



Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Instituto de Física y Matemáticas



Análisis dinámico de gravedad de galileón

Tesis presentada al

Instituto de Física y Matemáticas

como requisito parcial para la obtención del grado de

Doctor en Ciencias en el Área de Física

por

Roberto Carlos De Arcia Solís

asesorado por

Dr. Ulises Nucamendi Gómez
(IFM-UMSNH)

Morelia, Michoacán, México

Agosto de 2016

Índice general

0.1. Agradecimientos	1
0.2. Resumen	3
1. Introducción	5
2. Modelo estándar de la cosmología	9
2.1. La geometría del espacio-tiempo	9
2.2. Las componentes del universo	10
2.3. Ecuaciones de estado	11
2.4. Ecuaciones de Friedmann	12
2.5. Un universo en expansión	15
2.5.1. El parámetro de desaceleración	15
2.5.2. Expansión acelerada del universo	16
2.5.3. Parámetros cosmológicos	17
3. El problema de la energía oscura	21
3.1. Nuevos campos de materia	21
3.1.1. Constante Cosmológica Λ	21
3.1.2. Campos escalares quintaesencia	23
3.1.3. Modelos de interacción entre materia oscura y energía oscura	25
3.2. Teorías de gravedad modificada	27
3.2.1. Teorías tensor-escalares	27
3.2.2. Teorías tipo $f(R, \mathcal{G})$	29
3.2.3. Modelo DGP	30
3.2.4. Campo escalar galileón	32
4. Sistemas Dinámicos	35
4.1. Introducción a la teoría de sistemas dinámicos	35
4.1.1. Estabilidad de los puntos críticos	36
4.1.2. Sistemas dinámicos sobre el plano	37
4.1.3. Teorema de la variedad central	39
4.2. Ejemplo de un análisis dinámico cosmológico	40
5. Análisis dinámico de un modelo de galileón cúbico generalizado	45
5.1. Ecuaciones cosmológicas	45
5.1.1. Las variables del espacio-fase	47

5.2. Cosmología del galileón cúbico en presencia de materia	48
5.2.1. Puntos singulares en el espacio-fase 3D	49
5.3. Galileón generalizado en el vacío	50
5.3.1. Proyección de Poincaré	51
5.3.2. Nuevas variables	53
5.3.3. El sistema dinámico	54
5.4. Puntos críticos y estructura del espacio-fase	55
5.4.1. Campo quintaesencia con potencial exponencial	55
5.4.2. La solución de De Sitter	56
5.4.3. Solución de big bang	57
5.4.4. Solución fantasma (Phantom)	57
5.5. Discusión	60
6. Conclusiones	69

0.1. Agradecimientos

Sería imposible mencionar a todas las personas que de alguna u otra forma tengo cosas que agradecer por su apoyo durante el curso del posgrado y de vida, pero dado que sólo poseo un espacio finito haré el mejor esfuerzo para no dejar fuera a nadie. Para empezar quiero agradecer a mi padres y a mi hermana por estar siempre ahí, por entenderme, apoyarme y sobre todo aguantarme en los no pocos momentos de trato difícil que llego a tener. Ustedes son mi núcleo familiar y la base de mi persona, así que lo poco o mucho que haya logrado hacer es porque siempre han estado conmigo. No hay forma de describir en una hoja de tesis lo mucho que los quiero. Atalia, mi compañera de viaje y con quien deseo encontrar un hogar para todos los animalitos que podamos apoyar. Eres el mejor regalo que me ha dado el mundo de la física.

En el plano académico me encuentro en deuda total con mi asesor de tesis y con cada uno de los sinodales por las observaciones, comentarios y por ayudarme a comprender este mundo de la física. El viaje realizado en un doctorado es una tarea difícil de realizar, sobre todo para alguien con la capacidad perderse entre las ramas tan grande como la mía. En verdad les agradezco el apoyo obtenido así como la supervisión, las horas de trabajo que invirtieron en mi persona y por mostrarme el camino que se debe seguir para llevar a cabo este trabajo en la ciencia. De manera especial agradezco a los doctores Israel Quiros y Tame Gonzales por la paciencia y por las sugerencias de trabajo en la parte final del doctorado.

Por último quiero recordar a aquellas personas que conocí y que como dice la canción, llegaron para quedarse. En verdad agradezco haber compartido diferentes vivencias con cada uno de ustedes y estoy en deuda por su amistad y por el apoyo que me brindaron en diferentes contextos. Pete, Isabel, Fabiola, Itzia, Hilario, Claudia, Pietro, Ana, Chava, Cecy, Juan, Miguel, Gaby, Efraín y Manuel. Les deseo lo mejor hoy y siempre.

Para finalizar y por cuestión oficial agradezco a la beca otorgada por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología CONACyT número 350411, ya que sin ello no hubiera sido posible mantenerme estos cuatro años y haber realizado viajes a congresos y a eventos académicos.

Y como dijo Gustavo Ceratti
Gracias ... totales

0.2. Resumen

En este trabajo se emplean las herramientas de los sistemas dinámicos a fin de describir la estructura asintótica total de las interacciones del galileón con término de autointeracción cúbico en el vacío. Se muestra que, de forma contraria a lo que sucede cuando existe una componente de materia de fondo, las interacciones del campo escalar modifican la dinámica cosmológica a tiempos tardíos. En particular, se tiene la aparición de un punto singular que representa un comportamiento fantasma el cual está relacionado con la existencia de una singularidad tipo big rip. Se puede observar que la interacción gravitacional de la materia de fondo con el campo galileón es capaz de apantallar las autointeracciones del galileón consigo mismo, eliminando cualquier potencial modificación de la dinámica a tiempos tardíos. A diferencia de otros modelos inspirados en la gravedad DGP, las soluciones autoacelerante no aparecen en este modelo.

Palabras clave:

Relatividad General, cosmología, energía oscura, sistemas dinámicos, campos escalares

Abstract

In this paper we apply the tools of the dynamical systems theory in order to uncover the whole asymptotic structure of the vacuum interactions of a galileon model with a cubic derivative interaction term. It is shown that, contrary to what occurs in the presence of background matter, the galileon interactions of vacuum appreciably modify the late-time cosmic dynamics. In particular, a local late-time attractor representing phantom behavior arises which is inevitably associated with a big rip singularity. It seems that the gravitational interactions of the background matter with the galileon screen the effects of the gravitational self-interactions of the galileon, thus erasing any potential modification of the late-time dynamics by the galileon vacuum processes. Unlike other galileon models inspired in the DGP scenario, self-accelerating solutions do not arise in this model.

Capítulo 1

Introducción

Uno de los mayores problemas en la física teórica consiste en explicar el origen de la fase de expansión acelerada por la que atraviesa el universo. Esto es apoyado por diversas observaciones cosmológicas independientes entre las que se encuentran las Supernovas tipo Ia (SNIa) [1, 2], las Oscilaciones Acústicas de Bariones (BAO) [3] y el Fondo Cósmico de Microondas (CMB) [4], la estructura que presenta la materia a grandes escalas (LSS) [5], lentes gravitacionales [6] y el efecto Sach-Wolf [7]. El modelo estándar de la cosmología está basado en la teoría de la Relatividad General (RG) y supone la existencia de una nueva componente de materia, la cual es responsable de acelerar al universo y recibe el nombre genérico de *Energía Oscura*. La forma más sencilla de modelar a este objeto es por medio de la *Constante Cosmológica* Λ , con ecuación de estado $p = \omega\rho$, en donde p es la presión, ρ es la densidad de energía y se tiene un parámetro de ecuación de estado $\omega = -1$ [8]. Existe también la posibilidad de que ω no sea una constante sino que evolucione en el tiempo [9]. Esto se puede obtener modelando a la energía oscura por medio de un campo escalar con potencial de autointeracción V , el cual puede recibir el nombre de Quintaesencia, k-esencia o fantasma (phantom), dependiendo de la forma del Lagrangiano que lo describe [10].

Otra opción es considerar que la teoría de la relatividad general debe ser modificada a escalas cosmológicas, y que son éstos cambios al sector de geometría los responsables de la aceleración observada [11, 12]. Entre los modelos disponibles en el mercado podemos tomar por ejemplo a las teorías tipo $f(R, \mathcal{G})$ [13, 14], a las teorías tensor-escalar [15, 16, 17] y al modelo DGP [18]. En el caso de las teorías $f(R)$ se tiene que el Lagrangiano de Einstein-Hilbert presenta una dependencia no trivial con respecto al escalar de curvatura R o a funciones cuadráticas de éste. Por otro lado, si suponemos que la interacción gravitacional es transmitida por una componente escalar además del tensor métrico tenemos entonces a los modelos tipo tensor-escalar. Otra posibilidad es considerar la existencia de dimensiones extras hacia las que la gravedad puede “fluir” como en el caso del modelo DGP, explicando de esta forma el aparente debilitamiento de luminosidad de las SNIa.

En esta tesis se llevará a cabo el estudio para un modelo de campo escalar que presenta propiedades de los dos grupos antes mencionados. Por un lado proviene del modelo DGP y presenta soluciones acelerantes que permiten prescindir de la energía oscura en forma de

constante cosmológica, y por otro puede ser vista como una teoría efectiva para un campo escalar en 4D. Este campo se caracteriza por generar ecuaciones de movimiento a lo máximo de segundo orden en el contexto de la relatividad general [19, 20]. Llamamos a este objeto *galileón* por respetar una simetría tipo $\partial_\mu\phi \rightarrow \partial_\mu\phi + b_\mu$ en el vacío. Un caso de interés cosmológico está descrito por la acción

$$S = \int d^4x \frac{\sqrt{-g}}{2} \{R - [1 + \sigma(\square\phi)](\nabla\phi)^2 - 2V(\phi)\} + \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_m, \quad (1.1)$$

en donde σ es una constante de acoplamiento, $V = V(\phi)$ es el potencial de autointeracción del campo escalar y \mathcal{L}_m representa a cualquier campo de materia presente en el universo. Para simplificar la escritura definimos

$$(\square\phi) = g^{\mu\nu}(\nabla_\mu\nabla_\nu\phi), \quad (\nabla\phi)^2 = g^{\mu\nu}(\nabla_\mu\phi)(\nabla_\nu\phi).$$

Se investigará la importancia del acoplamiento del campo escalar con la materia para el modelo correspondiente al acoplamiento constante σ_0 y al potencial exponencial $V_0 \exp(\beta\phi)$. Debido a que tenemos que enfrentarnos a un sistema de ecuaciones altamente no lineal, haremos uso de los sistemas dinámicos a fin de revelar la estructura completa del espacio fase. Primero se llevará a cabo el estudio del sistema empleando las variables dinámicas usuales y se mostrará que, a diferencia del caso de los modelos de campo escalar tipo quintaesencia o k-esencia, en el caso del galileón aparecen puntos singulares asintóticos degenerados. Para evitar la pérdida de información del sistema se define un conjunto de variables capaces de compactificar el espacio-fase y romper de esta forma la degeneración asintótica. Contrario a lo que podría pensarse, cuando se elimina la componente de materia aparece una mayor riqueza de puntos críticos asintóticos modificando así la dinámica del sistema a tiempos tardíos. Esto viene a complementar los resultados de estudios hallados en la literatura en donde se analiza el caso $\sigma_0 \exp(\alpha\phi)$ para los potenciales exponencial y ley de potencias únicamente en presencia de materia.

La organización de este trabajo de tesis se hará de la siguiente forma. En el capítulo 1 se presenta un breve resumen del modelo cosmológico estándar a fin de poner al corriente al lector en lo referente al estado del arte. Se parte de las ecuaciones de campo de Einstein y muestra que bajo el contexto de la relatividad general no es posible explicar la aceleración observada sin asumir la existencia de un componente de energía oscura. Definimos la existencia de seis parámetros cosmológicos y cómo es posible describir la evolución del universo y la formación de estructura a partir de ellos. Este conjunto de parámetros ha sido restringido por medio de diversas observaciones y se menciona su situación actual en base a las observaciones del satélite Planck.

El capítulo 2 está centrado en el análisis del concepto de energía oscura, así como de algunos de los modelos más estudiados en la bibliografía que se tienen para su explicar su origen y propiedades. Comenzamos por presentar a la constante cosmológica, así como sus principales logros al momento de comparar con las observaciones, así también como los problemas teóricos que presenta. Es por eso que se tiene una gran variedad de ideas alternativas que van desde aceptar la existencia de energía oscura que evoluciona en el tiempo,

hasta modelos en donde existen dimensiones adicionales a las conocidas. Se hará un breve resumen de algunas de las ideas más estudiadas haciendo énfasis en el modelo del campo escalar galileón.

El capítulo 3 está dedicado a revisar los conceptos básicos de la teoría de sistemas dinámicos que son necesarios para el análisis del trabajo. Se dará un breve repaso de la teoría local y asintótica de los sistemas dinámicos autónomos, así como de los criterios de estabilidad para puntos singulares hiperbólicos y no hiperbólicos. Para finalizar se presenta a modo de ejemplo el estudio de un sistema de campo escalar quintaesencia con potencial ley de potencias $V(\phi) = \phi^{-p}$, el cual es una generalización del caso usual de potencial exponencial hallado en la literatura debido a que es necesaria una variable adicional para llevar a cabo el análisis. Se presenta el diagrama de espacio-fase para los casos en que $p = 1$, $p = 2$ y $p = 3$ y se muestra que para todos los casos siempre es posible hallar una solución inestable de materia dura, un punto de dominio estable tipo De Sitter y un punto silla relacionado con el dominio de materia.

El estudio del modelo cúbico de galileón en presencia de materia y en vacío se lleva a cabo en el capítulo 4. Aquí se presenta el análisis para un universo compuesto por materia oscura y un campo escalar galileón con función de acoplamiento constante $\sigma = \sigma_0$ y potencial exponencial $V = V_0 \exp(-\lambda\phi)$. Aún cuando la dinámica del espacio fase para el modelo $\sigma = \sigma_0 \exp(-\alpha\phi)$ y potencial $V = V_0 \exp(-\lambda\phi)$, ha sido estudiado en detalle en [21], en esta tesis vamos a centrar nuestra atención al caso aparentemente más sencillo; el caso de ausencia de materia. Dada la naturaleza altamente compleja del sistema de ecuaciones usaremos la teoría de los sistemas dinámicos a fin de descubrir el comportamiento local y asintótico del espacio fase. Primero se llevará a cabo el análisis del sistema utilizando las variables dinámicas usuales y se mostrará que, para el caso en que existe un componente de materia oscura en el universo el comportamiento del sistema no difiere mucho del modelo de quintaesencia exponencial: i) aparece un punto crítico adicional, y ii) el punto relacionado con el dominio de stiff matter sólo presenta comportamiento de punto silla y no puede tratarse de un repulsor. Sin embargo, y en contra de lo que podría pensarse, al eliminar el componente material se obtiene una mayor riqueza de puntos asintóticos los cuales son capaces de modificar la dinámica del universo a tiempos tardíos. Este material se encuentra publicado en “Cubic Derivative Interactions and Asymptotic Dynamics of the Galileon Vacuum”, Roberto De Arcia et al, *Class. Quantum Grav.* **33** 125036 (2016).

Capítulo 2

Modelo estándar de la cosmología

La cosmología es la rama de la ciencia que estudia el origen, la evolución y el destino del universo utilizando las dos teorías fundamentales de la física moderna: la relatividad general y el modelo estándar de partículas. La primera permite entender cómo está formado el espacio-tiempo y describe el comportamiento gravitacional de todos los objetos presentes en el universo. Considerando homogeneidad e isotropía a gran escala nos dice que no vivimos en un universo estático, sino que se encuentra bajo una fase de expansión acelerada. Por otro lado, el modelo de partículas describe las interacciones electromagnéticas y nucleares, proporciona las reglas con las cuales las partículas y los campos interactúan e intenta dar una explicación acerca del origen de las masas. Suponiendo un universo eléctricamente neutro y, debido a que las interacciones nucleares son de corto alcance tenemos que al estudiar la dinámica a niveles cosmológicos la gravedad es la interacción dominante.

2.1. La geometría del espacio-tiempo

De manera sencilla podemos decir que la idea clave de la relatividad general es que el espacio-tiempo no es un objeto estático, sino que presenta una dinámica de acuerdo a la cantidad de materia-energía que se encuentra presente. Se trata de una teoría geométrica de la gravedad descrita de forma tensorial y que es independiente del sistema de referencia. Toda la información del sistema se encuentra en las ecuaciones de campo de Einstein

$$G_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

en donde $G_{\mu\nu}$ es el tensor de geometría, $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci, $g_{\mu\nu}$ es el tensor métrico y R es el escalar de curvatura. En conjunto, la parte izquierda de la ecuación representa la geometría del espacio-tiempo, la cual es proporcional al tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}$. En este caso, la constante de acoplamiento que determina la intensidad de la fuerza de gravedad está dada por $\kappa = 8\pi G_N$, en donde G_N es la constante de gravitación de Newton. De manera formal decimos que se trata de un conjunto de 10 ecuaciones diferenciales parciales altamente acopladas, las cuales sólo se pueden resolver de forma cerrada en casos muy especiales. Para el caso de la cosmología es posible simplificar enormemente el sistema utilizando las simetrías

CAPÍTULO 2. MODELO ESTÁNDAR DE LA COSMOLOGÍA

2.2. LAS COMPONENTES DEL UNIVERSO

bajo traslaciones y rotaciones que posee la métrica a escalas de los cientos de Megaparsecs ¹ [28]. Una métrica en 4D compatible con el principio cosmológico de isotropía y homogeneidad espacial es la métrica de *Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker* (FLRW). En coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) el elemento de línea ds^2 tiene la forma

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (2.2)$$

en donde la función $a(t)$ es llamada factor de escala y k es una constante que nos indica la curvatura espacial del universo. Dependiendo del valor de k el universo puede ser *cerrado*, *abierto* o *plano*, de acuerdo a si la curvatura espacial es *positiva*, *negativa* o *nula*, respectivamente.

k	Densidad crítica	Curvatura espacial	Tipo universo
$k > 0$	$\rho > \rho_{\text{crit}}$	positiva	cerrado
$k < 0$	$\rho < \rho_{\text{crit}}$	negativa	abierto
$k = 0$	$\rho = \rho_{\text{crit}}$	nula	plano

Cuadro 2.1: Distintas geometrías dependiendo del valor del factor de curvatura espacial k y de la densidad crítica ρ_c .

La curvatura espacial queda determinada a través del contenido de materia-energía en el universo, es decir, de la abundancia de cada una de sus componentes. Hasta ahora las observaciones cosmológicas realizadas por el satélite Planck sugieren que vivimos en un universo plano con parámetro de curvatura $\Omega_k = 0.000 \pm 0.005$ [27]. Una de las predicciones que se pueden obtener de la métrica de FLRW es la expansión del universo cuantificada a través del factor de escala $a(t)$. Esta función representa la *distancia comóvil*, es decir, la distancia entre dos puntos arbitrarios que se van alejando entre sí conforme el universo se expande. Se considera que ésta distancia es cero en $t = 0$, y a partir de este momento aumenta debido a la expansión del universo. Hoy en día se denota como “ a_0 ” y se normaliza al valor $a_0 = 1$.

2.2. Las componentes del universo

La mayoría de los modelos cosmológicos considera la existencia de 4 tipos de materia:

Materia bariónica. Está constituida por los *bariones* y *fermiones* del *Modelo Estándar*. Se encuentra principalmente en forma de estrellas, galaxias, polvo interestelar y se ha establecido a partir de proceso de nucleosíntesis que la proporción total en el universo es $\sim 5\%$ [27].

Radiación. Se denomina así al remanente del desacople de fotones que se dio después de recombinación y está distribuida de forma altamente isotrópica con una distribución correspondiente a la de un cuerpo negro con temperatura de 2.725 K [27]. Se estima que su contribución a la densidad total de energía es de $\sim 0.005\%$.

¹Un parsec es aproximadamente 10^{12} Km

Materia oscura. Se trata de aquel tipo de materia que no emite radiación electromagnética y ha sido detectada a través de sus efectos gravitacionales usando principalmente *curvas de rotación* en galaxias, así también como la distribución a gran escala y oscilaciones acústicas de bariones. Se desconoce su naturaleza y hasta el momento se considera que las partículas que la componen no pertenecen al modelo estándar de partículas. Las estimaciones actuales sugieren que es $\sim 26\%$ de la proporción total de materia-energía en el universo [27].

Energía oscura. Es el nombre genérico que se utiliza para denominar al responsable de la presente expansión acelerada del universo de acuerdo al modelo cosmológico estándar. Fue descubierta por Adam Riess et al. en 1998 y confirmada meses más tarde por Perlmutter et al. [1]. Su abundancia se estima del orden de $\sim 69\%$ de la densidad total de materia-energía presente en el universo [27]. En el siguiente capítulo veremos a esta componente con con más detalle.

Una forma sencilla de describir a cada uno de los componentes del universo es por medio de un *fluido* caracterizado por cantidades macroscópicas tales como densidad, presión, temperatura, entropía, viscosidad, etc. Por ejemplo, las galaxias, cúmulos de galaxias, etc., pueden considerarse como partículas de un fluido ya que, a pesar de que cada partícula tiene su propia velocidad, el fluido como un todo (a nivel cosmológico) tiene su propio campo de velocidades *global*. Usando al tensor de energía-momento tenemos que las componentes T^{00} y T^{ii} corresponden a la *densidad de energía* ρ y la componente de la presión p^k , mientras que los términos T^{0i} , T^{ij} representan a la *densidad de momento* y al *flujo de momento*, respectivamente. Un caso particular de fluidos muy útiles son los llamados fluidos perfectos, los cuales son caracterizados por dos componentes, su densidad $\rho = T^{00}$ y presión $p = T^{ii}$. Escribimos al tensor de energía-momento del fluido perfecto de la forma

$$T^{\mu\nu} = \rho U^\mu U^\nu + p(g^{\mu\nu} + U^\mu U^\nu), \quad (2.3)$$

en donde U^μ es la cuadrivelocidad normalizada $U^\nu U_\nu = -1$. Usando la identidad de Bianchi es posible escribir la ecuación de conservación *local* de masa-energía

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0. \quad (2.4)$$

2.3. Ecuaciones de estado

El modelo más sencillo que se ha propuesto nos dice que los fluidos relevantes en cosmología presentan una ecuación de estado que relaciona la presión con la densidad de energía de forma lineal $p = \omega \rho$ ². Se acostumbra llamar a esta expresión *ecuación de estado barotrópica*, y cada fluido en el universo tienen asociado un valor para el parámetro ω

<i>tipo de materia</i>	<i>w</i>
Materia bariónica y oscura	0
Radiación	1/3
Constante cosmológica	-1

²Tomando el valor de la velocidad de la luz $c = 1$. La expresión completa es $p = c^2 \omega \rho$.

Para el caso de las componentes de materia bariónica y materia oscura, suponemos que la presión es tan pequeña comparada con la densidad de energía de las partículas, que se acostumbra asumir un valor nulo (sin que esto implique que la densidad de energía sea cero). Se denomina *polvo* a los fluidos que presentan $p = 0$. Para el caso de la energía oscura, si suponemos que viene descrita por la constante cosmológica se tiene que su ecuación de estado es $p = -\rho$ ($w = -1$).

2.4. Ecuaciones de Friedmann

Las ecuaciones de Friedmann permiten estudiar de manera cuantitativa la evolución del universo. Para deducirlas partimos de las ecuaciones de campo de Einstein

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G_N \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right), \quad (2.5)$$

en donde T denota la traza de $T_{\mu\nu}$

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{\text{MB}} + T_{\mu\nu}^{\text{MO}} + T_{\mu\nu}^{\text{R}} + T_{\mu\nu}^{\Lambda} + \dots, \quad (2.6)$$

y los superíndices “MB”, “MO”, “R” y “ Λ ” se refieren a materia bariónica, materia oscura, radiación y constante cosmológica respectivamente. Los puntos suspensivos indican cualquier otro tipo de materia o energía adicional que otro modelo pudiera proponer. Tomando la componente temporal de (2.5) y después de un poco de álgebra

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G_N}{3} (3p + \rho). \quad (2.7)$$

Esta ecuación es llamada *segunda ecuación de Friedmann*. La *primer ecuación de Friedmann* se obtiene asumiendo un tensor de energía-momento de la forma $T_{\mu\nu} = \text{diag}(\rho, p, p, p)$, así que para un fondo tipo FLRW toma la forma

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho. \quad (2.8)$$

Definimos al *parámetro de Hubble* por medio de

$$H(t) := \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}, \quad (2.9)$$

en donde t el tiempo cosmológico. De esta forma podemos reescribir a (2.8)

$$H^2(t) = \frac{8\pi G_N}{3} \rho(t) - \frac{k}{a^2(t)}. \quad (2.10)$$

Existen otras dos formas de expresar esta ecuación. Una de ellas es a través de los *parámetros de densidad* Ω_i para cada una de las componentes de materia

$$\Omega_i := \frac{\rho_i}{\rho_{\text{crit}}}, \quad (2.11)$$

CAPÍTULO 2. MODELO ESTÁNDAR DE LA COSMOLOGÍA
2.4. ECUACIONES DE FRIEDMANN

en donde ρ_i es la densidad de materia-energía de la i -ésima componente y ρ_{crit} es la *densidad crítica* que a su vez se define como

$$\rho_{\text{crit}}(t) := \frac{3H^2(t)}{8\pi G}. \quad (2.12)$$

Cuando $\rho = \rho_{\text{crit}}$ se dice que el universo es espacialmente *plano*, si $\rho > \rho_{\text{crit}}$ es cerrado, y si $\rho < \rho_{\text{crit}}$ es abierto (Tabla 2.1). Vamos a distinguir el tiempo cósmico t , así como cualquier otra cantidad cosmológica evaluada en el presente con un subíndice o superíndice cero. Por ejemplo, el valor presente de la densidad crítica lo representamos como

$$\rho_{\text{crit}}^0 := \rho_{\text{crit}}(t_0) = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \simeq 1.16 \times 10^{-27} \text{kg/m}^3, \quad (2.13)$$

donde $H_0 := H(t_0)$ es la *constante de Hubble* evaluada en el presente. Dividiendo la ecuación (2.10) por H^2 y usando (2.11) y (2.12), es posible reescribir la ecuación de Friedmann de la siguiente forma

$$1 = \frac{\rho}{\rho_{\text{crit}}} - \frac{k}{a^2 H^2}. \quad (2.14)$$

Definimos al parámetro Ω_k que corresponde a la curvatura espacial del universo

$$\Omega_k := -\frac{k}{a^2 H^2}, \quad (2.15)$$

y usando (2.12), la ecuación (2.14) se convierte en

$$1 = \Omega_{\text{total}} + \Omega_k, \quad (2.16)$$

en donde

$$\Omega_{\text{total}} := \frac{\rho}{\rho_{\text{crit}}} = \Omega_{\text{MB}} + \Omega_{\text{MO}} + \Omega_{\text{R}} + \Omega_{\Lambda} + \dots \quad (2.17)$$

Otra forma de expresar la ecuación de Friedmann es uniendo las expresiones (2.10) y (2.16) con la ayuda de la ecuación de conservación de materia. Primero debemos encontrar la dependencia de la densidad ρ_i con respecto al factor de escala para cada una de las componentes, y dado que la presión asociada al fluido de materia bariónica es cero, la ecuación de conservación de materia toma la forma

$$\dot{\rho}_{\text{MB}} + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho_{\text{MB}} = 0, \quad \Rightarrow \quad \rho_{\text{MB}}(a) = \frac{\rho_{\text{MB}}^0}{a^3}, \quad (2.18)$$

donde hemos normalizado al factor de escala de forma que en el presente $a_0 = 1$. Usando el hecho de que para la materia oscura se tiene exactamente la misma expresión que para la materia bariónica

$$\rho_{\text{MO}}(a) = \frac{\rho_{\text{MO}}^0}{a^3}, \quad (2.19)$$

con ρ_{MO}^0 el valor presente de la densidad de la materia oscura. En ocasiones se suele agrupar ambas componentes, materia bariónica y oscura en una misma expresión, y se suele referir a ella simplemente como “materia” $\rho_{\text{M}}(a)$. Esta se define de la siguiente forma

$$\rho_{\text{M}}(a) := \rho_{\text{MB}}(a) + \rho_{\text{MO}}(a), \quad \rho_{\text{M}}^0 := \rho_{\text{MB}}^0 + \rho_{\text{MO}}^0, \quad (2.20)$$

con lo que se llega a

$$\rho_M(a) = \frac{\rho_M^0}{a^3}. \quad (2.21)$$

Para la componente de radiación, la ecuación de estado puede calcularse a partir del tensor de energía-momento del campo electromagnético

$$T_{\mu\nu} = F_{\mu\alpha}F_{\nu}^{\alpha} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}, \quad (2.22)$$

en donde $F_{\mu\nu}$ es el *tensor de Faraday*.³ Sustituyendo la ecuación anterior en (2.4) tenemos

$$\frac{d\rho_R}{dt} + 4\frac{\dot{a}}{a}\rho_R \quad \Rightarrow \quad \rho_R(a) = \frac{\rho_R^0}{a^4}. \quad (2.23)$$

