



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS
DE HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
“MAT. LUIS MANUEL RIVERA GUTIÉRREZ”

DOCTORADO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA FÍSICA

TESIS:

MÉTODOS HÍBRIDOS APLICADOS A MODELOS
DE CONTAMINANTES GOBERNADOS POR
ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES NO
LINEALES

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

Doctor en Ciencias en Ingeniería Física

PRESENTA:

Maestro en Ciencias en Ingeniería Física

Gerardo Tinoco Guerrero

ASESOR:

Doctor en Ciencias Matemáticas

Francisco Javier Domínguez Mota

Morelia, Michoacán. Agosto 2020

*En memoria de la guerrera más grande
y fuerte que he conocido en mi vida.*



*María de Lourdes Guerrero Magaña
1962 - 2019*

A mis padres y a mis hermanos,

quienes me han enseñado y educado para llegar hasta donde estoy.

Agradecimientos

Creo que esta es la parte más difícil del presente trabajo, es el momento en que se recuerda todo el tiempo que se ha dedicado al mismo así como a todas las personas que han estado siempre presentes, ayudando, apoyando, dando ánimos. El camino ha sido largo, la trayectoria no ha sido fácil, pero el día de hoy nos encontramos aquí, dando el reconocimiento que se merecen a las personas que lo merecen.

El primero agradecimiento es, sin lugar a dudas, para el **Dr. Francisco Javier Domínguez Mota**, mi asesor. Todo el tiempo he contado con su apoyo, con su ayuda, con su tutela. Han sido ya, por lo menos, 7 años que ha estado apoyándome y guiándome a cada paso del camino. Más allá de un asesor excelente y un profesor maravilloso, es una persona increíble a la cual me siento orgulloso de llamar mi amigo.

Por su parte, trabajando siempre para ayudarme a mejorar continuamente, siempre se encontraron los doctores **Héctor Igor Pérez Aguilar**, **Alberto Mendoza Suarez** y **Petrz Zhevandrov Bolshakova**. Cada uno de sus comentarios, preguntas y correcciones me ha ayudado a mejorar este trabajo.

Además, también quiero agradecer directamente a mi querida Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo. Ella me acogió, con sus puertas abiertas, desde hace ya muchos años. Dentro de sus aulas he aprendido la mayor parte de las cosas que hoy en día conozco. Por todo lo que he aprendido en esta universidad, todo el tiempo que he pasado y todos los buenos momentos que me ha hecho vivir, siempre diré ser Nicolaita de Corazón y, sobre todo, gracias a su gran nivel y capacidad puedo decir: “Creo en mi, soy Nicolaita”.

Es importante mencionar un agradecimiento especial al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT), debido al apoyo económico brindado durante mis estudios. Por su parte, también un gran agradecimiento a la Universidad de Helsinki y al Gobierno de

Finlandia por la oportunidad de trabajar en conjunto con los profesores **Matti Leppäranta**, **Ivan Mammarella** y **Petteri Uotila**.

El agradecimiento más grande que puedo dar, para el cual nunca me van a alcanzar las palabras ni el tiempo para expresar, es para aquellas personas que han estado conmigo toda mi vida; esas personas que han luchado cada segundo, desde el momento en que nací, por ayudarme a llegar hasta donde he querido llegar, esas personas tan especiales para mí que siempre han sido y serán aquellas con las que quiero compartir mis triunfos y mis alegrías. Un agradecimiento infinito a mis padres: **Ma. de Lourdes Guerrero Magaña** y **José Gerardo Tinoco Ruiz**. Gracias a ustedes he logrado llegar hasta donde he llegado y se que, también gracias a ustedes, podré llegar aún más lejos. Mi agradecimiento y amor eterno para ustedes dos.

En mi vida hay otras dos personas que siempre han estado ahí para mí, haciéndome reír, enojar, patalear y, a veces, hasta llorar: Mis hermanos **Narciso Salvador** y **Luis Manuel**. Los dos son el tipo de personas con las que se que siempre puedo contar. Muchas veces nos habremos peleado, muchas veces nos habremos contentado, pero el cariño y amor que tenemos no cambia ni cambiará. ¡Los amo hermanos!

Otros miembros importantes en mi vida, en mi formación y en todo lo que he hecho son mis abuelos: **Elva Angélica Magaña**, **Teresa Ruiz**, **Salvador Guerrero** y **Narciso Tinoco**. Sin lugar a dudas, ustedes son una parte esencial de todo lo que he vivido y todo lo que me queda por vivir.

Además de ellos, mi una parte de mi familia siempre ha estado presente, siempre me ha echado porras y siempre me han ayudado a seguir adelante. Gracias de todo corazón.

Mas allá de mi familia hay personas que siempre han estado conmigo, de una u otra forma. Estas son personas donde he encontrado, a veces sin buscarlo, apoyo incondicional; son personas con quienes hemos compartido alegrías, tristezas, triunfos, fracasos, juegos, infortunios y alguna que otra cerveza de vez en cuando. Esas personas a las que estoy muy feliz y orgulloso de llamar MIS AMIGOS.

Cesar, **Ricardo**, **Audomaro**... Mis más grandes y estimados amigos de toda la vida. El camino hasta aquí no ha sido nada fácil, pero debo de decir que, gracias a ustedes, ha

sido más llevadero. Siempre voy a apreciar, atesorar y agradecer su gran amistad. Estoy seguro que ni el tiempo ni la distancia van a hacer que se deshagan de mi, lo siento mucho.

Entre mis amigos hay una persona infernal, perdón, especial, a la que me gustaría agradecer. Una mujer que siempre se ha preocupado por todos, que siempre nos ha regañado y que siempre ha estado muy al pendiente de todos y cada uno de ellos. Es una amiga tan especial y querida que, por primera vez, decido dedicarle un párrafo entero: ¡Muchas gracias por todo **Lucia Torres Fernandez!**

Durante este trayecto tuve la oportunidad de viajar a otro país, conocer otras costumbres, otra forma de vivir y, sobre todo, nuevas personas. Algunas de ellas quedará grabadas por siempre en mi memoria y mi corazón. Especialmente quiero agradecer a **Miquel Torrentz** y a **Aina Brias** por abrirme las puertas de su corazón, brindarme su amistad y por regalarme tantos momentos valiosos junto a ellos.

La lista de amigos podría parecer interminable y, la verdad, es que para poder escribirlos a todos y mencionar lo que me han apoyado, o hecho por mi, necesitaría otras 300 páginas. Sin embargo no quiero dejar de mencionar especial mente a mis muy queridos amigos y amigas: **Katherine, Yamile, Pepe, Sam, Juan Nepomuseno-pis, Daniel Salazar, Ariana, Lety, Monse, Saira**. Siempre han estado presentes, siempre he contado con ustedes. ¡Muchas gracias!

Pero último, pero no por eso menos importante, quiero agradecer profundamente a una persona a la que quiero, adoro y amo. Esa persona que ha logrado hacerme sonreír todos los días, esa persona que desde hace ya tiempo siempre ha estado presente, a diferentes distancias, y que, afortunadamente, hoy puedo llamar mi pareja. Gracias **Xiomara** por todo lo que has tenido que aguantarme durante este trayecto.

Resumen

Hoy en día existen una gran cantidad de problemas en el mundo que involucran contaminantes en el medio ambiente, debido a esto es imperativo trabajar para tratar de solventar o resolver dichos problemas. Una de las primeras cosas que pueden realizarse es conocer el comportamiento de dichos contaminantes en un medio. Debido a esto, en la literatura es posible encontrar una gran cantidad de trabajos que tratan sobre el modelado de problemas de transporte y dispersión de contaminantes en diferentes tipos de medios. En particular, las ecuaciones de advección, difusión y advección-difusión permiten obtener buenas aproximaciones a comportamientos reales. A pesar de que estas ecuaciones logran buenas aproximaciones a comportamientos reales, un problema que es importante de tomar en cuenta es que el transporte y la difusión de contaminantes en un medio se ven afectados por los movimientos de éste. Desafortunadamente, estas ecuaciones por su cuenta no toman en cuenta dicho comportamiento.

En el presente trabajo se presenta un esquema híbrido de diferencias finitas generalizadas con volúmenes finitos para modelar el comportamiento de un cuerpo de agua, por medio de una aproximación a la solución de las ecuaciones de aguas someras. Además, se mezcla dicho esquema con esquemas de diferencias finitas generalizadas que aproximan la solución de problemas de transporte y dispersión de contaminantes, con la finalidad de obtener escenarios más parecidos a la realidad.

Palabras Clave: *método híbrido, diferencias finitas, volúmenes finitos, regiones irregulares, ecuaciones de aguas someras, transporte de contaminantes.*

Abstract

Nowadays there are a large number of problems in the world that involve pollutants in the environment, due to this it is imperative to work to try to solve or solve such problems. One of the first things that can be done is to know the behavior of these pollutants in a medium. Due to this, in the literature, it is possible to find a large number of works that deal with the modeling of transport problems and dispersion of pollutants in different types of media. In particular, the advection, diffusion and advection-diffusion equations allow obtaining good approximations to real behaviors. Even though these equations achieve good approximations to real behaviors, a problem that is important to take into account is that the transport and diffusion of pollutants in a medium are affected by its movements. Unfortunately, these equations on their own do not account for such behavior.

This work presents a hybrid scheme of generalized finite differences with finite volumes to model the behavior of a body of water, employing an approximation to the solution of the shallow water equations. Besides, this scheme is mixed with generalized finite difference schemes that approximate the solution of problems of transport and dispersion of pollutants, to obtain scenarios more similar to reality.

Keywords: *hybrid method, finite differences, finite volumes, irregular regions, shallow-water equations, pollutant's transport*

Prefacio

Es posible encontrar en la literatura una gran variedad de trabajos y textos que tratan sobre la solución de ecuaciones diferenciales parciales. Dichas ecuaciones pueden ser resueltas de manera exacta por medio de métodos analíticos, o de manera aproximada mediante métodos numéricos. A pesar de esto, es una realidad que no existen soluciones analíticas para todas las ecuaciones diferenciales parciales. Es aquí donde radica la importancia de construir y contar con métodos numéricos para encontrar soluciones numéricas de estas ecuaciones.

Aunado a lo anterior, existe una gran cantidad de fenómenos naturales que pueden ser descritos por medio de ecuaciones diferenciales parciales que no cuentan con solución analítica, como es el caso de las ecuaciones de aguas someras. Se han diseñado una gran cantidad de métodos capaces de lograr buenas aproximaciones a la solución de dichos problemas; sin embargo, una gran parte de estos métodos se basan en geometrías regulares, o muy sencillas, lo cual limita la aplicación cuando se trata de problemas en regiones más complicadas, como las regiones geográficas reales. También existen muchos métodos que pueden lograr aproximaciones en regiones muy irregulares, pero muchos de estos tienen un trasfondo teórico muy complicado o su adaptación a diferentes regiones puede ser difícil.

Entre los diferentes métodos que se pueden encontrar en la bibliografía, destacan particularmente los siguientes:

- **Método de líneas.** William Schiesser describe en [49] el método de líneas como una técnica para resolver ecuaciones diferenciales parciales en el cual todas las dimensiones del problema son discretizadas con excepción de una. Es muy común que, en la solución de ecuaciones diferenciales parciales por medio de este método, se discreticen las derivadas parciales espaciales y se deje la derivada temporal como continua. Al hacer este tipo de discretización, la ecuación diferencial parcial se convierte en un

sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, el cual puede ser resuelto por algún método de valores iniciales.

Una de las principales limitantes de este método es que únicamente puede ser utilizado en problemas de ecuaciones diferenciales parciales bien planteados como un problema de valores iniciales en, al menos, una dimensión. Debido a esto, este método no puede ser utilizado directamente en ecuaciones diferenciales parciales elípticas.

- **Método de elementos finitos.** Olek Zienkiewicz explica en [75] que el método de elementos finitos permite obtener una solución numérica a ciertas ecuaciones diferenciales parciales en su forma débil (o integral), por medio de dividir el dominio de estudio en subdominios no-intersectantes entre sí, denominados *elementos*. Una de las grandes ventajas de este método es que el conjunto de elementos no necesita tener una estructura de datos especial, lo que hace que discretizar un dominio muy irregular sea una tarea fácil. Todos los cálculos realizados para este método se hacen sobre una malla de puntos, o nodos, los cuales son puntos representativos de cada uno de los elementos.

Este es uno de los métodos más ampliamente utilizados en problemas de ingeniería y de física debido a que permite realizar buenas soluciones numéricas de diferentes ecuaciones diferenciales en regiones muy irregulares. Sin embargo, el uso de este método requiere de un conocimiento técnico y tecnológico muy avanzado, a la vez que requiere de una gran capacidad de cómputo para producir soluciones estables.

- **Métodos espectrales.** Los métodos espectrales son una serie de técnicas que se utilizan para resolver, de manera numérica, ecuaciones diferenciales parciales por medio de el uso de la transformada de Fourier [25]. A grandes rasgos, este método trata de escribir la solución de la ecuación diferencial como una combinación lineal de funciones conocidas como *funciones base* para, posteriormente, elegir los coeficientes de la suma con la finalidad de satisfacer la solución de la ecuación de diferencial de la mejor manera posible.

Al igual que en el método de elementos finitos, estos métodos utilizan un conjunto de elementos en el cual se realizarán todos los cálculos necesarios, con la diferencia principal de que, al hacer uso de funciones de base distintas de cero sobre todo el dominio, realizan una interpolación global la cual logra obtener soluciones numéricas que pueden llegar a presentar convergencia exponencial cuando la solución es suave. A pesar de esto, al igual que en el método de elementos finitos, su aplicación requiere de una gran capacidad de cómputo.

- **Método de descomposición de dominio.** Este método es uno de los métodos más recientes utilizados para la solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales. Dolean *et al.* explican en [15] que éste puede ser utilizado para resolver problemas de valores a la frontera por medio de una división del problema en varios problemas de valores a la frontera en subdominios, y haciendo iteraciones para coordinar la solución entre subdominios adyacentes. Una de sus principales ventajas es que, al ser independientes todos los subdominios, el método es fácilmente adaptado para computación en paralelo. A pesar de esto, este método suele ser usado, únicamente, como un preconditionador para otros métodos iterativos.

En el presente trabajo se presentarán algunos esquemas para conseguir soluciones numéricas de ecuaciones que modelan el comportamiento de transporte y dispersión de cantidades físicas en un medio, así como el comportamiento de cuerpos de agua bajo ciertas condiciones. Para las ecuaciones de transporte y dispersión se presentan esquemas de Diferencias Finitas Generalizadas, las cuales consisten, a grandes rasgos, en remplazar las derivadas en las ecuaciones diferenciales parciales, por una aproximación en diferencias finitas. Este método ha probado ser bastante bueno para lograr aproximaciones estables en regiones muy irregulares. Además, debido a su sencilla formulación, es fácilmente aplicable a una gran cantidad de regiones de estudio. Respecto a las ecuaciones que modelan el comportamiento de cuerpos de agua, se presentan dos esquemas híbridos de diferencias finitas generalizadas y volúmenes finitos, los cuales se mostrará que producen resultados deseables, y cuya aplicación a diferentes regiones irregulares es igual de fácil que en las diferencias finitas generalizadas.

Tomando en cuenta lo anterior, el presente trabajo se encuentra estructurado como se muestra a continuación:

En el primer capítulo se presentan, de manera básica, los conceptos más importantes a tratar en el presente trabajo. La idea principal de este capítulo es dar una introducción al lector inexperto para conocer la terminología utilizada a lo largo de todo el trabajo. Debido a esto, los lectores con conocimientos sobre ecuaciones diferenciales parciales y métodos clásicos de aproximación de estas pueden omitir dicho capítulo fácilmente.

En el capítulo dos se realiza una descripción panorámica de la generación numérica de mallas, y se presentan las ideas principales que dan lugar a los esquemas de diferencias finitas generalizadas. Se explica el desarrollo de dicho método de manera que sirva para

comprender con facilidad su aplicación más adelante.

El tercer capítulo cuenta con la información y la teoría sobre cómo y de donde surgen las ecuaciones gobernantes a tratar. Se muestra a detalle la obtención de las ecuaciones de advección, difusión y advección-difusión a partir de leyes de conservación. Además de esto, se muestra el desarrollo de la teoría que da lugar a las ecuaciones de aguas someras.

El capítulo cuatro se presentan los esquemas propuestos por el presente trabajo. Se muestra la manera de obtener y adaptar dichos esquemas; además, para los esquemas de diferencias finitas generalizadas, se presentan análisis de estabilidad de los diferentes esquemas, con la finalidad de obtener cotas realistas para su aplicación.

Por último, en el quinto capítulo, se muestra una colección de resultados numéricos, resultantes de la aplicación de los esquemas presentados en el capítulo cuatro, para cuatro regiones de prueba diferentes. Además, se muestran las conclusiones del presente trabajo, así como el trabajo a futuro.

Índice general

Agradecimientos	4
Resumen	7
Abstract	8
Prefacio	9
1. Conceptos Básicos	27
1.1. Ecuaciones Diferenciales Parciales	27
1.1.1. Clasificación de Ecuaciones Diferenciales Parciales	28
1.1.2. Condiciones Iniciales y de Frontera	30
1.1.3. Leyes de Conservación	31
1.2. Esquemas Clásicos de Aproximación	32
1.2.1. Diferencias Finitas	33
1.2.2. Volúmenes Finitos	49
1.2.3. Esquemas de Aproximación en Diferencias Finitas	52
1.2.4. Análisis de Fourier	59
1.2.5. Estabilidad, Consistencia y Convergencia	62
2. Elementos de Discretización	70
2.1. Generación Numérica de Mallas	70
2.1.1. Generación Algebraica	71
2.1.2. Generación por Medio de Ecuaciones Diferenciales	75
2.1.3. Generación Variacional Continua	80
2.1.4. Generación Variacional Discreta	81
2.2. Esquemas de Diferencias Finitas Generalizadas	83
2.2.1. Aplicación del Método de Diferencias Finitas Generalizadas	89

3. Ecuaciones Gobernantes	92
3.1. Ecuaciones de Aguas Someras	92
3.1.1. Ecuaciones de Navier-Stokes	95
3.1.2. Condiciones de Frontera en el Fondo y la Superficie	96
3.1.3. Escalas	97
3.1.4. Ecuaciones de Aguas Someras en Dos Dimensiones	99
3.2. Ecuación de Advección-Difusión	102
3.2.1. Ecuación de Advección	103
3.2.2. Ecuación de Difusión	105
3.2.3. Ecuación de Advección-Difusión	106
4. Esquemas Propuestos	108
4.1. Esquemas de Diferencias Finitas Generalizadas	108
4.1.1. Ecuación de Advección	109
4.1.2. Ecuación de Difusión	117
4.1.3. Ecuación de Advección-Difusión	121
4.2. Esquema Híbrido para la Aproximación de las Ecuaciones de Aguas Someras	126
4.2.1. Esquemas Híbridos en Regiones Rectangulares	128
4.2.2. Esquemas Híbridos en Regiones no Rectangulares	135
5. Pruebas Numéricas	144
5.1. Pruebas Numéricas	144
5.1.1. Ecuación de Advección	150
5.1.2. Ecuación de Difusión	161
5.1.3. Ecuación de Advección-Difusión	171
5.1.4. Ecuaciones de Aguas Someras	181
5.1.5. Transporte de Contaminantes	211
6. Conclusiones y Trabajo a Futuro	243
6.1. Conclusiones	243
6.2. Trabajo a Futuro	246
A. Códigos del Capítulo 1	247
A.1. Diferencias Finitas para la aproximación de la ecuación de Poisson en una dimensión.	247
A.2. Diferencias Finitas para la aproximación de la ecuación de Poisson en dos dimensiones.	249

A.3. Diferencias Finitas para la aproximación de la ecuación de Poisson en ELE.	253
A.4. Diferencias Finitas para la aproximación de la ecuación de Poisson en Pacman.	256
A.5. Volúmenes Finitos para la aproximación de la ecuación de Advección en dos dimensiones espaciales.	259
A.6. Esquema Upwind para la aproximación de la ecuación de Advección en una dimensión espacial.	262
A.7. Esquema Lax-Friedrichs para la aproximación de la ecuación de Advección en una dimensión espacial.	264
A.8. Esquema Lax-Wendroff para la aproximación de la ecuación de Advección en una dimensión espacial.	266
B. Códigos del Capítulo 2	269
B.1. Diferencias Finitas Generalizadas para la aproximación de la ecuación de Poisson.	269
C. Códigos del Capítulo 4	273
C.1. Esquema de Diferencias Finitas Generalizadas Para la Aproximación de la Ecuación de Advección	273
C.1.1. Rutina Principal	273
C.1.2. Rutinas Adicionales	276
C.2. Esquema de Diferencias Finitas Generalizadas Para la Aproximación de la Ecuación de Difusión	280
C.2.1. Rutina Principal	280
C.2.2. Rutinas Adicionales	283
C.3. Esquema de Diferencias Finitas Generalizadas Para la Aproximación de la Ecuación de Advección-Difusión	287
C.3.1. Rutina Principal	287
C.3.2. Rutinas Adicionales	290
D. Videos de las Pruebas Numéricas	294
D.1. Ecuación de Advección	294
D.2. Ecuación de Difusión	294
D.3. Ecuación de Advección-Difusión	295
D.4. Ecuaciones de Aguas Someras	295
D.4.1. Forma Conservativa	295
D.4.2. Forma No Conservativa	295

D.5. Transporte de contaminantes	296
D.5.1. Forma Conservativa	296
D.5.2. Forma No Conservativa	296
Bibliografía	299

Índice de figuras

1.1. Discretización uniforme del intervalo $[a, b]$	35
1.2. Discretización uniforme del intervalo $[0, 1] \times [0, 1]$	37
1.3. Comparación de resultados numéricos y exactos para el problema de Poisson en una dimensión espacial con diferentes discretizaciones espaciales.	40
1.4. Comparación de resultados numéricos y exactos para el problema de Poisson en dos dimensiones espaciales con diferentes discretizaciones espaciales.	43
1.5. Regiones no rectangulares utilizadas para las pruebas numéricas.	44
1.6. Malla Generada para la región “ELE” con 310 nodos.	45
1.7. Comparación de resultados numéricos y exactos para el problema de Poisson en la Región ELE con diferentes discretizaciones espaciales.	46
1.8. Mallas generadas para la región Pacman con diferentes discretizaciones espaciales.	47
1.9. Comparación de resultados numéricos y exactos para el problema de Poisson en la Región Pacman con diferentes discretizaciones espaciales.	48
1.10. Discretización uniforme del intervalo $[0, 1] \times [0, 1]$ para Volúmenes Finitos.	50
1.11. i, j -ésima celda en el método de Volúmenes Finitos.	51
1.12. Comparación de resultados numéricos y exactos, en diferentes pasos de tiempo, para el problema de Advección resultado con volúmenes finitos en dos dimensiones espaciales.	53
1.13. Esquema tipo Upwind.	54
1.14. Comparación de resultados numéricos y exactos para el problema de Advección con un esquema Upwind utilizando $a = 0.2$	55
1.15. Comparación de resultados numéricos y exactos para el problema de Advección con un esquema Upwind utilizando $a = -0.2$	56
1.16. Esquema tipo Lax-Friedrichs.	57

1.17. Comparación de resultados numéricos y exactos para el problema de Advección con un esquema Lax-Friedrichs utilizando $a = 0.2$	58
1.18. Comparación de resultados numéricos y exactos para el problema de Advección con un esquema Lax-Friedrichs utilizando $a = -0.2$	58
1.19. Esquema tipo Lax-Wendroff.	59
1.20. Comparación de resultados numéricos y exactos para el problema de Advección con un esquema Lax-Wendroff utilizando $a = 0.2$	60
1.21. Comparación de resultados numéricos y exactos para el problema de Advección con un esquema Lax-Friedrichs utilizando $a = -0.2$	60
2.1. Región dada por cuatro ecuaciones paramétricas.	73
2.2. Mallas Generadas con TFI para la regiones SIN y CAB.	74
2.3. Mallas generadas con TFI para las regiones PATZ y ZIRA.	74
2.4. Mallas generadas para las regiones SIN y CAB por medio de un generador de Laplace.	76
2.5. Mallas generadas para la regiones PATZ y ZIRA por medio de un generador de Laplace.	76
2.6. Mallas generadas para las regiones SIN y CAB por medio de un generador de Winslow.	77
2.7. Mallas generada para las regiones PATZ y ZIRA por medio de un generador de Winslow.	78
2.8. Mallas Generadas para las regiones SIN y CAB por medio de un mapeo conforme.	79
2.9. Mallas generadas para la regiones PATZ y ZIRA por medio de un mapeo conforme.	80
2.10. Mallas generadas para las regiones SIN y CAB con el funcional armónico.	83
2.11. Mallas generadas para las regiones PATZ y ZIRA con el funcional armónico.	83
2.12. Distribución arbitraria de p_0 y sus vecinos.	86
2.13. Comparación de resultados numéricos y exactos para el problema de Poisson en la Región CAB con diferentes discretizaciones espaciales.	90
2.14. Comparación de resultados numéricos y exactos para el problema de Poisson en la Región ZIRA con diferentes discretizaciones espaciales.	91
3.1. Sistema coordenado.	95
4.1. Dominio Ω con $\partial\Omega = S_1 \cup S_2$	109
4.2. Esténcil para nodo interior.	111

4.3. Esténcil para nodo en la frontera superior en S_2	111
4.4. Esténcil para nodo en la frontera lateral en S_2	112
4.5. Esténcil para nodo en la esquina de la frontera en S_2	112
4.6. Ejemplo de dominio Ω	117
4.7. Esténcil centrado en el espacio.	118
4.8. Ejemplo de dominio Ω	122
4.9. Esténcil centrado en el espacio.	123
4.10. Malla uniforme sobre una región rectangular Ω	128
4.11. Esténcil centrado para q	130
4.12. Esténcil centrado para $r_{i+\frac{1}{2},j}$ y $s_{i+\frac{1}{2},j}$	132
4.13. Esténcil centrado para $r_{i,j+\frac{1}{2}}$ y $s_{i,j+\frac{1}{2}}$	133
4.14. Esténcil utilizado para $q_{i,j}$	142
4.15. Esténcil utilizado para $r_{i+\frac{1}{2},j}$ y $s_{i+\frac{1}{2},j}$	142
4.16. Esténcil utilizado para $r_{i,j+\frac{1}{2}}$ y $s_{i,j+\frac{1}{2}}$	143
5.1. Región CUAD.	145
5.2. Región CAB.	145
5.3. Región CUIT.	146
5.4. Región ZIRA.	146
5.5. Mallas generadas para la región CUAD con diferentes discretizaciones espaciales.	147
5.6. Mallas generadas para la región CAB con diferentes discretizaciones espaciales.	148
5.7. Mallas generadas para la región CUIT con diferentes discretizaciones espaciales.	149
5.8. Mallas generadas para la región ZIRA con diferentes discretizaciones espaciales.	150
5.9. Comparación de resultados numéricos y exactos para el problema de advección en la región CUAD con 81×81 nodos en $t = 0, 0.2, 0.4$	153
5.10. Comparación de resultados numéricos y exactos para el problema de advección en la región CUAD con 81×81 nodos en $t = 0.6, 0.8, 1$	154
5.11. Comparación de resultados numéricos y exactos para el problema de advección en la región CAB con 81×81 en $t = 0, 0.2, 0.4$	155
5.12. Comparación de resultados numéricos y exactos para el problema de advección en la región CAB con 81×81 nodos en $t = 0.6, 0.8, 1$	156
5.13. Comparación de resultados numéricos y exactos para el problema de advección en la región CUIT con 81×81 en $t = 0, 0.2, 0.4$	157

5.14. Comparación de resultados numéricos y exactos para el problema de advección en la región CUIT con 81×81 nodos en $t = 0.6, 0.8, 1$	158
5.15. Comparación de resultados numéricos y exactos para el problema de advección en la región ZIRA con 81×81 en $t = 0, 0.2, 0.4$	159
5.16. Comparación de resultados numéricos y exactos para el problema de advección en la región ZIRA con 81×81 nodos en $t = 0.6, 0.8, 1$	160
5.17. Comparación de resultados numéricos y exactos para el problema de difusión en la región CUAD con 81×81 nodos en $t = 0, 0.2, 0.4$	163
5.18. Comparación de resultados numéricos y exactos para el problema de difusión en la región CUAD con 81×81 nodos en $t = 0.6, 0.8, 1$	164
5.19. Comparación de resultados numéricos y exactos para el problema de difusión en la región CAB con 81×81 nodos en $t = 0, 0.2, 0.4$	165
5.20. Comparación de resultados numéricos y exactos para el problema de difusión en la región CAB con 81×81 nodos en $t = 0.6, 0.8, 1$	166
5.21. Comparación de resultados numéricos y exactos para el problema de difusión en la región CUIT con 81×81 nodos en $t = 0, 0.2, 0.4$	167
5.22. Comparación de resultados numéricos y exactos para el problema de difusión en la región CUIT con 81×81 nodos en $t = 0.6, 0.8, 1$	168
5.23. Comparación de resultados numéricos y exactos para el problema de difusión en la región ZIRA con 81×81 nodos en $t = 0, 0.2, 0.4$	169
5.24. Comparación de resultados numéricos y exactos para el problema de difusión en la región ZIRA con 81×81 nodos en $t = 0.6, 0.8, 1$	170
5.25. Comparación de resultados numéricos y exactos para el problema de advección-difusión en la región CUAD con 81×81 nodos en $t = 0, 0.2, 0.4$	173
5.26. Comparación de resultados numéricos y exactos para el problema de advección-difusión en la región CUAD con 81×81 nodos en $t = 0.6, 0.8, 1$	174
5.27. Comparación de resultados numéricos y exactos para el problema de advección-difusión en la región CAB con 81×81 nodos en $t = 0, 0.2, 0.4$	175
5.28. Comparación de resultados numéricos y exactos para el problema de advección-difusión en la región CAB con 81×81 nodos en $t = 0.6, 0.8, 1$	176
5.29. Comparación de resultados numéricos y exactos para el problema de advección-difusión en la región CUIT con 81×81 nodos en $t = 0, 0.2, 0.4$	177
5.30. Comparación de resultados numéricos y exactos para el problema de advección-difusión en la región CUIT con 81×81 nodos en $t = 0.6, 0.8, 1$	178

5.31. Comparación de resultados numéricos y exactos para el problema de advección-difusión en la región ZIRA con 81×81 nodos en $t = 0, 0.2, 0.4$	179
5.32. Comparación de resultados numéricos y exactos para el problema de advección-difusión en la región ZIRA con 81×81 nodos en $t = 0.6, 0.8, 1$	180
5.33. (a) G_q y (b) G_v calculadas para cada región con 21×21 nodos utilizando la forma conservativa de las ecuaciones.	184
5.34. (a) G_q y (b) G_v calculadas para cada región con 41×41 nodos utilizando la forma conservativa de las ecuaciones.	186
5.35. (a) G_q y (b) G_v calculadas para cada región con 81×81 nodos utilizando la forma conservativa de las ecuaciones.	188
5.36. (a) G_q y (b) G_v calculadas para cada región con 21×21 nodos utilizando la forma no conservativa de las ecuaciones.	190
5.37. (a) G_q y (b) G_v calculadas para cada región con 41×41 nodos utilizando la forma no conservativa de las ecuaciones.	192
5.38. (a) G_q y (b) G_v calculadas para cada región con 81×81 nodos utilizando la forma no conservativa de las ecuaciones.	194
5.39. Aproximación de la forma conservativa de las ecuaciones de aguas someras para la región CUAD con 81×81 nodos en $t = 0, 1, 2$	195
5.40. Aproximación de la forma conservativa de las ecuaciones de aguas someras para la región CUAD con 81×81 nodos en $t = 3, 4, 5$	196
5.41. Aproximación de la forma conservativa de las ecuaciones de aguas someras para la región CAB con 81×81 nodos en $t = 0, 1, 2$	197
5.42. Aproximación de la forma conservativa de las ecuaciones de aguas someras para la región CAB con 81×81 nodos en $t = 3, 4, 5$	198
5.43. Aproximación de la forma conservativa de las ecuaciones de aguas someras para la región CUIT con 81×81 nodos en $t = 0, 1, 2$	199
5.44. Aproximación de la forma conservativa de las ecuaciones de aguas someras para la región CUIT con 81×81 nodos en $t = 3, 4, 5$	200
5.45. Aproximación de la forma conservativa de las ecuaciones de aguas someras para la región ZIRA con 81×81 nodos en $t = 0, 1, 2$	201
5.46. Aproximación de la forma conservativa de las ecuaciones de aguas someras para la región ZIRA con 81×81 nodos en $t = 3, 4, 5$	202
5.47. Aproximación de la forma no conservativa de las ecuaciones de aguas someras para la región CUAD con 81×81 nodos en $t = 0, 1, 2$	203

5.48. Aproximación de la forma no conservativa de las ecuaciones de aguas someras para la región CUAD con 81×81 nodos en $t = 3, 4, 5$	204
5.49. Aproximación de la forma no conservativa de las ecuaciones de aguas someras para la región CAB con 81×81 nodos en $t = 0, 1, 2$	205
5.50. Aproximación de la forma no conservativa de las ecuaciones de aguas someras para la región CAB con 81×81 nodos en $t = 3, 4, 5$	206
5.51. Aproximación de la forma no conservativa de las ecuaciones de aguas someras para la región CUIT con 81×81 nodos en $t = 0, 1, 2$	207
5.52. Aproximación de la forma no conservativa de las ecuaciones de aguas someras para la región CUIT con 81×81 nodos en $t = 3, 4, 5$	208
5.53. Aproximación de la forma no conservativa de las ecuaciones de aguas someras para la región ZIRA con 81×81 nodos en $t = 0, 1, 2$	209
5.54. Aproximación de la forma no conservativa de las ecuaciones de aguas someras para la región ZIRA con 81×81 nodos en $t = 3, 4, 5$	210
5.55. G_u calculada para cada región con 21×21 nodos utilizando la forma conservativa de las ecuaciones.	213
5.56. G_u calculada para cada región con 41×41 nodos utilizando la forma conservativa de las ecuaciones.	214
5.57. G_u calculada para cada región con 81×81 nodos utilizando la forma conservativa de las ecuaciones.	215
5.58. G_u calculada para cada región con 21×21 nodos utilizando la forma no conservativa de las ecuaciones.	216
5.59. G_u calculada para cada región con 41×41 nodos utilizando la forma no conservativa de las ecuaciones.	217
5.60. G_u calculada para cada región con 81×81 nodos utilizando la forma no conservativa de las ecuaciones.	218
5.61. Aproximación de transporte de contaminantes usando la forma conservativa de las ecuaciones de aguas someras para la región CUAD con 81×81 nodos en $t = 0, 1$	219
5.62. Aproximación de transporte de contaminantes usando la forma conservativa de las ecuaciones de aguas someras para la región CUAD con 81×81 nodos en $t = 2, 3$	220
5.63. Aproximación de transporte de contaminantes usando la forma conservativa de las ecuaciones de aguas someras para la región CUAD con 81×81 nodos en $t = 4, 5$	221

5.64. Aproximación de transporte de contaminantes usando la forma conservativa de las ecuaciones de aguas someras para la región CAB con 81×81 nodos en $t = 0, 1$	222
5.65. Aproximación de transporte de contaminantes usando la forma conservativa de las ecuaciones de aguas someras para la región CAB con 81×81 nodos en $t = 2, 3$	223
5.66. Aproximación de transporte de contaminantes usando la forma conservativa de las ecuaciones de aguas someras para la región CAB con 81×81 nodos en $t = 4, 5$	224
5.67. Aproximación de transporte de contaminantes usando la forma conservativa de las ecuaciones de aguas someras para la región CUIT con 81×81 nodos en $t = 0, 1$	225
5.68. Aproximación de transporte de contaminantes usando la forma conservativa de las ecuaciones de aguas someras para la región CUIT con 81×81 nodos en $t = 2, 3$	226
5.69. Aproximación de transporte de contaminantes usando la forma conservativa de las ecuaciones de aguas someras para la región CUIT con 81×81 nodos en $t = 4, 5$	227
5.70. Aproximación de transporte de contaminantes usando la forma conservativa de las ecuaciones de aguas someras para la región ZIRA con 81×81 nodos en $t = 0, 1$	228
5.71. Aproximación de transporte de contaminantes usando la forma conservativa de las ecuaciones de aguas someras para la región ZIRA con 81×81 nodos en $t = 2, 3$	229
5.72. Aproximación de transporte de contaminantes usando la forma conservativa de las ecuaciones de aguas someras para la región ZIRA con 81×81 nodos en $t = 4, 5$	230
5.73. Aproximación de transporte de contaminantes usando la forma no conservativa de las ecuaciones de aguas someras para la región CUAD con 81×81 nodos en $t = 0, 1$	231
5.74. Aproximación de transporte de contaminantes usando la forma no conservativa de las ecuaciones de aguas someras para la región CUAD con 81×81 nodos en $t = 2, 3$	232

5.75. Aproximación de transporte de contaminantes usando la forma no conservativa de las ecuaciones de aguas someras para la región CUAD con 81×81 nodos en $t = 4, 5$	233
5.76. Aproximación de transporte de contaminantes usando la forma no conservativa de las ecuaciones de aguas someras para la región CAB con 81×81 nodos en $t = 0, 1$	234
5.77. Aproximación de transporte de contaminantes usando la forma no conservativa de las ecuaciones de aguas someras para la región CAB con 81×81 nodos en $t = 2, 3$	235
5.78. Aproximación de transporte de contaminantes usando la forma no conservativa de las ecuaciones de aguas someras para la región CAB con 81×81 nodos en $t = 4, 5$	236
5.79. Aproximación de transporte de contaminantes usando la forma no conservativa de las ecuaciones de aguas someras para la región CUIT con 81×81 nodos en $t = 0, 1$	237
5.80. Aproximación de transporte de contaminantes usando la forma no conservativa de las ecuaciones de aguas someras para la región CUIT con 81×81 nodos en $t = 2, 3$	238
5.81. Aproximación de transporte de contaminantes usando la forma no conservativa de las ecuaciones de aguas someras para la región CUIT con 81×81 nodos en $t = 4, 5$	239
5.82. Aproximación de transporte de contaminantes usando la forma no conservativa de las ecuaciones de aguas someras para la región ZIRA con 81×81 nodos en $t = 0, 1$	240
5.83. Aproximación de transporte de contaminantes usando la forma no conservativa de las ecuaciones de aguas someras para la región ZIRA con 81×81 nodos en $t = 2, 3$	241
5.84. Aproximación de transporte de contaminantes usando la forma no conservativa de las ecuaciones de aguas someras para la región ZIRA con 81×81 nodos en $t = 4, 5$	242

Índice de tablas

5.1. Errores cuadráticos e_{Δ_m} para los resultados del esquema que aproxima la ecuación de advección.	152
5.2. Errores cuadráticos e_{Δ_m} para los resultados del esquema que aproxima la ecuación de difusión.	162
5.3. Errores cuadráticos e_{Δ_m} para los resultados del esquema que aproxima la ecuación de advección y difusión.	172
5.4. Cantidad G_q calculada para cada región con 21×21 nodos utilizando la forma conservativa de las ecuaciones.	182
5.5. Cantidad G_v calculada para cada región con 21×21 nodos utilizando la forma conservativa de las ecuaciones.	183
5.6. Cantidad G_q calculada para cada región con 41×41 nodos utilizando la forma conservativa de las ecuaciones.	185
5.7. Cantidad G_v calculada para cada región con 41×41 nodos utilizando la forma conservativa de las ecuaciones.	185
5.8. Cantidad G_q calculada para cada región con 81×81 nodos utilizando la forma conservativa de las ecuaciones.	187
5.9. Cantidad G_v calculada para cada región con 81×81 nodos utilizando la forma conservativa de las ecuaciones.	187
5.10. Cantidad G_q calculada para cada región con 21×21 nodos utilizando la forma no conservativa de las ecuaciones.	189
5.11. Cantidad G_v calculada para cada región con 21×21 nodos utilizando la forma no conservativa de las ecuaciones.	189
5.12. Cantidad G_q calculada para cada región con 41×41 nodos utilizando la forma no conservativa de las ecuaciones.	191
5.13. Cantidad G_v calculada para cada región con 41×41 nodos utilizando la forma no conservativa de las ecuaciones.	191

5.14. Cantidad G_q calculada para cada región con 81×81 nodos utilizando la forma no conservativa de las ecuaciones.	193
5.15. Cantidad G_v calculada para cada región con 81×81 nodos utilizando la forma no conservativa de las ecuaciones.	193
5.16. Cantidad G_u calculada para cada región con 21×21 nodos utilizando la forma conservativa de las ecuaciones.	213
5.17. Cantidad G_u calculada para cada región con 41×41 nodos utilizando la forma conservativa de las ecuaciones.	214
5.18. Cantidad G_u calculada para cada región con 81×81 nodos utilizando la forma conservativa de las ecuaciones.	215
5.19. Cantidad G_u calculada para cada región con 21×21 nodos utilizando la forma no conservativa de las ecuaciones.	216
5.20. Cantidad G_u calculada para cada región con 41×41 nodos utilizando la forma no conservativa de las ecuaciones.	217
5.21. Cantidad G_u calculada para cada región con 81×81 nodos utilizando la forma no conservativa de las ecuaciones.	218

Capítulo 1

Conceptos Básicos

A lo largo del presente trabajo se hará una revisión de uno de los métodos para aproximar, de manera numérica, la solución de ecuaciones diferenciales parciales. Debido a los temas que se abordarán en el mismo, durante este primer capítulo se dará una breve introducción a los temas a tratar más adelante, se mostrará un breve estudio sobre ecuaciones diferenciales y se explicará, de manera somera, el método de Diferencias Finitas.

Cabe señalar que la intención de este primer capítulo es dar una introducción sobre la solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales, poniendo especial enfoque en la solución por medio de los métodos de diferencias finitas y volúmenes finitos, temas de especial importancia a lo largo del presente trabajo. Además, se muestra una forma de obtener esquemas de aproximación, por ambos métodos, los cuales son aplicados para resolver numéricamente algunas ecuaciones diferenciales parciales de gran interés en la literatura.

1.1. Ecuaciones Diferenciales Parciales

Se llaman ecuaciones diferenciales a aquellas ecuaciones cuyas incógnitas son funciones de una o varias variables, con la peculiaridad de que, en dichas ecuaciones, figuran no sólo las funciones, sino también sus derivadas. Si las incógnitas son funciones de dos o más variables, las ecuaciones se llaman ecuaciones diferenciales parciales [41].

Cuando una ecuación diferencial parcial, cuya función incógnita, u , de n variables x_1, \dots, x_n , contiene una derivada de orden N y no contiene derivadas de orden superior, se dice que es una ecuación de N -ésimo orden. En otras palabras, el *orden de la ecuación*

se define como el mayor orden de las derivadas que están presentes en la ecuación.

Estas ecuaciones tienen la forma

$$\Phi \left(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^N u}{\partial x_n^N} \right) = 0. \quad (1.1)$$

Además, se dice que esta ecuación es lineal si Φ , como función de

$$u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial^N u}{\partial x_n^N},$$

es lineal.

Para el caso que se tratará en este capítulo se considerarán ecuaciones lineales de segundo orden en las variables espaciales x y y , las cuales cumplen con que el mayor exponente de la función u es 1; mientras que la derivada de mayor orden es de orden 2. Una ecuación diferencial parcial como la descrita anteriormente puede escribirse como:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + F = 0,$$

en donde A , B , C , D , E y F son coeficientes que pueden depender tanto de x como de y , pero jamás de u . Por cuestiones de simplicidad, se puede escribir la ecuación anterior como

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + F = 0. \quad (1.2)$$

1.1.1. Clasificación de Ecuaciones Diferenciales Parciales

De acuerdo con Leveque [38], las ecuaciones diferenciales parciales pueden clasificarse dependiendo de la relación que existe entre las derivadas involucradas. Tomando en cuenta que una ecuación diferencial parcial lineal de segundo orden puede escribirse como en la ecuación (1.2), entonces la clasificación dependerá del signo del discriminante,

$$B^2 - 4AC \quad \begin{cases} < 0 & \Rightarrow \text{Elíptica,} \\ = 0 & \Rightarrow \text{Parabólica,} \\ > 0 & \Rightarrow \text{Hiperbólica.} \end{cases}$$

Los ejemplos más comunes, para hablar de cada una de ellas, son:

- En el caso de las **ecuaciones diferenciales parciales elípticas**, la ecuación del problema de Poisson es el ejemplo más usado en la bibliografía:

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0.$$

Dicha ecuación puede escribirse, tomando en cuenta la forma de la ecuación (1.2), como

$$u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

por lo que se tiene $A = 1$, $B = 0$ y $C = 1$ y, entonces,

$$B^2 - 4AC = 0^2 - 4(1)(1) = -4 < 0.$$

Este tipo de ecuaciones están asociadas con un estado especial del sistema, el cual corresponde a un estado de mínima energía.

- La ecuación de transporte de calor es el caso más usado de **ecuaciones diferenciales parciales parabólicas**:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = 0, \quad \text{con } \nu > 0,$$

la cual puede escribirse como

$$u_t - \nu u_{xx} = 0.$$

En este caso, los coeficientes son $A = -\nu$, $B = 0$ y $C = 0$, entonces,

$$B^2 - 4AC = 0^2 - 4(-\nu)(0) = 0.$$

En general este tipo de ecuaciones describen fenómenos que dependen del tiempo y que llevan a un estado de equilibrio.

- La ecuación de transporte se puede ver como un ejemplo de las **ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas**:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = 0,$$

que, al igual que en los casos anteriores, puede escribirse de forma general como

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0,$$

ahora $A = 1$, $B = 0$ y $C = -c^2$, y se tiene,

$$B^2 - 4AC = 0^2 - 4(1)(-c^2) = 4c^2 > 0.$$

En general este tipo de ecuaciones modelan el transporte y movimiento de alguna cantidad física, así como son las perturbaciones o el flujo de fluidos.

1.1.2. Condiciones Iniciales y de Frontera

Cuando se trabaja en la solución de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, las cuales relacionan una función desconocida de una variable con sus derivadas, es posible recurrir al teorema fundamental de existencia y unicidad. Dicho teorema garantiza que existe una solución al problema a tratar y que, además, esta solución es única si se cumplen un conjunto de condiciones dadas. A diferencia de las ecuaciones diferenciales ordinarias, cuando se trabaja con ecuaciones diferenciales parciales no se cuenta con un teorema fundamental con el cual se pueda garantizar la existencia y unicidad de las soluciones. En su lugar, se han generado diversas teorías que son usadas para cada uno de los tipos de ecuaciones diferenciales parciales de manera independiente.

En estos casos, las condiciones que son necesarias dependerán del tipo de ecuación con el que se este trabajando. En el caso de ecuaciones parabólicas e hiperbólicas, donde los problemas que se modelan dependen del tiempo, suelen darse condiciones iniciales y de frontera; esto es, el valor de la función en un primer nivel de tiempo y las condiciones en las fronteras en todos los niveles de tiempo posteriores. Por su parte, para las ecuaciones elípticas, donde el tiempo no influye, es acostumbrado dar únicamente condiciones de frontera.

Existen, fundamentalmente, tres tipos de condiciones de frontera:

- Condiciones de ***Dirichlet***. Son aquellas donde se cuenta con el valor de la función en la frontera.
- Condiciones de ***Neumann***. Éstas proveen el valor de la derivada de la función en cada punto de la frontera.
- Condiciones de ***Robin***. Dichas condiciones son una combinación de las condiciones de frontera de Dirichlet y de Neumann.

Cada uno de estos tipos se utilizan para modelar diferentes comportamientos en la frontera de la región. Comúnmente se utilizan condiciones de frontera de tipo Dirichlet cuando el problema no involucra fuentes o sumideros. Por su parte, las condiciones de Neumann o de Robin representan un cambio en las cantidades que modela el problema, pudiendo ser éstas: masa, temperatura, corriente eléctrica, entre muchas otras.

1.1.3. Leyes de Conservación

Mucho del trabajo que se ha realizado respecto a ecuaciones diferenciales es en una clase de ecuaciones hiperbólicas llamadas *leyes de conservación*. Éstas son sistemas de ecuaciones diferenciales particulares, usualmente no lineales, que dependen del tiempo con una estructura particularmente simple.

El ejemplo más simple de una ley de conservación en una dimensión es la ecuación diferencial parcial

$$u_t(x, t) + f_x(u(x, t)) = 0, \quad (1.3)$$

donde $u(x, t)$ es la **función de densidad** de alguna propiedad conservativa como masa, momento o energía, y se puede interpretar como

$$\int_{x_1}^{x_2} u(x, t) dx$$

siendo que es la cantidad total de la propiedad conservativa en el intervalo $[x_1, x_2]$ en el tiempo t ; además, $f(q)$ es conocida como **función de flujo**.

Es posible escribir la ecuación (1.3) en una *forma cuasi lineal*

$$u_t(x, t) + f'_x(u(x, t)) u(x, t) = 0,$$

con lo cual se puede observar que es una ecuación hiperbólica.

Las leyes de conservación surgen de manera natural de leyes físicas en una forma integral, indicando que, para cualesquiera dos puntos x_1 y x_2 ,

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} u(x, t) dx = f(u(x_1, t)) - f(u(x_2, t)). \quad (1.4)$$

En este caso, cada componente de u mide la densidad de alguna propiedad conservativa,

y la ecuación muestra que la cantidad total entre dos puntos puede cambiar únicamente debido al flujo que pasa entre x_1 y x_2 .

La ecuación (1.3) puede obtenerse desde la ecuación (1.4) por medio de manipulaciones simples y *suponiendo que u y $f(u)$ son suficientemente suaves*. Ésta es una condición importante ya que, en la práctica, muchas soluciones no son suaves, sino que contienen discontinuidades, como las ondas de choque. Una de las características importantes de las Leyes de Conservación no Lineales es que estas discontinuidades pueden desarrollarse espontáneamente, incluso desde los datos iniciales y, entonces, es necesario trabajar con ellas tanto computacional como matemáticamente.

En una discontinuidad en u , la ecuación diferencial parcial (1.3) no se “conservará” en el sentido clásico, y es importante recordar que la Ley de Conservación integral (1.4) es una ecuación más fundamental la cual sí se “conservará”.

En un sentido clásico, dependiendo de la ecuación diferencial parcial con la que se trabaje, es necesario elegir un método adecuado para hacerlo. Para los fines de este trabajo se utilizará el método de *Diferencias Finitas* en el caso de funciones suaves sin discontinuidades, y *Volúmenes Finitos* para tratar funciones que cuenten con discontinuidades. Ambos métodos se explicarán más adelante en este trabajo.

1.2. Esquemas Clásicos de Aproximación

En el caso en que se trata con ecuaciones diferenciales con suficiente suavidad, es posible utilizar métodos analíticos para encontrar su solución. Sin embargo, dado que existen una gran cantidad de ecuaciones diferenciales que no pueden ser resueltas de manera analítica, se ha recurrido a la creación y uso de métodos numéricos para aproximar la solución de dichas ecuaciones.

Existen una gran cantidad de estos métodos numéricos, entre los cuales destacan los métodos de Diferencias Finitas, Volúmenes Finitos, Elementos Finitos, Métodos Espectrales, entre muchos otros. En este trabajo, debido a los intereses del mismo, se acota la discusión explicando únicamente los primeros dos.

1.2.1. Diferencias Finitas

Uno de los métodos ampliamente usados en la literatura para realizar esta aproximación es el método de Diferencias Finitas. La idea principal de las diferencias finitas es reemplazar las derivadas en las ecuaciones diferenciales por combinaciones lineales de los valores de la función.

Una de las maneras de obtener esquemas en diferencias finitas es haciendo uso de *expansiones en series de Taylor*, con lo cual es posible aproximar el valor de una función en un punto dado, utilizando valores de la función, y sus derivadas, en otros puntos. Rudin [47] explica el teorema de expansión en series de Taylor como:

Teorema 1. (Expansión en series de Taylor) *Sea $u(x)$ una función continua en el intervalo $[a, b]$, la cual tiene derivadas continuas hasta de orden N sobre (a, b) ; dado un punto x_0 en (a, b) , entonces, para cualquier otro punto x en (a, b) se tiene que*

$$u(x) = u(x_0) + \frac{du(x_0)}{dx}(x - x_0) + \frac{d^2u(x_0)}{dx^2} \frac{(x - x_0)^2}{2!} + \cdots + \frac{d^{N-1}u(x_0)}{dx^{N-1}} \frac{(x - x_0)^{N-1}}{(N-1)!} + R^N,$$

en donde

$$R^N = \frac{d^N u(\xi)}{dx^N} \frac{(x - x_0)^N}{(N)!}, \quad \xi \in (a, b),$$

es el residuo.

Para el fin deseado, imaginemos que se cuenta con una función $u(x)$ que cumple con las hipótesis del teorema de Taylor, entonces es posible expresar su expansión alrededor del punto x_{i+1} como

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + \frac{du(x_i)}{dx}(x_{i+1} - x_i) + \cdots = u(x_i) + \frac{du(x_i)}{dx} \Delta x_i + \mathcal{O}(\Delta x_i^2),$$

donde $\Delta x = x_{i+1} - x_i$ y $\mathcal{O}(\Delta x^2)$ es el residuo de orden 2, el cual contiene todos los términos que involucran derivadas de orden 2 y superiores. De aquí, despejando el término que contiene la derivada de $u(x_i)$, se obtiene

$$\frac{du(x_i)}{dx} \approx \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{\Delta x_i}, \quad (1.5)$$

que es conocida como la expresión en diferencias finitas *hacia adelante* para la aproxi-

mación de la derivada de u en el punto x_i .

Si en lugar de hacer la expansión de $u(x)$ alrededor del punto x_{i+1} , se hace la misma expansión alrededor del punto x_{i-1} se tendrá

$$u(x_{i-1}) = u(x_i) + \frac{du(x_i)}{dx} (x_{i-1} - x_i) + \dots = u(x_i) + \frac{du(x_i)}{dx} (\Delta x_i) + \mathcal{O}(\Delta x_i^2),$$

que, en este caso, $\Delta x_i = x_{i-1} - x_i$. Siguiendo un proceso similar al del caso anterior, se encuentra

$$\frac{du(x_i)}{dx} \approx \frac{u(x_{i-1}) - u(x_i)}{\Delta x_i}, \quad (1.6)$$

la cual es una expresión en diferencias finitas **hacia atrás** para la aproximación de la derivada de u en el punto x_i .

Al restar las expresiones (1.5) y (1.6) se puede obtener una expansión alrededor de los puntos x_{i+1} y x_{i-1} , con lo que se tendrá

$$u(x_{i+1}) - u(x_{i-1}) = \left(u(x_i) + \frac{du(x_i)}{dx} (x_{i+1} - x_i) + \dots \right) - \left(u(x_i) + \frac{du(x_i)}{dx} (x_{i-1} - x_i) + \dots \right),$$

lo cual puede escribirse como

$$u(x_{i+1}) - u(x_{i-1}) = \frac{du(x_i)}{dx} (x_{i+1} - x_{i-1}) + \mathcal{O}(\Delta x_i^3),$$

y, siguiendo un procedimiento como en los casos anteriores, escribiendo $x_{i+1} - x_{i-1} = 2\Delta x$, puede obtenerse

$$\frac{du(x_i)}{dx} \approx \frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1}))}{2\Delta x}. \quad (1.7)$$

que es la expresión en diferencias finitas **centradas**.

Para esta primera parte, el intervalo $[a, b]$ que se utiliza se divide en subintervalos regulares, como se muestra en la Figura 1.1, esto es

$$x_{i+1} - x_i = x_i - x_{i-1},$$

y entonces las ecuaciones (1.5), (1.6) y (1.7) se reducen a:

$$\frac{du(x_i)}{dx} \approx \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{\Delta x}, \quad (1.8)$$

$$\frac{du(x_i)}{dx} \approx \frac{u(x_{i-1}) - u(x_i)}{\Delta x}, \quad (1.9)$$

$$\frac{du(x_i)}{dx} \approx \frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1}))}{2\Delta x}. \quad (1.10)$$

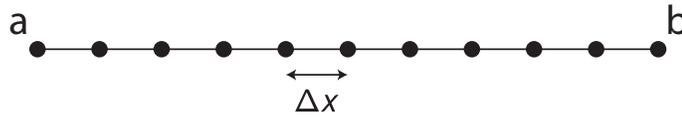


Figura 1.1: Discretización uniforme del intervalo $[a, b]$.

En el caso de ecuaciones diferenciales parciales de orden mayor a 1, también es posible obtener aproximaciones, en diferencias finitas, a sus derivadas parciales. Dado que, en el caso a desarrollar en el presente trabajo, se toman en cuenta ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden, es importante mostrar el desarrollo que produce estas aproximaciones.

Para obtener una aproximación a la segunda derivada de $u(x)$, puede partirse del desarrollo en serie de Taylor de u alrededor de los puntos x_{i+1} y x_{i-1} :

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + \frac{du(x_i)}{dx}(x_{i+1} - x_i) + \frac{1}{2!} \frac{d^2u(x_i)}{dx^2}(x_{i+1} - x_i)^2 + \mathcal{O}(\Delta x^3),$$

y

$$u(x_{i-1}) = u(x_i) + \frac{du(x_i)}{dx}(x_{i-1} - x_i) + \frac{1}{2!} \frac{d^2u(x_i)}{dx^2}(x_{i-1} - x_i)^2 + \mathcal{O}(\Delta x^3),$$

los cuales, tomando en cuenta que, para mallas regulares, $\Delta x = x_{i+1} - x_i$ y $-\Delta x = x_{i-1} - x_i$, pueden escribirse como

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + \frac{du(x_i)}{dx} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{d^2u(x_i)}{dx^2} (\Delta x)^2 + \mathcal{O}(\Delta x^3),$$

y

$$u(x_{i-1}) = u(x_i) - \frac{du(x_i)}{dx} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{d^2u(x_i)}{dx^2} (\Delta x)^2 + \mathcal{O}(\Delta x^3).$$

Sumando ambas expresiones se obtiene

$$u(x_{i+1}) + u(x_{i-1}) = 2u(x_i) + \frac{1}{2} \frac{d^2 u(x_i)}{dx^2} (\Delta x)^2 + \mathcal{O}(\Delta x^4),$$

de donde puede despejarse el término con la segunda derivada para llegar la expresión

$$\frac{d^2 u(x_i)}{dx^2} \approx \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))}{(\Delta x)^2}, \quad (1.11)$$

la cual muestra una aproximación en diferencias finitas a la segunda derivada de u en el punto x_i .

