Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Instituto de Física y Matemáticas

Título:

Álgebras C^* generadas por planos complejos cuánticos n-dimensionales.

Trabajo de Tesis.

Que para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas
presenta:

Ismael Farid Cohen Puerta

Asesor:
Dr. Elmar Wagner

Morelia, Michoacán - Febrero del 2017.

Índice general

Resumen: En este trabajo se expone la construcción de una esfera cuántica no conmutativa, donde los puntos clásicos (el álgebra de funciones continuas), son reemplazados por un álgebra C* de operadores acotados definidos sobre un espacio de Hilbert. Nuestro método se basa en describir formalmente la contraparte no conmutativa de la construcción de la esfera de Riemann, obtenida a partir de la compactación por un punto del plano complejo. Mostramos también la generalización de dicha esfera a dimensiones finitas arbitrarias. Demostramos que este proceso de deformación no cambia la topología de la esfera, es decir, la k-teoría cuántica y la clásica son iguales.

Abstract: In this document, we expose the construction of a quantum noncommutative sphere where the classical points (the algebra of continuous functions) are replaced by a C*-algebra of bounded operators defined on a Hilbert space. We base our method on the describing of the non-commutative counterpart of the Riemann 2-sphere construction, obtained by the one point compactification of the complex plane. We show the generalization of this quantum sphere for arbitrary finite dimensions. We proof that this deformation process do not change the topology of the sphere, that is, the quantum and the classical k-theory are the same.

Palabras Claves: Geometría no conmutativa, teoría espectral, esfera cuántica, k-teoría de C*-álgebras, Operadores q-normales.

Introducción

Existen dos ideas básicas que motivan el estudio de la geometría no conmutativa. La primera está relacionada con el cuestionarse por la existencia de espacios para los cuales las herramientas del análisis clásico tales como la teoría de la medida, la topología, el cálculo y la idea de métrica pierden su pertinencia, pero para los cuales les corresponde de forma muy natural un álgebra no conmutativa. Tales espacios surgen al tiempo en matemáticas y en física cuántica. Algunos ejemplos de tales espacios pueden ser el espacio de representaciones unitarias irreducibles de un grupo discreto y el espacio de foliaciones asociado a una variedad. La segunda motivación fundamental para el estudio de la geometría no conmutativa se relaciona con la extensión de las herramientas clásicas ya mencionadas (haciendo inclusión de la geometría Riemanniana). Este tipo de extensión envuelve una reformulación algebraica de las herramientas teóricas, transformando todo su aspecto conmutativo a uno aplicable a situaciones no conmutativas. De esta manera se da lugar a muchos fenómenos teóricos, a nuevos puntos de vista y nuevas herramientas que incluso pueden ser aplicadas al caso conmutativo tales como la cohomología cíclica y el cálculo diferencial cuantizado.

Para nosotros la motivación mas importante para adentrarnos en el estudio de esta geometría, se centra en la justificación de la no existencia del punto geométrico, propuesta por la física gravitacional. En este sentido, esta teoría no conmutativa propone una nueva forma de intepretar los espacios geométricos clásicos. El primer objetivo de este trabajo es exponer la construcción de una esfera cuántica, donde los puntos clásicos que deberían conformar a esta esfera (el álgebra de funciones continuas), son reemplazados por un álgebra C* de operadores acotados definidos sobre un espacio de Hilbert.

Nuestro método se basa en describir formalmente la contraparte no conmutativa de la construcción de la esfera de Riemann, obtenida a partir de la compactación por un punto del plano complejo. Para esto, consideramos como paso inicial una adecuada deformación del plano complejo, luego estudiamos la estructura C*-algebraica asociada a esta deformación y terminamos entonces por adjuntarle la unidad algebraica, proceso equivalente en la teoría C* al de obtener su compactación.

Al adentrarnos en las deformaciones del plano complejo, nos topamos con el concepto de operador q-normal. Para acercarnos a este concepto, debemos darnos cuenta que en la teoría de grupos cuánticos nos encontramos frecuentemente y en diferentes situaciones con elementos x que satisfacen la relación

$$xx^* = q^2 x^* x, \tag{1}$$

donde q es un número real positivo. De manera más general, existe una gran cantidad de espacios cuánticos que contienen la ecuación $xy = qyx$ como relación de definición para ciertos generadores x e y de las álgebras correspondientes. Esta es la importancia de estudiar el comportamiento de los operadores q-normales, es decir, operadores que satisfacen la propiedad (1) sobre espacios de Hilbert. Operadores no triviales de este tipo son necesariamente no acotados, lo cual dificulta el estudio de estas transformaciones en la teoría C*. Una forma adecuada en la que podemos entender estos operadores es como deformaciones del operador normal, es decir, operadores $T : H \longrightarrow H$ sobre un espacio de Hilbert H que satisfacen $TT^* = T^*T$, de aquí el nombre por el que son conocidos.

Una pregunta natural surge al indagar si el proceso de transformación de la C*-álgebra conmutativa $C_0(\mathbb{C})$ a la versión q-deformada $C_0(\mathbb{C}_q)$, preserva invariantes topológicos. Este tipo de preservación de invariantes nos brinda otra justificación para llamar a $C_0(\mathbb{C}_q)$ el álgebra de funciones continuas anulandose en el infinito sobre el plano complejo cuántico. Sin embargo, también estamos interesados en detectar efectos cuánticos, es decir, situaciones donde los cálculos de invariantes difieren del caso clásico al caso cuántico. En situaciones favorables, el caso cuántico conduce a una simplificación. Para dar respuesta a estos interrogantes, calculamos la K-teoría de $C_0(\mathbb{C}_q)$ y mostramos que este espacio tiene los mismos K-grupos que la C*-álgebra conmutativa $C_0(\mathbb{C})$. La analogía es incluso más estrecha ya que los elementos no triviales de $K_0(C_0(\mathbb{C}_q))$ pueden ser descritos como versiones q-deformadas de las proyecciones clásicas de Bott. Sin embargo, como un efecto cuántico, las clases K_0 pueden ser dadas también como proyecciones del tipo Power-Rieffel 1-dimensionales en la C*-álgebra $C_0(\mathbb{C}_q)$).

Otro de los objetivos del presente trabajo, es el de extender el procedimiento de construcción de la esfera cuántica a dimensiones mas elevadas, es decir, construcciones que envuelven un número mayor de generadores de la esfera. Para esto, en principio clasificamos las representaciones de buen comportamiento de $\mathcal{O}(\mathbb{C}_q^2)$ sobre espacios de Hilbert. Hacemos también un estudio de estas representaciones sobre un $\mathcal{L}_2$-espacio de tal modo que el módulo de cada generador actúa como un operador multiplicación. Además las medidas en este procedimiento, son escogidas de tal forma que las isometrías parciales de la descomposición polar sean dadas por un comportamiento análogo al 1-dimensional, esto es, estas isometrías actuarán como operadores shifts sobre el espacio de funciones. De esta forma obtendremos relaciones de conmutacion considerablemente simples entre los operadores multiplicación y las isometrías parciales. Luego consideramos una *-álgebra auxiliar de operadores acotados generada por funciones continuas asociadas al módulo de los generadores y potencias de las isometrías parciales y sus adjuntos. Para su interpretación como funciones continuas anulandose en el infinito sobre el plano complejo cuántico 2-dimensional, requeriremos que las funciones pertenezcan a $C_0([0,\infty) \times [0,\infty))$ y que al ser evaluadas en 0, no dependan de las fases. Luego definiremos nuestro espacio deseado al tomar la C*-clausura del álgebra auxiliar en la norma de operadores.

Finalizaremos el trabajo exponiendo un estudio de $\mathcal{O}(\mathbb{C}_q^n)$ para $n \in \mathbb{N}$, a través de sus representaciones de buen comportamiento y luego tratando este espacio de manera análoga a sus versiones de menos dimensión.

Esperamos que la exhibición de todos nuestros resultados sea de total agrado para el lector del presente documento.

Capítulo 1

Preliminares

1. La teoría de C*-álgebras generadas por elementos no acotados.

Una C*-álgebra A es una *-álgebra de Banach tal que para todo $a \in A$ se cumple la condición C*, es decir, $\|a\|^2 = \|a^*a\|$. Para estudiar las C*-álgebras generadas por elementos no acotados empleamos la teoría de Woronowicz (ver [**35**]). A continuación presentamos los conceptos de esta teoría que intervienen de forma relevante en nuestro trabajo.

Definición 1. *Sea H un espacio de Hilbert separable, definimos $C^*(H)$ como el conjunto de todas las subálgebras C^* no degeneradas de $B(H)$. Decimos que la C^*-álgebra $\mathcal{A} \subseteq B(H)$, es no degenerada si $\mathcal{A}H := \{ah : \ a \in A,\ h \in H\}$ es denso en H.*

Definición 2. *Sea H un espacio de Hilbert y $\mathcal{A} \in C^*(H)$; un operador $a \in B(H)$ se dice multiplicador de $\mathcal{A}$, si $a\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}a$ están contenidos en $\mathcal{A}$. Denotamos este conjunto por*

$$M(\mathcal{A}) = \{a \in B(H) : \ a\mathcal{A},\ \mathcal{A}a \subseteq \mathcal{A}\}.$$

Se verifica también que $M(\mathcal{A})$ es una subálgebra C^* de $B(H)$ y $I_{B(H)} \in M(\mathcal{A})$. Además $\mathcal{A}$ es ideal esencial de $M(\mathcal{A})$, esto es, $\mathcal{A}$ es ideal de $M(\mathcal{A})$ y si se cumple que $m \in M(\mathcal{A})$ y $ma = 0$ para todo $a \in \mathcal{A}$ entonces $m = 0$. Vale la pena resaltar el siguiente resultado.

Proposición 1. *$M(\mathcal{A})$ es el álgebra C^* más grande que contiene a $\mathcal{A}$ como un ideal esencial.*

Definición 3. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^*, un elemento $a \in M(\mathcal{A})$ se dice positivo sobre sp $\mathcal{A}$, si $0 \leq a$ y $a\mathcal{A}$ es denso en $\mathcal{A}$.*

Definición 4. *Sea T un operador cerrado densamente definido actuando sobre un espacio de Hilbert H, definimos la z-transformada de T como el operador $z_T = z(T) = T(1 + T^*T)^{-\frac{1}{2}}$.*

El operador z_T contiene toda la información de T, en el sentido que

$$T = z_T(I - z_T^* z_T)^{-\frac{1}{2}}.$$

Se puede demostrar que $\|T\| < \infty$ si y solo si $\|z_T\| < 1$.

Definición 5. *Sea H un espacio de Hilbert, $A \in C^*(H)$ y T un operador cerrado densamente definido actuando sobre H. Decimos que T es afiliado a A y escribimos $T \in A^\eta$, si $z_T \in M(A)$ y $z_T^* z_T < I$ es positivo sobre sp A.*

Destacamos los siguientes resultados de la teoría de Woronowicz.

Proposición 2. *Si T es afiliado a la C^*-álgebra $\mathcal{A}$, entonces T^* y T^*T también lo son.*

Proposición 3. *Los multiplicadores de una C^*-álgebra $\mathcal{A}$, son los únicos elementos acotados afiliados a $\mathcal{A}$.*

Vale la pena mencionar también que todo operador cerrado densamente definido sobre un espacio de Hilbert H, es afiliado al álgebra $CB(H)$ de todos los operadores compactos sobre H.

Definición 6. *$Rep(\mathcal{A}, H)$ denotará el conjunto de todas las representaciones no degeneradas de $\mathcal{A}$ en H. Por definición $\phi \in Rep(\mathcal{A}, H)$ si y solo si $\phi : \mathcal{A} \to B(H)$ es un *-homomorfismo tal que $\phi(\mathcal{A})H$ es denso en H.*

Se tienen los siguientes resultados concernientes a representaciones de álgebras C^*.

Proposición 4. *Toda representación $\phi \in Rep(\mathcal{A}, H)$, admite una única extensión a un $*$-homomorfismo $\phi : M(\mathcal{A}) \to B(H)$.*

Usando la propiedad $\phi(z_T) = z_{\phi(T)}$ para todo $T \in M(\mathcal{A})$, se extiende la acción de la representación ϕ a los elementos afiliados de $\mathcal{A}$ de la siguiente forma, si $T \in \mathcal{A}^\eta$ entonces $z_T \in M(\mathcal{A})$ y existe un único operador cerrado densamente definido S actuando sobre H tal que $\phi(z_T) = z_S$. Diremos que S es la ϕ-imagén de T y escribiremos $S = \phi(T)$. Esto significa que la ϕ-imagen de un elemento afiliado T estará dada por

$$\phi(T) = z^{-1}(\phi(z(T))). \tag{*}$$

Definición 7. *Sea H un espacio de Hilbert. Sean A y B álgebras C^*, tales que $B \in C^*(H)$. Decimos que ϕ es un morfismo de A en B, si $\phi \in Rep(A, H)$ y $\phi(A)B$ es denso en B. El conjunto de todos los morfismos de A en B será denotado por $Mor(A, B)$.*

Lema 1. *Sean A y B álgebras C^* y H un espacio de Hilbert. Conforme a la notación anterior se cumple que:*

1. *$Rep(A, H) = Mor(A, CB(H))$.*
2. *Para todo $\phi \in Mor(A, B)$, se tiene que si $T \in A^\eta$ entonces $\phi(T) \in B$.*

Definición 8. *Sea A un álgebra C^* y $T_1, \ldots, T_n$ elementos afiliados con A. Decimos que A está generada por $T_1, \ldots, T_n$, según Woronowicz, si para todo espacio de Hilbert H, toda $B \in C^*(H)$ y toda $\phi \in Rep(A, H)$, se tiene que: Si $\phi(T_i) \in B^\eta$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, entonces $\phi \in Mor(A, B)$.*

El siguiente resultado, es pieza fundamental en la obtención del resultado principal del siguiente capítulo.

Teorema 1. *Sea A una álgebra C^* y $T_1, \ldots, T_n$ elementos afiliados con A. El subconjunto de $M(A)$, compuesto por todos los elementos de la forma $(1 + T_i^* T_i)^{-1}$ y $(1 + T_i T_i^*)^{-1}$ para $i = 1, \ldots, n$, será notado por Γ. Si se cumplen las siguientes condiciones*

1. *$T_1, \ldots, T_n$ separan representaciones de A, es decir, si $\varphi_1, \ \varphi_2 \in Rep(A, H)$ y $\varphi_1 \neq \varphi_2$, entonces $\varphi_1(T_i) \neq \varphi_2(T_i)$ para algún $i = 1, \ldots, n$*
2. *Existen elementos $r_1, \ldots, r_m \in \Gamma$ tales que $r_1 \cdots r_m \in A$*

Entonces A está generada según Woronowicz por $T_1, \ldots, T_n$.

Fijamos ahora algo de notación. En adelante, para un espacio localmente compacto X entenderemos por $C(X)$, $C_b(X)$ y $C_0(X)$ al álgebra de las funciones continuas complejo valuadas sobre X, la subálgebra de las funciones acotadas en $C(X)$ y la subálgebra de funciones en $C_b(X)$ que se anulan al infinito, respectivamente. Los siguientes dos resultados explican una notación que muy frecuentemente utilizamos en el texto.

Teorema 2. *Sea E una medida espectral sobre un espacio medible $(\Omega, \ \mathfrak{M})$.*

- *A cada función medible $f : \Omega \to \mathbb{C}$ le corresponde un único operador $\Psi(f)$ cerrado densamente definido en H, con dominio $D_f = \left\{ x \in H : \int\limits_\Omega |f(z)|^2 dE_{x,x}(z) < \infty \right\}$ y satisface*

$$\langle \Psi(f)x, \ y \rangle = \int\limits_\Omega f dE_{x,y}, \quad x \in D_f, \ y \in H, \tag{2}$$

  donde $E_{x,y}(M) := \langle E(M)x, y \rangle$ para todo $M \in \mathfrak{M}$.
- *$\Psi(f)^* = \Psi\left(\bar{f}\right)$ y $\Psi(f)^*\Psi(f) = \Psi(|f|^2) = \Psi(f)\Psi(f)^*$.*

Lo anterior lo resumimos por la notación

$$\Psi(f) = \int\limits_\Omega f(\lambda) dE(\lambda).$$

Teorema 3. *(Teorema Espectral)*
A cada operador autoadjunto T en H le corresponde una única medida espectral E sobre los conjuntos de Borel de la recta real hasta $B(H)$, tal que

$$\langle T(x),\ y\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, dE_{x,y}(\lambda),\ x \in Dom\,(T),\ y \in H,$$

además $E(sp\,(T)) = I$; a E se le denomina descomposición espectral de T.

Para la medida espectral E asociada a un operador autoadjunto T, podemos definir el operador $\Psi(f)$ sobre las funciones medibles f sobre $\mathbb{R}$, y por convención escribiremos

$$f(T) := \Psi(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, dE(\lambda) = \int_{\mathrm{sp}\,(T)} f(\lambda)\, dE(\lambda). \tag{3}$$

En general se cumple que $\Psi(f)\Psi(g) \subseteq \Psi(fg)$ y $\Psi(fg) = \overline{\Psi(f)\Psi(g)}$.

2. Productos cruzados.

A pesar que la teoría de Woronowicz nos brinda herramientas suficientes para entender cuando una determinada C*-álgebra está generada por un conjunto de operadores no acotados, esta teoría sufre la crucial desventaja de no ofrecer noción alguna de como construir en principio dicha álgebra C*. Exponemos a continuación los pasos que nos llevan a la buena construcción de un candidato a ser la C*-álgebra generada por un operador q-normal. Este conjunto estará estrechamente relacionado al concepto de C*-álgebras dadas por producto cruzado, teoría que extraemos de [**33**]. Comenzamos por enunciar la Definición 2.6. de la anterior referencia.

Definición 9. *Un sistema dinámico C* es una tripleta (A, G, α) que consiste de una C*-álgebra A, un grupo localmente compacto G y un homomorfismo continuo $\alpha : G \longrightarrow Aut(A)$, donde la topología en $Aut(A)$ se define por la convergencia puntual.*

Se deduce fácilmente que G actúa sobre la C*-álgebra A por automorfismos, esto quiere decir que la fórmula dada por $s \cdot x \mapsto \alpha_s(x)$ define una acción de grupo. Nos interesa estudiar este concepto cuando $G = \mathbb{Z}$, $A \subset C(X)$ y $X \subset [0, \infty)$ es un conjunto cerrado q-invariante no vacío, aquí estamos considerando $q \in (0, 1)$ como una constante y la q-invarianza indica que $qX = X$. En este caso vemos que definiendo $\alpha(1) := \alpha_1$, entonces el homomorfismo $\alpha : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{Aut}(A)$ satisface $\alpha(n) = \alpha_1^n$. De esta forma, la acción de $\mathbb{Z}$ sobre A está dada por la fórmula $(n, a) \mapsto \alpha(n)(a) = \alpha_1^n(a)$. Así nuestro estudio de estos sistemas C*-dinámicos se limita a un solo automorfismo $\alpha(1) = \alpha_1$.

La definición de producto cruzado $A \rtimes \mathbb{Z}$, nos dice que este conjunto está dado por la cerradura en la norma universal (Ecuación (8)) de la *-álgebra

$$C_c(\mathbb{Z}, A) := \{f : \mathbb{Z} \longrightarrow A \quad | \quad \operatorname{supp}(f) \subset \mathbb{Z} \quad \text{es compacto}\}, \tag{4}$$

con el producto

$$f * g := \int_G f(k)\, \alpha_k(g)(n-k)\, d\mu(k)$$

y la involución

$$f^*(n) := \alpha_1^{-n}(\bar{f}(-n)),$$

lo cual denotamos por $A \rtimes \mathbb{Z} := \overline{C_c(\mathbb{Z}, A)}$. Notamos que $\operatorname{supp}(f)$ como subconjunto compacto de $\mathbb{Z}$, es equivalente a ser finito. Además es sabido que la medida de Haar μ asociada al grupo $\mathbb{Z}$ es la medida del conteo. Luego la involución para el caso $G = \mathbb{Z}$ satisface

$$f * g(n) := \int_G f(k)\, \alpha_k(g)(n-k)\, d\mu(k) = \sum_{k \in I} f(k)\, \alpha_k(g)(n-k),$$

donde $I \subset \mathbb{Z}$ es un conjunto finito de índices. Estas observaciones sugieren una construcción más explícita del producto cruzado $C_0(X) \rtimes \mathbb{Z}$.

Para esto, fijemos nuevamente un $q \in (0,1)$ y consideremos $X \subset [0, \infty)$ un conjunto cerrado q-invariante no vacío. Definamos

$$\gamma_q : C_0(X) \longrightarrow C_0(X), \quad \gamma_q(f)(x) := f(qx), \tag{5}$$

es claro que γ_q define un automorfismo de $C_0(X)$. Consideremos ahora el álgebra generada por $C_0(X)$, U y U^* sujeta a la relaciones

i) $UU^* = U^*U = 1$,
ii) $(fU^n)(gU^m) = f\gamma_q^n(g)U^{n+m}$ para $f,\ g \in C_0(X)$ y $n, m \in \mathbb{Z}$,

De forma natural, el numeral *i*) induce la consideración $U^{*n} = U^{-n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Destacamos también el hecho que los elementos de la forma fU^k con $k \in \mathbb{Z}$ son monomios bien definidos en este álgebra. Definimos *-alg$\{C_0(X), U\}$ como el álgebra generada por estos monomios fU^k con $f \in C_0(X)$. De esta manera U puede ser entendido como un elemento unitario abstracto y se cumple la fórmula

$$\text{*-alg}\{C_0(X), U\} := \Big\{ \sum_{\text{finito}} f_k U^k \ :\ f_k \in C_0(X),\ \ k \in \mathbb{Z} \Big\}. \tag{6}$$

Dentro de este álgebra podemos considerar la involución determinada por

$$(fU^n)^* = \gamma_q^{-n}(\bar{f})\, U^{-n}, \quad f \in C_0(X),\ \ n \in \mathbb{Z}, \tag{7}$$

donde $\bar{f}$ denota el conjugado complejo de f. Notamos que $U \notin$ *-alg$\{C_0(X), U\}$, puesto que las funciones constantes no decrecen al infinito. Además *-alg$\{C_0(X), U\}$ es isomorfa a la *-álgebra $C_c(\mathbb{Z}, C_0(X))$ definida en (4), esto por

$$C_c(\mathbb{Z}, C_0(X)) \ni f \longmapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)U^n \in \text{*-alg}\{C_0(X), U\}.$$

Ahora definimos la C*-álgebra producto cruzado $C_0(X) \rtimes \mathbb{Z}$ como la clausura de *-alg$\{C_0(X), U\}$ bajo la norma universal

$$(8) \qquad \|\varphi\|_{\text{univ}} := \sup\{\|\pi(\varphi)\| \ : \ \pi \text{ es una representación covariante}\}, \quad \varphi \in \text{*-alg}\{C_0(X), U\},$$

donde una representación covariante está dada por un operador unitario $\pi(U) \in B(\mathcal{H})$ y una *-representación $\pi : C_0(X) \longrightarrow B(\mathcal{H})$ tal que $\pi(\sum f_k U^k) := \sum \pi(f_k)\,\pi(U)^k$ define una *-representación de *-alg$\{C_0(X), U\}$. La existencia de la norma universal se sigue de consideraciones generales, ver [**33**]. Queremos ahora entender el producto como un objeto universal para las representaciones covariantes del sistema dinámico, este resultado se le debe a Raeburn y será enunciado más adelante. Primero, enunciamos un resultado previo (Proposición 2.34 [**33**]).

Proposición 5. *Supongamos que $\alpha : G \longrightarrow Aut\, A$ es un sistema dinámico. Luego existe un homomorfismo no degenerado fiel*

$$i_A : A \longrightarrow M(A \rtimes_\alpha G),$$

y un homomorfismo unitario estrictamente continuo

$$i_G : G \longrightarrow UM(A \rtimes_\alpha G),$$

tal que para $f \in C_c(G, A)$, $r, s \in G$ y $a \in A$ se tiene que

$$i_G(r)f(s) = \alpha_r(f(r^{-1}s)) \quad y \quad i_A(a)f(s) = af(s).$$

donde $UM(A \rtimes_\alpha G)$ denota el conjunto de elementos unitarios en $M(A \rtimes_\alpha G)$. Además (i_A, i_G) es covariante ya que

$$i_A(\alpha_r(a)) = i_G(r)i_A(a)i_G(r)^*.$$

Teorema 4. *[Teorema de Raeburn] Sea (A, G, α) un sistema dinámico. Supongamos que B es una C*-álgebra tal que*

(a) Existe un homomorfismo covariante (j_A, j_G) de (A, G, α) en $M(B)$.
(b) Dada una representación covariante no degenerada (π, U) de (A, G, α), existe una representación $L = L_{(\pi,U)}$ de B tal que $\bar{L} \circ j_A = \pi$ y $\bar{L} \circ j_G = U$.
(c) $B = \overline{span}\{j_A(a)j_G(z) : \ a \in A \ \ y \ \ z \in C_c(G)\}$.

Entonces existe un isomorfismo

$$j : B \longrightarrow A \rtimes_\alpha G$$

tal que

$$\bar{j} \circ j_A = i_A \quad y \quad \bar{j} \circ j_G = i_G,$$

donde (i_A, i_G) *es el homomorfismo covariante canónico de* (A, G, α) *a* $M(A \rtimes_\alpha G)$ *definido en la Proposición anterior.*

3. Elementos de la K-teoría y la K-homología en C*-álgebras.

3.1. La K-teoría. Iniciamos esta sección presentando los conceptos de la teoría K en el marco de C*-álgebras. Los siguientes objetos pueden ser consultados en [**15**].

Definición 10. *Sea* A *una C*-álgebra con unidad. Denotamos por* $K_0(A)$ *al grupo abeliano generado por* $[p]$*, para cada proyección* p *en cada álgebra* $M_n(A)$*, sujeta a las siguientes relaciones*

1. *si* p *y* q *son proyecciones en* $M_n(A)$*, para algún* $n \in \mathbb{N}$*, y si* p *y* q *están conectadas por un camino continuo de proyecciones en* $M_n(A)$*, entonces* $[p] = [q]$.
2. $[0] = 0$*, para cualquier tamaño de matriz cuadrada nula.*
3. $[p] + [q] = [p \oplus q]$*, para cualquier tamaño de matrices proyección* p *y* q*.*

Aquí la notación $p \oplus q$, para proyecciones $p, q \in M_n(A)$, se refiere a la proyección $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$ en $M_{m+n}(A)$.

Definición 11. *Si* A *es una C*-álgebra entonces la unitización de* A *es la única (módulo *-isomorfismo canónico isométrico) C*-álgebra* $\tilde{A}$ *con unidad multiplicativa la cual contiene a* A *como un ideal cerrado de codimensión uno.*

Definición 12. *Sea* J *una C*-álgebra sin unidad y* $\tilde{J}$ *su unitización, luego existe una sucesión exacta corta*

$$0 \longrightarrow J \longrightarrow \tilde{J} \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow 0.$$

Denotamos por $K_0(J)$ *al kernel del homomorfismo inducido* $K_0(\tilde{J}) \longrightarrow K_0(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}$.

Definición 13. *Sea* A *una C*-álgebra, denotamos por* $K_1(A)$ *al grupo abeliano con generador* $[u]$ *para todo* u *unitario en cada* $M_n(A)$*, sujeto a las siguientes relaciones*

1. *Si* u *y* v *están en el mismo* $M_n(\tilde{A})$*, y si* u *y* v *pueden ser unidos por un camino continuo de unidades en* $M_n(\tilde{A})$*, entonces* $[u] = [v]$.
2. $[1] = 0$.

3. $[u]+[v]=[u\oplus v]$*, para cualquier tamaño de las matrices unitarias* u *y* v*.*

Nuestro objetivo ahora es presentar el teorema de la sucesión exacta de seis términos de la K-teoría y el teorema de Pimsner-Voiculescu. Para esto necesitamos algunos conceptos previos. Las siguientes definiciones pueden ser consultadas en [**15, 32**].

Definición 14. *Sea* J *un ideal en una C*-álgebra* A *y* $x\in K_1(A/J)$*. Sean* $u\in\mathcal{U}_n(A/J)$ *y* $v\in\mathcal{U}_k(A/J)$ *tales que* $x=[u]$ *y* $diag(u,v)$ *es homotópica a* 1_{n+k} *en* $\mathcal{U}_{n+k}(A/J)$*. Sea* $w\in\mathcal{U}_{n+k}(A)$ *un lift unitario de* $diag(u,v)$*. Definimos el mapeo índice* $\delta_1: K_1(A/J)\longrightarrow K_0(J)$ *por la fórmula*

$$\delta_1(x):=[wp_nw^*]-[p_n],$$

donde $p_n=1_n\oplus 0$*.*

Definición 15. *Sea* J *un ideal en una C*-álgebra* A*. Supongamos que una clase en* $K_0(A/J)$ *está representada por la diferencia* $[p]-[q]$*, donde* p *y* q *son proyecciones en* $M_n(A/J)$*. Consideremos lifts de* p *y* q *a elementos autoadjuntos* x *y* k *en* $M_n(A)$*. Definimos* $\delta_2: K_0(A/J)\longrightarrow K_1(J)$ *dado por*

$$\delta_2([p]-[q])=[exp(2\pi ix)]-[exp(2\pi ik)].$$

Para una visión un poco mas detallada del siguiente resultado, este puede ser consultado en ([**28**], Sección B.1.5).

Teorema 5. *Sea* $0\longrightarrow J\longrightarrow A\longrightarrow A/J\longrightarrow 0$ *una sucesión exacta de C*-álgebras. Luego la siguiente sucesión cíclica de seis términos es exacta*

$$\begin{tikzcd}
K_0(J) \arrow[r] & K_0(A) \arrow[r] & K_0(A/J) \arrow[d, "\delta_2"] \\
K_1(A/J) \arrow[u, "\delta_1"] & K_1(A) \arrow[l] & K_1(J)\,. \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

El siguiente resultado lo podemos consultar en [[**32**], Sección 9.3].

Teorema 6 (Pimsner-Voiculescu). *Para toda C*-álgebra* A *y todo automorfismo* α *de* A*, la siguiente suecesión cíclica de seis términos es exacta*

$$\begin{tikzcd}
K_1(A) \arrow[r, "\mathrm{id}-\alpha_*"] & K_1(A) \arrow[r, "\iota_*"] & K_1(A\rtimes_\alpha\mathbb{Z}) \arrow[d] \\
K_0(A\rtimes\mathbb{Z}) \arrow[u] & K_0(A) \arrow[l, "\iota_*"'] & K_0(A)\,, \arrow[l, "\mathrm{id}-\alpha_*"']
\end{tikzcd}$$

donde $\alpha_*: K_*(A)\longrightarrow K_*(A)$ *denota el homomorfismo inducido.*

3.2. K-homología. Iniciamos ahora una breve exposición de las conceptos y resultados básicos referentes a la K-homología de C*-álgebras, para un tratamiento más detallado consultar [**28**]. La definición dada por Kasparov, parece ser el tratamiento técnico mas conveniente para el estudio de la k-homología. Esta visión utiliza el concepto de Módulos de Fredholm.

Los módulos de Fredholm graduados y no graduados definen, para una C*-álgebra $\mathcal{A}$, clases de equivalencia en los grupos de K-homología $K^0(\mathcal{A})$ y $K^1(\mathcal{A})$, respectivamente. Dado que estamos interesados en el apareamiento de índices de módulos de Fredholm con K-teoría y dado que vamos a demostrar que los K_1-grupos de C*-álgebras generados por un operador q-normal son triviales, solamente consideraremos módulos de Fredholm graduados los cuales se emparejan con las K_0-clases.

Recordamos que un Módulo de Fredholm (no graduado) sobre una C*-álgebra $\mathcal{A}$, está dado por una *-representación $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow B(\mathcal{H})$ sobre un espacio de Hilbert separable $\mathcal{H}$ y un operador lineal $F \in B(\mathcal{H})$ tal que $(F^2 - \mathbf{1})\pi(a) \in \mathrm{K}(\mathcal{H})$, $(F - F^*)\pi(a) \in \mathrm{K}(\mathcal{H})$ y $[F, \pi(a)] \in \mathrm{K}(\mathcal{H})$ para todo $a \in \mathcal{A}$, donde $[F, \pi(a)] := F\pi(a) - \pi(a)F$ y $\mathrm{K}(\mathcal{H})$ denota el ideal de operadores compactos en $B(\mathcal{H})$. Un módulo de Fredholm se dice graduado, si $\mathcal{H}$ tiene una descomposición en suma directa $\mathcal{H} = \mathcal{H}_- \oplus \mathcal{H}_+$ tal que $\pi = \pi_- \oplus \pi_+$ y $F = \begin{pmatrix} 0 & F_{-+} \\ F_{+-} & 0 \end{pmatrix}$.

En lo que sigue, discutiremos brevemente el apareamiento de índices para el caso especial $\mathcal{H}_- = \mathcal{H}_+$ y $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, el cual es suficiente para nuestros propósitos. En esta situación, un módulo graduado de Fredholm es equivalente a un par de *-representaciones acotadas π_- y π_+ de $\mathcal{A}$ sobre un espacio de Hilbert, dígase $\mathcal{H}$, tal que $\pi_+(a) - \pi_-(a) \in \mathrm{K}(\mathcal{H})$ para todo $a \in \mathcal{A}$. Su clase asociada en $K^0(\mathcal{A})$ será denotada por $[(\pi_-, \pi_+)]$, donde la relación de equivalencia se define por homotopía de operadores. Consideremos ahora $[p] \in K_0(\mathcal{A})$, donde $p \in \mathrm{Mat}_N(\mathcal{A})$ es una matriz proyección autoadjunta. Luego

$$\pi_+(p) : \pi_-(p)\mathcal{H}^N \longrightarrow \pi_+(p)\mathcal{H}^N \tag{9}$$

es un operador de Fredholm con pseudo-inverso

$$\pi_-(p) : \pi_+(p)\mathcal{H}^N \longrightarrow \pi_-(p)\mathcal{H}^N, \tag{10}$$

por el teorema de Atkinson [**1**, Theorem I.8.3.6] ya que

$$\begin{aligned} (\mathrm{id} - \pi_-(p)\pi_+(p))\restriction_{\pi_-(p)\mathcal{H}^N} &= \pi_-(p) - \pi_-(p)\pi_+(p)\pi_-(p) \\ &= \pi_-(p)(\pi_-(p) - \pi_+(p))\pi_-(p) \in \mathrm{K}(\pi_-(p)\mathcal{H}^N) \end{aligned}$$

Es conocido que el mapeo de índice $\langle[(\pi_-,\pi_+)],[p]\rangle := \mathrm{ind}(\pi_+(p)\restriction_{\pi_-(p)\mathcal{H}^N})$ define un apareamiento entre $K^0(\mathcal{A})$ y $K_0(\mathcal{A})$. Dado que

$$\big(\pi_+(p)\restriction_{\pi_-(p)\mathcal{H}^N}\big)^* \;=\; \big(\pi_+(p)\pi_-(p)\big)^*\restriction_{\pi_+(p)\mathcal{H}^N} \;=\; \big(\pi_-(p)\pi_+(p)\big)\restriction_{\pi_+(p)\mathcal{H}^N} \;=\; \pi_-(p)\restriction_{\pi_+(p)\mathcal{H}^N}\,,$$

podemos escribir

$$\langle[(\pi_-,\pi_+)],[p]\rangle = \dim\big(\ker(\pi_+(p)\restriction_{\pi_-(p)\mathcal{H}^N})\big) - \dim\big(\ker(\pi_-(p)\restriction_{\pi_+(p)\mathcal{H}^N})\big). \tag{11}$$

Si $\pi_+(p) - \pi_-(p)$ es de clase traza entonces, por el carácter cíclico de la traza,

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}^N}\big(\pi_\pm(p)(\pi_-(p) - \pi_+(p))\big) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}^N}\big((\pi_-(p) - \pi_+(p))\pi_\pm(p)\big)$$

y por [**13**, Proposition 4.2], se obtiene

$$\begin{aligned}
\langle[(\pi_-,\pi_+)],[p]\rangle &= \mathrm{Tr}_{\pi_-(p)\mathcal{H}^N}\big(\mathrm{id} - \pi_-(p)\pi_+(p)\big) - \mathrm{Tr}_{\pi_+(p)\mathcal{H}^N}\big(\mathrm{id} - \pi_+(p)\pi_-(p)\big)\\
&= \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}^N}\big(\pi_-(p) - \pi_-(p)\pi_+(p)\pi_-(p)\big) - \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}^N}\big(\pi_+(p) - \pi_+(p)\pi_-(p)\pi_+(p)\big)\\
&= \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}^N}\Big(\pi_-(p)(\pi_-(p) - \pi_+(p)) - (\pi_+(p) - \pi_-(p))\pi_+(p)\Big)\\
&= \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}^N}\big(\pi_-(p) - \pi_+(p)\big)\\
&= \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}\Big(\mathrm{Tr}_{\mathrm{Mat}_N(\mathcal{A})}\big(\pi_-(p) - \pi_+(p)\big)\Big), \qquad (12)
\end{aligned}$$

ver [**8**] y [**13**] para detalles adicionales.