Para el caso de la constante cosmológica se tiene puede relacionarse con la energía de vacío; una especie de densidad de energía del espacio libre. Una característica que se debe satisfacer es que debe ser isotrópica, así que su tensor de energía-momento debe comportarse como un invariante de Lorentz bajo transformación de coordenadas. Para el caso local se debe satisfacer que el tensor es proporcional a la métrica $T_{\mu\nu}^{(vac)} = -\rho_{vac}\eta_{\mu\nu}$, ya que η es el único tensor invariante de tipo (0,2). Cuando generalizamos al caso de cualesquiera sistemas de coordenadas se tiene

$$T_{\mu\nu}^{(vac)} = -\rho_{vac}g_{\mu\nu}, \quad (2.24)$$

y comparando con el tensor del fluido perfecto llegamos a una ecuación de estado de la forma $p_{vac} = -\rho_{(vac)}$. Sustituyendo esta expresión en (2.4) y sustituyendo la etiqueta de vacío por la de una constante cosmológica se obtiene

$$\frac{d\rho_{\Lambda}}{dt} = 0, \quad (2.25)$$

lo cual implica que la densidad de la constante cosmológica siempre es una constante

$$\rho_{\Lambda} = \rho_{\Lambda}^0 = \text{cte}. \quad (2.26)$$

Sustituyendo ahora las expresiones (2.18, 2.19, 2.23, 2.26) en la ecuación de Friedmann tenemos

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left(\frac{\rho_{MB}^0}{a^3} + \frac{\rho_{MO}^0}{a^3} + \frac{\rho_R^0}{a^4} + \rho_{\Lambda}^0 \right) - \frac{k}{a^2}, \quad (2.27)$$

y dividiendo por H_0^2 e identificando la expresión de la densidad crítica

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \left(\frac{\rho_{MB}^0}{\rho_{crit}^0} \frac{1}{a^3} + \frac{\rho_{MO}^0}{\rho_{crit}^0} \frac{1}{a^3} + \frac{\rho_R^0}{\rho_{crit}^0} \frac{1}{a^4} + \frac{\rho_{\Lambda}^0}{\rho_{crit}^0} \right) - \frac{k}{a^2 H_0^2}. \quad (2.28)$$

Tomando las definiciones del parámetro de densidad y de la curvatura espacial $\Omega_k^0 := -k/H_0^2$ llegamos a

$$H(a) = H_0 \left(\frac{\Omega_{MB}^0}{a^3} + \frac{\Omega_{MO}^0}{a^3} + \frac{\Omega_R^0}{a^4} + \Omega_{\Lambda}^0 + \frac{\Omega_k^0}{a^2} \right)^{1/2}. \quad (2.29)$$

Para determinar el valor de k a partir del parámetro de curvatura Ω_k^0 en el modelo Λ CDM se tiene

³El tensor de Faraday $F_{\mu\nu}$ se define en términos del cuadripotencial A como $F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}$ donde $A_{\mu} = (-\phi, \mathbf{A})$, ϕ y \mathbf{A} son los potenciales eléctrico y magnético respectivamente.

$$\text{Cerrado } k > 0 \quad \Rightarrow \quad \Omega_k^0 < 0 \quad \Rightarrow \quad \Omega_{\text{MB}}^0 + \Omega_{\text{MO}}^0 + \Omega_{\Lambda}^0 + \Omega_{\text{R}}^0 > 0.$$

$$\text{Plano } k = 0 \quad \Rightarrow \quad \Omega_k^0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Omega_{\text{MB}}^0 + \Omega_{\text{MO}}^0 + \Omega_{\Lambda}^0 + \Omega_{\text{R}}^0 = 0.$$

$$\text{Abierto } k < 0 \quad \Rightarrow \quad \Omega_k^0 > 0 \quad \Rightarrow \quad \Omega_{\text{MB}}^0 + \Omega_{\text{MO}}^0 + \Omega_{\Lambda}^0 + \Omega_{\text{R}}^0 < 0.$$

Es decir, hallando los valores de Ω_{MO}^0 , Ω_{MB}^0 y Ω_{Λ}^0 queda determinada la geometría del universo.

2.5. Un universo en expansión

En 1998 un grupo de astrónomos encabezados por Adam Riess publicaron un artículo titulado “*Observational evidence from supernovae for an accelerating Universe and a cosmological constant*” [1], en el que indicaban la posible expansión acelerada del universo hoy en día. Este grupo realizó un estudio sobre 50 supernovas tipo Ia que se encontraban a diversas distancias cosmológicas y descubrieron que éstas parecían tener una luminosidad aparente menor de la que predecía el modelo cosmológico más aceptado en aquel entonces: $\Omega_{\text{M}}^0 = 1$ (con $\Omega_{\text{R}}^0 = 0.00005$ y $\Omega_{\Lambda}^0 = \Omega_{\text{k}}^0 = 0$). Revisaron las posibles razones que atenuaban su luminosidad tales como errores sistemáticos en las mediciones, polvo interestelar, evolución de la metalicidad, lentes gravitacionales, etc. y a pesar de tomar en cuenta estos fenómenos, la luminosidad era de cualquier forma notablemente menor a lo esperado.

La conclusión a la que llegaron fue que el atenuamiento era debido a que las supernovas se encontraban a una distancia mayor de la esperada, es decir, estaban en promedio 10–15% más distantes que lo que predecía el modelo. Al realizar un análisis estadístico para determinar y acotar los valores de Ω_{M}^0 y Ω_{Λ}^0 , encontraron que el modelo que mejor ajustaba los datos era el de una constante cosmológica positiva $\Omega_{\Lambda}^0 > 0$, con un 99.9% de nivel de confianza (4.0σ) y un universo en expansión **acelerada**, con un 99.9% de confianza. Con esto concluyeron que la disminución de la luminosidad de las supernovas podría explicarse con la presencia de una constante cosmológica positiva ($\Omega_{\Lambda}^0 \sim 0.7$, asumiendo $\Omega_{\text{k}} = 0$) y con un universo en una etapa de expansión acelerada. Esto despertó gran interés entre la comunidad y generó que diversos grupos se pusieran a trabajar en el tema. Ese mismo año un grupo liderado por Saul Perlmutter realizó un estudio semejante al de Riess, y usando una forma distinta de manejo de datos llegaron a la misma conclusión: un universo en expansión acelerada y la presencia de una constante cosmológica con contribución del orden de $\Omega_{\Lambda}^0 \sim 0.7$.

2.5.1. El parámetro de desaceleración

En el estudio de la supernovas tipo Ia se ha encontrado que el universo no sólo se está expandiendo, sino que la rapidez con la que lo hace está cambiando con el tiempo. Una forma de cuantificar esto es usando el parámetro de desaceleración. Consideramos una expansión de Taylor del factor de escala alrededor de la época actual

$$a(t) = a(t_0) + \dot{a}(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}\ddot{a}(t_0)(t - t_0)^2 + \dots \quad (2.30)$$

Dividiendo por $a(t_0)$ y tomando coeficiente de $(t - t_0)$ como el parámetro de Hubble actual, podemos reescribir

$$\frac{a(t)}{a(t_0)} = 1 + H_0(t - t_0) - \frac{1}{2}q_0H_0^2(t - t_0)^2 + \dots \quad (2.31)$$

siendo $q(t)$ el parámetro de desaceleración

$$q_0(t) = -\frac{a(t_0)\ddot{a}(t_0)}{\dot{a}^2(t_0)}. \quad (2.32)$$

En términos de $q(t)$ se tiene

$\ddot{a} > 0 \Rightarrow q(t) < 0$ Expansión *acelerada* del universo.

$\ddot{a} < 0 \Rightarrow q(t) > 0$ Expansión *desacelerada* del universo.

De igual forma, de la definición del parámetro de Hubble

$H(t) > 0 \Rightarrow$ *Expansión* del universo.

$H(t) < 0 \Rightarrow$ *Contracción* del universo.

2.5.2. Expansión acelerada del universo

Se acostumbra definir al corrimiento al rojo gravitacional por medio de

$$1 + z = \frac{a_0}{a}, \quad (2.33)$$

y con la ayuda del parámetro de desaceleración (2.32) es posible reescribir al factor de Hubble como

$$H(z) = H_0 \exp\left(\int_0^z [1 + q(z')] d \ln(1 + z')\right). \quad (2.34)$$

Definimos la distancia de luminosidad como una medición usada en astronomía que se basa en la diferencia entre la magnitud absoluta (brillo intrínseco de las estrellas) y la magnitud aparente (brillo que nosotros observamos) por medio de

$$d_L^2 = \frac{L}{4\pi F}, \quad (2.35)$$

en donde L es la luminosidad absoluta de la fuente y F el flujo de fotones medido por un observador. Esto es posible ya que la magnitud aparente se ve afectado por la curvatura del espacio-tiempo, el corrimiento al rojo de fotones y la dilatación del tiempo. Usando (2.34) se tiene que para un universo plano

$$d_L(z) = \frac{c(1+z)}{H_0} \int_0^z \exp\left(-\int_0^{z'} [1 + q(z'')] d \ln(1 + z'')\right) dz'. \quad (2.36)$$

Haciendo una expansión a primer orden para $q(z)$ alrededor de $z = 0$

$$q(z) = q_0 + z \left. \frac{dq}{dz} \right|_{z=0}, \quad (2.37)$$

podemos calcular el valor que el parámetro de desaceleración tiene hoy en día $q_0 := q(z = 0)$, mientras que $(dq/dz)|_{z=0}$ nos indicará la evolución de $q(z)$. Con esto es posible investigar el signo de q_0 y si ha habido transiciones en el pasado a partir del signo de $(dq/dz)|_{z=0}$. Tomando en cuenta la expansión (2.37), la expresión (2.36) resulta

$$d_L(z) = \frac{c(1+z)}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{(1+z')^{1+q_0-q'_0} e^{z'q'_0}}, \quad (2.38)$$

donde $q'_0 := (dq/dz)|_{z=0}$. Del análisis estadístico usando los datos de supernovas Ia se tiene que las mejores estimaciones son

$$q_0 = -0.7432, \quad \left. \frac{dq}{dz} \right|_{z=0} = 1.6344. \quad (2.39)$$

lo cual nos indica que el universo tiene una expansión *acelerada* hoy en día, mientras la condición $dq/dz|_{z=0} > 0$ sugiere un la existencia de un periodo de desaceleración en el pasado. Esto se debe a que la función $q(z)$ es una recta bajo la aproximación lineal $q(z) = q_0 + z(dq/dz)|_{z=0}$, lo cual implica entonces que $q(z)$ fue positiva para algún $z > 0$ en algún intervalo en el pasado.

Además de las mediciones de supernovas, existen diversas observaciones cosmológicas que apoyan la idea de un universo en expansión. Entre las principales tenemos a la Radiación Cómica de Fondo (CMB) y las Oscilaciones Acústicas de Bariones (BAO) como se aprecia en la figura 2.1. Usando los resultados actuales [27], tenemos que el parámetro de ecuación de estado tiene un valor $\omega = -1.006 \pm 0.045$, mientras que para el término de curvatura se tiene $|\Omega_k| < 0.005$.

2.5.3. Parámetros cosmológicos

Hasta hace algunos años la cosmología estaba fundamentada principalmente en conjeturas filosóficas y validada principalmente por argumentos matemáticos. Sin embargo, gracias al avance en las técnicas de observación y el grado de fiabilidad que tenemos de los aparatos de medición, podemos decir que en la actualidad se cuenta con predicciones que están de acuerdo con los experimentos con una precisión cada vez mayor. Al día de hoy podemos describir a nuestro universo como una perturbación en un fondo con geometría tipo Robertson-Walker en donde la dinámica está descrita por las ecuaciones de campo de Einstein. Esto se logra a partir de la caracterización que los modelos a partir de ciertos parámetros que permiten describir el comportamiento de los fenómenos en el universo. Se tiene de manera típica que los modelos pueden ser caracterizados a partir del conocimiento de entre cinco y diez parámetros, aunque seis es el número mínimo que necesitamos para dar un ajuste razonable con las observaciones [22].

A partir del principio cosmológico es posible describir al universo homogéneo por medio del factor de Hubble y de los parámetros de densidad de cada una de las componentes de materia. El hecho de que se trate de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias nos permite estudiar la dinámica hacia el pasado hasta tiempos cercanos a nucleosíntesis primordial. A partir de acá es necesario considerar modificaciones a la relatividad general y al modelo estándar de partículas por lo que es en principio un área especulativa. Sin embargo,

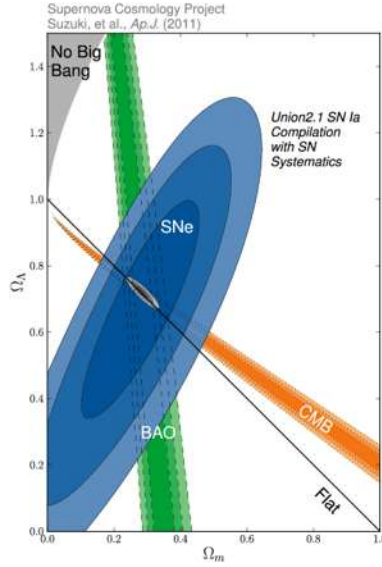


Figura 2.1: Unión de datos para las Supernovas tipo Ia (SNe), Fondo Cósmico de Microondas (CMB) y Oscilaciones Acústicas de Bariones (BAO). La línea negra representa a un universo plano ($\Omega_m^0 + \Omega_\Lambda^0 = 1$). Fuente: Supernova Cosmology Project, Lawrence Berkeley Laboratory.

considerando como un inicio el final de inflación, podemos distinguir a las desviaciones de homogeneidad de manera estadística. Este modelo fue propuesto por Alan Guth y nos dice que el universo se expandió en el pasado de forma muy rápida [23]. Este modelo se encarga de arreglar problemas como el del horizonte y el de monopolos magnéticos gracias a una expansión superacelerada, por lo que regiones que ahora se muestran inconexas estuvieron conectadas causalmente en el pasado. Además, propone un mecanismo dinámico que conduce al Universo a una geometría plana, resolviendo el problema de la planitud [24].

El proceso de inflación postula una fase de expansión acelerada en el universo debida a una forma de energía con presión negativa originada por potencial de un campo escalar denominado *inflatón*. Este campo domina el contenido de energía durante los primeros instantes y son sus fluctuaciones cuánticas las responsables de que generan perturbaciones en la métrica, las que posteriormente crecen con la expansión del universo y debido al colapso gravitatorio formarán la estructura a gran escala que observamos hoy en día. Dividimos a las perturbaciones en tres grupos: escalares, vectoriales y tensoriales y las escribimos de forma explícita

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -(1 + 2\Phi)dt^2 + 2a(t)B_i dx^i dt + a^2(t) [(1 - 2\Psi)\delta_{ij} + E_{ij}] dx^i dx^j, \quad (2.40)$$

en donde Φ es llamado potencial Newtoniano, Ψ es la curvatura escalar de secciones temporales, B_i es el término de perturbación vectorial y E_{ij} es el término de perturbación tensorial relacionado con ondas gravitacionales. Introducimos ahora un parámetro $\mathcal{R}(x)$ el cual es un invariante de norma y depende de los potenciales Φ y Ψ , tal que nos indica la curvatura espacial de las hipersuperficies. Las perturbaciones a dicho parámetro son llamadas perturbaciones de curvatura [?]. Cuando estas perturbaciones crecen por encima del horizonte se congelan ,

así que al estudiarlas obtenemos información acerca de cómo ha sido la evolución del universo. Considerando el espectro de Harrison-Zel'dovich ($\Delta_R^2 = \text{cte}$), podemos tomar el ansatz

$$\Delta_R^2(k) = \Delta_R^2(k_*) \left(\frac{k}{k_*} \right)^{n-1}, \quad (2.41)$$

siendo $\Delta_R^2(k_*)$ la amplitud de las perturbaciones, $k \sim 0.035 \text{ Mpc}^{-1}$ denota el pico en el espectro de potencias de las perturbaciones iniciales, k_* es llamado pivote de escala y n el índice espectral que nos da información acerca de la variación de las perturbaciones con respecto a k [25].

Finalmente vamos a mencionar que a partir del desacople de fotones ($z \sim 1100$) el universo puede ser visto como electricamente neutro hasta ($z \sim 5$) cuando el hidrógeno pasó a ser ionizado. Evidencias observacionales basadas en la ausencia del fenómeno Gunn-Peterson muestran la ausencia de espectros de absorción en cuásares lejanos y esto indica abundancia de hidrógeno neutro en el medio interestelar menor a la esperada [26]. Esto modifica a los fotones provenientes del CMB y para estudiar este proceso se puede ver a partir de la probabilidad de que un fotón se haya propagado de forma libre a partir de un tiempo t hasta nuestros días t_0 . La probabilidad de este fenómeno está dada por

$$\begin{aligned} P(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(1 - \frac{\Delta t}{\tau(t)} \right) \cdots \left(1 - \frac{\Delta t}{\tau(t_0)} \right), \\ &= \exp \left(- \int_t^{t_0} \frac{dt}{\tau(t)} \right) \equiv \exp(-\mu(t)), \end{aligned} \quad (2.42)$$

en donde $\tau = (\sigma_T X n_t)^{-1}$ es el tiempo libre medio para la dispersión de Thompson, n_t es el número total de electrones y X es la fracción total de ionización. La profundidad óptica $\mu(t) = \mu(z)$ puede ser reescrita como una integral definida sobre el parámetro de corrimiento al rojo

$$\mu(z) = \int_t^{t_0} \left(\frac{dt}{\tau(t)} \right) = \sigma_T \int_0^z \frac{X n_t(z)}{H(z)(1+z)} dz. \quad (2.43)$$

Para el caso del modelo estándar Λ CDM se tiene a partir de las observaciones de Planck [27]: parámetro de densidad de materia bariónica $\Omega_b h^2 = 0.02230 \pm 0.00014$, parámetro de densidad de materia oscura $\Omega_c h^2 = 0.1188 \pm 0.0010$, edad del universo $t_0 = 13.799 \pm 0.021 \times 10^9$ años, índice espectral escalar $n_s = 0.9667 \pm 0.0040$, la amplitud de fluctuaciones en la curvatura $\Delta_R^2 = 2.441_{-0.092}^{+0.088} \times 10^{-9}$ amplitud de las perturbaciones de curvatura Δ_R^2 y profundidad óptica de reionización $\tau = 0.066 \pm 0.012$.

Para finalizar vale la pena recordar que, aunque el modelo Λ CDM es el más sencillo y el que mejor se ajusta al conjunto de datos observacionales, presenta algunos problemas que hacen que no sea del todo satisfactorio [29]. Más importante aún, hasta el día de hoy se desconoce la naturaleza de estas dos nuevas componentes y aunque existen algunas propuestas para definir su origen a partir de modelos de física de partículas, hasta el momento no se cuenta con modelos convincentes.

Capítulo 3

El problema de la energía oscura

Una de las preguntas abiertas en la física teórica está relacionada con la naturaleza de la energía oscura, la cual es causante de la aceleración observada en el universo. Esta afirmación se sustenta a partir de observaciones cosmológicas independientes entre las que destacan la luminosidad de las supernovas tipo Ia (SNIa) [1, 2], las oscilaciones acústicas de bariones (BAO) [3], el fondo cósmico de radiación (CMB) [4], la estructura que presenta la materia a grandes escalas (LSS) [5], lentes gravitacionales [6] y el efecto Sach-Wolf [7]. Se acostumbra dividir en dos grandes grupos a los modelos que intentan explicar estas observaciones: i) si consideramos que relatividad general es una teoría completa, es necesario asumir la existencia de una nueva componente en el universo, o bien ii) suponer que la teoría de la relatividad general debe sufrir modificaciones a escalas cosmológicas, y son éstas las causantes de la fenomenología observada. En este capítulo vamos a mencionar algunos de los modelos más estudiados en la literatura haciendo especial énfasis en el campo escalar galileón, el cual es el tema central de esta tesis. De momento vamos a escribir de forma explícita el valor del acoplamiento de gravedad de la forma $8\pi G_N$.

3.1. Nuevos campos de materia

En el contexto de la relatividad general la explicación más sencilla para la energía oscura es asumir la existencia de una componente de materia con presión negativa capaz de causar la aceleración observada. Se sabe que es muy homogénea, no muy densa ($10^{-29}g/cm^3$) [30, 31], y hasta donde sabemos, no presenta interacción con los otros campos de materia salvo por la interacción gravitacional. Entre los principales modelos que se tienen disponibles para explicar este comportamiento podemos mencionar a la constante cosmológica Λ , los campos escalares y los modelos de interacción no gravitacional con la materia oscura.

3.1.1. Constante Cosmológica Λ

Desde el punto de vista de la relatividad general se trata de un parámetro con unidades de $(\text{dist})^{-2}$ introducido por Einstein para obtener una solución estática del universo. Representa el modelo más sencillo y el que mejor se ajusta al conjunto de observaciones cosmológicas, aunque su naturaleza sigue siendo un misterio. Asumiendo que se trata de la energía del vacío

CAPÍTULO 3. EL PROBLEMA DE LA ENERGÍA OSCURA

3.1. NUEVOS CAMPOS DE MATERIA

[8] puede ser descrita por medio de un campo escalar ϕ . Escribimos la acción

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - V(\phi) \right], \quad (3.1)$$

en donde g es el determinante del tensor métrico y $V(\phi)$ es un potencial de autointeracción. Tomando la variación de (3.1) con respecto a la métrica se obtiene el tensor de energía-momento

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi + \frac{1}{2} (g^{\rho\sigma} \nabla_\rho \phi \nabla_\sigma \phi) g_{\mu\nu} - V(\phi) g_{\mu\nu}. \quad (3.2)$$

Para que la teoría presente covarianza general, una posibilidad es que $T_{\mu\nu}$ sea proporcional al tensor de geometría $T_{\mu\nu} \sim g_{\mu\nu}$. Esto tiene sentido ya que al ser el estado de mínima energía se espera que no exista contribución del término cinético $\nabla_\mu \phi$. En este caso

$$T_{\mu\nu} = V(\phi_0) g_{\mu\nu} = -\rho_{vac} g_{\mu\nu},$$

en donde ϕ_0 es el valor del campo que minimiza al potencial V .

Considerando que el vacío puede ser modelado como un fluido perfecto tenemos que existe una relación entre la densidad de energía y la presión de la forma $p_{vac} = -\rho_{vac}$. Esto puede entenderse como que, desde el punto de vista matemático es indistinguible tener una energía de vacío o una constante cosmológica.

Para calcular la energía del vacío es necesario tomar en cuenta que, además de existir un valor mínimo para el potencial también debe agregarse el valor generado por las fluctuaciones cuánticas. Tomando el valor de la energía para el punto cero como $\hbar\omega/2$, podemos escribir a la densidad de energía del campo como la colección de pequeños osciladores en el espacio de momentos

$$\rho_{vac} = \int_0^\infty \sqrt{k^2 + m^2} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \simeq \frac{k_{max}^4}{16\pi^2}, \quad (3.3)$$

en donde hemos desechado los momentos grandes, ya que se considera que la teoría es válida sólo hasta cierto corte en el ultravioleta.

En el modelo electrodébil de Weinberg y Salam, la fase de rompimiento de simetría ocurre a escalas de energía del orden de 200 GeV [32]. Para este caso, la energía del vacío tiene un valor de

$$\rho_\Lambda^{EW} \sim (200 GeV)^4 \sim 10^{47} erg/cm^3. \quad (3.4)$$

Si consideramos que la teoría es válida hasta escalas de QCD [32], debemos esperar una contribución de energía del orden

$$\rho_\Lambda^{QCD} (0.3 GeV)^4 \sim 10^{36} erg/cm^3. \quad (3.5)$$

Siendo positivos y pensando que la validez de la teoría se mantiene hasta la escala de Planck [32], la contribución en este caso viene del orden

$$\rho_\Lambda^{Pl} \sim (10^{18} GeV)^4 \sim 10^{110} erg/cm^3 \quad (3.6)$$

CAPÍTULO 3. EL PROBLEMA DE LA ENERGÍA OSCURA
3.1. NUEVOS CAMPOS DE MATERIA

Se puede obtener a partir del conjunto de observaciones cosmológicas [27] una densidad de energía

$$|\rho_{\Lambda}^{(Obs)}| \leq (10^{-12} GeV)^4 \sim 10^{-10} erg/cm^3, \quad (3.7)$$

así que el cociente ente (3.6) y (3.7) da origen al famoso problema de los 120 órdenes de magnitud. Este ha sido catalogado como la “peor predicción en la historia de la física” [33].

3.1.2. Campos escalares quintaesencia

El conjunto de observaciones favorecen la existencia de una constante cosmológica que satisface una ecuación de estado $p = -\rho$, es decir $\omega = -1$. Desafortunadamente no existe experimento alguno que nos diga si esta cantidad es realmente una constante, o si se trata de un parámetro dinámico [9]. Una forma de describir este comportamiento es asumiendo nuevamente la existencia de un campo escalar ϕ acoplado de forma mínima a la gravedad [10]

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_{\mu} \phi \nabla_{\nu} \phi - V(\phi) \right]. \quad (3.8)$$

Tomando en este caso la variación de la acción anterior con respecto al campo escalar obtenemos la ecuación de conservación

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -V_{,\phi}, \quad (3.9)$$

en donde $V_{,\phi} = dV/d\phi$ y el tensor de energía momento está dado por (3.2). Para un fondo plano tipo FLRW, la presión y la densidad de energía toman la forma

$$\rho_{\phi} = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad p_{\phi} = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (3.10)$$

Para este caso las ecuaciones de Friedmann (2.10) toman la forma

$$H^2 = \frac{8\pi G_N}{3} \left[\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \right], \quad (3.11)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{8\pi G_N}{3} \left[\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) \right]. \quad (3.12)$$

Aquí se puede ver que existe aceleración positiva cuando $\dot{\phi} < V(\phi)$. Tomando el caso de un campo con potencial plano ($\dot{\phi} \sim 0$) se obtiene un parámetro de ecuación de estado

$$\omega_{\phi} = \frac{\dot{\phi}^2 - 2V(\phi)}{\dot{\phi}^2 + 2V(\phi)}, \quad (3.13)$$

el cual se encuentra en el rango $-1 \leq \omega_{\phi} \leq 1$. La ecuación de continuidad (2.11) se escribe

$$\rho = \rho_0 \exp \left[- \int 3(1 + \omega_{\phi}) \frac{da}{a} \right], \quad (3.14)$$

con ρ_0 una constante de integración. Para el caso límite de lento rodamiento $\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$, corresponde a $\omega_{\phi} = -1$, y a partir de (3.14) tenemos que $\rho = \rho_0 = cte$. Para el caso de

CAPÍTULO 3. EL PROBLEMA DE LA ENERGÍA OSCURA

3.1. NUEVOS CAMPOS DE MATERIA

materia dura (stiff matter) caracterizado por $\dot{\phi} \gg V(\phi)$, se tiene que $\omega_\phi = 1$ y la densidad de energía crece de forma proporcional a $\rho \propto a^{-6}$. En cualquier otro caso se tiene

$$\rho \propto a^{-m}, \quad 0 < m < 6.$$

Entre los diferentes potenciales que se han estudiado en la literatura, vale la pena revisar a aquellos que dan origen a una expansión tipo ley de potencias $a(t) \propto t^p$, con $p > 1$. A partir de la segunda ecuación de Friedmann (2.7) $\dot{H} = -4\pi G_N \dot{\phi}^2$, así que podemos expresar al potencial y al campo escalar de la forma

$$V = \frac{3H^2}{8\pi G_N} \left(1 + \frac{\dot{H}}{3H^2} \right), \quad (3.15)$$

$$\phi = \int dt \left(-\frac{\dot{H}}{4\pi G_N} \right)^{1/2}. \quad (3.16)$$

Tomando la raíz positiva de $\dot{\phi}$ podemos construir al potencial que genera la expansión tipo ley de potencia para el factor de escala, siempre y cuando $p > 1$.

