



**UNIVERSIDAD MICHOACANA DE
SAN NICOLÁS DE HIDALGO**

Instituto de Física y Matemáticas

T E S I S

Física Fundamental y del Grafeno

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
DOCTOR EN CIENCIAS EN EL ÁREA DE FÍSICA**

**PRESENTA
SAÚL FERNANDO HERNÁNDEZ ORTIZ**

**ASESOR
DR. ALFREDO RAYA MONTAÑO**

MORELIA, MICH., FEBRERO 2017.



Agradecimientos

La elaboración de esta tesis, si bien ha requerido de muchas horas de esfuerzo y dedicación, no hubiese sido posible su finalización sin la cooperación desinteresada de todas y cada una de las personas que han sido un soporte muy fuerte en momentos de angustia y desesperación. Por ello, es para mí un verdadero placer utilizar este espacio para ser justo y consecuente con ellos, expresándoles mis agradecimientos.

Primero y antes que nada quiero agradecer de manera especial y sincera al Dr. Alfredo Raya por aceptarme durante estos años para realizar esta tesis bajo su dirección. Su apoyo y amistad ha sido un aporte invaluable, no solo en mi formación académica, sino también en mi formación como persona. Las ideas propias, siempre enmarcadas en su orientación y rigurosidad, han sido la clave del buen trabajo que hemos realizado juntos, el cual no se puede concebir sin su siempre oportuna participación. Le agradezco también el haberme facilitado siempre los medios y el apoyo suficientes para llevar a cabo todas las actividades propuestas durante el tiempo que he estado bajo su tutela. Alfredo de verdad, MUCHAS GRACIAS.

A los Doctores Alejandro Ayala, Adnan Bashir Gabriela Murguía y Ulises Nucamendi, por su disposición de revisar esta tesis en un período corto de tiempo, haciendo observaciones, sugerencias y correcciones de manera oportuna. Debo destacar, por encima de todo, su disponibilidad y paciencia que hizo que nuestras discusiones redundaran benéficamente tanto a nivel académico como personal. También quiero agradecer a los Doctores Christoph Hofmann y Luis Manuel Montaña por el tiempo invertido y su participación como integrantes del comité de seguimiento académico. No cabe duda que su participación ha enriquecido el trabajo realizado.

Agradecer hoy y siempre a mi familia que siempre ha procurado por mi bienestar, y está claro que si no fuese por el esfuerzo realizado por ellos, mis estudios no hubiesen sido posibles. A mi esposa Karla, por ser la persona que ha compartido su tiempo a mi lado y por darme siempre su apoyo. A mis padres, Isabel y Ramón, por su ejemplo de honestidad y tenacidad; a mi tía Esperanza, por su apoyo incondicional; a mis hermanos, Maru y David, que sin su ejemplo y consejos, mi progreso no hubiera sido posible... por ellos y para ellos.

II

A mis compañeros, Angelo, Alan, Bedolla, Chino, Cobos, Gaby, Griego, Khepani, Mauricio, Miguel, Pancho y Poncho, por su paciencia y el apoyo que me han dado. Gracias por brindarme su amistad durante todos estos años.

Al Instituto de Física y Matemáticas de la UMSNH por haber contribuido a mi formación y por las facilidades y atenciones prestadas para la elaboración de este trabajo. Agradezco también a los profesores de esta institución por haberme soportado durante estos años.

Finalmente agradezco a todos aquellos que me han brindado su amistad y a quienes han ayudado directa o indirectamente a que esta tesis pudiera realizarse, a quienes no menciono no por falta de memoria sino por falta de espacio.

Índice general

Introducción	1
1. Diagrama de Fase de la QCD	3
1.1. Modelo Sigma Lineal	5
1.2. Potencial Fermiónico	6
1.3. Potencial Bosónico	12
1.4. Altas Temperaturas	14
1.5. Bajas Temperaturas	18
1.6. Presión	21
2. Teoría de baja energía del Grafeno	25
2.1. El Grafeno	25
2.1.1. Propiedades	25
2.2. Estructura Cristalina	27
2.2.1. La Primera Zona de Brillouin	28
2.3. Estructura de Bandas y Descripción del Modelo	29
2.4. Diagrama de Fase en grafeno	32
2.5. Colapso Atómico	35
3. Absorción de Luz en Grafeno	39
3.1. Absorción de Luz y Efecto Faraday	40
3.2. Campo Magnético Débil	42
3.3. Grafeno deformado	45
4. Efecto Pseudoquiral Magnético	49
4.1. Propagador del Fermión	49
4.2. Observables para PCME	51
4.2.1. Corriente Eléctrica	51
4.2.2. Densidad de Número	54
4.2.3. Condensados quirales	55
5. Conclusiones	61
5.1. Diagrama de Fase de la QCD	61
5.2. Diagrama de Fase y Colapso Atómico en Grafeno	61
5.3. Absorción de Luz	62

5.4. Efecto Pseudoquiral Magnético	63
A. Contribuciones del Tensor de Polarización	65
A.1. Calculando Π^{vac}	65
A.2. Calculando Π^{11}	69
A.3. Calculando Π^{20}	69
B. Notebook en <i>Mathematica</i>	73
Bibliografía	75

Resumen

La intención de esta tesis es mostrar que existe una fuerte conexión (un puente) entre la física del grafeno y la física de partículas bajo condiciones extremas (temperatura y densidad finitas, así como en presencia de campos magnéticos externos). Estas condiciones se observan comúnmente en experimentos de colisiones de iones pesados como en RHIC y ALICE y en fuentes naturales como estrellas compactas, donde se estudian las distintas fases que la materia hadrónica ha experimentado desde los primeros instantes del Big-Bang. Cabe destacar que la inclusión de temperatura, densidad y/o campos magnéticos da origen a una reducción dimensional en la teoría de campos cuánticos (QFT) correspondiente, por lo tanto, la teoría de bajas energías en grafeno, la Electrodinámica Cuántica en el plano (QED3) y la Cromodinámica Cuántica (QCD) se relacionan de distintas maneras. En este trabajo, revisamos algunos aspectos de la física de partículas que son relevantes para los experimentos de iones pesados, estudiando distintas características de la dinámica de los fermiones en el grafeno con la intención de proveer herramientas para el estudio de la QCD pero al alcance de un laboratorio estándar de materia condensada sin la necesidad de recurrir a grandes aceleradores o sofisticados detectores de partículas.

Palabras Clave: *Grafeno, Física de Partículas, Materia Condensada, Diagrama de Fase.*

Abstrac

The purpose of this thesis is to show that there is a strong connection between graphene physics and particle physics under extreme conditions (finite temperature and density, as well as in the presence of external magnetic fields). These conditions are commonly observed in heavy ion collision experiments such as in RHIC and ALICE and in natural sources such as compact stars, which study the different phases that hadronic matter has experienced since the first moments of the Big Bang. It should be noted that the inclusion of temperature, density and / or magnetic fields gives rise to a dimensional reduction in the corresponding quantum field theory (QFT), therefore the theory of low energies in graphene, Quantum Electrodynamics in the plane (QED3) and the Quantum chromodynamics (QCD) are related in different ways. In this work, we review some aspects of particle physics that are relevant for heavy ion experiments, studying different characteristics of the graphene fermion dynamics with the intention of providing tools for the study of QCD but within the scope of Standard laboratories of condensed matter without the need to resort to large accelerators or sophisticated particle detectors.

Introducción

La intención de esta tesis es mostrar que existe una fuerte conexión (un puente) entre la física del grafeno y la física de partículas, particularmente la física de partículas bajo condiciones extremas (temperatura y densidad finita, así como en presencia de campos magnéticos externos). Estas condiciones se observan comúnmente en experimentos de colisiones de iones pesados como en RHIC¹ y ALICE² y en fuentes naturales como estrellas compactas, donde se estudian las distintas fases que la materia hadrónica ha experimentado desde los primeros instantes del Big-Bang. Desde el punto de vista teórico, *Lattice* QCD (Cromodinámica Cuántica), ecuaciones de Schwinger-Dyson y teorías de campos efectivos son ejemplos de métodos desarrollados para describir dichas condiciones extremas. Cabe destacar que la inclusión de temperatura, densidad y/o campos magnéticos da origen a una reducción dimensional en la teoría de campos cuánticos (QFT) correspondiente.

Del otro lado del puente, una nueva era en el estudio de la materia condensada ha emergido desde 2004 con el aislamiento de la primera muestra de grafeno [1, 2]. Además del potencial para aplicaciones tecnológicas del grafeno debido a su alta conductividad eléctrica y térmica, dureza y flexibilidad y su casi transparencia a la luz visible, es el comportamiento de sus portadores de carga a bajas energías, los cuales se comportan como fermiones de Dirac ultrarelativistas, lo que revivió el interés de la comunidad de la física de partículas en este tipo de sistemas. La razón es que estos fermiones se mueven al máximo de velocidad posible en el grafeno, la velocidad de Fermi v_F que es unas 300 veces más pequeña que la velocidad de la luz en el vacío c . Por lo tanto, el grafeno y otros materiales que presentan portadores de carga ultrarelativistas (materiales de Dirac-Weyl [3]) ofrecen una oportunidad de estudiar aspectos de la e-lec-tro-di-ná-mi-ca cuántica en (2+1) dimensiones, QED3, donde los efectos relativistas son reescaldos unas 300 veces. Debido a lo anterior y la reducción dimensional de la QCD al estudiar condiciones extremas, podemos decir que la Física del grafeno es un puente natural entre la física de partículas en condiciones extremas y la materia condensada.

¹El Acelerador Relativista de Iones Pesados operado por el Laboratorio Nacional Brookhaven en Upton, New York.

²El Gran Colisionador de Iones es uno de los siete detectores del Gran Colisionador de Hadrones (LHC) de la Organización Europea para la Investigación Nuclear (CERN).

Este trabajo está organizado de la siguiente manera. En el Capítulo 1, estudiamos el diagrama de fase de la QCD utilizando el modelo Sigma Lineal acoplado a quarks, con el objetivo de mostrar las dificultades y algunas técnicas desarrolladas para sortearlas, al estudiar algunos aspectos de la QCD. En el Capítulo 2, dando una breve descripción del grafeno y su importancia en el desarrollo de la ciencia básica y sus aplicaciones. Introducimos el modelo necesario para estudiar el diagrama de fase de la transición semimetal-aislante y estudiamos las condiciones bajo las cuales es posible generar masas para los portadores de carga. Además, estudiamos el fenómeno del colapso atómico en el grafeno debido a una impureza tipo monopolo eléctrico y cómo dicho colapso está asociado a la pérdida de unitariedad de la teoría. El Capítulo 3 está dedicado al estudio de la absorción de luz en el grafeno y al efecto Faraday, con la intención de mostrar que es posible caracterizar teóricamente aspectos del grafeno utilizando técnicas de la física de partículas. En el Capítulo 4, con el objetivo de usar el grafeno como laboratorio teórico de la QCD, estudiamos un análogo del fenómeno del Efecto Quiral Magnético (CME) en el grafeno bajo la influencia de un campo magnético externo alineado con el plano de la muestra. Finalmente, la discusión de los resultados y conclusiones derivadas de los mismos se presentan en el Capítulo 5.

Capítulo 1

Diagrama de Fase de la QCD

La Cromodinámica Cuántica (QCD por su siglas en inglés) es la teoría de campos que describe a las interacciones fuertes, ya que da cuenta de la manera en la que ocurren las interacciones entre las cargas de color. Desafortunadamente, al enfrentarnos a la descripción de las interacciones de bajas energías, como QCD es altamente no lineal, debemos hacer simplificaciones o usar formalismos adecuados como: lattice QCD, ecuaciones de Schwinger-Dyson o teorías efectivas como el modelo Nambu-Jona-Lasino, modelo Sigma Lineal, etc. Estas teorías pueden incorporar ingredientes externos como la temperatura y la densidad, los cuales nos permiten estudiar transiciones de fase de la materia hadrónica y tratar de esbozar el diagrama de fase de la QCD en términos más simples, lo cual es un problema de suma relevancia en la actualidad.

Las posibles fases que la materia hecha de quarks y gluones puede presentar, depende principalmente de la temperatura y la densidad o bien, del potencial químico asociado a los números cuánticos de los quarks. Dado que los quarks u , d y s son las especies de quarks que juegan un papel más importante para las temperaturas y densidades cerca de las transiciones, debería ser posible dar una completa descripción en términos de los potenciales químicos asociados a estos quarks. Por otro lado, debido a que estos potenciales necesitan satisfacer: el equilibrio beta y la neutralidad de la carga, podemos escoger uno de ellos como independiente [5]. Por lo tanto, el diagrama de fase se puede describir en dos dimensiones, la temperatura T y el potencial químico de quarks ligeros, μ , que se relaciona con el potencial químico bariónico μ_B como $\mu_B = 3\mu$ (ver Fig. 1.0.1) . El diagrama de fase es mayormente desconocido, la mayor parte conocida del diagrama se limita a $T \geq 0$ y al eje $\mu = 0$. Para la masa física de los quarks y $\mu = 0$ los cálculos de *lattice* muestran que el cambio de fase, del dominio del plasma de quarks y gluones, a la fase hadrónica es un *crossover*, es decir, es una transición suave [6]. Por lo tanto, el valor (pseudo) crítico de la temperatura T_c se mide en un cierto rango de valores. Los cálculos de *lattice* han determinado distintos valores de T_c , el valor más reciente para esta temperatura dado por *lattice* QCD es $T_c = 155(1)(8)$ MeV considerando 2+1 sabores

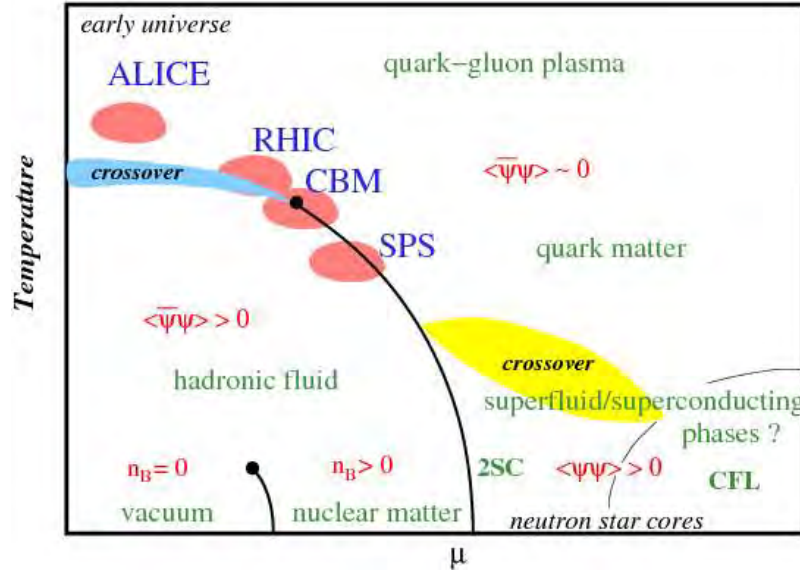


Figura 1.0.1: Representación esquemática del diagrama de fase de la QCD en el plano $T - \mu$. Tomada de [4].

de quarks [7]. El estatus de la termodinámica de la QCD a $\mu \neq 0$ es diferente. El principal impedimento para las simulaciones de *lattice* es el problema del signo, ningún método ideado hasta ahora se aproxima al resultado físico esperado para μ fijo distinto de cero. Sin embargo, dado que las estructuras más relevantes del diagrama de fase de la QCD (las transiciones de fase y el *Critical End Point* (CEP)) residen en $\mu \neq 0$, cualquier progreso en esta dirección es invaluable.

Las estimaciones teóricas disponibles sugieren que el CEP está dentro de la región del diagrama de fases explorable actualmente por los experimentos de colisión de iones pesados. Por ejemplo; los experimentos PHENIX y STAR del programa *Beam Energy Scan* (BES) del RHIC en su primera etapa con colisiones de iones Au+Au [8, 9], los experimentos del CERN-NA49 con colisiones de Si+Si [10]. Por otro lado, se esperan realizar experimentos de materia nuclear fría en el programa *Electronic Ion Collider* (EIC) del RHIC en 2024 y experimentos de materia caliente y densa en la segunda etapa del programa BES-RHIC a partir de 2018. Además de nuevas instalaciones planeadas como FAIR (*Facility for Antiprotons and Ion Research*) del Centro de Investigación de Iones Pesados (GSI) y NICA (*Heavy-Ion Collider Facility*) del Instituto Central de Investigaciones Nucleares (JINR-Dubna) que están en construcción y prometen profundizar en el futuro en la exploración del diagrama de fases QCD [11]. En este capítulo abordamos teóricamente el diagrama de fase de la QCD basados en los artículos [12, 13].

1.1. Modelo Sigma Lineal

Entre los modelos que se utilizan para estudiar a la QCD a bajas energías, el modelo Sigma Lineal acoplado a quarks (LSMq) es apropiado para determinar algunos aspectos del diagrama de fase de la QCD. Dicho modelo se enfoca en el sector mesónico con un número de fermiones determinado por el número de colores N_c y de sabores N_f . El Lagrangiano de LSMq es

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \vec{\pi})^2 + \frac{a^2}{2} (\sigma^2 + \vec{\pi}^2) - \frac{\lambda}{4} (\sigma^2 + \vec{\pi}^2)^2 \\ & + i\bar{\psi}\gamma_\mu \partial^\mu \psi - g\bar{\psi}(\sigma + i\gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\pi})\psi, \end{aligned} \quad (1.1.1)$$

donde ψ representa el campo de quarks, que es un doblete de isospin de $SU(2)$, $\vec{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ es un triplete de isospin y σ es un singlete de isospin. Tomamos los piones cargados como $\pi_\pm = (\pi_1 \pm i\pi_2)/\sqrt{2}$, el pion neutro como, $\pi^0 = \pi_3$. Además, consideramos el parámetro de masa al cuadrado a^2 y las constantes de acoplamiento λ y g como positivos. Ahora, para permitir ruptura espontánea de la simetría, permitimos que σ desarrolle un valor de expectación en el vacío no nulo

$$\sigma \rightarrow \sigma + \nu, \quad (1.1.2)$$

el cual es tomado como el parámetro de orden de la transición quiral. Entonces, podemos escribir el Lagrangiano anterior como

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{2}\sigma\partial_\mu\partial^\mu\sigma - \frac{1}{2}(3\lambda\nu^2 - a^2)\sigma^2 \\ & -\frac{1}{2}\vec{\pi}\partial_\mu\partial^\mu\vec{\pi} - \frac{1}{2}(\lambda\nu^2 - a^2)\vec{\pi}^2 + \frac{a^2}{2}\nu^2 \\ & -\frac{\lambda}{4}\nu^4 + i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - g\nu\bar{\psi}\psi + \mathcal{L}_I^b + \mathcal{L}_I^f, \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

en donde $\mathcal{L}_I^b$ y $\mathcal{L}_I^f$ describen las interacciones entre los campos bosónicos y fermiónicos, después del rompimiento de la simetría. Explícitamente,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_I^b &= -\frac{\lambda}{4} \left[(\sigma^2 + \pi_0^2)^2 + 4\pi^+\pi^- (\sigma^2 + \pi_0^2 + \pi^+\pi^-) \right], \\ \mathcal{L}_I^f &= -g\bar{\psi}(\sigma + i\gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\pi})\psi. \end{aligned}$$

De la Ec. (1.1.3), notamos que las masas de las partículas son

$$\begin{aligned} m_\sigma^2 &= 3\lambda\nu^2 - a^2, \\ m_\pi^2 &= \lambda\nu^2 - a^2, \\ m_f &= g\nu. \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

A partir de estas expresiones, pretendemos calcular la densidad de energía libre o el potencial efectivo para los bosones y fermiones a temperatura finita, con el objetivo de estudiar el rompimiento espontáneo de la simetría quiral y determinar el diagrama de fases en un plano μ (potencial químico) y T (temperatura).

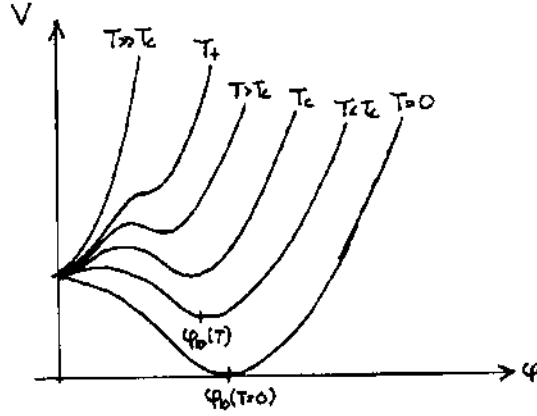


Figura 1.1.1: Potencial efectivo para una transición de primer orden.

Para esto, supongamos que tenemos un sistema con rompimiento espontáneo de la simetría y el potencial efectivo $V(\nu, T)$. Conforme la temperatura aumenta, la forma del potencial como función de ν cambia, y a temperatura suficientemente alta $T > T_c$, el mínimo del potencial efectivo está en $\nu = 0$ por lo que el sistema se estabiliza en un estado simétrico. Ésto es a lo que llamamos transición de fase de la fase rota a la fase simétrica. En el universo temprano, la temperatura era alta, y el universo estaba en la fase simétrica. Conforme el universo se enfrió y la temperatura cayó debajo de T_c , el universo se sometió a una transición de fase a la fase rota. Dicha transición puede ser de primer orden o segundo orden. En la transición de primer orden, el potencial efectivo tiene dos mínimos (locales) en cierto rango de temperaturas (T_- , T_+), el vacío verdadero o mínimo global y el vacío falso, ver Fig. 1.1.1. A la temperatura crítica T_c , ($T_- < T_c < T_+$), el potencial efectivo tiene el mismo valor en ambos mínimos. También a primer orden, a la transición le toma una cantidad considerable de tiempo el pasar de la fase simétrica a la fase rota, es decir que, durante la transición coexisten regiones o dominios con diferentes fases. A segundo orden, la transición toma lugar instantáneamente, es decir, para $T > T_c$ el único mínimo local es $\varphi = 0$ mientras que para $T < T_c$ ya no hay mínimo, ver Fig. 1.1.2.

1.2. Potencial Fermiónico

La contribución fermiónica al potencial efectivo estándar definida como

$$V_f = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \ln S^{-1/2}, \quad (1.2.1)$$

con S el propagador del fermión en el espacio frecuencia-momentum, dado por

$$S = i [\omega_n + \gamma^0 \vec{\gamma} \cdot \vec{p} - m\gamma^0], \quad \omega_n = 2(n+1)\pi T. \quad (1.2.2)$$

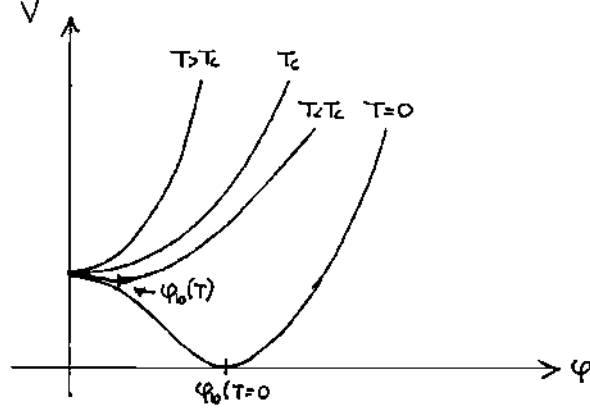


Figura 1.1.2: Potencial efectivo para una transición de segundo orden.

