



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN  
NICOLÁS DE HIDALGO

---

INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

QUARKONIA EN UNA INTERACCIÓN DE  
CONTACTO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:  
DOCTOR EN CIENCIAS EN EL ÁREA DE FÍSICA

PRESENTA:

MARCO ANTONIO BEDOLLA HERNÁNDEZ



DIRECTOR DE TESIS:

DR. ADNAN BASHIR

MORELIA MICH.

FEBRERO DE 2017



# Quarkonia en una Interacción de Contacto

Marco Antonio Bedolla Hernández  
del Instituto de Física y Matemáticas

Una disertación enviada a la Universidad Michoacana de San Nicolás de  
Hidalgo  
para obtener el grado de Doctor en Ciencias en el Área de Física.



## Resumen

Para el singlete de sabor de sistemas de quarkonia se calculan las masas de mesones en el estado base en cuatro canales diferentes: pseudoescalar ( $\eta_c(1S), \eta_b(1S)$ ), vector ( $J/\psi(1S), Y(1S)$ ), escalar ( $\chi_{c_0}(1P), \chi_{b_0}(1P)$ ) y vector axial ( $\chi_{c_1}(1P), \chi_{b_1}(1P)$ ), así como las constantes de decaimiento débil de  $\eta_c(1S)$  y  $J/\psi(1S)$  y el radio de carga de  $\eta_c(1S)$ .

Además, para los singletes de sabor de sistemas quarkonia en el canal pseudoescalar ( $\eta_c(1S), \eta_b(1S)$ ), se calculan los factores de forma elástico y de transición ( $\eta_{c,b}(1S) \rightarrow \gamma\gamma^*$ ) para un rango amplio del momento al cuadrado del fotón de transferencia ( $Q^2$ ).

El marco teórico para realizar este análisis está dado por las ecuaciones de Schwinger-Dyson (ESD), en el cual, mediante un tratamiento que preserva las simetrías mediante una interacción vector  $\times$  vector de contacto.

Los resultados coinciden con los datos de lattice para  $Q^2$  pequeños. Para  $Q^2 \geq Q_0^2$ , los resultados comienzan a desviarse de los resultados de lattice más del 20%.  $Q_0^2 \approx 2,5\text{GeV}^2$  para el factor de forma elástico y  $\approx 25\text{GeV}^2$  para el factor de forma de transición. Donde haya comparación posible, los resultados están en buena concordancia con lattice, QCD perturbativo, resultados de estudios de ESD-EBS con truncaciones refinadas, así como datos experimentales de los experimentos de BABAR<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Palabras clave: Interacción de Contacto, Ecuaciones de Schwinger Dyson, Quarkonia, Factores de Forma, Cromodinámica Cuántica.



# Abstract

For the flavor-singlet heavy quark system of charmonia, we compute the masses of the ground state mesons in four different channels: pseudoscalar ( $\eta_c(1S), \eta_b(1S)$ ), vector ( $J/\psi(1S), Y(1s)$ ), scalar ( $\chi_{c_0}(1P), \chi_{b_0}(1P)$ ) and axial vector ( $\chi_{c_1}(1P), \chi_{b_1}(1P)$ ), as well as the weak decay constants of the  $\eta_c(1S)$  and  $J/\psi(1S)$  and the charge radius of  $\eta_c(1S)$ .

Moreover, for the flavor singlet of quarkonia in pseudoscalar channel ( $\eta_c(1S), \eta_b(1S)$ ), we calculate the elastic and the transition ( $\eta_{c,b}(1S) \rightarrow \gamma\gamma^*$ ) form factors for a wide range of photon transfer ( $Q^2$ ).

The framework for this analysis is provided by a symmetry-preserving Schwinger-Dyson equation (SDE) treatment of a vector  $\times$  vector contact interaction.

The results found are in fairly good agreement with experimental data and earlier model calculations based upon Schwinger-Dyson and Bethe-Salpeter equations involving sophisticated interaction kernels. The charge radius of  $\eta_c(1S)$  is consistent with the results from refined SDE studies and lattice quantum chromodynamics.



# Declaración

Declaro que esta tesis no ha sido previamente enviada para la obtención de un grado en esta o cualquier otra universidad.

El trabajo de investigación descrito en esta tesis ha sido dirigido por el Dr. Adnan Bashir, en colaboración con el Dr. Jesús Javier Cobos Martínez.

El contenido de los Capítulos 1-4 se deriva de la bibliografía correspondiente en cada capítulo.

El contenido del Capítulo 5 se deriva de: L.X. Gutiérrez-Guerrero: *Mesones Pion, Rho y los Diquarks: Factores de Forma*, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Tesis Doctoral (2012). Trabajo de tesis dirigido previamente por el Dr. Adnan Bashir.

El capítulo 6 se deriva de:

- M. A. Bedolla, J.J. Cobos-Martinez and Adnan Bashir, *Charmonia in a Contact Interaction*. Phys. Rev. D**92**, 054031.
- M. A. Bedolla, Khépani Raya, J.J. Cobos-Martinez and Adnan Bashir,  $\eta_c$  *elastic and transition form factors: Contact interaction and algebraic model*. Phys. Rev. D**93**, 094025.
- M. A. Bedolla, J.J. Cobos-Martinez and Adnan Bashir, *Quarkonia in a Contact Interaction*. Work in Progress.

Marco A. Bedolla



# Agradecimientos

Antes que nada, quiero expresar mi más profundo agradecimiento a mi asesor Dr. Adnan Bashir por su apoyo continuo para realizar este trabajo de investigación, así como por su tiempo, paciencia, dedicación y el compartir su inmenso conocimiento. Él ha sido la piedra angular para que este trabajo sea posible. Muchas gracias.

Gracias también a los miembros del mi comité de seguimiento: Dr. Christian Schubert y Dr. Ulises Nucamendi, por sus comentarios acertados, su apoyo y los consejos para que este trabajo de investigación adquiriera la forma hoy presente.

Agradezco también al comité de sinodales: Dr. Alfredo Raya, Dr. Francisco Astorga, Dra. Laura Xiomara Gutiérrez y Dr. Pablo Roig, por tomarse el tiempo necesario para leer la tesis y por sugerencias convenientes y oportunas. Todo ello en un lapso de tiempo muy breve.

A nuestro grupo de trabajo: Cobos, Khépani, Luis, Xiomara, ya que gracias a su apoyo, discusiones y amistad las horas de trabajo eran más llevaderas. Mención especial a Cobos dado que se involucró profundamente en el proyecto, y me ayudó a darle forma y sentido físico.

También quisiera agradecer a mi familia, en especial a mis padres que no solo me han apoyado estos cuatro años, y cuyos consejos me han fortalecido en los momentos más difíciles.

A todas aquellas personas que me han ofrecido su amistad durante todo este tiempo: Abraham, Mauricio, Pancho, Alan, Gustavo, Maricela, Avril, Nancy, Peña, Ada, Adilene, Carlos, Víctor, Paco, Memo, Rafael, Oscar, Jesús, Saúl, Beto, Miguel, Manuel, Daniela, Arturo, Mauritania, Valeria, a todos los jugadores de los equipos de La Compañía, los Chilaquiles y Los Buchones. Todos ustedes de un modo han hecho todo este tiempo más interesante. Su apoyo el tiempo que he convivido con ustedes es y será irremplazable.

A la Universidad Michoacana y al Instituto de Física por proveer las herramientas y espacio necesario para poder hacer este proyecto. Y a CONACYT ya que sin la beca este trabajo habría sido imposible.



# Índice general

<b>Índice de figuras</b>	<b>XV</b>
<b>Índice de tablas</b>	<b>XIX</b>
<b>1. Modelo de Quarks</b>	<b>1</b>
1.1. Historia de los Hadrones . . . . .	2
1.2. Simetrías . . . . .	10
1.2.1. Grupos . . . . .	11
1.2.2. Grupos de Lie . . . . .	11
1.2.3. Transformaciones Unitarias . . . . .	12
1.3. Grupo Unitario Especial $SU(n)$ . . . . .	13
1.3.1. $SU(2)$ . . . . .	13
1.3.2. Transformaciones en $SU(2)$ . . . . .	15
1.3.3. Simetría de Isospín . . . . .	16
1.3.4. Estados conjugados en $SU(2)$ . . . . .	18
1.3.5. Combinación de Estados en $SU(2)$ de Isospín . . . . .	21
1.3.6. Pesos en $SU(2)$ . . . . .	23
1.4. Grupo Unitario Especial $SU(3)$ . . . . .	25
1.4.1. Quarks y $SU(3)$ . . . . .	27
1.4.2. Mesones . . . . .	32
1.4.3. Bariones . . . . .	34
1.4.4. Masas y Rompimiento de Simetría . . . . .	39
<b>2. Charmonia y Bottomonia</b>	<b>47</b>
2.1. Multiplicación de Estados mediante Diagramas de Young y Multiplicidad de $SU(n)$ . . . . .	48
2.2. Extensión del Modelo de Quarks . . . . .	56
2.2.1. El Encanto de $SU(4)$ . . . . .	56
2.2.2. La Belleza de $SU(5)$ . . . . .	66
2.3. Quarkonia en la actualidad . . . . .	67
2.4. Hadrones Exóticos . . . . .	72

<b>3. Elementos de QCD</b>	<b>75</b>
3.1. Quarks	76
3.2. Gluones	80
3.3. Fuerza entre quarks y libertad asintótica	83
3.3.1. Factores de Color	85
3.3.2. Libertad Asintótica	87
3.3.3. Escala de Interacción Fuerte $\Lambda_{\text{QCD}}$	91
3.4. Simetría Quiral	92
3.4.1. Simetría Quiral	92
3.5. Confinamiento de Color	93
3.6. Interacciones Débiles	96
<b>4. Ecuaciones de Schwinger-Dyson</b>	<b>101</b>
4.1. Integrales Funcionales	102
4.2. Cuantizando Teorías de Norma	104
4.2.1. Fantasmas de Faddeev-Popov	106
4.3. Identidades de Ward-Takahashi	108
4.4. Ecuaciones de Schwinger-Dyson	110
4.4.1. Ecuación de Schwinger-Dyson del Quark	111
4.5. Resolviendo las Ecuaciones de Schwinger-Dyson.	115
4.5.1. Modelo de Maris-Tandy para QCD	118
<b>5. Interacción de Contacto</b>	<b>121</b>
5.1. Ecuaciones de Schwinger-Dyson y de Bethe-Salpeter en una Interacción de Contacto	122
5.2. Aproximación arcoiris en la interacción de contacto	123
5.3. Identidad Axial-Vectorial de Ward-Takahashi	127
5.3.1. Un corolario de la identidad axial de Ward-Takahashi	129
5.4. Clasificación de las amplitudes de Bethe-Salpeter en una interacción de contacto.	135
5.5. Ecuación de Bethe-Salpeter para la masa del mesón	137
5.5.1. Kernel pseudoescalar	138
5.6. Normalización de las amplitudes de Bethe-Salpeter	142
5.6.1. Normalización de la amplitud pseudoescalar	144
5.7. Constantes de decaimiento	147
5.7.1. Constante de decaimiento pseudoescalar	148
5.7.2. Constante de decaimiento vectorial	149
5.8. Factores de Forma	150
5.8.1. Factor de Forma Elástico	153
5.8.2. Vistiendo al vértice quark-fotón	157

---

<b>6. Modelo de Interacción de Contacto para Quarkonia</b>	<b>159</b>
6.1. Sector Ligero en la interacción de Contacto . . . . .	160
6.2. Conjunto de Parámetros Óptimos en la Interacción de Contacto para Charmonia . . . . .	164
6.2.1. Bottomonia en la Interacción de Contacto . . . . .	171
6.2.2. Conjunto de Parámetros Óptimos en la Interacción de Contacto para Bottomonia . . . . .	172
6.3. Unificando al Modelo de Interacción de Contacto . . . . .	178
6.3.1. Conclusiones . . . . .	180
<b>A. Ecuación de Schwinger-Dyson del Quark</b>	<b>183</b>
<b>B. Ecuación de Bethe-Salpeter para la masa del mesón</b>	<b>193</b>
B.0.1. Kernel Vectorial . . . . .	193
B.0.2. Kernel Escalar . . . . .	195
B.0.3. Kernel Axial-Vector . . . . .	197
<b>C. Normalización de las amplitudes de Bethe-Salpeter</b>	<b>199</b>
C.1. Normalización de la amplitud vectorial . . . . .	199
C.2. Normalización de la amplitud escalar . . . . .	201
C.3. Normalización de la amplitud axial-vector . . . . .	202
<b>D. Cálculo de los Factores de Forma en la interacción de contacto</b>	<b>205</b>
D.1. Factor de Forma Elástico . . . . .	206
D.2. Factor de Forma de Transición . . . . .	215
<b>Bibliografía</b>	<b>221</b>



# Índice de figuras

1.1. Intercambio de piones . . . . .	18
1.2. Plano de isospín en $SU(2)$ . . . . .	23
1.3. Combinación de estados en $SU(2)$ . . . . .	23
1.4. Combinación de estados en $SU(2)$ . . . . .	24
1.5. Plano de hipercarga. . . . .	29
1.6. Plano de antihipercarga. . . . .	31
1.7. Producto del triplete de dos quarks. . . . .	31
1.8. Producto de tripletes quark-antiquark. . . . .	32
1.9. Tripletes de quarks y antiquarks. . . . .	33
1.10. Octete de mesones pseudoescalares. . . . .	33
1.11. Octete de mesones vectoriales. . . . .	34
1.12. Combinación de tres quarks 1. . . . .	35
1.13. Combinación de tres quarks 2. . . . .	35
1.14. Combinación de tres quarks 3. . . . .	36
1.15. Combinación de tres quarks final. . . . .	36
1.16. Octete de bariones. . . . .	36
1.17. Decuplete de bariones de Gell-Mann. . . . .	37
2.1. 16te de mesones. . . . .	60
2.2. 20te de bariones con espín $\frac{3}{2}$ . . . . .	61
2.3. 20te de bariones con espín $\frac{1}{2}$ . . . . .	62

2.4. Cuartete de mesones completamente antisimétricos. . . . .	62
2.5. Espectro de charmonia. . . . .	71
2.6. Espectro de bottomonia. . . . .	73
3.1. Colores de los quarks. . . . .	79
3.2. Cambio de color mediante la emisión de un gluón. . . . .	82
3.3. Autointeracciones de gluones. . . . .	83
3.4. Interacción entre dos quarks. . . . .	84
3.5. Factor de color $b - b$ . . . . .	86
3.6. Factor de color $r - r$ . . . . .	86
3.7. Factor de color $r - b$ . . . . .	86
3.8. Diagramas de interacción $b\bar{b}$ . . . . .	88
3.9. Polarización del vacío. . . . .	90
3.10. Libertad asintótica. . . . .	91
3.11. Confinamiento de color. . . . .	94
3.12. Dibujo de un protón. . . . .	96
4.1. Ecuación de Schwinger-Dyson del propagador del quark. . . . .	113
4.2. Función de masa del modelo MT para diferentes valores de la masa desnuda del quark. . . . .	119
5.1. Esquema de la ecuación de Bethe-Salpeter. . . . .	122
5.2. Constante de decaimiento pseudoescalar. . . . .	147
5.3. Diagrama de Feynman de una dispersión de un fotón con $\eta_c$ . . . . .	151
5.4. Factor de forma de $\eta_c$ . . . . .	154
5.5. Factor de forma elástico en la aproximación de impulso. . . . .	155

6.1. Resultados en la interacción de contacto para el espectro de masa $\bar{c}c$ usando los parámetros ajustados en el sector ligero, ver tabla 6.2. Los datos de PDG fueron extraídos de [46]. . . . .	162
6.2. Resultados en la interacción de contacto para el espectro de masa $\bar{c}c$ , ver tabla 6.4. Los datos de PDG fueron extraídos [46]. . . . .	165
6.3. Resultados del factor de forma elástico de $\eta_c$ en la interacción de contacto con y sin el revestimiento del vértice quark-fotón. La curva de <i>lattice</i> viene de [125] y el monopolo VDM se define con la escala de masa $m_V = 3.096$ GeV. Se incluyen también los resultados del modelo algebraico MA. . . . .	168
6.4. Resultados para los factores de forma elásticos de $\eta_c$ y $\pi$ en la interacción de contacto. El conjunto de parámetros usado para el factor de forma de $\eta_c$ son los mismos para encontrar tablas (6.4,6.5) y figura 6.3, mientras que los usados para calcular el factor de forma de $\pi$ viene en [96]. . . . .	169
6.5. Factor de forma de la transición $\gamma^* \gamma \rightarrow \eta_c$ en la interacción de contacto. La curva de <i>lattice</i> QCD es un ajuste a la curva [125] de la forma $G_{\gamma^* \gamma \eta_c}^{\text{Lattice}}(Q^2) = \frac{\mu^2}{\mu^2 + Q^2}$ con $\mu = 3.43$ GeV, mientras que los datos de BABAR son un ajuste [126] de la forma $G_{\gamma^* \gamma \eta_c}^{\text{BABAR}}(Q^2) = \frac{1}{1 + Q^2/\Lambda}$ con $\Lambda = 8.5$ GeV <sup>2</sup> . El límite de QCD perturbativo (pQCD) se debe a Feldmann y Kroll [127]. Se incluyen también los resultados con el modelo algebraico. . . . .	171
6.6. Resultados numéricos para $Q^2 G_{\gamma^* \gamma \eta_c}$ . Ver descripción de la figura 6.5. . . . .	172
6.7. Resultados del factor de forma elástico en la interacción de contacto para $\eta_c$ y $\eta_b$ . . . . .	176
6.8. Resultados del factor de forma de transición $\gamma \gamma^* \rightarrow \eta_{c,b}$ en la interacción de contacto. . . . .	178
6.9. Constante de acoplamiento adimensional $\alpha$ para la interacción de contacto. Se puede ver como un recordatorio de la constante de acoplamiento fuerte $\alpha_s$ de QCD, la cual tiene un comportamiento logarítmico (figura 3.10). . . . .	179
D.1. Factor de forma de transición en la aproximación de impulso. . . . .	216



# Índice de tablas

1.1. Números cuánticos de los quarks y antiquarks en $SU(2)$ . $B$ es número bariónico, $Q$ la carga total. . . . .	19
1.2. Bariones de $SU(2)$ . Se muestran los estados completamente simétricos y los estados con simetría mixta. Se indica mediante números bajo el intercambio de qué partículas hay simetría (o antisimetría). . . . .	24
1.3. Isospín e hipercarga de los quarks de $SU(3)$ . . . . .	28
1.4. Números cuánticos de los quarks. $B$ es número bariónico, $Q$ la carga total, $S$ la extrañeza y $Y = B + S$ , $Q = I_3 + Y/2$ . Los antiquarks poseen número cuántico opuesto. . . . .	32
1.5. Partículas del nonete de mesones en términos de su extrañeza. Se separan las partículas del octete de mesones de la figura 1.10 y el singlete formado por $\eta'$ . . . . .	34
1.6. Bariones del modelo de quarks. Se muestran los estados completamente simétricos y el estado completamente antisimétrico, aunque este último no puede formar un hadrón debido a la simetría de la función de onda que se verá más adelante. . . . .	38
1.7. Estados con simetría mixta del octete de bariones. Se indican las antisimetrías bajo los intercambios $1 \leftrightarrow 2$ y $1 \leftrightarrow 3$ . Es importante mencionar que el estado antisimétrico $2 \leftrightarrow 3$ no es independiente y se forma con la suma de los otros dos ( $\psi_{23} = \psi_{12} + \psi_{13}$ ). . . . .	43
1.8. Estados de espín de tres partículas. Al ser una simetría de $SU(2)$ los estados son los mismos que los de la simetría de isospín haciendo el cambio $u \rightarrow \uparrow, d \rightarrow \downarrow$ . . . . .	44
1.9. Masas del octete y decuplete de bariones. Nótese la similitud de las masas entre las partículas sobre el mismo eje horizontal en las figuras 1.16 y 1.17. Las masas están en $MeV$ . . . . .	45

1.10. Masas de los nonetes de mesones pseudoescalar y vectorial. Nótese la similitud de las masas entre las partículas con la misma extrañeza. Las masas están en $MeV$ . . . . .	46
2.1. Números cuánticos de los quarks de $SU(4)$ . $B$ es número bariónico, $Q$ la carga total, $S$ la extrañeza y $C$ , el encanto. La hipercarga y la carga vienen dadas por las ecuaciones 2.16 y 2.17 respectivamente. Los antiquarks poseen los números cuánticos opuestos. . . . .	59
2.2. Masa y espín de los mesones con encanto. Se muestran las partículas que contienen solamente quarks $c$ en la figura 2.1 con sus respectivas combinaciones de espín. Nótese que las partículas vectoriales ( $J = 1$ ) tienen una masa ligeramente mayor, la cual se atribuye al espín. Las masas están dadas en $GeV$ . Los estados marcados con – no han sido aún descubiertos. . . . .	63
2.3. Masa y espín de los bariones con encanto de espín $J = \frac{1}{2}$ . Se muestran las partículas que contienen solamente quarks $c$ en la figuras 2.3 y 2.4. Las masas están dadas en $GeV$ . Los estados marcados con – no han sido aún descubiertos. . . . .	64
2.4. Masa y espín de los bariones con encanto de espín $J = \frac{3}{2}$ . Se muestran las partículas que contienen solamente quarks $c$ en la figura 2.2. Las masas están dadas en $GeV$ . Los estados marcados con – no han sido aún descubiertos. . . . .	65
2.5. Masa y espín de los mesones con belleza. Se muestran las partículas que contienen solamente quarks $b$ con sus respectivas combinaciones de espín. Nótese que las partículas vectoriales ( $J = 1$ ) tienen una masa ligeramente mayor que se atribuye al espín. Las masas están dadas en $GeV$ . Los estados marcados con – no han sido aún descubiertos. . . . .	68
2.6. Masa y espín de los bariones con belleza de espín $J = \frac{1}{2}$ . Se muestran las partículas que contienen solamente quarks $b$ . Las masas están dadas en $GeV$ . Los estados marcados con – no han sido aún descubiertos. . . . .	69
2.7. Masa y espín de los bariones con encanto de espín $J = \frac{3}{2}$ . Se muestran las partículas que contienen solamente quarks $b$ . Las masas están dadas en $GeV$ . Los estados marcados con – no han sido aún descubiertos. . . . .	70

2.8. Estados de charmonium observados. Los números se obtienen de [46]. Los estados estudiados en este trabajo vienen de color azul. 71

2.9. Estados de botomonium observados. Los números se obtienen de [46]. Los estados estudiados en este trabajo vienen de color azul. 73

3.1. Masas y carga de los quarks . . . . . 78

5.1. Resultados para mesones pseudoscalar y vectoriales ligeros  $m_g = 0.8 \text{ GeV}$ ,  $\alpha_{IR} = 0.93\pi$ ,  $\Lambda_{IR} = 0.24 \text{ GeV}$ ,  $\Lambda_{UV} = 0.905 \text{ GeV}$ . Los parámetros de esos modelos fueron determinados en [76,77]. Estos se ajustaron para obtener en el límite quiral  $M^0 = 0.40 \text{ GeV}$ ,  $m_\rho^0 = 0.78 \text{ GeV}$ ,  $f_\pi^0 = 0.088 \text{ GeV}$ ,  $f_\rho^0 = 0.15 \text{ GeV}$  y el condensado quiral  $\kappa^0 = (0.22 \text{ GeV})^3$ . . . . . 123

5.2. Mesones del modelo de quarks . . . . . 136

6.1. Masas del estado base de mesones ligeros obtenidas con el conjunto de parámetros del sector ligero:  $m_g = 0.8 \text{ GeV}$ ,  $\alpha_{IR} = 0.93\pi$ ,  $\Lambda_{IR} = 0.24 \text{ GeV}$ ,  $\Lambda_{UV} = 0.905 \text{ GeV}$ . La masa corriente de los quarks es  $m_{u,d} = 0.007^* \text{ GeV}$ ,  $m_s = 0.17 \text{ GeV}$ ; la masa generada dinámicamente es  $M_{u,d} = 0.37 \text{ GeV}$ ,  $M_s = 0.53 \text{ GeV}$ . El valor que se muestra para los mesones  $\sigma$  y  $a_1$  IC son aquellos que se obtienen con el acoplamiento espín órbita  $g_{s0} = 0.24$ . Los resultados se comparan directamente con los datos experimentales. Las cantidades dimensionadas están en GeV. (\* = La masa corriente del quark se ajustó para obtener la masa del mesón pseudoescalar). . 160

6.2. Masas del estado base de charmonia obtenidas con el conjunto de parámetros del sector ligero:  $m_g = 0.8 \text{ GeV}$ ,  $\alpha_{IR} = 0.93\pi$ ,  $\Lambda_{IR} = 0.24 \text{ GeV}$ ,  $\Lambda_{UV} = 0.905 \text{ GeV}$ . La masa corriente del quark es  $m_c = 1.578^* \text{ GeV}$ , y la masa generada dinámicamente es  $M_c = 1.601 \text{ GeV}$ . El valor que se muestra debajo de los resultados de la IC son aquellos que se obtienen sin el acoplamiento espín órbita  $g_{s0} = 0.08$ . Para una comparación directa, citamos los valores de otros estudios de las ESD para calcular las masas a bajo orden de charmonia. Las cantidades dimensionadas están en GeV. (\* = La masa corriente del quark se ajustó para obtener la masa del mesón pseudoescalar). . . . . 161

- 6.3. Estados base de las amplitudes y constantes de decaimiento de charmonia obtenidas con el conjunto de parámetros del sector ligero en la tabla 6.2: . . . . . 163
- 6.4. Masas del estado base de charmonia obtenidas con el mejor ajuste al conjunto de parámetros:  $m_g = 0.8 \text{ GeV}$ ,  $\alpha_{IR} = 0.93\pi/20$ ,  $\Lambda_{IR} = 0.24 \text{ GeV}$ ,  $\Lambda_{UV} = 2.788 \text{ GeV}$ . La masa corriente del quark es  $m_c = 0.956^* \text{ GeV}$ , y la masa generada dinámicamente es  $M_c = 1.497 \text{ GeV}$ . El valor que se muestra debajo de los resultados de la IC son aquellos que se obtienen sin el acoplamiento espín orbital  $g_{so} = 0.24/3$ . Las cantidades dimensionadas están en GeV. (\* = Este conjunto de parámetros se obtuvo a partir del mejor ajuste a las masas, constantes de decaimiento y radio de carga del canal pseudoescalar. . . . . 165
- 6.5. Las constantes de decaimiento de  $\eta_c(1S)$  y  $J/\Psi(1S)$  obtenidas  $m_g = 0.8 \text{ GeV}$ ,  $\alpha_{IR} = 0.93\pi/20$ ,  $\Lambda_{IR} = 0.24 \text{ GeV}$ ,  $\Lambda_{UV} = 2.788 \text{ GeV}$ . La masa corriente del quark es  $m_c = 0.956 \text{ GeV}$ . Las cantidades dimensionadas están en GeV. . . . . 167
- 6.6. Radio de carga de  $\eta_c(1S)$  obtenido con el nuevo conjunto de parámetros discutido en el texto. . . . . 167
- 6.7. Radio de carga de  $\eta_c(1S)$  en la interacción de contacto y otros modelos. El conjunto de parámetros usados son el mismo para las tablas (6.4,6.5) y la figura 6.3. Se incluyen los resultados del modelo VMD con una escala de masa  $m_V = 3.096 \text{ GeV}$ . El valor entre paréntesis es con el vértice quark-fotón desnudo. Se muestra también el resultado para el radio de carga de  $\eta_c$  usando el modelo algebraico. . . . . 170
- 6.8. Radio de interacción para el factor de forma de la transición  $\gamma^* \gamma \rightarrow \eta_c$  definido en la ecuación (6.2). Los datos de BaBar y *lattice* QCD se extrajeron a partir de sus respectivas parametrizaciones a los datos. Se reportan también los resultados del modelo algebraico. 171

6.9. Masas del estado base de bottomonia obtenidas con el ajuste al conjunto de parámetros:  $m_g = 0,8 \text{ GeV}$ ,  $\alpha_{IR} = 0.93\pi/20$ ,  $\Lambda_{IR} = 0.24 \text{ GeV}$ ,  $\Lambda_{UV} = 2,788 \text{ GeV}$ . La masa corriente del quark es  $m_b = 3.782^* \text{ GeV}$ , y la masa generada dinámicamente es  $M_b = 4.821 \text{ GeV}$ . El valor que se muestra debajo de los resultados de la IC son aquellos que se obtienen sin el acoplamiento espín orbital  $g_{so} = 0.24/3$ . Las cantidades dimensionadas están en GeV. (\* = Este conjunto de parámetros se obtuvo a partir del mejor ajuste a las masas y constantes de decaimiento de los canales pseudoescalares y vectoriales para el caso del quark  $b$ ). . . . . 173

6.10. Las constantes de decaimiento de  $\eta_c(1S)$  y  $J/\Psi(1S)$  obtenidas  $m_g = 0.8 \text{ GeV}$ ,  $\alpha_{IR} = 0.93\pi/129$ ,  $\Lambda_{IR} = 0.24 \text{ GeV}$ ,  $\Lambda_{UV} = 2.788 \text{ GeV}$ . La masa corriente del quark es  $m_b = 4.782 \text{ GeV}$ . Las cantidades dimensionadas están en GeV. . . . . 173

6.11. Masas del estado base de bottomonia obtenidas con el ajuste al conjunto de parámetros:  $m_g = 0.8 \text{ GeV}$ ,  $\alpha_{IR} = 0.93\pi/129$ ,  $\Lambda_{IR} = 0.24 \text{ GeV}$ ,  $\Lambda_{UV} = 6.803 \text{ GeV}$ . La masa corriente del quark es  $m_b = 3.647^* \text{ GeV}$ , y la masa generada dinámicamente es  $M_b = 4.749 \text{ GeV}$ . El valor que se muestra debajo de los resultados de la IC son aquellos que se obtienen sin el acoplamiento espín orbital  $g_{so} = 0.24/3$ . Las cantidades dimensionadas están en GeV. (\* = Este conjunto de parámetros se obtuvo a partir del mejor ajuste a las masas y constantes de decaimiento del canal pseudoescalares con el quark  $b$ ). . . . . 174

6.12. Las constantes de decaimiento de  $\eta_b(1S)$  y  $Y$  obtenidas  $m_g = 0.8 \text{ GeV}$ ,  $\alpha_{IR} = 0.93\pi/129$ ,  $\Lambda_{IR} = 0.24 \text{ GeV}$ ,  $\Lambda_{UV} = 6.803 \text{ GeV}$ . La masa corriente del quark es  $m_b = 3.647 \text{ GeV}$ . Las cantidades dimensionadas están en GeV. . . . . 174

6.13. Radio de carga de  $\eta_b(1S)$  en la interacción de contacto y otros modelos. El conjunto de parámetros usados es el mismo para las tablas (6.11,6.12) y la figura 6.7. El valor entre paréntesis es con el vértice quark-fotón desnudo. . . . . 177

6.14. Radio de interacción de la transición  $\gamma\gamma^* \rightarrow \eta_b$  en la interacción de contacto y otros modelos. El conjunto de parámetros usados son el mismo para las tablas (6.11,6.12) y la figura 6.8. . . . . 177

6.15. Constante de acoplamiento adimensional. Para la interacción de contacto se obtuvieron mediante al mejor ajuste a los datos explicados a lo largo de este trabajo . . . . .	179
--	-----



# Capítulo 1.

## Modelo de Quarks

*«What is especially striking and remarkable is that in fundamental physics, a beautiful or elegant theory is more likely to be right than a theory that is inelegant. A theory appears to be beautiful or elegant (or simple, if you prefer) when it can be expressed concisely in terms of mathematics we already have. Symmetry exhibits the simplicity. The Fundamental Law is such that the different skins of the onion resemble one another and therefore the math for one skin allows you to express beautifully and simply the phenomenon of the next skin.»*

— Murray Gell-Mann

Un hadrón es una partícula formada por quarks y gluones enlazados a través de una fuerza nuclear o interacción fuerte, es decir, son partículas que interactúan fuertemente. Estos se clasifican en dos tipos: bariones y mesones. El ejemplo más común de bariones son los protones y neutrones, mientras que de mesones se tiene a los piones y kaones.

Un barión es una partícula compuesta por tres quarks con número bariónico 1. Los bariones tienen espín semientero ( $1/2$  ó  $3/2$ ) y por lo tanto son fermiones descritos a través de la estadística de Fermi-Dirac y a su vez obedecen el principio de exclusión de Pauli. Además, cada barión tiene una antipartícula llamada

*antibarión*, el cual está compuesto por antiquarks en lugar de quarks y tiene número bariónico  $-1$ .

Por otro lado, un mesón es una partícula compuesta por un par quark-antiquark. Tienen espín entero (0 ó 1) y por tanto son bosones descritos por la estadística de Bose-Einstein

La primera vez que se estudió a los hadrones fue por medio del modelo de quarks, el cual es una forma de clasificar a los hadrones en términos de sus quarks de valencia. Fue introducido en 1964 por Murray Gell-Mann [1] y George Zweig [2,3]. Su éxito se basó en el hecho de que predice de manera bastante acertada nuevas partículas y sus propiedades considerando que los hadrones están formados por entes fundamentales llamados *quarks*. A pesar de que nunca se ha visto un quark libre, la evidencia experimental a energías suficientemente altas sugiere que los hadrones son partículas compuestas [4]. En esta sección se introducen las herramientas necesarias para entender el modelo de quarks. En primer lugar, se hace una breve reseña sobre la historia de los hadrones hasta el descubrimiento del quark *top*. Posteriormente se comienzan a describir las simetrías con una breve introducción a la teoría de grupos, haciendo énfasis en los grupos especiales unitarios  $SU(2)$  y  $SU(3)$  necesarios para entender al modelo de quarks con tres componentes. Además, se muestra la manera diagramática para calcular las representaciones irreducibles de la representación de productos de grupos unitarios. Finalmente se muestra un método para calcular las masas de los distintos hadrones conformados con el modelo con tres quarks. El contenido de este capítulo se encuentra descrito en los libros de texto [5–10].

## 1.1. Historia de los Hadrones

Una de las cuestiones que desde siempre ha intrigado a la humanidad es saber de qué está hecha toda la materia. Los pioneros en tratar de responder esa pregunta fueron los griegos, en especial Empédocles de Agrigento, que propuso que toda la materia estaba formada por los cuatro elementos básicos conocidos hasta entonces: aire, tierra, fuego y agua.

Sin embargo, la primera idea más o menos acertada sobre la composición de la materia nació de las ideas de los filósofos griegos Leucipo y Demócrito. Ellos pensaban que si tomaban un pedazo de materia (un trozo de madera) y se dividía en pedazos cada vez más pequeños, se llegaría a un punto en el que no podría dividirse más y quedaría una partícula indivisible; a la que llamaron *átomo* [11]. Entonces pensaban que toda la materia estaba formada por átomos de diferentes tipos y variaba según la configuración en que éstos se arreglaran. Algo no muy distinto a lo que actualmente conocemos.

Muchos siglos más tarde, a principios del siglo XIX, el científico inglés John Dalton propone una teoría atómica en la cual cada elemento químico en realidad era un átomo distinto, los cuales no pueden cambiar su composición, pero podían combinarse para formar compuestos químicos. Más adelante, el profesor de química Dmitri Ivánovich Mendeléyev ordenó los elementos químicos en base a su peso atómico y sus propiedades químicas. Ahora ya se conocía a los elementos que formaban la materia [10,12].

Pero las sorpresas no paraban de llegar. En 1897, el físico británico Joseph John Thompson, mediante experimentos con rayos catódicos, descubrió que estos en realidad eran partículas [13,14] y también midió la razón de su masa y carga. El físico irlandés George Francis FitzGerald poco después bautizó a esas partículas con el nombre de *electrones*. Finalmente, en 1906, Robert Millikan y su estudiante Harvey Fletcher midieron su carga a través del experimento de la gota de aceite. Posteriormente, Millikan mejoró la precisión del experimento [15].

El primer hadrón fue descubierto por Ernest Rutherford en 1918 mediante experimentos de dispersión de partículas alfa (núcleos de helio). Rutherford colisionaba el haz de partículas alfa con una velocidad de  $1.5 \times 10^7$  m/s y con energía alrededor de 5.83 MeV contra una lámina de oro de la anchura de  $4 \mu\text{m}$ . Él determinó que gran parte de los átomos está vacío y tienen un núcleo bastante denso con carga positiva [16]. En experimentos posteriores hizo chocar a las partículas alfa contra átomos de hidrógeno y de ahí determinó que el núcleo de

hidrógeno era una partícula fundamental, una carga positiva a la que se llamó protón.

Además, en 1920, Rutherford propuso la existencia de una partícula neutra en los átomos con el fin de evitar que aquellos átomos con dos o más protones decayeran debido a la repulsión electromagnética entre ellos [17]. Por otro lado, el átomo de Helio era cuatro veces más pesado que el del hidrógeno, pero al tener el doble de carga solo podía tener dos protones, por lo que se suponía que había partículas de carga neutra en el núcleo. Fue en 1932 cuando James Chadwick descubrió que la energía producida en experimentos de radiación no concordaba con lo predicho por algunos modelos teóricos, y en su lugar se aceptó que la radiación eran partículas con carga neutra [18]. Estas partículas tenían una masa muy parecida a la del protón y se llamaron neutrones.

Inmediatamente después del descubrimiento del neutrón y debido a su similitud con el protón; prácticamente tienen la misma masa, Werner Karl Heisenberg propuso que en realidad eran dos estados de una misma partícula a la que llamó *nucleón* [19]. La idea de Heisenberg es que el protón y neutrón formaban un estado de dos partículas similar a los dos estados de espín de los electrones y lo denominó *isospín* debido a las similitudes entre ellos. Ésta similitud en la masa se interpretaba como una simetría bajo las interacciones nucleares, esto quería decir que el protón y neutrón se comportaban de la misma manera bajo las llamadas *interacciones fuertes* y su única diferencia era el contenido de carga. Así, la diferencia de masa se atribuía a la distinta carga de las partículas. Ahora sabemos que la diferencia también viene del hecho de que el contenido de quarks es diferente en los dos hadrones.

Por otro lado, el desarrollo de las teorías cuánticas ayudaba mejor al entendimiento de las partículas hasta ahora elementales. Las partículas se comenzaban a etiquetar según sus propiedades cuánticas como el espín o su carga, siendo las partículas de espín semientero aquellas que conformaban la materia (protones, neutrones y electrones) y las partículas con espín entero (fotones) aquellas que se encargaban de decir la manera en que interactuaban las partículas de materia.

Fue por eso que en 1934 el físico japonés Hideki Yukawa propuso que entre los protones y neutrones debería existir una fuerza que los mantuviera unidos. Dicha fuerza debería ser mucho más fuerte que la repulsión electromagnética que existe entre los protones; además, propuso las propiedades que debería tener dicha fuerza: debería ser una fuerza de corto alcance, con un rango del tamaño del núcleo, lo que implicaba que la partícula *mediadora* de dicha interacción tuviera masa. Yukawa calculó que esta debería ser aproximadamente 200 veces más pesada que el electrón, a la cual llamó mesón [20]. Fue en 1937, mediante estudios de rayos cósmicos, cuando se identificaron las partículas que casi encajaban con la descripción del mesón de Yukawa; tenían una masa casi similar pero su tiempo de vida era erróneo. Además, existía otro problema ya que estas partículas interactuaban débilmente con el núcleo atómico y en caso de ser las que Yukawa predecía tendrían que tener una interacción intensa. Después se aclaró que la partícula descubierta era muon ( $\mu$ ) que simplemente era un leptón, un electrón pesado, de masa de 105 MeV.

Fue en 1947 cuando Cecil Frank Powell y sus colaboradores en Bristol descubrieron al pión ( $\pi$ ) usando una nueva técnica de emulsión fotográfica a una altura de varios kilómetros [21, 22]. En unos meses se dieron cuenta de que debido a su corto tiempo de vida la mayoría de piones no alcanza a llegar a tierra. Uno de sus decaimientos es el muón ( $\mu$ ), la partícula descubierta anteriormente y con la posibilidad de ser detectado a nivel de mar [23]. Yukawa recibió el premio nobel en 1949 por postular la existencia de los mesones, y Powell lo recibió en 1950 por su descubrimiento y las técnicas correspondientes desarrolladas por él.

El mismo año en que Powell descubría al mesón  $\pi$ , George Rochester y Clifford Butler descubrieron en una cámara de niebla a una partícula neutra que decaía en dos piones cargados a la que llamaron partícula  $V$  debido a la naturaleza de su decaimiento (los piones formaban una  $V$  al decaer). Esta partícula era al menos el doble de pesada que el pión la cual ahora se conoce como kaón ( $K^0$ ) [24].

Dos años más tarde, en 1949, Powell publicó una imagen donde aparecía una partícula similar al kaón, pero con carga [25]. Estos kaones tenían un comporta-

miento similar al del pi3n. Eran m1s pesados y ten1an tiempo de vida demasiado largo. Por lo tanto, se llamaron part1culas extra1as. Adem1s, durante un breve periodo de tiempo muchos nuevos mesones fueron descubiertos:  $\eta$ ,  $\phi$ ,  $\omega$ ,  $\rho$  y otras.

El siguiente a1o, Victor David Hopper y Sukumar Biswas detectaron otra part1cula  $V$  neutra, la cual ten1a caracter1sticas similares a la part1cula  $V$  de Rochester, pero deca1a en un prot3n y un pi3n neutro [26]. As1, esta part1cula era m1s pesada que el prot3n y, de hecho, pertenec1a a la misma familia que ellos: los bariones. Adem1s, pertenec1a al grupo de part1culas extra1as porque su tiempo de vida era de  $10^{-10}$  segundos.

Para entender por qu3 el prot3n no deca1a en un positr3n y un fot3n, en 1938, Ernst Carl Gerlach St3ckelberg propuso una nueva ley de conservaci3n al asignar un n3mero bari3nico  $B = +1$  a todos los bariones conocidos y  $-1$  a sus antipart1culas [27]. De esta forma el prot3n al ser el bari3n m1s ligero no pod1a decaer en algo m1s.

Durante los a1os siguientes un manojo de nuevas part1culas fue descubierto: los  $\Sigma'$ s, los  $\Xi'$ s, los  $\Delta'$ s. Como se mencion3, varias de estas part1culas no eran esperadas y empezaron a ser conocidas como part1culas *extra1as* ya que eran producidas a gran escala (a una escala de  $10^{-23}$ s) y deca1an en un tiempo extremadamente lento ( $10^{-10}$ s). Esto hizo que Abraham Pais [28] identificara que el mecanismo de producci3n de estas part1culas (interacciones fuertes) era muy diferente al que las desintegraba (interacciones d3biles), as1 como que reconoc1a que deber1an ser producidas en pares, pero la evidencia experimental de este fen3meno no estaba muy clara en esos d1as. Fue en 1953 cuando Murray Gell-Mann [29] y Kazuhiko Nijishima [30] llegaron con una idea rompedora en la que asignaban un nuevo n3mero cu1ntico (extra1eza) a cada part1cula, la cual se conservaba en interacciones fuertes pero no en las d3biles.

Para 1960 se hab1a descubierto una cantidad exagerada de hadrones que la 3nica forma de describir a la f1sica hadr3nica era un completo desastre. El exceso de part1culas interactuantes fuertemente estaba dividido en dos familias: bario-

nes y mesones, y estos a su vez estaban divididos por su carga, extrañeza y masa, pero esta clasificación no parecía completamente satisfactoria y fundamental.

Fue Murray Gell-Mann quien en 1961 dio una solución elegante para este desorden. Acomodó a los mesones y bariones de acuerdo a su carga y extrañeza resultando en figuras geométricas conocidas como el camino óctuple [31]. Los bariones más ligeros caían dentro de un arreglo hexagonal con dos partículas en el centro, del mismo modo que los mesones, conocidos como los octetes de bariones y mesones respectivamente. Pero eso no era todo, sino que los bariones pesados además caían en un arreglo triangular, conocido como el decuplete de bariones. Pero en este arreglo algo increíble ocurría: en el decuplete había diez partículas, pero solo eran conocidas nueve de ellas, la partícula  $\Omega^-$  con carga  $-1$  y extrañeza  $-3$  jamás había sido vista, pero Gell-Mann predijo cómo encontrarla así como su masa. El camino óctuple fue el primer esquema clasificatorio y que inició la era moderna de la física de partículas. El siguiente paso fue preguntarse el porqué los hadrones se arreglan en esos curiosos patrones, y fue como nació el modelo de quarks, el cual será descrito en este capítulo.

El modelo de quarks da un esquema clasificatorio de los hadrones en términos de sus quarks de valencia, fue propuesto de manera independiente por Murray Gell-Mann [1] y George Zweig [2, 3] en 1964. En este modelo, se considera que los hadrones son estados compuestos de entidades fundamentales llamadas quarks. Los mesones son estados de un par quark-antiquark ( $q\bar{q}$ ), tienen spin 0 o 1 y por lo tanto son bosones; mientras que los bariones están compuestos de tres quarks ( $qqq$ ), como cada quark tiene spin  $\pm 1/2$ , entonces los bariones tienen spin semi-entero, por lo tanto, son fermiones.

En el modelo de quarks original se asumió que había tres tipos distintos de quarks, *up* ( $u$ ), *down* ( $d$ ) y *strange* ( $s$ ). Como los bariones tienen una carga eléctrica entera, los quarks debían tener una carga eléctrica semientera:  $+2/3$  para  $u$  y  $-1/3$  para  $d$  y  $s$ .

El éxito del modelo de quarks vino con la sorprendente predicción de nuevos hadrones, así como en explicar las amplitudes de transición electromagnéticas y decaimientos de hadrones. En particular, el modelo de quarks muestra simetrías

entre las partículas que interactúan; por ejemplo, si se supone que los quarks  $u$  y  $d$  tienen la misma masa, el grupo  $SU(2)$  actúa como una rotación unitaria de los estados  $u$  y  $d$

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \rightarrow U \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Los estados cuánticos de los multipletes que pertenecen al grupo de simetría  $SU(2)$  son llamadas isospín. De forma análoga, como el quark strange tiene una masa un poco mayor que los quarks  $u$  y  $d$ , es razonable considerar que la simetría de las transformaciones unitarias del triplete  $(u, d, s)$  es  $SU(3)$ .

A pesar del éxito del modelo de quarks, muchas interrogantes quedan sin respuesta. La más notable de ellas es el hecho de que no es posible ver quarks aislados y entonces es posible que los quarks no sean más que un genial artilugio matemático, sin física alguna que la sustente. Es por ello que el modelo era visto con recelo desde un sector de la comunidad física. Sin embargo, aquellos que creían firmemente en el modelo necesitaban explicar algún mecanismo para explicar el este fenómeno; así nació la idea del confinamiento de quarks.

En el confinamiento de quarks, mediante algún mecanismo desconocido, los quarks se encuentran netamente confinados dentro de los hadrones. Pero aun así, esto no era impedimento para que mediante experimentos de dispersión de Rutherford se probara si los quarks tenían estructura o no. Experimentos a finales de los 60's en SLAC y principios de los 70's en el CERN probaron que los protones si tenían subestructura, en particular que la carga del protón se encontraba localizada en tres pequeños bultitos, los que podrían interpretarse como tres quarks.

Otro de los problemas del modelo de quarks es que partículas como  $\Delta^{++}$ , compuesta de tres quarks  $u$  con espín  $1/2$  violan el principio de exclusión de Pauli. En 1964, Oscar Wallace Greenberg propuso que los quarks, además de tener tres sabores  $(u, d, s)$ , tenían también tres colores (rojo, verde y azul) y que las partículas que se pueden encontrar en la naturaleza son sin color; esto es,

que cada partícula tenga los tres colores en la misma cantidad o que tenga la misma cantidad de color y anticolor, [32]. Los bariones son un ejemplo de lo primero, donde se combinan tres quarks  $qqq$  de color distinto. Mientras que los mesones están formados por un par quark-antiquark  $q\bar{q}$  donde la segunda tiene el anticolor correspondiente. Este número cuántico de color daba solución al problema del principio de exclusión.

El golpe definitivo del modelo de quarks, gracias al cual logro aceptación por la comunidad científica, fue el descubrimiento de la partícula  $J/\psi$  en 1974 de manera independiente por el grupo de Samuel Chao Chung Ting en Brookhaven [33], y el de Burton Richter en SLAC [34]. La partícula  $J/\psi$  era mesón neutro extremadamente pesado con un tiempo de vida relativamente grande y el cual solamente podía ser explicado mediante el modelo de quarks. Unos años atrás, Bjorken y Glashow habían propuesto la existencia de un cuarto sabor al notar una asimetría en la cantidad de leptones ( $e, \nu_e, \mu, \nu_\mu$ ) y quarks ( $u, d, s$ ) [35]. Y fue con ese cuarto sabor que el modelo de quarks pudo explicar las propiedades de  $J/\psi$  y otras partículas subsiguientes que llevaban el número cuántico al que se denominó encanto (*charm*). Sin embargo, la predicción verdadera de este quark se debe al trabajo de Sheldon Glashow, John Iliopoulos y Luciano Maiani. Ellos propusieron un mecanismo para suprimir corrientes neutras que cambian el sabor, el famoso mecanismo GIM. Este mecanismo requería la existencia de un cuarto quark. Como se ha mencionado, este quark fue descubierto en 1974 y las propiedades del quark *charm* se encontraron como predecía el mecanismo GIM [36]. Además, en el año 2016, el Prof. Luciano Maiani fué galardonado con la medalla de la División de Partículas y Campos de la Sociedad Mexicana de Física, premiando su ilustre carrera y sus grandes contribuciones a la física, en especial la predicción del quark *charm* en colaboración con Sheldon Glashow y John Iliopoulos [37].

Y para cerrar con broche de oro, el leptón  $\tau$  fue descubierto, la cual tiene su propio neutrino y el número de leptones sumaba 6, mientras el de quarks solo 4. Solo era cuestión de tiempo para que los dos quarks restantes se encontraran. El primero fue el quark *bottom* como componente del mesón  $Y$  descubierto en 1977, y en años posteriores se encontraron más partículas con el nuevo número cuántico

co al que se denominó *belleza*. El último quark del modelo, descubierto en 1995 en Fermilab, fue el quark *top*, con el cual se restauraba la simetría de Glashow y el modelo de quarks exhibía su enorme capacidad predictiva. Aunque para esa fecha el modelo de quarks ya había sido sustituido por el modelo estándar de las partículas elementales, incluyendo cromodinámica cuántica, una teoría que combina las interacciones entre tres de las cuatro interacciones fundamentales. La resolución de cromodinámica cuántica, que describe las interacciones entre quarks, es extremadamente difícil para calcular propiedades de los hadrones resultantes. Por lo tanto, el modelo de quarks, por su simplicidad, todavía se utiliza por un gran número de científicos para investigar física hadrónica.

La importancia histórica del modelo de quarks no deja de tener relevancia y el entenderlo correctamente ayuda y facilita la comprensión del modelo estándar de las partículas. Para ello es importante conocer la respuesta a algunas preguntas. Por ejemplo, ¿qué es un grupo?, ¿qué sentido físico hay en el hecho que existan simetrías entre los elementos de los grupos  $SU(2)$  y  $SU(3)$ ?, ¿qué es el grupo de isospín con el cual se estudió originalmente la simetría protón-neutrón?, ¿qué son los multipletes de partículas?, ¿cuál es la manera en que se arreglan los quarks para formar hadrones?, ¿cómo se predicen las masas en el modelo de quarks? Todas éstas y algunas otras cuestiones serán resueltas en las secciones siguientes, de esta forma entender el modelo de quarks para posteriormente dar un salto al estudio de QCD.

## 1.2. Simetrías

Una de las características más bellas en la física es la existencia de simetrías. Cuando existe una simetría en un sistema físico significa que existe una ley de conservación en una cantidad física. En esta sección se analizan las simetrías desde el punto de vista de teoría de grupos, por lo que es buena idea saber qué es un grupo y algunas de sus propiedades para entender al modelo de quarks.

### 1.2.1. Grupos

Un grupo consiste en un conjunto de objetos  $G = \{a, b, c, \dots\}$  con una operación binaria  $\bullet$  que satisface [38]

- Cerradura: Esto es, si  $a, b \in G$ , entonces  $a \bullet b \in G$ .
- Asociatividad:  $(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$ .
- Identidad: Existe un elemento  $e \in G$  que cumple  $a \bullet e = a = e \bullet a$ .
- Inverso: Existe un elemento  $a^{-1} \in G$  tal que  $a \bullet a^{-1} = a^{-1} \bullet a = e$ .

Cuando se añade el requisito de conmutatividad ( $a \bullet b = b \bullet a$ ) se dice que el grupo es Abelian.

### 1.2.2. Grupos de Lie

Se considera un grupo continuo con un número finito de parámetros  $N$ , por ejemplo la multiplicación por un factor de fase  $e^{i\alpha}$  (un parámetro) o una rotación en tres dimensiones (tres parámetros). Entonces los elementos del grupo se escriben como  $g(\underline{a})$ , donde  $\underline{a}$  es un vector con  $N$  parámetros. Además, si se cumple que el producto  $g(a'') = g(a) \bullet g(a')$  y  $a'' = \Gamma(\underline{a}, \underline{a}')$  con  $\Gamma$  una función analítica, entonces el grupo es un grupo de Lie.

En principio y para no complicar con definiciones, en práctica, se tiene que si un grupo se caracteriza por parámetros de una forma analítica es casi inevitable que sea un grupo de Lie, como los cambios de fase cuya función es simplemente la adición de dos fases.

Una de las características principales de los grupos de Lie es que sus propiedades se derivan a partir de elementos que difieren infinitesimalmente del elemento identidad.

Si se considera uno de los parámetros, por ejemplo  $l$ , del vector  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3, \dots)$ , la representación correspondiente a una transformación es  $D(a_l) = \exp(ia_l X_l)$ ,

donde no hay suma sobre  $l$ . En otras palabras, cualquier elemento del grupo se puede expresar por una representación que es la exponencial de una combinación lineal de generadores.

Por ejemplo, la combinación de dos representaciones debería resultar en una tercera, esto es

$$D(a_1, 0, 0, \dots)D(0, a_2, 0, \dots) = e^{ia_1 X_1} e^{ia_2 X_2} = e^{i \sum_l b_l X_l}. \quad (1.2)$$

Expandiendo los exponenciales de la expresión anterior a segundo orden, enseguida resolver iterativamente para primer orden y después de sustituir en la expresión original, se obtiene el conmutador como una combinación lineal de los generadores, esto es [38]

$$[X_a, X_b] = i \sum_c f_{abc} X_c, \quad (1.3)$$

donde  $f_{abc}$  son las constantes de estructura que caracterizan al álgebra de Lie, y por tanto al grupo bajo estudio.

### 1.2.3. Transformaciones Unitarias

El grupo unitario de orden  $n$ ,  $U(n)$ , es el grupo asociado con las matrices unitarias cuya operación es la multiplicación de estas. Estas matrices se definen a través de

$$U^\dagger U = U U^\dagger = 1, \quad (1.4)$$

donde el superíndice  $\dagger$  indica el transpuesto conjugado de la matriz  $U$ . Una matriz unitaria tiene  $n^2$  parámetros libres y por tanto  $n^2$  generadores. ¿Cómo se ve esto? Una matriz compleja de  $n \times n$  tiene  $2 \times n^2$  parámetros libres. Luego la unitariedad  $U^\dagger U$  impone  $n \times n$  constricciones; se consideran dos vectores columna  $a \neq b$ , entonces los elementos de la diagonal proveen  $n$  constricciones al ser de la forma  $a^\dagger a = 1$ . En una matriz unitaria los elementos de la diagonal

son reales, entonces cada uno impone una restricción, dando un total de  $n$ . Por otro lado, los elementos fuera de la diagonal son  $a^\dagger b = b^\dagger a = 0$ . Sin embargo,  $a^\dagger b$  no es real necesariamente, pero la condición de que tanto la parte real como la imaginaria son cero corresponde a dos restricciones por cada elemento, dando en total  $n(n-1)$  restricciones. Combinando las restricciones se tiene que son en total  $n + n(n-1) = n^2$ .

Por lo tanto,  $U(n)$  tiene  $n^2$  parámetros libres y por tanto  $n^2$  generadores

### 1.3. Grupo Unitario Especial $SU(n)$

Este grupo se define con la condición extra de  $\det(U) = 1$ . En consecuencia, la restricción adicional implica que este grupo tiene  $n^2 - 1$  generadores. A continuación se describe en detalle al grupo unitario  $SU(2)$ .

#### 1.3.1. $SU(2)$

Las transformaciones  $SU(2)$  corresponden a las transformaciones unitarias especiales de vectores de dos dimensiones, por lo que pueden representarse como matrices de  $2 \times 2$  actuando sobre esos vectores. Tiene  $2^2 - 1$  parámetros, por tanto tiene 3 generadores hermitianos y con traza igual a cero:  $\{J_1, J_2, J_3\}$ . La representación más usual de las  $\sigma$ 's (pero no la única) está dada por las matrices de espín de Pauli  $J_i = \sigma_i/2$ , donde

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (1.5)$$

las cuales tienen las propiedades

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i \epsilon_{ijk} \sigma_k, \quad (1.6)$$

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij} \mathbb{I}_{2 \times 2}, \quad (1.7)$$

donde  $\epsilon_{ijk}$  es el tensor de Levi-Civita totalmente antisimétrico que cumple  $\epsilon_{123} = 1$ ,  $-1$  para permutaciones impares y  $1$  para pares,  $\mathbb{I}_{2 \times 2}$  es la matriz identidad de dos dimensiones. De la ecuación (1.6) se aprecia que el álgebra de Lie de los generadores de  $SU(2)$  es análoga al álgebra del momento angular

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k, \quad (1.8)$$

donde el conmutador de dos generadores resulta en el tercer generador.

En teoría de grupos se define a un operador de Casimir como aquel operador que conmuta con todos los demás generadores.  $SU(2)$  solo tiene un casimir:  $J^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$ . Por otra parte, como  $[J^2, J_3] = 0$ , entonces son observables simultáneos y sus eigenvalores pueden etiquetar a los estados cuánticos. Por ejemplo, se definen los eigenestados  $|j, m\rangle$  con eigenvalores

$$J^2|j, m\rangle = j(j+1)|j, m\rangle, \quad (1.9)$$

$$J_3|j, m\rangle = m|j, m\rangle, \quad (1.10)$$

y los operadores de ascenso y descenso  $J_{\pm} = J_1 \pm iJ_2$  con las propiedades

$$J_3 J_{\pm} |j, m\rangle = (m \pm 1) J_{\pm} |j, m\rangle \quad (1.11)$$

$$J_{\pm} |j, m\rangle = \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} |j, m \pm 1\rangle. \quad (1.12)$$

Para representar a  $SU(2)$  se utilizan dos estados ortogonales como vectores base

$$\left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1.13)$$

De manera análoga, si se toma  $j = 1$  se tiene una representación en tres dimensiones

$$|1,1\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1,0\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1,-1\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (1.14)$$

donde los generadores son

$$J_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.15)$$

Gracias a estos dos ejemplos se puede concluir de manera general que el grupo  $SU(n)$  tiene un número infinito de representaciones. La representación de dimensión más baja se puede representar como  $nD$ . Es la representación fundamental, la cual se puede describir por  $n - 1$  conjuntos distintos. Por ejemplo,  $SU(2)$  solo tiene una representación fundamental dada por las matrices de Pauli.

### 1.3.2. Transformaciones en $SU(2)$

En  $SU(2)$ , el operador de transformación está dado por

$$U = e^{i\alpha_i\sigma_i/2}. \quad (1.16)$$

Se escribe  $\alpha_i = 2\kappa n_i$ , donde  $\hat{n}$  es un vector unitario, por lo que la ecuación (1.16) se escribe como

$$U = e^{i\kappa\hat{n}_i\sigma_i}. \quad (1.17)$$

Se expande el exponencial hasta segundo orden

$$U = 1 + (i\theta\hat{n} \cdot \vec{\sigma}) + (i\theta\hat{n} \cdot \vec{\sigma})^2/2! + \dots, \quad (1.18)$$

donde

$$\begin{aligned} (\hat{n} \cdot \vec{\sigma})^2 &= n_1^2\sigma_1^2 + \dots + n_1n_2(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_1) + \dots \\ (\hat{n} \cdot \vec{\sigma})^2 &= n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1, \end{aligned} \quad (1.19)$$

donde se ha usado la propiedad de anticonmutación de las matrices de Pauli de la ecuación (1.7). Con estas relaciones se observa que los términos pares  $(\hat{n} \cdot \vec{\sigma})^{2n} = 1$  y los impares resultan en un término de la forma  $\hat{n} \cdot \vec{\sigma}$ . De esta manera, el operador de transformación es

$$\begin{aligned} U &= (1 - \kappa^2/2! + \kappa^4/4! + \dots) + i(\kappa - \kappa^3/3! + \kappa^5/5! - \dots)\hat{n} \cdot \vec{\sigma} \\ &= \cos \kappa + i\hat{n} \cdot \vec{\sigma} \sin \kappa, \end{aligned} \quad (1.20)$$

ó

$$U = e^{i\frac{\theta}{2}\hat{n} \cdot \vec{\sigma}} = \cos \frac{\theta}{2} + i\hat{n} \cdot \vec{\sigma} \sin \frac{\theta}{2}, \quad (1.21)$$

la cuál será de utilidad más adelante.

### 1.3.3. Simetría de Isospín

Como se mencionó brevemente en la introducción histórica, en los estudios tempranos de reacciones nucleares se encontró que una buena aproximación de éstas es independiente de la carga de los nucleones. En otras palabras, las interacciones fuertes tienen una simetría  $SU(2)$  que transforma al neutrón  $n$  en un protón  $p$  y viceversa. La relación de conmutación de los generadores  $T_1, T_2, T_3$  es

$$[T_i, T_j] = i\epsilon_{ijk} T_k, \quad (1.22)$$

los cuales al actuar sobre  $n$  o  $p$  resultan

$$T_3|p\rangle = \frac{1}{2}|p\rangle, \quad T_3|n\rangle = -\frac{1}{2}|n\rangle, \quad T_+|n\rangle = |p\rangle, \quad T_-|p\rangle = |n\rangle, \quad (1.23)$$

donde  $T_{\pm} = T_1 \pm iT_2$ . La ecuación (1.23) indica que  $n$  o  $p$  forman un doblete bajo la transformación de isospín. Además, el isospín es una simetría del hamiltoniano de la interacción fuerte  $H_s$

$$[T_i, H_s] = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.24)$$

Sin embargo, como los miembros de este doblete de isospín tienen diferente carga eléctrica, no es una simetría bajo interacciones electromagnéticas, por lo que no se puede considerar una simetría exacta. Si esta simetría fuera exacta, entonces  $n$  y  $p$  tendrían la misma masa, lo cual no es completamente cierto. Sin embargo, la diferencia de masa en el doblete es pequeña

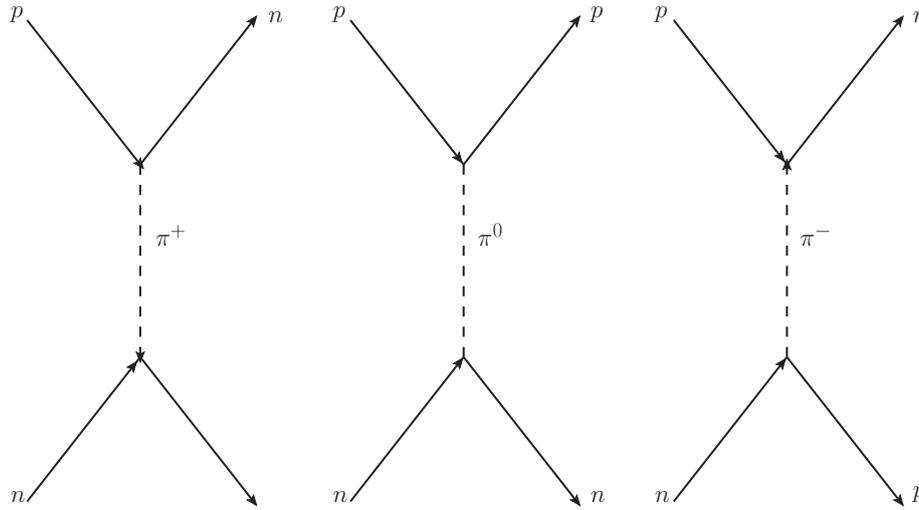
$$\frac{m_n - m_p}{m_n + m_p} \sim 0.7 \times 10^{-3}, \quad (1.25)$$

por lo que la simetría de isospín es bajo ciertas condiciones una buena simetría.

