



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN
NICOLÁS DE HIDALGO

INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

**SIMULACIÓN DE ACRECIÓN EN HOYOS
NEGROS Y CHOQUE DE HOYOS NEGROS**

T E S I S

PARA OBTENER EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS EN EL ÁREA DE FÍSICA

PRESENTA:
MIGUEL GRACIA LINARES

DIRECTOR DE TESIS:
DR. FRANCISCO S. GUZMÁN



La tesis de Miguel Gracia Linares fué recibida y aprobada * por:

Dr. Francisco S. Guzmán
IFM-UMSNH
Asesor de tesis, presidente del comité.

Dr. José Antonio González
IFM-UMSNH
Revisor de tesis, jurado.

Dr. Omar López Cruz
INAOE
Revisor de tesis, jurado

*Las firmas se encuentran archivadas en el Instituto de Física y Matemáticas UMSNH.

Agradecimientos

Agradezco a mi asesor el Profesor Francisco S. Guzmán por su confianza y guía a lo largo del doctorado.

A los profesores José Antonio González y Omar López por sus comentarios y sugerencias a la hora de revisar este trabajo.

Quisiera agradecer a mis padres, Esperanza y Justo Miguel por su amor y apoyo incondicional.

A mis compañeros del grupo de Física computacional Francisco y José Juan por sus sugerencias y comentarios a lo largo del doctorado.

A mis compañeros del IFM por su apoyo y amistad durante el doctorado.

Al Instituto de Física y Matemáticas de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo por proporcionar los espacios y ambiente académico para lograr la investigación que aquí se presenta.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por otorgarme la beca de munutención.

Publicaciones

1. *Accretion of Supersonic Winds on Boson Stars*. Gracia-Linares, M. and Guzmán, F. S., Phys. Rev. D. **94**, 064077, (2016).
2. *Accretion of supersonic winds onto black holes in 3D: stability of the shock cone*. Gracia-Linares, M. and Guzmán, F. S., ApJ **812**, 23 (2015).
3. *Parameter estimates in binary black hole collisions using neural networks*. Carrillo, M., Gracia-Linares, M., González J. A. and Guzmán, F. S., Gen. Rel. Grav. **48**, 141, (2016).
4. *Accretion of supersonic magnetized winds onto black holes in 3D*. M. Gracia-Linares, Guzmán, F. S., submitted to Phys. Rev. D, June 2017.

Resumen

En la primera parte de este trabajo se estudia el choque de hoyos negros mediante la solución numérica de las ecuaciones de Einstein. Se presenta un catálogo de 31 ondas gravitacionales provenientes de la evolución de un sistema binario de hoyos negros (BBH) y un ejemplo de su aplicación. La aplicación consiste en estimar el cociente de masas de un BBH a partir del *strain* de una onda gravitacional mediante un algoritmo basado en redes neuronales artificiales.

En la segunda parte de este trabajo se estudia por primera vez la acreción de vientos supersónicos en hoyos negros rotantes en tres dimensiones, se presentan cinco direcciones representativas del viento respecto al eje de rotación del hoyo negro. El estudio se centra en la evolución y estabilidad del cono de choque de alta densidad que se forma durante este proceso y se explora el régimen en el que se espera que aparezca una inestabilidad tipo Flip-Flop (FF). En todos los casos estudiados no se encontró la inestabilidad FF. También, se presenta por primera vez la acreción de vientos supersónicos magnetizados en un hoyo negro rotante en tres dimensiones. El hallazgo más importante en comparación con el escenario puramente hidrodinámico, es la formación de zonas rarificadas donde la presión del campo magnético domina. Se encontró que la tasa de acreción de vientos supersónicos en hoyos negros en los regímenes HD y MHD es bastante similar y se concluye que los parámetros más influyentes que cambian la tasa de acreción son la velocidad y la orientación del viento. Por ultimo, se presenta la evolución de un viento supersónico que interactúa con una estrella de bosones y se compara con la evolución de un viento que es acretado por un hoyo negro no rotante de la misma masa.

Palabras Clave: Relatividad General, hoyos negros, ondas gravitacionales, Magneto-hidrodinámica relativista, acreción.

Abstract

In the first part of this work the merger of two black holes is studied by solving numerically the Einstein's equations. A catalog of 31 gravitational waves coming from the evolution of a black hole binary black hole system (BBH) and an example of its application is presented. The application consists of estimating the mass ratio of the BBH from the *strain* of a wave using an algorithm based on artificial neural networks. In the second part of this work we study for the first time the accretion of supersonic winds onto a rotating black hole in three dimensions, we present five representative directions of the wind with respect to the axis of rotation of the black hole. The study focuses on the evolution and stability of the high-density shock cone formed during this process and explores the situation in which Flip-Flop (FF) type instability is expected. For all the studied cases the FF instability was not found. We also study for the first time the accretion of a supersonic magnetized wind onto a rotating black hole in three dimensions. The most important finding compared to the purely hydrodynamics scenario is the formation of rarefied zones where the magnitude of the magnetic field dominates. It was found that the accretion rate between the HD and MHD regimes is quite similar and concludes that the most influential parameters that change the accretion rate are the speed and direction of the wind. Finally, the evolution of a supersonic wind that interacts with a boson star is presented and is compared to the evolution of a wind that is accreted by a black hole of the same mass without rotation.

Keywords: General relativity, black holes, gravitational waves, relativistic Magnetohydrodynamics, accretion.

Índice general

Agradecimientos	III
Publicaciones	V
Resumen	VII
Abstract	IX
Índice de figuras	XV
Índice de tablas	XIX
Notación y convenciones	XXI
1. Introducción	1
1.1. Modelo de materia	2
2. Relatividad numérica e Hidrodinámica relativista	5
2.1. Ecuaciones de Einstein	5
2.2. Descomposición 3+1 del espacio-tiempo	7
2.3. Ecuaciones ADM	9
2.3.1. Ecuaciones BSSN	14
2.3.2. Norma: elección de α y β^i	18
2.4. Hidrodinámica relativista	20
3. Métodos numéricos	25
3.1. Cómputo de las derivadas espaciales utilizando diferencias finitas . . .	26
3.2. Método de alta resolución con captura de choques (HRSC)	29

3.3.	Recuperación de variables primitivas	34
3.4.	Integración en el tiempo utilizando el método de líneas	35
3.5.	Cactus y Einstein Toolkit	36
3.5.1.	Código Cactus	36
3.5.2.	Einstein toolkit (ETK)	37
3.5.2.1.	Evolución del espacio-tiempo	37
3.5.2.2.	Evolución de la materia	38
3.5.2.3.	Herramientas de análisis	38
3.5.2.4.	Condiciones de frontera	39
4.	Hoyos negros en el vacío.	41
4.1.	Ondas gravitacionales	42
4.2.	Sistemas binarios de hoyos negros (BBH)	45
4.2.1.	Catálogo	48
4.2.2.	Aplicaciones: problema inverso.	50
5.	Acreción supersónica de vientos en 3 dimensiones	55
5.1.	Acreción de vientos en hoyos negros	55
5.1.1.	Implementación numérica	57
5.1.1.1.	Ecuaciones y métodos numéricos	57
5.1.1.2.	Condiciones iniciales	58
5.1.1.3.	Condiciones de frontera	59
5.1.2.	Experimentos numéricos y resultados	60
5.1.2.1.	Hoyos negros medianamente pequeños	61
5.1.2.2.	Hoyos negros pequeños	64
5.1.2.3.	Acreción de Bondi-Hoyle perturbada	65
5.1.2.4.	Influencia debida a los métodos numéricos	68
5.2.	Acreción en hoyos negro: efectos de campos magnéticos	73
5.2.1.	Condiciones iniciales	74
5.2.2.	Resultados	75
5.3.	Acreción de vientos en estrellas de Bosones	83
5.3.1.	Descripción del sistema	85
5.3.2.	Selección de las Estrellas de Bosones	88
5.3.3.	Resultados	89
6.	Conclusiones y contribuciones	97
A.	Espina IFMBoundaries	99
A.0.1.	Acreción de Michel	99
A.0.2.	Rotor magnético	101

B.	Hoyo negro de Kerr	105
C.	Magnetohidrodinámica ideal relativista	109
C.1.	Constricción: $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	111
	Bibliografía	113

Índice de figuras

2.1.	Esquema de la foliación del espacio-tiempo de cuatro dimensiones en hipersuperficies 3-dimensionales.	8
3.1.	Esquema de un dominio numérico en tres dimensiones con discretización uniforme en las tres direcciones.	27
3.2.	Estructura de celda del espacio-tiempo (Volúmenes finitos). . . .	30
3.3.	Se ilustra el problema de Riemann que surge en la frontera de cada intercelda.	31
3.4.	Se ilustran los dos tipos de aproximación en las interceldas, utilizando una función contante a pedazos y una función lineal a pedazos.	32
4.1.	Deformación de un aro de partículas debida al paso de una onda gravitacional que se propaga en dirección z	44
4.2.	Se muestra instantes de tiempo correspondiente a la evolución de un sistema binario de hoyos negros.	49
4.3.	Se muestra el modo $l = 2, m = 2$ de Ψ^4 extraído al radio $r = 30M$, esta cantidad es la que comúnmente se mide en un código numérico.	50
4.4.	Se muestra la evolución de un BBH en la que los hoyos negros describen órbitas cuasi-circulares que precesan.	51
4.5.	Se presenta la parte real del modo $l = 2, m = 2$ del strain h_+ para cuatro casos representativos.	53
5.1.	Isocontornos de densidad al tiempo $t = 3000M$ para acretores medianamente pequeños $\rightarrow\uparrow$, $a = 0,95$ y $v_\infty = 0,5$, $c_{s\infty} = 0,1$, $r_{hor}/r_{acc} = 0,26$	63
5.2.	Campo de velocidades al tiempo $t = 8000M$ para el caso $\uparrow\uparrow$, $v_\infty = 0,5$, $a = 0,95$ y $r_{hor}/r_{acc} = 0,26$	64
5.3.	Isocontornos de la densidad de masa en reposo al tiempo $t = 8000M$, para el caso $\leftarrow\uparrow$, $a = 0,95$ con $v_\infty = 0,1$, $c_{s\infty} = 0,04$, $\Gamma = 5/3$, correspondiente a un hoyo negro pequeño con $r_{hor}/r_{acc} = 0,011$	66

5.4.	Isocontornos de la densidad de masa en reposo del caso diagonal $\swarrow\uparrow$, $a = 0,95$, $\Gamma = 4/3$ y $r_{hor}/r_{acc} = 0,012$	66
5.5.	Tasa de acreción para el caso perturbado $\rightarrow\uparrow$, $a = 0,95$, $v_\infty = 0,5$, $c_{s\infty} = 0,1$, $\Gamma = 4/3$ con amplitud de perturbación $A = 0,2$	68
5.6.	Se muestra la densidad a distintos tiempos para caso perturbado con orientación $\rightarrow\uparrow$, $a = 0,95$ y $v_\infty = 0,5$, $c_{s\infty} = 0,1$, $\Gamma = 4/3$ con amplitud de perturbación $A = 0,2$	69
5.7.	Se muestra el caso perturbado con orientación $\rightarrow\uparrow$, $a = 0,95$, $r_{hor}/r_{acc} = 0,011$, $v_\infty = 0,1$, $c_{s\infty} = 0,04$, $\Gamma = 4/3$ con amplitud de perturbación $A = 0,2$	70
5.8.	Comparación de la tasa de acreción para el caso $\rightarrow\uparrow$, $a = 0,95$, $\mathcal{M} = 5$, entre dos distintas corridas, la primera, utilizando dos niveles de refinamiento, la segunda, usando unigrid.	72
5.9.	Se muestra el instante de tiempo $t = 1000M$ en el plano $y = 0$ de la densidad de mas en reposo, para los casos MHD1 y HD1 correspondientes al modelo $\uparrow\uparrow$ y $r_{hor}/r_{acc} = 0,05$. En el fondo mostramos las líneas del campo magnético y el parámetro β de este caso.	76
5.10.	Se muestra el instante de tiempo $t = 1000M$ en el plano $y = 0$ de la densidad, para los casos MHD2 y HD2 con orientación $\nearrow\uparrow$ y $r_{hor}/r_{acc} = 0,05$	77
5.11.	Se muestra el instante de tiempo $t = 1000M$ de la densidad de masa en reposo en el plano $y = 0$ para los modelos MHD3 y HD3 con tamaño $r_{hor}/r_{acc} = 0,05$	80
5.12.	Se muestra el instante de tiempo $t = 1000M$ de la densidad de masa en reposo en el plano $y = 0$, para los modelos MHD4 y HD4 con $r_{hor}/r_{acc} = 0,4$	81
5.13.	Se muestra el instante de tiempo $t = 1000M$ de la densidad de masa en reposo ρ y campo de velocidades v^i para los modelos HD1, HD2, HD3, MHD1, MHD2 y MHD3 en la primera y segunda columnas. Para los modelos HD1 y MHD1 se muestran los campos en el plano $z = 2$, situados en la región <i>downstream</i> del hoyo negro.	82
5.14.	En el diagrama M vs $\phi_0(0)$ se muestran las configuraciones de equilibrio para los dos valores de Λ utilizados en este estudio. Cada punto en las curvas corresponde a una solución del problema del valor propio y representa una configuración de EBs.	87
5.15.	Densidad del gas que se mueve a lo largo de la dirección x de izquierda a derecha para el mejor simulador sin auto-interacción BSBMA0.	92

5.16.	Densidad del gas moviéndose de izquierda a derecha con velocidad $0,5c$	93
5.17.	Densidad del gas que se mueve de izquierda a derecha para el mejor simulador BSBMA50.	94
A.1.	Instantes superpuestos de la densidad de mas en reposo, presión y de la velocidad v^x cada unidad de tiempo de a $t = 400M$ a lo largo del eje $-x$. Se compara la solución con la solución exacta de Michel con la que fué inicializada la evolución, también, se muestra el ritmo de acreción $\dot{M}$ que muestra el momento de transición estable.	101
A.2.	Se muestra la densidad de masa (izquierda), y la presión magnética junto con las lineas de campo magnético (derecha) correspondientes al tiempo $t = 0,4$ de la prueba del rotor magnético, con una resolución de 200×200 en cada dirección, con esto, se demuestra que las condiciones de frontera de flujo saliente implementadas en IFMBoundaries funcionan.	103
B.1.	Se muestran las distintas superficies en un hoyo negro de Kerr. . .	106

Índice de tablas

4.1. Conjunto de parámetros iniciales de las formas de ondas que conforman el catálogo de ondas gravitacionales.	52
5.1. Configuraciones analizadas para el caso $\rho_0 = 10^{-6}$, $\mathcal{M} = 3$ y 5 , $\Gamma = 4/3$, $c_{s\infty} = 0.1$ y $v_\infty = 0,3$. El valor de $\dot{M}$ corresponde a la tasa de acreción medida en una superficie esférica localizada en $r = 3M$ en el momento después de que el proceso de formación del cono de choque ha terminado y el fluido se ha estabilizado.	62
5.2. Configuraciones analizadas para el caso $\rho_0 = 10^{-6}$ con $a = 0,95$. El valor de $\dot{M}$ corresponde al valor de la tasa de acreción medido en una superficie esférica localizada en $r = 3M$ y en el momento después de que el proceso de formación del cono de choque ha terminado.	67
5.3. Parámetros de las 8 simulaciones usadas en este trabajo. Cuatro de ellas involucran evoluciones de las ecuaciones MHD y las otras sus contrapartes equivalentes en la HD.	79
5.4. Valores de la tasa de acreción ($\dot{M}$) de todos los casos tratados. El caso perpendicular al eje de rotación del hoyo negro es la configuración que tiene el máximo valor de $\dot{M}$. $\dot{M}$ no cambia significativamente entre los casos MHD y HD.	83

Notación y convenciones

A lo largo de esta tesis las siguientes convenciones y notaciones son tomadas en cuenta:

- Se utiliza la convención de índices siguiente:
 1. Índices griegos ($\alpha, \beta, \mu, \nu, \dots$) se utilizan para etiquetar las coordenadas de un espacio-tiempo de cuatro dimensiones y toman valores de 0 a 3. El índice cero representa la coordenada temporal ($\mu = 0 = t$) y los índices del uno al tres las coordenadas espaciales ($\mu = 1, 2, 3 = x_1, x_2, x_3$).
 2. Índices latinos ($i, j, k, l, \dots$) se utilizaran para etiquetar las coordenadas espaciales de un espacio-tiempo de tres dimensiones y toman valores 1 a 3.
 3. Se utiliza la convención de suma de índices de Einstein: Cuando aparezcan dos índices repetidos, se sumará sobre todos los valores posibles que tome el índice ($h_\mu h^\mu = h_0 h^0 + h_1 h^1 + h_2 h^2 + h_3 h^3$).
- La signatura de la métrica del espacio-tiempo de 4 dimensiones utilizada es $(-1, +1, +1, +1)$.
- Se utiliza el sistema de *unidades geométricas*, en las que la velocidad de la luz c y la constante de gravitación universal de Newton G , son igual a uno.

Introducción

Fenómenos en el universo de altas energías son detectables gracias al enorme espectro que el conjunto de satélites, observatorios, telescopios construidos hasta la actualidad cubren. Algunos de estos fenómenos de altas energías y posibles explicaciones se asocian con los modelos de interacción de la materia alrededor de hoyos negros que a lo largo de los años se han explorado en el espectro electromagnético dentro y fuera del rango visible, mediante el uso de telescopios con diferente ventana de observación cuyo rango de frecuencias se encuentra entre $30\text{KHz} \sim 10^{27}\text{Hz}$ [Jansky (1933), Cox (2000), Holland et al. (2002), Dermer & Menon (2009)]. Otra forma de estudiar estos fenómenos de altas energías es midiendo rayos cósmicos, que son protones, iones, electrones, positrones, etc, generados durante la interacción de la atmósfera terrestre con partículas primarias provenientes del espacio exterior. Dependiendo de la energía de estas partículas pueden ser asociadas a fenómenos de altas energías como los antes mencionados [Dermer & Menon (2009)]. Hasta hace unos años los hoyos negros eran considerados objetos astrofísicos inferidos de observaciones astronómicas que provenían de predicciones teóricas de la relatividad general de Einstein, esto fue así hasta el 14 de Septiembre de 2015, cuando los interferómetros del experimento LIGO lograron medir por primera vez directamente una onda gravitacional proveniente del choque de hoyos negros en el evento llamado GW150914 [Abbot et al. (2016a)]. El GW150914 junto con dos detecciones más [Abbot et al. (2016b), Abbot et al. (2017)] marcaron el comienzo de una nueva era en la astronomía, abriendo toda una nueva ventana de observación de los fenómenos de nuestro universo. Con el surgimiento de la Astronomía de ondas gravitacionales se podrá estudiar los fenómenos desde un punto

de vista distinto, no en el espectro electromagnético sino en el de la medición de las perturbaciones del espacio-tiempo generadas por fenómenos de altas energías.

Los hoyos negros brindan una visión amplia del universo, desde escalas pequeñas (a distancias de Mpc de la Tierra), hasta en galaxias lejanas con desplazamientos al rojo de $z > 8$. Estos hoyos negros han sido a lo largo de los años candidatos para explicar los fenómenos de más altas energías jamás antes observados, por ejemplo, las emisiones de estallidos de rayos gamma podrían ser generados en la vecindades de hoyos negros recién formados; los hoyos negros en los centros de las galaxias y su interacción con la materia que los rodea conocidos como AGNs (por sus siglas en inglés), producen eventos tan energéticos que la luminosidad emitida es mayor a la emitida por todas las estrellas juntas en la galaxia; el colapso de estrellas que se quedan sin combustible y se convierten en hoyos negros; y la formación de estructuras de disco de acreción que mediante la interacción de campos magnéticos y la aceleración del material acretado emiten rayos X o rayos γ . Dado el gran conjunto de observaciones y el avance en el mejoramiento de las herramientas de observación, surge el desafío de intentar explicar la naturaleza de dichos eventos. En este sentido se ha tenido gran avance con el uso de computadoras para modelar sistemas astrofísicos. Por ejemplo, la solución de las ecuaciones de Einstein en el vacío usando métodos numéricos provistos en la relatividad numérica fue crucial para identificar la fuente de las ondas gravitacionales detectadas en 2015 por la colaboración LIGO. Con el pasar del tiempo, se espera que ondas gravitacionales producidas en eventos que involucren interacción de materia con objetos compactos, como el choque de estrellas de neutrones o de binarias mixtas sean observadas.

1.1. Modelo de materia

La solución de las ecuaciones de Euler relativistas en espacio-tiempos curvos se ha hecho en un gran número de estudios enfocados en el problema de acreción de materia, específicamente en el estudio de discos de acreción, ruptura de estrellas en sistemas binarios de hoyos negros y estrellas, estos sistemas de acreción también se pueden encontrar en cúmulos de galaxias, regiones de formación de estrellas entre

otras. Un escenario común que se ha estudiado es el proceso de acreción de Bondi-Hoyle-Littleton (BHL) o acreción de viento [Bondi (1952)] la cual ocurre cuando un objeto compacto se mueve con respecto a una distribución uniforme de fluido perfecto no auto-gravitante. El estudio de acreción de vientos se ha estudiado en distintos regímenes, tanto clásicos como relativistas, que contemplan distintos procesos físicos en sus modelos; existen estudios de acreción de BHL con campos magnéticos; otros consideran la adición de términos radiativos a las ecuaciones de la hidrodinámica y algunos de estos suponen algún tipo de simetría. Existen observaciones, como por ejemplo, sobre el quasar 3C186 reportadas en [Chiaberge et al. (2017)], las cuales suponen que existe un hoyo negro moviéndose a través del medio galáctico. Los autores argumentan que hay indicios de que el quasar 3C186 sea un remanente del choque de dos galaxias y el hoyo negro podría haber sido originado y expulsado en dicha colisión. Supongamos que dividiéramos este problema en dos etapas distintas 1) el momento antes de que los dos hoyos negros chocaran y 2) el momento después en que el hoyo negro se está moviendo a través del medio intergaláctico. Cada una de estas etapas, podrían ser modeladas separadamente, por un lado, evolucionando el sistema binario de hoyos negros y por otro, estudiando la acreción de un viento en un hoyo negro. Estos dos problemas fueron abordados de manera separada durante el trabajo doctoral.

Como primera parte de este trabajo, se presenta la solución de las ecuaciones de Einstein en el vacío, como resultado, se presenta un catálogo de 31 ondas gravitacionales generadas numéricamente que corresponden al choque de un sistema binario de hoyos negros. Cada elemento del catálogo consiste en la parte real de los modos $l = 2, m = 2$ del strain h_+ de la onda gravitacional en el que varía la razón de masa inicial de los hoyos negros. Como aplicación al catálogo se presenta un breve estudio del problema inverso y estimación de la razón de masa inicial en el choque de hoyos negros usando redes neuronales artificiales.

La segunda parte de este trabajo, está destinada al estudio de la acreción de vientos supersónicos en hoyos negros en 3D, el cual consistió en la evolución de las ecuaciones de la hidrodinámica ideal relativista en espacio-tiempos curvos. Como primer paso, se hizo un estudio de la existencia de la inestabilidad Flip-Flop (FF) de la estructura en forma de cono que se forma cuando el viento se mueve a velocidades supersónicas, esto, motivado por estudios que aseveran que estas oscilaciones del cono

de choque podrían estar asociadas a las fuentes de rayos X en el universo conocidas como oscilaciones cuasi-periódicas (QPOs)[Lora-Clavijo & Guzmán (2013), Dönmez et al.(2011)]. En un segundo estudio, se agregó el efecto de campos magnéticos al proceso de acreción de vientos en hoyos negros mediante la evolución de las ecuaciones de la magnetohidrodinámica relativista (MHD) ideal. Por último se hizo un estudio de acreción de vientos en estrellas de bosones en configuraciones en las que imitan el espacio-tiempo de un hoyo negro de Schwarzschild.

Es de notar que ambas partes del trabajo doctoral presentadas en esta manuscrito, se realizaron utilizando la herramienta numérica para la evolución de sistemas en astrofísica relativista Einstein Toolkit (ETK) [Löffler et al. (2012)]. Este código cuenta con las implementaciones necesarias para la solución de las ecuaciones de Einstein en el vacío y de las ecuaciones de la hidrodinámica y MHD relativistas. La contribución de este trabajo al ETK fue un módulo de condiciones de frontera, necesario para el estudio de acreción de vientos en hoyos negros.

En el Capítulo 2 se presenta una breve descripción de la deducción de las ecuaciones de Einstein e hidrodinámica relativista necesarios para el estudio de los problemas presentados en este trabajo. En el Capítulo 3, se habla de los métodos necesarios para resolver las ecuaciones de Einstein e hidrodinámica relativista, también se explica la estructura del ETK y del módulo de condiciones de frontera que se incorporó. En el Capítulo 4 se presenta la evolución de hoyos negros en el vacío, se presenta un catálogo de ondas gravitacionales que se generó en el estudio del problema inverso. En el Capítulo 5 se presenta el estudio de acreción 3D de vientos en hoyos negros. Se presentan dos estudios extra en los que se comparan por un lado, la acreción de vientos en hoyos negros con la acreción de vientos en estrellas de bosones que imitan el espacio-tiempo de un hoyo negro, por otro, la influencia de campos magnéticos en el proceso de acreción de vientos en hoyos negros. Finalmente en el Capítulo 6 se presentan las conclusiones.

Relatividad numérica e Hidrodinámica relativista

En este capítulo se muestra de manera general la deducción de los sistemas de ecuaciones necesarios para el estudio numérico de los dos principales problemas presentados en este manuscrito; la evolución de sistemas binarios de hoyos negros en el vacío y la acreción de fluidos en hoyos negros. Primero, muy brevemente se introducen las ecuaciones de Einstein en su forma covariante, después se dará una breve introducción de la descomposición 3+1 del espacio-tiempo, que como se verá, es fundamental para la construcción de los sistemas de evolución necesarios para realizar el estudio numérico de los problemas antes mencionados. Después, a partir de la descomposición 3+1, se transforman las ecuaciones de Einstein de su forma covariante a una representación de problema de Cauchy de valores iniciales. Finalmente, se deducen las ecuaciones de evolución de un fluido relativista en un espacio-tiempo curvo.

2.1. Ecuaciones de Einstein

La teoría general de la relatividad se basa en la idea de que el campo gravitacional no es una fuerza en el sentido Newtoniano, sino que la gravedad es una manifestación de la curvatura del espacio-tiempo producida por la distribución de materia, con esto, decimos que el estado dinámico de la materia está determinando por la curvatura del espacio-tiempo y viceversa. Esta idea de correspondencia entre la materia y el espacio-tiempo se deriva a partir de dos principios:

- 1) *El principio de covarianza general*: Las leyes de la física deben ser las mismas para cualquier observador.
- 2) *El principio de equivalencia*: Un sistema uniformemente acelerado desde un punto de vista local, es equivalente a un sistema que está en reposo en un campo gravitacional es decir, que de manera local, una fuerza de tipo inercial debe ser tratada como si fuese un campo gravitacional.

El primer paso para lograr escribir una relación entre materia y espacio-tiempo según estos principios es que, los objetos que los describan deben ser independientes de las coordenadas, propiedad que tienen los tensores. Por tanto para describir las propiedades de la materia como son densidad de energía, densidad de momento, y transferencia de momento, elegimos el tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}$.

En el caso del espacio-tiempo, las propiedades geométricas se construyen a partir del tensor métrico $g_{\mu\nu}$. Por ejemplo, la métrica define la distancia entre dos puntos $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ y junto con sus derivadas define al tensor de Riemann o de curvatura $R_{\mu\nu\rho\sigma}$, al tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ y el escalar de Ricci R^μ_μ . Por ello, en la construcción de las ecuaciones de Einstein se elige un tensor que por un lado sea compatible con la ley de conservación de energía-momento ($\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$), y por otro que describa la curvatura del espacio-tiempo como el tensor $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$. Finalmente, reuniendo todos estos elementos las ecuaciones de Einstein son:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

las cuales representan la relación entre espacio-tiempo y la materia. Este es un sistema de diez ecuaciones diferenciales de segundo orden extremadamente complejo, aún así existen algunas soluciones exactas pero restringidas a diferentes simetrías, para poder estudiar sistemas sin simetrías de relevancia astrofísica en el régimen de campo gravitacional fuerte es necesaria resolverlas mediante el uso de métodos numéricos. Existen diferentes formulaciones que permiten el uso de métodos numéricos para resolver las ecuaciones (2.1) como pueden ser el formalismo característico introducido en los años 60's por Bondi y Sachs [Bondi et al. (1962), Sachs (1962)], el cual mediante una serie de foliaciones de hipersuperficies nulas [Lehner (2001)], se obtienen dos ecuaciones de evolución de primer orden y cuatro relaciones entre cantidades definidas en las hipersuperficies. Otra formulación de las ecuaciones de Einstein es la

conforme introducida por Friedrich en los 80's [Friedrich (1981)] que considera una transformación conforme de la métrica $g_{\mu\nu}$ para obtener un espacio-tiempo diferente descrito por la métrica conforme $\tilde{g}_{\mu\nu}$. En este trabajo se utilizó una formulación del tipo valores iniciales de Cauchy basada en la descomposición 3+1 del espacio-tiempo que se describe en la siguiente sección.

2.2. Descomposición 3+1 del espacio-tiempo

En relatividad general, el papel que juegan el espacio y el tiempo es indistinguible y como consecuencia, las ecuaciones de Einstein (2.1) están escritas de forma covariante es decir, en forma tensorial. Para resolverlas numéricamente como un problema de valores iniciales que evolucione en el tiempo se utiliza la descomposición 3+1 del espacio-tiempo que permite separar el espacio-tiempo de 4 dimensiones, en uno de tres dimensiones espaciales y una temporal. Dicha aproximación ayudará a escribir las ecuaciones de tal manera que se pueden aplicar métodos numéricos convencionales para resolverlas.

La descomposición 3+1 del espacio-tiempo considera un espacio-tiempo arbitrario que sea globalmente hiperbólico, descrito por el tensor métrico $g_{\mu\nu}$ que se folia con hipersuperficies 3-dimensionales tipo espacio Σ_i y elige como parámetro de foliación a t que más adelante se identificará con la coordenada temporal; en la Fig. 2.1 se muestra un esquema de dicha foliación.

En cada una de las hipersuperficies se puede definir un vector normal n^μ tipo tiempo ($n_\mu n^\mu = -1$) con el cual se define la métrica inducida en dichas hipersuperficies:

$$\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu, \quad (2.2)$$

además, se puede construir el proyector sobre las hipersuperficies $P^\mu_\nu = g^{\mu\rho} \gamma_{\rho\nu} = \delta^\mu_\nu + n^\mu n_\nu$, donde δ^μ_ν es la delta de Kronecker.

- El lapso α del tiempo propio $d\tau$ medido por un observador que se mueve en dirección normal a la hipersuperficie:

$$d\tau = \alpha(t, x^i) dt \quad (2.3)$$

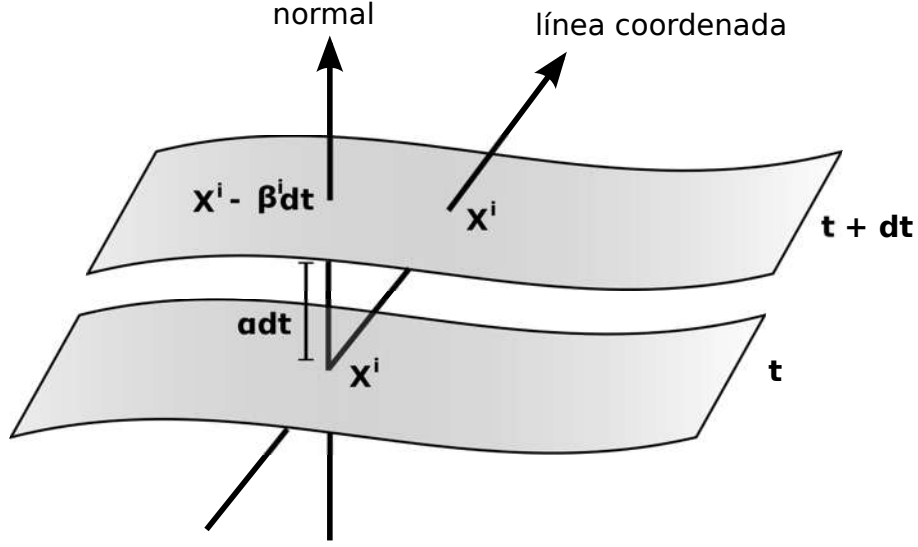


Figura 2.1. Esquema de la foliación del espacio-tiempo de cuatro dimensiones en hipersuperficies tres-dimensionales.

- El vector de corrimiento o desplazamiento β^i el cual representa la velocidad relativa entre un observador euleriano y las líneas coordenadas espaciales constantes:

$$x_{t+dt}^i = x_t^i - \beta^i(t, x^i)dt \quad (2.4)$$

En términos de α, β^i y γ_{ij} el elemento de línea del espacio-tiempo general es:

$$ds^2 = (-\alpha^2 + \beta_i \beta^i)dt^2 + 2\beta_i dx^i dt + \gamma_{ij} dx^i dx^j, \quad (2.5)$$

que en forma matricial, toma la forma:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\alpha^2 + \beta_k \beta^k & \beta_i \\ \beta_j & \gamma_{ij} \end{pmatrix},$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1/\alpha^2 & \beta^i/\alpha^2 \\ \beta^j/\alpha^2 & \gamma^{ij} - \beta^i \beta^j/\alpha^2 \end{pmatrix}.$$

Nótese que hasta ahora no se ha impuesto ninguna condición sobre el *vector de corrimiento* y el *lapso*, los cuales dictan la forma en que el espacio-tiempo es foliado y la forma en que el sistema de coordenadas espaciales se propaga de una hipersuperficie

a otra, esto deja un sin fin de posibilidades para describir el espacio-tiempo. Por esta propiedad, a este par de objetos se les conoce como *funciones de norma*, de las cuales se hablará más adelante.

2.3. Ecuaciones ADM

Continuando con las propiedades de la descomposición 3+1 del espacio-tiempo, las hipersuperficies se encuentran inmersas en el espacio-tiempo de cuatro dimensiones, la curvatura extrínseca es una propiedad que define la manera en que lo están. Esta cantidad se define como el cambio del vector normal a Σ en la vecindad de algún punto de la hipersuperficie, o sea $\nabla \vec{n}$, como se desea que esta propiedad sea una propiedad de Σ , se proyecta sobre las hipersuperficies como:

$$K_{\mu\nu} \equiv -P_{\mu}^{\alpha} \nabla_{\alpha} n_{\nu} = -(\nabla_{\mu} n_{\nu} + n_{\mu} n^{\alpha} \nabla_{\alpha} n_{\nu}), \quad (2.6)$$

donde el primer índice etiquetará la componente normal a la hipersuperficie y el otro la dirección en la que se está haciendo la variación con esto, se tendrá una medida de la deformación de la hipersuperficie en un punto en alguna dirección. Como ya se ha dicho, la curvatura extrínseca es una cantidad definida sobre las hipersuperficies, por lo que es conveniente escribirla en términos de la 3-métrica, para ello, se recurre a la definición de la derivada de Lie de un tensor a lo largo de un vector:

$$\mathcal{L}_{\vec{v}} A_{\mu\nu} = v^{\alpha} \nabla_{\alpha} A_{\mu\nu} + A_{\mu\beta} \nabla_{\nu} v^{\beta} + A_{\beta\nu} \nabla_{\mu} v^{\beta}, \quad (2.7)$$

que al aplicar a la 3-métrica γ_{ij} a lo largo del vector normal n^{μ} se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\vec{n}} \gamma_{ij} &= n^{\alpha} \nabla_{\alpha} \gamma_{ij} + \gamma_{ik} \nabla_j n^k + \gamma_{jk} \nabla_i n^k \\ &= n^k \nabla_k (n_i n_j) + g_{ik} \nabla_j n^k + g_{jk} \nabla_i n^k \\ &= n^k n_i \nabla_k n_j + n^k n_j \nabla_k n_i + \nabla_j n_i + \nabla_i n_j \\ &= (\gamma_i^k - g_i^k) \nabla_k n_j + (\gamma_j^k - g_j^k) \nabla_k n_i + \nabla_j n_i + \nabla_i n_j \\ &= \gamma_i^k \nabla_k n_j + \gamma_j^k \nabla_k n_i = -2K_{ij}, \end{aligned}$$

de donde se utiliza el hecho que $n^{\alpha} \nabla_{\mu} n_{\alpha} = 0$ y que $\nabla_{\mu} g_{\mu\nu} = 0$, con esto, se llega a la

relación entre la curvatura extrínseca y la 3-métrica siguiente:

$$K_{ij} = -\frac{1}{2} \mathcal{L}_{\vec{n}} \gamma_{ij}. \quad (2.8)$$

Es importante notar que la curvatura extrínseca depende únicamente del comportamiento del vector normal n^μ , que es un vector definido en Σ , por lo que es una propiedad geométrica de la propia hipersuperficie.

Por otro lado, si el parámetro de foliación es t , se puede definir un vector tipo tiempo de la forma:

$$t^\mu = \alpha n^\mu + \beta^\mu, \quad (2.9)$$

entonces, podemos reescribir la ecuación (2.8) de la siguiente manera:

$$K_{ij} = -\frac{1}{2\alpha} \left(\mathcal{L}_{\vec{t}} - \mathcal{L}_{\vec{\beta}} \right) \gamma_{ij}, \quad (2.10)$$

donde, se ha utilizado la identidad $\mathcal{L}_{\vec{v}} A_{\mu\nu} = \frac{1}{\phi} \mathcal{L}_{\phi \vec{v}} A_{\mu\nu}$ donde ϕ es una función escalar. Ahora, utilizando el hecho de que $\mathcal{L}_{\vec{t}} = \partial_t$ de la ecuación (2.10) se obtiene:

$$\partial_t \gamma_{ij} - \mathcal{L}_{\vec{\beta}} \gamma_{ij} = -2\alpha K_{ij}, \quad (2.11)$$

lo cual se puede escribir como:

$$\partial_t \gamma_{ij} = -2\alpha K_{ij} + P_i^k \nabla_k \beta_j + P_j^k \nabla_k \beta_i, \quad (2.12)$$

donde, $P_i^k \nabla_k$ es la proyección sobre las hipersuperficies Σ . Con este resultado, se ha construido una ecuación de evolución para la 3-métrica γ_{ij} . De la misma manera calculando la derivada de Lie de la curvatura extrínseca a lo largo del vector t^μ se obtiene:

$$\mathcal{L}_{\vec{t}} K_{\mu\nu} = \mathcal{L}_{\alpha \vec{n}} K_{\mu\nu} + \mathcal{L}_{\vec{\beta}} K_{\mu\nu}. \quad (2.13)$$

Para calcular el término $\mathcal{L}_{\alpha \vec{n}} K_{\mu\nu}$, se utilizan las proyecciones del tensor de Riemann siguientes:

$$P_\mu^\delta P_\nu^\kappa n^\lambda n^\sigma R_{\delta\lambda\kappa\sigma} = \mathcal{L}_{\vec{n}} K_{\mu\nu} + K_{\mu\lambda} K_\nu^\lambda + \frac{1}{\alpha} D_\mu D_\nu \alpha, \quad (2.14)$$

$$P_\mu^\delta P_\nu^\kappa (n^\lambda n^\sigma R_{\delta\lambda\kappa\sigma} + R_{\delta\kappa}) = R_{\mu\nu} + K K_{\mu\nu} - K_{\mu\lambda} K_\nu^\lambda, \quad (2.15)$$

que, al sustituir en (2.13) se llega a la relación:

$$\mathcal{L}_{\vec{t}} K_{\mu\nu} - \mathcal{L}_{\vec{\beta}} K_{\mu\nu} = -D_\mu D_\nu \alpha + \alpha(-P_\mu^\delta P_\nu^\kappa R_{\delta\kappa} + R_{\mu\nu} + K K_{\mu\nu} - 2K_{\mu\lambda} K_\nu^\lambda), \quad (2.16)$$

donde, $D_\mu = P_\mu^\alpha \nabla_\alpha$ es la proyección de la derivada covariante sobre las hipersuperficies.

Ahora, usando las ecuaciones de Einstein (2.1) y sustituyendo en (2.16) llegamos a:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\vec{t}} K_{\mu\nu} - \mathcal{L}_{\vec{\beta}} K_{\mu\nu} &= -D_\mu D_\nu \alpha + \alpha(R_{\mu\nu} + K K_{\mu\nu} - 2K_{\mu\lambda} K_\nu^\lambda) \\ &\quad + 4\pi\alpha[\gamma_{\mu\nu}(S - \rho_{ADM}) - 2S_{\mu\nu}], \end{aligned} \quad (2.17)$$

donde, $S_{\mu\nu} \equiv P_\mu^\alpha P_\nu^\beta T_{\alpha\beta}$, $(S \equiv S_\mu^\mu)$ y $\rho_{ADM} \equiv n^\mu n^\nu T_{\mu\nu}$.

Finalmente escribiendo

$$\mathcal{L}_{\vec{t}} = \partial_t, \quad \mathcal{L}_{\vec{\beta}} = \beta^\lambda \partial_\lambda K_{\mu\nu} + K_{\lambda\mu} \partial_\nu \beta^\lambda + K_{\lambda\nu} \partial_\mu \beta^\lambda, \quad (2.18)$$

se obtiene:

$$\begin{aligned} \partial_t K_{ij} &= \beta^k \partial_k K_{ij} + K_{ki} \partial_j \beta^k + K_{kj} \partial_i \beta^k - D_i D_j \alpha \\ &\quad + \alpha(R_{ij} + K K_{ij} - 2K_{ik} K_j^k) + 4\pi\alpha[\gamma_{ij}(S - \rho_{ADM}) - 2S_{ij}]. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Esta ultima ecuación representa la ecuación de evolución para las componentes de la curvatura extrínseca.