En el modelo sigma lineal, el potencial efectivo con temperatura y potencial químico de quarks finitos (en las mismas escalas que la masa) es

$$\begin{aligned}
 V_f &= -\frac{2}{\beta} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[\ln \left(1 + e^{-(\sqrt{k^2+m^2}-\mu)/T} \right) + \ln \left(1 + e^{-(\sqrt{k^2+m^2}+\mu)/T} \right) \right] \\
 &= -\frac{T}{\pi^2} \int_0^\infty dk \, k^2 \left[\ln \left(1 + e^{-(\sqrt{k^2+m^2}-\mu)/T} \right) + \ln \left(1 + e^{-(\sqrt{k^2+m^2}+\mu)/T} \right) \right].
 \end{aligned}
 \tag{1.2.3}$$

Para resolver esta integral, vamos a seguir el procedimiento empleado por Dolan-Jackiw [14] que consiste en establecer una ecuación diferencial de segundo orden. Consideremos que

$$x = \frac{k}{T}, \quad y = \frac{m}{T}, \quad z = \frac{\mu}{T}.$$

Entonces, la Ec (1.2.3) se expresa como

$$V_f = -\frac{T^4}{\pi^2} \int_0^\infty dx \, x^2 \left[\ln \left(1 + e^{-(\sqrt{x^2+y^2}-z)} \right) + \ln \left(1 + e^{-(\sqrt{x^2+y^2}+z)} \right) \right].$$

Ahora, si tomamos la segunda derivada con respecto a y^2 y logramos obtener una expresión explícita para tal derivada, podemos integrar dicha expresión para obtener V_f y usando las condiciones de frontera

$$V_f(y=0, z), \quad \left. \frac{d}{dy^2} V_f(y, z) \right|_{y=0}.$$

determinar las constantes de integración. Veamos primero,

$$\begin{aligned} V_f(y=0, z) &= -\frac{T^4}{\pi^2} \int_0^\infty dx x^2 \left[\ln(1 + e^{-(x-z)}) + \ln(1 + e^{-(x+z)}) \right] \\ &= \frac{2T^4}{\pi^2} (\text{Li}_4(-e^z) + \text{Li}_4(-e^{-z})) \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

donde $\text{Li}_s(z)$ es la función polilogaritmo o función de Jonquière [15]. Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy^2} V_f(y, z) &= -\frac{T^4}{\pi^2} \left(-\frac{1}{2} \right) \int_0^\infty \frac{dx x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \\ &\quad \left[\frac{1}{e^{(\sqrt{x^2 + y^2} - z)} + 1} + \frac{1}{e^{(\sqrt{x^2 + y^2} + z)} + 1} \right] \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

Evaluando en $y = 0$,

$$\left. \frac{d}{dy^2} V_f(y, z) \right|_{y=0} = \frac{T^4}{2\pi^2} \int_0^\infty dx \left[\frac{x}{e^{(x-z)} + 1} + \frac{x}{e^{(x+z)} + 1} \right] \quad (1.2.6)$$

$$= -\frac{T^4}{2\pi^2} (\text{Li}_2(-e^z) + \text{Li}_2(-e^{-z})) . \quad (1.2.7)$$

Ahora pasamos a calcular la segundo derivada de $V_f(y, z)$,

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{(dy^2)^2} V_f(y, z) &= \frac{T^4}{2\pi^2} \frac{d}{dy^2} \int_0^\infty \frac{dx x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &\quad \left[\frac{1}{e^{(\sqrt{x^2 + y^2} - z)} + 1} + \frac{1}{e^{(\sqrt{x^2 + y^2} + z)} + 1} \right] \\ &= \frac{T^4}{2\pi^2} \int_0^\infty dx x^2 \frac{d}{dy^2} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &\quad \left[\frac{1}{e^{(\sqrt{x^2 + y^2} - z)} + 1} + \frac{1}{e^{(\sqrt{x^2 + y^2} + z)} + 1} \right] . \end{aligned} \quad (1.2.8)$$

De la Ec. (1.2.8), podemos ver que derivar con respecto de y^2 es equivalente a derivar con respecto de x^2 , es decir

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{(dy^2)^2} V_f(y, z) &= \frac{T^4}{2\pi^2} \int_0^\infty dx x^2 \frac{d}{dx^2} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right. \\ &\quad \left. \left[\frac{1}{e^{(\sqrt{x^2 + y^2} - z)} + 1} + \frac{1}{e^{(\sqrt{x^2 + y^2} + z)} + 1} \right] \right), \end{aligned}$$

de modo que si cambiamos el diferencial $2dx \ x^2 \rightarrow \sqrt{x^2}dx^2$, podemos integrar por partes. Esto es

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{(dy^2)^2} V_f(y, z) &= \frac{T^4}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{dx^2}{2\sqrt{x^2}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &\quad \left[\frac{1}{e^{(\sqrt{x^2+y^2}-z)} + 1} + \frac{1}{e^{(\sqrt{x^2+y^2}+z)} + 1} \right]. \end{aligned}$$

El término que se evalúa en los extremos, se anula. Si regresamos al diferencial original, finalmente tenemos que

$$\frac{d^2}{(dy^2)^2} V_f = \frac{T^4}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dx \frac{1}{\omega} \left[\frac{1}{e^{(\omega-z)} + 1} + \frac{1}{e^{(\omega+z)} + 1} \right], \quad (1.2.9)$$

con

$$\omega^2 \equiv x^2 + y^2.$$

Para resolver esta integral, recordemos que [16]

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n-a)(n-b)} = -\frac{\pi(\cot(\pi a) - \cot(\pi b))}{a-b}.$$

Entonces, hacemos

$$\begin{aligned} a &= i\frac{\omega}{2\pi} - c; \quad b = -i\frac{\omega}{2\pi} - c, \quad c = i\frac{z}{2\pi} + \frac{1}{2} \\ (a-b) &= i\frac{\omega}{\pi}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} (n-a)(n-b) &= \left(n - i\frac{\omega}{2\pi} + c\right) \left(n + i\frac{\omega}{2\pi} + c\right) \\ &= (n+c)^2 + \frac{\omega^2}{4\pi^2} \\ &= \left(\frac{2n+1}{2} + i\frac{z}{2\pi}\right)^2 + \frac{\omega^2}{4\pi^2} \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \left[((2n+1)\pi + iz)^2 + \omega^2 \right]. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \cot(\pi a) &= \cot \left[i\frac{\omega-z}{2} - \frac{\pi}{2} \right], \\ &= -i \tanh \left[\frac{\omega-z}{2} \right], \\ \cot(\pi b) &= \cot \left[-i\frac{\omega+z}{2} - \frac{\pi}{2} \right], \\ &= i \tanh \left[\frac{\omega+z}{2} \right], \end{aligned}$$

pero recordando que

$$\tanh(\theta) = 1 - \frac{2}{e^{2\theta} + 1},$$

entonces

$$\cot(\pi a) - \cot(\pi b) = 2i \left(\frac{1}{e^{\omega-z} + 1} + \frac{1}{e^{\omega+z} + 1} - 1 \right),$$

$$\begin{aligned} -\frac{\pi(\cot(\pi a) - \cot(\pi b))}{a-b} &= \frac{i2\pi}{i\frac{\omega}{\pi}} \left(\frac{1}{e^{\omega-z} + 1} + \frac{1}{e^{\omega+z} + 1} - 1 \right), \\ &= \frac{2\pi^2}{\omega} \left(\frac{1}{e^{\omega-z} + 1} + \frac{1}{e^{\omega+z} + 1} - 1 \right), \end{aligned}$$

por lo que,

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{4\pi^2}{((2n+1)\pi + iz)^2 + \omega^2} &= -\frac{2\pi^2}{\omega} \left(\frac{1}{e^{\omega-z} + 1} + \frac{1}{e^{\omega+z} + 1} - 1 \right), \\ \frac{1}{\omega} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{-2}{((2n+1)\pi + iz)^2 + \omega^2} &= \frac{1}{\omega} \left(\frac{1}{e^{\omega-z} + 1} + \frac{1}{e^{\omega+z} + 1} \right). \end{aligned} \quad (1.2.10)$$

Aplicando la Ec. (1.2.10) en la Ec. (1.2.9), tenemos que

$$\frac{d^2}{(dy^2)^2} V_f = \frac{T^4}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dx \left[\frac{1}{\omega} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{-2}{((2n+1)\pi + iz)^2 + \omega^2} \right].$$

Así la integral a resolver es

$$I = I_\epsilon^{(1)} + I_\epsilon^{(2)},$$

$$\begin{aligned} I_\epsilon^{(1)} &= -2 \int_0^\infty dx \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{x^{-\epsilon}}{((2n+1)\pi + iz)^2 + x^2 + y^2}, \\ I_\epsilon^{(2)} &= \int_0^\infty dx \frac{x^{-\epsilon}}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \end{aligned}$$

donde hemos regularizado como Dolan y Jackiw [14]. Veamos primero $I_\epsilon^{(1)}$. Para esto, proponemos el cambio de variable

$$u = \frac{x}{\sqrt{[(2n+1)\pi + iz]^2 + y^2}}, \quad x^\epsilon = \frac{u^{-\epsilon}}{\left([(2n+1)\pi + iz]^2 + y^2 \right)^{\frac{\epsilon}{2}}}.$$

Entonces, la integral se reduce a

$$\begin{aligned}
I_\epsilon^{(1)} &= -2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(((2n+1)\pi + iz)^2 + y^2 \right)^{\frac{\epsilon+1}{2}}} \int_0^\infty du \frac{u^{-\epsilon}}{(1+u^2)} \\
&= -2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(((2n+1)\pi + iz)^2 + y^2 \right)^{\frac{\epsilon+1}{2}}} \left[\frac{\pi/2}{\cos\left(\frac{\pi\epsilon}{2}\right)} \right] \\
&= -\pi \sec\left(\frac{\pi\epsilon}{2}\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\left(((2n+1)\pi + iz)^2 + y^2 \right)^{\frac{\epsilon+1}{2}}} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\left(((2n+1)\pi - iz)^2 + y^2 \right)^{\frac{\epsilon+1}{2}}} \right).
\end{aligned}$$

Veamos los términos de la suma

$$\frac{1}{\left(((2n+1)\pi \pm iz)^2 + y^2 \right)^{\frac{\epsilon+1}{2}}} = [(2n+1)\pi \pm iz]^{-\epsilon-1} \left(1 + \frac{y^2}{[(2n+1)\pi \pm iz]^2} \right)^{-\frac{\epsilon+1}{2}}.$$

Realizamos un desarrollo en y cerca de $y = 0$,

$$\frac{1}{\left(((2n+1)\pi - iz)^2 + y^2 \right)^{\frac{\epsilon+1}{2}}} \approx \frac{1}{[(2n+1)\pi \pm iz]^{\epsilon+1}} + \mathcal{O}(y^2).$$

Estamos interesados en estudiar el diagrama de fase, es decir, estamos cerca de la temperatura crítica, por lo que podemos prescindir de los términos $\mathcal{O}(y^2)$. Entonces, la suma es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{[(2n+1)\pi \pm iz]^{\epsilon+1}} = \frac{1}{(2\pi)^{\epsilon+1}} \zeta\left(\epsilon+1, \frac{1}{2} \pm i \frac{z}{2\pi}\right),$$

donde $\zeta(s, q)$ es la función zeta de Hurwitz [17]

$$\zeta(s, q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(q+n)^s}.$$

Entonces,

$$I_\epsilon^{(1)} = -\frac{\pi \sec\left(\frac{\pi\epsilon}{2}\right)}{(2\pi)^{\epsilon+1}} \left[\zeta\left(\epsilon+1, \frac{1}{2} + i \frac{z}{2\pi}\right) + \zeta\left(\epsilon+1, \frac{1}{2} - i \frac{z}{2\pi}\right) \right].$$

Ahora, realizamos un desarrollo en serie del regulador a orden 0, de modo que reescribimos

$$I_\epsilon^{(1)} = -\frac{1}{\epsilon} + \ln(2\pi) + \frac{1}{2} \left(\psi^{(0)} \left(\frac{1}{2} + i\frac{z}{2\pi} \right) + \psi^{(0)} \left(\frac{1}{2} - i\frac{z}{2\pi} \right) \right),$$

con $\psi^{(m)}(z)$ la función poligamma de orden m [15]. Procedamos ahora a calcular

$$I_\epsilon^{(2)} = \int_0^\infty dx \frac{x^\epsilon}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{\epsilon} + \ln\left(\frac{2}{y}\right).$$

Es claro que al sumar $I_\epsilon^{(1)} + I_\epsilon^{(2)}$, el regulador de la divergencia se cancela y tenemos que

$$\frac{d^2}{(dy^2)^2} V_f = -\frac{T^4}{(2\pi)^2} \left(\ln\left(\frac{4\pi}{y}\right) + \frac{1}{2} \left[\psi^{(0)} \left(\frac{1}{2} + i\frac{z}{2\pi} \right) + \psi^{(0)} \left(\frac{1}{2} - i\frac{z}{2\pi} \right) \right] \right).$$

Si ahora integramos y de las condiciones de frontera de las Ecs. (1.2.4) y (1.2.7) determinamos las constantes de integración, tenemos que la contribución térmica al potencial fermiónico es

$$\begin{aligned} V_f^T = & -\frac{T^4}{16\pi^2} \left(y^4 \left[\ln\left(\frac{y}{4\pi}\right)^2 + \frac{3}{2} + \psi^{(0)} \left(\frac{1}{2} + i\frac{z}{2\pi} \right) + \psi^{(0)} \left(\frac{1}{2} - i\frac{z}{2\pi} \right) \right] \right. \\ & \left. + 8y^2 (\text{Li}_2(-e^z) + \text{Li}_2(-e^{-z})) - 32 (\text{Li}_4(-e^z) + \text{Li}_4(-e^{-z})) \right). \end{aligned} \quad (1.2.11)$$

Agregando el bien conocido término del vacío [18], finalmente tenemos el potencial fermiónico

$$\begin{aligned} V_f = & \left(\frac{m^4}{16\pi^2} \left[\ln\left(\frac{\pi T}{\mu}\right)^2 + 3\ln 2 + 1 \right. \right. \\ & \left. - \psi^{(0)} \left(\frac{1}{2} + i\frac{z}{2\pi} \right) + \psi^{(0)} \left(\frac{1}{2} - i\frac{z}{2\pi} \right) \right] \\ & - \frac{m^2 T^2}{2\pi^2} (\text{Li}_2(-e^z) + \text{Li}_2(-e^{-z})) \\ & \left. + \frac{2T^4}{\pi^2} (\text{Li}_4(-e^z) + \text{Li}_4(-e^{-z})) \right). \end{aligned} \quad (1.2.12)$$

A continuación requerimos de la contribución de los bosones al potencial efectivo, la cual calcularemos en la siguiente sección.

1.3. Potencial Bosónico

La contribución bosónica al potencial efectivo viene dada por

$$V_b = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \ln D^{-1/2}, \quad (1.3.1)$$

con

$$D = \frac{1}{k^2 + m^2 + \omega_n^2}, \quad \omega_n = 2n\pi T. \quad (1.3.2)$$

A continuación, escribimos la Ec. (1.3.2) de forma que

$$\begin{aligned} V_b &= T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \int dm^2 \frac{\partial}{\partial m^2} \ln D^{-1/2} \\ &= T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \int dm^2 \left(-\frac{1}{2} D^{-1} \frac{\partial D}{\partial m^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \int dm^2 T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega_n^2 + \omega^2}, \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

donde

$$\omega^2 \equiv k^2 + m^2. \quad (1.3.4)$$

Sabemos que,

$$T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega_n^2 + \omega^2} = \frac{1}{2\omega} [1 + 2n(\omega)], \quad (1.3.5)$$

con $n(\omega)$ la función número

$$n(\omega) = \frac{1}{e^{\frac{\omega}{T}} - 1}. \quad (1.3.6)$$

Así, obtenemos que

$$\begin{aligned} V_b &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \int dm^2 \frac{1 + 2n(\omega)}{2\omega} \\ &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \int dm^2 \left(\frac{1}{4\omega} + \frac{n(\omega)}{2\omega} \right) \\ &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left[\frac{\omega}{2} + T \ln(1 - e^{-\frac{\omega}{T}}) \right]. \end{aligned}$$

Enseguida, separamos las contribuciones del vacío y la contribución térmica como

$$V_b^{vac} = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\omega}{2}, \quad (1.3.7)$$

$$\begin{aligned} V_b^T &= T \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \ln(1 - e^{-\frac{\omega}{T}}) \\ &= T \int \frac{d\Omega}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dk k^2 \ln(1 - e^{-\frac{\omega}{T}}). \end{aligned} \quad (1.3.8)$$

Para el cálculo del vacío, recordemos la identidad [19]

$$I(m, d, s) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2 + m^2)^s} = \frac{\Gamma(s - \frac{d}{2})}{\Gamma(s)} \frac{(4\pi)^{d/2}}{(m^2)^{s-d/2}}. \quad (1.3.9)$$

En nuestro caso tomamos, $s = -1/2$ y $d = 3 - 2\epsilon$, con ϵ como regulador dimensional. Entonces, tenemos que

$$(4\pi)^{-\frac{3}{2}+\epsilon} = \frac{2\sqrt{2}}{(4\pi)^2} (1 + \epsilon \ln 4\pi) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (1.3.10)$$

$$(m^2)^{2-\epsilon} = m^4 \Lambda^{-2\epsilon} \left(\frac{\Lambda^2}{m^2} \right)^\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (1.3.11)$$

donde Λ es un parámetro de renormalización. Ahora, usando las propiedades de la función Gamma, tenemos que

$$\Gamma(-2 + \epsilon) = \frac{1}{(-2 + \epsilon)(-1 + \epsilon)\epsilon} \Gamma(-1 + \epsilon).$$

Realizamos un desarrollo en serie de Taylor y finalmente obtenemos[19]

$$\Gamma(-2 + \epsilon) = \frac{1}{2\epsilon} \left(1 + \frac{\epsilon}{2} \right) (1 + \epsilon) (1 - \gamma_E) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (1.3.12)$$

Uniendo los resultados de las Ecs. (1.3.10), (1.3.11) y (1.3.12), la expresión para el término de vacío del potencial bosónico es de la forma

$$V_b^{vac} = -\frac{m^4 \Lambda^{2\epsilon}}{64\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon} + \ln \left(\frac{4\pi \Lambda^2}{m^2} \right) - \gamma_E + \frac{3}{2} + \mathcal{O}(\epsilon) \right). \quad (1.3.13)$$

Para calcular la parte térmica, es de nuestro interés revisar los límites de alta y baja temperatura. En la siguiente sección vamos analizar el caso de alta temperatura.

1.4. Altas Temperaturas

En 1974, Dolan y Jackiw [14], elaboraron un desarrollo a alta temperatura partiendo de la Ec. (1.3.8). Su método consiste en desarrollar esta integral por medio de una ecuación diferencial de segundo orden. Ellos encontraron que

$$V_b^T = -\frac{\pi^2 T^4}{90} + \frac{m^2 T^2}{24} - \frac{m^3 T}{12\pi} + \frac{m^4}{64\pi^2} \left(\ln \left(\frac{4\pi T^2}{m^2} \right) - 2\gamma_E + \frac{3}{2} \right), \quad (1.4.1)$$

de modo que al agregar el término de vacío y para la renormalización de la masa, escogemos

$$-\delta m = \frac{1}{\epsilon} + \ln(4\pi) - \gamma_E + 1,$$

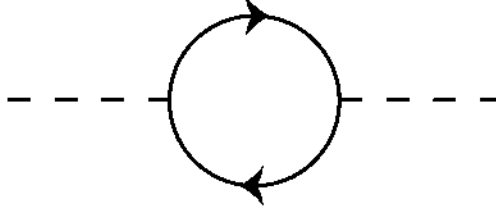


Figura 1.4.1: Diagrama de Feynman que representan la contribución a un lazo de la autoenergía del bosón. Líneas punteadas representa bosones mientras que las líneas solidas representan fermiones.

por lo que la contribución del potencial bosónico a altas temperaturas (incluyendo el nivel árbol) es

$$V_b = -\frac{a^2}{2}\nu^2 + \frac{\lambda}{4}\nu^2 - \frac{\pi^2 T^4}{90} + \frac{m^2 T^2}{24} - \frac{m^3 T}{12\pi} + \frac{m^4}{64\pi^2} \left(\ln \left(\frac{4\pi T^2}{\Lambda^2} \right) - 2\gamma_E + 1 \right). \quad (1.4.2)$$

A continuación, procedemos a calcular la autoenergía del bosón, ver Fig. 1.4.1, considerando únicamente la contribución térmica y la densidad y en el límite en el que la masa es pequeña comparada con T , es decir,

$$\begin{aligned} \Pi &= -4N_f N_c g^2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left(-\frac{1}{2k} \right) \left[\frac{1}{e^{(k-\mu)/T} + 1} + \frac{1}{e^{(k+\mu)/T} + 1} \right] \\ &= \frac{N_f N_c g^2}{\pi^2} \int_0^\infty dk k \left[\frac{1}{e^{(k-\mu)/T} + 1} + \frac{1}{e^{(k+\mu)/T} + 1} \right], \end{aligned}$$

donde $N_f = 2$ y $N_c = 3$ son el número de sabores ligeros y de colores respectivamente. Como vimos en la Ec. (1.2.6), la integral involucrada es

$$\Pi = -\frac{N_f N_c g^2 T^2}{\pi^2} \left[\text{Li}_2 \left(-e^{\frac{\mu}{T}} \right) + \text{Li}_2 \left(-e^{-\frac{\mu}{T}} \right) \right].$$

Agregando la interacción de los piones, obtenemos que la autoenergía para cualquiera de los bosones es

$$\Pi = \frac{\lambda T^2}{2} - \frac{N_f N_c g^2 T^2}{\pi^2} \left[\text{Li}_2 \left(-e^{\frac{\mu}{T}} \right) + \text{Li}_2 \left(-e^{-\frac{\mu}{T}} \right) \right]. \quad (1.4.3)$$

Entonces, juntando las Ecs. (1.2.12), (1.4.2), (1.4.3) y escogiendo la escala de renormalización como $\Lambda = e^{-1/2} a$, el potencial efectivo hasta la contribución de anillo para potencial químico finito y en el límite en el que la masa es pequeña

en comparación con T , está dado por

$$\begin{aligned}
V_{eff} = & -\frac{a^2}{2}\nu^2 + \frac{\lambda}{4}\nu^2 \\
& + \sum_{i=\sigma,\pi} \left\{ \frac{m_i^4}{64\pi^2} \left[\ln \left(\frac{4\pi T^2}{a^2} \right) - 2\gamma_E + 1 \right] \right. \\
& \left. - \frac{\pi^2 T^4}{90} + \frac{m_i^2 T^2}{24} - \frac{T}{12\pi} (m_i^2 + \Pi)^{\frac{3}{2}} \right\} \\
& - \frac{N_c}{16\pi^2} \sum_{f=u,d} \left\{ m_f^4 \left[\ln \left(\frac{4\pi T}{\sqrt{2}a} \right)^2 + 1 \right] \right. \\
& + \psi^{(0)} \left(\frac{1}{2} + i \frac{z}{2\pi} \right) + \psi^{(0)} \left(\frac{1}{2} - i \frac{z}{2\pi} \right) \\
& + 8m_f^2 T^2 (\text{Li}_2(-e^z) + \text{Li}_2(-e^{-z})) \\
& \left. - 32T^4 (\text{Li}_4(-e^z) + \text{Li}_4(-e^{-z})) \right\}. \tag{1.4.4}
\end{aligned}$$

donde hemos usado el término $(m_i^2 + \Pi)^{3/2}$ como una masa efectiva, donde la autoenergía contiene las propiedades del apantallamiento del plasma en la región infraroja [20]. Esto con la intención de considerar la contribución de los diagramas de anillo para cada especie de bosón. Entonces, la Ec. (1.4.4) describe el potencial efectivo considerando los efectos de apantallamiento a altas temperaturas. A continuación, vamos a fijar los valores de los parámetros λ , g y a de manera que podamos describir correctamente la transición de fase. Notemos que la masa de los bosones considerando efectos térmicos es (para $\mu = 0$)

$$m_\sigma^2(T) = 3\lambda\nu^2 - a^2 + \frac{\lambda}{2}T^2 + \frac{N_f N_c g^2}{6}T^2, \tag{1.4.5}$$

$$m_\pi^2(T) = \lambda\nu^2 - a^2 + \frac{\lambda}{2}T^2 + \frac{N_f N_c g^2}{6}T^2. \tag{1.4.6}$$

En la transición de fase ($T = T_c$), la curvatura del potencial efectivo se anula para $\nu = 0$ y como las masas de los bosones corregidas térmicamente son proporcionales a dicha curvatura, ésta también se anula en $\nu = 0$. Así, de las Ecs (1.4.5) y (1.4.6) obtenemos una relación de los parámetros del modelo a T_c dada por

$$\frac{a}{T_c} = \sqrt{\frac{\lambda}{2} + \frac{N_f N_c g^2}{6}}. \tag{1.4.7}$$

Además, podemos fijar el valor de a de la Ec. (1.1.4) notando que las masas de los bosones en el vacío satisfacen

$$a = \sqrt{\frac{m_\sigma^2 - 3m_\pi^2}{2}}. \tag{1.4.8}$$

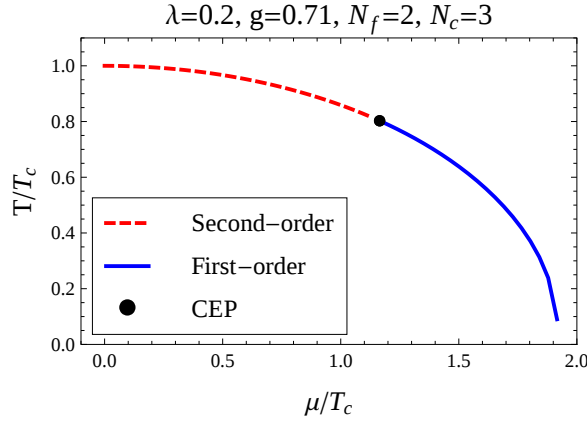


Figura 1.4.2: Diagrama de fase efectivo de QCD para $\lambda = 0.2$, $g = 0.71$ considerando $m_\sigma = 300$ MeV. La localización del CEP es $(\mu^{\text{CEP}}/T_c, T^{\text{CEP}}/T_c) \sim (1.2, 0.8)$.