Esquemas de Diferencias Finitas en Regiones Rectangulares

Así como surgen los esquemas de diferencias finitas en problemas unidimensionales, es posible obtener esquemas para problemas en dos o más dimensiones. En el caso de dos dimensiones espaciales, el caso más sencillo es cuando se tienen regiones rectangulares. En este caso, para obtener los esquemas buscados, es necesario hacer uso derivadas parciales, habida cuenta que éstas implican una derivada en una dirección.

Primero es necesario definir la región en la que se trabajará: sea Ω una región rectangular definida en $[0, 1] \times [0, 1]$, sobre la cual se construye una malla con nodos

$$(x_i, y_j) = (i\Delta x, j\Delta y),$$

como se muestra en la Figura 1.2, donde Δx y Δy son el tamaño de paso horizontal y vertical, respectivamente.

Una vez descrita la discretización de la región de interés, es posible realizar un procedimiento similar al realizado en una dimensión espacial, usado para obtener las ecuaciones (1.8) - (1.10), para escribir una expresión en diferencias finitas para cada una de las deri-

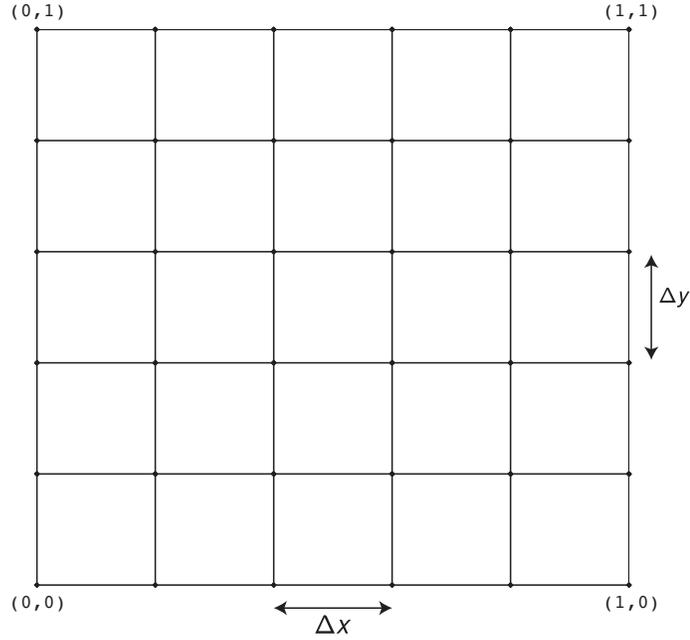


Figura 1.2: Discretización uniforme del intervalo $[0, 1] \times [0, 1]$.

vadas parciales

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x}, \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} \approx \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x}, \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x}, \quad (1.14)$$

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial y} \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta y}, \quad (1.15)$$

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial y} \approx \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\Delta y}, \quad (1.16)$$

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial y} \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta y}, \quad (1.17)$$

$$\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2}, \quad (1.18)$$

$$\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial y^2} \approx \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{(\Delta y)^2}. \quad (1.19)$$

En este caso $u_{i,j} = u(x_i, y_j)$ es la evaluación de u en el punto (x_i, y_j) .

mientras que el vector del lado derecho cuenta con $m - 1$, esto es debido a que, el primero contiene la información de todos los nodos de la malla, involucrando condiciones de frontera y nodos interiores, mientras que el segundo únicamente tiene únicamente la información de los nodos interiores. Tomando en cuenta que se conocen las condiciones de frontera en x_1 y x_{m+1} , entonces el sistema anterior puede escribirse como

$$\mathbb{M}\phi = -(f + R), \tag{1.23}$$

donde

$$\mathbb{M} = \frac{1}{\Delta x^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -2 & 1 \\ & & & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \phi = \begin{pmatrix} \phi_2 \\ \phi_3 \\ \vdots \\ \phi_{m-1} \\ \phi_m \end{pmatrix},$$

$$f = \begin{pmatrix} f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_{m-1} \\ f_m \end{pmatrix} \quad y \quad R = \frac{1}{\Delta x^2} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \phi_{m+1} \end{pmatrix}.$$

Al resolver el sistema (1.23), la solución ϕ , junto con las condiciones de frontera establecidas, serán la aproximación obtenida a la solución de la ecuación de Poisson.

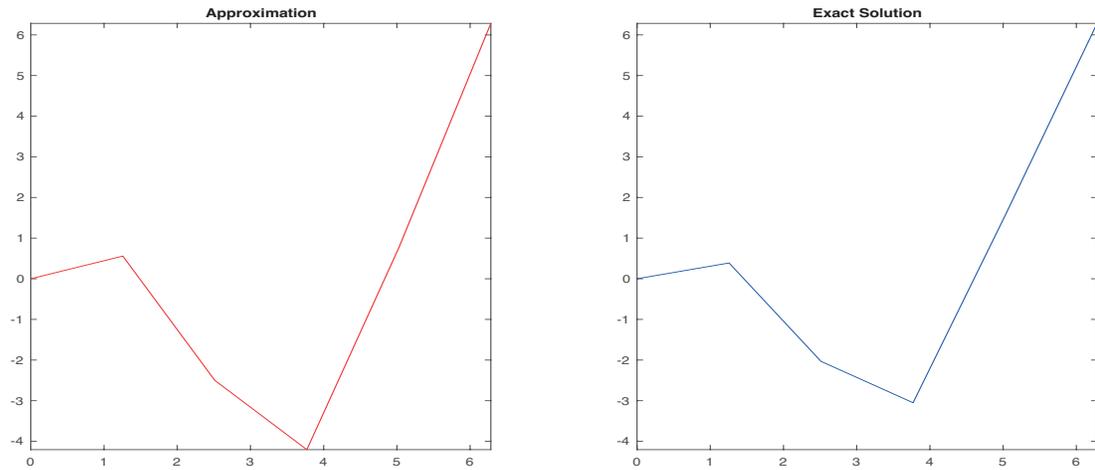
Como un ejemplo ilustrativo, se aplica este método para aproximar la solución del problema

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 2 \sin(x) + x \cos(x),$$

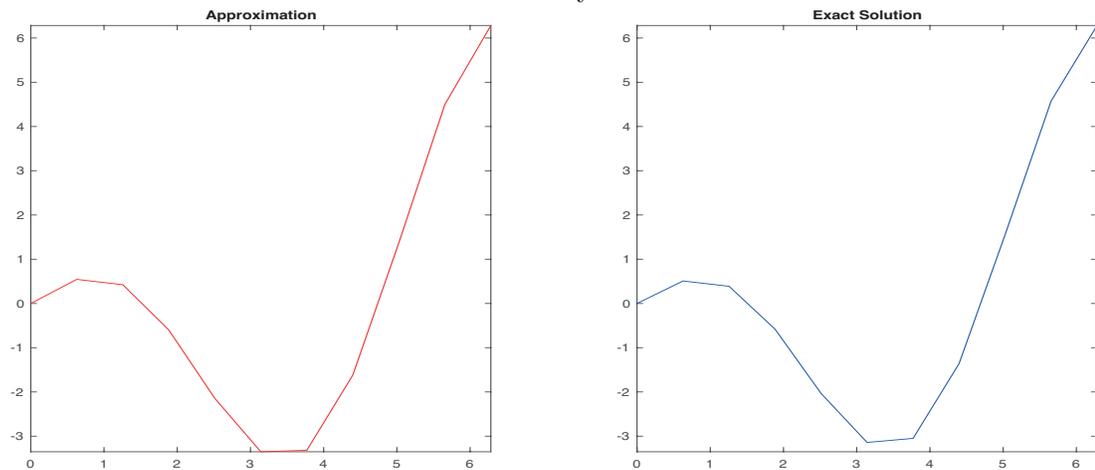
en el intervalo $[0, 2\pi]$, sujeto a las condiciones de frontera

$$\phi(\partial\Omega) = x \cos(x).$$

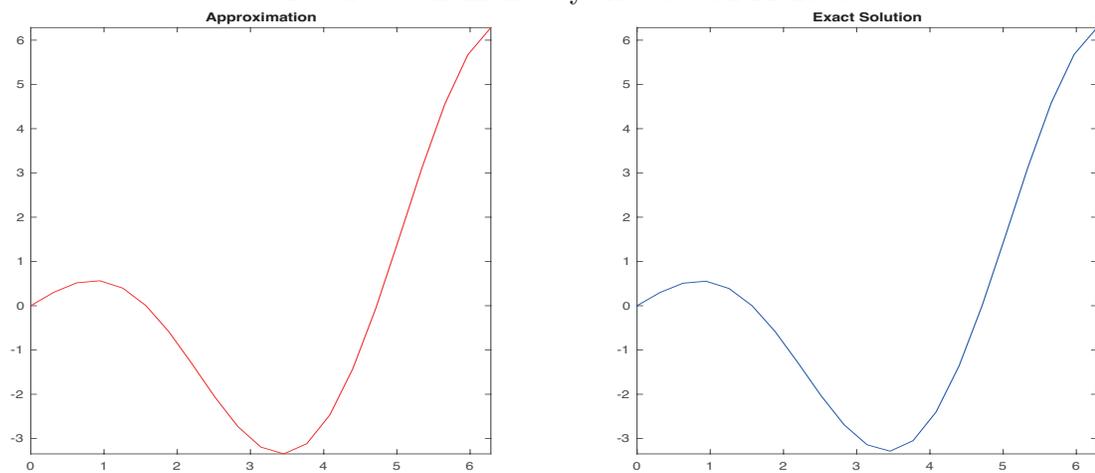
En la Figura 1.3 se muestra una comparación de la solución aproximada y la solución exacta de este método con diferentes cantidades de nodos en la discretización espacial del intervalo. Como se puede observar, mientras más “fina” o “pequeña” sea la discretización (*i.e.* se tengan más nodos dentro de la región), mejores resultados se obtienen.



Resultados numéricos y exactos con 6 nodos.



Resultados numéricos y exactos con 11 nodos.



Resultados numéricos y exactos con 21 nodos.

Figura 1.3: Comparación de resultados numéricos y exactos para el problema de Poisson en una dimensión espacial con diferentes discretizaciones espaciales.

Para dos dimensiones espaciales x y y , la ecuación de Poisson puede ser escrita como

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\phi(x, y) = -f(x, y).$$

Siguiendo un desarrollo similar al del caso en una dimensión espacial, las derivadas parciales son reemplazadas por su aproximación en diferencias finitas, con lo cual se obtiene

$$\frac{\phi_{i+1,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{\phi_{i,j+1} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} = -f_{i,j}.$$

Además, si se toma en cuenta que, en el caso rectangular $\Delta x = \Delta y = h$, entonces la expresión anterior puede reescribirse como

$$\frac{\phi_{i+1,j} + \phi_{i-1,j} + \phi_{i,j+1} + \phi_{i,j-1} - 4\phi_{i,j}}{h^2} = -f_{i,j}.$$

Nuevamente, esta expresión plantea un sistema de ecuaciones para $2 \leq i \leq m$ y $2 \leq j \leq m$. En este caso el sistema puede escribirse como

$$\mathbb{M}\phi = -(f + R), \quad (1.24)$$

en donde, esta vez, se tiene

$$\phi = [\phi_{2,2}, \dots, \phi_{m,2}, \phi_{2,3}, \dots, \phi_{m,3}, \dots, \phi_{2,m}, \dots, \phi_{m,m}]^T,$$

$$f = [f_{2,2}, \dots, f_{m,2}, f_{2,3}, \dots, f_{m,3}, \dots, f_{2,m}, \dots, f_{m,m}]^T,$$

$$R = \begin{bmatrix} \frac{\phi_{1,1}}{h^2}, \frac{\phi_{2,1}}{h^2}, \dots, \frac{\phi_{m,1}}{h^2}, \frac{\phi_{m+1,1}}{h^2}, \\ \frac{\phi_{1,2}}{h^2}, 0, \dots, 0, \frac{\phi_{m+1,2}}{h^2}, \dots \\ \frac{\phi_{1,m}}{h^2}, 0, \dots, 0, \frac{\phi_{m+1,m}}{h^2}, \\ \frac{\phi_{1,m+1}}{h^2}, \frac{\phi_{2,m+1}}{h^2}, \dots, \frac{\phi_{m,m+1}}{h^2}, \frac{\phi_{m+1,m+1}}{h^2} \end{bmatrix}^T,$$

y

$$\mathbb{M} = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} B & \mathbb{I} & & & \\ \mathbb{I} & B & \mathbb{I} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \mathbb{I} & B & \mathbb{I} \\ & & & & \mathbb{I} & B \end{pmatrix},$$

con

$$B = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nuevamente, resolviendo el sistema (1.24), la solución ϕ , junto con las condiciones de frontera establecidas, serán la aproximación obtenida a la solución de la ecuación de Poisson.

Como un ejemplo ilustrativo, se aplica este método para aproximar la solución del problema

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 10e^{2x+y}, \tag{1.25}$$

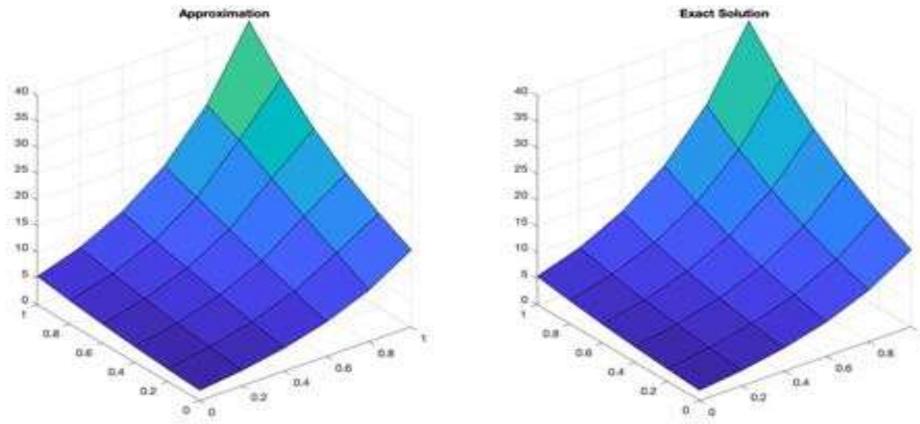
en la región delimitada por $[0, 1] \times [0, 1]$, sujeto a las condiciones de frontera

$$\phi(\partial\Omega) = 2e^{2x+y}. \tag{1.26}$$

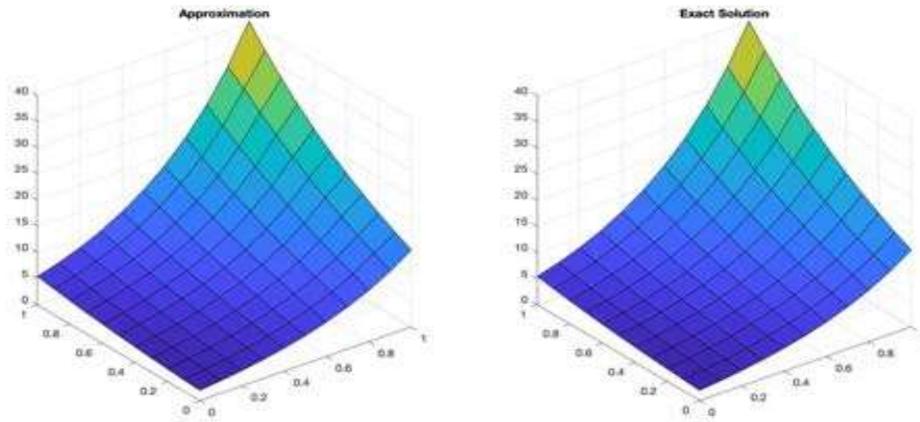
En la Figura 1.4 se muestra una comparación de la solución aproximada con este método y la solución exacta de la ecuación, con diferentes cantidades de nodos en la discretización espacial. Nuevamente se muestra que, mientras más grande es el número de nodos dentro de la región, los resultados de la aproximación son mejores.

Esquemas de Diferencias Finitas en Regiones No Rectangulares

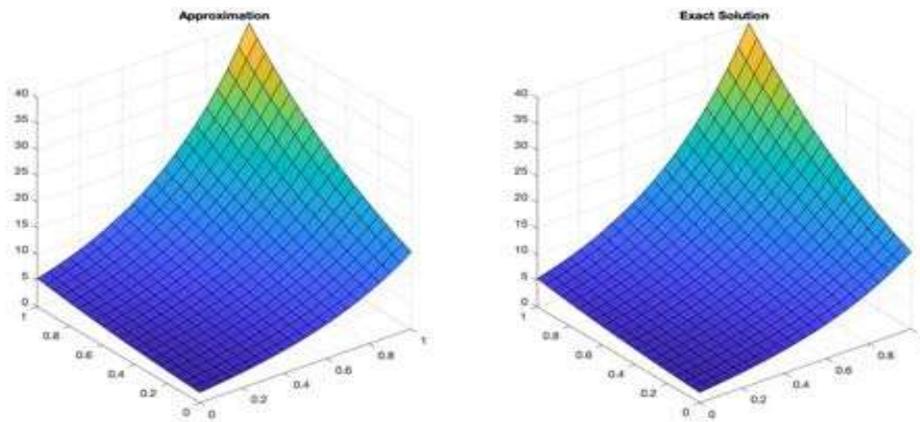
Cuando se trata con problemas que afectan situaciones de la vida real o cotidiana, es común que las regiones, en las cuales se pretende resolver un problema de ecuaciones diferenciales parciales, no cuenten con una geometría rectangular o regular. Aún en estos casos, los esquemas clásicos de diferencias finitas pueden ser aplicados creando una discretización adecuada de la región de estudio.



Resultados numéricos y exactos con 6×6 nodos.



Resultados numéricos y exactos con 11×11 nodos.



Resultados numéricos y exactos con 21×21 nodos.

Figura 1.4: Comparación de resultados numéricos y exactos para el problema de Poisson en dos dimensiones espaciales con diferentes discretizaciones espaciales.

El principal cambio que debe de tomarse en cuenta en estos casos es la manera en que se formarán las fronteras y se agregarán las condiciones en las mismas. Una idea que ha sido utilizada en la literatura [28, 34, 35] es la de crear mallas regulares lo suficientemente finas como para reflejar la frontera de la región. Para este caso, en la Figura 1.5 se muestran 2 regiones no rectangulares en las cuales se resolverá el problema de encontrar una aproximación a la ecuación de Poisson.

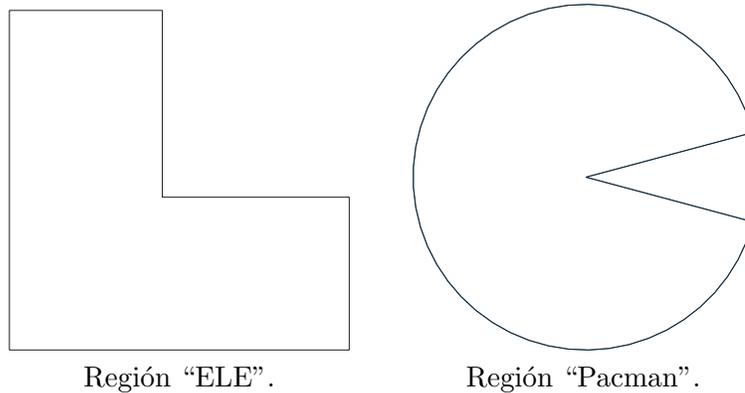


Figura 1.5: Regiones no rectangulares utilizadas para las pruebas numéricas.

La primera región, denotada como “ELE”, la cual ha sido ampliamente estudiada en la literatura, puede verse como una región rectangular a la cual se le ha cortado un cuadrado pequeño en la parte superior derecha. Por su parte, la segunda región, denotada como “Pacman”, es una región circular con un corte semitriangular. Cada una de ellas involucra diferentes problemas que deben de tratarse con cuidado y detalle. A continuación, se muestra cómo resolver el problema dado por la ecuación (1.25) sujeto a las condiciones de frontera dadas por la ecuación (1.26).

Región “ELE”. En este primer caso, es posible mellar la región por medio de una malla rectangular uniforme “truncada”, dado que se trata de una región que se basa en un cuadrado. En este caso, no se tiene problemas con reproducir las fronteras de la región, habida cuenta que las mismas son líneas paralelas a los ejes coordenados. Un ejemplo de una malla creada para esta región puede encontrarse en la Figura 1.6.

El esquema anteriormente planteado puede ser usado para aproximar la solución de la ecuación de Poisson, únicamente teniendo en cuenta que, en esta ocasión, la frontera

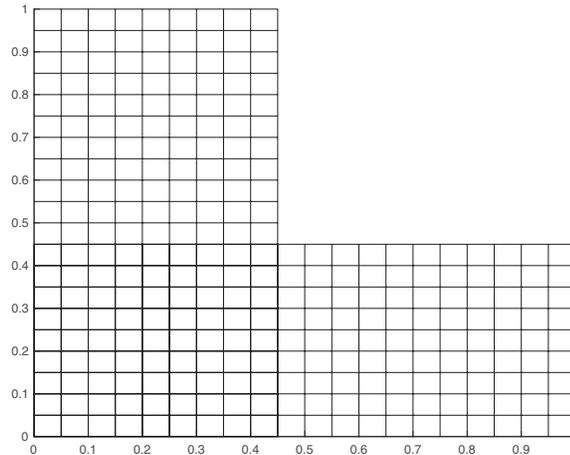


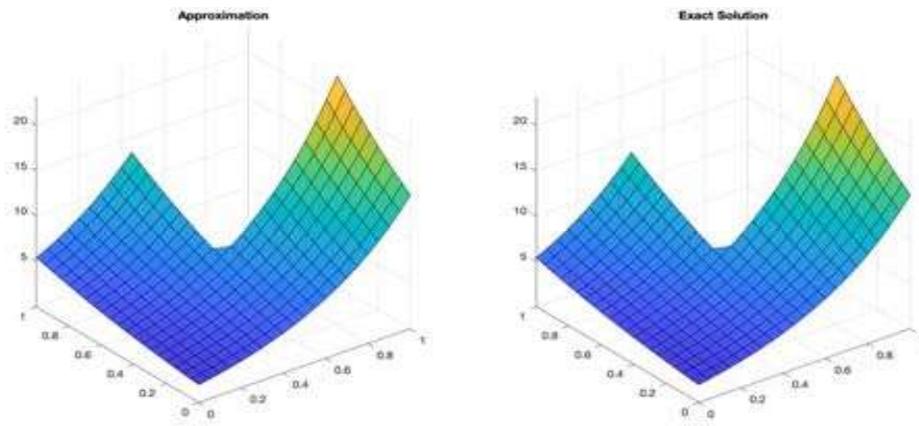
Figura 1.6: Malla Generada para la región “ELE” con 310 nodos.

estará dividida en 6 partes, en lugar de 4. En la Figura 1.7 se muestra una comparación de la solución aproximada y la solución exacta de la ecuación, con diferentes cantidades de nodos en la discretización espacial.

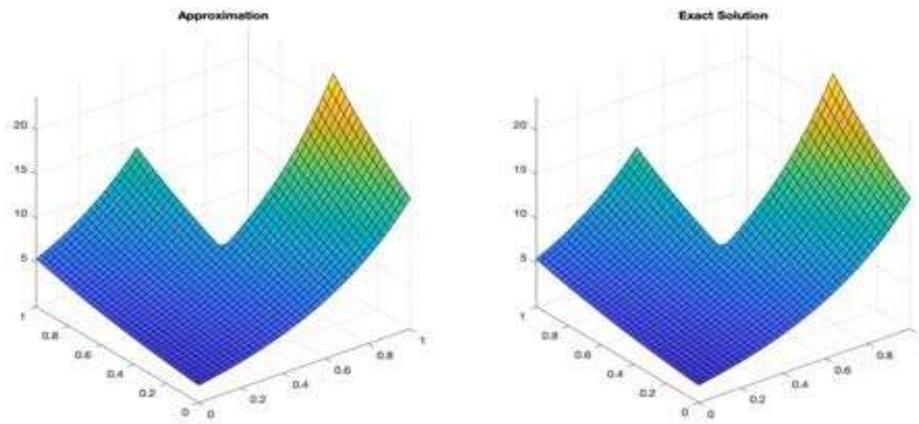
Región “Pacman”. En este segundo caso, a diferencia de el caso anterior, la frontera no puede ser completamente reproducida por una malla regular rectangular. En este caso será necesario, entonces, tener más precaución al trabajar con la misma. A pesar de lo anterior, aún es posible utilizar los esquemas clásicos de aproximación para encontrar una aproximación a la solución del problema planteado.

Es importante hacer notar que, en este caso, la precisión con la cual se puede reproducir la frontera de la región dependerá del número de nodos que se tomen en la aproximación. En la Figura 1.8 se muestran mallas generadas con diferentes discretizaciones para la región Pacman. En estas imágenes puede apreciarse que, mientras más nodos se tomen para hacer la aproximación, mejor se reflejará la frontera de ésta.

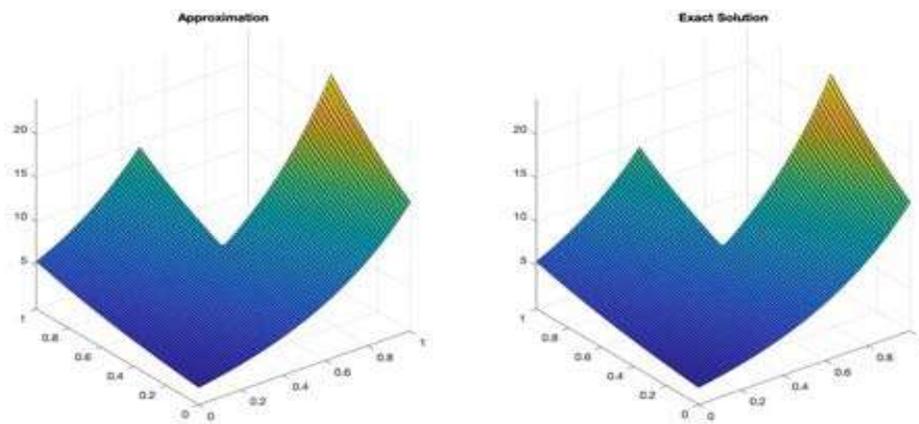
Al igual que en los casos anteriores, la Figura 1.9 muestra una comparación de la solución aproximada y la solución exacta. En este caso usando mallas con 280, 1142 y 18368 nodos, respectivamente.



Resultados numéricos y exactos con 310 nodos.

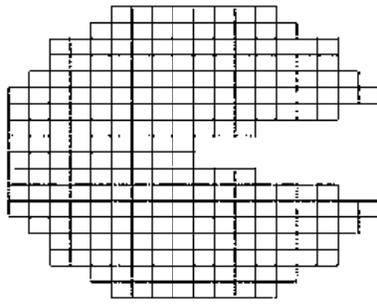


Resultados numéricos y exactos con 1220 nodos.

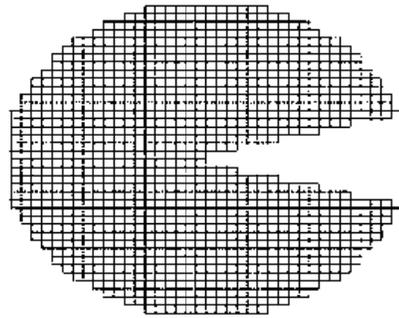


Resultados numéricos y exactos con 4840 nodos.

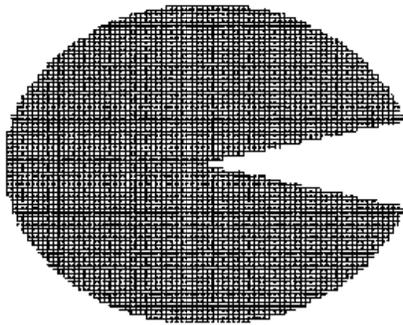
Figura 1.7: Comparación de resultados numéricos y exactos para el problema de Poisson en la Región ELE con diferentes discretizaciones espaciales.



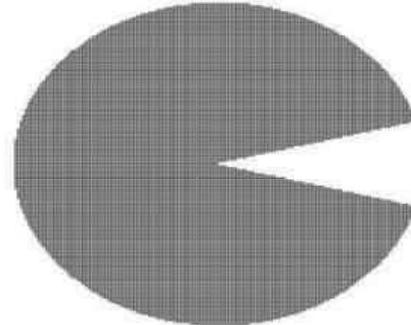
Malla con 280 nodos.



Malla con 1142 nodos.

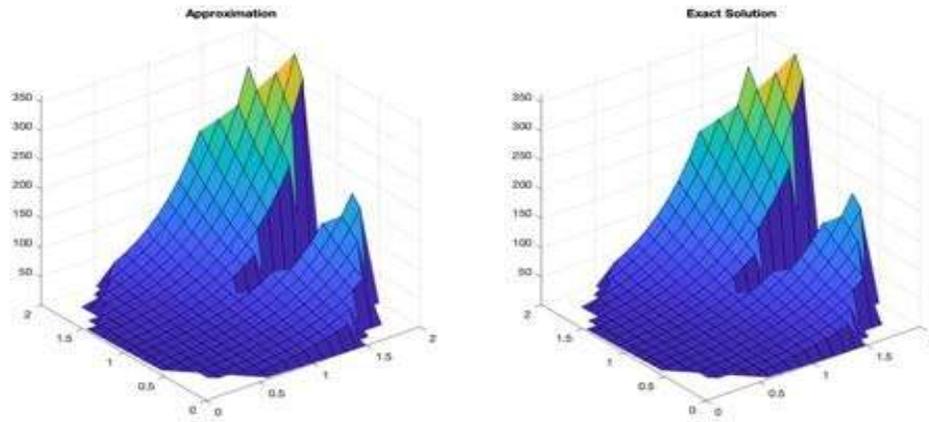


Malla con 4592 nodos.

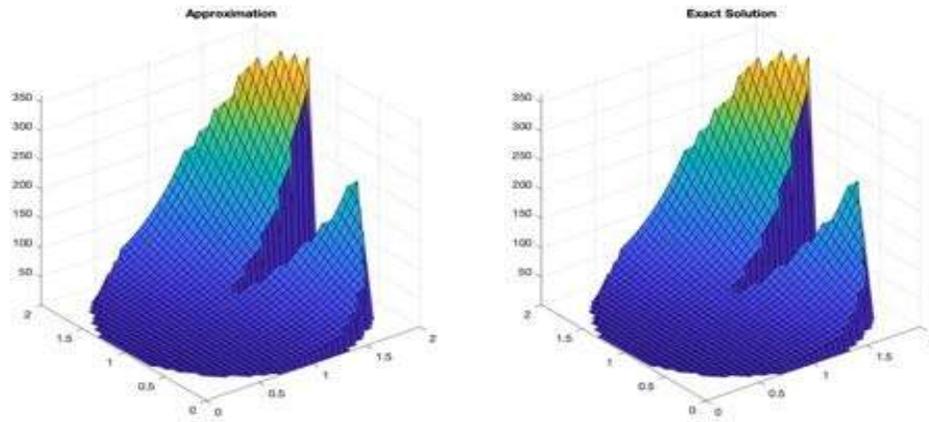


Malla con 18368 nodos.

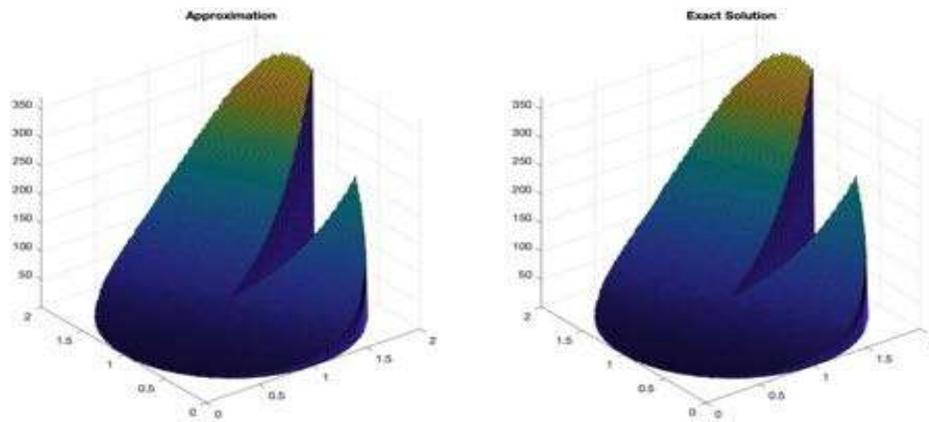
Figura 1.8: Mallas generadas para la región Pacman con diferentes discretizaciones espaciales.



Resultados numéricos y exactos con 280 nodos.



Resultados numéricos y exactos con 1142 nodos.



Resultados numéricos y exactos con 18368 nodos.

Figura 1.9: Comparación de resultados numéricos y exactos para el problema de Poisson en la Región Pacman con diferentes discretizaciones espaciales.

1.2.2. Volúmenes Finitos

Puede esperarse que los esquemas clásicos de diferencias finitas, en los cuales las derivadas son aproximadas, no logren una buena aproximación de la solución de alguna ecuación diferencial parcial en algún punto cercano a una discontinuidad. Debido a esto, cuando se tiene un problema de este tipo, es conveniente trabajar con algún método que pueda tratar con estas discontinuidades, siendo el *Método de Volúmenes Finitos* uno de los más utilizados en la literatura.

Con este método, en lugar de utilizar aproximaciones puntuales en los nodos de una malla, el dominio se descompone en celdas sobre las cuales se calcula la integral total de alguna variable conservativa u o, más de manera más acertada, se calcula el *promedio de u en la celda*, lo cual es el valor de la integral dividido entre el volumen de la celda. Estos valores son modificados, únicamente, por el flujo entre los bordes de las celdas y el problema principal es determinar las *funciones de flujo numérico* que aproximen los flujos reales de manera adecuada, utilizando únicamente los promedios aproximados de las celdas.

Tomando en cuenta lo anterior, se puede plantear una relación entre integrales de superficie e integrales de área, por medio del *Teorema de la Divergencia de Gauss*.

Teorema 2. (Gauss). *El flujo de un campo vectorial, a través de una superficie cerrada, es igual a la integral de la divergencia, del mismo campo, sobre el volumen encerrado por la superficie [69].*

Sea Ω una región en el espacio y $\partial\Omega$ la superficie cerrada y orientada que acota a Ω . Sea, además, \mathbf{F} un campo vectorial suave en Ω , entonces

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{F}) dV = \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

Una de las ventajas de aplicar el *Teorema de Gauss* es que permite trabajar con la forma integral de las ecuaciones, la cual puede manejar las discontinuidades que pudiesen presentarse en la solución de las ecuaciones.

Para ejemplificar este método se planteará el caso en dos dimensiones. Para ello se utilizará una discretización uniforme de la región $[0, 1] \times [0, 1]$, igual que como se mostró en el caso de las diferencias finitas; la diferencia se encontrará en que, esta vez, la función

será aproximada en los centroides de las celdas, en lugar de en los nodos, como se muestra en la Figura 1.10.

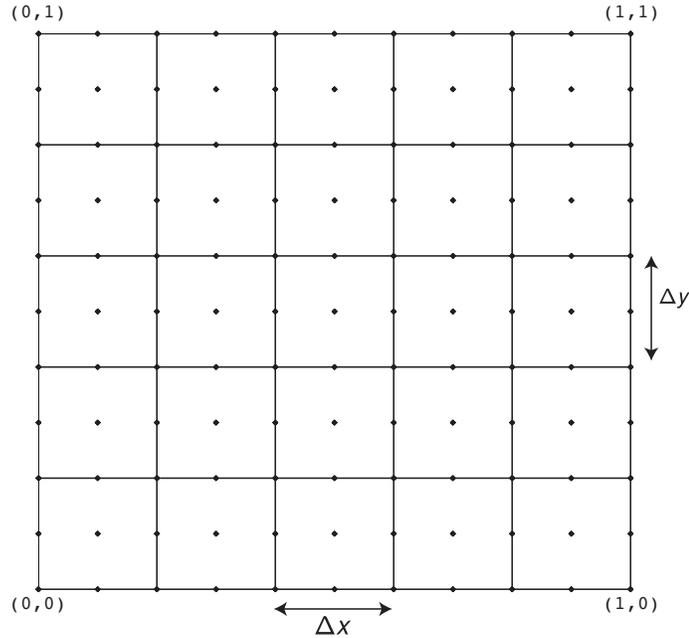


Figura 1.10: Discretización uniforme del intervalo $[0, 1] \times [0, 1]$ para Volúmenes Finitos.

Dado que el método de volúmenes finitos fue, inicialmente, pensado para tratar con problemas que dependen del tiempo, se ejemplificará el uso de dicho método aplicándolo en la aproximación de la solución de la ecuación de advección,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

la cual modela el movimiento de la concentración de alguna propiedad conservativa, u , que se encuentra siendo transportada por un medio. Esta ecuación puede escribirse como

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \tag{1.27}$$

donde $\mathbf{H} = au + bu$.

Integrando esta ecuación, sobre una región Ω como la mostrada en la Figura 1.2, y

aplicando el teorema de Gauss, se obtiene

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{H} \right) d\mathbf{V} = \frac{\partial u}{\partial t} \int_{\Omega} d\mathbf{V} + \int_{\partial\Omega} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s}.$$

Dado que la región Ω se ha discretizado de forma regular, todos sus intervalos Δx y Δy son iguales, por lo que es posible escribir el lado derecho de la ecuación anterior como

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Delta x \Delta y + \sum \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} \Delta s = 0. \quad (1.28)$$

Ahora, tomando en cuenta la i, j -ésima celda, la cual se muestra en la Figura 1.11, se puede observar que el flujo que entra en una celda es igual al flujo que sale de la misma hacia las celdas contiguas.

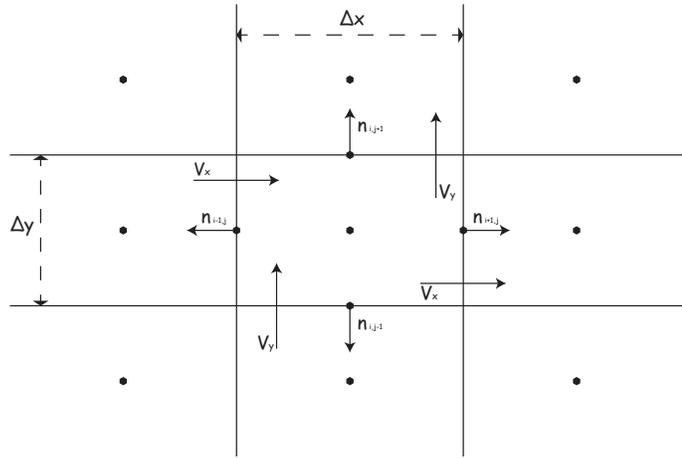


Figura 1.11: i, j -ésima celda en el método de Volúmenes Finitos.

Para un tiempo k , la derivada temporal puede ser aproximada por medio de diferencias finitas y, además, realizando los productos escalares en (1.28), entonces es posible escribir

$$\frac{u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^k}{\Delta t} \Delta x \Delta y + \mathbf{H}_x \Delta y + \mathbf{H}_y \Delta x = 0,$$

lo cual puede aproximarse como

$$\frac{u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^k}{\Delta t} \Delta x \Delta y + \left(H_{i,j}^k - H_{i-1,j}^k \right) \Delta y + \left(H_{i,j+1}^k - H_{i,j}^k \right) \Delta x = 0.$$

Despejando $u_{i,j}^{k+1}$ de la expresión anterior

$$u_{i,j}^{k+1} = u_{i,j}^k - \Delta t \left[\left(\frac{H_{i,j}^k - H_{i-1,j}^k}{\Delta x} \right) + \left(\frac{H_{i,j}^k - H_{i,j-1}^k}{\Delta y} \right) \right],$$

y, en un último paso, escribiendo H en términos de a y b , es posible obtener una aproximación al valor de u para la i, j -ésima celda en un paso de tiempo $k + 1$; aquí se debe de tomar en cuenta que las componentes H , dado que es el resultado de un producto escalar, se encuentran únicamente en la dirección correspondiente al sentido del movimiento, por lo que el esquema toma la forma

$$u_{i,j}^{k+1} = u_{i,j}^k - \Delta t \left[a \frac{u_{i+1,j}^k - u_{i-1,j}^k}{\Delta x} + b \frac{u_{i,j+1}^k - u_{i,j-1}^k}{\Delta y} \right]. \quad (1.29)$$

Se debe de recordar que las evaluaciones en el caso del método de volúmenes finitos se hacen sobre los centroides de las celdas, no en los nodos de la malla.

Como ejemplo ilustrativo, a continuación, se muestra una solución al problema de obtener una aproximación a la solución de la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -0.3 \frac{\partial u}{\partial x} - 0.3 \frac{\partial u}{\partial y}$$

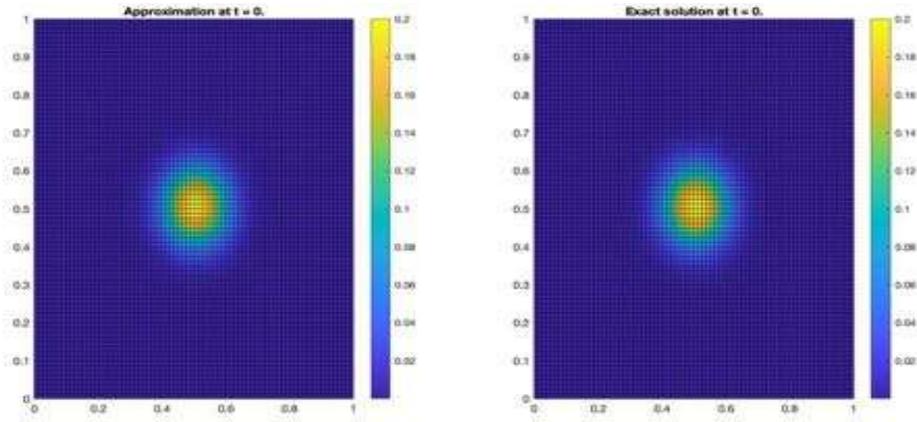
en la región limitada por $[0, 1] \times [0, 1]$, sujeto a condiciones iniciales y de frontera dadas por

$$u(x, y, t) = 0.2e^{-\frac{(x-.5-0.3t)+(y-.5-0.3t)}{.01}}$$

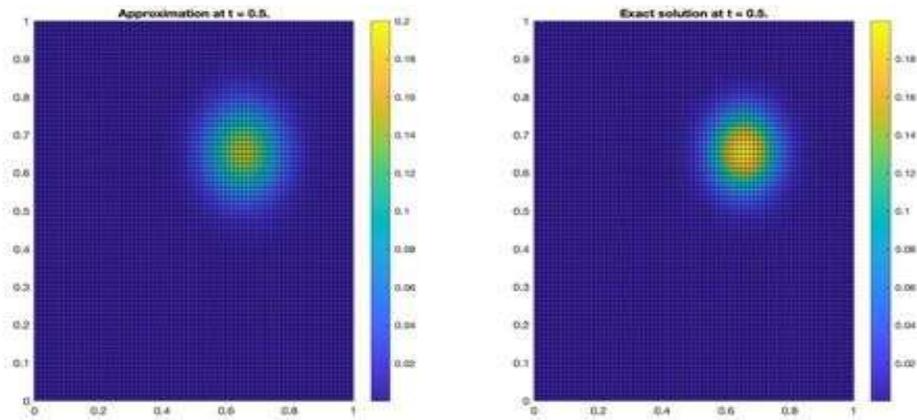
En la Figura 1.12 se muestra una comparación de la solución aproximada con este método y la solución exacta de la ecuación, en diferentes niveles de tiempo, tomando en cuenta una discretización uniforme con 81×81 nodos.

1.2.3. Esquemas de Aproximación en Diferencias Finitas

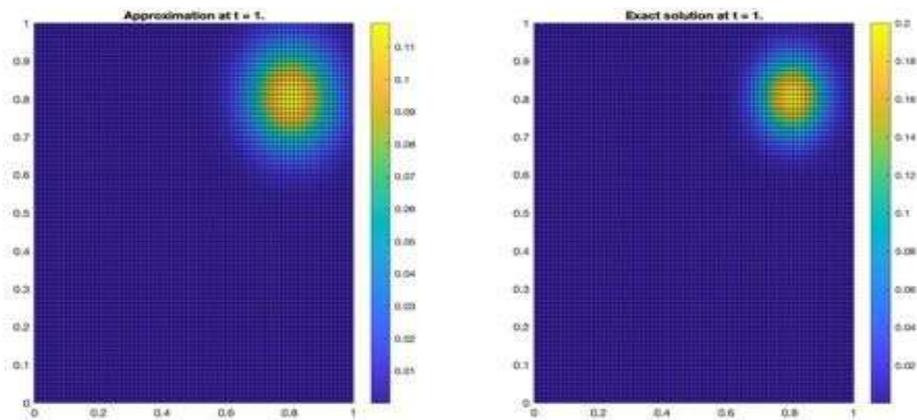
A pesar de que los esquemas numéricos de aproximación pueden ser utilizados para encontrar soluciones numéricas de alguna ecuación diferencial, es importante notar que, dependiendo de el tipo de problema con el que se trabaje existen diferentes métodos y esquemas de aproximación. En esta sección, se presentan tres tipos de aproximación ampliamente usados, los cuales, como se verá a continuación, presentan diferentes características



Resultados numéricos y exactos en $t = 0$.



Resultados numéricos y exactos en $t = 0.5$.



Resultados numéricos y exactos en $t = 1$.

Figura 1.12: Comparación de resultados numéricos y exactos, en diferentes pasos de tiempo, para el problema de Advección resuelto con volúmenes finitos en dos dimensiones espaciales.

en la solución obtenida.

Con el objetivo de mostrar los diferentes tipos de esquemas, se utilizará cada uno de ellos para encontrar una solución numérica de la ecuación de advección en una dimensión espacial y una temporal:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Esquema tipo Upwind

Los esquemas tipo Upwind se caracterizan por utilizar un estencil que depende de la solución de la ecuación para simular, de manera numérica, la dirección de propagación de la información en un flujo. Para la ecuación de advección, si se cuenta con una discretización uniforme de la malla espacial, reemplazando la derivada espacial por su aproximación en diferencias hacia atrás,

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx -a \left(\frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} \right),$$

y se reemplaza la derivada temporal por su aproximación en diferencias hacia adelante,

$$\frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\Delta t} \approx -a \left(\frac{u_i^k - u_{i-1}^k}{\Delta x} \right),$$

se puede obtener el esquema

$$u_i^{k+1} \approx u_i^k - a\Delta t \left(\frac{u_i^k - u_{i-1}^k}{\Delta x} \right).$$

Este esquema sigue un estencil como el que se presenta en la Figura 1.13.

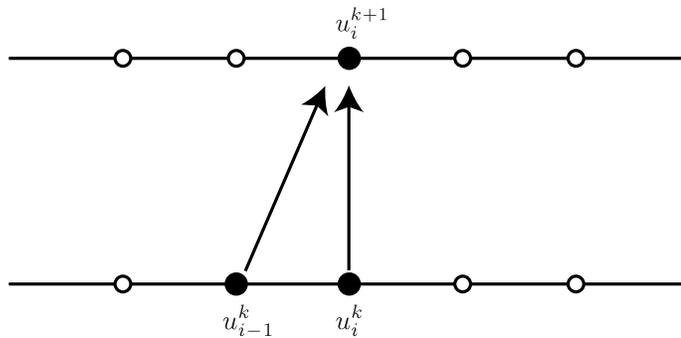


Figura 1.13: Esquema tipo Upwind.

A pesar de que este tipo de esquemas puede reproducir el comportamiento de ecuaciones diferenciales, como la ecuación de advección, una limitante importante que tiene es que, para que la solución numérica sea convergente, el fenómeno a reproducir debe de contar un movimiento que se adapte a la forma de propagación de la información en el estencil. En las Figuras 1.14 y 1.15 se muestran soluciones numéricas obtenidas por medio de este esquema para el problema

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \Omega \times [0, 5], \quad a \in \mathbb{R}$$

$$u(x, 0) = h(x, 0),$$

$$u(0, t) = h(0, t),$$

donde $\Omega = [0, 2\pi]$, y $h(x, t) = \sin(x - at)$.

En el primer caso se toma $a = 0.2$, reflejando un movimiento "hacia la derecha", mientras que en el segundo caso se toma $a = -0.2$ reflejando un movimiento en el sentido contrario. Para ambos casos se utilizó una discretización espacial uniforme tomando en cuenta 81 nodos, mientras que el intervalo temporal $[0, 5]$ se dividió uniformemente en 200 subintervalos.

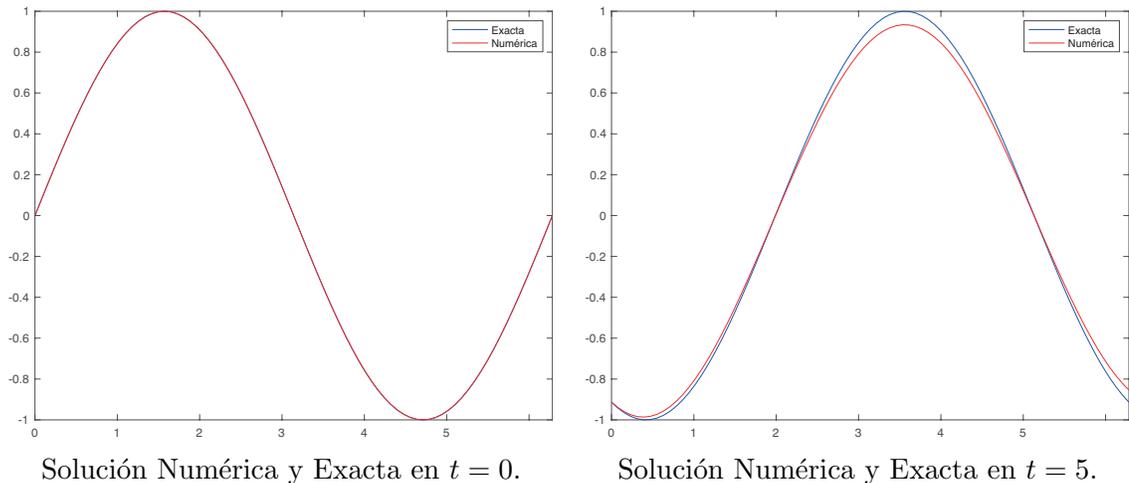


Figura 1.14: Comparación de resultados numéricos y exactos para el problema de Advección con un esquema Upwind utilizando $a = 0.2$

Es fácil notar que, cuando el fenómeno físico no se mueve en la misma dirección que el

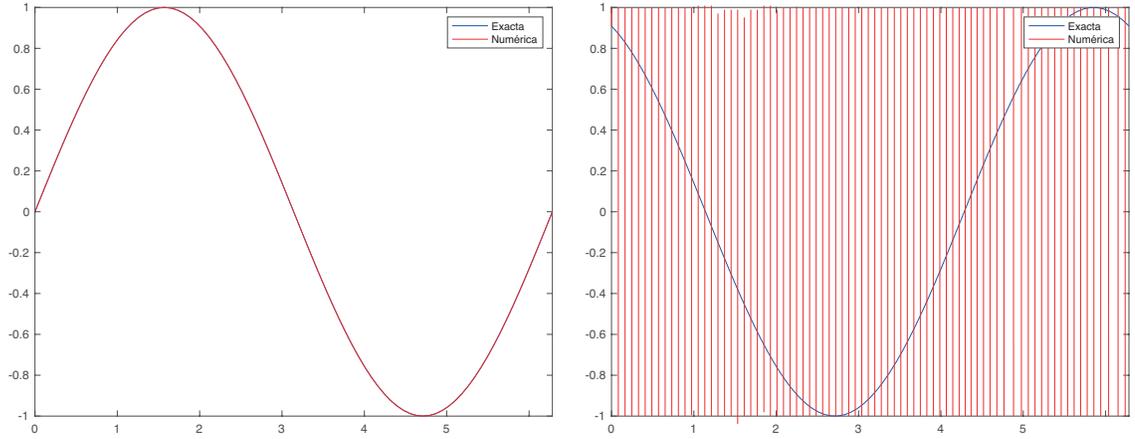


Figura 1.15: Comparación de resultados numéricos y exactos para el problema de Advección con un esquema Upwind utilizando $a = -0.2$

esquema, la solución no es convergente.

Esquema tipo Lax-Friedrichs

Los esquemas de tipo Lax-Friedrichs se crearon para contar con esquemas a los que “no les importe” la dirección del movimiento. A grandes rasgos, este tipo de esquemas utiliza una aproximación centrada en el espacio con un término de disipación de 0.5. Tomando las mismas suposiciones del caso anterior, reemplazando la derivada espacial por su aproximación en diferencias centradas,

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx -a \left(\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} \right),$$

y se reemplaza la derivada temporal por su aproximación en diferencias hacia adelante,

$$\frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\Delta t} \approx -a \left(\frac{u_{i+1}^k - u_{i-1}^k}{2\Delta x} \right),$$

se puede obtener el esquema, centrado en el espacio,

$$u_i^{k+1} \approx u_i^k - a\Delta t \left(\frac{u_{i+1}^k - u_{i-1}^k}{2\Delta x} \right).$$

Aquí, es posible agregar un término de disipación numérica en u_i^k , para lo cual se toma un promedio espacial en dicho nodo, *i.e.*,

$$u_i^k \approx \frac{u_{i+1}^k + u_{i-1}^k}{2},$$

con lo que el esquema tipo Lax-Friedrichs toma la forma

$$u_i^{k+1} \approx \left(\frac{u_{i+1}^k + u_{i-1}^k}{2} \right) - a\Delta t \left(\frac{u_{i+1}^k - u_{i-1}^k}{2\Delta x} \right).$$

El estencil relacionado a este esquema se presenta en la Figura 1.16.

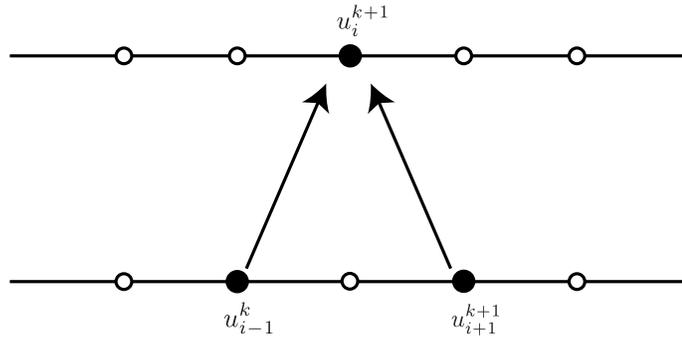


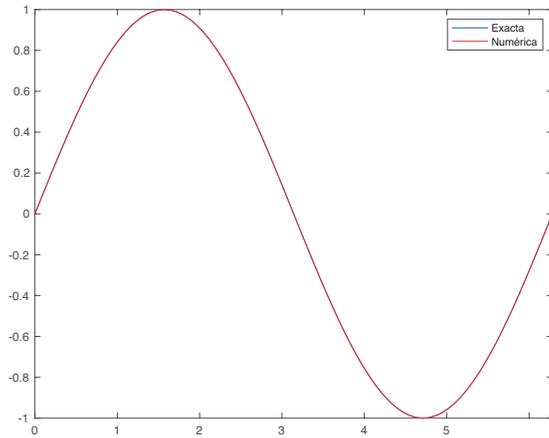
Figura 1.16: Esquema tipo Lax-Friedrichs.

Para mostrar el desempeño de este esquema, se realizan las mismas pruebas numéricas que en el caso anterior. Los resultados de las mismas pueden encontrarse en las Figuras 1.17 y 1.18.

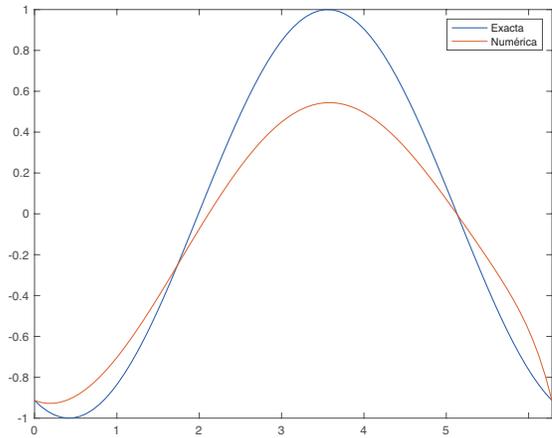
Para este tipo de esquemas, puede apreciarse que los resultados no divergen, sin importar la dirección del movimiento físico. A pesar de esto, las pruebas numéricas muestran que las aproximaciones son muy alejadas a la solución exacta.

