



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS
DE HIDALGO

INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

**Estructura Partónica de los Mesones
Pseudoescalares Neutros**

T E S I S

PARA OBTENER EL GRADO DE:

Doctor en Ciencias en el Área de Física

PRESENTA:

Khépani Raya Montaña



DIRECTOR DE TESIS:

DR. ADNAN BASHIR

"I... a universe of atoms, an atom in the universe."

- Richard Feynman

Resumen

Estructura Partónica de los Mesones Pseudoescalares

por Khépani RAYA MONTAÑO

Estudiamos el factor de forma de transición (TFF) $\gamma\gamma^* \rightarrow \pi^0$, $G_\pi(Q^2)$, a través del formalismo matemático de las Ecuaciones de Dyson-Schwinger (DSEs). En este formalismo se requiere resolver la DSE para el propagador del quark y la correspondiente ecuación relativista para un estado ligado de dos partículas, la ecuación de Bethe-Salpeter (BSE). Por primera vez, en un marco directamente relacionado con QCD en el continuo, fue posible calcular $G_\pi(Q^2)$ en todo el rango de momentos *space-like*. Nuestro resultado está de acuerdo con las colaboraciones experimentales de CELLO, CLEO y Belle; además de reproducir el límite de QCD asintótico.

Utilizando el mismo enfoque, se calcularon los TFF $\gamma\gamma^* \rightarrow \eta_{c,b}$. El resultado de $G_{\eta_c}(Q^2)$ es consistente con los resultados experimentales disponibles (Babar); a su vez, se encuentra debajo del límite asintótico en el rango de momentos experimentalmente accesible. Por su parte, la predicción obtenida de $G_{\eta_b}(Q^2)$ es comparable con el resultado de QCD no relativista. Adicionalmente, se obtuvieron predicciones para los TFF $\gamma\gamma^* \rightarrow \eta, \eta'$. Los resultados están en excelente acuerdo con los datos experimentales y con sus respectivos límites asintóticos.

Mediante un único formalismo, en conexión directa con QCD, se reproducen numerosas propiedades como masas y constantes de decaimiento. Nuestro análisis unifica los factores de forma de los mesones pseudoescalares neutros ($\gamma\gamma^* \rightarrow M_5$), con el factor de forma del pión y sus respectivas amplitudes de distribución de quarks de valencia (PDAs); cóncavas y anchas en el sector ligero, angostas tipo delta en el pesado. Un entendimiento claro de la dinámica interna de los mesones surge: con un sólo acercamiento conectamos los modos de Goldstone, constituidos con los quarks más ligeros, con aquellos sistemas que contienen los quarks de valencia más pesados. La herramienta desarrollada permite que otros procesos y objetos no perturbativos se puedan calcular.

Palabras clave:

Quarks, hadrones, mesones, factores de forma, ecuaciones de Dyson-Schwinger.

Abstract

Partonic Structure of Neutral Pseudoscalar Mesons

by Khépani RAYA MONTAÑO

We study the transition form factor (TFF) $\gamma\gamma^* \rightarrow \pi^0$, $G_\pi(Q^2)$, through the mathematical formulation of Dyson-Schwinger Equations (DSEs). In this formulation is required to solve the DSE for the quark propagator and its corresponding bound state relativistic equation, the Bethe-Salpeter equation (BSE). For the first time, in a framework directly related to continuum QCD. it was possible to calculate $G_\pi(Q^2)$ in the whole range of *space-like* momenta. Our result is in agreement with the experimental collaborations of CELLO, CLEO and Belle; besides reproducing the asymptotic QCD limit.

By employing the same approach, $\gamma\gamma^* \rightarrow \eta_{c,b}$ were calculated. The result of $G_{\eta_c}(Q^2)$ is consistent with the available experimental results (Babar); at the same time, it is below the asymptotic limit in the range of momentum experimentally accessible. Meanwhile, the obtained prediction for $G_{\eta_b}(Q^2)$ commensurates with the non relativistic QCD result. Additionally, $\gamma\gamma^* \rightarrow \eta, \eta'$ predictions were obtained. The results are in excellent agreement with the experimental data and with their corresponding asymptotic limits.

Through a unique formalism, in direct connection with QCD, numerous properties as masses and decay constants are reproduced. Our analysis unifies the form factors of neutral pseudoscalar mesons ($\gamma\gamma^* \rightarrow M_5$), with pion form factor and their corresponding valence quark distribution amplitudes (PDAs); concave and broad in the light sector, narrow delta shaped in the heavy one. A clear understanding of the internal meson dynamics arises: within a single approach we connect Goldstone modes, constituted with the lightest quarks, with those systems of the heaviest valence quarks. The developed toolkit allows that other processes and non perturbative objects could be computed.

Agradecimientos

Antes que nada, quiero agradecer a mi asesor y gran amigo Adnan Bashir, quien me ha guiado en todas y cada una de las etapas de mi desarrollo académico. Adnan es un gran físico y gran ser humano. Agradezco su paciencia (que ha excedido límites inimaginables), las palabras de aliento y la enorme promoción que le ha hecho a mi trabajo.

Agradezco también a Craig Roberts, con quien he tenido el gusto y honor de colaborar. Su notable trayectoria científica y la fructífera colaboración que hemos tenido con él y Adnan, han dado un impulso enorme a mi interés por la física.

Con gran cariño y amor, manifiesto mi eterna gratitud a mis papás Delia y Alfredo. Gracias a ellos, el mejor ejemplo de grandeza humana lo tuve en casa.

A mis hermanos y sobrinos, por su gran cariño y apoyo, gracias. A mis amigos y hermanos no biológicos, que por fortuna son muchos, muchísimas gracias.

Un agradecimiento muy especial a Alejandra Ayala, pues sin su enorme ayuda durante el trámite de titulación, ésta no se hubiera llevado a cabo en tiempo y forma.

Finalmente, desde lo más profundo de mi corazón, agradezco el enorme apoyo e incondicional amor de mi amada Érika.

Índice general

Resumen	II
Agradecimientos	IV
1. QCD: Generalidades	1
1.1. Introducción	1
1.2. Lagrangiano de QCD	3
1.3. Simetrías del lagrangiano	7
1.3.1. Teorema de Nöether	7
1.3.2. Simetrías de sabor y número bariónico	8
1.3.3. Simetría quirial y ruptura	8
1.3.4. Simetría de norma	12
1.4. Anomalías quirales: abeliana y no abeliana	15
1.4.1. Anomalía no abeliana	15
1.4.2. Anomalía abeliana	16
1.5. Ecuaciones de Dyson-Schwinger	18
2. El enfoque DSE-BSE	19
2.1. Propagador del quark	19
2.1.1. Representaciones	21
2.2. Ecuación de Bethe-Salpeter	22
2.3. Truncamiento	24
2.3.1. DSE: Aproximación Arcoiris	25
2.3.2. BSE: Aproximación Escalera	26
2.3.3. Acoplamiento efectivo	27
2.4. Resolución general	29
2.4.1. Ecuación de Gap	29
2.4.2. Ecuación de Bethe-Salpeter	32
2.5. Resultados numéricos	34
2.5.1. Función de masa del quark y condensado	34
2.5.2. Masas y constantes de decaimiento de mesones	37
2.6. Parametrización de las soluciones	38
2.6.1. Propagador del quark	38
2.6.2. Amplitudes de Bethe-Salpeter	39

3. El pión y los pseudoescalares pesados	42
3.1. El pión en el Modelo Estándar	42
3.2. Bosones de Goldstone y DCSB	43
3.2.1. Identidad axial de Ward	43
3.3. Quarkonia: η_c y η_b	45
3.4. Amplitud de distribución de partones	46
3.4.1. Límite conforme y evolución	47
3.5. Factores de forma	48
3.5.1. El vértice quark-fotón	49
3.5.2. Factor de forma del pión	50
3.5.3. Factor de forma de transición ($\gamma\gamma^*$)	52
3.6. Resolución y resultados	56
3.6.1. Idea general y algoritmo	56
3.6.2. Amplitudes de distribución: π^0 , η_c , η_b	57
3.6.3. Factor de forma del pión	59
3.6.4. Factores de transición: $\gamma\gamma^* \rightarrow \pi^0$, η_c , η_b	61
4. El caso de $\eta - \eta'$	66
4.1. Anomalía no abeliana y mezcla	66
4.2. Ecuación de Bethe-Salpeter	67
4.2.1. Amplitudes de Bethe-Salpeter	67
4.2.2. El kernel de la anomalía	68
4.2.3. Masas y ángulos de mezcla	69
4.3. Amplitud de distribución de partones	69
4.4. Factores de forma de transición ($\gamma\gamma^*$)	71
5. Discusión de resultados	73
5.1. Lagrangiano de QCD y sus simetrías	73
5.2. Propagador del quark y BSE	73
5.3. Amplitudes de distribución de partones	75
5.4. Factores de forma elástico y de transición	75
5.5. Comentarios finales	76
A. Convención Euclidiana y trazas	78
A.1. Convención euclidiana	78
A.2. Matrices gamma	79
B. Integrales de momento	80
B.1. Denominadores	80
B.2. Numerador	81
Bibliografía	83

A mis padres...

Capítulo 1

QCD: Generalidades

1.1. Introducción

Para la década de los sesentas, previo a la formulación de QCD, las interacciones electromagnéticas habían sido descritas exitosamente mediante una teoría de norma llamada Electrodinámica Cuántica (QED) [1]. Sin embargo, la descripción matemática de las interacciones fuertes permanecía poco clara. En ésta época se propusieron diferentes modelos que reprodujeran las propiedades estáticas y el espectro conocido de los hadrones. En el popular Modelo de Quarks [2–4], los hadrones son vistos como estados ligados compuestos de quarks, entidades puramente matemáticas, y se clasifican de acuerdo a los números cuánticos llamados isospín e hipercarga. Se derivaron relaciones entre las masas de los hadrones y sus constituyentes [2, 5, 6]. El éxito del modelo radica en que se pudieron clasificar consistentemente todos los hadrones conocidos, e incluso se predijo la existencia (y masa) del barión Ω^- , lo cual le valió el Premio Nobel a GellMann en 1969. Refinamientos posteriores por Nambu-Han incluyen el número cuántico de color [7], que resuelve el problema con la estadística Fermi-Dirac.

A finales de la década, experimentos de colisión entre electrones con protones y neutrones¹ demostraron que éstos no son fundamentales; se concluyó que los quarks son entidades físicas, no sólo matemáticas [8, 9]. Gracias a esto, se empezó a interpretar el grupo de color, propuesto por GellMann-Fritzsch, como un grupo de norma. En esta teoría, la interacción de quarks se genera por un octeto de bosones de norma, no masivos, llamados gluones [10]. Se le llamó Cromodinámica Cuántica (QCD). A diferencia de QED, en QCD los bosones de norma interactúan entre sí, por lo que se trata de una teoría no abeliana. Como consecuencia, presenta características muy particulares

¹En realidad con núcleos atómicos (deuterones), pues los neutrones no tienen carga eléctrica.

en el acoplamiento entre quarks y gluones. Dichas características son de fundamental importancia y se discutirán a detalle en este trabajo.

Por una parte, el acoplamiento se vuelve débil cuando la escala de energía es grande (poca separación entre quarks), por lo que la teoría es asintóticamente libre. Así, a altas energías los quarks se comportan casi como partículas libres: es posible realizar un tratamiento perturbativo de QCD. Este hecho se descubrió por Gross-Wilczek [11, 12] y Politzer [13] en 1973 (Premios Nobel, 2004). Por otra parte, cuando la escala de energía es pequeña (grande separación entre quarks), el acoplamiento es tan grande que los quarks se encuentran confinados en hadrones [14–16]. Otra consecuencia de ello es la generación dinámica de masas: quarks y gluones adquieren masa (efectiva) de manera dinámica dentro de los hadrones. A éste hecho se le conoce como ruptura dinámica de la simetría quiral (DCSB) [17]; el 98 % de la masa de la materia visible en el universo se debe a este mecanismo. Confinamiento y DCSB son dos fenómenos emergentes de QCD, que tienen importantes consecuencias en el espectro y dinámica de la estructura nuclear y hadrónica [18–20].

Los trabajos de los sesentas permitieron describir exitosamente las propiedades estáticas y espectro de los hadrones; mientras que los trabajos de los setenta nos dieron las primeras descripciones de quarks y gluones en el régimen perturbativo. Confinamiento, DCSB y toda la dinámica interna de los hadrones, así como su evolución con las escalas de energía, sigue siendo un problema de dificultad extraordinaria [21]. Así, la Cromodinámica Cuántica es la parte del Modelo Estándar (SM) que estudia las interacciones fuertes; interacciones que gobiernan la física nuclear/hadrónica y que dan la mayor parte de la masa a la materia visible. El papel de QCD en la dinámica nuclear/hadrónica, a partir de sus grados de libertad fundamentales, sigue siendo un enorme reto aún después de décadas; QCD es quizá la parte del SM que menos entendemos. Hoy en día se realizan numerosos esfuerzos teóricos y experimentales en todo el mundo [22–25].

En este trabajo, nuestro acercamiento con QCD es a través de las Ecuaciones de Dyson-Schwinger [25, 26]: exactas, no perturbativas e invariantes de Poincaré; consistentes con confinamiento, DCSB y QCD perturbativo. Estudiamos la estructura interna de los mesones pseudoescalares neutros ($\pi^0, \eta, \eta', \eta_c, \eta_b$) a partir de sus factores de forma de transición a dos fotones ($\gamma\gamma^* \rightarrow M_5$) [27, 28] y la conexión con las correspondientes PDAs [20, 29]. Comenzamos mostrando el lagrangiano de QCD, explicando sus términos y significado físico; de igual manera, se discutirán generalidades de las DSEs.

1.2. Lagrangiano de QCD

La información sobre la dinámica de un sistema se encuentra codificada en la densidad lagrangiana. En el caso de QCD, ésta se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu^a)^2 - (\partial^\mu \bar{\eta}_a)(\partial_\mu \eta_a) - gf_{abc}(\partial_\mu \bar{\eta}_a)A_b^\mu \eta_c \\ & + \sum_{j=1}^{N_f} \bar{\psi}_l^j (i\gamma^\mu D_\mu - m_j)\psi_l^j. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Estudiamos cada uno de sus términos.

1. El primer término contiene la dinámica de los campos de norma (gluones): su energía cinética y sus auto interacciones. Los campos son representados por A_μ^a y $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf_{abc}A_\mu^b A_\nu^c$ es el tensor de fuerza del campo gluónico (g es el acoplamiento y $a = 1 \cdots 8$ el índice de color). La presencia del término proporcional a g hace posible que existan interacciones entre 3 y 4 gluones.
2. El segundo término es el término que fija la norma, siendo ξ el parámetro covariante de norma: $\xi = 0$ corresponde a la Norma de Landau, $\xi = 1$ a la Norma de Feynman. Este término se introduce para eliminar grados de libertad redundantes y que el operador diferencial del gluón sea invertible, de manera que esté bien definido el propagador a nivel árbol.
3. Los campos η_a corresponden al campo fantasma de Faddeev-Popov. Debido a la naturaleza no abeliana de QCD, es necesario incluir este campo cuando se introduce el término de norma. Notemos que las componentes cinéticas tienen la forma de un lagrangiano para campos escalares cargados, sin masa, por lo que parecería ser un campo bosónico; sin embargo, es fermiónico debido a su naturaleza como número de Grassman.
4. Los campos ψ_l^j son los campos fermiónicos de materia (quarks). El último término corresponde al lagrangiano de Dirac, donde $D_\mu \psi_l^j = \partial_\mu \psi_l^j - ig R_{lk}^a \psi_k^j A_\mu^a$. La interacción con los campos de norma está dada por $-ig R_{lk}^a \psi_k^j A_\mu^a$. N_f es el número de sabores y $l = 1, 2, 3$, el color.

5. Por su parte, f_{abc} son las constantes de estructura completamente antisimétricas del grupo de norma de QCD. Tenemos las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} [R^a, R^b] &= if_{abc}R^c, \\ R^a R^a &= C_F I, \\ \text{Tr}[R^a R^b] &= \frac{1}{2}\delta_{ab}, \\ f_{acd}f_{bcd} &= C_A \delta_{ab}. \end{aligned}$$

Los generadores del grupo de color corresponden a R^a . En la representación fundamental de $SU_c(N)$:

$$C_A = N, \quad C_F = \frac{N^2 - 1}{2N}.$$

Para $N = 3$, $R^a = \lambda^a/2$, donde λ^a son las matrices de GellMann; además, se tiene que $C_A = 3$ y $C_F = 4/3$.

Al calcular observables físicas en QCD, más allá del nivel árbol, se encuentran divergencias ultravioleta. QCD es una teoría renormalizable, por lo que es posible remover consistentemente dichas divergencias [30]. Podemos añadir contra términos, con la misma forma que el lagrangiano original, que nos remuevan estas divergencias. A este proceso se le conoce como Renormalización Multiplicativa; al lagrangiano original, más el lagrangiano de contra términos, le llamamos el lagrangiano desnudo.

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \mathcal{L}_{CT} = \mathcal{L}_B.$$

El lagrangiano desnudo se factoriza de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_B &= -\frac{1}{4}\mathcal{Z}_3(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)(\partial^\mu A_a^\nu - \partial^\nu A_a^\mu) \\ &\quad - \frac{1}{2}\mathcal{Z}_1 g f_{abc}(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)A_b^\mu A_c^\nu \\ &\quad - \frac{1}{4}\mathcal{Z}_5 g^2 f_{abc}f_{ade}A_\mu^b A_\nu^c A_d^\mu A_e^\nu \\ &\quad - \frac{1}{2\xi}\mathcal{Z}_6(\partial^\mu A_\mu^a)^2 - \tilde{\mathcal{Z}}_3(\partial^\mu \bar{\eta}_a)(\partial_\mu \eta_a) - \tilde{\mathcal{Z}}_1 g f_{abc}(\partial_\mu \bar{\eta}_a)A_b^\mu \eta_c \\ &\quad + \sum_{j=1}^{N_f} (i\mathcal{Z}_{2Fj}\bar{\psi}_l^j \gamma^\mu \partial_\mu \psi_l^j + \mathcal{Z}_{1Fj} g \bar{\psi}_l^j R_{lk}^a \gamma^\mu \psi_k^j A_\mu^a - \mathcal{Z}_{4j} m_j \bar{\psi}_l^j \psi_l^j). \end{aligned}$$

Los coeficientes \mathcal{Z}_i corresponden a las constantes de renormalización, que son funciones del regulador ultravioleta Λ y del punto de renormalización ζ , es decir $\mathcal{Z}_i = \mathcal{Z}_i(\zeta, \Lambda)$. Al redefinir adecuadamente los campos y parámetros, las divergencias son absorbidas por estas constantes y el nuevo lagrangiano tiene la forma del original:

- Para los **campos**: $A_{B\mu}^a = \mathcal{Z}_3^{1/2} A_\mu^a$, $\eta_B^a = \tilde{\mathcal{Z}}_3^{1/2} \eta^a$, $\psi_{Bj} = \mathcal{Z}_{2Fj}^{1/2} \psi_j$.
- Para los **parámetros**: $g_B = \mathcal{Z}_g g$, $m_{Bj} = \mathcal{Z}_{m_j} m_j$, $\xi_B = \mathcal{Z}_\xi^{-1} \xi$

El subíndice B se refiere a las cantidades desnudas. Por razones obvias, las constantes de renormalización reciben los siguientes nombres:

- \mathcal{Z}_3 : Constante de renormalización del campo del gluón.
- $\tilde{\mathcal{Z}}_3$: Constante de renormalización del campo del fantasma.
- \mathcal{Z}_{2Fj} : Constante de renormalización del campo del quark.
- \mathcal{Z}_g : Constante de renormalización de la constante de acoplamiento.
- \mathcal{Z}_{m_j} : Constante de renormalización de la masa del quark.
- \mathcal{Z}_ξ : Constante de renormalización del parámetro de norma.

Los campos se redefinen de tal manera que se asegura que los coeficientes de los términos cinéticos correspondientes en el lagrangiano desnudo sean iguales a la unidad. Aparecen también otras constantes de renormalización, y son:

- \mathcal{Z}_1 : Constante de renormalización del vértice de tres gluones.
- \mathcal{Z}_5 : Constante de renormalización del vértice de cuatro gluones.
- \mathcal{Z}_6 : Constante de renormalización del término que fija la norma.
- $\tilde{\mathcal{Z}}_1$: Constante de renormalización del término de interacción gluón-fantasma.
- \mathcal{Z}_{1Fj} : Constante de renormalización del vértice quark-gluón.
- \mathcal{Z}_{4j} : Constante de renormalización del término de masa del quark.

Estas últimas constantes no son independientes, son determinadas por el requerimiento de covarianza de norma local del lagrangiano de QCD. Tenemos, por ejemplo, para el término del vértice de tres gluones:

$$-\frac{1}{2} \frac{\mathcal{Z}_1}{\mathcal{Z}_g \mathcal{Z}_3^{3/2}} g_B f_{abc} (\partial_\mu A_{B\nu}^a - \partial_\nu A_{B\mu}^a) A_B^{\mu b} A_B^{\nu c} = -\frac{1}{2} g_B f_{abc} (\partial_\mu A_{B\nu}^a - \partial_\nu A_{B\mu}^a) A_B^{\mu b} A_B^{\nu c}, \quad (1.2)$$

que implica que $\mathcal{Z}_1 = \mathcal{Z}_g \mathcal{Z}_3^{3/2}$. Para el vértice de cuatro gluones:

$$\frac{1}{4} \frac{\mathcal{Z}_5}{\mathcal{Z}_g^2 \mathcal{Z}_3^2} g_B^2 f_{abc} f_{ade} A_{B\mu}^b A_{B\nu}^c A_B^{\mu d} A_B^{\nu e} = \frac{1}{4} g_B^2 f_{abc} f_{ade} A_{B\mu}^b A_{B\nu}^c A_B^{\mu d} A_B^{\nu e}, \quad (1.3)$$

así tenemos $\mathcal{Z}_5 = \mathcal{Z}_g^2 \mathcal{Z}_3^2$. Con el término de interacción del quark-gluón:

$$\frac{\mathcal{Z}_{1Fj}}{\mathcal{Z}_g \mathcal{Z}_{2Fj} \mathcal{Z}_3^{1/2}} g_B \bar{\psi}_{Bl}^j R_{lk}^a \gamma^\mu \psi_{Bk}^j A_{B\mu}^a = g_B \bar{\psi}_{Bl}^j R_{lk}^a \gamma^\mu \psi_{Bk}^j A_{B\mu}^a, \quad (1.4)$$

se obtiene $\mathcal{Z}_{1Fj} = \mathcal{Z}_g \mathcal{Z}_{2Fj} \mathcal{Z}_3^{1/2}$. En el caso del término gluón-fantasma:

$$\frac{\tilde{\mathcal{Z}}_1}{\mathcal{Z}_g \tilde{\mathcal{Z}}_3 \mathcal{Z}_3^{1/2}} g_B^2 f_{abc} (\partial_\mu \bar{\eta}_B^a) A_B^{\mu b} \eta^{Bc} = g_B^2 f_{abc} (\partial_\mu \bar{\eta}_B^a) A_B^{\mu b} \eta^{Bc}, \quad (1.5)$$

y así $\tilde{\mathcal{Z}}_1 = \mathcal{Z}_g \tilde{\mathcal{Z}}_3 \mathcal{Z}_3^{1/2}$. El término de masa para quarks nos da:

$$\frac{\mathcal{Z}_{4j}}{\mathcal{Z}_{mj} \mathcal{Z}_{2Fj}} m_{Bj} \bar{\psi}_{Bl}^j \psi_{Bl}^j = m_{Bj} \bar{\psi}_{Bl}^j \psi_{Bl}^j, \quad (1.6)$$

que implica $\mathcal{Z}_{4j} = \mathcal{Z}_{mj} \mathcal{Z}_{2Fj}$. Para el término que fija la norma:

$$-\frac{1}{2\xi} \frac{\mathcal{Z}_6}{\mathcal{Z}_\xi \mathcal{Z}_3} (\partial^\mu A_{\mu B}^a)^2 = -\frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_{\mu B}^a)^2, \quad (1.7)$$

por lo que $\mathcal{Z}_6 = \mathcal{Z}_\xi \mathcal{Z}_3$. Resumimos las relaciones entre las constantes de renormalización:

$$\mathcal{Z}_1 = \mathcal{Z}_g \mathcal{Z}_3^{3/2}, \quad (1.8)$$

$$\mathcal{Z}_5 = \mathcal{Z}_g^2 \mathcal{Z}_3^2, \quad (1.9)$$

$$\tilde{\mathcal{Z}}_1 = \mathcal{Z}_g \tilde{\mathcal{Z}}_3 \mathcal{Z}_3^{1/2}, \quad (1.10)$$

$$\mathcal{Z}_6 = \mathcal{Z}_\xi \mathcal{Z}_3, \quad (1.11)$$

$$\mathcal{Z}_{1Fj} = \mathcal{Z}_g \mathcal{Z}_{2Fj} \mathcal{Z}_3^{1/2}, \quad (1.12)$$

$$\mathcal{Z}_{4j} = \mathcal{Z}_{mj} \mathcal{Z}_{2Fj}. \quad (1.13)$$

Manipulando algebraicamente estas relaciones, adicionalmente obtenemos:

$$\frac{\mathcal{Z}_1}{\mathcal{Z}_3} = \frac{\tilde{\mathcal{Z}}_1}{\tilde{\mathcal{Z}}_3} = \frac{\mathcal{Z}_5}{\mathcal{Z}_1} = \frac{\mathcal{Z}_{1Fj}}{\mathcal{Z}_{2Fj}}. \quad (1.14)$$

A este conjunto de identidades se les conoce como Identidades de Slavlov-Taylor [31, 32], que son generalizaciones no abelianas de las identidades de Ward-Takahashi [33, 34]. Garantizan la universalidad de la constante de acoplamiento g .

Habiendo escrito el lagrangiano de QCD de esta manera, a continuación mostramos algunas de sus diversas simetrías.

1.3. Simetrías del lagrangiano

En esta sección mostramos algunas simetrías del lagrangiano de QCD y sus corolarios. La mayoría de ellas son sólo aproximadas en la naturaleza; sin embargo, nos permiten obtener un entendimiento más profundo sobre la física en el mundo real.

Comenzamos discutiendo el teorema de Nöether [35], que nos permite relacionar simetrías con corrientes y cargas conservadas.

1.3.1. Teorema de Nöether

Supongamos ahora que el lagrangiano tiene los campos de quarks y el campo de gluones:

$$\mathcal{L}_{qg} = \bar{\psi}(x)(i\gamma_\mu D^\mu - m)\psi(x) + \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a(x)F_a^{\mu\nu}(x), \quad (a = 1 \cdots 8), \quad (1.15)$$

donde $D^\mu = \partial^\mu - igA^\mu(x)$, $A^\mu(x) = A_a^\mu(x)\lambda_a/2$ y $\psi(x) = (u \ d \ s)^T$. Pensando de manera general, definimos una transformación **global** como:

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = \exp[i\Gamma^a\Theta_a]\psi(x) = (1 + i\Gamma^a\Theta_a \pm \cdots)\psi(x), \quad (1.16)$$

donde Γ^a son los generadores del grupo $U(N)$ o $SU(N)$ y Θ_a es independiente de x . La corriente de Nöether está dada por:

$$J_\mu^a(x) = -\frac{\partial\mathcal{L}_{qg}}{\partial(\partial^\mu\psi)}\frac{\partial\psi'}{\partial\Theta_a} = \bar{\psi}(x)\gamma_\mu\Gamma^a\psi(x). \quad (1.17)$$

Si \mathcal{L}_q es invariante ante la transformación global, la corriente de Nöether se conserva:

$$\partial_\mu J_\mu^a(x) = 0. \quad (1.18)$$

Además, si la corriente está localizada en el espacio, se tiene una carga conservada:

$$\begin{aligned} Q_a &= \int d^3x J_a^0(x) = \int d^3x \psi^\dagger(x)\Gamma_a\psi(x), \\ \dot{Q}_a &= \frac{dQ_a}{dt} = 0 \left(\int_V d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_a = \oint_{\partial V} d\vec{f} \cdot \vec{J}_a = 0 \right). \end{aligned} \quad (1.19)$$

Algunos corolarios del teorema de Nöether se discuten en seguida.

1.3.2. Simetrías de sabor y número bariónico

Estudiamos diversas simetrías del lagrangiano (1.15):

1. **Simetría de número bariónico:** Tenemos la simetría global $U(1)$, tal que:

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\theta} \psi(x) \Rightarrow J_B^\mu(x) = \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) . \quad (1.20)$$

La carga conservada, $B = \int d^3x \psi^\dagger(x) \psi(x)$, corresponde al número bariónico.

2. **Simetría de isospin/sabor:** Tomamos $\psi(x) = (u \ d)^T$ y asumimos $m_u = m_d$. La transformación $SU_f(2)$ de sabor es:

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = \exp \left[i \frac{\tau^a}{2} \theta_a \right] , \quad (1.21)$$

donde $\tau^a/2$ ($a = 1, 2, 3$) son los generadores de $SU(2)$, las matrices de Pauli. La corriente y carga conservadas:

$$V_a^\mu(x) = \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \frac{\tau^a}{2} \psi(x) , \quad (1.22)$$

$$Q_V^a = \int d^3x V_a^0(x) = \int d^3x \psi^\dagger(x) \frac{\tau^a}{2} \psi(x) . \quad (1.23)$$

Les denominamos corriente y carga de isospin. Podemos extender al caso con $N_f = 3$ añadiendo la componente del quark strange a $\psi(x)$; adicionalmente, asumimos $m_u = m_d = m_s$ y las matrices de Pauli τ^a se reemplazan por las matrices de GellMann, λ^a ($a = 1, \dots, 8$).

1.3.3. Simetría quiral y ruptura

Consideremos $N_f = 2$ y el lagrangiano (1.15). Separamos las componentes del gluón, interacción quark-gluón y el término de masa:

$$\mathcal{L}_{qg} = \bar{\psi}(x) (i\gamma_\mu \partial^\mu) \psi(x) + \mathcal{M} \bar{\psi}(x) \psi(x) + \mathcal{L}_{\text{gluón}} + \mathcal{L}_{\text{int}} , \quad (1.24)$$

donde $\psi(x) = (u \ d)^T$ y $\mathcal{M} = \text{diag}(m_u \ m_d)$. En el límite donde $m_u = m_d = 0$, podemos separar los campos de quarks en derecho e izquierdo:

$$\psi_R(x) = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \gamma_5) \psi(x) , \quad \psi_L(x) = \frac{1}{2}(\mathbb{1} - \gamma_5) \psi(x) . \quad (1.25)$$

De esta manera, reescribimos al lagrangiano como:

$$\mathcal{L}_{qg} = \bar{\psi}_R(x) (i\gamma_\mu D^\mu) \psi_R(x) + \bar{\psi}_L(x) (i\gamma_\mu D^\mu) \psi_L(x) + \mathcal{L}_{\text{gluón}} . \quad (1.26)$$

Definimos transformaciones unitarias en la forma:

$$\psi_R(x) \rightarrow U_R \psi_R(x), \quad \psi_L(x) \rightarrow U_L \psi_L(x), \quad (1.27)$$

tal que $U_{R,L}$ pueden ser transformaciones globales unitarias $U(1)$ o $SU(2)$. Así, el grupo de simetría para el lagrangiano sin masa es $SU_R(2) \times SU_L(2) \times U_R(1) \times U_L(1)$. Las corrientes asociadas a las transformaciones $U(1)$ son:

$$J_R^\mu(x) = \bar{\psi}_R(x) \gamma^\mu \psi_R(x), \quad J_L^\mu(x) = \bar{\psi}_L(x) \gamma^\mu \psi_L(x), \quad (1.28)$$

para el grupo $SU(2)$:

$$J_R^{\mu a}(x) = \bar{\psi}_R(x) \gamma^\mu \frac{\tau^a}{2} \psi_R(x), \quad J_L^{\mu a}(x) = \bar{\psi}_L(x) \gamma^\mu \frac{\tau^a}{2} \psi_L(x). \quad (1.29)$$

De la suma de las corrientes derecha e izquierda se obtiene:

$$J^\mu(x) = \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x), \quad (1.30)$$

$$J^{\mu a}(x) = \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \frac{\tau^a}{2} \psi(x), \quad (1.31)$$

que corresponden a las corrientes de número bariónico y de isospin, en las ecuaciones (1.20) y (1.22). A la corriente de isospin también se le llama corriente vectorial. Por su parte, al restar las corrientes derecha e izquierda, se obtienen las corrientes axiales:

$$J^{\mu 5}(x) = \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \gamma^5 \psi(x), \quad (1.32)$$

$$J^{\mu 5a}(x) = \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \gamma^5 \frac{\tau^a}{2} \psi(x). \quad (1.33)$$

Las corrientes axiales de isospin, $J^{\mu 5a}$ se conservan y definen una carga axial Q_A^{5a} . Por otro lado, la corriente axial singlete de isospin, $J^{\mu 5}$, no se conserva por la presencia de la anomalía no abeliana. Ésto se discute en secciones posteriores.