Como en nuestro modelo estamos considerando en el límite quiral dos sabores de quarks, tomamos $T_c = 170$ MeV que es ligeramente mayor a la obtenida en simulaciones de lattice para $N_f = 2 + 1$. Considerando que es necesaria una transición de *crossover* (en nuestro modelo corresponde a una transición de segundo orden) con $g, \lambda \sim 1$ requerimos que $g^2 > \lambda$ para poder justificar un desarrollo perturbativo. Además, el potencial efectivo está escrito en potencias de a/T por lo que este cociente no debe ser mucho mayor a 1. Entonces, de las Ecs. (1.4.7) y (1.4.8) decimos que las constantes de acoplamiento son proporcionales a m_σ y de las condiciones previas, restringimos el análisis a valores no muy grandes de m_σ . Así que un tratamiento adecuado a los efectos de apantallamiento permite al modelo sigma lineal proporcionar valores del CEP del diagrama de fase para valores pequeños de m_σ . *The Particle Data Group* cita que $400 \text{ MeV} \leq m_\sigma \leq 550 \text{ MeV}$ [21] y analizan también que dicho valor de m_σ lo sitúa cerca del límite de dos piones [22], con el fin de satisfacer lo anterior, tomemos dos valores de m_σ cercanos al límite de dos piones, $m_\sigma = 300$ MeV y 400 MeV. Entonces, de la Ec. (1.4.8) los valores de λ y g están restringidos por

$$\sqrt{\frac{\lambda}{2} + \frac{N_f N_c g^2}{6}} = 0.77, 1.28.$$

Una posible solución consistente con todos los requerimientos previos es $\lambda = 0.2$, $g = 0.71$ para $m_\sigma = 300$ MeV y $\lambda = 0.86$, $g = 1.11$ para $m_\sigma = 400$ MeV. Las Figs. 1.4.2 y 1.4.3 muestran el diagrama de fase para la pareja previa de valores de los acoplamientos. Para construir los diagramas de fase, notemos que para valores pequeños de μ la transición de fase es de segundo orden, por lo que determinamos la temperatura crítica tomando la segunda derivada del potencial efectivo en la Ec. (1.4.4) y la igualaremos a cero en $\nu = 0$. Cuando

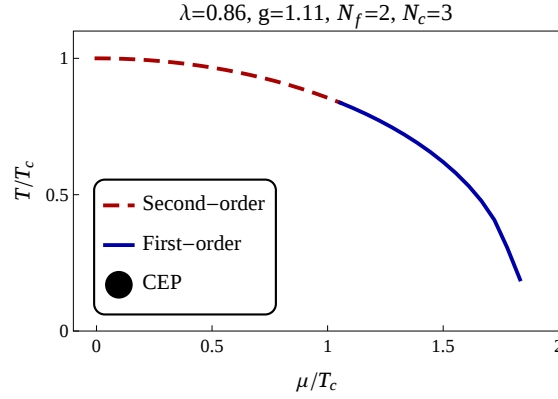


Figura 1.4.3: Diagrama de fase efectivo de QCD para $\lambda = 0.86$, $g = 1.11$ considerando $m_\sigma = 300$ MeV. La localización del CEP es $(\mu^{\text{CEP}}/T_c, T^{\text{CEP}}/T_c) \sim (1.2, 0.8)$.

μ crece y alcanza el CEP, la transición de fase se vuelve de primer orden y la temperatura crítica ahora se calcula buscando el valor de T para el cual el potencial efectivo posee un segundo mínimo en $\nu \neq 0$, que es degenerado con el mínimo en $\nu = 0$. Para los dos grupos de valores de los acoplamientos, se realizó el análisis previamente descrito y se localizó que la posición del CEP en ambos casos como [12]

$$\left(\frac{\mu^{\text{CEP}}}{T_c}, \frac{T^{\text{CEP}}}{T_c} \right) \sim (1.2, 0.8), \quad (1.4.9)$$

que se encuentra en la misma región que el CEP encontrado en trabajos de lattice [23, 24]. En la siguiente sección repetiremos este mismo análisis pero en el límite de bajas temperaturas.

1.5. Bajas Temperaturas

Nuevamente, partimos de la Ec. (1.3.8) y realizamos un desarrollo a bajas temperaturas ($m/T \gg 1$). Para esto, definamos nuevamente $x = k/T$, y $y = m/T$. Entonces

$$V_b^T = \frac{T^4}{2\pi^2} \int_0^\infty dx x^2 \ln \left(1 - e^{-\sqrt{x^2+y^2}} \right).$$

Como $y \gg 1$, podemos tomar que [25]

$$\ln \left(1 - e^{-\sqrt{x^2+y^2}} \right) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-n\sqrt{x^2+y^2}}.$$

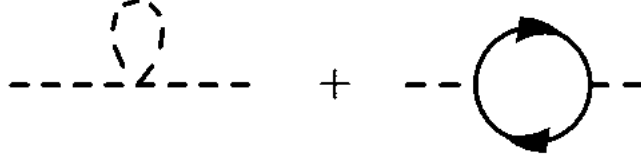


Figura 1.5.1: Diagrama de la autoenergía a primer orden para los bosones.

Entonces,

$$V_b^T = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T^4}{2\pi^2} \int_0^{\infty} dx \frac{x^2}{n} e^{-n\sqrt{x^2+y^2}}. \quad (1.5.1)$$

Esta última ecuación no requiere de un gran poder de cómputo para ser sumada e integrada numéricamente por *Mathematica* [26], de modo que para obtener la contribución bosónica al potencial efectivo, solo requerimos agregar la parte del vacío. Para el valor de la autoenergía del sistema consideramos la interacción del sigma con cada uno de los piones. Entonces la autoenergía es

$$\Pi = T \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega_n^2 + k^2 + m^2}, \quad (1.5.2)$$

de modo que la autoenergía se puede obtener a partir de la Ec. (1.3.3) como

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{\partial V_b}{\partial m^2} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int dk \frac{k^2}{\omega} n(\omega). \end{aligned}$$

Finalmente, la autoenergía Π_i para un solo bosón i está dada por

$$\Pi_i = \sum_{j=\sigma,\pi} \frac{s_j}{(2\pi)^2} \int dk \frac{k^2}{\omega} n(\omega) + \Pi_f, \quad (1.5.3)$$

donde s_j es el factor de simetría que corresponde a cada lazo de bosones y Π_f representa la contribución a un lazo de fermiones a la autoenergía del bosón, esto debido a que a diferencia del límite de altas temperaturas, en este límite, los bosones no tienen la energía necesaria para lograr apantallamiento, por lo que requerimos de la contribución del lazo de fermiones para que el potencial efectivo sea estable (ver Fig. 1.5.1). Notemos que, para las temperaturas de interés, cerca de la transición de fase, T puede ser considerada grande comparada con la masa de los fermiones, por lo que si bien no podemos considerar T pequeño en comparación con el parámetro de masa a en el sector bosónico, si podemos decir que un desarrollo a temperaturas altas con respecto a la masa del sector fermiónico es válida. Por lo tanto, podemos considerar para Π_f la misma expresión

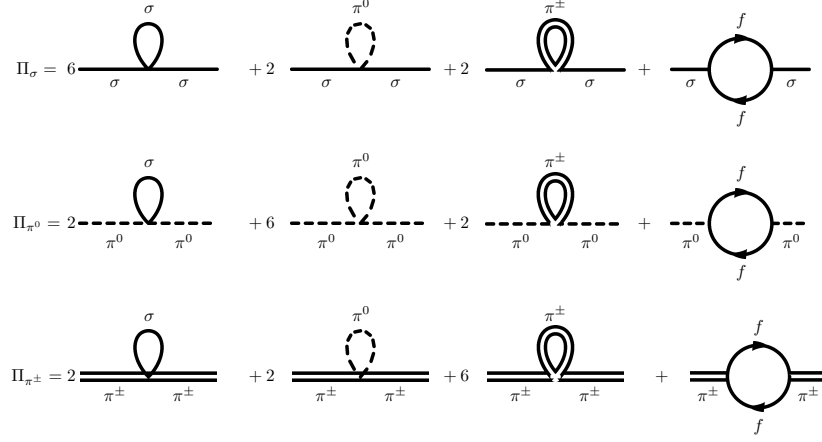


Figura 1.5.2: Forma diagramática para la autoenergía de los bosones. Cada vértice contribuye con $\lambda/4$.

que para la Ec. (1.4.3). Los diagramas que contribuyen a la autoenergía de cada tipo de bosón están representados en la Fig. 1.5.2 junto con su correspondiente factor de simetría que se pueden obtener del Lagrangiano de interacción

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \frac{\lambda}{4} (\sigma^4 + \pi_0^4 + 4\pi_0^2\pi_\pm\pi_\pm + 4\pi_\pm^2\pi_\pm^2 + 2\pi_0^2\sigma^2 + 4\pi_\pm\pi_\pm\sigma^2).$$

Entonces, es necesario resolver autoconsistentemente las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} \Pi_b^\sigma &= \frac{\lambda}{2} \left[3I \left(\sqrt{m_\sigma^2 + \Pi_b^\sigma} \right) + 2I \left(\sqrt{m_{\pi^\pm}^2 + \Pi_b^{\pi^\pm}} \right) + I \left(\sqrt{m_{\pi^0}^2 + \Pi_b^{\pi^0}} \right) \right] + \Pi_f \\ \Pi_b^{\pi^0} &= \frac{\lambda}{2} \left[3I \left(\sqrt{m_\sigma^2 + \Pi_b^\sigma} \right) + 2I \left(\sqrt{m_{\pi^\pm}^2 + \Pi_b^{\pi^\pm}} \right) + I \left(\sqrt{m_{\pi^0}^2 + \Pi_b^{\pi^0}} \right) \right] + \Pi_f \\ \Pi_b^{\pi^\pm} &= \frac{\lambda}{2} \left[3I \left(\sqrt{m_\sigma^2 + \Pi_b^\sigma} \right) + 2I \left(\sqrt{m_{\pi^\pm}^2 + \Pi_b^{\pi^\pm}} \right) + I \left(\sqrt{m_{\pi^0}^2 + \Pi_b^{\pi^0}} \right) \right] + \Pi_f \end{aligned} \quad (1.5.4)$$

donde

$$I(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + x^2}} n(\sqrt{k^2 + x^2}) dk. \quad (1.5.5)$$

Finalmente, usando las Ecs. (1.2.12), (1.4.3) y (1.5.4) el potencial efectivo en la aproximación de baja temperatura es

$$\begin{aligned}
V_{eff} = & -\frac{a^2}{2}\nu^2 + \frac{\lambda}{4}\nu^2 \\
& + \sum_{i=\sigma,\pi} \left\{ \frac{(m_i^2 + \Pi_i)^2}{64\pi^2} \left[\ln \left(\frac{m_i^2 + \Pi_i}{4\pi a^2} \right) + \gamma_E - \frac{1}{2} \right] \right. \\
& + \frac{T}{2\pi^2} \int dk \, k^2 \ln \left(1 - \exp \left(-\frac{\sqrt{k^2 + m_i^2 + \Pi_i}}{T} \right) \right) \Bigg\} \\
& - \frac{N_c}{16\pi^2} \sum_{f=u,d} \left\{ m_f^4 \left[\ln \left(\frac{4\pi T}{\sqrt{2}a} \right)^2 + 1 \right. \right. \\
& + \psi^{(0)} \left(\frac{1}{2} + i\frac{z}{2\pi} \right) + \psi^{(0)} \left(\frac{1}{2} - i\frac{z}{2\pi} \right) \Bigg] \\
& + 8m_f^2 T^2 (\text{Li}_2(-e^z) + \text{Li}_2(-e^{-z})) \\
& \left. \left. - 32T^4 (\text{Li}_4(-e^z) + \text{Li}_4(-e^{-z})) \right) \right\}. \tag{1.5.6}
\end{aligned}$$

Haciendo un análisis similar al realizado en el caso de altas temperaturas, estudiamos el diagrama de fase para la aproximación de baja- T , donde consideramos $T_c/a = 1/2$, que corresponde a $m_\sigma \approx 540$ MeV. Usando nuevamente la Ec. (1.4.7) restringimos los valores del λ y g . Además, escogemos un conjunto de parámetros de forma que el CEP se localice en la misma región que en el límite de alta temperatura. La Fig. 1.5.3 muestra el diagrama de fase y el CEP que encontramos, donde usamos $\lambda = 2.4$ y $g = 1.65$. Notemos que las Figs. 1.5.3 y 1.4.3 describen esencialmente el mismo diagrama de fase.

1.6. Presión

Con el fin de evaluar las consecuencias de describir el diagrama de fases con dos conjuntos de restricciones cuando se utilizan los desarrollos de alta temperatura y baja temperatura, en esta sección procederemos a calcular la presión P en el modelo de LSMq en ambos límites. Recordemos que la relación termodinámica entre P y V_{eff} es

$$P = -V_{eff}(\nu = 0). \tag{1.6.1}$$

En la Fig. 1.6.1 mostramos los resultados para $\mu = 0$ en la aproximación de baja y alta temperatura comparados con los resultados de *lattice* para dos sabores ligeros. Para el régimen de baja temperatura, usamos $\lambda = \lambda_{LT} = 2.4$ y $g = g_{LT} = 1.65$ y para el régimen de alta temperatura usamos $\lambda = \lambda_{HT} = 0.86$ y $g = g_{HT} = 1.11$ puesto que dichos parámetros reproducen el mismo CEP en ambos límites. El cálculo de la presión nos proporciona una descripción promedio

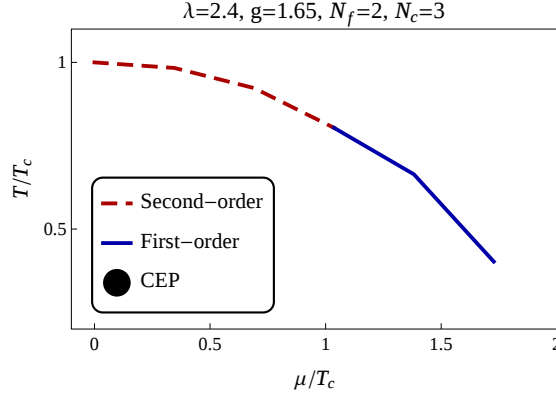


Figura 1.5.3: Diagrama de fase efectivo de QCD con $T_c/a = 1/2$ que corresponde a $m_\sigma = 540$ MeV. Tomamos $\lambda = 2.4$, $g = 1.65$ requiriendo que la localización del CEP sea $(\mu^{\text{CEP}}/T_c, T^{\text{CEP}}/T_c) \sim (1.2, 0.8)$.

de los datos de *lattice* en cada régimen de temperatura, es decir, el promedio de valores de P/T^4 a bajas temperaturas (hasta el máximo valor de T/T_c que se puede acceder) es similar al valor promedio de los datos de *lattice* en ese rango de temperaturas, $P/T^4 \simeq 2$. Lo mismo pasa en la descripción de altas temperaturas, donde obtenemos $P/T^4 \simeq 3$. El salto entre el límite de bajas y altas temperaturas cerca de T_c puede ser asociado al cambio en los valores del acoplamiento. Dicho cambio en los acoplamientos refleja la manera en la que el modelo puede incorporar el cambio en el número efectivo en los grados de libertad que describe el cambio de hadrones a quarks y gluones cuando vamos de bajas a altas temperaturas [13]. En este capítulo estudiamos el diagrama de fase de la QCD el cual es un aspecto de suma importancia en la física de partículas; que a la fecha no hay evidencia experimental de algunos aspectos de gran relevancia sobre el diagrama, como por ejemplo la ubicación del CEP, entre otros. Lo mismo sucede con varios modelos y teorías en QCD donde aún quedan dudas e incógnitas, en especial en el estudio de Teorías de Campos Cuánticos (QFT) en condiciones extremas, como en presencia de campos magnéticos o baños térmicos, las cuales son estudiadas como una reducción dimensional en la QFT correspondiente. En el siguiente capítulo, vamos a estudiar la teoría de baja-energía del Grafeno, y cómo dicha teoría está relacionada de muchas formas con la QCD, todo esto con el fin de proporcionar las herramientas para estudiar fenómenos de la QCD sin recurrir a grandes aceleradores o a detectores de partículas muy sofisticados como el LHC y tenerlo al alcance de un laboratorio estándar de materia condensada.

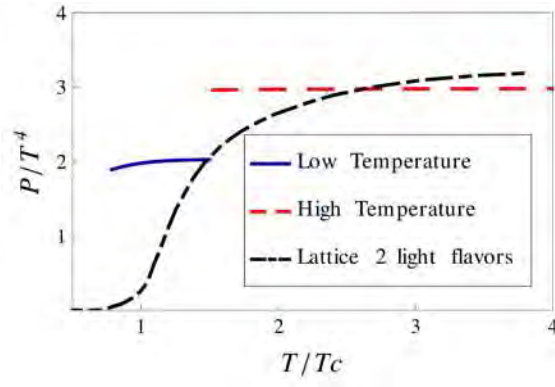


Figura 1.6.1: La presión calculada en el modelo dividida por T^4 y comparada con los datos de *lattice* para dos sabores ligeros. Los valores de los acoplamientos usados en la aproximación de baja y alta temperatura son $\lambda_{LT} = 2.4$ y $g_{LT} = 1.65$, $\lambda_{HT} = 0.86$ y $g_{HT} = 1.11$ respectivamente.

Capítulo 2

Teoría de baja energía del Grafeno

Una década ha pasado desde los primeros experimentos innovadores realizados por Andre Geim y Konstantin Novoselov (galardonados con el premio Nobel de Física en 2010) para aislar una muestra mono capa de grafito, el grafeno (Fig. 2.0.1) [1, 2]. Poco después, los grupos teóricos y experimentales resaltaron las propiedades de los portadores de carga en este material que se asemejan mucho a los electrones ultra-relativistas, estableciendo así un puente entre el estado sólido y la física de partículas. En este capítulo, describiremos brevemente las propiedades del grafeno y cómo gracias a estas propiedades se puede realizar física de partículas en este material.

2.1. El Grafeno

Se le denomina como grafeno a la membrana de átomos de carbono empaquetados en una red (lattice) 2-dimensional hexagonal. Es el componente estructural básico de todos los demás elementos gráfiticos. Puede ser envuelto para formar fulerenos, enrollado en nanotubos o apilado en grafito (ver Fig. 2.1.1). También, el grafeno proporciona un excelente análogo para el desarrollo de la Electrodinámica Cuántica en el plano (QED3), además de ser considerado un sistema excepcional de materia condensada.

2.1.1. Propiedades

Son varios los aspectos que se conjugan para hacer del grafeno un material tan interesante y revolucionario. Por un lado, es el primer cristal bidimensional que conocemos. Su espesor es apenas el de un átomo y no como el de las películas delgadas, que consta de cientos de átomos. Es un material tan duro como el diamante, pero posee una flexibilidad enorme, así que uno puede tomar una lámina de grafeno y deformarla sin romperla. Por otro lado, soporta intensas corrientes

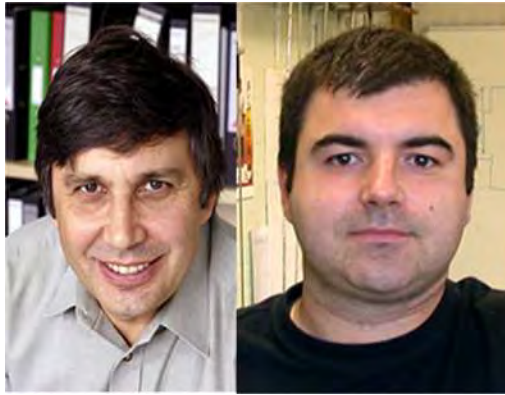


Figura 2.0.1: Izquierda: Andre Geim. Derecha: Konstantin Novoselov. (Tomada de: University of Manchester, via Associated Press)

eléctricas sin calentarse, pues es mucho mejor conductor térmico que la plata, y una vez que sus portadores de carga se mueven, “no miran atrás” literalmente, pues dada la alta movilidad de electrones en este material, las posibles colisiones que hay entre ellos no permitirían que uno de ellos rebotara hacia atrás. El hecho de que el grafeno sea 2-dimensional y no parte de una estructura tridimensional, como en las películas delgadas, lo hace un sistema físico muy peculiar. La producción de estructuras planas había sido un problema tecnológico vigente por mucho tiempo. Cuando se intentaban generar estas estructuras de un espesor muy pequeño con otros materiales o compuestos, se obtenían estructuras inestables. En algunos casos, sólo se conseguían pequeñas muestras imposibles de manipular para fines tecnológicos. La explicación a este fenómeno vino dada por los físicos Landau [27] y Mermin [28], quienes demostraron que en la naturaleza es imposible que un material cristalino bidimensional sea estable, debido a que las vibraciones naturales del material lo harían romperse. Sin embargo, en la actualidad se han generado muestras de grafeno tan grandes como un metro cuadrado de superficie. ¿Cómo logra el grafeno ser estable si es bidimensional? La respuesta es simple: La razón por la que el grafeno es estable a pesar de ser 2-dimensional es porque, en su forma natural, es corrugado. Es decir, visto de perfil, uno vería una superficie que no es más ancha que un átomo, pero que se arruga como una sábana. Esto hace recordar precisamente la concepción de Einstein sobre la forma del Universo: el espacio-tiempo es una superficie curva que cambia su forma en la medida en que interactúa la materia. Lo mismo ocurre en el grafeno, su curvatura se debe a las interacciones entre los núcleos atómicos de carbono y sus portadores de carga. Además, gracias al grafeno se despertó el interés en el estudio y desarrollo de otro tipo de materiales con características similares como los aislantes topológicos y los materiales de Weyl-Dirac [3]. Éstas son algunas de las propiedades que hacen del grafeno un tema de gran interés en la comunidad científica.

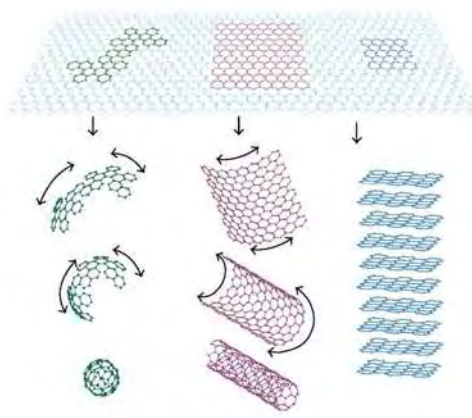


Figura 2.1.1: El grafeno y las demás estructuras gráficas. Adaptado de [2].

2.2. Estructura Cristalina

Como habíamos dicho, el grafeno es un sólido formado por átomos de carbono densamente empaquetados en una red cristalina hexagonal (panal de abeja). La red hexagonal es una de las 3 teselaciones regulares del plano y para describir la periodicidad de los puntos de la red desde un punto de vista analítico, se definen dos vectores $\vec{a}_1$ y $\vec{a}_2$, los cuales reciben el nombre de vectores fundamentales. Entonces, la periodicidad de la red queda definida como

$$\vec{T} = n_1 \vec{a}_1 + n_2 \vec{a}_2, \quad (2.2.1)$$

donde $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$. A partir de estos vectores, se construyen unas celdas elementales escogidas de tal modo que, por su forma, revelen la simetría de la red y a partir de éstas, caracterizarla. De todas las celdas elementales que se pueden construir, denominamos celda primitiva a la de volumen mínimo. Finalmente, la estructura de la celda primitiva a partir de la cual se construye la red hexagonal se muestra en la Fig. 2.2.1.

$$|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2|, \quad \varphi = 120^\circ.$$

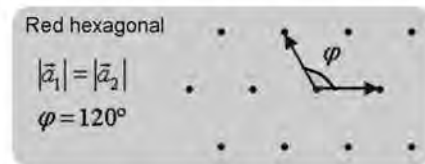


Figura 2.2.1: Vectores fundamentales de la red Hexagonal.

2.2.1. La Primera Zona de Brillouin

Para tener una mejor descripción sobre la estructura cristalina del grafeno, es necesario estudiar la red recíproca, es decir, la red en el espacio de momentos. Para esto, recordemos que una característica fundamental de una red tridimensional¹ es su periodicidad dada por $\vec{T} = n_1\vec{a}_1 + n_2\vec{a}_2 + n_3\vec{a}_3$. Por tanto, todas las magnitudes que dependan de la distribución de los átomos también serán periódicas. Así sucede con el potencial electrostático

$$\Phi(\vec{r}) = \Phi(\vec{r} + \vec{T}), \quad (2.2.2)$$

pero al ser una función periódica con periodo T , admite un desarrollo en serie de Fourier:

$$\Phi(\vec{r}) = \sum \Phi_k(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}},$$

donde

$$\Phi_k(\vec{k}) = \frac{1}{V_{\text{celda}}} \int \Phi(\vec{r}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} dV.$$

De la Ec. (2.2.2), podemos observar que

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}) &= \sum \Phi_k(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} = \Phi(\vec{r} + \vec{T}) = \sum \Phi_k(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r} + \vec{T})} \\ &\implies e^{i\vec{k} \cdot \vec{T}} = 1 \quad \therefore \vec{k} \cdot \vec{T} = 2m\pi \quad m \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

por lo que, si consideramos $\vec{k} = m_1\vec{k}_1 + m_2\vec{k}_2 + m_3\vec{k}_3$, entonces queremos que

$$\begin{aligned} m_1\vec{a}_1 \cdot \vec{k}_1 + m_2\vec{a}_1 \cdot \vec{k}_2 + m_3\vec{a}_1 \cdot \vec{k}_3 &= 2\pi m_1, \\ m_1\vec{a}_2 \cdot \vec{k}_1 + m_2\vec{a}_2 \cdot \vec{k}_2 + m_3\vec{a}_2 \cdot \vec{k}_3 &= 2\pi m_2, \\ m_1\vec{a}_3 \cdot \vec{k}_1 + m_2\vec{a}_3 \cdot \vec{k}_2 + m_3\vec{a}_3 \cdot \vec{k}_3 &= 2\pi m_3. \end{aligned}$$

Si además exigimos que satisfagan las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} \vec{a}_1 \cdot \vec{k}_1 &= 2\pi & \vec{a}_1 \cdot \vec{k}_2 &= 0 & \vec{a}_1 \cdot \vec{k}_3 &= 0, \\ \vec{a}_2 \cdot \vec{k}_1 &= 0 & \vec{a}_2 \cdot \vec{k}_2 &= 2\pi & \vec{a}_2 \cdot \vec{k}_3 &= 0, \\ \vec{a}_3 \cdot \vec{k}_1 &= 0 & \vec{a}_3 \cdot \vec{k}_2 &= 0 & \vec{a}_3 \cdot \vec{k}_3 &= 2\pi, \end{aligned}$$

entonces los vectores $\vec{k}_1$, $\vec{k}_2$ y $\vec{k}_3$ pueden ser escritos como

$$\vec{k}_1 = 2\pi \frac{\vec{a}_2 \times \vec{a}_3}{\vec{a}_1 \cdot (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3)}, \quad \vec{k}_2 = 2\pi \frac{\vec{a}_3 \times \vec{a}_1}{\vec{a}_1 \cdot (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3)}, \quad \vec{k}_3 = 2\pi \frac{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2}{\vec{a}_1 \cdot (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3)}.$$

Observe que el denominador de cada una de las ecuaciones es el volumen de la celda primitiva y el numerador tiene dimensiones de área, por lo que las dimensiones de los vectores $\vec{k}_i$ son las de un vector de onda.