Hasta ahora, a partir de la definición de la curvatura extrínseca se han deducido ecuaciones de evolución para las 6 componentes independientes de la 3-métrica. De la misma manera, usando la proyección de las ecuaciones de Einstein, se encontraron

ecuaciones de evolución para las 6 componentes de curvatura extrínseca. Estas son 12 ecuaciones con 20 variables a determinar, lo que sugiere que aún quedan ecuaciones por deducir por lo que si se considera la proyección normal del tensor de Einstein a lo largo de la dirección temporal $2n^\mu n^\nu G_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} 2n^\mu n^\nu G_{\mu\nu} &= R + 2n^\mu n^\nu R_{\mu\nu} \\ &= (g^{\alpha\mu} + n^\alpha n^\mu)(g^{\beta\nu} + n^\beta n^\nu)R_{\alpha\beta\mu\nu} \\ &= P^{\alpha\mu}P^{\beta\nu}R_{\alpha\beta\mu\nu}. \end{aligned}$$

Por otro lado, se tiene que:

$$P^{\alpha\mu}P^{\beta\nu}R_{\alpha\beta\mu\nu} = R + K^2 - K_{\mu\nu}K^{\mu\nu}, \quad (2.20)$$

$$P^{\alpha\mu}P^{\beta\nu}R_{\alpha\beta\mu\nu} = R + K^2 - K_{\mu\nu}K^{\mu\nu}, \quad (2.21)$$

sustituyendo en la ecuación anterior se obtiene:

$$2n^\mu n^\nu G_{\mu\nu} = R + K^2 - K_{\mu\nu}K^{\mu\nu}, \quad (2.22)$$

ahora, utilizando las ecuaciones de Einstein (2.1) llegamos a la relación:

$$R + K^2 - K_{\mu\nu}K^{\mu\nu} = 16\pi\rho_{ADM}, \quad (2.23)$$

donde $\rho_{ADM} \equiv n^\mu n^\nu T_{\mu\nu}$ corresponde a la densidad de energía medida por un observador Euleriano. Nótese que ésta no es una ecuación de evolución, pero sí de constricción que debe satisfacerse a todo tiempo. Esta ecuación se conoce como constricción *Hamiltoniana* o de energía.

Sí ahora se considera la contracción mixta del tensor de Einstein:

$$P^{\alpha\mu}n^\nu G_{\mu\nu} = P^{\alpha\mu}n^\nu R_{\mu\nu} \quad (2.24)$$

las ecuaciones de Codazzi-Mainardi implican que:

$$\gamma^{\alpha\mu} n^\nu G_{\mu\nu} = D^\alpha K - D_\mu K^{\alpha\mu}, \quad (2.25)$$

utilizando las ecuaciones de campo de Einstein se llega a:

$$D_\mu (K^{\alpha\mu} - \gamma^{\alpha\mu} K) = 8\pi j^\alpha, \quad (2.26)$$

donde, $j^\alpha \equiv -P^{\alpha\mu} n^\nu T_{\mu\nu}$ es la densidad de momento medida por un observador Euleriano. Las ecuaciones (2.26) se conocen como *constricciones de momento*. Finalmente las constricciones Hamiltoniana y de momento (2.23), (2.26) son:

$$\begin{aligned} R + K^2 - K_{ij} K^{ij} &= 16\pi \rho_{ADM}, \\ D_j (K^{ij} - \gamma^{ij} K) &= 8\pi j^i. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Es importante notar que las expresiones en (2.27) no son ecuaciones de evolución y son independientes explícitamente de α y β^i . Esto era de esperarse pues estas funciones únicamente determinan cómo es que las coordenadas cambian de una hipersuperficie Σ_t a la siguiente Σ_{t+1} . Mientras que las constricciones son relaciones que deben cumplir las variables que describen el campo gravitacional $(\gamma_{ij}, K_{ij})|_\Sigma$ en la hipersuperficie Σ_i .

Finalmente, reuniendo todos los resultados, las ecuaciones de Einstein (2.1) en la descomposición 3+1 representadas como un problema de valores iniciales son:

$$\partial_t \gamma_{ij} = -2\alpha K_{ij} + P_i^k \nabla_k \beta_j + P_j^k \nabla_k \beta_i, \quad (2.28)$$

$$\partial_t K_{ij} = \beta^k \partial_k K_{ij} + K_{ki} \partial_j \beta^k + K_{kj} \partial_i \beta^k - D_i D_j \alpha \quad (2.29)$$

$$+ \alpha (R_{ij} + K K_{ij} - 2K_{ik} K_j^k) + 4\pi \alpha [\gamma_{ij} (S - \rho_{ADM}) - 2S_{ij}]. \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} H &:= R + K^2 - K_{ij} K^{ij} = 16\pi \rho_{ADM}, \\ M^i &:= D_j (K^{ij} - \gamma^{ij} K) = 8\pi j^i. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Estas relaciones llamadas ecuaciones *Arnowitt-Deser-Misner (ADM)*, representan un sistema de 16 ecuaciones con 20 incógnitas, por lo que, para cerrar el sistema son necesarias 4 ecuaciones más, correspondientes a la norma. Es decir, una ecuación para el lapso α y tres ecuaciones para las componentes del vector de corrimiento β^i . Sobre la elección de las funciones de norma, se hablará más adelante. En resumen las ecuaciones ADM se pueden deducir a partir de las ecuaciones de Einstein utilizando la descomposición 3+1 del espacio-tiempo siguiendo los siguientes pasos:

1. Al definir la curvatura extrínseca se obtienen las ecuaciones de evolución para las componentes de la 3-métrica γ_{ij} .
2. De la proyección de las ecuaciones de Einstein sobre las hipersuperficies se obtienen las ecuaciones de evolución para las componentes de la curvatura extrínseca K_{ij} .
3. La proyección de las ecuaciones sobre la dirección normal nos da la ecuación de constricción *hamiltoniana*.
4. Finalmente la proyección mixta nos da como resultado las ecuaciones de constricción de *momento*.

2.3.1. Ecuaciones BSSN

En la sección anterior se introdujo el sistema de ecuaciones ADM a partir de la descomposición 3+1 del espacio-tiempo, dichas ecuaciones en principio pueden ser resueltas con métodos numéricos convencionales. Sin embargo, no representa un problema bien planteado en el sentido de que las ecuaciones ADM no constituyen un sistema fuertemente hiperbólico [Alcubierre (2008), Baumgarte 2010]. Debido a esto, la comunidad en relatividad numérica buscó una versión de las ecuaciones ADM que si constituyeran un sistema fuertemente hiperbólico. Algunos de los sistemas fuertemente hiperbólicos que se han construido a lo largo del tiempo son el sistema Bona-Masso [Bona & Massó (1989), Bona & Massó (1992)], NOR [Nagy et al. (2004)], KST [Frittelli & Reula (1996), Anderson & York (1999)], Z4 [Bona et al. (2003), Bona et al. (2004)] y BSSN [Baumgarte & Shapiro (1999), Sarbach et al. (2002)] que es la formulación basada en la descomposición 3+1 más utilizado en códigos numéricos y la que se utilizó para el problema de choque de hoyos negros presentado más adelante.

La construcción de las ecuaciones BSSN se realiza a partir de las ecuaciones ADM y consiste en definir nuevas variables de evolución y reescribir las ecuaciones ADM en términos de estas nuevas variables. A continuación se muestran los pasos a seguir para obtener estas ecuaciones.

1. Se definen las que serán las nuevas variables que sustituyen a γ_{ij} , K_{ij} y estas son la métrica conforme $\tilde{\gamma}_{ij}$, el exponente conforme ϕ , la traza de la curvatura extrínseca K , la parte conforme libre de traza de la curvatura extrínseca $\tilde{A}_{ij}$ y las funciones conformes de conexión $\tilde{\Gamma}^i$ como:

$$\phi = \frac{1}{12} \ln[\det \gamma], \quad (2.32)$$

$$\tilde{\gamma}_{ij} = e^{-4\phi} \gamma_{ij}, \quad (2.33)$$

$$K = \gamma^{ij} K_{ij}, \quad (2.34)$$

$$\tilde{A}_{ij} = e^{-4\phi} (K_{ij} - \frac{1}{3} \gamma_{ij} K), \quad (2.35)$$

$$\tilde{\Gamma}^i = -\partial_j \tilde{\gamma}^{ij}. \quad (2.36)$$

2. Se contrae la ecuación ADM para la métrica (2.28) con γ_{ij} y se obtiene:

$$\partial_t (\ln \gamma^{1/2}) = -\alpha K + D_i \beta^i,$$

ahora, se sustituye el valor del exponente conforme ϕ en la ecuación anterior quedando:

$$\partial_t \phi = \frac{1}{6} (-\alpha K + \partial_i \beta^i + \Gamma_{ij}^i \beta^j).$$

Utilizando la identidad $\Gamma_{ij}^i = \partial_j (\ln \gamma^{1/2})$ se obtiene:

$$\partial_t \phi - (\beta^j \partial_j \phi + \frac{1}{6} \partial_i \beta^i) = -\frac{1}{6} \alpha K,$$

y finalmente, se llega a una ecuación de evolución para el exponente conforme ϕ :

$$(\partial_t - \mathcal{L}_{\vec{\beta}})\phi = -\frac{\alpha K}{6}, \quad (2.37)$$

donde $\mathcal{L}_{\vec{\beta}}$ denota la derivada de Lie a lo largo de β^i .

3. Al sustituir la variable $\tilde{A}_{ij}$ en la ecuación de evolución ADM de la curvatura extrínseca se obtienen las ecuaciones BSSN:

$$\begin{aligned} \partial_t K &= -\gamma^{ij} D_i D_j \alpha + \alpha (\tilde{A}_{ij} \tilde{A}^{ij} + \frac{1}{3} K^2 + 4\pi(\rho + S)) + \beta^i D_i K, \\ (\partial_t - \mathcal{L}_{\vec{\beta}}) \tilde{A}_{ij} &= e^{-4\phi} [-D_i D_j \alpha + \alpha R_{ij}]^{TF} + \alpha (K \tilde{A}_{ij} \tilde{A}^{ij} + \frac{1}{3} K^2). \end{aligned}$$

4. De la ecuación ADM de evolución de la métrica γ_{ij}

$$(\partial_t - \mathcal{L}_{\vec{\beta}})\gamma_{ij} = -2\alpha K_{ij}, \quad (2.38)$$

se sustituye el valor $\gamma_{ij} = e^{4\phi} \tilde{\gamma}_{ij}$ y $K = e^{4\phi} \tilde{A}_{ij} + \frac{1}{3} \gamma_{ij} K$ con lo cual se obtiene:

$$(\partial_t - \mathcal{L}_{\vec{\beta}})\tilde{\gamma}_{ij} + 4\tilde{\gamma}_{ij}(\partial_t - \mathcal{L}_{\vec{\beta}})\phi = -2\alpha(\tilde{A}_{ij} + \frac{\tilde{\gamma}_{ij} K}{3}),$$

reagrupando, se obtiene la ecuación de evolución para la 3-métrica conforme:

$$(\partial_t - \mathcal{L}_{\vec{\beta}})\tilde{\gamma}_{ij} = -2\alpha \tilde{A}_{ij} \quad (2.39)$$

5. La ecuación de evolución para las funciones conformes de conexión $\tilde{\Gamma}^i$

$$\partial_t \tilde{\Gamma}^i = -\partial_t \partial_j \tilde{\gamma}^{ij} = -\partial_j \partial_t \tilde{\gamma}^{ij}, \quad (2.40)$$

se obtiene mediante la sustitución de la ecuación de evolución (2.39) en (2.40), que después de desarrollar y agrupar términos toma la forma:

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{\Gamma}^i &= 2\alpha [\tilde{\Gamma}_{jk}^i \tilde{A}^{jk} + 6\tilde{A}^{ij} \partial_j \phi - \frac{2}{3} \tilde{\gamma}^{ij} \partial_j K] - 2\tilde{A}^{ij} \partial_j \alpha + \beta^k \partial_k \tilde{\Gamma}^i - \tilde{\Gamma}^k \partial_k \beta^i \\ &\quad + \frac{2}{3} \tilde{\Gamma}^i \partial_k \beta^k + \frac{1}{3} \tilde{\gamma}^{ij} \partial_j \partial_k \beta^k + \tilde{\gamma}^{jk} \partial_j \partial_k \beta^i. \end{aligned} \quad (2.41)$$

6. Las ecuaciones de constricción de momento ADM:

$$D_j(K^{ij} - \gamma^{ij}K) = 8\pi S^i,$$

en términos de las nuevas variables toman la forma:

$$\partial_j \tilde{A}^{ij} + \Gamma_{jk}^i \tilde{A}^{kj} + 6\tilde{A}^{ik} \partial_k \phi - \frac{2}{3} \tilde{\gamma}^{ij} D_j K = 8\pi e^{4\phi} S^i,$$

y escrita de manera compacta:

$$\tilde{D}_j(e^{6\phi} \tilde{A}^{ij}) - \frac{2}{3} e^{6\phi} \tilde{D}^i K = 8\pi e^{6\phi} S^i. \quad (2.42)$$

7. La constricción *hamiltoniana* en su versión ADM:

$$R - K^{ij} K_{ij} + K^2 = 16\pi\rho,$$

en términos de las nuevas variables toma la forma:

$$R - \tilde{A}_{ij} \tilde{A}^{ij} + \frac{2}{3} K^2 - 16\pi\rho = 0. \quad (2.43)$$

Definiendo $R_{ij} = \tilde{R}_{ij} + R_{ij}^\phi$ se tiene que $R = e^{-4\phi}(\tilde{R} + \tilde{\gamma}^{ij} R_{ij}^\phi)$ que al sustituir en (2.43) se obtiene:

$$e^{-4\phi} \tilde{R} - 8e^{-5\phi} \tilde{\gamma}^{ij} \tilde{D}_i \tilde{D}_j e^\phi + \frac{2}{3} K^2 - \frac{2}{3} K^2 - \tilde{A}_{ij} \tilde{A}^{ij} - 16\pi\rho = 0,$$

o bien:

$$\tilde{\gamma}^{ij} \tilde{D}_i \tilde{D}_j e^\phi - \frac{e^\phi \tilde{R}}{8} + \frac{e^{5\phi}}{8} \tilde{A}_{ij} \tilde{A}^{ij} - \frac{e^{5\phi} K^2}{12} + 2\pi e^{5\phi} \rho = 0. \quad (2.44)$$

En resumen las ecuaciones de evolución BSSN de las ecuaciones de Einstein son:

$$\begin{aligned} (\partial_t - \mathcal{L}_{\vec{\beta}})\phi &= -\frac{\alpha K}{6} \\ (\partial_t - \mathcal{L}_{\vec{\beta}})\tilde{\gamma}_{ij} &= -2\alpha \tilde{A}_{ij}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\partial_t - \mathcal{L}_\beta)\tilde{A}_{ij} &= e^{-4\phi}[-D_i D_j \alpha + \alpha R_{ij}]^{TF} + \alpha(K\tilde{A}_{ij}\tilde{A}^{ij} + \frac{1}{3}K^2) \\
\partial_t K &= -\gamma^{ij}D_i D_j \alpha + \alpha(\tilde{A}_{ij}\tilde{A}^{ij} + \frac{1}{3}K^2 + 4\pi(\rho + S)) + \beta^i D_i K, \\
\partial_t \tilde{\Gamma}^i &= 2\alpha[\tilde{\Gamma}_{jk}^i \tilde{A}^{jk} + 6\tilde{A}^{ij}\partial_j \phi - \frac{2}{3}\tilde{\gamma}^{ij}\partial_j K] - 2\tilde{A}^{ij}\partial_j \alpha + \beta^k \partial_k \tilde{\Gamma}^i - \tilde{\Gamma}^k \partial_k \beta^i \\
&\quad + \frac{2}{3}\tilde{\Gamma}^i \partial_k \beta^k + \frac{1}{3}\tilde{\gamma}^{ij}\partial_j \partial_k \beta^k + \tilde{\gamma}^{jk}\partial_j \partial_k \beta^i,
\end{aligned} \tag{2.45}$$

y las constricciones son:

$$\tilde{\gamma}^{ij}\tilde{D}_i \tilde{D}_j e^\phi - \frac{e^\phi \tilde{R}}{8} + \frac{e^{5\phi}}{8}\tilde{A}_{ij}\tilde{A}^{ij} - \frac{e^{5\phi}K^2}{12} = -2\pi e^{5\phi}\rho, \tag{2.46}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{D}_j(e^{6\phi}\tilde{A}^{ij}) - \frac{2}{3}e^{6\phi}\tilde{D}^i K &= 8\pi e^{6\phi}S^i, \\
\tilde{\Gamma}^i + \partial_j \tilde{\gamma}^{ij} &= 0.
\end{aligned} \tag{2.47}$$

Las ecuaciones de BSSN constituyen un sistema fuertemente hiperbólico, este sistema fue parte de los primeros pasos para lograr evoluciones estables cuando se consideran espacio-tiempo de hoyos negros. Esta formulación se consideró para el problema de choque de hoyos negros presentado en esta tesis.

2.3.2. Norma: elección de α y β^i

Hasta ahora, en secciones anteriores se han introducido las ecuaciones de Einstein en su forma ADM y BSSN, las cuales son dependientes de las funciones de norma α y β^i . Sin embargo, no se ha hablado del valor de estas funciones o la manera de determinarlas. Las funciones de norma deben ser elegidas de manera inteligente debido a que al momento de implementar las ecuaciones numéricamente se pueda tener evoluciones largas y estables. Una condición para el lapso α que en la literatura es comúnmente mencionada es la llamada *maximal slicing*, la cual, consiste en imponer que la traza de la curvatura extrínseca es cero ($K = 0$) y que no evolucione ($\partial_t K = 0$). Entonces, la ecuación de evolución ADM de la curvatura extrínseca (2.30) toma la forma elíptica:

$$D^2 \alpha = \alpha[K_{ij}K^{ij} + 4\pi(\rho_{ADM} + S)], \tag{2.48}$$

esta condición es llamada así debido a que maximiza el volumen de una hipersuperficie espacial, esta condición fue introducida por primera vez en el trabajo [Lichnerowicz (1944)]. Esta condición ofrece un comportamiento estable como se explica en [Alcubierre (2008), Baumgarte 2010]. Respecto al vector de corrimiento β^i se puede decir que también existen condiciones que a lo largo de los años se han propuesto, todas ellas han surgido dependiendo del sistema a evolucionar. Existen condiciones sobre el vector de corrimiento que se podría pensar son idóneas, por ejemplo la condición conocida como *minimal distortion* (distorsión mínima) impone tres ecuaciones elípticas que minimizan la deformación de un elemento de volumen en una hipersuperficie conforme evoluciona, lo cual evita la singularidad que se forma en el caso de evoluciones que involucren hoyo negros. Un ejemplo de mala elección del vector de corrimiento que no evita singularidades es cuando se elige un vector de corrimiento trivial $\beta^i = 0$ [Smarr et al. (1978)]. Al elegir las condiciones *maximal slicing* y *minimal distortion*, por sus propiedades matemáticas, se espera un comportamiento suave en la evolución evitando la formación de inestabilidades además, en el caso de evolución de hoyos negros este tipo de norma evita la singularidad. Sin embargo, no son las más convenientes en el aspecto de implementación numérica, pues imponen ecuaciones elípticas en 3 dimensiones que en principio deben ser resueltas entre cada paso de tiempo. Numéricamente esto es poco conveniente pues resolver un sistema elíptico de ecuaciones en tres dimensiones con los métodos convencionales toma mucho tiempo. Por esta razón, un camino alternativo consiste en construir ecuaciones de evolución tipo hiperbólicas tanto para la función lapso α como para el vector de corrimiento β^i . Las condición llamada $1 + \log$ [Anninos et al. (1995), Bernstein (1993), Bona et al. (1995)] define una ecuación de evolución para α de la forma:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \alpha^2 f(\alpha) K, \quad (2.49)$$

donde comúnmente se elige a $f(\alpha) = N/\alpha$, con N una constante o $N = 1$. Esta condición históricamente fue introducida para $N = 2$ y a lo largo de los años se ha estudiado y comprobado que comparte algunas de las propiedades más importantes de la condición *maximal slicing* pero es mucho más fácil de implementar numéricamente, debido a que puede ser implementada como una ecuación de evolución complementaria a las ecuaciones de Einstein. De la misma manera, se puede construir un sistema hiperbólico de ecuaciones de evolución para las componentes del vector de corrimiento

β^i llamado *gamma driver* [Gundlach et al. (2006)]:

$$\partial_t^2 \beta^i = B^i \quad (2.50)$$

$$\partial_t^2 B^i = \alpha^2 \xi \partial_t \tilde{\Gamma}^i - \eta B^i, \quad (2.51)$$

donde $\tilde{\Gamma}^i = -\partial_t \tilde{\gamma}^{ij}$ con $\tilde{\gamma}^{ij}$ la métrica conforme de la formulación BSSN mencionada en la sección anterior y η es una constante de disipación que suprime las oscilaciones de β^i . Condiciones de norma de este estilo son las que se utilizan para resolver el choque de hoyos negros en el vacío y es el tipo de norma que se utilizó en el estudio de choque de hoyos negros presentado en este manuscrito.

2.4. Hidrodinámica relativista

Esta sección está dedicada a la deducción de las ecuaciones que describen la evolución de un fluido relativista en un espacio-tiempo curvo, el modelo a utilizar es el de un fluido perfecto, o sea se descartan efectos de viscosidad y conducción térmica. La deducción de las ecuaciones de evolución del fluido relativista en cuestión está basada en la descomposición 3+1 del espacio-tiempo. La razón de esto, entre otras cosas, es porque los métodos numéricos convencionales para resolverlas se basan en la formulación conservativa de las ecuaciones, característica que se obtiene a partir del uso de la descomposición 3+1 del espacio-tiempo. En este trabajo la deducción de las ecuaciones de la hidrodinámica relativista está basada en la llamada formulación de Valencia [Banyuls et al.(1997)], la descripción del fluido se hace desde la perspectiva de un observador euleriano, el cual, es un observador fijo fuera del fluido.

Las propiedades de un fluido perfecto están descritos por las componentes del tensor de energía-momento:

$$T^{\mu\nu} = \rho_0 h u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu}, \quad (2.52)$$

donde $g^{\mu\nu}$ es el tensor métrico, u^μ es la quadri-velocidad de los elementos de fluido, p la presión, ρ_0 la densidad de masa en reposo y h la entalpía específica definida como $h \equiv 1 + \epsilon + p/\rho_0$, donde, ϵ es la energía interna.

Las ecuaciones que describen la evolución de un fluido perfecto están dadas por la

ecuación de continuidad (conservación de la masa) y las identidades de Biachi (conservación de energía-momento):

$$\nabla_\mu(\rho_0 u^\mu) = 0, \quad (2.53)$$

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad (2.54)$$

donde, ∇_μ es la derivada covariante asociada al espacio-tiempo 4-dimensional descrito por $g_{\mu\nu}$. El objetivo de esta sección como ya se ha mencionado es lograr construir un sistema conservativo de ecuaciones de evolución para un fluido perfecto relativista, sin embargo, las ecuaciones antes escritas, se encuentra en forma covariante por lo que se transformaran una forma que represente un problema de valores iniciales que evoluciona en el tiempo.

Utilizando la identidad $\nabla_\mu \zeta^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} \zeta^\mu)$, se puede reescribir las ecuaciones (2.53) y (2.54) como sigue:

$$\partial_\mu (\sqrt{-g} \rho_0 u^\mu) = 0, \quad (2.55)$$

$$\partial_\mu (\sqrt{-g} T^{\mu\nu}) = 0. \quad (2.56)$$

por otro lado, utilizando la métrica 3+1 se puede definir las siguiente cantidades:

$$\begin{aligned} \sqrt{-g} &= \alpha \sqrt{\gamma}, \\ v^i &= \frac{u^i}{W} + \frac{\beta^i}{\alpha}, \\ W &= \alpha u^0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \gamma_{ij} v^i v^j}}, \end{aligned} \quad (2.57)$$

donde v^i es la 3-velocidad del fluido medida por un observador Euleriano, W el factor de Lorentz y g el determinate de la métrica $g_{\mu\nu}$. Sustituyendo los valores de las ecuaciones (2.57) en la ecuación de continuidad (2.55) se obtiene:

$$\partial_t D + \partial_k [D(\alpha v^k - \beta^k)] = 0, \quad (2.58)$$

donde se ha definido $D = \sqrt{\gamma}\rho_0 W$.

Ahora, proyectando la ecuación (2.55) sobre las hipersuperficies se obtiene:

$$\partial_t J_i + \partial_k [J_i(\alpha v^k - \beta^k) + \alpha\sqrt{\gamma}p\delta_i^k] = \alpha\sqrt{\gamma}\Gamma_{\mu\nu}^\alpha T^{\mu\nu}, \quad (2.59)$$

donde se ha definido $J_i = \sqrt{\gamma}\rho_0 h W^2 v_i$.

Por último, proyectando la ecuación (2.56) en la dirección normal n^μ y restando con la ecuación (2.58) obtenemos:

$$\partial_t \tau + \partial_k [\tau(\alpha v^k - \beta^k) + \alpha\sqrt{\gamma}p v^k] = \alpha\sqrt{\gamma}(T^{\mu 0}\partial_\mu \alpha - \alpha T^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu}^0), \quad (2.60)$$

donde se ha definido $\tau = \sqrt{\gamma}(\rho_0 h W^2 - p - \rho_0 W)$, de este modo el sistema de ecuaciones de un fluido relativista en el espacio-tiempo 3+1 es:

$$\begin{aligned} \partial_t D + \partial_k [D(\alpha v^k - \beta^k)] &= 0, \\ \partial_t J_i + \partial_k [J_i(\alpha v^k - \beta^k) + \alpha\sqrt{\gamma}p\delta_i^k] &= \alpha\sqrt{\gamma}\Gamma_{\mu\nu}^\alpha T^{\mu\alpha}, \\ \partial_t \tau + \partial_k [\tau(\alpha v^k - \beta^k) + \alpha\sqrt{\gamma}p v^k] &= \alpha\sqrt{\gamma}(T^{\mu 0}\partial_\mu \alpha - \alpha T^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu}^0). \end{aligned} \quad (2.61)$$

Como se observa, se ha construido el sistema de evolución definiendo nuevas variables de evolución D , J_i , y τ , esto, con el fin de tener al final un sistema del tipo balance de flujos $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}^i(\mathbf{u})}{\partial x^i} = \mathbf{S}$, apropiado para aplicar métodos numéricos convencionales para resolverlo. Para una mejor ilustración en forma matricial el sistema de ecuaciones se escribe como:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} D \\ J_1 \\ J_2 \\ J_3 \\ \tau \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}^i = \begin{pmatrix} \alpha \left(v^i - \frac{\beta^i}{\alpha} \right) D \\ \alpha \left(v^i - \frac{\beta^i}{\alpha} \right) J_1 + \alpha\sqrt{\gamma}p\delta_1^i \\ \alpha \left(v^i - \frac{\beta^i}{\alpha} \right) J_2 + \alpha\sqrt{\gamma}p\delta_2^i \\ \alpha \left(v^i - \frac{\beta^i}{\alpha} \right) J_3 + \alpha\sqrt{\gamma}p\delta_3^i \\ \alpha \left(v^i - \frac{\beta^i}{\alpha} \right) \tau + \alpha\sqrt{\gamma}p v^i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha\sqrt{\gamma}T^{\mu\nu}g_{\nu\sigma}\Gamma_{\mu 1}^\sigma \\ \alpha\sqrt{\gamma}T^{\mu\nu}g_{\nu\sigma}\Gamma_{\mu 2}^\sigma \\ \alpha\sqrt{\gamma}T^{\mu\nu}g_{\nu\sigma}\Gamma_{\mu 3}^\sigma \\ \alpha\sqrt{\gamma}(T^{\mu 0}\partial_\mu \alpha - \alpha T^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu}^0) \end{pmatrix},$$

con la relación entre variables conservativas (D, J_i, τ) y primitivas $(\rho_0, \epsilon, p, v^i)$:

$$D = \sqrt{\gamma}\rho_0 W,$$

$$\begin{aligned} J_i &= \sqrt{\gamma} \rho_0 h W^2 v_i, \\ \tau &= \sqrt{\gamma} (\rho_0 h W^2 - p - \rho_0 W). \end{aligned} \quad (2.62)$$

El sistema consiste de 5 ecuaciones, sin embargo, se tienen 6 variables por determinar por lo que es necesario introducir una ecuación de estado para cerrar el sistema.

En un fluido perfecto únicamente ocurren procesos adiabáticos en los elementos que lo conforman, es decir, la entropía se mantiene constante. Para un gas ideal, sabemos que la energía interna U es función únicamente de la temperatura y no del volumen, es decir $U = U(T)$, lo que lleva a la ecuación de estado para un fluido perfecto:

$$p = (\Gamma - 1) \rho_0 \epsilon, \quad (2.63)$$

la cual es la ecuación de estado que describirá a los fluidos considerados en este trabajo.

Las ecuaciones ADM (2.30), involucran la densidad de energía de la materia como la fuente del campo gravitacional, esta densidad de energía está asociada a observadores eulerianos cuya cuadri-velocidad u^μ es normal a la hipersuperficie espacial. Finalmente la relación entre las variables conservativas (D, J_i, τ) y las cantidades concernientes a la materia en las ecuaciones ADM es:

$$\begin{aligned} \rho_{ADM} &:= n^\mu n^\nu T_{\mu\nu} = \rho_0 h W^2 - p = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} (\tau + D), \\ j^i &:= -n^\mu P^{\nu i} T_{\mu\nu} = \rho_0 h W^2 v^i = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} J^i, \\ S^{ij} &:= P^{\mu i} P^{\nu j} T_{\mu\nu} = \rho_0 h W^2 v^i v^j + \gamma^{ij} p. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Hasta aquí hemos deducido los sistemas de ecuaciones necesarios para los estudios presentados en este trabajo. En el siguiente capítulo se describirá los métodos numéricos necesarios para resolverlos.

Métodos numéricos

En las secciones 2.3 2.4 de esta tesis se han construido de manera general las ecuaciones de Einstein y las ecuaciones de evolución para un fluido relativista en un espacio-tiempo curvo. Cuando se habla de la solución a las ecuaciones de Einstein en el vacío, comúnmente se hace referencia a soluciones exactas que suponen algún tipo de simetría. La solución de Schwarzschild por ejemplo, fue propuesta apenas un par de meses después de que Einstein publicara su teoría, esta solución es identificada con el espacio-tiempo de un hoyo negro esféricamente simétrico, por otro lado, la solución de Kerr que data de los años 60, está relacionada con el espacio-tiempo de un hoyo negro rotante y supone simetría axial. La solución a las ecuaciones de Einstein para sistemas más complejos como pueden ser sistemas binarios de estrellas, choque de hoyos negros, colapso de núcleo de estrellas, etc., no es una tarea fácil ni trivial de resolver pues no existen soluciones exactas. Por ello, surgió la relatividad numérica cuyo estudio se enfoca en el desarrollo de herramientas para resolver numéricamente las ecuaciones de Einstein. Como ya se ha mencionado la primera parte de esta tesis está enfocada al estudio del choque de hoyos negros y por lo tanto restringida a la solución numérica de las ecuaciones de Einstein en el vacío; existen distintos métodos numéricos para lograr resolver estas ecuaciones, por ejemplo los métodos espectrales para la solución de ecuaciones diferenciales se han adaptando a problemas que pertenecen al campo de estudio de la relatividad numérica [Bonazzola et al. (1999), Gourgoulhon (2002), Pfeiffer et al. (2003)]. De manera general consiste en aproximar los operadores diferenciales con una serie truncada de funciones base con lo cual el problema se reduce a encontrar el valor de los coeficientes que acompañan

cada término de la expansión [Gootlieb & Orszag (1977), Boyd (2001)]. Otro método numérico que comúnmente se utiliza en la relatividad numérica y que es el que se utilizó para resolver la versión BSSN de las ecuaciones de Einstein para el estudio del choque de hoyos negros presentado en esta tesis es el método de diferencias finitas que se revisa en la sección 3.1 de este capítulo.

La segunda parte de esta tesis está enfocada en el estudio de acreción de vientos en objetos compactos donde la solución numérica de las ecuaciones de evolución para un fluido relativista en un espacio-tiempo curvo (ecuaciones de Euler relativistas) es necesaria. La formación de discontinuidades en las soluciones de dichas ecuaciones, aún cuando se eligen condiciones iniciales suaves, tiene como consecuencia que los métodos numéricos basados en la aproximación en diferencias finitas o métodos espectrales sean poco utilizados en códigos que evolucionan fluidos es por esto que en la sección 3.2 de este capítulo describimos los métodos de alta resolución por captura de choque basados en la discretización del dominio numérico en volúmenes finitos que es el método que se utilizó para el estudio de acreción de vientos en objetos compactos presentado en esta tesis.

3.1. Cómputo de las derivadas espaciales utilizando diferencias finitas

El método de diferencias finitas es un método numérico para resolver ecuaciones diferenciales parciales (EDPs). Consiste en definir una versión discreta de una EDP y calcular una solución a dicha aproximación siguiendo los pasos:

1. Definir un dominio discreto donde se resolverá la EDP, por ejemplo una manera de discretizar un dominio en tres dimensiones continuo en coordenadas cartesianas consistirá en definir los arreglos $x_{ijk} = i\Delta x$, $y_{ijk} = j\Delta y$ y $z_{ijk} = k\Delta z$, donde i, j, k son números enteros que etiquetan los puntos donde estará definida la EDP y que juntos definen una malla cúbica, en la Fig. 3.1 se muestra el caso más elemental de un dominio cúbico discreto en que los puntos se encuentran uniformemente espaciados.
2. Discretizar las funciones y variables involucradas en la EDP en el conjunto discreto de puntos antes definido. Supongamos que una función f , involucrada en

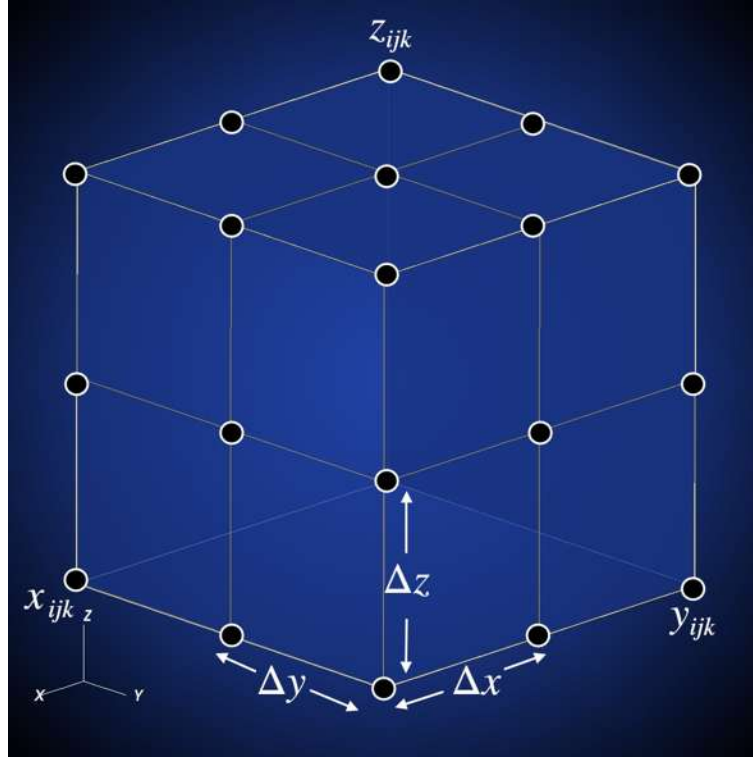


Figura 3.1. Se muestra un dominio numérico en tres dimensiones cúbico en coordenadas cartesianas con discretización uniforme en las tres direcciones.

una EDP, está definida en un dominio tridimensional en coordenadas cartesianas (x, y, z) , la función f en el dominio discreto queda definida en los puntos $(x_{i,j,k}, y_{i,j,k}, z_{i,j,k})$ que podemos denotar como $f_{i,j,k}$.

3. Discretizar los operadores diferenciales en el mismo dominio como sigue:

- *Derivada de primer orden en tres dimensiones.* Dada una función discreta $f_{i,j,k}$, es posible calcular valores aproximados de la función en los puntos adyacentes a partir de expansiones en serie de Taylor truncadas en torno a $f_{i,j,k}$. Por ejemplo, la expansión en series de Taylor de puntos adyacentes a la izquierda $(x_{i-1,j,k})$ y derecha $(x_{i+1,j,k})$ de $x_{i,j,k}$ es:

$$f_{i-1,j,k} = f_{i,j,k} - \frac{\partial f_{i,j,k}}{\partial x_i} \Delta x + \frac{\partial^2 f_{i,j,k}}{\partial x_i^2} \frac{\Delta x^2}{2} + O(\Delta x^3),$$

$$f_{i,j,k} = f_{i,j,k}, \quad (3.1)$$

$$f_{i+1,j,k} = f_{i,j,k} + \frac{\partial f_{i,j,k}}{\partial x_i} \Delta x + \frac{\partial^2 f_{i,j,k}}{\partial x_i^2} \frac{\Delta x^2}{2} + O(\Delta x^3),$$

combinando estas expresiones se llega a una expresión para la primera derivada centrada en $x_{i,j,k}$ con un error de segundo orden:

$$\frac{\partial f_{i,j,k}}{\partial x_i} = \frac{f_{i+1,j,k} - f_{i-1,j,k}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2). \quad (3.2)$$

Siguiendo el mismo procedimiento se pueden construir las llamadas aproximaciones *upwind* y *downwind* que son aproximaciones no centradas de las derivadas, por ejemplo la derivada utilizando solamente puntos a la izquierda de $x_{i,j,k}$ es:

$$\frac{\partial f_{i,j,k}}{\partial x_i} = \frac{f_{i-2,j,k} - 4f_{i-1,j,k} + 3f_{i,j,k}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2). \quad (3.3)$$

Así, supongamos se quiere que los operadores tengan un orden de aproximación mayor, por ejemplo, si se desea calcular la derivada de primer orden con un error de cuarto orden, es suficiente conservar un mayor número de términos en la serie de Taylor:

$$\begin{aligned} f_{i-2,j,k} &= f_i - 2\Delta x f'_i + \frac{4\Delta x^2}{2} f''_i - \frac{8\Delta x^3}{6} f'''_i + \frac{16\Delta x^4}{24} f''''_i + O(\Delta x^5), \\ f_{i-1,j,k} &= f_i - \Delta x f'_i + \frac{\Delta x^2}{2} f''_i - \frac{\Delta x^3}{6} f'''_i + \frac{\Delta x^4}{24} f''''_i + O(\Delta x^5), \\ f_j &= f_j, \\ f_{j+1} &= f_j + \Delta x f'_j + \frac{\Delta x^2}{2} f''_j + \frac{\Delta x^3}{6} f'''_j + \frac{\Delta x^4}{24} f''''_j + O(\Delta x^5), \\ f_{j+2} &= f_j + 2\Delta x f'_j + \frac{4\Delta x^2}{2} f''_j + \frac{8\Delta x^3}{6} f'''_j + \frac{16\Delta x^4}{24} f''''_j + O(\Delta x^5), \end{aligned}$$

y encontrar los coeficientes en la combinación lineal $af_{i-2,j,k} + bf_{i-1,j,k} + cf_{i,j,k} + df_{i+1,j,k} + ef_{i+2,j,k}$ que permitan calcular la derivada con una aproximación de cuarto orden centrada en el punto $x_{i,j,k}$:

$$\frac{\partial f_{i,j,k}}{\partial x_i} = \frac{f_{i-2,j,k} - 8f_{i-1,j,k} + 8f_{i+1,j,k} - f_{i+2,j,k}}{12\Delta x} + O(\Delta x^4), \quad (3.4)$$

Siguiendo esta receta, tenemos una infinidad de posibilidades para expresar de manera discreta la derivada de primer orden entorno a un punto en un dominio discreto; una lista de aproximaciones de la derivada de primer orden de $f_{i,j,k}$ alrededor de puntos vecinos a $x_{i,j,k}$ pueden ser encontradas en [Guzmán (2010)].

- *Derivada de segundo orden en 3 dimensiones.* Al igual que en el caso anterior, la aproximación de la derivada de segundo orden con una aproximación a segundo orden puede estimarse a partir de la combinación de las expresiones 3.1 cuyo resultado es:

$$\frac{\partial^2 f_{i,j,k}}{\partial x_i^2} = \frac{f_{j+1} - 2f_{i,j,k} + f_{i-1,j,k}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2). \quad (3.5)$$

En el caso en que se requiera calcular una derivada cruzada, la manera de proceder es mediante la aplicación primero de la derivada a primer orden en un dirección y luego en la otra, por ejemplo la derivada cruzada $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ con aproximación a segundo orden es:

$$\frac{\partial^2 f_{i,j,k}}{\partial x_i \partial y_j} = \frac{f_{i+1,j,k} - f_{i-1,j,k} + f_{i,j+1,k} - f_{i,j-1,k}}{2\Delta x \Delta y} + O(\Delta x^2, \Delta y^2). \quad (3.6)$$

En resumen, para aproximar derivadas de cualquier orden usando diferencias finitas seguimos la siguiente receta: 1) Hacer la expansión en serie de Taylor de f en puntos cercanos a aquel donde se quiera evaluar la derivada de f a un orden deseado y 2) encontrar una combinación lineal de tales expansiones que cumpla que los coeficientes de las derivadas de orden superior e inferior a la derivada del orden deseado sean cero.