Otra ventaja al estudiar este tipo de potenciales es la aparición de soluciones *scaling* [34, 35], en donde la densidad de energía del campo escalar es proporcional a la densidad de energía de la materia ρ_m . Por ejemplo, en el caso de un potencial exponencial

$$V(\phi) = V_0 \exp\left(-\lambda \frac{\phi}{M_{pl}}\right), \quad (3.17)$$

con V_0 una constante de integración, $M_{pl}^2 = (8\pi G_N)^{-1}$ es la masa de Planck y λ es un parámetro del modelo. Este tipo de potenciales aparecen comúnmente en teorías que van más allá del modelo estándar [36, 37] y presentan una dinámica dependiente del valor del parámetro λ . Cuando $\lambda^2 > 3(1 + \omega_m)$, la densidad de energía del campo escalar sigue a la densidad de energía de la materia ρ_m (sin tocarla), así que su crecimiento está siempre acotado. Para el caso $\lambda^2 < 2$, es posible hallar soluciones acelerantes, pero es necesario especificar condiciones iniciales para ϕ y $\dot{\phi}$.

Finalmente, vamos a mencionar la existencia de dos grupos de modelos de campo escalar quintaesencia; los modelos *thawing* y *freezing* [38]. Los modelos *thawing* poseen un potencial mínimo que puede ser reescalado a $V = 0$, el cual es accesible para un valor finito del campo. En este caso, el campo comienza en lo alto del potencial y permanece “congelado” por el parámetro de Hubble mientras el parámetro de ecuación de estado $\omega_\phi \simeq -1$. Conforme el parámetro de Hubble decrece, el campo comienza a descongelarse y a rodar por su potencial hasta alcanzar un parámetro $\omega_\phi = 0$.

Los modelos *freezing* son aquellos que no poseen un estado de vacío, así que el mínimo no es accesible para un valor finito del campo. Aún cuando no existen barreras, el rodamiento del campo se va frenando conforme el parámetro evoluciona de forma que $\omega_\phi \rightarrow -1$. En caso del potencial ley de potencias $V(\phi) = V_0 \phi^{-p}$ ($p > 0$), existe una solución llamada “tracker”,

CAPÍTULO 3. EL PROBLEMA DE LA ENERGÍA OSCURA

3.1. NUEVOS CAMPOS DE MATERIA

en donde el parámetro de ecuación de estado toma la forma $\omega = -2/(p + 2)$ durante el dominio de materia. En este caso, las soluciones con distintas condiciones iniciales se acercan a una trayectoria en donde ω decrece a -1 .

Para dar una idea de la situación de estos modelos con respecto a las observaciones cosmológicas vamos a mencionar algunos resultados hallados en [39]. Acá se presenta el análisis del modelo llevado a cabo con datos de SNIa a partir de la prueba Union 2.1, datos de CMB a partir de WMAP y de BAO obtenidas por SDSS7 y BOSS para una parametrización $\omega(a) = \omega_0 + w_a(1 - a)$, en donde $\omega_0 = -1.046 \pm_{-0.170}^{+0.179}$ y $w_a = 0.14_{-0.76}^{+0.60}$. En el caso de los modelos *thawing* se tiene que el parámetro de la ecuación de estado toma la forma

$$\omega(a) = -1 + (1 + \omega_0) a^{3(K-1)} f(K, \Omega_{\phi_0}, \omega_0),$$

en donde K es un parámetro que describe la masa del campo a tiempos tempranos y que se encuentra en el intervalo $0.1 < K < 10$, mientras que $-1.242 < \omega_0 < -0.995$ y $0.705 < \Omega_{\phi_0} < 0.734$ para un 95% de intervalo de confianza. Par el caso de los modelos *tracking* se tiene que los parámetros están restringidos a $-1.211 < \omega_0 < -0.998$ y $0.701 < \Omega_{\phi_0} < 0.733$, también a un intervalo de confianza del 95%. Finalmente, para los modelos del tipo *scaling*, se tiene que pueden ser vistos como un caso especial de los modelos *tracking* sobre los cuales $\Omega_{\phi} = 3(1 + \omega)/\lambda^2$ es una constante. Durante la etapa de dominio de materia $\omega = \omega_m = 0$, así que $\Omega_{\phi} = 31/\lambda^2$. Para obtener la fase de aceleración definimos el potencial

$$V(\phi) = V_1 e^{-\lambda_1 \phi} + V_2 e^{-\lambda_2 \phi},$$

en donde λ_i, V_i son constantes. En este caso, las observaciones favorecen a los modelos que presentan $\lambda_1 > 11.7$ y $\lambda_2 < 0.539$ también a un 95%.

3.1.3. Modelos de interacción entre materia oscura y energía oscura

Las observaciones recientes nos dicen que las componentes principales del universo 95 – 96% son dos entidades a las que llamamos energía oscura y materia oscura, las cuales son esenciales para tener una dinámica consistente con la teoría de la relatividad general. En el caso de materia oscura se sabe que se trata de materia no luminosa que forma estructuras e interacciona gravitacionalmente con la materia bariónica. Por otro lado, la energía oscura se trata de un objeto que presenta repulsión gravitacional y se dice que es la responsable de la expansión acelerada. Ahora bien, ya que no entendemos la naturaleza de estas componentes nada nos impide considerar la existencia de alguna clase de interacción no gravitacional entre ellas que pueda jugar un papel importante al momento de resolver (o aliviar) algunos problemas teóricos [40, 41, 42]. Por ejemplo, puede ser usada para entender el problema de coincidencia cósmica, ya que de esta forma tenemos que la densidad de energía oscura ya no es una constante, sino es una función que cambia en el tiempo [43]. Vamos a dar un ejemplo sencillo de cómo se modifican las ecuaciones de campo en este tipo de teorías.

Escribimos las ecuaciones de campo de Einstein de la forma

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G [T_{\mu\nu}^R + T_{\mu\nu}^{MB} + T_{\mu\nu}^{MO} + T_{\mu\nu}^{EO}], \quad (3.18)$$

CAPÍTULO 3. EL PROBLEMA DE LA ENERGÍA OSCURA
3.1. NUEVOS CAMPOS DE MATERIA

con $T_{\mu\nu}^i$ el tensor de energía-momento del i -ésimo componente de materia descrito por un fluido perfecto. Tomando la identidad de Bianchi

$$\begin{aligned} \nabla^\nu G_{\mu\nu} = \nabla^\nu T_{\mu\nu}^i = 0, & \Rightarrow \begin{aligned} &= \nabla^\nu T_{\mu\nu}^{MB,R} = 0, \\ &= \nabla^\nu T_{\mu\nu}^{MO} = F_\mu, \\ &= \nabla^\nu T_{\mu\nu}^{EO} = -F_\mu, \end{aligned} \end{aligned} \quad (3.19)$$

en donde $F_\mu = F_\mu(\rho_{MO}, \rho_{EO}, U^\alpha, \nabla_\alpha U^\alpha, \nabla_\alpha \rho_{MO})$ es el cuadrivector de interacción. Para definir al término de interacción Q , proyectamos sobre un vector U^μ perpendicular a nuestra hipersuperficie

$$U^\mu \nabla^\nu T_{\mu\nu}^{MB,R} = 0, \quad (3.20)$$

$$U^\mu \nabla^\nu T_{\mu\nu}^{MO} = U^\mu F_\mu := Q, \quad (3.21)$$

$$U^\mu \nabla^\nu T_{\mu\nu}^{EO} = -U^\mu F_\mu := -Q. \quad (3.21)$$

Tomando al tensor de fluido perfecto de la forma (2.3) y después de algo de álgebra

$$\begin{aligned} U^\mu \nabla^\nu T_{\mu\nu}^i &= U^\mu \nabla^\nu [\rho U_\mu U_\nu + g_{\mu\nu} p] \\ &= U^\nu \nabla_\nu \rho_i - (\rho_i + p_i) \nabla_\nu U^\nu, \end{aligned} \quad (3.22)$$

así que para cada componente

$$\begin{aligned} U^\nu \nabla_\nu \rho_{MB,R} - (\rho_{MB,R} + p_{MB,R}) \nabla_\nu U^\nu &= 0 \\ U^\nu \nabla_\nu \rho_{MO} - (\rho_{MO} + p_{MO}) \nabla_\nu U^\nu &= U^\nu F_\nu := Q, \\ U^\nu \nabla_\nu \rho_{EO} - (\rho_{EO} + p_{EO}) \nabla_\nu U^\nu &= -U^\nu F_\nu := -Q. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Para el caso de la métrica de FLRW tenemos que el sistema de ecuaciones dinámicas toma la forma

$$\dot{\rho}_{MB} + 3H\rho_{MB} = 0, \quad (3.24)$$

$$\dot{\rho}_R + 4H\rho_R = 0, \quad (3.25)$$

$$\dot{\rho}_{MO} + 3H\rho_{MO} = Q, \quad (3.26)$$

$$\dot{\rho}_{EO} + 3H(1 + \omega)\rho_{EO} = -Q. \quad (3.27)$$

Aquí el término Q puede ser interpretado como una transferencia de energía entre materia oscura y energía oscura. Debido a nuestra falta de conocimiento del sector oscuro, las propuestas que existen en la literatura en cuanto a la forma de Q se basan en argumentos heurísticos o que buscan simplificar las ecuaciones [44]. Entre los términos más usados de la literatura podemos tomar los casos $Q = 3H\rho_{MO}$, $Q = 3H\rho_{EO}$ o una combinación lineal de ambos, en donde el parámetro β puede ser visto un término de acoplamiento y se tiene que para el caso especial $\beta = 0$ se recupera el modelo λ CDM. Por lo tanto que basta con conocer el valor de β para saber qué tanto nos alejamos de las predicciones del modelo estándar. Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior para el caso $Q = 3H\rho_{MO}$

$$\begin{aligned} \rho_{MO} &= \rho_{MO}^0 a^{-3+\delta}, \\ \rho_{EO} &= \rho_{EO}^0 a^{-3+\omega} + \frac{\delta \rho_{MO}^0}{3|\omega| - \delta} a^{-3+\delta}, \end{aligned} \quad (3.28)$$

en donde el parámetro δ cuantifica la desviación con respecto al caso en donde no existe interacción y $\delta < 0$ corresponde al caso en el que la energía fluye de la componente de materia oscura a la de energía oscura, mientras que $\delta > 0$ indica que la energía fluye de la componente de energía oscura a la de materia oscura. Como ejemplo podemos tomar [45], en donde el parámetro $\delta = -0.009234^{+0.021}_{-0.017}$ para un intervalo de confianza del 95 %.

3.2. Teorías de gravedad modificada

Otra forma de explicar la aceleración observada del universo es considerando que ésta es una manifestación de nueva física y no de la presencia de energía oscura [11, 12]. En este caso, es necesario modificar la parte izquierda de las ecuaciones de campo de Einstein dando como resultado dos caminos de trabajo: i) se generalizan las ecuaciones de Friedmann, o ii) las modificaciones se llevan a cabo en las ecuaciones que gobiernan el crecimiento de perturbaciones de densidad, y son estas las que dan origen a las grandes estructuras que observamos. En general, los modelos de gravedad modificada son construidos de forma que, aún cuando las modificaciones en el IR sean grandes, siempre debe ser posible recuperar relatividad general a escalas del sistema solar. A lo largo del capítulo se usará de forma indistinta el término perturbación gravitacional y gravitón, sin importar el origen clásico o cuántico del nombre. Nos referimos únicamente a la propagación de la gravedad.

3.2.1. Teorías tensor-escalares

Se trata de un conjunto de teorías en donde la interacción gravitacional es transportada por el tensor métrico y por un campo escalar [15, 16, 17]. Estos modelos aparecen en el límite de bajas energías en teorías de cuerdas, así como en los modelos tipo $f(R)$ (de los cuales hablaremos a continuación). En este caso, la constante de acoplamiento de gravedad G_N ya no es una constante, pero permite definir a un campo escalar $\phi(x)$ por medio de $1/G_N$.

Tomando una acción del tipo

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[f(\phi)R - \frac{1}{2}h(\phi)g^{\mu\nu}(\nabla_\mu\phi)(\nabla_\nu\phi) - V(\phi) + \mathcal{L}_m(g_{\mu\nu}, \Psi) \right], \quad (3.29)$$

en donde g es el determinante del tensor métrico y R el escalar de curvatura. Las funciones $f(\phi)$, $h(\phi)$ y el potencial $V(\phi)$ son las que determinan la forma y las características de cada teoría. Aquí \mathcal{L}_M representa al Lagrangiano de materia que depende de la métrica y de los campos de materia Ψ_i . La presencia del término $f(\phi)$ multiplicando al escalar de curvatura R es responsable de que G_N ya no sea una constante, mientras que $h(\phi)$ se denomina término cinético del campo escalar.

Tomando la variación de (3.29) con respecto a la métrica obtenemos las ecuaciones de movimiento

$$G_{\mu\nu} = f^{-1}(\phi) \left[\frac{1}{2}T_{\mu\nu}^M + \frac{1}{2}T_{\mu\nu}^\phi + \nabla_\mu\nabla_\nu f - g_{\mu\nu}\square f \right], \quad (3.30)$$

CAPÍTULO 3. EL PROBLEMA DE LA ENERGÍA OSCURA
3.2. TEORÍAS DE GRAVEDAD MODIFICADA

en donde $G_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein, $T_{\mu\nu}^M$ es el tensor de energía-momento de la materia y

$$T_{\mu\nu}^\phi = h(\phi)(\nabla_\mu\phi)(\nabla_\nu\phi) - g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2}h(\phi)g^{\rho\sigma}(\nabla_\rho\phi)(\nabla_\sigma\phi) + V(\phi) \right], \quad (3.31)$$

es el tensor de energía-momento del campo escalar. Haciendo la variación de (3.29) con respecto al campo escalar

$$h(\square\phi) + \frac{1}{2}h'g^{\mu\nu}(\nabla_\mu\phi)(\nabla_\nu\phi) - V' + f'R = 0, \quad (3.32)$$

en donde $' := d/d\phi$.

Para un universo tipo FLRW plano tenemos que la ecuación de Friedmann toma la forma

$$H^2 = \frac{\rho}{6f} + \frac{h\dot{f}^2}{6f} - H\frac{\dot{f}}{f} + \frac{V}{6f}, \quad (3.33)$$

mientras que para la ecuación de conservación del campo

$$\ddot{f} + 3H\dot{f} = 3\frac{f'}{h}(\dot{H} + 2H^2) - \frac{h'\dot{f}^2}{2h} - \frac{V'}{2h}. \quad (3.34)$$

Debemos notar al menos dos cosas interesantes de esta última ecuación. Primero, debido a la gran libertad que tenemos para elegir las funciones f , h y V , es difícil tener enunciados generales de existencia y validez. Además, aún cuando se pueda especificar la forma de las funciones mencionadas, es necesario también el conocimiento de condiciones iniciales para determinar la fenomenología de cada teoría. Por otro lado, además de que existe una diferencia notable entre estas ecuaciones de movimiento y las obtenidas en el caso de relatividad general, hay algunos modelos de aceleración cosmológica que comparten propiedades con sistemas de tipo quintaesencia. Por ejemplo, si el potencial $V(\phi)$ es lo suficientemente plano, pueden existir soluciones de las ecuaciones de movimiento tales que desplacen al campo de su mínimo $V(\phi)$, dando origen a un “rodamiento lento” en donde $\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$. En este caso, la ecuación de Friedmann toma la forma

$$H^2 \simeq \frac{V}{6f} \simeq cte,$$

originando así una expansión tipo De Sitter. También debemos mencionar que, debido a que los términos adicionales de la ecuación de Friedmann y de conservación del campo son funciones que dependen de f , V y de sus derivadas, la dinámica del modelo aumenta. Sin embargo, el lado izquierdo de (3.34) implica que el rodamiento del campo escalar decrece de manera genérica con el tiempo, es decir, tendremos soluciones cosmológicas relativistas para una gran familia de modelos.

Como un caso especial de las teorías tensor-escalares podemos mencionar a la propuesta por Carl Brans y Robert Dicke en los años 60's y que recibe el nombre de teoría de Brans-Dicke [15]. Para este caso las funciones del campo escalar toman los valores

$$f(\phi) = \frac{\phi}{16\pi G_N}, \quad h(\phi) = \frac{\omega}{8\pi\phi G_N}, \quad V(\phi) = 0, \quad (3.35)$$

y el parámetro ω es una constante. La solución de las ecuaciones de campo a escalas del sistema solar da lugar a un parámetro (PPN) $\gamma = (\omega + 1)/(\omega + 2)$ ¹. Este valor ha sido medido en experimentos de deflexión de la luz dando un valor de $\gamma = 1 + (2.1 + 2.3) \times 10^{-5}$ [46], y esto da lugar a una cota $\omega \gtrsim 5 \times 10^4$.

3.2.2. Teorías tipo $f(R, \mathcal{G})$

Otra clase de teorías que han recibido atención en los últimos años son las de tipo $f(R)$, en donde la acción de Einstein-Hilbert es reemplazada por

$$S = \frac{1}{16\pi G_N} \int d^4x \sqrt{-g} f(R) + S_{mat}, \quad (3.36)$$

siendo el término $f(R)$ una función arbitraria que determina la forma y las propiedades de cada modelo [13, 14, 47, 48]. Se trata de una familia de teorías que generalizan la acción de Einstein-Hilbert, en donde la constante de Newton G_N de nuevo es elevada a una función que depende de la posición. Para obtener las ecuaciones de movimiento a partir de la acción (3.36) se pueden seguir dos formalismos. El primero es el formalismo métrico estándar, en donde la conexión $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ depende del tensor métrico $g_{\mu\nu}$, y las ecuaciones dinámicas se obtienen variando la acción con respecto a $g_{\mu\nu}$. El segundo caso es el formalismo de Palatini, en donde la conexión y la métrica son tratados como cantidades independientes al momento de llevar cabo la variación. Estos dos enfoques dan origen a las mismas ecuaciones de campo para el caso de relatividad general, sin embargo, producen diferentes ecuaciones de movimiento cuando el Lagrangiano presenta una dependencia no-lineal en R .

Puede hallarse en la literatura una gran variedad de estudios a modelos cosmológicos basados en las teorías tipo $f(R)$, ya que además de tratarse de la modificación más sencilla al Lagrangiano de relatividad general, también es capaz de modelar la inflación a tiempos tempranos y la reciente aceleración observada en el universo [49]. Sin embargo, la comunidad se dio cuenta rápidamente de que las restricciones a escalas del sistema solar hacen que estos modelos no viables [50]. Por ejemplo, el caso de un modelo en donde $f(R) = R - \alpha/R^n$ con $\alpha > 0$, $n > 0$ fue propuesto para modelar a la energía oscura a tiempos recientes, aunque ya se ha demostrado que estos modelos están plagados de inestabilidades una vez que se toman perturbaciones inhomogéneas de materia [51], así como dificultad para satisfacer las restricciones locales de gravedad [52, 39]. Además, no posee una etapa de dominio de materia estándar debido al fuerte acoplamiento que aparece entre la materia oscura y la energía oscura. Estos resultados nos indican que es altamente no trivial hallar modelos viables en el contexto de estas teorías.

En [53] se derivan las condiciones de viabilidad cosmológicas para las teorías $f(R)$, con la restricción de que en regiones en donde la densidad de energía es mucho mayor que la

¹Una forma de comparar las predicciones hechas a escalas del sistema solar por diferentes teorías de gravedad es usando la aproximación post-Newtoniana para campos débiles. Acá se describe a la métrica como una perturbación alrededor de un espacio-tiempo tipo Minkowski en términos de 10 potenciales adimensionales de distinto orden. En la aproximación Parametrizada Post-Newtoniana (PPN) se definen parámetros que acompañan a los diferentes potenciales y la diferencia entre las teorías se manifiesta a partir de las diferencias de estos parámetros. Por ejemplo, para el caso de relatividad general se tiene un valor $\gamma = 1$.

CAPÍTULO 3. EL PROBLEMA DE LA ENERGÍA OSCURA
3.2. TEORÍAS DE GRAVEDAD MODIFICADA

densidad homogénea del fondo, el modelo debe presentar un comportamiento cercano a relatividad general. Por ejemplo, en [14, 54, 55] se presentan algunos modelos viables de gravedad que son capaces de satisfacer condiciones cosmológicas, pero no son capaces de reproducir la etapa de dominio de materia anterior a la aceleración actual. Por otro lado, debido a que la fuerza de gravedad sufre modificaciones a grandes distancias, es posible que los modelos $f(R)$ presenten ciertas modificaciones que puedan hallarse en pruebas cosmológicas como la estructura a gran escala [56], el CMB [57] y lentes gravitacionales [58].

Existe también la posibilidad de que al quedarnos a segundo orden, además del escalar de Ricci R se puedan construir otras cantidades cuadráticas a partir del tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ y del tensor de Riemann $R_{\mu\nu\rho\sigma}$. Estas cantidades se llaman invariantes geométricos y toman el mismo valor en cualquier sistema de referencia. Algunos ejemplos son $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$, y $R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$. Definimos al término de Gauss-Bonnet $\mathcal{G} := R^2 - 4R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} + R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta}$, como una forma cuadrática que puede evitar la aparición de partículas *ghost* de espín 2 [59, 60]. Para evitar la contribución de este término en las ecuaciones de Friedmann se deben cumplir dos requisitos: i) el término de Gauss-Bonnet se debe acoplar a ϕ , por ejemplo $F(\phi)\mathcal{G}$, o bien ii) el Lagrangiano es función de \mathcal{G} , es decir $f(\mathcal{G})$. Los modelos pertenecientes al primer grupo provienen de teorías efectivas de cuerdas a bajas energías y han sido ampliamente estudiados a fin de obtener soluciones cosmológicas no singulares [61, 62]. Para el segundo caso se tiene que es posible construir modelos viables que son consistentes tanto con la evolución de fondo cosmológica, así como con las restricciones locales de gravedad [63, 64]. Sin embargo, las perturbaciones de densidad en el fluido perfecto muestran inestabilidades durante la época de dominio de materia ordinaria y de radiación, las cuales son independientes de la función $f(\mathcal{G})$. Este crecimiento de las perturbaciones se hace más fuerte a pequeñas escalas, lo cual hace muy complicado obtener modelos compatibles con desviaciones pequeñas con respecto a relatividad general.

3.2.3. Modelo DGP

Otra posibilidad para obtener una dinámica acelerante es considerar que la modificación a la teoría de gravedad se lleva a cabo en el sector IR, como en el caso del modelo de mundo-brana presentado por G. Dvali, G. Gabadadze y M. Porrati [18]. La acción de este modelo consiste en una membrana 4D embebida en un bulto tipo Minkowski en 5D

$$S_{(5)} = -\frac{M_5^3}{2} \int d^5 X \sqrt{-G} \mathcal{R}_5 - \frac{M_{Pl}^2}{2} \int d^4 x \sqrt{-g} R + \int d^4 x \mathcal{L}_m, \quad (3.37)$$

en donde G y \mathcal{R}_5 son el determinante de la métrica y el escalar de curvatura en el bulto, g y R son el determinante de la métrica sobre y el escalar de curvatura sobre la brana y \mathcal{L}_m representa a cualquier campo de materia que está confinado en la brana. Sea M_{Pl} la masa de Planck 4D y M_5 la masa de Planck 5D, podemos tomar el cociente y definir una distancia característica llamada *escala de cruce*

$$r_c := \frac{M_{Pl}^2}{2M_5^3}, \quad (3.38)$$

de forma que para distancias menores que r_c , la gravedad se manifiesta como una teoría 4D, mientras que para distancias mayores que r_c , ésta puede “fluir” hacia el bulto y es donde se

CAPÍTULO 3. EL PROBLEMA DE LA ENERGÍA OSCURA
3.2. TEORÍAS DE GRAVEDAD MODIFICADA

hace manifiesta la influencia de la dimensión extra en la dinámica observada [65]. Esto puede entenderse mejor a través del potencial gravitacional en el límite de campo débil

$$\Phi \sim \begin{cases} r^{-1}, & r < r_c, \\ r^{-2} & r > r_c. \end{cases}$$

Para intentar explicar la aceleración actual del universo vamos a concentrarnos en modelos con escala de cruce del orden del radio de Hubble H_0^{-1} , la cual está relacionada con una masa de $M_5 = 10 - 100 MeV$. Para el caso de una brana tipo FLRW plana, la ecuación de Friedmann modificada tiene la forma

$$H^2 + \frac{\kappa}{a^2} - \frac{\epsilon}{r_c} \sqrt{H^2 + \frac{\kappa}{a^2}} = \frac{\rho}{3M_{Pl}^2}, \quad (3.39)$$

en donde ρ es la densidad de energía total de los componentes de materia que se encuentran en la brana y que satisfacen la ecuación de conservación (2.4). Tomando el caso de una geometría plana ($K = 0$), la ecuación anterior se reduce a

$$H^2 - \frac{\epsilon}{r_c} H = \frac{\rho}{3M_{Pl}^2}, \quad (3.40)$$

donde $\epsilon = \pm 1$. Cuando la longitud de Hubble es mucho menor que la distancia de escalamiento $H^{-1} \ll r_c$, tenemos que el segundo término se anula y es posible recuperar la ecuación de Friedmann usual (2.10). Sólo es a partir de que la longitud de Hubble es comparable o mayor que la distancia de escalamiento $H^{-1} \gtrsim r_c$, cuando comienza a ser importante.

Dependiendo del signo de ϵ tenemos dos ramas para el modelo DGP. Por un lado, si $\epsilon = 1$, a partir de la ecuación (3.40) tenemos que, para un modelo dominado por materia oscura fría ($\rho \sim a^{-3}$) el universo tiende a una solución de De Sitter

$$H \rightarrow H_\infty = \frac{1}{r_c}. \quad (3.41)$$

Es decir, es posible obtener una dinámica acelerante a tiempos tardíos sin agregar una componente de energía oscura, [66]. Sin embargo, pronto la comunidad se percató de que las fluctuaciones alrededor de la solución acelerante presenta inestabilidades del tipo ghost [67], lo cual hace a la teoría físicamente no viable. Para el caso en que $\epsilon = -1$ y $H^{-1} \gg r_c$, el segundo término de la ecuación (3.40) domina sobre el primero y permite escribir

$$H^2 = \frac{\rho^2}{36M_5^6}, \quad (3.42)$$

por lo que no es posible tener una aceleración a menos que se introduzca una componente de energía oscura en la brana. Aunque esta solución es menos interesante desde el punto de vista fenomenológico que la solución acelerante, se trata de la parte saludable de la teoría y puede relacionarse con el sector no lineal del modelo de gravedad masiva [68].