¹Las mismas ideas se pueden trasladar al caso de cristales bidimensionales.

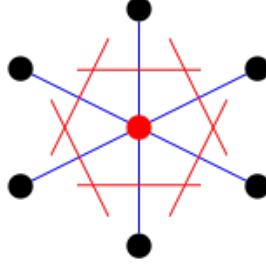


Figura 2.2.2: Celda de Wigner-Seitz.

A la celda formada por éstos vectores se le denomina celda elemental de la *red recíproca*. Podemos concluir que, formalmente, cualquier estructura cristalina tiene asociada dos importantes redes: la red cristalina que representa la red en el espacio real y la red recíproca que representa la red en el espacio de momentos recíproco (k -espacio). Finalmente, definimos como la primera zona de Brillouin a la celda primitiva de la red recíproca. Se construye por el método de la celda de Wigner–Seitz, que consiste en (ver Fig. 2.2.2)

1. Dibujar líneas que conecten un punto de la red con todos los vecinos más cercanos.
2. Trazar líneas normales en los puntos medios a las líneas dibujadas anteriormente, de manera que el volumen más pequeño encerrado de esta forma sea la celda primitiva de Wigner-Seitz.

En el caso del grafeno, la red recíproca a la red hexagonal es también una red hexagonal y los vectores que forman la primera zona de Brillouin son los que definen los puntos de Dirac (Fig. 2.2.3). En la siguiente sección describimos el modelo continuo que usamos para describir las cuasipartículas sin masa del grafeno que interactúan a través de un potencial Coulombiano ordinario.

2.3. Estructura de Bandas y Descripción del Modelo

La estructura de bandas del grafeno se puede obtener usando la aproximación de amarre fuerte. Tal aproximación es válida porque el carbono en los enlaces de grafeno tiene 3 de sus 4 electrones de valencia fuertemente atados a sus vecinos y un electrón libre en un orbital tipo p_z , cuya función de onda se traslapa muy poco con la función de onda del electrón del átomo vecino, dando lugar a que la probabilidad de saltos entre vecinos cercanos sea la más apreciable. La estructura cristalina del grafeno consiste de dos subredes triangulares que llamamos A y B en donde denotamos a las funciones de onda del electrón en el orbital p_z de las subredes A y B como $\Psi_{n,m}$ y $\Phi_{n,m}$, respectivamente, como se

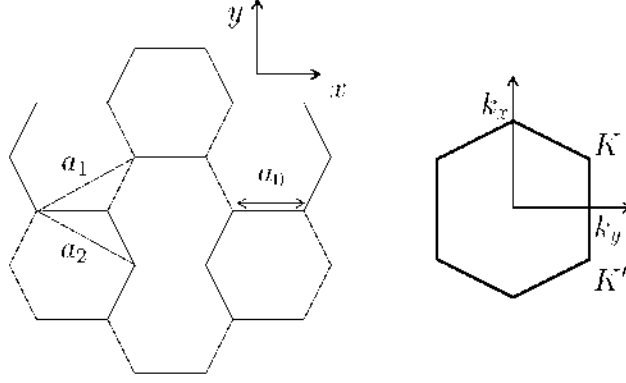


Figura 2.2.3: Estructura cristalina del grafeno (izquierda). Puntos de Dirac en la red recíproca (derecha). Los parámetros de la red son $a_0 = 1.42\text{\AA}$, $\vec{a}_1 = a_0\sqrt{3}(1/2, \sqrt{3}/2)$ y $\vec{a}_2 = a_0\sqrt{3}(-1/2, \sqrt{3}/2)$.

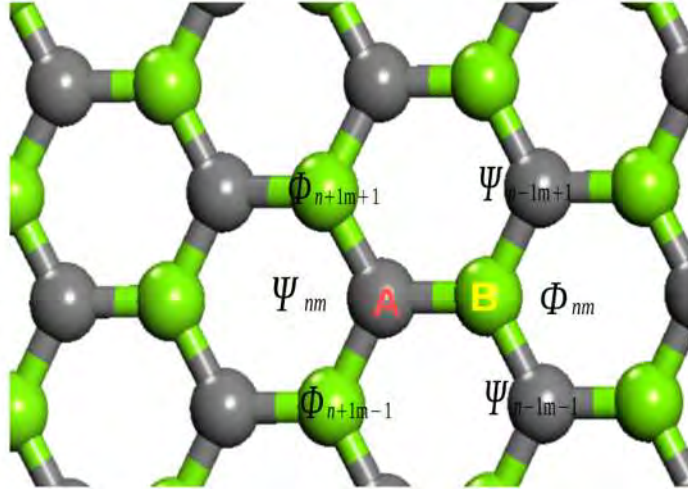


Figura 2.3.1: Redes triangulares de grafeno y funciones de onda para la red hexagonal. Los átomos en cada red triangular se indican con diferentes colores.

muestra en la Fig. 2.3.1. Las ecuaciones de Schrödinger en la aproximación de amarre fuerte son [29]

$$\begin{aligned} -t\Phi_{n+1,m-1} - t\Phi_{n+1,m+1} - t\Phi_{n,m} &= E\Psi_{n,m}, \\ -t\Psi_{n+1,m-1} - t\Psi_{n+1,m+1} - t\Psi_{n,m} &= E\Phi_{n,m}, \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

donde todas las integrales de salto, debido a la simetría del problema tienen el mismo valor ($t = 2.7$ eV), que es el resultado aproximado para grafeno. Como las subredes A y B son redes triangulares de Bravais, cada una tiene un conjunto de vectores primitivos dado por (ver Fig. 2.2.3).

$$\vec{a}_1 = \left(\frac{\sqrt{3}a}{2}, \frac{a}{2} \right), \quad \vec{a}_2 = \left(\frac{\sqrt{3}a}{2}, -\frac{a}{2} \right).$$

En consecuencia, la red recíproca es generada por

$$\vec{k}_1 = \frac{4\pi}{\sqrt{3}a} \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \quad \vec{k}_2 = \frac{4\pi}{\sqrt{3}a} \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right),$$

donde $\vec{a}_i \cdot \vec{k}_j = 2\pi\delta_{ij}$. Aplicando el teorema de Bloch, las funciones de onda se escriben como

$$\begin{aligned} \Psi_{n,m} &= \exp \left(i \frac{\sqrt{3}k_x a n}{2} + i \frac{k_y a m}{2} \right) u(\vec{k}), \\ \Phi_{n,m} &= \exp \left(i \frac{\sqrt{3}k_x a n}{2} + i \frac{k_y a m}{2} \right) v(\vec{k}). \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

Aquí las funciones $u(\vec{k})$ y $v(\vec{k})$ son periódicas en el espacio recíproco. Entonces las Ecs. (2.3.1) y (2.3.2) producen la siguiente ecuación de eigenvalores

$$\begin{bmatrix} 0 & \Delta(\vec{k}) \\ \Delta^*(\vec{k}) & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u(\vec{k}) \\ v(\vec{k}) \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} u(\vec{k}) \\ v(\vec{k}) \end{pmatrix}, \quad (2.3.3)$$

donde

$$\Delta(k) = -t - 2t \exp \left(i \frac{\sqrt{3}a k_x}{2} \right) \cos \frac{a k_y}{2},$$

cuyo espectro de energía es

$$E = \pm \sqrt{4t^2 \cos^2 \left(\frac{a}{2} k_y \right) + 4t^2 \cos \left(\frac{a}{2} k_y \right) \cos \left(\frac{\sqrt{3}a}{2} k_x \right) + t^2}. \quad (2.3.4)$$

El espectro para el caso en que $t = 1$ se muestra en la Fig. 2.3.2 [30], en donde podemos observar que cerca de los dos puntos inequivalentes (K, K') de la zona

de Brillouin, denominados puntos de Dirac, la estructura de bandas tiene forma de cono. Es por esta razón que se considera al grafeno como un semimetal con banda de energía prohibida de energía de tamaño cero.

Hagamos un análisis más detallado de lo que sucede cerca de los puntos de Dirac. Para esto, hagamos un desarrollo en serie de Taylor alrededor de, por ejemplo, el punto K

$$\Delta(K + k) = \frac{\sqrt{3}at}{2} (k_y - ik_x), \quad (2.3.5)$$

haciendo un cambio coordenadas tal que, $y \rightarrow x'$ y $x \rightarrow y'$ y sustituyendo la expresión resultante en la Ec. (2.3.3), el Hamiltoniano se escribe como

$$H = \frac{\sqrt{3}at}{2\hbar} \begin{pmatrix} 0 & \hbar(k_{x'} - ik_{y'}) \\ \hbar(k_{x'} + ik_{y'}) & 0 \end{pmatrix} = v_F (\vec{\sigma} \cdot \vec{k}),$$

que es precisamente el Hamiltoniano de Dirac². Como resultado, las cuasi-partículas cerca de los puntos de Dirac, denominados grafinos [31, 32], obedecen una relación de dispersión lineal $E = \hbar v_F k$ a bajas energías, siendo el límite hasta 1 eV [33]. Decimos entonces que los grafinos, cerca de los puntos de Dirac, se comportan de manera ultrarelativista, donde la velocidad de la luz c es reemplazada por la velocidad de Fermi

$$c = 3 \times 10^8 \text{ m/s} \implies v_F = 1 \times 10^6 \text{ m/s}.$$

Esto hace que la constante de acoplamiento en el grafeno sea

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137} \implies \alpha_{eff} = \frac{e^2}{\hbar v_F \kappa_e} \approx 2, \quad (2.3.6)$$

donde κ_e es la constante dieléctrica del sustrato donde se crea el grafeno³, lo que quiere decir que hay una fuerte atracción entre los grafinos y los anti-grafinos en los puntos de Dirac, lo que abre la posibilidad de estudiar aspectos de la QCD en este material.

2.4. Diagrama de Fase en grafeno

Un aspecto de suma importancia en la QCD es el hecho de que, a pesar de que los protones y neutrones están conformados de 3 quarks, la masa de éstos (alrededor de los 900 MeV) no corresponde a la masa de los 3 quarks (alrededor de los 3 MeV cada uno). Y es que debido a la fuerte interacción entre los quarks y los gluones, la masa de los protones no es únicamente de origen espontáneo, también es de origen dinámico proveniente de la autointeracción,

²Con los valores típicos de los parámetros a y t , se tiene que $v_F \simeq 1 \times 10^6 \text{ m/s}$.

³En el vacío, $\alpha_{eff} \approx 2.16$, mientras que en el SiO, que es un sustrato común del grafeno, $\alpha_{eff} \approx 0.79$.

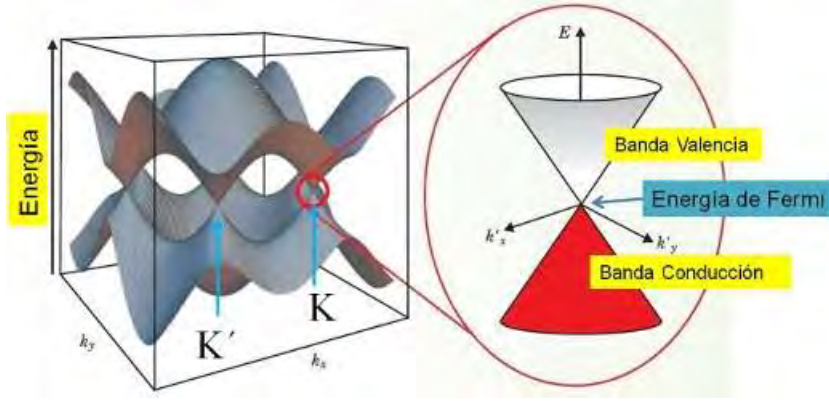


Figura 2.3.2: Relación de dispersión $E(k)$ para un electrón en grafeno. Las bandas de valencia y conducción se tocan en los puntos del espacio recíproco denotados por K y K'. A la derecha aparece una ampliación de los alrededores de K, indicándose la energía de Fermi. Tomada de [34].

por lo que sería de esperarse que en el caso del grafeno, al tener también una fuerte interacción, se genere masa debido a las interacciones, es decir, se dé la llamada Generación Dinámica de Masas (GDM). Para verificar si en efecto se tiene GDM, vamos a considerar que los portadores de carga del grafeno están confinados a moverse en el plano, mientras que los fotones se pueden mover por todo el espacio, es decir, su interacción es Coulombiana e instantánea. Entonces, cuando el acoplamiento es fuerte, las interacciones Coulombianas pueden generar una masa finita para los grafinos, lo que produce una transición de un semimetal a un aislante, denominado excitón [35, 36], debido a la formación de pares partícula-agujero estables. Esto es, precisamente, el escenario de ruptura dinámica de simetría quiral por la formación del condensado quiral. Una manera de estudiar la creación de dicha brecha es mediante las ESD para estos grafinos. En este trabajo usamos el mismo modelo propuesto por Gusynin, et al [37]

$$M(p) = \lambda \int_0^\Lambda dk \frac{kM(k)}{\sqrt{k^2 + M^2(k)}} \left[\frac{H(p-k)}{p} + \frac{H(k-p)}{k} \right], \quad (2.4.1)$$

$$\lambda = \frac{\alpha}{2 \left(1 + \frac{\pi}{4} N_f \alpha \right)}, \quad (2.4.2)$$

donde $H(x)$ es la función escalón de Heaviside y $N_f = 2$ (número de familias de grafinos). En trabajos anteriores se resolvió la Ec. (2.4.1) numéricamente mediante un *script* en el lenguaje de programación *Python* [39]. La Fig. 2.4.1 muestra la solución numérica de $M(p)$, donde podemos observar que se requiere de un valor mínimo del acoplamiento ($\lambda > 1/4^4$) para que se empiece a generar

⁴El valor de $\lambda_c \approx 1/4$ se obtuvo explícitamente de manera analítica mediante una aproximación y posteriormente verificada numéricamente. (ver[38])

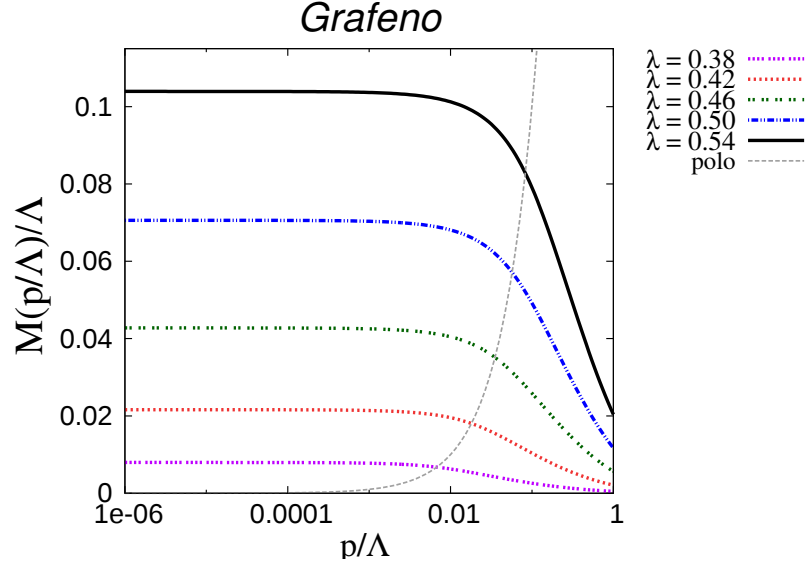


Figura 2.4.1: Solución a la función $M(p)$ para varios acoplamientos.

masa dinámicamente y que el valor de ésta se incremente conforme aumenta el valor del acoplamiento. De las Ecs. (2.3.6) y (2.4.2) podemos obtener un valor crítico para la constante dieléctrica,

$$\kappa_e^c \approx \frac{2.5742}{\alpha_c} = 1.104859. \quad (2.4.3)$$

Este valor crítico, nos sirve de referencia para comparar con los valores medidos de los sustratos en los que crece el grafeno, con el objetivo de identificar un posible escenario de GDM.⁵ A continuación, consideramos un baño térmico con el objetivo de estudiar la masa generada dinámicamente para distintas temperaturas y obtener el diagrama de fase Acoplamiento-Temperatura, que podría servir de guía para el estudio del diagrama de fase de la QCD. Entonces, partimos de la ecuación de brecha para grafinos a temperatura finita usando el formalismo de tiempo imaginario y regularización de tiempo propio

$$M(p) = \frac{\lambda}{\pi} T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} ds \int dq M(q) e^{-s(\omega_n^2 + q^2 + M(q)^2)}, \quad (2.4.4)$$

donde $\omega_n^2 = (2n+1)\pi T$ son las frecuencias de Matsubara. Considerando la aproximación de masa constante, $M(p) \rightarrow M$, lo que permite realizar la suma e integrar sobre q , tenemos que la ecuación de brecha a temperatura finita es

$$M = \frac{\lambda}{2\sqrt{\pi}} T \int_0^{\Gamma} ds \frac{e^{-s(M^2)}}{\sqrt{s}} \Theta_2(0, e^{-4\pi^2 s T^2}), \quad (2.4.5)$$

⁵Trabajo en proceso, próximo a enviarse.

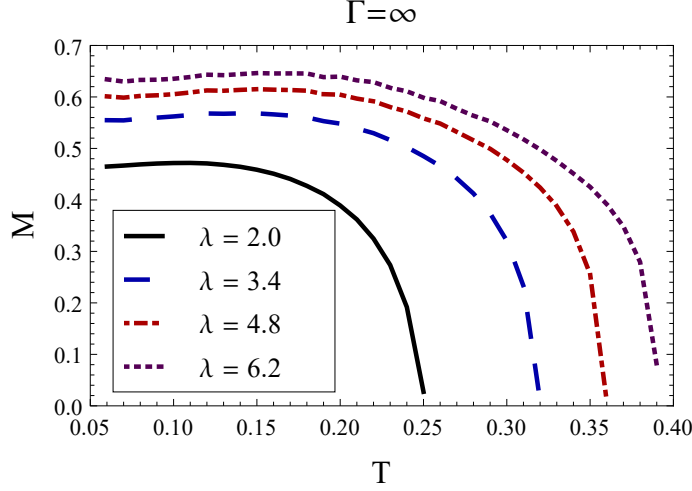


Figura 2.4.2: Masa generada dinámicamente en grafeno en función de la temperatura.

donde $\Theta_n(z, q)$ es la función theta de Jacobi [15]. Procedemos a resolver numéricamente la Ec. (2.4.5) de manera autoconsistente. En la Fig. 2.4.2, se muestra la masa generada en función de la temperatura para distintos acoplamientos, donde podemos observar que la temperatura dificulta la transición Semimetal-Aislante al punto de que a cierta temperatura, la brecha desaparece. Por último, en la Fig. 2.4.3 tenemos el diagrama de fase Acoplamiento-Temperatura, el cual nos dice que a mayor temperatura requerimos un acoplamiento mayor para tener GDM y además de que también se tiene un CEP a partir del cual se da la transición. Este resultado nos puede servir de guía para obtener información sobre este mismo fenómeno en la QCD donde aún hay muchas incógnitas sobre la estructura de dicho diagrama.

2.5. Colapso Atómico

El colapso atómico es un fenómeno predicho por vez primera en la década de los 30's, el cual dice que si un electrón que se encuentra orbitando en el núcleo siente un potencial Coulombiano tan intenso, éste puede colapsar hacia el núcleo y emitir positrones (ver por ejemplo [40]). En otras palabras, para observar el colapso, se requiere un potencial de Coulomb generado por un núcleo con una carga mayor que $Z = 137$, pero como los elementos naturales y artificiales conocidos apenas están sobrepasando la frontera del número atómico 118, no ha sido posible demostrar experimentalmente el colapso atómico. Por otro lado, las condiciones en grafeno y en otros materiales de Weyl-Dirac donde los portadores de carga se comportan como partículas ultrarelativistas, pueden ser favorables

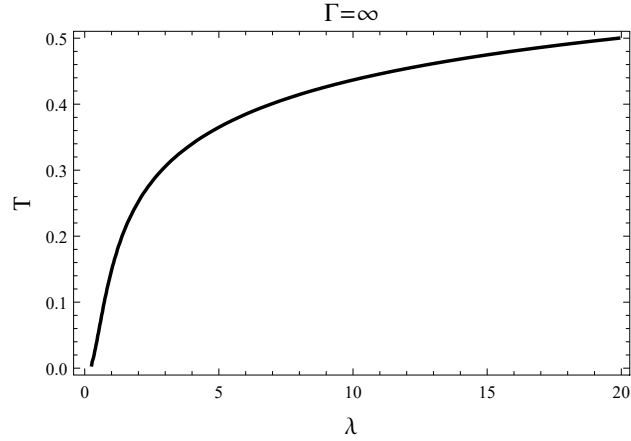


Figura 2.4.3: Diagrama de Fase Acoplamiento-Temperatura en grafeno.

para observar un posible colapso atómico. Por ejemplo en marzo de 2013, usando pares de átomos de calcio (llamados dímeros) colocados en la superficie del grafeno, donde la escala está dada por la velocidad de Fermi [ver Ec. 2.3.6], para simular núcleos atómicos súper cargados, se obtuvieron evidencias de lo que se podría considerar colapso atómico, al observar picos en la conductividad longitudinal después de agregar un cierto número de dímeros [41]. En esta sección vamos a verificar las condiciones necesarias para observar el colapso atómico en grafeno. Para esto, partimos de la ec. de Dirac para potenciales isotrópicos en coordenadas polares [42]

$$\left(-i(\vec{\sigma} \cdot \hat{r}) \left[\frac{d}{dr} + \frac{1}{2r} + i \frac{A_r(r)}{2\Phi_b} - \sigma_z \left(\frac{j}{r} + \frac{A_\theta(r)}{2\Phi_b} \right) \right] + \frac{\sigma_z}{n_g \lambda} + \frac{V(r)}{v_F \hbar} - \epsilon \right) \Psi_j(r, \theta) = 0, \quad (2.5.1)$$

donde $\epsilon = E/(v_F \hbar)$, es la energía escalada, $n_g = c/v_F$, el inverso del índice de refracción, $\lambda_c = \hbar/(\Delta c)$, la longitud de onda reducida, $\Phi_b = \Phi_0/2\pi$, el cuanto del flujo magnético y el momento angular total es conservado por lo que $\Psi_j(r, \theta)$ es eigenfunción del operador J_z , es decir

$$J_z \Psi_j(r, \theta) = j \hbar \Psi_j(r, \theta).$$

Proponemos una solución del tipo

$$\begin{aligned} \Psi_j(r, \theta) &= \frac{1}{\sqrt{r}} \begin{pmatrix} h_j(r) e^{i(j-\frac{1}{2})\theta} \\ ig_j(r) e^{i(j+\frac{1}{2})\theta} \end{pmatrix}, \\ &= \frac{1}{\sqrt{r}} \begin{pmatrix} e^{i(j-\frac{1}{2})\theta} & 0 \\ 0 & e^{i(j+\frac{1}{2})\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_j(r) \\ ig_j(r) \end{pmatrix}, \\ &\equiv M_j(\theta) \chi_j(r). \end{aligned}$$

Podemos expresar la matriz $M_j(\theta)$ en términos de σ_z , es decir,

$$M_j(\theta) = \begin{pmatrix} e^{i(j-\frac{1}{2})\theta} & 0 \\ 0 & e^{i(j+\frac{1}{2})\theta} \end{pmatrix} = e^{i(jI_{2 \times 2} - \frac{1}{2}\sigma_z)\theta}.$$

Es directo verificar que $(\vec{\sigma} \cdot \hat{r}) M_j(\theta) = M_j(\theta) \sigma_x$, lo cual nos permite escribir

$$\begin{aligned} M_j(\theta) \left(-i \left[\frac{d}{dr} + i \frac{A_r(r)}{2\Phi_b} + \sigma_z \left(\frac{j}{r} + \frac{A_\theta(r)}{2\Phi_b} \right) \right] \sigma_x \right. \\ \left. + \frac{\sigma_z}{n_g \lambda} + \frac{V(r)}{v_F \hbar} - \epsilon \right) \chi_j(r) = 0. \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

Por lo tanto, si definimos el potencial radial como

$$V_r(r) = \frac{A_r(r)}{2\Phi_b} \sigma_x + \frac{V(r)}{v_F \hbar} I_{2 \times 2}, \quad (2.5.3)$$

llegamos a la ecuación radial de Dirac para grafinos

$$\left(-i \left[\frac{d}{dr} + \sigma_z \left(\frac{j}{r} + \frac{A_\theta(r)}{2\Phi_b} \right) \right] \sigma_x + \frac{\sigma_z}{n_g \lambda} + V_r(r) - \epsilon \right) \chi_j(r) = 0. \quad (2.5.4)$$

En nuestro caso, vamos a considerar los dímeros de calcio como impurezas de tipo monopolo eléctrico, es decir,

$$A_r(r) = A_\theta(r) = 0, \quad V_r(r) = -\frac{Z\alpha_g}{r}, \quad (2.5.5)$$

donde $Z\alpha_g$ es la carga efectiva de la impureza eléctrica y $\alpha_g = \alpha n_g$ es la constante de estructura fina escalada para grafeno. Entonces, la Ec. (2.5.4) es

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{n_g \lambda} + \frac{Z\alpha_g}{r} + \epsilon & \frac{j}{r} - \frac{d}{dr} \\ \frac{j}{r} + \frac{d}{dr} & \frac{1}{n_g \lambda} - \frac{Z\alpha_g}{r} - \epsilon \end{pmatrix}}_{\mathbb{A}} \begin{pmatrix} g_j(r) \\ h_j(r) \end{pmatrix} = 0. \quad (2.5.6)$$

