



**UNIVERSIDAD MICHOACANA DE  
SAN NICOLÁS DE HIDALGO**

*Instituto de Física y Matemáticas*

**SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LAS  
ECUACIONES DE LA MHD RESISTIVA  
APLICADA AL ESTUDIO DE LA  
FORMACIÓN DE JETS EN LA  
ATMÓSFERA SOLAR**

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

**DOCTOR EN CIENCIAS EN EL ÁREA DE  
FÍSICA**

PRESENTA

**JOSÉ JUAN GONZÁLEZ AVILÉS**

ASESOR

**DR. FRANCISCO S. GUZMÁN MURILLO**

MORELIA, MICHOACÁN, AGOSTO DE 2017.







*Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo*  
*Instituto de Física y Matemáticas*



# **Solución numérica de las ecuaciones de la MHD resistiva aplicada al estudio de la formación de jets en la atmósfera solar**

Tesis que presenta:  
**José Juan González Avilés**

**para obtener el grado de Doctor en  
Ciencias en el Área de Física**

Director de tesis:  
**Francisco S. Guzmán Murillo**  
*Doctor en Ciencias en el Área de Física*

*Instituto de Física y Matemáticas, UMSNH.*

Morelia, Michoacán, Agosto de 2017.



*Dedicada especialmente a todas las personas  
que han sido un soporte en mi vida personal y académica*

# Agradecimientos

La elaboración de esta tesis ha requerido de esfuerzo y mucha dedicación por mi parte, pero estoy seguro que no hubiese sido posible sin la cooperación de todas y cada una de las personas que han sido un apoyo muy fuerte en todos los momentos que he vivido durante su realización. Por ello, quiero utilizar este breve espacio para expresarles mis agradecimientos.

Primeramente quiero agradecer de manera especial y sincera a mi asesor, el Dr. Francisco Siddhartha Guzmán Murillo. Su apoyo, experiencia, conocimientos y motivación, me ayudaron para poder culminar con este trabajo. Le agradezco también el haberme facilitado siempre los medios necesarios para poder asistir a los eventos académicos y por darme las herramientas para llevar a cabo todas las actividades propuestas durante el desarrollo de esta tesis.

Le agradezco también al Dr. José Antonio González Cervera, y al Dr. Víctor Hugo de la Luz Rodríguez, por su disposición para revisar esta tesis, haciendo observaciones y correcciones muy precisas que le dieron más solidez. Expreso mi agradecimiento al Dr. Viktor Fedun, por darme la confianza e introducirme al ámbito internacional de la física solar.

Quiero agradecer hoy y siempre a toda mi familia que siempre ha procurado mi bienestar en todos los aspectos de mi vida, lo que ha fortalecido mi desarrollo académico y personal. En especial agradezco a mis padres José y María Rosa, quienes han estado presentes a cada momento, inculcándome su honestidad, dedicación y humildad para seguir consiguiendo más objetivos.

Agradezco a mi novia Ana Isabel, que forma parte de mi vida y comparte su tiempo a mi lado, entendiéndome, apoyándome y dándome motivación en todos los momentos que he pasado durante estos cuatro años del doctorado.

A todos mis compañeros y amigos del Instituto, en especial a los del grupo de Relatividad Numérica (Miguel y Pancho).

Al Instituto de Física y Matemáticas de la UMSNH por haber sido el lugar en donde lleve a cabo el doctorado y por las atenciones prestadas durante todo este tiempo. Agradezco también al Centro de Supercómputo (CESCOM) del Laboratorio Nacional de Clima Espacial (LANCE) por el tiempo de procesamiento en sus instalaciones. Finalmente agradezco a CONACYT por la asignación de la beca.



# Publicaciones

La lista de publicaciones (aceptadas, sometidas y en preparación) asociadas con esta tesis se muestra a continuación:

1. González-Avilés, J. J., & Guzmán, F. S. 2015, MNRAS, **451**, 4819.
2. González-Avilés, J. J., Osorio-Cruz, A., Lora-Clavijo, F. D., & Guzmán, F. S. 2015, MNRAS, **454**, 1871.
3. González-Avilés, J. J., Guzmán, F. S., & Fedun, V. 2017, ApJ, **836**, 24.
4. González-Avilés, J. J., Guzmán, F. S., Fedun, V., Verth, G., Shelyag, S., & Regnier, S. 2017, sometido al ApJ.
5. González-Avilés, J. J., Guzmán, F. S., Fedun, V., Verth, G., Shelyag, S., & Regnier, S. 2017, en preparación.



# Índice General

<b>Agradecimientos</b>	<b>I</b>
<b>Publicaciones</b>	<b>III</b>
<b>Índice General</b>	<b>V</b>
<b>Resumen</b>	<b>IX</b>
<b>Abstract</b>	<b>XI</b>
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2 El Sol y jets en la atmósfera solar</b>	<b>5</b>
2.1 El Sol . . . . .	5
2.2 Eventos transitorios tipo jet en la atmósfera solar . . . . .	8
2.2.1 Espículas tipo II . . . . .	9
<b>3 Magnetohidrodinámica (MHD)</b>	<b>13</b>
3.1 Magnetohidrodinámica ideal . . . . .	13
3.1.1 Ecuaciones de la MHD ideal . . . . .	15
3.1.2 Estructura característica de la MHD ideal . . . . .	19
3.2 Magnetohidrodinámica resistiva . . . . .	23
3.2.1 Ecuaciones de la MHD resistiva . . . . .	23
<b>4 Métodos numéricos</b>	<b>27</b>
4.1 Volúmenes finitos . . . . .	27
4.2 Construcción de flujos numéricos . . . . .	31
4.2.1 HLLC: Harten, Lax, van Leer and Einfeldt . . . . .	31
4.2.2 HLLC: Harten, Lax, van Leer (Contact) . . . . .	32
4.2.3 HLLD: Harten, Lax, van Leer (Discontinuities) . . . . .	39
4.2.4 Resolvedor de Riemann Roe . . . . .	47
4.3 Reconstrucción de variables . . . . .	55

4.3.1	Método de Godunov . . . . .	56
4.3.2	Métodos con aproximación lineal . . . . .	56
4.3.3	WENO: Weighted Essentially Non-Oscillatory . . . . .	59
4.4	Constricción del campo magnético $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ . . . . .	60
4.4.1	Transporte de Flujos Restringidos: Flux-CT . . . . .	61
4.4.2	Limpieza hiperbólica de la divergencia: Método generalizado de los multiplicadores de Lagrange extendidos (EGLM) . . . . .	65
4.5	Evolución en el tiempo . . . . .	73
4.6	Condiciones de frontera . . . . .	75
4.6.1	Condiciones de frontera de flujo saliente . . . . .	75
4.6.2	Condiciones de frontera de flujo entrante . . . . .	76
4.6.3	Condiciones de frontera periódicas . . . . .	76
4.6.4	Condiciones de frontera fijas en el tiempo . . . . .	76
4.7	Positividad de la presión en las simulaciones con MHD ideal y resistiva . . . . .	77
<b>5</b>	<b>Pruebas del código numérico</b>	<b>81</b>
5.1	Pruebas numéricas de la Magnetohidrodinámica ideal clásica . . . . .	82
5.1.1	Pruebas 1D . . . . .	82
5.1.2	Pruebas 2D . . . . .	88
5.2	Pruebas numéricas de la Magnetohidrodinámica resistiva . . . . .	100
5.2.1	Pruebas 1D . . . . .	100
5.2.2	Pruebas 2D . . . . .	101
5.3	Pruebas numéricas asociadas a problemas solares . . . . .	113
5.3.1	Oscilaciones transversales en arcos coronales solares . . . . .	113
5.3.2	Estimación de la contribución de las ondas de Alfvén en el proceso del calentamiento de la corona quieta . . . . .	116
<b>6</b>	<b>Estudio de la formación de jets en la atmósfera solar en 2D</b>	<b>131</b>
6.1	Modelo y métodos numéricos . . . . .	131
6.1.1	El sistema de ecuaciones de la MHD resistiva . . . . .	131
6.1.2	Métodos numéricos . . . . .	133
6.1.3	Modelo de la atmósfera solar . . . . .	133
6.1.4	Modelo del campo magnético . . . . .	134
6.2	Resultados de las simulaciones numéricas . . . . .	136
6.2.1	Configuraciones simétricas . . . . .	136
6.2.2	Configuraciones no simétricas . . . . .	137
6.2.3	Característica de los jets relacionada con la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz . . . . .	140

---

<b>7</b>	<b>Estudio de la formación de jets en la atmósfera solar en 3D</b>	<b>145</b>
7.1	Modelo y métodos numéricos . . . . .	147
7.1.1	El sistema de ecuaciones de la MHD resistiva . . . . .	147
7.1.2	Configuración de campo magnético . . . . .	147
7.1.3	Métodos numéricos . . . . .	149
7.1.4	Modelo de la atmósfera solar . . . . .	150
7.2	Resultados de las simulaciones numéricas . . . . .	151
7.2.1	Vorticidad y efecto Doppler . . . . .	157
<b>8</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>161</b>
<b>A</b>	<b>Obtención de las ecuaciones de la MHD ideal y resistiva</b>	<b>165</b>
A.1	La ecuación de inducción: Conservación del flujo magnético . . . . .	165
A.2	Conservación de carga: Ley de Gauss . . . . .	167
A.3	Conservación de masa: Ecuación de continuidad . . . . .	168
A.4	Conservación de momento: Ecuación de momento . . . . .	170
A.5	Conservación de Energía: La Ecuación de energía . . . . .	174
<b>B</b>	<b>Normalización de las ecuaciones de la MHD ideal y resistiva</b>	<b>177</b>
B.1	Ecuaciones dimensionales de la MHD ideal . . . . .	177
B.1.1	Parámetros de normalización . . . . .	178
B.2	Ecuaciones dimensionales de la MHD resistiva . . . . .	179
	<b>Bibliografía</b>	<b>183</b>



# Resumen

En este trabajo se presenta la implementación numérica de un nuevo código en tres dimensiones cartesianas desarrollado con el objetivo de estudiar escenarios en donde estén involucradas las ecuaciones de la magnetohidrodinámica (MHD) ideal y resistiva. El código se denomina CAFE Newtoniano y es independiente a los existentes actualmente, enfocado al estudio de fenómenos de propagación de ondas de Alfvén y formación de jets en la atmósfera solar. La solución numérica de las ecuaciones de la MHD ideal y resistiva se lleva a cabo usando la discretización en volúmenes finitos en conjunto con los métodos de captura de choques de alta resolución (HRSC, por sus siglas en inglés), los cuales incluyen aproximadores de Riemann para calcular los flujos y reconstructores de variables en las intercelas numéricas. En este trabajo se implementan los resolvedores de Riemann *HLL*, *HLLC*, *HLLD* y *Roe*, así como los reconstructores *Godunov*, *MINMOD*, *MC* y *WENO5*. Para evolucionar en el tiempo las ecuaciones se usa el método de líneas (MoL, por sus siglas en inglés) con un integrador Runge-Kutta de tercer orden.

Para probar la capacidad del código de resolver y lidiar con diferentes configuraciones y escenarios físicos similares a los de la atmósfera solar, en donde existen choques, discontinuidades y campos magnéticos dominantes sobre la presión del gas, se presentan diversas pruebas numéricas en una y dos dimensiones para las ecuaciones de la MHD ideal y resistiva. Finalmente, por medio de simulaciones numéricas, se muestra que los jets con características de espículas tipo II pueden formarse como resultado de la reconexión magnética en escenarios con resistividad magnética y configuraciones de campo magnético realistas en dos y tres dimensiones.

*Palabras clave:* Magnetohidrodinámica (MHD), reconexión magnética, métodos numéricos, atmósfera solar, campos magnéticos.



# Abstract

This thesis presents the numerical implementation of a new code in three cartesian dimensions developed with the objective of studying scenarios involving the ideal and resistive magnetohydrodynamic (MHD) equations. The code is called Newtonian CAFE and is independent to the existing at the moment, it is focused to the study of phenomena of propagation of Alfvén waves and formation of jets in the solar atmosphere. The numerical solution of the ideal and resistive MHD equations is carried out using finite volume discretization in conjunction with high resolution shock capturing methods (HRSC), which include approximate Riemann solvers to calculate the fluxes and reconstructors of variables in the numerical intercells. In this work, the Riemann solvers *HLLE*, *HLLC*, *HLLD* and *Roe* are implemented, as well as the *Godunov*, *MINMOD*, *MC* and *WENO5* reconstructors. To evolve the equations in time is used the method of lines (MoL) with a third order Runge-Kutta integrator.

To test the ability of the code to solve and deal with different configurations and physical scenarios similar to those of the solar atmosphere, where there are shocks, discontinuities and dominating magnetic fields over gas pressure, several numerical tests are performed in one and two dimensions for the ideal and resistive MHD equations. Finally, using numerical simulations, it is shown that jets with characteristics of type II spicules can be formed as a result of magnetic reconnection in scenarios with magnetic resistivity and realistic magnetic field configurations in two and three dimensions.



# Capítulo 1

## Introducción

El Sol es uno de los objetos astrofísicos más relevantes para la humanidad. Tiene un impacto directo sobre la Tierra, la vida y la sociedad. Interactúa con la Tierra de muchas formas, por ejemplo, mediante el viento solar y las eyecciones de masa coronal (CMEs, por sus siglas en inglés) que son expulsadas por el Sol hacia el medio interplanetario, las CMEs son nubes gigantes de gas ionizado caliente conocido como plasma, el cual se interpreta como un medio eléctricamente neutro de partículas positivas y negativas “libres”, es decir, de carga total aproximadamente cero. Las CMEs se impactan con frecuencia sobre la Tierra causando daños a los satélites en órbita, incluso induciendo grandes aumentos de potencia en las redes eléctricas de los suministros de energía que han dejado a millones de hogares sin electricidad. Debido a la dinámica magnética que hay en la atmósfera del Sol y los efectos como las CMEs que tiene sobre el clima espacial, es importante entender la interacción entre la Tierra y el Sol y el ambiente espacial. Además, la atmósfera solar es un laboratorio natural en donde se puede estudiar el plasma bajo condiciones de temperaturas altas del orden de millones de grados Kelvin y configuraciones de campo magnético muy complejas que no se pueden alcanzar en un laboratorio sobre la Tierra, pudiendo obtener información sobre los procesos fundamentales entre los que se encuentran los eventos transitorios tipo jet.

Los fenómenos observados en el Sol cambian según la distancia a su centro. La parte central del Sol está formada por el núcleo, que es donde se llevan a cabo las reacciones de fusión nuclear, y tal región es la fuente de energía del Sol y el resto del material en forma de plasma que está sobre el núcleo transporta energía hacia la fotosfera y la atmósfera superior. Esta tesis se enfoca en la atmósfera solar, que a menudo se describe como una región formada por varias capas verticalmente estratificadas, en donde la capa más baja es la fotosfera. Arriba de la fotosfera, hay una región llamada cromosfera, nombrada así debido a lo colorido de sus líneas de emisión, como la línea  $H_\alpha$  que es la emisión dominante en esta región. En la cromosfera se encuentra el punto de temperatura más bajo del Sol,

que es de alrededor de 4,500 K [Avrett (2003)]. Se dice que hay una temperatura mínima en la cromosfera, ya que por medio de las observaciones de líneas de CO en las áreas del Sol quieto, indican que hay temperaturas lo suficientemente bajas para formar cantidades significativas de moléculas de CO [Noyes & Hall (1972), Ayres & Testerman (1981), Ayres et al. (2006)]. De la cromosfera hacia arriba ocurre un cambio drástico en las propiedades del plasma, es decir, la densidad del plasma disminuye rápidamente con la altura y la temperatura aumenta. Estos cambios drásticos ocurren en la zona conocida como región de transición. Por encima de la región de transición se encuentra la corona solar, la cual está caracterizada por tener emisiones en longitudes de onda bajas, una temperatura alta del orden  $10^6$  K, y en donde los efectos del campo magnético son dominantes respecto al efecto de la presión cinética del plasma.

La atmósfera solar se encuentra en estado de plasma y se considera la región más dinámica del Sol, ya que es donde ocurren los eventos transitorios tipo jet, que son responsables en buena medida de la transferencia de masa y energía desde la cromosfera hasta la corona, por tal razón se piensa que pueden ser el mecanismo de aceleración del viento solar. Los eventos transitorios en que se enfoca esta tesis son las espículas, que se definen como jets dinámicos asociados con regiones de alta concentración de flujo magnético que aparecen desde la fotosfera hasta la atmósfera solar baja o cromosfera, por lo general tienen un diámetro de aproximadamente 500 km y se mueven hacia arriba con velocidades de aproximadamente  $20 \text{ km s}^{-1}$  [De Pontieu et al. (2004)]. Existen dos tipos de espículas, las tipo I y las tipo II, en particular en esta tesis se estudian las espículas tipo II y se propone que se forman debido a la reconexión magnética en un escenario con resistividad magnética. Un buen modelo aproximado para estudiar la dinámica del plasma en la atmósfera solar es la magnetohidrodinámica (MHD), en el caso de esta tesis se usan las aproximaciones de la MHD ideal y la resistiva. En general el sistema de ecuaciones de la MHD está formado por un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales no lineales acopladas, por lo que llevar a cabo un estudio analítico es muy complicado, particularmente en los casos de más de una dimensión [Goedbloed et al. (2010), Priest (2014)]. Por lo tanto, la solución de las ecuaciones se obtiene implementando métodos numéricos específicos que serán presentados en el capítulo 4.

El enfoque de esta tesis está dividido en dos partes. El primero consiste en presentar un nuevo código de la MHD ideal y resistiva en 3 dimensiones cartesianas. Tal código es denominado CAFE Newtoniano [González-Avilés et al. (2015)], que resuelve las ecuaciones de la MHD ideal y resistiva sometidas a un campo gravitacional usando los métodos de captura de choque de alta resolución (HRSC, por sus siglas en inglés). Primeramente para validar el código, se presentan las pruebas básicas a las que fue sometido, tanto en el caso de la MHD ideal como resistiva. Las pruebas de la MHD ideal son estándar de muchos de los códigos existentes, como son AstroBEAR [Cunningham et al. (2009)], AMRVAC [Keppens et al. (2003)], ATHENA [Stone et al. (2008)], FLASH [Fryxell et al.

(2000), Lee & Deane (2000), Lee (2013)], NIRVANA [Ziegler (2008)] y PLUTO [Mignone et al. (2007)], por mencionar algunos. Las pruebas de la MHD resistiva son estándar de los códigos MAP [Jiang et al. (2012)], CANS+ [Matsumoto et al. (2016)] y de la parte resistiva del código PLUTO [Mignone et al. (2007)]. En el aspecto de las simulaciones numéricas en el Sol, existen varios códigos dedicados a estudiar fenómenos en específico, por ejemplo, se han hecho simulaciones de magnetoconvección en la zona de convección-fotosfera usando el código MURaM [Vögler et al. (2005)], además de simulaciones de turbulencia y calentamiento coronal hechas con el código Pencil [Brandenburg & Dobler (2002)]. En el caso particular de la atmósfera solar se han llevado a cabo simulaciones numéricas usando el código Lared3D [Arber et al. (2001)] de la formación de jets por medio de la emergencia del flujo magnético. De igual forma se han hecho simulaciones numéricas de la propagación de ondas MHD a lo largo de tubos de flujo magnético en una atmósfera solar estratificada usando el código SAC [Shelyag et al. (2008)]. Además se han llevado a cabo simulaciones de la dinámica de protuberancias y de la lluvia coronal magnética usando el código MPI-AMRVAC [Keppens et al. (2012), Porth et al. (2014)]. Por lo tanto uno de los objetivos del trabajo de tesis ha sido el desarrollo de un código independiente a todos los códigos anteriores, que esté completamente bajo control en todas las subrutinas, y que sea fácilmente modificable para incluir nuevos efectos físicos a las ecuaciones, además de ser capaz de llevar a cabo simulaciones numéricas de los fenómenos transitorios tipo jet en una atmósfera solar gravitacionalmente estratificada formada por configuraciones de campo magnético realistas. La implementación numérica del código se llevó a cabo usando el lenguaje Fortran 90 y se montó en el driver del código Cactus Einstein Toolkit [Löffler et al. (2012)] para usar la paralelización basada en MPI.

El segundo enfoque de esta tesis se basa en la aplicación del código al estudio de la propagación de ondas de Alfvén en el contexto de la MHD ideal, las ondas de Alfvén son un tipo de onda magnetohidrodinámica en la cual los iones oscilan en respuesta a una fuerza de restauración producida por una tensión efectiva sobre las líneas de campo magnético, y a la formación de jets con características de espículas tipo II por medio de la reconexión magnética en el contexto de la MHD resistiva. En general la reconexión magnética se puede entender como la reconfiguración topológica del campo magnético causada por los cambios en la conectividad de sus líneas de campo [Priest (1984), Priest et al. (2000)]. De manera más simple se entiende como el mecanismo de conversión de energía magnética en energía cinética y térmica de un plasma cuando dos campos magnéticos anti-paralelos interactúan y se reconectan entre sí. En especial, la reconexión magnética ocurre desde la zona de convección hasta la atmósfera solar baja y alta. Recientemente, se ha propuesto que las espículas tipo II ocurren cuando la tensión magnética aumenta y entonces las interacciones entre los iones por medio de la difusión ambipolar hace que las espículas se muevan hacia arriba [Martínez-Sykora et al. (2017)]. Para esto se llevaron a cabo simulaciones numéricas usando un modelo 2.5 D (en este tipo de modelos todas las variables de estado dependen de  $x$  y  $y$ , pero se permite que las componentes  $v_z$  y  $B_z$  sean distintas de cero) usando el código

Bifrost [Gudiksen et al. (2011)], el cual resuelve las ecuaciones de la MHD considerando un gas parcialmente ionizado que no está en equilibrio termodinámico local, términos radiativos en el límite ópticamente grueso y considerando dispersión, además se toma en cuenta el efecto de la conductividad térmica en la cromosfera alta, región de transición y corona. En cambio el código desarrollado en esta tesis, considera al gas completamente ionizado, no toma en cuenta los efectos radiativos ni tampoco incluye la conductividad térmica, sin embargo, incluye los términos de resistividad, y presenta por primera vez la formación de jets con características de las espículas tipo II por medio de la resistividad magnética, sin ninguna perturbación en algunas de las componentes de la velocidad.

La tesis está dividida en los siguientes capítulos, en el capítulo 2 se presenta una introducción general de la estructura interna y externa del Sol, así como de los fenómenos dinámicos más importantes que ocurren en la atmósfera solar, dando énfasis a las espículas tipo II. En el capítulo 3 se describen las ecuaciones de la MHD ideal y resistiva en forma conservativa, así como su estructura característica. En el capítulo 4, se presentan los métodos numéricos usados para la implementación del código, en particular se presentan los resolvedores de Riemann y las técnicas para reconstruir las variables en cada intercelda numérica. También se presentan los métodos usados para mantener la constricción del campo magnético  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  y la positividad de la densidad y presión. De igual forma se presenta el método usado para evolucionar en el tiempo y la implementación de las condiciones de frontera. En el capítulo 5, se muestran algunas de las pruebas básicas de la MHD ideal y resistiva a las que fue sometido el código, así como algunas pruebas solares asociadas a la propagación de ondas de Alfvén. En el capítulo 6, se presenta el estudio de la formación de jets en 2D con características de jets coronales fríos y espículas tipo II, como resultado de la reconexión magnética. En el capítulo 7, se presenta un estudio de la formación de jets con características de las espículas tipo II por medio de la reconexión magnética en 3D, en donde se usa una configuración de campo magnético potencial extrapolado de una simulación a nivel fotosférico del Sol quieto. Finalmente, en el capítulo 8 se presentan las conclusiones y comentarios finales.

# Capítulo 2

## El Sol y jets en la atmósfera solar

### 2.1 El Sol

El Sol tiene una clasificación G2V basada en sus propiedades espectrales. G2 significa que su temperatura superficial es de aproximadamente 5,700 K y V indica que es una estrella de la secuencia principal que genera su energía mediante la fusión nuclear de Hidrógeno en Helio. Su edad se puede calcular indirectamente a partir de las edades obtenidas de los datos de radiactividad de los meteoritos más antiguos, ya que se considera que su edad deber estar cercana a la edad de los meteoritos. Además se calcula usando datos de las rocas más viejas de la Tierra, que son de aproximadamente 4.6 billones de años. La presencia de los fósiles en las rocas indican que la Tierra fue un lugar propicio para la vida cuando los fósiles se formaron. Esto implica que el Sol era luminoso en ese tiempo, es decir, se encontraba en la parte estable de su tiempo de vida, llamada secuencia principal hace más de 3.6 billones años. Con lo anterior se ha estimado que es de aproximadamente  $4.6 \times 10^9$  años. Se considera como una masa auto-gravitante de  $1.99 \times 10^{30}$  kg y con un radio de  $6.955 \times 10^8$  m, que radia energía y tiene una composición química de  $\approx 90\%$  de Hidrógeno,  $\approx 9 - 10\%$  de Helio y menos del 1% de elementos pesados como el Oxígeno y el Carbono. Tiene un interior estructurado y un exterior conocido como la atmósfera solar, además tiene un campo magnético dipolar que presenta variaciones cíclicas con periodo de aproximadamente 11 años.

El interior del Sol está blindado a nuestra vista, ya que solamente se pueden observar sus capas exteriores en donde el Sol no es opaco a la luz visible, es decir la luz visible se propaga libremente hacia el exterior. Sin embargo para estudiar el interior del Sol se usan las propiedades de los neutrinos y la heliosismología. El modelo estándar supone que el interior está dividido en tres regiones, llamadas, el núcleo, la zona radiativa y la zona de convección.

### El núcleo

Es una región que se considera desde el centro del Sol hasta alrededor de 0.2 a 0.25 radios solares, tiene una densidad de alrededor de  $1.6 \times 10^5 \text{ kg m}^{-3}$  y una temperatura de aproximadamente 15 millones de grados Kelvin, en la cual se genera la energía por medio de reacciones termonucleares. Contiene solamente la mitad de la masa del Sol, pero genera el 99% de su energía.

### La zona radiativa

Es una zona localizada por encima del núcleo solar de ancho 0.2 radios solares (139.14 Mm). Aquí la densidad decae lentamente alejándose del núcleo. La luz que se produce por la fusión nuclear en el núcleo viaja a través de esta capa, por lo cual es conocida como zona radiativa. Entonces la energía es transportada hacia el exterior por medio de la radiación electromagnética, es decir en forma de fotones.

### La zona de convección

Es una región que se encuentra por encima de la zona radiativa y se extiende desde un radio de 500 a 700 Mm, además contiene más del 60% del volumen interno del Sol, pero menos del 2% de su masa. Cuando la densidad de la zona radiativa llega a ser lo suficientemente baja con respecto al núcleo, entonces la radiación se convierte en calor. Por lo tanto en esta región domina la convección. Tal proceso se entiende como una forma de transferencia de calor entre zonas con diferentes temperaturas, en donde se generan movimientos que generan patrones similares a las burbujas que se aprecian cuando el agua hierve dentro de una olla. En particular en el Sol, estos movimientos burbujeantes llamadas celdas convectivas son las responsables de generar el patrón de granulación en su superficie. En la frontera de esta zona, existe una capa delgada conocida como **tacoclina** [Spiegel & Zahn (1992)], en donde se piensa que se genera el campo magnético a gran escala mediante el efecto dinamo.

La parte exterior del Sol es la atmósfera solar, que se define simplemente como la región de la cual los fotones escapan directamente hacia el espacio. Está formada por distintas capas con diferentes propiedades físicas, representadas de manera simplificada por una serie de cascarones esféricos. Estas regiones son la fotosfera, la cromosfera, la región de transición y la corona.

### La fotosfera

Es la región del Sol que es la primera parte visible para nosotros, ya que es donde se concentra la luz que vemos desde Sol. Representa la capa más baja y delgada de la atmósfera solar, que es relativamente densa y opaca que emite el 99% de la energía generada en el

interior. La masa de la atmósfera solar es aproximadamente igual a la masa de la fotosfera. La temperatura en esta región aumenta desde un valor de  $\sim 5,700$  K en la superficie a una temperatura de  $10^4$  K.

### La cromosfera

Es una capa que se encuentra por encima de la fotosfera, la cual es más transparente. En esta región las marcadas líneas de absorción observadas en la fotosfera se convierten en líneas de emisión, principalmente en las líneas de Hidrogeno (H), Calcio (Ca) y Magnesio (Mg), así como un fuerte continuo en el Ultravioleta (UV), en el Sub-milimétrico, milimétrico e infrarrojo lejano. Se puede vislumbrar durante el inicio y el final de un eclipse solar en el color rojo del espectro de Balmer. La cromosfera se extiende a un altura de  $\sim 2$  Mm por encima de la superficie solar, que está delimitada por la fotosfera. Es una región muy característica de la atmósfera solar, ya que la temperatura incrementa desde una temperatura mínima de  $4,000$  K hasta  $\sim 20,000$  K. Tal incremento va en contra de lo que se espera termodinámicamente, esto es, la temperatura debería de obedecer un perfil que va como una ley del inverso del cuadrado con respecto a la distancia radial. Las observaciones de la cromosfera, revelan que es una región muy dinámica y poco uniforme. Entre los fenómenos dinámicos más importantes que se presentan en tal región se encuentran las espículas.

### La región de transición (RT)

Es una capa delgada ( $\sim 500$ - $700$  km) y muy dinámica, que se encuentra aproximadamente a  $2000$  km sobre la superficie del Sol [Mariska (1992), Vernazza et al.(1981)]. La RT es donde se presenta la variación más significativa en la temperatura y densidad entre la cromosfera ( $10^3$ - $4$  K) y la parte superior de la corona ( $10^6$ - $7$  K). Las líneas de emisión asociadas con esta región están en el rango del extremo ultravioleta, y los fenómenos transitorios tipo jet son muy abundantes en esta región.

### La corona

Es la atmósfera exterior extendida del Sol, la cual es mucho más grande en volumen que el Sol mismo. Se observa en los eclipses como un halo tenue de baja densidad y temperatura alta ( $\sim 10^6$  K), y brillante como una Luna llena. La corona baja se encuentra por encima de la región de transición, y tiene una densidad de masa en el rango de  $10^{-11}$  –  $10^{-13}$   $\text{kg m}^{-3}$ . A su vez, es más de  $1000$  veces más caliente que la superficie solar. En la corona se pueden observar ocasionalmente rayos X duros ( $0.1$ - $1$  Å) y rayos gamma ( $0.001$ - $0.1$  Å) como consecuencia de las poderosas erupciones solares, las cuales iluminan la corona especialmente durante los máximos solares. La temperatura promedio de la corona es de varios millones de grados Kelvin, y hasta ahora no se tiene una teoría satisfactoria que explique el porqué de esta temperatura. Este problema del calentamiento coronal se considera hoy en día uno



Figura 2.1: Imagen esquemática de la estructura interna y externa del Sol [Kelvinsong (2015)].

de los grandes acertijos de la física solar moderna y astrofísica. La corona es una región muy inhomogénea debido a los procesos dinámicos tales como las erupciones solares, en donde se pueden encontrar configuraciones magnéticas de gran escala, que resultan de un proceso de reconexión magnética muy energético. Sin embargo, también está presente la constante interacción entre las ondas que se propagan hacia el exterior y la oscilación de los arcos magnéticos, que podrían contribuir a la cantidad de energía de la corona [Erdélyi et al. (2003), Aschwanden (2004), Erdélyi & James (2004), Erdélyi (2005), Erdélyi (2008)]. Una imagen esquemática de la estructura interna y externa del Sol se muestra en la Fig. 2.1.

## 2.2 Eventos transitorios tipo jet en la atmósfera solar

Los eventos transitorios tipo jet son responsables en buena medida de la transferencia de masa y energía desde la superficie solar hasta la corona alta, además se piensa que dominan la componente rápida del viento solar. Una gran variedad de eventos transitorios aparecen en forma de espículas [Beckers (1972), Koutchmy & Stellmacher (1976), Sterling (2000), Yamauch et al. (2005)], macroespículas [Dere et al. (1989), Pike & Mason (1998), Nishizuka et al. (2009)], oleadas, eventos explosivos en la región de transición (TREEs, por sus siglas en inglés)[Brueckner & Bartoe (1983)] en la atmósfera solar baja y media. Y en la atmósfera alta se pueden observar jets de rayos X [Shimojo et al. (1996), Kim et al. (2007), Shimojo (2008), Baker et al. (2008)] y jets coronales polares [Okamoto et al. (2007), Patsourakos et al. (2008)]. En particular en esta tesis, se estudiará

la formación de espículas tipo II mediante el proceso de reconexión magnética, por tal motivo en esta subsección se presenta una explicación más detallada de dichas espículas.

### 2.2.1 Espículas tipo II

Las espículas se consideran uno de los componentes más fundamentales de la cromosfera solar. Aparecen como jets de gas que se observan en el limbo solar en las líneas espectrales de  $H_{\alpha}$ . Existen dos clases de espículas revelados por [De Pontieu et al. (2007a)] con diferentes características y mecanismos de formación. El primer tipo de espículas conocidas como espículas tipo I alcanzan alturas de 2-9 Mm sobre la fotosfera, tienen un tiempo de vida de 3-10 min, y muestran movimientos hacia arriba y hacia abajo [Beckers (1968), Suematsu et al. (1995)]. Las espículas tipo II como lo ha revelado el satélite Hinode, son mucho más dinámicas que las tipo I, y tienden a aparecer en el limbo solar como se ha observado en los hoyos coronales [De Pontieu et al. (2007a)]. Alcanzan alturas de aproximadamente 6.5 Mm sobre la fotosfera y tienen tiempos de vida de aproximadamente 100 s [De Pontieu et al. (2007b)]. Además, las espículas tipo II muestran movimientos verticales aparentes con velocidades del orden de 50-100 km s<sup>-1</sup> y de acuerdo a las imágenes tomadas en las líneas cromosféricas, en el final de sus vidas presentan un desvanecimiento rápido. Tienen una contraparte sobre el disco solar, que aparece como una absorción de movimiento rápido en el ala azul de las líneas cromosféricas [Langangen et al. (2008), Rouppe van der Voort et al. (2009)], muestran un efectos Doppler hacia el azul en la región que comprende la mitad de la cromosfera hacia la parte superior. Este tipo de espículas aún no están bien entendidas. Por ejemplo, algunas observaciones sugieren que las espículas tipo II son impulsivamente y continuamente aceleradas mientras que se calientan a por lo menos las temperaturas de la región de transición [De Pontieu et al. (2009), De Pontieu et al. (2011)]. Otras observaciones indican que algunas espículas tipo II muestran también una disminución o una dependencia de la velocidad más compleja con la altura [Sekse et al. (2012)]. Estas espículas parece que muestran emisión en la región de transición y en las líneas coronales [De Pontieu et al. (2011)], sin embargo, las observaciones de menor ruido, sugieren que la emisión viene del plasma frío [Madjarska et al. (2011)].

Otros movimientos, aparte del movimiento vertical, son observados en las espículas tipo II. Por ejemplo, estos jets muestran movimientos oscilatorios horizontales en el limbo con velocidades del orden 10-30 km s<sup>-1</sup> y periodos de 100-500 s [Tomczyk et al. (2007), McIntosh et al. (2011), Zaqarashvili & Erdélyi (2009)], sugiriendo que se observan ondas de Alfvén en la zona de transición, cromosfera y corona [De Pontieu et al. (2007c), Okamoto & De Pontieu (2011), Tavabi et al. (2015b)], o como ondas MHD tipo modos kink [He et al. (2009), McLaughlin et al. (2012), Kuridze et al. (2012)], los cuales se definen como modos normales azimutalmente asimétricos en un plasma dentro de un cilindro. En la referencia [Suematsu et al. (2008)], los autores sugieren que algunas espículas muestran

estructura múltiple como resultado de una posible rotación. Los movimientos torsionales a lo largo de las espículas fueron sugeridos por [Beckers (1972)], y han sido corroborados mediante las observaciones de alta resolución en el limbo [De Pontieu et al. (2012)].

Como resultado de la naturaleza altamente dinámica y estructura fina de este tipo de espículas y de los procesos físicos complejos que gobiernan a la cromosfera solar (radiación, efectos de la ionización parcial, etc.), el entendimiento es limitado, por lo tanto se ha llegado a cuestionar si las espículas tipo II son una clase por separado de todas las estructuras tipo jet observadas [Zhang et al. (2012)]. Un modelo exitoso de este tipo de jets debe explicar su impacto sobre las diferentes capas de la atmósfera. Se ha propuesto que son conducidas por la reconexión magnética [De Pontieu et al. (2007b), Isobe et al. (2008), Archontis et al. (2010), Sterling et al. (2010)], por medio de un proceso de reconexión magnética oscilatoria [Hegglund et al. (2009), McLaughlin et al. (2012)], por medio de una fuerza de Lorentz bajo condiciones cromosféricas [Goodman (2012)], o mediante la propagación de modos  $p$  [de Wijn et al. (2009)], los cuales son modos de oscilación en donde la fuerza de restauración dominante es la presión. Otro posible candidato fue presentado en [Martínez-Sykora et al. (2011)], en donde se sugiere que el plasma cromosférico expulsado como resultado de ser presionado por la tensión magnética resultante del flujo emergente. Más recientemente se ha propuesto que las espículas tipo II surgen cuando la tensión magnética aumenta por medio de interacciones entre iones debido a la difusión ambipolar [Martínez-Sykora et al. (2017)]. Imágenes tomadas de las observaciones de las espículas tipo I y II se presentan en la Fig. 2.2.

En este capítulo se presentó de forma general la estructura interna y externa del Sol, así como los distintos fenómenos dinámicos que ocurren principalmente en su atmósfera. En particular se dio énfasis a las espículas tipo II, ya que en los capítulos 6 y 7 se estudia la formación de jets con características de las espículas tipo II en una atmósfera solar formada por configuraciones de campo magnético en 2D y 3D. En el siguiente capítulo se describen las ecuaciones de la MHD ideal y resistiva en forma conservativa, así como su estructura característica.

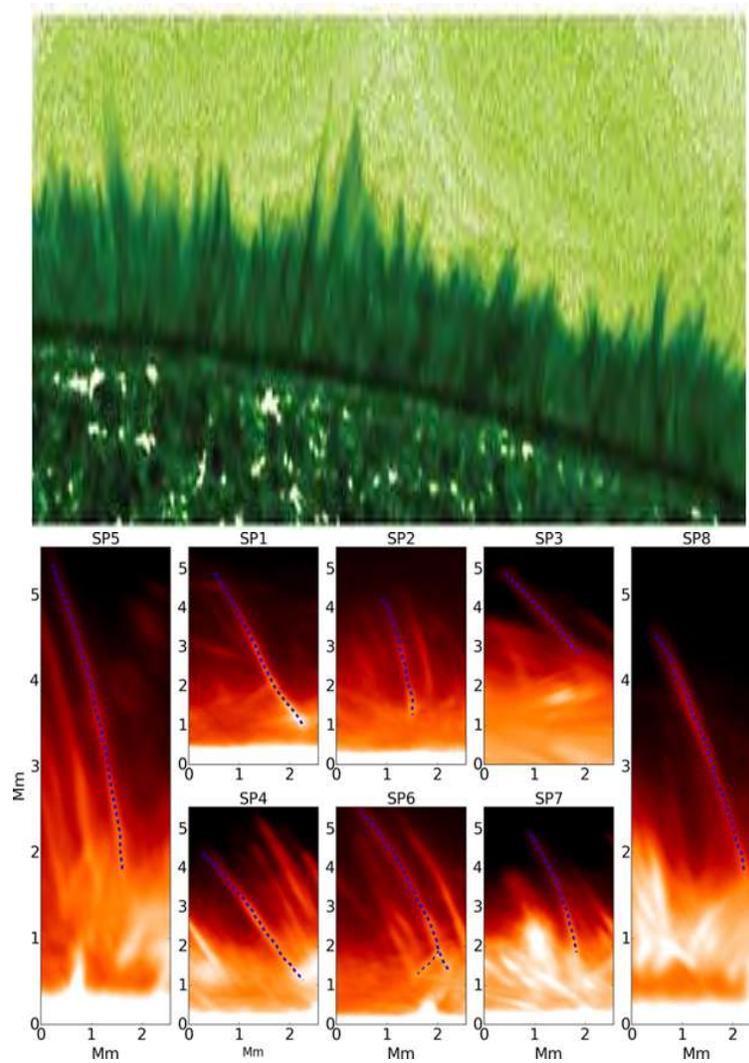


Figura 2.2: (Arriba) Imagen en la línea del Ca II tomada por el satélite Hinode la cual muestra a las estructuras magnéticas finas conocidas como espículas tipo I [Suematsu et al. (2008)]. (Abajo) Ejemplos de espículas tipo II en la línea  $H_{\alpha}$  observadas en el limbo solar (marcadas con una línea discontinua) en diferentes posiciones de las líneas de observación [Sharma et al. (2017)].



# Capítulo 3

## Magnetohidrodinámica (MHD)

La magnetohidrodinámica (MHD) estudia la interacción entre los campos magnéticos y los fluidos conductores en movimiento. Se considera el modelo matemático de las interacciones de baja frecuencia entre los fluidos conductores eléctricos y los campos electromagnéticos. En particular estudia a los fluidos conductores perfectos tales como los metales líquidos, gases ionizados o plasmas y electrolitos. La MHD es una buena aproximación para estudiar muchos problemas en astrofísica y en particular es útil para estudiar la dinámica del plasma en la atmósfera solar, parte de los temas centrales de esta tesis.

### 3.1 Magnetohidrodinámica ideal

En particular la MHD tiene una aproximación llamada MHD ideal, que describe a un plasma como un fluido conductor perfecto. Esta descripción tiene ciertas restricciones sobre su validez en muchos de los fenómenos astrofísicos, sin embargo para los propósitos de esta tesis, las ecuaciones de la MHD ideal se usan para describir la dinámica del plasma ionizado en la atmósfera solar y es un modelo de estado del arte en los análisis de eventos transitorios tipo jet en la física solar. Una de las suposiciones de la MHD ideal es que describe al plasma solar como un fluido Newtoniano. Esto significa que hay colisiones frecuentes entre las partículas que constituyen el plasma. Además de que la temperatura de los electrones y de los iones es igual, lo que implica que hay interacciones entre estas dos especies, y que el plasma puede ser tratado como un fluido simple. Otra de las suposiciones, es que la MHD ideal es válida solamente en un cierto régimen de escalas de tiempo y longitud. La escala de longitud característica del plasma debe ser lo suficientemente grande como para que el movimiento de las partículas alrededor del campo magnético pueda ser despreciado. Y las escalas temporales deben ser considerablemente más grandes que el período cinético. Sin embargo, la escala temporal debe ser suficientemente más corta que los efectos disipativos lentos, tales que la escala de decaimiento del campo magnético pueda ser despreciada. Además se consideran otras dos aproximaciones, las cuales carac-

terizan al plasma como un fluido simple: la aproximación de la cuasi-neutralidad, la cual significa que hay un gran número de cargas positivas y negativas similares, y la aproximación en la que las velocidades relativas entre las cargas positivas y negativas sean pequeñas. Finalmente para el caso de la MHD ideal clásica, se asume que el plasma es no relativista, lo que significa que la velocidad del plasma es mucho más pequeña que la velocidad de la luz, es decir  $v/c \ll 1$ . De acuerdo a lo anterior, las condiciones que debe satisfacer un fluido para que sea válida la MHD ideal son:

1. La densidad debe ser suficientemente alta para que las colisiones sean frecuentes y que el número de partículas cargadas dentro del radio de Debye sea tal que  $4\pi n\lambda_D^3 \gg 1$  [Priest (2014)]. En donde el radio de Debye  $\lambda_D$  es la escala a través de la cual los portadores de carga móviles, tales como los electrones generan apantallamiento de los campos eléctricos. En otras palabras es la distancia sobre la cual puede ocurrir una separación significativa de carga y se define de la siguiente forma:

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{k_B T_e}{4\pi n_e q_e^2}}, \quad (3.1)$$

en donde  $k_B$  es la constante de Boltzmann,  $T_e$  es la temperatura de los electrones,  $n_e$  es la densidad de electrones y  $q_e$  es la carga del electrón.

2. Las escalas de longitud deben ser sustancialmente más grandes que las longitudes características del movimiento del plasma, esto es  $l_0 \gg r_g$ , en donde  $l_0$  es una escala de longitud y  $r_g$  es el giro radio, el cual se define como el radio del movimiento circular de una partícula cargada en presencia de un campo magnético uniforme, y está expresado como

$$r_g = \frac{mv_{\perp}}{q_e B}, \quad (3.2)$$

en donde  $m$  es la masa de las partículas,  $v_{\perp}$  es la componente de la velocidad perpendicular a la dirección del campo magnético,  $q_e$  es la carga del electrón y  $B$  es la magnitud del campo magnético.

3. Las escalas de tiempo deben ser mucho más grandes que el tiempo característico del plasma, en donde el más grande es el de giro-frecuencia de los iones. Tal tiempo de giro-frecuencia se define en términos de la giro frecuencia de oscilación de los iones  $\omega_{v_i}$ , que es la frecuencia angular del movimiento circular de una partícula cargada en el plano perpendicular al campo magnético. La giro frecuencia se expresa como:

$$\omega_{v_i} = \frac{Zq_e B}{mv}, \quad (3.3)$$

en donde  $Z = 1$ ,  $q_e$  es la carga del electrón,  $B$  es la magnitud del campo magnético,  $m$  es la masa de las partículas y  $v$  es la velocidad perpendicular a la dirección del campo magnético.

4. El plasma debe estar completamente ionizado y deber ser cuasi-neutro. La condición de cuasi-neutralidad significa que  $\rho_e \rightarrow 0$ , por lo tanto la ecuación de Maxwell de la divergencia del campo eléctrico es  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ .
5. La MHD ideal asume que el fluido es un conductor perfecto, es decir, la conductividad eléctrica  $\sigma \rightarrow \infty$ . Por lo que, en el marco de referencia del fluido se debe cumplir que el campo eléctrico  $\mathbf{E} = 0$ . Sin embargo para un observador que se mueve con velocidad  $\mathbf{v}$ , la ley de Ohm  $\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0$  implica que  $\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ .
6. Generalmente en la MHD ideal se usa la suposición de que la magnitud de la corriente de desplazamiento que aparece en la ecuación de Ampere-Maxwell  $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$  comparada con la magnitud de la densidad de corriente  $\mathbf{J}$  es despreciable, que se expresa en términos de la siguiente razón

$$\epsilon_0 \frac{|\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}|}{|\mathbf{J}|} \sim \frac{10^{-11} s}{\tau}, \quad (3.4)$$

donde  $\tau$  es el tiempo característico, que para el caso particular del Sol  $\tau_{sol} = 10^{17}$  s, por lo tanto en este caso el lado derecho de la expresión (3.4) es del orden  $10^{-28}$  s, suficientemente pequeña para ser despreciada en la ecuación de inducción de Faraday.

### 3.1.1 Ecuaciones de la MHD ideal

En una parte de esta tesis se resuelven las ecuaciones de la MHD ideal clásica sometidas a un campo gravitacional, por lo tanto las ecuaciones de movimiento que gobiernan la dinámica del plasma están dadas mediante el acoplamiento de las ecuaciones de Maxwell con las ecuaciones de Euler de la hidrodinámica, y se expresan de la siguiente forma:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (\text{Conservación de masa}) \quad (3.5)$$

$$\rho \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \mathbf{v} + \nabla p - \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = \rho \mathbf{g}, \quad (\text{Ecuación de movimiento}) \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla p + \gamma p \nabla \cdot \mathbf{v} = \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{g}, \quad (\text{Ecuación de la energía}) \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0, \quad (\text{Ecuación de inducción}) \quad (3.8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (\text{No monopolos magnéticos}) \quad (3.9)$$

con  $\rho$  la densidad de masa,  $\mathbf{v}$  es la velocidad del plasma,  $\mathbf{B}$  es el campo magnético,  $p$  es la presión del gas,  $\mathbf{g}$  es el campo gravitacional,  $\gamma$  es el coeficiente de dilatación adiabática y  $\mu_0$  es la permeabilidad magnética del vacío. La presión está dada por la ecuación del gas ideal, que se define de la siguiente forma

$$p = (\gamma - 1)\rho e, \quad (3.10)$$

en donde  $e$  es la energía interna, sin embargo para las aplicaciones en los fenómenos solares es más conveniente escribir la ecuación de estado en términos de la temperatura, esto es

$$p = \frac{k_B \rho T}{\bar{m}}, \quad (3.11)$$

en donde  $T$  es la temperatura,  $k_B$  es la constante de Boltzmann y  $\bar{m}$  es la masa media de las partículas, que depende de si el plasma está completamente ionizado o no. La deducción detallada de las ecuaciones de la MHD ideal sometidas a un campo gravitacional se presenta en el Apéndice A. Para los fenómenos que se estudian en la atmósfera solar, se considera una aceleración gravitacional  $\mathbf{g}$  constante, ya que se toma solamente una pequeña región de estudio en el Sol, por lo tanto, el efecto de la gravedad es local y una buena aproximación es considerarla constante.

Las ecuaciones (3.5)-(3.8) se pueden expresar en forma conservativa de la siguiente mane-

ra:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (\text{Conservación de masa}) \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} - \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} + \mathbf{p}_t) = \rho \mathbf{g}, \quad (\text{Conservación de momento}) \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot [(E + \mathbf{p}_t) \mathbf{v} - \mathbf{B}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{v})] = \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{g}, \quad (\text{Conservación de energía}) \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \cdot [\mathbf{v} \otimes \mathbf{B} - \mathbf{B} \otimes \mathbf{v}] = 0, \quad (\text{Ecuación de inducción}) \quad (3.15)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (\text{No monopolos magnéticos}) \quad (3.16)$$

en donde  $\mathbf{p}_t$  es un tensor diagonal con componentes  $p_t = p + \mathbf{B}^2/2$ , con  $p$  la presión del gas dada por la ecuación de estado (3.11),  $E$  es la densidad de energía total  $E = \frac{p}{\gamma-1} + \frac{1}{2}\rho v^2 + \frac{\mathbf{B}^2}{2}$ , y  $\otimes$  denota el producto tensorial. Tales ecuaciones representan la conservación de la masa, momento y energía, lo que implica que desde un principio se asegura que físicamente tenemos cantidades conservadas. Las ecuaciones (3.12)-(3.15) están escritas en forma adimensional, y la manera de hacerlas adimensionales se encuentra en el Apéndice B.

Las ecuaciones de la MHD ideal escritas en forma conservativa son útiles para la aplicación de los métodos numéricos como se mostrará en el capítulo 4. Ya que se tienen las ecuaciones en forma conservativa, ahora se pueden definir los vectores de variables conservativas y primitivas, además de los términos fuente, que se denotarán por  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{W}$  y  $\mathbf{S}$ , respectivamente. En esta tesis se resuelven numéricamente las ecuaciones de la MHD ideal sometidas a un campo gravitacional en tres dimensiones cartesianas porque los fenómenos en la región de interés no tienen simetría. Es por eso que para este caso los vectores  $\mathbf{U}$  y  $\mathbf{W}$  están dados de la siguiente forma:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ M_x \\ M_y \\ M_z \\ E \\ B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} \rho \\ v_x \\ v_y \\ v_z \\ p \\ B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix}, \quad (3.17)$$

en donde  $\mathbf{M} = \rho \mathbf{v}$  es la densidad de momento. Entonces las ecuaciones se pueden escribir en forma de ley de conservación o balance de flujos, esto es

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial z} = \mathbf{S}, \quad (3.18)$$

en donde  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{G}$  y  $\mathbf{H}$  son vectores de flujos en las direcciones  $x$ -,  $y$ -, y  $z$ -, respectivamente, y  $\mathbf{S}$  es el vector de los términos fuente. Entonces cada uno de los vectores de flujo están definidos de la siguiente manera

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho v_x \\ \rho v_x^2 + p + B^2/2 - B_x^2 \\ \rho v_x v_y - B_x B_y \\ \rho v_x v_z - B_x B_z \\ (E + p_t)v_x - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{v})B_x \\ 0 \\ B_y v_x - B_x v_y \\ B_z v_x - B_x v_z \end{bmatrix}, \quad (3.19)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \rho v_y \\ \rho v_y v_x - B_y B_x \\ \rho v_y^2 + p + B^2/2 - B_y^2 \\ \rho v_y v_z - B_y B_z \\ (E + p_t)v_y - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{v})B_y \\ B_x v_y - B_y v_x \\ 0 \\ B_z v_y - B_y v_z \end{bmatrix}, \quad (3.20)$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \rho v_z \\ \rho v_z v_x - B_z B_x \\ \rho v_z v_y - B_z B_y \\ \rho v_z^2 + p + B^2/2 - B_z^2 \\ (E + p_t)v_z - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{v})B_z \\ B_x v_z - B_z v_x \\ B_y v_z - B_z v_y \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.21)$$

y la fuente simplemente

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \rho \mathbf{g} \\ \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.22)$$

El sistema de ecuaciones derivado de la ley de conservación (3.18) se usa para resolver numéricamente las ecuaciones de la MHD ideal como se mostrará en el siguiente capítulo.

### 3.1.2 Estructura característica de la MHD ideal

Para la aplicación de los métodos numéricos, en especial el método de volúmenes finitos tal y como se verá en el siguiente capítulo, es útil calcular la estructura característica asociada a la ley de conservación descrita por la ecuación (3.18). Por simplicidad en esta sección solamente se muestra de forma detallada el cálculo de la estructura característica asociada a los valores propios en la dirección  $x$ , ya que para las direcciones  $y$  y  $z$  se hace de forma análoga. La estructura característica se calcula para la ley de conservación con  $\mathbf{S} = 0$ , por lo tanto en este caso la ecuación de conservación en dirección  $x$  se puede escribir de la siguiente forma

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} = 0, \quad (3.23)$$

en donde  $\mathbf{U} = (\rho, \rho v_x, \rho v_y, \rho v_z, E, B_x, B_y, B_z)^T$ , es el vector de variables conservativas y el vector de flujos  $\mathbf{F}(\mathbf{U})$  está dado por la ecuación (3.19).

La restricción de la divergencia en una dimensión implica que la componente del campo magnético  $B_x$  es constante en el espacio y el tiempo, y por lo tanto es un parámetro constante en las ecuaciones. Para calcular la estructura característica de la ecuación (3.23) es conveniente definirla en términos de las variables primitivas, es decir en forma cuasilínea,

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + A_x(\mathbf{W}) \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} = 0, \quad (3.24)$$

en donde  $\mathbf{W} = (\rho, v_x, v_y, v_z, p, B_x, B_y, B_z)^T$  define el vector de variables primitivas y  $A_x(\mathbf{W})$  es la matriz jacobiana dada por [Roe & Balsara (1996)]

$$A_x(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} v_x & p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_x & 0 & 0 & -B_x/\rho & -B_y/\rho & -B_z/\rho & 1/\rho \\ 0 & 0 & v_x & 0 & -B_y/\rho & -B_x/\rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v_x & -B_z/\rho & 0 & -B_x/\rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_y & -B_x & 0 & -v_y & v_x & 0 & 0 \\ 0 & B_z & 0 & -B_x & -v_z & 0 & v_x & 0 \\ 0 & \gamma p & 0 & 0 & -\mathbf{v} \cdot \mathbf{B} & 0 & 0 & v_x \end{pmatrix}.$$

De la matriz  $A_x(\mathbf{W})$  se puede ver que la quinta fila es de ceros, lo que hace a la matriz singular, esto implica que se tiene un valor propio igual a cero. El valor propio cero está relacionado con el hecho de que en una dimensión espacial, la ecuación de evolución para  $B_x$  es tal que  $\frac{\partial B_x}{\partial t} = 0$ , es por eso que para remover la fila de ceros en la matriz jacobiana, se tiene que quitar a  $B_x$  como una variable, esto al menos en una dimensión. Haciendo esto, se reemplaza una de las entradas de la fila de ceros por la componente  $v_x$  en la quinta columna de la matriz  $A_x(\mathbf{W})$ , obteniendo la siguiente matriz jacobiana

$$A'_x(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} v_x & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_x & 0 & 0 & -B_x/\rho & -B_y/\rho & -B_z/\rho & 1/\rho \\ 0 & 0 & v_x & 0 & -B_y/\rho & -B_x/\rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v_x & -B_z/\rho & 0 & -B_x/\rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_y & -B_x & 0 & -v_y & v_x & 0 & 0 \\ 0 & B_z & 0 & -B_x & -v_z & 0 & v_x & 0 \\ 0 & \gamma p & 0 & 0 & -\mathbf{v} \cdot \mathbf{B} & 0 & 0 & v_x \end{pmatrix},$$

en donde los valores propios de la matriz  $A'_x(\mathbf{W})$  se calculan mediante el determinante  $\det(A'_x(\mathbf{W}) - \lambda I) = 0$ , y se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned} \lambda_{1_x} &= v_x - C_{f_x}, \quad \lambda_{2_x} = v_x - C_{A_x}, \quad \lambda_{3_x} = v_x - C_{s_x}, \quad \lambda_{4_x} = \lambda_{5_x} = v_x, \\ \lambda_{6_x} &= v_x + C_{s_x}, \quad \lambda_{7_x} = v_x + C_{A_x}, \quad \lambda_{8_x} = v_x + C_{f_x}, \end{aligned} \quad (3.25)$$

en donde  $C_{A_x}$ ,  $C_{f_x}$  y  $C_{s_x}$  están definidas por

$$C_{A_x}^2 = \frac{B_x^2}{\rho}, \quad (3.26)$$

$$C_{f_x}^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{\gamma p + B^2}{\rho} + \sqrt{\left( \frac{\gamma p + B^2}{\rho} \right)^2 - 4 \frac{\gamma p B_x^2}{\rho^2}} \right), \quad (3.27)$$

$$C_{s_x}^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{\gamma p + B^2}{\rho} - \sqrt{\left( \frac{\gamma p + B^2}{\rho} \right)^2 - 4 \frac{\gamma p B_x^2}{\rho^2}} \right), \quad (3.28)$$

que representan las velocidades de Alfvén, magnetosónica rápida y magnetosónica lenta, respectivamente, donde  $B^2 = B_x^2 + B_y^2 + B_z^2$ . Se puede ver que todos los valores propios son reales, y por lo tanto el sistema de ecuaciones de la MHD ideal es hiperbólico. Además de que los valores propios están en orden, esto es  $\lambda_{1_x} \leq \dots \leq \lambda_{8_x}$  cuando  $C_{s_x} \leq C_{A_x} \leq C_{f_x}$ . Las ondas asociadas a los valores propios  $\lambda_{1_x}$  y  $\lambda_{8_x}$  son llamadas rápidas, las correspondientes a los valores propios  $\lambda_{3_x}$  y  $\lambda_{6_x}$  son llamadas lentas, las ondas de Alfvén corresponden a  $\lambda_{2_x}$  y  $\lambda_{7_x}$ , la onda asociada con  $\lambda_{4_x}$  es llamada de contacto, y finalmente la onda asociada a  $\lambda_{5_x}$  es conocida como onda de corte, véase la Fig. 3.1. Para calcular los valores propios en las direcciones  $y$ ,  $z$  se lleva a cabo un procedimiento similar al caso de la dirección  $x$ . Entonces para estos casos las matrices jacobianas  $A'_y(\mathbf{W})$  y  $A'_z(\mathbf{W})$  están definidas de la siguiente forma [Lee (1996)]

$$A'_y(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} v_y & 0 & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_y & 0 & 0 & -B_y/\rho & -B_x/\rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_y & 0 & B_x/\rho & -B_y/\rho & B_z/\rho & 1/\rho \\ 0 & 0 & 0 & v_y & 0 & -B_z/\rho & -B_y/\rho & 0 \\ 0 & -B_y & B_x & 0 & v_y & -v_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_z & -B_y & 0 & -v_z & v_y & 0 \\ 0 & 0 & \gamma p & 0 & 0 & -\mathbf{v} \cdot \mathbf{B} & 0 & v_y \end{pmatrix},$$

$$A'_z(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} v_z & 0 & 0 & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_z & 0 & 0 & -B_z/\rho & 0 & -B_x/\rho & 0 \\ 0 & 0 & v_z & 0 & 0 & -B_z/\rho & -B_y/\rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v_z & B_x/\rho & B_y/\rho & -B_z/\rho & 1/\rho \\ 0 & -B_z & 0 & B_x & v_z & 0 & -v_x & 0 \\ 0 & 0 & -B_z & B_y & 0 & v_z & -v_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma p & 0 & 0 & -\mathbf{v} \cdot \mathbf{B} & v_z \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto los valores propios de las matrices  $A'_y(\mathbf{W})$  y  $A'_z(\mathbf{W})$  son los siguientes:

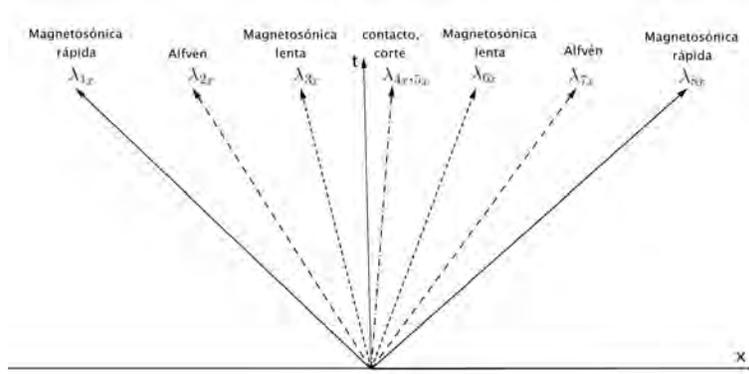


Figura 3.1: Estructura característica de las ecuaciones de la MHD ideal en el plano  $x - t$ .

$$\begin{aligned} \lambda_{1_y} &= v_y - C_{f_y}, \quad \lambda_{2_y} = v_y - C_{A_y}, \quad \lambda_{3_y} = v_y - C_{s_y}, \quad \lambda_{4_y} = \lambda_{5_y} = v_y, \\ \lambda_{6_y} &= v_y + C_{s_y}, \quad \lambda_{7_y} = v_y + C_{A_y}, \quad \lambda_{8_y} = v_y + C_{f_y}, \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} \lambda_{1_z} &= v_z - C_{f_z}, \quad \lambda_{2_z} = v_z - C_{A_z}, \quad \lambda_{3_z} = v_z - C_{s_z}, \quad \lambda_{4_z} = \lambda_{5_z} = v_z, \\ \lambda_{6_z} &= v_z + C_{s_z}, \quad \lambda_{7_z} = v_z + C_{A_z}, \quad \lambda_{8_z} = v_z + C_{f_z}, \end{aligned} \quad (3.30)$$

en donde  $C_{A_{y,z}}$ ,  $C_{f_{y,z}}$  y  $C_{s_{y,z}}$  están definidas por

$$C_{A_{y,z}}^2 = \frac{B_{y,z}^2}{\rho}, \quad (3.31)$$

$$C_{f_{y,z}}^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{\gamma p + B^2}{\rho} + \sqrt{\left( \frac{\gamma p + B^2}{\rho} \right)^2 - 4 \frac{\gamma p B_{y,z}^2}{\rho^2}} \right), \quad (3.32)$$

$$C_{s_{y,z}}^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{\gamma p + B^2}{\rho} - \sqrt{\left( \frac{\gamma p + B^2}{\rho} \right)^2 - 4 \frac{\gamma p B_{y,z}^2}{\rho^2}} \right), \quad (3.33)$$

y representan las velocidades de Alfvén, magnetosónica rápida y magnetosónica lenta en las direcciones  $y$  y  $z$ , respectivamente.

En esta sección se explicó qué se puede estudiar con la MHD, y en particular cuales son las aproximaciones de la MHD ideal. Además se describieron las ecuaciones de la MHD ideal y su estructura característica asociada a los valores propios, la cual será útil cuando se implemente la solución numérica.

## 3.2 Magnetohidrodinámica resistiva

Los temas que se presentarán en los capítulos 6 y 7 de esta tesis están enfocados en estudiar el efecto de la reconexión magnética en la formación de jets con características de las espículas tipo II en la atmósfera solar, en donde se considera que la dinámica del plasma está regida por las ecuaciones de la MHD resistiva sometidas al campo gravitacional solar constante. En este caso la aproximación de la MHD ideal no es válida, ya que las líneas de campo magnético que se mueven a través del fluido siguen una ley de difusión, es decir la ley de Ohm, en donde la resistividad del plasma sirve como la constante de difusión. Entonces se puede decir que la MHD ideal es el límite de la MHD resistiva cuando la difusión se considera despreciable. Sin embargo en algunos sistemas físicos, que son lo suficientemente conductores se puede ignorar la resistividad, resulta interesante ver si existen inestabilidades que puedan incrementar la resistividad efectiva del plasma. El aumento de la resistividad es usualmente el resultado de la formación de estructuras de pequeña escala conocidas como hojas de corriente o turbulencia magnética, lo que introduce pequeñas escalas espaciales sobre un sistema que en principio está regido por la MHD ideal, y por consiguiente la difusión magnética puede ocurrir de manera rápida. Cuando esto pasa, la reconexión magnética ocurre en el plasma, lo que produce una liberación de energía magnética en forma de ondas, aceleración de partículas y calor. El mecanismo de reconexión magnética es importante porque concentra energía que sirve como mecanismo para las explosiones violentas y estallidos de radiación que se dan en la atmósfera solar.

### 3.2.1 Ecuaciones de la MHD resistiva

Las ecuaciones que dictan la dinámica de un plasma en donde se consideran los efectos difusivos en el campo magnético son las ecuaciones de la MHD resistiva, que para el caso particular del estudio de los fenómenos en la atmósfera solar, se añade la parte de un campo gravitacional constante, y entonces el sistema de ecuaciones de la MHD resistiva sometidas a un campo gravitacional en forma conservativa son las siguientes:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (3.34)$$

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} - \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} + \mathbf{p}_t) = \rho \mathbf{g}, \quad (3.35)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot ((E + p_t) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B}) = -\nabla \cdot ((\eta \cdot \mathbf{J}) \times \mathbf{B}) + \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{g}, \quad (3.36)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{B} \otimes \mathbf{v} - \mathbf{v} \otimes \mathbf{B}) = -\nabla \times (\eta \cdot \mathbf{J}), \quad (3.37)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (3.38)$$

en donde  $\rho$  es la densidad de masa,  $\mathbf{v}$  es el vector de velocidad del plasma,  $\mathbf{p}_t$  es el tensor de la presión total con componentes diagonales  $p_t = p + B^2/2$ , con  $p$  dada por la ecuación de estado del gas ideal,  $\mathbf{B}$  es el vector de campo magnético,  $\mathbf{g}$  es la aceleración gravitacional,  $\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B}$  es la densidad de corriente y  $\eta$  es el tensor de resistividad magnética. Estas ecuaciones están escritas en forma adimensional, los detalles de la adimensionalización se encuentran en el Apéndice B. Los términos fuente que incluyen a la resistividad magnética representan disipación de Joule en la ecuación de la energía (3.36), y difusión magnética en la ecuación de inducción (3.37). La deducción de las ecuaciones de la MHD resistiva se presenta en el Apéndice A.

De igual manera que el caso de la MHD ideal, las ecuaciones de la MHD resistiva se pueden escribir en forma de ley de conservación o en forma de ley de balance de flujos, que para el caso de tres dimensiones cartesianas queda de la siguiente forma

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial z} = \mathbf{S}, \quad (3.39)$$

en donde  $\mathbf{U}$  es el vector de variables conservativas,  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{G}$  y  $\mathbf{H}$  son vectores de los flujos en las direcciones  $x$ -,  $y$ -, y  $z$ -, y  $\mathbf{S}$  representa el vector de los términos fuente de las ecuaciones (3.34)-(3.37). Entonces para tres dimensiones cartesianas de manera explícita el vector de variables conservativas y los flujos se expresan por las ecuaciones (3.17), (3.19)-(3.21), y el vector de términos fuente como

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho g_x \\ \rho g_y \\ \rho g_z \\ -\nabla \cdot ((\eta \cdot \mathbf{J}) \times \mathbf{B}) + \rho(v_x g_x + v_y g_y + v_z g_z) \\ (-\nabla \times (\eta \cdot \mathbf{J}))_x \\ (-\nabla \times (\eta \cdot \mathbf{J}))_y \\ (-\nabla \times (\eta \cdot \mathbf{J}))_z \end{bmatrix}. \quad (3.40)$$

El término fuente está definido para el caso general en donde  $\mathbf{g}$  tiene tres componentes, sin embargo, para los problemas que se estudiarán en los capítulos 6 y 7, se considera un campo gravitacional solar constante en dirección  $z$ , ya que solamente se estudia una región pequeña en el Sol, y el efecto de la gravedad es local. La resistividad es representada por  $\eta$  y en general es un tensor, sin embargo para algunas de las pruebas básicas se considera  $\eta$  como anisotrópica o como una función de la posición, y en el caso particular de los problemas en la atmósfera solar, la resistividad se considera homogénea y constante, ya que es una aproximación aceptable para el caso de un gas completamente ionizado. Para el caso en donde  $\eta$  sea constante el término fuente  $\mathbf{S}(\mathbf{U})$  se expresa simplemente de la siguiente forma:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \rho g \\ -\eta \nabla \cdot (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) + \rho v_z g \\ -\eta (\nabla \times \mathbf{J})_x \\ -\eta (\nabla \times \mathbf{J})_y \\ -\eta (\nabla \times \mathbf{J})_z \end{bmatrix}, \quad (3.41)$$

en donde los términos  $-\eta \nabla \cdot (\mathbf{J} \times \mathbf{B})$ ,  $-\eta (\nabla \times \mathbf{J})_x$ ,  $-\eta (\nabla \times \mathbf{J})_y$  y  $-\eta (\nabla \times \mathbf{J})_z$  están dados explícitamente por

$$-\eta \nabla \cdot (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) = -\eta \left[ \frac{\partial}{\partial x} (J_y B_z - J_z B_y) + \frac{\partial}{\partial y} (J_z B_x - J_x B_z) + \frac{\partial}{\partial z} (J_x B_y - J_y B_x) \right], \quad (3.42)$$

$$-\eta (\nabla \times \mathbf{J})_x = -\eta \left( \frac{\partial J_z}{\partial y} - \frac{\partial J_y}{\partial z} \right), \quad (3.43)$$

$$-\eta (\nabla \times \mathbf{J})_y = -\eta \left( \frac{\partial J_x}{\partial z} - \frac{\partial J_z}{\partial x} \right), \quad (3.44)$$

$$-\eta (\nabla \times \mathbf{J})_z = -\eta \left( \frac{\partial J_y}{\partial x} - \frac{\partial J_x}{\partial y} \right), \quad (3.45)$$

donde  $J_x = \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}$ ,  $J_y = \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}$  y  $J_z = \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}$  son las componentes de la densidad de corriente.

De igual manera que en el caso de la MHD ideal, la estructura característica asociada a los valores propios de las ecuaciones de la MHD resistiva, se calcula usando la forma cuasilineal de las leyes de conservación, con  $\mathbf{S} = 0$ . Para este caso se obtienen los mismos valores propios que en el caso de la MHD ideal, es por eso que no es necesario volver a calcularlos. Por lo tanto en los métodos numéricos en donde se usen los valores propios para resolver las ecuaciones de la MHD resistiva, se toman los mismos valores propios obtenidos para la MHD ideal. Sin embargo cuando se aplique un método específico para controlar la constricción del campo magnético  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  numéricamente, la estructura característica de la MHD resistiva puede cambiar, como se verá en el próximo capítulo.