3.2.4. Campo escalar galileón

La teoría del campo escalar galileón fue presentada por A. Nicolis, R. Rattazzi y E. Trincherini en el año 2009 por su capacidad de producir soluciones acelerantes sin tener una componente de energía oscura [19]. Se trata de una teoría de gravedad modificada que se origina en el modelo DGP, pero que puede ser vista como una teoría efectiva en 4D contiene a un campo escalar acoplado de forma no mínima con la materia y que posee términos de autointeracción especiales. Para recuperar relatividad general a escalas del sistema solar, es necesario que el campo y la materia se desacoplen y es aquí donde entra en juego el mecanismo de Vainshtein. Este procedimiento da origen a un Lagrangiano efectivo

$$\mathcal{L} = -3(\nabla\phi)^2 - \frac{1}{r_c^3}(\nabla\phi)^2(\square\phi) + \frac{2}{M_{Pl}}\phi T, \quad (3.43)$$

en donde $(\nabla\phi)^2(\square\phi)$ es conocido como término cúbico. Debido a que las ecuaciones de movimiento se obtienen tomando la variación de (3.43) con respecto a la métrica y al campo escalar, es de esperarse que existan términos de tercer orden para estas dos variables. Es decir, cuando obtenemos la ecuación de movimiento para el tensor métrico aparecen derivadas de tercer orden para el campo escalar, y viceversa, lo cual no es algo deseado ya que como demostró Horndeski, las ecuaciones de movimiento para un Lagrangiano no degenerado genera ecuaciones de campo con términos de derivadas de orden 2 no presentan inestabilidades de tipo “ghost” [69]. Este resultado fue probado por Ostrogradsky en 1850 y demostró que para el caso en que aparecen derivadas de orden mayor, al construir el Hamiltoniano sobreviven momentos conjugados lineales que dan origen a sistemas con niveles de energía inferior no acotados. Estos aparecen como términos cinéticos con el signo cambiado en el Lagrangiano. Vale mencionar que de forma reciente han aparecido artículos en donde se menciona la posibilidad de tener teorías de mayor orden en las derivadas capaces de propagar grados de libertad libres de inestabilidades [70].

La solución a este problema fue hallada por Nicolis et al [19], en donde derivan los 5 Lagrangianos para un campo escalar que dan origen a ecuaciones de movimiento a lo máximo de segundo orden en 4D. Se tiene que en ausencia de materia el campo escalar presenta una simetría

$$\partial_\mu\phi \rightarrow \partial_\mu\phi + b_\mu, \quad (3.44)$$

y debido a la similitud con el grupo transformaciones de Galileo recibe el nombre de galileón. Los 5 Lagrangianos que representan al campo es escalar son

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &= \phi, \\ \mathcal{L}_2 &= (\nabla\phi)^2, \\ \mathcal{L}_3 &= (\nabla\phi)^2(\square\phi), \\ \mathcal{L}_4 &= (\nabla\phi)^2 [(\nabla\phi)^2 - (\nabla_\mu\nabla_\mu\phi)^2], \\ \mathcal{L}_5 &= (\nabla\phi)^2 [(\nabla\phi)^3 - 3(\nabla\phi)(\nabla_\mu\nabla_\mu\phi)^2 + 2(\nabla_\mu\nabla_\mu\phi)^3]. \end{aligned}$$

Aunque como se mencionó antes, el campo escalar proviene de una teoría de dimensiones extras, también puede aparecer en modelos de gravedad masiva [20]. Además de que han sido

CAPÍTULO 3. EL PROBLEMA DE LA ENERGÍA OSCURA

3.2. TEORÍAS DE GRAVEDAD MODIFICADA

usados para explicar la aceleración cósmica [71], también aparecen en modelos alternativos de inflación [72, 73, 74] y para modelar el crecimiento de perturbaciones en el universo temprano [75, 76], aunque violan la condición de energía nula [77, 78].

Por otro lado, si queremos estudiar a la teoría en presencia de una métrica dinámica, es necesario promover a los Lagrangianos a formas covariantes. Podría pensarse que basta con sustituir a las derivadas parciales por derivadas covariantes, pero si hacemos esto aparecen términos de mayor orden en las ecuaciones de movimiento. En este caso es necesario agregar un acoplamiento no mínimo entre el campo escalar y la gravedad para \mathcal{L}_4 y \mathcal{L}_5 , a fin de garantizar que las ecuaciones de movimiento sean también de segundo orden. Los Lagrangianos del galileón covariante toman la forma

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_2 &= K(X, \phi), \\ \mathcal{L}_3 &= -G_3(X, \phi)(\square\phi), \\ \mathcal{L}_4 &= G_4(X, \phi)R + G_{4,X}(X, \phi) [(\square\phi)^2 - 2(\nabla\phi)^2], \\ \mathcal{L}_5 &= G_5(X, \phi)G_{\mu\nu} + G_{5,X}(X, \phi) [(\square\phi)^3 - 3(\square\phi)(\nabla_\mu\nabla_\nu\phi)^2 + 2(\nabla_\mu\nabla_\nu\phi)^3],\end{aligned}$$

en donde X el término cinético del campo escalar $X = -1/2(\nabla^\mu\phi)(\nabla_\mu\phi)$, mientras que $G_{i,\phi}$ y $G_{i,X}$, denotan las derivadas de las funciones G_i con respecto al campo y al término cinético. Para simplificar la escritura usamos la notación empleada en [79]

$$\begin{aligned}(\nabla_\mu\nabla_\nu\phi)^2 &:= (\nabla_\mu\nabla_\nu\phi)(\nabla^\mu\nabla^\nu\phi), \\ (\nabla_\mu\nabla_\nu\phi)^3 &:= (\nabla^\mu\nabla_\alpha\phi)(\nabla^\alpha\nabla_\beta\phi)(\nabla^\beta\nabla_\mu\phi).\end{aligned}$$

CAPÍTULO 3. EL PROBLEMA DE LA ENERGÍA OSCURA
3.2. TEORÍAS DE GRAVEDAD MODIFICADA

Capítulo 4

Sistemas Dinámicos

El comportamiento de un sistema físico que evoluciona en el tiempo puede ser descrito por medio de una ecuación diferencial ordinaria o parcial, según si la dependencia es con respecto a una o varias variables. Como vimos en el capítulo anterior, las ecuaciones de campo de Einstein están descritas por medio de un conjunto de Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDPs) altamente acopladas, lo que hace imposible resolverlas de forma general. Sin embargo, cuando hacemos uso del principio cosmológico el sistema se simplifica a un sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDOs) y se tiene que sólo es necesario resolver para 4 variables. En este capítulo se presentará un breve resumen acerca de la teoría de sistemas dinámicos necesaria para describir de manera cualitativa el comportamiento de los puntos singulares locales y los posibles estados asintóticos de un sistema físico. Para finalizar, a modo de ejemplo se llevará a cabo el análisis de un modelo cosmológico dado por un campo escalar quintaesencia con potencial $V_0 = V_0\phi^{-p}$ en presencia de materia.

4.1. Introducción a la teoría de sistemas dinámicos

Definición 1: Un Sistema Dinámico es un conjunto de puntos que describen una variedad diferencial (espacio fase), junto con conjunto de reglas que nos indican su evolución

$$\dot{x} = f(x), \tag{4.1}$$

en donde $x \in E$, y E es un abierto $E \subset \mathbb{R}^n$. La función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, es un campo vectorial tal que

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)), \quad y \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n). \tag{4.2}$$

Definición 2: Decimos que un sistema dinámico es autónomo si es de la forma $\dot{x} = f(x)$. Es decir, si no presenta dependencia explícita con respecto al tiempo.

Definición 3: Un punto crítico o punto singular x_* , es aquel en donde el campo vectorial se anula y satisface $f(x_*) = 0$.

Definición 4: Un punto singular del sistema (4.1) es llamado *hiperbólico* si $Re(z_i) \neq 0$, para todo los eigenvalores z_i del Jacobiano de $f(x)$ evaluado en x_* . De otra forma, recibe el

nombre de *no hiperbólico*.

Definición 5: Sea E un conjunto abierto de \mathbb{R}^n y sea f una función de al menos clase $C^1(E)$. Para $x(0) = x_0 \in E$, sea $\phi(t, x_0)$ una solución al problema de valores iniciales (4.1) definida sobre el intervalo de existencia $I(x_0)$. Para todo $t \in I(x_0)$ tenemos que el mapeo $\phi_t : E \rightarrow E$ definido por $\phi_t(x_0) = \phi(t, x_0)$, es llamado flujo de la ecuación diferencial y satisface las propiedades

1. $\phi_0(x) = x$,
2. $\phi_s(\phi_t(x)) = \phi_{s+t}(x)$ para todo $s, t \in \mathbb{R}$
3. $\phi_{-t}(\phi_t(x)) = \phi_t(\phi_{-t}(x)) = x$ para todo $t \in \mathbb{R}$

Definición 6 Dado un punto inicial x_0 , se tiene que el mapeo $\phi(\cdot, x_0)$ define una curva solución a la que llamamos órbita o trayectoria.

Definición 7: Sea un sistema dinámico definido sobre \mathbb{R}^n . Un subconjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es llamado conjunto invariante de la ecuación diferencial (4.1) si para todo punto $x_0 \in E$, la trayectoria que pasa por x_0 se encuentra contenida enteramente en E . Eso es $\phi_t(x_0) \in E$.

Definición 8: Dado un sistema dinámico (4.1) en \mathbb{R}^n con flujo ϕ_t , un subconjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ se dice conjunto atrapante si satisface: (i) S es un conjunto compacto, (ii) $x_0 \in S$ implica que $\phi_t(x_0) \in S$ para todo $t \geq 0$.

4.1.1. Estabilidad de los puntos críticos

El análisis cualitativo del sistema dinámico comienza con la localización de los puntos críticos del sistema en el espacio-fase. Una vez que éstos se conocen, es necesario hallar la dinámica y la estabilidad que las soluciones presentan en la vecindad de dichos puntos. A fin de asegurar la existencia y unicidad de las soluciones es necesario asumir que la función $f(x)$ es de al menos clase C^1 [80].

Para determinar el comportamiento local de la solución tomamos el desarrollo en serie de Taylor

$$f'(x) = f(x_*) + \frac{Df(x_*)}{1!}(x - x_*) + \frac{D^2f(x_*)}{2!}(x - x_*)^2 + \dots \quad (4.3)$$

en donde $Df(x_*)$ representa el Jacobiano de $f(x)$ evaluado en el punto singular x_* . Si despreciamos los términos de alto orden, tenemos que los puntos críticos pueden ser clasificado de acuerdo a los eigenvalores de la matriz linealizada. Podemos resumir lo anterior en el teorema de Hartman-Grobman.

Teorema de Hartman-Grobman: Sea E un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n que contiene al origen y sean $f \in C^1(E)$ y ϕ_t el flujo del sistema no-lineal $\dot{x} = f(x)$. Suponiendo que $f(0) = 0$ y que la matriz $A = Df(x)$ no posee eigenvalores con parte real nula, se tiene que existe un

CAPÍTULO 4. SISTEMAS DINÁMICOS

4.1. INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE SISTEMAS DINÁMICOS

homeomorfismo H entre un abierto U de R^n y un abierto $I_0 \subset R$, tal que para cada $x_0 \in U$ y $t \in I_0$

$$H \circ \phi_t(x_0) = e^{At}H(x_0). \quad (4.4)$$

Es decir, H mapea trayectorias de $\dot{x} = f(x)$ cerca del origen a trayectorias de $\dot{x} = Ax$ también cercanas al origen y preserva la parametrización con respecto al tiempo. Si los eigenvalores de la matriz A son todos positivos, los flujos en la vecindad del punto crítico tienden a alejarse de él y recibe el nombre de *repulsor*. En el caso en que los eigenvalores son todos negativos, las soluciones tienden hacia el punto singular y recibe el nombre de *atractor*. Para el caso en que existen valores positivos y negativos, se dice entonces que tenemos un *punto silla* y es necesario identificar en qué direcciones se tiene cada comportamiento.

Para el caso de un sistema de EDOs, tenemos que el espacio fase R^n es generado por el conjunto de eigenvectores de la matriz Jacobiana. Estos eigenvalores dividen el espacio fase en tres subespacios distintos:

- Subespacio estable, $E^s = \text{gen}(s_1, s_2, \dots, s_{ns})$,
- Subespacio inestable, $E^u = \text{gen}(u_1, u_2, \dots, u_{nu})$,
- Subespacio centro, $E^c = \text{gen}(c_1, c_2, \dots, c_{nc})$,

en donde s_i son los eigenvalores relacionados con la existencia de puntos críticos hiperbólicos con parte real negativa, u_i los eigenvalores con parte real positiva y c_i los eigenvalores que son imaginarios puros.

Para el caso en que los sistemas muestran una naturaleza no lineal, existe una equivalencia topológica entre el comportamiento de las soluciones con los flujos generados para el caso lineal. Esto sucede únicamente cuando los eigenvalores poseen parte real distinta de cero. En este caso tenemos la existencia de una *variedad estable* W^s , la cual es tangente al subespacio estable, una *variedad inestable* W^u tangente al subespacio inestable y una *variedad centro* W^c , tangente al subespacio centro. Esta puede ser estable, inestable o neutral y para describir su dinámica es necesario usar métodos más sofisticados como es el caso del *Teorema de la variedad central* [80, 81, 82].

4.1.2. Sistemas dinámicos sobre el plano

Un teorema que resulta ser de mucha ayuda para entender el comportamiento asintótico para el caso de sistemas definidos sobre un plano fue desarrollado por Poincaré y Bendixon

Definición 9: Un ciclo w -límite es el estado que un sistema dinámico alcanza una vez que ha transcurrido una cantidad infinita de tiempo, ya sea a futuro o a pasado.

Teorema de Poincaré-Bendixon: Considere un sistema de EDOs dado por (4.1) definido en un abierto de R^2 , y suponga la existencia de un número finito de puntos críticos. Entonces, todo conjunto w -límite compacto no vacío consta de

- un punto
- una órbita cerrada
- un conjunto dado por puntos singulares y *órbitas homoclíneas* (las que unen a un punto crítico con signo mismo) y *órbitas heteroclíneas* (las que unen a los puntos críticos entre sí).

Es importante recordar que para algunos casos la dinámica del sistema puede depender de uno o más parámetros. En estos casos se dice que existe una *bifurcación* cuando un pequeño cambio en el valor del parámetro puede dar origen a cambios dramáticos en el sistema. Estos casos también pueden ser descritos por la matriz linearizada y aparecen sólo cuando la parte real del eigenvalor es cero.

Como ejemplo del estudio de un sistema dinámico sobre el plano podemos tomar al sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y), \\ \dot{y} &= g(x, y),\end{aligned}\tag{4.5}$$

en donde f, g son funciones de al menos clase C^2 , y suponemos la existencia de un punto singular $(x = x_0, y = y_0)$. Calculamos la matriz Jacobiana y evaluando en el punto crítico

$$M = \begin{pmatrix} \partial f / \partial x & \partial f / \partial y \\ \partial g / \partial x & \partial g / \partial y \end{pmatrix}_{(x_0, y_0)},\tag{4.6}$$

obtenemos los eigenvalores z_1, z_2 . A modo de resumen decimos que la dinámica que seguirán las soluciones en la vecindad de cada punto crítico obedece

- Si $Re(z_1) < 0$ y $Re(z_2) < 0$ se trata de un atractor o nodo estable hacia el cual tienden todas las trayectorias.
- Si $Re(z_1) > 0$ y $Re(z_2) > 0$ se trata de un repulsor o nodo inestable del cual parten todas todas las trayectorias.
- Si $Re(z_1)$ y $Re(z_2)$ son de diferente signo, se trata de un punto inestable sobre algunas trayectorias y estable a lo largo de otras. Llamamos a este punto silla.
- Si $Re(z_1) = 0$ y $Re(z_2) > 0$ o viceversa, se trata de un punto de equilibrio inestable.
- Si $Re(z_1) = 0$ y $Re(z_2) < 0$ o viceversa, no se puede definir su naturaleza. Se trata de un punto no hiperbólico y es necesario llevar a cabo un estudio más detallado. Una forma de hacerlo es por medio del teorema de la variedad central que mencionaremos a continuación.
- Si $z_1 = \alpha + i\beta, z_2 = \alpha - i\beta$, con $\alpha > 0$, se trata de una espiral estable.
- Si $z_1 = \alpha + i\beta, z_2 = \alpha - i\beta$, con $\alpha < 0$, se trata de una espiral inestable.
- Si $z_1 = i\beta, z_2 = -i\beta$, se trata de una solución oscilatoria y se denomina centro.

4.1.3. Teorema de la variedad central

Sea $f \in C^r(E)$, en donde E es un abierto de R^n que contiene al origen y $r \geq 1$. Suponiendo que $f(0) = 0$, y que $Df(0)$ posee c eigenvalores con parte real nula y $s = (n - c)$ eigenvalores con parte real negativa, se tiene que el sistema $\dot{x} = f(x)$ puede ser descrito de forma diagonal

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Cx + f(x, y) \\ \dot{y} &= Py + g(x, y),\end{aligned}\tag{4.7}$$

en donde $(x, y) \in R^c \times R^s$, C es una matriz cuadrada con c eigenvalores con parte real nula, P es una matriz cuadrada con s eigenvalores con parte real negativa y $f(0) = g(0) = 0$, $Df(0) = Dg(0) = 0$. Además, se tiene que si existe un $\delta > 0$ y una función $h \in C^r(N_\delta(0))$, $h(0) = 0$, $Dh(0) = 0$, es posible definir la variedad central local $W^c(0) := \{(x, y) \in R^c \times R^s | y = h(x) \text{ para } |x| < \delta\}$. Esta satisface

$$Dh(x)[Cx + f(x, h(x))] = Ph(x) + g(x, h(x)),\tag{4.8}$$

para $|x| < \delta$. De esta forma, el flujo sobre la variedad central $W^c(0)$ está definido por el sistema de EDOs

$$\dot{x} = Cx + f(x, h(x)),\tag{4.9}$$

para todo $x \in R^n$ que satisface $|x| < \delta$. Este teorema permite determinar el flujo en la vecindad de los puntos no hiperbólicos siguiendo los pasos

1. Llevar el sistema dinámico (4.1) a una forma diagonal (4.7).
2. Usar una expansión en serie para la función $h(x)$ hasta el grado de exactitud que sea necesario.
3. Determinar los componentes de la expansión de $h(x)$ usando (4.8).
4. Finalmente, sustituimos la aproximación de $h(x)$ en (4.9) para determinar el flujo del sistema.

Vamos a mostrar cómo funciona este teorema con un ejemplo sencillo. Para el sistema dinámico descrito por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= xy \\ \dot{y} &= -y - x^2,\end{aligned}\tag{4.10}$$

tenemos que $C = 0$, $P = -1$, $f(x, y) = xy$, $g(x, y) = -x^2$. Tomando $h(x)$ de la forma

$$h(x) = ax^2 + bx^3 + \dots,$$

se tiene que

$$\begin{aligned}Dh(x) &= 2ax + 3bx^2 + \dots \\ Dh(x)[Cx + f(x, h(x))] &= (2ax + 3bx^2 + \dots)x(ax^2 + bx^3 + \dots) \\ Ph(x) + g(x, h(x)) &= -(ax^2 + bx^3 + \dots) - x^2.\end{aligned}\tag{4.11}$$

Usando (4.8) podemos agrupar términos

$$\begin{aligned} O(x^2) &\Rightarrow -a - 1 = 0, \\ O(x^3) &\Rightarrow b = 0, \end{aligned} \tag{4.12}$$

$$\vdots, \tag{4.13}$$

así que $h(x) = -x^2 + O(x^4)$. Por lo tanto, el flujo sobre la variedad central está dado por el sistema unidimensional

$$\dot{x} = f(x, h(x)) = -x^3 + O(x^5), \tag{4.14}$$

y $x = 0$ es un punto de equilibrio estable.

4.2. Ejemplo de un análisis dinámico cosmológico

Vamos a ver ahora cómo la teoría de sistemas dinámicos resulta ser de ayuda al momento de estudiar un sistema cosmológico. En la literatura pueden hallarse diversos estudios realizados al modelo de materia fría y constante cosmológica Λ CDM, así como al caso de un universo con materia fría y campo escalar quintaesencia con potencial exponencial $V(\phi) = V_0 \exp(k\phi)$ [83]. En esta sección se llevará a cabo el análisis para un campo escalar quintaesencia con potencial ley de potencias $V(\phi) = V_0 \phi^{-p}$ usando la elección de variables dinámicas usuales y siguiendo la metodología estándar [84]. Eso se hace a fin de que el lector pueda notar las diferencias existentes con el estudio del siguiente capítulo en donde empleamos un conjunto de variables capaces de definir un dominio compacto para el espacio-fase. Por el momento se omitirán algunos pasos que no son indispensables para llevar a cabo el estudio y sólo se escribirán las ecuaciones necesarias para entender el problema al que nos enfrentamos. Las deducciones y los cálculos explícitos se llevarán a cabo en el capítulo siguiente.

Comenzamos por tomar un universo compuesto por materia oscura dada por un fluido perfecto con ecuación de estado barotrópico $p_m = \omega_m \rho_m$, y energía oscura modelada por un campo escalar $\phi = \phi(t)$. Escribimos las ecuaciones de movimiento en un fondo tipo Robertson Walker plano

$$\begin{aligned} 3H^2 &= \rho_m + \rho_\phi \\ -2\dot{H} &= \rho_m + p_m + \rho_\phi + p_\phi \\ \ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_{,\phi} &= 0, \end{aligned} \tag{4.15}$$

en donde H es el parámetro de Hubble, ρ_m es la densidad de energía de la materia, ρ_ϕ es la densidad de energía del campo escalar y p_ϕ es la presión del campo escalar. Escribimos las cantidades

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V, \quad p_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V,$$

con el parámetro de ecuación de estado del campo escalar

$$\omega_\phi = \frac{p_\phi}{\rho_\phi} = \frac{\dot{\phi}^2 - 2V}{\dot{\phi}^2 + 2V}.$$

CAPÍTULO 4. SISTEMAS DINÁMICOS

4.2. EJEMPLO DE UN ANÁLISIS DINÁMICO COSMOLÓGICO

Para escribir a este conjunto de ecuaciones como un sistema de EDOs es necesario elegir nuevas variables. Por conveniencia algebraica, definimos las variables normalizadas por el factor de Hubble

$$x_s := \frac{\dot{\phi}}{\sqrt{6}H}, \quad y_s := \frac{\sqrt{V}}{\sqrt{6}H},$$

a fin de hacer al parámetro de densidad de energía adimensional y tener a la primer ecuación de Friedmann como una ecuación de restricción válida para todo tiempo

$$\Omega_m = 1 - x^2 - y^2.$$

Tomando el caso de materia libre de presión $p_m = 0$ y un potencial de autointeracción para el campo escalar de la forma $V = V_0\phi^{-p}$ ($p > 0$), es necesario definir una variable dinámica extra y una variable auxiliar

$$z := -\frac{V_{,\phi}}{V}, \quad \Gamma := \frac{V \cdot V_{,\phi\phi}}{(V_{,\phi})^2}.$$

Con la ayuda de las nuevas variables dinámicas y tomando a $(') = d/d\ln(a)$, siendo a el factor de escala, es posible reescribir el sistema de ecuaciones (4.15) de la forma

$$\begin{aligned} x' &= -\frac{3}{2}x(1 - x^2 + y^2) + \sqrt{\frac{3}{2}}y^2z, \\ y' &= \frac{3}{2}y(1 + x^2 - y^2) - \sqrt{\frac{3}{2}}xyz, \\ z' &= \sqrt{6}xz^2(1 - \Gamma). \end{aligned} \tag{4.16}$$

Este sistema de ecuaciones posee 4 puntos críticos

1. $(x_s = 0, y_s = 0)$, con z arbitraria,
2. $(x_s = 0, y_s = 1, z = 0)$,
3. $(x_s = 1, y_s = 0, z = 0)$,
4. $(x_s = -1, y_s = 0, z = 0)$.

Para analizar la estabilidad del sistema es necesario calcular la matriz de derivadas parciales y evaluar en cada uno de los 4 puntos críticos. En el Tabla 4.1 se muestran los eigenvalores del sistema, así como el parámetro de densidad de materia, el parámetro de la ecuación de estado del campo escalar y el parámetro de desaceleración. Dado que aparece sólo un caso en donde uno de los eigenvalores tiene parte real nula y dos eigenvalores negativos ($x_s = 0, y_s = 1, z = 0$), es necesario usar el teorema de la variedad central mencionado en la sección anterior para definir la estabilidad en la vecindad de dicho punto [85].

Se puede ver de la tabla 4.1 que la estabilidad de los puntos críticos $P3$ y $P4$ no dependen de la forma específica del potencial, ya que sólo existen cuando éste es constante ($z = 0$). Se trata de nodos inestables relacionados con soluciones de dominio del término cinético del campo escalar ($\Omega_\phi = 1$), con ecuación de estado de materia dura. Para el caso de $P1$ se tiene

CAPÍTULO 4. SISTEMAS DINÁMICOS

4.2. EJEMPLO DE UN ANÁLISIS DINÁMICO COSMOLÓGICO

P. C	x_s	y_s	z	Ω_m	ω_ϕ	q	λ_1	λ_2	λ_3	Estabilidad
P_1	0	0	z	1	indet.	1/2	3/2	-3/2	0	Silla
P_2	0	1	0	0	-1	-1	-3	-3	0	Atractor
P_3	1	0	0	0	1	2	3	3	0	Repulsor
P_4	-1	0	0	0	1	2	3	3	0	Repulsor

Cuadro 4.1: Puntos críticos del sistema (4.16) junto con la densidad de materia y los parámetros de ecuación de estado para el campo escalar y el parámetro de desaceleración. Se presentan los eigenvalores de la matriz Jacobiana y se indica la estabilidad en cada caso. Para conocer la estabilidad del punto crítico P_2 empleamos el teorema de la variedad central.

que éste siempre existe en los modelos de quintaesencia aunque su estabilidad depende de la forma específica del potencial. Se trata de un punto silla relacionado con el dominio de materia ($\Omega_\phi = 0$), en donde las soluciones pueden abandonar después de cierto tiempo la vecindad del punto y dirigirse hacia un atractor. Finalmente tenemos al punto P_2 , el cual corresponde a una solución atractora a tiempos tardíos cuando el parámetro $\Gamma(0) > 1$. Tenemos un punto de dominio de campo escalar ($\Omega_\phi = 1$) y recibe el nombre de punto *de De Sitter* 4.1.