La dependencia de r en los elementos de la diagonal de la matriz $\mathbb{A}$ no permite desacoplar el sistema, puesto que el término $1/r$ aumenta su potencia tras ser derivado. Sin embargo, el desacoplamiento de las ecuaciones puede ser realizado si rotamos la matriz $\mathbb{A}$ de la manera adecuada, para esto definimos la matriz unitaria

$$U(\eta) = e^{i\frac{1}{2}\eta\sigma_y}, \quad (2.5.7)$$

donde el parámetro de la rotación η está definido por

$$\sin(\eta) = \frac{Z\alpha_g}{j}. \quad (2.5.8)$$

Si definimos $\nu^2 = j^2 - (Z\alpha_g)^2$, tenemos que

$$U(\eta) \mathbb{A} U^\dagger(\eta) = \begin{pmatrix} -\frac{\nu}{n_g \lambda j} - \epsilon & \frac{Z\alpha_g}{\lambda j} + \frac{\nu}{r} - \frac{d}{dr} \\ \frac{Z\alpha_g}{\lambda j} + \frac{\nu}{r} + \frac{d}{dr} & \frac{\nu}{n_g \lambda j} - \epsilon - 2\frac{Z\alpha_g}{r} \end{pmatrix}. \quad (2.5.9)$$

Ahora, supongamos que la función de onda radial se transforma como

$$U(\eta) \begin{pmatrix} g_j(r) \\ h_j(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_j(r) \\ F_j(r) \end{pmatrix}. \quad (2.5.10)$$

De este modo, ya es posible desacoplar el sistema de ecuaciones de forma estándar. Entonces, el sistema de ecuaciones desacopladas es

$$\begin{aligned} \left[-\frac{d^2}{dr^2} + \left(\frac{\nu}{r} - \frac{Z\alpha_g\epsilon}{\nu} \right)^2 - \frac{d}{dr} \left(\frac{\nu}{r} - \frac{Z\alpha_g\epsilon}{\nu} \right) \right] G_j(r) &= \aleph^2 G_j(r), \\ \left[-\frac{d^2}{dr^2} + \left(\frac{\nu}{r} - \frac{Z\alpha_g\epsilon}{\nu} \right)^2 + \frac{d}{dr} \left(\frac{\nu}{r} - \frac{Z\alpha_g\epsilon}{\nu} \right) \right] F_j(r) &= \aleph^2 F_j(r), \end{aligned} \quad (2.5.11)$$

con

$$\begin{aligned} \aleph^2 &= -\left(\frac{Z\alpha_g}{\lambda n_g j} \right)^2 - \left(\frac{\nu}{n_g \lambda j} \right)^2 + \epsilon^2 + \left(\frac{Z\alpha_g}{\nu} \epsilon \right)^2 \\ &= \left(\frac{\epsilon j}{\nu} \right)^2 - \left(\frac{1}{n_g \lambda} \right)^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, los valores de autoenergía son

$$\epsilon_{n,j} = \left(\frac{1}{n_g \lambda} \right) \left[1 + \frac{Z^2 \alpha_g^2}{(\nu + n)^2} \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad (2.5.12)$$

con $n \in \mathbb{Z}^+$ para $j > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ en cualquier otro caso. Así, podemos decir que para el estado base existe un valor crítico

$$Z_{cr} = \frac{1}{2\alpha_g}, \quad (2.5.13)$$

para el cual

$$\nu_{cr} = \sqrt{1 - (2Z_{cr}\alpha_g)^2} \quad (2.5.14)$$

es imaginario, lo que es un claro ejemplo de un fenómeno similar al colapso atómico. En términos del parámetro de la rotación, tenemos que para $\eta > \eta_{cr}$ se cumple que

$$\sin(\eta) > 1, \quad (2.5.15)$$

lo que solo puede ser logrado si η es imaginario, es decir, la transformación de la Ec. (2.5.7) ya no es unitaria. Podemos concluir que un fenómeno que podemos asociar al colapso atómico está directamente relacionado con una pérdida de unitariedad [42]. En el siguiente capítulo vamos a estudiar más a fondo una propiedad importante del grafeno, la absorción de luz, para esto usaremos técnicas de la física de partículas, de modo que sea más claro que se pueden usar herramientas de física fundamental para caracterizar grafeno.

Capítulo 3

Absorción de Luz en Grafeno

En este capítulo estudiaremos la absorción de luz y el efecto Faraday en el grafeno en dos distintos escenarios, campo magnético débil y grafeno deformado. Dichos fenómenos son de gran interés para la caracterización y potenciales aplicaciones tecnológicas del grafeno basados en los artículos [43] y [44]. Para esto, usaremos el tensor de Polarización del Vacío $\Pi^{\mu\nu}$, que dentro de la QED juega un rol fundamental, ya que cuantifica la aparición de pares virtuales de partícula-antipartícula de corta duración que se crean fuera del vacío y se aniquilan mutuamente. Usamos esta herramienta de gran utilidad en la física de partículas para comprender la dinámica en grafeno. En cuatro dimensiones, el tensor de polarización del vacío es

$$\Pi^{\mu\nu}(p) = -ie^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} [\gamma^\mu S(k) \gamma^\nu S(k-p)], \quad (3.0.1)$$

donde γ^μ son las matrices de Dirac y $S(k)$ es el propagador del fermión. En el caso del grafeno, los portadores de carga son descritos por modelos de amarre fuerte, los que permiten un límite continuo en términos de una versión sin masa de la electrodinámica cuántica en (2+1) dimensiones, pero con la interacción Coulombiana que varía como el inverso de la distancia [45]. Por lo tanto, sus portadores pueden ser descritos por el Lagrangiano no masivo de Dirac

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi. \quad (3.0.2)$$

La estructura simétrica que existe entre las dos subredes triangulares nos permite migrar este modelo en una teoría de 4-componentes para los portadores de carga llamada Electrodinámica Cuántica Reducida (RQED), donde las matrices de Dirac son

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & -\sigma_3 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} i\sigma_i & 0 \\ 0 & -i\sigma_i \end{pmatrix},$$

con σ_k las matrices de Pauli (2×2) e $i = 1, 2$. Notemos que, para este caso, el Lagrangiano es invariante bajo dos transformaciones de tipo quiral,

$$\psi \rightarrow e^{i\beta\gamma^3}\psi, \quad \psi \rightarrow e^{i\beta\gamma^5}\psi,$$

$$\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = i \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix},$$

con I la matriz identidad (2×2). Debido a esto, podemos introducir dos términos de masa en el Lagrangiano (3.0.2), el término de masa ordinario ($m_e = \bar{\psi}\psi$) que rompe la simetría quiral y el término de masa de Haldane ($m_0 = \bar{\psi}\tau\psi$) con $\tau = [\gamma^3, \gamma^5]/2$ que rompe paridad e inversión temporal, por lo que el Lagrangiano masivo se convierte en

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_e - m_0\tau) \psi. \quad (3.0.3)$$

Por la introducción del término $m_0\bar{\psi}\tau\psi$, Haldane recibió junto con Kosterlitz y Thouless el Premio Nobel de Física en 2016 [46].

3.1. Absorción de Luz y Efecto Faraday

En esta primera sección vamos a calcular las expresiones para la absorción de luz y el Efecto Faraday en términos del tensor de polarización de vacío $\Pi^{\mu\nu}$. Para esto, notemos que la acción que describe las interacciones electromagnéticas en términos de $\Pi^{\mu\nu}$ en el espacio de configuraciones está dada por

$$S[A, \partial A] = \int d^4x \left[\frac{1}{2} A_\mu(x) \Pi^{\mu\nu}(x) A_\nu(x) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right], \quad (3.1.1)$$

con $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, por lo que el Lagrangiano correspondiente es,

$$\mathcal{L}[A, \partial A; x] = \frac{1}{2} A_\mu(x) \Pi^{\mu\nu}(x) A_\nu(x) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (3.1.2)$$

Ahora, de las ecuaciones de Euler-Lagrange tenemos que la ecuación de movimiento en presencia de un campo electromagnético es

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + \delta(z) \Pi^{\mu\nu} A_\mu = 0, \quad (3.1.3)$$

donde $\delta(z)$ se usa para indicar que la corriente sólo actúa en el plano $z = 0$, precisamente donde se encuentra la lámina de grafeno. En otras palabras, los electrones se encuentran restringidos al plano $z = 0$ y $\Pi^{\mu\nu}$ es el tensor de polarización del vacío, que en el caso del grafeno consideramos que la tercera componente espacial es nula, i.e., $\Pi^{u3} = \Pi^{3\mu} = 0$. Ahora, para nuestro problema, consideremos una onda plana de frecuencia ω , que se propaga a lo largo de la dirección z y que atraviesa la hoja de grafeno con una polarización lineal en la dirección $\hat{e}_x$, por lo que las ondas reflejada y transmitida pueden ser descritas por

$$A = e^{-i\omega t} \begin{cases} \hat{e}_x e^{ik_z z} + (r_{xx}\hat{e}_x + r_{xy}\hat{e}_y) e^{-ik_z z}, & z < 0, \\ (t_{xx}\hat{e}_x + t_{xy}\hat{e}_y) e^{ik_z z}, & z > 0, \end{cases} \quad (3.1.4)$$

donde $\hat{e}_{x,y}$ son los vectores unitarios a lo largo de las direcciones x y y de la membrana. Entonces la Ec. (3.1.3) está sujeta a las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} A_\mu \Big|_{z=0_+} - A_\mu \Big|_{z=0_-} &= 0, \\ (\partial_z A_\mu) \Big|_{z=0_+} - (\partial_z A_\mu) \Big|_{z=0_-} &= \Pi_\mu^\nu A_\nu \Big|_{z=0_+}. \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

Por lo tanto, deducimos que la corriente es

$$j^\nu = \Pi^{\mu\nu} A_\mu. \quad (3.1.6)$$

En tres dimensiones, podemos escribir el tensor $\Pi^{\mu\nu}$ como

$$\Pi^{\mu\nu} = \alpha \left[\Psi(p) \left(g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \right) + i\Phi(p) \epsilon^{\mu\nu\rho} p_\rho \right], \quad (3.1.7)$$

de modo que, $\Psi(p)$ y $\Phi(p)$ representen las funciones escalares de polarización. La primera describe la parte que conserva paridad, mientras que la segunda describe el término que rompe paridad. Dicha distinción será de utilidad en próximas secciones. Entonces, las condiciones de frontera de la Ec. (3.1.5) implican que $k_3 = \omega$ por lo que, para dicha onda incidente tenemos que

$$\begin{aligned} A_a \Big|_{z=0_+} - A_a \Big|_{z=0_-} &= 0, \\ (\partial_z A_a) \Big|_{z=0_+} - (\partial_z A_a) \Big|_{z=0_-} &= \alpha [\Psi(\omega) \delta_a^b + i\omega\Phi(p) \epsilon_a^b] A_b, \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

con $a, b = 1, 2$ y $\epsilon_1^2 = -\epsilon_2^1 = 1$. Por lo tanto, los coeficientes de transmisión y reflexión son

$$t_{xx} = \frac{-2\omega(i\alpha\Psi + 2\omega)}{\alpha^2\Psi^2 - 4i\alpha\omega\Psi - (4 + \alpha^2\Phi^2)\omega^2}, \quad (3.1.9)$$

$$t_{xy} = \frac{2\alpha\Phi\omega^2}{\alpha^2\Psi^2 - 4i\alpha\omega\Psi - (4 + \alpha^2\Phi^2)\omega^2}, \quad (3.1.10)$$

de forma tal que la amplitud de la onda transmitida (intensidad) está dada por

$$\mathcal{I} = \sqrt{|t_{xx}|^2 + |t_{xy}|^2} \quad (3.1.11)$$

y el ángulo de rotación de la polarización θ_F es

$$\begin{aligned} \theta_F &= \frac{1}{2} \arg \frac{t_{xx} - it_{xy}}{t_{xx} + it_{xy}} \\ &= -\frac{\alpha}{2} \text{Re}(\Phi) + \mathcal{O}(\alpha^2), \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

donde $\alpha = 1/137$ es la constante de estructura fina. En la siguiente sección, calcularemos el tensor de polarización del vacío en presencia de un campo magnético débil, para así calcular la intensidad de luz transmitida y el ángulo de rotación de la polarización de la onda incidente.

3.2. Campo Magnético Débil

En esta sección calculamos el tensor de polarización del vacío en presencia de un campo magnético débil que atraviesa a la lámina de grafeno, esto en el límite quirral, es decir, consideramos que los portadores de carga en el grafeno son no masivos. En esta configuración, el propagador del fermión se conoce como el propagador de Schwinger [47], que en la representación de tiempo propio en el plano se escribe como

$$iS(k) = \int_0^\infty ds e^{is(k_\parallel^2 - k_\perp^2 \frac{\tan(eBs)}{eBs} - m^2 + i\varepsilon)} [(k_\parallel + m)(1 + \gamma^1 \gamma^2 \tan(eBs)) k_\perp (1 + \tan^2(eBs))],$$

donde utilizamos la siguiente notación

$$\vec{a}_\parallel = (a_0, 0, 0), \quad \vec{a}_\perp = (0, a_2, a_3). \quad (3.2.1)$$

Por otro lado, en esta tesis seguiremos la convención siguiente

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (3.2.2)$$

$$g_\parallel^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.2.3)$$

$$g_\perp^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (3.2.4)$$

$$g^{\mu\nu} = g_\parallel^{\mu\nu} + g_\perp^{\mu\nu}, \quad (3.2.5)$$

$$\vec{a} = \vec{a}_\parallel + \vec{a}_\perp, \quad (3.2.6)$$

$$(a \cdot b) = (a \cdot b)_\parallel + (a \cdot b)_\perp, \quad (3.2.7)$$

con los índices griegos $\mu, \nu, \dots = 0, 1, 2$. A continuación, se desarrolla el propagador de Schwinger en serie potencias de (eB) hasta términos de orden $\mathcal{O}((eB)^2)$. Por lo tanto, en el límite de campo débil [48], la estructura del propagador de los portadores de carga del grafeno es

$$S(k) = S_0(k) + (eB) S_1(k) + (eB)^2 S_2(k)$$

en donde

$$S^0(k) = \frac{k + m}{k^2 - m^2} \quad S^0(k) \Big|_{m \rightarrow 0} = \frac{k}{k^2}$$

$$S^1(k) = \frac{i\gamma^1 \gamma^2 (k_\parallel + m)}{(k^2 - m^2)^2} \quad S^1(k) \Big|_{m \rightarrow 0} = \frac{i\gamma^1 \gamma^2 k_\parallel}{(k^2 - m^2)^2}$$

$$S^2(k) = -\frac{2k_{\perp}^2}{(k^2 - m^2)^4} \left(k_{\parallel} + m + k_{\perp} \left(\frac{m^2 - k_{\parallel}^2}{k_{\perp}^2} \right) \right),$$

$$S^2(k) \Big|_{m \rightarrow 0} = -2 \frac{k_{\perp}^2}{(k^2 - m^2)^4} \frac{k_{\parallel} - k_{\perp}^2}{k_{\parallel}}.$$

Entonces, la estructura del tensor de polarización en presencia de un campo magnético débil en el límite quiral hasta orden $(eB)^2$ es

$$\Pi_{\mu\nu}^{O2}(p) = \Pi_{\mu\nu}^{vac} + (eB) (\Pi_{\mu\nu}^{10} + (eB) \Pi_{\mu\nu}^{01}) + (eB)^2 (\Pi_{\mu\nu}^{11}(p) + \Pi_{\mu\nu}^{20}(p) + \Pi_{\mu\nu}^{02}(p)) \quad (3.2.8)$$

con

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^{vac}(p) &= ie^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \text{Tr} [\gamma_{\mu} S^0(k) \gamma_{\nu} S^0(k+p)], \\ \Pi_{\mu\nu}^{10}(p) &= ie^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \text{Tr} [\gamma_{\mu} S^1(k) \gamma_{\nu} S^0(k+p)], \\ \Pi_{\mu\nu}^{01}(p) &= ie^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \text{Tr} [\gamma_{\mu} S^0(k) \gamma_{\nu} S^1(k+p)], \\ \Pi_{\mu\nu}^{11}(p) &= ie^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \text{Tr} [\gamma_{\mu} S^1(k) \gamma_{\nu} S^1(k+p)], \\ \Pi_{\mu\nu}^{20}(p) &= ie^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \text{Tr} [\gamma_{\mu} S^2(k) \gamma_{\nu} S^0(k+p)], \\ \Pi_{\mu\nu}^{02}(p) &= ie^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \text{Tr} [\gamma_{\mu} S^0(k) \gamma_{\nu} S^2(k+p)]. \end{aligned}$$

Sin embargo, es fácil notar que

$$\Pi_{\mu\nu}^{10}(p) = -\Pi_{\mu\nu}^{01}(p),$$

$$\Pi_{\mu\nu}^{20}(p) = \Pi_{\mu\nu}^{02}(p),$$

por lo que la Ec. (3.2.8) se simplifica a

$$\Pi_{\mu\nu}(p) = \Pi_{\mu\nu}^{vac} + (eB)^2 (\Pi_{\mu\nu}^{11}(p) + 2\Pi_{\mu\nu}^{20}(p)), \quad (3.2.9)$$

donde podemos notar que solo hay contribución a orden cero y a segundo orden. Calculando cada una de las contribuciones del tensor de polarización tenemos que $\Pi^{\mu\nu}$ es (ver Apendice A)

$$\Pi^{\mu\nu} = 4\pi\alpha \left[\left(\Pi_{vac}(p) + (eB)^2 \Pi_0(p) \right) P^{\mu\nu} + \left((eB)^2 \Pi_{\perp}(p) \right) P_{\perp}^{\mu\nu} \right], \quad (3.2.10)$$

$$\Pi_{vac}(p) = \frac{i}{8}p, \quad (3.2.11)$$

$$\Pi_0(p) = \frac{i}{8p^3} \left(1 - 5 \frac{p_{\parallel}^2}{p^2} \right), \quad (3.2.12)$$

$$\Pi_{\perp}(p) = \frac{i}{4p^3} \left(1 - \frac{p_{\parallel}^2}{p^2} \right), \quad (3.2.13)$$

$$P^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - \frac{p^{\mu}p^{\nu}}{p^2}, \quad (3.2.14)$$

$$P_{\perp}^{\mu\nu} = g_{\perp}^{\mu\nu} - \frac{p_{\perp}^{\mu}p_{\perp}^{\nu}}{p_{\perp}^2}. \quad (3.2.15)$$

La estructura tensorial de la Ec. (3.2.10) nos asegura que el tensor es transversal por orden en (eB) , por lo que el desarrollo en el campo en la representación de tiempo propio del propagador preserva la invarianza de norma. A continuación, usando las Ecs. (3.1.9, 3.1.10) y notando que el tensor es solamente transversal, tenemos que los coeficientes de transmisión son

$$t_{xx} = \frac{2\omega}{i\alpha\Psi_N(\omega) + 2\omega}, \quad t_{xy} = 0, \quad (3.2.16)$$

con $\Psi_N(\omega) = N\Psi(\omega)$ y N cuenta el número de grados de libertad de los portadores de carga, en nuestro caso, $N = 2$. Entonces, la intensidad de luz transmitida se expresa como

$$\mathcal{I} = |t_{xx}| \approx 1 + \alpha \frac{\text{Im}\Psi_N(\omega)}{\omega} + \mathcal{O}(\alpha^2), \quad (3.2.17)$$

la cual, en términos de los escalares de polarización es

$$\mathcal{I} = 1 - \alpha\pi \left(1 + 4 \frac{(eB)^2}{\omega^4} \right), \quad (3.2.18)$$

donde $\alpha = 1/137$, por lo que $\alpha\pi \approx 2.3\%$ de la intensidad total, lo que se ha medido experimentalmente en ausencia de campos externos. Esto quiere decir que la presencia de un campo externo débil se puede ver como una corrección a la absorción de luz. En la Fig. 3.2.1, se muestra la absorción de la luz como función de la frecuencia del rayo incidente (ω). Ahora, en este caso como el tensor es transversal, tenemos que $\Phi = 0$, por lo que el vector de polarización del haz incidente no cambia, es decir,

$$\theta_F = 0.$$

Entonces, aún cuando un campo magnético débil modifique la intensidad de luz transmitida, no es una condición suficiente para que se presente polarización de la onda incidente.

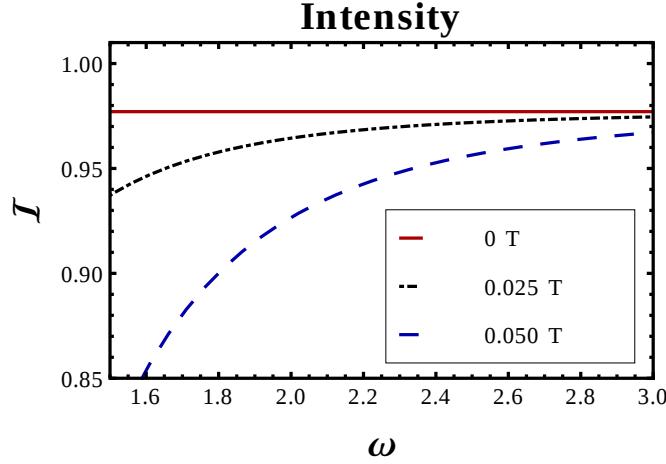


Figura 3.2.1: La intensidad de la luz transmitida como función de la frecuencia de la onda incidente (en eV) para diferentes valores del campo magnético externo.

3.3. Grafeno deformado

En esta sección, consideremos una hoja de grafeno deformada (estirada o retraída), de forma que se rompe paridad, lo que nos permite caracterizar la deformidad con la masa de Haldane m_0 , además de caracterizar las corrugaciones naturales de una lámina de grafeno de manera efectiva en el término m_e . Partimos de la Ec. (3.0.3) y para facilitar la descripción y el comportamiento de la simetría quiral, introducimos los operadores de proyección $\chi_{\pm} = (1 \pm \tau)/2$, los cuales nos permiten escribir el Lagrangiano como

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_+ (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_+) \psi_+ + \bar{\psi}_- (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_-) \psi_-, \quad (3.3.1)$$

donde $m_{\pm} = m_e \pm m_0$, y los campos “Izquierdos” y “Derechos” son $\psi_{\pm} = \chi_{\pm} \psi$. De este modo, el Lagrangiano describe dos diferentes especies de portadores de carga, relacionados con los puntos K y K' de la zona de Brillouin, que son no degenerados en masa. Además, la descomposición quiral para el propagador es

$$\begin{aligned} S(p) &= - \left(\left[\frac{\not{p} + m_+}{p^2 - m_+^2} \right] \chi_+ + \left[\frac{\not{p} + m_-}{p^2 - m_-^2} \right] \chi_- \right) \\ &= - (S_+(p) \chi_+ + S_-(p) \chi_-). \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

Vamos a usar esta descripción para estudiar el problema de la rotación de Faraday debido a las masas inducidas (FRIM) en grafeno.