Esquema tipo Lax-Wendroff

Los métodos de este tipo son una extensión de segundo orden de precisión en el tiempo de los esquemas de tipo Lax-Friedrichs, en los cuales se hace uso de dos niveles de tiempo para obtener una aproximación numérica en un nuevo nivel de tiempo. La expresión para

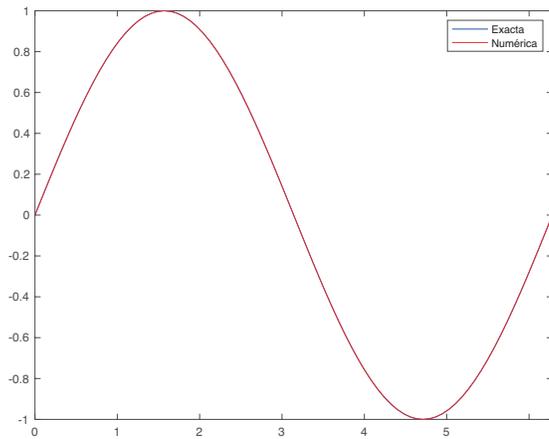


Solución Numérica y Exacta en $t = 0$.

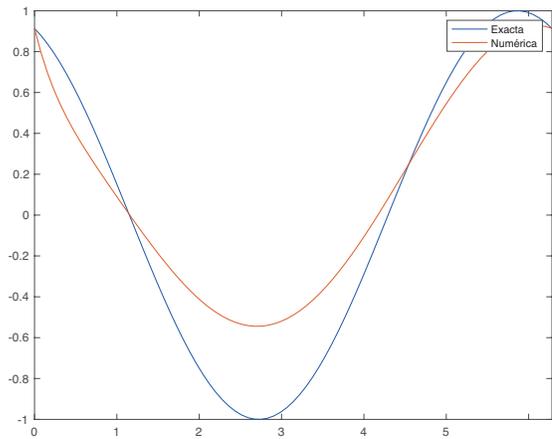


Solución Numérica y Exacta en $t = 5$.

Figura 1.17: Comparación de resultados numéricos y exactos para el problema de Advección con un esquema Lax-Friedrichs utilizando $a = 0.2$



Solución Numérica y Exacta en $t = 0$.



Solución Numérica y Exacta en $t = 5$.

Figura 1.18: Comparación de resultados numéricos y exactos para el problema de Advección con un esquema Lax-Friedrichs utilizando $a = -0.2$

este tipo de esquemas puede ser escrita como:

$$u_i^{k+1} \approx u_i^k - a\Delta t \left(\frac{u_{i+1}^k - u_{i-1}^k}{2\Delta x} \right) + (a\Delta t)^2 \left(\frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{2(\Delta x)^2} \right).$$

Es importante notar que, aunque el estencil espacial utilizado por este esquema es idéntico al de los esquemas de tipo Lax-Friedrichs (Figura 1.19), esta discretización agrega términos de dispersión.

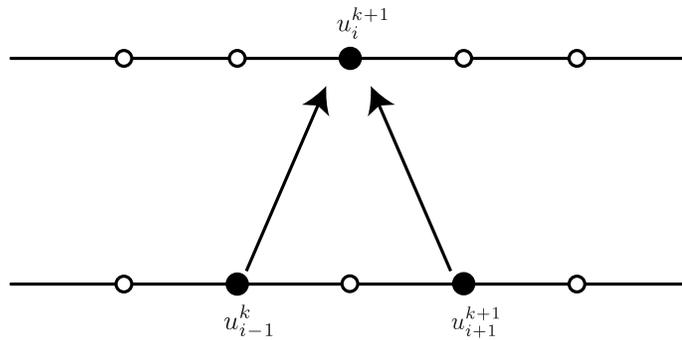


Figura 1.19: Esquema tipo Lax-Wendroff.

Nuevamente, para mostrar el desempeño de este esquema, se muestran los resultados de realizar las mismas pruebas numéricas que en los casos anteriores. Las Figuras 1.20 y 1.21 muestran los resultados obtenidos.

Como se puede apreciar en las pruebas numéricas, los esquemas de tipo Lax-Wendroff producen muy buenas aproximaciones. Esto deja claro que es importante revisar las condiciones de estabilidad, consistencia y convergencia de los métodos numéricos aplicados a la solución de ecuaciones diferenciales parciales, tema que se tratará en las siguientes secciones.

1.2.4. Análisis de Fourier

Antes de estudiar la estabilidad de los esquemas de diferencias finitas, es importante mencionar el análisis de Fourier, el cual es una de las herramientas más utilizadas en diferentes tipos de análisis de esquemas de numéricos de aproximación [53]. Para una función $u(x)$ definida en la recta real, \mathbb{R} , es posible escribir su transformada de Fourier

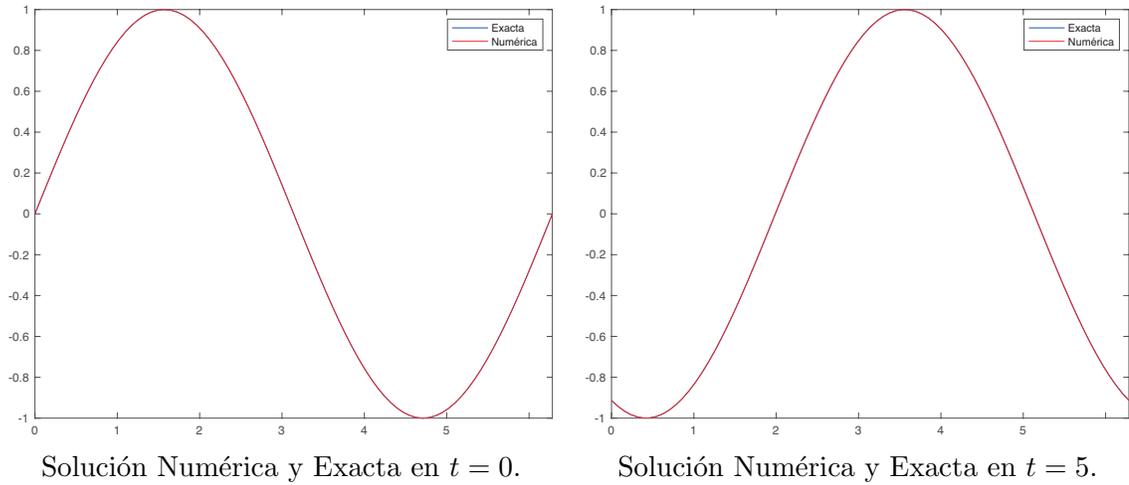


Figura 1.20: Comparación de resultados numéricos y exactos para el problema de Advección con un esquema Lax-Wendroff utilizando $a = 0.2$

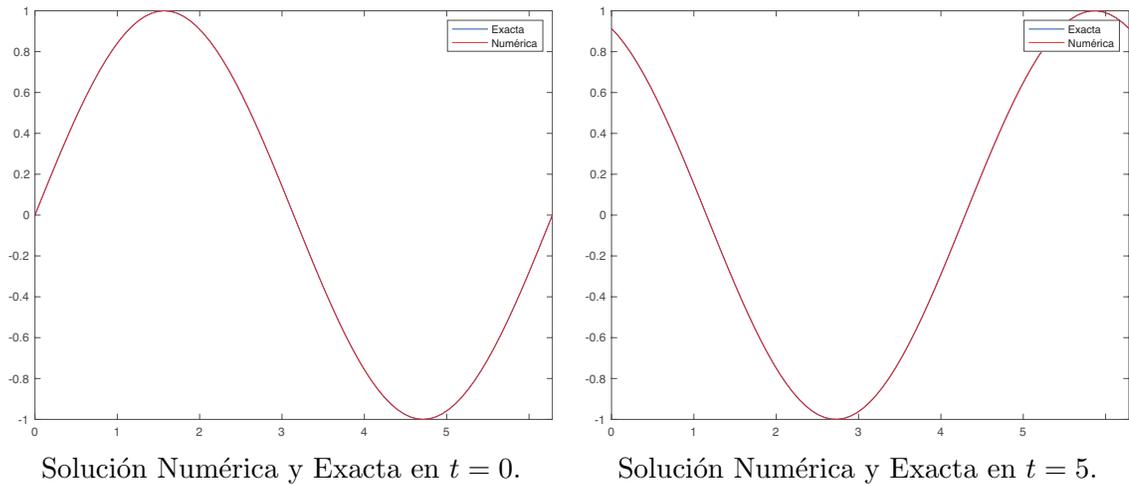


Figura 1.21: Comparación de resultados numéricos y exactos para el problema de Advección con un esquema Lax-Friedrichs utilizando $a = -0.2$

como

$$\hat{u}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwx} u(x) dx, \quad (1.30)$$

la cual es una función de una variable real, w , y se encuentra definida de manera única para u . Además, esta transformación es una representación alternativa de la función u , de la cual es posible inferir ciertas propiedades de u .

Además, es posible obtener la función u por medio de la fórmula de inversión de \hat{u} :

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iwx} \hat{u}(w) dw, \quad (1.31)$$

la cual expresa a la función u como una superposición de ondas, dadas por e^{iwx} , con diferentes amplitudes $\hat{u}(w)$.

Así como se establece la transformada de Fourier para funciones continuas, es posible escribir una versión discreta de ésta. Si se supone que u es una función de malla definida para todos los enteros m , su transformada de Fourier estará dada por

$$\hat{u}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-im\xi} u_m,$$

para $\xi \in [-\pi, \pi]$ y $\hat{u}(-\pi) = \hat{u}(\pi)$. En este caso, la fórmula de inversión puede escribirse como

$$u_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{im\xi} \hat{u}(\xi) d\xi.$$

Si se toma en cuenta que la distancia entre los puntos de la malla es h , entonces es posible realizar un cambio de variables y definir la transformada de Fourier como

$$\hat{u}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-im\xi} u_m h$$

para

$$\xi \in \left[\frac{-\pi}{h}, \frac{\pi}{h} \right],$$

y, similarmente, la fórmula de inversión será

$$u_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} e^{imh\xi} \hat{u}(\xi) d\xi.$$

Es posible encontrar una relación importante entre la norma-2 de una función y la norma-2 de su transformada:

$$\begin{aligned}
 \|\hat{u}\|_h^2 &= \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} \hat{u}(\xi) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-im\xi} u_m h d\xi \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} e^{-imh\xi} \overline{\hat{u}(\xi)} d\xi u_m h \\
 &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} e^{-imh\xi} \hat{u}(\xi) d\xi u_m h \\
 &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \overline{u_m} u_m h = \|u\|_h^2.
 \end{aligned}$$

Esta relación entre las normas es conocida como la relación de Parseval.

Además de lo anterior, si se realiza una diferenciación espacial de la fórmula de inversión (1.31), se obtiene

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iwx} iw \hat{u}(w) dw,$$

de aquí, comparando con la transformada de Fourier (1.30), es posible ver que

$$\widehat{\frac{\partial u}{\partial x}}(w) = iw \hat{u}(w).$$

Este último resultado permite ver que, bajo la transformada de Fourier, la diferenciación se convierte en una multiplicación, resultado que se utilizará más adelante en el presente trabajo.

1.2.5. Estabilidad, Consistencia y Convergencia

Como pudo observarse en las pruebas numéricas mostradas en las secciones anteriores, las aproximaciones que se obtienen por medio de métodos numéricos difieren, en algunas ocasiones, de la solución exacta. Es debido a esto que, siempre que se utiliza algún método numérico para aproximar la solución de alguna ecuación diferencial, es importante tomar en cuenta las propiedades de estabilidad, consistencia y convergencia del método. Para poder hablar de estas propiedades es necesario poder medir el tamaño del error que se

comete al momento de aproximar la solución por medio de un método numérico.

Cuando se cuenta con problemas en los cuales la solución de la ecuación diferencial debe de aproximarse tanto en el espacio como en el tiempo, como el caso de las ecuaciones que se encontrarán más adelante en este trabajo, existen diferentes maneras de medir la magnitud del error que se comete al momento de hacer la aproximación.

Anteriormente ya se ha hablado de las discretizaciones espaciales, en las cuales dividíamos el intervalo espacial $[a, b]$ en m subintervalos de medida Δx tales que $b = a + m\Delta x$. Para el caso de una discretización temporal se sigue un procedimiento similar, en este caso se debe de seleccionar algún tiempo finito T , sobre el cual se desea realizar la aproximación, y subdividirlo en N subintervalos de tiempo de medida Δt , tal que $T = N\Delta t$.

Tomando el caso, de una dimensión espacial y una temporal, en el que se tiene una aproximación $\Phi_i^n = \Phi(x_i, t_n)$ para cada punto de una malla (en el caso del método de diferencias finitas) o para cada celda de la misma (en el caso de los volúmenes finitos) entonces, si se considera a $\phi_i^n = \phi(x_i, t_n)$ como la solución exacta, se tiene que el error global de aproximación puede ser denotado como

$$E^N = \Phi^N - \phi^N.$$

Para cuantificar el error es necesario elegir una normal en la cual medir el mismo en un tiempo fijo del tiempo. LeVeque [37] menciona que una buena idea es tomar el conjunto de normas llamadas *p-normas* definidas por

$$\| E \|_P = \left(\Delta x \sum_{i=-\infty}^{\infty} | E_i |^P \right)^{1/P}, \quad (1.32)$$

las cuales son la versión discreta análoga de las normas de función-espacio

$$\| E \|_P = \left(\int_{i=-\infty}^{\infty} | E(x) |^P dx \right)^{1/P}. \quad (1.33)$$

La norma-2 ($P = 2$) es comúnmente utilizada para problemas lineales, debido a la utilidad del análisis de Fourier en este caso, es debido a esto que será la norma que se utilizará a lo largo del presente trabajo para cuantificar el error, y se denotará por $\| \cdot \|$. Una vez que se ha definido cómo se medirá el error, entonces podemos decir que un método

es *convergente* al tiempo T en la norma $\| \cdot \|$ si

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \| E^N \| = 0,$$

recordando que $N = T/\Delta t$. Además, se dirá que el método es *preciso de orden s* si

$$\| E^N \| = \mathcal{O}(\Delta t^s)$$

cuando $\Delta t \rightarrow 0$.

A pesar de contar con una forma de cuantificar el error, para todos los fines prácticos, es imposible obtener una expresión simple para el error global después de cientos de pasos en el tiempo. Debido a esto, en lugar de medir el error directamente, otro enfoque ha sido utilizado ampliamente en la bibliografía [14, 28], el cual consiste en tomar el problema desde dos puntos diferentes:

- Estudiar el error que se genera en cada paso del tiempo, mostrando que el método es consistente con la ecuación diferencial e introduce un error pequeño en cada paso de tiempo.
- Mostrar que el método es estable, por lo que estos errores locales no crecen de manera abrupta y, por lo tanto, se puede obtener una cota para el error global en términos de los errores locales.

En caso de obtener una cota para el error local, en un sentido apropiado, entonces es posible utilizar criterios de estabilidad para convertir ésta en una cota para el error global, la cual puede ser utilizada para probar que existe convergencia del método. Incluso, es posible, generalmente, determinar la tasa de convergencia y, en algunos casos, cotas razonables para el error.

En [54] se presenta el teorema fundamental en el análisis de métodos numéricos aplicados a ecuaciones de diferencias parciales, conocido como el *teorema de equivalencia de Lax*. Éste menciona que, para un método consistente para un problema lineal bien planteado de ecuaciones iniciales, el método es convergente si y sólo si es estable. Escrito de otra manera,

$$\text{convergencia} \iff \text{estabilidad} + \text{consistencia}.$$

Este teorema tiene una gran importancia ya que indica que, para poder garantizar que el método es convergente, basta con probar que el mismo es consistente y estable. Debido a

esto, se centrará la atención en explicar estas dos partes: la consistencia y la estabilidad.

Consistencia. Un esquema genera, explícito, puede escribirse como

$$Q^{n+1} = \mathcal{N}(Q^n),$$

en donde $\mathcal{N}(\cdot)$ representa el operador numérico que calcula la aproximación a la solución en un nivel de tiempo, utilizando la aproximación en el tiempo anterior. Con esto, el error de un paso, e_{1p} , puede definirse aplicando el operador numérico a la solución real en algún paso de tiempo, q^n , y comparándola con la solución exacta en el siguiente paso de tiempo, q^{n+1} :

$$e_{1p} = \mathcal{N}(q^n) - q^{n+1}.$$

Este error permite medir el error que se introduce a la solución aproximada en cada paso de tiempo. Gracias a esto, es posible definir el *error local de truncamiento* dividiendo e_{1p} entre el paso de tiempo Δt :

$$\tau^n = \frac{1}{\Delta t} [\mathcal{N}(q^n) - q^{n+1}].$$

Una vez definido esto, en [14, 53], se define un esquema como *consistente* con la ecuación diferencial que aproxima si

$$\tau = 0, \text{ mientras } \Delta t \rightarrow 0.$$

Estabilidad. Cuando se trabaja con esquemas de aproximación para ecuaciones diferenciales parciales que dependen del tiempo, el error global es un tema de gran importancia, dado que puede expresarse como una relación de recurrencia que involucra al error local de truncamiento. Una aproximación Q^n en un paso de tiempo n y un error E^n puede escribirse como

$$Q^n = q^n + E^n,$$

si a esta aproximación se le aplica un método numérico para obtener una aproximación en un siguiente nivel de tiempo, Q^{n+1} ,

$$Q^{n+1} = \mathcal{N}(Q^n) = \mathcal{N}(q^n + E^n),$$

el error global puede expresarse como

$$\begin{aligned}
 E^{n+1} &= Q^{n+1} - q^{n+1}, \\
 &= \mathcal{N}(q^n + E^n) - q^{n+1}, \\
 &= \mathcal{N}(q^n + E^n) - \mathcal{N}(q^n) + \mathcal{N}(q^n) - q^{n+1}, \\
 &= [\mathcal{N}(q^n + E^n) - \mathcal{N}(q^n)] + \Delta t \tau^n.
 \end{aligned}$$

Puede observarse en este desarrollo que el nuevo error global se expresa como la suma de dos términos: $\mathcal{N}(q^n + E^n) - \mathcal{N}(q^n)$, el cual mide los efectos del esquema numérico sobre el error anterior y $\Delta t \tau^n$, que es el nuevo error de paso que se introduce en este paso de tiempo. Dado que las condiciones de consistencia permiten acotar el error de paso, es necesario, ahora, encontrar una manera de acotar los efectos del esquema sobre los errores anteriores.

El análisis de estabilidad en la norma 2 es comúnmente utilizado, para ecuaciones diferenciales lineales, debido a que el análisis de Fourier permite simplificar el problema. De aquí parte el método de *von Neumann* para análisis de estabilidad, éste menciona que un esquema que aproxima una ecuación diferencial parcial *es estable* si los errores cometidos en un paso de tiempo del cálculo no causan que los errores crezcan mientras el cálculo continua [51].

Para ejemplificar este método, considérese la ecuación de difusión en una dimensión espacial,

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t),$$

definida en un intervalo espacial de medida \mathcal{L} . Un esquema en diferencias finitas para esta ecuación se obtiene de intercambiar las derivadas parciales por su aproximación en diferencias finitas. En este caso, esto quiere decir

$$\frac{u(x_j, t_{n+1}) - u(x_j, t_n)}{\Delta t} = \nu \left(\frac{u(x_{j+1}, t_n) - 2u(x_j, t_n) + u(x_{j-1}, t_n)}{(\Delta x)^2} \right), \quad (1.34)$$

lo cual, en aras de la simplicidad, puede escribirse como

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \nu \left(\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} \right),$$

donde los subíndices hacen referencia al punto en el espacio, mientras que los superíndices

hacen referencia al paso en el tiempo. De aquí, es posible despejar el término de la solución en un nuevo nivel de tiempo u_j^{n+1} ,

$$u_j^{n+1} = u_j^n + c (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n),$$

en donde

$$c = \nu \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}.$$

Si se define el error de redondeo, Φ_j^n , como

$$\Phi_j^n = Q_j^n - u_j^n,$$

donde u_j^n es la solución real de la ecuación, evaluada en el punto (x_j, t_n) de la malla, mientras que Q_j^n es la solución numérica obtenida con una precisión aritmética finita. Dado que la solución, u_j^n debe satisfacer de manera exacta la ecuación discreta, entonces el error Φ_j^n debe de satisfacer la ecuación discreta y, por lo tanto,

$$\Phi_j^{n+1} = \Phi_j^n + c (\Phi_{j+1}^n - 2\Phi_j^n + \Phi_{j-1}^n), \quad (1.35)$$

es la relación de recurrente para el error. Además, la variación espacial del error puede expresarse en términos de series de Fourier, en el intervalo \mathcal{L} como

$$\Phi(x) = \sum_{m=1}^M R_m e^{ir_m x},$$

donde $r_m = \frac{\pi m}{L}$ con $m = 1, 2, \dots, M$ y $M = \mathcal{L}/\Delta x$, es un número de onda; además de que se asume que la amplitud del error R_m es una función del tiempo. Dado que las ecuaciones (1.34) y (1.35) muestran que tanto la aproximación numérica, u_j^{n+1} , como el error, Φ_j^{n+1} , tienen el mismo comportamiento de crecimiento o decaimiento con respecto del tiempo, y el error tiende a crecer o decaer de manera exponencial con el tiempo, es posible asumir que la amplitud varía exponencialmente con el tiempo y, por lo tanto, es posible escribir

$$\Phi(x, t) = \sum_{m=1}^M e^{at} e^{ir_m x},$$

donde a es una constante.

Dado que el comportamiento de cada término de la serie es igual al de la serie en sí,

i.e. la diferencia para el error el lineal, es suficiente con considerar el crecimiento del error de un término arbitrario

$$\Phi_m(x, t) = e^{at} e^{ir_mx}.$$

Ya que se cuenta con una expresión para el error, es posible estudiar las características de la estabilidad utilizando ésta sin pérdida de generalidad. Para hacer esto, se toman en cuenta las siguientes expresiones para el error

$$\begin{aligned}\Phi_j^n &= e^{at} e^{ir_mx}, \\ \Phi_j^{n+1} &= e^{a(t+\Delta t)} e^{ir_mx}, \\ \Phi_{j+1}^n &= e^{at} e^{ir_m(x+\Delta x)}, \\ \Phi_{j-1}^n &= e^{at} e^{ir_m(x-\Delta x)},\end{aligned}$$

las cuales, al ser sustituidas en la ecuación (1.35), producen la expresión

$$e^{a(t+\Delta t)} e^{ir_mx} = e^{at} e^{ir_mx} + c \left(e^{at} e^{ir_m(x+\Delta x)} - 2e^{at} e^{ir_mx} + e^{at} e^{ir_m(x-\Delta x)} \right),$$

que puede ser simplificada como

$$e^{a\Delta t} = 1 + c \left(e^{ir_m\Delta x/2} + e^{-ir_m\Delta x} - 2 \right), \quad (1.36)$$

y muestra el comportamiento del crecimiento del error en cada paso de tiempo. Es posible simplificar aún más la expresión anterior tomando en cuenta que

$$\sin \left(\frac{r_m\Delta x}{2} \right) = \frac{e^{ir_m\Delta x/2} - e^{-ir_m\Delta x/2}}{2i},$$

con lo que

$$\sin^2 \left(\frac{r_m\Delta x}{2} \right) = -\frac{e^{ir_m\Delta x} + e^{-ir_m\Delta x} - 2}{4},$$

por lo cual la ecuación (1.36) puede ser escrita como

$$e^{a\Delta t} = 1 - 4c \sin^2 \left(\frac{r_m\Delta x}{2} \right). \quad (1.37)$$

Ahora, definiendo el factor de amplificación R como

$$R = \frac{\epsilon_j^{n+1}}{\epsilon_j^n} = \frac{e^{a(t+\Delta t)} e^{ir_mx}}{e^{at} e^{ir_mx}} = e^{a\Delta t},$$

para que el error quede acotado, la condición necesaria y suficiente es que $|R| \leq 1$, lo cual quiere decir que

$$\left| 1 - 4c \sin^2 \left(\frac{r_m \Delta x}{2} \right) \right| \leq 1.$$

Dado que el término $4c \sin^2(r_m \Delta x/2)$ es siempre positivo, entonces la expresión anterior puede reescribirse como

$$4c \sin^2(r_m \Delta x/2) \leq 2,$$

ahora, debido a que $\sin^2(r_m \Delta x/2)$ puede tomar valores entre 0 y 1, para que la condición se satisfaga es necesario que

$$4c \leq 2,$$

o,

$$c \leq \frac{1}{2},$$

por lo tanto, la condición de estabilidad estará dada por

$$\nu \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2}. \quad (1.38)$$

La ecuación (1.38) permite calcular el tamaño de Δt para que, con un Δx dado, el esquema sea estable.

Capítulo 2

Elementos de Discretización

A pesar de que se pueden utilizar los esquemas clásicos de diferencias finitas en regiones que no son rectangulares, como se mostró en el capítulo anterior, cuando la geometría de la región de estudio, o la distribución inicial de datos, no permiten realizar una malla rectangular o uniforme del área de estudio. Los métodos clásicos que se han revisado hasta ahora no pueden ser utilizados para encontrar una solución numérica, esto es debido a que estos, desde su formulación, toman en consideración que la separación entre los nodos es uniforme a lo largo de toda la región.

En estos casos es importante contar con

- una manera de hacer un mallado de la región de interés y, además,
- esquemas que no tomen en consideración una distribución uniforme de los nodos de la malla.

En el presente capítulo se mostrarán algunos de los avances que se han hecho al respecto de cada uno de estos puntos.

2.1. Generación Numérica de Mallas

La generación numérica de mallas es, desde hace algunos años, una de las herramientas de uso común en la solución numérica de ecuaciones diferenciales sobre regiones que cuentan con una forma arbitraria. La idea básica trata de resolver ecuaciones diferenciales parciales sobre una región física complicada, transformando primeramente esta región de tal manera que el resultado de dicha transformación sea un cuadrado. Cuando se ha logrado esto, se puede resolver la ecuación diferencial usando los esquemas vistos de diferencias

finitas.

Siguiendo a Tinoco [63], se puede decir que

“Las mallas generadas numéricamente han proporcionado la manera de solucionar el problema de la forma de la frontera en los métodos de diferencias finitas, y estas mallas también sirven para construir redes de elemento finito. Con dichas mallas todos los cálculos numéricos, ya sean de diferencias finitas o de elemento finito, son implementados sobre una malla computacional cuadrada sin importar la forma y configuración de la región física”.

Históricamente, los procedimientos para generar mallas de manera numérica más usados han sido básicamente de dos tipos:

1. Construcción por interpolación algebraica. Los cuales van desde una simple normalización de las curvas frontera, hasta la interpolación transfinita de las mismas.
2. Solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales. Las cuales pueden ser elípticas, parabólicas o hiperbólicas.

La generación de mallas de por medio de interpolación algebraica es más rápida, sin embargo, las mallas generadas por ecuaciones diferenciales son más suaves.

2.1.1. Generación Algebraica

La generación de una malla puede realizarse interpolando los valores en las fronteras. Esto puede hacerse por medio de la construcción de una función definida sobre toda la región lógica, de tal manera que, en la frontera, dicha función coincida con los valores prescritos. La evaluación de esta función, para los valores en el interior de la región lógica, proporcionará un sistema de coordenadas curvilíneo que definirá la malla buscada.

Los métodos de generación algebraica son extensivamente usados para aprovechar sus dos principales ventajas: la generación de la malla es rápida, en comparación a los métodos de ecuaciones diferenciales parciales, y se cuenta con un control directo sobre la localización de los puntos de la malla. Sin embargo, una desventaja importante que tienen estos métodos es que no garantizan la suavidad de la malla; las discontinuidades de las pendientes en la frontera pueden fácilmente propagarse al interior de la región.

Entre los tipos de interpolación más usados pueden mencionarse la interpolación de Lagrange, de Hermite, por splines, por funciones trigonométricas, entre otros. En particular, el método de Interpolación Transfinita, que se presenta a continuación, es uno de los más usados para generar mallas de manera algebraica.

Interpolación Transfinita

Este método, también llamado **TFI** por su nombre en inglés (Transfinite Interpolation), es bastante simple y puede usarse para generar mallas estructuradas de una gran cantidad de regiones por medio de interpolación algebraica. Un estudio detallado de este método puede encontrarse en [20, 32–34, 45, 70].

Para generar una malla sobre una región arbitraria Ω , es necesario seleccionar los lados derecho $x_r(\eta)$, izquierdo $x_l(\eta)$, inferior $x_b(\xi)$ y superior $x_t(\xi)$ de la frontera de Ω , como se muestra en la Figura 2.1. Se supone, entonces, que la descripción de la frontera buscada está dada por cuatro ecuaciones paramétricas:

$$\begin{aligned} x_b(\xi), \quad x_t(\xi), \quad 0 < \xi < 1, \\ x_l(\eta), \quad x_r(\eta), \quad 0 < \eta < 1. \end{aligned}$$

La orientación debe de conservarse y, para que x sea continua, se debe cumplir que en las esquinas correspondientes los mapeos coincidan en el mismo punto, esto es

$$\begin{aligned} x_b(0) &= x_l(0), \\ x_b(1) &= x_r(0), \\ x_r(1) &= x_t(1), \\ x_t(0) &= x_l(1). \end{aligned}$$

Una vez que se cuenta con lo anterior, la fórmula básica que usa la interpolación transfinita, por medio de la aplicación de estos cuatro mapeos, para generar una malla sobre Ω es

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\xi, \eta) &= (1 - \eta)x_b(\xi) + \eta x_t(\xi) + (1 - \xi)x_t(\eta) + \xi x_l(\eta) \\ &\quad - [\xi \eta x_t(1) + \xi(1 - \eta)x_b(1) + \eta(1 - \xi)x_t(0) + (1 - \xi)(1 - \eta)x_b(0)], \end{aligned}$$

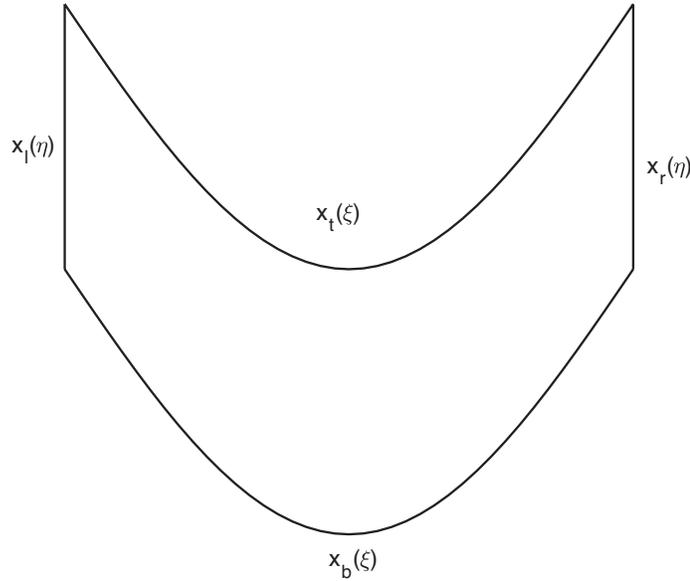


Figura 2.1: Región dada por cuatro ecuaciones paramétricas.

y la malla se genera como la imagen bajo \mathbf{x} del rectángulo

$$R = \{(\xi, \eta) \mid 0 \leq \xi \leq 1; 0 \leq \eta \leq 1\}.$$

Utilizando este método es posible generar mallas de una gran cantidad de regiones y que pueden ser utilizadas por los métodos de Diferencias Finitas y Volúmenes Finitos. A continuación, se muestran algunas mallas generadas utilizando este método.

Las primeras dos regiones, mostradas en la Figura 2.2, son regiones polinomiales denotadas por *SIN* y *CAB*.

Las siguientes dos regiones, mostradas en la Figura 2.3, son aproximaciones polinomiales a regiones geográficas reales, en este caso corresponden a los lagos de Pátzcuaro y Zirahuén en Michoacán, México, las cuales se denotan por *PATZ* y *ZIRA*. En este caso, las mallas se muestran de gran tamaño para poder observar los detalles de las mallas.

Es fácil notar que, cuando se trabaja con regiones de geometría no muy complicada, este método puede generar mallas con cualidades deseables; sin embargo, cuando la frontera de la región Ω es muy irregular, este método transmitirá dichas irregularidades a lo largo

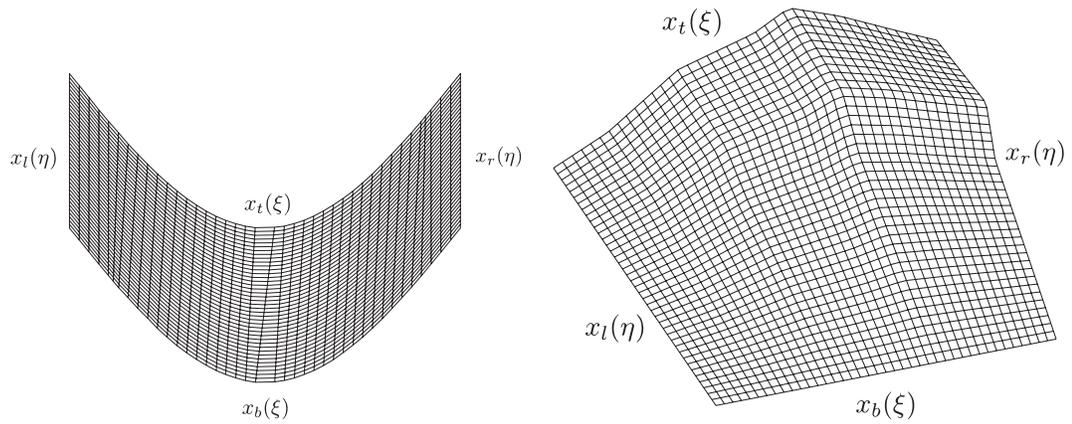


Figura 2.2: Mallas Generadas con TFI para la regiones SIN y CAB.

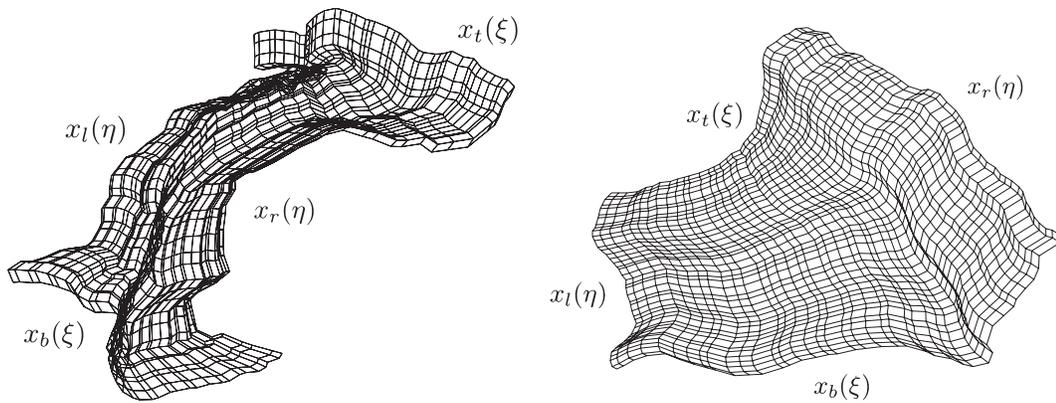


Figura 2.3: Mallas generadas con TFI para las regiones PATZ y ZIRA.

de toda la malla, por lo que, en muchas ocasiones, este método dará mallas que no son convexas.

2.1.2. Generación por Medio de Ecuaciones Diferenciales

Si en lugar de utilizar interpolación para generar una malla de una región arbitraria Ω , se toma como un problema de valores a la frontera, entonces es posible la generación de ésta por medio de la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales parciales. Si se especifican valores fijos sobre toda la frontera de la región física, las ecuaciones a resolver serán elípticas; por su parte, si dicha especificación se hace únicamente sobre una porción de la frontera, las ecuaciones pueden ser parabólicas o hiperbólicas.

Generación Elíptica

Generar mallas por medio de solución de ecuaciones diferenciales parciales elípticas garantiza que el mapeo entre las regiones lógica y física sea uno a uno debido a los llamados principios extremales, eso es, los extremos de las soluciones no pueden ser alcanzados en el interior de la región lógica [14]. Además, los sistemas de coordenadas generados son suaves y, más aún, las discontinuidades en las primeras derivadas que puedan presentarse en la frontera de la región, no se propagan al interior de ésta.

El generador elíptico por excelencia se obtiene al resolver el sistema de Laplace

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} &= 0,\end{aligned}$$

llamado de AH [2] o de longitud. La solución de este sistema produce a la distribución de líneas coordenadas más suave posible sobre el campo, para los datos asignados en la frontera. Además, las líneas estarán más acumuladas cerca de las partes convexas de la frontera. En las Figuras 2.4 y 2.5 se presentan algunas mallas generadas utilizando el generador elíptico de Laplace.

Se han realizado variantes del sistema anterior, los cuales se obtienen agregando, en el lado derecho de las ecuaciones, algunas funciones de control; esto es, el sistema a resolver

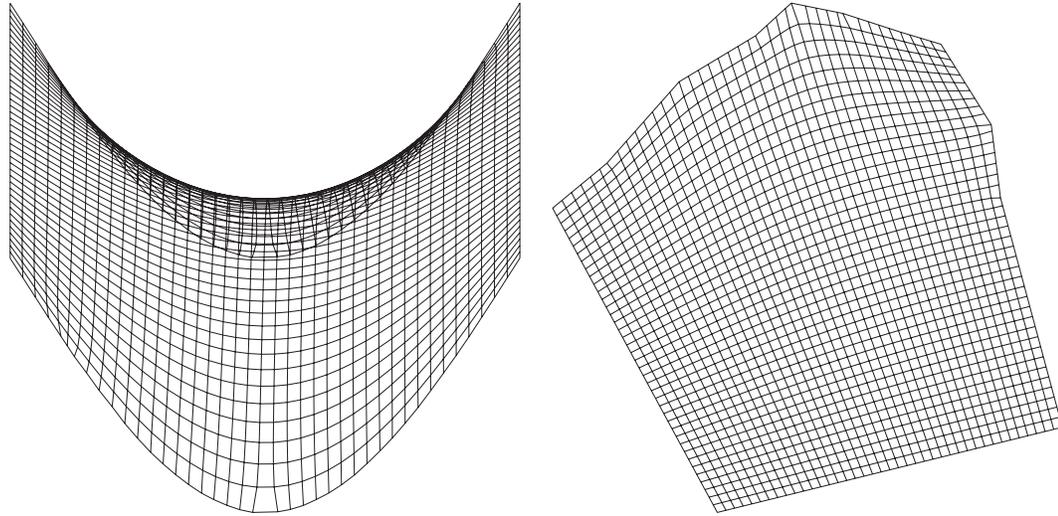


Figura 2.4: Mallas generadas para las regiones SIN y CAB por medio de un generador de Laplace.

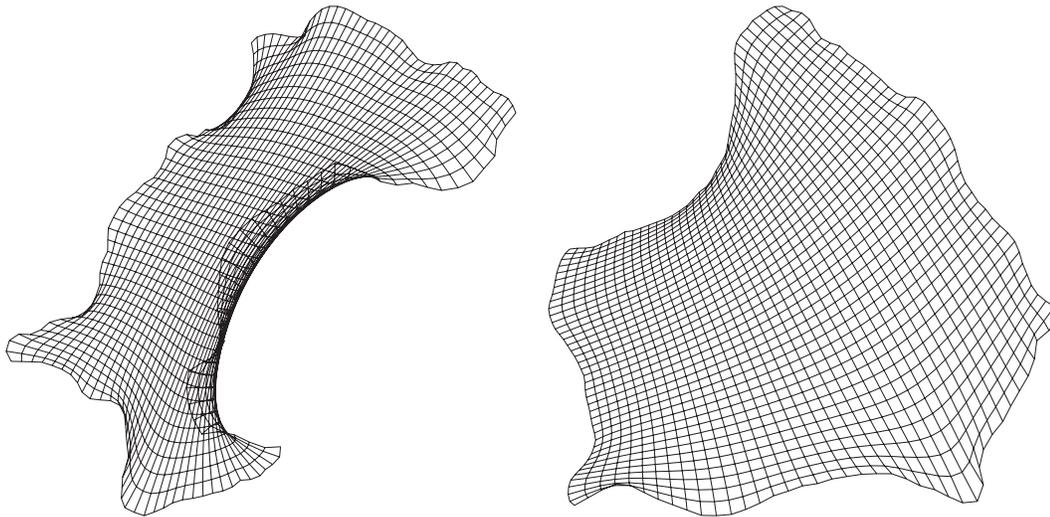


Figura 2.5: Mallas generadas para la regiones PATZ y ZIRA por medio de un generador de Laplace.

tiene la forma

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} &= P, \\ \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} &= Q,\end{aligned}$$

en donde P y Q juegan el papel de “controlar” el esparcimiento y orientación de las líneas coordenadas. A pesar de que la introducción de estas funciones puede hacer que se pierdan los principios extremales, aún es posible obtener mapeos uno a uno con una cierta elección éstas.

El generador de Winslow, o Thompson-Thames-Mastin homogéneo [55], es uno de los generadores elípticos más ampliamente usado. A grandes rasgos, es el generador de longitud; sin embargo, ahora va de la región física a la región lógica. Una modificación de este método, llamada TTM no homogéneo, es usada para atraer (o repeler) puntos de la malla hacia puntos especificados en el dominio lógico, además de que se puede hacer lo mismo con las líneas coordenadas. Una discusión más general de los sistemas generadores elípticos puede verse en [73]. En las Figuras 2.6 y 2.7 se presentan algunas mallas generadas utilizando el generador Winslow.

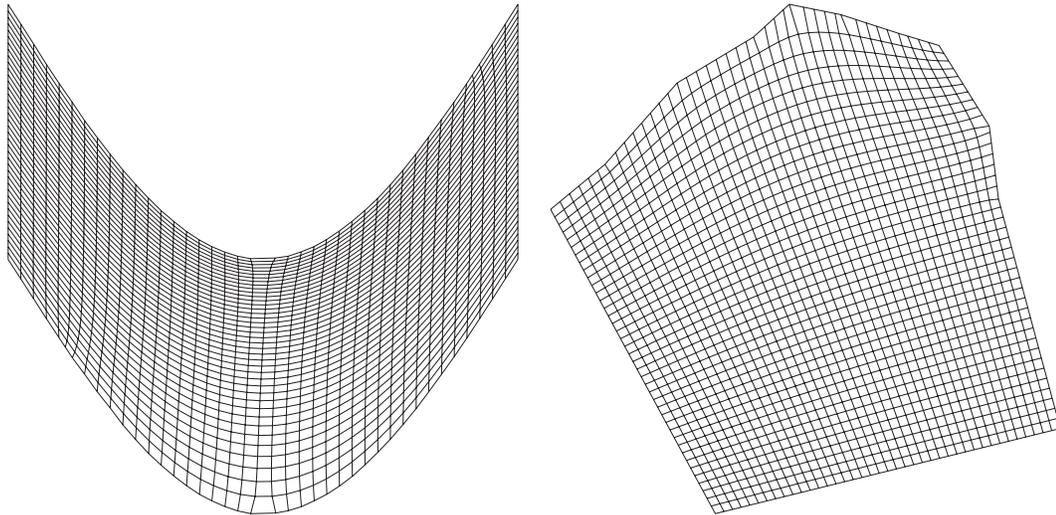


Figura 2.6: Mallas generadas para las regiones SIN y CAB por medio de un generador de Winslow.

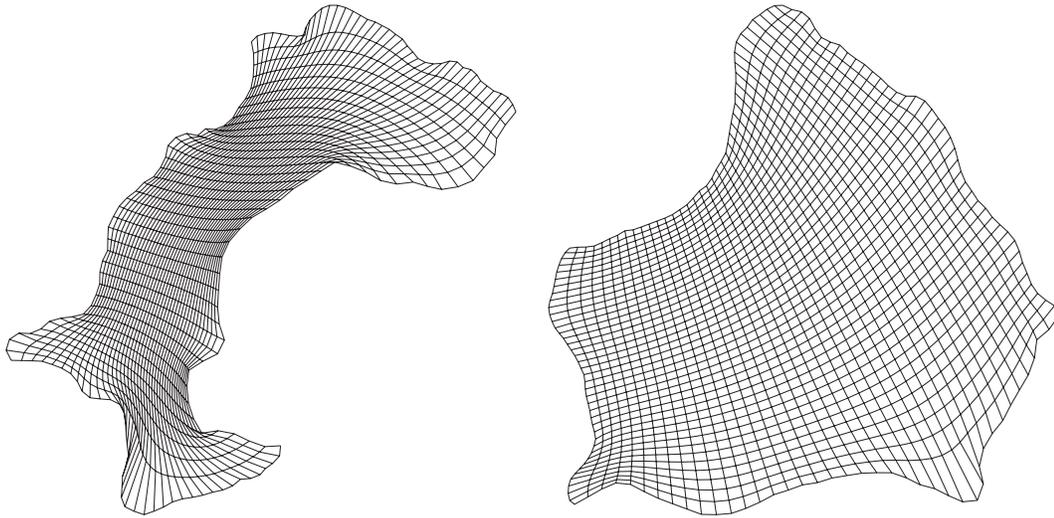


Figura 2.7: Mallas generada para las regiones PATZ y ZIRA por medio de un generador de Winslow.

Generación Hiperbólica y Parabólica

Cuando el sistema de ecuaciones diferenciales a resolver es parabólico o hiperbólico, debe de resolverse de manera numérica, marchando en la dirección de una de las coordenadas curvilíneas entre dos curvas de frontera. En ninguno de estos casos es posible especificar una frontera completa.

Un sistema parabólico puede ser aplicado para generar mallas entre dos fronteras de una región doblemente conexa, con cada una de éstas especificadas de antemano. Por su parte, un sistema hiperbólico permite especificar sólo una frontera y, por lo tanto, es un caso de interés únicamente en los casos en que la región física no es acotada.

Generación por Mapeo Conforme y Cuasi-conforme

Uno de los métodos más usados de manera clásica es el de mapeo conforme, el cual permite construir mapeos entre dominios planos. De manera simple, un mapeo conforme en el plano complejo preserva ángulos entre curvas y la orientación de estos. Un mapeo f del plano complejo en él mismo es conforme si f es analítica; en otras palabras, si las partes real y compleja de f satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann. Debido a esto, una manera de construir un mapeo de esta forma es resolviendo este sistema de ecuaciones

diferenciales. Además, un mapeo conforme es ortogonal y tiene jacobiano estrictamente positivo.

Una de las ventajas de este método es que, al transformar la ecuación diferencial parcial a resolver, se introducen una cantidad pequeña de términos. Sin embargo, los sistemas generados de esta manera son muy rígidos en el sentido en que se puede ejercer muy poco control sobre la distribución de los puntos de la malla. No siempre es posible construir un mapeo conforme del cuadrado unitario a una región plana general, que tenga cuatro lados, a menos de que la razón de la “longitud” y el “ancho” de ésta esté restringida a cierto valor constante particular llamado módulo de conformidad. Cuando se tiene alguna manera de calcular dicha constante [50], la cual depende de cada región, se puede generar un mapeo cuasi-conforme [36].

En las Figuras 2.8 y 2.9 se presentan algunas mallas generadas utilizando la técnica de mapeo conforme.

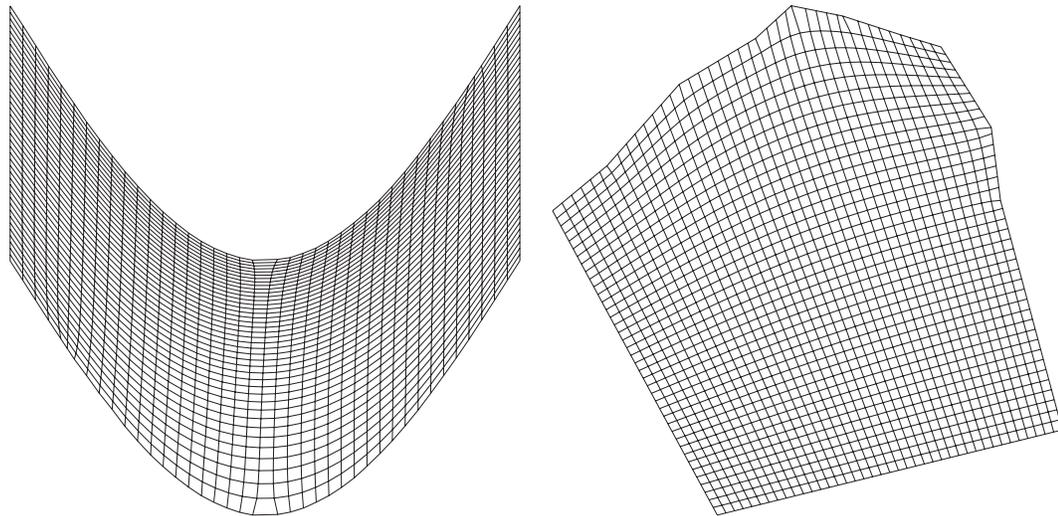


Figura 2.8: Mallas Generadas para las regiones SIN y CAB por medio de un mapeo conforme.

Para una revisión más a fondo, referente a la parte teórica y computacional de mapeos conformes, así como algunas de sus aplicaciones en generación de mallas, es posible revisar los trabajos en [27, 43, 68].

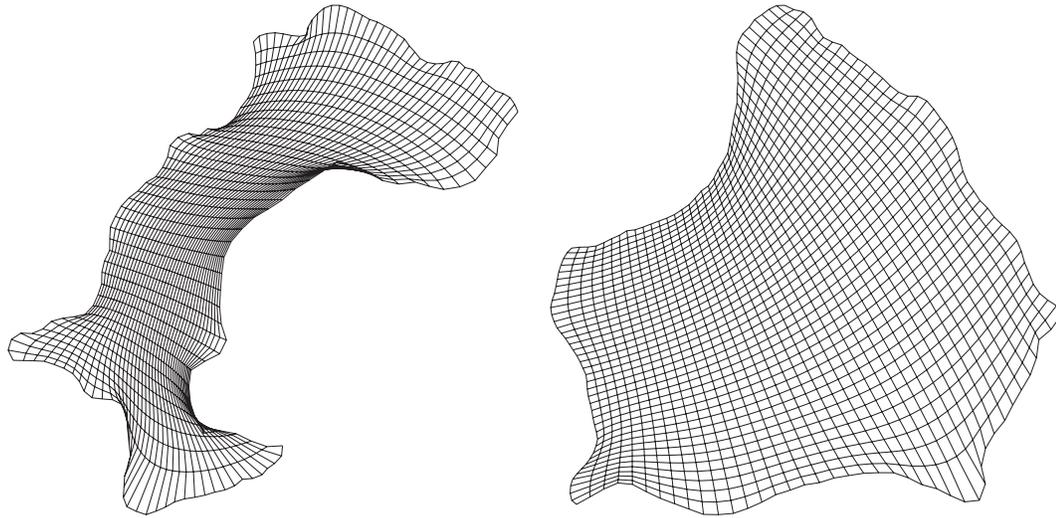


Figura 2.9: Mallas generadas para la regiones PATZ y ZIRA por medio de un mapeo conforme.

Mallas Ortogonales

Al resolver ecuaciones diferenciales parciales, cuando se busca que el error de truncamiento se vea reducido, las mallas que cuentan con la característica de que sus líneas coordenadas sean ortogonales, o casi ortogonales, son las más utilizadas [40]. Además, este tipo de mallas tienen la ventaja de que, al transformar la ecuación a resolver, aparecen menos términos que para una malla no ortogonal y las condiciones de frontera se pueden representar más fácilmente.

Una desventaja de este tipo de mallas es que requiere de una parametrización muy particular de la frontera [21], esto hace que, en la práctica, encontrar una malla ortogonal para una región dada puede ser extremadamente difícil. En general, los sistemas ortogonales no necesitan ser conformes, y pueden ser generados tanto por sistemas hiperbólicos como elípticos.

2.1.3. Generación Variacional Continua

La generación variacional continua puede considerarse un caso de los métodos de ecuaciones diferenciales. La principal diferencia que existe en ellos es que los parámetros relacionados al control de las propiedades de la malla aparecen en integrales de superficie, y no en forma de términos asociados a las fuentes. En estos casos, la malla generada es

determinada tomando el óptimo de dichas integrales, esto produce el sistema diferencial generador en forma de Ecuaciones de Euler-Lagrange.

Los primeros trabajos relacionados con la generación variacional continua fueron formulados por Brackbill y Saltzman, los cuales presentan en [8] un método modificado de Winslow que permite, de manera adaptiva, variar los tamaños y la ortogonalidad de las celdas de la malla, tomando en cuenta la zona en la cual se encuentran. Posteriormente, Steinberg y Roache proponen en [52] un método con el cual es posible controlar las propiedades de área o volumen de las celdas, la separación entre los nodos de la malla y los ángulos entre las líneas coordenadas. Además de estos trabajos, también es posible encontrar métodos que siguen un enfoque similar desarrollados por Roache y Steinberg [46], Castillo, Steinber y Roache [11–13].

En estos trabajos se puede resaltar que los funcionales continuos clásicos de área, longitud, suavidad y ortogonalidad son presentados. Algunos de los resultados más notables son:

- Se muestra que la combinación de los funcionales de área y longitud producen mallas razonables.
- Las ecuaciones de Euler-Lagrange en el funcional de longitud son lineales, desacopladas y elípticas.
- Las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas al funcional de área son acopladas, no lineales y no siempre elípticas.
- Se hace notar que uno de los problemas más comunes es que muchas veces las mallas generadas no son convexas.
- Se logran buenos resultados realizando combinaciones convexas de los funcionales de área, longitud y ortogonalidad.

2.1.4. Generación Variacional Discreta

La generación variacional discreta surge de las ideas establecidas por la generación variacional continua. En este caso, en lugar de utilizar integrales de superficie para los parámetros relacionados al control de las propiedades de la malla, se utilizan sumas finitas. El primer trabajo presentado en este campo es presentado por Castillo [9], en dicho trabajo se muestra un método variacional directo que controla las propiedades de longitud entre los

puntos de la malla y las áreas de las celdas. En este caso la malla se genera minimizando un funcional definido sobre los puntos interiores de la misma. Vale la pena recalcar, de este trabajo, que los funcionales discretos de área y longitud son presentados y, los cuales, son una discretización de los correspondientes funcionales continuos presentados por Steinberg y Roache.

A partir de este trabajo se han desarrollado una gran cantidad de trabajos relacionados a métodos directos. Algunos de los más importantes por mencionar son:

1. Barrera *et al.* proponen en [7] una forma de generar funcionales discretos que se basa en una manera diferente de atacar la discretización de funcionales continuos. En este trabajo también se presentan nuevos funcionales discretos que permiten un control mayor de las propiedades de la malla. Además, presentan algunos ajustes de parámetros para evitar que se generen mallas no convexas.
2. Ivanenko presenta en [29–31] algunas modificaciones al funcional de suavidad con las cuales soluciona, en gran medida, el problema de no convexidad de mallas óptimas. Por medio de un ingenioso ajuste de parámetros relativos al funcional y al método de optimización, se obtienen mallas convexas para regiones que, hasta ese momento, eran consideradas en extremo complicadas.
3. De manera similar, Barrera realiza una modificación del funcional de suavidad. Con dicha modificación, Barrera logra mallas óptimas y convexas sobre una gran variedad de regiones [5].
4. Tomando en cuenta el trabajo de Barrera, Tinoco presenta nuevos funcionales de suavidad adaptiva y suavidad bilateral, así como funcionales de área adaptiva y área bilateral [63], mostrando, además, que es posible generar mallas convexas y suaves, de una gran variedad de regiones complejas, cuando se hacen combinaciones de estos funcionales.
5. En 2005, Domínguez presenta un algoritmo para obtener mallas convexas utilizando funcionales de área y ortogonalidad, logrando mallas quasiortogonales convexas e introduce el concepto de ϵ -convexidad, el cual permite hacer un planteamiento adecuado del problema de generar mallas convexas [16].
6. En 2009, Barrera *et al.* presentan en [4] un método para generar mallas armónicas y adaptivas, el cual es capaz de generar mallas de regiones muy complicadas. Este es el método usado para generar las mallas del presente trabajo. Debido a esto, en las

Figuras 2.10 y 2.11 se presentan algunas mallas generadas utilizando este método, para las mismas regiones presentadas en el método de Interpolación Transfinita. Es importante hacer notar que, utilizando este método, todas las mallas que se presentan son convexas y suaves.

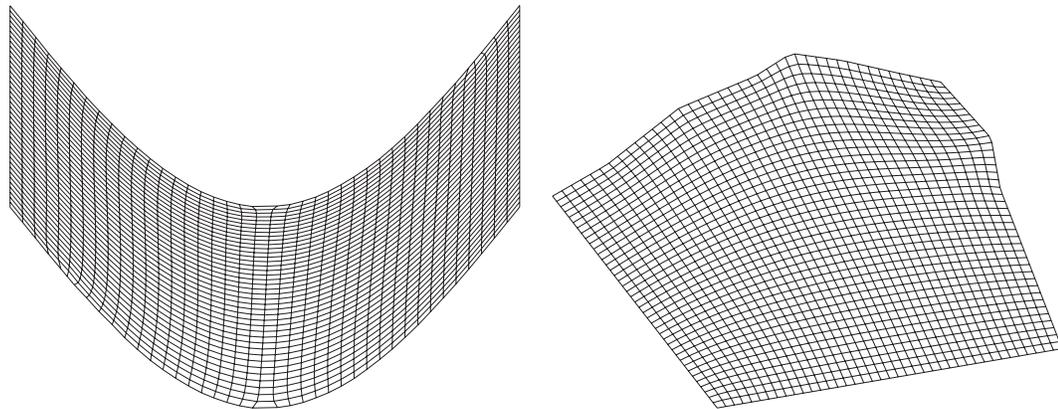


Figura 2.10: Mallas generadas para las regiones SIN y CAB con el funcional armónico.