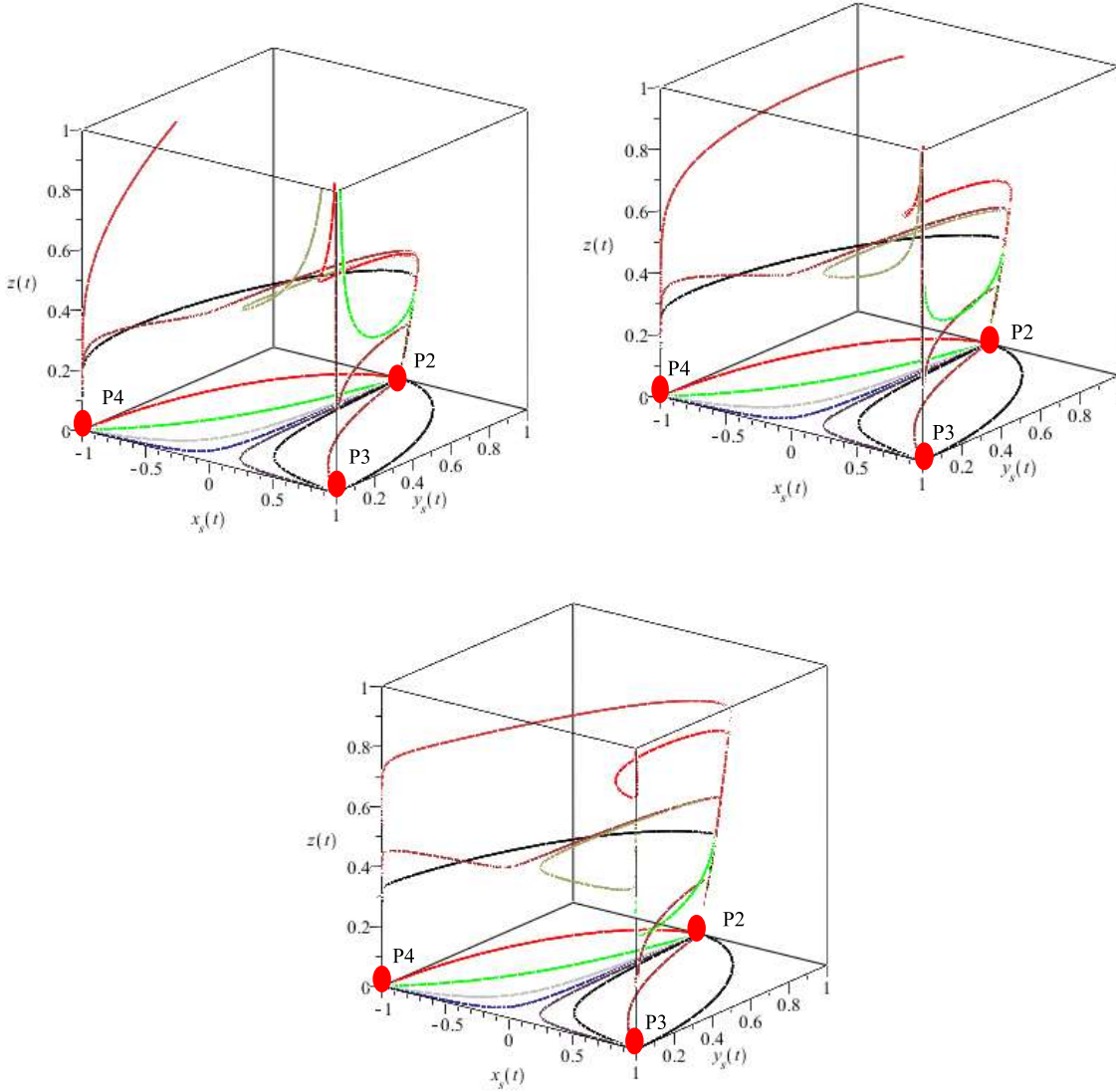


Figura 4.1: Retrato de fase para el sistema de EDOs (4.16) correspondientes al modelo de campo escalar quintaesencia con potencial exponencial $V(\phi) = V_0\phi^{-p}$ para diferentes valores del parámetro p . Tenemos en la parte superior los casos $p = 2$ y $p = 4$, mientras que la parte inferior corresponde a $p = 9$. En todos los casos las trayectorias se originan en los puntos gobernados por materia dura $P3$ y $P4$ que representan a los nodos inestables. Podemos observar que, mientras algunas trayectorias se dirigen de forma directa al atractor del sistema $P2$ que representa al punto de De Sitter, mientras que otras se dirigen primero hacia el punto de dominio de materia $\Omega_\phi = 0$ que viene dado por $(x_s = 0, y_s = 0, z)$, para trasladarse posteriormente al punto $P2$.

CAPÍTULO 4. SISTEMAS DINÁMICOS
4.2. EJEMPLO DE UN ANÁLISIS DINÁMICO COSMOLÓGICO

Capítulo 5

Análisis dinámico de un modelo de galileón cúbico generalizado

En este capítulo vamos a llevar a cabo el análisis para un universo compuesto por materia oscura y un campo escalar galileón con función de acoplamiento constante $\sigma = \sigma_0$, y potencial exponencial $V = V_0 \exp(-\lambda\phi)$. Aún cuando la dinámica del espacio fase para el modelo $\sigma = \sigma_0 \exp(-\alpha\phi)$ y potencial $V = V_0 \exp(-\lambda\phi)$, ha sido estudiado en detalle en [21], en esta tesis vamos a centrar nuestra atención al caso aparentemente más sencillo; el caso de ausencia de materia. Dada la naturaleza altamente compleja del sistema de ecuaciones usaremos la teoría de los sistemas dinámicos a fin de descubrir el comportamiento local y asintótico del espacio fase. Primero se llevará a cabo el análisis del sistema utilizando las variables dinámicas usuales y se mostrará que, para el caso en que existe un componente de materia oscura en el universo el comportamiento del sistema no difiere mucho del modelo de quintaesencia exponencial: i) aparece un punto crítico adicional, y ii) el punto relacionado con el dominio de stiff matter sólo presenta comportamiento de punto silla. Sin embargo, y en contra de lo que podría pensarse, al eliminar el componente material se obtiene una mayor riqueza de puntos asintóticos los cuales son capaces de modificar la dinámica del universo a tiempos tardíos.

5.1. Ecuaciones cosmológicas

Como se mencionó en el capítulo 2, el modelo más general para un campo escalar en 4D que genera ecuaciones de movimiento a lo máximo de segundo orden recibe el nombre de Lagrangiano de Horndeski. Una forma de expresarlo es mediante la combinación de los Lagrangianos del campo escalar galileón [86]:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_2 &= K(X, \phi), \\ \mathcal{L}_3 &= -G_3(X, \phi)(\square\phi), \\ \mathcal{L}_4 &= G_4(X, \phi)R + G_{4,X}(X, \phi) [(\square\phi)^2 - 2(\nabla\phi)^2], \\ \mathcal{L}_5 &= G_5(X, \phi)G_{\mu\nu} + G_{5,X}(X, \phi) [(\square\phi)^3 - 3(\square\phi)(\nabla_\mu\nabla_\nu\phi)^2 + 2(\nabla_\mu\nabla_\nu\phi)^3],\end{aligned}$$

**CAPÍTULO 5. ANÁLISIS DINÁMICO DE UN MODELO DE GALILEÓN
CÚBICO GENERALIZADO**
5.1. ECUACIONES COSMOLÓGICAS

en donde X es el término cinético del campo escalar $X = -1/2(\nabla^\mu\phi)(\nabla_\mu\phi)$, mientras que $G_{i,\phi}$ y $G_{i,X}$, denotan las derivadas de las funciones G_i con respecto al campo y al término cinético.

Para continuar con el análisis es necesario enfocarnos a modelos específicos. Un caso especial de galileón con aplicaciones cosmológicas estudiado en la literatura [87, 88, 89], está dado por

$$K = X - V(\phi), \quad G_3 = \sigma X, \quad G_4 = \frac{1}{16\pi G_N}, \quad G_5 = 0, \quad (5.1)$$

siendo $\sigma = \sigma(\phi)$ una función de acoplamiento y G_N es la constante de gravedad de Newton. Escribimos la acción para el modelo (5.1) de la forma

$$S = \int d^4x \frac{\sqrt{-g}}{2} \{R - [1 + \sigma(\square\phi)](\nabla\phi)^2 - 2V(\phi)\} + \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_m, \quad (5.2)$$

en donde $V = V(\phi)$ es el potencial de autointeracción del campo y \mathcal{L}_m representa el campo de materia. El término galileón cúbico $\sim f(\phi)(\nabla\phi)^2(\square\phi)$ ha sido investigado en el contexto de la teoría Brans-Dicke [90, 91], en donde se menciona su importancia al momento de recuperar relatividad general a escalas pequeñas y tiempos tempranos. Este es el único término de interacción formado por $(\nabla_\mu\phi)$, $(\nabla_\mu\phi\nabla^\mu\phi)$ y $(\square\phi)$ que origina ecuaciones a lo máximo de segundo orden. Esto es una propiedad deseable, ya que de acuerdo al teorema de Ostrogradski, las teorías de mayor orden en derivadas involucran inestabilidades al momento de construir el Hamiltoniano del sistema.

Tomando la variación de la acción (5.2) con respecto a la métrica y al campo escalar, tenemos que en un fondo plano tipo FLRW se obtienen las ecuaciones de campo

$$\begin{aligned} 3H^2 &= \rho_m + \rho_\phi, \\ -2\dot{H} &= \rho_m + p_m + \rho_\phi + p_\phi, \\ \left(1 + 2\sigma_{,\phi}\dot{\phi}^2 - 6\sigma H\dot{\phi}\right)\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \left(\frac{1}{2}\sigma_{,\phi\phi}\dot{\phi}^2 - 3\sigma\dot{H} - 9\sigma H^2\right)\dot{\phi}^2 &= -V_{,\phi}, \end{aligned}$$

en donde la densidad de energía ρ_m y la presión barotrópica p_m del fluido de materia toman la forma

$$\rho_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} \left(1 + \sigma_{,\phi}\dot{\phi}^2 - 6\sigma H\dot{\phi}\right) + V, \quad p_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} \left(1 + \sigma_{,\phi}\dot{\phi}^2 + 2\sigma\ddot{\phi}\right) - V.$$

A partir de este punto, como una primera aproximación al estudio de este tipo de modelos vamos a considerar una función de acoplamiento constante $\sigma_0 > 0$ y un potencial del tipo exponencial

$$\sigma = \sigma_0 \Rightarrow \sigma_{,\phi\phi} = \sigma_{,\phi} = 0, \quad V(\phi) = V_0 e^{-\lambda\phi}. \quad (5.3)$$

Para este caso las ecuaciones de Friedmann toman la forma

$$\begin{aligned} 3H^2 &= \rho_m + \rho_\phi, \\ -2\dot{H} &= \rho_m + p_m + \rho_\phi + p_\phi, \end{aligned} \quad (5.4)$$

**CAPÍTULO 5. ANÁLISIS DINÁMICO DE UN MODELO DE GALILEÓN
CÚBICO GENERALIZADO**
5.1. ECUACIONES COSMOLÓGICAS

y a la ecuación de campo escalar viene dada por

$$\left(1 - 6\sigma_0 H \dot{\phi}\right) \ddot{\phi} + 3H \dot{\phi} - 3\sigma_0 H^2 \left(3 + \frac{\dot{H}}{H^2}\right) \dot{\phi}^2 = -V_{,\phi}. \quad (5.5)$$

en donde

$$\rho_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} \left(1 - 6\sigma_0 H \dot{\phi}\right) + V, \quad p_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} \left(1 + 2\sigma_0 \ddot{\phi}\right) - V. \quad (5.6)$$

El conjunto de ecuaciones (5.4), (5.5) y (5.6), son llamadas ecuaciones maestras. Dado que existen 4 incógnitas $a(t)$, ρ_m , ρ_ϕ , ϕ , es necesario agregar una ecuación extra a fin de que el sistema sea cerrado. Vamos a tomar la ecuación de estado barotrópica para la materia $p_m = w_m \rho_m$, con w_m constante.

5.1.1. Las variables del espacio-fase

Para llevar a cabo el análisis dinámico, lo primero que tenemos que hacer es reescribir al sistema de ecuaciones cosmológicas (5.4), (5.5) y (5.6) por medio de un conjunto de EDOs de primer orden. Una forma de llevar a cabo es usando las variables normalizadas de Hubble[?]

$$x_s = \frac{\dot{\phi}}{\sqrt{6}H}, \quad y_s = \frac{\sqrt{V}}{\sqrt{3}H}, \quad (5.7)$$

en donde H el factor de Hubble. En estas nuevas variables la primer ecuación de Friedmann (5.4) toma la forma de una ecuación de restricción

$$\Omega_m = 1 - x_s^2 - y_s^2 + 6\sqrt{6} x_s^3 H^2 \sigma_0, \quad (5.8)$$

siendo $\Omega_i := \rho_i/3H^2$ la densidad de energía de la i -ésima componente de materia. Dos cosas que saltan a la vista son

1. Se necesita una variable extra para el término $H^2 \sigma_0$.
2. Debido a que el último término es positivo, para el caso en que $x_s \geq 0$ las variables pueden tomar valores arbitrarios siempre y cuando $0 \leq \Omega_m \leq 1$.

Una forma de tratar con este tipo de modelos es definiendo un conjunto de variables capaces de escribir al espacio fase como un espacio compacto

$$x_\pm := \frac{1}{x_s \pm 1}, \quad y := \frac{1}{y_s + 1}, \quad z := \frac{1}{H^2 \sigma_0 + 1}, \quad (5.9)$$

en donde x_+ se refiere al caso en que $x_s \geq 0$ ($\dot{\phi} \geq 0$), mientras que x_- se emplea cuando $x_s \leq 0$ ($\dot{\phi} \leq 0$). De esta forma tenemos un dominio compacto $0 \leq x_+ \leq 1$ ($-1 \leq x_- \leq 0$), $0 \leq y \leq 1$, y $0 \leq z \leq 1$. Para este trabajo de tesis vamos a suponer que sólo existen cosmologías de expansión $H \geq 0$ ($y_s \geq 0$), y que a lo largo de las órbitas en el espacio-fase x_s no cambia de signo. Estas suposiciones no son independientes una de otra debido a que sin importar

**CAPÍTULO 5. ANÁLISIS DINÁMICO DE UN MODELO DE GALILEÓN
CÚBICO GENERALIZADO**

5.2. COSMOLOGÍA DEL GALILEÓN CÚBICO EN PRESENCIA DE MATERIA

si estamos en un máximo o mínimo, en el punto de inflexión se tiene que por un instante $\dot{a} = 0$, $\ddot{a} > 0$ (máximo), o $\dot{a} = 0$, $\ddot{a} < 0$ (mínimo). En ambos casos H cambia de signo, por lo que $y_s \sim \sqrt{V}/H$, también cambia de signo. Debemos notar que si ocurre un rebote, éste se tiene que dar en la frontera $y_s = 0$ debido a que, mientras que H cambia de signo $\sqrt{V}(\phi)$ no lo hace. Además, se debe satisfacer de manera simultánea $\dot{\phi} \sim H \sim 0$ y $\sqrt{V} \sim H \sim 0$, o de otra forma, si $\dot{\phi}$ y V son cantidades distintas de cero, se tiene que las variables divergen

$$x_s = \frac{\dot{\phi}}{\sqrt{6}H} \rightarrow \infty, \quad y_s = \frac{\sqrt{V}}{\sqrt{3}H} \rightarrow \infty.$$

La elección de coordenadas en (5.9) es de mucha utilidad para el caso en que $x_s = 0$, y $y_s = 0$, son subconjuntos invariantes en el espacio fase (x_s, y_s) y se tiene que las rectas $x_s = 0$, y $y_s = 0$, funcionan como separatrices del espacio-fase. Una cantidad que será de utilidad a la hora de escribir el sistema dinámico viene dada por

$$Q := -9H^2\sigma_0 = 9 \left(\frac{z-1}{z} \right) < 0, \quad (5.10)$$

con lo que la ecuación de restricción de Friedmann toma la forma

$$\Omega_m = 1 - x_s^2 - y_s^2 - 2\sqrt{\frac{2}{3}}x_s^3Q. \quad (5.11)$$

Finalmente, tenemos al parámetro de desaceleración

$$q := -1 - \frac{\dot{H}}{H^2}. \quad (5.12)$$

5.2. Cosmología del galileón cúbico en presencia de materia

Vamos a usar este caso para ilustrar la diferencia que existe al estudiar un sistema usando un nuevo conjunto de variables acotadas y los estudios que se encuentran en la literatura. Tomando (\cdot) como la derivada con respecto a $N = \ln a$ es posible escribir al sistema de ecuaciones dinámicas para las variables x_{\pm} , y y z de la forma

$$\begin{aligned} x'_{\pm} &= -\frac{x_{\pm}^2}{\sqrt{6}}\eta_{\pm} + x_{\pm}(1 \mp x_{\pm})\gamma_{\pm}, \\ y' &= y(1-y) \left[\sqrt{\frac{3}{2}}\lambda \left(\frac{1 \mp x_{\pm}}{x_{\pm}} \right) + \gamma_{\pm} \right], \\ z' &= -2z(1-z)\gamma_{\pm}, \end{aligned} \quad (5.13)$$

**CAPÍTULO 5. ANÁLISIS DINÁMICO DE UN MODELO DE GALILEÓN
CÚBICO GENERALIZADO**
5.2. COSMOLOGÍA DEL GALILEÓN CÚBICO EN PRESENCIA DE MATERIA

en donde, para simplificar la escritura definimos las cantidades

$$\begin{aligned}
 \gamma_{\pm} &:= \left[\frac{\dot{H}}{H^2} \right]_{\pm} \\
 &= -3 \left\{ \frac{\frac{3}{2} x_{\pm}^2 \Theta_{\pm}(1) + 2(1 \mp x_{\pm})^4 y^2 Q^2 + x_{\pm}(1 \mp x_{\pm}) [\sqrt{6} \Theta_{\pm}(2) - \lambda x_{\pm}(1 \mp x_{\pm})(1-y)^2] Q}{y^2 [3x_{\pm}^4 + 2\sqrt{6}x_{\pm}^3(1 \mp x_{\pm})Q + 2(1 \mp x_{\pm})^4 Q^2]} \right\}, \\
 \eta_{\pm} &:= \left[\frac{\ddot{\phi}}{H^2} \right]_{\pm} \\
 &= -9 \left\{ \frac{\sqrt{6}x_{\pm}^3(1 \mp x_{\pm})y^2 - \lambda x_{\pm}^4(1-y)^2 + (1 \mp x_{\pm})^2 \Gamma_{\pm} Q}{y^2 [3x_{\pm}^4 + 2\sqrt{6}x_{\pm}^3(1 \mp x_{\pm})Q + 2(1 \mp x_{\pm})^4 Q^2]} \right\}. \tag{5.14}
 \end{aligned}$$

y las funciones

$$\begin{aligned}
 \Theta_{\pm}(a) &:= a(1 \mp x_{\pm})^2 y^2 - x_{\pm}^2(1-2y), \\
 \Gamma_{\pm} &:= x_{\pm}^2(1-y)^2 - (1 \mp 2x_{\pm})y^2. \tag{5.15}
 \end{aligned}$$

El signo '±' nos indica que tenemos dos ramas para cada término cinético, por lo que en realidad tenemos dos sistemas dinámicos por estudiar. Finalmente, en términos de las nuevas variables el parámetro de desaceleración toma la forma

$$q = -1 - \gamma_{\pm}$$

5.2.1. Puntos singulares en el espacio-fase 3D

Los puntos críticos del sistema dinámico (5.13), junto con sus principales propiedades pueden ser halladas en la Tabla 5.1, mientras que los eigenvalores de la matriz Jacobiana y sus propiedades de estabilidad se encuentran en la tabla 5.2. En ellas se puede observar que para el caso del big bang dominado por materia P_1^{\pm} , este modelo cosmológico (y es posible que también otros modelos con función de acoplamiento $\sigma_0 \neq 0$), no difiere mucho del modelo de quintaesencia exponencial como se indicó al inicio del capítulo. Lo mismo sucede para los puntos tardíos (P_4^{\pm} y P_5^{\pm}), los cuales se relacionan con los puntos dominados por stiff matter y scaling respectivamente. Es importante observar que aquí la solución de big bang no es un atractor global al pasado, sino que se trata de un atractor local ya que dependiendo del valor del parámetro λ puede ser que las trayecque . El resto de los puntos singulares pueden ser vistos también en la tabla TAB. 1 de [34].

1. Solución de dominio por materia P_2^{\pm} , está asociada a siempre un punto silla.
2. Solución de “stiff matter” P_3^{\pm} , se refiere al dominio del término cinético del campo escalar en la densidad de energía del universo. Este caso se trata siempre de un punto silla, aunque en el modelo usual de quintaesencia puede tratarse también de un repulsor.

**CAPÍTULO 5. ANÁLISIS DINÁMICO DE UN MODELO DE GALILEÓN
CÚBICO GENERALIZADO**
5.3. GALILEÓN GENERALIZADO EN EL VACÍO

3. Solución de dominio del campo escalar P_4^\pm , representa el cociente entre el término cinético y el potencial del campo escalar. Puede tratarse de un punto silla o de un atractor al igual que en el modelo de quintaesencia.
4. La solución “scaling” entre la materia y el campo escalar P_5^\pm , representa siempre un atractor a futuro . Puede tratarse de un nodo estable o de una espiral estable.

P. C.	Existencia	Estabilidad	q	Ω_m	ω_ϕ
$P_1^\pm : (\pm 1, 1, 0)$	siempre	inestable (análisis numérico)	$\frac{1}{2}$	1	indet.
$P_2^\pm : (\pm 1, 1, 1)$	”	silla	$\frac{1}{2}$	1	1
$P_3^\pm : (\pm 1/2, 1, 1)$	”	silla	2	0	1
$P_4^\pm : \left(\frac{\sqrt{6}}{\lambda \pm \sqrt{6}}, \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6-\lambda^2} + \sqrt{6}}, 1 \right)$	$\lambda^2 < 6$	estable si $\lambda^2 < 3$ silla si $\lambda^2 > 3$	$-1 + \frac{\lambda^2}{2}$	0	$-1 + \frac{\lambda^2}{3}$
$P_5^\pm : \left(\frac{\pm 2\lambda}{2\lambda \pm \sqrt{6}}, \frac{2\lambda}{2\lambda \pm \sqrt{6}}, 1 \right)$	$\lambda^2 > 3$	punto estable espiral si $\lambda^2 > \frac{24}{7}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\lambda^2-3}{\lambda^2}$	0

Cuadro 5.1: Puntos críticos $P_{c_i} : (x_{c_i}, y_{c_i}, z_{c_i})$ del sistema dinámico (5.13), juntos con algunas propiedades interesantes: existencia, estabilidad, parámetro de desaceleración q , parámetro de densidad de materia Ω_m , y parámetro de ecuación de estado $\omega_\phi = p_\phi/\rho_\phi$.

5.3. Galileón generalizado en el vacío

Se podría pensar que el caso de vacío ($\Omega_m = 0$), al ser una solución particular del caso en donde existe una componente de materia debería presentar una dinámica más sencilla. Sin embargo, como veremos a continuación, esto no podría estar más alejado de la realidad. En este caso, la restricción de Friedmann (5.11) permite formular una relación entre las variables x_s , y_s y z . Por ejemplo, despejando a la variable z en términos de x_s y y_s

$$z = \frac{6\sqrt{6}x_s^3}{6\sqrt{6}x_s^3 + x_s^2 + y_s^2 - 1}, \quad (5.16)$$

P. C.	λ_1	λ_2	λ_3
$P_1^\pm : (\pm 1, 1, 0)$	indet.	indet.	indet.
$P_2^\pm : (\pm 1, 1, 1)$	$-\frac{3}{2}$	-3	$\frac{3}{2}$
$P_3^\pm : (\pm 1/2, 1, 1)$	$3 \mp \sqrt{\frac{3}{2}}\lambda$	3	-6
$P_4^\pm : \left(\frac{\sqrt{6}}{\lambda \pm \sqrt{6}}, \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6-\lambda^2} + \sqrt{6}}, 1 \right)$	$-\lambda^2$	$-3 + \frac{\lambda^2}{2}$	$-3 + \lambda^2$
$P_5^\pm : \left(\frac{\pm 2\lambda}{2\lambda \pm \sqrt{6}}, \frac{2\lambda}{2\lambda \pm \sqrt{6}}, 1 \right)$	-3	$-\frac{3}{4} + \alpha$	$-\frac{3}{4} - \alpha$

Cuadro 5.2: Eigenvalores de la matriz Jacobiana alrededor de los puntos críticos del sistema dinámico (5.13). Para simplificar la escritura, definimos el parámetro $\alpha := \sqrt{-7 + 24/\lambda^2}$.

**CAPÍTULO 5. ANÁLISIS DINÁMICO DE UN MODELO DE GALILEÓN
CÚBICO GENERALIZADO**
5.3. GALILEÓN GENERALIZADO EN EL VACÍO

así que la ecuación para \dot{z} es redundante. Por lo tanto, se puede reescribir al sistema de ecuaciones cosmológicas por medio del sistema 2D

$$\begin{aligned} x'_s &= \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{\ddot{\phi}}{H^2} - x_s \frac{\dot{H}}{H^2}, \\ y'_s &= -y_s \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \lambda x_s + \frac{\dot{H}}{H^2} \right), \end{aligned} \quad (5.17)$$

en donde

$$\begin{aligned} \frac{\dot{H}}{H^2} &= -\frac{6(1-y_s^2)(1+x_s^2-y_s^2) - 3(x_s^2+y_s^2-1)(1+x_s^2-y_s^2 - \sqrt{2/3}\lambda x_s y_s^2)}{4(1-y_s^2) + (x_s^2+y_s^2-1)^2}, \\ \frac{\ddot{\phi}}{H^2} &= -\frac{3\sqrt{6}x_s(x_s^2+y_s^2-1)(1+x_s^2-y_s^2) - 6\sqrt{6}x_s(1+x_s^2-y_s^2 - \sqrt{2/3}\lambda x_s y_s^2)}{4(1-y_s^2) + (x_s^2+y_s^2-1)^2}. \end{aligned}$$

La estructura del sistema dinámico (5.17) está contenida en los semi-planos $\{\Psi_+ := (x_s, y_s) : x_s > 0, y_s \geq 0\}$ y $\{\Psi_- := (x_s, y_s) : x_s < 0, y_s \geq 0\}$. Aquí, nuevamente las rectas $x_s = 0$, $y_s \geq 0$, y $y_s = 0$ son subconjuntos invariantes del sistema, y $x_s = 0$ ($y_s \geq 0$) es una separatriz del espacio-fase. Otra propiedad del sistema (5.17) es su invarianza bajo la transformación $(x_s, y_s, \lambda) \rightarrow (-x_s, y_s, -\lambda)$, así que para el análisis será suficiente con estudiar el sector $x_s \geq 0, \lambda \geq 0$. Puede verse de la figuras 5.1, 5.2 y 5.3 que, dependiendo de las condiciones iniciales las trayectorias del espacio-fase se pueden originar tanto en infinito $x_s \rightarrow \pm\infty$, así como en el big bang $(x_s, y_s) = (0, 0) \Rightarrow z = 0$ (ver ecuación (5.16)). Esto significa que las variables (x_s, y_s) no están acotadas y al realizar el estudio de puntos críticos tenemos que tomar en cuenta los puntos singulares asintóticos del sistema. Una forma de estudiar las configuraciones en infinito es por medio de la esfera de Poincaré como mencionaremos a continuación

5.3.1. Proyección de Poincaré

Uno de los métodos usuales para hallar a los puntos críticos asintóticos de un sistema dinámico es usando la esfera de Poincaré. Tomando el cambio de variables

$$X_s = \frac{x_s}{r_s}, \quad Y_s = \frac{y_s}{r_s}, \quad Z_s = r_s^{-1}, \quad r_s = \sqrt{1 + x_s^2 + y_s^2},$$

y la restricción $Z_s = \sqrt{1 - X_s^2 - Y_s^2}$, es posible reescribir al sistema (5.17), de la forma

$$\begin{aligned} KX'_s &= \sqrt{6}\lambda X_s^2 Y_s^2 [8X_s^4 + 2X_s^2(8Y_s^2 - 7) + 8Y_s^4 - 14Y_s^2 + 7] \\ &\quad - 6X_s(2Y_s^2 - 1)Z_s(4X_s^4 + 2X_s^2(5Y_s^2 - 3) + 6Y_s^4 - 9Y_s^2 + 2), \end{aligned} \quad (5.18)$$

$$\begin{aligned} KY'_s &= \sqrt{6}\lambda X_s Y_s (8X_s^4(Y_s^2 - 1) + 2X_s^2(8Y_s^4 - 15Y_s^2 + 6) + 8Y_s^6 - 22Y_s^4 + 19Y_s^2 - 5) \\ &\quad - 6Y_s(2Y_s^2 - 1)Z_s(4X_s^4 + 2X_s^2(5Y_s^2 - 3) + 6Y_s^4 - 9Y_s^2 + 3), \end{aligned} \quad (5.19)$$

con ayuda de la ecuación auxiliar

$$\begin{aligned} KZ'_s &= Z_s(2X_s^2 + 2Y_s^2 - 1) \\ &\quad \left[\sqrt{6}\lambda X_s Y_s^2(4X_s^2 + 4Y_s^2 - 5) - 6(2Y_s^2 - 1)Z_s(2X_s^2 + 3Y_s^2) \right]. \end{aligned} \quad (5.20)$$

**CAPÍTULO 5. ANÁLISIS DINÁMICO DE UN MODELO DE GALILEÓN
CÚBICO GENERALIZADO**
5.3. GALILEÓN GENERALIZADO EN EL VACÍO

Aquí el factor

$$K = 2 (8X_s^4 + 20X_s^2Y_s^2 - 12X_s^2 + 12Y_s^4 - 16Y_s^2 + 5),$$

puede tomar cualquier signo y se ha reescalado la derivada temporal con ayuda de Z_s . Debemos notar que el sistema sólo está definido para $Y_s \geq 0$, y esto se debe a que la variable estándar $y_s \geq 0$. Podemos observar que los puntos críticos del sistema (5.17) en infinito son mapeados a los puntos fijos del sistema (5.18), los cuales se encuentran localizados a lo largo del ecuador $X_s^2 + Y_s^2 = 1$.