Ruptura. La presencia de un término de masa en (1.24), mezcla quarks izquierdos y derechos, por lo que rompe **explícitamente** la simetría quiral:

$$\mathcal{L}_{\text{masa}} = \bar{\psi}_R \mathcal{M} \psi_L + \bar{\psi}_L \mathcal{M} \psi_R. \quad (1.34)$$

Sin embargo, éste no es el único mecanismo de ruptura [36]. En la realización de Weyl-Wigner [37], las cargas vectoriales y axiales, Q_V^a y Q_A^{5a} , actúan sobre el vacío:

$$Q_V^a |0\rangle = 0, \quad Q_A^{5a} |0\rangle = 0, \quad (1.35)$$

es decir, hay simetría total sobre estados de paridad positiva y negativa. En principio, se espera que por cada estado de paridad positiva, se observe en el espectro un estado de paridad negativa con la misma masa. Ésto no ocurre en la naturaleza. Por ejemplo, entre el mesón ρ y su compañero de paridad (el mesón a_1) hay una diferencia de masas del orden de 500 MeV [38]. De manera que, empíricamente:

$$Q_V^a|0\rangle = 0, \quad Q_A^{5a}|0\rangle \neq 0. \quad (1.36)$$

Por otra parte, si los quarks son no masivos (o casi no masivos), el costo energético de crear pares adicionales quark-antiquark es pequeño. Así, QCD contiene condensados de pares quark-antiquark. Los condensados tienen momento total y momento angular cero. El valor de expectación del vacío es caracterizado por un condensado quark-antiquark, que aunque se transforma como en (1.27), es distinto de cero [39, 40]:

$$\langle 0|\bar{\psi}\psi|0\rangle = \langle 0|\bar{\psi}_R\psi_L + \bar{\psi}_L\psi_R|0\rangle \neq 0. \quad (1.37)$$

Este hecho permite a los quarks u, d adquirir una masa efectiva cuando viajan a través del vacío de QCD, es decir, dentro de los estados ligados quark-antiquark. Es un efecto que no se puede descifrar de la teoría de perturbaciones, que predice un condensado idénticamente cero. Adicionalmente, tenemos la siguiente relación:

$$\langle 0|\bar{\psi}\psi|0\rangle \neq 0 \Leftrightarrow Q_A^{5a}|0\rangle \neq 0. \quad (1.38)$$

Hemos visto que, aunque se transforma de la misma manera que el lagrangiano, el vacío no tiene todas sus simetrías [41]. Las transformaciones axial/chiral $SU(2) \times U(1)$ que hemos descrito, no son simetrías que se manifiestan en QCD. Nambu-Goldstone [42–44] hipotizaron que éstas se rompen de manera espontánea (dinámica).

El teorema de Goldstone nos dice que cuando se rompe una simetría continua, de manera espontánea, la QFT genera una partícula no masiva con los mismos números cuánticos que una simetría local de rotación [43]. Ésto implica que, por cada corriente axial de isospin en QCD², con quarks u, d no masivos (o también s), se obtienen los mesones pseudoescalares: $\{\pi^0, \pi^\pm\}$ con $N_f = 2$; $\{\pi^0, \pi^\pm, K^0, K^\pm, \bar{K}, \eta\}$, con $N_f = 3$.

Por otra parte, los piones tienen paridad negativa; el elemento de matriz de $J^{\mu 5a}$, entre el vacío y un pión *on-shell*, se escribe:

$$\langle 0|J^{\mu 5a}(x)|\pi^b(p)\rangle = -ip^\mu f_\pi \delta^{ab} e^{-ip \cdot x}, \quad (1.39)$$

²La corriente $J^{\mu 5}$ no se conserva y por tanto no existen isosingletes ligeros.

donde $f_\pi \approx 0.92$ MeV es la constante de decaimiento del pión. En el límite quiral, al contraer con p_μ y utilizar la conservación de dicha corriente axial, tenemos que $p^2 = 0$. En este límite el pión es no masivo, como lo requiere el teorema de Goldstone.

Por otro lado, si consideramos que $m_u, m_d \neq 0$, tenemos:

$$\partial_\mu J^{\mu 5a}(x) = i\bar{\psi}(x) \left\{ \mathcal{M}, \frac{\tau^a}{2} \right\} \psi(x), \quad (1.40)$$

por lo que, de la ecuación (1.39):

$$\langle 0 | \partial_\mu J^{\mu 5a}(x) | \pi^b(p) \rangle = p^2 f_\pi \delta^{ab} = \langle 0 | i\bar{\psi}(x) \left\{ \mathcal{M}, \frac{\tau^a}{2} \right\} \psi(x) | \pi^b(p) \rangle, \quad (1.41)$$

de manera que obtenemos la relación GellMann-Oakes-Renner (GMOR) [6]:

$$m_\pi^2 = (m_u + m_d) \frac{\kappa_\pi}{f_\pi}, \quad (1.42)$$

donde a $\kappa_\pi \sim 300$ MeV y eventualmente se le asocia con el condensado [45]. Hemos usado el siguiente resultado:

$$\text{Tr} \left[\left\{ \mathcal{M}, \frac{\tau^a}{2} \right\} \tau^b \right] = \frac{1}{2} \delta^{ab} (m_u + m_d). \quad (1.43)$$

La relación (1.42) implica que el **cuadrado** de la masa del bosón de Goldstone, evoluciona linealmente con la masa de los quarks. Contrariamente a la masa de los bariones, que tienen una relación **lineal**, de acuerdo a las fórmulas de masa de GellMann-Okubo [3, 5]. En cierta medida, esto explica porqué, con los mismos quarks de valencia, tenemos $m_\pi \approx 140$ MeV y masa del nucleón $m_N \approx 940$ MeV [38].

La simetría quiral y su rompimiento tienen consecuencias muy grandes en la naturaleza: entre otras cosas, podemos tener piones muy ligeros y al mismo tiempo, con los mismos quarks de valencia, formar estados mucho más pesados. Estos hechos discuten con mayor detalle en capítulos posteriores. Veremos que son consecuencia de la dinámica de QCD: así, por *ruptura espontánea* entiéndase *dinámica* [17, 46].

1.3.4. Simetría de norma

La simetría fundamental de QCD, inviolable, es la simetría de norma. QCD es una teoría de campos (QFT) basada en una simetría de norma $SU_c(3)$ de color. Comprender esta simetría nos ayuda a dar sentido a la forma del lagrangiano de QCD, ecuación (1.1). Además, nos brinda un mejor entendimiento de la naturaleza de las interacciones fuertes.

Imaginemos que sólo tenemos el campo de materia, el campo de quarks:

$$\mathcal{L}_q = \bar{\psi}(x)(i\gamma_\mu\partial^\mu - m)\psi(x) . \quad (1.44)$$

Hemos visto que las simetrías globales $U(1)$ o $SU(2)$ (o $SU(3)$, en su defecto) implican conservación de número bariónico o de sabor. Sin embargo, estas simetrías no demandan la presencia de campos de norma, por lo que la materia (quarks) no interactúa. Promovemos entonces una transformación local, $SU_c(3)$ de color:

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = \exp\left[i\frac{\lambda^a}{2}\theta_a(x)\right]\psi(x) , \quad (1.45)$$

donde $\theta_a(x)$ es una función real ($a = 1, \dots, 8$ y λ^a las matrices de Gellman, como usualmente). Para que la física permanezca invariante ante esta transformación, se debe:

- **Redefinir la derivada.** Los términos cinéticos contienen derivadas. Dado un vector de dirección n^μ , la derivada se define como [30]:

$$n^\mu\partial_\mu\psi(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon}[\psi(x+n) - \psi(x)] , \quad (1.46)$$

Los campos $\psi(x+n)$ y $\psi(x)$ transforman diferente bajo (1.45); la no localidad de la transformación vuelve no trivial la definición (1.46). Debemos definir entonces la derivada covariante:

$$n^\mu D_\mu\psi(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon}[\psi(x+\epsilon n) - U(x+\epsilon n, x)\psi(x)] , \quad (1.47)$$

donde $U(x, y) = \exp[i\phi(x, y)]$ es una fase, tal que $U(x, x) = 1$ y además, $\psi(x)$ y $U(x, y)\psi(y)$ tienen la misma ley de transformación (1.45). Expandimos $U(x+\epsilon n, x)$ a orden lineal en ϵ y así, la derivada covariante toma la forma:

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu(x) , \quad A_\mu(x) = \sum_{a=1}^8 \frac{\lambda^a}{2} A_\mu^a(x) . \quad (1.48)$$

Hemos introducido un campo de norma, $A_\mu^a(x)$, que corresponde a los gluones. El término de interacción quark-gluón es $-igA_\mu(x)\psi(x)$, dónde la constante adimensional g es la magnitud del acoplamiento (en analogía con e en QED).

- **Transformar los campos de norma.** Para que (1.44) permanezca invariante con las definiciones (1.48), el campo de norma debe transformarse como:

$$A_\mu^a(x) \rightarrow A_\mu^{a'}(x) = A_\mu^a(x) + \frac{1}{g}\partial_\mu\theta^a(x) + f^{abc}\theta^b(x)A_\mu^c(x). \quad (1.49)$$

Donde f_{abc} son las constantes de estructura completamente antisimétricas, que hemos definido en secciones anteriores. El tensor de fuerza del campo gluónico es:

$$F_{\mu\nu}^a(x) = \partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x) + gf^{abc}A_\mu^b(x)A_\nu^c(x). \quad (1.50)$$

La ecuación (1.50) difiere de su análogo en QED en el término proporcional a g ; ésto es por la presencia de las estructuras antisimétricas, corolario de tratar con una teoría no abeliana. Podemos definir un término invariante de norma como:

$$\mathcal{L}_g = -\frac{1}{2}\text{tr}[F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}] = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a(x)F_a^{\mu\nu}(x). \quad (1.51)$$

Encontraste con QED, este lagrangiano contiene términos cúbicos y cuárticos en los campos A_μ^i . Así, describe una teoría no trivial donde los campos de norma interactúan entre sí. Por otro lado, el campo de norma debe ser no masivo, pues un término de masa $m_g A_\mu^a(x)A_\mu^a(x)$ viola invarianza de norma.

Hasta este punto, tenemos el siguiente lagrangiano:

$$\mathcal{L}_{qg} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} + \sum_{j=1}^{N_f} \bar{\psi}_l^j (i\gamma^\mu D_\mu - m_j)\psi_l^j. \quad (1.52)$$

- **Fijar la norma.** Para remover los grados de libertad redundantes en los campos de norma, debemos dar restricciones al campo. Una restricción es imponer la norma covariante (o norma de Lorentz)³:

$$G(A) = \partial^\mu A_\mu(x) = 0. \quad (1.53)$$

³Otras restricciones son la norma temporal, norma axial o norma de Coulomb.

Introducimos $\lambda(\partial^\mu A_\mu^a(x))^2$, donde $\lambda = -(2\xi)^{-1}$ es un multiplicador de Lagrange, un parámetro que podemos ajustar. Añadimos éste término a (1.52), obtenemos:

$$\mathcal{L}_{qg} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu^a)^2 + \sum_{j=1}^{N_f} \bar{\psi}_l^j (i\gamma^\mu D_\mu - m_j)\psi_l^j. \quad (1.54)$$

Con el término que fija la norma, el operador diferencial que actúa sobre $A_\mu(x)$ es invertible \Rightarrow el propagador del gluón está bien definido.

- **Fantasma y determinante de Faddeev-Popov.** Para que (1.54) sea completamente consistente y se remuevan todos los grados de libertad espurios, necesitamos incluir un campo adicional.

Supongamos que queremos derivar las reglas de Feynman para el campo $A_\mu(x)$. Definimos la integral funcional:

$$\int \mathcal{D}A \exp \left[i \int d^4x \left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} \right) \right]. \quad (1.55)$$

De la condición (1.53), tenemos:

$$1 = \int \mathcal{D}\alpha \delta(G(A^\alpha)) \det \left(\frac{\delta G(A^\alpha)}{\delta \alpha} \right), \quad (1.56)$$

donde A_μ^α es el campo A_μ transformado de acuerdo a (1.57):

$$(A^\alpha)_\mu^a \rightarrow A_\mu^{a'} = A_\mu^a + \frac{1}{g}\partial_\mu \alpha^a + f^{abc}\alpha^b A_\mu^c = A_\mu^a + \frac{1}{g}D_\mu \alpha^a. \quad (1.57)$$

Para no abrumar la notación, obviamos la dependencia con x de los campos y α . De lo anterior, notamos que:

$$\det \left(\frac{\delta G(A^\alpha)}{\delta \alpha} \right) = \det \left(\frac{1}{g}\partial^\mu D_\mu \right). \quad (1.58)$$

A diferencia de QED, éste operador depende de los campos A_μ , por lo que contribuye con nuevos términos al lagrangiano (1.54). Para representar éste determinante, Faddeev y Popov introdujeron campos auxiliares, anticonmutantes, a los que llamaron fantasmas [47]:

$$\det \left(\frac{1}{g}\partial^\mu D_\mu \right) = \int \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\bar{\eta} \exp \left[i \int d^4x \bar{\eta}(-\partial^\mu D_\mu)\eta \right]. \quad (1.59)$$

El lagrangiano del campo fantasma corresponde a:

$$\mathcal{L}_\eta = -(\partial^\mu \bar{\eta}_a)(\partial_\mu \eta_a) - gf_{abc}(\partial_\mu \bar{\eta}_a)A_b^\mu \eta_c. \quad (1.60)$$

Añadimos este lagrangiano a (1.54) y obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu^a)^2 - (\partial^\mu \bar{\eta}_a)(\partial_\mu \eta_a) - gf_{abc}(\partial_\mu \bar{\eta}_a)A_b^\mu \eta_c \\ & + \sum_{j=1}^{N_f} \bar{\psi}_l^j (i\gamma^\mu D_\mu - m_j)\psi_l^j, \end{aligned} \quad (1.61)$$

que corresponde al lagrangiano de QCD en la ecuación (1.1).

Estudiamos distintas simetrías del lagrangiano de QCD y sus consecuencias en el mundo real. Hemos visto como, a partir del campo de materia (quarks), demandando una simetría local (simetría de norma), se construye el lagrangiano de QCD. Éste es un hecho extraordinario. En la siguiente sección, estudiamos sus ecuaciones de movimiento: ecuaciones de Dyson-Schwinger.

1.4. Anomalías quirales: abeliana y no abeliana

Adler-Bell-Jackiw mostraron que las corrientes axiales, en los diagramas de triángulo de la figura 1.1, contienen anomalías [48, 49]. Los bosones de norma pueden ser gluones (anomalía *no abeliana*) o fotones (anomalía *abeliana*).

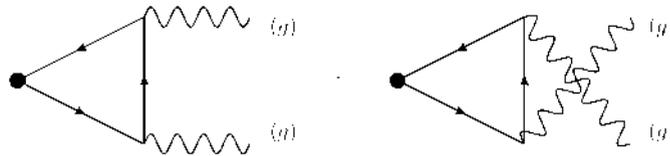


FIGURA 1.1: Diagramas que inducen la anomalía axial para una corriente quiral.

1.4.1. Anomalía no abeliana

El caso de QCD corresponde a la anomalía no abeliana. Para la corriente axial de isospin en la ecuación (1.33), tenemos:

$$\partial_\mu J^{\mu 5a} = -\frac{g^2}{16\pi^2} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} F_{\alpha\beta}^c F_{\mu\nu}^d \cdot \text{Tr}[\tau^a R^c R^d], \quad (1.62)$$

con las cantidades definidas con su significado usual. Tomando la traza sobre color y sabor, encontramos que:

$$\text{Tr}[\tau^a R^c R^d] = \text{Tr}[\tau^a] \text{Tr}[R^c R^d] = 0, \quad (1.63)$$

pues $\text{Tr}[\tau^a] = 0$. Como dijimos en apartados anteriores, la corriente axial de isospin se conserva; no es afectada por la anomalía no abeliana. Por su parte, la corriente axial de singlete de isospin:

$$\partial_\mu J^{\mu 5} = -\frac{g^2}{16\pi^2} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} F_{\alpha\beta}^c F_{\mu\nu}^d \cdot \text{Tr}[\mathbb{1} R^c R^d], \quad (1.64)$$

que implica:

$$\partial_\mu J^{\mu 5} = -\frac{g^2 N_f}{32\pi^2} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} F_{\alpha\beta}^c F_{\mu\nu}^d. \quad (1.65)$$

Ésta corriente no se conserva, es afectada por la anomalía no abeliana. La ecuación anterior nos muestra porqué, en las interacciones fuertes, no existe un meson pseudoescalar ligero, que sea isosinglete y que tenga una masa comparable a la de los piones. Cuando se incluyen quarks s (el caso $N_f = 3$), la enorme diferencia de masas de los mesones $\eta - \eta'$ es explicada por esta anomalía.

1.4.2. Anomalía abeliana

Pensemos ahora en QED. La anomalía axial de la corriente de isospin está dada por:

$$\partial_\mu J^{\mu 5a} = -\frac{e^2}{16\pi^2} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} \cdot \text{Tr}[\tau^a \mathcal{Q}^2], \quad (1.66)$$

donde $\mathcal{Q} = \text{diag}(2/3 - 1/3)$ es el operador de carga y $F_{\mu\nu}$ ahora corresponde al tensor de fuerza del campo electromagnético (fotón). La traza de sabor es únicamente distinta de cero para $a = 3$, de manera que:

$$\partial_\mu J^{\mu 53} = -\frac{e^2}{32\pi^2} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu}. \quad (1.67)$$

La corriente $J^{\mu 53}$ aniquila a un π^0 . Así, la ecuación anterior indica que dicha anomalía contribuye al elemento de matriz para el decaimiento $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$; de hecho, es la contribución principal.

Consideremos el elemento de matriz de la corriente axial entre el vacío y un estado con dos fotones:

$$\langle k_1, k_2 | J^{\mu 53}(P) | 0 \rangle = \epsilon_\mu^* \epsilon_\nu^* \mathcal{M}^{\lambda\mu\nu}(k_1, k_2), \quad (1.68)$$

tal que, de la ecuación (1.67) se obtiene:

$$iP_\lambda \mathcal{M}^{\lambda\mu\nu} = -\frac{e^2}{4\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} k_1^\alpha k_2^\beta. \quad (1.69)$$

Por otra parte, podemos descomponer $\mathcal{M}^{\lambda\mu\nu}$ en factores de forma. La descomposición debe ser tal que contenga todas las posibles estructuras tensoriales, siempre y cuando sean simétricas bajo el intercambio $(k_1, \mu) \leftrightarrow (k_2, \nu)$ y cumplan las identidades de Ward en QED [33, 34]. Tenemos entonces:

$$iP_\lambda \mathcal{M}^{\lambda\mu\nu}(k_1, k_2) = iP^2 \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} k_1^\alpha k_2^\beta (\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2), \quad (1.70)$$

donde $\mathcal{M}_{1,2}$ son factores de forma y $P = k_1 + k_2$ es el momento total del sistema. Las condiciones *on-shell* implican que $k_1^2 = k_2^2 = 0$ y $P^2 = 2 k_1 \cdot k_2$.

La expresión (1.70) entra en conflicto con la ecuación (1.69), pues aparentemente se anula cuando $P^2 \rightarrow 0$. Ésto se puede resolver si pensamos que uno de los factores de forma en (1.70) contiene un polo en P^2 . El polo puede surgir a partir de la creación de un π^0 y su posterior aniquilación $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$. El elemento de matriz:

$$i\mathcal{M}(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma) = iG_{\pi\gamma}^0 \epsilon_\mu^* \epsilon_\nu^* \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} k_1^\alpha k_2^\beta, \quad (1.71)$$

donde $G_{\pi\gamma}^0$ es una constante por determinar. De la ecuación anterior y (1.39), vemos que la contribución de este decaimiento al proceso (1.68), es:

$$\mathcal{M}_0 = (iP^\mu f_\pi) \frac{i}{P^2} (iG_{\pi\gamma}^0 \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} k_1^\alpha k_2^\beta), \quad (1.72)$$

de manera que la contribución a \mathcal{M}_1 está dada por:

$$\mathcal{M}_1 = -\frac{i}{P^2} f_\pi G_{\pi\gamma}^0 + \text{constante} + \mathcal{O}(P^2). \quad (1.73)$$

Finalmente, comparando (1.70) y (1.69), tenemos:

$$G_{\pi\gamma}^0 = \frac{e^2}{4\pi^2 f_\pi}. \quad (1.74)$$

Con $N_f = 3$, el resultado anterior también aplica al mesón η . Por otra parte, éste bien conocido valor implica que el ancho de decaimiento $\Gamma[\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma]$ es:

$$\Gamma(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma) = \frac{\alpha_{\text{QED}}^2 m_\pi^3}{64\pi^3 f_\pi^2} = 7.7 \text{ keV}. \quad (1.75)$$

Como podemos observar, la relación anterior está en íntima conexión con la anomalía abeliana de Adler-Bell-Jackiw. Experimentalmente, se confirma a una precisión de un poco porcentaje. En nuestro estudio no perturbativo del factor de forma $\gamma\gamma^* \rightarrow \pi^0$, es de extrema importancia satisfacer este resultado [27, 50].

1.5. Ecuaciones de Dyson-Schwinger

Como mencionamos anteriormente, QCD se caracteriza por dos fenómenos emergentes, no obvios del lagrangiano:

- **Confinamiento:** Los grados de libertad fundamentales, quarks y gluones, no pueden ser aislados (ni observados directamente), pues poseen carga de color. Éstos se agrupan en estados ligados de color neutro, denominados hadrones. Los hadrones pueden ser: *bariones* (compuestos por tres quarks) o *mesones* (compuestos por un quark y un antiquark)⁴.
- **DCSB:** Debido a las autointeracciones, quarks y gluones adquieren masa (efectiva) de manera dinámica, dentro de los hadrones. Las autointeracciones generan un valor de expectación del vacío $\langle \bar{q}q \rangle$ (también llamado condensado) distinto de cero, que es el parámetro de orden de la DCSB.

Estos fenómenos son de naturaleza no perturbativa. Debido a ello, estudiar hadrones (y sus constituyentes) de primeros principios, es un enorme reto. Existen diversos acercamientos a QCD no perturbativo: teoría quiral de perturbaciones [51] u otros modelos efectivos [42], lattice QCD (lQCD) [14], ecuaciones de Dyson-Schwinger [52], entre otros. Nuestro acercamiento con QCD es a través de estas últimas.

Las DSEs son una torre infinita de ecuaciones acopladas, en el sentido de que dada una función de Green de n -puntos, ésta depende de al menos una función de orden mayor. Debido a dicha dependencia en funciones de más y más puntos, se necesita de un esquema de truncamiento, consistente y apropiado, para obtener un conjunto de ecuaciones tratable. En la derivación de las DSEs no se hacen suposiciones sobre el acoplamiento, por lo que son no perturbativas. Como hemos dicho antes, las DSEs son exactas e invariantes de Poincaré; consistentes con confinamiento, DCSB y QCD perturbativo [52–55].

En el siguiente capítulo, discutimos sobre la DSE para el propagador del quark y su correspondiente BSE para los mesones; dando énfasis al truncamiento de las DSEs-BSEs y el cálculo de propiedades estáticas (masas, constantes de decaimiento).

⁴Se predicen estados exóticos, como tetraquarks, pero no hay confirmación experimental.

Capítulo 2

El enfoque DSE-BSE

2.1. Propagador del quark

La DSE para el propagador del quark, en su forma desnuda¹, se escribe:

$$\begin{aligned} S_B^{-1}(p; \Lambda) &= S_0^{-1}(p) + \Sigma_B(p; \Lambda) , \\ \Sigma_B(p; \Lambda) &= \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} g_B^2(\Lambda) D_{\mu\nu}^B(p-q; \Lambda) \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\mu S_B(q; \Lambda) \Gamma_{B\nu}^a(q, p; \Lambda) , \end{aligned} \quad (2.1)$$

donde Λ es el regulador de corte UV y los demás símbolos tienen su significado usual:

- S : Propagador del quark, completamente vestido.
- S_0 : Propagador del quark a nivel árbol.
- $D_{\mu\nu}$: Propagador del gluón, completamente vestido.
- Γ_ν^a : Vértice quark-gluón, completamente vestido.
- γ_μ : Vértice quark-gluón a nivel árbol.
- Σ_B : comúnmente se le denomina *autoenergía*.

De lo anterior, entiéndase por *vestido*, como aquella función de Green que contiene todas las posibles contribuciones a cualquier orden. $D_{\mu\nu}$ y Γ_ν^a obedecen sus propias DSEs. La DSE para el propagador del quark corresponde diagramáticamente a la figura 2.1.

¹Se escribe en el espacio Euclidiano. Las convenciones se encuentran en el Apéndice A.

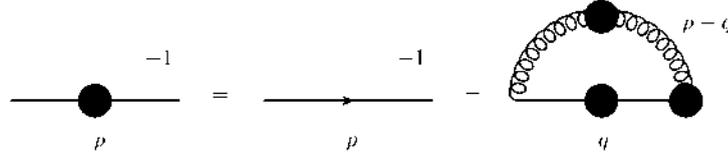


FIGURA 2.1: Ecuación de Dyson-Schwinger para el propagador del quark.

Escribimos las cantidades desnudas en términos de las renormalizadas:

$$\frac{S^{-1}(p; \zeta)}{\mathcal{Z}_{2F}} = S_0^{-1}(p) + \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} [\mathcal{Z}_g g(\zeta)]^2 [\mathcal{Z}_3 D_{\mu\nu}(p-q; \zeta)] \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\mu \quad (2.2)$$

$$\times [\mathcal{Z}_{2F} S(q; \zeta)] \left[\frac{\Gamma_\nu^a(p, q; \zeta)}{\mathcal{Z}_{1F}} \right].$$

Las constantes de renormalización \mathcal{Z} dependen del corte Λ y del punto de renormalización ζ ; por simplicidad en la notación obviaremos esa dependencia. El propagador del quark a nivel árbol está dado por:

$$S_0^{-1}(p) = i\gamma \cdot p + m_B(\Lambda) = i\gamma \cdot p + \mathcal{Z}_m m(\zeta), \quad (2.3)$$

donde $\mathcal{Z}_m m(\zeta) = m_B(\Lambda)$. Multiplicamos por \mathcal{Z}_{2F} y reagrupamos las constantes de renormalización:

$$S^{-1}(p, \zeta) = \mathcal{Z}_{2F} [i\gamma \cdot p + \mathcal{Z}_m m(\zeta)] + \mathcal{Z}_g^2 \mathcal{Z}_{2F}^2 \mathcal{Z}_3 \mathcal{Z}_{1F}^{-1} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} g^2(\zeta) \quad (2.4)$$

$$\times D_{\mu\nu}(p-q; \zeta) \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\mu S(q; \zeta) \Gamma_\nu^a(p, q; \zeta).$$

Ahora, utilizando el hecho de que $\mathcal{Z}_{1F} = \mathcal{Z}_g \mathcal{Z}_{2F} \mathcal{Z}_3^{1/2}$ y $\mathcal{Z}_{2F} \mathcal{Z}_m = \mathcal{Z}_4$, tenemos:

$$S^{-1}(p; \zeta) = \mathcal{Z}_{2F} (i\gamma \cdot p) + \mathcal{Z}_4 m(\zeta) + \mathcal{Z}_{1F} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} g^2(\zeta) \quad (2.5)$$

$$\times D_{\mu\nu}(p-q; \zeta) \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\mu S(q; \zeta) \Gamma_\nu^a(p, q; \zeta).$$

La ecuación 2.5 corresponde a la DSE renormalizada para el propagador del quark [56, 57]. Se le denomina también *ecuación de gap*. Escrita de otra manera (con $g = g(\zeta)$):

$$S^{-1}(p; \zeta) = \mathcal{Z}_{2F} S_0^{-1}(p) + \mathcal{Z}_{1F} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} g^2 D_{\mu\nu}(p-q; \zeta) \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\mu S(q; \zeta) \Gamma_\nu^a(p, q; \zeta). \quad (2.6)$$

Si utilizamos las relaciones de Slavlov-Taylor, podemos escribir la ecuación de gap como:

$$S^{-1}(p; \zeta) = \mathcal{Z}_{2F} S_0^{-1}(p) + \frac{\tilde{\mathcal{Z}}_{1F} \mathcal{Z}_{2F}}{\tilde{\mathcal{Z}}_3} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} g^2 D_{\mu\nu}(p-q; \zeta) \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\mu S(q; \zeta) \Gamma_\nu^a(p, q; \zeta), \quad (2.7)$$

que relaciona el propagador del quark con el sector del fantasma [58]. Independientemente del truncamiento, la forma general del propagador del quark se escribe términos de dos estructuras matriciales $(\mathbb{1}, \gamma \cdot p)$. Ésto lo discutimos a continuación.

2.1.1. Representaciones

De manera general, podemos escribir al propagador del quark como:

$$S^{-1}(p, \zeta) = i \gamma \cdot p A(p^2; \zeta^2) + B(p^2; \zeta^2), \quad (2.8)$$

donde $A(p^2; \zeta^2)$ y $B(p^2; \zeta^2)$ son funciones de vestimiento que se obtienen al resolver la ecuación de gap. Alternativamente, podemos el propagador se escribe:

$$S(p; \zeta) = -i \gamma \cdot p \sigma_v(p^2; \zeta^2) + \sigma_s(p^2; \zeta^2), \quad (2.9)$$

la parte vectorial y escalar del propagador corresponden a $\sigma_v(p^2; \zeta^2)$ y $\sigma_s(p^2; \zeta^2)$, respectivamente. Una forma particularmente conveniente para el entendimiento de la física subyacente es la siguiente:

$$S^{-1}(p; \zeta) = \frac{i \gamma \cdot p + M(p^2; \zeta^2)}{Z(p^2; \zeta^2)}, \quad (2.10)$$

donde $M(p^2; \zeta^2)$ es la función de masa y $Z(p^2; \zeta^2)$ la renormalización de la función de onda. Esta particular forma se asemeja al propagador del quark a nivel árbol, cuando $M(p^2; \zeta^2) \approx m(\zeta)$ y $Z(p^2; \zeta^2) \approx 1$.