Factor de Llenado

Recordemos que la conductividad eléctrica de Hall para el Efecto Hall Cuántico (QHE), se puede expresar como

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & -\nu \frac{e^2}{2\pi} \\ \nu \frac{e^2}{2\pi} & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.3.3)$$

donde ν es un entero pequeño para el QHE entero o una fracción para el QHE fraccionario llamado factor de llenado (ver por ejemplo, QHE en grafeno [49]). Una herramienta útil para calcular el factor de llenado es la fórmula de Kubo, que expresa la respuesta de una observable cuántica debido a una perturbación dependiente del tiempo. En términos del propagador fermiónico, el factor de llenado es

$$\nu = \frac{1}{24\pi^2} \int d^3p \epsilon_{\mu\nu\rho} \text{Tr} [(\partial_\mu S^{-1}) S (\partial_\nu S^{-1}) S (\partial_\rho S^{-1}) S], \quad (3.3.4)$$

donde S es el propagador del fermión, $\epsilon^{\mu\nu\rho}$ es el símbolo Levi-Civita. Usando la descomposición quirral de la Ec. (3.3.2), tenemos que

$$\nu_\pm = \frac{1}{24\pi^2} \int d^3p \epsilon_{\mu\nu\rho} \text{Tr} [(\partial_\mu S_\pm^{-1}) S_\pm (\partial_\nu S_\pm^{-1}) S_\pm (\partial_\rho S_\pm^{-1}) S_\pm \chi_\pm]. \quad (3.3.5)$$

Por lo tanto, el factor de llenado es $\nu = \nu_+ + \nu_-$. Es fácil notar que el cálculo de $\nu_\pm$ se reduce a calcular la traza

$$\text{Tr} [S_\pm] = \text{Tr} \left[\gamma^\mu \left[\frac{\not{p} + m_\pm}{p^2 - m_\pm^2} \right] \gamma^\nu \left[\frac{\not{p} + m_\pm}{p^2 - m_\pm^2} \right] \gamma^\rho \left[\frac{\not{p} + m_\pm}{p^2 - m_\pm^2} \right] \chi_\pm \right]. \quad (3.3.6)$$

Las matrices gammas con el proyector $\chi_\pm$ satisfacen:

$$\begin{aligned} \text{Tr} [\chi_\pm] &= 2, \\ \text{Tr} [\gamma^\mu \chi_\pm] &= 0, \\ \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu \chi_\pm] &= 2g^{\mu\nu}, \\ \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \chi_\pm] &= \mp 2i\epsilon^{\mu\nu\rho}, \\ \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\kappa \chi_\pm] &= 2(g^{\mu\nu}g^{\rho\kappa} + g^{\mu\rho}g^{\nu\kappa} - g^{\mu\kappa}g^{\nu\rho}), \end{aligned}$$

notemos que solamente $\text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \chi_\pm]$ es simétrico después de contraer con $\epsilon_{\mu\nu\rho}$ y por lo tanto la traza en la Ec. (3.3.6) se reduce a

$$\epsilon_{\mu\nu\rho} \text{Tr} [S_\pm] = i \frac{\pm 12m_\pm p^2 \mp 12m_\pm^3}{(p^2 \pm m_\pm^2)^3}. \quad (3.3.7)$$

Reemplazando en la fórmula de Kubo y haciendo una rotación de Wick, obtenemos

$$\nu_\pm = \mp \frac{m_\pm}{2\pi^2} \int \frac{d^3p}{(p^2 - m_\pm^2)^2} = \mp \frac{m_\pm}{2\pi^2} \frac{\pi^2}{|m_\pm|} = \mp \frac{1}{2} \frac{m_\pm}{|m_\pm|}. \quad (3.3.8)$$

Entonces, para $m_{\pm} \rightarrow 0$

$$\nu_{\pm} = \mp \frac{1}{2} \text{sign}(m_{\pm}), \quad (3.3.9)$$

es decir,

$$\nu = -\frac{1}{2} \text{sign}(m_{+}) + \frac{1}{2} \text{sign}(m_{-}). \quad (3.3.10)$$

Entonces $\nu = 0$ si $m_0 = 0$, y $\nu = -1$ si $m_e = 0$. Por lo tanto, la conductividad de Hall es

$$\sigma_{xy} = \begin{cases} 0, & \text{si } m_0 = 0 \\ \frac{e^2}{2\pi}, & \text{si } m_e = 0 \end{cases}. \quad (3.3.11)$$

Ahora, consideremos una onda monocromática que incide en la hoja de grafeno con frecuencia ω , por un lado sabemos que el campo eléctrico se puede describir por

$$E_b = i\omega A_b,$$

retomando la Ec. (3.1.6) y de la ley de Ohm $j^a = \sigma^{ab} E_b$, obtenemos que la conductividad transversa es

$$\sigma_{xy} = \frac{\Pi_{xy}}{i\omega}, \quad (3.3.12)$$

por lo que, de la Ec. (3.1.12) tenemos que la rotación de Faraday de la onda incidente en términos de la conductividad transversa es:

$$\theta_F = -\frac{\text{Re}(\sigma_{xy})}{2}. \quad (3.3.13)$$

Entonces, en el caso de que la luz incide en una hoja deformada de grafeno, la FRIM es

$$\theta_F = \begin{cases} 0, & \text{si } m_0 = 0 \\ \frac{e^2}{4\pi} \equiv \alpha, & \text{si } m_e = 0 \end{cases}. \quad (3.3.14)$$

Notemos que la FRIM solo va a aparecer cuando la simetría de paridad e inversión temporal están rotas, lo que es consistente con los resultados experimentales y teóricos en ausencia de campos externos y en presencia de un campo magnético fuerte [50, 51, 52]. Por lo tanto, hemos analizado la absorción de luz y el efecto Faraday en grafeno en dos distintos escenarios y obtenido resultados acordes a los experimentos utilizando técnicas de la física de partículas, las cuales resultan útiles para estudiar ciertas propiedades del grafeno. En el siguiente capítulo, usaremos técnicas de la física de partículas para estudiar un fenómeno similar al que ocurre en la QCD con la finalidad de aprovechar al grafeno como un ambiente más amigable que nos sirva de guía en el estudio de la QCD.

Capítulo 4

Efecto Pseudoquiral Magnético

El Efecto Quiral Magnético (CME) fue propuesto como un posible fenómeno en experimentos de colisiones de iones pesados relativistas, se asume que se produce en una colisión no centrada a altas temperaturas donde el plasma presenta estados metaestables que violan paridad e inversión temporal [53]. El rompimiento en la simetría se manifiesta como un desbalance de los quarks con diferentes quiralidades. Además, el campo magnético tan intenso generado durante estos procesos alinea los espines de las partículas y producen una corriente eléctrica a lo largo de las líneas de campo. Hasta ahora, no se han detectado señales evidentes del CME en sistemas de colisión de iones pesados (plasma de quarks y gluones), sin embargo, se observó experimentalmente en 2014 en un material de Dirac (ZrTe_5) por un grupo del Laboratorio Nacional de Brookhaven [54]. Existe la posibilidad de estudiar un fenómeno similar que imita el CME en grafeno, el llamado Efecto Pseudoquiral Magnético (PCME) [55]. En este capítulo, vamos a estudiar el PCME y algunas consecuencias de este fenómeno, con la intención de trasladarlos a la QCD. Este trabajo está en preparación y se presentarán sus resultados en el futuro cercano [56].

4.1. Propagador del Fermión

Como vimos en el capítulo anterior, el Lagrangiano para los portadores de carga del grafeno puede separarse en dos quiralidades, en el caso en que las matrices de Dirac estén en la representación de Weyl y considerando un campo magnético externo alineado a lo largo de la lámina de grafeno, descrito por el potencial vectorial $A_3^{\text{ext}} = B_{x_2}$, donde x_2 representa la segunda coordenada espacial. Este escenario es descrito por el Lagrangiano

$$\mathcal{L}_F = \sum_{\chi=\pm} \bar{\psi}_\chi [i \not{\partial} + \mu \gamma^0 + (e A_3^{\text{ext}} - m_\chi) \gamma^3] \psi_\chi, \quad (4.1.1)$$

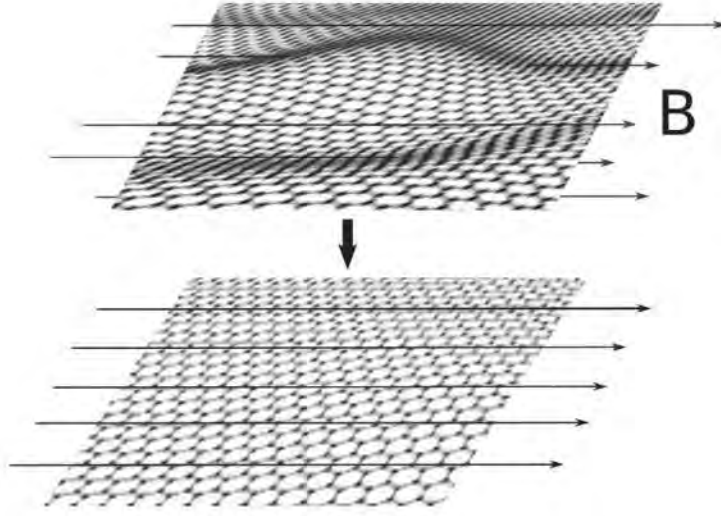


Figura 4.0.1: Una lámina de grafeno corrugada en un campo magnético en el plano se idealiza como una lámina de grafeno liso, donde los portadores de carga de diferentes subredes tienen masas efectivas diferentes.

donde $\psi_{\pm} = (1/2)(1 \pm \gamma^5)\psi$ y $m_{\pm} = m_3 \pm m_0$. Recordemos que la aparición del término $m_{\pm}$, sirve para describir las posibles corrugaciones en una muestra de grafeno de manera efectiva (ver Fig. 4.0.1). Podemos obtener el propagador del fermión para cada quiralidad como

$$S(x, x') = \frac{1 + \gamma^5}{2} S_+(x, x') + \frac{1 - \gamma^5}{2} S_-(x, x'). \quad (4.1.2)$$

A continuación, consideramos que dichas funciones de Green incluyen efectos de campo externo, temperatura y potencial químico. Los efectos de temperatura, por ejemplo, se introducen de la manera usual, usando frecuencias de Matsubara, sustituyendo la componente cero del momento ($k_0 \rightarrow i\omega_n = i(2n + 1)\pi T$) y su integral $\int dk_0 \rightarrow i2\pi T \sum_n$. Para incluir los efectos del campo magnético, usamos el método de tiempo propio de Schwinger [47]. Sin embargo, cuando se introduce el método de tiempo propio en presencia de potencial químico finito, hay que tener consideraciones especiales con el rango de integración con la finalidad de garantizar la convergencia correcta de las integrales [57]

$$\int_0^{\infty} ds g(s) \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} ds r_s(\omega_n \mu) g(s), \quad (4.1.3)$$

donde el regulador $r_s(\omega_n \mu)$ está dado por

$$r_s(\omega_n \mu) = H(s) H(\omega_n \mu) e^{-s\epsilon} - H(-s) H(-\omega_n \mu) e^{s\epsilon}, \quad (4.1.4)$$

donde $H(x)$ es la función escalón de Heaviside. Por lo tanto, el propagador para cada quiralidad es

$$S_{\pm}(x, x') = T \sum_n \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^3} e^{-ik \cdot (x - x')} \tilde{S}_n(k; \xi_{\pm}), \quad (4.1.5)$$

con

$$\begin{aligned} \tilde{S}_n(k; \xi_{\pm}) &= i \int_{-\infty}^{\infty} ds r_s(\omega_n \mu) e^{isK_{\parallel}^2 - i[k_2^2 + \xi_{\pm}^2] \frac{\tan(eBs)}{eB}} \\ &\quad \{K_{\parallel} [1 + \gamma^2 \gamma^3 \tan(eBs)] + [k_2 \gamma^2 + \xi_{\pm} \gamma^3] \sec^2(eBs)\}, \end{aligned}$$

donde $\xi_{\pm} = \frac{1}{2}(x^2 + x'^2)eB + m_{\pm}$ y $K_{\parallel} = (i\omega_n + \mu, k^1, 0)$. En la siguiente sección vamos a usar el propagador de la Ec. (4.1.5) para calcular varias observables de PCME.

4.2. Observables para PCME

Para ilustrar una analogía entre el PCME y el CME, vamos a calcular distintas observables, la primera de estas es la corriente eléctrica, axial y vectorial.

4.2.1. Corriente Eléctrica

Sabemos que las corrientes están dadas por:

$$j_{\mu}(y) = -e \langle \bar{\psi} \gamma_{\mu} \psi \rangle = e \text{Tr}[\gamma_{\mu} G(x, x')], \quad (4.2.1)$$

$$j_5(y) = -e \langle \bar{\psi} \gamma_{\mu} \gamma_5 \psi \rangle = e \text{Tr}[\gamma_{\mu} \gamma_5 G(x, x')], \quad (4.2.2)$$

tras realizar las trazas correspondientes y la integral en el momento, notamos que sólo las componentes j_1 y j_{15} son no nulas

$$\begin{aligned} j_1(y) &= j((y - y_+)) + j((y - y_-)), \\ j_{15}(y) &= j((y - y_+)) - j((y - y_-)), \end{aligned}$$

donde $y_{\pm} = m_{\pm}/eB$ y la función j es

$$\begin{aligned} j\left(\frac{\eta}{\sqrt{eB}}\right) &= \frac{e^2 B}{\pi} T \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} ds r_s(\omega_n \mu) (\omega_n - i\mu) \left[\frac{\tan(eBs)}{eBs} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \exp \left[-i \left(s (\omega_n - i\mu)^2 + eB \tan(eBs) \eta^2 \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

Consideramos que $\mu < \pi T$, por lo que podemos hacer una rotación de Wick en la integral de tiempo propio de modo que $r_s(\omega_n \mu) \rightarrow 1$, finalmente

$$\begin{aligned} j(\eta) &= -i \frac{e^2 B}{\pi} T \sum_n \int_0^{\infty} ds (\omega_n - i\mu) \left[\frac{\tan(eBs)}{eBs} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \exp \left[- \left(s (\omega_n - i\mu)^2 + eB \tanh(eBs) \eta^2 \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

Realizando la suma sobre las frecuencias de Matsubara considerando que

$$\begin{aligned} \sum_n (\omega_n - i\mu) \exp \left[-s (\omega_n - i\mu)^2 \right] &= -\frac{i}{2s} \frac{\partial}{\partial \mu} \sum_n \exp \left[-s (\omega_n - i\mu)^2 \right] \\ &= -\frac{1}{8\sqrt{\pi} s^{\frac{3}{2}} T^2} \Theta'_3 \left(\frac{1}{2} \left(1 - i \frac{\mu}{\pi T} \right), \frac{i}{4\pi s T^2} \right), \end{aligned}$$

donde $\Theta'_3(z, \tau) = (\partial/\partial z)\Theta_3(z, \tau)$ [15]. Entonces, la expresión a calcular finalmente es

$$j(\eta) = -i \frac{e^2 B}{8\pi^{\frac{3}{2}} T} \int_0^\infty \frac{ds}{s^2} \frac{\sqrt{\tanh(eBs)}}{\exp[eB \tanh(eBs)\eta]} \Theta'_3 \left(\frac{1}{2} \left(1 - i \frac{\mu}{\pi T} \right), \frac{i}{4\pi s T^2} \right),$$

la cual calculamos numéricamente. A continuación, consideramos una aproximación a campo débil, $eB \ll (\pi T)^2 - \mu^2$, partiendo de la Ec. (4.2.4) realizando un desarrollo en el campo, por lo que obtenemos

$$j(\eta) = -i \frac{e^2 B}{\pi} T \sum_n (\omega_n - i\mu) \int_0^\infty ds \exp \left[- \left(s (\omega_n - i\mu)^2 + (eB\eta)^2 s \right) \right], \quad (4.2.5)$$

lo cual simplifica enormemente los calculos y nos permite realizar la integral sobre s y la suma, para finalmente obtener

$$j(\eta) = -\frac{e^2 B}{2\pi} (nf(|eB\eta| - \mu) - nf(|eB\eta| + \mu)). \quad (4.2.6)$$

La validez de esta aproximación la verificamos en la Fig. 4.2.1. Ahora, consideremos el caso en el que el campo es extremadamente intenso, $eB \gg (\pi T)^2 - \mu^2$, en este caso observamos que $\tanh(eBs) \approx 1$ por lo que la Ec. (4.2.4) queda como

$$j(\eta) = -i \frac{e^2 B}{\pi} T \sum_n (\omega_n - i\mu) \int_0^\infty ds \frac{1}{\sqrt{eBs}} \exp \left[- \left(s (\omega_n - i\mu)^2 + eB\eta^2 \right) \right], \quad (4.2.7)$$

podemos escribir convenientemente

$$s^{-1/2} = 2\pi^{1/2} \int_0^\infty dp e^{-sp^2}, \quad (4.2.8)$$

ahora podemos realizar la integral en s y la suma, para finalmente obtener

$$j(\eta) = -\frac{e\sqrt{eB}}{\pi^{\frac{3}{2}}} \mu e^{-eB\eta^2}, \quad (4.2.9)$$

verificamos la validez de esta aproximación en la Fig. 4.2.2.

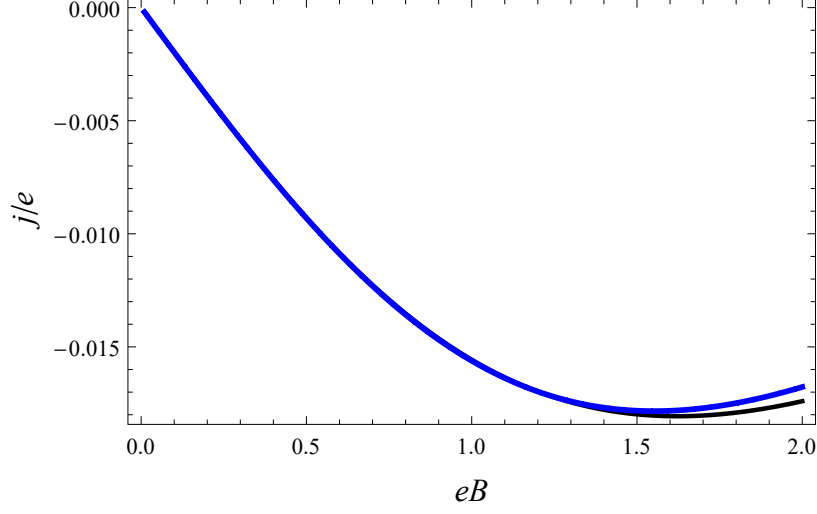


Figura 4.2.1: Verificación del cálculo de $j(\eta)$ para campo débil con $\eta = 1$, Recta Numérica (Azul), Recta Aproximada (Negro).

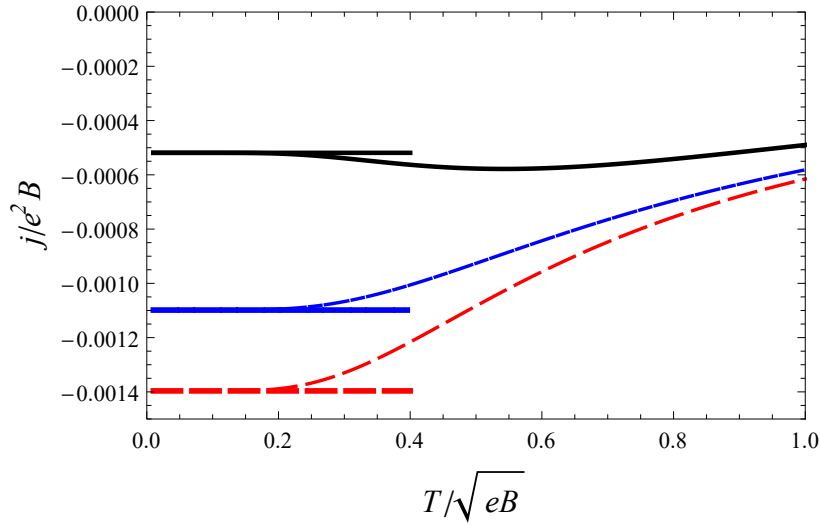


Figura 4.2.2: Verificación de la no dependencia de T del cálculo de $j(\eta)$ para campo fuerte, $\eta = 0.1$ (rojo), $\eta = 0.5$ (Azul), $\eta = 1.0$ (Negro).

4.2.2. Densidad de Número

Realizamos un cálculo similar para la densidad de número y la densidad quiral de número, definidas como $n = \langle \bar{\psi}\psi \rangle$ y $n_5 = \langle \bar{\psi}\gamma_5\psi \rangle$, respectivamente. En este caso las densidades son

$$\begin{aligned} n(y) &= \nu((y - y_+)) - \nu((y - y_-)), \\ n_5(y) &= \nu((y - y_+)) + \nu((y - y_-)), \end{aligned}$$

donde $y_{\pm} = m_{\pm}/eB$ y la función ν es

$$\begin{aligned} \nu(\eta) &= -i \frac{eB}{\pi} T \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} ds r_s(\omega_n \mu) (\omega_n - i\mu) \left[\frac{1}{eBs \tan(eBs)} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \exp \left[-i \left(s (\omega_n - i\mu)^2 + eB \tan(eBs) \eta^2 \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

Consideramos que $\mu < \pi T$, por lo que podemos hacer una rotación de Wick en la integral de tiempo propio de modo que $r_s(\omega_n \mu) \rightarrow 1$. Finalmente

$$\begin{aligned} \nu(\eta) &= -i \frac{eB}{\pi} T \sum_n \int_0^{\infty} ds (\omega_n - i\mu) \left[\frac{1}{eBs \tanh(eBs)} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \exp \left[- \left(s (\omega_n - i\mu)^2 + eB \tanh(eBs) \eta^2 \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

Realizando la suma sobre las frecuencias de Matsubara, la expresión a calcular numéricamente es

$$\nu(\eta) = -i \frac{(eB)^2}{8\pi^{\frac{3}{2}} T} \int_0^{\infty} \frac{ds}{s^2} \frac{\exp[-eB \tanh(eBs) \eta^2]}{\sqrt{\tanh(eBs)}} \Theta'_3 \left(\frac{1}{2} \left(1 - i \frac{\mu}{\pi T} \right), \frac{i}{4\pi s T^2} \right).$$

Nuevamente consideramos una aproximación a campo débil, $eB \ll (\pi T)^2 - \mu^2$, partiendo de la Ec. (4.2.11) realizando un desarrollo en el campo, por lo que obtenemos

$$\nu(\eta) = -i \frac{eB}{\pi} T \sum_n (\omega_n - i\mu) \int_0^{\infty} \frac{ds}{s} \exp \left[- \left(s (\omega_n - i\mu)^2 + (eB \eta)^2 s \right) \right]. \quad (4.2.12)$$

Escribimos convenientemente

$$s^{-1} = 2 \int_0^{\infty} dp p e^{-sp^2}, \quad (4.2.13)$$

por lo cual podemos integrar sobre s y realizar la suma para finalmente obtener

$$\begin{aligned} \nu(\eta) &= -\frac{\sqrt{eB} T}{\pi} \left(\eta \ln \left(\frac{1 + e^{\beta(eB\eta - \mu)}}{1 + e^{\beta(eB\eta + \mu)}} \right) + \right. \\ &\quad \left. \frac{T}{\sqrt{eB}} \left[\text{Li}_2 \left(-e^{(\beta(eB\eta - \mu))} \right) - \text{Li}_2 \left(-e^{(\beta(eB\eta + \mu))} \right) \right] \right). \end{aligned} \quad (4.2.14)$$

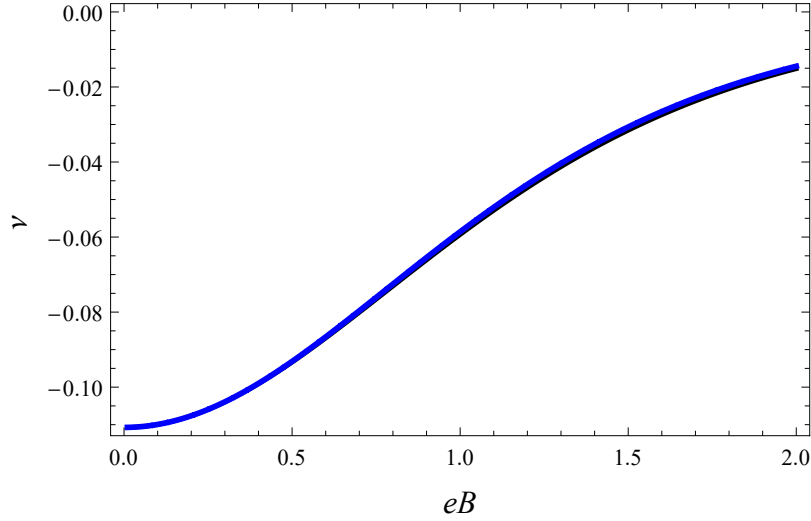


Figura 4.2.3: Verificación del cálculo de $\nu(\eta)$ para campo débil para $\eta = 2$, Recta Numérica (Azul), Recta Aproximada (Negro).

La validez de esta aproximación se verifica en la Fig. 4.2.3. Ahora, consideremos el caso en el que el campo es extremadamente intenso, $eB \gg (\pi T)^2 - \mu^2$. En este caso observamos que $\tanh(eBs) \approx 1$ por lo que la Ec. (4.2.11) queda como

$$\nu(\eta) = -i \frac{eB}{\pi} T \sum_n \int_0^\infty ds \frac{(\omega_n - i\mu)}{\sqrt{eBs}} \exp \left[- \left(s (\omega_n - i\mu)^2 + eB\eta^2 \right) \right]. \quad (4.2.15)$$

Usando la Ec. (4.2.8) para poder realizar la integral en s y la suma sobre las frecuencias, para finalmente obtener

$$\nu(\eta) = -\frac{e\sqrt{eB}}{\pi^{\frac{3}{2}}} \mu e^{-eB\eta^2},$$

verificamos la validez de esta aproximación en la Fig. 4.2.4.