En este capítulo, se describieron de manera general las ecuaciones de la MHD ideal y resistiva. Se calculó la estructura característica asociada a los valores propios de las ecuaciones de la MHD ideal. Los valores propios de las ecuaciones de la MHD resistiva son los mismos que para el caso de la MHD ideal, sin embargo como se verá en el siguiente capítulo, los valores propios cambian si se usa una formulación en particular para mantener la constricción del campo magnético. De igual forma en el siguiente capítulo se introdu-

se desarrollarán las herramientas numéricas necesarias para resolver las ecuaciones de la MHD ideal y resistiva, las cuales están basadas en la discretización en volúmenes finitos en conjunto con métodos de captura de choques de alta resolución.

# Capítulo 4

## Métodos numéricos

Los sistemas de ecuaciones de la MHD ideal y resistiva están formados por ecuaciones diferenciales acopladas no lineales, las cuales tienen solución analítica solamente en los casos más simples, que por lo general son en una dimensión espacial. En esta tesis se estudiarán problemas en dos y tres dimensiones espaciales los cuales no tienen solución analítica, por tal motivo es necesario resolverlas implementando métodos numéricos que serán descritos en este capítulo.

Cuando se estudian problemas relacionados con la MHD, se pueden tener situaciones en donde las condiciones iniciales son discontinuas o problemas en donde hay gradientes de presión y densidad muy grandes, los cuales se traducen en choques y rarefacciones, por tal razón es necesario implementar métodos numéricos que capturen tales estructuras y que sean lo suficientemente precisos para obtener la solución aproximada. Por tal motivo se han desarrollado métodos que son capaces de lidiar con rarefacciones, discontinuidades y choques de una forma más precisa, en particular en esta tesis se resuelven numéricamente las ecuaciones de la MHD ideal y resistiva usando métodos de captura de choques de alta resolución (HRSC) [LeVeque (1992), Toro (1999)]. Una forma de aplicar estos métodos a las ecuaciones diferenciales parciales no lineales es usando la discretización en volúmenes finitos. Esta técnica de discretización se basa en las leyes de conservación de las cantidades físicas involucradas en las ecuaciones, y por lo general son métodos más estables, que por ejemplo las diferencias finitas en la presencia de choques, rarefacciones y discontinuidades.

### 4.1 Volúmenes finitos

El método de volúmenes finitos (MVF) es un esquema de discretización para las ecuaciones diferenciales parciales, especialmente aquellas que surgen de las leyes físicas de conservación. El MVF se basa en la formulación integral del problema mediante un conjunto de

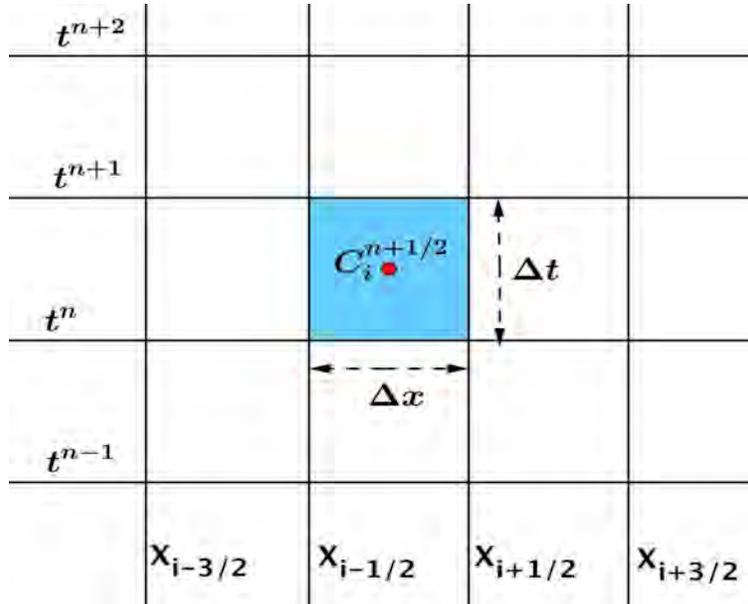


Figura 4.1: Discretización de la malla numérica en el esquema de volúmenes finitos. En esta figura se muestra un elemento de volumen en el espacio tiempo  $\Delta V = \Delta t \Delta x$  en una dimensión espacial, definido en la celda que ocupa el dominio  $[t^n, t^{n+1}] \times [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ . El centro de la celda  $C_i^{n+1/2}$  está localizado en  $(t^{n+1/2}, x_i)$ .

volúmenes de partición finita para discretizar las ecuaciones. Este método tiene la ventaja de que puede ser aplicado a geometrías arbitrarias, por medio de mallas estructuradas y no estructuradas, lo que lo hace un esquema muy robusto. Además el MVF tiene la propiedad de conservación local de los flujos, ya que se basa en una aproximación de balance, es decir un balance local definido sobre cada volumen de control, entonces mediante la aplicación de la forma integral del teorema de la divergencia, se obtiene una formulación integral de los flujos sobre cada uno de los volúmenes de control.

Para explicar el MVF es suficiente considerar el caso unidimensional espacial, en donde el dominio se divide en intervalos o celdas, a los cuales se les llama volúmenes de control o finitos denotados por  $V$ . Se considera una malla numérica con una dimensión espacial y una temporal, esto es  $\vec{x} = (t^n, x_i)$ , en donde la coordenada temporal se discretiza como  $t^n = n\Delta t$  y la coordenada espacial como  $x_i = i\Delta x$ ,  $n = 0, 1, 2, 3, \dots, N_t$  e  $i = 0, 1, 2, 3, \dots, N_x$  son las etiquetas de las celdas en las que se divide el dominio espacio-temporal en cuestión. La malla numérica para este caso se muestra en la Fig. 4.1.

La discretización se aplica a la ley de conservación en una dimensión dada por la ecuación:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} = \mathbf{S}(\mathbf{U}), \quad (4.1)$$

en donde  $\mathbf{U}$  es el vector de variables conservativas,  $\mathbf{F}(\mathbf{U})$  son los flujos y  $\mathbf{S}(\mathbf{U})$  son los términos fuente. Entonces para llevar a la forma integral la ecuación (4.1) se integra sobre el elemento de volumen de la Fig. 4.1 y sobre el lapso de tiempo entre  $t^n$  y  $t^{n+1}$ , de la siguiente forma:

$$\frac{1}{V} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \left( \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} \right) dx dt = \frac{1}{V} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{S}(\mathbf{U}) dx dt, \quad (4.2)$$

el avance en el tiempo de las variables conservativas  $\mathbf{U}$  se calcula mediante la siguiente expresión:

$$\mathbf{Q}_i^{n+1} = \mathbf{Q}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{F}_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) + \mathbf{S}_i^n \Delta t, \quad (4.3)$$

en donde  $\mathbf{Q}_i^n$  es la integral de las variables  $\mathbf{U}_i^n$  a lo largo de  $x$ . Esta cantidad se puede interpretar como un promedio espacial de las variables conservativas en cada uno de los volúmenes de control, esto es

$$\mathbf{Q}_i^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{U}(t_n, x) dx. \quad (4.4)$$

En el caso de los términos fuente  $\mathbf{S}$  se tiene que calcular la doble integral sobre el espacio y el tiempo en el dominio  $[t^n, t^{n+1}] \times [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$  de la celda numérica  $C_i^{n+1/2}$

$$\mathbf{S}_i^n = \frac{1}{\Delta x \Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{S}(t, x) dx dt. \quad (4.5)$$

Finalmente los flujos numéricos que aparecen en la ecuación (4.3) se calculan como un promedio temporal, de tal forma que los flujos a través de las intercelas  $\mathbf{F}_{i\pm\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$  están definidos como

$$\mathbf{F}_{i\pm\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{F}[\mathbf{U}(t, x_{i\pm 1/2})] dt. \quad (4.6)$$

Los flujos numéricos dados por la ecuación (4.6) no se conocen a priori, por lo que se deben calcular en cada intercelda, lo que implica que el fluido presenta discontinuidades al pasar de una celda a otra, y de manera natural aparece un problema de Riemann en las fronteras de cada intercelda. En general el problema de Riemann consiste en un problema de valores iniciales de un sistema de ecuaciones diferenciales hiperbólicas en combinación con un dato inicial constante a pedazos que es discontinuo. La estructura de la solución general del problema de Riemann se puede esquematizar en el plano  $x - t$ , y consiste de  $m$  ondas saliendo de un origen, una para cada valor propio  $\lambda_i$  asociado a un sistema de ecuaciones particular escrito en forma de balance de flujos, tal estructura se muestra en la Fig. 4.2. Cada onda  $i$  acarrea una discontinuidad de salto asociada al vector de variables

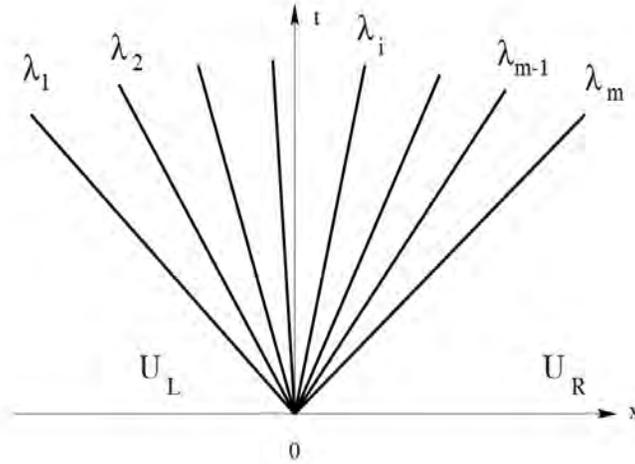


Figura 4.2: Estructura esquemática del abanico de Riemann que representa la solución a un sistema de ecuaciones lineales hiperbólicas con coeficientes constantes.

conservativas  $\mathbf{U}$  que se propagan con velocidad  $\lambda_i$ . Naturalmente, la solución del lado izquierdo de la onda  $\lambda_1$  es simplemente el dato inicial  $\mathbf{U}_L$  y la del lado derecho de la onda  $\lambda_m$  es  $\mathbf{U}_R$ . Entonces el reto en el problema de Riemann es encontrar la solución en la región entre las ondas  $\lambda_1$  y  $\lambda_m$ .

En esta tesis se usan métodos numéricos basados en el método de Godunov [Godunov (1959)], que consisten en definir y resolver el problema de Riemann en cada intercelda de la malla numérica. Es posible resolver el problema de Riemann de manera exacta, sin embargo resulta ser muy complicado y costoso computacionalmente para los casos en dos y tres dimensiones espaciales, por lo que es más práctico usar los resolvedores que calculan una solución aproximada del problema de Riemann, es decir aproximan la solución exacta mediante un esquema consistente y conservativo para converger a la solución débil (integral) de un sistema de ecuaciones diferenciales escritas en forma de ley de conservación. Entre estos resolvedores de Riemann se encuentran el HLLC [Einfeldt (1988), Harten et al. (1983)], HLLC [Li (2005)], HLLD [Miyoshi & Kusano (2005)] y Roe [Roe (1981)]. En esta tesis se implementaron los resolvedores de Riemann HLLC, HLLD y Roe para el caso de la MHD ideal, mientras que en el caso de la MHD resistiva se implementaron los resolvedores HLLC y HLLD.

## 4.2 Construcción de flujos numéricos

Para calcular los flujos numéricos en las interfaces de cada celda numérica, se usan resolvedores de Riemann aproximados. En general estos métodos se basan en la estructura característica de la matriz jacobiana asociada a las ecuaciones del tipo ley de balance de flujos, como la ecuación (4.1). En particular el resolvedor de Riemann Roe, necesita la estructura característica completa, es decir los valores y vectores propios, mientras que el HLLC necesita solamente los valores propios. Los resolvedores HLLC Y HLLD necesitan la información de las velocidades magnetosónicas rápidas y lentas, además de que para estos resolvedores se tienen que resolver ecuaciones asociadas a las condiciones de Rankine-Hugoniot. En particular estos resolvedores se han aplicado en la solución numéricas de las ecuaciones de la MHD ideal en algunas simulaciones de propagación de ondas MHD en la atmósfera solar [Del Zanna et al. (2005), Fuchs et al. (2009), Murawski et al. (2013), Chmielewski et al. (2014b)].

La estructura característica asociada a los valores propios para las ecuaciones de la MHD ideal y resistiva fue calculada en el capítulo anterior, pero en esta sección se calcularán los vectores propios asociadas al sistema de ecuaciones de la MHD ideal en una dimensión espacial para explicar el resolvedor de Riemann Roe.

### 4.2.1 HLLC: Harten, Lax, van Leer and Einfeldt

Es un resolvedor de Riemann que se basa en la solución al problema de Riemann usando un solo estado intermedio constante calculado de un promedio conservativo, delimitado por el máximo y mínimo de las velocidades características, por tal razón se considera uno de los resolvedores aproximados más simples. En el caso de la MHD ideal se desprecian las ondas de Alfvén, magnetosónica lenta y de contacto. Por tal razón, el HLLC es extremadamente difuso para estas ondas, sin embargo una de sus ventajas es que mantiene la positividad de la densidad y presión al menos en problemas 1D. El flujo HLLC en la interface  $x_{i-1/2}$  está definido como

$$\mathbf{F}_{i-1/2}^{HLLC} = \frac{\lambda^+ \mathbf{f}_{L,i-1/2} - \lambda^- \mathbf{f}_{R,i-1/2}}{\lambda^+ - \lambda^-} + \frac{\lambda^+ \lambda^-}{\lambda^+ - \lambda^-} (\mathbf{U}_i - \mathbf{U}_{i-1}), \quad (4.7)$$

en donde  $\mathbf{f}_{L,i-1/2} = \mathbf{f}(\mathbf{U}_{L,i-1/2})$  y  $\mathbf{f}_{R,i-1/2} = \mathbf{f}(\mathbf{U}_{R,i-1/2})$  son los flujos evaluados usando los estados izquierdo y derecho de las variables conservativas en cada interface, donde  $\lambda^+$  y  $\lambda^-$  están definidas por

$$\lambda^+ = \max[0, \lambda_i^L, \lambda_i^R], \quad (4.8)$$

$$\lambda^- = \min[0, \lambda_i^L, \lambda_i^R], \quad (4.9)$$

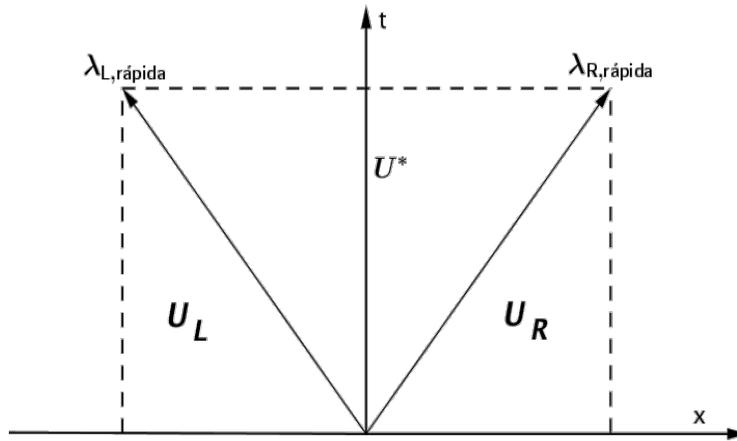


Figura 4.3: Se muestran los valores propios más rápidos en el plano  $t - x$ . El resolvidor HLLE, usa solamente los valores propios de magnitud más grande, uno que corresponde a una onda que viaja a la derecha y otro que corresponde a una onda que viaja hacia la izquierda.

con  $\lambda_i$  que representan los valores propios de la matriz jacobiana para la MHD ideal  $i = 1, 2, 3, \dots, 8$ . El resolvidor HLLE no requiere una descomposición característica completa de las ecuaciones, lo que lo hace menos costoso computacionalmente y fácil de programar. Un esquema de la solución aproximada de este resolvidor se muestra en la Fig. 4.3.

#### 4.2.2 HLLC: Harten, Lax, van Leer (Contact)

Es un resolvidor de Riemann aproximado que modifica al HLLE, ya que en este caso en lugar de tener solo un estado intermedio, tenemos dos estados intermedios entre cada interface denotados por  $\mathbf{U}_L^*$  y  $\mathbf{U}_R^*$ , separados por una velocidad  $S_M$ , como se puede ver en la Fig. 4.4. Para calcular  $\mathbf{U}_L^*$  y  $\mathbf{U}_R^*$  se aplican las condiciones de Rankine-Hugoniot a través de las ondas  $S_L$  y  $S_R$ , esto es:

$$\mathbf{F}_L^* = \mathbf{F}_L + S_L(\mathbf{U}_L^* - \mathbf{U}_L), \quad (4.10)$$

$$\mathbf{F}_R^* = \mathbf{F}_R + S_R(\mathbf{U}_R^* - \mathbf{U}_R). \quad (4.11)$$

Que se pueden reescribir de la siguiente forma

$$S_L \mathbf{U}_L^* - \mathbf{F}_L^* = S_L \mathbf{U}_L - \mathbf{F}_L, \quad (4.12)$$

$$S_R \mathbf{U}_R^* - \mathbf{F}_R^* = S_R \mathbf{U}_R - \mathbf{F}_R. \quad (4.13)$$

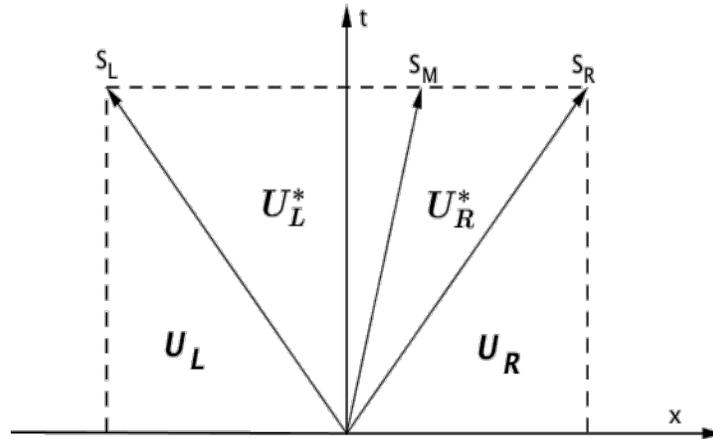


Figura 4.4: Estructura esquemática del abanico de Riemann con dos estados intermedios.

Con la ecuaciones (4.12)-(4.13) se calculan los estados intermedios (\*). Una de las suposiciones del HLLC, es que la velocidad  $S_M$  es constante a lo largo de los estados intermedios  $U_L^*$  y  $U_R^*$ , y se define como [Toro et al. (1994)]

$$S_M = q_L^* = q_R^* = q^*. \quad (4.14)$$

### HLLC para la MHD ideal en 1D

Para ilustrar el resolvidor de Riemann HLLC se considera el caso de las ecuaciones de la MHD ideal en 1D en la dirección  $x$ , y se sigue el procedimiento como en las referencias [Gurski (2004), Li (2005)]. Entonces para este caso el vector de variables conservativas  $\mathbf{U}$  y los flujos  $\mathbf{F}$  están dados por las ecuaciones (3.17) y (3.19), respectivamente. En este caso, debido a la condición de la divergencia del campo magnético,  $B_x$  está dada como una constante en la dirección  $x$ .

Para comenzar con la obtención de los flujos HLLC, primeramente se calculan los estados  $U_L^*$  partiendo de la ecuaciones (3.17), (3.19), (4.12) y de la condición  $S_M = q_L^* = q_R^* = q^*$ , con lo que se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$S_L \begin{bmatrix} \rho_L^* \\ \rho_L^* v_{x,L}^* \\ \rho_L^* v_{y,L}^* \\ \rho_L^* v_{z,L}^* \\ E_L^* \\ B_{x,L}^* \\ B_{y,L}^* \\ B_{z,L}^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \rho_L^* q^* \\ \rho_L^* v_{x,L}^* q^* + p_{tL}^* - (B_{x,L}^*)^2 \\ \rho_L^* v_{y,L}^* q^* - B_{x,L}^* B_{y,L}^* \\ \rho_L^* v_{z,L}^* q^* - B_{x,L}^* B_{z,L}^* \\ (E_L^* + p_{tL}^*) q^* - B_{x,L}^* (\mathbf{B}_L \cdot \mathbf{v}_L)^* \\ 0 \\ v_{x,L}^* B_{y,L}^* - v_{y,L}^* B_{x,L}^* \\ v_{x,L}^* B_{z,L}^* - v_{z,L}^* B_{x,L}^* \end{bmatrix} = S_L \begin{bmatrix} \rho_L \\ \rho_L v_{x,L} \\ \rho_L v_{y,L} \\ \rho_L v_{z,L} \\ E_L \\ B_{x,L} \\ B_{y,L} \\ B_{z,L} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \rho_L q_L \\ \rho_L v_{x,L} q_L + p_{tL} - (B_{x,L})^2 \\ \rho_L v_{y,L} q_L - B_{x,L} B_{y,L} \\ \rho_L v_{z,L} q_L - B_{x,L} B_{z,L} \\ (E_L + p_{tL}) q - B_{x,L} (\mathbf{B}_L \cdot \mathbf{v}_L) \\ 0 \\ v_{x,L} B_{y,L} - v_{y,L} B_{x,L} \\ v_{x,L} B_{z,L} - v_{z,L} B_{x,L} \end{bmatrix}, \quad (4.15)$$

aquí  $p_{tL}$  (ó  $p_{tL}^*$ ) representa la presión total y  $v_{x,L}^* = q^*$ ,  $v_{x,L} = q$ . Para calcular la velocidad  $q^*$  se sigue [Batten et al. (1997)], en donde se usa la aproximación HLL de  $\mathbf{U}_L^*$ , esto es

$$\mathbf{U}^* = \frac{S_R \mathbf{U}_R - S_L \mathbf{U}_L - (F_R - F_L)}{S_R - S_L}, \quad (4.16)$$

entonces  $q^* = S_M$  se define de la siguiente forma

$$q^* = \frac{\rho_R v_{x,R} (S_R - v_{x,R}) - \rho_L v_{x,L} (S_L - v_{x,L}) + p_{tL} - p_{tR} - B_{x,L}^2 + B_{x,R}^2}{\rho_R (S_R - v_{x,R}) - \rho_L (S_L - v_{x,L})}. \quad (4.17)$$

Las demás componentes de  $\mathbf{U}_L^*$  se derivan haciendo manipulaciones algebraicas del sistema de ecuaciones (4.15), de donde se obtienen

$$B_{x,L}^* = B_{x,L}, \quad (4.18)$$

$$B_{y,L}^* = \frac{(S_L - v_{x,L} - \frac{B_{x,L}^* B_{x,L}}{\rho_L (S_L - v_{x,L})}) B_{y,L} - (B_{x,L}^* - B_{x,L}) v_{y,L}}{S_L - q^* - \frac{(B_{x,L}^*)^2}{\rho_L (S_L - v_{x,L})}}, \quad (4.19)$$

$$B_{z,L}^* = \frac{(S_L - v_{x,L} - \frac{B_{x,L}^* B_{x,L}}{\rho_L (S_L - v_{x,L})}) B_{z,L} - (B_{x,L}^* - B_{x,L}) v_{z,L}}{S_L - q^* - \frac{(B_{x,L}^*)^2}{\rho_L (S_L - v_{x,L})}}, \quad (4.20)$$

$$\rho_L^* = \rho_L \frac{S_L - v_{x,L}}{S_L - q^*}, \quad (4.21)$$

$$(\rho v_x)_L^* = \rho_L^* q^*, \quad (4.22)$$

$$(\rho v_y)_L^* = (\rho v_y)_L \frac{S_L - v_{x,L}}{S_L - q^*} - \frac{(B_{x,L}^* B_{y,L}^* - B_{x,L} B_{y,L})}{S_L - q^*}, \quad (4.23)$$

$$(\rho v_z)_L^* = (\rho v_z)_L \frac{S_L - v_{x,L}}{S_L - q^*} - \frac{(B_{x,L}^* B_{z,L}^* - B_{x,L} B_{z,L})}{S_L - q^*}, \quad (4.24)$$

$$E_L^* = E_L \frac{S_L - v_{x,L}}{S_L - q^*} + \frac{(p_{tL}^* q^* - p_{tL} v_{x,L}) - (B_{x,L}^* (\mathbf{B} \cdot \mathbf{v})_L^* - B_{x,L} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{v})_L)}{S_L - q^*}, \quad (4.25)$$

con

$$p_{tL}^* = \rho_L (S_L - v_{x,L}) (q^* - v_{x,L}) + p_{tL} - B_{x,L}^2 + (B_{x,L}^*)^2, \quad (4.26)$$

la cual satisface  $p_{tL}^* = p_{tR}^* = p_t^*$ , lo que implica que  $B_{x,L}^* = B_{x,R}^*$ . El estado  $\mathbf{U}_R^*$  se puede derivar de manera análoga resolviendo el sistema de ecuaciones dado por la condición (4.13). Para el caso en 1D, se cumple que  $B_{x,L,R}^* = B_{x,L,R}$ , sin embargo en el caso multidimensional esto no es cierto, por lo que se tiene que calcular  $B_{x,L,R}^*$  de forma consistente.

Además de que los estados  $\mathbf{U}^*$  derivados anteriormente no son consistentes con la forma

integral de las leyes de conservación, la cual es conocida como condición de consistencia introducida en [Toro (1999)]

$$\frac{q^* - S_L}{S_R - S_L} \mathbf{U}_L^* + \frac{S_R - q^*}{S_R - S_L} \mathbf{U}_R^* = \frac{S_R \mathbf{U}_R - S_L \mathbf{U}_L - (\mathbf{F}_R - \mathbf{F}_L)}{S_R - S_L}. \quad (4.27)$$

Por lo tanto se tiene que encontrar un conjunto de soluciones que satisfaga la condición (4.27). Lo que se hace inicialmente es dejar igual las ecuaciones (4.17) y (4.26), la idea es encontrar nuevas expresiones para  $B_y^*$  y  $B_z^*$  que satisfagan (4.27). Sustituyendo las ecuaciones (4.24) y (4.25) en la ecuación (4.27), se obtienen las siguientes condiciones para las componentes del campo magnético

$$B_{x,L}^* B_{y,L}^* = B_{x,R}^* B_{y,R}^*, \quad (4.28)$$

$$B_{x,L}^* B_{z,L}^* = B_{x,R}^* B_{z,R}^*. \quad (4.29)$$

Ya que  $B_{x,L}^* = B_{x,R}^*$ , de las ecuaciones (4.28) y (4.29) se obtiene

$$B_{y,L}^* = B_{y,R}^* \quad B_{z,L}^* = B_{z,R}^*. \quad (4.30)$$

Entonces, como una solución se asigna el promedio simple HLL descrito por la ecuación (4.16) a estos campos, esto es

$$B_{y,L}^* = B_{y,R}^* = B_y^{HLL}; \quad B_{z,L}^* = B_{z,R}^* = B_z^{HLL}. \quad (4.31)$$

Se pueden escoger otras soluciones para  $B_{y,L,R}^*$ ,  $B_{z,L,R}^*$  de tal forma que satisfagan (4.30). Ya que se tienen calculados los nuevos valores consistentes para  $B_y^*$  y  $B_z^*$ , además de  $q^*$  y  $p_i^*$ , ahora se puede calcular el nuevo  $E_{L,R}^*$  que satisfaga (4.27). Sustituyendo las ecuaciones (4.25) y (4.27), se obtiene

$$B_{x,L}^* (\mathbf{B} \cdot \mathbf{v})_L^* = B_{x,R}^* (\mathbf{B} \cdot \mathbf{v})_R^*, \quad \text{ó} \quad (\mathbf{B} \cdot \mathbf{v})_L^* = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{v})_R^*. \quad (4.32)$$

Entonces tal y como a la ecuación (4.30), se pueden asignar los promedios simples HLL a (4.32), esto es

$$(\mathbf{B} \cdot \mathbf{v})_L^* = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{v})_R^* = \mathbf{B}^{HLL} \cdot \mathbf{v}^{HLL}, \quad (4.33)$$

y por lo tanto la ecuación (4.25) se convierte en

$$E_L^* = E_L \frac{S_L - v_{x,L}}{S_L - q^*} + \frac{(p_i^* q^* - p_{iL} v_{x,L}) - (B_{x,L}^* (\mathbf{B}^{HLL} \cdot \mathbf{v}^{HLL}) - B_{x,L} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{v})_L)}{S_L - q^*}. \quad (4.34)$$

Para calcular la expresión consistente de  $B_{x,L}^* = B_{x,R}^*$  se usa el valor promedio simple HLL, que para el caso cuando  $B_x$  no es constante, es decir para el caso multidimensional se tiene lo siguiente

$$B_{x,L}^* = B_{x,R}^* = B_x^{HLL} = \frac{S_R B_{x,R} - S_L B_{x,L}}{S_R - S_L}. \quad (4.35)$$

Entonces finalmente los estados  $\mathbf{U}_{L,R}^*$  consistentes con la condición (4.27) están dados por:

$$B_{x,\alpha}^* = \frac{S_R B_{x,R} - S_L B_{x,L}}{S_R - S_L}, \quad (4.36)$$

$$B_{y,\alpha}^* = \frac{S_R B_{y,R} - S_L B_{y,L} - B_{y,R} v_{x,R} + B_{x,R} v_{y,R} + B_{y,L} v_{x,L} - B_{x,L} v_{y,L}}{S_R - S_L}, \quad (4.37)$$

$$B_{z,\alpha}^* = \frac{S_R B_{z,R} - S_L B_{z,L} - B_{z,R} v_{x,R} + B_{x,R} v_{z,R} + B_{z,L} v_{x,L} - B_{x,L} v_{z,L}}{S_R - S_L}, \quad (4.38)$$

$$\rho_\alpha^* = \rho_\alpha \frac{S_\alpha - v_{x,\alpha}}{S_\alpha - q^*}, \quad (4.39)$$

$$(\rho v_x)_\alpha^* = \rho_\alpha^* q^*, \quad (4.40)$$

$$(\rho v_y)_\alpha^* = (\rho v_y)_\alpha \frac{S_\alpha - v_{x,\alpha}}{S_\alpha - q^*} - \frac{(B_{x,\alpha}^* B_{y,\alpha}^* - B_{x,\alpha} B_{y,\alpha})}{S_\alpha - q^*}, \quad (4.41)$$

$$(\rho v_z)_\alpha^* = (\rho v_z)_\alpha \frac{S_\alpha - v_{x,\alpha}}{S_\alpha - q^*} - \frac{(B_{x,\alpha}^* B_{z,\alpha}^* - B_{x,\alpha} B_{z,\alpha})}{S_\alpha - q^*}, \quad (4.42)$$

$$E_\alpha^* = E_\alpha \frac{S_\alpha - v_{x,\alpha}}{S_\alpha - q^*} + \frac{(p_{t_\alpha}^* q^* - p_{t_\alpha} v_{x,\alpha}) - (B_{x,\alpha}^* (\mathbf{B}^{HLL} \cdot \mathbf{v}^{HLL}) - B_{x,\alpha} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{v})_\alpha)}{S_\alpha - q^*}, \quad (4.43)$$

en donde  $\alpha = L, R$  representa los estados izquierdos y derechos,  $q^*$  está dada por la ecuación (4.17) y  $p_{t_\alpha} = p_{t_\alpha}^*$  está definida por la ecuación (4.26). En este caso  $S_L$  y  $S_R$  representan las velocidades izquierda y derecha, las cuales se pueden definir de varias formas, en este caso particular se definen tal y como en [Davis (1988)], esto es

$$S_L = \min(v_{x,L} - C_{f_{x,L}}, v_{x,R} - C_{f_{x,R}}), \quad (4.44)$$

$$S_R = \max(v_{x,L} + C_{f_{x,L}}, v_{x,R} + C_{f_{x,R}}), \quad (4.45)$$

en donde  $C_{f_{x,L,R}}$  son las velocidades magnetosónicas rápidas a izquierda y derecha.

El procedimiento para calcular los estados  $\mathbf{U}^*$  en las direcciones  $y$  y  $z$  es análogo al del caso  $x$ , sin embargo en esta tesis no se muestra a detalle, aunque por completéz se presentan los flujos  $\mathbf{U}^*$  en las direcciones  $y$  y  $z$ , los cuales están dados de la siguiente forma

Estados  $U^*$  en dirección  $y$

$$B_{x,\alpha}^* = \frac{S_R B_{x,R} - S_L B_{x,L} - v_{y,R} B_{x,R} + v_{x,R} B_{y,R} + v_{y,L} B_{x,L} - v_{x,L} B_{y,L}}{S_R - S_L}, \quad (4.46)$$

$$B_{y,\alpha}^* = \frac{S_R B_{y,R} - S_L B_{y,L}}{S_R - S_L}, \quad (4.47)$$

$$B_{z,\alpha}^* = \frac{S_R B_{z,R} - S_L B_{z,L} - v_{y,R} B_{z,R} + v_{z,R} B_{y,R} + v_{y,L} B_{z,L} - v_{z,L} B_{y,L}}{S_R - S_L}, \quad (4.48)$$

$$\rho_\alpha^* = \rho_\alpha \frac{S_\alpha - v_{y,\alpha}}{S_\alpha - q^*}, \quad (4.49)$$

$$(\rho v_x)_\alpha^* = (\rho v_x)_\alpha \frac{S_\alpha - v_{y,\alpha}}{S_\alpha - q^*} - \frac{(B_{y,\alpha}^* B_{z,\alpha}^* - B_{y,\alpha} B_{z,\alpha})}{S_\alpha - q^*}, \quad (4.50)$$

$$(\rho v_y)_\alpha^* = \rho_\alpha^* q^*, \quad (4.51)$$

$$(\rho v_z)_\alpha^* = (\rho v_z)_\alpha \frac{S_\alpha - v_{y,\alpha}}{S_\alpha - q^*} - \frac{(B_{y,\alpha}^* B_{z,\alpha}^* - B_{y,\alpha} B_{z,\alpha})}{S_\alpha - q^*}, \quad (4.52)$$

$$E_\alpha^* = E_\alpha \frac{S_\alpha - v_{y,\alpha}}{S_\alpha - q^*} + \frac{(p_{t_\alpha}^* q^* - p_{t_\alpha} v_{y,\alpha}) - (B_{y,\alpha}^* (\mathbf{B}^{HLL} \cdot \mathbf{v}^{HLL}) - B_{y,\alpha} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{v})_\alpha)}{S_\alpha - q^*}, \quad (4.53)$$

en donde  $\alpha = L, R$  representa los estados izquierdo o derechos,  $q^*$  y  $p_{t_\alpha} = p_{t_\alpha}^* = p_t^*$  están definidas como

$$q^* = \frac{\rho_R v_{y,R} (S_R - v_{y,R}) - \rho_L v_{y,L} (S_L - v_{y,L}) + p_{t_L} - p_{t_R} - B_{y,L}^2 + B_{y,R}^2}{\rho_R (S_R - v_{y,R}) - \rho_L (S_L - v_{y,L})}, \quad (4.54)$$

$$p_t^* = \rho_L (S_L - v_{y,L}) (q^* - v_{y,L}) + p_{t_L} - B_{y,L}^2 + (B_{y,L}^*)^2. \quad (4.55)$$

Estados  $U^*$  en dirección  $z$ 

$$B_{x,\alpha}^* = \frac{S_R B_{x,R} - S_L B_{x,L} - v_{z,R} B_{x,R} + v_{x,R} B_{z,R} + v_{z,L} B_{x,L} - v_{x,L} B_{z,L}}{S_R - S_L}, \quad (4.56)$$

$$B_{y,\alpha}^* = \frac{S_R B_{y,R} - S_L B_{y,L} - v_{z,R} B_{y,R} + v_{y,R} B_{z,R} + v_{z,L} B_{y,L} - v_{y,L} B_{z,L}}{S_R - S_L}, \quad (4.57)$$

$$B_{z,\alpha}^* = \frac{S_R B_{z,R} - S_L B_{z,L}}{S_R - S_L}, \quad (4.58)$$

$$\rho_\alpha^* = \rho_\alpha \frac{S_\alpha - v_{z,\alpha}}{S_\alpha - q^*}, \quad (4.59)$$

$$(\rho v_x)_\alpha^* = (\rho v_x)_\alpha \frac{S_\alpha - v_{z,\alpha}}{S_\alpha - q^*} - \frac{(B_{z,\alpha}^* B_{x,\alpha}^* - B_{z,\alpha} B_{x,\alpha})}{S_\alpha - q^*}, \quad (4.60)$$

$$(\rho v_y)_\alpha^* = (\rho v_y)_\alpha \frac{S_\alpha - v_{y,\alpha}}{S_\alpha - q^*} - \frac{(B_{z,\alpha}^* B_{y,\alpha}^* - B_{z,\alpha} B_{y,\alpha})}{S_\alpha - q^*}, \quad (4.61)$$

$$(\rho v_z)_\alpha^* = \rho_\alpha^* q^*, \quad (4.62)$$

$$E_\alpha^* = E_\alpha \frac{S_\alpha - v_{z,\alpha}}{S_\alpha - q^*} + \frac{(p_{t_\alpha}^* q^* - p_{t_\alpha} v_{z,\alpha}) - (B_{z,\alpha}^* (\mathbf{B}^{HLL} \cdot \mathbf{v}^{HLL}) - B_{z,\alpha} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{v})_\alpha)}{S_\alpha - q^*}, \quad (4.63)$$

en donde  $\alpha = L, R$  representa los estados izquierdo o derechos,  $q^*$  y  $p_{t_\alpha} = p_{t_\alpha}^* = p_t^*$  están definidas como

$$q^* = \frac{\rho_R v_{z,R} (S_R - v_{z,R}) - \rho_L v_{y,L} (S_L - v_{z,L}) + p_{t_L} - p_{t_R} - B_{z,L}^2 + B_{z,R}^2}{\rho_R (S_R - v_{y,R}) - \rho_L (S_L - v_{y,L})}, \quad (4.64)$$

$$p_t^* = \rho_L (S_L - v_{z,L}) (q^* - v_{z,L}) + p_{t_L} - B_{z,L}^2 + (B_{z,L}^*)^2. \quad (4.65)$$

Ya que se tiene el conjunto completo de las variables de los estados intermedios  $\mathbf{U}_{L,R}^*$ , finalmente se calculan los flujos intercelda  $\mathbf{F}_{HLLC}$  definidos de la siguiente forma

$$\mathbf{F}_{HLLC} = \begin{cases} F_L, & \text{si } 0 \leq S_L \\ F_L^* = F_L + S_L (\mathbf{U}_L^* - \mathbf{U}_L), & \text{si } S_L \leq q^* \\ F_R^* = F_R + S_R (\mathbf{U}_R^* - \mathbf{U}_R), & \text{si } q^* \leq S_R \\ F_R, & \text{si } 0 \geq S_R. \end{cases} \quad (4.66)$$

Con lo anterior se tiene el conjunto de estados  $\mathbf{U}^*$  y flujos para implementar el resolvidor HLLC en el caso de las ecuaciones de la MHD ideal en 3D.

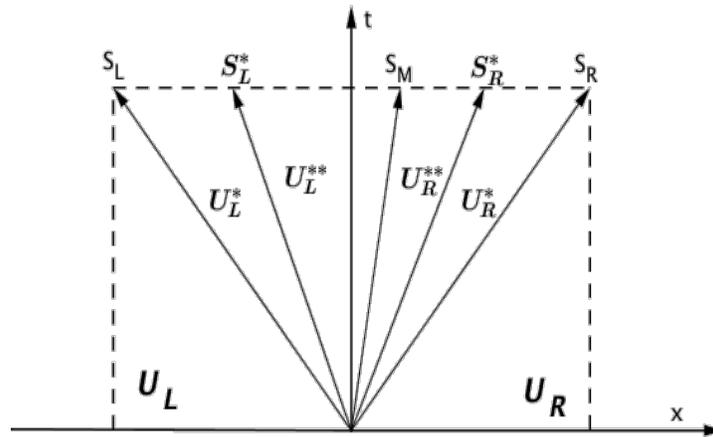


Figura 4.5: Estructura esquemática del abanico de Riemann con cuatro estados intermedios.

### 4.2.3 HLLD: Harten, Lax, van Leer (Discontinuities)

Es un resolvidor de Riemann aproximado de multiestados tipo HLL, el cual se basa en la aproximación de que la velocidad normal es constante sobre el abanico de Riemann. Este resolvidor captura de manera exacta las discontinuidades aisladas que se generan en la MHD ideal, de ahí viene la denominación HLLD. Sin embargo debido a la suposición de que la velocidad normal es constante, y además de que la presión total es constante sobre el abanico de Riemann, no captura las ondas de choque lentas, pero si las discontinuidades rotacionales que se propagan con las ondas de Alfvén. Las dos implicaciones anteriores sugieren que para construir un resolvidor de Riemann HLL con un mayor orden de aproximación, el abanico de Riemann debe estar separado por cuatro estados intermedios que se denotan  $U_L^*$ ,  $U_L^{**}$ ,  $U_R^{**}$  y  $U_R^*$ , como se ilustra en la Fig. 4.5. Entonces, lo que se tiene que resolver es el problema de Riemann aproximado en los cuatro estados separados por una onda entrópica y dos ondas de Alfvén,  $S_M$  y  $S_L^*$ ,  $S_R^*$ , respectivamente.

#### HLLD para la MHD en 1D

Para esquematizar el resolvidor de Riemann HLLD, se considera el caso de las ecuaciones de la MHD ideal en 1D descrito por el vector de variables conservativas y flujos de la ecuaciones (3.17), (3.19) y se sigue el procedimiento tal y como en las referencias [Miyoshi & Kusano (2005), Guo et al. (2016)]. Como se muestra en la Fig. 4.5, el objetivo es encontrar los cuatro estados intermedios,  $U_L^*$ ,  $U_L^{**}$ ,  $U_R^{**}$  y  $U_R^*$ , que están separados por ondas de Alfvén con velocidades  $S_L^*$  y  $S_R^*$ , y por una onda de contacto con velocidad  $S_M$ . Además se asume que la velocidad normal del fluido y la presión total no cambian a través de las ondas de Alfvén y de contacto, todo lo anterior implica las siguientes igualdades

$$q_L^* = q_L^{**} = q_R^{**} = q_R^* = S_M, \quad (4.67)$$

$$p_{t_L}^* = p_{t_L}^{**} = p_{t_R}^* = p_{t_R}^{**}. \quad (4.68)$$

Ahora, si se aplican las condiciones de Rankine-Hugoniot a lo largo de las ondas  $S_\alpha$ ,  $S_\alpha^*$ , y  $S_M$ , se obtiene

$$S_\alpha \mathbf{U}_\alpha^* - F_\alpha^* = S_\alpha \mathbf{U}_\alpha - F_\alpha, \quad (4.69)$$

$$S_\alpha^* \mathbf{U}_\alpha^{**} - F_\alpha^{**} = S_\alpha^* \mathbf{U}_\alpha^* - F_\alpha^*, \quad (4.70)$$

$$S_M \mathbf{U}_L^{**} - F_R^* = S_M \mathbf{U}_R^{**} - F_L^{**}, \quad (4.71)$$

en donde  $\alpha$  representa a los estados  $R$  o  $L$ . Si se aplica la condición (4.70) a las ecuaciones de la MHD en 1D, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$S_\alpha \begin{bmatrix} \rho_\alpha^* \\ \rho_\alpha^* v_{x,\alpha}^* \\ \rho_\alpha^* v_{y,\alpha}^* \\ \rho_\alpha^* v_{z,\alpha}^* \\ E_\alpha^* \\ B_{x,\alpha}^* \\ B_{y,\alpha}^* \\ B_{z,\alpha}^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \rho_\alpha^* S_M \\ \rho_\alpha^* S_M^2 + p_{t_\alpha}^* - (B_{x,\alpha}^*)^2 \\ \rho_\alpha^* v_{y,\alpha}^* S_M - B_{x,\alpha}^* B_{y,\alpha}^* \\ \rho_\alpha^* v_{z,\alpha}^* S_M - B_{x,\alpha}^* B_{z,\alpha}^* \\ (E_\alpha^* + p_{t_\alpha}^*) S_M - B_{x,\alpha}^* (\mathbf{B}_\alpha \cdot \mathbf{v}_\alpha)^* \\ 0 \\ v_{x,\alpha}^* B_{y,\alpha}^* - v_{y,\alpha}^* B_{x,\alpha}^* \\ v_{x,\alpha}^* B_{z,\alpha}^* - v_{z,\alpha}^* B_{x,\alpha}^* \end{bmatrix} = S_\alpha \begin{bmatrix} \rho_\alpha \\ \rho_\alpha v_{x,\alpha} \\ \rho_\alpha v_{y,\alpha} \\ \rho_\alpha v_{z,\alpha} \\ E_\alpha \\ B_{x,\alpha} \\ B_{y,\alpha} \\ B_{z,\alpha} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \rho_\alpha S_M \\ \rho_\alpha S_M^2 + p_{t_\alpha} - (B_{x,\alpha})^2 \\ \rho_\alpha v_{y,\alpha} S_M - B_{x,\alpha} B_{y,\alpha} \\ \rho_\alpha v_{z,\alpha} S_M - B_{x,\alpha} B_{z,\alpha} \\ (E_\alpha + p_{t_\alpha}) S_M - B_{x,\alpha} (\mathbf{B}_\alpha \cdot \mathbf{v}_\alpha) \\ 0 \\ v_{x,\alpha} B_{y,\alpha} - v_{y,\alpha} B_{x,\alpha} \\ v_{x,\alpha} B_{z,\alpha} - v_{z,\alpha} B_{x,\alpha} \end{bmatrix}. \quad (4.72)$$

En el caso 1D se asume que las ondas se mueven en dirección  $x$ , lo que implica

$$v_{x,\alpha} = q_\alpha, \quad v_{x,\alpha}^* = q_\alpha^*, \quad v_{x,\alpha}^{**} = q_\alpha^{**}. \quad (4.73)$$

Para calcular  $S_M$  se usa la condición (4.68) y se toma el promedio simple HLL (4.16), lo que implica la siguiente expresión

$$S_M = q_\alpha^* = \frac{(\rho v_x)^*}{\rho^*} = \frac{\rho_R v_{x,R} (S_R - v_{x,R}) - \rho_L v_{x,L} (S_L - v_{x,L}) + p_{t_L} - p_{t_R} - B_{x,L}^2 + B_{x,R}^2}{\rho_R (S_R - v_{x,R}) - \rho_L (S_L - v_{x,L})}. \quad (4.74)$$

De la condición de balance de la presión total  $p_{t_L}^* = p_{t_R}^*$ , y de la suposición  $v_{x,\alpha}^* = q_\alpha^*$ , se tiene

$$q_\alpha^* = \frac{\rho_R v_{x,R} (S_R - v_{x,R}) - \rho_L v_{x,L} (S_L - v_{x,L}) + p_{t_L} - p_{t_R} - B_{x,L}^2 + B_{x,R}^2 - (B_{x,R}^*)^2 + (B_{x,L}^*)^2}{\rho_R (S_R - v_{x,R}) - \rho_L (S_L - v_{x,L})}. \quad (4.75)$$

Comparando la ecuación (4.74) con (4.75), se obtiene que  $B_{x,L}^* = B_{x,R}^*$ , lo cual es cierto solamente en el caso unidimensional. Para el caso multidimensional  $B_{x,\alpha}^*$  se define mediante el estado HLL

$$B_{x,\alpha}^* = \frac{S_R B_{x,R} - S_L B_{x,L}}{S_R - S_L}. \quad (4.76)$$

Ya que se ha definido  $S_M$  y  $B_{x,\alpha}^*$ , las demás variables del estado  $\mathbf{U}_\alpha^*$  se obtienen del sistema de ecuaciones (4.72), las cuales están definidas como:

$$B_{y,\alpha}^* = \frac{B_{y,\alpha} \rho_\alpha (S_\alpha - v_{x,\alpha})^2 - B_{y,\alpha} B_{x,\alpha} B_{x,\alpha}^* - (B_{x,\alpha}^* - B_{x,\alpha}) v_{y,\alpha} \rho_\alpha (S_\alpha - v_{x,\alpha})}{\rho_\alpha (S_\alpha - q^*) (S_\alpha - v_{x,\alpha}) - (B_{x,\alpha}^*)^2}, \quad (4.77)$$

$$B_{z,\alpha}^* = \frac{B_{z,\alpha} \rho_\alpha (S_\alpha - v_{x,\alpha})^2 - B_{z,\alpha} B_{x,\alpha} B_{x,\alpha}^* - (B_{x,\alpha}^* - B_{x,\alpha}) v_{z,\alpha} \rho_\alpha (S_\alpha - v_{x,\alpha})}{\rho_\alpha (S_\alpha - q^*) (S_\alpha - v_{x,\alpha}) - (B_{x,\alpha}^*)^2}, \quad (4.78)$$

$$\rho_\alpha^* = \rho_\alpha \frac{S_\alpha - v_{x,\alpha}}{S_\alpha - q^*}, \quad (4.79)$$

$$(\rho v_x)_\alpha^* = \rho_\alpha^* q^*, \quad (4.80)$$

$$(\rho v_y)_\alpha^* = (\rho v_y)_\alpha \frac{S_\alpha - v_{x,\alpha}}{S_\alpha - q^*} - \frac{(B_{x,\alpha}^* B_{y,\alpha} - B_{x,\alpha} B_{y,\alpha})}{S_\alpha - q^*}, \quad (4.81)$$

$$(\rho v_z)_\alpha^* = (\rho v_z)_\alpha \frac{S_\alpha - v_{x,\alpha}}{S_\alpha - q^*} - \frac{(B_{x,\alpha}^* B_{z,\alpha} - B_{x,\alpha} B_{z,\alpha})}{S_\alpha - q^*}, \quad (4.82)$$

$$E_\alpha^* = E_\alpha \frac{S_\alpha - v_{x,\alpha}}{S_\alpha - q^*} + \frac{(p_{t_\alpha}^* q^* - p_{t_\alpha} v_{x,\alpha}) - (B_{x,\alpha}^* (\mathbf{B} \cdot \mathbf{v})_\alpha^* - B_{x,\alpha} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{v})_\alpha)}{S_\alpha - q^*}, \quad (4.83)$$

en donde

$$p_{t_\alpha}^* = \rho_\alpha (S_\alpha - v_{x,\alpha}) (q^* - v_{x,\alpha}) + p_{t_\alpha} - B_{x,\alpha}^2 + (B_{x,\alpha}^*)^2. \quad (4.84)$$

Se puede ver que en las ecuaciones (4.77)-(4.83) se tienen indeterminaciones del tipo 0/0 cuando  $q^* = v_{x,\alpha}$ ,  $S_\alpha = v_{x,\alpha} \pm c_{f_\alpha}$ ,  $B_{y,\alpha} = B_{z,\alpha} = 0$ , y  $B_{x,\alpha}^2 \geq \gamma p_\alpha$ . En estos casos las ecuaciones (4.77)-(4.83) se reemplazan simplemente por  $v_{y,\alpha} = v_\alpha$ ,  $v_{z,\alpha}^* = v_{z,\alpha}$ , y  $B_{y,\alpha}^* = B_{z,\alpha}^* = 0$ , ya que no hay choques a través de  $S_\alpha$ , esto es,  $\rho_\alpha^* = \rho_\alpha$ ,  $v_{x,\alpha}^* = v_{x,\alpha}$ , y  $p_{t_\alpha}^* = p_{t_\alpha}$ .

Antes de calcular los estados intermedios  $\mathbf{U}_\alpha^{**}$  se definen las velocidades de propagación de Alfvén en los estados intermedios de la siguiente forma

$$S_L^* = S_M - \frac{B_{x,L}^*}{\sqrt{\rho_L^*}}, \quad S_R^* = S_M + \frac{B_{x,R}^*}{\sqrt{\rho_R^*}}. \quad (4.85)$$

Aplicando las condiciones de Rankine-Hugoniot a través de las ondas  $S_\alpha^*$  se tiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$S_\alpha^* \begin{bmatrix} \rho_\alpha^{**} \\ \rho_\alpha^{**} v_{x,\alpha}^{**} \\ \rho_\alpha^{**} v_{y,\alpha}^{**} \\ \rho_\alpha^{**} v_{z,\alpha}^{**} \\ E_\alpha^{**} \\ B_{x,\alpha}^{**} \\ B_{y,\alpha}^{**} \\ B_{z,\alpha}^{**} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \rho_\alpha^{**} S_M \\ \rho_\alpha^{**} S_M^2 + p_{t_\alpha}^{**} - (B_{x,\alpha}^{**})^2 \\ \rho_\alpha^{**} v_{y,\alpha}^{**} S_M - B_{x,\alpha}^{**} B_{y,\alpha}^{**} \\ \rho_\alpha^{**} v_{z,\alpha}^{**} S_M - B_{x,\alpha}^{**} B_{z,\alpha}^{**} \\ (E_\alpha^{**} + p_{t_\alpha}^{**}) S_M - B_{x,\alpha}^{**} (\mathbf{B}_\alpha \cdot \mathbf{v}_\alpha)^{**} \\ 0 \\ v_{x,\alpha}^{**} B_{y,\alpha}^{**} - v_{y,\alpha}^{**} B_{x,\alpha}^{**} \\ v_{x,\alpha}^{**} B_{z,\alpha}^{**} - v_{z,\alpha}^{**} B_{x,\alpha}^{**} \end{bmatrix} = S_\alpha^* \begin{bmatrix} \rho_\alpha^* \\ \rho_\alpha^* v_{x,\alpha}^* \\ \rho_\alpha^* v_{y,\alpha}^* \\ \rho_\alpha^* v_{z,\alpha}^* \\ E_\alpha^* \\ B_{x,\alpha}^* \\ B_{y,\alpha}^* \\ B_{z,\alpha}^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \rho_\alpha^* S_M \\ \rho_\alpha^* S_M^2 + p_{t_\alpha}^* - (B_{x,\alpha}^*)^2 \\ \rho_\alpha^* v_{y,\alpha}^* S_M - B_{x,\alpha}^* B_{y,\alpha}^* \\ \rho_\alpha^* v_{z,\alpha}^* S_M - B_{x,\alpha}^* B_{z,\alpha}^* \\ (E_\alpha^* + p_{t_\alpha}^*) S_M - B_{x,\alpha}^* (\mathbf{B}_\alpha \cdot \mathbf{v}_\alpha)^* \\ 0 \\ v_{x,\alpha}^* B_{y,\alpha}^* - v_{y,\alpha}^* B_{x,\alpha}^* \\ v_{x,\alpha}^* B_{z,\alpha}^* - v_{z,\alpha}^* B_{x,\alpha}^* \end{bmatrix}, \quad (4.86)$$

de donde es obvio que

$$\rho_\alpha^{**} = \rho_\alpha^*, \quad B_{x,\alpha}^{**} = B_{x,\alpha}^*. \quad (4.87)$$

Sin embargo el sistema de ecuaciones (4.86) no tiene solución cuando  $S_\alpha^*$  está definida por la ecuación (4.85), es por eso que se consideran las condiciones de salto para las componentes tangenciales de la velocidad y campo magnético a través de  $S_M$ , esto es

$$S_M \begin{bmatrix} \rho_L^{**} v_{y,L}^{**} \\ \rho_L^{**} v_{z,L}^{**} \\ B_{y,L}^{**} \\ B_{z,L}^{**} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \rho_L^{**} v_{y,L}^{**} S_M - B_{x,L}^{**} B_{y,L}^{**} \\ \rho_L^{**} v_{z,L}^{**} S_M - B_{x,L}^{**} B_{z,L}^{**} \\ B_{y,L}^{**} S_M - B_{x,L}^{**} v_{y,L}^{**} \\ B_{z,L}^{**} S_M - B_{x,L}^{**} v_{z,L}^{**} \end{bmatrix} = S_M \begin{bmatrix} \rho_R^{**} v_{y,R}^{**} \\ \rho_R^{**} v_{z,R}^{**} \\ B_{y,R}^{**} \\ B_{z,R}^{**} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \rho_R^{**} v_{y,R}^{**} S_M - B_{x,R}^{**} B_{y,R}^{**} \\ \rho_R^{**} v_{z,R}^{**} S_M - B_{x,R}^{**} B_{z,R}^{**} \\ B_{y,R}^{**} S_M - B_{x,R}^{**} v_{y,R}^{**} \\ B_{z,R}^{**} S_M - B_{x,R}^{**} v_{z,R}^{**} \end{bmatrix}. \quad (4.88)$$

De donde se obtienen las siguientes igualdades

$$v_{y,L}^{**} = v_{y,R}^{**} = v_y^{**}, \quad (4.89)$$

$$v_{z,L}^{**} = v_{z,R}^{**} = v_z^{**}, \quad (4.90)$$

$$B_{y,L}^{**} = B_{y,R}^{**} = B_y^{**}, \quad (4.91)$$

$$B_{z,L}^{**} = B_{z,R}^{**} = B_z^{**}, \quad (4.92)$$

para el caso  $B_{x,\alpha}^{**} = B_{x,\alpha}^* = B_x^{HLL} \neq 0$ . Estas igualdades indican las condiciones de una discontinuidad de contacto y además muestran que  $v_y$ ,  $v_z$ ,  $B_y$ , y  $B_z$  están aproximadas por tres estados intermedios. Por lo tanto, si se sustituyen las ecuaciones (4.85), (4.87), (4.90)-(4.92) dentro de la integral de las leyes de conservación a lo largo del abanico de Riemann,

$$(S_R - S_R^*) \mathbf{U}_R^* + (S_R^* - S_M) \mathbf{U}_R^{**} + (S_M - S_L) \mathbf{U}_L^{**} + (S_L^* - S_L) \mathbf{U}_L^* - S_R \mathbf{U}_R + S_L \mathbf{U}_L + \mathbf{F}_R - \mathbf{F}_L = 0, \quad (4.93)$$

de donde se obtienen los estados  $\mathbf{U}^{**}$  definidos de la siguiente forma

$$v_y^{**} = \frac{\sqrt{\rho_L^*} v_{y,L}^* + \sqrt{\rho_R^*} v_{y,R}^* + (B_{y,R}^* - B_{y,L}^*) \text{sign}(B_x^{HLL})}{\sqrt{\rho_L^*} + \sqrt{\rho_R^*}}, \quad (4.94)$$

$$v_z^{**} = \frac{\sqrt{\rho_L^*} v_{z,L}^* + \sqrt{\rho_R^*} v_{z,R}^* + (B_{z,R}^* - B_{z,L}^*) \text{sign}(B_x^{HLL})}{\sqrt{\rho_L^*} + \sqrt{\rho_R^*}}, \quad (4.95)$$

$$B_y^{**} = \frac{\sqrt{\rho_L^*} B_{y,R}^* + \sqrt{\rho_R^*} B_{y,L}^* + \sqrt{\rho_L^* \rho_R^*} (v_{y,R}^* - v_{y,L}^*) \text{sign}(B_x^{HLL})}{\sqrt{\rho_L^*} + \sqrt{\rho_R^*}}, \quad (4.96)$$

$$B_z^{**} = \frac{\sqrt{\rho_L^*} B_{z,R}^* + \sqrt{\rho_R^*} B_{z,L}^* + \sqrt{\rho_L^* \rho_R^*} (v_{z,R}^* - v_{z,L}^*) \text{sign}(B_x^{HLL})}{\sqrt{\rho_L^*} + \sqrt{\rho_R^*}}, \quad (4.97)$$

$$E_\alpha^{**} = E_\alpha^* \mp \sqrt{\rho_\alpha^*} (\mathbf{v}_\alpha^* \cdot \mathbf{B}_\alpha^* - \mathbf{v}^{**} \cdot \mathbf{B}^{**}) \text{sign}(B_x^{HLL}), \quad (4.98)$$

en donde  $\text{sign}(B_x^{HLL})$  es la función signo de  $B_x^{HLL}$  y se define como 1, si  $B_x^{HLL} > 0$  y -1, si  $B_x^{HLL} < 0$ . Además los signos menos y más de la ecuación (4.98) corresponden a  $\alpha = L$  y  $R$ , respectivamente.

Con todo lo anterior se han calculado los estados intermedios  $\mathbf{U}_L^*$ ,  $\mathbf{U}_L^{**}$ ,  $\mathbf{U}_R^*$ , y  $\mathbf{U}_R^{**}$  para las ecuaciones de la MHD ideal 1D, en dirección  $x$ . De igual manera que en el caso del resolvidor HLLC, se presentan las componentes de los estados  $\mathbf{U}^*$  y  $\mathbf{U}^{**}$  para las direcciones  $y$  y  $z$ , las cuales se expresan de la siguiente forma

Estados  $U^*$  en dirección y

$$B_{x,\alpha}^* = \frac{B_{x,\alpha}\rho_\alpha(S_\alpha - v_{y,\alpha})^2 - B_{x,\alpha}B_{y,\alpha}^*B_{y,\alpha} - v_{x,\alpha}\rho_\alpha(B_{y,\alpha}^* - B_{y,\alpha})(S_\alpha - v_{y,\alpha})}{\rho_\alpha(S_\alpha - q^*)(S_\alpha - v_{y,\alpha}) - (B_{y,\alpha}^*)^2}, \quad (4.99)$$

$$B_{y,\alpha}^* = \frac{S_R B_{y,R} - S_L B_{y,L}}{S_R - S_L}, \quad (4.100)$$

$$B_{z,\alpha}^* = \frac{B_{z,\alpha}\rho_\alpha(S_\alpha - v_{y,\alpha})^2 - B_{z,\alpha}B_{y,\alpha}^*B_{y,\alpha} - v_{z,\alpha}\rho_\alpha(B_{y,\alpha}^* - B_{y,\alpha})(S_\alpha - v_{y,\alpha})}{\rho_\alpha(S_\alpha - q^*)(S_\alpha - v_{y,\alpha}) - (B_{y,\alpha}^*)^2}, \quad (4.101)$$

$$\rho_\alpha^* = \rho_\alpha \frac{S_\alpha - v_{y,\alpha}}{S_\alpha - S_M}, \quad (4.102)$$

$$(\rho v_x)_\alpha^* = \frac{\rho_\alpha v_{x,\alpha}(S_\alpha - v_{y,\alpha}) - B_{y,\alpha}^* B_{x,\alpha}^* + B_{y,\alpha} B_{x,\alpha}}{S_\alpha - q^*}, \quad (4.103)$$

$$(\rho v_y)_\alpha^* = \rho_\alpha^* q^*, \quad (4.104)$$

$$(\rho v_z)_\alpha^* = \frac{\rho_\alpha v_{z,\alpha}(S_\alpha - v_{y,\alpha}) - B_{y,\alpha}^* B_{z,\alpha}^* + B_{y,\alpha} B_{z,\alpha}}{S_\alpha - q^*}, \quad (4.105)$$

$$E_\alpha^* = E_\alpha \frac{S_\alpha - v_{y,\alpha}}{S_\alpha - q^*} + \frac{(p_{t_\alpha}^* q^* - p_{t_\alpha} v_{y,\alpha}) - (B_{y,\alpha}^* (\mathbf{B} \cdot \mathbf{v})_\alpha^* - B_{y,\alpha} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{v})_\alpha)}{S_\alpha - q^*}, \quad (4.106)$$

en donde  $\alpha = R, L$  representa los estados derecho e izquierdo respectivamente. Además  $q^*$  y  $p_{t_\alpha} = p_t^*$  están definidas como

$$q^* = \frac{\rho_R v_{y,R}(S_R - v_{y,R}) - \rho_L v_{y,L}(S_L - v_{y,L}) + p_{t_L} - p_{t_R} - B_{y,L}^2 + B_{y,R}^2 - (B_{y,R}^*)^2 + (B_{y,L}^*)^2}{\rho_R(S_R - v_{y,R}) - \rho_L(S_L - v_{y,L})}, \quad (4.107)$$

$$p_t^* = \rho_\alpha(S_\alpha - v_{y,\alpha})(q^* - v_{y,\alpha}) + p_{t_\alpha} - B_{y,\alpha}^2 + (B_{y,\alpha}^*)^2. \quad (4.108)$$

Estados  $U^{**}$  en dirección  $y$ 

$$v_x^{**} = \frac{\sqrt{\rho_L^*} v_{x,L}^* + \sqrt{\rho_R^*} v_{x,R}^* + (B_{x,R}^* - B_{x,L}^*) \text{sign}(B_y^{HLL})}{\sqrt{\rho_L^*} + \sqrt{\rho_R^*}}, \quad (4.109)$$

$$v_y^{**} = q^*, \quad (4.110)$$

$$v_z^{**} = \frac{\sqrt{\rho_L^*} v_{z,L}^* + \sqrt{\rho_R^*} v_{z,R}^* + (B_{z,R}^* - B_{z,L}^*) \text{sign}(B_y^{HLL})}{\sqrt{\rho_L^*} + \sqrt{\rho_R^*}}, \quad (4.111)$$

$$B_x^{**} = \frac{\sqrt{\rho_L^*} B_{x,R}^* + \sqrt{\rho_R^*} B_{x,L}^* + \sqrt{\rho_L^* \rho_R^*} (v_{x,R}^* - v_{x,L}^*) \text{sign}(B_y^{HLL})}{\sqrt{\rho_L^*} + \sqrt{\rho_R^*}} \quad (4.112)$$

$$B_y^{**} = \frac{S_R B_{y,R} - S_L B_{y,L}}{S_R - S_L}, \quad (4.113)$$

$$B_z^{**} = \frac{\sqrt{\rho_L^*} B_{z,R}^* + \sqrt{\rho_R^*} B_{z,L}^* + \sqrt{\rho_L^* \rho_R^*} (v_{z,R}^* - v_{z,L}^*) \text{sign}(B_y^{HLL})}{\sqrt{\rho_L^*} + \sqrt{\rho_R^*}}, \quad (4.114)$$

$$E_\alpha^{**} = E_\alpha^* \mp \sqrt{\rho_\alpha^*} (\mathbf{v}_\alpha^* \cdot \mathbf{B}_\alpha^* - \mathbf{v}^{**} \cdot \mathbf{B}^{**}) \text{sign}(B_y^{HLL}), \quad (4.115)$$

en donde  $\text{sign}(B_y^{HLL})$  es la función signo de  $B_y^{HLL}$  y se define como 1, si  $B_y^{HLL} > 0$  y -1, si  $B_y^{HLL} < 0$ . Además los signos menos y más de la ecuación (4.115) corresponden a  $\alpha = L$  y  $R$ , respectivamente.

Estados  $U^*$  en dirección  $z$ 

$$B_{x,\alpha}^* = \frac{B_{x,\alpha} \rho_\alpha (S_\alpha - v_{z,\alpha})^2 - B_{x,\alpha} B_{z,\alpha}^* B_{z,\alpha} - v_{x,\alpha} \rho_\alpha (B_{z,\alpha}^* - B_{z,\alpha}) (S_\alpha - v_{z,\alpha})}{\rho_\alpha (S_\alpha - q^*) (S_\alpha - v_{z,\alpha}) - (B_{z,\alpha}^*)^2}, \quad (4.116)$$

$$B_{y,\alpha}^* = \frac{B_{y,\alpha} \rho_\alpha (S_\alpha - v_{z,\alpha})^2 - B_{y,\alpha} B_{z,\alpha}^* B_{z,\alpha} - v_{y,\alpha} \rho_\alpha (B_{z,\alpha}^* - B_{z,\alpha}) (S_\alpha - v_{z,\alpha})}{\rho_\alpha (S_\alpha - q^*) (S_\alpha - v_{z,\alpha}) - (B_{z,\alpha}^*)^2}, \quad (4.117)$$

$$B_{z,\alpha}^* = \frac{S_R B_{z,R} - S_L B_{z,L}}{S_R - S_L}, \quad (4.118)$$

$$\rho_\alpha^* = \rho_\alpha \frac{S_\alpha - v_{y,\alpha}}{S_\alpha - S_M}, \quad (4.119)$$

$$(\rho v_x)_\alpha^* = \frac{\rho_\alpha v_{z,\alpha} (S_\alpha - v_{z,\alpha}) - B_{z,\alpha}^* B_{x,\alpha}^* + B_{z,\alpha} B_{x,\alpha}}{S_\alpha - q^*}, \quad (4.120)$$

$$(\rho v_y)_\alpha^* = \frac{\rho_\alpha v_{y,\alpha} (S_\alpha - v_{z,\alpha}) - B_{z,\alpha}^* B_{y,\alpha}^* + B_{z,\alpha} B_{y,\alpha}}{S_\alpha - q^*}, \quad (4.121)$$

$$(\rho v_z)_\alpha^* = \rho_\alpha^* q^*, \quad (4.122)$$

$$E_\alpha^* = E_\alpha \frac{S_\alpha - v_{z,\alpha}}{S_\alpha - q^*} + \frac{(p_{t_\alpha}^* q^* - p_{t_\alpha} v_{z,\alpha}) - (B_{z,\alpha}^* (\mathbf{B} \cdot \mathbf{v})_\alpha^* - B_{z,\alpha} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{v})_\alpha)}{S_\alpha - q^*}, \quad (4.123)$$

en donde  $\alpha = R, L$  representa los estados derecho e izquierdo respectivamente. Además  $q^*$  y  $p_{t_\alpha} = p_i^*$  están definidas como

$$q^* = \frac{\rho_R v_{z,R}(S_R - v_{z,R}) - \rho_L v_{z,L}(S_L - v_{z,L}) + p_{t_L} - p_{t_R} - B_{z,L}^2 + B_{z,R}^2 - (B_{z,R}^*)^2 + (B_{z,L}^*)^2}{\rho_R(S_R - v_{z,R}) - \rho_L(S_L - v_{z,L})}, \quad (4.124)$$

$$p_i^* = \rho_\alpha(S_\alpha - v_{z,\alpha})(q^* - v_{z,\alpha}) + p_{t_\alpha} - B_{z,\alpha}^2 + (B_{z,\alpha}^*)^2. \quad (4.125)$$

### Estados $U^{**}$ en dirección $z$

$$v_x^{**} = \frac{\sqrt{\rho_L^*} v_{x,L}^* + \sqrt{\rho_R^*} v_{x,R}^* + (B_{x,R}^* - B_{x,L}^*) \text{sign}(B_z^{HLL})}{\sqrt{\rho_L^*} + \sqrt{\rho_R^*}}, \quad (4.126)$$

$$v_y^{**} = \frac{\sqrt{\rho_L^*} v_{y,L}^* + \sqrt{\rho_R^*} v_{y,R}^* + (B_{y,R}^* - B_{y,L}^*) \text{sign}(B_z^{HLL})}{\sqrt{\rho_L^*} + \sqrt{\rho_R^*}}, \quad (4.127)$$

$$v_z^{**} = q^*, \quad (4.128)$$

$$B_x^{**} = \frac{\sqrt{\rho_L^*} B_{x,R}^* + \sqrt{\rho_R^*} B_{x,L}^* + \sqrt{\rho_L^* \rho_R^*} (v_{x,R}^* - v_{x,L}^*) \text{sign}(B_z^{HLL})}{\sqrt{\rho_L^*} + \sqrt{\rho_R^*}} \quad (4.129)$$

$$B_y^{**} = \frac{\sqrt{\rho_L^*} B_{y,R}^* + \sqrt{\rho_R^*} B_{y,L}^* + \sqrt{\rho_L^* \rho_R^*} (v_{y,R}^* - v_{y,L}^*) \text{sign}(B_z^{HLL})}{\sqrt{\rho_L^*} + \sqrt{\rho_R^*}}, \quad (4.130)$$

$$B_z^{**} = \frac{S_R B_{z,R} - S_L B_{z,L}}{S_R - S_L}, \quad (4.131)$$

$$E_\alpha^{**} = E_\alpha^* \mp \sqrt{\rho_\alpha^*} (\mathbf{v}_\alpha^* \cdot \mathbf{B}_\alpha^* - \mathbf{v}^{**} \cdot \mathbf{B}^{**}) \text{sign}(B_z^{HLL}), \quad (4.132)$$

en donde  $\text{sign}(B_z^{HLL})$  es la función signo de  $B_z^{HLL}$  y se define como 1, si  $B_z^{HLL} > 0$  y -1, si  $B_z^{HLL} < 0$ . Además los signos menos y más de la ecuación (4.132) corresponden a  $\alpha = L$  y  $R$ , respectivamente.