3.2. Método de alta resolución con captura de choques (HRSC)

Una de las alternativas a la discretización en diferencias finitas de una ecuación diferencial es el método de captura de choques de alta resolución (HRSC por sus siglas en inglés), los cuales se basan en la discretización del espacio-tiempo en volúmenes

finitos [Toro (1999)]. En esta sección se dará una descripción breve de la discretización en volúmenes finitos así como de los métodos de HRSC que se utilizaron para el estudio del problema de acreción en hoyos negros que se presenta en este trabajo, se describe en una dimensión para ilustrarlo con claridad. El método de volúmenes finitos en una dimensión espacial consiste en discretizar el dominio numérico en pequeños trozos de volumen centrados en un punto $x_i = i\Delta x$, con i un número entero (en la otra dirección, se discretiza como $t = n\Delta t$, donde, n es un número entero), que se muestra en la Fig. 3.2 . Esta forma de discretizar el espacio-tiempo usando pequeñas celdas, es útil para poder construir una discretización de la forma integral de la ecuación en cuestión. El método de volúmenes finitos se aplica a sistemas de ecuaciones que representan leyes de conservación, esto es, ecuaciones del tipo balance de flujo:

$$\partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{u}) = \mathbf{S}, \quad (3.7)$$

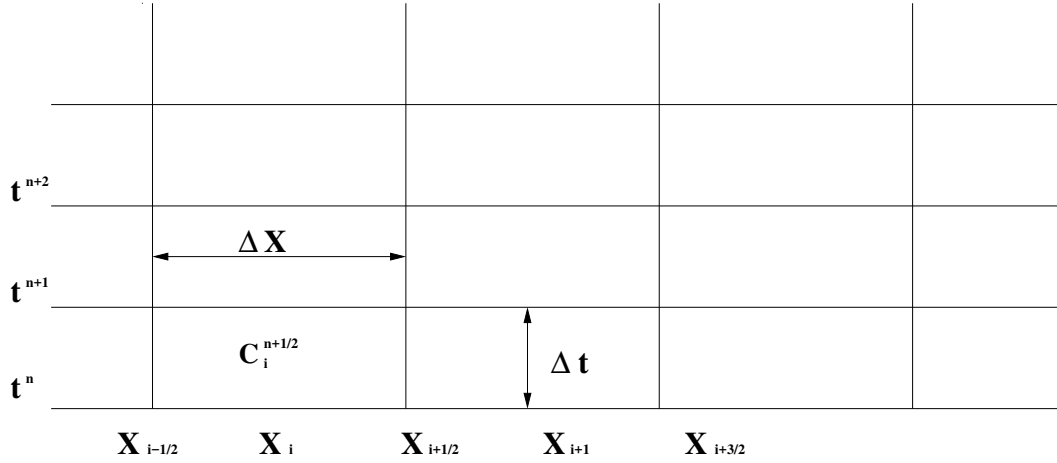


Figura 3.2. Se presenta la estructura de celda del espacio-tiempo, donde $C_i^{n+1/2}$ es la etiqueta de la celda centrada en x_i y delimitada por t^n y t^{n+1} .

donde, $\mathbf{u}$ es el vector de variables conservativas, $\mathbf{F}(\mathbf{u})$ son los flujos correspondientes a las variables $\mathbf{u}$ y $\mathbf{S}(\mathbf{u})$ el vector de fuentes.

La versión integral en el tiempo y espacio de una ecuación del tipo (3.7) se puede construir calculando las integrales en tiempo y espacio en una celda $C_i^{n+1/2}$:

$$\frac{1}{\Delta t \Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \partial_t \mathbf{u} dx dt +$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t \Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{u}) dx dt = \\ \frac{1}{\Delta t \Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{S} dx dt, \end{aligned} \quad (3.8)$$

que se puede reescribir como:

$$\bar{\mathbf{u}}_i^{n+1} = \bar{\mathbf{u}}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\bar{\mathbf{F}}_{i+1/2}^{n+1/2} - \bar{\mathbf{F}}_{i-1/2}^{n+1/2}) + \bar{\mathbf{S}}_i^n \Delta t, \quad (3.9)$$

donde $\bar{\mathbf{u}}_i^n$ es el promedio espacial de las variables conservativas proveniente de la definición:

$$\bar{\mathbf{u}}_i^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{u}(x, t^n) dx, \quad (3.10)$$

$\bar{\mathbf{S}}_i^{n+1/2}$ son los promedios espacial y temporal de las fuentes en la celda $C_i^{n+1/2}$ y $\bar{\mathbf{F}}_{i+1/2}^{n+1/2}$ son el promedio temporal de los flujos en las interceldas, donde podría aparecer una discontinuidad que definirá problemas de Riemann (PR) [Toro (1999)] locales $\text{PR}(\mathbf{u}_{i-1}^n, \mathbf{u}_i^n)$ y $\text{PR}(\mathbf{u}_i^n, \mathbf{u}_{i+1}^n)$.

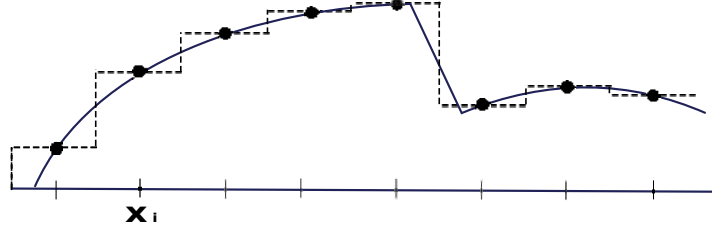


Figura 3.3. Se ilustra el problema de Riemann $\text{PR}(\mathbf{u}_{i-1}^n, \mathbf{u}_i^n)$ que surge en la frontera de las interceldas

Para obtener una solución a la ecuación (3.9), el problema se ha reducido a calcular los promedios de los flujos en las interceldas, que a su vez, se reduce a solucionar los problemas de Riemann $\text{PR}(\mathbf{u}_{i-1}^n, \mathbf{u}_i^n)$ y $\text{PR}(\mathbf{u}_i^n, \mathbf{u}_{i+1}^n)$ de manera exacta o aproximada. Este trabajo se restringe a métodos aproximados para resolver el problema de Riemann.

Para calcular los flujos utilizando un resolver de Riemann aproximado, es necesario conocer los valores de las variables primitivas y conservativas a la izquierda y derecha de cada intercelda, estos valores definen el problema de Riemann aproximado a resolver. Existen diversos métodos de reconstrucción de variables, desde los más sencillos

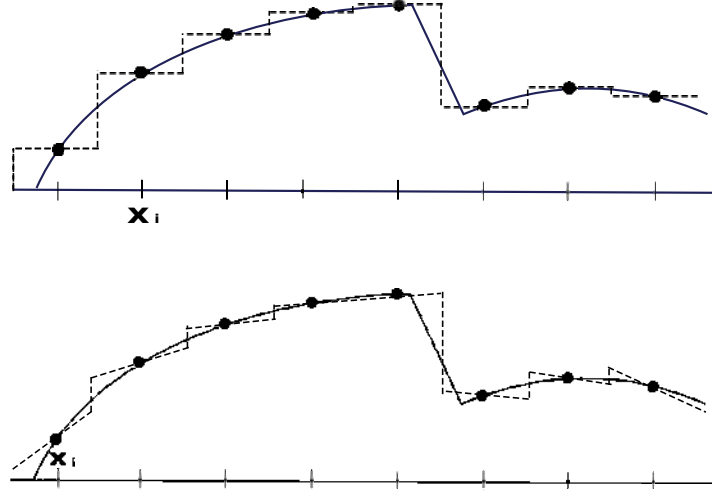


Figura 3.4. Se ilustran los dos tipos de aproximación en las interceldas, utilizando una función constante a pedazos (superior) y una función lineal a pedazos (inferior).

que consisten en utilizar funciones constantes a pedazos (ver parte superior de la Fig. 3.4) o funciones lineales (parte inferior de la Fig 3.4), hasta los más complejos como son los que utilizan funciones polinomiales o parabólicas para reconstruir las variables [Martí & Muller (1996)]. En este trabajo se utilizó el método de reconstrucción de variables llamado *minmod*, el cual, consiste en reconstruir cada variable $\bar{\mathbf{u}}$ con una función lineal a pedazos $\tilde{\mathbf{u}}$. Los valores de las variables $\tilde{\mathbf{u}}$ son fijados a partir del uso de un limitador de pendientes (*minmod*) de las funciones lineales definidas por las variables conservativas en el centro de las celdas. El limitador sirve para asignar valores aproximados a las variables en cada intercelda, esto es, aproxima la variable $\tilde{\mathbf{u}}$ a la derecha (D) e izquierda (I) de cada intercelda como:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{u}}_{i+1/2}^I &= \bar{\mathbf{u}}_i + \sigma_i(x_{i+1/2} - x_i), \\ \tilde{\mathbf{u}}_{i+1/2}^D &= \bar{\mathbf{u}}_i + \sigma_{i+1}(x_{i+1/2} - x_{i+1}),\end{aligned}$$

donde $\sigma_i = \minmod(m_{i-1/2}, m_{i+1/2})$, la función $m_{i+1/2}$ es la pendiente de las variables conservativas $\bar{\mathbf{u}}$ centrada en cada interfase

$$m_{i+1/2} = \frac{\bar{\mathbf{u}}_{i+1} - \bar{\mathbf{u}}_{i-1}}{x_{i+1} - x_i}, \quad (3.11)$$

y el limitador de pendientes *minmod* definido como:

$$\text{minmod}(a, b) = \begin{cases} a & \text{si } |a| > |b| \text{ y } ab > 0, \\ b & \text{si } |a| < |b| \text{ y } ab > 0, \\ 0 & \text{si } ab < 0. \end{cases}$$

Una vez que se conocen las variables en las interceldas, se pueden calcular los promedios de los flujos utilizando un resolvidores de Riemann aproximado. Existen distintos tipos de resolvidores aproximado de Riemann que para poder aplicarlos es necesario conocer información sobre las propiedades características de la matriz jacobiana $\frac{d\mathbf{F}}{d\mathbf{u}}$ del sistema a resolver, en este caso el sistema (3.7). Por ejemplo, el resolvidor *Roe* [Roe (1981)], demanda conocer los eigenvalores y eigenvectores, por otro lado el HLLE solo requiere conocer el máximo y el mínimo de los eigenvalores λ_i de la matriz jacobiana [Einfeldt (1988)]. Para uno de los estudios presentados en este trabajo (acreción de vientos en hoyos negros), utilizamos el resolver aproximado de Riemann HLLE.

La fórmula de flujos HLLE es:

$$\bar{\mathbf{F}}_{i+1/2}^{HLLE} = \frac{\lambda^+ \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{u}}_{i+1/2}^I) - \lambda^- \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{u}}_{i+1/2}^D) + \lambda^+ \lambda^- (\tilde{\mathbf{u}}_{i+1/2}^D - \tilde{\mathbf{u}}_{i+1/2}^I)}{\lambda^+ \lambda^-}, \quad (3.12)$$

donde

$$\begin{aligned} \lambda^+ &= \text{máx}(0, \lambda_i^D, \lambda_{i+1}^D, \lambda_{i+3}^D, \dots), \\ \lambda^- &= \text{mín}(0, \lambda_i^I, \lambda_{i+1}^I, \lambda_{i+3}^I, \dots), \end{aligned}$$

son el máximo y mínimo de las velocidades características de propagación de una onda a la derecha e izquierda repectivamente. Finalmente, con ésta fórmula se integran (3.9) y se evolucionan las variables conservativas. Como se verá más adelante, en el Cap. 5, empleamos el resolvidor de Riemann *Marquina* y el reconstructor de variables *MC*. El primero a diferencia de la fórmula HLLE, para el cálculo de flujos a derecha e izquierda de las interceldas es necesario conocer los eigenvectores de la matriz Jacobiana [Donat & Marquina (1996)]. El reconstructor *MC* es parecido al reconstructor *minmod* la diferencia entre ambos es que *MC* define un valor extra intermedio [Van

Leer (1977)].

3.3. Recuperación de variables primitivas

Como se mencionó en secciones anteriores, las variables de evolución en las ecuaciones de la hidrodinámica relativista en forma conservativa son D, S_i, τ . Por otro lado, para utilizar el método de alta resolución por captura de choques es necesario conocer el valor de las variables primitivas en cada paso de tiempo para resolver el problema de Riemann en cada intercelda y poder calcular los flujos necesarios para conocer el valor de las variables conservativas a tiempos posteriores. Sin embargo en las ecuaciones de la hidrodinámica relativista no es fácil lograrlo, debido a que, cuando se intenta escribir las variables primitivas en términos de las conservativas se llega a ecuaciones algebraicas trascendentes, cuya solución analítica no existe, por lo que surge la necesidad de implementar métodos numéricos para solucionarlas. El método que comúnmente se utiliza para recuperar las variables primitivas a cada paso de tiempo es el método Newton-Raphson. Para ilustrar este problema, en la definición de las variables primitivas de las ecuaciones de la hidrodinámica relativista se tiene:

$$\begin{aligned} D &= \sqrt{\gamma} \rho_0 W, \\ J_i &= \sqrt{\gamma} \rho_0 h W^2 v_i, \\ \tau &= \sqrt{\gamma} (\rho_0 h W^2 - p - \rho_0 W). \end{aligned} \tag{3.13}$$

De la ecuación para τ :

$$\tau = \sqrt{\gamma} \rho_0 W^2 \epsilon + \sqrt{\gamma} \rho_0 W (W - 1) + \sqrt{\gamma} P (W^2 - 1), \tag{3.14}$$

despejando ρ_0 y v_i de las ecuaciones para D y J_i se obtiene:

$$\rho_0 = \frac{D}{\sqrt{\gamma} W}, \quad v_i = \frac{J_i}{\sqrt{\gamma} \rho_0 h W^2}, \tag{3.15}$$

sustituyendo en la ecuación para τ se llega a la ecuación trascendental para la presión p :

$$p = \tau + p\sqrt{\gamma} + D - \frac{D}{\sqrt{\gamma}} - \frac{W^2 p}{(\Gamma - 1)} + \frac{D(W - 1)}{\sqrt{\gamma}} + p(W^2 - 1), \quad (3.16)$$

donde, se ha utilizado la ecuación de estado $p = (\Gamma - 1)\rho\epsilon$. Esta ecuación trascendental para la presión es la que se debe resolver numéricamente en cada paso de tiempo usando el método de Newton-Raphson.

3.4. Integración en el tiempo utilizando el método de líneas

La evolución numérica de un sistema de ecuaciones, consiste en el cálculo de una función solución al tiempo t^{n+1} definida en un punto $x_{i,j,k}$ que denotaremos como $f_{i,j,k}^{n+1}$, a partir de datos en los niveles de tiempo previos $f_{i,j,k}^n$. Las ecuaciones BSSN y de la hidrodinámica relativista son de la forma:

$$\partial_t \vec{u} = L[\vec{u}],$$

donde $\vec{u}$ es un vector de estado que se desea evolucionar, y $L[\vec{u}]$ es un operador diferencial sobre $\vec{u}$. Esta ecuación está escrita de tal manera que permite conocer valores de $\vec{u}$ en términos de la información en el pasado. El método de líneas (MoL) consiste en construir una versión semidiscreta de la ecuación como sigue:

$$\partial_t \vec{u} = L[\vec{u}]_{i,j,k}^n, \quad (3.17)$$

donde n etiqueta el tiempo y i, j, k el espacio. Por ejemplo, la versión semidiscreta de la ecuación en una dimensión espacial $\partial_t f = \partial_x f$ usando la aproximación de las derivadas espaciales en diferencias finitas a segundo orden es:

$$\partial_t f = \frac{f_{i+1,j,k}^n - f_{i-1,j,k}^n}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2). \quad (3.18)$$

Esta ecuación es válida para todo i, j, k en el dominio numérico. Esta expresión permite ver que para cada valor de i, j, k se tiene una ecuación ordinaria en t para f , o sea, ahora tenemos $N_x * N_y * N_z$ ecuaciones ordinarias. Para integrar en el tiempo este sistema de EDPs, se puede utilizar integradores numéricos convencionales como son

los integradores Runge-Kutta [Kreiss & Scherer (1992)] o Crank-Nicholson iterativo [Teukolsky 2000] . Para los casos estudiados durante el trabajo doctoral se usó un integrador Runge-Kutta de cuarto orden [Kreiss & Scherer (1992)] el cual consiste calcular iterativamente el valor de $\vec{u}$ (3.17) de un tiempo n a otro $n + 1$ recalculando $L[\vec{u}]_{i,j,k}^n$ en 4 pasos de tiempo intermedios entre n y $n + 1$:

$$u_{i,j,k}^{n+1} = u_{i,j,k}^n + \frac{\Delta t}{6}(k_1 + k_2 + k_3 + k_4), \quad (3.19)$$

donde k_1, k_2, k_3, k_4 tienen el valor:

$$\begin{aligned} k_1 &= L[u_{i,j,k}^n], \\ k_2 &= L\left[u_{i,j,k}^n + \frac{k_1 \Delta t}{2}\right] \\ k_3 &= L\left[u_{i,j,k}^n + \frac{k_2 \Delta t}{2}\right], \\ k_4 &= L\left[u_{i,j,k}^n + k_3 \Delta t\right]. \end{aligned}$$

Este integrador da como resultado una aproximación de la solución del sistema 3.17 a cuarto orden de precisión si la discretización del lado derecho de la ecuación se hace utilizando un método de aproximación del mismo orden.

3.5. Cactus y Einstein Toolkit

A lo largo del capítulo hemos introducido los métodos numéricos necesarios para resolver las ecuaciones de Einstein en el vacío y las ecuaciones de la hidrodinámica relativista. En esta sección, introducimos la infraestructura numérica que se utilizó para realizar los estudios presentados en este trabajo.

3.5.1. Código Cactus

El código de **Cactus** es una implementación numérica de acceso público que ofrece un conjunto común de subcódigos, que sirve para organizar y conjuntar implementaciones numéricas de distintos tipos como pueden ser problemas de datos iniciales,

evolución de ecuaciones diferenciales o herramientas de análisis como el cálculo de errores [Cactus Code (1998)]. La estructura del código **Cactus** consiste en un conjunto de módulos llamados *Thorns* o espinas, cuyo orden de ejecución e interacción entre ellos son administrados por un código principal llamado *flesh*. Las espinas deben especificar ante el *flesh* no sólo el orden en que se llamarán o ejecutarán las rutinas, sino también, una descripción de las funciones y/o variables provistas; las funciones o variables que otras espinas puedan utilizar y el conjunto de parámetros que requiere para ejecutarse. Con esto, cada una de las espinas tendrá acceso a la información sobre variables de otras espinas; el dominio numérico y su discretización; memoria, etc. Una de las ventajas de una estructura como la de **Cactus**, es que permite al usuario agregar nuevas espinas; conjuntarlas con otras ya existentes y/o utilizar alguna otra herramienta que la infraestructura ofrece. La infraestructura predeterminada en **Cactus** disponible para su uso es el manejo óptimo de memoria, paralelización via MPI, interfaz de guardado de datos, métodos de evolución, refinamiento de mallas.

3.5.2. Einstein toolkit (ETK)

El proyecto Einstein toolkit está enfocado al desarrollo de herramientas computacionales para simular fenómenos en astrofísica relativista y relatividad numérica [Löffler et al. (2012)]. A continuación daremos una breve descripción de las espinas del ETK que se utilizaron y que como se verá más adelante se utilizaron en el desarrollo de los problemas presentados en esta tesis.

3.5.2.1. Evolución del espacio-tiempo

Para evolucionar el espacio-tiempo en el vacío, el Einstein toolkit cuenta con un código llamado **McLachlan** el cual resuelve las ecuaciones de Einstein en el vacío en coordenadas cartesianas en 3 dimensiones. Aprovechando la topología del *flesh* de **Cactus** es posible acoplarse con otros códigos que evolucionan la materia y juntos modelar sistemas que contengan fuentes de materia. Algunas de las características que es importante mencionar sobre la espina **McLachlan** son las siguientes:

- La evolución del espacio-tiempo está determinada mediante la implementación y evolución de las ecuaciones BSSN usando el método de líneas para la inte-

gración temporal y la discretización en diferencias finitas de la derivadas en las direcciones espaciales con aproximaciones a octavo orden.

- Para regularizar las variables BSSN de evolución en el origen, la evolución de hoyos negros, utiliza el método de *moving punctures*.
- Evoluciona la norma *Gamma driver* y $1 + \log$.

3.5.2.2. Evolución de la materia

Para resolver las ecuaciones de la hidrodinámica relativista en 3D, el Einstein toolkit provee la espina llamada **GRHydro** la cual, es la versión pública del código **Whisky** [Löffler et al. (2012)]. **GRHydro** resuelve las ecuaciones de la hidrodinámica relativista en 3D en espacio-tiempos curvos utilizando métodos de alta resolución con captura de choques. Algunas de las características principales de la espina **GRHydro** son:

- Utiliza el método de líneas para la evolución temporal de las variables de evolución.
- Posee distintos resolvedores de Riemann aproximados como: HLLE, Marquina y Roe.
- Para la reconstrucción de variables en la interceldas, se cuenta con los reconstrucutores: TVD, Minmod, PPM y ENO.
- Para la reconstrucción de variables primitivas se cuenta con un resolvedor de raíces Newton-Raphson.
- Posee el driver **carpet** que permite utilizar refinamiento de mallas [Schenetter et al. (2006)].

3.5.2.3. Herramientas de análisis

El Einstein toolkit también provee las siguientes herramientas de análisis:

- Extracción de ondas gravitacionales.
- Cálculo de horizonte aparente.

- Cálculo del flujo de densidad de masa a través de una superficie esférica.
- Medición de la violación de las constricciones.

3.5.2.4. Condiciones de frontera

Las condiciones de frontera en el dominio numérico en coordenadas cartesianas del ETK se encuentran implementadas de tal manera que la condición se aplica a todas las caras del dominio cúbico, esto quiere decir que las condiciones de frontera no pueden ser elegidas de manera independiente para cada cara. Cuando se estudian sistemas numéricos, la elección libre de las condiciones de frontera es conveniente. En el estudio de acreción en hoyos negros en 3D que se presenta en este trabajo, se requiere definir condiciones de frontera en cada una de las caras del dominio numérico de manera libre, por ello, se implementó una espina de condiciones de frontera que permite elegir de manera independiente la condición de frontera deseada para cada cara de dominio cúbico.

La espina que se dedica a definir las condiciones de frontera en el ETK se llama **Boundary**, de entre todas, las condiciones de frontera que proporciona **Boundary**, las de nuestro interés son dos:

- *Condición de frontera flat*. Comúnmente llamada de flujo saliente, consiste en definir el valor en la frontera como el valor en el punto anterior, esto es, si $u(N_x, j, k)$ es el valor de la función en la frontera $x_{N_x, j, k}$ con vector normal $\hat{x}$, entonces *flat* define las condiciones $u(N_x, j, k) = u(N_x - 1, j, k)$.
- *Condición de frontera none*. Comúnmente llamada de flujo entrante, consiste en reiniciar el valor de la función en la frontera al valor inicial, esto es, si $u(N_x^0, j, k)$ es el valor de la función al tiempo cero en la frontera x positiva, entonces *none* definirá el valor en la frontera como $u(N_x, j, k) = u(N_x^0, j, k)$.

Como ya se mencionó **Boundary** no permite definir condiciones de frontera independientes en cada cara, esto quiere decir que no se pueden mezclar libremente las condiciones *flat* o *none* a través de las diferentes caras del dominio cúbico, para solucionar este problema, se implementó la espina **IFMBoundaries**.

La espina **IFMBoundaries**, por un lado, provee las mismas condiciones de frontera que **Boundary**, pero agrega un nuevo tipo de condición de frontera nombrada *free*. La

condición de frontera *free* combina las condiciones *flat* y *none* y las asigna según la cara que el usuario decida, esto quiere decir que si se tiene un problema en que se necesitan condiciones de flujo entrante en una cara del dominio y de flujo saliente en las demás bastará con elegir la condición necesaria mediante el archivo de parámetros de la simulación que se desea ejecutar. La espina **IFMBoundaries** está escrita de tal forma que es compatible con las espinas de evolución ya existentes en el **ETK**, y es extensible a nuevas implementaciones. En el Apéndice A, se muestran algunas pruebas a las que se sometió la espina **IFMBoundaries** para conocer si el funcionamiento es correcto. Además la espina **IFMBoundaries** ha sido probada en códigos que se utilizan en estudios de Física solar e hidrodinámica relativista con términos radiativos [González-Avilés et al. (2017), Rivera-Paleo & Guzmán (2017)]. La versión actual de la espina **IFMBoundaries**, permite agregar nuevas condiciones de frontera fácilmente.

Capítulo 4

Hoyos negros en el vacío.

Las ondas gravitacionales predichas por la teoría de la relatividad general de Einstein son perturbaciones del espacio-tiempo que se propagan a la velocidad de la luz, dichas perturbaciones han sido medidas de manera indirecta desde hace unos años, por ejemplo en las observaciones del pulsar PSR 1913+16, cuya variación en el periodo orbital puede ser explicada mediante la suposición de que el sistema pierde energía en forma de radiación gravitacional. Grandes colaboraciones científicas han surgido con el propósito de detectar ondas gravitacionales de manera directa, el diseño de experimentos como LIGO y VIRGO [Abbot et al. (2009), Acernese et al. (2008)] han sido el resultado de los esfuerzos encaminados a la detección de ondas gravitacionales desde hace más de 20 años. Los esfuerzos rindieron fruto el 14 de septiembre de 2015 cuando el experimento LIGO detectó por primera vez una onda gravitacional originada hace un billón de años. La señal medida provino del choque de hoyos negros [Abbot et al. (2016a)]. Con esta medición no solo se comprobó que la teoría de Einstein es correcta sino que ha marcado el comienzo de una nueva era en la Astronomía. En este capítulo abordaremos el estudio de la solución de las ecuaciones de Einstein en el vacío, dicho estudio fue integrado al proyecto de doctorado, primero, como un ejercicio de aprendizaje y familiarización con el ETK y segundo, con la finalidad de construir un catálogo de ondas gravitacionales numéricas, el cual fue empleado para el estudio del problema de estimación de parámetros del choque de hoyos negros usando redes neuronales.

4.1. Ondas gravitacionales

La teoría de Einstein predice que las perturbaciones del espacio-tiempo se propagan en forma de ondas. En esta sección se presentan los fundamentos teóricos del concepto de onda gravitacional mediante la linealización de las ecuaciones de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (4.1)$$

Primero, se considera la métrica:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (4.2)$$

donde, $\eta_{\mu\nu}$ es la métrica plana de Minkowski y $h_{\mu\nu}$ una perturbación tal que $|h_{\mu\nu}| \leq 1$. Calculando el tensor de Riemann:

$$R^\alpha_{\beta\mu\nu} = (\partial_\mu \Gamma^\alpha_{\beta\nu} - \partial_\nu \Gamma^\alpha_{\beta\mu} + \Gamma^\alpha_{\rho\mu} \Gamma^\rho_{\beta\nu} - \Gamma^\alpha_{\rho\nu} \Gamma^\rho_{\beta\mu}), \quad (4.3)$$

donde, $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}\eta^{\alpha\rho}(\partial_\beta h_{\gamma\rho} + \partial_\gamma h_{\beta\rho} - \partial_\rho h_{\beta\gamma})$ son los símbolos de Christoffel del espacio-tiempo descrito por (4.2). Conservando únicamente los términos lineales en $h_{\mu\nu}$ se llega a:

$$R^\alpha_{\beta\mu\nu} = (\partial_\mu \Gamma^\alpha_{\beta\nu} - \partial_\nu \Gamma^\alpha_{\beta\mu}). \quad (4.4)$$

El tensor de Ricci ($R^\alpha_{\beta\alpha\nu} = R_{\beta\nu}$), el escalar de Ricci ($R^\nu_\nu = R$) y el tensor de Einstein ($G_{\beta\nu} = R_{\beta\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\beta\nu}R$) son respectivamente:

$$R_{\beta\nu} = \frac{1}{2} \left(\partial_\alpha \partial_\mu h^\alpha_\nu + \partial_\rho \partial_\nu h^\rho_\beta - \partial^\alpha \partial_\alpha h_{\beta\nu} - \partial_\beta \partial_\nu h^\xi_\xi \right), \quad (4.5)$$

$$R = \partial^\alpha \partial^\beta h_{\alpha\beta} - \partial^\alpha \partial_\alpha h^\xi_\xi, \quad (4.6)$$

$$G_{\beta\nu} = \frac{1}{2} \left(\partial_\alpha \partial_\mu h^\alpha_\nu + \partial_\rho \partial_\nu h^\rho_\beta - \partial^\alpha \partial_\alpha h_{\beta\nu} - \partial_\beta \partial_\nu h^\xi_\xi \right) - \frac{1}{2} \eta_{\beta\nu} (\partial^\alpha \partial^\beta h_{\alpha\beta} - \partial^\alpha \partial_\alpha h^\xi_\xi).$$

Ahora, si se define $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h$, las ecuaciones de Einstein (4.1) en términos de $\bar{h}_{\mu\nu}$ toman la forma:

$$\partial^\alpha \partial_\beta \bar{h}_{\mu\nu} + \partial^\alpha \partial_{(\mu} \bar{h}_{\nu)\alpha} - \frac{1}{2} n_{\mu\nu} \partial^\alpha \partial^\beta \bar{h}_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (4.7)$$

Considerando la norma de Lorentz $\partial_\nu \bar{h}_{\alpha\nu} = 0$ se llega a la versión lineal de las ecuaciones de Einstein:

$$\partial^\alpha \partial_\alpha \bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi T_{\mu\nu}, \quad (4.8)$$

que en el vacío son:

$$\partial^\alpha \partial_\alpha \bar{h}_{\mu\nu} = 0. \quad (4.9)$$

La última ecuación muestra que una perturbación h al espacio-tiempo se propaga en forma de onda. Una solución simple es:

$$\bar{h}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} \exp(ik_\alpha x^\alpha), \quad (4.10)$$

que representa una onda plana de amplitud $A_{\mu\nu}$ con dirección de propagación x^α y vector de onda k_α . Si se explota un poco más las propiedades de la norma de Lorentz podemos imponer sobre $\bar{h}_{\mu\nu}$ las condiciones:

$$\bar{h}_{\mu 0} = 0, \quad \bar{h}^\mu{}_\mu = 0, \quad \bar{h}_{\mu 0} = 0, \quad (4.11)$$

esto significa que, $\bar{h}_{\mu\nu}$ es puramente espacial, la traza es cero y de divergencia cero respectivamente.

Las condiciones (4.9) y (4.11) determinan 8 de las 10 componentes independientes de h , las dos restantes están relacionadas con dos polarizaciones de una onda gravitacional, la polarización *más* (h_+) y la polarización *cruz* ($h_\times$) [Alcubierre (2008), Baumgarte 2010]. Se puede mostrar que, una partícula libre que se encuentra en un espacio-tiempo descrito por esta métrica perturbada seguirá la ecuación de movimiento:

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = \frac{\eta^{ij}}{2} \frac{d^2 h_{ij}}{dt^2} x^k, \quad (4.12)$$

lo cual, nos dice que la perturbación h_{ij} determinará la dinámica de una partícula. En la Fig. 4.1 se muestra el efecto sobre un aro de partículas debido a las ondas gravitacionales para el caso en que la dirección de propagación de la onda es z . La

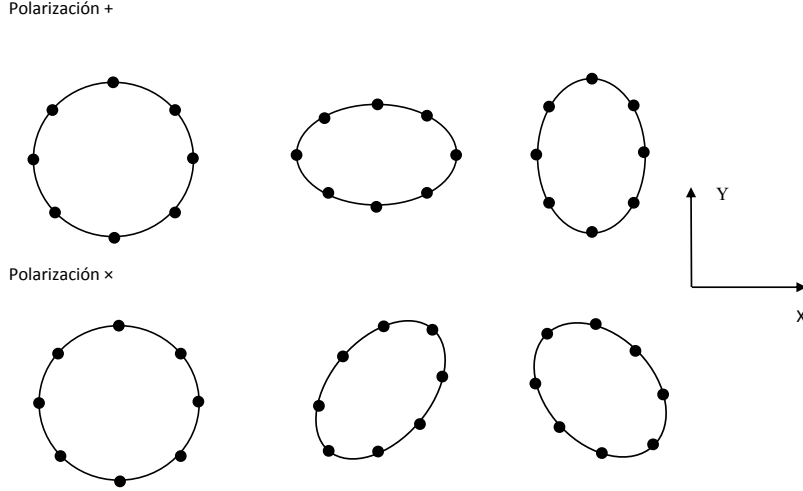


Figura 4.1. Deformación de un aro de partículas debido al paso de una onda gravitacional que se propaga en dirección z ; la contracción y alargamiento produce que el aro se deforme, la medida de dicha deformación se conoce como *strain*.

medida del efecto de contracción o alargamiento del aro de partículas, se conoce como *strain*.

Por otro lado, bajo las condiciones (4.11) se puede ver que las componentes del tensor de Riemann distintas de cero son:

$$R_{i0j0} = -\frac{1}{2} \frac{dt^2 h_{ij}}{dt^2}, \quad (4.13)$$

la ecuación anterior nos dice que para calcular las segunda derivada del tiempo de las polarizaciones h_+ y $h_\times$ basta con medir las componentes del tensor de Riemann. Comúnmente, se utiliza el cuarto escalar de Weyl (Ψ^4) que es la proyección sobre las componentes de una tetra da nula del tensor de Riemann ($\Psi^4 = R_{\alpha\beta\gamma\delta} n^\alpha \bar{m}^\beta n^\gamma \bar{m}^\delta$) cuya relación con el *strain* es $\Psi^4 = h_+ - i h_\times$ [Alcubierre (2008), Baumgarte 2010]. Numéricamente, Ψ^4 se descompone en armónicos esféricos y se extrae en superficies esféricas definidas en el dominio numérico, sin embargo, se debe tener en cuenta que estas componentes deben medirse lo más lejos de la fuente, esto, para que la aproximación lineal sea válida.

4.2. Sistemas binarios de hoyos negros (BBH)

El proceso de evolución de un sistema binario de hoyos negros puede ser descrito mediante las siguientes etapas:

1. *Inspiral*. En esta etapa los hoyos negros se encuentran orbitando, formando trayectorias circulares, órbitas que precesan u órbitas con un valor alto de excentricidad. En esta fase, a medida que el sistema evoluciona, pierde energía en forma de radiación gravitacional. Por conservación de energía, los hoyos negros se aproximan y la frecuencia orbital aumenta hasta un punto límite antes del *merger*.
2. *Merger*. Esta etapa ocurre cuando los hoyos negros chocan. En este instante marca el punto de mayor emisión de radiación gravitacional considerada como uno de los eventos más energéticos en el Universo.
3. *Ringdown*. Esta etapa comienza justo después del choque, cuando el hoyo negro resultante aún se encuentra en proceso de estabilizarse. Durante este proceso de estabilización aún se emite radiación gravitacional de menor intensidad.

La evolución numérica de un BBH representó por muchos años un gran desafío para la comunidad científica en relatividad numérica, este proceso puede ser modelado utilizando teoría Post-Newtoniana [Marronetti et al. (2008), Marronetti et al. (2007), Brüggmann et al. (2008)], sin embargo, cuando los efectos del campo gravitacional comienzan a ser importantes, es necesaria la solución de las ecuaciones de Einstein. Para simular numéricamente un BBH se deben tomar en cuenta los siguientes pasos:

- **Datos iniciales.** El primer paso para simular el choque de dos hoyos negros y generar ondas gravitacionales numéricamente consiste en elegir de manera adecuada las condiciones iniciales. En el Cap. 3 donde se dedujeron las ecuaciones de Einstein, se encontraron ecuaciones de constricción (2.27), esto quiere decir que los datos iniciales no se pueden escoger de manera libre, sino que, inicialmente y durante la evolución deben satisfacer estas ecuaciones. En el caso de un sistema binario de hoyos negros, existen distintos métodos para construir datos iniciales [Baumgarte 2010, Alcubierre (2008)]. Sin embargo, en este trabajo, hablaremos de manera general del método de generación de datos iniciales que

se encuentra implementado en el ETK, dicha implementación está programada en la espina `TwoPunctures`. `TwoPunctures` maneja el método de construcción de datos iniciales para un hoyo negro llamado *puncture* introducido por Brandt and Brügmann en [Brandt & Brügman (1997)], dicha propuesta se basa en la solución de la constricción Hamiltoniana presentada por Bowen y York en [Bowen (1979), Bowen & York (1980)], la cual se construye a partir de suponer una transformación conforme de la forma:

$$\gamma_{ij} = \psi^4 \bar{\gamma}_{ij}, \quad K_{ij} = \psi^4 \bar{A}_{ij}, \quad (4.14)$$

donde, $\bar{\gamma}_{ij}$ es la métrica conforme y $\bar{A}_{ij}$ la parte libre de traza de la curvatura extrínseca conforme. Con estas suposiciones las ecuaciones de constricción toman la forma:

$$\Delta\psi + \frac{1}{8} \bar{A}^{ij} \bar{A}_{ij} \psi^{-7} = 0, \quad (4.15)$$

$$D_j \bar{A}^{ij} = 0, \quad (4.16)$$

y conforma un sistema elíptico. La constricción de momento tiene la solución analítica:

$$\bar{A}_{ij} = \frac{3}{2r^2} [n_i P_j + n_j P_i + n_k P^k (n_i n_j - \delta_{ij})] \quad (4.17)$$

$$- \frac{3}{r^3} (\epsilon_{ilk} n_j + \epsilon_{jlk} n^l S^k), \quad (4.18)$$

donde, P^i , S^i son el momento lineal y angular del hoyo negro respectivamente. En el método propuesto por Brandt and Brügman, la solución a la constricción hamiltoniana, se construye partiendo de suponer que el factor conforme es de la forma:

$$\psi = \frac{1}{\alpha}, \quad \frac{1}{\alpha} = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2|\vec{r} - \vec{r}_i|} + u. \quad (4.19)$$

con esta definición la restricción Hamiltoniana se transforma en:

$$\Delta u + \beta(1 + \alpha u)^{-7} = 0, \quad \beta = \frac{1}{8}\alpha^7 \bar{A}_{ij} \bar{A}^{ij}, \quad (4.20)$$

donde ha quedado una ecuación para u (nombrada *puntura*), que resulta ser regular en la singularidad. Este método es comúnmente utilizado en los códigos de relatividad numérica debido a que implementarla es relativamente simple y sencillo.

- **Evolución.** Después de fijar las condiciones iniciales se deben resolver el sistema BSSN; la espina `Mclachlan` en el ETK es la que se encarga de dicha tarea, discretiza el sistema de ecuaciones BSSN y las resuelve en el tiempo con el método de líneas. Respecto a la evolución de la norma `Mclachlan`, utiliza el método *punturas en movimiento* propuesto por [Campanelli et al. (2006), Baker et al. (2006)], que consiste en hacer un cambio de la variable $\phi = \ln \psi$ la cual, es singular en la *puntura* por $\chi = \psi^{-4}$ la cual es cero en la *puntura*, el cambio en las ecuaciones de evolución (2.46) inducido por este cambio de variable es mínimo. Las funciones de norma se evolucionan de acuerdo a las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \partial_t \alpha &= -2\alpha K + \beta^i \partial_i \alpha \\ \partial_t \beta^i &= B^i, \quad \partial_t B^i = \frac{3}{4} \partial_t \tilde{\Gamma}^i - \eta B^i, \end{aligned}$$

que, en la práctica son las que comúnmente se utilizan en la evolución de sistemas binarios de hoyos negros, debido a que permite evoluciones más largas y estables [Campanelli et al. (2006), Baker et al. (2006)].

- **Diagnóstico.** La extracción numérica de ondas gravitacionales se realiza mediante el cálculo de los modos Ψ_{lm}^4 de la expansión en armónicos esféricos del escalar de Weyl. En el ETK la espina `WeylSca14` calcula Ψ^4 y la espina `Multipole` se encarga de descomponer Ψ^4 en armónicos esféricos.

Ejemplos. A continuación se presentan algunos ejemplos de simulaciones numéricas de un sistema binario de hoyos negros que se realizaron como ejercicio en el ETK. En la Fig. 4.2 se muestra la componente real del cuarto escalar de Weyl Ψ^4 en diferentes

instantes de la evolución de un BBH. Para este caso, los hoyos negros inicialmente tienen la misma masa ($m_{1,2} \sim 0,45$), momento lineal $\vec{P}_1 = P_1 \hat{y}$ y $\vec{P}_2 = -P_1 \hat{y}$ antiparalelo con la misma magnitud ($P_i P^i \sim 0,33$) y sin rotación; la distancia de separación entre los hoyos negros es $3M$ ($M = m_1 + m_2$) con $m_{1,2}$ es la masa irreducible definida como $m_i = (A_i/16\pi)^{1/2}$ con A_i el área del horizonte aparente del hoyo negro i . En esta configuración chocan aproximadamente después de media órbita. En la Fig. 4.3 se muestra el modo Ψ_{22}^4 ($l = 2, m = 2$) medido en un detector en $r = 30M$. Otro ejemplo se muestra en la Fig. 4.4, donde se puede apreciar la trayectoria de los centroides de los hoyos negros en el que describen órbitas cuasi-circulares que precesan. En este caso las masas iniciales no son iguales, el cociente entre ellas es de $m_1/m_2 = 1,5$ los momentos de cada hoyo negro son antiparalelo con magnitud aproximada de ($P_i P^i \sim 0,12$) y sin rotación; la distancia de separación inicial es de $6M$.