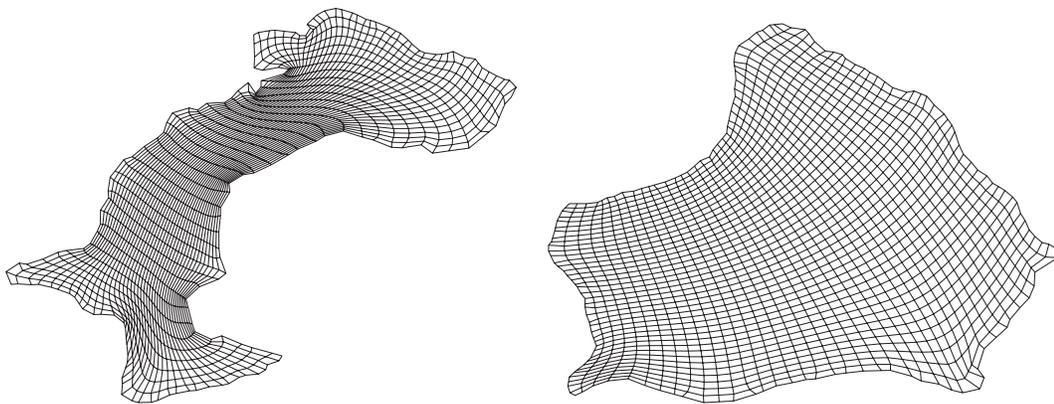


Figura 2.11: Mallas generadas para las regiones PATZ y ZIRA con el funcional armónico.

2.2. Esquemas de Diferencias Finitas Generalizadas

Ya que se cuentan con formas de generar mallas de regiones cuyas fronteras pueden presentar irregularidades, también es importante contar con esquemas que puedan adaptarse para hacer uso de estos mallados en los cuales la distribución de los nodos no es

uniforme. En esta sección se presenta el avance que se ha hecho respecto a generalizar el Método de Diferencias Finitas para poder aplicarlo en este tipo de distribuciones de nodos.

Como se vio en el capítulo 1, un esquema de diferencias finitas clásico aproxima el valor de la derivada de una función, ϕ , en un punto, $p_0 = p(x_0, y_0)$, utilizando valores de la función en algunos puntos cercanos, p_1, p_2, \dots, p_q , los cuales también pueden ser llamados vecinos de p_0 , por lo cual, puede ser escrito como

$$\frac{\partial}{\partial x} \phi(p_0) \approx \Phi_0 \phi(p_0) + \Phi_1 \phi(p_1) + \Phi_2 \phi(p_2) + \dots + \Phi_q \phi(p_q), \quad (2.1)$$

en donde $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_q$ son valores adecuados, que tienen que ver con la malla y las propiedades de la ecuación a tratar.

Por ejemplo, el caso de un esquema de diferencias finitas centrado en el espacio de la forma

$$\frac{\partial}{\partial x} \phi(x_i) \approx \frac{\phi(x_{i+1}) - \phi(x_{i-1}))}{2\Delta x},$$

puede ser escrito como

$$\frac{\partial}{\partial x} \phi(x_i) \approx \Phi_1 \phi(x_{i+1}) + \Phi_2 \phi(x_{i-1})$$

con

$$\Phi_1 = \frac{1}{2\Delta x} \quad \text{y} \quad \Phi_2 = -\frac{1}{2\Delta x}.$$

Además, esto también se aplica a operadores con más de una derivada. Tomando en consideración el caso de escribir una aproximación, en diferencias finitas, para el gradiente de una función

$$\nabla \phi(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \phi(x, y) + \frac{\partial}{\partial y} \phi(x, y),$$

podemos escribir esto como

$$\nabla \phi(x_i, y_j) \approx \Phi_1 \phi(p_1) + \Phi_2 \phi(p_2) + \Phi_3 \phi(p_3) + \Phi_4 \phi(p_4),$$

con

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \frac{1}{2\Delta x}, & p_1 &= (x_{i+1}, y_j), \\ \Phi_2 &= -\frac{1}{2\Delta x}, & p_2 &= (x_{i-1}, y_j), \\ \Phi_3 &= \frac{1}{2\Delta y}, & p_3 &= (x_i, y_{j+1}), \\ \Phi_4 &= -\frac{1}{2\Delta y}, & p_4 &= (x_i, y_{j-1}).\end{aligned}$$

En general, una aproximación en diferencias finitas a cualquier operador diferencial puede ser escrito como una combinación lineal de la forma mostrada en la ecuación (2.1).

Para los casos de interés de este trabajo, es posible escribir el operador diferencial lineal de segundo orden, de manera general, de la siguiente forma

$$L\phi = A\frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi(x, y, t) + B\frac{\partial^2}{\partial xy}\phi(x, y, t) + C\frac{\partial^2}{\partial y^2}\phi(x, y, t) + D\frac{\partial}{\partial x}\phi(x, y, t) + E\frac{\partial}{\partial y}\phi(x, y, t) + F,$$

donde A, B, C, D, E y F son los coeficientes respectivos que multiplican a cada una de las derivadas. En aras de la simplicidad, este operador puede ser escrito como

$$L\phi = A\phi_{xx} + B\phi_{xy} + C\phi_{yy} + D\phi_x + E\phi_y + F. \quad (2.2)$$

El problema planteado es ahora, obtener un esquema de diferencias finitas que aproxime el operador diferencial ((ecuación (2.2)) en un punto p_0 , utilizando valores de la función ϕ en algunos nodos vecinos p_1, p_2, \dots, p_q de p_0 . Nótese que, en esta ocasión, no se está pidiendo que los nodos involucrados tengan alguna distribución en especial, por lo que es posible tener una conjunto de nodos distribuidos arbitrariamente como se muestra en la Figura 2.12.

Dicho esquema, puede escribirse, siguiendo la idea presentada en la ecuación (2.1), como

$$L_0\phi(p_0) = \Gamma_0\phi(p_0) + \Gamma_1\phi(p_1) + \dots + \Gamma_q\phi(p_q) = \sum_{i=0}^q \Gamma_i\phi(p_i), \quad (2.3)$$

donde $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_q$ son coeficientes constantes adecuados. Es importante hacer notar que, en este caso, L hace referencia al operador diferencial, mientras que L_0 hace referencia al esquema de diferencias finas que lo aproxima.

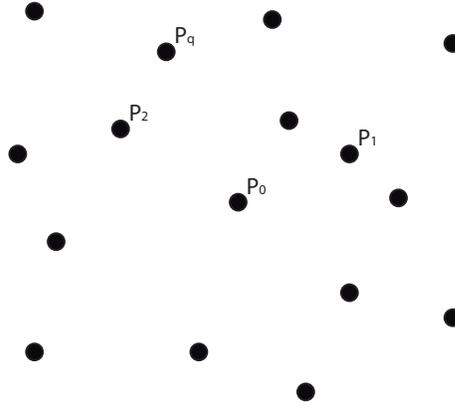


Figura 2.12: Distribución arbitraria de p_0 y sus vecinos.

Un esquema de diferencias finitas es consistente con la ecuación diferencial que aproxima si el error local de truncamiento tiende a cero cuando todos los nodos vecinos tienden al nodo central [14, 53]. Dicho de otra manera, satisface que

$$\tau = [L\phi]_{p_0} - L_0\phi(p_0) \rightarrow 0,$$

mientras que $p_1, p_2, \dots, p_q \rightarrow p_0$.

En esta expresión para la estabilidad del esquema es posible sustituir las ecuaciones (2.2) y (2.3), con lo cual toma la forma

$$[A\phi_{xx} + B\phi_{xy} + C\phi_{yy} + D\phi_x + E\phi_y + F]_{p_0} - \sum_{i=0}^q \Gamma_i \phi(p_i) \rightarrow 0. \quad (2.4)$$

Realizando una expansión en series de Taylor de ϕ , hasta segundo orden, y reagrupando

los términos correspondientes, la expresión anterior puede ser escrita como

$$\begin{aligned}
& [A\phi_{xx} + B\phi_{xy} + C\phi_{yy} + D\phi_x + E\phi_y + Fu]_{p_0} - \sum_{i=0}^q \Gamma_i \phi(p_i) = \\
& \left(F(p_0) - \sum_{i=0}^q \Gamma_i \right) \phi(p_0) + \left(D(p_0) - \sum_{i=1}^q \Gamma_i \Delta x_i \right) \phi_x(p_0) + \\
& \left(E(p_0) - \sum_{i=1}^q \Gamma_i \Delta y_i \right) \phi_y(p_0) + \left(A(p_0) - \sum_{i=1}^q \frac{\Gamma_i (\Delta x_i)^2}{2} \right) \phi_{xx}(p_0) + \\
& \left(B(p_0) - \sum_{i=1}^q \Gamma_i \Delta x_i \Delta y_i \right) \phi_{xy}(p_0) + \left(C(p_0) - \sum_{i=1}^q \frac{\Gamma_i (\Delta y_i)^2}{2} \right) \phi_{yy}(p_0) + \\
& \mathcal{O}(\max\{\Delta x_i, \Delta y_i\})^4 \quad (2.5)
\end{aligned}$$

donde Δx_i y Δy_i son las distancias horizontal y vertical, respectivamente, del nodo central p_0 a cada uno de los nodos vecinos p_i .

Para cumplir con la condición (2.4), es necesario que cada uno de los coeficientes entre paréntesis en la expresión (2.5) se anule de manera simultánea, lo cual puede escribirse como un conjunto de condiciones

$$\begin{aligned}
F(p_0) - \sum_{i=0}^q \Gamma_i &= 0, & A(p_0) - \sum_{i=1}^q \frac{\Gamma_i (\Delta x_i)^2}{2} &= 0, \\
D(p_0) - \sum_{i=1}^q \Gamma_i \Delta x_i &= 0, & B(p_0) - \sum_{i=1}^q \Gamma_i \Delta x_i \Delta y_i &= 0, \\
E(p_0) - \sum_{i=1}^q \Gamma_i \Delta y_i &= 0, & C(p_0) - \sum_{i=1}^q \frac{\Gamma_i (\Delta y_i)^2}{2} &= 0.
\end{aligned}$$

Bajo el supuesto de que se cumplan estas condiciones, el error local de truncamiento se encontrará acotado por una función $\mathcal{O}(\max\{\Delta x_i, \Delta y_i\})^4$, la cual involucra a las derivadas de orden superior y, además, se hará más pequeña cuando los nodos vecinos se acerquen al nodo central p_0 .

Dado que las condiciones de consistencia pueden ser vistas como un sistema de ecuaciones lineales, éstas pueden escribirse en forma vectorial, la cual permitirá, más adelante, identificar los valores a determinar. Haciendo un reagrupamiento pertinente de términos semejantes, las condiciones de consistencia pueden ser escritas como

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \Delta x_1 & \dots & \Delta x_q \\ 0 & \Delta y_1 & \dots & \Delta y_q \\ 0 & (\Delta x_1)^2 & \dots & (\Delta x_q)^2 \\ 0 & \Delta x_1 \Delta y_1 & \dots & \Delta x_q \Delta y_q \\ 0 & (\Delta y_1)^2 & \dots & (\Delta y_q)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_0 \\ \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \Gamma_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(p_0) \\ D(p_0) \\ E(p_0) \\ 2A(p_0) \\ B(p_0) \\ 2C(p_0) \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Para poder construir el esquema deseado, es necesario encontrar los valores de Γ_i que definen el esquema (2.3). Es importante notar que, el sistema de ecuaciones que permite determinar dichos valores (ecuación (2.6)) cuenta con 6 ecuaciones y $q + 1$ incógnitas por lo que, en la mayoría de los casos, no es un sistema bien determinado.

Si se separa la primera ecuación del sistema (2.6), se puede notar que representa una primera condición:

$$\Gamma_0 = F(p_0) - \Gamma_1 - \dots - \Gamma_q. \quad (2.7)$$

Ahora, es posible tomar las últimas 5 ecuaciones de dicho sistema

$$\begin{pmatrix} \Delta x_1 & \dots & \Delta x_q \\ \Delta y_1 & \dots & \Delta y_q \\ (\Delta x_1)^2 & \dots & (\Delta x_q)^2 \\ \Delta x_1 \Delta y_1 & \dots & \Delta x_q \Delta y_q \\ (\Delta y_1)^2 & \dots & (\Delta y_q)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \Gamma_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D(p_0) \\ E(p_0) \\ 2A(p_0) \\ B(p_0) \\ 2C(p_0) \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

para calcular los valores Γ_i restantes. Para esto es posible resolver el sistema

$$\mathbb{M}\Gamma = \beta,$$

donde

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} \Delta x_1 & \dots & \Delta x_q \\ \Delta y_1 & \dots & \Delta y_q \\ (\Delta x_1)^2 & \dots & (\Delta x_q)^2 \\ \Delta x_1 \Delta y_1 & \dots & \Delta x_q \Delta y_q \\ (\Delta y_1)^2 & \dots & (\Delta y_q)^2 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Gamma_q \end{pmatrix} \quad y \quad \beta = \begin{pmatrix} D(p_0) \\ E(p_0) \\ 2A(p_0) \\ B(p_0) \\ 2C(p_0) \end{pmatrix},$$

en el sentido de cuadrados mínimos. Con esto se obtienen los valores todos los coeficientes Γ necesarios para definir el esquema (2.3) [18].

El esquema obtenido es un *Esquema de Diferencias Finitas Generalizadas* que puede ser aplicado a cualquier operador diferencial definido por alguna ecuación diferencial parcial lineal hasta de segundo orden. En general, este esquema de diferencias finitas no toma en consideración el uso de una malla estructurada, por lo que, en primera instancia, podría ser aplicado a cualquier nube de puntos.

2.2.1. Aplicación del Método de Diferencias Finitas Generalizadas

Para mostrar la aplicación del método descrito se presenta, a continuación, un ejemplo de aplicación similar al presentado en el Capítulo 1. En este caso se aplica el método de diferencias finitas generalizadas para aproximar la solución del problema

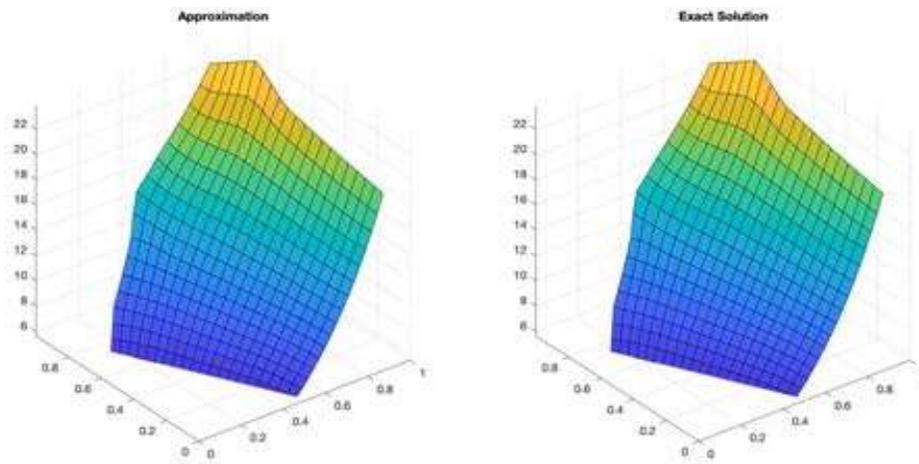
$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 10e^{2x+y}, \quad (2.9)$$

sujeto a las condiciones de frontera

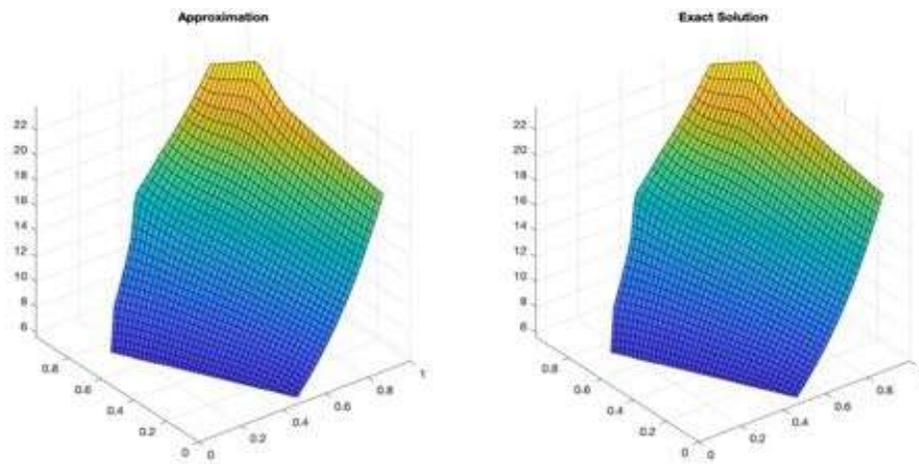
$$\phi(\partial\Omega) = 2e^{2x+y}. \quad (2.10)$$

en las regiones denotadas como CAB y ZIRA. Las cuales han sido discretizadas utilizando 21×21 , 41×41 y 81×81 nodos.

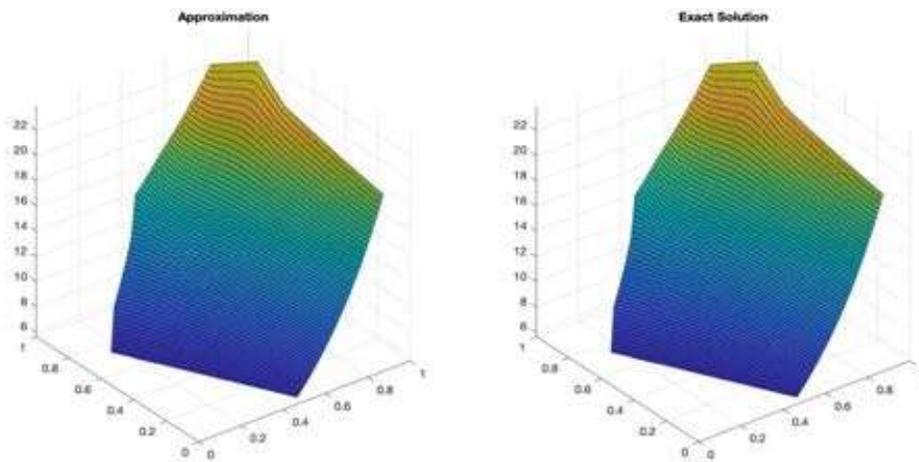
En la Figuras 2.13 y 2.14 se muestra una comparación de la solución aproximada con este método y la solución exacta de la ecuación, con las diferentes cantidades de nodos en la discretización espacial. En este caso, se puede observar que, incluso con pocos nodos espaciales, la aproximación lograda corresponde a la solución exacta.



Resultados numéricos y exactos con 21×21 nodos.

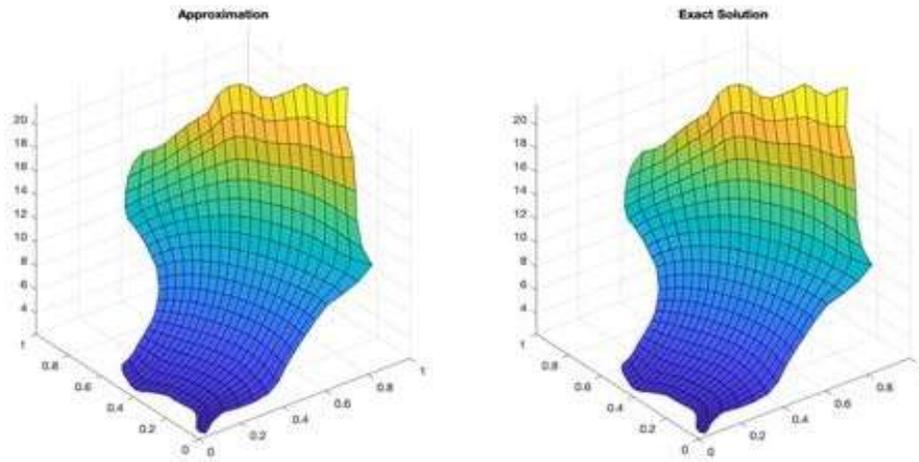


Resultados numéricos y exactos con 41×41 nodos.

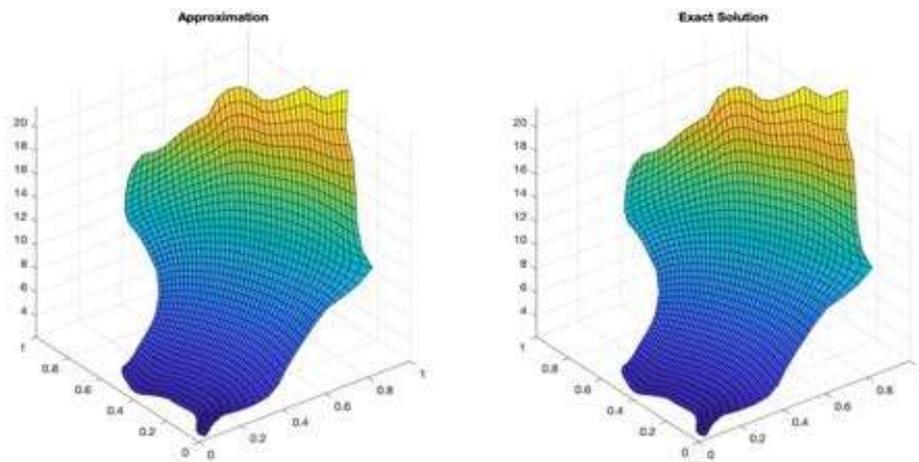


Resultados numéricos y exactos con 81×81 nodos.

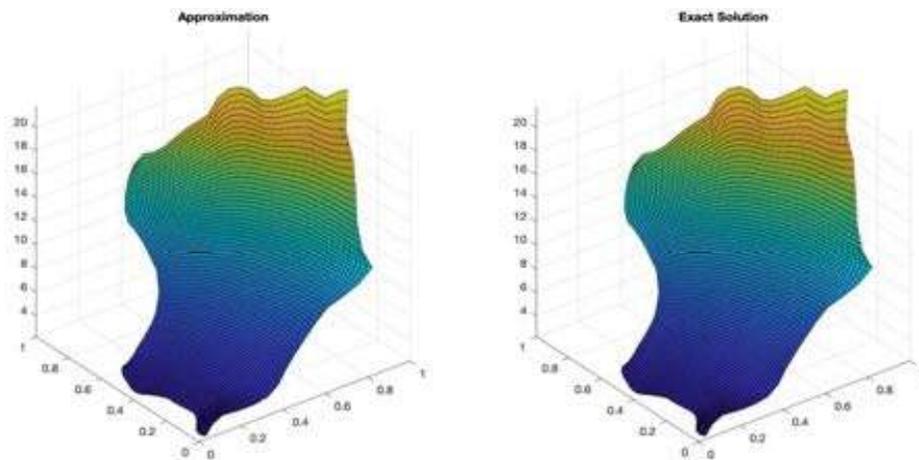
Figura 2.13: Comparación de resultados numéricos y exactos para el problema de Poisson en la Región CAB con diferentes discretizaciones espaciales.



Resultados numéricos y exactos con 21×21 nodos.



Resultados numéricos y exactos con 41×41 nodos.



Resultados numéricos y exactos con 81×81 nodos.

Figura 2.14: Comparación de resultados numéricos y exactos para el problema de Poisson en la Región ZIRA con diferentes discretizaciones espaciales.

Capítulo 3

Ecuaciones Gobernantes

Este capítulo centrará la atención en mostrar la forma en que las ecuaciones que gobiernan el comportamiento de los cuerpos de agua someros, así como el transporte y dispersión de contaminantes, pueden obtenerse partiendo desde los principios básicos de conservación de masa y momento. Primeramente se realizará una revisión sobre la obtención y deducción de las ecuaciones de aguas someras, las cuales pueden modelar el comportamiento de los cuerpos de agua que se pretenden estudiar y, posteriormente, se hará una deducción de las ecuaciones de transporte y dispersión (advección, difusión y advección-difusión).

3.1. Ecuaciones de Aguas Someras

Dentro de la hidrodinámica es posible encontrar una gran variedad de fenómenos que pueden ser modelados, o aproximados, por medio de ecuaciones diferenciales parciales, como el flujo en aguas someras. Dicho flujo puede ser modelado por medio de las llamadas *ecuaciones de aguas someras*, las cuales, a pesar de lo que indica su nombre, pueden modelar fenómenos que no involucran agua (existen algunos tipos de flujos atmosféricos que también pueden ser modelados con estas ecuaciones). La parte esencial es que el grosor, a , de la capa de fluido a modelar es bastante pequeña comparada con las escalas horizontales L .

Debido a que el interés del presente trabajo es modelar el comportamiento de un cuerpo de agua, la formulación de estas ecuaciones se realizará tomando en cuenta algunas simplificaciones que aplican únicamente para este tipo de fenómenos. Además, dado que la obtención de las ecuaciones de aguas someras ha sido bastante estudiada, en el presente trabajo se sigue un procedimiento similar al mostrado en [23, 71, 72].

Una de las primeras simplificaciones que se tomarán en cuenta es que, a lo largo del presente trabajo, se utilizará la hipótesis del continuo, con la cual se establece que todos los fluidos son continuos y no es de interés una descripción microscópica (molécula a molécula) de los mismos. Para tomar en cuenta esta hipótesis, considerando la deformación isentrópica de un fluido para un sistema microscópico arbitrario, es necesario considerar la presión, la gravedad y la inercia del sistema cuando acelera. De la segunda ley de Newton se tiene que

$$(dm)(\vec{a}_{CM}) = \int d\vec{F},$$

donde dm es la masa del elemento, \vec{a}_{CM} es la aceleración del centro de masa y \vec{F} son las fuerzas aplicadas sobre dm .

Si $\vec{r}(t)$ denota la trayectoria de un elemento particular del fluido dentro del sistema, la velocidad de éste puede ser expresada como

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = \frac{D\vec{r}}{Dt},$$

por lo cual su aceleración se puede escribir como

$$\vec{a}(\vec{r}, t) = \frac{D\vec{v}}{Dt}.$$

Dado que se está tomando en cuenta un enfoque Euleriano, es importante mencionar que, en este caso, $\frac{D}{Dt}$ representa la derivada material.

Al multiplicar la aceleración por la masa del elemento del fluido es posible obtener una expresión para la inercia

$$(dm)(\vec{a}_{CM}) = (\rho dV) \left(\frac{D\vec{v}}{Dt} \right).$$

Para calcular la inercia total del sistema, este proceso se debe de repetir para cada uno de los elementos del fluido y, finalmente, sumar todas las inercias calculadas, esto es,

$$(m)(\vec{a}) = \int_V (dm)(\vec{a}_{CM}) = \int_V (\rho dV) \left(\frac{D\vec{v}}{Dt} \right) = \int_V \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} dV.$$

De la segunda ley de Newton se sabe que esto debe de ser igual a la fuerza neta actuando

sobre el sistema

$$\int_V \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} dV = \vec{F}_g + \vec{F}_p = \int_V \rho \vec{g} dV - \int_A \vec{n} p da.$$

Con la finalidad de contar únicamente con integrales de volumen, es posible hacer uso del teorema de la divergencia, con lo cual

$$\int_A \vec{n} p da = \int_V \nabla p dV,$$

y, entonces, es posible escribir

$$\int_V \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} dV = \int_V \rho \vec{g} dV - \int_V \nabla p dV.$$

Por medio de una sencilla manipulación algebraica, la ecuación anterior puede escribirse como

$$\int_V \left[\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} - \rho \vec{g} + \nabla p \right] dV = 0.$$

Ahora, dado que la integral es siempre cero para cualquier volumen arbitrario V , el integrando debe de ser idénticamente cero, con lo cual se puede obtener la expresión

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} - \rho \vec{g} + \nabla p = 0,$$

la cual puede ser escrita como

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{g} - \frac{1}{\rho} \nabla p,$$

que es conocida como la **ecuación de Euler**.

Este primer paso de obtener la ecuación de Euler es muy importante, ya que el desarrollo dicha ecuación conducirá a las ecuaciones de Navier-Stokes

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \vec{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v}.$$

3.1.1. Ecuaciones de Navier-Stokes

Las ecuaciones de Navier-Stokes describen el fenómeno de la conservación de masa y momento. Una forma de expresar la conservación del momento puede ser escrita como

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho uv) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho uw) - \rho f v + \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho uv) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v^2) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho vw) + \rho f u + \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho w) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho uw) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho vw) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w^2) + \rho g + \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} = 0 \quad (3.3)$$

En este caso, se utiliza un sistema de coordenadas como el que se muestra en la Figura 3.1 con z positivo hacia arriba; (u, v, w) es el campo de velocidades, t representa el tiempo, p es la presión, ρ es la densidad, g es la aceleración de la gravedad y $f = 2\Omega \sin \phi$ es la fuerza de Coriolis, la cual indica el efecto de la rotación de la tierra, en la cual Ω es la velocidad angular de rotación y ϕ es la latitud geográfica.

En este caso, los esfuerzos viscosos τ_{ij} se expresan en términos de la tasa de deformación del fluido como

$$\frac{\tau_{ij}}{\rho} = \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (3.4)$$

donde ν es la viscosidad cinemática.

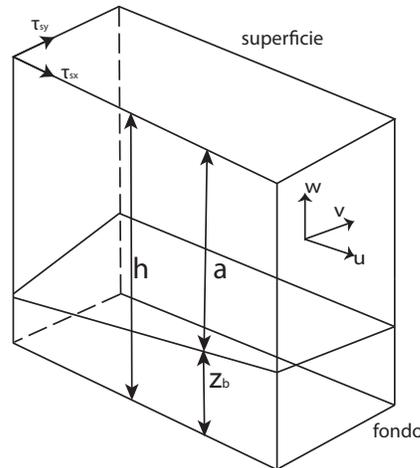


Figura 3.1: Sistema coordenado.

La conservación de la masa, para un elemento del fluido, permite construir la ecuación de la conservación de la masa como

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0. \quad (3.5)$$

En este caso, la densidad ρ depende de la presión p , la temperatura T y la salinidad S , definida como la cantidad de masa disuelta por unidad de masa de agua. Tomando esto en cuenta, es posible escribir una ecuación para la conservación de la masa de sal disuelta,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho S) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u S) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v S) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w S) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(D \frac{\partial \rho S}{\partial x_j} \right) = 0,$$

donde D representa el coeficiente de difusión de la sal en agua. Combinando esta ecuación con la ecuación de la conservación de masa (ecuación (3.5)) y asumiendo que los términos de difusión son pequeños, se obtiene

$$\frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} + v \frac{\partial S}{\partial y} + w \frac{\partial S}{\partial z} = 0,$$

que es la ecuación de la conservación de la salinidad. Dicha ecuación dice que la salinidad de un cierto volumen de agua se mantendrá constante siempre y cuando te muevas con él. De manera similar se puede obtener una ecuación para la temperatura.

Para el caso de interés de este trabajo, se tomará en cuenta un fluido incompresible, lo cual dice que la densidad ρ no depende de la presión sino que depende, únicamente, de la temperatura y la salinidad. Con esto, la tasa de cambio de densidad de un elemento del fluido puede expresarse como

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} = \frac{\partial \rho}{\partial T} \frac{dT}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial S} \frac{dS}{dt} = 0.$$

Al combinar esta ecuación con la ecuación de la conservación de la masa (ecuación (3.5)), se obtiene la ecuación de continuidad para fluidos incompresibles:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (3.6)$$

3.1.2. Condiciones de Frontera en el Fondo y la Superficie

Las condiciones del fondo y de la superficie se pueden encontrar en dos formas diferentes:

- Las condiciones de frontera cinemáticas dicen que las partículas del fluido no pueden cruzar ninguna de las dos fronteras. Para el fondo esto quiere decir que la componente del vector normal debe ser cero:

$$u \frac{\partial z_b}{\partial x} + v \frac{\partial z_b}{\partial y} - w = 0 \quad \text{cuando } z = z_b, \quad (3.7)$$

donde z_b es el nivel del fondo, medido como se muestra en la figura 3.1. En la superficie del agua se debe de tener cuidado con esta condición; debido a que la superficie del agua puede estar moviéndose y variando, lo que debe hacerse cero es la velocidad normal relativa:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} - v \frac{\partial h}{\partial y} - w = 0 \quad \text{cuando } z = h, \quad (3.8)$$

en este caso, h es el nivel de la superficie del agua.

- Las condiciones de frontera dinámicas incluyen todas las fuerzas que se encuentran actuando en las fronteras. En el fondo, se cuenta con una condición de no deslizamiento, la cual quiere decir que el fluido viscoso “se pega” al mismo, esto es,

$$u = v = 0.$$

Por su parte, en la superficie, se asume que los esfuerzos en el fluido, justo debajo de la superficie, son los mismos que los que se encuentran en el aire sobre él. Esto quiere decir que la tensión superficial no es tomada en cuenta. Para la presión se tiene que

$$p = p_a,$$

donde p_a es la presión atmosférica.

3.1.3. Escalas

Cuando se habla de aguas someras, es importante especificar a qué se refiere dicho término. Debido a esto es importante considerar las escalas típicas de un cuerpo de aguas someras. En este punto se debe de tener cuidado dado que, comúnmente, existen muchas escalas diferentes, ya sean externas, como la batimetría del fondo o la variación de los esfuerzos del viento; o internas, como las longitudes de onda típicas generadas por el sistema. A continuación se muestran una serie de escalas a utilizar en el presente trabajo.

- Escalas verticales:
 1. La profundidad del agua a .
 2. El grosor de las capas de frontera δ en el fondo y la superficie del fluido.
 3. La variación del nivel del fondo.
 4. La variación del nivel del agua.

- Escalas horizontales:
 1. Las dimensiones físicas del cuerpo de agua.
 2. Escalas horizontales de la batimetría.
 3. La distancia sobre la cual las fuerzas externas varían de manera significativa.
 4. La longitud de las ondas generadas por el sistema.

Tomando en cuenta estas escalas, la suposición básica en la teoría de aguas someras es que cualquier escala vertical, H , es mucho menor que cualquier escala horizontal, L . Según [72], la proporción de estas escalas debe de ser tal que se cumpla que

$$\frac{H}{L} \leq 0.05.$$

Con esta suposición en las escalas, es posible simplificar las ecuaciones previamente obtenidas. Primeramente, para la ecuación de continuidad (3.6), si x, y tienen escalas típicas para L , y las componentes horizontales de la velocidad, u, v , son de un orden U , entonces cada uno de los primeros dos términos serán del orden de U/L . Con esto, asumiendo que la longitud de la escala vertical es la profundidad del fluido, a , entonces la componente vertical de la velocidad tiene que ser del orden Ua/L , el cual es más pequeño que el orden de las componentes horizontales por un factor igual al de las escalas de longitud.

Ahora, considerando la ecuación vertical del momento (3.3), al utilizar las escalas de longitud y velocidad, se puede verificar que es posible estimar, de manera aproximada, todos los términos con excepción del gradiente de presión. Debido a las escalas de w todos los términos advectivos resultan ser de magnitudes comparables. Se puede observar que, en la ecuación (3.4), únicamente son importantes las derivadas verticales en la capa de frontera, dado que los términos del gradiente de los esfuerzos involucran derivadas de segundo orden en la dirección horizontal y éstas resultan ser menores por un factor de $(a/L)^2$. En general,

se puede revisar que todos los términos son pequeños comparados con la aceleración de la gravedad, únicamente el gradiente de la presión queda para balancear la ecuación y, debido a esto, la ecuación (3.3) se puede reducir a la ecuación de la distribución de presión hidrostática:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g.$$

En esta ecuación ρ es la densidad real, que depende de la temperatura y la salinidad. Integrando desde las capas de frontera, y utilizando la condición $p = p_a$, se obtiene

$$p = g \int_z^h \rho dz + p_a.$$

Dado que, en este trabajo, se toma en cuenta que la densidad es constante a lo largo de la profundidad, se obtiene

$$p = g\rho(h - z) + p_a,$$

de donde es posible determinar los gradientes de presión

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \rho g \frac{\partial h}{\partial x} + g(h - z) \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial p_a}{\partial x}, \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \rho g \frac{\partial h}{\partial y} + g(h - z) \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial p_a}{\partial y}. \end{aligned}$$

3.1.4. Ecuaciones de Aguas Someras en Dos Dimensiones

Con los resultados que se han obtenido hasta el momento, las ecuaciones de momento pueden escribirse como

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(uv) + \frac{\partial}{\partial z}(uw) - fv + g \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{g}{\rho_0}(h - z) \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_a}{\partial x} - \\ \frac{1}{\rho_0} \left[\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right] = 0, \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uv) + \frac{\partial}{\partial y}(v^2) + \frac{\partial}{\partial z}(vw) + fu + g \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{g}{\rho_0}(h - z) \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_a}{\partial y} - \\ \frac{1}{\rho_0} \left[\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right] = 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Estas ecuaciones, junto con la ecuación de continuidad (3.6) conforman las ecuaciones de aguas someras en tres dimensiones. Integrando la ecuación de continuidad, sobre la

profundidad $a = h - z_b$, se obtiene

$$\int_{z_b}^h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + [w]_{z_b}^h = \frac{\partial}{\partial x}(a\bar{u}) + \frac{\partial}{\partial y}(a\bar{v}) + [w]_{z_b}^h - \frac{\partial h}{\partial x}u_x - \frac{\partial h}{\partial y}v_s + \frac{\partial z_b}{\partial x}u_b - \frac{\partial z_b}{\partial y}v_b = 0,$$

En este caso, la barra superior indica un valor promedio de la profundidad. Los términos de corrección de la superficie, s , y del fondo, b , surgen del intercambio de la integración y diferenciación con la posición de la frontera dependiendo de x y de y . Utilizando aquí las condiciones (3.7) y (3.8), los términos del fondo se cancelan y los términos de la superficie producen la tasa de cambio del nivel de ésta:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(a\bar{u}) + \frac{\partial}{\partial y}(a\bar{v}) = 0. \quad (3.11)$$

Un proceso similar puede seguirse para integrar las ecuaciones de momento (3.9) y (3.10). La principal diferencia es que, en este caso, al integrar los términos advectivos, los términos de la superficie y el fondo se cancelan por completo debido a las condiciones de frontera. Por su parte, la integración para términos que involucran la fuerza de Coriolis y la presión puede hacerse de manera directa; sin embargo, para los términos de los esfuerzos puede hacerse

$$\begin{aligned} \int_{z_b}^h \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) dz &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^h \tau_{xx} dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^h \tau_{xy} dz \\ &\quad - \left[\tau_{xx} \frac{\partial h}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial h}{\partial y} - \tau_{xz} \right]_{z=h} \\ &\quad + \left[\tau_{xx} \frac{\partial z_b}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial z_b}{\partial y} - \tau_{xz} \right]_{z=z_b}, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \int_{z_b}^h \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) dz &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^h \tau_{yx} dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^h \tau_{yy} dz \\ &\quad - \left[\tau_{yx} \frac{\partial h}{\partial x} + \tau_{yy} \frac{\partial h}{\partial y} - \tau_{yz} \right]_{z=h} \\ &\quad + \left[\tau_{yx} \frac{\partial z_b}{\partial x} + \tau_{yy} \frac{\partial z_b}{\partial y} - \tau_{yz} \right]_{z=z_b}. \end{aligned}$$

Los términos de la frontera en la superficie y en el fondo conducen a componentes de esfuerzo cortante, por lo tanto las integrales pueden ser expresadas en términos de éste.

Siguiendo este proceso de integración, las ecuaciones del momento pueden escribirse como:

$$\frac{\partial}{\partial t}(au) + \frac{\partial}{\partial x}(au^2) + \frac{\partial}{\partial y}(auv) - fav + ga\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{ga^2}{2\rho_0}\frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{\tau_{bx}}{\rho_0} - \frac{\partial}{\partial x}(aT_{xx}) - \frac{\partial}{\partial y}(aT_{xy}) = F_x, \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(av) + \frac{\partial}{\partial x}(auv) + \frac{\partial}{\partial y}(av^2) + fau + ga\frac{\partial h}{\partial y} + \frac{ga^2}{2\rho_0}\frac{\partial \rho}{\partial y} - \frac{\tau_{by}}{\rho_0} - \frac{\partial}{\partial x}(aT_{xy}) - \frac{\partial}{\partial y}(aT_{yy}) = F_y. \quad (3.13)$$

Vale la pena hacer notar que el esfuerzo lateral T_{ij} incluye la fricción viscosa, la fricción turbulenta y la advección diferencial:

$$T_{ij} = \frac{1}{a} \int_{z_b}^h \left[v \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \overline{u'_i u'_j} + (u_i - \overline{u_i})(u_j - \overline{u_j}) \right] dz.$$

Si, en las ecuaciones (3.11), (3.12) y (3.13), se desprecian los esfuerzos laterales y las fuerzas de empuje, además de asumir la expresión más simple posible para el esfuerzo del fondo, éstas toman la forma

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(au) + \frac{\partial}{\partial y}(av) = 0, \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(au) + \frac{\partial}{\partial x}(au^2) + \frac{\partial}{\partial y}(auv) - fav + ga\frac{\partial h}{\partial x} + c_f u \sqrt{u^2 + v^2} = 0, \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(av) + \frac{\partial}{\partial x}(auv) + \frac{\partial}{\partial y}(av^2) + fau + ga\frac{\partial h}{\partial y} + c_f v \sqrt{u^2 + v^2} = 0, \quad (3.16)$$

las cuales son conocidas como la *forma conservativa* de las ecuaciones de aguas someras en dos dimensiones.

Con la finalidad de simplificar un poco dichas ecuaciones, es posible hacer los cambios de variable

$$q = h \quad r = au \quad s = av$$

con lo cual, dicha forma conservativa puede ser escrita como:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial y} = 0, \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{r^2}{a} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{rs}{a} \right) - fs + g \frac{\partial q}{\partial x} + c_f r \frac{\sqrt{r^2 + s^2}}{a} = 0, \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{rs}{a} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{s^2}{a} \right) + fr + g \frac{\partial q}{\partial y} + c_f s \frac{\sqrt{r^2 + s^2}}{a} = 0, \quad (3.19)$$

donde, ahora, q , r y s son las variables conservativas que representan la masa y el momento del problema físico.

Además, es posible realizar algunas diferenciaciones en esta forma conservativa para obtener

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial y} = 0, \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial r}{\partial t} + \frac{2r}{a} \frac{\partial r}{\partial x} + ga \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{r}{a} \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{s}{a} \frac{\partial r}{\partial y} - fs + c_f \frac{r}{a^2} \sqrt{r^2 + s^2} = 0, \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{r}{a} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{s}{a} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{2s}{a} \frac{\partial s}{\partial y} + ga \frac{\partial q}{\partial y} + fr + c_f \frac{s}{a^2} \sqrt{r^2 + s^2} = 0, \quad (3.22)$$

que son la *forma no conservativa* de las ecuaciones de aguas someras en dos dimensiones.

3.2. Ecuación de Advección-Difusión

Ahora que se cuenta con un conjunto de ecuaciones que pueden modelar el comportamiento de cuerpos de agua someros, es importante conocer cómo se comporta un contaminante dentro de dicho cuerpo de agua. En este caso, el comportamiento del contaminante puede modelarse por medio de la ecuación de advección-difusión, la cual, en general, ayuda a describir fenómenos físicos en los cuales las partículas de una sustancia, energía o alguna otra cantidad física es transportada en un medio debido a dos procesos diferentes: la advección y la difusión.

El resto de este capítulo será dedicado a hacer una explicación de estos procesos, además de mostrar un bosquejo de cómo pueden obtenerse ecuaciones diferenciales que reflejen comportamientos físicos de los mismos.

3.2.1. Ecuación de Advección

Cuando una sustancia está siendo transportada en un flujo con una velocidad constante a , la función que modela dicho flujo puede ser escrita como

$$f(u) = au(x, t), \quad (3.23)$$

donde $u(x, t)$ es la densidad local de la sustancia transportada, la cual puede expresarse en kilogramos sobre metros. Debido a esto, el flujo del material que pasa por un punto x , expresado en kilogramos sobre segundo, puede obtenerse multiplicando la densidad u por la velocidad de transporte a , expresado en metros sobre segundo (m/s). Un análisis de unidades permite ver que este razonamiento es consistente:

$$f(u) = au \quad \Rightarrow \quad \frac{[\text{kg}]}{[\text{s}]} = \frac{[\text{m}]}{[\text{s}]} \frac{[\text{kg}]}{[\text{m}]}.$$

Dado que el cambio de la masa total en un intervalo $[x_1, x_2]$ se da debido al flujo en los puntos extremos, si tomamos en cuenta que el flujo se mueve hacia la derecha, entonces es posible escribir

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} u(x, t) dx = f(u(x_1, t)) - f(u(x_2, t)).$$

Si se asume suficiente suavidad para las funciones u y f , *i.e.* tienen tantas derivadas como sea necesario, la expresión anterior se puede escribir como

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} u(x, t) dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} f(u(x, t)) dx,$$

o, simplificando

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} f(u(x, t)) \right] dx = 0.$$

Dado que esta integral debe de ser igual a cero para cualesquiera valores de x_1 y x_2 , entonces el integrando debe de ser siempre igual a cero. De aquí se obtiene que

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} f(u(x, t)) = 0, \quad (3.24)$$

la cual, como se vio en el Capítulo 1, es una ecuación diferencial parcial que corresponde a una ley de conservación.

En este caso, tomando en cuenta que, por definición, $f(u) = au$, entonces la ecuación

anterior se puede escribir como

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x, t) + \frac{\partial}{\partial x}au(x, t) = 0,$$

o

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x, t) + a\frac{\partial}{\partial x}u(x, t) = 0, \quad (3.25)$$

la cual es conocida como la *ecuación de advección* en una dimensión espacial.

Para poder determinar una solución única, esta ecuación requiere de una condición de inicial, representado por un perfil inicial, y, en algunos casos, condiciones de frontera. El caso más simple es cuando no hay fronteras, *i.e.* $-\infty < x < \infty$. En este caso únicamente se necesita contar con información de la condición inicial

$$u(x, 0) = \eta(x).$$

Esta misma idea puede extenderse a 2 dimensiones espaciales, siguiendo un proceso similar al mostrado para el caso en una dimensión espacial, puede definirse la *ecuación de advección* en dos dimensiones espaciales como

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x, y, t) + a\frac{\partial}{\partial x}u(x, y, t) + b\frac{\partial}{\partial y}u(x, y, t) = 0. \quad (3.26)$$

Nuevamente, para poder determinar una solución única, es necesario contar con una condición inicial

$$u(x, y, 0) = \eta(x, y),$$

y, en caso necesario, con algunas condiciones de frontera.

En el caso más general, la ecuación de advección puede ser escrita como

$$\frac{\partial}{\partial t}u(\vec{r}, t) + \vec{v} \cdot \nabla u(\vec{r}, t) = 0, \quad (3.27)$$

en donde \vec{r} es el vector con las coordenadas espaciales y \vec{v} representa las velocidades en cada una de las direcciones correspondientes.

3.2.2. Ecuación de Difusión

Si la sustancia se encuentra siendo transportada con una velocidad cero, *i.e.* no existe un flujo que la mueva, entonces, según la ecuación de advección, el perfil inicial, η , no debería de cambiar conforme pasa el tiempo, manteniéndose la concentración de la sustancia en cada punto del fluido. Sin embargo, si el perfil η no es constante en el espacio, entonces experimentará cambios en el tiempo debido a difusión molecular. De hecho, la velocidad a debe de ser pensada como una velocidad promedio de las moléculas de la sustancia. Debido a que las moléculas se encuentran en movimiento constante, provocando choques y rebotes en diferentes direcciones, entonces dichas moléculas tenderán a separarse o difundirse dentro del fluido. En general, este movimiento se produce de zonas con una densidad mayor de moléculas hacia zonas con menor densidad.

Tomando en cuenta que el flujo difusivo de una sustancia, $f(u)$, en cualquier parte de un sistema es proporcional al gradiente de su densidad, entonces éste puede ser escrito como

$$f(u) = -\nu \nabla u(x, t) = -\nu \frac{\partial}{\partial x} u(x, t), \quad (3.28)$$

donde ν representa el coeficiente de difusión, el cual dice qué tan fácil se difunde la sustancia en el medio.

Si utilizamos este flujo en la ley de conservación establecida en la ecuación (3.24), se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} \left(-\nu \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) \right) = 0,$$

o bien, haciendo las derivaciones pertinentes,

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t), \quad (3.29)$$

la cual es conocida como la *ecuación de difusión* en una dimensión espacial. También es conocida como la *ecuación de calor*, debido a que el calor se difunde de una manera similar.

Nuevamente, la versión en dos dimensiones espaciales, de esta ecuación, puede encontrarse siguiendo un proceso similar al anterior, con el cual se obtiene la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, y, t) = \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, y, t) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x, y, t) \right), \quad (3.30)$$

o, de manera general,

$$\frac{\partial}{\partial t}u(\vec{r}, t) = \nu \nabla^2 u(\vec{r}, t). \quad (3.31)$$

3.2.3. Ecuación de Advección-Difusión

De manera general, cuando se trata de modelar el comportamiento de una sustancia que es transportada en un fluido, la sustancia será transportada siguiendo los procesos de advección y de difusión, por lo cual, en este caso, es importante tomar en cuenta ambos flujos: el flujo advectivo y el flujo difusivo.

En este caso, el flujo total de la sustancia puede escribirse como

$$f(u) = f_{adv}(u) + f_{dif}(u),$$

el cual, considerando los flujos establecidos en las ecuaciones (3.23) y (3.28),

$$f_{adv}(u) = au(x, t) \quad \text{y} \quad f_{dif}(u) = -\nu \frac{\partial}{\partial x}u(x, t),$$

puede llevarse a la forma

$$f(u) = au(x, t) - \nu \frac{\partial}{\partial x}u(x, t). \quad (3.32)$$

Tomando en cuenta este flujo para la ecuación de conservación (3.24), es posible obtener la expresión

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} \left(au(x, t) - \nu \frac{\partial}{\partial x}u(x, t) \right) = 0,$$

que puede ser escrita como

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x, t) = \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x, t) - a \frac{\partial}{\partial x}u(x, t), \quad (3.33)$$

la cual es conocida como la *ecuación de advección-difusión* en una dimensión espacial.

Al igual que en los casos anteriores, este procedimiento puede extenderse a dos dimensiones espaciales, con lo cual se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x, y, t) = \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x, y, t) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x, y, t) \right) - a \frac{\partial}{\partial x}u(x, y, t) - b \frac{\partial}{\partial y}u(x, y, t), \quad (3.34)$$

o, en un caso general,

$$\frac{\partial}{\partial t}u(\vec{r}, t) = \nu \nabla^2 u(\vec{r}, t) - \vec{v} \cdot \nabla u(\vec{r}, t). \quad (3.35)$$

Como se mencionó en el Capítulo 1, es posible encontrar soluciones numéricas, para las ecuaciones revisadas en este Capítulo, por medio de diferentes métodos. En el Capítulo 4 se presentan los esquemas propuestos para la solución numérica de las mismas, presentando algunos esquemas de Diferencias Finitas Generalizadas para las ecuaciones de advección, difusión y advección-difusión, y un esquema híbrido de diferencias finitas generalizadas y volúmenes finitos para el caso de las ecuaciones de aguas someras.

Capítulo 4

Esquemas Propuestos

En el presente capítulo se presentan algunos esquemas numéricos propuestos para aproximar la solución de las ecuaciones presentadas en el Capítulo 3. En particular, se presentan los esquemas de diferencias finitas generalizadas (explicados en el Capítulo 2) para obtener aproximaciones a las ecuaciones de advección, difusión y advección-difusión; además de que se muestra un análisis de estabilidad de dichos esquemas. También se presenta un novedoso esquema híbrido para obtener aproximaciones a las ecuaciones de aguas someras. Dicho esquema, como se verá más adelante, combina los métodos de Diferencias Finitas Generalizadas y Volúmenes Finitos.

4.1. Esquemas de Diferencias Finitas Generalizadas

Como se vio en el Capítulo 2, los esquemas de diferencias finitas generalizadas pueden ser aplicados para obtener aproximaciones a la solución de diferentes ecuaciones diferenciales parciales. En esta sección se partirá del esquema definido en la ecuación (2.3),

$$L_0\phi(p_0) = \sum_{i=0}^q \Gamma_i\phi(p_i),$$

y se mostrará su aplicación para aproximar la solución de algunas ecuaciones en regiones irregulares. En esta expresión se muestra una fórmula general para facilitar la notación, en la cual debe tomarse en cuenta que ésta se refiere al estencil definido un punto arbitrario p_0 de la malla. Es importante mencionar que, para una malla irregular, los coeficientes Γ_i serán diferentes en cada nodo de la misma.

4.1.1. Ecuación de Advección

Como se mostró anteriormente, la ecuación de advección, en dos dimensiones espaciales, puede ser escrita como

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a \frac{\partial u}{\partial x} - b \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (4.1)$$

donde $u = u(x, y, t)$.

El interés de esta sección es encontrar una aproximación, en diferencias finitas generalizadas, a la solución del problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} &= 0, & \Omega \times [0, T], & \quad a, b \in \mathbb{R}, \\ u(x, y, 0) &= g(x, y) & (x, y) \in \Omega, \\ u(x, y, t)|_{S_1} &= h(x, y, t) & (x, y) \in \Omega, & \quad t \in [0, T], \end{aligned}$$

donde Ω es un dominio plano, simplemente conexo, cuya frontera $\partial\Omega$ es un polígono de Jordan orientado de manera positiva; además de que $\partial\Omega = S_1 \cup S_2$, donde S_1 y S_2 son curvas conexas, no vacías, como se muestra en la Figura 4.1.

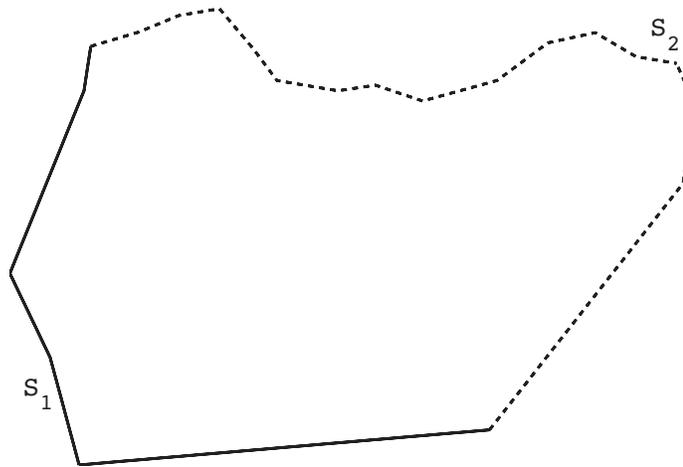


Figura 4.1: Dominio Ω con $\partial\Omega = S_1 \cup S_2$.

Dado que se pretende realizar una aproximación en diferencias finitas generalizadas a la solución de la ecuación (4.1), entonces ésta puede ser parcialmente discretizada en un

sentido de diferencias finitas como

$$u(x, y, t + \Delta t) \approx u(x, y, t) - \Delta t \left[a \frac{\partial}{\partial x} u(x, y, t) + b \frac{\partial}{\partial y} u(x, y, t) \right].$$

Nótese que, en este caso, la ecuación ha sido discretizada en el tiempo utilizando un esquema clásico de diferencias finitas; habida cuenta que la discretización temporal no interviene en el desarrollo del método de diferencias finitas generalizadas.

El esquema definido por la ecuación (2.3) puede ser utilizado para aproximar el operador lineal

$$-\Delta t \left[a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} \right],$$

en cada nivel de tiempo. Nótese que, por cuestiones de simplicidad, se ha escrito $u = u(x, y, t)$. Con lo anterior, en este caso, es posible obtener la solución numérica

$$u_0^{(k+1)} = u_0^{(k)} + \sum_{i=0}^q \Gamma_i u_i^{(k)}, \quad (4.2)$$

en donde $u_i^{(k)}$ es la aproximación a la solución, u , en el punto p_i al tiempo $k\Delta t$.

Es posible contar con una expresión que involucre, de manera explícita, a Δt ; si se toma en cuenta la aproximación al operador lineal

$$-\left[a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} \right],$$

es posible obtener la solución numérica

$$u_0^{(k+1)} = u_0^{(k)} + \Delta t \sum_{i=0}^q \Gamma_i u_i^{(k)}, \quad (4.3)$$

la cual cuenta con una estructura más parecida a los esquemas clásicos de diferencias finitas.

El esquema (4.2) puede ser visto como la versión explícita de un esquema θ más general dado por

$$u_0^{(k+1)} = u_0^{(k)} + \theta \sum_{i=0}^q \Gamma_i u_i^{(k)} + (1 - \theta) \sum_{i=0}^q \Gamma_i u_i^{(k+1)}. \quad (4.4)$$

Para lograr consistencia de segundo orden en el sistema (2.6), seis condiciones inde-

pendientes deben de cumplirse. En general, para lograr esto, el valor q , que representa el número de nodos vecinos a tomar en la aproximación, debe de ser mayor o igual a 6. Cumpliendo con esto, el esquema propuesto utilizará ocho nodos vecinos, con lo que se obtendrá un estencil de 9 puntos. Tomando en cuenta que, en el presente trabajo se utilizan mallas estructuradas y debido a las condiciones de frontera del problema, la forma del estencil dependerá de la posición lógica de la malla. Los diferentes estenciles utilizados por este esquema se encuentran representados en las Figuras 4.2 a 4.5.

El estencil en la Figura 4.2 corresponde al caso en el que p_0 es un nodo al interior de la malla. Además, existen 3 casos para los cuales p_0 se encuentra en la frontera de Ω . Las Figuras 4.3 y 4.4 corresponden a los lados lógicos superior y derecho de la frontera en S_2 . El estencil mostrado en la Figura 4.5 corresponde al nodo en la esquina de S_2 .

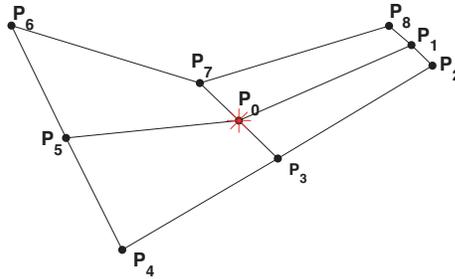


Figura 4.2: Estencil para nodo interior.