En las figuras 5.1, 5.2 y 5.3 se presenta el diagrama de espacio-fase del sistema 2D autónomo (5.17) para distintos valores del parámetro λ . En la parte inferior se muestra el espacio-fase compacto en términos de las variables de Poincaré (5.18), el cual corresponde a la dinámica total (finita e infinita) en cada caso. Se puede apreciar que gracias al acoplamiento de galileón, los puntos críticos pueden estar localizados no solamente dentro del semicírculo $x_s^2 + y_s^2 \leq 1$, sino que también fuera de él. Es posible hallar por inspección numérica que los únicos puntos singulares en infinito son $Q_1 : (X_s = 0, Y_s = 1)$ y $Q_{2,3} : (X_s = \pm 1, Y_s = 0)$, y corresponden a $x_s \rightarrow 0, y_s \rightarrow +\infty$ (Q_1) y $x_s \rightarrow \mp\infty, y_s \rightarrow 0$ (Q_2 or Q_3) en términos de las variables estándar.

Para calcular de forma analítica a los puntos críticos en el infinito, comenzamos por tomar coordenadas polares $x_s = r \cos \theta, y_s = r \sin \theta$, en donde $\rho = 1/r$. Reescalando a la derivada por el factor ρ

$$\rho' = \frac{1}{4}\rho(\rho^2 - 1) \left[\sqrt{6}\lambda(5\rho^2 + 1) \sin(\theta) \sin(2\theta) \right. \quad (5.21)$$

$$\left. + 6(\rho^2 - 5)\rho \cos(2\theta) + 3\rho \cos(4\theta) - 30\rho^3 + 3\rho \right], \quad (5.22)$$

$$\theta' = \frac{1}{4} \sin(2\theta) \left[\sqrt{6}\lambda(-5\rho^4 + 2\rho^2 - 1) \cos(\theta) + 6(\rho^3 + \rho)(\cos(2\theta) + \rho^2) \right]. \quad (5.23)$$

Esto es

$$\rho' = f(\theta)\rho + O(\rho^2), \quad \theta' = g(\theta) + O(\rho). \quad (5.24)$$

en donde

$$f(\theta) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\lambda \sin(\theta) \sin(2\theta), \quad g(\theta) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\lambda \cos(\theta) \sin(2\theta).$$

Para obtener los puntos asintóticos es necesario resolver las ecuaciones $\rho' = \theta' = 0$, con $\rho = 0$. Esto es equivalente a hallar las raíces de la ecuación $g(\theta) = 0$ y se puede ver que las soluciones θ^* vienen en pares θ_i y $\theta_i + 2\pi$. Para este análisis y sin pérdida de generalidad vamos a considerar únicamente el intervalo $0 \leq \theta \leq \pi$. Las soluciones corresponden a los puntos críticos $Q_i : (\theta^i, X_s^i, Y_s^i)$

$$Q_1 : (\pi/2, 0, 1), \quad Q_2 : (0, 1, 0), \quad Q_3 : (\pi, -1, 0).$$

Un detalle importante cuando analizamos este tipo de sistemas y que siempre debemos tener en mente, es la posibilidad de que uno o varios puntos críticos sean degenerados. A partir de la definición de las variables X_s, Y_s , y de la relación $x_s = r \cos \theta, y_s = r \sin \theta$

**CAPÍTULO 5. ANÁLISIS DINÁMICO DE UN MODELO DE GALILEÓN
CÚBICO GENERALIZADO**

5.3. GALILEÓN GENERALIZADO EN EL VACÍO

con $\rho = 1/r$, se puede ver que bajo la proyección de Poincaré, todos los puntos con x_s finito y $y_s \rightarrow \infty$, son mapeados a un sólo punto singular (degenerado) $Q_1 : (\pi/2, 0, 1)$. En particular, de los puntos críticos de la tabla 5.3, P_{1v}^\pm , para los cuales $x_s = 0$, $y_s \rightarrow \infty$, y el punto fantasma P_{3v}^\pm , que corresponde al caso donde $x_s = \mp 2\sqrt{6}/\lambda$, $y_s \rightarrow \infty$, son mapeados al punto degenerado Q_1 . Esta degeneración se puede hacer más evidente si relacionamos a las variables de Poincaré con el conjunto de variables acotadas definidas en la ecuación (5.9).

Como ejemplo vamos a considerar la carta generado por la rama positiva x_+ y . Usando la ecuación (5.9) obtenemos la relación

$$X_s = \frac{(1 - x_+)y}{\sqrt{x_+^2 y^2 + (1 - x_+)^2 y^2 + x_+^2 (1 - y)^2}},$$

$$Y_s = \frac{x_+(1 - y)}{\sqrt{x_+^2 y^2 + (1 - x_+)^2 y^2 + x_+^2 (1 - y)^2}}.$$

Esto implica que los puntos críticos del vacío

$$P_{1v}^+ : (1, 0), \quad P_{3v}^+ : \left(\frac{\lambda}{\lambda - 2\sqrt{6}}, 0 \right),$$

comparten el mismo valor para la coordenada $y = 0$. Por lo tanto, sustituyendo $y = 0$ en las ecuaciones para X_s y Y_s , se obtiene de manera independiente al valor de x_+

$$X_s = 0, \quad Y_s = 1.$$

Para los puntos

$$P_{1v}^- : (-1, 0), \quad P_{3v}^- : \left(-\frac{\lambda}{\lambda + 2\sqrt{6}}, 0 \right),$$

se obtienen los mismos resultados después de escribir a X_s , Y_s en términos de x_- , y .

5.3.2. Nuevas variables

El propósito de esta sección es encontrar un nuevo conjunto de variables adimensionales con los cuales podamos describir a todo el espacio-fase. Aprovechando el hecho de que $x_s = 0$ es una separatriz, podemos estudiar la dinámica en cada subconjunto en el espacio fase Ψ^- y Ψ^+ de forma independiente. Tomando el conjunto de variables definidos en (5.9), tenemos que en este caso el conjunto de puntos están dados por la unión de dos planos acotados $\Phi_{\text{tot}} = \Phi^- \cup \Phi^+$.

$$\Phi^+ = \{(x_+, y) : 0 \leq x_+ \leq 1, 0 \leq y \leq 1\},$$

$$\Phi^- = \{(x_-, y) : -1 \leq x_- \leq 0, 0 \leq y \leq 1\}. \tag{5.25}$$

**CAPÍTULO 5. ANÁLISIS DINÁMICO DE UN MODELO DE GALILEÓN
CÚBICO GENERALIZADO**
5.3. GALILEÓN GENERALIZADO EN EL VACÍO

P. C.	Existencia	Estabilidad	q
$P_{1v}^{\pm} : (\pm 1, 0)$	siempre	silla	8
$P_{2v}^{\pm} : (\pm 1, 1)$	”	inestable	4/5
$P_{3v}^{\pm} : \left(\frac{\pm \lambda}{\lambda \mp 2\sqrt{6}}, 0 \right)$	$\pm \lambda < 0$	estable	-4
$P_{4v} : (0, 1)$	siempre	silla si $\pm \lambda \geq 0$ inestable si $\pm \lambda < 0$ (inv. num.)	-4
$P_{5v}^{\pm} : (\pm 1/2, 1)$	”	silla si $\pm \lambda < \sqrt{6}$ estable si $\pm \lambda > \sqrt{6}$	2
$P_{6v}^{\pm} : \left(\frac{\sqrt{6}}{\lambda \pm \sqrt{6}}, \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6 - \lambda^2} + \sqrt{6}} \right)$	$\lambda^2 < 6$	estable	$-1 + \frac{\lambda^2}{2}$
$P_{7v}^{\pm} : (\pm 1, 1/2)$	siempre	estable (inv. num.)	-1

Cuadro 5.3: Puntos críticos del sistema dinámico (5.26) y sus principales propiedades: existencia, estabilidad y parámetro de desaceleración q .

5.3.3. El sistema dinámico

En término de las variables (5.9), el sistema dinámico toma la forma

$$\begin{aligned} x'_{\pm} &= -\frac{x_{\pm}^2}{\sqrt{6}} \left[\frac{\ddot{\phi}}{H^2} \right]_{\pm} + x_{\pm}(1 \mp x_{\pm}) \left[\frac{\dot{H}}{H^2} \right]_{\pm}, \\ y' &= y(1 - y) \left\{ \sqrt{\frac{3}{2}} \lambda \left(\frac{1 \mp x_{\pm}}{x_{\pm}} \right) + \left[\frac{\dot{H}}{H^2} \right]_{\pm} \right\}, \end{aligned} \quad (5.26)$$

en donde

$$\begin{aligned} \left[\frac{\dot{H}}{H^2} \right]_{\pm} &= -3 \left\{ \frac{3\Theta_{\pm}(-1/3)\Theta_{\pm}(1) - \sqrt{2/3}\lambda x_{\pm}(1 \mp x_{\pm})(1 - y)^2\Theta_{\pm}(-1)}{4x_{\pm}^4 y^2(2y - 1) + \Theta_{\pm}^2(-1)} \right\}, \\ \left[\frac{\ddot{\phi}}{H^2} \right]_{\pm} &= 3 \left\{ \frac{\sqrt{6}(1 \mp x_{\pm})\Theta_{\pm}(1) [\Theta_{\pm}(-1) - 2x_{\pm}^2 y^2] + 4\lambda x_{\pm}^3(1 \mp x_{\pm})^2 y^2(1 - y)^2}{x_{\pm} [4x_{\pm}^4 y^2(2y - 1) + \Theta_{\pm}^2(-1)]} \right\}, \end{aligned}$$

siendo $\Theta_{\pm}(a)$ la función definida en (5.15). Nuevamente los signos '+' y '-' se refieren a las dos ramas de la variable estándar x_s , así que en realidad estamos tratando con dos sistemas dinámicos distintos: i) el que se expresa en términos de las variables (x_+, y, z) , correspondiente a $\dot{\phi} > 0$, y ii) el descrito por (x_-, y, z) , cuando $\dot{\phi} < 0$. De la misma forma que con las variables estándar, en este caso despejamos z en términos de (x_{\pm}, y)

$$Q_{\pm} = 9 \left(\frac{z - 1}{z} \right) = \frac{x_{\pm} \Theta_{\pm}(-1)}{2\sqrt{2/3}(1 \mp x_{\pm})^3 y^2}. \quad (5.27)$$

**CAPÍTULO 5. ANÁLISIS DINÁMICO DE UN MODELO DE GALILEÓN
CÚBICO GENERALIZADO**
5.4. PUNTOS CRÍTICOS Y ESTRUCTURA DEL ESPACIO-FASE

P. C.	λ_1	λ_2
$P_{1v}^\pm : (\pm 1, 0)$	12	-9
$P_{2v}^\pm : (\pm 1, 1)$	6/5	9/5
$P_{3v}^\pm : \left(\frac{\pm \lambda}{\lambda \mp 2\sqrt{6}}, 0 \right)$	-3	-12
$P_{4v} : (0, 1)$	indet.	6
$P_{5v}^\pm : (\pm 1/2, 1)$	$3 \mp \sqrt{\frac{3}{2}}\lambda$	-6
$P_{6v}^\pm : \left(\frac{\sqrt{6}}{\lambda \pm \sqrt{6}}, \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6-\lambda^2} + \sqrt{6}} \right)$	$-\lambda^2$	$-3 + \frac{\lambda^2}{2}$
$P_{7v}^\pm : (\pm 1, 1/2)$	0	-3

Cuadro 5.4: Eigenvalores de la matriz linealizada alrededor de los puntos críticos del sistema dinámico (5.26).

5.4. Puntos críticos y estructura del espacio-fase

El espacio-fase del sistema está dado por la unión de los semiplanos Φ^+ y Φ^- definidos en (5.25): $\Phi_{\text{tot}} = \Phi^- \cup \Phi^+$. Las fronteras son

$$\begin{aligned}
 B_1 &:= \{(x_-, 0) : -1 \leq x_- \leq 0\} \cup \{(x_+, 0) : 0 \leq x_+ \leq 1\}, \\
 B_2 &:= \{(1, y) : -\infty \leq y \leq \infty\}, \\
 B_3 &:= \{(x_-, 1) : -1 \leq x_- \leq 0\} \cup \{(x_+, 1) : 0 \leq x_+ \leq 1\}, \\
 B_4 &:= \{(-1, y) : -\infty \leq y \leq \infty\},
 \end{aligned} \tag{5.28}$$

en donde $z = 0$, ocurre únicamente cuando $\sigma_0 H^2 \rightarrow \infty$. Esto significa que, o hay una singularidad cosmológica ($H \rightarrow \infty$), o el término cúbico se desacopla de la interacción gravitacional ($\sigma_0 \rightarrow \infty$). Podemos identificar a las separatrices

$$\begin{aligned}
 \text{sep}^0 &:= (0, y), \\
 \text{sep}^+ &:= \left(x_+, \frac{x_+}{x_+ + \sqrt{2x_+ - 1}} \right), \\
 \text{sep}^- &:= \left(x_-, \frac{x_-}{x_- - \sqrt{-2x_- - 1}} \right),
 \end{aligned} \tag{5.29}$$

y debe notarse que para las separatrices sep^0 y sep^\pm , se tiene que $z = 1$, es decir, $\sigma_0 H^2 = 0$. Se tiene entonces que estamos tratando con dos posibilidades: ya sea que el universo es estático ($H = 0$), o para el caso en que $\sigma_0 = 0$, se tiene que recuperamos el modelo de relatividad general mínimamente acoplado con campo escalar quintaesencia.

5.4.1. Campo quintaesencia con potencial exponencial

Los puntos críticos del sistema dinámico (5.26), junto con sus principales propiedades se muestran en la tabla 5.3. Para la estabilidad de los puntos de equilibrio se presentan los eigenvalores de la matriz linealizada en la tabla 5.4. Los puntos singulares P_{5v}^\pm y P_{6v}^\pm , para los cuales $z = 1$, son los puntos usuales para el modelo de quintaesencia exponencial [34]. Los

CAPÍTULO 5. ANÁLISIS DINÁMICO DE UN MODELO DE GALILEÓN CÚBICO GENERALIZADO

5.4. PUNTOS CRÍTICOS Y ESTRUCTURA DEL ESPACIO-FASE

puntos P_{5v}^{\pm} corresponden a la solución de “stiff matter”, los cuales están relacionados con un punto inestable al pasado, por lo que sólo son relevantes para tiempos tempranos. En nuestro caso hallamos algo un poco distinto y esto se debe a la presencia de una función de acoplamiento $\sigma = \sigma_0$. De hecho, como se puede observar en la tabla 5.3 y en la figura 5.4, la solución de “stiff-matter” puede ser también un atractor a futuro. Esto se logra si, $\lambda > \sqrt{6}$ (rama ‘+’), o $\lambda < -\sqrt{6}$ (rama ‘-’). Para los casos en que $\lambda < \sqrt{6}$ (rama ‘+’) o $\lambda > -\sqrt{6}$ (rama ‘-’), la solución de “stiff-matter” representa un punto silla (ver tabla 5.5 y 5.6), y no hay forma de que represente un repulsor en el pasado como en el caso de quintaesencia exponencial con $|\lambda| < \sqrt{6}$.

Esta pequeña diferencia en la estabilidad aparece debido a que el punto $x_{\pm} = \pm 1/2$, $y = 1$, ($z = 1$), o en términos de las variables estándar $x_s = \pm 1$, $y_s = 0$, es obtenido no sólo cuando $\dot{\phi} = \pm\sqrt{6}H$, $V = 0$, $\sigma_0 = 0$, como en el caso de quintaesencia, sino que también puede originarse cuando existe una función de acoplamiento “residual” $\sigma_0 \neq 0$ ($\sigma_0 \ll 1$)

$$\dot{\phi} \sim H \gg V, \sigma_0 \ll 1/H^2, \sigma_0 \neq 0.$$

Por lo tanto, una vez que se tiene $|\lambda| > \sqrt{6}$, y se satisface lo dicho anteriormente, la solución de “stiff-matter” es un atractor global del sistema. Este comportamiento no tiene un equivalente en el caso usual de quintaesencia.

Los puntos críticos P_{6v}^{\pm} tienen las mismas propiedades que en el caso de quintaesencia exponencial [?]. Estos corresponden a la solución “scaling” entre el término cinético y el potencial del campo

$$\frac{\dot{\phi}^2}{2V} = \frac{\lambda^2}{6 - \lambda^2}.$$

Siempre que existen, estos puntos son atractores.

5.4.2. La solución de De Sitter

Otra propiedad interesante que presenta el modelo de galileón y que ha sido estudiado a detalle en [21], es el punto de De Sitter (P_{7v}^{\pm} en la tabla 5.3). En este caso se trata de un punto singular de (5.26) y se comporta como un atractor local ¹. El parámetro z es indefinido en este caso, ya que si nos acercamos sobre la separatriz sep^{\pm} , tenemos $z = 1$, mientras que a lo largo de cualquier otra dirección $z = 0$. El punto de De Sitter no aparece en el modelo de quintaesencia, salvo cuando $\lambda = 0$ (potencial constante), así que su existencia para cualquier valor de $\lambda \neq 0$ es una consecuencia directa del acoplamiento no nulo entre la gravedad y el campo galileón.

A partir de la existencia de puntos críticos de De Sitter de forma independiente al valor del parámetro λ , uno podría pensar que para el caso en el que el potencial se anula ($\lambda \rightarrow \infty$), el punto de equilibrio P_{7v}^{\pm} estaría asociado a la solución autoacelerante [90]. Esto es una solución en donde la aceleración del universo aparece aún en el caso de ausencia de materia y de potencial

$$\rho_m = p_m = V(\phi) = \dot{H} = 0.$$

¹Los puntos P_{5v}^{\pm} y P_{6v} corresponden a los puntos A^{\pm} y C en la tabla 1 de [21] respectivamente.

**CAPÍTULO 5. ANÁLISIS DINÁMICO DE UN MODELO DE GALILEÓN
CÚBICO GENERALIZADO**
5.4. PUNTOS CRÍTICOS Y ESTRUCTURA DEL ESPACIO-FASE

En [90] se analiza esta solución en el contexto de la teoría de Brans-Dicke con un término de interacción cúbico $\propto f(\phi)(\nu\phi)^2\nabla^2\phi$, así que no sería del todo raro que aparezca en este modelo. Sin embargo, esto no es posible y para probarlo se toma $\rho_m = p_m = 0$, y $\dot{H} = 0 \Rightarrow H = H_0$, por lo que la ecuación de Friedmann (5.4) se transforma en una ecuación algebraica para $\dot{\phi}$

$$9\sigma_0 H_0 \dot{\phi}^3 - \dot{\phi}^2 + 9H_0^2 = 0.$$

Toda solución real $\dot{\phi} = r_0 = cte$, nos dice que $\ddot{\phi} = 0$. Por lo tanto, la ecuación de Raychaudhuri toma la forma

$$-2\dot{H} = \rho_\phi + p_\phi = 0 \Rightarrow 1 - 3\sigma_0 H_0 r_0 = 0.$$

Puede probarse que al trabajar con la ecuación de conservación del campo (5.5) se obtiene la misma solución $3\sigma_0 H_0 r_0 = 1$. Sustituyendo este valor de r_0 en la ecuación cúbica se tiene que $H_0^4 = -2/27\sigma_0^2$, lo cual no se satisface para H_0 y σ_0 reales.

5.4.3. Solución de big bang

Los puntos singulares $P_{2v}^\pm : (\pm 1, 1)$ no deben ser confundidos con los puntos P_2^\pm de la tabla 5.1 (O_1 en la referencia [21]), tampoco con los puntos P_1^\pm de la misma tabla. En términos de las variables estándar (x_s, y_s) , P_{2v}^\pm corresponde a $(0, 0)$, el cual representa al big bang dominado por materia en el modelo de quintaesencia exponencial [?]. Sin embargo, para el caso de vacío tenemos

$$\Omega_\phi = \frac{\rho_\phi}{3H^2} = 1,$$

por lo que no puede representar ningún dominio de materia. De hecho, dado que para el punto P_{2v}^\pm el parámetro de desaceleración toma el valor $q = 4/5$, se tiene que

$$\frac{\dot{H}}{H^2} = -\frac{9}{5} \Rightarrow H = \frac{5/9}{t - t_0} \Rightarrow a(t) \propto (t - t_0)^{5/9},$$

así que podemos asociar a P_{2v}^\pm con la solución de big bang en ausencia de materia para un tiempo t_0 . Esta solución inestable corresponde a un punto crítico repulsor en el pasado y no tiene un equivalente en el modelo de quintaesencia ordinaria (o al menos no en los casos estudiados en la literatura), ya que no se tiene el estudio en caso de la no presencia de materia.

5.4.4. Solución fantasma (Phantom)

Uno de los resultados más interesantes hallados en este trabajo es la existencia del punto singular P_{3v}^\pm , el cual se trata de un atractor estable y representa un comportamiento tipo “phantom”. Para entender mejor esta solución que sólo existe cuando $\lambda < 0$, vamos a tomar una constante positiva κ , tal que $\lambda = -\kappa$. En el punto P_{3v}^+ se tiene

$$\begin{aligned} x_+ &= \frac{\kappa}{\kappa + 2\sqrt{6}} \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{12}{\kappa} H, \\ y &= 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{V}}{\sqrt{3}H} \rightarrow \infty, \\ z &= 0 \Rightarrow \sigma_0 H^2 \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

**CAPÍTULO 5. ANÁLISIS DINÁMICO DE UN MODELO DE GALILEÓN
CÚBICO GENERALIZADO**
5.4. PUNTOS CRÍTICOS Y ESTRUCTURA DEL ESPACIO-FASE

A partir de la primer ecuación

$$\phi(a) = \frac{12}{\kappa} \ln a + \phi_0,$$

siendo ϕ_0 una constante de integración. Por otro lado, ya que en el punto crítico $q = -4$, y en el vacío $\Omega_\phi = 1$

$$\frac{\dot{H}}{H^2} = -\frac{3}{2}(1 + \omega_\phi) = 3 \Rightarrow \omega_\phi = -3,$$

así que para este caso

$$H(t) = \frac{1}{3(t_f - t)} \Rightarrow a(t) = \frac{a_0}{(t_f - t)^{1/3}} \quad (t \leq t_f),$$

en donde $-3t_f$ y $\ln a_0$ son constantes de integración.

Puesto que $V \sim \exp(\kappa\phi) \sim a^{12} \sim (t_f - t)^{-4}$, entonces, ya que $t \rightarrow t_f$ de manera asintótica

$$H^2\sigma_0 \propto (t_f - t)^{-2} \rightarrow \infty, \quad \frac{\sqrt{V}}{H} \propto (t_f - t)^{-1} \rightarrow \infty.$$

Tenemos también

$$\rho_\phi(t) = 3H^2(t) = \dot{H}(t) = \frac{1}{3(t_f - t)^2}.$$

Además, ya que en el punto P_{3v}^\pm , $\dot{\phi} = 12H/\kappa$, es posible reescribir a la ecuación de Friedmann de la forma

$$V = \left(3 - \frac{\alpha^2}{2}\right) H^2 + 3\alpha^3\sigma_0 H^4,$$

donde $\alpha = 12/\kappa$. Como podemos ver, el potencial de autointeracción del campo galileón se aproxima de forma asintótica a $V \propto H^4$, tal como se requiere. El comportamiento “phantom” es evidente por el hecho que la densidad de energía del galileón aumenta de forma no acotada con t , y también puede verse que $a(t)$, $H(t)$, $\dot{H}(t)$, y $\rho_\phi(t)$, divergen cuando $t = t_f$. Por lo tanto, en un tiempo finito a futuro tendremos de manera inevitable una singularidad tipo big rip [92].

El punto P_{4v} representa una contracción superacelerada del universo y a diferencia de la solución P_{3v}^\pm , ésta no presenta impacto en la dinámica a tiempos tardíos. En este caso se requiere que el potencial se anule $V = 0 \Rightarrow y = 1$, tener un término cinético finito $\dot{\phi} \neq 0$, y que de forma asintótica

$$H \rightarrow 0 \Rightarrow x_\pm \rightarrow 0, z \rightarrow 1.$$

Volviendo al parámetro de desaceleración

$$q = -4 \Rightarrow \frac{\dot{H}}{H^2} = 3 \Rightarrow H(t) = -\frac{1}{3(t - t_b)} \quad (t \geq t_b),$$

en donde hemos fijado la constante de integración $C = -3t_b$. De forma asintótica, mientras que $t \rightarrow \infty$, tenemos que $H \rightarrow 0$, como era de esperarse. A pesar de que hemos restringido nuestro estudio a los modelos cosmológicos en expansión, éste punto pertenece a la frontera

CAPÍTULO 5. ANÁLISIS DINÁMICO DE UN MODELO DE GALILEÓN CÚBICO GENERALIZADO

5.4. PUNTOS CRÍTICOS Y ESTRUCTURA DEL ESPACIO-FASE

del espacio fase y debe ser tomado en cuenta al llevar a cabo el análisis.

Existen además un par de puntos de equilibrio del sistema dinámico correspondientes al galileón en vacío que no pueden ser hallados cuando existe un componente de materia. Estos son los puntos P_{1v}^{\pm} de la tabla 5.3 y representan una fase super desacelerada de la expansión cósmica

$$H \sim \frac{1}{9(t-t_0)} \quad \Rightarrow \quad a(t) \propto (t-t_0)^{1/9},$$

en donde $9t_0$ es una constante de integración. En estos puntos

$$\dot{\phi} \ll H \ll \sqrt{V}, \quad 1 \ll \sqrt{\sigma_0}H \ll (\sqrt{\sigma_0}\dot{\phi})^3.$$

Los puntos P_{1v}^{\pm} tienen un comportamiento tipo silla, así que se trata de un estado de transición en la evolución del universo. Además, como puede verse en las figuras 5.4, 5.5 y 5.6 sólo para un pequeño conjunto de condiciones iniciales se tienen trayectorias que se aproximan a P_{1v}^{\pm} .

Se ha tratado de mostrar a lo largo de este capítulo que la estructura del presente modelo de galileón cúbico en ausencia de materia es altamente no trivial. En particular, tenemos que los galileones pueden jugar un papel importante al momento de describir la evolución del universo. Esto debe ser contrastado de manera más profunda con los resultados de [21], en donde los autores mencionan que la presencia de galileón no modifica la dinámica a tiempos tardíos. Además, es necesario llevar a cabo un análisis en donde contrastemos el valor del parámetro σ_0 de acuerdo a las observaciones para acotar la viabilidad del modelo y determinar de qué manera continuar el análisis en presencia de funciones de acoplamiento más generales y distintos potenciales. Como una primera prueba de validez se muestra en la figura (fig-vac) que, con las condiciones iniciales adecuadas las trayectorias en el espacio-fase tienden siempre al punto atractor de De Sitter en el futuro. Esto implica que, aún cuando la dinámica se haya originado en la vecindad de un punto singular repulsor como en el caso de $P2$ con parámetro de desaceleración $q = 8$ o en un punto silla como en los casos $P1$ con $q = 8$ o $P5$ con $q = 2$, éste cambiará de signo ya que en el punto de De Sitter toma un valor $q = -1$, lo cual está de acuerdo con resultados hallados en la literatura [93]

P. C.	Existencia	Estabilidad	Ω_m
$P_{\text{mat}} : (0, 0)$	siempre	silla	1
$P_{\text{dura}}^{\pm} : (\pm 1, 0)$	"	inestable si $\pm\lambda < \sqrt{6}$ silla $\pm\lambda > \sqrt{6}$	0
$P_{\phi} : \left(\lambda/\sqrt{6}, \sqrt{1-\lambda^2/6}\right)$	$\lambda^2 < 6$	estable si $\lambda^2 < 3$ silla $3 < \lambda^2 < 6$	0
$P_{\text{scaling}} : \left(\sqrt{3/2}/\lambda, \sqrt{3/2}/\lambda\right)$	$\lambda^2 > 3$	nodo estable si $3 < \lambda^2 < 24/7$ espiral estable si $\lambda^2 > 24/7$	$1 - 3/\lambda^2$

Cuadro 5.5: Puntos críticos P_* : (x_s^*, y_s^*) del sistema dinámico (5.30), correspondientes del modelo de quintaesencia exponencial quintaesencia [34].