4.2.1. Catálogo

En todas las simulaciones de evolución de sistemas binarios de hoyos negro realizadas para la construcción del catálogo de ondas gravitacionales presentado en esta tesis, el dominio numérico se fijó en $[120M, 120M]^3$ en simetría bitante. La separación inicial entre los hoyos negros se fijó con la distancia correspondiente al caso conocido como primera órbita cuasi-circular ($qc0$), esto, considerando que el tiempo que se debe esperar para que los hoyos negros choquen es relativamente corto [Cook (2000)]. El siguiente parámetro que se tomó en cuenta fue el cociente de masas de los hoyos negros (q), que en el catálogo varía entre 1-5. En todas las configuraciones la masa ADM del espacio-tiempo se fijó con el valor $M_{ADM} = 1$. La extracción del modo $l = 2, m = 2$ del cuarto escalar de Weyl (Ψ_{22}^4) se realizó en detectores situados en el dominio a distintos radios. Los detectores fueron situados una distancia entre $30M$ y $90M$ con M la masa del hoyo negro. Cabe mencionar que para los fines de este catálogo no fue necesario extrapolarlas a infinito. Después del cálculo de Ψ_{22}^4 se convirtió a *strain* (h_+)₂₂, utilizando el método introducido en [Reisswig & Pollney (2011)].

El catálogo de ondas gravitacionales generadas numéricamente consiste en 31 formas de onda provenientes de la evolución de sistema binarios de hoyos negros sin espín con cociente de masas iniciales $q = m_1/m_2$ en un rango de 1-5. Los parámetros

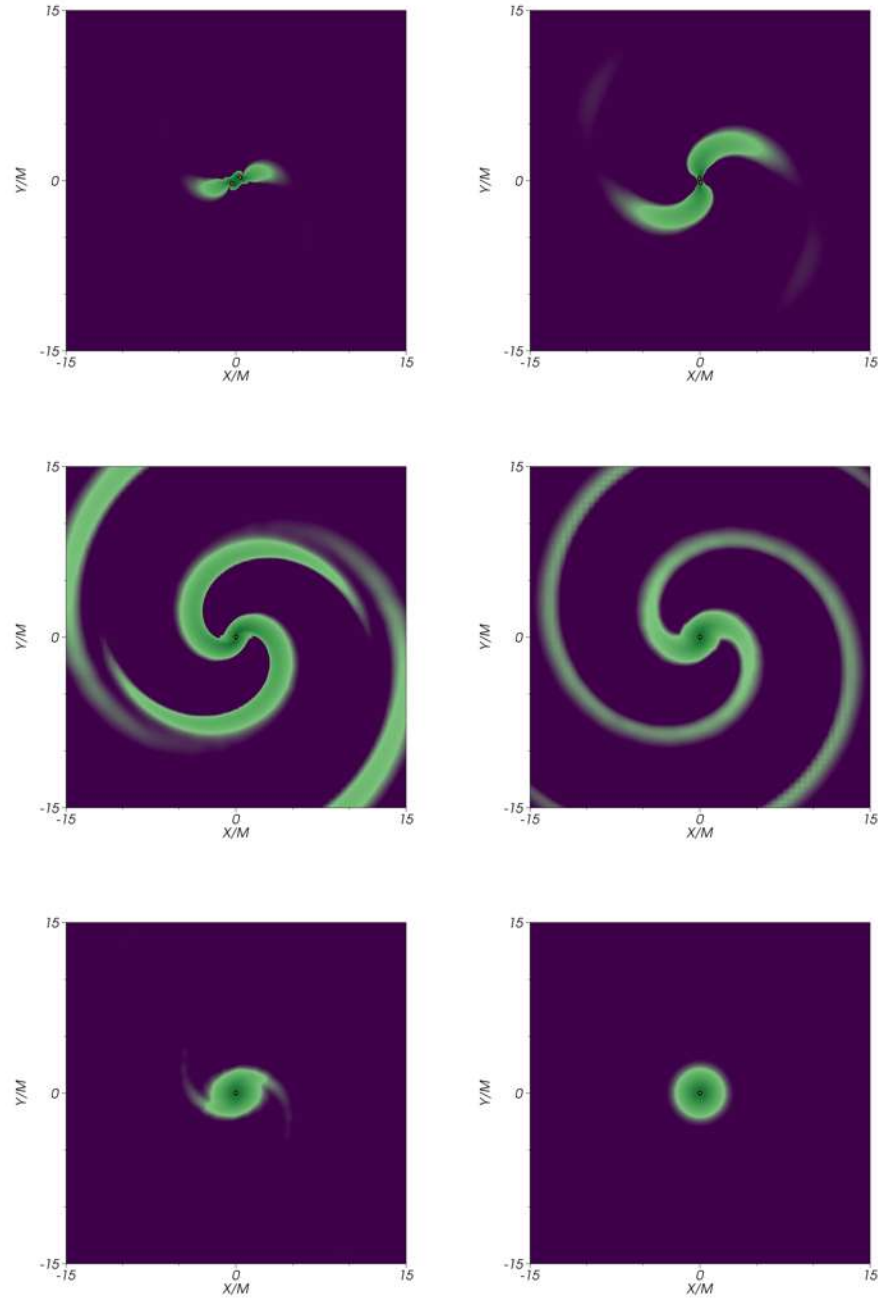


Figura 4.2. Se muestra instantes de tiempo correspondiente a la evolución de un sistema binario de hoyos negros, se pinta en color verde la parte real de Ψ^4 que representa la radiación gravitacional emitida por el sistema vista desde un plano $Z = cte$.

iniciales se muestran en la Tabla 4.1 y en la Fig. 4.5 se muestra la parte real del *strain*

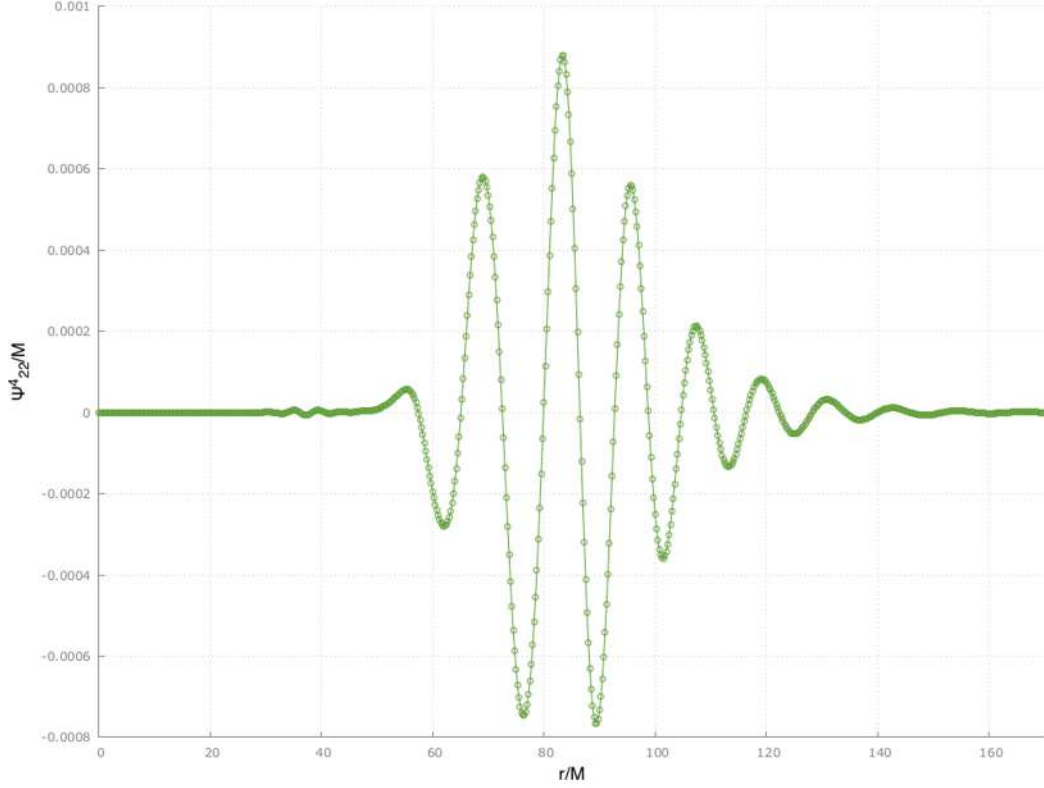


Figura 4.3. Se muestra el modo $l = 2$, $m = 2$ de Ψ^4 extraído al radio $r = 30M$, esta cantidad es la que comúnmente se mide en un código numérico. Para comparar con una señal real debe ser transformada a *strain*.

$(h_+)_{22}$ de algunos casos con diferentes cocientes de masa.

4.2.2. Aplicaciones: problema inverso.

Una de las aplicaciones a nuestro catálogo de ondas gravitacionales (GWs) se encuentra en el trabajo titulado *Estimaciones de parámetros en colisiones binarias de hoyos negros utilizando redes neuronales* [Carrillo et al. (2016)] donde se presenta un algoritmo basado en redes neuronales artificiales (RNAs) [Russell & Norving (1995)], que estima el cociente de masas en el choque de hoyos negros a partir del *strain* de una GW.

En este análisis las RNAs implementadas son entrenadas con una muestra representativa de formas de onda y posteriormente se mide su desempeño con otro conjunto de tal manera que se determine su capacidad en resolver el problema inverso, en este caso en particular estimando la razón de masas.

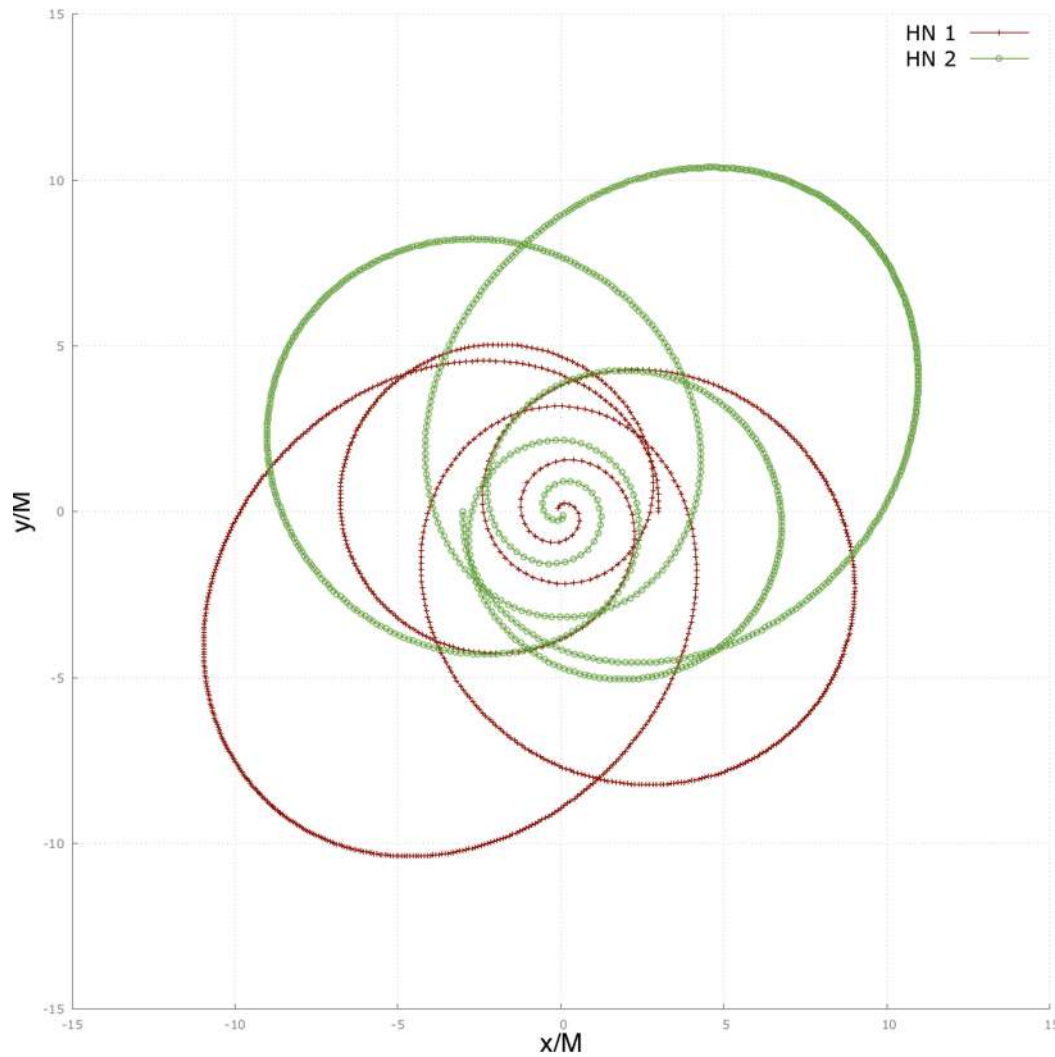


Figura 4.4. Se muestra la evolución de un BBH en la que los hoyos negros describen órbitas cuasi-circulares que precesan.

Dado que no es el objetivo en este trabajo de ahondar sobre la estructura de las RNAs y su funcionamiento, el procedimiento seguido en dicho artículo se sintetiza de la siguiente forma:

- Se seleccionó una muestra representativa de formas de onda del catálogo para el entrenamiento y validación con valores $q = 1.0, 1.10, 1.25, 1.30, 1.5, 1.70, 1.75, 2.0, 2.25, 2.5$ y $q = 2.75, 3.0, 3.25$ respectivamente. De esta manera y comparando la Tabla 4.1 vemos que se encuentra en el rango inferior del parámetro q del catálogo. Se menciona que la intención de esta selección tan escasa es para

q	m_1	m_2	Separación	$\vec{p}_1$	$\vec{p}_2$
1.0	0.453	0.453	3.0	(0.3331,0,0)	(-0.3331,0,0)
1.1	0.431	0.4741	3.0	(0.3331,0,0)	(-0.3331,0,0)
1.2	0.412	0.4944	3.0	(0.3331,0,0)	(-0.3331,0,0)
1.25	0.40	0.5	3.0	(0.3331,0,0)	(-0.3331,0,0)
1.30	0.39	0.507	3.0	(0.3331,0,0)	(-0.3331,0,0)
1.40	0.373	0.5222	3.0	(0.3331,0,0)	(-0.3331,0,0)
1.50	0.360	0.54	3.0	(0.3331,0,0)	(-0.3331,0,0)
1.60	0.345	0.552	3.0	(0.3331,0,0)	(-0.3331,0,0)
1.70	0.332	0.5644	3.0	(0.3331,0,0)	(-0.3331,0,0)
1.75	0.325	0.56875	3.0	(0.3331,0,0)	(-0.3331,0,0)
1.80	0.320	0.576	3.0	(0.3331,0,0)	(-0.3331,0,0)
1.90	0.308	0.5852	3.0	(0.3331,0,0)	(-0.3331,0,0)
2.00	0.2975	0.595	3.0	(0.3331,0,0)	(-0.3331,0,0)
2.10	0.286	0.6006	3.0	(0.3331,0,0)	(-0.3331,0,0)
2.20	0.277	0.6094	3.0	(0.3331,0,0)	(-0.3331,0,0)
2.25	0.272	0.612	3.0	(0.3331,0,0)	(-0.3331,0,0)
2.30	0.268	0.6164	3.0	(0.3331,0,0)	(-0.3331,0,0)
2.40	0.259	0.6216	3.0	(0.3331,0,0)	(-0.3331,0,0)
2.50	0.250	0.625	3.0	(0.3331,0,0)	(-0.3331,0,0)
2.60	0.244	0.6344	3.0	(0.3331,0,0)	(-0.3331,0,0)
2.70	0.236	0.6372	3.0	(0.3331,0,0)	(-0.3331,0,0)
2.75	0.232	0.638	3.0	(0.3331,0,0)	(-0.3331,0,0)
2.80	0.230	0.644	3.0	(0.3331,0,0)	(-0.3331,0,0)
2.90	0.2235	0.64815	3.0	(0.3331,0,0)	(-0.3331,0,0)
3.00	0.2175	0.6525	3.0	(0.3331,0,0)	(-0.3331,0,0)
3.25	0.203	0.65975	3.0	(0.3331,0,0)	(-0.3331,0,0)
3.50	0.191	0.6685	3.0	(0.3331,0,0)	(-0.3331,0,0)
3.75	0.180	0.675	3.0	(0.3331,0,0)	(-0.3331,0,0)
4.00	0.170	0.68	3.0	(0.3331,0,0)	(-0.3331,0,0)
4.50	0.165	0.7425	3.0	(0.3331,0,0)	(-0.3331,0,0)
5.00	0.139	0.695	3.0	(0.3331,0,0)	(-0.3331,0,0)

Tabla 4.1. Conjunto de parámetros iniciales de las formas de ondas que conforman el catálogo de ondas gravitacionales.

poder medir el desempeño de las RNAs tanto en una región de interpolación como extrapolación en el resto de las formas de onda que conforman el conjunto de predicción.

- Cada una de las formas de onda, tanto en la fase de entrenamiento como de predicción, fue incluida en el análisis tanto en la versión sin ruido como tam-

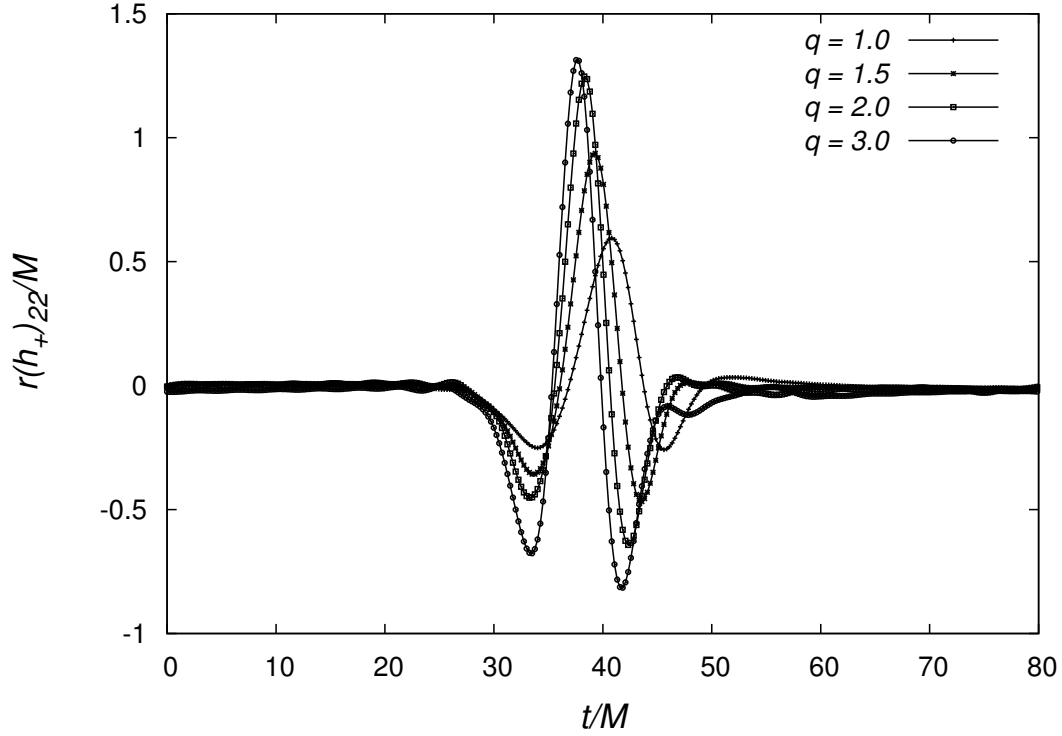


Figura 4.5. Se presenta la parte real del modo $l = 2, m = 2$ del strain h_+ para cuatro casos representativos. Estas señales se reescalan apropiadamente con el radio de extracción (r) y la masa ADM (M) del sistema

bién incluyendo distintos niveles de ruido Gaussiano, descrito por una razón de señal/ruido (SNR, por sus siglas en inglés) desde 0.5 hasta 25. Por lo que el análisis comparaba la precisión de predicción de las RNAs para cada uno de estos escenarios.

- Dado que en el catálogo las fases más importantes son tanto el *merger* como el *ringdown*, en ese trabajo se consideraron únicamente los 130 puntos de la forma de onda posteriores al valor máximo de la serie de tiempo, es decir, desde el momento en que ocurre el *merger*.
- Bajo las consideraciones anteriores y a grandes rasgos, se puede decir que las RNAs que se implementaron se conformaron de tres capas: 1) una capa de entrada en la cual se introduce los 130 puntos seleccionados de la forma de onda, 2) una capa oculta con distintos números de elementos desde 10 hasta 100 con una función de activación del tipo tangente hiperbólica, de forma que

se exploraron distintas arquitecturas y 3) una capa de salida que mostraba finalmente la estimación del parámetro de razón de masas q .

- La fase de aprendizaje de las RNAs fue realizada bajo un método de gradiente descendente conocido como *backpropagation* en el cual se busca minimizar una función de costo determinada por la diferencia de la predicción dada por las RNAs y el valor real de q en el conjunto de entrenamiento seleccionado, en este caso el mencionado en el primer punto. El ajuste de los valores de parámetros que determinan a la RNA se realiza de manera iterativa hasta que el error en el conjunto de validación alcanza un mínimo (técnica conocida como validación cruzada). Este procedimiento se siguió para cada uno de los casos mencionado en señales con y sin ruido Gaussiano.
- Una vez realizado el entrenamiento de las RNAs, fue presentado cada uno de las formas de onda del conjunto de predicción, de tal manera que se hiciera un análisis de su precisión en los distintos escenarios de señales con/sin ruido y en la zona de interpolación y extrapolación.

La precisión del método de predicción obtenido con este método es preciso dentro del error de 3% para el régimen de interpolación. Para valores de q en el régimen de extrapolación el error no es tan bueno. Argumentamos que la necesidad de ampliar el conjuntos de entrenamiento es inevitable por lo que la ampliación del catálogo sería de gran ayuda.

Acreción supersónica de vientos en 3 dimensiones

La acreción de Bondi Hoyle-Littleton (BHL) o acreción de vientos es un proceso que ocurre cuando un objeto compacto se mueve respecto a una distribución constante de un gas [Bondi & Hoyle (1944)]. En un régimen Newtoniano este problema ha sido estudiado analítica y numéricamente por [Fryxell(1987), Matsuda et al. (1987), Shima et al. (1988), Sawada et al. (1989), Matsuda et al. (1992), Matsuda et al. (1991)] y en el relativista por [Petrich et al. (1988), Font et al. (1998), Dönmez et al.(2011), Cruz et al. (2012), Lora-Clavijo & Guzmán (2013)]. En el régimen relativista dicho proceso se ha asociado a fuentes de altas energías. Este proceso ha sido analizado en distintos tipos de objetos compactos que actúan como acretores. Sin embargo, durante el trabajo doctoral nos concentramos en tres casos particulares, el primero en el cual el objeto compacto es un hoyo negro en el cual el viento es puramente hidrodinámico, otro, involucra la evolución de las ecuaciones de la MHD relativistas y el tercero es el caso en que el acretor es una estrella de bosones.

5.1. Acreción de vientos en hoyos negros

En el caso de acreción de BHL en un hoyo negro rotante, los estudios más recientes consideran la acreción de un fluido con radiación restringida al caso 2D [Zannotti et al. (2011), Park & Ricotti (2013)], el caso magnetizado 2.5 D en [Penner (2011), Takahashi & Ohsuga(2014)] y el caso con gradientes de densidad y velocidad en

[Lora-Clavijo et al. (2015), Cruz-Osorio & Lora-Clavijo (2016)].

Uno de los aspectos importantes del proceso de acreción es cuando la velocidad relativa del fluido respecto al acretor es supersónica, pues una región de alta densidad en forma de cono que llamaremos de choque, se crea en la parte trasera del acretor. Cuando el objeto compacto se encuentra rotando, el fluido que constituye el cono de choque es arrastrado debido a la rotación del acretor, dicho efecto provocará eventualmente la distorsión del cono de choque lo cual podría generar un movimiento inestable de oscilación y podría destruirlo [Foglizzo et al. (2005)]. La estabilidad de la distribución de fluido es importante porque podría proporcionar un modelo para la aceleración abrupta de gas de alta densidad en regiones cerca de un objeto compacto, las cuales podrían ayudar a explicar las emisiones de corta y alta energía en fenómenos astrofísicos [Dönmez et al.(2011), Lora-Clavijo & Guzmán (2013)]. La estabilidad del cono de choque es descrita en términos de la estabilidad del flujo cerca del acretor. Particularmente la estabilidad de tipo FF que consiste en el cambio de signo del momento angular del cono de choque y que debido a esto eventualmente podría destruirse.

La inestabilidad involucra por un lado la naturaleza del acretor, esto es, un hoyo negro con un horizonte de eventos y una estrella de neutrones podrían mostrar un comportamiento diferente debido a la naturaleza de sus superficies. Por otro lado la estabilidad dependerá de las condiciones dinámicas del viento, por ejemplo, su velocidad o la velocidad del sonido asociada a la ecuación de estado del fluido. Para establecer un régimen de estabilidad del cono de choque, se han propuesto criterios empíricos independientes del tipo de acretor y enfocados más en la relación del tamaño del acretor respecto al radio de acreción de Bondi [Foglizzo et al. (2005)]. El análisis de dichos criterios requieren de la evolución numérica del viento, lo cual conlleva a cuestionarnos la naturaleza de la inestabilidad. Existe controversia acerca de si la inestabilidad es de carácter físico o es producto de los errores producidos por la implementación numérica, por ejemplo, en [Shima et al. (1988), Sawada et al. (1989), Matsuda et al. (1991), Foglizzo et al. (2005)] pueden encontrarse argumentos que muestran que la inestabilidad es de tipo Física, mientras que en [Cruz et al. (2012)] se muestra que la inestabilidad es debida a una implementación numérica inadecuada. Durante el trabajo doctoral nos enfocamos en la inestabilidad tipo FF del cono de choque para un flujo relativista que es acretado por un hoyo negro rotante,

consideramos que el flujo obedece la ecuación de estado de un gas ideal en el régimen supersónico. Este problema ha sido estudiado en 2D en [Font et al. (1998), Dönmez et al.(2011), Cruz et al. (2012)] en donde se puede encontrar el estudio relativista de la acreción de BHL de un viento no esférico supersónico con un tamaño de acretor r_{hor}/r_{acc} que va 0,10 a 0,26 en simetría s-lab, donde, r_{hor} es aproximadamente el radio del hoyo negro y r_{acc} es el radio de acreción de Bondi. En nuestro estudio, no suponemos ningún tipo de simetría, lo cual es relevante pues hasta donde se sabe es la primera vez que se realiza un estudio de este tipo en 3D. De acuerdo con [Foglizzo et al. (2005)], la inestabilidad se espera que ocurra cuando las propiedades del sistema involucren velocidades supersónicas con números de Mach $\mathcal{M} \sim 2,4$ y el tamaño de acretor es $r_{hor}/r_{acc} \lesssim 0,05$, sin embargo para confirmar dicha afirmación y descartar la inestabilidad en este régimen, exploramos un espacio de parámetros correspondiente a alta velocidad y tamaños de acretor suficientemente pequeños que caen en el régimen de inestabilidad, el cual, r_{hor}/r_{acc} va de 0,011 a 0,025. Exploramos la acreción en un hoyo negro con momento angular tan rápido como $a = 0,95$ en seis orientaciones representativas del flujo del viento respecto al eje de rotación del hoyo negro. En todos los casos analizados encontramos que no existe inestabilidad del tipo FF.

5.1.1. Implementación numérica

5.1.1.1. Ecuaciones y métodos numéricos

Se resolvió el sistema de ecuaciones de la hidrodinámica relativista (2.61) introducida en el Cap. 3 usando el ETK [Löffler et al. (2012), Einstein toolkit(2005)] introducido en el Cap. 4. Para los métodos de alta resolución con captura de choques se utilizó en específico la fórmula de flujos *HLLE* y *Marquina* y los reconstructores lineales *minmod* y *MC*. Para la integración en el tiempo, se usó el método de *Runge-Kutta* de cuarto orden. Como parte de las herramientas de diagnóstico, se utilizó la espina *Outflow* que permite medir el flujo de masa en reposo a través de una superficie esférica esto para poder monitorear el comportamiento de la tasa de acreción $\dot{M}$ que representa la cantidad de materia por unidad de tiempo que es acretada por el hoyo negro.

5.1.1.2. Condiciones iniciales

El espacio-tiempo de fondo es el de un hoyo negro que se describe usando coordenadas cartesianas penetrantes de Kerr-Schild (KS) (la descripción de estas coordenadas se puede encontrar en el Apéndice B), con el eje de rotación paralelo a la dirección $\hat{z}$ como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= \left(\eta_{\mu\nu} + \frac{2Mr^3}{r^4 + a^2 z^2} l_\mu l_\nu \right) dx^\mu dx^\nu, \\
 l_\mu &= \left(1, \frac{rx + ay}{r^2 + a^2}, \frac{ry - ax}{r^2 + a^2}, \frac{z}{r} \right), \\
 r &= \sqrt{\frac{r_*^2 - a^2 + \sqrt{(r_*^2 - a^2)^2 + 4a^2 z^2}}{2}}, \\
 r_* &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

donde M es la masa del hoyo negro y en donde hemos asumido unidades geométricas $G = c = 1$.

El fluido se considera como un gas ideal con densidad de masa en reposo constante moviéndose hacia el hoyo negro con una velocidad asintótica $v_\infty^2 = v^i v_i$. Se asumió que el fluido obedece la ecuación de estado $p = (\Gamma - 1)\rho\epsilon$, para lo cual introducimos la velocidad del sonido asintótica $c_{s\infty}$. Una vez que hemos definido el valor de $c_{s\infty}$ y que hemos fijado la densidad de masa en reposo como una constante $\rho = \rho_{\text{ini}}$, la presión puede ser escrita como $p_{\text{ini}} = c_{s\infty}^2 \rho_{\text{ini}} / (\Gamma - c_{s\infty}^2 \Gamma_1)$, donde $\Gamma_1 = \Gamma / (\Gamma - 1)$. Para evitar valores negativos o cero de la presión, la condición $c_{s\infty} < \sqrt{\Gamma - 1}$ debe satisfacerse. Finalmente con los valores de la presión p_{ini} , la energía interna específica es construida a partir de la ecuación de estado.

Para parametrizar los datos iniciales, se define el número de Mach relativista en infinito como $\mathcal{M}_\infty^R = W v_\infty / W_s c_{s\infty}$, donde W es el factor de Lorentz del gas y W_s es el factor de Lorentz calculado con la velocidad del sonido. Cuando $\mathcal{M}_\infty^R$ es mayor que uno, se dirá que el viento es supersónico de otra manera se dirá que es subsónico.

De acuerdo con [Foglizzo et al. (2005)], los dos parámetros decisivos para la estabilidad del proceso son el número de Mach del gas $\mathcal{M}_\infty^R$ y el tamaño relativo del acretor r_{acc} respecto al radio de acreción de Bondi. En este caso el objeto compacto

que se considera es un hoyo negro rotante a pesar de esto, fijamos el valor del radio de horizonte $r_{hor} = 2M$. Entonces, el tamaño del acretor estará definido por la relación $r_{hor}/r_{acc} = v_{\infty}^2 + c_{s\infty}^2$.

Esta fórmula indica que un hoyo negro relativamente pequeño es equivalente a tener un viento moviéndose lentamente. Esto explica porqué los casos en que r_{hor}/r_{acc} es pequeño, son difíciles de seguir en términos de recursos computacionales y aún más en tres dimensiones. La razón es porque el dominio numérico debe contener al menos una esfera de tamaño r_{acc} para observar el proceso de acreción. Vientos lentos implican un mayor r_{acc} y por tanto un dominio numérico mayor y como resultado el uso de más recursos computacionales.

Para observar el comportamiento en un escenario general, escogimos 5 direcciones representativas del viento, que se representaron en términos de la orientación respecto a la dirección del eje de rotación del hoyo negro $\hat{z}$ denotada por $\uparrow$. Estas cinco orientaciones diferentes serán representadas por $\uparrow$ $\downarrow$ $\rightarrow$ $\swarrow$ $\nwarrow$, y corresponden a $\hat{z}$, $-\hat{z}$, $\hat{x}$, $-\hat{x} - \hat{z}$ y $-\hat{x} + \hat{z}$, respectivamente.

5.1.1.3. Condiciones de frontera

El ETK permite la solución de las ecuaciones en coordenadas cartesianas en un dominio cúbico de un tamaño dado. En el caso de la evolución de un viento, dos condiciones de frontera deben ser especificada (ver [Dönmez et al.(2011), Cruz et al. (2012)]), propiamente. Una condición de flujo entrante es necesaria en la región entrante del dominio, donde el gas es bombeando a la caja numérica, y condiciones flujo saliente en donde se espera que el fluido salga del dominio. Como se mencionó antes el ETK por si solo no provee dicha configuración de condiciones de frontera, pues no incorpora condiciones de frontera para distintas caras del dominio cúbico por lo que se tuvo la necesidad de programar e incorporar un modulo que permitió hacerlo.

Existe otra frontera muy importante que debe ser considerada, como se usan coordenadas penetrantes de KS, se puede utilizar el método de excisión dentro del horizonte de eventos del hoyo negro tal como se hace en [Seidel & Suen (1992), Thornburg (1996)], el método de excisión consiste en remover un pedazo de dominio numérico dentro del horizonte de eventos. El pedazo removido es una esfera lego dentro del horizonte de eventos del hoyo negro. Si se consideran los conos de luz en las coordenadas KS se mantienen abiertos y siempre en dirección hacia dentro de la

singularidad, por lo que no se necesitan condiciones de frontera, la extrapolación de las variables del fluido es suficiente para garantizar que el fluido no es expulsado del interior del hoyo negro. Este método se encuentra implementado en el ETK como se describe en [Hawke et al. (2005)].

5.1.2. Experimentos numéricos y resultados

Mostrar la inestabilidad de una determinada configuración de fluido requiere el análisis de la teoría de perturbaciones, que se aplica cuando las configuraciones de equilibrio se dan a priori. Otra posibilidad utiliza la evolución numérica de las configuraciones de equilibrio y luego permitir que los errores de truncamiento o discretización actúen como la perturbación y eventualmente (o no) desencadenen una inestabilidad. Cuando la configuración es estable, la perturbación es simplemente expulsada y dicha perturbación es imperceptible para el sistema, mientras que en casos inestables las variables del sistema deberían cambiar notablemente.

Para el caso aquí tratado, la estabilidad de un cono de choque, en realidad no hay una configuración de equilibrio dada a priori, por lo tanto, es necesario, evolucionar el sistema hasta que se forme el cono de choque. La forma y las propiedades del cono se construyen simplemente por la evolución numérica y no sobre un conjunto de suposiciones sobre el perfil de densidad o campo de velocidades. Por lo tanto, para conocer su estabilidad, el método consiste simplemente en evolucionar el sistema durante un tiempo suficientemente largo y esperar que los errores numéricos se acumulen y provoquen que el cono oscile o muestre cualquier tipo de inestabilidad.

Las diferentes configuraciones del proceso de acreción del viento se caracterizan por los siguientes parámetros: 1) la velocidad asintótica del viento, 2) la densidad de masa de reposo inicial del viento, 3) el índice adiabático Γ , 4) el momento angular del hoyo negro a , 5) la orientación del viento con respecto al eje de rotación del hoyo negro y 6) el tamaño relativo del acretor r_{hor}/r_{acc} .

Según [Foglizzo et al. (2005)], el tamaño del acretor y la velocidad del viento son los parámetros que determinan si el cono de choque es estable o inestable y se ha estimado que en el rango del tamaño relativo del acretor $r_{hor}/r_{acc} \lesssim 0,05$ con el número de Mach $\mathcal{M}_{\infty}^R \geq 2,4$ se espera que el cono de choque sea inestable.

Durante el trabajo de doctorado se exploraron dos tamaños de hoyo negro. Primero

consideramos un hoyo negro de tamaño medianamente pequeño con r_{hor}/r_{acc} igual a 0,1 y 0,26. Con estos tamaños el cono de choque debe ser estable, sin embargo, ya que no se han mostrado antes en 3D los presentamos. Por otro lado, un segundo conjunto de experimentos consideramos acretores muy pequeño con valores de r_{hor}/r_{acc} igual a 0,011, 0,012 y 0,025, que están en el régimen de inestabilidad según [Foglizzo et al. (2005)].

5.1.2.1. Hoyos negros medianamente pequeños

En el primer conjunto de experimentos, utilizamos los siguientes parámetros: $\rho_0 = 10^{-6}$, $\Gamma = 4/3$, $c_{s\infty} = 0.1$. Consideramos velocidades supersónicas con valor $\mathcal{M}_\infty = 3, 5$, usamos dos distintos valores de velocidad del viento $v_\infty = 0,3, 0,5$, las cuales corresponden a tamaños de acretor de $r_{hor}/r_{acc} = 0,1$ y $0,26$ respectivamente. Estos parámetros corresponden a hoyos negros medianamente pequeños, cuyo tamaño debería representar un cono estable, esto, de acuerdo con [Foglizzo et al. (2005)]. También, llevamos a cabo estas simulaciones para dos valores de la magnitud del momento angular del hoyo negro a iguales a $0,5$ y $0,95$.

La evolución se realizó usando la resolución $\Delta xyz = 0,25M$, en un dominio $[-40M, 40M]^3$, donde, M es la masa del hoyo negro. Esta es una resolución modesta comparada con la utilizada en el análisis usando simetría s-lab en [Font et al. (1998), Dönmez et al.(2011), Cruz et al. (2012)], sin embargo, utilizar una resolución menor implica errores más grandes que deberían desencadenar una inestabilidad más rápido si es que la hubiera. En todos los casos, es decir, para los dos valores de velocidad, los dos valores del momento angular del hoyo negro y las cinco orientaciones del viento, como se esperaba para estos parámetros, no encontramos inestabilidad tipo FF. En la Tabla 5.1 enumeramos el conjunto de configuraciones en que analizamos la evolución del viento. Respecto a estas simulaciones, ya existen algunos resultados publicados en otros estudios, por ejemplo, el caso $\rightarrow\uparrow$, que es la generalización de los estudios de s-lab mostrados en [Font et al. (1998), Dönmez et al.(2011), Cruz et al. (2012)]. En [Dönmez et al.(2011)] se demostró que había una inestabilidad tipo FF, mientras que en [Cruz et al. (2012)] el uso de coordenadas penetrantes en el horizonte para describir el hoyo negro indicó que no existe tal inestabilidad. Es importante señalar que en ambos análisis se realizaron utilizando simetría tipo s-lab por lo que el resultado en 3D aún era incierto.

Tabla 5.1. Configuraciones analizadas para el caso $\rho_0 = 10^{-6}$, $\mathcal{M} = 3$ y 5 , $\Gamma = 4/3$, $c_{s\infty} = 0.1$ y $v_\infty = 0.3$. El valor de $\dot{M}$ corresponde a la tasa de acreción medida en una superficie esférica localizada en $r = 3M$ en el momento después de que el proceso de formación del cono de choque ha terminado y el fluido se ha estabilizado. No se encontró alguna inestabilidad en todos los casos estudiados. Como aspecto extra, mostramos la tasa de acreción para cada caso pero calculado mediante el uso de la fórmula de BHL.

Config.	$\mathcal{M} = 3$		$\mathcal{M} = 5$	
	$\dot{M}_3(10^{-4})$	$\dot{M}_{3BHL}(10^{-4})$	$\dot{M}_5(10^{-4})$	$\dot{M}_{5BHL}(10^{-4})$
$a = 0,5$				
$\uparrow\uparrow$	8,29		3,81	
$\downarrow\uparrow$	8,24		3,80	
$\rightarrow\uparrow$	8,21	4,00	3,63	1,00
$\swarrow\uparrow$	8,27		3,60	
$\nwarrow\uparrow$	8,32		3,61	
$a = 0,95$				
$\uparrow\uparrow$	8,23		3,64	
$\downarrow\uparrow$	8,22		3,64	
$\rightarrow\uparrow$	8,82	4,00	3,63	1,00
$\swarrow\uparrow$	8,57		3,64	
$\nwarrow\uparrow$	8,50		3,58	

En el trabajo [Gracia-Linares & Guzmán (2015)] se mostró el caso 3D por primera vez, por ejemplo, en la Fig. 5.1, mostramos un instante de tiempo del caso 3D correspondiente a los parámetros $v_\infty = 0,5$, $c_{s\infty} = 0,1$ y momento angular del hoyo negro $a = 0,95$. No se encontró algún signo de inestabilidad, esto hasta el tiempo $t = 10000M$. Dicho tiempo es comparable con el tiempo de evolución considerado en [Dönmez et al.(2011), Font et al. (1998), Cruz et al. (2012)].