Capítulo 2

Esfera cuántica no conmutativa generada por un operador q-normal.

1. Operadores q-normales.

El objeto principal de nuestro trabajo y en el cual se basará prácticamente toda nuestra exposición es el plano complejo cuántico, el cual denotaremos por $\mathcal{O}(\mathbb{C}_q)$. Este será también entendido como el anillo de coordenadas del plano complejo cuántico definido por un generador y su adjunto sujetos a una relación bastante particular. En este capítulo, nos encargaremos de construir una 2-esfera cuántica a partir del estudio de este objeto y las álgebras C* generadas por este según la teoría de Woronowicz. Posteriormente nos damos a la tarea de generalizar el proceso de la clasificación de las representaciones de $\mathcal{O}(\mathbb{C}_q)$.

Definición 16. *Definimos el plano complejo cuántico $\mathcal{O}(\mathbb{C}_q)$ como el álgebra generada por ζ y ζ^* sujetos a la relación $\zeta\zeta^* = q^2\zeta^*\zeta$, donde $q \in (0, 1)$, es una constante arbitrariamente fija.*

Diremos que un operador ζ cerrado densamente definido sobre un espacio de Hilbert H es una representación de $\mathcal{O}(\mathbb{C}_q)$, si ζ satisface la relación que define al plano complejo cuántico, es decir, si ζ cumple

$$\zeta\zeta^* = q^2\zeta^*\zeta.$$

Este último tipo de operadores también son conocidos como operadores q-normales. Estos han sido estudiados en el marco de la teoría de q-deformaciones cuánticas de espacios (ver [**3, 2, 20**]). Dentro de las propiedades mas relevantes de estos operadores debemos destacar las que condensa el siguiente resultado consultado en [**3, 19**].

Proposición 6. *Sea ζ un operador cerrado densamente definido sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y $\zeta = u|\zeta|$ su descomposición polar. Denotemos por E a la medida espectral sobre la σ-álgebra de Borel $\Sigma([0, \infty))$ tal que $|\zeta| = \int \lambda \, \mathrm{d}E(\lambda)$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. *ζ es un operador q-normal, es decir, $\zeta\zeta^* = q^2\zeta^*\zeta$.*
2. *$u|\zeta|u^* = q|\zeta|$.*
3. *$u E(M) u^* = E(q^{-1}M)$ para todo $M \in \Sigma([0, \infty))$.*
4. *$u f(|\zeta|) u^* = f(q|\zeta|)$ para toda función de Borel f sobre $[0, \infty)$, donde $f(|\zeta|) := \int f(\lambda) \, \mathrm{d}E(\lambda)$.*

En adelante mantendremos la notación propuesta por esta proposición, es decir, ζ será un operador q-normal definido sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, notamos su dominio como $\operatorname{dom}(\zeta)$, su descomposición polar estará dada por $\zeta = u|\zeta|$, la proyección espectral asociada por teorema espectral a $|\zeta|$ la denotaremos por E. A continuación daremos una descripción más explícita de un operador q-normal. Para esto transformamos el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, donde nuestro operador se define, en una suma directa de subespacios en donde el comportamiento de la representación puede ser controlado. Notamos primero que $\operatorname{Ker}(\zeta) = \operatorname{Ker}(\zeta^*\zeta)$ y de igual forma $\operatorname{Ker}(\zeta^*) = \operatorname{Ker}(\zeta\zeta^*)$. Como ζ es q-normal, las anteriores igualdades dicen que $\operatorname{Ker}(\zeta) = \operatorname{Ker}(\zeta^*)$. Aplicando teorema espectral tenemos que $\ker(|\zeta|) = E(\{0\})\mathcal{H}$. De esta manera concluimos que

$$\ker(\zeta) = \ker(\zeta^*) = \ker(|\zeta|) = E(\{0\})\mathcal{H}. \tag{13}$$

Dado que $\ker(|\zeta|)$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$, tenemos que $\mathcal{H} = \ker(|\zeta|) \oplus \ker(|\zeta|)^\perp$. Observamos que la acción de ζ deja invariantes a los espacios $\ker(|\zeta|)$ y $\ker(|\zeta|)^\perp$, ya que

$$\langle f, \zeta g\rangle = \langle \zeta^* f, g\rangle = 0, \qquad \langle f, \zeta^* h\rangle = \langle \zeta f, h\rangle = 0,$$

para toda $f \in \ker(|\zeta|)$, $g \in \ker(|\zeta|)^\perp \cap \operatorname{dom}(\zeta)$, $h \in \ker(|\zeta|)^\perp \cap \operatorname{dom}(\zeta^*)$. Por otro lado, las propiedades de E como proyección espectral nos dicen que

$$\ker(|\zeta|)^\perp = E((0,\infty)) = E\left(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (q^{n+1}, q^n]\right) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} E((q^{n+1}, q^n]),$$

puesto que la familia $\{(q^{n+1}, q^n]\}_{n\in\mathbb{Z}}$ conforma una partición disjunta del intervalo $(0,\infty)$. Esto implica una nueva y muy adecuada expresión en suma directa de $\mathcal{H}$, toda vez que

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \operatorname{id}_{\mathcal{H}}\mathcal{H} \\
&= E([0,\infty))\mathcal{H} \\
&= E(\{0\})\mathcal{H} \oplus E((0,\infty))\mathcal{H} \\
&= \operatorname{Ker}(|\zeta|) \oplus \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} E((q^{n+1}, q^n])\mathcal{H}.
\end{aligned}$$

Hagamos

$$\mathcal{H}_n := E((q^{n+1}, q^n])\mathcal{H}, \ \ n \in \mathbb{Z}.$$

Afirmamos que u, la fase en la descomposición polar de ζ, se comporta como un operador shift sobre los espacios $\mathcal{H}_n$, es decir, $u : \mathcal{H}_{n+1} \longrightarrow \mathcal{H}_n$ es un isomorfismo con inverso dado por $u^* : H_n \longrightarrow H_{n+1}$. De hecho, por Proposición 6.3, si $h \in \mathcal{H}_{n+1}$ entonces $h = E((q^{n+2}, q^{n+1}])h' \in \mathcal{H}_{n+1}$ y luego

$$u\,h = uE((q^{n+2}, q^{n+1}])h' = uE((q^{n+2}, q^{n+1}])u^*uh' = E((q^{n+1}, q^n])(uh') \in \mathcal{H}_n.$$

Análogamente para todo $h \in \mathcal{H}_n$ se muestra que $u^*h \in \mathcal{H}_{n+1}$. Esto sumado al hecho que $uu^*h = h$ y $u^*uh = h$ para todo $h \in \mathcal{H}_n$, nos dice que u es isomorfismo unitario y sustentamos nuestra afirmación. Luego podemos escribir

$$\mathcal{H}_n = \{h_n := u^{*n}h : \quad h \in \mathcal{H}_0\}. \tag{14}$$

Definiendo $A : \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_0$ por $A := \int_{(q,1]} \lambda \, \mathrm{d}E(\lambda)$, entonces por la Proposición 6.4, tenemos

$$\zeta h_n = u|\zeta|u^{*n}h = q^n u^{*(n-1)}Ah = q^n(Ah)_{n-1}, \tag{15}$$

sobre $\ker(\zeta)^\perp = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{H}_n$. De las anteriores observaciones, obtenemos la siguiente descripción de operadores q-normales.

Corolario 1. *Sea ζ un operador q-normal no nulo sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Salvo equivalencia unitaria, la acción de ζ está determinada por las siguientes fórmulas: Existe un espacio de Hilbert $\mathcal{H}_0$ tal que $\mathcal{H}$ se descompone en una suma directa $\mathcal{H} = \ker(\zeta) \oplus \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{H}_n$ con $\mathcal{H}_n = \mathcal{H}_0$. Para $h \in \mathcal{H}_0$, denotemos por h_n al vector en $\mathcal{H}$ el cual tiene a h en la n-ésima componente de la suma directa $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{H}_n$ y 0 en las demás. Luego existe un operador autoadjunto A sobre $\mathcal{H}_0$, que satisface $sp(A) \subset [q, 1]$ sin ser q un valor propio, y se cumple*

$$\zeta h_n = q^n A h_{n-1} \quad \textit{para todo } h_n \in \mathcal{H}_n.$$

La propiedad mas relevante de los operadores q-normales desarrollada en [**3**], nos describe el comportamiento de este tipo de operadores sobre un espacio de funciones. Esta propiedad será aplicada frecuentemente en nuestros resultados. A continuación la exponemos.

Teorema 7. *Cualquier operador q-normal es unitariamente equivalente a una suma directa de operadores de la siguiente forma: $\mathcal{H} = \mathcal{L}_2([0,\infty), \mu)$, donde μ es una medida de Borel q-invariante sobre $[0,\infty)$, $dom(\zeta) = \{f \in \mathcal{H} : \int_{[0,\infty)} x^2 |f(x)|^2 \mathrm{d}\mu(x) < \infty\}$ y*

$$(\zeta f)(x) = qxf(qx), \quad (\zeta^* f)(x) = xf(q^{-1}x), \quad \textit{para todo } f \in dom(\zeta). \tag{16}$$

Además, para cada medida de Borel q-invariante μ sobre $[0,\infty)$, la ecuación (16) define un operador q-normal.

La última parte del resultado anterior es determinante en el desarrollo de nuestro trabajo y esta involucra medidas q-invariantes. Hablemos un poco acerca de la determinación y buena construcción de este tipo de medidas. Notamos que una medida q-invariante μ solo depende del (o está determinada por el) valor $\mu(\{0\})$ y de su restricción a los borelianos sobre el intervalo $(q,1]$, notando esta restricción por $\mu_0 := \mu\restriction_{\Sigma([0,\infty))\cap(q,1]}$. Nos damos cuenta de esto verificando que la siguiente igualdad se cumple para todo boreliano M sobre $[0,\infty)$

$$\mu(M) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mu_0(q^{-k}(M \cap (q^{k+1}, q^k])) + \mu(\{0\} \cap M). \tag{17}$$

Por otro lado, esta fórmula extiende a cualquier medida μ_0 definida sobre la σ-álgebra de Borel $\Sigma((q,1])$ a una medida q-invariante μ sobre $\Sigma([0,\infty))$. Una vez más, si el valor $\mu(\{0\})$ es fijo, esta medida queda bien definida.

Supongamos que $X \subset [0,\infty)$ es un conjunto cerrado q-invariante del rayo positivo real. Interpretamos acá la q-invarianza como $qX = X$. Dado que $K := [q,1] \cap X$ es compacto (y así tiene un subconjunto denso contable), existe una medida de Borel finita ν sobre $[q,1]$ tal que $\mathrm{supp}(\nu) = K$, ver [**14**]. Denotemos por δ_x la medida de Dirac en $x \in [0,\infty)$ y definamos μ_0 como la restricción de $\nu + \nu(\{q\})\delta_1 + \nu(\{1\})\delta_q$ a $\Sigma([0,\infty)) \cap (q,1]$. Si $X = \{0\}$, hacemos $\mu(\{0\}) := 1$. Luego la medida μ determinada por la fórmula de la ecuación (17) es una medida de Borel q-invariante σ-finita sobre $[0,\infty)$ tal que $\mathrm{supp}(\mu) = X$. Recordamos ahora que el operador multiplicacion Q sobre $\mathcal{L}_2([0,\infty),\mu)$, satisface que $\mathrm{sp}(Q) = \mathrm{supp}(\mu)$. Combinando la discusión anterior con el Teorema 7 deducimos el siguiente resultado.

Corolario 2. *Para cada subconjunto cerrado q-invariante no vacío $X \subset [0,\infty)$, existe un operador q-normal ζ tal que $sp(|\zeta|) = X$.*

2. C*-álgebras producto cruzado asociadas a operadores q-normales.

A pesar que la teoría de Woronowicz, que más adelante aplicaremos, nos brinda herramientas suficientes para entender cuando una determinada C*-álgebra esta generada por un conjunto de operadores no acotados, esta teoría sufre la crucial desventaja de no ofrecer noción alguna de como construir en principio dicha álgebra C*. En esta sección nos damos a la tarea de evidenciar los pasos que nos llevan a la buena construcción de un candidato a ser la C*-álgebra generada por un operador q-normal. La siguiente proposición muestra que ciertos productos cruzados de C*-álgebra asociadas a operadores q-normales ζ, pueden ser obtenidos por la fase u de la descomposición polar $\zeta = u|\zeta|$ y el cálculo funcional del operador autoadjunto $|\zeta|$.

Proposición 7. *Sea $X \neq \{0\}$ un subconjunto cerrado q-invariante no vacío de $[0,\infty)$ y ζ un operador q-normal con descomposición polar dada por $\zeta = u|\zeta|$ tal que $sp(|\zeta|) = X$ y $Ker(|\zeta|) = \{0\}$.*

Entonces, con el automorfismo definido en (5)*,*

$$C_0(X) \rtimes \mathbb{Z} \;\cong\; \mathcal{B}_1 := \|\cdot\|\text{-cls}\Big\{ \sum_{\mathit{finito}} f_k(|\zeta|)u^k \;:\; f_k \in C_0(X),\; k \in \mathbb{Z}\Big\},$$

$$C_0(X\setminus\{0\}) \rtimes \mathbb{Z} \;\cong\; \mathcal{B}_0 := \|\cdot\|\text{-cls}\Big\{ \sum_{\mathit{finito}} f_k(|\zeta|)u^k \;:\; f_k \in C_0(X\setminus\{0\}),\; k \in \mathbb{Z}\Big\},$$

donde u *y* $|\zeta|$ *están definidos por la descomposición polar* $\zeta = u|\zeta|$ *de un operador* q*-normal* ζ *tal que* $sp(|\zeta|) = X$ *y* $\ker(|\zeta|) = \{0\}$.

Demostración. Notamos en primera instancia que un operador q-normal ζ tal que $\mathrm{sp}(\zeta) = X$ existe por el Corolario 2. Tomando su restricción al subespacio $\ker(|\zeta|)^{\perp}$, podemos asumir que $\ker(|\zeta|) = \{0\}$. Por lo tanto u es operador unitario. Para facilitar la notación hagamos $X_0 := X \setminus \{0\}$ y $X_1 := X$. Aplicaremos la propiedad universal de productos cruzados para demostrar nuestro resultado, es decir, debemos mostrar que se cumple el Teorema de Raeburn 4, para concluir que $\mathcal{B}_i \cong C_0(X_i) \rtimes \mathbb{Z}$ para $i = 0, 1$. Haciendo $\rho_i(f) := f(|\zeta|)$, para $f \in C_0(X_i)$, y $\rho_i(U) = u$, Teorema 4.(a) se sigue de la Proposición 6.(4) y Teorema 4.(c) se deriva de la definición de $\mathcal{B}_i$. Para mostrar Teorema 4.(b), es suficiente probar que $\Pi_i(\sum_{\text{finito}} f_k(|\zeta|)u^k) := \sum_{\text{finito}} \pi_i(f_k)\pi_i(u)^k$ está bien definido para cualquier representación covariante $\pi_i : *\text{-alg}\{C_0(X_i), U\} \longrightarrow B(\mathcal{H})$. Para lo último, es suficiente verificar que $\sum_{k=M}^{N} f_k(|\zeta|)u^k = 0$ implica $f_k = 0$ para todo k, donde $f_k \in C_0(X_i)$, $M, N \in \mathbb{Z}$ y $M \leq N$. Por equivalencia unitaria, podemos asumir que la acción de $\zeta = u|\zeta|$ está dada por las fórmulas del Corolario 1. Recordamos que $\mathcal{H}_n \perp \mathcal{H}_m$ para $n \neq m$, $f_k(|\zeta|) : \mathcal{H}_n \to \mathcal{H}_n$ y $u^k h_n = h_{n-k} \in \mathcal{H}_{n-k}$. Supongamos ahora que $f_M \neq 0$. Luego existe $n \in \mathbb{Z}$ y g_n, $h_n \in \mathcal{H}_n$ tales que $\langle g_n, f_M(|\zeta|)h_n\rangle \neq 0$. Y de esta manera

$$\Big\langle g_n, \sum_{k=M}^{N} f_k(|\zeta|)u^k h_{n+M}\Big\rangle = \Big\langle g_n, \sum_{k=M}^{N} f_k(|\zeta|)h_{n+M-k}\Big\rangle = \langle g_n, f_M(|\zeta|)h_n\rangle \neq 0.$$

Luego $\sum_{k=M}^{N} f_k(|\zeta|)u^k = 0$ implica $f_M = 0$. Por inducción sobre $m = M, M+1, \ldots$, concluimos que $f_m = 0$ para todo $m = M$, $M+1, \ldots, N$. Esto completa la prueba. □

3. C*-álgebras generadas por operadores q-normales.

El resultado principal de este capítulo lo conforma el siguiente teorema el cual presenta una descripción explícita de la C*-álgebra generada por un operador q-normal no trivial. Destacamos que el uso de álgebras producto cruzado y la Proposición 7 nos permiten dar una descripción de tal C*-álgebra sin hacer referencia a un espacio de Hilbert.

Teorema 8. *Sea ζ un operador q-normal sobre un espacio de Hilbert separable $\mathcal{H}$ tal que $X := sp(|\zeta|) \neq \{0\}$. Entonces existe una única C*-álgebra en $B(\mathcal{H})$ generada por ζ y esta C*-álgebra es isomorfa a*

$$C_0^*(\zeta,\zeta^*) := \|\cdot\|\text{-cls}\Big\{\sum_{\text{finito}} f_k U^k \in C_0(X) \rtimes \mathbb{Z} \ :\ k\in\mathbb{Z},\ \ f_k(0) = 0 \ \textit{para todo}\ \ k \neq 0\Big\}, \tag{18}$$

donde la clausura en norma está tomada en la C-álgebra $C_0(X) \rtimes \mathbb{Z}$.*

Demostración. El primer paso para la prueba consiste en identificar la C*-álgebra abstractamente definida $C_0^*(\zeta,\zeta^*)$ con una C*-subálgebra no degenerada $\mathcal{A} \subset B(\mathcal{H})$. Sea $\zeta = u|\zeta|$ la descomposición polar de ζ. Por equivalencia unitaria, podemos asumir que $\mathcal{H}$ y ζ están dados por las fórmulas del Colorario 1. Luego $\ker(\zeta) = \ker(|\zeta|)$ y $u\restriction_{\ker(|\zeta|)^\perp}$ es un operador unitario. Además, por Proposición 7, tenemos que $C_0^*(\zeta,\zeta^*) \cong \mathcal{B} \subset B(\ker(|\zeta|)^\perp)$, donde

$$\mathcal{B} := \|\cdot\|\text{-cls}\Big\{\sum_{\text{finito}} f_k(|\zeta|)u^k\restriction_{\ker(|\zeta|)^\perp} \ :\ f_k \in C_0(\mathrm{sp}(|\zeta|)),\ \ f_k(0) = 0\ \text{ para todo }\ k\neq 0\Big\}.$$

Sobre $\mathcal{H} = \ker(|\zeta|) \oplus \ker(|\zeta|)^\perp$, hacemos

$$\begin{aligned}\mathcal{A} := \|\cdot\|\text{-cls}\Big\{f_0(|\zeta|)\restriction_{\ker(|\zeta|)} \oplus \sum_{\text{finito}} f_k(|\zeta|)u^k\restriction_{\ker(|\zeta|)^\perp} \ :\ & f_k \in C_0(\mathrm{sp}(|\zeta|))\ \text{ y}\\ & f_k(0) = 0\ \text{ para todo }\ k\neq 0\Big\}.\end{aligned} \tag{19}$$

Recordamos del Corolario 1 que $\mathcal{H} = \ker(|\zeta|) \oplus \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{H}_n$, donde $\mathcal{H}_n \cong \mathcal{H}_0$ es la imagen de la proyección espectral de $|\zeta|$ correspondiente al conjunto de Borel $(q^{n+1}, q^n] \cap \mathrm{sp}(|\zeta|)$. Ahora como

$$\begin{aligned}\|f_0(|\zeta|)\restriction_{\ker(|\zeta|)}\| = |f_0(0)| &\leq \sup\{|f_0(x)|\ :\ x\in \mathrm{sp}(|\zeta|)\backslash\{0\}\}\\ &\leq \sup\{\|f_0(|\zeta|)h_n\|\ :\ h_n\in\mathcal{H}_n,\ \ \|h_n\| = 1\}\\ &\leq \Big\|\sum_{\text{finito}} f_k(|\zeta|)u^k\restriction_{\ker(|\zeta|)^\perp}\Big\|,\end{aligned}$$

uno fácilmente verifica que $\psi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, dado por

$$\psi\Big(f_0(|\zeta|)\restriction_{\ker(|\zeta|)} \oplus \sum_{\text{finito}} f_k(|\zeta|)u^k\restriction_{\ker(|\zeta|)^\perp}\Big) = \sum_{\text{finito}} f_k(|\zeta|)u^k\restriction_{\ker(|\zeta|)^\perp},$$

define un *-isomorfismo isométrico. Así $C_0^*(\zeta,\zeta^*) \cong \mathcal{A}$. La no degeneración de $\mathcal{A}$ se sigue del hecho que para cada $m\in\mathbb{N}$, existe un $\varphi_m \in C_0(\mathrm{sp}(|\zeta|))$ que satisface $\varphi_m(t) = 1$ para todo $t\in[0, q^{-m})$ así que $\varphi_m(|\zeta|)\in\mathcal{A}$ actúa como la identidad sobre $\ker(|\zeta|) \oplus \bigoplus_{n=-m}^{\infty} \mathcal{H}_n$.

El teorema será probado aplicando Teorema 1 a $\mathcal{A} \subset B(\mathcal{H})$, luego es suficiente mostrar que

a) ζ está afiliado a $\mathcal{A}$,
b) ζ separa las representaciones de $\mathcal{A}$,
c) $(1+\zeta^*\zeta)^{-1} \in \mathcal{A}$,

Observamos que (c) se cumple ya que la función f_0, definida por $f_0(t) := (1+t^2)^{-1}$, pertenece a $C_0(\mathrm{sp}(|\zeta|))$ y $(1+\zeta^*\zeta)^{-1} = f_0(|\zeta|) = f_0(|\zeta|)\restriction_{\ker(|\zeta|)} \oplus f_0(|\zeta|)\restriction_{\ker(|\zeta|)^\perp}$.

A continuación verificamos (a). Por la Definición 5, esto significa que

$$z_\zeta := \zeta(1+\zeta^*\zeta)^{-1/2} \in M(\mathcal{A}), \tag{20}$$

y que

$$\|\cdot\|\text{-cls}\{(1-z_\zeta^* z_\zeta)a \,:\, a \in \mathcal{A}\} = \mathcal{A}. \tag{21}$$

Por las fórmulas en el Corolario 1, $z_\zeta = 0 \oplus (u|\zeta|(1+|\zeta|^2)^{-1/2})\restriction_{\ker(|\zeta|)^\perp}$. Sobre $\ker(|\zeta|)^\perp$, obtenemos de la Proposición 6.(4) que $u|\zeta|(1+|\zeta|^2)^{-1/2} f_k(|\zeta|)u^k = q|\zeta|(1+q^2|\zeta|^2)^{-1/2} f_k(q|\zeta|)u^{k+1}$. Dado que la función $\tilde{f}_k$ dada por $\tilde{f}_k(t) := \frac{qt}{\sqrt{1+q^2t^2}} f_k(qt)$ pertenece a $C_0(\mathrm{sp}(|\zeta|))$ para cualquier $f_k \in C_0(\mathrm{sp}(|\zeta|))$ y satisface $\tilde{f}_k(0) = 0$, vemos que al multiplicar por izquierda con z_ζ se mapea el conjunto $\mathcal{A}$ definido por (19) en si mismo. Tomando clausura concluimos que $z_\zeta \in M(\mathcal{A})$.

Para mostrar (21), notamos que $1 - z_\zeta^* z_\zeta = (1+|\zeta|^2)^{-1}$. Sea $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una unidad apróximada sobre $C_0(\mathrm{sp}(|\zeta|))$ tal que cada φ_n tiene soporte compacto. Hagamos $\phi_n(t) := (1+t^2)\varphi_n(t)$. Luego $\phi_n \in C_0(\mathrm{sp}(|\zeta|))$ y $\lim\limits_{n\to\infty}(1-z_\zeta^* z_\zeta)\phi_n(|\zeta|)f(|\zeta|) = \lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(|\zeta|)f(|\zeta|) = f(|\zeta|)$ para todo $f \in C_0(\mathrm{sp}(|\zeta|))$. De esto, uno fácilmente concluye que la clausura sobre el lado izquierdo de (21) contiene al conjunto $\mathcal{A}$ definido por (19) lo cual prueba (21).

Mostremos ahora a la prueba de (b). Como $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son isomorfos, es suficiente considerar representaciones de $\mathcal{B}$. Hagamos $\tilde{\zeta} := \zeta\restriction_{\ker(|\zeta|)^\perp}$. Notamos que $\mathrm{sp}(|\tilde{\zeta}|) = \mathrm{sp}(|\zeta|)$ ya que $0 \in \mathrm{sp}(|\tilde{\zeta}|)$ por la q-invarianza de $\mathrm{sp}(|\zeta|) \neq \{0\}$. Luego $\mathcal{B}$ está generado por $\sum\limits_{\text{finito}} f_k(|\tilde{\zeta}|)u^k$ con $f_k \in C_0(\mathrm{sp}(|\zeta|))$ y $f_k(0) = 0$ para todo $k \neq 0$. Por los mismos argumentos expuestos con anterioridad, se muestra que

$$z_{\tilde{\zeta}} := \tilde{\zeta}(1+\tilde{\zeta}^*\tilde{\zeta})^{-1/2} \in M(\mathcal{B}). \tag{22}$$

Sea $\mathcal{K}$ un espacio de Hilbert y sea $\pi : \mathcal{B} \to B(\mathcal{K})$ una *-representación no degenerada. Por Proposición 4, π admite una única extensión $\pi : M(\mathcal{B}) \to B(\mathcal{K})$. La π-imagen de ζ dada por la fórmula (*) (ver página 2), está entonces definida como $\pi(\zeta) := \pi(z_{\tilde{\zeta}})(1-\pi(z_{\tilde{\zeta}})^*\pi(z_{\tilde{\zeta}}))^{-1/2}$. De esta forma, calculando la z-transfomada de $\pi(\zeta)$ concluimos $z_{\pi(\zeta)} = \pi(z_{\tilde{\zeta}})$, luego $\pi(\zeta)$ está determinado de forma única por $\pi(z_{\tilde{\zeta}}) = z_{\pi(\tilde{\zeta})}$, donde la última ecuación cumple por (*).

Supongamos ahora que están dadas dos representaciones $\pi_i : \mathcal{B} \to B(\mathcal{K})$, $i = 1, 2$. De esta forma la afirmación "ζ seprara representaciones de $\mathcal{B}$" significa que $\pi_1(\zeta) \neq \pi_2(\zeta)$ siempre que $\pi_1 \neq \pi_2$. Por la discusión previa, esto es equivalente a mostrar que $\pi_1(z_{\tilde{\zeta}}) = \pi_2(z_{\tilde{\zeta}})$ implica que $\pi_1 = \pi_2$.

Nuestro primer objetivo es mostrar que $|\pi_1(z_{\tilde\zeta})| = |\pi_2(z_{\tilde\zeta})|$ implica $\pi_1(f(|\tilde\zeta|)) = \pi_2(f(|\tilde\zeta|))$ para una apropiada clase de funciones continuas f sobre $\mathrm{sp}(|\zeta|)$. Empezamos observando que $\pi(z_{\tilde\zeta})^*\pi(z_{\tilde\zeta}) = \pi(z_{\tilde\zeta}^* z_{\tilde\zeta}) = \pi(|z_{\tilde\zeta}|^2) = \pi(|z_{\tilde\zeta}|)^2$ de donde se deduce $|\pi(z_{\tilde\zeta})| = \pi(|z_{\tilde\zeta}|)$. Acá el hecho de que $z_{\tilde\zeta} \in M(\mathcal{B})$ implica que $z_{\tilde\zeta}^*,\ |z_{\tilde\zeta}| \in M(\mathcal{B})$ se utiliza. Ahora utilizamos la representación de Gelfand para obtener un embebimiento isométrico

$$\iota : C_0(\mathrm{sp}(|\zeta|)) \hookrightarrow \mathcal{B}, \quad \iota(f) := f(|\tilde\zeta|). \tag{23}$$

Combinando esto con $\pi : M(\mathcal{B}) \to B(\mathcal{K})$ tenemos una representación $\pi : \iota(C_0(\mathrm{sp}(|\zeta|))) \to B(\mathcal{K})$. Por la definición de z-transfomada, vemos que $|z_{\tilde\zeta}| = |\tilde\zeta|\,(1 + |\tilde\zeta|^2)^{-1/2}$. La función $z(t) := t(1 + t^2)^{-1/2}$ separa los puntos de la compactación por un punto $\mathrm{sp}(|\zeta|) \cup \{\infty\}$. Por el Teorema de Stone–Weiertrass (ver Teorema 9 más adelante), las funciones 1 y z generan $C(\mathrm{sp}(|\zeta|) \cup \{\infty\})$. Interpretando a $C_0(\mathrm{sp}(|\zeta|))$ como una subálgebra de $C(\mathrm{sp}(|\zeta|) \cup \{\infty\})$ y extendiendo $\pi \circ \iota$ al álgebra de multiplicadores $M(C_0(\mathrm{sp}(|\zeta|)))$, se sigue que $\pi \circ \iota : C_0(\mathrm{sp}(|\zeta|)) \to B(\mathcal{K})$ está determinado de forma única por su valor sobre $z \in M(C_0(\mathrm{sp}(|\zeta|)))$, y así de la misma forma queda determinada su extensión a $M(C_0(\mathrm{sp}(|\zeta|)))$. Finalmente, se sigue de (23), que $\pi(\iota(z)) = \pi(|\tilde\zeta|(1 + |\tilde\zeta|^2)^{-1/2}) = \pi(|z_{\tilde\zeta}|) = |\pi(z_{\tilde\zeta})|$. Como consecuencia, dadas dos representaciones $\pi_i : \mathcal{B} \to B(\mathcal{K})$, $i = 1, 2$, tenemos $|\pi_1(z_{\tilde\zeta})| = |\pi_2(z_{\tilde\zeta})|$ si y solo si $\pi_1 \circ \iota = \pi_2 \circ \iota$, y lo mismo se cumple para sus extensiones a $M(C_0(\mathrm{sp}(|\zeta|)))$.

Aún nos falta mostrar que $\pi_1(z_{\tilde\zeta}) = \pi_2(z_{\tilde\zeta})$ implica que $\pi_1(f(|\tilde\zeta|)u^k) = \pi_2(f(|\tilde\zeta|)u^k)$ para todo $f \in C_0([0,\infty))$, $f(0) = 0$ y $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Consideremos nuevamente una representacion π extendida a la C*-álgebra de multiplicadores $\pi : M(\mathcal{B}) \to B(\mathcal{K})$ y sea $\pi(z_{\tilde\zeta}) = v|\pi(z_{\tilde\zeta})|$ la descomposición polar. Si u perteneciera a $M(\mathcal{B})$, entonces sería suficiente mostrar que $\pi(u) = v$, ya que de esta forma $\pi(f(|\tilde\zeta|)u^k) = \pi(f(|\tilde\zeta|))v^k$ estaría determinado de forma única por v. Desafortunadamente, $u \notin M(\mathcal{B})$ ya que $f(|\tilde\zeta|) \in \mathcal{B}$ para $f \in C_0([0,\infty))$ con $f(0) \neq 0$, pero $f(|\tilde\zeta|)u \notin \mathcal{B}$. Por esta razón, nuestra prueba es más compleja, involucrando al teorema espectral para operadores no acotados autoadjuntos.

Denotemos por F a la única proyección espectral sobre la σ-álgebra Borel $\Sigma([0,1])$ que satisface $|\pi(z_{\tilde\zeta})| = \int z\,\mathrm{d}F(z)$. Usando el hecho de que $|\pi(z_{\tilde\zeta})| = \pi(|z_{\tilde\zeta}|)$ y la ecuación (23) deducimos que $|\pi(z_{\tilde\zeta})| = \pi(|\tilde\zeta(1 + \tilde\zeta^*\tilde\zeta)^{-\frac{1}{2}}|) = \pi(|\tilde\zeta|(1 + |\tilde\zeta|^2)^{-\frac{1}{2}}) = \pi(z_{|\tilde\zeta|})$. Por la definición de la π-imagen de operadores afiliados a $\mathcal{B}$, tenemos que $\pi(|\tilde\zeta|) = \pi(z_{|\tilde\zeta|})(1 - \pi(z_{|\tilde\zeta|})^2)^{-1/2}$. Luego podemos escribir $\pi(|\tilde\zeta|) = |\pi(z_{\tilde\zeta})|(1 - |\pi(z_{\tilde\zeta})|^2)^{-1/2} = \int z(1 - z^2)^{-1/2}\mathrm{d}F(z)$. La función $z : [0,\infty] \to [0,1]$, $z(\tau) = \frac{\tau}{\sqrt{1+\tau^2}}$ es un homeomorfismo con inverso dado por la fórmula $\tau : [0,1] \to [0,\infty]$, $\tau(z) = \frac{z}{\sqrt{1-z^2}}$. Denotemos por E la proyección espectral sobre $\Sigma([0,\infty])$ dada por el pull-back de F bajo z, es decir, $E(M) := F(z(M))$ para todo $M \in \Sigma([0,\infty])$. Luego

$$\pi(|\tilde\zeta|) = \int \tau\,\mathrm{d}E(\tau) \ \text{ y } \ \pi(z_{|\tilde\zeta|}) = \int z(\tau)\,\mathrm{d}E(\tau) = \int \frac{\tau}{\sqrt{1+\tau^2}}\,\mathrm{d}E(\tau). \tag{24}$$

Observamos también que $E(\{\infty\}) = 0$ pues $F(\{1\}) = 0$.