5.5. Discusión

Para entender mejor el problema que estamos enfrentando, vamos a exponer de forma rápida los resultados del estudio de campo quintaesencia exponencial (ver [?] para más detalles). En este caso las variables estándar x_s , y_s definidas en la ecuación (5.7) generan un espacio-fase compacto en el que se encuentran contenidos todos los puntos críticos del sistema. Considerando por simplicidad el caso de materia descrita por polvo ($p_m = 0$), el sistema dinámico que representa a las ecuaciones de movimiento tiene la forma

$$\begin{aligned} x'_s &= -3x_s + \frac{3}{2}x_s(1 + x_s^2 - y_s^2) + \sqrt{\frac{3}{2}}\lambda y_s^2, \\ y'_s &= -\sqrt{\frac{3}{2}}\lambda x_s y_s + \frac{3}{2}y_s(1 + x_s^2 - y_s^2), \end{aligned} \quad (5.30)$$

mientras que la ecuación de Friedmann está dada por

$$\Omega_m = 1 - x_s^2 - y_s^2. \quad (5.31)$$

Los puntos críticos $P^* : (x_s^*, y_s^*)$ del sistema dinámico (5.30), están localizados en la parte superior del disco $x_s^2 + y_s^2 \leq 1$ ($y_s \geq 0$), y se muestran en la tabla 5.6. Existen dos puntos de equilibrio asociados con la presencia de materia estándar: i) la solución dominada por materia P_{mat} , en donde $\Omega_m = 1$, y ii) la solución “scaling” entre la materia y el campo escalar P_{scaling} , en donde $\Omega_m = 1 - 3/\lambda^2$. Para los otros puntos singulares se tiene que $\Omega_m = 0$, y estos son iii) la solución de “stiff matter” P_{stiff}^\pm , y iv) la solución dominada por campo escalar P_ϕ , los cuales existen aún en el caso de ausencia de materia.

Por lo tanto, uno podría pensar que la dinámica del espacio-fase para el caso de vacío estaría dada exclusivamente por los puntos P_{stiff}^\pm y P_ϕ . Esto puede comprobarse tomando $\Omega_m = 0$ en la ecuación (5.31)

$$\Omega_m = 0 \Rightarrow x_s^2 + y_s^2 = 1.$$

Esta relación entre las variables x_s y y_s nos permite llevar a cabo una reducción dimensional del sistema dinámico y quedarnos con un sistema unidimensional. En otras palabras, tenemos una ecuación diferencial del tipo

$$x'_s = \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\lambda - 3x_s \right) (1 - x_s^2).$$

Como era de esperarse, los únicos puntos críticos están dado por $x_s = \pm 1$ ($y_s = 0$), y $x_s = \lambda/\sqrt{6}$ ($y_s = \sqrt{1 - \lambda^2/6}$), respectivamente. En consecuencia, solamente los puntos críticos P_{stiff}^\pm y P_ϕ , sobreviven en el caso de vacío.

P. C.	Existencia	Estabilidad	Ω_m
$P_{\text{mat}} : (0, 0)$	siempre	silla	1
$P_{\text{dura}}^{\pm} : (\pm 1, 0)$	"	inestable si $\pm\lambda < \sqrt{6}$ silla $\pm\lambda > \sqrt{6}$	0
$P_{\phi} : \left(\lambda/\sqrt{6}, \sqrt{1 - \lambda^2/6}\right)$	$\lambda^2 < 6$	estable si $\lambda^2 < 3$ silla $3 < \lambda^2 < 6$	0
$P_{\text{scaling}} : \left(\sqrt{3/2}/\lambda, \sqrt{3/2}/\lambda\right)$	$\lambda^2 > 3$	nodo estable si $3 < \lambda^2 < 24/7$ espiral estable si $\lambda^2 > 24/7$	$1 - 3/\lambda^2$

Cuadro 5.6: Puntos críticos $P_* : (x_s^*, y_s^*)$ del sistema dinámico (5.30), correspondientes del modelo de quintaesencia exponencial quintaesencia [34].

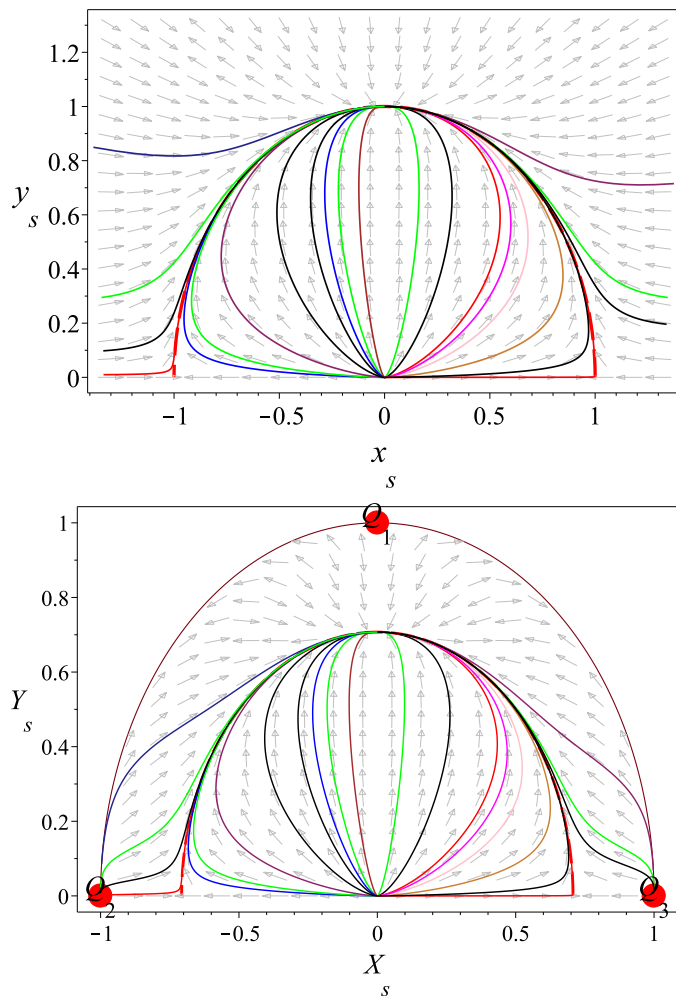


Figura 5.1: Espacio-fase del sistema autónomo de EDOs (5.17) para el valor del parámetro $\lambda = 0$. En la parte de arriba tenemos al espacio-fase definido por las variables estándar, mientras que en la parte inferior se muestra el espacio fase en las variables de Poincaré. Se puede ver que gracias al acoplamiento del campo galileón σ_0 , no todos los puntos críticos se encuentran dentro del semicírculo $x_s^2 + y_s^2 \leq 1$ (como en el caso de quintaesencia exponencial), sino que también pueden existir fuera de él. Podemos ver la existencia de dos soluciones con comportamiento de tipo silla en los puntos dominados por materia fría dura ($x_s = \pm 1, y_s = 0$), así como un punto inestable relacionado con el periodo de dominio de materia ($x_s = 0, y_s = 0$) y un atractor en $(x_s = 1, y_s = 1)$ correspondiente al punto de De Sitter. Las configuraciones al infinito corresponden a los puntos $x_s \rightarrow 0, y_s \rightarrow +\infty$ (Q_1) y al caso $x_s \rightarrow \mp\infty, y_s \rightarrow 0$ (Q_2 ó Q_3).

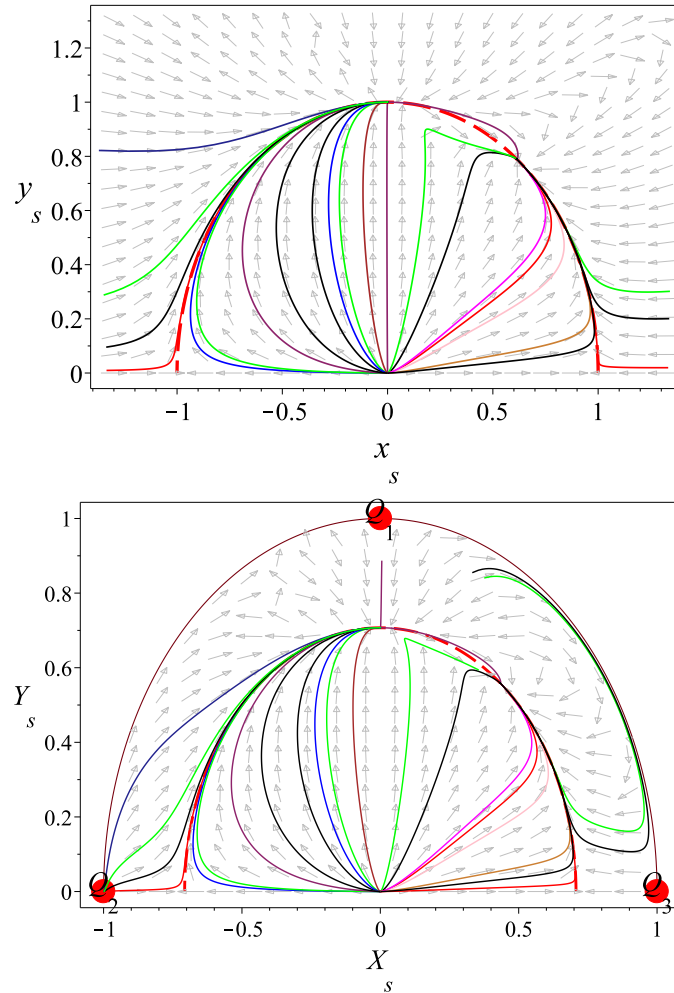


Figura 5.2: Espacio-fase del sistema autónomo de EDOs (5.17) para $\lambda = 1.5$. En la parte de arriba a abajo tenemos al espacio-fase definido por las variables estándar, mientras que en la parte inferior se muestra el espacio fase en las variables de Poincaré. De nuevo podemos notar que gracias al acoplamiento del campo galileón σ_0 , no todos los puntos críticos se encuentran dentro del semicírculo $x_s^2 + y_s^2 \leq 1$ (como en el caso de quintaesencia exponencial), sino que también pueden existir fuera de él. En este caso aparece un punto de equilibrio tipo silla dado por la solución escalante dentro del círculo unitario y también un punto estable relacionado con la solución de dominio de campo escalar que se recorre a lo largo del círculo unitario. Las configuraciones al infinito corresponden a los puntos $x_s \rightarrow 0, y_s \rightarrow +\infty$ (Q_1) y al caso $x_s \rightarrow \mp\infty, y_s \rightarrow 0$ (Q_2 ó Q_3).

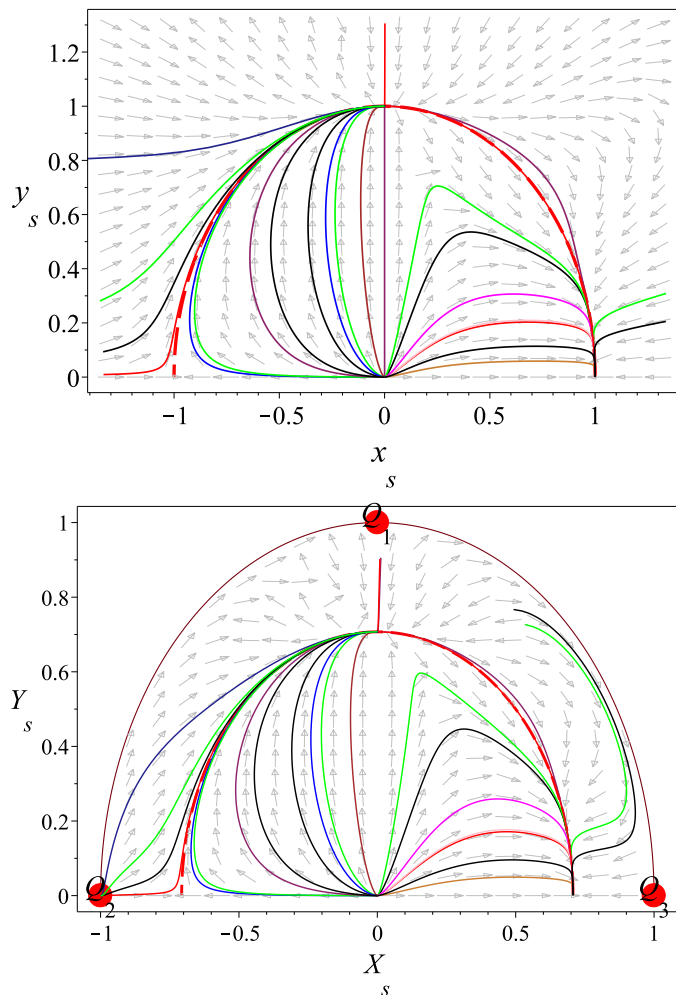


Figura 5.3: Espacio-fase del sistema autónomo de EDOs (5.17) para $\lambda = 3$. En la parte de arriba a abajo tenemos al espacio-fase definido por las variables estándar, mientras que en la parte inferior se muestra el espacio fase en las variables de Poincaré. De nuevo podemos notar que gracias al acoplamiento del campo galileón σ_0 , no todos los puntos críticos se encuentran dentro del semicírculo $x_s^2 + y_s^2 \leq 1$ (como en el caso de quintaesencia exponencial), sino que también pueden existir fuera de él. En este caso se tiene que el punto estable continúa recorriendo el semicírculo unitario hasta llegar a los puntos de dominio de materia dura. De nuevo las configuraciones al infinito corresponden a los puntos $x_s \rightarrow 0, y_s \rightarrow +\infty$ (Q_1) y al caso $x_s \rightarrow \mp\infty, y_s \rightarrow 0$ (Q_2 ó Q_3).

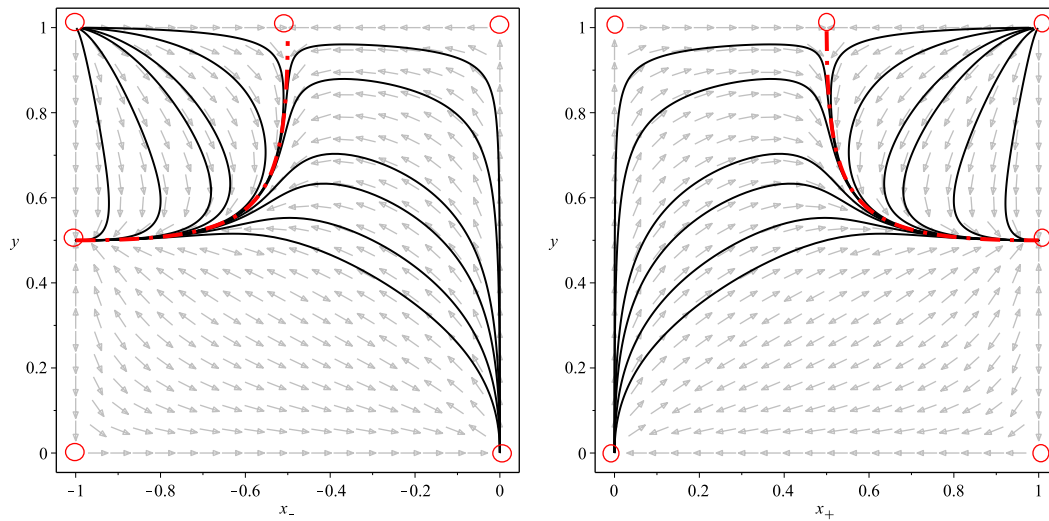


Figura 5.4: Retrato de fase del sistema autónomo de EDOs (5.26) para el valor del parámetro $\lambda = 0$. La figura de la izquierda se relaciona con el espacio-fase $\{(x_-, y) : -1 \leq x_- \leq 0, 0 \leq y \leq 1\}$, correspondiente a la rama negativa ($\dot{\phi} \leq 0$), mientras que la imagen de la derecha se trata del espacio-fase $\{(x_+, y) : 0 \leq x_+ \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, asociado con la rama positiva (5.26) ($\dot{\phi} \geq 0$). La curva punteada representa la separatriz $z = 1$, la cual une a los puntos de materia dura $(x_+, y) = (1/2, 1)$ y $(x_-, y) = (-1/2, 1)$, con los puntos críticos de De Sitter $(1, 1/2)$ y $(-1, 1/2)$. Se puede observar que en ambos casos el punto de De Sitter es el único atractor estable a futuro, mientras que la solución de big bang $(x_{\pm} = \pm 1, y = 1)$ es un repulsor y el punto de dominio de materia dura $(x_{\pm} = \pm 1/2, y = 1)$ funciona como un punto silla. Debido al valor del parámetro $\lambda = 0$ se tiene la existencia de un punto silla relacionado con la solución fantasma $(0, 0)$.

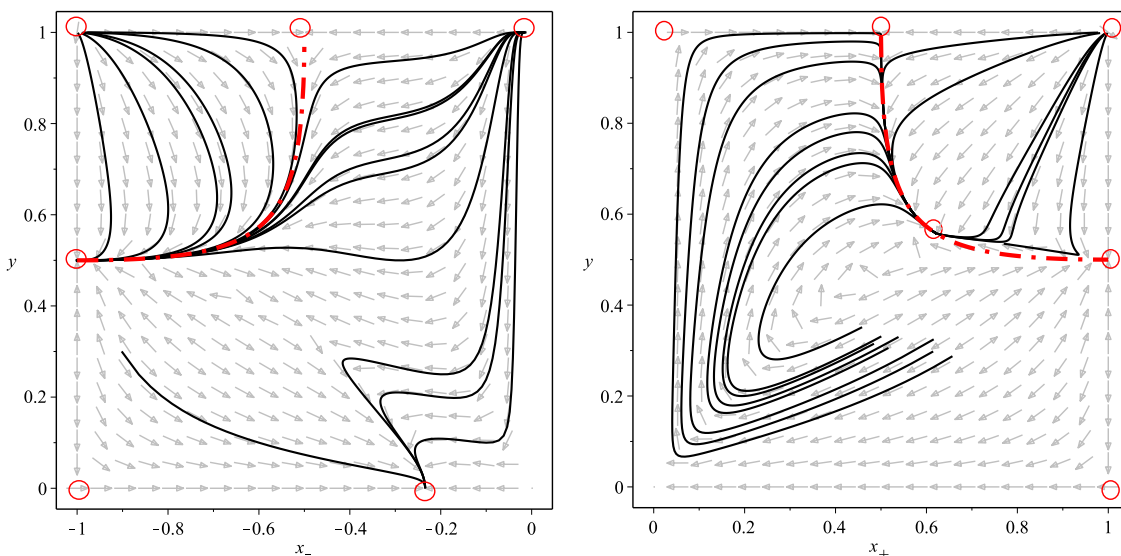


Figura 5.5: Retrato de fase del sistema autónomo de EDOs (5.26) para el valor del parámetro $\lambda = 0$. La figura de la izquierda se relaciona con el espacio-fase $\{(x_-, y) : -1 \leq x_- \leq 0, 0 \leq y \leq 1\}$, correspondiente a la rama negativa ($\dot{\phi} \leq 0$), mientras que la imagen de la derecha se trata del espacio-fase $\{(x_+, y) : 0 \leq x_+ \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, asociado con la rama positiva (5.26) ($\dot{\phi} \geq 0$). La curva punteada representa la separatriz $z = 1$, la cual une a los puntos de materia dura $(x_+, y) = (1/2, 1)$ y $(x_-, y) = (-1/2, 1)$, con los puntos críticos de De Sitter $(1, 1/2)$ y $(-1, 1/2)$. Se puede observar que en ambos casos el punto de De Sitter y la solución escalante son puntos atractores locales, mientras que la solución de big bang ($x_{\pm} = \pm 1, y = 1$) es un repulsor y el punto de dominio de materia dura ($x_{\pm} = \pm 1/2, y = 1$) funciona como un punto silla. En la imagen de la derecha aparece una solución escalante sobre la separatriz que funciona como punto silla, mientras que en la figura de la izquierda podemos observar que la solución fantasma se recorre a partir del origen.

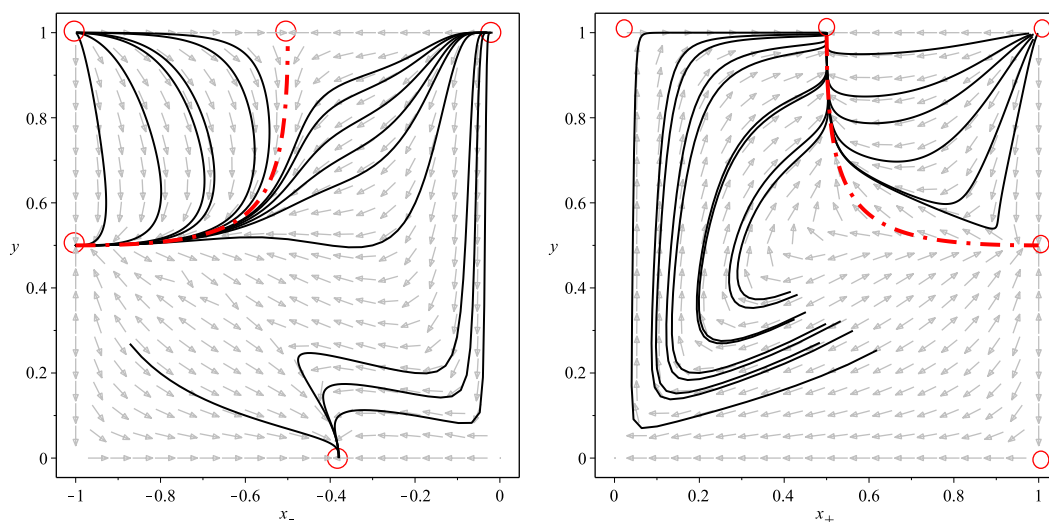


Figura 5.6: Retrato de fase del sistema autónomo de EDOs (5.26) para el valor del parámetro $\lambda = 0$. La figura de la izquierda se relaciona con el espacio-fase $\{(x_-, y) : -1 \leq x_- \leq 0, 0 \leq y \leq 1\}$, correspondiente a la rama negativa ($\dot{\phi} \leq 0$), mientras que la imagen de la derecha se trata del espacio-fase $\{(x_+, y) : 0 \leq x_+ \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, asociado con la rama positiva (5.26) ($\dot{\phi} \geq 0$). La curva punteada representa la separatriz $z = 1$, la cual une a los puntos de materia dura $(x_+, y) = (1/2, 1)$ y $(x_-, y) = (-1/2, 1)$, con los puntos críticos de De Sitter $(1, 1/2)$ y $(-1, 1/2)$. Se puede observar que en ambos casos el punto de materia dura y el punto de De Sitter pueden ser atractores estables a futuro, mientras que la solución de big bang ($x_{\pm} = \pm 1, y = 1$) es un repulsor. Debido al valor del parámetro $\lambda = 0$ se tiene la existencia de un punto silla relacionado con la solución phantom $(0, 0)$.

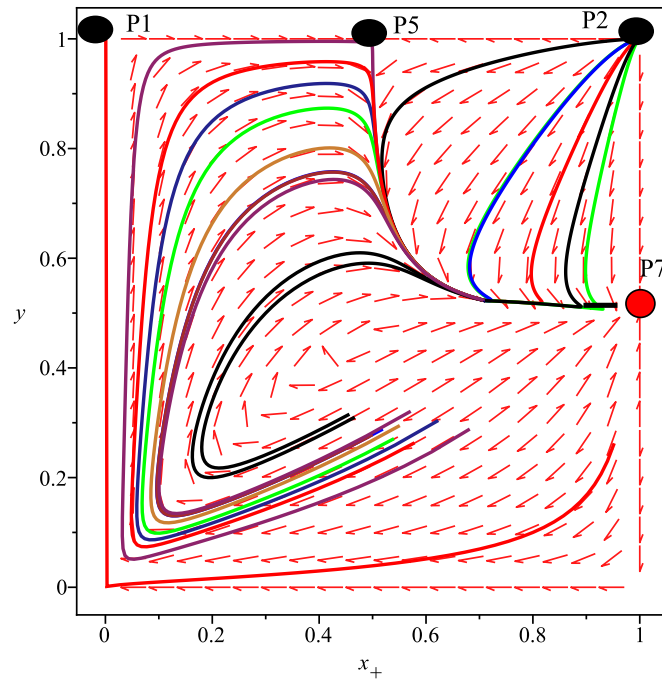


Figura 5.7: Retrato de fase del sistema autónomo de EDOs (5.26) para el valor del parámetro $\lambda = 2$. Acá se puede observar que todas las trayectorias del espacio-fase sin importar en dónde se originan, se tiene que terminan dirigiéndose al punto atractor de De Sitter P7 ($x_+ = 1, y = 1/2$). Se tiene que el punto P1 ($x_+ = 0, y = 1$) representa un punto silla, mientras que P2 ($x_+ = 1, y = 1$) se relaciona con un repulsor dado por el big bang y el punto P5 ($x_+ = 1/2, y = 1$) está relacionado al estado del sistema dominado por materia dura. En los tres casos se tiene un valor positivo del parámetro de desaceleración $q = 8, q = 4/5$ y $q = 2$ respectivamente, así ue existe siempre un cambio de signo en q , ya que para el punto acelerante se tiene un valor $q = -1$

Capítulo 6

Conclusiones

Uno de los problemas más importantes de la física teórica es encontrar la naturaleza de la energía oscura, la cual es responsable de la expansión acelerada que observamos en el universo. Nuestra concepción de la gravedad nos indica que todos los cuerpos en el universo se atraen entre sí, por lo que parece lógico suponer que el universo debería “frenarse” con el paso del tiempo, nada más lejos de la realidad. Esto implica que, o la gravedad actúa de forma distinta a la que pensamos y por lo tanto es necesario modificar la relatividad general a escalas cosmológicas, o bien es necesario asumir la existencia de un ente de materia que llena de forma homogénea al universo y que posee propiedades gravitacionales exóticas. De cualquier forma aparece nueva física que no está descrita ni por el modelo estándar de partículas ni por la relatividad general. Se trata pues de un problema abierto y pueden encontrarse un gran número de modelos que intentan responder esta cuestión.

Una opción es centrarnos en el análisis de un campo escalar llamado galileón debido a que respeta una simetría tipo $\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu \phi + b_\mu$ en el vacío. Se trata de una teoría de gravedad modificada que se origina en el modelo DGP, pero que puede ser vista como una teoría efectiva en 4D que contiene a un campo escalar acoplado de forma no mínima con la materia y que posee términos de autointeracción especiales. Por ejemplo, en [75] se analiza el caso de un campo escalar galileón en el contexto de la teoría Brans-Dicke descrito por el Lagrangiano

$$\mathcal{L}_{SK} = \phi R - \frac{\omega}{\phi} (\nabla \phi)^2 - 2\Lambda \phi + f(\nabla^2 \phi)^2 (\square \phi), \quad (6.1)$$

en donde la solución acelerante a tiempos tardíos es libre de inestabilidades de tipo ghost a escalas pequeñas si el término de interacción derivativo es negativo ($\omega < 0$). En este caso, el término cúbico $f(\nabla^2 \phi)^2 (\square \phi)$ es el que garantiza que las fluctuaciones alrededor del vacío sean estables, eliminando así la existencia de las inestabilidades que aparecen en el modelo de DGP.