Por otro lado, como las constantes de estructura están dadas por la representación adjunta<sup>1</sup> matrices adjuntas, los campos de norma se transforman de acuerdo a la representación adjunta. De esta forma, los bosones de norma están relacionados con el adjunto, el intercambio entre protón y neutrón se produce a través del intercambio de los bosones de la simetría, en este caso piones como se observa en la figura 1.1. De esta forma el adjunto de  $SU(2)$  consiste en un triplete que transforma como una representación de  $SO(3)$ <sup>2</sup>, aunque también tiene una representación en  $SU(2)$  como se aprecia en la ecuación (1.15). Esta se

<sup>1</sup>La representación adjunta está dada por las constantes de estructura  $T_{bc}^a$ , donde  $T^a$  es una matriz de dimensión  $n \times n$ . Por tanto, hay un total de  $n^2 - 1$ .

<sup>2</sup>El grupo  $SO(n)$  consiste en las transformaciones ortogonales  $O^T O$  con determinante uno, las cuales se interpretan como rotaciones.



**Figura 1.1.:** Intercambio de partículas de norma entre estados del isospín protón neutrón.

escribe en términos de los números cuánticos  $(I, I_3)$  como

$$\text{Doblete} \quad p = \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle, \quad n = \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle, \quad (1.26)$$

$$\text{Triplete} \quad \pi^+ = |1, 1\rangle, \quad \pi^0 = |1, 0\rangle, \quad \pi^- = |1, -1\rangle. \quad (1.27)$$

Finalmente, se puede observar que se cumple una relación en la carga  $Q$  de la forma  $Q = \frac{1}{2}B + I_3$ , donde  $B$  es el número bariónico. El Hamiltoniano completo contiene  $Q$ . Además, la relación anterior nos dice que  $Q$  conmuta con  $\vec{I}^2$  e  $I_3$ , por lo que estas dos cantidades son conservadas. Por otro lado,  $Q$  no conmuta con  $\vec{I}$ , por lo que  $\vec{I}$  no es invariante bajo transformaciones de isospín, las cuales corresponden al intercambio  $p - n$  de la figura 1.1, que requiere al operador  $I_1 \pm iI_2$ .

### 1.3.4. Estados conjugados en $SU(2)$

De manera análoga al isospín protón-neutrón, se define un isospín de quarks, donde el estado base se define con los vectores base de los quarks más ligeros  $(u, d)$ , los cuales tienen masa muy similar, por lo que se les puede asignar una

simetría de isospín. Este estado en  $SU(2)$  se define como

$$\mathbf{2} \equiv \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}. \quad (1.28)$$

Se busca formar un estado conjugado que corresponda a los antiquarks y además satisfaga propiedades de transformación adecuadas. Para empezar se sabe que el conjugado contiene a las funciones de onda de los antiquarks, de las cuales se espera que sus números cuánticos serán los negativos a aquellos de los quarks como se observa en la tabla 1.1 De esta forma, bajo  $SU(2)$  el estado  $\mathbf{2}$  se

Quark	$B$	$Q$	$I_3$
$u$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$
$\bar{u}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{2}$
$d$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$
$\bar{d}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

**Tabla 1.1.:** Números cuánticos de los quarks y antiquarks en  $SU(2)$ .  $B$  es número bariónico,  $Q$  la carga total.

transforma a través de la ecuación (1.21)

$$\begin{pmatrix} u' \\ d' \end{pmatrix} = e^{i\frac{\theta}{2}\hat{n}\cdot\vec{\sigma}} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} = \left(\cos\frac{\theta}{2} + i\hat{n}\cdot\vec{\sigma}\sin\frac{\theta}{2}\right) \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}. \quad (1.29)$$

Las antipartículas se comportan como los complejos conjugados, esto es  $\bar{u} \sim u^*$ ,  $\bar{d} \sim d^*$ . Tomando el conjugado de la ecuación (1.29)

$$\begin{pmatrix} u'^* \\ d'^* \end{pmatrix} = \left(\cos\frac{\theta}{2} - i\hat{n}\cdot\vec{\sigma}^* \sin\frac{\theta}{2}\right) \begin{pmatrix} u^* \\ d^* \end{pmatrix}. \quad (1.30)$$

De este modo, la transformación para los estados de antiquarks es

$$\begin{pmatrix} \bar{u}' \\ \bar{d}' \end{pmatrix} = \left( \cos \frac{\theta}{2} - i\hat{n} \cdot \vec{\sigma}^* \sin \frac{\theta}{2} \right) \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{d} \end{pmatrix}. \quad (1.31)$$

El siguiente paso es buscar que el estado conjugado tenga las mismas propiedades de transformación como **2**. Esto resultará conveniente. Para este fin, se define el estado conjugado como

$$\bar{\mathbf{2}} = M \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{d} \end{pmatrix}, \quad (1.32)$$

donde  $M$  es una matriz  $2 \times 2$  que satisface

$$M \begin{pmatrix} \bar{u}' \\ \bar{d}' \end{pmatrix} = \left( \cos \frac{\theta}{2} + i\hat{n} \cdot \vec{\sigma} \sin \frac{\theta}{2} \right) M \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{d} \end{pmatrix}, \quad (1.33)$$

la cual transforma igual a la ecuación (1.29). La meta es encontrar una forma de  $M$  que satisfaga la ecuación (1.33). Para ellos se multiplica por  $M$  a la ecuación (1.31)

$$M \begin{pmatrix} \bar{u}' \\ \bar{d}' \end{pmatrix} = M \left( \cos \frac{\theta}{2} - i\hat{n} \cdot \vec{\sigma}^* \sin \frac{\theta}{2} \right) \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{d} \end{pmatrix}. \quad (1.34)$$

Comparando la expresión anterior con la de la ecuación (1.33) se tiene que  $-M\sigma_i^* = \sigma_i M$ , por lo que  $\sigma_i^* = -M^{-1}\sigma_i M$ . Escrito en detalle

$$\vec{\sigma}^* = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ -\sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -M^{-1}\sigma_1 M \\ -M^{-1}\sigma_2 M \\ -M^{-1}\sigma_3 M \end{pmatrix}. \quad (1.35)$$

Se toma en la propiedad de anticonmutación de las matrices de Pauli y de esta forma la ecuación anterior se satisface si  $M = e^{i\theta}\sigma_2$ , eligiendo la fase de tal

manera que  $M$  sea

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.36)$$

Finalmente, el estado conjugado es

$$\bar{\mathbf{2}} \equiv \begin{pmatrix} \bar{d} \\ -\bar{u} \end{pmatrix}, \quad (1.37)$$

el cual transforma de la misma forma que  $\mathbf{2}$  y será bastante útil en la siguiente sección, donde se muestra la formación de estados  $q\bar{q}$ .

### 1.3.5. Combinación de Estados en $SU(2)$ de Isospín

Dado que los operadores de isospín para estados combinados es igual a la suma de los operadores para estados individuales, lo mismo se asume para los generadores en  $SU(2)$  donde  $\vec{I}^{ab} = \vec{I}^a + \vec{I}^b$  y  $I_3^{ab} = I_3^a + I_3^b$ . Para el cuadrado se tiene  $\vec{I}^{(ab)^2}$  se tiene la relación

$$\vec{I}^{(ab)^2} = \vec{I}^{a^2} + \vec{I}^{b^2} + 2\vec{I}^a \cdot \vec{I}^b = \vec{I}^{a^2} + \vec{I}^{b^2} + I_+^a I_-^b + I_-^a I_+^b + 2I_3^a I_3^b. \quad (1.38)$$

Se etiqueta a los estados como  $u = |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ ,  $d = |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$  y se comienza con el estado completamente alineado  $uu$ . Se aplican los generadores para calcular  $I$  e  $I_3$

$$I_3 uu = (I_3^a + I_3^b)uu = (I_3^a u)u + u(I_3^b u) = \left(\frac{1}{2}u\right)u + u\left(\frac{1}{2}u\right) = uu \quad (1.39)$$

$$\begin{aligned} \vec{I}^2 uu &= (\vec{I}^{a^2} + \vec{I}^{b^2} + I_+^a I_-^b + I_-^a I_+^b + 2I_3^a I_3^b)uu \\ &= \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{4} + 0 + 0 + 2\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right)uu \\ &= 2uu = 1(1+1)uu. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Entonces el estado  $uu$  tiene  $I = 1, I_3 = 1$  y se escribe como  $uu = |1, 1\rangle$ . Los otros estados se encuentran aplicando los operadores escalera, por ejemplo, al usar  $I_-$  ( $I_- u = d$ )

$$I_- uu = (I_-^a + I_-^b)uu = (I_-^a u)u + u(I_-^b u) = ud + du, \quad (1.41)$$

del cual se demuestra de manera análoga a  $uu$  que tiene  $I = 1, I_3 = 0$  y por lo tanto  $|1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(ud + du)$ . Aplicando  $I_-$  nuevamente sobre  $|1, 0\rangle$  se obtiene el estado  $|1, -1\rangle = dd$ . Finalmente, la última combinación se obtiene por ortogonalidad y es  $|0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(ud - du)$ .

En resumen, se tienen todos los estados de sistemas acoplados de un quark up y un quark down en  $SU(2)$ :

$$\begin{aligned} |1, 1\rangle &= uu, \\ |1, 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(ud + du), \\ |1, -1\rangle &= dd, \\ |0, 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(ud - du), \end{aligned} \quad (1.42)$$

Sin embargo, nuestro interés es el formar mesones, los cuales son estados  $q\bar{q}$ . Esto se logra al recordar la regla de transformación de  $\mathbf{2}$  en la ecuación (1.37). Así, para representar a los mesones se hace el reemplazo  $u \rightarrow \bar{d}$  y  $d \rightarrow -\bar{u}$  y se obtiene

$$\begin{aligned} |1, 1\rangle &= u\bar{d}, \\ |1, 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d}), \\ |1, -1\rangle &= -d\bar{u}, \\ |0, 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + d\bar{d}), \end{aligned} \quad (1.43)$$

Se tiene un triplete con  $I = 1$  que se asocia con los piones ( $\pi^+, \pi^0, \pi^-$ ) y un singlete  $I = 0$  asociado con  $\eta$ .

### 1.3.6. Pesos en $SU(2)$

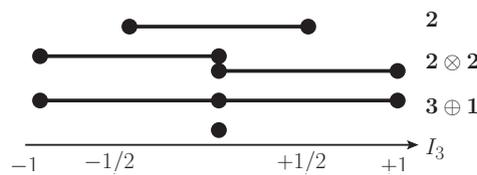
Se desea encontrar un conjunto de operadores Hermíticos que conmutan para un sistema dado, ya que corresponden a variables independientes que pueden ser medidas simultáneamente. Este conjunto de operadores que conmutan entre si se conoce como *subálgebra de Cartan* y sus valores propios son llamados *pesos*. Los *vectores peso* se construyen a partir de los eigenvalores de todos los generadores conmutantes para un vector base dado.

Como en  $SU(2)$  no existen operadores conmutantes, entonces el subálgebra de Cartan tiene solo un generador el cual conmuta trivialmente consigo mismo; típicamente se elige  $I_3$ . Sus pesos son  $-\frac{1}{2}$  y  $\frac{1}{2}$ , los cuales se representan como un par de puntos sobre una línea como se muestra en la figura 1.2. Para com-



**Figura 1.2.:** Línea del tercer componente de isospín para los quarks de  $SU(2)$ . Se puede mover entre un estado a otro del mismo doblete al aplicar los operadores de escalera.

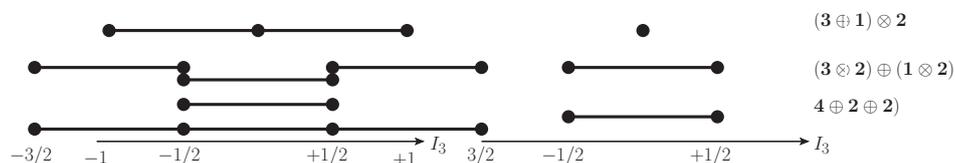
binar estados de dos partículas, se añade el diagrama de peso de la segunda partícula a los nodos de la primera como se observa en la figura 1.3. También se



**Figura 1.3.:** Combinación de estados en  $SU(2)$ . Se añade un segundo diagrama a los nodos del primero y se separan los estados con el mismo valor para así conseguir un triplete y un singlete de la forma  $2 \otimes 2 = 3 \oplus 1$

pueden combinar tres partículas (bariones) cuyos diagramas de peso ayudan a identificar los números cuánticos resultantes como se muestra en la figura 1.4. La identificación de su composición de quarks se hace de manera análoga a los mesones, esto es: se parte del estado más alineado ( $uuu$ ) y se utiliza el operador

de descenso. Para los restantes se usa ortogonalidad. De esta manera se pueden encontrar los estados de la tabla 1.2.



**Figura 1.4.:** Combinación de tres estados fundamentales en  $SU(2)$ . Se añade el tercer diagrama al resultante del primer producto de la figura 1.3 y se separan los estados con el mismo valor para así conseguir un cuartete y dos dobletes  $2 \otimes 2 \otimes 2 = 4 \oplus 2 \oplus 2$

Estado	$(j, m)$	Estado
Simétricos	$\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$	$uuu$
	$\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{3}}(uud + udu + duu)$
	$\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{3}}(ddu + dud + udd)$
	$\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$	$ddd$
Simétricos	$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{6}}(2uud - udu - duu)$
$1 \leftrightarrow 2$	$\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{6}}(2ddu - dud - udd)$
Antisimétricos	$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(ud - du)u$
$1 \leftrightarrow 2$	$\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(du - ud)d$

**Tabla 1.2.:** Bariones de  $SU(2)$ . Se muestran los estados completamente simétricos y los estados con simetría mixta. Se indica mediante números bajo el intercambio de qué partículas hay simetría (o antisimetría).

La formación de estados, funciones de onda y su interpretación como partículas dentro del modelo de quarks se describirá al final de la siguiente sección.

## 1.4. Grupo Unitario Especial $SU(3)$

Basado en la sección previa, se entiende que el grupo de transformación  $SU(3)$  corresponde a las transformaciones especiales unitarias de vectores complejos en tres dimensiones. En consecuencia, una representación natural consiste en matrices  $3 \times 3$  actuando sobre vectores complejos de tres dimensiones. Así,  $SU(3)$  tiene  $3^2 - 1$  parámetros y por tanto tiene 8 generadores sin traza y hermitianos. Los generadores de la representación fundamental son  $F_i = \frac{1}{2}\lambda_i$ , donde  $\lambda_i$  son las matrices de Gell-Mann

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} & & (1.44)
 \end{aligned}$$

Es importante notar que  $\lambda_3$  y  $\lambda_8$  son matrices diagonales. Además, las matrices  $\lambda_{1,2,3}$  proveen un subgrupo  $SU(2)$ . Estas matrices  $\lambda$  satisfacen las siguientes propiedades de conmutación y anticonmutación

$$[\lambda_j, \lambda_k] = 2if_{jkl}\lambda_l, \quad (1.45)$$

$$\{\lambda_j, \lambda_k\} = 2d_{jkl}\lambda_l + \frac{4}{3}\delta_{ij}\mathbb{I}, \quad (1.46)$$

donde los coeficientes  $f_{jkl}$  son completamente antisimétricos (constantes de estructura del álgebra de Lie), mientras los  $d_{jkl}$  son completamente simétricos.

Los valores de las constantes de estructura son

$$\begin{aligned}
 f_{123} &= 1 \\
 f_{147} &= -f_{156} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = -f_{367} = \frac{1}{2} \\
 f_{458} &= f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}.
 \end{aligned} \tag{1.47}$$

Las constantes de estructura  $f_{jkl}$  para la base del grupo, al cumplir la relación  $[\lambda_j, \lambda_k] = 2if_{jkl}\lambda_l$ , no es trivial obtenerlas. Por ejemplo, dado que las primeras tres  $F_i$ 's forman un subgrupo de  $SU(2)$ , entonces  $f_{jkl} = \epsilon_{jkl}$  cuando todos los índices son  $\leq 3$ , y  $f_{jkl} = 0$  cuando  $j, k \leq 3, l > 3$ . También es importante notar que  $F_4, F_5$  y  $\frac{1}{2}(\sqrt{3}F_8 + F_3)$  forman una base canónica de  $SU(2)$ , del mismo modo que lo hacen  $F_6, F_7$  y  $\frac{1}{2}(\sqrt{3}F_8 - F_3)$ . Entonces se tiene  $f_{458} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ ,  $f_{453} = \frac{1}{2}$ ,  $f_{678} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ ,  $f_{673} = -\frac{1}{2}$ . Finalmente, como  $[\lambda_1, \lambda_4] = i\lambda_7$ , implica que  $f_{147} = \frac{1}{2}$ , y análogamente  $f_{246} = f_{257} = \frac{1}{2}$ ,  $f_{156} = -\frac{1}{2}$ . Las demás constantes se obtienen por antisimetría total o son exactamente cero.

Por otro lado, las constantes completamente simétricas tienen los valores

$$\begin{aligned}
 d_{118} &= d_{228} = d_{338} = -d_{888} = \frac{1}{\sqrt{3}} \\
 d_{448} &= d_{558} = d_{668} = d_{778} = -\frac{1}{2\sqrt{3}} \\
 d_{146} &= d_{157} = -d_{247} = d_{256} = d_{344} = d_{355} = -d_{366} = -d_{377} = \frac{1}{2}.
 \end{aligned} \tag{1.48}$$

Además, los generadores  $F_i$  satisfacen

$$[F_j, F_k] = if_{jkl}F_l. \tag{1.49}$$

Nótese que solo puede haber dos matrices  $3 \times 3$  hermitianas independientes diagonales sin traza:  $\lambda_3$  y  $\lambda_8$ . Estos son los generadores conmutantes que contienen un subálgebra de Cartan, esto implica que existen dos observables simultáneos, por lo que se puede etiquetar a los estados con los eigenvalores de  $F_3$  y  $F_8$ .

Se define el isospín  $I_3 = F_3$  y la hipercarga  $Y = \frac{2}{\sqrt{3}}F_8$ . Por otra parte, los pesos se identifican a partir de estas matrices diagonales

$$I_3 = \begin{pmatrix} +\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} +\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & +\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}. \quad (1.50)$$

Además se definen operadores de escalera que se mueven entre los diferentes estados de isospín, que en  $SU(3)$  son tres puntos en el plano

$$I_{\pm} = \frac{\lambda_1 \pm i\lambda_2}{2}, \quad U_{\pm} = \frac{\lambda_6 \pm i\lambda_7}{2}, \quad V_{\pm} = \frac{\lambda_4 \pm i\lambda_5}{2}, \quad (1.51)$$

los cuales no son independientes.

### 1.4.1. Quarks y $SU(3)$

Como una base para la representación fundamental de  $SU(3)$ , se etiqueta con los nombres de los quarks a los eigenestados de  $\lambda_3$  y  $\lambda_8$ .

$$|u\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |d\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |s\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (1.52)$$

cuyos eigenvalores son

$$\begin{aligned} \lambda_3|u\rangle &= |u\rangle, & \lambda_8|u\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}|u\rangle, \\ \lambda_3|d\rangle &= -|d\rangle, & \lambda_8|d\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}|d\rangle, \\ \lambda_3|s\rangle &= 0, & \lambda_8|s\rangle &= -\frac{2}{\sqrt{3}}|s\rangle, \end{aligned} \quad (1.53)$$

y sus pesos se muestran en la tabla 1.3. Los operadores de escalera definidos en

sabor	$I_3$	$Y$
$u$	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{3}$
$d$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{3}$
$s$	$0$	$-\frac{2}{3}$

**Tabla 1.3.:** Isospín e hipercarga de los quarks de  $SU(3)$ .

la ecuación (1.51) se mueven entre los diferentes eigenestados. Por ejemplo, el operador  $I_+$  actuando sobre el eigenestado  $|d\rangle$

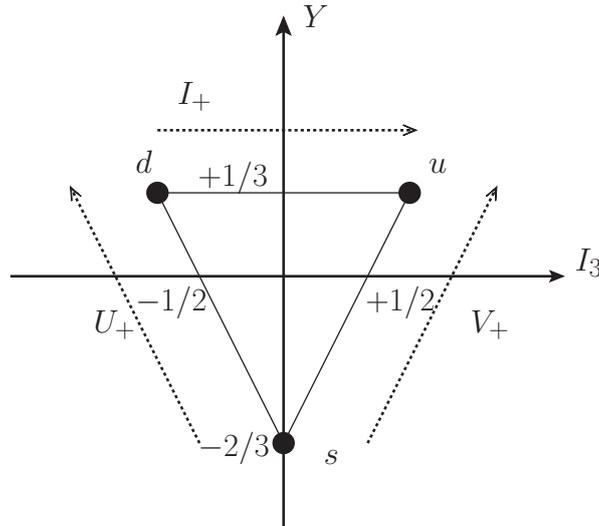
$$I_+|d\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = |u\rangle, \quad (1.54)$$

ó  $U_+$  actuando sobre  $|s\rangle$

$$U_+|s\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |d\rangle. \quad (1.55)$$

La forma en que estos operadores actúan sobre los diferentes eigenestados se puede escribir en forma diagramática mediante un diagrama de peso, como se muestra en la figura 1.5. Esto simplifica la representación fundamental de  $SU(3)$  como un triplete **3**. Los antiquarks correspondientes tiene los números cuánticos aditivos con el signo opuesto de los quarks de la tabla 1.4 y su diagrama en el espacio de isospín se muestra en la figura 1.6.

Es importante mencionar que de manera análoga a  $SU(2)$ , los antiquarks en  $SU(3)$  también obedecen las mismas reglas de transformación que **3**. Para verlo



**Figura 1.5.:** Plano de hipercarga de isospín para los quarks de  $SU(3)$ . Se muestra la acción de los operadores escalera; los operadores con  $-$  tienen el efecto contrario.

se elige una base en el espacio anti-triplete  $\bar{3}$  como

$$|\bar{u}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\bar{d}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\bar{s}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (1.56)$$

los cuales tienen la misma forma que el triplete de quarks de la ecuación (1.52). Pero hay que notar que debe haber una forma de distinguirlos de este. Para ello, los generadores en la representación conjugada son

$$\bar{F}_i = \frac{1}{2} \bar{\lambda}_i. \quad (1.57)$$

Como los quarks y antiquarks tienen los números cuánticos invertidos pero el mismo estado, entonces los generadores que representan a los eigenestados son

$$\bar{\lambda}_3 = -\lambda_3, \quad \bar{\lambda}_8 = -\lambda_8. \quad (1.58)$$

Como en el caso de  $SU(2)$ , las antipartículas se comportan como el complejo conjugado. Así el resto de las matrices se obtienen a partir del álgebra de  $SU(3)$  como el negativo del complejo conjugado

$$\bar{\lambda}_i = -(\lambda_i)^T = -\lambda_i^*. \quad (1.59)$$

Y de esta manera, la representación del antitriplete  $\bar{\mathbf{3}}$  los generadores son

$$T_3 = \frac{1}{2}\bar{\lambda}_3 = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.60)$$

y los operadores de escalera son

$$\bar{I}_\pm = \frac{\bar{\lambda}_1 \pm i\bar{\lambda}_2}{2}, \quad \bar{U}_\pm = \frac{\bar{\lambda}_6 \pm i\bar{\lambda}_7}{2}, \quad \bar{V}_\pm = \frac{\bar{\lambda}_4 \pm i\bar{\lambda}_5}{2}, \quad (1.61)$$

por ejemplo

$$\bar{I}_+ = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad I_- = - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.62)$$

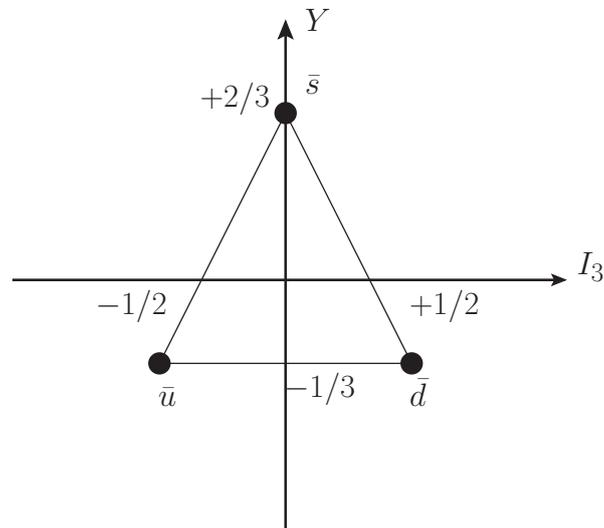
Al actuar sobre los elementos de  $\bar{\mathbf{3}}$

$$T_3|\bar{u}\rangle = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}|u\rangle, \quad (1.63)$$

y de manera análoga

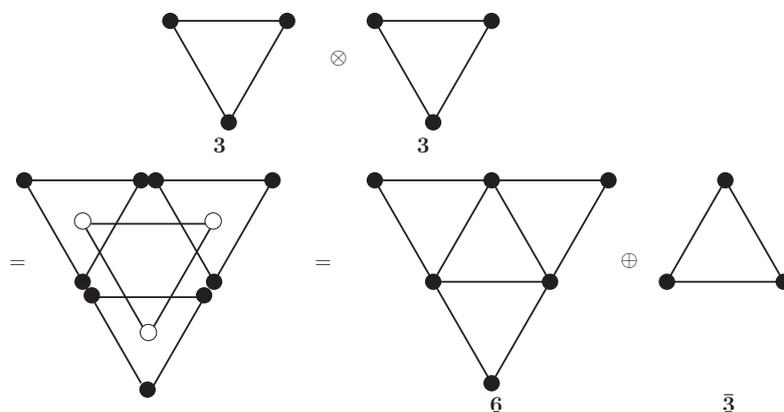
$$T_3|\bar{d}\rangle = \frac{1}{2}|\bar{d}\rangle, \quad \bar{I}_+|\bar{u}\rangle = -|\bar{d}\rangle \quad \bar{I}_-|\bar{d}\rangle = -|\bar{u}\rangle. \quad (1.64)$$

Los antiquarks serán necesarios para formar mesones en la sección siguiente. Para identificar los estados y multipletes al combinar quarks y antiquarks se



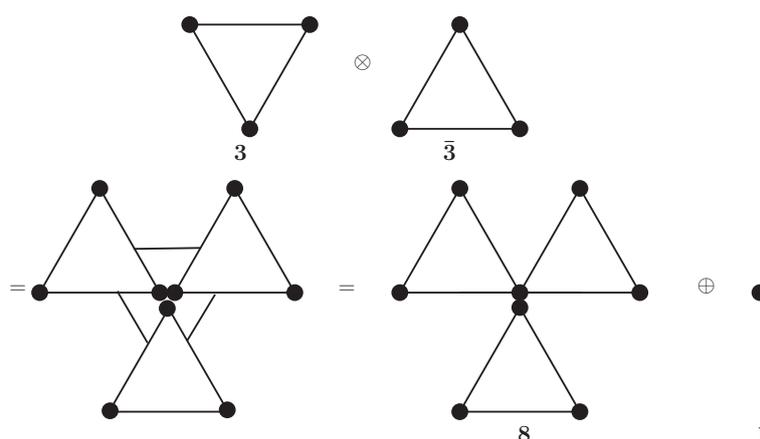
**Figura 1.6.:** Plano de hipercarga de isospín para los antiquarks de  $SU(3)$ . Se puede notar que los números cuánticos están invertidos respecto a la figura 1.5.

añade un diagrama a los vértices del triplete anterior. Por ejemplo, la combinación de dos quarks se muestra en la figura 1.7. De manera análoga, la figura 1.8



**Figura 1.7.:** Producto de dos quarks. Para notar la descomposición  $3 \otimes 3 = 6 \oplus \bar{3}$ , se añade un segundo diagrama a cada vértice del primero, luego se separan donde quedan dos vértices juntos.

muestra el producto de un quark por un antiquark. En la siguiente sección se usarán estas herramientas para construir mesones y bariones.



**Figura 1.8.:** Producto quark-antiquark. Para notar la descomposición  $\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{8} \oplus \mathbf{1}$ , se añade un segundo diagrama a cada vértice del primero, luego se separan donde quedan vértices juntos.

### 1.4.2. Mesones

En el modelo de quarks, los mesones se construyen a partir de estados quark-antiquark cuyos multipletes se obtienen al combinar  $\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{8} \oplus \mathbf{1}$ . El espín total de los mesones es  $J = L + S$ , donde  $S = 0, 1$ . La tabla 1.4 muestra los números cuánticos principales de los quarks de  $SU(3)$ . Estos son de suma importancia para entender las propiedades de las partículas compuestas por diferentes combinaciones de quarks debido a que son aditivos (el resultado final es la suma de las partes). El modelo de quarks original de Gell-Mann se ordena a los quarks (y antiquarks) en términos de su carga  $Q$  y extrañeza  $S$  como se muestra en la figura 1.9. En base a la figura 1.8 se construye un octete de mesones

Quark	Spin	$B$	$Q$	$I_3$	$S$	$Y$
$u$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{3}$
$d$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{3}$
$s$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	-1	$-\frac{2}{3}$

**Tabla 1.4.:** Números cuánticos de los quarks.  $B$  es número bariónico,  $Q$  la carga total,  $S$  la extrañeza y  $Y = B + S$ ,  $Q = I_3 + Y/2$ . Los antiquarks poseen número cuántico opuesto.

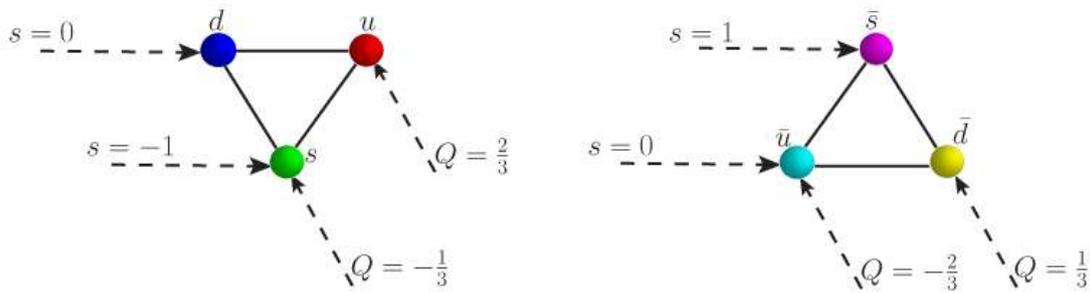


Figura 1.9.: Triplete de quarks y antiquarks en términos de su carga y extrañeza.

como se ve en la figura 1.10. La tabla 1.5 muestra los componentes en términos

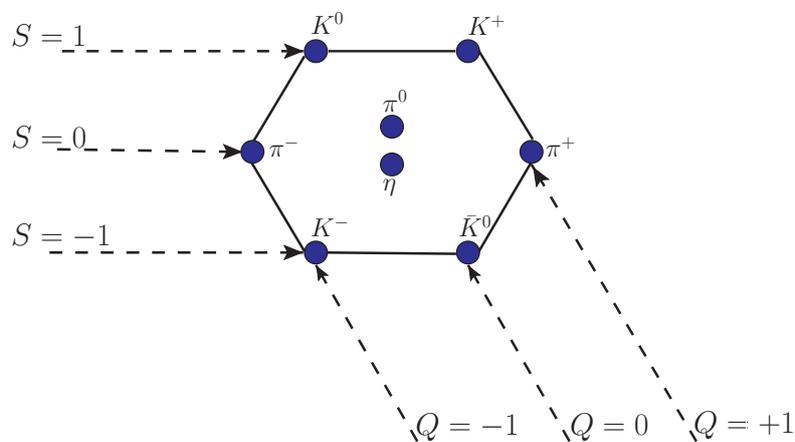


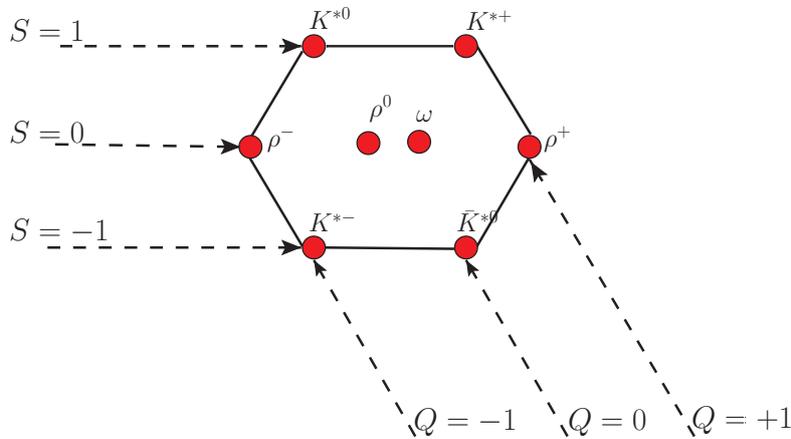
Figura 1.10.: Octete de mesones pseudoescalares. En la figura no se incluye al mesón  $\eta'$  que corresponde al singlete  $U(1)$  de la figura 1.8.

de quarks para cada partícula de la figura 1.8. Es importante mencionar que  $\eta$  y  $\eta'$  tienen los mismos números cuánticos, esto es  $I = I_3 = S = B = Y = Q = 0$ , aunque tienen diferentes función de onda de sabor en  $SU(3)$ ; uno transforma como **8** y otro como **1**.

Las partículas hasta ahora mencionadas en esta sección son mesones pseudoescalares con  $J = 0$ , las cuales corresponden a un estado de espín  $\frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)$ . Pero existen otro conjunto de partículas más pesadas, se conocen como mesones vectoriales con  $J = 1$  y estados de espín  $\uparrow\uparrow$  ó  $\downarrow\downarrow$ , estos se representan en la figura 1.11.

	$S = -1$	$S = 0$	$S = +1$
Octete	$K^- = s\bar{u}$	$\pi^- = -d\bar{u}$	$K^0 = d\bar{s}$
	$\bar{K}^0 = s\bar{d}$	$\pi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(d\bar{d} - u\bar{u})$	$K^+ = u\bar{s}$
		$\pi^+ = u\bar{d}$	
		$\eta = \frac{1}{\sqrt{6}}(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s})$	
Singlete		$\eta' = \frac{1}{\sqrt{6}}(u\bar{u} + d\bar{d} + 2s\bar{s})$	

**Tabla 1.5.:** Partículas del nonete de mesones en términos de su extrañeza. Se separan las partículas del octete de mesones de la figura 1.10 y el singlete formado por  $\eta'$ .

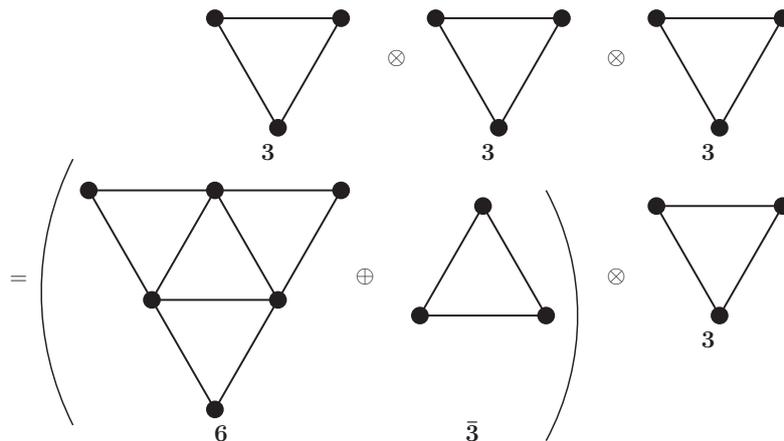


**Figura 1.11.:** Octete de mesones vectoriales. En la figura no se incluye al mesón  $\phi$  que corresponde al singlete  $U(1)$  de la figura 1.8.

### 1.4.3. Bariones

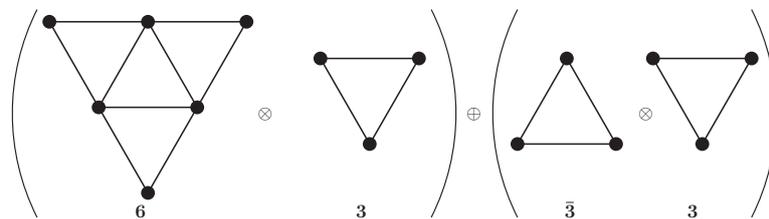
Antes de comenzar a estudiar los bariones en  $SU(3)$ , es importante saber cómo obtener la representación irreducible de  $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3}$ . Como las operaciones de grupo son asociativas, en la figura 1.7 se muestra que  $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{6} \oplus \bar{\mathbf{3}}$ . Entonces la representación irreducible para el producto de tres quarks se puede escribir como  $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = (\mathbf{6} \oplus \bar{\mathbf{3}}) \otimes \mathbf{3}$  como se muestra en la figura 1.12.

Entonces, en la figura 1.13 se muestra cómo se distribuye el producto interno de la figura 1.12. Es importante mencionar que el producto  $\bar{\mathbf{3}} \oplus \mathbf{3}$  que aparece del



**Figura 1.12.:** Combinación de tres quarks tomando en cuenta la asociatividad de las operaciones del grupo. El producto  $3 \otimes 3$  de los dos quarks del lado izquierdo se separa como  $6 \oplus \bar{3}$  como se ve en la figura 1.7

lado derecho de la imagen es el mismo que en la figura 1.8, por lo que solo se muestra el producto  $6 \oplus 3$ . Para ello, en la figura del sextete se añade el triplete en cada vértice del triángulo, resultando en un decuplete más un octete como muestra la figura 1.14



**Figura 1.13.:** Combinación de tres quarks tomando en cuenta la asociatividad de las operaciones del grupo. El producto  $3 \otimes 3$  de los dos quarks del lado izquierdo se separa como  $6 \oplus \bar{3}$  como se ve en la figura 1.7.

Así se tiene que el producto de tres quarks  $3 \otimes 3 \otimes 3 = 10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1$  como muestra la figura 1.15

El siguiente paso es formar los estados de quarks de esas partículas. Gell-Mann los ordenó de acuerdo a su extrañeza y su carga en un decuplete y un octete como se observa en las figuras 1.16-1.17. Pero surge una pregunta: ¿cuál es la composición en quarks de estas partículas? Para ello nótese primero que

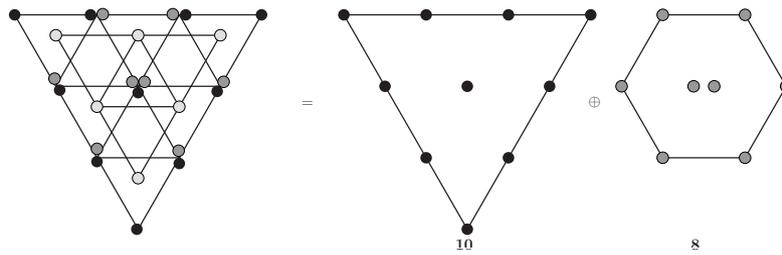


Figura 1.14.: Producto interno  $6 \otimes 3$  el cual se separa en un decuplete más un octete  $10 \oplus 8$ .

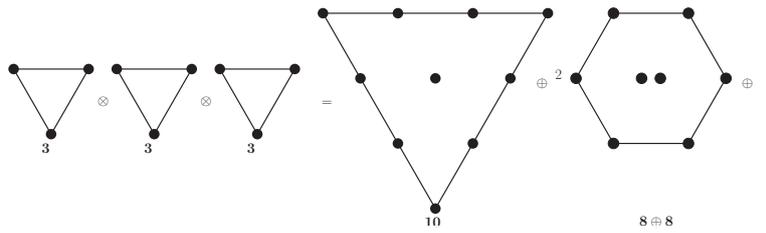


Figura 1.15.: Producto interno  $3 \otimes 3 \otimes 3$  el cual se separa en un decuplete, dos octetes y un singlete  $10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1$ .

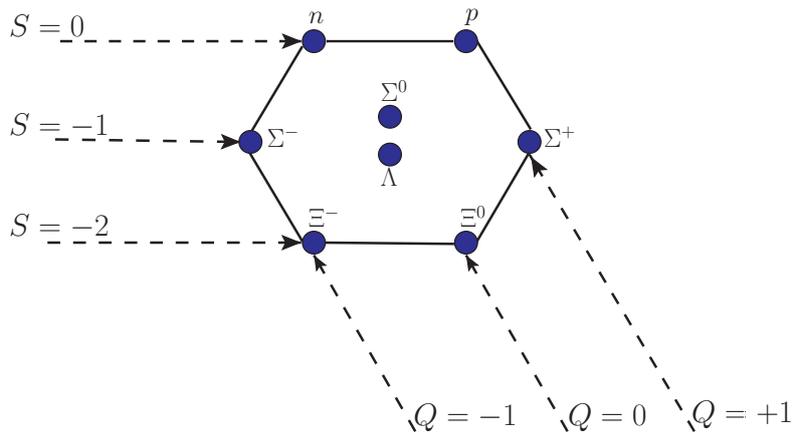
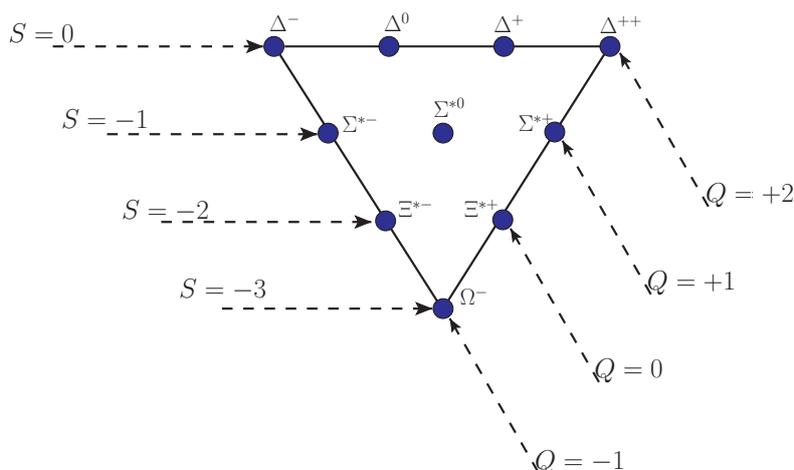


Figura 1.16.: Octete de bariones de Gell-Mann ordenados de acuerdo a su carga y extrañeza.

el decuplete de bariones corresponde a estados completamente simétricos, los octetes a estados con simetría mixta y el singlete es un estado completamente antisimétrico. Para formarlos nuevamente se parte del estado base  $uuu$  y se aplican los operadores de descenso en la ecuación (1.51) del mismo modo como



**Figura 1.17.:** Decuplete de bariones de Gell-Mann ordenados de acuerdo a su carga y extrañeza.

se hizo para  $SU(2)$ , aunque en esta ocasión se tiene un tercer quark y dos operadores extra. Los estados de tres quarks del decuplete y singlete de bariones se muestran en la tabla 1.6 y los estados con simetría mixta en la tabla 1.7.

Es importante recalcar que a partir de las funciones de onda de la tabla 1.7 no es posible identificar a que bariones del octete que muestra la figura 1.16 corresponden a cada función. Para identificarlos correctamente se debe introducir el concepto de *color* de las partículas. La idea del color surge como una forma para *arreglar* al modelo de quarks ya que, por ejemplo, el estado  $uuu$  tiene tres partículas idénticas con los mismos números cuánticos, por lo que se viola el principio de exclusión de Pauli. Entonces se añade otro número cuántico al que se denomina color por su similitud con los colores reales. En el modelo de quarks, cada partícula puede venir en tres colores distintos; rojo, verde o azul ( $rgb$ ), y cada hadrón debe tener un color neutro: un mesón es la combinación de un quark de un color con un antiquark del anticolor del quark. Un barión tiene un quark de cada color, y la combinación de los tres colores da un color neutro.

En lenguaje moderno, se dice que los tres colores generan una simetría  $SU(3)$  de color, que a diferencia de la simetría  $SU(3)$  de sabor, es exacta. Así, al poner

Decuplete	Barión	Estado
	$\Delta^{++}$	$uuu$
	$\Delta^+$	$\frac{1}{\sqrt{3}}(uud + udu + duu)$
	$\Delta^0$	$\frac{1}{\sqrt{3}}(ddu + dud + udd)$
	$\Delta^-$	$ddd$
	$\Sigma^{*+}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}(uus + usu + suu)$
	$\Sigma^{*0}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}(uds + usd + dus + dsu + sud + sdu)$
	$\Sigma^{*-}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}(dds + dsd + sdd)$
	$\Xi^{*0}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}(uss + sus + ssu)$
	$\Xi^{*-}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}(dss + sds + ssd)$
	$\Omega^-$	$sss$
Antisimétrico	$\Lambda^-$	$\frac{1}{\sqrt{6}}(uds - usd + dsu - dus + sud - sdu)$

**Tabla 1.6.:** Bariones del modelo de quarks. Se muestran los estados completamente simétricos y el estado completamente antisimétrico, aunque este último no puede formar un hadrón debido a la simetría de la función de onda que se verá más adelante.

tres colores se tiene un decuplete, dos octetes y un singlete de color. Además, el hecho de que los bariones son de color neutro indica que éstos son singletes de color, elementos de la representación antisimétrica  $\mathbf{1}$  de  $SU(3)$  y la función de onda para todos es de la forma

$$|rgb\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(rgb - rbg + gbr - grb + brg - bgr). \quad (1.65)$$

Como la función de onda de color es antisimétrica, el resto de la función de onda  $\psi_{\text{sabor}}\psi_{\text{spin}}$  debe ser simétrico. La función de onda de espín es una simetría bajo  $SU(2)$  similar a la representación de isospín haciendo el cambio  $u \rightarrow \uparrow, d \rightarrow \downarrow$ , de esta forma se tienen las representaciones de espín para tres partículas que se muestra en la tabla 1.8.

De esta manera, los estados de bariones se forman como un producto simétrico de las funciones de onda de sabor y espín. Los bariones del decuplete se multiplican por la función de onda de espín con  $j = \frac{3}{2}$  y se tiene una función de onda para cada valor de  $m$ . Sin embargo, para formar la función de onda de los bariones del octete hay que notar que el producto de dos funciones antisimétricas es simétrico. Entonces, el producto de las funciones  $\psi_{12}(\text{sabor})\psi_{12}(\text{spin})$  es simétrico bajo el intercambio  $1 \leftrightarrow 2$ , lo mismo para los productos  $\psi_{13}(\text{sabor})\psi_{13}(\text{spin})$  y  $\psi_{23}(\text{sabor})\psi_{23}(\text{spin})$  bajo los intercambios  $1 \leftrightarrow 3$  y  $2 \leftrightarrow 3$  respectivamente. De esta forma la función de onda para los hadrones del octete de bariones es

$$\begin{aligned} \psi(\text{octete bariones}) = & \psi_{12}(\text{sabor})\psi_{12}(\text{spin}) + \psi_{13}(\text{sabor})\psi_{13}(\text{spin}) \\ & + \psi_{23}(\text{sabor})\psi_{23}(\text{spin}). \end{aligned} \quad (1.66)$$

Por ejemplo, para formar la función de onda del protón con espín arriba

$$\begin{aligned} \left| p; \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle = & N \left\{ \frac{1}{2}(\uparrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow)(udu - duu) + \frac{1}{2}(\uparrow\uparrow\downarrow - \uparrow\downarrow\uparrow)(uud - udu) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2}(\uparrow\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\uparrow)(uud - duu) \right\} = \frac{N}{2} \{ uud(2\uparrow\uparrow\downarrow - \uparrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow) \\ & + udu(2\uparrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow - \uparrow\uparrow\downarrow) + duu(2\downarrow\uparrow\uparrow - \uparrow\downarrow\uparrow - \uparrow\uparrow\downarrow) \} \\ = & \frac{N}{2} (2(u^\uparrow u^\uparrow d_\downarrow + u^\uparrow d_\downarrow u^\uparrow + d_\downarrow u^\uparrow u^\uparrow) \\ & - (u^\uparrow u_\downarrow d^\uparrow + d^\uparrow u_\downarrow u^\uparrow + u_\downarrow d^\uparrow u^\uparrow) \\ & - (u_\downarrow u^\uparrow d^\uparrow + d^\uparrow u^\uparrow u_\downarrow + u^\uparrow d^\uparrow u_\downarrow)), \end{aligned} \quad (1.67)$$

donde se encuentra que el factor de normalización es  $N = \frac{\sqrt{2}}{3}$ . El resto de bariones encuentran de manera análoga. El resto de las funciones de onda se puede ver en [39].

#### 1.4.4. Masas y Rompimiento de Simetría

El éxito del modelo de quarks se basó principalmente en el descubrimiento de una nueva partícula ( $\Omega^-$ ) y la predicción de su masa y momento magnético.

Antes de mostrar la forma en que se calculan las masas dentro del modelo de quarks, la tabla 1.9 muestra las masas de los bariones del octete y decuplete de bariones.

Para calcular la masa de los hadrones primero se afirma que en el caso de que los tres quarks que los forman ( $u, d, s$ ) tuvieran la misma masa, entonces todas las masas serían iguales. Pero la simetría se rompe ya que la partícula de singlete ( $s$ ) es más pesada que la del doblete ( $u, d$ ). Se considera que la masa promedio de un barión se calcula con la relación [2]

$$M_{abc} = M_a + M_b + M_c - E_{ab} - E_{ac} - E_{bc}, \quad (1.68)$$

donde  $a, b, c$  corresponden a la composición de quarks del barion,  $M_i$  corresponde a la masa constituyente del quark y  $E_{ij}$  a la energía de enlace entre los quarks  $i$  y  $j$ . Una primera aproximación consiste en suponer que la energía de enlace es igual para todos los sabores de quarks. Por lo tanto, para el octete de bariones, se encuentran las relaciones

$$M(\Lambda) \approx M(\Sigma), \quad (M(\Sigma) + M(\Lambda))/2 \approx (M(\Xi) + M(N))/2, \quad (1.69)$$

donde, en la segunda expresión, se espera que las masas de  $\Lambda$  y  $\Sigma$  sean un poco diferentes debido a que están enlazadas de diferentes maneras. Ahora, si se asume una simetría de isospín ( $m_u = m_d$ ), se encuentra que la diferencia de masas entre las con la misma extrañeza se debe únicamente a la diferencia de las masas de los quarks constituyentes. Las masas de los bariones en términos de sus quarks constituyentes son

$$\begin{aligned} M_N &= m_0 + 3m_u, & M_\Xi &= m_0 + m_u + 2m_s, \\ M_\Sigma &= m_0 + 2m_u + m_s, & M_\Delta &= m_0 + 2m_u + m_s, \end{aligned} \quad (1.70)$$

donde se ha escrito a la energía de enlace total como  $m_0$ . De estas relaciones se obtiene

$$\frac{1}{2}[M_\Sigma + 3M_\Lambda] = M_N + M_\Xi, \quad (1.71)$$

que es la fórmula de masa de Gell-Mann-Okubo. Se toma  $m_N = 940$ ,  $m_\Sigma = 1190$  y  $m_\Xi = 1320$ , en MeV, donde  $m_\Sigma$  es la masa promedio de  $\Sigma^-$ ,  $\Sigma^0$  y  $\Sigma^+$  y así se predice una masa de  $m_\Lambda = 1110$  MeV, siendo el valor experimental igual a 1115 MeV.

Para los bariones en el decuplete se tienen las siguientes relaciones de masa

$$M_\Omega - M_{\Xi^*} = M_{\Xi^*} - M_{\Sigma^*} = M_{\Sigma^*} - M_{N^*}, \quad (1.72)$$

la cual fue usada por Gell-Mann para predecir la existencia, naturaleza y masa del barión  $\Omega$ , recibiendo por ello el premio Nobel en 1969.

Por otro lado, en el modelo de quarks se calculan también las masas de los mesones. La tabla 1.10 muestra las masas de los mesones pseudoescalares y vectoriales del modelo de quarks.

Para el caso de los mesones se considera una relación cuadrática en las masas similar a la ecuación (1.68)

$$M_{ab}^2 = M_a^2 + M_b^2 - E_{ab}, \quad (1.73)$$

donde  $M_{ab}$  es la masa del mesón formado por los quarks  $a$  y  $b$ ,  $M_i$  la masa de los quarks constituyentes y  $E_{ab}$  la energía de enlace. Considerando simetría de isospín se tiene que la masa de los mesones es

$$\begin{aligned} M_\pi^2 &= m_0 + 2M_u^2, \\ M_K^2 &= m_0 + M_u^2 + M_s^2, \\ M_\eta^2 &= m_0 + \frac{2}{3}(M_u^2 + 2M_s^2), \end{aligned} \quad (1.74)$$

y se encuentra una relación similar a la de la ecuación (1.71)

$$4M_K^2 = M_\pi^2 + 3M_\eta^2, \quad (1.75)$$

la cual se cumple con un error cercano al 8%. ¿Por qué se toman las masas cuadráticas de los mesones pseudoescalares? Esta pregunta está íntimamente conectada con el rompimiento dinámico de la simetría quiral, cuyos detalles veremos en uno de los capítulos posteriores. Por lo pronto basta saber que las masas cuadráticas dan una predicción mucho más cercana a los valores observados experimentalmente.

Con esto termina el estudio del modelo de quarks en  $SU(3)$ . En el siguiente capítulo se discute el modelo de quarks con sabores pesados.

Octete	Barión	Estado
Antisimétrico $1 \leftrightarrow 2$	$uud$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(ud - du)u$
	$ddu$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(ud - du)d$
	$uus$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(us - su)u$
	$dds$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(ds - sd)d$
	$uds$	$\frac{1}{2}[(us - su)d + (ds - sd)u]$
	$uds$	$\frac{1}{\sqrt{12}}[2(ud - du)s + (us - su)d - (ds - sd)u]$
	$uss$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(us - su)s$
	$dss$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(ds - sd)s$
Antisimétrico $2 \leftrightarrow 3$	$uud$	$\frac{1}{\sqrt{2}}u(ud - du)$
	$ddu$	$\frac{1}{\sqrt{2}}d(ud - du)$
	$uus$	$\frac{1}{\sqrt{2}}u(us - su)$
	$dds$	$\frac{1}{\sqrt{2}}d(ds - sd)$
	$uds$	$\frac{1}{2}[d(us - su) + u(ds - sd)]$
	$uds$	$\frac{1}{\sqrt{12}}[2s(ud - du) + d(us - su) - u(ds - sd)]$
	$uss$	$\frac{1}{\sqrt{2}}s(us - su)$
$dss$	$\frac{1}{\sqrt{2}}s(ds - sd)$	
Antisimétrico $1 \leftrightarrow 3$	$uud$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(uud - duu)$
	$ddu$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(udd - ddu)$
	$uus$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(uus - suu)$
	$dds$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(dds - sdd)$
	$uds$	$\frac{1}{2}[uds - sdu + dus - sud]$
	$uds$	$\frac{1}{\sqrt{12}}[2(USD - dsu) + uds - sdu - dus + sud]$
	$uss$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(uss - ssu)$
	$dss$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(dss - ssd)$

**Tabla 1.7.:** Estados con simetría mixta del octete de bariones. Se indican las antisimetrías bajo los intercambios  $1 \leftrightarrow 2$  y  $1 \leftrightarrow 3$ . Es importante mencionar que el estado antisimétrico  $2 \leftrightarrow 3$  no es independiente y se forma con la suma de los otros dos ( $\psi_{23} = \psi_{12} + \psi_{13}$ ).

Estado	$(j, m)$	Estado
Simétricos	$\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$	$\uparrow\uparrow\uparrow$
	$\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{3}}(\uparrow\uparrow\downarrow + \uparrow\downarrow\uparrow + \downarrow\uparrow\uparrow)$
	$\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{3}}(\downarrow\downarrow\uparrow + \downarrow\uparrow\downarrow + \uparrow\downarrow\downarrow)$
	$\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$	$\downarrow\downarrow\downarrow$
Simétricos	$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{6}}(2\uparrow\uparrow\downarrow - \uparrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow)$
$1 \leftrightarrow 2$	$\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{6}}(2\downarrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\downarrow - \uparrow\downarrow\downarrow)$
Antisimétricos	$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow) \uparrow$
$1 \leftrightarrow 2$	$\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\downarrow\uparrow - \uparrow\downarrow) \downarrow$

**Tabla 1.8.:** Estados de espín de tres partículas. Al ser una simetría de  $SU(2)$  los estados son los mismos que los de la simetría de isospín haciendo el cambio  $u \rightarrow \uparrow$ ,  $d \rightarrow \downarrow$ .

Barión	Composición	Masa en reposo
Octete		
$p$	$uud$	938.3
$n$	$udd$	939.6
$\Lambda^0$	$uds$	1115.6
$\Sigma^+$	$uus$	1189.4
$\Sigma^0$	$uds$	1192,5
$\Sigma^-$	$dds$	1197.3
$\Xi^0$	$uss$	1315
$\Xi^-$	$dss$	1321
Decuplete		
$\Delta^{++}$	$uuu$	1232
$\Delta^+$	$uud$	1232
$\Delta^0$	$udd$	1232
$\Delta^-$	$ddd$	1232
$\Sigma^{*+}$	$uus$	1382.8
$\Sigma^{*0}$	$uds$	1383.7
$\Sigma^{*-}$	$dds$	1387.2
$\Xi^{*0}$	$uss$	1531.8
$\Xi^{*-}$	$dss$	1535
$\Omega^-$	$sss$	1672.45

**Tabla 1.9.:** Masas del octete y decuplete de bariones. Nótese la similitud de las masas entre las partículas sobre el mismo eje horizontal en las figuras 1.16 y 1.17. Las masas están en  $MeV$ .

Mesón	Composición	Masa en reposo
Pseudoescalares		
$\pi^+$	$u\bar{d}$	139.57
$\pi^0$	$\frac{u\bar{u}-d\bar{d}}{2}$	134.97
$\pi^-$	$d\bar{u}$	139.57
$K^+$	$u\bar{s}$	493.67
$K^-$	$s\bar{u}$	493.67
$K^0$	$d\bar{s}$	497.61
$\bar{K}^0$	$s\bar{d}$	497.61
$\eta$	$\frac{u\bar{u}+d\bar{d}-2s\bar{s}}{6}$	547.86
$\eta'$	$\frac{u\bar{u}+d\bar{d}+s\bar{s}}{3}$	957.78
Vectoriales		
$\rho^+$	$u\bar{d}$	775.11
$\rho^0$	$\frac{u\bar{u}-d\bar{d}}{2}$	775.26
$\rho^-$	$d\bar{u}$	775.11
$\omega$	$\frac{u\bar{u}+d\bar{d}}{2}$	782.65
$K^{*+}$	$u\bar{s}$	891.66
$K^{*-}$	$s\bar{u}$	891.66
$K^{*0}$	$d\bar{s}$	895.81
$\bar{K}^{*0}$	$s\bar{d}$	895.81
$\phi$	$s\bar{s}$	1019.46

**Tabla 1.10.:** Masas de los nonetes de mesones pseudoescalar y vectorial. Nótese la similitud de las masas entre las partículas con la misma extrañeza. Las masas están en  $MeV$ .

## Capítulo 2.

# Charmonia y Bottomonia

«In 1969, John Iliopoulos and Luciano Maiani came to Harvard as research fellows. Together, we found the arguments that predicted the existence of charmed hadrons.»

— Sheldon Lee Glashow

En el modelo de quarks original todos estados ligados están conformados solamente por tres distintos sabores de quarks: *up*, *down* y *strange*. Hoy en día se conoce la existencia de tres sabores adicionales: *charm* (*c*), *bottom* (*b*) y *top* (*t*). Estos quarks tienen la particularidad de mucho más pesados que los primeros tres, y por ello su descubrimiento sucedió varios años después del nacimiento del modelo de quarks. El más ligero del conjunto de quarks pesados, el quark *charm*, fué el primero en descubrirse experimentalmente y con ello originar toda una avalancha de nuevas partículas formadas por estados ligados de este quark. Las primeras fueron mesones conformados por un par quark-antiquark  $c\bar{c}$ , que son denotados como charmonia. De manera análoga, los mesones formados por un par quark-antiquark  $b\bar{b}$  se denominan bottomonia. Al conjunto de mesones formados por un par quark-antiquark del mismo sabor se conoce como *quarkonia*. En este capítulo se presentan las herramientas para estudiar estados de *quarkonia* desde un enfoque con el modelo de quarks. Para lograr esta tarea y por completes al capítulo anterior, primero se aprende a

calcular las representaciones irreducibles con el método de los diagramas de Young. Esta manera es mucho más sofisticada que el método gráfico empleado en el capítulo anterior y se incluye una buena cantidad de ejemplos bastante didácticos. Posteriormente, se presenta la una breve extensión al modelo de quarks con 4 y 5 quarks, además de ofrecer el algoritmo para extender las matrices de Gell-Mann a dimensiones mayores a 3. Finalmente, se presentan algunos modelos potenciales usados para estudiar estados ligados de quarks pesados y se muestran los modos de producción de estados de quarkonia.

## 2.1. Multiplicación de Estados mediante Diagramas de Young y Multiplicidad de $SU(n)$

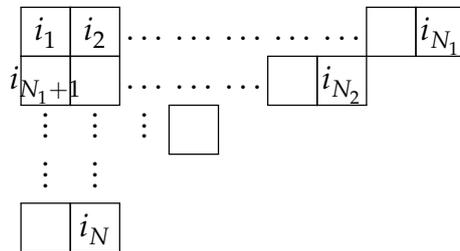
En el capítulo 1 se mostró la multiplicación de estados mediante diagramas triangulares en  $SU(2)$  y  $SU(3)$ , además de ver la separación en multipletes de manera gráfica. El método gráfico es útil para comprender como que funciona la separación en multipletes en  $SU(n)$  cuando  $n \leq 3$ . Sin embargo, para calcular la multiplicidad de productos de estados para  $n > 3$ , el método gráfico deja de ser útil y se convierte en embrollo total (por no mencionar que para  $n \geq 4$  solo se pueden graficar por secciones al no poder hacer dibujos en cuatro o más dimensiones), por lo conocer otras herramientas para realizar estos cálculos se vuelve crucial. Así se introduce el método de los diagramas de Young para generar los estados y sus multiplicidades de forma general.

Se considera una función de onda de dos partículas  $\psi_{ij}$ . Para generar estados simétricos se aplica el operador de simetrización  $S_{ij} = 1 + P_{ij}$  las veces que sea necesario, donde  $P_{ij}$  representa el intercambio de partículas  $i \leftrightarrow j$ . De manera análoga se crean estados antisimétricos con el operador de antisimetrización  $A_{ij} = 1 - P_{ij}$ . A través de la aplicación de estos operadores se pueden crear estados simétricos ( $S_{ij} = \frac{1}{2}(\psi_{ij} + \psi_{ji})$ ) ó antisimétricos ( $A_{ij} = \frac{1}{2}(\psi_{ij} - \psi_{ji})$ ). Dado que  $S_{ij}$  y  $A_{ij}$  no se pueden descomponer entonces forman una representación irreducible.

Los estados simetrizados y antisimetrizados se pueden generalizar a tensores, de esta forma se tiene la posibilidad de estados con simetría mixta y poder denotar a la base de la representación irreducible de  $SU(n)$  como tensores con una simetría definida. Para encontrar a esta representación irreducible se utilizan los diagramas de Young. Estos son una representación pictográfica de la permutación de  $N$  objetos como un conjunto de  $N$  cajas  $\square$  con un número que lo etiqueta. El ejemplo más sencillo, los tensores de rango dos, cuya simetrización  $S_{ud}$  de los índices  $u$  y  $d$  (ó  $i$  y  $j$ ) se representa por [40]  $\begin{bmatrix} u & d \end{bmatrix}$ ; mientras que la antisimetrización  $A_{ud}$  se representa por  $\begin{bmatrix} u \\ d \end{bmatrix}$ . Para tensores de rango tres, el tensor completamente simétrico  $S_{uds}$  se representa por  $\begin{bmatrix} u & d & s \end{bmatrix}$ , el totalmente antisimétrico por  $\begin{bmatrix} u \\ d \\ s \end{bmatrix}$ , y  $\begin{bmatrix} u & d \\ s \end{bmatrix}$  representa al tensor con simetría mixta

$$\psi_{ud;s} = \psi_{uds} + \psi_{dus} - \psi_{dsu} - \psi_{sdu} \tag{2.1}$$

Un diagrama de Young es un arreglo de  $N$  cajas colocadas en filas y columnas de tal manera que la longitud de las filas no aumenta cuando se lee de arriba a abajo, y la de las columnas no aumenta cuando se lee de izquierda a derecha

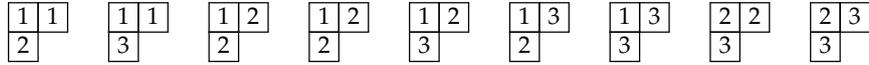


donde se cumple  $N_1 \geq N_2 \geq \dots$  y  $N_1 + N_2 + \dots = N$ . A cada caja se le asocia con un índice  $i_k = 1, 2, \dots, n$ , al mismo tiempo que al diagrama se le asocia el tensor

$$\psi_{i_1, i_2, \dots, i_{N_1}; i_{N_1+1}, \dots, i_{N_1+N_2}, \dots} \tag{2.2}$$

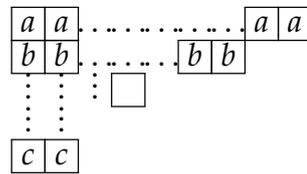
en el cual se deben cumplir que los números indexantes no deben decrecer cuando se leen de izquierda a derecha, y que dichos números deben incrementar yendo hacia abajo en las columnas. Por ejemplo, para un sistema de tres partícu-

las  $N = 3$  bajo  $SU(3)$ , se pueden reetiquetar los índices  $(u, d, s)$  como  $(1, 2, 3)$ . De esta forma se construyen ocho estados con simetría mixta



La combinación de multipletes se realiza tomando en cuenta que el resultado final cumpla las reglas para un diagrama de Young y tener una representación irreducible. Así, para encontrar la representación irreducible del producto de dos representaciones se siguen las siguientes reglas:

1. En el diagrama del primer factor se asigna un mismo símbolo a cada fila, evitando repetir el mismo símbolo entre filas.