Afirmamos que $\pi(f(|\tilde{\zeta}|)) = \int f(\tau)\, dE(\tau)$ para todo $f \in C([0,\infty])$. Notar que $\pi(f(|\tilde{\zeta}|))$ está bien definido para cada una de las f puesto que $f(|\tilde{\zeta}|) \in M(\mathcal{B})$. Como explicamos anteriormente, la función $z \in C([0,\infty])$ separa los puntos de $[0,\infty]$ así que para cada $f \in C([0,\infty])$ existe una sucesión de polinomios $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que satisface $\lim_{n\to\infty} p_n(z) = f$ en la norma del supremo. Usando la convergencia uniforme, $z_{|\tilde{\zeta}|} = z(|\tilde{\zeta}|)$ y la segunda ecuación en (24), obtenemos que

$$\pi(f(|\tilde{\zeta}|)) = \lim_{n\to\infty} \pi(p_n(z(|\tilde{\zeta}|))) = \lim_{n\to\infty} \pi(p_n(z_{|\tilde{\zeta}|})) = \lim_{n\to\infty} \int p_n(z(\tau))\, dE(\tau) = \int f(\tau)\, dE(\tau),$$

lo cual prueba nuestra afirmación. Combinando esto con (24) deducimos que $\pi(f(|\tilde{\zeta}|)) = f(\pi(|\tilde{\zeta}|))$. Ahora sea $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C_0((0,\infty))$ una sucesión de funciones de rápido decaimiento, es decir,

$$\sup\{t^k|\phi_n(t)| \;:\; t\in(0,\infty)\} < \infty \text{ para todo } k\in\mathbb{Z}, \tag{25}$$

tal que $0 \le \phi_1 \le \phi_2 \le \ldots \le 1$ y $\lim_{n\to\infty} \phi_n(t) = 1$ para todo $t \in (0,\infty)$. Con la extensión obvia a funciones continuas sobre $[0,\infty]$, se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} \pi(\phi_n(|\tilde{\zeta}|)) = \lim_{n\to\infty} \phi_n(\pi(|\tilde{\zeta}|)) = E((0,\infty)),$$

en la topología débil de operadores. Recordemos ahora que $\tilde{\zeta} = u|\tilde{\zeta}|$ define un operador q-normal sobre $\ker(|\zeta|)^{\perp}$ así que por Corolario 6, tenemos que $uf(|\tilde{\zeta}|)u^* = f(q|\tilde{\zeta}|)$ para toda función de Borel f sobre $[0,\infty]$. Además

$$z_{\tilde{\zeta}} = \tilde{\zeta}(1+\tilde{\zeta}^*\tilde{\zeta})^{-1/2} = u|\tilde{\zeta}|(1+|\tilde{\zeta}|^2)^{-1/2} = uz(|\tilde{\zeta}|) = z(q|\tilde{\zeta}|)u.$$

Como consecuencia para todo $f \in C_0([0,\infty))$ y $k \in \mathbb{N}$ tenemos

$$\begin{aligned} \phi_n(|\tilde{\zeta}|)f(|\tilde{\zeta}|)u^k &= \phi_n(|\tilde{\zeta}|)\left(\prod_{j=1}^{k} z(q^j|\tilde{\zeta}|)^{-1}\right) f(|\tilde{\zeta}|)\left(uz(|\tilde{\zeta}|)\right)^k \\ &= \phi_n(|\tilde{\zeta}|)\left(\prod_{j=1}^{k} z(q^j|\tilde{\zeta}|)^{-1}\right) f(|\tilde{\zeta}|)z_{\tilde{\zeta}}^k, \end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned} \phi_n(|\tilde{\zeta}|)f(|\tilde{\zeta}|)u^{-k} &= \phi_n(|\tilde{\zeta}|)\left(\prod_{j=0}^{k-1} z(q^{-j}|\tilde{\zeta}|)^{-1}\right) f(|\tilde{\zeta}|)\left(z(|\tilde{\zeta}|)u^*\right)^k \\ &= \phi_n(|\tilde{\zeta}|)\left(\prod_{j=0}^{k-1} z(q^{-j}|\tilde{\zeta}|)^{-1}\right) f(|\tilde{\zeta}|)z_{\tilde{\zeta}}^{*k}. \end{aligned} \tag{27}$$

De (25), se sigue que la función $(0,t) \ni t \mapsto \phi_n(t)(\prod_{j=1}^{k} z(q^j t)^{-1})$ pertenece a $C_0((0,\infty))$ y de esta forma también puede ser considerada como un elemento en $C_0([0,\infty))$. Lo mismo se cumple para la función $(0,t) \ni t \mapsto \phi_n(t)(\prod_{j=0}^{k-1} z(q^{-j}t)^{-1})$. Para finalizar la prueba del inciso (b) arriba, asumamos que $\pi_i : \mathcal{B} \longrightarrow B(\mathcal{K})$, $i = 1,2$, son dos representaciones que satisfacen $\pi_1(z_{\tilde{\zeta}}) = \pi_2(z_{\tilde{\zeta}})$. En particular, tenemos que $|\pi_1(z_{\tilde{\zeta}})| = |\pi_2(z_{\tilde{\zeta}})|$. Ya ha sido mostrado que $\pi_1(f(|\tilde{\zeta}|)) = \pi_2(f(|\tilde{\zeta}|))$ para todo $f \in ([0,\infty])$. Esto también implica que $\pi_1(|\tilde{\zeta}|) = \pi_2(|\tilde{\zeta}|)$ por definición de la π-imagen de $|\tilde{\zeta}|$. Como en (24), escribimos $\pi_i(|\tilde{\zeta}|) = \int \tau \, dE_i(\tau)$. Usando el hecho de que $\pi_i(f(|\tilde{\zeta}|)) = f(\pi_i(|\tilde{\zeta}|))$, se sigue que $E(\{0\})\pi_i(f(|\tilde{\zeta}|)) = f(0)E(\{0\})$. Como consecuencia $\pi_i(f(|\tilde{\zeta}|)) = E((0,\infty))\pi_i(f(|\tilde{\zeta}|))$ para toda $f \in C_0([0,\infty))$ con $f(0) = 0$. Dada tal f y tomando el límite débil de operadores tenemos para todo $k \in \mathbb{N}$

$$
\begin{aligned}
\pi_1(f(|\tilde{\zeta}|u^k)) &= E((0,\infty))\pi_1(f(|\tilde{\zeta}|u^k)) \\
&= \lim_{n\to\infty} \pi_1(\phi_n(|\tilde{\zeta}|))\pi_1(f(|\tilde{\zeta}|)u^k)) \\
&= \lim_{n\to\infty} \pi_1\left(\phi_n(|\tilde{\zeta}|)\left(\prod_{j=1}^{k} z(q^j|\tilde{\zeta}|)^{-1}\right) f(|\tilde{\zeta}|)z_{\tilde{\zeta}}^k\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \pi_1\left(\phi_n(|\tilde{\zeta}|)\left(\prod_{j=1}^{k} z(q^j|\tilde{\zeta}|)^{-1}\right) f(|\tilde{\zeta}|)\right)\pi_1(z_{\tilde{\zeta}})^k \\
&= \lim_{n\to\infty} \pi_2\left(\phi_n(|\tilde{\zeta}|)\left(\prod_{j=1}^{k} z(q^j|\tilde{\zeta}|)^{-1}\right) f(|\tilde{\zeta}|)\right)\pi_2(z_{\tilde{\zeta}})^k \\
&= \pi_2(f(|\tilde{\zeta}|)u^k).
\end{aligned} \tag{28}
$$

Hemos aplicado (26) en la tercera de las anteriores ecuaciones y también hemos usado la propiedad de que π define una representación de $M(\mathcal{B})$ en la línea siguiente. El paso crucial de la cuarta a la quinta línea se sigue de $\pi_1(z_{\tilde{\zeta}}) = \pi_2(z_{\tilde{\zeta}})$ por hipótesis y de así lo que hemos probado es que $\pi_1(g(|\tilde{\zeta}|)) = \pi_2(g(|\tilde{\zeta}|))$ para toda $g \in C([0,\infty])$. Aplicando a las anteriores ecuaciones (27) en vez de (26) mostramos que (28) se cumple también para todo $k \in \mathbb{Z}$ con $k < 0$. En conclusión, hemos mostrado que para todo $k \in \mathbb{Z}$ y toda $f_k \in C_0([0,\infty))$ que satisfacen $f_k(0) = 0$ si $k \neq 0$ se cumple que $\pi_1(z_{\tilde{\zeta}}) = \pi_2(z_{\tilde{\zeta}})$ implica $\pi_1(f(|\tilde{\zeta}|u^k)) = \pi_2(f(|\tilde{\zeta}|u^k))$. Como estos elementos generan $\mathcal{B}$, finalmente tenemos que $\pi_1 = \pi_2$. □

Enunciamos ahora uno de los resultados del análisis matemático cuya aplicación nos permitirá dar una visualización más clara de lo que llamaremos esfera cuántica. Para esto, primero diremos que un álgebra $A \subset C(X)$ separa los puntos de un espacio topológico X si para todo $x, y \in X$ con $x \neq y$, existe un $a \in A$ tal que $a(x) \neq a(y)$.

Teorema 9 (Teorema de Stone-Weierstraß). *Sean X un espacio topológico localmente compacto y $A \subset C_0(X)$ una *-álgebra que separa los puntos de X, luego se cumple que $\bar{A} = C_0(X)$.*

Asumamos ahora que ζ es un operador q-normal con $\mathrm{sp}(\zeta) = [0,\infty)$. Observamos que la definición del producto cruzado tiene sentido para $q = 1$. En este caso, $\gamma_q = 1$ y el producto se vuelve conmutativo. Si $f_k \in C_0([0,\infty))$ y $f_k(0) = 0$ para $k \neq 0$, tenemos que $f_k U^k$ puede ser visto como una función en $C_0(\mathbb{C})$ en el siguiente sentido: Para $w = |w|e^{i\theta} \in \mathbb{C}$ consideramos el mapeo

$$\mathbb{C} \ni w = |w|e^{i\theta} \longmapsto f_k U^k(w) := f_k(|w|)e^{i\theta k} \in \mathbb{C}.$$

Notamos así que el único posible problema para esta asignación se encuentra en $0 \in \mathbb{C}$ ya que no tiene un ángulo polar complejo determinado de forma única. Restringiéndonos a funciones $f_k(0) = 0$, el problema se soluciona pues $f_k U^k(w) = 0\ e^{i\theta k} = 0$ para todo $\theta \in \mathbb{R}$. Dado que el álgebra de funciones $|w|e^{i\theta} \longmapsto f_k(|w|)e^{i\theta k} = f_k U^k(w)$, separa puntos en $\mathbb{C}$ tenemos entonces por el teorema de Stone-Weierstraß que el álgebra de funciones así definidas genera $C_0(\mathbb{C})$. Esta interpretación justifica el siguiente concepto.

Definición 17. *Decimos que*

$$C_0(\mathbb{C}_q) := \|\cdot\|\text{-cls}\Big\{ \sum_{\text{finito}} f_k U^k \in C_0([0,\infty)) \rtimes \mathbb{Z} \ :\ k \in \mathbb{Z},\ f_k(0) = 0 \ \textit{para todo}\ k \neq 0 \Big\}$$

es la C-álgebra de funciones continuas que se anulan en el infinito sobre el plano complejo cuántico $\mathbb{C}_q$. Su unitización*

$$C(\mathbb{S}^2_q) := C_0(\mathbb{C}_q) \oplus \mathbb{C}$$

es definida como la C-álgebra de funciones continuas sobre la esfera cuántica $\mathbb{S}^2_q$.*

Damos así por finalizada la construcción de la esfera no clásica que nos propusimos.

4. K-teoría de C*-álgebras generadas por operadores q-normales.

En esta sección, mostramos de manera explícita la deducción de la teoría K asociada a nuestra esfera cuántica. El resultado fundamental que nos permite desarrollar este computo es el hecho de que $C_0^*(\zeta,\zeta^*)$ es una C*-extensión de $C_0(X\backslash\{0\}) \rtimes \mathbb{Z}$ por $\mathbb{C}$, donde estamos interpretando $X = \mathrm{sp}(|\zeta|)$. Para mostrar esto, observamos que la q-invarianza de X implica que $0 \in X := \mathrm{sp}(|\zeta|)$ para cualquier operador q-normal ζ. Como $\{0\}$ es invariante bajo la multiplicación por q, la fórmula

$$\mathrm{ev}_0 : \{ \sum_{\text{finito}} f_k U^k : f_k \in C_0(X) \} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \mathrm{ev}_0\Big(\sum_{\text{finito}} f_k U^k \Big) = \sum_{\text{finito}} f_k(0), \tag{29}$$

es un *-homomorfismo bien definido, en particular este define una representación covariante 1-dimensional al considerar $\mathrm{ev}_0(U) := 1$. Dado que la C*-norma de la C*-álgebra producto cruzado está dada al tomar el supremo de las normas de los operadores sobre todas las representaciones covariantes de *-alg$\{C_0(X), U\}$ definida en [**25**], el mapeo es norma-decreciente y así posee una *-extensión continua de la forma $\mathrm{ev}_0 : C_0(X) \rtimes \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$. De las definiciones de $C_0(X) \rtimes \mathbb{Z}$, $C_0^*(z,z^*)$ y ev_0, obtenemos la siguiente sucesión exacta de C*-álgebras

$$0 \longrightarrow C_0(X \setminus \{0\}) \rtimes \mathbb{Z} \xhookrightarrow{\ \iota\ } C_0^*(z,z^*) \xrightarrow{\mathrm{ev}_0} \mathbb{C} \longrightarrow 0\,. \tag{30}$$

Para $C_0^*(z,z^*) \cong C_0(\mathbb{C}_q) \subset C_0([0,\infty)) \rtimes \mathbb{Z}$, esta sucesión exacta se traduce en

$$0 \longrightarrow C_0((0,\infty)) \rtimes \mathbb{Z} \xhookrightarrow{\iota} C_0(\mathbb{C}_q) \xrightarrow{\mathrm{ev}_0} \mathbb{C} \longrightarrow 0\,. \tag{31}$$

Notamos finalmente que podemos identificar la unidad en $C_0^*(z,z^*) \oplus \mathbb{C}\mathbf{1}$ con la función constante $\mathbf{1} \in C(X \cup \{\infty\})$, $\mathbf{1}(x) = 1$. Luego

$$\begin{aligned} C_0^*(z,z^*) \oplus \mathbb{C}\mathbf{1} = \|\cdot\|\text{-cls}\Big\{ \sum_{\text{finito}} f_k\, U^k \in C(X \cup \{\infty\}) \rtimes \mathbb{Z} \ : \\ f_k(0) = f_k(\infty) = 0 \ \text{ para todo } \ k \neq 0,\ \ k \in \mathbb{Z}\Big\}, \end{aligned} \tag{32}$$

y la proyección natural $C_0^*(z,z^*) \oplus \mathbb{C}\mathbf{1} \longrightarrow (C_0^*(z,z^*) \oplus \mathbb{C}\mathbf{1})/C_0^*(z,z^*) \cong \mathbb{C}$ puede ser escrita como

$$\mathrm{ev}_\infty : C_0^*(z,z^*) \oplus \mathbb{C}\mathbf{1} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \mathrm{ev}_\infty\Big(\sum_{\text{finito}} f_k\, U^k\Big) = f_0(\infty). \tag{33}$$

Los cálculos son diferentes para los casos $\mathrm{sp}(|z|) = [0,\infty)$ y $\mathrm{sp}(|z|) \neq [0,\infty)$. Como paso inicial, calculamos los K-grupos asociados a nuestra esfera cuántica $C(\mathbb{S}_q^2) := C_0(\mathbb{C}_q) \oplus \mathbb{C}$. En este caso $\mathrm{sp}(|z|) = [0,\infty)$.

4.1. Teoría K de la 2-esfera cuántica no conmutativa. Dado que $C(\mathbb{S}_q^2)$ es la unitizacion de la C*-álgebra $C_0(\mathbb{C}_q)$, es claro que los K-grupos de $C(\mathbb{S}_q^2)$ determinan los K-grupos de $C_0(\mathbb{C}_q)$ y viceversa. Por esta razón, nosotros nos concentramos ahora en $C_0(\mathbb{C}_q)$. Nuestra estrategia será utilizar la sucesión exacta de seis términos de la teoría K para extensiones de álgebras C* y la sucesión exacta de seis términos de Pimsner–Voiculescu para productos cruzados de álgebras C* [**22**]. También podríamos usar la generalización dada por Exel de este último resultado introduciendo el concepto de productos cruzados parciales de álgebras C* [**12**], pero nuestra recompensa sería mucho menor, pues someteríamos nuestro trabajo al costo de introducir mucha más terminología (álgebras producto cruzado definidas por automorfismos parciales). Con las técnicas así desarrolladas, mantenemos nuestro trabajo accesible a una posible audiencia más amplia.

Para aplicar la sucesión exacta de seis términos de la K-teoría a la extensión C*-algebraica (31), necesitamos conocer primero $K_0(C_0((0,\infty)) \rtimes \mathbb{Z})$ y $K_1(C_0((0,\infty)) \rtimes \mathbb{Z})$. Para este fin, consideramos el automorfismo γ_q en (5) y la sucesión exacta asociada por Pimsner–Voiculescu [**1**, Teorema 10.2.1]

$$\begin{array}{ccccc} K_0(C_0((0,\infty))) & \xrightarrow{\mathrm{id}-\gamma_{q_*}} & K_0(C_0((0,\infty))) & \xrightarrow{\iota_*} & K_0(C_0((0,\infty)) \rtimes \mathbb{Z}) \\ \big\uparrow & & & & \big\downarrow \\ K_1(C_0((0,\infty)) \rtimes \mathbb{Z}) & \xleftarrow{\iota_*} & K_1(C_0((0,\infty))) & \xleftarrow{\mathrm{id}-\gamma_{q_*}} & K_1(C_0((0,\infty)))\,. \end{array} \tag{34}$$

Tomando $q \to 1$ en (5), vemos que γ_q es homotópico a $\gamma_1 = \mathrm{id}$, así que $(\gamma_q)_* = \mathrm{id}$ sobre los K-grupos. Además, es sabido que $K_0(C_0((0,\infty))) \cong K_0(C_0(\mathbb{R})) = 0$ y $K_1(C_0((0,\infty))) \cong K_1(C_0(\mathbb{R})) = \mathbb{Z}$, ver para esto [**32**, p. 123]. Luego (34) es equivalente a

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "0"] & 0 \arrow[r, "\iota_*"] & K_0(C_0((0,\infty)) \rtimes \mathbb{Z}) \arrow[d] \\ K_1(C_0((0,\infty)) \rtimes \mathbb{Z}) \arrow[u] & \mathbb{Z} \arrow[l, "\iota_*"'] & \mathbb{Z}\,. \arrow[l, "0"'] \end{tikzcd} \tag{35}$$

Por la exactitud de la sucesión tenemos,

$$K_0(C_0((0,\infty)) \rtimes \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}, \qquad K_1(C_0((0,\infty)) \rtimes \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}. \tag{36}$$

El diagrama (35) contiene más información: Recordamos que $K_1(\mathcal{A}) = K_1(\mathcal{A} \oplus \mathbb{C})$ para cualquier C*-álgebra sin unidad $\mathcal{A}$ y su unitización $\mathcal{A} \oplus \mathbb{C}$. Hagamos $\mathrm{S}^1 := \{x \in \mathbb{C} : |x| = 1\}$. Usando $C_0((0,\infty)) \oplus \mathbb{C} \cong C(\mathrm{S}^1)$, un generador de $K_1(C_0((0,\infty))) \cong K_1(C(\mathrm{S}^1))$ está dado por la K_1-clase de una función periódica S^1-valuada sobre $[0,\infty]$ con winding number dado por ± 1. Dado que $\iota_* : \mathbb{Z} \cong K_1(C_0((0,\infty))) \to K_1(C_0((0,\infty)) \rtimes \mathbb{Z})$ es un isomorfismo por la exactitud de la sucesión (35), se deriva que mapea un generador de grupo sobre un generador de grupo. De esta forma, un generador de $K_1(C_0((0,\infty)) \rtimes \mathbb{Z})$ está dado por la K_1-clase del unitario

$$\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} h} \in \big(C_0((0,\infty)) \oplus \mathbb{C}\big) \rtimes \mathbb{Z} \cong \big(C_0((0,\infty)) \rtimes \mathbb{Z}\big) \oplus \mathbb{C}, \tag{37}$$

donde $h : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ es una función continua tal que $h(0) = 1$ y $\lim_{t\to\infty} h(t) = 0$.

Retornando al cálculo de los K-grupos de $C_0(\mathbb{C}_q)$, consideramos la sucesión exacta de seis términos estandard de la teoría K asociada a (31)

$$\begin{tikzcd} K_0(C_0((0,\infty)) \rtimes \mathbb{Z}) \arrow[r, "\iota_*"] & K_0(C_0(\mathbb{C}_q)) \arrow[r, "\mathrm{ev}_{0*}"] & K_0(\mathbb{C}) \arrow[d, "\delta_{01}"] \\ K_1(\mathbb{C}) \arrow[u, "\delta_{10}"] & K_1(C_0(\mathbb{C}_q)) \arrow[l, "\mathrm{ev}_{0*}"'] & K_1(C_0((0,\infty)) \rtimes \mathbb{Z})\,. \arrow[l, "\iota_*"'] \end{tikzcd} \tag{38}$$

Aplicando el hecho de que $K_0(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}$, $K_1(\mathbb{C}) = 0$ y por (36) se tiene

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, "\iota_*"] & K_0(C_0(\mathbb{C}_q) \arrow[r, "\mathrm{ev}_{0*}"] & \mathbb{Z} \arrow[d, "\delta_{01}"] \\ 0 \arrow[u, "0"] & K_1(C_0(\mathbb{C}_q) \arrow[l, "0"'] & \mathbb{Z}\,. \arrow[l, "\iota_*"'] \end{tikzcd} \tag{39}$$

Afirmamos ahora que el mapeo conector δ_{01} es un isomorfismo. Para ver esto, levantamos la proyección trivial $1 \in \mathbb{C}$ a la función real $h \in C_0(\mathbb{R}_+) \subset C_0(\mathbb{C}_q)$ usada en (37). Aplicando δ_{01} a $[1] \in K_0(\mathbb{C})$ tenemos $\delta_{01}([1]) = [\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} h}] \in K_1(C_0((0,\infty)) \rtimes \mathbb{Z})$, para esto ver Definición 15. Análogamente a lo discutido luego de la Ecuación (36), $[\mathrm{e}^{-2\pi i h}]$ es generador de $K_1(C_0((0,\infty)) \rtimes \mathbb{Z})$, entonces δ_{01} mapea el generador $[1] \in K_0(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}$ al generador de $K_1(C_0((0,\infty)) \rtimes \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ y de esta forma es un isomorfismo.

Ahora, la sucesión exacta (39) puede ser escrita de la siguiente forma

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \arrow[r, "\iota_*"] & K_0(C_0(\mathbb{C}_q) \arrow[r, "0"] & \mathbb{Z} \arrow[d, "\cong"] \\
0 \arrow[u, "0"] & K_1(C_0(\mathbb{C}_q) \arrow[l, "0"] & \mathbb{Z}. \arrow[l, "0"]
\end{tikzcd} \tag{40}
$$

De esto, es inmediatamente claro que $K_0(C_0(\mathbb{C}_q) \cong \mathbb{Z}$ y $K_1(C_0(\mathbb{C}_q) \cong 0$. Además, adjuntando la unidad a $C_0(\mathbb{C}_q)$ se deduce que $K_0(C(\mathbb{S}_q^2)) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ y $K_1(C(\mathbb{S}_q^2)) \cong 0$. Concluimos así la formulación del siguiente resultado.

Teorema 10. *Los K-grupos de las C*-álgebras $C_0(\mathbb{C}_q)$ y de la esfera cuántica $C(\mathbb{S}_q^2)$ estudiados en la sección anterior, están dados por las fórmulas*

$$K_0(C_0(\mathbb{C}_q)) \cong \mathbb{Z}, \qquad K_0(C(\mathbb{S}_q^2)) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \tag{41}$$

$$K_1(C_0(\mathbb{C}_q)) \cong 0, \qquad K_1(C(\mathbb{S}_q^2)) \cong 0. \tag{42}$$

Notar que los K-grupos de los espacios cuánticos en el Teorema 10 son isomorfos a sus respectivas contrapartes clásicas pues $K_0(C_0(\mathbb{C})) \cong \mathbb{Z}$, $K_0(C(\mathrm{S}^2)) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ y $K_1(C_0(\mathbb{C})) = K_1(C(\mathrm{S}^2)) = 0$.

Nota 1. *En el Corolario 3 que enunciamos más adelante, mostraremos que generadores de $K_0(C_0(\mathbb{C}_q))$ están dados por las K_0-clases $[P_{\pm 1}] - [1]$ y $[R_1]$ para las proyecciones de Bott $P_{\pm 1}$ definidas en* (65) *y en* (66)*, y las proyecciones tipo Powers–Rieffel R_1 definidas en* (68)*. Como una consecuencia trivial, estos elementos junto con* [1] *generan $K_0(C(\mathbb{S}_q^2))$.*

4.2. K-teoría de subconjuntos compactos de la recta real. El cálculo de los K-grupos de las C*-álgebras generadas por un operador q-normal general, requiere el conocimiento de la K-teoría de $C(Y)$, donde Y denota un subconjunto compacto no vacío de $(q, 1)$. Una caracterización de los K-grupos de $C(Y)$ puede ser encontrada en [**15**, Sección 7.5], para cualquier conjuto compacto no vacío $Y \subset \mathbb{C}$. Sin embargo, dado que estamos interesados en una descripción de los generadores, presentaremos aquí una prueba mas explícita relacionada con los hechos de [**15**]. Como el intervalo $(q, 1)$ es homeomorfo a $\mathbb{R}$, los resultados pueden ser aplicados a cualquier subconjunto compacto de los números reales. Antes de plantear el teorema, presentamos algo de notación en la siguiente nota.

Nota 2. *Sean $Y \subset (q, 1)$ un conjunto compacto y denotemos por $s \in (q, 1)$ al máximo de Y. Considere la familia $\{I_j : j \in J\}$ de componentes conexas de $(q, s] \setminus Y$. Como las componentes conexas de subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}$ son intervalos abiertos, podemos escribir $I_j = (a_j, b_j)$.*

Si Y tiene un número finito de componentes conexas, supongamos $n \in \mathbb{N}$, entonces J tiene el mismo número de elementos y podemos escoger $J = \{1, \ldots, n\}$. Si Y tiene un número infinito *(posiblemente no contable) de componentes conexas, entonces J es infinito contable ya que $\{j \in J : b_j - a_j > \epsilon\}$ es finito para todo $\epsilon > 0$, de esta forma podemos tomar $J = \mathbb{N}$. Para cada $j \in J$, escogemos un $c_j \in I_j$ y así llegamos a la siguiente situación:*

$$Y^{\mathrm{c}} := (q,1)\setminus Y = (s,1) \cup \bigcup_{j\in J} I_j,\ \ I_j \cap I_k = \emptyset \ \ si \ \ j \neq k,\ \ c_j \in I_j = (a_j, b_j) \subset (q,s). \tag{43}$$

Frecuentemente utilizaremos la función característica de un subconjunto $A \subset \mathbb{R}$, dada por

$$\chi_A(t) := \begin{cases} 1, & para \quad t \in A, \\ 0, & para \quad t \notin A. \end{cases} \tag{44}$$

Notar que para todo $x, y \in Y^{\mathrm{c}} := (q,1) \setminus Y$, $\chi_{(x,y)}$ es una proyección continua, es decir,

$$\chi_{(x,y)} \in C(Y), \qquad (\chi_{(x,y)})^2 = \chi_{(x,y)} = (\chi_{(x,y)})^* . \tag{45}$$

Finalmente, si $j_0 \in J$ es el único índice tal que $I_{j_0} = (q, \min(Y))$, entonces tenemos $\chi_{(c_{j_0},1)} = 1 \in C(Y)$.

Teorema 11. *Sea $Y \subset (q,1)$ un conjunto compacto no vacío. Para tales conjuntos,*

$$K_1(C(Y)) = 0. \tag{46}$$

Si Y tiene $n \in \mathbb{N}$ componentes conexas, entonces

$$K_0(C(Y)) \cong \mathbb{Z}^n. \tag{47}$$

Si Y tiene un número infinito de componentes conexas, entonces

$$K_0(C(Y)) \cong \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z} \qquad (\textit{suma directa infinita}). \tag{48}$$

Para cualquier escogencia de números reales $c_j \in I_j$ como en la Nota 2, las clases de equivalencia de las proyecciones $\chi_{(c_j,1)} \in C(Y)$, $j \in J$, generan libremente a $K_0(C(Y))$.

Demostración. Consideremos el homomorfismo $h_1 : K_1(C(Y)) \to \check{H}^1(Y, \mathbb{C}^*)$, $h_1([U]) := \det(\mathrm{U})$, donde $\check{H}^1(Y, \mathbb{C}^*)$ denota el grupo de clases de homotopía de funciones continuas complejo valuadas que no se anulan sobre Y bajo la multiplicación punto a punto. Por [**15**, Proposición 7.5.2], h_1 es un isomorfismo y por [**15**, Proposición 7.5.3] tenemos que $\check{H}^1(Y, \mathbb{C}^*)$ está generado por las funciones $Y \ni y \mapsto y - \lambda$, donde se escoge exactamente un sólo λ en cada componente conexa acotada de $\mathbb{C} \setminus Y$. Dado que $Y \subset (q,1)$ es un conjunto acotado real, $\mathbb{C} \setminus Y$ no tiene componentes conexas acotadas y así $\check{H}^1(Y, \mathbb{C}^*)$ es el grupo trivial, de esto se tiene que $K_1(C(Y)) = 0$.

Para determinar $K_0(C(Y))$, identificamos primero proyecciones $P \in \mathrm{Mat}_N(C(Y))$ con funciones continuas de la forma $P : Y \to \mathrm{Mat}_N(\mathbb{C})$, $N \in \mathbb{N}$. Denotemos por $\check{H}^0(Y, \mathbb{Z})$ el grupo de funciones continuas entero valuadas sobre Y. Por [**15**, Proposición 7.5.2], el mapeo

$$h_0 : K_0(C(Y)) \longrightarrow \check{H}^0(Y, \mathbb{Z}), \qquad h_0([P])(t) := \mathrm{rank}(P(t)), \tag{49}$$

es un isomorfismo.

Para una descripción de $K_0(C(Y))$ dada por generadores, consideremos a J y c_j para $j \in J$, que estén definidos como en la Nota 2 y consideremos el homomorfismo de grupos

$$\Phi : \bigoplus_{j\in J} \mathbb{Z} \longrightarrow K_0(C(Y)), \qquad \Phi((g_j)_{j\in J}) := \sum_{k=1}^{N} g_{n_k} [\chi_{(c_{n_k},1)}], \tag{50}$$

donde $N \in \mathbb{N}$ y $g_{n_1}, \ldots, g_{n_N}$ son los elementos no nulos de $(g_j)_{j\in J} \in \oplus_{j\in J}\mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Nuestro objetivo es mostrar que Φ es un isomorfismo componiendo este con h_0.

Supongamos que $\Phi((g_j)_{j\in J}) = \sum_{k=1}^{N} g_{n_k} [\chi_{(c_{n_k},1)}] = 0$ en $K_0(C(Y))$, donde $g_{n_1}, \ldots, g_{n_N}$ son enteros distintos de cero. Notamos que $h_0([\chi_{(c_{n_k},1)}]) = \chi_{(c_{n_k},1)}$. Dado que h_0 es un homomorfismo de grupos, tenemos $0 = h_0(\sum_{k=1}^{N} g_{n_k} [\chi_{(c_{n_k},1)}]) = \sum_{k=1}^{N} g_{n_k} \chi_{(c_{n_k},1)}$. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $c_{n_1} < \cdots < c_{n_N}$. Si $N = 1$, consideremos $y \in (c_{n_1}, 1) \cap Y$, y si $N > 1$, sea $y \in (c_{n_1}, c_{n_2}) \cap Y$. Tal y siempre existe por las definiciones de c_j y I_j en la Nota 2. Entonces $\chi_{(c_{n_1},1)}(y) = 1$ y $\chi_{(c_{n_k},1)}(y) = 0$ para $k = 2, \ldots, N$, luego $0 = h_0(\sum_{k=1}^{N} g_{n_k} [\chi_{(c_{n_k},1)}])(y) = g_{n_1}$, es una contradicción. Esto muestra la inyectividad de Φ.

Para probar la sobreyectividad, es suficiente verificar que cada $[P] \in K_0(C(Y))$ pertenece a la imagen de Φ. Aplicando h_0 a $[P]$, obtenemos la función continua entero valuada $h_0([P])(t) = \mathrm{rank}(P(t))$. Dado que $h_0([P])(t)$ toma valores en un conjunto discreto, esta es localmente constante. Por la compacidad de Y, existe un cubrimiento finito de intervalos abiertos tal que $h_0([P])$ es constante en cada intervalo. En particular, este solo tiene un número finito de saltos y cada salto puede ocurrir solamente si la distancia de los puntos vecinos es mayor que 0. Entonces podemos encontrar $c_{j_1}, \ldots, c_{j_{k_0}} \in (q, 1) \setminus Y$ tal que c_{j_k} pertenece a la componente conexa I_{j_k} como se describe en (43), además $c_{j_1} < \cdots < c_{j_{k_0}}$ y $h_0([P])$ es constante sobre $(c_{j_k}, c_{j_{k+1}}) \cap Y$ para $k = 1, \ldots, k_0$, donde estamos considerando $c_{j_{k_0+1}} := 1$. Sea $n_k \in \mathbb{N}_0$ tal que $h_0([P])(t) = n_k \in \mathbb{N}_0$ para todo $t \in (c_{j_k}, c_{j_{k+1}}) \cap Y$. Entonces

$$h_0([P]) = \sum_{k=1}^{k_0} n_k \chi_{(c_{j_k},c_{j_{k+1}})} = n_1 \chi_{(c_{j_1},1)} + \sum_{k=2}^{k_0} (n_k - n_{k-1}) \chi_{(c_{j_k},1)}. \tag{51}$$

Definamos $[p] \in K_0(C(Y))$ por

$$[p] := \sum_{k=1}^{k_0} n_k [\chi_{(c_{j_k},c_{j_{k+1}})}] = n_1 [\chi_{(c_{j_1},1)}] + \sum_{k=2}^{k_0} (n_k - n_{k-1}) [\chi_{(c_{j_k},1)}]. \tag{52}$$

Por (45), $\chi_{(c_{j_k},c_{j_{k+1}})}$ es una proyección continua en $C(Y)$, entonces $[p]$ define una clase en $K_0(C(Y))$. La segunda igualdad en (52) se sigue de $\chi_{(c_{j_k},c_{j_{k+1}})} = \chi_{(c_{j_k},1)} - \chi_{(c_{j_{k+1}},1)}$. Aplicando h_0 a $[p]$, usando nuevamente $h_0([\chi_{(c_{j_k},c_{j_{k+1}})}]) = \chi_{(c_{j_k},c_{j_{k+1}})}$ y comparando el resultado con (51), obtenemos que $h_0([p]) = \sum_{k=1}^{k_0} n_k \chi_{(c_{j_k},c_{j_{k+1}})} = h_0([P])$. Por la inyectividad de h_0, se sigue que $[p] = [P]$ in $K_0(C(Y))$. Ahora definimos $(g_j)_{j\in J} \in \oplus_{j\in J} \mathbb{Z}$ por $g_{j_1} = n_1$, $g_{j_k} = n_k - n_{k-1}$ para $k = 2, \ldots, k_0$, y $g_j = 0$ en otro caso. Entonces, por (50),

$$\Phi((g_j)_{j\in J}) = n_1[\chi_{(c_{j_1},1)}] + \sum_{k=2}^{k_0}(n_k - n_{k-1})[\chi_{(c_{j_k},1)}] = [p] = [P] \in K_0(C(Y)),$$

lo cual prueba la sobreyectividad de Φ.

Además, dado que $\{(\delta_{ji})_{j\in J} \in \oplus_{i\in J}\mathbb{Z} : j \in J\}$ es un conjunto de generadores libres para $\oplus_{j\in J}\mathbb{Z}$, donde $\delta_{jj} = 1$ y $\delta_{ji} = 0$ si $i \neq j$, y dado que Φ es un isomorfismo, los elementos $[\chi_{(c_j,1)}] = \Phi((\delta_{ji})_{i\in J})$, $j \in J$, generan libremente a $K_0(C(Y))$.

Finalmente recordamos que la notación $J = \{1, \dots, n\}$ y $J = \mathbb{N}$ fue explicada en la Nota 2. □

4.3. La K-teoría de álgebras C* generadas por operadores q-normales genéricos. En esta sección calculamos los K-grupos de la C*-álgebra $C_0^*(z, z^*)$ definida en (18), donde z es un operador q-normal tal que

$$X := \mathrm{sp}(|z|) = \{0\} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} q^n \,\mathrm{sp}(A) \subset [0, \infty). \tag{53}$$

Reemplazando z por tz, con $t > 0$, podemos asumir que $1 \notin \mathrm{sp}(|z|)$. Entonces la q-invarianza del $\mathrm{sp}(|z|)$ implica que $q^n \notin \mathrm{sp}(|z|)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Dado que $q, 1 \notin \mathrm{sp}(|z|)$, la Ecuación (53) y de las propiedades del operador autoadjunto A descritas en el Corolario 1, concluímos que $Y := \mathrm{sp}(|z|) \cap (q, 1) = \mathrm{sp}(A)$ es un subconjunto compacto de $(q, 1)$. Por (53), $X = \{0\} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} q^n Y$ es la union de conjuntos compactos. Entonces $C_0(X \setminus \{0\})$ se puede considerar como el límite inductivo

$$C_0(X \setminus \{0\}) = \varinjlim C\Big(\bigcup_{k=-N}^{N} q^k Y\Big) = \varinjlim \bigoplus_{k=-N}^{N} C(q^k Y). \tag{54}$$

Dado que la K-teoría respeta límites inductivos y como $C(q^k Y) \cong C(Y)$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, obtenemos de (54) para $j = 0, 1$

$$K_j(C_0(X\setminus\{0\})) = \varinjlim_N \bigoplus_{k=-N}^{N} K_j(C(q^k Y)) \cong \varinjlim_N \bigoplus_{k=-N}^{N} K_j(C(Y)) = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} K_j(C(Y)). \tag{55}$$

Nuestros cálculos estarán basados en la aplicación de la sucesión exacta de seis términos correspondiente a la C*-extensión (30) y a la sucesión exacta de seis términos de Pimsner–Voiculescu

$$\begin{array}{ccccc} K_0(C_0(X\setminus\{0\})) & \xrightarrow{\mathrm{id}-\gamma_{q_*}} & K_0(C_0(X\setminus\{0\})) & \xrightarrow{\iota_*} & K_0(C_0(X\setminus\{0\}) \rtimes \mathbb{Z}) \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ K_1(C_0(X\setminus\{0\}) \rtimes \mathbb{Z}) & \xleftarrow{\iota_*} & K_1(C_0(X\setminus\{0\})) & \xleftarrow{\mathrm{id}-\gamma_{q_*}} & K_1(C_0(X\setminus\{0\}))\,. \end{array} \tag{56}$$

Insertando (55) en (56) y usando los resultados del Teorema 11, podemos calcular los K-grupos de $C_0(X \setminus \{0\}) \rtimes \mathbb{Z}$. Planteamos el resultado en la siguiente proposición.