Finalmente los flujos numéricos para el resolvidor de Riemann aproximado se obtienen mediante la integral de las leyes de conservación sobre los estados izquierdos y derechos del abanico de Riemann

$$\mathbf{F}_{HLLD} = \begin{cases} F_L & \text{si } S_L > 0, \\ F_L^* = F_L + S_L(\mathbf{U}_L^* - \mathbf{U}_L) & \text{si } S_L \leq 0 \leq S_L^*, \\ F_L^{**} = F_L + S_L^* \mathbf{U}_L^{**} - (S_L^* - S_L) \mathbf{U}_L^* - S_L(\mathbf{U}_L^* - \mathbf{U}_L) & \text{si } S_L^* \leq 0 \leq S_M^*, \\ F_R^* = F_R + S_R^* \mathbf{U}_R^* - (S_R^* - S_R) \mathbf{U}_R^* - S_R(\mathbf{U}_R^* - \mathbf{U}_R) & \text{si } S_M^* \leq 0 \leq S_R^*, \\ F_R^* = F_R + S_R(\mathbf{U}_R^* - \mathbf{U}_R), & \text{si } S_R^* \leq 0 \leq S_R, \\ F_R, & \text{si } S_R < 0. \end{cases} \quad (4.133)$$

En donde  $S_L$  y  $S_R$  están dadas por las ecuaciones (4.44)-(4.45), respectivamente. Ya que se han calculado los estados  $\mathbf{U}^*$ ,  $\mathbf{U}^{**}$  en las tres direcciones  $x, y$  y  $z$ , con eso se calculan los flujos y por lo tanto es posible implementar el resolvidor de Riemann HLLD para el caso de las ecuaciones de la MHD ideal en 3D.

#### 4.2.4 Resolvidor de Riemann Roe

Es un resolvidor de Riemann que se construye de las soluciones exactas para aproximar (linealizar) las ecuaciones tipo ley de conservación, que por ejemplo en 1D se expresa de la siguiente forma

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \mathbf{A}(\bar{\mathbf{U}}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x}. \quad (4.134)$$

En donde  $\mathbf{A}(\bar{\mathbf{U}})$  es la matriz jacobiana evaluada en algún estado promedio apropiado constante  $\bar{\mathbf{U}}$ . El reto del resolvidor de Riemann linealizado es encontrar una representación apropiada de la matriz  $\mathbf{A}(\bar{\mathbf{U}})$ . Tal matriz Roe debe cumplir las siguientes propiedades:

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}_{i+1}) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_i) = \bar{\mathbf{A}}_{i+1/2}(\mathbf{U}_{i+1} - \mathbf{U}_i) \quad (4.135)$$

cuando

$$\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_{i+1} \rightarrow \mathbf{U}_0, \quad \bar{\mathbf{A}}_{i+1/2}(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_{i+1}) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{U}_0), \quad (4.136)$$

en donde  $\mathbf{A} = d\mathbf{F}/d\mathbf{U}$ , además la matriz  $\bar{\mathbf{A}}$  debe tener valores propios reales y un conjunto completo de vectores propios.

Una de las primeras propuestas fue presentada por [Roe (1981)], la cual fue extendida para el caso de la MHD ideal adiabática por [Cargo & Gallice (1997)]. En esta representación, la matriz jacobiana es evaluada usando un promedio de estados definidos de las variables primitivas  $\bar{\mathbf{W}} = (\bar{\rho}, \bar{\mathbf{v}}, \bar{p}, \bar{B}_y, \bar{B}_z)$  de la siguiente forma:

$$\bar{\rho} = \sqrt{\rho_L} \sqrt{\rho_R}, \quad (4.137)$$

$$\bar{\mathbf{v}} = (\sqrt{\rho_L} \mathbf{v}_L + \sqrt{\rho_R} \mathbf{v}_R) / (\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}), \quad (4.138)$$

$$\bar{H} = (\sqrt{\rho_L} H_L + \sqrt{\rho_R} H_R) / (\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}), \quad (4.139)$$

$$\bar{B}_y = (\sqrt{\rho_L} B_{y,L} + \sqrt{\rho_R} B_{y,R}) / (\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}), \quad (4.140)$$

$$\bar{B}_z = (\sqrt{\rho_L} B_{z,L} + \sqrt{\rho_R} B_{z,R}) / (\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}), \quad (4.141)$$

con  $H = (E + p + B^2/2)/\rho$  que representa la entalpía, aquí  $L, R$  son los subíndices que denotan los estados izquierdo y derecho de la intercelda. Dados los valores propios  $\lambda^\alpha$ , y los vectores propios izquierdo y derecho  $\mathbf{L}(\bar{\mathbf{W}})$  y  $\mathbf{R}(\bar{\mathbf{W}})$ , respectivamente, en donde  $\alpha = 1, M$  denota las  $M$  velocidades características de la matriz  $\mathbf{A}(\bar{\mathbf{U}})$ , lo que conlleva a definir los

flujos Roe de la siguiente forma

$$\mathbf{F}_{i-1/2}^{Roe} = \frac{1}{2} \left( \mathbf{F}_{L,i-1/2} + \mathbf{F}_{R,i-1/2} + \sum_{\alpha} \eta^{\alpha} |\lambda^{\alpha}| \mathbf{R}^{\alpha} \right), \quad (4.142)$$

en donde  $\mathbf{F}_{L,i-1/2} = \mathbf{F}(\mathbf{U}_{L,i-1/2})$ ,  $\mathbf{F}_{R,i-1/2} = \mathbf{F}(\mathbf{U}_{R,i-1/2})$ , y

$$\eta^{\alpha} = \mathbf{L}^{\alpha} \cdot \delta \mathbf{U}_{i-1/2}, \quad (4.143)$$

$$\delta \mathbf{U}_{i-1/2} = \mathbf{U}_{L,i-1/2} - \mathbf{U}_{R,i-1/2}, \quad (4.144)$$

con  $\mathbf{L}^{\alpha}$  y  $\mathbf{R}^{\alpha}$  que representan los vectores fila y columna de las eigenmatrices correspondientes a  $\lambda^{\alpha}$ .

La ventaja principal del método de Roe es que incluye toda la información característica del problema, y por lo tanto, es menos disipativo que por ejemplo el HLLE, y además tiene mayor precisión para capturar discontinuidades de contacto. Además como fue demostrado por [Roe (1981)], se obtienen los flujos de forma exacta si la solución del problema de Riemann completo no lineal contiene solamente una discontinuidad aislada. Sin embargo, ya que este resolvidor está basado en una linealización de las ecuaciones del sistema de ecuaciones, para algunos valores de los estados izquierdos o derechos el método puede fallar [Einfeldt et al. (1991)], regresando valores de densidad o presión negativos en uno o más estados intermedios.

### Roe para la MHD en 1D

Para ilustrar el resolvidor de Roe, solamente se calculará para el caso de las ecuaciones de la MHD ideal en 1D tal y como se hace en [Cargo & Gallice (1997)]. Para este caso se escriben las ecuaciones de la MHD ideal en 1D de la siguiente forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} = 0, \quad (4.145)$$

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x^2 + p_t)}{\partial x} = 0, \quad (4.146)$$

$$\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x v_y - B_x B_y)}{\partial x} = 0, \quad (4.147)$$

$$\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x v_z - B_x B_z)}{\partial x} = 0, \quad (4.148)$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} + \frac{\partial(B_y v_x - B_x v_y)}{\partial x} = 0, \quad (4.149)$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} + \frac{\partial(B_z v_x - B_x v_z)}{\partial x} = 0, \quad (4.150)$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x H - B_x(B_x v_x + B_y v_y + B_z v_z))}{\partial x} = 0, \quad (4.151)$$

en donde  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_z$  son las componentes de la velocidad,  $B_x$ ,  $B_y$  y  $B_z$  son las componentes del campo magnético,  $E$  es la densidad de energía total,  $p_t = p + B^2/2$  es la presión total y  $H$  es la densidad de entalpía.

La construcción de la matriz Roe para el caso  $\gamma = 2$  fue calculada por [Brio & Wu (1988)], en este caso la matriz se define mediante la relación siguiente

$$\tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{U}_l, \mathbf{U}_r) = \mathbf{A}(\mathbf{U}_{ave}(\mathbf{U}_l, \mathbf{U}_r)), \quad (4.152)$$

en donde  $\mathbf{U}_{ave}(\mathbf{U}_l, \mathbf{U}_r)$  es una generalización de los promedios Roe para la dinámica del gas, esto es

$$\mathbf{U}_{ave}(\mathbf{U}_l, \mathbf{U}_r) = \mathbf{U}(\underline{\rho}, \underline{v}_x, \underline{v}_y, \underline{v}_z, \underline{H}, \underline{B}_y, \underline{B}_z), \quad (4.153)$$

con

$$\underline{\xi} = \frac{\sqrt{\rho_l} \xi_l + \sqrt{\rho_r} \xi_r}{\sqrt{\rho_l} + \sqrt{\rho_r}}, \quad \underline{\xi} = \frac{\sqrt{\rho_r} \xi_l + \sqrt{\rho_l} \xi_r}{\sqrt{\rho_l} + \sqrt{\rho_r}}. \quad (4.154)$$

Sin embargo, dicha matriz Roe no es para el caso de  $\gamma$  en general, y tampoco cumple la condición (4.135). El cálculo de una matriz Roe para  $\gamma$  en general presenta dificultades, y para entender un poco sobre dichas dificultades se presenta el cálculo de tal matriz para las ecuaciones de la MHD isentrópicas en 1D. El modelo está dado por el siguiente conjunto de ecuaciones

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} &= 0, \\
\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho u^2 + p + \frac{B^2}{2} \right) &= 0, \\
\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (Bu) &= 0,
\end{aligned} \tag{4.155}$$

en donde la presión está definida por la ley isentrópica,  $p = C\rho^\gamma$  con  $C > 0$  y  $\gamma \leq 1$ . Aquí  $B$  y  $u$  representan componentes transversales del campo magnético y de velocidad, respectivamente.

Para construir la matriz Roe del sistema (4.155), se usa la analogía con la hidrodinámica. Primero se supone que el campo magnético es cero, por lo tanto en este caso la matriz debe coincidir con la matriz Roe de la hidrodinámica en 1D. Esta aproximación da los promedios que se usan para expresar los saltos de la presión magnética en términos de los saltos hidrodinámicos. De aquí en adelante, se define  $\Delta\xi = \xi_l - \xi_r$ , y se usa la relación clásica

$$\Delta(\xi\eta) = \underline{\xi}\Delta\eta + \bar{\eta}\Delta\xi, \tag{4.156}$$

con  $\underline{\xi}$  y  $\bar{\eta}$  definidas por (4.154). Se introduce el promedio positivo de la velocidad del sonido  $\bar{a}^2$ , el cual es una función de  $U_l$  y  $U_r$ , y está definido tal que  $\Delta p = \bar{a}^2\Delta\rho$ .

La dificultad más importante radica en la descomposición del salto de la presión magnética. La relación natural  $\Delta B^2 = 2\tilde{B}\Delta B$ , en donde  $\tilde{B}$  denota el promedio aritmético de los estados izquierdo y derecho, implicaría que la matriz tiene valores propios que no son reales. Entonces se debe encontrar una relación más general que exprese las variaciones de la presión magnética en términos de cada componente del vector de variables conservativas, esto es

$$\Delta \frac{B^2}{2} = X\Delta\rho + Y\Delta(\rho u) + Z\Delta B, \tag{4.157}$$

en donde  $X, Y, Z$  son coeficientes por calcular. Estos coeficientes se calculan de modo tal que la matriz resultante  $\bar{\mathbf{A}}^{isen}$  sea una matriz Roe:

$$\bar{\mathbf{A}}^{isen} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\bar{u}^2 + \bar{a}^2 + X & 2\bar{u} + Y & Z \\ -\bar{u}\left(\frac{B}{\rho}\right) & \left(\frac{B}{\rho}\right) & \bar{u} \end{pmatrix}.$$

La matriz  $\bar{\mathbf{A}}^{isen}$  debe tener valores propios que sean invariantes de Galileo y deben ser simétricos con respecto a la velocidad  $\bar{u}$ . Esto implica que el parámetro  $Y$  debe ser cero. Además, se quiere que la matriz  $\bar{\mathbf{A}}^{isen}$  sea consistente con el caso particular de  $\gamma = 2$ , es por eso que se usa el promedio  $\underline{B}$  para el campo magnético, que representa el único promedio

en la matriz Roe introducida por [Brio & Wu (1988)]. Lo anterior implica la siguiente relación

$$\Delta \frac{B^2}{2} = X\Delta\rho + \underline{B}\Delta B, \quad (4.158)$$

de donde se obtiene fácilmente el valor para  $X$ , dado por

$$X = \frac{(\Delta B)^2}{2(\sqrt{\rho_l} + \sqrt{\rho_r})^2}. \quad (4.159)$$

La matriz definida por las relaciones (4.157)-(4.159) forman una matriz Roe, con valores propios reales que están definidos por

$$\bar{u} - \sqrt{\bar{a}^2 + \underline{B}^2/\underline{\rho} + X}, \bar{u}, \bar{u} + \sqrt{\bar{a}^2 + \underline{B}^2/\underline{\rho} + X}. \quad (4.160)$$

Esta matriz coincide con la del caso de la dinámica de un gas isentrópico cuando el campo magnético es cero. El resultado que se obtuvo para este caso simple es muy interesante ya que indica una forma de expresar el salto de la presión magnética de manera consistente con la definición de la matriz Roe. Se puede ver que esta relación es sorprendente en cierto punto, ya que expresa el salto de la presión magnética en términos no solamente del salto del campo magnético, sino que también en términos del salto de la densidad, lo cual es menos natural.

Como se presentó la construcción de la matriz Roe para el sistema (4.155) sin ninguna suposición sobre  $\gamma$ , para calcular la matriz Roe asociada al sistema de ecuaciones de la MHD ideal en 1D, se usan los resultados principales obtenidos anteriormente para el caso isentrópico. Los saltos de los términos hidrodinámicos se tratan de igual forma que en el caso de las ecuaciones de Euler. Por ejemplo, las variaciones de la energía cinética se expresan como

$$\Delta(\rho v^2) = -\bar{v}^2\Delta\rho + 2\bar{v} \cdot \Delta(\rho v). \quad (4.161)$$

Por otra parte, las variaciones de la presión magnética se expresan en términos de los saltos en el campo magnético y la densidad,

$$\Delta \frac{\mathbf{B}^2}{2} = X\Delta\rho + \underline{\mathbf{B}} \cdot \Delta\mathbf{B}. \quad (4.162)$$

Además usando las ecuaciones (4.159), (4.161) y (4.162) se pueden calcular de manera simple los saltos de la presión y de la entalpía total:

$$\Delta p = (\gamma - 1) \left[ \left( \frac{\bar{v}^2}{2} - X \right) \Delta \rho - \bar{\mathbf{v}} \cdot \Delta(\rho \mathbf{v}) + \Delta(\rho E) - \underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\mathbf{B}} \right], \quad (4.163)$$

$$\Delta(\rho H) = \left[ (2 - \gamma)X + \frac{1}{2}(\gamma - 1)\bar{v}^2 \right] \Delta \rho - (\gamma - 1)\bar{\mathbf{v}} \cdot \Delta \mathbf{v} + \gamma \Delta(\rho E) + (2 - \gamma)\underline{\mathbf{B}} \cdot \Delta \underline{\mathbf{B}}. \quad (4.164)$$

Con todo lo anterior se obtiene la siguiente matriz Roe

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} & \delta_{24} & \delta_{25} & \delta_{26} & \delta_{27} \\ -\bar{v}_x \bar{v}_y & \bar{v}_y & \bar{v}_x & 0 & -\underline{B}_x & 0 & 0 \\ -\bar{v}_x \bar{v}_z & \bar{v}_z & 0 & \bar{v}_x & 0 & -\underline{B}_x & 0 \\ \frac{-\underline{B}_y \bar{v}_x}{\underline{\rho}} + \frac{\underline{B}_x \bar{v}_y}{\underline{\rho}} & \frac{\underline{B}_y}{\underline{\rho}} & \frac{-\underline{B}_x}{\underline{\rho}} & 0 & \bar{v}_x & 0 & 0 \\ \frac{-\underline{B}_z \bar{v}_x}{\underline{\rho}} + \frac{\underline{B}_x \bar{v}_z}{\underline{\rho}} & \frac{\underline{B}_z}{\underline{\rho}} & 0 & \frac{-\underline{B}_x}{\underline{\rho}} & 0 & \bar{v}_x & 0 \\ \delta_{71} & \delta_{72} & \delta_{73} & \delta_{74} & \delta_{75} & \delta_{76} & \delta_{77} \end{pmatrix},$$

en donde

$$\begin{aligned} \delta_{21} &= -\bar{v}_x^2 + (2 - \gamma)X + \frac{\gamma - 1}{2}\bar{v}^2, \delta_{22} = 2\bar{v}_x - (\gamma - 1)\bar{v}_x, \\ \delta_{23} &= -(\gamma - 1)\bar{v}_y, \delta_{24} = -(\gamma - 1)\bar{v}_z, \\ \delta_{25} &= (2 - \gamma)\underline{B}_y, \delta_{26} = (2 - \gamma)\underline{B}_z, \delta_{27} = \gamma - 1 \end{aligned} \quad (4.165)$$

y

$$\begin{aligned} \delta_{71} &= -\bar{v}_x \bar{H} + \bar{v}_x(\delta_{21} + \bar{v}_x^2) + \frac{\underline{B}_x}{\underline{\rho}}(\bar{\mathbf{v}} \cdot \underline{\mathbf{B}}) \\ \delta_{72} &= \bar{H} + \bar{v}_x(\delta_{22} - 2\bar{v}_x) - \frac{\underline{B}_x^2}{\underline{\rho}}, \delta_{73} = \bar{v}_x \delta_{23} - \frac{\underline{B}_x \underline{B}_y}{\underline{\rho}}, \\ \delta_{74} &= \bar{v}_x \delta_{24} - \frac{\underline{B}_x \underline{B}_z}{\underline{\rho}} \\ \delta_{75} &= \bar{v}_x \delta_{25} - \underline{B}_x \bar{v}_y, \delta_{76} = \bar{v}_x \delta_{26} - \underline{B}_x \bar{v}_z, \delta_{77} = \bar{v}_x + \bar{v}_x \delta_{27}. \end{aligned} \quad (4.166)$$

La matriz  $\bar{\mathbf{A}}$  tiene los siguientes valores propios

$$\bar{v}_x - \bar{c}_f, \bar{v}_x - \bar{c}_a, \bar{v}_x - \bar{c}_s, \bar{v}_x, \bar{v}_x + \bar{c}_s, \bar{v}_x + \bar{c}_a, \bar{v}_x + \bar{c}_f. \quad (4.167)$$

Con

$$\begin{aligned}
\bar{c}_a^2 &= \bar{b}_x^2, \\
\bar{c}_f^2 &= \frac{1}{2} \left( (\bar{a}^*)^2 + \sqrt{(\bar{a}^*)^4 - 4\bar{a}^2\bar{b}_x^2} \right), \\
\bar{c}_s^2 &= \frac{1}{2} \left( (\bar{a}^*)^2 - \sqrt{(\bar{a}^*)^4 - 4\bar{a}^2\bar{b}_x^2} \right),
\end{aligned} \tag{4.168}$$

en donde

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{b}} &= \frac{\mathbf{B}}{\sqrt{\rho}}, \quad \bar{\mathbf{b}} = (\bar{b}_x, \bar{b}_y, \bar{b}_z) \\
\bar{a}^{*2} &= \bar{a} + \bar{\mathbf{b}}^2, \quad \bar{a}^2 = (2 - \gamma)X + (\gamma - 1) \left( \bar{H} - \frac{\mathbf{v}^2}{2} - \bar{\mathbf{b}}^2 \right).
\end{aligned} \tag{4.169}$$

Para definir completamente los flujos Roe, se requieren los vectores propios, los cuales están definidos de la siguiente forma

$$\mathbf{R}_{\bar{v}_x} = \frac{1}{\bar{a}^2} \begin{bmatrix} 1 \\ \bar{v}_x \\ \bar{v}_y \\ \bar{v}_z \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\bar{v}^2}{2} + \frac{\gamma-2}{\gamma-1}X \end{bmatrix}, \tag{4.170}$$

$$\mathbf{R}_{\bar{v}_x \pm \bar{c}_a} = \frac{1}{\bar{a}^2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm \rho \beta_z \\ \mp \rho \beta_y \\ -S \sqrt{\rho} \beta_z \\ S \sqrt{\rho} \beta_y \\ \pm \rho (\bar{v}_y \beta_z - \bar{v}_z \beta_y) \end{bmatrix}, \tag{4.171}$$

$$\mathbf{R}_{\bar{v}_x \pm \bar{c}_s} = \frac{1}{\underline{\rho} \bar{a}^2} \begin{bmatrix} \underline{\rho} \alpha_s \\ \underline{\rho} \alpha_s (\bar{v}_x \pm \bar{c}_s) \\ \underline{\rho} (\alpha_s \bar{v}_y \pm \alpha_f \bar{c}_f \beta_y S) \\ \underline{\rho} (\alpha_s \bar{v}_z \pm \alpha_f \bar{c}_f \beta_z S) \\ -\sqrt{\underline{\rho}} \alpha_f \bar{a} \beta_y \\ -\sqrt{\underline{\rho}} \alpha_f \bar{a} \beta_z \\ \underline{\rho} \alpha_s \left[ \bar{H} - \frac{\mathbf{B}^2}{\underline{\rho}} \pm \bar{v}_x \bar{c}_s \right] \pm \underline{\rho} \alpha_f \bar{c}_f S (\bar{v}_y \beta_y + \bar{v}_z \beta_z) - \sqrt{\underline{\rho}} \alpha_f \bar{a} |\mathbf{B}_\perp| \end{bmatrix}, \quad (4.172)$$

$$\mathbf{R}_{\bar{v}_x \pm \bar{c}_f} = \frac{1}{\underline{\rho} \bar{a}^2} \begin{bmatrix} \underline{\rho} \alpha_f \\ \underline{\rho} \alpha_f (\bar{v}_x \pm \bar{c}_f) \\ \underline{\rho} (\alpha_f \bar{v}_y \mp \alpha_s \bar{c}_s \beta_y S) \\ \underline{\rho} (\alpha_f \bar{v}_z \mp \alpha_s \bar{c}_s \beta_z S) \\ \sqrt{\underline{\rho}} \alpha_s \bar{a} \beta_y \\ \sqrt{\underline{\rho}} \alpha_s \bar{a} \beta_z \\ \underline{\rho} \alpha_f \left[ \bar{H} - \frac{\mathbf{B}^2}{\underline{\rho}} \pm \bar{v}_x \bar{c}_f \right] \mp \underline{\rho} \alpha_s \bar{c}_s S (\bar{v}_y \beta_y + \bar{v}_z \beta_z) - \sqrt{\underline{\rho}} \alpha_s \bar{a} |\mathbf{B}_\perp| \end{bmatrix}, \quad (4.173)$$

y los saltos  $\eta$  están definidos por las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} \eta_{\bar{v}_x} &= [\bar{a}^2 - X] \Delta \rho - \Delta p, \\ \eta_{\bar{v}_x \pm \bar{c}_a} &= \frac{1}{2} \left[ \mp \beta_y \Delta v_z \pm \beta_z \Delta v_y + \frac{S}{\sqrt{\underline{\rho}}} (\beta_y \Delta B_z - \beta_z \Delta B_y) \right], \\ \eta_{\bar{v}_x \pm \bar{c}_s} &= \frac{1}{2} [\alpha_s [X \Delta \rho + \Delta p] \pm \underline{\rho} \alpha_f \bar{c}_f S (\beta_y \Delta v_y + \beta_z \Delta v_z) \pm \underline{\rho} \alpha_s \bar{c}_s \Delta v_x - \sqrt{\underline{\rho}} \alpha_f \bar{a} (\beta_y \Delta B_y + \beta_z \Delta B_z)], \\ \eta_{\bar{v}_x \pm \bar{c}_f} &= \frac{1}{2} [\alpha_f [X \Delta \rho + \Delta p] \mp \underline{\rho} \alpha_s \bar{c}_s S (\beta_y \Delta v_y + \beta_z \Delta v_z) \pm \underline{\rho} \alpha_f \bar{c}_f \Delta v_x + \sqrt{\underline{\rho}} \alpha_s \bar{a} (\beta_y \Delta B_y + \beta_z \Delta B_z)], \end{aligned} \quad (4.174)$$

en donde

$$\begin{aligned} S &= \text{sign}(B_x), \quad \beta_{y,z} = \frac{B_{y,z}}{|\mathbf{B}_\perp|}, \quad |\mathbf{B}_\perp| = \sqrt{\bar{B}_y^2 + \bar{B}_z^2}, \\ \alpha_f^2 &= \frac{\bar{a}^2 - \bar{c}_s^2}{\bar{c}_f^2 - \bar{c}_s^2}, \quad \alpha_s^2 = \frac{\bar{c}_f^2 - \bar{a}^2}{\bar{c}_f^2 - \bar{c}_s^2}. \end{aligned} \quad (4.175)$$

Para obtener las matrices de Roe en las direcciones  $y$  y  $z$  se lleva a cabo el mismo proce-

dimiento mostrado anteriormente, sin embargo en esta tesis solamente se muestra el caso en 1D. Para fines de implementación numérica en 3D, la estructura característica completa de las matrices Roe para las ecuaciones de la MHD ideal en 3D se puede encontrar en [Linde (1998)], y se expresa tal que para una dirección dada a lo largo de un vector normal  $\mathbf{n}$  se eligen dos vectores unitarios arbitrarios  $\tau_1$  y  $\tau_2$  que forman una base con  $\mathbf{n}$ . Por lo tanto la estructura característica conformada por vectores propios (izquierdos y derechos) asociados a los valores propios de las ecuaciones de la MHD ideal en 3D está dada por

$$\lambda_e : \mathbf{l}_e = (1, 0, 0, 0, -\frac{1}{a^2}, 0, 0, 0), \quad (4.176)$$

$$\mathbf{r}_e = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T; \quad (4.177)$$

$$\lambda_a^\pm : \mathbf{l}_a^\pm = (0, 0, -B_{\tau_2}\sigma_{B_n}, B_{\tau_1}\sigma_{B_n}, 0, 0, \pm\frac{B_{\tau_2}}{\sqrt{\rho}}, \mp\frac{B_{\tau_1}}{\sqrt{\rho}}), \quad (4.178)$$

$$\mathbf{r}_a = (0, 0, -B_{\tau_2}\sigma_{B_n}, B_{\tau_1}\sigma_{B_n}, 0, 0, \pm\frac{B_{\tau_2}}{\sqrt{\rho}}, \mp\frac{B_{\tau_1}}{\sqrt{\rho}}); \quad (4.179)$$

$$\lambda_{f,s}^\pm : \mathbf{l}_{f,s}^\pm = (0, \pm\rho c_{f,s}, \mp\frac{\rho c_{f,s} B_n B_{\tau_1}}{\rho c_{f,s}^2 - B_n^2}, \mp\frac{\rho c_{f,s} B_n B_{\tau_2}}{\rho c_{f,s}^2 - B_n^2}, 1, 0, \frac{\rho c_{f,s} B_{\tau_1}}{\rho c_{f,s}^2 - B_n^2}, \frac{\rho c_{f,s} B_{\tau_2}}{\rho c_{f,s}^2 - B_n^2}), \quad (4.180)$$

$$\mathbf{r}_{f,s}^\pm = (\rho, \pm c_{f,s}, \mp\frac{\rho c_{f,s} B_n B_{\tau_1}}{\rho c_{f,s}^2 - B_n^2}, \mp\frac{\rho c_{f,s} B_n B_{\tau_2}}{\rho c_{f,s}^2 - B_n^2}, \gamma p, 0, \frac{\rho c_{f,s} B_{\tau_1}}{\rho c_{f,s}^2 - B_n^2}, \frac{\rho c_{f,s} B_{\tau_2}}{\rho c_{f,s}^2 - B_n^2})^T; \quad (4.181)$$

$$\lambda_d : \mathbf{l}_d = (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0), \quad (4.182)$$

$$\mathbf{r}_d = (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)^T, \quad (4.183)$$

en donde  $B_n = \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}$ ,  $B_{\tau_1} = \mathbf{B} \cdot \tau_1$ ,  $B_{\tau_2} = \mathbf{B} \cdot \tau_2$  y  $\sigma_{B_n} = \text{sign}(B_n)$ , que es la función signo. Además  $a^2 = \frac{\gamma p}{\rho}$  es la velocidad del sonido al cuadrado,  $c_{f,s}$  es la velocidad magnetosónica rápida y lenta asociada al sistema de la MHD ideal. Para calcular los saltos  $\eta$  se usan las ecuaciones (4.143)-(4.144), las cuales usan los vectores izquierdo y derechos definidos arriba. Entonces se calcula la estructura característica para cada dirección normal correspondiente y con eso se obtienen los flujos de Roe en las direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$ .

### 4.3 Reconstrucción de variables

En la sección anterior se desarrollaron los resolvedores de Riemann para el cálculo de los flujos numéricos en el caso de la MHD ideal, y se vio que se requiere conocer las variables conservativas o primitivas a la izquierda y derecha de cada intercelda numérica del volumen finito. Por tal motivo se deben reconstruir tales variables, que representarán los estados del resolvedor de Riemann aproximado en especial. En esta sección se describirán algunos de los métodos de reconstrucción de variables, abarcando desde el método más sencillo, que se basa en reconstruir las variables como constantes a trozos, el cual se llama Godunov,

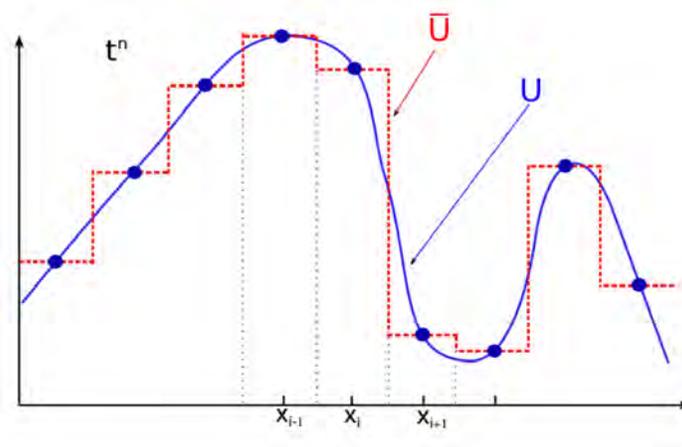


Figura 4.6: Se muestra la aproximación constante por pedazos de la función  $U(x, t)$ , y la función resultante  $\bar{U}(x, t)$  compuesta por las funciones escalón en cada intercelda.

hasta los métodos que usan una aproximación lineal como MINMOD y MC, e incluso los que usan una aproximación polinomial, como es el WENO.

### 4.3.1 Método de Godunov

Es el método más simple para reconstruir o aproximar una función. Este método considera una función  $U(x, t)$  definida con valores constantes sobre una malla numérica  $x_i$ , entonces la función constante a trozos se define por  $\bar{U}(x, t)$  tal y como se muestra en la Fig. 4.6. Por lo tanto bajo esta aproximación, en cada intercelda localizada en  $x_{i+1/2}$  se construyen valores a la izquierda denotados por  $\bar{U}_L$  y valores a la derecha  $\bar{U}_R$  de la siguiente forma

$$\bar{U}_{i+1/2}^L = U_i, \quad (4.184)$$

$$\bar{U}_{i+1/2}^R = U_{i+1}. \quad (4.185)$$

Como se puede ver, es un método muy sencillo de implementar, sin embargo como en el problema de Riemann se resuelven discontinuidades, el uso de este método produce mucha disipación que puede ser un problema cuando es importante capturar las discontinuidades en un problema físico en especial.

### 4.3.2 Métodos con aproximación lineal

Son métodos que aproximan una función  $U(x, t)$  usando la aproximación lineal por trozos, con un error de precisión de segundo orden. En general estos métodos consisten en construir una función por trozos usando líneas rectas con una pendiente aproximada, como se

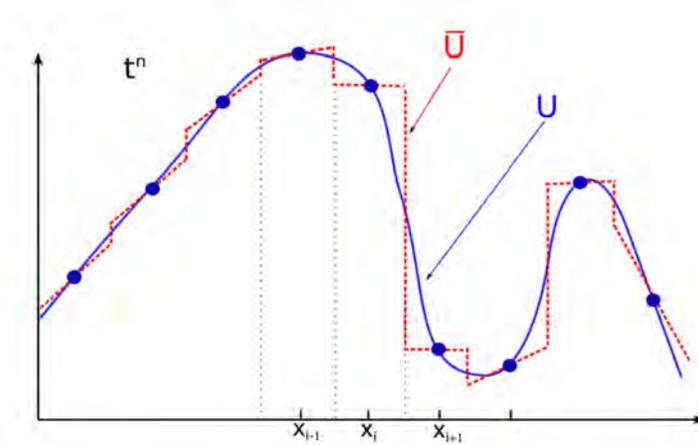


Figura 4.7: Reconstrucción lineal a trozos. La figura muestra la función  $\bar{U}$  construida con funciones lineales a trozos  $U$  en cada intercelda.

muestra en la Fig. (4.7). Tal pendiente se puede escoger de varias maneras, y en específico se describen los métodos MINMOD [Roe (1986)] y MC [Van Leer (1977)] que fueron usados en esta tesis.

### MINMOD

Es un método de reconstrucción de variables mediante líneas rectas a trozos. La dificultad de este método es el cálculo de la pendiente de la función lineal, para dicho cálculo se requiere conocer los valores de la función  $U(x, t)$  en los puntos vecinos  $U_{i-1}$ ,  $U_i$  y  $U_{i+1}$  de la celda  $x_{i+1/2}$ . Para esto se calculan las pendientes auxiliares  $m_1 = m_{i-1/2}$ ,  $m_2 = m_{i+1/2}$  y  $m_3 = m_{i+3/2}$ , entonces la pendiente centrada en la celda  $x_{i+1/2}$  está definida como

$$m_{i+1/2} = \frac{U_{i+1} - U_i}{x_{i+1} - x_i}. \quad (4.186)$$

Por lo tanto la variable aproximada  $\bar{U}$  se construye usando lo siguiente

$$\bar{U}_{i+1/2}^L = U_i + \sigma_i(x_i - x_{i-1/2}), \quad (4.187)$$

$$\bar{U}_{i+1/2}^R = U_{i+1} + \sigma_{i+1}(x_i - x_{i+1/2}), \quad (4.188)$$

donde el valor de las pendientes  $\sigma_i = \sigma(m_1, m_2)$  y  $\sigma_{i+1} = \sigma(m_2, m_3)$ , se determina por la función *MINMOD*

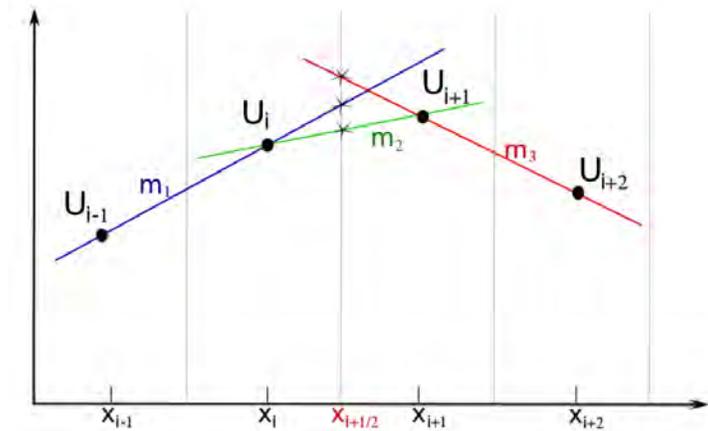


Figura 4.8: En la figura se esquematizan las pendientes adyacentes al punto  $x_{i+1/2}$ . Se puede notar que para calcular las pendientes  $m_1$ ,  $m_2$  y  $m_3$  se requiere conocer los valores de la variable  $U$  en los puntos vecinos,  $U_{i-1}$ ,  $U_i$ ,  $U_{i+1}$  y  $U_{i+2}$ .

$$\sigma = \text{MINMOD}(a, b) = \begin{cases} a & \text{si } |a| < |b|, \text{ con } ab > 0, \\ b & \text{si } |a| > |b|, \text{ con } ab > 0, \\ 0 & \text{si } ab < 0. \end{cases} \quad (4.189)$$

La función *MINMOD* escoge la pendiente mínima en cada intercelda siempre y cuando las pendientes tengan el mismo signo. En el caso de que las pendientes tengan signos opuestos, como en el caso de  $m_2$  y  $m_3$  de la Fig. 4.8, se toma una función constante  $U_{i+1}$  con el valor de la función evaluada en el punto  $x_{i+1}$ . La descripción anterior es para el caso de una dimensión, sin embargo para reconstruir las variables en tres dimensiones, simplemente se aplica el método a cada dirección.

### MC: Monotonized Central

El método de reconstrucción de variables *MC* es similar al *MINMOD*, ya que se basa en la construcción de pendientes para aproximar la función dada. La principal diferencia es que este método permite que la pendiente tenga un valor intermedio, haciendo que la pendiente no sea tan pronunciada, y de esta forma las variables aproximadas preserven su monotonicidad. Para calcular los valores a izquierda y derecha de la intercelda ubicada en  $x_{i+1/2}$ , se usan las expresiones (4.187)-(4.188) y la función *MC* para calcular la pendiente está definida de la siguiente forma

$$\sigma = MC(a, b) = \begin{cases} 2a & \text{si } |a| < |b| \text{ y } 2|a| < |c|, \\ 2b & \text{si } |a| > |b| \text{ y } 2|b| < |c|, \\ c & \text{si } |c| < 2|a| \text{ y } |c| < 2|b|, \\ 0 & \text{si } ab < 0. \end{cases} \quad (4.190)$$

En el caso de la función  $MC$ , se puede ver que las pendientes son el doble que en el caso del  $MINMOD$ , además de que calcula la pendiente intermedia  $c = (a + b)/2$  antes de calcular el mínimo. Este método tiene mayor precisión para reconstruir las variables que el  $MINMOD$ , sin embargo puede introducir oscilaciones no físicas más fácilmente.

### 4.3.3 WENO: Weighted Essentially Non-Oscillatory

Es un método de aproximación que usa polinomios de alto orden para reconstruir las variables a izquierda y derecha. La principal ventaja de este método es que reduce las oscilaciones numéricas que se presentan por ejemplo en el caso del  $MC$ . Existen diferentes órdenes del  $WENO$ , en esta tesis se usó el caso  $r = 2$ , que corresponde a reconstruir las variables usando polinomios de quinto orden, y se denomina  $WENO5$  [Titarev & Toro (2004), Harten et al. (1997)]. Se basa en una interpolación que usa cinco valores de las variables en  $U_{i-2}$ ,  $U_{i-1}$ ,  $U_i$ ,  $U_{i+1}$  y  $U_{i+2}$ . Los valores de las variables  $U$  se reconstruyen usando la siguiente base de polinomios

$$u(x) = \sum_{l=0}^{r-1} \alpha_l(x) \omega_l, \quad (4.191)$$

en donde los coeficientes se calculan de tal forma que el polinomio aproxime de la manera más óptima las variables en cada intercelda, y se definen de la siguiente forma

$$\alpha_l = \frac{d_l}{(\epsilon + \beta_l)^2}, \quad \omega_l = \frac{\alpha_l}{\sum_{k=0}^{r-1} \alpha_k}, \quad l = 0, 1, \dots, r-1, \quad (4.192)$$

en donde los valores de  $\beta_l$  para el caso  $r = 2$  están dados por

$$\beta_0 = \frac{13}{12}(U_i - 2U_{i+1} + U_{i+2})^2 + \frac{1}{4}(3U_i - 4U_{i+1} + U_{i+2})^2, \quad (4.193)$$

$$\beta_1 = \frac{13}{12}(U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1})^2 + \frac{1}{4}(U_{i-1} - U_{i+1})^2, \quad (4.194)$$

$$\beta_2 = \frac{13}{12}(U_{i-2} - 2U_{i-1} + U_i)^2 + \frac{1}{4}(U_{i-2} - 4U_{i-1} + U_i)^2. \quad (4.195)$$

Para el caso  $r = 2$  los valores óptimos  $d_l$  son

$$d_0 = \frac{3}{10}, \quad d_1 = \frac{3}{5}, \quad d_2 = \frac{1}{10}, \quad (4.196)$$

con estos valores se puede calcular la variable  $U_{L,i+1/2}$  a la izquierda de la intercelda  $x_{i+1/2}$  de la siguiente forma

$$\begin{aligned} U_{i+1/2}^L = & \frac{1}{6}\omega_0(-U_{i+2} + 5U_{i+1} + 2U_i) \\ & + \frac{1}{6}\omega_1(-U_{i-1} + 5U_i + 2U_{i+1}) \\ & + \frac{1}{6}\omega_2(2U_{i-2} - 7U_{i-1} + 11U_i). \end{aligned} \quad (4.197)$$

De la misma forma se calculan los coeficientes óptimos para interpolar las variables a la derecha de la intercelda  $x_{i-1/2}$

$$d_0 = \frac{1}{10}, \quad d_1 = \frac{3}{5}, \quad d_2 = \frac{3}{10}, \quad (4.198)$$

de tal forma que  $U_{R,i-1/2}$  a la derecha está dada de la siguiente forma

$$\begin{aligned} U_{i-1/2}^R = & \frac{1}{6}\omega_0(2U_{i+2} - 7U_{i+1} + 11U_i) \\ & + \frac{1}{6}\omega_1(-U_{i+1} + 5U_i + 2U_{i-1}) \\ & + \frac{1}{6}\omega_2(-U_{i-2} + 5U_{i-1} + 2U_i). \end{aligned} \quad (4.199)$$

## 4.4 Constricción del campo magnético $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

La MHD ideal tiene una ecuación adicional que no es de evolución, sino más bien representa una constricción, que describe la ausencia de monopolos magnéticos y está dada por la ecuación de la divergencia del campo magnético  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ . Esta constricción debe satisfacerse numéricamente desde el tiempo inicial y durante toda la evolución. Incluso numéricamente, resulta complicado que se mantenga su valor exactamente en cero, debido a que en la evolución se van produciendo errores que violan la constricción y pueden obtenerse valores no físicos, es decir monopolos magnéticos debidos a la acumulación de errores. Por tal motivo, se requiere la implementación de métodos numéricos específicos que controlen la violación de la constricción lo más posible. Existen varios métodos, entre los que se encuentran la formulación no conservativa de las ecuaciones de la MHD ideal incorporando los términos de la divergencia como fuente en las ecuaciones, tal for-

mulación es conocida como 8-waves y fue introducida por [Godunov (1972), Powell et al. (1999)]. Otro de los métodos se basa en una forma especial de discretización de la ecuación de Faraday usando los flujos numéricos calculados con un resolvidor de Riemann, el cual es conocido como Transporte de Flujos Restringidos (Flux-CT, por sus siglas en inglés)[Evans & Hawley (1988), Balsara & Spicer (1998)], este método se implementó en la MHD ideal. Existen otros métodos en donde se introduce una variable escalar extra que ayuda a disipar los errores de la divergencia, este tipo de métodos es conocido como limpieza hiperbólica de la divergencia [Dedner et al.(2002)]. En el caso de la MHD resistiva se usa un método basado en la limpieza hiperbólica, y es conocido como formulación extendida de los multiplicadores de Lagrange generalizados (EGLM, por sus siglas en inglés) [Dedner et al.(2002)]. En las secciones siguientes se hará una descripción de los métodos mencionados anteriormente para cada sistema de ecuaciones.

#### 4.4.1 Transporte de Flujos Restringidos: Flux-CT

Este método se basa en el hecho de que hay una dualidad entre el campo eléctrico y los flujos calculados por los resolvidores de Riemann. La ecuación de inducción de Faraday en el marco de referencia de un observador euleriano está dada por

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (4.200)$$

Para la MHD ideal el campo eléctrico  $\mathbf{E}$  está definido simplemente por

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (4.201)$$

considerando que hay situaciones en donde se usa la forma más general de la ley de Ohm. Las ecuaciones (4.200)-(4.201) sugieren que se puede usar una versión discreta del teorema de Stokes para la actualización temporal de los campos magnéticos [Yee (1966), Brecht et al. (1981), Evans & Hawley (1988), DeVore (1991), Balsara & Spicer (1999)]. En esta interpretación, las tres componentes del campo magnético están colocadas en el centro de las caras del elemento de volumen y el campo magnético es calculado como un promedio sobre el área de cada cara. En este caso los campos eléctricos están colocados en las aristas de las caras, entonces la integral de línea del campo eléctrico sobre las aristas da la fuerza electromotriz en la arista. Por lo tanto el teorema de Stokes implica que el cambio en el flujo magnético asociado a cada cara del volumen es igual a la integral de línea del campo eléctrico sobre las aristas multiplicada por el paso de tiempo. En palabras más sencillas, el cambio en el flujo es la suma de las fuerzas electromotrices sobre las aristas que delimitan cada cara del volumen. En la Fig. 4.9 se muestra la posición del campo magnético y eléctrico de una forma esquemática.

El método se puede explicar de una forma más detallada partiendo de que la constricción  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ , y se escribe en forma integral aplicando la ley de Gauss, esto es

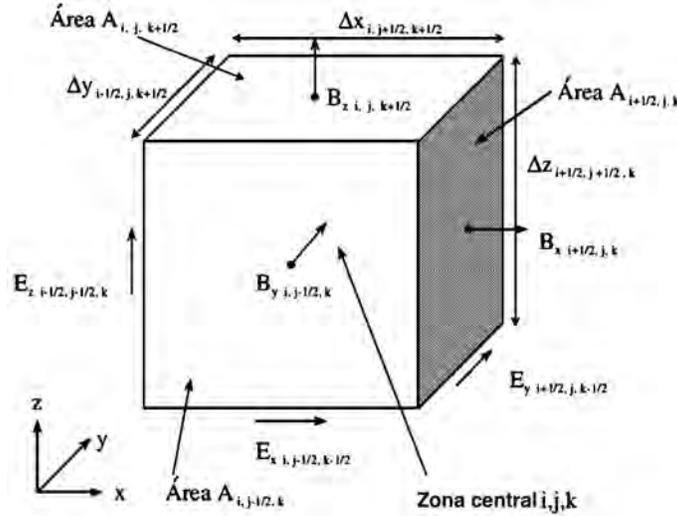


Figura 4.9: Posición de los campos magnéticos  $\mathbf{B}$  en el centro de las caras del volumen y posición de los campos eléctricos  $\mathbf{E}$  en las aristas del volumen. En esta figura se presenta la notación usada para los cálculos.

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{B} dV = \oint_{\partial V} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0. \quad (4.202)$$

En este caso  $V$  representa el volumen de un cubo en el caso 3D, y  $\delta V$  son las superficies cerradas o caras del cubo. Entonces la integral (4.202) se debe descomponer en 6 integrales de área de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \oint_{\partial V} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} &= \int_{A_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}_1 + \int_{A_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}_2 + \int_{A_3} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}_3 \\ &\quad + \int_{A_4} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}_4 + \int_{A_5} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}_5 + \int_{A_6} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}_6. \end{aligned} \quad (4.203)$$

Además la ecuación (4.200) y la forma integral de  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  se relacionan de la siguiente forma

$$\frac{d}{dt} \int_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = \int_A \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{A} = \int_A (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{A}. \quad (4.204)$$

Se puede aplicar el teorema de Stokes a la ecuación (4.204), de donde se obtiene la ecuación de evolución del campo magnético en dirección normal a cada cara del cubo, dada por

$$\frac{d}{dt} \int_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = \oint_{\partial A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}, \quad (4.205)$$

en donde la integral de línea se hace a lo largo de cada arista del cubo.

Haciendo la integración a lo largo de la dirección  $x$  se obtiene la siguiente ecuación de evolución para  $B_x$

$$\frac{\partial B_x(i + 1/2, j, k)}{\partial t} = \frac{E_z(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) - E_z(i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}, k)}{\Delta y} - \frac{E_y(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) - E_y(i + \frac{1}{2}, j, k - \frac{1}{2})}{\Delta z}, \quad (4.206)$$

en donde

$$E_z(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) = \int_{k-1/2}^{k+1/2} \mathbf{E}(x_{i+1/2}, y_{j+1/2}, z) \cdot \hat{z} dz, \quad (4.207)$$

$$E_y(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) = \int_{j-1/2}^{j+1/2} \mathbf{E}(x_{i+1/2}, y, z_{k+1/2}) \cdot \hat{y} dy. \quad (4.208)$$

La ecuación (4.207) está definida en el centro de la cara  $A_1$  ubicada en  $(i + 1/2, j, k)$ .

De manera análoga se integra a lo largo de la dirección  $y$  para obtener la ecuación de evolución para  $B_y$  en la cara  $A_2(i, j + 1/2, k)$

$$\frac{\partial B_y(i, j + 1/2, k)}{\partial t} = \frac{E_x(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) - E_x(i, j + \frac{1}{2}, k - \frac{1}{2})}{\Delta z} - \frac{E_z(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) - E_z(i - \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k)}{\Delta x}, \quad (4.209)$$

en donde  $E_z$  está definida de la misma forma que la ecuación (4.208) y  $E_x$  se define como

$$E_x(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) = \int_{i-1/2}^{i+1/2} \mathbf{E}(x, y_{j+1/2}, z_{k+1/2}) \cdot \hat{x} dx. \quad (4.210)$$

Finalmente integrando en dirección  $z$  se obtiene la ecuación de evolución para  $B_z$  en la cara  $A_3(i, j, k + 1/2)$

$$\frac{\partial B_z(i, j, k + 1/2)}{\partial t} = \frac{E_y(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) - E_y(i - \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2})}{\Delta x} - \frac{E_x(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) - E_x(i, j - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2})}{\Delta y}, \quad (4.211)$$

en donde  $E_y$  y  $E_x$  se definen por las ecuaciones (4.208)-(4.210) respectivamente.

En las ecuaciones de evolución aparecen las componentes del campo eléctrico  $\mathbf{E}$  que se calculan en las aristas del cubo. En este caso los flujos se calculan en las interfaces de cada celda. Es decir, en dirección  $x$  los flujos se ubican en el punto  $(i + 1/2, j, k)$ , en la dirección  $y$  se definen en el punto  $(i, j + 1/2, k)$  y en la dirección  $z$  en el punto  $(i, j, k + 1/2)$ , la manera detallada de calcularlos se puede encontrar en [Lora-Clavijo et al. (2015)].

Los valores  $\mathbf{E}$  en los vértices del cubo se calculan mediante un promedio aritmético usando flujos adyacentes de la siguiente forma

$$E_x(i, j + 1/2, k + 1/2) = \frac{1}{4}(F_{yz}(i, j + \frac{1}{2}, k) + F_{yz}(i, j + \frac{1}{2}, k + 1)) \quad (4.212)$$

$$-F_{zy}(i, j, k + \frac{1}{2}) - F_{zy}(i, j + 1, k + \frac{1}{2}),$$

$$E_y(i + 1/2, j, k + 1/2) = \frac{1}{4}(F_{zx}(i, j, k + \frac{1}{2}) + F_{zx}(i + 1, j, k + \frac{1}{2})) \quad (4.213)$$

$$-F_{xz}(i + \frac{1}{2}, j, k) - F_{xz}(i + \frac{1}{2}, j, k + 1),$$

$$E_z(i + 1/2, j + 1/2, k) = \frac{1}{4}(F_{xy}(i + \frac{1}{2}, j, k) + F_{xy}(i + \frac{1}{2}, j + 1, k)) \quad (4.214)$$

$$-F_{yx}(i, j + \frac{1}{2}, k) - F_{yx}(i + 1, j + \frac{1}{2}, k),$$

en donde las componentes  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $E_z$  cumplen la condición

$$E_x = -F_{zy} = F_{yz}, \quad (4.215)$$

$$E_y = F_{zx} = -F_{xz}, \quad (4.216)$$

$$E_z = -F_{yx} = F_{xy}, \quad (4.217)$$

esto por definición de los flujos de las ecuaciones de la MHD ideal que en forma general se expresan

$$F_{lm} = v_l B_m - v_m B_l, \quad (4.218)$$

en donde  $l$  es la dirección a la que apunta el campo y  $m$  es la componente. De acuerdo al método del Flux-CT tales flujos se calculan usando el resolvidor de Riemann en particular. La contribución de cada una de las seis caras del cubo, debe satisfacer la constricción en su forma integral dada por la ecuación (4.204) con al menos el error de redondeo de la computadora ( $10^{-12} - 10^{-16}$ ).

#### 4.4.2 Limpieza hiperbólica de la divergencia: Método generalizado de los multiplicadores de Lagrange extendidos (EGLM)

Es un método en donde se agrega una ecuación escalar en el sistema de ecuaciones de la MHD, de tal forma que se acople con la divergencia del campo magnético mediante multiplicadores de Lagrange generalizados. En tal formulación los errores de la divergencia son transportados hacia las fronteras del dominio con la máxima velocidad admisible y al mismo tiempo son amortiguados. La ventaja de esta formulación es que el nuevo sistema de ecuaciones de la MHD que incluye la ecuación escalar sigue siendo hiperbólico.

Para explicar el acoplamiento del campo magnético con una nueva función  $\psi$ , se modifica la ecuación de inducción del campo magnético  $\mathbf{B}$  y la ecuación de la divergencia de la siguiente forma

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \otimes \mathbf{B} - \mathbf{B} \otimes \mathbf{v}) + \nabla \psi = 0, \quad (4.219)$$

$$D(\psi) + \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (4.220)$$

en donde  $D$  es un operador diferencial lineal y  $\psi$  es una función escalar que se acopla con la divergencia del campo magnético. Entonces se debe escoger  $D$  junto con las condiciones iniciales y de frontera para  $\psi$  de tal forma que una aproximación numérica de las ecuaciones (4.219) y (4.220) sea también para el sistema original dado por las ecuaciones (3.15) y (3.16). Existen distintas posibilidades para el operador lineal  $D$ , algunas de las cuales se presentan en [Dedner et al.(2002), Munz et al. (2000), Munz et al. (1999)]. Para soluciones lo suficientemente suaves se obtiene lo siguiente

$$\partial_t(\nabla \cdot \mathbf{B}) + \Delta \psi = 0, \quad (4.221)$$

$$\partial_t D(\nabla \cdot \mathbf{B}) + \Delta D(\psi) = 0, \quad (4.222)$$

$$\partial_t D(\psi) + \partial_t(\nabla \cdot \mathbf{B}) = 0, \quad (4.223)$$

$$\Delta D(\psi) + \Delta(\nabla \cdot \mathbf{B}) = 0, \quad (4.224)$$

que se obtuvieron de las ecuaciones (4.219), (4.220). Finalmente se tiene

$$\partial_t D(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \Delta(\nabla \cdot \mathbf{B}) = 0, \quad (4.225)$$

$$\partial_t D(\psi) - \Delta\psi = 0, \quad (4.226)$$

es decir  $\nabla \cdot \mathbf{B}$  y  $\psi$  satisfacen la misma ecuación para cualquier elección de  $D$ . Entonces si se elige por definición

$$D(\psi) := 0, \quad (4.227)$$

implica que  $\psi$  es solamente un multiplicador de Lagrange. En esta tesis se usa un operador lineal mixto, que incluye una parte parabólica e hiperbólica, esto es

$$D(\psi) := \frac{1}{c_h^2} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{c_p^2} \psi, \quad (4.228)$$

en donde  $c_h$  es la velocidad a la que se propagan los errores de la divergencia hacia las fronteras, y  $c_p$  es la velocidad a la que se amortiguan los errores. La elección de esta forma del operador implica que se tiene una ecuación tipo telegráfica para  $\psi$ , la cual ofrece disipación y propagación de los errores de la divergencia. Con tal definición del operador lineal  $D$  la ecuación (4.220) queda de la siguiente forma

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + c_h^2 \nabla \cdot \mathbf{B} = -\frac{c_h^2}{c_p^2} \psi, \quad (4.229)$$

en donde  $c_h$  y  $c_p$  están definidos como

$$c_h = \frac{C_{CFL}}{\Delta t} \min(\Delta x, \Delta y, \Delta z), \quad (4.230)$$

$$c_p = \sqrt{-\Delta t \frac{c_h^2}{\text{Inc}_d}}, \quad (4.231)$$

en las expresiones anteriores  $\Delta t$  es el paso de tiempo,  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  y  $\Delta z$  son las resoluciones espaciales definidas en un dominio 3D discretizado de la siguiente forma:

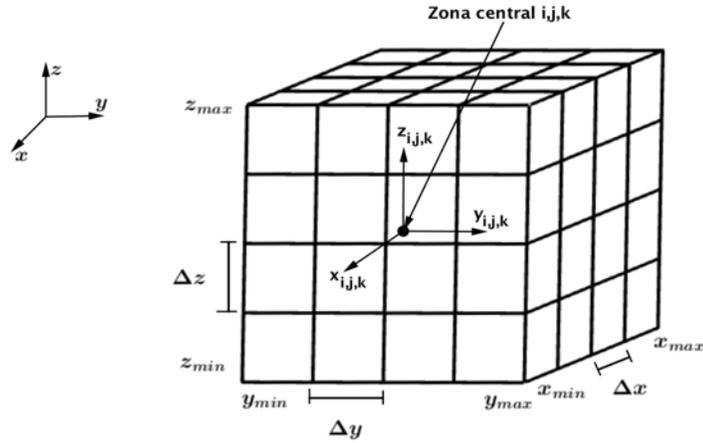


Figura 4.10: Discretización del dominio 3D. En esta figura se muestra la discretización espacial de un dominio uniforme en 3D. En el centro de cada elemento se definen las variables conservativas  $U_{i,j,k}$ .

$$\begin{aligned}
 \Delta x &= \frac{x_{max} - x_{min}}{N_x}, \\
 x_{i,j,k} &= x_{min} + \Delta x \cdot i, \\
 \Delta y &= \frac{y_{max} - y_{min}}{N_y}, \\
 y_{i,j,k} &= y_{min} + \Delta y \cdot j, \\
 \Delta z &= \frac{z_{max} - z_{min}}{N_z}, \\
 z_{i,j,k} &= z_{min} + \Delta z \cdot k,
 \end{aligned}
 \tag{4.232}$$

donde  $i, j, k$  son enteros que etiquetan los puntos donde se define el dominio. Se considera además que  $i = 0, 1, \dots, N_x$ ,  $j = 0, 1, \dots, N_y$ ,  $k = 0, 1, \dots, N_z$ , con  $N_x$ ,  $N_y$  y  $N_z$  denotan el número de celdas en las direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente. Finalmente,  $C_{CFL}$  es el factor de Courant-Friedrich-Levy que es menor a 1. Aquí  $c_d \in (0, 1)$  es un coeficiente que depende del problema, el cual define el rango de amortiguamiento de las ondas que describen la propagación de los errores de la divergencia, en la mayoría de las simulaciones de esta tesis se toma el valor 0.18. Una figura esquemática del dominio 3D se muestra en la Fig. 4.10.

Para obtener el conjunto de ecuaciones de la MHD resistiva de la formulación EGLM, se usan directamente las ecuaciones de Maxwell acopladas con  $\psi$ , esto es

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J}, \quad (4.233)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} + \nabla \psi = 0, \quad (4.234)$$

$$D(\psi) + \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (4.235)$$

Para el caso de la MHD resistiva, la densidad de corriente  $\mathbf{J}$  está relacionada con el campo eléctrico mediante la ley de Ohm  $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}'$ , en donde  $\mathbf{E}'$  representa el campo eléctrico en un sistema de referencia moviéndose con el fluido. Entonces la ley de Ohm en un sistema inercial se expresa de la siguiente forma

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}' = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (4.236)$$

donde  $\sigma$  es la conductividad eléctrica que se relaciona con la resistividad magnética mediante  $\sigma = 1/\eta$ . Por lo tanto el campo eléctrico  $\mathbf{E}$  está definido por

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B} + \eta \mathbf{J}. \quad (4.237)$$

Con estas definiciones se obtienen las ecuaciones acopladas EGLM del campo magnético y la función escalar  $\psi$ , que están dadas de la siguiente forma

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{B} \otimes \mathbf{v} - \mathbf{v} \otimes \mathbf{B} + \psi \mathbf{I}) = -\nabla \times (\eta \cdot \mathbf{J}), \quad (4.238)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + c_h^2 \nabla \cdot \mathbf{B} = -\frac{c_h^2}{c_p^2} \psi. \quad (4.239)$$

Para encontrar las ecuaciones del momento y de la energía, se considera que en las ecuaciones del fluido la influencia del campo magnético viene dada por una fuerza externa, es decir por la fuerza de Lorentz

$$\mathbf{F}_L = \mathbf{J} \times \mathbf{B}, \quad (4.240)$$

la cual completa las ecuaciones de momento, mientras que  $\mathbf{F}_L \cdot \mathbf{v}$  complementa la ecuación de la energía. La expresión completa de la fuerza de Lorentz está dada por

$$\mathbf{F}_L = \mathbf{J} \times \mathbf{B} = (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = \nabla \cdot (\mathbf{B} \otimes \mathbf{B} - \frac{1}{2} \mathbf{B}^2 \mathbf{I}) - (\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B}. \quad (4.241)$$

Por lo tanto en la ecuación de movimiento (3.6), la parte en forma de divergencia de la ecuación (4.241) es añadida como flujo, mientras que el segundo término es añadido como fuente. La densidad de energía total consiste en la energía hidrodinámica y la energía magnética  $|\mathbf{B}|^2/2$ . Por medio de consideraciones similares a las de la ecuación (4.241)

se obtiene el término fuente  $-\mathbf{B} \cdot (\nabla\psi)$  para la ecuación de la energía, además en el caso resistivo se toma en cuenta un término fuente dado por la disipación de Joule definido como  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$ . Con lo anterior las ecuaciones para el momento y energía en la formulación EGLM son

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot \left( \left( p + \frac{1}{2}\mathbf{B}^2 \right) \mathbf{I} + \rho\mathbf{v} \otimes \mathbf{v} - \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} \right) = -(\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{B} \quad (4.242)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot ((E + p_t)\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B})\mathbf{B}) = -\mathbf{B} \cdot \nabla\psi - \nabla \cdot ((\eta \cdot \mathbf{J}) \times \mathbf{B}). \quad (4.243)$$

Finalmente la ecuación de conservación de masa es la misma que en el caso de la MHD ideal, y está definida por la ecuación (3.12). El conjunto de ecuaciones de la MHD resistiva en la formulación extendida de los multiplicadores de Lagrange generalizados (EGLM) es el siguiente

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) = 0, \quad (4.244)$$

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot \left( \left( p + \frac{1}{2}\mathbf{B}^2 \right) \mathbf{I} + \rho\mathbf{v} \otimes \mathbf{v} - \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} \right) = -(\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{B} \quad (4.245)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot ((E + p_t)\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B})\mathbf{B}) = -\mathbf{B} \cdot \nabla\psi - \nabla \cdot ((\eta \cdot \mathbf{J}) \times \mathbf{B}), \quad (4.246)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{B} \otimes \mathbf{v} - \mathbf{v} \otimes \mathbf{B} + \psi \mathbf{I}) = -\nabla \times (\eta \cdot \mathbf{J}), \quad (4.247)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + c_h^2 \nabla \cdot \mathbf{B} = -\frac{c_h^2}{c_p^2} \psi. \quad (4.248)$$

Todas las variables del sistema anterior tienen su significado usual y se resuelven con las mismas técnicas numéricas presentadas en secciones anteriores, sin embargo es importante explicar cómo se trata la nueva función  $\psi$  en la implementación de los resolvedores de Riemann HLLE, HLLC y HLLD.

### HLLE para las ecuaciones EGLM de la MHD resistiva en 1D

Para aplicar el resolvidor de Riemann HLLE al sistema de ecuaciones de la MHD resistiva se necesita conocer el conjunto de valores propios, en este caso la estructura característica tiene un valor propio adicional que está asociada a la velocidad  $c_h$ . Es decir la matriz jacobiana  $A'_x(\mathbf{W})$  para este caso es de la forma

$$A'_x(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} v_x & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_x & 0 & 0 & -B_x/\rho & B_y/\rho & B_z/\rho & 1/\rho & 0 \\ 0 & 0 & v_x & 0 & -B_y/\rho & -B_x/\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v_x & -B_z/\rho & 0 & -B_x/\rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v_x & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & B_y & -B_x & 0 & -v_y & v_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_z & 0 & -B_x & -v_z & 0 & v_x & 0 & 0 \\ 0 & \gamma p & 0 & 0 & -\mathbf{v} \cdot \mathbf{B} & 0 & 0 & v_x & (1-\gamma)B_x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_h^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De donde se obtienen 9 valores propios dados por

$$\begin{aligned} \lambda_{1_x} &= -c_h, \quad \lambda_{2_x} = v_x - C_{f_x}, \quad \lambda_{3_x} = v_x - C_{A_x}, \quad \lambda_{4_x} = v_x - C_{s_x}, \quad \lambda_{5_x} = v_x, \\ \lambda_{6_x} &= v_x + C_{s_x}, \quad \lambda_{7_x} = v_x + C_{A_x}, \quad \lambda_{8_x} = v_x + C_{f_x}, \quad \lambda_9 = c_h, \end{aligned} \quad (4.249)$$

en donde  $C_{a_x}$ ,  $C_{f_x}$  y  $C_{s_x}$  están definidas por

$$C_{A_x}^2 = \frac{B_x^2}{\rho}, \quad (4.250)$$

$$C_{f_x}^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{\gamma p + B^2}{\rho} + \sqrt{\left( \frac{\gamma p + B^2}{\rho} \right)^2 - 4 \frac{\gamma p B_x^2}{\rho^2}} \right), \quad (4.251)$$

$$C_{s_x}^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{\gamma p + B^2}{\rho} - \sqrt{\left( \frac{\gamma p + B^2}{\rho} \right)^2 - 4 \frac{\gamma p B_x^2}{\rho^2}} \right), \quad (4.252)$$

con  $B^2 = B_x^2 + B_y^2 + B_z^2$  y representan las velocidades de Alfvén, magnetosónica rápida y magnetosónica lenta, respectivamente.

Por lo tanto para calcular el máximo y el mínimo de las velocidades características necesarias para el HLLC se usan los nueve valores propios calculados anteriormente.

### HLLC para las ecuaciones EGLM de la MHD resistiva en 1D

Para describir el resolutor de Riemann HLLC, se considera el caso 1D de las ecuaciones (4.244)-(4.248) con los términos fuente  $\mathbf{S} = 0$ , ya que en general los resolutores se aplican a la parte de las ecuaciones que no contienen las fuentes. Aplicando las condiciones de Rankine-Hugoniot como en el caso de la MHD ideal, se tiene lo siguiente

$$S_L \begin{bmatrix} \rho_L^* \\ \rho_L^* v_{x,L}^* \\ \rho_L^* v_{y,L}^* \\ \rho_L^* v_{z,L}^* \\ E_L^* \\ B_{x,L}^* \\ B_{y,L}^* \\ B_{z,L}^* \\ \psi_L^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \rho_L^* q^* \\ \rho_L^* v_{x,L}^* q^* + p_L^* - (B_{x,L}^*)^2 \\ \rho_L^* v_{y,L}^* q^* - B_{x,L}^* B_{y,L}^* \\ \rho_L^* v_{z,L}^* q^* - B_{x,L}^* B_{z,L}^* \\ (E_L^* + p_L^*) q^* - B_{x,L}^* (\mathbf{B}_L \cdot \mathbf{v}_L)^* \\ \psi_L^* \\ v_{x,L}^* B_{y,L}^* - v_{y,L}^* \\ v_{x,L}^* B_{z,L}^* - v_{z,L}^* B_{x,L}^* \\ c_h^2 B_{x,L}^* \end{bmatrix} = S_L \begin{bmatrix} \rho_L \\ \rho_L v_{x,L} \\ \rho_L v_{y,L} \\ \rho_L v_{z,L} \\ E_L \\ B_{x,L} \\ B_{y,L} \\ B_{z,L} \\ \psi_L \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \rho_L q_L \\ \rho_L v_{x,L} q + p_L - (B_{x,L})^2 \\ \rho_L v_{y,L} q - B_{x,L} B_{y,L} \\ \rho_L v_{z,L} q - B_{x,L} B_{z,L} \\ (E_L + p_L) q - B_{x,L} (\mathbf{B}_L \cdot \mathbf{v}_L) \\ \psi_L \\ v_{x,L} B_{y,L} - v_{y,L} \\ v_{x,L} B_{z,L} - v_{z,L} B_{x,L} \\ c_h^2 B_{x,L} \end{bmatrix}, \quad (4.253)$$

del sistema anterior se tienen las siguientes relaciones para  $\psi_L$ ,  $\psi_L^*$ ,  $B_{x,L}$  y  $B_{x,L}^*$

$$S_L (B_{x,L}^* - B_{x,L}) = \psi_L^* - \psi_L, \quad (4.254)$$

$$S_L (\psi_L^* - \psi_L) = c_h^2 (B_{x,L}^* - B_{x,L}) \quad (4.255)$$

en general se considera  $\psi_L = \psi_L^* = \psi$ , y se calculan directamente los flujos de  $\psi$  sin resolver el estado intermedio  $\mathbf{U}^*$ . Las demás variables del estado  $\mathbf{U}_\alpha^*$  son iguales a las que se calcularon para el caso de la MHD ideal, esto es:

$$B_{x,\alpha}^* = \frac{S_R B_{x,R} - S_L B_{x,L}}{S_R - S_L}, \quad (4.256)$$

$$B_{y,\alpha}^* = \frac{S_R B_{y,R} - S_L B_{y,L} - B_{y,R} v_{x,R} + B_{x,R} v_{y,R} + B_{y,L} v_{x,L} - B_{x,L} v_{y,L}}{S_R - S_L}, \quad (4.257)$$

$$B_{z,\alpha}^* = \frac{S_R B_{z,R} - S_L B_{z,L} - B_{z,R} v_{x,R} + B_{x,R} v_{z,R} + B_{z,L} v_{x,L} - B_{x,L} v_{z,L}}{S_R - S_L}, \quad (4.258)$$

$$\rho_\alpha^* = \rho_\alpha \frac{S_\alpha - v_{x,\alpha}}{S_\alpha - q^*}, \quad (4.259)$$

$$(\rho v_x)_\alpha^* = \rho_\alpha^* q^*, \quad (4.260)$$

$$(\rho v_y)_\alpha^* = (\rho v_y)_\alpha \frac{S_\alpha - v_{x,\alpha}}{S_\alpha - q^*} - \frac{(B_{x,\alpha}^* B_{y,\alpha}^* - B_{x,\alpha} B_{y,\alpha})}{S_\alpha - q^*}, \quad (4.261)$$

$$(\rho v_z)_\alpha^* = (\rho v_z)_\alpha \frac{S_\alpha - v_{x,\alpha}}{S_\alpha - q^*} - \frac{(B_{x,\alpha}^* B_{z,\alpha}^* - B_{x,\alpha} B_{z,\alpha})}{S_\alpha - q^*}, \quad (4.262)$$

$$E_\alpha^* = E_\alpha \frac{S_\alpha - v_{x,\alpha}}{S_\alpha - q^*} + \frac{(p_{t_\alpha}^* q^* - p_{t_\alpha} v_{x,\alpha}) - (B_{x,\alpha}^* (\mathbf{B}^{HLL} \cdot \mathbf{v}^{HLL}) - B_{x,\alpha} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{v})_\alpha)}{S_\alpha - q^*}, \quad (4.263)$$

en donde el subíndice  $\alpha = L, R$  representa los estados izquierdos o derechos, aquí  $\mathbf{B}^{HLL}$  y  $\mathbf{v}^{HLL}$  están definidos por los promedios simples

$$\mathbf{U}^{HLL} = \frac{S_R \mathbf{U}_R - S_L \mathbf{U}_L - (F_R - F_L)}{S_R - S_L}, \quad (4.264)$$

y  $q^* = S_M$  dada por la ecuación (4.17), finalmente  $p_t^* = p_{t_\alpha}^*$  está dada por

$$p_{t_\alpha}^* = \rho_\alpha(S_\alpha - v_{x,\alpha})(q^* - v_{x,\alpha}) + p_{t_\alpha} - B_{x,\alpha}^2 + (B_{x,\alpha})^2. \quad (4.265)$$

Las velocidades  $S_L$  y  $S_R$  están definidas como

$$S_L = \min(v_{x,L} - C_{f_{x,L}}, v_{x,R} - C_{f_{x,R}}), \quad (4.266)$$

$$S_R = \max(v_{x,L} + C_{f_{x,L}}, v_{x,R} + C_{f_{x,R}}), \quad (4.267)$$

en donde  $C_{f_{x,L,R}}$  es la velocidad magnetosónica rápida a derecha e izquierda.