2. Se adjuntan todas las cajas con la etiqueta  $a$  al diagrama del segundo factor en todas las formas posibles, asegurándose que no se repita en ninguna columna y que el resultado sea un diagrama de Young. Se repite el mismo proceso con las otras letras considerando de que cada columna no tenga más de  $n$  filas.
3. Después de que se hayan añadido todas las cajas al diagrama, los símbolos adjuntados se leen de derecha a izquierda en la primera fila, luego en la segunda, y así. En secuencia de símbolos  $aabbac \dots$ , a la izquierda de cada símbolo no hay menos  $a$  que  $b$ , y no menos  $b$  que  $c$ , etcétera.
4. Como el producto se realiza en  $SU(n)$ , en el resultado final se eliminan las columnas con  $n$  cuadros, dado a que pueden contraerse.

Se pueden conocer más detalles en [7,40]. Por ejemplo, la combinación de dos y tres partículas bajo  $SU(3)$

$$\begin{aligned}
 \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} &= \begin{array}{|c|c|} \hline & a \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline a \\ \hline \end{array} \\
 \begin{array}{|c|} \hline b \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} &= \begin{array}{|c|} \hline b \\ \hline \end{array} \otimes \left( \begin{array}{|c|c|} \hline & a \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline a \\ \hline \end{array} \right), \\
 &= \begin{array}{|c|c|c|} \hline & a & b \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline & a \\ \hline b \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline & b \\ \hline a \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline a \\ \hline b \\ \hline \end{array}.
 \end{aligned}$$

El ejemplo más ilustrativo está dado por el producto de dos estados con simetría mixta  $\begin{array}{|c|c|} \hline a & a \\ \hline b & \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array}$ , el cual se realiza siguiendo las reglas mencionadas anteriormente. Primero se toma una caja con  $a$  y se coloca en todos los lugares disponibles para tener un diagrama válido

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & a \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & a \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline a \\ \hline \end{array}.$$

Luego se toma otra caja con  $a$  y se pone en los anteriores, evitando tener dos  $a$  en la misma columna

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & a & a \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & a \\ \hline & & a \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & a \\ \hline & & \\ \hline a \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & a \\ \hline a \\ \hline \end{array}.$$

Ahora se coloca la caja con  $b$ , tomando en cuenta que el diagrama de Young siga siendo válido y no tenga más  $a$  (dos en este caso) a su izquierda

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & a & a \\ \hline & b & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & a & a \\ \hline & & & b \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & a \\ \hline & a & b \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & a \\ \hline & a & \\ \hline b \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & a \\ \hline & b & \\ \hline a \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline a & a \\ \hline a & b \\ \hline \end{array}.$$

Cuando los multipletes se combinan bajo  $SU(3)$ , se pueden contraer las columnas con 3 cajas, resultando así en (se omiten los índices que ayudaron al producto)

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array}.$$

En  $SU(n)$ , el diagrama de Young que representa a una antipartícula  $\bar{n}$  se representa por una columna de  $n - 1$  cajas, de tal modo que el producto  $n \otimes \bar{n}$

se tiene una representación identidad (columna de  $n$  cajas). Por ejemplo en  $SU(2)$  el conjugado  $\bar{2}$  se representa por una caja,  $\bar{3}$  por dos cajas verticales y así sucesivamente. Entonces, la combinación de un quark y un antiquark en  $SU(n)$  es

$$\square \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$$

Y de forma general, el estado conjugado se forma de tal forma que cuando se hace el producto con la representación fundamental se obtienen columnas llenas de tamaño  $n$ . Por ejemplo, en  $SU(3)$ ,  $\bar{6}$  se representa por  $\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$ , entonces el diagrama con dos columnas de tres filas que debe resultar después de multiplicarse por su conjugado es  $\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$ . De esta manera, el conjugado  $\bar{6}$  se representa por  $\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$ .

Ahora que se conoce la forma de combinar multipletes con diagramas de Young, es momento de calcular su multiplicidad. La multiplicidad es un cociente  $n/d$ , donde  $n$  es el numerador que para  $SU(n)$  se obtiene al insertar los números en la tabla:

$n$	$n+1$	$n+2$	$n+3$	$n+4$	$n+5$	$n+6$
$n-1$	$n$	$n+1$				
$n-2$						
$n-3$						

y se toma el producto de todos los números. Para el denominador  $d$ , el número que se escribe en cada caja es el número total de cajas a la derecha y hacia abajo más uno. Por ejemplo, en la tabla anterior

10	7	6	4	3	2	1
5	2	1				
2						
1						

se ejemplifican tres números mediante colores. Por ejemplo, en verde se muestran los siete cuadros involucrados en el número: 5 a la derecha, uno abajo y el cuadro mismo para un total de siete. En amarillo se muestra un cuadro que no tiene vecinos a la derecha ni abajo, solo se toma en cuenta el cuadro mismo. En color rosa se tiene un cuadro solo con un vecino abajo y con número dos. El denominador es el producto de todos los números. Para simplificar las expresiones se pueden tomar tanto numerador como denominador en una sola caja y calcular el producto de todas las cajas para encontrar la multiplicidad.

$\frac{n}{10}$	$\frac{n+1}{7}$	$\frac{n+2}{6}$	$\frac{n+3}{4}$	$\frac{n+4}{3}$	$\frac{n+5}{2}$	$\frac{n+6}{1}$
$\frac{n-1}{5}$	$\frac{n}{2}$	$\frac{n+1}{1}$				
$\frac{n-2}{2}$						
$\frac{n-3}{1}$						

Para ejemplificar, se muestra la multiplicidad de la combinación de un quark con un antiquark en  $SU(3)$

$$\begin{array}{c}
 \boxed{3} \otimes \boxed{3} = \begin{array}{c} \boxed{\frac{3}{3}} \\ \boxed{\frac{2}{2}} \\ \boxed{\frac{1}{1}} \end{array} \oplus \begin{array}{c} \boxed{\frac{3}{3}} \quad \boxed{\frac{4}{1}} \\ \boxed{\frac{2}{1}} \end{array} \\
 \mathbf{3 \otimes \bar{3} = 1 \oplus 8}
 \end{array}$$

El cual nos da un singlete más un octete; tal como se obtuvo con el método gráfico en la figura 1.8. Del mismo modo se calcula la multiplicidad para la combinación de tres quarks, primero se muestra para  $n = 3$

$$\begin{array}{c}
 \boxed{3} \otimes \boxed{3} \otimes \boxed{3} = \begin{array}{c} \boxed{\frac{3}{3}} \quad \boxed{\frac{4}{2}} \quad \boxed{\frac{5}{1}} \\ \oplus \begin{array}{c} \boxed{\frac{3}{3}} \quad \boxed{\frac{4}{1}} \\ \boxed{\frac{2}{1}} \end{array} \oplus \begin{array}{c} \boxed{\frac{3}{3}} \quad \boxed{\frac{4}{1}} \\ \boxed{\frac{2}{1}} \end{array} \oplus \begin{array}{c} \boxed{\frac{3}{3}} \\ \boxed{\frac{2}{2}} \\ \boxed{\frac{1}{1}} \end{array} \\
 \mathbf{3 \otimes 3 \otimes 3 = 10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1,}
 \end{array}$$

(2.3)

la cual es la misma multiplicidad que se encontró en la figura 1.15. A continuación se muestra el cálculo de las multiplicidades de la combinación quark-antiquark y tres quarks para  $n = 4, 5, 6$ . Para  $SU(4)$  las multiplicidades de los bariones y mesones es

$$\begin{array}{c}
 SU(4) \\
 \boxed{4} \otimes \boxed{4} \otimes \boxed{4} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \frac{4}{3} & \frac{5}{2} & \frac{6}{1} \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \frac{4}{3} & \frac{5}{1} \\ \hline \frac{3}{1} \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \frac{4}{3} & \frac{5}{1} \\ \hline \frac{3}{1} \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \frac{4}{3} \\ \hline \frac{3}{2} \\ \hline \frac{2}{1} \\ \hline \end{array} \\
 \\
 \mathbf{4 \otimes 4 \otimes 4 = 20 \oplus 20 \oplus 20 \oplus 4,} \tag{2.4}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \boxed{4} \otimes \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \frac{4}{4} \\ \hline \frac{3}{3} \\ \hline \frac{2}{2} \\ \hline \frac{1}{1} \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \frac{4}{4} & \frac{5}{1} \\ \hline \frac{3}{2} & \\ \hline \frac{2}{1} & \\ \hline \end{array} \\
 \\
 \mathbf{4 \otimes \bar{4} = 1 \oplus 15.} \tag{2.5}
 \end{array}$$

Para  $SU(5)$  las multiplicidades son

$$\begin{array}{c}
 SU(5) \\
 \boxed{5} \otimes \boxed{5} \otimes \boxed{5} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \frac{5}{3} & \frac{6}{2} & \frac{7}{1} \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \frac{5}{3} & \frac{6}{1} \\ \hline \frac{4}{1} \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \frac{5}{3} & \frac{6}{1} \\ \hline \frac{4}{1} \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \frac{5}{3} \\ \hline \frac{4}{2} \\ \hline \frac{3}{1} \\ \hline \end{array} \\
 \\
 \mathbf{5 \otimes 5 \otimes 5 = 35 \oplus 40 \oplus 40 \oplus 10,} \tag{2.6}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \boxed{5} \otimes \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline 4 \\ \hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \frac{5}{5} \\ \hline \frac{4}{4} \\ \hline \frac{3}{3} \\ \hline \frac{2}{2} \\ \hline \frac{1}{1} \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \frac{5}{5} & \frac{6}{1} \\ \hline \frac{4}{3} & \\ \hline \frac{3}{2} & \\ \hline \frac{2}{1} & \\ \hline \end{array} \\
 \\
 \mathbf{5 \otimes \bar{5} = 1 \oplus 24.} \tag{2.7}
 \end{array}$$

Y para  $SU(6)$

$$\begin{array}{c}
 SU(6) \\
 \begin{array}{c} \boxed{6} \otimes \boxed{6} \otimes \boxed{6} \end{array} = \begin{array}{c} \boxed{\frac{6}{3} \ \frac{7}{2} \ \frac{8}{1}} \oplus \begin{array}{c} \boxed{\frac{6}{3} \ \frac{7}{1}} \\ \boxed{\frac{5}{1}} \end{array} \oplus \begin{array}{c} \boxed{\frac{6}{3} \ \frac{7}{1}} \\ \boxed{\frac{5}{1}} \end{array} \oplus \begin{array}{c} \boxed{\frac{6}{3}} \\ \boxed{\frac{5}{2}} \\ \boxed{\frac{4}{1}} \end{array}
 \end{array}$$

$$\mathbf{6 \otimes 6 \otimes 6 = 56 \oplus 70 \oplus 70 \oplus 20,} \tag{2.8}$$

$$\begin{array}{c} \boxed{6} \otimes \begin{array}{c} \boxed{6} \\ \boxed{5} \\ \boxed{4} \\ \boxed{3} \\ \boxed{2} \end{array} = \begin{array}{c} \boxed{\frac{6}{6}} \\ \boxed{\frac{5}{5}} \\ \boxed{\frac{4}{4}} \\ \boxed{\frac{3}{3}} \\ \boxed{\frac{2}{2}} \\ \boxed{\frac{1}{1}} \end{array} \oplus \begin{array}{c} \boxed{\frac{6}{6} \ \frac{7}{1}} \\ \boxed{\frac{5}{4}} \\ \boxed{\frac{4}{3}} \\ \boxed{\frac{3}{2}} \\ \boxed{\frac{2}{1}} \end{array}
 \end{array}$$

$$\mathbf{6 \otimes \bar{6} = 1 \oplus 35.} \tag{2.9}$$

Los cuales son de utilidad para estudiar por ejemplo un modelo de quarks con 4, 5 y 6 quarks o teorías unificadas. Para terminar los ejemplos, la multiplicidad del producto de dos octetes en  $SU(3)$  es

$$\begin{aligned}
 \mathbf{8 \otimes 8} &= \begin{array}{c} \boxed{\phantom{0}} \ \boxed{\phantom{0}} \\ \boxed{\phantom{0}} \end{array} \otimes \begin{array}{c} \boxed{\phantom{0}} \ \boxed{\phantom{0}} \\ \boxed{\phantom{0}} \end{array} \\
 &= \begin{array}{c} \boxed{\frac{3}{5} \ \frac{4}{4} \ \frac{5}{2} \ \frac{6}{1}} \\ \boxed{\frac{2}{2} \ \frac{3}{1}} \end{array} \oplus \begin{array}{c} \boxed{\frac{3}{3} \ \frac{4}{2} \ \frac{5}{1}} \\ \boxed{\phantom{0}} \end{array} \oplus \begin{array}{c} \boxed{\frac{3}{4} \ \frac{4}{3} \ \frac{5}{2}} \\ \boxed{\frac{2}{3} \ \frac{3}{2} \ \frac{4}{1}} \end{array} \oplus \begin{array}{c} \boxed{\frac{3}{3} \ \frac{4}{1}} \\ \boxed{\frac{2}{1}} \end{array} \oplus \begin{array}{c} \boxed{\frac{3}{3} \ \frac{4}{1}} \\ \boxed{\frac{2}{1}} \end{array} \oplus \begin{array}{c} \boxed{\frac{3}{3}} \\ \boxed{\frac{2}{2}} \\ \boxed{\frac{1}{1}} \end{array} \\
 &= \mathbf{27 \oplus 10 \oplus \bar{10} \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1.} \tag{2.10}
 \end{aligned}$$

Ahora se tienen las herramientas para poder estudiar las extensiones al modelo de quarks con  $n$  sabores. En la siguiente sección se estudia para  $n = 4$

## 2.2. Extensión del Modelo de Quarks

En el capítulo 1 se estudió el modelo de quarks con los tres sabores de quarks que se conocían hasta 1964. Pero todo cambió con el descubrimiento del mesón  $J/\psi$ , el cual trajo consigo una oleada de nuevas partículas, las cuales sólo podían ser explicadas mediante el modelo de quarks si se agregaba un nuevo sabor al que se denominó *encanto* (*charm*). Con este nuevo sabor se cumplía además la simetría entre el número de leptones y sabores que había propuesto Glasgow, además de fortalecer al modelo de quarks como la teoría que describía correctamente a los hadrones. A continuación se describe brevemente la extensión al modelo de quarks para cuatro sabores.

### 2.2.1. El Encanto de $SU(4)$

Con la introducción del quark *charm* ( $c$ ), se agrega un nuevo número cuántico al que se denomina encanto  $C$ , donde  $C = 1$  para  $c$ ,  $C = 0$  para  $u, d$  y  $s$ . Otros números cuánticos como son el isospin;  $I_3 = 0$ , y la hipercarga  $Y = \frac{1}{3}$ . Donde además  $c$  es un singlete con respecto a  $SU(3)$ . Dado que ahora se tienen tres números cuánticos para describir a los quarks, entonces la simetría del grupo es de rango tres y la representación fundamental debe ser un cuartete, por lo que  $SU(4)$  tiene  $15(= 4^2 - 1)$  generadores de la forma  $F_i = \frac{1}{2}\lambda_i$ .

Con ayuda de los generadores de  $SU(3)$  de la ecuación (1.44) se pueden encontrar las quince matrices  $\lambda_i$ , las primeras ocho son un subconjunto que

contiene a  $SU(3)$

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. & & (2.11)
 \end{aligned}$$

El resto de las matrices se obtiene al desplazar los elementos no nulos hacia abajo y a la izquierda, del mismo modo en que se obtiene  $\lambda_4$  y  $\lambda_7$  para  $SU(3)$  a partir de  $SU(2)$ . De esta forma las matrices restantes son

$$\begin{aligned}
 \lambda_9 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_{10} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_{11} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 \lambda_{12} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_{13} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_{14} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix} & (2.12)
 \end{aligned}$$

y  $\lambda_{15}$  se construye en analogía con  $\lambda_8$ , esto es

$$\lambda_{15} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

El conjunto de matrices  $\lambda_1 - \lambda_{15}$  satisfacen las relaciones de conmutación de la ecuación (1.3). Las constantes de estructura se pueden ver en [41]. La base de la representación fundamental es una extensión natural de la de  $SU(3)$ , siendo para  $SU(4)$  el cuartete  $\mathbf{4}$

$$|u\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |d\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |s\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |c\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

También se extienden los operadores de escalera de isospin, los cuales para  $SU(4)$  son

$$\begin{aligned} I_{\pm} &= \frac{\lambda_1 \pm i\lambda_2}{2}, & U_{\pm} &= \frac{\lambda_6 \pm i\lambda_7}{2}, & V_{\pm} &= \frac{\lambda_4 \pm i\lambda_5}{2}, \\ X_{\pm}^{uc} &= \frac{\lambda_9 \pm i\lambda_{10}}{2}, & X_{\pm}^{dc} &= \frac{\lambda_{11} \pm i\lambda_{12}}{2}, & X_{\pm}^{sc} &= \frac{\lambda_{13} \pm i\lambda_{14}}{2}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

donde los primeros tres operadores de la ecuación (2.15) corresponden a los operadores de  $SU(3)$  mostrados en la ecuación (1.51). La hipercarga  $Y$  ahora se define con la ayuda de la matriz diagonal  $F_{15}$

$$Y = \frac{2}{\sqrt{3}}F_8 + \frac{1}{12} \left( \mathbb{I} - 2\sqrt{6}F_{15} \right), \quad (2.16)$$

con la cual se tiene  $Y = \frac{1}{3}$  para el quark *charm*. La carga  $Q$  se define por

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}(B + S + C). \quad (2.17)$$

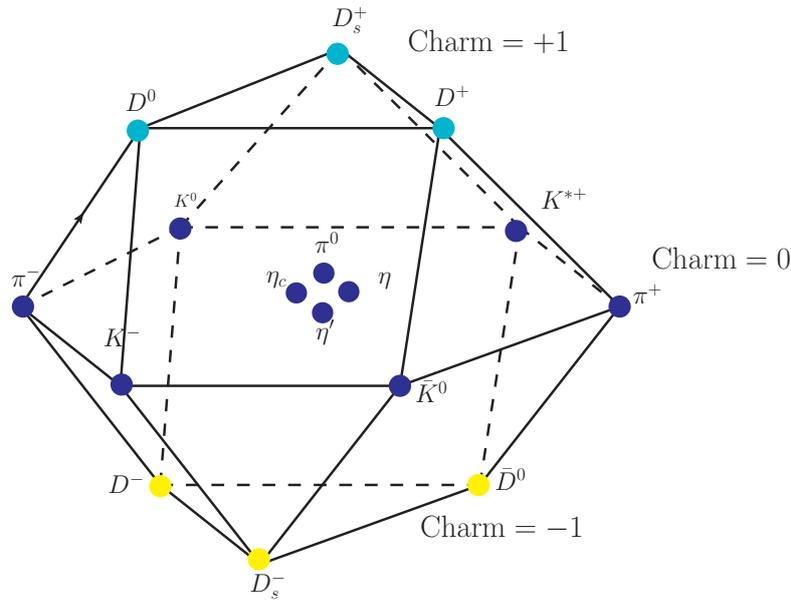
En la tabla 2.1 se muestran los números cuánticos de los quarks en  $SU(4)$  La

Quark	Spin	$B$	$Q$	$I_3$	$S$	$Y$	$C$
$u$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{3}$	0
$d$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{3}$	0
$s$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	-1	$-\frac{2}{3}$	0
$c$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	1

**Tabla 2.1.:** Números cuánticos de los quarks de  $SU(4)$ .  $B$  es número bariónico,  $Q$  la carga total,  $S$  la extrañeza y  $C$ , el encanto. La hipercarga y la carga vienen dadas por las ecuaciones 2.16 y 2.17 respectivamente. Los antiquarks poseen los números cuánticos opuestos.

combinación de multipletes en  $SU(4)$  se mostró en la sección previa y se encontró que los bariones en  $SU(4)$  se separan en los multipletes dados por la ecuación (2.4), mientras que los mesones por la ecuación (2.5). En la figura 2.1 se muestra el dieciseiete de mesones en términos de su encanto. Por otro lado, las figuras 2.2, 2.3 y 2.4 muestran diagramáticamente la representación fundamental de los elementos de los multipletes  $4 \otimes 4 \otimes 4$ . Es importante mencionar que las funciones de onda de sabor se construyen de manera análoga. La construcción de estados para mesones y bariones de  $SU(4)$  es análogo al mostrado en las tablas 1.5, 1.6 y 1.7. La combinatoria es idéntica salvo que con el quark adicional  $c$  se tienen mayor cantidad de hadrones como se observa en las figuras 2.2, 2.3 y 2.4. En la tabla 2.2 se muestra la masa de mesones con encanto.

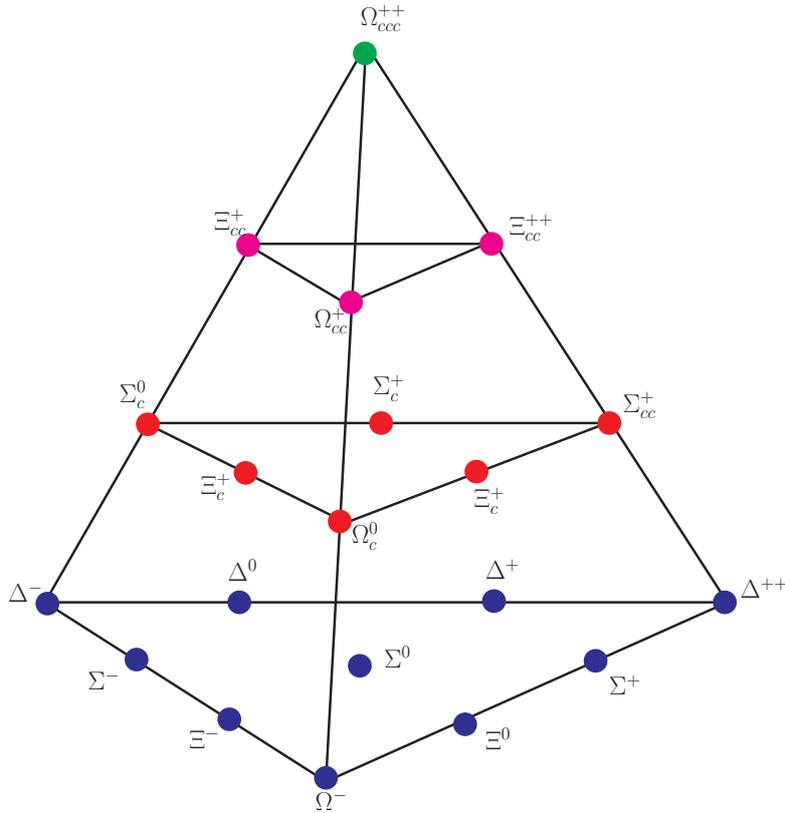
Del mismo modo, las tablas 2.3 y 2.4 muestran la masa de los diferentes bariones encantadores, para  $J = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$  respectivamente.



**Figura 2.1.:** Dieciseis de mesones en  $SU(4)$ . Nótese que el nonete de mesones de la figura 1.10 está incluido en la zona donde  $C = 0$ .

Ahora que ya conocemos el valor de las masas de los hadrones con encanto, es importante notar que la simetría de sabor en  $SU(4)$  se rompe de una manera mucho más drástica a la de  $SU(3)$ . Por ejemplo, para el caso de los mesones en el estado  $J^-$  de la tabla 2.2 la diferencia de masas es de hasta  $1\text{GeV}$ , por lo que el intentar estudiar este tipo de hadrones mediante una simetría de  $SU(4)$  no tendría mucho sentido. Sin embargo, si se considera que para hadrones pesados la masa se puede obtener como la suma de las masas de los quarks constituyentes, las cuales son:  $M_u \approx M_d \approx 0,31\text{GeV}$ ,  $M_s \approx 0,438\text{GeV}$  y  $M_c \approx 1,6\text{GeV}$  se puede calcular de una manera bastante exacta la masa de los hadrones.

Además, por lo que se observa en las tablas 2.2, 2.3 y 2.4, se puede considerar que la diferencia entre masas con los mismos quarks constituyentes se debe al espín de estos. Así, se puede construir un modelo para calcular las masas del estado base de los hadrones en el cual se asume que: 1. El confinamiento de quarks es independiente de sus masas y espines, 2. El acoplamiento es irrelevante a cortas distancias y 3. La simetría se rompe únicamente por la diferencia de sabor. Con esto en mente, se tiene que las masas de los bariones y mesones se



**Figura 2.2.:** Veintete de bariones de estados completamente simétricos de espín  $\frac{3}{2}$  en  $SU(4)$ . Nótese que el decuplete de bariones de la figura 1.17 está en la base de la pirámide donde  $C = 0$ , a cada piso se le agrega una unidad de encanto.

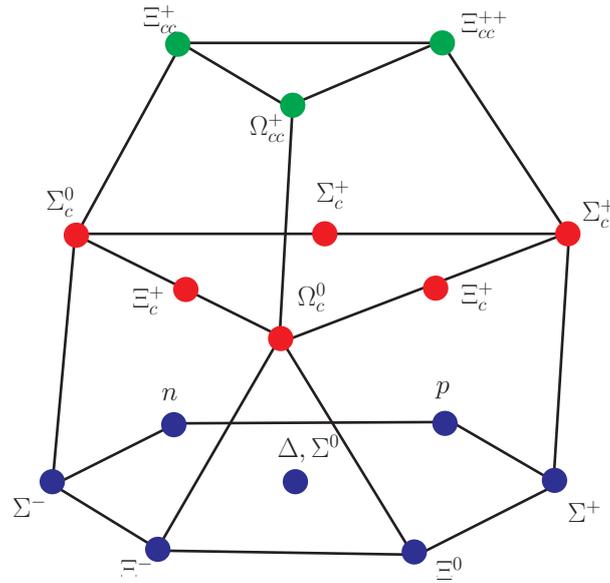
obtiene a partir de

$$m(q_1\bar{q}_2) = M_1 + M_2 + [a\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 / M_1M_2] , \quad (2.18)$$

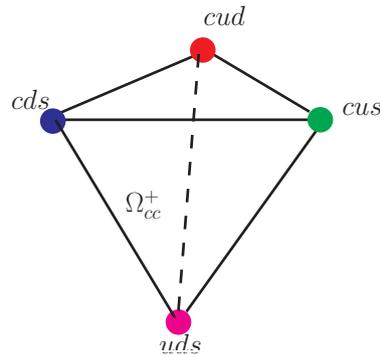
$$m(q_1q_2q_3) = M_1 + M_2 + M_3 + \left[ \frac{a'}{2} \sum_{i>j} (\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j) / M_iM_j \right] , \quad (2.19)$$

donde  $M_i$  es la masa del quark constituyente,  $\mathbf{S}_i$  su espín y  $a, a'$  son parámetros positivos. Para calcular el espín de los mesones se considera que el espín total es la suma de los espines<sup>1</sup> individuales  $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$ . Posteriormente se eleva al

<sup>1</sup>Se toma en cuenta un momento angular  $L = 0$ .



**Figura 2.3.:** Veintete de bariones de estados con simetría mixta de espín  $\frac{1}{2}$  en  $SU(4)$ . Nótese que el octete de bariones de la figura 1.16 está en la base donde  $C = 0$ , a cada piso se le agrega una unidad de encanto.



**Figura 2.4.:** Cuartete de mesones de estados completamente antisimétricos en  $SU(4)$ . Como no existe un estado completamente antisimétrico en la función de onda de espín de  $SU(2)$ , no es posible formar un producto completamente simétrico de  $\psi_{\text{sabor}}\psi_{\text{espn}}$ . En consecuencia, no se pueden formar bariones en 4.

cuadrado para obtener

$$\mathbf{S}^2 = \mathbf{S}_1^2 + \mathbf{S}_2^2 + 2\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2, \quad (2.20)$$

Mesón	Composición	Spin $J^{PC}$	Masa	
			Observada	Calculada
$\eta_c$	$c\bar{c}$	$0^{-+}$	2.983	3.070
$J/\psi$	$c\bar{c}$	$1^{--}$	3.097	3.096
$D^+(D^-)$	$c\bar{d}, d\bar{c}$	$0^-$	1.869	1.758
$D^0(\bar{D}^0)$	$c\bar{u}, u\bar{c}$	$0^-$	1.864	1.758
$D_s^+(D_s^-)$	$c\bar{s}, s\bar{c}$	$0^-$	1.968	1.966
$D^{*+}(D^{*-})$	$c\bar{d}, d\bar{c}$	$1^-$	2.010	1.887
$D^{*0}(\bar{D}^{*0})$	$c\bar{u}, u\bar{c}$	$1^-$	2.006	1.887
$D_s^{*+}(D_s^{*-})$	$c\bar{s}, s\bar{c}$	$1^-$	2.112	2.048

**Tabla 2.2.:** Masa y espín de los mesones con encanto. Se muestran las partículas que contienen solamente quarks  $c$  en la figura 2.1 con sus respectivas combinaciones de espín. Nótese que las partículas vectoriales ( $J = 1$ ) tienen una masa ligeramente mayor, la cual se atribuye al espín. Las masas están dadas en GeV. Los estados marcados con  $-$  no han sido aún descubiertos.

la cual, al escribirse en términos de sus eigenvalores toma la forma

$$s(s+1) = s_1(s_1+1) + s_2(s_2+1) + 2s_1s_2. \quad (2.21)$$

Dado que  $s = (0, 1)$  para mesones pseudoescalares y vectoriales respectivamente, se encuentran las expresiones para calcular la masa

$$m(q_1\bar{q}_2; \uparrow\downarrow) = M_1 + M_2 - 3a/M_1M_2, \quad (2.22)$$

$$m(q_1\bar{q}_2; \uparrow\uparrow) = M_1 + M_2 + a/M_1M_2. \quad (2.23)$$

La masa de los bariones es un asunto un poco más delicado. Para empezar, un barión en el modelo de quarks puede tener espín total  $s = \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$ . En el caso de espín  $\frac{3}{2}$  cada par de partículas tiene los espines alineados. De esta manera, dicho par se comporta de manera análoga a la ecuación (2.23), por lo que la masa de este tipo de bariones es

$$m(q_1q_2q_3) = M_1 + M_2 + M_3 + a' \left( \frac{1}{M_1M_2} + \frac{1}{M_1M_3} + \frac{1}{M_2M_3} \right). \quad (2.24)$$

Barión	Composición	Spin $J^{PC}$	Masa	
			Observada	Calculada
$\Lambda_c^+$	$udc$	$\frac{1}{2}^+$	2.286	2.153
$\Sigma_c^{++}$	$uuc$	$\frac{1}{2}^+$	2.454	2.153
$\Sigma_c^+$	$udc$	$\frac{1}{2}^+$	2.453	2.153
$\Sigma_c^0$	$ddc$	$\frac{1}{2}^+$	2.453	2.153
$\Xi_c^+$	$usc$	$\frac{1}{2}^+$	2.463	2.335
$\Xi_c^0$	$dsc$	$\frac{1}{2}^+$	2.470	2.335
$\Xi_c^{\prime+}$	$usc$	$\frac{1}{2}^+$	2.575	–
$\Xi_c^{\prime0}$	$dsc$	$\frac{1}{2}^+$	2.577	–
$\Xi_{cc}^{++}$	$ucc$	$\frac{1}{2}^+$	–	3.402
$\Xi_{cc}^+$	$dcc$	$\frac{1}{2}^+$	–	3.402
$\Omega_c^0$	$ssc$	$\frac{1}{2}^+$	2.695	2.415
$\Omega_{cc}^+$	$scc$	$\frac{1}{2}^+$	–	3.529

**Tabla 2.3.:** Masa y espín de los bariones con encanto de espín  $J = \frac{1}{2}$ . Se muestran las partículas que contienen solamente quarks  $c$  en la figuras 2.3 y 2.4. Las masas están dadas en GeV. Los estados marcados con – no han sido aún descubiertos.

Para bariones con espín  $\frac{1}{2}$  es el proceso es más laborioso. De los tres quarks, dos deben estar alineados y el tercero debe estar en sentido opuesto, pero como no existe algún mecanismo que diga cuales deben estar alineados, entonces se toman las combinaciones posibles entre los espines de los quarks. Si los quarks 1 y 2 están alineados, entonces ese par se comporta como en la ecuación (2.23), mientras que 3 con 1 y 2 se comportan como en la ecuación (2.22). Luego se toma el caso cuando 1 y 3 están alineados y finalmente cuando 2 y 3 se alinean. Las expresiones se simplifican al considerar simetría de isospín para bariones con dos quarks  $u$  y  $d$ . Por ejemplo, cuando  $M_1 = M_2$  y además están alineados se cumple

$$m(q_1q_2q_3) = 2M_1 + M_3 + a' \left( \frac{1}{M_1^2} - \frac{4}{M_1M_3} \right), \quad (2.25)$$

Barión	Composición	Spin $J^{PC}$	Masa	
			Observada	Calculada
$\Sigma_c^{*++}$	$uuc$	$\frac{3}{2}^+$	2.518	2.169
$\Sigma_c^{*+}$	$udc$	$\frac{3}{2}^+$	2.517	2.169
$\Sigma_c^{*0}$	$ddc$	$\frac{3}{2}^+$	2.519	2.169
$\Xi_c^{*+}$	$usc$	$\frac{3}{2}^+$	2.645	2.296
$\Xi_c^{*0}$	$dsc$	$\frac{3}{2}^+$	2.645	2.296
$\Xi_c^{\prime+}$	$usc$	$\frac{3}{2}^+$	2.575	–
$\Xi_{cc}^{*++}$	$ucc$	$\frac{3}{2}^+$	–	3.401
$\Xi_{cc}^{*+}$	$dcc$	$\frac{3}{2}^+$	–	3.401
$\Omega_c^{*0}$	$ssc$	$\frac{3}{2}^+$	2.766	2.423
$\Omega_{cc}^{*+}$	$scc$	$\frac{3}{2}^+$	–	3.528
$\Omega_{ccc}^{*+}$	$ccc$	$\frac{3}{2}^+$	–	4.635

**Tabla 2.4.:** Masa y espín de los bariones con encanto de espín  $J = \frac{3}{2}$ . Se muestran las partículas que contienen solamente quarks  $c$  en la figura 2.2. Las masas están dadas en GeV. Los estados marcados con – no han sido aún descubiertos.

y cuando están desalineados

$$m(q_1q_2q_3) = 2M_1 + M_3 - a' \frac{4}{M_1M_3}. \quad (2.26)$$

Cuando los quarks que componen al barión son distintos, no hay preferencia sobre cuales quarks deben estar alineados entre sí, entonces se consideran los dos casos para cada par y se divide por un factor de dos. Al final se tiene la expresión para las masas

$$m(q_1q_2q_3) = M_1 + M_2 + M_3 - a' \left( \frac{1}{M_1^2} + \frac{1}{M_2^2} + \frac{1}{M_3^2} \right). \quad (2.27)$$

Las ecuaciones 2.22 y 2.23 se usan para calcular las masas en las tablas 2.2 y 2.5, la ecuación (2.24) para las masas de las tablas 2.4 y 2.7; y finalmente las ecuaciones 2.25, 2.26 y 2.27 las masas de las tablas 2.3 y 2.6.

### 2.2.2. La Belleza de $SU(5)$

Con el descubrimiento del leptón  $\tau$  en 1975, y con el fin de mantener la simetría de Glasgow, un quinto y sexto quark deberían ser añadidos al modelo de quarks. El primero en ser descubierto fue el quark *bottom* ( $b$ ) en 1977 en Fermilab con el descubrimiento del mesón  $Y$  conformado por un par  $b\bar{b}$ . Así, al considerar un quinto quark *bottom* ( $b$ ) en el modelo de quarks, es necesario añadir un nuevo número cuántico al que se vamos a denominar como *belleza*<sup>2</sup>  $B$ , donde  $B = 1$  para  $b$ ,  $B = 0$  para  $u, d, s$  y  $c$ ; y  $C = 0$  para  $b$ . La hipercarga se define por

$$Y = \mathcal{B} + S - \frac{C - B + F}{3}, \quad (2.28)$$

donde ahora se denota por  $\mathcal{B}$  al número bariónico,  $F$  es el número cuántico del sexto quark ( $t$ ) al que nombraremos como *fealdad*<sup>3</sup>. Volviendo al modelo de quarks con simetría  $SU(5)$ , ahora se tienen cuatro números cuánticos, entonces la simetría del grupo debe ser de rango cuatro y la representación fundamental es un quintete, por lo que los  $24(= 5^2 - 1)$  generadores de  $SU(5)$  son de la forma  $F_i = \frac{1}{2}\lambda_i$  y se construyen a partir de los de  $SU(4)$ . Las matrices diagonales de  $SU(N)$  se escriben de la forma [7]

$$[F_m]_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2m(m+1)}} \left( \sum_{k=1}^m \delta_{ik}\delta_{jk} - m\delta_{i,m+1}\delta_{j,m+1} \right). \quad (2.29)$$

<sup>2</sup>Debido a que originalmente se intentó llamar al quark *bottom* como *beauty*, se va a denotar al número cuántico como *belleza* en lugar del nombre de *inferioridad* (*bottomless*) como usualmente se denota en la literatura.

<sup>3</sup>En la literatura se le da el nombre de *superioridad* (*topness*).

Por ejemplo

$$\begin{aligned}
 F_1 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} & F_2 &= \frac{1}{\sqrt{24}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \\
 F_3 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} & F_4 &= \frac{1}{\sqrt{40}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

A partir de la expresión para representación fundamental de los multipletes de  $SU(5)$  de las ecuaciones 2.6 y 2.7, se tiene que para mesones, la representación fundamental es  $5 \otimes \bar{5} = 1 \oplus 24$ ; por lo que hay 9 mesones adicionales respecto a los de  $SU(4)$ . La tabla 2.5 muestra la lista de mesones con belleza. De manera análoga, en la representación fundamental para bariones de  $5 \otimes \otimes 5 = 35 \oplus 40 \oplus 40 \oplus 10$ , se tienen 15 estados simétricos, 20 estados con simetría mixtos y 6 estados completamente antisimétricos adicionales en comparación con los estados existentes en  $SU(4)$ . Algunos de los estados conocidos se muestran en las tablas 2.6- 2.7.

### 2.3. Quarkonia en la actualidad

La física de Quarkonia ha jugado un papel fundamental en el desarrollo de la cromodinámica cuántica (QCD). Recientemente, la espectroscopia de quarkonia

Mesón	Composición	Spin $J^{PC}$	Masa	
			Observada	Calculada
$\eta_b$	$b\bar{b}$	$0^{-+}$	9.398	9.455
$\Upsilon$	$b\bar{b}$	$1^{--}$	9.460	9.458
$B^+(B^-)$	$u\bar{b}, b\bar{u}$	$0^-$	5.279	5.007
$B^0(\bar{B}^0)$	$d\bar{b}, b\bar{d}$	$0^-$	5.007	
$B_s^0(\bar{B}_s^0)$	$s\bar{b}, b\bar{s}$	$0^-$	5.192	
$B_c^+(B_c^-)$	$c\bar{b}, b\bar{c}$	$0^-$	6.275	6.267
$B^{*+}(B^{*-})$	$u\bar{b}, u\bar{b}$	$1^-$	5.325	5.050
$B^{*0}(\bar{B}^{*0})$	$d\bar{b}, b\bar{d}$	$1^-$	5.050	
$B_s^{*0}(\bar{B}_s^{*0})$	$s\bar{b}, b\bar{s}$	$1^-$	5.415	5.218
$B_c^{*+}(B_c^{*-})$	$c\bar{b}, b\bar{c}$	$1^-$	–	6.276

**Tabla 2.5.:** Masa y espín de los mesones con belleza. Se muestran las partículas que contienen solamente quarks  $b$  con sus respectivas combinaciones de espín. Nótese que las partículas vectoriales ( $J = 1$ ) tienen una masa ligeramente mayor que se atribuye al espín. Las masas están dadas en GeV. Los estados marcados con – no han sido aún descubiertos.

ha renacido en años recientes, todo gracias a la avalancha de nueva información proveniente de las colisiones  $e^-e^+$ , pero también de otras interacciones hadrónicas. Además, durante los siguientes años se espera todavía una mayor cantidad de información sobre resonancias  $\psi$  y  $\Upsilon$  proveniente de los nuevos colisionadores  $e^-e^+$ . Por ello, el estudio de física pesada se convierte en un arma importante para buscar nuevas partículas, así como nueva física.

El estado actual de estados de charmonia ( $c\bar{c}$ ) se muestra en la tabla 2.8, mientras que los de bottomonia en la tabla 2.9. Del mismo modo, también se pueden ver en las figuras 2.5 y 2.6. Se denotan de color azul los estados que se estudian en esta tesis.

Tanto en las gráficas como en las tablas, los niveles se etiquetan con  $S, P, D$ , los cuales corresponden al momento angular relativo  $L = 0, 1, 2$  entre el quark y el antiquark. El espín entre quarks se puede acoplar mediante un singlete  $S = 0$  (espín opuesto), o acoplados mediante un triplete  $S = 1$  (espín alineado). Así, la

Barión	Composición	Spin $J^{PC}$	Masa	
			Observada	Calculada
$\Lambda_b^0$	$udb$	$\frac{1}{2}^+$	5.619	–
$\Sigma_b^+$	$uub$	$\frac{1}{2}^+$	5.811	5.360
$\Sigma_b^-$	$ddb$	$\frac{1}{2}^+$	5.815	5.360
$\Sigma_b^0$	$udb$	$\frac{1}{2}^+$	–	5.360
$\Xi_b^0$	$usb$	$\frac{1}{2}^+$	5.787	5.524
$\Xi_b^-$	$dsb$	$\frac{1}{2}^+$	5.791	5.525
$\Xi_b'^0$	$usb$	$\frac{1}{2}^+$	–	–
$\Xi_b'^-$	$dsb$	$\frac{1}{2}^+$	–	–
$\Xi_{bb}^0$	$ubb$	$\frac{1}{2}^+$	–	9.765
$\Xi_{bb}^-$	$dbb$	$\frac{1}{2}^+$	–	9.765
$\Xi_{cb}^+$	$ucb$	$\frac{1}{2}^+$	–	6.584
$\Xi_{cb}^0$	$dcb$	$\frac{1}{2}^+$	–	6.584
$\Xi_{cb}'^+$	$ucb$	$\frac{1}{2}^+$	–	–
$\Xi_{cb}'^0$	$dcb$	$\frac{1}{2}^+$	–	–
$\Omega_b^-$	$ssb$	$\frac{1}{2}^+$	6.071	5.611
$\Omega_{cb}^0$	$scb$	$\frac{1}{2}^+$	–	6.712
$\Omega_{bb}^-$	$sbb$	$\frac{1}{2}^+$	–	9.894
$\Omega_{ccb}^+$	$ccb$	$\frac{1}{2}^+$	–	7.819
$\Omega_{cbb}^0$	$cbb$	$\frac{1}{2}^+$	–	11.002

**Tabla 2.6.:** Masa y espín de los bariones con belleza de espín  $J = \frac{1}{2}$ . Se muestran las partículas que contienen solamente quarks  $b$ . Las masas están dadas en GeV. Los estados marcados con – no han sido aún descubiertos.

paridad del estado quark antiquark con momento angular  $L$  es  $P = (-1)^{L+1}$ , y la conjugación de carga es  $C = (-1)^{L+S}$ . Los estados también se denotan como  $2^{S+1}[L]_J$ , con  $L = S, P, D, \dots$ . Los valores de  $J^{PC}$  se muestran en la parte baja de las figuras, mientras que en las tablas se denota por  $n$  al número cuántico de la función de onda radial.

Históricamente, un esquema apropiado para describir a los estados de quarkonia es mediante un potencial interquarks que los mantiene ligados. Dicha

Barión	Composición	Spin $J^{PC}$	Masa	
			Observada	Calculada
$\Sigma_b^{*+}$	$uub$	$\frac{3}{2}^+$	5.832	5.345
$\Sigma_b^{*0}$	$udb$	$\frac{3}{2}^+$	–	5.345
$\Sigma_b^{*-}$	$ddb$	$\frac{3}{2}^+$	5.835	5.345
$\Xi_b^{*0}$	$usb$	$\frac{3}{2}^+$	5.945	5.474
$\Xi_b^{*-}$	$usb$	$\frac{3}{2}^+$	–	5.474
$\Xi_{bb}^{*0}$	$ubb$	$\frac{3}{2}^+$	–	9.767
$\Xi_{bb}^{*-}$	$dbb$	$\frac{3}{2}^+$	–	9.767
$\Xi_{cb}^{*+}$	$ucb$	$\frac{3}{2}^+$	–	6.583
$\Xi_{cb}^{*0}$	$dcb$	$\frac{3}{2}^+$	–	6.583
$\Omega_b^{*-}$	$ssb$	$\frac{3}{2}^+$	–	5.603
$\Omega_{cb}^{*0}$	$scb$	$\frac{3}{2}^+$	–	6.711
$\Omega_{bb}^{*-}$	$sbb$	$\frac{3}{2}^+$	–	9.895
$\Omega_{ccb}^{*+}$	$ccb$	$\frac{3}{2}^+$	–	7.818
$\Omega_{cbb}^{*0}$	$cbb$	$\frac{3}{2}^+$	– 11.002	
$\Omega_{bbb}^-$	$bbb$	$\frac{3}{2}^+$	–	14.187

**Tabla 2.7.:** Masa y espín de los bariones con encanto de espín  $J = \frac{3}{2}$ . Se muestran las partículas que contienen solamente quarks  $b$ . Las masas están dadas en GeV. Los estados marcados con – no han sido aún descubiertos.

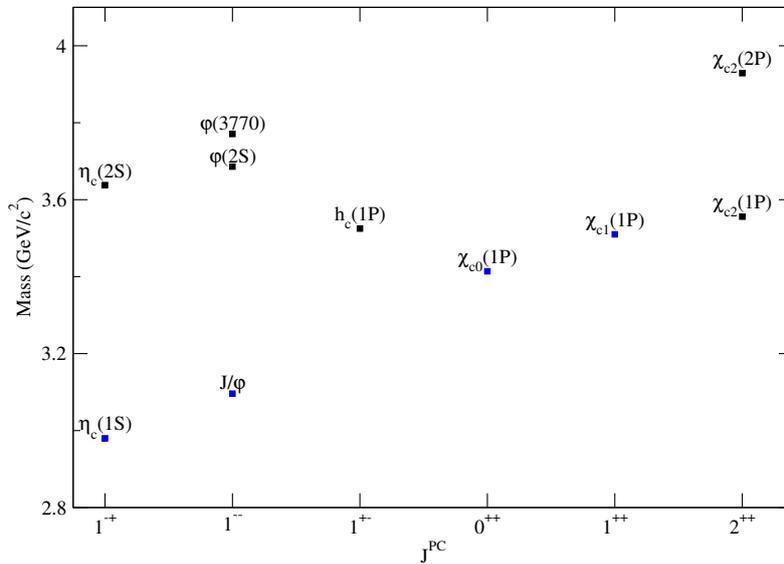
fuerza, a distancias cortas tiene un comportamiento del tipo Coulumb e incluye una modificación logarítmica para el acoplamiento, ideal para incluir la libertad asintótica. Además incluye un término lineal a largas distancias con el cual se describe confinamiento. Esto se puede ver en [47–52]. Dada la elevada masa

de los quarks *charm* y *bottom* es posible estudiar sus estados ligados en un esquema no relativista. Siempre tomando en cuenta que los espectros  $c\bar{c}$  y  $b\bar{b}$  son muy similares entre sí cuando se toma un potencial logarítmico [53]. Este potencial, en una buena aproximación, puede verse como la interpolación de un término Coulombiano más otro lineal. Con ese potencial se obtiene una rapidez promedio para el quark *charm* ( $M_c \sim 1.5\text{GeV}$  de  $\langle v_c^2 \rangle = 0.24$ , mientras que para el quark *bottom* ( $M_b \sim 4.9\text{GeV}$  se obtuvo  $\langle v_b^2 \rangle = 0.08$ . Con lo cual se concluye

Números Cuánticos				Nombre	Masa (Mev)	Ancho (Mev <sup>4</sup> )
$n$	$L$	$J^{PC}$	$n^{2S+1}L_J$			
1	0	$0^{-+}$	$1^1S_0$	$\eta_c(1S)$	$2980.4 \pm 1.2$	$25.5 \pm 3.4$
1	0	$1^{--}$	$1^3S_1$	$J/\psi$	$3096.916 \pm 0.011$	$93.4 \pm 2.1$ keV
1	1	$0^{++}$	$1^3P_0$	$\chi_{c0}(1P)$	$3414.76 \pm 0.35$	$10.4 \pm 0.7$
1	1	$1^{++}$	$1^3P_1$	$\chi_{c1}(1P)$	$3510.66 \pm 0.07$	$0.89 \pm 0.05$
1	1	$2^{++}$	$1^3P_2$	$\chi_{c2}(1P)$	$3556.20 \pm 0.09$	$2.06 \pm 0.12$
1	1	$1^{+-}$	$1^1P_1$	$h_c(1P)$	$3525.93 \pm 0.27$	$<1$
1	2	$1^{--}$	$1^3D_1$	$\psi(3770)$	$3771.1 \pm 2.4$	$23.0 \pm 2.7$
2	0	$0^{-+}$	$2^1S_0$	$\eta_c(2S)$	$3638 \pm 4$	$14 \pm 7$
2	0	$1^{--}$	$2^3S_1$	$\psi(2S)$	$3686.093 \pm 0.034$	$337 \pm 13$ keV
2	1	$2^{++}$	$2^3P_2$	$\chi_{c2}(2P)$	$3929 \pm 5$	$29 \pm 10$

**Tabla 2.8.:** Estados de charmonium observados. Los números se obtienen de [46]. Los estados estudiados en este trabajo vienen de color azul.

que una descripción no relativista para charmonia se encuentra sobre una línea muy delgada de validez, pero para bottomonia es bastante acertada [50] Aparte



**Figura 2.5.:** Espectro de estados  $c\bar{c}$  conocidos.

de las masas, uno de los observables para entender los estados de quarkonia

es el ancho de decaimiento leptónico. El ancho de decaimiento sirve para explorar la compacidad del sistema de quarkonia, así como proveer información complementaria sobre los niveles de espaciamento. En efecto, para un potencial logarítmico, un cambio en la masa del quark se compensa con un cambio en la escala de distancias (o energías). Lo que se traduce en que mientras mayor sea la masa del quark, este es más parecido a una partícula puntual. Además, en algunos trabajos se usan los anchos de decaimiento leptónicos para construir un potencial interquarks [?, 54–57]. En nuestro trabajo se calculan las constantes de decaimiento leptónicas para  $\eta_c, \eta_b, J/\psi$  y  $\Upsilon$  y se comparan con resultados experimentales y otros trabajos.

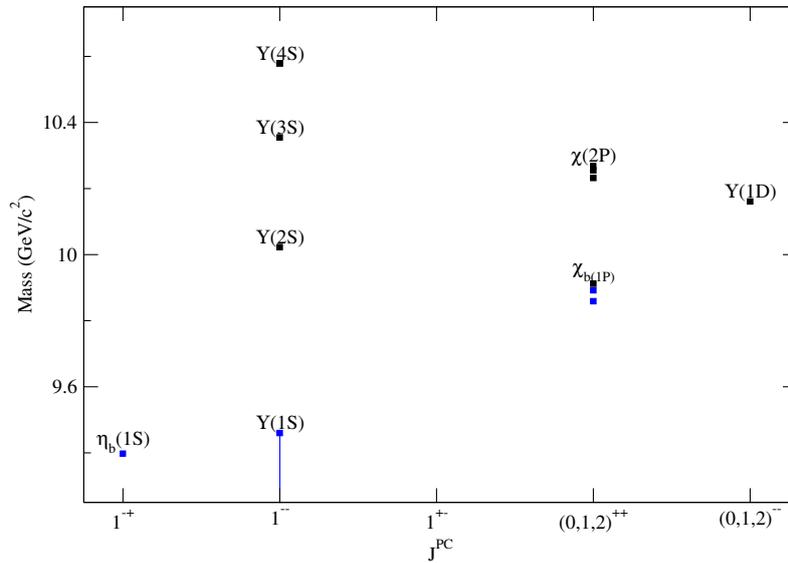
Otro observable que se pueden calcular son los factores de forma electromagnéticos. Estos ofrecen una herramienta para explorar la estructura intrínseca de los hadrones, como la forma en que se distribuye su carga y el momento magnético. También es posible calcular factores de forma de transiciones hadrónicas y así reconocer los decaimientos hadrónicos de quarkonia y entender sus propiedades. Para un resumen completo sobre las transiciones de la mayoría de los estados  $c\bar{c}$  y  $b\bar{b}$  conocidos hasta el año 2008 ver [59]. En nuestro trabajo se calculan los factores de forma de elásticos para  $\eta_{c,b}$ , así como el factor de forma de transición  $\eta_{c,b} \rightarrow \gamma\gamma^*$ .

## 2.4. Hadrones Exóticos

Hasta ahora se han descrito a los hadrones como partículas compuestas por tres quarks (bariones) o por un par quark-antiquark. Además, en la sección 1.4.3 se mencionó que, con el fin de evitar la violación al principio de exclusión de Pauli se le asigna una simetría de color  $SU(3)$  a los quarks. De esta manera los hadrones son partículas de color neutro. Hasta ahora se ha mencionado a los mesones, cuyo color neutro se debe al anticolor que posee el antiquark; y los bariones, donde el color neutro se debe a la combinación de tres colores distintos.

Números Cuánticos				Nombre	Masa (Mev)	Ancho
$n$	$L$	$J^{PC}$	$n^{2S+1}L_J$			
1	0	$0^{-+}$	$1^1S_0$	$\eta_b(1S)$	$9398.0 \pm 3.2$	Desconocido
1	0	$1^{--}$	$1^3S_1$	$Y(1S)$	$9460.30 \pm 0.26$	$54.02 \pm 1.25$ keV
1	1	$0^{++}$	$1^3P_0$	$\chi_{b0}(1P)$	$9859.44 \pm 0.52$	Desconocido
1	1	$1^{++}$	$1^3P_1$	$\chi_{b1}(1P)$	$9892.78 \pm 0.40$	Desconocido
1	1	$2^{++}$	$1^3P_2$	$\chi_{b2}(1P)$	$9912.21 \pm 0.40$	Desconocido
1	2	$2^{--}$	$1^3D^a_j$	$Y(1D)$	$10161.1 \pm 1.7$	Desconocido
2	0	$1^{--}$	$2^3S_1$	$Y(2S)$	$10023.26 \pm 0.31$	$31.98 \pm 2.63$ keV
2	1	$0^{++}$	$2^3P_0$	$\chi_{b0}(2P)$	$10232.5 \pm 0.6$	Desconocido
2	1	$1^{++}$	$2^3P_1$	$\chi_{b1}(2P)$	$10255.46 \pm 0.55$	Desconocido
2	1	$2^{++}$	$2^3P_2$	$\chi_{b2}(2P)$	$10268.65 \pm 0.55$	Desconocido
3	0	$1^{--}$	$3^3S_1$	$Y(3S)$	$10355.2 \pm 0.5$	$20.32 \pm 1.85$ keV
4	0	$1^{--}$	$4^3S_1$	$Y(4S)$	$10579.4 \pm 1.2$	$20.5 \pm 2.5$ MeV

**Tabla 2.9.:** Estados de botomonium observados. Los números se obtienen de [46]. Los estados estudiados en este trabajo vienen de color azul.



**Figura 2.6.:** Espectro de estados  $b\bar{b}$  conocidos.

Sin embargo, no existe ningún principio para afirmar que esas dos combinaciones son las únicas posibles en la naturaleza. Por ejemplo, una partícula compuesta por cinco quarks  $qqqq\bar{q}$  (pentaquark) es bastante plausible, así como una compuesta por cuatro quarks  $q\bar{q}\bar{q}$  (tetraquark). E incluso combinaciones con mayor número de quarks, siempre y cuando que esta siga siendo un singlete de color.

En efecto, en abril de 2014, la colaboración LHCb del CERN confirmó que la resonancia  $Z(4430)$  es un estado ligado de cuatro quarks ( $c\bar{c}u\bar{d}$ ) con paridad  $1^+$  [60]. El año siguiente encontraron dos partículas ( $P_c^+(4380)$  y  $P_c^+(4380)$ ), las cuales son pentaquarks con un contenido de quarks  $c\bar{c}uud$  [61]. Existen algunos otros candidatos por confirmar, como  $X(3872)$ ,  $Y(3940)$ ,  $Y(4140)$ ,  $Y(4260)$ ,  $Z_c(3900)$ ,  $Z(4430)$ ,  $X(4274)$ ,  $X(4500)$  y  $X(4700)$ ; de los cuales aún se discute si son estados exóticos o moléculas de mesones.

## Capítulo 3.

# Elementos de QCD

«¡Es increíble pero no se me da!»

— Lionel Messi, Copa América Centenario 2016

La cromodinámica cuántica (QCD) es la teoría cuántica de campos que describe a los quarks, gluones y las interacciones entre ellos. Es una herramienta extremadamente poderosa para describir experimentos a muy altas energías, debido a su propiedad de libertad asintótica. Este fenómeno fue propuesto por David Gross y Frank Wilczek y de manera independiente por David Politzer en 1973. Ellos, al estudiar una teoría de norma no abeliana, notaron que la constante de acoplamiento de dicha teoría iba a un valor constante en el límite de momentos muy grandes, lo cual se considera una teoría *asintóticamente libre*. De esta forma, en una teoría de Yang-Mills, la constante de acoplamiento disminuye a distancias cortas, contrario a una teoría abeliana donde se tiene el fenómeno opuesto. Por este trabajo los tres científicos antes mencionados recibieron el Premio Nobel de Física en 2004.

Es importante recalcar que, dada la complejidad de QCD, la mejor manera para entender la teoría en sus conceptos más fundamentales, son los libros de texto. Muy buenas opciones son los libros ya citados anteriormente, tales como [5, 10, 40, 42–45]. Sin embargo, como este capítulo describe los elementos principales de QCD, comenzando a partir de sus entes básicos como son los

quarks y gluones y sus propiedades fundamentales como confinamiento, libertad asintótica y rompimiento dinámico de la simetría quiral. Fenómenos de suma importancia para poder estudiar y comprender el espectro, propiedades estáticas y dinámicas de los distintos hadrones, se toma como base el documento bastante ilustrativo presentado en [62].

### 3.1. Quarks

Los quarks son el ingrediente principal de las interacciones fuertes, son partículas sin estructura de espín  $1/2$  que, a diferencia de los electrones, tienen un número cuántico adicional llamado carga de color. En los capítulos anteriores se presentaron a través del modelo de quarks, con el cual se logró predecir una enorme cantidad de nuevos hadrones y sus características principales como su masa. Sin embargo, no dejaban de ser una genialidad matemática que funcionaba sin que nadie conociera las razones de fondo. No obstante, con el desarrollo de la teoría de norma ahora se entiende que los quarks se describen por medio de espinores de Dirac  $\psi_\alpha(x)$  con cuatro componentes  $\alpha = 1, \dots, 4$ . Estos se caracterizan por ser funciones de las coordenadas de espacio-tiempo  $x^\mu = (t, x, y, z)$ . De esta manera, si se considera un quark libre, este debe obedecer la ecuación de Dirac

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0, \quad (3.1)$$

donde  $m$  es la masa libre del quark. Las soluciones de estos estados cuánticos consisten en ondas planas

$$\psi_{k,\lambda}(x) = u(k, \lambda)e^{-i(Et - \vec{x} \cdot \vec{k})}, \quad (3.2)$$

donde  $k^\mu = (E, \vec{k})$  y  $\lambda$  son el cuadrimomento y polarización respectivamente, y  $u(k, \lambda)$  es la función de onda dependiente del cuadrimomento y espín. Dado que en los detectores no se observan quarks libres, sino hadrones que son los estados sin color de la teoría, se entiende que los quarks son partículas *confinadas*. Este

fenómeno de confinamiento tiene consecuencias importantes en la dinámica de las interacciones fuertes.

A pesar de eso, gracias a los experimentos en los aceleradores de partículas llevados a cabo desde hace décadas, hoy en día se conoce la existencia de seis sabores de quarks, a saber: *up* ( $u$ ), *down* ( $d$ ), *strange* ( $s$ ), *charm* ( $c$ ), *bottom* ( $b$ ) y *top* ( $t$ ). Estos sabores se organizan en familias bajo las interacciones débiles. *Up* y *down* forman la primera familia (o generación), *strange* y *charm* la segunda, mientras que *bottom* y *top* la tercera. Estas tres familias conforman básicamente la repetición de un mismo patrón (o mismos números cuánticos) con un significado físico hasta ahora desconocido. Por ejemplo, la carga eléctrica de los quarks *up*, *charm*, y *top* es  $2/3$  la carga del protón, mientras que las cargas de *down*, *strange* y *bottom* es  $-1/3$ . También se distinguen por su masa y sus números cuánticos asociados al *sabor* del mismo modo que en los capítulos anteriores.

### Masa de los Quarks

Debido a la imposibilidad de ver quarks libres en la naturaleza, se comprende que no se puedan medir sus masas directamente, pero esto puede lograrse si se redefine el concepto de masa. La *masa* del quark es, en efecto, un parámetro en el lagrangiano de la teoría, el cual describe las autointeracciones de este, y no es directamente un observable. De esta forma, dicho parámetro se comporta como una constante de acoplamiento en teoría cuántica de campos, y técnicamente depende de la escala de momentos, el esquema de renormalización y el escalamiento correspondiente.

De acuerdo al modelo estándar, la masa de los quarks se genera a través de una transición de fase que rompe la simetría de las interacciones débiles. La masa y carga de los distintos quarks se muestran en la tabla 3.1. No hay que olvidar que la masa de los quarks descrita en esta sección se refiere a la masa *corriente*, o masa desnuda. Cuando un quark se encuentra formando un estado ligado dentro de un hadrón, este adquiere una masa constituyente debido a las interacciones con el campo gluónico. Se puede decir que el campo gluónico viste

Sabor	<i>up</i>	<i>down</i>	<i>strange</i>	<i>charm</i>	<i>bottom</i>	<i>top</i>
Masa	1.5-4MeV	4-8MeV	$\approx 100\text{MeV}$	1.25Gev	4.25GeV	175GeV
Carga	2/3	-1/3	-1/3	2/3	-1/3	2/3

**Tabla 3.1.:** Masas y carga de los quarks

al quark desnudo y este adquiere una masa efectiva, la cual se puede obtener de una manera autoconsistente al resolver las ecuaciones de Schwinger-Dyson, las cuales son las ecuaciones de movimiento para el propagador del quark y se describen en el siguiente capítulo.

### Carga de Color

Con el fin de solucionar el problema de que, en el modelo de quarks, los quarks dentro de los hadrones aparentemente violan el principio de exclusión de Pauli, Oscar W. Greenberg propuso en 1964 que los quarks también son portadores de *cargas de color*. Estas son las responsables de las interacciones fuertes y de mantener a los quarks confinados dentro de los hadrones. Las cargas de color son un análogo a la carga eléctrica en electrodinámica, pero su inclusión se traduce en una teoría completamente diferente. Por ejemplo, la carga eléctrica es una cantidad escalar en el sentido que la carga total de un sistema eléctrico es la suma de las cargas individuales, mientras que la carga de color es una carga cuántica vectorial. Esto es, la carga de color total de un sistema se obtiene al combinar las cargas individuales de los constituyentes del sistema de acuerdo una simetría exacta de  $SU(3)$ .