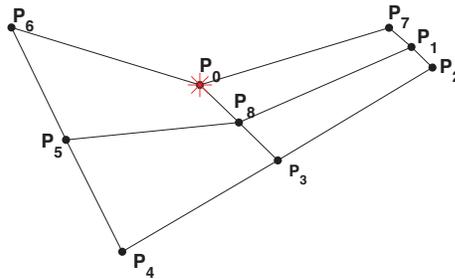


Figura 4.3: Estencil para nodo en la frontera superior en S_2 .

Tomando en cuenta estos estenciles, los esquemas (4.2) y (4.4) tomarán, en cada caso,

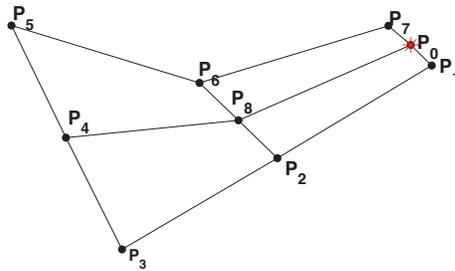


Figura 4.4: Estencil para nodo en la frontera lateral en S_2 .

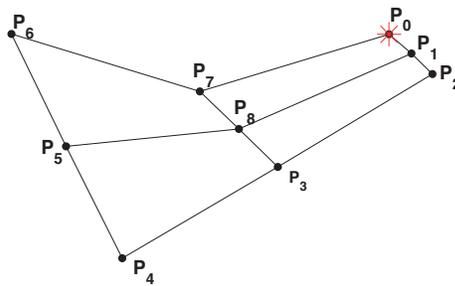


Figura 4.5: Estencil para nodo en la esquina de la frontera en S_2 .

la forma

$$u_0^{(k+1)} = u_0^{(k)} - \sum_{i=0}^8 \Gamma_i u_i^{(k)}, \quad (4.5)$$

$$u_0^{(k+1)} = u_0^{(k)} - \left[\theta \sum_{i=0}^8 \Gamma_i u_i^{(k)} + (1 - \theta) \sum_{i=0}^8 \Gamma_i u_i^{(k+1)} \right]. \quad (4.6)$$

Análisis de Estabilidad

Un aspecto importante que debe de considerarse respecto a un esquema de diferencias finitas es su convergencia. El Teorema de Equivalencia de Lax [38, 53] muestra que, bajo la suposición de consistencia, un esquema en una malla uniforme es convergente si y sólo si es estable. A pesar de que las regiones de interés del presente trabajo son regiones no rectangulares, dado que el esquema de diferencias finitas generalizadas es consistente por construcción, surge de manera natural la pregunta de si es estable o no. A continuación, se muestra un análisis de la estabilidad de los esquemas (4.5) y (4.6), para regiones irregulares, empleando el análisis de von Neumann presentado en el Capítulo 1.

Es importante mencionar que el análisis de von Neumann fue diseñado como un análisis de estabilidad para regiones rectangulares, a pesar de esto, algunos autores [26, 58–60, 65] han estudiado de manera experimental para su aplicación en regiones irregulares mostrando consistencia entre los resultados teóricos y los resultados numéricos.

Dado que el esquema (4.5) es un caso particular del esquema (4.6), el desarrollo completo se realizará para el esquema general y, posteriormente, se tomará el caso particular para conocer las condiciones de estabilidad de ambos esquemas.

El error local en el nodo central (x_0, y_0) en algún paso de tiempo k puede expresarse como una suma de términos de la forma

$$\Phi^{(k)}(x_0, y_0) = R^{(k)} e^{i(rx_0 + sy_0)},$$

donde r y s son números de onda y, en este caso, i representa la unidad imaginaria. Si se toma en cuenta la linealidad de la ecuación (4.6), entonces la expresión anterior puede

usarse para llegar a

$$R^{(k+1)}e^{i(rx_0+sy_0)} = R^{(k)}e^{i(rx_0+sy_0)} + \theta \left[\sum_{l=0}^8 \Gamma_l R^{(k)} e^{i[r(x_0+\Delta x_l)+s(y_0+\Delta y_l)]} \right] \\ + (1-\theta) \left[\sum_{l=0}^8 \Gamma_l R^{(k+1)} e^{i[r(x_0+\Delta x_l)+s(y_0+\Delta y_l)]} \right],$$

que, a su vez, puede reducirse como

$$R^{(k+1)}e^{i(rx_0+sy_0)} = R^{(k)}e^{i(rx_0+sy_0)} + [\theta + (1-\theta)R] \sum_{l=0}^8 \Gamma_l R^{(k)} e^{i[r(x_0+\Delta x_l)+s(y_0+\Delta y_l)]}.$$

De aquí es posible escribir el factor de amplificación, R , como

$$R = 1 + [\theta + (1-\theta)R] \sum_{l=0}^8 \Gamma_l e^{i[r\Delta x_l + s\Delta y_l]}. \quad (4.7)$$

La suma en el lado derecho de la ecuación (4.7) puede escribirse como

$$H = \sum_{l=0}^8 \Gamma_l e^{i[r\Delta x_l + s\Delta y_l]}, \\ = \sum_{l=0}^8 \Gamma_l [\cos(r\Delta x_l + s\Delta y_l) + i \sin(r\Delta x_l + s\Delta y_l)], \\ = \sum_{l=0}^8 \Gamma_l [\cos(r\Delta x_l + s\Delta y_l)] + \sum_{l=0}^8 \Gamma_l [i \sin(r\Delta x_l + s\Delta y_l)],$$

la cual, si se toman en cuenta las condiciones

$$\Gamma_0 = - \sum_{l=1}^8 \Gamma_l,$$

$$\cos(r\Delta x_0 + s\Delta y_0) = 1,$$

y

$$\sin(r\Delta x_0 + s\Delta y_0) = 0,$$

puede escribirse como

$$H = \sum_{l=1}^8 \Gamma_l [\cos(r\Delta x_l + s\Delta y_l) - 1] + \sum_{l=1}^8 \Gamma_l [i \sin(r\Delta x_l + s\Delta y_l)],$$

donde, si se considera que, hasta segundo orden,

$$\begin{aligned} \cos(r\Delta x_l + s\Delta y_l) - 1 &= -[r\Delta x_l + s\Delta y_l]^2/2! \\ &= -[r^2\Delta x_l^2 + 2rs\Delta x_l\Delta y_l + s^2\Delta y_l^2]/2, \end{aligned}$$

y

$$\sin(r\Delta x_l + s\Delta y_l) = r(\Delta x)_l + s(\Delta y)_l + \mathcal{O}(\Delta x^3, \Delta y^3),$$

es posible escribir

$$\sum_{l=0}^8 \Gamma_l [\cos(r\Delta x_l + s\Delta y_l)] = - \sum_{l=1}^8 \left[\frac{r^2}{2} \Gamma_l \Delta x_l^2 + rs \Gamma_l \Delta x_l \Delta y_l + \frac{s^2}{2} \Gamma_l \Delta y_l^2 \right]$$

y

$$\sum_{l=0}^8 \Gamma_l [i \sin(r\Delta x_l + s\Delta y_l)] = \sum_{l=1}^8 [r \Gamma_l \Delta x_l + s \Gamma_l \Delta y_l],$$

por lo que, la suma puede expresarse como

$$H = \sum_{l=0}^q \Gamma_l + i \sum_{l=1}^q [r \Gamma_l \Delta x_l + s \Gamma_l \Delta y_l] - \sum_{l=1}^q \left[\frac{r^2}{2} \Gamma_l \Delta x_l^2 + rs \Gamma_l \Delta x_l \Delta y_l + \frac{s^2}{2} \Gamma_l \Delta y_l^2 \right].$$

Es posible escribir H en términos del operador lineal de segundo orden como

$$H = F + i[rD + sE] - [Ar^2 + Brs + Cs^2]$$

En el caso de la ecuación de advección, donde $D = -a\Delta t$, $E = -b\Delta t$ y $A = B = C = F = 0$, H toma la forma

$$H = -i\Delta t(ra + sb).$$

Ahora, el factor de amplificación puede ser escrito como

$$R = \frac{1 + \theta H}{1 + (\theta - 1)H}$$

por lo que

$$|R|^2 = \frac{1 + \theta^2 \Delta t^2 (ar + bs)^2}{1 + (\theta - 1)^2 \Delta t^2 (ar + bs)^2}. \quad (4.8)$$

Dado que, para obtener estabilidad, es necesario que $|R|^2 \leq 1$, entonces

$$\begin{aligned} 1 + \theta^2 \Delta t^2 (ar + bs)^2 &\leq 1 + (\theta - 1)^2 \Delta t^2 (ar + bs)^2 \\ &= 1 + \theta^2 \Delta t^2 (ar + bs)^2 - 2\theta \Delta t^2 (ar + bs)^2 + \Delta t^2 (ar + bs)^2, \end{aligned}$$

de aquí puede verse que

$$\begin{aligned} 0 &\leq -2\theta \Delta t^2 (ar + bs)^2 + \Delta t^2 (ar + bs)^2 \\ &= -2\theta + 1, \end{aligned}$$

lo cual indica que basta con elegir

$$\theta \leq \frac{1}{2},$$

para que el esquema sea *incondicionalmente estable*.

Por su parte, las condiciones de estabilidad para el esquema (4.5) pueden obtenerse de tomar el caso $\theta = 1$ en la ecuación (4.8), lo cual puede escribirse como

$$\begin{aligned} |R|^2 &= 1 + \Delta t^2 (ar + bs)^2 \\ &= (1 + \Delta t (ar + bs))^2 - 2\Delta t (ar + bs); \end{aligned}$$

lo cual implica que

$$|R| \leq 1 + \Delta t (ar + bs).$$

Nuevamente, el módulo $|R|$ debe de ser menor que 1 para obtener estabilidad incondicional. En este caso, sin embargo, se obtiene que $|R| > 1$, por lo que el esquema explícito no es estrictamente estable, pero, en el sentido de estabilidad de von Neumann, dado que se cumple

$$|R| \leq 1 + C(\Delta t),$$

entonces es posible decir que el esquema es *débilmente estable*.

4.1.2. Ecuación de Difusión

Para el caso de la ecuación de difusión, la cual en dos dimensiones espaciales puede escribirse como

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right], \quad (4.9)$$

donde, nuevamente, $u = u(x, y, t)$, también es posible escribir un esquema en diferencias finitas generalizadas para encontrar una aproximación numérica a su solución.

Para hacer esto, considerando el caso de obtener una solución numérica al problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \nu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right], & \Omega \times [0, T], & \nu \in \mathbb{R}, \\ u(x, y, 0) &= g(x, y), & (x, y) \in \Omega, & \\ u(x, y, t) |_{\partial\Omega} &= h(x, y), & (x, y) \in \Omega & \quad t \in [0, T], \end{aligned}$$

donde Ω es un dominio plano simplemente conexo y su frontera, $\partial\Omega$ es un polígono de Jordan orientado de manera positiva, como el que se muestra en la Figura 4.6.

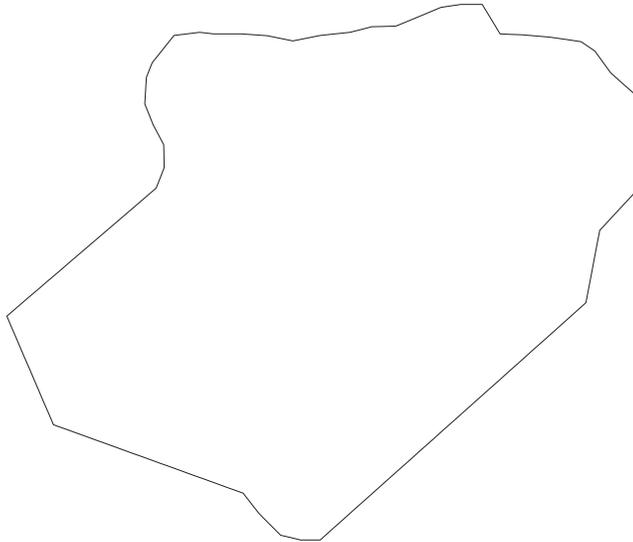


Figura 4.6: Ejemplo de dominio Ω .

Siguiendo la misma idea que en el caso de la ecuación de advección, la ecuación (4.9) puede ser parcialmente discretizada en el tiempo, siguiendo un esquema clásico de diferen-

cias finitas, como

$$u(x, y, t + \Delta t) \approx u(x, y, t) + \nu \Delta t \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right].$$

Una vez que se ha discretizado parcialmente la ecuación de interés es posible utilizar el esquema definido por (2.3) para aproximar el operador lineal

$$\nu \Delta t \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right],$$

en cada nivel de tiempo, para obtener la solución numérica

$$u_0^{(k+1)} = u_0^{(k)} + \sum_{i=0}^q \Gamma_i u_i^{(k)}, \quad (4.10)$$

en donde $u_i^{(k)}$ es, nuevamente, la aproximación a la solución, u , en el punto p_i al tiempo $k\Delta t$.

Es posible escribir una versión más general del esquema explícito (4.10), tomando en cuenta el esquema implícito θ ,

$$u_0^{(k+1)} = u_0^{(k)} + \theta \sum_{i=0}^q \Gamma_i u_i^{(k)} + (1 - \theta) \sum_{i=0}^q \Gamma_i u_i^{(k+1)}. \quad (4.11)$$

La elección de los nodos involucrados en el sistema vuelve a ser un tema de importancia a considerar. Debido a las características del problema físico que describe la ecuación de difusión, una idea ampliamente usada en la literatura [28, 37, 38, 53, 54, 65] es la de tomar un esquema centrado en el espacio. Con esto, se selecciona un estencil que involucre a 8 nodos vecinos del nodo central, como el que se muestra en la Figura 4.7.

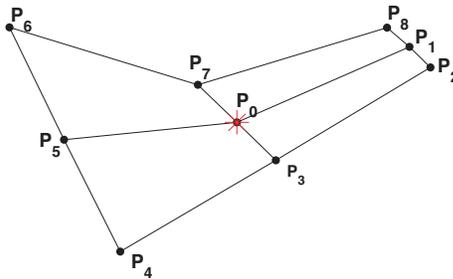


Figura 4.7: Estencil centrado en el espacio.

Análisis de Estabilidad

Para revisar las condiciones de estabilidad del esquema definido por (4.11) se sigue, nuevamente, un enfoque de análisis de estabilidad de von Neumann. En este caso, el error local en el nodo central, en un paso de tiempo k , puede expresarse como

$$\Phi^{(k)}(x_0, y_0) = R^{(k)} e^{i(rx_0 + sy_0)},$$

Nuevamente, tomando en cuenta que la expresión (4.4) es lineal, es posible escribir un esquema para calcular el error local en cada paso de tiempo como

$$\begin{aligned} R^{(k+1)} e^{i(rx_0 + sy_0)} &= R^{(k)} e^{i(rx_0 + sy_0)} + \theta \left[\sum_{l=0}^8 \Gamma_l R^{(k)} e^{i[r(x_0 + \Delta x_l) + s(y_0 + \Delta y_l)]} \right] \\ &+ (1 - \theta) \left[\sum_{l=0}^8 \Gamma_l R^{(k+1)} e^{i[r(x_0 + \Delta x_l) + s(y_0 + \Delta y_l)]} \right], \end{aligned}$$

que puede ser escrita como

$$R^{(k+1)} e^{i(rx_0 + sy_0)} = R^{(k)} e^{i(rx_0 + sy_0)} + [\theta + (1 - \theta)R] \sum_{l=0}^8 \Gamma_l R^{(k)} e^{i[r(x_0 + \Delta x_l) + s(y_0 + \Delta y_l)]}.$$

Esta expresión permite realizar un cálculo para el factor de amplificación como

$$R = 1 + [\theta + (1 - \theta)R] \sum_{l=0}^8 \Gamma_l e^{i[r\Delta x_l + s\Delta y_l]}. \quad (4.12)$$

Ahora, al igual que en el caso del análisis de estabilidad realizado para el esquema diseñado para la ecuación de advección, la suma en el lado derecho de la ecuación (4.12) puede escribirse como

$$H = \sum_{l=0}^8 \Gamma_l [\cos(r\Delta x_l + s\Delta y_l)] + \sum_{l=0}^8 \Gamma_l [i \sin(r\Delta x_l + s\Delta y_l)],$$

y, tomando nuevamente en cuenta las condiciones

$$\Gamma_0 = - \sum_{l=1}^8 \Gamma_l,$$

$$\cos(r\Delta x_0 + s\Delta y_0) = 1,$$

y

$$\sin(r\Delta x_0 + s\Delta y_0) = 0,$$

puede escribirse como

$$H = \sum_{l=1}^8 \Gamma_l [\cos(r\Delta x_l + s\Delta y_l) - 1] + \sum_{l=1}^8 \Gamma_l [i \sin(r\Delta x_l + s\Delta y_l)].$$

Considerando, nuevamente, que, hasta segundo orden,

$$\begin{aligned} \cos(r\Delta x_l + s\Delta y_l) - 1 &= -[r\Delta x_l + s\Delta y_l]^2/2! \\ &= -[r^2\Delta x_l^2 + 2rs\Delta x_l\Delta y_l + s^2\Delta y_l^2]/2, \end{aligned}$$

y

$$\sin(r\Delta x_l + s\Delta y_l) = r(\Delta x)_l + s(\Delta y)_l + \mathcal{O}(\Delta x^3, \Delta y^3),$$

la suma puede expresarse como

$$\begin{aligned} H &= \sum_{l=0}^q \Gamma_l + i \sum_{l=1}^q [r\Gamma_l\Delta x_l + s\Gamma_l\Delta y_l] - \sum_{l=1}^q \left[\frac{r^2}{2}\Gamma_l\Delta x_l^2 + rs\Gamma_l\Delta x_l\Delta y_l + \frac{s^2}{2}\Gamma_l\Delta y_l^2 \right] \\ &= F + i[rD + sE] - [Ar^2 + Brs + Cs^2]. \end{aligned}$$

En el caso de la ecuación de difusión, donde $A = C = \nu\Delta t$ y $B = D = E = F = 0$, H toma la forma

$$H = -\nu\Delta t[r^2 + s^2].$$

Ahora, el factor de amplificación puede ser escrito como

$$R = \frac{1 + \theta H}{1 - (1 - \theta)H}. \quad (4.13)$$

Dado que, para obtener *estabilidad incondicional*, es necesario que $|R|^2 \leq 1$, *i. e.*

$$\left| \frac{1 + \theta H}{1 - (1 - \theta)H} \right|^2 \leq 1.$$

Esta expresión puede ser reducida,

$$\begin{aligned}
1 + 2\theta H + \theta^2 H^2 &\leq 1 - 2(1 - \theta)H + (1 - \theta)^2 H^2, \\
2\theta H + \theta^2 H^2 &\leq -2H + 2\theta H + H^2 - 2\theta H^2 + \theta^2 H^2, \\
0 &\leq -2H - 2\theta H^2 + H^2, \\
0 &\geq -2 - 2\theta H + H, \\
2\theta H &\geq -2 + H, \\
\theta &\leq \frac{1}{2} - \frac{1}{H},
\end{aligned}$$

lo cual permite obtener

$$\theta \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{\nu(r^2 + s^2)\Delta t}. \quad (4.14)$$

Además, el lado derecho de la ecuación (4.14) puede tomar valores mayores que $\frac{1}{2}$ por lo que, para obtener un factor de amplificación menor que 1, la elección de θ puede hacerse como

$$0 < \theta \leq \frac{1}{2}.$$

Con esta elección, el esquema implícito resulta ser *incondicionalmente estable*.

Por su parte, las condiciones de estabilidad para el esquema explícito (4.10), nuevamente, pueden obtenerse de tomar el caso $\theta = 1$ en la ecuación (4.19), lo cual puede escribirse como

$$R = 1 + H,$$

nuevamente, dado que, para que exista estabilidad es necesario que $|R|^2 \leq 1$, entonces

$$|1 - \nu\Delta t[r^2 + s^2]|^2 \leq 1,$$

lo cual dice que el esquema explícito es *condicionalmente estable* para

$$\nu[r^2 + s^2]\Delta t < 2.$$

4.1.3. Ecuación de Advección-Difusión

Es posible escribir caso en dos dimensiones espaciales para la ecuación advección-difusión como

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] - a \frac{\partial u}{\partial x} - b \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (4.15)$$

donde $u = u(x, y, t)$. Además, un esquema de diferencias finitas generalizadas puede aplicarse para encontrar una solución numérica de dicha ecuación.

En este caso en particular, el problema a resolver es el de encontrar una solución numérica de

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \nu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] - a \frac{\partial u}{\partial x} - b \frac{\partial u}{\partial y}, & \Omega \times [0, T], & \quad \nu \in \mathbb{R}, \\ u(x, y, 0) &= g(x, y), & (x, y) \in \Omega, & \\ u(x, y, t) |_{\partial\Omega} &= h(x, y), & (x, y) \in \Omega & \quad t \in [0, T], \end{aligned}$$

donde Ω es, nuevamente, un dominio plano simplemente conexo y su frontera, $\partial\Omega$ es un polígono de Jordan orientado de manera positiva, como el que se muestra en la Figura 4.8.

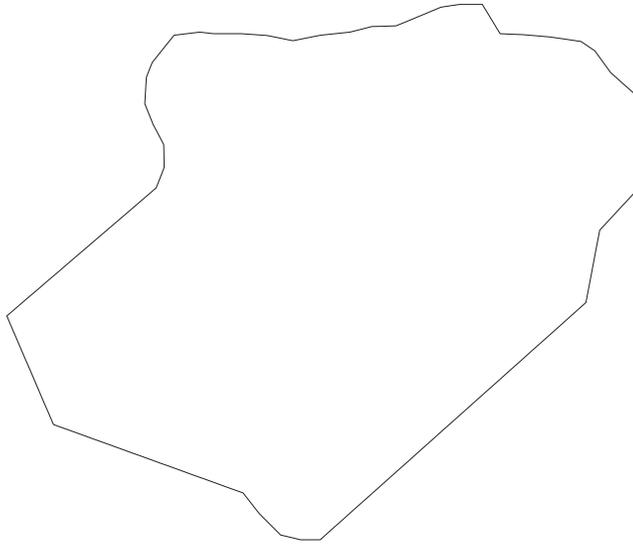


Figura 4.8: Ejemplo de dominio Ω .

Al igual que en casos anteriores, utilizando un esquema clásico de diferencias finitas, la ecuación (4.15) puede ser parcialmente discretizada en el tiempo como

$$u(x, y, t + \Delta t) \approx u(x, y, t) + \nu \Delta t \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] - \Delta t \left[a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} \right].$$

Con esto, una vez más, es posible utilizar el esquema definido por (2.3) para aproximar

el operador lineal

$$\nu \Delta t \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] - \Delta t \left[a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} \right],$$

en cada nivel de tiempo. De esta manera, al igual que en los casos anteriores, se obtiene una solución numérica de la forma

$$u_0^{(k+1)} = u_0^{(k)} + \sum_{i=0}^q \Gamma_i u_i^{(k)}, \quad (4.16)$$

en donde $u_i^{(k)}$ es, nuevamente, la aproximación a la solución, u , en el punto p_i al tiempo $k\Delta t$; del cual, al igual que en los casos de advección y difusión, puede escribirse un esquema implícito θ como

$$u_0^{(k+1)} = u_0^{(k)} + \theta \sum_{i=0}^q \Gamma_i u_i^{(k)} + (1 - \theta) \sum_{i=0}^q \Gamma_i u_i^{(k+1)}. \quad (4.17)$$

Nuevamente, debido a las características del problema físico que describe esta ecuación, es recomendado tomar en cuenta un esquema centrado en el espacio, en el cual se involucren al nodo central y 8 de sus vecinos, como el que se muestra en la Figura 4.9.

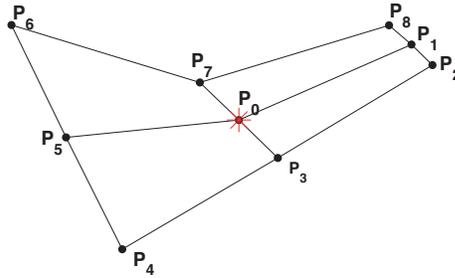


Figura 4.9: Estencil centrado en el espacio.

Análisis de Estabilidad

Siguiendo el mismo enfoque que en los esquemas anteriores, para el esquema definido por (4.17), es posible expresar el error local en el nodo central, en un paso de tiempo k , como

$$\Phi^{(k)}(x_0, y_0) = R^{(k)} e^{i(rx_0 + sy_0)},$$

por lo que, en el caso implícito, el error toma la forma

$$R^{(k+1)}e^{i(rx_0+sy_0)} = R^{(k)}e^{i(rx_0+sy_0)} + \theta \left[\sum_{l=0}^8 \Gamma_l R^{(k)} e^{i[r(x_0+\Delta x_l)+s(y_0+\Delta y_l)]} \right] \\ + (1-\theta) \left[\sum_{l=0}^8 \Gamma_l R^{(k+1)} e^{i[r(x_0+\Delta x_l)+s(y_0+\Delta y_l)]} \right],$$

o, reescribiendo, como en los casos anteriores,

$$R^{(k+1)}e^{i(rx_0+sy_0)} = R^{(k)}e^{i(rx_0+sy_0)} + [\theta + (1-\theta)R] \sum_{l=0}^8 \Gamma_l R^{(k)} e^{i[r(x_0+\Delta x_l)+s(y_0+\Delta y_l)]}.$$

Con esto, es posible expresar el factor de amplificación como

$$R = 1 + [\theta + (1-\theta)R] \sum_{l=0}^8 \Gamma_l e^{i[r\Delta x_l + s\Delta y_l]}. \quad (4.18)$$

En esta ocasión, nuevamente, es posible escribir la suma que se encuentra el lado derecho de la ecuación (4.18) como

$$H = \sum_{l=0}^8 \Gamma_l [\cos(r\Delta x_l + s\Delta y_l)] + \sum_{l=0}^8 \Gamma_l [i \sin(r\Delta x_l + s\Delta y_l)],$$

la cual, al tomar las condiciones

$$\Gamma_0 = - \sum_{l=1}^8 \Gamma_l,$$

$$\cos(r\Delta x_0 + s\Delta y_0) = 1,$$

y

$$\sin(r\Delta x_0 + s\Delta y_0) = 0,$$

puede escribirse como

$$H = \sum_{l=1}^8 \Gamma_l [\cos(r\Delta x_l + s\Delta y_l) - 1] + \sum_{l=1}^8 \Gamma_l [i \sin(r\Delta x_l + s\Delta y_l)].$$

Siguiendo un camino análogo al seguido en las secciones anteriores, las condiciones

hasta segundo orden permiten que la suma pueda expresarse como

$$\begin{aligned} H &= \sum_{l=0}^q \Gamma_l + i \sum_{l=1}^q [r\Gamma_l \Delta x_l + s\Gamma_l \Delta y_l] - \sum_{l=1}^q \left[\frac{r^2}{2} \Gamma_l \Delta x_l^2 + rs\Gamma_l \Delta x_l \Delta y_l + \frac{s^2}{2} \Gamma_l \Delta y_l^2 \right] \\ &= F + i[rD + sE] - [Ar^2 + Brs + Cs^2]. \end{aligned}$$

Con lo cual, en el caso de la ecuación de advección - difusión, donde $A = C = \nu\Delta t$, $D = -a\Delta t$, $E = -b\Delta t$ y $E = F = 0$, H , toma la forma

$$H = -\Delta t [\nu(r^2 + s^2) + i(ar + bs)].$$

Ahora, el factor de amplificación puede ser escrito como

$$R = \frac{1 + \theta H}{1 - (1 - \theta)H}. \quad (4.19)$$

Dado que, para obtener *estabilidad incondicional*, es necesario que $|R|^2 \leq 1$, es posible escribir

$$\left| \frac{1 - \nu\theta(r^2 + s^2)\Delta t - i\theta(ar + bs)\Delta t}{1 + \nu(1 - \theta)(r^2 + s^2)\Delta t + i(1 - \theta)(ar + bs)\Delta t} \right| \leq 1.$$

Si se toma un valor para θ como

$$0 \leq \theta \leq \frac{1}{2},$$

entonces

$$|1 - \nu(r^2 + s^2)\Delta t\theta| \leq |1 + \nu(r^2 + s^2)\Delta t(1 - \theta)|,$$

y

$$|(ar + bs)\Delta t\theta| \leq |(ar + bs)\Delta t(1 - \theta)|.$$

Por lo que, con esta selección, $|R|^2 \leq 1$ y el esquema implícito resulta ser *incondicionalmente estable*.

Ahora, considerando el caso particular de $\theta = 1$ en el esquema (4.17), la condición es estabilidad para el esquema explícito (4.16) puede escribirse como

$$|1 - [\nu(r^2 + s^2) + i(ar + bs)] \Delta t| \leq 1$$

lo cual dice que el esquema explícito es *condicionalmente estable* para

$$\Delta t \leq \frac{2\nu (r^2 + s^2)}{\nu^2 (r^2 + s^2)^2 + (ar + bs)^2} = \frac{2\nu}{\nu^2 (r^2 + s^2) + \left(\frac{ar}{\sqrt{r^2 + s^2}} + \frac{bs}{\sqrt{r^2 + s^2}} \right)^2},$$

además, tomando en cuenta que

$$\left(\frac{ar}{\sqrt{r^2 + s^2}} + \frac{bs}{\sqrt{r^2 + s^2}} \right)^2 \leq (a + b)^2,$$

entonces, es suficiente con tener

$$\Delta t \leq \frac{2\nu}{\nu^2 (r^2 + s^2) + (a + b)^2}.$$

Es importante hacer mención de que, en todos los casos anteriores, dado que, en una malla general, no es posible garantizar que el método de diferencias finitas generalizadas produzca un sistema

$$\mathbb{M}\Gamma = \beta,$$

con matrices \mathbb{M} normales ni simétricas, no es posible realizar un análisis de estabilidad matricial y es debido a esto que se opta por realizar un análisis de estabilidad de von Neumann. Un tercer análisis de estabilidad es el análisis de la conservación de las cantidades físicas, el cual se basa en revisar que se cumplan las leyes de conservación de masa, energía y momento. El lector interesado en dicho método puede revisar más a profundidad el mismo en el trabajo de Iserles [28].

4.2. Esquema Híbrido para la Aproximación de las Ecuaciones de Aguas Someras

El interés de la presente sección es mostrar el desarrollo de esquemas híbridos, de Diferencias Finitas-Volúmenes Finitos, aplicado a encontrar una solución numérica a las ecuaciones de aguas someras, las cuales, como se vio anteriormente, en su forma conservativa pueden ser escritas como

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial y} = 0, \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{r^2}{a} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{rs}{a} \right) - fs + g \frac{\partial q}{\partial x} + cfr \frac{\sqrt{r^2 + s^2}}{a} = 0, \quad (4.21)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{rs}{a} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{s^2}{a} \right) + fr + g \frac{\partial q}{\partial y} + c_f s \frac{\sqrt{r^2 + s^2}}{a} = 0, \quad (4.22)$$

y, en su forma no conservativa, las mismas pueden escribirse de la siguiente manera:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial y} = 0, \quad (4.23)$$

$$\frac{\partial r}{\partial t} + \frac{2r}{a} \frac{\partial r}{\partial x} + ga \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{r}{a} \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{s}{a} \frac{\partial r}{\partial y} - fs + c_f \frac{r}{a^2} \sqrt{r^2 + s^2} = 0, \quad (4.24)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{r}{a} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{s}{a} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{2s}{a} \frac{\partial s}{\partial y} + ga \frac{\partial q}{\partial y} + fr + c_f \frac{s}{a^2} \sqrt{r^2 + s^2} = 0, \quad (4.25)$$

en cada caso, q , r y s son las variables conservativas que representan la masa y el momento del problema físico.

Es importante notar que, vistas desde un punto de vista diferencial, ambos conjuntos de ecuaciones son exactamente las mismas; sin embargo, al momento de revisar la forma discreta se puede encontrar diferencias. La forma conservativa es, usualmente, utilizada debido a que puede reproducir correctamente el fenómeno físico de interés, no obstante, su discretización e implementación puede ser mu complicada. Por su parte, haciendo uso de la forma no conservativa, es más fácil producir esquemas numéricos para la aproximación de la solución de las ecuaciones; sin embargo, dichos esquemas, suelen presentar ondas de choque y oscilaciones espurias. A pesar de esto, en el presente trabajo se muestran esquemas para la aproximación de ambas formas diferenciales, los cuales, como se mostrará en el Capítulo 5, pueden producir buenas aproximaciones a la dinámica real del fenómeno a estudiar sin producir ondas de choque ni oscilaciones espurias.

Los esquemas híbridos propuestos surgen de la forma integral de las ecuaciones que reflejan el cambio en el momento, (4.21 - 4.22), y (4.24 - 4.25); y una aproximación en diferencias finitas para la solución las ecuaciones de conservación, (4.20) y (4.23), respectivamente.

A continuación, se muestra el desarrollo realizado para los diferentes esquemas híbridos desarrollados para modelar el cambio de masa y momento en cada nodo de una región discretizada.

4.2.1. Esquemas Híbridos en Regiones Rectangulares

En regiones rectangulares, la región espacial se puede discretizar tomando en cuenta una malla formada por celdas uniformes $C_{i,j}$ definidas como

$$C_{i,j} = \left[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}} \right] \times \left[y_{i-\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}} \right],$$

como se muestra en la Figura 4.10.

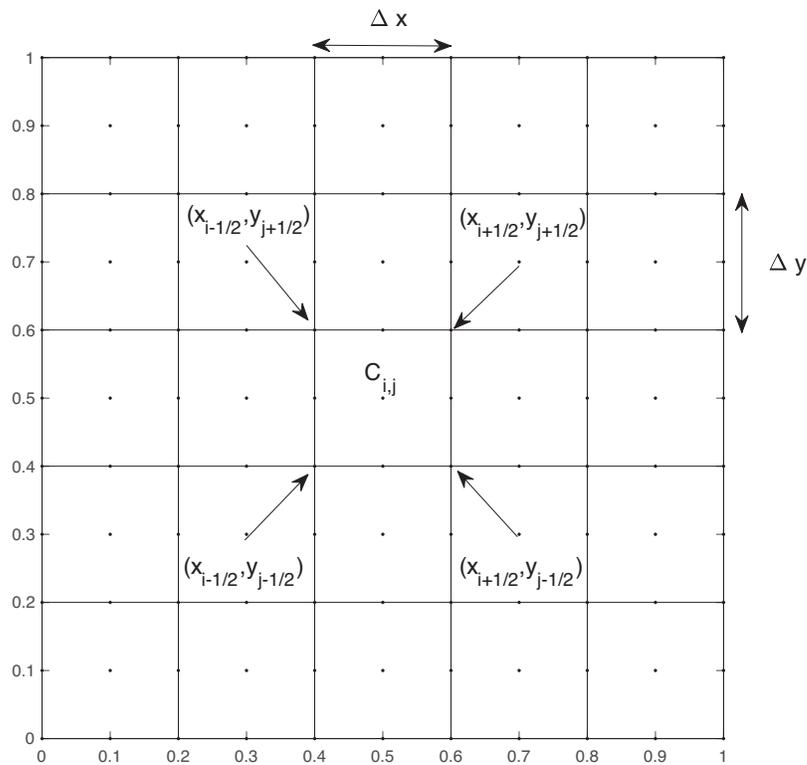


Figura 4.10: Malla uniforme sobre una región rectangular Ω .

Esquema Híbrido Para la Forma Conservativa

Con esta discretización de la región, el esquema propuesto aproxima el valor de q en el centro de cada celda utilizando una aproximación en diferencias finitas clásicas.

Para este caso, las derivadas parciales pueden ser aproximadas en el punto central $p_{i,j}$,

utilizando un esquema de diferencias finitas centrado, como

$$\frac{\partial q}{\partial t} \approx \frac{q_{i,j}^{(k+1)} - q_{i,j}^{(k)}}{\Delta t},$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} \approx \frac{r_{i+\frac{1}{2},j}^{(k)} - r_{i-\frac{1}{2},j}^{(k)}}{\Delta x},$$

y

$$\frac{\partial s}{\partial y} \approx \frac{s_{i,j+\frac{1}{2}}^{(k)} - s_{i,j-\frac{1}{2}}^{(k)}}{\Delta y}.$$

donde los subíndices y superíndices representan la posición espacial en la malla y el nivel de tiempo, respectivamente.

Tomando en cuenta estas aproximaciones, la primera ecuación puede ser aproximada como

$$\frac{q_{i,j}^{(k+1)} - q_{i,j}^{(k)}}{\Delta t} + \frac{r_{i+\frac{1}{2},j}^{(k)} - r_{i-\frac{1}{2},j}^{(k)}}{\Delta x} + \frac{s_{i,j+\frac{1}{2}}^{(k)} - s_{i,j-\frac{1}{2}}^{(k)}}{\Delta y} = 0.$$

De aquí, resolviendo dicha ecuación para $q_{i,j}^{(k+1)}$, puede obtenerse la aproximación

$$q_{i,j}^{(k+1)} = q_{i,j}^{(k)} - \Delta t \left[\frac{r_{i+\frac{1}{2},j}^{(k)} - r_{i-\frac{1}{2},j}^{(k)}}{\Delta x} + \frac{s_{i,j+\frac{1}{2}}^{(k)} - s_{i,j-\frac{1}{2}}^{(k)}}{\Delta y} \right]. \quad (4.26)$$

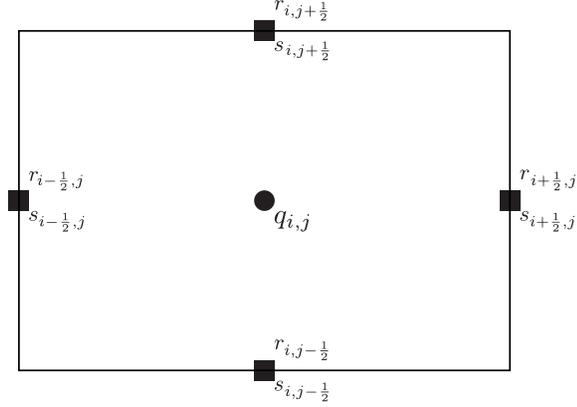
El estencil relacionado a esta aproximación puede verse en la Figura 4.11.

Ahora, los valores de r y s pueden aproximarse mediante un *Esquema Híbrido de Diferencias Finitas y Volúmenes Finitos* en los puntos medios de las aristas de cada celda. Para lograr esto, debe de tomarse en cuenta la forma integral de las ecuaciones (4.21) y (4.22).

La forma integral de la ecuación (4.21), evaluada sobre una celda arbitraria $C_{i,j}$, es

$$\int_{C_{i,j}} \left[\frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{r^2}{a} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{rs}{a} \right) - fs + ga \frac{\partial q}{\partial x} + cfr \frac{\sqrt{r^2 + s^2}}{a^2} \right] dA = 0.$$

En esta expresión, las derivadas parciales pueden ser remplazadas por su aproximación


 Figura 4.11: Estencil centrado para q .

en diferencias finitas, calculadas en las aristas de la celda,

$$\frac{\partial r}{\partial t} \approx \frac{r_{i+\frac{1}{2},j}^{(k+1)} - r_{i+\frac{1}{2},j}^{(k)}}{\Delta t},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{r^2}{a} \right) \approx \frac{\left(r_{i+\frac{3}{2},j}^{(k)} \right)^2 - \left(r_{i-\frac{1}{2},j}^{(k)} \right)^2}{2a\Delta x},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{rs}{a} \right) \approx \frac{r_{i+\frac{1}{2},j+1}^{(k)} s_{i+\frac{1}{2},j+1}^{(k)} - r_{i+\frac{1}{2},j-1}^{(k)} s_{i+\frac{1}{2},j-1}^{(k)}}{2a\Delta y},$$

y

$$\frac{\partial q}{\partial x} \approx \frac{q_{i+1,j}^{(k)} - q_{i,j}^{(k)}}{\Delta x},$$

para obtener

$$\int_{C_{i,j}} \left[\frac{r_{i+\frac{1}{2},j}^{(k+1)} - r_{i+\frac{1}{2},j}^{(k)}}{\Delta t} + \frac{\left(r_{i+\frac{3}{2},j}^{(k)} \right)^2 - \left(r_{i-\frac{1}{2},j}^{(k)} \right)^2}{2a\Delta x} + \frac{r_{i+\frac{1}{2},j+1}^{(k)} s_{i+\frac{1}{2},j+1}^{(k)} - r_{i+\frac{1}{2},j-1}^{(k)} s_{i+\frac{1}{2},j-1}^{(k)}}{2a\Delta y} - f s_{i+\frac{1}{2},j}^{(k)} + g a \frac{q_{i+1,j}^{(k)} - q_{i,j}^{(k)}}{\Delta x} + \frac{c_f r_{i+\frac{1}{2},j}^{(k)}}{a^2} \sqrt{\left(r_{i+\frac{1}{2},j}^{(k)} \right)^2 + \left(s_{i+\frac{1}{2},j}^{(k)} \right)^2} \right] dA = 0.$$

Dado que el valor de la integral debe ser 0 para cualquier celda $C_{i,j}$, la expresión anterior

puede escribirse como

$$\begin{aligned} & \frac{r_{i+\frac{1}{2},j}^{(k+1)} - r_{i+\frac{1}{2},j}^{(k)}}{\Delta t} + \frac{\left(r_{i+\frac{3}{2},j}^{(k)}\right)^2 - \left(r_{i-\frac{1}{2},j}^{(k)}\right)^2}{2a\Delta x} + \frac{r_{i+\frac{1}{2},j+1}^{(k)}s_{i+\frac{1}{2},j+1}^{(k)} - r_{i+\frac{1}{2},j-1}^{(k)}s_{i+\frac{1}{2},j-1}^{(k)}}{2a\Delta y} \\ & - fs_{i+\frac{1}{2},j}^{(k)} + ga\frac{q_{i+1,j}^{(k)} - q_{i,j}^{(k)}}{\Delta x} + \frac{cfr_{i+\frac{1}{2},j}^{(k)}}{a^2} \sqrt{\left(r_{i+\frac{1}{2},j}^{(k)}\right)^2 + \left(s_{i+\frac{1}{2},j}^{(k)}\right)^2} = 0, \end{aligned}$$

de donde, resolviendo para $r_{i+\frac{1}{2},j}^{(k+1)}$, puede obtenerse la aproximación

$$\begin{aligned} r_{i+\frac{1}{2},j}^{(k+1)} = & r_{i+\frac{1}{2},j}^{(k)} - \Delta t \left[\frac{\left(r_{i+\frac{3}{2},j}^{(k)}\right)^2 - \left(r_{i-\frac{1}{2},j}^{(k)}\right)^2}{2a\Delta x} + \frac{r_{i+\frac{1}{2},j+1}^{(k)}s_{i+\frac{1}{2},j+1}^{(k)} - r_{i+\frac{1}{2},j-1}^{(k)}s_{i+\frac{1}{2},j-1}^{(k)}}{2a\Delta y} \right. \\ & \left. - fs_{i+\frac{1}{2},j}^{(k)} + ga\frac{q_{i+1,j}^{(k)} - q_{i,j}^{(k)}}{\Delta x} + \frac{cfr_{i+\frac{1}{2},j}^{(k)}}{a^2} \sqrt{\left(r_{i+\frac{1}{2},j}^{(k)}\right)^2 + \left(s_{i+\frac{1}{2},j}^{(k)}\right)^2} \right]. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Siguiendo una lógica similar, la forma integral de la ecuación (4.22),

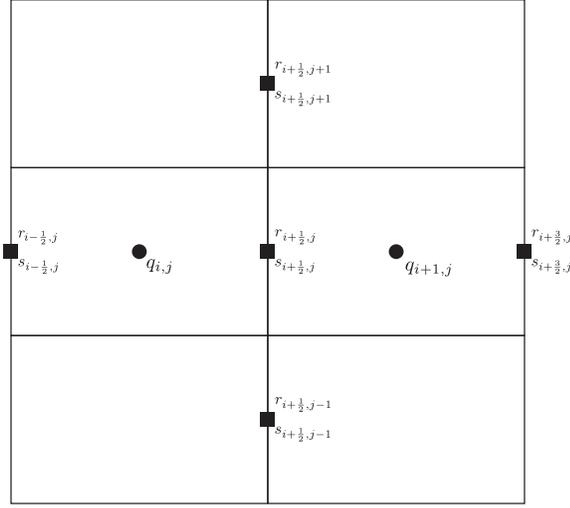
$$\int_{C_{(i,j)}} \left[\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{rs}{a} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{s^2}{a} \right) + fr + ga\frac{\partial q}{\partial y} + cfs\frac{\sqrt{r^2 + s^2}}{a^2} \right] dA = 0,$$

puede ser tratada para obtener una aproximación a $s_{i+\frac{1}{2},j}^{(k+1)}$,

$$\begin{aligned} s_{i+\frac{1}{2},j}^{(k+1)} = & s_{i+\frac{1}{2},j}^{(k)} - \Delta t \left[\frac{r_{i+\frac{3}{2},j}^{(k)}s_{i+\frac{3}{2},j}^{(k)} - r_{i-\frac{1}{2},j}^{(k)}s_{i-\frac{1}{2},j}^{(k)}}{2a\Delta x} + \frac{\left(s_{i+\frac{1}{2},j+1}^{(k)}\right)^2 - \left(s_{i+\frac{1}{2},j-1}^{(k)}\right)^2}{2a\Delta y} \right. \\ & \left. - fr_{i+\frac{1}{2},j}^{(k)} + ga\frac{\left(\frac{q_{i,j+1}^{(k)} + q_{i+1,j+1}^{(k)}}{2}\right) - \left(\frac{q_{i,j-1}^{(k)} + q_{i+1,j-1}^{(k)}}{2}\right)}{2\Delta y} + \frac{cfs_{i+\frac{1}{2},j}^{(k)}}{a^2} \sqrt{\left(r_{i+\frac{1}{2},j}^{(k)}\right)^2 + \left(s_{i+\frac{1}{2},j}^{(k)}\right)^2} \right]. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Las ecuaciones (4.27) y (4.28) siguen un estencil como el que se encuentra esbozado en la Figura 4.12.

Es importante notar que, para calcular el valor de r y s en los puntos medios de todas las aristas de la celda, es importante contar con una aproximación también para $r_{i,j+\frac{1}{2}}^{(k+1)}$ y $s_{i,j+\frac{1}{2}}^{(k+1)}$. Para esto, se sigue un proceso similar al seguido anteriormente, con lo que se


 Figura 4.12: Estencil centrado para $r_{i+\frac{1}{2},j}$ y $s_{i+\frac{1}{2},j}$.

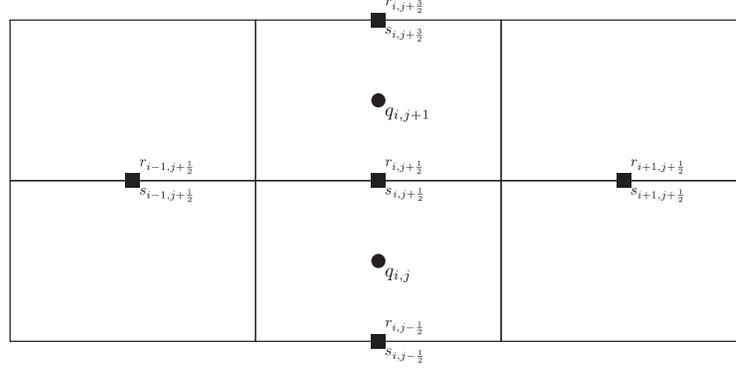
obtienen las aproximaciones:

$$\begin{aligned}
 r_{i,j+\frac{1}{2}}^{(k+1)} = & r_{i,j+\frac{1}{2}}^{(k)} - \Delta t \left[\frac{\left(r_{i+1,j+\frac{1}{2}}^{(k)}\right)^2 - \left(r_{i-1,j+\frac{1}{2}}^{(k)}\right)^2}{2a\Delta x} + \frac{r_{i,j+\frac{3}{2}}^{(k)}s_{i,j+\frac{3}{2}}^{(k)} - r_{i,j-\frac{1}{2}}^{(k)}s_{i,j-\frac{1}{2}}^{(k)}}{2a\Delta y} \right. \\
 & \left. - f s_{i,j+\frac{1}{2}}^{(k)} + ga \frac{\left(\frac{q_{i+1,j}^{(k)} + q_{i+1,j+1}^{(k)}}{2}\right) - \left(\frac{q_{i-1,j}^{(k)} + q_{i-1,j+1}^{(k)}}{2}\right)}{2\Delta x} + \frac{c_f r_{i,j+\frac{1}{2}}^{(k)}}{a^2} \sqrt{\left(r_{i,j+\frac{1}{2}}^{(k)}\right)^2 + \left(s_{i,j+\frac{1}{2}}^{(k)}\right)^2} \right].
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

$$\begin{aligned}
 s_{i,j+\frac{1}{2}}^{(k+1)} = & s_{i,j+\frac{1}{2}}^{(k)} - \Delta t \left[\frac{r_{i+1,j+\frac{1}{2}}^{(k)}s_{i+1,j+\frac{1}{2}}^{(k)} - r_{i-1,j+\frac{1}{2}}^{(k)}s_{i-1,j+\frac{1}{2}}^{(k)}}{2a\Delta x} + \frac{\left(s_{i,j+\frac{3}{2}}^{(k)}\right)^2 - \left(s_{i,j-\frac{1}{2}}^{(k)}\right)^2}{2a\Delta y} \right. \\
 & \left. - f r_{i,j+\frac{1}{2}}^{(k)} + ga \frac{q_{i,j+1}^{(k)} - q_{i,j}^{(k)}}{\Delta y} + \frac{c_f s_{i,j+\frac{1}{2}}^{(k)}}{a^2} \sqrt{\left(r_{i,j+\frac{1}{2}}^{(k)}\right)^2 + \left(s_{i,j+\frac{1}{2}}^{(k)}\right)^2} \right].
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

Estas ecuaciones, por su parte, describen un estencil como el que se muestra en la

Figura 4.13.


 Figura 4.13: Estencil centrado para $r_{i,j+\frac{1}{2}}$ y $s_{i,j+\frac{1}{2}}$.

Con esto, las ecuaciones (4.26) a (4.53) definen un esquema híbrido de diferencias y volúmenes finitos para la **forma conservativa** de las ecuaciones de aguas someras, en regiones rectangulares.

Esquema Híbrido Para la Forma no Conservativa

Para el caso de la forma no conservativa de las ecuaciones de aguas someras, es posible seguir un enfoque similar al tomado para la forma conservativa. En esta ocasión, se tomará en cuenta un esquema en diferencias finitas para la ecuación (4.23),

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial y} = 0,$$

y la forma integral de las ecuaciones (4.24) y (4.25),

$$\frac{\partial r}{\partial t} + \frac{2r}{a} \frac{\partial r}{\partial x} + ga \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{r}{a} \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{s}{a} \frac{\partial r}{\partial y} - fs + cf \frac{r}{a^2} \sqrt{r^2 + s^2} = 0,$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{r}{a} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{s}{a} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{2s}{a} \frac{\partial s}{\partial y} + ga \frac{\partial q}{\partial y} + fr + cf \frac{s}{a^2} \sqrt{r^2 + s^2} = 0.$$

Haciendo esto, es posible obtener un esquema definido por las ecuaciones

$$q_{i,j}^{(k+1)} = q_{i,j}^{(k)} - \Delta t \left[\frac{r_{i+\frac{1}{2},j}^{(k)} - r_{i-\frac{1}{2},j}^{(k)}}{\Delta x} + \frac{s_{i,j+\frac{1}{2}}^{(k)} - s_{i,j-\frac{1}{2}}^{(k)}}{\Delta y} \right], \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned}
 r_{i+\frac{1}{2},j}^{(k+1)} = & r_{i+\frac{1}{2},j}^{(k)} - \Delta t \left[\frac{2r_{i+\frac{1}{2},j}^{(k)}}{a} \left(\frac{r_{i+\frac{3}{2},j}^{(k)} - r_{i-\frac{1}{2},j}^{(k)}}{2\Delta x} \right) + ga \left(\frac{q_{i+1,j}^{(k)} - q_{i,j}^{(k)}}{\Delta x} \right) \right. \\
 & + \frac{r_{i+\frac{1}{2},j}^{(k)}}{a} \left(\frac{s_{i+\frac{1}{2},j+1}^{(k)} - s_{i+\frac{1}{2},j-1}^{(k)}}{2\Delta y} \right) + \frac{s_{i+\frac{1}{2},j}^{(k)}}{a} \left(\frac{r_{i+\frac{1}{2},j+1}^{(k)} - r_{i+\frac{1}{2},j-1}^{(k)}}{2\Delta y} \right) \\
 & \left. - fs_{i+\frac{1}{2},j}^{(k)} + cf \frac{r_{i+\frac{1}{2},j}^{(k)}}{a^2} \sqrt{\left(r_{i+\frac{1}{2},j}^{(k)} \right)^2 + \left(s_{i+\frac{1}{2},j}^{(k)} \right)^2} \right], \tag{4.32}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 s_{i+\frac{1}{2},j}^{(k+1)} = & s_{i+\frac{1}{2},j}^{(k)} - \Delta t \left[\frac{r_{i+\frac{1}{2},j}^{(k)}}{a} \left(\frac{s_{i+\frac{3}{2},j}^{(k)} - s_{i-\frac{1}{2},j}^{(k)}}{2\Delta x} \right) + \frac{s_{i+\frac{1}{2},j}^{(k)}}{a} \left(\frac{r_{i+\frac{3}{2},j}^{(k)} - r_{i-\frac{1}{2},j}^{(k)}}{2\Delta x} \right) \right. \\
 & + \frac{2s_{i+\frac{1}{2},j}^{(k)}}{a} \left(\frac{s_{i+\frac{1}{2},j+1}^{(k)} - s_{i+\frac{1}{2},j-1}^{(k)}}{2\Delta y} \right) + ga \left(\frac{\left(\frac{q_{i,j+1}^{(k)} + q_{i+1,j+1}^{(k)}}{2} \right) - \left(\frac{q_{i,j-1}^{(k)} + q_{i+1,j-1}^{(k)}}{2} \right)}{2\Delta y} \right) \\
 & \left. + fr_{i+\frac{1}{2},j}^{(k)} + cf \frac{s_{i+\frac{1}{2},j}^{(k)}}{a^2} \sqrt{\left(r_{i+\frac{1}{2},j}^{(k)} \right)^2 + \left(s_{i+\frac{1}{2},j}^{(k)} \right)^2} \right], \tag{4.33}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 r_{i,j+\frac{1}{2}}^{(k+1)} = & r_{i,j+\frac{1}{2}}^{(k)} - \Delta t \left[\frac{2r_{i,j+\frac{1}{2}}^{(k)}}{a} \left(\frac{r_{i+1,j+\frac{1}{2}}^{(k)} - r_{i-1,j+\frac{1}{2}}^{(k)}}{2\Delta x} \right) + ga \left(\frac{\left(\frac{q_{i+1,j}^{(k)} + q_{i+1,j+1}^{(k)}}{2} \right) - \left(\frac{q_{i-1,j}^{(k)} + q_{i-1,j+1}^{(k)}}{2} \right)}{\Delta x} \right) \right. \\
 & + \frac{r_{i,j+\frac{1}{2}}^{(k)}}{a} \left(\frac{s_{i,j+\frac{3}{2}}^{(k)} - s_{i,j-\frac{1}{2}}^{(k)}}{2\Delta y} \right) + \frac{s_{i,j+\frac{1}{2}}^{(k)}}{a} \left(\frac{r_{i,j+\frac{3}{2}}^{(k)} - r_{i,j-\frac{1}{2}}^{(k)}}{2\Delta y} \right) \\
 & \left. - fs_{i,j+\frac{1}{2}}^{(k)} + cf \frac{r_{i,j+\frac{1}{2}}^{(k)}}{a^2} \sqrt{\left(r_{i,j+\frac{1}{2}}^{(k)} \right)^2 + \left(s_{i,j+\frac{1}{2}}^{(k)} \right)^2} \right], \tag{4.34}
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
s_{i,j+\frac{1}{2}}^{(k+1)} = & s_{i,j+\frac{1}{2}}^{(k)} - \Delta t \left[\frac{r_{i,j+\frac{1}{2}}^{(k)}}{a} \left(\frac{s_{i+1,j+\frac{1}{2}}^{(k)} - s_{i-1,j+\frac{1}{2}}^{(k)}}{2\Delta x} \right) + \frac{s_{i,j+\frac{1}{2}}^{(k)}}{a} \left(\frac{r_{i+1,j+\frac{1}{2}}^{(k)} - r_{i-1,j+\frac{1}{2}}^{(k)}}{2\Delta x} \right) \right. \\
& + \frac{2s_{i,j+\frac{1}{2}}^{(k)}}{a} \left(\frac{s_{i,j+\frac{3}{2}}^{(k)} - s_{i,j-\frac{1}{2}}^{(k)}}{2\Delta y} \right) + ga \left(\frac{q_{i,j+1}^{(k)} - q_{i,j}^{(k)}}{\Delta y} \right) \\
& \left. + fr_{i,j+\frac{1}{2}}^{(k)} + c_f \frac{s_{i,j+\frac{1}{2}}^{(k)}}{a^2} \sqrt{\left(r_{i,j+\frac{1}{2}}^{(k)} \right)^2 + \left(s_{i,j+\frac{1}{2}}^{(k)} \right)^2} \right]. \tag{4.35}
\end{aligned}$$

Este esquema puede aplicarse a la forma **no conservativa** de las ecuaciones de aguas someras, en regiones rectangulares, y sigue los mismos estenciles mostrados en las Figuras 4.11 a 4.13.

4.2.2. Esquemas Híbridos en Regiones no Rectangulares

Los esquemas híbridos para regiones no regulares son obtenidos en una manera análoga a los de regiones rectangulares, con la diferencia de que, en este caso, en lugar de reemplazar las derivadas espaciales por su aproximación en diferencias finitas clásicas, éstas son reemplazadas por su aproximación en diferencias finitas generalizadas.