### HLLD para las ecuaciones EGLM de la MHD resistiva en 1D

De igual forma que para el HLLC, se ilustra el resolutor de Riemann HLLD, para el caso de la ecuaciones de la MHD resistiva en la formulación EGLM con  $\mathbf{S} = 0$ . La característica principal, es que la función  $\psi$  se considera invariante en los estados  $\mathbf{U}^*$  y  $\mathbf{U}^{**}$ , esto es

$$\psi_\alpha^* = \psi_\alpha^{**} = \psi. \quad (4.268)$$

Las demás variables para los estados  $\mathbf{U}^*$  y  $\mathbf{U}^{**}$  se calculan de la misma forma que para las ecuaciones de la MHD ideal, y están definidas de la siguiente forma

$$B_{x,\alpha}^* = \frac{S_R B_{x,R} - S_L B_{x,L}}{S_R - S_L}, \quad (4.269)$$

$$B_{y,\alpha}^* = \frac{B_{y,\alpha} \rho_\alpha (S_\alpha - v_{x,\alpha})^2 - B_{y,\alpha} B_{x,\alpha} B_{x,\alpha}^* - (B_{x,\alpha}^* - B_{x,\alpha}) v_{y,\alpha} \rho_\alpha (S_\alpha - v_{x,\alpha})}{\rho_\alpha (S_\alpha - q^*) (S_\alpha - v_{x,\alpha}) - (B_{x,\alpha}^*)^2}, \quad (4.270)$$

$$B_{z,\alpha}^* = \frac{B_{z,\alpha} \rho_\alpha (S_\alpha - v_{x,\alpha})^2 - B_{z,\alpha} B_{x,\alpha} B_{x,\alpha}^* - (B_{x,\alpha}^* - B_{x,\alpha}) v_{z,\alpha} \rho_\alpha (S_\alpha - v_{x,\alpha})}{\rho_\alpha (S_\alpha - q^*) (S_\alpha - v_{x,\alpha}) - (B_{x,\alpha}^*)^2}, \quad (4.271)$$

$$\rho_\alpha^* = \rho_\alpha \frac{S_\alpha - v_{x,\alpha}}{S_\alpha - q^*}, \quad (4.272)$$

$$(\rho v_x)_\alpha^* = \rho_\alpha^* q^*, \quad (4.273)$$

$$(\rho v_y)_\alpha^* = (\rho v_y)_\alpha \frac{S_\alpha - v_{x,\alpha}}{S_\alpha - q^*} - \frac{(B_{x,\alpha}^* B_{y,\alpha}^* - B_{x,\alpha} B_{y,\alpha})}{S_\alpha - q^*}, \quad (4.274)$$

$$(\rho v_z)_\alpha^* = (\rho v_z)_\alpha \frac{S_\alpha - v_{x,\alpha}}{S_\alpha - q^*} - \frac{(B_{x,\alpha}^* B_{z,\alpha}^* - B_{x,\alpha} B_{z,\alpha})}{S_\alpha - q^*}, \quad (4.275)$$

$$E_\alpha^* = E_\alpha \frac{S_\alpha - v_{x,\alpha}}{S_\alpha - q^*} + \frac{(p_{t_\alpha}^* q^* - p_{t_\alpha} v_{x,\alpha}) - (B_{x,\alpha}^* (\mathbf{B} \cdot \mathbf{v})_\alpha^* - B_{x,\alpha} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{v})_\alpha)}{S_\alpha - q^*}, \quad (4.276)$$

en donde nuevamente  $\alpha = L, R$ , además que  $p_{t_\alpha}^*$  y  $q^*$  están dadas por las ecuaciones (4.75)-

(4.84).

De igual manera que en el caso de la MHD ideal las variables del estado  $\mathbf{U}^{**}$  están dadas por el siguiente conjunto de ecuaciones

$$\rho_\alpha^{**} = \rho_\alpha^*, \quad (4.277)$$

$$v_x^{**} = q^*, \quad (4.278)$$

$$v_y^{**} = \frac{\sqrt{\rho_L^*} v_{y,L}^* + \sqrt{\rho_R^*} v_{y,R}^* + (B_{y,R}^* - B_{y,L}^*) \text{sign}(B_x^{HLL})}{\sqrt{\rho_L^*} + \sqrt{\rho_R^*}}, \quad (4.279)$$

$$v_z^{**} = \frac{\sqrt{\rho_L^*} v_{z,L}^* + \sqrt{\rho_R^*} v_{z,R}^* + (B_{z,R}^* - B_{z,L}^*) \text{sign}(B_x^{HLL})}{\sqrt{\rho_L^*} + \sqrt{\rho_R^*}}, \quad (4.280)$$

$$B_{x,\alpha}^{**} = B_x^{HLL}, \quad (4.281)$$

$$B_y^{**} = \frac{\sqrt{\rho_L^*} B_{y,R}^* + \sqrt{\rho_R^*} B_{y,L}^* + \sqrt{\rho_L^* \rho_R^*} (v_{y,R}^* - v_{y,L}^*) \text{sign}(B_x^{HLL})}{\sqrt{\rho_L^*} + \sqrt{\rho_R^*}}, \quad (4.282)$$

$$B_z^{**} = \frac{\sqrt{\rho_L^*} B_{z,R}^* + \sqrt{\rho_R^*} B_{z,L}^* + \sqrt{\rho_L^* \rho_R^*} (v_{z,R}^* - v_{z,L}^*) \text{sign}(B_x^{HLL})}{\sqrt{\rho_L^*} + \sqrt{\rho_R^*}}, \quad (4.283)$$

$$E_\alpha^{**} = E_\alpha^* \mp \sqrt{\rho_\alpha^*} (\mathbf{v}_\alpha^* \cdot \mathbf{B}_\alpha^* - \mathbf{v}^{**} \cdot \mathbf{B}^{**}) \text{sign}(B_x^{HLL}), \quad (4.284)$$

en donde  $\text{sign}(B_x^{HLL})$  es la función signo de  $B_x^{HLL}$  y se define como 1, si  $B_x^{HLL} > 0$  y -1, si  $B_x^{HLL} < 0$ . Además el signo menos y más de la ecuación (4.98) corresponden a  $\alpha = L$  y  $R$ , respectivamente.

## 4.5 Evolución en el tiempo

Para evolucionar en el tiempo las ecuaciones de la MHD ideal y resistiva se usó el método de líneas en combinación con el algoritmo de integración Runge-Kutta de tercer orden del tipo TVD (Total Variation Diminishing) [Shu & Osher (1989)], esto para obtener un orden de convergencia aproximado de segundo orden considerando que la discretización en volúmenes finitos es de primer orden en el espacio. La propiedad TVD es un tipo de discretización temporal que se aplica a sistemas hiperbólicos que tengan una discretización espacial estable. Cuando no se tiene la propiedad TVD se generan oscilaciones en la solución cuando se integre en el tiempo, lo que también está asociado con los operadores de discretización espacial que se usen. Entonces para que estas oscilaciones estén acotadas, se debe cumplir la propiedad TV para una función o variable definida en una malla, esto es

$$TV(q) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} |q_i - q_{i-1}|, \quad (4.285)$$

en donde  $TV(q)$  es finito si  $q_i$  es cero o constante cuando  $i \rightarrow \pm\infty$ . Entonces para que las oscilaciones no aparezcan, el método que se emplee debe evitar que se incremente la variación total en el tiempo, es decir

$$TV(q^{n+1}) \leq TV(q^n). \quad (4.286)$$

La condición anterior significa que si el método es  $TVD$ , y se tiene un dato inicial monótono, entonces éste permanecerá así en los pasos de tiempo posteriores. En el caso cuando se discretiza una discontinuidad que se propaga, esta puede suavizarse en pasos posteriores, pero no se volverá oscilatoria.

El método de líneas (MoL) consiste en escribir un sistema de ecuaciones diferenciales parciales como ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden en el tiempo, de tal manera que las ecuaciones se puedan representar de la siguiente forma

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \mathcal{L}(U), \quad (4.287)$$

en donde  $\mathcal{L}(U)$  es un operador que contiene la información de la discretización espacial y los términos fuentes de las ecuaciones escritas en forma de ley de balance. El MoL supone que la ecuación (4.287) se semidiscretiza como

$$\frac{\partial U}{\partial t} = [\mathcal{L}(U)]_{i,j,k}, \quad (4.288)$$

y entonces la parte derecha es un número fuente de una ecuación diferencial ordinaria (EDO) en el tiempo. Esta EDO se resuelve con un integrador de EDOs. Como ejemplo, si

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad (4.289)$$

la versión semidiscreta es

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{F_{i+1/2,j,k}^n - F_{i-1/2,j,k}^n}{\Delta x}, \quad (4.290)$$

que se resuelve del tiempo  $t^n$  al  $t^{n+1}$  para todo  $i, j, k$  del dominio. Si se repite el proceso acaba considerándose una solución  $U_{i,j,k}^n$  en todo el dominio 3D de la Fig. 4.10.

Los flujos numéricos  $F^n$  se calculan usando los resolvedores de Riemann descritos en las secciones anteriores. Tanto los flujos como los términos fuentes se calculan en el nivel de tiempo  $t^n$ .

Para integrar en el tiempo se usó el método de Runge-Kutta de tercer orden, esto significa que en cada paso de tiempo  $\Delta t$  el integrador hará tres iteraciones antes de pasar al nuevo  $\Delta t$ , tal método está descrito de la siguiente forma

$$U_{i,j,k}^{(1)} = U^n + \Delta t[\mathcal{L}(U^n)]_{i,j,k}, \quad (4.291)$$

$$U_{i,j,k}^{(2)} = \frac{1}{4}[3U^{2n} + U^{(1)} + \Delta t[\mathcal{L}(U^{(1)})]_{i,j,k}], \quad (4.292)$$

$$U_{i,j,k}^{n+1} = \frac{1}{4}[3U^{2n} + 2U^{(2)} + 2\Delta[\mathcal{L}(U^{(2)})]_{i,j,k}]. \quad (4.293)$$

Se usan los valores  $U^n$  y  $\mathcal{L}(U^n)$  obtenidos al tiempo  $t^n$  para calcular los valores de  $U^{n+1}$  al tiempo  $t^{n+1}$  [Shu & Osher (1989)]. El paso de tiempo  $\Delta t$  se considera constante, y está definido para el caso de una dimensión como  $\Delta t = C_{CFL}dx$ , en donde  $C_{CFL}$  se toma como fijo y constante en todas las simulaciones de esta tesis. Los problemas resueltos en esta tesis van desde una dimensión espacial hasta tres, por lo tanto se tiene que definir el  $\Delta t$  de manera consistente con la velocidad de propagación de las señales a lo largo del dominio numérico, por ejemplo para el caso en dos dimensiones se define como  $\Delta t = C_{CFL}min(\Delta x, \Delta y)$  y para el caso de tres dimensiones como  $\Delta t = C_{CFL}min(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ .

## 4.6 Condiciones de frontera

Las condiciones de frontera son parte esencial de la solución de cualquier sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales, en el caso específico de esta tesis se usaron diferentes condiciones de frontera dependiendo del problema físico que se estudió. Las condiciones de frontera más usadas fueron las de flujo saliente, flujo entrante, periódicas y fijas en el tiempo.

### 4.6.1 Condiciones de frontera de flujo saliente

En forma general este tipo de condiciones de frontera evita que el flujo que sale del dominio numérico regrese y contamine con errores numéricos la evolución. Se definen para un dominio 1D con  $N$  celdas, definidas de la siguiente forma:

$$q_0 = q_1, \quad (4.294)$$

$$q_N = q_{N-1}, \quad (4.295)$$

en donde  $q_0 = q(x(0))$ ,  $q_1 = q(x(1))$ ,  $q_N = q(x(N_x))$  y  $q_{N-1} = q(x(N_x - 1))$ , las cuales denotan a las variables evaluadas en los extremos (fronteras) de la malla numérica. Para el caso de los problemas en 3D la condición de aplica todas la caras del dominio numérico.

### 4.6.2 Condiciones de frontera de flujo entrante

Análogamente, estas condiciones consisten en inyectar materia al dominio numérico de manera constante, y se definen de la siguiente forma

$$q_0^{n+1} = q_0^n, \quad (4.296)$$

$$q_N^{n+1} = q_0^n, \quad (4.297)$$

en donde  $q^n$  y  $q^{n+1}$  son las variables en dos tiempos distintos, lo que significa la variable al tiempo  $n + 1$  hereda el valor de la variable al tiempo  $n$ .

### 4.6.3 Condiciones de frontera periódicas

Tales condiciones consisten en unir las fronteras opuestas del dominio numérico de la siguiente forma

$$q_0 = q_{N-1}, \quad (4.298)$$

$$q_N = q_1, \quad (4.299)$$

entonces el fluido circula de manera periódica en el dominio.

### 4.6.4 Condiciones de frontera fijas en el tiempo

Este tipo de condiciones de frontera se usan para simular numéricamente que las variables queden fijas en el tiempo durante la evolución, esto significa que las variables toman los valores de la condición inicial en cada una de las fronteras del dominio. Tales condiciones se simulan usando la siguiente condición

$$RHS(q_0) = 0, \quad (4.300)$$

$$RHS(q_N) = 0, \quad (4.301)$$

en donde  $RHS$  es el right-hand-side de cada una de las variables conservativas.

## 4.7 Positividad de la presión en las simulaciones con MHD ideal y resistiva

Los métodos de Godunov de orden alto que se han presentado en secciones anteriores y que se usan para resolver las ecuaciones de la MHD ideal y resistiva calculan la densidad de energía total y de ahí derivan la presión usando la densidad de energía interna en la ecuación de estado. La densidad de energía interna se obtiene restando la densidad de energía cinética y magnética de la densidad de energía total. Sin embargo esto puede causar problemas, en situaciones en las cuales la densidad de energía térmica sea mucho más pequeña que la densidad de energía cinética o magnética. Entonces pequeños errores en la discretización de la energía total pueden producir presiones negativas, lo que implica que los resultados no tienen una interpretación física. Dinámicamente esto podría no ser un problema, ya que la presión se puede reemplazar con una atmósfera  $P_{atm} \approx 10^{-12}$ , de tal forma que la energía total no se modifique. Sin embargo, si se quiere ver la distribución de temperatura, la cual es una variable que se calcula de la presión, esta será afectada por el valor de la atmósfera, lo que implica que se pierda información sobre la morfología y dinámica del problema. En el caso particular de esta tesis, se estudian fenómenos en la atmósfera solar, en donde la  $\beta$  del plasma puede ser muy pequeña, por ejemplo  $\beta \sim 10^{-4}$ . Tales valores pequeños de  $\beta$  producen que la presión se vuelva negativa aún en el caso de usar un resolvidor de Riemann HLL, tales como el HLLC y HLLD que en teoría mantienen la positividad bajo ciertas circunstancias, por lo tanto es necesario implementar métodos que sean físicamente consistentes, de tal forma que se mantenga la positividad de la presión.

Uno de los métodos que se usan para calcular de manera consistente y preservar la positividad de la presión fue introducido en [Balsara & Spicer (1999)], en donde se resuelve la ecuación de la densidad de entropía en lugar de la densidad de energía total. El método parte de la ecuación de la densidad de entropía

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{p}{\rho^\gamma} \right) + \mathbf{v} \cdot \nabla \left( \frac{p}{\rho^\gamma} \right) = 0, \quad (4.302)$$

que puede ser acoplada con la ecuación de continuidad (3.5) para derivar una ecuación conservativa tipo advección para la densidad de entropía, la cual se expresa como

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}S) = 0, \quad (4.303)$$

en donde  $S = \frac{p}{\gamma-1}$  es la densidad de entropía. Es importante mencionar que la densidad de entropía se conserva para cada elemento de fluido, sin importar que pase a través de un choque magnetosónico. Entonces la presión se mantendrá positiva ya que se recuperará

de la ecuación de la densidad de entropía. A pesar de que con este método se asegura que la presión sea positiva, tiene sus desventajas, por ejemplo en las regiones en donde hayan choques, la entropía no cumple con las condiciones de salto, lo que implica que hay un aumento de entropía, pero si se estudia un fenómeno en donde los procesos sean aproximadamente adiabáticos, el uso de la ecuación de la entropía es una opción. En el caso específico de esta tesis se resuelve la ecuación de la densidad de entropía en regiones de  $\beta$  del plasma pequeñas cuando se estudia la formación de jets en una atmósfera solar estratificada y considerando una configuración de campo magnético más realista en tres dimensiones, como se estudiará en el capítulo 7.

Otro de los métodos que se usan para mantener la positividad de la presión en problemas en donde la beta del plasma sea pequeña, es resolviendo la ecuación de la densidad de energía interna en lugar de la de la energía total [Li (2008)]. El método se basa en usar la siguiente ecuación para la densidad de energía interna

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e \mathbf{v}) = -p \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad (4.304)$$

en donde  $e = \frac{p}{(\gamma-1)\rho}$ , es la densidad de energía interna. Como se puede ver es una ecuación no conservativa, sin embargo ésta propiedad no modifica la validez de la solución cuando se calcula la presión directamente después de haber calculado la densidad de energía interna. De igual forma que la ecuación de la densidad de entropía, la ecuación (4.304) no cumple las condiciones de salto en los choques magnetosónico, lo que resulta en una elección no tan precisa para capturar choques, sin embargo de acuerdo a los resultados obtenidos cuando se usa es una elección físicamente aceptable.

Existen otros métodos para mantener la positividad de la presión en los casos en donde se tengan choques fuertes, a tales métodos se les conoce como aproximaciones de retroceso [Mignone et al. (2007), Tchekhovskoy et al. (2017), Beckwith & Stone (2011), Radice & Rezzolla (2011), Núñez & Munz (2015)]. Los cuales se basan en implementar diferentes localizadores de choques, y en la vecindad de tales choques disminuir el orden del resolvidor de Riemann, para de esta forma agregar disipación. Por ejemplo en el código CAFE Newtoniano para estudiar la formación de jets en la atmósfera solar en 3D, se implementó un método híbrido basado en la aproximación de retroceso en donde se mezclan los resolvidores HLLC y HLLE.

En este capítulo se han descrito los métodos numéricos utilizados para resolver las ecuaciones de la MHD ideal y resistiva, los cuales se basan en volúmenes finitos en conjunto con los resolvidores de Riemann HLLE, HLLC, HLLD y Roe. También se han descrito los reconstructores de las variables en las interceldas de los volúmenes, los cuales van desde el constante a trozos, conocido como Godunov, los lineales a trozos, tales como el MC, MINMOD, hasta los de orden mayor basados en polinomios, como el WENO5. De

igual forma se describieron los métodos usados para mantener la constricción del campo magnético  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  al orden del error de redondeo de la computadora, los cuales son el Flux-CT para la MHD ideal y el EGLM cleaning para el MHD resistiva. También se describieron las condiciones de frontera que se usarán en las pruebas básicas, como se verá en el capítulo siguiente y en los problemas en particular estudiados en esta tesis. Finalmente se describieron los métodos para mantener la positividad de la presión del gas cuando se usa la forma conservativa de la ecuación de la densidad de energía interna total en problemas en donde la beta del plasma es del orden  $10^{-2} - 10^{-4}$ . En el siguiente capítulo se presentan las pruebas básicas en 1D y 2D que debe pasar cualquier código que resuelva las ecuaciones de la MHD ideal y resistiva.



# Capítulo 5

## Pruebas del código numérico

Para que el código CAFE Newtoniano pueda ser usado en simulaciones numéricas en un problema físico en particular, debe pasar primero una serie de pruebas. Las pruebas presentadas en esta tesis son estándar de muchos de los códigos existentes. En algunas pruebas es posible comparar la solución numérica con la exacta, como en el caso de los problemas de Riemann en 1D para la MHD ideal. En el caso de las pruebas en 2D de la MHD ideal no se tienen soluciones analíticas disponibles, entonces una forma de mostrar que el código reproduce las pruebas es al menos comparar morfológicamente los resultados obtenidos con los de otros códigos existentes. Sin embargo, lo anterior no es suficiente para estar seguros de que el código funcione bien, por tal motivo en la mayoría de las pruebas 2D se incluyen además pruebas de consistencia. Particularmente en el caso de la MHD ideal una prueba que indica que la implementación es correcta es el monitoreo de la constricción  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ , la cual debe mantenerse lo suficientemente pequeña para que no afecte la evolución del sistema. En el caso de la MHD resistiva, se presenta una prueba en 1D relacionada con la advección del campo magnético en presencia de la resistividad. Las pruebas 2D para la MHD resistiva miden la capacidad del código para describir correctamente los procesos de reconexión magnética lenta y rápida, así como de capturar las inestabilidades que se presentan en el caso de una resistividad localizada. Aparte de las pruebas de la MHD ideal y resistiva, se presentan pruebas solares, en donde se mide la capacidad del código de describir correctamente fenómenos asociados a la propagación de ondas de Alfvén en una atmósfera solar formada por configuraciones magnéticas realistas.

Nombre del test	$\gamma$	$\rho$	$p$	$v_x$	$v_y$	$v_z$	$B_x$	$B_y$	$B_z$
<b>Brio – Wu</b>									
Estado izquierdo	5/3	1.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.75	1.0	0.0
Estado derecho		0.125	0.1	0.0	0.0	0.0	0.75	-1.0	0.0
<b>Ryu&amp;Jones 1b</b>									
Estado izquierdo	5/3	1.0	1.0	0.0	0.0	0.0	$3/\sqrt{4\pi}$	$5/\sqrt{4\pi}$	0.0
Estado derecho		0.1	10.0	0.0	0.0	0.0	$3/\sqrt{4\pi}$	$2/\sqrt{4\pi}$	0.0
<b>Ryu&amp;Jones 2b</b>									
Estado izquierdo	5/3	1.0	1.0	0.0	0.0	0.0	$3/\sqrt{4\pi}$	$6/\sqrt{4\pi}$	0.0
Estado derecho		0.1	10.0	0.0	2.0	1.0	$3/\sqrt{4\pi}$	$1/\sqrt{4\pi}$	0.0
<b>Ryu&amp;Jones 3b</b>									
Estado izquierdo	5/3	1.0	1.0	-1.0	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0
Estado derecho		1.0	1.0	1.0	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0

Tabla 5.1: Parámetros para los distintos problemas de Riemann de la MHD en 1D.

## 5.1 Pruebas numéricas de la Magnetohidrodinámica ideal clásica

### 5.1.1 Pruebas 1D

Para ilustrar cómo el código puede evolucionar un gas magnetizado, en esta sub-sección se presentan las pruebas básicas de los tubos de choque en una dirección. Se presentan pruebas 1D dadas por problemas de Riemann bajo ciertas condiciones iniciales y se comparan los resultados numéricos con la solución exacta desarrollada en [Takahashi & Yamada (2013), Takahashi & Yamada (2014)]. En este caso se calcula la solución numérica usando las fórmulas de flujo HLLC, HLLC, HLLD y Roe combinados con el reconstructor MINMOD. El dominio de evolución es  $[-0.5, 0.5]$  con  $N = 800$  celdas, un factor de Courant  $CFL = 0.25$  para las pruebas 1, 3, 4 y  $CFL = 0.08$  para la prueba 2. La discontinuidad está localizada en  $x = 0$ . Para la estimación del error entre la solución numérica y la solución numérica, se calcula la solución numérica usando tres resoluciones espaciales distintas  $\Delta x_1 = 1/200$ ,  $\Delta x_2 = 1/400$  y  $\Delta x_3 = 1/800$ . Para estas pruebas se usó la versión del código 3D con 4 celdas a lo largo de las direcciones transversales. Los parámetros de las pruebas 1D se muestran en la Tabla 5.1.

#### Prueba 1: Tubo de choque de Brio-Wu

El problema del tubo de choque de Brio-Wu [Brio & Wu (1988)] prueba la capacidad del código de capturar los diferentes tipos de ondas, choques, rarefacciones, discontinuidades de contacto, y la estructura compuesta de la MHD ideal. Una imagen de la solución numérica para 4 diferentes resolvers de Riemann comparada con la solución exacta al tiempo  $t = 0.1$  se muestra en la Fig. 5.1. y se describe de la siguiente forma: la onda de rarefacción se mueve hacia la izquierda de  $x \approx -0.2$  a  $x \approx -0.1$ , y la onda lenta compuesta en  $x \approx -0.03$  son correctamente capturadas. La discontinuidad de contacto se resuelve en

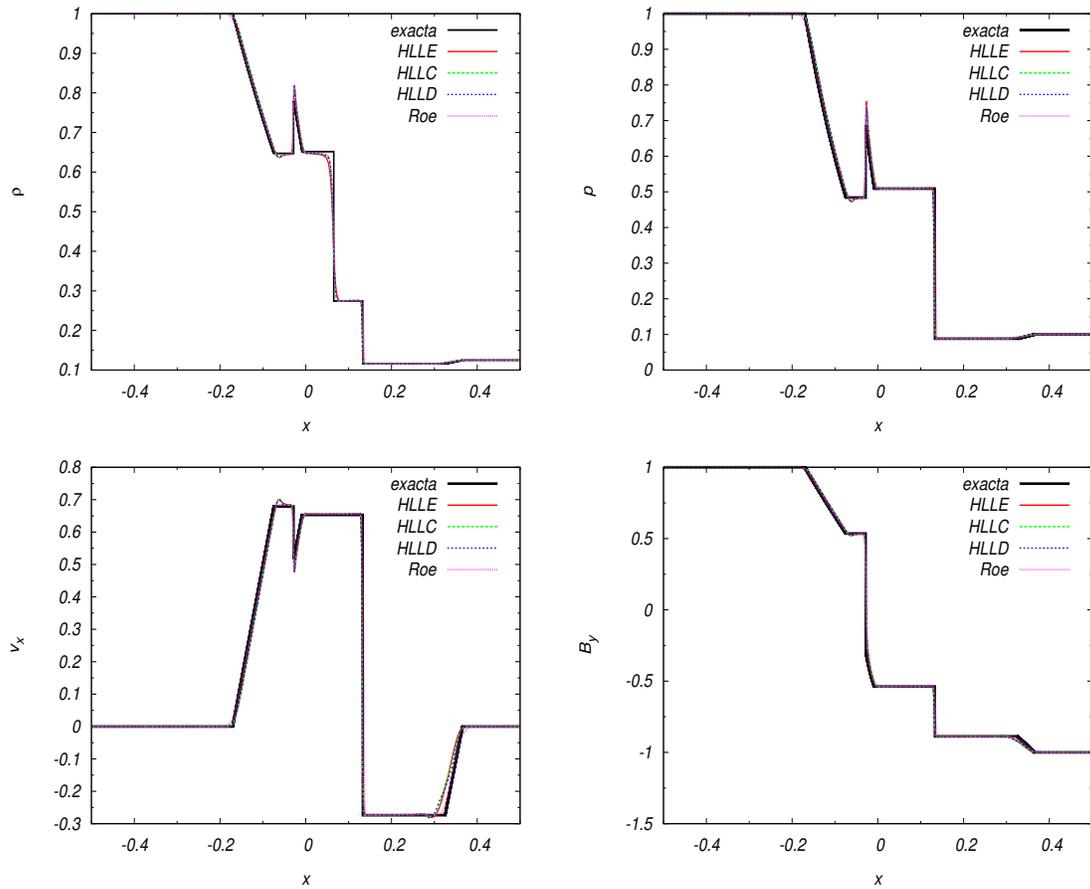


Figura 5.1: Prueba 1: Tubo de choque de Brio-Wu a  $t = 0.1$ . Se muestra la solución numérica de  $\rho$ ,  $p$ ,  $v_x$  y  $B_y$  usando 4 resolvers distintos comparada con la solución exacta. En este caso se usó el reconstructor MINMOD.

$x \approx 0.05$ . Finalmente, la onda de choque lenta es capturada en  $x \approx 0.15$  y la rarefacción rápida de  $x \approx 0.32$  a  $x \approx 0.37$ .

### Prueba 2: Ryu & Jones 1b

Esta prueba fue introducida por Ryu & Jones [Ryu & Jones (1995)]. Es importante para probar la habilidad del algoritmo numérico de capturar choques rápidos, una rarefacción, un choque lento, una rarefacción lenta, y una discontinuidad de contacto. Una imagen de la evolución se muestra en la Fig. 5.2. Los resultados obtenidos con el código usando los 4 resolvers de Riemann muestran que el choque rápido está en  $x \approx -0.11$  y el choque lento se localiza en  $x \approx -0.075$  se capturan de manera correcta. Además la discontinuidad de contacto aparece en  $x \approx -0.061$  y la rarefacción lenta está en  $x \approx -0.040$ . Finalmente, la

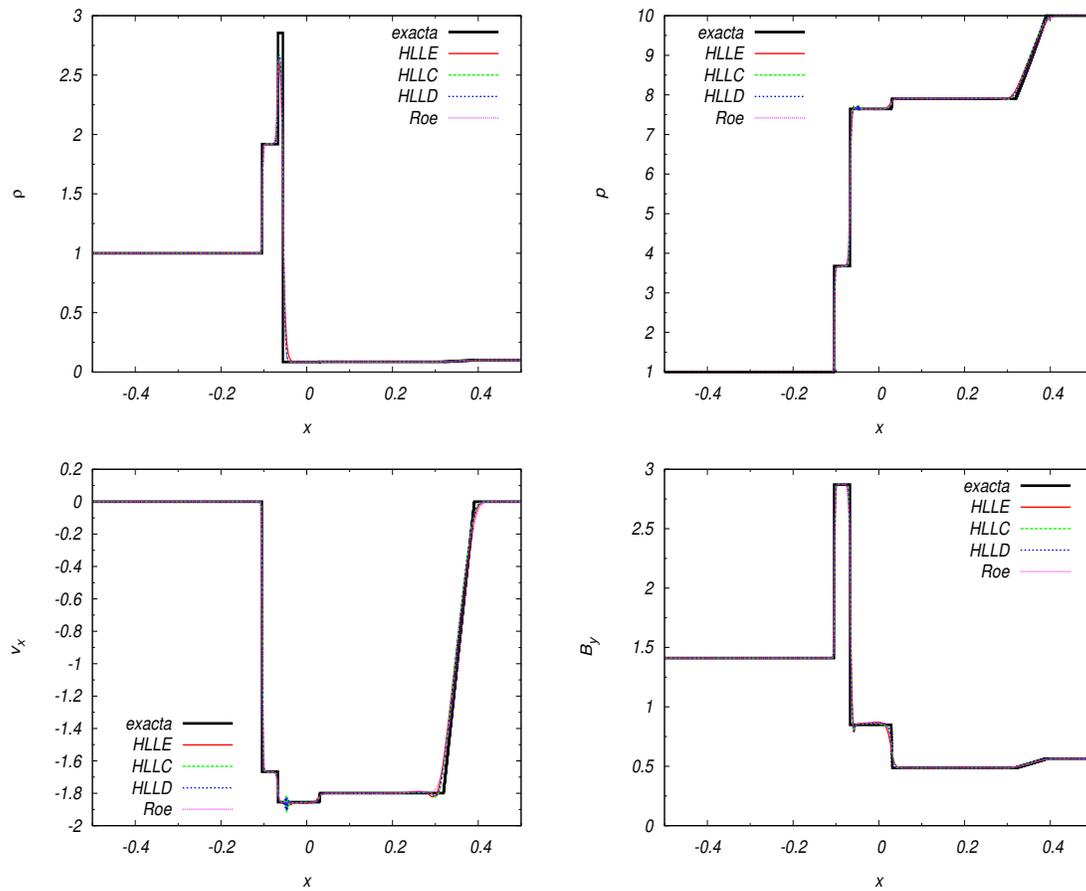


Figura 5.2: Prueba 2: Ryu & Jones 1b a  $t=0.03$ . Se muestra la solución numérica de  $\rho$ ,  $p$ ,  $v_x$  y  $B_y$  usando 4 resolvedores distintos comparada con la solución exacta. En este caso se usó el reconstructor MINMOD con los 4 resolvedores.

rarefacción rápida es capturada en  $x \approx 0.34$ .

### Prueba 3: Ryu & Jones 2a

Esta prueba es un tubo de choque presentado en [Ryu & Jones (1995)], y es importante porque contiene choques rápidos, choques lentos, y discontinuidades rotacionales las cuales se propagan hacia los lados de la discontinuidad de contacto. Además prueba la habilidad del algoritmo numérico de capturar las 7 ondas asociadas a la MHD ideal. Los resultados de la solución numérica usando 4 resolvedores de Riemann comparados con la solución exacta se muestra en la Fig. 5.3, en donde se puede ver que se captura la estructura característica de manera correcta.

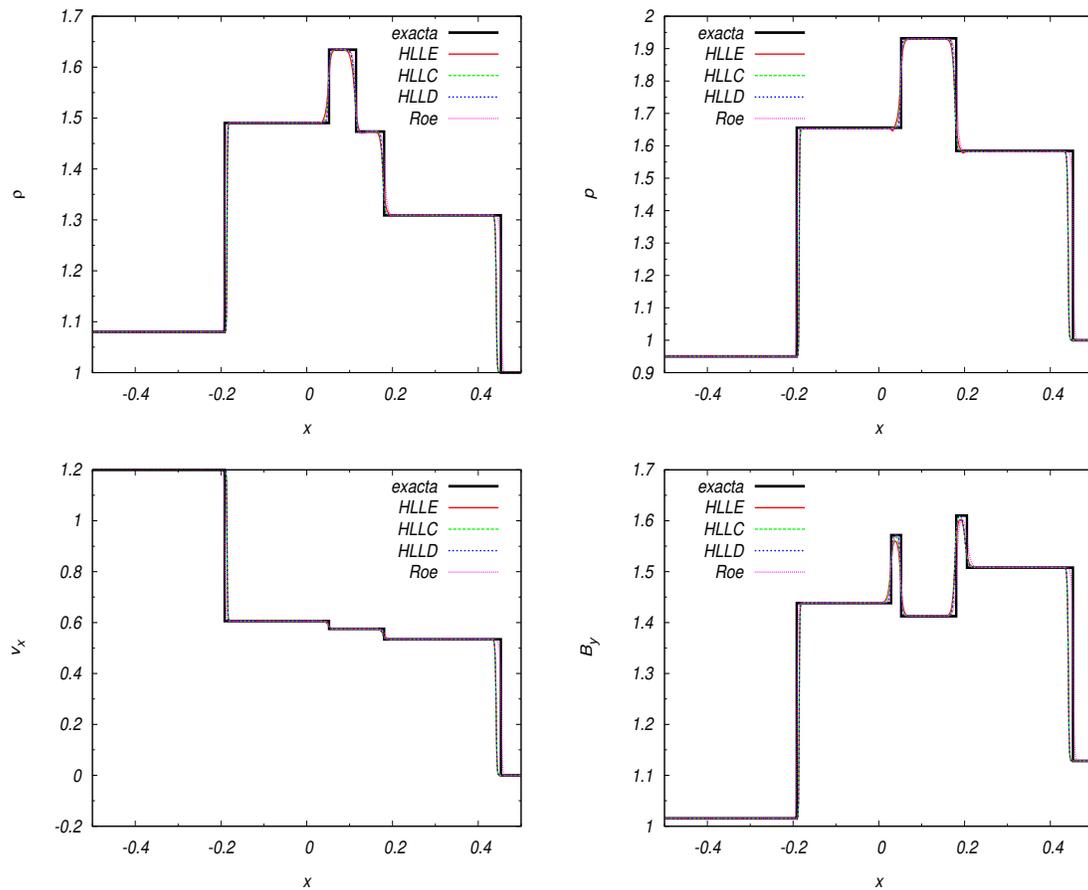


Figura 5.3: Prueba 3: Ryu & Jones 2a a  $t = 0.2$ . Se muestra la solución numérica de  $\rho$ ,  $p$ ,  $v_x$  y  $B_y$  usando 4 resolvedores distintos comparada con la solución exacta. En este caso se usó el reconstructor MINMOD con los 4 resolvedores.

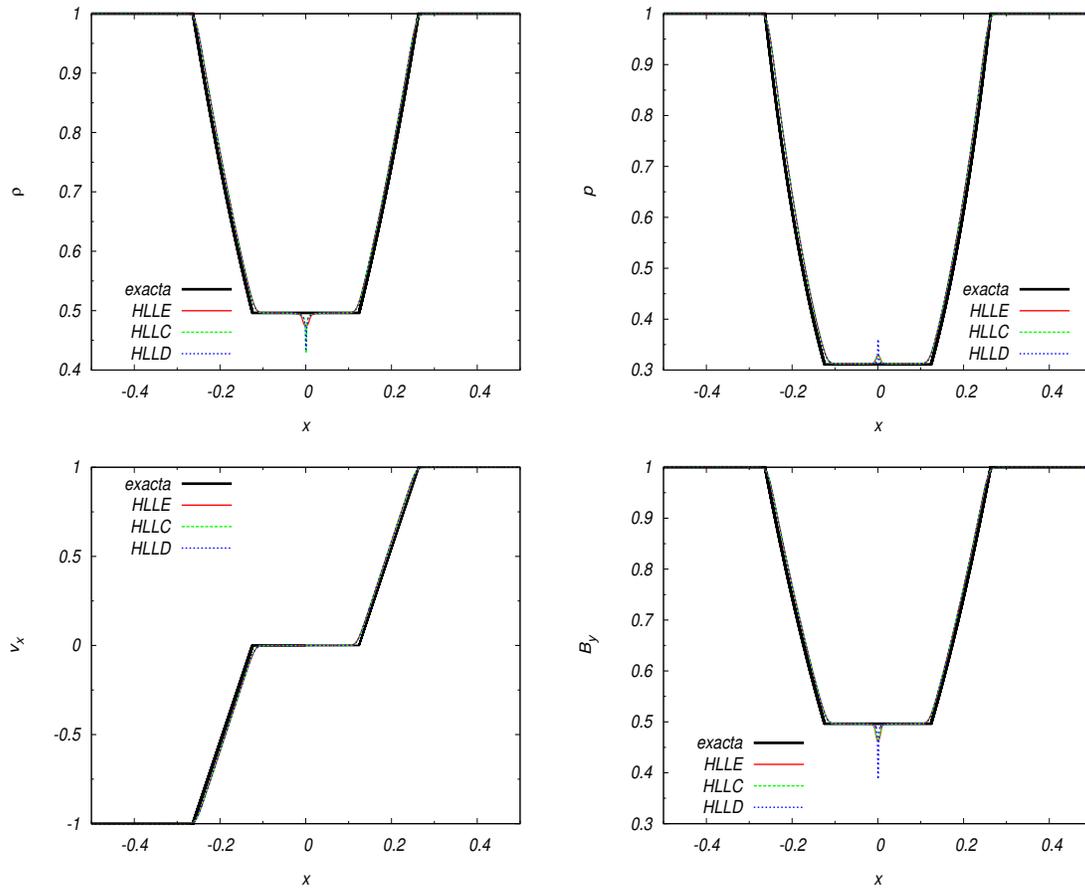


Figura 5.4: Prueba 3: Ryu & Jones 3b a  $t=0.1$ . Se muestra la solución numérica de  $\rho$ ,  $p$ ,  $v_x$  y  $B_y$  usando 3 resolvedores distintos comparada con la solución exacta. En este caso se usó el reconstructor MINMOD con los 3 resolvedores.

#### Prueba 4: Ryu & Jones 3b

Esta prueba se encuentra nuevamente en la referencia [Ryu & Jones (1995)], y prueba la habilidad del código de capturar ondas de rarefacción magnetosónicas. La solución numérica usando 3 resolvedores de Riemann presenta solamente dos rarefacciones intensas e iguales. El código es capaz de capturar esta estructura como se muestra en la Fig. 5.4. En esta

#### Estimación del error para las pruebas 1D de la MHD ideal

Para comparar las soluciones usando las diferentes fórmulas de flujo implementadas en el código, se calcula el error para cada una de las pruebas 1D descritas anteriormente, y los resultados se muestran en la Tabla 5.2. En todas las pruebas, con las cuatro fórmulas de flu-

Resolución	HLLC	HLLC	HLLD	Roe	HLLC	HLLC	HLLD	Roe
Error				Orden de convergencia				
<b>Brio – Wu</b>								
$\Delta x_1$	0.11e-1	0.12e-1	0.12e-1	0.13e-1	....	....	....	....
$\Delta x_2$	0.66e-2	0.54e-2	0.49e-2	0.53e-2	0.74	1.152	1.29	1.29
$\Delta x_3$	0.41e-2	0.33e-2	0.30e-2	0.32e-2	0.69	0.71	0.70	0.72
<b>Ryu&amp;Jones 1b</b>								
$\Delta x_1$	0.32e-1	0.29e-1	0.29e-1	0.31e-1	....	....	....	....
$\Delta x_2$	0.22e-1	0.19e-1	0.19e-1	0.20e-1	0.54	0.61	0.61	0.63
$\Delta x_3$	0.14e-1	0.12e-1	0.12e-1	0.13e-1	0.65	0.66	0.66	0.62
<b>Ryu&amp;Jones 2a</b>								
$\Delta x_1$	0.17e-1	0.16e-1	0.15e-1	0.17e-1	....	....	....	....
$\Delta x_2$	0.74e-2	0.66e-2	0.62e-2	0.76e-2	1.2	1.27	1.27	1.16
$\Delta x_3$	0.55e-2	0.50e-2	0.48e-2	0.55e-2	0.42	0.40	0.36	0.46
<b>Ryu&amp;Jones 3b</b>								
$\Delta x_1$	0.15e-1	0.15e-1	0.15e-1	....	....	....	....	....
$\Delta x_2$	0.37e-2	0.35e-2	0.35e-2	....	2.0	2.0	2.0	....
$\Delta x_3$	0.19e-2	0.18e-2	0.18e-2	....	0.96	0.95	0.95	...

Tabla 5.2: Norma  $L_1$  del error en la densidad de masa calculada con tres resoluciones espaciales distintas y cuatro fórmulas de flujos combinadas con el reconstructor MINMOD. También se muestra el orden de convergencia entre los diferentes pares de resoluciones.

jo y MINMOD, los resultados se encuentran dentro de un regimen de consistencia, esto es, el error disminuye cuando la resolución aumenta. Para calcular el orden de convergencia se calcula la norma  $L_1$  del error comparada con la solución exacta. En este caso la norma  $L_1$  está definida por  $L_1 = \sum_{i=1, N_x} |\rho_i - \rho_i^{exacta}|$ , en donde  $N_x$  es el número de celdas en la dirección  $x$ . Ya que siempre se consideran factores de 2 en la resolución, el orden de convergencia está dado por  $\log(error_i/error_{i-1})/\log(2)$ , en donde  $i$  es el error que se calcula con la resolución  $\Delta x_i$ . En este caso se calculó la solución numérica para tres resoluciones espaciales distintas. Para todas las pruebas se obtiene un orden de convergencia cercano a uno como se esperaba, ya que se debe considerar que todos los datos iniciales comienzan con discontinuidades y en la Tabla 5.2 se muestran como las diferentes fórmulas de flujo funcionan en las pruebas, en especial se puede ver que se obtiene un mejor orden de convergencia cuando se usan las fórmulas de flujo HLLD y Roe.

### Prueba del pulso de Alfvén en 1D para el caso de un $\beta$ del plasma pequeño

Esta prueba es presentada como una prueba básica 1D del código Lared3d [Arber et al. (2001)], y sirve para medir la capacidad de los algoritmos numéricos implementados en el código de evolucionar sistemas en 1D con un  $\beta$  del plasma del orden de  $10^{-3}$ , valores que caracterizan  $\beta$  de la corona solar. Esta prueba también es útil para verificar si la formulación conservativa de las ecuaciones de la MHD ideal falla y se obtienen presiones negativas. Las condiciones iniciales de esta prueba describen un pulso simple de Alfvén en 1D, esto es, la densidad de masa  $\rho = 1$ , la componente  $x$  del campo magnético  $B_x = 1$ , la componente  $y$  de la velocidad  $v_y = 0.2\exp(-x^2/0.01)$ , las demás componentes del campo magnético y de la velocidad son cero. La densidad de energía interna es  $e = 10^{-3}$  y entonces usando la ecuación del gas ideal  $p = (\gamma - 1)\rho e$  con  $\gamma = 5/3$  se obtiene la presión del gas que es  $p = 1/1500$ , con esto la beta del plasma  $\beta = 2p/B^2 = 2 \times 10^{-3}$ . El dominio de evolución es  $[-1.5, 1.5]$  con  $N=3000$  celdas y un factor de Courant CFL = 0.25. Los resultados al tiempo  $t = 1$  de la densidad de energía interna  $e$ , la presión del gas  $p$ , la componente  $v_y$  y  $\beta$  del plasma se muestran en la Fig. 5.5.

## 5.1.2 Pruebas 2D

### El vórtice de Orszag-Tang

El vórtice de Orszag-Tang es una prueba estándar de la MHD ideal introducida en [Orszag & Tang (1998)]. Es un problema muy usado para probar la transición a una turbulencia supersónica MHD en 2D, y sirve para medir la robustez del código en el manejo de la formación de choques e interacciones choque-choque en la MHD ideal. También con esta prueba se pueden hacer estimaciones de cuánto afectan los monopolos magnéticos la solución numérica del problema, por lo tanto se debe verificar la constricción  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ .

Los datos iniciales para esta prueba son:  $\mathbf{v} = v_0(-\sin(2\pi y), \sin(2\pi x), 0)$ ,  $\mathbf{B} = B_0(-\sin(2\pi y), \sin(4\pi x), 0)$ ,  $\rho_0 = 25/36\pi$ ,  $p_0 = 5/12\pi$ , en donde  $v_0 = 1$  y  $B_0 = 1/\sqrt{4\pi}$  con  $\gamma = 5/3$ , están definidos de tal forma que el sistema desarrolle un vórtice. Los datos iniciales para  $\rho$  y  $p$  se calculan usando  $\beta$  y el número de Mach  $M$  [Dai & Woodward (1998)], de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\beta_0 &= 8\pi p_0, \\ M &= \frac{\rho_0}{\gamma p_0}.\end{aligned}$$

En este caso  $\beta_0 = 10/3$  y  $M = 1$ . La evolución se lleva a cabo en el dominio  $[0,1] \times [0,1]$  que se cubre con  $512 \times 512$  celdas, y se imponen condiciones de frontera periódicas.

La evolución de la densidad muestra la aparición de la turbulencia y la interacción de los choques dentro del dominio como se muestra en la Fig. 5.6 al tiempo  $t = 0.5$ . Tales resul-

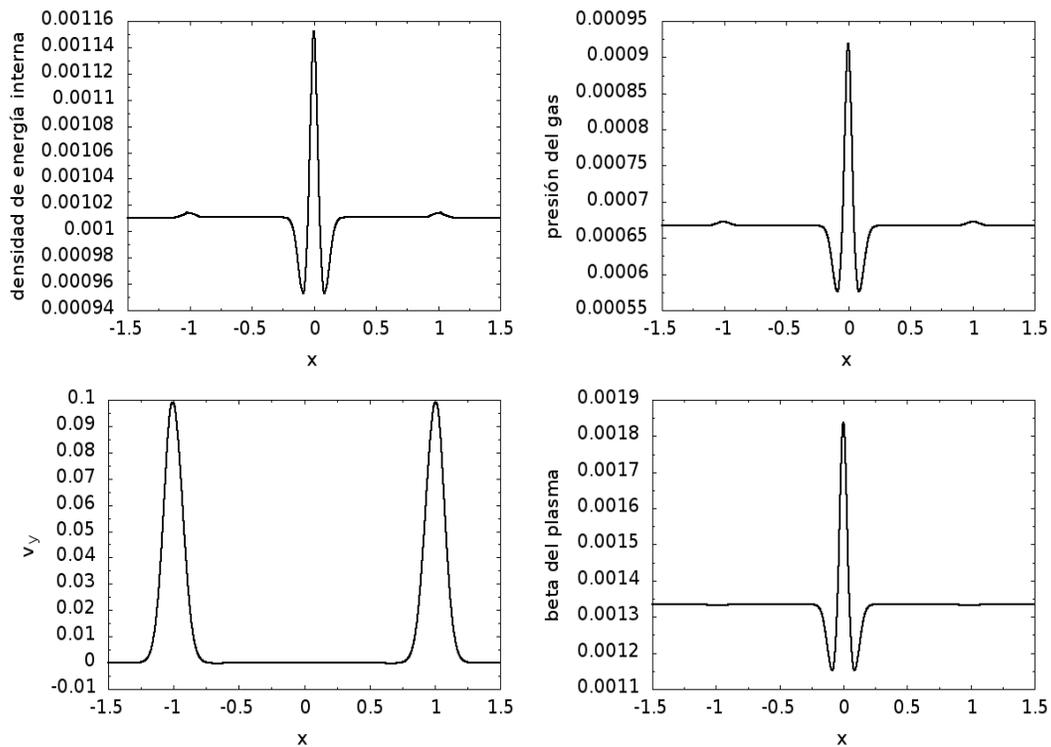


Figura 5.5: Se muestran los resultados de la evolución al tiempo  $t = 1$  de la densidad de energía interna  $e$  (arriba-izquierda), la presión del gas  $p$  (arriba-derecha), la componente  $y$  de la velocidad  $v_y$  (abajo-izquierda) y el  $\beta$  del plasma (abajo-derecha) para la prueba del pulso de Alfvén en 1D para el caso de un  $\beta$  del plasma pequeño. En esta prueba se usó el resolvidor HLLE combinado con MINMOD. El resultado de la energía interna  $e$  obtenido aquí es similar al de la Fig. 10 de la referencia [Arber et al. (2001)].

tados pueden ser comparados morfológicamente con los obtenidos por el código ATHENA [Stone et al. (2008)]. Para mostrar qué pasa cuando el fluido hace la transición a una turbulencia supersónica, se calcula el número de Mach definido como  $M = |\mathbf{v}|^2/c_s^2$ , en donde  $c_s^2 = \frac{\gamma p}{\rho}$  es la velocidad del sonido. Una imagen tomada al tiempo  $t = 0.5$  se muestra en la Fig. 5.6, en donde se puede ver que el número de Mach aumenta en las regiones en donde la densidad disminuye. Es importante mencionar que el código es capaz de mantener la constricción del orden  $|\nabla \cdot \mathbf{B}| \approx 10^{-13}$  usando en Flux-CT, tal y como se muestra en la Fig. 5.6. Además para ver que la solución es consistente se muestran resultados cuantitativos en la Fig. 5.7, en donde se calcula la presión del gas  $p$  medida en la línea  $y = 0.3125$  al tiempo  $t = 0.5$  para 4 resoluciones distintas. Los resultados que se muestran coinciden con los de la Fig. 11 de [Londrillo & Del Zanna (2000)]. En esta prueba se usó el resolvidor HLLE combinado con MINMOD, y los resultados obtenidos son comparables a los obtenidos por los códigos FLASH [Fryxell et al. (2000), Lee & Deane (2000), Lee (2013)], ATHENA [Stone et al. (2008)], y PLUTO [Mignone et al. (2007)] en donde se usa refinamiento adaptativo de la malla (AMR, por sus siglas en inglés).

### Rotor MHD

Es una prueba en 2D de la MHD ideal presentada en [Balsara & Spicer (1999)], y es útil para estudiar la aparición y propagación de ondas de Alfvén torsionales fuertes, las cuales son relevantes en la evolución de las espículas. Las condiciones iniciales están definidas de la siguiente forma

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 10 & r \leq r_0 \\ 1 + 9f(r) & r_0 < r < r_1 \\ 1 & r \geq r_1, \end{cases} \quad (5.1)$$

$$v_x(x, y) = \begin{cases} -f(r)u_0(y - 0.5)/r_0 & r \leq r_0 \\ -f(r)u_0(y - 0.5)/r & r_0 < r < r_1 \\ 0 & r \geq r_1, \end{cases} \quad (5.2)$$

$$v_y(x, y) = \begin{cases} -f(r)u_0(x - 0.5)/r_0 & r \leq r_0 \\ f(r)u_0(x - 0.5)/r & r_0 < r < r_1 \\ 0 & r \geq r_1, \end{cases} \quad (5.3)$$

$$p(x, y) = 1, \quad (5.4)$$

$$B_x(x, y) = \frac{5}{\sqrt{4\pi}}, \quad (5.5)$$

$$B_y(x, y) = 0, \quad (5.6)$$

en donde  $r_0 = 0.1$ ,  $r_1 = 0.115$ ,  $r = \sqrt{(x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2}$ ,  $v_z = B_z = 0$  y la función

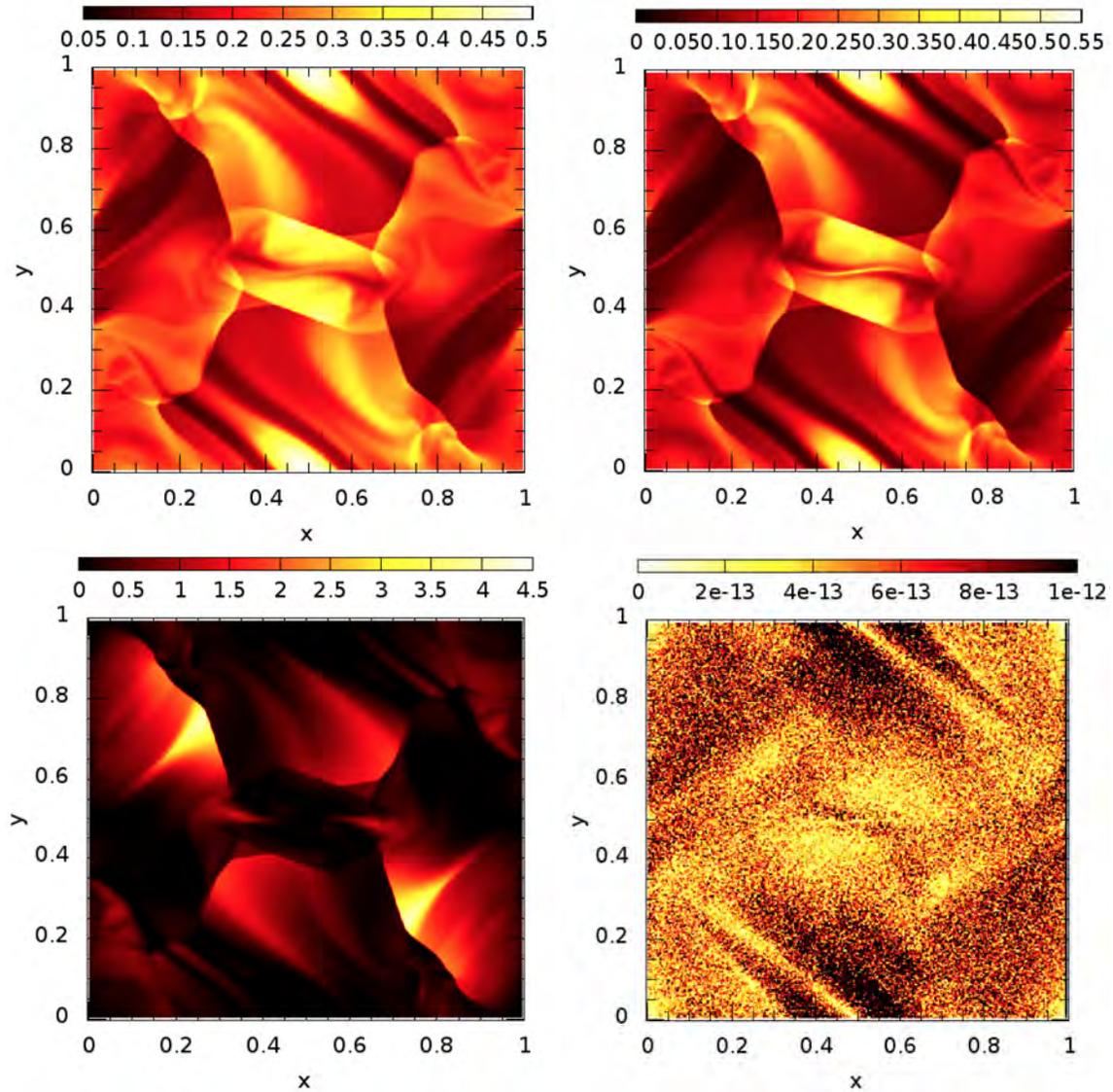


Figura 5.6: (Arriba) Densidad para la prueba del vórtice de Orszag-Tang (izquierda) y presión del gas  $p$  (derecha) al tiempo  $t=0.5$  en el plano  $xy$ . (Abajo) Número de Mach  $M$  (izquierda) y  $|\nabla \cdot \mathbf{B}|$  (derecha) al tiempo  $t=0.5$  en el plano  $xy$ .

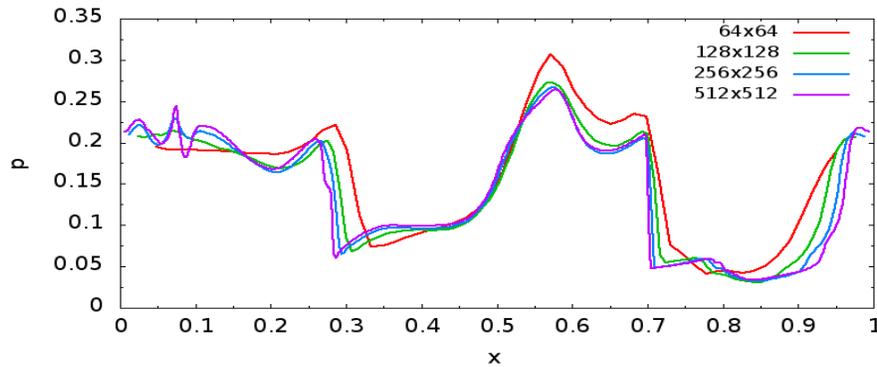


Figura 5.7: Cortes horizontales de  $p$  a lo largo de  $y = 0.3125$  para la prueba del vórtice de Orszag-Tang usando cuatro resoluciones espaciales. Esta gráfica muestra la consistencia de la solución y es similar a la Fig. 11 de [Londrillo & Del Zanna (2000)].

$f(r) = (r_1 - r)/(r - r_0)$ . Se usa un valor de  $\gamma = 1.4$ . Los datos iniciales describen un disco denso rotante en el centro del dominio, rodeado por un ambiente de fluido en reposo con densidad y presión uniformes. La evolución se lleva a cabo en el dominio  $[0,1] \times [0,1]$  que se cubre con  $512 \times 512$  celdas, imponiendo condiciones de frontera de flujo saliente. Los resultados de la evolución muestran que el rotor comienza a girar con la velocidad inicial dada, entonces el campo magnético uniforme en dirección  $x$  hace que se generen ondas magnetosónicas que disiparan al rotor. Por lo tanto el rotor estará envuelto por el campo magnético, y comenzará a lanzar ondas de Alfvén al fluido ambiente. Además el momento angular del rotor disminuirá en tiempos posteriores de la evolución, y su forma circular será progresivamente comprimida a una forma ovalada debido al aumento de la presión magnética. Imágenes de la densidad, presión del gas, presión magnética con las líneas del campo magnético tomadas al tiempo  $t = 0.15$  se muestran en la Fig. 5.8, en donde se pueden apreciar que el código es capaz de mantener la constricción del orden  $\nabla \cdot \mathbf{B} \approx 10^{-13}$  usando el Flux-CT, tales resultados son comparables con los obtenidos por el código FLASH [Fryxell et al. (2000), Lee & Deane (2000), Lee (2013)]. Para ver que la solución numérica sea consistente, se calcula la componente  $y$  del campo magnético a lo largo del corte  $y=0.5$  como se muestra en la Fig. 5.9 al tiempo  $t = 0.15$  para 4 resoluciones distintas.

### Ondas explosivas MHD

Este problema es una prueba en 2D de la MHD ideal presentada en [Gardiner & Stone (2006)], que se caracteriza por una explosión en una región de presión alta a una de presión baja, con un beta del plasma pequeño. Esta prueba mide la capacidad del código de poder evolucionar sistemas en donde se desarrollen choques, regiones de flujos suaves y campos magnéticos intensos, lo que la hace una buena prueba, particularmente cuando se quieren

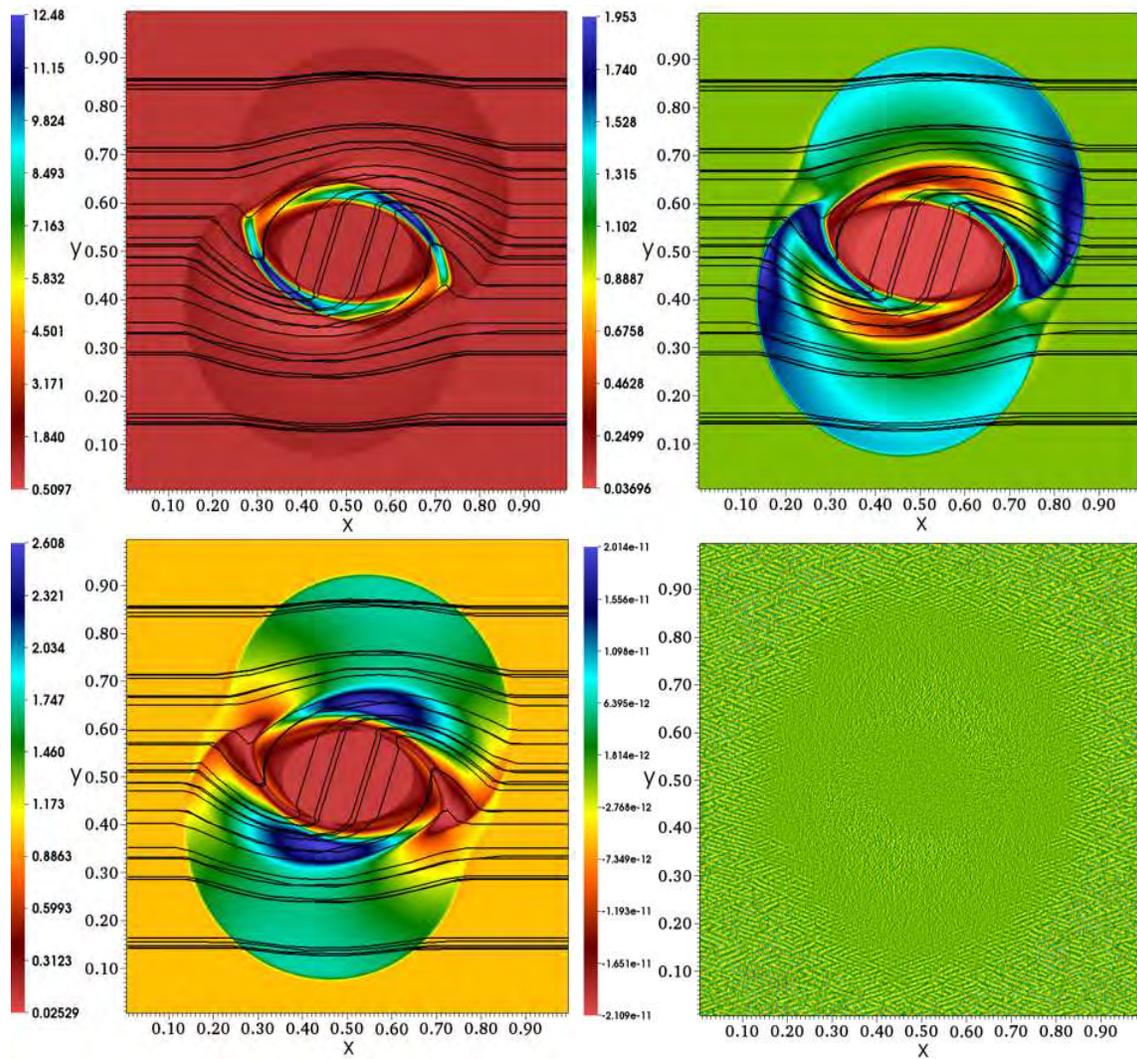


Figura 5.8: Densidad (arriba-izquierda) y presión del gas con líneas de campo magnético (arriba-derecha) para la prueba del rotor MHD al tiempo  $t = 0.15$  en el plano  $xy$ . Presión magnética con líneas de campo magnético (abajo-izquierda) y  $\nabla \cdot \mathbf{B}$  (abajo-derecha) al tiempo  $t = 0.15$  en el plano  $xy$ . En esta prueba se usó el resolver HLLC combinado con MINMOD.

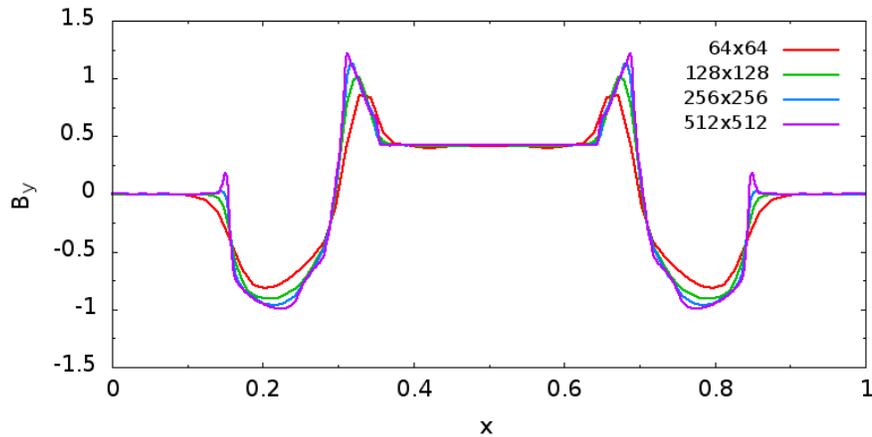


Figura 5.9: Cortes horizontales de  $B_y$  a lo largo de  $y = 0.5$  para la prueba del rotor MHD usando 4 resoluciones distintas. Esta gráfica muestra la consistencia de la solución y es comparable con los resultados obtenidos usando el código ATHENA [Stone et al. (2008)].

estudiar problemas con un beta del plasma pequeño, como en la atmósfera solar. Los datos iniciales están dados por:  $\mathbf{v} = 0$ ,  $\rho = 1$ ,  $B_x = 10/\sqrt{2} = B_y$ ,  $B_z = 0$ . Y dentro de una esfera de radio  $r = 0.125$  la presión del gas  $p = 100$  con un beta del plasma  $\beta = 2p/B^2 = 2$ . Fuera de la esfera, la presión del gas  $p = 1$  y  $\beta = 1 \times 10^{-2}$ . La evolución se lleva a cabo en el dominio  $[-0.5, 0.5] \times [-0.5, 0.5]$  que se cubre con  $512 \times 512$  celdas, y se imponen condiciones de frontera de flujo saliente. Los resultados al tiempo  $t = 0.02$  de la densidad de masa  $\rho$ , presión del gas  $p$  y presión magnética  $p_{mag}$  con las líneas de campo magnético se muestran en la Fig. 5.10, y se puede ver una superficie que está formada por una cascara que se expande como un choque rápido, el cual es comprimido débilmente y es dominado energéticamente por el campo magnético. En el interior, se forman dos cascara de gas densos que se propagan en dirección paralela al campo magnético. Estos cascara están delimitados por un choque lento y una superficie de contacto. Nuevamente se puede notar que el código es capaz de mantener la constrictión  $|\nabla \cdot \mathbf{B}| \approx 10^{-11}$  usando método Flux-CT, sin importar que se trate de una dinámica que involucra choques fuertes y discontinuidades. En esta prueba se usó un CFL = 0.01, debido a que se tiene un choque fuerte y campos magnéticos intensos.

### Hoja de Corriente

La prueba de la hoja de corriente fue propuesta por [Gardiner & Stone (2005)], y estudiada en el contexto del AMR por [Fromang et. al. (2006)]. Esta prueba describe la evolución de dos hojas de corriente, inicialmente definidas por una configuración de campo magnético discontinuo. Mediante la resistividad numérica el proceso de la reconexión magnética toma lugar, haciendo que la solución resultante sea muy sensible a la resolución espacial. La

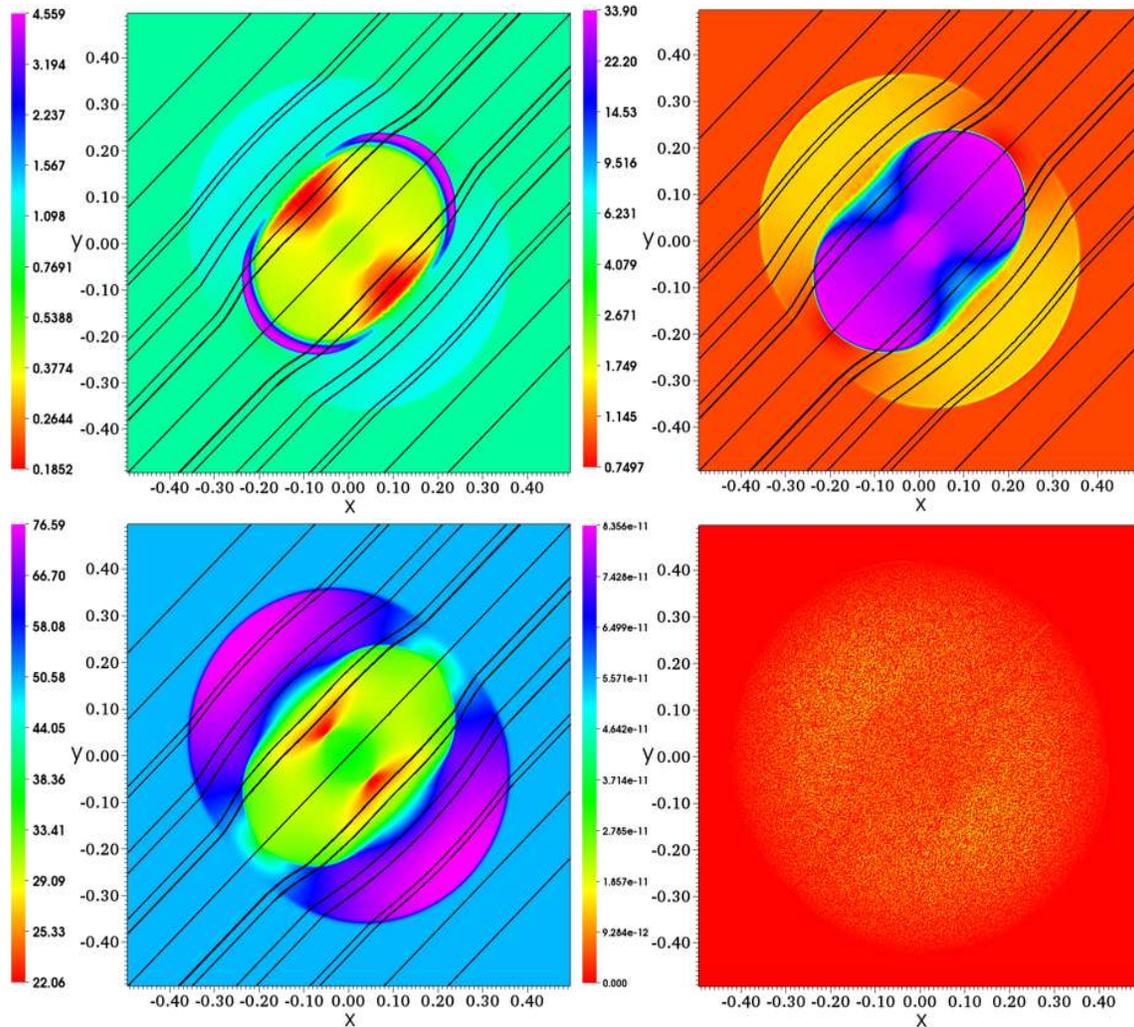


Figura 5.10: Logaritmo de la densidad (arriba-izquierda) y logaritmo de la presión del gas con líneas de campo magnético (arriba-derecha) para la prueba de las ondas explosivas MHD al tiempo  $t = 0.02$  en el plano  $xy$ . Logaritmo de la presión magnética con líneas de campo magnético (abajo-izquierda) y  $|\nabla \cdot \mathbf{B}|$  (abajo-derecha) al tiempo  $t = 0.02$  en el plano  $xy$ . En esta prueba se usó el resolver HLLD combinado con MINMOD.

resistividad numérica se considera una forma de difusión y es función de la resolución, alineamiento del campo magnético con la malla, y de los métodos numéricos usados, en general tiene un comportamiento anisotrópico, y se puede presentar en varias partes del dominio computacional.