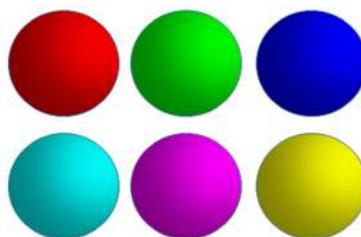
De esta manera, los quarks tienen tres estados principales de carga de color, los cuales se etiquetan como  $i = r, g, b$  o bien, rojo, verde y azul, en una analogía a los colores básicos. Los tres estados de color forman una base de un espacio vectorial complejo de tres dimensiones. Así, el estado de color de un quark es

un vector en ese espacio

$$r = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Estos estados de color se rotan por matrices unitarias de  $3 \times 3$ . Dichas transformaciones con determinante unitario forman un grupo de Lie en  $SU(3)$ , la cual tiene como una representación fundamental al espacio de color de tres dimensiones. Además, las cargas de color se etiquetan por los espacios de la representación de  $SU(3)$ , que es . De esta manera las reglas de suma junto con las cargas de color son las mismas reglas de suma de  $SU(3)$ , las cuales se describen en el primer capítulo de esta tesis.

Los antiquarks tienen la particularidad de tener el mismo espín y masa del quark, pero con cargas eléctricas y de color opuestas. Por ejemplo, el antiquark de un quark  $up$  de color rojo es un antiquark  $\bar{u}\bar{p}$  con carga  $-2/3$  la carga del protón y el color cian-antirrojo. La carga de color de un antiquark es , el cual es también una representación de  $SU(3)$  donde los vectores se transforman según la transformación conjugado complejo de una matriz  $SU(3)$ . En la figura 3.1 se muestran los distintos colores con los que representamos visualmente a los quarks y antiquarks.



**Figura 3.1.:** Colores de quarks (arriba): rojo, verde y azul. Colores de antiquarks (abajo): Cian-antirrojo, magenta-antiverde y amarillo-antiazul

Finalmente, el confinamiento de quarks se puede ver como un confinamiento de color. Esto es, a pesar de que en las colisiones a altas energías están involu-

cradas todos los tipos de interacciones, al final en los detectores solo dejan su marca los hadrones, que son estados de singletes de color o color neutro. No existe alguna prueba analítica que indique que QCD deba ser confinante. La idea actual es que al intentar separar a dos quarks ligados es más económico crear un nuevo par quark-antiquark que el separarlos. Con esto es posible ver en los detectores estados de partículas neutras en color, como mesones y bariones.

## 3.2. Gluones

Los quarks no interactúan entre ellos directamente; lo hacen mediante agentes intermedios conocidos como *gluones*. Para comprender mejor este fenómeno, véase a los gluones en el papel de los fotones en electrodinámica (QED), que median las interacciones electromagnéticas entre corrientes cargadas. Similar a los fotones, los gluones no tienen masa, tienen espín igual a 1 y tienen dos estados de polarización (izquierda y derecha). Y al igual que en QED, los gluones se representan por un potencial vectorial  $A^{\mu a}(x)$  con un índice de Lorentz  $\mu = 0, 1, 2, 3$  y uno de color  $a$ . Por lo tanto, es necesario imponer algunas condiciones sobre el potencial para así elegir únicamente los grados de libertad físicos, pero tomando en consideración que la interpretación física debe ser invariante de su elección. Esas condiciones son las condiciones de *norma* y los gluones son *partículas de norma*.

En QCD existen ocho tipos de gluones que median las interacciones fuertes. Esta abundancia de partículas surge de la simetría de color  $SU(3)$ , cuya representación adjunta se relaciona con los mediadores de la interacción, es decir, los gluones. El número de elementos de la representación adjunta es 8, la misma cantidad de gluones. Se tiene la densidad lagrangiana del quark

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_\alpha(x)(i \not{\partial} - m)\psi(x)_\alpha, \quad (3.4)$$

donde el índice  $\alpha$  denota el color. Es fácil ver que  $\mathcal{L}$  es invariante bajo una transformación global de  $SU(3)$

$$\psi'(x) = U\psi(x), \quad (3.5)$$

donde  $U$  es una matriz unitaria  $3 \times 3$  que actúa sobre el índice de color, y al ser global entonces el campo se transforma exactamente de la misma manera en todo el espacio. Recordemos que una matriz de  $SU(3)$  requiere ocho parámetros reales, que se escriben como

$$U = \exp i \sum_a \theta^a \lambda^a / 2, \quad (3.6)$$

donde  $\lambda^a / 2$  ( $a = 1, \dots, 8$ ) son matrices las matrices de Gell-Mann de la ecuación (1.44). Al incluir potenciales para ocho gluones,  $A_\mu^a$ , así como la derivada covariante asociada  $D^\mu = \partial^\mu + ig A_\mu^a \lambda^a / 2$ , entonces el lagrangiano del quark libre es

$$\mathcal{L}_q = \bar{\psi}_\alpha(x) (i \not{D} - m_q) \psi_\alpha(x). \quad (3.7)$$

Este lagrangiano tiene una *simetría de norma*. La cual es invariante bajo rotaciones  $U(x)$  dependientes del espacio-tiempo en  $SU(3)$  si, al mismo tiempo los potenciales de norma se transforman como

$$A^\mu \rightarrow U(A^\mu + \frac{i}{g} \partial^\mu) U^\dagger, \quad (3.8)$$

donde  $A^\mu = A_\mu^a \lambda^a / 2$ . La transformación anterior es una generalización de las transformaciones de norma en electrodinámica, y además indica el número de grados de libertad asociados con cada potencial de norma es 2, los mismos para una partícula sin masa con espín igual a 1.

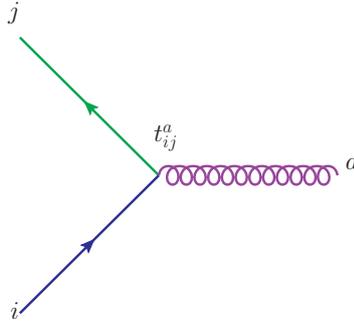
De esta manera, al tener una simetría de color local, los quarks no son partículas libres, pero la interacción entre ellos se realiza a través de potenciales de norma. Dicho de otro modo, la simetría de norma genera una dinámica que

se define perfectamente por las cargas de color, donde los ocho gluones están relacionados con los ocho parámetros de la transformación general en  $SU(3)$ .

El término de interacción del Lagrangiano es

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -g \bar{\psi}_\beta A_a^\mu \frac{\lambda_{\beta\alpha}^a}{2} \gamma_\mu \psi_\alpha, \quad (3.9)$$

donde  $g$  es la constante de acoplamiento. Así, los quarks interactúan con los gluones de una manera bastante similar a las interacciones entre electrones y fotones, salvo con la novedad de que el quark puede cambiar su color de  $\alpha$  a  $\beta$  al emitir u absorber un gluón con color  $a$ , los cuales se acoplan a través de un generador  $t_{\alpha\beta}^a = \lambda_{\alpha\beta}^a/2$  como se muestra en la figura 3.2. Como los gluones



**Figura 3.2.:** El color de un quark puede cambiar de  $i$  a  $j$  al emitir (o absorber) un gluón de color  $a$ , el cual se acopla a través del generador  $t_{ij}^a = \lambda_{ij}^a/2$ .

son grados de libertad físicos, entonces llevan energía y momento. Por ello es crucial que el lagrangiano contenga términos que describan esas características físicas. Nuevamente, esto se logra con una analogía a la electrodinámica: se introduce un tensor de fuerza antisimétrico  $F_{\mu\nu}^a$  para describir el término de energía cinética del gluón

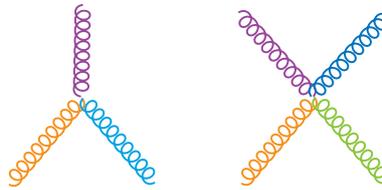
$$\mathcal{L}_g = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu a} F_{\mu\nu a}, \quad (3.10)$$

donde hay una suma implícita en los índices de color. Para asegurar que el nuevo lagrangiano sea invariante de norma, se requiere que el tensor de campo

transforme como  $F^{\mu\nu} = UF^{\mu\nu}U^\dagger$ , lo cual se logra al elegir  $F^{\mu\nu} = -ig[D^\mu, D^\nu]$ , o

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu - g[A^\mu, A^\nu], \quad (3.11)$$

el cual tiene un término  $[A^\mu, A^\nu]$  adicional a las derivadas usuales. Este es un término no lineal en términos del potencial de norma, lo que hace que los gluones no sean una simple repetición de los fotones de la electrodinámica, sino que incluyan autointeracciones de tres y cuatro gluones, las cuales se esquematizan en la figura 3.3. Combinando todas las componentes de la densidad lagrangiana,



**Figura 3.3.:** Autointeracciones de gluones, las cuales son responsables de las características únicas de QCD, como libertad asintótica, confinamiento y rompimiento de la simetría quiral.

se tiene a la total como la suma de los lagrangianos del quark y gluón

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \mathcal{L}_q + \mathcal{L}_g. \quad (3.12)$$

De esta manera, las autointeracciones entre los gluones debidas a su carga de color son la diferencia principal entre QCD y QED. De hecho, esas autointeracciones son responsables de las características que hacen única a QCD; tales como: libertad asintótica, rompimiento de la simetría quiral y confinamiento. En las secciones siguientes se discuten un poco las propiedades de la dinámica del color.

### 3.3. Fuerza entre quarks y libertad asintótica

¿Cómo es la fuerza entre dos quarks? Esto es una pregunta bastante difícil de responder dado que no se observan quarks libres en la naturaleza. Además,

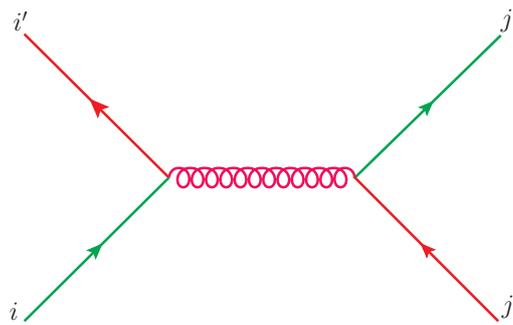
las interacciones entre ellos es una combinación bastante caótica entre gluones, los cuales se encargan de romper la simetría quiral y forman un mar pegajoso dentro de los hadrones. Para tener una idea acerca de las interacciones entre quarks, hay que imaginar por un momento que un quark libre de color  $\alpha$ . Este quark interactúa con otro de color  $\beta$  mediante el intercambio de un sólo gluón, el cual dispersa a los quarks con colores  $\alpha'$  y  $\beta'$  como muestra la figura 3.4. La amplitud de dispersión para ese proceso es

$$S \propto (-igt_{\alpha\beta}^a \gamma^\mu) D_{\mu\nu}(q) (-igt_{\alpha'\beta'}^a \gamma^\nu), \quad (3.13)$$

donde se toman en cuenta las ocho contribuciones de intercambio de gluones al sumar  $a = 1, \dots, 8$ . Así, el cuadrimomento  $q$  del gluón es una cantidad espacialoide,  $q^2 = q_0^2 - \vec{q}^2 < 0$ . Además,  $D_{\mu\nu}(q)$  es el propagador del gluón en la norma de Feynman

$$D_{\mu\nu}(q) = \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}. \quad (3.14)$$

Nótese que la diferencia entre la amplitud dada por la ecuación (3.13) y la amplitud para la interacción entre dos electrones es solamente el factor de color  $t_{\alpha\alpha'}^a t_{\beta\beta'}^a$ , el cual se calcula en la sección siguiente.



**Figura 3.4.:** Interacción de dos quarks a través del intercambio de un gluón.

### 3.3.1. Factores de Color

Dado que tanto quarks y gluones tienen color, entonces la función de onda debe tener un factor de color. Se ha mencionado en reiteradas ocasiones que los quarks vienen en colores  $r$ ,  $g$  y  $b$ . Esto es, los quarks se asignan a un triplete de  $SU(3)$  con una simetría de color exacta. Luego, los gluones median la fuerza entre cargas de color con ocho combinaciones de color distintas, a saber, el octete

$$r\bar{g}, r\bar{b}, g\bar{r}, g\bar{b}, b\bar{r}, b\bar{g}, \sqrt{\frac{1}{2}}(r\bar{r} - g\bar{g}), \sqrt{\frac{1}{6}}(r\bar{r} + g\bar{g} - 2b\bar{b}). \quad (3.15)$$

Por otro lado, el singlete de color

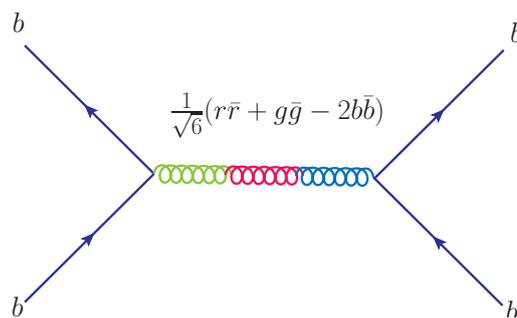
$$\sqrt{\frac{1}{3}}(r\bar{r} + g\bar{g} + b\bar{b}). \quad (3.16)$$

no lleva color y por tanto no tiene ninguna acción entre las cargas de color.

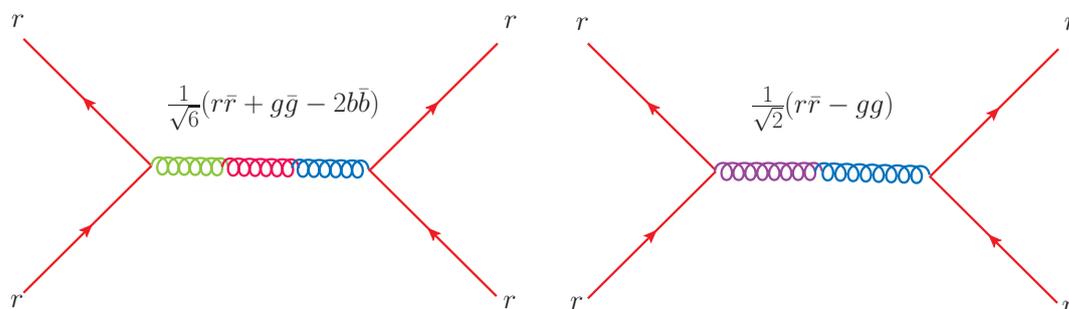
La fuerza de color entre dos cargas acopladas mediante el intercambio de un gluón se denota por  $\frac{1}{2}c_1c_2\alpha_s$ , donde  $c_1$  y  $c_2$  son los coeficientes de color asociados con los vértices. Entonces el factor de color se define por

$$C_F \equiv \frac{1}{2} |c_1c_2|. \quad (3.17)$$

Por ejemplo, para calcular el factor de color de dos quarks de color  $b$ , se nota que de los ocho gluones de la ecuación (3.15), solamente uno tiene la combinación  $b\bar{b}$  que se puede intercambiar, así el producto  $c_1c_2$  es  $\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}\right)\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}\right) = \frac{2}{3}$  como muestra la figura 3.5. Por otro lado, la interacción entre quarks de color  $r$  es mediada por dos gluones, esto es  $c_1c_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$  (figura 3.6), el cual es exactamente el mismo, lo cual es de esperar dado que proviene de la simetría de color. Cuando se tienen quarks de diferente color, como  $r$  y  $b$ , de nuevo se tiene que los gluones permitidos tienen  $c_1c_2 \equiv \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}\right) = -\frac{1}{3}, 1$ . Estas amplitudes se añaden o substraen de acuerdo a la simetría de color bajo el intercambio de quarks. Para estados simétricos se suman, obteniendo así un factor de color  $+\frac{2}{3}$ , para estados simétricos se restan

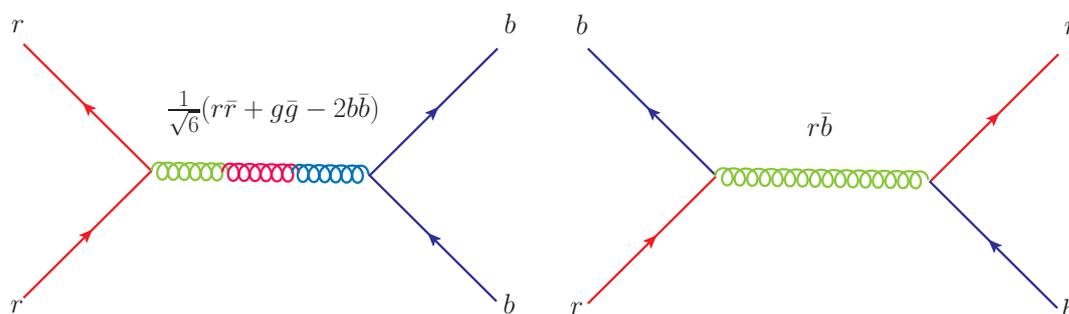


**Figura 3.5.:** Diagrama de la interacción de colores  $b - b$ . Como el término  $b\bar{b}$  de la ecuación (3.15) es el único que afecta la interacción de estos colores, entonces se pone el factor  $\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$  para cada vértice.



**Figura 3.6.:** Diagrama de la interacción de colores  $r - r$ . Como los términos  $r\bar{r}$  de la ecuación (3.15) son los únicos involucrados en esta interacción, entonces en el primer diagrama se tiene el vértice  $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$  y en el segundo  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ .

resultando en  $-\frac{4}{3}$ . Los resultados anteriores se reducen a la expresión



**Figura 3.7.:** Diagrama de la interacción de colores  $r - b$ . Los gluones con combinaciones  $r - b$  de la ecuación (3.15) son los involucrados en esta interacción.

$$c_1 c_2 = P - \frac{1}{3}, \quad (3.18)$$

donde  $P = \pm 1$  según los quarks estén en un estado de color simétrico o antisimétrico.

Para nuestro objetivo es importante calcular el factor de color para un mesón, el cual está en el singlete de color

$$\sqrt{\frac{1}{3}} (r\bar{r} + g\bar{g} + b\bar{b}). \quad (3.19)$$

Se tiene entonces que debido a que todos los colores tienen la misma influencia, entonces es suficiente considerar solo una interacción, a saber, el término  $b\bar{b}$  de la figura 3.8. Para calcular  $c_1 c_2$ , se pone un signo menos en el vértice la antipartícula, ya que tiene la carga opuesta. Así, en el singlete de color del mesón, cada estado inicial y final de la figura 3.8 tiene un factor  $\sqrt{\frac{2}{3}}$ . Así, el factor de forma para la interacción  $q\bar{q}$  es

$$c_1 c_2 = 3\sqrt{\frac{1}{3}}\sqrt{\frac{1}{3}} \left( -\frac{2}{3} - 1 - 1 \right) = -\frac{8}{3}, \quad (3.20)$$

donde el factor de 3 incluye las contribuciones  $r\bar{r}$  y  $g\bar{g}$ . El factor de color es

$$C_F = \frac{4}{3}. \quad (3.21)$$

Resultado que es de bastante utilidad a la hora de hacer cálculos en QCD.

### 3.3.2. Libertad Asintótica

Una de las características más sorprendentes de QCD es el fenómeno de la *libertad asintótica*, mediante el cual se afirma que la fuerza de interacción entre quarks  $\alpha_s = g^2/4\pi$  se hace más y más pequeña conforme la distancia entre ellos disminuye. Gracias a esta deducción el premio Nobel de física de 2004 fue para Gross, Politzer y Wilczek, los padres de esta idea.

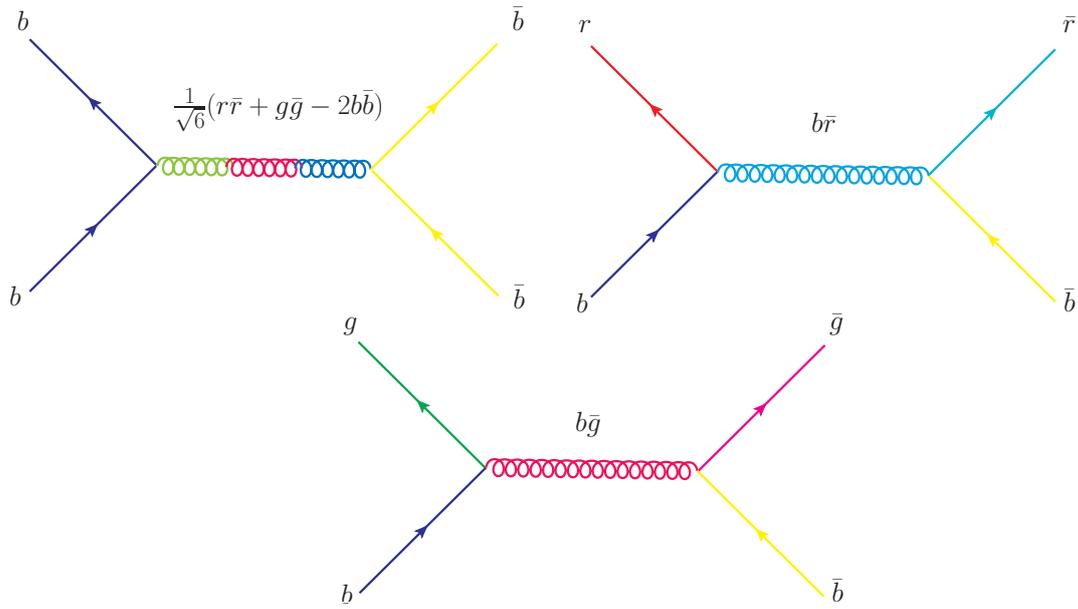


Figura 3.8.: Diagramas que describen la interacción  $b\bar{b}$ .

Para lograr entender este fenómeno, primero mencionemos un caso un poco más familiar: La fuerza de atracción entre dos cargas  $q_1$  y  $q_2$  en el vacío, la cual se describe mediante la ley de Coulomb

$$F = \frac{1}{4\pi} \frac{q_1 q_2}{r^2}. \quad (3.22)$$

Si las cargas se sumergen en un medio con constante dieléctrica  $\epsilon > 1$ , la fuerza es

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_1 q_2}{r^2}, \quad (3.23)$$

la cual también se escribe de una forma similar a la ecuación (3.22) si se consideran las cargas efectivas  $\tilde{q}_i = q_i/\sqrt{\epsilon}$ . De esta manera el efecto del medio puede interpretarse como un agente modificante de las cargas.

En teoría cuántica de campos, el vacío no es realmente un *vacío* debido a que el estado más bajo de energía del campo puede verse como un estado con un mar de energía con electrones de energía negativa. De este modo, cuando un

electrón pasa por ese medio vacío, puede inducir una transición de un electrón de energía positiva a uno de energía negativa, creando un par electrón-positrón virtual, que se conoce como fluctuación del vacío. Así, la interacción entre dos electrones en el vacío se vuelve

$$F = \frac{e_{\text{efe}}^2}{4\pi r^2} = \frac{\alpha_{\text{em}}(r)}{r^2}, \quad (3.24)$$

donde  $\alpha_{\text{em}}$  es la constante de estructura fina, la cual depende de la distancia  $r$  o el momento de transferencia  $q \propto 1/r$ . Así, el efecto de  $r \rightarrow \infty$  es equivalente a  $q \rightarrow 0$ . El acoplamiento medido de la fuerza de interacción de un fotón de baja energía es  $\alpha_{\text{em}}(q = 0) = 1/137,035$ . La constante de estructura fina se obtiene mediante la ecuación diferencial

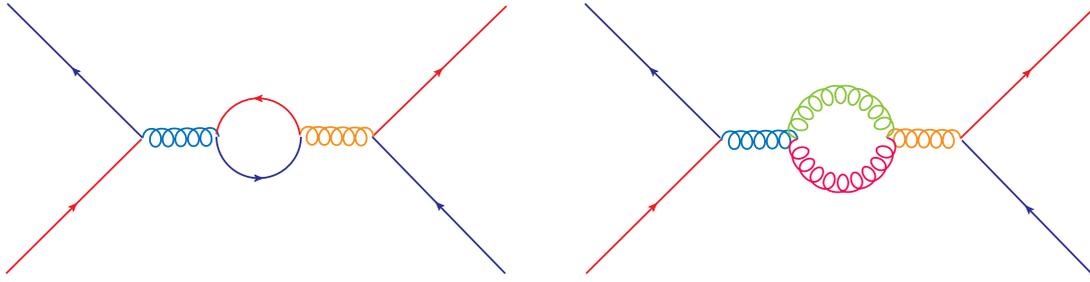
$$\mu \frac{d\alpha(\mu)}{d\mu} = \beta(\alpha(\mu)) \quad (3.25)$$

donde  $\mu$  es una escala de momentos. La función  $\beta$  se calcula en teoría de perturbaciones gracias a que  $\alpha_{\text{em}}$  es pequeño y a un lazo  $\beta = 2\alpha_{\text{em}}^2/3\pi > 0$ . La solución es

$$\alpha_{\text{em}}(\mu) = \frac{\alpha_{\text{em}}}{1 - \frac{\alpha_{\text{em}}(\mu_0)}{3\pi} \ln \frac{\mu^2}{\mu_0^2}}. \quad (3.26)$$

Es importante notar que la fuerza de interacción entre dos electrones se hace más grande conforme la distancia entre ellos disminuye. Por lo tanto, la electrodinámica es una teoría fuertemente acoplada a distancias muy pequeñas. Es la razón por la cual no se puede resolver de una manera completamente consistente a menos que se imponga un corte ultravioleta en la escala de momentos. De manera análoga, la ecuación (3.25) es también la ecuación diferencial que se satisface para la constante de acoplamiento. Sin embargo, la función  $\beta$  para este caso es

$$\beta(\alpha) = -\frac{\beta_0}{2\pi} \alpha^2 + \dots, \quad (3.27)$$



**Figura 3.9.:** Polarización cuántica del vacío que cambia las fuerza efectiva de interacción. El primer diagrama hace la interacción más fuerte a distancias cortas (apantallamiento). El segundo resulta de la interacción no lineal entre gluones y tiene un efecto de antiapantallamiento, el cual hace el acoplamiento más débil a distancias cortas.

donde  $\beta_0 = 11 - \frac{2}{3}n_f$ , siendo  $n_f$  el número de sabores de quarks. El término  $-\frac{2}{3}n_f$  viene del efecto del par quark-antiquark del primer diagrama, este escala el número de sabores y además es negativo. Por otro lado, el término logarítmico viene de la contribución no lineal del gluón del segundo diagrama. Y de esta manera el autoacoplamiento del gluón tiene un efecto de antiapantallamiento. Se muestra a partir de la ecuación de renormalización del grupo que la constante de acoplamiento de QCD tiene la forma

$$\alpha_s(\mu) = \frac{2\pi}{\beta_0 \ln(\mu/\Lambda_{\text{QCD}})} \quad (3.28)$$

la cual va a cero conforme  $\mu$  va a infinito. Este comportamiento se ha verificado en experimentos a altas energías, como se muestra en la figura 3.10, donde  $Q$  es la escala de energías. Así, debido a la libertad asintótica, las interacciones fuertes se calculan en teoría de perturbaciones cuando el momento de transferencia es grande. Por ejemplo, en el intercambio de un gluón, una buena aproximación para la interacción del quark es  $q^2 \sim \Lambda_{\text{QCD}}$ . Hasta la fecha, uno de los mayores logros de QCD se aloja en la región perturbativa (pQCD). Pero es importante notar que a pesar de que el acoplamiento entre los quarks se hace más pequeño, no significa que la fuerza entre ellos tenga el mismo comportamiento. En efecto, la fuerza sigue aumentando a cortas distancias para una teoría asintótica.

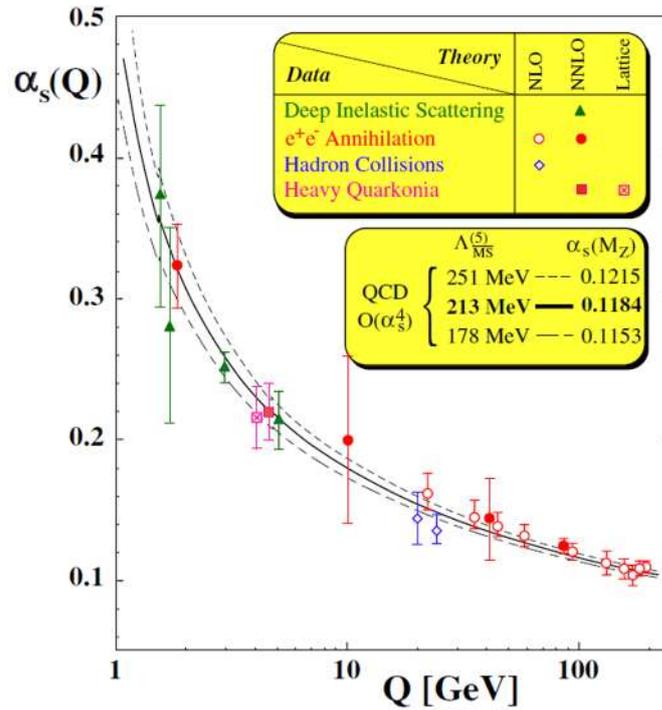


Figura 3.10.: Constante de acoplamiento de QCD como función del momento. Se muestran datos experimentales y algunas predicciones teóricas.

### 3.3.3. Escala de Interacción Fuerte $\Lambda_{\text{QCD}}$

El acoplamiento introduce un parámetro adicional  $\Lambda_{\text{QCD}}$ , el cual establece la escala en la cual la constante de acoplamiento se hace grande y la física adquiere su faceta no perturbativa. En otras palabras,  $\Lambda_{\text{QCD}}$  ajusta la escala de la física de interacciones fuertes. En el esquema  $\overline{\text{MS}}$  con tres sabores

$$\Lambda_{\text{QCD}} \sim 250 \text{ MeV}. \quad (3.29)$$

La mayoría de los resultados de QCD sin escala de momento externo usan este parámetro cuanto la masa de los quarks es despreciable. De manera particular, tiene una gran importancia para la masa de protones y neutrones, y en general de la masa bariónica del universo. Sin embargo, cuando se trabaja con quarks más pesados, la escala de momento necesariamente tiene que aumentar. Esto con el fin de tener resultados concordantes con esas escalas de energía.

### 3.4. Simetría Quiral

¿Para qué sirve introducir una escala de interacción fuerte  $\Lambda_{\text{QCD}}$  que dependa del acoplamiento  $\alpha$ ? Los quarks ligeros tienen una masa mucho más pequeña que  $\Lambda_{\text{QCD}}$ , mientras que los quarks pesados son mucho más pesados. Con esta clasificación, los quarks *up* y *down* se consideran ligeros, mientras que *charm*, *bottom* y *top* se consideran pesados. ¿Qué pasa con el quark *strange*? Bien, dado que no puede considerarse ni ligero ni pesado, en algunas ocasiones se toma como quark ligero, pero en otras como casi pesado.

En esta sección se hace énfasis en los dos quarks ligeros. Para entender la física adyacente de los quarks, conviene tomar el límite teórico en el cual sus masas es cero, ya que la física del mundo real no es muy diferente a la de este límite.

#### 3.4.1. Simetría Quiral

Si la masa del quark fuera cero, entonces el espín del quark podría estar en la dirección del movimiento (quark derecho) o en la posición opuesta (quark izquierdo). Dado que el quark sin masa se mueve a la velocidad de la luz, su lateralidad es independiente del sistema de referencia donde se observa.

La quiralidad se elige con la matriz  $\gamma_5$ , ya que esta conmuta con el Hamiltoniano libre. Así se define el operador de proyección  $P_{\pm} = (1 \pm \gamma_5)/2$  para proyectar sobre quarks derechos (o izquierdos)

$$\begin{aligned}\psi_{\text{I}_f} &= \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi_f, \\ \psi_{\text{D}_f} &= \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi_f,\end{aligned}\tag{3.30}$$

donde  $f$  denota los diferentes sabores. Así la función de onda del quark se escribe como una combinación lineal de ambos

$$\psi = \psi_I + \psi_D. \quad (3.31)$$

Y el lagrangiano del quark también se separa como

$$\mathcal{L}_q = \mathcal{L}_q(\psi_I) + \mathcal{L}_q(\psi_D), \quad (3.32)$$

el cual depende ya sea solo del quark con lateralidad izquierda, ó derecha, pero no ambos. Esto quiere decir que las interacciones de QCD no acoplan los quarks derechos con izquierdos o viceversa.

Así, como se considera que ambos quarks *up* y *down* no tienen masa, se consideran como dos estados independientes del mismo objeto el cual forma un espacio de isospín con dos componentes (espinores). Entonces la densidad lagrangiana es simétrica bajo rotaciones independientes de  $\psi_I$  o  $\psi_D$

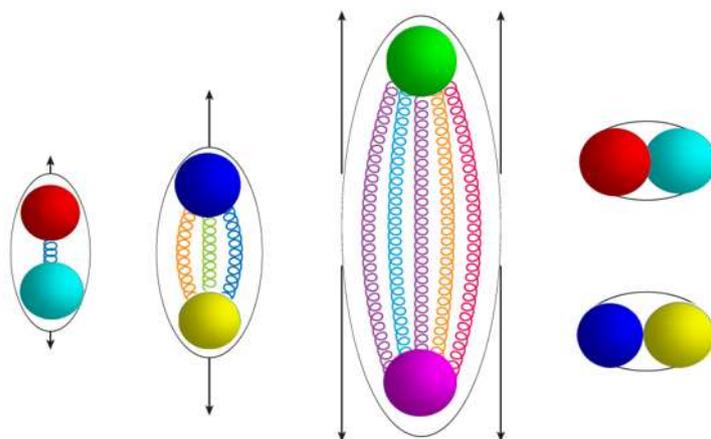
$$\begin{pmatrix} u'_{I,D} \\ d'_{I,D} \end{pmatrix} = U_{I,D} \begin{pmatrix} u_{I,D} \\ d_{I,D} \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

donde  $U_{I,D}$  son matrices unitarias  $2 \times 2$ . De esta manera se dice que el lagrangiano de QCD tiene una simetría quiral  $U(2)_I \times U(2)_D$ .

### 3.5. Confinamiento de Color

Se puede decir que el confinamiento de color es una de las características más sobresalientes de QCD. Esto es, que a temperatura y densidad cero, cualquier sistema interactuando fuertemente debe ser un singlete de color a una escala de distancia más grande que  $1/\Lambda_{\text{QCD}}$ . Como consecuencia, no existen quarks libres aislados en la naturaleza (confinamiento de quarks). El confinamiento de color es una conjetura consistente con resultados experimentales, pero aún no ha sido probado de manera formal.

Por ejemplo, si se considera que un par quark-antiquark está en un estado de singlete de color y se aplica energía para intentar separarlo, la interacción entre ellos se vuelve cada vez más grande. Esta es una situación equivalente a lo que pasa con se estira a un resorte. En efecto, cuando uno estira a un resorte más allá de su límite elástico, este se rompe en dos resortes. Para el par quark-antiquark, el añadir energía suficiente crea un nuevo par en vez de separarlo, lo que tiene como consecuencia que los quarks no sean partículas libres nunca. Este efecto se muestra esquemáticamente en la figura 3.11



**Figura 3.11.:** Creación de un nuevo par quark-antiquark después de agregar energía suficiente a otro par.

A pesar de todo, lo escrito en el párrafo anterior no es más que pura especulación la cual todos tomamos como cierta debido a que no se ha mostrado que ocurra mediante otra especie de mecanismo. Para entender realmente lo que sucede, se deben hacer cálculos en QCD de manera formal a escalas de distancia realmente grandes donde, según la ecuación de renormalización del grupo, el acoplamiento es verdaderamente grande. Un cálculo de este tipo es demasiado complicado con la tecnología actual. Una de las formas más aceptadas para resolver QCD en el régimen de acoplamiento fuerte es metiendo la teoría en una red espacio-tiempo finita, o *lattice* QCD. En *lattice* QCD se encuentra que la energía potencial entre los quarks, cuando se les intenta grandes distancias en un nivel donde no hay creación de un par quark-antiquark (QCD *apagada*), es de una forma lineal a una distancia de pocos fermis.

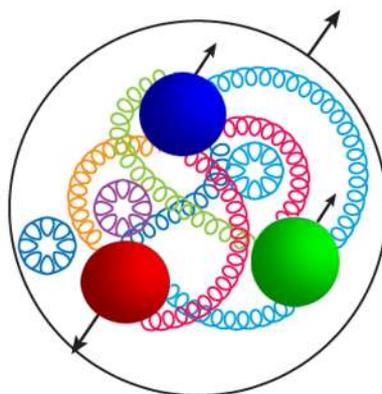
Es posible que este potencial lineal tenga su origen en el llamado tubo de flujo: un resorte de energía gluónica entre un par de quarks. En QED, por ejemplo, las líneas de campo entre un par de cargas positiva y negativa se dispersan sobre todo el espacio, generando así un potencial  $1/r$ . En QCD, sin embargo, el vacío actúa como un superconductor que oprime al campo de color hacia una configuración geométrica mínima: un tubo estrecho. Le cuesta energía al tubo esparcirse en el espacio, por lo que el tubo tiene aproximadamente una sección eficaz y energías constantes y así la energía almacenada en el flujo se incrementa linealmente con la longitud del tubo. Este tubo se ha visto en soluciones numéricas de la energía del gluón en *lattice* QCD.

El aspecto aparentemente más místico de QCD es que todo el formalismo se desarrolla utilizando *ingredientes* que no es posible observar en experimentos a bajas energías, quarks y gluones. Lo que usualmente se observa en los laboratorios son hadrones y núcleos, los cuales son estados base de esos bloques de la materia.

Como se discutió en el capítulo del modelo de quarks, un mesón es una partícula compuesta por un par quark-antiquark. Por ejemplo, el pión tiene el número cuántico  $u\bar{u} - d\bar{d}$ ,  $u\bar{d}$  y  $d\bar{u}$ , los cuales son singletes de color. Por otro lado, un barión se compone de los números cuánticos de tres quarks, que pueden formar un singlete ya que recordando la regla de multiplicación de  $SU(3)$

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{10}, \quad (3.34)$$

donde 1 representa el singlete de color. Por ejemplo, un protón está formado por dos quarks *up* y uno *down*; aquí la carga total de los quarks es 1, el espín de los quarks se añade para formar una partícula con espín total  $1/2$ , como se observa en la figura 3.12. Recordemos que existen otros bariones como  $\Lambda$ ,  $\Omega$ , etc, que se mencionaron en el primer capítulo, pero además también se tienen a sus estados excitados. Y bien, el conjunto de bariones y mesones son los hadrones hadrones, los estados ligados de las interacciones fuertes, y el objeto principal de estudio de QCD.



**Figura 3.12.:** Diagrama de un protón. En el modelo de quarks solamente aparecen tres quarks para formarlo, modelos recientes indican que los protones se encuentran sobre un mar de gluones que crean pares de partículas y antipartículas que constantemente se aniquilan.

Los bariones con las masas más pequeñas son los protones y neutrones, que en conjunto se llaman *nucleones*. Los protones son estables mientras que los neutrones tienen un tiempo de vida de aproximadamente 15 minutos. Además, existe una fuerza de atracción entre protones y neutrones, que son residuos de la interacción de color, similar a las fuerzas de Van der Waals entre átomos y moléculas neutras. Esa fuerza es la responsable de mantener a los nucleones unidos para formar núcleos atómicos.

### 3.6. Interacciones Débiles

Para finalizar este pequeño repaso sobre los elementos básicos de QCD hay que mencionar a las interacciones débiles. Las interacciones débiles aparentemente no juegan un rol muy importante cuando se estudia QCD, pero su importancia recae en el hecho de ser las responsables de fenómenos como la desintegración radioactiva y el cambio de sabor de los quarks. Estas son mediadas por medio de bosones vectoriales  $W$  y  $Z$ , los cuales juegan un papel similar a los fotones y gluones en QED y QCD respectivamente. En particular, el bosón  $Z$  conserva el color y es neutro, por lo que es más parecido al fotón. Sin embargo, esos

bosones de norma débil son realmente masivos,  $80,4\text{GeV}$  para  $W$  y  $91,2\text{GeV}$  para  $Z$ , y median una fuerza que actúa en un rango muy pequeño con una fuerza extremadamente débil. Los bosones  $W$  tienen carga y además cambian el sabor. Por ejemplo, la emisión de un  $W^+$  cambia un quark *up* por un quark *down*, y también cambia a un electrón en un neutrino del electrón, y a un muón en un neutrino del muón. Por lo que no es una mala idea tener una idea general sobre estas interacciones, la cual se desarrolla brevemente a continuación.

Dado que las interacciones electromagnéticas y fuertes involucran solo a la corriente vectorial  $j^\mu = V^\mu = \psi\gamma^\mu\psi$  y por tanto conservan paridad. Sin embargo, en 1956, Lee, Yang y Wu descubrieron que la interacción débil incluye violación de paridad, y que la corriente axial  $A^\mu = j_5^\mu = \psi\gamma^\mu\gamma_5\psi$  también se involucra en este tipo de fenómenos. Bajo una transformación de paridad  $\vec{x} \rightarrow -\vec{x}$ , el vector corriente transforma como  $V^\mu \rightarrow -V^\mu$ , mientras  $A^\mu \rightarrow A^\mu$ . De manera análoga, se pueden definir nueve corrientes axiales en términos de la estructura de sabor de los quarks *up*, *down* y *strange*,

$$A_5^{\mu a} = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\frac{\lambda^a}{2}\psi. \quad (3.35)$$

Una forma de entender mejor las interacciones débiles comienza con la definición de cargas débiles. La asignación de carga débil se relaciona con la propiedad quiral de los quarks visto en la 3.4.

Dentro del modelo estándar se asume que los quarks *up* y *down* izquierdos forman un vector de dos componentes

$$q_L^1 = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

el cual transforma como un doblete bajo  $SU(2)_L$ , mientras los quarks derechos,  $u_D$  y  $d_D$  transforman como singletes. El superíndice 1 indica la primera generación. El mismo patrón se repite para los quarks de la segunda generación: *charm* y *strange*, así como en la tercera que incluye a *top* y *bottom*. Además, los quarks llevan una hipercarga escalar  $Y$  que transforma como  $U_Y(1)$ , la cual se define

como

$$Q = I_3 + \frac{Y}{2}, \quad (3.37)$$

donde  $I_3 = T_3$  es la tercer componente del isoespín débil  $SU(2)_I$  y  $Q$  es la carga eléctrica.

Para que  $SU(2)_I \times U_Y(1)$  sea una simetría local, se introducen los campos de norma  $W_i^\mu$  para  $SU(2)_I$  y  $B^\mu$  para  $U_Y(1)$ . Entonces, la derivada covariante para el doblete débil es

$$D^\mu = \partial^\mu + ig \frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{W}^\mu + ig' \frac{Y}{2} \cdot B^\mu. \quad (3.38)$$

Así, después del rompimiento espontáneo de la simetría  $SU(2)_I \times U_Y(1)$  a través de un doblete de Higgs  $H = (\phi^+, \phi^0)$ , solo se mantiene  $U_{em}(1)$ . Los bosones de norma sin carga  $W^0$  y  $B$  se mezclan para dar un campo vectorial de fotones sin masa  $A^\mu$  y un campo bosónico de norma débil masivo  $Z^\mu$

$$Z^\mu = \frac{gW_3^\mu - g'B^\mu}{\sqrt{g^2 + g'^2}} = \cos \theta_W W_3^\mu - \sin \theta_W B^\mu, \quad (3.39)$$

$$A^\mu = \frac{g'W_3^\mu + gB^\mu}{\sqrt{g^2 + g'^2}} = \sin \theta_W W_3^\mu + \cos \theta_W B^\mu, \quad (3.40)$$

donde se introduce el ángulo de mezcla de Weinberg  $\theta_W$ . Así, como el campo electromagnético  $A^\mu$  media la interacción electromagnética, los acoplamientos se relacionan por

$$e = g \sin \theta_W = g' \cos \theta_W. \quad (3.41)$$

Con la definición anterior, el acoplamiento de un bosón-Z con quarks y leptones es

$$\mathcal{L}_{int}^Z = -\frac{g}{\cos \theta_W} \bar{\psi}_i \gamma^\mu (g_V^i - g_A^i \gamma^5) \psi_i Z_\mu, \quad (3.42)$$

donde las constantes de acoplamiento vectorial y axial son  $g_V^i = I_3 - 2q_i \sin^2 \theta_W$  y  $g_A^i = I_3$ , respectivamente. El valor medido experimentalmente es  $\sin^2 \theta_W = 0.23120(15)$ .

En el modelo estándar con tres quarks ligeros, la corriente de interacción del bosón  $W$  es

$$J_W^\mu / 2 = \cos \theta_C \bar{u}_1 \gamma^\mu d_1 + \sin \theta_C \bar{u}_1 \gamma^\mu s_L + \dots, \quad (3.43)$$

donde  $\theta_C = 15^\circ$  es el ángulo de Cabibbo. La interacción viola la paridad maximalmente, por lo que los quarks de la primera generación pueden pasar a uno de la segunda a través del intercambio de un bosón  $W$ . Esto se conoce como mezcla de sabores. De hecho, la mezcla de sabores más general dentro del modelo estándar con seis quarks va como

$$J_W^\mu / 2 = \bar{u}_1 \gamma^\mu d'_1 + \bar{c}_1 \gamma^\mu s'_1 + \bar{t}_1 \gamma^\mu b'_1, \quad (3.44)$$

donde los quarks primados son

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

y la ecuación (3.45) es la matriz de mezcla de Cabbibo-Kobayashi-Maskawa, la cual satisface la condición de unitariedad

$$|V_{ud}|^2 + |V_{us}|^2 + |V_{ub}|^2 = 1. \quad (3.46)$$

Este tipo de matrices se pueden parametrizar en términos de tres ángulos de mezcla  $\theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{23}$  y una fase  $\delta$ , cuatro parámetros independientes. La parame-

trización estándar es

$$\begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \quad (3.47)$$

donde  $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$  y  $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$ .

Para conocer en detalle la teoría de norma de las interacciones débiles se puede leer [5, 10, 40, 42–44, 64, 65].

## Capítulo 4.

# Ecuaciones de Schwinger-Dyson

*«There is a great satisfaction in building good tools for other people to use!»*

— Freeman Dyson

Con el fin de derivar a las ecuaciones de Schwinger-Dyson (ESD), o ecuaciones de movimiento de cualquier teoría cuántica de campos, se introducen algunos conceptos fundamentales de teoría cuántica de campos en formalismo de integrales de trayectoria. De esta forma se obtienen las herramientas para deducir la ecuación de movimiento de quark. Se comienza con una introducción al formalismo de integrales funcionales de las funciones de Green, el método usual para cuantizar las teorías de norma. También se presentan las identidades de Ward-Takahashi y la forma en que éstas relacionan a los vértices con los propagadores. Finalmente se presenta a las ecuaciones de Schwinger-Dyson no renormalizadas para el propagador del quark, así como la solución para la función de masa. La derivación y cálculo de observables usando las ESD se puede encontrar en [66–72]

## 4.1. Integrales Funcionales

El formalismo de integrales funcionales es el método más directo para derivar a las ecuaciones de Schwinger-Dyson, el cual se expone brevemente a continuación.

Una teoría cuántica de campos se caracteriza principalmente por sus funciones de Green. Para una teoría escalar, la integral funcional sobre los campos es

$$\langle 0|T[\hat{\varphi}(x_1)\cdots\hat{\varphi}(x_n)]|0\rangle = \frac{\int D[\varphi]\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)\exp[iS]}{\int D[\varphi]\exp[iS]}. \quad (4.1)$$

Aquí,  $\varphi(x)$  es el campo escalar en el punto del espacio-tiempo  $x$ , y  $T$  indica un ordenamiento temporal de los operadores. Además,  $S$  es la acción clásica

$$S = \int d^d x \mathcal{L}(x). \quad (4.2)$$

La ecuación (4.1) se escribe en una forma más compacta al introducir una fuente externa  $J$ . La función de Green de la ecuación (4.1) se obtiene al tomar la derivada funcional respecto a la fuente externa  $J(x)$ , esto es

$$\langle 0|T[\hat{\varphi}(x_1)\cdots\hat{\varphi}(x_n)]|0\rangle = \frac{(-i)^n}{\mathcal{Z}[0]} \frac{\delta^n \mathcal{Z}[J]}{\delta J(x_1)\cdots\delta J(x_n)} \Bigg|_{J=0}, \quad (4.3)$$

donde

$$\mathcal{Z}[J] = \int D[\varphi] \exp \left[ i \int d^4 x (\mathcal{L} + J\varphi) \right], \quad (4.4)$$

es el funcional generador del campo bosónico  $\varphi$ .

Dado que es necesario calcular la función de Green de dos puntos, la cual representa al propagador, entonces se calcula la segunda derivada respecto a la

fuente externa

$$\langle 0|T[\hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2)]|0\rangle = -\frac{1}{\mathcal{Z}[0]} \frac{\delta^2 \mathcal{Z}[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)} \Bigg|_{J=0} = i\Delta_F(x_1 - x_2). \quad (4.5)$$

Para fermiones, los cuales estamos interesados estudiar, el generador funcional es

$$\mathcal{Z}[\eta, \bar{\eta}, J] = \int D[\bar{\psi}\psi A] \exp \left[ i \int d^4x (\mathcal{L} + \bar{\psi}\eta + \bar{\eta}\psi + J^\mu A_\mu) \right], \quad (4.6)$$

donde se usa la notación  $D[\bar{\psi}\psi A] = D[\bar{\psi}]D[\psi]D[A]$ . El término  $A_\mu$  corresponde al campo de norma asociado a una fuente externa  $J^\mu$ . Los campos fermiónicos  $\psi$  y  $\bar{\psi}$  vienen con unos términos de Grassman  $\bar{\eta}$  and  $\eta$ . Con estos elementos presentes, la función de dos puntos del fermión es

$$\langle 0|T[\hat{\psi}(x_1)\hat{\psi}(x_2)]|0\rangle = -\frac{1}{\mathcal{Z}[0,0,0]} \frac{\delta^2 \mathcal{Z}[\eta, \bar{\eta}]}{\delta \bar{\eta}(x_1)\delta(-\eta(x_2))} \Bigg|_{J=\eta=\bar{\eta}=0} = iS_F(x_1 - x_2), \quad (4.7)$$

donde  $S_F(x_1 - x_2)$  denota al propagador del fermión. Es importante notar que se considera la derivada funcional con respecto a  $-\eta$ , para así tomar en consideración la anticonmutación de los elementos del álgebra de Grassman.

Las funciones de Green conectadas generan los diagramas que contribuyen a la matriz  $S$ . El funcional generador para las funciones de Green conectadas  $\mathcal{W}$  se define como

$$\mathcal{Z}[\eta, \bar{\eta}, J] = \exp[iW[\eta, \bar{\eta}, J]], \quad (4.8)$$

la cual se relaciona mediante una identidad de Legendre al vértice propio o acción efectiva  $\Gamma[\bar{\psi}, \psi, A]$

$$W[\eta, \bar{\eta}, J] = \Gamma[\bar{\psi}, \psi, A] + \int d^4x [\bar{\psi}\eta + \bar{\eta}\psi + J^\mu A_\mu]. \quad (4.9)$$

Con la ayuda de la ecuación (4.9) es posible obtener las funciones de Green una-partícula irreducible (1PI). Estos consisten en los diagramas de Feynman que no se pueden separar en dos diagramas autoconsistentes cuando son cortados con una línea. A partir de la ecuación (4.9), se define

$$\begin{aligned} -i \frac{\delta \mathcal{W}[J]}{\delta J^\mu} &= A_\mu, & -i \frac{\delta \mathcal{W}[\eta]}{\delta \eta} &= \psi, & i \frac{\delta \mathcal{W}[\bar{\eta}]}{\delta \eta} &= \bar{\psi}, \\ i \frac{\delta \Gamma[A]}{\delta A^\mu} &= J_\mu, & i \frac{\delta \Gamma[\bar{\psi}]}{\delta \bar{\psi}} &= \eta, & -i \frac{\delta \Gamma[\psi]}{\delta \bar{\psi}} &= \bar{\eta}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

los cuales son también funcionales, pero usualmente se refiere a ellos como campos clásicos.

## 4.2. Cuantizando Teorías de Norma

Ignorando los campos fermiónicos, el generador de funciones de Green de  $n$  puntos es

$$Z[J] = \int D[A] \exp \left[ i \int d^4x (\mathcal{L} + J^{a\mu} A_\mu^a) \right], \quad (4.11)$$

donde el Lagrangiano  $\mathcal{L}$  y la medida  $D[a]$  son invariantes de norma, pero la fuente no. Por este motivo, se tiene que las funciones de Green son cantidades dependientes de la norma. Por ejemplo, si se ignora a los campos fermiónicos y se concentra solamente en la parte de norma, el Lagrangiano es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}. \quad (4.12)$$

Al realizar la integral sobre las configuraciones de norma se sobrecuentan algunos términos que resultan de sumar sobre configuraciones de campo que son equivalentes. Para resolver este problema es necesario restringir el funcional y considerar solamente una órbita de norma representativa. Esto se logra al

imponer una restricción sobre el campo de norma  $A_\mu^a$ , la cual se escribe como

$$G^\mu A_\mu^a = B^a. \quad (4.13)$$

Esta condición se satisface para todas las  $A_\mu^a$ 's. Además, tanto  $G^\mu$  como  $B^a$  se deben elegir de tal manera que se obtenga un único  $\lambda^a$  para  $A_\mu^a$  y  $B^a$  fijos. Para poder utilizar esta restricción dentro de la funcional integral, se inserta un término unidad en forma de una funcional integral

$$\delta_G[A] \int \mathcal{D}[\prod_a \lambda^a] \delta(G^\mu A_\mu^{(\lambda)a} - B^a) = 1, \quad (4.14)$$

la cual se evalúa directamente y se obtiene

$$\delta_G[A] = \det M_G, \quad \text{donde } (M_G(x_1, x_2))^{ab} = \frac{\delta(G^\mu A_\mu^{(\lambda)a}(x_1))}{\delta \lambda^b(x_2)}. \quad (4.15)$$

Colocando la ecuación (4.14) dentro de la expresión para el funcional generatriz se obtiene

$$\mathcal{Z}[J] = \int \mathcal{D}[A] \det M_G \prod_{a,x} \delta(G^\mu A_\mu^a(\lambda) - B^a) \exp \left[ i \int d^4x (\mathcal{L} + J^{a\mu} A_\mu^a) \right]. \quad (4.16)$$

Como todos los términos en la ecuación (4.16), con excepción de la función delta, son invariantes de norma, entonces uno desearía remover a la función delta de dicha ecuación. Esto se logra imponiendo una condición que fije la norma de la ecuación (4.13) al introducir una integral gaussiana centrada en  $B^a$  e integrando sobre el campo auxiliar

$$\mathcal{Z}[J] = \int \mathcal{D}[AB] \det M_G \exp \left[ i \int d^4x \left( \mathcal{L} + B^a G_\mu A_\mu^a + \frac{\xi}{2} (B^a)^2 + J^{a\mu} A_\mu^a \right) \right]. \quad (4.17)$$

Con esta restricción se obtiene una integral independiente de los parámetros  $B^a$ , por lo que es posible factorizar al resultado del integrando  $\int \mathcal{D}[B]$ , el cual es una constante. Esta constante afecta globalmente a la normalización del funcional,

por lo que incluirla en la expresión final del funcional no es muy importante. De esta manera, para un parámetro de norma  $\zeta$ , se tiene la siguiente forma de funcional generatriz

$$\mathcal{Z}[J] = \int \mathcal{D}[A] \det M_G \exp \left[ i \int d^4x \left( \mathcal{L} - \frac{1}{2\zeta} (G_\mu A_\mu^a)^2 + J^{a\mu} A_\mu^a \right) \right]. \quad (4.18)$$

Así, al utilizar la norma covariante, donde  $G^\mu = \partial^\mu$ , se llega a que la condición de que fijar la norma es equivalente a agregar el término  $\mathcal{L}_{GF} = -\frac{1}{2\zeta} (\partial_\mu A^\mu(x))^2$  al Lagrangiano. En esta norma, la matriz  $M_G$  adquiere la forma

$$(M_G(x, y))^{ab} = -\frac{1}{g} (\delta^{ab} \partial^2 - g f^{abc} \partial^\mu A_\mu^c) \delta^4(x - y). \quad (4.19)$$

El siguiente paso consiste en utilizar el truco de Faddeev-Popov. Para una teoría abeliana, las constantes de estructura  $f^{abc} = 0$ , por lo que el determinante de  $M_G$  es constante. Esto es similar en las normas de Coulomb y Axial. Sin embargo, como en la norma covariante el determinante depende del parámetro de norma  $A^\mu$ , este deja de ser una constante. Este argumento debe tomarse cuidadosamente, ya que la elección de dicho parámetro afectará directamente a las predicciones físicas. El método de Faddeev-Popov es utilizado para obtener un lagrangiano efectivo al introducir el fantasma de Faddeev-Popov como un campo adicional.

### 4.2.1. Fantasmas de Faddeev-Popov

La dependencia del campo de norma del determinante de Faddeev-Popov y de la constante de acoplamiento  $g$  complican demasiado la descripción de las teorías de norma no abelianas. Para solucionar esto, se escribe el determinante en términos de un campo complejo  $\chi^a(x)$ , el cual pertenece a la representación adjunta del grupo de norma  $SU(3)$ , que anticonmuta pero tiene un propagador

bosónico. El determinante de  $M_G$  se expresa como

$$\det M_G = \int \mathcal{D}[\chi\chi^*] \exp \left\{ -i \int d^4x_1 d^4x_2 \chi^{a*}(x_1) (M_G(x_1, x_2))^{ab} \chi^b(x_2) \right\}. \quad (4.20)$$

Después de integrar el término dentro de la exponencial de la ecuación (4.20) por partes, esto es

$$\int d^4x_1 d^4x_2 \chi^{a*}(x_1) (M_G(x_1, x_2))^{ab} \chi^b(x_2) = - \int d^4x_1 (\partial^\mu \chi^{a*}(x_1))^* D_\mu^{ab} \chi^b(x_1), \quad (4.21)$$

el determinante de  $M_G$  se reescribe como

$$\det M_G = \int \mathcal{D}[\chi\chi^*] \exp \left\{ i \int d^4x (\partial^\mu \chi^{a*}(x)) D_\mu^{ab} \chi^b(x) \right\}, \quad (4.22)$$

donde  $D_\mu^{ab} = \delta^{ab} \partial_\mu - g f^{abc} A_\mu^c(x)$  es la derivada covariante, además se reetiquetó  $x_1 \rightarrow x$ . Colocando todos los términos correspondientes de los campos del quark junto con sus fuentes, se obtiene el funcional generatriz de QCD

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[J, \sigma, \sigma^*, \eta, \bar{\eta}] = & \int \mathcal{D}[A\chi\chi^*\eta\bar{\eta}] \exp \left\{ i \int d^4x \left( \mathcal{L} + \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_{GF} + \mathcal{L}_{FP} \right. \right. \\ & \left. \left. + A_\mu^a J^{a\mu} + \chi^{*a} \sigma^a + \sigma^{*a} \chi^a + \bar{\psi} \eta + \bar{\eta} \psi \right) \right\}, \end{aligned} \quad (4.23)$$

donde  $\sigma^a$  y  $\sigma^{*a}$  son las fuentes asociadas al campo de fantasmas. Además, se ha descompuesto al Lagrangiano en sus partes constituyentes

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_F = \sum_{k=1}^{N_f} \bar{\psi}_k (i\gamma^\mu D_\mu - m_k) \psi_k, \quad \mathcal{L}_G = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}, \\ \mathcal{L}_{GF} = -\frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu^a)^2, \quad \mathcal{L}_{FP} = (\partial^\mu \chi^{a*}) D_\mu^{ab} \chi^b, \end{aligned} \quad (4.24)$$

donde la suma sobre el Lagrangiano del fermión  $\mathcal{L}_F$  se realiza sobre  $N_F$  sabores de quarks.

### 4.3. Identidades de Ward-Takahashi

Las identidades de Ward-Takahashi son relaciones exactas entre los vértices y propagadores 1 partícula irreducible (1PI), las cuales son válidas para todos los órdenes, tanto en teoría de perturbaciones como de manera no perturbativa. Su razón de ser se debe a la invariancia de norma de QED y su papel en el cálculo de observables es importante ya que permanece válida después de renormalizar la teoría. Esta identidad se obtiene fácilmente usando el formalismo de integrales funcionales presentado en la sección previa. Se comienza con la ecuación (4.6) y el lagrangiano de QED de la ecuación (3.12)

$$\mathcal{Z}[\eta, \bar{\eta}, J] = \int D[\bar{\psi}\psi A] \left\{ \exp \left[ i \int d^4x (\mathcal{L}(A_\mu, \psi, \bar{\psi}) + \bar{\psi}\eta + \bar{\eta}\psi + J^\mu A_\mu) \right] \right\}. \quad (4.25)$$

El objetivo principal es hacer una transformación de norma a este funcional, el cual debe ser invariante ante dicho cambio. Esto es posible ya que una transformación de norma no es más que un desplazamiento en las variables, el cual deja la integral invariante. Cuando se varia el funcional, el enfoque es solamente en los términos que fijan la norma y en las fuentes externas, que no son invariantes de norma. Sea  $\lambda(x)$  el término que parametriza a la transformación de norma, entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} + \delta\mathcal{Z} = & \int D[\bar{\psi}\psi A] \left\{ \exp \left[ i \int d^4x (\mathcal{L}(A_\mu, \psi, \bar{\psi}) + \bar{\psi}\eta + \bar{\eta}\psi + J^\mu A_\mu) \right. \right. \\ & \left. \left. + \left( -\frac{1}{\xi} (\partial_\mu A^\mu) \partial^2 \lambda(x) + J^\mu (\partial_\mu \lambda(x)) + ie\lambda(x) (\bar{\psi}\eta - \bar{\eta}\psi) \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Se integra por partes el término que incluye la variación para así cancelar las derivadas sobre  $\lambda(x)$ . Además, se expande la exponencial a orden  $\mathcal{O}(\lambda)$

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{Z} = & \int D[\bar{\psi}\psi A] \left\{ \exp \left[ i \int d^4x (\mathcal{L}(A_\mu, \psi, \bar{\psi}) + \bar{\psi}\eta + \bar{\eta}\psi + J^\mu A_\mu) \right] \right. \\ & \left. \times \left( -\frac{\partial^2}{\xi} (\partial_\mu A^\mu) \partial_\mu J^\mu + ie(\bar{\psi}\eta - \bar{\eta}\psi) \right) i\lambda(x) \right\}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

La condición  $\delta \mathcal{Z} = 0$  se reescribe como una ecuación diferencial funcional que actúa sobre el funcional generatriz  $\mathcal{Z}$

$$\left[ -\partial_\mu J^\mu + e \left( \eta \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(x)} - \bar{\eta} \frac{\delta}{\delta \eta(x)} \right) + i \frac{\partial^2}{\xi} \partial_\mu \frac{\delta}{\delta J_\mu} \right] \mathcal{Z}[J, \eta, \bar{\eta}] = 0. \quad (4.28)$$

Es posible reescribir la expresión anterior en términos de la función de Green conectada de la ecuación (4.8) usando las distintas relaciones para el vértice propio de la ecuación (4.10)

$$\left[ \partial_\mu \frac{\partial \Gamma}{\partial A_\mu(x)} + ie \left( \bar{\psi} \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\psi}(x)} - \psi \frac{\delta \Gamma}{\delta \psi(x)} \right) - i \frac{\partial^2}{\xi} \partial_\mu A^\mu(x) \right] \mathcal{Z}[J, \eta, \bar{\eta}] = 0. \quad (4.29)$$

De esta forma, la identidad de Ward-Takahashi para QED en el espacio de coordenadas se obtiene al tomar las derivadas funcionales con respecto a  $\psi$  y  $\bar{\psi}$ , además de considerar a los campos  $A$ ,  $\psi$ ,  $\bar{\psi}$  igual a cero, así

$$\begin{aligned} \delta_z^\mu \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta \bar{\psi}(z) \delta \psi(y) \delta A^\mu(x)} &= ie \frac{\delta^2}{\delta \bar{\psi}(z) \delta \psi(y)} \left( \bar{\psi} \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\psi}(x)} - \psi \frac{\delta \Gamma}{\delta \psi(x)} \right) \\ &= ie \left[ \delta^4(x-y) \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \bar{\psi}}(z) \delta \psi(x) - \delta^4(x-z) \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \bar{\psi}(x) \delta \psi(y)} \right]. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Después de hacer una transformada de Fourier al espacio de los momentos se tiene

$$q_\mu \Gamma^\mu(p, q, p+q) = S_F^{-1}(p+q) - S_F^{-1}(p) \quad (4.31)$$

la cual es la identidad vectorial de Ward-Takahashi en el espacio de momentos. Al considerar el límite  $q \rightarrow 0$  se obtiene la primera identidad de Ward

$$\Gamma^\mu(p, p) = \frac{\partial S_F^{-1}(p)}{\partial p_\mu}. \quad (4.32)$$

También se puede obtener una identidad de Ward para el fotón de la ecuación (4.29) al diferencia con respecto al campo  $A^\mu$ . Una vez que se hacen todos los campos igual a cero se encuentra

$$\partial_x^\mu \frac{\partial^2 \Gamma}{\delta A_\nu(y) \delta A_\mu(x)} = \frac{\delta^2}{\xi} \partial_x^\nu \delta^4(x - y) \quad (4.33)$$

y después de la transformada de Fourier

$$q^\mu [\Delta_{\mu\nu}]^{-1} = \frac{1}{\xi} q_\nu q^2. \quad (4.34)$$

La cual indica que la parte transversa del fotón no recibe correcciones a mayor orden en las normas covariantes lineales. Las normas covariantes lineales son aquellas en la que se le añade al Lagrangiano un término de la forma  $\frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu^a)^2$ , donde  $\xi$ , como ya se mencionó, es el parámetro que fija la norma. Los ejemplos más comunes son la anteriormente mencionada norma de Landau ( $\xi = 0$ ), y la norma de Feynman ( $\xi = 1$ ).