Esquema Híbrido Para la Forma Conservativa

Para el caso de la forma integral de las ecuaciones (4.21) y (4.22),

$$\int_{C_{(i,j)}} \left[\frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{r^2}{a} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{rs}{a} \right) - fs + ga \frac{\partial q}{\partial x} + c_f r \frac{\sqrt{r^2 + s^2}}{a^2} \right] dA = 0,$$

$$\int_{C_{(i,j)}} \left[\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{rs}{a} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{s^2}{a} \right) + fr + ga \frac{\partial q}{\partial y} + c_f s \frac{\sqrt{r^2 + s^2}}{a^2} \right] dA = 0$$

es posible reemplazar las derivadas espaciales por su aproximación en diferencias finitas generalizadas, mientras que las derivadas parciales son reemplazadas por su aproximación en diferencias finitas clásicas.

Si se considera, para cada caso, el operador linear de primer orden

$$L_{qrs} = Aq_x + Bq_y + Cq + Dr_x + Er_y + Fr + Gs_x + Hs_y + Is, \quad (4.36)$$

donde A, B, C, D, E, F, G, H e I son funciones dadas por la ecuación. El operador puede ser aproximado en un punto $p_0 = (x_0, y_0)$ utilizando valores de q, r y s en algunos nodos vecinos

$$p_i = (x_i, y_i) \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Dado que el operador (4.36) es parcialmente separable, éste puede ser escrito como

$$L_{qrs} = L_q + L_r + L_s,$$

donde

$$L_q = Aq_x + Bq_y + Cq,$$

$$L_r = Dr_x + Er_y + Fr,$$

y

$$L_s = Gs_x + Hs_y + Is.$$

Una vez separado, cada operador puede ser aproximado de manera separada, *i.e.*

$$L_{0q} = \Gamma_{10}q(p_0) + \Gamma_{11}q(p_1) + \dots + \Gamma_{1m}q(p_m) = \sum_{i=0}^m \Gamma_{1i}q(p_i), \quad (4.37)$$

$$L_{0r} = \Gamma_{20}r(p_0) + \Gamma_{21}r(p_1) + \dots + \Gamma_{2m}r(p_m) = \sum_{i=0}^m \Gamma_{2i}r(p_i), \quad (4.38)$$

y

$$L_{0s} = \Gamma_{30}s(p_0) + \Gamma_{31}s(p_1) + \dots + \Gamma_{3m}s(p_m) = \sum_{i=0}^m \Gamma_{3i}s(p_i). \quad (4.39)$$

Como ya se definió antes, un esquema de diferencias finitas L_0 es consistente si el error local de truncamiento $\tau(p_0)$ satisface que

$$\tau(p_0) = [L\phi]_{p_0} - L_0 \rightarrow 0,$$

mientras $p_1, \dots, p_m \rightarrow p_0$ [53, 54].

En este caso, esto quiere decir que

$$Aq_x + Bq_y + Cq - \sum_{i=0}^m \Gamma_{1i} q(p_i) \rightarrow 0, \quad (4.40)$$

$$Dr_x + Er_y + Fr - \sum_{i=0}^m \Gamma_{2i} r(p_i) \rightarrow 0, \quad (4.41)$$

y

$$Gs_x + Hs_y + Is - \sum_{i=0}^m \Gamma_{3i} s(p_i) \rightarrow 0. \quad (4.42)$$

Haciendo la correspondiente expansión en series de Taylor de las ecuaciones (4.40), (4.41) y (4.42), y reagrupando los términos de manera conveniente, se obtienen las expresiones

$$\begin{aligned} L_q(p_0) - L_{0q} &\approx \left[C(p_0) - \sum_{i=0}^m \Gamma_{1i} \right] q(p_0) + \left[A(p_0) - \sum_{i=1}^m \Gamma_{1i} \Delta x_i \right] q_x(p_0) \\ &+ \left[B(p_0) - \sum_{i=1}^m \Gamma_{1i} \Delta y_i \right] q_y(p_0), \end{aligned} \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned} L_r(p_0) - L_{0r} &\approx \left[F(p_0) - \sum_{i=0}^m \Gamma_{2i} \right] r(p_0) + \left[D(p_0) - \sum_{i=1}^m \Gamma_{2i} \Delta x_i \right] r_x(p_0) \\ &+ \left[E(p_0) - \sum_{i=1}^m \Gamma_{2i} \Delta y_i \right] r_y(p_0), \end{aligned} \quad (4.44)$$

y

$$\begin{aligned} L_s(p_0) - L_{0s} &\approx \left[I(p_0) - \sum_{i=0}^m \Gamma_{3i} \right] s(p_0) + \left[G(p_0) - \sum_{i=1}^m \Gamma_{3i} \Delta x_i \right] s_x(p_0) \\ &+ \left[H(p_0) - \sum_{i=1}^m \Gamma_{3i} \Delta y_i \right] s_y(p_0), \end{aligned} \quad (4.45)$$

donde $\Delta x_i = x_i - x_0$, $\Delta y_i = y_i - y_0$ para $i = 0, 1, \dots, m$.

La condición de consistencia, entonces, conduce a los sistemas

$$\begin{aligned}
 C(p_0) - \sum_{i=0}^m \Gamma_{1i} &= 0, & F(p_0) - \sum_{i=0}^m \Gamma_{2i} &= 0, & I(p_0) - \sum_{i=0}^m \Gamma_{3i} &= 0, \\
 A(p_0) - \sum_{i=1}^m \Gamma_{1i} \Delta x_i &= 0, & D(p_0) - \sum_{i=1}^m \Gamma_{2i} \Delta x_i &= 0, & G(p_0) - \sum_{i=1}^m \Gamma_{3i} \Delta x_i &= 0, \\
 B(p_0) - \sum_{i=1}^m \Gamma_{1i} \Delta y_i &= 0, & E(p_0) - \sum_{i=1}^m \Gamma_{2i} \Delta y_i &= 0, & H(p_0) - \sum_{i=1}^m \Gamma_{2i} \Delta y_i &= 0.
 \end{aligned}$$

El encontrar los valores de Γ que satisfacen estas condiciones requiere que se resuelvan los sistemas

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \Delta x_1 & \dots & \Delta x_m \\ 0 & \Delta y_1 & \dots & \Delta y_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{10} \\ \Gamma_{11} \\ \Gamma_{12} \\ \cdot \\ \cdot \\ \Gamma_{1m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C(p_0) \\ A(p_0) \\ B(p_0) \end{pmatrix}, \quad (4.46)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \Delta x_1 & \dots & \Delta x_m \\ 0 & \Delta y_1 & \dots & \Delta y_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{20} \\ \Gamma_{21} \\ \Gamma_{22} \\ \cdot \\ \cdot \\ \Gamma_{2m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(p_0) \\ D(p_0) \\ E(p_0) \end{pmatrix}, \quad (4.47)$$

y

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \Delta x_1 & \dots & \Delta x_m \\ 0 & \Delta y_1 & \dots & \Delta y_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{30} \\ \Gamma_{31} \\ \Gamma_{32} \\ \cdot \\ \cdot \\ \Gamma_{3m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I(p_0) \\ G(p_0) \\ H(p_0) \end{pmatrix}. \quad (4.48)$$

Es importante notar que cada sistema tiene 3 ecuaciones y $m + 1$ incógnitas por lo que, en general, en una malla adecuada, existe un kernel no trivial. Para seleccionar una solución, se

puede utilizar un subconjunto de ecuaciones normales del problema de mínimos cuadrados correspondiente; entonces, considerando las últimas 2 ecuaciones en cada sistema,

$$\begin{pmatrix} \Delta x_1 & \dots & \Delta x_m \\ \Delta y_1 & \dots & \Delta y_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{11} \\ \Gamma_{12} \\ \cdot \\ \cdot \\ \Gamma_{1m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(p_0) \\ B(p_0) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \Delta x_1 & \dots & \Delta x_m \\ \Delta y_1 & \dots & \Delta y_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{21} \\ \Gamma_{22} \\ \cdot \\ \cdot \\ \Gamma_{2m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D(p_0) \\ E(p_0) \end{pmatrix},$$

y

$$\begin{pmatrix} \Delta x_1 & \dots & \Delta x_m \\ \Delta y_1 & \dots & \Delta y_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{31} \\ \Gamma_{32} \\ \cdot \\ \cdot \\ \Gamma_{3m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G(p_0) \\ H(p_0) \end{pmatrix},$$

las cuales pueden ser resueltas en el sentido de los cuadrados mínimos, es posible obtener los valores de $\Gamma_{11}, \dots, \Gamma_{1m}, \Gamma_{21}, \dots, \Gamma_{2m}, \Gamma_{31}, \dots, \Gamma_{3m}$.

Después de esto, para obtener los valores de Γ_{10} , Γ_{20} y Γ_{30} , se pueden utilizar las primeras ecuaciones de (4.46), (4.47) y (4.48),

$$\Gamma_{10} = C(p_0) - \Gamma_{11}\dots - \Gamma_{1m}, \tag{4.49}$$

$$\Gamma_{20} = F(p_0) - \Gamma_{21}\dots - \Gamma_{2m}, \tag{4.50}$$

$$\Gamma_{30} = G(p_0) - \Gamma_{31}\dots - \Gamma_{3m}. \tag{4.51}$$

Los coeficientes Γ resultantes definirán, entonces, el esquema definido por las ecuaciones (4.37 - 4.39).

Este esquema puede ser utilizado para aproximar los operadores

$$\begin{aligned} L_q &= Aq_x + Bq_y + Cq, \\ L_r &= Dq_x + Eq_y + Fq, \\ L_s &= Gq_x + Hq_y + Iq, \end{aligned}$$

para obtener, para cada ecuación por separado, las aproximaciones

$$r_0^{(k+1)} = r_0^{(k)} + \sum_{i=0}^m \left[\Gamma_{1i} q_i^{(k)} + \Gamma_{2i} r_i^{(k)} + \Gamma_{3i} s_i^{(k)} - f s_i^{(k)} + \frac{c_f r_i^{(k)}}{a^2} \sqrt{(r_i^{(k)})^2 + (s_i^{(k)})^2} \right], \quad (4.52)$$

$$s_0^{(k+1)} = s_0^{(k)} + \sum_{i=0}^m \left[\Gamma_{1i} q_i^{(k)} + \Gamma_{2i} r_i^{(k)} + \Gamma_{3i} s_i^{(k)} + f r_i^{(k)} + \frac{c_f s_i^{(k)}}{a^2} \sqrt{(r_i^{(k)})^2 + (s_i^{(k)})^2} \right]. \quad (4.53)$$

Ahora, para la ecuación (4.20),

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial y} = 0,$$

es posible utilizar una aproximación en diferencias finitas generalizadas para obtener la solución numérica

$$q_0^{(k+1)} = q_0^{(k)} + \sum_{i=0}^m \left[\Gamma_{2i} r_i^{(k)} + \Gamma_{3i} s_i^{(k)} \right]. \quad (4.54)$$

Las ecuaciones (4.52), (4.53) and (4.54) definen un esquema híbrido de diferencias finitas generalizadas y volúmenes finitos para la **forma conservativa** de las ecuaciones de aguas someras, en regiones no rectangulares.

Esquema Híbrido Para la Forma no Conservativa

De una manera análoga, para la forma no conservativa de las ecuaciones de aguas someras, si se toma en cuenta la forma integral de las ecuaciones (4.24) y (4.25)

$$\int_{\mathcal{C}_{(i,j)}} \left[\frac{\partial r}{\partial t} + \frac{2r}{a} \frac{\partial r}{\partial x} + ga \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{r}{a} \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{s}{a} \frac{\partial r}{\partial y} - fs + c_f \frac{r}{a^2} \sqrt{r^2 + s^2} \right] dA = 0,$$

$$\int_{\mathcal{C}_{(i,j)}} \left[\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{r}{a} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{s}{a} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{2s}{a} \frac{\partial s}{\partial y} + ga \frac{\partial q}{\partial y} + fr + c_f \frac{s}{a^2} \sqrt{r^2 + s^2} \right] dA = 0,$$

y se aplica esquema en diferencias finitas generalizadas a la ecuación (4.23),

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial y} = 0,$$

se encontrará el esquema definido por

$$r_0^{(k+1)} = r_0^{(k)} + \sum_{i=0}^m \left[\Gamma_{1i} q_i^{(k)} + \Gamma_{2i} r_i^{(k)} + \Gamma_{3i} s_i^{(k)} - f s_i^{(k)} + \frac{C f r_i^{(k)}}{a^2} \sqrt{(r_i^{(k)})^2 + (s_i^{(k)})^2} \right], \quad (4.55)$$

$$s_0^{(k+1)} = s_0^{(k)} + \sum_{i=0}^m \left[\Gamma_{1i} q_i^{(k)} + \Gamma_{2i} r_i^{(k)} + \Gamma_{3i} s_i^{(k)} + f s_i^{(k)} + \frac{C f s_i^{(k)}}{a^2} \sqrt{(r_i^{(k)})^2 + (s_i^{(k)})^2} \right], \quad (4.56)$$

$$q_0^{(k+1)} = q_0^{(k)} + \sum_{i=0}^m \left[\Gamma_{2i} r_i^{(k)} + \Gamma_{3i} s_i^{(k)} \right]. \quad (4.57)$$

Ahora, las ecuaciones (4.55), (4.56) y (4.57) definen un esquema híbrido de diferencias finitas generalizadas y volúmenes finitos para la **forma no conservativa** de las ecuaciones de aguas someras, en regiones no rectangulares.

Una vez que se cuenta con los esquemas híbridos propuestos, se debe de hacer una adecuada elección de m , el número de puntos utilizado por los esquemas, para representar las diferentes características de manera precisa. Para este caso, la elección de m se realizó de la siguiente manera:

- $m = 4$ para los esquemas que aproximan los valores de q ;
- $m = 6$ para los que aproximan los valores de r y s .

Los estenciles elegidos se muestran en las Figuras 4.14, 4.15 y 4.16.

En el Apéndice C se presentan los códigos de algunos los esquemas aquí mostrados.

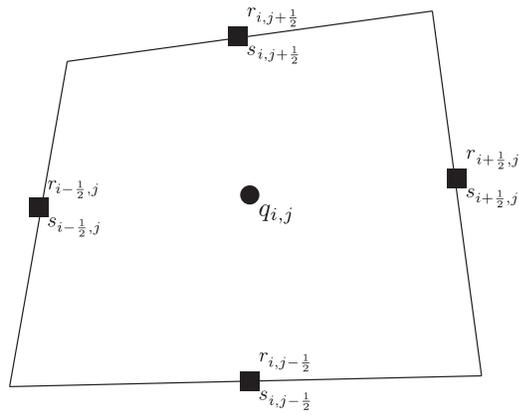


Figura 4.14: Esténcil utilizado para $q_{i,j}$.

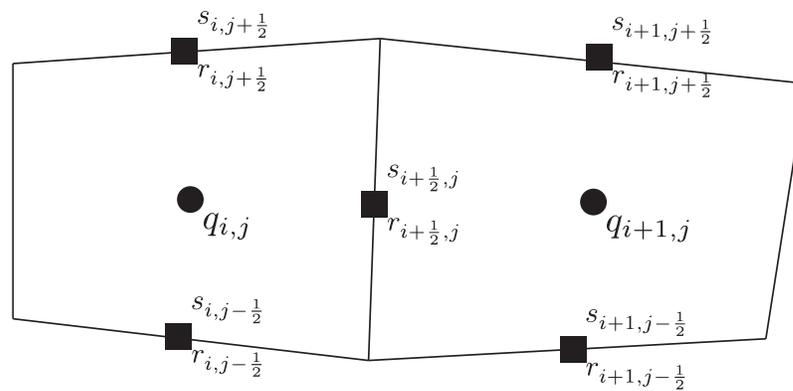


Figura 4.15: Esténcil utilizado para $r_{i+\frac{1}{2},j}$ y $s_{i+\frac{1}{2},j}$.

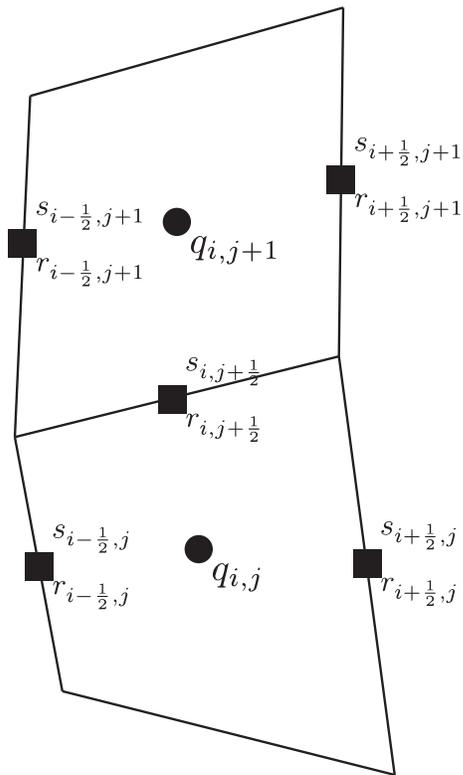


Figura 4.16: Estencil utilizado para $r_{i,j+\frac{1}{2}}$ y $s_{i,j+\frac{1}{2}}$.

Capítulo 5

Pruebas Numéricas

En el presente capítulo se muestran algunas aproximaciones numéricas a las ecuaciones de advección, difusión, advección-difusión, aguas someras y transporte de contaminantes. El principal objetivo del presente capítulo es mostrar la precisión de los métodos y su aplicación a diferentes regiones, tanto rectangulares como no rectangulares.

5.1. Pruebas Numéricas

A continuación, se presentan las pruebas numéricas realizadas para los diferentes esquemas presentados en el Capítulo 4. Para todos los casos se utilizan 4 regiones de prueba, las cuales se presentan a continuación:

1. CUAD: Esta región se define como el cuadrado unitario $[0, 1] \times [0, 1]$, y es de utilidad para comparar con los esquemas clásicos de aproximación. Ver Figura (5.1).
2. CAB: Esta región es una región poligonal convexa que ha sido ampliamente utilizada en diferentes artículos de investigación con fines de comparación. Ver Figura (5.2).
3. CUIT: Aproximación poligonal a la una de las secciones del lago de Cuitzeo, Michoacán, México. Las medidas se normalizaron para entrar en el área computacional $[0, 1] \times [0, 1]$. Ver Figura (5.3).
4. ZIRA: Aproximación poligonal al lago de Zirahuén, Michoacán, México. Las medidas se normalizaron para entrar en el área computacional $[0, 1] \times [0, 1]$. Ver Figura (5.4).

Para cada región se generaron mallas con 21×21 , 41×41 y 81×81 nodos siguiendo los procedimientos que a continuación son mencionados:

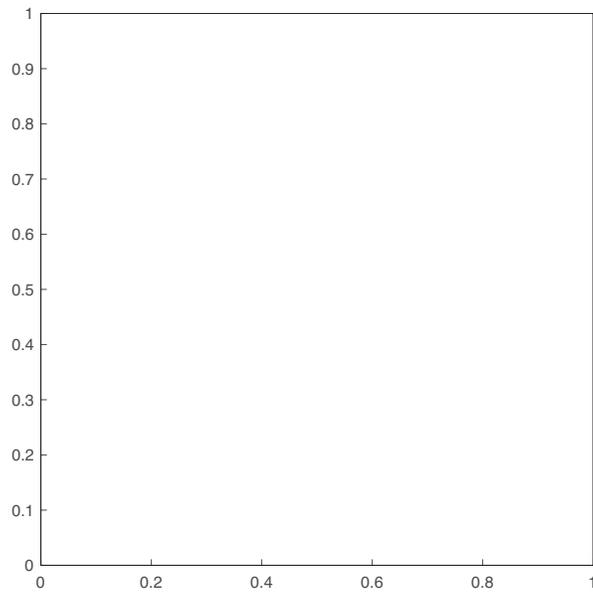


Figura 5.1: Región CUAD.

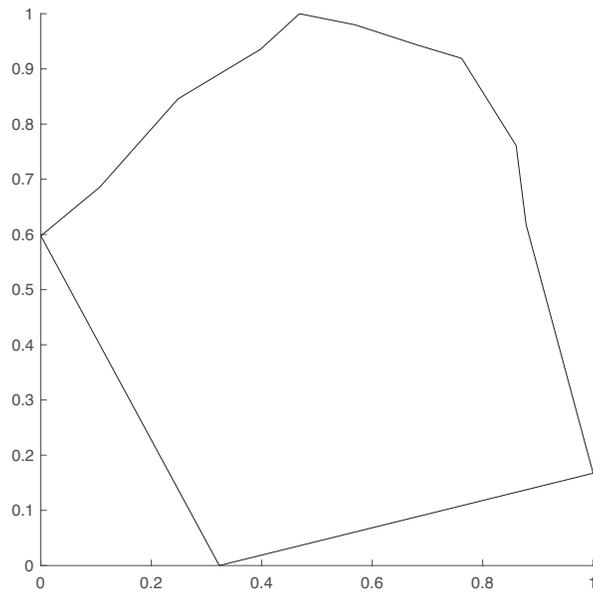


Figura 5.2: Región CAB.

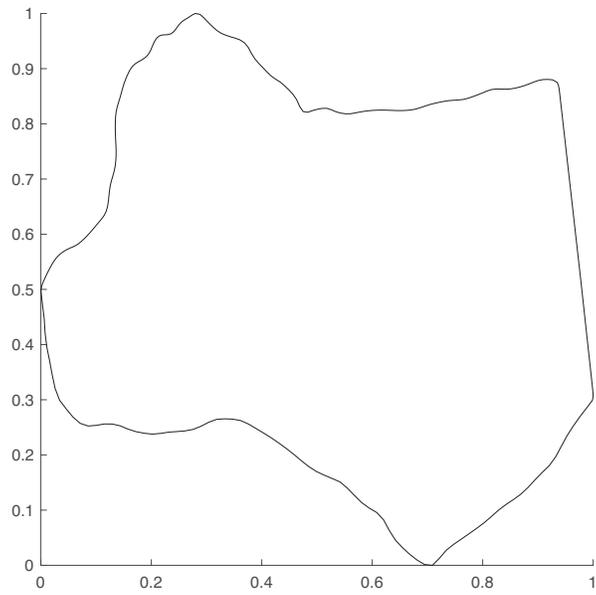


Figura 5.3: Región CUIT.

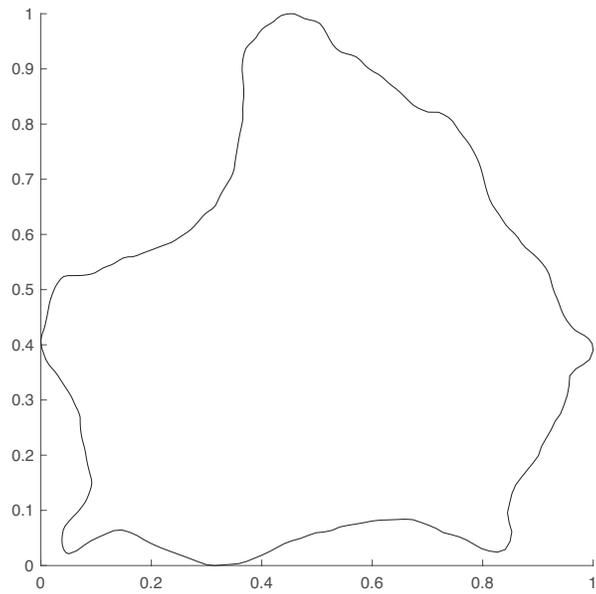


Figura 5.4: Región ZIRA.

1. CUAD: Se generó una malla regular utilizando $\Delta x = \Delta y = \frac{1}{21}$ y se refinó uniformemente dicha malla para crear las mallas con 41×41 y 81×81 nodos. Las mallas resultantes pueden verse en la Figura 5.5.

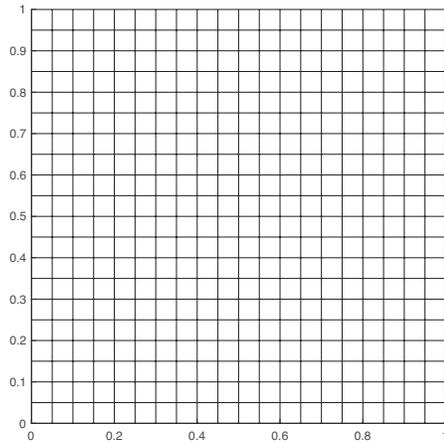
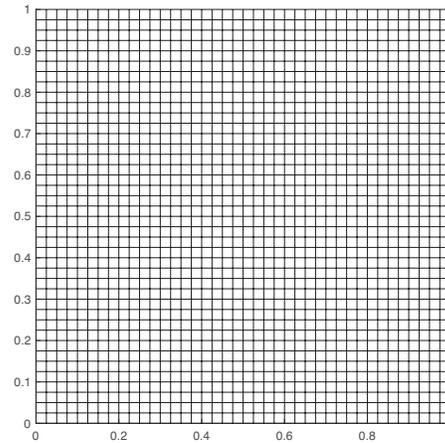
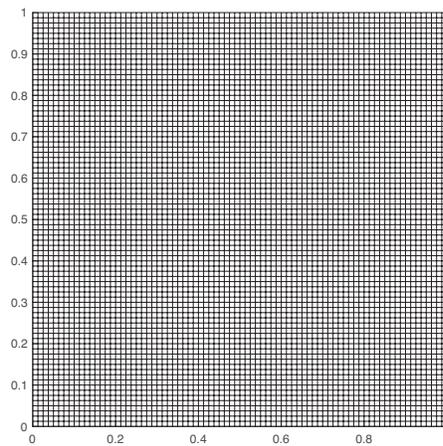
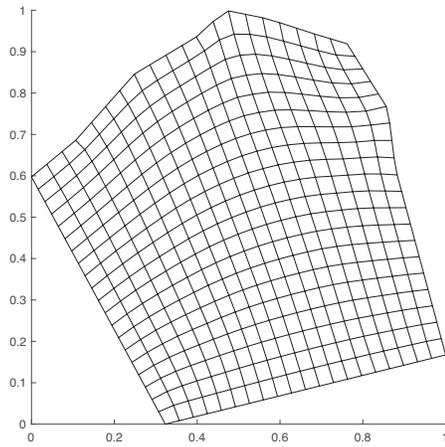
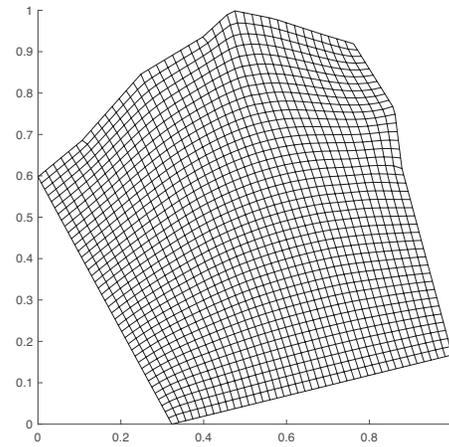
Malla con 21×21 nodos.Malla con 41×41 nodos.Malla con 81×81 nodos.

Figura 5.5: Mallas generadas para la región CUAD con diferentes discretizaciones espaciales.

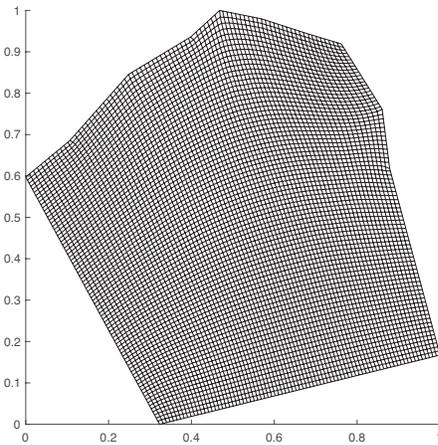
2. CAB: Se generó una malla con 81×81 nodos, por medio del método de interpolación transfinita, y se optimizó la misma utilizando el funcional armónico de Barrera y Domínguez [4] presentado en el Capítulo 2. Posteriormente, dicha malla se recortó uniformemente para formar las mallas con 41×41 y 21×21 nodos. Las mallas resultantes pueden verse en la Figura 5.6.



Malla con 21×21 nodos.



Malla con 41×41 nodos.



Malla con 81×81 nodos.

Figura 5.6: Mallas generadas para la región CAB con diferentes discretizaciones espaciales.

3. CUIT: Se generó una malla con 21×21 nodos, por medio del método de interpolación transfinita, y se optimizó la misma utilizando el funcional armónico de Barrera y Domínguez [4] presentado en el Capítulo 2. Posteriormente, dicha malla se recortó uniformemente para formar las mallas con 41×41 y 81×81 nodos. Las mallas resultantes pueden verse en la Figura 5.7.

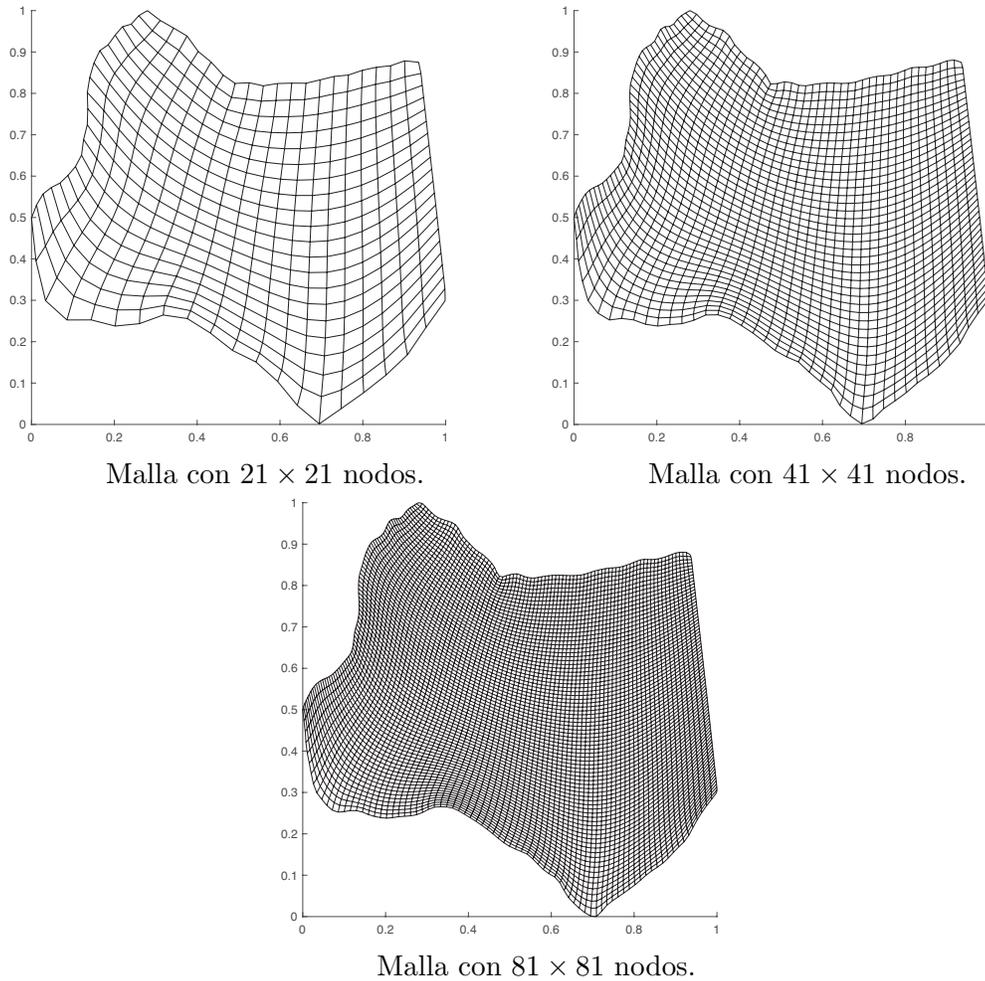


Figura 5.7: Mallas generadas para la región CUIT con diferentes discretizaciones espaciales.

4. ZIRA: Se generó una malla con 21×21 nodos, por medio del método de interpolación transfinita, y se optimizó la misma utilizando el funcional armónico de Barrera y Domínguez [4] presentado en el Capítulo 2. Posteriormente, se recortó uniformemente dicha malla para formar las mallas con 41×41 y 81×81 nodos. Las mallas resultantes

pueden verse en la Figura 5.8.

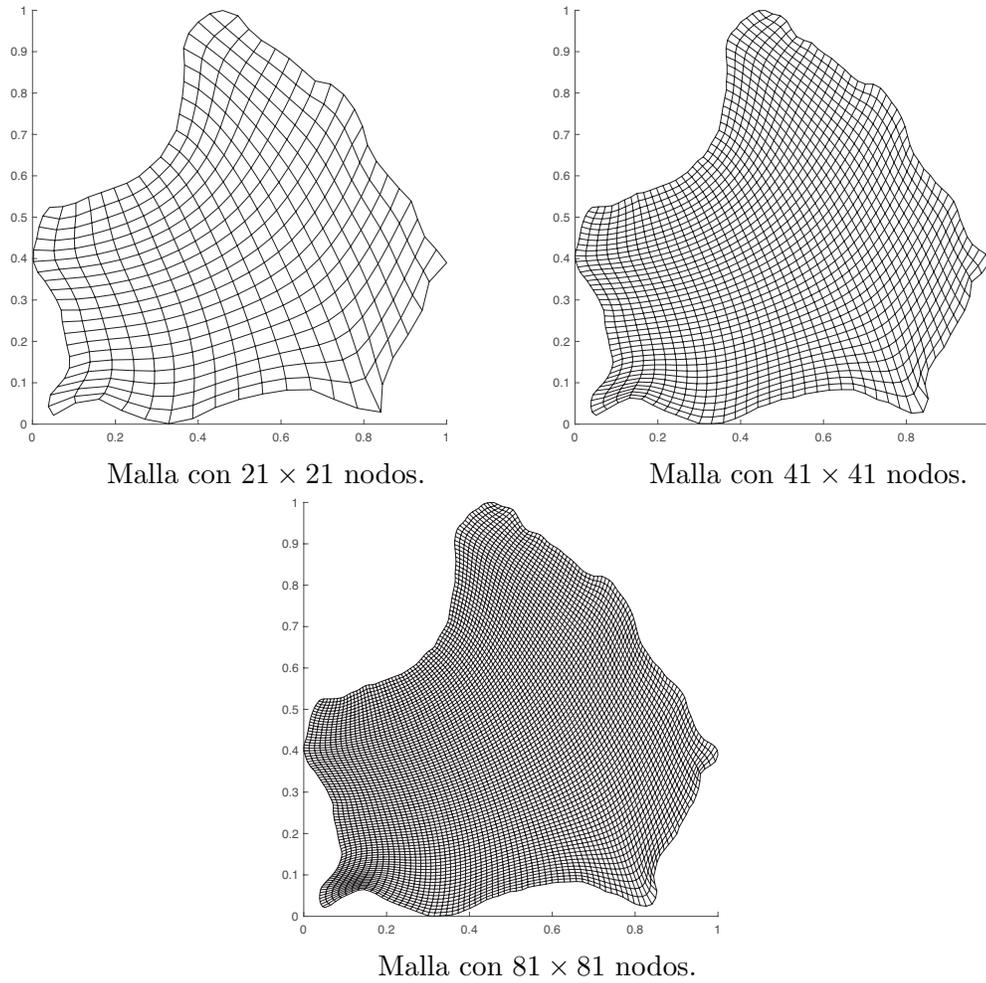


Figura 5.8: Mallas generadas para la región ZIRA con diferentes discretizaciones espaciales.

5.1.1. Ecuación de Advección

Para el caso de la ecuación de advección se utilizó el esquema implícito presentado en el Capítulo 4 utilizando un valor de $\theta = 0.5$. Utilizando dicho esquema se propone resolver

el problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} &= 0 & \Omega \times [0, T] & \quad a, b \in \mathbb{R}, \\ u(x, y, 0) &= h(x, y, 0), \\ u(x, y, t)_{S_1} &= h(x, y, t). \end{aligned}$$

Para cada una de las diferentes regiones Ω . Las condiciones iniciales y de frontera, en cada caso, fueron seleccionadas como

$$h(x, y, t) = 0.2e^{\frac{-(x-0.5-0.3t)^2 - (y-0.5-0.2t)^2}{0.01}},$$

que es la solución de forma cerrada de la ecuación, tomando en cuenta $a = b = 0.3$.

Vale la pena mencionar que la condición inicial y de frontera representa una concentración continua, en regiones pequeñas, de una variable conservativa.

El error cuadrático absoluto, con respecto a las diferentes discretizaciones espaciales de cada región, puede ser calculado como la función de malla

$$\| e_{\Delta_m} \| = \sqrt{\sum_{i,j} (u_{i,j} - U_{i,j})^2 A_{i,j}},$$

donde Δ_m representa el tamaño de paso más grande calculado sobre la malla, $U_{i,j}^{(k)}$ y $u_{i,j}^{(k)}$ son las soluciones aproximada y exacta, respectivamente, en el i, j -ésimo nodo de la malla al tiempo $t = 1$, y $A_{i,j}$ es el área del polígono definido por los puntos $P_{i+1,j}, P_{i,j+1}, P_{i-1,j}$ y $P_{i,j-1}$.

En este caso, los pasos en el tiempo y el espacio fueron vinculados como $\Delta t = (\Delta x)^2$, además, asumiendo que el error es de la forma $\| e_{\Delta_m} \| = C\Delta_m^p + O(\Delta_m^{p+1})$, donde C es independiente del tamaño de paso en la malla Δ_m entonces, dados dos pares (e_{Δ_m}, Δ_m) y (e_{Δ_n}, Δ_n) , el orden de convergencia empírico p puede calcularse como

$$p_{m,n} \approx \frac{\log\left(\frac{\|e_{\Delta_m}\|}{\|e_{\Delta_n}\|}\right)}{\log\left(\frac{\Delta_m}{\Delta_n}\right)}.$$

En la tabla 5.1 se presentan los resultados del error cuadrático calculado, así como

los ordenes de convergencia empíricos para el esquema propuesto. Las Figuras 5.9 a 5.16, muestran el comportamiento de la solución aproximada y la solución exacta, en los niveles de tiempo $t = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$ para cada una de las regiones utilizando la discretización espacial con 81×81 .

Puede notarse que, en las soluciones numéricas presentadas, no se observan oscilaciones espurias ni efectos de subrepresentación como los que pueden observarse en los esquemas clásicos de tipo Upwind, ni picos como en los esquemas clásicos de tipo Lax-Wendroff. En el Apéndice D pueden encontrarse las direcciones electrónicas a videos que muestran la evolución de cada una de las pruebas realizadas.

Región	m	e_{Δ_m}	Δ_m	p
CUAD	21	1.3597E-02	5.0000E-02	
	41	5.1954E-03	2.5000E-02	1.39
	81	1.4304E-03	1.2500E-02	1.86
CAB	21	1.2737E-02	5.6173E-02	
	41	4.0770E-03	2.9220E-02	1.74
	81	1.0637E-03	1.6397E-02	2.33
CUIT	21	1.3500E-02	6.5720E-02	
	41	4.5832E-03	3.5761E-02	1.78
	81	1.2203E-03	2.0732E-02	2.43
ZIRA	21	1.2511E-02	8.1879E-02	
	41	4.1392E-03	4.4404E-02	1.81
	81	1.0925E-03	2.3616E-02	2.11

Tabla 5.1: Errores cuadráticos e_{Δ_m} para los resultados del esquema que aproxima la ecuación de advección.

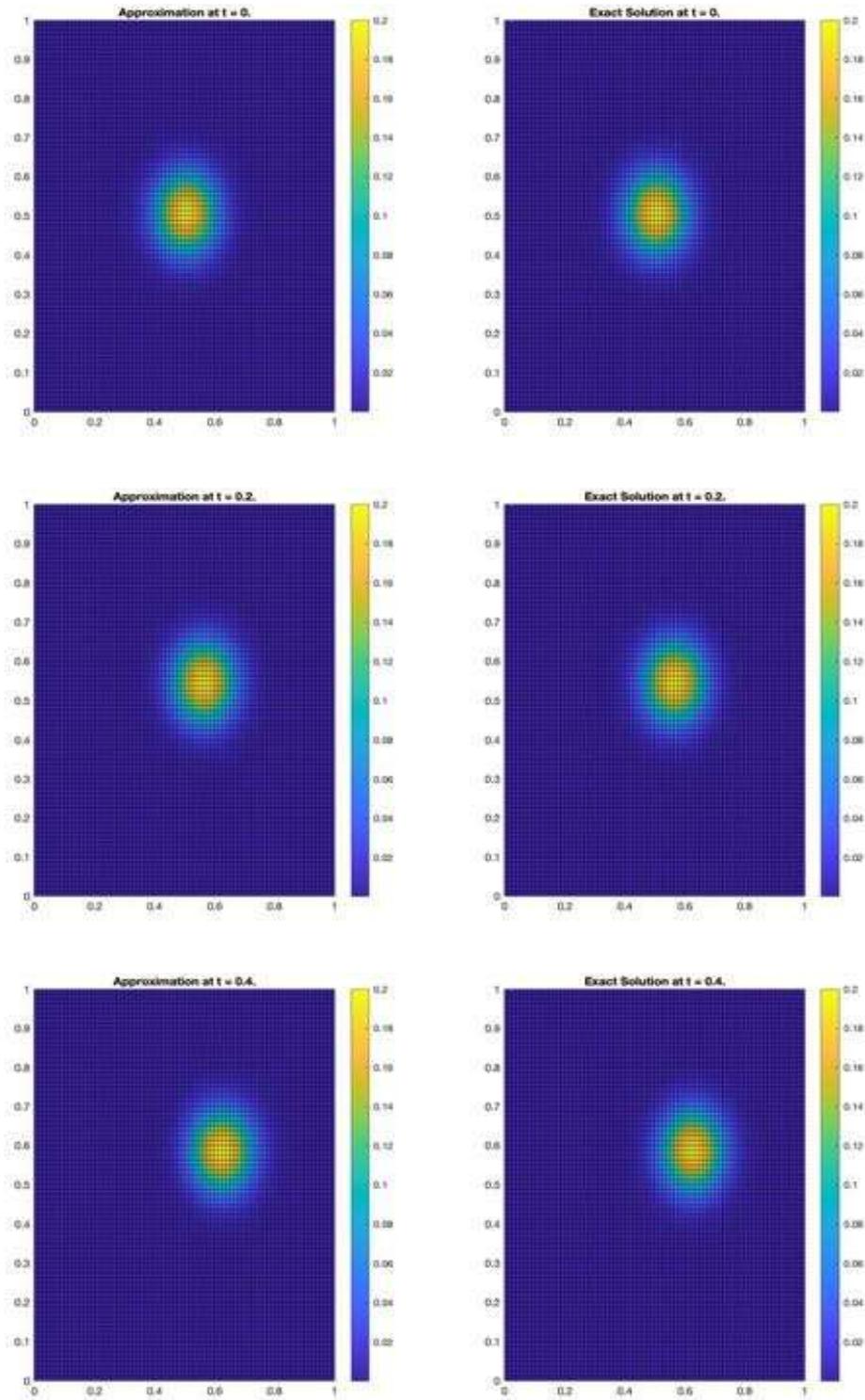


Figura 5.9: Comparación de resultados numéricos y exactos para el problema de advección en la región CUAD con 81×81 nodos en $t = 0, 0.2, 0.4$.

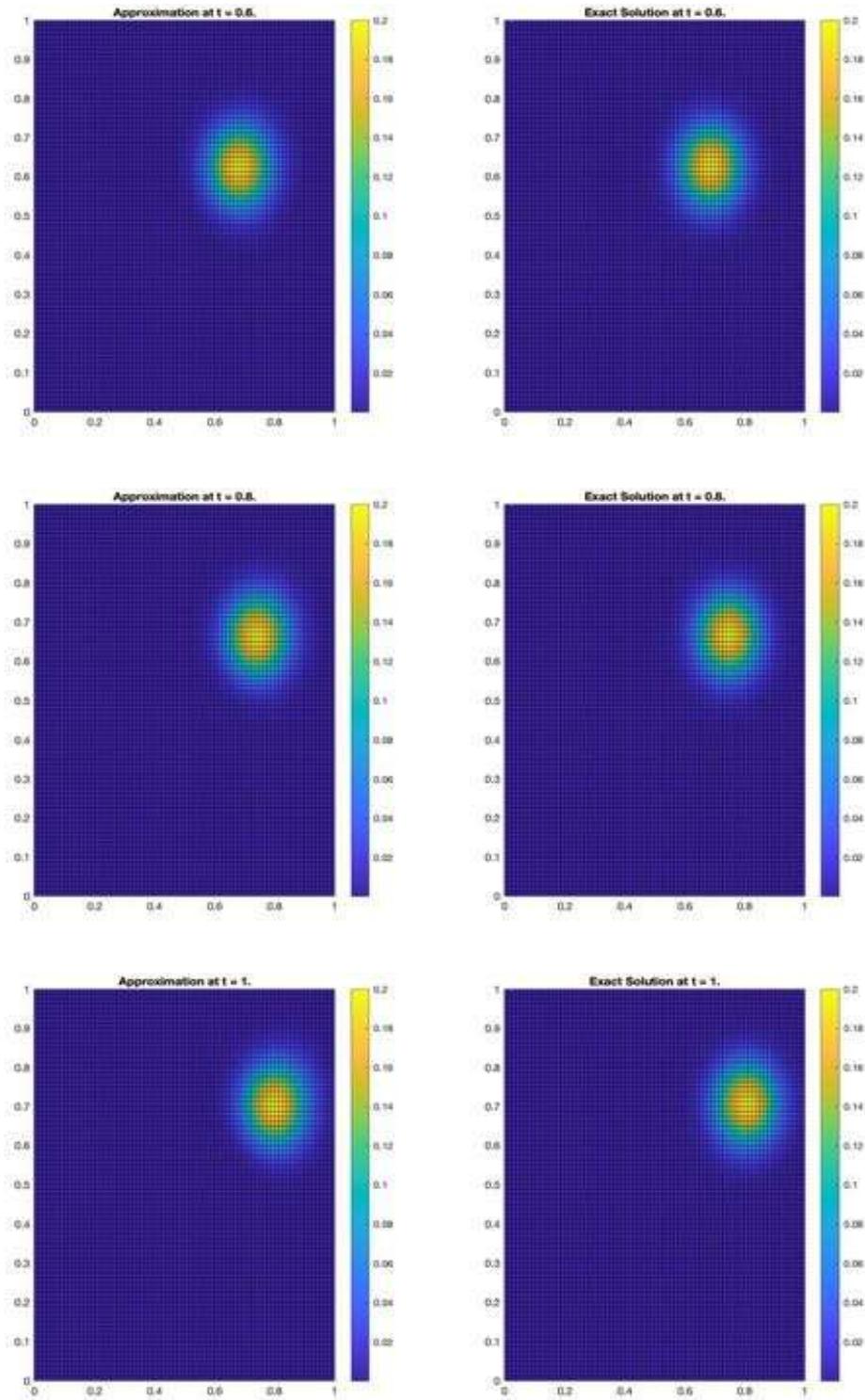


Figura 5.10: Comparación de resultados numéricos y exactos para el problema de advección en la región CUAD con 81×81 nodos en $t = 0.6, 0.8, 1$.

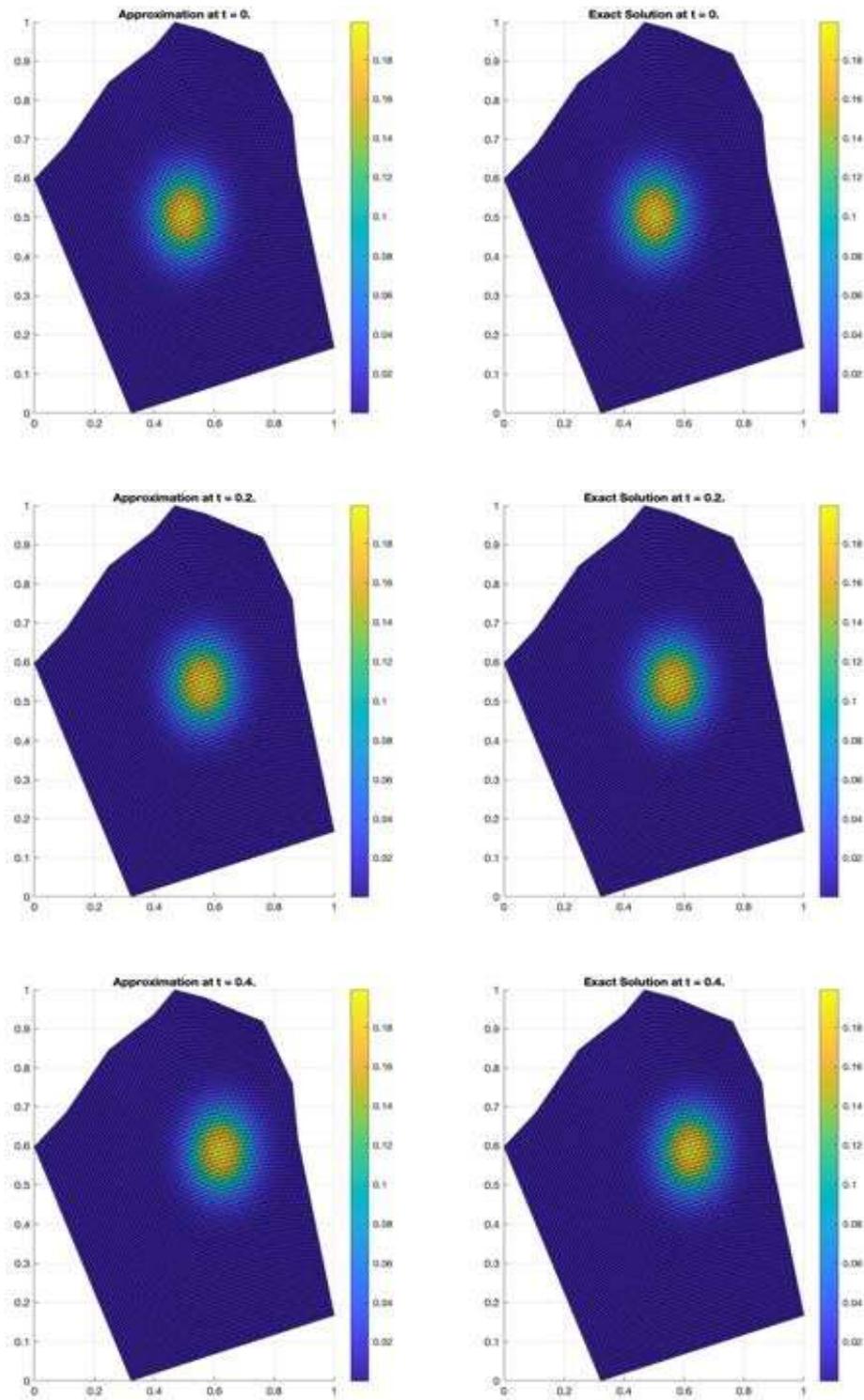


Figura 5.11: Comparación de resultados numéricos y exactos para el problema de advección en la región CAB con 81×81 en $t = 0, 0.2, 0.4$.

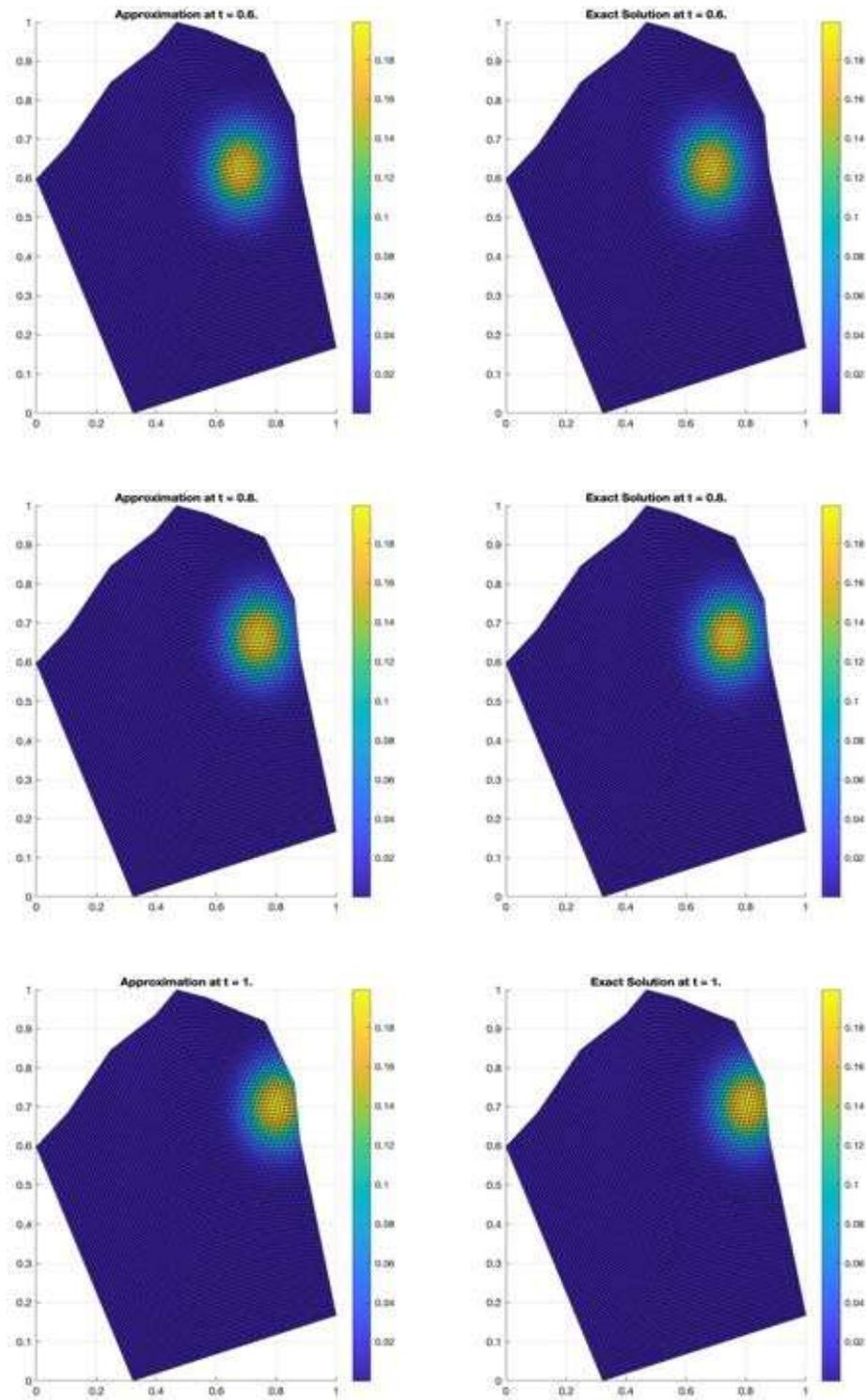


Figura 5.12: Comparación de resultados numéricos y exactos para el problema de advección en la región CAB con 81×81 nodos en $t = 0.6, 0.8, 1$.

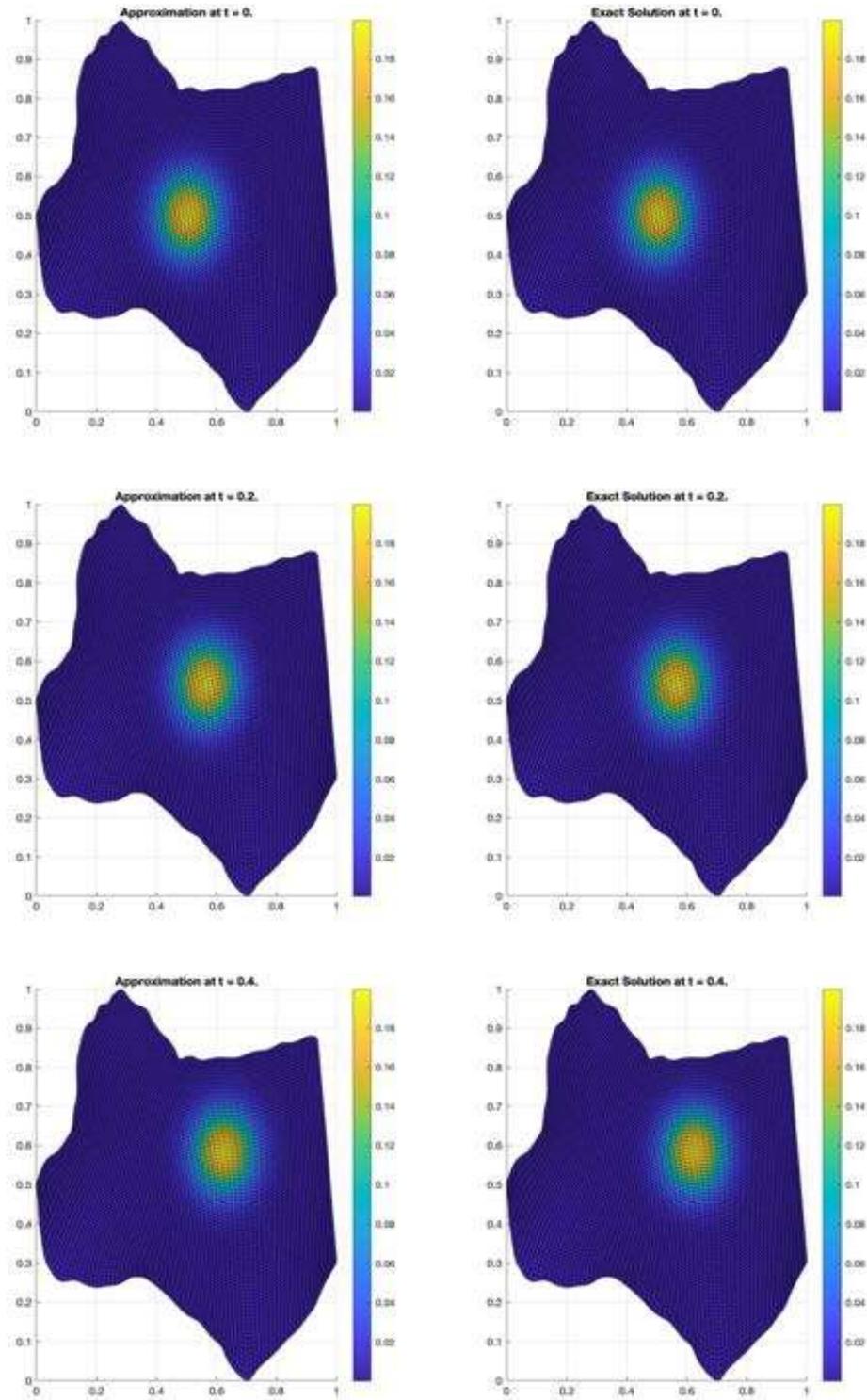


Figura 5.13: Comparación de resultados numéricos y exactos para el problema de advección en la región CUIT con 81×81 en $t = 0, 0.2, 0.4$.