Las funciones $A(p^2; \zeta^2)$ y $B(p^2; \zeta^2)$ se relacionan de la siguiente forma:

$$Z(p^2; \zeta^2) = \frac{1}{A(p^2; \zeta^2)}, \quad M(p^2; \zeta^2) = \frac{B(p^2; \zeta^2)}{A(p^2; \zeta^2)}.$$

Además, se tienen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \sigma_v(p^2; \zeta^2) &= \frac{Z(p^2; \zeta^2)}{p^2 + M^2(p^2; \zeta^2)} = \frac{A(p^2; \zeta^2)}{p^2 A^2(p^2; \zeta^2) + B^2(p^2; \zeta^2)}, \\ \sigma_s(p^2; \zeta^2) &= \frac{Z(p^2; \zeta^2) M(p^2; \zeta^2)}{p^2 + M^2(p^2; \zeta^2)} = \frac{B(p^2; \zeta^2)}{p^2 A^2(p^2; \zeta^2) + B^2(p^2; \zeta^2)}. \end{aligned}$$

Independientemente del truncamiento y la forma del propagador, debemos ser capaces de reproducir la teoría de perturbaciones, por lo que se tiene la condición:

$$S^{-1}(p)|_{p=\zeta} = i \gamma \cdot p + m(\zeta), \quad (2.11)$$

donde $m(\zeta) = M(\zeta^2)$. Ésto implica que $A(\zeta^2; \zeta^2) = 1 = Z(\zeta^2; \zeta^2)$ y $B(\zeta^2; \zeta^2) = m(\zeta)$. Por otra parte, vemos de la ecuación (2.10), que para poder renormalizar multiplicativamente $M(p^2; \zeta^2) \equiv M(p^2)$; es decir, a diferencia del resto de las funciones de vestimento, la función de masa no depende del punto de renormalización.

Las implicaciones de la función de masa en las observables hadrónicas se discuten a detalle en este trabajo. En seguida mostramos generalidades sobre la ecuación de Bethe-Salpeter, que describe a los mesones.

2.2. Ecuación de Bethe-Salpeter

En una teoría cuántica de campos, la ecuación de Bethe-Salpeter es una descripción completamente relativista de estados ligados de dos partículas [59]. Así, es empleada para describir mesones. Los estados ligados se identifican como polos en la amplitud de dispersión quark-antiquark. La BSE se escribe:

$$\begin{aligned} [\Gamma_H^{ab}(p; P)]_{tu} &= \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} K_{tu}^{rs}(p, q; P) [\chi_H^{ab}(q; P)]_{sr}, \\ \chi_H^{ab}(q; P) &= S^a(q + \eta P) \Gamma_H^{ab}(q; P) S^b(q - (1 - \eta)P). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Tenemos las siguientes definiciones:

- $\Gamma_H^{ab}(p; P)$ es la amplitud de Bethe-Salpeter (BSA); el vértice quark-meson amputado e irreducible.
- $\chi_H^{ab}(q; P)$ corresponde a la función de onda de Bethe-Salpeter.
- p es el momento relativo entre quark-antiquark; a y b los correspondientes sabores.
- η es la fracción del momento total que comparten quark-antiquark. Ninguna observable física depende de su valor ($\eta = 1/2$ es conveniente).
- P es el momento total, tal que $P^2 = -m_H^2$, dónde m_H es la masa del mesón.
- r, s, t, u representan los índices combinados de las matrices de color.
- H es la etiqueta que identifica al meson. En particular, escribimos: Γ_5 para pseudoescalares, Γ_μ para vectores, Γ_1 para escalares y $\Gamma_{5\mu}$ para pseudovectores o *axial-vectors*. La estructura tensorial de las BSAs depende del tipo de mesón (propiedades de transformación según sus números cuánticos).

- $K_{tu}^{rs}(p, q; P)$ es el kernel de dispersión: renormalizado, amputado e irreducible con respecto a cortes entre pares de líneas de quark-antiquark. Éste debe ser determinado consistentemente con el truncamiento de la ecuación de gap.

La BSE corresponde diagramáticamente a la figura 2.2.

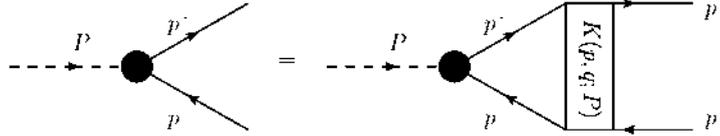


FIGURA 2.2: Ecuación de Bethe-Salpeter.

La ecuación (2.12) se normaliza canónicamente de acuerdo a la condición:

$$2P_\mu = \frac{\partial}{\partial P_\mu} \left(\int_q \text{Tr}_{CD} [\bar{\Gamma}_H^{ab}(q; -K) S^a(q + \eta P) \Gamma_H^{ab}(q; K) S^b(q - (1 - \eta)P)] \right) \quad (2.13)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial P_\mu} \left(\int_q \int_k \text{Tr} \{ [\bar{\chi}_H^{ba}(k; -K)]_{ut} K_{tu}^{rs} [\chi_H^{ab}(q; K)]_{sr} \} \right), \quad K^2 = P^2 = -m_H^2,$$

que garantiza que la BSA describa un mesón con probabilidad unitaria [60]. Las BSAs debidamente normalizadas resultan en conservación de la corriente electromagnética [61].

Para mesones pseudoescalares (con $J^{PC} = 0^{-+}$) la BSA tiene la forma:

$$\Gamma_5^{ab}(p; P) = \gamma_5 [iE_5(p; P) + \gamma \cdot P F_5(p; P) + \gamma \cdot p \cdot p \cdot P G_5(p; P) + p_\alpha \sigma_{\alpha\beta} P_\beta H_5(p; P)], \quad (2.14)$$

donde, para el correspondiente antimesón, la BSA obedece:

$$\bar{\Gamma}_5^{ba}(p; P) = [C^{-1} \Gamma_5^{ab}(-p; P) C]^T. \quad (2.15)$$

Para eigenestados de conjugación de carga $C = +1$, como el π^0 , tenemos que $\bar{\Gamma}_5^{q\bar{q}}(p; P) = +\Gamma_5^{q\bar{q}}(p; P)$. Si además $m_u = m_d$, los π^\pm tendrán la misma masa que el π^0 y por consiguiente, las mismas amplitudes invariantes. Éstas se transforman:

Γ_5^{ab}	$\bar{\Gamma}_5^{ba}$
$i\gamma_5 E_5(q \cdot P)$	$i\gamma_5 E_5(-q \cdot P)$
$\gamma_5 \gamma \cdot P F_5(q \cdot P)$	$\gamma_5 \gamma \cdot P F_5(-q \cdot P)$
$\gamma_5 \gamma \cdot q \cdot q \cdot P G_5(q \cdot P)$	$\gamma_5 \gamma \cdot q \cdot q \cdot P G_5(-q \cdot P)$
$\gamma_5 q_\alpha \sigma_{\alpha\beta} P_\beta H_5(q \cdot P)$	$\gamma_5 q_\alpha \sigma_{\alpha\beta} P_\beta H_5(-q \cdot P)$

En la siguiente sección, estudiamos como truncar consistentemente la DSE para el propagador del quark. Observamos cómo a partir de allí se puede escribir el kernel de

dispersión en la BSE. Mostramos también algunos corolarios importantes de la relación entre el kernel de la BSE y el truncamiento de la DSE.

2.3. Truncamiento

Como hemos dicho, el vértice quark-gluón y el propagador del gluón, obedecen sus propias DSEs. Tenemos una torre infinita de ecuaciones acopladas que debemos volver tratable. Una manera conveniente es introducir consistentemente un *ansatz* para el vértice quark-gluón y el propagador del gluón, de manera que se desacople la torre infinita.

Comencemos discutiendo sobre el propagador del gluón. Éste está caracterizado por una sola función de vestimento, $G(k^2, \zeta^2)/k^2$, y se escribe:

$$D_{\mu\nu}(k; \zeta) = \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \frac{G(k^2; \zeta^2)}{k^2} + \xi \frac{k_\mu k_\nu}{k^4}. \quad (2.16)$$

Hoy en día, mucho sabemos sobre el propagador del gluón [62–64]. La función de vestimento es acotada y exhibe un máximo en $k^2 = 0$; además decrece monotónicamente en el eje *space-like*. Ésto se aprecia en la figura 2.3. Los gluones, al igual que los quarks, adquieren masa de manera dinámica en el infrarrojo. Esta masa es del orden de cientos de MeVs [65].

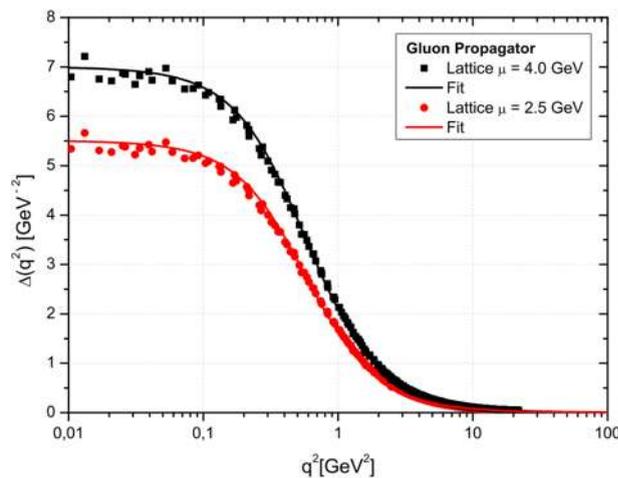


FIGURA 2.3: Propagador del gluón. Comparativa de entre lQCD y DSEs [63].

Por otro lado, el vértice quark-gluón demanda la construcción de una estructura tensorial de 12 componentes: 4 longitudinales y 12 transversas. Hay y ha habido numerosos esfuerzos en todo el mundo por construir el vértice quark-gluón [66–70]. Entre otras cosas, éste debe reproducir todas las predicciones perturbativas en el ultravioleta y ser consistente con las restricciones en el infrarrojo (identidades de Ward). En nuestro caso,

es importante que reproduzca la fenomenología y sea *amigable* numéricamente [71].

Teniendo en cuenta las observaciones anteriormente mencionadas, escribimos un *ansatz* que trunca consistentemente la ecuación de gap y la BSE.

2.3.1. DSE: Aproximación Arcoiris

En el esquema de truncamiento de las DSEs que preserva simetrías², el más sencillo es el que se conoce como la *aproximación arcoiris*. Este truncamiento satisface la identidad axial de Ward-Takahashi (AxWTI) [72], que veremos más adelante; de igual forma, describe adecuadamente toda la fenomenología de los mesones pseudoescalares [73, 74].

El truncamiento consiste en reemplazar el vértice quark-gluón vestido por su contraparte desnuda y escribir al propagador del gluón como un gluón efectivo, ésto es:

$$\mathcal{Z}_{1F} g^2 D_{\mu\nu}(k^2) \Gamma_\nu^a \rightarrow k^2 \mathcal{G}(k^2) D_{\mu\nu}^0(k^2) \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\nu, \quad (2.17)$$

donde $\mathcal{G}(k^2)$ es el acoplamiento efectivo. La forma específica se describe más adelante. A partir de ahora, por conveniencia, se elige la norma de Landau³ [76, 77], $\xi = 0$. La aproximación arcoiris corresponde diagramáticamente a la figura 2.4.

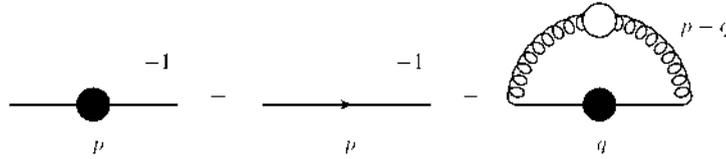


FIGURA 2.4: DSE para el propagador del quark en la aproximación arcoiris.

Recordemos la DSE para el propagador del quark:

$$S^{-1}(p; \zeta) = \mathcal{Z}_{2F} S_0^{-1}(p) + \mathcal{Z}_{1F} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} g^2 D_{\mu\nu}(p-q; \zeta) \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\mu S(q; \zeta) \Gamma_\nu^a(p, q; \zeta). \quad (2.18)$$

Truncando de acuerdo a (2.17), tenemos:

$$S^{-1}(p; \zeta) = \mathcal{Z}_{2F} S_0^{-1}(p) + \int_q k^2 \mathcal{G}(k^2) D_{\mu\nu}^0(k; \zeta) \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\mu S(q; \zeta) \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\nu. \quad (2.19)$$

donde $k = p - q$ y hemos usado la notación $\int_q = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4}$.

²Poincaré e identidades de Ward [52].

³La norma de Landau es el punto fijo en el grupo de renormalización [75]. Además, elimina la componente longitudinal del propagador del gluón, que no tiene correcciones a ningún orden.

Esta aproximación desacopla la DSE del propagador del quark de las correspondientes DSE del vértice quark-gluón y propagador del gluón, de manera que la ecuación de gap es tratable. El kernel de interacción en la BSE se describe a continuación.

2.3.2. BSE: Aproximación Escalera

Retomemos la ecuación de Bethe-Salpeter:

$$[\Gamma_H^{ab}(p; P)]_{tu} = \int_q K_{tu}^{rs}(p, q; P) [\chi_H^{ab}(q; P)]_{sr}. \quad (2.20)$$

El kernel de interacción, $K_{tu}^{rs}(p, q; P)$, no es independiente del truncamiento de la ecuación de gap. Éste está relacionado con el truncamiento mediante:

$$[\Sigma(p^+) \gamma_5 + \gamma_5 \Sigma(p^-)] = \int_q K(p, q; P) [\gamma_5 S(q^-) + S(q^+) \gamma_5], \quad (2.21)$$

donde $p^+ = p + \eta P$, $p^- = p - (1 - \eta)P$ y hemos obviado los índices de color. La ecuación anterior es un corolario de la AxWTI [72], e implica que, en la aproximación arcoiris:

$$K(p, q; P)_{tu}^{rs} = -k^2 \mathcal{G}(k^2) D_{\mu\nu}^0(k) \left[\frac{\lambda^c}{2} \gamma_\mu \right]^{ru} \left[\frac{\lambda^c}{2} \gamma_\nu \right]^{ts}, \quad (2.22)$$

donde $k = p - q$. De esta manera, la BSE se escribe:

$$[\Gamma_H^{ab}(p; P)]_{tu} = - \int_q k^2 \mathcal{G}(k^2) D_{\mu\nu}^0(k) \left[\frac{\lambda^c}{2} \gamma_\mu \right]^{ru} \left[\frac{\lambda^c}{2} \gamma_\nu \right]^{ts} [\chi_H^{ab}(q; P)]_{sr}. \quad (2.23)$$

A ésta aproximación se le conoce como la *aproximación escalera*; se muestra diagramáticamente en la figura 2.5. Junto con la aproximación arcoiris, corresponde al bien conocido truncamiento *Rainbow-Ladder* (RL).

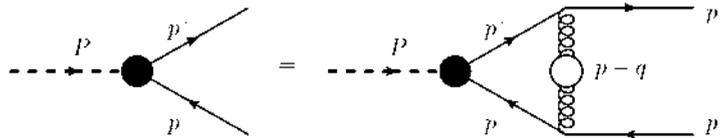


FIGURA 2.5: Ecuación de Bethe-Salpeter en la aproximación escalera.

Hemos mostrado un esquema de truncamiento, lo que resta es dar forma al acoplamiento efectivo, $\mathcal{G}(k^2)$. Ésto se discute a continuación.

2.3.3. Acoplamiento efectivo

En principio, existe mucha libertad para la forma del acoplamiento efectivo. Uno puede tomar información directamente de la fenomenología o de estudios del sector de norma (en el continuo o en lQCD), y así escribir $\mathcal{G}(k^2)$ de una manera en particular. Sin importar la elección, el acoplamiento debe reproducir la teoría de perturbaciones, así como garantizar suficiente realce en el infrarrojo para producir DCSB y confinamiento.

Una posible elección es el popular modelo de Maris-Tandy (MT) [57]:

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(k^2) &= \frac{4\pi^2}{\omega^6} D k^2 e^{-k^2/\omega^2} + 8\pi^2 \frac{\gamma_m}{\ln[\tau + (1 + k^2/\Lambda_{QCD}^2)^2]} \mathcal{F}(k^2), \\ \mathcal{F}(k^2) &= [1 - \exp(-k^2/(4m_t^2))]/k^2.\end{aligned}\quad (2.24)$$

Por comodidad, definamos $\mathcal{G}(k^2) = \mathcal{G}_{\text{NP}}(k^2) + \mathcal{G}_{\text{UV}}(k^2)$, donde:

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_{\text{IR}}(k^2) &= \frac{4\pi^2}{\omega^6} D k^2 e^{-k^2/\omega^2} \\ \mathcal{G}_{\text{UV}}(k^2) &= (2\pi)^2 \frac{\gamma_m}{1/2 \ln[\tau + (1 + k^2/\Lambda_{QCD}^2)^2]} F(k^2).\end{aligned}$$

$\mathcal{G}_{\text{IR}}(k^2)$ corresponde a una aproximación de anchura finita de $\delta^4(k)$, que cuál concentra la mayor contribución en el infrarrojo. Las constantes ω y D son parámetros del modelo. Previamente [56], se incluía además un término tipo delta, $8\pi^4 D \delta^4(k)$, que corresponde a una singularidad integrable en el infrarrojo.

$\mathcal{G}_{\text{UV}}(k^2)$ contiene la parte perturbativa, que está escrita de manera que reproduce el comportamiento de $\alpha_s(k^2)$ en el ultravioleta [55]. Los parámetros involucrados son: $\Lambda_{QCD} = 0.234$ GeV, $\gamma_m = 12/(33 - 2N_f)$ (con $N_f = 4$), $\tau = e^2 - 1$, $m_t = 0.5$ GeV; valores fijados en [57] para reproducir la teoría de perturbaciones a un lazo.

El modelo MT da una buena descripción de las propiedades de los mesones pseudo-escalares y vectores. Sin embargo, presenta algunas deficiencias. Como dijimos antes, la función del vestimento del gluón es acotada, exhibe un máximo en $k^2 = 0$ y decrece monotónicamente sobre el eje *space-like*. Ésto no ocurre con el modelo MT, que además tiene un cero sobre un valor muy pequeño en el eje *time-like* y decrece a valores negativos muy rápidamente.

Es necesario un modelo más realista. Un modelo que comparte las virtudes del modelo MT, sin las deficiencias antes mencionadas, es el modelo Qin-Chang (QC) [73].

La interacción QC, utilizada en este trabajo, se escribe:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(k^2) &= \frac{8\pi^2}{\omega^4} D e^{-k^2/\omega^2} + 8\pi^2 \frac{\gamma_m}{\ln[\tau + (1 + k^2/\Lambda_{QCD}^2)^2]} \mathcal{F}(k^2), \\ \mathcal{F}(k^2) &= [1 - \exp(-k^2/(4m_t^2))]/k^2. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Las propiedades observables (masas y constantes de decaimiento) de los mesones vectoriales y pseudoescalares (en estado base), son prácticamente insensibles a variaciones de $\omega \in [0.4, 0.6]$ GeV, siempre y cuando $\omega D = \text{constante}$; la constante se fija para reproducir la fenomenología del sector ligero. Los parámetros de la parte ultravioleta se toman igual que en el modelo MT. Comparamos los modelos MT y QC en la siguiente figura:

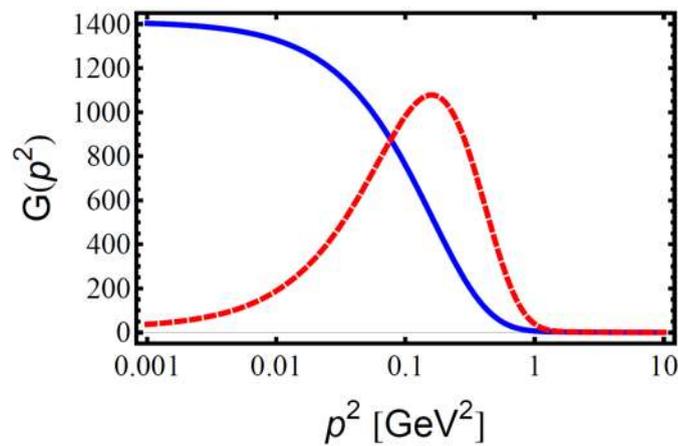


FIGURA 2.6: Acoplamiento efectivo. Modelo QC (azul) y modelo MT (rojo).

El modelo QC induce al gluón una masa efectiva de $M_g \approx 680$ MeVs. La función de masa decrece monótonicamente con el momento y el gluón se vuelve no masivo en el ultravioleta. Ésta se muestra en la figura 2.7.

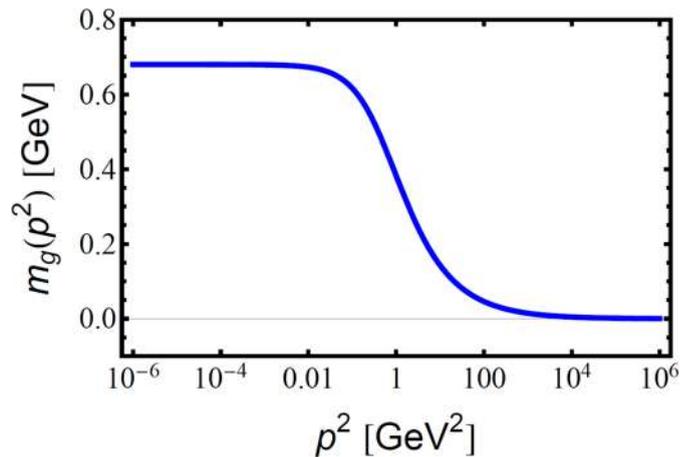


FIGURA 2.7: Función de masa del gluón.

De acuerdo a estudios modernos de lQCD y DSE, el acoplamiento efectivo se puede parametrizar como [63]:

$$\mathcal{G}(k^2) \approx \frac{4\pi\alpha_{QC}(k^2)}{k^2 + m_g^2(k^2)}, \quad m_g^2(k^2) = \frac{M_g^4}{k^2 + M_g^2}. \quad (2.26)$$

La función $\alpha(k^2)/\pi$ se escribe en analogía con el acoplamiento de QCD, se muestra en la figura (2.8). El valor producido $\alpha_{QC}(0)/\pi \approx 16.5$ es alto, como consecuencia de la pérdida de realce en el infrarrojo debido al uso del vértice desnudo. Típicamente, $\alpha(0)/\pi \sim 1$. Un truncamiento más sofisticado produce valores más pequeños.

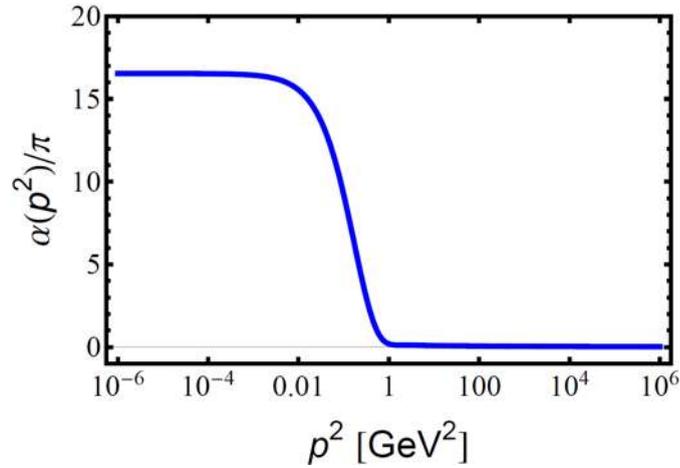


FIGURA 2.8: Acoplamiento *QCD-like* inducido por la interacción QCD.

Por lo que se ha discutido de la aproximación RL y la interacción QC, se espera que uno logre obtener una buena descripción de la fenomenología de los mesones pseudoescalares.

2.4. Resolución general

En esta sección explicamos como resolver la DSE para el propagador de quark y damos un algoritmo general para resolver la BSE.

2.4.1. Ecuación de Gap

Hemos visto antes que el propagador tiene varias representaciones equivalentes:

$$\begin{aligned} \sigma_v(p^2; \zeta^2) &= \frac{Z(p^2; \zeta^2)}{p^2 + M^2(p^2)} = \frac{A(p^2; \zeta^2)}{p^2 A^2(p^2; \zeta^2) + B^2(p^2; \zeta^2)}, \\ \sigma_s(p^2; \zeta^2) &= \frac{Z(p^2; \zeta^2) M(p^2)}{p^2 + M^2(p^2)} = \frac{B(p^2; \zeta^2)}{p^2 A^2(p^2; \zeta^2) + B^2(p^2; \zeta^2)}. \end{aligned}$$

Resolver la DSE para el propagador del quark es equivalente a encontrar las funciones de vestimento del propagador en la ecuación:

$$S^{-1}(p; \zeta) = \mathcal{Z}_{2F} S_0^{-1}(p) + \int_q k^2 \mathcal{G}(k^2) D_{\mu\nu}^0(k; \zeta) \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\mu S(q; \zeta) \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\nu. \quad (2.27)$$

Para despejar $A(p^2; \zeta)$ y $B(p^2; \zeta)$, multiplicamos por $\gamma \cdot p$ y por la matriz identidad, respectivamente. Tomamos trazas y obtenemos:

$$\begin{aligned} A(p^2; \zeta^2) &= \mathcal{Z}_{2F} - i \frac{1}{4p^2} \frac{4}{3} \int_q k^2 \mathcal{G}(k^2) D_{\mu\nu}^0(k; \zeta) \text{Tr}[\gamma \cdot p \gamma_\mu S(q; \zeta) \gamma_\nu], \quad (2.28) \\ B(p^2; \zeta^2) &= \mathcal{Z}_{2F} m_B(\Lambda) + \frac{1}{4} \frac{4}{3} \int_q k^2 \mathcal{G}(k^2) D_{\mu\nu}^0(k; \zeta) \text{Tr}[\gamma_\mu S(q; \zeta) \gamma_\nu], \end{aligned}$$

donde hemos usado que $\sum_{a=1}^8 \lambda^a \lambda^a = 16/3$. Por comodidad en la notación, denotaremos a las integrales en (2.28) como $A'(p^2)$ y $B'(p^2)$ respectivamente, así:

$$\begin{aligned} A(p^2; \zeta^2) &= \mathcal{Z}_{2F} + A'(p^2; \zeta^2), \\ B(p^2; \zeta^2) &= \mathcal{Z}_{2F} m_B(\Lambda) + B'(p^2; \zeta^2). \end{aligned}$$

De la condición de renormalización (2.11), tenemos:

$$\begin{aligned} 1 &= A(\zeta^2; \zeta^2) = \mathcal{Z}_{2F} + A'(\zeta^2; \zeta^2), \\ m(\zeta) &= B(\zeta^2; \zeta^2) = \mathcal{Z}_{2F} m_B(\Lambda) + B'(\zeta^2; \zeta^2), \end{aligned}$$

por lo que se obtiene:

$$\begin{aligned} A(p^2; \zeta^2) &= 1 + A'(p^2; \zeta^2) - A'(\zeta^2; \zeta^2), \quad (2.29) \\ B(p^2; \zeta^2) &= m(\zeta) + B'(p^2; \zeta^2) - B'(\zeta^2; \zeta^2). \end{aligned}$$

Tomamos el 4-vector de integración cómo:

$$q = |q|(\cos \phi \sin \theta \sin \beta, \sin \phi \sin \theta \sin \beta, \cos \theta \sin \beta, \cos \beta),$$

de manera que la integración sobre el momento es:

$$\int d^4q = \int_0^\Lambda q^3 dq \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^\pi \sin^2 \beta d\beta.$$

Elegimos la dirección de p_μ sobre el cuarto eje. Así, los integrandos son independientes de θ y ϕ ; la integración sobre esas variables se puede hacer analíticamente.

Si además utilizamos que $q^3 dq = (1/2)q^2 dq^2$ y definimos $u = \cos \beta$, tenemos:

$$\int d^4 q = 2\pi \int_0^{\Lambda^2} q^2 dq^2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-u^2} du.$$

De esta manera, podemos escribir la ecuación (2.29) como:

$$\begin{aligned} A(p^2; \zeta^2) &= 1 + \frac{1}{6\pi^3 p^2} \int_0^{\Lambda^2} dq^2 q^2 \sigma_v(q^2; \zeta^2) [I_A(p^2) - I_A(\zeta^2)], \\ B(p^2; \zeta^2) &= m(\zeta) + \frac{1}{2\pi^3} \int_0^{\Lambda^2} dq^2 q^2 \sigma_s(q^2; \zeta^2) [I_B(p^2) - I_B(\zeta^2)], \end{aligned} \quad (2.30)$$

donde las integrales angulares están dadas por:

$$\begin{aligned} I_A(p^2) &= \int_{-1}^1 du \sqrt{1-u^2} \mathcal{G}(k^2) \left[pq u + 2 \frac{(p^2 - pq u)(pq u - q^2)}{p^2 - 2pq u + q^2} \right], \\ I_B(p^2) &= \int_{-1}^1 du \sqrt{1-u^2} \mathcal{G}(k^2), \quad k^2 = p^2 + q^2 - 2pq u. \end{aligned}$$

Trazas y contracciones de la ecuación 2.28 se calculan de las propiedades mostradas en el apéndice A.2. Las integrales angulares se resuelven con una cuadratura gaussiana. Las ecuaciones (2.30) son ecuaciones integrales, no lineales y acopladas. Para resolver, discretizamos los momentos (en una malla logarítmica), se da un *guess* inicial para las funciones de vestimento y se itera hasta obtener el error relativo promedio deseado.

La resolución de la BSE demanda conocer al propagador del quark en una región parabólica del plano complejo: parábola acostada, con vértice en $(-m_H^2/4, 0)$. El proceso es casi inmediato si se integra a lo largo de rayos en el plano complejo. Hacemos la sustitución $p^2 \rightarrow r e^{i\theta}$ y tenemos:

$$\begin{aligned} A(r e^{i\theta}; \zeta^2) &= 1 + \frac{1}{6\pi^3 p^2} \int_0^{\Lambda^2} dq^2 q^2 \sigma_v(q^2; \zeta^2) [I_A(r e^{i\theta}) - I_A(\zeta^2)], \\ B(r e^{i\theta}; \zeta^2) &= m(\zeta) + \frac{1}{2\pi^3} \int_0^{\Lambda^2} dq^2 q^2 \sigma_s(q^2; \zeta^2) [I_B(r e^{i\theta}) - I_B(\zeta^2)]. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Nótese que la variable de integración q^2 se encuentra sobre el eje *space-like*, independientemente del ángulo θ . Conocido el propagador sobre dicho eje, la evaluación de las integrales es casi inmediata, aunque puede haber inestabilidades numéricas para algunos valores de θ . Dichas inestabilidades son causadas por el término perturbativo en el vestimento del gluón efectivo.

2.4.2. Ecuación de Bethe-Salpeter

El procedimiento que describimos a continuación sirve para resolver la BSE, independientemente del tipo de meson. La forma general de $\Gamma_H^{ab}(p; P)$, con N covariantes $C_H^i(p; P)$ y amplitudes $A_H^i(p; P)$ es:

$$\Gamma_H^{ab}(p, P) = \sum_{i=1}^N C_H^i(p, P) A_H^i(p, P). \quad (2.32)$$

Lo primero es encontrar proyectores $T_i(p; P)$ que despejen cada una de las amplitudes invariantes $A_H^i(p; P)$; es decir, $\text{Tr}[T_i(p; P) \Gamma_H^{ab}(p; P)] = A_H^i(p; P)$.