## 4.4. Ecuaciones de Schwinger-Dyson

La técnica funcional vista en las secciones anteriores permite determinar las ecuaciones de movimiento de QED y QCD, o ecuaciones de Schwinger-Dyson (ESD). Al expandir en el parámetro de acoplamiento a esta ecuación se obtiene la teoría de perturbaciones. Pero lo realmente fascinante de estas ecuaciones, es que su derivación se puede obtener de manera no perturbativa. Entonces se pueden usar para tratar problemas tanto no perturbativos como perturbativos. Las ecuaciones de Schwinger-Dyson se basan en el hecho de que la el funcional

integral de una derivada total es igual a cero

$$\int \mathcal{D}[\varphi] \frac{\delta}{\delta\varphi} = 0. \quad (4.35)$$

A pesar que este argumento parezca ser trivial desde el punto de vista del análisis funcional, conduce a relaciones no triviales entre los funcionales generatrices en teoría cuántica de campos.

Para comenzar, se usa la ecuación (4.35) en el contexto de una teoría escalar, así

$$\begin{aligned} 0 &= \int [\varphi] \frac{\delta}{\delta\varphi} \exp \left\{ i \left( S(\varphi) + \int dx J\varphi \right) \right\} \\ &= \mathcal{D}[\varphi] i \left[ \frac{\delta S}{\delta\varphi} + J \right] \exp \left\{ i \left( S(\varphi) + \int dx J\varphi \right) \right\}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

La cual se escribe como una ecuación diferencial

$$\left[ \frac{\delta S}{\delta\varphi} \left( -i \frac{\delta}{\delta J} \right) + J \right] \mathcal{Z}[J] = 0. \quad (4.37)$$

La expresión anterior es la relación de Schwinger-Dyson, la cual es independiente de teoría de perturbaciones. En la siguiente sección se calcula la ecuación de Schwinger-Dyson para el propagador del quark. Para ello se considerará solo un sabor, esto gracias a que los campos de quarks se añaden aditivamente al Lagrangiano de QCD.

#### 4.4.1. Ecuación de Schwinger-Dyson del Quark

Para encontrar la ESD del quark es importante recordar varios aspectos de la teoría. Primero que nada, el propagador del quark es

$$S(x, y) = \frac{\frac{\delta}{i\delta\bar{\eta}} \frac{\delta}{i\delta\eta} \mathcal{Z}[J, \sigma, \sigma^*, \eta, \bar{\eta}]}{\mathcal{Z}[J, \sigma, \sigma^*, \eta, \bar{\eta}]}. \quad (4.38)$$

La acción de QCD se escribe como

$$S = S_{\text{QCD}} + i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{fuentes}}, \quad (4.39)$$

donde

$$S_{\text{QCD}} = i \int d^4x \left( \mathcal{L} + \mathcal{L}_G + L_{GF} + \mathcal{L}_{FP} \right), \quad (4.40)$$

$$\mathcal{L}_{\text{fuentes}} = A_\mu^a J^{a\mu} + \chi^* \sigma + \sigma^* \chi + \bar{\psi} \eta + \bar{\eta} \psi. \quad (4.41)$$

Debido a que la integral funcional es independiente de los campos, se escribe la derivada de la acción

$$0 = \int \mathcal{D}[A\chi\chi^*\eta\bar{\eta}] \frac{\delta}{\delta\bar{\psi}(x)} e^{S_{\text{QCD}} + \int d^4x' \mathcal{L}_{\text{fuentes}}}. \quad (4.42)$$

Una vez que se realiza la derivada, se reescribe en una forma tal que se usa la funcional generatriz

$$0 = \left( \frac{\delta S_{\text{QCD}}}{\delta\bar{\psi}} \left[ -i \frac{\delta}{\delta\sigma^*}, i \frac{\delta}{\delta\sigma}, -i \frac{\delta}{\delta\bar{\eta}}, i \frac{\delta}{\delta\eta}, -i \frac{\delta}{\delta J} \right] + \eta(x) \right) \mathcal{Z}[J, \sigma, \sigma^*, \eta, \bar{\eta}], \quad (4.43)$$

donde  $\delta S_{\text{QCD}}/\delta\bar{\eta}(x)[\dots]$  es el operador diferencial funcional que actúa sobre el funcional generatriz. Es esta ecuación también actúa el operador diferencial  $\delta/\delta\eta$ , el cual, al ser un operador de Grassmann, actúa por el lado derecho. Por tanto

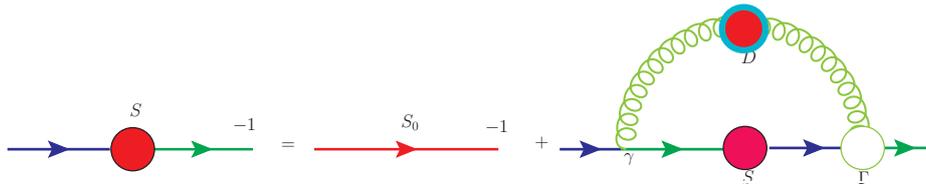
$$\left( \frac{\delta S_{\text{QCD}}}{\delta\bar{\psi}(x)} \frac{\delta}{\delta\eta(y)} \left[ -i \frac{\delta}{\delta\sigma^*}, i \frac{\delta}{\delta\sigma}, -i \frac{\delta}{\delta\bar{\eta}}, i \frac{\delta}{\delta\eta}, -i \frac{\delta}{\delta J} \right] + \delta^4(x-y) \right) \mathcal{Z}[J, \sigma, \sigma^*, \eta, \bar{\eta}], \quad (4.44)$$

donde se omitió el término  $\delta Z(\dots)\delta\sigma$  ya que no contribuye a ningún término de la ESD después de hacer las fuentes igual a cero. Después de realizar la serie de pasos vistos en el Apéndice A, se llega a la expresión de la ESD del propagador

del quark

$$S_F^{-1}(p) = i\not{p} - m_0 + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} g^2 t^a \gamma^\mu S(k) \Gamma_\nu^b(k, p; k - p) D_{\mu\nu}^{ab}(k - p). \quad (4.45)$$

Esta es la ESD no renormalizada para el propagador del quark en el espacio de momentos. En la figura 4.1 se presenta a la ecuación (4.45) de forma diagramática. El primer sumando en el lado derecho es el propagador del quark libre  $S_0(P)$ . Mientras que el segundo diagrama corresponde a la autoenergía del quark. Es importante mencionar que tanto el propagador del gluón como el vértice tienen su propia ESD que, en principio se tienen que resolver junto con la del quark, pero por a su complejidad se usan modelos que satisfagan las propiedades básicas de QCD. Esto es, libertad asintótica en el régimen ultravioleta, confinamiento de quarks y gluones y rompimiento dinámico de la simetría quiral.



**Figura 4.1.:** Ecuación de Schwinger-Dyson del propagador del quark. De izquierda a derecha: El propagador completo del quark se expresa como propagador libre del quark más su autoenergía. La autoenergía contiene al propagador completo del quark y del gluón. Estos se acoplan con el vértice completo 1PI.

Después de renormalizar a la ESD se obtiene

$$S_F^{-1}(p) = Z_2(i\not{p} + m_f) + Z_1 \int_q^\Lambda g^2 t^a \gamma^\mu S(k) \Gamma_\nu^a(k, p; k - p) D_{\mu\nu}(k - p), \quad (4.46)$$

donde se han factorizado los índices de color

$$D_{\mu\nu}^{ab} = \delta^{ab} D_{\mu\nu}(q), \quad (4.47)$$

con  $q = k - p$ . El vértice quark-gluón se descompone como

$$\Gamma_v^a(k, p) = t^a \Gamma_v(k, p). \quad (4.48)$$

donde  $\Gamma_v(k, p)$  es el vértice quark-gluón propio. Además,  $\int_q^\Lambda = \int^\Lambda d^4q / (2\pi)^4$  representa una regularización de invariancia traslacional de la integral, donde  $\Lambda$  es la escala de regularización. En la ecuación (4.46), las constantes  $Z_1(\xi^2, \Lambda^2)$  y  $Z_2(\xi^2, \Lambda^2)$  son las constantes de renormalización del vértice quark-gluón y de la función de onda del quark respectivamente. Estas dependen del punto de renormalización  $\xi$ . Con esto en mente es mucho más sencillo es posible escribir la contribución a la autoenergía de las matrices de Gell-Mann como un solo factor  $C_F$ , el cual es un casimir. Para tres colores  $N_C = 3$ , la contracción de los generadores de  $SU(3)$  es

$$C_F = \delta^{ab} t^a t^b = \sum_{a=1}^8 \frac{\lambda^a}{2} \lambda^a = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^8 \{\lambda^a, \lambda^a\} = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^8 \left( \frac{4}{3} \delta^{aa} + 2d^{aac} \lambda^c \right) = \frac{4}{3}. \quad (4.49)$$

Además, en normas covariantes, la forma más general para el propagador del gluón es

$$D_{\mu\nu}^{ab} = \delta^{ab} \left[ \left( \delta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) \frac{1}{q^2(1 + \Pi(q^2))} + \xi \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right] \quad (4.50)$$

Es importante mencionar que la derivación de las ESD no requiere que la constante de acoplamiento sea pequeña, por lo que son ideales para combinar los espectros ultravioleta e infrarrojo de la teoría. Además, estas acoplan a la función de Green de  $n$  puntos con la de  $n + 1$ , la de  $n + 1$  puntos con la de  $n + 2$  puntos, etcétera. De esta manera forman una torre infinita de ecuaciones acopladas que deben resolverse simultáneamente. Sin embargo, para resolver este número infinito de ecuaciones se necesita un esquema de truncamiento, el cual debe satisfacer las características principales de QCD.

El truncamiento usual consiste en obtener el propagador del quark se proponen *ansatz* para el propagador del gluón  $D_{\mu\nu}^{ab}$  y el vértice  $\Gamma_\nu^a$ . El objetivo es seguir conservando las características principales de la teoría. Por ejemplo, el vértice debe incluir la identidad no abeliana de Slavnov-Taylor, las cuales proveen invariancia de norma en la teoría, y son además una generalización de las identidades de Ward-Takahashi para teorías no abelianas. También es importante mantener la renormalizabilidad multiplicativa, con la cual se pueden eliminar las divergencias ultravioletas de manera sistemática. Por otro lado, el propagador del gluón debe respetar el límite perturbativo, además de incluir el fenómeno del rompimiento dinámico de simetría quiral (RDSQ). En la siguiente sección se describe brevemente la solución para la ESD del quark.

## 4.5. Resolviendo las Ecuaciones de Schwinger-Dyson.

Para resolver la ESD del quark, primero es conveniente representarla de la forma

$$S_f^{-1}(p) = i\gamma \cdot p + m_f + \Sigma_f(p), \quad (4.51)$$

donde  $S_f^{-1}(p)$  es el inverso del propagador del quark,  $m_f$  la masa desnuda del quark y  $\Sigma_f(p)$  la autoenergía del quark. Recordemos que la autoenergía es

$$\Sigma_f(p) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} g^2 \gamma_\mu D_{\mu\nu}(p-k) \frac{\lambda^a}{2} S_f(k) \Gamma_\nu^a(p,k). \quad (4.52)$$

Como se mencionó anteriormente, el primer paso es preparar un *ansatz* para el propagador del gluón y el vértice, esto se hace con un modelo para el producto  $g^2 D_{\mu\nu}(q) \Gamma_\nu(k, p)$ . Para el vértice, se toma la aproximación arcoiris  $\Gamma_\nu(k, p) = \gamma_\nu$ .

De esta forma el producto es

$$g^2 D_{\mu\nu}(q) \Gamma_\nu(k, p) = g^2 \mathcal{D}(q) \gamma_\nu \Delta_{\mu\nu}^{ab} = \gamma_\nu \mathcal{D}(q^2) \left[ \delta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right], \quad (4.53)$$

donde se ha separado al gluón en el producto del propagador desnudo multiplicado por una función de revestimiento efectiva  $g^2 \mathcal{D}(q^2)$ . Una vez que se sustituye la expresión de la ecuación (4.53) en la ecuación (4.52), se obtiene dentro del integrando de la ESD

$$S_f^{-1}(p) = S_0^{-1}(p) - \int d^4 k t^a \gamma_\mu S_f(k) t^a \gamma_\nu \mathcal{D}(q^2) \left[ \delta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right]. \quad (4.54)$$

Uno de los métodos para resolver la ecuación de gap en QCD consiste en separar la ecuación (4.54) en dos funciones:  $M(p)$  y  $F(p)$ . Primero, se escribe la expresión completa para el propagador de la ecuación (4.45) como

$$\frac{\not{p} + M(p)}{F(p)} = \not{p} - m_f - \int d^4 k t^a \gamma_\mu \frac{F(k)}{k^2 + M^2(k^2)} t^a \gamma_\nu \mathcal{D}(q^2) \left[ \delta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right], \quad (4.55)$$

donde  $F(q)$  es la función de renormalización de la función de onda del quark. De esta manera, para encontrar la función de masa  $M(p)$  del quark se calcula la traza en la ecuación (4.55). Así

$$4 \frac{M(p)}{F(p)} = 4m_b + \sum_a t^a t^a \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\mathcal{G}(q^2)}{q^2} \frac{F(k)}{k^2 + M^2(k^2)} \left[ \delta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right] \times \text{Tr}[\gamma_\mu (\not{k} + M(k)) \gamma_\nu], \quad (4.56)$$

Incluyendo el factor de color de la ecuación (4.49), aunado al hecho que la traza de productos de matrices  $\gamma$  tiene las propiedades

$$\begin{cases} \text{Tr}[\text{\#impar de } \gamma's] = 0, \\ \text{Tr}[\gamma_\alpha \gamma_\beta] = d \delta_{\alpha\beta}, \\ \text{Tr}[\gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\mu \gamma_\nu] = d[\delta_{\alpha\beta} \delta_{\mu\nu} - \delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\nu} + \delta_{\alpha\nu} \delta_{\beta\mu}], \end{cases}, \quad (4.57)$$

donde  $d$  es la dimensión de las matrices  $\gamma$ . Se cumple

$$\sum_a t^a t^a \text{Tr}[\gamma_\mu (\not{k} + M(k)) \gamma_\nu] = \frac{16}{3} M(k) \delta_{\mu\nu}. \quad (4.58)$$

Se contraen los índices de Lorentz correspondientes al propagador libre del gluón para obtener

$$\delta_{\mu\nu} \left[ \delta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right] = 3. \quad (4.59)$$

Y se obtiene la expresión para la función de masa

$$\frac{M(p)}{F(p)} = m_b + \frac{4}{3} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{M(k)F(k)}{k^2 + M^2(k^2)} \mathcal{D}(q^2). \quad (4.60)$$

Para poder integrar en las cuatro dimensiones, se usan coordenadas hiperesféricas

$$\begin{aligned} d^4 k &= k^3 \sin^2 \theta \sin \phi dk d\theta d\phi d\psi \\ q^2 &= (k-p)^2 = k^2 + p^2 - 2kp \cos \theta, \end{aligned} \quad (4.61)$$

donde  $\theta$  es el ángulo entre los momentos de los fermiones. Además, se tiene el rango para los cuatro grados de libertad

$$\psi \in [0, 2\pi], \quad \phi \in [0, \pi], \quad \theta \in [0, \pi], \quad k^2 \in (0, \Lambda^2), \quad (4.62)$$

donde se utiliza una regularización de las integrales a la escala  $\Lambda$ . La etapa final de este (y cualquier otro) cálculo es remover la regularización al tomar el límite  $\Lambda \rightarrow \infty$ , y de esta forma preservar las identidades de Ward-Takahashi, lo cual es crucial cuando se estudia el RDSQ, por poner un ejemplo. Después de integrar sobre las coordenadas angulares independientes  $\psi$  y  $\phi$

$$\frac{M(p^2)}{F(p^2)} = m_b + \frac{1}{2\pi^3} \int_0^{\Lambda^2} dk^2 \frac{k^2 M(k^2) F(k^2)}{k^2 + M^2(k^2)} \int_0^\pi d\theta \sin^2 \theta \mathcal{D}(q^2), \quad (4.63)$$

la cual es la ecuación para la función de masa, la cual está acoplada con  $F$ .

Con el fin de obtener la expresión para la función de renormalización de la función de onda, la expresión dada por la ecuación (4.55) se multiplica por  $\not{p}$  previo al cálculo de la traza, obteniendo así (después de integrar sobre  $\psi$  y  $\phi$ )

$$\frac{1}{F(p^2)} = 1 - \frac{1}{6\pi^3 p^2} \int_0^{\Lambda^2} dk^2 \frac{k^2 F(k^2)}{k^2 + M^2(k^2)} \int_0^\pi d\theta \sin^2 \theta \mathcal{D}(q^2) \times \left( \frac{2(k^2 - k \cdot p)(k \cdot p - p^2)}{q^2} - k \cdot p \right). \quad (4.64)$$

El siguiente paso es encontrar una solución para las ecuaciones (4.63) y (4.64) utilizando un modelo para la función de revestimiento del gluón. Para esta ocasión se utiliza el modelo de Maris-Tandy [73].

#### 4.5.1. Modelo de Maris-Tandy para QCD

Con los elementos vistos en la sección anterior, ahora es posible encontrar una solución numérica a las ecuaciones acopladas  $M(P)$  y  $F(p)$ . En esta sección se muestran los detalles generales de la solución de la función de masa del quark con el modelo de Maris-Tandy [73]. Este modelo ha sido usado extensivamente en los estudios de fenomenología de hadrones que involucran a las ESD. La función de vestimiento  $\mathcal{D}(q)$  de este modelo es

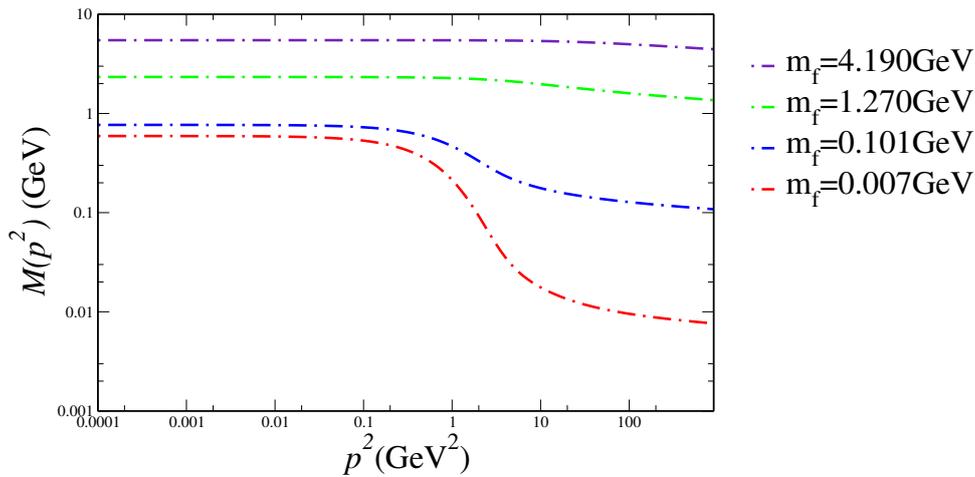
$$\frac{\mathcal{D}(q)}{q^2} = \frac{4\pi^2 D q^2}{\omega} e^{-q^2/\omega^6} + \frac{8\pi^2 \gamma_m Z(q^2)}{\ln[\tau + (1 + q^2/\Lambda_{\text{QCD}})^2]}, \quad (4.65)$$

donde

$$\begin{aligned} \gamma_m &= \frac{12}{32 - 2N_F}, & m_z &= 0.5\text{GeV}, & N_F &= 4, \\ \tau &= e^2 - 1, & \Lambda_{\text{QCD}} &= 0.254\text{GeV}, & \omega &= 0.4\text{GeV}, \\ D &= 0.93\text{GeV}^2, & Z(s) &= (1 - e^{-\frac{s}{4m_z^2}})/s. \end{aligned}$$

Las características fenomenológicas de la ecuación (4.65) son simples. El primer término representa una función delta con un ancho finito que se encarga principalmente de la región infrarroja de QCD. El segundo término es proporcional a  $\alpha(q^2)/q^2$  para  $q^2$  grandes y no tiene singularidades en el eje real de  $q^2$ , da un muestreo de la región ultravioleta del modelo.

En la Figura 4.2 se muestra a la función de masa para diferentes valores de la masa del quark. Se puede notar un crecimiento notable de la función de masa en la región infrarroja especialmente para los quarks *up* y *down*, donde existe RDSQ. Se observa que la masa generada dinámicamente aparece dentro del rango de 300-500MeV, como es esperado de la fenomenología para estos quarks ligeros, que además coincide con la masa usada en el modelo de quarks del primer capítulo de esta tesis. Nótese también que este fenómeno no perturbativo domina en la región  $0 < p^2 < 1\text{GeV}^2$ . A altas energías, la función de masa cae suavemente hacia la masa corriente de los quarks, el cual es un requerimiento del truncamiento usado para resolver la ESD.



**Figura 4.2.:** Función de masa del modelo MT para diferentes valores de la masa desnuda del quark.

Por otro lado, en la figura 4.2 se aprecia también el otro lado de la moneda: el sector pesado de los quarks *charm* y *bottom*. Para estos quarks se ve que la masa generada dinámicamente debido a las autointeracciones es prácticamente imperceptible. Una vez más, esto deja la ventana abierta para que el sector de

quarks pesados se pueda estudiar mediante modelos no relativistas. Nuestro objetivo es estudiarlo mediante una interacción vector  $\times$  vector de contacto, la cual se describe en el capítulo siguiente.

## Capítulo 5.

# Interacción de Contacto

«¡La Liga está peligrosamente preparada para el Real Madrid!»

— Diego Pablo *El Cholo* Simeone, 2015.

En este capítulo se presenta el formalismo de la interacción de contacto (IC), el cual es un tratamiento vector  $\times$  vector en donde se regularizan las divergencias ultravioletas para preservar las simetrías. Primero se presentan tanto a las ecuaciones de Schwinger-Dyson y a la ecuación de estados ligados de dos cuerpos (Ecuación de Bethe-Salpeter) en el formalismo de la IC. El objetivo de este capítulo es encontrar las expresiones analíticas de las ecuaciones de Schwinger-Dyson para calcular la masa del quark, de las amplitudes de Bethe-Salpeter para encontrar la masa de mesones para distintos canales  $J^{PC}$  (pseudoescalar, vectorial, escalar y axial-vector), de las constantes de normalización de las amplitudes de Bethe-Salpeter. Así como de las expresiones para la constante de decaimiento pseudoescalar y vectorial. Finalmente se presenta el desarrollo para el cálculo de factor de forma elástico.

Se ha hecho especial énfasis en el cálculo explícito de las expresiones. Hasta la fecha se han publicado varios artículos usando la interacción de contacto, en donde se calculan constantes de decaimiento y factores de forma de mesones ligeros [74–77]. Además, en un trabajo de tesis previó en esta Universidad se desarrollaron los conceptos básicos requeridos para implementar a este modelo

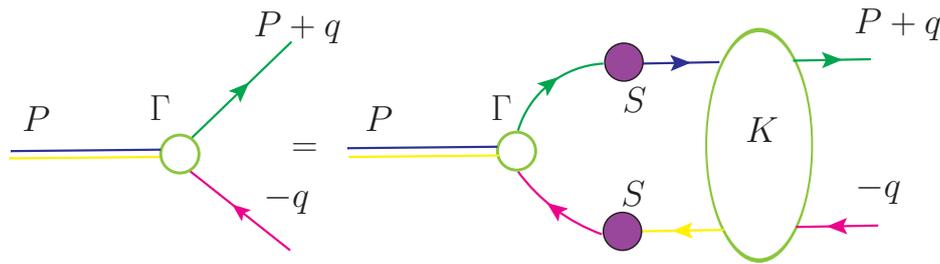
[78]. En este capítulo se extiende ese trabajo y se busca una descripción lo más clara posible para que futuras generaciones puedan seguir implementándolo.

## 5.1. Ecuaciones de Schwinger-Dyson y de Bethe-Salpeter en una Interacción de Contacto

Los estados ligados de mesones aparecen como polos de una función de green de cuatro puntos. La condición para la aparición de esos polos en un canal  $J^{PC}$  particular se describe por la ecuación homogénea de Bethe-Salpeter [100–102]

$$[\Gamma_H(k; P)]_{tu} = \int dq \chi(q; P)_{sr} K_{tu}^{rs}(q, k; P), \quad (5.1)$$

donde  $\chi(q; P) = S_f(q_+) \Gamma_H(q; P) S_g(q_-)$  es la función de onda de Bethe-Salpeter;



**Figura 5.1.:** Representación diagramática de la ecuación de Bethe-Salpeter. Se omiten los subíndices y superíndices para simplificar las expresiones.

$q_+ = q + \eta P$ ,  $q_- = q - (1 - \eta)P$ ;  $k(P)$  es el momento relativo (total) del sistema quark-antiquark;  $S_f$  es el propagador de quark con sabor  $f$ ;  $\Gamma_H(q; P)$  es la amplitud de Bethe-Salpeter (ABS) del mesón, donde  $H = f\bar{g}$  especifica el contenido de sabor del mesón;  $r, s, t, u$  representa al color, sabor e índices espinoriales; y  $K$  es el kernel de dispersión quark-antiquark. En la figura 5.1 se representan todos los ingredientes de la ecuación de una manera diagramática.<sup>1</sup>

El propagador vestido del quark con sabor  $f$ ,  $S_f$ , que entra en la ecuación (5.1), se obtiene como solución de la ESD del quark, o ecuación de brecha [103–106],

<sup>1</sup> Para una revisión comprensible reciente de las EBS y sus aplicaciones ver [97].

las cuales han sido mostradas en el capítulo anterior. Recordemos que estas son

$$S_f^{-1}(p) = i\gamma \cdot p + m_f + \Sigma_f(p), \quad (5.2)$$

$$\Sigma_f(p) = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} g^2 D_{\mu\nu}(p-q) \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\mu S_f(q) \Gamma_\nu^a(p, q), \quad (5.3)$$

donde  $D_{\mu\nu}$  es el propagador vestido del gluón,  $\Gamma_\nu^a$  es el vértice vestido quark-gluón, y  $m_f$  es la masa corriente de quark con sabor  $f$ . Dado que la interacción de contacto definida en sección 5.2 no es renormalizable, entonces no es necesario introducir ninguna constante de renormalización. El límite quiral se obtiene colocando  $m_f = 0$  [103–105].

Como se mencionó en el capítulo anterior, tanto  $D_{\mu\nu}$  como  $\Gamma_\nu^a$  satisfacen su propia ESD, las cuales están acopladas a funciones de  $n$ -puntos de grado mayor, y así sucesivamente *hasta infinito*. Por lo tanto, la ecuación (5.2), es solamente una del conjunto infinito de integrales acopladas no lineales. Un problema manejable se define una vez que se especifica un esquema de truncamiento, esto es, una vez que se define al propagador del gluón y al vértice.

## 5.2. Aproximación arcoiris en la interacción de contacto

$m$	$M$	$E_\pi$	$F_\pi$	$E_\rho$	$m_\pi$	$m_\rho$	$f_\pi$	$f_\rho$
0	0.358	3.568	0.459	1.520	0	0.919	0.100	0.130
0.007	0.368	3.639	0.481	1.531	0.140	0.928	0.101	0.129

**Tabla 5.1.:** Resultados para mesones pseudoscalar y vectoriales ligeros  $m_g = 0.8 \text{ GeV}$ ,  $\alpha_{IR} = 0.93\pi$ ,  $\Lambda_{IR} = 0.24 \text{ GeV}$ ,  $\Lambda_{UV} = 0.905 \text{ GeV}$ . Los parámetros de esos modelos fueron determinados en [76,77]. Estos se ajustaron para obtener en el límite quiral  $M^0 = 0.40 \text{ GeV}$ ,  $m_\rho^0 = 0.78 \text{ GeV}$ ,  $f_\pi^0 = 0.088 \text{ GeV}$ ,  $f_\rho^0 = 0.15 \text{ GeV}$  y el condensado quiral  $\kappa^0 = (0.22 \text{ GeV})^3$ .

En trabajos previos [74–77], se mostró que una interacción vector  $\times$  vector de contacto independiente del momento relativo es capaz de proveer una descripción de las propiedades estáticas de mesones pseudoescalares y vectoriales ligeros, la cual es comparable a las que se obtienen usando interacciones más sofisticadas [91, 97–99]; ver por ejemplo la tabla 5.1. Nosotros usamos esta interacción para analizar el espectro de quarkonia dentro del modelo de quarks. Por tanto, se utiliza

$$g^2 D_{\mu\nu}(k) = \frac{4\pi\alpha_{\text{IR}}}{m_g^2} \delta_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{m_G^2} \delta_{\mu\nu}, \quad (5.4)$$

en la ecuación (5.3), donde  $m_g = 800$  MeV es una escala de la masa del gluón, la cual se genera dinámicamente, como por ejemplo en [107],  $\alpha_{\text{IR}} = 0.93\pi$  es un parámetro que determina la fuerza de interacción. Para el vértice quark-gluón se usa nuevamente la aproximación arcoiris.

$$\Gamma_\mu^a(p, q) = \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\mu. \quad (5.5)$$

Una vez que se especifican los elementos del kernel de la ESD, lo que sigue es obtener y analizar su solución. La forma general del propagador vestido del quark con sabor  $f$ , se obtiene como la solución a la ecuación (5.2), la cual se reescribe en términos de dos funciones de revestimiento que son escalares de Lorentz. El propagador se puede escribir de dos formas equivalentes

$$S_f^{-1}(p) = i\gamma \cdot p A_f(p^2) + B_f(p^2) \quad (5.6)$$

$$= Z_f^{-1}(p^2) \left( i\gamma \cdot p + M_f(p^2) \right). \quad (5.7)$$

En la expresión anterior,  $Z(p^2)$  es la función de onda de renormalización, y  $M_f(p^2)$  es la función de masa dependiente del momento del quark vestido, la cual conecta las masas corriente y constituyente del quark [103–105].

Al insertar la ecuación (5.4) y la ecuación (5.5) dentro de la ecuación (5.2), se obtiene

$$S_f^{-1}(p) = i\gamma \cdot p + m_f + \frac{4}{3} \frac{1}{m_G^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \gamma_\mu S_f(q) \gamma_\mu. \quad (5.8)$$

La solución de la ecuación anterior es

$$S_f^{-1}(p) = i\gamma \cdot p + M_f, \quad (5.9)$$

debido a que el último término del lado derecho de la ecuación (5.8) es independiente del momento externo. La masa independiente del momento,  $M_f$ , se determina como la solución de

$$M_f = m_f + \frac{M_f}{3\pi^2 m_G^2} \int_0^\infty ds s \frac{1}{s + M_f^2}, \quad (5.10)$$

la cual es una solución de masa constante. Puesto que la ecuación (5.10) es divergente, es necesario especificar un esquema de regularización. En nuestro caso se usa el esquema de regularización del tiempo propio [108], la cual es

$$\begin{aligned} \frac{1}{s + M_f^2} &= \int_0^\infty d\tau e^{-\tau(s+M_f^2)} \rightarrow \int_{\tau_{UV}^2}^{\tau_{IR}^2} d\tau e^{-\tau(s+M_f^2)}, \\ &= \frac{e^{-\tau_{UV}^2(s+M_f^2)} - e^{-\tau_{IR}^2(s+M_f^2)}}{s + M_f^2}, \end{aligned} \quad (5.11)$$

donde  $\tau_{IR}^2$  y  $\tau_{UV}^2$  son los reguladores infrarrojo y ultravioleta respectivamente. Un valor distinto de cero para  $\tau_{IR} \equiv 1/\Lambda_{IR}$  implementa confinamiento, al asegurar la ausencia del umbral de producción de quarks libres eliminando el polo cuando  $s = -M_f^2$  [109]. Además, como la ecuación (5.4) no define una teoría renormalizable, entonces  $\tau_{UV} \equiv 1/\Lambda_{UV}$  no puede removerse. En cambio, juega un papel dinámico y establece la escala para las cantidades dimensionales. Al insertar en el numerador de la ecuación (5.10) la regularización introducida

en la ecuación (5.11), se obtiene

$$M_f = m_f + \frac{M_f}{3\pi^2 m_G^2} \int_0^\infty ds s \left[ \frac{e^{-\tau_{UV}^2(s+M_f^2)} - e^{-\tau_{IR}^2(s+M_f^2)}}{s + M_f^2} \right]. \quad (5.12)$$

El siguiente paso es integrar la expresión anterior, para ello se hace un cambio de variable  $s + M_f^2 \rightarrow s'$  en la ecuación (5.12) para obtener

$$M_f = m_f + \frac{M_f}{3\pi^2 m_G^2} \left\{ \int_{M_f^2}^\infty ds' \left( e^{-\tau_{UV}^2 s'} - e^{-\tau_{IR}^2 s'} \right) - M_f \int_{M_f^2}^\infty ds' \left( \frac{e^{-\tau_{UV}^2 s'} - e^{-\tau_{IR}^2 s'}}{s'} \right) \right\}. \quad (5.13)$$

Para facilitar la integración de la ecuación (5.13), se hace el cambio de variable  $s' \tau_{UV,IR} = t$ , obteniendo así

$$M_f = m_f + \frac{1}{3\pi^2 m_G^2} \left\{ M_f^2 \left[ \Gamma(0, M_f^2 \tau_{IR}^2) - \Gamma(0, M_f^2 \tau_{UV}^2) \right] + \frac{M_f^2 e^{-\tau_{UV}^2}}{\tau_{UV}^2} - \frac{M_f^2 e^{-\tau_{IR}^2}}{\tau_{IR}^2} \right\}, \quad (5.14)$$

donde

$$\Gamma(\alpha, y) = \int_y^\infty dt t^{\alpha-1} e^{-t}, \quad (5.15)$$

es la función gamma incompleta. La última expresión puede reescribirse como

$$M_f = m_f + \frac{M_f}{3\pi^2 m_G^2} \mathcal{C}_{01}(M_f^2; \tau_{IR}, \tau_{UV}), \quad (5.16)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{01}(M_f^2; \tau_{\text{IR}}, \tau_{\text{UV}}) &= \left[ \Gamma(0, M_f^2 \tau_{\text{IR}}^2) - \Gamma(0, M_f^2 \tau_{\text{UV}}^2) \right] \\ &+ \frac{M_f^2 e^{-\tau_{\text{UV}}^2}}{\tau_{\text{UV}}^2} - \frac{M_f^2 e^{-\tau_{\text{IR}}^2}}{\tau_{\text{IR}}^2}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Esta expresión se puede escribir de una manera más general como

$$\mathcal{C}_{\alpha\beta}(M^2; \tau_{\text{IR}}, \tau_{\text{UV}}) = \frac{(M^2)^\nu}{\Gamma(\beta)} \Gamma(\beta - 2, \tau_{\text{UV}}^2 M^2, \tau_{\text{IR}}^2 M^2), \quad (5.18)$$

con  $\nu = \alpha - (\beta - 2)$  y

$$\Gamma(\alpha, z_1, z_2) = \int_{z_1}^{z_2} dt t^{\alpha-1} e^{-t}, \quad (5.19)$$

la función gamma incompleta generalizada.

### 5.3. Identidad Axial-Vectorial de Ward-Takahashi

Las características fenomenológicas de la simetría quiral y su rompimiento dinámico en QCD se pueden entender a través de la identidad axial-vectorial de Ward-Takahashi (IaxWT). En el límite quiral, se lee

$$-iP_\mu \Gamma_{5\mu}(k; P) = S^{-1}(k_+) \gamma_5 + \gamma_5 S^{-1}(k_-). \quad (5.20)$$

La IaxWT relaciona al vértice axial,  $\Gamma_{5\mu}$ , al vértice pseudoscalar,  $\gamma_5$  y al propagador del quark. Esto en cambio significa una relación entre los kernels de la EBS y la ESD, la cual se debe preservar por cualquier esquema de truncamiento del sistema acoplado de ESD-EBS. La conservación de esta cantidad constata las características definitorias del octete de mesones pseudoescalares, a saber, su masa pequeña, la ausencia de masa en el límite quiral, así como la separación de los valores de la masa de los hadrones [79, 112]

El vértice axial satisface su propia ESD, esto es

$$\Gamma_{5\mu}(k; P) = \gamma_5 \gamma_\mu + \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} K(k, q; P) \chi_{5\mu}(q; P), \quad (5.21)$$

donde se contrajeron los índices apropiados y  $K(k, q; P)$  es el kernel de la EBS que aparece en el estado ligado de la ecuación (5.1). Es importante mencionar que el vértice pseudoescalar satisface también una ecuación similar.

Al combinar las ESD que satisfacen a los vértices axiales y pseudoescalares con la IaxWT se llega a [79]

$$\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} K_{tu,rs}(k, q; P) [\gamma_5 S(q_-) + S(q_+) \gamma_5]_{sr} = [\Sigma(k_+) \gamma_5 + \gamma_5 \Sigma(k_-)]_{tu}, \quad (5.22)$$

con lo cual se restringe el contenido del kernel de dispersión del par quark-antiquark  $K(p, q; P)$  en caso de que hubiera una simetría esencial en las interacciones fuertes, y de ese modo su patrón de ruptura, sea fielmente reproducido.

Desde un punto de vista práctico, la ecuación (5.22) provee una manera para obtener el kernel de dispersión del par quark-antiquark una vez que esta restricción sea resuelta, con una expresión para la autoenergía del quark dada. Sin embargo, esto no siempre es posible, ver por ejemplo [113]. Así que es necesario encontrar un modo alternativo para preservar las propiedades de simetría quiral de las interacciones fuertes. En principio, es posible construir un kernel de dispersión del par quark-antiquark que satisfaga la ecuación (5.22) a partir de una derivada funcional de la autoenergía del quark con respecto al propagador del quark [114]. Esto se logra dentro del formalismo de la acción efectiva para operadores compuestos, el cual se desarrolla en [115].

Afortunadamente, para el modelo de IC bajo estudio, la ecuación (5.22) se satisface fácilmente. La expresión resultante para el kernel de dispersión se conoce como aproximación *rainbow-ladder*, el cual es el esquema de truncamiento no perturbativo que preserva las simetrías globales más utilizado mundialmente. Es famoso por ser preciso para el cálculo de observables de mesones pseudoescalares y vectoriales, además de garantizar la conservación de corriente

electromagnética [109]

$$K(p, q; P)_{tu;rs} = -\frac{1}{m_G^2} \delta_{\mu\nu} \left[ \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\mu \right]_{ts} \left[ \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\nu \right]_{ru}. \quad (5.23)$$

Usando la interacción especificada en las ecuaciones (5.4,5.5), la EBS homogénea para un mesón ( $\eta = 1$ ) adquiere la forma simple

$$\Gamma_H(k; P) = -\frac{4}{3} \frac{1}{m_G^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \gamma_\mu S_f(q + P) \Gamma_H(q; P) S_g(q) \gamma_\mu. \quad (5.24)$$

Puesto que la interacción no depende del momento relativo de los quarks, una regularización que preserve las simetrías de la ecuación (5.24) conducirá a soluciones que son independientes del momento. Entonces, si la interacción de la ecuación (5.4) genera estados ligados, entonces el momento relativo entre el quark y el antiquark puede tener cualquier valor con la misma probabilidad. Esta es la característica definitoria de una partícula puntual.

### 5.3.1. Un corolario de la identidad axial de Ward-Takahashi

Existen consecuencias adicionales no triviales de la conjunción de la IaxWT y la IC. Para ello se parte del producto de la ecuación (5.21) con  $P_\mu$

$$P_\mu \Gamma_{5\mu}(k; P) = \gamma_5 \gamma_\mu \cdot P + \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} K(k, q; P) P_\mu \chi_{5\mu}(q; P), \quad (5.25)$$

en la aproximación arcoíris con la interacción de contacto esto adquiere la forma

$$P_\mu \Gamma_{5\mu}(k; P) = \gamma_5 \gamma_\mu \cdot P - \frac{4}{3} \frac{1}{m_G^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \gamma_\mu S_f(q + P) P_\mu \Gamma_{5\mu} S_g(q) \gamma_\mu. \quad (5.26)$$

En el integrando de la ecuación anterior se introduce la forma de la identidad dada por la ecuación (5.20)

$$P_\mu \Gamma_{5\mu}(k; P) = \gamma_5 \gamma_\mu \cdot P + i \frac{4}{3} \frac{1}{m_G^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left( \gamma_5 \gamma_\mu S_g(q) \gamma_\mu + \gamma_\mu S_f(q+P) \gamma_\mu \gamma_5 \right). \quad (5.27)$$

Para simplificar los cálculos, hay que recordar la forma del propagador del fermión en la interacción de contacto

$$S_f(q) = (-i\gamma \cdot q + M_f) \sigma_{v_f}(q^2), \quad (5.28)$$

$$\sigma_{v_f}(q^2) = \frac{1}{q^2 + M_f^2}. \quad (5.29)$$

Se sustituye el valor del propagador dado por la ecuación (5.28) dentro del integrando de la ecuación (5.26)

$$P_\mu \Gamma_{5\mu}(k; P) = \gamma_5 \gamma_\mu \cdot P + i \frac{4}{3} \frac{1}{m_G^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left[ \gamma_5 \gamma_\mu \left( (-i\gamma \cdot q + M_g) \sigma_{v_g}(q^2) \right) \gamma_\mu + \gamma_\mu \left( (-i\gamma \cdot (q+P) + M_f) \sigma_{v_f}((q+P)^2) \right) \gamma_\mu \gamma_5 \right]. \quad (5.30)$$

Tomando en cuenta el hecho que  $\gamma_5$  anticonmuta con todas las  $\gamma_\mu$ 's, se puede desplazar al  $\gamma_5$  localizado al extremo derecho de la segunda expresión en la integral hasta el extremo izquierdo. Se obtiene

$$P_\mu \Gamma_{5\mu}(k; P) = \gamma_5 \gamma_\mu \cdot P + i \frac{4}{3} \frac{1}{m_G^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \gamma_5 \gamma_\mu \left[ (-i\gamma \cdot q + M_g) \sigma_{v_g}(q^2) + (-i\gamma \cdot (q+P) + M_f) \sigma_{v_f}((q+P)^2) \right] \gamma_\mu. \quad (5.31)$$

El siguiente paso es separar el integrando previo en sumas de los términos con  $M$ 's y  $\sigma$ 's, para llegar a la forma

$$P_\mu \Gamma_{5\mu}(k; P) = \gamma_5 \gamma_\mu \cdot P + i \frac{4}{3} \frac{1}{m_G^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \gamma_5 \gamma_\mu \left\{ i\gamma \cdot \left[ (q+P)\sigma_{v_f}((q+P)^2) - q\sigma_{v_g}(q^2) \right] + M_g \sigma_{v_g}((q)^2) + M_f \sigma_{v_f}((q+P)^2) \right\} \gamma_\mu. \quad (5.32)$$

Ahora, si se toma en cuenta la forma explícita del lado derecho de la ecuación (5.28) y se sustituye la expresión del propagador del fermión en la interacción de contacto, se obtiene

$$\begin{aligned} S_f^{-1}(q_+) i\gamma_5 + i\gamma_5 S_g^{-1}(q) &= (i\gamma \cdot q_+ + M_f) i\gamma_5 + i\gamma_5 (i\gamma \cdot q + M_g) \\ &= i\gamma_5 (i\gamma \cdot (-q_+ + q)) + i\gamma_5 (M_f + M_g), \end{aligned} \quad (5.33)$$

donde  $q_+ = q + P$ . Al comparar las ecuaciones (5.32 y 5.33), se puede obtener fácilmente las siguientes identidades

$$M_f + M_g = \frac{1}{3\pi^2 m_G^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} (M_f \sigma_{v_f}(q_+^2) + M_g \sigma_{v_g}(q^2)), \quad (5.34)$$

$$0 = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} (P \cdot q_+ \sigma_{v_f}(q_+^2) - P \cdot q \sigma_{v_g}(q^2)), \quad (5.35)$$

donde la ecuación (5.35) define nuestro esquema de regularización. Por otro lado, la ecuación (5.35) indica que la IaxWT se satisface si, y solo si el modelo está regularizado de tal manera que no existan divergencias cuadráticas o logarítmicas. Como es de esperar, bajo las circunstancias en donde un desplazamiento de las variables de integración está permitido, es una operación permitida con el fin de demostrar la ecuación (5.20). Para asegurar que la ecuación (5.20) se

satisfaga, nótese los integrandos de la ecuación (5.35)

$$\begin{aligned} 0 &= \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left[ \frac{P \cdot q_+}{q_+^2 + M_f^2} - \frac{P \cdot q}{q^2 + M_g^2} \right] \\ &= \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left[ \frac{P \cdot q_+(q^2 + M_g^2) - P \cdot q(q_+^2 + M_f^2)}{(q_+^2 + M_f^2)(q^2 + M_g^2)} \right], \end{aligned} \quad (5.36)$$

donde se tomó la expresión explícita para las  $\sigma'$ s. Para analizar los integrandos correctamente, hay que realizar una parametrización de Feynman, cuya forma más simple es

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 \frac{dx}{[Ax + (1-x)B]^2}. \quad (5.37)$$

Analizando el numerador del integrando del lado derecho de la ecuación (5.36) y después de aplicarle la parametrización de Feynman, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{(q_+^2 + M_f^2)(q^2 + M_g^2)} &= \int_0^1 \frac{dx}{[(q_+^2 + M_f^2)x + (1-x)(q^2 + M_g^2)]^2} \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{[(q^2 + 2q \cdot P + P^2 + M_f^2)x + (1-x)(q^2 + M_g^2)]^2}. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Desarrollando el denominador de la ecuación (5.38), y después de completar el cuadrado en  $q$  se llega a

$$\begin{aligned} \frac{1}{(q_+^2 + M_f^2)(q^2 + M_g^2)} &= \int_0^1 \frac{dx}{[(q + xP)^2 + xM_f^2 + M_g^2(1-x) + x(1-x)P^2]^2} \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{[(q + xP)^2 + \mathfrak{M}^2]^2}, \end{aligned} \quad (5.39)$$

donde

$$\mathfrak{M}^2 = M_f^2 x + M_g^2(1-x) + x(1-x)P^2, \quad (5.40)$$

se usará de ahora en adelante para simplificar la notación. Además, es necesario hacer un desplazamiento en  $q$  mediante el cambio de variable  $q' \rightarrow q + xP$ , este cambio afecta también al numerador de la ecuación (5.36), el cual adquiere la forma

$$\mathcal{N} = \left[ q' + (1-x)P \cdot P((q' - xP)^2 + M_g^2) - (q' - xP) \cdot P((q' - xP)^2 + 2(q' - xP) \cdot P + P^2 + M_f^2) \right], \quad (5.41)$$

donde se denota con  $\mathcal{N}$  al numerador. Después de expandir los términos cuadráticos y reagrupar los términos polinomiales equivalentes se llega a

$$\mathcal{N} = -2x(q' \cdot P)^2 + (1-x)^2 P^2 (q'^2 + x^2 P^2 + M_g^2) - q' \cdot P(-2xq' \cdot P) + xP^2 (q'^2 + x^2 P^2 - 2xP^2 + P^2 + M_f^2). \quad (5.42)$$

Debido a que se integra en todo el espacio, la integral se anula para las potencias impares de  $q'$ , esto es los términos de la forma  $(q' \cdot P)^{2n+1}$ . Por lo que de ahora en adelante se puede ignorar a los términos con potencia impar, quedando el numerador con una expresión más simple

$$\mathcal{N} = -2(q \cdot P)^2 + p^2 (q^2 + x^2 P^2 + M_g^2) + xP^2 (P^2 + M_f^2 - M_g^2 - 2xP^2). \quad (5.43)$$

Se volvió a la variable original  $q' \rightarrow q$ . Una propiedad útil de las integrales consiste en la separación de un producto punto elevado al cuadrado. Dicha propiedad es

$$\int_q^\Lambda \frac{(p \cdot q)^2}{(q^2 + s)^n} = \frac{1}{4} \int_q^\Lambda \frac{p^2 q^2}{(q^2 + s)^n}, \quad (5.44)$$

la cual permite escribir los términos de la forma  $(q \cdot P)^2$  del numerador en la ecuación (5.43) como  $\frac{1}{4}q^2P^2$ . Esto conduce al denominador a la forma

$$\begin{aligned}\mathcal{N} &= P^2 \left( \frac{1}{2}q^2 + M_g^2 + M_f^2x - M_g^2x + x(1-x)P^2 \right) \\ &= P^2 \left( \frac{1}{2}q^2 + \mathfrak{M}^2 \right).\end{aligned}\quad (5.45)$$

Finalmente, combinando los resultados de las ecuaciones (5.45, 5.39) se llega a la forma final de la ecuación (5.35)

$$0 = \int_0^1 dx \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{\frac{1}{2}q^2 + \mathfrak{M}^2}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2}.\quad (5.46)$$

Para  $P^2 = 0 = m$ , y  $M_f = M_g = M$  se tiene

$$0 = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{\frac{1}{2}q^2 + M^2}{(q^2 + M^2)^2}.\quad (5.47)$$

Estas restricciones se implementarán en todos nuestros cálculos, de tal manera que la ecuación (5.20) se preserve.

Para finalizar esta pequeña discusión, nótese que tanto la ecuación (5.46) como la ecuación (5.47) se pueden regularizar en la forma dada por la ecuación (5.11). Para ello se toma en cuenta la propiedad

$$\frac{M}{(q^2 + M)^2} = -M \frac{d}{dM} \frac{1}{q^2 + M},\quad (5.48)$$

entonces se aplica en la función regularizada dada por la ecuación (5.17) y así se tiene

$$\begin{aligned}
C_{02}(M_f^2; \tau_{\text{IR}}, \tau_{\text{UV}}) &= -M_f^2 \frac{dC_{01}(M_f^2; \tau_{\text{IR}}, \tau_{\text{UV}})}{dM_f^2} \\
&= -M_f^2 \frac{d}{dM_f^2} \left[ M_f^2 \left( \Gamma(0, dM_f^2 \tau_{\text{IR}}^2) - \Gamma(0, M_f^2 \tau_{\text{UV}}^2) \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{e^{-M_f^2 \tau_{\text{UV}}^2}}{\tau_{\text{UV}}^2} - \frac{e^{-M_f^2 \tau_{\text{IR}}^2}}{\tau_{\text{IR}}^2} \right] \\
&= -M_f^2 \left[ \Gamma(0, M_f^2 \tau_{\text{IR}}^2) - \Gamma(0, M_f^2 \tau_{\text{UV}}^2) \right] \tag{5.49}
\end{aligned}$$

Insertando las ecuaciones (5.17, 5.49) dentro de la ecuación (5.46) se llega la relación final

$$0 = \frac{1}{2} \int_0^1 dx \left[ C_{01}(M_f^2; \tau_{\text{IR}}, \tau_{\text{UV}}) + C_{02}(M_f^2; \tau_{\text{IR}}, \tau_{\text{UV}}) \right], \tag{5.50}$$

la cual será de utilidad a la hora de hacer cálculos numéricos.

## 5.4. Clasificación de las amplitudes de Bethe-Salpeter en una interacción de contacto.

Como nos interesa calcular las propiedades estáticas de varios tipos de mesones, entonces se describe su clasificación general y las amplitudes de Bethe-Salpeter que adquieren cuando se implementan de una interacción de contacto. La tabla 5.2 lista los números cuánticos de espín del modelo de quarks.

Con la dependencia del momento relativo prohibida por la interacción de contacto, la forma general de las amplitudes de Bethe-Salpeter para los mesones

$L$	$J^{PC}$	Tipo	$L$	$J^{PC}$	Tipo
0	$0^{-+}$	Pseudoescalares	1	$0^{++}$	Escalares
0	$1^{--}$	Vectoriales	1	$1^{++}, 1^{+-}$	Axial Vectoriales

**Tabla 5.2.:** Mesones del modelo de quarks

listados en la tabla 5.2 son [116]

$$\Gamma_{0^{-+}}(P) = \gamma_5 \left[ iE_{0^{-+}} + \frac{1}{2M} \gamma \cdot P F_{0^{-+}} \right], \quad (5.51)$$

$$\Gamma_{0^{++}}(P) = \mathbb{1} E_{0^{++}}, \quad (5.52)$$

$$\Gamma_{1^{--}\mu}(P) = \gamma_\mu^T E_{1^{--}} + \frac{1}{2M} \sigma_{\mu\nu} P_\nu F_{1^{--}}, \quad (5.53)$$

$$\Gamma_{1^{++}\mu}(P) = \gamma_5 \left[ \gamma_\mu^T E_{1^{++}} + \frac{1}{2M} \sigma_{\mu\nu} P_\nu F_{1^{++}} \right], \quad (5.54)$$

donde  $M$  es una escala de masa, que se define posteriormente y los resultados son independientes de su elección. Una amplitud de Bethe-Salpeter con conjugación de carga se obtiene de manera general con

$$\bar{\Gamma}_H(k; P) = C^\dagger \Gamma(-k; P)^T C, \quad (5.55)$$

donde  $T$  denota la transpuesta de todos los índices matriciales y  $C = \gamma_2 \gamma_4$  es la matriz de conjugación de carga, con  $C^\dagger = -C$ , y  $[C, \gamma_5] = 0$ . De este modo se tiene

$$C^\dagger \gamma_\mu^T C = -\gamma_\mu, \quad (5.56)$$

$$C^\dagger \sigma_{\mu\nu}^T C = -\sigma_{\mu\nu}, \quad (5.57)$$

$$C^\dagger \gamma_5^T C = \gamma_5, \quad (5.58)$$

$$C^\dagger \gamma_5 \sigma_{\mu\nu}^T C = -\gamma_5 \sigma_{\mu\nu}, \quad (5.59)$$

$$C^\dagger (\gamma_5 \sigma_{\mu\nu})^T C = \gamma_5 \sigma_{\mu\nu}, \quad (5.60)$$

por lo tanto

$$\bar{\Gamma}^{0^{++}}(P) = \Gamma^{0^{++}}(P), \quad (5.61)$$

$$\bar{\Gamma}_{\mu}^{1^{--}}(P) = -\Gamma_{\mu}^{1^{--}}(P), \quad (5.62)$$

$$\bar{\Gamma}_{\mu}^{1^{++}}(P) = \Gamma_{\mu}^{1^{++}}(P). \quad (5.63)$$

## 5.5. Ecuación de Bethe-Salpeter para la masa del mesón

La masa y amplitudes de Bethe-Salpeter se encuentran resolviendo la ecuación (5.1). Para lograr esta meta, se introduce un valor propio ficticio  $\lambda_H$  a la ecuación del estado ligado. Así, la masa del estado ligado en un canal particular  $m_H$ , será tal que  $\lambda_H(P^2 = -m_H^2) = 1$ , donde  $P$  es el momento del mesón. Para cualquier canal, la forma de la EBS homogénea para la IC es

$$K_H(m_H) \cdot \Gamma_H(m_H) = \lambda_H(m_H) \Gamma_H(m_H), \quad (5.64)$$

donde  $K_H$  es una matriz  $2 \times 2$ , y el subíndice  $H$  indica la dependencia explícita de los números cuánticos del mesón en consideración, ver ecuaciones (5.51-5.54). La ecuación (5.64) es una ecuación de valores propios del vector  $\Gamma_H(m_H) = (E_H(m_H), F_H(m_H))^T$ , la cual tiene soluciones para valores discretos de  $P^2 = -m_H^2$ .

Para obtener una expresión explícita de las amplitudes de Bethe-Salpeter para los diferentes canales considerados en la sección 5.4. Se consideran los elementos de matriz de la ecuación (5.64), los cuales se pueden escribir en una

notación conveniente

$$\mathcal{K}_H^{ij} = -\frac{4}{3} \frac{1}{m_G^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\text{Tr} \left[ \mathcal{P}_H^i(P) \gamma_\mu \hat{S}_f(q_+) \mathcal{D}_H^j(P) \hat{S}_g(q_-) \gamma_\mu \right]}{(q_+^2 + M_f^2)(q_-^2 + M_g^2)} \quad (5.65)$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{4}{3} \frac{1}{m_G^2} \int_0^1 dx \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\text{Tr} \left[ \mathcal{P}_H^i(P) \gamma_\mu \hat{S}_f(q_+) \mathcal{D}_H^j(P) \hat{S}_g(q_-) \gamma_\mu \right]_{q \rightarrow q-xP}}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2}, \\ &= \int \frac{\bar{\mathcal{K}}^{ij}}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2} \end{aligned} \quad (5.66)$$

donde  $\hat{S}_f(k) = -i\gamma \cdot k + M_f$ , y  $\mathcal{D}_H^i$ ,  $\mathcal{P}_H^i$  son, respectivamente, proyectores covariantes de Dirac que se ajustan para cada canal de mesones. A continuación se muestran en detalle los resultados obtenidos para cada canal.

### 5.5.1. Kernel pseudoescalar

Para el canal pseudoescalar se tiene

$$\mathcal{D}_{0^{-+}}^1 = i\gamma_5, \quad \mathcal{D}_{0^{-+}}^2 = \frac{1}{2M} \gamma_5 \gamma \cdot P, \quad (5.67)$$

$$\mathcal{P}_{0^{-+}}^1 = -\frac{i}{4} \gamma_5, \quad \mathcal{P}_{0^{-+}}^2 = -\frac{M}{2P^2} \gamma_5 \gamma \cdot P, \quad (5.68)$$

donde  $\mathcal{D}_{0^{-+}}^1$  y  $\mathcal{D}_{0^{-+}}^2$  vienen directamente del lado derecho de la ecuación (5.51). Después de calcular la traza del elemento de matriz para la amplitud  $\mathcal{K}_{0^{-+}}^{11}$ , esta llega a la forma

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{K}}_{0^{-+}}^{11} &= \text{Tr} \left[ -\frac{i}{4} \gamma_5 (-i\gamma \cdot q_+ + M_f) i\gamma_5 (-i\gamma \cdot q + M_g) \right] \\ &= M_f M_g + P \cdot q + q^2. \end{aligned} \quad (5.69)$$

Ahora se procede a hacer el cambio de variable  $q \rightarrow q - xP$  mostrado en la ecuación (5.65) para obtener

$$\bar{\mathcal{K}}_{0^{-+}}^{11} = M_f M_g + P \cdot (q - xP) + (q - xP)^2. \quad (5.70)$$

Posteriormente se desarrollan los términos cuadráticos, se eliminan los términos impares de la forma  $q \cdot P$  y se obtiene

$$\bar{\mathcal{K}}_{0^{-+}}^{11} = [M_f M_g - xP^2 + q^2 + x^2 P^2]. \quad (5.71)$$

Después de introducir la ecuación (5.71) en el numerador de la ecuación (5.65) queda la expresión

$$\mathcal{K}_{0^{-+}}^{11} = \frac{4}{3} \frac{1}{m_G^2} \int_0^1 dx \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{M_f M_g - xP^2 + q^2 + x^2 P^2}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2}, \quad (5.72)$$

la cual se regulariza de la manera usual. Para ello se añade y subtrae el término  $\mathfrak{M}^2$  en el numerador, así el numerador adquiere un término de la forma  $q^2 + \mathfrak{M}^2$  y otro con  $M_f M_g - x(1-x)P^2 - \mathfrak{M}^2$ . Después de regularizar correctamente la ecuación (5.72) se llega a

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{0^{-+}}^{11} = & \frac{1}{3\pi^2 m_G^2} \int_0^1 dx \left[ \left( M_f M_g - x(1-x)P^2 - \mathfrak{M}^2 \right) \mathcal{C}_{02}(\mathfrak{M}^2; \tau_{\text{IR}}, \tau_{\text{UV}}) \right. \\ & \left. + \mathcal{C}_{01}(\mathfrak{M}^2; \tau_{\text{IR}}, \tau_{\text{UV}}) \right]. \end{aligned} \quad (5.73)$$

Ahora se calcula el elemento  $\mathcal{K}_{0^{-+}}^{12}$  del kernel pseudoescalar, para ello se toman en cuenta los proyectores  $\mathcal{P}_{0^{-+}}^1$  y  $\mathcal{D}_{0^{-+}}^2$ . Quedando la traza como

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{K}}_{0^{-+}}^{12} &= \text{Tr} \left[ -\frac{i}{8M} \gamma_5 (-i\gamma \cdot q_+ + M_f) (\gamma_5 \gamma \cdot P) (-i\gamma \cdot q + M_g) \right] \\ &= \frac{1}{2M} \left[ M_g P^2 + (M_g - M_f) P \cdot q \right], \end{aligned} \quad (5.74)$$

donde  $\bar{\mathcal{K}}_0^{12}$  es el elemento de la matriz de la ecuación (5.65). Nuevamente, haciendo el cambio de variable  $q \rightarrow q - xP$  y llegar a

$$\bar{\mathcal{K}}_0^{12} = \frac{1}{2M} \left[ M_g P^2 - M_f P \cdot (q - xP) + M_g P \cdot (q - xP) \right]. \quad (5.75)$$

Y se desarrollan los términos cuadráticos, se eliminan los términos impares de la forma  $q \cdot P$  para obtener

$$\bar{\mathcal{K}}_0^{12} = \frac{P^2}{2M} \left[ M_g (1 - x) P^2 + M_f x P^2 \right]. \quad (5.76)$$

Ahora se inserta la ecuación (5.76) dentro de la ecuación (5.65). Después de regularizar

$$\mathcal{K}_0^{12} = \frac{1}{3\pi^2 m_G^2} \frac{P^2}{2M} \int_0^1 dx \left[ M_g (1 - x) P^2 + M_f x P^2 \right] \mathcal{C}_{02}(\mathfrak{M}_f^2; \tau_{\text{IR}}, \tau_{\text{UV}}). \quad (5.77)$$

Para obtener el elemento  $\mathcal{K}_0^{21}$  del kernel pseudoescalar, se toman en cuenta los proyectores  $\mathcal{P}_0^2$  y  $\mathcal{D}_0^1$ , por lo que la traza es del elemento de matriz  $\bar{\mathcal{K}}_0^{21}$  es

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{K}}_0^{21} &= \text{Tr} \left[ -\frac{M}{2P^2} \gamma_5 \gamma \cdot P (-i\gamma \cdot q_+ + M_f) (i\gamma_5) (-i\gamma \cdot q + M_g) \right] \\ &= 8 \frac{M}{2P^2} \left[ -M_g^2 + P \cdot q M_f - M_g P \cdot q \right]. \end{aligned} \quad (5.78)$$

Después del cambio de variable  $q \rightarrow q - xP$

$$\bar{\mathcal{K}}_0^{21} = 8 \frac{M}{2P^2} \left[ -M_g P^2 + P \cdot (q - xP) M_f - M_g P \cdot (q - xP) \right], \quad (5.79)$$

y eliminar los términos impares de la forma  $q \cdot P$  para llegar a

$$\bar{\mathcal{K}}_0^{21} = 8 \frac{M}{2P^2} \left[ P^2 \left( -M_g x - M_f x + M_g x \right) \right]. \quad (5.80)$$

Entonces se introduce a la ecuación (5.76) dentro de la ecuación (5.65). Después de regularizar la expresión

$$\mathcal{K}_{0^{-+}}^{21} = \frac{1}{3\pi^2 m_G^2} M \int_0^1 dx \left[ M_g(1-x) + M_f x \right] \mathcal{C}_{02}(\mathfrak{M}^2; \tau_{\text{IR}}, \tau_{\text{UV}}). \quad (5.81)$$

Finalmente, el elemento  $\mathcal{K}_{0^{-+}}^{22}$  del kernel pseudoescalar se obtiene a partir de los proyectores  $\mathcal{P}_{0^{-+}}^2$  y  $\mathcal{D}_{0^{-+}}^2$ , entonces

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{K}}_{0^{-+}}^{22} &= \text{Tr} \left[ -\frac{1}{4P^2} \gamma_5 \gamma \cdot P (-i\gamma \cdot q_+ + M_f) (\gamma_5 \gamma \cdot P) (-i\gamma \cdot q + M_g) \right] \\ &= -8 \frac{1}{4P^2} \left[ M_f M_g P^2 + P^2 P \cdot q + 2(p \cdot q)^2 - P^2 q^2 \right]. \end{aligned} \quad (5.82)$$

Otra vez se hace el cambio de variable  $q \rightarrow q - xP$  para obtener

$$\overline{\mathcal{K}}_{0^{-+}}^{22} = -8 \frac{1}{4P^2} \left[ M_f M_g P^2 + P^2 P \cdot (q - xP) + 2(p \cdot (q - xP))^2 - P^2 (q - xP)^2 \right], \quad (5.83)$$

y se eliminan los términos impares de la forma  $q \cdot P$ , además de utilizar la relación dada por la ecuación (5.44) para obtener

$$\overline{\mathcal{K}}_{0^{-+}}^{22} = -8 \frac{1}{4P^2} \left[ P^2 \left( M_f M_g - xP^2 - \frac{1}{2}q^2 + x^2 P^2 \right) \right]. \quad (5.84)$$

Ahora se utiliza a la ecuación (5.84) dentro de la ecuación (5.65), se regulariza y se obtiene

$$\mathcal{K}_{0^{-+}}^{12} = -\frac{1}{3\pi^2 m_G^2} \frac{1}{2} \int_0^1 dx \left[ M_f M_g - x(1-x)P^2 + \mathfrak{M}^2 \right] \mathcal{C}_{02}(\mathfrak{M}^2; \tau_{\text{IR}}, \tau_{\text{UV}}), \quad (5.85)$$

donde se usó la identidad de Ward-Takahashi dada por la ecuación (5.39). Entonces la EBS pseudoescalar se escribe como una ecuación matricial

$$\begin{bmatrix} E_{0^{-+}}(P) \\ F_{0^{-+}}(P) \end{bmatrix} = \frac{1}{3\pi^2 m_G^2} \begin{bmatrix} \mathcal{K}_{0^{-+}}^{11} & \mathcal{K}_{0^{-+}}^{12} \\ \mathcal{K}_{0^{-+}}^{21} & \mathcal{K}_{0^{-+}}^{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{0^{-+}}(P) \\ F_{0^{-+}}(P) \end{bmatrix}, \quad (5.86)$$

donde

$$\mathcal{K}_{0^{-+}}^{11} = \int_0^1 dx \left[ \mathcal{C}_{01}(\mathfrak{M}^2) + (L^-(x) - 2J(x)P^2) \mathcal{C}_{02}(\mathfrak{M}^2) \right], \quad (5.87)$$

$$\mathcal{K}_{0^{-+}}^{12} = \frac{P^2}{2M} \int_0^1 dx K(x) \mathcal{C}_{02}(\mathfrak{M}^2), \quad (5.88)$$

$$\mathcal{K}_{0^{-+}}^{21} = M \int_0^1 dx K(x) \mathcal{C}_{02}(\mathfrak{M}^2), \quad (5.89)$$

$$\mathcal{K}_{0^{-+}}^{22} = -\frac{1}{2} \int_0^1 dx L^+(x) \mathcal{C}_{02}(\mathfrak{M}^2). \quad (5.90)$$

Se define

$$\begin{aligned} J(x) &= x(1-x), & K(x) &= M_f x + M_g(1-x), \\ L(x) &= M_f^2 x + M_g^2(1-x), & L^\pm(x) &= M_f M_g \pm L(x), \end{aligned}$$

los cuales serán además de utilidad en el cálculo de las expresiones para los otros canales. El resto de las amplitudes se puede ver en el apéndice **B**

## 5.6. Normalización de las amplitudes de Bethe-Salpeter

Debido a que la rutina matemática utilizada para resolver las ecuaciones de Bethe-Salpeter devuelve un eigenvector normalizado a uno, es necesario normalizar las expresiones con una condición aparte. Esto con el fin de realizar un cálculo consistente de las constantes de decaimiento leptónico y otros obser-

vables, así como para obtener una comparación confiable con otros estudios que utilicen las ecuaciones de Schwinger-Dyson. En la aproximación arcoíris de la ecuación de Bethe-Salpeter se tiene una condición simple (eligiendo  $\eta = 1$  en la ecuación (5.1)):

$$P_\mu = N_c \frac{\partial}{\partial P_\mu} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \text{Tr} [\bar{\Gamma}_H(-Q) S(q_+) \Gamma_H(Q) S(q)] , \quad (5.91)$$

cuando  $Q = P$ , con  $P^2 = -m_H^2$ , lo cual asegura que el residuo en el polo de masa sea igual a 1. Aquí,  $\Gamma_H$  es la amplitud normalizada y  $\bar{\Gamma}_H$  su versión con la carga conjugada.

