sum_{i=1}^{l} a_i f_i \| - \| \sum_{i=1}^{l} a_i x_{k_{s(i)}}^i \| \right| + \left| \| \sum_{i=1}^{l} a_i x_{k_{s(i)}}^i \| - \| \sum_{i=1}^{l} a_i y_{s(i)}^i \| \right| \\
&\leq \left| \| \sum_{i=1}^{l} a_i f_i \| - \| \sum_{i=1}^{l} a_i x_{k_{s(i)}}^i \| \right| + \frac{1}{2^{s(1)}},
\end{aligned}$$

para un conjunto finito dado $s = \{s(1), s(2), \cdots, s(l)\}$ de numeros naturales y para todo $(a_i)_{i=1}^l \in [-1, 1]$. Notemos que el primer sumando puede hacerse arbitrariamente pequeño usando la suposición sobre la matriz $(x_i^n)_{i\in\mathbb{N},n\in\mathbb{N}}$. Así, $(y_i^n)_{i\in\mathbb{N},n\in\mathbb{N}}$ gerena $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ como modelos asintótico. ∎

Es fácil ver de los Teoremas 2.27 y 2.30 que cada cadena finita de modelos asintóticos generados por matrices débilmente nulas (dentro de sus respectivos espacios de Banach) se puede reemplazar por una cadena de matrices bloque. Este comentario nos lleva al siguiente corolario.

Corolario 2.31. *Existe un espacio de Banach X tal que ninguna cadena finita de modelos asintóticos débilmente generados $X_1, X_2, \cdots, X_n$ tal que $X_1 = X$ tiene como espacio de Banach terminal l_p para $p \in [1, \infty)$ o c_0.*

Terminamos este capítulo enlistando algunas preguntas relevantes que son el equivalente asintótico a conocidas preguntas sobre spreading models.

PREGUNTA 2.32. *Para dos distintos $\xi < \eta < \omega_1$ ¿existe un espacio de Banach X tal que*

$$AM_\xi(X) \neq AM_\eta(X) \text{ ?}$$

Para un $\mathcal{F} \subseteq FIN$ y $t \in FIN$ denotamos $\mathcal{F}_t = \{s \in FIN : t < s \text{ and } t^\frown s \in \mathcal{F}\}$. Si $B \subseteq FIN$ es una barrera uniforme, es sabido que para cada $t \in FIN$ tal que $\mathcal{B}_t$ tiene uniformidad mayor que uno es posible encontrar $s \in FIN$ tal que $\mathcal{B}_{t^\frown s}$ tiene uniformidad exactamente uno.

En el artículo [**1**] fue demostrado que cada conjunto numerable de spreading models tiene una cota superior en el preorden de dominación [1]. Esto fue generalizado en [**37**] estableciendo esta misma propiedad en $SM_w^\xi(X)$, donde $SM_w^\xi(X)$ denota la familia de todos los modelos ξ-spreading de un espacio de Banach X generado por $\mathcal{F}$-sucesiones subordinadas débilmente nulas. En particular, si este conjunto contiene una sucesión creciente de tamaño ω, entonces contiene una sucesión creciente de tamaño ω_1. Teniendo en cuenta esto, es natural considerar la siguiente clase de matrices débilmente nulas.

DEFINICIÓN 2.33. Sea $\mathcal{B}$ una barrera uniforme. Una $\mathcal{B} \times \mathbb{N}$-matriz $(x_s^n)_{s\in\mathcal{B},n\in\mathbb{N}}$ es llamada *débilmente nula* si para cada $n \in \mathbb{N}$ y para cada $s \in FIN$ tal que $\mathcal{B}_s$ es de uniformidad uno

$$(x^n_{s^\frown i})_{i\in\mathbb{N}/s}$$

es una matriz débilmente nula.

Entonces, nos podemos preguntar si el conjunto $AM_w^\xi(X)$ de modelos asintóticos generados por matrices débilmente nulas es también una semi-lattice con el orden pre-parcial de dominación.

En las siguientes preguntas, fijamos $\xi < \eta < \omega_1$.

PREGUNTA 2.34. *Sean $\mathcal{B}$ una barrera de uniformidad ξ y X un espacio de Banach con base de Schauder. Si X admite un único, en el sentido isométrico, modelo asintótico de nivel ξ para toda $\mathcal{B} \times \mathbb{N}$-matriz normalizada plegma bloque.*

¿ Debe X contener una copia isomórfica de ese espacio ?

Es sabido que si X admite un único, en el sentido isométrico, modelo asintótico de nivel ξ este modelo asintótico debe ser c_0 o ℓ_p para algún $1 \leq p < \infty$.

[1] Dadas dos sucesiones básicas $(x_i)_{i=1}^\infty$ y $(y_i)_{i=1}^\infty$ diremos que $(y_i)_{i=1}^\infty$ *domina a* $(x_i)_{i=1}^\infty$ si existe un $K \in \mathbb{R}$ tal que

$$\|\sum_{i=1}^n a_i x_i\| \leq K \|\sum_{i=1}^n a_i y_i\|$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ y $(a_i)_{i=1}^n \subseteq \mathbb{R}^n$.

PREGUNTA 2.35. *¿Puede la estructura ξ-asintótica de un espacio de Banach arbitrario X ser estabilizada ?*

En la temática de distorsión de espacios de Banach, podemos formular la siguiente pregunta:

PREGUNTA 2.36. *¿Puede la distorsión de ℓ_p $(1 \leq p < \infty)$ ser extendida a su estructura ξ-asintótica ? Es decir, existen una $K > 1$ y una norma equivalente $|||\cdot|||$ en $\ell_p$tal que ningún modelo ξ-asintótico de ésta renorma es K-equivalente a la base canónica unitaria de ℓ_p ?*

Capítulo 3

Un Conjunto Normante

1. Introducción

La motivación de éste último capítulo surge de varios lugares, de los cuales podemos remarcar los siguientes dos:

El primero empieza al analizar el conjunto normante del espacio de Tsirelson. Recordemos de manera general que dado un conjunto normante W y un elemento $f \in W$, se sigue de la definición de la norma de un funcional lineal que

$$\|f\|_{X_W^*} \leq 1.$$

En un caso particular, es conocido que la bola unitaria del espacio dual al espacio de Tsirelson (es decir, del espacio original de Tsirelson) se puede obtener como

$$B_{\mathcal{T}^*} = \overline{conv(W_{\mathcal{T}})},$$

donde la cerradura denotada por la línea superior en la parte derecha de la igualdad es en la topología de la convergencia puntual. Esto nos deja, por un lado, con un conocimiento geométrico de la bola unitaria del espacio dual de Tsirelson y, por otro lado, con un conocimiento analítico de la bola unitaria del espacio de Tsirelson (a través de la norma como el supremo de las evaluaciones de una cantidad numerable de funcionales). Nuestra primera motivación fue intentar obtener una forma de revertir los papeles a través de un conjunto normante cuidadosamente elegido, aunque ésta meta no ha sido concretada hemos logrado obtener resultados alentadores en esta dirección. Investigación de este tipo, con ideas distintas, se puede apreciar por ejemplo en el artículo [**35**].

La segunda motivación viene de una pregunta abierta importante dentro del estudio de los espacios de Banach, el llamado "problema de la distorsión acotada" el cual pregunta si existe un espacio de Banach distorsionable pero cuya distorsión sea acotada (recomendamos al lector para más información sobre el tema de distorsión los artículos [**27**] y [**15**]). Se conjetura que los mejores candidatos a cumplir ésta propiedad son tanto el espacio de Tsirelson como su espacio dual. Es natural pensar que un entendimiento más profundo de ambas bolas unitarias ayudará a responder ésta pregunta como, por ejemplo, extraer del conjunto normante usual de Tsirelson ($W_{\mathcal{T}}$) un subconjunto de los funcionales cuya norma no es solamente menor que uno, sino mayor que $(1 - \epsilon)$

para algún $\epsilon > 0$. Esto ha sido logrado en parte en el Corolario 3.14 en la tercera sección de éste capítulo.

2. Arboles de Análisis

El concepto de un árbol de análisis para un funcional dentro de ciertos conjuntos normantes ayuda enormemente en la comprensión de las propiedades que se desean para la construcción de bases de Schauder. Por este motivo dedicamos una sección pequeña a la descripción de estos de manera formal y general. Un útil análisis informal de ellos se puede encontrar en [**7**].

Definición 3.1. Dado un conjunto no vacío $L \subseteq c_{00}(\mathbb{N})$ definimos recursivamente el conjunto de arboles finitos bloque con hojas en L (denotado por $\mathcal{A}(L)$), junto con una función soporte (que denotaremos *supp*) y una función "sucesores inmediatos de" (que denotaremos por s) de la siguiente manera:

1. $L \subseteq \mathcal{A}(L)$ y, para cada $l \in L$:
   - l no tiene sucesores inmediatos. Es decir, $s(l) = \emptyset$.
2. Para $n \in \mathbb{N}$, si $(t_i)_{i=1}^n \subseteq \mathcal{A}(L)$ con $supp(t_i) < supp(t_{i+1})$ para cada $1 \leq i \leq n-1$. Entonces
   - $t = \{t_i : i \leq n\} \in \mathcal{A}(L)$.
   - $supp(t) = \bigcup_{i=1}^n supp(t_i)$.
   - Los sucesores inmediatos de t son $s(t) = \{t_i : i \leq n\}$. Es decir, t es precisamente el conjunto de sus sucesores inmediatos.

Para $r, t \in \mathcal{A}(L)$, decimos que *r es nodo de t* (o *r es subárbol de t*) y escribimos $r \lhd t$ si existe una cadena finita $r_1, r_2, \cdots r_k \in \mathcal{A}(L)$ tal que

$$r \in r_1 \in r_2 \in \cdots \in r_k \in t.$$

Por simplicidad denotamos solamente por $\mathcal{A}$ al conjunto de arboles finitos bloque con hojas en $G_0 = \{\pm e_i^* : i \in \mathbb{N}\}$.