Además, de la morfología del cono de choque, la cual muestra un comportamiento estable, monitoreamos la estabilidad del proceso de acreción através de medir la tasa de acreción $\dot{M}$ en una superficie esférica ubicada en $r = 3M$. En todos nuestros experimentos encontramos que para que $\dot{M}$ se estabilice, debe terminar el proceso transitorio inicial correspondiente a la formación del cono de choque. Medimos la tasa de acreción para los diferentes casos y verificamos que entre más lento sea el viento, mayor será el valor de la tasa de acreción, este comportamiento es congruente con el valor calculado con la fórmula Bondi. En la Tabla 5.1, se muestra la tasa de acreción para los dos casos $\mathcal{M}_\infty = 3$ y $\mathcal{M}_\infty = 5$ y por completés y comparación mostramos

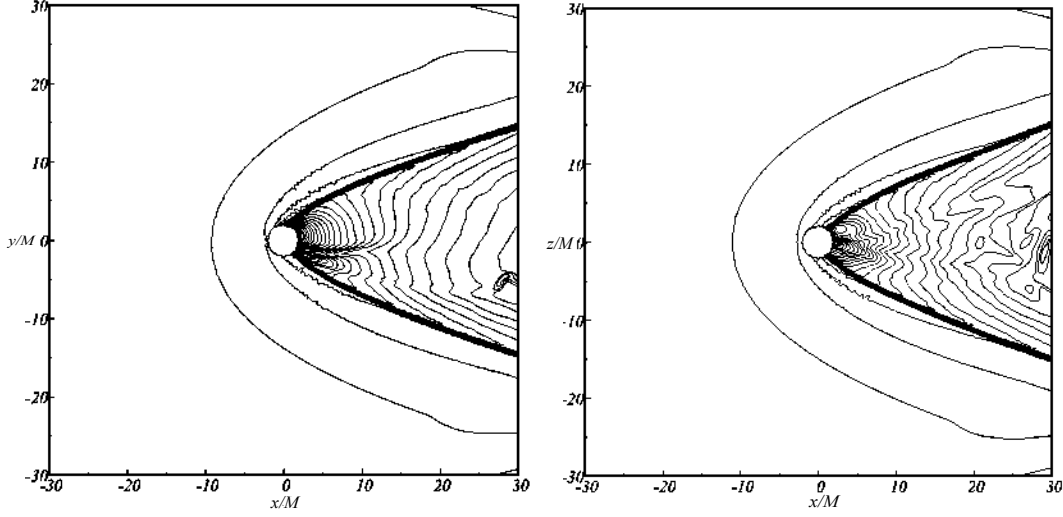


Figura 5.1. Isocontornos de densidad al tiempo $t = 3000M$ para acretores medianamente pequeños $\rightarrow \uparrow$, $a = 0,95$ y $v_\infty = 0,5$, $c_{s\infty} = 0,1$, $r_{hor}/r_{acc} = 0,26$. La línea gruesa que define la forma cónica es en realidad un conjunto de isocontornos cercanas que muestran que tan pronunciado es el gradiente de densidad en esa región. En la parte superior mostramos la morfología del cono de choque visto desde el plano $z = 0$, donde, se puede observar el arrastre de la densidad debido a la rotación del hoyo negro. En el panel inferior se muestra la estructura del cono de choque en el plano $y = 0$, que es, el ángulo de visión que se ha ignorando en simulaciones asumiendo simetría tipo s-lab.

los valores obtenidos usando la fórmula de tasa de acreción de BHL [Edgar(2004)]

$$\dot{M}_{BHL} = \frac{4\pi\rho}{(v_\infty^2 + c_{s\infty}^2)^{3/2}}, \quad (5.2)$$

donde, etiquetamos los resultados con $\dot{M}_{3BHL}$ y $\dot{M}_{5BHL}$ para las dos velocidades del viento consideradas. Concluimos que la tasa de acreción, medida en nuestras simulaciones para un espacio-tiempo de un hoyo negro de este tamaño, es considerablemente mayor que la tasa de acreción calculada con la fórmula de BHL.

Casos particulares. Algunas configuraciones especiales pueden ser interesantes, por ejemplo, uno puede preguntarse si se forma una estructura en la densidad en forma de remolino detrás del hoyo negro cuando el viento se mueve paralelo o antiparalelo al eje de rotación. En la Fig. 5.2 se muestran cortes del campo de velocidad en tres planos constantes $z = 3, 6, 9$ y una vista lateral del proceso a $t = 8000M$. En este caso, el tamaño del hoyo negro es $r_{hor}/r_{acc} = 0,26$ y no se observan efectos de arrastre en el campo de velocidad debido a la rotación del hoyo negro. Lo que realmente se

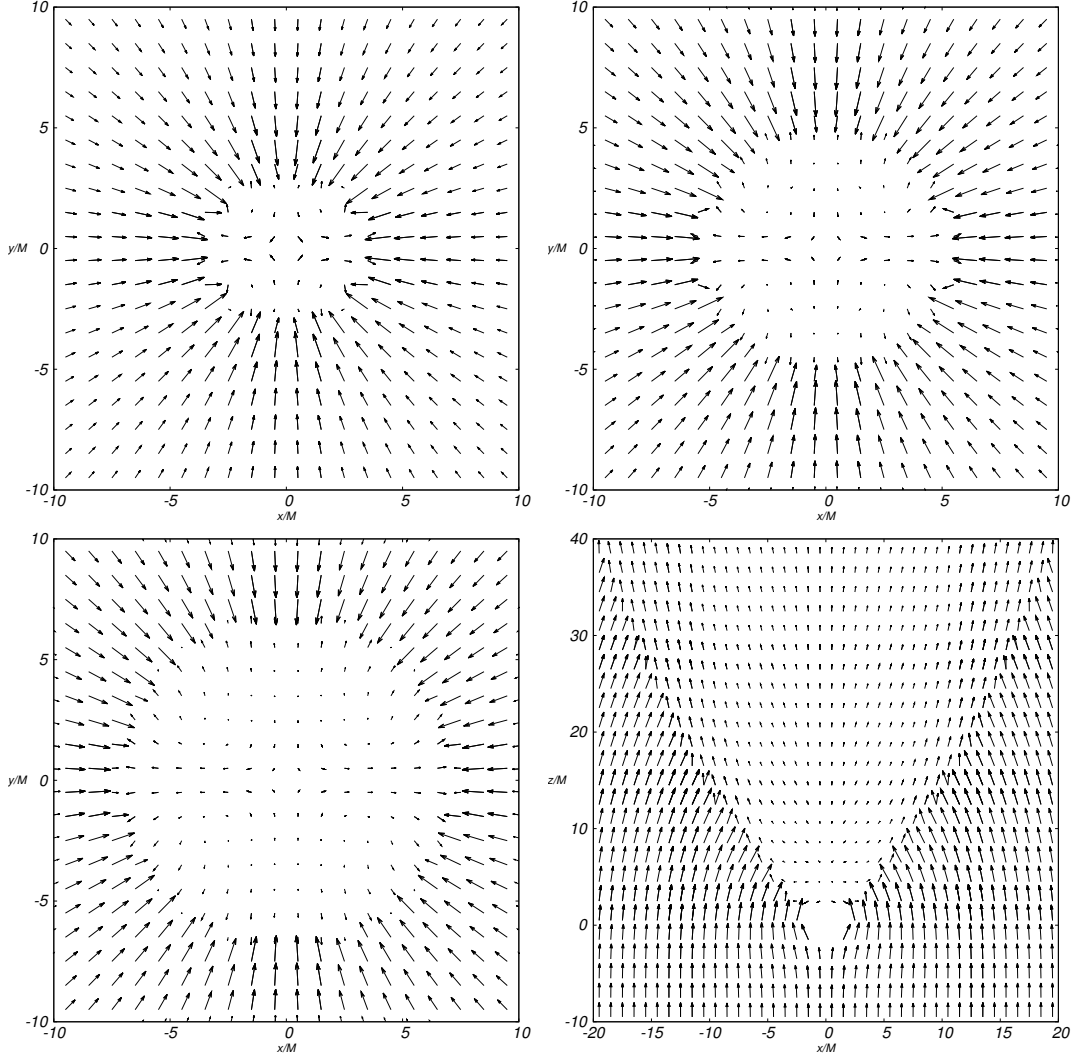


Figura 5.2. Campo de velocidades al tiempo $t = 8000M$ para el caso $\uparrow\uparrow$, $v_\infty = 0,5$, $a = 0,95$ y $r_{hor}/r_{acc} = 0,26$. Los planos son los siguientes (superior-izquierda) es el plano $z = 3$, (superior-derecha) el plano $z = 6$, (inferior-izquierda) el plano $z = 9$ y (inferior-derecho) el plano $y = 0$.

puede ver es la convergencia de las líneas de corriente en el límite del cono de choque.

5.1.2.2. Hoyos negros pequeños

Un segundo conjunto de experimentos consistió en la evolución del viento para un hoyo negro más pequeño, en particular establecemos tres casos: $r_{hor}/r_{acc} = 0,011$, $0,012$ y $0,025$. Estos valores se encuentran por debajo del valor límite ($r_{hor}/r_{acc} = 5$) en el que se espera que la inestabilidad FF suceda como se sugiere en [Fogizzo et al.

(2005)]. Por otro lado, de acuerdo con el análisis de [Foglizzo et al. (2005)], las simulaciones numéricas incluyendo las axisimétricas, deben ser inestables al considerar valores de índice adiabático $\Gamma = 5/3$ y $4/3$ con número de Mach $\mathcal{M}_\infty = 2,4$ y $3,0$. Hemos desarrollado estos casos particulares en 3D, para todas las orientaciones de viento descritas anteriormente, y presentado en la Tabla 5.2. En este caso sólo realizamos las simulaciones con magnitud del momento angular del hoyo negro $a = 0,95$ con la esperanza de que se lograra crear la inestabilidad o descartarla por completo. Usamos la misma resolución $\Delta xyz = 0,25M$, sin embargo, debido a que se requiere un dominio que contenga al menos una esfera de radio r_{acc} , fijamos el dominio en $[-100M, 100M]^3$. Una vez más no encontramos la inestabilidad tipo FF después de $10000M$. Es importante señalar que, a diferencia del de lo que ocurrió en el caso anterior en que el tamaño del hoyo negro era medianamente pequeño, la tasa de acreción para este caso, es considerablemente menor que la tasa calculada con la fórmula BHL.

Con el fin de ilustrar que los efectos de arrastre en el fluido debido a la rotación de un hoyo negro pequeño son más significativos en comparación con el caso de un hoyo negro de mayor tamaño, se muestra en la Fig. 5.3 un instante de tiempo de la densidad para el caso con orientación $\rightarrow\uparrow$, $r_{hor}/r_{acc} = 0,011$, $\Gamma = 5/3$ y $\mathcal{M} = 2,4$ (Tabla 5.2). También en la Fig. 5.4, mostramos el instante de tiempo en un plano vertical del caso diagonal, que claramente muestra mayor arrastre de fluido que en el caso mostrado en la Fig. 5.10.

5.1.2.3. Acreción de Bondi-Hoyle perturbada

Como no encontramos ningún caso inestable, además del análisis simple de seguir la evolución del gas y esperar que el error numérico desencadene la inestabilidad FF, diseñamos un experimento numérico el cual consistió en, evolucionar el gas hasta que termine la formación del cono de choque, justo después aplicamos una perturbación al campo de velocidad de la forma:

$$v^i = v^i + k\delta(t), \quad (5.3)$$

donde, $k \geq 0$ es un número aleatorio entre 0 y A y $\delta(t)$ es la delta de Dirac que representa. Aplicamos esta perturbación aleatoriamente perpendicular a la dirección del cono de choque y esperamos que desencadene la inestabilidad. Hicimos este ex-

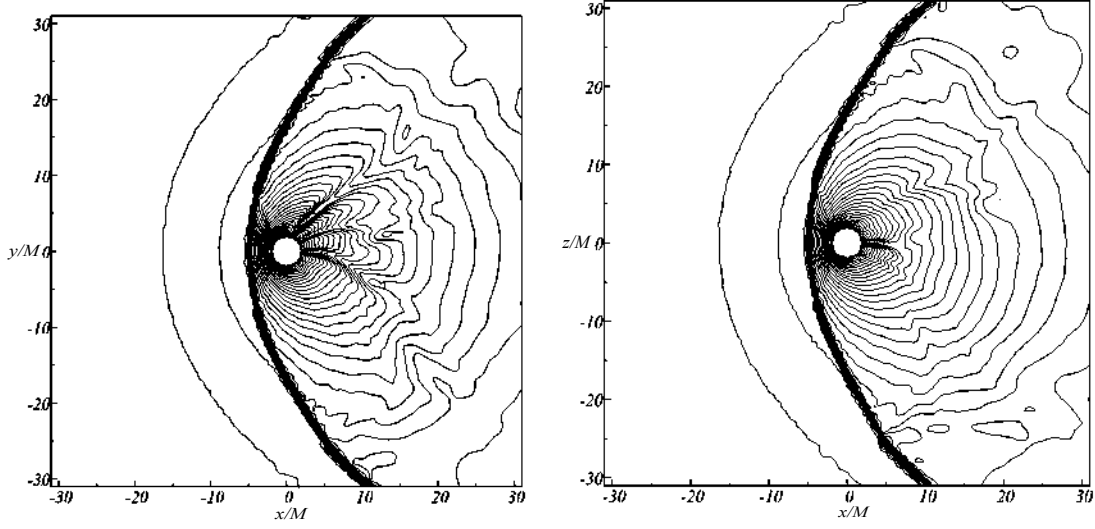


Figura 5.3. Isocontornos de la densidad de masa en reposo al tiempo $t = 8000M$, para el caso $\leftarrow\Uparrow$, $a = 0,95$ con $v_\infty = 0,1$, $c_{s\infty} = 0,04$, $\Gamma = 5/3$, correspondiente a un hoyo negro pequeño con $r_{hor}/r_{acc} = 0,011$. Se muestran dos ángulos de visión en dos planos distintos; $z = 0$ y $y = 0$. Este caso se esperaba que fuera inestable por dos razones, la primera es porque el hoyo negro es suficientemente pequeño y la segunda porque la zona de choque del fluido con el hoyo negro se encuentra alejada del hoyo negro, sin embargo, no encontramos signos de la estabilidad tipo FF hasta $t = 10000M$.

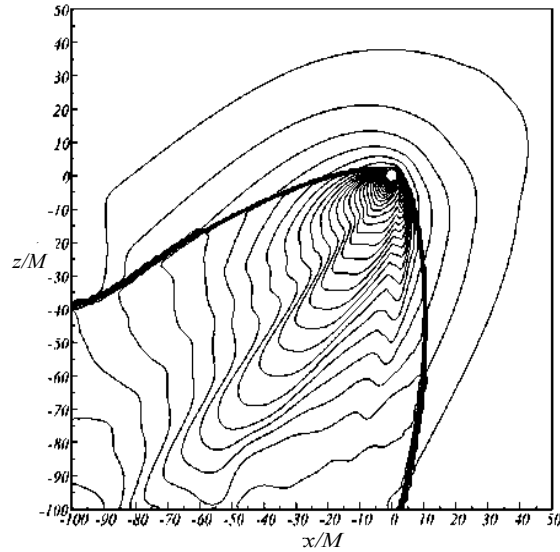


Figura 5.4. Isocontornos de la densidad de masa en reposo del caso diagonal $\swarrow\Uparrow$, $a = 0,95$, $\Gamma = 4/3$ y $r_{hor}/r_{acc} = 0,012$. El instante de tiempo que se muestra es al tiempo $t = 3800M$.

Tabla 5.2. Configuraciones analizadas para el caso $\rho_0 = 10^{-6}$ con $a = 0,95$. El valor de $\dot{M}$ corresponde al valor de la tasa de acreción medido en una superficie esférica localizada en $r = 3M$ y en el momento después de que el proceso de formación del cono de choque ha terminado. Ninguno de los casos mostraron inestabilidad tipo FF. Para poner a prueba la precisión de la formula de BHL mostramos la tasa de acreción calculado por esta. Contrario al caso de un hoyo negro medianamente pequeño, la tasa de acreción medido es aproximadamente independiente de la dirección del viento.

$\Gamma = 5/3$	$r_{hor}/r_{acc} = 0,011$	$\mathcal{M} = 2,4$
	$\dot{M}_{2,4}(\times 10^{-2})$	$\dot{M}_{BHL}(10^{-2})$
$\uparrow\uparrow$		
$\downarrow\uparrow$		
$\rightarrow\uparrow$	0,14	1,00
$\swarrow\uparrow$		
$\nwarrow\uparrow$		
$\Gamma = 4/3$	$r_{hor}/r_{acc} = 0,012$	$\mathcal{M} = 2,5$
	$\dot{M}_{2,5}(\times 10^{-2})$	$\dot{M}_{BHL}(10^{-2})$
$\uparrow\uparrow$		
$\downarrow\uparrow$		
$\rightarrow\uparrow$	0,48	1,00
$\swarrow\uparrow$		
$\nwarrow\uparrow$		
$\Gamma = 4/3$	$r_{hor}/r_{acc} = 0,025$	$\mathcal{M} = 3$
	$\dot{M}_{3,0}(\times 10^{-2})$	$\dot{M}_{BHL}(10^{-3})$
$\uparrow\uparrow$		
$\downarrow\uparrow$		
$\rightarrow\uparrow$	0,34	3,72
$\swarrow\uparrow$		
$\nwarrow\uparrow$		

perimento para los dos valores extremos del tamaños de acretor y en todas las orientaciones que consideramos antes. En todos los casos y en todas direcciones no se desencadenó ninguna inestabilidad.

En la Fig. 5.5 se muestra la tasa de acreción para el caso perturbado, donde se puede ver el momento en que aplicamos la perturbación. Usamos $A = 0,2$, lo que significa que la velocidad de perturbación perpendicular al cono de choque que se ha añadido al azar es una quinta parte de la velocidad de la luz y sin embargo, el flujo se restaura y vuelve a ser estable. En las Figs. 5.6 y 5.7 mostramos la densidad de más en reposo

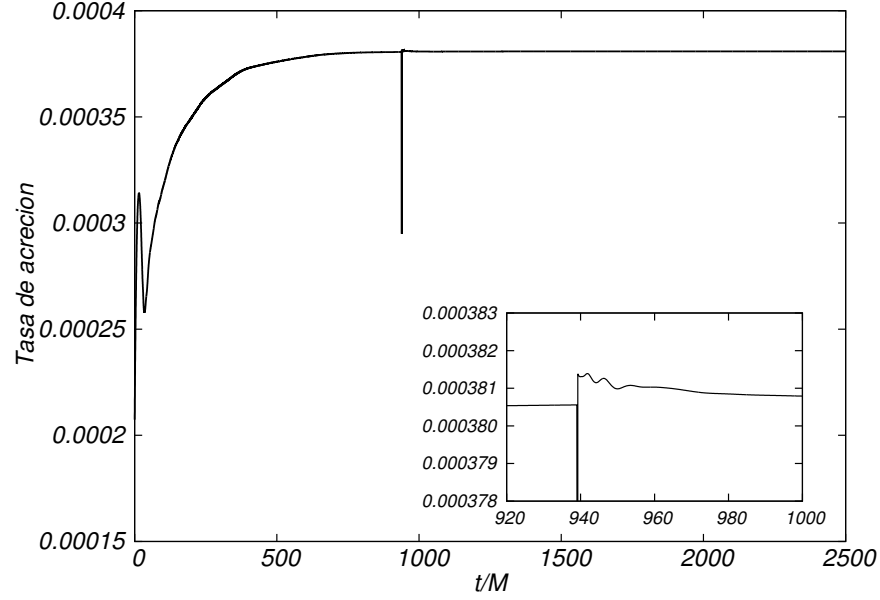


Figura 5.5. Tasa de acreción para el caso perturbado $\rightarrow \uparrow$, $a = 0,95$, $v_\infty = 0,5$, $c_{s\infty} = 0,1$, $\Gamma = 4/3$ con amplitud de perturbación $A = 0,2$. En el panel interior de la figura se muestra el instante en que la perturbación es aplicada al tiempo $t = 939M$.

a distintos tiempos: antes, durante y después de la perturbación, también, se muestra cómo la morfología del cono se restablece.

5.1.2.4. Influencia debida a los métodos numéricos

El estudio de la acreción de vientos en hoyos negros, se diseñó de tal manera que el sistema físico estuviera lo más libre posible de cualquier sofisticación numérica, esto con el fin de evitar efectos indeseables. Para ello, en las series de producción de las simulaciones, se utilizó un único nivel de refinamiento, esto, debido a que la disipación numérica que se utiliza a nivel refinamiento para remover inestabilidades, podría ocultar los modos potencialmente inestables del cono de choque. Esto se ha discutido como una posible inhibición de fenómenos de inestabilidad de tipo FF [Foglizzo et al. (2005)].

Con el fin de mostrar los efectos debidos al uso del refinamiento fijo de mallas (FMR), mostramos en la Fig. 5.8 la tasa de acreción cuando se utiliza FMR con dos niveles de refinamiento y cuando se utiliza un solo nivel de refinamiento. La desviación es

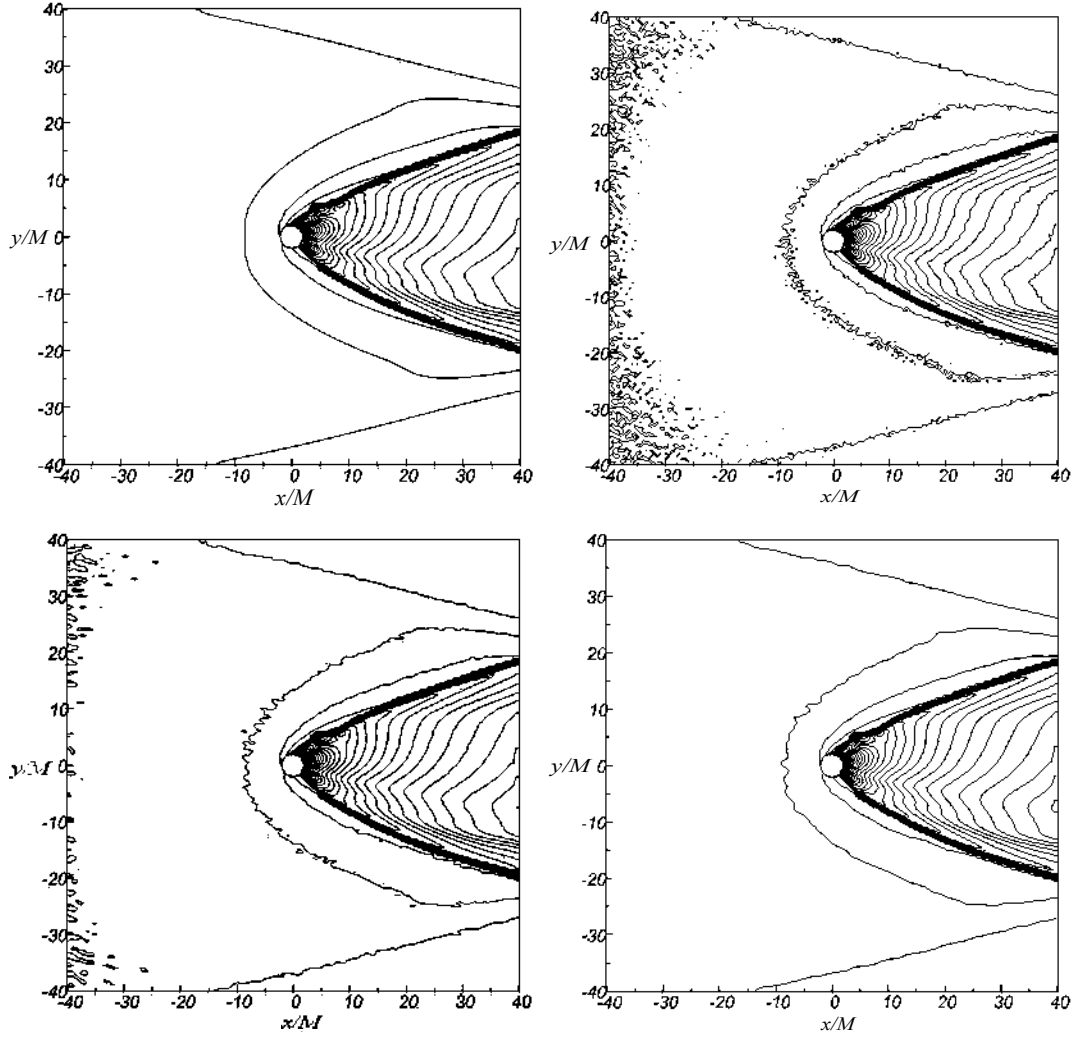


Figura 5.6. Se muestra la densidad a distintos tiempos para caso perturbado con orientación $\rightarrow \uparrow$, $a = 0,95$ y $v_\infty = 0,5$, $c_{s\infty} = 0,1$, $\Gamma = 4/3$ con amplitud de perturbación $A = 0,2$. En la parte superior izquierda se muestra la densidad antes de que la perturbación sea aplicada. En la parte superior derecha, mostramos la morfología al tiempo $t = 939M$ al momento en que la perturbación es aplicada. En los paneles de la parte inferior, mostramos la densidad a los tiempos $t = 945M$ y $t = 955M$ a los cuales el cono de choque se restablece.

del orden del 3% en la tasa de acreción de masa. El uso de FMR, al usar mayor resolución permite tener simulaciones con mayor precisión. Esta herramienta en la siguiente sección cuando se hable de los fenómenos de arrastre y vórtices.

También, verificamos nuestros resultados sobre la estabilidad del cono de choque en todas nuestras corridas usando diversas combinaciones de resolvers de Riemann aproximados y métodos de reconstrucción de variables. Desarrollamos todas las con-

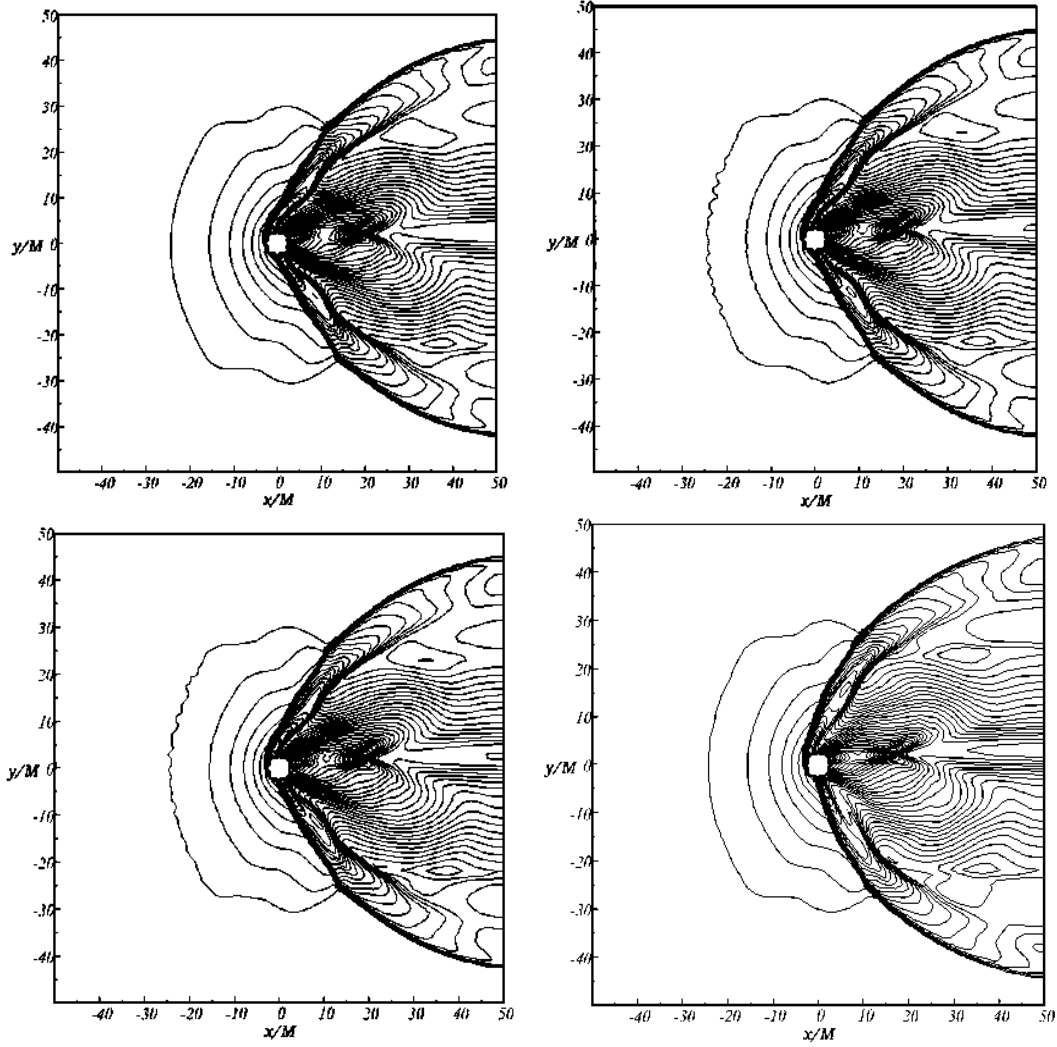


Figura 5.7. Se muestra el caso perturbado con orientación $\rightarrow \uparrow$, $a = 0,95$, $r_{hor}/r_{acc} = 0,011$, $v_{\infty} = 0,1$, $c_{s\infty} = 0,04$, $\Gamma = 4/3$ con amplitud de perturbación $A = 0,2$. En la parte superior izquierda se muestra la densidad antes de aplicar la perturbación. En el panel superior derecho se muestra la morfología al tiempo $t = 1500M$ que corresponde al momento en que la perturbación es aplicada. En los paneles inferiores se muestran el proceso de restauración del cono de choque a los tiempos $t = 1530M$ y $t = 1600M$.

figuraciones reportadas en las Tablas, utilizando cuatro combinaciones, estas son: 1) Marquina con MC y minmod, y 2) HLLE con MC y minmod. En todos los casos encontramos que el cono de choque es estable en todas las orientaciones y velocidades descritas del viento. En la Fig. 5.8 se compara la tasa de acreción estimada usando las cuatro combinaciones de flujos y reconstructores para un caso particular. La dife-

rencia entre la tasa de acreción se encuentra dentro de 1 %, que es menor que el error introducido al usar FMR.

A lo largo de este capítulo presentamos la acreción supersónica de un viento en hoyos negros en 3D, estudiamos si existe o no una inestabilidad tipo FF utilizando una serie de parámetros que se esperaba que mostraran esta inestabilidad. Seguimos la evolución del fluido hasta la formación del cono de choque considerando un valor alto de la magnitud del momento angular del hoyo negro así como, un conjunto general de orientaciones del viento con respecto al eje de rotación del hoyo negro. Nos centramos en dos regímenes, uno en el que el tamaño relativo del acretor es $r_{hor}/r_{acc} = 0,1$ y $0,26$ donde la inestabilidad FF no se espera, sin embargo, presentamos por primera vez la acreción en tres dimensiones. Un segundo régimen en el que el tamaño relativo del acretor es $r_{hor}/r_{acc} = 0,011, 0,012$ y $0,025$, lo que debería mostrar la inestabilidad FF de acuerdo con [Foglizzo et al. (2005)]. En ambos casos no vimos la inestabilidad cuando se esperaba que ocurriera durante el tiempo de evolución.

Un primer conjunto de experimentos supone que los errores numéricos podrían desencadenar la inestabilidad del cono de choque. Como no encontramos la inestabilidad, realizamos un segundo conjunto de experimentos en los que aplicamos una perturbación transversal al cono de choque y tampoco se observó la inestabilidad. Nuestras corridas de producción se realizaron en modo unigrid para evitar los efectos numéricos inducidos por el refinamiento de la malla, en particular la disipación artificial. Ilustramos con un caso particular, la desviación estimada del modo unigrid inducida por el uso de FMR. Otro ingrediente particular de nuestras simulaciones es la descripción del espacio-tiempo del hoyo negro, usamos coordenadas penetrantes de Kerr-Schild y la técnica de excisión dentro del horizonte del eventos. Esto inhibe la propagación de errores numéricos generados en el límite interno. Como se describe en [Cruz et al. (2012)] este simple hecho hace la diferencia entre la estabilidad y la inestabilidad del cono de choque cuando el acretor es un hoyo negro. Desafortunadamente, esta técnica sólo puede aplicarse a hoyos negros y no a otros objetos compactos.

Un resultado más es que la fórmula de BHL no es exacta para ambos regímenes. Para los casos en que $r_{hor}/r_{acc} = 0,1$ y $0,26$, el material acretado en una superficie situada a $3M$ es aproximadamente mayor, el doble que la predicha por la fórmula BHL, mientras que para los casos de hoyos negros pequeños con r_{hor}/r_{acc} que van de $0,011$ a $0,025$, la tasa de acreción oscila desde casi $\sim 0,15$ a $\sim 0,5$ veces la calculada

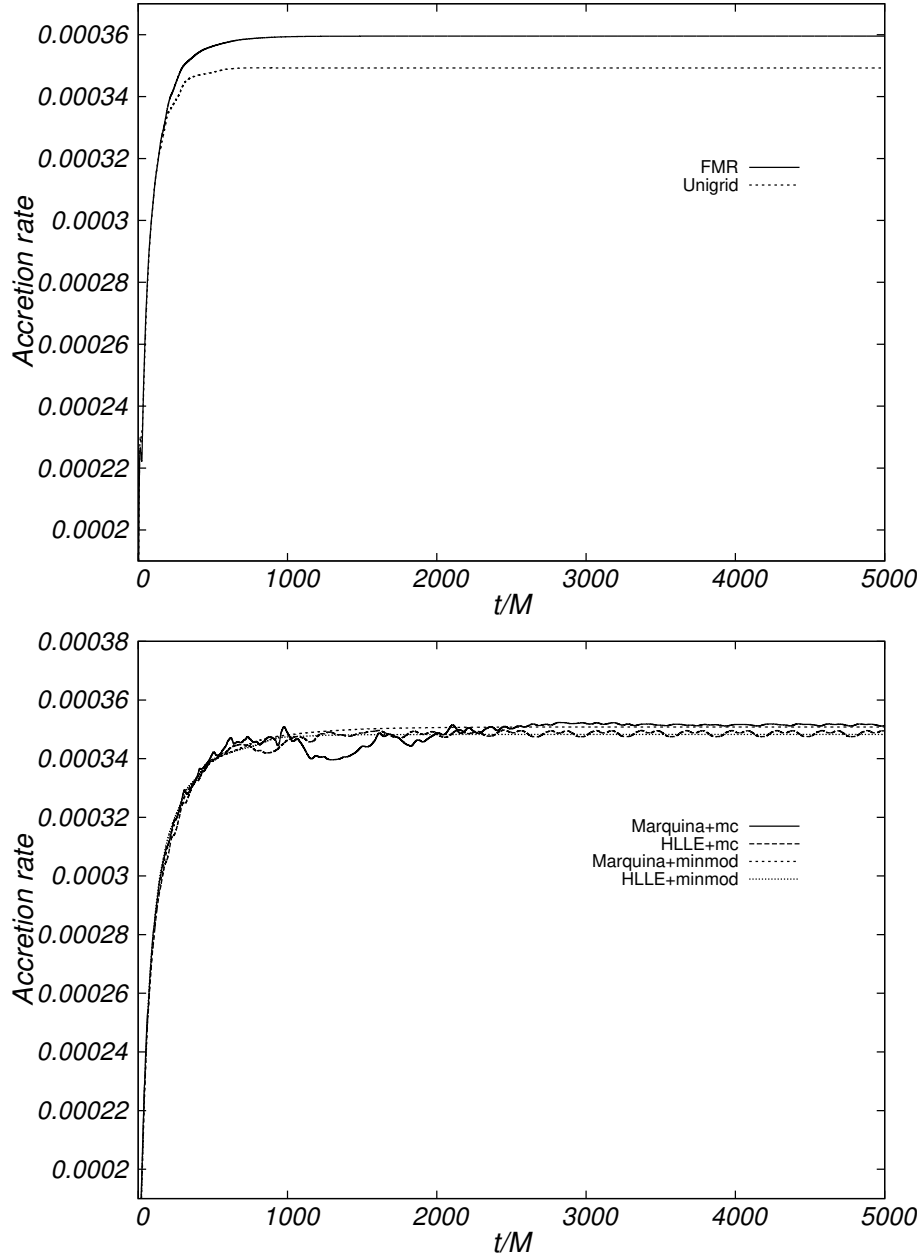


Figura 5.8. (Parte superior) Comparación de la tasa de acreción para el caso $\rightarrow\uparrow$, $a = 0,95$, $\mathcal{M} = 5$, entre dos distintas corridas, la primera, utilizando dos niveles de refinamiento, la segunda, usando unigrid. El dominio se fijó para ambas corridas en $[-20M, 20M]^3$. En el caso unigrid, la resolución es de $0,25M$ en todas las direcciones. En el caso de dos niveles de refinamiento se utilizaron resoluciones del nivel más grande en $0,5M$ y la caja más pequeña con resolución $0,25M$ en un dominio de $[-10M, 10M]^3$. La tasa de acreción está medida en una esfera de radio $3M$. La diferencia es del 3%, que eventualmente podría ser importante. (Parte inferior) Comparación del ritmo de acreción para el caso $\rightarrow\uparrow$, $a = 0,95$, $\mathcal{M} = 5$ entre cuatro corridas distintas, usando los resolvedores de Riemann Marquina y HLL, ambos con reconstructor de variables minmod y MC, en el dominio $[-20M, 20M]^3$ en una malla unigrid con resolución $0,25M$ en todas las direcciones. De entre todas las posibles combinaciones, la máxima diferencia en la tasa de acreción encontrada fue del 1%.

con la fórmula BHL, dependiendo del valor de Γ y de que tan supersónico es el viento.

Dada la rica combinación de las orientaciones del viento y los valores del momento angular del agujero negro explorado, podemos concluir con seguridad que incluso para nuestro caso más extremo, con un viento moviéndose a $\mathcal{M}_\infty = 2,4$ y hoyos negros tan pequeños como $r_{hor}/r_{acc} = 0,011$, el cono de choque es estable. Y para vientos más rápidos con $\mathcal{M}_\infty = 3$ y $r_{hor}/r_{acc} = 0,025$ dentro del régimen de inestabilidad esperada tampoco se encontraron signos de inestabilidad.

5.2. Acreción en hoyos negro: efectos de campos magnéticos

En el estudio de acreción de un viento supersónico en un hoyo negro presentado en la sección anterior, el fluido que constituye el fluido se consideró como un fluido perfecto, el cual, ayudó a describir de manera aproximada el fenómeno. La acreción de BHL se puede modelar de una manera más realista añadiendo ingredientes extra a los modelos tanto del viento como del acretor. Una de las razones por las que se incluyen los campos magnéticos es que, algunos de los sistemas astrofísicos de acreción contienen material magnetizado que podría influir en el proceso. En el régimen Newtoniano, el estudio de acreción magnetizada de BHL sobre una estrella de neutrones se puede encontrar en [Toropina et al. (2012)], también, en [Lee et al. (2014)] el proceso de un plasma magnetizado sobre un hoyo negro se estudió usando un modelo newtoniano de hoyo negro. En el régimen relativista, podemos encontrar el estudio de acreción supersónica magnetizada de BHL, restringida a configuraciones axisimétricas [Penner (2011)]. En esta sección se presenta la acreción de vientos supersónicos magnetizados en un hoyo negro rotante en tres dimensiones.

Con el fin de contribuir a esta adición de ingredientes que modelan la acreción BHL en un hoyo negro rotante, durante el trabajo doctoral se estudió la acreción supersónica 3D de vientos magnetizados en un hoyo negro rotante. En esta sección se presenta la acreción supersónica 3D de vientos magnetizados en un hoyo negro rotante inmerso en un campo magnético, inicialmente alineado con la dirección del eje de rotación de el agujero negro, dentro de la aproximación de magnetohidrodinámica ideal (MHD). Los resultados se comparan con la acreción puramente hidrodinámica

(HD). También, se compara la estabilidad, el comportamiento de la evolución de las variables hidrodinámicas que describen el viento y la tasa de acreción. La intensidad del campo magnético se fijó de tal manera que guarda similitud con el valor del campo magnético en sistemas astrofísicos de alta energía como: AGNs, donde oscila entre 10^4 a $10^{10}G$ [Field & Rogers (1993), Karshev (2005), Sing (2005)] y el campo magnético de un magnetar $10^{15}G$ [Olausen & Kaspi (2014)]. También, la intensidad del campo magnético es del orden de la utilizada en modelos de choque de hoyos negros-estrellas de neutrones, donde, se ha encontrado que el campo magnético afecta la dinámica del choque [Etienne et al. (2012a), Etienne et al. (2012b)].

5.2.1. Condiciones iniciales

Espacio-tiempo. Describimos al espacio-tiempo como un hoyo negro rotante en coordenadas penetrantes de Kerr-Schild (Apéndice B) con eje de rotación en dirección $\vec{S} = a\hat{z}$.

El viento. Se fija inicialmente como un gas ideal con densidad de masa en reposo constante $\rho = 10^{-6}$ a lo largo de todo el espacio, con velocidad inicial asintótica en dirección al hoyo negro $v_\infty^2 = v^i v_i$. Consideramos que el gas obedece la ecuación $p = (\Gamma - 1)\rho\epsilon$, la constante adiabática que se consideró es la de un fluido relativista $\Gamma = 4/3$, fijamos la velocidad del sonido como $c_{s\infty} = 0,05$ y para evitar tener valores negativos de presión, la definimos en términos de la velocidad del sonido y del coeficiente adiabático $p_{\text{ini}} = c_{s\infty}^2 \rho_{\text{ini}} / (\Gamma - c_{s\infty}^2 \Gamma_1)$ y hacemos que se cumpla que $c_{s\infty} < \sqrt{\Gamma - 1}$, finalmente, la energía interna inicial se calcula a partir de la ecuación de estado.