Para el caso de un pseudoescalar, tenemos:

$$\Gamma_5^{ab}(p; P) = \gamma_5 [iE_5(p; P) + \gamma \cdot P F_5(p; P) + \gamma \cdot p p \cdot P G_5(p; P) + p_\alpha \sigma_{\alpha\beta} P_\beta H_5(p; P)], \quad (2.33)$$

por lo que, los proyectores apropiados son:

$$\begin{aligned} T_E(p; P) &= -\frac{1}{4} i \gamma_5, \\ T_F(p; P) &= \frac{1}{4N(p, P)^2} \gamma_5 [-p^2 \gamma \cdot P + \gamma \cdot p p \cdot P], \\ T_G(p; P) &= \frac{1}{4N(p, P)^2} \gamma_5 \left[\gamma \cdot P - \frac{P^2}{4(p \cdot P)^2} \gamma \cdot p p \cdot P \right], \\ T_H(p; P) &= \frac{1}{4N(p, P)^2} \gamma_5 p_\alpha \sigma_{\alpha\beta} P_\beta, \quad N(p, P)^2 = p^2 P^2 - (p \cdot P)^2. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Con $k = p - q$ y $T_{\mu\nu}(k) \equiv k^2 D_{\mu\nu}^0(k)$, la BSE en la aproximación RL es:

$$\Gamma_H^{ab}(p; P) = - \int_q \mathcal{G}(k^2) T_{\mu\nu}(k) \frac{\lambda^c}{2} \gamma_\mu S^a(q^+) \Gamma_H^{ab}(q; P) S^b(q^-) \frac{\lambda^c}{2} \gamma_\nu. \quad (2.35)$$

La anterior ecuación tiene soluciones únicamente para valores discretos de P , tal que $P_i^2 = -m_i^2$. El valor más pequeño de m_i corresponde al estado base. Al proyectar adecuadamente, obtenemos un conjunto de ecuaciones lineales para cada amplitud:

$$\begin{aligned} \lambda(P^2) A^i(p; P) &= - \sum_{j=1}^N \int_q \mathcal{G}(k^2) T_{\mu\nu}(k) R_{\mu\nu}^{ij}(q, p; P) A^j(q; P), \\ R_{\mu\nu}^{ij}(q, p; P) &= \text{Tr}_{CD} \left[T_i(p, P) \frac{\lambda^c}{2} S^a(q^+) C_H^j(q; P) S^b(q^-) \frac{\lambda^c}{2} \right]. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Hemos introducido artificialmente la constante $\lambda(P^2)$, de manera que podemos resolver la BSE para valores continuos de P^2 . La ecuación anterior es una ecuación de eigenvalores, tal que la solución al problema original es cuando $\lambda(P^2 = -m_i^2) = 1$. Para mesones

multisabor, como el kaón, se toma también la traza sobre el espacio de sabor.

Similarmente al caso de la ecuación de gap, elegimos al 4-vector de integración cómo:

$$q = |q|(\cos \phi \sin \theta \sin \beta, \sin \phi \sin \theta \sin \beta, \cos \theta \sin \beta, \cos \beta),$$

de manera que la integración sobre el momento es:

$$\int d^4 q = \frac{1}{2} \int_0^{\Lambda^2} q^2 dq^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^\pi \sin^2 \beta d\beta .$$

Elegimos P_μ tal que sólo tenga componente en la cuarta dirección; se escoge p_μ sobre el plano 3-4. Explícitamente:

$$p_\mu = |p|(0, 0, \sin \psi, \cos \psi) , \quad (2.37)$$

$$P_\mu = P(0, 0, 0, 1) , \quad (2.38)$$

por lo que se tiene:

$$q \cdot P = |q|P \cos \beta , \quad (2.39)$$

$$p \cdot P = |p|P \cos \psi , \quad (2.40)$$

$$q \cdot p = |q||p|(\cos \theta \sin \beta \sin \psi + \cos \beta \cos \psi) . \quad (2.41)$$

Ningún 4-vector depende del ángulo ϕ , así la integración sobre esa variable se puede hacer analítica. Con las sustituciones $u = \cos \beta$ y $v = \cos \theta$, tenemos:

$$\begin{aligned} \lambda(P^2)A^i(p; P) &= -\frac{1}{2} \frac{2\pi}{(2\pi)^4} \sum_{j=1}^N \int_0^{\Lambda^2} q^2 dq^2 \int_{-1}^1 dv \int_{-1}^1 \sqrt{1-u^2} du \quad (2.42) \\ &\times \mathcal{G}(k^2)T_{\mu\nu}(k)R_{\mu\nu}^{ij}(q, p; P)A^j(q; P) . \end{aligned}$$

Manejamos la dependencia angular de las BSA con polinomios de Chebyshev del segundo tipo. Con $p \cdot P = pPw$ ($w = \cos \psi$), ésto es:

$$A^i(p; P) = A^i(p^2, P^2; w) = \sum_{m=0}^{\infty} U_m(w)\tilde{A}_m^i(p^2, P^2) , \quad (2.43)$$

de manera análoga se procede con $q \cdot P = qPu$.

La relación de ortonormalidad:

$$\int_{-1}^1 U_m(x)U_n(x)\sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{2}\delta_{mn} ,$$

implica que la ecuación (2.42) se escriba:

$$\lambda(P^2)\tilde{A}_m^i(p^2, P^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^N \int_0^{\Lambda^2} dq^2 M_{mn}^{ij}(p^2, q^2, P^2) \tilde{A}_n^j(q^2, P^2), \quad (2.44)$$

donde hemos definido :

$$\begin{aligned} M_{mn}^{ij}(p_r^2, q_s^2, P^2) &\equiv -\frac{2}{\pi} \frac{1}{2} \frac{2\pi}{(2\pi)^4} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^N q^2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-w^2} dw \int_{-1}^1 dv \\ &\times \int_{-1}^1 \sqrt{1-u^2} du \mathcal{G}(k^2) T_{\mu\nu}(k) U_m(w) R_{\mu\nu}^{ij}(q, p; P) U_n(u). \end{aligned} \quad (2.45)$$

Al discretizar la integración sobre el momento y escoger un número finito de polinomios de Chebyshev, la ecuación (2.44) se escribe, de manera compacta:

$$\lambda(P^2)\tilde{A}_m^i(p_r^2, P^2) = \sum_{j=1}^{N_A} \sum_{n=0}^{N_C} \sum_{s=1}^{N_q} \Delta(q_s^2) M_{mn}^{ij}(p_r^2, q_s^2, P^2) \tilde{A}_n^j(q_s^2, P^2), \quad (2.46)$$

donde N_A , N_C y N_q son el número de amplitudes, polinomios de Chebyshev y número puntos de la cuadratura (con pesos $\Delta(q_s^2)$), respectivamente. Tenemos un problema de eigenvalores con una matriz de $N_A \cdot (N_C + 1) \cdot N_q$ entradas.

Como hemos mencionado, el valor más pequeño de P_i^2 que satisface $\lambda(P_i^2 = -m_i^2) = 1$ corresponde a la solución del estado base. Éste es el que tiene el eigenvalor más grande, por lo que, si sólo interesa el estado base, usamos el método de potencias para calcular el eigenvalor dominante y su correspondiente eigenvector⁴.

2.5. Resultados numéricos

Los resultados que se presentan a continuación, fueron obtenidos con $\omega = 0.5$ GeV y $m_G = (0.87 \text{ GeV})^3 = D\omega$. La escala de renormalización es $\zeta = 2$ GeV: valor típico para la física en escala hadrónica, es utilizado en los estudios del sector de gauge en lQCD.

2.5.1. Función de masa del quark y condensado

Calculamos la función de masa para distintos valores de la masa de corriente. Los resultados se muestran en la figura 2.9. Por otra parte, en la figura 2.10 mostramos las funciones de vestimento para el propagador del quark, en el límite quiral.

⁴Para estados excitados o casos como $\eta - \eta'$ (en el que interesan los primeros dos eigenvalores), se utilizan otros métodos de álgebra lineal [78, 79]

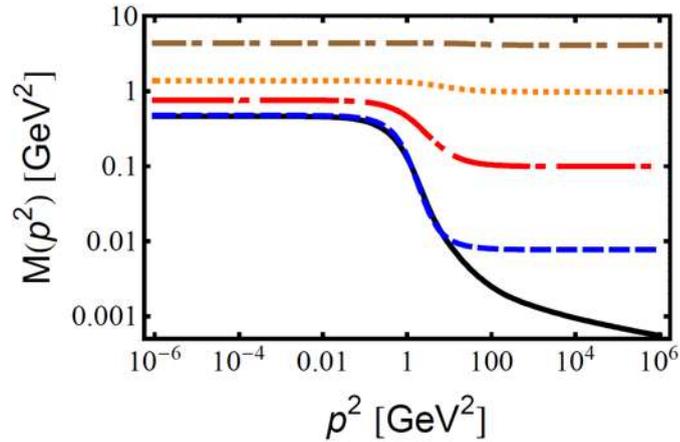


FIGURA 2.9: Funciones de masa para diferentes quarks: $m_{u/d}^{\zeta} = 4.7$ MeV (azul), $m_s^{\zeta} = 0.106$ GeV (rojo), $m_{\eta_c}^{\zeta} = 1.21$ GeV (naranja), $m_{\eta_b}^{\zeta} = 4.19$ GeV (café) y en el límite quiral $m_0^{\zeta} = 0$ (negro).

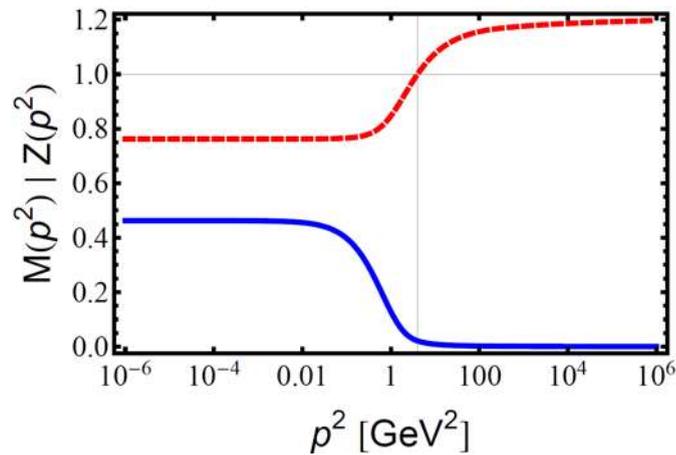


FIGURA 2.10: Función de masa (azul) y renormalización de la función de onda (rojo). Límite quiral.

De la figura 2.9 vemos que, en el infrarrojo (momentos pequeños), hay un realce con respecto al valor de la masa de corriente (que es la masa en el ultravioleta). Una masa de semilla de unos cuantos MeVs puede generar masa de cientos de MeVs, a la cuál llamamos masa constituyente. A medida que aumenta la masa de corriente del quark, cada vez son menos los efectos de la DCSB.

Notablemente, incluso cuando la masa de corriente es idénticamente cero, hay generación dinámica de masas. Ésto no ocurre en la teoría de perturbaciones: una masa de semilla $m = 0$ genera una función de masa $M(p^2) = 0$. DCSB es el mecanismo que genera el mayor porcentaje de masa de la materia ordinaria.

La función de masa exhibe un punto de inflexión. Es un indicativo de que se trata de una partícula confinada [52, 76]. El confinamiento puede ser entendido a partir del

axioma de reflexión de posibilidad. Definimos el promedio espacial de la función de Schwinger:

$$\Delta(t) = \int d^3x \int_q e^{i(q_4t + \mathbf{q} \cdot \mathbf{x})} \sigma_s(q^2, \zeta). \quad (2.47)$$

Un cambio de signo en $\Delta(t)$ implica que no tenemos un propagador positivo definido; éste corresponde a una función de onda que decae rápidamente. Por ello, se trata de una partícula inestable, o bien, una partícula confinada [80]. Para partículas fundamentales, como los quarks, la interpretación es esta última. Graficamos $\log |\Delta(t)|$ en la figura 2.11.

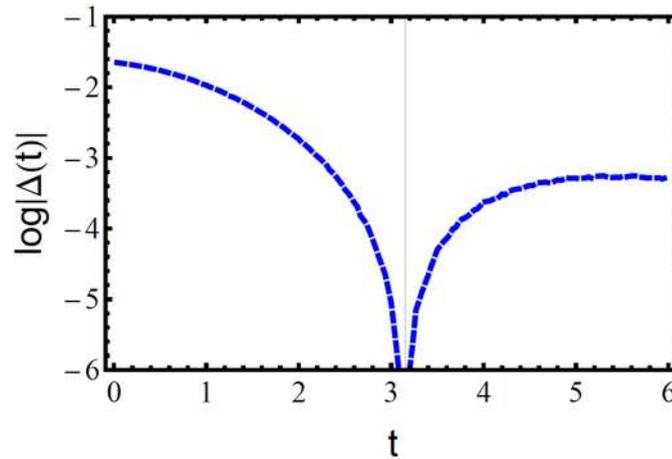


FIGURA 2.11: Promedio espacial de la función de Schwinger.

Adicionalmente, calculamos el condensado quiral. Como dijimos antes, éste es el parámetro de orden de la DCSB y está dado por:

$$- \langle \bar{\psi}\psi \rangle_{\zeta}^0 = \mathcal{Z}_{4F} N_c \int_q \text{Tr}[S_{m=0}(q, \zeta)] = \left(\frac{3\mathcal{Z}_{4F}}{4\pi^2} \int dq^2 q^2 \sigma_s(q^2, \zeta^2) \right). \quad (2.48)$$

Se obtienen los siguientes valores:

$$\begin{aligned} - \langle \bar{\psi}\psi \rangle_{\zeta=2 \text{ GeV}} &= (0.248 \text{ GeV})^3 \\ - \langle \bar{\psi}\psi \rangle_{\zeta=1 \text{ GeV}} &= (0.241 \text{ GeV})^3 \\ - \langle \bar{\psi}\psi \rangle_{\zeta=1 \text{ GeV}} &= (0.235 \pm 15 \text{ GeV})^3 \text{ (exp. [81])} \end{aligned} \quad (2.49)$$

Hemos dicho que el condensado es el valor de expectación del vacío, que de hecho es, el valor del límite quiral del condensado dentro del mesón; en otras palabras, describe una propiedad del límite quiral del mesón pseudoescalar. Es la escala del condensado la que determina la cantidad de masa generada dinámicamente.

2.5.2. Masas y constantes de decaimiento de mesones

Con nuestra elección de covariantes para un meson pseudoescalar - ecuación (2.33) - y con $q^\pm = q \pm P/2$ ($\eta = 1/2$ en la definición del momento relativo), las BSAs son funciones pares de $q \cdot P$. Así, los coeficientes de los polinomios de Chebyshev impares son idénticamente cero. Tomar únicamente los polinomios 0 y 2 es adecuado, no hay ninguna ventaja material en incluir más.

Obtuvimos las masas de π , η_c , η_b . Con las BSAs debidamente normalizadas de acuerdo a la ecuación (2.13), calculamos las constantes de decaimiento [82]:

$$f_5 = -\frac{Z_{2F}N_c}{m_5^2} \int_q P_\mu \text{Tr}[\Gamma_5^{ba}(q; P) S^a(q^-) \gamma_\mu \gamma_5 S^b(q^+)]. \quad (2.50)$$

Resumimos los resultados en las siguientes tablas:

Masas (GeV).

Mesón	m_5	m_5 (Exp.)
π	0.138	0.138*
η_c	2.980	2.983
η_b	9.390	9.391

* El valor de m_π es el promedio entre m_{π^0} y m_{π^+} .

Constantes de decaimiento (GeV).

Mesón	f_5 (DSE-RL)	f_5 (DSE-DB)	f_5 (lQCD)	f_5 (Exp.)
f_π	0.093	0.092	0.092	0.092
f_{η_c}	0.389	0.262	0.279	0.238*
f_{η_b}	0.597	0.543	0.472	-

DB: Truncamiento de la DSE más sofisticado [29].

lQCD: Promedio de resultados de lattice QCD [29].

* Se infiere a partir del ancho de decaimiento.

Las amplitudes de Bethe-Salpeter para el pión se muestran en la figura 2.12. La contribución de $H_5(p; P)$ es despreciable para todos los mesones. Por su parte, $E_5(p; P)$ domina en todos los mesones pseudoescalares. En el caso del pión, ésta contribuye 85 % al valor de m_π . Su similitud con la función de masa $M_{u/d}(p^2)$ es una consecuencia de la AxWTI, que se estudia en el siguiente capítulo.

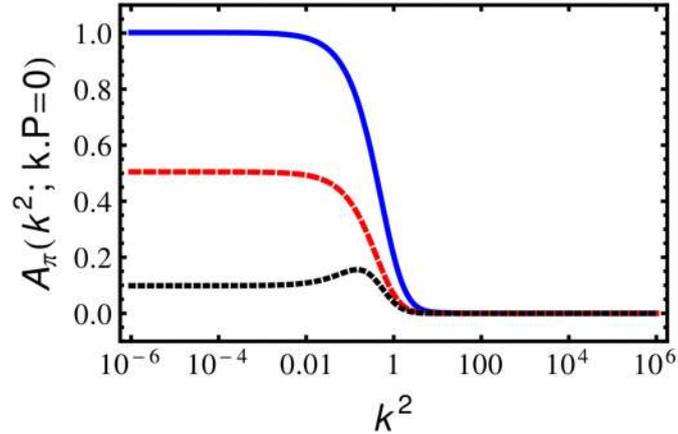


FIGURA 2.12: Amplitudes de Bethe-Salpeter del pión (sin normalizar).
 $E_\pi(k^2)$ (azul), $F_\pi(k^2)$ (rojo) y $G_\pi(k^2)$ (negro).

2.6. Parametrización de las soluciones

Para el cálculo de observables hadrónicas y objetos no perturbativos, es conveniente parametrizar el propagador del quark y las BSAs. De ésta manera, podemos extender nuestro resultado a un continuo en todo el plano complejo.

A las parametrizaciones que empleamos en este trabajo, les denominamos *Representación Integral de Teoría de Perturbaciones* (PTIR) [20, 27–29], pues las expresiones a las que dan lugar se asemejan a las que encontramos en cálculos perturbativos de lazos. Las describimos a continuación.

2.6.1. Propagador del quark

Escribimos al propagador del quark en términos de polos complejos conjugados [83]:

$$S(q) = \sum_{k=1}^N \left(\frac{z_k}{i\gamma \cdot q + m_k} + \frac{z_k^*}{i\gamma \cdot q + m_k^*} \right), \quad (2.51)$$

donde m_k , z_k son parámetros a fijar a partir de las soluciones numéricas. Al menos un parámetro m_k debe tener parte imaginaria $\neq 0$, de manera que el propagador no tenga polos sobre el eje real y se trate de una partícula confinada.

Explícitamente, las funciones de vestimento se escriben:

$$\begin{aligned}\sigma_v(q) &= \sum_{k=1}^N \left(\frac{z_k}{q^2 + m_k^2} + \frac{z_k^*}{q^2 + m_k^2} \right), \\ \sigma_s(q) &= \sum_{k=1}^N \left(\frac{z_k m_k}{q^2 + m_k^2} + \frac{z_k^* m_k^*}{q^2 + m_k^2} \right),\end{aligned}\quad (2.52)$$

donde $S(p) = -i \gamma \cdot p \sigma_v(p^2) + \sigma_s(p^2)$. Se obtiene que $N = 2$ es adecuado. Además de ajustarse a los datos numéricos, la elección de parámetros debe ser consistente con la condición de renormalización (2.11). Adicionalmente, nótese que:

$$q^4 \sigma_s(q^2 \rightarrow \infty) \rightarrow C \Rightarrow -2 \sum_{k=1}^3 \text{Re}(z_k m_k^3) = C, \quad (2.53)$$

donde C es una constante. En el límite quiral corresponde al condensado.

La forma paramétrica en la ecuación (2.51), que denotamos N-ccp, se asemeja a la del propagador del quark en teoría de perturbaciones. En la figura 2.13 se compara la parametrización N-ccp los datos numéricos del propagador s . Esta parametrización fue utilizada para resolver las BSEs en el apartado anterior.

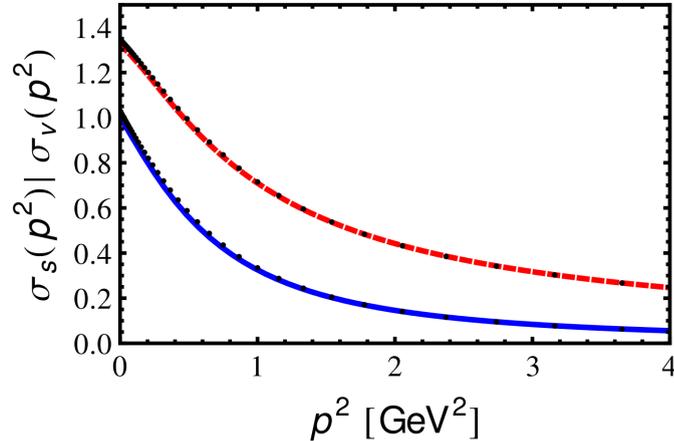


FIGURA 2.13: Parametrización N-ccp para el quark s . $\sigma_s(p^2)$ (azul) y $\sigma_v(p^2)$ (rojo). Datos numéricos en negro.

2.6.2. Amplitudes de Bethe-Salpeter

Para parametrizar las BSAs, se emplea una forma similar a la representación de Nakaniishi [84]. Ésta consiste en escribir las BSAs en términos de una forma funcional similar

al propagador del quark a nivel árbol, integrada sobre una densidad espectral:

$$\mathcal{F}^k(p, P) = \int_{-1}^1 dz \rho(z) \int_0^\infty d\Lambda \delta(\Lambda - \Lambda_c) \frac{1}{(p^2 + z p \cdot P + \Lambda^2)^n}, \quad (2.54)$$

donde $\mathcal{F}^k(p, P)$ es la BSA, $\rho(z)$ es la densidad espectral, n alguna potencia adecuada y Λ_c una escala de masa. En principio, uno debe formular y resolver una ecuación para $\rho(z)$. En la práctica, hacemos lo siguiente [20]:

- Separamos las amplitudes en una parte infrarroja y una parte ultravioleta.
- Resolvemos numéricamente la BSE, como hemos descrito en secciones anteriores.
- Damos una forma particular para $\rho(z)$ y ajustamos los parámetros con los datos numéricos.

Utilizamos la representación mostrada en , que es:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(p, P) &= \mathcal{F}^i(p, P) + \mathcal{F}^u(p, P), \\ \mathcal{F}^i(p, P) &= c_{\mathcal{F}}^i \int_{-1}^1 dz \rho_{\nu_{\mathcal{F}}^i}(z) [a_{\mathcal{F}} \hat{\Delta}_{\Lambda_{\mathcal{F}}}^4(k_z^2) + \bar{a}_{\mathcal{F}} \hat{\Delta}_{\Lambda_{\mathcal{F}}}^5(k_z^2)], \\ E^u(p, P) &= c_E^u \int_{-1}^1 dz \rho_{\nu_E^u}(z) \hat{\Delta}_{\Lambda_E^u}^{1+\alpha}(k_z^2), \\ F^u(p, P) &= c_F^u \int_{-1}^1 dz \rho_{\nu_F^u}(z) k^2 \Lambda_F^u \Delta_{\Lambda_F^u}^{2+\alpha}(k_z^2), \\ G^u(p, P) &= c_G^u \int_{-1}^1 dz \rho_{\nu_G^u}(z) \Lambda_G^u \Delta_{\Lambda_G^u}^{2+\alpha}(k_z^2), \end{aligned}$$

donde $\mathcal{F}(p, P) = E, F, G$; i, u se refieren a infrarrojo y ultravioleta, respectivamente; $\hat{\Delta}_{\Lambda}(s) = \Lambda^2 \Delta_{\Lambda}(s)$, $\Delta_{\Lambda}(s) = (\Lambda^2 + s)^{-1}$, $k_z^2 = k^2 + zk \cdot P$, $\bar{a}_E = 1 - a_E$, $\bar{a}_F = 1/\Lambda_F^i - a_F$, $\bar{a}_G = [1/\Lambda_G^i]^3 - a_G$. La forma explícita de $\rho(z)$ es:

$$\rho_{\nu}(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma[\nu + 3/2]}{\Gamma[\nu + 1]} (1 - z^2)^{\nu}, \quad (2.55)$$

$$\int_{-1}^1 \rho_{\nu}(z) dz = 1. \quad (2.56)$$

Los parámetros a ajustar: a, c, Λ y ν . Nótese que la parametrización N-ccp es un caso particular de (2.54), con $\rho(z) = \delta(z)$.

En el régimen perturbativo de QCD aparecen logaritmos. Ésto se debe a la forma en que el acoplamiento corre. Uno puede aproximar el comportamiento logarítmico mediante una ley de potencias, ésto es: $\ln^{\gamma_F} [D(s)] \approx D[s]^{\alpha}$, donde $D(s)$ es alguna función, γ_F la

dimensión anómala del objeto F en cuestión y α es un valor apropiado⁵. La introducción de $\alpha = 0.085 \neq 0$ a la representación descrita en [20], es una mejora que se ha incluido en este trabajo y en [27, 28].

En las figuras 2.14 y 2.15 mostramos como ajusta la parametrización que hemos mostrado, a los momentos 0-2 de Chebyshev de la amplitud $E_\pi(p, P)$.

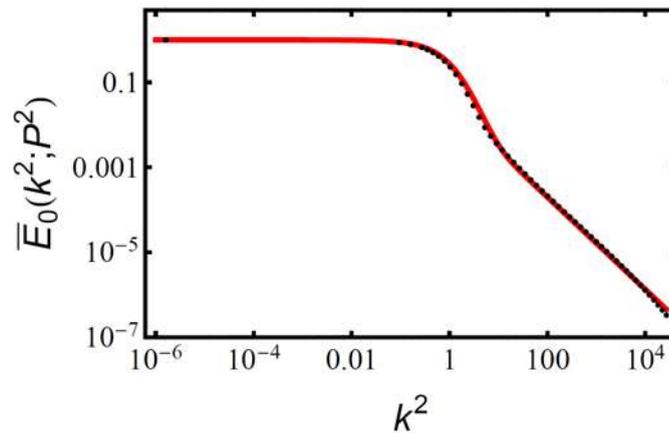


FIGURA 2.14: BSA del pión, momento 0 de Chebyshev: $\tilde{E}_0(k^2)$.
Datos numéricos en negro.

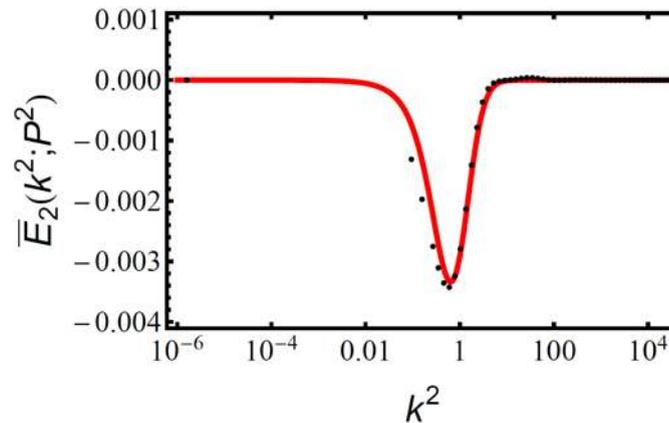


FIGURA 2.15: BSA del pión, momento 2 de Chebyshev: $\tilde{E}_2(k^2)$.
Datos numéricos en negro.

Además de permitirnos extender los resultados numéricos a un resultado continuo en el plano complejo, las PTIRs que hemos descrito son de gran utilidad numérica para el cálculo de PDAs, factores de forma y otros objetos no perturbativos. Ésto se describe en detalle en el siguiente capítulo.

⁵Por consistencia, α debe introducirse también en la parte escalar del propagador del quark.

Capítulo 3

El pión y los pseudoescalares pesados

3.1. El pión en el Modelo Estándar

Décadas antes de la formulación de QCD y el Modelo Estándar, la existencia del pión fue predicha por Yukawa, en 1935 [85]. Después de una búsqueda de varios años, el pión cargado fue encontrado en 1947 [86] y el pión neutro en 1950¹ [87, 88]. El pión se predijo como el arquetipo de mediador de la fuerza fuerte en los núcleos atómicos; hoy juega un papel crítico en los Hamiltonianos de interacción nuclear [89].

Por otro lado, el pión se introduce en los años 60's en los modelos de quarks [2, 3]. En éstos modelos, el pión es visto como un estado ligado ordinario de la mecánica cuántica, formado por un quark y antiquark constituyentes. Con este enfoque, resulta complicado describir simultáneamente, sin ingredientes adicionales, las masas del nucleón ($m_N \approx 940$ GeV) y el pión ($m_\pi \approx 140$ GeV) en términos de las masas de sus quarks constituyentes.

Durante la misma época, se desarrolló el álgebra de corrientes (de la que ya hemos hablado en detalle) [6] y se dedujeron relaciones entre las masas de hadrones y quarks [5]. En el mismo contexto, surgió el entendimiento de que de la no conservación de corrientes axiales (ruptura espontánea de simetría quiral, anomalías) [44, 48, 49], se crean *pseudo* bosones de Goldstone. Así, en la naturaleza tenemos mesones muy ligeros.

¹El pión fue el primer mesón observado experimentalmente.

Hoy en día, sabemos que la ruptura espontánea ocurre por la dinámica de las interacciones fuertes. La ruptura dinámica de la simetría quiral es el fenómeno emergente más importante del SM, al ser responsable por la generación del 98 % de la materia visible. Protones, neutrones y los piones, que los mantienen unidos en los núcleos atómicos, constituyen la mayor parte de la materia ordinaria. Mediante un sólo mecanismo, DCSB, podemos explicar la masa del nucleón y la ligereza del pión [17].

Sin embargo, aún después de 80 años de estudio, dudas y controversias sobre la estructura interna del pión (y todos los hadrones) persisten [46, 90]. El reto más grande es conectar la teoría (QCD) con las observaciones experimentales disponibles; al mismo tiempo, debemos ser capaces de predecir futuras observaciones.

3.2. Bosones de Goldstone y DCSB

Cuando discutimos sobre la simetría quiral en la sección 1.3.3, vimos que aunque el vacío se transforme de la misma manera que el lagrangiano, no necesariamente tiene las mismas simetrías. En particular, vimos que el vacío mezcla componentes derechas con izquierdas, y se genera un valor de expectación diferente de cero:

$$\langle 0 | \bar{\psi} \psi | 0 \rangle = \langle 0 | \bar{\psi}_R \psi_L + \bar{\psi}_L \psi_R | 0 \rangle \neq 0. \quad (3.1)$$

La ruptura de una simetría continua genera bosones de Goldstone. Así, cuando se rompe la simetría quiral, tenemos los mesones pseudoescalares: $\{\pi^0, \pi^\pm\}$ con $N_f = 2$; $\{\pi^0, \pi^\pm, K^0, K^\pm, \bar{K}, \eta\}$ con $N_f = 3$.

Demostrar (3.1) no es directo, pues de la teoría de perturbaciones se obtiene un vacío idénticamente cero. Es hasta que calculamos no perturbativamente, ecuación (2.48), que se obtiene un valor de expectación distinto de cero. Como hemos enfatizado antes, la ruptura espontánea es, en realidad, dinámica.

Otras consecuencias de la DCSB las estudiamos mediante una de las identidades fundamentales de una QFT, denominada identidad axial de Ward [72, 91].