Proposición 8. *Sea X un subconjunto cerrado q-invariante de $[0,\infty)$ tal que $1 \notin X$ y consideremos el álgebra producto cruzado $C_0(X\setminus\{0\}) \rtimes \mathbb{Z}$ con el automorfismo definido en* (5). *Sea $Y := X \cap (q,1)$ y denotemos por J el conjunto de índices descrito en la Nota 2. Entonces*

$$K_0(C_0(X\setminus\{0\}) \rtimes \mathbb{Z}) \cong \bigoplus_{j\in J} \mathbb{Z}, \qquad K_1(C_0(X\setminus\{0\}) \rtimes \mathbb{Z}) = 0.$$

Demostración. De la Ecuación (55) y el Teorema 11, concluimos que

$$K_0(C_0(X\setminus\{0\})) \cong \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} (\bigoplus_{j\in J} \mathbb{Z}), \qquad K_1(C_0(X\setminus\{0\})) = 0.$$

Para $k \in \mathbb{Z}$, consideramos el isomorfismo de C*-álgebras $\gamma_q^k : C(Y) \to C(q^{-k}Y)$ definido por $\gamma_q^k(f)(y) := f(q^k y)$. Sea $c_j \in (a_j, b_j)$ dado como en (43). Identificando la componente conexa $(a_j, b_j) \subset Y^{\mathrm{c}}$ con la componente conexa $(q^{-k}a_j, q^{-k}b_j) \subset q^{-k}Y^{\mathrm{c}}$, escogiendo para todo $j \in J$ el número $q^{-k}c_j \in (q^{-k}a_j, q^{-k}b_j)$ y los correspondientes generadores $[\chi_{(q^{-k}c_j, q^{-k})}] \in K_0(C(q^{-k}Y))$ como en el Teorema 11, el isomorfismo inducido $(\gamma_q^k)_* : K_0(C(Y)) \to K_0(C(q^{-k}Y))$ se convierte en la identidad sobre $\bigoplus_{j\in J} \mathbb{Z}$. Entonces, por un ligero abuso de notación, podemos escribir

$$(\gamma_q^k)_* : \bigoplus_{j\in J} \mathbb{Z} \cong K_0(C(Y)) \longrightarrow \bigoplus_{j\in J} \mathbb{Z} \cong K_0(C(q^{-k}Y)), \quad (\gamma_q^k)_*(g) = g. \tag{57}$$

En esta notación, el mapeo $\mathrm{id} - \gamma_{q_*} : K_0(C_0(X\setminus\{0\})) \to K_0(C_0(X\setminus\{0\}))$ en (56) se transforma en $\mathrm{id} - \gamma_{q_*} : \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} (\bigoplus_{j\in J} \mathbb{Z}) \to \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} (\bigoplus_{j\in J} \mathbb{Z})$, $(\mathrm{id} - \gamma_{q_*})((g_k)_{k\in\mathbb{Z}}) = (g_k - g_{k+1})_{k\in\mathbb{Z}}$. Este mapeo es obviamente inyectivo pues si n es el entero más grande tal que $g_n \neq 0$, entonces $(\mathrm{id} - \gamma_{q_*})(..., g_{n-1}, g_n, 0, 0, ...) = (..., g_{n-1} - g_n, g_n, 0, 0, ...) \neq 0$. Como $K_1(C_0(X\setminus\{0\})) = 0$, concluimos de la exactitud de (56) que $K_1(C_0(X\setminus\{0\}) \rtimes \mathbb{Z}) = 0$ ya que $K_1(C_0(X\setminus\{0\})) \xrightarrow{0} K_1(C_0(X\setminus\{0\}) \rtimes \mathbb{Z}) \xrightarrow{0} \ker(\mathrm{id} - \gamma_{q_*})$. De esta forma obtenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} (\bigoplus_{j\in J} \mathbb{Z}) \xhookrightarrow{\mathrm{id}-\gamma_{q_*}} \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} (\bigoplus_{j\in J} \mathbb{Z}) \xrightarrow{\iota_*} K_0(C_0(X\setminus\{0\}) \rtimes \mathbb{Z}) \longrightarrow 0. \tag{58}$$

Así $K_0(C_0(X\setminus\{0\}) \rtimes \mathbb{Z})$ es isomorfo al grupo cociente $\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} (\bigoplus_{j\in J} \mathbb{Z}) / \mathrm{Im}(\mathrm{id} - \gamma_{q_*})$. Como de costumbre, denotaremos las clases de equivalencia con corchetes. Dado que los elementos $(..., 0, 0, -g, g, 0, 0, ...) = (\mathrm{id} - \gamma_{q_*})(..., 0, 0, 0, g, 0, 0, ...)$ pertenecen a la imagen de $\mathrm{id} - \gamma_{q_*}$, tenemos que

$$[(\dots, 0, g, 0, 0, ...)] = [(\dots, 0, g, 0, 0, ...) + (\dots, 0, -g, g, 0, ...)] = [(\dots 0, 0, g, 0, ...)]$$

y así

$$[(\dots, 0, 0, g_k, ..., g_n, 0, 0, ...)] = [(\dots, 0, ..., 0, g_k + \cdots + g_n, 0, \dots, 0, ...)],$$

donde la suma puede ser también hecha en la componente 0. Además, si $(\dots, 0, 0, g_0, 0, 0, ...)$ pertenece a la imagen de $\mathrm{id} - \gamma_{q_*}$, entonces $g_0 = 0$, como el único elemento $g \in \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} (\bigoplus_{j\in J} \mathbb{Z})$ tal que $(\dots, 0, 0, g_0, 0, 0, ...) =$

$(\mathrm{id} - \gamma_{q_*})(g)$ está dado por $g = (\ldots, g_0, g_0, g_0, 0, 0, \ldots)$ pero si $g_0 \neq 0$ se tendría un número infinito de componentes distintas de cero. Entonces

$$\bigoplus_{j\in J} \mathbb{Z} \ni g \longmapsto [(\ldots, 0, 0, g, 0, 0, \ldots)] \in \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} (\bigoplus_{j\in J} \mathbb{Z})/\,\mathrm{Im}(\mathrm{id} - \gamma_{q_*}) \cong K_0(C_0(X\setminus\{0\}) \rtimes \mathbb{Z}) \tag{59}$$

es un isomorfismo. □

Finalmente, estamos en posición de calcular los K-grupos de la C*-álgebra $C_0^*(z, z^*)$.

Teorema 12. *Sea z un operador q-normal tal que $1 \notin X := \mathrm{sp}(|z|) \neq [0, \infty)$. Si $(q, 1) \cap X$ tiene $n \in \mathbb{N}$ componentes conexas, entonces*

$$K_0(C_0^*(z, z^*)) \cong \mathbb{Z}^{n+1}, \qquad K_1(C_0^*(z, z^*)) = 0.$$

Si $(q, 1) \cap X$ tiene un número infinito de componentes conexas, entonces

$$K_0(C_0^*(z, z^*)) \cong \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}, \qquad K_1(C_0^*(z, z^*)) = 0.$$

Un conjunto de generadores para $K_0(C_0^*(z, z^*))$ está dado por $[\chi_{[0,q)}]$ y $[\chi_{(c_j,1)}]$, $j \in J$, con J y $c_j \in (q, 1)$ definidos como en (43) para $Y := (q, 1) \cap X$.

Demostración. Los K-grupos son fácilmente calculados por la sucesión exacta de seis términos estandar asociada a la extensión C* dada por (30), es decir,

$$\begin{array}{ccccc} K_0(C_0(X\setminus\{0\}) \rtimes \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\iota_*} & K_0(C_0^*(z, z^*)) & \xrightarrow{\mathrm{ev}_{0*}} & K_0(\mathbb{C}) \\ \uparrow{\scriptstyle\delta_{10}} & & & & \downarrow{\scriptstyle\delta_{01}} \\ K_1(\mathbb{C}) & \xleftarrow{\mathrm{ev}_{0*}} & K_1(C_0^*(z, z^*)) & \xleftarrow{\iota_*} & K_1(C_0(X\setminus\{0\}) \rtimes \mathbb{Z})\,. \end{array} \tag{60}$$

Insertando $K_0(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}$, $K_1(\mathbb{C}) = 0$ y los K-grupos de la Proposición 8 se deduce inmediatamente que $K_1(C_0^*(z, z^*)) = 0$ y también se deduce la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{j\in J} \mathbb{Z} \overset{\iota_*}{\hookrightarrow} K_0(C_0^*(z, z^*)) \overset{\mathrm{ev}_{0*}}{\twoheadrightarrow} \mathbb{Z} \longrightarrow 0\,. \tag{61}$$

Esta sucesión exacta corta obviamente se escinde con un homomorfismo de la forma $\sigma : \mathbb{Z} \to K_0(C_0^*(z, z^*))$ que envia al generador $[1] \in K_0(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}$ a la clase de la proyección continua $\chi_{[0,q)} \in C_0(X) \subset K_0(C_0^*(z, z^*))$, es decir, $\sigma([1]) := [\chi_{[0,q)}]$. La continuidad de $\chi_{[0,q)} \in C_0(X)$ se sigue de $q \notin X$. Como la sucesión exacta de (61) se escinde, concluimos primero que $K_0(C_0^*(z, z^*)) \cong \mathbb{Z} \oplus (\bigoplus_{j\in J} \mathbb{Z})$ y luego que $K_0(C_0^*(z, z^*))$ está generado por $[\chi_{[0,q)}]$ y los generadores $K_0(C_0(X\setminus\{0\}) \rtimes \mathbb{Z}) \cong \bigoplus_{j\in J} \mathbb{Z}$. El límite directo (55), el isomorfismo (59) con $\bigoplus_{j\in J} \mathbb{Z} \cong K_0(C(Y))$ y los resultados del Teorema 11 muestran que $K_0(C_0(X\setminus\{0\}) \rtimes \mathbb{Z})$ está generado por los elementos $[\chi_{(c_j,1)}]$ con $j \in J$, del K_0-grupo de la C*-subálgebra $C(Y) \subset C_0(X\setminus\{0\}) \overset{\iota}{\hookrightarrow} C_0(X\setminus\{0\}) \rtimes \mathbb{Z})$. La prueba concluye al observar que

$J = \{1, \ldots, n\}$ si $(q, 1) \cap X$ tiene $n \in \mathbb{N}$ componentes conexas y $J = \mathbb{N}$ si $(q, 1) \cap X$ tiene un número infinito de componentes conexas, ver Nota 2. $\square$

Para todos los operadores q-normales z tales que $X := \mathrm{sp}(|z|) \neq [0, \infty)$, tenemos por el Teorema 12 que $K_0(C_0^*(z, z^*)) \cong \mathbb{Z} \oplus \underset{j\in J}{\oplus} \mathbb{Z} \neq \mathbb{Z} \cong K_0(C_0(\mathbb{C}))$ puesto que $(q, 1) \cap X$ tiene por lo menos una componente conexa. Esto justifica la definición de $C_0(\mathbb{C}_q)$ como la C*-álgebra generada por un operador q-normal ζ tal que $\mathrm{sp}(|\zeta|) = [0, \infty)$ ya que solamente así las igualdades $K_0(C_0(\mathbb{C}_q)) = K_0(C_0(\mathbb{C}))$ y $K_1(C_0(\mathbb{C}_q)) = K_1(C_0(\mathbb{C}))$ se mantienen.

Sin embargo, si uno quiere considerar $C_0^*(z, z^*))$ también como un álgebra de funciones continuas anulandose en el infinito sobre un plano complejo cuántico, entonces por [**4**, Corolario 2.4], todos los grupos abelianos $\mathbb{Z}^n$, $n \in \mathbb{N}$, y $\underset{n\in\mathbb{N}}{\oplus} \mathbb{Z}$ pueden figurar como un K_0-grupo de un plano complejo cuántico.

4.4. Proyecciones de Bott y proyecciones del tipo Powers–Rieffel. Por proyecciones clásicas de Bott, nosotros entendemos las siguientes proyecciones que representan haces lineales de números de giro (winding number) $\pm n \in \mathbb{Z}$ sobre la 2-esfera clásica [**13**, Sección 2.6]:

$$p_n := \tfrac{1}{1+z^n\bar{z}^n} \begin{pmatrix} \bar{z}^n z^n & \bar{z}^n \\ z^n & 1 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{1+z^n\bar{z}^n} \begin{pmatrix} \bar{z}^n \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^n & 1 \end{pmatrix}, \qquad n \geq 0,$$

$$p_{-n} := \tfrac{1}{1+\bar{z}^n z^n} \begin{pmatrix} z^n \bar{z}^n & z^n \\ \bar{z}^n & 1 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{1+\bar{z}^n z^n} \begin{pmatrix} z^n \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{z}^n & 1 \end{pmatrix}, \qquad n < 0.$$

Haciendo $v_n := \frac{1}{\sqrt{1+z^n\bar{z}^n}} \begin{pmatrix} z^n & 1 \end{pmatrix}$ y $v_{-n} := \frac{1}{\sqrt{1+\bar{z}^n z^n}} \begin{pmatrix} \bar{z}^n & 1 \end{pmatrix}$ para $n \geq 0$, podemos escribir $p_k = v_k^* v_k$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. De la simple observación que $v_k v_k^* = 1$, se sigue que v_k es una isometría parcial y así p_k es una proyección.

Aplicamos las mismas ideas para definir proyecciones de Bott en el caso no conmutativo, la única diferencia ocurre al reemplazar las funciones continuas no acotadas $z \in C(\mathbb{C})$, por el operador q-normal no acotado $z : \mathrm{dom}(z) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$. De esta manera, para $n \in \mathbb{N}$, hacemos

$$V_n := \tfrac{1}{\sqrt{1+z^n z^{*n}}} \begin{pmatrix} z^n & 1 \end{pmatrix}, \quad V_{-n} := \tfrac{1}{\sqrt{1+z^{*n} z^n}} \begin{pmatrix} z^{*n} & 1 \end{pmatrix}, \quad P_{\pm n} := V_{\pm n}^* V_{\pm n}. \tag{62}$$

Claramente, $V_{\pm n} V_{\pm n}^* = 1$, y así $P_{\pm n}$ es una proyección autoadjunta. Asumamos por un momento que $\ker(|z|) = 0$, de esta manera la isometría parcial U en la descomposición polar $z = U|z|$ es unitaria. Recordemos también que para cada función de Borel f sobre $[0, \infty)$, se tiene

$$U f(|z|) U^* = f(q|z|) =: \gamma_q(f)(|z|), \tag{63}$$

por Proposición 6.(4). Entonces $U|z| = q|z|U$ implica que

$$z^n = q^{-\frac{n}{2}(n-1)} U^n |z|^n = q^{\frac{n}{2}(n+1)} |z|^n U^n, \quad z^{*n} = q^{-\frac{n}{2}(n-1)} |z|^n U^{*n} = q^{\frac{n}{2}(n+1)} U^{*n} |z|^n. \tag{64}$$

Usando (63) y (64), uno fácilmente calcula que

$$P_n = \begin{pmatrix} \frac{q^{-n(n-1)}|z|^{2n}}{1+q^{-n(n-1)}|z|^{2n}} & \frac{q^{-\frac{n}{2}(n-1)}|z|^n}{1+q^{-n(n-1)}|z|^{2n}} U^{*n} \\ \frac{q^{\frac{n}{2}(n+1)}|z|^n}{1+q^{n(n+1)}|z|^{2n}} U^n & \frac{1}{1+q^{n(n+1)}|z|^{2n}} \end{pmatrix}, \tag{65}$$

$$P_{-n} = \begin{pmatrix} \frac{q^{n(n+1)}|z|^{2n}}{1+q^{n(n+1)}|z|^{2n}} & \frac{q^{\frac{n}{2}(n+1)}|z|^n}{1+q^{n(n+1)}|z|^{2n}} U^n \\ \frac{q^{-\frac{n}{2}(n-1)}|z|^n}{1+q^{-n(n-1)}|z|^{2n}} U^{*n} & \frac{1}{1+q^{-n(n-1)}|z|^{2n}} \end{pmatrix}. \tag{66}$$

Para $k \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$, consideramos las funciones $f_{k,n}, g_{k,n}, h_{k,n} : X := \mathrm{sp}(|z|) \to \mathbb{R}$ dadas por $f_{k,n}(t) := \frac{q^k t^{2n}}{1+q^k t^{2n}}$, $g_{k,n}(t) := \frac{1}{1+q^k t^{2n}}$ y $h_{k,n}(t) := \frac{q^k t^n}{1+q^k t^{2n}}$. Obviamente, tenemos que $f_{k,n} - 1$, $g_{k,n}$, $h_{k,n} \in C_0(X)$, y $h_{k,n}(0) = 0$ para $n \neq 0$. Entonces, al identificar, como antes, esas funciones racionales en $|z|$ con funciones continuas sobre $\mathrm{sp}(|z|)$, podemos interpretar a P_n y a P_{-n} como proyecciones en $\mathrm{Mat}_2(C_0^*(z,z^*)\oplus\mathbb{C})$. Luego las proyecciones representan las K_0-clases $[P_n]$, $[P_{-n}] \in K_0(C_0^*(z,z^*)\oplus\mathbb{C})$ y $[P_n]-[1], [P_{-n}]-[1] \in K_0(C_0^*(z,z^*))$.

En lo que sigue, construiremos proyecciones 1-dimensionales en $C_0^*(z,z^*)$ similares a las proyecciones de Powers–Rieffel en la C*-álgebra de rotación irracional [**24**]. Para este fin, escogemos una función continua

$$\phi : [q,1] \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{tal que} \quad 0 \le \phi \le 1, \quad \phi(q) = 0, \quad \phi(1) = 1,$$

y definimos para $n \in \mathbb{N}$

$$h(t) := \begin{cases} \sqrt{\phi(t)(1-\phi(t))}, & t \in [q,1], \\ 0, & t \notin [q,1], \end{cases} \qquad f_n(t) := \begin{cases} \phi(t), & t \in [q,1], \\ 1, & t \in (1, q^{-n+1}), \\ 1-\phi(q^n t), & t \in [q^{-n+1}, q^{-n}], \\ 0, & t \notin [q, q^{-n}]. \end{cases} \tag{67}$$

Con U denotando el elemento unitario de $C_0(X) \rtimes \mathbb{Z}$ implementando la $\mathbb{Z}$-acción. Consideremos también

$$R_n := U^n h + f_n + h U^{*n}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{68}$$

Dado que h, $f_n \in C_0(X)$ y $h(0) = 0$, tenemos que $R_n \in C_0^*(z, z^*)$, donde $X = \mathrm{sp}(|z|)$. Obviamente, $R_n^* = R_n$. Además, usando $U^n g(t) = \gamma_q^n(g)(t)\, U^n = g(q^n t)\, U^n$ para todo $g \in C_0(X)$ y

$$
\begin{aligned}
&h(t)h(q^n t) = 0 && \text{para cada } t \in [0, \infty),\\
&h(t)^2 + h(q^n t)^2 + f_n(t)^2 = f_n(t) && \text{para cada } t \in [0, \infty),\\
&f_n(t) + f_n(q^{-n} t) = \phi(t) + 1 - \phi(t) = 1 && \text{para todo } t \in \mathrm{supp}(h) \subset [1, q^{-1}],
\end{aligned}
$$

uno fácilmente prueba que $R_n^2 = R_n$. Entonces $[R_n] \in K_0(C_0^*(z, z^*))$ define una K_0-clase con inverso $-[R_n] = [1 - R_n] - [1]$, donde $1 - R_n \in C_0^*(z, z^*) \oplus \mathbb{C}$ es una proyección 1-dimensional.

5. K-homología y apareamiento de índices.

El objetivo de esta sección es determinar las clases de la K-homología y el apareamiento de índices. Empezaremos con las clases de K-homología más triviales. Observamos que para que el apareamiento de índices (11) quede bien definido, uno no necesita asumir que π_+ ni que π_- sean representaciones unitarias. Entonces consideramos los *-homomorfismos ev_∞, $\mathrm{ev}_0 : C_0^*(z, z^*) \oplus \mathbb{C}\mathbf{1} \longrightarrow \mathbb{C}$, donde ev_∞ está definido en (33) y ev_0 denota la extensión del homomorfismo (29) a $C_0^*(z, z^*) \oplus \mathbb{C}$. Considerando $\mathcal{H}_- = \mathcal{H}_+ := \mathbb{C}$, los pares $(\mathrm{ev}_\infty, 0)$ y $(\mathrm{ev}_0, 0)$ dan lugar trivialmente a módulos de Fredholm para $C_0^*(z, z^*) \oplus \mathbb{C}$ y el apareamiento de índices (12) nos dice que

$$\langle [(\mathrm{ev}_\infty, 0)], [p] \rangle = \mathrm{Tr}_{\mathrm{Mat}_N(\mathbb{C})}(\mathrm{ev}_\infty(p)), \qquad \langle [(\mathrm{ev}_0, 0)], [p] \rangle = \mathrm{Tr}_{\mathrm{Mat}_N(\mathbb{C})}(\mathrm{ev}_0(p)). \tag{69}$$

Notar que las trazas en (69) calculan el rango de las proyecciones $\mathrm{ev}_\infty(p)$, $\mathrm{ev}_0(p) \in \mathrm{Mat}_N(\mathbb{C})$. Como $\mathbb{C} \cong (C_0^*(z, z^*) \oplus \mathbb{C}) / C_0^*(z, z^*)$ corresponde a la evaluación de funciones en el punto clásico ∞, podemos interpretar el número $\mathrm{Tr}_{\mathrm{Mat}_N(\mathbb{C})}(\mathrm{ev}_\infty(p))$ como el rango del haz vectorial no conmutativo determinado por $p \in \mathrm{Mat}_N(C_0^*(z, z^*) \oplus \mathbb{C})$ en el sentido del Teorema de Serre–Swan.

A parte de los módulos de Fredholm que aparecen en (69), la siguiente proposición asocia un módulo de Fredholm a cualquier *-representación irreducible del plano complejo cuántico.

Proposición 9. *Sea z un operador q-normal. Para todo $y \in (q, 1] \cap sp(|z|)$, consideramos la *-representación $\pi_y : C_0^*(z, z^*) \oplus \mathbb{C} \longrightarrow B(\ell_2(\mathbb{Z}))$ definida sobre una base ortonormal $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ por*

$$\pi_y(U)e_n = e_{n-1}, \qquad \pi_y(f)e_n = f(q^n y)e_n, \quad f \in C(sp(|z|) \cup \{\infty\}). \tag{70}$$

*Además, supongamos que Π_+ y Π_- denotan las proyecciones ortogonales sobre los subespacios cerrados $\overline{\mathrm{span}}\{e_k : k > 0\}$ y $\overline{\mathrm{span}}\{e_k : k \leq 0\}$ de $\ell_2(\mathbb{Z})$, respectivamente, y definamos las *-representaciones π_0, $\pi_\infty : C_0^*(z, z^*) \oplus \mathbb{C} \longrightarrow B(\ell_2(\mathbb{Z}))$ por*

$$\pi_0(a) := \mathrm{ev}_0(a)\Pi_+, \qquad \pi_\infty(a) := \mathrm{ev}_\infty(a)\Pi_-, \qquad a \in C_0^*(z, z^*) \oplus \mathbb{C}, \tag{71}$$

*con los *-homomorfismos* ev_0, $\mathrm{ev}_\infty : C_0^*(z, z^*) \oplus \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *presentados en* (29) *y* (33)*, respectivamente. Entonces el par* $(\pi_y, \pi_0 \oplus \pi_\infty)$ *define un módulo de Fredholm graduado para* $C_0^*(z, z^*) \oplus \mathbb{C}$*.*

Demostración. Cálculos directos muestran que (70) y (71) definen *-representaciones unitarias. Por densidad y continuidad, es suficiente mostrar que $\pi_y(fU^n) - \pi_0(fU^n) - \pi_\infty(fU^n)$ es compacto para los generadores $fU^n \in C_0^*(z, z^*) \oplus \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$. Primeramente, sea $n \neq 0$. En este caso $f(0) = f(\infty) = 0$ por (32), entonces $\pi_0(fU^n) + \pi_\infty(fU^n) = 0$ por (71). El operador $\pi_y(f)$ es diagonal sobre los elementos de la base dados por e_k con valores propios $f(q^k y)$ convergiendo a $f(0) = f(\infty) = 0$ cuando $k \to \pm\infty$. Entonces $\pi_y(f)$ es un operador compacto y así tenemos que la diferencia $\pi_y(fU^n) - \pi_0(fU^n) - \pi_\infty(fU^n) = \pi_y(f)\pi_y(U^n)$ es también compacta.

Luego, sea $n = 0$. Entonces tenemos $(\pi_y(f) - \pi_0(f) - \pi_\infty(f))e_k = (f(q^k y) - f(0))e_k$ si $k > 0$ y $(\pi_y(f) - \pi_0(f) - \pi_\infty(f))e_k = (f(q^k y) - f(\infty))e_k$ si $k \leq 0$. Nuevamente, $\{e_k : k \in \mathbb{Z}\}$ es un conjunto de valores propios y la sucesión de valores propios converge a 0 ya que $\lim\limits_{k\to\infty}(f(q^k y) - f(0)) = f(0) - f(0) = 0$ y $\lim\limits_{k\to-\infty}(f(q^k y) - f(\infty)) = f(\infty) - f(\infty) = 0$. Entonces $\pi_y(f) - \pi_0(f) - \pi_\infty(f)$ produce también en este caso un operador compacto. □

Recordamos que la relación de equivalencia en K-homología esta definida por la homotopía de operadores. Si y_1, $y_2 \in (q, 1] \cap \mathrm{sp}(|z|)$ pertenecen a la misma componente conexa del $\mathrm{sp}(|z|)$, entonces $[0, 1] \ni t \to (\pi_{y_1 + t(y_2 - y_1)}, \pi_0 \oplus \pi_\infty)$ produce una homotopía de módulos de Fredholm graduados entre $(\pi_{y_1}, \pi_0 \oplus \pi_\infty)$ y $(\pi_{y_2}, \pi_0 \oplus \pi_\infty)$, de esta manera definen la misma clase en $K^0(C_0^*(z, z^*) \oplus \mathbb{C})$. El apareamiento de índices nos mostrará que si y_1, $y_2 \in (q, 1] \cap \mathrm{sp}(|z|)$ pertenecen a diferentes componentes conexas, entonces los correspondientes módulos de Fredholm producen diferentes clases de K-homología.

5.1. Apareamiento de índices para el plano complejo. El objetivo de esta sección es calcular el apareamiento de índices para la C*-álgebra unitaria $C(\mathbb{S}_q^2) = C_0(\mathbb{C}_q) \oplus \mathbb{C}$ vista como el álgebra de funciones continuas sobre la compactación por un punto del plano complejo cuántico. Una familia de proyecciones que describe las K_0-clases fue dada en la Sección 4.4. Sin embargo, dado que los cálculos aplican para cualquier operador q-normal, planteamos el resultado para una C*-álgebra general $C_0^*(z, z^*) \oplus \mathbb{C}$. Ahora, por el Teorema 10, $K_0(C(\mathbb{S}_q^2)) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ es libre de torsión, se sigue del Teorema del coeficiente universal dado por Rosenberg y Schochet [**25**], que $K^0(C(\mathbb{S}_q^2)) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Luego es suficiente calcular el apareamiento de índices para dos generadores de $K^0(C(\mathbb{S}_q^2))$. Resulta que uno está dado por la Proposición 9 y el otro puede ser obtenido como $[(\mathrm{ev}_\infty, 0)]$ por (69).

Teorema 13. *Sea z un operador q-normal y $n \in \mathbb{N}$. Para $y \in (q, 1] \cap \mathrm{sp}(|z|)$, consideremos la clase de K-homología* $[(\pi_y, \pi_0 \oplus \pi_\infty)]$ *de la Proposición 9 y sea* $[(\mathrm{ev}_\infty, 0)]$ *la clase de K-homología de la Ecuación* (69)*. Luego el apareamiento de índices entre estas clases de K-homología, y las* *clases de K-teoría de* $C_0^*(z,z^*)\oplus\mathbb{C}$ *definidas por las proyecciones de Bott* $P_{\pm n}$ *de las ecuaciones* (65)–(66) *y las proyecciones de Powers–Rieffel* R_n *de la Ecuación* (68) *están dadas por*

$$\langle[(\mathrm{ev}_\infty,0)],[P_{\pm n}]\rangle = 1, \qquad \langle[(\pi_y,\pi_0\oplus\pi_\infty)],[P_{\pm n}]\rangle = \pm n,$$
$$\langle[(\mathrm{ev}_\infty,0)],[R_n]\rangle = 0, \qquad \langle[(\pi_y,\pi_0\oplus\pi_\infty)],[R_n]\rangle = n, \qquad n\in\mathbb{N}.$$

Además, $\langle[(\mathrm{ev}_\infty,0)],[1]\rangle = 1$ *y* $\langle[(\pi_y,\pi_0\oplus\pi_\infty)],[1]\rangle = 0$.

Demostración. Al considerar $|z|=0$ y tomando el límite $|z|\to\infty$ en (65) y (66), uno observa que la aplicación de los mapeos evaluación (29) y (33) a las proyecciones producen

$$\mathrm{ev}_0(P_{\pm n}) = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \qquad \mathrm{ev}_\infty(P_{\pm n}) = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \tag{72}$$

$$\mathrm{ev}_0(R_n) = f_n(0) = 0, \qquad \mathrm{ev}_\infty(R_n) = f_n(\infty) = 0, \tag{73}$$

y también $\mathrm{ev}_0(1) = 1 = \mathrm{ev}_\infty(1)$. En particular, por (69),

$$\langle[(\mathrm{ev}_\infty,0)],[P_{\pm n}]\rangle = 1, \qquad \langle[(\mathrm{ev}_\infty,0)],[R_n]\rangle = 0, \qquad \langle[(\mathrm{ev}_\infty,0)],[1]\rangle = 1.$$

Además, $\langle[(\pi_y,\pi_0\oplus\pi_\infty)],[1]\rangle = 0$ por (12) ya que $\pi_y(1) - (\pi_0\oplus\pi_\infty)(1) = 1-1 = 0$.

Continuamos ahora calculando el apareamiento $\langle[(\pi_y,\pi_0\oplus\pi_\infty)],[R_n]\rangle$. De (71) y (73), se sigue que $(\pi_0\oplus\pi_\infty)(R_n) = 0$. Entonces (12) se reduce a

$$\langle[(\pi_y,\pi_0\oplus\pi_\infty)],[R_n]\rangle = \mathrm{Tr}_{\ell_2(\mathbb{Z})}\big(\pi_y(U^n h + f_n + hU^{*n})\big). \tag{74}$$

Como $\pi_y(U^n h)e_k = h(q^k y)e_{k-n}$ actúa como un operador shift, la traza de $\pi_y(U^n h)$ se anula, y de igual forma pasa con la traza de su adjunto $\pi_y(hU^{*n}) = \pi_y((U^n h)^*)$. Entonces, calcular la traza en (74) se reduce a sumar los elementos matriciales $\langle e_k,\pi_y(f)e_k\rangle$ para $k\in\mathbb{Z}$. Aplicando ahora (67) y (70), obtenemos

$$\langle e_0,\pi_y(f)e_0\rangle = f(y) = \phi(y), \quad \langle e_k,\pi_y(f)e_k\rangle = f(q^k y) = 1, \ \ k = -(n-1),\dots,-1,$$
$$\langle e_{-n},\pi_y(f)e_{-n}\rangle = f(q^{-n}y) = 1-\phi(y), \quad \langle e_k,\pi_y(f)e_k\rangle = f(q^k y) = 0, \ \ k\notin\{0,\dots,n\}.$$

Así

$$\langle[(\pi_y,\pi_0\oplus\pi_\infty)],[R_n]\rangle = \mathrm{Tr}_{\ell_2(\mathbb{Z})}\big(\pi_y(f_n)\big) = \phi(y) + \Big(\sum_{k=1}^{n-1} 1\Big) + 1 - \phi(y) = n.$$

Queda calcular $\langle[(\pi_y,\pi_0\oplus\pi_\infty)],[P_{\pm n}]\rangle$. De (71) y (72), se sigue que

$$\mathrm{Tr}_{\mathrm{Mat}_2(C_0^*(z,z^*)\oplus\mathbb{C})}\big((\pi_0\oplus\pi_\infty)(P_{\pm n})\big) = \Pi_+ + \Pi_- = 1.$$

De esta manera, para $[P_n]$ de (65), el apareamiento de índices (12) puede ser escrito como

$$
\begin{aligned}
\langle[(\pi_y,\pi_0\oplus\pi_\infty)],[P_n]\rangle &= \mathrm{Tr}_{\ell_2(\mathbb{Z})}\big(\pi_y(\tfrac{q^{-n(n-1)}|z|^{2n}}{1+q^{-n(n-1)}\,|z|^{2n}}+\tfrac{1}{1+q^{n(n+1)}|z|^{2n}})-1\big)\\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\Big(\tfrac{q^{-n(n-1)}(q^k y)^{2n}}{1+q^{-n(n-1)}\,(q^k y)^{2n}}+\tfrac{1}{1+q^{n(n+1)}(q^k y)^{2n}}-1\Big)\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\Big(\tfrac{q^{-n^2+n+2nk}\,y^{2n}}{1+q^{-n^2+n+2nk}\,y^{2n}}+(\tfrac{1}{1+q^{n^2+n+2nk}\,y^{2n}}-1)\Big)+\sum_{k=1}^{\infty}\Big((\tfrac{q^{-n^2+n-2nk}\,y^{2n}}{1+q^{-n^2+n-2nk}\,y^{2n}}-1)+\tfrac{1}{1+q^{n^2+n-2nk}\,y^{2n}}\Big)\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\Big(\tfrac{q^{-n^2+n+2nk}\,y^{2n}}{1+q^{-n^2+n+2nk}\,y^{2n}}-\tfrac{q^{n^2+n+2nk}\,y^{2n}}{1+q^{n^2+n+2nk}\,y^{2n}}\Big)+\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\tfrac{-1}{1+q^{-n^2+n-2nk}\,y^{2n}}+\tfrac{1}{1+q^{n^2+n-2nk}\,y^{2n}}\Big)
\end{aligned}\tag{75}
$$

donde hemos usado (70) y la identificación de las funciones racionales en $|z|$ con funciones continuas sobre $\mathrm{sp}(|z|)$. Observemos que

$$\sum_{k=0}^{\infty}\tfrac{q^{-n^2+n+2nk}\,y^{2n}}{1+q^{-n^2+n+2nk}\,y^{2n}}=\sum_{k=0}^{n-1}\tfrac{q^{-n^2+n+2nk}\,y^{2n}}{1+q^{-n^2+n+2nk}\,y^{2n}}+\sum_{k=0}^{\infty}\tfrac{q^{n^2+n+2nk}\,y^{2n}}{1+q^{n^2+n+2nk}\,y^{2n}}\,,\tag{76}$$

donde la segunda suma es obtenida por un desplazamiento del índice de suma de k a $n+k$. De forma similar,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\tfrac{1}{1+q^{n^2+n-2nk}\,y^{2n}}=\sum_{k=1}^{n}\tfrac{1}{1+q^{n^2+n-2nk}\,y^{2n}}+\sum_{k=1}^{\infty}\tfrac{1}{1+q^{-n^2+n-2nk}\,y^{2n}}=\sum_{k=0}^{n-1}\tfrac{1}{1+q^{-n^2+n+2nk}\,y^{2n}}+\sum_{k=1}^{\infty}\tfrac{1}{1+q^{-n^2+n-2nk}\,y^{2n}},\tag{77}$$

donde la segunda igualdad es obtenida por el desplazamiento $k\mapsto n-k$ del índice de sumación en la primera suma. Insertando (76) y (77) dentro de (75) tenemos

$$\langle[(\pi_y,\pi_0\oplus\pi_\infty)],[P_n]\rangle=\sum_{k=0}^{n-1}\Big(\tfrac{q^{-n^2+n+2nk}\,y^{2n}}{1+q^{-n^2+n+2nk}\,y^{2n}}+\tfrac{1}{1+q^{-n^2+n+2nk}\,y^{2n}}\Big)=\sum_{k=0}^{n-1}1=n.\tag{78}$$

Análogamente,

$$
\begin{aligned}
\langle[(\pi_y,\pi_0\oplus\pi_\infty)],[P_{-n}]\rangle &= \mathrm{Tr}_{\ell_2(\mathbb{Z})}\big(\pi_y(\tfrac{q^{n(n+1)}|z|^{2n}}{1+q^{n(n+1)}\,|z|^{2n}}+\tfrac{1}{1+q^{-n(n-1)}|z|^{2n}})-1\big)\\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\Big(\tfrac{q^{n(n+1)}(q^k y)^{2n}}{1+q^{n(n+1)}\,(q^k y)^{2n}}+\tfrac{1}{1+q^{-n(n-1)}(q^k y)^{2n}}-1\Big)\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\Big(\tfrac{q^{n^2+n+2nk}\,y^{2n}}{1+q^{n^2+n+2nk}\,y^{2n}}-\tfrac{q^{-n^2+n+2nk}\,y^{2n}}{1+q^{-n^2+n+2nk}\,y^{2n}}\Big)+\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\tfrac{-1}{1+q^{n^2+n-2nk}\,y^{2n}}+\tfrac{1}{1+q^{-n^2+n-2nk}\,y^{2n}}\Big)\\
&= -\langle[(\pi_y,\pi_0\oplus\pi_\infty)],[P_n]\rangle=-n,
\end{aligned}
$$

donde hemos usado que la penúltima línea es el negativo de (75). □

Como fue anunciado en la Nota 4, nosotros ahora daremos de manera explícita los generadores de $K_0(C_0(\mathbb{C}_q))$ y $K_0(C(\mathbb{S}^2_q))$.