4.2.3. Condensados quirales

En QCD, el condensado quiral es el parámetro de orden del rompimiento espontaneo de la simetría quiral. En grafeno, al existir dos distintas simetrías quirales, sus condensados se definen como $\sigma_3 = \langle \bar{\psi} \gamma_3 \psi \rangle$ y $\sigma_5 = \langle \bar{\psi} \gamma_3 \gamma_5 \psi \rangle$, generados por m_3 y m_0 respectivamente. Por lo tanto, realizando un cálculo similar al de las secciones previas para los condensados tenemos que

$$\begin{aligned} \sigma_3(y) &= \sigma((y - y_+)) - \sigma((y - y_-)), \\ \sigma_0(y) &= \sigma((y - y_+)) + \sigma((y - y_-)), \end{aligned}$$

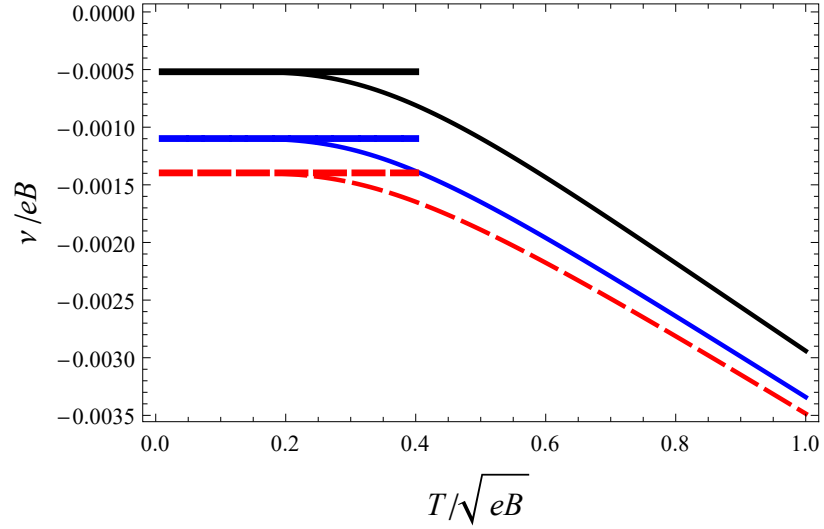


Figura 4.2.4: Verificación de la no dependencia de T del cálculo de $\nu(\eta)$ para campo fuerte, $\eta = 0.1$ (rojo), $\eta = 0.5$ (Azul), $\eta = 1.0$ (Negro).

donde $y_{\pm} = m_{\pm}/eB$ y la función σ es

$$\sigma(\eta) = \frac{(eB)^2}{\pi} T \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} ds r_s(\omega_n \mu) \frac{\sec^2(eBs)}{\sqrt{eBs \tan(eBs)}} \exp \left[-i \left(s(\omega_n - i\mu)^2 + eB \tan(eBs) \eta^2 \right) \right].$$

Consideremos que $\mu < \pi T$, por lo que podemos hacer una rotación de Wick en la integral de tiempo propio de modo que $r_s(\omega_n \mu) \rightarrow 1$. Finalmente,

$$\sigma(\eta) = \frac{(eB)^2}{\pi} T \sum_n \int_0^{\infty} ds \frac{\eta \operatorname{sech}^2(eBs)}{\sqrt{eBs \tan(eBs)}} \exp \left[- \left(s(\omega_n - i\mu)^2 + eB \tanh(eBs) \eta^2 \right) \right]. \quad (4.2.16)$$

Realizando la suma sobre las frecuencias de Matsubara

$$\sigma(\eta) = \frac{(eB)^{\frac{3}{2}}}{2\pi^{\frac{3}{2}}} \int_0^{\infty} \frac{ds}{s} \frac{\eta \operatorname{sech}^2(eBs)}{\sqrt{\tanh(eBs)}} \frac{\Theta_3 \left(\frac{1}{2} \left(1 - i \frac{\mu}{\pi T} \right), \frac{i}{4\pi s T^2} \right)}{\exp [eB \tanh(eBs) \eta^2]}. \quad (4.2.17)$$

En este caso, hay que tener cuidado con el término a $T = 0$ el cual es divergente y trataremos más adelante. Entonces, la expresión a calcular numéricamente es

$$\sigma(\eta) = \frac{(eB)^{\frac{3}{2}}}{2\pi^{\frac{3}{2}}} \int_0^{\infty} \frac{ds}{s} \frac{\eta \operatorname{sech}^2(eBs)}{\sqrt{\tanh(eBs)}} \frac{\Theta_3 \left(\frac{1}{2} \left(1 - i \frac{\mu}{\pi T} \right), \frac{i}{4\pi s T^2} \right) - 1}{\exp [eB \tanh(eBs) \eta^2]}. \quad (4.2.18)$$

Nuevamente consideramos una aproximación a campo débil, $eB \ll (\pi T)^2 - \mu^2$, partiendo de la Ec. (4.2.16) realizando un desarrollo en el campo, por lo que

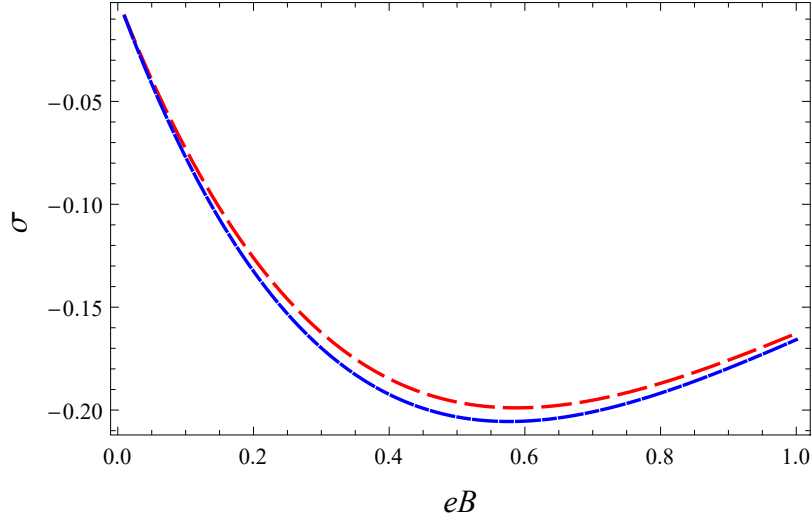


Figura 4.2.5: Verificación de la aproximación para el cálculo de $\sigma(\eta)$ para campo débil con $\eta = 2$, σ numérico (azul), σ (Roja).

obtenemos

$$\sigma(\eta) = \frac{eB}{\pi} T \sum_n \int_0^\infty \frac{ds}{s} \exp \left[- \left(s (\omega_n - i\mu)^2 + (eB\eta)^2 s \right) \right]. \quad (4.2.19)$$

Usamos la Ec. (4.2.13) para reescribir e integrar sobre s por lo que se reduce a calcular la suma

$$\sum_n \frac{2pT}{p^2 + (eB\eta)^2 - (i\omega_n + \mu)^2} = - \frac{p(nf(|eB\eta| - \mu) + nf(|eB\eta| + \mu) - 1)}{\sqrt{p^2 + (eB\eta)^2}}.$$

Ahora, para poder realizar la integral en p tenemos que cuidar nuevamente el término en $T = 0$, por lo que finalmente obtenemos,

$$\sigma(\eta) = - \frac{eBT}{\pi} \eta \left(\ln \left(1 + e^{-\beta(|eB\eta| - \mu)} \right) + \ln \left(1 + e^{-\beta(|eB\eta| + \mu)} \right) \right).$$

La validez de esta aproximación la verificamos en la Fig. 4.2.5. Ahora, consideremos el caso en el que el campo es extremadamente intenso, $eB \gg (\pi T)^2 - \mu^2$. En este caso observamos que $\tanh(eBs) \approx 1$, y consideramos que $\text{sech}^2(eBs)$ se puede aproximar a manera de niveles de Landau, i.e. $\sum_{l=1}^\infty e^{2eBsl}$. Entonces considerando únicamente el primer nivel tenemos

$$\sigma(\eta) = \frac{(eB)^2}{\pi} T \sum_n \int_0^\infty ds \frac{\eta \exp^{2eBs}}{\sqrt{eBs}} \exp \left[- \left(s (\omega_n - i\mu)^2 + eB\eta^2 \right) \right], \quad (4.2.20)$$

Nuevamente, escribimos convenientemente $s^{1/2} = 2\pi^{1/2} \int_0^\infty dp e^{-sp^2}$, y ahora podemos realizar la integral en s y la suma aislando el término $T = 0$, la Ec.

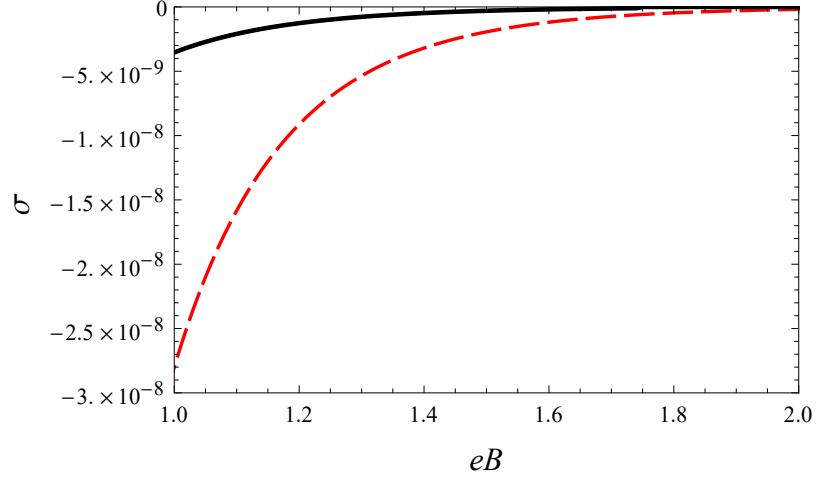


Figura 4.2.6: Verificación de la aproximación para el cálculo de $\sigma(\eta)$ para campo fuerte con $\eta = 0.08$, Recta Numérica (Roja), Recta Aproximada (Negro).

(4.2.16) queda como

$$\sigma(\eta) = \frac{(eB)^{3/2}}{4\pi} \sqrt{\sqrt{2eB}T\eta} e^{(-eB\eta^2)} \left[\text{Li}_2\left(-e^{-(\beta(\sqrt{2eB}-\mu))}\right) + \text{Li}_2\left(-e^{-(\beta(\sqrt{2eB}+\mu))}\right) \right]. \quad (4.2.21)$$

Además, recordemos que el campo magnético es mucho mayor que el potencial químico, por lo que

$$\sigma(\eta) = -\frac{eB}{4\pi} \sqrt{\sqrt{2eB}T\eta} \exp(-eB\eta^2) e^{-(\beta\sqrt{2eB})} \cosh\left(\frac{\mu}{T}\right). \quad (4.2.22)$$

La validez de esta aproximación se verifica en la Fig. 4.2.6. Por último, calculamos el término a $T = 0$ para $|eBL/2m| \ll 1$, una vez realizada la integral en y

$$\sigma_B = -\frac{(eB)^2}{6\pi m^2} \left[1 + mL + \left(\frac{eBL}{2m}\right)^2 (1 + 2/mL)^2 + \mathcal{O}\left(\frac{eBL}{2m}\right)^4 \right]. \quad (4.2.23)$$

Por otro lado, el término a $T = 0$ para $|eBL/2m| \gg 1$ una vez realizada la integral en y

$$\sigma_B = -\frac{eBLm}{\pi} \left[1 + \frac{2m}{eBL} + \mathcal{O}\left(\frac{2m}{eBL}\right)^2 \right]. \quad (4.2.24)$$

De este modo, si consideramos deformaciones en una hoja de grafeno mostramos que la presencia de un campo magnético externo alineado con la hoja de grafeno puede generar una corriente eléctrica a lo largo de las líneas de campo, además de

modificar la densidad de estados y los condensados. Lo cual se puede considerar análogo al CME propuesto en QCD.

Capítulo 5

Conclusiones

En este trabajo hemos estudiado distintos aspectos del grafeno desde el punto de vista de la física de partículas, ya sea para caracterizar propiedades del grafeno o bien para que este material sirva como un “laboratorio” teórico para estudiar algunos aspectos de la QCD en un ambiente más controlado, todo esto con la intención de crear y fortalecer un puente entre la física de partículas, la materia condensada y el estado sólido. A continuación enlistamos los aspectos más importantes.

5.1. Diagrama de Fase de la QCD

En el Capítulo 1, estudiamos el diagrama de fase efectivo usando el LSMq. Para esto, calculamos el potencial efectivo para T y μ finitos a orden de diagramas de anillo en el límite de bajas y altas temperaturas. El diagrama de fase que obtuvimos para altas temperaturas es, en esencia, el mismo que obtuvimos para bajas temperaturas pero con distintos acoplamientos. La diferencia entre el conjunto de acoplamientos que obtenemos es una forma de medir el cambio en los grados de libertad efectivos en cada fase, es decir, es la manera efectiva en que el modelo puede describir el cambio en los grados de libertad cuando vamos de la fase hadrónica a la fase del plasma de quarks y gluones. Además, el incremento en la presión que se da cuando se va de la descripción de baja temperaturas a la descripción de altas temperaturas se puede también atribuir al cambio en los acoplamientos, por lo tanto, es otra manera en la que el modelo de cuenta del cambio en los grados de libertad. Nuestras conclusiones parciales se publicaron en [12, 13].

5.2. Diagrama de Fase y Colapso Atómico en Grafeno

En el Capítulo 2, estudiamos la GDM en grafeno y cómo está relacionada con una transición del material (semimetal-aislante). Obtuvimos que a $T = 0$, se requiere de un valor crítico del acoplamiento $\lambda > 1/4$ el cual nos permite

establecer un valor de referencia para la constante dieléctrica de $\kappa_e \approx 1.104859$ que puede asociarse a los distintos sustratos en los que se crece el grafeno. Además, al incluir efectos térmicos fuimos capaces de esbozar un diagrama de fase Acomplamiento-Temperatura, el cual nos dice que la temperatura dificulta la transición, es decir, se requiere de un valor mayor del acoplamiento para que ésta suceda. También, como parte del Capítulo 2, estudiamos el análogo del colapso atómico en el grafeno, el cual fue observado experimentalmente por [41] y concluimos que dicho fenómeno está ligado con la pérdida de unitariedad en el Hamiltoniano del Grafeno, los resultados de esta sección fueron publicados en [42].

5.3. Absorción de Luz

En el Capítulo 3, trabajo publicado en [43, 44], calculamos la absorción de luz y el efecto Faraday de un haz de luz incidente en una lámina de grafeno en dos escenarios. En el primero, suponemos una lámina de grafeno sin impurezas en presencia de un campo magnético débil. En este caso, calculamos el tensor de polarización del vacío realizando un desarrollo de segundo orden para el campo débil, a partir del tensor estimamos la absorción de luz en grafeno. Observamos un incremento en la opacidad de la forma $(eB)^2/\omega^4$ en comparación con la ausencia de campo externo. Estos resultados, coinciden con los resultados teóricos previos [58, 59, 60], así como con la medición experimental del 2.3 % de absorción por membrana de grafeno [61]. En el segundo escenario, consideramos una lámina de grafeno deformada, es decir, estirada, contraída u otras deformaciones o impurezas en la estructura cristalina del grafeno. Dichas deformaciones son parametrizadas de manera efectiva considerando dos términos de masa, el término de masa ordinario $m\psi\bar{\psi}$ que es invariante ante paridad e inversión temporal y el término de Haldane $m\psi\tau\bar{\psi}$ que es invariante ante las transformaciones pseudoquirales pero rompe paridad e inversión temporal. En este caso, calculamos la conductividad transversa de Hall usando la fórmula de Kubo, que es proporcional al ángulo de rotación θ_F de la polarización del haz de luz. Obtuvimos que, θ_F se puede considerar cuantificable y que su valor depende de las simetrías presentes en la lámina, esto es

$$\theta_F = \begin{cases} 0, & \text{si } m_0 = 0 \\ \frac{e^2}{4\pi} \equiv \alpha, & \text{si } m_e = 0 \end{cases}. \quad (5.3.1)$$

Entonces, si las deformaciones en la lámina de grafeno son tales que si la simetría de paridad se rompe, por ejemplo; deformaciones elásticas, colocando grafeno sobre una lamina de Nitruro de Boro. Entonces, el ángulo de rotación es distinto de cero y toma el valor del cuanto α [44].

5.4. Efecto Pseudoquiral Magnético

Con la intención de ejemplificar el puente que existe entre la materia condensada, la electrodinámica cuántica en $(2 + 1)$ dimensiones y la cromodinámica cuántica proponemos un arreglo para una hoja de grafeno que reproduzca los ingredientes necesarios para observar un posible CME, el cual consiste en deformar la membrana de grafeno de forma que la inequivalencia entre las subredes triangulares se rompa, por ejemplo, colocando la lámina de grafeno en un sustrato [62] y en presencia de un campo magnético alineado en el plano del grafeno. Encontramos que se genera una corriente eléctrica alineada con el campo magnético producida por el acoplamiento del campo y el pseudospin asociado a cada subred en el grafeno, además de encontrar otras observables que tienen un comportamiento muy similar al CME en QCD.

Comentarios Finales

Con la intención de continuar fortaleciendo el puente entre la física de partículas y la materia condensada, varios resultados obtenidos en esta tesis se pueden ampliar de distintas formas. Por ejemplo:

- En el diagrama de fase de grafeno, se puede mejorar la aproximación de masa constante o bien agregar un campo magnético y obtener un diagrama de fase Temperatura-Acoplamiento-Campo Magnético, de modo que nos permita entender mejor cómo se da la transición Semimetal-Aislante y sirva de motivación para futuras aplicaciones tecnológicas.
- Uno puede realizar un análisis similar del tensor de polarización del vacío en presencia de un campo magnético débil considerando además posibles deformaciones en la lámina de grafeno y medir la absorción de luz y el efecto Faraday. Esto con el objetivo de tener un escenario más real y reproducible experimentalmente.
- En el caso del PCME, se puede profundizar más en la interpretación física de cada una de las observables de este fenómeno, así como profundizar en las similitudes que tiene este fenómeno con el CME en QCD.

Existen muchas formas de extender los resultados de este trabajo y existen también otros fenómenos que se pueden estudiar usando la física de partículas en el grafeno, pero es una realidad que la física del grafeno sirve como herramienta para estudiar la QCD en un ambiente más controlado.

Apéndice A

Contribuciones del Tensor de Polarización

A continuación, vamos a calcular cada una de las contribuciones al tensor de polarización de la Ec. 3.2.9.

A.1. Calculando Π^{vac}

Partimos por la contribución a orden cero, es decir, la contribución sin campo

$$\Pi_{\mu\nu}^{vac}(p) = ie^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \text{Tr} [\gamma_\mu S^0(k) \gamma_\nu S^0(k+p)]$$

con

$$S^0(k) = \frac{\not{k}}{(k)^2},$$

$$\Pi_{\mu\nu}^{vac}(p) = ie^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \text{Tr} [\gamma_\mu i S^0(k) \gamma_\nu i S^0(k+p)],$$

$$\Pi_{\mu\nu}^{vac}(p) = ie^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\text{Tr} [\gamma_\mu \not{k} \gamma_\nu (\not{k} + \not{p})]}{k^2 (k+p)^2},$$

$$\Pi_{\mu\nu}^{vac}(p) = ie^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k^\alpha (k+p)^\beta \text{Tr} [\gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\beta]}{k^2 (k+p)^2},$$

$$\Pi_{\mu\nu}^{vac}(p) = ie^2 \text{Tr} [\gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\beta] I_{vac}^{\alpha\beta},$$

donde $I_{vac}^{\alpha\beta}$ es:

$$I_{vac}^{\alpha\beta} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k^\alpha (k+p)^\beta}{k^2 (k+p)^2}.$$

66APÉNDICE A. CONTRIBUCIONES DEL TENSOR DE POLARIZACIÓN

Para resolver dicha integral, vamos a recurrir a los parámetros de Feynman [63]

$$\frac{1}{A^n B^p} = \frac{\Gamma(n+p)}{\Gamma(n)\Gamma(p)} \int_0^1 dx \frac{x^{n-1} (1-x)^{p-1}}{[Ax + B(1-x)]^{n+p}}.$$

Entonces,

$$I_{\alpha\beta}^a = \int_0^1 dx \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k^\alpha (k+p)^\beta}{\left(k^2 x + (k+p)^2 (1-x)\right)^2}.$$

Haciendo el cambio de variable $k = k' - p(1-x)$, $k+p = k' + px$, tenemos que el denominador es:

$$\begin{aligned} D &= k^2 x + (k+p)^2 (1-x) \\ &= (k' - p(1-x))^2 x + (k' + px)^2 (1-x) \\ &= k'^2 x - 2(k' \cdot p)x(1-x) + p^2 x(1-x)^2 \\ &\quad + k'^2 (1-x) + 2(k' \cdot p)x(1-x) + p^2 x^2 (1-x) \\ &= k'^2 + p^2 x(1-x) [(1-x) - x] \\ &= k'^2 + p^2 x(1-x) \end{aligned}$$

y el numerador es

$$\begin{aligned} N^{\alpha\beta} &= k^\alpha (k+p)^\beta = (k' - p(1-x))^\alpha (k' + px)^\beta, \\ &= \left(k'^\alpha k'^\beta + \underline{k'^\alpha p^\beta x} - \underline{k'^\beta p^\alpha (1-x)} - p^\alpha p^\beta x(1-x) \right). \end{aligned}$$

Los términos subrayados se cancelan debido a la paridad de k . Entonces ($k \equiv k'$):

$$N^{\alpha\beta} = (k^\alpha k^\beta - p^\alpha p^\beta x(1-x)),$$

por lo que la integral a calcular es:

$$I_{vac}^{\alpha\beta} = \int dx x^3 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{(k^\alpha k^\beta - p^\alpha p^\beta x(1-x))}{(k^2 + p^2 x(1-x))^2}.$$

Entonces, tenemos dos integrales a resolver. La primera corresponde al factor $k^\alpha k^\beta$,

$$\begin{aligned} I_{1vac}^{\alpha\beta} &= \int_0^1 dx \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k^\alpha k^\beta}{(k^2 + p^2 x(1-x))^2} = \frac{1}{3} g^{\alpha\beta} \int_0^1 dx \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k^2}{(k^2 + p^2 x(1-x))^2}, \\ I_{1vac}^{\alpha\beta} &\stackrel{\text{RW}}{=} -i \frac{1}{3} g^{\alpha\beta} \int_0^1 dx \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k^2}{(k^2 + p^2 x(1-x))^2}, \end{aligned}$$

donde RW indica que se realiza una rotación de Wick. Integrando la parte angular,

$$I_{1vac}^{\alpha\beta} = -i \frac{1}{3} g^{\alpha\beta} \int_0^1 dx 4\pi \int \frac{dk}{(2\pi)^3} \frac{k^2 k^2}{(k^2 + p^2 x(1-x))^2}.$$

Sea $w = k^2$ y $dw = 2kdk$. Entonces:

$$I_{1vac}^{\alpha\beta} = -i \frac{1}{12\pi^2} g^{\alpha\beta} \int_0^1 dx \int dw \frac{w^{\frac{3}{2}}}{(w + p^2 x (1-x))^2}.$$

Ahora, sea $t = w/C$ y $dt = dw/C$ con $C = p^2 x (1-x)$. Se tiene que:

$$I_{1vac}^{\alpha\beta} = -i \frac{1}{12\pi^2} g^{\alpha\beta} \int_0^1 dx \int C dt \frac{C^{\frac{3}{2}} t^{\frac{3}{2}}}{C^2 (t+1)^2},$$

$$I_{1vac}^{\alpha\beta} = -i \frac{1}{12\pi^2} g^{\alpha\beta} \int_0^1 dx C^{\frac{1}{2}} \int dt \frac{t^{\frac{3}{2}}}{(t+1)^2}.$$

Usando la siguiente representación integral de la función Beta [64],

$$B(x, y) = \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}, \quad (\text{A.1.1})$$

obtenemos que

$$I_{1vac}^{\alpha\beta} = -i \frac{B(5/2, -1/2)}{12\pi^2} g^{\alpha\beta} \int_0^1 dx C^{\frac{1}{2}},$$

$$I_{1vac}^{\alpha\beta} = i \frac{1}{8\pi} g^{\alpha\beta} \int_0^1 dx (p^2 x (1-x))^{\frac{1}{2}} = i \frac{1}{8\pi} g^{\alpha\beta} \frac{\pi}{8} \sqrt{p^2},$$

$$I_{1vac}^{\alpha\beta} = i \frac{\sqrt{p^2}}{64} g^{\alpha\beta} \stackrel{\text{RW}}{=} i \frac{\sqrt{-p^2}}{64} g^{\alpha\beta}.$$

Ahora, calculamos la segunda integral correspondiente a $p^\alpha p^\beta x (1-x)$,

$$I_{2vac}^{\alpha\beta} = \int_0^1 dx x (1-x) \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{p^\alpha p^\beta}{(k^2 + p^2 x (1-x))^2},$$

$$I_{2vac}^{\alpha\beta} \stackrel{\text{RW}}{=} i p^\alpha p^\beta \int_0^1 dx x (1-x) \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k^2 + p^2 x (1-x))^2},$$

$$I_{2vac}^{\alpha\beta} = i p^\alpha p^\beta \int_0^1 dx x (1-x) 4\pi \int \frac{dk}{(2\pi)^3} \frac{k^2}{(k^2 + p^2 x (1-x))^2}.$$

Sea $w = k^2$ y $dw = 2kdk$. Entonces:

$$I_{2vac}^{\alpha\beta} = i \frac{1}{4\pi^2} p^\alpha p^\beta \int_0^1 dx x (1-x) \int dw \frac{w^{\frac{1}{2}}}{(w + p^2 x (1-x))^2}.$$

Sea, ahora $t = w/C$ y $dt = dw/C$ con $C = p^2 x (1-x)$. Se tiene que:

$$I_{2vac}^{\alpha\beta} = i \frac{1}{4\pi^2} p^\alpha p^\beta \int_0^1 dx x (1-x) \int C dt \frac{C^{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}}}{C^2 (t+1)^2},$$

68APÉNDICE A. CONTRIBUCIONES DEL TENSOR DE POLARIZACIÓN

$$I_{2vac}^{\alpha\beta} = i \frac{1}{4\pi^2} p^\alpha p^\beta \int_0^1 dx x(1-x) C^{-\frac{1}{2}} \int dt \frac{t^{\frac{1}{2}}}{(t+1)^2}.$$

Usando la representación integral de la función Beta (A.1.1), obtenemos que

$$I_{2vac}^{\alpha\beta} = i \frac{B(3/2, 1/2)}{4\pi^2} p^\alpha p^\beta \int_0^1 dx x(1-x) C^{-\frac{1}{2}},$$

$$I_{2vac}^{\alpha\beta} = i \frac{1}{8\pi} p^\alpha p^\beta \int_0^1 dx x(1-x) (p^2 x(1-x))^{-\frac{1}{2}} = i \frac{1}{8\pi} p^\alpha p^\beta \frac{\pi}{8} \frac{1}{\sqrt{p^2}}.$$

$$I_{2vac}^{\alpha\beta} = i \frac{1}{64} \frac{p^\alpha p^\beta}{\sqrt{p^2}} \stackrel{\text{RE}}{=} i \frac{1}{64} \frac{p^\alpha p^\beta}{\sqrt{-p^2}},$$

Agrupando todos los términos tenemos que:

$$I_{vac}^{\alpha\beta} = i \frac{\sqrt{-p^2}}{64} g^{\alpha\beta} - i \frac{1}{64} \frac{p^\alpha p^\beta}{\sqrt{-p^2}} = i \frac{\sqrt{-p^2}}{64} \left(g^{\alpha\beta} + \frac{p^\alpha p^\beta}{p^2} \right).$$

Así, retomando

$$\Pi_{\mu\nu}^{vac}(p) = ie^2 \text{Tr} [\gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\beta] I_{vac}^{\alpha\beta},$$

hay que calcular:

$$\text{Tr} [\gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\beta] g^{\alpha\beta} = 4(2g_{\mu\nu} - 3g_{\mu\nu}) = -4g_{\mu\nu},$$

$$\text{Tr} [\gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\beta] p^\alpha p^\beta = 4(2p_\mu p_\nu - p^2 g_{\mu\nu}).$$

Finalmente,

$$\Pi_{\mu\nu}^{vac}(p) = 4ie^2 i \frac{\sqrt{-p^2}}{64} \left(-g_{\mu\nu} + \frac{2p_\mu p_\nu - p^2 g_{\mu\nu}}{p^2} \right),$$

$$\Pi_{\mu\nu}^{vac}(p) = \frac{e^2}{8} \sqrt{-p^2} \left(g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right),$$

$$\Pi_{\mu\nu}^{vac}(p) = 4\pi\alpha \Pi_{vac}(p) P_{\mu\nu}, \quad (\text{A.1.2})$$

con $\alpha = e^2/(4\pi)$, la constante de estructura fina y donde definimos,

$$\Pi_{vac}(p) = \frac{i}{8} p, \quad P_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2},$$

por lo que podemos ver que cumple la identidad de Ward

$$P^{\mu\nu} p_\mu = 0^\nu,$$

por lo tanto, es invariante de norma y en consecuencia, $\Pi_{\mu\nu}^{vac}(p)$ es transverso.