Informalmente, $\mathcal{A}(L)$ es el conjunto de todos los árboles finitos tales que los elementos máximales son los miembros de L y todos los nodos tienen la propiedad de que sus sucesores inmediatos son una sucesión bloque. Para ligar este concepto a los conjuntos normantes necesitamos la siguiente definición.

Definición 3.2. Sea $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{A}$ y $\mathcal{I} : \mathcal{H} \to c_{00}$. Llamaremos a $\mathcal{I}$ *una interpretación vectorial* de $\mathcal{H}$ y denotaremos por $W_{(\mathcal{H},\mathcal{I})}$ a la imagen de $\mathcal{H}$ a través de $\mathcal{I}$. Para cada $f \in c_{00}$ y $h \in \mathcal{I}^{-1}(f)$, diremos que h es un *árbol de análisis* de f a través de $\mathcal{I}$.

Ahora estamos listos para reconstruir el conjunto normante del espacio de Tsirelson en estos terminos. Para esto, dada una barrera $\mathcal{B}$, es necesario definir el conjunto de los *arboles $\mathcal{B}$-admisibles* de la siguiente manera:

Si el árbol $t \in \mathcal{A}$ cumple que para todos sus nodos $r \triangleleft t$, se tiene que

$$\{min(supp(d)) : d \in s(r)\} \in \overline{\mathcal{B}}^{\sqsubseteq},$$

entonces t es $\mathcal{B}$-admisible. Denotaremos este conjunto por $\mathcal{A}_{\mathcal{B}}$. Los arboles del espacio de Tsirelson son dados por $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ y la interpretación se obtiene de la siguiente manera recursiva:

1. Para $\pm e_i^* \in G_0$ tenemos que $\mathcal{I}_{\mathcal{S}}(\pm e_i^*) = \pm e_i^*$.
2. Para $t \in \mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ tenemos que $\mathcal{I}_{\mathcal{S}}(t) = \frac{1}{2} \sum_{r \in s(t)} \mathcal{I}_{\mathcal{S}}(r)$.

De manera análoga es posible encontrar subconjuntos del conjunto $\mathcal{A}$ relevantes para cada uno de los conjuntos normantes definidos en el capítulo uno, junto con su respectiva interpretación.

3. Un Nuevo Conjunto Normante

Los espacios conocidos ahora como "Espacios tipo Tsirelson con restricciones" están siendo estudiados ampliamente, por ejemplo, en los recientes artículos [**2**] y [**10**]. Nuestro espacio entra de alguna manera en ese concepto pero es de naturaleza distinta. Como es usual en el área, el conjunto normante será definido por un procedimiento numerablemente recursivo, de tal que manera que cada paso utiliza los elementos del paso previo y cada elemento del conjunto normante vendrá equipado con un peso, el cual estará relacionado con sus arboles de análisis.

Definición 3.3. Para cada $2 < m \in \mathbb{N}$, definimos el conjunto normante $W_{(RIS,2,m)}$ por recursión, construyendo al mismo tiempo para cada elemento de este conjunto una *función de pesos* (denotada por P) que le asignará un elemento de $FIN \cup \{\infty\}$. Para el primer paso,

- $W_0 := G_0 = \{\pm e_i^* : i \in \mathbb{N}\}$.
- $P(\pm e_i^*) = \{\infty\}$ para cada $i \in \mathbb{N}$.

Ahora, asumimos construido el conjunto W_k con su correspondiente asignación de pesos. Para el siguiente paso, primero usaremos W_k para construir un conjunto auxiliar W_k' aplicando a este la siguiente operación:

Si $(f_i)_{i=1}^n \subseteq W_k$ satisface

1. $n > m$.
2. Existe $l \in P(f_{i+1})$ tal que $max(supp(f_i)) < l$ para $i = 1, 2, \cdots, n-1$.

entonces $f = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i \in W'_k$ y $n \in P(f)$. Tomamos así

$$W_{k+1} = W_k \cup W'_k$$

como el paso recursivo necesario en nuestra construcción. Finalmente,

$$W_{(RIS,2,m)} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} W_k.$$

Para cada $f \in W_{(RIS,2,m)}$ definimos su *altura* como $h(f) = min\{k : f \in W_k\}$.

Los arboles de análisis (que denotaremos por $\mathcal{A}_{(RIS,2,m)}$) y la interpretación relevante (que denotaremos por $\mathcal{I}_{(RIS,2,m)}$) se obtienen fácilmente de manera análoga a este proceso recursivo.

En lo sucesivo, nos referiremos a una sucesión $(f_i)_{i=1}^{n} \subseteq W_{(RIS,2,m)}$ tal que $f = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i$ como una *descomposición de f con peso n*. Además, la notación $w(f)$ denotará un número natural dentro del conjunto de pesos de $f \in W_{(RIS,2,m)}$, cuya elección será siempre clara dentro del contexto. Notemos también directamente de la definición que $w(f) \geq m$ para cada $f \in W_{(RIS,2,m)}$. Remarcamos además que la siguiente desigualdad se mantiene para cada descomposición $(f_i)_{i=1}^{n}$:

$$max(supp(f_{j+k})) > min(supp(f_{j+k})) + w(f_{j+k}).$$

Observese que la segunda condición que define el conjunto auxiliar W'_k se refiere a, lo que ha sido llamado, una "sucesión rápidamente creciente" (una "rapidly increasing sequence") en el artículo por T. Gowers y B. Maurey [**19**] [1]. Esta condición ha sido previamente usada en la construcción de espacios de Banach a los que se les conoce como"Espacios de Tsirelson con restricciones". Es también necesario notar que, al contrario de la mayoría de los conjuntos normantes de espacios tipo Tsirelson, se tiene que si $f \in W_{(RIS,2,m)}$ y $E \subseteq \mathbb{N}$ no es necesariamente cierto que $f\restriction_E \in W_{(RIS,2,m)}$.

De acuerdo al comentario después de la Definición 1.13, la norma es entonces definida como

$$\|x\|_{W_{(RIS,2,m)}} = sup\{f(x) : f \in W_{(RIS,2,m)}\}$$

para cada $x \in c_{00}$ y el espacio $X_{W(RIS,2,m)}$ será la completación de esta norma. No es difícil ver que la base canónica de c_{00} denotada por $(e_i)_{i=1}^{\infty}$ es una base de Schauder incondicional para el espacio $X_{W(RIS,2,m)}$. Aunque esta norma se evalua como un supremo de un conjunto infinito, en el caso de los vectores de soporte finito tenemos la siguiente información útil.

[1]De aquí el subíndice RIS de nuestro conjunto normante

Lema 3.4. *Si $x \in c_{00}$ es tal que $\|x\|_{W_{(RIS,2,m)}} = 1$, entonces existe un $f \in W_{(RIS,2,m)}$ tal que $f(x) = 1$.*

Demostración. Para obtener nuestra conclusión probaremos que $\|x\|_{W_{(RIS,2,m)}}$ se puede obtener como el supremo de las evaluaciones a través de una cantidad finita de funcionales. Primero acotaremos la altura máxima necesaria de un funcional "normante" de x demostrando que para cada $f \in W_{(RIS,2,m)}$ existe un $f' \in W_{(RIS,2,m)}$ tal que

- $f(x) \leq f'(x)$.
- $h(f') \leq max(supp(x)) + 1$.

Para lograr esto demostraremos por recursión que existe $f' \in W_{(RIS,2,m)}$ que posee un árbol de análisis t de tal modo que las siguientes condiciones se cumplen:

- $f(x) \leq f'(x)$.
- $supp(f') \subseteq supp(f)$.
- Para todo nodo $r \prec t$ se tiene que o bien $r \in G_0$ o existen $r_1, r_2 \in s(r)$ con
$$supp(r_i) \cap supp(x) \neq \emptyset$$
para $i = 1, 2$.

Una f' con estas características cumple forzosamente $h(f') \leq max(supp(x)) + 1$, puesto que por la tercera propiedad, por cada nodo que no sea maximal existen dos elementos distintos i_1 e i_2 en el soporte de x. Así, la altura máxima de un nodo de t no puede ser mayor que $|supp(x)| \leq max(supp(x)) + 1$.

Comencemos entonces la demostración. Si $f = \pm e^*_{k_0}$, entonces tomando $f' = f$ y el árbol de análisis que consta simplemente de la hoja $\pm e^*_{k_0}$ se tiene que las propiedades deseadas se mantienen. Ahora si $f \in W_{(RIS,2,m)}$ es de altura $k+1$, entonces f se puede expresar como

$$f = \frac{2}{w(f)} \sum_{i=1}^{w(f)} f_i.$$

Dividimos ahora esta suma en tres conjuntos disjuntos $H_0 = \{i \leq w(f) : supp(f_i) \cap supp(x) = \emptyset\}$, $H_1 = \{i \leq w(f) : |supp(f_i) \cap supp(x)| = 1\}$ y $H_2 = \{i \leq w(f) : |supp(f_i) \cap supp(x)| \geq 2\}$. Tomamos ahora el funcional

$$f' = \frac{2}{w(f)} \left(\sum_{i \in H_0} e^*_{min(supp(f_i))} + \sum_{i \in H_1} sgn(e^*_{k_i}(x)) e^*_{k_i} + \sum_{i \in H_2} f'_i \right),$$

donde k_i denota el único elemento en la intersección $supp(f_i) \cap supp(x)$. Las dos últimas propiedades se siguen fácilmente, para la primera se puede obtener comparando la partición de la suma de f' de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2}{w(f)} \sum_{i=1}^{w(f)} f_i(x) \\ &= \frac{2}{w(f)} \left(\sum_{i\in H_0} f_i(x) + \sum_{i\in H_1} f_i(x) + \sum_{i\in H_2} f_i(x) \right) \\ &\leq \frac{2}{w(f)} \left(\sum_{i\in H_0} e^*_{min(supp(f_i))}(x) + \sum_{i\in H_1} sgn(e^*_{k_i}(x)) e^*_{k_i}(x) + \sum_{i\in H_2} f'_i(x) \right), \end{aligned}$$

remarcando que la desigualdad intermedia se sigue del hecho de que

$$f_i(x) = f_i(e^*_{k_i}(x) e_{k_i}) \leq sgn(e^*_{k_i}(x)) e^*_{k_i}(x),$$

para cada $i \in H_1$.