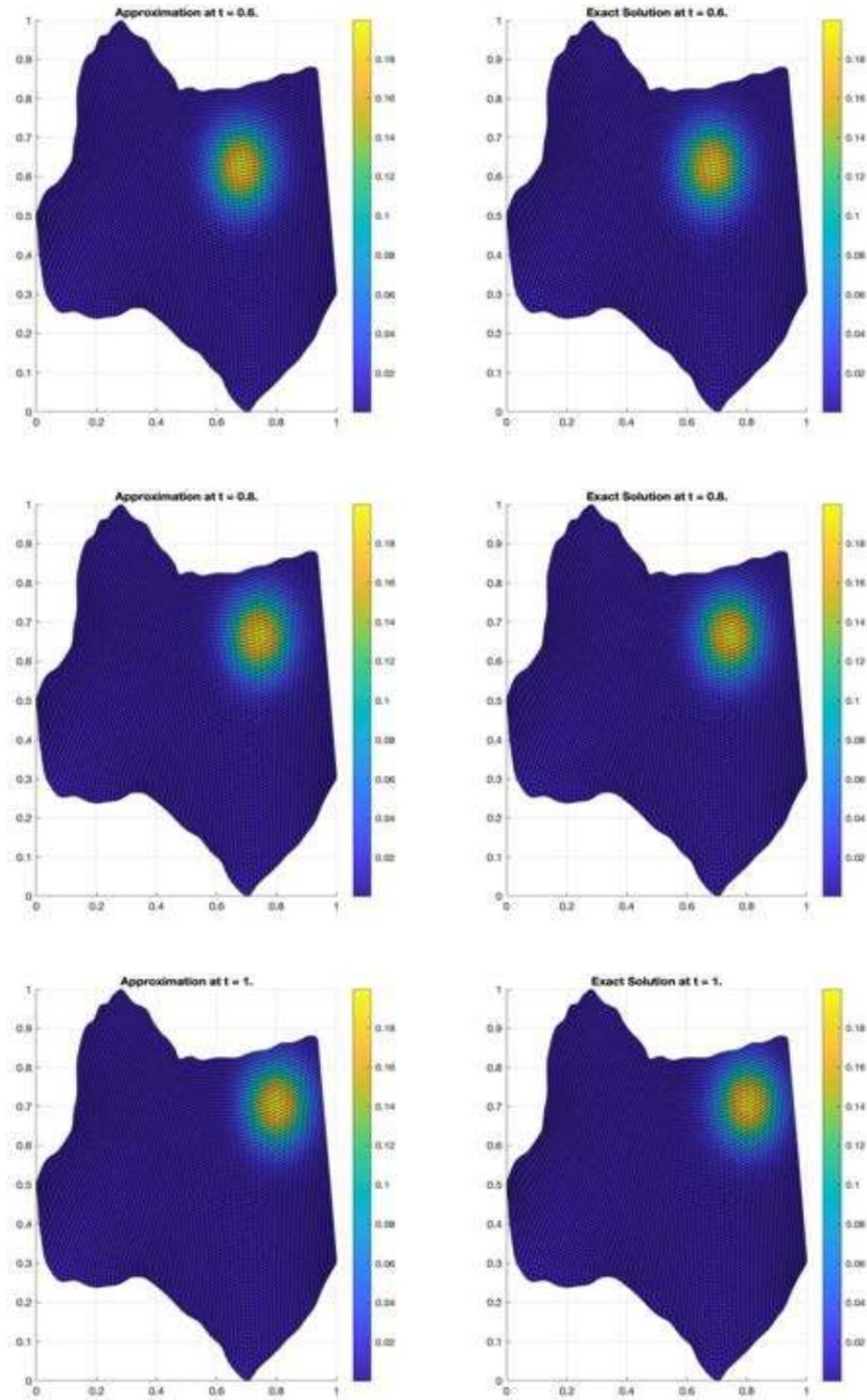


Figura 5.14: Comparación de resultados numéricos y exactos para el problema de advección en la región CUIT con 81×81 nodos en $t = 0.6, 0.8, 1$.

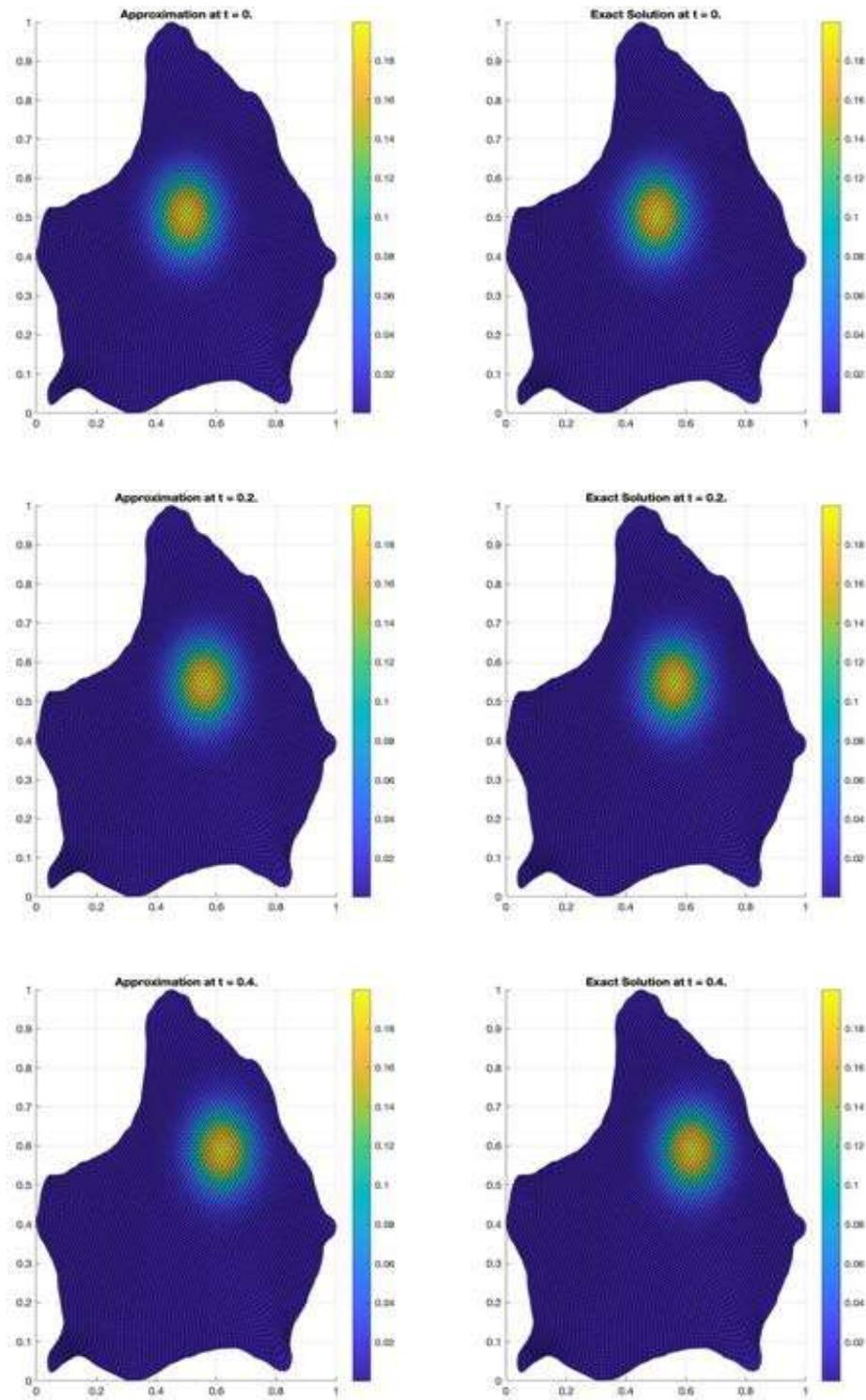


Figura 5.15: Comparación de resultados numéricos y exactos para el problema de advección en la región ZIRA con 81×81 en $t = 0, 0.2, 0.4$.

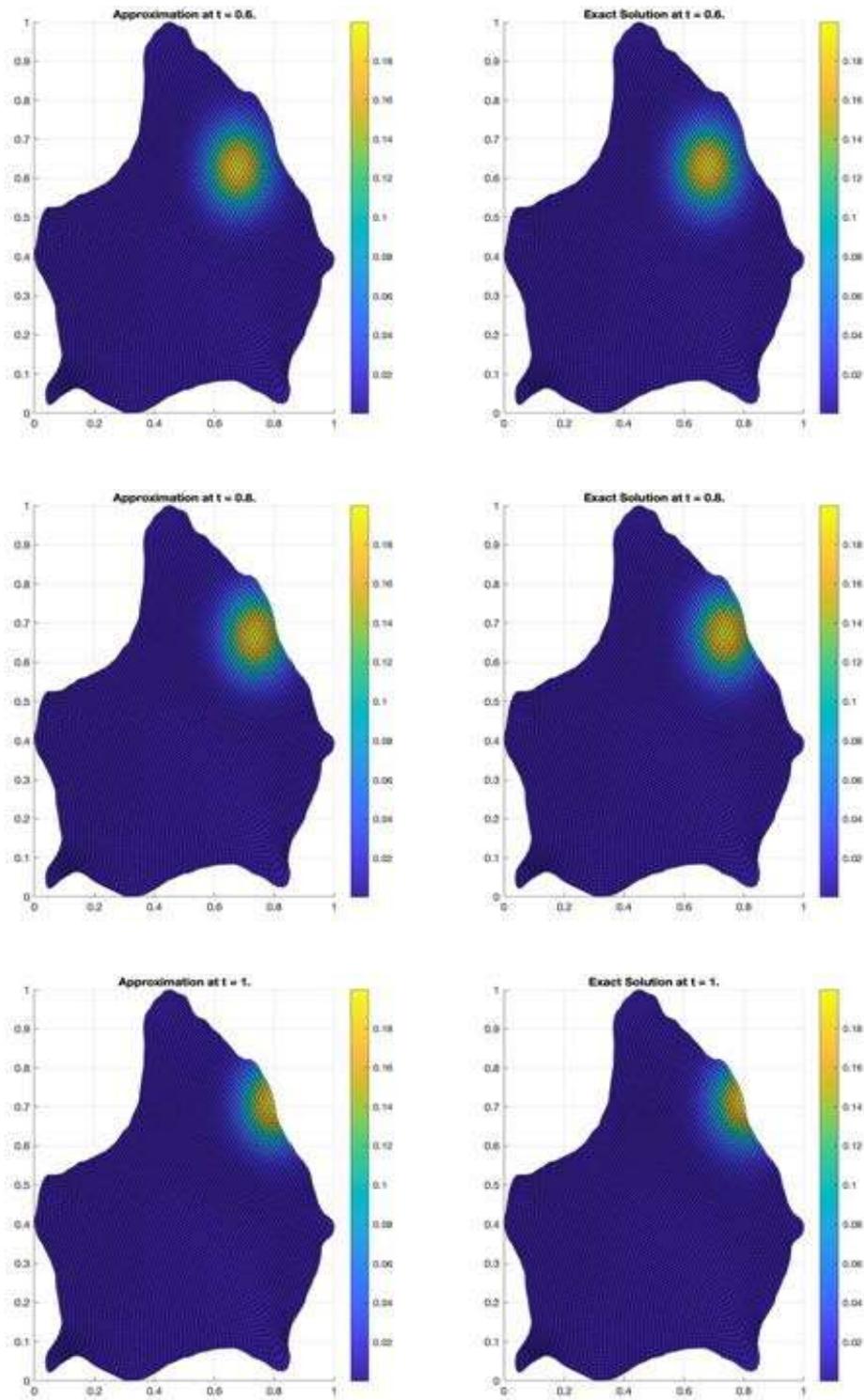


Figura 5.16: Comparación de resultados numéricos y exactos para el problema de advección en la región ZIRA con 81×81 nodos en $t = 0.6, 0.8, 1$.

5.1.2. Ecuación de Difusión

Para aproximar la solución de la ecuación de difusión se utilizó, al igual que en el caso anterior, el esquema implícito presentado en el Capítulo 4 utilizando un valor de $\theta = 0.5$. En este caso se propone resolver el problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \nu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right], & \Omega \times [0, T] & \quad \nu \in \mathbb{R}, \\ u(x, y, 0) &= h(x, y, 0), \\ u(x, y, t)_{\partial\Omega} &= h(x, y, t). \end{aligned}$$

Para cada una de las regiones Ω . Las condiciones iniciales y de frontera, en cada caso, fueron seleccionadas como

$$h(x, y, t) = e^{-0.8\pi^2 t} \cos(\pi x) \cos(\pi y),$$

que es la solución de forma cerrada de la ecuación, tomando en cuenta $\nu = 0.4$.

Al igual que en el caso anterior, se calculó el error cuadrático medio con respecto a las diferentes discretizaciones espaciales de cada región; además, el orden de convergencia empírico se calculó de la misma forma.

En la tabla 5.2 se presentan los resultados del error cuadrático calculado, así como los órdenes de convergencia empíricos para el esquema propuesto. Las Figuras 5.17 a 5.24, muestran el comportamiento de la solución aproximada y la solución exacta, en los niveles de tiempo $t = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$ para cada una de las regiones discretizadas con 81×81 . En el Apéndice D pueden encontrarse las direcciones electrónicas a videos que muestran la evolución de cada una de las pruebas realizadas.

Región	m	e_{Δ_m}	Δ_m	p
CUAD	21	1.8570E-06	5.0000E-02	
	41	4.9414E-07	2.5000E-02	1.91
	81	1.2748E-07	1.2500E-02	1.95
CAB	21	1.4025E-06	5.6173E-02	
	41	4.0946E-07	2.9220E-02	1.88
	81	1.3281E-07	1.6397E-02	1.95
CUIT	21	2.0736E-06	6.5720E-02	
	41	6.5821E-07	3.5761E-02	1.89
	81	2.2761E-07	2.0732E-02	1.95
ZIRA	21	3.0565E-06	8.1879E-02	
	41	9.6308E-07	4.4404E-02	1.89
	81	2.8145E-07	2.3616E-02	1.95

Tabla 5.2: Errores cuadráticos e_{Δ_m} para los resultados del esquema que aproxima la ecuación de difusión.

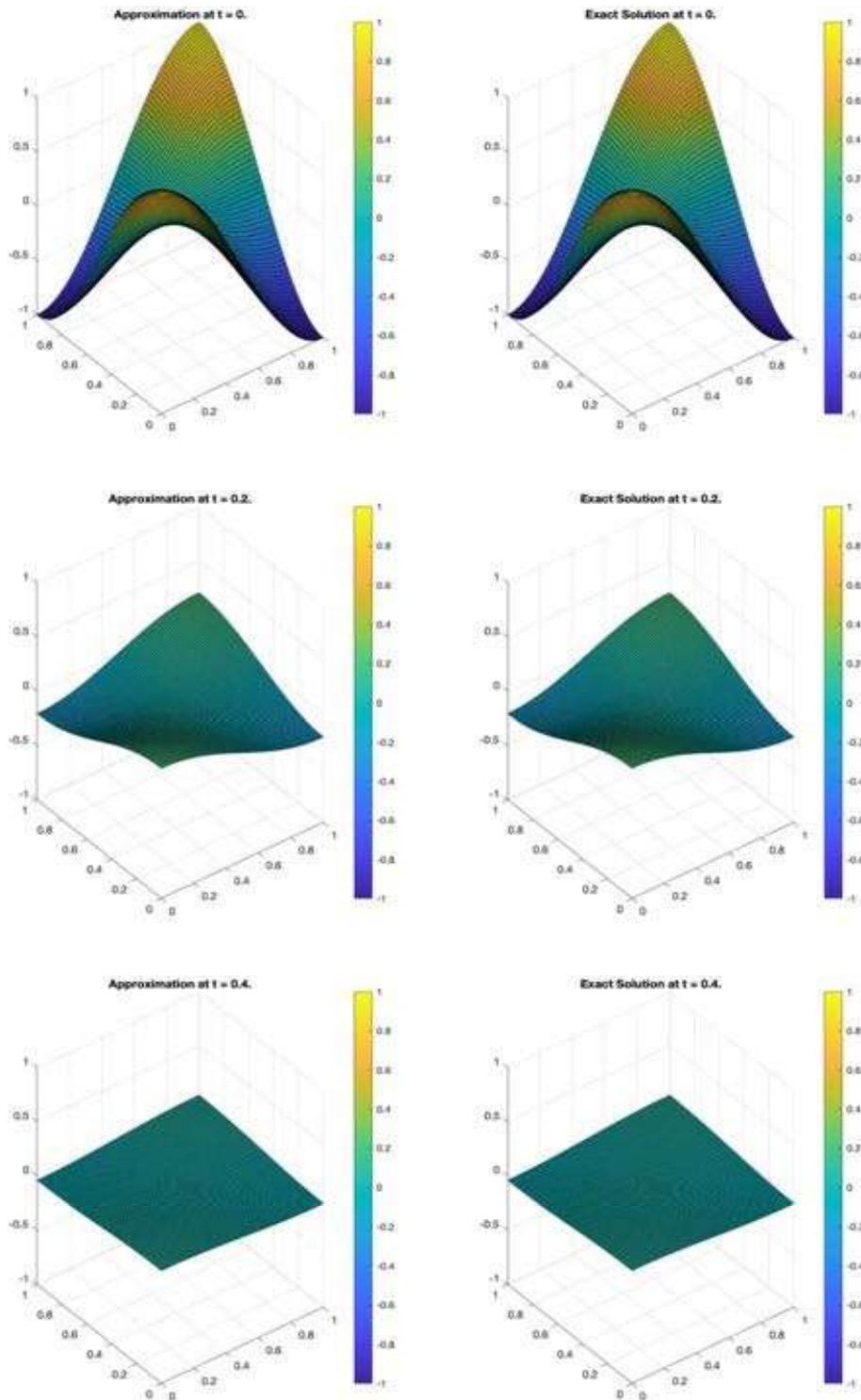


Figura 5.17: Comparación de resultados numéricos y exactos para el problema de difusión en la región CUAD con 81×81 nodos en $t = 0, 0.2, 0.4$.

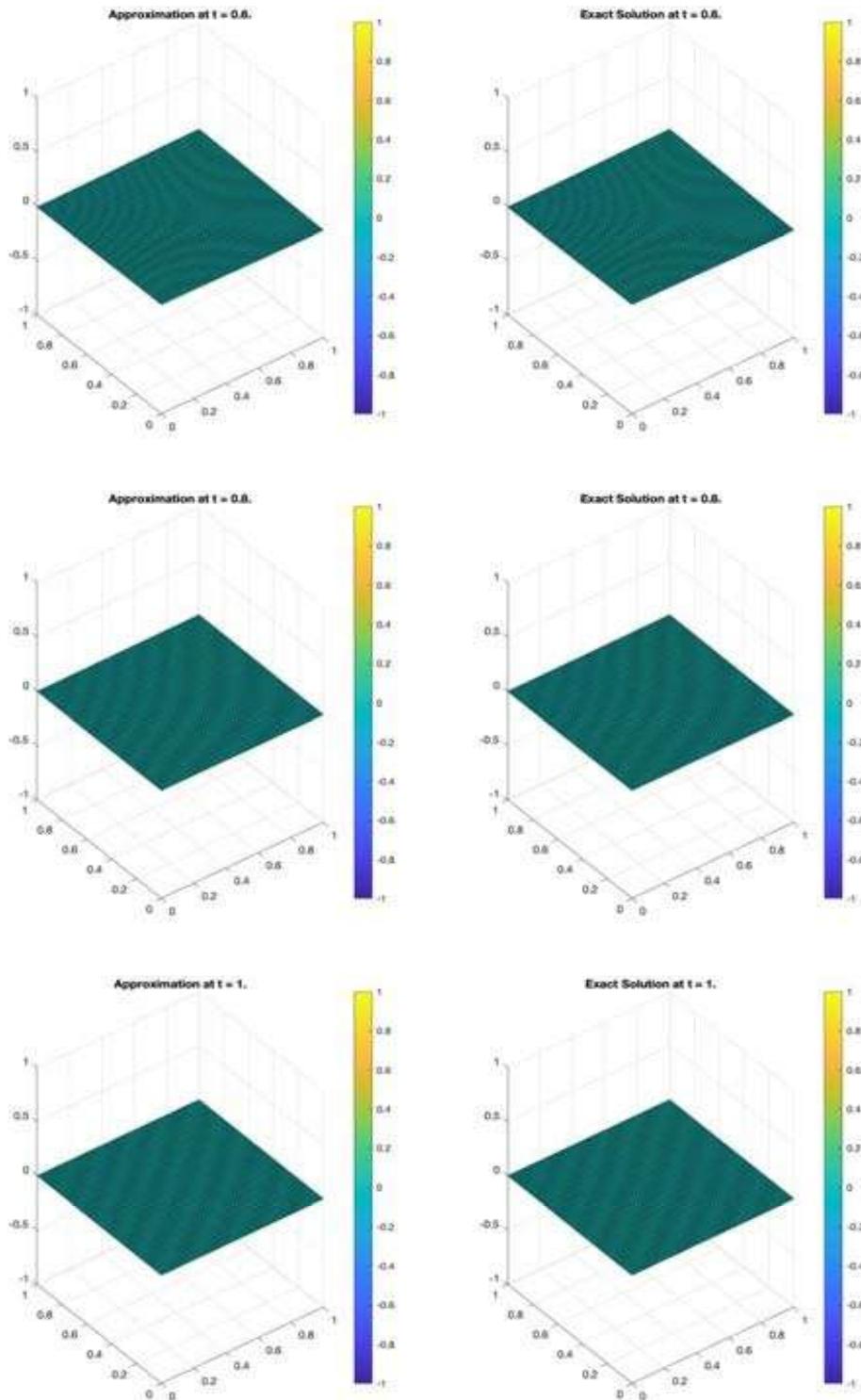


Figura 5.18: Comparación de resultados numéricos y exactos para el problema de difusión en la región CUAD con 81×81 nodos en $t = 0.6, 0.8, 1$.

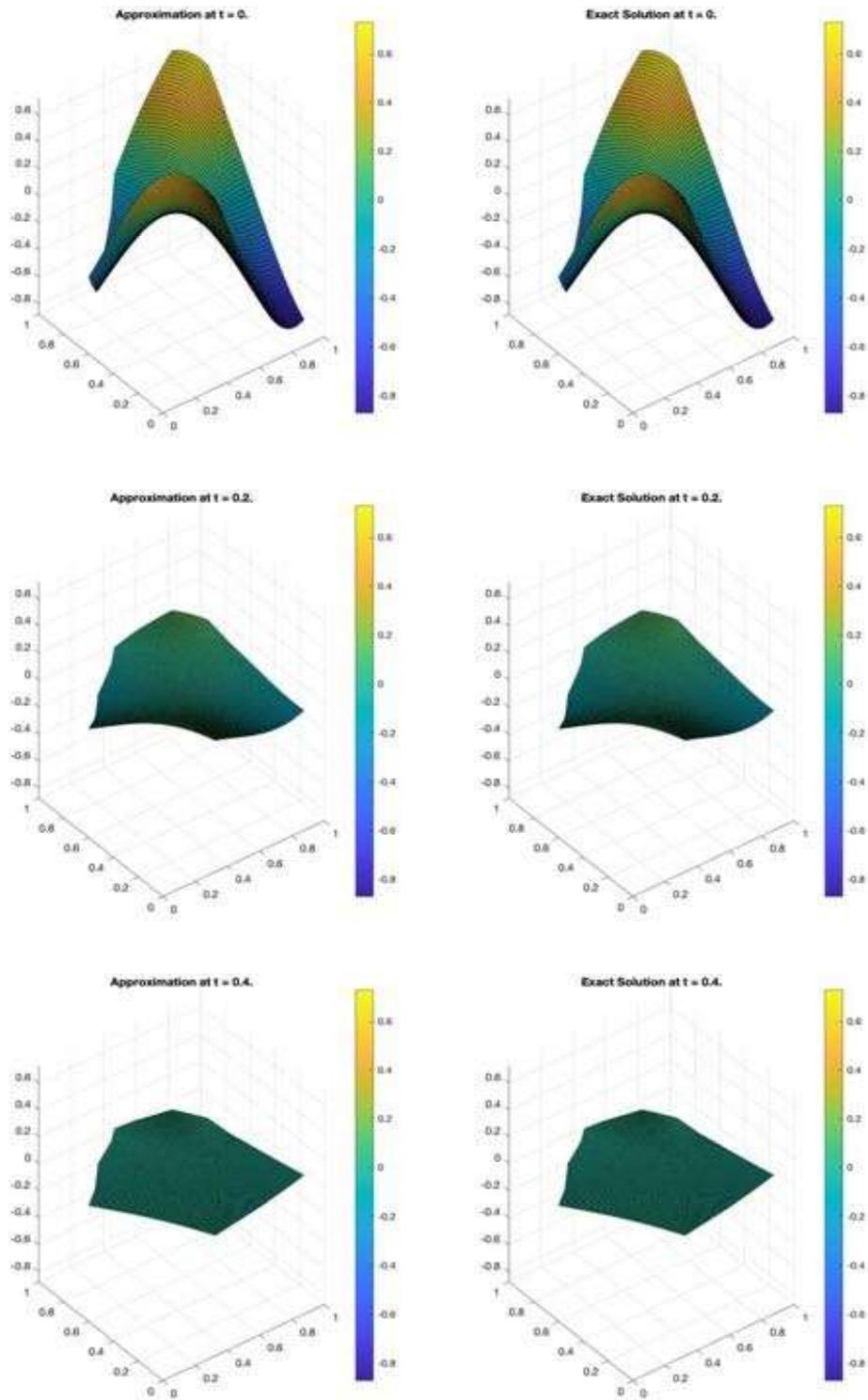


Figura 5.19: Comparación de resultados numéricos y exactos para el problema de difusión en la región CAB con 81×81 nodos en $t = 0, 0.2, 0.4$.

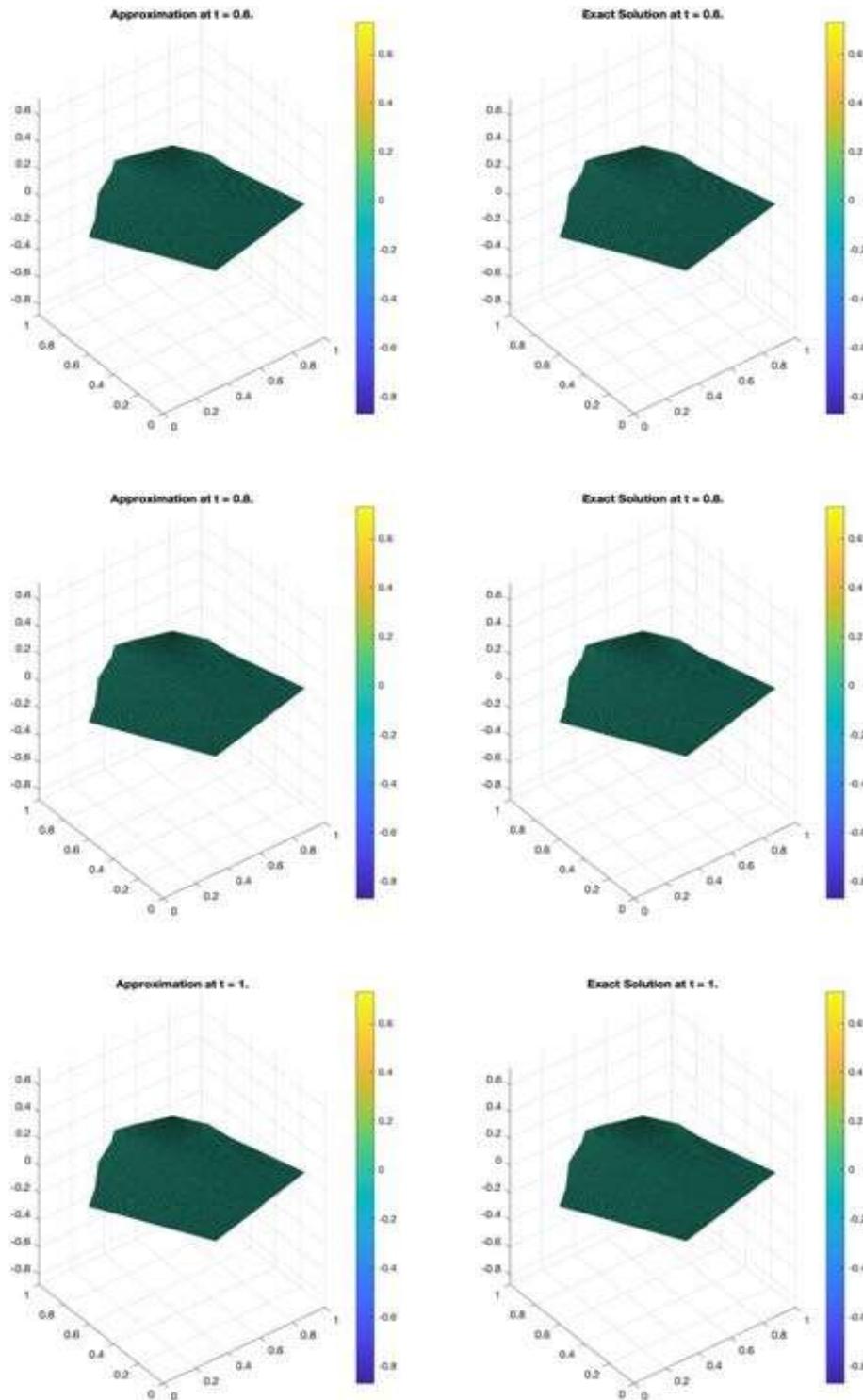


Figura 5.20: Comparación de resultados numéricos y exactos para el problema de difusión en la región CAB con 81×81 nodos en $t = 0.6, 0.8, 1$.

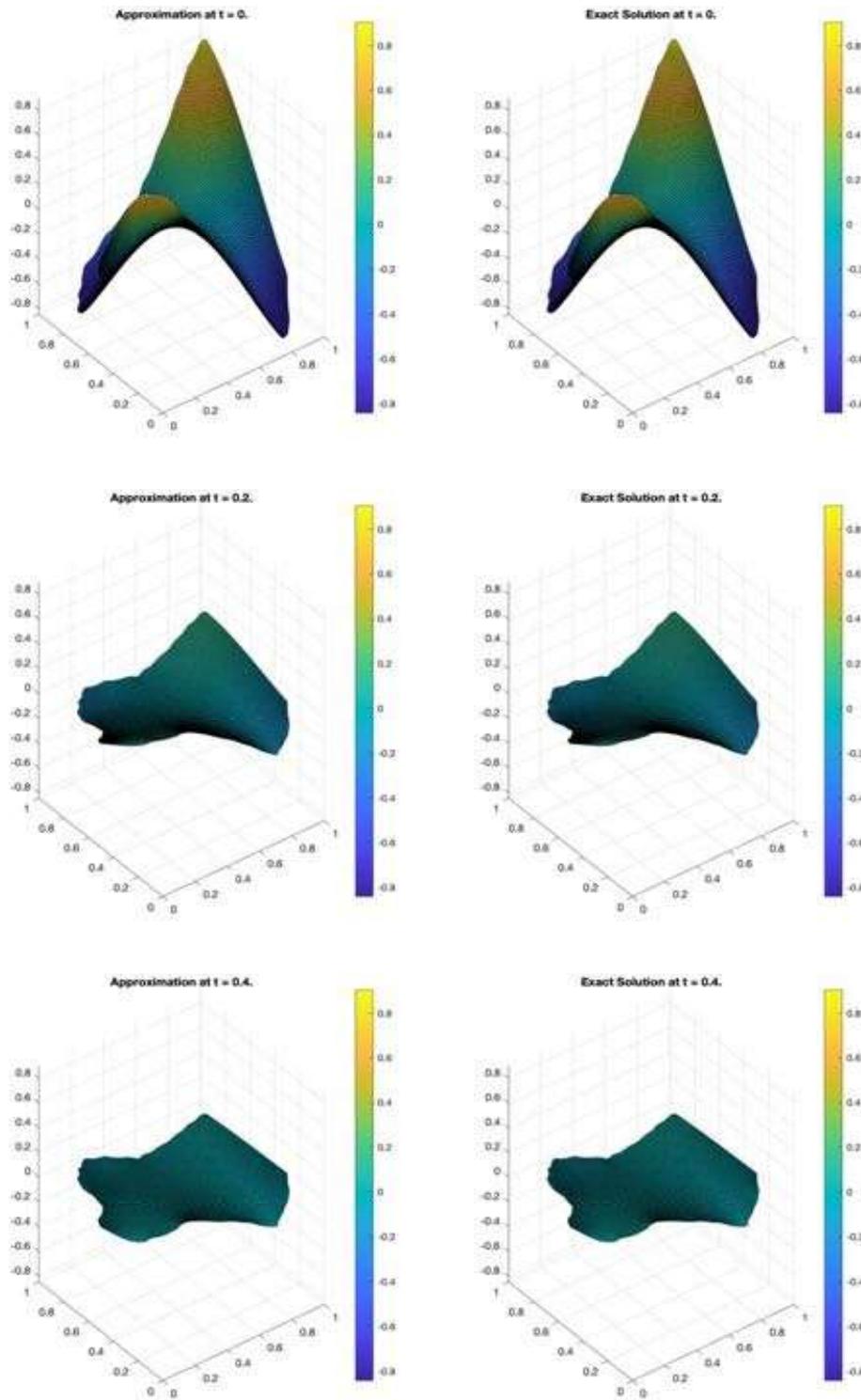


Figura 5.21: Comparación de resultados numéricos y exactos para el problema de difusión en la región CUIT con 81×81 nodos en $t = 0, 0.2, 0.4$.

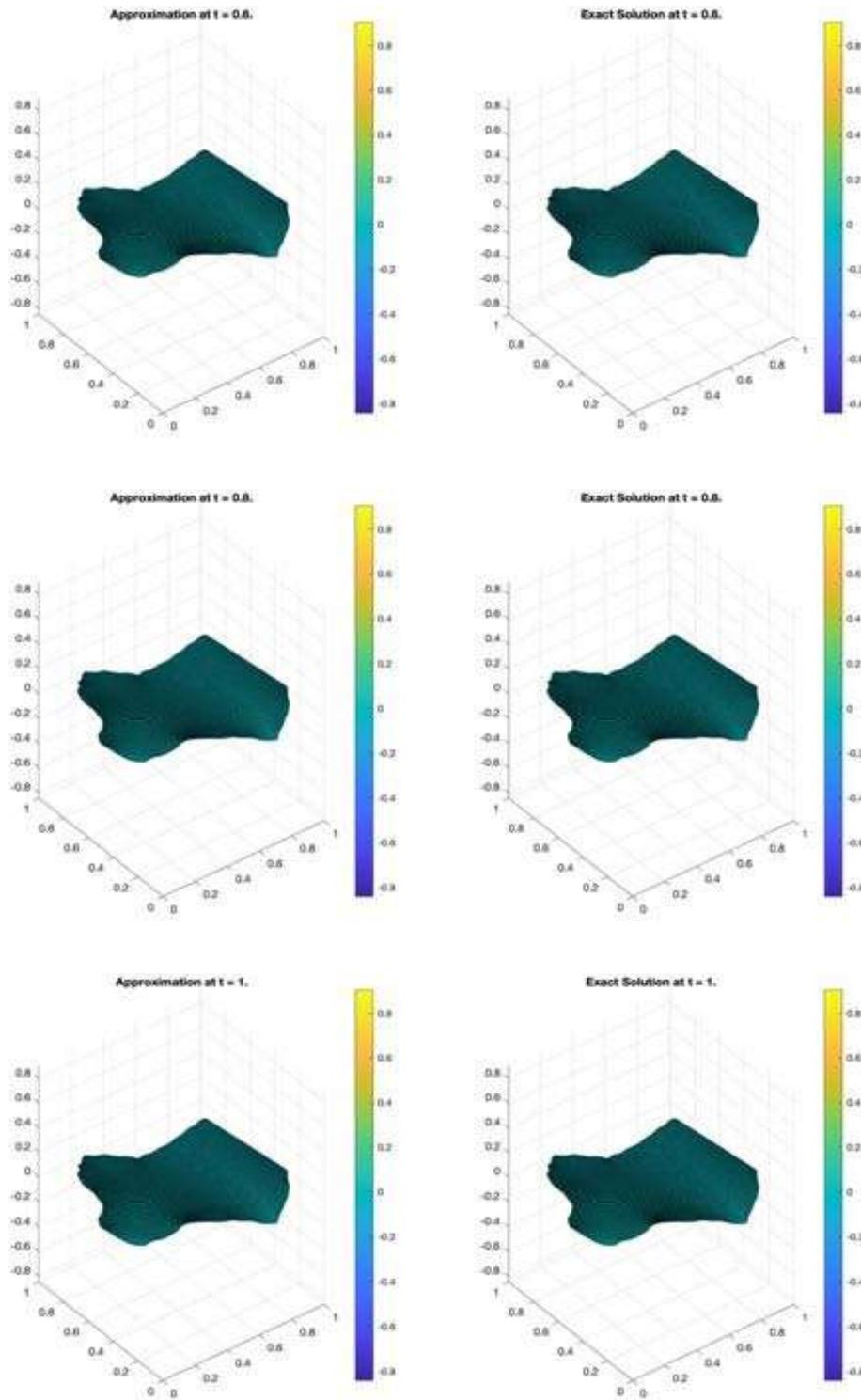


Figura 5.22: Comparación de resultados numéricos y exactos para el problema de difusión en la región CUIT con 81×81 nodos en $t = 0.6, 0.8, 1$.

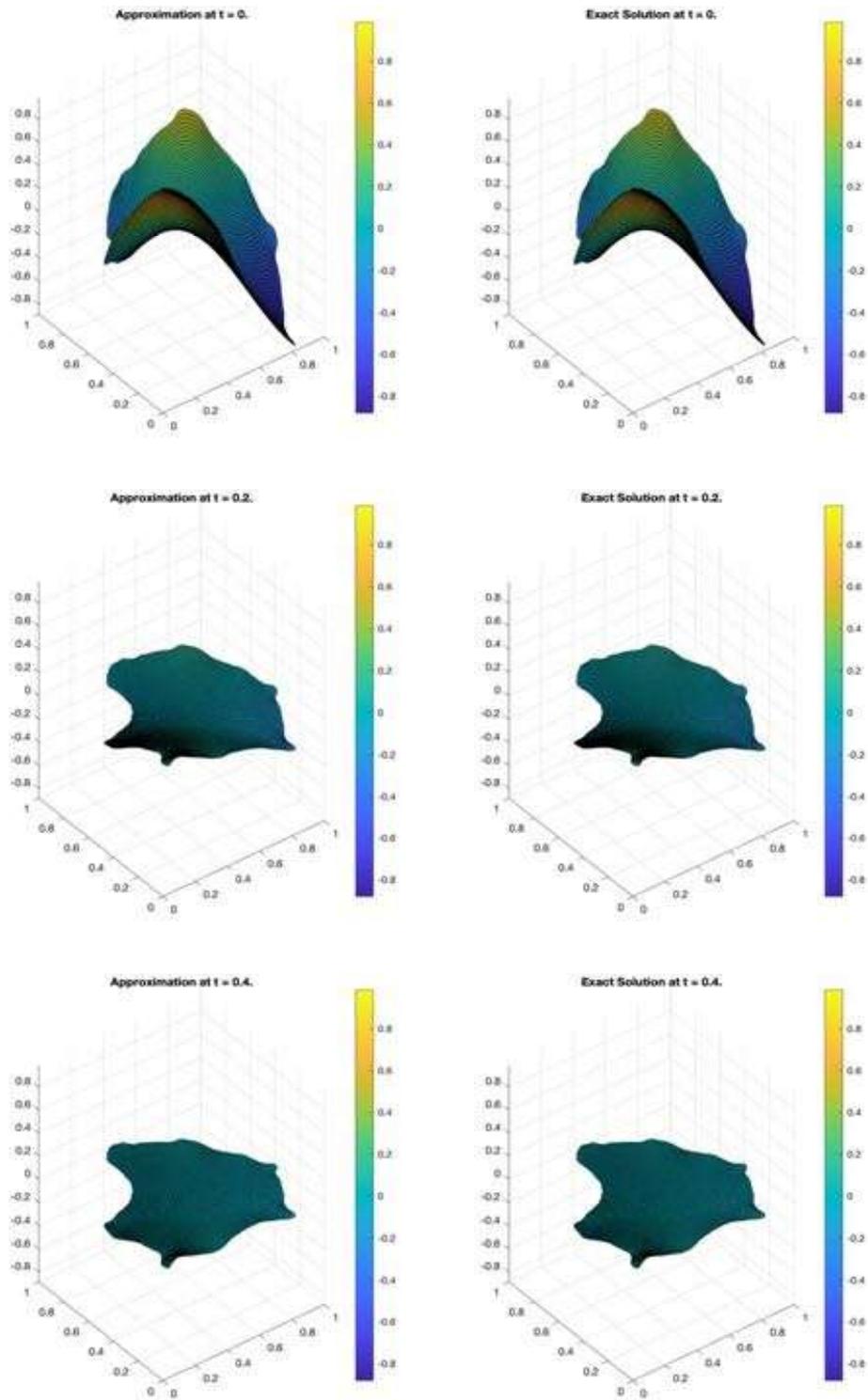


Figura 5.23: Comparación de resultados numéricos y exactos para el problema de difusión en la región ZIRA con 81×81 nodos en $t = 0, 0.2, 0.4$.

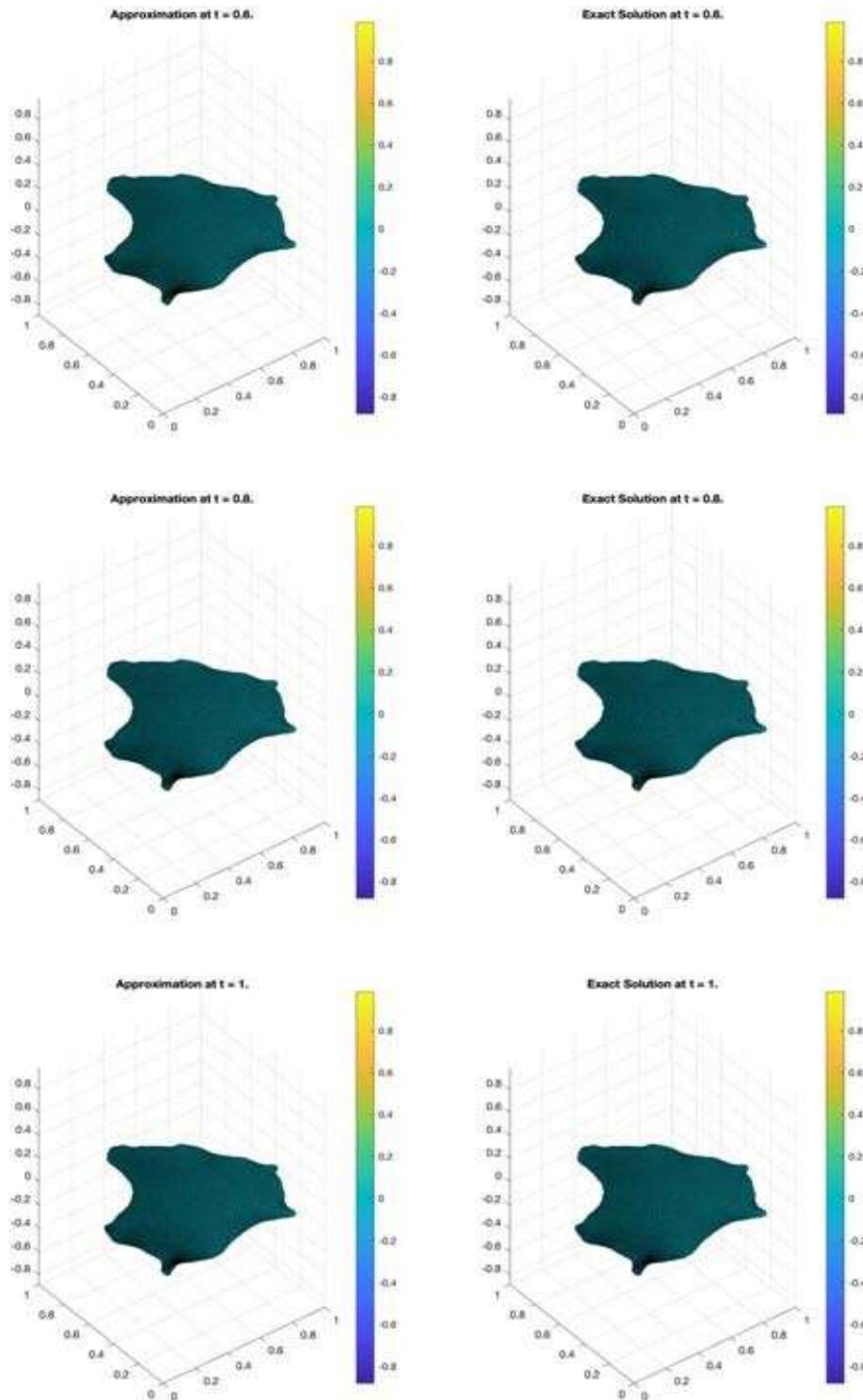


Figura 5.24: Comparación de resultados numéricos y exactos para el problema de difusión en la región ZIRA con 81×81 nodos en $t = 0.6, 0.8, 1$.

5.1.3. Ecuación de Advección-Difusión

En el caso de conseguir una aproximación a la solución de la ecuación de advección-difusión se utilizó, al igual que en los casos anteriores, el esquema implícito presentado en el Capítulo 4 utilizando un valor de $\theta = 0.5$. En esta ocasión se propone resolver el problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \nu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] - a \frac{\partial u}{\partial x} - b \frac{\partial u}{\partial y}, & \Omega \times [0, T] & \quad a, b, \nu \in \mathbb{R}, \\ u(x, y, 0) &= h(x, y, 0), \\ u(x, y, t)_{\partial\Omega} &= h(x, y, t). \end{aligned}$$

Para cada una de las regiones Ω . Las condiciones iniciales y de frontera, en cada caso, fueron seleccionadas como

$$h(x, y, t) = \frac{1}{4t + 1} e^{-\frac{(x-0.3t-0.5)^2 - (y-0.3t-0.5)^2}{0.01(4t+1)}},$$

que es la solución de forma cerrada de la ecuación, tomando en cuenta $a = b = 0.3$ y $\nu = 0.01$.

Al igual que en los casos anteriores, el error cuadrático medio con respecto a las diferentes discretizaciones espaciales de cada región fue calculado. El orden de convergencia empírico se calculó, nuevamente, de la misma forma.

En la tabla 5.3 se presentan los resultados del error cuadrático calculado, así como los ordenes de convergencia empíricos para el esquema propuesto. Las Figuras 5.25 a 5.32, muestran el comportamiento de la solución aproximada y la solución exacta, en los niveles de tiempo $t = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$ para cada una de las regiones utilizando las mallas con 81×81 . En el Apéndice D pueden encontrarse las direcciones electrónicas a videos que muestran la evolución de cada una de las pruebas realizadas.

Región	m	e_{Δ_m}	Δ_m	p
CUAD	21	5.0304E-03	5.0000E-02	
	41	1.2505E-03	2.5000E-02	2.01
	81	3.1206E-04	1.2500E-02	2.00
CAB	21	3.1795E-03	5.6173E-02	
	41	7.9325E-04	2.9220E-02	2.12
	81	1.9915E-04	1.6397E-02	2.39
CUIT	21	3.4396E-03	6.5720E-02	
	41	8.5220E-04	3.5761E-02	2.29
	81	2.1364E-04	2.0732E-02	2.54
ZIRA	21	2.9957E-03	8.1879E-02	
	41	7.0382E-04	4.4404E-02	2.37
	81	1.7387E-04	2.3616E-02	2.21

Tabla 5.3: Errores cuadráticos e_{Δ_m} para los resultados del esquema que aproxima la ecuación de advección-difusión.

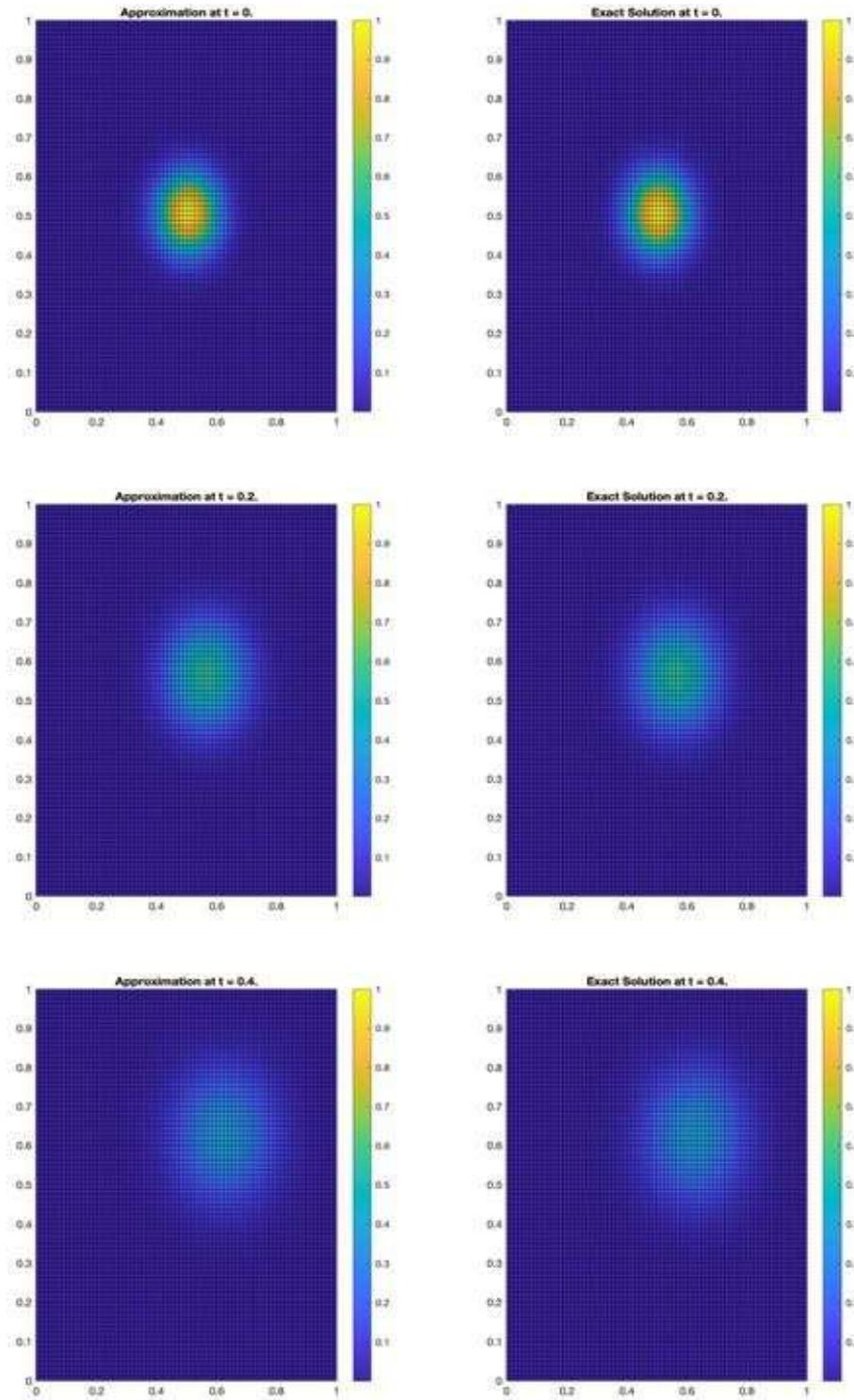


Figura 5.25: Comparación de resultados numéricos y exactos para el problema de advección-difusión en la región CUAD con 81×81 nodos en $t = 0, 0.2, 0.4$.

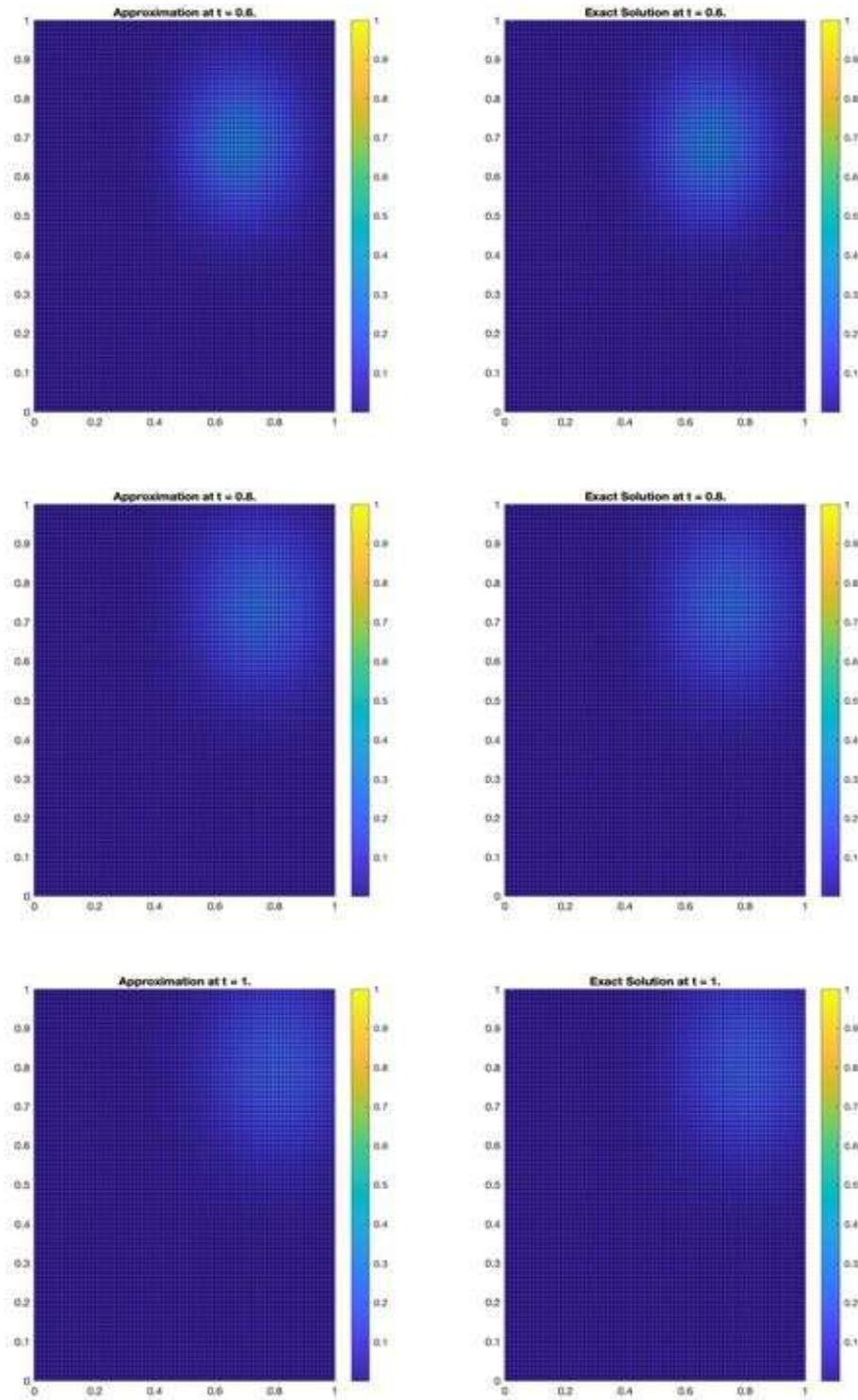


Figura 5.26: Comparación de resultados numéricos y exactos para el problema de advección-difusión en la región CUAD con 81×81 nodos en $t = 0.6, 0.8, 1$.