3.2.1. Identidad axial de Ward

La identidad axial de Ward (que en realidad es de Ward-Green-Takahashi) se escribe:

$$P_\mu \Gamma_{5\mu}^{ab}(k, P) = S^{-1}(k^+) i\gamma_5 + i\gamma_5 S^{-1}(k^-) - i[m_a^\zeta + m_b^\zeta] \Gamma_5^{ab}(k, P), \quad (3.2)$$

donde los símbolos tienen su significado usual.

La expresión anterior relaciona el vértice axial-vector $\Gamma_{5\mu}^{ab}$, con el pseudoescalar Γ_5^{ab} . Individualmente, cada término depende del punto de renormalización ζ ; aún así, las observables físicas que se obtienen a partir de (3.2), no [46].

Consideremos el caso en el que tenemos los quarks ligeros u , d . Los vértices $P_\mu \Gamma_{5\mu}^{ab}$ y Γ_5^{ab} son estados $J^{PC} = 0^{-+}$, de manera que poseen los mismos polos de estado ligado. En una vecindad de $P^2 + m_\pi^2 \simeq 0$:

$$\begin{aligned} P_\mu \Gamma_{5\mu}^{ud}(k; P) &= \gamma_5 [\gamma_\mu F_A(k; P) + k_\mu \gamma \cdot k G_A(k; P) - \sigma_{\mu\nu} k_\nu H_A(k; P)] \\ &+ \tilde{\Gamma}_{5\mu}^{ud}(k; P) + \frac{2f_\pi}{P^2 + m_\pi^2} \Gamma_\pi(k; P), \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_5^{ud}(k; P) &= \gamma_5 [iE_A(k; P) + \gamma \cdot P F_A(k, P + \gamma \cdot k) + k \cdot P G_A(k; P) \\ &+ \sigma_{\mu\nu} k_\mu P_\nu H_A(k; P)] + \frac{2\rho_\pi}{P^2 + m_\pi^2} \Gamma_\pi(k; P), \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_\pi^{ud}(k; P) &= \gamma_5 [iE_\pi(k; P) + \gamma \cdot P F_\pi(k, P + \gamma \cdot k) + k \cdot P G_\pi(k; P) \\ &+ \sigma_{\mu\nu} k_\mu P_\nu H_\pi(k; P)]. \end{aligned} \quad (3.5)$$

En el límite quiral, $m_u = m_d = 0$ y $m_\pi^2 = 0$, de acuerdo a la ecuación (1.39). De la expresión (3.3), el lado izquierdo de (3.2) se escribe:

$$\begin{aligned} P_\mu \Gamma_{5\mu}^{ab}(k; P) &= \{-2iE_\pi(k; P)f_\pi + [2f_\pi F_\pi(k; P) + F_A(k; P)]\gamma \cdot P \\ &+ i[2f_\pi G_\pi(k; P) + G_A(k; P)]\gamma \cdot k + k \cdot P \\ &+ [2f_\pi H_\pi(k; P) + H_A(k; P)]\sigma_{\mu\nu} k_\mu P_\nu\} i\gamma_5. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Por otra parte, con $S(k) = i\gamma \cdot PA(k^2) + B(k^2)$, el lado derecho:

$$\begin{aligned} S^{-1}(k^+) i\gamma_5 + i\gamma_5 S^{-1}(k^-) &= \{[B(k_+^2) + B(k_-^2)] + [A(k_+^2) + A(k_-^2)]\gamma \cdot P \\ &+ [A(k_+^2) - A(k_-^2)]\gamma \cdot k\} i\gamma_5. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Igualamos (3.6) y (3.7), término a término en potencias de P_ν , y obtenemos:

$$f_\pi E_\pi(k^2; P=0) = B(k^2) \quad (3.8)$$

$$2f_\pi F_\pi(k^2; P=0) + F_A(k^2; P=0) = A(k^2) \quad (3.9)$$

$$2f_\pi G_\pi(k^2; P=0) + G_A(k^2; P=0) = 2A'(k^2) \quad (3.10)$$

$$2f_\pi H_\pi(k^2; P=0) + H_A(k^2; P=0) = 0, \quad (3.11)$$

que corresponden a las relaciones de Goldberger-Treiman, en el límite quiral.

Podemos entender mucho de la física hadrónica a partir de éste conjunto de relaciones, en particular de la relación (3.8). Observamos que:

- En la teoría de perturbaciones, $B(k^2) = 0$ en el límite quirral $m = 0$. La aparición de una solución $M(k^2) = B(k^2)/A(k^2) \neq 0$ en la ecuación de gap, indica que se generó masa dinámicamente a través del mecanismo de DCSB.
- Por otra parte, la solución de $B(k^2)$ en el límite quirral, garantiza que tengamos un pión no masivo $P^2 = -m_\pi^2 = 0$ en la correspondiente BSE. Ésta es una clara manifestación del teorema de Goldstone: se rompe la simetría quirral y se genera un bosón de spin 0, no masivo.
- La amplitud dominante $E_\pi(k^2; P = 0)$ está completamente determinada por la parte escalar del propagador, $B(k^2)$: cuando resolvemos el problema de un cuerpo, *casi* se resuelve el de dos.
- El vértice axial-vector está dominado por el polo en $P^2 \simeq 0$. Esta es una expresión de la conservación *parcial* de la corriente axial (PCAC) en la ecuación (1.41) y la relación de GMOR en (1.42).

Existen análogos a las identidades (3.8), fuera del límite quirral [72] y con anomalías [92]; ésta discusión se deja fuera del presente trabajo.

3.3. Quarkonia: η_c y η_b

Contrario a los mesones ligeros, tenemos los sistemas de *quarkonio*: estados ligados pesados, compuestos por quarks $c\bar{c}$ (*charmonia*) o $b\bar{b}$ (*bottomonia*). Los sistemas de quarkonio han sido observados experimentalmente: el primero de ellos en 1974, en BNL y SLAC (J/ψ , charmonia) [93, 94]; el segundo en 1977, en Fermilab (Υ , bottomonia) [95]. Su observación experimental contribuyó al descubrimiento de los quarks c y b .

Los mesones neutros ligeros (π^0 , η , η'), estados físicos que uno observa en los experimentos, en realidad son mezclas de estados cuánticos de quarks ligeros. La enorme diferencia de masa entre los quarks c , b y los quarks ligeros, resulta en estados quark-antiquark bien definidos, con un sabor en particular; por ello, los sistemas de quarkonia proveen una ventana complementaria al estudio de la física hadrónica y QCD.

Entre otros enfoques, estos sistemas pueden estudiarse en modelos de potencial [96, 97], en analogía con la descripción de la mecánica cuántica de los niveles de energía del átomo. Por otra parte, las masas grandes de los quarks c y b motivan a emplear modelos

de quark constituyentes (CQM) [98] y teorías efectivas no relativistas de QCD (nrQCD) [99, 100]. Pocos estudios se realizan en conexión directa con QCD [28].

En este trabajo se estudian los factores de forma de transición $\gamma\gamma^* \rightarrow \eta_{c,b}$, con el mismo formalismo matemático que empleamos para el sector ligero: ecuaciones de Dyson-Schwinger. Hacemos una comparativa entre el alcance de nrQCD [100] con las predicciones que obtenemos en nuestro análisis.

Asímismo, mostramos que mediante las DSEs podemos entender simultáneamente la estructura partónica de los sistemas más ligeros, así como de aquellos formados por los quarks de valencia más pesados que podemos estudiar hoy en día.

3.4. Amplitud de distribución de partones

En íntima conexión con la estructura interna de los hadrones, se encuentra la amplitud de distribución de partones (PDA). Éste objeto es el análogo a la función de onda (en espacio de momentos) en la mecánica cuántica, que incluye las sutilezas que demanda una QFT (no conservación de número de partículas, por ejemplo) [20, 101].

La PDA se describe en el *light-front*, pues las eigenfunciones del hamiltoniano en el *light-front* son independientes del 4-momento del sistema. Así, la función de onda en el *light-front* provee una conexión entre las propiedades dinámicas de la QFT con las nociones de la mecánica cuántica ordinaria.

La amplitud de distribución de quarks de valencia se entiende, intuitivamente, como la distribución de probabilidad de que un quark (con fracción de momento total x) y un antiquark (con fracción de momento $1 - x$) formen un estado ligado. Matemáticamente, se define como la proyección de la función de onda de Bethe-Salpeter al *light-front*. Para un mesón pseudoescalar:

$$f_5\phi_5(x; \zeta) = \mathcal{Z}_{2F}\text{Tr}_{CD} \int_q \delta(n \cdot q^+ - x n \cdot P) \gamma_5 \gamma \cdot n \chi_5(q; P), \quad (3.12)$$

donde f_5 es la constante de decaimiento, P es el momento total ($P^2 = -m_5^2$) y $\phi_5(x; \zeta)$ corresponde a la PDA en la escala ζ . El 4-vector *light-like* n cumple: $n^2 = 0$, $n \cdot P = -m_5$.

Los momentos de la distribución están dados por:

$$\begin{aligned} f_5(n \cdot P)^{m+1} \langle x^m \rangle &= \mathcal{Z}_{2F} \text{Tr}_{CD} \int_q (n \cdot q^+)^m \gamma_5 \gamma \cdot n \chi_5(q; P), \quad (3.13) \\ \langle x^m \rangle &= \int_0^1 x^m \phi_5(x; \zeta) dx, \quad \int_0^1 \phi(x; \zeta) dx = 1. \end{aligned}$$

Como podemos ver, la PDA queda representada en términos de amplitudes de Bethe-Salpeter y propagadores. Así, el cálculo de la PDA expone el patrón de DCSB y confinamiento en una función de onda con características de mecánica cuántica.

3.4.1. Límite conforme y evolución

En una vecindad del límite conforme (CL), la PDA se escribe en términos de polinomios de Gegenbauer (en la base 3/2):

$$\phi_5(x; \zeta) = 6x(1-x) \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(3/2)}(\zeta) C_n^{(3/2)}(2x-1) \right]. \quad (3.14)$$

Asintóticamente, independientemente de la constitución de quarks de valencia del mesón, la forma de la PDA es:

$$\phi^{\text{CL}}(x) = \phi(x; \zeta \rightarrow \infty) = 6x(1-x), \quad (3.15)$$

que es el bien conocido resultado de Brodsky-Lepage [101]. En las escalas accesibles por los experimentos, la forma de la PDA es muy diferente [20, 29]. Ésto se discute en detalle en secciones posteriores. De manera general, $\phi_5(x; \zeta)$ se puede escribir como:

$$\phi_5(x; \zeta) = N_\alpha [x(1-x)]^{\alpha_-} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^\alpha(\zeta) C_n^\alpha(2x-1) \right], \quad (3.16)$$

donde $\alpha_- = \alpha - 1/2$ es alguna potencia adecuada y N_α es la normalización.

Existe una conexión íntima entre PDA y factores de forma, como veremos más adelante. En procesos exclusivos, la PDA controla la distribución de quarks de valencia en el régimen de momentos altos. Así, los experimentos a alta energía son una prueba directa de la validez de QCD como la teoría que describe a las interacciones fuertes.

A partir de una escala inicial ζ_0 a una final ζ , la PDA evoluciona mediante las ecuaciones de evolución Efremov-Radyushkin-Brodsky-Lepage (ERBL) [102, 103]²:

$$\alpha_n^{(3/2)}(\zeta) = \alpha_n^{(3/2)}(\zeta_0) \left[\frac{\alpha_s(\zeta_0)}{\alpha_s(\zeta)} \right]^{\gamma_n^0/\beta_0}, \quad \alpha_s = \frac{4\pi}{\beta_0 \ln[Q^2/\Lambda_{\text{QCD}}^2]}, \quad (3.17)$$

$$\gamma_n^0 = \frac{4}{3} \left[3 + \frac{2}{(n+1)(n+2)} - 4 \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} \right], \quad \beta_0 = 11 - (2/3)N_f.$$

La evolución, que es logarítmicamente lenta, permite a los grados de libertad de quark-antiquark convertirse en partones menos vestidos, mediante la adición de gluones y quarks del mar. Ésta es la manera que la dinámica de QCD prescribe. Dichos efectos se incorporan de manera natural en problemas de estados ligados, cuando se toma en cuenta el kernel de dispersión completo. Sin embargo, aspectos de la física se pierden cuando los kernels se truncan, y así pasa con la aproximación RL.

3.5. Factores de forma

De diferentes tipos de experimentos, a partir de las secciones eficaces, se pueden extraer objetos no perturbativos (funciones de estructura), que revelan información sobre la estructura hadrónica. Por ejemplo:

- **Función de distribución de partones (PDF):** distribución de momento longitudinal de los partones.
- **PDF dependiente del momento transversal (TMD):** su análogo para la distribución de momento transversal.
- **Factores de forma (FFs):** estructura electromagnética del hadrón.
- **Distribución de partones generalizada (GDP):** distribución espacial de los partones. En ciertos límites, se reduce a la PDF o FF.

Los factores de forma nos dan información sobre la estructura electromagnética dentro del hadrón [27, 28, 104]. A partir de ellos podemos inferir, por ejemplo, distribuciones de carga y radios de interacción. Los FFs se extraen de procesos exclusivos; el número necesario de FFs que describen un proceso en particular, depende de los números cuánticos (spin y paridad) de los hadrones involucrados.

²Debemos tener o proyectar la PDA en la base 3/2.

Es el fotón el que sondea la estructura electromagnética del hadrón. Por ello, es necesario tener una buena descripción de la interacción quark-photon; es decir, escribir adecuadamente el vértice quark-fotón. Se analiza a continuación.

3.5.1. El vértice quark-fotón

La construcción del vértice quark-fotón, demanda la construcción de 12 estructuras tensoriales: 4 longitudinales y 8 transversas. Este vértice, al igual que el vértice quark-gluon, tiene su correspondiente DSE. Sin embargo, uno puede formular un ansatz. El vértice debe [68, 105]:

- Satisfacer las identidades longitudinales WGTI.
- Ser libre de singularidades cinemáticas.
- Reducirse al vértice desnudo en el límite ultravioleta.
- Tener las mismas propiedades de transformación que éste.
- Adicionalmente, se debe satisfacer el resultado (1.74) (anomalía abeliana).

Mediante la técnica *gauge* construimos el vértice [52, 104]. El vértice no amputado:

$$S\Gamma_\mu S \rightarrow \chi(k_f, k_i) = \sum_{j=1}^3 T_{j\mu}(k_f, k_i) X_j(k_f, k_i),$$

donde la estructura tensorial está dada por:

$$\begin{aligned} T_{1\mu}(k_f, k_i) &= \gamma_\mu, \\ T_{2\mu}(k_f, k_i) &= \beta \gamma \cdot k_f \gamma_\mu \gamma \cdot k_i + \bar{\beta} \gamma \cdot k_i \gamma_\mu \gamma \cdot k_f, \\ T_{3\mu}(k_f, k_i) &= i\beta (\gamma \cdot k_f \gamma_\mu + \gamma_\mu \gamma \cdot k_i) + i\bar{\beta} (\gamma \cdot k_i \gamma_\mu + \gamma_\mu \gamma \cdot k_f), \end{aligned}$$

tal que $\bar{\beta} = 1 - \beta$ y $\Delta_F(k_f^2, k_i^2) = (F(k_f^2) - F(k_i^2))/(k_f^2 - k_i^2)$.

Las funciones de vestimento son:

$$\begin{aligned} X_1(k_f, k_i) &= \Delta_{k^2 \sigma_v}(k_f^2, k_i^2), \\ X_2(k_f, k_i) &= \Delta_{\sigma_v}(k_f^2, k_i^2), \\ X_3(k_f, k_i) &= \Delta_{\sigma_s}(k_f^2, k_i^2). \end{aligned}$$

Una forma similar fue usada en [104] para el cálculo del factor de forma del pión. Con una elección adecuada de β , la anomalía abeliana se satisface [27]:

$$\beta \rightarrow \beta(Q^2) = 1 + s_0 \text{Exp} [-\mathcal{E}_5/M_f^E] , \quad (3.18)$$

$$\mathcal{E}_5 = \sqrt{\frac{1}{4}Q^2 + m_5^2} - m_5 , \quad M_f^E = \{p|p^2 = M(p^2) , p > 0\} . \quad (3.19)$$

donde Q^2 y s_0 se fija tal que se satisfaga la anomalía abeliana o se obtenga el correspondiente ancho de decaimiento; \mathcal{E}_5 corresponde a la energía cinética del fotón en el marco de referencia de Breit. M_f^E es la masa Euclidiana, que se calcula a partir del propagador del quark correspondiente ($M_{u/d}^E = 0.46$ GeV, $M_c^E = 1.28$ GeV, $M_b^E = 4.30$ GeV).

Salvo por piezas transversas asociadas con s , $\chi_\mu(k_f, k_i)$ y $S(k_f)\Gamma_\mu(k_f, k_i)S(k_i)$ son equivalentes. Nada se gana con hacerlos idénticos, pues los términos transversos están suprimidos experimentalmente. Además, con ésta elección, el tiempo de cómputo de los factores de forma se reduce considerablemente.

El vértice queda escrito completamente en términos de las funciones de vestimento del quark, por lo que se pueden usar las PTIRs descritas en la sección anterior. Además, el *ansatz* tiene el mérito adicional de que reproduce el límite ultravioleta correcto cuando uno o ambos fotones (en los factores de forma $\gamma\gamma$) son duros. Ésto no podría pasar, por ejemplo, con el popular vértice Ball-Chiu [105].

3.5.2. Factor de forma del pión

El factor de forma del pión cargado se mide en colisiones electrón-protón. El electrón emite un fotón y este interactúa con un pión de la nube de mesones del protón, como se muestra en la figura 3.1. Se ha medido en JLab (EUA), en el rango de energías $Q^2 = 0.6 - 2.45$ GeV², [106].

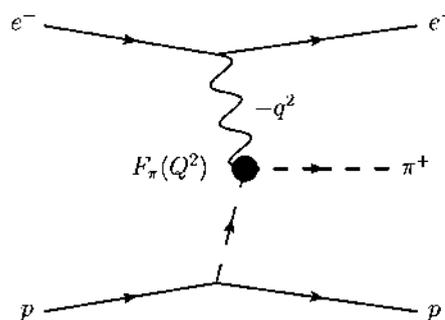


FIGURA 3.1: De la dispersión electrón-protón se mide el factor de forma del π^+ .

En la aproximación de impulso, el factor de forma del pión está dado por [104]:

$$K_\mu F_\pi(Q^2) = N_c \text{Tr} \int_k \chi_\mu(k + p_f, k + p_i) \Gamma_\pi(k_i; p_i) S(k) \Gamma_\pi(k_f; -p_f), \quad (3.20)$$

donde Q es el momento del fotón, $p_{f,i} = K \pm Q/2$ y $k_{f,i} = k \pm k/2$; χ_μ corresponde al vértice no amputado quark-photon, su forma es similar a la que describimos en (3.18). La expresión (3.20) corresponde a la figura 3.2.

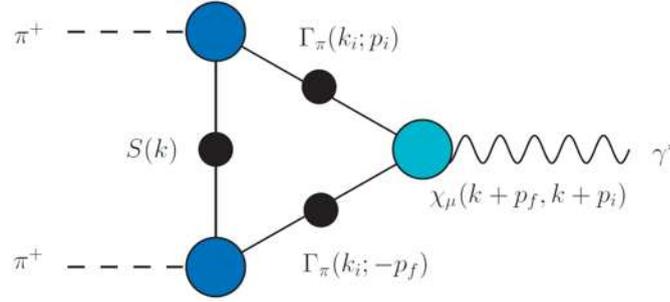


FIGURA 3.2: Factor de forma del pión en la aproximación de impulso.

De acuerdo a las reglas de factorización de QCD [101], el factor de forma electromagnético puede separarse en una parte perturbativa (que se puede calcular orden por orden) y una completamente no perturbativa, ésto es::

$$F_\pi(Q^2) = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \phi_\pi^*(x; \zeta) T_{\pi\pi}(x, y, Q^2; \alpha_s(Q^2); \zeta) \phi_\pi(y; \zeta), \quad (3.21)$$

donde Q^2 es el momento del fotón y $T_{\pi\pi}(x, y, Q^2; \alpha_s(Q^2); \zeta)$ corresponde al kernel de dispersión. El orden dominante está dado por::

$$T_{\pi\pi}(x, y, Q^2; \alpha_s(Q^2); \zeta) = \frac{16\pi}{9} \frac{\alpha_s(Q^2)}{Q^2} \frac{1}{xy}, \quad (3.22)$$

y se muestra en la figura 3.3.

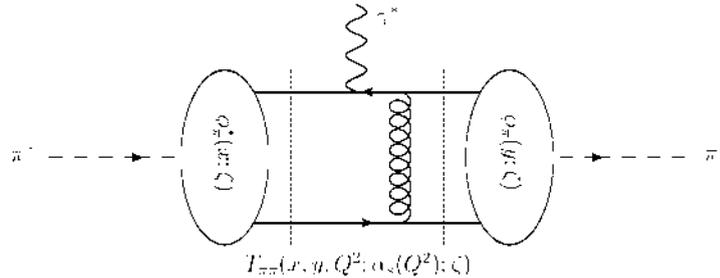


FIGURA 3.3: Orden dominante de la factorización de QCD para el EFF.

De las expresiones (3.21) y (3.22), se obtiene la siguiente predicción:

$$\exists Q_0 > \Lambda_{\text{QCD}} |Q^2 F_\pi(Q^2)|^{Q^2 > Q_0^2} \approx 16\pi\alpha_s(Q^2) f_\pi^2 \omega_\phi^2, \quad \omega_\phi = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{\phi(x; \zeta)}{x} dx, \quad (3.23)$$

aunque la escala Q_0 no es predicha. En el CL, $\phi^{\text{CL}}(x) = 6x(1-x)$, se obtiene $\omega_\phi = 1$. Así, la predicción asintótica es [101]:

$$Q^2 F_\pi(Q^2) \approx^{Q^2 > Q_0^2} 16\pi\alpha_s(Q^2) f_\pi^2. \quad (3.24)$$

De la figura 3.4, se observa que los datos experimentales se encuentran en enorme discrepancia con ésta predicción. Ésto sugiere que: 1) la predicción de QCD está mal, 2) la PDA asintótica no corresponde a la física en la escala accesible experimentalmente, $\zeta^2 \sim 2.45 \text{ GeV}^2$. Estudios recientes sugieren que es lo segundo [104].

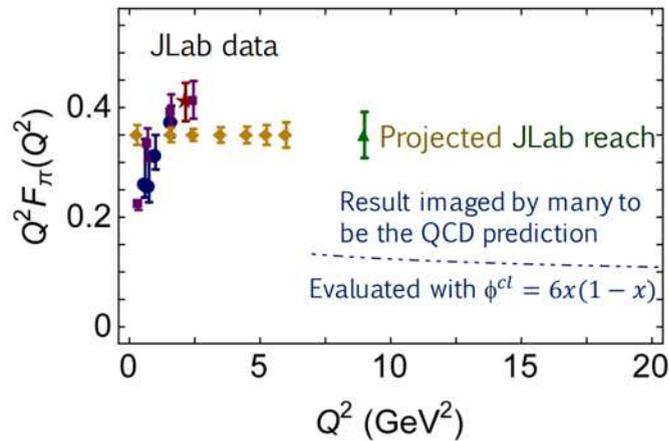


FIGURA 3.4: Resultados experimentales del EFF del pión y comparativa con el resultado en el CL.

En futuros experimentos en JLab se calculará el factor de forma del pión hasta energías de $\sim 9 \text{ GeV}^2$ [107]. El resultado nos dará una verificación experimental. Este experimento forma parte del programa “*The 2015 Long Range Plan for Nuclear Science*”, del departamento de energía y la agencia nacional de ciencia (EUA) [24].

3.5.3. Factor de forma de transición ($\gamma\gamma^*$)

La estructura de los pseudoescalares neutros se estudia de la transición $\gamma\gamma^* \rightarrow M_5$ en colisiones electrón-positrón [108, 109]. En éstos experimentos, un fermión es detectado después de un ángulo de dispersión grande, mientras que el otro se desvía muy poco y pasa sin ser detectado. Se asume que el fermión detectado emite un fotón altamente *off-shell*, mientras que el otro emite un fotón suave; los fotones se fusionan y producen

un pseudoescalar neutro (figura 3.5).

Como vimos, el factor de forma del pión cargado se obtiene de experimentos electrón-protón. El reto de extraer el factor de forma del pión, a altas energías, es sondear su estructura sin romperlo. Por su parte, la colisión electrón-positrón permite estudiar la estructura del pseudoescalar neutro a relativamente altas energías, siendo así una buena plataforma para poner a prueba las predicciones de QCD perturbativo. El reto es, ahora, eliminar los posibles procesos de fondo.

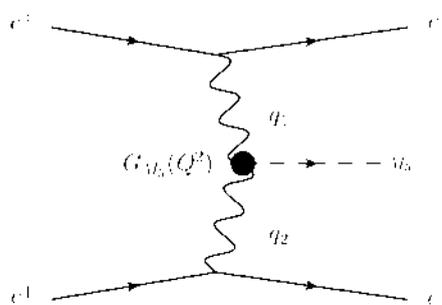


FIGURA 3.5: De la dispersión electrón-positrón se produce un pseudoescalar neutro.

En épocas recientes, se ha medido la transición $\gamma\gamma^* \rightarrow \pi^0, \eta, \eta', \eta_c$ en Babar (EUA) [108, 110] y la transición $\gamma\gamma^* \rightarrow \pi^0$ en Belle (Japón) [109]. Experimentos anteriores en CELLO [111] y CLEO [112] (EUA) también midieron algunas de estas transiciones. Estos resultados se muestran en las figuras 3.6 y 3.7. No hay mediciones de $\gamma\gamma^* \rightarrow \eta_b$.

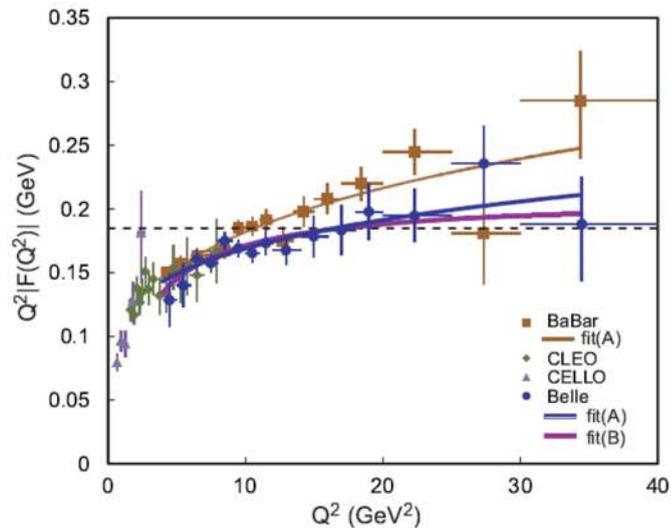
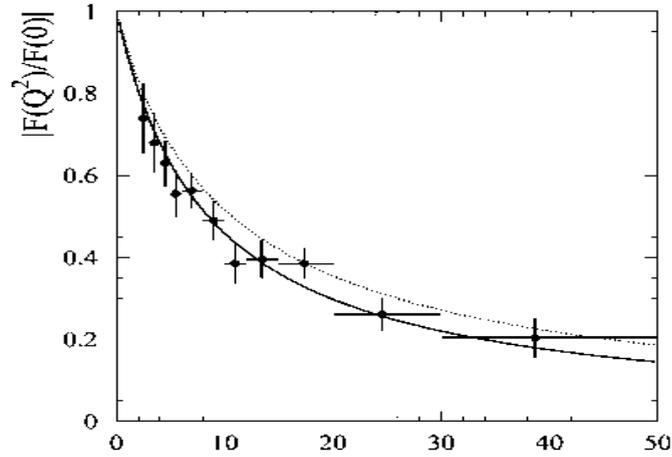


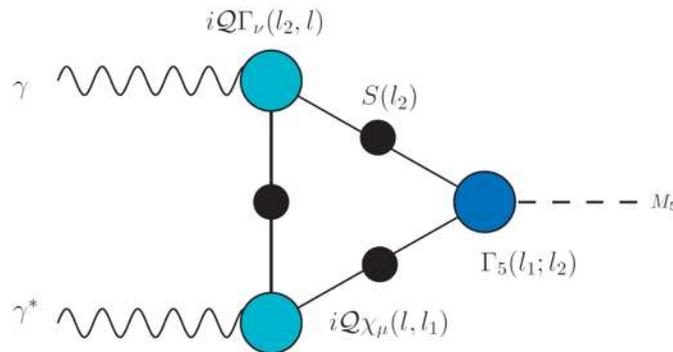
FIGURA 3.6: Resultados experimentales $\gamma\gamma^* \rightarrow \pi^0$.


 FIGURA 3.7: Resultados experimentales $\gamma\gamma^* \rightarrow \eta_c$ (Babar).

Para un pseudoescalar neutro, la transición $\gamma\gamma^* \rightarrow M_5$ se muestra en la figura 3.8, y corresponde a la expresión [27]:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\mu\nu}(k_1, k_2) &= T_{\mu\nu}(k_1, k_2) + T_{\nu\mu}(k_2, k_1) & (3.25) \\ T_{\mu,\nu}(k_1, k_2) &= \frac{e^2}{4\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} k_{1\alpha} k_{2\beta} G(k_1^2, k_1 \cdot k_2, k_2^2) \\ &= \text{Tr}_{CD} \int_l i\mathcal{Q}\chi_\mu(l, l_1) \Gamma_5(l_1, l_2) S(l_2) i\mathcal{Q}\Gamma_\nu(l_2, l), \end{aligned}$$

donde $l_1 = l + k_1$, $l_2 = l - k_2$. Se tienen las condiciones cinemáticas: $k_1^2 = Q^2$, $k_2^2 = 0$, $2k_1 \cdot k_2 = -(m_{M_5}^2 + Q^2)$. Por otro lado, \mathcal{Q} es una matriz que se asocia con las cargas de los quarks de valencia del mesón. Más adelante explicamos como evaluar esta transición.


 FIGURA 3.8: Factor de forma de transición $\gamma\gamma^* \rightarrow M_5$. Aproximación de impulso.

Por su parte, la factorización de QCD para la transición $\gamma\gamma^* \rightarrow M_5$ se observa en la figura 3.9, y se escribe:

$$G_5(Q^2) = 4\pi^2 f_\pi \int_0^1 dx T_{\gamma M_5}(x, Q^2; \alpha_s(Q^2); \zeta) \phi_5(x; \zeta), \quad (3.26)$$

donde $T_{\gamma M_5}(x, Q^2; \alpha_s(Q^2); \zeta)$ es el kernel de dispersión. Pensemos por lo pronto en el caso $M_5 = \pi^0$ (los otros casos son análogos). A orden dominante, el kernel de dispersión tiene la forma simple:

$$T_{\gamma\pi}(x, Q^2; \alpha_s(Q^2); \zeta) = \frac{e_u^2 - e_d^2}{xQ^2}, \quad (3.27)$$

donde $e_{u,d}$ corresponden a las cargas de los quarks u/d .

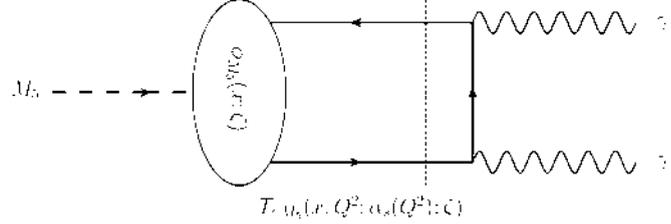


FIGURA 3.9: Factorización de QCD para el factor de forma de transición $\gamma\gamma^* \rightarrow M_5$.