Ahora, como segundo paso, demostraremos la siguiente afirmación: Para cada $f \in W_{(RIS,2,m)}$ tal que $supp(f) \cap supp(x) \neq \emptyset$ existe $g \in W_{(RIS,2,m)}$ satisfaciendo las siguientes propiedades:

(1) $supp(g) \subseteq ran(f) \cap [0, [h(f) + 1] max(supp(x))]$.
(2) $h(g) \leq h(f)$.
(3) $f(x) \leq g(x)$.
(4) Se cumple que o bien $g \in G_0$ o $w(g) = \text{mín}\{max(supp(x)), w(f)\}$.

Haremos esto nuevamente por inducción sobre la altura de f. Supongamos que f tiene altura cero. Usando que la intersección de f con el soporte de x es no vacía sabemos que $f = \pm e^*_i$ para algún $i \in supp(x)$. Tomando $g = f$ es claro que se satisface la conclusión.

Para el paso inductivo tomemos $f \in W_{(RIS,2,m)}$ de altura $k + 1$. Se sigue que f tiene una descomposición

$$f = \frac{2}{w(f)} \sum_{i=1}^{w(f)} f_i,$$

en donde la altura de cada f_i es a lo más k. Definimos $i_0 = \text{máx}\{i : supp(f_i) \cap supp(x) \neq \emptyset\}$ y $a = \text{mín}\{max(supp(x), w(f))\} - i_0$ si esta resta es positiva y $a = 0$ en el otro caso. Después aplicamos la hipótesis de inducción a f_{i_0} obteniendo g_0 satisfaciendo las condiciones (1)−(4). De (1) tenemos que la sucesión resultante de concatenar $(f_i)_{i=1}^{i_0-1}$, (g_0) y $(sgn(e^*_i(x))e^*_i)_{i=max(supp(g_0))+1}^{max(supp(g_0))+a}$ es una sucesión bloque. Por (4) sabemos que ésta sucesión es admisible (notando que $max(supp(f_{i_0-1})) < \text{mín}\{max(supp(x)), w(f_{i_0})\}$. Nuestro candidato será el funcional

$$g = \frac{1}{\text{mín}\{max(supp(x), w(f))\}} \left(\sum_{i=1}^{i_0-1} f_i + g_0 + \sum_{i=max(supp(g_0))+1}^{max(supp(g_0))+a} sgn(e^*_i(x)) e^*_i \right) \in W_{(RIS,2,m)}.$$

Las condiciones (2),(3) y (4) se cumplen de manera evidente. Para (1) notemos que la siguiente cadena de desigualdades se mantiene

$$\begin{aligned} max(supp(g)) &\leq max(supp(g_0)) + a \\ &\leq (h(f_{i_0}) + 1)max(supp(x)) + max(supp(x)) \\ &\leq ([h(f_{i_0}) + 1] + 1)max(supp(x)) \\ &\leq (h(f) + 1)max(supp(x)). \end{aligned}$$

De donde se sigue fácilmente la contención

$$supp(g) \subseteq [0, (h(f) + 1)max(supp(x))].$$

Falta solamente observar que $supp(g) \subseteq ran(f)$. Esto se sigue de las desigualdades

$$\begin{aligned} max(supp(g)) &\leq max(supp(g_0)) + a \\ &\leq max(supp(f_{i_0})) + a \\ &\leq max(supp(f)), \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se obtiene de notar que cada uno de los elementos de la sucesión $(f_i)_{i=i_0+1}^{w(f)}$ al menos añade un elemento al rango de f, de los cuales hay $w(f) - i_0 \geq a$ de ellos.

Para finalizar la demostración para $f \in W_{(RIS,2,m)}$ obtenemos un $f' \in W_{(RIS,2,m)}$, como en la primera parte, y posteriormente para este funcional f' encontramos $g \in W$, como en la segunda parte, y observamos que g satisface lo siguiente:

- $f(x) \leq g(x)$.
- $h(g) \leq max(supp(x)) + 1$.
- $supp(g) \subseteq ran(f) \cap [0, [max(supp(x)) + 2]max(supp(x))]$.

Con esto probamos que con sólo una cantidad finita de funcionales se puede obtener el supremo de las evualuaciones, y de aquí se sigue el resultado deseado. ❏

Demostraremos que $X_{W(RIS,2,m)}$ no admite un subespacio isomorfo ni a c_0 y ni a ningún ℓ_p para $p \geq 1$. La prueba se dividirá en estos dos casos respectivos, para el caso c_0 es necesario el siguiente lema técnico.

Lema 3.5. *Sea $x \in c_{00}$ de norma uno y $f \in W_{(RIS,2,m)}$ tal que $f(x) = 1$. Entonces existe un $f' \in W_{(RIS,2,m)}$ tal que:*

- *$ran(f') \subseteq ran(x)$.*
- *$w(f') \geq min(supp(x))$.*

- $f'(x) \geq \frac{1}{2}(1 - \frac{4}{m})$.

Demostración. No hay nada que hacer cuando $f \in G_0$. Supongamos entonces que $f \notin G_0$. Por hipótesis sabemos que

$$f = \frac{2}{l} \sum_{i=1}^{l} f_i$$

y, de esto, obtenemos

$$1 = f(x) = \frac{2}{l} \sum_{i=1}^{l} f_i(x).$$

Denotando por i_0 al elemento mínimo del conjunto $\{i \,:\, supp(f_i) \cap supp(x) \neq \emptyset\}$ y por i_1 a su máximo. Dado que $l \geq m$, la siguiente desigualdad se obtiene

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{4}{m}\right) \leq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2f_{i_0}(x)}{m} - \frac{2f_{i_1}(x)}{m}\right) \leq \frac{1}{l} \sum_{i=1, i\neq i_0, i\neq i_1}^{l} f_i(x).$$

Así que debe existir un$j \leq l$ tal que $f_j(x) \geq \frac{1}{2}(1 - \frac{4}{m})$. Es claro que este f_j satisface las condiciones del Lema. ❏

Teorema 3.6. *Ninguna sucesión bloque normalizada dentro de $X_{W(RIS,2,m)}$ es equivalente a la base canónica de c_0. De aquí concluimos que $X_{W(RIS,2,m)}$ no admite subespacios isomorfos a c_0.*

Demostración. Supongamos que $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es K-equivalente a $(e_i^{c_0})$ para algún $K \in \mathbb{R}$. En particular se cumple la siguiente desigualdad:

$$\|\sum_{i\in E} x_i\|_W \leq K$$

para cada $E \subseteq \mathbb{N}$. Definiremos recursivamente para cada $n \in \mathbb{N}$ una subsucesión bloque $(x_i^n)_{i\in\mathbb{N}}$ de $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ y una sucesión $(g_i^n)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq W_{(RIS,2,m)}$ tal que:

1. Para cada $i \in \mathbb{N}$, $ran(g_i^n) \subseteq ran(x_i^n)$ y $w(g_i^n) \geq min(supp(x_i^n))$.
2. $g_i^n(x_i^n) \geq 2^n[\frac{1}{2}(1 - \frac{4}{m})]$.
3. Para cada $i \in \mathbb{N}$ existe un conjunto finito $E_i^n \subseteq \mathbb{N}$ tal que $\sum_{i\in E_i^n} x_i = x_i^n$.

Al terminar esta construcción la contradicción se seguirá de (2) junto con la definición de la norma. Comencemos entonces la recursión. Para el caso $n = 0$, usando que cada x_i está normalizado, tomemos para cada i en $\mathbb{N}$, un $f_i \in W$ tal que $f_i(x_i) = 1$. Ahora, tomamos $x_i^0 = x_i$ y obtenemos

g_i^0 aplicando el Lema 3.5 a f_i y x_i. Es claro que estas sucesiones tienen las propiedades deseadas. Procedemos ahora con el caso $n = l + 1$. Tomamos

$$x_1^{l+1} = \sum_{j=1}^{min(supp(x_1^l))} x_j^l$$

y

$$g_1^{l+1} = \frac{2}{min(supp(x_1^l))} \sum_{j=1}^{min(supp(x_1^l))} g_j^l.$$

Para definir x_{i+1}^{l+1} junto con g_{i+1}^{l+1}, primero definimos $r_0 = min\{r \in \mathbb{N} : x_i^{n+1} < x_r^n\}$ y después

$$x_{i+1}^{l+1} = \sum_{j=r_0}^{r_0+min(supp(x_r^n))-1} x_j^l$$

y

$$g_{i+1}^{l+1} = \frac{2}{min(supp(x_r^n))} \sum_{j=r_0}^{r_0+min(supp(x_r^n))-1} g_j^l.$$

Notemos que

$$max(supp(g_j^l)) < max(ran(x_j^l)) < min(supp(x_{j+1}^l)) \leq w(g_{j+1}^l).$$

Esto implica que la operación es permisible y por ello $g_{i+1}^{l+1} \in W_{(RIS,2,m)}$. La propiedad (2) se sigue de un cálculo técnico simple y el inciso (3) se obtiene trivialmente. Para el inciso (1), es claro que $ran(g_i^l) \subseteq ran(x_i^l)$ y para la desigualdad faltante basta observar que la identidad

$$min(supp(x_{i+1}^{l+1})) = min(supp(x_{r_0}^l))$$

se cumple. ❏

Nuestra siguiente meta será demostrar que el espacio $X_{W(RIS,2,m)}$ no admite subespacios isomorfos a ℓ_p. Esto se obtendrá demostrando la afirmación mas fuerte de que este espacio es asintóticamente c_0[2]. Para justificar esto será necesario hacer calculos técnicos con la norma dentro de los cuales los siguientes resultados y nociones serán importantes.

Lema 3.7. *Dado un $f \in W_{(RIS,2,m)} \setminus G_0$ y $(g_i)_{i\leq n} \subseteq W_{(RIS,2,m)}$ una descomposición de f. Sea $E = \{g_i : g_i \notin G_0\}$ enumerado como $\{f_i : i \leq r\}$ de tal forma que $f_1 < f_2 < \cdots < f_r$. Si $j, k \in \mathbb{N}$ satisface $j + k \leq r$, Entonces:*

$$w(f_{(j+k)}) > 2^{k-1} max(supp(f_j)).$$

[2]Es decir, existe $K \in \mathbb{R}$ tal que cada subsucesión bloque $(x_i)_{i=1}^n$ de $(e_i)_{i=n}^\infty$ es K-equivalente a c_0.