Corolario 3. *Cada una de las K_0-clases $[R_1]$, $[P_1]-[1]$ y $[P_{-1}]-[1]$ generan $K_0(C_0(\mathbb{C}_q))\cong\mathbb{Z}$, y un par de generadores para $K_0(C(\mathbb{S}^2_q))\cong\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ es obtenido al sumar la clase trivial dada por $[1]\in K_0(C(\mathbb{S}^2_q))$.*

Demostración. Primero consideremos $K_0(C_0(\mathbb{C}_q)) \cong \mathbb{Z}$. Dado que cualquier múltiplo de un generador produce un múltiplo de 1 en el apareamiento de índices con clases de K-homología, es suficiente encontrar un elemento en $K_0(C_0(\mathbb{C}_q))$ tal que el apareamiento con una clase de K-homología sea igual a ± 1. Como se notó debajo de (68), $R_1 \in C_0(\mathbb{C}_q)$ y así $[R_1] \in K_0(C_0(\mathbb{C}_q))$. Además, por Teorema 13, $\langle[(\pi_y, \pi_0 \oplus \pi_\infty)], [R_1]\rangle = 1$, entonces $[R_1]$ genera $K_0(C_0(\mathbb{C}_q)) \cong \mathbb{Z}$.

Recordamos de la discusión previa a la Ecuación (33) que la proyección natural $C_0(\mathbb{C}_q) \oplus \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ está dada por ev_∞. Como $\mathrm{ev}_{\infty *}([P_{\pm 1}] - [1]) = [1] - [1] = 0$ por (72), tenemos que $[P_{\pm 1}] - [1] \in K_0(C_0(\mathbb{C}_q))$. Además, $\langle[(\pi_y, \pi_0 \oplus \pi_\infty)], [P_{\pm 1}] - [1]\rangle = \pm 1$ por Teorema 13, de esta manera $[P_1] - [1]$ y $[P_{-1}] - [1]$ también genera $K_0(C_0(\mathbb{C}_q)) \cong \mathbb{Z}$.

Finalmente, para obtener generadores de $K_0(C(\mathbb{S}_q^2)) \cong K_0(C_0(\mathbb{C}_q)) \oplus K_0(\mathbb{C})$, es suficiente tomar cualquier generador de $K_0(C_0(\mathbb{C}_q))$ junto con el generador trivial $[1] \in K_0(C(\mathbb{S}_q^2))$. □

Por analogía a las proyecciones de Bott clásicas, podemos interpretar los módulos proyectivos $C(\mathbb{S}_q^2)^2 P_k$ como secciones continuas de un haz lineal complejo no conmutativo sobre la esfera cuántica $\mathbb{S}_q^2$ con número de giros $k \in \mathbb{Z}$. Notamos que el apareamiento con $[(\pi_y, \pi_0 \oplus \pi_\infty)]$ calcula el número de giros y el apareamiento dado por la evaluación ev_∞ en el punto clásico ∞ determina el rango de un haz vectorial no conmutativo.

Como una aplicación del apareamiento de índice en el Teorema 13, daremos una descripción alternativa de haces lineales complejos no conmutativos por las proyecciones 1-dimensionales R_n, $n \in \mathbb{N}$, sin la necesidad de especificar las relaciones de equivalencia en $K_0(C(\mathbb{S}_q^2))$.

Corolario 4. *Consideremos $n \in \mathbb{N}$. Dadas las proyecciones de Bott $P_{\pm n}$ de las ecuaciones* (65) *y* (66) *y las proyecciones tipo Powers–Rieffel R_n de la ecuación* (68)*, las siguientes igualdades se mantienen en $K_0(C(\mathbb{S}_q^2))$:*

$$[P_n] = \left[\begin{pmatrix} R_n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right], \qquad [P_{-n}] = [1 - R_n].$$

Demostración. Dado que las clases de K-homología $[(\mathrm{ev}_\infty, 0)]$ y $[(\pi_y, \pi_0 \oplus \pi_\infty)]$ del Teorema 13 separan los generadores de $K_0(C(\mathbb{S}_q^2))$ del Corolario 3, es suficiente mostrar que los apareamientos de índices coinciden. Claramente, $\left[\begin{pmatrix} R_n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = [R_n] + [1]$ y $[1 - R_n] = [1] - [R_n]$ en $K_0(C(\mathbb{S}_q^2))$.

Ahora, por Teorema 13,

$$\langle[(\mathrm{ev}_\infty,0)],[R_n]+[1]\rangle \;=\; 0+1 \;=\; 1 \;=\; \langle[(\mathrm{ev}_\infty,0)],[P_n]\rangle,$$
$$\langle[(\pi_y,\pi_0\oplus\pi_\infty)],[R_n]+[1]\rangle \;=\; n+0 \;=\; n \;=\; \langle[(\pi_y,\pi_0\oplus\pi_\infty)],[P_n]\rangle,$$

$$\langle[(\mathrm{ev}_\infty,0)],[1]-[R_n]\rangle \;=\; 1-0 \;=\; 1 \;=\; \langle[(\mathrm{ev}_\infty,0)],[P_{-n}]\rangle,$$
$$\langle[(\pi_y,\pi_0\oplus\pi_\infty)],[1]-[R_n]\rangle \;=\; 0-n \;=\; -n \;=\; \langle[(\pi_y,\pi_0\oplus\pi_\infty)],[P_{-n}]\rangle,$$

lo cual finaliza la prueba. □

Claramente, no existen proyecciones unidimensionales en $C(\mathbb{S}^2)$ ya que $\mathbb{S}^2$ es conexo, luego la existencia de proyecciones unidimensionales R_n puede ser interpretada como un posible efecto cuántico. Notamos además que el apareamiento de índices con las K_0-clases $[R_n]$ se reduce al cálculo de ciertas trazas simples y es también mucho más sencillo que el cálculo del apareamiento de índices con las K_0-clases determinadas por las proyecciones de Bott. En este sentido, uno puede decir que la cuantización de $\mathbb{S}^2$ conduce a una significante simplificación del apareamiento índices.

5.2. Apareamiento de índices en el caso general. En esta sección, calculamos el apareamiento de índices para la C*-álgebra $C_0^*(z,z^*)$ generada por un operador q-normal tal que $X := \mathrm{sp}(|z|) \neq [0,\infty)$. Como en la Sección 4.3, asumimos que $1 \notin \mathrm{sp}(|z|)$ y como en la sección anterior planteamos los resultados para la adición de la unidad en $C_0^*(z,z^*)\oplus\mathbb{C}$, pues los mismos resultados aplican al caso sin unidad luego de algunas pequeñas modificaciones. La diferencia principal con la sección anterior es que ahora el K_0-grupo está generado por proyecciones simples del tipo $\chi_A(|z|) \in C_0^*(z,z^*)\oplus\mathbb{C}$.

De manera más precisa, consideramos $Y := (q,1)\cap\mathrm{sp}(|z|)$. Por Teorema 12, $K_0(C_0^*(z,z^*))$ está generado por las proyecciones $[\chi_{[0,q)}]$ y $[\chi_{(c_j,1)}]$, $j \in J$, donde $\{I_j : j \in J\}$ es la familia de componentes conexas de $(q,\max(Y))\backslash Y$, y $c_j \in I_j$, ver Sección 4.3. Para la unitización $C_0^*(z,z^*)\oplus\mathbb{C}$, tenemos que añadir el generador trivial [1].

Dado que $1 \notin \mathrm{sp}(|z|)$ y así también $q \notin \mathrm{sp}(|z|)$, tenemos que $Y \subset \mathbb{R}$ es compacto. Claramente las componentes conexas de subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$ son intervalos cerrados, donde estamos identificando cada conjunto unitario $\{y\}$ con el intervalo cerrado $[y,y]$. Denotemos por $\{K_\gamma := [a_\gamma,b_\gamma] : \gamma\in\Gamma\}$ al conjunto de las componentes conexas de Y. Para cada $\gamma\in\Gamma$, escogemos un $y_\gamma \in K_\gamma$ y consideramos el módulo de Fredholm $F_\gamma := (\pi_{y_\gamma},\pi_0\oplus\pi_\infty)$ de la Proposición 9. El siguiente teorema muestra que el apareamiento de índices con estas clases de K-homología junto con $[(\mathrm{ev}_0,0)]$ y $[(\mathrm{ev}_\infty,0)]$ de (69) determinan de forma única cualquier K_0-clase de $C_0^*(z,z^*)\oplus\mathbb{C}$.

Teorema 14. *Consideremos $\{K_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ y F_γ definidos como antes. El apareamiento de índices* (12) *define un apareamiento no degenerado entre la suma directa de clases pares de K-homología*

$$\mathcal{K} := \mathbb{Z}[(\mathrm{ev}_0, 0)] \oplus \Big(\bigoplus_{\gamma\in\Gamma} \mathbb{Z}[F_\gamma]\Big) \oplus \mathbb{Z}[(\mathrm{ev}_\infty, 0)]$$

y $K_0(C_0^*(z, z^*) \oplus \mathbb{C})$. Además, el apareamiento de índices está determinado por

$$\langle[(\mathrm{ev}_\infty, 0)], [1]\rangle = 1, \quad \langle[(\mathrm{ev}_\infty, 0)], [\chi_{[0,q)}]\rangle = 0, \quad \langle[(\mathrm{ev}_\infty, 0)], [\chi_{(c_j,1)}]\rangle = 0, \tag{79}$$

$$\langle[(\mathrm{ev}_0, 0)], [1]\rangle = 1, \quad \langle[(\mathrm{ev}_0, 0)], [\chi_{[0,q)}]\rangle = 1, \quad \langle[(\mathrm{ev}_0, 0)], [\chi_{(c_j,1)}]\rangle = 0, \tag{80}$$

$$\langle[F_\gamma], [1]\rangle = 0, \qquad \langle[F_\gamma], [\chi_{[0,q)}]\rangle = 0, \tag{81}$$

$$\langle[F_\gamma], [\chi_{(c_j,1)}]\rangle = 1 \ \ si \ \ y_\gamma \in (c_j, 1), \quad \langle[F_\gamma], [\chi_{(c_j,1)}]\rangle = 0 \ \ si \ \ y_\gamma \notin (c_j, 1). \tag{82}$$

Demostración. Empezamos la demostración calculando el apareamiento de índices para los generadores de $K_0(C_0^*(z, z^*) \oplus \mathbb{C})$. Por (69), tenemos que

$$\langle[(\mathrm{ev}_\infty, 0)], [1]\rangle = \mathrm{ev}_\infty(1) = 1, \qquad \langle[(\mathrm{ev}_\infty, 0)], [\chi_{[0,q)}]\rangle = \mathrm{ev}_\infty(\chi_{[0,q)}) = 0,$$
$$\langle[(\mathrm{ev}_\infty, 0)], [\chi_{(c_j,1)}]\rangle = \mathrm{ev}_\infty(\chi_{(c_j,1)}) = 0,$$

lo cual prueba (79). Además, por el mismo argumento,

$$\langle[(\mathrm{ev}_0, 0)], [1]\rangle = \mathrm{ev}_0(1) = 1, \qquad \langle[(\mathrm{ev}_0, 0)], [\chi_{[0,q)}]\rangle = \mathrm{ev}_0(\chi_{[0,q)}) = 1,$$
$$\langle[(\mathrm{ev}_0, 0)], [\chi_{(c_j,1)}]\rangle = \mathrm{ev}_0(\chi_{(c_j,1)}) = 0.$$

De (71) y por los valores de ev_0 y ev_∞ que acabamos de evaluar, también se sigue que

$$(\pi_0 \oplus \pi_\infty)(1) = 1, \quad (\pi_0 \oplus \pi_\infty)(\chi_{[0,q)}) = \Pi_+, \quad (\pi_0 \oplus \pi_\infty)(\chi_{(c_j,1)}) = 0. \tag{83}$$

Además, (70) nos dice que $\pi_{y_\gamma}(\chi_A)e_n = e_n$ si $q^n y_\gamma \in A$ y $\pi_{y_\gamma}(\chi_A)e_n = 0$ en otro caso. Luego $\pi_{y_\gamma}(1) = 1$ y

$$\pi_{y_\gamma}(\chi_{[0,q)}) = \Pi_+, \quad \pi_{y_\gamma}(\chi_{(c_j,1)}) = 0 \ \text{ si } \ y_\gamma \notin (c_j, 1), \quad \pi_{y_\gamma}(\chi_{(c_j,1)}) = \Pi_0 \ \text{ si } \ y_\gamma \in (c_j, 1), \tag{84}$$

donde Π_0 denota la proyección ortogonal 1-dimensional sobre $\mathrm{span}\{e_0\}$. Combinando (83) y (84) con (12) se deduce que

$$\langle[F_\gamma], [1]\rangle = \mathrm{Tr}_{\ell_2(\mathbb{Z})}(1 - 1) = 0, \quad \langle[F_\gamma], [\chi_{[0,q)}]\rangle = \mathrm{Tr}_{\ell_2(\mathbb{Z})}(\Pi_+ - \Pi_+) = 0, \tag{85}$$

$$\langle[F_\gamma], [\chi_{(c_j,1)}]\rangle = \mathrm{Tr}_{\ell_2(\mathbb{Z})}(0 - 0) = 0 \ \text{ si } \ y_\gamma \notin (c_j, 1), \tag{86}$$

$$\langle[F_\gamma], [\chi_{(c_j,1)}]\rangle = \mathrm{Tr}_{\ell_2(\mathbb{Z})}(\Pi_0) = 1 \ \text{ si } \ y_\gamma \in (c_j, 1). \tag{87}$$

Esto completa la prueba de (79)–(82).

Para mostrar la no degeneración de el apareamiento de índices, consideramos

$$p := l[\chi_{[0,q)}] + \sum_{k=1}^{N} n_k[\chi_{(c_{j_k},1)}] + m[1] \in K_0(C_0^*(z,z^*) \oplus \mathbb{C}), \quad N \in \mathbb{N},\ l, n_k, m \in \mathbb{Z},$$

y suponemos que $\langle F, p\rangle = 0$ para todo $F \in \mathcal{K}$. Primero hacemos $F = [(\mathrm{ev}_\infty, 0)]$ y de esta manera obtenemos que $0 = \langle [(\mathrm{ev}_\infty, 0)], p\rangle = m$ por (79). Similarmente, $0 = \langle [(\mathrm{ev}_0, 0)], p\rangle = l$ por (79), acá estamos usando que $m = 0$. De esta manera $p = \sum_{k=1}^{N} n_k[\chi_{(c_{j_k},1)}]$. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $c_{j_1} > \ldots > c_{j_N}$. Dado que c_{j_N} y $c_{j_{N-1}}$ pertenecen a diferentes componentes conexas de $(q, 1) \setminus Y$, existe un $\gamma_N \in \Gamma$ tal que $c_{j_{N-1}} > y_{\gamma_N} > c_{j_N}$. Entonces (86) y (87) implican que $0 = \langle [F_{\gamma_N}], [p]\rangle = n_N$. Continuando de forma inductiva, escogiendo en cada paso un $\gamma_k \in \Gamma$ de tal manera que $c_{j_{k-1}} > y_{\gamma_k} > c_{j_k}$, y en el último paso (y en el caso $N = 1$) un $\gamma_1 \in \Gamma$ tal que $1 > y_{\gamma_1} > c_{j_1}$, concluimos que $n_N = \cdots = n_1 = 0$. De esta forma se tiene que $p = 0$.

Finalmente, consideremos

$$F := l[(\mathrm{ev}_0, 0)] + \sum_{k=1}^{N} n_k[F_{\gamma_k}] + m[(\mathrm{ev}_\infty, 0)] \in \mathcal{K}, \quad N \in \mathbb{N},\ l, n_k, m \in \mathbb{Z},$$

y supongamos que $\langle F, p\rangle = 0$ para cada $p \in K_0(C_0^*(z,z^*) \oplus \mathbb{C})$. De manera similar a lo anterior, podemos asumir que $y_{\gamma_1} > \ldots > y_{\gamma_N}$. Como cada y_{γ_k} pertenece a diferentes componentes conexas de Y, existen $j_k \in J$ tales que $y_{\gamma_k} > c_{j_k} > y_{\gamma_{k+1}}$ para $k = 1, \ldots, N-1$ y $y_{\gamma_N} > c_{j_N} > q$. Por (79), (80) y (82), obtenemos que $0 = \langle F, [\chi_{(c_{j_1},1)}]\rangle = n_1$. Continuando así por inducción sobre $k = 2, \ldots, N$, y aplicando en cada paso el mismo argumento, podemos concluir que $n_2 = \cdots = n_N = 0$. De esta forma tenemos $F = l[(\mathrm{ev}_0, 0)] + m[(\mathrm{ev}_\infty, 0)]$. Ahora (79) y (80) implican primero que $0 = \langle F, [\chi_{[0,q)}]\rangle = l$ y luego $0 = \langle F, [1]\rangle = \langle m[(\mathrm{ev}_\infty, 0)], [1]\rangle = m$, concluimos así que $F = 0$. □

Como una aplicación del apareamiento de índices en el Teorema 14, usaremos proyecciones elementales $\chi_A \in C_0^*(z,z^*) \oplus \mathbb{C}$ para dar una descripción alternativa de las K_0-clases de un haz lineal complejo no conmutativo determinado por las proyecciones de Bott y las proyecciones del tipo Powers–Rieffel de la Sección 4.4.

Corolario 5. *Para $n \in \mathbb{N}$, denotemos por $P_{\pm n}$ las proyecciones de Bott definidas en* (65) *y* (66)*, y denotemos por R_n las proyecciones del tipo Powers–Rieffel dadas en* (68)*. Luego las siguientes igualdades se mantienen en $K_0(C_0^*(z,z^*) \oplus \mathbb{C})$*

$$[P_n] = [1] + [R_n] = [1] + n[\chi_{(q,1)}] = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \chi_{(q^n,1)} \end{pmatrix}\right], \tag{88}$$

$$[P_{-n}] = [1] - [R_n] = [1] - n[\chi_{(q,1)}] = [1 - \chi_{(q^n,1)}]. \tag{89}$$

Demostración. Recordamos que hemos asumido que $1 \notin X := \mathrm{sp}(|z|)$. Por las q-invarianza de X, tenemos $\{q^k : k \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R} \setminus X$ y entonces $\chi_{(q^n,q^k)} \in C_0(X)$ para todo $n, k \in \mathbb{Z}$, $n > k$. Claramente, $\chi_{(q^n,q^k)} \in C_0^*(z, z^*) \oplus \mathbb{C}$ es una proyección.

Probaremos (88) y (89) mostrando que el apareamiento de índices con las clases de K-homología $[(\mathrm{ev}_0, 0)]$, $[(\mathrm{ev}_\infty, 0)]$ y $[F_\gamma]$, $\gamma \in \Gamma$, coinciden. Luego el apareamiento de índices con cualquier $F \in \mathcal{K}$ coincide y por la no degeneración dada por el Teorema 14, las Ecuaciones (88) y (89) implican identidades en $K_0(C_0^*(z, z^*) \oplus \mathbb{C})$.

Del Teorema 13, ya sabemos que

$$\langle [(\mathrm{ev}_\infty, 0)], [P_{\pm n}] \rangle = \langle [(\mathrm{ev}_\infty, 0)], [1] \pm [R_n] \rangle = 1, \tag{90}$$

$$\langle [F_\gamma], [P_{\pm n}] \rangle = \langle [F_\gamma], [1] \pm [R_n] \rangle = \pm n. \tag{91}$$

donde $[F_\gamma] = [(\pi_{y_\gamma}, \pi_0 \oplus \pi_\infty)]$. Además, por (69), (72), (73) y $\mathrm{ev}_0(1) = 1$,

$$\langle [(\mathrm{ev}_0, 0)], [P_{\pm n}] \rangle = \langle [(\mathrm{ev}_0, 0)], [1] \pm [R_n] \rangle = 1. \tag{92}$$

De (90)–(92), concluimos que $[P_{\pm n}] = [1] \pm [R_n]$.

Definamos J como en (43) para $Y := (q, 1) \cap X$, y denotemos por $j_0 \in J$ al único índice tal que $I_{j_0} = (q, \mathrm{mín}(Y))$. Entonces $c_{j_0} \in (q, \mathrm{mín}(Y))$ y así $\chi_{(c_{j_0},1)} = \chi_{(q,1)}$ en $C_0^*(z, z^*) \oplus \mathbb{C}$ ya que $(q, c_{j_0}] \cap X = \emptyset$. Como $y_\gamma \in Y \subset (c_{j_0}, 1)$ para todo $\gamma \in \Gamma$, obtenemos de (85) y (87)

$$\langle [F_\gamma], [1] \pm n[\chi_{(q,1)}] \rangle = \langle [F_\gamma], [1] \rangle \pm n \langle [F_\gamma], [\chi_{(c_{j_0},1)}] \rangle = \pm n. \tag{93}$$

Además, por (79) y (80),

$$\langle [(\mathrm{ev}_\infty, 0)], [1] \pm n[\chi_{(q,1)}] \rangle = \langle [(\mathrm{ev}_\infty, 0)], [1] \rangle \pm n \langle [(\mathrm{ev}_\infty, 0)], [\chi_{(c_{j_0},1)}] \rangle = 1, \tag{94}$$

$$\langle [(\mathrm{ev}_0, 0)], [1] \pm n[\chi_{(q,1)}] \rangle = \langle [(\mathrm{ev}_0, 0)], [1] \rangle \pm n \langle [(\mathrm{ev}_0, 0)], [\chi_{(c_{j_0},1)}] \rangle = 1. \tag{95}$$

Comparando (90)–(92) con (93)– (95) mostramos que $[P_{\pm n}] = [1] \pm n[\chi_{(q,1)}]$.

Luego calculamos el apareamiento de índices por la proyección $\chi_{(q^n,1)} \in C_0^*(z, z^*) \oplus \mathbb{C}$. Dado que $\mathrm{ev}_\infty(\chi_{(q^n,1)}) = \mathrm{ev}_0(\chi_{(q^n,1)}) = 0$, obtenemos de (69)

$$\langle [(\mathrm{ev}_\infty, 0)], [\chi_{(q^n,1)}] \rangle = \langle [(\mathrm{ev}_0, 0)], [\chi_{(q^n,1)}] \rangle = 0, \tag{96}$$

y también $(\pi_0 \oplus \pi_\infty)(\chi_{(q^n,1)}) = 0$ por (71). Además, la ecuación (70) muestra que $\pi_y(\chi_{(q^n,1)})$ es la proyección ortogonal sobre $\mathrm{span}\{e_0, \dots, e_{n-1}\}$ para todo $y \in Y \subset (q, 1)$. Entonces el apareamiento de índices (12) implica para $[F_\gamma] = [(\pi_{y_\gamma}, \pi_0 \oplus \pi_\infty)]$

$$\langle [F_\gamma], [\chi_{(q^n,1)}] \rangle = \mathrm{Tr}_{\ell_2(\mathbb{Z})}(\pi_{y_\gamma}(\chi_{(q^n,1)})) = n. \tag{97}$$

Claramente, $\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \chi_{(q^n,1)}\end{pmatrix}\right] = [1] + [\chi_{(q^n,1)}]$ y $[1-\chi_{(q^n,1)}] = [1] - [\chi_{(q^n,1)}]$ en K-teoría. Ahora

$$\langle[(\mathrm{ev}_\infty,0)],[1]\pm[\chi_{(q^n,1)}]\rangle = \langle[(\mathrm{ev}_0,0)],[1]\pm[\chi_{(q^n,1)}]\rangle = 1, \tag{98}$$

por (79), (80) y (96), y

$$\langle[F_\gamma],[1]\pm[\chi_{(q^n,1)}]\rangle = \pm n \tag{99}$$

por (81) y (97). Comparando (98) y (99) con (90)–(92) prueba que las K_0-clases $[P_{\pm n}]$ y $[1]\pm[\chi_{(q^n,1)}]$ coinciden. Esto concluye la prueba. □

Notar que las proyecciones $\chi_{(q^n,1)}$ son completamente elementales, es decir, funciones continuas con valores en $\{0,1\}$. En particular, el cálculo del apareamiento de índices se reduce a su forma más simple posible el cual es el cálculo de una traza de una proyección de dimensión finita. También, por equivalencia unitaria de las K_0-clases, obtenemos de (88) y (89) los siguientes isomorfismos de módulos proyectivos finitamente generados:

$$\begin{aligned}(C_0^*(z,z^*)\oplus\mathbb{C})^2 P_{-n} &\cong (C_0^*(z,z^*)\oplus\mathbb{C})\chi_{(q^n,1)},\\ (C_0^*(z,z^*)\oplus\mathbb{C})^2 P_{n} &\cong (C_0^*(z,z^*)\oplus\mathbb{C})\oplus(C_0^*(z,z^*)\oplus\mathbb{C})\chi_{(q^n,1)}.\end{aligned}$$

Notamos que el lado derecho de estas últimas equivalencias simplifica considerablemente el lado izquierdo.

El interés en las proyecciones $P_{\pm n}$ surge de la observación de que ellas pueden ser interpretadas como deformaciones de proyecciones de Bott clásicas representando haces lineales complejos con número de giro $\pm n$ sobre la 2-esfera. Recordamos que hemos definido la C*-álgebra de la 2-esfera cuántica como $C(\mathbb{S}_q^2) := C_0^*(z,z^*)\oplus\mathbb{C}$, donde $\mathrm{sp}(|z|) = [0,\infty)$, ya que solamente en este caso la deformación preserva los K-grupos clásicos. Sin embargo, si uno quiere ver cualquier operador q-normal z como una deformación del plano complejo, entonces las deformaciones que satisfacen $\mathrm{sp}(|z|) \neq [0,\infty)$ conducen a una significante simplificación de la descripción de haces lineales complejos y los cálculos del apareamiento de índices.

Capítulo 3

Esfera cuántica no conmutativa de segunda dimensión.

1. Clasificación de representaciones de $\mathcal{O}(\mathbb{C}_q^2)$.

En este capítulo iniciaremos la generalización del proceso de construcción de nuestra esfera cuántica a dimensiones más altas. Lo que buscamos es extender el concepto de plano complejo cuántico a dimensiones más elevadas. Para que la exposición sea más comprensible, empezamos con la extensión del plano complejo cuántico 1-dimensional al plano complejo cuántico 2-dimensional ya que este proceso exhibe todas las técnicas necesarias para la extensión al caso n-dimensional la cual será expuesta en el Capítulo 4.

Ejemplos de planos complejos cuánticos han sido ampliamente estudiados en la teoría de grupos cuánticos (ver [**17**]) los cuales serán introducidos en el siguiente capítulo. El candidato que se ajusta mejor a nuestros propósitos C*-algebraicos es el espacio cuántico $\mathcal{X}^N_{\gamma,\delta}$ con $\delta = \gamma = 0$ definido en [**17**, Sección 9.2]. El objeto correspondiente al caso $N = 2$ del anterior sistema nos permite desarrollar apropiadamente el proceso de generalización del concepto de operador q-normal, de su estructura C* generada y de esfera cuántica 2-dimensional.

Definición 18. *Sea $q \in (0,1)$. El plano complejo cuántico 2-dimensional, denotado por $\mathcal{O}(\mathbb{C}_q^2)$, se define como la *-álgebra sobre $\mathbb{C}$ generada por z_1 y z_2 sujetos a las relaciones*

1. $z_2 z_1 = q z_1 z_2, \;\; z_1^* z_2^* = q z_2^* z_1^*,$
2. $z_2 z_1^* = q z_1^* z_2, \;\; z_1 z_2^* = q z_2^* z_1,$
3. $z_2 z_2^* = q^2 z_2^* z_2, \;\; z_1 z_1^* - q^2 z_1^* z_1 = -(1-q^2) z_2^* z_2.$

Siguiendo el orden lógico planteado en el primer capítulo, una vez presentada la noción 2-dimensional, el paso a seguir es el estudio de las representaciones asociadas. Observamos que la presentación de esta generalización de $\mathcal{O}(\mathbb{C}_q)$ incluye automáticamente un operador q-normal. Siguiendo como guía las líneas del primer capítulo, daremos una clasificación explícita de estos nuevos operadores. Antes, consideramos sobre las posibles representaciones de $\mathcal{O}(\mathbb{C}_q^2)$ algunas restricciones que nos permiten dar solución al problema de la clasificación. Como las representaciones involucran operadores no acotados, implementamos algunas restricciones para que los operadores tengan un buen comportamiento con respeto a los dominios, a los inversos y al teorema espectral de operadores autoadjuntos. Mencionemos primero algunas manipulaciones algebraicas que motivan la consideración de algunas de estas restricciones.

Sean z_1 y z_2 operadores cerrados densamente definidos sobre un espacio de Hilbert separable que satisfacen las relaciones (1)-(3) sobre un dominio denso común D. Consideramos $Q := z_2^* z_2$, así que

$$z_1 Q = (z_1 z_2^*) z_2 = q z_2^*(z_1 z_2) = q q^{-1} z_2^* z_2 z_1 = Q z_1,$$

además

$$z_1^* Q = (z_1^* z_2^*) z_1 = q z_2^* z_1^* z_2 = q q^{-1} z_2^* z_2 z_1^* = Q z_1^*,$$

tambien se cumple

$$z_2 Q = (z_2 z_2^*) z_2 = q^2 (z_2^* z_2) z_2 = q^2 Q z_2.$$

Por otro lado,

$$z_2^* Q = q^{-2} z_2^* (z_2 z_2^*) = q^{-2} Q z_2^*.$$

Deducimos de esta forma las siguientes relaciones

$$z_1 Q = Q z_1, \;\; z_1^* Q = Q z_1^*, \;\; z_2 Q = q^2 Q z_2, \;\; z_2^* Q = q^{-2} Q z_2^*.$$

De estas últimas ecuaciones se deduce inmediatamente que, para cualquier polinomio p de una variable sobre $\mathbb{C}$, se cumple

$$z_1 p(Q) = p(Q) z_1, \;\; z_1^* p(Q) = p(Q) z_1^*, \;\; z_2 p(Q) = p(q^2 Q) z_2, \;\; z_2^* p(Q) = p(q^{-2} Q) z_2^*.$$

Definamos E como la proyección espectral asociada a Q a través del teorema espectral, es decir, $Q = \int_{[0,\infty)} \lambda \, dE(\lambda)$. Si asumimos que las anteriores relaciones polinómicas se cumplen para cualquier función Borel medible acotada sobre $\mathrm{sp}(Q)$, podemos mostrar (ver Lema 4 más adelante) que los conjuntos $\mathrm{Ker}(Q) = E(\{0\})H$ y $E(0,\infty)H$ son invariantes bajo las acciones de z_1 y z_2 utilizando el hecho de que

$$E(\{0\}) = \chi_{\{0\}}(Q) \quad \text{y} \quad E((0,\infty)) = \chi_{(0,\infty)}(Q).$$

Esto es,

$$z_1 k = z_1 E(\{0\}) k = z_1 \, \chi_{\{0\}}(Q) k = \chi_{\{0\}}(Q) z_1 k = E(\{0\}) z_1 k \in E(\{0\})H \text{ para todo } k \in E(\{0\})H,$$

entonces tenemos que $z_1 k \in \mathrm{Ker}(Q)$ para todo $k \in \mathrm{Ker}(Q)$. De forma análoga mostramos la invarianza de las acciones z_1 y z_2 sobre los espacios mencionados.

La observación más relevante en cuanto al manejo algebraico de estos operadores la exponemos a continuación. Definiendo el operador w por la ecuación

$$z_1 := w \sqrt{Q} = \sqrt{Q} w,$$

hacemos que w satisfaga una relación que llamamos relación del disco cuántico negativo, operadores ampliamente estudiados en [**31**]. De hecho, notamos que

$$\begin{aligned} Q(ww^* - q^2w^*w - (q^2-1)) &= w\sqrt{Q}\sqrt{Q}w^* - q^2\sqrt{Q}w^*w\sqrt{Q} - (q^2-1)Q \\ &= z_1z_1^* - q^2z_1^*z_1 - (q^2-1)z_2^*z_2 \\ &= 0. \end{aligned} \tag{100}$$

Restringiendo este razonamiento al $\mathrm{Ker}(Q)^\perp$, se deduce la relación

$$ww^* - q^2w^*w = q^2 - 1.$$

De esta forma, nuestro operador w hereda estructura de representación del disco cuántico negativo, un tipo de operador que ya ha sido clasificado en [**18**, Lema 2.3]. Luego z_1 estaría determinado por las fórmulas ya calculadas del q-normal z_2 y del disco cuántico negativo w, lo cual solucionaría nuestro problema de clasificación.

Teniendo en cuenta las anteriores observaciones, ilustramos a través de la siguiente definición el concepto de representación bien comportada.

Definición 19. *Una *-representación de buen comportamiento de $\mathcal{O}(\mathbb{C}_q^2)$ está dada por operadores cerrados densamente definidos z_1 y z_2 que satisfacen* (1)-(3) *de la definición* (18) *sobre un dominio denso común D, de tal forma que*

1. *Los operadores $z_1^*z_1$ y $z_2^*z_2$ conmutan fuertemente, es decir, las proyecciones espectrales asociadas conmutan.*
2. *z_2 es un operador q-normal, es decir, satisface la ecuación de operadores $z_2z_2^* = q^2z_2^*z_2$.*
3. *Para toda función Borel medible acotada f sobre $sp(Q)$ se cumple que*

$$f(Q)z_1 \subset z_1f(Q), \quad f(Q)z_1^* \subset z_1^*f(Q), \quad f(Q)z_2 \subset z_2f(q^{-2}Q), \quad f(Q)z_2^* \subset z_2^*f(q^2Q).$$

4. *Sobre $\mathrm{Ker}(Q)$, z_1 es un operador q-normal, es decir, $z_1z_1^* = q^2z_1^*z_1$.*
5. *Sobre $\mathrm{Ker}(Q)^\perp$, z_1 conmuta con $\sqrt{Q}^{-1}$ y la fórmula $w := \sqrt{Q}^{-1}z_1 = z_1\sqrt{Q}^{-1}$ define un operador cerrado densamente definido que satisface la relación*

$$ww^* - q^2w^*w = -(1-q^2).$$

Recalcamos que las ecuaciones anteriores implican igualdad de dominios. Sabemos por Corolario 1 que todo operador q-normal ζ sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{G}$ admite la siguiente representación

$$\mathcal{G} = \ker(\zeta) \oplus (\oplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathcal{G}_0)\,, \quad \zeta g_n = q^nZg_{n-1} \text{ sobre } \oplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathcal{G}_0, \tag{101}$$

donde Z denota un operador autoadjunto sobre $\mathcal{G}_0$ tal que $sp(Z) \subset [q, 1]$ y q no es valor propio de Z. Además, los operadores w que satisfacen la relación de la Definición 19.5 han sido clasificados en [**18**].

Lema 2. *(*[**18**, Lemma 2.3]*)*
Sea w un operador cerrado densamente definido sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{G}$ el cual satisface la ecuación de operadores

$$ww^* = q^2 w^* w - (1 - q^2). \tag{102}$$

Entonces, salvo equivalencia unitaria, $\mathcal{G}$ se descompone en una suma ortogonal $\mathcal{G} = \oplus_{m\in\mathbb{N}}\mathcal{G}_m$, donde $\mathcal{G}_m = \mathcal{G}_1$ para todo $m \in \mathbb{N}$, y las acciones de w y w^* satisfacen las fórmulas

$$wg_m = \sqrt{q^{-2m} - 1}\, g_{m+1}, \quad w^* g_m = \sqrt{q^{-2(m-1)} - 1}\, g_{m-1}, \quad g \in \mathcal{G}_1, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{103}$$

La representación es irreducible si y solo si $\mathcal{G}_1 = \mathbb{C}$.

Estos últimos resultados que hemos enunciado son todo lo que necesitamos para llevar a cabo la clasificación de las representaciones de buen comportamiento de $\mathcal{O}(\mathbb{C}^2_q)$.