La predicción de QCD:

$$\exists \tilde{Q}_0 > \Lambda_{\text{QCD}} |Q^2 G_\pi(Q^2)|^{Q^2 > \tilde{Q}_0^2} \approx 4\pi^2 f_\pi \omega_\phi. \quad (3.28)$$

De nueva cuenta, la escala \tilde{Q}_0 no es predicha. En el límite conforme [101]:

$$Q^2 G_\pi(Q^2) \approx 4\pi^2 f_\pi. \quad (3.29)$$

El caso del π^0 es particular. Todos las mediciones están de acuerdo en momentos $Q^2 < 10 \text{ GeV}^2$. Sin embargo, los resultados disponibles a momentos más grandes (Babar y Belle), parecen no estar de acuerdo, como se observa en la figura . No es claro cómo el resultado de Babar se reconcilia con la predicción asintótica de QCD. Se espera que futuros experimentos en Belle II [25] resuelvan esta controversia. Por ello, es de extrema importancia tener predicciones para los TFF.

El reto teórico de entender la transición $\gamma\gamma^* \rightarrow \pi^0$, es que demanda un formalismo que pueda explicar la (esencialmente no perturbativa) anomalía abeliana y, al mismo tiempo, conectar con el régimen perturbativo de QCD. El evaluar la expresión (3.25) en el enfoque DSE-BSE nos permite lograr lo antes expuesto.

Por otra parte, si se tiene un resultado sólido, se puede extender el análisis al caso de ambos fotones *off-shell*³ y calcular su contribución *light-by-light* (y de todos los pseudoescalares) al momento magnético anómalo del muón [113, 114]; cuyas mediciones experimentales y cálculos teóricos han estado en histórico desacuerdo. Se medirá pronto en Fermilab (USA) [115].

³No se ha medido, pues es muy complicado desde el punto de vista experimental.

3.6. Resolución y resultados

En esta sección se explica como calcular, de manera general, PDAs y factores de forma. Retomemos algunas expresiones.

La PDA de un mesón pseudoescalar está dada por:

$$f_5 \phi_5(x; \zeta) = \mathcal{Z}_{2F} \text{Tr}_{CD} \int_q \delta(n \cdot q^+ - x n \cdot P) \gamma_5 \gamma \cdot n \chi_5(q; P), \quad (3.30)$$

donde los momentos de la distribución están dados por:

$$\begin{aligned} f_5 (n \cdot P)^{m+1} \langle x^m \rangle &= \mathcal{Z}_{2F} \text{Tr}_{CD} \int_q (n \cdot q^+)^m \gamma_5 \gamma \cdot n \chi_5(q; P), \quad (3.31) \\ \langle x^m \rangle &= \int_0^1 x^m \phi(x; \zeta) dx, \quad \int_0^1 \phi(x; \zeta) dx = 1. \end{aligned}$$

El factor de forma del pión:

$$K_\mu F_\pi(Q^2) = N_c \text{Tr} \int_k \chi_\mu(k + p_f, k + p_i) \Gamma_\pi(k_i; p_i) S(k) \Gamma_\pi(k_f; -p_f). \quad (3.32)$$

Por su parte, para un pseudoescalar neutro, la transición $\gamma\gamma^* \rightarrow M_5$ se escribe:

$$\begin{aligned} T_{\mu,\nu}(k_1, k_2) &= \frac{e^2}{4\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} k_{1\alpha} k_{2\beta} G(k_1^2, k_1 \cdot k_2, k_2^2) \quad (3.33) \\ &= \text{Tr}_{CD} \int_l i \mathcal{Q} \chi_\mu(l, l_1) \Gamma_5(l_1, l_2) S(l_2) i \mathcal{Q} \Gamma_\nu(l_2, l). \end{aligned}$$

De las expresiones (3.31), (3.32) y (3.33), vemos que las cantidades a calcular quedan escritas en términos de propagadores y BSAs; que tienen su correspondiente PTIR, definidas en las secciones 2.6.2 y 2.6.1. Como veremos más adelante, estas representaciones son de gran utilidad.

3.6.1. Idea general y algoritmo

Todos los elementos en (3.31), (3.32) y (3.33), expresados en términos de PTIRs. Los cálculos correspondientes se reducen a la tarea de sumar series de términos, tales que involucran denominadores en los integrandos de la forma:

$$\prod_{i=1}^N f_i(q; p_i, b_i, \omega_i) \sim \frac{1}{(q^2 + 2b_1 q \cdot p_1 + \omega_1^2)^{\beta_1}} \times \cdots \times \frac{1}{(q^2 + 2b_N q \cdot p_N + \omega_N^2)^{\beta_N}}. \quad (3.34)$$

Por su parte, al tomar las trazas, en los numeradores aparecen combinaciones de potencias de q^2 y $(q \cdot p_i)$.

La forma cuadrática de los denominadores permite que, después de emplear una parametrización de Feynman y elegir un adecuado cambio de variables, las integrales se puedan escribir como:

$$F(q) \sim \int_q \frac{(q^2)^\alpha}{(q^2 + \tilde{m}^2)^\beta} = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{\Gamma[\alpha - \beta - 2] \Gamma[\beta + 2]}{\Gamma[\alpha] \Gamma[2]} \frac{1}{(\tilde{m}^2)^{\alpha - \beta - 2}}, \quad \alpha - \beta - 2 > 0, \quad (3.35)$$

que son el tipo de integrales que aparecen en los libros de texto, cuando se realizan cálculos perturbativos; de allí el nombre de las representaciones que utilizamos. En el apéndice B se discute más en detalle este procedimiento.

Después, se calcula numéricamente el resto de las integrales: aquellas que dependen de los parámetros de Feynman y las densidades espectrales en las BSAs. El resultado completo viene cuando se suma toda la serie.

Por cada propagador o vértice quark-fotón (que queda escrito en términos de las funciones de vestimento del quark), el número total de términos de la serie se multiplica por 4 (2 sumandos y sus respectivos complejos conjugados); por cada BSA, se multiplica por 9 (2 de la parte infrarroja, 1 de la ultravioleta y un total de 3 amplitudes). Cada propagador y cada término en la BSA necesitan 1 parámetro de Feynman; cada vértice quark-fotón necesita 2.

3.6.2. Amplitudes de distribución: π^0 , η_c , η_b

Para la evaluación de cada uno de los momentos en (3.31), se requiere integrar $4 \times 9 \times 4 = 144$ términos, sobre 3 parámetros de Feynman y una densidad espectral. La PDA se reconstruye a partir de los momentos, ecuación (3.30), minimizando:

$$\epsilon = |\phi_5^R(x; \zeta) / \phi_5(x; \zeta) - 1|,$$

donde hemos definido:

$$\phi_5^R(x; \zeta) = N_\alpha [x(1-x)]^{\alpha_-} \left[1 + \sum_{j=2,4,\dots}^N a_n^\alpha(\zeta) C_n^\alpha(2x-1) \right], \quad \alpha_- = \alpha - 1/2. \quad (3.36)$$

Los parámetros a ajustar son α y a_n . Se toman únicamente los valores pares de j , pues para mesones con las masas del quark-antiquark iguales, la PDA es invariante ante el intercambio $x \leftrightarrow 1 - x$.

Para los mesones pesados, es conveniente dar una forma alternativa a $\phi^R(x; \zeta)$:

$$\phi_5^R(\xi = 2x - 1; \zeta) = N_\alpha \frac{3}{2} (1 - \xi^2) \text{Exp}[\alpha^2((1 - \xi^2) - 1)], \quad (3.37)$$

tal que el parámetro a ajustar es α . En ambos casos N_α es una constante de normalización, tal que $\langle x^0 \rangle = 1$.

Se obtiene, para el pión:

$$\phi_\pi(x; \zeta = 2 \text{ GeV}) = N_\alpha [x(1-x)]^{\alpha_-} [1 + a_2 C_2^\alpha (2x-1)] \sim [x(1-x)]^{0.3}, \quad (3.38)$$

donde $N_\alpha = 1.74$, $\alpha_- = \alpha - 0.5 = 0.29$ y $a_2 = 0.0029$; que corresponde a una PDA en escala hadrónica [20]. A esta escala, la PDA es cóncava y más ancha que en el CL. La evolución de las PDAs, con la escala de resolución, es logarítmicamente lenta. En la figura se muestra la evolución de la PDA del pión, de una escala $\zeta = 2 \text{ GeV}$ a $\zeta = 10 \text{ GeV}$. Incluso a esa escala, la anchura de la PDA es mucho más marcada que la del límite conforme. La PDA del pion se muestra en la figura 3.10

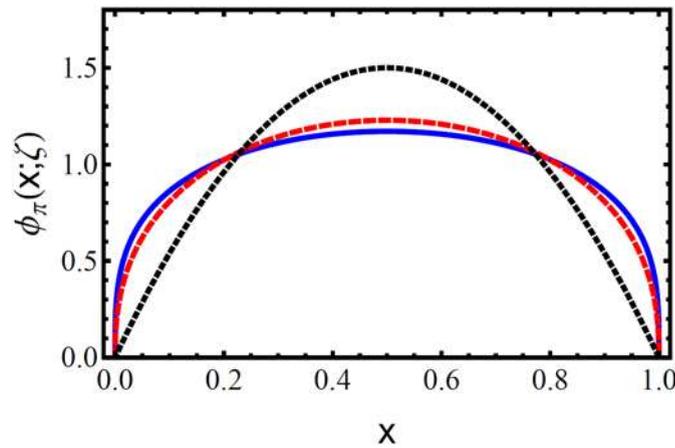


FIGURA 3.10: PDA del pion a $\zeta = 2 \text{ GeV}$ (azul), evolución ERBL a $\zeta = 10 \text{ GeV}$ (rojo) y $\phi^{\text{CL}}(x)$ (negro).

Notemos qué, con $\zeta = 2 \text{ GeV}$:

$$\omega_\phi = \frac{1}{3} \int_0^1 dx \frac{\phi(x; \zeta = 2 \text{ GeV})}{x} \approx 1.8, \quad (3.39)$$

a diferencia del resultado en el CL, que produce $\omega_\phi = 1$. De ésta manera, se espera que la PDA a esta escala produzca factores de forma más duros. Para η_c y η_b se obtienen, respectivamente, $\alpha = 1.7$ y 2.6 en la ecuación (3.37) [29]. Las correspondientes PDAs se muestran en la figura 3.11.

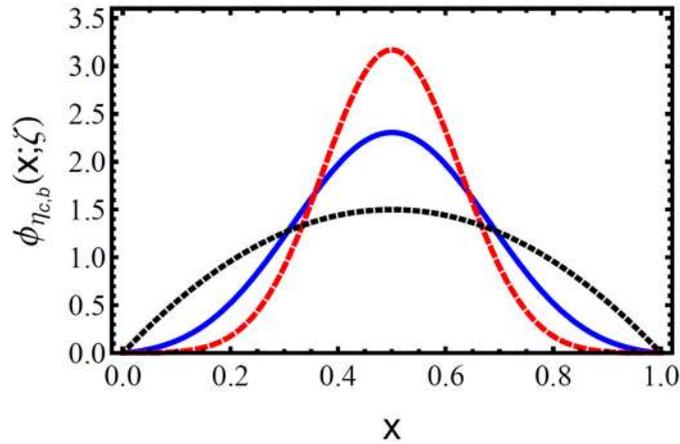


FIGURA 3.11: PDA de η_c (azul) y PDA de η_b (rojo), a escala $\zeta = 2$ GeV y $\phi^{\text{CL}}(x)$ (negro).

La PDA del pión es concava y ancha, más ancha que $\phi^{\text{CL}}(x)$. Esta dilatación es un efecto marcado de la DCSB. Las PDA de η_c y η_b son más angostas que el límite conforme; asemejan a una función $\delta(x - 1/2)$ de anchura finita. Debido a que los quarks de valencia son más pesados, los efectos relativistas son menores. En el límite de quarks de masa infinita o en nrQCD, se tiene exactamente $\phi(x) = \delta(x - 1/2)$.

Que la PDA del mesón ligero (de quarks u/d) sea ancha, con respecto al límite conforme, y que la PDA del mesón pesado (de quarks c, b) sea más angosta con respecto al mismo límite, sugiere que hay un valor crítico de la masa del quark de valencia, tal que $\phi(x; \zeta) = 6x(1 - x) = \phi^{\text{CL}}(x)$ para toda escala ζ . Se hipotiza que este valor es ligeramente arriba de la masa del quark s [29].

3.6.3. Factor de forma del pión

Este caso, que es el más complicado, requiere de la evaluación de $4 \times 9 \times 4 \times 9 = 1296$ integrales, sobre 5 parámetros de Feynman y 2 densidades espectrales; para cada valor Q_i^2 del momento del fotón.

La predicción de Chang *et al.*, [104] que se muestra en la figura 3.12, está de acuerdo con los datos experimentales. Más aún, está de acuerdo (hasta un 15% de error) con el resultado obtenido de (3.21), a partir de una $\phi_\pi(x; \zeta = 2 \text{ GeV})$. Estos resultados sugieren que la factorización (3.21) es correcta; sin embargo, a las energías accesibles, es incorrecto utilizar la PDA en el CL.

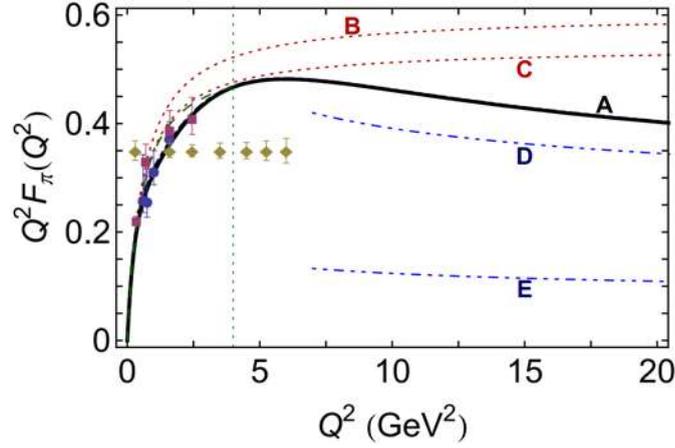


FIGURA 3.12: Factor de forma del pión. Predicción de DSE (A) [104], fits de monopolos (B,C), resultado obtenido de $\phi_\pi(x; \zeta = 2 \text{ GeV})$ (D) y resultado obtenido de $\phi^{\text{CL}}(x)$ (E).

Se define el radio de carga como:

$$r_{\pi^0}^2 = -6 \frac{dF_\pi(Q^2)}{dQ^2}, \quad Q^2 = 0, \quad (3.40)$$

el valor obtenido es $r_{\pi^+} = 0.66 \text{ fm}$, que compara bien con el valor empírico $r_{\pi^+} = 0.67 \text{ fm}$.

Una carencia de este cálculo es la falta de evolución de la escala: el resultado se evalúa a una escala fija $\zeta = 2 \text{ GeV}$. Es el fotón el que sondea la estructura del mesón y, por consiguiente, el que determina la resolución con la que se ve su estructura. Así, la escala debe evolucionar con el momento del fotón ($\zeta^2 = Q^2$). De esta manera, se concilia con la predicción de QCD asintótica cuando $\Lambda_{\text{QCD}}^2/Q^2 \simeq 0$.

Este hecho no es evidente del EFF, pues éste tiene un gran realce a momentos pequeños y, contrariamente al TFF del π^0 , tiende a su límite asintótico por arriba. El corrimiento del EFF con $\alpha_s(Q^2)$ en la ecuación (3.23), sugiere (equivocadamente) que el límite asintótico eventualmente se recupera. Fue hasta que se calculó el TFF del pión que se mostró la necesidad de la evolución con la escala [27]. Como veremos más adelante, sin el debido factor de evolución el CL nunca se recupera.

Hemos incluido la evolución ERBL en la figura 3.13. El resultado modifica favorablemente: la predicción que se obtiene de evaluar el diagrama de triángulo de la ecuación (3.32) y aquella que se obtiene de la factorización están más cercanas. Además, la conciliación con el límite de QCD asintótico es más evidente.

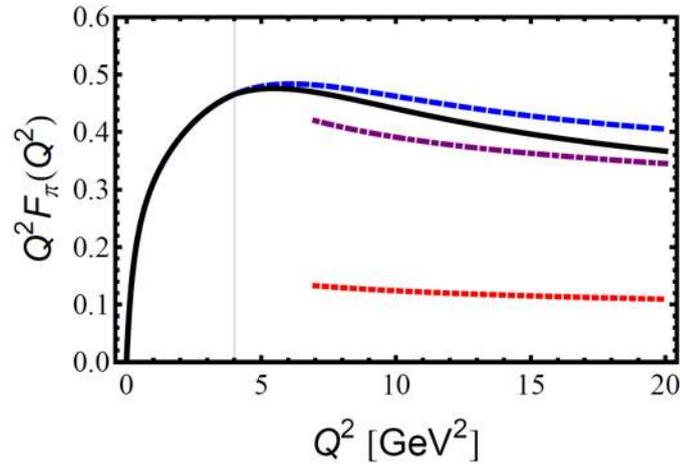


FIGURA 3.13: EFF del π^+ . Resultado de DSE sin evolución (azul), con evolución (negro). Resultado obtenido de $\phi_\pi(x; \zeta = 2 \text{ GeV})$ (morado) y $\phi^{\text{CL}}(x)$ (rojo).

3.6.4. Factores de transición: $\gamma\gamma^* \rightarrow \pi^0$, η_c , η_b

En estas transiciones se evalúan $4 \times 9 \times 4 \times 4 = 576$ integrales, sobre 6 parámetros de Feynman y 1 densidad espectral; para cada valor Q_i^2 del momento del fotón.

Mostramos el resultado de π^0 en la figura 3.14. La predicción mostrada satisface la anomalía abeliana, compara bien con los datos experimentales para $Q^2 < 10 \text{ GeV}^2$, con resultados de Belle a momentos mayores y reconcilia con el límite asintótico. Hay desacuerdo con los datos de Babar a momentos grandes.

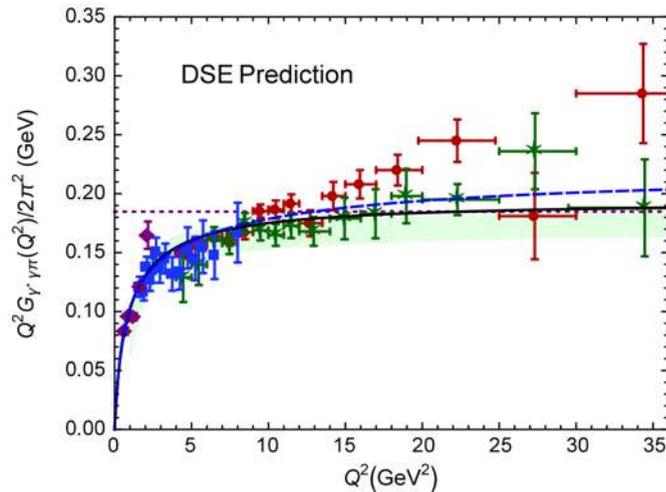


FIGURA 3.14: TFF del π^0 . Predicción de DSE (negro) [27], Resultado de DSE sin evolución (azul) y límite conforme (morado). La banda (verde) se describe en [116]. CELLO (morado) [111], CLEO (azul) [112], Babar (rojo) [108] y Belle (verde) [109]

Normalizando $G_\pi(Q^2) \rightarrow G_\pi(Q^2)/G_\pi(0)$, obtenemos el radio de interacción de la expresión (3.40). Se obtiene $r_{\pi^0} \approx 0.68 \text{ fm}$, muy similar al del pión cargado.

El límite asintótico es alcanzado, por debajo, a $Q^2 \approx 35 \text{ GeV}^2$ y se sobrepasa ligeramente. Ésto es consecuencia del truncamiento RL. Aunque da la ley de potencias correcta, falla en obtener las dimensiones anómalas correctas. El límite asintótico sólo es excedido logarítmicamente y se recupera a $Q^2 \gtrsim 100 \text{ GeV}^2$. Si no se toma en cuenta la evolución de QCD con la escala, el factor de forma crece hasta alcanzar su propio valor asintótico, ≈ 1.8 más grande que el CL.

En cuanto a η_c , el resultado compara bien con los datos experimentales y se obtiene un radio de interacción $r_{\eta_c} = 0.16 \text{ fm}$, en excelente acuerdo con el valor empírico $r_{\eta_c} = 0.17 \pm 0.01 \text{ fm}$; por otra parte, $r_{\eta_b} = 0.041 \text{ fm}$. La transición de η_c se encuentra por debajo del límite asintótico y tiende a él muy lentamente. Ambas predicciones se muestran en la figura 3.15.

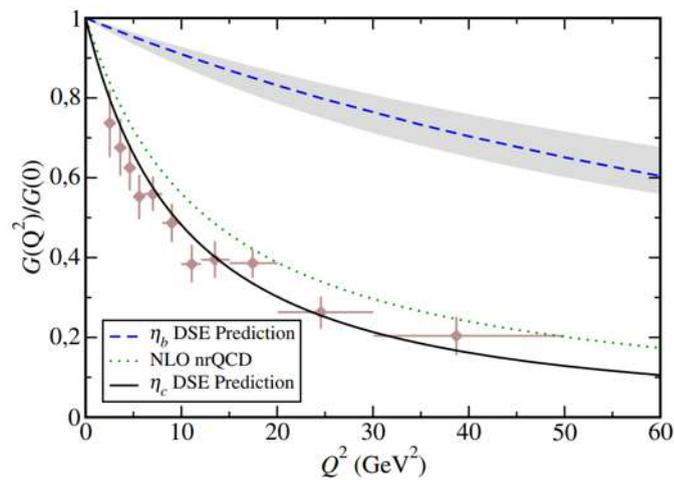


FIGURA 3.15: TFF de η_c : Predicción de DSE (negro) [28], nrQCD a NLO (verde) [100].
 Datos de Babar [110].
 TFF de η_b : Predicción de DSE (azul) y nrQCD a NNLO (banda gris).

Contrario al mesón η_c , la masa del pión es muy pequeña. Si $Q^2 = 35 \text{ GeV}^2$, $m_\pi^2/Q^2 = 0.0008$, por lo que el fotón percibe un sistema casi libre de escala. Por otra parte, $m_{\eta_c}^2/Q^2 = 0.4$ y $m_{\eta_b}^2/Q^2 = 3.5$, valores que revelan que las escalas de masa intrínsecas relacionadas a las transiciones, son conmensurables (η_c) o superan (η_b) a aquellas del momento del fotón. Consecuentemente, a las escalas accesibles, éstos factores de forma no pueden estar cerca del límite conforme. Ésto se observa en la figura 3.16.

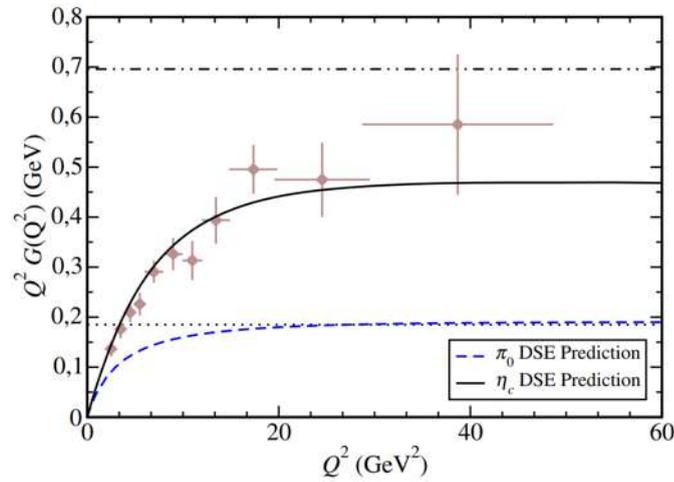


FIGURA 3.16: TFF de η_c en negro (límite asintótico en puntos y rayas). TFF de π^0 en azul (límite asintótico en puntos).

Las predicciones a NLO y NNLO de nrQCD (η_c) son vástamente diferentes [100]; ésto sugiere que hay mucha sensibilidad a las factorizaciones y escalas de renormalización asumidas. No obstante, los resultados de η_b de este trabajo [28] y nrQCD a NNLO coinciden. El enfoque no relativista de QCD, para procesos exclusivos, puede no ser adecuado en sistemas de charmonia, pero lo es con bottomonia. De las figuras 3.17 y 3.18, se llega a una conclusión similar, cuando se utiliza una interacción de contacto (CI) para estos sistemas [117, 118].

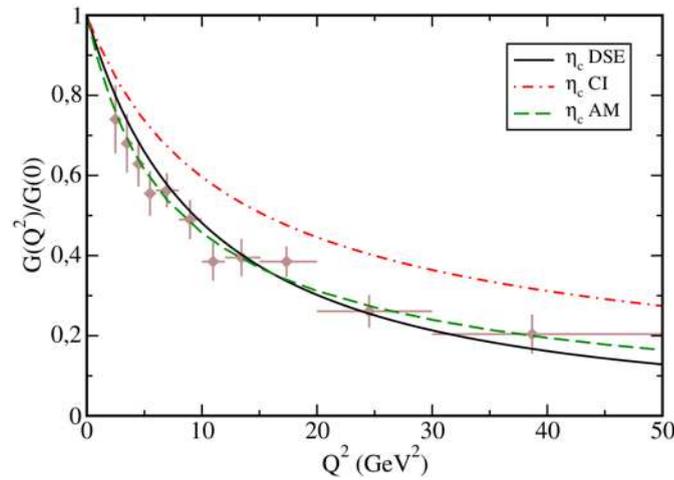


FIGURA 3.17: TFF de η_c . Predicción de DSE (negro) [28], modelo algebraico basado en QCD (verde) e interacción de contacto (negro) [117].

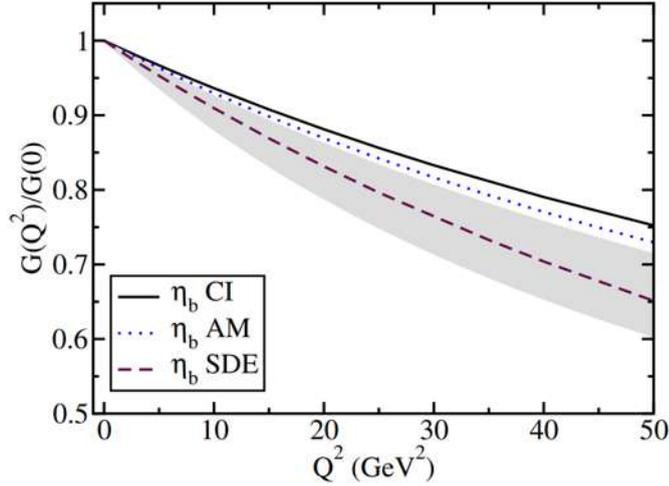


FIGURA 3.18: TFF de η_b . Predicción de DSE (morado) [28], modelo algebraico basado en QCD (azul) [118], interacción de contacto (negro) [117] y nrQCD (banda gris) [100].

Para fijar s_0 en el vértice quark-fotón de la ecuación(3.18), calculamos los anchos de decaimiento $\Gamma[\eta_c, \eta_b \rightarrow \gamma\gamma]$ (con $f_{\eta_c} = 0.262$ GeV y $f_{\eta_b} = 0.543$ GeV), a partir de:

$$\Gamma[M_5 \rightarrow \gamma\gamma] = \frac{8\pi\alpha_{\text{QED}}e_{M_5}^4 f_{M_5}^2}{m_5}, \quad (3.41)$$

donde e^{M_5} son las cargas de los quarks de valencia. Se obtienen $\Gamma[\eta_c \rightarrow \gamma\gamma] = 6.1$ keV y $\Gamma[\eta_b \rightarrow \gamma\gamma] = 0.52$ keV, que implican $s_0^c = 0.78$ y $s_0^b = 0.43$. El valor medido para η_c es 5.1 ± 0.4 . Si se fija s_0 para obtener ese valor, la diferencia entre los TFF producidos es de un ancho de línea. El decaimiento $\eta_b \rightarrow \gamma\gamma$ no se ha medido. Para el π^0 , se fija a partir de la anomalía abeliana y se obtiene $s_0^{u/d} = 1.9$.

Notamos los siguientes patrones:

- Los efectos de la anomalía abeliana disminuyen cuando aumenta la masa del quark de corriente, así: $s_0^{u/d} > s_0^c > s_0^b$.
- Los radios de interacción: $r_{\pi^+} \approx r_{\pi^0}$. Además, η_c y η_b siguen el patrón: $r_{\eta_c} = 0.23 r_{\pi^0}$, $r_{\eta_b} = 0.26 r_{\eta_c} \approx 0.23 r_{\eta_c}$.
- Adicionalmente, $r_{\eta_c}/r_{\pi^0} \approx M_{u/d}^E/M_c^E$ y $r_{\eta_b}/r_{\eta_c} \approx M_c^E/M_b^E$.

El resultado del π^0 está de acuerdo con los datos experimentales, salvo con Babar a momentos grandes; además, se reconcilia con su límite asintótico. Por su parte, el resultado de η_c está de acuerdo con las mediciones experimentales disponibles; la predicción de η_b es similar a la que se obtiene en nrQCD. Los valores de radios de interacción y anchos de decaimientos se encuentran en razonable comparación con los resultados empíricos.

Se mostró la importancia de conectar los resultados con las correspondientes PDA, a escalas accesibles. La escala está dada por el momento del fotón, que sondea la estructura del hadrón, y debe evolucionar con éste, de manera que se recupera el resultado en el CL.

En el siguiente capítulo, se extiende esta discusión para el caso de $\eta - \eta'$.

Capítulo 4

El caso de $\eta - \eta'$

4.1. Anomalía no abeliana y mezcla

Para estudiar a los mesones η , tenemos que tener en consideración la anomalía no abeliana [30, 48], descrita en la sección 1.4.1. Esta anomalía puede explicar la diferencia de masas entre los mesones $\eta - \eta'$.

Los mesones pseudoescalares ligeros (π^0 , η , η') son estados mezclados, combinaciones lineales de estados que predice el grupo $SU_f(3)$ de sabor. El ángulo de mezcla entre π^0 y $\eta - \eta'$ es muy pequeño, por lo que se descarta esta mezcla en el presente trabajo. No obstante, la mezcla $\eta - \eta'$ si debe tomarse en cuenta.

Consideremos las siguientes combinaciones lineales:

$$\begin{aligned} |\eta_8\rangle &= \frac{1}{\sqrt{6}}(|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle - 2|s\bar{s}\rangle) \\ |\eta_0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}(|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle + |s\bar{s}\rangle). \end{aligned} \tag{4.1}$$

En los modelos de quarks, $|\eta\rangle = |\eta_8\rangle$ y $|\eta'\rangle = |\eta_0\rangle$. En la realidad, $\eta - \eta'$ son una combinación lineal estos estados:

$$\begin{aligned} |\eta\rangle &= \cos\theta |\eta_8\rangle - \sin\theta |\eta_0\rangle, \\ |\eta'\rangle &= \sin\theta |\eta_8\rangle + \cos\theta |\eta_0\rangle, \end{aligned} \tag{4.2}$$

donde $\theta \approx -11.8^\circ$ es el ángulo de mezcla. Teniendo en cuenta lo que hemos dicho, escribimos la BSE correspondiente para $\eta - \eta'$.

4.2. Ecuación de Bethe-Salpeter

Una descripción de la mezcla de sabores y la anomalía no abeliana, en el enfoque DSE-BSE, fue llevada a cabo por *M. Bhagwat et al.* en [92]. La interacción empleada en dicho trabajo, utiliza un kernel en el que, aunque se obtiene una función de masa dependiente de momento, produce amplitudes de Bethe-Salpeter que no. En este trabajo se extiende la discusión, incorporando una interacción más realista.