Para cada canal se reescala  $\Gamma_H$  de tal manera que la ecuación (5.91) se satisfaga. Así, reemplazando  $\Gamma_H$  por  $\Gamma_H/N_H$ , donde  $N_H$  es la constante de normalización y entonces  $\Gamma_H$  es la amplitud de Bethe-Salpeter no normalizada, que se obtiene al resolver la ecuación de Bethe-Salpeter homogénea. De esta manera la constante de renormalización se obtiene a partir de

$$N_H^2 P^2 = N_c P_\mu \frac{\partial}{\partial P_\mu} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \text{Tr} [\bar{\Gamma}_H(-Q) S(q_+) \Gamma_H(Q) S(q)] , \quad (5.92)$$

donde  $q_+ = q + P$ . Para los canales vectorial y axial hay un factor adicional de  $1/3$  al lado derecho de la ecuación, ya que se toman en cuenta las tres polarizaciones del mesón. Contrayendo la ecuación (5.92) con  $P_\mu$ , y usando la siguiente propiedad de la regla de la cadena

$$\frac{d}{dP^2} = \frac{1}{2P^2} P^\mu \frac{\partial}{\partial P^\mu} . \quad (5.93)$$

Además, utilizando  $N_c = 3$  se obtiene la amplitud reescalada tal que

$$1 = \frac{d}{dP^2} \Pi_H(Q, P) \Big|_{Q=P} , \quad (5.94)$$

con

$$\Pi_H(Q, P) = 6 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \text{Tr} [\bar{\Gamma}_H(-Q) S(q+P) \Gamma_H(Q) S(q)] , \quad (5.95)$$

donde  $\Gamma_H$  es la amplitud no normalizada.

### 5.6.1. Normalización de la amplitud pseudoescalar

La ecuación (5.51) son las amplitud de Bethe-Salpeter para mesones pseudoescalares, esto significa que después de calcular la traza en la ecuación (5.95) se tendrán términos proporcionales a  $E_{0^{--}}^2$ ,  $E_{0^{--}} F_{0^{--}}$  and  $F_{0^{--}}^2$ . Para notarlo, se escriben las amplitudes en términos de covariantes

$$\mathcal{N}_{0^{--}}^{ij} = 6 \frac{d}{dP^2} \int_0^1 dx \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\text{Tr} [\bar{\mathcal{D}}_{0^{--}}^i(-Q) \hat{S}_f(q+P) \mathcal{D}_{0^{--}}^j(Q) \hat{S}_g(q) \gamma_\mu]}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2} \Big|_{Q=P} \quad (5.96)$$

donde  $i, j = \{1, 2\}$ ,  $\mathcal{D}_{0^{--}}^j = \{i\gamma_5, \frac{1}{2M} \gamma_5 \gamma \cdot P\}$  y  $\hat{S}_f(q+P) = -i\gamma \cdot (q+P) + M_f$  y  $\hat{S}_g(q) = -i\gamma \cdot q + M_g$ . Entonces se toman las trazas para los distintos valores de  $i$  y  $j$ , se hace el cambio de variable usual  $q \rightarrow q - xP$  y se toman las condiciones  $P \cdot q = 0$  y  $(P \cdot q)^2 = \frac{1}{4} P^2 q^2$  cuando sean necesarias. El término proporcional a  $E_{0^{--}}^2$  se lee

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{0^{--}}^{11} &= 6 \frac{d}{dP^2} \int_0^1 dx \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{-4(M_f M_g - x(1-x)P^2 + q^2)}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2} \Big|_{Q=P} \\ &= -24 \frac{d}{dP^2} \int_0^1 dx \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{(M_f M_g - x(1-x)P^2 + q^2 + \mathfrak{M}^2 - \mathfrak{M}^2)}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2} \\ &= -24 \frac{d}{dP^2} \int_0^1 dx \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left[ \frac{(M_f M_g - x(1-x)P^2 - \mathfrak{M}^2)}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2} + \frac{1}{q^2 + \mathfrak{M}^2} \right]. \end{aligned} \quad (5.97)$$

De la ecuación (5.40) se obtiene fácilmente que

$$\frac{d\mathfrak{M}^2}{dP^2} = x(1-x), \quad (5.98)$$

el cual ayuda a calcular la derivada de la ecuación (5.97)

$$\mathcal{N}_{0^-}^{11} = -24 \int_0^1 dx \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} x(1-x) \left[ \frac{-3}{[q^2 + \mathfrak{M}^2]^2} - \frac{2(M_f M_g - x(1-x)P^2 - \mathfrak{M}^2)}{[q^2 + \mathfrak{M}^2]^3} \right]. \quad (5.99)$$

Después de regularizar se obtiene

$$\mathcal{N}_{0^-+}^{11} = \frac{3}{2\pi^2} \int_0^1 dx (1-x)x \left( 3\mathcal{C}_{02}(\mathfrak{M}^2) + 2(M_f M_g - x(1-x)P^2 + \mathfrak{M}^2)\mathcal{C}_{03}(\mathfrak{M}^2) \right). \quad (5.100)$$

La descomposición sobre el producto de las amplitudes del tipo  $E_{0^-+}F_{0^-+}$  se encuentra de la misma manera. La traza es

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{0^-+}^{12} &= 6 \frac{d}{dP^2} \int_0^1 dx \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{(\frac{-2}{M})(M_f x + M_g(1-x))P \cdot K}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2} \Big|_{Q=P} \\ &= -\frac{12}{M} \int_0^1 dx \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left[ M_f x + M_g(1-x) \right] \left[ \frac{1}{2(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2} - \frac{2x(1-x)P^2}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^3} \right] \\ &= -\frac{12}{16\pi^2 M} \int_0^1 dx \left[ M_f x + M_g(1-x) \right] \left[ \frac{1}{2}\mathcal{C}_{02}(\mathfrak{M}^2) - 2x(1-x)P^2\mathcal{C}_{03}(\mathfrak{M}^2) \right]. \end{aligned} \quad (5.101)$$

Para finalizar, la descomposición que acompaña a la amplitud  $F_{0^-}^2$  es

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_{0^{2+}}^{22} &= \frac{6}{M^2} \frac{d}{dP^2} \int_0^1 dx \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left( Q^2 (M_f M_g + x(1-x)P^2) - 2x(1-x)(P \cdot Q)^2 \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} Q^2 q^2 \right) \Bigg/ (q^2 + \mathfrak{M}^2)^2 \Bigg|_{Q=P} \\
&= \frac{6P^2}{M^2} \frac{d}{dP^2} \int_0^1 dx \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left( M_f M_g + x(1-x)P^2 - 2x(1-x) \frac{(P \cdot Q)^2}{Q^2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} q^2 - \mathfrak{M}^2 + \mathfrak{M}^2 \right) \Bigg/ (q^2 + \mathfrak{M}^2)^2 \\
&= \frac{6P^2}{M^2} \int_0^1 dx \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{-2x(1-x)(M_f M_g - x(1-x)P^2 + \mathfrak{M}^2)}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^3} \\
&= -\frac{12P^2}{16\pi^2 M^2} \int_0^1 dx x(1-x)(M_f M_g - x(1-x)P^2 + \mathfrak{M}^2) \mathcal{C}_{03}(\mathfrak{M}^2).
\end{aligned} \tag{5.102}$$

Ya con todos estos ingredientes es posible escribir a la constante de normalización pseudoescalar como

$$\mathcal{N}_{0^{2+}}^2 = 6[\mathcal{N}_{0^{1+}}^{11} E_{0^{2+}}^2 + 2\mathcal{N}_{0^{2+}}^{12} E_{0^{2+}} F_{0^{2+}} + \mathcal{N}_{0^{2+}}^{22} F_{0^{2+}}^2], \tag{5.103}$$

donde

$$\mathcal{N}_{0^{1+}}^{11} = \frac{8}{16\pi^2} \int_0^1 dx J(x) \left[ 2 \left( L^-(x) - 2J(x)P^2 \right) \mathcal{C}_{03}(\mathfrak{M}^2) + 3\mathcal{C}_{02}(\mathfrak{M}^2) \right], \tag{5.104}$$

$$\mathcal{N}_{0^{2+}}^{12} = -\frac{2}{M} \int_0^1 dx K(x) \left[ -4J(x)P^2 \mathcal{C}_{03}(\mathfrak{M}^2) + \mathcal{C}_{02}(\mathfrak{M}^2) \right], \tag{5.105}$$

$$\mathcal{N}_{0^{2+}}^{21} = -\frac{2}{16\pi^2 M} \int_0^1 dx K(x) \left[ -4J(x)P^2 \mathcal{C}_{03}(\mathfrak{M}^2) + \mathcal{C}_{02}(\mathfrak{M}^2) \right], \tag{5.106}$$

$$\mathcal{N}_{0^{2+}}^{22} = -\frac{4P^2}{16\pi^2 M^2} \int_0^1 dx J(x) L^+(x) \mathcal{C}_{03}(\mathfrak{M}^2), \tag{5.107}$$

los cuales son los términos que dividen a la amplitudes no normalizadas.

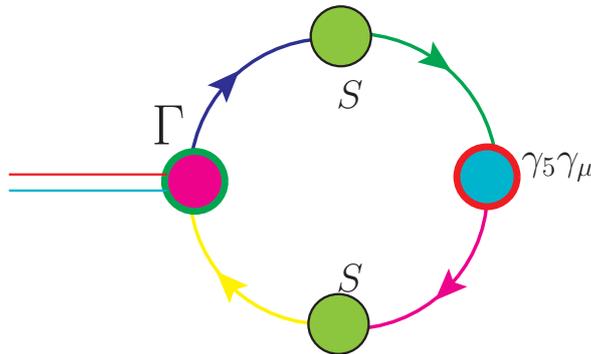
El resto de las amplitudes se pueden ver en el apéndice C.

### 5.7. Constantes de decaimiento

Las constantes de decaimiento son bastante útiles dado al rol que juega en la física de altas energías. Por ejemplo, indican la fuerza de los decaimientos leptónicos y además están relacionadas con el tiempo de vida de las partículas. Para nuestro caso, una vez que se normaliza canónicamente a la amplitud de Bethe-Salpeter, es posible calcular observables a partir de ellas. La constante de decaimiento leptónico pseudoescalar  $f_{0^{--}}$  se define por

$$P_\mu f_{0^{--}} = N_c \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[ \gamma_5 \gamma_\mu S(q_+) \Gamma_{0^{--}}(P) S(q_-) \right]. \quad (5.108)$$

La cual se representa en la figura 5.2 De manera análoga, la constante de



**Figura 5.2.:** Constante de decaimiento pseudoescalar. La constante de decaimiento vectorial es análoga salvo el factor  $\gamma_5$ .

decaimiento vectorial  $f_{1^{--}}$  se define por

$$m_{1^{--}} f_{1^{--}} = \frac{N_c}{3} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[ \gamma_\mu S(q_+) \Gamma_{\mu 1^{--}} S(q_-) \right], \quad (5.109)$$

donde  $m_{1^{--}}$  es la masa del estado ligado  $1^{--}$ , y el factor 3 en el denominador viene de sumar sobre las tres polarizaciones del mesón de espín 1.

### 5.7.1. Constante de decaimiento pseudoescalar

La ecuación (5.108) es una proyección axial-vector de la función de onda de un mesón pseudoescalar, en el origen del espacio de configuraciones; es decir, la constante de decaimiento leptónica del mesón. Esta indica la contribución de la interacción fuerte a la fuerza de la interacción débil del mesón.

La ecuación debe satisfacer la identidad axial de Ward-Takahashi de la ecuación (5.20), con el fin de satisfacer las relaciones de Goldberger-Treiman en el límite quiral [79]. Cuando se cumplen estas identidades, se demuestra que un mesón pseudoescalar sin masa aparece en el límite quiral de la masa del quark, si y solo sí, la simetría quiral se rompe dinámicamente.

Para calcular la constante de decaimiento pseudoescalar en la IC, se contrae con  $P_\mu$  a la ecuación (5.108) se obtiene

$$\begin{aligned} P^2 f_{0^{--}} &= N_c \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \text{Tr} [\gamma_5 \not{P} S(q_+) \Gamma_{0^{--}}(P) S(q_-)] \\ &= N_c [\mathcal{K}_{0^{--}}^1 E_{0^{--}}^1 + \mathcal{K}_{0^{--}}^2 F_{0^{--}}^1], \end{aligned} \quad (5.110)$$

donde los factores  $\mathcal{K}_{0^{--}}^1$  y  $\mathcal{K}_{0^{--}}^2$  se obtienen con el procedimiento usual: calcular la traza, hacer cambio de variable  $q \rightarrow q - xP$  y las identidades respectivas, se obtiene así

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{0^{--}}^1 &= \int_0^1 dx \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\text{Tr} [\gamma_5 \not{P} \hat{S}(q_+) \mathcal{D}^{0^{--}+1}(P) \hat{S}(q_-)]_{q \rightarrow q-xP}}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2} \\ &= \int_0^1 dx \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{4P^2 (M_f x + (1-x)M_g)}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2} \\ &= \frac{P^2}{4\pi^2} \int_0^1 dx \int [M_f x + (1-x)M_g] \mathcal{C}_{02}(\mathfrak{M}^2). \end{aligned} \quad (5.111)$$

De manera análoga

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_{0^{-+}}^2 &= \int_0^1 dx \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\text{Tr} \left[ \gamma_5 \hat{P} \hat{S}(q_+) \mathcal{D} 0^{-+} (P)^2 \hat{S}(q_-) \right]_{q \rightarrow q-xP}}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2} \\
&= \int_0^1 dx \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\frac{P^2}{M} [-2(M_f M_g - x(1-x)P^2) + q^2]}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2} \\
&= -\frac{2P^2}{M} \int_0^1 dx \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{M_f M_g - x(1-x)P^2 - \frac{q^2}{2} - \mathfrak{M}^2 + \mathfrak{M}^2}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2} \\
&= -\frac{2P^2}{M} \int_0^1 dx \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{M_f M_g - x(1-x)P^2 + \mathfrak{M}^2}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2} \\
&= -\frac{P^2}{8\pi^2 M} \int_0^1 dx \int [M_f M_g - x(1-x)P^2 + \mathfrak{M}^2] \mathcal{C}_{02}(\mathfrak{M}^2). \quad (5.112)
\end{aligned}$$

Después de cancelar el factor  $P^2$  se llega a la expresión final

$$\begin{aligned}
f_{0^-} &= N_c \left[ \mathcal{K}_{0^-}^1 \mathcal{F}_{0^-}^1 + \mathcal{K}_{0^-}^2 \mathcal{F}_{0^-}^2 \right], \quad (5.113) \\
\mathcal{K}_{0^-}^1 &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^1 dx K(x) \mathcal{C}_{02}(\mathfrak{M}^2), \\
\mathcal{K}_{0^-}^1 &= -\frac{1}{16\pi^2} \frac{2}{M} \int_0^1 dx L^+(x) \mathcal{C}_{02}(\mathfrak{M}^2).
\end{aligned}$$

### 5.7.2. Constante de decaimiento vectorial

Similar al caso pseudoescalar, la constante de decaimiento vectorial dada por la ecuación (5.109), describe la contribución de la interacción fuerte a la constante de decaimiento leptónica del mesón, pero esta vez para una corriente vectorial.

Para encontrar una expresión, se calcula la traza de la ecuación (5.109) mediante el factor  $\mathcal{D}_{1^{--}}^1$ , seguido del cambio de variable  $q \rightarrow q - xP$  y el uso de las

identidades usuales, para finalizar con la regularización de la expresión

$$\begin{aligned}
f_{1^{--}} &= \frac{N_c}{3m_{1^{--}}} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \text{Tr} [\gamma_5 \not{P} S(q_+) \Gamma_{0^{--}}(P) S(q_-)]_{q \rightarrow q-xP} \\
&= \frac{N_c}{3m_{1^{--}}} \int_0^1 dx \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{6[2(M_f M_g - x(1-x)P^2) + q^2]}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2} \\
&= \frac{N_c}{3m_{1^{--}}} 12 \int_0^1 dx \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{M_f M_g - x(1-x)P^2 + \frac{q^2}{2} + \mathfrak{M}^2 - \mathfrak{M}^2}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2} \\
&= \frac{N_c}{3m_{1^{--}}} 12 \int_0^1 dx \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{M_f M_g - x(1-x)P^2 - \mathfrak{M}^2}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2} \\
&= \frac{N_c}{4\pi^2 m_{1^{--}}} \int_0^1 dx (M_f M_g - x(1-x)P^2 - \mathfrak{M}^2) \mathcal{C}_{02}(\mathfrak{M}^2). \quad (5.114)
\end{aligned}$$

Finalmente, la constante de decaimiento vectorial se escribe como

$$\begin{aligned}
f_{1^{--}} &= \frac{N_c}{3m_{1^{--}}} \mathcal{K}_{1^{--}}^1 \mathcal{F}_{1^{--}}^1, \quad (5.115) \\
\mathcal{K}_{1^{--}}^1 &= \frac{12}{16\pi^2} \int_0^1 dx (L^-(x) - 2J(x)P^2) \mathcal{C}_{02}(\mathfrak{M}^2).
\end{aligned}$$

## 5.8. Factores de Forma

Hoy en día se sabe que los hadrones tienen subestructura. Sin embargo, esto no siempre fue así hasta la ejecución de los primeros experimentos de dispersión inelástica profunda en SLAC en la década de los 60's. La interpretación de los resultados experimentales concluyó la presencia de pequeños bloques de materia dentro de los hadrones, las cuales se identificaron como los quarks y gluones de QCD.

Además, se encontró que a grandes momentos, el protón era un estado ligado de quarks y gluones interactuando no muy fuertemente. Lo cual fue una razón para considerar la libertad asintótica que regía a QCD a altas energías. Así, para momentos pequeños, el hadrón está fuertemente ligado, y se considera una

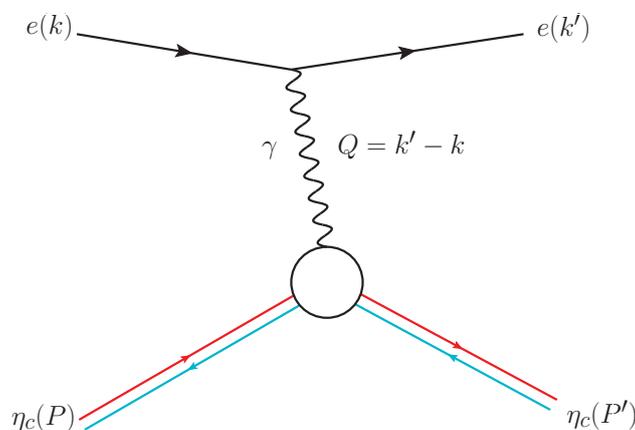
dispersión elástica de electrones que puede interpretarse en términos de los factores de forma eléctricos y magnéticos.

Dado que a momentos pequeños la constante de acoplamiento es muy grande, las técnicas perturbativas dejan de tener sentido, por lo que las técnicas no perturbativas aparecen como una herramienta indispensable para estudiar a los hadrones.

Para encontrar experimentalmente la distribución de carga de un hadrón, por ejemplo un protón, se mide la distribución angular de los electrones dispersados y se compara con la expresión matemática de dispersión de electrones con una carga puntual

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{puntual}} |F(Q^2)|, \quad (5.116)$$

donde  $Q = k' - k$  es el momento de transferencia entre el electrón incidente y el hadrón blanco, por ejemplo  $\eta_c$ ;  $F(Q^2)$  es el factor de forma electromagnético. La estructura y la dinámica del blanco se deducen a partir de dicho factor de forma, el cual depende de la resolución del experimento. Es importante



**Figura 5.3.:** Dispersión elástica mediante un fotón ( $\gamma$ ) de una colisión electrón ( $e$ )-protón ( $p$ ).

mencionar que la ecuación (5.116) sirve para estudiar partículas estáticas que no retroceden después del impacto con el electrón (fotón), por lo que no es

descabellado utilizarla para estudiar quarks pesados. Así, el factor de forma de la ecuación (5.116) es la transformada de Fourier de la distribución de carga normalizada  $\rho(x)$

$$F(Q^2) = \int d^3x \rho(x) e^{i\vec{Q} \cdot \vec{x}}. \quad (5.117)$$

Cuando el momento de transferencia  $q$  es pequeño, la expresión anterior se puede expandir como una serie de potencias<sup>2</sup>

$$F(Q^2) = 1 - \frac{1}{6} \langle r^2 \rangle |Q^2| + \dots. \quad (5.118)$$

Por lo que el radio de carga promedio de la distribución de carga del hadrón es

$$\langle r^2 \rangle = -6 \left. \frac{dF(Q^2)}{dQ^2} \right|_{Q^2=0}. \quad (5.119)$$

De esta forma, la dispersión a bajas energías solo mide el radio de carga promedio del hadrón. Esto debido a que el fotón tampoco lleva mucha energía, y su función de onda solo mide la distribución de carga del hadrón, pero no muestra detalles sobre su subestructura.

La figura 5.3 muestra la dispersión elástica de un electrón contra  $\eta_c$ . La amplitud con el intercambio de un fotón es

$$T_{fi} = (-ie)^2 \bar{u}(k') \gamma_\mu u(k) \frac{-i}{Q^2} \langle \eta_c(P_f) | J_\mu | \eta_c(P_i) \rangle, \quad (5.120)$$

donde  $u$  y  $\bar{u}$  son los espinores del electrón,  $Q = k' - k$  es el momento de transferencia del fotón virtual,  $|\eta_c(P)\rangle$  es el estado ligado del mesón  $\eta_c$ , y  $J_\mu$  es la corriente electromagnética de  $\eta_c$ .

Además, el término  $\langle \eta_c(P_f) | J_\mu | \eta_c(P_i) \rangle$  corresponde al vértice fotón-mesón, cuya estructura es hasta ahora desconocida en términos de las interacciones entre quarks, gluones y fotones. No obstante, el término  $J_\mu$  es un cuadrivector

---

<sup>2</sup>Se considera simetría esférica.

de Lorentz, por lo que la descripción de una partícula con espín cero se puede describir mediante un solo factor de forma. Así

$$\langle \eta_c(P_f) | J_\mu | \eta_c(P_i) \rangle = (P_f + P_i)_\mu F_{0^{++}}(Q^2), \quad (5.121)$$

donde  $F_{0^{++}}(Q^2)$  es el factor de forma de la ecuación (5.116). Este factor de forma nos indica el grado de desconocimiento del mesón pseudoescalar y la dinámica de su subestructura, la cual se representa por la burbuja de la figura 5.3. Se puede pensar que ésta puede calcularse con QCD para momentos de transferencia grandes gracias a que QCD es una teoría asintótica libre. Sin embargo, hasta ahora se desconoce si esa escala de energías será accesible algún día en los grandes aceleradores, ideal para hacer cálculos perturbativos en QCD [70]. Por lo que el empleo de técnicas no perturbativas se vuelve crucial a la hora de estudiar estos fenómenos.

En las subsecciones siguientes se calculan las expresiones para calcular el factor de forma elástico y de transición en la interacción de contacto descrita en este capítulo.

### 5.8.1. Factor de Forma Elástico

Los estados simétricos bajo conjugación de carga no tienen factor de forma elástico. Al nivel de quarks, esto se atribuye a las cargas iguales y opuestas del quark con su correspondiente antiquark. A pesar de ello, al acoplar una corriente vectorial con los quarks dentro del mesón, se puede medir un *factor de forma* que ofrezca información sobre la estructura interna del estado.

Los mesones pseudoescalares, por ejemplo el pión o  $\eta_{c,b}$ , tienen solamente un factor de forma vectorial  $F_H(Q^2)$ , el cual se define mediante el vértice  $\eta_c \gamma^*$  como

$$\Lambda_\mu^{\eta_c \gamma^*}(P_f, P_i; Q) = F_H(Q^2)(P_f + P_i)_\mu, \quad (5.122)$$

donde  $Q = P_f - P_i$  es el momento del fotón virtual, y  $F_H(Q^2)$  es el factor de forma elástico del mesón pseudoescalar. La figura 5.4 muestra a la ecuación (5.122) para el caso del mesón  $\eta_c$ .

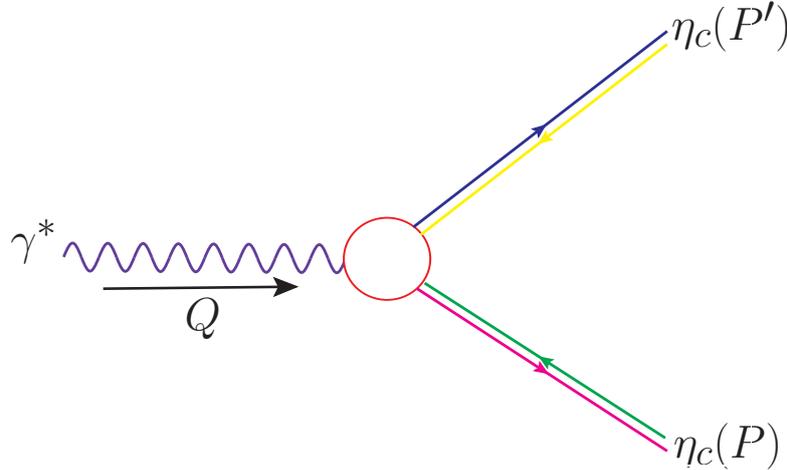


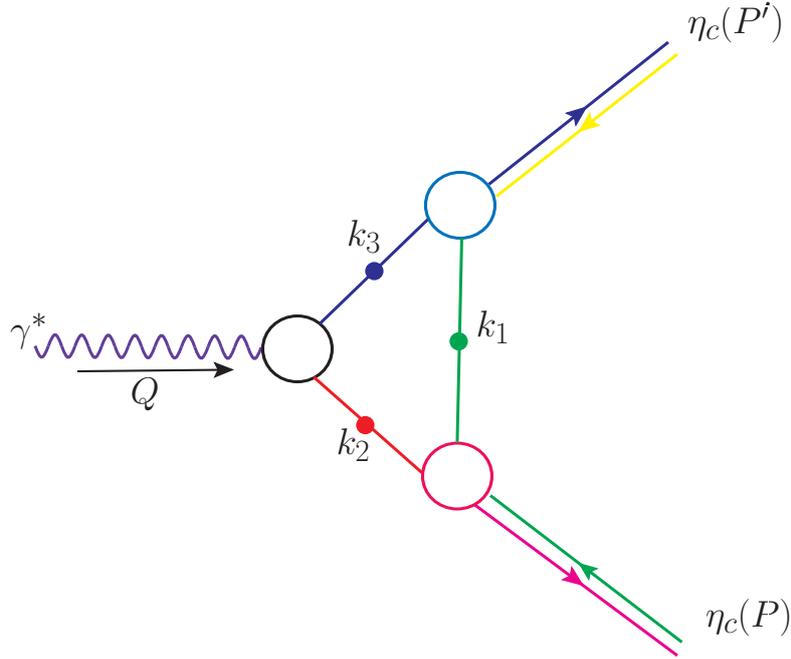
Figura 5.4.: Factor de forma de  $\eta_c$ .

El factor de forma elástico es el portador de la estructura electromagnética interna del estado ligado. En la aproximación de impulso, el vértice  $\eta_c \gamma^*$  es

$$\Lambda_{\mu}^{\eta_c \gamma^*}(P, Q) = 2N_c \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[ i\Gamma_{\eta_c}(-P_f) S(k_2) i\Gamma_{\mu}(Q) S(k_1) i\Gamma_{\eta_c}(P_i) S(k) \right], \quad (5.123)$$

donde  $P_i = P - Q/2$  and  $P_f = P + Q/2$  son los momentos del mesón entrante y saliente respectivamente,  $Q = P_f - P_i$  es el momento del fotón virtual, y la distribución de los momentos entre los constituyentes es tal que  $k_1 = k + P - Q/2$  y  $k_2 = k + P + Q/2$ . Como la dispersión es elástica,  $P_i^2 = P_f^2 = -m_H^2$ . En términos de  $P$  y  $Q$ , esas restricciones son válidas debido a que  $P \cdot Q = 0$  y  $P^2 + Q^2/4 = -m_H^2$ , donde  $m_H$  es la masa del estado ligado.

Para evaluar mejor las expresiones en la aproximación de impulso. Se reetiqueta el momento de mesón entrante como momento  $p_1$ , el del mesón saliente como  $p_2$  y de esta forma la región de interacción tiene momento  $p_2 = p_1 + q$ . En el esquema de Breit se elige  $p_1 = K - q/2$ . Así



**Figura 5.5.:** Factor de forma elástico en la aproximación de impulso. Se considera el caso para  $\eta_c$  y además  $P = p_1, P' = p_2$ .

$$\begin{aligned} p_1^2 &= (K - q/2)^2 = -m_H^2 = p_2^2 = (K + q/2)^2 \Rightarrow K \cdot q = 0, \\ K^2 &= -m_H^2 - 1/4q^2. \end{aligned} \quad (5.124)$$

En un espacio euclidiano se tienen las relaciones fuera del límite quiral de cuádrimomentos con  $q = (0, 0, Q, 0), K = (-im_H, 0, 0, iQ/2)$ . Así, en el modelo de interacción de contacto, la aproximación de impulso para este proceso se denota mediante la expresión

$$2K_\mu F_H(Q^2) = \frac{3}{2\pi^2} \int_t^\Lambda \text{Tr}_D i\Gamma_H(-p_2) S(t + p_2) i\gamma_\mu S(t + p_1) i\Gamma_H(p_1) S(t), \quad (5.125)$$

donde  $S(t) = -i\gamma \cdot t\sigma_V(t^2) + \sigma_S(t^2)$ .

Para obtener de manera sistemática a cada uno de los factores que componen a la ecuación (5.125), se separa cada factor que involucra la amplitud de Bethe-Salpeter para mesones pseudoescalares, la cual está dada por la ecuación (5.51).

Al igual que en cálculo de las amplitudes de Bethe-Salpeter y sus factores de normalización vistos en la sección 5.6. Así, cada uno de los factores se puede escribir en términos de los covariantes de la ecuación (5.67)

$$\mathcal{A}_{0^{-+}}^{ij} = -\frac{3}{2\pi^2} \int_t^\Lambda -i \text{Tr} \left[ \mathcal{D}_H^i(P) \hat{S}_f(t+p_2) \gamma_\mu \hat{S}_g(t+p_1) \mathcal{D}_H^j(P) \hat{S}_g(t) \right].$$

Así, el factor de forma elástico se escribe como la suma de diferentes términos

$$Q^2 F_H^{\text{em}}(Q^2) = \mathcal{A}_{0^{-+}}^{11} E_{0^{-+}}^1 E_{0^{-+}}^1 + \mathcal{A}_{0^{-+}}^{12} E_{0^{-+}}^1 F_{0^{-+}}^1 + \mathcal{A}_{0^{-+}}^{21} F_{0^{-+}}^1 E_{0^{-+}}^1 + \mathcal{A}_{0^{-+}}^{22} F_{0^{-+}}^1 F_{0^{-+}}^1, \quad (5.126)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{0^{-+}}^{11} = & -4K^2 \frac{3}{2\pi^2} \left[ \int_0^1 dx \mathcal{C}_{02}(\sigma(x); \tau_{uv}, \tau_{ir}) \right. \\ & \left. + 2m^2 \int_0^1 dx_1 dx_2 x_1^2 \mathcal{C}_{03}(\mathfrak{M}^2; \tau_{ir}^2, \tau_{uv}^2) \right], \end{aligned} \quad (5.127)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{0^{-+}}^{12} = & -8K^2 \frac{3}{2\pi^2} \left[ \int_0^1 dx_1 \mathcal{C}_{02}(\sigma(x); \tau_{ir}, \tau_{uv}) - \right. \\ & \left. - \int_0^1 dx_1 dx_2 x_1 (2m^2 - x_1 Q^2) \mathcal{C}_{03}(\mathfrak{M}^2) \right], \end{aligned} \quad (5.128)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{0^{-+}}^{22} = & -8K^2 \frac{1}{M^2} \frac{3}{2\pi^2} \int_t^\Lambda \int_0^1 dx_1 dx_2 x_1 \{ A(x_1, Q^2, m^2) \mathcal{C}_{02}(\mathfrak{M}^2) \\ & - B(M^2, x_1, x_2, Q^2, m^2) \mathcal{C}_{03}(\mathfrak{M}^2) \}, \end{aligned} \quad (5.129)$$

con

$$\mathcal{A}(x_1, Q^2, m^2) = x_1 (3m^2 + \frac{1}{2} Q^2) - m^2 x_1 - m^2 \quad (5.130)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(M^2, x_1, x_2, Q^2, m^2) = & (\mathfrak{M}^2 - \mathfrak{M}_1^2) \mathcal{A}(x_1, Q^2, m^2) \\ & - x_1 (m^4 - m^2 M^2 - M^2 Q^2) - 2m^2 M^2. \end{aligned} \quad (5.131)$$

Las cuales se usan para calcular el factor de forma en el siguiente capítulo.

### 5.8.2. Vistiendo al vértice quark-fotón

Cuando los fotones se acoplan a estados ligados compuestos por quarks vestidos, se debe tomar en cuenta que el vértice quark-fotón también este vestido para asegurar que la identidad vectorial de Ward-Takahashi se satisfice

$$P_\mu i\Gamma_\mu^\nu(k_+, k) = S^{-1}(k_+) - S^{-1}(k), \quad (5.132)$$

donde  $\Gamma_\mu^\nu$  es el vértice fotón-quark-vestido. Esto es crucial para un estudio sensible de los factores de forma electromagnéticos. Idealmente, el vértice tiene que vestirse a un nivel consistente con el esquema de truncación que se usa para calcular los estados ligados de las amplitudes de Bethe-Salpeter. Para ese caso el vértice se determina a partir de la ecuación inhomogénea de Bethe-Salpeter

$$\Gamma_\mu = \gamma_\mu - \frac{16\pi}{3} \frac{\alpha_{\text{IR}}}{m_G^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \gamma_\alpha \chi_\mu(q_+, q) \gamma_\alpha, \quad (5.133)$$

donde  $\chi_\mu(q_+, q) = S(q+P)\Gamma_\mu(Q)S(q)$ . Debido a la naturaleza independiente del momento del kernel de interacción, la forma general tiene la forma

$$\Gamma_\mu(Q) = \gamma_\mu^T P_T(Q^2) + \gamma_\mu^L P_L(Q^2), \quad (5.134)$$

con  $Q_\mu \gamma_\mu^T = 0$  and  $\gamma_\mu^T + \gamma_\mu^L = \gamma_\mu$ . Es importante mencionar que esta expresión no es válida cuando se usa una interacción más compleja.

Después de insertar a la ecuación (5.134) en la ecuación (5.133) se obtiene

$$P_L(Q^2) = 1, \quad (5.135)$$

que gracias a la identidad de la ecuación (5.36) se escribe como

$$0 = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left[ \frac{P \cdot q_+}{q_+^2 + M^2} + \frac{P \cdot q}{q^2 + M^2} \right]. \quad (5.136)$$

Usando la misma identidad se llega a

$$P_T(Q^2) = \frac{1}{1 + K_\gamma(Q^2)}, \quad (5.137)$$

donde  $K_\gamma(Q^2)$  viene dado por la ecuación (B.9). Entonces la parte transversa es igual a uno cuando  $Q^2 = 0$ , esto es

$$P_T(Q^2 = 0) = 1, \quad (5.138)$$

de forma que en  $Q^2 = 0$ , la aproximación arcoíris de la interacción de contacto, el vértice vestido es idéntico al desnudo. Sin embargo, esto no es válido para  $Q^2 \neq 0$ ; de hecho, la parte transversa de vértice fotón-quark vestido muestra un polo para  $Q^2 < 0$ . Esto es

$$1 + K_\gamma(Q^2) = 0, \quad (5.139)$$

la cual es idéntica a la ecuación de Bethe-Salpeter para mesones vectoriales en el estado base en la interacción de contacto, donde  $K_\gamma(Q^2) \equiv K_1^{11-}(P^2)$ . Esto es, la expresión matemática es idéntica y el polo equivale a la masa del mesón vectorial. En resumen, se viste el vértice de tal manera que se reescala como

$$\Gamma_\mu(Q) \rightarrow \gamma_\mu P_T(Q^2), \quad (5.140)$$

cuando se realizan cálculos numéricos.

El factor de forma de transición y el cálculo detallado del factor de forma elástico se presentan en el Apéndice D.

## Capítulo 6.

# Modelo de Interacción de Contacto para Quarkonia

«¡Lo bueno casi no se cuenta, pero cuenta mucho!»

— Lic. Enrique Peña Nieto, lema del cuarto informe de Gobierno Federal de los Estados Unidos Mexicanos

Con las expresiones obtenidas en el capítulo anterior, ahora es posible calcular las masas del singlete de sabor de quarkonia en el estado base en cuatro canales diferentes: pseudoescalar ( $\eta_{c,b}(1S)$ ), vector ( $J/\psi(1S), Y(1S)$ ), escalar ( $\chi_{c_0,b_0}(1P)$ ) y axial vector ( $\chi_{c_1,b_1}(1P)$ ). Así como las constantes de decaimiento débil de  $\eta_{c,b}(1S)$  y  $J/\psi(1S), Y(1S)$ .

Además, para el canal pseudoscalar ( $\eta_{c,b}(1S)$ ), se calculan los factores de forma elástico y de transición ( $\eta_{c,b}(1S) \rightarrow \gamma\gamma^*$ ) para un rango amplio del momento al cuadrado del fotón de transferencia ( $Q^2$ ).

Los resultados coinciden con los datos de *lattice* para  $Q^2$  pequeños. Para  $Q^2 \geq Q_0^2$ , los resultados comienzan a desviarse de los resultados de *lattice* más del 20%.  $Q_0^2 \approx 2.5\text{GeV}^2$  para el factor de forma elástico y  $\approx 25\text{GeV}^2$  para el factor de forma de transición. Donde haya comparación posible, los resultados están en buena concordancia con *lattice* QCD, QCD perturbativo, resultados de estudios

de ESD-EBS con truncamientos refinados, así como datos experimentales de los experimentos de BABAR.

## 6.1. Sector Ligero en la interacción de Contacto

La interacción de contacto utilizada en esta tesis fue desarrollada para calcular propiedades del pión  $\phi$  y el mesón rho  $\rho$  [74,75]. En años posteriores ha sido utilizada para calcular otro tipo de observables de hadrones compuestos por dos quarks [76]. La primera extensión al primer trabajo que usa la IC fue en [77]. Aquí se calcula el espectro de masa de hadrones con sabor gracias a la inclusión del quark *strange*. Los resultados se presentan en la tabla 6.1.

	masas					
	$m_{\pi(1S)}$	$m_{\rho(1S)}$	$m_{\sigma(1P)}$	$m_{a_1(1P)}$	$m_{\phi(1S)}$	$m_{f_1(1S)}$
Experimento [46]	0.14	0.78	1.0-1.2	1.23	1.02	1.42
Interacción de Contacto	0.14	0.93	1.29	1.38	1.13	1.59

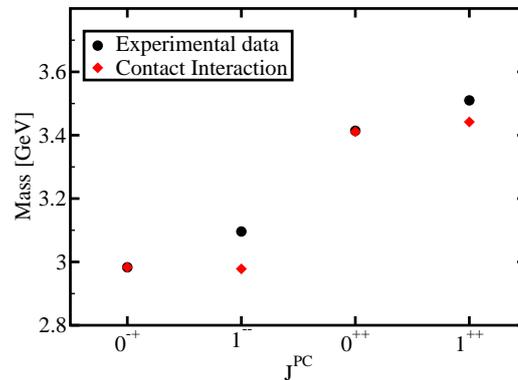
**Tabla 6.1.:** Masas del estado base de mesones ligeros obtenidas con el conjunto de parámetros del sector ligero:  $m_g = 0.8 \text{ GeV}$ ,  $\alpha_{IR} = 0.93\pi$ ,  $\Lambda_{IR} = 0.24 \text{ GeV}$ ,  $\Lambda_{UV} = 0.905 \text{ GeV}$ . La masa corriente de los quarks es  $m_{u,d} = 0.007^* \text{ GeV}$ ,  $m_s = 0.17 \text{ GeV}$ ; la masa generada dinámicamente es  $M_{u,d} = 0.37 \text{ GeV}$ ,  $M_s = 0.53 \text{ GeV}$ . El valor que se muestra para los mesones  $\sigma$  y  $a_1$  IC son aquellos que se obtienen con el acoplamiento espín órbita  $g_{so} = 0.24$ . Los resultados se comparan directamente con los datos experimentales. Las cantidades dimensionadas están en GeV. (\* = La masa corriente del quark se ajustó para obtener la masa del mesón pseudoescalar).

Para analizar rápidamente los resultados de la tabla 6.1, se toma en cuenta la propiedad de la aproximación arcoíris de que un sistema ESD-EBS describe a los mesones pseudoescalares y vectoriales correctamente, pero no a sus compañeros de paridad, a saber, los mesones escalares y axiales. En kernels más realistas, por ejemplo [84], cuando el vértice quark-gluon está completamente vestido, se encuentra que el rompimiento dinámico de la simetría quiral (RDSQ) produce un gran momento cromomagnético anómalo del quark vestido en el

infrarrojo. En consecuencia, las correcciones asociadas se cancelan en los canales pseudoescalar y vectorial, pero se añaden en los otros dos, resultando así en una separación mayor entre los compañeros de paridad. Este efecto es de especial importancia para mesones compuestos por quarks ligeros. Teniendo esto en cuenta, y siguiendo el trabajo [76], se introduce una repulsión espín orbital dentro de los canales escalar y axial a través del ingenio de un acoplamiento fenomenológico  $g_{SO}^2 \leq 1$ , que se introduce como un factor multiplicativo dentro de los kernels escalar y axial. El valor de  $g_{SO} = 0,24$  se eligió en [76] con el fin de obtener el valor experimental de la separación de las masas  $a_1-\rho$ , que se logra con las correcciones descritas anteriormente (sin el acoplamiento espín orbital  $g_{SO}$ , la diferencia de masa entre  $a_1$  y  $\rho$  es 0.15 GeV, un factor de 3 más pequeño que el valor experimental. El cual implica que el acoplamiento ha incrementado la masa de  $a_1$  un 28 %, el cuál es un efecto bastante notorio).

	masas			
	$m_{\eta_c(1S)}$	$m_{J/\Psi(1S)}$	$m_{\chi_{c0}(1P)}$	$m_{\chi_{c1}(1P)}$
Experimento [46]	2.983	3.096	3.414	3.510
Interacción de Contacto	2.983*	2.979	3.412	3.442
	-	-	3.293	3.344
JM [80]	2.821	3.1	3.605	-
BK [90]	2.928	3.111	3.321	3.437
S1rp [94]	3.035	3.192	-	-
RB1 [95]	3.065	-	-	-
RB2 [95]	3.210	-	-	-

**Tabla 6.2.:** Masas del estado base de charmonia obtenidas con el conjunto de parámetros del sector ligero:  $m_g = 0.8 \text{ GeV}$ ,  $\alpha_{IR} = 0.93\pi$ ,  $\Lambda_{IR} = 0.24 \text{ GeV}$ ,  $\Lambda_{UV} = 0.905 \text{ GeV}$ . La masa corriente del quark es  $m_c = 1.578^* \text{ GeV}$ , y la masa generada dinámicamente es  $M_c = 1.601 \text{ GeV}$ . El valor que se muestra debajo de los resultados de la IC son aquellos que se obtienen sin el acoplamiento espín órbita  $g_{so} = 0.08$ . Para una comparación directa, citamos los valores de otros estudios de las ESD para calcular las masas a bajo orden de charmonia. Las cantidades dimensionadas están en GeV. (\* = La masa corriente del quark se ajustó para obtener la masa del mesón pseudoescalar).



**Figura 6.1.:** Resultados en la interacción de contacto para el espectro de masa  $\bar{c}c$  usando los parámetros ajustados en el sector ligero, ver tabla 6.2. Los datos de PDG fueron extraídos de [46].

La tabla 6.2 muestra los resultados en la IC para el cálculo de espectro de masas de charmonia. Ahí se usa una aproximación bastante ingenua, en donde se toma el conjunto de parámetros usado para estudiar al sector ligero. Solamente se ha cambiado la masa corriente del quark charm como parámetro de entrada, el cual se fijó de tal manera que reproduzca el resultado de la masa del mesón pseudoescalar. El resto de las masas son predicciones del modelo. Como puede verse en la tabla 6.2, las predicciones para las masas de los mesones restantes son bastante buenas, al comparar con cálculos de otros modelos basados en las ESD-EBS más sofisticados [90,95], QCD en la red para el sector charm [117,118], así como los valores experimentales [46].

El hecho de que una aproximación arcoíris con una interacción de contacto describa correctamente el espectro de masas de estados ligados de charmonia puede entenderse de una manera sencilla: como las funciones de onda de renormalización y de la masa del quark son independientes del momento, el vértice quark pesado-gluón puede por tanto ser bien aproximado por el vértice desnudo, asegurando así las identidades vectorial y axial de Ward-Takahashi.

## Constantes de decaimiento

	amplitudes			
	$\eta_c(1S)$	$J/\Psi(1S)$	$\chi_{c_0}(1P)$	$\chi_{c_1}(1P)$
$E_H$	6.028	3.024	0.437	0.298
	-	-	1.905	1.153
$F_H$	1.711	-	-	-
constantes de decaimiento				
Experimento [46]	0.361	0.416	-	-
Interacción de Contacto	0.084	0.080	-	-

**Tabla 6.3.:** Estados base de las amplitudes y constantes de decaimiento de charmonia obtenidas con el conjunto de parámetros del sector ligero en la tabla 6.2:

Sin embargo, a la hora de calcular las constantes de decaimiento pseudoescalar y vectorial como se ve en la tabla 6.3, las constantes de decaimiento pseudoescalar y vectorial para los parámetros del modelo usados están demasiado infraestimado, en total desacuerdo con otros modelos y datos experimentales ya que son más chicas por un orden de magnitud. Esto tiene una causa numérica, ya que las ABS son demasiado pequeñas. Si se cambia  $\Lambda_{UV}$ , por ejemplo, a 1.843 GeV, y al mismo tiempo se mantienen los otros parámetros fijos, excepto por la masa corriente de los quarks, que se toman de la referencia [46], la situación mejora por un factor de 2. Sin embargo, aún se tiene una discordancia entre nuestros resultados, cálculos con otros modelos y resultados experimentales. Observamos que esta discrepancia persiste a pesar del hecho de que nuestro cálculo para los mesones pseudoescalares están en perfecta concordancia con la relación de Gell-Mann–Oakes–Renner, la cual es válida para todo mesón  $0^-$ , sin tener en consideración la magnitud de la masa desnuda del quark [90, 119, 120].

No es muy difícil comprender porque las constantes de decaimiento resultan ser mucho más pequeñas que las que uno espera a partir de los resultados de las ESD, con una función de masa variable. Como se señala en las referencias [73, 93, 121], la constante de decaimiento está influenciada por la cola a momentos

grandes del propagador vestido del quark. Esta región de momentos grandes explora la función de onda de quarkonia al origen. Por otro lado, la interacción de contacto produce una masa constante sin cola perturbativa para momentos grandes. Por lo tanto, este artefacto de quarkonia tiene que construirse en nuestro modelo de una forma alternativa. Se sabe que al incrementar la masa de los quarks pesados, estos se vuelven cada vez similares a una partícula puntual. Además, entre más cercanos se encuentre un quark del antiquark, la fuerza de acoplamiento entre ellos disminuye. Por consiguiente, no se puede esperar que las constantes de decaimiento estén correctamente reproducidas utilizando los parámetros del sector de quarks ligeros. Sin embargo, la reducción en la fuerza del kernel tiene que ser compensada incrementando el corte ultravioleta. Esto tiene sentido al observar que  $\Lambda_{UV}$  (mayor escala de energía asociada al sistema) usada en el sector ligero es, de hecho, menor que la masa desnuda del quark charm. Entonces necesita ser modificada. Se busca por un equilibrio entre la constante de acoplamiento efectiva y el corte ultravioleta para describir las propiedades estáticas de charmonia, los cuales se muestran en la siguiente sección.

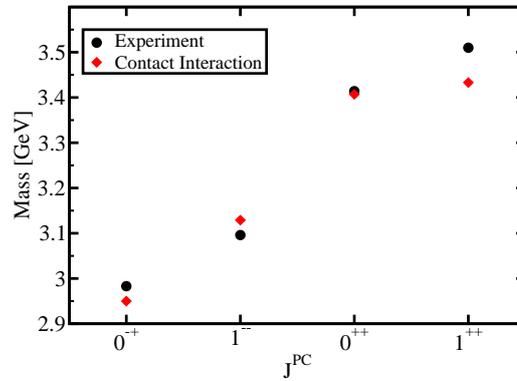
## 6.2. Conjunto de Parámetros Óptimos en la Interacción de Contacto para Charmonia

En esta sección nos proponemos a redefinir el conjunto de parámetros de la IC para estudiar las masas, constantes de decaimiento y radio de carga de charmonia.

Se mantienen los parámetros  $m_g$  and  $\Lambda_{IR}$  del sector ligero. Esto indicado por estudios modernos del propagador del gluón que indican que en el infrarojo, la escala de masa del gluón, generada dinámicamente, no se ve afectada por la introducción de masas dinámicas quarks pesados, como se ve en [122, 123]. El resto de parámetros se obtiene del mejor ajuste a la masa, la constante de decaimiento y el radio de carga del canal pseudoescalar ( $\eta_c$ ).

	masas			
	$m_{\eta_c(1S)}$	$m_{J/\Psi(1S)}$	$m_{\chi_{c_0}(1P)}$	$m_{\chi_{c_1}(1P)}$
Experimento [46]	2.983	3.096	3.414	3.510
Interacción de Contacto	2.950*	3.129	3.407	3.433
			3.194	3.254
JM [80]	2.821	3.1	3.605	-
BK [90]	2.928	3.111	3.321	3.437
RB1 [95]	3.065	-	-	-
RB2 [95]	3.210	-	-	-

**Tabla 6.4.:** Masas del estado base de charmonia obtenidas con el mejor ajuste al conjunto de parámetros:  $m_g = 0.8 \text{ GeV}$ ,  $\alpha_{IR} = 0.93\pi/20$ ,  $\Lambda_{IR} = 0.24 \text{ GeV}$ ,  $\Lambda_{UV} = 2.788 \text{ GeV}$ . La masa corriente del quark es  $m_c = 0.956^* \text{ GeV}$ , y la masa generada dinámicamente es  $M_c = 1.497 \text{ GeV}$ . El valor que se muestra debajo de los resultados de la IC son aquellos que se obtienen sin el acoplamiento espín orbital  $g_{so} = 0.24/3$ . Las cantidades dimensionadas están en GeV. (\* = Este conjunto de parámetros se obtuvo a partir del mejor ajuste a las masas, constantes de decaimiento y radio de carga del canal pseudoescalar.



**Figura 6.2.:** Resultados en la interacción de contacto para el espectro de masa  $\bar{c}c$ , ver tabla 6.4. Los datos de PDG fueron extraídos [46].

Ahora se puede calcular fácilmente las masas del estado base de los mesones vectorial, escalar y axial. Los resultados se muestran en la tabla 6.4 y la figura 6.2. Se puede notar que las masas están en concordancia con los valores

experimentales y son además comparables a los mejores resultados de ESD con aproximaciones refinadas. Es cierto que las masas de charmonia de modelos de quark apagados se desplazan por valores muy grandes, cuando se consideran lazos hadrónicos, como se ven en [124]. Con esta observación, los resultados para modelos de quarks apagados parecieran ser no válidos.

Sin embargo, como se señala en el mismo artículo [124], como este desplazamiento de la escala de masa es común para todos los estados en niveles bajos, entonces puede ser absorbida en un cambio de los parámetros del modelo. Así, en lugar de añadir lazos hadrónicos consistentemente dentro de nuestro cálculo en la interacción de contacto, simulamos el efecto al ajustar los parámetros del modelo (constante de acoplamiento y corte ultravioleta). Esto asegura, por ejemplo, una masa del quark *charm* similar a la masa constituyente del orden de 1 GeV y un valor correcto para la masa experimental del  $\eta_c$ .

Para el caso del mesón  $\chi_{c_1}$ , se encuentra una masa 3.254 GeV sin acoplamiento espín-órbita, el cual está 7% por debajo del valor experimental; una diferencia menor a la obtenida al comparar nuestro valor con el experimental de la masa de  $J/\psi$ . Del mismo modo, se observa un patrón similar entre los canales pseudoescalares y escalares. Por otro lado, para lograr un valor aceptable en las diferencias entre los compañeros de paridad, se introdujo un acoplamiento espín orbital de  $g_{SO} = 0.08$ . Esto se muestra en los valores en la segunda fila de la tabla 6.4. Como se puede observar al analizar esos valores, la masa del mesón  $\chi_{c_1}$  aumentó solo 5%. Este efecto pequeño está en línea con los resultados de la simetría de espín de quarks pesados. Las interacciones dependientes del espín son proporcionales al momento cromomagnético del quark (simulado por el acoplamiento espín-orbital). Esos efectos están suprimidos sustancialmente para charmonia, comparado con mesones ligeros.

Las constantes de decaimiento de the  $\eta_c(1S)$  y  $J/\Psi(1S)$  se reportan en la tabla 6.5. Para el mesón pseudoescalar, el resultado se alinea perfectamente con el valor experimental. Desafortunadamente, este no es el caso para el canal vectorial. Además, notemos que la constante de decaimiento de  $J/\Psi(1S)$  es más pequeña que la de  $\eta_c(1S)$ . El orden correcto puede recuperarse al reducir aún

más la fuerza de interacción. Sin embargo, al considerarse algo artificial, no se prosiguió. Es importante notar que uno de los resultados de ESD conduce a la constante de decaimiento de  $J/\Psi(1S)$  menor que nuestro valor, [94].

	constantes de decaimiento	
	$f_{\eta_c}$	$f_{J/\Psi}$
Experimento [46]	0.361	0.416
S1rp [94]	0.239	0.198
S3ccp [94]	0.326	0.330
BK [90]	0.399	0.448
Interacción de Contacto	0.305	0.220

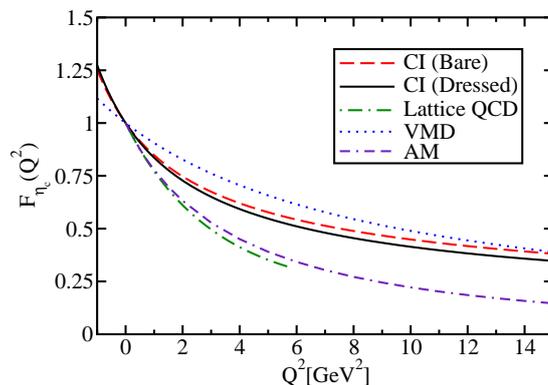
**Tabla 6.5.:** Las constantes de decaimiento de  $\eta_c(1S)$  y  $J/\Psi(1S)$  obtenidas  $m_g = 0.8 \text{ GeV}$ ,  $\alpha_{IR} = 0.93\pi/20$ ,  $\Lambda_{IR} = 0.24 \text{ GeV}$ ,  $\Lambda_{UV} = 2.788 \text{ GeV}$ . La masa corriente del quark es  $m_c = 0.956 \text{ GeV}$ . Las cantidades dimensionadas están en GeV.

$\eta_c(1S)$ radio de carga		
ESD [88]	Lattice [125]	IC
0.219 fm	0.25 fm	0.21 fm

**Tabla 6.6.:** Radio de carga de  $\eta_c(1S)$  obtenido con el nuevo conjunto de parámetros discutido en el texto.

Como otra prueba para el nuevo conjunto de parámetros para la interacción de contacto, se calculó el radio de carga de  $\eta_c(1S)$ ,  $r_{\eta_c}^2 = -6\partial F_{\eta_c}(Q^2)/\partial Q^2|_{Q^2=0}$  donde  $F_{\eta_c}(Q^2)$  es el factor de forma electromagnético que mostraremos más adelante. Este se compara con los resultados presentados en [88] a partir de estudios previos de ESD y [88, 125] a partir de *lattice* QCD. Los resultados se presentan en la tabla 6.6. Como se puede ver, el radio de carga calculado está muy cercano a esos obtenidos al emplear el modelo de Maris y Tandy y el reportado por estudios en la red [88, 125].

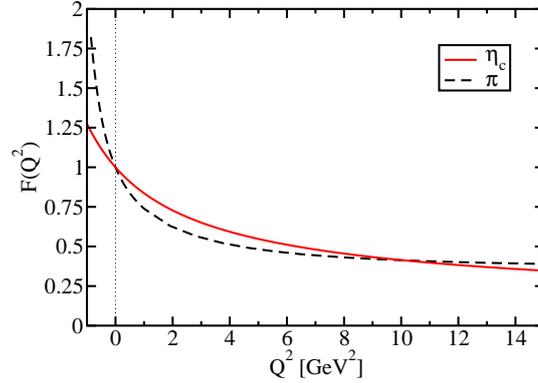
La figura 6.3 muestra los resultados para el factor de forma elástico en  $\eta_c$  con y sin el vértice de revestimiento quark-fotón. Es evidente que este revestimiento



**Figura 6.3.:** Resultados del factor de forma elástico de  $\eta_c$  en la interacción de contacto con y sin el revestimiento del vértice quark-fotón. La curva de *lattice* viene de [125] y el monopolo VDM se define con la escala de masa  $m_V = 3.096$  GeV. Se incluyen también los resultados del modelo algebraico MA.

tiene un efecto no apreciable en el factor de forma. Dicho de otra manera, el vértice quark-fotón en la interacción de contacto es prácticamente igual al desnudo para el rango  $Q^2$  mostrado. Sin embargo, aunque el sector temporal no se muestra en la figura 6.3, el factor de forma de  $\eta_c$  tiene un polo en  $Q^2 = -m_{J/\Psi}^2$ , donde  $m_{J/\Psi}$  es la masa del estado ligado vectorial, que viene en la tabla 6.4. Esto es una consecuencia de vestir al vértice quark-fotón apropiadamente. Los resultados se comparan bien con el modelo de dominio del mesón vectorial (VDM) para  $Q^2 > 5 \text{ GeV}^2$  pero son más duros que los predichos por *lattice* QCD. Más allá de  $Q^2 \gtrsim 2.5 \text{ GeV}^2$ , el factor de forma electromagnético en la interacción de contacto se desvía más del 20%. Es importante notar que la curva de los resultados de *lattice* QCD es un ajuste a los datos [125], calculados en la aproximación apagada al asumir una forma  $F_{\eta_c}(Q^2) = \exp\left[-\frac{Q^2}{16\beta^2}(1 + \alpha Q^2)\right]$ , donde  $\beta = 0.480(3) \text{ GeV}$  y  $\alpha = -0.046(1) \text{ GeV}^{-2}$  dentro del rango  $[0, 5, 5] \text{ GeV}^2$ .

En la figura 6.4 se compara el factor de forma elástico de  $\eta_c$  con el de  $\pi$ , ambos en la aproximación arcoíris, interacción de contacto con un vértice vestido quark-fotón. En ambos casos, los factores de forma respectivos tienden a ser constantes cuando  $Q^2 \rightarrow \infty$ , lo cual es una consecuencia de la interacción independiente



**Figura 6.4.:** Resultados para los factores de forma elásticos de  $\eta_c$  y  $\pi$  en la interacción de contacto. El conjunto de parámetros usado para el factor de forma de  $\eta_c$  son los mismos para encontrar tablas (6.4,6.5) y figura 6.3, mientras que los usados para calcular el factor de forma de  $\pi$  viene en [96].

del momento. Nótese que el factor de forma para el pión se incrementa más rápidamente para  $Q^2 < 0$  dado que el polo (el polo  $\rho$  para el factor de forma del pión) asociado con el revestimiento del vértice quark ligero-fotón está muy cercano a  $Q^2 = 0$ .