Teorema 15. *Sea z_1 y z_2 representación de buen comportamiento de $\mathcal{O}(\mathbb{C}^2_q)$. Salvo equivalencia unitaria, existen espacios de Hilbert $\mathcal{N}$, H_0, H_{00} y operadores autoadjuntos $A \in B(H_0)$ y $B \in B(H_{00})$ tales que su espectro está contenido en $[q, 1]$, q no es valor propio para ambos, tal que el espacio de Hilbert donde se define la representación se descompone en $H = \mathcal{N} \oplus (\oplus_{k\in\mathbb{Z}} H_0) \oplus (\oplus_{n\in\mathbb{Z}} \oplus_{m\in\mathbb{N}} H_{00})$, y las acciones de z_1 y z_2 están dadas por las fórmulas*

1. *$z_1 = z_2 = 0$, sobre $\mathcal{N}$,*
2. *$z_1 h_k = q^k A h_{k-1}$ y $z_2 = 0$, sobre $\oplus_{k\in\mathbb{Z}} H_0$,*
3. *$z_1 h_{n,m} = q^n \sqrt{q^{-2m} - 1} B h_{n,(m+1)}$ y $z_2 h_{n,m} = q^n B h_{(n-1),m}$ sobre $\oplus_{n\in\mathbb{Z}} \oplus_{m\in\mathbb{N}} H_{00}$.*

Demostración. Afirmamos que los conjuntos $\mathcal{K} := E(\{0\})H = \mathrm{Ker}(Q)$ y $\mathcal{G} := E(0, \infty)H$ son invariantes bajo las acciones de z_1 y z_2, acá estamos considerando nuevamente $Q = z_2^* z_2$ y E como la medida espectral asociada a Q. Observamos que H se puede expresar como

$$H = E([0, \infty))H = E(\{0\})H \oplus E((0, \infty))H = \mathcal{K} \oplus \mathcal{G}.$$

Por Definición 19.3 y el buen comportamiento de z_1 y z_2 se verifica que

$$E(\{0\})z_1 = \chi_{\{0\}}(Q)z_1 \subset z_1\chi_{\{0\}}(Q) = z_1E(\{0\}), \quad E(\{0\})z_1^* = \chi_{\{0\}}(Q)z_1^* \subset z_1^*\chi_{\{0\}}(Q) = z_1^*E(\{0\}),$$
$$E(\{0\})z_2 = \chi_{\{0\}}(Q)z_2 \subset z_2\chi_{\{0\}}(q^{-2}Q) = z_2\chi_{\{0\}}(Q) = z_2E(\{0\}),$$
$$E(\{0\})z_2^* = \chi_{\{0\}}(Q)z_2^* \subset z_2^*\chi_{\{0\}}(q^2Q) = z_2^*\chi_{\{0\}}(Q) = z_2^*E(\{0\}).$$

Entonces, para todo $k \in D \cap \mathcal{K} = E(\{0\})D$, tenemos $k = E(\{0\})k$ y por lo anterior

$$z_i k = z_i E(\{0\})k = E(\{0\})z_i k \in E(\{0\})H = \mathcal{K}, \quad z_i^* k = z_i^* E(\{0\})k = E(\{0\})z_i^* k \in E(\{0\})H = \mathcal{K},$$

es decir, $z_i : D \cap \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ y $z_i^* : D \cap \mathcal{K} \to \mathcal{K}$, $i = 1, 2$. Por lo tanto, $\mathcal{K} = E(\{0\})H$ es invariante para las acciones de los generadores de $\mathcal{O}(\mathbb{C}_q^2)$. Como $E((0,\infty)) = 1 - E(\{0\})$, obtenemos para todo $g \in D \cap \mathcal{G} = E((0,\infty))D$ por los mismos argumentos

$$z_i g = z_i E((0,\infty))g = z_i(1 - E(\{0\}))g = (1 - E(\{0\}))z_i g = E((0,\infty))z_i g \in E((0,\infty))H = \mathcal{G},$$

y analogamente $z_i^* g \in \mathcal{G}$. Así tenemos que $\mathcal{G} = E((0,\infty))H$ es también invariante para los generadores de $\mathcal{O}(\mathbb{C}_q^2)$.

Dado que $\mathcal{K} = \mathrm{Ker}(Q) = \mathrm{Ker}(z_2^* z_2)$, tenemos que $z_2 = 0$ sobre $\mathcal{K}$. Ahora por Definición 19.4, z_1 es q-normal sobre $\mathcal{K}$. Por Corolario 1 (ver también la ecuación (101)), existe un espacio de Hilbert H_0 tal que la acción de z_1 sobre $\mathcal{K}$ es unitariamente equivalente a

$$\mathcal{K} = \ker(z_1) \oplus \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} H_0\,, \qquad z_1\, h_n = q^n (Ah)_{n-1} \quad \text{sobre} \quad \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} H_0\,,$$

donde $A \in B(H_0)$ es un operador autoadjunto tal que su espectro está contenido en $[q, 1]$ y q no es valor propio. Definiendo $\mathcal{N} := \mathrm{Ker}(z_1)$, deducimos los resultados (1) y (2) del teorema.

Por Definición 19, tenemos que z_2 es un operador q-normal sobre $\mathcal{G}$ con $\mathrm{Ker}(z_2) = \{0\}$. Luego z_2 actúa sobre $\mathcal{G} = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{G}_0$ por las fórmula (101). Notamos además que

$$Qg_n = z_2^* z_2\, g_n = q^n z_2^* (Zg)_{n-1} = q^{2n}(Z^2 g)_n \quad \text{sobre} \quad \mathcal{G}_n := \{g_n :\ g \in \mathcal{G}_0\}. \tag{104}$$

Además, ya que $\mathrm{sp}(Z) \subset [q, 1]$ y q no es valor propio, tenenemos por propiedades polinómicas del espectro que $\mathrm{sp}(q^{2n}Z^2) \subset [q^{2n+2}, q^{2n}]$ y q^{2n+2} no es valor propio. Ahora considerando $(0,\infty) = \cup_{n\in\mathbb{Z}}(q^{2n+2}, q^{2n}]$, se verifica que $\mathcal{G}_n = E((q^{2n+2}, q^{2n}])\mathcal{G}$. Por otra parte, dado que $E((q^{2n+2}, q^{2n}]) = \chi_{(q^{2n+2},q^{2n}]}(Q)$ y que las funciones características son acotadas Borel medibles, tenemos por definición de buen comportamiento

$$E((q^{2n+2}, q^{2n}])z_1 \subset z_1 E((q^{2n+2}, q^{2n}]), \qquad E((q^{2n+2}, q^{2n}])z_1^* \subset z_1^* E((q^{2n+2}, q^{2n}]),$$

Por lo tanto, $z_1, z_1^* : D \cap \mathcal{G}_n \to \mathcal{G}_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir, z_1 y z_1^* dejan todos los espacios $\mathcal{G}_n$ invariantes. Notamos que $\sqrt{Q}^{-1} = \int_{[0,\infty)} \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\, dE(\lambda)$ luego

$$
\begin{aligned}
E((q^{2n+2}, q^{2n}])\sqrt{Q}^{-1} &= \int_{[0,\infty)} \chi_{(q^{2n+2},q^{2n}]}(\lambda)\, dE(\lambda) \int_{[0,\infty)} \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\, dE(\lambda) \\
&\subset \int_{[0,\infty)} \frac{\chi_{(q^{2n+2},q^{2n}]}(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\, dE(\lambda) \\
&= \int_{[0,\infty)} \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\, dE(\lambda) \int_{[0,\infty)} \chi_{(q^{2n+2},q^{2n}]}(\lambda)\, dE(\lambda) \\
&= \sqrt{Q}^{-1} E((q^{2n+2}, q^{2n}]),
\end{aligned} \tag{105}
$$

por lo tanto, $\sqrt{Q}^{-1} : \mathcal{G}_n \to \mathcal{G}_n$, es decir, $\sqrt{Q}^{-1}$ deja los espacios $\mathcal{G}_n$ invariantes. Lo anterior implica que $w := \sqrt{Q}^{-1} z_1$ y $w^* = z_1^* \sqrt{Q}^{-1}$ dejan invariantes a los $\mathcal{G}_n$.

Ahora dado que w satisface (102) sobre todo $\mathcal{G}_n$, su representación viene dada por (103). Luego podemos escribir $\mathcal{G}_n = \oplus_{m\in\mathbb{N}} H_{n,0}$ y

$$
wh_{n,m} = \sqrt{q^{-2m} - 1}\, h_{n,m+1}, \tag{106}
$$

donde $h_{n,m}$ pertenece a la m-ésima posición en la suma directa $\oplus_{m\in\mathbb{N}} H_{n,0}$. Pero $\mathcal{G}_n$ es el mismo espacio como $\mathcal{G}_0$, luego $H_{n,0} = H_{0,0}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Por la ecuación anterior tenemos que

$$
w^* wh_{n,m} = (q^{-2m} - 1)h_{n,m},
$$

y de esta forma $H_{n,m} := \{h_{n,m} : h \in H_{0,0}\} \subset \mathcal{G}_n$ es el espacio propio asociado a los valores propios $q^{-2m} - 1$ de la restricción de w^*w sobre el espacio $\mathcal{G}_n$. Por definición de buen comportamiento tenemos que w^*w y Q conmutan fuertemente. Luego las restricciones de w^*w y Q sobre $\mathcal{G}_n$ también conmutan fuertemente. Como consecuencia el operador autoadjunto Z sobre $\mathcal{G}_n$ de (104) deja invariante al espacio propio $H_{n,m}$. Denotemos la restricción de Z a $H_{0,0}$ por B. Como $H_{n,m}$ es una copia idéntica de $H_{0,0}$ en la m-ésima posición de $\oplus_{m\in\mathbb{N}} H_{n,0}$, tenemos

$$
Zh_{n,m} = (Bh)_{n,m}, \quad \text{para todo } h_{n,m} \in H_{n,m}.
$$

Además, B hereda las propiedades espectrales de Z como es requerido. Finalmente notamos que la anterior ecuación y la clasificación de q-normalidad implican

$$
z_2 h_{n,m} = q^n Z h_{n-1,m} = q^n (Bh)_{n-1,m}, \tag{107}
$$

y de (104) con (106), obtenemos que

$$
z_1 h_{n,m} = \sqrt{Q} wh_{n,m} = \sqrt{q^{-2m} - 1}\, \sqrt{Q} h_{n,m+1} = \sqrt{q^{-2m} - 1}\, \sqrt{q^{2n} Z^2} h_{n,m+1} = \sqrt{q^{-2m} - 1}\, q^n (Bh)_{n,m+1}.
$$

Esto prueba el resultado (3) de nuestro teorema. $\square$

2. Representaciones de $\mathcal{O}(\mathbb{C}_q^2)$ sobre espacio de funciones.

Notamos que la descomposición de H en el teorema anterior está determinada por las propiedades espectrales de los operadores autoadjuntos Q y w^*w. Es conocido que todo operador autoadjunto T sobre un espacio de Hilbert separable es unitariamente equivalente a una suma directa de operadores de multiplicación sobre el espacio $\mathcal{L}_2(\mathrm{sp}(T), \mu)$. Usaremos este hecho para mostrar que las representaciones del anterior teorema poseen también unas fórmulas de clasificación sobre espacios L_2, resultado análogo a la representaciones sobre espacios de funciones de los operadores q-normales (ver Teorema 7). Empezamos observando que la suma directa $\oplus_{n\in\mathbb{Z}} \oplus_{m\in\mathbb{N}} \; H_{00}$ en el Teorema 15.3, es isomorfa al producto tensorial $\ell_2(\mathbb{N}) \otimes (\oplus_{n\in\mathbb{Z}} H_{00})$. Sea ζ un operador q-normal actuando sobre $\oplus_{n\in\mathbb{Z}} H_{00}$ y consideremos ω, una representación del disco cuántico negativo actuando sobre $\ell_2(\mathbb{N})$, de tal forma que se cumple (103) escogiendo $\mathcal{G}_0 = \mathbb{C}$, luego los operadores w de (106) y z_2 de (107) descritos en la prueba del Teorema 15, pueden ser caracterizados por $w = \omega \otimes \mathrm{id}$ y $z_2 = \mathrm{id} \otimes \zeta$ con un operador q-normal ζ. Explícitamente, lo que nos dice el Teorema 7 es que todo operador q-normal es unitariamente equivalente a una suma directa de operadores de la siguiente forma: Existe una medida de Borel q-invariante sobre $[0, \infty)$ tal que ζ y ζ^* actúan sobre $H = \mathcal{L}_2([0, \infty), \mu)$ siguiendo las ecuaciones

(108)

$$\zeta f(t) = qtf(qt), \;\; \zeta^* f(t) = tf(q^{-1}t), \;\; f \in \mathrm{dom}(\zeta) := \left\{ h \in \mathcal{L}_2([0, \infty), \mu) \; : \; \int t^2 |h(t)|^2 \, d\mu(t) < \infty \right\}.$$

Acá la q-invarianza de la medida μ se entiende por $\mu(qS) = \mu(S)$ para todo conjunto Borel medible S de $[0, \infty)$. Notamos además que estos operadores satisfacen el siguiente resultado.

Proposición 10. *El operador q-normal ζ de la ecuación* (108) *es inyectivo si y sólo si* $\mu(\{0\}) = 0$.

Demostración. Supongamos que $\mu(\{0\}) = 0$ y $f \in \mathrm{Ker}\,\zeta$, entonces $\zeta f = 0$ en H, esto es, $\zeta(f)x = qxf(qx) = 0$ en casi todo punto de $[0, \infty)$. Por lo tanto $f = 0$ en casi todo punto de $(0, \infty)$, pero $\{0\}$ tiene medida cero entonces $f = 0$ en casi todo punto de $[0, \infty)$.

Por otra parte si $\mathrm{Ker}\,\zeta = \{0\}$, consideremos la función $\chi_{\{0\}} \in \mathrm{dom}(\zeta)$ y notemos que $\zeta(\chi_{\{0\}}) = 0$, luego $\chi_{\{0\}} \in \mathrm{Ker}\,\zeta$, es decir, $\chi_{\{0\}} = 0$ en H y así $\chi_{\{0\}}(x) = 0$ en casi todo punto de $[0, \infty)$. De esto inferimos $\mu(\{0\}) = 0$. $\square$

De esta manera, para obtener una representación como la descrita en el Teorema 15.(3), debemos asumir $\mu(\{0\}) = 0$.

Para convertir $\ell_2(\mathbb{N})$ en un $\mathcal{L}_2$-espacio, consideramos el operador $y := \sqrt{\omega^*\omega + 1}$ sobre $\ell_2(\mathbb{N})$. Denotando por $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ la base estandar de $\ell_2(\mathbb{N})$, tenemos

$$ye_n = q^{-n} e_n, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{109}$$

Como el conjunto de valores propios de y es discreto, y puede ser interpretado como un operador multiplicación sobre $\mathcal{L}_2(\mathrm{sp}(y), \sigma) \cong \ell_2(\mathbb{N})$ escogiendo la medida de contar $\sigma(\{q^{-n}\}) = 1$ sobre $\mathrm{sp}(y)$. Extendiendo σ a una medida de Borel sobre $[0, \infty)$ al definir $\sigma([0, \infty) \setminus \mathrm{sp}(y)) := 0$, obtenemos $yg(s) = sg(s)$, $g \in \mathrm{dom}(y) \subset \mathcal{L}_2([0, \infty), \sigma)$. El conjunto $\{e_n := \chi_{\{q^{-n}\}}(s) : \ n \in \mathbb{N}\}$ es una base ortonormal de $\mathcal{L}_2([0, \infty), \sigma)$. Notamos además que

$$\chi_{\{q^{-n}\}}(qs) = \chi_{\{q^{-(n+1)}\}}(s) = e_{n+1}, \qquad \sqrt{(qs)^2 - 1}\chi_{\{q^{-(n+1)}\}}(s) = \sqrt{q^{-2n} - 1}\chi_{\{q^{-(n+1)}\}}(s),$$

donde hemos usado que $f(t)\chi_{\{t_0\}}(t) = f(t_0)\chi_{\{t_0\}}(t)$ en la segunda ecuación. Así

$$\omega g(s) = \sqrt{(qs)^2 - 1}\, g(qs), \qquad \omega^* g(s) = \sqrt{s^2 - 1}\, g(q^{-1}s) \tag{110}$$

para $g \in \mathrm{dom}(\omega) = \mathrm{dom}(\omega^*) := \{h \in \mathcal{L}_2([0, \infty), \sigma) : \int t^2 |h(t)|^2 \, d\sigma(t) < \infty\}$. En particular

$$\omega^* e_1 = \sqrt{s^2 - 1}\, \chi_{\{q^{-1}\}}(q^{-1}s) = \sqrt{1^2 - 1}\, \chi_{\{q^{-1}\}}(q^{-1}s) = 0, \tag{111}$$

como es requerido. Notamos además que aunque $\|\chi_{\{1\}}(s)\| = 0$ y $\chi_{\{1\}}(qs) = \chi_{\{q^{-1}\}}(s) = e_1$, tenemos que

$$\sqrt{(qs)^2 - 1}\, \chi_{\{1\}}(qs) = \sqrt{(qq^{-1})^2 - 1}\, \chi_{\{1\}}(qs) = 0.$$

De esta forma, las fórmulas en (110) son consistentes también para $\chi_{\{1\}}$.

Ahora por el isomorfismo $\mathcal{L}_2([0, \infty), \sigma) \otimes \mathcal{L}_2([0, \infty), \mu) \cong \mathcal{L}_2([0, \infty) \times [0, \infty), \sigma \oplus \mu)$ obtenemos de (108) y (110) las siguientes representaciones tanto de $z_1 = \sqrt{Q}w = \omega \otimes \sqrt{\zeta^*\zeta}$ como de $z_2 = \mathrm{id} \otimes \zeta$,

$$z_1 h(s, t) = \sqrt{(qs)^2 - 1}\, t\, h(qs, t), \qquad z_2 g(s, t) = q\, t\, g(s, qt), \tag{112}$$

donde $h \in \mathrm{dom}(\omega) \otimes_{alg} \mathrm{dom}(\zeta)$ y $g \in \mathcal{L}_2([0, \infty), \sigma) \otimes_{alg} \mathrm{dom}(\zeta)$. En resumen, hemos mostrado que las representaciones del Teorema 15.3 son unitariamente equivalentes a una suma directa de representaciones del tipo descrito en (112).

Recordamos que $\mathcal{N} \oplus (\oplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{K}_0)$ en el Teorema 15 corresponde al kernel del operador q-normal z_2 y que el operador q-normal en la representación (108) tiene un kernel trivial si y solo si $\mu(\{0\}) = 0$. Dado que nosotros asumimos está propiedad sobre μ, añadiremos ahora una medida puntual δ_0 centrada en 0 a esta. Por equivalencia unitaria podemos asumir que $\delta_0(\{0\}) = 1$. De esta forma la representación z_1 sobre $\oplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{K}_0$ es nuevamente unitariamente equivalente a una suma directa de representaciones de la forma expresada en (108). Para interpretar esta representación sobre un

$\mathcal{L}_2$-espacio escogemos una medida q-invariante, digamos ν, y asumimos de nuevo que $\nu(\{0\}) = 0$, tomamos la medida producto $\nu \otimes \delta_0$ y añadimos esta a $\sigma \otimes \mu$. Luego

$$\mathcal{L}_2([0,\infty)\times[0,\infty),\ \sigma\otimes\mu+\nu\otimes\delta_0) \cong \mathcal{L}_2([0,\infty)\times[0,\infty),\ \sigma\otimes\mu)\oplus\mathcal{L}_2([0,\infty)\times[0,\infty),\ \nu\otimes\delta_0)$$

y sobre $\mathcal{L}_2([0,\infty)\times[0,\infty),\ \nu\otimes\delta_0)$ tenemos la representación

$$z_1 h(s,t) = qsh(qs,t) = q\chi_{\{0\}}(t)sh(qs,t), \qquad z_2 g(s,t) = qtg(s,qt) = 0, \tag{113}$$

para todo h tal que $\int s^2|h(0,s)|^2\, d\nu(s) < \infty$ y para todo g. Para las funciones que dependen de la segunda variable, nosotros hemos usado el hecho que $\operatorname{supp}(\delta_0) = \{0\}$. Nuevamente por la clasificación de q-normales sobre espacios de funciones y la misma argumentación de antes, las representaciones del Teorema 15.2 son unitariamente equivalentes a una suma directa de representaciones del tipo descrito en (113).

Además, para obtener una componente no trivial $\mathcal{N} = \operatorname{Ker}(z_1)\cap\operatorname{Ker}(z_2)$, añadimos a $\sigma\otimes\mu+\mu\otimes\delta_0$ la medida puntual $\epsilon\,\delta_0\otimes\delta_0$, donde $\epsilon = 0$ o $\epsilon = 1$ dependiendo si $\mathcal{N} = \{0\}$ o $\mathcal{N} \neq \{0\}$ respectivamente. Sumando estos hechos, hemos probado el siguiente teorema.

Teorema 16. *Las *-representaciones de $\mathcal{O}(\mathbb{C}_q^2)$ son unitariamente equivalentes a una suma directa de operadores del siguiente tipo: Sean μ y ν medidas de Borel q-invariantes sobre $[0,\infty)$ de tal forma que $\mu(\{0\}) = \nu(\{0\}) = 0$. Denotamos por δ_0 a la medida puntual centrada en 0 y definimos σ sobre $[0,\infty)$ como $\sigma(\{q^{-n}\}) := 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\sigma([0,\infty)\setminus\{q^{-n}:\ n\in\mathbb{N}\})$. Para $\epsilon \in \{0,1\}$ consideramos el espacio de Hilbert*

$$H := \mathcal{L}_2([0,\infty)\times[0,\infty),\ \sigma\otimes\mu+\nu\otimes\delta_0+\epsilon\delta_0\otimes\delta_0), \tag{114}$$

y hacemos

$$dom(z_1) := \{h\in H\ :\ sth \in H\ \ y\ \ s\chi_{\{0\}}(t)h\in H\}, \quad dom(z_2) := \{h \in H\ :\ th\in H\},$$

donde $\chi_{\{0\}}$ indica la función característica sobre $\{0\}$ y $h = h(s,t)$. Para $h \in dom(z_1)$ y $g \in dom(z_2)$, las acciones de los generadores de $\mathcal{O}(\mathbb{C}_q^2)$ están dadas por las fórmulas

$$z_1 h(s,t) = \sqrt{(qs)^2-1}\,th(qs,t) + q\chi_{\{0\}}(t)sh(qs,t), \quad z_2 g(s,t) = qtg(s,qt), \tag{115}$$

$$z_1^* h(s,t) = \sqrt{s^2-1}\,th(q^{-1}s,t) + \chi_{\{0\}}(t)sh(q^{-1}s,t), \quad z_2^* g(s,t) = tg(s,q^{-1}t). \tag{116}$$

Además se cumple que

(117)

$$\begin{aligned} H &= \mathcal{L}_2([0,\infty)\times[0,\infty),\ \epsilon\delta_0\otimes\delta_0)\oplus\mathcal{L}_2([0,\infty)\times[0,\infty),\nu\otimes\delta_0)\oplus\mathcal{L}_2([0,\infty)\times[0,\infty),\ \sigma\otimes\mu) \\ &= \mathcal{L}_2(\{0\}\times\{0\},\ \epsilon\delta_0\otimes\delta_0)\oplus\mathcal{L}_2([0,\infty)\times\{0\},\nu\otimes\delta_0)\oplus\mathcal{L}_2(\{q^{-n}:n\in\mathbb{N}\}\times[0,\infty),\ \sigma\otimes\mu). \end{aligned}$$

3. La C^*-álgebra de funciones continuas anulandose en el infinito.

Queremos definir un álgebra C* que pueda ser interpretada como el espacio de funciones continuas sobre el plano complejo cuántico 2-dimensional anulandose en el infinito. La definición será motivada por la construcción similar hecha para el caso 1-dimensional en el Capítulo 2. En este sentido, debemos construir como primer paso una *-álgebra auxiliar en donde las propiedades algebraicas y de conmutación sean considerablemente simples.

Diremos que una representación de la forma descrita en el Teorema 16 es universal si $\epsilon = 1$ y $\mathrm{supp}(\mu) = \mathrm{supp}(\nu) = [0,\infty)$. Tales medidas q-invariantes pueden ser obtenidas al considerar la medida de Lebesgue λ sobre $(q,1]$ y teniendo en cuenta la fórmula (17). Dada una representación universal, consideramos las descomposiciones polares

$$z_1 = U|z_1|, \qquad z_2 = V|z_2|.$$

Para todo $h \in \mathrm{dom}(|z_1|) = \mathrm{dom}(z_1)$ y $g \in \mathrm{dom}(|z_2|) = \mathrm{dom}(z_2)$, (115) y (116) implican que

$$|z_1|h(s,t) = \left(\chi_{[q^{-1},\infty)}(s)\sqrt{s^2-1}\,t + s\chi_{\{0\}}(t)\right)h(s,t), \quad |z_2|g(s,t) = tg(s,t). \tag{118}$$

Por otra parte, como

$$\begin{aligned}
|z_1|h(s,t) = 0 \in H &\iff h(s,t) = 0 \text{ p. c. t. } (s,t) \in [q^{-1},\infty)\times(0,\infty) \,\cup\, (0,\infty)\times\{0\},\\
|z_2|h(s,t) = 0 \in H &\iff h(s,t) = 0 \text{ p. c. t. } t \in (0,\infty),
\end{aligned}$$

se sigue que

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{ran}(|z_1|)} &= \mathrm{Ker}(|z_1|)^{\perp} = \mathrm{ran}(\chi_{(0,\infty)}(t)\chi_{[q^{-1},\infty)}(s) + \chi_{\{0\}}(t)\chi_{(0,\infty)}(s)),\\
\overline{\mathrm{ran}(|z_2|)} &= \mathrm{Ker}(|z_2|)^{\perp} = \mathrm{ran}(\chi_{(0,\infty)}(t)),
\end{aligned}$$

luego, de (115),

$$Uh(s,t) = \left(\chi_{(0,\infty)}(t)\chi_{[q^{-1},\infty)}(qs) + \chi_{\{0\}}(t)\chi_{(0,\infty)}(s)\right)h(qs,t), \tag{119}$$

$$Vh(s,t) = \chi_{(0,\infty)}(t)h(s,qt), \tag{120}$$

para todo $h \in H$, donde hemos usado que $\chi_{(0,\infty)}(qx) = \chi_{(0,\infty)}(x)$. Sus adjuntos actúan sobre H por

$$U^*h(s,t) = \left(\chi_{(0,\infty)}(t)\chi_{[q^{-1},\infty)}(s) + \chi_{\{0\}}(t)\chi_{(0,\infty)}(s)\right)h(q^{-1}s,t), \tag{121}$$

$$V^*h(s,t) = \chi_{(0,\infty)}(t)h(s,q^{-1}t). \tag{122}$$

De (119)-(122), obtenemos

$$UU^* = \chi_{(0,\infty)}(t)\chi_{[q^{-1},\infty)}(qs) + \chi_{\{0\}}(t)\chi_{(0,\infty)}(s), \tag{123}$$

$$U^*U = \chi_{(0,\infty)}(t)\chi_{[q^{-1},\infty)}(s) + \chi_{\{0\}}(t)\chi_{(0,\infty)}(s), \tag{124}$$

$$VV^* = V^*V = \chi_{(0,\infty)}(t), \tag{125}$$

donde usamos nuevamente el hecho de que $\chi_{(0,\infty)}(q^{\pm 1}t) = \chi_{(0,\infty)}(t)$. Fácilmente vemos que se cumple

$$UV = VU, \;\; UV^* = V^*U, \;\; U^*V = VU^*, \;\; U^*V^* = V^*U^*. \tag{126}$$

Considerando las funciones Borel medibles f sobre $[0,\infty)\times[0,\infty)$ como operadores multiplicación dados por

$$fh(s,t) := f(s,t)h(s,t),$$

obtenemos de (119)-(122) las siguientes relaciones simples de conmutación

$$Uf(s,t) = f(qs,t)U, \qquad U^*f(s,t) = f(q^{-1}s,t)U^*, \tag{127}$$

$$Vf(s,t) = f(s,qt)V, \qquad V^*f(s,t) = f(s,q^{-1}t)U^*. \tag{128}$$

De hecho, la razón para escoger $|\zeta|$ en (101) y también y en (109), como operadores multiplicación, es obtener relaciones de conmutación mucho más simples entre funciones y fases de las descomposiciones polares de los generadores de $\mathcal{O}(\mathbb{C}_q^2)$. Como consecuencia

$$\mathrm{Fun}(\mathbb{C}_q^2) := \left\{ \sum_{\text{finito}} f_{nm}(s,t)U^{\#n}V^{\#m} : \;\; f \in \mathcal{L}_\infty([0,\infty)\times[0,\infty)) \right\}, \tag{129}$$

es una subálgebra de $B(H)$; donde para todo $n \in \mathbb{Z}$ estamos definiendo

$$U^{\#n} = \begin{cases} U^n, & \text{si } n \geq 0, \\ U^{*n}, & \text{si } n < 0. \end{cases} \tag{130}$$

$$V^{\#n} = \begin{cases} V^n, & \text{si } n \geq 0, \\ V^{*n}, & \text{si } n < 0. \end{cases} \tag{131}$$

Además, por (118) y las anteriores relaciones de conmutatividad para todo $k,l,m,n \in \mathbb{N}_0$ existe una función Borel medible p_{klmn} sobre $[0,\infty)\times[0,\infty)$ tal que

$$z_1^k z_1^{*l} z_2^m z_2^{*n} = p_{klmn}(s,t)U^{\#k-l}V^{\#m-n}. \tag{132}$$

Ecuaciones (129) y (132) son gran parte de la motivación de nuestra definición de C^*-álgebra de funciones continuas sobre $\mathbb{C}_q^2$ que se anulan en el infinito.

3.1. Resumen del caso clásico. Antes de tratar y profundizar en el caso cuántico, revisemos previamente y de forma breve el caso clásico asociado, es decir, estudiemos un poco la C*-álgebra $C_0(\mathbb{C}^2)$. En analogía a la descomposición espectral de los generadores, escribimos $z_1 = e^{i\phi}|z_1|$ y $z_2 = e^{i\theta}|z_1|$. Consideremos ahora $n, m \in \mathbb{Z}$. Dada una función $f_{nm} \in C_0([0,\infty)\times[0,\infty))$, la asignación

$$\mathbb{C}^2 \ni (e^{i\phi}|z_1|,\ e^{i\theta}|z_1|) \longmapsto f_{nm}(|z_1|,|z_2|)e^{i\phi n}e^{i\theta m} \in \mathbb{C},$$

define una función en $C_0(\mathbb{C}^2)$ si y solo si

1. $f_{nm}(0,|z_2|)\,e^{i\phi n}\,e^{i\theta m}$ no depende de ϕ, lo cual implica que $f_{nm}(0,|z_2|) = 0$ para todo $n \neq 0$,
2. $f_{nm}(|z_1|,0)\,e^{i\phi n}\,e^{i\theta m}$ no depende de θ, lo cual implica que $f_{nm}(|z_1|,0) = 0$ para todo $m \neq 0$.

Además, la siguiente *-subálgebra de $C_0(\mathbb{C}^2)$,

$$C_0(\mathbb{C}^2) := \Big\{ \sum_{finito} f_{nm}(|z_1|,|z_2|)e^{i\phi n}e^{i\theta m}\ : f_{nm} \in C_0([0,\infty)\times[0,\infty)),\ \ n,m \in \mathbb{Z},$$
$$f_{nm}(|z_1|,0) = 0 \text{ si } m \neq 0,\ \ f_{nm}(0,|z_2|) = 0 \text{ si } n \neq 0\},$$

separa los puntos de $\mathbb{C}^2$. Por el Teorema 9 (Stone-Weierstraß), su clausura bajo la norma genera a $C_0(\mathbb{C}^2)$. Para pasar del caso clásico al caso cuántico, empezamos con una representación universal del tipo descrito en el Teorema 16. Para toda función continua acotada g sobre $[0,\infty)$, los operadores $g(|z_1|), g(|z_2|) \in B(H)$ quedan bien definidos por el teorema espectral y (118) nos dice que

$$g(|z_1|)h(s,t) = g\left(\chi_{[q^{-1},\infty)}(s)\sqrt{s^2-1} + s\chi_{\{0\}}(t)\right)h(t,s), \quad g(|z_2|)h(s,t) = g(t)h(s,t).$$

Dado que la representación es universal nosotros tenemos que $\|g(|z_i|)\| = \|g\|_\infty$ para $i = 1,2$. En particular, la norma no depende de la escogencia de las medidas de una representación universal. De manera similar, para $f \in C_0([0,\infty)\times[0,\infty))$ la fórmula

$$f(|z_1|,|z_2|)h(s,t) := f\left(\chi_{[q^{-1},\infty)}(s)\sqrt{s^2-1}\,t + s\chi_{\{0\}}(t), t\right)h(s,t), \quad h \in H, \tag{133}$$

produce un operador bien definido en $B(H)$ con $\|f(|z_1|,|z_2|)\| = \|f\|_\infty$. Estas observaciones conducen a la siguiente definición de $\mathcal{O}(\mathbb{C}_q^2)$.

Definición 20. *Consideremos una representación universal de $\mathcal{O}(\mathbb{C}_q^2)$ como se describe en el Teorema 16 y consideremos su descomposición espectral $z_1 = U|z_1|$ y $z_2 = V|z_2|$. La C^*-álgebra $C_0(\mathbb{C}_q^2)$ de funciones continuas sobre el plano complejo cuántico que se anulan en el infinito está definida como la clausura en la norma de*

$$C_0(\mathbb{C}_q^2) := \Big\{ \sum_{finito} f_{nm}\left(\chi_{[q^{-1},\infty)}(s)\sqrt{s^2-1}\,t + s\chi_{\{0\}}(t), t\right)U^{\#n}V^{\#m} : \quad n,m \in \mathbb{Z},$$
$$f_{nm} \in C_0([0,\infty)\times[0,\infty)),\ f_{nm}(0,t) = 0 \ \text{ si } n \neq 0,\ f_{nm}(s,0) = 0 \ \text{ si } m \neq 0\}. \tag{134}$$

Además de la no conmutatividad de (127) y (128), la principal diferencia con el caso clásico es la inusual expresión en el primer argumento de la función f_{nm}. Sin embargo, si analizamos por separado los componentes ortogonales de (117), nuestras fórmulas tienen una interpretación geométrica natural. Notamos primero que la función $h_{00}(s,t) := \chi_{\{0\}}(s)\chi_{\{0\}}(t) \in H$ genera el subespacio 1-dimensional invariante $L_2([0,\infty)\times[0,\infty), \epsilon\ \delta_0\otimes\delta_0)$, y la representación de $C_0(\mathbb{C}_q^2)$ sobre este se lee

$$\sum_{finito} f_{nm}\left(\chi_{[q^{-1},\infty)}(s)\sqrt{s^2-1}\ t + s\chi_{\{0\}}(t), t\right) U^{\#n}V^{\#m}h_{00}(s,t) = f_{00}(0,0)h_{00}(s,t), \tag{135}$$

esto porque $f_{nm}(0,0) = 0$ si $n \neq 0$ o si $m \neq 0$. Obviamente, (135) corresponde a la evaluación de funciones sobre el plano complejo 2-dimensional en el punto $(0,0)$. Esta representación 1-dimensional describe el único punto clásico de $\mathbb{C}_q^2$. Por otro lado, sobre $L_2([0,\infty)\times[0,\infty), \nu\otimes\delta_0)$, tenemos que $z_2 = 0$ y podemos afirmar así que

$$\sum_{n,m} f_{nm}\left(\chi_{[q^{-1},\infty)}(s)\sqrt{s^2-1}\ t + s\chi_{\{0\}}(t), t\right) U^{\#n}V^{\#m} = \sum_{n} f_{n0}(s,0)U^{\#n}.$$

Recordando ahora que z_1 actúa sobre $\mathcal{L}_2([0,\infty)\times[0,\infty), \nu\otimes\delta_0)$ como un operador q-normal y comparando la anterior ecuación con

$$\text{*-alg}\{C_0(\mathrm{sp}(|\zeta|), U)\} := \Big\{\sum_{\text{finito}} f_k(|\zeta|)\,U^k\ :\ f \in C_0(\mathrm{sp}(|\zeta|),\ k\in\mathbb{Z},\ f_k(0) = 0\ \text{ si }\ k\neq 0\Big\}, \tag{136}$$

objeto central de estudio del capítulo anterior, concluimos que la restricción de $C_0(\mathbb{C}_q^2)$ a la componente ortogonal $\mathcal{L}_2([0,\infty)\times[0,\infty), \nu\otimes\delta_0)$ genera a $C_0(\mathbb{C}_q)$. Esta representación corresponde a una inclusión $\mathbb{C}_q\times\{0\}\subset\mathbb{C}_q^2$.