Las condiciones iniciales de este problema están dadas por una densidad  $\rho = 1$  y una presión del gas  $p = 0$ , uniformes. Las velocidades  $v_y = v_z = 0$ , mientras que se permite una pequeña perturbación en  $v_x = v_0 \sin(\pi y)$ , en donde  $v_0 = 0.1$ . El campo magnético inicial  $B_y$  describe una hoja de corriente y está definido como

$$B_y = \begin{cases} -B_0 & \text{si } |x - 1| \leq 0.5, \\ B_0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (5.7)$$

en donde  $B_0 = 1$ , lo que resulta en una configuración predominantemente magnética. La evolución se lleva a cabo en el dominio  $[0,2] \times [0,2]$  que se cubre con  $512 \times 512$  celdas, y se imponen condiciones de frontera periódicas. Debido a que no hay resistividad física, las hojas de corriente son propensas a sufrir una inestabilidad desgarrante debido a la resistividad numérica, y entonces se forman islas secundarias en forma de plasmoides. Debido a que ocurre la reconexión magnética, el campo magnético es disipado y la energía magnética se convierte en energía térmica, además se generan ondas de Alfvén y ondas compresionales [Mignone et al. (2012)]. En esta prueba el valor de la constricción del campo magnético se mantiene del orden  $|\nabla \cdot \mathbf{B}| \approx 10^{-13}$  usando el método Flux-CT. Los resultados se muestran en la Fig. 5.11 y son comparables con los obtenidos con los códigos PLUTO [Mignone et al. (2007)], FLASH [Fryxell et al. (2000), Lee & Deane (2000), Lee (2013)] y ATHENA [Stone et al. (2008)]. La evolución de las líneas de campo magnético se muestran en la Fig. 5.12 para 4 tiempos, y se puede ver que en las regiones en donde la presión del gas es mayor ocurre la reconexión magnética.

### Inestabilidad de Kelvin-Helmholtz

Esta es una prueba básica de la MHD ideal que fue presentada en el libro “Hydrodynamics and Hydromagnetic stability” [Chandrasekhar (1961)], y en la referencia [Frank et al. (1996)]. Las condiciones iniciales están dadas de la siguiente forma, para  $|y| > 0.25$ , se pone  $v_x = -0.5$  y  $\rho = 1$ , y para  $|y| \leq 0.25$ ,  $v_x = 0.5$  y  $\rho = 2$ . La presión  $p = 2.5$  en todo el dominio, las velocidades transversales  $v_y = v_z = 0$  y las componentes  $B_y = B_z = 0$  con excepción de  $B_x = 0.2$  en todo el dominio. Para generar la inestabilidad se añade una perturbación de la forma  $\delta v_x = 0.1 \cos(4\pi x) \sin(4\pi y)$  a las componentes  $v_x$  y  $v_y$  de la velocidad. La evolución se lleva a cabo en el dominio  $[0,2] \times [0,2]$  que se cubre con  $512 \times 512$  celdas, y se imponen condiciones de frontera periódicas. Los resultados de la evolución para la densidad de masa  $\rho$ , la presión magnética y la  $\nabla \cdot \mathbf{B}$  se muestran en la Fig. 5.13, en donde se puede ver el desarrollo de la inestabilidad de manera similar a los obtenidos con el código ATHENA [Stone et al. (2008)]. En este caso la constricción del campo magnético se mantiene del orden  $|\nabla \cdot \mathbf{B}| \approx 10^{-13}$  usando el método Flux-CT.

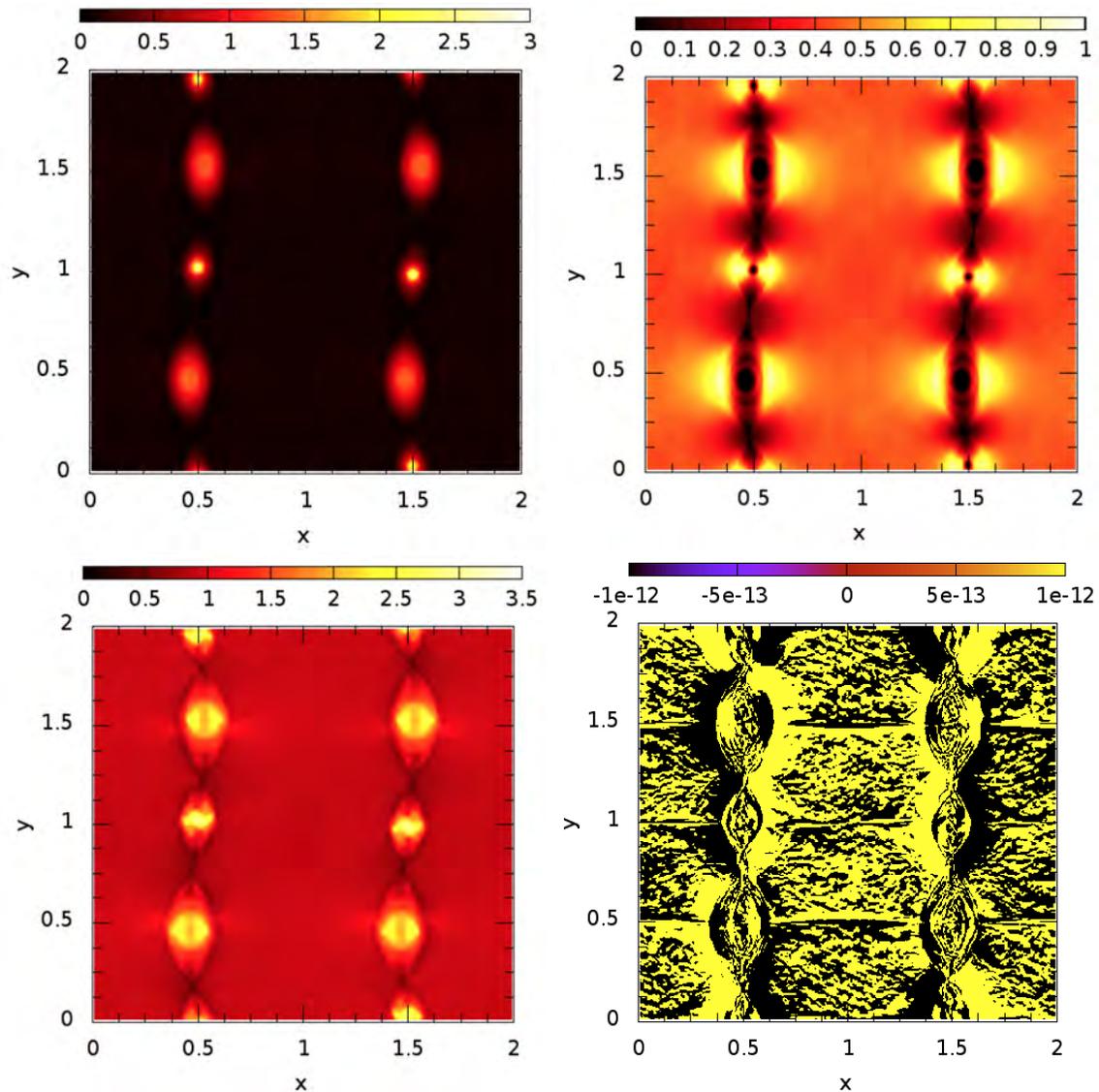


Figura 5.11: Presión del gas (arriba-izquierda) y presión magnética (arriba-derecha) para la prueba de la hoja de corriente al tiempo  $t = 4$  en el plano  $xy$ . Densidad (abajo-izquierda) y  $\nabla \cdot \mathbf{B}$  (abajo-derecha) al tiempo  $t = 4$  en el plano  $xy$ . En esta prueba se usó el resolver HLLE combinado con WENO5.

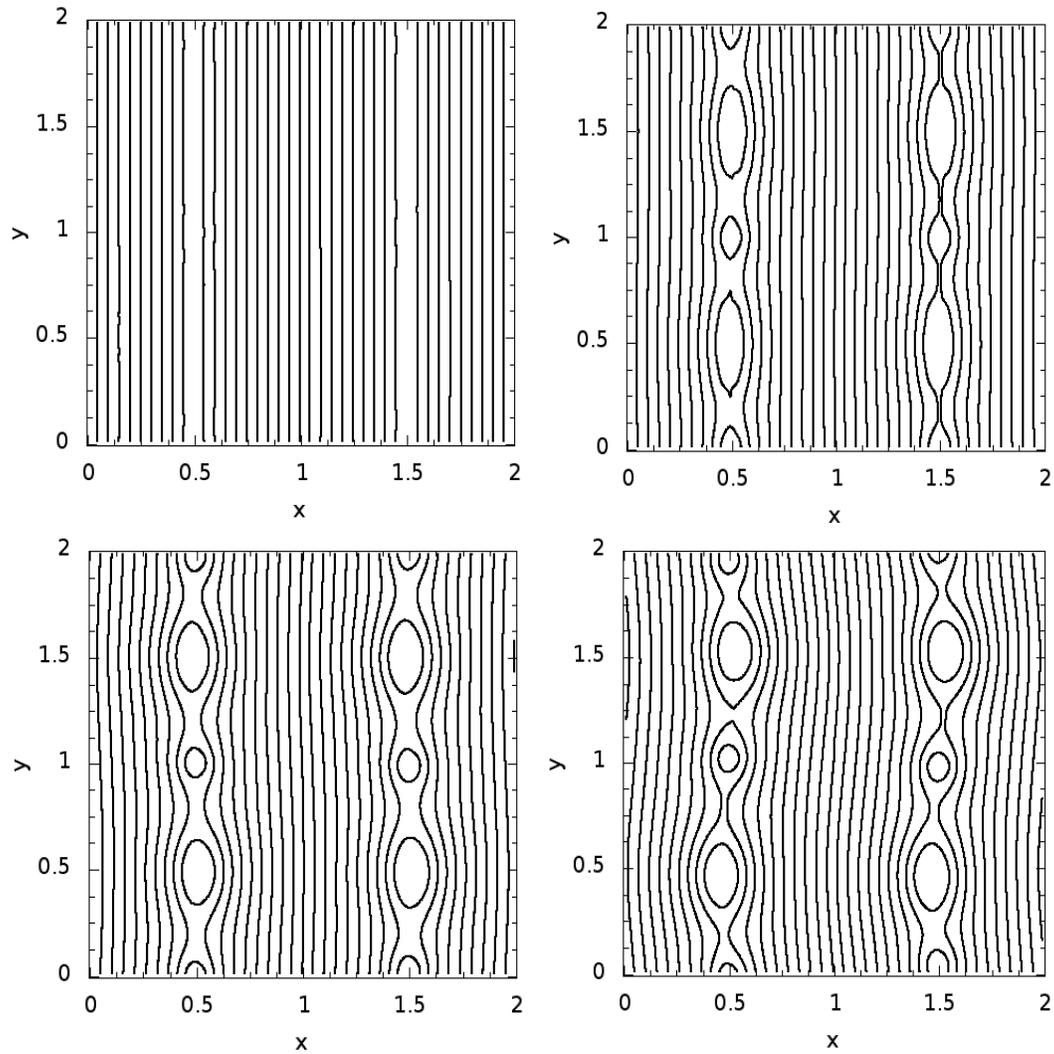


Figura 5.12: (Arriba) Imágenes de la evolución de las líneas de campo magnético a los tiempos  $t = 1$  (izquierda) y  $t = 2$  (derecha) en el plano  $xy$  para la prueba de la hoja de corriente. (Abajo) Evolución de las líneas de campo magnético a los tiempos  $t = 3$  (izquierda) y  $t = 4$  (derecha) en el plano  $xy$ .

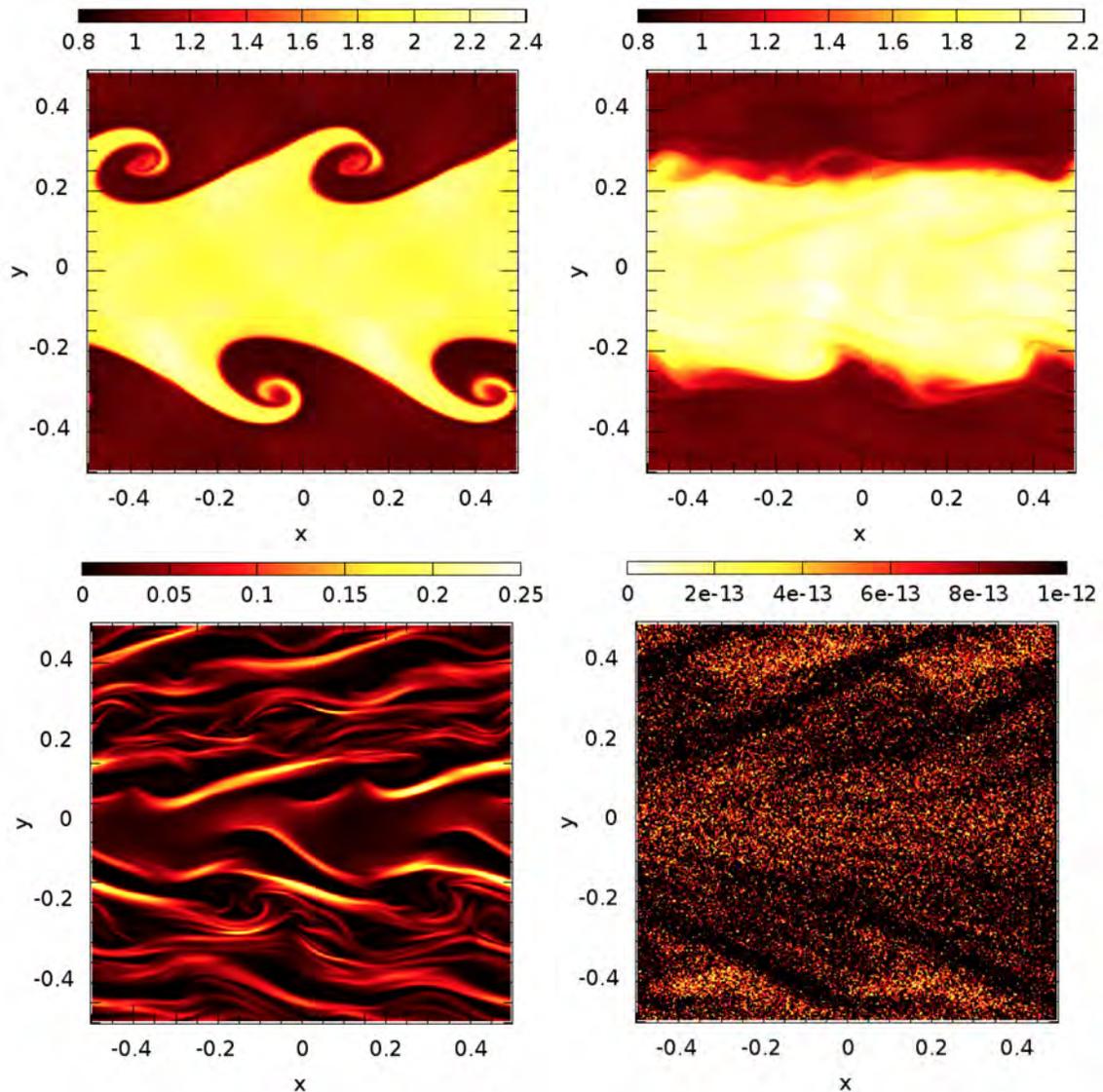


Figura 5.13: (Arriba) Densidad a los tiempos  $t = 1$  (izquierda) y  $t = 5$  (derecha) en el plano  $xy$  para la prueba de la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz. (Abajo) presión magnética  $p_{mag}$  (izquierda) y  $\nabla \cdot \mathbf{B}$  (abajo-derecha) al tiempo  $t = 5$ . En esta prueba se usó el resolver HLLD combinado con MINMOD.

## 5.2 Pruebas numéricas de la Magnetohidrodinámica resistiva

### 5.2.1 Pruebas 1D

En el caso de la MHD resistiva, no se tienen pruebas relacionadas directamente con los tubos de choque, sin embargo hay pruebas sobre la advección del campo magnético considerando el efecto de la resistividad, y en esta tesis se presenta una prueba de advección del campo magnético en 1D.

#### Hoja de corriente auto-similar

Esta prueba fue presentada por Komissarov [Komissarov (2007)] y ha sido estudiada en [Palenzuela et al. (2009), Mizuno (2013)] en el régimen de la MHD resistiva relativista. Las condiciones del problema son tales que la presión magnética es mucho más pequeña que la presión del gas en todas partes, el campo magnético tiene componentes  $B_x = B_z = 0$  y  $B_y = B_y(x, t)$ , en donde  $B_y(x, t)$  cambia de signo dentro de una hoja de corriente de ancho  $\Delta l$ . Tales condiciones describen un sistema en equilibrio, lo que implica que la presión del gas es constante, y la evolución estará descrita simplemente por una difusión expansiva lenta de la hoja de corriente debido a la resistividad, en donde la dinámica está dada por la ecuación de difusión para la componente  $B_y$ , esto es

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} - \eta \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} = 0. \quad (5.8)$$

Ya que el sistema se expande, el ancho de la hoja llega a ser mucho más grande que  $\Delta l$  y por lo tanto evoluciona de manera auto-similar. Para  $t > 0$ , la solución analítica de 5.8 está dada por

$$B_y(x, t) = B_0 \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\eta t}}\right), \quad (5.9)$$

en donde erf es la función error, y tal solución se puede usar en el régimen resistivo moderado. Siguiendo la referencia [Komissarov (2007)], para evitar la singularidad a  $t = 0$  de la ecuación (5.9), se escoge como dato inicial de  $B_y$  la solución a  $t = 1$  con una presión del gas  $p = 50$ ,  $\rho = 1$ ,  $\mathbf{v} = 0$  y  $\eta = 0.01$ , finalmente como se está usando la formulación EGLM para resolver las ecuaciones de la MHD resistiva, la condición inicial para la variable auxiliar es  $\psi = 0$ . El dominio de evolución es  $[-1.5, 1.5]$  cubierto con 300 celdas y se usan condiciones de frontera salientes. Los resultados para el tiempo  $t = 10$  usando los resolvedores de Riemann HLLE y HLLC combinados con MC, se muestran en la Fig. 5.14, en donde se puede ver que la solución numérica coincide con la solución analítica y los resultados son comparables con los obtenidos en [Palenzuela et al. (2009), Mizuno

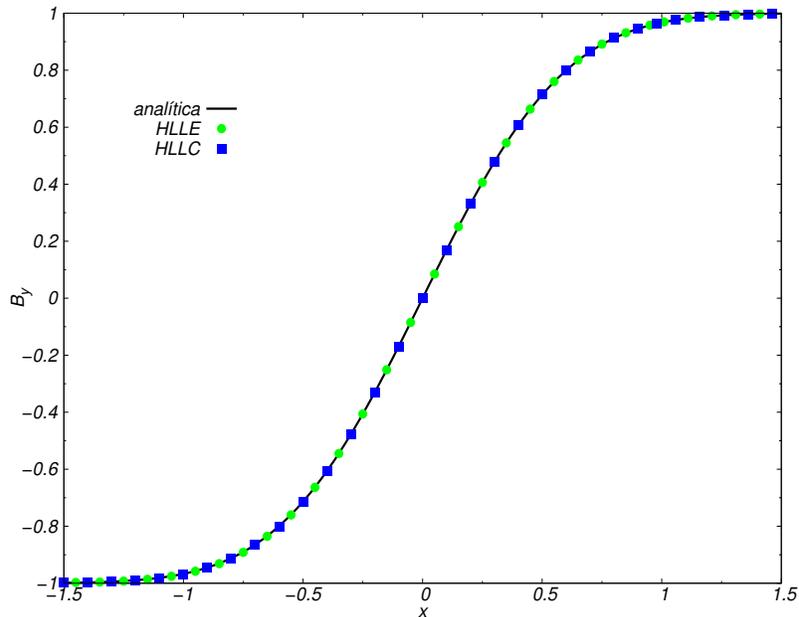


Figura 5.14: Componente  $B_y$  del campo magnético para la prueba de la hoja de corriente auto-similar. Se muestra la solución numérica usando los resolvedores de Riemann HLLC, y HLLC comparada con la solución analítica al tiempo  $t = 10$  tal y como se muestra en las referencias [Palenzuela et al. (2009), Mizuno (2013)].

(2013)]. Para estimar el error de la solución numérica con la exacta obtenida usando las dos fórmulas de flujo HLLC y HLLC, se calcula la norma  $L_1$  del error de la componente  $B_y$  del campo magnético para dos resoluciones espaciales distintas  $\Delta x_1 = 1/150$ ,  $\Delta x_2 = 1/300$  y los resultados se muestran en la Tabla 5.3. Se puede ver que los resultados se encuentran dentro de un régimen de consistencia, esto es, el error disminuye cuando la resolución aumenta para las dos fórmulas de flujo.

## 5.2.2 Pruebas 2D

### Difusión del campo magnético en 2D

Esta prueba es presentada en el código PLUTO [Mignone et al. (2007)], como parte de las pruebas de la MHD resistiva. Es útil para medir la capacidad del código de resolver problemas estándar de difusión cuando se tiene una resistividad magnética anisotrópica. Las componentes del campo magnético inicialmente están dadas por un perfil Gaussiano, y se considera una resistividad anisotrópica. Esta prueba tiene solución analítica que en 2D está dada por

Resolvidor	Resolución	Error
HLLE	$\Delta x_1$	0.226e-02
	$\Delta x_2$	0.199e-02
HLLC	$\Delta x_1$	0.225e-02
	$\Delta x_2$	0.198e-02

Tabla 5.3: Norma  $L_1$  del error en la componente  $y$  del campo magnético  $B_y$ , para la prueba de la hoja de corriente auto-similar calculada con dos resoluciones espaciales distintas y dos fórmulas de flujos combinadas con el reconstructor MC.

$$\begin{aligned}
 B_x(y, t) &= \exp(-y^2/4\eta_z t) / \sqrt{t}, \\
 B_y(x, t) &= \exp(-x^2/4\eta_z t) \sqrt{t}, \\
 B_z(x, y, t) &= \exp(-x^2/4\eta_y t) \exp(-y^2/4\eta_x t) / t,
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

en donde para este problema se eligen  $\eta_x = 0.1$ ,  $\eta_y = 0.2$  y  $\eta_z = 0.2$ , que representan los valores de la resistividad en las direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente. La condición inicial de los campos  $B_x$ ,  $B_y$  y  $B_z$  está dada por las ecuaciones 5.10 para  $t = 1$ . El dato inicial para la densidad es tal que se tenga una inercia en el sistema, y en este caso  $\rho = 1 \times 10^9$ , la presión del gas  $p = 1$ , las componentes de la velocidad  $v_x = v_y = v_z = 0$  y la función escalar  $\psi = 0$ . La evolución se lleva a cabo en el dominio  $[-5,5] \times [-5,5]$  cubierto por  $300 \times 300$  celdas, y se usan condiciones de frontera de flujo saliente. Los resultados de la evolución de las componentes del campo magnético como función de  $x$  y  $y$  para el tiempo inicial y el tiempo  $t = 5$  se muestran en la Fig. 5.15, en donde se compara la solución numérica con la analítica para cada caso. Se puede ver que la solución numérica empalma con la solución exacta. Para estimar el error de la solución numérica con la exacta obtenida, se calcula la norma  $L_1$  del error de las componentes  $B_x$ ,  $B_y$  y  $B_z$  del campo magnético para dos resoluciones espaciales distintas  $\Delta x_1 = 1/150$ ,  $\Delta x_2 = 1/300$  y los resultados se muestran en la Tabla 5.4. Se puede ver que los resultados se encuentran dentro de un régimen de consistencia, ya que la norma  $L_1$  del error disminuye cuando la resolución aumenta. Además en la Fig. 5.16 se muestra la constricción del campo magnético  $\nabla \cdot \mathbf{B}$  y  $\psi$  como función de  $x$  y  $y$  para dos tiempos, esto para verificar que tanto la constricción del campo magnético y  $\psi$  se mantengan en un orden pequeño y por lo tanto no afecten la evolución del sistema.

### Hoja de corriente de Harris

Esta prueba es parte de los retos de la reconexión magnética en el ámbito del modelado del ambiente geoespacial (GEM, por sus siglas en inglés) y se presenta en la referencia [Birn et al. (2001)]. Los datos iniciales consisten de una hoja de corriente de Harris,

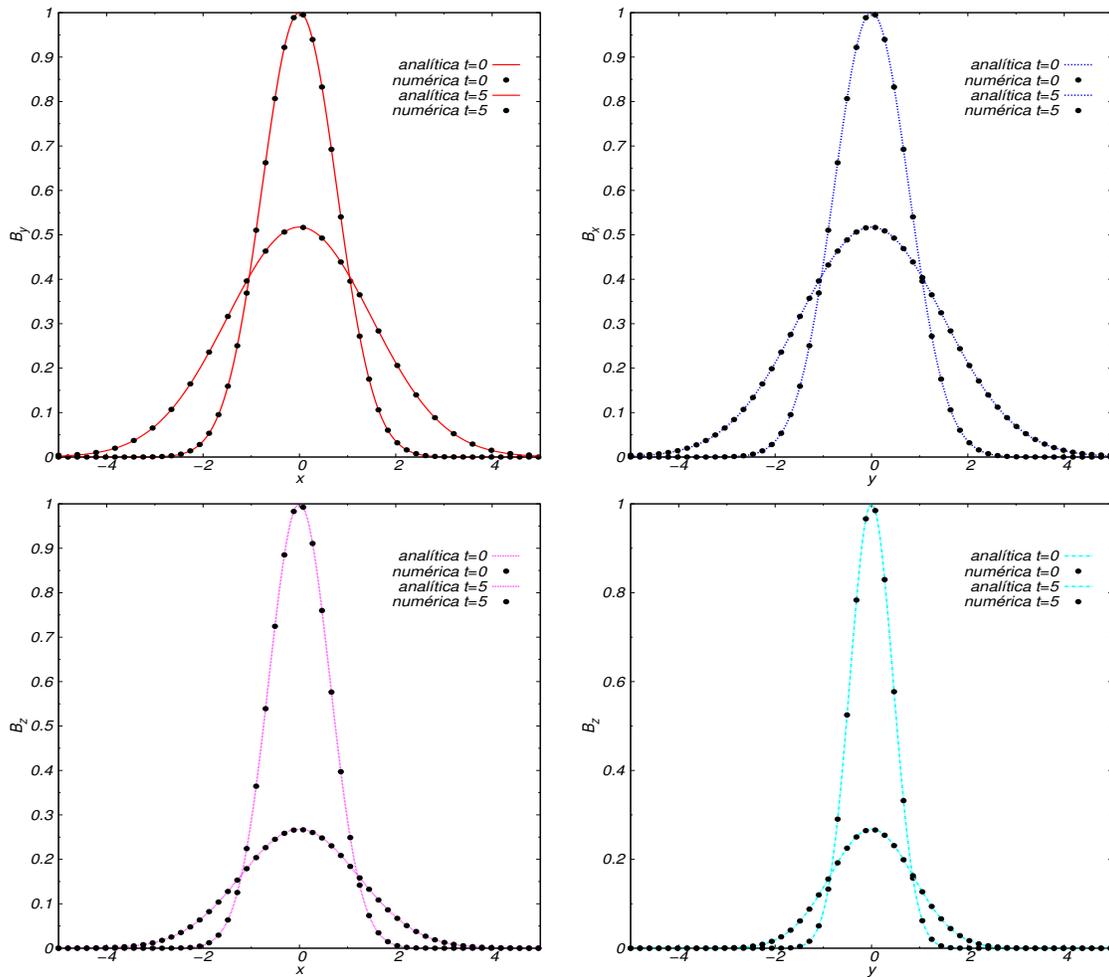


Figura 5.15: Perfiles de las componentes del campo magnético a los tiempos  $t = 0$  y  $t = 5$  de la solución numérica y analítica para los casos  $B_y$  como función de  $x$  (arriba-izquierda),  $B_x$  como función de  $y$  (arriba-derecha),  $B_z$  como función de  $x$  (abajo-izquierda) y  $B_z$  como función de  $y$  (abajo-derecha). En esta prueba se usó HLLE combinado con MINMOD.

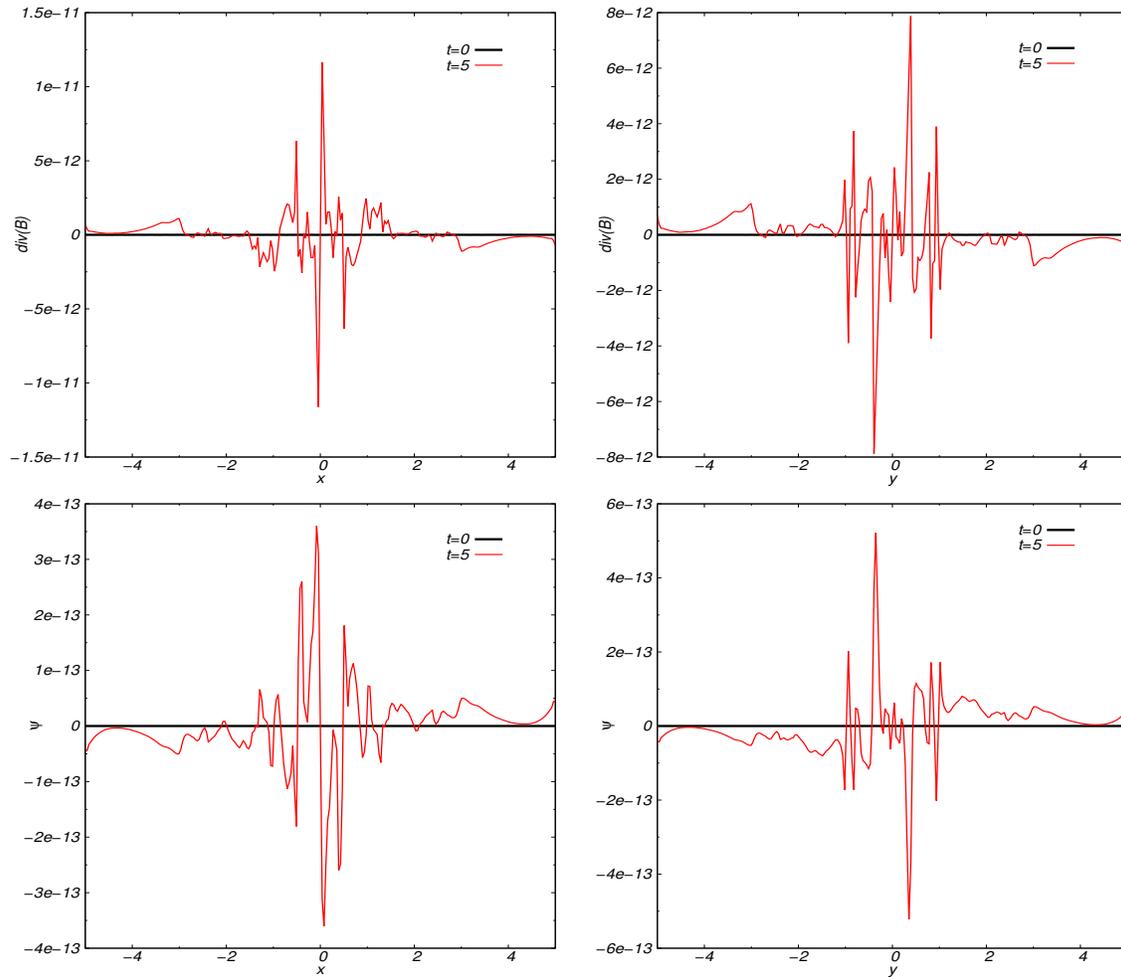


Figura 5.16: (Arriba) Constricción del campo magnético  $\nabla \cdot \mathbf{B}$  como función de  $x$  para el tiempo inicial y  $t = 5$  (izquierda),  $\nabla \cdot \mathbf{B}$  como función de  $y$  para el tiempo inicial y  $t = 5$  (derecha). (Abajo) Función escalar  $\psi$  como función de  $x$  al tiempo inicial y a  $t = 5$  (izquierda), y  $\psi$  como función de  $y$  al tiempo inicial y a  $t = 5$  (derecha).

Resolución	Error
<b><math>B_y</math> como función de <math>x</math></b>	
$\Delta x_1$	0.201e-1
$\Delta x_2$	0.176e-1
<b><math>B_x</math> como función de <math>y</math></b>	
$\Delta x_1$	0.201e-1
$\Delta x_2$	0.176e-1
<b><math>B_z</math> como función de <math>x</math></b>	
$\Delta x_1$	0.738e-2
$\Delta x_2$	0.244e-2
<b><math>B_z</math> como función de <math>y</math></b>	
$\Delta x_1$	0.376e-2
$\Delta x_2$	0.930e-3

Tabla 5.4: Norma  $L_1$  del error de las componentes  $B_y$  del campo magnético como función de  $x$ ,  $B_x$  como función de  $y$ ,  $B_z$  como función de  $x$  y de  $y$  para la prueba de difusión del campo magnético en 2D calculada con dos resoluciones espaciales distintas usando la fórmula HLLE combinada con el reconstructor MINMOD.

que se define de la siguiente forma: la configuración de campo magnético está descrita por  $B_x(y) = B_0 \tanh(y/\lambda)$ , mientras que la densidad de masa es  $\rho = \rho_0 \text{sech}^2(y/\lambda) + \rho_\infty$ , en donde  $\lambda = 0.5$ ,  $\rho_0 = 1$ , y  $\rho_\infty = 0.2$ . La presión del gas está en equilibrio con la presión magnética, y está dada por  $p = B_0^2/2 = 0.5$ , finalmente la función escalar  $\psi = 0$ . Las componentes  $B_x$  y  $B_y$  del campo magnético se perturban inicialmente por medio de

$$\begin{aligned} dB_x &= -\Psi_0(\pi/L_y) \sin(\pi y/L_y) \cos(2\pi x/L_x), \\ dB_y &= \Psi_0(2\pi/L_x) \sin(2\pi x/L_x) \cos(\pi y/L_y), \end{aligned} \quad (5.11)$$

en donde  $\Psi_0 = 0.1$ . La evolución se lleva a cabo en el dominio  $[-L_x/2, L_x/2] \times [-L_y/2, L_y/2]$ , con  $L_x = 25.6$  y  $L_y = 12.8$ , cubierto por  $512 \times 256$  celdas. Se usan condiciones de frontera periódicas en la dirección  $x$ , mientras que en  $y$  se imponen condiciones de flujo saliente. Los resultados de la evolución de la presión del gas, la componente  $z$  de la densidad de corriente, la función escalar  $\psi$  y la constricción del campo magnético  $\nabla \cdot \mathbf{B}$  para el caso  $\eta = 8 \times 10^{-3}$  se muestran en la Fig. 5.17.

De acuerdo al modelo de Sweet-Parker, la convección del flujo entrante de campo magnético es balanceada por la disipación ohmica. Además se toma en cuenta la suposición de la continuidad, lo que permite encontrar una relación entre la reconexión magnética y los

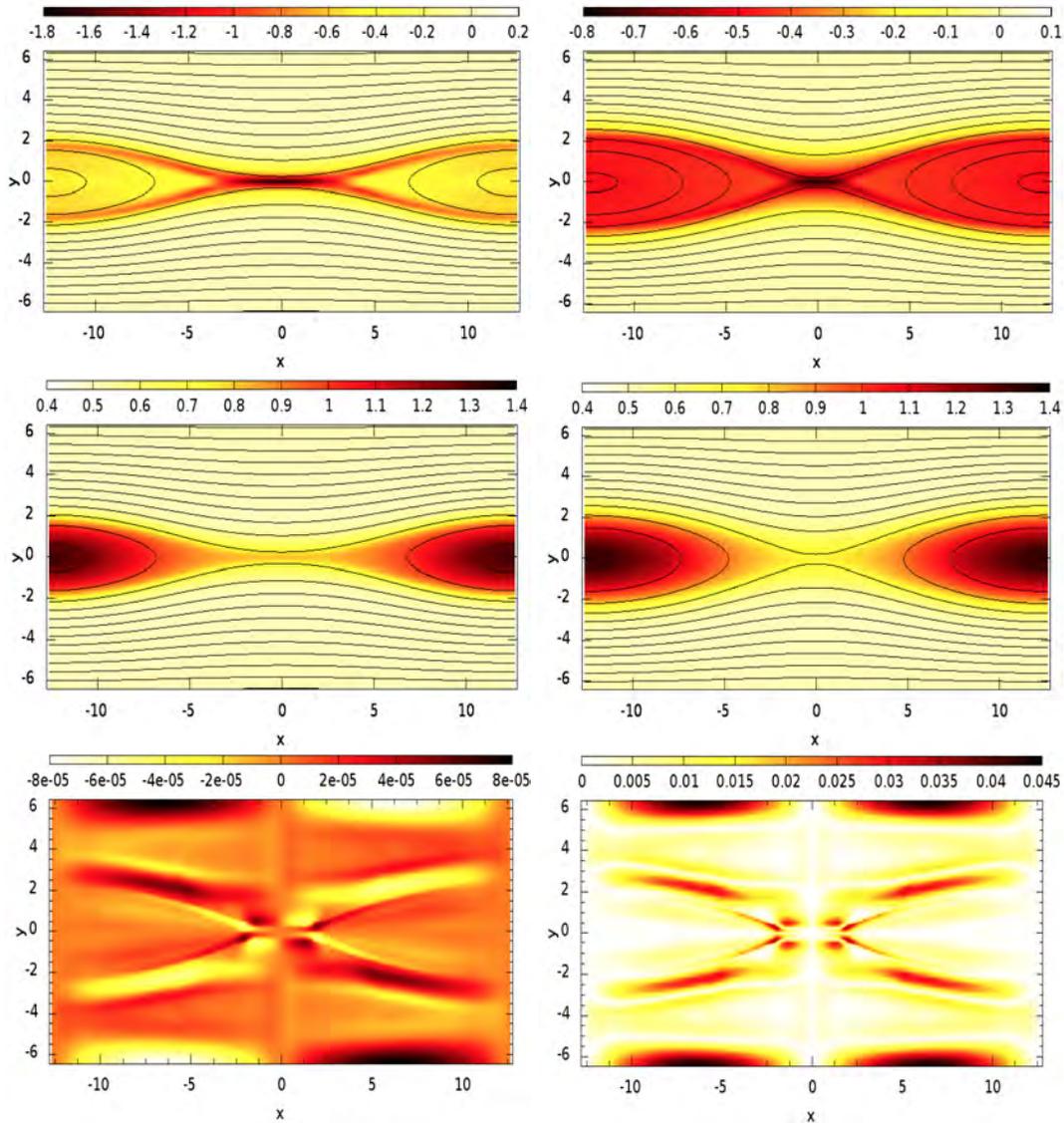


Figura 5.17: (Arriba) Componente  $z$  de la densidad de corriente  $J_z$  con las líneas de campo magnético al tiempo  $t = 50$  (izquierda) y  $t = 100$  (derecha). (Centro) Presión del gas  $p$  con las líneas de campo magnético al tiempo  $t = 50$  (izquierda) y  $t = 100$  (derecha). (Abajo) Función escalar  $\psi$  al tiempo  $t = 100$  (izquierda) y  $|\nabla \cdot \mathbf{B}|$  en el plano  $xy$  al tiempo  $t = 100$  (derecha). En esta prueba se usó HLLE combinado con MINMOD.

parámetros del plasma. Si  $L$  es la longitud media y  $\delta$  el ancho de la región de difusión, entonces la tasa de reconexión  $\varepsilon$  está definida como

$$\varepsilon = \frac{u_{in}}{u_{out}} \sim \frac{\delta}{L} \sim \frac{1}{S}. \quad (5.12)$$

Con  $u_{in}$  y  $u_{out}$  que denotan las velocidades entrantes y salientes dentro de la región de difusión. El número de Lundquist se define como  $S = v_A L / \eta$ , en donde  $v_A$  es la velocidad de Alfvén sobre la región de difusión,  $\eta$  es la resistividad magnética y  $L$  es la longitud media de la región de difusión. La dependencia de la tasa de reconexión como la raíz cuadrada de la resistividad magnética es llamada escala de Sweet-Parker, y ha sido verificada numérica [Biskamp (1986), Uzdensky & Kulsrud (2000)] y experimentalmente [Ji et al. (1998)]. En la Fig. 5.18 se muestran los resultados obtenidos para la escala de Sweet-Parker mediante la simulación numérica usando el resolvidor de HLLC combinado con MINMOD para valores de  $\eta$  en el rango  $10^{-2} - 10^{-4}$ , y se puede ver que el código es capaz de describir la escala de Sweet-Parker de manera satisfactoria. Los valores  $\delta$  y  $L$  fueron calculados post-proceso usando el perfil de la componente  $z$  de la densidad de corriente  $J_z$  al tiempo  $t = 150$  para cada uno de los valores de la resistividad, en tal perfil es más evidente la formación de la zona de difusión (zona de mayor corriente) como se puede ver en la parte superior de la Fig. 5.17, en donde  $\delta$  es el ancho de esa zona de difusión y  $L$  es su longitud. Los resultados obtenidos para esta prueba son comparables a los que se obtienen con el código PLUTO [Mignone et al. (2012)] usando 5 niveles de refinamiento en la malla.

### Prueba de la reconexión magnética localizada en 2D

Esta prueba es presentada en [Jiang et al. (2012)], y sirve para probar el efecto de una resistividad localizada en el proceso de la reconexión magnética. Este tipo de resistividad puede ser el resultado de inestabilidades microscópicas, sin embargo no está claro aún como estas inestabilidades conducen a la reconexión magnética macroscópica. Las condiciones iniciales están dadas de la siguiente manera: las velocidades  $v_x = v_y = v_z = 0$ , se asume una densidad uniforme  $\rho = 1$ , una presión del gas  $p = 0.1$  y  $\psi = 0$ . La configuración del campo magnético está definida como una distribución anti-paralela:

$$B_x = 0, \quad (5.13)$$

$$B_y = \begin{cases} -1 & \text{para } x < -L_r, \\ \sin(\pi x / 2L_r) & \text{para } |x| \leq L_r, \\ 1 & \text{para } x > L_r, \end{cases} \quad (5.14)$$

$$B_z = \begin{cases} 0 & \text{para } x < -L_r, \\ \cos(\pi x / 2L_r) & \text{para } |x| \leq L_r, \\ 0 & \text{para } x > L_r, \end{cases} \quad (5.15)$$

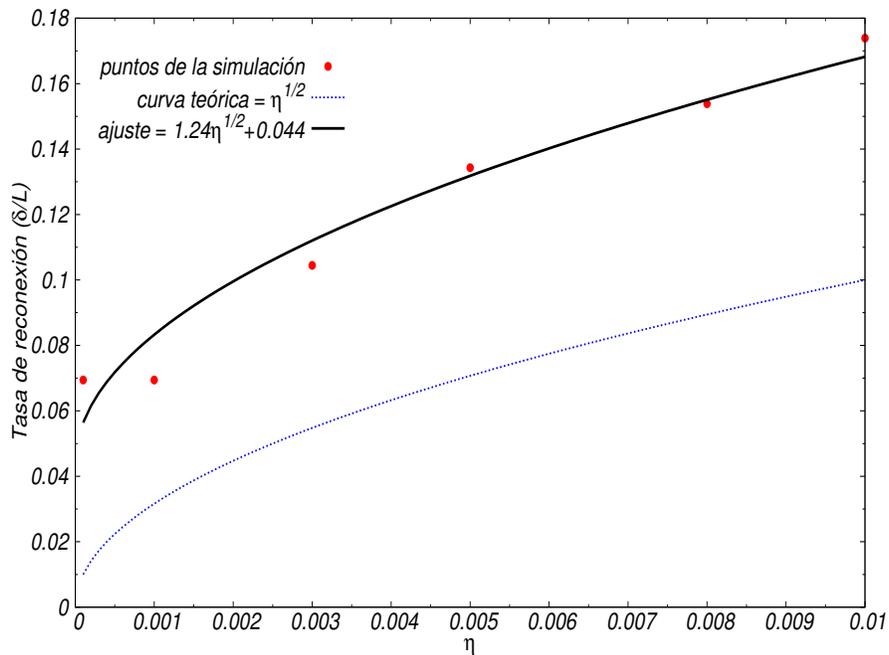


Figura 5.18: Comparación de la tasa de reconexión  $\delta/L$  de Sweet-Parker para los puntos de la simulación numérica, la predicción teórica y el mejor ajuste a los puntos de la simulación en un rango de valores de la resistividad  $\eta = 10^{-2} - 10^{-4}$ . Se puede notar que los puntos de la simulación numérica se ajustan con un perfil que va como  $\sim \eta^{1/2}$ , tal y como lo predice la teoría.

en donde  $L_r = 0.05$  y se define como la anchura media de la región de resistividad en la dirección  $x$ . En esta prueba el perfil de resistividad tiene la forma  $\eta(x, y) = \eta_0(\cos(\pi x/0.1) + 1) \times (\cos(\pi y/0.4) + 1)/4$  en la región pequeña  $[-0.05, 0.05] \times [-0.2, 0.2]$ . La evolución se lleva a cabo en el dominio  $[-0.5, 0.5] \times [-2, 2]$  cubierto por  $400 \times 1600$  celdas. Los resultados de la simulación para la presión del gas y las líneas de campo magnético se muestran en la Fig. 5.19. La evolución muestra una reconexión magnética rápida en el centro del dominio como resultado de la resistividad localizada. La reconexión magnética libera energía magnética y calienta el plasma localizado en el centro del dominio. Además de que aparecen flujos hacia arriba y abajo que se mueven con la velocidad de Alfvén. En la Fig. 5.20 se muestra la función escalar  $\psi$  y la constricción del campo magnético  $|\nabla \cdot \mathbf{B}|$  al tiempo  $t = 2.5$ , en donde se puede ver que el valor absoluto de la divergencia del campo  $|\nabla \cdot \mathbf{B}|$  es del orden  $10^{-2}$ , el cual representa un valor relativamente grande, sin embargo en este caso la dinámica del problema es descrita correctamente por el código, y en la referencia en donde se presenta tal prueba no se muestra la violación de la constricción.

En la Fig. 5.21, se muestran los perfiles de la presión del gas, presión magnética, la componente  $v_x$  y  $v_y$  de la velocidad en el corte horizontal  $y = 0.5$ . Estos perfiles muestran choques lentos en los rangos  $-0.03 < x < -0.01$  y  $0.01 < x < 0.03$ , en donde las variables cambian bruscamente entre las fases ascendente y descendente del choque, tales resultados son similares a los obtenidos en [Jiang et al. (2012)], a pesar de que en tal referencia se usa AMR con 5 niveles de refinamiento.

### Plasmoide en una reconexión magnética rápida

Esta prueba se presenta para diagnosticar el código CANS+ [Matsumoto et al. (2016)], sin embargo es parte de un estudio más detallado realizado en [Zenitani & Miyoshi (2011), Zenitani & Miyoshi (2015)], en donde se analiza la formación de estructuras tipo plasmoides en el proceso de la reconexión magnética rápida en medios con un  $\beta$  del plasma pequeño. Además esta prueba es útil para medir la capacidad del código de capturar estructuras asociadas con choques y discontinuidades que se generan en el plasma, también mide la capacidad del código de capturar la turbulencia asociada con la evolución del plasmoides. Las condiciones iniciales se toman de [Zenitani & Miyoshi (2011)], y están dadas por una hoja de corriente de Harris en equilibrio:  $B_x(z) = \tanh(z)$ ,  $B_y = B_z = 0$ ,  $\mathbf{v} = 0$ ,  $\rho = \rho_0(1 + \cosh^{-2}(z/\lambda)/\beta_0)$ ,  $p = 0.5B_0^2(\beta_0 + \cosh^{-2}(z/\lambda))$  y  $\psi = 0$  en donde  $\lambda$  es la anchura media de la hoja de corriente. Para esta prueba se usan los valores  $\lambda = 1$ ,  $\beta_0 = 0.2$  y  $B_0 = 1$ . La resistividad está definida como un perfil localizado en el dominio de la simulación alrededor del punto "X", esto es  $\eta = \eta_0 + (\eta_1 - \eta_0) \cosh^{-2}(\sqrt{x^2 + z^2}/\lambda)$ . Para inicializar la reconexión magnética se añade una perturbación a las componentes  $B_x$  y  $B_z$  por medio del potencial vectorial  $\delta A_z = 0.06B_0\lambda \exp[-(x^2 + z^2/4\lambda^2)]$ . La evolución se lleva a cabo en el dominio  $[0, 200] \times [-75, 75]$  cubierto por  $1600 \times 1200$  celdas. Se usan condiciones de frontera de flujo saliente en todas las caras del dominio.

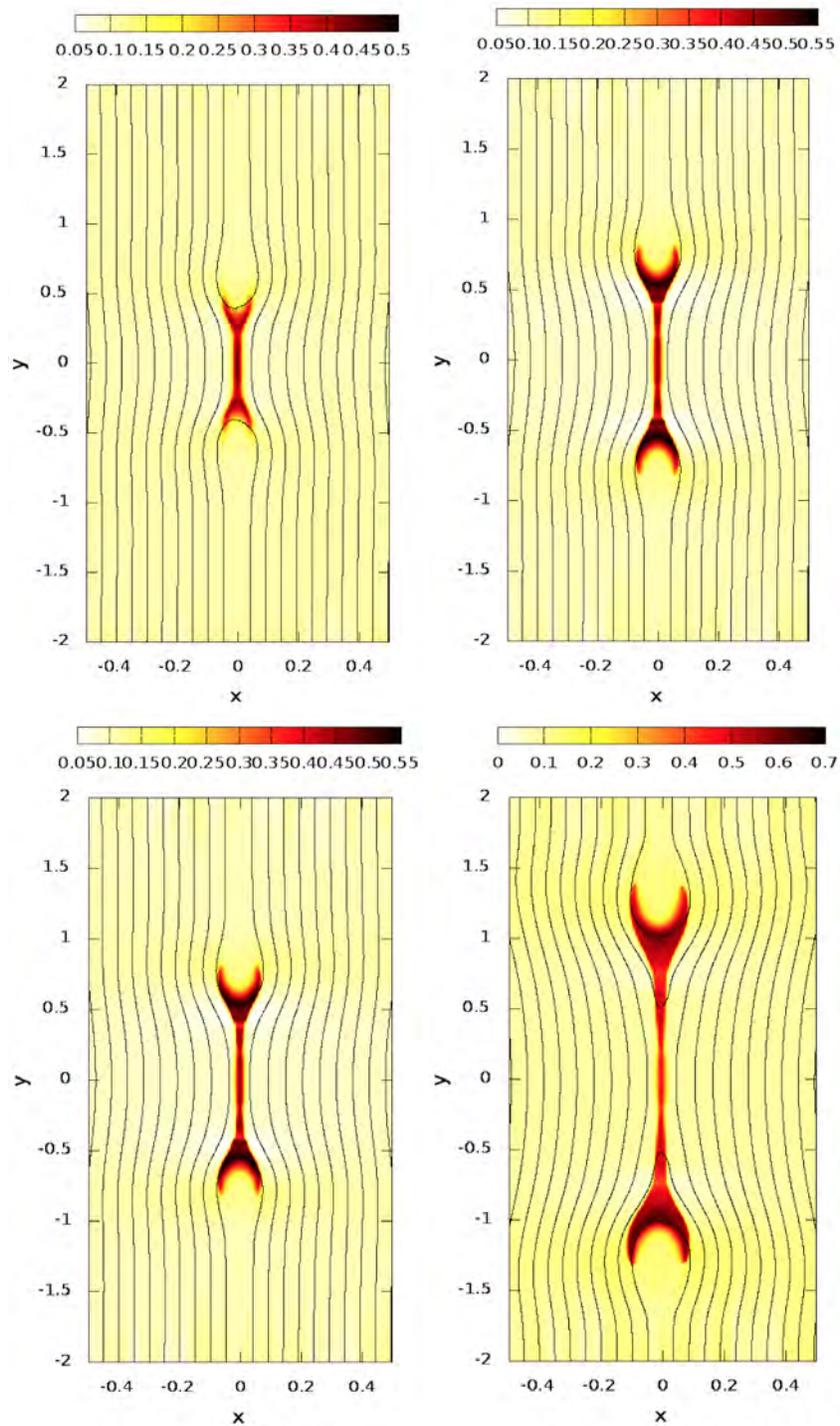


Figura 5.19: Presión del gas con líneas de campo magnético a los tiempos  $t = 1$  (arriba-izquierda),  $t = 1.5$  (arriba-derecha),  $t = 2$  (abajo-izquierda) y  $t = 2.5$  (abajo-derecha). En esta prueba se usó HLLE combinado con WENO5.

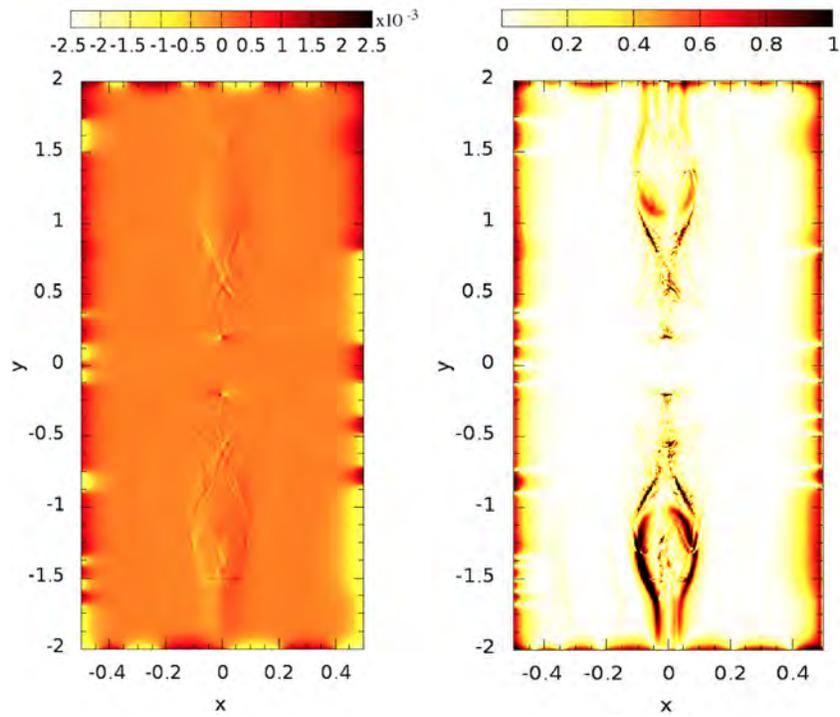


Figura 5.20: Función escalar  $\psi$  al tiempo  $t=2.5$  en el plano  $xy$  (izquierda) y valor absoluto de la constricción del campo magnético  $|\nabla \cdot \mathbf{B}|$  al tiempo  $t=2.5$  en el plano  $xy$  (derecha).

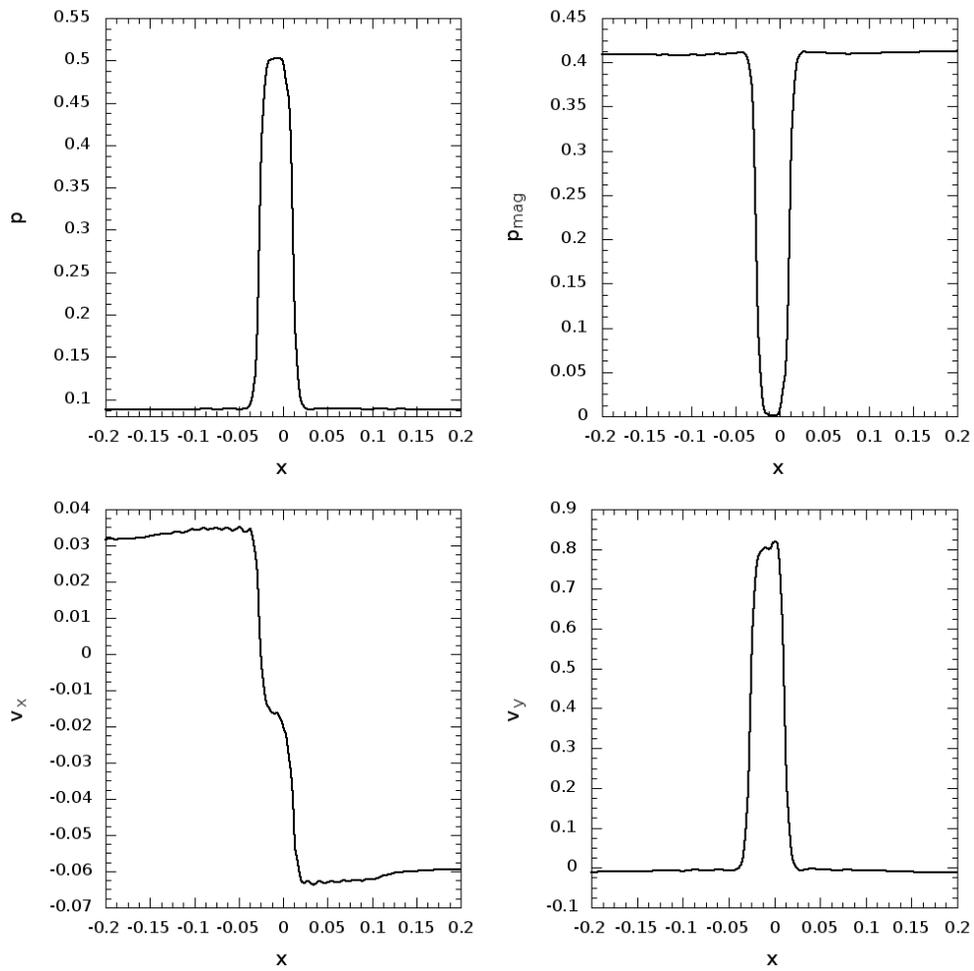


Figura 5.21: Perfiles de la presión del gas  $p$  (arriba-izquierda), presión magnética  $p_{mag}$  (arriba-derecha), componente  $x$  de la velocidad (abajo-izquierda) y componente  $y$  de la velocidad (abajo-derecha) a lo largo del corte horizontal  $y = 0.5$  al tiempo  $t = 2.5$ .

Los resultados de esta prueba se muestran en la Fig. 5.22, en donde se puede ver que la resistividad localizada causa que el campo magnético se disipe, generando entrada de material desde la región opuesta al movimiento del plasma, lo que provoca la formación del plasmoide. La reconexión magnética transfiere a los campos magnéticos desde la región opuesta hacia la dirección  $x$  positiva junto con un jet de salida. Además en la Fig. 5.22, se muestra un zoom de la densidad de masa  $\rho$  y de la componente  $v_x$  de la velocidad al tiempo  $t = 150$  dentro del plasmoide. En el caso de la densidad aparece una discontinuidad que actúa como una pared magnética que refleja el plasma del lado derecho, eso se debe a que aparece una inestabilidad tipo Kelvin-Helmholtz entre el jet reflejado y el medio circundante. En el caso de  $v_x$ , se pueden ver en la región central un plasma que queda inmóvil, debido a la alta densidad de la hoja de Harris. Estos flujos similares son conducidos por la reconexión saliente o reflejados por la pared magnética, y están separados por regiones de transición. Los resultados obtenidos con el código CAFE Newtoniano son comparables con los obtenidos en [Zenitani & Miyoshi (2011)] hasta el tiempo  $t = 150$ , después de ese tiempo la estructura del plasmoide no es simétrica, lo que se debe principalmente a que la resolución usada en esta prueba es muy baja comparada con la que se usa la referencia [Zenitani & Miyoshi (2011)].

## 5.3 Pruebas numéricas asociadas a problemas solares

Para mostrar que el código es capaz de evolucionar sistemas asociados con fenómenos en la atmósfera solar, se presentan dos pruebas en donde se mide la habilidad de resolver rarefacciones y discontinuidades asociadas a una atmósfera solar caracterizada por una región de transición en donde la densidad y la presión cambian hasta 8 órdenes de magnitud. En particular las condiciones de la corona solar indican que la presión magnética domina sobre la presión del gas, lo que implica una  $\beta$  del plasma del orden  $10^{-2} - 10^{-4}$ , lo que resulta ser un problema para mantener la positividad de la presión del gas durante la evolución. Por lo tanto estas pruebas sirven para también para medir la capacidad del código de evolucionar sistemas con betas del plasma pequeñas. La primera prueba que se estudia en esta sección está relacionada con la propagación de pulsos Alfvénicos a lo largo de un arco magnético coronal, y la segunda estudia el efecto de la interacción de dos ondas de Alfvén impulsivamente generadas en el calentamiento de la corona quieta, las cuales se propagan en arcadas magnéticas y embudos coronales.

### 5.3.1 Oscilaciones transversales en arcos coronales solares

Esta prueba fue presentada como parte de las pruebas solares del código CAFE Newtoniano en la referencia [González-Avilés et al. (2015)], en este caso se resuelven las ecuaciones de la MHD ideal sometidas al campo gravitacional constante del Sol en 2D. En esta prueba se usa una atmósfera solar estratificada gravitacionalmente que cubre la región fotosfera-

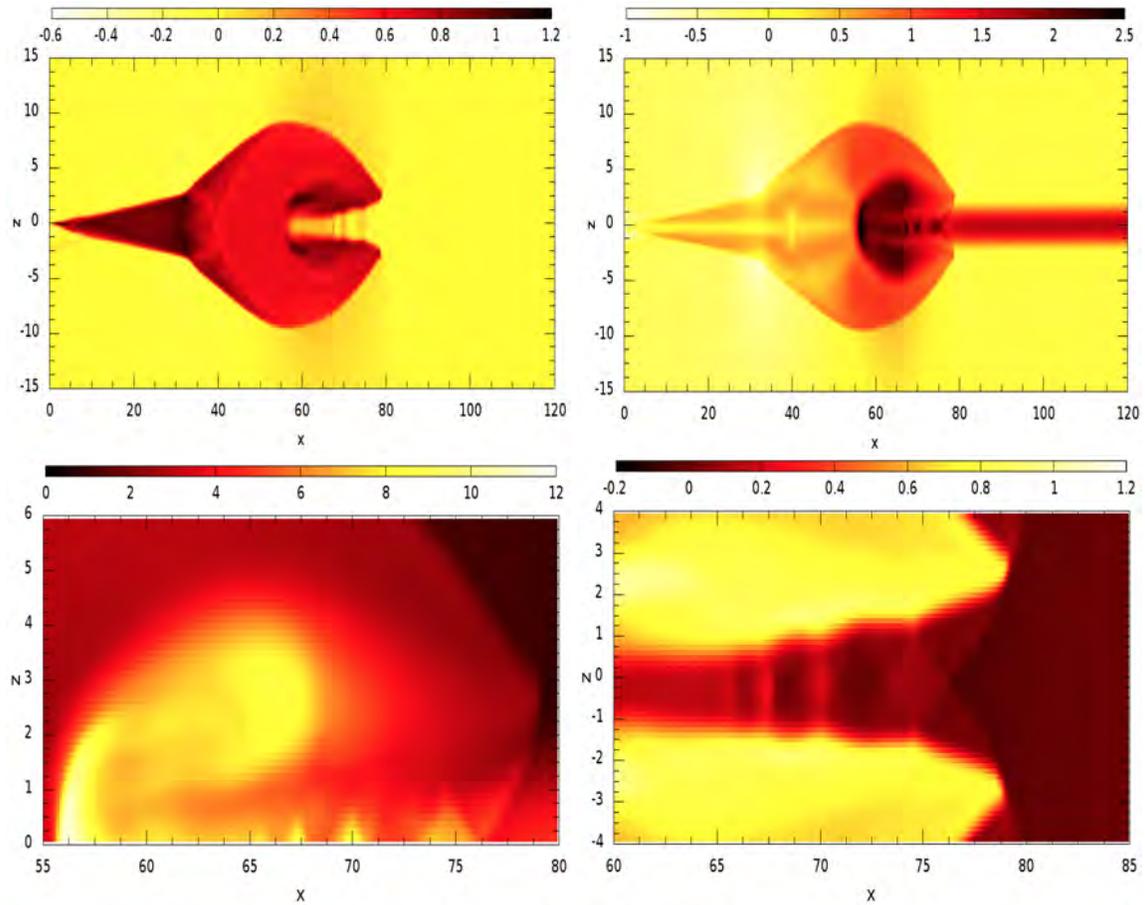


Figura 5.22: (Arriba) Componente de la velocidad  $v_x$  (izquierda) y logaritmo de la densidad  $\rho$  al tiempo  $t = 150$  (derecha). (Abajo) Densidad del plasma  $\rho$  dentro del plasmoides al tiempo  $t = 150$  (izquierda) y componente  $x$  de la velocidad  $v_x$  vista en la región central del plasmoides al tiempo  $t = 150$  (derecha). En esta prueba se usó HLLC combinado con MC.

corona. La idea se toma de la referencia [Del Zanna et al. (2005)], en donde se estudia la propagación de ondas de Alfvén generadas impulsivamente en una arcada magnética. Las oscilaciones que se generan en la propagación de las ondas son debido a las explosiones solares y se interpretan como oscilaciones estacionarias tipo “kink”. En este problema, la configuración de campo magnético se obtiene de una solución estacionaria de las ecuaciones de la MHD ideal en 2D [Priest (1982)], y está dada por

$$\begin{aligned} B_x &= B_0 \cos(kx) \exp(-kz), \\ B_z &= -B_0 \sin(kx) \exp(-kz), \end{aligned} \quad (5.16)$$

en donde  $B_0 = 40$  G es la magnitud del campo magnético a nivel fotosférico con sus polos definidos en  $x = \pm L/2$  y  $k = \pi/L$  con  $L = 50$  Mm. La configuración magnética es potencial lo que implica que es libre de corriente, entonces tal condición se usa para obtener la ecuación del equilibrio hidrostático en donde el gradiente de presión está en equilibrio con la gravedad, y se expresa de la siguiente forma:

$$-\nabla p_e + \rho_e \mathbf{g} = \mathbf{0}, \quad (5.17)$$

aquí  $p_e$  y  $\rho_e$  representan la presión y densidad en equilibrio. El término de la gravedad  $\mathbf{g} = -g\hat{z}$  en este caso, por lo tanto solamente se tiene que resolver la ecuación de equilibrio hidrostático en la dirección vertical  $z$ , esto es

$$-\frac{dp_e}{dz} - \rho_e g = 0. \quad (5.18)$$

Entonces usando la ecuación de un gas completamente ionizado  $p = 2k_B \rho T / m_p$ , donde  $k_B$  es la constante de Boltzmann y  $m_p$  es la masa del protón, se obtiene la siguiente expresión para la presión del gas en equilibrio

$$p_e(z) = p_e(z_0) \exp\left(-\frac{m_p g}{2k_B} \int_{z_0}^z \frac{dz'}{T(z')}\right), \quad (5.19)$$

con  $p_e(z_0)$  definida como la presión al nivel fotosférico. Finalmente la densidad de masa se calcula simplemente despejando  $\rho$  de la ecuación de estado, esto es  $\rho_e = \frac{m_p p_e(z)}{2k_B T(z)}$ . Para este problema en particular se usa un modelo de temperatura que está dado por una función escalón suave

$$T(z) = \frac{1}{2} T_{cor} \left( 1 + dt_c + (1 - dt_c) \tanh\left(\frac{z - z_t}{z_w}\right) \right), \quad (5.20)$$

en donde  $dt_c = T_{fot}/T_{cor}$  y  $T_{fot} = 6000$  K es la temperatura en la fotosfera,  $T_{cor} = 1.2 \times 10^6$  K es la temperatura en la corona. Estas dos regiones están separadas en  $z_w = 2$  Mm que es la región de transición con un ancho  $z_w = 0.2$  Mm. Se usa la ecuación (5.20) y se debe

integrar la ecuación (5.19) para obtener la presión del gas en equilibrio  $p_e$  y después la densidad del gas en equilibrio  $\rho_e$ .

De acuerdo a la referencia [Del Zanna et al. (2005)] para generar las ondas de Alfvén de manera impulsiva, se usa un pulso puramente transversal de la velocidad  $v_y$ , al tiempo  $t = 0$ , localizado en  $(x_0, z_0)$ :

$$v_y = \frac{Av_0}{1 + (r/r_0)^4}, \quad (5.21)$$

en donde  $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2}$  con  $x_0 = 0$  Mm y  $z_0 = 50$  Mm,  $A = 0.1$ ,  $v_0 = 1$  Mm s<sup>-1</sup> es la velocidad de Alfvén típica en la corona y  $r_0 = 1$  Mm. Considerando todo lo anterior, las condiciones iniciales para este problema están dadas por:  $p = p_e(z)$ ,  $\rho = \rho_e(z)$ , el campo de velocidad  $\mathbf{v} = (0, 0, 0)$  y  $\mathbf{B} = (B_x, 0, B_z)$ . La evolución se lleva a cabo en el dominio  $[-25, 25] \times [0, 1] \times [0, 50]$  Mm<sup>3</sup>, cubierto con  $400 \times 4 \times 400$  celdas, y se imponen condiciones de frontera de flujo saliente en todas las caras. En particular se usó el resolvidor de Riemann HLLE combinado con MINMOD. Los perfiles iniciales de la atmósfera solar en equilibrio se muestran en la Fig. 5.23.

Aquí solamente se presenta el caso de un pulso simétrico descrito por la ecuación (5.21), y los resultados de la evolución de la componente transversal de la velocidad  $v_y$  y las líneas de campo magnético se muestran en la Fig. 5.24 a los tiempos  $t = 12.5$  s,  $t = 37.5$  s,  $t = 100$  s, y  $t = 200$  s. Al tiempo  $t = 12.5$  s se puede ver la propagación de dos pulsos Alfvénicos de igual amplitud moviéndose hacia abajo. Al tiempo  $t = 37.5$  s, los pulsos muestran una disminución en la amplitud y una elongación producida por el decaimiento de la densidad. Al tiempo  $t = 100$  s, los pulsos ya pasaron por la región de transición y sufren una reflexión, lo cual está representado por una amplitud negativa. Finalmente al tiempo  $t = 200$  s, los pulsos han cruzado dos veces la región y su amplitud ha decaído se tienen un perfil más elongado. A pesar de esta dinámica de los pulsos Alfvénicos, el valor  $|\nabla \cdot \mathbf{B}|$  se mantiene en el orden  $10^{-16}$  Tesla km<sup>-1</sup> como se muestra en la descripción de la Fig. 5.24.