Demostración. Demostraremos que

$$min((supp(f_{(j+k)}))), w(f_{(j+k)}) > 2^{k-1}max(supp(f_j))$$

por inducción sobre k para un j fijo. El caso $k = 1$ se sigue directamente de la definición de una descomposición. Para el caso inductivo $k + 1$ notemos que

$$min(supp(f_{j+k+1})), w(f_{(j+k+1)}) > max(supp(f_{j+k}))$$

y usando el comentario justo después de la definición de descomposición, se sigue que

$$max(supp(f_{j+k})) > min(supp(f_{j+k})) + w(f_{j+k}) > 2^k max(supp(f_j)),$$

donde la tercera desigualdad se obtiene de la hipótesis de inducción. ❑

Del anterior teorema se sigue el siguiente resultado:

Corolario 3.8. *Sea* $(f_i)_{i=1}^l \subseteq W_{(RIS,2,m)}$ *como en el teorema anterior,* $E = \{i \leq l : f_i \notin G_0\}$ *y* $i_0 = min(E)$. *Entonces*

$$\sum_{i \in E \setminus \{i_0\}} \frac{1}{w(f_i)} \leq \frac{2}{max(supp(f_{i_0}))}.$$

Los siguiente conjuntos nos ayudarán a controlar las evaluaciones de un funcional dado.

Definición 3.9. Si $(f_j)_{j=1}^r, (y_i)_{i=1}^s \subseteq c_{00}$ son dos sucesiones bloque, entonces definimos los conjuntos

$$\begin{aligned} E_{0,\{y_1,y_2,\ldots,y_s\}}^{\{f_1,f_2,\ldots,f_r\}} &:= \{j \leq r : \exists i \leq s(supp(f_j) \cap supp(y_i) \neq \emptyset)\}, \\ E_{1,\{y_1,y_2,\ldots,y_s\}}^{\{f_1,f_2,\ldots,f_r\}} &:= \{j \in E_{0,y}^f : \exists! i \leq s(supp(f_j) \cap supp(y_i) \neq \emptyset)\} \text{ y} \\ E_{2,\{y_1,y_2,\ldots,y_s\}}^{\{f_1,f_2,\ldots,f_r\}} &:= E_{0,\{y_1,y_2,\ldots,y_s\}}^{\{f_1,f_2,\ldots,f_r\}} \setminus E_{1,\{y_1,y_2,\ldots,y_s\}}^{\{f_1,f_2,\ldots,f_r\}}. \end{aligned}$$

Además, para cada $i \leq s$

$$B_{y_i}^{\{f_1,f_2,\ldots,f_r\}} := \{j \in E_{1,\{y_1,y_2,\ldots,y_s\}}^{\{f_1,f_2,\ldots,f_r\}} : supp(f_j) \cap supp(y_i) \neq \emptyset\}.$$

Cuando $f = \sum_j^r d_j f_j$ y $y = \sum_i^s c_i y_i$, donde $c_i, d_j \in \mathbb{R}$, y sea claro del contexto a que sucesión bloque nos estamos refiriendo, escribiremos simplemente $E_{k,y}^f = E_{k,\{y_1,y_2,\ldots,y_s\}}^{\{f_1,f_2,\ldots,f_r\}}$ para $k \in \{0, 1, 2\}$, y $B_{y_i}^f = B_{y_i}^{\{f_1,f_2,\ldots,f_r\}}$.

Para cada $j \in E_{1,y}^f$ denotamos por y_f^j al único $i \leq t$ tal que $supp(f_j) \cap supp(y_i) \neq \emptyset$. No es difícil ver que las siguientes relaciones se cumplen:

$$E_{0,y}^f = E_{1,y}^f \cup E_{2,y}^f, |E_{0,y}^f| \leq r, \ , \ |E_{2,y}^f| \leq s \text{ and } E_{1,y}^f = \bigcup_{i=1}^s B_{y_i}^f, \tag{3.1}$$

donde la última unión es disjunta. Las primeras dos y la cuarta son evidentes, la tercera se sigue de que al asignación $j \to$ mín$\{i \in s : supp(f_j) \cap supp(y_i) \neq \emptyset\}$, para cada $j \in E^f_{2,y}$, es inyectiva.

La afirmación que $X_{W(RIS,2,m)}$ es asintóticamente c_0 se seguirá del siguiente teorema. Para enunciarlo es necesario introducir un tipo especial de vectores relacionados con la definición del espacio de Tsirelson.

Definición 3.10. : Dado un espacio de Banach X con base de Schauder $(e_i)_{i=1}^{\infty}$ y una subsucesión bloque $(x_i)_{i=1}^{\infty} \subseteq X$ definimos los $\mathcal{T}(\mathcal{S}, \frac{1}{2})$-vectores basados en $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ recursivamente:

1. Si i está en $\mathbb{N}$ entonces x_i es un $\mathcal{T}(\mathcal{S}, \frac{1}{2})$-vector de altura zero.
2. Si $(y_i)_{i=1}^{n}$ es una sucesión $\mathcal{S}$-admisible (veáse Definición 1.19) de $\mathcal{T}(\mathcal{S}, \frac{1}{2})$-vectores, entonces $y = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} y_i$ es un $\mathcal{T}(\mathcal{S}, \frac{1}{2})$-vector de altura $max\{h(y_i) + 1 : i \leq n\}$.

De esta definición podemos ver que los $\mathcal{T}(\mathcal{S}, \frac{1}{2})$-vectores son aquellos que se obtiene de aplicar la Tsirelson-operación (véase [**40**]) empezando con una subsucesión bloque, y el conjunto normante usual del espacio de Tsirelson es $\mathcal{T}(\mathcal{S}, \frac{1}{2})$ basado en G_0 (véase [**7**]).

Teorema 3.11. *Sea $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ una subsucesión bloque normalizada de $(e_i^X)_{i=1}^{\infty}$ y $c = (4log_2(m^2)+10)$. Supongamos que $m \in \mathbb{N}$ satisface $\frac{c+4m+8}{m^2} \leq \frac{1}{2}$ y $\frac{c}{m} \leq 1$. Entonces, para cada $f \in W_{(RIS,2,m)}$ y $y \in \mathcal{T}(\mathcal{S}, \frac{1}{2})$ basado en $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ tenemos que*

$$|f(y)| \leq 1 + \frac{c}{w(f)}.$$

Como una consecuencia de esto, obtenemos que para cada $y \in \mathcal{T}(\mathcal{S}, \frac{1}{2})$ se tiene lo siguiente:

$$\|y\|_W \leq 1 + \frac{c}{m}.$$

Demostración. Procederemos por inducción sobre la altura de f en $W_{(RIS,2,m)}$ con $y \in \mathcal{T}(\mathcal{S}, \frac{1}{2})$ arbitrario.

Primeros asumamos que $f \in G_0$, es decir, f tiene altura cero. Dado y en $\mathcal{T}(\mathcal{S}, \frac{1}{2})$, notando que es un vector bloque del espacio generado por $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ y que $|supp(f)| = 1$, concluimos que o bien $f(y) = 0$ o existe un único $i_0 \in \mathbb{N}$ con

$$f(y) = f(c_{i_0} x_{i_0}) \leq c_{i_0}\|x_{i_0}\|_{W_{(RIS,2,m)}} \leq 1,$$

donde $c_{i_0} \in [-1, 1]$. En cualquier caso la conclusión del teorema se obtiene para el caso cero.

Para el paso de inducción fijamos f in $W_{(RIS,2,m)}$ de altura $n+1$. Tomemos cualquier $y \in \mathcal{T}(\mathcal{S}, \frac{1}{2})$. Si y es de altura 0 (esto es, y es de la forma $\pm x_i$ para algún $i \in \mathbb{N}$), usando la definición de la norma y el hecho de que la sucesión está normalizada, tenemos que

$$f(y) \leq \|x_i\|_W = 1.$$

Ahora asumimos que $y = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s} y_i$ con $(y_i)_{i=1}^{s} \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{S}, \frac{1}{2})$ y $k \leq min(supp(y))$. Sabemos que

$$\begin{aligned} f(y) &= \frac{2}{w(f)} \sum_{j=1}^{w(f)} f_j(y) \\ &= \frac{2}{w(f)}\Big(\sum_{j\in E^f_{1,y}\setminus F} f_j(y) + \sum_{j\in E^f_{2,y}\setminus F} f_j(y) + \sum_{j\in F} f_j(y)\Big), \end{aligned}$$

donde F denota o bien los primeros $[log_2(m^2)] + 2$ elementos del conjunto $E^f_{0,y}$ si su cardinalidad es suficientemente grande, o $F = E^f_{0,y}$ si $|E^f_{0,y}| < [log_2(m^2)] + 2$, lo que haría las primeras dos sumas vacías. Acotaremos cada sumando de manera separada. Antes de continuar, quisieramos remarcar la siguiente desigualdad útil que se obtiene a base de aplicar el Lema 3.7 y el Corolario 3.8 :

$$\sum_{j\in E^f_{0,y}\setminus F} \frac{1}{w(f_j)} \leq \frac{2}{max(supp(f_{max(F)}))} \leq \frac{2}{2^{[log_2(m^2)]} max(supp(f_{min(F)}))} \leq \frac{2}{m^2 s}. \tag{3.2}$$

Para acotar el primer sumando, usamos la hipótesis de inducción aplicada a cada $j \in E^f_{1,y}$. Tenemos que f_j intersecta exactamente un y^j_f, y de ésta forma obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{j\in E^f_{1,y}\setminus F} f_j(\frac{1}{2} y^j_f) &\leq \frac{1}{2}\Big(|E^f_{1,y} \setminus F| + \sum_{j\in E^f_{1,y}\setminus F} \frac{c}{w(f_j)}\Big) \\ &\leq \frac{|E^f_{1,y}|}{2} + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Para el tercer sumando, usando hipótesis de inducción y el hecho de que $w(g) \geq m$ para cada g in $W_{(RIS,2,m)}$, tenemos que

$$\sum_{j\in F} f_j(y) \leq |F|(1 + \frac{c}{m}) \leq ([log_2(m^2)] + 2)(1 + \frac{c}{m}).$$