El factor de forma de  $\eta_c$  mostrado en la figura 6.4, se parametriza por la siguiente forma funcional en el rango de  $Q^2$  mostrado

$$F_{\eta_c}(Q^2) = \frac{1 + 0.167Q^2 + 0.004Q^4}{1 + 0.372Q^2 + 0.028Q^4}. \quad (6.1)$$

Los valores del radio de carga de  $\eta_c$  se definen con

$$r_{\eta_c}^2 = -6 \left. \frac{dF_{\eta_c}(Q^2)}{dQ^2} \right|_{Q^2=0}, \quad (6.2)$$

y se presentan en la tabla 6.7. Se puede apreciar que esos se comparan bastante bien con la interacción más sofisticada del modelo de Maris-Tandy [88], con lattice QCD-regularizada [125]. Además, se compara el radio de carga de  $\eta_c$  con el de  $\pi$ ,  $r_\pi = 0.45$  fm, calculados en [96]. Obviamente,  $r_{\eta_c} < r_\pi$ ; es decir,

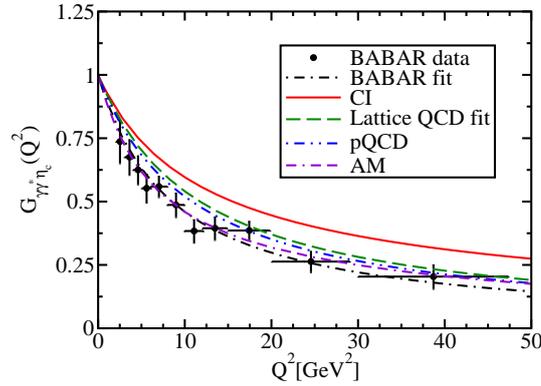
mientras más pesado es el mesón, es más cercano a ser una partícula puntual. También se compara el radio de carga de  $\eta_c$  con el modelo algebraico. Es de esperar que este modelo da un valor más alto que el de la interacción de contacto (que produce factores de forma más duros que aquellos calculados con modelos de QCD más realistas) y en mayor concordancia con los resultados de *lattice* QCD. Además de que el radio de carga de la tabla 6.7, están en perfecta sincronía con los resultados de *lattice*.

Radio de carga $\eta_c$ (fm)					
SDE [88]	Lattice QCD [125]	VMD	CI		AM
0.219	0.25	0.156	0.219	(0.210)	0.256

**Tabla 6.7.:** Radio de carga de  $\eta_c(1S)$  en la interacción de contacto y otros modelos. El conjunto de parámetros usados son el mismo para las tablas (6.4,6.5) y la figura 6.3. Se incluyen los resultados del modelo VMD con una escala de masa  $m_V = 3.096$  GeV. El valor entre paréntesis es con el vértice quark-fotón desnudo. Se muestra también el resultado para el radio de carga de  $\eta_c$  usando el modelo algebraico.

En la figura 6.5 se muestran los resultados para el factor de forma de transición  $\gamma^* \gamma \rightarrow \eta_c$  en la interacción de contacto. A pesar de que no se muestra en la figura 6.5, el factor de forma tiene un polo en  $Q^2 = -m_{J/\Psi}^2$ , donde  $m_{J/\Psi}$  es la masa del estado ligado vectorial. Los resultados se comparan perfectamente bien con los datos de BABAR y *lattice* QCD para  $Q^2$  pequeños. Es por esta razón que el radio de interacción del factor de forma de transición, definido en la ecuación (6.2) y tabulado en la tabla 6.8, se compara bien con aquellos encontrados con *lattice* QCD y BaBar, como se muestra en la pendiente del factor de forma de transición cuando  $Q^2 \rightarrow 0$ . Sin embargo, para valores de  $Q^2$  intermedios y muy grandes, la interacción de contacto tiene factores de forma más duros y el comportamiento asintótico de  $Q^2$  no se captura, lo cual también se nota en la figura 6.6.

Tanto el factor de forma elástico como el de transición en la interacción de contacto mostrados en las figuras (6.3,6.5) tienden a un valor constante cuando



**Figura 6.5.:** Factor de forma de la transición  $\gamma^* \gamma \rightarrow \eta_c$  en la interacción de contacto. La curva de *lattice* QCD es un ajuste a la curva [125] de la forma  $G_{\gamma^* \gamma \eta_c}^{\text{Lattice}}(Q^2) = \frac{\mu^2}{\mu^2 + Q^2}$  con  $\mu = 3.43$  GeV, mientras que los datos de BABAR son un ajuste [126] de la forma  $G_{\gamma^* \gamma \eta_c}^{\text{BABAR}}(Q^2) = \frac{1}{1 + Q^2/\Lambda}$  con  $\Lambda = 8.5$  GeV<sup>2</sup>. El límite de QCD perturbativo (pQCD) se debe a Feldmann y Kroll [127]. Se incluyen también los resultados con el modelo algebraico.

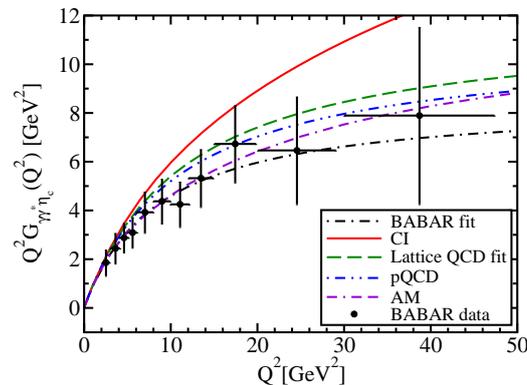
radio de interacción (fm)			
BaBar [126]	Lattice QCD [125]	CI	AM
0.166	0.141	0.133	0.17

**Tabla 6.8.:** Radio de interacción para el factor de forma de la transición  $\gamma^* \gamma \rightarrow \eta_c$  definido en la ecuación (6.2). Los datos de BaBar y *lattice* QCD se extrajeron a partir de sus respectivas parametrizaciones a los datos. Se reportan también los resultados del modelo algebraico.

$Q^2 \rightarrow \infty$ . Esto se debe a que la función de masa del propagador del quark y sus amplitudes de Bethe-Salpeter son independientes del momento, la cual es la característica principal de la interacción de la ecuación (5.4).

### 6.2.1. Bottomonia en la Interacción de Contacto

La tabla 6.9 muestra los resultados para el espectro de masa utilizando los parámetros óptimos obtenidos en la sección 6.2. Como es de esperar, el espectro



**Figura 6.6.:** Resultados numéricos para  $Q^2 G_{\gamma^* \gamma \eta_c}$ . Ver descripción de la figura 6.5.

de masas es bastante exacto cuando se compara con el valor experimental y los otros modelos. Para obtener dicho espectro, solamente se ajusta la masa del quark  $b$  con el valor experimental de la masa de  $\eta_b$  y los demás son predicciones del modelo. Sin embargo, la tabla 6.10 muestra que las constantes de decaimiento están bastante alejadas de aquellos resultados predichos por los modelos. Incluso son más pequeños que los valores obtenidos para charmonia mostrados en la tabla 6.5. Esto sugiere, como era de esperar, que para estudiar bottomonia con la interacción de contacto se requiere el uso de nuevos parámetros óptimos para esa zona de energías.

## 6.2.2. Conjunto de Parámetros Óptimos en la Interacción de Contacto para Bottomonia

Una vez más se mantienen los parámetros  $m_g$  and  $\Lambda_{\text{IR}}$  del sector ligero. El resto de parámetros se obtiene del mejor ajuste a la masa y la constante de decaimiento del mesón pseudoescalar ( $\eta_b$ ). Se hace el mismo tratamiento a los parámetros que en la sección anterior. Se ajustan los parámetros del modelo con el fin de ajustar a la masa, constante de decaimiento y radio de carga de  $\eta_b$ .

	masas			
	$m_{\eta_b(1S)}$	$m_{Y(1S)}$	$m_{\chi_{b_0}(1P)}$	$m_{\chi_{b_1}(1P)}$
Experimento [46]	9.389	9.460	9.860	9.892
Interacción de Contacto	9.400*	9.420	9.790	9.799
			9.644	9.653
JM [80]	9.322	9.460	9.860	-
BK [90]	9.405	9.488	9.831	9.878
S1rp [94]	9.603	9.645		

**Tabla 6.9.:** Masas del estado base de bottomonia obtenidas con el ajuste al conjunto de parámetros:  $m_g = 0,8 \text{ GeV}$ ,  $\alpha_{IR} = 0.93\pi/20$ ,  $\Lambda_{IR} = 0.24 \text{ GeV}$ ,  $\Lambda_{UV} = 2,788 \text{ GeV}$ . La masa corriente del quark es  $m_b = 3.782^* \text{ GeV}$ , y la masa generada dinámicamente es  $M_b = 4.821 \text{ GeV}$ . El valor que se muestra debajo de los resultados de la IC son aquellos que se obtienen sin el acoplamiento espín orbital  $g_{so} = 0.24/3$ . Las cantidades dimensionadas están en GeV. (\* = Este conjunto de parámetros se obtuvo a partir del mejor ajuste a las masas y constantes de decaimiento de los canales pseudoescalares y vectoriales para el caso del quark  $b$ ).

	constantes de decaimiento	
	$f_{\eta_b}$	$f_Y$
Experimento [46]	-	0.715
S1rp [94]	0.244	0.210
S3ccp [94]	0.414	0.381
BK [90]	0.708	0.687
Interacción de Contacto	0.293	0.285

**Tabla 6.10.:** Las constantes de decaimiento de  $\eta_c(1S)$  y  $J/\Psi(1S)$  obtenidas  $m_g = 0.8 \text{ GeV}$ ,  $\alpha_{IR} = 0.93\pi/129$ ,  $\Lambda_{IR} = 0.24 \text{ GeV}$ ,  $\Lambda_{UV} = 2.788 \text{ GeV}$ . La masa corriente del quark es  $m_b = 4.782 \text{ GeV}$ . Las cantidades dimensionadas están en GeV.

Ahora es posible calcular las masas del estado base de los mesones vectorial ( $Y$ ), escalar ( $\chi_{b0}$ ) y axial ( $\chi_{b1}$ ). Los resultados se muestran en la tabla 6.11. Se puede notar que las masas están en concordancia con los valores experimentales

y son además comparables a los mejores resultados de ESD con aproximaciones refinadas.

	masas			
	$m_{\eta_b(1S)}$	$m_{Y(1S)}$	$m_{\chi_{b_0}(1P)}$	$m_{\chi_{b_1}(1P)}$
Experimento [46]	9.389	9.460	9.860	9.892
Interacción de Contacto	9.406 *	9.547	9.671	9.680
			9.644	9.653
JM [80]	9.322	9.460	9.860	-
BK [90]	9.405	9.488	9.831	9.878
S1rp [94]	9.603	9.645		

**Tabla 6.11.:** Masas del estado base de bottomonia obtenidas con el ajuste al conjunto de parámetros:  $m_g = 0.8 \text{ GeV}$ ,  $\alpha_{IR} = 0.93\pi/129$ ,  $\Lambda_{IR} = 0.24 \text{ GeV}$ ,  $\Lambda_{UV} = 6.803 \text{ GeV}$ . La masa corriente del quark es  $m_b = 3.647^* \text{ GeV}$ , y la masa generada dinámicamente es  $M_b = 4.749 \text{ GeV}$ . El valor que se muestra debajo de los resultados de la IC son aquellos que se obtienen sin el acoplamiento espín orbital  $g_{so} = 0.24/3$ . Las cantidades dimensionadas están en GeV. (\* = Este conjunto de parámetros se obtuvo a partir del mejor ajuste a las masas y constantes de decaimiento del canal pseudoescalares con el quark  $b$ ).

	constantes de decaimiento	
	$f_{\eta_b}$	$f_Y$
Experimento [46]	-	0.715
S1rp [94]	0.244	0.210
S3ccp [94]	0.414	0.381
BK [90]	0.708	0.687
Interacción de Contacto	0.709	0.224

**Tabla 6.12.:** Las constantes de decaimiento de  $\eta_b(1S)$  y  $Y$  obtenidas  $m_g = 0.8 \text{ GeV}$ ,  $\alpha_{IR} = 0.93\pi/129$ ,  $\Lambda_{IR} = 0.24 \text{ GeV}$ ,  $\Lambda_{UV} = 6.803 \text{ GeV}$ . La masa corriente del quark es  $m_b = 3.647 \text{ GeV}$ . Las cantidades dimensionadas están en GeV.

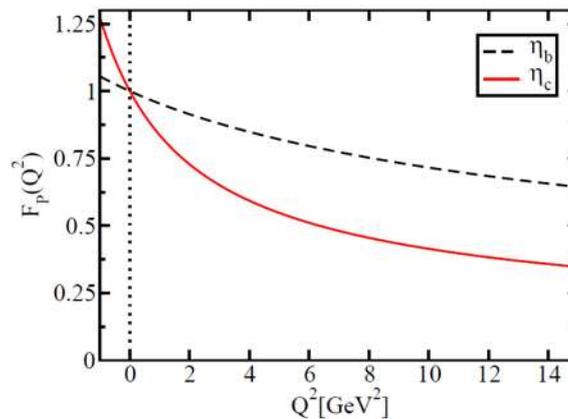
Para el caso del mesón  $\chi_{b_0}$ , se encontró una masa 9.644 GeV sin acoplamiento espín orbital, el cual está 2% por debajo del valor experimental; diferencia un poco mayor a la obtenida al comparar nuestro valor con el experimental de la masa de  $Y$ . Se observa un patrón similar entre los canales pseudoescalares y escalares. Entonces, para lograr un valor aceptable en las diferencias entre los compañeros de paridad, se utiliza el mismo acoplamiento espín orbital de  $g_{SO} = 0.08$  que en el caso de charmonia. Esto se muestra en los valores en la segunda fila de la tabla 6.4. Como se puede observar al analizar esos valores, la masa del mesón  $\chi_{b_1}$  aumentó solo un 0.2%. Este efecto, a pesar de ser prácticamente imperceptible está en línea con los resultados de la simetría de espín de quarks pesados. Las interacciones dependientes del espín son proporcionales al momento cromomagnético del quark (simulado por el acoplamiento espín orbital). Como se enfatizó anteriormente, esos efectos están suprimidos sustancialmente para charmonia, mientras que para bottomonia son prácticamente nulos.

Las constantes de decaimiento de the  $\eta_b(1S)$  y  $Y$  se reportan en la tabla 6.12. Para el mesón pseudoescalar, el resultado se alinea perfectamente con el valor experimental. Desafortunadamente, este no es el caso para el canal vectorial. Además, notemos que la constante de decaimiento de  $Y$  es más pequeña que la de  $\eta_b(1S)$  y solo un poco más grande que la de  $J/\psi(1S)$ . El orden correcto puede recuperarse al reducir aún más la fuerza de interacción. Sin embargo, el orden correcto solo cuando la fuerza de interacción se divide por más de 2500 pero el radio de carga se vuelve extremadamente grande. Entonces el conjunto de parámetros deja de ser óptimo. Es importante notar que a pesar de tener una constante de decaimiento de  $Y$  muy chica, uno de los resultados de ESD con aproximación a masa constante tiene un valor de la constante de decaimiento de menor que el nuestro [94].

En la figura 6.7 se presentan los resultados para el factor de forma elástico de  $\eta_c$  y  $\eta_b$ . Estos se muestran con el vértice quark-fotón vestido. Para los mesones pesados, tales como  $\eta_c$  y  $\eta_b$ , el revestimiento del vértice tiene un valor despreciable en el factor de forma elástico; esto es, en la interacción de contacto, el vértice quark pesado-fotón es prácticamente el desnudo en el rango de  $Q^2$

mostrado. Sin embargo, aunque el sector espacialoide no se ha mostrado en la figura 6.7, el factor de forma  $\eta_{c,b}$  tiene un polo en  $Q^2 = -m_{1^-}^2$ , donde  $m_{1^-}$  es la masa del estado ligado vectorial correspondiente. Los valores se pueden ver en las tablas 6.4 y 6.11.

Para ambos casos, tanto como  $\eta_c$  como para  $\eta_b$ , la dependencia para  $Q^2$  grandes es constante, lo cual es una característica de una partícula puntual. De hecho, se sabe que los factores de forma asintóticos obtenidos con la interacción de contacto son más duros que aquellos predichos por QCD [74–77]. Esto es una consecuencia de la independencia del momento de la interacción. Al comparar los dos factores de forma elásticos, se puede ver que ambos tienen a un valor constante para  $Q^2$  grande; No obstante,  $F_{\eta_b}(Q^2)$  lo hace más rápido. Por otro lado,  $F_{\eta_c}(Q^2)$  aumenta más drásticamente para  $Q^2 < 0$ , ya que el polo asociado con el revestimiento del vértice quark c-fotón está más cerca de  $Q^2 = 0$ . A la fecha no tenemos resultados de *lattice* QCD para  $\eta_b$ , pero se esperan que una futura comparación esté en línea a los de la figura 6.3



**Figura 6.7.:** Resultados del factor de forma elástico en la interacción de contacto para  $\eta_c$  y  $\eta_b$ .

Los valores del radio de carga de  $\eta_b$  se definen con la ecuación (6.2) y se presentan en la tabla 6.13. Es evidente que  $r_{\eta_b} < r_{\eta_c}$ , es decir, mientras más pesado es un mesón, más cercano es a una partícula puntual. A la fecha no tenemos resultados de *lattice* QCD para  $\eta_b$ , pero se esperan unos resultados bastante razonables y parecidos a los nuestros.

Radio de carga $\eta_b$ (fm)				
SDE [88]	Lattice QCD [125]	VMD	CI	AM
-	-	-	0.107 (0.105)	-

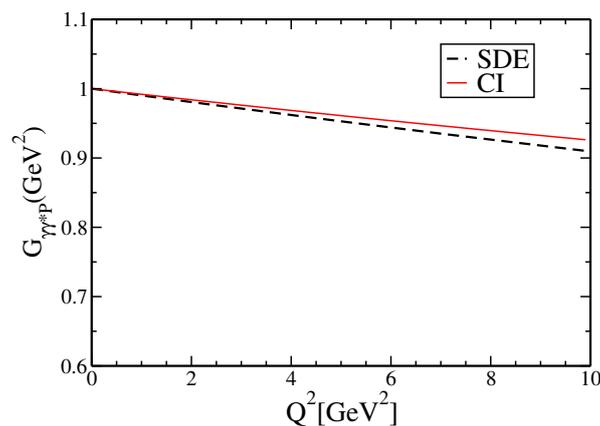
**Tabla 6.13.:** Radio de carga de  $\eta_b(1S)$  en la interacción de contacto y otros modelos. El conjunto de parámetros usados es el mismo para las tablas (6.11,6.12) y la figura 6.7. El valor entre paréntesis es con el vértice quark-fotón desnudo.

En la figura 6.8 se presentan los resultados para el factor de forma transición de  $\eta_c$  y  $\eta_b$ . Estos se muestran con el vértice quark-fotón vestido. A pesar de no mostrarse en la figura, los dos factores de forma de transición tienen un polo en  $Q^2 = -m_{1^-}^2$ , donde  $m_{1^-}$  es la masa del estado ligado vectorial correspondiente. La discusión para  $\eta_c$  se hizo en la sección anterior. Para  $\eta_b$  no se tiene a la fecha datos de *lattice* QCD, ni para el factor de forma de interacción ni para el radio de interacción; sin embargo, se esperan comparaciones similares a las  $\eta_c$ .

Por otro lado, en la figura 6.8 se muestran los resultados de  $Q^2 G_{\gamma\gamma^* \eta_{c,b}}$ . De las dos figuras se puede apreciar que ambos factores de forma de transición tienden a un valor constante para  $Q^2$  grandes. Y nuevamente,  $\eta_b$  lo hace más rápido. El radio de interacción  $\eta_b$  se define con la ecuación (6.2) y se presentan en la tabla 6.14. A la fecha no se tienen valores experimentales para el factor de forma de transición, pero se espera que la siguiente generación de colisionadores  $e^+e^-$  para poner a prueba nuestras predicciones

Radio de interacción $\eta_b$ (fm)				
SDE [88]	Lattice QCD [125]	VMD	CI	AM
-	-	-	0.043	-

**Tabla 6.14.:** Radio de interacción de la transición  $\gamma\gamma^* \rightarrow \eta_b$  en la interacción de contacto y otros modelos. El conjunto de parámetros usados son el mismo para las tablas (6.11,6.12) y la figura 6.8.



**Figura 6.8.:** Resultados del factor de forma de transición  $\gamma\gamma^* \rightarrow \eta_{c,b}$  en la interacción de contacto.

### 6.3. Unificando al Modelo de Interacción de Contacto

Con el conjunto de parámetros óptimos  $\alpha_{\text{IR}}/m_g^2$  y  $\Lambda_{\text{UV}}$  para charmonia, bottononia obtenidos en este trabajo, así como los parámetros del sector ligero de [77], es posible crear una teoría unificada de la interacción de contacto. La contribución principal es este trabajo fue encontrar al conjunto de parámetro óptimos para los sectores *charm* y *bottom*. En donde se permite una disminución en  $\alpha_{\text{IR}}$ , la cual viene acompañada de un incremento en  $\Lambda_{\text{UV}}$ . Si se define el acoplamiento adimensional  $\alpha$  como [110,111]

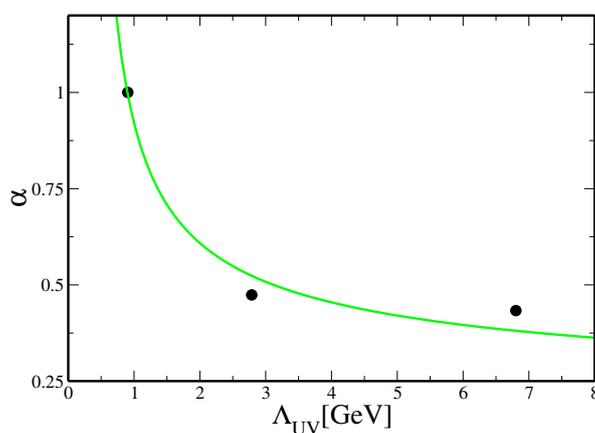
$$\alpha = \frac{\alpha_{\text{IR}}}{m_g^2} \Lambda_{\text{UV}}^2, \quad (6.3)$$

se obtiene una constante de acoplamiento adimensional que indica la fuerza de interacción según la zona donde se deseen calcular observables. La constante de acoplamiento  $\alpha$  con una escala de masa  $\Lambda_{\text{UV}}$  se muestra en la figura 6.9. La disminución de  $\alpha$  con respecto a sus valores en el sector de quarks ligeros, se puede ver en la tabla 6.15. En la tabla se incluyen los valores de la constante adimensional  $\alpha = \hat{\alpha}_{\text{IR}} \Lambda_{\text{UV}}^2$ , donde  $\hat{\alpha}_{\text{IR}} = \alpha_{\text{IR}}/m_g^2$  con los parámetros fijos son  $m_g = 0.8\text{GeV}$  y  $\Lambda_{\text{IR}} = 0.24\text{GeV}$ . En efecto,  $\alpha$  se reduce por alrededor de un factor

de 2.1-2.3 cuando se transporta del sector ligero al sector pesado, en lugar de los números aparentemente grandes citados en las tablas 6.4 y 6.11.

quark	$\hat{\alpha}_{\text{IR}}[\text{GeV}^{-2}]$	$\Lambda_{\text{UV}}[\text{GeV}]$	$\alpha$	Ratio
$u, d, s$	4.565	0.905	3.739	1
$c$	0.228	2.788	1.774	0.475
$b$	0.035	6.803	1.638	0.438

**Tabla 6.15.:** Constante de acoplamiento adimensional. Para la interacción de contacto se obtuvieron mediante al mejor ajuste a los datos explicados a lo largo de este trabajo



**Figura 6.9.:** Constante de acoplamiento adimensional  $\alpha$  para la interacción de contacto. Se puede ver como un recordatorio de la constante de acoplamiento fuerte  $\alpha_s$  de QCD, la cual tiene un comportamiento logarítmico (figura 3.10).

Con estas ideas en mente, para futuro se piensa construir un modelo unificado, donde se puedan calcular observables para todo el espectro mesones, haciendo especial énfasis al cálculo de observables de mesones  $D$  y  $B$ . Posteriormente utilizar el modelo para calcular observables de diquarks, bariones pesados y hadrones exóticos.

### 6.3.1. Conclusiones

Se encontraron dos conjuntos de parámetros óptimos para calcular los distintos observables para sector de mesones pesados *charm* y *bottom*. Los parámetros óptimos se ajustaron con el canal pseudoescalar: tanto para *charm* y *bottom* se ajustó a la masa ( $\eta_{c,b}$ ), la constante de decaimiento y el radio de carga. Con este conjunto de parámetros se calculó la masa de los otros canales: vectorial ( $J/\psi, \Upsilon$ ), escalar ( $\chi_{c0,b0}$ ) y axial-vector ( $\chi_{c1,b1}$ ). Se tiene una buena descripción para todos los valores calculados de la masa, los cuales están dentro de un rango no mayor al 7% del valor experimental y los predichos por otros modelos. Sin embargo, la constante de decaimiento vectorial es mucho menor, pero es comparable con un modelo similar que utiliza una masa constante.

También se calcularon los factores de forma elástico y de transición ( $\eta_{c,b}(1S) \rightarrow \gamma\gamma^*$ ) para el mesón  $\eta_{c,b}$ , así como sus radios de carga correspondientes en una interacción de contacto. Para la interacción de contacto se usa el vértice quark-fotón vestido, el cual es consistente con el modelo y con la identidad de Ward-Takahashi. Con lo cual se asegura que el factor de forma tenga un polo vectorial en  $Q^2 = (-m_{J/\Psi}^2, -m_{\Upsilon}^2)$ . Como la masa de  $m_{J/\Psi}$  es grande, el efecto del polo vectorial en el radio de carga es muy pequeño, es decir, mientras más pesado es el mesón más cercano es a una partícula puntual. Teniendo así un efecto prácticamente imperceptible para  $\eta_b$ .

Para los factores de forma, la interacción de contacto provee resultados en bastante concordancia con predicciones de QCD y/o experimentos solamente hasta cierto valor del momento del fotón virtual de transferencia  $Q^2$ . Esta observación está en línea con cálculos similares para los mesones  $\pi$  y  $\rho$ , [74,75,96], donde se discute que los factores de forma de hadrones dentro de una interacción de contacto son más duros que los resultados en modelos inspirados en QCD. Por lo tanto, ambos factores de forma tienden a una constante cuando  $Q^2 \rightarrow \infty$ , lo cual es consecuencia para una interacción independiente del momento. A pesar de no tener datos experimentales para comparar los factores de forma de  $\eta_b$ , se espera que estos tengan un comportamiento muy similar a los obtenidos para

$\eta_c$ . Esto es, un factor de forma más duro y en sintonía con predicciones de QCD para momentos de transferencia pequeños.

Con los resultados presentados en este trabajo, es posible crear un modelo unificado de la interacción de contacto. Este trabajo aún está en desarrollo y su publicación se espera pronto. En el futuro se piensa utilizar este modelo para calcular espectro de masa, constantes de decaimiento y factores de forma de mesones con sabor y bariones. Así como emplearlo para poder estudiar hadrones exóticos como tetraquarks y pentaquarks.



## Apéndice A.

# Ecuación de Schwinger-Dyson del Quark

*«Le savant n'étudie pas la nature parce que cela est utile;  
il l'étudie parce qu'il y prend plaisir,  
et il y prend plaisir parce qu'elle est belle.»*  
— Henri Poincaré, 1854–1912

Antes de proceder, es importante mencionar que se va a calcular la ESD del quark en un espacio euclidiano. Recordemos que en un espacio euclidiano no existen distinciones entre índices arriba o abajo. Se usan las convenciones  $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu}$ ;  $\gamma_\mu^\dagger = \gamma_\mu$ ;  $\gamma_5 = \gamma_4\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ ;  $a \cdot b = \sum_{i=1}^4 a_i b_i$ ; y  $P_\mu$  temporal, que significa que  $P^2 < 0$ . Entonces los índices de color y Lorentz son indistinguibles entre sí, por lo que la convención de suma se define cuando los índices de Lorentz ( $\mu, \nu, \dots$ ) y de color ( $a, b, \dots$ ), se suma sobre todos los valores disponibles de estos.

Así, en el espacio euclidiano, la acción para QCD no renormalizada es

$$S_{\text{QCD}}[\psi, \bar{\psi}, \chi, \chi^*, A] = \int d^4x \left\{ \sum_{f=1}^{N_f} \bar{\psi}_f (\gamma_\mu \partial_\mu + m_f + i g t^a \gamma_\mu A_\mu^a) \psi_f \right. \quad (\text{A.1}) \\ \left. + \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a + \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A_\mu^a)^2 - [\partial_\mu \chi^{*a} \partial_\mu \chi^a + g f^{abc} \partial_\mu \chi^{*a} \chi^b A_\mu^c] \right\},$$

donde se incluye la suma sobre los sabores de quarks  $f$ . Aquí, la acción de las fuentes externas es

$$S_{\text{fuentes}}[\psi, \bar{\psi}, \chi, \chi^*, A, \bar{\eta}, \eta, \sigma^*, \sigma, J] = \int d^4x \left\{ \sum_{f=1}^{N_f} \bar{\psi}_f \eta_f + \bar{\eta}_f \psi_f + J_\mu^a A_\mu^a \right. \\ \left. + \sigma_a^* \chi_a + \chi_a^* \sigma_a \right\}. \quad (\text{A.2})$$

Estas expresiones, combinadas, representan el generador funcional de QCD

$$\mathcal{Z}[J, \bar{\eta}, \eta, \sigma^*, \sigma] = \int \mathcal{D}\omega e^{-S_{\text{QCD}}[\psi, \bar{\psi}, \chi, \chi^*, A] + S_{\text{fuentes}}[\psi, \bar{\psi}, \chi, \chi^*, A, \bar{\eta}, \eta, \sigma^*, \sigma, J]}, \quad (\text{A.3})$$

donde  $\mathcal{D}\omega = \mathcal{D}[\psi \bar{\psi} \chi \chi^* A]$  es la medida de la integral funcional, la cual es

$$D[\psi \bar{\psi} \chi \chi^* A] = \prod_{x \in \mathcal{R}^4} \prod_{f=1}^{N_f} \prod_{\rho=1}^{N_c} \mathcal{D}\bar{\psi}_{f,\rho}(x) \mathcal{D}\psi_{f,\rho}(x) \prod_{a=1}^{N_c^2-1} \mathcal{D}\chi^{*a}(x) \mathcal{D}\chi^a \prod_{\mu}^4 \mathcal{D}A_\mu^a(x). \quad (\text{A.4})$$

Si se usa el generador funcional en QCD euclidiana, los propagadores del quark y gluón son

$$S(x-y) = \langle 0|T\psi(x)\bar{\psi}(y)|0\rangle \quad (\text{A.5})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\int \mathcal{D}\omega \psi(x)\bar{\psi}(y)e^{-S_{\text{QCD}}}}{\int \mathcal{D}\omega e^{-S_{\text{QCD}}}} \\ &= \frac{\int \mathcal{D}\omega \psi(x)\bar{\psi}(y)e^{-S_{\text{QCD}}+S_{\text{source}}}}{\int \mathcal{D}\omega e^{-S_{\text{QCD}}+S_{\text{fuentes}}}} \Bigg|_{\bar{\chi}=\chi=\bar{\eta}=\eta=J=0} \\ &= \frac{\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x)} \frac{\delta}{\delta\eta(y)} \mathcal{Z}[J, \bar{\eta}, \eta, \sigma^*, \sigma]}{\mathcal{Z}[\bar{\xi}, \xi, \bar{\eta}, \eta, J]} \Bigg|_{\bar{\chi}=\chi=\bar{\eta}=\eta=J=0} \\ &= \frac{\delta}{\delta\bar{\xi}(x)} \frac{\delta}{\delta\xi(y)} \ln \mathcal{Z}[\bar{\xi}, \xi, \bar{\eta}, \eta, J] \Bigg|_{\bar{\chi}=\chi=\bar{\eta}=\eta=J=0}, \end{aligned}$$

$$D_{\mu\nu}^{ab}(x-y) = \langle 0|TA_{\mu}^a(x)A_{\nu}^b(y)|0\rangle \quad (\text{A.6})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\int \mathcal{D}\omega A_{\mu}^a(x)A_{\nu}^b(y)e^{-S_{\text{QCD}}}}{\int \mathcal{D}\omega e^{-S_{\text{QCD}}}} \\ &= \frac{\delta}{\delta J_{\mu}^a(x)} \frac{\delta}{\delta J_{\nu}^b(y)} \ln \mathcal{Z}[J, \bar{\eta}, \eta, \sigma^*, \sigma] \Bigg|_{\bar{\chi}=\chi=\bar{\eta}=\eta=J=0}. \end{aligned}$$

El primer paso para derivar la ecuación deseada es preparar el operador diferencial que actúa sobre el funcional generador. Para ello, se considera el hecho de que el funcional generador  $\mathcal{Z}[\dots]$  es independiente de los campos. Así, para  $\bar{\psi}(x)$  se obtiene

$$0 = \frac{\delta \mathcal{Z}}{\delta \bar{\psi}(x)} [J, \bar{\eta}, \eta, \sigma^*, \sigma] \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{aligned} &= \int \mathcal{D}\omega \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}(x)} e^{-S_{\text{QCD}}+S_{\text{fuentes}}} \\ &= \int \mathcal{D}\omega \left( -\frac{\delta S}{\delta \bar{\psi}(x)} [\psi, \bar{\psi}, \chi, \chi^*, A] + \eta(x) \right) e^{-S_{\text{QCD}}+S_{\text{source}}} \\ &= \left( -\frac{\delta S}{\delta \bar{\psi}(x)} \left[ \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}'} \frac{\delta}{\delta \eta'} \frac{\delta}{\delta \sigma^*'} \frac{\delta}{\delta \sigma'} \frac{\delta}{\delta J} \right] + \eta(x) \right) \mathcal{Z}[J, \bar{\eta}, \eta, \sigma^*, \sigma]. \quad (\text{A.8}) \end{aligned}$$

En el operador  $\delta/\delta\bar{\psi}(x)$ , que representa la derivada funcional con respecto a campo de (anti) quarks, se omiten los índices de color y sabor. Esto es válido ya que todos los colores contribuyen igualmente y no se acoplan entre ellos. Así, la derivada funcional de la acción de QCD es

$$\frac{\delta S}{\delta\bar{\psi}(x)}[\psi, \bar{\psi}, \chi, \chi^*, A] = (\gamma_\mu \partial_\mu + m + ig t^a \gamma_\mu A_\mu^a(x))\psi(x), \quad (\text{A.9})$$

cuando se escriben como operadores

$$\frac{\delta S}{\delta\bar{\psi}(x)} \left[ \frac{\delta}{\delta\bar{\eta}'}, \frac{\delta}{\delta\eta'}, \frac{\delta}{\delta\sigma^{*'}}, \frac{\delta}{\delta\sigma'}, \frac{\delta}{\delta J} \right] = \left( \gamma_\mu \partial_\mu + m + ig t^a \gamma_\mu \frac{\delta}{\delta J_\mu^a(x)} \right) \frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x)}. \quad (\text{A.10})$$

El siguiente paso es calcular otra derivada sobre la ecuación (A.7), sólo que está vez sobre la fuente  $\eta(y)$  desde la derecha

$$0 = \left( - \left( \frac{\delta S}{\delta\bar{\psi}(x)} \left[ \frac{\delta}{\delta\bar{\eta}'}, \frac{\delta}{\delta\eta'}, \frac{\delta}{\delta\sigma^{*'}}, \frac{\delta}{\delta\sigma'}, \frac{\delta}{\delta J} \right] \frac{\delta}{\delta\eta(y)} \right) + \delta(x-y) \right) \mathcal{Z}[J, \bar{\eta}, \eta, \sigma^*, \sigma], \quad (\text{A.11})$$

donde se omite el término  $\eta(x)\delta\mathcal{Z}\delta\eta(y)$  ya que será igual a cero una vez que las fuentes se anulen. Se divide entre  $\mathcal{Z}$  para obtener

$$\begin{aligned} 0 &= - \frac{\left( \frac{\delta S}{\delta\bar{\psi}(x)} \left[ \frac{\delta}{\delta\bar{\eta}'}, \frac{\delta}{\delta\eta'}, \frac{\delta}{\delta\sigma^{*'}}, \frac{\delta}{\delta\sigma'}, \frac{\delta}{\delta J} \right] \frac{\delta}{\delta\eta(y)} \right) \mathcal{Z}[J, \bar{\eta}, \eta, \sigma^*, \sigma]}{\mathcal{Z}[J, \bar{\eta}, \eta, \sigma^*, \sigma]} + \delta(x-y) \quad (\text{A.12}) \\ &= - \left( \frac{\delta S}{\delta\bar{\psi}(x)} \left[ \frac{\delta}{\delta\bar{\eta}'}, \frac{\delta}{\delta\eta'}, \frac{\delta}{\delta\sigma^{*'}}, \frac{\delta}{\delta\sigma'}, \frac{\delta}{\delta J} \right] \frac{\delta}{\delta\eta(y)} \right) \ln \mathcal{Z}[J, \bar{\eta}, \eta, \sigma^*, \sigma] + \delta(x-y). \end{aligned}$$

Aquí se usó la regla de la cadena para ir de la primera a la segunda línea. Si se inserta la ecuación (A.10) en la ecuación (A.12) se tiene<sup>1</sup>

$$0 = - \left( \gamma_\mu \partial_\mu + m + i g t^a \gamma_\mu \frac{\delta}{\delta J_\mu^a(x)} \right) \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(x)} \frac{\delta}{\delta \eta(y)} \ln \mathcal{Z} + \delta(x-y) \quad (\text{A.13})$$

$$\begin{aligned} &= -(\gamma_\mu \partial_\mu) \frac{\delta^2 \ln \mathcal{Z}}{\delta \bar{\eta}(x) \delta \eta(y)} - i g t^a \gamma_\mu \frac{\delta^3 \ln \mathcal{Z}}{\delta J_\mu^a(x) \delta \bar{\eta}(x) \delta \eta(y)} + \delta(x-y) \\ &= -(\gamma_\mu \partial_\mu) \frac{\delta^2 \ln \mathcal{Z}}{\delta \bar{\eta}(x) \delta \eta(y)} \\ &\quad - i g t^a \gamma_\mu \int d^4 v \int d^4 w \delta(v-x) \delta(w-x) \frac{\delta^3 \ln \mathcal{Z}}{\delta J_\mu^a(v) \delta \bar{\eta}(w) \delta \eta(y)} + \delta(x-y). \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Dentro del integrando se incluyen funciones  $\delta(x)$  con el fin de separar la derivada con respecto a ese argumento.

El término  $\delta^3 \ln \mathcal{Z} / \delta J_\mu^a(v) \delta \bar{\eta}(w) \delta \eta(y)$  es la función de 3-puntos conectada con dos líneas de quarks y una de gluón. Además, esta función se expresa en términos de una función de vértice 1 partícula irreducible (1PI) al aplicar una transformada de Legendre al logaritmo del generador funcional de QCD  $\ln \mathcal{Z}$ .

Ahora, la transformada de Legendre de  $\ln \mathcal{Z}$  (ignorando los índices de sabor y color) es

$$\Gamma \left[ \frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\delta \bar{\eta}}, \frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\delta \eta}, \frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\delta J}, \frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\delta \sigma^*}, \frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\delta \sigma} \right] = \quad (\text{A.15})$$

$$\int d^4 x \left\{ \bar{\eta} \frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\delta \bar{\eta}} + \frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\delta \eta} \eta + J \frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\delta J} + \bar{\sigma} \frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\delta \sigma^*} + \frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\delta \sigma} \sigma \right\} - \ln \mathcal{Z},$$

con

$$\Gamma[\psi, \bar{\psi}, \chi, \chi^*, A] := \int d^4 x \{ \bar{\eta} \psi + \bar{\psi} \eta + J A + \bar{\eta} \chi + \chi^* \eta \} - \ln \mathcal{Z}. \quad (\text{A.16})$$

<sup>1</sup>Por simplicidad se omiten los argumentos de  $\mathcal{Z}$

A partir de la acción efectiva se obtienen las siguientes identidades

$$\delta(w - u) = \frac{\delta\bar{\eta}(u)}{\delta\bar{\eta}(w)} = \int d^4s \frac{\delta\bar{\eta}(u)}{\delta\bar{\psi}(s)} \frac{\delta\bar{\psi}(s)}{\delta\bar{\eta}(w)} = \int d^4s \frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar{\psi}(s)\delta\psi(u)} \frac{\delta^2\ln\mathcal{Z}}{\delta\bar{\eta}(w)\delta\eta(s)}, \quad (\text{A.17})$$

$$\delta(s - y) = \frac{\delta\bar{\psi}(y)}{\delta\bar{\psi}(s)} = \int d^4u \frac{\delta\bar{\psi}(y)}{\delta\bar{\eta}(u)} \frac{\delta\bar{\eta}(u)}{\delta\bar{\psi}(s)} = \int d^4u \frac{\delta^2\ln\mathcal{Z}}{\delta\bar{\eta}(u)\delta\eta(y)} \frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar{\psi}(s)\delta\psi(u)}, \quad (\text{A.18})$$

y

$$\frac{\delta}{\delta J_\mu^a(v)} = \int d^4t \frac{\delta A_\nu^b(t)}{\delta J_\mu^a(v)} \frac{\delta}{\delta A_\nu^b(t)} = \int d^4t \frac{\delta^2\ln\mathcal{Z}}{\delta J_\mu^a(v)\delta J_\nu^b(t)} \frac{\delta}{\delta A_\nu^b(t)}, \quad (\text{A.19})$$

donde se omiten en la suma sobre los índices de Lorentz y de color. Al usar la ecuación (A.19) dentro de la ecuación (A.17) se obtiene un término que será muy

útil a la hora de manipular a la ecuación (A.13). Aplicando la derivada

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\delta}{\delta J_\mu^a(v)} [\delta(w-u)] \tag{A.20} \\
&= \frac{\delta}{\delta J_\mu^a(v)} \left[ \int d^4s \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \bar{\psi}(s) \delta \psi(u)} \frac{\delta^2 \ln \mathcal{Z}}{\delta \bar{\eta}(w) \delta \eta(s)} \right] \\
&= \int d^4s \left\{ \frac{\delta}{\delta J_\mu^a(v)} \left[ \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \bar{\psi}(s) \delta \psi(u)} \right] \frac{\delta^2 \ln \mathcal{Z}}{\delta \bar{\eta}(w) \delta \eta(s)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \bar{\psi}(s) \delta \psi(u)} \frac{\delta}{\delta J_\mu^a(v)} \left[ \frac{\delta^2 \ln \mathcal{Z}}{\delta \bar{\eta}(w) \delta \eta(s)} \right] \right\} \\
&= \int d^4s \left\{ \int d^4t \left( \frac{\delta^2 \ln \mathcal{Z}}{\delta J_\mu^a(v) \delta J_\nu^b(t)} \frac{\delta}{\delta A_\nu^b(t)} \left[ \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \bar{\psi}(s) \delta \psi(u)} \right] \frac{\delta^2 \ln \mathcal{Z}}{\delta \bar{\eta}(w) \delta \eta(s)} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \bar{\psi}(s) \delta \psi(u)} \frac{\delta}{\delta J_\mu^a(v)} \left[ \frac{\delta^2 \ln \mathcal{Z}}{\delta \bar{\eta}(w) \delta \eta(s)} \right] \right\} \\
&= \int d^4s \int d^4t \frac{\delta^2 \ln \mathcal{Z}}{\delta J_\mu^a(v) \delta J_\nu^b(t)} \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta A_\nu^b(t) \delta \bar{\psi}(s) \delta \psi(u)} \frac{\delta^2 \ln \mathcal{Z}}{\delta \bar{\eta}(w) \delta \eta(s)} \\
&\quad + \int d^4s \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \bar{\psi}(s) \delta \psi(u)} \frac{\delta^3 \ln \mathcal{Z}}{\delta J_\mu^a(v) \delta \bar{\eta}(w) \delta \eta(s)}.
\end{aligned}$$

Con el fin de expresar la función de tres puntos en la ecuación (A.13) se multiplica desde la izquierda el primer término de la ecuación anterior por  $\delta^2 \ln \mathcal{Z} / \delta \bar{\eta}(u) \delta \eta(y)$ . Después de integrar con respecto a  $u$  y aplicar la ecuación (A.18), se obtiene

$$\begin{aligned}
&\int d^4s \int d^4t \int d^4u \frac{\delta^2 \ln \mathcal{Z}}{\delta \bar{\eta}(u) \delta \eta(y)} \frac{\delta^2 \ln \mathcal{Z}}{\delta J_\mu^a(v) \delta J_\nu^b(t)} \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta A_\nu^b(t) \delta \bar{\psi}(s) \delta \psi(u)} \frac{\delta^2 \ln \mathcal{Z}}{\delta \bar{\eta}(w) \delta \eta(s)} \\
&= - \int d^4s \int d^4u \frac{\delta^2 \ln \mathcal{Z}}{\delta \bar{\eta}(u) \delta \eta(y)} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \bar{\psi}(s) \delta \psi(u)} \frac{\delta^3 \ln \mathcal{Z}}{\delta J_\mu^a(v) \delta \bar{\eta}(w) \delta \eta(s)} \tag{A.21}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \int d^4s \delta(s-y) \frac{\delta^3 \ln \mathcal{Z}}{\delta J_\mu^a(v) \delta \bar{\eta}(w) \delta \eta(s)} \\
&= - \frac{\delta^3 \ln \mathcal{Z}}{\delta J_\mu^a(v) \delta \bar{\eta}(w) \delta \eta(y)} \tag{A.22}
\end{aligned}$$

donde la función  $\delta^3\Gamma/\delta A_v^b\delta\bar{\psi}(s)\delta\psi(u)$  es el vértice quark-gluón 1PI.

Al aplicar la ecuación (A.21) en la ecuación (A.13) y expresarla en términos del vértice 1PI

$$\begin{aligned}
0 &= -(\gamma_\mu\partial_\mu + m)\frac{\delta^2\ln\mathcal{Z}}{\partial\bar{\eta}(x)\partial\eta(y)} \\
&\quad -igt^a\gamma_\mu\int d^4v\int d^4w\delta(v-x)\delta(w-x)\int d^4s\int d^4t\int d^4u \\
&\quad \times\left\{-\frac{\delta^2\ln\mathcal{Z}}{\delta\bar{\eta}(u)\delta\eta(y)}\frac{\delta^2\ln\mathcal{Z}}{\delta J_\mu^a(v)\delta J_\nu^b(t)}\frac{\delta^3\Gamma}{\delta A_\nu^b(t)\delta\bar{\psi}(s)\delta\psi(u)}\frac{\delta^2\ln\mathcal{Z}}{\delta\bar{\eta}(w)\delta\eta(s)}\right\} \\
&\quad +\delta(x-y) \\
&= -(\gamma_\mu\partial_\mu + m)\frac{\delta^2\ln\mathcal{Z}}{\partial\bar{\eta}(x)\partial\eta(y)} \\
&\quad +igt^a\gamma_\mu\int d^4s\int d^4t\int d^4u \\
&\quad \times\left\{\frac{\delta^2\ln\mathcal{Z}}{\delta\bar{\eta}(u)\delta\eta(y)}\frac{\delta^2\ln\mathcal{Z}}{\delta J_\mu^a(x)\delta J_\nu^b(t)}\frac{\delta^3\Gamma}{\delta A_\nu^b(t)\delta\bar{\psi}(s)\delta\psi(u)}\frac{\delta^2\ln\mathcal{Z}}{\delta\bar{\eta}(x)\delta\eta(s)}\right\} \\
&\quad +\delta(x-y) \\
&= -(\gamma_\mu\partial_\mu + m)S(x-y) \\
&\quad +igt^a\gamma_\mu\int d^4s\int d^4t\int d^4uS(u-y)D_{\mu\nu}^{ab}(x-t)\Gamma_\mu^b(t,s,u)S(x-s) \\
&\quad +\delta(x-y). \tag{A.23}
\end{aligned}$$

La cual es la ecuación de Schwinger-Dyson del quark en el espacio de posiciones. El siguiente paso es calcular la transformada de Fourier para obtener la forma usual de la ESD en el espacio de momentos Para este fin, es importante recordar que la transformada de Fourier de una función  $f$  es<sup>2</sup>

$$F(k) = \int dx e^{-ikx} f(x), \tag{A.24}$$

<sup>2</sup>Por simplicidad se omiten los índices de color  $a, b$ , etc.

y su inverso

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int dk e^{ikx} F(k). \quad (\text{A.25})$$

Para hacer los cálculos, es importante recordar una definición de la función Delta

$$\delta(x - x') = \frac{1}{2\pi} \int dk e^{ik(x-x')}, \quad (\text{A.26})$$

$$\delta(k - k') = \frac{1}{2\pi} \int dx e^{i(k-k')x}. \quad (\text{A.27})$$

Y ahora es posible calcular la transformada de Fourier de la ecuación (A.23)

$$\begin{aligned} S(p, k)^{-1} &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4x d^4y S(x, y) e^{-i(p \cdot x - k \cdot y)} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4x d^4y \left[ (i\partial - m)\delta(x - y) \right. \\ &\quad \left. + ie^2 \int d^4z d^4u D^{\mu\nu}(x, z) \gamma_\mu S_F(x, u) \Gamma_\nu(u, y; z) \right] e^{-i(p \cdot x - k \cdot y)}. \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

La transformada de la primera parte de la ecuación anterior no es complicada. Se realiza con los siguiente pasos

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4x d^4y (i\partial - m)\delta(x - y) e^{-i(p \cdot x - k \cdot y)} e^{-i(p \cdot x - k \cdot y)} &= \\ \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4x d^4y (i\partial - m)\delta(x - y) e^{-i(p-k) \cdot x} &= \\ \int dx (\not{p} - \not{k} - m) e^{-i(p-k) \cdot x} &= \\ ((\not{p} - \not{k}) - m)\delta(p - k), & \quad (\text{A.29}) \end{aligned}$$

donde se considera  $q = p - k$  para eliminar a la función Delta. Para calcular la transformada de la parte derecha de la ecuación, hay que hacer una transformada

inversa a los términos dentro de la integral

$$\begin{aligned}
 D^{\mu\nu}(x, z) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^2 p' D^{\mu\nu}(p') e^{i p' \cdot (x-z)}, \\
 S_F(x, u) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^2 p'' S_F(p'') e^{i p'' \cdot (x-u)}, \\
 \Gamma_\nu(u, y; z) &= \frac{1}{(2\pi)^{12}} \int d^4 p''' d^4 k d^4 q e^{i(p''' \cdot u - k \cdot y + q \cdot z)}, \quad (\text{A.30})
 \end{aligned}$$

y así se tiene

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{(2\pi)^{20}} \int d^4 x d^4 y d^4 z d^4 u d^2 p' d^2 p'' d^4 p''' d^4 k d^4 q \gamma_\mu D^{\mu\nu}(p') S_F(p'') \Gamma_\nu(p''', k, q) \\
 &\quad \times e^{i[(p' + p'' - p) \cdot x - (p - k) \cdot y + (p''' - p'') \cdot u + (q - p') \cdot z]} \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^2 p' d^2 p'' d^4 p''' d^4 k d^4 q \gamma_\mu D^{\mu\nu}(p') S_F(p'') \Gamma_\nu(p''', k, q) \\
 &\quad \times \delta^4(p' + p'' - p) \delta^4(p - k) \delta^4(p''' - p'') \delta^4(q - p') \\
 &\Rightarrow p' = p'' - p, \quad k = p, \quad q = p', \quad p''' = p''' \\
 &\Rightarrow \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p''' \gamma_\mu D^{\mu\nu}(p''' - p) S_F(p''') \Gamma_\nu(p''', p, p''' - p),
 \end{aligned}$$

Después de reetiquetar  $p''' = k$  se obtiene la expresión final de la ESD

$$S_F^{-1}(p) = i\not{p} + m_f + \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} g^2 \gamma^\mu S(k) \Gamma_\nu(k, p; k - p) D_{\mu\nu}^{ab}(k - p). \quad (\text{A.31})$$

Recuperando los índices de color se tiene

$$S_F^{-1}(p) = i\not{p} - m_0 + \text{int} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} g^2 t^a \gamma^\mu S(k) \Gamma_\nu^b(k, p; k - p) D_{\mu\nu}^{ab}(k - p). \quad (\text{A.32})$$

La cual es la expresión usual para la ESD no normalizada.

## Apéndice B.

# Ecuación de Bethe-Salpeter para la masa del mesón

En este apéndice se muestra el cálculo de las amplitudes de Bethe-Salpeter para los canales vectorial, escalar y axial-vector.

### B.0.1. Kernel Vectorial

Para el canal vectorial, la amplitud de Bethe-Salpeter en una interacción de contacto es

$$\Gamma_{1--\mu}(P) = \gamma_\mu^T E_{1--} + \frac{1}{2M} \sigma_{\mu\nu} P_\nu F_{1--}, \quad (\text{B.1})$$

donde  $\gamma_\mu^T + \gamma_\mu^L = \gamma_\mu$  y  $P_\mu \gamma_\mu^T = 0$ , lo cual indica

$$\gamma_\mu^\perp = \gamma_\mu - P_\mu \frac{\gamma \cdot P}{P^2}. \quad (\text{B.2})$$

Además, es importante notar que  $F_{1--} = 0$  en la aproximación arcoíris. Sin embargo, hay que tomar en cuenta que esto es un artefacto de dicho truncamiento. A pesar de utilizar una interacción de contacto dada por la ecuación (5.4),  $F_{1--} \neq 0$  y la amplitud de Bethe-Salpeter contiene los dos términos covariantes de la ecuación (B.1) justo cuando se añaden correcciones al vértice. Para deter-

minar las amplitudes vectoriales se realiza un procedimiento análogo al de las amplitudes pseudoescalares. Se define

$$\mathcal{D}_{1^{--}}^1 = \gamma_\mu^T, \quad \mathcal{D}_{1^{--}}^2 = \frac{1}{2M} \sigma_{\mu\nu} P_\nu, \quad (\text{B.3})$$

$$\mathcal{P}_{1^{--}}^1 = \frac{1}{12} \gamma_\mu^T, \quad \mathcal{P}_{1^{--}}^2 = \frac{M}{6P^2} \sigma_{\mu\nu} P_\nu. \quad (\text{B.4})$$

De las cuales se obtiene una ecuación de valores propios similar a la de la ecuación (5.86). Después de proyectar la ecuación (5.65) con  $\mathcal{P}_{1^{--}}^1$  al covariante  $\mathcal{D}_{1^{--}}^1$ , se tiene que el elemento de la amplitud  $\bar{\mathcal{K}}_{1^{--}}^{11}$

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{K}}_{1^{--}}^{11} &= \text{Tr} \left[ \frac{1}{12} \gamma_\mu^T (-i\gamma \cdot q_+ + M_f) \gamma_\mu^T (-i\gamma \cdot q + M_g) \right] \\ &= -\frac{1}{P^2} \left[ 2(P \cdot q)^2 + P^2(3M_f M_g + 3P \cdot q + q^2) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Se procede a hacer el cambio de variable  $q \rightarrow q - xP$ , se desarrollan los términos cuadráticos y se llega a

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{K}}_{1^{--}}^{11} &= -\frac{8}{12P^2} \left[ 2(P \cdot q)^2 - 4P \cdot q x P^2 + 2x^2 P^2 \right. \\ &\quad \left. + P^2(3M_f M_g + 3P \cdot q - 3xP^2 + q^2 - 2xP \cdot q + x^2 P^2) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Nuevamente, se eliminan los términos impares de la forma  $q \cdot P$  y se utiliza la identidad de la ecuación (5.44) para escribir los términos  $(P \cdot q)^2 = \frac{1}{4} P^2 q^2$ , obteniendo así

$$\bar{\mathcal{K}}_{1^{--}}^{11} = -\frac{8}{12P^2} \left[ -\frac{3}{2} q^2 - 3x^2 P^2 - 3M_f M_g + 3xP^2 \right]. \quad (\text{B.7})$$

Después de introducir la ecuación (B.7) dentro de la ecuación (5.65) queda la expresión

$$\mathcal{K}_{1^{--}}^{11} = \frac{2}{3m_G^2} \int_0^1 dx \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left[ \frac{\frac{1}{2}q^2 + x^2 P^2 + M_f M_g - x P^2}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2} \right], \quad (\text{B.8})$$

la cual se regulariza de la manera usual. Para ello se añade y subtrae el término  $\mathfrak{M}^2$  en el numerador, luego se usa la identidad de la ecuación (5.46). Al regularizar la ecuación (B.8) se llega a

$$\mathcal{K}_{1^{--}}^{11} = \frac{1}{3\pi^2 m_G^2} \frac{1}{2} \int_0^1 dx \left[ M_g M_f - x(1-x)P^2 - \mathfrak{M}^2 \right] C_{02}(\mathfrak{M}^2; \tau_{\text{IR}}, \tau_{\text{UV}}) \quad (\text{B.9})$$

Dado a que se tiene  $F_{1^{--}} = 0$ , la amplitud de Bethe-Salpeter para el mesón vectorial tiene solo una amplitud

$$0 = 1 - \mathcal{K}_{1^{--}}^{11}(-m_{1^{--}}^2) = 1 - E_{1^{--}}(-m_{1^{--}}^2) \quad (\text{B.10})$$

donde  $\mathcal{K}_{1^{--}}^{11}$  está dado por la ecuación (B.9) y  $m_{1^{--}}$  es la masa del mesón vectorial.

## B.0.2. Kernel Escalar

Dada la simpleza de la amplitud de Bethe-Salpeter para mesones escalares vista en la ecuación (5.52), la única proyección que se necesita es

$$\mathcal{D}_{0^{++}}^1 = \mathbb{1}, \quad (\text{B.11})$$

$$\mathcal{P}_{0^{++}}^1 = \frac{1}{4}\mathbb{1}. \quad (\text{B.12})$$

Después de proyectar la ecuación (5.65) con los proyectores anteriores, se tiene una amplitud  $\bar{\mathcal{K}}_{0^{++}}^{11}$  de la forma

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{K}}_{0^{++}}^{11} &= \text{Tr} \left[ \frac{1}{4} \mathbb{1}(-i\gamma \cdot q_+ + M_f) \mathbb{1}(-i\gamma \cdot q + M_g) \right] \\ &= -4 \left[ M_f M_g - P \cdot q - q^2 \right].\end{aligned}\quad (\text{B.13})$$

Después del cambio de variable  $q \rightarrow q - xP$

$$\bar{\mathcal{K}}_{0^{++}}^{11} = -4 \left[ M_f M_g - P \cdot (q - xP) - (q - xP)^2 \right]. \quad (\text{B.14})$$

Se desarrolla el término cuadrático, se eliminan los términos impares de la forma  $q \cdot P$  para obtener

$$\bar{\mathcal{K}}_{0^{++}}^{11} = -4 \left[ M_f M_g + x(1-x)P^2 - q^2 \right]. \quad (\text{B.15})$$

Después de introducir la ecuación (B.15) dentro de la ecuación (5.65) queda la expresión

$$\mathcal{K}_{0^{++}}^{11} = -4 \frac{1}{3m_G^2} \int_0^1 dx \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left[ \frac{M_f M_g + x(1-x)P^2 - q^2}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2} \right], \quad (\text{B.16})$$

la cual se regulariza de la manera usual. Para ello se añade y subtrae el término  $\mathfrak{M}^2$  en el numerador. Al regularizar la ecuación (B.16) se llega a

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_{0^{++}}^{11} &= \frac{1}{3\pi^2 m_G^2} \int_0^1 dx \left[ \mathcal{C}_{01}(\mathfrak{M}^2; \tau_{\text{IR}}, \tau_{\text{UV}}) \right. \\ &\quad \left. - \left( M_f M_g + x(1-x)P^2 + \mathfrak{M}^2 \right) \mathcal{C}_{02}(\mathfrak{M}^2; \tau_{\text{IR}}, \tau_{\text{UV}}) \right].\end{aligned}\quad (\text{B.17})$$

y la amplitud de Bethe-Salpeter es

$$0 = 1 + \mathcal{K}_{0^{++}}^{11}(-m_{0^{++}}^2) = 1 + E_{0^{++}}(-m_{0^{++}}^2) \quad (\text{B.18})$$

donde  $\mathcal{K}_{0^{++}}^{11}$  está dado por la ecuación (B.17) y  $m_{0^{++}}$  la masa del mesón escalar.

### B.0.3. Kernel Axial-Vector

Para el canal axial-vector, las proyecciones a usar son

$$\mathcal{D}_{1^{++}}^1 = \gamma_5 \gamma_\mu^T, \quad \mathcal{D}_{1^{++}}^2 = \gamma_5 \frac{1}{2M} \sigma_{\mu\nu} P_\nu, \quad (\text{B.19})$$

$$\mathcal{P}_{1^{++}}^1 = \frac{1}{12} \gamma_\mu^T \gamma_5, \quad \mathcal{P}_{1^{++}}^2 = \frac{M}{6P^2} \sigma_{\mu\nu} P_\nu \gamma_5. \quad (\text{B.20})$$

Se proyecta a la ecuación (5.65) con los proyectores  $\mathcal{P}_{1^{++}}^1$  y  $\mathcal{D}_{1^{++}}^1$  para que el elemento de matriz  $\bar{\mathcal{K}}_{1^{++}}^{11}$  adquiera la forma

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{K}}_{1^{++}}^{11} &= \text{Tr} \left[ \frac{1}{12} \gamma_\mu^T \gamma_5 (-i\gamma \cdot q_+ + M_f) \gamma_5 \gamma_\mu^T (-i\gamma \cdot q + M_g) \right] \\ &= \frac{8}{12} \left[ -3M_f M_g + P \cdot q \left( 3 + \frac{2P \cdot q}{P^2} \right) + q^2 \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

Se procede a hacer el cambio de variable  $q \rightarrow q - xP$

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{K}}_{1^{++}}^{11} &= \frac{2}{3} \left[ -3M_f M_g + P \cdot (q' - xP) \left( 3 + \frac{2P \cdot (q' - xP)}{P^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + (q' - xP)^2 \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

Se expande el término cuadrático, se eliminan los términos impares de la forma  $q \cdot P$  para obtener

$$\bar{\mathcal{K}}_{1^{++}}^{11} = \frac{2}{3} \left[ -3M_f M_g + 2 \frac{(P \cdot q')^2}{P^2} - 3xP^2 + 3x^2P^2 + q'^2 \right]. \quad (\text{B.23})$$

En el término  $(P \cdot q')^2$  se emplea la identidad de la ecuación (5.43) para escribirlo como  $\frac{1}{4}P^2q'^2$ , se introduce la ecuación (B.23) dentro de la ecuación (5.65) y se obtiene

$$\mathcal{K}_{1^{++}}^{11} = -2 \frac{1}{3m_G^2} \int_0^1 dx \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \left[ \frac{-M_f M_g + \frac{1}{2}q'^2 - 1x(1-x)P^2}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2} \right], \quad (\text{B.24})$$

la cual se regulariza de la manera usual. Para ello, se añade y subtrae el término  $\mathfrak{M}^2$  en el numerador, entonces se usa la ecuación (5.46) y después de regularizar la ecuación (B.24) se llega a

$$\mathcal{K}_{1^{++}}^{11} = -\frac{1}{3\pi^2 m_G^2} \frac{1}{2} \int_0^1 dx \left[ M_f M_g + x(1-x)P^2 + \mathfrak{M}^2 \right] \mathcal{C}_{02}(\mathfrak{M}^2; \tau_{\text{IR}}, \tau_{\text{UV}}). \quad (\text{B.25})$$

Las otras proyecciones son cero, esto es  $K_{1^{++}}^{12} = K_{1^{++}}^{21} = K_{1^{++}}^{22} = 0$ , entonces la ecuación de Bethe-Salpeter para el mesón escalar es

$$0 = 1 + \mathcal{K}_{1^{++}}^{11}(-m_{1^{++}}^2) = 1 + E_{1^{++}}(-m_{1^{++}}^2) \quad (\text{B.26})$$

donde  $\mathcal{K}_{1^{++}}^{11}$  está dado por la ecuación (B.25) y  $m_{1^{++}}$  es la masa del mesón axial-vector.

## Apéndice C.

# Normalización de las amplitudes de Bethe-Salpeter

*«Le savant n'étudie pas la nature parce que cela est utile;  
il l'étudie parce qu'il y prend plaisir,  
et il y prend plaisir parce qu'elle est belle.»*  
— Henri Poincaré, 1854–1912

Se muestran el cálculo completo para calcular las expresiones de las constantes de normalización de las amplitudes de Bethe-Salpeter del resto de canales de la sección 5.6: los canales vectorial, escalar y axial-vector.