### 5.3.2 Estimación de la contribución de las ondas de Alfvén en el proceso del calentamiento de la corona quieta

Esta prueba es parte del estudio realizado en la referencia [González-Avilés & Guzmán (2015)], en donde se resuelven numéricamente las ecuaciones de la MHD ideal en 2D sometidas al campo gravitacional del Sol, con el objetivo de estudiar los efectos de interacción de dos ondas de Alfvén lineales y no lineales impulsivamente generadas cuando se propagan a lo largo de arcadas magnéticas y embudos coronales.

En este problema se considera, al igual que el problema anterior, una atmósfera solar en equilibrio hidrostático en el dominio finito  $xz$ , en donde  $x$  es la coordenada horizontal y  $z$  denota la altura.

De igual forma en este problema se consideran configuraciones de campo magnético po-

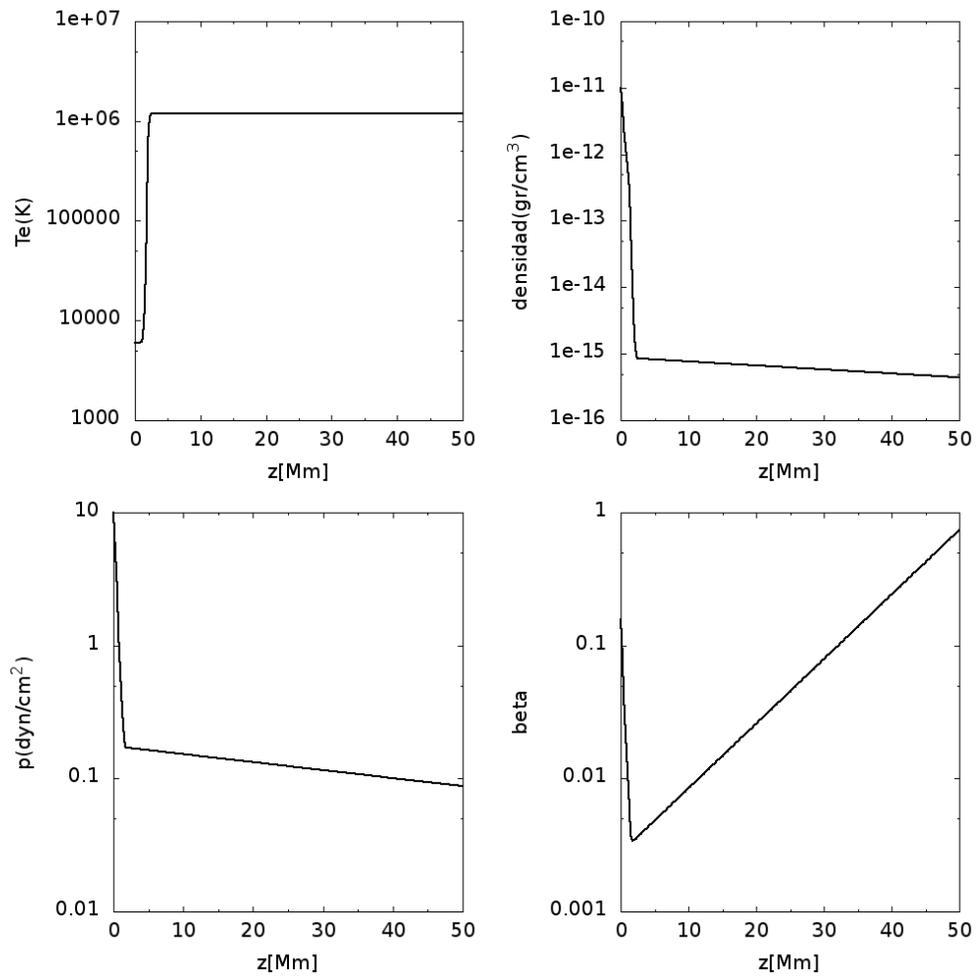


Figura 5.23: Perfiles iniciales de la atmósfera en equilibrio, (arriba-izquierda) temperatura en Kelvin, (arriba-derecha) densidad de masa. (Abajo-izquierda) presión del gas y (abajo-derecha) beta del plasma. Se puede ver el gradiente significativo de densidad y presión en la región de transición.

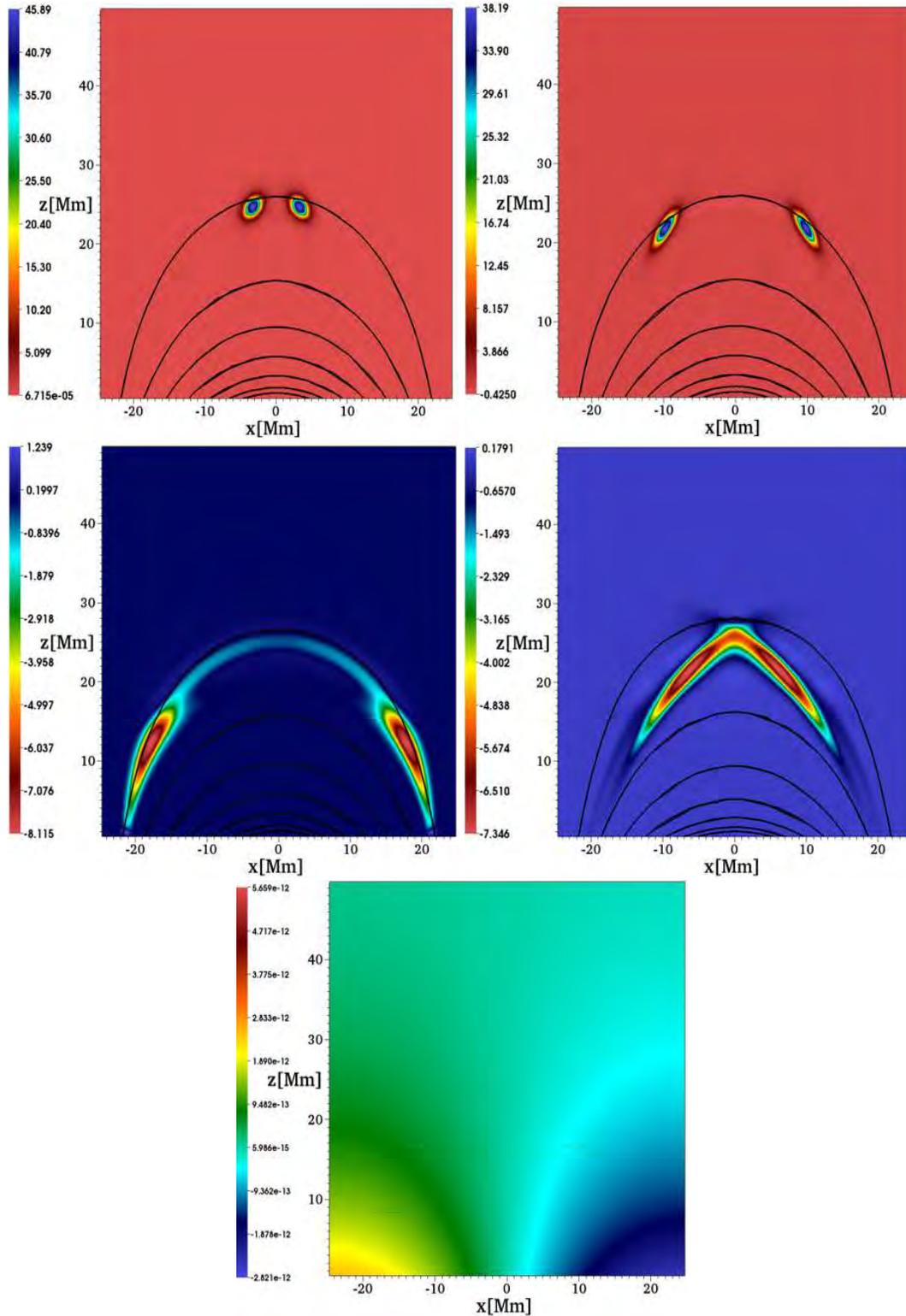


Figura 5.24: Evolución de la componente transversal de la velocidad  $v_y$ (km/s) y líneas del campo magnético a los tiempos  $t = 12.5$  s (arriba-izquierda),  $t = 37.5$  s (arriba-derecha),  $t = 100$  s (centro-izquierda),  $t = 200$  s (centro-derecha), y  $|\nabla \cdot \mathbf{B}|$ (Tesla/km) al tiempo  $t = 200$  s (abajo).

tencial, lo que implica

$$\nabla \times \mathbf{B}_e = \mathbf{0} \Rightarrow (\nabla \times \mathbf{B}_e) \times \mathbf{B}_e = \mathbf{0}, \quad (5.22)$$

en donde el subíndice denota las cantidades en equilibrio. La elección del campo magnético que satisfaga 5.22 es general y depende del problema físico que se estudie, en este caso se considera una configuración de campo magnético en dos dimensiones. Cuando se aplican las condiciones de equilibrio hidrostático, se tiene lo siguiente

$$-\nabla p_e + \rho_e \mathbf{g} = \mathbf{0}. \quad (5.23)$$

Usando la ley del gas ideal y el hecho de que el equilibrio hidrostático es a lo largo de la dirección  $z$ , entonces la presión del gas en equilibrio toma la forma:

$$p_e(z) = p_{ref} \exp\left(-\int_{z_{ref}}^z \frac{dz'}{\Lambda(z')}\right), \quad (5.24)$$

y la densidad de masa

$$\rho_e(z) = \frac{p_e(z)}{g\Lambda(z)}, \quad (5.25)$$

en donde

$$\Lambda(z) = \frac{k_B T_e(z)}{mg}, \quad (5.26)$$

es la escala de altura de la presión y  $p_{ref}$  representa la presión del gas a un cierto nivel de referencia, que se elige para este caso en  $z_{ref} = 10$  Mm, que es donde la corona solar empieza.

El modelo de temperatura se asume que obedece el modelo C7 [Avrett & Loeser (2008)]. Este es un modelo semi-empírico de la región fotosfera-cromosfera, con una distribución de temperatura que se ajusta a las intensidades continuas observadas, líneas de intensidad, y perfiles de las líneas del extremo ultravioleta del atlas SUMER [Curdt et al. (1999)]. El perfil de la temperatura es interpolado a la malla numérica y después se hace una integración numérica usando la ecuación 5.24 para obtener la presión del gas  $p_e(z)$ . Ya que se tiene la presión del gas, simplemente se usa la ecuación (5.25) para obtener la densidad de masa en equilibrio  $\rho_e(z)$ . Los perfiles de la temperatura, densidad y presión se muestran en la Fig. 5.25.

El modelo de la configuración magnética que describe a las arcadas magnéticas coronales se toma de un modelo desarrollado originalmente para un tubo de flujo magnético presentando en [Low (1985)]. Este modelo considera la siguiente función de flujo magnético

$$A(x, z) = \frac{x(z_{ref} - b)^2}{(z - b)^2 - x^2} B_{ref}, \quad (5.27)$$

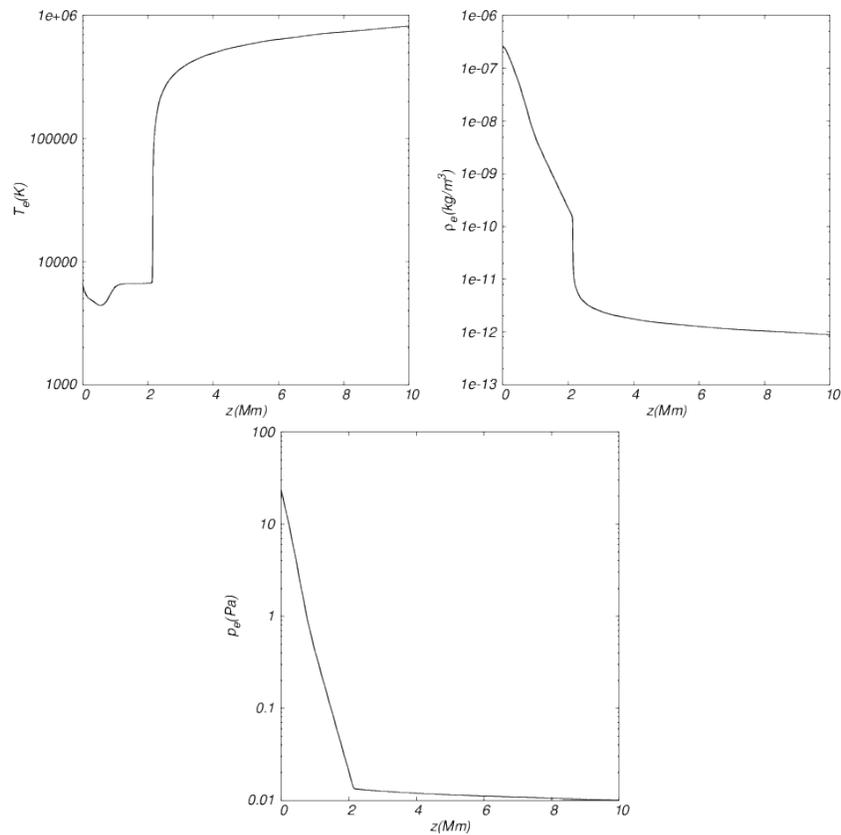


Figura 5.25: Perfiles iniciales de la atmósfera en equilibrio, (arriba-izquierda) temperatura en Kelvin, (arriba-derecha) densidad de masa. (Abajo) presión del gas. Se puede ver el gradiente significativo en la región de transición se localiza en  $z \approx 2.1$  Mm.

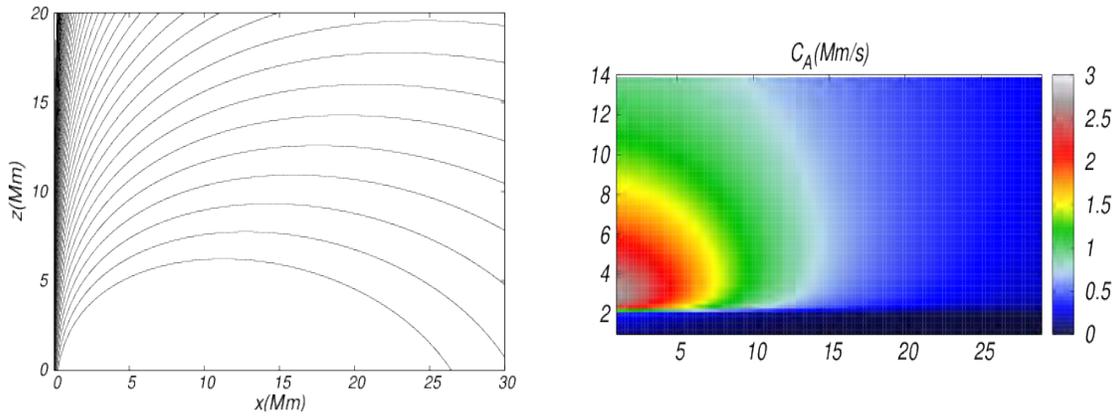


Figura 5.26: (Izquierda) Líneas de campo magnético de una arcada coronal con parámetros  $B_{ref} = 14.472$  G,  $b = -5$  Mm y  $z_{ref} = 10$  Mm. (Derecha) La velocidad de Alfvén asociada en Mm/s.

en donde  $b$  es una constante que determina la localización vertical de un polo magnético, para este caso se usa  $b = -5$  Mm y  $B_{ref}$  es la magnitud del campo magnético al nivel de referencia  $z_{ref}$ . Entonces el campo magnético en equilibrio se calcula usando  $A(x, z)$  de la siguiente forma

$$\mathbf{B}_e(x, z) = \nabla \times (A(x, z)\hat{\mathbf{y}}) = -\frac{\partial A(x, z)}{\partial z}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial A(x, z)}{\partial x}\hat{\mathbf{z}}, \quad (5.28)$$

entonces específicamente las componentes del campo magnético en equilibrio están dadas por

$$B_{ex}(x, z) = \frac{2(z-b)(b-z_{ref})^2}{(x^2 - (b-z)^2)^2}, \quad (5.29)$$

$$B_{ez}(x, z) = \frac{(x^2 + (b-z)^2)(b-z_{ref})^2}{(b+x-z)^2(x+z-b)^2}. \quad (5.30)$$

El valor de  $B_{ref}$  se escoge tal forma que las velocidades de Alfvén y el sonido

$$c_A(x, z) = \sqrt{\frac{B_{ex}^2 + B_{ez}^2}{\mu_0 \rho_e(z)}}, \quad c_s(z) = \sqrt{\frac{\gamma p_e(z)}{\rho_e(z)}}, \quad (5.31)$$

satisfagan la condición  $c_A(0, z_{ref}) = 10c_s(z_{ref})$ , ya que en la corona solar la presión magnética es mayor que la presión del gas. Tal condición da el valor de  $B_{ref} = 14.472$  G. Las líneas de campo magnético y la velocidad de Alfvén  $c_A(x, z)$  se muestran en la Fig. 5.26

El modelo para los embudos coronales se toma de [Chmielewski et al. (2014a)], en donde se

asume que la función de flujo magnético tiene solamente una componente  $\hat{y}$  y está definida por la siguiente expresión

$$\mathbf{A}_e(x, z) = \Lambda_B B_{ref} \sin\left(\frac{x}{\Lambda_B}\right) \exp\left(-\frac{z - z_{ref}}{\Lambda_B}\right) \hat{y}, \quad (5.32)$$

en donde  $B_{ref}$  es nuevamente la magnitud del campo magnético de referencia en el nivel  $z_{ref} = 10$  Mm. A diferencia de [Chmielewski et al. (2014a)] se usa la función seno en lugar del coseno para ser consistentes con la convención de coordenadas consideradas aquí. En la ecuación (5.32)  $\Lambda_B = 2L/\pi$  y denota la escala de altura del campo magnético y  $L$  es un medio de la longitud de la arcada magnética. En este problema se quieren modelar embudos coronales que se expandan débilmente, por lo tanto se fija  $L = 75$  Mm [Chmielewski et al. (2014a)]. De acuerdo a esta elección, las líneas de campo magnético son ligeramente curvas y representan líneas de campo abiertas similares a las de los hoyos coronales. Finalmente, el campo magnético se define como

$$\mathbf{B}_e(x, z) = \nabla \times (A(x, y) \hat{y}) = -\frac{\partial A(x, z)}{\partial z} \hat{x} + \frac{\partial A(x, z)}{\partial x} \hat{z}, \quad (5.33)$$

y las componentes del campo magnético en equilibrio  $B_{ex}(x, z)$  and  $B_{ez}(x, z)$  explícitamente son

$$B_{ez}(x, z) = -B_{ref} \sin\left(\frac{x}{\Lambda_B}\right) \exp\left(-\frac{z - z_{ref}}{\Lambda_B}\right), \quad (5.34)$$

$$B_{ex}(x, z) = -B_{ref} \cos\left(\frac{x}{\Lambda_B}\right) \exp\left(-\frac{z - z_{ref}}{\Lambda_B}\right). \quad (5.35)$$

Por otra lado, en este modelo la velocidad de Alfvén varía solamente con  $z$ , debido a que la densidad lo hace:

$$c_A(z) = \sqrt{\frac{B_{ex}^2 + B_{ez}^2}{\mu_0 \rho_e(z)}} = \frac{B_{ref} e^{-\frac{z - z_{ref}}{\Lambda_B}}}{\sqrt{\mu_0 \rho_e(z)}}, \quad (5.36)$$

y finalmente se puede definir la velocidad del sonido como

$$c_s(z) = \sqrt{\frac{\gamma P_e(z)}{\rho_e(z)}}. \quad (5.37)$$

En este caso,  $B_{ref}$  debe satisfacer la condición  $c_A(z_{ref}) = 10c_s(z_{ref})$ , de donde se obtiene nuevamente que  $B_{ref} = 14.472$  G como en el caso de las arcadas. El campo magnético resultante y la velocidad de Alfvén se muestran en la Fig. 5.27.

Para perturbar la atmósfera solar en equilibrio se definen perturbaciones de la componente

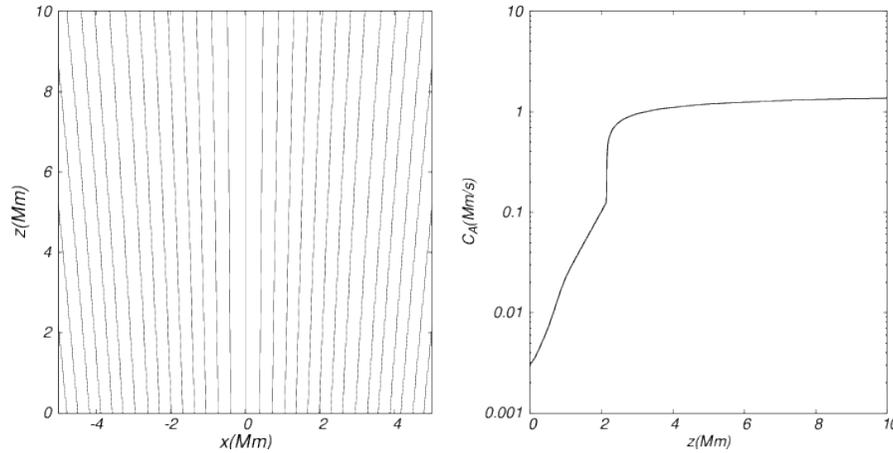


Figura 5.27: (Arriba) Líneas de campo magnético de los embudos coronales con parámetros  $B_{ref} = 14.432$  G,  $z_{ref} = 10$  y  $\Lambda_B = 150/\pi$  Mm. (Abajo) Velocidad de Alfvén como función de  $z$ .

$z$  del campo de velocidad  $v_z$  con un perfil Gaussiano de la forma

$$v_y(x, z, t = 0) = A_v e^{-\frac{(x-x_0)^2}{w_x^2} - \frac{(z-z_0)^2}{w_z^2}}, \quad (5.38)$$

en donde  $A_v$  es la amplitud del pulso,  $(x_0 = 2Mm, z_0 = 1.5Mm)$  es la posición inicial,  $w_x = 0.2$  Mm y  $w_z$  denotan el ancho del pulso a lo largo de  $x$  y  $z$ . La propuesta novedosa del trabajo [González-Avilés & Guzmán (2015)], es que se considera la interacción de dos pulsos, uno que se lanza al tiempo inicial y el segundo que se lanza después de un lapso de tiempo  $\tau$ .

Para estimar la influencia de las ondas de Alfvén en el transporte de energía a la corona solar, lo que eventualmente produciría el calentamiento de la corona quieta, es necesario estimar algunos flujos hacia la corona. Una manera de medir el flujo de energía que transportan las ondas de Alfvén es considerar el flujo de Poynting definido por

$$\mathbf{F}_p = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (5.39)$$

del cual solamente se toma la componente  $z$ , la cual estima el flujo de energía en dirección vertical. Otra manera usual de medir el flujo de energía, es mediante la aproximación WKB, la cual define el flujo de la siguiente forma [Browning (1991), Hollweg (1991), Kudoh & Shibata]

$$F \approx \rho v_y^2 c_A, \quad (5.40)$$

en donde  $\rho$  es la densidad de masa,  $c_A$  es la velocidad de Alfvén local y  $v_y$  es la velocidad

de Alfvén medida en una altura en particular.

### Interacción entre dos ondas de Alfvén en una arcada solar larga

En este caso se usa un dominio de  $[1,29] \times [1,15]$  Mm<sup>2</sup>, cubierto con  $1200 \times 600$  celdas. La longitud de las arcadas depende de la curvatura de las líneas de campo magnético, para el caso de una arcada larga  $x_0 = 2$  Mm, y las ondas de Alfvén se propagarán a lo largo de líneas de campo más grandes y curvas. Los parámetros del perfil Gaussiano (5.38) son  $A_v = 3$  km s<sup>-1</sup>, los anchos son  $w_x = 0.2$  Mm,  $w_z = 0.1$  Mm y se localiza inicialmente en  $(x_0, z_0) = (2$  Mm, 1.75 Mm). En la Fig. 5.28 se muestran los resultados para el caso particular en el cual el segundo pulso es lanzado 30 s después del primero. Inicialmente el primer pulso se desacopla en dos que se mueven en direcciones opuestas. Uno de los pulsos se mueve hacia abajo muy rápido, y el segundo se propaga desde la cromosfera y región de transición hasta la corona, la parte del pulso que se propaga hacia arriba alcanza la región de transición y se acelera debido a un incremento en la velocidad de Alfvén local, como se espera en el caso de un solo pulso [Chmielewski et al. (2014b)]. Se lanza el segundo pulso al tiempo  $t = 30$  s, este pulso afecta claramente la propagación del primero. La interacción entre los dos pulsos produce reflexiones como se muestra al tiempo  $t = 76$  s. Finalmente al tiempo  $t = 106$  s, las ondas alcanzan la distancia máxima en  $x$ , en donde son reflejadas y regresan hacia la superficie solar. El proceso muestra que la mezcla de fases y las reflexiones crecen debido a la interacción. Finalmente, para verificar cómo se comporta la constricción de la divergencia del campo magnético, se muestra en la parte inferior de la Fig. 5.28.

Se llevaron a cabo una serie de simulaciones para distintos lapsos de tiempo  $\tau$  entre el primer y segundo pulso. Se midió la componente  $z$  del flujo de Poynting  $F_{Pz}$  y  $F_{WKB}$  en tres diferentes detectores, y los resultados se muestran en la Fig. 5.29. Con una línea recta se indica el umbral del flujo de energía necesario para calentar la corona  $3 \times 10^5$  erg s<sup>-1</sup> cm<sup>-2</sup>. Los resultados indican que el flujo de Poynting medido en el detector localizado más a la izquierda sobrepasa el umbral por un lapso de tiempo corto. La razón es que en este detector el campo es más intenso. Esto no se puede observar en los otros detectores, ni tampoco en el caso del flujo  $F_{WKB}$ , en donde nunca se alcanza el umbral.

### Interacción entre dos ondas de Alfvén en un embudo coronal

En este caso se usa un dominio de  $[-5,5] \times [1,81]$  Mm<sup>2</sup>, cubierto con  $300 \times 2400$  celdas. Los parámetros del pulso Gaussiano (5.38) para este caso son  $A_v = 10$  km s<sup>-1</sup>,  $w_x = w_z = 0.2$  Mm, localizado en  $(x_0 = 0, z_0 = 1.75)$  Mm. En la Fig. 5.30 se muestran los resultados para el caso de la interacción de dos pulsos con un intervalo de tiempo  $\tau = 10$  s. Se puede ver que inicialmente el primer pulso se descompone en dos ondas [Chmielewski et al. (2014a)], una de esas ondas se mueve hacia arriba y la segunda se mueve hacia abajo. La amplitud del pulso que se mueve hacia abajo decae con el tiempo y prácticamente se hace

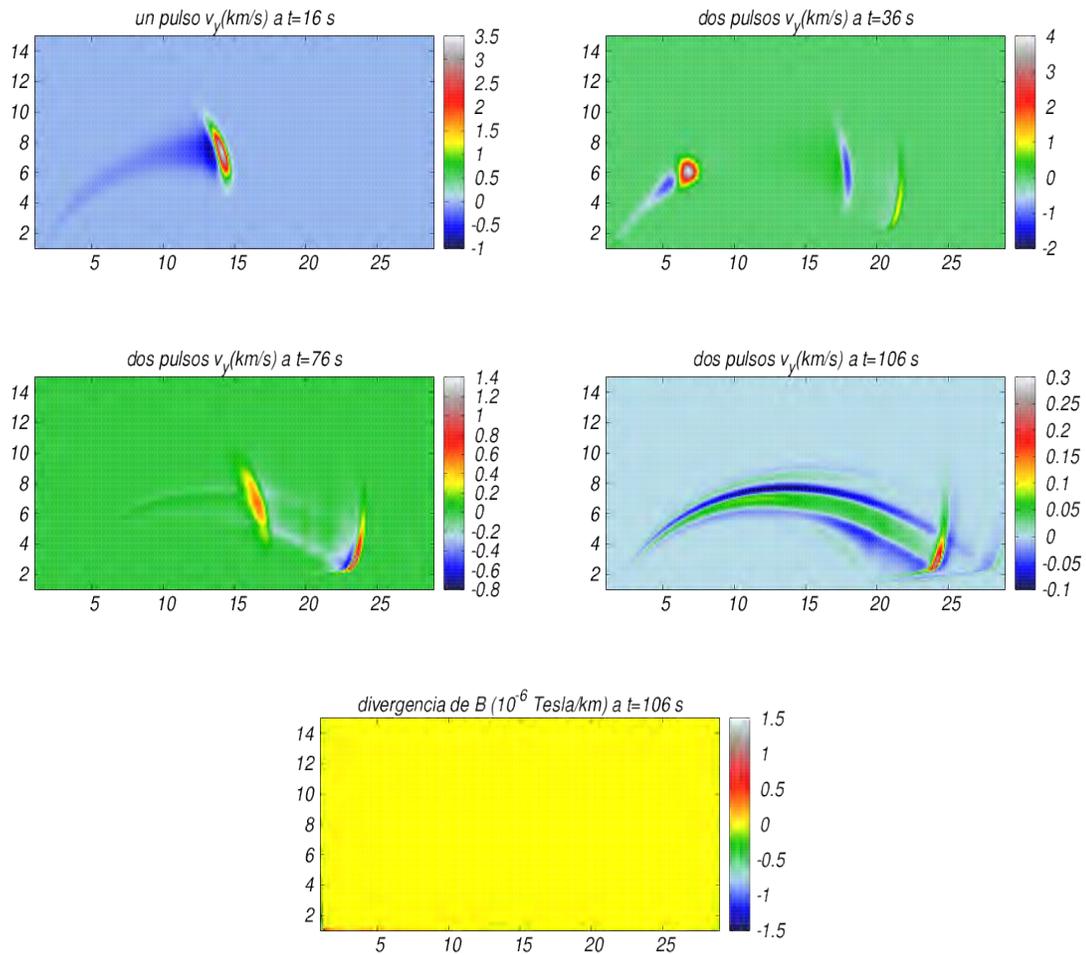


Figura 5.28: Perfiles espaciales de la velocidad  $v_y$ (km/s) en el caso de la interacción de dos ondas de Alfvén en una arcada larga con los parámetros  $x_0 = 2$  Mm,  $w_z = 2$  Mm a los tiempos  $t = 16$  s,  $t = 36$  s,  $t = 76$  s y  $t = 106$  s. También se muestra la constricción del campo magnético  $\nabla \cdot \mathbf{B}$  (Tesla/km) al tiempo  $t = 106$  s. Este caso corresponde a  $\tau = 30$  s.

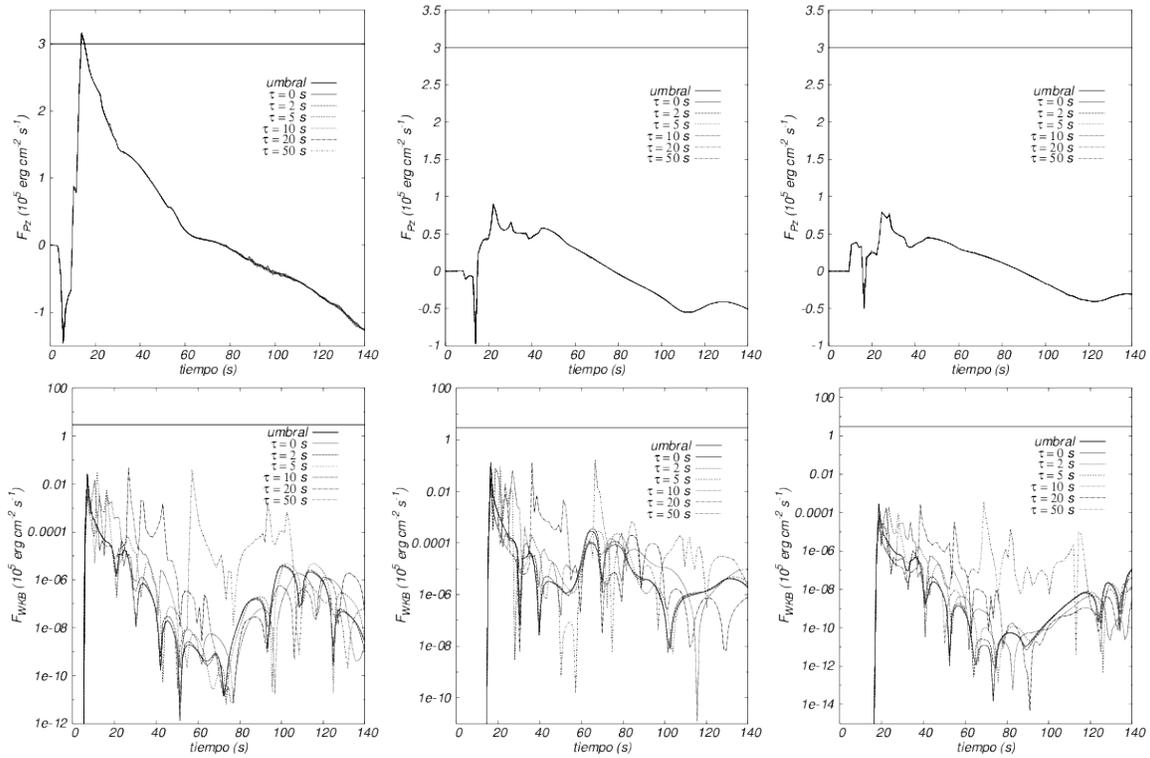


Figura 5.29: Flujos de energía  $F_{Pz}$  (arriba) y  $F_{WKB}$  (abajo) para la propagación de dos pulsos en una arcada larga usando tres detectores (de izquierda a derecha) localizados en (7.25,7) Mm, (14.5,7) Mm y (14.5,10) Mm, para  $\tau = 0, 2, 5, 10, 30, 50$  s. La línea continua indica el umbral sobre el cual los flujos contribuyen al calentamiento coronal.

cero. También en la Fig. 5.30 se muestra el primer pulso a  $t = 5$  s, este pulso experimenta una aceleración al pasar por la región de transición debido a un incremento local de la velocidad de Alfvén  $c_A$ . La forma del pulso como una elipse alargada a lo largo de la dirección vertical. Entonces a  $t = 10$  s se inyecta el segundo pulso, sin embargo al tiempo  $t = 15$  s, el efecto del segundo pulso aún no es significativa. A tiempos posteriores en la evolución, se pueden ver reflexiones y mezcla de fase en los pulsos debido a los efectos de la rarefacción en la región de transición, esto se da al tiempo  $t = 30$  s, a este tiempo los dos pulsos ya alcanzaron la corona. Al tiempo  $t = 60$  s, una señal del pulso  $v_y$  con amplitud negativa alcanza la corona, y los pulsos que se mueven verticalmente continúan haciéndolo verticalmente.

En este caso se estimó el flujo de Poynting y el WKB en diferentes detectores tal y como se muestra en la Fig. 5.31. En este caso, el flujo de Poynting no alcanza nunca el umbral para ninguna de las combinaciones de los pulsos, sin embargo, el flujo  $F_{WKB}$  excede el umbral durante un lapso de tiempo pequeño para el caso cuando se lanza el segundo pulso a un  $\tau = 5$  s, medido por el detector localizado a lo largo de la línea vertical central ubicada en  $(x = 0, z = 10)$  Mm.

Como conclusiones generales del estudio anterior se puede decir que se usó un escenario optimista en donde no solamente un pulso simple de Alfvén puede contribuir al calentamiento de la corona quieta, sino posiblemente dos pulsos lanzados en un periodo de tiempo cercano podrían hacerlo aunque eso sería equivalente a un driver continuo, que es un modelo muy especulativo. Se encontró que las ondas impulsivamente generadas en las arcadas magnéticas coronales largas o cortas, tienen la energía suficiente para calentar la corona quieta solamente durante un pequeño lapso de tiempo para el caso de una combinación particular de pulsos. En el caso de la propagación de ondas de Alfvén impulsivamente generadas en los embudos coronales, las ondas con amplitudes de  $A_v = 10 \text{ km s}^{-1}$  no tienen la suficiente energía para calentar la corona quieta, aunque se lancen dos pulsos consecutivos. Entonces se puede concluir de manera general, que las ondas de Alfvén, aún en el escenario más optimista no son candidatos para calentar la corona quieta. Sin embargo, existen otros escenarios más realistas en donde las ondas de Alfvén torsionales de alta frecuencia podrían ser una fuente de energía para calentar la corona [Srivastava et al. (2017)].

En este capítulo se han presentado algunas de las pruebas básicas de la MHD ideal y resistiva en 1D y 2D, todas las pruebas se hicieron con la versión del código en 3D. El código pasa satisfactoriamente las pruebas 1D de la MHD ideal, las cuales se llevaron a cabo en la dirección  $x$  y se comparan con la solución exacta en cada caso. Las pruebas 2D de la MHD ideal se hicieron en el plano  $xz$ , en donde se midió la constricción del campo magnético cuando se usó el Flux-CT, en la mayoría de los casos la constricción es del orden de  $\sim 10^{-12}$ , como se espera teóricamente. En el caso de las pruebas básicas en 1D del MHD resistiva, se compararon las soluciones numéricas con las exactas, y se puede ver que el código pasa las pruebas satisfactoriamente. En el caso de las pruebas básicas en 2D de

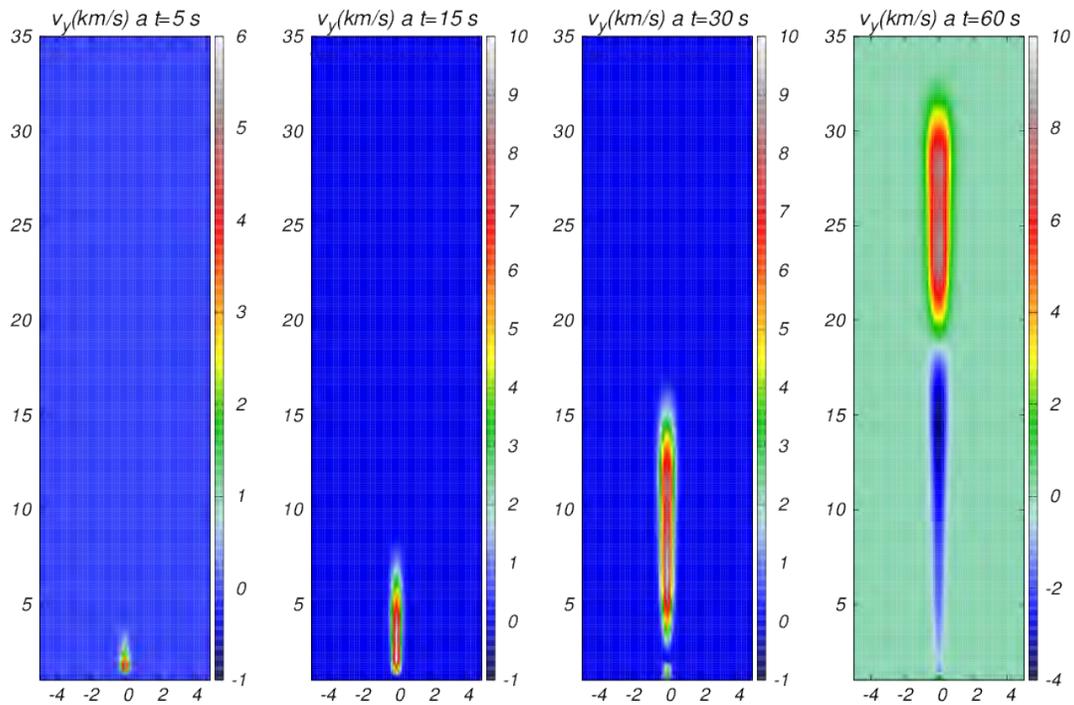


Figura 5.30: Perfiles espaciales de la interacción de dos pulsos no-lineales  $v_y(x, z, t)$  para  $A_v = 10$  km/s,  $w_x = w_z = 0.25$  Mm a los tiempos  $t = 5$  s,  $t = 15$  s,  $t = 30$  s,  $t = 60$  s. En este caso  $\tau = 10$  s.

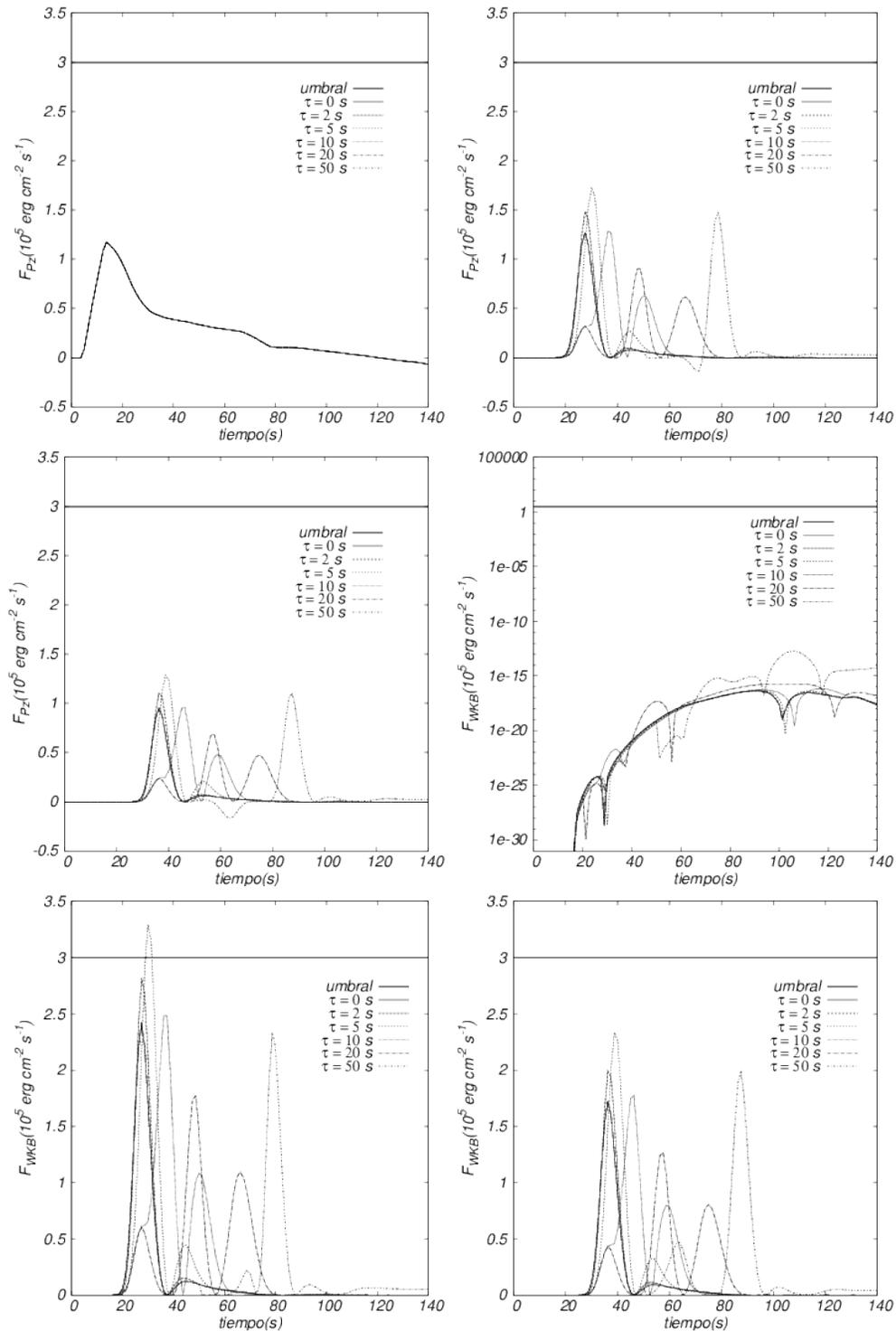


Figura 5.31: Flujos de energía  $F_{Pz}$  y  $F_{WKB}$  para la propagación de dos pulsos en un embudo coronal usando tres detectores ubicados en  $(-2.5, 10)$  Mm,  $(0, 10)$  Mm and  $(0, 15)$  Mm, para  $\tau = 0, 2, 5, 10, 20, 50$  s. El umbral se alcanza solamente para la combinación particular  $\tau = 5$  s, sin embargo este no es un caso genérico de las condiciones de la atmósfera solar.

la MHD resistiva, se vio que el código es capaz de evolucionar sistemas con un perfil de resistividad dependiente de la posición, y es capaz de describir las estructuras asociadas con las inestabilidades de la MHD resistiva. Además se describe de manera correcta los procesos de reconexión magnética lenta y rápida. También se presentaron pruebas asociadas a problemas solares, en específico se presentó el estudio de la propagación de pulsos Alfvénicos en la atmósfera formada por arcos coronales. Finalmente se presentó el estudio de la influencia de la interacción de dos ondas de Alfvén impulsivamente generadas en el proceso del calentamiento de la corona quieta. En el siguiente capítulo se presenta el estudio de la formación de jets con características de las espículas tipo II por medio del proceso de reconexión magnética en el contexto de la MHD resistiva.

# Capítulo 6

## Estudio de la formación de jets en la atmósfera solar en 2D

En este capítulo se presentan los resultados estudiados en [González-Avilés et al. (2017a)], tales resultados representan parte importante de esta tesis doctoral. En tal referencia se hacen simulaciones numéricas para mostrar que los jets con características de espículas tipo II y jets coronales fríos [Nishizuka et al. (2008)] que corresponden a temperaturas de  $10^4$  K pueden formarse como resultado de la reconexión magnética en una escenario en donde se considera el efecto de la disipación de la resistividad magnética. Para modelar la región cromosfera baja-corona se usa el modelo C7 en conjunto con una atmósfera solar en equilibrio hidrostático. La configuración de campo magnético que se analiza corresponde a dos arcos vecinos con polaridad opuesta. La formación de estructuras tipo jet depende de la separación de los arcos. Se estudian los casos en donde la magnitud del campo magnético de los arcos es igual y distinta. En el caso en donde se tiene una configuración simétrica, el jet emerge verticalmente, mientras que en el caso no simétrico los jets muestran una inclinación. Se exploran varias propiedades tales como, la inclinación, tiempo de vida y velocidad. La magnitud de campo magnético que se analiza está en el rango de 20 a 40 G y la resistividad magnética se asume uniforme con un valor constante  $\eta = 10^{-2}\Omega \cdot m$ . Debido a que se trata de resultados originales se especifican las particularidades de los métodos numéricos y modelos usados en las siguientes secciones.

### 6.1 Modelo y métodos numéricos

#### 6.1.1 El sistema de ecuaciones de la MHD resistiva

El sistema de ecuaciones que permite la formación de la reconexión magnética es la MHD resistiva, tal y como se introdujo en el capítulo 3, sin embargo para el problema en particular que se estudia en el capítulo, es necesario definir el sistema de ecuaciones de la MHD

resistiva sometidas al campo gravitacional constante del Sol y especificar que la formulación que se usa es la versión extendida de los multiplicadores de Lagrange generalizados (EGLM) [Jiang et al. (2012)]. Por lo tanto el sistema de ecuaciones está definido de la siguiente forma:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot \left( \left( p + \frac{1}{2} \mathbf{B}^2 \right) \mathbf{I} + \rho \mathbf{v} \mathbf{v} - \mathbf{B} \mathbf{B} \right) = -(\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B} + \rho \mathbf{g}, \quad (6.2)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot \left( \mathbf{v} \left( E + \frac{1}{2} \mathbf{B}^2 + p \right) - \mathbf{B} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{v}) \right) = -\mathbf{B} \cdot (\nabla \psi) - \nabla \cdot ((\eta \cdot \mathbf{J}) \times \mathbf{B}) + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}, \quad (6.3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{B} \mathbf{v} - \mathbf{v} \mathbf{B} + \psi \mathbf{I}) = -\nabla \times (\eta \cdot \mathbf{J}), \quad (6.4)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + c_h^2 \nabla \cdot \mathbf{B} = -\frac{c_h^2}{c_p^2} \psi, \quad (6.5)$$

$$\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B},$$

$$E = \frac{p}{(\gamma - 1)} + \frac{\rho \mathbf{v}^2}{2} + \frac{\mathbf{B}^2}{2},$$

en donde  $\rho$  es la densidad de masa,  $\mathbf{v}$  es el campo de velocidad,  $\mathbf{B}$  es el campo magnético,  $E$  es la densidad de energía total, en donde  $\gamma = 5/3$ , la presión del gas  $p$  está descrita por medio de la ecuación del gas ideal;  $\mathbf{g} = (0, 0, g)$  en donde  $g = 274 \text{ km s}^{-1}$  que es el valor promedio de la aceleración de la gravedad en la superficie del Sol,  $\mathbf{J}$  es la densidad de corriente,  $\eta$  es el tensor de resistividad magnética y  $\psi$  es una función escalar que ayuda a amortiguar la propagación de los errores generados por la violación de la constricción del campo magnético  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ . Como se vio en el capítulo 3,  $c_h$  es la velocidad de la onda y  $c_p$  es el rango de amortiguamiento de la onda asociada al modo característico de  $\psi$ , en este caso se usa  $c_p = \sqrt{c_r c_h}$ , con  $c_r = 0.18$  y  $c_h = 0.01$ . Para el análisis del problema se usa un modelo 2.5D, el cual significa que todas las variables de estado dependen de  $x$  y  $z$ , en donde  $x$  es la coordenada horizontal y  $z$  denota la altura, y se considera que la componente de la velocidad  $v_y$  y del campo magnético  $B_y$  pueden variar con  $x$  y  $z$ . Entonces en este problema se resuelve una versión 2.5D de las ecuaciones de la MHD resistiva sobre el plano  $xz$ . En este caso se considera una resistividad magnética uniforme y constante, ya que esta es una buena aproximación cuando se tiene una atmósfera solar completamente colisional y si se quiere usar una resistividad anómala, es decir dependiente de la densidad de corriente o de la posición, la cual es el resultado de procesos no colisionantes, podría no ser una buena

Variable	Cantidad	Unidad	Valor
$x, y, z$	Longitud		$10^6$ m
$\rho$	Densidad	$\rho_0$	$10^{-12}$ kg·m <sup>-3</sup>
$\mathbf{B}$	Campo magnético	$B_0$	11.21 G
$\mathbf{v}$	Velocidad	$v_0 = B_0 / \sqrt{\mu_0 \rho_0}$	$10^6$ m·s <sup>-1</sup>
$t$	Tiempo	$t_0 = l_0 / v_0$	1 s
$\eta$	Resistividad	$\eta_0 = l_0 \mu_0 v_0$	$1.25664 \times 10^6$ m <sup>2</sup> · s <sup>-1</sup> · N · A <sup>-2</sup>

Tabla 6.1: Factores de escala para convertir a unidades físicas

aproximación [Singh et al. (2011)]. El sistema de ecuaciones (6.1-6.5) son normalizadas con las cantidades que se encuentran en la Tabla 6.1, las cuales son escalas típicas en la corona solar.

### 6.1.2 Métodos numéricos

Se resuelve numéricamente el sistema de ecuaciones (6.1)-(6.5) sobre una malla simple y uniforme de celdas centradas, usando el método de líneas con un Runge-Kutta de tercer orden del tipo TVD para integrar en el tiempo [Shu & Osher (1989)]. Para poder aplicar el método de líneas, las partes derechas del sistema de ecuaciones (6.1)-(6.5) se discretizan usando la aproximación en volúmenes finitos en conjunto con los métodos de captura de choque de alta resolución [LeVeque (1992)]. Para la reconstrucción de variables en cada intercelda del volumen se usa el reconstructor lineal de segundo orden MINMOD. Los flujos se calculan usando el aproximador de Riemann Harten-Lax-van Leer (HLLC) [Li (2005)].

### 6.1.3 Modelo de la atmósfera solar

Se escoge un dominio que cubre parte de la fotosfera, cromosfera, y corona. En este problema se considera una atmósfera en equilibrio hidrostático y se estudia la evolución en un dominio finito del plano  $xz$ . El campo de temperatura se asume que obedece el modelo semi-empírico C7 que cubre la región cromosfera-región de transición [Avrett & Loeser (2008)] y su distribución se obtiene de manera que concuerde con las observaciones de las líneas espectrales en el continuo, las líneas de intensidades, y los perfiles del catálogo del espectro del extremo ultravioleta SUMER [Curdt et al. (1999)]. Tal modelo de la atmósfera incluye la fotosfera tal y como se presenta en [Fontela et al. (1990)] y se extiende hasta la corona de la manera como se describe en [Griffiths et al. (1999)]. Los perfiles de  $T(z)$  y  $\rho(z)$  se muestran en la Fig. 6.1, en donde claramente se ven los gradientes en la región de transición.

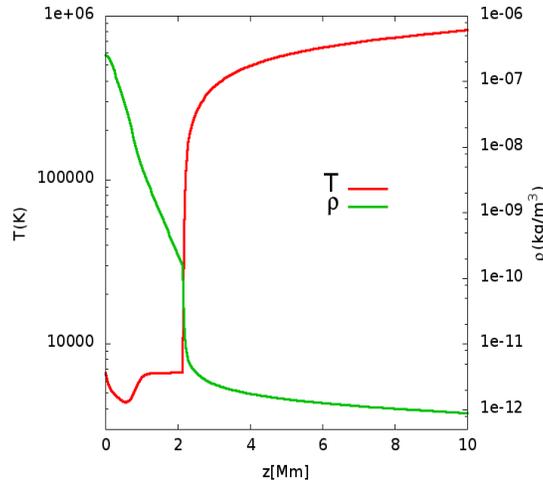


Figura 6.1: Temperatura ( $T$ ) y densidad de masa ( $\rho$ ) como función de la altura  $z$  para el modelo C7 de la atmósfera solar en equilibrio. Se puede ver el gradiente pronunciado en la región de transición en  $z \approx 2.1$  Mm.

### 6.1.4 Modelo del campo magnético

El modelo del campo magnético se escoge como una superposición de dos arcos vecinos. La idea detrás de este tipo de configuración es que el campo magnético de los dos arcos tiene una diferente polaridad en la región en donde son cercanos el uno al otro. Ha sido observado que este tipo de configuraciones pueden desencadenar la formación de ráfagas solares como se reporta en las referencias [Takasao et al. (2012), Su et al. (2013)], en donde por medio de los datos en el extremo ultravioleta y de rayos-X se observaron indicios de la reconexión magnética, especialmente en arcos fríos afluentes y arcos calientes salientes. Inspirados por estas ideas, en este problema se considera una topología del campo magnético con una magnitud más débil que para el caso de las ráfagas solares. Siguiendo las referencias [Priest (1982), Del Zanna et al. (2005)], se construye un arco mediante el potencial vectorial

$$A_y(x, z) = \frac{B_{01}}{k} \cos(kx) \exp(-kz), \quad (6.6)$$

en donde  $B_{01}$  es la magnitud del campo magnético fotosférico en los puntos de pie  $x = \pm L/2$  y  $k = \pi/L$ . Aquí  $L$  es la distancia entre los dos puntos de pie del arco y  $k$  define los nodos del potencial. En este modelo las componentes del campo magnético están representadas como

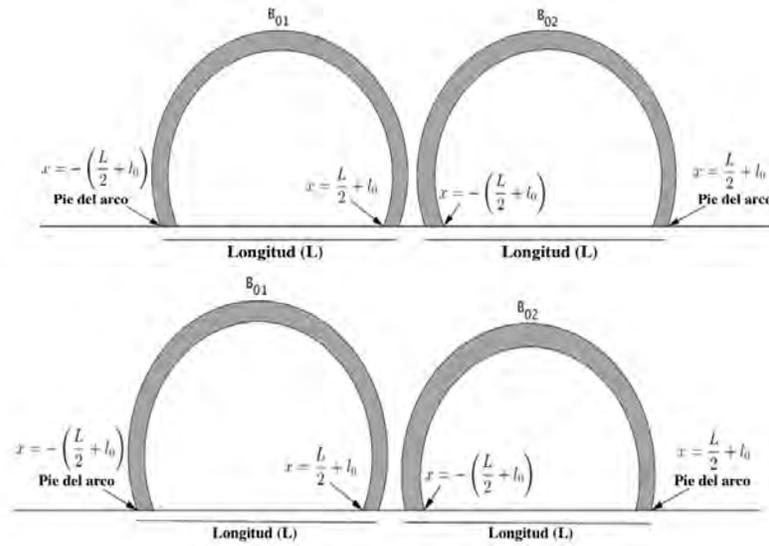


Figura 6.2: En la parte de arriba se muestran dos arcos magnéticos vecinos simétricos con la misma magnitud del campo  $B_{01} = B_{02}$ . En la parte de abajo se muestran dos arcos magnéticos vecinos no simétricos para el caso  $B_{01} > B_{02}$ . La longitud de cada arco se representa por  $L$  y la posición de los puntos del pie está determinada por el parámetro  $l_0$ .

$$B_x(x, z) = B_{01} \cos(kx) \exp(-kz), \quad (6.7)$$

$$B_z(x, z) = -B_{01} \sin(kx) \exp(-kz). \quad (6.8)$$

Para superponer dos arcos usamos la siguiente versión modificada de (6.6):

$$A_y(x, z) = \frac{B_{01}}{k} \cos(k(x + l_0)) \exp(-kz) + \frac{B_{02}}{k} \cos(k(x - l_0)) \exp(-kz), \quad (6.9)$$

donde  $l_0$  define la posición de los puntos del pie de cada arco,  $B_{01}$  y  $B_{02}$  son las magnitudes del campo magnético de los arcos izquierdo y derecho respectivamente. Con el parámetro  $l_0$  es posible controlar la separación entre los dos arcos magnéticos, los cuales a su vez influyen en el espesor de la hoja de corriente. El caso  $B_{01} = B_{02}$  describe dos configuraciones de arcos vecinos con la misma magnitud del campo magnético, mientras que  $B_{01} \neq B_{02}$  describe dos arcos vecinos con diferente magnitud del campo magnético. Una pintura esquemática de estas configuraciones se muestra en la Fig. 6.2.

## 6.2 Resultados de las simulaciones numéricas

Se estudia la formación de las estructuras tipo jet considerando distintos escenarios en donde se varía la magnitud del campo magnético y la separación entre los arcos. En este caso se fijó el valor de  $k\pi/L$  con  $L = 8$  Mm, y las simulaciones se llevaron a cabo en un dominio  $x \in [-4, 4]$ ,  $y \in [0, 1]$ ,  $z \in [0, 10]$  en unidades de Mm, cubierto con  $300 \times 4 \times 375$  celdas. En todas las simulaciones se usaron condiciones de frontera de flujo saliente, tales condiciones son apropiadas para el problema debido a que se comportan como estacionarias a medida que el fluido se aproxima a las fronteras, y tan rápido como es posible cualquier modo que llegue a las fronteras es libre de dejar el dominio. En la Tabla 6.2, se presentan los resultados obtenidos para varias corridas.

### 6.2.1 Configuraciones simétricas

En esta subsección se muestran los resultados para el caso  $B_{01} = B_{02}$  para tres valores diferentes de la magnitud del campo magnético: 20, 30, 40 G y  $l_0 = 2.5, 3.0, 3.5$  Mm. Algunas de las simulaciones más representativas para este caso se muestran en la Fig. 6.3 para  $l_0 = 3.5$  Mm. La corrida #1 corresponde a la formación típica de un jet, con una característica especial en su cima, la cual como se discute más adelante está relacionada con la formación de una inestabilidad tipo Kelvin-Helmholtz (KHI, por sus siglas en inglés). El jet alcanza una altura máxima de 7.3 Mm, la cual está denotada por  $h_{max}$  en todos los casos que se presentan aquí. La velocidad vertical del jet calculada en la altura máxima  $h_{max}$  es  $v_{z,h_{max}} \approx 15.4$  km s<sup>-1</sup>; dicho cálculo es diferente al que se hace en [Hegglund et al. (2007)], en donde la máxima velocidad se calcula en todo el dominio, y en este caso se estima en la altura máxima  $h_{max}$  para descartar la posibilidad de que la velocidad máxima se alcance en la base del jet en lugar que en la cima. Dicha altura máxima se alcanza al tiempo  $t_{h_{max}} = 210.2$  s. Después de este tiempo, el jet comienza a caer hasta prácticamente desaparecer al tiempo aproximado  $t \approx 400$  s. Para tener una idea de cómo varían la temperatura y la velocidad dentro del jet, en la Fig. 6.4 se muestra la estimación de la temperatura  $T_{dentro}$  y  $v_{z,dentro}$  como funciones del tiempo, en donde el subíndice “dentro” significa que dichas cantidades son medidas en la cima del jet durante la evolución. En la Fig. 6.3 se muestra también la magnitud de la densidad de corriente  $|J|$ , la cual muestra que es más intensa en la región en donde se forma el jet, lo que significa que hay una corriente asociada. En el panel de la mitad de la Fig. 6.3 se muestran los resultados para la corrida #3. En este caso se tiene una magnitud del campo magnético más débil, por lo tanto el jet resultante alcanza una altura máxima de 3.9 Mm al tiempo  $t = 196.8$  s. Finalmente, en el panel de abajo de la Fig. 6.3, se muestran los resultados de la corrida #6; en este caso el efecto de tener un campo magnético aún más débil se nota en que el jet que aparece es más pequeño y alcanza una altura máxima de 1.2 Mm con una velocidad  $v_{z,h_{max}} \approx 8.7$  km s<sup>-1</sup> al tiempo  $t = 160$  s. De acuerdo a los resultados mostrados para estas tres corridas, la altura del jet es mayor

para valores más grandes de  $B_{01} = B_{02}$ , y la estructura del jet es también más clara para campos magnéticos más intensos.

Como conclusión general de los resultados obtenidos en este caso, se puede decir que la separación de los arcos determina la formación de los jets. En este caso de las configuraciones con una mayor separación, el plasma se acelera más rápidamente hacia los lados del dominio, lo que produce difusión y en consecuencia que no se forme el jet. Sin embargo, en el caso de dos arcos más cercanos, el plasma se acelera más lentamente, lo que permite que se forme una estructura tipo jet en tiempos posteriores. De acuerdo a los resultados, y el espacio de parámetros analizado, el valor más efectivo de  $l_0$  para propiciar la formación de un jet es  $l_0 = 3.5$  Mm.

### 6.2.2 Configuraciones no simétricas

En este caso se muestran los resultados para una configuración de campo menos idealista en donde los dos arcos tienen diferentes magnitudes 20, 30, y 40 G y  $l_0 = 2.5, 3.0, 3.5$  Mm. Para ilustrar el efecto de la asimetría en la formación de los jets, se muestran en la Fig. 6.5 los resultados de las corridas #7, #9, y #12. En el panel superior se presentan los resultados de la corrida #7, en donde la principal característica del jet es que muestra una inclinación en dirección del arco con una magnitud del campo más débil. De manera similar al caso de las configuraciones simétricas, la parte superior del jet exhibe una estructura similar a una inestabilidad del tipo KHI [Kuridze et al. (2016)]. Este jet alcanza una altura máxima de 7.2 Mm y velocidad vertical  $v_{z,h_{max}} = 16.8 \text{ km s}^{-1}$  al tiempo  $t = 213.3$  s. Tal y como en el caso simétrico, el jet comienza a difundirse y finalmente desaparece. En los paneles de la mitad de la Fig. 6.5 se muestran los resultados de la corrida #9, y en este caso el jet muestra una inclinación más significativa. El jet alcanza una altura máxima de 6.7 Mm y una velocidad vertical  $v_{z,h_{max}} \approx 31 \text{ km s}^{-1}$  al tiempo  $t = 211.2$  s. En este caso se muestra la magnitud de la densidad de corriente  $|\mathbf{J}|$ , en donde se puede ver que la densidad de corriente es más intensa en donde se forma el jet. En la parte inferior de la Fig. 6.5 se muestran los resultados de la corrida # 12, en donde se puede ver que el jet es pequeño, esto debido a que los arcos tienen un campo magnético más débil. La altura máxima de este jet es de aproximadamente 3.1 Mm, y su velocidad vertical es  $v_{z,h_{max}} \approx 5.8 \text{ km s}^{-1}$  al tiempo  $t = 204.8$  s.

El campo de velocidad muestra que el plasma se mueve en dirección del arco con el campo magnético más débil. Además se pueden apreciar algunas similitudes geométricas de los mapas de la magnitud de la densidad de corriente  $|\mathbf{J}|$  obtenidos en las simulaciones, con la imagen obtenida por el Hinode/SOT en la banda estrecha del Ca II H (ver la Fig. 1 de la referencia [Tavabi et al. (2015a)]).

Los resultados obtenidos para todas las combinaciones de los configuraciones magnéticas

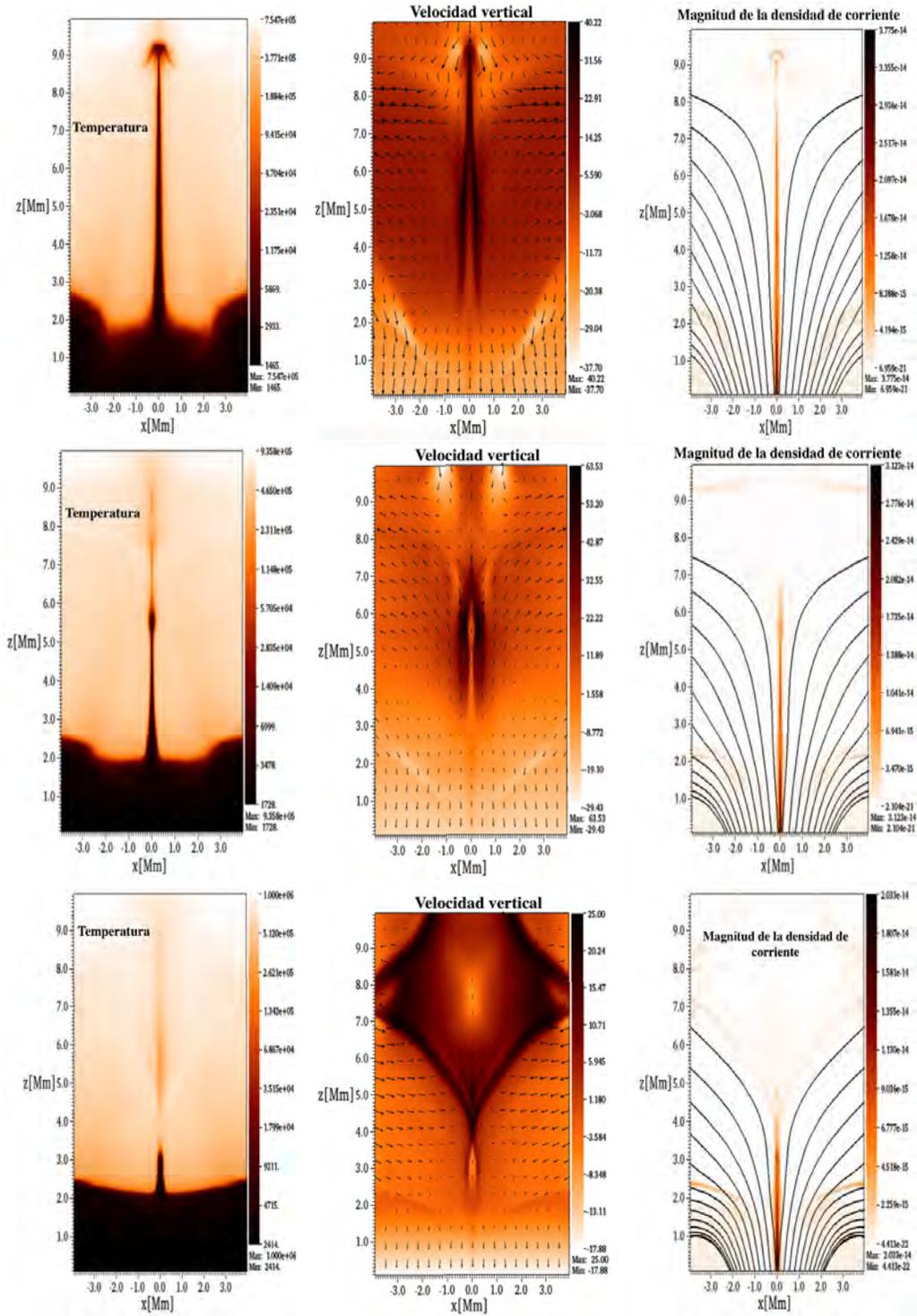


Figura 6.3: De izquierda a derecha se muestran instantáneas de i) logaritmo de la temperatura en Kelvin, ii) componente de la velocidad ( $v_z$  km s<sup>-1</sup>); las flechas muestran la distribución del campo de velocidad, iii) la magnitud de la densidad de corriente  $|\mathbf{J}|$  (A m<sup>-2</sup>). En la parte superior se muestran los resultados para la Corrida # 1, en donde  $B_{01} = B_{02} = 40$  G al tiempo  $t = 210.136$  s. En la figura del medio se muestran los resultados de la Corrida # 3, en donde  $B_{01} = B_{02} = 30$  G al tiempo  $t = 196.8$  s. Finalmente en la parte inferior de muestran los resultados de la Corrida # 6, en donde  $B_{01} = B_{02} = 20$  G al tiempo  $t = 160$  s. En todos los casos  $l_0 = 3.5$  Mm.

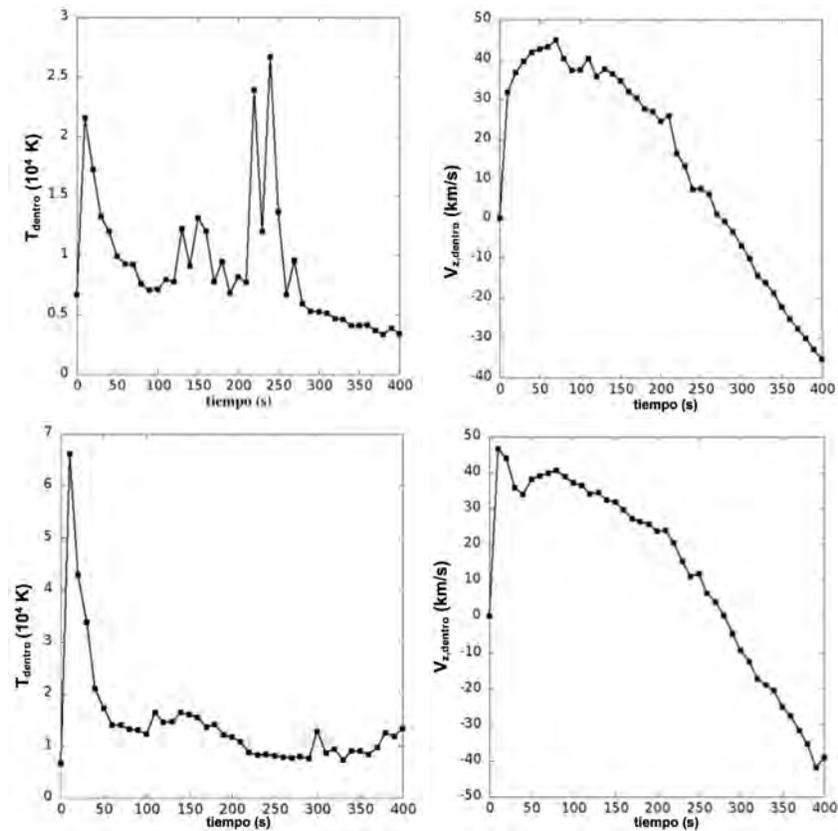


Figura 6.4: Se muestran algunas propiedades del jet usando estimaciones de la temperatura del jet  $T_{dentro}$  y la velocidad vertical  $v_{z,dentro}$  como una función del tiempo. Se estiman cada 10 segundos. En la parte superior se muestra el caso  $B_{01} = B_{02} = 40$  G y  $l_0 = 3.5$  Mm. De las estimaciones de la velocidad se puede ver que el jet comienza a dispersarse al tiempo  $t \approx 200$  s. En la parte inferior se muestra el caso  $B_{01} = 40$ ,  $B_{02} = 30$  G and  $l_0 = 3.5$  Mm, en donde el jet comienza a dispersarse en aproximadamente  $t \approx 200$  s.

corrida #	$B_{01}$ (G)	$B_{02}$ (G)	$l_0$ (Mm)	$h_{max}$ (Mm)	$v_{z,h_{max}}$ (km s <sup>-1</sup> )	$T_{dentro,h_{max}}$ (K)	$\rho_{dentro,h_{max}}$ (kg m <sup>-3</sup> )	$t_{h_{max}}$ (s)
1	40	40	3.5	7.3	15.4	14200	$1.32 \times 10^{-10}$	210.2
2	30	30	2.5	2.3	33.9	48452	$2.5 \times 10^{-10}$	70.4
3	30	30	3.5	3.9	13.4	22532	$1.3 \times 10^{-10}$	196.8
4	20	20	2.5	1.5	12.1	25933	$1.2 \times 10^{-10}$	94.4
5	20	20	3.0	1.8	3.7	47990	$1.0 \times 10^{-10}$	142.4
6	20	20	3.5	1.2	8.7	27334	$1.4 \times 10^{-10}$	160
7	40	30	3.5	7.2	16.8	34112	$4.0 \times 10^{-11}$	213.3
8	40	20	3.0	1.2	76.5	76467	$1.0 \times 10^{-9}$	11.2
9	40	20	3.5	6.7	31.0	110560	$1.2 \times 10^{-11}$	211.2
10	30	20	2.5	2.8	61.4	30565	$6.4 \times 10^{-10}$	52.8
11	30	20	3.0	2.7	11.0	31201	$8.6 \times 10^{-11}$	139.2
12	30	20	3.5	3.1	5.8	31931	$5.8 \times 10^{-11}$	204.8

Tabla 6.2: Parámetros de las corridas y resultados de las simulaciones. Altura máxima, velocidad vertical, temperatura, densidad y el tiempo en que los jets alcanzan su altura máxima para cada caso de la configuración magnética. Incluimos los casos simétrico ( $B_{01} = B_{02}$ ) y no simétrico ( $B_{01} \neq B_{02}$ ).

se presentan en la Tabla 6.2. En donde se muestra la altura máxima  $h_{max}$ , la velocidad del jet a lo largo de la dirección vertical  $v_{z,h_{max}}$ , la temperatura del plasma dentro del jet  $T_{dentro}$  medida en la altura máxima  $h_{max}$ , la densidad dentro del jet  $\rho_{dentro}$  también es medida en la altura máxima, y también se muestra el tiempo cuando los jets alcanzan su altura máxima denotado por  $t_{h_{max}}$ .