4.2.1. Amplitudes de Bethe-Salpeter

La elección de la base para el *mixing* $\eta - \eta'$ puede ser la tradicional $\eta_8 - \eta_0$, un esquema de doble ángulo de mezcla [119] o una base que separe los sabores de quarks. Para calcular las amplitudes de distribución de quarks de valencia, esta última es más conveniente. Se escribe de la siguiente manera:

$$|\eta\rangle = \cos_\eta \phi \frac{1}{\sqrt{2}}(|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle) - \sin_\eta \phi |s\bar{s}\rangle, \quad (4.3)$$

$$|\eta'\rangle = \sin_\eta \phi \frac{1}{\sqrt{2}}(|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle) + \cos_\eta \phi |s\bar{s}\rangle. \quad (4.4)$$

El ángulo de mezcla ideal es cuando $\phi_\eta = \phi = 0^\circ$, que separa las componentes u/d y produce estados puros u/d o s , a los que denotamos η_q y η_s . En la base usual, ecuación (4.2), el ángulo de mezcla ideal es $\theta = -54.74^\circ$. En el límite de isospin $u = d$, la amplitud de Bethe-Salpeter es:

$$\begin{aligned} \Gamma(p; P) &= \lambda_q \Gamma^q(p; P) + \lambda_s \Gamma^s(p; P), \quad (4.5) \\ \Gamma^{q,s} &= \gamma_5 [iE^{q,s} + \gamma \cdot PF^{q,s} + \gamma \cdot p (p \cdot P)G^{q,s} + p_\alpha \sigma_{\alpha\beta} P_\beta H^{q,s}(p; P)], \\ \lambda_q &= (1/\sqrt{2})\text{diag}(1, 1, 0), \quad \lambda_s = \text{diag}(0, 0, 1). \end{aligned}$$

La estructura de sabor está contenida en λ_q , λ_s ; la estructura de dirac en $\Gamma^{q,s}$. Así, la ecuación de Bethe-Salpeter se escribe:

$$\Gamma(p; P) = \int_q (K_L + K_A)_{tu}^{rs} (\mathcal{S} \Gamma(q; P) \mathcal{S})_{sr}, \quad \mathcal{S} = \text{diag}(S^q, S^q, S^s), \quad (4.6)$$

donde K_L es el kernel de interacción *ladder* de secciones anteriores, ecuación (2.22). K_A debe ser determinado y corresponde al kernel de la anomalía, contiene las contribuciones de la figura 4.1.

La solución más ligera de (4.6) se asocia al mesón η ; la más pesada a η' . Los ángulos de mezcla se inferen a partir de las BSAs. Con manipulaciones algebraicas, se puede proyectar de una base a otra.

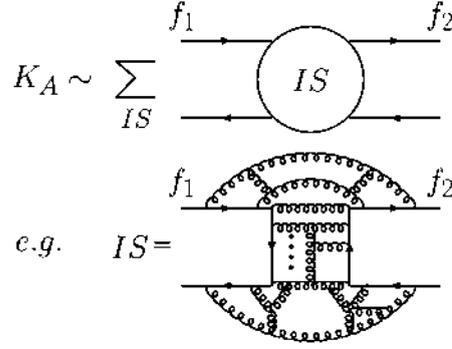


FIGURA 4.1: Kernel asociado a la anomalía no abeliana.
Los sabores de los quarks f_1, f_2 , son independientes.

4.2.2. El kernel de la anomalía

El kernel RL que hemos descrito en el capítulo 2, en particular en la ecuación (2.22) no es adecuado para estudiar a los mesones $\eta - \eta'$, pues no toma en cuenta la anomalía no abeliana y a partir de él no se produce una mezcla de estados.

En el trabajo de [92], *M. Bhagwat et al.* escriben el kernel de la anomalía como:

$$(K_A)_{rs}^{tu}(q, p; P) = -\xi(k^2) \{ \cos^2 \theta_\xi [\gamma_5]_{rs} [\gamma_5]_{tu} + \sin^2 \theta_\xi [\mathcal{M}\gamma \cdot P\gamma_5]_{rs} [\mathcal{M}\gamma \cdot P\gamma_5]_{tu} \}, \quad (4.7)$$

donde $k = p - q$, $\xi(k^2)$ es un acoplamiento efectivo, $\mathcal{M} = \text{diag}[1/M_u^D, 1/M_d^D, 1/M_s^D]$ y $M_f^D = M_f(s=0)$. El ángulo θ_ξ controla la magnitud de las dos posibles contribuciones a (4.7), no es el ángulo de mezcla. En [92], toman $\xi(k^2) \sim \delta(k)$; para este trabajo, en consistencia con la interacción de QC, se elige una δ de anchura finita:

$$(K_A)_{rs}^{tu}(q, p; P) = -\frac{8\pi^2}{\omega_A^4} D_A e^{-k^2/\omega_A^2} [\cos^2 \theta_A [\gamma_5]_{rs} [\gamma_5]_{tu} + \sin^2 \theta_A [\mathcal{M}\gamma \cdot P\gamma_5]_{rs} [\mathcal{M}\gamma \cdot P\gamma_5]_{tu}]. \quad (4.8)$$

Son 3 parámetros a ajustar: D_A, ω_A y θ_A . En principio, se tiene demasiada libertad. Siguiendo el razonamiento que utilizamos para fijar los parámetros en la aproximación RL, tenemos sólo dos restricciones: $m_{\eta'}$, $m_\eta/m_{\eta'}$. Podríamos imponer una tercera restricción (como el ángulo de mezcla). Elegimos proceder de diferente manera:

Retomemos el kernel RL:

$$(K_L)_{rs}^{tu}(q, p; P) = -\mathcal{G}(k^2) k^2 D_{\mu\nu}^0(k) \left[\gamma_\mu \frac{\lambda^a}{2} \right]_{ts} \left[\gamma_\nu \frac{\lambda^a}{2} \right]_{ru}, \quad (4.9)$$

$$\mathcal{G}(k^2) = \frac{8\pi^2}{\omega^4} D e^{-k^2/\omega^2} + \text{cola perturbativa}.$$

Si $\omega_A = \omega$, se puede comparar el realce en el infrarrojo de los kernels en (4.8) y (4.9), al tomar el cociente D_A/D . De esta manera, se tienen dos parámetros (D_A y θ_A) y dos restricciones ($m_{\eta'}$, $m_\eta/m_{\eta'}$). *A posteriori*, uno encuentra que no hay diferencia sustancial en las masas si $\theta_A \simeq 0$, por lo que sólo hay un parámetro a fijar, D_A .

4.2.3. Masas y ángulos de mezcla

Siguiendo el procedimiento de resolución de la sección 2.4.2, considerando únicamente las BSA dominantes E , F , se obtuvieron los siguientes resultados:

Masas y ángulos.

	DSE-BSE	Experimento
$m_{\eta'}$	0.962 GeV	0.958 GeV
$m_\eta/m_{\eta'}$	0.531	0.572
$\phi_{\eta'}$	42.4°	$\approx 36.8^\circ$ *
ϕ_η	36.5°	$\approx 36.8^\circ$ *

Valores obtenidos con $D_A/D = 0.186$.

* Dato experimental de [120].

De los ángulos de mezcla se infiere la constitución de quarks de valencia:

$$\begin{aligned}
 |\eta\rangle &\approx 0.40 (|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle) - 0.59 |s\bar{s}\rangle, \\
 |\eta'\rangle &\approx 0.34 (|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle) + 0.73 |s\bar{s}\rangle.
 \end{aligned}
 \tag{4.10}$$

Con un sólo parámetro (D_A/D) y 2 BSAs, las masas de $\eta - \eta'$ se reproducen hasta un error del 7%; notablemente, sin intentar ajustarlos, los ángulos de mezcla se encuentran dentro del 15% de error. Obtener $\phi_{\eta'} \neq \phi_\eta$ es típico de los estudios DSE-BSE [92].

4.3. Amplitud de distribución de partones

Por su constitución de quarks de valencia, consideramos a los mesones η, η' como mesones ligeros (además, el mesón η es un *pseudo* bosón de Goldstone). De esta manera, *a priori*, la forma de las correspondientes PDAs debe ser similar a la del pión:

$$\phi_5(x; \zeta) = N_\alpha [x(1-x)]^{\alpha_-} \left[1 + \sum_{j=2,4,\dots}^N a_n^\alpha(\zeta) C_n^\alpha(2x-1) \right], \quad \alpha_- = \alpha - 1/2. \tag{4.11}$$

La forma particular de la PDA del pión es:

$$\phi_\pi(x; \zeta = 2 \text{ GeV}) = N_\alpha [x(1-x)]^{\alpha_-} [1 + a_2 C_2^\alpha (2x-1)] , \quad (4.12)$$

donde $N_\alpha = 1.74$, $\alpha_- = \alpha - 0.5 = 0.29$ y $a_2 = 0.0029$. El coeficiente a_2 es muy pequeño, por lo que motiva a utilizar una forma simplificada:

$$\phi_5(x; \zeta) = N_\alpha [x(1-x)]^\alpha . \quad (4.13)$$

Para el pión, $\alpha \approx 0.3$ en la aproximación RL; el CL corresponde a $\alpha = 1$. De acuerdo a la ecuación (4.10), la estructura de η, η' se separa en términos de los sabores de sus quarks de valencia. Por ello, se necesitan calcular 4 PDA: 2 mesones, 2 sabores de quark ($u = d$). Los resultados se muestran en las figuras 4.2 y 4.3 y corresponden a:

$$\phi_\eta^q(x; \zeta = 2 \text{ GeV}) \sim [x(1-x)]^{0.36} , \quad \phi_\eta^s(x; \zeta = 2 \text{ GeV}) \sim [x(1-x)]^{0.51} , \quad (4.14)$$

$$\phi_{\eta'}^q(x; \zeta = 2 \text{ GeV}) \sim [x(1-x)]^{0.48} , \quad \phi_{\eta'}^s(x; \zeta = 2 \text{ GeV}) \sim [x(1-x)]^{0.89} . \quad (4.15)$$

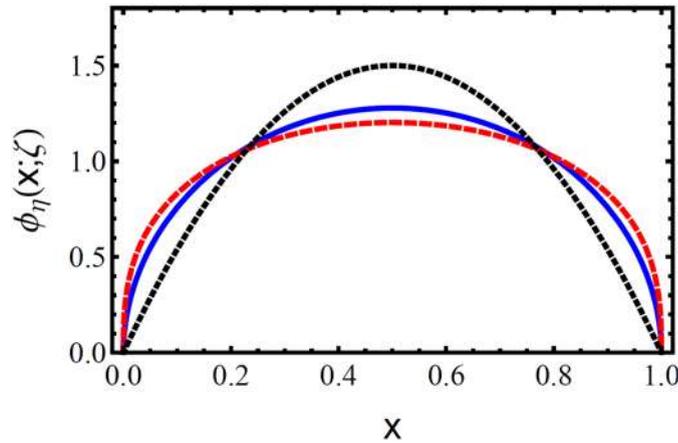


FIGURA 4.2: $\phi_\eta^q(x; \zeta)$ (rojo), $\phi_\eta^s(x; \zeta)$ (azul) y $\phi_\eta^{\text{CL}}(x)$ (negro); escala $\zeta = 2 \text{ GeV}$.

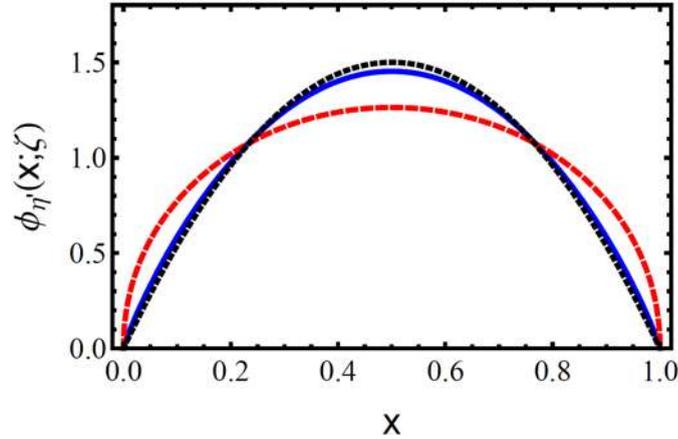


FIGURA 4.3: $\phi_{\eta}^q(x; \zeta)$ (rojo), $\phi_{\eta}^s(x; \zeta)$ (azul) y $\phi^{CL}(x)$ (negro); escala $\zeta = 2$ GeV.

Algunas observaciones:

- $\phi_{\eta}^q(x; \zeta = 2 \text{ GeV})$ es similar a la PDA del pión (en el truncamiento RL), aunque $|q\bar{q}\rangle = (|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle)/\sqrt{2} \neq |\pi^0\rangle$.
- $\phi_{\eta}^s(x; \zeta = 2 \text{ GeV})$ y $\phi_{\eta'}^q(x; \zeta = 2 \text{ GeV})$ son muy parecidas. Quizá ésto es sólo coincidencia.
- $\phi_{\eta'}^s(x; \zeta = 2 \text{ GeV})$ es muy cercana a la PDA del límite conforme.

Como mencionamos anteriormente, se hipotiza que existe un valor crítico de la masa de corriente del quark, tal que la correspondiente PDA es exactamente la PDA en el CL para toda escala y el valor crítico es un poco arriba de la masa del quark s [29]. La última observación parece confirmar tal hipótesis.

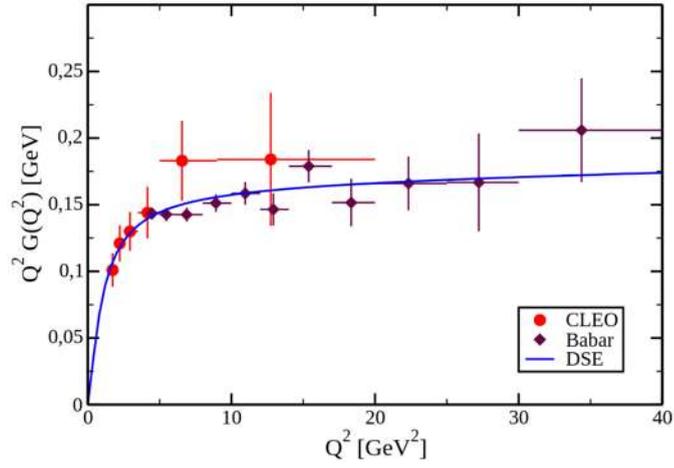
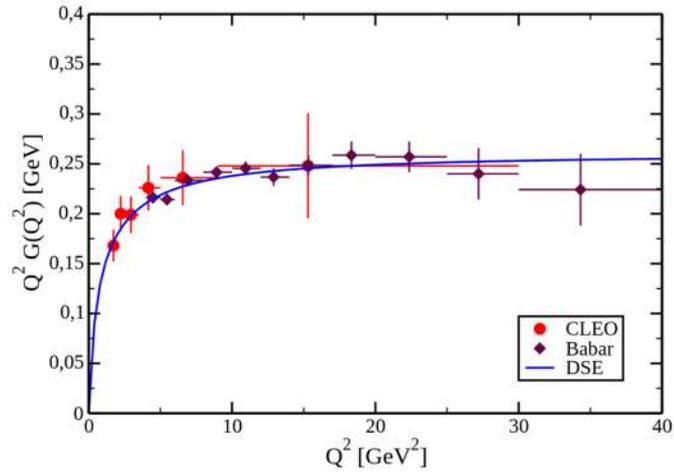
4.4. Factores de forma de transición ($\gamma\gamma^*$)

De manera análoga a la ecuación (3.25), definimos el factor de forma de transición $\gamma\gamma^* \rightarrow \eta, \eta'$ como:

$$\begin{aligned} T_{\mu,\nu}(k_1, k_2) &= \frac{e^2}{4\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} k_{1\alpha} k_{2\beta} G(k_1^2, k_1 \cdot k_2, k_2^2) \\ &= \text{Tr}_{CDF} \int_l i\mathcal{Q}\chi_{\mu}(l, l_1) \Gamma_{M_5}(l_1, l_2) S(l_2) i\mathcal{Q}\Gamma_{\nu}(l_2, l), \end{aligned} \quad (4.16)$$

donde ahora la traza también se toma sobre el espacio de sabor. Los resultados se muestran en las figuras 4.4 y 4.5.

Se observa un excelente acuerdo con los resultados experimentales. No obstante, hay que tener en cuenta que sólo se han incluido 2 amplitudes de Bethe-Salpeter en este análisis.


 FIGURA 4.4: Factor de forma de transición de η .

 FIGURA 4.5: Factor de forma de transición de η' .

Una consecuencia de esta omisión, es que masas y ángulos de mezcla se encuentran con $\approx 15\%$ de error. Se espera que mejore al incluir la amplitud $G_{\eta(\eta')}$.

Por lo anterior, se requiere entonces un análisis más profundo para dar resultados completos sobre la transición $\gamma\gamma^* \rightarrow \eta, \eta'$. Dicho análisis se encuentra en desarrollo. Los resultados mostrados en este trabajo, sin embargo, dan cierto optimismo.

Capítulo 5

Discusión de resultados

Se estudió la estructura partónica de los mesones pseudoescalares neutros, a partir de las ecuaciones de Dyson-Schwinger de la Cromodinámica Cuántica, la teoría cuántica de campos que describe las interacciones nucleares y hadrónicas. Esta teoría está caracterizada por dos fenómenos emergentes, que son el confinamiento y la ruptura dinámica de la simetría quiral.

5.1. Lagrangiano de QCD y sus simetrías

Se discutieron algunas simetrías del lagrangiano: de número bariónico, de isospin, quiral y de norma. Hemos visto que en la naturaleza, la mayoría de estas simetrías son aproximadas; es decir, sólo existen bajo algunas condiciones. Sin embargo, su estudio nos brinda un mejor entendimiento de la física subyacente.

Entre otras cosas, se vio que a partir de promover una transformación local para el lagrangiano de materia (quarks), todos los demás términos del lagrangiano surgen de manera natural. Por otro lado, la simetría quiral (más precisamente, su rompimiento), es la responsable de la mayor parte de la masa de materia visible en el universo. Nuestra entera existencia se debe a la presencia de simetrías y sus violaciones.

5.2. Propagador del quark y BSE

DCSB fue estudiada a partir del propagador del quark; su función de masa en particular. Para resolver la correspondiente DSE para el propagador del quark, se eligió un truncamiento que permite desacoplar dicha DSE de las correspondientes para el vértice

quark-gluón y propagador del gluón. Dicho truncamiento está relacionado con el kernel de interacción en la BSE. Se le conoce como *rainbow-ladder* [56, 57, 73].

La interacción Qin-Chang (acoplamiento efectivo) [73] que se eligió para este truncamiento, comparte características esenciales del propagador del gluón completo: la función de vestimenta es acotada y exhibe un máximo en $k^2 = 0$; además decrece monotónicamente en el eje *space-like*; además, induce una masa al gluón (de cientos de MeVs) en el infrarrojo, que corre con el momento [65].

De la función de masa del quark se observó lo siguiente:

- La función de masa es monótona y decrece; es finita en el infrarrojo.
- Tiene un realce en el infrarrojo. El realce es tal que para una masa de corriente ~ 5 MeV, se genera masa del orden de ~ 400 MeV. El ultravioleta corresponde a la masa de corriente.
- A medida que la masa de corriente aumenta, los efectos dinámicos disminuyen; es decir, se genera más masa dinámica para los quarks ligeros que para los pesados.
- Incluso si se comienza con una masa de semilla $m = 0$, se genera una función de masa $M(p^2) \neq 0$.
- Exhibe un punto de inflexión, indicativo de que el quark es una partícula confinada [52].

Además, el argumento de que el valor de expectación del vacío (en el límite quiral) es distinto de cero, no es obvio de la teoría de perturbaciones [30], pero lo es a partir de la función de masa en un enfoque no perturbativo [58].

Por su parte, al resolver la BSE en la aproximación RL, obtuvimos un espectro de los mesones pseudoescalares neutros (masas y constantes de decaimiento) en excelente acuerdo experimental. Los ángulos de mezcla y masas ajustan aceptablemente a los valores empíricos.

Se concluye que, como se ha observado antes [57, 73], la aproximación RL describe bien el espectro de pseudoescalares. También se sabe que describe aceptablemente mesones vectoriales, pero no escalares ni axiales [69].

Propagadores y amplitudes de Bethe-Salpeter se parametrizaron mediante la *Representación Integral de Teoría de Perturbaciones*. Dicha representación demostró su utilidad en el cálculo de amplitudes de distribución de partones y factores de forma [20, 27–29].

5.3. Amplitudes de distribución de partones

Se estudiaron las amplitudes de distribución de partones de los mesones $(\pi^0, \eta, \eta', \eta_c, \eta_b)$. En los mesones ligeros (π^0, η, η') se observó:

- Estas distribuciones, a escalas hadrónicas, tienen una forma cóncava y ancha, más ancha que la correspondiente al límite conforme $\phi^{\text{CL}}(x) = 6x(1-x)$.
- Esta dilatación es consecuencia marcada de la DCSB.
- A medida que la escala crece, se vuelven menos anchas y se aproximan al límite conforme. La evolución con la escala es logarítmicamente lenta.
- Curiosamente, aunque un poco más angosta, $\phi_{\eta'}^s(x; \zeta)$ es muy similar a $\phi^{\text{CL}}(x)$.

En el caso de los mesones pesados η_c, η_b :

- A escalas hadrónicas, las amplitudes de distribución son angostas, más angostas que $\phi^{\text{CL}}(x)$ y su forma es de función δ de anchura finita.
- Mientras más pesado el mesón, más angosta es. Ésto tiene que ver con que, conforme es más pesado el quark de valencia, menores son los efectos relativistas dentro del hadrón; hecho que motiva a usar acercamientos no relativistas de QCD.
- De manera similar a las del sector ligero, estas distribuciones evolucionan con la escala, hasta llegar al límite conforme.

La evolución permite a los grados de libertad de quark-antiquark convertirse en partones menos vestidos; gluones y quarks del mar comienzan a gobernar la dinámica. Es la manera en que QCD trabaja.

5.4. Factores de forma elástico y de transición

En este trabajo, se calcularon los factores de forma de transición $\gamma\gamma^* \rightarrow M_5$ y se analizó el resultado anterior del factor de forma del pion, Chang *et al.* [104]. De los cálculos realizados se observa lo siguiente:

- La predicción de π^0 [27] está de acuerdo con todos los datos experimentales, excepto Babar a momentos grandes, y recupera el límite de QCD asintótico.

- El resultado de η_c [28] es consistente con las observaciones experimentales de Babar; al igual que la predicción de η_b , se encuentra por debajo del límite asintótico en el rango de momentos experimentalmente accesibles.
- Los resultados de η_b , de este trabajo y nrQCD están de acuerdo [28]. Por otra parte, la predicción de nrQCD de η_c a NNLO es básicamente diferente a la de NLO. De estos hechos se concluye que nrQCD puede ser un buen enfoque para procesos exclusivos que involucren bottomonia pero no charmonia [100]. Se llega a una conclusión similar con una interacción de contacto [117, 118].
- Los cálculos de η, η' armonizan bien con los datos experimentales, aún cuando en este caso no se incluyeron todas las BSAs; lo cuál genera optimismo para cuando se realice el cálculo complejo.

Adicionalmente, la anomalía abeliana se satisface para los bosones de Golstone, los radios de interacción y anchos de decaimiento comparan bien con los resultados empíricos (cuando hay disponibles), radios de interacción de pión neutro y cargado son similares.

Una observación importante es que, en ambos sectores (ligero y pesado), al utilizar la PDA del límite conforme como aquella que describe la física en escala hadrónica, no se obtiene una buena descripción de la física. La escala está dada y debe evolucionar con el momento del fotón que sondea la estructura del hadrón. El resultado del pión cargado carece de ésta evolución, pero da una buena pista de que a escalas de GeVs es incorrecto utilizar la PDA del CL.

5.5. Comentarios finales

Las novedosas técnicas empleadas hicieron posible que, por primera vez en un formalismo en conexión directa con QCD en el continuo, se calcularan las transiciones $\gamma\gamma^* \rightarrow M_5$ en todo el rango de momentos *space-like*. En este análisis se estudiaron sistemas ligeros, influenciados ampliamente por la DCSB; al mismo tiempo, se estudiaron sistemas pesados, cuyos quarks de valencia están fuertemente acoplados con el campo de higgs.

El cómputo que se ha presentado en este trabajo resuelve la polémica de Babar, al demostrar concluyentemente que los resultados de QCD asintótico son fielmente reproducidos y, al mismo tiempo estar en acuerdo con los datos experimentales para valores pequeños y medianos de momento. Los datos de Belle apoyan esta conclusión. El resultado de η_c reproduce los datos de Babar y reconcilia con el límite asintótico. Por su parte, el resultado de η_b está de acuerdo con las predicciones de nrQCD.

Mediante un único formalismo, se ha alcanzado un entendimiento de la distribución de quarks de valencia dentro de los mesones, de manera que se conectan suavemente modos de goldstone, constituidos de los quarks más ligeros de la naturaleza, con aquellos que están hechos de los quarks más pesados que se pueden estudiar experimentalmente.

Así, este análisis unifica las predicciones de $\gamma\gamma^* \rightarrow M_5$ [27, 28] con sus respectivas amplitudes de distribución de quarks de valencia [20, 29], el factor de forma electromagnético del pión [104] y otras propiedades (masas, constantes de decaimiento) [73].

La herramienta numérica implementada se puede adaptar para calcular otros factores de forma (de mesones [121] y bariones [18]) y otros objetos no perturbativos como PDFs [122] y GPDs [123]; en principio, cualquier objeto que pueda ser representado en términos de propagadores y vértices.

Apéndice A

Convención Euclidiana y trazas

A.1. Convención euclidiana

Por razones prácticas, la mayoría de los cálculos en una QFT no perturbativa, se realizan en la métrica Euclidiana (donde $a \cdot b = a_\mu \delta_{\mu\nu} b_\nu$). A partir de los 4-vectores en el espacio de Minkowski, se obtienen en el espacio Euclidiano mediante la continuación analítica a tiempo imaginario.

Para vectores espacio-tiempo y energía momento:

$$t^E = it^M \quad , \quad \vec{x}^E = \vec{x}^M \quad , \quad (\text{A.1})$$

$$\mathcal{E}^E = i\mathcal{E}^M \quad , \quad \vec{p}^E = \vec{p}^M \quad , \quad (\text{A.2})$$

los índices M, E denotan Minkowski y Euclidiano, respectivamente.

Las matrices gamma: $\gamma^{0E} = \gamma^{0M}$ y $\vec{\gamma}^E = -i\vec{\gamma}^M$; la métrica $g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$.

Además, tenemos las siguientes relaciones:

$$\int d^4k^M = -i \int d^4k^E \quad , \quad (\text{A.3})$$

$$\gamma^M \cdot p^M = -i\gamma^E \cdot p^E \quad , \quad (\text{A.4})$$

$$q^M \cdot p^M = -iq^E \cdot p^E \quad , \quad (\text{A.5})$$

$$x^M \cdot p^M = -x^E \cdot p^E \quad . \quad (\text{A.6})$$

A.2. Matrices gamma

Las matrices gamma Euclidianas tienen las siguientes propiedades:

$$\gamma_\mu \gamma_\mu = \mathbb{1}, \quad (\text{A.7})$$

$$\gamma_5 \gamma_5 = \mathbb{1}, \quad (\text{A.8})$$

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu}, \quad (\text{A.9})$$

$$\{\gamma_5, \gamma_5\} = 0. \quad (\text{A.10})$$

Se cumplen los siguientes teoremas de trazas:

$$\text{Tr}[\gamma_\mu \gamma_\nu] = 4\delta_{\mu\nu}, \quad (\text{A.11})$$

$$\text{Tr}[\text{número impar de } \gamma\text{'s}] = 0, \quad (\text{A.12})$$

$$\text{Tr}[\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_\beta] = 4(\delta_{\mu\nu}\delta_{\alpha\beta} - \delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta} + \delta_{\mu\beta}\delta_{\nu\alpha}), \quad (\text{A.13})$$

$$\text{Tr}[\sigma_{\mu\nu} \sigma_{\alpha\beta}] = 4(\delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta} - 4\delta_{\mu\beta}\delta_{\nu\alpha}), \quad (\text{A.14})$$

$$\text{Tr}[\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu] = 0, \quad (\text{A.15})$$

$$\text{Tr}[\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_\beta] = 4\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}, \quad (\text{A.16})$$

$$\epsilon_{4123} = 1. \quad (\text{A.17})$$

Apéndice B

Integrales de momento

Para las integrales como en la ecuación (3.35), la fórmula cerrada es:

$$\int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{(q^2)^\alpha}{(q^2 + C)^\beta} = \frac{\Gamma[\alpha - \beta - D/2] \Gamma[\beta + D/2]}{(4\pi)^{D/2} \Gamma[\alpha] \Gamma[D/2]} \frac{1}{C^{\alpha - \beta - D/2}}, \quad \alpha - \beta - D/2 > 0. \quad (\text{B.1})$$

En general, al tomar las trazas en las expresiones para PDAs o factores de forma, uno empieza con integrandos más complicados.

B.1. Denominadores

Las PTIRs tienen formas cuadráticas en el denominador. Por ello, en los cálculos aparecen integrandos de la forma:

$$\prod_{i=1}^N f_i(q; p_i, b_i, \omega_i) \sim \frac{1}{(q^2 + 2b_1 q \cdot p_1 + \omega_1^2)^{\beta_1}} \times \cdots \times \frac{1}{(q^2 + 2b_N q \cdot p_N + \omega_N^2)^{\beta_N}}. \quad (\text{B.2})$$

Para combinar los denominadores en la expresión anterior, utilizamos la parametrización de Feynman. La identidad general para N denominadores $A_i^{\alpha_i}$ es:

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_1^{\alpha_1} \cdots A_N^{\alpha_N}} &= \frac{\Gamma[\alpha_1 + \cdots + \alpha_N]}{\Gamma[\alpha_1] \cdots \Gamma[\alpha_N]} \int_0^1 dx_1 \cdots dx_N \delta(x_1 + \cdots + x_N - 1) I(x_i; \alpha_i, A_i), \\ I(x_i; \alpha_i, A_i) &= \frac{x_1^{\alpha_1 - 1} \cdots x_N^{\alpha_N - 1}}{(A_1 x_1 + \cdots + A_N x_N)^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_N}}. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Así, si los denominadores tienen la forma (B.2), podemos combinarlos como:

$$\prod_{i=1}^N f_i(q; p_i, b_i, \omega_i) \sim \frac{1}{(q^2 + 2q \cdot (a_1(\tilde{x})p_1 + \cdots + a_N(\tilde{x})p_N) + \tilde{m}^2(\tilde{x}, \omega_i))^{\beta_1 + \cdots + \beta_N}}, \quad (\text{B.4})$$

donde $a_1(\tilde{x})$ y $\tilde{m}^2(\tilde{x}, \omega_i)$ son constantes que dependen de los parámetros de Feymann; $\tilde{m}^2(\tilde{x}, \omega_i)$ depende además de ω_i . Considere las siguientes definiciones:

$$\begin{aligned} p &= a_1(\tilde{x})p_1 + \cdots + a_N(\tilde{x})p_N, \\ C &= \tilde{m}^2 - p^2, \\ \beta &= \beta_1 + \cdots + \beta_N. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Con el cambio de variable $q \rightarrow q - p$, tenemos:

$$\prod_{i=1}^N f_i(q; p_i, b_i, \omega_i) \sim \frac{1}{(q^2 + C)^\beta}, \quad (\text{B.6})$$

que es la forma que deseamos para el denominador.