### C.1. Normalización de la amplitud vectorial

La ecuación (5.53) es la amplitud de Bethe-Salpeter para mesones vectoriales, esto significa que después de calcular la traza en la ecuación (5.95) se tendrán solamente términos proporcionales a  $E_1^2$ . Se escriben las amplitudes en términos

de sus covariantes

$$\mathcal{N}_{1^{--}}^{ij} = -6 \frac{d}{dP^2} \int_0^1 dx \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\text{Tr} \left[ \overline{\mathcal{D}}_{1^{--}}^1(-Q) \hat{S}_f(q+P) \mathcal{D}_{1^{--}}^1(Q) \hat{S}_g(q) \gamma_\mu \right]}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2} \Bigg|_{Q=P} \quad (\text{C.1})$$

donde  $\mathcal{D}_{1^{--}}^1 = \gamma_\mu^T$  y  $\hat{S}_f(q+P) = -i\gamma \cdot (q+P) + M_f$  y  $\hat{S}_g(q) = -i\gamma \cdot q + M_g$ . Al tener el mismo denominador que en todas las expresiones, se hace el cambio de variable usual  $q \rightarrow q - xP$ , además de tomar las condiciones  $P \cdot q = 0$  y  $(P \cdot q)^2 = \frac{1}{4}P^2 q^2$  cuando sean necesarias. Así, el término que proyecta a  $E_{1^{--}}^2$  se lee como

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{1^{--}}^{11} &= 6 \frac{d}{dP^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{4 \left( 3M_f M_g + P \cdot q + q^2 + \frac{2q \cdot Q(P \cdot Q + q \cdot Q)}{Q^2} \right)}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2} \Bigg|_{q \rightarrow q - xP} \\ &= 6 \frac{d}{dP^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left( 4(3M_f M_g + P \cdot (q - xP) + (q - xP)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{2(q - xP) \cdot Q(P \cdot Q + (q - xP) \cdot Q)}{Q^2} \right) / (q^2 + \mathfrak{M}^2)^2 \\ &= 6 \frac{d}{dP^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left( 4(3M_f M_g - xP^2 + q^2 + x^2 P^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{2(q \cdot Q)^2 - 2x(P \cdot Q)^2 + 2x^2(P \cdot Q)^2}{Q^2} \right) / (q^2 + \mathfrak{M}^2)^2 \\ &= 6 \frac{d}{dP^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left( 4(3M_f M_g - xP^2 + \frac{3}{2}q^2 + 3\mathfrak{M}^2 - 3\mathfrak{M}^2 \right. \\ &\quad \left. + x^2 P^2 - 2x(1-x) \frac{(P \cdot Q)^2}{Q^2} \right) / (q^2 + \mathfrak{M}^2)^2, \\ &= 6 \frac{d}{dP^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{4 \left( 3M_f M_g - x(1-x)P^2 - 3\omega - 2x(1-x) \frac{(P \cdot Q)^2}{Q^2} \right)}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2}. \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Antes de proceder a realizar la derivada de la ecuación (C.2), nótese  $\mathcal{P} = d/dP^2(P \cdot Q)^2 = (P \cdot Q)(P^{-1} \cdot Q)$ . Entonces, cuando se evalúa  $P^2 = Q^2$ , se obtiene  $\mathcal{P} = 1$ , así

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_{1^{--}}^{11} &= 24 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left[ -2x(1-x) \frac{3M_f M_g - 3x(1-x)P^2 - 3\mathfrak{M}^2}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^3} \right. \\
&\quad \left. - \frac{6x(1-x)}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2} \right] \\
&= -72 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} 2x(1-x) \left[ \frac{M_f M_g - x(1-x)P^2 - \mathfrak{M}^2}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^3} + \frac{1}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2} \right] \\
&= -\frac{144}{16\pi^2} \int_0^1 dx x(1-x) \left[ (M_f M_g - x(1-x)P^2 - \mathfrak{M}^2) \mathcal{C}_{03}(\mathfrak{M}^2) \right. \\
&\quad \left. + \mathcal{C}_{02}(\mathfrak{M}^2) \right]. \tag{C.3}
\end{aligned}$$

Finalmente, la condición de normalización para este canal resulta

$$\mathcal{N}_{1^{--}}^{11} = \frac{9}{\pi^2} \int_0^1 dx J(x) \left[ \left( L^-(x) - 2J(x)P^2 \right) \mathcal{C}_{03}(\mathfrak{M}^2) \mathcal{C}_{02}(\mathfrak{M}^2) \right]. \tag{C.4}$$

## C.2. Normalización de la amplitud escalar

La ecuación (5.52) es la amplitud de Bethe-Salpeter para mesones escalares. Para este caso sólo se tiene un término de normalización que acompaña a la amplitud  $E_{0^{++}}^2$ , el cual se escribe como

$$\mathcal{N}_{0^{++}}^{ij} = 6 \frac{d}{dP^2} \int_0^1 dx \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\text{Tr} \left[ \overline{\mathcal{D}}_{0^{++}}^1(-Q) \hat{S}_f(q+P) \mathcal{D}_{0^{++}}^1(Q) \hat{S}_g(q) \gamma_\mu \right]}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2} \Bigg|_{Q=P} \tag{C.5}$$

donde  $\mathcal{D}_{0^{++}}^1 = \mathbb{1}$  y  $\hat{S}_f(q+P) = -i\gamma \cdot (q+P) + M_f$  y  $\hat{S}_g(q) = -i\gamma \cdot q + M_g$ . Al tener el mismo denominador que en todas las expresiones, se hace el cambio de

variable usual  $q \rightarrow q - xP$ , además de tomar las condiciones  $P \cdot q=0$  y  $(P \cdot q)^2 = \frac{1}{4}P^2 q^2$  cuando sean necesarias. Así, el término que proyecta a  $E_{0^{++}}^2$  se lee como

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_{0^{++}}^{11} &= 6 \frac{d}{dP^2} \int_0^1 dx \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{4(M_f M_g - P \cdot q - q^2)}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2} \\
&= 6 \frac{d}{dP^2} \int_0^1 dx \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{4(M_f M_g - P \cdot (q - xP) - (q - xP)^2)}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2} \\
&= 6 \frac{d}{dP^2} \int_0^1 dx \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{4(M_f M_g + xP^2 - q'^2 - x^2 P^2 - \mathfrak{M}^2 + \mathfrak{M}^2)}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2} \\
&= 24 \frac{d}{dP^2} \int_0^1 dx \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{(M_f M_g + x(1-x)P^2 + \mathfrak{M}^2)}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2} - \frac{1}{q^2 + \mathfrak{M}^2} \\
&= 24 \int_0^1 dx \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} x(1-x) \left[ - \frac{2(M_f M_g + x(1-x)P^2 + \mathfrak{M}^2)}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^3} \right. \\
&\quad \left. + \frac{3}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2} \right]. \tag{C.6}
\end{aligned}$$

Después de regularizar a la ecuación (C.6) se obtiene la condición de normalización para el canal escalar.

$$\mathcal{N}_{0^{++}}^{11} = \frac{3}{2\pi^2} \int_0^1 dx J(x) \left[ - \left( L^+(x) + 2J(x)P^2 \right) \mathcal{C}_{02}(\mathfrak{M}^2) + 3\mathcal{C}_{02}(\mathfrak{M}^2) \right]. \tag{C.7}$$

### C.3. Normalización de la amplitud axial-vector

La ecuación (5.54) es la amplitud de Bethe-Salpeter para mesones axial-vectoriales, esto significa que después de calcular la traza en la ecuación (5.95) se tendrán solamente términos proporcionales a  $E_{1^{++}}^2$ . Se escriben las amplitudes

en términos de covariantes

$$\mathcal{N}_{1^{++}}^{ij} = -6 \frac{d}{dP^2} \int_0^1 dx \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\text{Tr} \left[ \overline{\mathcal{D}}_{1^{++}}^1(-Q) \hat{S}_f(q+P) \mathcal{D}_{1^{++}}^1(Q) \hat{S}_g(q) \gamma_\mu \right]}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2} \Bigg|_{Q=P} \quad (\text{C.8})$$

donde  $\mathcal{D}_{1^{++}}^1 = \gamma_5^T$  y  $\hat{S}_f(q+P) = -i\gamma \cdot (q+P) + M_f$  y  $\hat{S}_g(q) = -i\gamma \cdot q + M_g$ . Al tener el mismo denominador que en todas las expresiones, se hace el cambio de variable usual  $q \rightarrow q - xP$ , además de tomar las condiciones  $P \cdot q = 0$  y  $(P \cdot q)^2 = \frac{1}{4}P^2 q^2$  cuando sean necesarias. Así, el término que proyecta a  $E_{1^{++}}^2$  se lee

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{1^{++}}^{11} &= 6 \frac{d}{dP^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{4(-3M_f M_g + P \cdot q + q^2 + \frac{2q \cdot Q(P \cdot Q + q \cdot Q)}{Q^2})}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2} \Bigg|_{q \rightarrow q-xP} \\ &= 6 \frac{d}{dP^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} 4 \left( -3M_f M_g + P \cdot (q - xP) + (q - xP)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{2(q - xP) \cdot Q(P \cdot Q + (q - xP) \cdot Q)}{Q^2} \right) / (q^2 + \mathfrak{M}^2)^2 \\ &= 6 \frac{d}{dP^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{4(-3M_f M_g + q^2 - xP^2 + x^2 P^2 - 2 \frac{(q \cdot P^2) - x(1-x)(P \cdot Q)^2}{Q^2})}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2}, \\ &= 6 \frac{d}{dP^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} 4 \left( -3M_f M_g - xP^2 + \frac{3}{2}q^2 + 3\mathfrak{M}^2 - 3\mathfrak{M}^2 \right. \\ &\quad \left. + x^2 P^2 - 2x(1-x) \frac{(P \cdot Q)^2}{Q^2} \right) / (q^2 + \mathfrak{M}^2)^2, \\ &= 6 \frac{d}{dP^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{4(-3M_f M_g - x(1-x)P^2 - 3\mathfrak{M}^2 - 2x(1-x) \frac{(P \cdot Q)^2}{Q^2})}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2}. \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

Es fácil notar que se tiene una expresión muy similar a la de la condición de normalización para el canal vectorial dada por la ecuación (C.2), salvo que se tiene un signo menos (-) que multiplica al término  $M_f M_g$ . Se realiza la derivada con respecto a  $P^2$  y obtener así la expresión para la regularización de

la ecuación (C.9),

$$\begin{aligned}
 \mathcal{N}_{1^{++}}^{11} &= 72 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} 2x(1-x) \left[ \frac{M_f M_g + x(1-x)P^2 + \mathfrak{M}^2}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^3} - \frac{1}{(q^2 + \mathfrak{M}^2)^2} \right] \\
 &= \frac{144}{16\pi^2} \int_0^1 dx x(1-x) \left[ (M_f M_g + x(1-x)P^2 + \mathfrak{M}^2) \mathcal{C}_{03}(\mathfrak{M}^2) \right. \\
 &\quad \left. - \mathcal{C}_{02}(\mathfrak{M}^2) \right]. \tag{C.10}
 \end{aligned}$$

Se obtiene así la condición de renormalización del canal axial-vector

$$\mathcal{N}_{1^{++}}^{11} = \frac{3}{\pi^2} \int_0^1 dx J(x) \left[ (L^+(x) + 2J(x)P^2) \mathcal{C}_{03}(\mathfrak{M}^2) - \mathcal{C}_{02}(\mathfrak{M}^2) \right]. \tag{C.11}$$

## Apéndice D.

# Cálculo de los Factores de Forma en la interacción de contacto

*«Le savant n'étudie pas la nature parce que cela est utile;  
il l'étudie parce qu'il y prend plaisir,  
et il y prend plaisir parce qu'elle est belle.»*  
— Henri Poincaré, 1854–1912

En este apéndice se desarrolla el álgebra para el cálculo de los factores de forma. Será de mucha utilidad para quien desee reproducir los resultados y tener las herramientas para calcular unos nuevos.

## D.1. Factor de Forma Elástico

De la ecuación (5.126), se tiene que cada uno de los términos del factor de forma elástico es<sup>1</sup>

$$\mathcal{A}_{0^{11}}^{11} = \frac{3}{2\pi^2} \int_t^\Lambda 2 \left( 2K \cdot t(m^2 - M^2 - t^2) + (4m^2 + Q^2)(M^2 + t^2) \right) \times \sigma_V((t + p_2)^2) \sigma_V((t + p_1)^2) \sigma_V(t^2), \quad (\text{D.1})$$

$$\mathcal{A}_{0^{12}}^{12} = -\frac{3}{2\pi^2} \int_t^\Lambda 2M \left( (4m^2 + Q^2)(m^2 + M^2 + t^2) - 2Q^2 K \cdot t \right) \times \frac{1}{M} \sigma_V((t + p_2)^2) \sigma_V((t + p_1)^2) \sigma_V(t^2), \quad (\text{D.2})$$

$$\mathcal{A}_{0^{22}}^{22} = \frac{3}{2\pi^2} \int_t^\Lambda 2 \left[ -8m^2(K \cdot t)^2 + 2K \cdot t(m^4 - m^2 M^2 + t^2(3m^2 + Q^2) - M^2 Q^2 - (Q \cdot t)^2) + 8(K \cdot t)^3 + m^2(4m^2 + Q^2)(M^2 - t^2) \right] \times \frac{1}{M^2} \sigma_V((t + p_2)^2) \sigma_V((t + p_1)^2) \sigma_V(t^2). \quad (\text{D.3})$$

El siguiente paso es regularizar cada una de las expresiones de la manera usual. Se comienza por el más simple,  $\mathcal{A}_{0^{11}}^{11}$ ; dado que el numerador tiene un término de la forma  $(t^2 + M^2)$ , el cual cancela a  $\sigma_V(t^2)$ . Entonces la expresión a regularizar contiene dos parámetros de Feynman, cuya regularización ya se conoce de los resultados de la ecuación (5.37). Sin embargo, también se tiene un término

---

<sup>1</sup>Por simplicidad en las expresiones se toma  $m_f = m_g = m$ , omitiendo el sabor en los propagadores, que para este caso, es el mismo.

con tres denominadores, por lo que la expresión para  $\mathcal{A}_{0^{11+}}$  es

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{0^{11+}} &= 2 \frac{3}{2\pi^2} \int_t^\Lambda ((4m^2 + Q^2 - 2K \cdot t)(M^2 + t^2) + 2K \cdot tm^2) \times \\
&\times \sigma_V((t + p_2)^2) \sigma_V((t + p_1)^2) \sigma_V(t^2), \\
&= 2 \frac{3}{2\pi^2} \left\{ \int_t^\Lambda (4m^2 + Q^2 - 2K \cdot t) \sigma_V((t + p_2)^2) \sigma_V((t + p_1)^2) \right. \\
&\left. + \int_t^\Lambda 2K \cdot tm^2 \sigma_V((t + p_2)^2) \sigma_V((t + p_1)^2) \sigma_V(t^2) \right\}. \quad (D.4)
\end{aligned}$$

Para regularizar expresiones con tres denominadores, la parametrización Feynman adquiere la forma

$$\frac{1}{A_1 A_2 A_3} = 2 \int_0^1 \frac{dx_1 dx_2 x_1}{[A_1 x_1 x_2 + A_2 x_1 (1 - x_2) + A_3 (1 - x_1)]^3}. \quad (D.5)$$

Para notar la separación del producto de los denominadores  $\sigma_V((t + p_2)^2) \sigma_V((t + p_1)^2) \sigma_V(t^2)$  se tiene

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{[(t + p_2)^2 + M^2]} \frac{1}{[(t + p_1)^2 + M^2]} \frac{1}{[t^2 + M^2]} = \\
&2 \int_0^1 dx_1 dx_2 x_1 / \left\{ [(t + p_2)^2 + M^2] x_1 x_2 + [(t + p_1)^2 + M^2] x_1 (1 - x_2) \right. \\
&\left. + [t^2 + M^2] (1 - x_1) \right\}^3 = \\
&2 \int_0^1 \frac{dx_1 dx_2 x_1}{\{[t + [(p_2 - p_1)x_2 + p_1]x_1]^2 + M^2 - m^2 x_1 (1 - x_1)^2 - Q^2 x_2 (x_2 - 1)x_1^2\}^3}. \quad (D.6)
\end{aligned}$$

El paso a la última línea de la ecuación (D.6) pareciera directo pero en realidad no es así. A continuación se escribe en detalle la factorización que se realiza en el denominador. Una vez hecha la expresión será trivial. Primero se expande el

denominador  $\mathfrak{D}$  del paso intermedio de la ecuación (D.6)

$$\begin{aligned}
\mathfrak{D} &= \left[ (t + p_2)^2 + M^2 \right] x_1 x_2 + \left[ (t + p_1)^2 + M^2 \right] x_1 (1 - x_2) \\
&\quad + \left[ t^2 + M^2 \right] (1 - x_1) \\
&= \left[ t^2 + 2t \cdot p_2 + p_2^2 + M^2 \right] x_1 x_2 + \left[ t^2 + 2t \cdot p_1 + p_1^2 + M^2 \right] x_1 (1 - x_2) \\
&\quad + \left[ t^2 + M^2 \right] (1 - x_1) \\
&= (2t \cdot p_2 + p_2^2) x_1 x_2 + (2t \cdot p_1 + p_1^2) x_1 (1 - x_2) + t^2 + M^2 = \\
&\quad t^2 + 2t \cdot [(p_2 - p_1)x_2 + p_1] x_1 + x_1 x_2 (p_2^2 - p_1^2) + M^2 + p_1^2 x_1^2. \quad (\text{D.7})
\end{aligned}$$

Entonces se completa el cuadrado al añadir y substraer el término  $((p_2 - p_1)x_2 + p_1)^2 x_1^2 = (Qx_2 + (K - Q/2))^2 x_1^2$ , recordando siempre que  $p_1^2 = p_2^2 = -m^2$  y  $p_1 \cdot p_2 = K^2 - Q^2/4 = -m^2 - Q^2/2$ . Así se llega a

$$\begin{aligned}
\mathfrak{D} &= \{t + [(p_2 - p_1)x_2 + p_1] x_1\}^2 + M^2 - m^2 x_1^2 - [Qx_2 + (K - Q/2)]^2 x_1^2 \\
&= \{t + [(p_2 - p_1)x_2 + p_1] x_1\}^2 + M^2 - m^2 x_1^2 \\
&\quad - \left[ Q^2 x_2^2 + 2x_2 Q \cdot (K - Q/2) + (K - Q/2)^2 \right] x_1^2 \\
&= \{t + [(p_2 - p_1)x_2 + p_1] x_1\}^2 + M^2 - m^2 x_1^2 \\
&\quad - \left[ Q^2 x_2^2 - x_2 Q^2 + K^2 + Q^2/4 \right] x_1^2, \\
&= \{t + [(p_2 - p_1)x_2 + p_1] x_1\}^2 + M^2 - m^2 x_1^2 \\
&\quad - \left[ Q^2 x_2 (x_2 - 1) + K^2 + Q^2/4 \right] x_1^2, \\
&= \{t + [(p_2 - p_1)x_2 + p_1] x_1\}^2 + M^2 - m^2 x_1^2 \\
&\quad - \left[ Q^2 x_2 (x_2 - 1) - m^2 - Q^2/4 + Q^2/4 \right] x_1^2 \\
&= \{t + [(p_2 - p_1)x_2 + p_1] x_1\}^2 + M^2 - m^2 x_1 (1 - x_1)^2 - Q^2 x_2 (x_2 - 1) x_1^2. \quad (\text{D.8})
\end{aligned}$$

Con esto en mente, el término con tres denominadores de la ecuación (D.4) se parametriza como

$$\mathcal{A}_{0^{-+}}^{11_2} = 4 \frac{3}{2\pi^2} m^2 \int_t^\Lambda 2 \int_0^1 dx_1 dx_2 x_1 K \cdot t / \left\{ [t + [(p_2 - p_1)x_2 + p_1]x_1]^2 + M^2 - m^2 x_1(1 - x_1)^2 - Q^2 x_2(x_2 - 1)x_1^2 \right\}^3. \quad (\text{D.9})$$

Se hace el cambio de variable  $t' = t + x_1(x_2(p_2 - p_1) + p_1)$  para

$$\begin{aligned} K \cdot t &= K \cdot (t' - x_1(x_2(p_2 - p_1) + p_1)) \\ &= K \cdot t' - K \cdot x_1(x_2 q + K - q/2) = K \cdot t' - K^2 x_1, \end{aligned} \quad (\text{D.10})$$

así se tiene

$$\mathcal{A}_{0^{-+}}^{11_2} = -8 \frac{3}{2\pi^2} m^2 K^2 \int_t^\Lambda \int_0^1 \frac{dx_1 dx_2 x_1^2}{\{t'^2 + M^2 - m^2 x_1(1 - x_1)^2 - Q^2 x_2(x_2 - 1)x_1^2\}^3}. \quad (\text{D.11})$$

Por el otro lado, al primer término de la ecuación (D.4) se le multiplica por  $[M^2 - m^2 x_1(1 - x_1) - Q^2 x_2(x_2 - 1)x_1^2]^2 = \mathfrak{M}^2$ , además de considerar la relación

$$\mathcal{C}_{03}(M^2; r_{ir}^2, r_{uv}^2) = \frac{1}{2} M^2 \frac{d^2}{dM^2} \mathcal{C}_{02}(M^2; \tau_{ir}^2, \tau_{uv}^2) = \frac{M^4}{(s + M^2)^3}. \quad (\text{D.12})$$

Se puede escribir

$$\mathcal{A}_{0^{-+}}^{11_2} = -8 \frac{3}{2\pi^2} m^2 K^2 \int_0^1 dx_1 dx_2 x_1^2 \mathcal{C}_{03}(\mathfrak{M}; \tau_{ir}^2, \tau_{uv}^2). \quad (\text{D.13})$$

Ahora es posible escribir la forma completa para  $\mathcal{A}_{0^{-+}}^{11}$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{0^{-+}}^{11} &= -4K^2 \frac{3}{2\pi^2} \left[ \int_0^1 dx \mathcal{C}_{02}(\mathfrak{M}^2; \tau_{uv}, \tau_{ir}) \right. \\ &\quad \left. + 2m^2 \int_0^1 dx_1 dx_2 x_1^2 \mathcal{C}_{03}(\mathfrak{M}^2; \tau_{ir}^2, \tau_{uv}^2) \right]. \end{aligned} \quad (\text{D.14})$$

El siguiente paso es la manipulación del término  $\mathcal{A}_{0^{-+}}^{12}$ . Para ello se tiene la traza

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{0^{-+}}^{12} &= -2 \frac{3}{2\pi^2} \int_t^\Lambda ((4m^2 + Q^2)(m^2 + M^2 + t^2) - 2Q^2 K \cdot t) \times \\ &\quad \times \sigma_V((t + p_2)^2) \sigma_V((t + p_1)^2) \sigma_V(t^2), \end{aligned} \quad (\text{D.15})$$

y nuevamente se separan los términos que incluyan  $t^2 + M^2$  en el denominador. Así

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{0^{-+}}^{12} &= -2 \frac{3}{2\pi^2} \left[ \int_t^\Lambda (-4K^2) \sigma_V((t + p_2)^2) \sigma_V((t + p_1)^2) - \right. \\ &\quad \left. - \int_t^\Lambda (2Q^2 K \cdot t + 4K^2 m^2) \sigma_V((t + p_2)^2) \sigma_V((t + p_1)^2) \sigma_V(t^2) \right]. \end{aligned} \quad (\text{D.16})$$

Gracias a las manipulaciones anteriores, ahora es muy simple calcular las expresiones finales. Por ejemplo, se separa  $\mathcal{A}_{0^{-+}}^{12} = A_{0^{-+}}^{12_1} + A_{0^{-+}}^{12_2}$ , el término  $A_{0^{-+}}^{12_1}$  se escribe como

$$\begin{aligned} A_{0^{-+}}^{12_1} &= 8K^2 \frac{3}{2\pi^2} \int_t^\Lambda \sigma_V((t + p_2)^2) \sigma_V((t + p_1)^2) \\ &= 8K^2 \frac{3}{2\pi^2} \int_0^1 dx_1 \mathcal{C}_{02}(\mathfrak{M}^2; \tau_{ir}, \tau_{uv}). \end{aligned} \quad (\text{D.17})$$

Y el término  $A_{0^{-+}}^{12_2}$  no es mucho más complicado. Solo hay que recordar que el cambio de variable conduce a un término de la forma  $K \cdot t = K \cdot t - K^2 x_1$ .

Entonces se tiene

$$2Q^2K \cdot t + 4K^2m^2 = 2K^2(-x_1Q^2 + 2m^2),$$

y al final

$$A_{0^{-+}}^{12_2} = -8K^2 \frac{3}{2\pi^2} \int_0^1 dx_1 dx_2 x_1 (2m^2 - x_1 Q^2) C_{03}(\mathfrak{M}^2). \quad (\text{D.18})$$

De este modo el término  $\mathcal{A}_{0^{-+}}^{12}$  se escribe como

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{0^{-+}}^{12} = & -8K^2 \frac{3}{2\pi^2} \left[ \int_0^1 dx_1 C_{02}(\mathfrak{M}^2; \tau_{ir}, \tau_{uv}) \right. \\ & \left. - \int_0^1 dx_1 dx_2 x_1 (2m^2 - x_1 Q^2) C_{03}(\mathfrak{M}^2) \right]. \quad (\text{D.19}) \end{aligned}$$

Para finalizar, el factor que multiplica a  $\mathcal{A}_{0^{-+}}^{22}$  es un poco más complicado. Se tiene a la expresión después de hacer la traza

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{0^{-+}}^{22} = & \frac{1}{M^2} \frac{3}{2\pi^2} \int_t^\Lambda 2 \left\{ -8m^2(K \cdot t)^2 + 2K \cdot t \left[ m^4 - m^2 M^2 + t^2(3m^2 + Q^2) \right. \right. \\ & \left. \left. - M^2 Q^2 - (Q \cdot t)^2 \right] + 8(K \cdot t)^3 + m^2(4m^2 + Q^2)(M^2 - t^2) \right\} \\ & \times \sigma_V((t + p_2)^2) \sigma_V((t + p_1)^2) \sigma_V(t^2). \quad (\text{D.20}) \end{aligned}$$

Al considerar el hecho que  $K \cdot t)^2 = \frac{1}{4}K^2 t^2$  por la ecuación (5.44), la expresión anterior se simplifica como

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{0^{-+}}^{22} = & \frac{3}{2\pi^2 M^2} \int_t^\Lambda 2 \left\{ -2m^2 K^2 t^2 + 2K \cdot t \left[ m^4 - m^2 M^2 + t^2(3m^2 + Q^2) \right. \right. \\ & \left. \left. - M^2 Q^2 - \frac{1}{4} Q^2 t^2 \right] + 2K^2 t^2 (K \cdot t) + m^2(4m^2 + Q^2)(M^2 - t^2) \right\} \\ & \times \sigma_V((t + p_2)^2) \sigma_V((t + p_1)^2) \sigma_V(t^2). \quad (\text{D.21}) \end{aligned}$$

Y en la parametrización de Feynman se usa la ecuación (D.10) para así tener el mismo cambio de variable  $t' = t + x_1(x_2(p_2 - p_1) + p_1)$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{0^{22}}^{22} &= \frac{3}{2\pi^2 M^2} \int_t^\Lambda 2 \int_0^1 dx_1 dx_2 x_1^2 \left\{ -2m^2 K^2 [t - x_1(x_2(p_2 - p_1) + p_1)]^2 \right. \\
&\quad - 2K^2 x_1 \left[ m^4 - m^2 M^2 + (t - x_1(x_2(p_2 - p_1) + p_1))^2 (3m^2 + Q^2) \right. \\
&\quad \left. \left. - M^2 Q^2 - \frac{1}{4} Q^2 (t - x_1(x_2(p_2 - p_1) + p_1))^2 \right] \right. \\
&\quad \left. - 2K^2 t^2 K^2 x_1 + m^2 (4m^2 + Q^2) \left( M^2 - (t - x_1(x_2(p_2 - p_1) + p_1))^2 \right) \right\} \\
&\quad \times \left\{ \frac{1}{\{t^2 + M^2 - m^2 x_1(1 - x_1)^2 - Q^2 x_2(x_2 - 1)x_1^2\}^3} \right\} \\
&= -8K^2 \frac{3}{2\pi^2 M^2} \int_t^\Lambda \int_0^1 dx_1 dx_2 x_1 \left\{ m^2 [t - x_1(x_2(p_2 - p_1) + p_1)]^2 \right. \\
&\quad + x_1 \left[ m^4 - m^2 M^2 + (t - x_1(x_2(p_2 - p_1) + p_1))^2 (3m^2 + Q^2) \right. \\
&\quad \left. M^2 Q^2 - \frac{1}{4} Q^2 (t - x_1(x_2(p_2 - p_1) + p_1))^2 \right] \\
&\quad + (t - x_1(x_2(p_2 - p_1) + p_1))^2 K^2 x_1 \\
&\quad \left. + 2m^2 \left[ M^2 - (t - x_1(x_2(p_2 - p_1) + p_1))^2 \right] \right\} \\
&\quad \times \left\{ \frac{1}{\{t^2 + M^2 - m^2 x_1(1 - x_1)^2 - Q^2 x_2(x_2 - 1)x_1^2\}^3} \right\}, \quad (D.22)
\end{aligned}$$

en la última línea se usó  $K^2 = -m^2 - Q^2/4$ . Para el siguiente paso hay que manipular un poco a la expresión  $\mathfrak{T} = (t - x_1(x_2(p_2 - p_1) + p_1))^2$ , se observa que<sup>2</sup>

$$\begin{aligned}
\mathfrak{T} &= t^2 - 2x_1(x_2 q + K - q/2) \cdot t + x_1^2(x_2 q + K + q/2)^2 \\
&= t^2 + x_1^2(x_2^2 q^2 - x_2 q^2 + K^2 + q^2/4) \\
&= t^2 + x_1^2(x_2 Q^2(x_2 - 1) - m^2) \\
&= t^2 + \mathfrak{M}_1^2, \quad (D.23)
\end{aligned}$$

<sup>2</sup>Aquí es bueno volver a recordar que  $p_1 = K - q/2$ ,  $p_2 = K + q/2$ ,  $K \cdot q = 0$  y  $K^2 = -m^2 - q^2/4$ .

donde

$$\mathfrak{M}_1^2 = x_1^2(x_2 Q^2(x_2 - 1) - m^2), \quad (\text{D.24})$$

Entonces ahora es posible escribir a la ecuación (D.22) en una forma más clara

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{0^-+}^{22} = & -8K^2 \frac{3}{2\pi^2 M^2} \int_t^\Lambda \int_0^1 dx_1 dx_2 x_1 \left\{ m^2(t^2 + \mathfrak{M}_1^2) \right. \\ & + x_1 \left( m^4 - m^2 M^2 + (t^2 + \mathfrak{M}_1^2)(3m^2 + Q^2) \right. \\ & \left. \left. - M^2 Q^2 - \frac{1}{4} Q^2(t^2 + \mathfrak{M}_1^2) \right) \right. \\ & \left. + (t^2 + \mathfrak{M}_1^2) K^2 x_1 + 2m^2 \left( M^2 - (t^2 + \mathfrak{M}_1^2) \right) \right\} \\ & \times \left\{ \frac{1}{\{t^2 + \mathfrak{M}_1^2\}^3} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{D.25})$$

El siguiente paso es añadir y restar un término  $\mathfrak{M}^2$  cada vez que aparezca un  $t^2$  en el numerador. De esta forma es posible factorizar  $t^2 + \mathfrak{M}^2$  y así obtener

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{0^-+}^{22} = & -8K^2 \frac{3}{2\pi^2 M^2} \int_t^\Lambda \int_0^1 dx_1 dx_2 x_1 \left\{ m^2(t^2 + \mathfrak{M}^2 - \mathfrak{M}^2 + \mathfrak{M}_1^2) \right. \\ & + x_1 \left[ m^4 - m^2 M^2 + (t^2 + \mathfrak{M}^2 - \mathfrak{M}^2 + \mathfrak{M}_1^2)(3m^2 + Q^2) \right. \\ & \left. \left. - M^2 Q^2 - \frac{1}{4} Q^2(t^2 + \mathfrak{M}^2 - \mathfrak{M}^2 + \mathfrak{M}_1^2) \right] - \right. \\ & \left. + (t^2 + \mathfrak{M}^2 - \mathfrak{M}^2 + \mathfrak{M}_1^2) K^2 x_1 + 2m^2 \left( M^2 - (t^2 + \mathfrak{M}^2 - \mathfrak{M}^2 + \mathfrak{M}_1^2) \right) \right\} \\ & \times \left\{ \frac{1}{\{t^2 + \mathfrak{M}^2\}^3} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{D.26})$$

y se factorizan los términos con  $t^2 + \mathfrak{M}^2$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{0^{2+}}^{22} &= -8K^2 \frac{3}{2\pi^2 M^2} \int_t^\Lambda \int_0^1 dx_1 dx_2 x_1 \left\{ (t^2 + \mathfrak{M}^2) \left[ m^2 + x_1(3m^2 + Q^2) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{4}Q^2 x_1 + K^2 x_1 - 2m^2 \right] + \left[ m^2(-\mathfrak{M}^2 + \mathfrak{M}_1^2) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + x_1 \left( m^4 - m^2 M^2 + (-\mathfrak{M}^2 + \mathfrak{M}_1^2)(3m^2 + Q^2) - M^2 Q^2 \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{4}Q^2(-\mathfrak{M}^2 + \mathfrak{M}_1^2) \right) + (-\mathfrak{M}^2 + \mathfrak{M}_1^2)K^2 x_1 \right. \\
&\quad \left. \left. + 2m^2 \left( M^2 - (-\mathfrak{M}^2 + \mathfrak{M}_1^2) \right) \right] \right\} \times \left\{ \frac{1}{\{t^2 + \mathfrak{M}^2\}^3} \right\} \\
&= -8K^2 \frac{3}{2\pi^2 M^2} \int_t^\Lambda \int_0^1 dx_1 dx_2 x_1 \left\{ (t^2 + \mathfrak{M}^2) \left[ m^2 + x_1(3m^2 + Q^2) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{4}Q^2 x_1 + K^2 x_1 - 2m^2 \right] \right. \\
&\quad \left. + (\mathfrak{M}^2 - \mathfrak{M}_1^2) \left[ m^2 + x_1(3m^2 + Q^2) - \frac{1}{4}Q^2 x_1 + K^2 x_1 - 2m^2 \right] \right. \\
&\quad \left. + x_1(m^4 - m^2 M^2 - M^2 Q^2) + 2m^2 M^2 \right\} \times \left\{ \frac{1}{\{t^2 + \mathfrak{M}^2\}^3} \right\} \\
&= -8K^2 \frac{3}{2\pi^2 M^2} \int_t^\Lambda \int_0^1 dx_1 dx_2 x_1 \left\{ (t^2 + \mathfrak{M}^2) \left[ m^2 + x_1(3m^2 + Q^2) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{4}Q^2 x_1 + K^2 x_1 - 2m^2 \right] \right. \\
&\quad \left. - (\mathfrak{M}^2 - \mathfrak{M}_1^2) \left[ m^2 + x_1(3m^2 + Q^2) - \frac{1}{4}Q^2 x_1 + K^2 x_1 - 2m^2 \right] \right. \\
&\quad \left. + x_1(m^4 - m^2 M^2 - M^2 Q^2) + 2m^2 M^2 \right\} \times \left\{ \frac{1}{\{t^2 + \mathfrak{M}^2\}^3} \right\}. \quad (\text{D.27})
\end{aligned}$$

Finalmente se regulariza de la manera usual

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{0^{22}+} &= -8K^2 \frac{1}{M^2} \frac{3}{2\pi^2} \int_t^\Lambda \int_0^1 dx_1 dx_2 x_1 \{ \mathcal{A}(x_1, Q^2, m^2) \mathcal{C}_{02}(\mathfrak{M}^2) \\
&\quad - \mathcal{C}_{03}(\mathfrak{M}^2) [x_1(3m^2 + \frac{1}{2}Q^2) - m^2 x_1 - m^2] \\
&\quad - x_1(m^4 - m^2 M^2 - M^2 Q^2) - 2m^2 M^2 \}. \\
&= -8K^2 \frac{1}{M^2} \frac{3}{2\pi^2} \int_t^\Lambda \int_0^1 dx_1 dx_2 x_1 \{ \mathcal{A}(x_1, Q^2, m^2) \mathcal{C}_{02}(\mathfrak{M}^2) \\
&\quad - \mathcal{B}(M^2, x_1, x_2, Q^2, m^2) \mathcal{C}_{03}(\mathfrak{M}^2) \}, \tag{D.28}
\end{aligned}$$

## D.2. Factor de Forma de Transición

De manera análoga al factor de forma elástico, el vértice de interacción que describe a la transición  $\gamma^* \gamma \rightarrow \eta_c$  se parametriza por un solo factor de forma  $G_{\gamma^* \gamma \eta_c}(Q_1^2, Q_2^2)$ , el cual se calcula a partir de

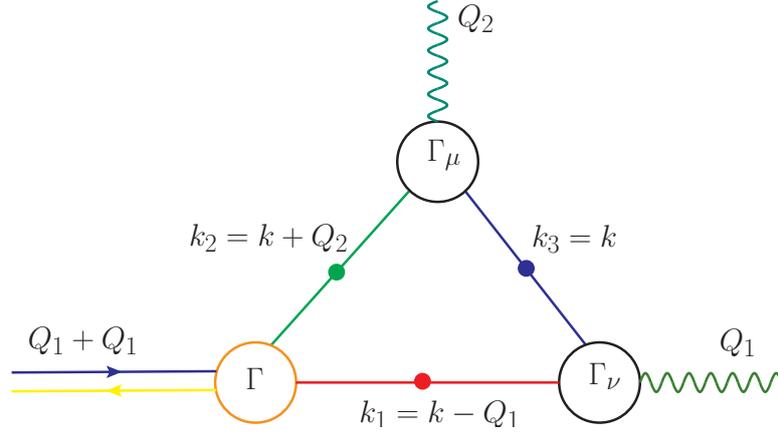
$$\mathcal{T}_{\mu\nu}(Q_1, Q_2) = T_{\mu\nu}(Q_1, Q_2) + T_{\nu\mu}(Q_2, Q_1), \tag{D.29}$$

donde  $Q_1$  and  $Q_2$  son los momentos de los fotones,  $P = Q_1 + Q_2$  es el momento de  $\eta_H$ , entonces

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu}(Q_1, Q_2) &= \frac{\alpha_{\text{em}}}{\pi f_{\eta_c}} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} Q_{1\alpha} Q_{2\beta} G_{\gamma^* \gamma \eta_c}(Q_1^2, Q_2^2) \\
&= \text{Tr} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} S(k_1) \Gamma_{\eta_c}(k_1, k_2; P) S(k_2) \\
&\quad \times i \mathcal{Q}_c \Gamma_\mu(k_2, k_3; Q_2) S(k_3) i \mathcal{Q}_c \Gamma_\nu(k_3, k_1; Q_1), \tag{D.30}
\end{aligned}$$

con  $k_1 = k - Q_1$ ,  $k_2 = k + Q_2$ ,  $k_3 = k$ ,  $\mathcal{Q}_c = (2/3)e$  y  $\alpha_{\text{em}} = e^2/(4\pi)$ . Las restricciones cinemáticas son  $Q_1^2 = Q^2$ ,  $Q_2^2 = -m_{J/\psi}^2$  y  $Q_1 \cdot Q_2 = -(m_{\eta_c}^2 + Q^2 - m_{J/\psi}^2)/2$ , donde  $P^2 = -m_{\eta_c}^2$ , con  $m_{\eta_c}$  la masa de  $\eta_c$ , y  $m_{J/\psi}$  la masa de  $J/\psi$ <sup>3</sup>.

<sup>3</sup>Los cálculos se harán tomando en cuenta la transición  $\gamma^* \eta_c J/\psi$  y al final se considera a  $J/\psi$  como un  $\gamma$ .



**Figura D.1.:** Factor de forma de transición en la aproximación de impulso.

Se contrae a la ecuación (D.30) con  $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}k_1^\alpha k_2^\beta$ , se evalúan las trazas para obtener dos contribuciones diferentes. Después de insertar a la ecuación (5.51) dentro de la ecuación (D.30), se tiene un término que se asocia con  $E_{0^{--}}(P)$ ; al cual se denomina como  $G_E$ . Y otro asociado  $F_{0^{--}}(P)$ , denotado  $G_F$ . Se encuentra para cada uno<sup>4</sup>

$$\begin{aligned}
 G_E(Q^2, -\mathcal{P}^2/2, 0) &= \frac{2}{(\mathcal{P}^2)^2} \frac{4\pi^2 f_{\eta_c}}{e^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} k_1^\alpha k_2^\beta \\
 &\quad \times \text{tr} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \chi_{0^{--}}(l_1, l_2) i \mathcal{Q} \Gamma_\mu(l_2, l_{12}) S(l_{12}) i \mathcal{Q} \Gamma_\nu(l_{12}, l_1) \\
 &= \frac{2}{(\mathcal{P}^2)^2} \frac{4\pi^2 f_{\eta_c}}{e^2} 2M E_{0^{--}} \\
 &\quad \times \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} (\mathcal{P}^2)^2 \sigma_V((l - k_1)^2) \sigma_V((l + k_2)^2) \sigma_V(l^2) \\
 &= \frac{16\pi^2 M f_{\eta_c} E_{0^{--}}}{e^2} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \sigma_V((l - k_1)^2) \sigma_V((l + k_2)^2) \sigma_V(l^2),
 \end{aligned} \tag{D.31}$$

<sup>4</sup>Se denota a  $(m_{\eta_c}^2 + Q^2 - m_{j/\psi}^2) = \mathcal{P}^2$  para acortar la notación

Después de regularizar de la misma forma en que se hizo para el cálculo del factor de forma elástico se obtiene

$$G_E(Q^2, -\mathcal{P}^2/2, 0) = 2ME_{0^+} f_{\eta_c} \int_0^1 \int_0^1 dx_1 dx_2 x_1 \bar{C}_2^{\text{iu}}(\mathfrak{M}_3^2), \quad (\text{D.32})$$

donde

$$\mathfrak{M}_3^2 = M^2 - x_1(x_1 x_2(1-x_2)m_{\eta_c}^2 + (1-x_1)(1-x_2)m_{J/\psi}^2 - (1-x_1)x_2 Q^2). \quad (\text{D.33})$$

Aquí,  $\mathfrak{M}_3^2$  se obtiene de un modo análogo a  $\mathfrak{M}^2$  después de hacer el cambio  $p_1 \rightarrow k_2$  y  $p_2 \rightarrow -k_1$  durante la parametrización de Feynman similar al cálculo de la ETF.

Del mismo modo, el término con  $G_F$  resulta en

$$\begin{aligned} G_F(Q^2, -\mathcal{P}^2/2, 0) &= -\frac{2}{(\mathcal{P}^2)^2} \frac{4\pi^2 f_{\eta_c}}{e^2} \frac{F_{0^+}}{2M} \\ &\times 4 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} [(-2(l \cdot k_2)^2 k_1^2 \\ &- 2(l \cdot k_1)^2 k_2^2 + 2M^2((k_1 \cdot k_2)^2 - k_1^2 k_2^2) \\ &- l \cdot k_2(k_1 \cdot k_2(l^2 + M^2 + k_1^2) + k_1^2(l^2 + M^2 + k_2^2)) \\ &+ l \cdot k_1((l^2 + M^2 + k_1^2)k_2^2 + k_1 \cdot k_2(l^2 + M^2 + 4l \cdot k_2 + k_2^2))] \\ &\times \sigma_V((l - k_1)^2) \sigma_V((l + k_2)^2) \sigma_V(l^2). \end{aligned} \quad (\text{D.34})$$

Se hace el cambio de variable  $l \rightarrow l + x_1(x_2(k_1 + k_2) - k_2)$  Con el fin de conseguir términos lineales de la forma  $l \cdot k_{1,2}$ , lo cuales se integran después de regularizar la expresión. Primero, se comienza con  $l \cdot k_1$

$$\begin{aligned} l \cdot k_1 &= l \cdot k_1 + x_1[x_2(k_1 + k_2) - k_2] \cdot k_1 \\ &= l \cdot k_1 + x_1[x_2(k_1^2 + k_2 \cdot k_1) - k_2 \cdot k_1] \\ &= l \cdot k_1 + x_1[x_2(Q^2 - (m_{\eta_c}^2 + Q^2 - m_{J/\psi}^2)/2) + (m_{\eta_c}^2 + Q^2 - m_{J/\psi}^2)/2] \\ &= l \cdot k_1 + \frac{x_1}{2}[x_2(Q^2 - m_{\eta_c}^2 + m_{J/\psi}^2) + (m_{\eta_c}^2 + Q^2 - m_{J/\psi}^2)]. \end{aligned} \quad (\text{D.35})$$

Similarmente

$$\begin{aligned}
l \cdot k_2 &= l \cdot k_2 + x_1 [x_2 (k_1 + k_2) - k_2] \cdot k_2 \\
&= l \cdot k_2 + x_1 [x_2 (k_1 \cdot k_2 + k_2^2) - k_2 \cdot k_2] \\
&= l \cdot k_2 + x_1 [x_2 (-(m_{\eta_c}^2 + Q^2 - m_{j/\psi}^2)/2)] \\
&= l \cdot k_2 - \frac{x_1 x_2}{2} (m_{\eta_c}^2 + Q^2 - m_{j/\psi}^2). \tag{D.36}
\end{aligned}$$

Ahora nos concentramos en el integrando de la ecuación (D.34). Se insertan las expresiones de las ecuaciones (D.35, D.36) dentro del integrando de esa ecuación, se expanden todos los términos y al reducir los términos semejantes se llega a

$$\begin{aligned}
G_F(Q^2, -\mathcal{P}^2/2, 0) &= \frac{f_{\eta_c} F_{0^{--}}}{M} \int_0^1 dx_1 dx_2 x_1 \\
&\times \left[ \bar{\mathcal{A}}(x_1) \mathcal{C}_{02}^{\text{iu}}(\mathfrak{M}_3^2) + \left( \bar{\mathcal{B}}(M^2, x_2, Q^2, m_{f\bar{g}}^2) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \bar{\mathcal{A}}(x_1) \mathfrak{M}_3^2 \right) \mathcal{C}_{03}^{\text{iu}}(\mathfrak{M}_3^2) \right], \tag{D.37}
\end{aligned}$$

donde

$$\bar{\mathcal{A}}(x_1) = 3x_1 - 2, \tag{D.38}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\mathcal{B}}(M, x_1, x_2, Q^2, m_{\eta_c}^2, m_{j/\psi}^2) &= -2 \left[ x_1 (x_2 - 1) ((x_1 - 1)^2 m_{j/\psi}^2 + 2m_{\eta_c}^2 x_1 x_2) \right. \\
&\quad \left. + M^2 (x_1 - 2) + Q^2 (x_1 - 1)^2 x_1 x_2 \right]. \tag{D.39}
\end{aligned}$$

y  $\mathfrak{M}_3^2$  dado por la ecuación (D.33).

# Colophon

Esta tesis se escribió en  $\text{\LaTeX}2_{\epsilon}$  usando la clase “hepthesis” [128].



# Bibliografía

- [1] M. Gell-Mann, Phys. Lett. **8**, 214-215 (1964).
- [2] G. Zweig, An SU(3) Model for Strong Interaction Symmetry and its Breaking. CERN Report No.8182/TH.401. 1964.
- [3] G. Zweig, An SU(3) Model for Strong Interaction Symmetry and its Breaking: II. CERN Report No.8419/TH.412. 1964.
- [4] M. Bander and M.R. Barnett D. Silverman, Phys. Lett. **48**, 243-245 (1974).
- [5] D. Griffiths, Introduction to Elementary Particles. John Wiley and Sons, 1987.
- [6] S. Haywood, Symmetries and Conservations Laws in Particle Physics: An Introduction to Group Theory for Particle Physics, Imperial Colege Press, 2010.
- [7] H. Georgi, Lie Algebras in Particle Physics: From Isospin to Unified Theories, Westview Press, 1999, ISBN: 0-7382-0233-9.
- [8] D. B. Lichtenberg, Unitary Simmetry and Elementary Particles, Academic Press, 1970.
- [9] G. Costa and G. Fogli, Symmetries and Group Theory in Particle Physics, Springer, 2012.
- [10] F. Halzen and A.D. Martin, Quarks and Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics. John Wiley and Sons, 1984.
- [11] J. Burnet: Early greek philosophy[1892]. Whitefish (Montana): Kessinger, 2003. ISBN 0-7661-2826-1.

- [12] Dmitrii Mendeleev, *On the Relationship of the Properties of the Elements to their Atomic Weights*, *Zhurnal Russkoe Fiziko-Khimicheskoe Obschestvo* **1**, 60-77 (1869); abstracted in *Zeitschrift für Chemie*, **12**, 405-406 (1869).
- [13] J.J. Thompson, *Cathode rays*, *The Electrician*, **39**, 104-109 (1897).
- [14] J.J. Thompson, *Cathode rays*, *Philosophical Magazine*, **44**, 293-316 (1897).
- [15] R.A. Millikan, *Phys. Rev.*, **32**, 349-397 (1911).
- [16] E. Rutherford, *Philosophical Magazine, Series 6*, **21**, 669-688 (1911).
- [17] E. Rutherford, *Nuclear Constitution of Atoms* *Proceedings of the Royal Society*, **A. 97**, (686) 374-688 (1920).
- [18] James Chadwick, *Possible Existence of a Neutron* *Nature*, **Vol. 129**, issue 3252 p.p. 312 (1932).
- [19] W. Heisenberg, *Z. Physik*, **77**, 1 (1932).
- [20] H. Yukawa, *Proc. Phys.-Math. Soc. Jpn.*, **17**, 48 (1935).
- [21] D.H. Perkins, *Nature*, **Vol. 159** 126 (1947).
- [22] G.P.S. Occhialini and C. F. Powell, *Nature*, **Vol. 159** 186 (1947).
- [23] C.M.G. Lattes, G.P.S. Occhialini and C.F. Powell, *Nature*, **Vol. 160** 453-456 (1947).
- [24] G.D. Rochester and C.C. Butler, *Evidence for the existence of new unstable elementary particles* *Nature*, **Vol. 160** 855-857 (1947).
- [25] C.F. Powell, *Rep. Prog. Phys.*, **13** 384 (1950).
- [26] V.D. Hopper and S. Biswas, *Evidence Concerning the Existence of the New Unstable Elementary Neutral Particle* *Phys. Rev.*, **80** 1037 (1950).
- [27] E.C.G. Stueckelberg, *Helvetica Physica Acta*, **11** 298 (1938).
- [28] A. Pais, *Phys. Rev.*, **86** 663 (1952).
- [29] M. Gell-Mann, *Phys. Rev.*, **92** 883 (1953).

- [30] T. Nakano and K. Nishijima, *Prog. Theor. Phys.*, **10** 581 (1953).
- [31] M. Gell-Mann, *Phys. Rev.*, **125** 1067-1084 (1962).
- [32] O.W. Greenberg, *Phys. Rev. Lett.*, **13** 598 (1964).
- [33] J. J. Aubert, U. Becker, P. J. Biggs, J. Burger, M. Chen, G. Everhart, P. Goldhagen, J. Leong, T. McCorrison, T. G. Rhoades, M. Rohde, Samuel C. C. Ting, Sau Lan Wu and Y. Y. Lee, *Phys. Rev. Lett.*, **33** 1404 (1974).
- [34] J.-E. Agustin et al., *Phys. Rev. Lett.*, **33** 1404 (1974).
- [35] B. J. Bjorken and S. L. Glashow *Phys. Lett.*, **11** 1285 (1964).
- [36] S. L. Glashow, J. Iliopoulos and L. Maiani *Phys. Rev.*, **D2** 1285 (1970).
- [37] URL <http://www.conacytprensa.mx/index.php/ciencia/universo/12032-galardonan-en-mexico-a-luciano-maiani-exdirector-del-cern>
- [38] S. Haywood, *Lectures in Symmetries and Conservations Laws: University of London*, 2015. URL <http://hepwww.rl.ac.uk/Haywood/lectures.htm>
- [39] J.I. Illana, *Los Hadrones y el modelo de quarks*,  
URL <http://www.ugr.es/~jillana/Docencia/TG/Ejercicios/qm-s.pdf>
- [40] T.P. Cheng and L.F. Li, *Gauge Theory of Elementary Particles Physics*. Clarendon Press, Oxford, 1982.
- [41] W. Greiner and B. Müller, *Quantum Mechanics: Symmetries*. Springer, 1994. ISBN 0-387-58080-8, p. 376-377.
- [42] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*. Westview Press, 1995.
- [43] C. Itzykson and J. B. Zuber, *Quantum Field Thoery*. McGraw Hill, 1980.
- [44] L. H. Ryder, *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, 1996.
- [45] D. Bailin and A. Love, *Introduction to Gauge Field Theory*. IOP.
- [46] K. Nakamura and P. D. Group, *Journal of Physics G: Nuclear and Particle*

- Physics **37**(7A), 075021 (2010), URL <http://stacks.iop.org/0954-3899/37/i=7A/a=075021>.
- [47] E. J. Eichten, K. Gottfried, T. Kinoshita, K. D. Lane, and T.-M. Yan, *Phys. Rev.* **D21** (1980), 203.
- [48] T. Appelquist, R. M. Barnett, and K. D. Lane, *Annu. Rev. Nucl. Part. Sci* **28** (1978), 387.
- [49] V. A. Novikov, L. B. Okun, M. A. Shifman, A. I. Vainshtein, , M. B. Voloshin, and V.I. Zakharov, *Phys. Lett.* **C41** (1978), 1.
- [50] C. Quigg, and J. L. Rosner, *Phys. Rep.* **56**, 167 (1979).
- [51] H. Grosse, and A. Martin, *Phys. Rep.* **60**, 341 (1980).
- [52] S.F. Radford, and W.W. Repko, *Phys. Rev.* **D75**, 074031 (2007).
- [53] C. Quigg, and J. L. Rosner, *Phys. Rep.* **71**, 153 (1979).
- [54] H. B. Thacker, C. Quigg, and J. L. Rosner, *Phys. Rev.* **D18**, 274 (1978a).
- [55] H. B. Thacker, C. Quigg, and J. L. Rosner, *Phys. Rev.* **D18**, 274 (1978a).
- [56] J. F. Schonfeld, W. Kwong, J. L. Rosner, C. Quigg, and H. B. Thacker, *Ann. Phys. (N.Y.)* **128**, 1 (1980).
- [57] C. Quigg, and J. L. Rosner, *Phys. Rev.* **D23**, 2625 (1981).
- [58] W. Kwong, and J. L. Rosner, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **86**, 366 (1986).
- [59] E. Eichten, S. Godfrey, H. Mahlke, and J. L. Rosner, *Rev. Mod. Phys.* **80**, 1161 (2008).
- [60] R. Aaij, et. al. (LHCb Collaboration), *Phys. Rev. Lett* **112**, 222002 (2014).
- [61] R. Aaij, et. al. (LHCb Collaboration), *Phys. Rev. Lett* **115**, 072001 (2015).
- [62] X. Ji, (Phys 741) Quarks, Nuclei, and the Cosmos: A Modern Indroduction to Nuclear Physics, Lectures Notes.
- [63] C. D. Roberts: Strong QCD and Dyson-Schwinger Equations (2012), ar-

- Xiv:1203.5341 [nucl-th].
- [64] D.A. Bromley, *Gauge Theory of Weak Interactions*. Springer, 2000. ISBN 3-540-67672-4.
- [65] Gordon L. Kane, *Modern Elementary Particle Physics*. Perseus Books, 1987. ISBN 0-201-11749-5.
- [66] C. Itzykson and J. Zuber: *Quantum Field Theory*, Dover Books on Physics, Dover Publications, 2005.
- [67] C. D. Roberts and A. G. Williams, *Progress in Particle and Nuclear Physics* **33**, 477-575 (1994).
- [68] R. Alkofer and L. von Smekal, R. Alkofer and L. von Smekal: *The infrared behaviour of QCD Green's functions: Confinement, dynamical symmetry breaking, and hadrons as relativistic bound states* *Phys. Rep.* **353**, 281 (2001).
- [69] R. Williams: *Schwinger-Dyson equations in QED and QCD the calculation of fermion-antifermion condensates*, Ph.D. thesis, Durham University (2007).
- [70] J.J. Cobos-Martínez: *Static and dynamic properties of the pion from continuum modelling of strong QCD*, Durham theses, Durham University, Ph.D. thesis, Durham University (2010).  
URL <http://etheses.dur.ac.uk/633/>
- [71] J. A. Müller: *A Dyson-Schwinger Approach to Finite Temperature QCD*, Ph.D. thesis, TU Darmstadt (2011).
- [72] M. Viebach: *Dyson-Schwinger equation for the quark propagator at finite temperatures*, Ph.D. thesis, TU Darmstadt (2011).
- [73] P. Maris and P. C. Tandy, *Phys. Rev.* **C60**, 055214 (1999), nucl-th/9905056.
- [74] L. Gutierrez-Guerrero, A. Bashir, I. Cloet, and C. Roberts, *Phys.Rev.* **C81**, 065202 (2010), 1002.1968.
- [75] H. Roberts, C. Roberts, A. Bashir, L. Gutierrez-Guerrero, and P. Tandy, *Phys.Rev.* **C82**, 065202 (2010), 1009.0067.

- [76] H. L. Roberts, L. Chang, I. C. Cloet, and C. D. Roberts, *Few Body Syst.* **51**, 1 (2011a), 1101.4244.
- [77] C. Chen, L. Chang, C. D. Roberts, S. Wan, and D. J. Wilson, *Few Body Syst.* **53**, 293 (2012), 1204.2553.
- [78] L.X. Gutiérrez-Guerrero: *Mesones Pion, Rho y los Diquarks: Factores de Forma*, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Tesis Doctoral (2012).
- [79] P. Maris, C. D. Roberts, and P. C. Tandy, *Phys. Lett.* **B420**, 267 (1998), nucl-th/9707003.
- [80] P. Jain and H. J. Munczek, *Phys.Rev.* **D48**, 5403 (1993), hep-ph/9307221.
- [81] P. Boucaud, J. Leroy, A. Le Yaouanc, J. Micheli, O. Pene, *et al.*, *JHEP* **0806**, 099 (2008), 0803.2161.
- [82] A. Aguilar, D. Binosi, and J. Papavassiliou, *Phys.Rev.* **D78**, 025010 (2008), 0802.1870.
- [83] M. Pennington and D. Wilson, *Phys.Rev.* **D84**, 119901 (2011), 1109.2117.
- [84] L. Chang and C. D. Roberts, *Phys.Rev.Lett.* **103**, 081601 (2009), 0903.5461.
- [85] A. Kizilersu and M. Pennington, *Phys.Rev.* **D79**, 125020 (2009), 0904.3483.
- [86] A. Bashir, R. Bermudez, L. Chang, and C. Roberts, *Phys.Rev.* **C85**, 045205 (2012a), 1112.4847.
- [87] A. Krassnigg and P. Maris, *J.Phys.Conf.Ser.* **9**, 153 (2005), nucl-th/0412058.
- [88] M. Bhagwat, A. Krassnigg, P. Maris, and C. Roberts, *Eur.Phys.J.* **A31**, 630 (2007), nucl-th/0612027.
- [89] P. Maris and P. Tandy, *Nucl.Phys.Proc.Suppl.* **161**, 136 (2006), nucl-th/0511017.
- [90] M. Blank and A. Krassnigg, *Phys.Rev.* **D84**, 096014 (2011), 1109.6509.
- [91] P. Maris, *AIP Conf.Proc.* **892**, 65 (2007), nucl-th/0611057.

- [92] A. Krassnigg, Phys.Rev. **D80**, 114010 (2009), 0909.4016.
- [93] M. Bhagwat, A. Holl, A. Krassnigg, C. Roberts, and P. Tandy, Phys.Rev. **C70**, 035205 (2004), nucl-th/0403012.
- [94] N. Souchlas, Phys.Rev. **D81**, 114019 (2010).
- [95] E. Rojas, B. El-Bennich, and J. de Melo, Phys.Rev. **D90**(7), 074025 (2014), 1407.3598.
- [96] H. Roberts, A. Bashir, L. Gutierrez-Guerrero, C. Roberts, and D. Wilson, Phys.Rev. **C83**, 065206 (2011b), 1102.4376.
- [97] A. Bashir, L. Chang, I. C. Cloet, B. El-Bennich, Y.-X. Liu, *et al.*, Commun.Theor.Phys. **58**, 79 (2012b), 1201.3366.
- [98] G. Eichmann, R. Alkofer, I. Cloet, A. Krassnigg, and C. Roberts, Phys.Rev. **C77**, 042202 (2008), 0802.1948.
- [99] I. Cloet, A. Krassnigg, and C. Roberts, eConf **C070910**, 125 (2007), 0710.5746.
- [100] F. Gross, *Relativistic quantum mechanics and field theory* (Wiley, New York, 1993), first ed.
- [101] E. E. Salpeter and H. A. Bethe, Phys. Rev. **84**, 1232 (1951).
- [102] M. Gell-Mann and F. Low, Phys. Rev. **84**, 350 (1951).
- [103] C. D. Roberts, M. S. Bhagwat, A. Holl, and S. V. Wright, Eur. Phys. J. ST **140**, 53 (2007), 0802.0217.
- [104] A. Holl, C. D. Roberts, and S. V. Wright (2006), nucl-th/0601071.
- [105] P. Maris and C. D. Roberts, Int. J. Mod. Phys. **E12**, 297 (2003), nucl-th/0301049.
- [106] R. Alkofer and L. von Smekal, Phys. Rept. **353**, 281 (2001), hep-ph/0007355.
- [107] P. Boucaud, J. Leroy, A. L. Yaouanc, J. Micheli, O. Pene, *et al.*, Few Body Syst. **53**, 387 (2012), 1109.1936.

- [108] D. Ebert, T. Feldmann, and H. Reinhardt, *Phys.Lett.* **B388**, 154 (1996), hep-ph/9608223.
- [109] C. Roberts, *Prog.Part.Nucl.Phys.* **61**, 50 (2008), 0712.0633.
- [110] R. Farias, G. Dallabona, G. Krein, and O. Battistel, *Phys.Rev.* **C73**, 018201 (2006), hep-ph/0510145.
- [111] R. Farias, G. Dallabona, G. Krein, and O. Battistel, *Phys.Rev.* **C77**, 065201 (2008), hep-ph/0604203.
- [112] W. Weise (2005), nucl-th/0504087.
- [113] C. S. Fischer, D. Nickel, and J. Wambach, *Phys. Rev.* **D76**, 094009 (2007), 0705.4407.
- [114] H. J. Munczek, *Phys. Rev.* **D52**, 4736 (1995), hep-th/9411239.
- [115] J. M. Cornwall, R. Jackiw, and E. Tomboulis, *Phys. Rev.* **D10**, 2428 (1974).
- [116] C. H. Llewellyn-Smith, *Ann. Phys.* **53**, 521 (1969).
- [117] E. Follana *et al.* (HPQCD Collaboration, UKQCD Collaboration), *Phys.Rev.* **D75**, 054502 (2007), hep-lat/0610092.
- [118] M. Kalinowski and M. Wagner, *PoS LATTICE2013*, 241 (2014), 1310.5513.
- [119] A. Krassnigg, *PoS CONFINEMENT8*, 075 (2008), 0812.3073.
- [120] A. Holl, A. Krassnigg, and C. D. Roberts, *Phys. Rev.* **C70**, 042203 (2004), nucl-th/0406030.
- [121] P. Maris and C. D. Roberts, *Phys. Rev.* **C56**, 3369 (1997), nucl-th/9708029.
- [122] A. Ayala, A. Bashir, D. Binosi, M. Cristoforetti, and J. Rodriguez-Quintero, *Phys.Rev.* **D86**, 074512 (2012), 1208.0795.
- [123] A. Bashir, A. Raya, and J. Rodriguez-Quintero, *Phys.Rev.* **D88**, 054003 (2013), 1302.5829.
- [124] T. Barnes and E. S. Swanson, *Phys. Rev.* **C77**, 055206 (2008), 0711.2080.

- 
- [125] J. J. Dudek, R. G. Edwards, N. Mathur, and D. G. Richards, *J.Phys.Conf.Ser.* **69**, 012006 (2007).
- [126] V. P. Druzhinin (BaBar), *PoS ICHEP2010*, 144 (2010), 1011.6159.
- [127] T. Feldmann and P. Kroll, *Phys. Lett.* **B413**, 410 (1997), hep-ph/9709203.
- [128] A. Buckley, The hepthesis L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X class.