En el caso de las configuraciones magnéticas no simétricas, la inclinación depende de la razón del campo magnético entre los dos arcos, tal y como se muestra en la Fig. 6.5. Para tener una idea de esta dependencia de forma más clara, en la Fig. 6.6 se muestra el ángulo de inclinación de los jets como función del cociente  $B_{02}/B_{01}$  para diferentes valores del parámetro de separación  $l_0$  al tiempo cuando el jet alcanza su altura máxima para cada uno de los casos.

### 6.2.3 Característica de los jets relacionada con la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz

Durante la evolución del jet y en especial cuando alcanza una altura máxima, se puede ver que aparece una estructura que puede estar relacionada con una inestabilidad del tipo Kelvin-Helmholtz, es por eso que se quiso profundizar un poco más en este sentido, y ver si realmente esa característica tiene que ver con tal inestabilidad. Para esto se monitoreo la condición definida en las referencias [Chandrasekhar (1961), Cowling (1976)] dada por la siguiente expresión

$$\frac{B_z^{(-)2} + B_z^{(+2)}}{\mu_0 \rho^{(+)} \rho^{(-)}} (\rho^{(+)} + \rho^{(-)}) \geq (v_z^{(-)} - v_z^{(+)} )^2, \quad (6.10)$$

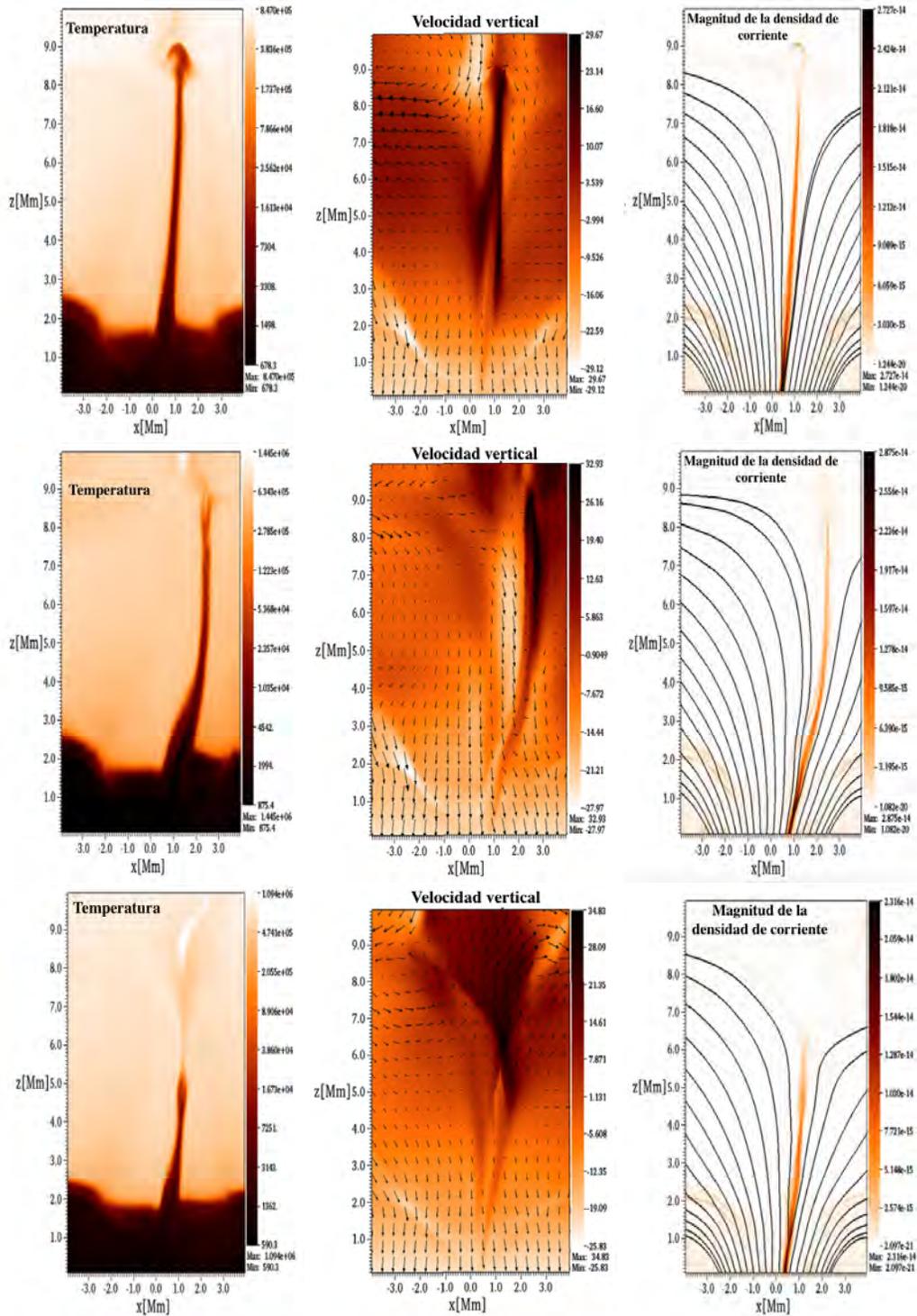


Figura 6.5: De izquierda a derecha se muestran instantáneas de i) logaritmo de la temperatura en Kelvin, ii) componente de la velocidad ( $v_z \text{ km s}^{-1}$ ); las flechas muestran la distribución del campo de velocidad, iii) la magnitud de la densidad de corriente  $|\mathbf{J}| \text{ (A m}^{-2}\text{)}$ . En la parte superior se muestran los resultados para la corrida # 7, en donde  $B_{01} = 40, B_{02} = 30 \text{ G}$  al tiempo  $t = 213.3 \text{ s}$ . En las figuras del medio se muestran los resultados de la corrida # 9, en donde  $B_{01} = 40, B_{02} = 20 \text{ G}$  al tiempo  $t = 211.2 \text{ s}$ . Finalmente en la parte inferior se muestran los resultados de la corrida # 13, en donde  $B_{01} = 30, B_{02} = 20 \text{ G}$  al tiempo  $t = 204.8 \text{ s}$ . En todos los casos  $l_0 = 3.5 \text{ Mm}$ .

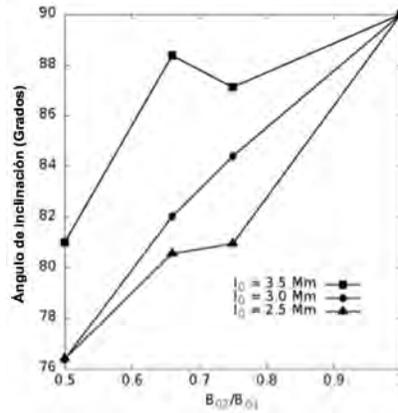


Figura 6.6: El ángulo de inclinación del jet como una función de la razón  $B_{02}/B_{01}$  medido cuando el jet alcanza su altura máxima para los casos de configuraciones no simétricas con separaciones  $l_0 = 3.5, 3.0, 2.5$  Mm.

en donde  $B_z^{(-)}$  and  $B_z^{(+)}$  representan la componente vertical del campo magnético afuera y dentro del jet, respectivamente. Aquí  $\rho^{(-)}$  and  $\rho^{(+)}$  son los valores correspondientes de la densidad de masa,  $\mu_0$  es la permeabilidad magnética y  $v_z^{(-)}$ ,  $v_z^{(+)}$  son las componentes verticales de la velocidad. La condición (6.10) implica que si el campo magnético es paralelo al jet, entonces la perturbación producida por la velocidad comprime las líneas de campo y produce una fuerza de restauración cuando el campo magnético es lo suficientemente intenso para suprimir la inestabilidad y entonces la condición se satisface.

Se estimaron las cantidades involucradas en la ecuación (6.10) en dos lugares distintos y a dos diferentes tiempos, de tal forma que se pudiera rastrear la violación de la condición. Para hacer este análisis, se consideró la corrida #1 y para verificar si se satisface o no la ecuación (6.10) se estimó a los tiempos  $t_1 = 100$  s, cuando el jet aún se está moviendo hacia arriba y posiblemente se produzca una inestabilidad KH, y al tiempo  $t_2 = 210$  s, que es al tiempo cuando está más cerca de su altura máxima, y el bulbo ya está formado. Los resultados de las mediciones se presentan en la Tabla 6.3. Se encontró que al tiempo  $t = t_1$  la desigualdad se cumple por aproximadamente un orden de magnitud, mientras que al tiempo  $t = t_2$ , es decir en la parte superior del jet, la desigualdad casi se satisface, lo que implica que la inestabilidad KH tiende a aparecer pero es suprimida por el campo magnético. Sin embargo, en la parte inferior del jet la desigualdad está cercana a satisfacerse y entonces no se ve ninguna característica asociada con la inestabilidad KH. Por lo tanto de acuerdo a los parámetros de la Tabla 6.3 para ambos ejemplos, la condición dada por la ecuación (6.10) se satisface, lo cual implica que el campo magnético debe suprimir la inestabilidad tipo KH.

En este capítulo se presentaron los resultados numéricos de las ecuaciones de la MHD resistiva sometidas al campo gravitacional constante del Sol, y se simuló la formación de

	$\rho^{(+)} (\text{kg m}^{-3})$	$\rho^{(-)} (\text{kg m}^{-3})$	$v_z^{(+)} (\text{km s}^{-1})$	$v_z^{(-)} (\text{km s}^{-1})$	$B_z^{(+)} (\text{T})$	$B_z^{(-)} (\text{T})$	time (s)
Ejemplo 1 (Parte inferior del jet)	$2.27 \times 10^{-9}$	$2.96 \times 10^{-10}$	7.54	1.35	$5.6 \times 10^{-4}$	$1.94 \times 10^{-3}$	100.3
Parte superior del jet	$1.66 \times 10^{-10}$	$2.06 \times 10^{-12}$	38.86	25.27	$2.83 \times 10^{-4}$	$3.99 \times 10^{-4}$	100.3
Ejemplo 2 (Parte inferior del jet)	$1.057 \times 10^{-9}$	$3.57 \times 10^{-11}$	-5.85	-7.07	$4.39 \times 10^{-4}$	$1.33 \times 10^{-3}$	210.2
Parte superior del jet	$1.40 \times 10^{-10}$	$7.12 \times 10^{-12}$	15.4	-4.60	$-3.056 \times 10^{-5}$	$-2.7 \times 10^{-4}$	210.2

Tabla 6.3: Estimación de los parámetros relacionados con la condición (6.10).

estructuras estrechas tipo jet en la interfase de la cromosfera baja-corona. Para esto se uso una configuración magnética formada por la superposición de dos arcos, que desencadenan el proceso de reconexión magnética. El modelo es idealizado en el sentido de que usa una región con polaridad opuesta, sin embargo muchas de las espículas tipo II son observadas en regiones donde el campo magnético es predominantemente unipolar.

Un ingrediente importante de las simulaciones llevadas a cabo es que se usa un modelo de la atmósfera solar que incluye la región de transición, lo cual implica que se tiene una región rarificada que a su vez ayuda a la aceleración del plasma. Se pueden resumir los resultados encontrados por medio del bosquejo que se muestra en la Fig. 6.7. Tal atmósfera rarificada tiene que ver con la formación de un bulbo en la parte superior de los jets, lo cual sería muy interesante si tuviera que ver con la inestabilidad de KH aparición de la característica [Kuridze et al. (2016)], pero en este problema es contenida y estabilizada por el campo magnético tal y como se propone en [Zaqarashvili et al. (2014)].

Se analizaron dos casos de las configuraciones de arcos magnéticos. En el caso simétrico, se estimaron diferentes propiedades de los jets en términos de la separación y de la magnitud del campo magnético. El campo magnético se tomó en el rango de 20 a 40 G, y de acuerdo a los resultados se puede concluir que para un campo magnético más intenso a nivel fotosférico, el jet alcanza una altura mayor. También se estimó la temperatura dentro del jet, la cual es del orden de  $10^4$  K en todos los casos, dicho valor está en el rango de un jet frío [Nishizuka et al. (2008)]. Uno de los ejemplos más representativos del caso simétrico es  $B_{01}=B_{02}$  G y  $l_0 = 3.5$  Mm, en tal caso el jet alcanza una altura máxima de 7.3 Mm medida desde la región de transición y una velocidad vertical de  $v_{z,h_{max}} \approx 15.4 \text{ km s}^{-1}$ . El tiempo de vida de los jets es de aproximadamente 200 s, el cual está un poco arriba del tiempo de las espículas tipo II, que está entre 50-150 s [De Pontieu et al. (2007c)], además de que la velocidad es menor a la que se ha obtenido en las observaciones.

En el caso de las configuraciones no simétricas, también se obtuvieron estructuras tipo jets con temperaturas, velocidad, altura y tiempo de vida, similares al caso simétrico. La principal característica de estas configuraciones, es que los jets muestran una inclinación considerable hacia el arco con el campo magnético más débil. Se encontró tal y como lo muestra la Fig. 6.6, que la inclinación depende del cociente de campo magnético entre los dos arcos.

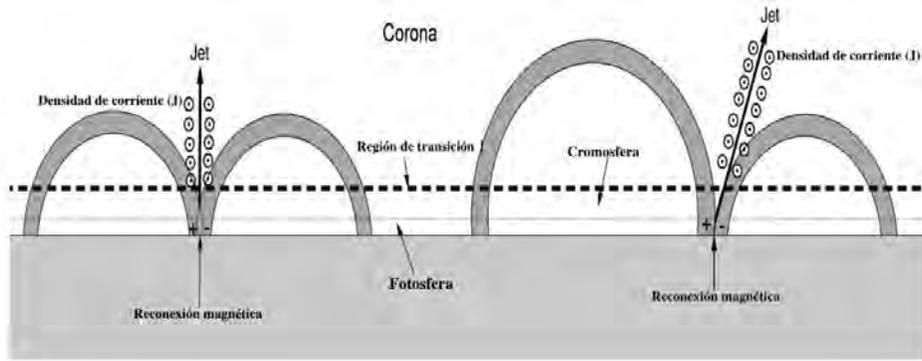


Figura 6.7: Se muestran las dos configuraciones de arcos magnéticos con pies a nivel fotosférico. Inicialmente los dos arcos magnéticos están suficientemente cerca y tienen polaridad opuesta, lo cual ayuda que se de la reconexión magnética. En el caso de dos arcos simétricos (izquierda) el jet aparece a la mitad de la configuración y se mueve hacia arriba hasta alcanzar la corona solar, y después se difunde. En el caso de dos arcos no simétricos (derecha) los jets se forman y evolucionan a lo largo de la mitad de la configuración, pero en este caso el arco con el campo magnético más intenso empuja al jet hacia el arco con campo magnético más débil. En ambos casos se puede ver una corriente intensa asociada con la formación del jet.

De acuerdo a los resultados obtenidos en este capítulo, un buen modelo para la formación de jets que imitan algunas de las características de los jets coronales fríos y de las espículas tipo II, es mediante una configuración de arcos magnéticos lo suficientemente cercanos y con polaridad opuesta. Esto produce reconexión magnética, la cual acelera el plasma, además de que se debe incluir la resistividad magnética como parte de la difusión de las líneas de campo magnético. En el siguiente capítulo se presenta el estudio de la formación de jets con características de las espículas tipo II mediante el proceso de la reconexión magnética en una atmósfera solar que está formada por una configuración de campo magnético en 3D.

## Capítulo 7

# Estudio de la formación de jets en la atmósfera solar en 3D

Se han llevado a cabo simulaciones numéricas en 3D de la formación de jets en la atmósfera sola considerando a la reconexión magnética como el mecanismo principal, por ejemplo en [Gontikakis et al. (2009)], se hacen simulaciones numéricas MHD en 3D para estudiar la dinámica del flujo magnético emergente y la subsecuente reconexión magnética con un flujo magnético preexistente generado por una región activa. Mediante las simulaciones numéricas se encontró la aparición de flujos bidireccionales calientes y de alta velocidad que se forman debido al proceso de reconexión magnética cuando aparece un flujo emergente en la región activa. En la referencia [Archontis et al. (2010)], los autores resuelven las ecuaciones de la MHD resistiva con términos de viscosidad usando el código Lared3D [Arber et al. (2001)] para estudiar la interacción de un tubo de flujo toroidal con un campo magnético preexistente de una región activa en la atmósfera solar. Se encontró que la generación del flujo magnético produce una perturbación en el campo de la región activa, que a su vez causa reconexión magnética entre los campos vecinos y produce la liberación de la energía almacenada, lo que finalmente genera la emisión de estructuras tipo jet. Otro de los enfoques se presenta en la referencia [Martínez-Sykora et al. (2011)], en donde se resuelven las ecuaciones completas de la MHD en 3D considerando efectos de transferencia radiativa en el límite de un cuerpo no gris, es decir un cuerpo que no absorbe toda la radiación electromagnética incidente y que está fuera del equilibrio termodinámico local, además se considera el efecto de la conductividad térmica a lo largo de líneas de campo magnético. De los resultados de las simulaciones se encontró que se forman jets con características de espículas tipo II, en donde el mecanismo de generación es una fuerza de Lorentz muy intensa debido a los gradientes de campo magnético y por las corrientes eléctricas intensas. Otro enfoque en el estudio de formación de jets, se presenta en la referencia [Jiang et al. (2015)], en donde se estudian erupciones solares en una región de campo magnético no potencial mediante la MHD en 3D y se usan magnetogramas solares como

condición de frontera a nivel fotosférico. En tal referencia se llevaron a cabo simulaciones numéricas del campo magnético coronal seguido de una evolución cuasi-estática de larga duración hasta que genera una erupción rápida, la transición clave del estado pre-eruptivo al eruptivo se debe a una retroalimentación positiva entre la expansión hacia arriba de arca-das magnéticas y la reconexión magnética externa que desencadena la erupción. Además tal y como se reportó en [Tian et al. (2014)], las observaciones revelan el predominio de jets intermitentes de pequeña escala en la región de transición y cromosfera. Estos jets construirían una fuente de masa y energía que aceleraría el viento solar.

Más recientemente en la referencia [Wyper et al. (2017)] se ha propuesto un mecanismo universal para las erupciones solares. En tal referencia se resolvieron las ecuaciones de la MHD ideal en 3D para simular un jet coronal conducido por una eyección de filamentos, en donde una región de campo magnético altamente cizallado que se encuentra cerca de la superficie solar llega a ser inestable y entra en erupción. Los principales resultados de este trabajo muestran que la reconexión magnética causa una liberación de energía por medio de una ruptura magnética, es decir mediante un mecanismo de retroalimentación positiva entre la eyección de filamento y la reconexión. Finalmente se concluyó que si las eyecciones de masa coronal y los jets se consideran fenómenos de un origen físicamente idéntico, entonces la reconexión magnética también debe ser la base de las eyecciones de masa coronal, y en consecuencia la ruptura magnética es un modelo universal de las erupciones solares.

Tomando como motivación las referencias anteriores, en este capítulo se estudia la posibilidad de que la reconexión magnética sea el mecanismo responsable para la formación de jets con características de espículas tipo II. Para esto se considera una atmósfera solar formada por una configuración de campo magnético en 3D. En este caso no se estudiarán las erupciones solares, ni el efecto que tiene el flujo magnético emergente que interactúa con un campo magnético preexistente, sino más bien se estudiará el efecto que tiene la resistividad magnética como mecanismo de disipación para producir reconexión magnética. De igual forma que en el caso 2D mostrado en el capítulo anterior, se modela la región fotosfera-corona usando el modelo C7, y se asume que las ecuaciones de la MHD resistiva sometidas al campo gravitacional del Sol son las que dictan la dinámica del plasma. La configuración magnética inicial que se analiza es un campo magnético potencial en 3D, el cual es extrapolado de una simulación fotosférica del Sol quieto. En este problema se asume que la resistividad magnética es uniforme y constante sobre todo el dominio, y su valor es  $\eta = 10^{-5}$ .

## 7.1 Modelo y métodos numéricos

### 7.1.1 El sistema de ecuaciones de la MHD resistiva

En este caso se resuelve el sistema de ecuaciones de la MHD resistiva sometidas a un campo gravitacional constante en el formulación EGLM en 3D dadas por las ecuaciones (6.1)-(6.5). Las diferencias para este caso son que las constantes  $c_p = 0.18$  y  $c_h = 0.1$ , y como se trata de un problema en 3D caracterizado por una atmósfera realista en donde se tienen beta del plasma del orden  $\beta \sim 10^{-2}$  en la región de transición, es complicado mantener la estabilidad del código especialmente cuando se usa la formulación conservativa de las ecuaciones, esto es, cuando se resuelve la ecuación de la densidad de energía total. La principal razón de esto radica en que para calcular la presión del gas se tiene que usar la energía térmica, la cual a su vez se obtiene restando la energía cinética y la energía magnética. Entonces en el caso de la atmósfera solar la energía térmica y cinética puede llegar a ser muchos ordenes de magnitud menores que la energía magnética, por lo tanto se producen presiones del gas negativas que generan resultados no físicos. Estas inconsistencias y problemas de estabilidad del código se resolvieron usando la ecuación de la densidad de entropía en lugar de la ecuación de la densidad de energía total para obtener la presión, lo que permitió mantener positiva la presión del gas durante toda la evolución del problema. La ecuación de la densidad de entropía que se usó está definida de la siguiente forma:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \cdot (S \mathbf{v}) = (\gamma - 1) \rho^{1-\gamma} \eta \mathbf{J}^2, \quad (7.1)$$

en donde  $S = \frac{P}{\rho^{\gamma-1}}$  es la densidad de entropía,  $\eta$  es la resistividad magnética, que para este problema es uniforme y constante,  $\gamma$  es el coeficiente de dilatación adiabática y  $\mathbf{J}^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$  es la magnitud al cuadrado de la densidad de corriente. Se usan los mismos factores de normalización que para las ecuaciones del problema 2D, tales factores están definidos en la Tabla 6.1, y representan escalas típicas de la corona solar.

### 7.1.2 Configuración de campo magnético

Como condición inicial del campo magnético, se usa un campo magnético potencial en 3D, el cual es extrapolado de una simulación fotosférica del Sol quieto. Esta configuración ha sido obtenida de una simulación a gran escala, de alta resolución y auto-consistente de la magnetoconvección solar usando el código MURaM [Shelyag et al. (2012), Vögler et al. (2005)]. El dominio computacional original tiene un tamaño de  $480 \times 480 \times 400$  pixeles en la imagen con una resolución espacial de 25 km en todas las direcciones. La extrapolación del campo potencial se basa en el método potencial-vector de Grad-Rubin, tal y como se describe en [Amari et al. (1997)]. En este trabajo se selecciona una región del dominio

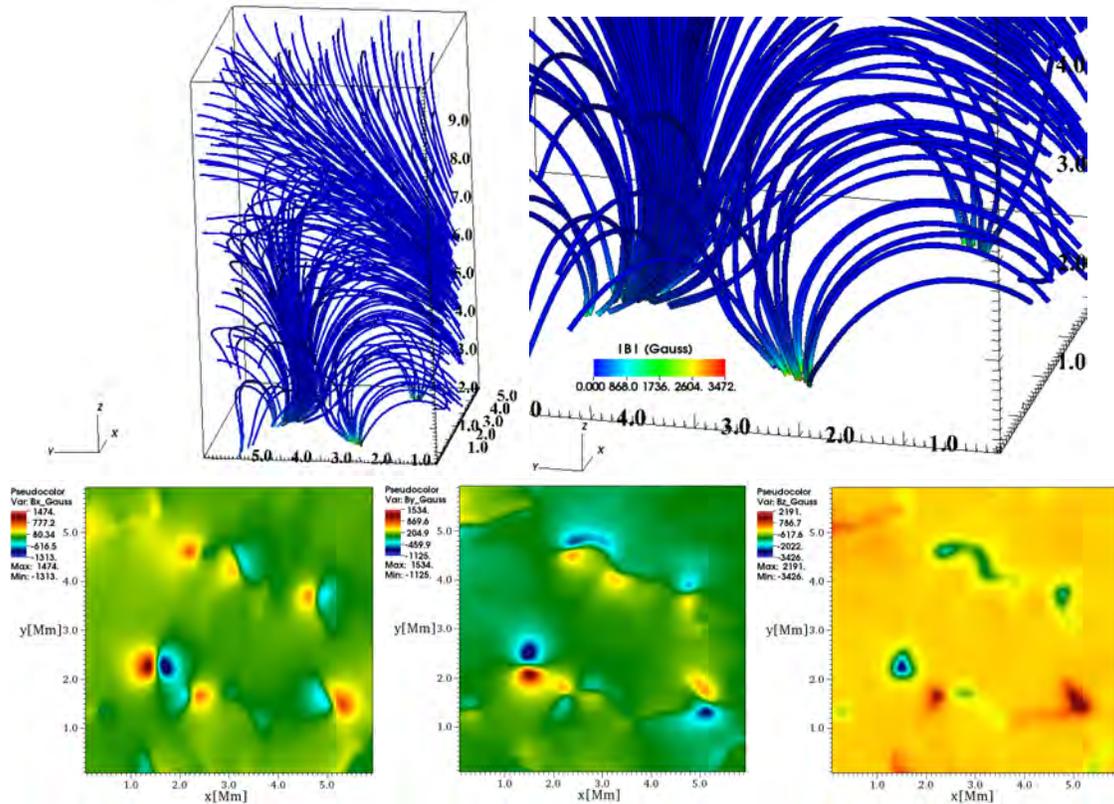


Figura 7.1: (Arriba) Líneas de campo magnético al tiempo inicial y acercamiento de las regiones dipolares intensas en el dominio 3D al tiempo inicial. (Abajo) Componentes del campo magnético  $B_x$ ,  $B_y$  y  $B_z$  en el plano  $xy$  a  $z = 0.1$  Mm. La barras de color representa la magnitud del campo magnético en Gauss.

3D, la cual está definida por  $6 \times 6 \times 10$  Mm que contiene una topología de interés para las simulaciones numéricas llevadas a cabo. En la Fig. 7.1, se muestran las líneas de campo magnético en el dominio 3D, en donde se pueden ver estructuras complejas de arcos magnéticos con un campo magnético muy intenso en sus pies. En la Fig. 7.1, también se muestran las componentes del campo magnético  $B_x$ ,  $B_y$  y  $B_z$  en el plano  $xy$  a  $z = 0.1$  Mm, en donde se pueden ver estructuras dipolares. Las imágenes anteriores muestran la región usada para la evolución del sistema, la cual contiene dipolos magnéticos alrededor de la región  $(x, y, 0.1)$  Mm  $\sim (1.4, 2.3, 0.1)$ , en donde se desencadena la reconexión magnética y se forma el jet.

Para verificar que la configuración de campo magnético en 3D es potencial, se calcula la divergencia del campo magnético  $\nabla \cdot \mathbf{B}$  y el valor absoluto  $|\nabla \cdot \mathbf{B}|$  en el plano  $xy$  en dos diferentes alturas  $z$  como se muestra en la Fig. 7.2. Como se puede ver, el valor de  $\nabla \cdot \mathbf{B}$  es del orden  $10^{-4}$  T km $^{-1}$  en las regiones en donde el campo magnético es más intenso.

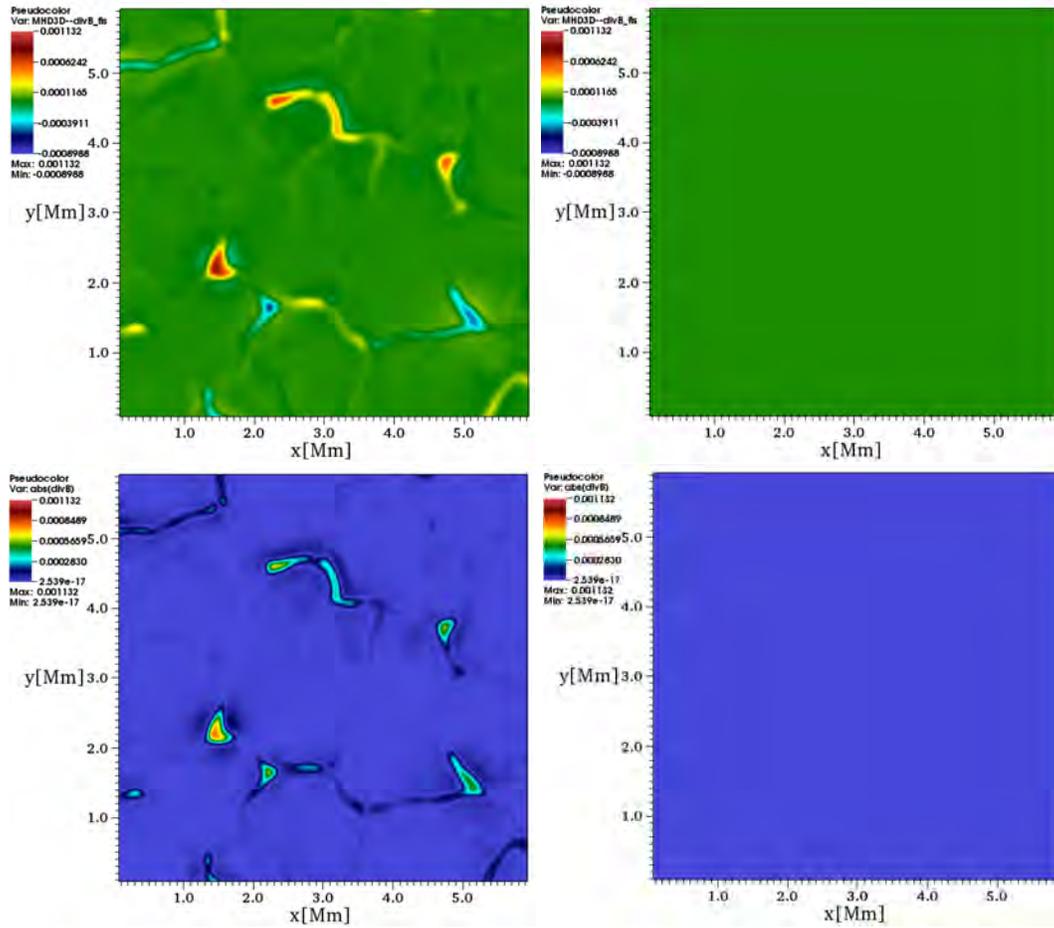


Figura 7.2: (Arriba-izquierda)  $\nabla \cdot \mathbf{B}$   $\text{T km}^{-1}$  en el plano  $xy$  a la altura  $z = 0.1$  Mm y a la altura  $z = 5$  Mm (arriba-derecha). (Abajo-izquierda)  $|\nabla \cdot \mathbf{B}|$  en el plano  $xy$  a la altura  $z = 0.1$  Mm y a la altura  $z = 5$  Mm (abajo-derecha).

En cambio el valor absoluto  $|\nabla \cdot \mathbf{B}|$  es del orden  $10^{-16}$   $\text{T km}^{-1}$  en las regiones donde el campo magnético es más débil y del orden  $10^{-4}$   $\text{T km}^{-1}$  en donde el campo magnético es más fuerte. La obtención de estos valores para la divergencia del campo magnético, significa que no se tiene un campo completamente potencial, es decir, inicialmente se tienen corrientes, lo que en principio ayuda a que el plasma se acelere.

### 7.1.3 Métodos numéricos

La implementación numérica es la misma que se usa en [González-Avilés et al. (2017a)], sin embargo en el presente problema se explota la capacidad del código CAFE Newtoniano en 3D. Un resumen de los métodos numéricos específicos se presenta a continuación. Se

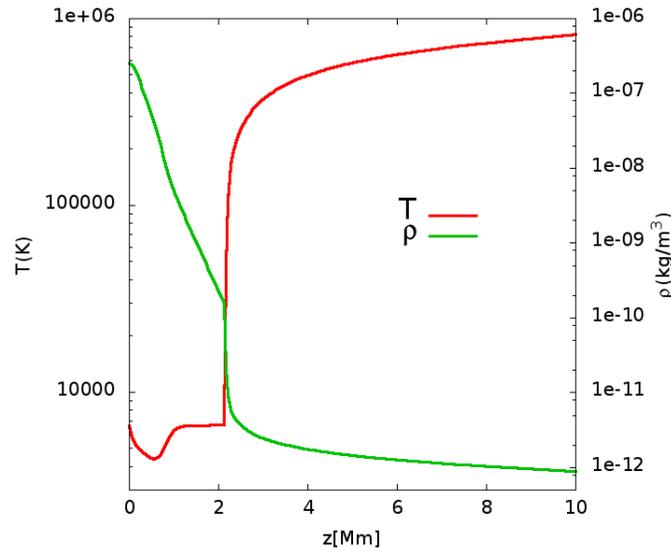


Figura 7.3: Temperatura ( $T$ ) y densidad de masa ( $\rho$ ) como función de la altura para el modelo C7 de la atmósfera solar en equilibrio.

resuelven numéricamente el sistema de ecuaciones (6.1)-(7.1) sobre una malla simple y uniforme de celdas centradas, usando el método de líneas con un Runge-Kutta de tercer orden. La discretización de las ecuaciones de la MHD resistiva se basa en volúmenes finitos y se implementan métodos de captura de choque de alta resolución. Se usan los reconstructores MINDMOD y MC para las variables conservativas, y la combinación de las fórmulas de flujos HLLE y HLLC. La combinación de los reconstructores y fórmulas de flujos es adaptativa y depende de la magnitud de las discontinuidades y choques que se forman durante la evolución, usando la combinación con la disipación máxima HLLE-MINMOD en zonas donde  $\beta < 10^{-2}$  y la combinación menos disipativa HLLC-MC en otro caso.

### 7.1.4 Modelo de la atmósfera solar

Se escoge un dominio que cubre parte de la fotosfera, cromosfera, y corona, en donde el campo de temperatura se asume que obedece el modelo semi-empírico C7. Los perfiles de temperatura  $T(z)$  y la densidad de masa  $\rho(z)$  como funciones de la altura  $z$  se muestran en la Fig. 7.3, en donde la región de transición se caracteriza por un gradiente pronunciado.

## 7.2 Resultados de las simulaciones numéricas

Se llevó a cabo una simulación numérica dentro de un dominio específico usando la configuración de campo magnético construida con el código MURaM, la cual contiene una región con dipolos de alta intensidad de campo magnético. Se define el dominio numérico como  $x \in [0, 6]$ ,  $y \in [0, 6]$ ,  $z \in [0, 10]$  en unidades de Mm, cubierto con  $240 \times 240 \times 400$  celdas, es decir, la resolución efectiva en cada dirección es de 25 km. En todas las caras del dominio numérico se usan condiciones de frontera fijas en el tiempo.

Una vez que se definió el campo magnético y el modelo de la atmósfera solar descritos anteriormente, se inicia la evolución del plasma de acuerdo a las ecuaciones (6.1)-(7.1). No se aplica ninguna perturbar explícita al sistema, en lugar de esto, los errores de redondeo son suficientes para desencadenar la inestabilidad de todo el sistema, incluyendo el campo magnético y el equilibrio hidrostático, lo que más tarde se traduce en la explosión del material hacia arriba. Sucede la reconexión y está acompañada de una resistividad magnética finita  $\eta = 12.56 \Omega \cdot m$ .

Se analiza la temperatura del plasma la cual ayuda a entender la dinámica del sistema. En la Fig. 7.4 se muestra una imagen de la temperatura sobre el plano  $x = 2.5$  Mm y las líneas de campo magnético en 3D a diferentes tiempos. Por ejemplo, al tiempo  $t = 30$  s una estructura tipo espícula comienza a aparecer en la región en donde pasa la reconexión magnética, la cual acelera al plasma. Al tiempo  $t = 60$  s como se muestra en la Fig. 7.4, aparece una estructura que alcanza de aproximadamente  $z \approx 6.5$  Mm medida desde la región de transición [Tavabi et al. (2015b)] y velocidad vertical de alrededor de  $v_z \approx 80 \text{ km s}^{-1}$ , estas características son similares a las de una espícula tipo II [De Pontieu et al. (2007c)]. Aproximadamente al tiempo  $t = 120$  s, la estructura penetra la región de transición y alcanza la corona, en donde las líneas de campo magnético son predominantemente abiertas. Para el tiempo  $t = 180$  s, el jet con estructura de espícula comienza a desaparecer y ahora las líneas de campo tienden a ser uniformes. Finalmente al tiempo  $t = 300$  s, la espícula prácticamente desaparece.

Se muestran perspectivas útiles en 2D del proceso con un corte del dominio 3D en el plano  $x = 0.1$  Mm en la Fig. 7.5, en donde se pueden ver varias imágenes de la evolución de la temperatura (en Kelvin) y las líneas de campo magnético. Se puede notar que al tiempo inicial hay una región interesante con un punto-X, localizada alrededor de  $z \approx 3.5$  Mm. En esta región, la reconexión magnética inicia y consecuentemente se desencadena la formación del jet con estructura de espícula. Al tiempo  $t = 30$  s, el jet comienza a aparecer y las líneas de campo magnético cercanas al punto X se reconectan entre sí. Al tiempo  $t = 60$  s, aparece un jet con características de una espícula tipo II, con su base precisamente localizada alrededor del punto-X, esta espícula alcanza una altura de aproximadamente  $z \approx 6.5$  Mm (ver Fig. 7.4), la cual está de acuerdo con las alturas observadas que se encuentran

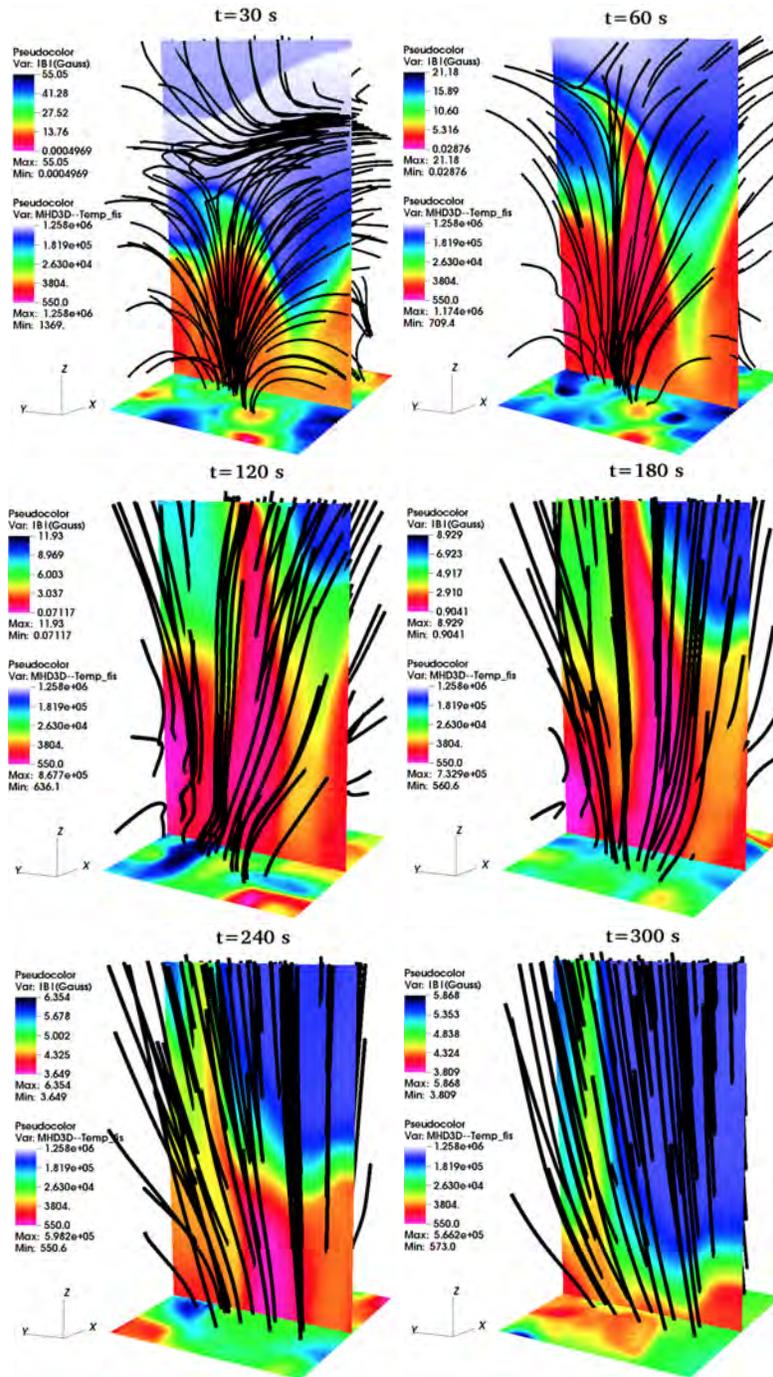


Figura 7.4: La representación en 3D de la formación del jet. Se muestran imágenes de la evolución del logaritmo de la temperatura en Kelvin y las líneas de campo magnético en 3D (negro) a los tiempos 30, 60, 120, 180, 240 y 300 s. En la parte inferior del dominio 3D se muestra la magnitud del campo magnético en el plano  $xy$  a  $z=0.1$  Mm. La espícula es representada por el color rosa.

entre 4-10 Mm [Tavabi et al. (2015b)]. Se puede decir que la reconexión magnética acelera el plasma hacia arriba con una forma colimada. La estructura de la espícula obtenida al tiempo  $t = 60$  s es similar a la que se obtiene en la Fig. 5 de la referencia [Martínez-Sykora et al. (2011)]. Al tiempo  $t = 120$  s, la espícula alcanza la corona que está localizada a  $z = 10$  Mm en donde las líneas de campo son abiertas y muestran un patrón uniforme. Después de este tiempo la espícula comienza a disiparse, y durante este lapso las líneas de campo magnético forman un nuevo punto-X alrededor de  $z \approx 3$  Mm. Finalmente al tiempo  $t = 300$  s, la espícula se disipa y las líneas de campo magnético son predominantemente uniformes y abiertas.

Como se ha reportado en un número de trabajos observacionales [De Pontieu et al. (2007c), Anan et al. (2010), Pereira et al. (2012), Zhang et al. (2012)], la velocidad vertical de la espícula es importante, por lo tanto se monitorea esta cantidad en este trabajo. Específicamente se estima la velocidad vertical  $v_z$  de la estructura medida en tres diferentes puntos localizados dentro o cerca de la estructura tipo espícula. Estos tres puntos se colocan a lo largo de una línea vertical. Se muestra la localización de estos puntos en la parte superior del mapa de temperatura y los valores de  $v_z$  como función del tiempo en estos puntos en la Fig. 7.6. De acuerdo a estas series de tiempo, la estructura cubre en rango de velocidades verticales del orden de  $v_z \approx 100 \text{ km s}^{-1}$ , el cual coincide con los movimientos verticales del orden  $50\text{-}100 \text{ km s}^{-1}$  de las espículas tipo II. De acuerdo a la morfología y el rango de velocidad de la estructura, desde ahora se llamará a este jet como espícula. También se puede notar que el tiempo de vida de los movimientos verticales duran aproximadamente 170 s, el cual está por encima de los 100 s que se han observado para las espículas tipo II [De Pontieu et al. (2007c)].

Para entender la física detrás del modelado de la formación de la espícula, es importante identificar la fuerza(s) actuantes durante la formación y desarrollo de la espícula. Para esto se compararon las fuerzas debido al campo magnético y la hidrodinámica, entonces se calculó el cociente entre la magnitud de la fuerza de Lorentz y la magnitud del gradiente de presión  $|\mathbf{J} \times \mathbf{B}|/|\nabla p|$ . Los resultados en el corte transversal en el plano  $x = 0.1$  Mm del dominio 3D se muestran en la Fig. 7.7. Se ve que al tiempo inicial la fuerza dominante es prácticamente el gradiente de presión, pero cuando la espícula comienza a surgir la fuerza de Lorentz se hace más intensa. Al tiempo  $t = 60$  s, el cual es tiempo en cual la espícula aparece, la fuerza de Lorentz es la dominante en la región en donde precisamente se forma la espícula, lo cual se puede ver hasta el tiempo  $t = 150$  s. Para tiempos posteriores la fuerza de Lorentz decrece y la espícula se disipa, por ejemplo al tiempo  $t = 240$  s, la presión del gas nuevamente domina sobre la fuerza de Lorentz. Finalmente, al tiempo  $t = 300$  s, la espícula prácticamente se disipa. Este análisis demuestra que la fuerza de Lorentz es la principal responsable de la formación de la espícula.

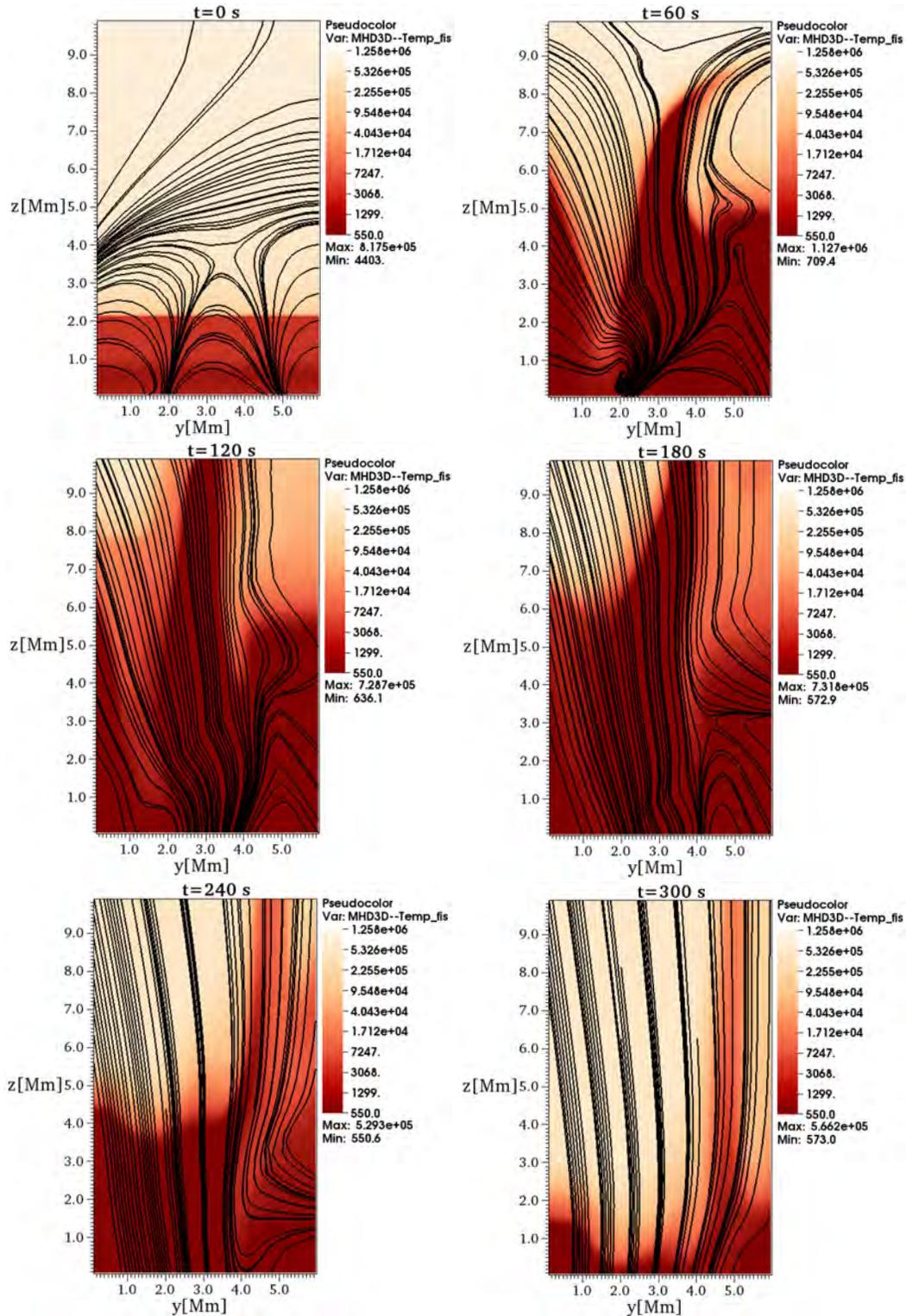


Figura 7.5: Imágenes del logaritmo de la temperatura en Kelvin con las líneas de campo magnético en el corte transversal a  $x = 0.1$  Mm para varios tiempos. Es interesante notar que hay una región con un punto X al tiempo inicial, en ese lugar es donde más tarde aparece la espícula.

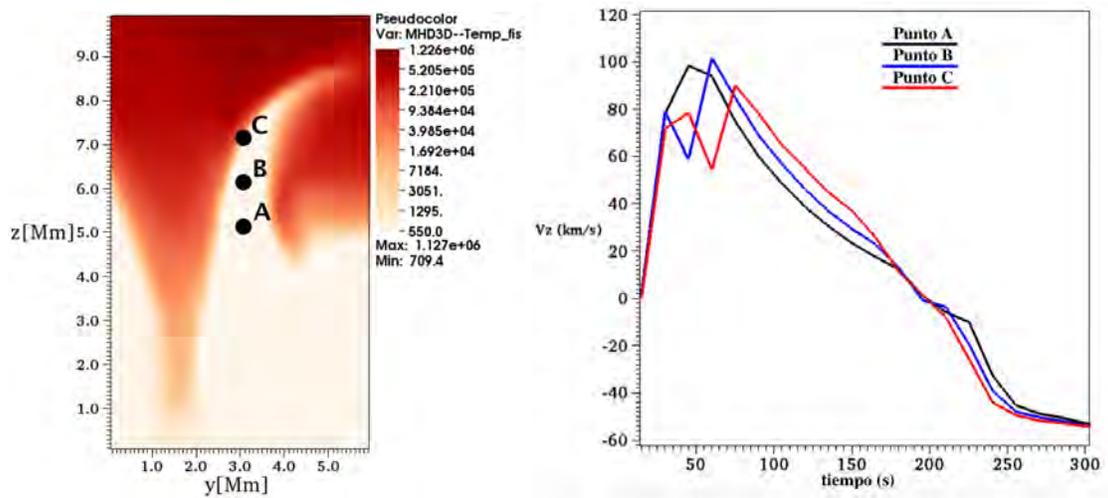


Figura 7.6: En la izquierda se muestra el logaritmo de la temperatura en el plano  $yz$  a  $x = 0.1$  Mm al tiempo  $t = 60$  s, en donde la estructura de la espícula se puede ver más claramente. Se indican los tres puntos sobre los cuales se estima la componente vertical de la velocidad del plasma  $v_z$ . Estos puntos son punto A ( $x = 0.1, y = 3, z = 6$ ) Mm, punto B ( $x = 0.1, y = 3, z = 7$ ) Mm y punto C ( $x = 0.1, y = 3, z = 8$ ) Mm. En el lado derecho se presentan las series de tiempo de  $v_z$  en  $\text{km s}^{-1}$  medidas en tales puntos, por donde pasa la espícula. Se puede ver también que después de  $t \sim 170$  s, los elementos de plasma comienzan a moverse hacia abajo.

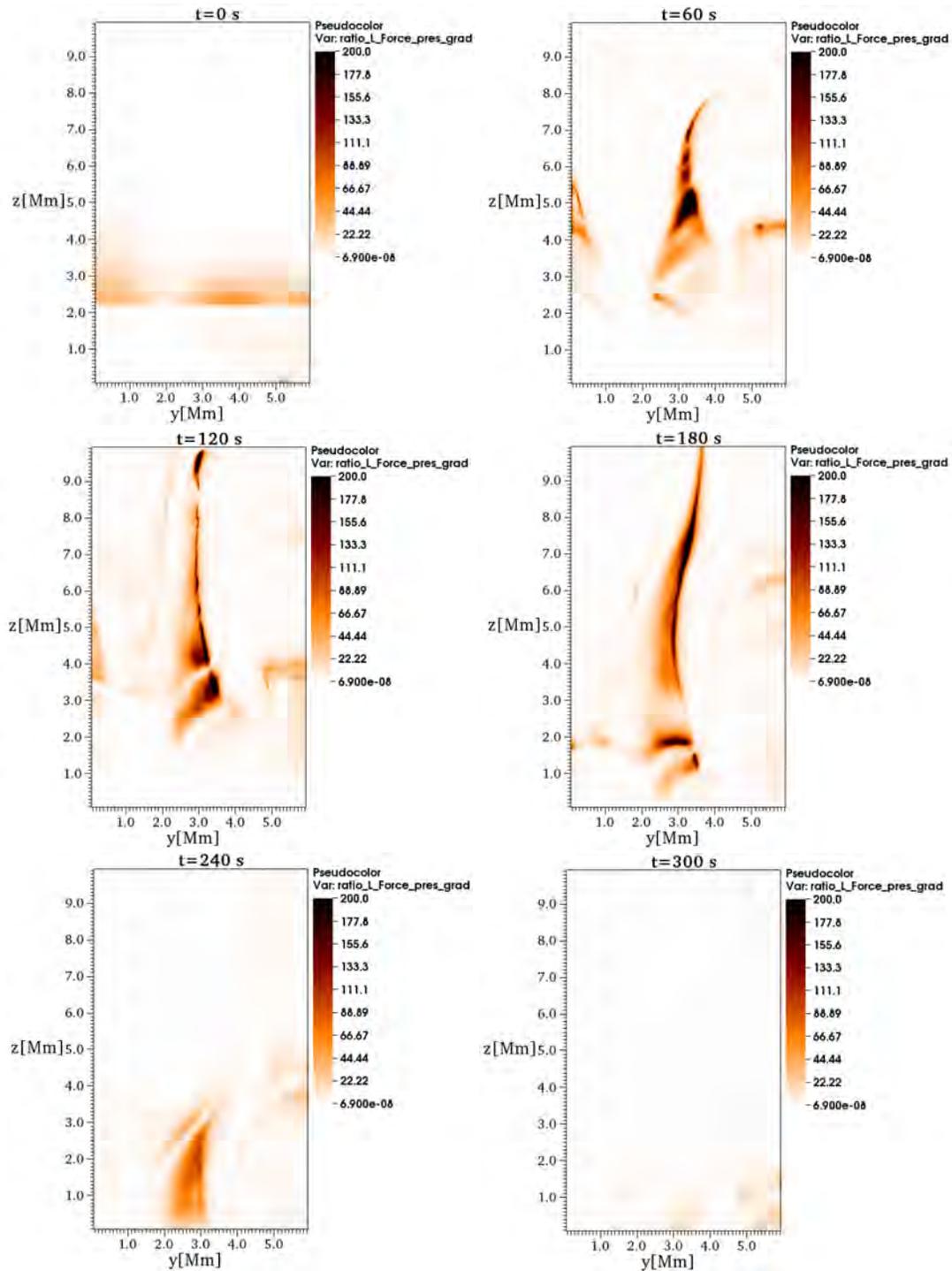


Figura 7.7: Imágenes del cociente  $|\mathbf{J} \times \mathbf{B}|/|\nabla p|$  en el corte transversal en el plano  $x = 0.1$  Mm para varios tiempos. Una comparación con las Figs. 7.4 y 7.5 indica que la fuerza de Lorentz es la fuerza dominante en la región en donde se forma la espícula.

### 7.2.1 Vorticidad y efecto Doppler

Otro diagnóstico importante de las espículas es ver si están rotando o muestran movimientos torsionales. Las observaciones del efecto Doppler de varias líneas de emisión en el limbo sugieren que las espículas tipo II están rotando [Martínez-Sykora et al. (2013)]. Por lo tanto se calcula la vorticidad definida como  $\omega = \nabla \times \mathbf{v}$  y el campo vectorial de la velocidad para ver movimientos rotacionales en la región de la espícula. Para esto se consideran dos planos, el plano 1 definido a  $z = 3.5$  Mm localizado alrededor de la parte inferior de la espícula como se puede ver en la Fig. 7.8, y el plano 2 en  $z = 5$  Mm localizado en una región más alta de la espícula.

Para el plano 1, se muestra la magnitud de la vorticidad  $|\omega|$  y el campo vectorial de la velocidad en la Fig. 7.8. Al tiempo  $t = 15$  s se pueden ver regiones en donde la magnitud de la vorticidad es alta y el campo vectorial de la velocidad comienza a circular. Al tiempo  $t = 120$  s la aparición de un vórtice es clara, lo cual indica un proceso dinámico de la espícula. A tiempos posteriores, la región de vorticidad es menos evidente, sin embargo se ven algunas zonas donde el campo de velocidad circula. Finalmente al tiempo  $t = 300$  s, la magnitud de la vorticidad alcanza su valor mínimo, y por lo tanto las regiones con vórtices desaparecen.

Se muestran imágenes similares a las del plano 1, pero para el plano 2 en la Fig. 7.10. En este plano se puede ver más claramente el comportamiento rotacional del campo de velocidades. La figura más representativa se presenta al tiempo  $t = 60$  s, en donde se puede ver un vórtice cerca de donde la magnitud de la vorticidad es alta. Este comportamiento dura hasta  $t = 120$  s, que es el tiempo en el que aproximadamente la espícula comienza a disiparse. Para el tiempo  $t = 300$  s la magnitud de la vorticidad alcanza un valor mínimo y por lo tanto ya no se observan vórtices.

Se estima el efecto Doppler relacionado con la dinámica de la espícula de manera simple en los dos planos definidos anteriormente. Específicamente se estima este efecto en una pequeña región en donde la vorticidad es alta y el campo vectorial de la velocidad está circulando. Para estimar el efecto Doppler se define un centro en la región mencionada anteriormente en donde la velocidad es  $\mathbf{v}_c$ . Entonces se elige un conjunto de puntos hacia la izquierda y hacia la derecha a lo largo de la dirección  $x$  desde el centro (podría ser cualquier otra), con velocidades  $\mathbf{v}_L$  y  $\mathbf{v}_R$ , respectivamente. Después se calcula la diferencia en la componente  $y$  de las velocidades con respecto al centro, específicamente  $\Delta \mathbf{v}_D = \mathbf{v}_{L,R} - \mathbf{v}_c$ , en donde  $\mathbf{v}_{L,R}$  es una estimación de la velocidad tangente de los puntos alrededor del centro, y por lo tanto una forma de medir el corrimiento al rojo y al azul. Este método se ilustra en las Figs. 7.9 y 7.11 para cada caso. Se muestra un acercamiento del vórtice en donde la circulación del campo de velocidad es más evidente. En este caso particular se calculan las gráficas de  $\Delta \mathbf{v}_D$  para la componente  $y$  de la velocidad  $v_y$  como función de la distancia  $d_c$  desde el centro hacia la izquierda y derecha, a lo largo de la línea azul o roja. Los

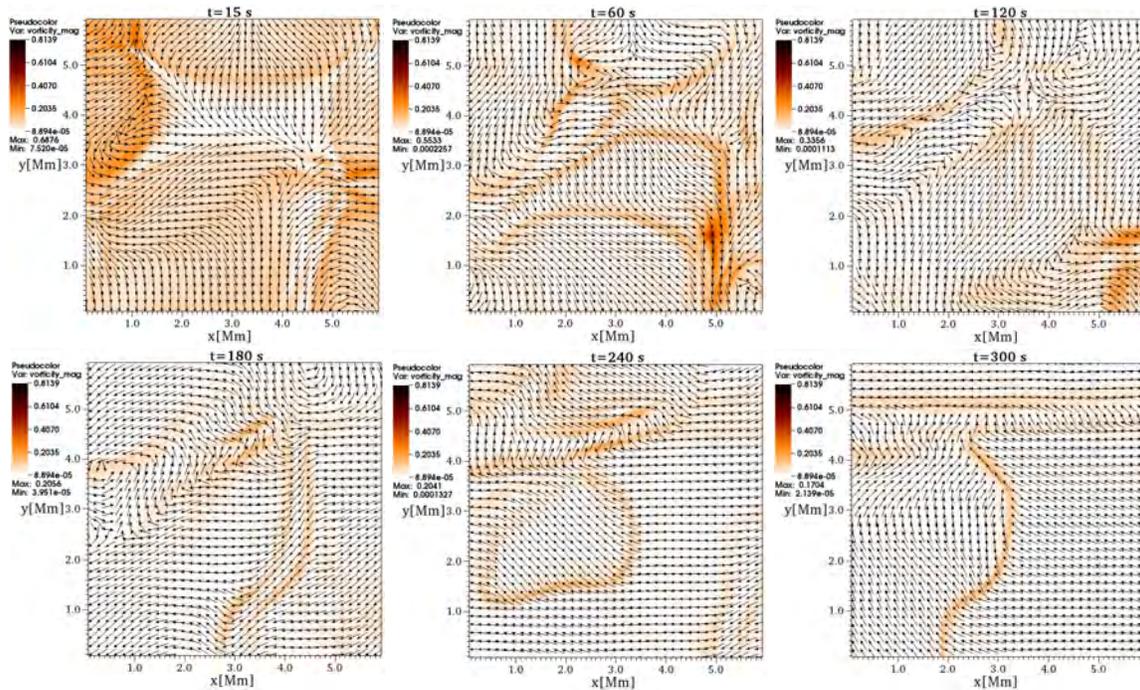


Figura 7.8: Imágenes de la magnitud de la vorticidad  $|\omega| \text{ s}^{-1}$  y campo vectorial de la velocidad en el plano  $xy$  a  $z = 3.5 \text{ Mm}$  para distintos tiempos. En este caso la espícula se puede ver en el plano  $xy$  dentro de la región  $x \in [0, 1.5] \text{ Mm}$  y  $y \in [2.5, 4.0] \text{ Mm}$ .

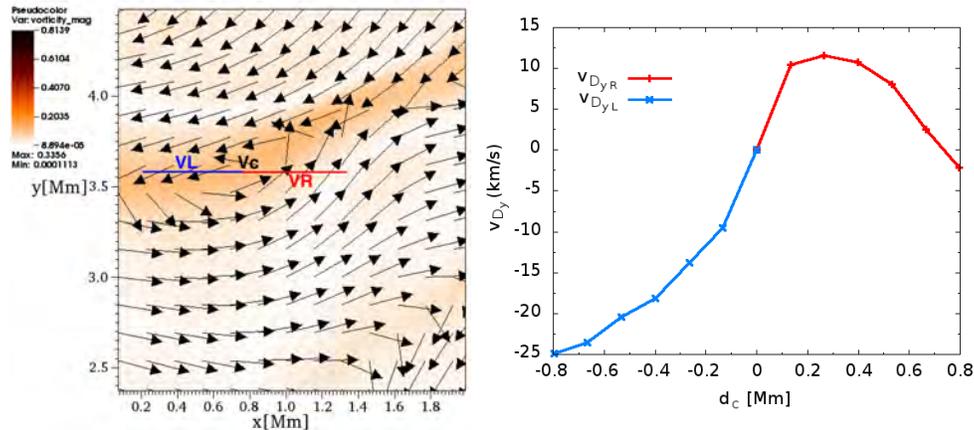


Figura 7.9: (Izquierda) Región en donde se estima el efecto Doppler  $\Delta v_D$ . Esta imagen es un acercamiento de una región de la Fig. 7.8 al tiempo  $t = 120 \text{ s}$  en donde se aprecia el vórtice más claramente. (Derecha) Valor de  $\Delta v_D$  de la componente  $y$  o equivalentemente la velocidad tangencial como función de la distancia desde el centro.

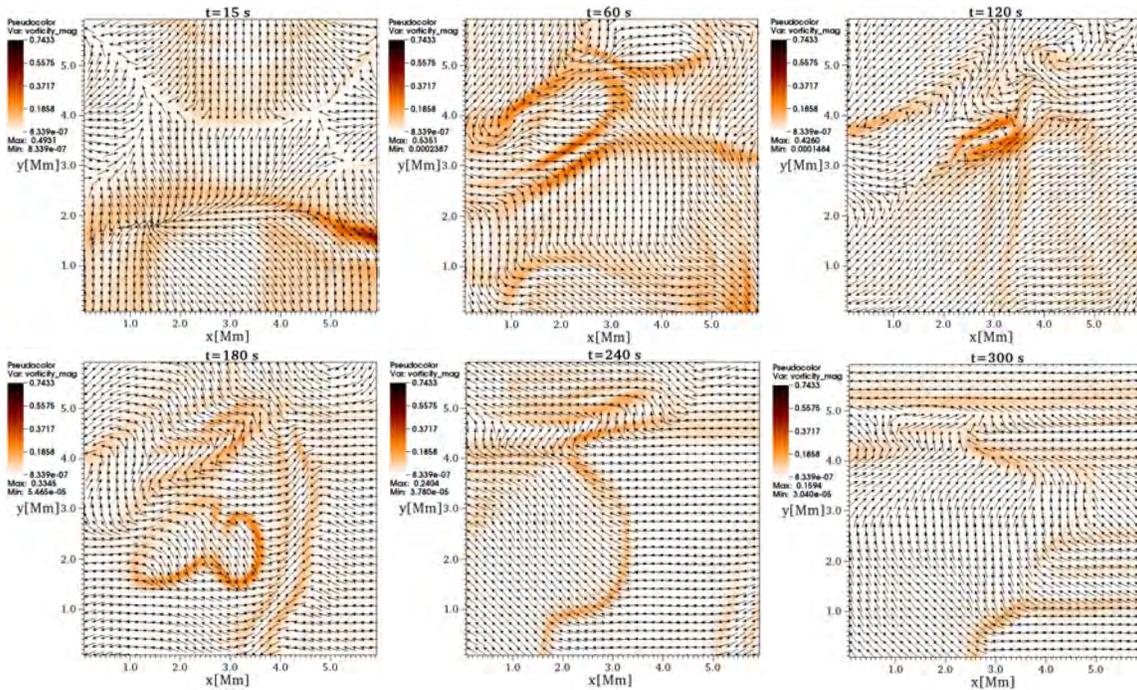


Figura 7.10: Imágenes de la magnitud de la vorticidad  $|\omega|$  s<sup>-1</sup> y campo vectorial de la velocidad en el plano  $z = 5$  Mm a varios tiempos. La región en donde se localiza la dinámica de la espícula está dentro de  $x \in [0, 1.5]$  Mm y  $y \in [2.5, 4.0]$  Mm.

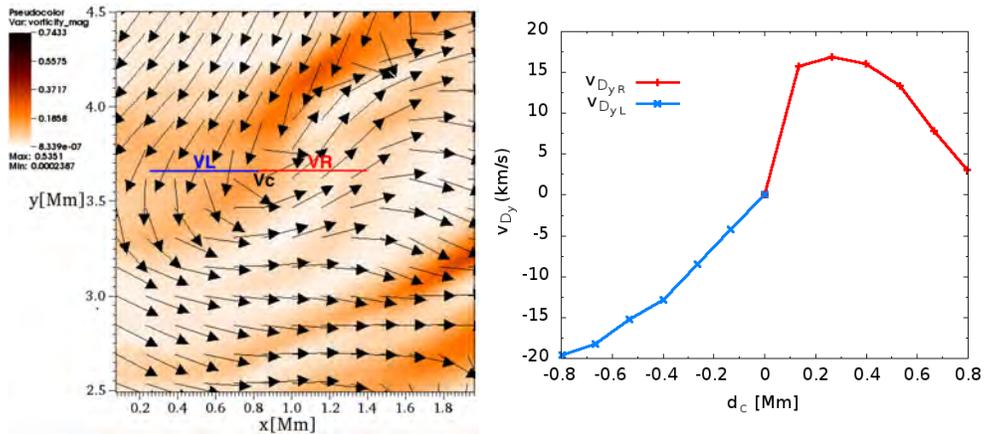


Figura 7.11: (Izquierda) Región en donde se estima el efecto Doppler  $\Delta v_D$ . Esta imagen es un acercamiento de una región con vórtice de la Fig. 7.10 al tiempo  $t = 60$  s. (Derecha) Valor de  $\Delta v_D$  de la componente  $y$  de la velocidad  $v_y$  o equivalentemente la velocidad tangencial como función de la distancia desde el centro.

resultados de la estimación del efecto Doppler producido por el movimiento tangencial  $\Delta v_D$  se muestran también en las Figs. 7.9 y 7.11.

En este capítulo se presentó una simulación numérica en 3D de una región pequeña de la atmósfera solar que forma parte del trabajo sometido al ApJ [González-Avilés et al. (2017b)], mostrando la formación de una estructura de jet con características de una espícula tipo II, específicamente la morfología, el rango en la velocidad vertical y el tiempo de vida. Este resultado da una explicación simple y está en contraste con la que se presenta en [Martínez-Sykora et al. (2017)], en donde mediante simulaciones 2D se explica que la formación de espículas se debe a la amplificación de la tensión magnética y la interacción entre iones y neutros. En nuestra simulación se demuestra que incluso si la tensión magnética podría ser importante, la presión magnética, que es parte de la fuerza de Lorentz completa también es importante.

Para llevar a cabo la simulación se resolvieron las ecuaciones de la MHD resistiva sometidas a un campo gravitacional solar constante. Se usa una configuración de campo magnético en 3D extrapolada hasta la corona solar obtenida mediante una simulación del campo fotosférico del Sol quieto. La configuración de campo magnético presenta regiones bipolares con una magnitud de campo muy intensa en la parte inferior, lo cual ayuda a que se desarrolle el proceso de reconexión magnética cerca de un punto-X.

Un resultado clave del análisis llevado a cabo en este capítulo es que la fuerza de Lorentz domina sobre el gradiente de presión en la región en donde la espícula aparece y esto ayuda a acelerar hacia arriba a la estructura.