Para acotar el segundo sumando se requiere un poco más de trabajo. Para cada $j \in E^f_{2,y} \setminus F$, el funcional f_j será considerado de manera individual. Dado que $f_j \in E^f_{2,y}$ tenemos que su soporte debe intersectar el soporte de al menos dos diferentes y_i's, lo cual garantiza que $f_j \in W_{(RIS,2,m)} \setminus G_0$. Por esto $f_j = \frac{2}{w(f_j)} \sum_{k=1}^{w(f_j)} f_{j,k}$ y así

$$f_j(y) = \frac{2}{w(f_j)} \sum_{k=1}^{w(f_j)} f_{j,k}(y).$$

A continuación analizaremos esta suma mas detalladamente usando los conjuntos $E^{f_j}_{1,y}$ y $E^{f_j}_{2,y}$ para dividir la suma en dos pedazos como sigue

$$f_j(y) = \frac{2}{w(f_j)}\Big(\sum_{k\in E^{f_j}_{1,y}} f_{j,k}(\frac{1}{2}y^k_{f_j}) + \sum_{k\in E^{f_j}_{2,y}} f_{j,k}(y)\Big).$$

Usando las relaciones de 3.1 en la Definición 3.9 subdividimos aún mas esta suma (recordemos que $y^k_{f_j}$ denota el único elemento de $(y_i)^s_{i=1}$ tal que $supp(f_{j,k}) \cap supp(y_i) \neq \emptyset$ para cada $k \in E^{f_j}_{1,y}$):

$$\begin{aligned}
f_j(y) &= \frac{2}{w(f_j)}\Big(\sum_{i=1}^{s}\sum_{k\in B^{f_j}_{y_i}} f_{j,k}(\frac{1}{2}y_i) + \sum_{k\in E^{f_j}_{2,y}} f_{j,k}(y)\Big)\\
&\le \frac{2}{w(f_j)}\Big(\sum_{i=1}^{s}\sum_{k\in B^{f_j}_{y_i}} f_{j,k}(\frac{1}{2}y_i) + |E^{f_j}_{2,y}|(1+\frac{c}{m})\Big)\\
&\le \frac{2}{w(f_j)}\Big(\sum_{\substack{i\in s,\\ |B^{f_j}_{y_i}|\ge m}}\sum_{k\in B^{f_j}_{y_i}} f_{j,k}(\frac{1}{2}y_i) + \sum_{\substack{i\in s,\\ |B^{f_j}_{y_i}|< m}}\sum_{k\in B^{f_j}_{y_i}} f_{j,k}(\frac{1}{2}y_i) + |E^{f_j}_{2,y}|(1+\frac{c}{m})\Big)\\
&\le \frac{2}{w(f_j)}\Big(\sum_{\substack{i\in s,\\ |B^{f_j}_{y_i}|\ge m}}\sum_{k\in B^{f_j}_{y_i}} f_{j,k}(\frac{1}{2}y_i) + \frac{1}{2}sm(1+\frac{c}{m}) + |E^{f_j}_{2,y}|(1+\frac{c}{m})\Big)\\
&\le \frac{2}{w(f_j)}\Big(\sum_{\substack{i\in s,\\ |B^{f_j}_{y_i}|\ge m}}\frac{|B^{f_j}_{y_i}|}{2}\frac{2}{|B^{f_j}_{y_i}|}\sum_{k\in B^{f_j}_{y_i}} f_{j,k}(\frac{1}{2}y_i) + sm + s2\Big).
\end{aligned}$$

Ahora aplicaremos la hipótesis de inducción a los funcionales $\frac{2}{|B^{f_j}_{y_i}|}\sum_{k\in B^{f_j}_{y_i}} f_{j,k} \in W_{(RIS,2,m)}$ cuyo peso es $|B^{f_j}_{y_i}|$, lo cual es posible dado que su altura es a lo más n. De esto, obtenemos

$$\begin{aligned}
f_j(y) &\le \frac{2}{w(f_j)}\Big(\sum_{\substack{i\in s,\\ |B^{f_j}_{y_i}|\ge m}}\frac{|B^{f_j}_{y_i}|}{4}\Big(1+\frac{c}{|B^{f_j}_{y_i}|}\Big) + s(m+2)\Big)\\
&\le \frac{2}{w(f_j)}\Big(\frac{|E^{f_j}_{1,y}|}{4} + \frac{sc}{4} + s(m+2)\Big)\\
&\le \frac{1}{2} + 2s(\frac{c}{4}+m+2)\frac{1}{w(f_j)}.
\end{aligned}$$

Sumando ahora sobre todo $j \in E^f_{2,y} \setminus F$ tenemos que

$$\sum_{j\in E^f_{2,y}\setminus F} f_j(y) \le \frac{|E^f_{2,y}|}{2} + 2s(\frac{c}{4}+m+2)\sum_{j\in E^f_{2,y}\setminus F}\frac{1}{w(f_j)}.$$

Esta desigualdad, junto con el comentario (2), establece las desigualdades

$$\begin{aligned}\sum_{j\in E^f_{2,y}\setminus F} f_j(y) &\le \frac{|E^f_{2,y}|}{2} + \frac{c+4m+8}{m^2}\\ &\le \frac{|E^f_{2,y}|}{2} + \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Así, juntando las tres cotas:

$$\begin{aligned} f(y) &= \frac{2}{w(f)}\Big(\sum_{j\in E^f_{1,y}\setminus F} f_j(y) + \sum_{j\in E^f_{2,y}\setminus F} f_j(y) + \sum_{j\in F} f_j(y)\Big)\\ &\le \frac{2}{w(f)}\Big(\frac{|E^f_{1,y}|}{2} + \frac{1}{2} + \frac{|E^f_{2,y}|}{2} + \frac{1}{2} + 2(log_2(m^2)+2)\Big)\\ &\le \frac{2}{w(f)}\Big(\frac{|E^f_{1,y}|}{2} + \frac{|E^f_{2,y}|}{2} + 2(log_2(m^2)+5\Big)\\ &\le 1 + \frac{c}{w(f)}.\end{aligned}$$

Con esto concluimos la demostración. ❏

Corolario 3.12. *El espacio* $X_{W_{(RIS,2,m)}}$ *es* $2(1+\frac{c}{m})$*-asintóticamente* c_0.

Demostración. Sea $(x_i)_{i=1}^n \subseteq X_{W_{(RIS,2,m)}}$ una sucesión bloque normalizada de vectores tal que $n \le supp(x_1)$. Tenemos que

$$\|\sum_{i=1}^n a_i x_i\| \le sup\{|a_i| : i \le n\}\|\sum_{i=1}^n x_i\| \le sup\{|a_i| : i \le n\}2(1+\frac{c}{m})$$

para todo $(a_i)_{i=1}^n \subseteq \mathbb{R}^n$. ❏

Corolario 3.13. *Ningún subespacio de* $X_{(RIS,2,m)}$ *es isomorfo a algún* ℓ_p.

Demostración. Por el Corolario 3.12 la única posibilidad sería que c_0 tuviera una copia dentro de $X_{W(RIS,2,m)}$, esto no es posible por el Teorema 3.6. ❏

El Teorema 3.11 nos da información sobre la norma de algunos vectores de nuestro conjunto normante dentro del espacio de Tsirelson. Esto lo podemos apreciar dentro del siguiente corolario.

Corolario 3.14. *La siguiente desigualdad se mantiene*

$$\|f\|_{\mathcal{T}} \le 1 + \frac{c}{m},$$

para todo $f \in W_{(RIS,2,m)}$. Además, si f tiene un árbol de análisis en el que toda operación es $\mathcal{S}$-admisible, se tiene que

$$1 \leq \|f\|_{\mathcal{T}} \leq 1 + \frac{c}{m}.$$

Demostración. La cota superior se sigue directamente al aplicar el Teorema 3.11 a la sucesión $(e_i)_{i=1}^{\infty}$. Para la cota inferior construiremos recursivamente sobre la altura de $f \in W_{(RIS,2,m)}$ un elemento $x_f \in W_{\mathcal{T}}$ que satisfaga

1. $supp(x_f) \subseteq supp(f)$.
2. $f(x_f) = 1$.

Cuando f es de altura cero, sabemos que $f = \pm e_i^*$ para algún $i \in \mathbb{N}$, por lo que podemos tomar $x_f = \pm e_i$. En el caso cuando $f \in W_{(RIS,2,m)}$ sea de altura $k+1$, sabemos entonces que

$$f = \frac{2}{w(f)} \sum_{i=1}^{w(f)} f_i,$$

donde la descomposición viene de un árbol de análisis como en la hipótesis y se cumple cumple $w(f_i) \leq k$ para cada $i \leq w(f)$. Es claro que los f_i también cumplen la hipótesis y, por lo tanto, existe x_{f_i} que cumplen la hipótesis de inducción, para cada $1 \leq i \leq w(f)$. Por lo cual el vector

$$x_f = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{w(f)} x_{f_i}$$

tiene las características deseadas. ❏

Describimos ahora un forma sencilla de obtener funcionales que cumplen con las condiciones de éste último corolario. Para esto consideremos el conjunto de los arboles que llamaremos "Schreier completos de cardinalidad hereditaria mayor que m". Es decir, los arboles $t \in \mathcal{A}$ que cumplen para todo nodo $r \triangleleft t$ lo siguiente:

1. $\{\text{mín}(supp(u)) : u \in s(r)\} \in \mathcal{S}$.
2. $|s(r)| = |r| \geq m$.

Todo árbol t con éstas características satisface que

$$t \in \mathcal{A}_{(RIS,2,m)} \cap \mathcal{A}_{\mathcal{S}} \text{ y } < \mathcal{I}_{(RIS,2,m)}(t), \mathcal{I}_{\mathcal{S}}(t) >= 1.$$

De hecho, ésta observación es la causante principal que motivó la investigación del espacio arriba definido.