Finalmente, sobre $\mathcal{L}_2([0,\infty)\times[0,\infty), \sigma\otimes\mu)$, tenemos que $t = |z_2| > 0$ y $\chi_{[q^{-1},\infty)}(s)\sqrt{s^2-1} = |w|$, para esto basta con revisar (110). De esta forma la representación de las funciones de (134) puede ser escrita como

$$\sum_{finito} f_{nm}(|w|t,t)U^{\#n}V^{\#m}.$$

De forma clásica obtenemos que

$$\sum_{finito} f_{nm}(|w|t,t)e^{i\phi n}e^{i\theta m}\ |_{t=0} = \sum_{finito} f_{nm}(0,0)e^{i\phi n}e^{i\theta m} = f_{00}(0,0).$$

Luego estas funciones separan solamente los puntos de $\mathbb{C}^2\backslash(\mathbb{C}\times\{0\})$ y todo el subespacio $\mathbb{C}\times\{0\}$ queda identificado con el punto $(0,0)$. Geométricamente, este corresponde a un plano complejo 2-dimensional, donde $\mathbb{C}\times\{0\}$ es colapsado a un punto. Argumentando recíprocamente, podemos decir que la representación de (112) corresponde al plano complejo cuántico 2-dimensional, donde

$\mathbb{C}_q \times \{0\}$ es colapsado a un punto y que $\mathbb{C}_q \times \{0\}$ se encuentra adherido a este espacio por la representación (113). Además, el origen del plano complejo cuántico de dimensión 2, es el único punto descrito por la representación 1-dimensional dada por (135).

Capítulo 4

Generalización n-dimensional de $\mathcal{O}(\mathbb{C}_q)$.

Constituye una parte bastante amplia de la teoría de grupos cuánticos el estudio de los anillos de coordenadas de $GL_q(N)$ y $SL_q(N)$, estos son entendidos como las deformaciones asociadas al grupo general lineal y al grupo lineal especial, respectivamente. Una familia de espacios cuánticos con una (co-)acción de $GL_q(N)$ y $SL_q(N)$ son los anillos de coordenadas $\mathcal{X}_{\gamma,\delta}$, γ, $\delta \in \mathbb{C}$, los cuales vienen definidos como el álgebra generada por $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ sujetos a las relaciones

1. $x_i x_j = q x_j x_i$, $\quad y_i y_j = q^{-1} y_j y_i$, $\quad$ para $i < j$.
2. $y_i x_j = q x_j y_i$, $\quad$ para $i \neq j$.
3. $y_i x_i - q^2 x_i y_i = \gamma + (q^2 - 1)\Big(\sum\limits_{j>i} x_j y_j \; - \delta \sum\limits_{j=1}^{N} x_j y_j \Big)$,

Podemos encontrar un compendio de información de lo anterior en [**17**].

Teniendo en cuenta el éxito en la construcción en el caso $n = 2$, dentro del anterior objeto consideramos coordenadas holomorfas cuánticas $z_j := y_j$ y anti-holomorfas cuánticas $z_j^* := x_j$ para $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, además seleccionamos $\gamma = \delta = 0$ y $q \in (0, 1)$. De esta manera, formulamos la siguiente definición del plano complejo cuántico n-dimensional.

Definición 21. *Sea $q \in (0, 1)$. El anillo de coordenadas del plano complejo cuántico n-dimensional $\mathcal{O}(\mathbb{C}_q^n)$ está dado como el álgebra generada por $z_1, z_2, \dots, z_n$ sujeta a las relaciones*

1. $z_i z_j = q^{-1} z_j z_i$, $\quad$ *para* $i < j$.
2. $z_i^* z_j^* = q z_j^* z_i^*$, $\quad$ *para* $i < j$.
3. $z_i z_j^* = q z_j^* z_i$, $\quad$ *para* $i \neq j$.
4. $z_i z_i^* = q^2 z_i^* z_i - (1 - q^2) \sum\limits_{j>i} z_j^* z_j$, $\quad i < n$, $\qquad z_n z_n^* = q^2 z_n^* z_n$.

Utilizamos estas mismas letras para denotar más adelante representaciones de $\mathcal{O}(\mathbb{C}_q^n)$ sobre un espacio de Hilbert. Para $m \in \mathbb{N}$ consideramos $\mathbb{I}_m := \{1, 2, \dots, m\}$.

Nuestro objetivo principal en este último capítulo será la definición de una C*-álgebra $C_0(\mathbb{C}_q^n)$. El punto de partida es estudiar las *-representaciones de $\mathcal{O}(\mathbb{C}_q^n)$, es decir, operadores $z_1, \dots, z_n$ cerrados densamente definidos sobre un espacio de Hilbert y sus adjuntos $z_1^*, \dots, z_n^*$, los cuales satisfacen 1) - 4) en la Definición 21 sobre un dominio denso común. A una representación le diremos irreducible, si el espacio de Hilbert donde está definida no se descompone en la suma ortogonal de dos subespacios no triviales los cuales sean invariantes bajo la acción de todos los elementos de $\mathcal{O}(\mathbb{C}_q^n)$. Por un ligero abuso de notación, usaremos las mismas letras para denotar un generador del anillo de coordenadas $\mathcal{O}(\mathbb{C}_q^n)$, su representación como un operador sobre un espacio de Hilbert y la restricción de este operador a un dominio denso común. Daremos la clasificación de las ya tratadas representaciones de buen comportamiento en la siguiente sección, a continuación solo damos algunos resultados preliminares.

Para obtener una descripción más uniforme en que todos los generadores $z_j \neq 0$ actúan como operadores shift en dirección $+1$, reformulamos Corolario 1 aplicando la transformación unitaria $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{H}_n \ni h_n \mapsto h_{-n} \in \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{H}_n$.

Proposición 11. *Sea z un operador q-normal, esto es, un operador cerrado densamente definido sobre un espacio de Hilbert separable $\mathcal{H}$ que satisface la ecuación*

$$zz^* = q^2 z^* z.$$

Entonces el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ se descompone en una suma directa $\mathcal{H} = \ker(z) \oplus \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{H}_n$, donde, salvo una transformación unitaria, $\mathcal{H}_n = \mathcal{H}_0$. La representación está determinada de forma única por un operador autoadjunto A sobre $\mathcal{H}_0$ tal que $\mathrm{sp}(A) \subset [q, 1]$ y q no es uno de sus valores propios. Para $h \in \mathcal{H}_0$, denotemos por h_n al vector en $\mathcal{H}$ el cual tiene a h en la n-ésima componente de la suma directa $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{H}_n$ y 0 en las demás. La acción de z está determinada por

$$zh_n = q^{-n} A h_{n+1} \tag{137}$$

para todo $h_n \in \mathcal{H}_n$.

El siguiente lema sencillo se plantea como una referencia adicional para cuando las representaciones de buen comportamiento sean clasificadas.

Lema 3. *Dada una *-representación de $\mathcal{O}(\mathbb{C}_q^n)$ sobre un dominio denso común D de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y consideremos $\mathcal{H}_0$ como un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$ tal que $D \cap \mathcal{H}_0$ y $D \cap \mathcal{H}_0^\perp$ son densos en $\mathcal{H}_0$ y en $\mathcal{H}_0^\perp$ respectivamente. Si $\mathcal{H}_0$ es invariante bajo la acción de $\mathcal{O}(\mathbb{C}_q^n)$, entonces este se reduce, esto es , $\mathcal{H}_0^\perp$ es también invariante.*

Demostración. El lema se sigue del hecho que $a^*h \in \mathcal{H}_0$ para todo $h \in D \cap \mathcal{H}_0$ y $a \in \mathcal{O}(\mathbb{C}_q^n)$ dado que $\mathcal{H}_0$ es invariante y $\mathcal{O}(\mathbb{C}_q^n)$ es una *-álgebra. De esta forma $\langle h, ag\rangle = \langle a^*h, g\rangle = 0$ para todo $h \in D \cap \mathcal{H}_0$ y $g \in D \cap \mathcal{H}_0^\perp$, y luego $ag \in \mathcal{H}_0^\perp$. □

1. Representaciones sobre espacios de Hilbert.

Expondremos en esta sección una descripción completa de las representaciones bien comportadas de $\mathcal{O}(\mathbb{C}_q^n)$. Para definir lo que significa en este caso "buen comportamiento", primero adaptamos y mejoramos la definición análoga para $\mathcal{O}(\mathbb{C}_q^2)$ dada en en el anterior capítulo (ver también [**6**]) para $\mathcal{O}(\mathbb{C}_q^n)$. Por analogía, empezamos con algunas manipulaciones formales que motivan la definición.

Para $k = 1, \ldots, n$, hacemos

$$Q_k := \sum_{j=k}^{n} z_j^* z_j. \tag{138}$$

Entonces de forma obvia se tiene $Q_k^* = Q_k$ y además

$$z_k z_k^* - q^2 z_k^* z_k = -(1-q^2)\, Q_{k+1} \tag{139}$$

por Definición 21.(4), y por medio de cálculos elementales podemos mostrar

$$z_i Q_k = Q_k z_i, \qquad z_i^* Q_k = Q_k z_i^*, \qquad i < k, \tag{140}$$

$$z_j Q_k = q^2 Q_k z_j, \qquad z_j^* Q_k = q^{-2} Q_k z_j^*, \qquad j \geq k. \tag{141}$$

Ahora si $h \in \ker(Q_k)$, entonces $Q_k(z_i h) = z_i(Q_k h) = 0$ y $Q_k(z_j h) = q^2 z_j(Q_k h) = 0$, luego $z_i h$ y $z_j h$ pertenecen nuevamente a $\ker(Q_k)$. El mismo argumento muestra que $z_i^* h$, $z_j^* h \in \ker(Q_k)$ para todo $h \in \ker(Q_k)$. Asumiendo que las hipótesis del Lema 3 se satisfacen, podemos concluir que $\ker(Q_k)$ se reduce bajo la acción de la representación. Sobre $\ker(Q_k)$, se cumple que $z_k = \cdots = z_n = 0$ por (138). Haciendo $z_k = \cdots = z_n = 0$ en las ecuaciones de la definición (21), uno fácilmente observa que los generadores restantes satisfacen las relaciones de $\mathcal{O}(\mathbb{C}_q^{k-1})$. En particular, z_{k-1} satisface la relación de q-normalidad ampliamente estudiada hasta el momento. De esta forma, es natural asumir que z_n es q-normal y z_{k-1} lo es sobre $\ker(Q_k)$.

Más adelante clasificaremos las representaciones bien comportadas aplicando inducción sobre el índice n. Por los comentarios anteriormente hechos y debido a que todo nuestro procedimiento es recursivo, una vez demos con la clasificación para el mayor de los índices, podremos asumir que las representaciones bien comportadas de $\mathcal{O}(\mathbb{C}_q^{k-1})$ sobre $\ker(Q_k)$ ya tendrán un comportamiento bien definido. Consideremos entonces las representaciones sobre $\ker(Q_n)^\perp$, donde $Q_1 \geq \ldots \geq Q_n > 0$. Aquí, $Q_k \geq Q_{k+1}$ se sigue de $Q_k = z_k^* z_k + Q_{k+1}$ por (138). Las ecuaciones (140) y (141) implican que para cualquier polinomio p en una variable se cumple

$$z_i p(Q_k) = p(Q_k) z_i, \qquad z_i^* p(Q_k) = p(Q_k) z_i^*, \qquad i < k, \tag{142}$$

$$z_j p(Q_k) = p(q^2 Q_k) z_j, \qquad z_j^* p(Q_k) = p(q^{-2} Q_k) z_j^*, \qquad j \geq k. \tag{143}$$

Supongamos que Q_k es un operador autoadjunto y denotemos por E_k la medida espectral de proyecciones que satisface $Q_k = \int \lambda \, \mathrm{d}E_k(\lambda)$. Entonces $f(Q_k) := \int f(\lambda)\, \mathrm{d}E_k(\lambda)$ produce para toda función compleja medible $f : \mathrm{sp}(Q_k) \to \mathbb{C}$ un operador cerrado densamente definido. Nosotros asumiremos que (142) y (143) se cumplen para $p(Q_k)$ reemplazado por $f(Q_k)$ en un sentido apropiado, en el que se tendrá en cuenta el dominio de operadores no acotados.

Sobre el espacio $\ker(Q_n)^{\perp}$, la relación $Q_k \geq Q_n > 0$ nos permite definir $\sqrt{Q_k}^{-1} = \int \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \, \mathrm{d}E_k(\lambda)$. Consideremos ahora

$$w_k := \sqrt{Q_{k+1}}^{-1} z_k = z_k \sqrt{Q_{k+1}}^{-1} \tag{144}$$

como un operador abstractamente definido. Insertando (144) dentro de (139) deducimos formalmente (cf. (100)) que

$$w_k w_k^* - q^2 w_k^* w_k = -(1-q^2) \sqrt{Q_{k+1}}^{-1} Q_{k+1} \sqrt{Q_{k+1}}^{-1} = -(1-q^2). \tag{145}$$

Algebraicamente, (145) es equivalente a (102). Sin embargo, como en el Lema 3, nosotros requerimos que los operadores w_k satisfagan (102) como operadores densamente definidos los cuales incluyen la condición que $\mathrm{dom}(w_k w_k^*) = \mathrm{dom}(w_k^* w_k)$.

Finalmente notamos que $z_1^* z_1, \ldots, z_n^* z_n \in \mathcal{O}(\mathbb{C}_q^n)$ conmutan por Definición 21.(1-3) y como consecuencia también $Q_1, \ldots, Q_n \in \mathcal{O}(\mathbb{C}_q^n)$ conmutan. Vistos como operadores autoadjuntos, es costumbre requerir que ellos conmuten fuertemente.

Similar a la exposición del capítulo anterior (ver también [**6**, Definición 1]), enunciamos nuestra definición de representaciones bien comportadas a partir de las anteriores observaciones.

Definición 22. *Una *-representación de buen comportamiento de $\mathcal{O}(\mathbb{C}_q^n)$ sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ está dada por operadores cerrados densamente definidos $z_1, \ldots, z_n$ que satisfacen la ecuaciones de la Definición 21 sobre un dominio denso común $D \subset \mathcal{H}$ tal que para todo $j, k \in \{1, \ldots, n\}$ se cumple*

(I) *D es un núcleo para los operadores cerrados z_j y z_j^*, y para los operadores autoadjuntos Q_j definidos sobre D por* (138)*, es decir, las cerraduras de la restricciones de estos operadores al dominio D coinciden con los operadores cerrados correspondientes.*

(II) *Los operadores autoadjuntos Q_j y Q_k conmutan fuertemente.*

(III) *Denotemos por E_j la única medida espectral tal que $Q_j = \int \lambda \, \mathrm{d}E_j(\lambda)$. Entonces $E_j(M)D \subset D$ para todo conjunto Borel medible $M \subset \mathbb{R}$.*

(iv) *Para toda función Borel medible f sobre* $\mathrm{sp}(Q)$, *las relaciones de operadores*

$$\begin{aligned} &f(Q_k)z_j \subset z_j f(Q_k), && f(Q_k)z_j^* \subset z_j^* f(Q_k), && j < k, \\ &f(Q_k)z_j \subset z_j f(q^{-2}Q_j), && f(Q_k)z_j^* \subset z_j^* f(q^2 Q_k), && j \geq k, \end{aligned}$$

se cumplen.

(v) z_n *es un operador q-normal y para $k < n$ la restricción de z_k a* $\ker(Q_{k+1})$ *es un operador q-normal definido como en la Proposición 11.*

(vi) *Sobre* $\ker(Q_k)^\perp$, *z_j conmuta con $\sqrt{Q_{j+1}}^{-1}$ para todo $j = 1, \ldots, k-1$ y haciendo $w_j := \sqrt{Q_{j+1}}^{-1} z_j = z_j \sqrt{Q_{j+1}}^{-1}$ se define un operador cerrado densamente definido que satisface la ecuación*

$$w_j w_j^* = q^2 w_j^* w_j - (1 - q^2).$$

De la Definición 22.(iii) y (iv), podemos deducir el siguiente lema.

Lema 4. *Sean $k \in \{2, \ldots, n\}$ y $M_k, \ldots, M_n \subset [0, \infty)$ conjuntos Borel medibles. Luego para cualquier *-representación bien comportada de $\mathcal{O}(\mathbb{C}_q^n)$ sobre un dominio denso común D de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, el subespacio $E_k(M_k) \cdots E_n(M_n)\mathcal{H}$ es invariante bajo la acción de los operadores $z_1, \ldots, z_{k-1}$ y $z_1^*, \ldots, z_{k-1}^*$, donde E_j denota la medida espectral introducida en la Definición 22.*(iii).

Demostración. Hagamos $\mathcal{H}_0 := E_k(M_k) \cdots E_n(M_n)\mathcal{H}$. De la Definición 22.(iii), podemos concluir que

$$\begin{aligned} D \cap \mathcal{H}_0 &= E_k(M_k) \cdots E_n(M_n) D \subset D, \\ D \cap \mathcal{H}_0^\perp &= (1 - E_k(M_k) \cdots E_n(M_n)) D \subset D. \end{aligned}$$

En particular, $D \cap \mathcal{H}_0$ y $D \cap \mathcal{H}_0^\perp$ son densos en $\mathcal{H}_0$ y en $\mathcal{H}_0^\perp$ respectivamente. Además, la Definición 22.(iv) implica que $E_j(M_j)z_i \subset z_i E_j(M_j)$ para $i < j$ puesto que $E_j(M_j) = \chi_{M_j}(Q_j)$, donde χ_{M_j} denota la función característica del conjunto M_j. De esta manera, para todo $h \in D \cap \mathcal{H}_0$ y $g \in D \cap \mathcal{H}_0^\perp$, y para todo $i = 1, \ldots, k-1$, tenemos que

$$\begin{aligned} z_i h &= z_i E_k(M_k) \cdots E_n(M_n) h = E_k(M_k) \cdots E_n(M_n) z_i h \in \mathcal{H}_0, \\ z_i g &= z_i (1 - E_k(M_k) \cdots E_n(M_n)) g = (1 - E_k(M_k) \cdots E_n(M_n)) z_i g \in \mathcal{H}_0^\perp. \end{aligned}$$

Dado que esto mismo se cumple también para z_i^*, tenemos que $\mathcal{H}_0$ y $\mathcal{H}_0^\perp$ son invariantes bajo la acción de los operadores densamente definidos $z_1, \ldots, z_{k-1}$ y $z_1^*, \ldots, z_{k-1}^*$, así como queriamos mostrar. $\square$

El resultado principal de esta sección es el siguiente teorema. Este nos da una completa clasificación de las *-representaciones de buen comportamiento de $\mathcal{O}(\mathbb{C}_q^n)$.

Teorema 17. *Toda *-representación de buen comportamiento de $\mathcal{O}(\mathbb{C}_q^n)$ sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es unitariamente equivalente a una representación descrita de la siguiente forma: Para $n = 1$, las representaciones bien comportadas están descritas por la Proposición 11. Para $n > 1$, el espacio de Hilbert se descompone en la suma ortogonal de subespacios invariantes*

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}_n \quad \textit{tal que} \quad \ker(Q_k) = \mathcal{H}_0 \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}_{k-1}, \tag{146}$$

donde el operador autoadjunto Q_k denota la clausura de $\sum_{j=k}^n z_j^* z_j$. Además, existen espacios de Hilbert $\mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_n$ tales que cada espacio $\mathcal{H}_k$ para $k = 1, \ldots, n$, se descompone en la suma ortogonal

$$\mathcal{H}_k = \bigoplus_{i_1,\ldots,i_{k-1}\in\mathbb{N}} \bigoplus_{i_k\in\mathbb{Z}} \mathcal{G}_{i_1,\ldots,i_{k-1},i_k}, \qquad \mathcal{G}_{i_1,\ldots,i_{k-1},i_k} = \mathcal{K}_k. \tag{147}$$

La representación sobre $\mathcal{H}_k$ está determinada por un operador acotado autoadjunto A_k sobre $\mathcal{K}_k$ tal que $\mathrm{sp}(A_k) \subset [q, 1]$ y q no es un valor propio. Las acciones de $z_1, \ldots, z_n$ sobre $\mathcal{H}_k$ están dadas por

$$\begin{aligned}
&z_{k+1} = \ldots = z_n = 0 \qquad \textit{si} \qquad k < n,\\
&z_k h_{i_1,\ldots,i_{k-1},i_k} = q^{-i_k}(A_k h)_{i_1,\ldots,i_{k-1},i_k+1},\\
&z_j h_{i_1,\ldots,i_j,\ldots,i_k} = q^{-(i_{j+1}+\cdots+i_k)}\sqrt{q^{-2i_j}-1}\,(A_k h)_{i_1,\ldots,i_j+1,\ldots,i_k}, \qquad j = 1, \ldots, k-1,
\end{aligned}$$

donde $h_{i_1,\ldots,i_{k-1},i_k} \in \mathcal{G}_{i_1,\ldots,i_{k-1},i_k}$ para todo $h \in \mathcal{K}_k$. Además

$$z_1 = \ldots = z_n = 0 \qquad \textit{sobre} \qquad \mathcal{H}_0.$$

Un dominio denso común está dado por $D := D_0 \oplus \cdots \oplus D_n$, donde $D_0 := \mathcal{H}_0$ y, para $k > 0$, $D_k := \mathrm{gen}\{h_{i_1,\ldots,i_{k-1},i_k} : h \in \mathcal{K}_k,\ i_1, \ldots, i_{k-1} \in \mathbb{N},\ i_k \in \mathbb{Z}\}$ es la suma directa ortogonal algebraica de $\mathcal{G}_{i_1,\ldots,i_{k-1},i_k} = \mathcal{K}_k$. La representación es irreducible si todos los espacios de Hilbert menos uno en la descomposición (146) *son cero y además $\mathcal{H}_0 = \mathbb{C}$ o $\mathcal{K}_k = \mathbb{C}$ para la componente no nula $\mathcal{H}_k$.*

Demostración. Probamos el teorema por inducción sobre n. Para $n = 1$, el Teorema 17 es equivalente a la Proposición 11. Ahora sea $n > 1$ y asumamos que la representaciones de buen comportamiento de $\mathcal{O}(\mathbb{C}_q^{n-1})$ están clasificadas por el Teorema 17. Como en la Definición 22.(iii), escribimos $Q_j = \int \lambda \, \mathrm{d}E_j(\lambda)$ usando el teorema espectral. Luego por Lema 4, $\ker(Q_n) = E_n(\{0\})\mathcal{H}$ está reducido por los operadores $z_1, \ldots, z_{n-1}$ y $z_1^*, \ldots, z_{n-1}^*$. Dado que $\ker(Q_n) = \ker(z_n^* z_n) = \ker(z_n)$ y $\ker(z_n) = \ker(z_n^* z_n) = \ker(z_n z_n^*) = \ker(z_n^*)$ (esto último por Definicón 21.(4)), tenemos que $z_n = z_n^* = 0$ sobre $\ker(Q_n)$. Por Lema 4, $\ker(Q_n)$ es invariante bajo la acción de todos los generadores de $\mathcal{O}(\mathbb{C}_q^n)$. De esta manera $\ker(Q_n)$ y $\ker(Q_n)^\perp$ se reducen por la acción de los generadores, esto por el

Lema 3. Haciendo $z_n = z_n^* = 0$ en las relaciones planteadas en la Definición 21, observamos que los operadores restantes satisfacen las relaciones de $O(\mathbb{C}_q^{n-1})$. Por inducción, $\ker(Q_n)$ se descompone en la suma directa ortogonal $\mathcal{H}_0 \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}_{n-1}$, donde las acciones de $z_1, \ldots, z_{n-1}$ sobre $\ker(Q_n)$ están dadas por el Teorema 17. Finalmente, el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ se descompone en la suma ortogonal de subespacios reducidos $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}_n$, donde $\ker(Q_n) = \mathcal{H}_0 \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}_{n-1}$ y $\mathcal{H}_n := \ker(Q_n)^\perp$. Entonces nos resta clasificar las representaciones de $O(\mathbb{C}_q^n)$ sobre el espacio reducido $\mathcal{H}_n = \ker(Q_n)^\perp$.

Por la Definición 22.(v), z_n es un operador q-normal, luego podemos aplicar la Proposición 11. Dado que $\ker(z_n) = \ker(Q_n)$, tenemos que $\ker(z_n) = 0$ sobre $\mathcal{H}_n$ y de esta forma, por la Proposición 11, $\mathcal{H}_n$ se descompone (módulo equivalencia unitaria) en la suma ortogonal $\mathcal{H}_n = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{G}_{i_n}$, donde $\mathcal{G}_{i_n} = \mathcal{G}_0$ para todo $i_n \in \mathbb{Z}$. Además, las acciones de z_n y $Q_n = z_n^* z_n$ están dadas por

$$z_n h_{i_n} = q^{-i_n}(A_n h)_{i_n+1}, \qquad Q_n h_{i_n} = q^{-2i_n}(A_n^2 h)_{i_n}, \qquad h_{i_n} \in \mathcal{G}_{i_n},$$

donde A_n denota un operador acotado autoadjunto sobre $\mathcal{G}_0$ tal que $\mathrm{sp}(A_n) \subset [q, 1]$ y q no es un valor propio de este. Notamos que $\mathrm{sp}(Q_n \lceil_{\mathcal{G}_{i_n}}) = q^{-2i_n}\mathrm{sp}(A_n^2) \subset [q^{-2i_n+2}, q^{-2i_n}]$ sin ser q^{-2i_n+2} un valor propio. Escribiendo $(0, \infty) = \cup_{i_n\in\mathbb{Z}} (q^{-2i_n+2}, q^{-2i_n}]$ como la unión disjunta de intervalos abiertos por izquierda y cerrado por derecha, fácilmente se observa que

$$\mathcal{G}_{i_n} = E_n((q^{-2i_n+2}, q^{-2i_n}])\mathcal{H}_n.$$

Procedemos por inducción iniciando por el mas alto índice n. Sea $j \in \{0, \ldots, n-2\}$ y supongamos que $\mathcal{H}_n = \bigoplus_{i_{n-j},\ldots,i_{n-1}\in\mathbb{N}} \bigoplus_{i_n\in\mathbb{Z}} \mathcal{G}_{i_{n-j},\ldots,i_{n-1},i_n}$ puede ser escrito como una suma ortogonal de espacios de Hilbert idénticos $\mathcal{G}_{i_{n-j},\ldots,i_{n-1},i_n} = \mathcal{G}_{1,\ldots,1,0}$. Asumimos además que las acciones de $z_{n-j}, \ldots, z_n$ sobre la anterior descomposición de $\mathcal{H}_n$ están dadas por

$$z_n h_{i_{n-j},\ldots,i_{n-1},i_n} = q^{-i_n}(A_n h)_{i_{n-j},\ldots,i_{n-1},i_n+1} \tag{148}$$

y, si $j > 0$,

$$z_{n-l} h_{i_{n-j},\ldots,i_{n-l},\ldots,i_n} = \sqrt{q^{-2i_{n-l}} - 1}\, q^{-(i_{n-l+1}+\cdots+i_n)}(A_n h)_{i_j,\ldots,i_l+1,\ldots,i_n} \tag{149}$$

para $l = 1, \ldots, j$. Un cálculo directo muestra que

$$z_n^* z_n h_{i_{n-j},\ldots,i_{n-1},i_n} = Q_n h_{i_{n-j},\ldots,i_{n-1},i_n} = q^{-2i_n}(A_n^2 h)_{i_{n-j},\ldots,i_{n-1},i_n},$$
$$z_{n-l}^* z_{n-l} h_{i_{n-j},\ldots,i_{n-l},\ldots,i_n} = (q^{-2i_{n-l}} - 1)\, q^{-2(i_{n-l+1}+\cdots+i_n)}(A_n^2 h)_{i_{n-j},\ldots,i_{n-l},\ldots,i_n}.$$

De esta forma la acción de $Q_{n-l} = \sum_{k=n-l}^n z_k^* z_k$ se convierte para $l > 0$ en una suma telescópica que implica

$$Q_{n-l} h_{i_{n-j},\ldots,i_{n-l},\ldots,i_n} = q^{-2(i_{n-l}+i_{n-l+1}+\cdots+i_n)}(A_n^2 h)_{i_{n-j},\ldots,i_{n-l},\ldots,i_n}. \tag{150}$$

Finalmente asumimos como parte de la hipótesis de inducción que

$$\mathcal{G}_{i_{n-j},\ldots,i_{n-1},i_n} = E_{n-j}((q^{-2(i_{n-j}+\cdots+i_n)+2}, q^{-2(i_{n-j}+\cdots+i_n)}]) \;\cdots\; E_n((q^{-2i_n+2}, q^{-2i_n}])\mathcal{H}_n. \tag{151}$$

Para presentar el paso de inducción, necesitamos verificar lo siguiente:

1. $\mathcal{G}_{i_{n-j},\ldots,i_{n-1},i_n}$ está reducido por la acción de z_{n-j-1}.

2. $\mathcal{G}_{i_{n-j},\ldots,i_{n-1},i_n}$ es unitariamente equivalente a la suma directa ortogonal

$$\mathcal{G}_{i_{n-j},\ldots,i_{n-1},i_n} = \bigoplus_{i_{n-j-1}\in\mathbb{N}} \mathcal{G}_{i_{n-j-1},i_{n-j},\ldots,i_{n-1},i_n}, \quad \mathcal{G}_{i_{n-j-1},i_{n-j},\ldots,i_{n-1},i_n} = \mathcal{G}_{1,1,\ldots,1,0}, \tag{152}$$

3. Las acciones de z_{n-j-1} y Q_{n-j-1} sobre $h_{i_{n-j-1},i_{n-j},\ldots,i_{n-1},i_n} \in \mathcal{G}_{i_{n-j-1},i_{n-j},\ldots,i_{n-1},i_n}$ satisfacen

$$\begin{aligned} z_{n-j-1}h_{i_{n-j-1},i_{n-j},\ldots,i_n} &= \sqrt{q^{-2i_{n-j-1}}-1}\, q^{-(i_{n-j}+\cdots+i_n)}(A_n h)_{i_{n-j-1}+1,i_{n-j},\ldots,i_n}, \\ Q_{n-j-1}h_{i_{n-j-1},i_{n-j},\ldots,i_n} &= q^{-2(i_{n-j-1}+i_{n-j}+\cdots+i_n)}(A_n^2 h)_{i_{n-j-1},i_{n-j},\ldots,i_n}. \end{aligned} \tag{153}$$

4. Salvo una transformación unitaria del punto 2, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{i_{n-j-1},i_{n-j},\ldots,i_n} &= E_{n-j-1}((q^{-2(i_{n-j-1}+i_{n-j}+\cdots+i_n)+2}, q^{-2(i_{n-j-1}+i_{n-j}+\cdots+i_n)}])\,\mathcal{G}_{i_{n-j},\ldots,i_n} \\ &= E_{n-j-1}((q^{-2(i_{n-j-1}+i_{n-j}+\cdots+i_n)+2}, q^{-2(i_{n-j-1}+i_{n-j}+\cdots+i_n)}])E_{n-j}((q^{-2(i_{n-j}+\cdots+i_n)+2}, q^{-2(i_{n-j}+\cdots+i_n)}]) \\ &\quad \cdots\; E_n((q^{-2i_n+2}, q^{-2i_n}])\mathcal{H}_n. \end{aligned} \tag{154}$$

5. Para $l = 0, \ldots, j$, las acciones de z_{n-l} y Q_{n-l} sobre $\mathcal{G}_{i_{n-j-1},i_{n-j},\ldots,i_n} \subset \mathcal{G}_{i_{n-j},\ldots,i_n}$ descritas en (148)–(150) permanecen inalterables, la única diferencia es la aparición de un nuevo subíndice i_{n-j-1} el cual extiende la notación de los vectores en el espacio de Hilbert y este es el único cambio en la fórmula de las acciones.

Para este fin, observemos que 1) se sigue inmediatamente de (151) y Lema 4. Dado que la igualdad $\sqrt{Q_{n-j}}^{-1}E_{n-j}(M_j) = E_{n-j}(M_j)\sqrt{Q_{n-j}}^{-1}E_{n-j}(M_j)$ se cumple por teorema espectral (cf. (105)) y dado que el operador acotado $\sqrt{Q_{n-j}}^{-1}E_{n-j}(M_j)$ conmuta con las proyecciones $E_{n-l}(M_l)$ para todo $l = 0, \ldots, j$ y para cualquier conjuntos Borel medibles $M_j, M_l \subset \mathbb{R}$ por Definición 22.(ii), concluimos de la Ecuación (151) y el Lema 4 que $w_{n-j-1} := \sqrt{Q_{n-j}}^{-1}z_{n-j-1}$ también reduce al espacio $\mathcal{G}_{i_{n-j},\ldots,i_n}$. Ahora la Definición 22.(vi) nos permite aplicar el Lema 2. Entonces, módulo equivalencia unitaria, $\mathcal{G}_{i_{n-j},\ldots,i_n}$ se descompone en la suma ortogonal de subespacios de Hilbert idénticos

$$\mathcal{G}_{i_{n-j},\ldots,i_n} = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} (\mathcal{G}_{i_{n-j},\ldots,i_n})_k, \qquad (\mathcal{G}_{i_{n-j},\ldots,i_n})_k = (\mathcal{G}_{i_{n-j},\ldots,i_n})_1 \tag{155}$$

y la Ecuación (103) implica

$$w_{n-j-1}(h_{i_{n-j},\ldots,i_n})_k = \sqrt{q^{-2k}-1}\,(h_{i_{n-j},\ldots,i_n})_{k+1}, \tag{156}$$

donde $(h_{i_{n-j},\ldots,i_n})_k \in (\mathcal{G}_{i_{n-j},\ldots,i_n})_k$.

Ahora consideremos la función acotada medible dada por

$$f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(t) := q^{i_{n-j}+\cdots+i_n} \sqrt{t}\,\chi_{(q^{-2(i_{n-j}+\cdots+i_n)+2}\,,\,q^{-2(i_{n-j}+\cdots+i_n)}]}(t).$$

Se sigue de (150) que $f(Q_{n-j}) = A_n$ sobre $\mathcal{G}_{i_{n-j},\dots,i_{n-1},i_n} = \mathcal{G}_{1,\dots,1,0}$. Además, la restricción de $\sqrt{Q_{n-j}}^{-1}$ a $\mathcal{G}_{i_{n-j},\dots,i_{n-1},i_n}$ da lugar a un operador acotado el cual conmuta obviamente con $f(Q_{n-j})$. De la Definición 22.(iv), obtenemos sobre $\mathcal{G}_{i_{n-j},\dots,i_{n-1},i_n}$ que

$$A_n w^*_{n-j-1} w_{n-j-1} = f(Q_{n-j}) z^*_{n-j-1} Q^{-1}_{n-j} z_{n-j-1} \subset z^*_{n-j-1} Q^{-1}_{n-j} z_{n-j-1} f(Q_{n-j}) = w^*_{n-j-1} w_{n-j-1} A_n. \tag{157}$$

Como es bien sabido, (157) implica que los espacios propios $(\mathcal{G}_{i_{n-j},\dots,i_n})_k$ de $w^*_{n-j-1} w_{n-j-1}$ correspondientes a los valores propios $q^{-2k} - 1$ se reducen por A_n ya que para todo $(h_{i_{n-j},\dots,i_n})_k \in (\mathcal{G}_{i_{n-j},\dots,i_n})_k$ se cumple

$$w^*_{n-j-1} w_{n-j-1} A_n (h_{i_{n-j},\dots,i_n})_k = A_n w^*_{n-j-1} w_{n-j-1} (h_{i_{n-j},\dots,i_n})_k = (q^{-2k} - 1) A_n (h_{i_{n-j},\dots,i_n})_k.$$

De esta manera, $A_n(h_{i_{n-j},\dots,i_n})_k$ pertenece nuevamente a $(\mathcal{G}_{i_{n-j},\dots,i_n})_k$. Además usando el hecho que $A_n w_{n-j-1} \subset w_{n-j-1} A_n$ como en (157), se obtiene de (156) que

(158)

$$A_n(h_{i_{n-j},\dots,i_n})_k = \prod_{m=1}^{k-1} \frac{1}{\sqrt{q^{-2m}-1}} A_n w^{k-1}_{n-j-1} (h_{i_{n-j},\dots,i_n})_1 = \prod_{m=1}^{k-1} \frac{1}{\sqrt{q^{-2m}-1}} w^{k-1}_{n-j-1} A_n (h_{i_{n-j},\dots,i_n})_1 = (A_n(h_{i_{n-j},\dots,i_n})_1)_k$$

para todo $(h_{i_{n-j},\dots,i_n})_k \in (\mathcal{G}_{i_{n-j},\dots,i_n})_k$. Luego la acción de A_n sobre $\mathcal{G}_{i_{n-j},\dots,i_n}$ está completamente determinada por su restricción a $(\mathcal{G}_{i_{n-j},\dots,i_n})_1 = (\mathcal{G}_{i_{n-j},\dots,i_n})_k$. Por un ligero abuso de notación, denotaremos esta restricción nuevamente por A_n.