Se entiende que la reconexión magnética desencadena la aceleración del plasma hacia arriba y hace que se forme la espícula. Este modelo 3D, representa un escenario realista, ya que se tiene una atmósfera que contiene la región de transición en combinación con un campo magnético con una topología compleja que esquematiza mejor la complejidad de la atmósfera solar.

Los resultados muestran también que la vorticidad es importante cerca de la espícula. Observando el campo de velocidad en cortes transversales específicos del dominio 3D en donde se aprecia la estructura de la espícula, se monitorea el desplazamiento vertical circular del plasma que eventualmente puede ser identificado como un corrimiento al rojo o al azul.

Un estudio detallado sobre las propiedades torsionales de la espícula, las ondas generadas, los desplazamientos rotacionales y radiales se presentará en el trabajo [González-Avilés et al. (2017c)].

# Capítulo 8

## Conclusiones

En esta tesis se presentó un panorama general de la estructura interna y externa del Sol, dando énfasis a los eventos transitorios del tipo jet que ocurren en su atmósfera, y en particular a las espículas tipo II. Se consideró que la atmósfera solar está formada por un plasma completamente ionizado, en donde las aproximaciones de la MHD ideal clásica y resistiva son razonables para describir su dinámica. Se resolvieron numéricamente tales ecuaciones escritas en forma conservativa y se discretizaron mediante el método de volúmenes finitos en conjunto con el esquema HRSC. Se calculó la estructura característica asociada a los valores propios para ambos sistemas de ecuaciones, que fue útil para los resolvedores de Riemann implementados.

Se explicaron a detalle todos los métodos numéricos usados en el código CAFE Newtoniano. Se implementaron los resolvedores de Riemann HLLC, HLLE, HLLD y Roe en el caso de la MHD ideal, y en el caso de la MHD resistiva se implementaron los resolvedores HLLE, HLLC y HLLD. De igual forma se implementaron los reconstructores de variables Godunov, MINMOD, MC y WENO5. Además se implementó un método híbrido, en donde se usa el HLLE-MINMOD en zonas con choques fuertes y HLLC-MC en zonas suaves. Para evolucionar en el tiempo las ecuaciones de la MHD ideal y resistiva se usó el método de líneas en combinación con el integrador Runge-Kutta de tercer orden. Además se explicaron los métodos usados para controlar la constricción del campo magnético  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ , uno de ellos es el método de transporte de flujos restringidos para el caso de la MHD ideal, y el otro es el método extendido de los multiplicadores de Lagrange basado en el método de la limpieza hiperbólica para la MHD resistiva. Ambos métodos se combinan con las 4 fórmulas de flujos y reconstructores. En general la combinación HLLE-MINMOD para el método del FluxCT o EGLM, es la combinación que permite una mayor estabilidad de las soluciones, al costo de disipación numérica. Otra de las combinaciones que permite una estabilidad razonable sin que sea muy disipativo es el HLLC con MINMOD, esta combi-

nación fue usada en particular para el problema 2D, en donde se estudió la formación de jets con características de espículas tipo II.

Después de haber descrito a detalle los métodos numéricos usados en la implementación del código, se llevaron a cabo pruebas numéricas que midieron su capacidad para resolver distintas configuraciones y escenarios físicos en donde existen choques, discontinuidades y en especial en medios en donde la  $\beta$  del plasma sea del orden  $\approx 10^{-2}$ , que es una característica de la atmósfera solar. Las pruebas se dividieron en la parte de la MHD ideal y resistiva, primeramente se hicieron las pruebas en 1D en la dirección  $x$ . En el caso de la MHD ideal se realizaron pruebas de tubos de choque en 1D y se compararon directamente con las soluciones exactas para verificar que el código resolviera el problema de manera adecuada. En el caso de MHD resistiva se hicieron pruebas en 1D asociadas a la difusión del campo magnético para una resistividad magnética isotrópica y anisotrópica, para estos casos se comparó directamente con la solución exacta y se vio que el código resuelve de manera correcta los problemas. En el caso 2D para la MHD ideal, se hicieron pruebas estándar en donde aparecen vórtices, inestabilidades, plasma en rotación, explosiones esféricas con  $\beta$  del plasma pequeño y problemas asociados a la reconexión magnética numérica. Para este caso no existen soluciones exactas, por lo tanto para verificar la precisión de las soluciones se llevaron a cabo pruebas de consistencia y se monitoreó la constricción del campo magnético, y en la mayoría de las pruebas es de orden  $\nabla \cdot \mathbf{B} \approx 10^{-12}$ , que se encuentran en el error de redondeo de la computadora. En el caso de las pruebas de la MHD resistiva en 2D, se midió la capacidad del código para evolucionar correctamente los procesos de reconexión magnética lenta y rápida, así como la captura de choques e inestabilidades asociadas a una resistividad magnética dependiente de la posición. De acuerdo a los resultados obtenidos en las pruebas, el código es capaz de describir correctamente los procesos de reconexión magnética y de capturar las inestabilidades asociadas a una resistividad anómala. En el caso de los problemas asociados a fenómenos en la atmósfera solar, se presentó un estudio enfocado a la propagación de pulsos Alfvénicos en arcadas coronales y se analizó la interacción de dos ondas de Alfvén generadas impulsivamente en la influencia del calentamiento de la corona quieta. Ambos problemas describen configuraciones en una atmósfera solar con una región de transición que presenta gradientes de presión y densidad de hasta 8 órdenes, por lo tanto se midió la capacidad del código de lidiar con rarefacciones, y además de evolucionar sistemas con campos magnéticos realistas a nivel coronal. De acuerdo a los resultados se puede ver que el código describe de manera satisfactoria ambos problemas.

Como aplicación del código CAFE Newtoniano, se resolvieron numéricamente las ecuaciones de la MHD resistiva, y se mostró que la formación de jets con características de espículas tipo II y jets coronales fríos que corresponden a temperaturas de  $10^4$  K se pueden formar como resultado de la reconexión magnética en un escenario con resistividad magnética. Para esto, se modeló la región de la cromosfera baja y la corona usando el modelo atmosférico en equilibrio C7, asumiendo que la MHD resistiva describe la dinámica

del plasma. Las configuraciones magnéticas que se analizan corresponden a dos arcos vecinos con polaridad opuesta. Se encontró que la formación de jets con estructuras finas depende de la separación entre los pies de cada arco. Se analizaron los casos en donde la magnitud del campo magnético de los dos arcos es igual y distinta. En el primer caso, el jet crece verticalmente, mientras que en el caso de una configuración asimétrica el jet muestra una inclinación. Se estudiaron varias propiedades del jet, entre las que se encuentra, la inclinación, el tiempo de vida y la velocidad. El espacio de parámetros involucró una magnitud del campo magnético entre 20 y 40 G, y la resistividad se asumió uniforme con un valor constante  $\eta = 10^{-2} \Omega \cdot m$ . Se mostró que la reconexión magnética puede ser el mecanismo de formación de las espículas tipo II.

La aplicación más representativa del código CAFE Newtoniano es el estudio de la formación de jets en 3D. Se estudió la posibilidad de que la reconexión magnética sea la responsable de la formación de jets en una configuración de campo magnético en 3D por primera vez considerando solamente los efectos de la resistividad magnética  $\eta$ . Para eso, se modeló la región fotosfera-corona usando el modelo C7, asumiendo que las ecuaciones de la MHD resistiva sometidas al campo gravitacional solar determinan la dinámica del plasma. En este caso, la configuración inicial magnética está descrita por un campo magnético potencial en 3D extrapolado de un modelo fotosférico realista del Sol quieto. Nuevamente se consideró un valor de la resistividad uniforme y constante. Los resultados de esta simulación indican que se forma un jet con características de una espícula tipo II, en una región en donde ocurre la reconexión magnética acelera al plasma. La fuerza dominante en el proceso de formación del jet es la fuerza de Lorentz. Se encontró que en una región cercana a la espícula se pueden ver que hay vorticidad, además de que la espícula presenta movimientos transversales que se asocian a oscilaciones, resultados que están en acuerdo con muchas de las observaciones que suponen que las espículas tipo II oscilan y además presentan un movimiento torsional [De Pontieu et al. (2007c), De Pontieu et al. (2012), McIntosh et al. (2011)].

Gran parte del trabajo de esta tesis se concentró en la construcción de un código en tres dimensiones en coordenadas cartesianas, para estudiar fenómenos en donde la dinámica del plasma sea descrita por la MHD ideal y resistiva. El código se puede enriquecer de distintas maneras. Para estudiar configuraciones y procesos más realistas en la atmósfera solar es necesario incluir más procesos físicos tales como la conductividad térmica y de la radiación. Por otra parte en lo que respecta a los métodos numéricos, resultaría interesante incluir el refinamiento dinámico de mallas que permitiría capturar más fácilmente las regiones finas de la reconexión magnética en la atmósfera solar a la vez de optimizar los recursos computacionales.

En el futuro inmediato se generalizará el código para resolver las ecuaciones de la MHD multiespecies, con el objetivo de estudiar distintas líneas de emisión de las espículas tipo II. Además se incluirá la conductividad térmica, con el objetivo de estudiar el problema del

calentamiento coronal usando configuraciones de campo magnético en tres dimensiones tomadas directamente de las observaciones.

# Apéndice A

## Obtención de las ecuaciones de la MHD ideal y resistiva

Las ecuaciones de la MHD ideal y resistiva se derivan de la combinación de las ecuaciones del electromagnetismo de Maxwell: Ley de Gauss, Ley de Ohm, Ley de Faraday y Ley de Ampere, en conjunto con las ecuaciones de Navier-Stokes para la dinámica de los fluidos. En general las ecuaciones de la MHD se pueden expresar en términos de las siguientes leyes de conservación:

### A.1 La ecuación de inducción: Conservación del flujo magnético

La Ley de Faraday nos dice acerca de la fuerza electromotriz (f.e.m) generada por un conductor. El campo eléctrico se puede derivar de un potencial electrostático escalar ( $\phi$ ) o vectorial ( $\vec{A}$ ). En este caso, el campo eléctrico puede ser expresado como

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}, \quad (\text{A.1})$$

en donde  $\mathbf{E}$  es la intensidad del campo eléctrico medida en el marco de referencia del laboratorio. Si se toma el rotacional de la ecuación (A.1) se puede derivar la ecuación de inducción de Faraday

$$\nabla \times \mathbf{E} = \nabla \times \left( -\nabla\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{A}) = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \quad (\text{A.2})$$

la cual establece que la f.e.m a lo largo de una espira cerrada en un espacio en 3D es igual a la tasa de cambio del flujo de  $\mathbf{B}$  a lo largo de la espira.

Ahora, si se toma en cuenta la ley de Ohm, la cual establece que la corriente a través de dos puntos localizados a lo largo de una espira cerrada, es directamente proporcional al voltaje de potencia a través de los puntos e inversamente proporcional a la resistencia entre ellos. Esta ley fue generalizada por Kirchoff, él cual la expresó como  $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ , en donde  $\sigma$  es la conductividad eléctrica definida como  $\sigma = 1/\mu\eta$  y  $\eta$  es la resistividad magnética. La densidad de corriente es proporcional a la f.e.m., es decir a la fuerza de Coulomb  $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$  (en donde  $q$  es la carga) actuando sobre portadores de cargas libres. Si el fluido conductor se está moviendo con una velocidad  $\mathbf{v}$  en un campo magnético, las cargas experimentan una fuerza adicional conocida como la fuerza magnética ( $=q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ ) que resulta en una corriente de desplazamiento. La fuerza de Lorentz es la fuerza total que actúa sobre una carga puntual en un campo electromagnético y se expresa como

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (\text{A.3})$$

La dirección de la fuerza de Lorentz se determina por medio de la regla de la mano derecha, tal que las componentes de  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  sean perpendiculares al movimiento. Si se sustituye la fuerza de Lorentz en la expresión de la ley de Ohm se obtiene

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = (\eta/\mu)\mathbf{J}, \quad (\text{A.4})$$

en donde  $\mathbf{E}$  es el campo eléctrico medido en el marco de referencia del laboratorio, mientras que  $\mathbf{E}'$  es el campo eléctrico medido en un marco de referencia comóvil con el fluido, y en este caso se usa  $\mu = 1$ . Entonces como en la aproximación de la MHD ideal se considera que  $\mathbf{E}' = \mathbf{0}$ , por lo tanto la ecuación (A.4) es

$$\mathbf{E} = \eta\mathbf{J} - \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (\text{A.5})$$

Sustituyendo la ecuación (A.5) en la expresión de la ley de Faraday se obtiene

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times [\eta\mathbf{J} - \mathbf{v} \times \mathbf{B}]. \quad (\text{A.6})$$

Considerando otra de las aproximaciones de la MHD ideal, en donde las variaciones del campo electromagnético son no relativistas ( $v/c \ll 1$ ), en otras palabras el sistema se dice que es cuasi-estático [Priest (1984)]. Por lo tanto, la corriente de desplazamiento que aparece en la ecuación de Ampere-Maxwell se desprecia. Entonces la ley de Ampere se simplifica y se escribe como

$$\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B}. \quad (\text{A.7})$$

Ahora, si se sustituye la ecuación (A.7) en la ecuación de inducción (A.6) y se usa la identidad vectorial ( $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B}$ ) se llega a la ecuación de inducción, que describe la dinámica de un campo magnético en un plasma, y está definida por

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times [\eta(\nabla \times \mathbf{B}) - \mathbf{v} \times \mathbf{B}]. \quad (\text{A.8})$$

Finalmente, si se usa otra identidad vectorial ( $\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \nabla \cdot (\mathbf{B}\mathbf{v} - \mathbf{v}\mathbf{B})$ ), la ecuación de inducción se convierte en

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \cdot [\mathbf{B}\mathbf{v} - \mathbf{v}\mathbf{B}] - \eta(\nabla^2 \mathbf{B}) = \mathbf{0}. \quad (\text{A.9})$$

La ecuación anterior tiene tres términos, en especial el segundo término describe la advección de las líneas de campo magnético en el tiempo. El tercer término describe el decaimiento del campo magnético, es decir, su difusión. En el caso de la MHD ideal  $\eta = 0$  se tiene advección, pero en el caso de la MHD resistiva  $\eta \neq 0$  se tiene difusión del campo magnético. En particular, cuando  $\eta \neq 0$ , al difundirse el campo magnético puede reconfigurar su topología, esto resulta en una transferencia de energía libre por medio de calor y procesos cinéticos hacia los alrededores del plasma, y en consecuencia puede ocurrir la reconexión magnética. La aproximación de la MHD ideal se aplicó al estudio de la propagación de ondas MHD en la atmósfera solar, y la MHD resistiva se aplicó al estudio de la formación de espículas tipo II como se presentó en los capítulos 4, 6 y 7.

## A.2 Conservación de carga: Ley de Gauss

A escalas microscópicas, el plasma se puede considerar como eléctricamente neutro, es decir  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ . La aproximación macroscópica es válida en el contexto de la MHD ideal, y en particular en el contexto de la física solar, dado que las escalas de longitud de la atmósfera solar (del orden  $10^4$ - $10^6$  m) comparadas con la longitud de Debye es varios ordenes de magnitud más grande.

La razón de los términos de advección y difusión del lado derecho de la ecuación (A.9) se puede definir como un número adimensional conocido como el número de Reynolds magnético ( $R_m$ ), el cual está dado por

$$R_m = \frac{vL}{\eta}, \quad (\text{A.10})$$

en donde  $v$  es una velocidad característica del sistema,  $L$  es la longitud característica del sistema y  $\eta$  es la resistividad magnética. El número de Reynolds es útil para medir el acoplamiento entre el fluido y el campo magnético de un sistema dado.

Cuando  $R_m \gg 1$ , la escala de longitud es muy grande, entonces las líneas de campo magnético actúan como bandas elásticas que se congelan dentro del plasma y el flujo magnético se conserva durante el movimiento del fluido. Esta condición se conoce como aproximación del campo congelado de la MHD, por lo tanto pequeñas perturbaciones en el campo magnético resultan en oscilaciones inelásticas debido al aumento de la tensión y presión magnéticas. En la atmósfera solar  $R_m \sim 10^6 - 10^{12}$ , por lo que la MHD ideal es una buena aproximación.

Cuando  $R_m \ll 1$ , la escala de longitud del sistema es pequeña y por lo tanto el fluido en movimiento tiene efectos despreciables sobre el campo magnético. El campo magnético es disipativo por naturaleza, en lugar de elástico, lo que produce una conversión de energía magnética en calor por de la disipación de Joule.

### A.3 Conservación de masa: Ecuación de continuidad

Desde el punto de vista macroscópico el plasma se puede tratar como un fluido simple. Esta condición establece que si la masa total de un fluido en el sistema se conserva, entonces la suma de los términos de colisión debe ser igual a cero.

Un plasma puede ser descompuesto en pequeños elementos cúbicos infinitesimales de dimensiones  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ . De acuerdo a la continuidad de la masa, el flujo entrante hacia cada elemento debe ser igual al flujo saliente. Ver la Fig. A.1, en donde se muestra una ilustración del flujo de masa a través del elemento de fluido.

La masa total que fluye con velocidad  $v_x$  en la dirección  $x$  a lo largo de la cara del cubo de área  $dydz$  está dada por

$$(\rho v_x) dydz, \quad (\text{A.11})$$

en donde  $\rho$  es la densidad de masa. Entonces, después de un desplazamiento  $dx$  a lo largo de la dirección  $x$  en el cubo, se tiene que el flujo de masa total que sale está dado por

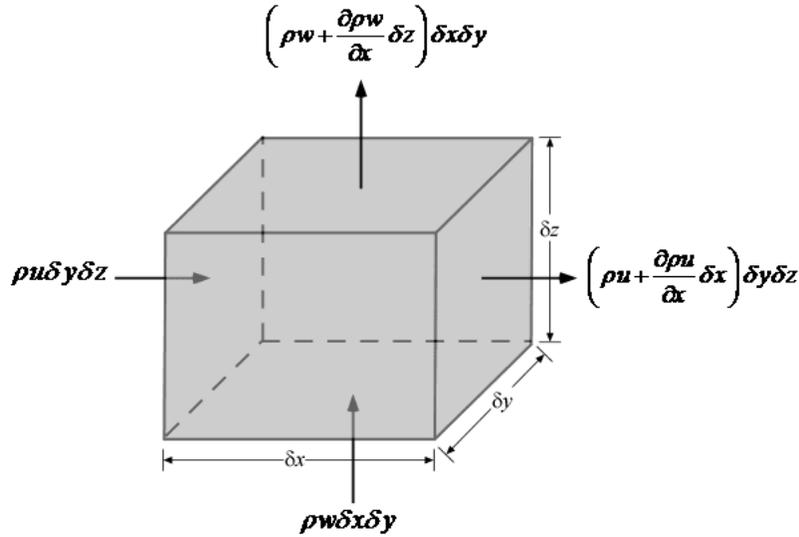


Figura A.1: Elemento de volumen del fluido que expresa la conservación de masa por medio de la ecuación de continuidad.

$$\left( \rho v_x + \left( \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} \right) dx \right) dydz, \tag{A.12}$$

en donde  $\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}$  es el cambio del flujo de masa entre la caras izquierda y derecha del cubo. Para que se conserve la masa, la ecuación (A.11) y la ecuación (A.12) deben ser iguales. Por lo tanto, el flujo neto que sale es la diferencia entre las ecuaciones (A.11) y (A.12) que se expresa como

$$\left( \rho v_x + \left( \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} \right) dx \right) dydz - (\rho v_x) dydz = 0, \tag{A.13}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} dydz = 0. \tag{A.14}$$

De manera análoga, el cambio en el flujo de masa se conservará para  $v_y$  y  $v_z$ . Por lo tanto el flujo total de masa a través del cubo completo, está dado por la suma de las contribuciones en cada dirección, y se define como

$$\left( \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} \right) dx dy dz. \tag{A.15}$$

Ya que la masa se conserva, entonces el flujo total de masa que sale del elemento de volumen del plasma debe ser igual a la tasa de disminución de masa ( $\rho\mathbf{v}$ ) dentro del volumen, lo que implica

$$\left(\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}\right) dx dy dz = -\frac{\partial\rho}{\partial t}(dx dy dz). \quad (\text{A.16})$$

Que después de eliminar de cada lado de la ecuación (A.16) los términos de elemento de volumen, se obtiene

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \left(\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}\right) = 0. \quad (\text{A.17})$$

El segundo término de la ecuación (A.17), se puede reescribir en términos de la  $\nabla \cdot \mathbf{v}$ , en donde  $\mathbf{v}$  es el vector de la velocidad en tres dimensiones y  $\nabla$  es el operador vectorial  $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$ , entonces usando esto en la ecuación (A.17), se llega a la ecuación de continuidad en forma conservativa, la cual se expresa como

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) = 0, \quad (\text{A.18})$$

en donde  $t$  es el parámetro temporal. Físicamente, la densidad incrementa en un punto ( $\frac{\partial\rho}{\partial t} > 0$ ) si la masa fluye dentro de una región circundante, y decrece ( $\frac{\partial\rho}{\partial t} < 0$ ) si hay una divergencia en lugar de una convergencia del flujo de masa.

## A.4 Conservación de momento: Ecuación de momento

El momento se conserva cuando su razón de cambio toma en cuenta el acoplamiento con todas las fuerzas que actúan sobre el sistema. La ecuación de momento se deriva inicialmente de la segunda ley de Newton ( $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ ) sobre cada elemento cúbico infinitesimal del fluido que se muestra en la Fig. (A.1). La masa total del cubo se puede considerar como la densidad de masa multiplicada por el volumen del cubo y se expresa como

$$m = (\rho) dx dy dz. \quad (\text{A.19})$$

Considerando que la aceleración del cubo que se mueve a lo largo de la dirección  $x$  sobre el dominio, entonces se puede demostrar que está dada por

$$a_x = \frac{Dv_x}{Dt}, \quad (\text{A.20})$$

en donde  $a_x$  es la aceleración en dirección  $x$  que se toma por simplicidad solamente. Por lo tanto, de la segunda ley de Newton la fuerza se está dada por

$$F_x = \rho \frac{Dv_x}{Dt} dx dy dz. \quad (\text{A.21})$$

Si se considera solamente la forma euleriana de un fluido no viscoso asumiendo que no hay fuerzas gravitacionales. Entonces, las únicas fuerzas que se necesita calcular son las debidas a la presión que actúa sobre cada cara del cubo. Como se muestra en la Fig. (A.1), hay una presión  $p$ , que actúa sobre el lado izquierda de la cara  $dydz$  y una presión  $(p + (\partial p/\partial x)dx)$  actuando en dirección opuesta sobre la cara derecha del cubo con área  $dydz$ . Entonces la fuerza total en la dirección  $x$ , está dada por la diferencia de presiones entre las dos caras, y se expresa de la siguiente forma

$$\left( p - \left( p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) \right) dy dz = 0 \quad (\text{A.22})$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz = 0. \quad (\text{A.23})$$

Ahora, si se igualan las fuerzas del lado derecho de la ecuación (A.21) y del lado izquierdo de la ecuación (A.23) en todas las direcciones  $(x, y, z)$  se tiene lo siguiente

$$\rho \left( \frac{Dv_x}{Dt} + \frac{Dv_y}{Dt} + \frac{Dv_z}{Dt} \right) dx dy dz = - \left( \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z} \right) dx dy dz. \quad (\text{A.24})$$

Nuevamente como en el caso de la ecuación de continuidad se eliminan los elementos de volumen en ambos lados de la ecuación anterior. Como se derivó la ecuación de continuidad, el lado izquierdo de la ecuación (A.24) se puede combinar con el vector de la velocidad  $\mathbf{v}$ . De igual forma, el lado derecho de la ecuación (A.24) se puede expresar en términos del operador  $\nabla$ , y con esto se obtiene la ecuación de momento en forma no conservativa o primitiva

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p. \quad (\text{A.25})$$

En la expresión anterior  $\frac{D}{Dt}$  representa la derivada advectiva o sustancial dada por

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}. \quad (\text{A.26})$$

Entonces usando lo anterior y en combinación con una identidad vectorial el primer término del lado derecho de la ecuación (A.25) se puede expresar como

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} - \mathbf{v} \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (\text{A.27})$$

Además, el segundo término se expresa de la siguiente forma

$$\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) - \mathbf{v} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}). \quad (\text{A.28})$$

Entonces sustituyendo las expresiones dadas por las ecuaciones (A.27),(A.28) en el lado derecho de la ecuación (A.25), se tiene una nueva expresión para el término  $\rho D\mathbf{v}/Dt$ , el cual está dado por

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} - \mathbf{v} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) - \mathbf{v} \nabla \cdot \rho \mathbf{v} \quad (\text{A.29})$$

$$= \frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} - \mathbf{v} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right] + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) \quad (\text{A.30})$$

$$= \frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}), \quad (\text{A.31})$$

en donde los términos dentro de los brackets representan la ecuación de continuidad, entonces ese término es igual a cero. Aparte de considerar el gradiente de presión en la ecuación (A.25), se pueden considerar más fuerzas externas, tales como la fuerza de gravedad y la fuerza de Lorentz ( $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ ) que es producida por el campo magnético. Entonces se llega a la ecuación de momento escrita en forma primitiva

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) + \nabla p - \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \rho \mathbf{g} = \mathbf{0}, \quad (\text{A.32})$$

en donde  $\rho \mathbf{g}$  es la fuerza externa debida a la gravedad, que para el caso del Sol está dada por  $g = 274 \text{m s}^{-2}$ . En los problemas aplicados a la atmósfera solar se consideró un campo gravitacional constante en dirección  $z$  y una fuerza de Lorentz.

La fuerza de Lorentz  $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$  puede ser expandida en términos de la expresión para la densidad de corriente  $\mathbf{J}$  tomada de ley de Ampere, esto es

$$\mathbf{J} \times \mathbf{B} = (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \nabla \left( \frac{\mathbf{B}^2}{2} \right). \quad (\text{A.33})$$

De la ecuación anterior, se puede ver que las líneas de campo magnético tienen una tensión de magnitud  $\mathbf{B}^2$  y una presión de magnitud  $\mathbf{B}^2/2$ . Dado que

$$\nabla \frac{\mathbf{B}^2}{2} = \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{B}^2}{2} \right) \mathbf{i}. \quad (\text{A.34})$$

Entonces si se sustituye la nueva expresión de la fuerza de Lorentz en la ecuación (A.32), se obtiene lo siguiente

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot \left( \rho \mathbf{v} \mathbf{v} + p + \frac{\mathbf{B}^2}{2} \mathbf{i} - \mathbf{B} \mathbf{B} - \rho \mathbf{g} \right) = \mathbf{0}. \quad (\text{A.35})$$

La presión total del sistema se define como la suma de la presión del gas  $p$  más la presión magnética  $\mathbf{B}^2/2$ , esto es

$$p_t = p + \mathbf{B}^2/2. \quad (\text{A.36})$$

Se puede definir un parámetro que relaciona la presión del gas con la presión magnética, este es el parámetro  $\beta$ , el cual se define como el cociente entre la presión del gas y la presión magnética, es decir

$$\beta = \frac{p}{\mathbf{B}^2/2}. \quad (\text{A.37})$$

Por lo general en la atmósfera solar,  $\beta > 1$  en la fotosfera y  $\beta < 1$  en la corona y la región de transición. Finalmente se puede expresar la ecuación de conservación del momento incluyendo el efecto de la gravedad de la siguiente forma:

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v} - \mathbf{B} \mathbf{B} + p_t) - \rho \mathbf{g} = \mathbf{0}. \quad (\text{A.38})$$

## A.5 Conservación de Energía: La Ecuación de energía

La tasa total de cambio de la energía dentro de un elemento infinitesimal cúbico del fluido del plasma se representa como la razón de cambio del trabajo hecho sobre el elemento en forma de conductividad térmica, disipación de Joule y el trabajo que hace la fuerza de gravedad sobre el elemento de volumen. Entonces la ecuación de la energía se puede escribir como

$$\frac{DE}{Dt} = \gamma E \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} + \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{g}, \quad (\text{A.39})$$

en donde  $E$  es la densidad de energía total, definida como  $E = p/(\gamma - 1) + \rho \mathbf{v}^2/2$  (energía térmica+ energía cinética),  $p$  está dada por la ecuación del gas ideal,  $\gamma$  es el índice adiabático y  $\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{g}$  es la energía potencial gravitacional.

La disipación de Joule que está representada por el término  $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$  puede ser expresada en términos de la ley de Ampere, ley de Faraday, ley de Ohm y una identidad vectorial, lo que resulta

$$\begin{aligned} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} &= \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \\ &= \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \\ &= -\mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \cdot ((\eta \mathbf{J} - \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}) \\ &= -\mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \cdot [(\mathbf{B} \times \eta \mathbf{J}) - (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}] \\ &= -\frac{\partial \mathbf{B}^2}{\partial t} \frac{1}{2} + \nabla \cdot [(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B})\mathbf{B} - \mathbf{B}^2 \mathbf{v}] - \nabla \cdot (\mathbf{B} \times \eta \mathbf{J}). \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

Para juntar todas las derivadas temporales, se puede demostrar que la densidad de energía total es la suma de las energías, térmica, cinética y magnética, esto es

$$E = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{\rho \mathbf{v}^2}{2} + \frac{\mathbf{B}^2}{2}. \quad (\text{A.41})$$

Y la ecuación de estado del gas ideal queda expresada como

$$p = (\gamma - 1)(E - \rho \mathbf{v}^2/2 - \mathbf{B}^2/2). \quad (\text{A.42})$$

Por lo tanto la ecuación de la densidad de energía total en forma conservativa es

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot (E\mathbf{v} - \mathbf{B}\mathbf{B} \cdot \mathbf{v} + p\mathbf{v}) - \nabla \cdot (\mathbf{B} \times \eta\mathbf{J}) - \rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{g} = 0. \quad (\text{A.43})$$

En la ecuación anterior, se incluyen los términos de la energía potencial gravitacional y de la resistividad magnética que aparece como disipación de Joule.



# Apéndice B

## Normalización de las ecuaciones de la MHD ideal y resistiva

### B.1 Ecuaciones dimensionales de la MHD ideal

El sistema de ecuaciones de la MHD ideal sometidas a un campo gravitacional fue usado en el estudio de las oscilaciones transversales de pulsos alfvénicos y del efecto de dos ondas de Alfvén impulsivamente generadas en la influencia del calentamiento de la corona quieta. En tales problemas se resolvieron las ecuaciones en su forma adimensional, por lo tanto en este apéndice se muestra el proceso de adimensionalización.

Las ecuaciones de la MHD ideal sometidas a un campo gravitacional en su forma dimensional son las siguientes:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (\text{B.1})$$

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot \left( \rho \mathbf{v} \mathbf{v} + \left( p + \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} \right) \mathbf{I} - \frac{\mathbf{B}^2}{\mu_0} \mathbf{v} \right) = \rho \mathbf{g}, \quad (\text{B.2})$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot \left( \left( E + p + \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} \right) \mathbf{v} - \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B}}{\mu_0} \right) = \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} \quad (\text{B.3})$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \mathbf{B} - \mathbf{B} \mathbf{v}) = 0, \quad (\text{B.4})$$

todas las variables tienen el mismo significado descrito en los capítulos anteriores, y  $\mu_0$  es la permeabilidad magnética en el vacío, que tiene un valor de  $4\pi \times 10^{-7} \text{ T m A}^{-1}$  en el

sistema internacional de unidades.

La presión  $p$ , y la densidad de energía total  $E$ , están relacionadas mediante la ecuación de estado del gas ideal

$$E = \frac{p}{\gamma - 1} - \frac{\rho v^2}{2} - \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0}, \quad (\text{B.5})$$

en donde  $\gamma$  es el cociente de los calores específicos (adimensional), lo que implica que  $E$  deba tener las mismas unidades que  $p$ .

En el caso de las aplicaciones en el estudio de la propagación de ondas en la atmósfera solar, es más conveniente escribir la ecuación de estado del gas ideal en términos de la temperatura, esto es

$$p = \frac{k_B \rho T}{m}, \quad (\text{B.6})$$

donde  $T$  es la temperatura del gas,  $k_B$  es la constante de Boltzmann y  $m$  es la masa media de las partículas.

### B.1.1 Parámetros de normalización

Para hacer adimensionales a las ecuaciones (B.1)-(B.6), se necesita primeramente adimensionalizar todas las cantidades involucradas. En este caso se toma los siguientes parámetros de referencia:

- $l_0$ : escala de longitud de referencia,
- $\rho_0$ : escala de densidad de referencia del plasma,
- $B_0$ : escala de la magnitud del campo magnético de referencia,

de las cuales se derivan directamente las cantidades de la velocidad y el tiempo

$$v_0 = v_{A,0} = \frac{B_0}{\sqrt{\mu_0 \rho_0}}, \quad (\text{B.7})$$

$$t_0 = \frac{l_0}{v_0}, \quad (\text{B.8})$$

y en consecuencia se pueden obtener las demás variables adimensionales, definidas de la siguiente forma

$$\bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad (\text{B.9})$$

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{v_0}, \quad (\text{B.10})$$

$$\bar{t} = \frac{t}{t_0}, \quad (\text{B.11})$$

$$\bar{\mathbf{B}} = \frac{\mathbf{B}}{B_0}, \quad (\text{B.12})$$

$$\bar{p} = \frac{p}{\rho_0 v_0^2}, \quad (\text{B.13})$$

$$\bar{E} = \frac{E}{\rho_0 v_0^2}, \quad (\text{B.14})$$

$$\bar{\mathbf{g}} = \mathbf{g} \left( \frac{l_0}{v_0^2} \right). \quad (\text{B.15})$$

Finalmente para hacer adimensional a la ecuación (B.6), se usan los factores adimensionales de  $p$  y  $\rho$  con el objetivo de hacer adimensional la temperatura  $T$ . Entonces, partiendo de la ecuación (B.6) se tiene lo siguiente

$$p = \frac{k_B \rho T}{m} \rightarrow \bar{p} = \frac{k_B}{v_0^2 m} \bar{\rho} T, \quad (\text{B.16})$$

lo que implica que la temperatura adimensional está dada por

$$\bar{T} = T \left( \frac{k_B}{m v_0^2} \right). \quad (\text{B.17})$$

De esta forma se adimensionalizan las ecuaciones de la MHD ideal sometidas a un campo gravitacional, y los factores de escala dependen del problema en particular que se estudie.

## B.2 Ecuaciones dimensionales de la MHD resistiva

El sistema de ecuaciones de la MHD resistiva que se uso para estudiar la formación de jets en la atmósfera solar se hace adimensional de forma similar al caso de las ecuaciones de

la MHD ideal, sin embargo, en este caso se tienen que hacer adimensional la densidad de corriente  $\mathbf{J}$  y la resistividad  $\eta$ . Las ecuaciones de la MHD resistiva sometidas a un campo gravitacional en su forma dimensional son las siguientes

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (\text{B.18})$$

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot \left( \rho \mathbf{v} \mathbf{v} + \left( p + \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} \right) \mathbf{I} - \frac{\mathbf{B}^2}{\mu_0} \mathbf{v} \right) = \rho \mathbf{g}, \quad (\text{B.19})$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot \left( \left( E + p + \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} \right) \mathbf{v} - \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B}}{\mu_0} \right) = -\nabla \cdot \left( \frac{\eta \mathbf{J} \times \mathbf{B}}{\mu_0} \right) + \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} \quad (\text{B.20})$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \mathbf{B} - \mathbf{B} \mathbf{v}) = -\nabla \times (\eta \mathbf{J}), \quad (\text{B.21})$$

donde  $\eta$  es la resistividad magnética y  $\mathbf{J}$  es la densidad de corriente que se define por medio de la ley de Ampere

$$\mathbf{J} = \frac{\nabla \times \mathbf{B}}{\mu_0}. \quad (\text{B.22})$$

Para hacer adimensionales las ecuaciones (B.18)-(B.21), se consideran los mismos factores de escala que en el caso de la MHD ideal, sin embargo en las ecuaciones de la MHD resistiva se deben encontrar los factores que permitan hacer adimensionales la densidad de corriente  $\mathbf{J}$  dada por la ecuación (B.22) y resistividad magnética  $\eta$ .

Para hacer adimensional  $\mathbf{J}$  se usa el factor de escala de la longitud  $l_0$  para hacer adimensional al operador  $\nabla$  y del factor de escala del campo magnético  $B_0$ , esto es

$$\bar{\nabla} = l_0 \nabla. \quad (\text{B.23})$$

Entonces la versión sin dimensiones de  $\mathbf{J}$  es

$$\mathbf{J} = \frac{\nabla \times \mathbf{B}}{\mu_0} = \frac{B_0}{l_0 \mu_0} \bar{\nabla} \times \bar{\mathbf{B}}, \quad (\text{B.24})$$

lo que implica que se debe tomar el factor

$$J_0 = \frac{B_0}{l_0 \mu_0}, \quad (\text{B.25})$$

para de esa forma llegar a la cantidad  $\bar{J}$  dada por

$$\bar{\mathbf{J}} = \frac{\mathbf{J}}{J_0}. \quad (\text{B.26})$$

Ahora, para hacer adimensional  $\eta$ , se hace un análisis dimensional de las ecuaciones que lo involucran, con lo que se llega a que las cantidades adecuadas para adimensionalizar  $\eta$  son

$$\eta_0 = v_0 l_0 \mu_0, \quad (\text{B.27})$$

y se tiene la variable adimensional  $\bar{\eta}$  dada por

$$\bar{\eta} = \frac{\eta}{\eta_0}. \quad (\text{B.28})$$

Con tales factores de escalamiento dados por las ecuaciones (B.26) y ( B.28), en conjunto con los factores obtenidos para el caso de la MHD ideal es posible obtener el conjunto de ecuaciones adimensionales de la MHD resistiva sometidas a un campo gravitacional.



# Bibliografía

- [Amari et al. (1997)] Amari, T., Aly, J. J., Luciani, J. F., & Boulmezaoud, T. Z. 1997, Sol. Phys., 174, 129A
- [Anan et al. (2010)] Anan, T., Kitai, R., Kawate, T. et al. 2010, PASJ, 62, 871
- [Arber et al. (2001)] Arber, T. D., Longbottom, A. W., Gerrard, C. L., & Milne, A. M. 2001, J. Comput. Phys., 171, 151
- [Archontis et al. (2005)] Archontis, V., Moreno-Insertis, F., Galsgaard, K., & Hood, A. W. 2005, ApJ, 635, 1299
- [Archontis et al. (2010)] Archontis, V., Tsinganos, K., & Gontikakis, C. 2010, A&A, 512, L2
- [Aschwanden (2004)] Aschwanden, M. J. 2004, Physics of the Solar Corona. An Introduction (Praxis Publishing Ltd)
- [Avrett (2003)] Avrett, E. H. 2003, ASP Conference Series, 286, 419A
- [Avrett & Loeser (2008)] Avrett, E. H., & Loeser R. 2008, ApJS, 175, 229
- [Ayres & Testerman (1981)] Ayres, T. R., & Testerman, L. 1981, ApJ, 245, 1124
- [Ayres et al. (2006)] Ayres, T. R., Plymate, C., & Keller, C. U. 2006, ApJS, 165, 618
- [Baker et al. (2008)] Baker, D., van Driel-Gesztelyi, L., Kamio, S., et al. 2008, in Astronomical Society of the Pacific Conference Series, Vol. 397, First Results From Hinode, ed. S. A. Matthews, J. M. Davis, & L. K. Harra, 23
- [Balsara & Spicer (1998)] Balsara, D. S., & Spicer, S. 1998, J. Comput. Phys., 149, 270
- [Balsara & Spicer (1999)] Balsara, D. S., & Spicer, S. 1999, J. Comput. Phys., 148, 133
- [Batten et al. (1997)] Batten, P., Clarke, N., Lambert, C., & Causon, D. 1997, SIAM J. Sci. Comput., 18, 1553

- [Beckers (1968)] Beckers, J. M. 1968, *Sol. Phys.*, 3, 367
- [Beckers (1972)] Beckers, J. M. 1972, *ARA&A*, 10, 73
- [Beckwith & Stone (2011)] Beckwith K., & Stone, J. 2011, *ApJS*, 193, 6
- [Birn et al. (2001)] Birn, J., Drake, J. F., Shay, M. A., et al. 2001, *J. Geophys. Res.*, 106, 3715
- [Biskamp (1986)] Biskamp, D. 1986, *Phys. Fluids*, 29, 1520
- [Brandenburg & Dobler (2002)] Brandenburg, A., & Dobler, W. 2002, *Comput. Phys. Comm.*, 147, 471
- [Brecht et al. (1981)] Brecht, S. H., Lyon, J. G., Fedder, J. A., & Hain, K. 1981, *Geophys. Res. Lett.*, 8, 397
- [Brio & Wu (1988)] Brio, M., & Wu, C. C. 1988, *J. Comput. Phys.*, 75, 400
- [Browning (1991)] Browning, P. K. 1991, *Plasma Phys. Control Fusion*, 33, 539
- [Brueckner & Bartoe (1983)] Brueckner, G. E. & Bartoe, J. D. F. 1983, *ApJ*, 272, 329
- [Budnik et al. (1998)] Budnik, F., Schroeder, K., Wilhelm, K., & Glassmeier, K. 1998, *A&A*, 334, L77
- [Cargo & Gallice (1995)] Cargo, P & Gallice, G. 1995, *R. Acad. Sci.*, 320, 1269
- [Cargo & Gallice (1997)] Cargo, P., & Gallice, G. 1997, *J. Comput. Phys.*, 136, 446
- [Chae et al. (1998)] Chae, J., Wang, H., Lee, C., Goode, P. R., & Schulhe, U. 1998, *ApJL*, 504, L123
- [Chandrasekhar (1961)] Chandrasekhar, S., 1961, *Hydrodynamics and Hydromagnetic stability*, Oxford University.
- [Chen & Priest (2006)] Chen, P. F. & Priest, E. R. 2006, *Sol. Phys.*, 238, 313
- [Cowling (1976)] Cowling T. K., 1976. *Magnetohydrodynamics*. (Adam Hilger, Bristol, UK).
- [Curdt et al. (1999)] Curdt W., Heinzel P., Schmidt W., Tarbell T., Uexkull V., Wilken V., 1999, in Wilson A., ed., *ESA SP-448: Magnetic Fields and Solar Processes*. ESA, Noordwijk, p. 177
- [Chmielewski et al. (2014a)] Chmielewski P., Murawski K., Musielak Z. E., Srivastava A. K. 2014a, *Acta Phys. Pol.*, 125, 1

- [Chmielewski et al. (2014b)] Chmielewski P., Murawski K., Musielak Z. E., Srivastava A. K. 2014b, *ApJ*, 793, 43
- [Cunningham et al. (2009)] Cunninham, A. J., Frank, A., Varniere, P., Mitran, S., & Jones, T. W. 2009, *ApJS*, 182, 519
- [Dai & Woodward (1998)] Dai W., & Woodward P. R. 1998, *ApJ*, 494, 317
- [Davis (1988)] Davis, S. F. 1988, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 445, 9
- [Dedner et al.(2002)] Dedner A., Kemm F., Kroner D., Munz C.D., Schnitzer T., & Wesenberg M. 2002, *J. Comput. Phys.*, 175, 645
- [Del Zanna et al. (2005)] Del Zanna, L., Schnaekens, E., & Velli, M. 2005, *A&A*, 431, 1095
- [De Pontieu (1999)] De Pontieu, B. 1999, *A&A*, 347, 696
- [De Pontieu et al. (2004)] De Pontieu, B., Erdélyi, R., & James, S. P. 2004, *Nature*, 430, 536
- [De Pontieu & Erdélyi (2006)] De Pontieu, B. & Erdélyi, R. 2006, *Phil. Trans. R. Soc. A*, 364, 383
- [De Pontieu et al. (2007a)] De Pontieu, B., McIntosh, S., Hansteen, V. H., et al. 2007a, *PASJ*, 59, 655
- [De Pontieu et al. (2007b)] De Pontieu, B., Hansteen, V. H., Rouppe van der Voort, L., van Noort, M., & Carlsson, M. 2007b, *ApJ*, 655, 624
- [De Pontieu et al. (2007c)] De Pontieu, B., McIntosh, S., Hansteen, V. H., et al. 2007c, *PASJ*, 59, 655
- [De Pontieu et al. (2009)] De Pontieu, B., McIntosh, S. W., Hansteen, V. H., & Schrijver, C. J. 2009, *ApJL*, 701, L1
- [De Pontieu et al. (2011)] De Pontieu, B., McIntosh, S. W., Carlsson, M., et al. 2011, *Science*, 331, 55
- [De Pontieu et al. (2012)] De Pontieu, B., Carlsson, M., Rouppe van der Voort, L. H. M., et al. 2012, *ApJL*, 752, L12
- [Dere et al. (1989)] Dere, K. P., Bartoe, J.D. F., & Brueckner, G. E. 1989, *Sol. Phys.*, 123, 41
- [DeVore (1991)] DeVore, R. 1991, *J. Comput. Phys.*, 92, 142

- [de Wijn et al. (2009)] de Wijn, A. G., McIntosh, S. W., & De Pontieu, B. 2009, *ApJL*, 702, L168
- [Doyle et al. (2006)] Doyle, J. G., Popescu, M. D., & Taroyan, Y. 2006, *A&A*, 446, 327
- [Einfeldt (1988)] Einfeldt, B. 1988, *SIAM J. Numer. Anal.*, 25, 294
- [Einfeldt et al. (1991)] Einfeldt, B., Munz, C. D., Roe, P. L., & Sjögren, B. J. 1991, *J. Comput. Phys.*, 92, 273
- [Erdélyi & Goossens (1995)] Erdélyi, R. & Goossens, M. 1995, *A&A*, 294, 575
- [Erdélyi (1998)] Erdélyi, R. 1998, *Sol. Phys.*, 180, 213
- [Erdélyi et al. (2003)] Erdélyi, R., Petrovay, K., Roberts, B., & Aschwanden, M. 2003, *Turbulence, Waves and Instabilities in the Solar Plasma*
- [Erdélyi & James (2004)] Erdélyi, R. & James, S. P. 2004, *A&A*, 427, 1055
- [Erdélyi (2005)] Erdélyi, R. 2005, *Publications of the Astronomy Department of the Eotvos Lorand University*, 15, 7
- [Erdélyi (2008)] Erdélyi, R. 2008, *Waves and Oscillations in the Solar Atmosphere*, 61-108
- [Evans & Hawley (1988)] Evans, C. R. & Hawley, J. H. 1988, *ApJ*, 332, 659
- [Fontela et al. (1990)] Fontela, J. M., Avrett, E. H., & Loeser, R. 1990, *ApJ*, 355, 700
- [Frank et al. (1996)] Frank, A., Jones, T. W., Ryu, D., & Gaalaas, J. 1996, *ApJ*, 460, 777
- [Fromang et al. (2006)] Fromang, S., Hennebelle, P., & Teyssier, R. 2006, *A&A*, 457, 371
- [Fryxell et al. (2000)] Fryxell B. et al. 2000, *ApJS*, 131, 273
- [Fuchs et al. (2009)] Fuchs, F. G., McMurry, A. D., Mishra, S., & Waagan, K. 2009, *Commun. Comput. Phys.*, 7, 473
- [Galsgaard et al. (2007)] Galsgaard, K., Archontis, V., Moreno-Insertis, F., & Hood, A. W. 2007, *ApJ*, 666, 516
- [Gardiner & Stone (2005)] Gardiner, T. A., & Stone, J. M. 2005, *J. Comput. Phys.*, 205, 509
- [Gardiner & Stone (2006)] Gardiner, T. A., & Stone, J. M. 2006, *ASP Conference Series*, 359, 143G

- [Godunov (1959)] Godunov, S. K. 1959, A Difference Scheme for Numerical Solution of Discontinuous Solution of Hydrodynamic Equations , Math. Sbornik 47, 271-306.
- [Godunov (1972)] Godunov, S.K. 1972, Symmetric form of the equations of magnetohydrodynamics, Numerical Methods for Mechanics of Continuum Medium 1 26-34.
- [Goedbloed et al. (2010)] Goedbloed, J. P., Keppens, R., & Poedts, S., 2010, Advanced Magnetohydrodynamics, With Applications to Laboratory and Astrophysical Plasmas, Cambridge University Press.
- [Gontikakis et al. (2009)] Gontikakis, C., Archontis, V., & Tsinganos, K. 2009, A&A, 506, L45
- [González-Avilés & Guzmán (2015)] González-Avilés J. J., & Guzmán F. S. 2015, MNRAS, 451, 4819
- [González-Avilés et al. (2015)] González-Avilés J. J., Cruz-Osorio, A., Lora-Clavijo, F. D., & Guzmán F. S. 2015, MNRAS, 454, 1817
- [González-Avilés et al. (2017a)] González-Avilés, J. J., Guzmán, F. S., & Fedun, V. 2017, ApJ, 836, 24
- [González-Avilés et al. (2017b)] González-Avilés, J. J., Guzmán, F. S., Fedun, V., Verth, G., Shelyag, S., & Regnier, S. 2017, sometido al ApJ
- [González-Avilés et al. (2017c)] González-Avilés, J. J., Guzmán, F. S., Fedun, V., Verth, G., Shelyag, S., & Regnier, S. 2017, en preparación
- [Goodman (2012)] Goodman, M. L. 2012, ApJ, 757, 188
- [Griffiths et al. (1999)] Griffiths, N. W., Fisher, G. H., Woods, D. T., & Siegmund, H. W. 1999, ApJ, 512, 992
- [Gudiksen et al. (2011)] Gudiksen, B. V., Carlsson, M., Hansteen, V. H., Hayek, W., Leenaarts, J., & Martínez-Sykora, J. 2011, A&A, 531, A154
- [Guo et al. (2016)] Guo, X., Florinski, V., & Wang, C. 2016, J. Comput. Phys., 327, 543
- [Gurski (2004)] Gurski, K. F., 2004, SIAM J. Sci. Comput., 25, 2165
- [Hansteen et al. (2006)] Hansteen, V. H., De Pontieu, B., Ruoppe van der Voort, L., van Noort, M., & Carlsson, M. 2006, ApJL, 647, L73
- [Harten et al. (1983)] Harten, P., Lax, P. D., & van Leer, B. 1983, SIAM review, 25, 35

- [Harten et al. (1997)] Harten, A., Engquist, B., Chakravarthy, S. R. 1997, *J. Comput. Phys.*, 131, 347
- [He et al. (2009)] He, J., Marsch, E., Tu, C., & Tian, H. 2009, *ApJL*, 705, L217
- [Heggland et al. (2007)] Heggland, L., De Pontieu, B., & Hansteen, V. H. 2007, *ApJ*, 666, 1227
- [Heggland et al. (2009)] Heggland, L., De Pontieu, B., & Hansteen, V. H. 2009, *ApJ*, 702, 1
- [Heyvaerts & Priest (1983)] Heyvaerts, J. & Priest, E. R. 1983, *A&A*, 117, 220
- [Hollweg (1991)] Hollweg J. V., 1991, in Ulmschneider P., Priest E. R., Rosner R., eds, *Mechanisms of Chromospheric and Coronal Heating*. Springer-Verlag, Berlin, p. 300
- [Isobe et al. (2008)] Isobe, H., Proctor, M. R. E., & Weiss, N. O. 2008, *ApJL*, 679, L57
- [Ji et al. (1998)] Ji, H., Yamada, M., Hsu, S., & Kulsrud, R. 1998, *Phys. Rev. Lett.*, 80, 3256
- [Jiang et al. (2012)] Jiang, R. L., Fang, C., & Chen, P. F., 2012, *Comput. Phys. Comm.*, 283, 1617
- [Jiang et al. (2015)] Jiang, C., Wu, S. T., Feng, X., & Hu, Q. 2015, *Nat. Commun.*, 7, 11522
- [Judge et al. (2011)] Judge, P. G., Tritschler, A., & Chye Low, B. 2011, *ApJL*, 730, L4
- [Kelvinsong (2015)] Kelvinsong, 2015. *Diagram of the Sun (Wikipedia)*. *Diagram of the Sun (Wikipedia)*
- [Keppens et al. (2003)] Keppens, R., Nool, M., Toth, G., Goedbloed, J. P. 2003, *Comput. Phys. Comm.*, 153, 317
- [Keppens et al. (2012)] Keppens, R., Meliani, Z., van Marle, A. J., et al. 2012, *J. Comput. Phys.*, 231, 718
- [Kim et al. (2007)] Kim, Y., Moon, Y., Park, Y., et al. 2007, *PASJ*, 59, 763
- [Komissarov (2007)] Komissarov S. S. 2007, *MNRAS*, 382, 995
- [Kosugi et al. (2007)] Kosugi, T., Matsuzaki, K., Sakao, T., et al. 2007, *Sol. Phys.*, 243, 3
- [Koutchmy & Stellmacher (1976)] Koutchmy, S. & Stellmacher, G. 1976, *Sol. Phys.*, 49, 253

- [Kudoh & Shibata] Kudoh T., & Shibata K. 1999, ApJ, 514, 493
- [Kuridze et al. (2012)] Kuridze, D., Morton, R. J., Erdélyi, R., Dorrian, G. D., Mathioudakis, M., Jess, D. B., & Keenan, F. P. 2012, ApJ, 750, 51
- [Kuridze et al. (2016)] Kuridze, D., Zaqarashvili, T. V., Henriques, V., Mathioudakis, M., Keenan, F. P., & Hanslmeier, A. 2016, ApJ, 830, 2
- [Langangen et al. (2008)] Langangen, Ø., De Pontieu, B., Carlsson, M., et al. 2008, ApJL, 679, L167
- [Lee (1996)] Lee, D., An Unsplit Staggered Mesh Scheme For Multidimensional Magnetohydrodynamics: A Staggered Dissipation-control Differencing Algorithm, PhD thesis, 1996.
- [Lee & Deane (2000)] Lee D., & Deane, A. E. 2009, J. Comput. Phys., 228, 952
- [Lee (2013)] Lee D. 2013, J. Comput. Phys., 243, 269
- [LeVeque (1992)] LeVeque, R. J. 1992, Numerical Methods for Conservation Laws (Basel: Birkhäuser)
- [Li (2005)] S. Li, 2005, J. Comput. Phys., 203, 334
- [Li (2008)] S. Li, 2008, ASP Conference Series, 385, 273L
- [Linde (1998)] Linde, T. J., 1988, A Three-Dimensional Adaptive Multifluid MHD Model of the Heliosphere, Phd thesis, The University of Michigan
- [Löffler et al. (2012)] Löffler, F., Faber, J., Bentivegna, E., Bode, T., Diener, P., Haas, R., Hinder, I., Mundim, B. C., Ott, C. D., Schnetter, E., Allen, G., Campanelli, & M., Laguna, P. 2012, Class. Quantum Grav., 29, 115001
- [Londrillo & Del Zanna (2000)] Londrillo, P., & Del Zanna, L. 2000, ApJ, 530, 508
- [Lora-Clavijo et al. (2015)] Lora-Clavijo, F. D., Cruz-Osorio, A., & Guzmán, F. S. 2015, ApJS, 218, 24
- [Low (1985)] Low B. C. 1985, ApJ, 293, 31
- [Madjarska et al. (2011)] Madjarska, M. S., Vanninathan, K., & Doyle, J. G. 2011, A&A, 532, L1
- [Marik & Erdélyi (2002)] Marik, D. & Erdélyi, R. 2002, A&A, 393, L73
- [Mariska (1992)] Mariska, J. T. 1992, The solar transition region (Cambridge University Press)

- [Martínez-Sykora et al. (2009)] Martínez-Sykora, J., Hansteen, V., De Pontieu, B., & Carlsson, M. 2009, *ApJ*, 701, 1569
- [Martínez-Sykora et al. (2011)] Martínez-Sykora, J., Hansteen, V., & Moreno-Insertis, F. 2011, *ApJ*, 736, 9
- [Martínez-Sykora et al. (2013)] Martínez-Sykora, J., De Pontieu, B., Leenaarts, J., Pereira, T. M. D., Carlsson, M., Hansteen, V., Stern, J. V., Tian, H., McIntosh, S. W., & Van Der Voort, L. R. 2013, *ApJ*, 771, 66
- [Martínez-Sykora et al. (2017)] Martínez-Sykora, J., De Pontieu, B., Hansteen, V. H., Rouppe van der Voort, L., Carlsson, M., & Pereira, T. M. D. 2017, *Science*, 356, 1269
- [Matsumoto et al. (2016)] Matsumoto, Y., Asahina, Y., Kudoh, Y., et al. 2016, arXiv:1611.01775v2
- [McIntosh et al. (2007)] McIntosh, S. W., Davey, A. R., Hassler, D. M., et al. 2007, *ApJ*, 654, 650
- [McIntosh & De Pontieu (2009)] McIntosh, S. W. & De Pontieu, B. 2009, *ApJL*, 706, L80
- [McIntosh et al. (2011)] McIntosh, S. W., de Pontieu, B., Carlsson, M., et al. 2011, *Nature*, 475, 477
- [McLaughlin et al. (2012)] McLaughlin, J. A., Verth, G., Fedun, V., & Erdélyi, R. 2012, *ApJ*, 749, 30
- [Mignone et al. (2007)] Mignone A., Bodo G., Massaglia S., Matsakos T., Tesileanu O., Zanni C., & Ferrari A. 2007, *ApJS*, 170, 228
- [Mignone et al. (2012)] Mignone, A., Zanni, C., Tzeferacos, P., van Straalen, B., Colella, P., & Bodo, G. 2011, *ApJS*, 198, 7
- [Miyoshi & Kusano (2005)] Miyoshi, T., & Kusano, K. 2005, *J. Comput. Phys.*, 208, 315
- [Mizuno (2013)] Mizuno, Y. 2013, *ApJS*, 205, 7
- [Munz et al. (1999)] Munz, C. D., Schneider, R., Sonnendrucker, E., & Voss, U. 1999, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, 328, 431
- [Munz et al. (2000)] Munz, C. D., Omnes, P., Schneider, R., Sonnendrucker, E., & Voss, U. 2000, *J. Comput. Phys.*, 161, 484
- [Murawski & Musielak (2010)] Murawski, K., & Musielak, Z. E. 2010, *A&A*, 518, A37

- [Murawski & Zaqarashvili (2010)] Murawski, K., & Zaqarashvili, T. V. 2010, *A&A*, 519, A8
- [Murawski et al. (2011)] Murawski, K., Srivastava, A. K., & Zaqarashvili, T. V. 2011, *A&A*, 535, A58
- [Murawski et al. (2013)] Murawski, K., Ballai, I., Srivastava, A. K., Lee, D. 2013, *MNRAS*, 436, 1268
- [Narang et al. (2016)] Narang, N., Arbacher, R. T., Tian, H., et al. 2016, *Sol. Phys.*, 291, 1129
- [Nishikawa (1988)] Nishikawa, T. 1988, *PASJ*, 40, 613
- [Nishizuka et al. (2008)] Nishizuka, N., Shimizu, M., Nakamura, T., et al. 2008, *ApJL*, 683, L83
- [Nishizuka et al. (2009)] Nishizuka, N., Asai, A., Takasaki, H., Kurokawa, H., & Shibata, K. 2009, *ApJ*, 694, L74
- [Nishizuka et al. (2011)] Nishizuka, N., Nakamura, T., Kawate, T., Singh, K. A. P., & Shibata, K. 2011, *ApJ*, 731, 43
- [Noyes & Hall (1972)] Noyes, R. W. & Hall, D. N. B. 1972, *ApJL*, 176, L89
- [Núñez & Munz (2015)] Núñez-de la Rosa, J., & Munz, C.D. 2015, *MNRAS*, 455, 3458
- [Okamoto et al. (2007)] Okamoto, T. J., Tsuneta, S., Berger, T. E., et al. 2007, *Science*, 318, 1577
- [Okamoto & De Pontieu (2011)] Okamoto, T. J., & De Pontieu, B. 2011, *ApJL*, 736, L24
- [Orszag & Tang (1998)] Orszag S. A., & Tang C. M., 1998, *J. Fluid Mech.*, 90, 129
- [Palenzuela et al. (2009)] Palenzuela, C., Lehner, L., Reula, O., & Rezzolla, L. 2009, *MNRAS*, 394, 1727
- [Pariat et al. (2009)] Pariat, E., Antiochos, S. K., & DeVore, R. C. 2009, *ApJ*, 691, 61
- [Pariat et al. (2010)] Pariat, E., Antiochos, S. K., & DeVore, C. R. 2010, *ApJ*, 714, 1762
- [Pariat et al. (2015)] Pariat, E., Dalmasse, K., DeVore, C. R., & Karpen, J. 2015, *A&A*, 573, 15
- [Parker (1987)] Parker, E. N. 1987, *ApJ*, 318, 876
- [Parker (1988)] Parker, E. N. 1988, *ApJ*, 330, 474

- [Patsourakos et al. (2008)] Patsourakos, S., Pariat, E., Vourlidas, A., Antiochos, S. K., & Wuelser, J. P. 2008, *ApJ*, 680, L73
- [Pereira et al. (2012)] Pereira, T. M. D., De Pontieu, B., & Carlsson, M. 2012, *ApJ*, 759, 18
- [Pike & Mason (1998)] Pike, C. D. & Mason, H. E. 1998, *Sol. Phys.*, 182, 333
- [Popescu et al. (2005)] Popescu, M. D., Banerjee, D., O'Shea, E., Doyle, J. G., & Xia, L. D. 2005, *A&A*, 442, 1087
- [Porth et al. (2014)] Porth, O., Xia, C., Hendrix, T., Moschou, S. P., & Keppens, R. 2014, *ApJ*, 214, 4
- [Powell et al. (1999)] Powell, K. G., Roe, P. L., Linde, T. J., Gombosi, T. I., & De Zeeuw, D. L. 1999, *J. Comput. Phys.*, 154, 284
- [Priest (1982)] Priest E. R., 1982, *Solar Magnetohydrodynamics*. Reidel, Dordrecht
- [Priest (1984)] Priest, E. R. 1984, *Solar Magnetohydrodynamics* (Springer), 171
- [Priest et al. (2000)] Priest E. R., Forbes T., & Murnin P., 2000, *Magnetohydrodynamics*
- [Priest (2014)] Priest, E. R. (2014). *Magnetohydrodynamics of the Sun*. Cambridge University Press, New York, NY.
- [Rachmeler et al. (2010)] Rachmeler, L., Pariat, E., DeForest, C., & Antiochos, S. K. 2010, *ApJ*, 715, 1556
- [Radice & Rezzolla (2011)] Radice D., & Rezzolla, L. 2011, *Phys. Rev. D*, 84, 024010
- [Rae & Roberts (1981)] Rae, I. C. & Roberts, B. 1981, *Geophys. Astro. Fluid*, 18, 197
- [Roe (1981)] Roe, P. L. 1981, *J. Comput Phys.*, 43, 357
- [Roe (1986)] Roe, P.L. 1996, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 18, 337
- [Roe & Balsara (1996)] Roe, P. L., & Balsara, D. S., 1996, *SIAM J. Appl. Math.*, 56, 57
- [Roupe van der Voort et al. (2009)] Roupe van der Voort, L., Leenaarts, J., de Pontieu, B., Carlsson, M., & Vissers, G. 2009, *ApJ*, 705, 272
- [Ryu & Jones (1995)] Ryu D., & Jones T. W. 1995, *ApJ*, 228, 258
- [Scharmer et al. (2008)] Scharmer, G. B., Narayan, G., Hillberg, T., et al. 2008, *ApJL*, 689, L69

- [Scullion et al. (2011)] Scullion, E., Erdélyi, R., Fedun, V., & Doyle, J. G. 2011, *ApJ*, 743, 14
- [Secchi (1877)] Secchi, A. 1877, *Le Soleil*, Vol. 2 (Paris: Gauthier-Villars)
- [Sharma et al. (2017)] Sharma, R., Verth, G., & Erdélyi, R., 2017, *ApJ*, 840, 2
- [Sekse et al. (2012)] Sekse, D. H., Rouppe van der Voort, L., & De Pontieu, B., 2012, *ApJ*, 752, 108
- [Shelyag et al. (2008)] Shelyag, S., Fedun, V., & Erdélyi, R. 2008, *A&A*, 486, 655
- [Shelyag et al. (2012)] Shelyag, S., Mathioudakis, M., & Keenan, F. P. 2012, *ApJL*, 753, L22
- [Shibata & Suematsu] Shibata, K., & Suematsu, Y. 1982, *Sol. Phys.*, 78, 333
- [Shimojo et al. (1996)] Shimojo, M., Hashimoto, S., Shibata, K., et al. 1996, *PASJ*, 48, 123
- [Shimojo (2008)] Shimojo, M. 2008, *Astronomical Herald*, 101, 311
- [Shu & Osher (1989)] Shu, C. W. Shu & Osher, S. J. 1989, *J. Comput. Phys.*, 83, 32
- [Singh et al. (2011)] Singh, K. A., Shibata, K., Nishizuka, N., & Isobe, H. 2011, *PhPI*, 18, 111210
- [Singh et al. (2012)] Singh, K. A. P., Isobe, H., Nishizuka, N., Nishida, K., & Shibata, K. 2012, *ApJ*, 759, 33
- [Skogsrud et al. (2015)] Skogsrud, H., Rouppe Van Der Voort, L., De Pontieu, B., & Pereira, T. M. 2015, *ApJ*, 806, 170
- [Spiegel & Zahn (1992)] Spiegel, E.A., & Zahn, J.P., 1992, *A&A*, 265, 106
- [Srivastava et al. (2017)] Srivastava, A. K., Shetye, J., Murawski, K., Doyle, J. G., Stangalini, M., Scullion, E., Ray, T., Wójcik, D. P., & Dwivedi, B. N., 2017, *Sci. Rep.*, 7, 43147
- [Sterling (2000)] Sterling, A. C. 2000, *Sol. Phys.*, 196, 79
- [Sterling et al. (2010)] Sterling, A. C., Harra, L. K., & Moore, R. L., 2010, *ApJ*, 722, 1644
- [Sterling & Moore (2016)] Sterling, A. C., & Moore, R. L. 2016, *ApJL*, 828, L9
- [Stone et al. (2008)] Stone, J. M., Gardiner, T. A., Teuben, P., Hawley, J. F., & Simon, J. B. 2008, *ApJS*, 178, 137

- [Suematsu et al. (1995)] Suematsu, Y., Wangm, H., & Zirin, H. 1995, *ApJ*, 450, 411
- [Suematsu (1998)] Suematsu, Y. 1998, in *ESA Special Publication*, Vol. 421, *Solar Jets and Coronal Plumes*, ed. T.-D. Guyenne, 19
- [Suematsu et al. (2008)] Suematsu, Y., Ichimito, K., Katsukawa, Y., Shimizu, T., Okamoto, T., Tsuneta, S., Tarbell, T., & Shine, R. A., 2008, High resolution observations of spicules with Hinode/SOT, p. 27 in *First Results from Hinode*, *Astronomical Society of the Pacific Conference Series* (S.A. Matthews, J.M. Davis, and L.K. Harra, eds.), Vol. 397, *Astronomical Society of the Pacific*, San Francisco, Calif.
- [Su et al. (2013)] Su, Y., Veronig, A. M., Holman, G. D., et al. 2013, *NatPh*, 9, 489
- [Takahashi & Yamada (2013)] Takahashi K., Yamada S. 2013, *J. Plasma Phys.*, 335, 356
- [Takahashi & Yamada (2014)] Takahashi K., Yamada S. 2014, *J. Plasma Phys.*, 255, 287
- [Takasao et al. (2012)] Takasao, A., Asai, A., Isobe, H., & Shibata, K. 2012, *ApJL*, 745, L6
- [Tarbell et al. (2000)] Tarbell, T. D., Ryutova, M., & Shine, R. 2000, *Sol. Phys.*, 193, 195
- [Taroyan & Erdélyi (2009)] Taroyan, Y. & Erdélyi, R. 2009, *Space Sci. Rev.*, 149, 229
- [Tavabi et al. (2015a)] Tavabi, E., Koutchmy, S., Ajabshirizadeh, A., Ahangarzadeh Maralani, A. R., & Zeighmani, S. 2015a, *A&A*, 573, A4
- [Tavabi et al. (2015b)] Tavabi, E., Koutchmy, S., & Golub, L. 2015b, *Sol. Phys.*, 290, 2871
- [Tchekhovskoy et al. (2017)] Tchekhovskoy A., McKinney J., Narayan R. 2007, *MNRAS*, 379, 469
- [Tian et al. (2014)] Tian, H., DeLuca, E. E., Crammer, S. R., et al. 2014, *Science*, 346, 6207
- [Titarev & Toro (2004)] Titarev, V. A., Toro E. F., 2004, *J. Comput. Phys* 201, 238260
- [Tomczyk et al. (2007)] Tomczyk, S., McIntosh, S. W., Keil, S. L., et al. 2007, *Sci*, 317, 1192
- [Toro et al. (1994)] Toro, E. F., Spruce, M., & Spears, W., 1994, *Shocks Waves*, 4, 25
- [Toro (1999)] Toro, E. F. 1999, *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluids Dynamics*, Springer, Berlin, Heidelberg, Second Edition
- [Tsiropoula et al. (2012)] Tsiropoula, G., Tziotziou, K., Kontogiannis, I., et al. 2012, *SSRv*, 169, 181

- [Uzdensky & Kulsrud (2000)] Uzdensky, D. A., & Kulsrud, R. M. 2000, *Phys. Plasmas*, 7, 4018
- [Van Leer (1977)] Van Leer, B. 1977, *J. Comp. Phys.*, 23, 263
- [Vernazza et al.(1981)] Vernazza, J. E., Avrett, E. H., & Loeser, R. 1981, *ApJS*, 45, 635
- [Vögler et al. (2005)] Vögler, A., Shelyag, S., Schüsler, M., Cattaneo, F., Emonet, T., & Linde, T. 2005, *A&A*, 429, 335
- [Wang et al. (2000)] Wang, J., Li, W., Denker, C., et al. 2000, *ApJ*, 530, 1071
- [Wilhelm (2000)] Wilhelm, K. 2000, *A&A*, 360, 351
- [Wyper et al. (2017)] Wyper, P. F., Antiochos, S. K., & DeVore, C. R. 2017, *Nature*, 544, 452
- [Xia et al. (2005)] Xia, L. D., Popescu, M. D., Doyle, J. G., & Giannikakis, J. 2005, *A&A*, 438, 1115
- [Yamauchi et al. (2005)] Yamauchi, Y., Wang, H., Jiang, Y., Schwadron, N., & Moore, R. L. 2005, *ApJ*, 629, 572
- [Yee (1966)] Yee, K. S. 1966, *IEEE Trans. Antenna Propagation AP-14*, 302
- [Yokoyama & Shibata (1995)] Yokoyama, T., & Shibata, K. 1995, *Nature*, 375, 42
- [Yokoyama & Shibata (1996)] Yokoyama, T., & Shibata, K. 1996, *PASJ*, 48, 353
- [Zaqarashvili & Erdélyi (2009)] Zaqarashvili, T. V., & Erdélyi, R. 2009, *SSRv*, 149, 355
- [Zaqarashvili et al. (2014)] Zaqarashvili, T. V., Vörös, Z., & Zhelyazkov, I. 2014, *A&A*, 561, A62
- [Zenitani & Miyoshi (2011)] Zenitani, S., & Miyoshi, T. 2011, *Phys. Plasmas*, 18, 022105
- [Zenitani & Miyoshi (2015)] Zenitani, S., & Miyoshi, T. 2015, *Phys. Plasmas*, 22, 032114
- [Zhang et al. (2012)] Zhang, Y. Z., Shibata, K., Wang, J. X., et al. 2012, *ApJ*, 750, 16
- [Ziegler (2008)] Ziegler U. 2008, *Comput. Phys. Comm.*, 179, 227
- [Zirker (1993)] Zirker, J. B. 1993, *Sol. Phys.*, 148, 43