Campo magnético. Se define inicialmente como constante y paralelo al eje de rotación del hoyo negro, con magnitud $10^{13}G$. Después del tiempo inicial el campo magnético evoluciona acoplado a la evolución del plasma de acuerdo con las ecuaciones MHD ideal (Apéndice C).

Este estudio se centró en tres escenarios representativos, en los que se supone que el viento tiene diferente dirección con respecto al eje de rotación del hoyo negro $\vec{S}$. Estas tres orientaciones diferentes del viento están representadas por $\uparrow$, $\rightarrow$, $\nearrow$ y corresponden a las direcciones $\hat{z}$, $\hat{x}$ y $\hat{x} + \hat{z}$ respectivamente. La dirección de rotación del hoyo negro se representa por $\uparrow\uparrow$.

Utilizamos condiciones de frontera de flujo entrante en la región *downstream* del

dominio, donde el gas está siendo bombeado al dominio numérico 3D, y condiciones de flujo saliente en la región *upstream* donde se espera el flujo de fluido sale del dominio numérico. También se utilizó el método de excisión dentro del horizonte del hoyo negro para evitar la singularidad [Hawke et al. (2005), Gracia-Linares & Guzmán (2015)].

Todas las simulaciones presentadas en esta sección se hicieron utilizando el driver **carpet** de refinamiento de mallas (FMR) con una resolución base $\Delta xyz = 0,5M$ con un nivel de refinamiento de resolución $\Delta xyz/2$. El dominio base es de $[-30M, 30M]^3$ y corresponde aproximadamente el doble de una esfera del radio de acreción $r_{acc} = M/(c_{s\infty}^2 + v_\infty^2)$. Esto es importante porque sin esta condición no es posible definir regiones *downstream* y *upstream* del proceso. El dominio refinado se localizó en $[-10M, 10M]^3$ el cual se fijó utilizando la espina del ETK de refinamiento de mallas Carpet [Schenetter et al. (2006)].

5.2.2. Resultados

La primera característica que se evaluó es la estabilidad del proceso. Como se presentó en la Sec. 5.1 de este capítulo, el parámetro que podría definir la estabilidad del proceso de acreción es el tamaño del acretor [Foglizzo et al. (2005)], por lo que, consideramos un tamaño de acuerdo con [Foglizzo et al. (2005)] de $r_{hor}/r_{acc} = 0,05$ en tres distintos casos en que el viento es lento con velocidad asintótica $v_\infty = 0,25c$ y para $r_{hor}/r_{acc} = 0,4$ en un único caso rápido con velocidad asintótica $v_\infty = 0,5c$. Estos valores de la velocidad asintótica del viento corresponden a hoyos negros medianamente pequeños [Gracia-Linares & Guzmán (2015)]. Fijamos el parámetro de rotación del hoyo negro $a = 0,8$ y la amplitud del campo magnético $10^{13}G$. En la Tabla 5.3 presentamos los parámetros utilizados en este estudio incluyendo los casos los puramente hidrodinámicos que se compararon.

Las propiedades generales de la morfología y dinámica del proceso, una vez que la evolución del fluido se ha establecido hasta un régimen cuasi-estacionario, se presentan en las Figs. 5.10, 5.11 y 5.12 en las que se muestra el instante $t = 1000M$ de la densidad de masa en reposo para comparar los casos HD y MHD, las líneas de campo magnético y el parámetro $\beta = \frac{2p}{b_i b^i}$ del plasma.

Estabilidad. Similarmente al proceso puramente hidrodinámico, donde no se en-

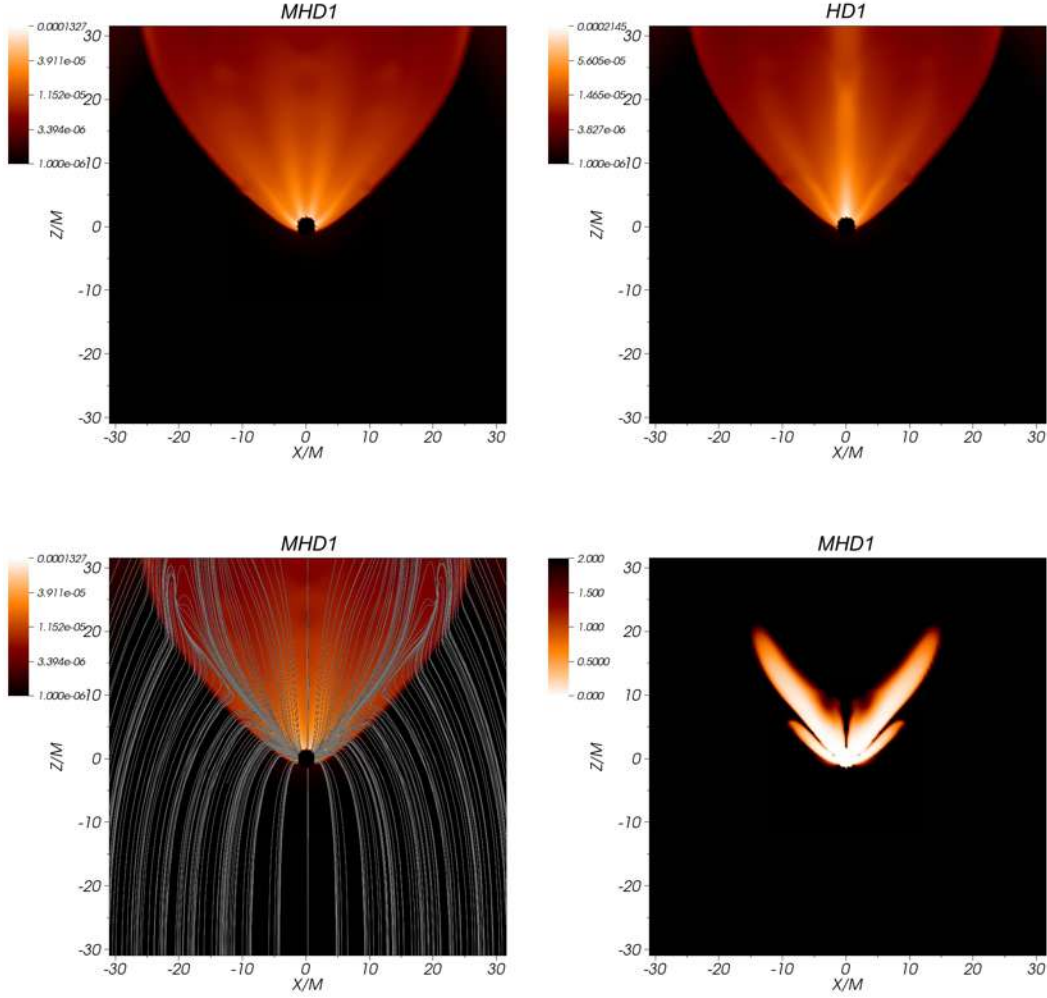


Figura 5.9. Se muestra el instante de tiempo $t = 1000M$ en el plano $y = 0$ de la densidad de mas en reposo, para los casos MHD1 y HD1 correspondientes al modelo $\uparrow\uparrow$ y $r_{hor}/r_{acc} = 0,05$. En el fondo mostramos las líneas del campo magnético y el parámetro β de este caso. Podemos ver que el cono de choque en presencia de campo magnético es más ancho que en el caso puramente HD. Otra diferencia es que en el caso MHD el máximo de la densidad del gas ($1,3 \times 10^{-4}$) es considerablemente menor que el caso HD ($2,1 \times 10^{-4}$). Las líneas de campo magnético son axisimétricas como se esperaba.

contró ningún tipo de inestabilidad tipo Flip-Flop, incluso, dentro del régimen donde se predijo en la teoría Newtoniana [Gracia-Linares & Guzmán (2015)], en el caso MHD tampoco se encontró tal inestabilidad, sin embargo, a pesar de esto, se encontraron algunas características dinámicas diferentes. Otra importante característica que se encontró es la formación de un choque que se encuentra separado de la superficie del

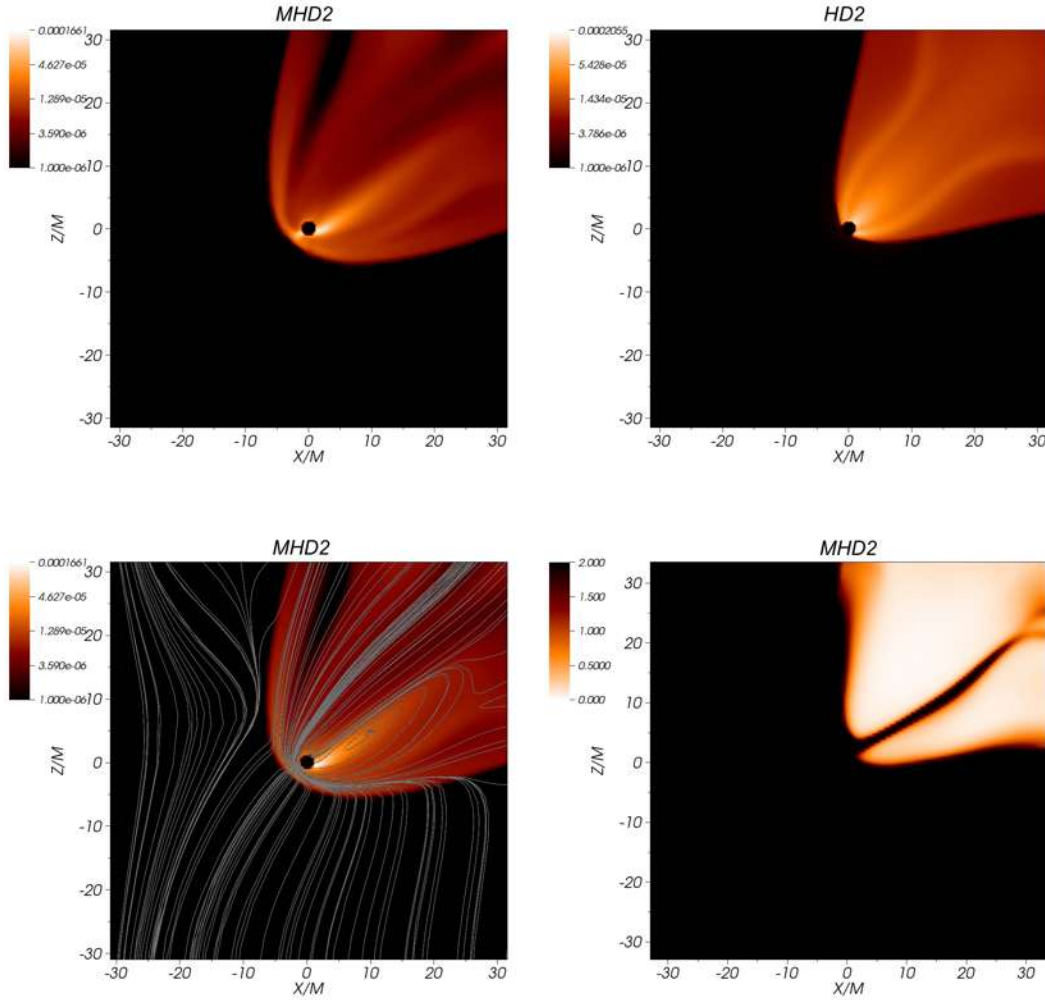


Figura 5.10. Se muestra el instante de tiempo $t = 1000M$ en el plano $y = 0$ de la densidad, para los casos MHD2 y HD2 con orientación $\nearrow \uparrow$ y $r_{hor}/r_{acc} = 0,05$. En la parte inferior de la figura se muestran las líneas de campo magnético y el parámetro β . Podemos ver que el cono de choque en presencia de campo magnético es más ancho que en el caso puro de HD. El máximo de la densidad de masa de reposo es mayor que el caso puramente HD, pero no es tan regular como lo fue en el caso puramente HD. La zona más oscura dentro del cono de choque es la zona de rarefacción donde ρ es muy pequeña. Esta región coincide con aquella donde $\beta < 1$ y por lo tanto la presión del campo magnético domina. También vemos las líneas de campo magnético, que son considerablemente distorsionadas con respecto al campo magnético inicial que son verticales.

hoyo negro tipo *bow shock* que depende de la orientación del viento. En la Fig. 5.10 se muestra que para el caso MHD la zona en que aparece el *bow shock* se desprende de la superficie del hoyo negro, condición que por lo general desencadenaría la inesta-

bilidad del cono de choque en un sistemas newtonianos [Foglizzo et al. (2005)], pero que se ha demostrado que es inofensivo en el caso relativista presentado en la sección anterior y publicado en [Gracia-Linares & Guzmán (2015)].

Angulo de apertura del cono. Como fue reportado en [Penner (2011)], en el caso axisimétrico, el ángulo de apertura del cono de choque es mayor para el MHD que para el escenario puramente HD. Confirmamos este resultado en los casos axisimétricos y también en los casos sin simetría diagonal $\nearrow\uparrow$ y horizontal $\uparrow\leftarrow$.

Zonas rarificadas. En los casos MHD2, MHD3 y MHD4 mostrados en las Figs. 5.10, 5.11, 5.12 se aprecia la formación de una zona rarificada que no se ve en el caso HD. En esta zona, la presión magnética domina sobre la presión del fluido ($\beta < 1$), esto se considera como la razón por la cual el fluido es expulsado de estas regiones. Esta zona de rarefacción aparece en diferentes lugares dependiendo de la dirección del viento, por ejemplo, en el caso diagonal MHD2 la zona rarificada es más grande en la mitad superior del cono de choque pero en el caso horizontal MHD3, la zona es simétrica con respecto a plano $z = 0$.

Remolinos. Una pregunta interesante que surge cuando se utiliza un código 3D es si existe la formación de remolinos en la zona *downstream* del dominio. La respuesta se muestra en la Fig. 5.13 donde mostramos al instante $t = 1000M$ la densidad de masa en reposo y el campo de velocidades en tres escenarios interesantes. Primero, presentamos estas cantidades para los modelos de viento paralelo $\uparrow\uparrow$ HD1 y MHD1 en el plano $z = 2$ cerca del horizonte del hoyo negro en la zona *downstream*. En esta proyección el cono de choque se encuentra en la región de alta densidad. No existe un remolino global formado, sino cuatro choques formados por la convergencia de cuatro flujos circulares en la proyección de este plano, y luego, el fluido se mueve hacia el hoyo negro.

El segundo caso de la Fig. 5.13 corresponde al viento diagonal $\nearrow\uparrow$. Se muestra el campo de densidad y velocidad del cono de choque en un plano perpendicular a la dirección del viento a $2M$ del centro del hoyo negro. La diferencia entre el HD2 puramente hidrodinámico y los casos MHD2 magnetizados es de nuevo la formación de dos zonas de baja densidad dentro del cono. Al menos en uno de ellos se aprecia la formación de un remolino.

También presentamos en la Fig. 5.13 los resultados para el viento horizontal $\uparrow\leftarrow$, correspondientes a los modelos HD3 y MHD3. Presentamos el momento $t = 1000$ de

la densidad de masa en reposo del campo de velocidad en el plano $x = -2$, también en la regin *downstream* del flujo. La diferencia entre los casos puramente HD3 y MHD3 es muy clara, y la formación de dos remolinos dentro de las zonas de baja densidad del cono de choque debido al campo magnético es evidente.

Los tres casos muestran un patrón similar. Sucede que en una región alejada del hoyo negro, es decir, fuera del cono, el flujo de materia es casi radial en las proyecciones mostradas. Sin embargo, dentro del cono hay claras diferencias: en el caso HD el campo de velocidad proyectado no muestra una orientación preferencial, mientras que en el caso MHD hay zonas rarificadas y coincidentemente un claro remolino en estas zonas.

Tabla 5.3. Parámetros de las 8 simulaciones usadas en este trabajo. Cuatro de ellas involucran evoluciones de las ecuaciones MHD y las otras sus contrapartes equivalentes en la HD.

Nombre	$a = 0,8c$	$v_\infty = 0,25c$	A_0	Orientación
MHD01			$10^{13}G$	$\uparrow\uparrow$
HD01			0	$\uparrow\uparrow$
MHD02			$10^{13}G$	$\nearrow\uparrow$
HD02			0	$\nearrow\uparrow$
MHD03			$10^{13}G$	$\rightarrow\uparrow$
HD03			0	$\rightarrow\uparrow$
Nombre	$a = 0,8c$	$v_\infty = 0,5c$	A_0	Orientación
MHD04			$10^{13}G$	$\uparrow\uparrow$
HD04			0	$\uparrow\uparrow$

Tasa de acreción. Otra propiedad es la influencia del campo magnético en la tasa de acreción. Medimos $\dot{M}$ en una superficie esférica ubicada cerca del horizonte del hoyo negro, a $r = 2M$. En la tabla 5.4 se muestran los valores de la tasa de acreción para todos los modelos en una etapa estacionaria. Primero observamos que el viento horizontal (modelos HD3 y MHD3) tiene la tasa de acreción más alta para la velocidad usada aquí, aproximadamente entre 10 % a 20 % por encima de los otros casos. En segundo lugar, se puede pensar que debido al ángulo de apertura más amplio en el cono de choque para los casos magnetizados y la formación de puntos rarificados en la densidad, la tasa de acreción para el MHD podra ser muy diferente de la de los casos puramente HD. Sin embargo, encontramos que el cambio es bajo, del orden de 3 %. Otro aspecto que los valores de la Tabla muestran es que la dirección del viento influye

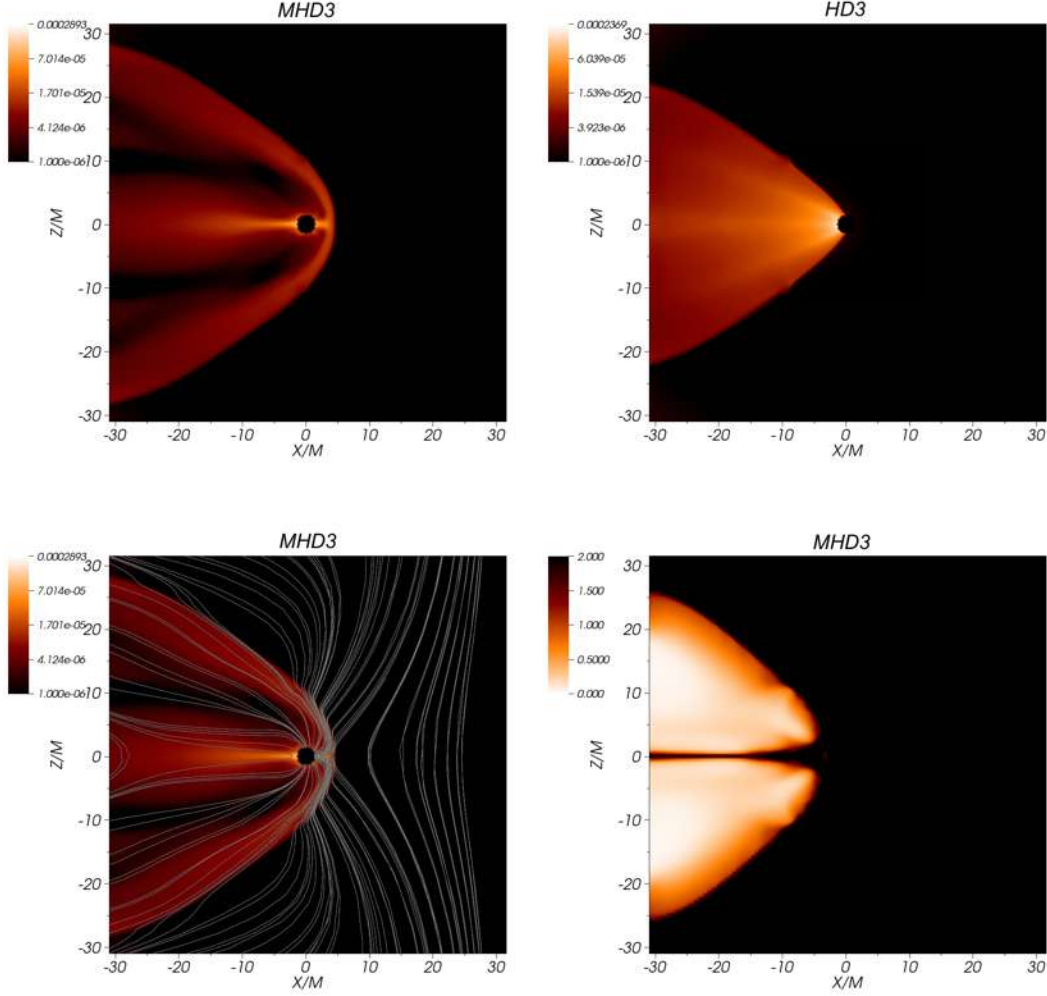


Figura 5.11. Se muestra el instante de tiempo $t = 1000M$ de la densidad de masa en reposo en el plano $y = 0$ para los modelos MHD3 y HD3 con tamaño $r_{hor}/r_{acc} = 0,05$. Se muestran las líneas de campo magnético y el parámetro β . Para este caso, la zona rarificada dentro del cono de choque donde $\rho \ll 0$, es simétrica a lo largo del plano $z = 0$.

más en la tasa de acreción que en el hecho de tener HD puro o MHD. Por último, es más importante la velocidad del viento, como puede verse en la comparación de los modelos MHD1 y MHD4, con diferencias significativas del 100 %.

Efecto de la velocidad del viento. Uno puede preguntarse si la velocidad del viento produce cambios morfológicos significativos. En el régimen puramente HD encontramos que la velocidad de acreción del sistema y el ángulo de apertura del cono de choque varían dependiendo de la velocidad del viento, los vientos explícitamente más

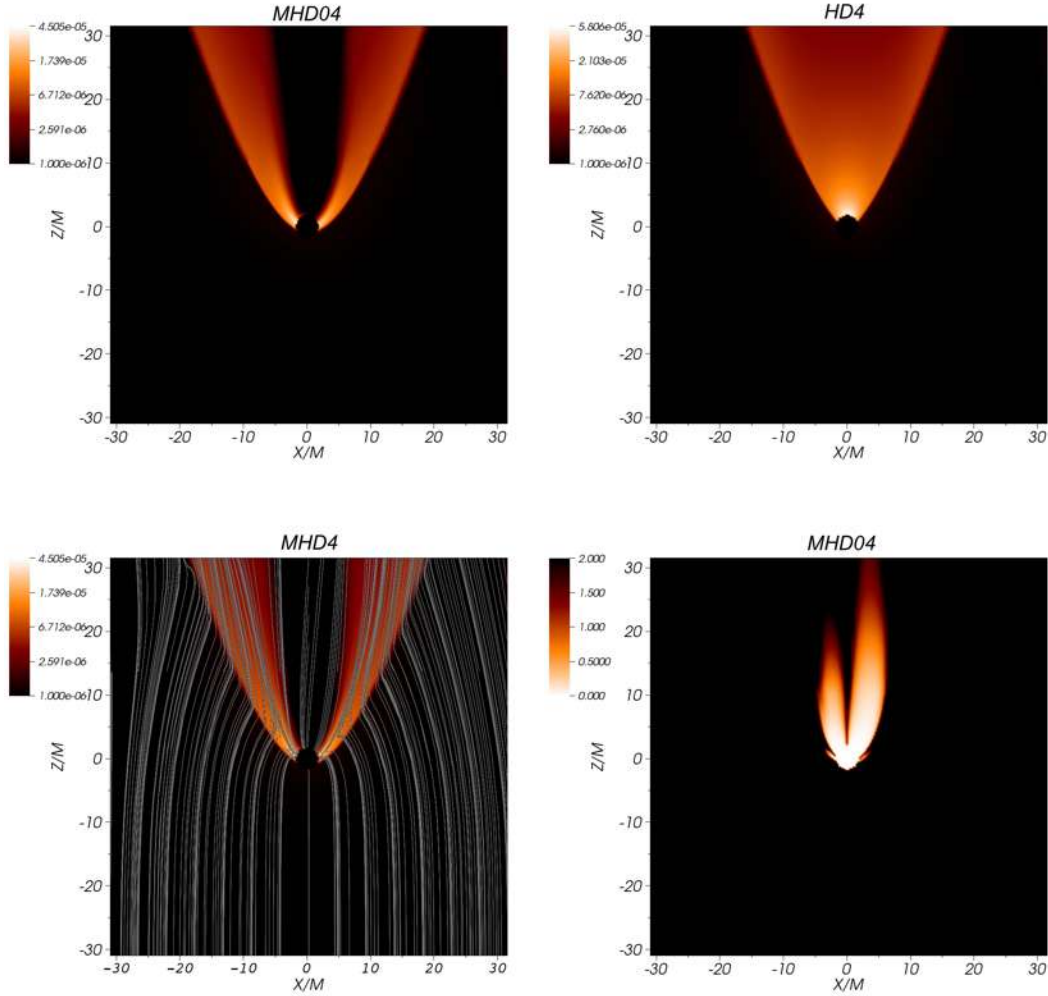


Figura 5.12. Se muestra el instante de tiempo $t = 1000M$ de la densidad de masa en reposo en el plano $y = 0$, para los modelos MHD4 y HD4 con $r_{hor}/r_{acc} = 0,4$. Se muestran las líneas del campo magnético y el parámetro β . La densidad en la zona rarificada dentro del cono de choque es del orden de 10^{-6} , dicho valor es menor que en el caso MHD1 que es de 10^{-5} . Este es un claro ejemplo de cómo la velocidad del viento influye en el comportamiento del sistema. Como en los casos anteriores, las zonas rarificadas coinciden con las regiones donde $\beta < 1$. Las líneas del campo magnético son axisimétricas como se esperaba.

lentos corresponden a conos de choque con ángulo de apertura más amplios y mayores tasas de acreción. En este trabajo verificamos que ocurre lo mismo con el caso magnetizado. Una nueva característica importante apareció, relacionada con la zona rarificada dentro del cono de choque. La densidad en la zona rarificada es un orden de magnitud menor en el modelo de caso rápido MHD4 que en el modelo de caso lento

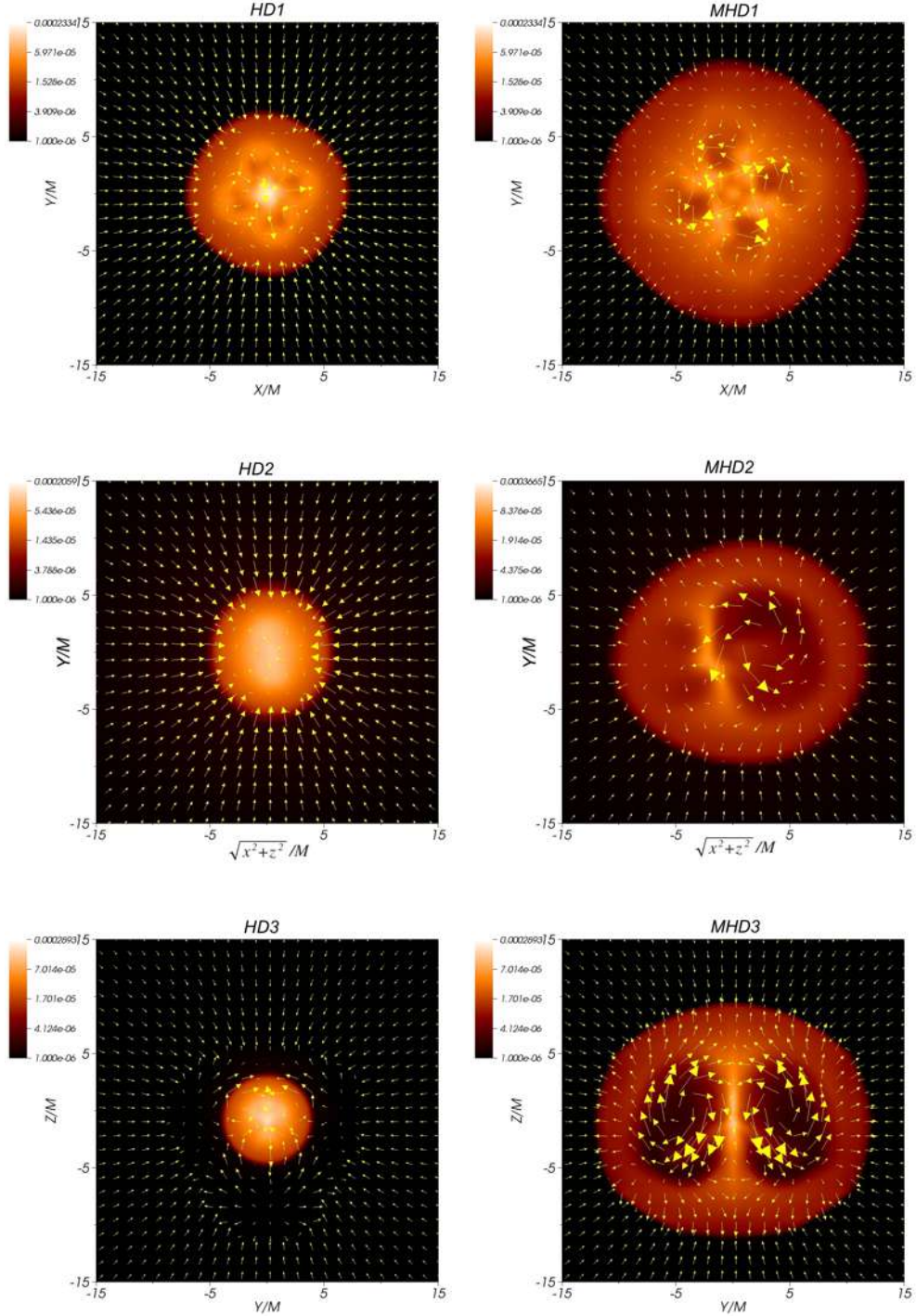


Figura 5.13. Se muestra el instante de tiempo $t = 1000M$ de la densidad de masa en reposo ρ y campo de velocidades v^i para los modelos HD1, HD2, HD3, MHD1, MHD2 y MHD3 en la primera y segunda columnas. Para los modelos HD1 y MHD1 se muestran los campos en el plano $z = 2$, situados en la región *downstream* del hoyo negro. Para los modelos HD2 y MHD2 se muestran los resultados en el plano $x + z = 4$, también en la región *downstream* y para los modelos HD3 y MHD3 se muestran los resultados en el plano $x = -2$. En esta figura podemos observar la importancia de la dirección del viento y la diferencia de morfología entre los modelos HD y MHD.

Tabla 5.4. Valores de la tasa de acreción ($\dot{M}$) de todos los casos tratados. El caso perpendicular al eje de rotación del hoyo negro es la configuración que tiene el máximo valor de $\dot{M}$. $\dot{M}$ no cambia significativamente entre los casos MHD y HD.

Modelo	Orientación	$\dot{M}$
MHD1	$\uparrow\uparrow$	$0,66 \times 10^{-3}$
HD1	$\uparrow\uparrow$	$0,68 \times 10^{-3}$
MHD2	$\nearrow\uparrow$	$0,67 \times 10^{-3}$
HD2	$\nearrow\uparrow$	$0,63 \times 10^{-3}$
MHD3	$\rightarrow\uparrow$	$0,78 \times 10^{-3}$
HD3	$\rightarrow\uparrow$	$0,77 \times 10^{-3}$
Modelo	Orientación	$\dot{M}$
MHD4	$\uparrow\uparrow$	$0,31 \times 10^{-3}$
HD4	$\uparrow\uparrow$	$0,33 \times 10^{-3}$

MHD1 como puede verse en las Figs. 5.9 y 5.12.

En esta sección presentamos por primera vez la acreción supersónica de un viento magnetizado sobre un hoyo negro en 3D. Para ello se seleccionó un conjunto de cuatro escenarios generales que proporcionaron información sobre el comportamiento general del proceso. En todos los casos comparamos los resultados con la contraparte puramente hidrodinámica.

Los hallazgos importantes incluyen la formación de zonas con características diferentes que no aparecieron en el caso puramente HD. En los casos de viento horizontal y diagonal, la formación de torbellinos transparentes detrás del hoyo negro que vale la pena estudiar y podría tener aplicaciones astrofísicas potenciales. En estas zonas raras también sucede que la presión magnética domina con $\beta < 1$.

Se encontró que la tasa de acreción no es significativamente diferente entre los casos HD y MHD. En cambio, la velocidad y orientación del viento es más importante que el hecho de tener un fluido magnetizado o puramente hidrodinámico.

5.3. Acreción de vientos en estrellas de Bosones

Las Estrellas de Bosones (EBs) son soluciones de las ecuaciones de Einstein originadas por un campo escalar complejo. Originalmente estas soluciones eran esféricamente simétricas, estacionarias y consideraban un potencial escalar de campo libre

[Kaup (1968), Ruffini & Bonazzola (1969)], posteriormente, estos sistemas fueron estudiados con un término de auto-interacción por ejemplo en [Colpi (1986)]. Estos sistemas se desarrollaron y su estabilidad en la relatividad general no lineal fue declarada como consistente con la teoría de la perturbaciones [Seidel and Suen (1990)], incluido el caso con auto-interacción [Balakrishna et al. (1998)]. Bajo condiciones más refinadas, el colapso crítico de las EBs cerca del inicio del colapso fue estudiado en [Hawley & Choptuik (2000)]. En algún momento las EBs funcionaron como casos de prueba para los códigos de relatividad numérica en [Alcubierre et al. (2000), Guzmán (2004)] y eventualmente su papel como fuentes potenciales de ondas gravitacionales (GW) fue estudiado en [Balakrishna et al. (2006)], incluyendo el sistema binario de EBs en [Palenzuela et al. (2008)]. Existen varias reseñas sobre EBs que describen en detalle su historia centrada en soluciones estacionarias. La reseña más reciente que incluye un análisis más dinámico y numérico orientado a la relatividad se puede encontrar en [Liebling & Palenzuela (2012)].

El desempeño más cercano de las EBs en los escenarios astrofísicos ha sido el de simular hoyos negros, esto consiste en analizar la posibilidad de que las EBs puedan desempeñar el papel de hoyos negros debido a su compacticidad, transparencia a la luz y que sólo interactúan gravitacionalmente con la materia ordinaria. Después del reciente descubrimiento de ondas gravitacionales, y la certeza de que las fuentes son sistemas binarios de hoyos negros, las EBs tienen poca oportunidad de ser un simulador de hoyo negro en el régimen de campo fuerte, sin embargo, todavía hay oportunidad para otro tipo de objetos compactos que puedan ser fuente de ondas gravitacionales [Cardoso et al. (2016), Chirenti & Rezzolla]. Por sus características las EBs podrían mantener un disco de acreción cuyo espectro podría ser el mismo que el de un hoyo negro de la misma masa [Torres (2002), Guzmán (2006)]. Las restricciones que se le podrían poner a las EBs como simuladores implican el análisis de las diferencias en la forma en que deflexan la luz en comparación con la deflexión debido a los hoyos negros [Guzmán & Rueda-Becerril] y las diferentes señales GW de EBs perturbadas [Balakrishna et al. (2006)]. Estas dos restricciones deben ser refinadas bajo observaciones de alta resolución, por ejemplo, el telescopio Event Horizon [Doeleman et al. (2008)]. Además, con el descubrimiento de GW150914 y GW151226, se ha demostrado que los modos de resonancia son observables por los detectores LIGO y podrían ser comparables con los de las EBs y posiblemente con sus correspondientes colas

[Lora-Clavijo et al. (2010)], además, las EBs en el régimen de campo débil tienen una oportunidad importante en el contexto de la materia oscura, no sólo como halos de EBs gigantescos, sino también como estrellas de acción desempeñando el papel de mini-MACHOS (objetos masivos de halos compactos en un rango de masa bajo) para masas de bosones físicamente aceptables [Chavanis (2016)].

En este trabajo se estudió otra diferencia potencial entre los hoyos negros y las EBs, el proceso de acreción de Bondi-Hoyle. Como ya se ha visto en la sección anterior, se sabe que, cuando un viento supersónico se aproxima a un espacio-tiempo de un hoyo negro, se forma un cono de choque de alta densidad en la parte trasera del hoyo negro. En esta sección se explora la formación de una estructura de alta densidad del gas sobre una EBs y se compara con el cono de choque formado detrás de un hoyo negro de la misma masa. Para ello se resuelven numéricamente las ecuaciones de Euler relativistas bajo las condición de que el viento no distorsiona el espacio-tiempo de fondo tanto de la EB como el del hoyo negro. El viento en cuestión obedece una ecuación de estado de gas ideal. Se analizan dos regímenes de velocidad, un viento supersónico lento que equivale al caso de considerar un acretor pequeño y un viento supersónico rápido que corresponde a un tamaño de acretor grande según [Foglizzo et al. (2005)].

5.3.1. Descripción del sistema

Espacio-tiempo de las estrellas de Bosones. Las EBs se construyen a partir de la densidad lagrangiana de un campo escalar complejo acoplado débilmente a la gravedad $\mathcal{L} = -\frac{R}{16\pi G} + g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi^*\partial_\nu\phi + V(|\phi|^2)$, donde ϕ es el campo escalar y V el potencial de autointeracción [Jetzer (1992), Schunck & Mielke (2003)]. El tensor de energía-momento resultante es $T_{\mu\nu} = \frac{1}{2}[\partial_\mu\phi^*\partial_\nu\phi + \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi^*] - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}[\phi^{*,\alpha}\phi_{,\alpha} + V(|\phi|^2)]$. Las EBs están relacionadas con el potencial $V = m^2|\phi|^2 + \frac{\lambda}{2}|\phi|^4$, aunque el nombre estrella de bosón se ha aplicado a soluciones utilizando otros tipos de potenciales (véase, por ejemplo, [Schunck & Torres (2000)]). La masa del bosón es m y λ es el coeficiente de auto-interacción del campo. La ecuación de evolución para el campo escalar es la ecuación de Klein-Gordon:

$$\left(\square - \frac{dV}{d|\phi|^2}\right)\phi = 0, \quad (5.4)$$

donde, $\square\phi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu[\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi]$. Las EBs son soluciones esféricamente simétricas de las ecuaciones de Einstein para el tensor de energía-momento y la ecuación de Klein-Gordon, asumiendo que el campo escalar tiene una dependencia de tiempo armónica $\phi(r, t) = \phi_0(r)e^{-i\Omega t}$, donde, r es la coordenada radial en coordenadas esféricas. Esta condición implica que el tensor energía-momento y la geometría del espacio-tiempo son independientes del tiempo. La construcción de las soluciones de una EBs consiste en asumir la métrica en coordenadas normales $ds^2 = -\alpha(r)^2 dt^2 + a(r)^2 dr^2 + r^2 d\Omega^2$. El sistema Einstein-Klein-Gordon se reduce al conjunto de EDOs:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial_r a}{a} &= \frac{1 - a^2}{2r} + \\
&\quad \frac{1}{4}\kappa_0 r \left[\omega^2 \phi_0^2 \frac{a^2}{\alpha^2} + (\partial_r \phi_0)^2 + a^2 \phi_0^2 (m^2 + \frac{1}{2}\lambda \phi_0^2) \right], \\
\frac{\partial_r \alpha}{\alpha} &= \frac{a^2 - 1}{r} + \frac{\partial_r a}{a} - \frac{1}{2}\kappa_0 r a^2 \phi_0^2 (m^2 + \frac{1}{2}\lambda \phi_0^2), \\
\partial_{rr} \phi_0 &+ \partial_r \phi_0 \left(\frac{2}{r} + \frac{\partial_r \alpha}{\alpha} - \frac{\partial_r a}{a} \right) + \omega^2 \phi_0 \frac{a^2}{\alpha^2} \\
&- a^2 (m^2 + \lambda \phi_0^2) \phi_0 = 0.
\end{aligned} \tag{5.5}$$

que se resuelve bajo las condiciones $a(0) = 1$, $\phi_0(0)$. Para garantizar regularidad y consistencia espacial plana en el origen se considera que $\partial_r \phi_0(0) = 0$ y la condición $\phi_0(\infty) = 0$ asegura que sea asintóticamente plana en el infinito, este conjunto de condiciones se discuten con mayor detalle en [Ruffini & Bonazzola (1969), Balakrishna et al. (1998), Hawley & Choptuik (2000), Guzmán (2009)]. Estas condiciones junto con las mencionada en (5.5) definen un problema de valor propio para ω el cual, por cada valor central de ϕ_0 existe un ω único que satisface las condiciones de contorno, rescalando, las variables como $\phi_0 := \sqrt{\frac{\kappa_0}{2}}\phi_0$, $r := mr$, $t := \omega t$, $\alpha := \frac{m}{\omega}\alpha$ y $\Lambda := \frac{2\lambda}{\kappa_0 m^2}$ el sistema se puede escribir sin la dependencia en m y ω como:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial_r a}{a} &= \frac{1 - a^2}{2r} + \\
&\quad \frac{1}{2}r \left[\phi_0^2 \frac{a^2}{\alpha^2} + (\partial_r \phi_0)^2 + a^2 (\phi_0^2 + \frac{1}{2}\Lambda \phi_0^4) \right], \\
\frac{\partial_r \alpha}{\alpha} &= \frac{a^2 - 1}{r} + \frac{\partial_r a}{a} - r a^2 \phi_0^2 (1 + \frac{1}{2}\Lambda \phi_0^2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_{rr}\phi_0 + \partial_r\phi_0 \left(\frac{2}{r} + \frac{\partial_r\alpha}{\alpha} - \frac{\partial_r a}{a} \right) + \phi_0 \frac{a^2}{\alpha^2} \\ - a^2(1 + \Lambda\phi_0^2)\phi_0 = 0. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Ahora, el autovalor ω se incluye en el valor central del lapso α debido al reescalamiento. Resolvemos (5.6) usando diferencias finitas con un runge-Kutta de cuarto orden con tamaño de paso adaptativo y una rutina tipo *shooting* que bisecta el valor central de α y así calcular ω .