Es fácil extraer del Corolario 3.14 una comparación de nuestra norma con la norma del espacio dual al espacio de Tsirelson:

Corolario 3.15. *Para toda $x \in c_{00}(\mathbb{N})$ se cumple $\|x\|_{W_{(RIS,2,m)}} \leq (1 + \frac{c}{m})\|x\|_{\mathcal{T}^*}$.*

4. El Espacio $X_{W(RIS,2,m)}$ es $(2\left(1 - \frac{4}{m}\right)^2 - \epsilon)$-distorsionable

Recordemos que un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ es *D-distorsionable* si existe una norma $|||\cdot|||$ en X equivalente a $\|\cdot\|$ tal que todo subespacio de Banach infinito dimensional $Y \leq X$ satisface:

$$sup\left\{\frac{|||x|||}{|||y|||} : x, y \in Y(\|x\| = \|y\| = 1)\right\} \geq D.$$

Para distorsionar nuestro espacio necesitamos los siguientes conjuntos normantes

$$Z_N = \{f \in W_{(RIS,2,m)} : \exists K \in w(f)(K \geq N)\}, \text{ en donde } N > m.$$

Demostraremos que $\|\cdot\|_{Z_N}$ es una distorsión de $\|\cdot\|_{W_{(RIS,2,m)}}$. Primero estableceremos la equivalencia entre ambas normas. La contención entre los conjuntos normantes nos asegura que

$$\|x\|_{Z_N} \leq \|x\|_{W_{(RIS,2,m)}},$$

para cada $x \in c_{00}(\mathbb{N})$. Para la desigualdad restante ocuparemos el siguiente lema.

Lema 3.16. *Si $f \in W_{(RIS,2,m)}$ y $x \in c_{00}$, entonces existe $f' \in Z_N$ tal que*

$$f(x) \leq \left(\frac{N}{m}\right) f'(x).$$

Como una consecuencia se tiene que

$$\|x\|_{W_{(RIS,2,m)}} \leq \left(\frac{N}{m}\right) \|x\|_{Z_N}.$$

Por lo tanto, las normas $\|\cdot\|_{W_{(RIS,2,m)}}$ y $\|\cdot\|_{Z_N}$ son $\frac{N}{m}$-equivalentes.

Demostración. Si $w(f) \geq N$, entonces podemos elegir $f' = f$. Ahora, asumamos que $w(f) \leq N$. Esto implica, en particular, que $f \notin G_0$. Lo cual nos permite tomar una descomposición $f = \frac{2}{w(f)} \sum_{i=1}^{w(f)} f_i$. Fijando ahora un conjunto $\{k_j : j = 1, \cdots, N - w(f)\} \subseteq \mathbb{N} \setminus (supp(x) \cup supp(f))$ podemos definir

$$f' = \frac{2}{N}\left(\sum_{i=1}^{w(f)} f_i + \sum_{j=1}^{N-w(f)} e^*_{k_j}\right) \in W_{(RIS,2,m)} \cap Z_N.$$

Es claro que $f(x) \leq \frac{N}{w(f)} f'(x)$, lo que inmediatamente implica la conclusión del lema. ❑

La demostración de la distorsión requiere un cierto tipo de vectores especiales, relacionados con la base canónica de c_0, los cuales que serán descritos a continuación.

Si $(y_i)_{i=1}^l$ es una subsucesión bloque normalizada de $(e_i^{X_{W(RIS,2,m)}})_{i=1}^\infty$ que sea $(1+\epsilon)$-equivalente a $(e_i^{c_0})_{i=1}^l$, entonces nos referiremos al vector $y = \sum_{i=1}^l y_i$ como un (l, ϵ, c_0)- *promedio*.

Lema 3.17. *Para cada (l,ϵ,c_0)-promedio $y=\sum_{i=1}^{l} y_i$ existe un $f\in W_{(RIS,2,m)}$ tal que*

- *$ran(f)\subseteq ran(y)$,*
- *$f(y)\geq(1-\frac{4}{m})$,*
- *$l\in w(f)$.*

De aquí se sigue la desigualdad

$$(1+\epsilon)\geq\|y\|_{W_{(RIS,2,m)}}\geq\|y\|_{Z_N}\geq(1-\frac{4}{m})$$

para cada $N>l$.

Demostración. Por el lema 3.4 tomamos para cada $i=1,\cdots,l$ un $f_i\in W_{(RIS,2,m)}$ tal que

$$f_i(y_i)=1.$$

Aplicamos ahora el Lema 3.5 a cada una de estas f_i (con su respectiva y_i) para obtener $f_i'\in W_{(RIS,2,m)}$ como en la conclusión del mismo lema. No es difícil ver que $f'=\frac{2}{l}\sum_{i=1}^{l} f_i'\in W_{(RIS,2,m)}$ satisface lo deseado. ❏

Teorema 3.18. *La norma $\|\cdot\|_{W_{(RIS,2,m)}}$ es $(2\left(1-\frac{4}{m}\right)^2-\epsilon)$-distorsionable para cada $\epsilon>0$.*

Demostración. Sea $(e_i)_{i=1}^{\infty}$ la base de Schauder del espacio de Banach $(X_{W(RIS,2,m)},\|\cdot\|_{W_{(RIS,2,m)}})$. Tomamos $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ una subsucesión bloque normalizada de esta. Fijemos $\epsilon>0$ y eligimos $N\in\mathbb{N}$ y $\delta>0$ tal que

$$\frac{2}{(1+2\delta)(1+\delta)^2}\leq(2-\epsilon)\text{ y }\frac{2}{N}(\frac{m^2}{2}+m(1+\frac{c}{m}))\leq\delta.$$

Construiremos dos vectores $x,y\in<\{x_i:i\in\mathbb{N}\}>$ que satisfagan

$$\|x\|_{W_{(RIS,2,m)}}=\|y\|_{W_{(RIS,2,m)}}=1$$

y

$$\frac{\|x\|_{Z_N}}{\|y\|_{Z_N}}\geq\frac{2(1-\frac{4}{m})}{(1+2\delta)(1+\delta)^2}.$$

Para definir x primero notemos que, por el Teorema de Krivine ([**23**]) y el Corolario 3.12, es posible obtener un sucesión bloque $N<(y_i)_{i=1}^{N}$ que sea $(1+\delta)$-equivalente a $(e_i^{c_0})_{i=1}^{N}$. Lo cual nos permite tomar un (N,δ,c_0)-promedio $\sum_{i=1}^{N} y_i$ para posteriormente definir

$$x=\frac{\sum_{i=1}^{N} y_i}{\|\sum_{i=1}^{N} y_i\|_{W_{(RIS,2,m)}}}.$$

Aplicando el Lema 3.17 obtenemos

$$1 \geq \|x\|_{Z_N} \geq \frac{1-\frac{4}{m}}{1+\delta}.$$

Para construir el vector y tomamos una subsucesión bloque $(z_i)_{i=1}^m$, definida recursivamente cada uno de manera análoga al vector x (como en el párrafo anterior), satisfaciendo:

- z_1 es un (m, δ, c_0)-promedio normalizado.
- z_{i+1} es un $(max(supp(z_i)), \delta, c_0)$-promedio tal que $z_{i+1} > z_i$.

Nuevamente, usando el Lema 3.17, obtenemos para cada $i = 1, \cdots, m$ un funcional $f_i \in W_{(RIS,2,m)}$ que cumple:

- $f_i(z_i) \geq \frac{1-\frac{4}{m}}{1+\delta}$.
- $ran(f_i) \subseteq ran(z_i)$ para $i = 1, \cdots, m$.
- $m \in w(f_1)$.
- $max(supp(f_i)) \in w(f_{i+1})$ para $i = 1, \cdots, m-1$.

Tomamos $y = \frac{z}{\|z\|_{W_{(RIS,2,m)}}}$ donde

$$z = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} z_i.$$

Para acotar superioramente a $\|y\|_{Z_N}$ encontraremos una cota superior para $\|z\|_{Z_N}$ y una cota inferior para $\|z\|_{W_{(RIS,2,m)}}$. Para la cota inferior necesaria, es importante notar que $f = \frac{2}{m}\sum_{i=1}^m f_i \in W_{(RIS,2,m)}$. Por lo tanto, usando el Teorema 3.11, obtenemos

$$\|z\|_{W_{(RIS,2,m)}} \geq f(z) \geq \frac{1-\frac{4}{m}}{1+\delta}.$$

Para la cota superior demostaremos que

$$\|z\|_{Z_N} \leq \frac{1}{2} + \frac{2}{N}(\frac{m^2}{2} + m\|z\|), \tag{4.1}$$

donde, por simplicidad, hemos escrito $\|z\| = \|z\|_{W_{(RIS,2,m)}}$. Fijemos $g \in Z_N$. Si $g \in G_0$, entonces

$$g(z) \leq \frac{1}{2}.$$

Cuando $g \notin G_0$, obtenemos que

$$
\begin{aligned}
g(z) &\leq \frac{2}{w(g)}(\sum_{i\in E^g_{1,z}} g_i(z) + \sum_{i\in E^g_{2,y}} g_i(z)) \\
&\leq \frac{2}{w(g)}(\sum_{i\in E^g_{1,z}} g_i(\frac{1}{2}z^i_g) + m\|z\|) \\
&\leq \frac{2}{w(g)}\left(\sum_{\substack{i=1,\\ |B^g_{z_i}|\geq m}}^{m} \sum_{k\in B^g_{z_i}} g_k(\frac{1}{2}z_i) + \sum_{\substack{i=1,\\ |B^g_{z_i}|< m}}^{m} \sum_{k\in B^g_{z_i}} g_k(\frac{1}{2}z_i) + m\|z\|\right) \\
&\leq \frac{2}{w(g)}\left(\sum_{\substack{i=1,\\ |B^g_{z_i}|\geq m}}^{m} \frac{|B^g_{z_i}|}{2}\frac{2}{|B^g_{z_i}|} \sum_{k\in B^g_{z_i}} g_k(\frac{1}{2}z_i) + \frac{m^2}{2} + m\|z\|\right) \\
&\leq \frac{2}{w(g)}\left(\sum_{\substack{i=1,\\ |B^g_{z_i}|\geq m}}^{m} \frac{|B^g_{z_i}|}{4} + \frac{m^2}{2} + m\|z\|\right) \\
&\leq \frac{1}{2} + \frac{2}{w(g)}(\frac{m^2}{2} + m\|z\|) \\
&\leq \frac{1}{2} + \frac{2}{N}(\frac{m^2}{2} + m\|z\|).
\end{aligned}
$$