B.2. Numerador

Al tomar las trazas aparecen potencias de q^2 en el numerador, por lo que no hay nada que hacer en tal caso. Sin embargo, también pueden aparecer potencias y combinaciones de $(q \cdot p_i)$. Si q aparece un número impar de veces, el término de superficie no contribuye a la integral. En caso contrario, se adopta la siguiente estrategia:

- Se escribe $q \cdot p_i$ como $p_{\mu_i}^i q^{\mu_i}$. Para el caso $N = 2$ tenemos:

$$\int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{(q \cdot p_1)(q \cdot p_2)}{(q^2 + C)^\beta} = p_{\mu_1}^1 p_{\mu_2}^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q^{\mu_1} q^{\mu_2}}{(q^2 + C)^\beta}, \quad (\text{B.7})$$

- Para contraer los índices, debemos buscar una estructura $S_{\mu_1 \mu_2}$, completamente simétrica, y multiplicar por una constante de proporcionalidad. En éste caso, la estructura es $S_{\mu_1 \mu_2} = g_{\mu_1 \mu_2}$. Por lo que se tiene:

$$\int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{(q \cdot p_1)(q \cdot p_2)}{(q^2 + C)^\beta} = S_2 g^{\mu_1 \mu_2} p_{\mu_1}^1 p_{\mu_2}^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q^{\mu_1} q^{\mu_2}}{(q^2 + C)^\beta}, \quad (\text{B.8})$$

donde S_2 es una constante de proporcionalidad.

- La constante de proporcionalidad se obtiene de ver que $g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = 4$, por lo que $S_2 = 1/4$. De ésta manera:

$$\int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{(q \cdot p_1)(q \cdot p_2)}{(q^2 + C)^\beta} = \frac{1}{4} (p_1 \cdot p_2) \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q^2}{(q^2 + C)^\beta}. \quad (\text{B.9})$$

- Para $N = 4$, la estructura completamente simétrica es:

$$S^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = g^{\mu_1\mu_2}g^{\mu_3\mu_4} + g^{\mu_1\mu_3}g^{\mu_2\mu_4} + g^{\mu_1\mu_4}g^{\mu_2\mu_3} . \quad (\text{B.10})$$

Vemos que $g_{\mu_1\mu_2}g_{\mu_3\mu_4}S^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = 24$, por lo que la constante de proporcionalidad es $S_4 = 1/24$. Se procede de forma similar para valores más grandes de N .

Con estos pasos, las integrales de momento se pueden llevar a la forma B.1, que tiene solución completamente analítica.

Bibliografía

- [1] Julian Schwinger. *Selected Papers on Quantum Electrodynamics*. Dover Publications, 1958. ISBN 0486604446,9780486604442. URL <http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=579ec7f3c3d4f8e5836077868c203697>.
- [2] Murray Gell-Mann. The Eightfold Way: A Theory of strong interaction symmetry. 1961.
- [3] Murray Gell-Mann. A Schematic Model of Baryons and Mesons. *Phys. Lett.*, 8:214–215, 1964. doi: 10.1016/S0031-9163(64)92001-3.
- [4] G. Zweig. An SU(3) model for strong interaction symmetry and its breaking. Version 1. 1964.
- [5] Susumu Okubo. Note on unitary symmetry in strong interactions. *Prog. Theor. Phys.*, 27: 949–966, 1962. doi: 10.1143/PTP.27.949.
- [6] Murray Gell-Mann, R. J. Oakes, and B. Renner. Behavior of current divergences under SU(3) x SU(3). *Phys. Rev.*, 175:2195–2199, 1968. doi: 10.1103/PhysRev.175.2195.
- [7] M. Y. Han and Yoichiro Nambu. Three Triplet Model with Double SU(3) Symmetry. *Phys. Rev.*, 139:B1006–B1010, 1965. doi: 10.1103/PhysRev.139.B1006.
- [8] Martin Breidenbach, Jerome I. Friedman, Henry W. Kendall, Elliott D. Bloom, D. H. Coward, H. C. DeStaebler, J. Drees, Luke W. Mo, and Richard E. Taylor. Observed Behavior of Highly Inelastic electron-Proton Scattering. *Phys. Rev. Lett.*, 23:935–939, 1969. doi: 10.1103/PhysRevLett.23.935.
- [9] Elliott D. Bloom et al. High-Energy Inelastic e p Scattering at 6-Degrees and 10-Degrees. *Phys. Rev. Lett.*, 23:930–934, 1969. doi: 10.1103/PhysRevLett.23.930.
- [10] H. Fritzsch, Murray Gell-Mann, and H. Leutwyler. Advantages of the Color Octet Gluon Picture. *Phys. Lett.*, 47B:365–368, 1973. doi: 10.1016/0370-2693(73)90625-4.
- [11] D. J. Gross and Frank Wilczek. Asymptotically Free Gauge Theories. 1. *Phys. Rev.*, D8: 3633–3652, 1973. doi: 10.1103/PhysRevD.8.3633.
- [12] David J. Gross and Frank Wilczek. Ultraviolet Behavior of Nonabelian Gauge Theories. *Phys. Rev. Lett.*, 30:1343–1346, 1973. doi: 10.1103/PhysRevLett.30.1343.
- [13] H. David Politzer. Reliable Perturbative Results for Strong Interactions? *Phys. Rev. Lett.*, 30:1346–1349, 1973. doi: 10.1103/PhysRevLett.30.1346.

-
- [14] Kenneth G. Wilson. Confinement of Quarks. *Phys. Rev.*, D10:2445–2459, 1974. doi: 10.1103/PhysRevD.10.2445. [45(1974)].
- [15] John M. Cornwall and George Tiktopoulos. Infrared Behavior of Nonabelian Gauge Theories. 2. *Phys. Rev.*, D15:2937, 1977. doi: 10.1103/PhysRevD.15.2937.
- [16] H. J. Munczek and A. M. Nemirovsky. The Ground State q anti- q Mass Spectrum in QCD. *Phys. Rev.*, D28:181, 1983. doi: 10.1103/PhysRevD.28.181.
- [17] Craig D. Roberts. Perspective on the origin of hadron masses. *Few Body Syst.*, 58(1):5, 2017. doi: 10.1007/s00601-016-1168-z.
- [18] D. J. Wilson, I. C. Cloet, L. Chang, and C. D. Roberts. Nucleon and Roper electromagnetic elastic and transition form factors. *Phys. Rev.*, C85:025205, 2012. doi: 10.1103/PhysRevC.85.025205.
- [19] Lei Chang, Craig D. Roberts, and Peter C. Tandy. Selected highlights from the study of mesons. *Chin. J. Phys.*, 49:955–1004, 2011.
- [20] Lei Chang, I. C. Cloet, J. J. Cobos-Martinez, C. D. Roberts, S. M. Schmidt, and P. C. Tandy. Imaging dynamical chiral symmetry breaking: pion wave function on the light front. *Phys. Rev. Lett.*, 110(13):132001, 2013. doi: 10.1103/PhysRevLett.110.132001.
- [21] Stanley J. Brodsky, Abhay L. Deshpande, Haiyan Gao, Robert D. McKeown, Curtis A. Meyer, Zein-Eddine Meziani, Richard G. Milner, Jianwei Qiu, David G. Richards, and Craig D. Roberts. QCD and Hadron Physics. 2015.
- [22] Adnan Bashir, Lei Chang, Ian C. Cloet, Bruno El-Bennich, Yu-Xin Liu, Craig D. Roberts, and Peter C. Tandy. Collective perspective on advances in Dyson-Schwinger Equation QCD. *Commun. Theor. Phys.*, 58:79–134, 2012. doi: 10.1088/0253-6102/58/1/16.
- [23] N. Brambilla et al. QCD and Strongly Coupled Gauge Theories: Challenges and Perspectives. *Eur. Phys. J.*, C74(10):2981, 2014. doi: 10.1140/epjc/s10052-014-2981-5.
- [24] Ani Aprahamian et al. Reaching for the horizon: The 2015 long range plan for nuclear science. 2015.
- [25] Ryosuke Itoh. Status of Belle II and Physics Prospects. *Nucl. Part. Phys. Proc.*, 285-286: 155–159, 2017. doi: 10.1016/j.nuclphysbps.2017.03.028.
- [26] F. J. Dyson. The S matrix in quantum electrodynamics. *Phys. Rev.*, 75:1736–1755, 1949. doi: 10.1103/PhysRev.75.1736.
- [27] K. Raya, L. Chang, A. Bashir, J. J. Cobos-Martinez, L. X. Gutiérrez-Guerrero, C. D. Roberts, and P. C. Tandy. Structure of the neutral pion and its electromagnetic transition form factor. *Phys. Rev.*, D93(7):074017, 2016. doi: 10.1103/PhysRevD.93.074017.
- [28] Khepani Raya, Minghui Ding, Adnan Bashir, Lei Chang, and Craig D. Roberts. Partonic structure of neutral pseudoscalars via two photon transition form factors. *Phys. Rev.*, D95(7):074014, 2017. doi: 10.1103/PhysRevD.95.074014.

- [29] Minghui Ding, Fei Gao, Lei Chang, Yu-Xin Liu, and Craig D. Roberts. Leading-twist parton distribution amplitudes of S-wave heavy-quarkonia. *Phys. Lett.*, B753:330–335, 2016. doi: 10.1016/j.physletb.2015.11.075.
- [30] Michael E. Peskin and Daniel V. Schroeder. *An Introduction to quantum field theory*. Addison-Wesley, Reading, USA, 1995. ISBN 9780201503975, 0201503972. URL <http://www.slac.stanford.edu/~mpeskin/QFT.html>.
- [31] J. C. Taylor. Ward Identities and Charge Renormalization of the Yang-Mills Field. *Nucl. Phys.*, B33:436–444, 1971. doi: 10.1016/0550-3213(71)90297-5.
- [32] A. A. Slavnov. Ward Identities in Gauge Theories. *Theor. Math. Phys.*, 10:99–107, 1972. doi: 10.1007/BF01090719. [Teor. Mat. Fiz.10,153(1972)].
- [33] John Clive Ward. An Identity in Quantum Electrodynamics. *Phys. Rev.*, 78:182, 1950. doi: 10.1103/PhysRev.78.182.
- [34] Y. Takahashi. On the generalized Ward identity. *Nuovo Cim.*, 6:371, 1957. doi: 10.1007/BF02832514.
- [35] Emmy Noether. Invariant Variation Problems. *Gott. Nachr.*, 1918:235–257, 1918. doi: 10.1080/00411457108231446. [Transp. Theory Statist. Phys.1,186(1971)].
- [36] S. L. Glashow and Steven Weinberg. Breaking chiral symmetry. *Phys. Rev. Lett.*, 20:224–227, 1968. doi: 10.1103/PhysRevLett.20.224.
- [37] H. Weyl. Quantum mechanics and group theory. *Z. Phys.*, 46:1, 1927. doi: 10.1007/BF02055756.
- [38] C. Patrignani et al. Review of Particle Physics. *Chin. Phys.*, C40(10):100001, 2016. doi: 10.1088/1674-1137/40/10/100001.
- [39] Stanley J. Brodsky, Craig D. Roberts, Robert Shrock, and Peter C. Tandy. Essence of the vacuum quark condensate. *Phys. Rev.*, C82:022201, 2010. doi: 10.1103/PhysRevC.82.022201.
- [40] Stanley J. Brodsky, Craig D. Roberts, Robert Shrock, and Peter C. Tandy. Confinement contains condensates. *Phys. Rev.*, C85:065202, 2012. doi: 10.1103/PhysRevC.85.065202.
- [41] T. W. B. Kibble. Symmetry breaking in nonAbelian gauge theories. *Phys. Rev.*, 155:1554–1561, 1967. doi: 10.1103/PhysRev.155.1554.
- [42] Yoichiro Nambu and G. Jona-Lasinio. Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity. 1. *Phys. Rev.*, 122:345–358, 1961. doi: 10.1103/PhysRev.122.345.
- [43] J. Goldstone. Field Theories with Superconductor Solutions. *Nuovo Cim.*, 19:154–164, 1961. doi: 10.1007/BF02812722.
- [44] Jeffrey Goldstone, Abdus Salam, and Steven Weinberg. Broken Symmetries. *Phys. Rev.*, 127:965–970, 1962. doi: 10.1103/PhysRev.127.965.

- [45] Lei Chang, Craig D. Roberts, and Peter C. Tandy. Expanding the concept of in-hadron condensates. *Phys. Rev.*, C85:012201, 2012. doi: 10.1103/PhysRevC.85.012201.
- [46] Tanja Horn and Craig D. Roberts. The pion: an enigma within the Standard Model. *J. Phys.*, G43(7):073001, 2016. doi: 10.1088/0954-3899/43/7/073001.
- [47] L. D. Faddeev and V. N. Popov. Feynman Diagrams for the Yang-Mills Field. *Phys. Lett.*, 25B:29–30, 1967. doi: 10.1016/0370-2693(67)90067-6.
- [48] Stephen L. Adler. Axial vector vertex in spinor electrodynamics. *Phys. Rev.*, 177:2426–2438, 1969. doi: 10.1103/PhysRev.177.2426.
- [49] J. S. Bell and R. Jackiw. A PCAC puzzle: $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ in the sigma model. *Nuovo Cim.*, A60:47–61, 1969. doi: 10.1007/BF02823296.
- [50] H. L. L. Roberts, C. D. Roberts, A. Bashir, L. X. Gutierrez-Guerrero, and P. C. Tandy. Abelian anomaly and neutral pion production. *Phys. Rev.*, C82:065202, 2010. doi: 10.1103/PhysRevC.82.065202.
- [51] Steven Weinberg. Nonlinear realizations of chiral symmetry. *Phys. Rev.*, 166:1568–1577, 1968. doi: 10.1103/PhysRev.166.1568.
- [52] Craig D. Roberts and Anthony G. Williams. Dyson-Schwinger equations and their application to hadronic physics. *Prog. Part. Nucl. Phys.*, 33:477–575, 1994. doi: 10.1016/0146-6410(94)90049-3.
- [53] Conrad J. Burden, Craig D. Roberts, and Anthony G. Williams. Singularity structure of a model quark propagator. *Phys. Lett.*, B285:347–353, 1992. doi: 10.1016/0370-2693(92)91516-C.
- [54] G. Krein, Craig D. Roberts, and Anthony G. Williams. On the implications of confinement. *Int. J. Mod. Phys.*, A7:5607–5624, 1992. doi: 10.1142/S0217751X92002544.
- [55] D. Atkinson and P. W. Johnson. Chiral Symmetry Breaking in QCD. 2. Running Coupling Constant. *Phys. Rev.*, D37:2296–2299, 1988. doi: 10.1103/PhysRevD.37.2296.
- [56] Pieter Maris, Craig D. Roberts, and Peter C. Tandy. Pion mass and decay constant. *Phys. Lett.*, B420:267–273, 1998. doi: 10.1016/S0370-2693(97)01535-9.
- [57] Pieter Maris and Peter C. Tandy. Bethe-Salpeter study of vector meson masses and decay constants. *Phys. Rev.*, C60:055214, 1999. doi: 10.1103/PhysRevC.60.055214.
- [58] R. Williams, C. S. Fischer, and M. R. Pennington. Extracting the anti-q q condensate for light quarks beyond the chiral limit in models of QCD. 2007.
- [59] E. E. Salpeter and H. A. Bethe. A Relativistic equation for bound state problems. *Phys. Rev.*, 84:1232–1242, 1951. doi: 10.1103/PhysRev.84.1232.
- [60] C. H. Llewellyn-Smith. A relativistic formulation for the quark model for mesons. *Annals Phys.*, 53:521–558, 1969. doi: 10.1016/0003-4916(69)90035-9.

- [61] Pieter Maris and Peter C. Tandy. The Quark photon vertex and the pion charge radius. *Phys. Rev.*, C61:045202, 2000. doi: 10.1103/PhysRevC.61.045202.
- [62] I. L. Bogolubsky, E. M. Ilgenfritz, M. Muller-Preussker, and A. Sternbeck. Lattice gluodynamics computation of Landau gauge Green's functions in the deep infrared. *Phys. Lett.*, B676:69–73, 2009. doi: 10.1016/j.physletb.2009.04.076.
- [63] A. C. Aguilar, D. Binosi, and J. Papavassiliou. QCD effective charges from lattice data. *JHEP*, 07:002, 2010. doi: 10.1007/JHEP07(2010)002.
- [64] A. Ayala, A. Bashir, D. Binosi, M. Cristoforetti, and J. Rodriguez-Quintero. Quark flavour effects on gluon and ghost propagators. *Phys. Rev.*, D86:074512, 2012. doi: 10.1103/PhysRevD.86.074512.
- [65] A. C. Aguilar, D. Binosi, J. Papavassiliou, and J. Rodriguez-Quintero. Non-perturbative comparison of QCD effective charges. *Phys. Rev.*, D80:085018, 2009. doi: 10.1103/PhysRevD.80.085018.
- [66] R. Bermudez, L. Albino, L. X. Gutiérrez-Guerrero, M. E. Tejeda-Yeomans, and A. Bashir. Quark-gluon Vertex: A Perturbation Theory Primer and Beyond. *Phys. Rev.*, D95(3):034041, 2017. doi: 10.1103/PhysRevD.95.034041.
- [67] A. C. Aguilar, D. Binosi, D. Ibañez, and J. Papavassiliou. New method for determining the quark-gluon vertex. *Phys. Rev.*, D90(6):065027, 2014. doi: 10.1103/PhysRevD.90.065027.
- [68] A. Bashir, R. Bermudez, L. Chang, and C. D. Roberts. Dynamical chiral symmetry breaking and the fermion–gauge-boson vertex. *Phys. Rev.*, C85:045205, 2012. doi: 10.1103/PhysRevC.85.045205.
- [69] Lei Chang, Yu-Xin Liu, and Craig D. Roberts. Dressed-quark anomalous magnetic moments. *Phys. Rev. Lett.*, 106:072001, 2011. doi: 10.1103/PhysRevLett.106.072001.
- [70] Andrei I. Davydchev, P. Osland, and L. Saks. Quark gluon vertex in arbitrary gauge and dimension. *Phys. Rev.*, D63:014022, 2001. doi: 10.1103/PhysRevD.63.014022.
- [71] Daniele Binosi, Lei Chang, Joannis Papavassiliou, Si-Xue Qin, and Craig D. Roberts. Natural constraints on the gluon-quark vertex. *Phys. Rev.*, D95(3):031501, 2017. doi: 10.1103/PhysRevD.95.031501.
- [72] Si-Xue Qin, Craig D. Roberts, and Sebastian M. Schmidt. Ward–Green–Takahashi identities and the axial-vector vertex. *Phys. Lett.*, B733:202–208, 2014. doi: 10.1016/j.physletb.2014.04.041.
- [73] Si-xue Qin, Lei Chang, Yu-xin Liu, Craig D. Roberts, and David J. Wilson. Interaction model for the gap equation. *Phys. Rev.*, C84:042202, 2011. doi: 10.1103/PhysRevC.84.042202.
- [74] Chao Shi, Lei Chang, Craig D. Roberts, Sebastian M. Schmidt, Peter C. Tandy, and Hong-Shi Zong. Flavour symmetry breaking in the kaon parton distribution amplitude. *Phys. Lett.*, B738:512–518, 2014. doi: 10.1016/j.physletb.2014.07.057.

- [75] Igor F. Herbut. Chiral symmetry breaking in three-dimensional quantum electrodynamics as fixed point annihilation. *Phys. Rev.*, D94(2):025036, 2016. doi: 10.1103/PhysRevD.94.025036.
- [76] A. Bashir, A. Raya, I. C. Cloet, and C. D. Roberts. Regarding confinement and dynamical chiral symmetry breaking in QED3. *Phys. Rev.*, C78:055201, 2008. doi: 10.1103/PhysRevC.78.055201.
- [77] K. Raya, A. Bashir, S. Hernández-Ortiz, A. Raya, and C. D. Roberts. Multiple solutions for the fermion mass function in QED3. *Phys. Rev.*, D88(9):096003, 2013. doi: 10.1103/PhysRevD.88.096003.
- [78] E. Rojas, B. El-Bennich, and J. P. B. C. de Melo. Exciting flavored bound states. *Phys. Rev.*, D90:074025, 2014. doi: 10.1103/PhysRevD.90.074025.
- [79] Fredy F. Mojica, Carlos E. Vera, Eduardo Rojas, and Bruno El-Bennich. Mass spectrum and decay constants of radially excited vector mesons. *Phys. Rev.*, D96(1):014012, 2017. doi: 10.1103/PhysRevD.96.014012.
- [80] F. Lenz, J. T. Londergan, E. J. Moniz, R. Rosenfelder, M. Stingl, and K. Yazaki. Quark Confinement and Hadronic Interactions. *Annals Phys.*, 170:65, 1986. doi: 10.1016/0003-4916(86)90088-6.
- [81] G. Colangelo, J. Gasser, and H. Leutwyler. $\pi\pi$ scattering. *Nucl. Phys.*, B603:125–179, 2001. doi: 10.1016/S0550-3213(01)00147-X.
- [82] Pankaj Jain and Herman J. Munczek. q anti- q bound states in the Bethe-Salpeter formalism. *Phys. Rev.*, D48:5403–5411, 1993. doi: 10.1103/PhysRevD.48.5403.
- [83] M. Bhagwat, M. A. Pichowsky, and Peter C. Tandy. Confinement phenomenology in the Bethe-Salpeter equation. *Phys. Rev.*, D67:054019, 2003. doi: 10.1103/PhysRevD.67.054019.
- [84] Noboru Nakanishi. Partial-Wave Bethe-Salpeter Equation. *Phys. Rev.*, 130:1230–1235, 1963. doi: 10.1103/PhysRev.130.1230.
- [85] Hideki Yukawa. On the Interaction of Elementary Particles I. *Proc. Phys. Math. Soc. Jap.*, 17:48–57, 1935. doi: 10.1143/PTPS.1.1. [Prog. Theor. Phys. Suppl.1,1(1935)].
- [86] C. M. G. Lattes, H. Muirhead, G. P. S. Occhialini, and C. F. Powell. Processes involving charged mesons. *Nature*, 159:694–697, 1947. doi: 10.1038/159694a0. [42(1947)].
- [87] R. Bjorklund, W. E. Crandall, B. J. Moyer, and H. F. York. High Energy Photons from Proton-Nucleon Collisions. *Phys. Rev.*, 77:213–218, 1950. doi: 10.1103/PhysRev.77.213.
- [88] J. Steinberger, W. K. H. Panofsky, and J. Steller. Evidence for the production of neutral mesons by photons. *Phys. Rev.*, 78:802–805, 1950. doi: 10.1103/PhysRev.78.802.
- [89] Steven C. Pieper and Robert B. Wiringa. Quantum Monte Carlo calculations of light nuclei. *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.*, 51:53–90, 2001. doi: 10.1146/annurev.nucl.51.101701.132506.

- [90] Daniele Binosi, Lei Chang, Joannis Papavassiliou, and Craig D. Roberts. Bridging a gap between continuum-QCD and ab initio predictions of hadron observables. *Phys. Lett.*, B742:183–188, 2015. doi: 10.1016/j.physletb.2015.01.031.
- [91] Pieter Maris and Craig D. Roberts. Pi- and K meson Bethe-Salpeter amplitudes. *Phys. Rev.*, C56:3369–3383, 1997. doi: 10.1103/PhysRevC.56.3369.
- [92] Mandar S. Bhagwat, Lei Chang, Yu-Xin Liu, Craig D. Roberts, and Peter C. Tandy. Flavour symmetry breaking and meson masses. *Phys. Rev.*, C76:045203, 2007. doi: 10.1103/PhysRevC.76.045203.
- [93] J. E. Augustin et al. Discovery of a Narrow Resonance in e^+e^- Annihilation. *Phys. Rev. Lett.*, 33:1406–1408, 1974. doi: 10.1103/PhysRevLett.33.1406. [Adv. Exp. Phys.5,141(1976)].
- [94] J. J. Aubert et al. Experimental Observation of a Heavy Particle *J. Phys. Rev. Lett.*, 33:1404–1406, 1974. doi: 10.1103/PhysRevLett.33.1404.
- [95] S. W. Herb et al. Observation of a Dimuon Resonance at 9.5-GeV in 400-GeV Proton-Nucleus Collisions. *Phys. Rev. Lett.*, 39:252–255, 1977. doi: 10.1103/PhysRevLett.39.252.
- [96] M. B. Voloshin. Charmonium. *Prog. Part. Nucl. Phys.*, 61:455–511, 2008. doi: 10.1016/j.pnpnp.2008.02.001.
- [97] J. Ahmed, R Manzoor, and A. Raya. Variational constraints of masses and radii of $c\bar{c}$ -mesons. *Quant. Phys. Lett.*, 6(2):99–103, 2017. doi: 10.18576/qpl/060204.
- [98] J. Segovia, D. R. Entem, F. Fernandez, and E. Hernandez. Constituent quark model description of charmonium phenomenology. *Int. J. Mod. Phys.*, E22:1330026, 2013. doi: 10.1142/S0218301313300269.
- [99] Stefan Meinel. The Bottomonium spectrum from lattice QCD with 2+1 flavors of domain wall fermions. *Phys. Rev.*, D79:094501, 2009. doi: 10.1103/PhysRevD.79.094501.
- [100] Feng Feng, Yu Jia, and Wen-Long Sang. Can Nonrelativistic QCD Explain the $\gamma\gamma^* \rightarrow \eta_c$ Transition Form Factor Data? *Phys. Rev. Lett.*, 115(22):222001, 2015. doi: 10.1103/PhysRevLett.115.222001.
- [101] G. Peter Lepage and Stanley J. Brodsky. Exclusive Processes in Perturbative Quantum Chromodynamics. *Phys. Rev.*, D22:2157, 1980. doi: 10.1103/PhysRevD.22.2157.
- [102] G. Peter Lepage and Stanley J. Brodsky. Exclusive Processes in Quantum Chromodynamics: Evolution Equations for Hadronic Wave Functions and the Form-Factors of Mesons. *Phys. Lett.*, 87B:359–365, 1979. doi: 10.1016/0370-2693(79)90554-9.
- [103] A. V. Efremov and A. V. Radyushkin. Factorization and Asymptotical Behavior of Pion Form-Factor in QCD. *Phys. Lett.*, 94B:245–250, 1980. doi: 10.1016/0370-2693(80)90869-2.
- [104] L. Chang, I. C. Cloët, C. D. Roberts, S. M. Schmidt, and P. C. Tandy. Pion electromagnetic form factor at spacelike momenta. *Phys. Rev. Lett.*, 111(14):141802, 2013. doi: 10.1103/PhysRevLett.111.141802.

- [105] James S. Ball and Ting-Wai Chiu. Analytic Properties of the Vertex Function in Gauge Theories. 1. *Phys. Rev.*, D22:2542, 1980. doi: 10.1103/PhysRevD.22.2542.
- [106] G. M. Huber et al. Charged pion form-factor between $Q^2 = 0.60 \text{ GeV}^2$ and $Q^2 = 2.45 \text{ GeV}^2$. II. Determination of, and results for, the pion form-factor. *Phys. Rev.*, C78:045203, 2008. doi: 10.1103/PhysRevC.78.045203.
- [107] G. Huber and D. Gaskell. Measurement of the Charged Pion Form Factor to High Q^2 . *Jefferson Lab Experiment E12-06-10*.
- [108] Bernard Aubert et al. Measurement of the $\gamma\gamma^* \rightarrow \pi^0$ transition form factor. *Phys. Rev.*, D80:052002, 2009. doi: 10.1103/PhysRevD.80.052002.
- [109] S. Uehara et al. Measurement of $\gamma\gamma^* \rightarrow \pi^0$ transition form factor at Belle. *Phys. Rev.*, D86:092007, 2012. doi: 10.1103/PhysRevD.86.092007.
- [110] J. P. Lees et al. Measurement of the $\gamma\gamma^* \rightarrow \eta_c$ transition form factor. *Phys. Rev.*, D81:052010, 2010. doi: 10.1103/PhysRevD.81.052010.
- [111] H. J. Behrend et al. A Measurement of the pi0, eta and eta-prime electromagnetic form-factors. *Z. Phys.*, C49:401–410, 1991. doi: 10.1007/BF01549692.
- [112] J. Gronberg et al. Measurements of the meson - photon transition form-factors of light pseudoscalar mesons at large momentum transfer. *Phys. Rev.*, D57:33–54, 1998. doi: 10.1103/PhysRevD.57.33.
- [113] P. Roig, A. Guevara, and G. López Castro. $VV'P$ form factors in resonance chiral theory and the $\pi - \eta - \eta'$ light-by-light contribution to the muon $g-2$. *Phys. Rev.*, D89(7):073016, 2014. doi: 10.1103/PhysRevD.89.073016.
- [114] Fred Jegerlehner and Andreas Nyffeler. The Muon $g-2$. *Phys. Rept.*, 477:1–110, 2009. doi: 10.1016/j.physrep.2009.04.003.
- [115] James Mott. The Muon $g-2$ experiment at Fermilab. *Nucl. Part. Phys. Proc.*, 287-288:65–69, 2017. doi: 10.1016/j.nuclphysbps.2017.03.046.
- [116] A. P. Bakulev, S. V. Mikhailov, A. V. Pimikov, and N. G. Stefanis. Comparing antithetic trends of data for the pion-photon transition form factor. *Phys. Rev.*, D86:031501, 2012. doi: 10.1103/PhysRevD.86.031501.
- [117] Marco A. Bedolla, Khépani Raya, J. J. Cobos-Martínez, and Adnan Bashir. η_c elastic and transition form factors: Contact interaction and algebraic model. *Phys. Rev.*, D93(9):094025, 2016. doi: 10.1103/PhysRevD.93.094025.
- [118] K. Raya, M. A. Bedolla, J. J. Cobos-Martínez, and A. Bashir. Heavy quarkonia in a contact interaction and an algebraic model: mass spectrum, decay constants, charge radii and elastic and transition form factors. 2017.
- [119] Daniel Gomez Dumm and Pablo Roig. Resonance Chiral Lagrangian analysis of $\tau^- \rightarrow \eta^{(\prime)}\pi^-\pi^0\nu_\tau$ decays. *Phys. Rev.*, D86:076009, 2012. doi: 10.1103/PhysRevD.86.076009.

-
- [120] S. V. Donskov, V. N. Kolosov, A. A. Lednev, Yu. V. Mikhailov, V. A. Polyakov, V. D. Samoylenko, and G. V. Khaustov. Measurement of the $\eta - \eta'$ mixing angle in π^- and K^- beams with the GAMS-4 π Spectrometer. *Eur. Phys. J.*, C73(10):2614, 2013. doi: 10.1140/epjc/s10052-013-2614-4.
- [121] Fei Gao, Lei Chang, Yu-Xin Liu, Craig D. Roberts, and Peter C. Tandy. Exposing strangeness: projections for kaon electromagnetic form factors. *Phys. Rev.*, D96(3):034024, 2017. doi: 10.1103/PhysRevD.96.034024.
- [122] Lei Chang, Cédric Mezrag, Hervé Moutarde, Craig D. Roberts, Jose Rodríguez-Quintero, and Peter C. Tandy. Basic features of the pion valence-quark distribution function. *Phys. Lett.*, B737:23–29, 2014. doi: 10.1016/j.physletb.2014.08.009.
- [123] C. Mezrag, L. Chang, H. Moutarde, C. D. Roberts, J. Rodríguez-Quintero, F. Sabatié, and S. M. Schmidt. Sketching the pion’s valence-quark generalised parton distribution. *Phys. Lett.*, B741:190–196, 2015. doi: 10.1016/j.physletb.2014.12.027.