En esta tesis se analizó un modelo definido por

$$\mathcal{L} = R - (\nabla \phi)^2 - 2V_0 e^{-\lambda \phi} - \sigma_0 (\square \phi) (\nabla \phi)^2, \quad (6.2)$$

el cual presenta una fenomenología interesante, ya que permite describir la aceleración observada del universo sin asumir la existencia de una componente de energía oscura modelada

por una constante cosmológica, y al mismo tiempo es capaz de recuperar los resultados de relatividad general a escalas del sistema solar gracias al mecanismo de apantallamiento de Vainshtein. En este caso se tiene que el término cúbico activa la interacción gravitacional del galileón con el fondo de materia, así como la autointeracción del galileón consigo mismo. Gracias a la existencia del acoplamiento cúbico $\sigma(\square\phi)(\nu\phi)^2$, el modelo del campo galileón descrito por el sistema de ecuaciones (5.4), se vuelve más complicado. Para llevar a cabo el estudio dinámico se ha tenido que hacer un cambio de coordenadas usando un conjunto de variables acotadas (5.9):

$$x_{\pm} = \frac{1}{x_s \pm 1}, \quad y = \frac{1}{y_s + 1},$$

ya que las variables estándar x_s y y_s pueden tomar valores arbitrariamente grandes. Los puntos críticos $P_*^{\pm} : (x_{\pm}^*, y^*, z^*)$ del sistema autónomo de ecuaciones correspondientes al sistema (5.13), se muestran en la tabla 5.1. De todos ellos, solamente para los casos $P_3^{\pm} : (\pm 1/2, 1, 1)$ la solución de “stiff matter”, y para $P_4^{\pm} : \left(\frac{\sqrt{6}}{\lambda \pm \sqrt{6}}, \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6 - \lambda^2 + \sqrt{6}}}, 1 \right)$, el cual está asociado la solución de dominación de energía oscura, se tiene que la densidad de energía se anula $\Omega_m = 0$. Por lo tanto, si uno se olvida del término de acoplamiento $\sigma(\square\phi)(\nu\phi)^2$, se podría pensar que el vacío es sólo un caso especial del caso con materia $\Omega_m = 0$, y sólo consistiría de estos dos puntos críticos. El punto interesante aquí es que de acuerdo a lo que nos dice la intuición, además de los puntos P_3^{\pm} y P_4^{\pm} (que corresponden a los puntos críticos P_{5v}^{\pm} y P_{6v}^{\pm} de la tabla 5.3, respectivamente) aparece una variedad de nuevos puntos de equilibrio $P_*^{\pm} : (x_{\pm}^*, y^*)$, los cuales no existen cuando hay presencia de materia. Entre los más interesantes son

1. La solución de big bang $P_{2v}^{\pm} : (\pm 1, 1)$, de la cual parten todas las órbitas del lado derecho de la separatriz sep^+ (‘+’ rama positiva) del sistema dinámico (5.26), y del lado izquierdo de la separatriz sep^- (‘-’ rama negativa). Esto se muestra en la figura 4.1.
2. La solución de De Sitter $P_{7v}^{\pm} : (\pm 1, 1/2)$, es un atractor local a tiempos tardíos, ya que puede coexistir con otros atractores.
3. La solución fantasma superacelerada $P_{3v}^{\pm} : \left(\frac{\pm \lambda}{\lambda \mp 2\sqrt{6}}, 0 \right)$, que sólo existe cuando $\lambda < 0$, en la rama ‘+’ (5.26), o para $\lambda > 0$, en la rama ‘-’. Se trata también de un atractor local a futuro (ver las figuras del centro y de la derecha en la parte inferior de la figura 4.1.)

Todos estos puntos no pueden ser hallados en el caso general cuando $\Omega_m \neq 0$, y se trata de atractores a futuro o a pasado que sólo afectan la estructura asintótica del universo. En particular, el punto P_{3v}^{\pm} que corresponde a la solución fantasma es un atractor a tiempos tardíos. Esta solución ha sido estudiada en [90] para la teoría de Brans-Dicke en presencia de un término cúbico de interacción $\propto f(\phi)(\square\phi)(\nu\phi)^2$. Sin embargo, en este caso la solución es acelerante y tal como se mostró en la sección 5.4.2, este punto no existe en nuestro modelo ya que no es compatible con las ecuaciones de movimiento (5.4), (5.5).

La situación a la que nos enfrentamos es la siguiente: existe una menor riqueza de puntos singulares en el caso del modelo (5.2) más un término de materia S_m , que en el caso de vacío aún cuando se trata de un caso especial $\mathcal{L}_m = 0 \Rightarrow S_m = 0$. La explicación para este fenómeno se tiene a partir de las las ecuaciones de Einstein y de la ecuación de conservación del campo

(5.4), (5.5) y (5.6). Como se va a describir a continuación, si se analiza con cuidado se puede ver que la función de acoplamiento cúbica $\sim \sigma_0(\Box\phi)(\partial\phi)^2$ estimula la interacción gravitacional entre la materia y el campo galileón y posteriormente apantalla las autointeracciones gravitacionales. Para dejar más claro esto de las interacciones del galileón con la materia y consigo misma (autointeracciones del campo), escribimos las ecuaciones de campo (5.4):

$$\begin{aligned} 3H^2 &= \rho_m + \rho_\phi, \\ -2\dot{H} &= \rho_m + \rho_\phi + p_\phi, \end{aligned} \tag{6.3}$$

en donde por simplicidad, se he considerado un fondo de materia sin presión. Para la ecuación de Klein-Gordon (5.5):

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - 3\sigma_0 F = -V_{,\phi}, \tag{6.4}$$

con la función F dada por

$$F = F(H, \dot{H}, \dot{\phi}, \ddot{\phi}) = \left(\dot{H} + 3H^2\right) \dot{\phi}^2 + 2H\dot{\phi}\ddot{\phi}. \tag{6.5}$$

El hecho de que en las ecuaciones (6.4) y (6.5) no aparezca dependencia de forma explícita con respecto la densidad de materia ρ_m , pero sí con respecto a cantidades geométricas es un manifestación directa del acoplamiento mínimo que existe entre el galileón y la materia. Debemos notar sin embargo que el campo interactúa con el fluido de materia y con él mismo a través de la gravedad, y esto se obtiene a partir de las ecuaciones de Einstein. Sustituyendo los términos H y $\dot{H} + 3H^2$ en la ecuación (6.5)

$$\begin{aligned} F = F(\rho_m, \phi, \dot{\phi}, \ddot{\phi}) &= \frac{\dot{\phi}^2}{2} (\rho_m + 2V) + \frac{2\dot{\phi}\ddot{\phi}}{\sqrt{3}} \sqrt{\rho_m + \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V} \\ &\quad - \sigma_0 \frac{\dot{\phi}^4}{2} \left(\ddot{\phi} + \sqrt{3} \dot{\phi} \sqrt{\rho_m + \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V} \right), \end{aligned} \tag{6.6}$$

en donde las definiciones de ρ_ϕ y p_ϕ son las presentadas en (5.6). De esta forma, la dependencia con respecto a la densidad de materia es ahora explícita. Finalmente, cuando sustituimos esta función F en la ecuación de movimiento del campo escalar (6.4), la interacción gravitacional del galileón con la materia de fondo y consigo mismo es ahora evidente.

Tomando $\rho_m = 0$ en la ecuación (6.6), tenemos que la ecuación de movimiento resultante (6.4) refleja la existencia de una solución de vacío que corresponde a los puntos críticos de la tabla 5.3. Estos son el resultado de la auto-interacción gravitacional del campo galileón generado por el término cúbico de interacción de la función F descrita en (6.6). De otra forma, si apagamos la interacción tomando $\sigma_0 = 0$ en la ecuación (6.4), se tiene que sólo sobreviven los puntos críticos P_{5v}^\pm y P_{6v}^\pm de la tabla 5.3. En este caso ($\rho_m = 0, \sigma_0 = 0$), así que el vacío del galileón es indistinguible del caso del vacío de quintaesencia. Si consideramos

que la materia de fondo tiene densidad de energía no nula ($\rho_m \neq 0$), la interacción de ésta con el campo galileón es capaz de apantallar la autointeracción del campo que da origen a los puntos P_{1v} , P_{2v} , P_{3v} , P_{4v} , y P_{7v} . Cuando esto no ocurre, entonces estos puntos aparecen junto con P_{5v} y P_{6v} en la tabla 5.3.

Los resultados que aquí se han presentado son de interés suficiente para continuar investigando los posibles efectos de apantallamiento del campo de materia de fondo en la dinámica de teorías de gravedad con función de acoplamiento no trivial. En este sentido será de interés complementar el análisis con un estudio estadístico a fin de buscar un efecto similar en modelos del tipo (5.2), con diferentes funciones de acoplamiento $\sigma = \sigma(\phi)$, y potenciales distintos al exponencial, o bien, de teorías tipo Horndeski con acoplamiento derivativo. Estas ideas serán objeto de trabajo futuro.

Bibliografía

- [1] A. G. Riess et al. (Supernova Search Team Collaboration), *Astron. J.* **116** (1998) 1009-1038; S. Perlmutter et al. (Supernova Cosmology Project), *Astrophys. J.* **517** (1999) 565-586
- [2] M. Betoule et al., (SDSS Collaboration), *Astron. Astrophys.* **568** (2014) A22; A. Rest et al., *Astrophys. J.* **795** (2014) 1, 44; N. Suzuki et al., *Astrophys. J.* **746** (2012) 85
- [3] L. Anderson et al. (BOSS Collaboration), *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **441** (2014) 1, 24-62; L. Anderson et al., *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **427** (2013) 4, 3435-3467; N. Padmanabhan et al., *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **427** (2012) 3, 2132-2145; C. Blake et al., *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **418** (2011) 1707-1724; W. J. Percival et al., *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **381** (2007) 1053-1066; W. J. Percival et al. (SDSS Collaboration), *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **401** (2010) 2148-2168
- [4] Z. Hou et al., *Astrophys. J.* **782** (2014) 74; K. T. Story et al., *Astrophys. J.* **779** (2013) 86; A. Lewis, S. Bridle, *Phys. Rev. D* **66** (2002) 103511; A. Lewis, A. Challinor, A. Lasenby, *Astrophys. J.* **538** (2000) 473-476; G. F. Smoot et al., *Astrophys. J.* **396** (1992) L1-L5
- [5] T. Giannantonio, W. J. Percival, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **441** (2014) L16-L20; R. Fernández-Cobos, P. Vielva, D. Pietrobon, A. Balbi, E. Martínez-González, R. B. Barreiro, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **441** (2014) 3, 2392-2397; F. Bernardeau, S. Colombi, E. Gaztanaga, R. Scoccimarro, *Phys. Rept.* **367** (2002) 1-248; G. R. Blumenthal, S. M. Faber, J. R. Primack, M. J. Rees, *Nature* **311** (1984) 517-525
- [6] A. Lewis, A. Challinor, *Phys. Rept.* **429** (2006) 1-65; M. Bartelmann, P. Schneider, *Phys. Rept.* **340** (2001) 291-472; D. M. Wittman, J. A. Tyson, D. Kirkman, I. Dell'Antonio, G. Bernstein, *Nature* **405** (2000) 143-149; D. J. Bacon, A. R. Refregier, R. S. Ellis, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **318** (2000) 625; N. Kaiser, G. Squires, *Astrophys. J.* **404** (1993) 441-450
- [7] P. A. R. Ade et al. (Planck Collaboration), arXiv:1502.01595; G. Cabass, M. Gerbino, E. Giusarma, A. Melchiorri, L. Pagano, L. Salvati, *Phys. Rev. D* **92** (2015) 6, 063534; S. Nadathur, S. Hotchkiss, S. Sarkar, *JCAP* **1206** (2012) 042; F.-X. Dupe, A. Rassat, J.-L. Starck, M. J. Fadili, *Astron. Astrophys.* **534** (2011) A51; J.-Q. Xia, M. Viel, C. Baccigalupi, S. Matarrese, *JCAP* **0909** (2009) 003; G. Olivares, F. Atrio-Barandela, D. Pavon, *Phys. Rev. D* **77** (2008) 103520; M. J. White, W. Hu, *Astron. Astrophys.* **321** (1997) 8-9

- [8] S. Weinberg, *Rev. Mod. Phys.* **61** (1989) 1-23; T. Pad-manabhan, *Phys. Rept.* **380** (2003) 235-320; Sean M. Carroll, *Living Rev. Relativity* **4** (2001) 1; A. Padilla, arXiv:1502.05296 [hep-th]; R. Bouusso, *Gen Relativ Gravit* **40** (2008) 607;
- [9] P. J. E. Peebles, B. Ratra, *Rev. Mod. Phys.* **75** (2003) 559-606; B. Ratra, P. J. E. Peebles, *Phys. Rev. D* **37** (1998) 3406; P. J. E. Peebles, B. Ratra, *Astrophys. J.* **325** (1988) L17; P. P. Avelino, A. M. M. Trindade, and P. T. P. Viana, *Phys. Rev. D* **80** (2009) 067302; Özgür Akarsu et al, *JCAP* **06** (2015) 049
- [10] S. Tsujikawa *Class. Quantum Grav.* **30** (2013) 214003; E. V. Linder, *Phys. Rev. D* **73** (2006) 063010; C. Armendariz-Picon, V. Mukhanov, and P. J. Steinhardt, *Phys. Rev. D* **63** (2001) 103510; A. Paliathanasis, M. Tsamparlis, S. Basilakos, and J. D. Barrow *Phys. Rev. D* **91** (2015) 123535; N. Dimakis, A. Karagiorgos, A. Zampeli, A. Paliathanasis, T. Christodoulakis, and P. A. Terzis *Phys. Rev. D* **93** (2016) 123518; A. Paliathanasis et al, *Class. Quantum Grav.* **32** (2015) 245006
- [11] T. Clifton, P. Ferreira, A. Padilla and C. Skordis, *Physics Reports*, **513** (2012); A. Joyce, L. Lombriser, F.Schmidt, arXiv:1601.06133 [astro-ph.CO]; E. Bertschinger and P. Zukin, *Phys. Rev. D* **78** (2008) 024015; K. Koyama, *Rep. Prog. Phys.* **79** (2016) 046902; E. Di Valentino, A. Melchiorri, and J. Silk *Phys. Rev. D* **93** (2016) 023513; X. Liu, , T. Harko and S. Liang, *Eur. Phys. J. C* **76** (2016) 420
- [12] C. M. Will., *Living Rev. Relativity* **4** 4 (2001)
- [13] S. Capozziello, *Int. J. Mod. Phys. D*, **11** (2002) 483
- [14] W. Hu, I. Sawiki, *Phys. Rev. D* **76** (2007) 064004
- [15] C. Brans and R. Dicke, *Phys. Rev.* **124** (1961) 925; P. Teyssandier and P. Tournenc, *J. Math. Phys.* **24** 2793 (1983); J. D. Barrow and S. Cotsakis, *Phys. Lett. B* **214** (1998) 515
- [16] A. Naruko et al., *Class. Quantum Grav.* **33** (2016) 09LT01
- [17] Fujii Y and Maeda K., *The scalar-tensor theory of gravitation* (Cambridge University Press, Cambridge) (2003); Marco Crisostomi et al *JCAP* **04**(2016) 044; B. Boisseau et al *JCAP* **07** (2015)002; Emmanuel N. Saridakis and Minas Tsoukalas *Phys. Rev. D* **93** (2016) 124032
- [18] G. Dvali, G. Gabadadze and M. Porrati, *Phys. Lett. B* **485** (2000) 208
- [19] A. Nicolis, R. Rattazzi, E. Trincherini, *Phys. Rev. D* **79** (2009) 064036
- [20] T. Kobayashi, M. Yamaguchi, and J. Yokoyama, *Phys. Rev. Lett.* **105** (2010) 231302; R. Gannouji and M. Sami, *Phys. Rev. D* **82** (2010) 024011; A. De Felice, S. Mukohyama and S. Tsujikawa, *Phys. Rev. D* **82** (2010) 023524; P. Brax, C. Burrage and A.C. Davis, *JCAP*, **1301** (2013) 020
- [21] G. Leon, E. N. Saridakis, *JCAP* **1303** (2013) 025

- [22] D. N. Spergel, *Science*. **347** (2015) 6226-1100-1102
- [23] A. Guth, *Physical Review D* **23** (1981) 347-356
- [24] A. P. Lightman *Ancient Light: Our Changing View of the Universe*. Harvard University Press. ISBN 978-0-674-03363-4
- [25] C. Fedeli, F. Finelli and L. Moscardini, *MNRAS* **407** 3: 1842-1858
- [26] J. Schroeder, A. Mesinger and Z. Haiman, *MNRAS* **428** 4: 3058-3071
- [27] Planck Collaboration: P. A. R. Ade et al. arXiv:1502.01589 [astro-ph.CO]
- [28] D. Alonso et al., *MNRAS* **449** (2015) 670
- [29] J. Martin, *Comptes Rendus Physique* **13** (2012) 566; A. Del Popolo, M. Le Delliou, arXiv:1606.07790 [astro-ph.CO]; M. Raveri arXiv:1510.00688 [astro-ph.CO]; E. Macaulay, I. K. Wehus, and H. K. Eriksen, *Phys. Rev. Lett.* **111** (2013) 161301; R. A. Battye, T. Charnock, and A. Moss, *Phys. Rev. D* **91** (2015) 103508
- [30] Sean Carroll, “*Space and Geometry. An introduction to General Relativity*”, Addison Wesley, 2004, ISBN 0-8053-8732-3.
- [31] E. Aubourg et al., *Phys. Rev. D* **92** (2015) 123516
- [32] C. T. Hill, D. N. Schramm and J. N. Fry, *Comments Nucl. Part. Phys.*, **19** (1989) 25-40
- [33] S. D. Bass, *Mod. Phys. Lett. A*, **30** (2015) 1540033; R. R. Caldwell and M. Kamionkowski, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **59** (2009) 397;
- [34] E. J. Copeland, A. R. Liddle and D. Wands, *Phys. Rev. D* **57** (1998) 4686
- [35] T. Barreiro, E. J. Copeland and N. J. Nunes, *Phys. Rev. D* **61** (2000) 127301
- [36] P. Binetruy, *Phys. Rev. D* **60** (1999) 063502
- [37] C. Wetterich, *Astron. Astrophys.* **301** (1995) 321
- [38] P.J. Steinhardt, I. Zlatev and L-M Wang, *Phys Rev D*. **59**, (1999) 123504; N. Chandrachani et al., *JCAP* **06** (2014) 055; G. Pantazis, S. Nesseris, and L. Perivolaropoulos, *Phys. Rev. D* **93** (2016) 103503; G. Gupta, S. Majumdar and A. A. Sen, *MNRAS* **432** (2013) 1513-1524; Y. Muromachi, A. Okabayashi, D. Okada, T. Hara, and Y. Itoh, *Prog. Theor. Exp. Phys.* **E01** (2015) 093. DOI: 10.1093/ptep/ptv115
- [39] T. Chiba, A. De Felice, S. Tsujikawa, *Phys. Rev. D*, **87** (2013) 083505
- [40] C. Pigozzo, S. Carneiro, J. S. Alcaniz, H. A. Borges and J. C. Fabris, *JCAP* **05** (2016)022
- [41] I. Zlatev, L.-M. Wang, P. J. Steinhardt, *Phys. Rev. Lett.* **82** (1999) 896-899
- [42] G. Caldera-Cabral, R. Maartens, and L. Arturo Ureña López, *Phys. Rev. D* **79** (2009) 063518; L. P. Chimento, A. S. Jakubi, D. Pavón, and W. Zimdahl, *Phys. Rev. D* **67** (2003) 083513; Sergio del Campo *et al*, *JCAP*, (2009) 020

- [43] S. B. Chen, B. Wang, J. L. Jing, Phys.Rev.D **78** (2008) 123503; L. Amendola and C. Quercellini, Phys. Rev. D **68** (2003) 023514; D. Pavon, W. Zimdahl, Phys. Lett. B **628** (2005) 206; V. Salvatelli, N. Said, M. Bruni, A. Melchiorri, and D. Wands, Phys. Rev. Lett. **113** (2014) 181301; E. Abdalla, E. G. M. Ferreira, J. Quintin, and B. Wang, (2014), arXiv:1412.2777 [astro-ph.CO]
- [44] E. Abdalla, L. Graef, B. Wang, Phys.Lett. B **726** (2012) 786; S. Micheletti, E. Abdalla, B Wang, Phys.Rev. D **79** (2009) 123506; S. Micheletti, JCAP. **1005** (2010) 009; O. Bertolami, P. Carrilho, J. Paramos, Phys.Rev. D **86** (2012) 103522
- [45] R. Nunes, S. Pan, E. Saridakis, Phys. Rev. D **94** (2016) 023508
- [46] B. Bertotti, L. Iess and P. Tortora, Nature **425** (2003) 374
- [47] A. De Felice and S. Tsujikawa, Living Rev. Relativity, **13** (2010) 3
- [48] S. M. Carroll, V. Duvvuri, M. Trodden and M. S. Turner, Phys. Rev. D **70** (2004) 043528
- [49] S. Capozziello, V. F. Cardone, S. Carloni and A. Troisi, Int. J. Mod. Phys. D **12** (2003); S. Capozziello, F. Occhionero and L. Amendola, Int. J. Mod. Phys. D **1** (1993) 615
- [50] T. Chiba, Phys. Lett. B **575** (2003) 1; A. D. Dolgov and M. Kawasaki, Phys. Lett. B **573** (2003) 1
- [51] V. Faraoni, Phys. Rev. D, **74** (2006) 104017
- [52] G.J. Olmo, Phys. Rev. Lett. **95** (2005) 261102
- [53] L. Amendola, R. Gannouji, D. Polarski, and S. Tsujikawa, Phys. Rev. D, **75** (2007) 083504
- [54] B. Li, and J. D. Barrow, Phys. Rev. D, **75** (2007) 084010
- [55] E. Linder, Phys. Rev. D, **80** (2009) 123528
- [56] S. Carroll, I. Sawicki, A. Silvestri, and M. Trodden, New J. Phys., **8** (2006) 323
- [57] P. Zhang, Phys. Rev. D, **73** (2006) 123504
- [58] S. Tsujikawa, T. Tamaki, and R. Tavakol, J. Cosmol. Astropart. Phys. **05** (2009) 020
- [59] N. H. Barth, and S. M. Christensen, Phys. Rev. D, **28** (1983), 1876?1893
- [60] K. S. Stelle, Gen. Relativ. Gravit., **9** (1978) 353-371
- [61] S. Nojiri and S. D. Odintsov, Phys. Rev. D **68** (2003) 123512; S. Nojiri, S. Odintsov, and M. Sasaki, Phys. Rev. D, **71** (2005) 123509; B. Li, and J. D. Barrow, Phys. Rev. D, **75** (2007) 084010
- [62] S. Tsujikawa and M. Sami, J. Cosmol. Astropart. Phys., **01** (2007) 006
- [63] A. De Felice, and S. Tsujikawa, Phys. Rev. D, **80** (2009) 063516

- [64] H. Davoudiasl, R. Kitano, G. Kribs, H. Murayama, and P. Steinhardt, Phys. Rev. Lett., **93** (2004) 201301
- [65] R. Maartens, K. Koyama, Living Rev. Rel. **13** (2010) 5
- [66] C. Deffayet, Phys. Lett. B **502** (2001) 199; C. Deffayet, G. R. Dvali and G. Gabadadze, Phys. Rev. D **65** (2002) 044023
- [67] C. Charmousis, R. Gregory, N. Kaloper and A. Padilla, J. High Energy Phys **10** (2006) 066; D. Gorbunov, K. Koyama and S. Sibiryakov, Phys. Rev. D **73** (2006) 044016; R. Gregory, N. Kaloper, R. C. Mayers and A Padilla, J. High Energy Phys. **10** (2007) 069.0707.2666; A. Padilla, J Phys A: Math. Theor. **40** (2007) 6827-6834
- [68] C. Deffayet, G. R. Dvali and G. Gabadadze, Phys. Rev. D **65** (2002) 044023; C. Deffayet and J. W. Rombouts, Phys. Rev. D **72** (2005) 044003
- [69] M. Ostrogradski, Mem. Ac. St. Petersbourg VI **4** (1850) 385; C. Deffayet, D. A. Steer, Class. Quant. Grav. **30** (2013) 214006
- [70] J. Gleyzes, D. Langlois, F. Piazza, and F. Vernizzi, Phys. Rev. Lett. **114** (2015) 211101; M. Crisostomi et al JCAP **03** (2016) 038; A. De Felice et al JCAP **05** (2015) 058; E Babichev et al., Class. Quantum Grav. **32** (2015) 242001
- [71] G. Dvali and G. Gabadadze, Phys. Rev. D **63** (2001) 065007; N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, N. Kaloper, and R. Sundrum, Phys.Lett. B **480** (2000) 193-199
- [72] K. Koyama, Phys.Rev. D **72** (2005) 123511;
- [73] A. De Felice and S. Tsujikawa, JCAP **02** (2012) 007
- [74] A. De Felice and S. Tsujikawa, Phys. Rev. Lett. **105** (2010) 111301
- [75] F. P. Silva and K. Koyama, Phys.Rev. D **80** (2009) 121301
- [76] A. Barreira, b. Li, W. A. Hellwing, C. M. Baugh and S. Pascoli, JCAP **10** (2013) 027
- [77] T. Kobayashi, Phys. Rev. D **81** (2010) 103533; A. De Felice and S. Tsujikawa, JCAP **1104** (2011) 029
- [78] V. A. Rubakov, Phys. Usp. **57** 128?142 (2014)
- [79] T. Kobayashi, M. Yamaguchi, J. Yokoyama, Prog. Theor. Phys. **126** (2011) 511-529
- [80] Dynamical Systems and Differential Equations, Lawrence Perko. Texts in applied mathematics
- [81] www.cds.caltech.edu; www.staff.science.uu.nl/kounz101/
- [82] C. Böhmer, N. Chan and R. Lazkoz, Physics Letters B **714** (2012) 11-17

- [83] E. J. Copeland, M. Sami and S. Tsujikawa, *Int J Mod Phys D* **15** (2006) 1753-936; A. A. Coley, arXiv:grqc/9910074; L. Amendola, *Phys Rev D* **62** (2000) 043511; T. Matos, J. R. Luevano, I. Quiros, L. A. Urena-Lopez and J. A. Vazquez, *Phys Rev D* **80** (2009) 123521; R. Garcia Salcedo, T. Gonzales, F. A. Horta-Rangel, I. Quiros and D. Sanchez-Guzman, *Eur J Phys* **36** (2015) 025008
- [84] R. Yang and X. T. Gao, *Class Quantum Grav* **28** (2011) 065012; Y. Gong, *Physics Letters B* **731** (2014) 342-249
- [85] A. Alho and C. Uggla, *J. Math. Phys.* **56** (2015) 012502; J. Miritzis, *J. Math. Phys.* **46** (2005) 082502; I. Quiros, T. Gonzalez, D. Gonzalez, Y. Napoles, R. Garcia-Salcedo and C. Moreno, *Class. Quant. Grav.* **27** (2010) 215021; Y. Leyva, D. Gonzalez, T. Gonzalez, T. Matos and I. Quiros, *Phys. Rev. D* **80** (2009) 044026; D. Escobar, C. R. Fadrugas, G. Leon and Y. Leyva, *Class. Quantum Grav.* **29** (2012) 175006; G. Otalora, *Phys. Rev. D* **88** (2013) 063505
- [86] C. Deffayet, S. Deser, G. Esposito-Farese, *Phys. Rev. D* **80** (2009) 064015; C. Deffayet, G. Esposito-Farese, A. Vikman, *Phys. Rev. D* **79** (2009) 084003;
- [87] S. Bhattachayra, K. F. Dialektopoulos and T. N. Tomaras, arXiv:1512.0886v2 [gr-qc]
- [88] K. Yee, H. W. Lee and Y. S. Myung, *Phys. Rev. D* **88** (2013) 123001
- [89] E. Babichev, C. Charmousis, A. Lehébel and T. Moskalaets, arXiv:1605.07438v1 [gr-qc]
- [90] F. P. Silva and K. Koyama, *Phys. Rev. D* **80** (2009) 121301
- [91] N. Chow and J. Khoury, *Phys. Rev. D* **80** (2009) 024037
- [92] L. P. Chimento and R. Lazkoz, *Mod. Phys. Lett. A* **19** (2004) 2479-2484
- [93] C. G. Tsagas and M. I. Kadiltzoglou, *Phys. Rev. D* **92** (2015) 043515