De aquí se concluye la desigualdad (4,1). Juntando ambas cotas obtenemos

$$
\|y\|_{Z_N} \leq \frac{\frac{1}{2} + \frac{2}{N}(\frac{m^2}{2} + m\|z\|)}{\frac{1-\frac{4}{m}}{1+\delta}}.
$$

Por lo tanto,

$$
\frac{\|x\|_{Z_N}}{\|y\|_{Z_N}} \geq \frac{(\frac{1-\frac{4}{m}}{1+\delta})^2}{\frac{1}{2} + \frac{2}{N}(\frac{m^2}{2} + m\|z\|)} \geq \frac{2(1-\frac{4}{m})^2}{(1+2\delta)(1+\delta)^2} \geq \frac{2(1-\frac{4}{m})^2}{(1+2\delta)(1+\delta)^2}.
$$

Esto demuestra la conclusión deseada. ❑

Quisieramos remarcar que los vectores encontrados en el teorema anterior, al igual que las normas $\|\cdot\|_{Z_N}$, son definidos de una manera similar (dualizada) a las normas y vectores $(2-\epsilon)$-distorsionando el espacio de Tsirelson que fueron descritos por E. Odell, el lector puede encontrar éste resultado en el artículo [**21**].

Nos preguntamos si las normas $\{\|\cdot\|_{Z_N} : N > m\}$ D-distorsionan la norma $\|\cdot\|_{W_{(RIS,2,m)}}$ para algún $D \geq 2(1-\frac{4}{m})^2$. Qué esto no sea posible para $D \in \mathbb{R}$ un poco más grande es el contenido del siguiente resultado.

Teorema 3.19. *Las normas* $\|\cdot\|_{Z_N}$ *y* $\|\cdot\|_{W_{(RIS,2,m)}}$ *son* $(\frac{2}{1-\frac{4}{m}})$*-equivalentes en* $(e_i)_{i=N}^{\infty}$.

Demostración. Ya que es claro que $\|\cdot\|_{Z_N} \leq \|\cdot\|_{W_{(RIS,2,m)}}$ demostraremos sólo la otra desigualdad. Para hacer esto, fijemos $x \in c_{00}$ tal que $\|x\|_{W_{(RIS,2,m)}} = 1$ y, usando el Lema 3.4, un elemento $f \in W_{(RIS,2,m)}$ tal que $f(x)) = 1$. Si $w(f) \geq N$, entonces $f \in Z_N$. Lo cual implica

$$\|x\|_{W_{(RIS,2,m)}} \leq f(x) \leq \|x\|_{Z_N}.$$

En el caso que $w(f) < N$, podemos encontrar $f' \in W_{(RIS,2,m)}$ satisfaciendo las propiedades del Lema 3.5. Es claro que $f' \in Z_N$ de donde se siguen las desigualdades

$$\|x\|_{W_{(RIS,2,m)}} \leq \frac{2}{1-\frac{4}{m}} f'(x) \leq \frac{2}{1-\frac{4}{m}} \|x\|_{Z_N}.$$

Lo que concluye la demostración. ❑

Ahora compararemos las normas definidas por los conjuntos normantes $W_{(RIS,2,n)}$'s. Para hacer esto recurriremos al siguiente lema.

Lema 3.20. *Sea* $N \in \mathbb{N}$ *y* $x \in c_{00}[N,\infty)$ *con* $\|x\|_{W_{(RIS,2,m)}} = 1$. *Para cada* $f \in W_{(RIS,2,m)}$ *tal que* $supp(f) \cap supp(x) \neq \emptyset$ *existe un* $f' \in W_{(RIS,2,N)}$ *que cumple*

- $w(f') = \text{máx}\{w(f), N\}$.
- $f(x) \leq \text{máx}\left\{\frac{N}{w(f)}, 1\right\} f'(x) + \frac{2}{w(f)} \sum_{j=0}^{\infty} (\frac{4}{N})^j$.

Ademas, si $w(f) \geq N$ *entonces es posible elegir* $f' \in W_{RIS,2,N}$ *satisfaciendo*

$$supp(f') \subseteq supp(f).$$

Demostración. Haremos esto por inducción sobre la altura de $f \in W_{(RIS,2,m)}$. Si $f \in G_0$, entonces es claro que $f' = f$ satisface la conclusión. En el caso $f \notin G_0$ sabemos que $f = \frac{2}{w(f)} \sum_{i=1}^{w(f)} f_i$. De aquí se sigue

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2}{w(f)}\sum_{i=1}^{w(f)} f_i(x) \\ &= \frac{2}{w(f)}\left(f_{i_0}(x) + \sum_{i=i_0+1}^{w(f)} f_i(x)\right) \\ &\leq \frac{2}{w(f)}\left(1 + \sum_{\substack{i=i_0+1 \\ supp(f_i)\cap supp(x)\neq\emptyset}}^{w(f)} f_i(x)\right), \end{aligned}$$

en donde $i_0 = \text{mín}\{1 \leq i \leq w(f) : supp(f_i) \cap supp(x) \neq \emptyset\}$. Ahora aplicamos la hipótesis de inducción a $f_i \in W_{(RIS,2,m)}$ y notamos que $w(f_i) > N$ para todo $i \in (i_0+1, w(f)]$, obteniendo así $f_i' \in W_{(RIS,2,N)}$ con $supp(f_i') \subseteq supp(f_i)$ satisfaciendo la conclusión. Esto nos da

$$\begin{aligned} f(x) &\leq \frac{2}{w(f)}\left(1 + \sum_{\substack{i=i_0+1 \\ supp(f_i)\cap supp(x)\neq\emptyset}}^{w(f)} [f_i'(x) + \frac{2}{w(f_i)}\sum_{j=0}^{\infty}(\frac{4}{N})^j]\right) \\ &\leq \frac{2}{w(f)}\left(1 + \sum_{\substack{i=i_0+1 \\ supp(f_i)\cap supp(x)\neq\emptyset}}^{w(f)} f_i'(x) + 2\left[\sum_{i=i_0+1}^{w(f)} \frac{1}{w(f_i)}\right]\sum_{j=0}^{\infty}(\frac{4}{N})^j\right). \end{aligned}$$

Usando el Corolario 3.8 y el hecho que cada $supp(f_{i_0}) \cap supp(x) \neq \emptyset$ obtenemos

$$\sum_{i=i_0+1}^{w(f)} \frac{1}{w(f_i)} \leq \frac{2}{max(supp(f_{i_0}))} \leq \frac{2}{N}.$$

De aquí deducimos que

$$\begin{aligned} f(x) &\leq \frac{2}{w(f)}\left(1 + \sum_{i=i_0+1}^{w(f)} f_i'(x) + \frac{4}{N}\sum_{j=0}^{\infty}(\frac{4}{N})^j\right) \\ &\leq \frac{2}{w(f)}\left(\sum_{i=i_0+1}^{w(f)} f_i'(x) + 1 + \sum_{j=1}^{\infty}(\frac{4}{N})^j\right) \\ &\leq \frac{2}{w(f)}\left(\sum_{i=i_0+1}^{w(f)} f_i'(x) + \sum_{j=0}^{\infty}(\frac{4}{N})^j\right) \\ &\leq \frac{2}{w(f)}\sum_{i=i_0+1}^{w(f)} f_i'(x) + \frac{2}{w(f)}\sum_{j=0}^{\infty}(\frac{4}{N})^j. \end{aligned}$$

Para definir f' consideramos dos casos. Cuando $w(f) \geq N$ simplemente elegimos, para $i = 1, \cdots, w(f)$ con $supp(f_i) \cap supp(x) = \emptyset$, cualquier $e^*_{r_i}$ con $r_i \in supp(f_i)$ y definimos

$$f' = \frac{2}{w(f)} \left(\sum_{\substack{i=i_0+1 \\ supp(f_i)\cap supp(x)\neq\emptyset}}^{w(f)} f'_i + \sum_{\substack{i=1 \\ supp(f_i)\cap supp(x)=\emptyset}}^{w(f)} e^*_{r_i} \right).$$

Nótese que en este caso $f' \in W_{(RIS,2,N)}$ satisface la parte adicional de la conclusión del lema. Ahora si $w(f) < N$, entonces repetimos los pasos del caso anterior y después tomamos un conjunto $A \subseteq G_0$ de $N - w(f)$ funcionales $e^*_i \in G_0$ tales que $i \in \mathbb{N} \setminus supp(x)$ y definimos

$$f' = \frac{2}{N} \left(\sum_{\substack{i=i_0+1 \\ supp(f_i)\cap supp(x)\neq\emptyset}}^{w(f)} f'_i + \sum_{\substack{i=1 \\ supp(f_i)\cap supp(x)=\emptyset}}^{w(f)} e^*_{r_i} + \sum_{g\in A} g \right),$$

el cual es un funcional del conjunto normante $W_{(RIS,2,N)}$. ❑

Corolario 3.21. *Sea $N \in \mathbb{N}$. Las normas $\|\cdot\|_{Z_N}$ y $\|\cdot\|_{W_{(RIS,2,N)}}$ son $(1 + \sum_{j=1}^{\infty}(\frac{2}{N})^j)$-equivalentes.*

Corolario 3.22. *Sea $m < N \in \mathbb{N}$. Las normas $\|\cdot\|_{W_{(RIS,2,m)}}$ y $\|\cdot\|_{W_{(RIS,2,N)}}$ son $\frac{N}{m}$-equivalentes.*

5. Conclusiones

Concluimos éste capítulo con una serie de preguntas acerca de las propiedades del espacio $X_{W(RIS,2,m)}$ cuya respuesta ayudaría a clarificar la relación que éste mantiene con el espacio dual del espacio de Tsirelson.