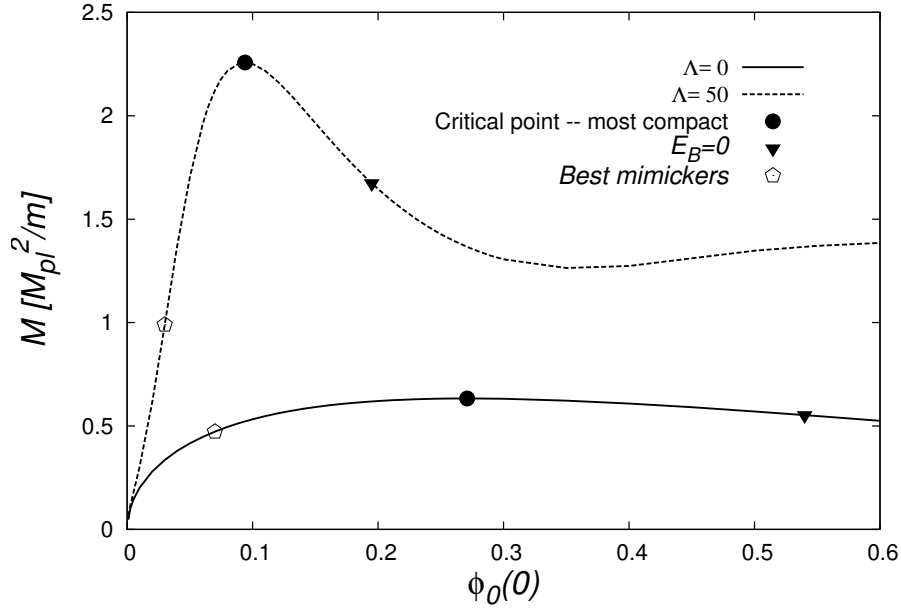


Figura 5.14. En el diagrama M vs $\phi_0(0)$ se muestran las configuraciones de equilibrio para los dos valores de Λ utilizados en este estudio. Cada punto en las curvas corresponde a una solución del problema del valor propio y representa una configuración de EBs. Los círculos llenos indican la solución crítica que separa rama estable de la inestable, la cual es de todas la configuraciones estables la más compacta. Esas configuraciones a la izquierda de los máximos representan configuraciones estables. Por completés presentamos una vista ampliada de la rama inestable. Los triángulos invertidos indican el punto en el que la energía de unión es cero. Esas configuraciones entre los círculos rellenos y los triángulos invertidos (a lo largo de cada secuencia) se colapsan en hoyos negros si se les aplica una perturbación. Las configuraciones a la derecha de los triángulos invertidos se dispersan. Los pentágonos corresponden a los mejores simuladores de hoyos negros para $\Lambda = 0$ y $\Lambda = 50$ cuando se usa un modelo de disco de acreción estacionario.

Las soluciones de la ecuación (5.6) definen configuraciones estables, una para cada valor de Λ . En la Fig. 5.14 se muestran secuencias de configuraciones en equilibrio

para los valores $\Lambda = 0$ y $\Lambda = 50$, los cuales, son casos con autointeracción. Cada punto en las curvas corresponden a una solución de EBs para un valor dado del campo central, en cada una de ellas, se resaltan tres puntos para cada valor de Λ debido a su importancia:

- i) El punto crítico (resaltado con un círculo relleno), indica el umbral entre las ramas estables e inestables de cada secuencia, explícitamente, las configuraciones a la izquierda de este punto son estables y las que están a la derecha son inestables [Hawley & Choptuik (2000), Seidel and Suen (1990), Balakrishna et al. (1998), Guzmán (2004)].
- ii) El punto en el que la energía de enlace $E_B = M - Nm = 0$ (resaltado con un triángulo invertido), donde $N = \int j^0 d^3x = \int \frac{i}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} [\phi^* \partial_\nu \phi - \phi \partial_\nu \phi^*] d^3x$ es el número de partículas, el cual, es la cantidad conservada debido a la invariancia bajo el grupo global $U(1)$ de la densidad Lagrangiana. La masa Misner-Sharp $M = (1 - 1/a^2)r/2$ evaluada en el punto más externo del dominio numérico. Las configuraciones entre punto umbral inestable y el punto de energía cero de enlace, tiene energía de enlace igual a ($E_B < 0$) y colapsa en hoyo negro mientras que aquellas configuraciones a la derecha tienen energía de enlace positiva y son dispersadas [Guzmán (2004), Guzmán (2009)]. La rama astrofísicamente relevante es la rama estable, que contiene configuraciones que no se espera que colapsen o dispersen bajo perturbaciones.
- iii) Los puntos marcados con un pentágono corresponden a dos Estrellas de Bosones, una en la curva $\Lambda = 0$ otra para $\Lambda = 50$, que es la configuración que mejor imita un hoyo negro de la misma masa usando un modelo de disco de acreción fijo [Guzmán & Rueda-Becerril].

5.3.2. Selección de las Estrellas de Bosones

Se quiere comparar algunas propiedades de la distribución de gas durante la interacción con una configuración de EB. En particular es interesante saber cómo la auto-interacción Λ y la compacticidad de la EB afectan la distribución del gas. Con el fin de investigar los efectos de Λ se puede elegir cualquier configuración estable para los dos valores de $\Lambda = 0, 50$, siempre y cuando sean estables, entonces, las diferencias

en la configuración del gas se deberán al valor de Λ . En lugar de elegir cualquiera de las dos configuraciones, se eligieron dos que se han utilizado como simuladores de hoyos negros en el contexto de los discos de acreción fijos [Guzmán & Rueda-Becerril]. La configuración $\Lambda = 0$ y la de $\Lambda = 50$ están marcadas con pentágonos en la Figura. 5.14, estas configuraciones tienen los siguientes parámetros:

1. Mejor imitador con $\Lambda = 0$ (BSBM Λ 0), con parámetros $\phi_0(0) = 0,07$ y $M = 0,47297[M_{pl}^2/m]$.
2. Mejor imitador con $\Lambda = 50$ (BSBM Λ 50), con parámetros $\phi_0(0) = 0,03$ y $M = 0,9898[M_{pl}^2/m]$.

Por otro lado, se estudiaron los efectos de la compacticidad escogiendo los casos en que las EBs son más compactas en el caso $\Lambda = 0$. En términos del potencial gravitacional que genera, se espera que la configuración más compacta sea más parecida a un hoyo negro. Hay que tener en cuenta que la configuración más compacta de la rama estable está también en el inicio de la inestabilidad, por lo tanto, cualquier perturbación podría colapsar en un hoyo negro, sin embargo, el hecho de que se trata del caso más compacto, ayudará a entender el efecto de compacticidad. La configuración que se utilizó se señala en la Fig. 5.14 con un círculo relleno, a lo largo de la familia $\Lambda = 0$, y sus parámetros son:

3. Caso más compacto con $\Lambda = 0$ (MCBS Λ 0), y parámetros $\phi_0(0) = 0,271$ y $M = 0,633[M_{pl}^2/m]$.

En estas configuraciones de EBs se enfocó el estudio.

5.3.3. Resultados

En primer lugar, es importante mencionar que las EBs son esféricamente simétricas y por lo tanto no rotan, entonces, para hacer una comparación apropiada se consideran hoyos negros no rotantes. Por lo tanto, la orientación del viento con respecto a la EB o al HN no es importante. Los efectos de la EB en el viento tienen que ser comparados con los efectos producidos sobre las propiedades del viento con los de un hoyo negro de Schwarzschild de la misma masa. Se simuló la evolución del viento mediante la solución de las ecuaciones de Euler relativistas sobre un espacio-tiempo

curvo, correspondiente a una EB o HN. El viento se propaga inicialmente a lo largo de una dirección dada con velocidad asintótica $v_{infty}^2 = v^i v_i$. Se asume que el gas inicialmente tiene una densidad de masa de reposo constante espacialmente, también, se supone que obedece una ecuación de estado $p = (\Gamma - 1)\rho\epsilon$, que se usa para calcular la velocidad asintótica del sonido $c_{s\infty}$. Una vez que se define el valor de $c_{s\infty}$ y asume que la densidad es constante inicialmente $\rho = \rho_{ini}$, la presión puede escribirse como $p_{ini} = c_{s\infty}^2 \rho_{ini} / (\Gamma - c_{s\infty}^2 \Gamma_1)$. Para evitar valores negativos y cero de la presión, la condición $c_{s\infty} < \sqrt{\Gamma - 1}$ debe satisfacerse. Finalmente, con este valor para p_{ini} , la energía interna específica interna se reconstruye usando la ecuación de estado. En este trabajo se uso el valor $\Gamma = 4/3$. También reducimos el análisis a dos regímenes de velocidad del viento, un viento rápido y un viento lento lo cual es equivalente a escoger diferentes escalas relativas entre el radio del objeto compacto y el radio de acreción (véase, por ejemplo la Sec. 5.1). Las propiedades específicas de los regímenes rápidos y lentos son las siguientes:

Viento rápido. $\sqrt{v_\infty^2} = 0,5c$, $r_{acc} = 3,63M$, $\rho_0 = 1 \times 10^{-6} M^{-2}$.

Viento lento. $\sqrt{v_\infty^2} = 0,25c$, $r_{acc} = 47,297M$, $\rho_0 = 1 \times 10^{-6} M^{-2}$,

donde, el radio de acreción es $r_{acc} = 2M/(v_\infty^2 + c_{s\infty}^2)$ y M es la masa del acretor. Observe que v_∞ es en unidades de c , r_{acc} en unidades de la masa del acretor M y la densidad en unidades de M^{-2} . Más detalles relacionados con la relación entre las condiciones iniciales y el tamaño de un dominio apropiado, así como configuraciones más generales del viento se pueden encontrarse en [Gracia-Linares & Guzmán (2015)]. En todos los casos el espacio-tiempo de la EB y el HN se encuentra descrito en coordenadas cartesianas y el dominio es un cubo centrado en el origen $(x, y, z) \in [x_{min}, x_{max}] \times [y_{min}, y_{max}] \times [z_{min}, z_{max}]$. Se eligió que el viento se moviera a lo largo de la dirección x con los parámetros descritos anteriormente. La mitad del dominio $x < 0$ define lo que se llamó la región *upstream* mientras que la otra mitad $x > 0$ la región *downstream* del fluido. Para la evolución de la ecuaciones de Euler relativistas, se utilizó la implementación **GRHydro** del ETK descrita en el Cap. 3, específicamente se utilizó el resolutor de Riemann aproximado **HLLE** combinado con el reconstructor de variables *mindmod*. Para la integración en el tiempo se utilizó el método de líneas con un integrador de cuarto orden Runge-Kutta. Utilizamos la implementación de

condiciones de frontera **IFMBoundaries** para fijar condiciones de flujo entrante en la región *upstream* (plano $x = x_{min}$) y de flujo saliente en la *downstream* (plano $x = x_{max}$), en las demás caras de cubo se utilizaron condiciones de flujo saliente. Se utilizó el driver **Carpet** [Schenetter et al. (2006)] para definir 3 niveles de refinamiento con resoluciones $\Delta_1 = 2\Delta_2 = 4\Delta_3 = 0,25M$.

El espacio-tiempo de la EB construido anteriormente, requiere de un cierto procesamiento antes de iniciar su evolución. La solución se encuentra escrita en coordenadas esféricas y por lo tanto tiene que ser interpolada de la malla esférica a la malla 3D en coordenadas cartesianas del ETK, después de hacerlo, las funciones métricas se transforman de esféricas a cartesianas. Dado que se asume que el viento no distorsiona el espacio-tiempo, el campo escalar no está obligado a evolucionar o desempeñar algún papel durante la evolución porque el campo escalar no interactúa con el viento, además, como los Bosones interactúan sólo gravitacionalmente con el viento, únicamente es necesario conocer la geometría del espacio-tiempo de la EB. Para fijar las condiciones iniciales en el caso que el acretor es el hoyo negro, se sigue la misma metodología que en la Sec. 5.1

Caso $\Lambda = 0$. Sabiendo que las EBs no tienen superficie, un horizonte de eventos y la materia ordinaria interactúa con los Bosones sólo a través de la gravedad, se espera que un viento entrante encuentre un espacio-tiempo ligeramente doblado y las líneas de corriente sufran una reconfiguración y el gas posiblemente se acumule en alguna región y luego escape al infinito, esto es porque no se espera ningún proceso de acreción. Lo que las simulaciones mostraron es que después de un tiempo inicial transitorio, como en la acreción sobre un hoyo negro, la configuración se acerca a un régimen estacionario con una región de alta densidad de gas en forma de cono formada en la parte trasera de la estrella Bosones. Este fenómeno en la densidad se muestra en la Fig. 5.15 para la configuración BSBMA0 junto con el caso de un hoyo negro con la misma masa, usando dos velocidades de viento.

La morfología indica que se forma una región de alta densidad sobre la parte superior de la EB, una estructura en forma de cono aparece pero es diferente de la que se forma detrás de un HN. En el caso del viento *rápido* hay un importante gradiente de densidad, aunque el máximo de la densidad del cono es aproximadamente cinco veces menor que el cono de choque detrás del HN. En el caso *lento* la densidad es un orden de magnitud menor. Esto significa que cuando el viento es más lento, las

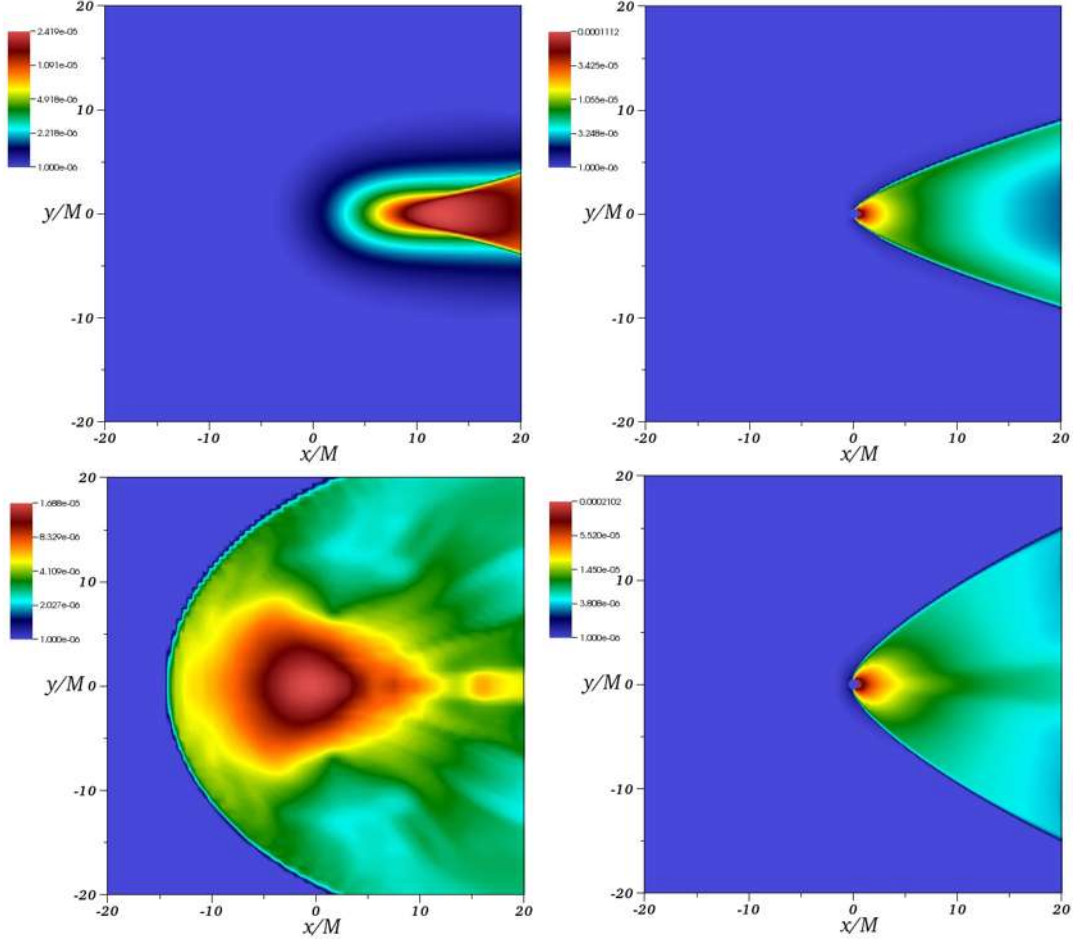


Figura 5.15. Densidad del gas que se mueve a lo largo de la dirección x de izquierda a derecha para el mejor simulador sin auto-interacción BSBMA0. En el panel superior se muestra el caso rápido correspondiente a una velocidad asintótica de $0,5c$, mientras que en el panel inferior mostramos un viento más lento con velocidad $0,25c$. Las EBs están situadas en el centro de coordenadas, donde se acumula la densidad máxima del gas. Para comparar ambos casos, mostramos a la derecha el cono de choque formado cuando, en vez de una EB, tenemos un hoyo negro de Schwarzschild con la misma masa. El círculo dentro del hoyo negro es la región de excisión en el plano $z = 0$.

diferencias en la densidad del cono en la EBs y en el HN son más relevantes.

También, la morfología para el viento lento tiene más estructura que en el caso de viento rápido. Llama la atención que la densidad en el marco inferior izquierdo de la Fig.5.15 es realmente estacionario.

Con el fin de conocer los efectos de la compacidad de la EB, en la Fig. 5.16 se muestran los resultados para la EB más compacta con $\Lambda = 0$ y la velocidad $0.5c$, junto

con el cono de choque debido a un HN de la misma masa. El perfil de densidad se aproxima nuevamente a un régimen estacionario. La morfología del cono en la parte superior de la EB es diferente de la de BSBM $\Lambda 0$ (parte superior izquierda de la Fig. 5.15). La mayor densidad del gas se encuentra en el centro de la EB y es casi la mitad de la densidad máxima del gas del cono de choque en el espacio-tiempo del HN. Esto significa que cuanto más compacta es la EBs, la densidad se comporta de manera similar en mayor medida a la del cono de choque en un espacio-tiempo de un HN.

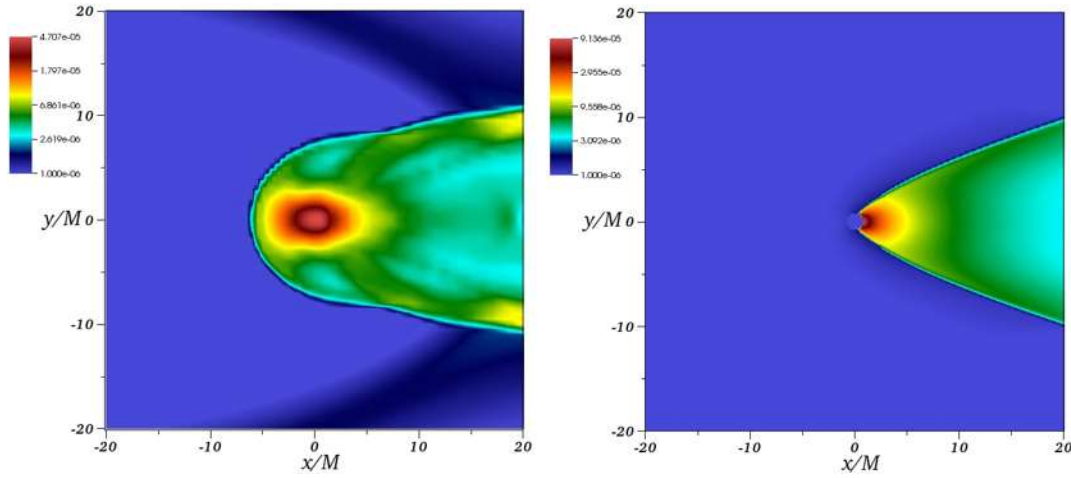


Figura 5.16. Densidad del gas moviéndose de izquierda a derecha con velocidad $0,5c$. A la izquierda se muestra el caso de EB más compacta MCBSA0, y a la derecha el caso de un viento para un HN de la misma masa.

Caso $\Lambda = 50$. Este valor de la auto-interacción es bien conocido por permitir que la EBs sea más masiva. Por lo tanto, mostrar los resultados de la mejor imitador de hoyo negro con $\Lambda = 50$ de acuerdo con [Guzmán & Rueda-Becerril] es importante. La morfología de alta densidad en forma de cono es casi la misma que sin auto-interacción. El máximo valor de la densidad del gas es aproximadamente un tercio de la densidad más alta del cono de choque en un HN de la misma masa, esto, para un viento rápido, mientras que un quinto en el caso del viento lento. Esto significa que al considerar la auto-interacción, la densidad del gas es más parecida a la de un HN que cuando se usa $\Lambda = 0$. Una observación final sobre la morfología es que para el viento lento, una estructura similar a un cono de choque parece estar evolucionando en la zona *upstream*, sin embargo, no se mueve y se mantiene estacionaria.

En esta sección se presentó el proceso de acreción Bondi-Hoyle de un viento sobre un espacio-tiempo de una EB y se comparó con el proceso cuando el viento es acretado

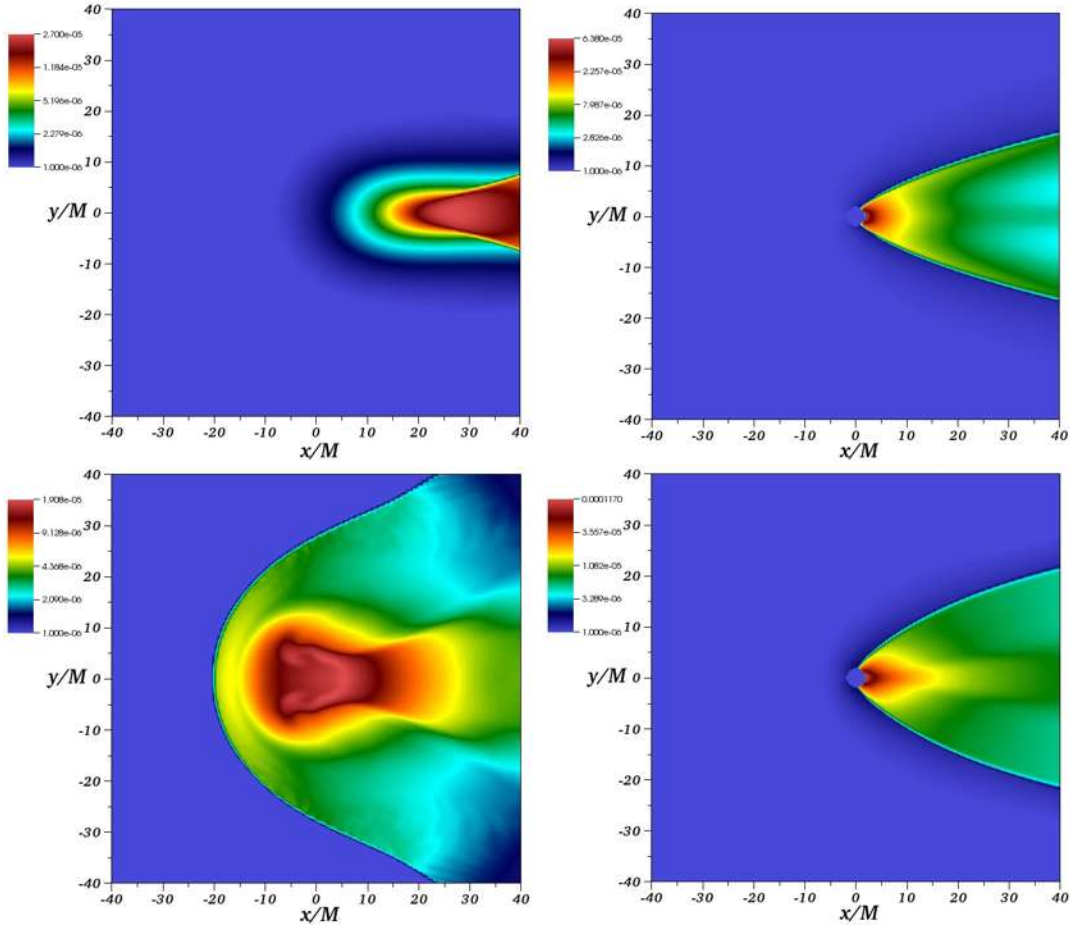


Figura 5.17. Densidad del gas que se mueve de izquierda a derecha para el mejor simulador BSBMA50. Como en el caso sin auto-interacción, a la izquierda se muestra el momento de la densidad una vez que la estructura de alta densidad se ha estabilizado y a la derecha se muestra el cono de choque formado cuando el acretor es un hoyo negro de la misma masa. Las velocidades son nuevamente $0,5c$ (arriba) y $0,25c$ (parte inferior).

por un hoyo negro de la misma masa. Para ello se simuló la evolución de un viento que consiste en un gas ideal con velocidades supersónicas rápidas y lentas.

Con el fin de aprender sobre el impacto de la auto-interacción ese estudió el proceso en dos configuraciones de EBs típicas con $\Lambda = 0$ (BSBMA0) y $\Lambda = 50$ (BSBM A50). En los dos casos, para los vientos rápidos y lentos, la densidad alcanza una configuración estacionaria con una forma cónica y alta densidad, sobre la Estrella del Bosones.

Para el caso de viento rápido (lento) se encontró que la densidad es menor en una EB que cuando la acreción ocurre en un HN con la misma masa, por un factor de

cinco (doce) para $\Lambda = 0$, mientras que cuando la EB tiene una auto-interacción alta $\Lambda = 50$ la densidad del gas en el régimen estacionario es menor que en el BH por un factor de tres (seis). Esto indica, por un lado, que una configuración con mayor auto-interacción produce una densidad de gas más parecida en magnitud a la del cono de choque en un HN. Por otro lado estos resultados muestran que cuanto más rápido es el viento, más parecida es la densidad de la estructura.

También se quería explorar la influencia de la compacidad de la EB. Para eso usamos la configuración (BSBMA0) y la comparamos con la EB más compacta para $\Lambda = 0$ (MCBS $\Lambda 0$) para el viento rápido. Para la configuración más compacta se encontró que la densidad de pico del gas es menor que con el EB sólo por un factor de dos. Por lo tanto, se encontró que cuando la EB es más compacta, la densidad de la configuración de gas estacionario es más similar a la del cono de choque en la parte superior de un HN.

Tomando estos resultados juntos, encontramos que la densidad del gas en el proceso de Bondi-Hoyle en un espacio-tiempo generado por una EBs es más similar al de un cono de choque en un espacio-tiempo de HN cuando el viento es rápido, el EBs tiene auto-interacción positiva y cuando es más compacto.

Estos resultados son peculiares ya que las EBs no tienen horizonte de eventos, ni superficie mecánica, no acretan en el sentido de que atrapan el gas, sin embargo, son capaces de concentrar la densidad de gas en una pequeña región con alta densidad. Se han mostrado algunas diferencias morfológicas en la configuración del gas, a saber, el ángulo del cono de la región de alta densidad y la densidad misma. Sin embargo, la densidad de gas es comparable para las EBs y los HNs. Con el fin de proporcionar una comparación cuantitativa en motivos de observación, se está planeando realizar el análisis utilizando hidrodinámica relativista con términos radiativos [Rivera-Paleo & Guzmán (2016)] con el fin de estimar las curvas de luminosidad del proceso.

A lo largo de este capítulo se presentaron los proyectos más importantes que se realizaron durante el trabajo doctoral. Los estudios aquí presentados han sido publicados en revistas de refereo internacional. Como perspectiva a corto plazo, se pretende mejorar el modelo mediante la inclusión de la evolución de la geometría del espacio-tiempo.

Conclusiones y contribuciones

Los estudios principales en los que se enfocó este trabajo fueron el problema de acreción de vientos en hoyos negros en tres dimensiones y el problema del choque de hoyos negros, para lograr estos objetivos se debieron conjuntar tanto conceptos teóricos como prácticos. Las conclusiones y contribuciones más importantes en este trabajo son:

1. Se construyó un código que permite, a petición del usuario, aplicar de manera independiente condiciones de frontera de flujo entrante o flujo saliente en cada cara del dominio numérico dentro del ETK llamada `IFMBoundaries`. Dicha implementación se ha utilizado en los trabajos [Gracia-Linares & Guzmán (2015), Gracia-Linares & Guzmán (2016), Rivera-Paleo & Guzmán (2017), González-Avilés et al. (2017)].
2. Se construyó un catálogo de 31 ondas gravitacionales debida al choque de hoyos negros. Una aplicación del catálogo se puede encontrar en el estudio: *Estimaciones de parámetros en colisiones binarias de hoyos negros utilizando redes neuronales* [Carrillo et al. (2016)] donde se presenta un algoritmo basado en redes neuronales artificiales, que estima el cociente de masas en el choque de hoyos negros a partir del *strain* de una onda gravitacional.
3. Por primera vez, se estudió la acreción de vientos supersónicos en hoyos negros rotantes en tres dimensiones, se estudiaron cinco direcciones representativas del viento respecto al eje de rotación del hoyo negro. El estudio se centró en

la evolución y estabilidad del cono de choque de alta densidad que se forma durante este proceso; se exploró el régimen en el que se esperaba que apareciera una inestabilidad tipo Flip-Flop [Foglizzo et al. (2005)]. En todos los casos analizados, no se encontró ninguna inestabilidad tipo Flip-Flop, los resultados se encuentran publicados en [Gracia-Linares & Guzmán (2015)]

4. Se presentó por primera vez la acreción de vientos supersónicos magnetizados en un hoyo negro rotante en tres dimensiones. El hallazgo más importante en comparación con el escenario puramente hidrodinámico, es la formación de zonas rarificadas donde la presión del campo magnético domina. En estas zonas rarificadas, en los casos en que se tiene un viento perpendicular y diagonal respecto al eje de rotación del hoyo negro, se observó la formación de remolinos dentro del cono de choque. Se encontró que la tasa de acreción en vientos supersónicos en hoyos negros en los regímenes HD y MHD es bastante similar y se concluye que los parámetros más influyentes que cambian la tasa de acreción son la velocidad y la orientación del viento. Los resultados se encuentran enviados y en proceso de revisión en la revista *Physical Review D*.
5. Se presentó la evolución de un viento supersónico que interactúa con una estrella de bosones. Los resultados se compararon con los obtenidos en la evolución de un viento que es acretado por un hoyo negro de la misma masa sin rotación. A pesar de las diferencias físicas entre estos dos objetos el fluido alcanza un estado estacionario de alta densidad detrás de la estrella de bosones comparable con el cono de choque que aparece en el caso de acreción de un viento en un hoyo negro. Los resultados se encuentran publicados en el artículo [Gracia-Linares & Guzmán (2016)].

Espina IFMBoundaries

En este apéndice se presentan algunas pruebas numéricas del módulo de condiciones de frontera que se implementaron en el ETK.

A.0.1. Acreción de Michel

La implementación de la Hidrodinámica relativista, tanto en la relatividad especial como en la general del ETK, ha sido probada rigurosamente [Einstein toolkit(2005), Löffler et al. (2012)]. Sin embargo, se ha añadido un módulo que trata con condiciones de frontera específicas para cada una de las caras del dominio cúbico, que necesita ser probado. Se presenta una prueba relevante para los resultados presentados aquí, la solución exacta de la acreción radial de un gas ideal sobre un hoyo negro de Schwarzschild conocida como la solución de Michel [Papadopoulos & Font (1998)]. El primer paso para construir la solución exacta es integrar las ecuaciones de evolución en simetría esférica $\partial_\mu(\sqrt{-g}\rho u^\mu) = 0$ y $\nabla_\mu T^\mu_0 = 0$,

$$\sqrt{-g}\rho u^r = c_1, \quad \sqrt{-g}p u^r u_0 = c_2. \quad (\text{A.1})$$

El resultado de dividir ambas ecuaciones y diferenciar respecto a ρ , u^r y r es:

$$\frac{1}{\rho}d\rho + \frac{1}{u^r}du^r + \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_r\sqrt{-g}dr = 0, \quad \frac{2\partial_\rho h}{h}d\rho + \frac{2u^r}{u_0^2}du^r - \frac{\partial_r g_{00}}{u_0^2}dr = 0, \quad (\text{A.2})$$

después de sustituir $d\rho/\rho$ en las ecuaciones (A.2) y reordenar términos se obtiene

$\frac{du^r}{u^r} \left[V^2 - \left(\frac{u^r}{u_0} \right)^2 \right] + \frac{dr}{r} \left[2V^2 - \frac{M}{ru_0^2} \right] = 0$, donde $V^2 \equiv \frac{d \ln(\rho h)}{d \ln \rho} - 1$. Para obtener una solución para u^r y r , la siguiente condición debe cumplirse al mismo tiempo

$$V^2 - \left(\frac{u^r}{u_0} \right)^2 = 0, \quad 2V^2 - \frac{M}{ru_0^2} = 0, \quad (\text{A.3})$$

el resultado de resolver la ecuación (A.3) son los puntos críticos $u_c^r = \frac{M}{2r_c}$ y $V_c^2 = \frac{u_c^r}{(u_c^r)^2 - (g_{00})_c}$.

Por otro lado, si consideramos que el gas obedece una ecuación de estado politrópica $P = \kappa \rho^\Gamma$, y si el valor de Γ y ρ_c se fijan, podemos calcular la constante politrópica κ .

Una vez conocidos los valores críticos u_c^r , V_c y κ , se pueden calcular las constantes c_1 y c_2 y el sistema de ecuaciones (A.1), puede ser resuelto encontrando las raíces mediante el método Newton-Raphson.

Para establecer la solución de Michel como condición inicial en la espina **GRHydro** del ETK, primero se debe interpolar las variables hidrodinámicas en la malla cartesiana 3D del ETK y luego, realizar la transformación de coordenadas tensorial del campo de velocidades. Con el fin de establecer el espacio-tiempo de un hoyo negro no rotante se fija el parámetro de rotación del hoyo negro $a = 0$ en la métrica Kerr-Schild. Dado que la acreción de Michel es constante, todas las variables hidrodinámicas tienen que permanecer fijas e independientes del tiempo. Se muestra en la Fig. A.1 instantes de tiempo superpuestos de la evolución de la densidad, la presión y el perfil de velocidad proyectados a lo largo del eje x , la tasa de acreción está medida en una superficie situada en $r = 3 M$. Los valores críticos utilizados en este caso son $\rho_c = 1 \times 10^{-2}$, $r_c = 400M$, mientras que el índice adiabático $\Gamma = 4/3$ [Papadopoulos & Font (1998)]. Como era de esperarse, los perfiles de densidad, de presión, de velocidad y la tasa de acreción permanecen fijas e independientes del tiempo.

Con esta sencilla prueba se muestra que las condiciones de flujo entrante que se implementaron son correctas, en las seis fronteras que corresponden a las 6 caras del dominio cúbico. El dominio numérico se fijó en $[15M, 15M]^3$, se cubrió con una resolución de $0.25M$ en todas las direcciones con radio de excisión $r_{exc} = 1.5 M$. La prueba se ejecutó usando el resolutor aproximado de Riemann HLLC y para la reconstrucción de variables en las interceldas el reconstructor *minmod*.

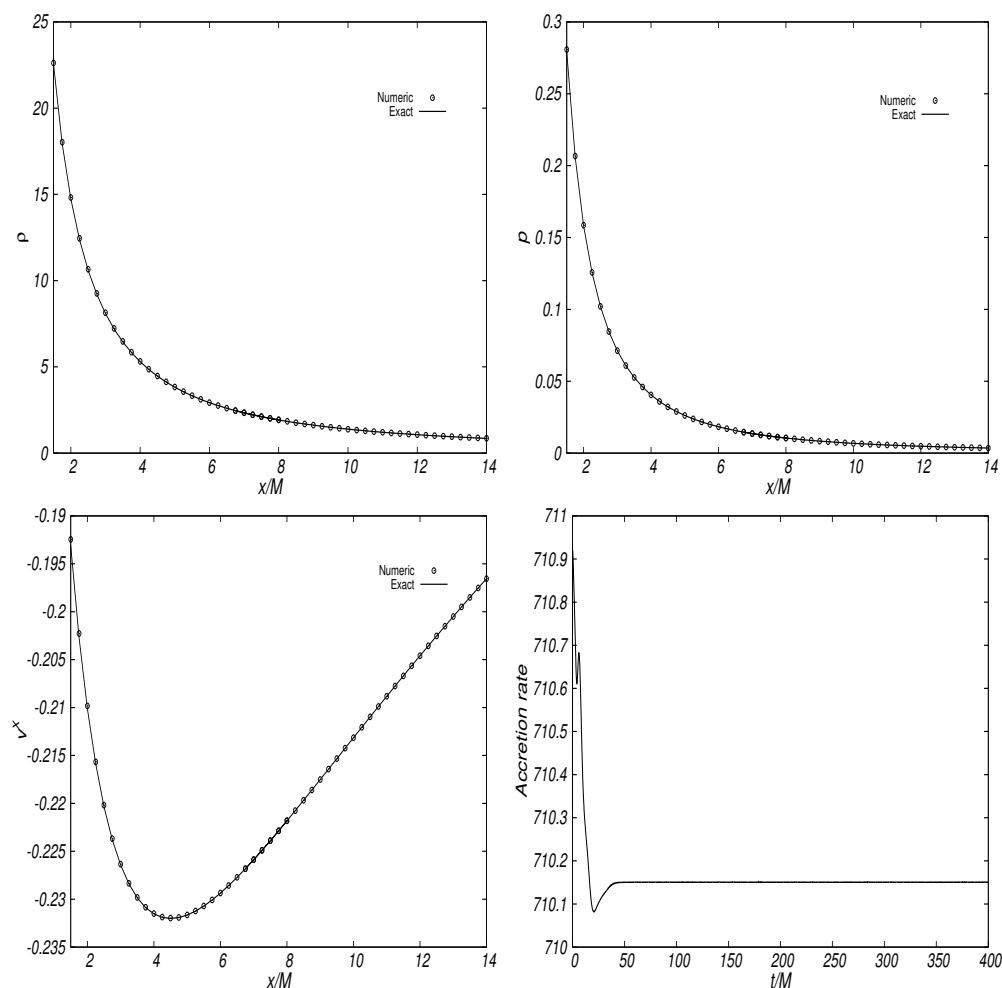


Figura A.1. Instantes superpuestos de la densidad de mas en reposo, presión y de la velocidad v^x cada unidad de tiempo de a $t = 400M$ a lo largo del eje $-x$. Se compara la solución con la solución exacta de Michel con la que fué inicializada la evolución, también, se muestra el ritmo de acreción $\dot{M}$ que muestra el momento de transición estable.

A.0.2. Rotor magnético

Para probar las condiciones de frontera de flujo saliente, se implementó la prueba del rotor magnético relativista [Del Zanna et al. (2003)], la cual es una prueba estándar en 2D para un código numérico de MHD. La configuración inicial de la prueba es la siguiente:

- Se definen dos zonas, la primera está definida por un cilindro de radio $r_c = 0,1$ con densidad $\rho_{int} = 10$, la segunda, el resto del dominio, que se cubre con un

valor de $\rho_{ext} = 1$.

- La presión inicial tanto fuera como dentro del cilindro es $p = 1$,
- Las componentes del campo magnético son $B_x = 1$, $B_y = 0$.
- La velocidad angular es $\omega z = 9,55$ y define las componentes de la velocidad dentro del cilindro como $v_x = -\omega y$, $v_y = \omega x$ y fuera $v_x = v_y = 0$.

Los resultados de esta prueba utilizando condiciones de frontera de flujo saliente implementadas mediante la espina `IFMBoundaries` se muestran en la Fig. B.1. La evolución se hizo utilizando el método de líneas con un Runge-Kutta de tercer orden. Para el cálculo de flujos se utilizó el resolver de Riemann HLLE junto con el reconstructor de variables minmod y se utilizó el método de transporte restringido para mantener la constricción del campo magnético. Los resultados se muestran en la Fig. B.1, los cuales demuestran que las condiciones de frontera funcionan al nivel deseado. Como se esperaba según [Del Zanna et al. (2003), Mösta et al. (2014), Lora-Clavijo et al. (2015)] el campo magnético frena el rotor, el fluido es arrastrado y al final toma una configuración como la reportada en [Del Zanna et al. (2003), Mösta et al. (2014), Lora-Clavijo et al. (2015)]. La configuración de las líneas del campo magnético al final de la simulación también es consistente con la misma prueba en [Del Zanna et al. (2003), Mösta et al. (2014), Lora-Clavijo et al. (2015)]. Al final, dentro del rotor las líneas de campo magnético tienden a ser perpendiculares respecto a la configuración fuera de él.