Recordamos que todos los $\mathcal{G}_{i_{n-j},\dots,i_n}$ son isomorfos, es decir, $\mathcal{G}_{i_{n-j},\dots,i_n} = G_{1,\dots,1,0}$. Cambiando en (155) el índice de la suma k por i_{n-j-1}, definiendo $\mathcal{G}_{i_{n-j-1},i_{n-j},\dots,i_n} := (\mathcal{G}_{i_{n-j},\dots,i_n})_{i_{n-j-1}}$ y $h_{i_{n-j-1},i_{n-j},\dots,i_n} := (h_{i_{n-j},\dots,i_n})_{i_{n-j-1}}$, obtenemos que $\mathcal{G}_{i_{n-j-1},i_{n-j},\dots,i_n} = (\mathcal{G}_{1,\dots,1,0})_1 = \mathcal{G}_{1,1,\dots,1,0}$. En esta notación y aplicando (156), (150) y (158), la acción de $z_{n-j-1} = \sqrt{Q_{n-j}} w_{n-j-1}$ puede ser escrita como

$$z_{n-j-1} h_{i_{n-j-1},i_{n-j},\dots,i_n} = \sqrt{Q_{n-j}} w_{n-j-1} h_{i_{n-j-1},i_{n-j},\dots,i_n} = \sqrt{q^{-2i_{n-j-1}} - 1}\, q^{-(i_{n-j}+\cdots+i_n)} (A_n h)_{i_{n-j-1}+1,i_{n-j},\dots,i_n}.$$

Además, el mismo cálculo que nos conduce a (150) muestra que (153) se satisface. Es claro que al tomar la clausura de Q_{n-j-1} de (153) da lugar a un operador autoadjunto. Esto finaliza los pasos 1)–3) del proceso de inducción.

Ahora fijemos $i_{n-j}, \dots, i_n$ y $k \in \mathbb{N}$. De (153), podemos concluir que la restricción de Q_{n-j-1} a $\mathcal{G}_{k,i_{n-j},\dots,i_n} = (\mathcal{G}_{i_{n-j},\dots,i_n})_k$ está dada por $q^{-2(k+i_{n-j}+\cdots+i_n)} A_n^2$, en particular

$$\operatorname{sp}(Q_{n-j-1} \restriction_{\mathcal{G}_{k,i_{n-j},\dots,i_n}}) = q^{-2(k+i_{n-j}+\cdots+i_n)} \operatorname{sp}(A_n^2) \subset [q^{-2(k+i_{n-j}+\cdots+i_n)+2}\,,\, q^{-2(k+i_{n-j}+\cdots+i_n)}],$$

y $q^{-2(k+i_{n-j}+\cdots+i_n)+2}$ no es un valor propio. Entonces

$$\mathcal{G}_{k,i_{n-j},\dots,i_n} \subset E_{n-j-1}((q^{-2(k+i_{n-j}+\cdots+i_n)+2}\,,\, q^{-2(k+i_{n-j}+\cdots+i_n)}])\mathcal{G}_{i_{n-j},\dots,i_n}, \tag{159}$$

donde E_{n-j-1} denota la medida espectral de la Definición 22.(iii). Dado que

$$(q^{-2(k+i_{n-j}+\cdots+i_n)+2},\, q^{-2(k+i_{n-j}+\cdots+i_n)}] \cap (q^{-2(l+i_{n-j}+\cdots+i_n)+2},\, q^{-2(l+i_{n-j}+\cdots+i_n)}] = \emptyset$$

para todo $k, l \in \mathbb{N}$ tal que $k \neq l$, tenemos

$$\mathcal{G}_{i_{n-j},\ldots,i_n} = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{G}_{k,i_{n-j},\ldots,i_n} \subset \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} E_{n-j-1}((q^{-2(k+i_{n-j}+\cdots+i_n)+2},\, q^{-2(k+i_{n-j}+\cdots+i_n)}])\mathcal{G}_{i_{n-j},\ldots,i_n} \subset \mathcal{G}_{i_{n-j},\ldots,i_n}. \tag{160}$$

De (159) y (160), se sigue que

$$\mathcal{G}_{k,i_{n-j},\ldots,i_n} = E_{n-j-1}((q^{-2(k+i_{n-j}+\cdots+i_n)+2},\, q^{-2(k+i_{n-j}+\cdots+i_n)}])\mathcal{G}_{i_{n-j},\ldots,i_n}, \tag{161}$$

y ahora insertando (151) en (161), deducimos que (154).

Finalmente, como $h_{i_{n-j-1},i_{n-j},\ldots,i_n} \in \mathcal{G}_{i_{n-j},\ldots,i_n}$, las acciones $z_{n-j}, \ldots, z_n$ y $Q_{n-j}, \ldots Q_n$ están dadas por (148)–(150), actuando solamente sobre los índices $i_{n-j}, \ldots, i_n$. Esto completa el paso de inducción.

Nos resta mostrar que las representaciones del Teorema 17 son bien comportadas. Cálculos directos nos muestran que los operadores satisfacen las relaciones de la Definición 21 sobre D. Del teorema espectral, se sigue que D es un núcleo para Q_j, $|z_j|$ y $|z_j^*|$, y de esta forma también para z_j y z_j^*, para todo $j = 1, \ldots, n$. Luego, la Definición 22.(iii) se sigue de (151). Lo anterior, junto con el hecho de que el operador A_n actuando sobre $\mathcal{G}_{1,\ldots,1,0}$ es el mismo para todo Q_j, implica también la Definición 22.(ii). De las fórmulas en el Teorema 17, es obvio que los espacios de Hilbert $\mathcal{G}_{i_1,\ldots,i_n}$ se reducen por las acciones de los operadores autoadjuntos Q_k, $|z_j|$ y $|z_j^*|$ y que las restricciones de estos operadores a $\mathcal{G}_{i_1,\ldots,i_n}$ son acotados y conmutan. Usando el teorema espectral, fácilmente observamos que $\mathrm{dom}(|z_j^*|) = \mathrm{dom}(|z_j|)$ y además

$$\mathrm{dom}(|z_j|) = \{ \bigoplus_{i_1,\ldots,i_{n-1}\in\mathbb{N}} \bigoplus_{i_n\in\mathbb{Z}} h_{i_1,\ldots,i_n} \in \mathcal{H}_n : \sum_{i_1,\ldots,i_{n-1}\in\mathbb{N}} \sum_{i_n\in\mathbb{Z}} \||z_j|h_{i_1,\ldots,i_n}\|^2 < \infty\}.$$

Como $\||z_j|f(Q_k)h_{i_1,\ldots,i_n}\| = \|f(Q_k)|z_j|h_{i_1,\ldots,i_n}\| \leq \|f\|_\infty \||z_j|h_{i_1,\ldots,i_n}\|$, podemos concluir que

$$\mathrm{dom}(f(Q_k)z_j) = \mathrm{dom}(|z_j|) \subset \mathrm{dom}(|z_j|f(Q_k)) = \mathrm{dom}(z_j f(Q_k))$$

y análogamente $\mathrm{dom}(f(Q_k)z_j^*) \subset \mathrm{dom}(z_j^* f(Q_k))$ para todo $j, k \in \{1, \ldots, n\}$ y para toda función medible acotada f sobre $[0, \infty)$. Las relaciones de la Definición 22.(iv) pueden ser ahora verificadas directamente aplicando ambos lados a vectores $h \in \mathrm{dom}(|z_j|)$. Similarmente, usando

$$\| \sqrt{Q_{j+1}}^{-1} z_j h_{i_1,\ldots,i_n}\| = \|z_j \sqrt{Q_{j+1}}^{-1} h_{i_1,\ldots,i_n}\| = \||z_j| \sqrt{Q_{j+1}}^{-1} h_{i_1,\ldots,i_n}\|,$$

Deducimos que $\mathrm{dom}(\sqrt{Q_{j+1}}^{-1} z_j) = \mathrm{dom}(z_j \sqrt{Q_{j+1}}^{-1}) = \mathrm{dom}(|z_j| \sqrt{Q_{j+1}}^{-1})$ y que las ecuaciones de operadores dadas en la Definición 22.(vi) se satisfacen. Por último, z_n es un operador q-normal por la Proposición 11. □

2. C*-álgebra de funciones.

Nuestro objetivo ahora será definir una C*-álgebra $C_0(\mathbb{C}_q^n)$ de funciones continuas que se anulen al infinito sobre el plano complejo cuántico n-dimensional. Como fue hecho en los dos capítulos anteriores (ver también [**4**] y [**6**]), el primer paso es realizar las representaciones sobre un L_2-espacio tal que los operadores autoadjuntos Q_k y $|z_j|$ actúan como operadores multiplicación.

Teorema 18. *Las *-representaciones de $O(\mathbb{C}_q^n)$ en el Teorema 17 son unitariamente equivalentes a una suma directa de representaciones de la siguiente forma: Hagamos $I_q := \{q^{-m} : m \in \mathbb{N}\}$ además sea $X_{q,k} := I_q^{k-1} \times [0,\infty) = I_q \times \ldots \times I_q \times [0,\infty)$. Sea ν una medida de Borel q-invariante sobre $[0,\infty)$, es decir, $\nu(qM) = \nu(M)$ para todo conjunto de Borel $M \subset [0,\infty)$. Consideremos la medida producto $\mu := \delta \otimes \cdots \otimes \delta \otimes \nu$ sobre $X_{q,k}$, donde δ denota la medida de conteo sobre I_q, y definamos $D_k := \{f \in \mathcal{L}_2(X_{q,k},\mu) : \mathrm{supp}(f) \subset I_q^{k-1} \times (0,\infty)$ es compacto$\}$. Para $k \in \{1,\ldots,n\}$, los operadores $z_1,\ldots,z_n$ actúan sobre $h \in D_k$ por*

$$z_{k+1} = \ldots = z_n = 0 \qquad si \qquad k < n, \tag{162}$$

$$(z_k h)(t_1,\ldots,t_{k-1},t_k) = qt_k h(t_1,\ldots,t_{k-1},qt_k), \tag{163}$$

$$(z_j h)(t_1,...,t_j,...,t_k) = \sqrt{(qt_j)^2 - 1}\, t_{j+1}\cdots t_k h(t_1,...,qt_j,...,t_k), \qquad j < k. \tag{164}$$

Demostración. Es suficiente asumir que $k = n$, los otros casos se siguen al considerar $z_{k+1} = \ldots = z_n = 0$ y reemplazando n por k. Dada una representación de $O(\mathbb{C}_q^n)$ sobre $\mathcal{H}_n$, observamos que z_n actúa sobre

$$\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{G}_{i_1,\ldots,i_{n-1},j} \cong \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{G}_{1,\ldots,1,j} =: \mathcal{K}$$

como un operador q-normal. Ha sido mostrado en el Teorema 7 (ver también [**4**, Teorema 2.3]) que la representación de $z_n = U|z_n|$ sobre $\mathcal{K}$ es unitariamente equivalente a una suma directa de representaciones sobre $\mathcal{L}([0,\infty),\nu) \cong \mathcal{K}$ las cuales satisfacen

$$(|z_n|f)(t) = tf(t), \qquad (Uf)(t) = f(qt), \qquad (z_n f)(t) = qtf(qt), \tag{165}$$

donde ν denota una medida de Borel q-invariante sobre $[0,\infty)$. Notar que la q-invarianza de ν implica el aspecto unitario de U. Además, $\mathcal{G}_{1,\ldots,1,j}$ puede ser tomado como $\mathcal{L}_2((q^{j+1},q^j]),\nu)$ y el isomorfismo $\mathcal{G}_{1,\ldots,1,j} \cong \mathcal{G}_{1,\ldots,1,0}$ corresponde a la restricción de U^j a este subespacio, es decir, para todo $j \in \mathbb{Z}$, la aplicación $U^j : \mathcal{L}_2((q^{j+1},q^j]),\nu) \to \mathcal{L}_2((q,1]),\nu)$ es un isomorfismo unitario.

Dado que I_q es un conjunto contable discreto y δ es la medida de contar, obtenemos un isomorfismo unitario explícito $\mathcal{L}_2(I_q,\delta) \cong \ell_2(\mathbb{N})$ al escoger la base ortonormal $\{\chi_m : m \in \mathbb{N}\}$ de $\mathcal{L}_2(I_q,\delta)$, donde $\chi_m := \chi_{\{q^{-m}\}}$ denota la función característica del conjunto unitario $\{q^{-m}\}$. El operador $S : \mathcal{L}_2(I_q,\delta) \to \mathcal{L}_2(I_q,\delta)$ dado por $(Sf)(t) := f(qt)$ se convierte sobre los elementos de la base en el operador desplazamiento o shift

$$(S\chi_m)(t) = \chi_{\{q^{-m}\}}(qt) = \chi_{\{q^{-m-1}\}}(t) = \chi_{m+1}(t). \tag{166}$$

Además, $\{\chi_m : m \in \mathbb{N}\}$ es una base de vectores propios del operador multiplicación T_φ, donde $T_\varphi : \mathcal{L}_2(I_q, \delta) \to \mathcal{L}_2(I_q, \delta)$, $(Tf)(t) = \varphi(t)f(t)$ para todo $\varphi : I_q \to \mathbb{C}$. Más precisamente,

$$(T_\varphi\chi_m)(t) = \varphi(t)\chi_{\{q^{-m}\}}(t) = \varphi(q^{-m})\chi_{\{q^{-m}\}}(t) = \varphi(q^{-m})\chi_m(t), \tag{167}$$

ya que el soporte de χ_m es el conjunto unitario $\{q^{-m}\}$. Luego tenemos la siguiente equivalencia unitaria entre espacios de Hilbert,

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_n &= \bigoplus_{i_1,\dots,i_{n-1}\in\mathbb{N}} \bigoplus_{i_n\in\mathbb{Z}} \mathcal{G}_{i_1,\dots,i_{n-1},i_n} = \bigoplus_{i_1,\dots,i_{n-1}\in\mathbb{N}} \Big(\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{G}_{1,\dots,1,j}\Big) \cong \underbrace{\ell_2(\mathbb{N})\bar\otimes\cdots\bar\otimes\ell_2(\mathbb{N})}_{(n-1)\text{-veces}}\bar\otimes\mathcal{K} \\ &\cong \mathcal{L}_2(I_q,\delta)\bar\otimes\cdots\bar\otimes\mathcal{L}_2(I_q,\delta)\bar\otimes\mathcal{L}_2([0,\infty),\nu) \\ &\cong \mathcal{L}_2(I_q\times\cdots\times I_q\times[0,\infty), \delta\otimes\cdots\otimes\delta\otimes\nu) =: \mathcal{L}_2(X_{q,n},\mu),\end{aligned} \tag{168}$$

donde

$$\mathcal{G}_{i_1,\dots,i_{n-1},i_n} \cong \chi_{i_1}\otimes\cdots\otimes\chi_{i_{n-1}}\otimes\mathcal{L}_2((q^{i_n+1}, q^{i_n}]),\nu) \cong \mathcal{L}_2((q,1]),\nu),$$

y el último isomorfismo es obtenido al multiplicar las funciones del producto tensorial algebraico. Dado un isomorfismo unitario $\mathcal{G}_{1,\dots,1,0} \ni h \mapsto \hat h \in \mathcal{L}_2((q,1]),\nu)$ tal que

$$(\widehat{|z_n|h})(t) = \widehat{A_n h}(t) = t\hat h(t), \tag{169}$$

como en (165) y el párrafo siguiente a este, el isomorfismo unitario (168) está determinado por

$$\mathcal{G}_{i_1,\dots,i_{n-1},i_n} \ni h_{i_1,\dots,i_{n-1},i_n} \longmapsto \chi_{i_1}\cdots\chi_{i_{n-1}}U^{-i_n}\hat h =: \hat h_{i_1,\dots,i_{n-1},i_n} \in \mathcal{L}_2(X_{q,n},\mu) \tag{170}$$

y las acciones de $z_1,\dots,z_n$ en (163) y (164) (con $k=n$) se traducen sobre $\mathcal{L}_2(X_{q,n},\mu)$ como sigue:

$$\begin{aligned}(z_n\hat h_{i_1,\dots,i_{n-1},i_n})(t_1,\dots,t_{n-1},t_n) &= z_n(\chi_{i_1}(t_1)\cdots\chi_{i_{n-1}}(t_{n-1})(U^{-i_n}\hat h)(t_n)) \\ &= qt_n\chi_{i_1}(t_1)\cdots\chi_{i_{n-1}}(t_{n-1})(U^{-i_n}\hat h)(qt_n) \\ &= q^{i_n}\chi_{i_1}(t_1)\cdots\chi_{i_{n-1}}(t_{n-1})U^{-i_n+1}(t_n\hat h(t_n)) \\ &= q^{i_n}\chi_{i_1}(t_1)\cdots\chi_{i_{n-1}}(t_{n-1})U^{-i_n+1}(\widehat{A_n h}(t_n)) \\ &= q^{i_n}(\widehat{A_n h})_{i_1,\dots,i_{n-1},i_n-1}(t_1,\dots,t_{n-1},t_n),\end{aligned}$$

donde hemos usado (170) en la primera y la última igualdad, (165) en la segunda y tercera, y (169) en la cuatra. Análogamente, aplicando de manera adicional (166) y (167), las formulas de (164) se convierten en

$$(z_j\hat{h}_{i_1,\dots,i_j,\dots,i_{n-1},i_n})(t_1,\dots,t_j,\dots,t_{n-1},t_n) = \sqrt{(qt_j)^2-1}\,t_{j+1}\cdots t_n\chi_{i_1}(t_1)\cdots\chi_{i_j}(qt_j)\cdots\chi_{i_{n-1}}(t_{n-1})(U^{-i_n}\hat{h})(t_n)$$
$$= \chi_{i_1}(t_1)\cdots(\sqrt{(qt_j)^2-1}\,\chi_{i_j+1}(t_j))\cdots(t_{n-1}\chi_{i_{n-1}}(t_{n-1}))(q^{i_n}U^{-i_n}(t_n\hat{h}(t_n)))$$
$$= \sqrt{q^{-2i_j}-1}\,q^{-(i_{j+1}+\cdots+i_{n-1})+i_n}\chi_{i_1}(t_1)\cdots\chi_{i_j+1}(t_j)\cdots\chi_{i_{n-1}}(t_{n-1})U^{-i_n}(\widehat{A_n h}(t_n))$$
$$= \sqrt{q^{-2i_j}-1}\,q^{-(i_{j+1}+\cdots+i_{n-1})+i_n}(\widehat{A_n h})_{i_1,\dots,i_j+1,\dots,i_{n-1},i_n}(t_1,\dots,t_j,\dots,t_{n-1},t_n).$$

Finalmente reemplazando el último índice i_n por $-i_n$ se muestra que las representaciones dadas en (162)–(164) son unitariamente equivalentes a las representaciones dadas en el Teorema 17.

Para finalizar la prueba, nos queda por mostrar que el dominio D_n del Teorema 18 es isomorfo al D_n del Teorema 17. Esto puede ser fácilmente visto observando que

$$\mathcal{G}_{i_1,\dots,i_{n-1},i_n} \cong \{f\restriction_{\{q^{-i_1}\}\times\dots\times\{q^{-i_{n-1}}\}\times(q^{i_n+1},q^{i_n}]} : f \in \mathcal{L}_2(X_{q,n},\mu)\},$$

y $\operatorname{supp}(f\restriction_{\{q^{-i_1}\}\times\dots\times\{q^{-i_{n-1}}\}\times(q^{i_n+1},q^{i_n}]}) \subset \{q^{-i_1}\}\times\ldots\times\{q^{-i_{n-1}}\}\times[q^{i_n+1},q^{i_n}]$ es compacto. Además, si $f\in D_n\subset\mathcal{L}_2(X_{q,n})$, su soporte está contenido en una unión finita de tales conjuntos. □

Como un procedimiento análogo al expuesto en los capítulos anteriores, la idea básica detrás de la definición de $C_0(\mathbb{C}^n_q)$ es asociar una *-álgebra de operadores acotados a las *-representaciones bien comportadas de $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n_q)$ tal que su contraparte clásica sea densa en $C_0(\mathbb{C}^n)$. Al tomar sumas directas y al aplicar el Teorema 18, no existe pérdida de generalidad si consideramos solamente representaciones sobre $\mathcal{L}_2(X_{q,k},\mu)$ como las descritas en (162)–(164).

Nuestro punto de inicio es la descomposición polar $z_j = S_j|z_j|$, donde S_j y $|z_j|$ actúan sobre $D_n\subset\mathcal{L}_2(X_{q,n},\mu)$ por

$$(S_jh)(t_1,\dots,t_j,\dots,t_n) = h(t_1,\dots,qt_j,\dots,t_n),\qquad j=1,\dots,n, \tag{171}$$

$$(|z_n|h)(t_1,\dots,t_{n-1},t_n) = t_nh(t_1,\dots,t_{n-1},t_n), \tag{172}$$

$$(|z_j|h)(t_1,\dots,t_j,\dots,t_n) = \chi_{I_q}(t_j)\sqrt{t_j^2-1}\,t_{j+1}\cdots t_nh(t_1,\dots,t_j,\dots,t_n),\quad j<n. \tag{173}$$

Aquí estamos considerando la función característica χ_{I_q} tal que el valor $\chi_{I_q}(q^kt_j)\sqrt{(q^kt_j)^2-1}$ permanece bien definido para todo $k\in\mathbb{Z}$ y todo $t_j\in I_q$. Obviamente, $|z_1|,\dots,|z_n|$ son operadores simétricos que conmutan sobre D_n. Para cualquier polinomio $p\in\mathbb{C}[X_1,\dots,X_n]$, la acción de $p(|z_1|,\dots,|z_n|)$ sobre D_n está dada por multiplicación con la función continua

$$\hat{p}(t_1,\dots,t_n) := p(\chi_{I_q}(t_1)\sqrt{t_1^2-1}\,t_2\cdots t_n,\dots,\chi_{I_q}(t_{n-1})\sqrt{t_{n-1}^2-1}\,t_n,t_n)\in C(X_{q,n}). \tag{174}$$

Como las funciones en D_n tienen soporte compacto, la acción de $\hat{p}$ sobre D_n está bien definida y deja a D_n invariante. Recordemos que U en (165) es un operador unitario y S en (166) actúa como un desplazamiento unilateral con $\ker(S^*) = \chi_1 = \chi_{\{q^{-1}\}}$. Debido a estas observaciones y a la Ecuación (171), obtenemos las siguientes relaciones de conmutación sobre D_n

$$S_n S_n^* = S_n^* S_n = 1, \qquad S_j^* S_j = 1, \quad S_j S_j^* = 1 - \chi_{\{q^{-1}\}}(t_j), \quad j < n, \tag{175}$$

$$S_j S_k = S_k S_j, \qquad S_j S_k^* = S_k^* S_j, \qquad j \neq k, \tag{176}$$

$$S_j\, \hat{p}(t_1, ..., t_j, ..., t_n) = \hat{p}(t_1, ..., qt_j, ..., t_n) S_j, \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{177}$$

Las relaciones restantes se obtienen al tomar adjuntos. Notar que $1 - \chi_{\{q^{-1}\}}(t_j)$ pertence a $C(X_{q,n})$. Para simplificar la notación, para $l \in \mathbb{Z}$ hacemos

$$S^{\# l} := \begin{cases} S^l, & l \geq 0\,, \\ S^{*l}, & l < 0\,. \end{cases}$$

Luego, usando las relaciones (174) – (177), se muestra que la acción de cualquier polinomio $p(z_1, \ldots, z_n)$ sobre D_n puede ser escrita como

$$p(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{\text{finito}} p_{l_1,\ldots,l_n}(t_1, \ldots, t_n) S_1^{\# l_1} \cdots S_n^{\# l_n}\,, \qquad p_{l_1,\ldots,l_n} \in C(X_{q,n}). \tag{178}$$

Las ecuaciones (174) y (178) serán la principal motivación para la definición de $C_0(\mathbb{C}_q^n)$. Para explicar esto, recordemos y resumamos el caso clásico. La descomposición polar $z_j = S_j\,|z_j|$ corresponde a la representación de Euler $z_j = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_j}|z_j|$ de un número complejo $z_j \in \mathbb{C}$. Dados $l_1, \ldots, l_n \in \mathbb{Z}$ y $f_{l_1,\ldots,l_n} \in C(\mathbb{R}_+^n)$, donde $\mathbb{R}_+ := [0, \infty)$, la asignación

$$\mathbb{C}^n \ni (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}|z_1|, \ldots, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_n}|z_n|) \longmapsto f_{l_1,\ldots,l_n}(|z_1|, \ldots, |z_n|)\mathrm{e}^{\mathrm{i}l_1\theta_1} \cdots \mathrm{e}^{\mathrm{i}l_n\theta_n} \in \mathbb{C} \tag{179}$$

define un elemento en $C_0(\mathbb{C}^n)$ si y solo si la función $f_{l_1,\ldots,l_j,\ldots,l_n}(|z_1|, ..., 0, ..., |z_n|)\mathrm{e}^{\mathrm{i}l_1\theta_1} \cdots \mathrm{e}^{\mathrm{i}l_j\theta_j} \cdots \mathrm{e}^{\mathrm{i}l_n\theta_n}$ no dependen de θ_j y $f_{l_1,\ldots,l_n} \in C_0(\mathbb{R}_+^n)$. De esta forma necesitamos que

$$f_{l_1,\ldots,l_j,\ldots,l_n}(|z_1|, ..., 0, ..., |z_n|) = 0 \quad \text{para} \quad l_j \neq 0. \tag{180}$$

Por otro lado, tenemos por el Teorema 9 (Stone-Weierstraß) que las funciones complejas en (179) que satisfacen la condición (180) con $f_{l_1,\ldots,l_n} \in C_0(\mathbb{R}_+^n)$, generan la C*-álgebra $C_0(\mathbb{C}_q^n)$. Por esta razón, tomaremos operadores análogos a los obtenidos de las representaciones en el Teorema 18 como generadores de $C_0(\mathbb{C}_q^n)$.

Retornando al caso no conmutativo, dado $f \in C_0(\mathbb{R}_+^n)$, podemos interpretar al operador acotado $\pi_k(f)$ actuando sobre $\mathcal{L}_2(X_{q,k}, \mu)$ por multiplicación con la función

$$\pi_k(f)(t_1, ..., t_k, ..., t_n) := f(\sqrt{t_1^2 - 1}\, t_2 \cdots t_k\,, ..., \sqrt{t_{k-1}^2 - 1}\, t_k\,, t_k, 0, ..., 0), \tag{181}$$

como una representación de $f(|z_1|, \ldots, |z_n|)$, ver (174). Para $k = 0$, definimos $\pi_0(f) \in B(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}$ por

$$\pi_0(f)(t_1, ..., t_n) := f(0, ..., 0). \tag{182}$$

Además, para todo $h \in \mathcal{L}_2(X_{q,k}, \mu)$, hacemos

$$(\pi_k(S_j)h)(t_1, ..., t_j, ..., t_k) := h(t_1, ..., qt_j, ..., t_k), \quad j \le k, \quad \pi_k(S_j) = 0, \quad j > k, \tag{183}$$

y $\pi_k(S_j^*) := \pi_k(S_j)^*$. Finalmente para todo $l_1, \ldots, l_n \in \mathbb{Z}$ y $f_{l_1,...,l_n} \in C_0(\mathbb{R}^n_+)$ que satisfacen (180), definimos

$$\pi_k(f_{l_1,...,l_n} S_1^{\# l_1} \cdots S_n^{\# l_n}) := \pi_k(f_{l_1,...,l_n})\pi_k(S_1)^{\# l_1} \cdots \pi_k(S_n)^{\# l_n} \tag{184}$$

Notamos que bajo la condición (180), $\pi_k(S_j) = 0$ para $j > k$ es consistente con (181) y (182).

Ahora recordamos que una C*-álgebra generada por operadores de multiplicación sobre un L_2-espacio no depende de la medida, sino solamente del soporte de esta. De forma mas precisa, asumiendo que μ_j es una medida de Borel sobre subconjuntos cerrados $X_j \subset \mathbb{R}$ y que $Y_j := \mathrm{supp}(\mu_j)$, se tiene que la C*-álgebra generada por una familia de operadores multiplicación $\{\pi(f_\alpha) : \alpha \in J\}$, donde $f_\alpha \in C_0(X_1 \times \cdots \times X_k)$ y

$$(\pi(f_\alpha)h)(x_1, ..., x_k) := f_\alpha(x_1, ..., x_k)h(x_1, ..., x_k), \quad h \in \mathcal{L}(X_1 \times ... \times X_k, \mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_k),$$

es isomorfa a $C_0(Y_1 \times ... \times Y_k)$ si y solo si la familia $\{f_\alpha : \alpha \in J\}$ separa los puntos de $Y_1 \times ... \times Y_k$. Entonces para obtener algo similar a una C*-álgebra universal (cf. [**4**] y [**6**]), nosotros debemos asumir que la medida ν en el Teorema 18 satisface $\mathrm{supp}(\nu) = [0, \infty)$.

Finalmente, recordamos que las representaciones de $\mathcal{O}(\mathbb{C}^k_q)$ en el Teorema 17 se descomponen en una suma ortogonal de representaciones sobre $\ker(|z_k|)$ y $\ker(|z_k|)^\perp$. Además, el operador $|z_k|$ es invertible sobre $D_k \subset \ker(|z_k|)^\perp$. Estas representaciones pueden ser interpretadas como funciones representadas sobre conjuntos disjuntos $\{(z_1, ..., z_k) \in \mathbb{C}^k_q : z_k = 0\} = \mathbb{C}^{k-1}_q \times \{0\}$ así como $\{(z_1, ..., z_k) \in \mathbb{C}^k_q : z_k \neq 0\} = \mathbb{C}^k_q \setminus (\mathbb{C}^{k-1}_q \times \{0\})$. Por lo tanto, para obtener una C*-álgebra que represente a las funciones continuas sobre todo el plano cuántico $\mathbb{C}^n_q$, debemos considerar la suma ortogonal $\pi_0 \oplus \pi_1 \oplus ... \oplus \pi_n$.

Definición 23. *Sea ν una medida de Borel q-invariante sobre $[0, \infty)$ tal que $\nu((q, 1]) < \infty$ y $\mathrm{supp}(\nu) = [0, \infty)$. Para $k = 1, \ldots, n$, denotemos por $\mathcal{H}_k := \mathcal{L}_2(X_{q,k}, \mu)$ al espacio de Hilbert dado en el Teorema 18 y hagamos $\mathcal{H}_0 = \mathbb{C}$. La C*-álgebra $C_0(\mathbb{C}^n_q)$ de funciones continuas que se anulan en el infinito sobre el plano complejo cuántico n-dimensional, es la C*-subálgebra de $B(\mathcal{H}_0 \oplus \ldots \oplus \mathcal{H}_n)$ generada por el conjunto de operadores*

$$\{(\pi_0 \oplus \pi_1 \oplus ... \oplus \pi_n)(f_{l_1,...,l_n} S_1^{\# l_1} \cdots S_n^{\# l_n}) : \ l_1, \ldots, l_n \in \mathbb{Z}, \ f_{l_1,...,l_n} \in C_0(\mathbb{R}^n_+),$$
$$f_{l_1,...,l_j,...,l_n}(r_1, ..., 0, ..., r_n) = 0 \ si \ l_j \neq 0\},$$

donde $\pi_k(f_{l_1,...,l_n} S_1^{\# l_1} \cdots S_n^{\# l_n})$ está definido por (184).

Como en Teorema 16, se pudo haber dado una definición equivalente al considerar una única representación sobre $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}_+^n, \mu)$, donde

$$\mu = \delta_0 \otimes \cdots \otimes \delta_0 + \nu \otimes \delta_0 \otimes \cdots \otimes \delta_0 + \delta \otimes \nu \otimes \delta_0 \otimes \cdots \otimes \delta_0 + \ldots + \delta \otimes \cdots \otimes \delta \otimes \nu,$$

y δ denotará la extesión de la medida de conteo sobre I_q al intervalo $[0, \infty)$. Sin embargo, las fórmulas para la representación habrián sido más complicadas. Estas hubiesen involucrado varias funciones característica en los argumentos de las funciones $f_{l_1,\ldots,l_j,\ldots,l_n}$, ver Ecuación (134) en la Definición 20. El objetivo siguiente sería someter la C*-álgebra $C_0(\mathbb{C}_q^n)$ al mismo análisis detallado como fue hecho para $C_0(\mathbb{C}_q)$ en el Capítulo 2, pero esto queda como un proyecto posterior al presente trabajo de tesis.

Bibliografía

[1] B. Blackadar, *K-theory for operator algebras*, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[2] M. Chaichian y A. Demichev, *Introduction to quantum groups, World Scientific, Londres, 1996.*

[3] J. Cimpric, Y. Savchuk y K. Schmüdgen, On q-normal operators and quantum complex plane, Transactions of the american mathematical society, **366-1** *(2014), 135–158.*

[4] I. Cohen y E. Wagner, A noncommutative 2-sphere generated by the quantum complex plane, Banach Center Publ. **98** *(2012), 55–66.*

[5] I. Cohen y E. Wagner, C-algebras generated by the n-dimensional quantum complex plane, En preparación.*

[6] I. Cohen y E. Wagner, Function algebras on a 2-dimensional quantum complex plane, J. Phys. Conf. Ser **563** *(2014), 1–11.*

[7] I. Cohen y E. Wagner, K-Theory of the C-algebra generated by q-normal operators, En preparación.*

[8] A. Connes, Noncommutative geometry, Academic Press, San Diego, 1994.

[9] Cullen, H. F., Introduction to general topology, Heath, 1968.

[10] K. Davidson, C-Algebras by examples, American Mathematical Society, Providence, 1996.*

[11] R. Douglas,Banach algebra techniques in operator theory, Springer, Nueva York, 1972.

[12] R. Exel, Circle actions on C-algebras, partial automorphisms, and a generalized Pimsner–Voiculescu exact sequence, J. Funct. Anal.* **122** *(1994), 361–401.*

[13] J. M. Gracia-Bondía, H. Figueroa y J. C. Várilly, Elements of Noncommutative Geometry, Birkhäuser, Boston, 2001.

[14] P. R. Halmos, Measure theory, Springer, Nueva York, 1974.

[15] N. Higson y J. Roe, Analytic K-homology. Oxford University Press, Oxford, 2000.

[16] M. Iamelli, R. Nagel y S. Piazzera, Functional analytic methods for evolution equations, Springer, Nueva York, 2004.

[17] A. U. Klimyk y K. Schmüdgen, Quantum Groups and their Representations, Springer, Nueva York, 1998.

[18] K.-D. Kürsten y E. Wagner, An operator-theoretic approach to invariant integrals on quantum homogeneous $SU_{n,1}$*-spaces, Publ. RIMS Kyoto Univ.* **43** *(2007), 1–37.*

*[19] V. Ostrovskyĭ y Yu. S. Samoĭlenko. Introduction to the Theory of Representations of Finitely Presented *-Algebras. I, Gordon and Breach, Londres, 1999.*

[20] S. Ota, Some classes of q-deformed operators, J. Operator Theory **48** *(2002), 151–186.*

[21] G. Pedersen, Analysis Now, Springer, Nueva York, 1989.

[22] M. Pimsner y D. Voiculescu, Exact sequences for K-groups and Ext-groups of certain cross-product C-algebras, J. Operator Theory* **4** *(1980), 93–118.*

[23] M. Reed y B. Simon, Methods of modern mathematical physics. I. Functional analysis, Academic Press, Inc., Nueva York, 1980.

[24] M. A. Rieffel, C-algebras associated with irrational rotations, Pacific J. Math.* **93** *(1981), 415–429.*

[25] J. Rosenberg y C. Schochet, *The Künneth theorem and the universal coefficient theorem for Kasparov's generalized K-functor, Duke Math. J.* **55** *(1987), 431–474.*

[26] *W. Rudin, Functional analysis, McGraw-Hill, Singapore, 1991.*

[27] *W. Rudin, Principles of mathematical analysis, McGraw-Hill, California, 1953.*

[28] *V. Nazaikinskii, A. Savin y B. Sternin, Elliptic theory and noncommutative geometry. Birkhäuser, 2008.*

[29] *K. Schmüdgen, Strongly commuting selfadjoint operators and commutants of unbounded operator algebras, Proceedings of the AMS* **102** *(1988).*

[30] *K. Schmüdgen, Unbounded self-adjoint operators on Hilbert space, Graduate Texts in Mathematics 265, Springer, Dordrecht, 2012.*

[31] *Wagner, E., Hilbert space representations of some quantum algebras, Disertación Doctoral, Universität Leipzig, 2001.*

[32] *N. E. Wegge-Olsen, K-Theory and C*-Algebras: A Friendly Approach, Oxford University Press Inc., Oxford, 1993.*

[33] *D. P. Williams, Crossed Products of C*-Algebras. Mathematical Surveys and Monographs 134, Providence, Rhode Island, 2007.*

[34] *S. L. Woronowicz, Unbounded Elements Affiliated with C*-Algebras and Non-Compact Quantum Groups, Comm. Math. Phys.* **136** *(1991), 399–432.*

[35] *S. L. Woronowicz, C*-algebras generated by unbounded elements, Reviews in Mathematical Physics,* **7** *(1995), 481–521.*