Definición 3.23. Un espacio de Banach X se dice *minimal* si cada subespacio infinitodimensional Y de X contiene un subespacio Z isomorfo a X.

Es sabido que el espacio dual al espacio de Tsirelson es un espacio minimal (y que el espacio $\mathcal{T}$ no lo es). Antes de la construcción de $\mathcal{T}^*$, los únicos espacios minimales conocidos eran los ℓ_p's y c_0. Por esto, la respuesta a la siguiente pregunta sería interesante.

Pregunta 3.24. *¿ Es el espacio $X_{W(RIS,2,m)}$ minimal ?*

Otra propiedad conocida del espacio dual de Tsirelson es que toda sus subsucesiones bloque se encuentran dominadas por la base canónica del mismo. En este contexto la siguiente pregunta es natural.

PREGUNTA 3.25. *¿ Existe $K \in \mathbb{R}$ tal que para todo subsucesión bloque normalizada $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ de la base canónica de $X_{W(RIS,2,m)}$ se tiene que*

$$\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\| \leq K \|\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\|?$$

Como ya hemos mencionado, ambas preguntas tendrían una respuesta positiva si la siguiente resultase verdadera.

PREGUNTA 3.26. *¿ Es el espacio $X_{W(RIS,2,m)}$ isomorfo al espacio dual del espacio de Tsirelson?*

Finalmente, un espacio se dice de distorsión acotada si es D-distorsionable para algún $D > 1$ pero, al mismo tiempo, existe un $R > D$ tal que no existe R-distorsión alguna. Es un resultado clásico de R.C. James que c_0 y l_1 son espacios no distorsionables. Es también conocido que para $1 < p < \infty$, el espacio ℓ_p es arbitrariamente distorsionable (distorsionable para todo $D > 0$). Todos los espacios conocidos hasta ahora han caído dentro de ésta dicotomía. Los siguiente resultados encontrados en el artículo [**31**] ahondan un poco sobre la estructura que debería tener un espacio acotadamente distorsionable.

TEOREMA 3.27. *Si X es no distorsionable, entonces para cada Y subespacio de X existe un Z subespacio de Y isomorfo o bien a c_0 o a ℓ_1.*

TEOREMA 3.28 (Maurey, Tomczak-Jaegermann). *Si X es de distorsión acotada, entonces contiene un subespacio ya sea asintóticamente c_0 o asintóticamente ℓ_1.*

Dado el Corolario 3.12, nos preguntamos ahora:

PREGUNTA 3.29. *¿ Es $X_{W(RIS,2,m)}$ de distorsión acotada?*

Recordemos que se conoce que el espacio de Tsirelson es $(2-\epsilon)$-distorsionable para cada $\epsilon > 0$, también se sabe que su espacio dual es D-distorsionable para alguna $D > 1$ pero dado que es un resultado de existencia, ésta D no se conoce.

Bibliografía

[1] Androulakis, G.; Odell, E.; Schlumprecht, Th.; Tomczak-Jaegermann, N. *On the structure of the spreading models of a Banach space.* Canad. J. Math. 57 (2005), no. 4, 673–707.

[2] Argyros, S.; Beanland, K; Motakis, P. *Strictly singular operators in Tsirelson like spaces.* arXiv:1309.4516, http://arxiv.org/pdf/1309.4516.pdf.

[3] Argyros, S. A.; Deliyanni, I. *Examples of asymptotic l1 Banach spaces.* Trans. Amer. Math. Soc. 349 (1997), no. 3, 973–995.

[4] Argyros, S. A.; Haydon, R. G. *A hereditarily indecomposable L8-space that solves the scalar-plus-compact problem.* Acta Math. 206 (2011), no. 1, 1–54.

[5] Argyros S. A., Kanellopoulos V., and Tyros K. *Finite order spreading models.* Adv. Math. 234 (2013), 574–617.

[6] Argyros S. A., Kanellopoulos V., and Tyros K. *Higher order spreading models.* Fund. Math. 221 (2013), no. 1, 23–68.

[7] Argyros S. A. and Todorcevic S., *Ramsey Methods in Analysis.* Birkhäuser Verlag (2005).

[8] Banach, S. *Théorie des opérations linéaires.* Monografie Matematyczne 1, Warszawa: Subwencji Funduszu Kultury Narodowej (1932).

[9] Beanland, K.; Causey, R.; Motakis, P. *Arbitrarily distortable Banach spaces of higher order.* arXiv:1408.5065, http://arxiv.org/pdf/1408.5065v1.pdf.

[10] Beanland, K.; Freeman, D; Motakis, P. *The stabilized set of p's in Krivine's theorem can be disconnected* arXiv:1408.0265, http://arxiv.org/pdf/1408.0265.pdf.

[11] Brunel A. and Sucheston L., *On B -convex Banach spaces.* Math. Systems Theory 7 (1974), no. 4, 294–299.

[12] Calderón-García, E.; García-Ferreira, S. *Asymptotic models via plegma families.* enviado.

[13] Casazza, Peter G.; Shura, Thaddeus J. *Tsirelson's space. With an appendix by J. Baker, O. Slotterbeck and R. Aron.* Lecture Notes in Mathematics, 1363. Springer-Verlag, Berlin, 1989. viii + 204 pp.

[14] Di Prisco, C., A. ; López-Abad, J. *Teoría de Ramsey y Espacios de Banach.* Editorial Texto.

[15] Dodos, P.; Lopez-Abad, J.; Todorcevic, S. *Banach spaces and Ramsey theory: some open problems.* Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Math. RACSAM 104 (2010), no. 2, 435–450.

[16] Ferenczi, Valentin; Pelczar, Anna Maria; Rosendal, Christian. *On a question of Haskell P. Rosenthal concerning a characterization of c0 and lp.* Bull. London Math. Soc. 36 (2004), no. 3, 396–406.

[17] Figiel, T.; Johnson, W. B. A *uniformly convex Banach space which contains no lp.* Compositio Math. 29 (1974), 179–190.

[18] Gowers, W. T. A *solution to Banach's hyperplane problem. Bull.* London Math. Soc. 26 (1994), no. 6, 523–530.

[19] Gowers, W. T.; Maurey, B. *The unconditional basic sequence problem.* J. Amer. Math. Soc. 6 (1993), no. 4, 851–874.

[20] Halbeisen L. and Odell E. *On asymptotic models in Banach spaces.* Israel Journal of Mathematics 139 (2004) 253-291.

[21] Henson, C. Ward; Iovino, José; Kechris, Alexander S.; Odell, Edward *Analysis and logic.* London Mathematical Society Lecture Note Series, 262. Cambridge University Press, Cambridge, (2002), x+267 pp.

[22] James R. C. *Uniformly nonsquare Banach spaces.* Ann. of Math., 80 (1964), 542-550.

[23] Krivine J. L. *Sous-espaces de dimension finie des espaces de Banach réticulés.* Ann. of Math. (2) 104 (1976), no. 1, 1–29.

[24] Lindenstrauss, Joram. *Some aspects of the theory of Banach spaces.* Advances in Math 5: 159–180, (1970).

[25] Lindenstrauss, Joram, *The geometric theory of the classical Banach spaces,* Actes du Congrès Intern. Math., Nice 1970: 365–372.

[26] Lindenstrauss, Joram; Tzafriri, Lior (1977), *Classical Banach Spaces I, Sequence Spaces,* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 92, Berlin: Springer-Verlag, (1977)

[27] Lopez-Abad, Jordi *Some problems concerning basic sequences in Banach spaces.* Extracta Math. 26 (2011), no. 2, 295–316. 46-02

[28] Lopez-Abad, J.; Todorcevic, S. *Pre-compact families of finite sets of integers and weakly null sequences in Banach spaces.* Topology Appl. 156 (2009), no. 7, 1396–1411.

[29] Maurey, B.; Rosenthal, H. P. *Normalized weakly null sequence with no unconditional subsequence.* Studia Math. 61 (1977), no. 1, 77–98.

[30] Milman, V. D. *Geometric theory of Banach spaces. I. Theory of basic and minimal systems.* Uspehi Mat. Nauk (in Russian), 25 no. 3: 113–174. English translation in Russian Math. Surveys 25 (1970), 111-170.

[31] Odell, E.; Schlumprecht, Th. *Distortion and stabilized structure in Banach spaces; new geometric phenomena for Banach and Hilbert spaces. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2* (Zürich, 1994), 955–965, Birkhäuser, Basel, 1995.

[32] Odell, E; Schlumprecht, Th. *The distortion problem.* Acta Math. 173 (1994), no. 2, 259–281.

[33] Odell, E. and Schlumprecht, Th. *On the richness of the set of p's in Krivine's theorem.* Geometric aspects of functional analysis (Israel, 1992–1994), 177–198, Oper. Theory Adv. Appl., 77, Birkhäuser, Basel (1995).

[34] Odell, Edward; Tomczak-Jaegermann, Nicole; Wagner, Roy *Proximity to l1 and distortion in asymptotic l1 spaces.* J. Funct. Anal. 150 (1997), no. 1, 101–145.

[35] Ojeda-Aristizabal, Diana *A norm for Tsirelson's Banach space.* Extracta Math. 28 (2013), no. 2, 235–245.

[36] Pino-Villela, H. S. *Espacios clásicos de Banach.* Tesis de licenciatura UMSNH, 2008

[37] Sari, B. ; Tyros, K. *On the structure of the set of higher order spreading models.* Studia Math. 223 (2014), no. 2, 149–173.

[38] Schlumprecht Th. *Logic and Set Theory in Analysis.* http://arxiv.org/pdf/1202.6390v1.pdf

[39] Schlumprecht, Th. *An arbitrarily distortable Banach space.* Israel J. Math. 76 (1991), no. 1-2, 81–95.

[40] Tsirelson, B. S. *It is impossible to imbed lp or c0 into an arbitrary Banach space. (Russian)* Funkcional. Anal. i Priložen. 8 (1974), no. 2, 57–60.

[41] Zippin, M. *On perfectly homogeneous bases in Banach spaces.* Israel J. Math. 4 (1966), 265–272.