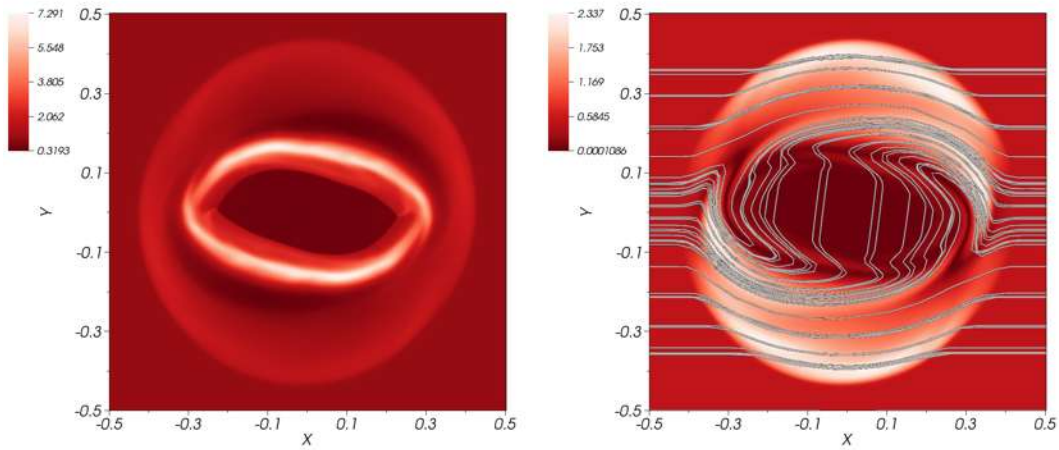


Figura A.2. Se muestra la densidad de masa (izquierda), y la presión magnética junto con las líneas de campo magnético (derecha) correspondientes al tiempo $t = 0,4$ de la prueba del rotor magnético, con una resolución de 200×200 en cada dirección, con esto, se demuestra que las condiciones de frontera de flujo saliente implementadas en `IFMBoundaries` funcionan.

Hoyo negro de Kerr

La solución a las soluciones de Einstein correspondiente a un hoyo negro rotante fue propuesta por Kerr en los años 60, comúnmente existen dos maneras de escribir la métrica de Kerr dependiendo de las coordenadas que se utilicen, por ejemplo, el elemento de línea en coordenadas Boyer-Lindquist es de la forma:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2} \right) dt^2 - \frac{4Mr a \sin^2 \theta}{\rho^2} d\phi dt + \frac{\rho^2}{\delta} dr^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2Mr a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} \right) \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (\text{B.1})$$

donde, se han definido las cantidades:

$$a = J/M, \quad \rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad \delta = r^2 - 2Mr + a^2, \quad (\text{B.2})$$

donde M es la masa de hoyo negro, J el momento angular. Se observa que la métrica de Kerr es singular cuando $\delta \rightarrow 0$ y tiene que cumplirse que $a \leq M$, cuando $\rho^2 = 0$:

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}, \quad (\text{B.3})$$

el horizonte de eventos r_+ y la superficie definida por r_- es una singularidad debida al tipo de coordenadas definida dentro del horizonte de eventos.

En la métrica de Kerr, también se puede encontrar una región que se conoce como la ergosfera. El concepto de ergosfera surge del análisis de la componente de la métrica:

$$g_{00} = \left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right), \quad (\text{B.4})$$

el caso en que $g_{00} = 0$ se tiene que $\left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right) = 0$, cuya solución es:

$$r = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta}. \quad (\text{B.5})$$

La zona r entre el el radio del horizonte r_+ y $M + \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta}$, se conoce como ergosfera del hoyo negro, la cual, alcanza el máximo en el ecuador y el mínimo en los polos. En la zona en que $g_{00} > 0$, una partícula debe rotar con el hoyo negro, de lo contrario, se supondría que la partícula viaja más rápido que la luz. Esta propiedad se conoce como arrastre de sistemas inerciales. En la Fig. B.1 se muestra un esquema de las distintas superficies definidas anteriormente correspondientes a un hoyo de Kerr.

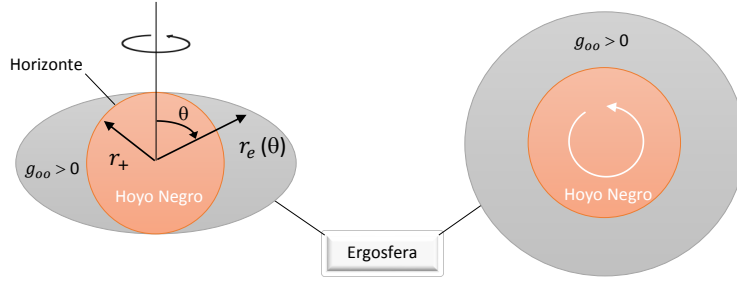


Figura B.1. Se muestran las distintas superficies en un hoyo negro de Kerr.

Una manera de evitar la singularidad en el horizonte de eventos es las coordenadas de Boyer-Lindquist es eligiendo un sistema de coordenadas que permita de forma natural penetrar el horizonte de eventos. Las coordenadas de Kerr-Schild tienen esta característica. La métrica de Kerr-Schild se construye utilizando la siguiente transformación de coordenadas:

$$t = u - r, \quad x + iy = (r - ia)e^{i\phi} \sin \theta, \quad z = r \cos \theta, \quad (\text{B.6})$$

que, desarrollando queda:

$$x = (r \cos \phi + a \sin \phi) \sin \theta = \sqrt{r^2 + a^2} \sin \theta \cos[\phi - \arctan(a/r)], \quad (\text{B.7})$$

$$y = (r \sin \phi + a \cos \phi) \sin \theta = \sqrt{r^2 + a^2} \sin \theta \sin[\phi - \arctan(a/r)], \quad (\text{B.8})$$

$$z = r \cos \theta, \quad (\text{B.9})$$

de aquí se deduce la siguiente expresión:

$$\frac{x^2 + y^2}{r^2 + a^2} + \frac{z^2}{r^2} = 1. \quad (\text{B.10})$$

Finalmente, manipulando estas expresiones se llega a la métrica de Kerr-Schild:

$$ds^2 = \left(\eta_{\mu\nu} + \frac{2Mr^3}{r^4 + a^2 z^2} l_\mu l_\nu \right) dx^\mu dx^\nu,$$

donde,

$$\begin{aligned} l_\mu &= \left(1, \frac{rx + ay}{r^2 + a^2}, \frac{ry - ax}{r^2 + a^2}, \frac{z}{r} \right), \\ r &= \sqrt{\frac{r_*^2 - a^2 + \sqrt{(r_*^2 - a^2)^2 + 4a^2 z^2}}{2}}, \\ r_* &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

las componentes covariantes y contravariantes de la métrica de Kerr-Schild son:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \frac{2Mr^3}{r^4 + a^2 z^2} l_\mu l_\nu, \quad (\text{B.12})$$

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \frac{2Mr^3}{r^4 + a^2 z^2} l^\mu l^\nu. \quad (\text{B.13})$$

Magnetohidrodinámica ideal relativista

La Magnetohidrodinámica (MHD) estudia las interacciones de un fluido conductor eléctrico con campos magnéticos, estos campos inducen corrientes eléctricas que al mismo tiempo cambian al mismo campo magnético. A continuación se introduce la MHD ideal, la cual representa una versión reducida de la MHD, esto es porque mediante algunas aproximaciones y la imposición de límites en la que se desprecian efectos microscópicos, (interacción de iones y electrones) se estudia la interacción de fluidos sin cargas libres con campos magnéticos.

La aproximación de la MHD ideal supone lo siguiente: 1) el fluido debe ser aproximadamente neutro $\rho_e \rightarrow 0$ lo que implica que no hay corrientes de desplazamiento $\partial_t \mathbf{E} = 0$ y que $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, 2) el fluido es un conductor perfecto, es decir, la conductividad eléctrica tiende a infinito $\sigma \rightarrow \infty$, por lo que un marco de referencia que se mueve a velocidad $\mathbf{v}$, el campo eléctrico está relacionado con el campo magnético como: $\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}$.

Con estas suposiciones el tensor de energía-momento del fluido toma la forma:

$$T^{\mu\nu} = (\rho h + b^2)u^\mu u^\nu + (p + b^2/2)g^{\mu\nu} - b^\mu b^\nu, \quad (\text{C.1})$$

donde b^μ son las componentes del campo magnético medido por un observador en el marco de referencia del fluido, cuya relación con el campo magnético $\mathbf{B}$ medido por un observador euleriano con cuadrivelocidad u^μ es:

$$b^0 = \frac{WB^i v_i}{\alpha}, \quad b^i = \frac{B^i + \alpha b^0 (v^i - \beta^i / \alpha)}{W}, \quad (\text{C.2})$$

donde, α es el lapso, β^i el vector de corrimiento y W el factor de Lorentz.

Por otro lado, las ecuaciones de la MHD relativista ideal son:

$$\nabla_\mu (\rho u^\mu) = 0, \quad (\text{C.3})$$

$$\nabla_\mu (T^{\mu\nu}) = 0, \quad (\text{C.4})$$

$$\nabla_\mu (u^\mu b^\nu - u^\nu b^{\mu\nu}) = 0, \quad (\text{C.5})$$

las cuales se encuentran en su forma covariante. Usando la descomposición 3+1 del espacio-tiempo podemos construir un sistema de ecuaciones del tipo conservativo $\partial_t \mathbf{u} + \partial_{x^i} \mathbf{F}^{(i)}(\mathbf{u}) = \mathbf{S}(\mathbf{u})$, donde D sea la densidad de masa en reposo del fluido, S_i son las componentes del momento generalizado en cada dirección, τ es la energía interna, B^k el vector de campo magnético medido por un observador euleriano, $\mathbf{F}^{(i)}(\mathbf{u})$ los flujos y $\mathbf{S}(\mathbf{u})$ las fuentes. En términos de las variables primitivas de los elementos de fluido, (ρ la densidad de masa de reposo, p la presión, v^i la fluida 3-velocidad, ϵ la energía interna específica y b^μ el campo magnético medido por un observador comóvil) las variables conservadas se definen como:

$$\begin{aligned} D &= \rho W \\ S_i &= (\rho h + b^2) W^2 v_j - \alpha b^0 b_j \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

$$\tau = (\rho h + b^2) W^2 v_j - \left(p + \frac{b^2}{2} \right) - \alpha^2 (b^0)^2 - \rho W \quad (\text{C.7})$$

$$B^i = b^i W - \alpha b^0 \left(v^i - \frac{\beta^i}{\alpha} \right), \quad (\text{C.8})$$

donde γ es el determinante de la 3-métrica espacial γ_{ij} proveniente de la descomposición 3+1 del espacio-tiempo, $h \equiv 1 + \epsilon + p/\rho$ es la entalpía específica, W es el factor de Lorentz y $b^0 = WB^i V_i / \alpha$. Como de costumbre, el sistema de ecuaciones se cierra con una ecuación de estado. Ahora los flujos y fuentes son:

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}^i(\mathbf{u}) &= \begin{pmatrix} (\alpha v^i - \beta^i) D \\ S_j \left(v^i - \frac{\beta^i}{\alpha} \right) + \left(p + \frac{b^2}{2} \right) \delta_j^i - b^i b_j \\ (\rho h + b^2) W^2 \left(v^i - \frac{\beta^i}{\alpha} \right) + \left(p + \frac{b^2}{2} \right) \frac{\beta^i}{\alpha} - \alpha b^0 b^i \\ \left(v^i - \frac{\beta^i}{\alpha} \right) B^k - \left(v^k - \frac{\beta^k}{\alpha} \right) B^i \end{pmatrix}, \\
\mathbf{S}(\mathbf{u}) &= \begin{pmatrix} 0 \\ T^{\mu\nu} \left(\partial_\mu g_{\nu j} + \Gamma_{\mu\nu}^\delta g_{\delta j} \right) \\ \alpha \left(T^{\mu 0} \partial_\mu \ln \alpha - T^{\mu\nu} \Gamma_{\nu\mu}^0 \right) \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{C.9}
\end{aligned}$$

donde, $g_{\mu\nu}$ son los componentes de la 4-métrica del espacio-tiempo y $\Gamma_{\mu\nu}^\delta$ los símbolos de Christoffel asociados a la 3-métrica, α la función lapso y β^i las componentes del vector de corrimiento asociado a la descomposición 3+1 del espacio-tiempo. La solución a estas ecuaciones representan la evolución de un fluido que interactúa con campos magnéticos, comúnmente el sistema se soluciona utilizando métodos numéricos de alta resolución con captura de choques, sin embargo, la evolución de campo magnéticos debe tratarse de manera especial, esto es debido a que los errores debidos a la solución numérica podría generar resultados que violan la ecuación de constricción de Maxwell $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ lo cual no sería físicamente aceptable. A continuación se habla de los métodos numéricos asociados a la preservación de dicha relación.

C.1. Constricción: $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

El transporte de flujo restringido es un método numérico que se implementa comúnmente en un código de MHD para asegurar que en cada paso de tiempo la constricción del campo magnético $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ se cumpla. El método de transporte de flujo restringido se puede construir a partir de las ecuaciones de evolución de campos magnéticos medidos por un observador euleriano, las cuales se escriben de la siguiente manera:

$$\partial_t \mathbf{B} = -\nabla \times \mathbf{E}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{C.10}$$

recordando que en la aproximación de la MHD ideal el campo magnético medido por un observador euleriano es $\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ se tiene que :

$$\partial_t \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (\text{C.11})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (\text{C.12})$$

El método de transporte de flujo restringido consiste en solucionar las ecuaciones C.11 y C.12 acopladas con las ecuaciones de Euler relativistas. Para que los métodos numéricos con los que se solucionan las ecuaciones de Euler sean compatibles con las solución de C.11 y C.12, estas deben ser transformadas a su forma integral, primero, la ecuación C.12 se puede escribir como:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{B} dV = \oint_{\partial V} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}, \quad (\text{C.13})$$

donde, hemos utilizado la ley de Gauss. Ahora combinando las ecuaciones C.11 y C.12 podemos escribir:

$$\frac{d}{dt} \oint_{\partial V} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = \oint_V \frac{\partial_t \mathbf{B}}{\partial} \cdot d\mathbf{A} = \oint_V [\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B})] dV, \quad (\text{C.14})$$

utilizando el teorema de Stokes en la ultima igualdad queda una ecuación de evolución del campo magnético:

$$\frac{d}{dt} \oint_{\partial V} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = \oint_{\partial A} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}. \quad (\text{C.15})$$

Para el caso en que se tenga un dominio cúbico, se tiene que la integral sobre el volumen $\oint_{\partial V} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$ es igual a la suma de las integrales de área sobre las 6 superficies correspondientes a las caras del cubo $\int_{A_c} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$, donde $A_c = A_1 + A_2 \dots A_6$. Entonces la ecuación C.16 para un dominio cúbico será:

$$\frac{d}{dt} \int_{\partial A_c} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = \oint_{\partial A_c} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}. \quad (\text{C.16})$$

La evolución de esta ecuación nos asegura un comportamiento físicamente aceptable de los campos magnéticos.

Bibliografía

- [Abbot et al. (2009)] Abbott, B. P. et al., *LIGO Scientific Collaboration*, Rept. Prog. Phys. **72**, 076901, (2009).
- [Abbot et al. (2016a)] Abbott, B. P. et al., *Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger*. Phys. Rev. Lett. **116**, 061102, (2016).
- [Abbot et al. (2016b)] Abbott, B. P. et al., *GW151226: Observation of Gravitational Waves from a 22-Solar-Mass Binary Black Hole Coalescence*. Phys. Rev. Lett. **116**, 241103, (2016).
- [Abbot et al. (2017)] Abbott, B. P. et al., *GW170104: Observation of a 50-Solar-Mass Binary Black Hole Coalescence at Redshift 0.2*. Phys. Rev. Lett. **118**, 221101, (2017).
- [Acernese et al. (2008)] Acernese, F. et al., *Status of VIRGO*. Class. Quantum Grav. **25**, 114045, (2008).
- [Alcubierre et al. (2000)] Alcubierre, M., Brüggmann, B., Dramlitsch, T., Font, J. A., Papadopoulos, P., Seidel, E., Stergioulas, N. and Takahashi, R., *Towards a stable numerical evolution of strongly gravitating systems in general relativity: The conformal treatments*. Phys. Rev. D **62**, 044034, (2000).
- [Alcubierre (2008)] Alcubierre, M., *Introduction to 3+1 Numerical Relativity*. Oxford Science Publications Phys, (2008).
- [Anderson & York (1999)] Anderson, A. and York, J. W. *Fixing Einstein's equations*. Phy. Rev. Lett. **82**, 4384, (1999).

- [Anninos et al. (1995)] Anninos, P. , Camarda, K., Massó, J., Seidel, E., Suen, W. M. and Towns, J., *Three-dimensional numerical relativity: The evolution of black holes*. Phys. Rev. D **52**, 2059, (1995).
- [Baiotti et al.(2005)] Baiotti, L., Hawke, I., Montero, P. J., Löffler, F., Rezzolla, L., Stergioulas, N., Font, J. A. and Seidel, E., *Three-dimensional relativistic simulations of rotating neutron-star collapse to a Kerr black hole*. Phys. Rev. D **71**, 024035, (2005).
- [Baker et al. (2006)] Baker, J. G., Centrella, J.,Choi, D. I., Koppitz, M., and Van Meter, J., *Gravitational-Wave Extraction from an Inspirling Configuration of Merging Black Holes*. Phys. Rev. Lett. **96**, 111102, (2006).
- [Balakrishna et al. (1998)] Balakrishna, J., Seidel, E. and Suen, W-M., *Dynamical evolution of boson stars. II. Excited states and self-interacting fields*. Phys. Rev. D **58**, 104004, (1998).
- [Balakrishma et al. (2006)] Balakrishma, J., Bondarescu, R., Daues, G., Guzmán, F. S. and Seidel, E., *Evolution of 3D boson stars with waveform extraction*. Class. Quantum Grav. **23**, 2631, (2006).
- [Banyuls et al.(1997)] Banyuls, F., Font, J. A., Ibañez, J., M., Martí , J. M. and Miralles, J. A., *Numerical 3+1 General Relativistic Hydrodynamics: A Local Characteristic Approach*. ApJ **476**, 221, (1997).
- [Baumgarte & Shapiro (1999)] Baumgarte, T. W. and Shapiro, S. L., *On the numerical integration of Einsteins field equations*. Phys. Rev. D **59**, 024007, (1999).
- [Baumgarte 2010] Baumgarte, T. W. and Shapiro, S. L., *Numerical Relativity: Solving Einsteins Equations on the Computer*. Cambridge University Press, (2010).
- [Bernstein (1993)] Bernstein, D., *A Numerical Study of the Black Hole Plus Brill Wave Spacetime*. PhD thesis, University of Illinois Urbana-Champaign, (1993).
- [Bona & Massó (1989)] Bona, C. and Massó, J., *Einstein's evolution equations as a system of balance laws*. Phys. Rev. D, **40**, 1022, (1989).

- [Bona & Massó (1992)] Bona, C. and Massó, J. *Hyperbolic evolution system for numerical relativity*. Phys. Rev. Lett. **68**, 1097, (1992).
- [Bona et al. (1995)] Bona, C., Massó, J., Seidel, E., and Stela, J. *New Formalism for Numerical Relativity*. Phys. Rev. Lett. **75**, 600, (1995).
- [Bona et al. (2003)] Bona, C., Ledvinka, T., Palenzuela, C. and Zacek, M., *General covariant evolution formalism for numerical relativity*. Phys. Rev. D **67**, 104005, (2003).
- [Bona et al. (2004)] Bona, C., Ledvinka, T., Palenzuela, C. and Zacek, M. *A symmetry-breaking mechanism for the Z4 general-covariant evolution system*. Phys. Rev. D **69**, 064036, (2004).
- [Bonazzola et al. (1999)] Bonazzola, S., Gourgoulhon, E. and Marck, J. A., *Spectral methods in general relativistic astrophysics*. J. Comput. Appl. Math. **109**, 433, (1999).
- [Bondi & Hoyle (1944)] Bondi, H. and Hoyle, F., *On the Mechanism of Accretion by Stars*. MNRAS **104**, 273 (1944).
- [Bondi (1952)] Bondi, H., *On Spherically Symmetrical Accretion*. MNRAS **112**, 195, (1952).
- [Bondi et al. (1962)] Bondi H., Van der Burg, M. and Metzner, A., *Gravitational waves in general relativity VIII. Waves in asymptotically flat space-time.*, Proc. R. Soc. London Ser. A **270**, 103, (1962).
- [Bowen (1979)] Bowen, J. M., *General form for the longitudinal momentum of a spherically symmetric source*. Gen. Rel. Grav. **11**(3), 227, (1979).
- [Bowen & York (1980)] Bowen, J. M. and York, J. W. *Time-asymmetric initial data for black holes and black hole collisions*. Phys. Rev. D, **21**, 2047, (1980).
- [Boyd (2001)] Boyd, J. P., *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*. Dover, New York, (2001).
- [Brandt & Brüggman (1997)] Brandt, S. and Brüggmann, B., *A Simple Construction of Initial Data for Multiple Black Holes*. Phys. Rev. Lett. **78**, 3606, (1997).

- [Brügmann et al. (2008)] B. Brügmann, B., González, J. A., Hannam, M., Husa, S., Sperhake, U. and Tichy, W., *Calibration of moving puncture simulations*. Phys. Rev. D **77**, 024027, (2008).
- [Cactus Code (1998)] Cactus Code <http://cactuscode.org>.
- [Campanelli et al. (2006)] Campanelli M., Lousto, C. O., Marronetti, P. and Zlochower, Y., *Accurate Evolutions of Orbiting Black-Hole Binaries without Excision*. Phys.Rev. Lett., **96**, 111101, (2006).
- [Cardoso et al. (2016)] Cardoso, V., Franzin, E. and Pani, P., *Is the Gravitational-Wave Ringdown a Probe of the Event Horizon?*. Phys. Rev. Lett. **116**, 171101, (2016).
- [Carrillo et al. (2016)] Carrillo, M., Gracia-Linares, M. González, J. A. and Guzmán, F. S., *Parameter estimates in binary black hole collisions using neural networks*. Gen. Rel. Grav. **48**, 141, (2016).
- [Chavanis (2016)] Chavanis, P-H., *Collapse of a self-gravitating Bose-Einstein condensate with attractive self-interaction* Phys. Rev. D **94**, 083007, (2016).
- [Chiaberge et al. (2017)] Chiaberge, M. et al., *The puzzling case of the radio-loud QSO 3C 186: a gravitational wave recoiling black hole in a young radio source?*. A&A **600**, A57, (2017).
- [Chirenti & Rezzolla] Chirenti, C. and Rezzolla, L., *Did GW150914 produce a rotating gravastar?*. Phys. Rev. D **94**, 084016, (2016).
- [Colpi (1986)] Colpi, M., Shapiro, S. L. and Wasserman, I., *Boson Stars: Gravitational Equilibria of Self-Interacting Scalar Fields*. Phys. Rev. Lett. **57**, 2485, (1986).
- [Cook (2000)] Cook, G. B., *Initial Data for Numerical Relativity* Living Rev. Relativity **3**,5, (2000).
- [Cox (2000)] Cox, A. N., *Allen's Astrophysical Quantities*. New York Springer-Verlag. p. 124, (2000).

- [Cruz et al. (2012)] Cruz-Osorio, A., Lora-Clavijo, F. D. and Guzmán, F. S., *Is the flip-flop behaviour of accretion shock cones on to black holes an effect of coordinates?*. MNRAS **426**, 732, (2012).
- [Cruz-Osorio & Lora-Clavijo (2016)] Cruz-Osorio, A. and F. D. Lora-Clavijo, F. D., *Non-axisymmetric relativistic wind accretion with velocity gradients on to a rotating black hole*. MNRAS **460**, 3193, (2016).
- [Del Zanna et al. (2003)] Del Zanna, L., Bucciantini, N. and Londrillo, P., *An efficient shock-capturing central-type scheme for multidimensional relativistic flows*. A&A **400**, 397, (2003).
- [Dermer & Menon (2009)] Dermer, C. D. and Menon, G., *Hight Energy Radiation from black holes, gamma rays, cosmic rays, and neutrinos*. Princeton University Press, ISBN:978-0-691-13795-7, (2009).
- [Doeleman et al. (2008)] Doeleman, S. S. et al., *Event-horizon-scale structure in the supermassive black hole candidate at the Galactic Centre*. Nature **455**, 78, (2008).
- [Donat & Marquina (1996)] Donat, R. and A. Marquina, A., *A Flux-Split Algorithm Applied to Relativistic Flows*. J. Comput. Phys., **125**, 42,(1996).
- [Dönmez et al.(2011)] Dönmez, O., Zanotti, O. and Rezzolla, L., *On the development of QPOs in Bondi-Hoyle accretion flows*. MNRAS **412**, 1659, (2011).
- [Edgar(2004)] Edgar, R., *A review of Bondi-Hoyle-Lyttleton accretion*. New Astron. Reviews **48**, 843, (2004).
- [Einfeldt (1988)] Einfeldt B., *On Godunov-type methods for gas dynamics*. Journal of Computational Physics **25**, 294 (1988).
- [Einstein toolkit(2005)] Einstein toolkit, <http://www.einsteintoolkit.org>.
- [Etienne et al. (2012a)] Etienne, Z. B., Liu, Y. T., Paschalidis, V. and Shapiro, S. L., *General relativistic simulations of black-hole-neutron-star mergers: Effects of magnetic fields*. Phys. Rev. D. **85**, 064029, (2012).

- [Etienne et al. (2012b)] Etienne, Z. B., Paschalidis, V. and S. L. Shapiro, S. L., *General-relativistic simulations of black-hole-neutron-star mergers: Effects of tilted magnetic fields*. Phys. Rev. D. **86**, 084026 (2012).
- [Field & Rogers (1993)] B. D. Field, R. D. Rogers, ApJ, 494, 94 (1993).
- [Foglizzo et al. (2005)] Foglizzo, T., Galletti, P. and Ruffert, M., *A fresh look at the unstable simulations of Bondi-Hoyle-Lyttleton accretion*. A&A **435**, 397, (2005).
- [Friedrich (1981)] Friedrich, H., *On the regular and the asymptotic characteristic initial value problem for Einstein's vacuum field equations*. Proc. R. Soc. London A **375**, 169, (1981).
- [Frittelli & Reula (1996)] Frittelli, S. and Reula, O. *First-order symmetric-hyperbolic Einstein equations with arbitrary fixed gauge*. Phys. Rev. Lett. **76**, 4667, (1996).
- [Font et al. (1998)] Font, J. A. and Ibañez, J. M., *Non-axisymmetric relativistic Bondi-Hoyle accretion on to a Schwarzschild black hole*. MNRAS **298**, 835, (1998).
- [Fryxell(1987)] Fryxell, B. A., Taam, R. E. and McMillan, S. L. W., *Numerical Simulations of Adiabatic Axisymmetric Accretion Flow. I. A New Mechanism for the Formation of Jets*. ApJ **315**, 536, (1987).
- [Giacomazzo & Rezzolla] Giacomazzo, B. and Rezzolla, L., *WhiskyMHD: a new numerical code for general relativistic magnetohydrodynamics*. Class. Quantum Grav. **24**, 325, (2007).
- [González-Avilés et al. (2017)] González-Avilés, J. J., Guzmán, F. S. and Fedun, V., *JET Formation in Solar Atmosphere Due to Magnetic Reconnection*. ApJ **836**, 1, (2017).
- [Gottlieb & Orszag (1977)] Gottlieb, D. and Orszag, S. A., *Numerical analysis of spectral methods: theory and applications*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, (1977).
- [Gourgoulhon (2002)] Gourgoulhon, E., *Introduction to spectral methods*. Presentation at the 4th EU Network Meeting, Palma de Mallorca, (2002).

- [Gundlach et al. (2006)] Gundlach, C. and Martin-Garcia, J. M., *Well-posedness of formulations of the Einstein equations with dynamical lapse and shift conditions*. Phys. Rev. D **74**, 024016, (2006).
- [Guzmán et al. (2003, 2006, 2014, 2015)] Guzmán F. S. and Ureña-López, L. A., *Newtonian collapse of scalar field dark matter* Phys. Rev. D **68**, 024023, (2003). Guzmán, F. S., and L. A Ureña-López, L. A., *Gravitational Cooling of Self-gravitating Bose Condensates*. ApJ **645**, 814, (2006).
- Guzmán, F. S., Lora-Clavijo, F. D., González-Avilés, J. J. and Rivera-Paleo, F. J., *Rotation curves of rotating Galactic Bose-Einstein condensate dark matter halos*. Phys. Rev. D. **89**, 063507, (2014).
- Guzmán, F. S. and Lora-Clavijo, F. D., *Rotation curves of ultralight BEC dark matter halos with rotation*. Gen. Rel. Grav. **47**, 21, (2015).
- [Guzmán (2004)] Guzmán, F. S., *Evolving spherical boson stars on a 3D Cartesian grid.*, Phys. Rev. D **70**, 044033, (2004).
- [Guzmán (2006)] Guzmán, F. S., *Accretion disk onto boson stars: A way to supplant black hole candidates*. Phys. Rev. **D 73**, 021501, (2006).
- [Guzmán (2009)] Guzmán, F. S., *The three dynamical fates of Boson Stars*. Rev. Mex. Fis. **55**, 321-326, (2009).
- [Guzmán & Rueda-Becerril] Guzmán, F. S. and Rueda-Becerril, J. M., *Spherical boson stars as black hole mimickers*. Phys Rev. D **80**, 084023, (2009).
- [Guzmán (2010)] Guzmán, F. S., *Solución de la ecuación de onda como un problema de valores iniciales usando diferencias finitas*. Rev. mex. de física **56**, 1, 51, (2010).
- [Gracia-Linares & Guzmán (2015)] Gracia-Linares, M. and Guzmán, F. S., *Accretion of Supersonic Winds onto Black Holes in 3D: Stability of the Shock Cone*. ApJ **812**, 23 (2015).
- [Gracia-Linares & Guzmán (2016)] Gracia-Linares, M. and Guzmán, F. S., *Accretion of supersonic winds on boson stars*. Phys. Rev. D **94**, 064077, (2016).

- [Hawke et al. (2005)] Hawke, I., Löffler, F. and Nerozzi, A., *Excision methods for high resolution shock capturing schemes applied to general relativistic hydrodynamics*. Phys. Rev. D **71**, 104006, (2005).
- [Hawley & Choptuik (2000)] Hawley, S. H. and M. W. Choptuik, M. W., *Boson stars driven to the brink of black hole formation*. Phys. Rev. D **62**, 104024, (2000).
- [Holland et al. (2002)] Holland W. S. et al., *SCUBA: a common-user submillimetre camera operating on the James Clerk Maxwell Telescope*. Mon. Not. R. Astron. Soc. Lett. **303**(4), 659, (2002).
- [Hunt(1971)] Hunt, R., *A Fluid Dynamical Study of The Accretion Process*. MNRAS **154**, 141 (1971).
- [Jansky (1933)] Jansky, K. G., *Radio waves from outside the solar system*. Nature **132**, 3323, (1933).
- [Jetzer (1992)] Jetzer, P., Phys. Rev. D **22**, 01163, (1992).
- [Karshev (2005)] Kardashev, N. S., *Plasma Physics for Astrophysics*. Princeton Univ. Press, Pinceton, NJ (2005).
- [Kaup (1968)] Kaup, D. J., *Klein-Gordon Geon*. Phys. Rev. **172**, 1331 (1968).
- [Kreiss & Scherer (1992)] Kreiss, H. O. and Scherer, G. *Method of lines for hyperbolic equations*. SIAM J. Num. Anal. **29**, 640, (1992).
- [Lee et al. (2014)] A. T. Lee, A. T., Cunningham, A. J., McKee, C. F. and Klein, R. I., *Bondi-Hoyle Accretion in an Isothermal Magnetized Plasma*. ApJ **783**, 1, (2014).
- [Lehner (2001)] Lehner, L. *Numerical relativity: A review*. Class. Quantum Grav. **18**, 25, (2001).
- [Lichnerowicz (1944)] Lichnerowicz, J., *L'integration des equations de la gravitation relativiste et le probl'eme n corps*. Math. Pures et Appl. **23**, 37, (1944).
- [Liebling & Palenzuela (2012)] Liebling, S. and Palenzuela, C., *Dynamical Boson Stars* Living Rev. Relativity **15**, 6, (2012).

- [Löffler et al. (2012)] Löffler, F., Faber, J., Bentivegna, E., Bode, T., Diener, P., Haas, R., Hinder, I., Mundim, B. C., Ott, C. D., Schnetter, E., Allen, G., Campanelli, M. and Laguna, P., *The Einstein Toolkit: a community computational infrastructure for relativistic astrophysics*. Class. Quantum Grav. **29**, 115001, (2012).
- [Lora-Clavijo et al. (2010)] Lora-Clavijo, F. D., Cruz-Osorio, A. and Guzmán, F. S., *Evolution of a massless test scalar field on boson star space-times*. Phys. Rev. D **82**, 023005, (2010).
- [Lora-Clavijo & Guzmán (2013)] Lora-Clavijo, F. D., and Guzmán, F. S., *Axisymmetric Bondi-Hoyle accretion on to a Schwarzschild black hole: shock cone vibrations* MNRAS **429**, 3144, (2013).
- [Lora-Clavijo et al. (2015)] Lora-Clavijo, F. D., Cruz-Osorio, A. and Guzmán, F. S., *CAFE: A New Relativistic MHD Code*. ApJS **218**, 2, (2015).
- [Lora-Clavijo et al. (2015)] Lora-Clavijo, F. D., Cruz-Osorio, A., and Moreno-Méndez, E., *Relativistic Bondi-Hoyle-Lyttleton Accretion onto a Rotating Black Hole: Density Gradients*. ApJS **219**, 30, (2015).
- [Marronetti et al. (2007)] P. Marronetti, W. Tichy, B. Brügmann, B., González, J., Hannam, M., Husa, S. and Sperhake, U., *Binary black holes on a budget: simulations using workstations*. Class. Quant. Grav. **24**, 12, (2007).
- [Marronetti et al. (2008)] Marronetti, P., Tichy, W., Brügmann, B., González, J. and Sperhake, U., *High-spin binary black hole mergers* Phys. Rev. D **77**, 064010, (2008).
- [Martí & Muller (1996)] Martí, J. Ma., Muller, E., *Extension of the Parabolic Method to One-Dimensional Relativistic Hydrodynamics*. J. Comput. Phys **123**, 114, (1996).
- [Matsuda et al. (1987)] Matsuda, T., Inoue, M., Sawada, K., *Spin-up and spin-down of an accreting compact object*. MNRAS **226**, 785, (1987).
- [Matsuda et al. (1991)] Matsuda, T., Sekino, N., Sawada, K., Shima, E., Livio, M., Anzer, U. and Börner, G., *On the stability of wind accretion*. A&A **248**, 301, (1991).

- [Matsuda et al. (1992)] Matsuda, T., Ishii, T., Sekino, N., Sawada, K., Shima, E., Livio, M. and Anzer, U., *Numerical simulations of two-dimensional and three-dimensional accretion flows*. MNRAS **255**, 183 (1992).
- [Mösta et al. (2014)] Mošta, P., Mundim, B. C., Faber, J. A., Haas, R., Noble, S. C., Bode, T., Löffler, F., Ott, C. D., Reisswig, C. and Schnetter, E., *GRHydro: a new open-source general-relativistic magnetohydrodynamics code for the Einstein toolkit*. Class. Quantum Grav. **31**, 015005, (2014).
- [Nagy et al. (2004)] Nagy, G., Ortiz, O. E., and Reula, O. A. *Strongly hyperbolic second order Einstein's evolution equations*. Phys. Rev. D **70**, 044012, (2004).
- [Olausen & Kaspi (2014)] Olausen, S. A. and Kaspi, V. M., *The McGill Magnetar Catalog*. ApJS **212**, 6 (2014).
- [Palenzuela et al. (2008)] Palenzuela, C., Lehner, L. and S. L. Liebling, S. L., *Orbital dynamics of binary boson star systems*. Phys. Rev. D, **77**, 044036, (2008).
- [Papadopoulos & Font (1998)] Papadopoulos F. and Font J. A., *Relativistic hydrodynamics around black holes and horizon adapted coordinate systems*. Phys. Rev. D **58**, 024005, (1998).
- [Park & Ricotti (2013)] Park, K. and Ricotti, M., *Accretion onto Black Holes from Large Scales Regulated by Radiative Feedback. III. Enhanced Luminosity of Intermediate-mass Black Holes Moving at Supersonic Speeds* . ApJ **767**, 2, (2013).
- [Penner (2011)] Penner, A. J., *General Relativistic Magnetohydrodynamic Bondi-Hoyle Accretion*. MNRAS **414**, 1467, (2011).
- [Petrich et al. (1988)] Petrich, L. I. Shapiro, S. L. and Teukolsky, S. A., *Accretion onto a moving black hole: An exact solution*. Phys. Rev. Lett. **60**, 1781, (1988).
- [Pfeiffer et al. (2003)] Pfeiffer, H. P., Kidder, L. E., Scheel, M. A., and Teukolsky, S. A. *A multidomain spectral method for solving elliptic equations*. Comput. Phys. Commun. **152**, 253273, (2003).

- [Reisswig & Pollney (2011)] Reisswig, C. and Pollney, D., *Notes on the integration of numerical relativity waveforms*. Class. Quantum Grav. **28**, 195015, (2011).
- [Rivera-Paleo & Guzmán (2016)] Rivera-Paleo, F. J. and Guzmán, F. S., *Modelling long GRBs using a single shock with relativistic radiation hydrodynamics*. MNRAS **459**, 2777, (2016).
- [Rivera-Paleo & Guzmán (2017)] Rivera-Paleo, F. J. and Guzmán, F. S., *Evolution of jets driven by relativistic radiation hydrodynamics as Long and Low Luminosity GRBs*. enviado, MNRAS (2017).
- [Roe (1981)] Roe, P. L., *Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference scheme*. J. Comput Phys. **43**, 357, (1981).
- [Roe (1986)] Roe, P. L. *Characteristic-based schemes for the Euler equations*. Ann. Rev. Fluid Mech. (1996).
- [Ruffini & Bonazzola (1969)] Ruffini, R. and Bonazzola, S., *Systems of Self-Gravitating Particles in General Relativity and the Concept of an Equation of State*. Phys. Rev. **187**, 1767 (1969).
- [Russell & Norving (1995)] Russell S. J. and Norvig, P., *Artificial Intelligence: A Modern Approach*. Prentice-Hall NJ, pp. 563-566 (1995).
- [Sachs (1962)] Sachs, R., *Gravitational waves in general relativity VIII. Waves in asymptotically flat space-time*. Proc. R. Soc. A 270, 103, (1962).
- [Sarbach et al. (2002)] Sarbach, O., Calabrese, G., Pullin, J., and Tiglio, M. *Hyperbolicity of the BSSN system of Einstein evolution equations*. Phys. Rev. D, **66** 064002, (2002).
- [Sawada et al. (1989)] Sawada, K., Matsuda, T., Anzer, U., Böner, G., and Livio, M., *Inhomogeneous wind accretion-Comparison between 3D and 2D computations*. A&A, **221**, 263, (1989).
- [Schenetter et al. (2006)] Schenetter, E., Diener, P., Dorband, N. and Tiglio, M., *A multi-block infrastructure for three-dimensional time-dependent numerical relativity*. Class. Quantum Grav. **23**, 16, (2006).

- [Schunck & Torres (2000)] Schunck, F. E. and Torres, D. F., *Boson stars with generic self-interactions* Int. J. Mod. Phys. D **9**, 601, (2000).
- [Schunck & Mielke (2003)] Schunck, F. E. and Mielke, E. W., *General relativistic boson stars*. Class. Quantum Grav. **20**, 20, (2003).
- [Seidel and Suen (1990)] Seidel, E. and Suen, W-M., *Dynamical evolution of boson stars: Perturbing the ground state*. Phys. Rev. D **42**, 384, (1990).
- [Seidel & Suen (1992)] E. Seidel E., and W-M. Suen, W-M. *Towards a singularity proof scheme in numerical relativity*. Phys. Rev. Lett. **69**, 1845, (1992).
- [Shima et al. (1988)] Shima, E., Mastsuda, T., Takeda, H. and Sawada, K., *Hydrodynamic calculations of axisymmetric accretion flow*. MNRAS **217**, 367, (1985).
- [Shima et al. (1998)] Shima, E., Mastsuda, T., Anzer, U., Boerner, G. and Boffin, H. M. J., *Numerical computation of two dimensional wind accretion of isothermal gas*. A&A **337**, 311, (1998).
- [Sing (2005)] D. K. Sing, PhD thesis, University of Arizona (2005).
- [Smarr et al. (1978)] Smarr, L. and York, J. W., *Radiation gauge in general relativity*. Phys. Rev. D **17**, 1945, (1978).
- [Takahashi & Ohsuga(2014)] Takahashi, H. R. and Ohsuga, K., *Relativistic radiation Magnetohydrodynamics simulations of supercritical accretion onto Magnetized Neutron Star; modeling of ultra luminous X-Ray Pulsars*. PASJ, 2014.
- [Teukolsky 2000] Teukolsky, S. *On the stability of the iterated crank-nicholson method in numerical relativity*. Phys. Rev. D **61**, 087501, (2000).
- [Thornburg (1996)] Thornburg J. *Finding apparent horizons in numerical relativity*. Phys. Rev. D **54** 4899, (1996).
- [Toro (1999)] E. F. Toro, *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*. Springer-Verlag, 2nd edition, (1999).
- [Toropina et al. (2012)] Toropina, O. D., Romanova, M. M. and Lovelace, R. R. V., *BondiHoyle accretion on to a magnetized neutron star*. MNRAS **420**, 810, (2012).

- [Torres (2002)] D. F. Torres, Nucl. Phys. **B 26**, 377 (2002).
- [Van Leer (1977)] B. Van Leer, *Towards the ultimate conservative difference scheme III. Upstream-centered finite-difference schemes for ideal compressible flow*. J. Comp. Phys. **23**, 263, (1977).
- [Zannotti et al. (2011)] Zannotti, O., Roedig, C., Rezzolla, L. and Del Zanna, L., *General relativistic radiation hydrodynamics of accretion flows I. Bondi-Hoyle accretion*. MNRAS **417**, 2899, (2011).