A.2. Calculando Π^{11}

A continuación, vamos a calcular cada una de las contribuciones al tensor de polarización a segundo orden, empezando con el Π^{11} ,

$$\begin{aligned}\Pi_{\mu\nu}^{11}(p) &= ie^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \text{Tr} [\gamma_\mu S^1(k) \gamma_\nu S^1(k+p)] \\ \Pi_{\mu\nu}^{11}(p) &= -ie^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_\parallel^\alpha (k+p)_\parallel^\beta}{(k^2)^2 ((k+p)^2)^2} \text{Tr} [\gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_1 \gamma_2 \gamma_\nu \gamma_\beta \gamma_1 \gamma_2] \\ \Pi_{\mu\nu}^{11}(p) &= \text{Tr} [\gamma_\mu \gamma_\nu] i (e^2 B)^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k^0 (k+p)^0}{(k^2)^2 ((k+p)^2)^2}.\end{aligned}\quad (\text{A.2.1})$$

Realizando nuevamente la parametrización de Feynman y los cambios de variables para obtener el mismo denominador que en el caso del vacío, tenemos que la integral a calcular es

$$\Pi_{\mu\nu}^{11}(p) = 6i (e^2 B)^2 I_{\mu\nu}^{11}, \quad (\text{A.2.2})$$

con

$$I_{\mu\nu}^{11} = 3g_{\mu\nu} \int dx x (1-x) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_\parallel^2 + p_\parallel^2 x (1-x)}{(k^2 + q^2 x (1-x))^4}. \quad (\text{A.2.3})$$

Para calcular dicha integral, usaremos una hoja de trabajo en *Mathematica* (Ver Apéndice B) que calcula integrales de la forma

$$I_{rsl}^{nm} = \int dx x^n (1-x)^m \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{(k_\parallel^2)^r (k_\perp^2)^s}{(k^2 + q^2 x (1-x))^l}.$$

De este modo, la información a colocar en la hoja de trabajo de *Mathematica* es

$$I_{\mu\nu}^{11} = 3g_{\mu\nu} [I_{104}^{11} + p_\parallel^2 I_{104}^{22}]. \quad (\text{A.2.4})$$

A.3. Calculando Π^{20}

$$\Pi_{\mu\nu}^{20}(p) = ie^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \text{Tr} [\gamma_\mu S^2(k) \gamma_\nu S^0(k+p)].$$

Sustituimos $S^2(k)$ y $S^0(k+p)$, es decir,

$$\Pi_{\mu\nu}^{20}(p) = -ie^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \text{Tr} \left[\gamma_\mu \left(\frac{k_\perp}{(k^2)^3} - \frac{k_\perp^2 k}{(k^2)^4} \right) \gamma_\nu \frac{k + \not{p}}{(k+p)^2} \right].$$

70 APÉNDICE A. CONTRIBUCIONES DEL TENSOR DE POLARIZACIÓN

A continuación, separamos en dos integrales para poder calcular las respectivas trazas

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mu\nu}^{20}(p) &= -ie^2 \left(\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\text{Tr} [\gamma_\mu \not{k}_\perp \gamma_\nu (\not{k} + \not{p})]}{(k^2)^3 (k+p)^2} \right. \\
&\quad \left. - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\text{Tr} [\gamma_\mu k_\perp^2 \not{k} \gamma_\nu \not{k} + \not{p}]}{(k^2)^4 (k+p)^2} \right), \\
\Pi_{\mu\nu}^{20}(p) &= -ie^2 \left(\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\text{Tr} [\gamma_\mu (\not{k} - \not{k}_\parallel) \gamma_\nu (\not{k} + \not{p})]}{(k^2)^3 (k+p)^2} \right. \\
&\quad \left. - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\text{Tr} [\gamma_\mu (k^2 - k_\parallel^2) \not{k} \gamma_\nu \not{k} + \not{p}]}{(k^2)^4 (k+p)^2} \right), \\
\Pi_{\mu\nu}^{20}(p) &= -ie^2 \left(\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\text{Tr} [\gamma_\mu \not{k}_\parallel \gamma_\nu (\not{k} + \not{p})]}{(k^2)^3 (k+p)^2} \right. \\
&\quad \left. - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\text{Tr} [\gamma_\mu k_\parallel^2 \not{k} \gamma_\nu \not{k} + \not{p}]}{(k^2)^4 (k+p)^2} \right), \\
\Pi_{\mu\nu}^{20}(p) &= -ie^2 \left(\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_\parallel^\alpha (k+p)^\beta \text{Tr} [\gamma_\mu \gamma_\alpha^\parallel \gamma_\nu \gamma_\beta]}{(k^2)^3 (k+p)^2} \right. \\
&\quad \left. - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_\parallel^2 k^\alpha (k+p)^\beta \text{Tr} [\gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\beta]}{(k^2)^4 (k+p)^2} \right),
\end{aligned}$$

de modo que las integrales a calcular son

$$\Pi_{\mu\nu}^{20}(p) = ie^2 \left(\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_\parallel^\alpha (k+p)^\beta}{(k^2)^3 (k+p)^2} T_{\mu\alpha\nu\beta}^{20,A} - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_\parallel^2 k^\alpha (k+p)^\beta}{(k^2)^4 (k+p)^2} T_{\mu\alpha\nu\beta}^{20,A} \right)$$

$$\Pi_{\mu\nu}^{20}(p) = ie^2 (\Pi_{\mu\nu}^{20A} - \Pi_{\mu\nu}^{20B})$$

donde $\Pi_{\mu\nu}^{20A}$ es:

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mu\nu}^{20A} &= T_{\mu\alpha\nu\beta}^{20,A} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_\parallel^\alpha (k+p)^\beta}{(k^2)^3 (k+p)^2}, \\
\text{Tr} [\gamma_\mu \gamma_\alpha^\parallel \gamma_\nu \gamma_\beta] &\equiv T_{\mu\alpha\nu\beta}^{20,A}
\end{aligned} \tag{A.3.1}$$

y $\Pi_{\mu\nu}^{20B}$ es:

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mu\nu}^{20B} &= T_{\mu\alpha\nu\beta}^{20,B} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_\parallel^2 k^\alpha (k+p)^\beta}{(k^2)^4 (k+p)^2}. \\
\text{Tr} [\gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\beta] &\equiv T_{\mu\alpha\nu\beta}^{20,B}
\end{aligned} \tag{A.3.2}$$

A continuación, usaremos los parámetros de Feynman de la misma forma que en los casos anteriores para calcular

$$I_{20A}^{\alpha\beta} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_{\parallel}^{\alpha}(k+p)^{\beta}}{(k^2)^3 (k+p)^2},$$

$$I_{20B}^{\alpha\beta} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_{\parallel}^2 k^{\alpha}(k+p)^{\beta}}{(k^2)^4 (k+p)^2}.$$

En este caso, la parametrización es de la forma

$$\frac{1}{A^3 B^1} = 3 \int dx \frac{x^2 (1-x)^0}{(Ax + B(1-x))^4},$$

$$\frac{1}{A^4 B^1} = 4 \int dx \frac{x^3 (1-x)^0}{(Ax + B(1-x))^5},$$

por lo que, las integrales quedan como

$$I_{20A}^{\alpha\beta} = 3 \int dx x^2 dx \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_{\parallel}^2 g_{\parallel}^{\alpha\beta} - p_{\parallel}^{\alpha} p^{\beta} x(1-x)}{(k^2 + q^2 x(1-x))^4},$$

$$I_{20B}^{\alpha\beta} = 4 \int dx x^3 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{N_{B1}^{\alpha\beta} + N_{B2}^{\alpha\beta}}{(k^2 + q^2 x(1-x))^5},$$

donde

$$N_{B1}^{\alpha\beta} = \left(k_{\parallel}^2 + p_{\parallel}^2 (1-x)^2 \right) \left(k_{\parallel}^2 g_{\parallel}^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} k_{\perp}^2 g_{\perp}^{\alpha\beta} - p^{\alpha} p^{\beta} x(1-x) \right),$$

$$N_{B2}^{\alpha\beta} = 2 \left(p^{\alpha} p^{\beta} k_{\parallel}^2 (1-x)^2 - p_{\parallel}^{\alpha} p^{\beta} k_{\parallel}^2 x(1-x) \right).$$

Así las expresiones a calcular con la hoja de trabajo de *Mathematica* son

$$I_{20A}^{\alpha\beta} = 3 \left(g_{\parallel}^{\alpha\beta} I_{104}^{20} - p_{\parallel}^{\alpha} p^{\beta} I_{004}^{31} \right), \quad (\text{A.3.3})$$

$$I_{20B1}^{\alpha\beta} = 4 \left[g_{\parallel}^{\alpha\beta} \left(I_{205}^{30} + p_{\parallel}^2 I_{105}^{32} \right) + \frac{1}{2} g_{\perp}^{\alpha\beta} \left(I_{115}^{30} + p_{\parallel}^2 I_{005}^{32} \right) - p^{\alpha} p^{\beta} \left(I_{105}^{41} + p_{\parallel}^2 I_{005}^{43} \right) \right], \quad (\text{A.3.4})$$

$$I_{20B2}^{\alpha\beta} = 8 \left[p^{\alpha} p^{\beta} I_{105}^{32} - p_{\parallel}^{\alpha} p^{\beta} I_{105}^{41} \right]. \quad (\text{A.3.5})$$

Juntando los términos de las Ecs. (A.2.4, A.3.3, A.3.4, A.3.5) y separando de forma que sea clara la invarianza de norma usando

$$P^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - \frac{p^{\mu} p^{\nu}}{p^2}; \quad P_{\perp}^{\mu\nu} = g_{\perp}^{\mu\nu} - \frac{p_{\perp}^{\mu} p_{\perp}^{\nu}}{p_{\perp}^2},$$

entonces, obtenemos que el tensor de Polarización a segundo orden es:

$$\Pi_{\mathcal{O}(2)}^{\mu\nu} = i \frac{e^2}{8(p^2)^{\frac{3}{2}}} \left[\left(1 - 5 \frac{p_{\parallel}^2}{p^2} \right) P^{\mu\nu} + \left(2 \frac{p_{\perp}^2}{p^2} \right) P_{\perp}^{\mu\nu} \right].$$

Por lo tanto, finalmente tenemos que $\Pi^{\mu\nu}$ es

$$\Pi^{\mu\nu} = 4\pi\alpha \left[\left(\Pi_{vac}(p) + (eB)^2 \Pi_0(p) \right) P^{\mu\nu} + \left((eB)^2 \Pi_{\perp}(p) \right) P_{\perp}^{\mu\nu} \right], \quad (\text{A.3.6})$$

$$\Pi_{vac}(p) = \frac{i}{8}p, \quad (\text{A.3.7})$$

$$\Pi_0(p) = \frac{i}{8p^3} \left(1 - 5 \frac{p_{\parallel}^2}{p^2} \right), \quad (\text{A.3.8})$$

$$\Pi_{\perp}(p) = \frac{i}{4p^3} \left(1 - \frac{p_{\parallel}^2}{p^2} \right). \quad (\text{A.3.9})$$

Apéndice B

Notebook en *Mathematica*

En este apéndice anexo completo la hoja de trabajo en *Mathematica* utilizada para resolver integrales del tipo $I_{rsl}^{(n,m)}$.

```
CI = {{ {CI004, CI005}, {CI014, CI015}}, {{CI104, CI105}, {CI114, CI115}}};
```

$$CI004 = \frac{1}{64 \pi}; CI005 = \frac{5}{512 \pi};$$

$$CI014 = \frac{1}{96 \pi}; CI015 = \frac{1}{256 \pi};$$

$$CI104 = \frac{1}{192 \pi}; CI105 = \frac{1}{512 \pi};$$

$$CI114 = \frac{1}{96 \pi}; CI115 = \frac{1}{768 \pi};$$

$$CI025 = \frac{1}{192 \pi}; CI204 = \frac{1}{64 \pi}; CI205 = \frac{1}{512 \pi};$$

$$\text{Potencia}[r_ , m_ , d_] := - \left(r - m + \frac{d}{2} \right)$$

```
Feynman[i_, j_, potencia_] := {i - potencia + 1, j - potencia + 1}
```

$$I_{\text{rsl}}^{(n,m)} = \int_0^1 x^n (1-x)^m dx \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{k_{\parallel}^2 r k_{\perp}^2 s}{(k^2 + p^2 x(1-x))^l}$$

```
Iw[XX_] := (
  r1 = IntegerPart[XX / 10^4];
  s1 = IntegerPart[XX / 10^3] - 10^1 r1;
  m1 = IntegerPart[XX / 10^2] - 10^2 r1 - 10^1 s1;
  n = IntegerPart[XX / 10^1] - 10^3 r1 - 10^2 s1 - 10^1 m1;
  l = XX - 10 * IntegerPart[XX / 10^1];
  m2 = Potencia[r1, m1, 1];
  Pot = Potencia[s1, m2, 2];
  A = Feynman[n, l, Pot];
  cFINAL = Beta[A[[1]], A[[2]]];
  If[s1 == 2, CIN = CI025,
    If[r1 == 2, If[m1 == 4, CIN = CI204, CIN = CI205], CIN = CI[[r1 + 1, s1 + 1, m1 - 3]]];
  wick = (-1)^(m1+r1+s1) I;
  CF = FullSimplify[cFINAL * CIN * wick * (-p^2)^(3/2-Pot, Assumptions -> p > 0)]
```

Bibliografía

- [1] Novoselov, K. S.; et al. *Two-dimensional atomic crystals*, Proc. Natl Acad. Sci. USA **102**, 10451–10453 (2005).
- [2] Geim, A. K. y Novoselov, K. S. *The rise of graphene*, Nature Materials **6**; 183–191 (2007).
- [3] Vafeek, O. y Vishwanath, A. *Dirac Fermions in Solids - from High T_c cuprates and Graphene to Topological Insulators and Weyl Semimetals*, Ann. Rev. Cond. Mat. Phys **5**; 83-112 (2014).
- [4] Schaefer, B. J. y Wagner, M. *On the QCD phase structure from effective models*, Prog.Part.Nucl.Phys. **62**; 381 (2009).
- [5] Ayala, A. *Hadronic matter at the edge: A survey of some theoretical approaches to the physics of the QCD phase diagram*, J. Phys.: Conf. Ser. **761**; 1 (2016).
- [6] Aoki, Y. et al, *The order of the quantum chromodynamics transition predicted by the standard model of particle physics*, Nature **443**; 675-678 (2006).
- [7] Bhattacharya, T. et. al., *QCD Phase Transition with Chiral Quarks and Physical Quark Masses*, Phys. Rev. Lett. **113**; 082001 (2014).
- [8] Mitchell, J. T. (for the PHENIX Collaboration), *PHENIX Experiment Results from the RHIC Beam Energy Scan Program*, PoS CPOD **2013**; arXiv:1308.2185 [nucl-exp] (2013).
- [9] L. Adamczyk et al. (STAR Collaboration), *Observation of an Energy-Dependent Difference in Elliptic Flow between Particles and Antiparticles in Relativistic Heavy Ion Collisions*, Phys. Rev. Lett. **110**; 142301 (2013).
- [10] Davis, N.; Antoniou, N. G.; Diakonov, F. K. (and the NA49 Collaboration), *Searching for the QCD critical point in AA collisions at CERN SPS*, Phys. Atom. Nucl. **75**; 661 (2012).
- [11] Stephano, M. A., *QCD phase diagram: an overview*, PoS LAT **2006**; 024 (2006).

- [12] Ayala, A.; Bashir, A.; Cobos-Martínez, J.; Hernández-Ortiz, S. y Raya, A. *The effective QCD phase diagram and the critical end point*, Nucl. Phys. B **897**; 77 - 86 (2016).
- [13] Ayala, A. et al, *Chiral Symmetry transition in the Linear Sigma Model with quarks: Counting effective QCD degrees of freedom from low to high temperature*, Int. J. Mod. Phys. A **31**, 1650199 (2016)
- [14] Dolan, L. y Jackiw, R. *Symmetry Behavior at Finite Temperature*, Phys. Rev. D **9**; 3320-3341 (1974).
- [15] Abramowitz, M. y Stegun, I. A. *Handbook of mathematical functions : with formulas, graphs, and mathematical tables*, Dover (1965).
- [16] Kapusta, J. I. *Finite-Temperature Field Theory*, Cambridge University Press (1989).
- [17] Apostol, T. M. *Introduction to Analytic Number Theory*, Springer (1976).
- [18] Ayala, A.; Bashir, A.; Raya, A. & Sánchez, A. *Chiral phase transition in relativistic heavy-ion collisions with weak magnetic fields: Ring diagrams in the linear sigma model*, Phys. Rev. D **80**; 036005, (2009).
- [19] Bellac, M. L. *Thermal Field Theory* (Cambridge Monographs on Mathematical Physics), Cambridge University Press (2000).
- [20] Ayala, A. et al. *Chiral transition with magnetic fields*, Phys. Rev. D **89**, 116017 (2014).
- [21] *Particle Data Group*. <http://pdg.lbl.gov/>
- [22] Anisovich, V. V. *Scalar mesons and low-mass sigma: Does the σ reveal the confinement singularity?*, Int. J. Mod. Phys. A **21**; 3615-3639 (2006).
- [23] Sharma, S. *QCD thermodynamics on the lattice*, Adv. High Energy Phys. **2013**; 452978 (2013).
- [24] Costa, P. et al, *Influence of the inverse magnetic catalysis and the vector interaction in the location of the critical end point*, Phys. Rev. D **92**; 036012 (2015).
- [25] Laine, M. y Vuorinen, A. *Basics of Thermal Field Theory: A Tutorial on Perturbative Computations* (Lecture Notes in Physics), Springer (2016).
- [26] Wolfram Research, Inc., *Mathematica*, Versión 10.4, Champaign, IL (2016).
- [27] L.D. Landau y Lifshitz, *Statistical Physics*, (Pergamon, Oxford 1980).
- [28] N. D. Mermin, *Crystalline Order in Two Dimensions*, Phys. Rev. **176**; 250-254.

- [29] Katsnelson, M. I. *Graphene: Carbon in Two Dimensions*, Cambridge University Press (2012).
- [30] López, F.J. *Transporte de Carga en Grafeno Bajo Radiación Electromagnética*, Tesis de Doctorado, IF-UNAM (2010).
- [31] H. M. Faisal, *Adiabatic solutions of a Dirac equation of a new class of quasi-particles and high harmonic generation from them in an intense electromagnetic field*, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **44**; 111001 (2011).
- [32] Hernández-Ortiz, S., Murguía, G. y Raya, A. *Hard and soft supersymmetry breaking for 'graphinos' in uniform magnetic fields*, J. Phys.: Condens. Matter **24**; 015304 (2012).
- [33] Bostwick, A.; Ohta, T.; Seyller, T.; Horn, K. y Rotenberg, E. *Quasiparticle dynamics in graphene*, Nature Phys. **3**; 36 (2007).
- [34] Naumis, G. G. *Premio Nobel 2010: el descubrimiento del grafeno*, El Gluón No. **14**; Noviembre 2010.
- [35] Knox, R. S.; Di Bartolo, B. (Ed.) *Introduction to Exciton Physics Collective Excitations in Solids*, Springer US; 183-245 (1983).
- [36] Liang, W. Y. *Excitons*, Physics Education, **5**; 226 (1970).
- [37] Gamayun, O. V.; Gorbar, E. V. y Gusynin, V. P. *Gap generation and semimetal-insulator phase transition in graphene*, Phys. Rev. B **81**; 075429 (2010).
- [38] Hernández-Ortiz, S. *Sobre la Transición Semimetal-Aislante en Grafeno*, Tesis de Maestría, IFM-UMSNH (2013).
- [39] Python Software Foundation, *Python*, Versión 3.5.1 (2015).
- [40] Greiner, W., Müller, B. y Rafelski, J. *Quantum Electrodynamics of Strong Fields*, Texts and Monographs in Physics. Springer-Verlag (1985).
- [41] Wang, Y.; Wong, D.; Shytov, A. V.; et al *Observing Atomic Collapse Resonances in Artificial Nuclei on Graphene*, Science **340**; 734-737 (2013).
- [42] Valenzuela, D.; Hernández-Ortiz, S.; Loewe, M. y Raya, A. *Atomic collapse in graphene: lost of unitarity*, J. Phys. A. **49**; 495302 (2016).
- [43] Valenzuela, D. et al *Graphene transparency in weak magnetic fields*, J. Phys. A: Math. Theor. **48**; 065402 (2015).
- [44] Hernández-Ortiz, S. et al, *Light absorption in distorted graphene*, Int. J. Mod. Phys. B **30**, 1650084 (2016).
- [45] Gusynin, V. P.; Sharapov, S. G. y Carbotte, J. P. *AC Conductivity of graphene: From tight-binding model to 2+1-dimensional quantum electrodynamics*, Int. J. Mod. Phys. B **21**, 4611 (2007).

- [46] Haldane, F. D. M. *Model of a Quantum Hall Effect without Landau Levels: Condensed-Matter Realization of the "Parity Anomaly"*, Phys. Rev. Lett. **61**; 2015 (1988).
- [47] Schwinger, J. *On Gauge Invariance and Vacuum Polarization*, Phys. Rev. **82**, 664 (1951).
- [48] Chyi, T.-K.; Hwang, C.-W.; Kao, W. F.; Lin, G.-L.; Ng, K.-W. & Tseng, J.-J. *Weak-field expansion for processes in a homogeneous background magnetic field*, Phys. Rev. D **62**; 105014 (2000).
- [49] Gusynin, V. P. y Sharapov, S. G. *Unconventional Integer Quantum Hall Effect in Graphene*, Phys. Rev. Lett. **95**; 146801 (2005).
- [50] Fialkovsky, I. y Vassilevich, D. V. *Quantum Field Theory in Graphene*, Int. J. Mod. Phys. A **27**, 1260007 (2012); Fialkovsky, I. y Vassilevich, D. V. Int. J. Mod. Phys. Conf. Ser. **14**, 88 (2012).
- [51] Grassee, I. et al *Giant Faraday rotation in single- and multilayer graphene*, Nat. Phys. **7**, 48 (2011).
- [52] Shimano, R. et al *Quantum Faraday and Kerr rotations in graphene*, Nat. Commun. **4**; 1841 (2013).
- [53] Kharzeev, D. E.; McLerran L. D. y Warringa, H. J. *The effects of topological charge change in heavy ion collisions: "Event by event P and CP violation"*, Nucl. Phys. A **803**; 227 (2008).
- [54] Kharzeev, D. E. et al *Chiral magnetic effect in ZrTe₅*, Nat. Phys. **12**, 550–554 (2016).
- [55] Mizher, A. J.; Raya, A. y Villavicencio, C. *The pseudo chiral magnetic effect in QED₃*, Nuclear and Particle Physics Proceedings **270**; 181 - 184 (2016).
- [56] Hernández-Ortiz, S.; Mizher, A. J.; Raya, A. y Villavicencio, C. *Trabajo en proceso*.
- [57] Chodos, A.; Everding, K. y Owen, D. A. *QED with a chemical potential: The case of a constant magnetic field*, Phys. Rev. D **42**; 2881 (1990).
- [58] Fialkovsky, I. y Vassilevich, D. *Quantum Field Theory in Graphene*, Int. J. Mod. Phys. A **27**; 1260007 (2012).
- [59] Aires Ferreira, J.; et al. *Faraday effect in graphene enclosed in an optical cavity and the equation of motion method for the study of magneto-optical transport in solids*, Phys. Rev. B **84**; 235410 (2011).
- [60] Fialkovsky, I. y Vassilevich, D. *Faraday Rotation in Graphene*, Eur. Phys. J. B **85**; 384 (2012).

- [61] Nair, R. R.; et al. *Fine Structure Constant defines visual transparency of Graphene*, Science **320**; 1308 (2008).
- [62] Giovannetti, G.; et al. Substrate-induced band gap in graphene on hexagonal boron nitride: Ab initio density functional calculations, Phys. Rev. B **76**; 073103 (2007).
- [63] Weinberg, S. *The Quantum Theory of Fields, Volume I*, Cambridge: Cambridge University Press (2008).
- [64] Askey, R. A.; Roy, R. *Beta function*, in Olver, Frank W. J.; Lozier, Daniel M.; Boisvert, Ronald F.; Clark, Charles W., *NIST Handbook of Mathematical Functions*, Cambridge University Press (2010).