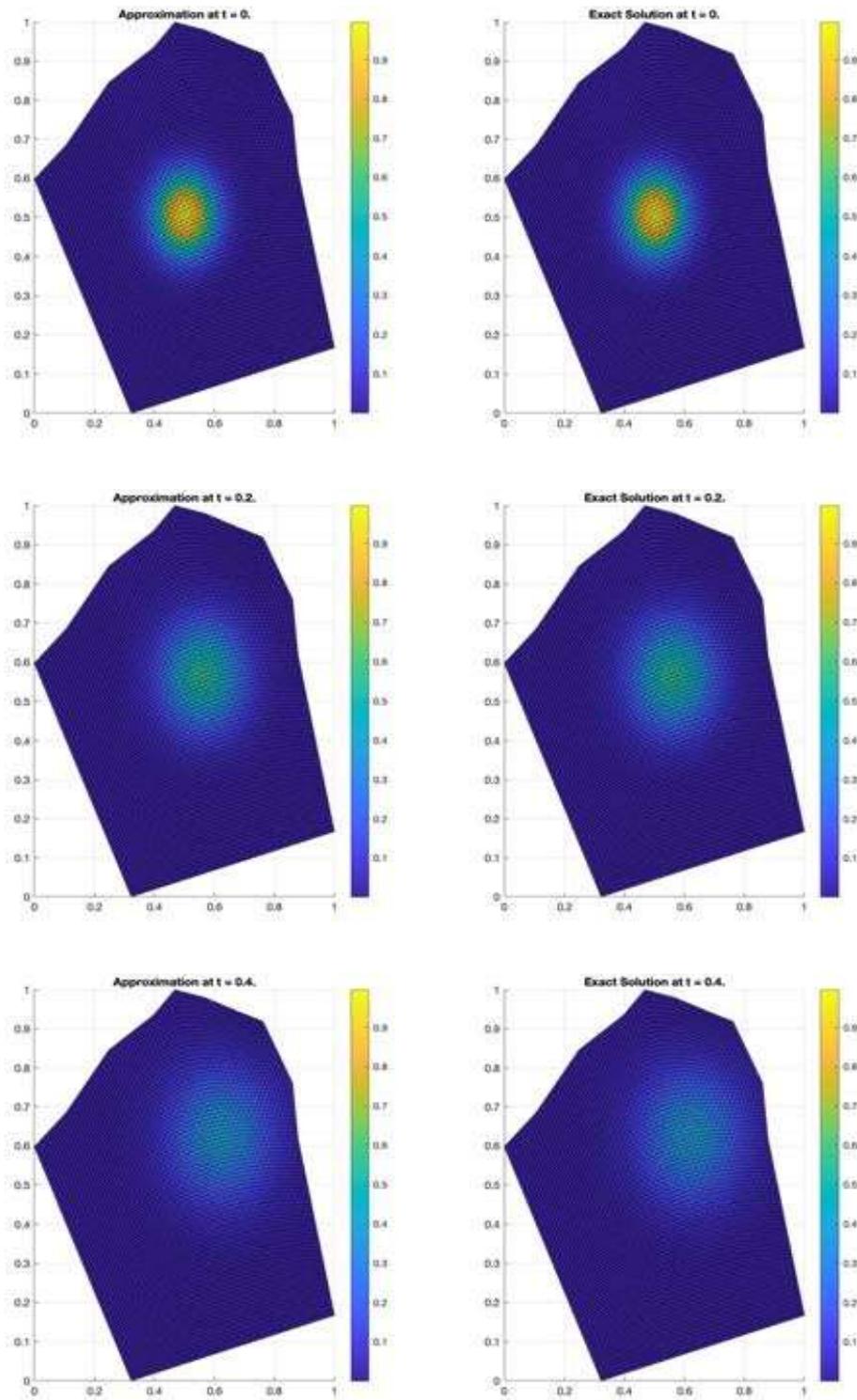


Figura 5.27: Comparación de resultados numéricos y exactos para el problema de advección-difusión en la región CAB con 81×81 nodos en $t = 0, 0.2, 0.4$.

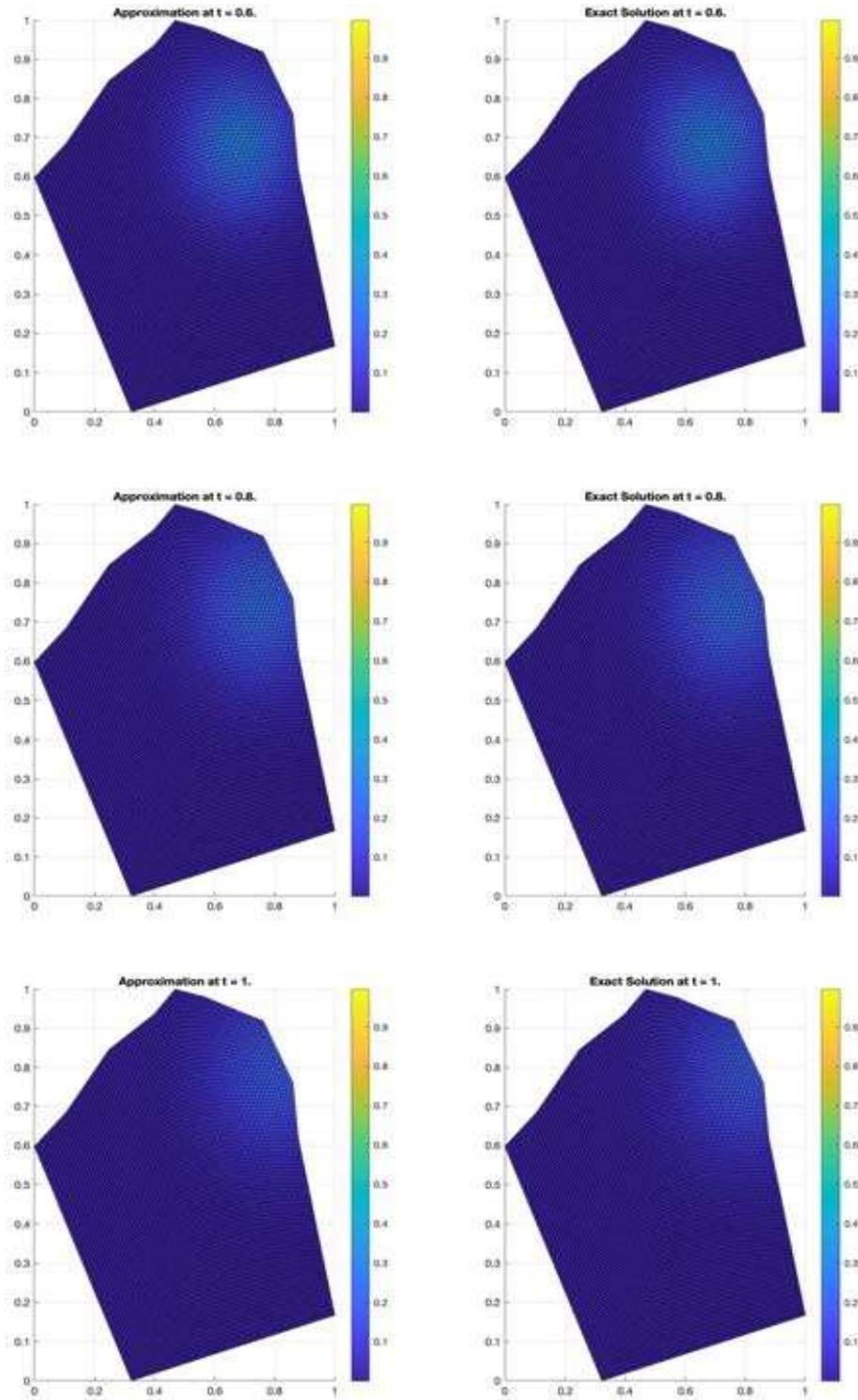


Figura 5.28: Comparación de resultados numéricos y exactos para el problema de advección-difusión en la región CAB con 81×81 nodos en $t = 0.6, 0.8, 1$.

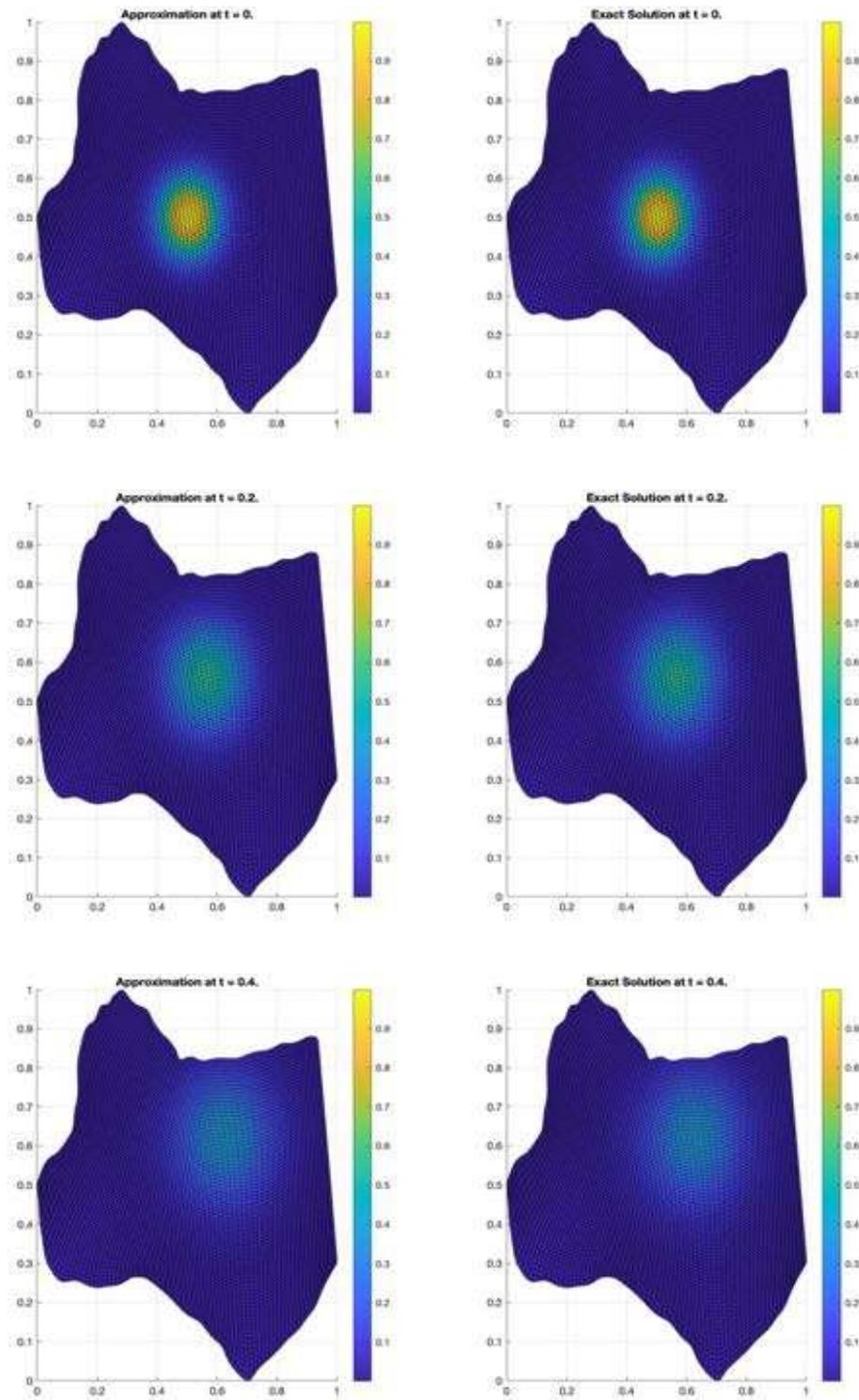


Figura 5.29: Comparación de resultados numéricos y exactos para el problema de advección-difusión en la región CUIT con 81×81 nodos en $t = 0, 0.2, 0.4$.

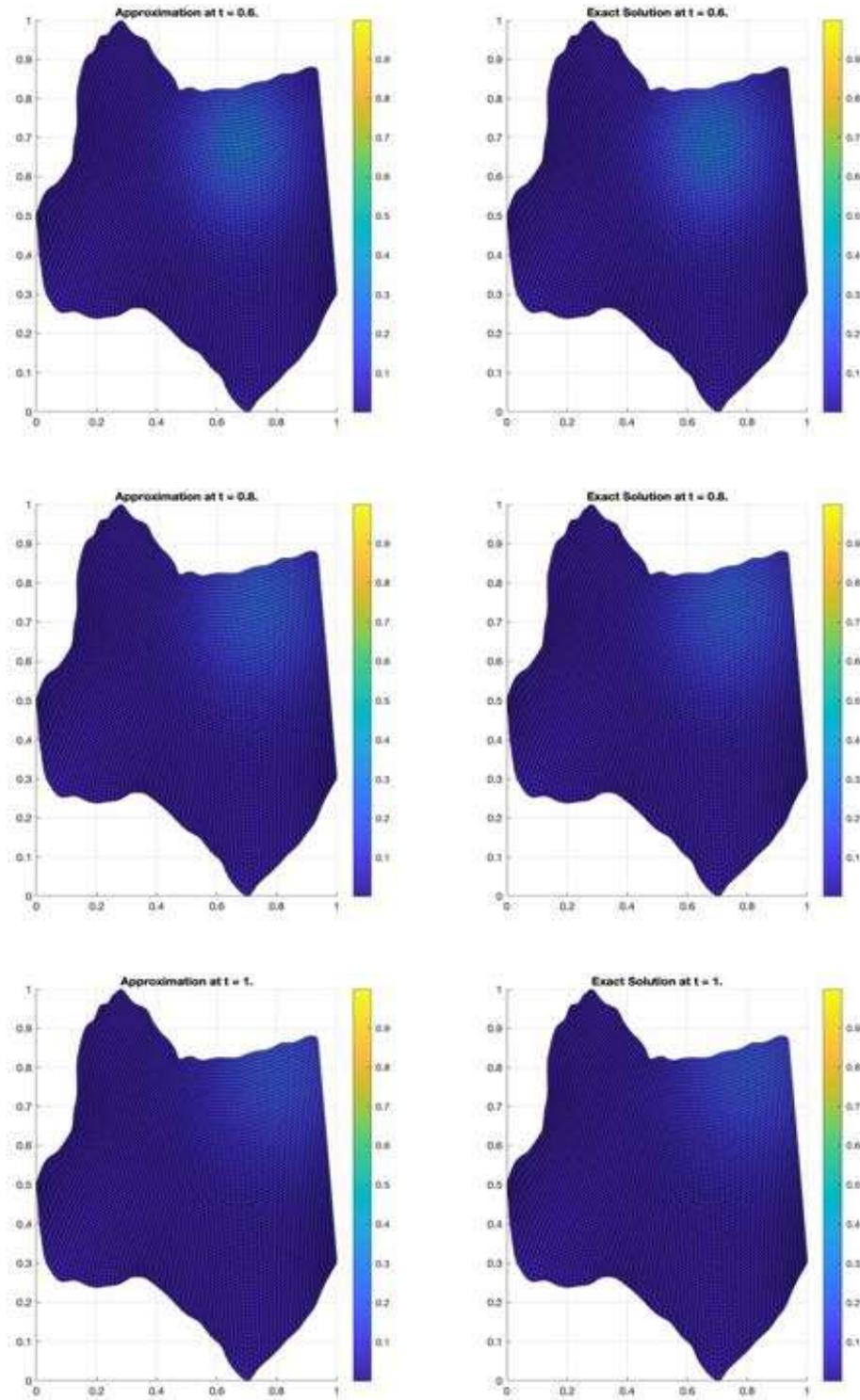


Figura 5.30: Comparación de resultados numéricos y exactos para el problema de advección-difusión en la región CUIT con 81×81 nodos en $t = 0.6, 0.8, 1$.

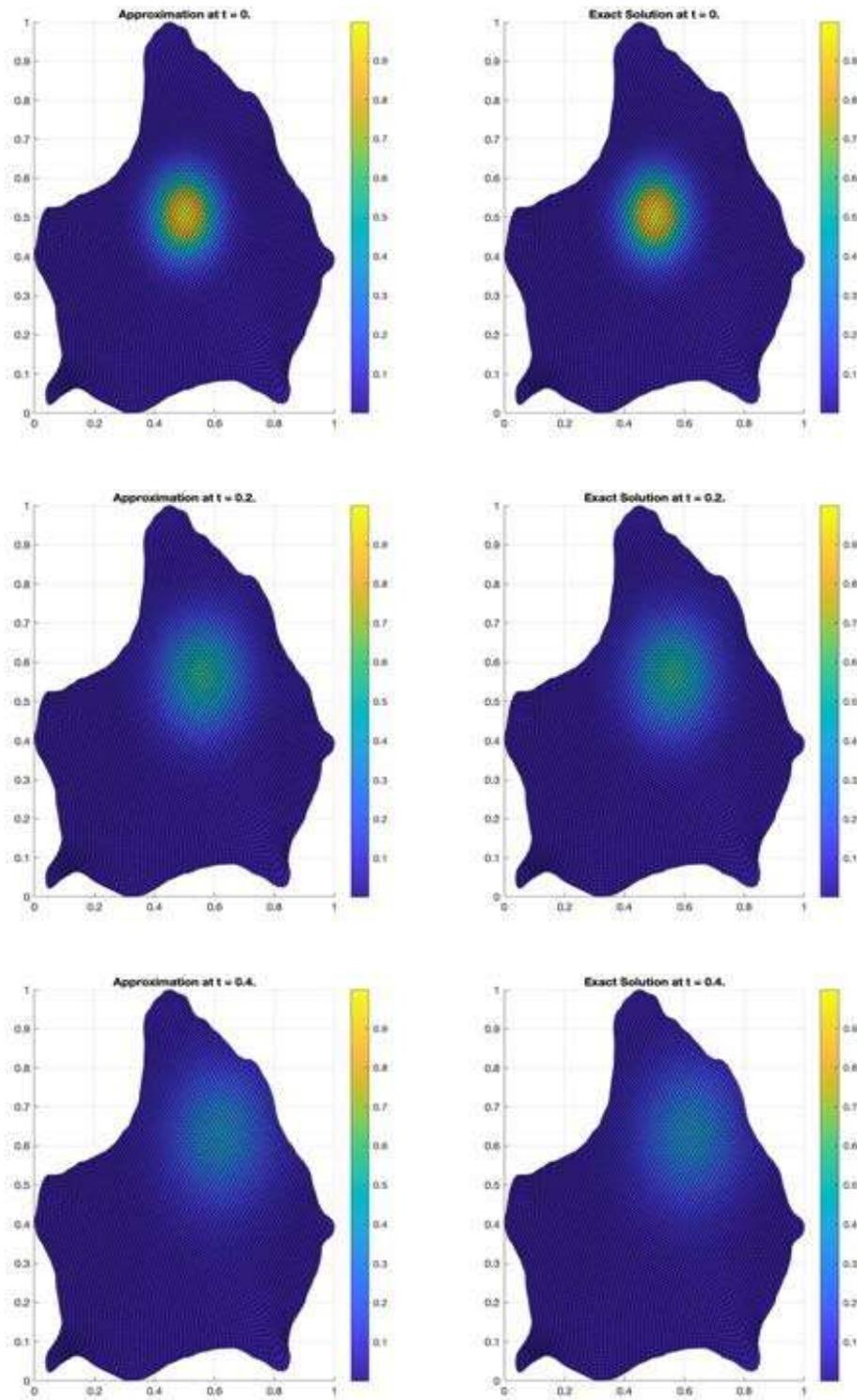


Figura 5.31: Comparación de resultados numéricos y exactos para el problema de advección-difusión en la región ZIRA con 81×81 nodos en $t = 0, 0.2, 0.4$.

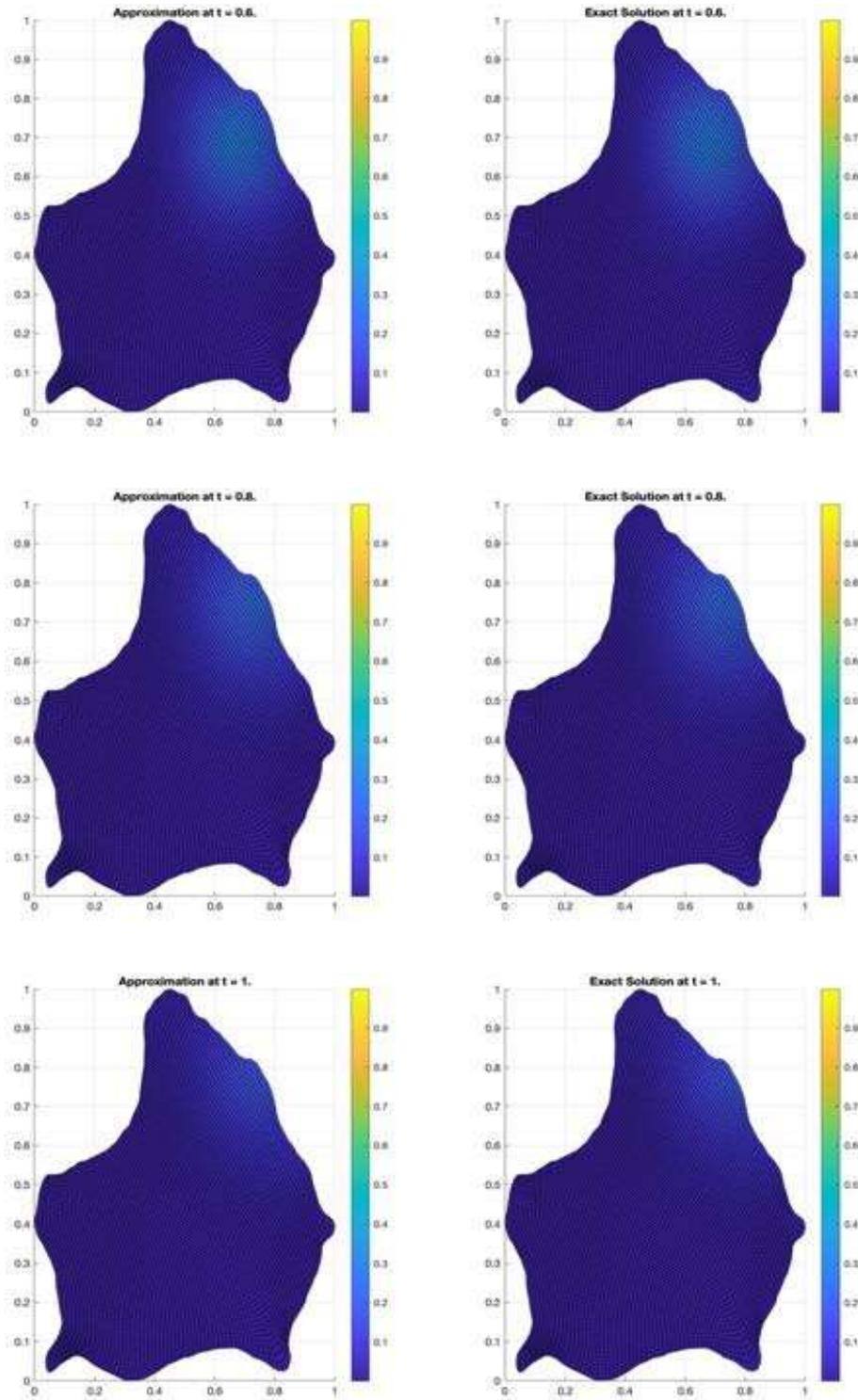


Figura 5.32: Comparación de resultados numéricos y exactos para el problema de advección-difusión en la región ZIRA con 81×81 nodos en $t = 0.6, 0.8, 1$.

5.1.4. Ecuaciones de Aguas Someras

Para realizar las pruebas numéricas con el esquema híbrido presentado en el Capítulo 4, se utilizaron, nuevamente, las cuatro regiones mostradas anteriormente, con sus respectivas discretizaciones espaciales, utilizando tanto el esquema para la forma conservativa como el esquema para la forma no conservativa de las ecuaciones.

La condición inicial para la variable conservativa que representa el tirante, q , fue seleccionada como la caída de una gota de agua con diferente centro, dependiendo de la región, de la siguiente manera:

- CUAD: centro en (0.5, 0.3).
- CAB: centro en (0.5, 0.5).
- CUIT: centro en (0.6, 0.5).
- ZIRA centro en (0.5, 0.4).

Las condiciones iniciales para las variables conservativas que representan el momento, r y s , fueron fijadas como 0 para todas las regiones. Las condiciones de frontera fueron seleccionadas como reflexivas para r y s , esto es, el total de momento que llega a una frontera, es reflejado siguiendo un comportamiento similar al de la Ley de Snell en óptica. Esto con la finalidad de simular el comportamiento de cuerpos de agua endorreicos confinados.

Siguiendo la idea presentada por Alcrudo en [1], para producir cálculos estables, la discretización temporal se realizó, en cada caso, considerando

$$\Delta t = c \frac{\min(\Delta x) \min(\Delta y)}{\min(\Delta x) + \min(\Delta y)}$$

donde $\min \Delta x$ y $\min \Delta y$ son los valores mínimos de Δx y Δy sobre toda la región, y $c = 0.5 \frac{t}{d}$. Con esto, el intervalo temporal (0s, 5s) se dividió en 5,000, 30,000 y 50,000 pasos, para las mallas de 21×21 , 41×41 y 81×81 nodos, respectivamente.

Para corroborar que se cumplen las leyes de conservación en el comportamiento del cuerpo de agua, las cantidades totales de masa agua y momento, sobre todo el dominio, están dadas, para un tiempo k , de la siguiente manera:

- Para la cantidad total de masa de agua:

$$G_q^{(k)} = \int_{\Omega} (q^{(k)}) \, dx dy$$

- Para la cantidad total de momento:

$$G_v^{(k)} = \int_{\Omega} \left(\sqrt{(r^{(k)})^2 + (s^{(k)})^2} \right) \, dx dy.$$

En este caso, estas cantidades fueron aproximadas utilizando una cuadratura numérica.

Las tablas (5.4) a (5.9), así como las tablas (5.10) a (5.15), muestran los resultados obtenidos al calcular las cantidades totales de masa y momento para la forma conservativa y no conservativa, respectivamente, con las diferentes discretizaciones espaciales. Gráficas realizadas utilizando los cálculos en todos los niveles de tiempo pueden encontrarse en Figuras 5.33 a 5.38. Para todas las regiones, utilizando las discretizaciones con 81×81 nodos, se presentan en las Figuras 5.39 a 5.46 (para el esquema conservativo) y en las Figuras 5.47 a 5.54 (para el esquema no conservativo), las soluciones numéricas en diferentes puntos del tiempo de la siguiente manera. En la gráfica del lado izquierdo se muestra el comportamiento de las velocidades, mientras que en la parte derecha se muestra el comportamiento de la masa de agua.

En el Apéndice D pueden encontrarse las direcciones electrónicas a videos que muestran la evolución de cada una de las pruebas realizadas.

t	CUAD	CAB	CUIT	ZIRA
1.0	$1.8127E - 02$	$1.1878E - 02$	$1.1373E - 02$	$1.1079E - 02$
2.0	$1.8064E - 02$	$1.1858E - 02$	$1.1325E - 02$	$1.1039E - 02$
3.0	$1.8008E - 02$	$1.1733E - 02$	$1.1268E - 02$	$1.0951E - 02$
4.0	$1.8025E - 02$	$1.1773E - 02$	$1.1261E - 02$	$1.0994E - 02$
5.0	$1.8036E - 02$	$1.1773E - 02$	$1.1274E - 02$	$1.0980E - 02$

Tabla 5.4: Cantidad G_q calculada para cada región con 21×21 nodos utilizando la forma conservativa de las ecuaciones.

t	CUAD	CAB	CUIT	ZIRA
1.0	$3.2596E - 05$	$3.3439E - 05$	$3.2300E - 05$	$3.3911E - 05$
2.0	$4.1490E - 05$	$4.0052E - 05$	$3.5777E - 05$	$4.0442E - 05$
3.0	$4.8391E - 05$	$4.0758E - 05$	$4.1220E - 05$	$3.8626E - 05$
4.0	$5.2635E - 05$	$4.9424E - 05$	$3.6103E - 05$	$3.9475E - 05$
5.0	$5.8595E - 05$	$4.7535E - 05$	$3.9337E - 05$	$4.4829E - 05$

Tabla 5.5: Cantidad G_v calculada para cada región con 21×21 nodos utilizando la forma conservativa de las ecuaciones.

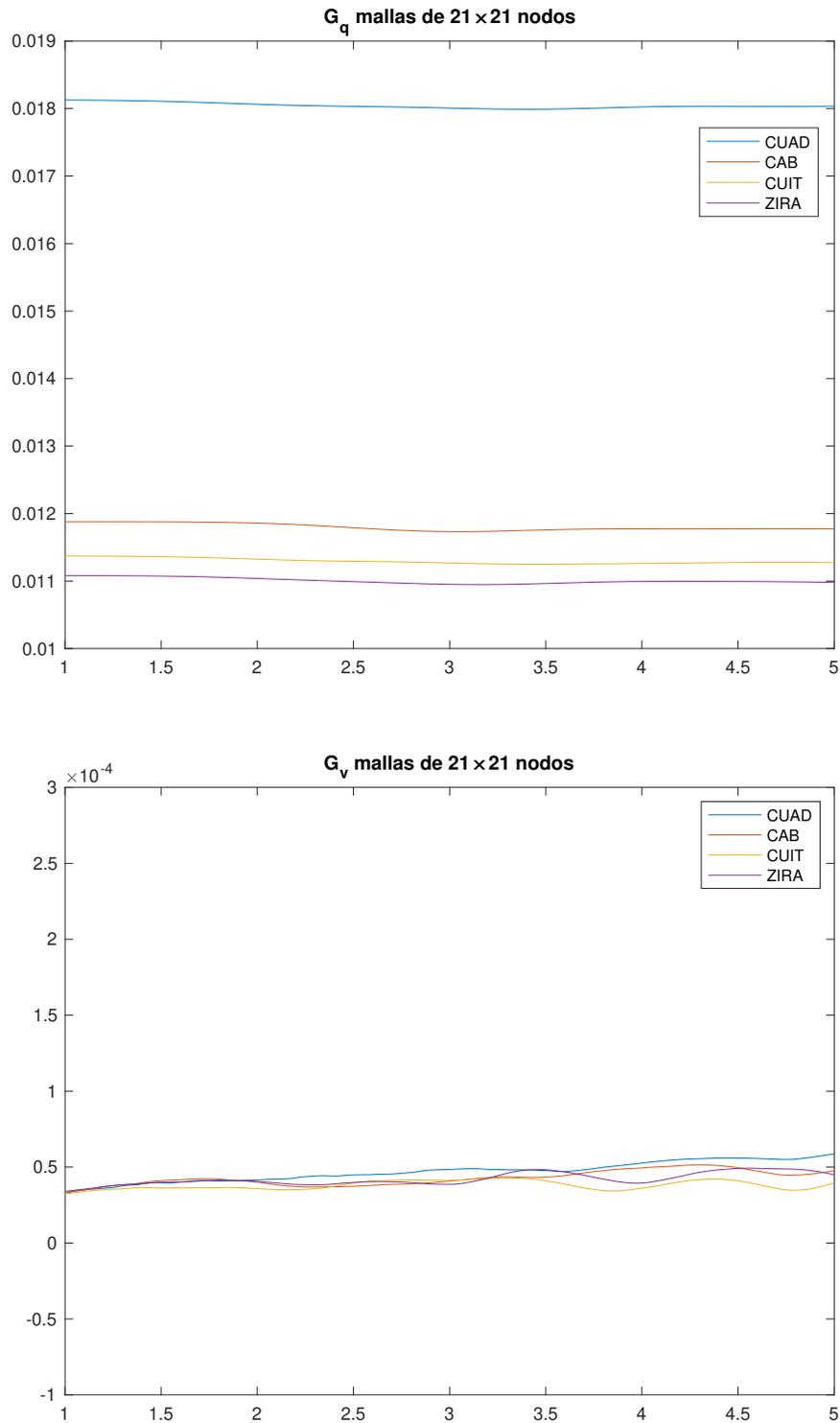


Figura 5.33: (a) G_q y (b) G_v calculadas para cada región con 21×21 nodos utilizando la forma conservativa de las ecuaciones.

t	CUAD	CAB	CUIT	ZIRA
1.0	1.9090E - 02	1.2481E - 02	1.2097E - 02	1.1673E - 02
2.0	1.9023E - 02	1.2463E - 02	1.2045E - 02	1.1632E - 02
3.0	1.8960E - 02	1.2339E - 02	1.1980E - 02	1.1538E - 02
4.0	1.8984E - 02	1.2372E - 02	1.1981E - 02	1.1581E - 02
5.0	1.8995E - 02	1.2371E - 02	1.1999E - 02	1.1573E - 02

Tabla 5.6: Cantidad G_q calculada para cada región con 41×41 nodos utilizando la forma conservativa de las ecuaciones.

t	CUAD	CAB	CUIT	ZIRA
1.0	3.4011E - 05	3.3589E - 05	3.2990E - 05	3.4347E - 05
2.0	4.7519E - 05	4.7072E - 05	4.1445E - 05	4.6721E - 05
3.0	5.6820E - 05	4.9621E - 05	4.6636E - 05	4.3002E - 05
4.0	6.3391E - 05	5.3524E - 05	4.0920E - 05	4.4534E - 05
5.0	6.4446E - 05	5.0740E - 05	4.4119E - 05	4.7166E - 05

Tabla 5.7: Cantidad G_v calculada para cada región con 41×41 nodos utilizando la forma conservativa de las ecuaciones.

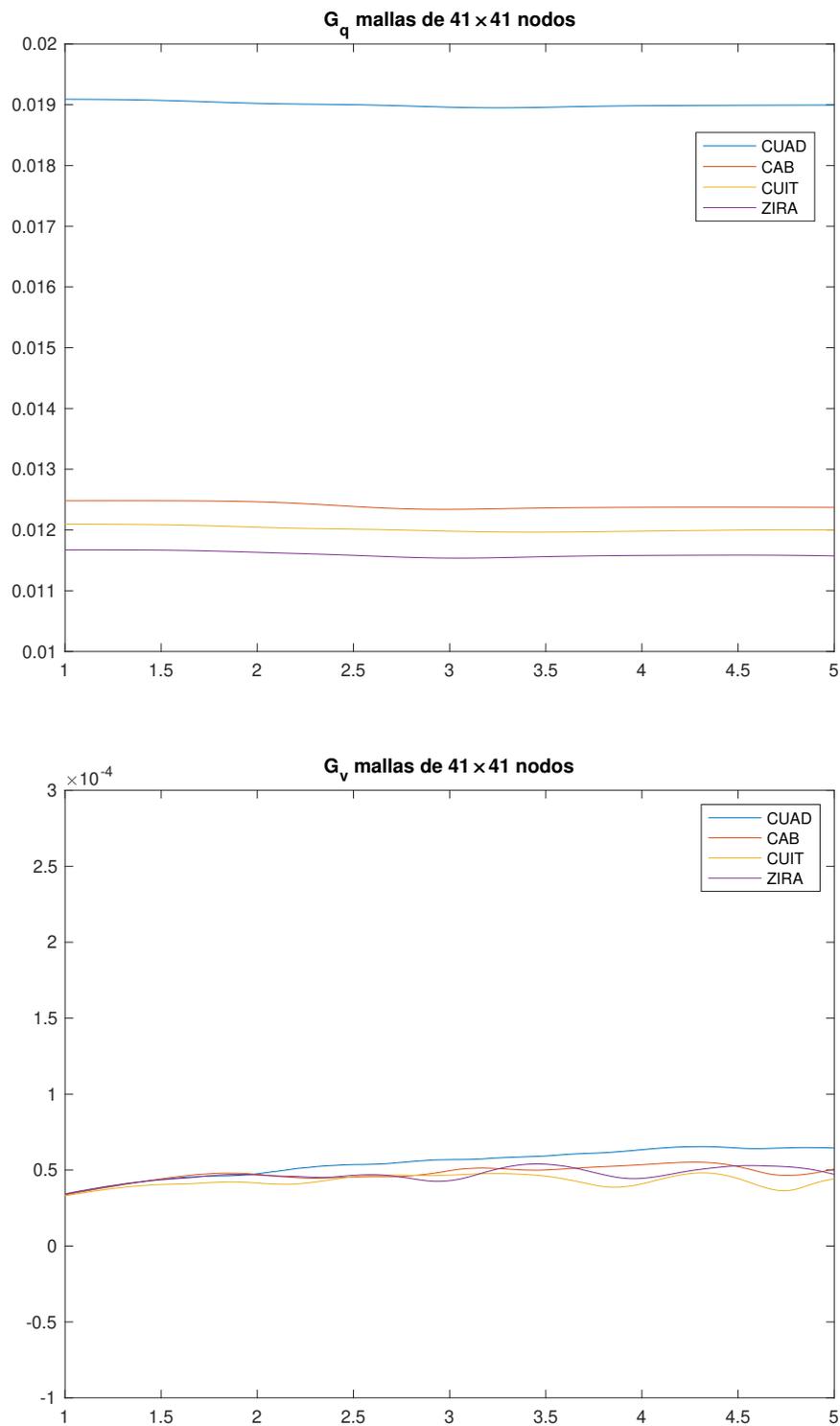


Figura 5.34: (a) G_q y (b) G_v calculadas para cada región con 41×41 nodos utilizando la forma conservativa de las ecuaciones.

t	CUAD	CAB	CUIT	ZIRA
1.0	$1.9581E - 02$	$1.2788E - 02$	$1.2475E - 02$	$1.1984E - 02$
2.0	$1.9511E - 02$	$1.2772E - 02$	$1.2420E - 02$	$1.1943E - 02$
3.0	$1.9435E - 02$	$1.2640E - 02$	$1.2339E - 02$	$1.1835E - 02$
4.0	$1.9448E - 02$	$1.2660E - 02$	$1.2331E - 02$	$1.1865E - 02$
5.0	$1.9451E - 02$	$1.2645E - 02$	$1.2347E - 02$	$1.1847E - 02$

Tabla 5.8: Cantidad G_q calculada para cada región con 81×81 nodos utilizando la forma conservativa de las ecuaciones.

t	CUAD	CAB	CUIT	ZIRA
1.0	$3.5724E - 05$	$3.5133E - 05$	$3.4605E - 05$	$3.5894E - 05$
2.0	$5.5947E - 05$	$5.6653E - 05$	$4.9795E - 05$	$5.5075E - 05$
3.0	$6.9622E - 05$	$6.0922E - 05$	$5.5254E - 05$	$5.1687E - 05$
4.0	$7.8434E - 05$	$6.1370E - 05$	$5.0398E - 05$	$5.3518E - 05$
5.0	$7.4814E - 05$	$5.9414E - 05$	$5.0653E - 05$	$5.4108E - 05$

Tabla 5.9: Cantidad G_v calculada para cada región con 81×81 nodos utilizando la forma conservativa de las ecuaciones.

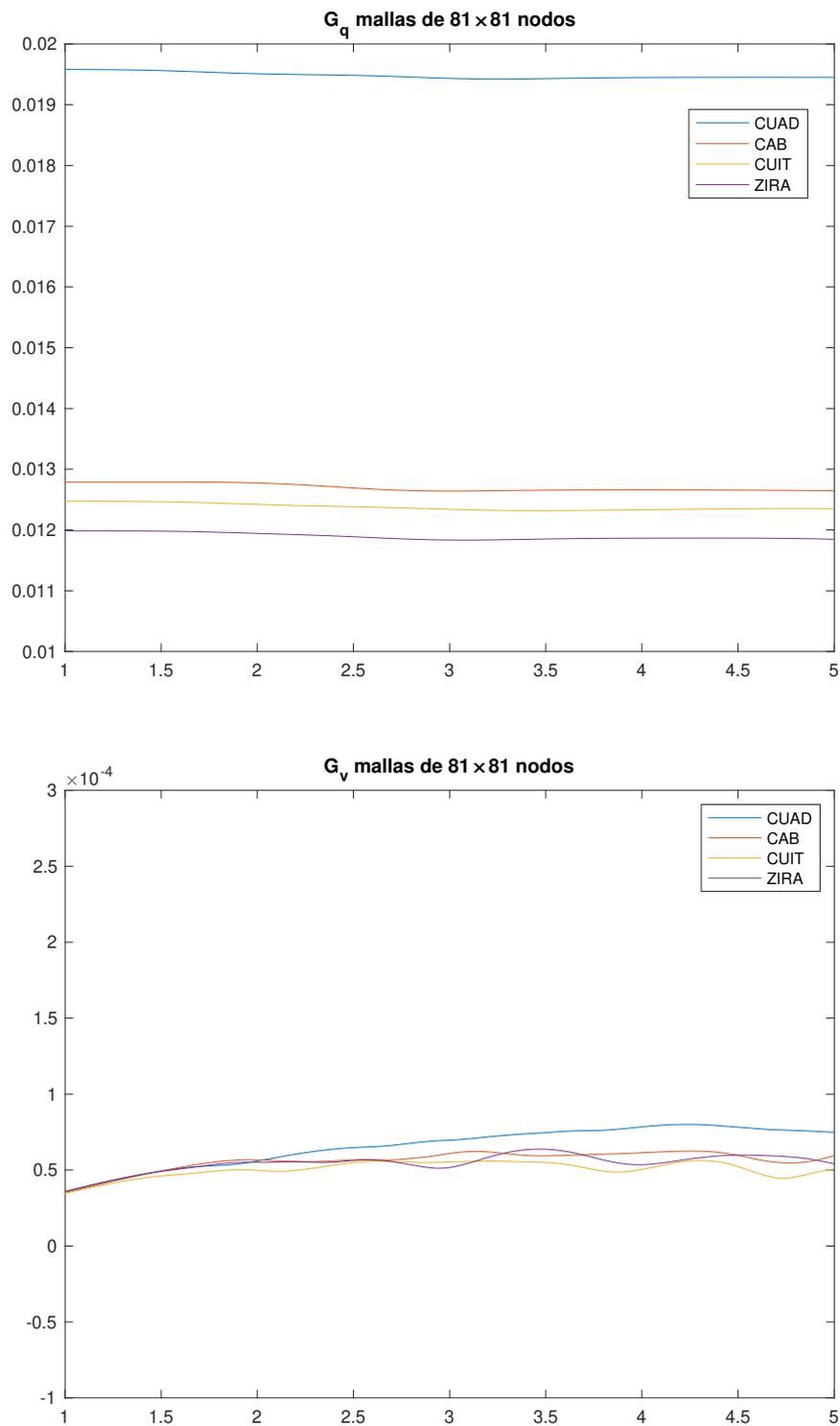


Figura 5.35: (a) G_q y (b) G_v calculadas para cada región con 81×81 nodos utilizando la forma conservativa de las ecuaciones.

t	CUAD	CAB	CUIT	ZIRA
1.0	$1.8127E - 02$	$1.1878E - 02$	$1.1373E - 02$	$1.1079E - 02$
2.0	$1.8064E - 02$	$1.1858E - 02$	$1.1324E - 02$	$1.1038E - 02$
3.0	$1.8008E - 02$	$1.1733E - 02$	$1.1268E - 02$	$1.0951E - 02$
4.0	$1.8025E - 02$	$1.1772E - 02$	$1.1261E - 02$	$1.0994E - 02$
5.0	$1.8036E - 02$	$1.1772E - 02$	$1.1274E - 02$	$1.0980E - 02$

Tabla 5.10: Cantidad G_q calculada para cada región con 21×21 nodos utilizando la forma no conservativa de las ecuaciones.

t	CUAD	CAB	CUIT	ZIRA
1.0	$3.2493E - 05$	$3.3345E - 05$	$3.2250E - 05$	$3.3890E - 05$
2.0	$4.1452E - 05$	$3.9920E - 05$	$3.5729E - 05$	$4.0572E - 05$
3.0	$4.8400E - 05$	$4.0628E - 05$	$4.1205E - 05$	$3.8583E - 05$
4.0	$5.2554E - 05$	$4.9236E - 05$	$3.5998E - 05$	$3.9380E - 05$
5.0	$5.8541E - 05$	$4.7378E - 05$	$3.9195E - 05$	$4.4935E - 05$

Tabla 5.11: Cantidad G_v calculada para cada región con 21×21 nodos utilizando la forma no conservativa de las ecuaciones.

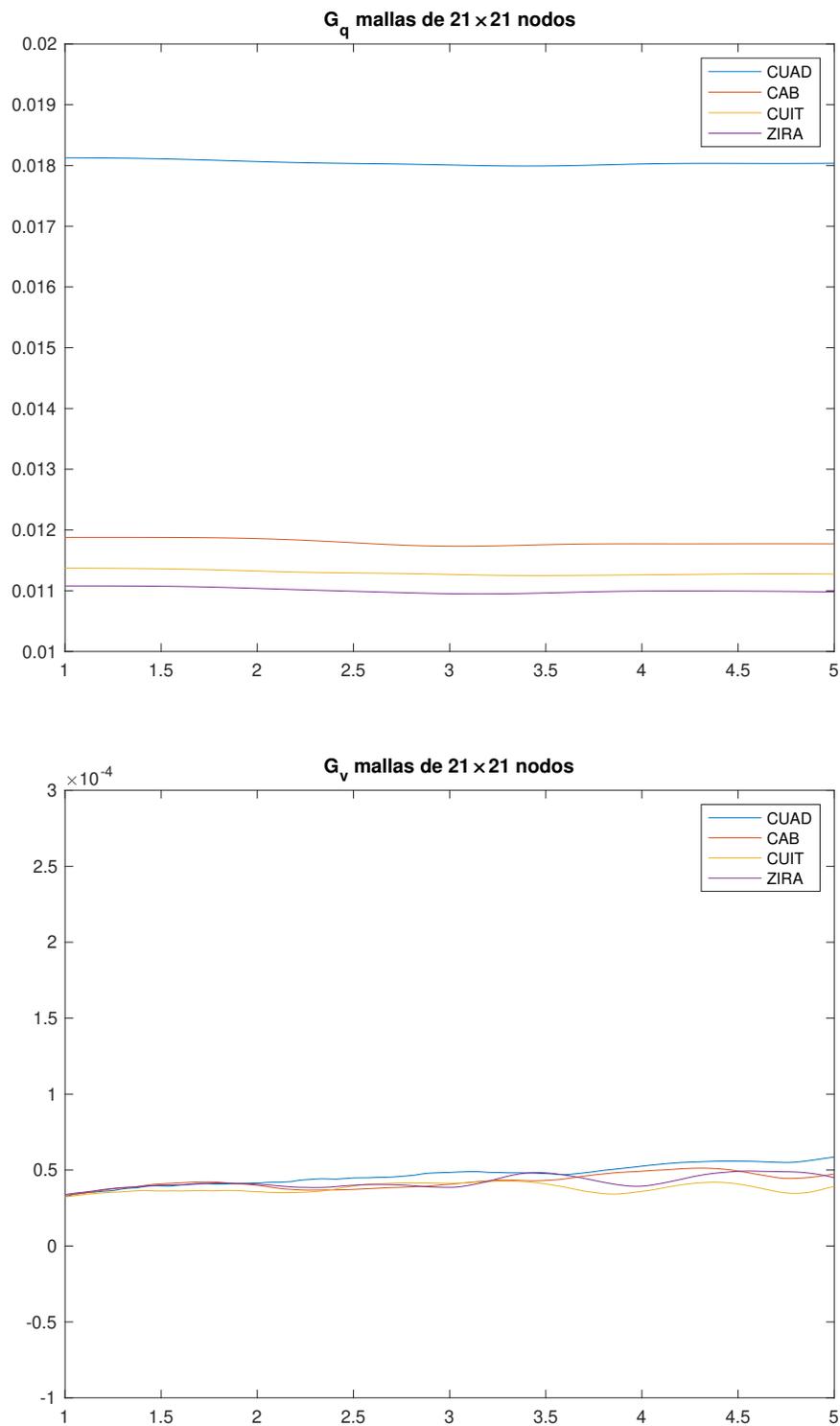


Figura 5.36: (a) G_q y (b) G_v calculadas para cada región con 21×21 nodos utilizando la forma no conservativa de las ecuaciones.

t	CUAD	CAB	CUIT	ZIRA
1.0	1.9090E - 02	1.2481E - 02	1.2097E - 02	1.1673E - 02
2.0	1.9023E - 02	1.2463E - 02	1.2045E - 02	1.1632E - 02
3.0	1.8960E - 02	1.2339E - 02	1.1981E - 02	1.1537E - 02
4.0	1.8984E - 02	1.2372E - 02	1.1982E - 02	1.1581E - 02
5.0	1.8995E - 02	1.2371E - 02	1.2000E - 02	1.1573E - 02

Tabla 5.12: Cantidad G_q calculada para cada región con 41×41 nodos utilizando la forma no conservativa de las ecuaciones.

t	CUAD	CAB	CUIT	ZIRA
1.0	3.3989E - 05	3.3539E - 05	3.2987E - 05	3.4382E - 05
2.0	4.7514E - 05	4.6903E - 05	4.1402E - 05	4.6897E - 05
3.0	5.6824E - 05	4.9399E - 05	4.6662E - 05	4.3009E - 05
4.0	6.3379E - 05	5.3324E - 05	4.0849E - 05	4.4441E - 05
5.0	6.4415E - 05	5.0538E - 05	4.3902E - 05	4.7327E - 05

Tabla 5.13: Cantidad G_v calculada para cada región con 41×41 nodos utilizando la forma no conservativa de las ecuaciones.

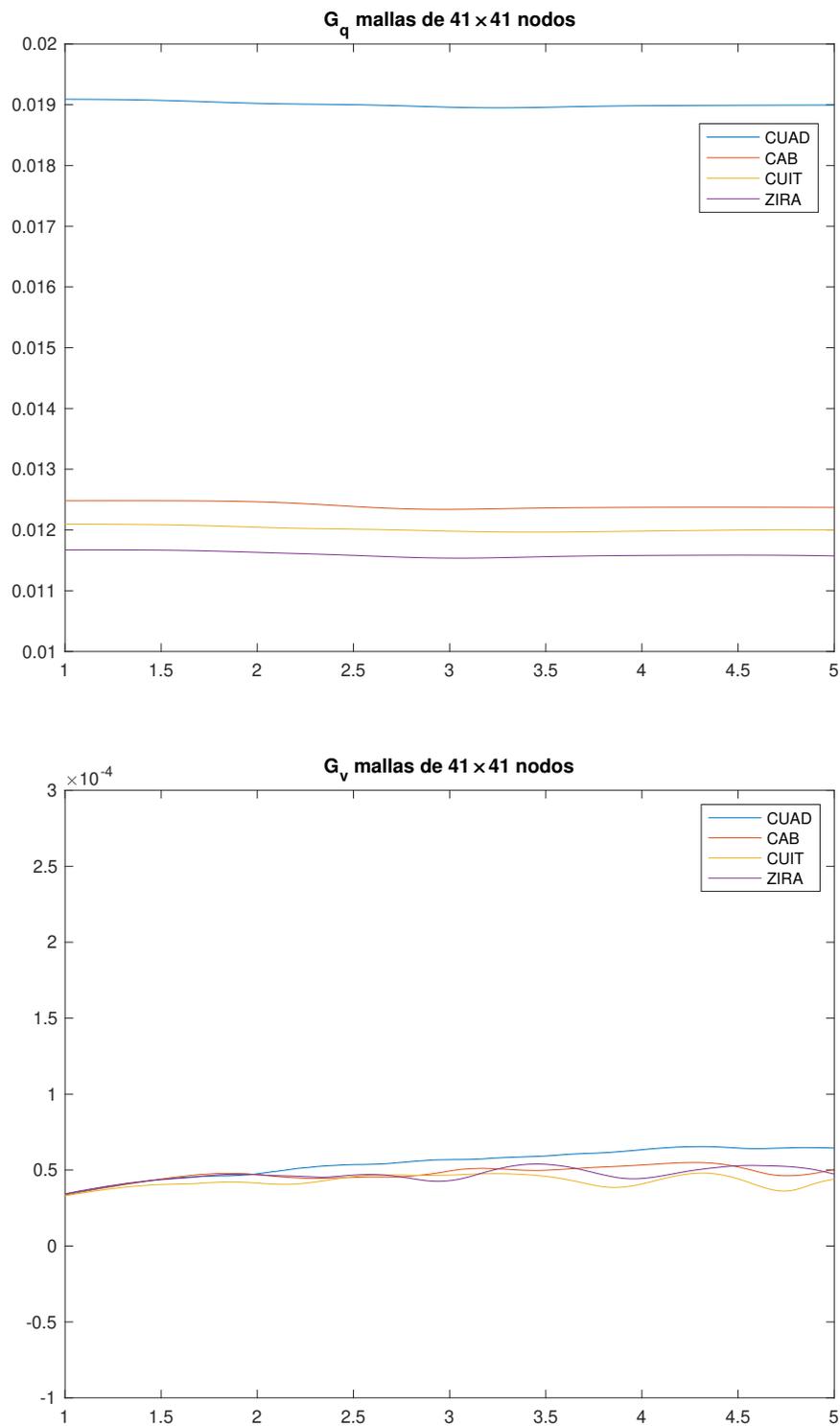


Figura 5.37: (a) G_q y (b) G_v calculadas para cada región con 41×41 nodos utilizando la forma no conservativa de las ecuaciones.

t	CUAD	CAB	CUIT	ZIRA
1.0	$1.9581E - 02$	$1.2788E - 02$	$1.2475E - 02$	$1.1984E - 02$
2.0	$1.9511E - 02$	$1.2772E - 02$	$1.2420E - 02$	$1.1942E - 02$
3.0	$1.9435E - 02$	$1.2640E - 02$	$1.2340E - 02$	$1.1834E - 02$
4.0	$1.9448E - 02$	$1.2659E - 02$	$1.2333E - 02$	$1.1866E - 02$
5.0	$1.9451E - 02$	$1.2644E - 02$	$1.2351E - 02$	$1.1850E - 02$

Tabla 5.14: Cantidad G_q calculada para cada región con 81×81 nodos utilizando la forma no conservativa de las ecuaciones.

t	CUAD	CAB	CUIT	ZIRA
1.0	$3.5718E - 05$	$3.5080E - 05$	$3.4606E - 05$	$3.5950E - 05$
2.0	$5.5946E - 05$	$5.6414E - 05$	$4.9727E - 05$	$5.5289E - 05$
3.0	$6.9621E - 05$	$6.0548E - 05$	$5.5261E - 05$	$5.1738E - 05$
4.0	$7.8432E - 05$	$6.1048E - 05$	$5.0196E - 05$	$5.3262E - 05$
5.0	$7.4808E - 05$	$5.9040E - 05$	$5.0116E - 05$	$5.3765E - 05$

Tabla 5.15: Cantidad G_v calculada para cada región con 81×81 nodos utilizando la forma no conservativa de las ecuaciones.

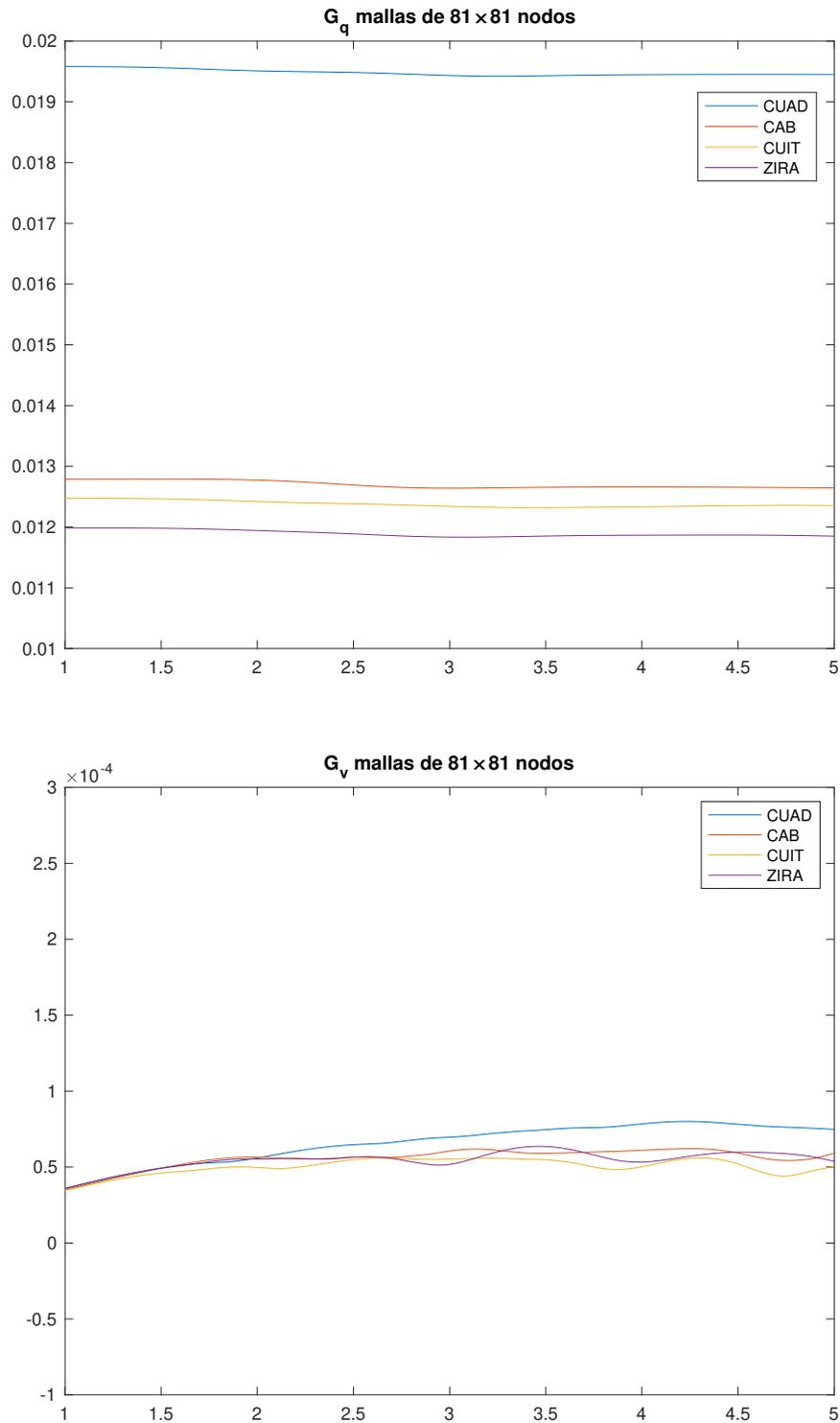


Figura 5.38: (a) G_q y (b) G_v calculadas para cada región con 81×81 nodos utilizando la forma no conservativa de las ecuaciones.

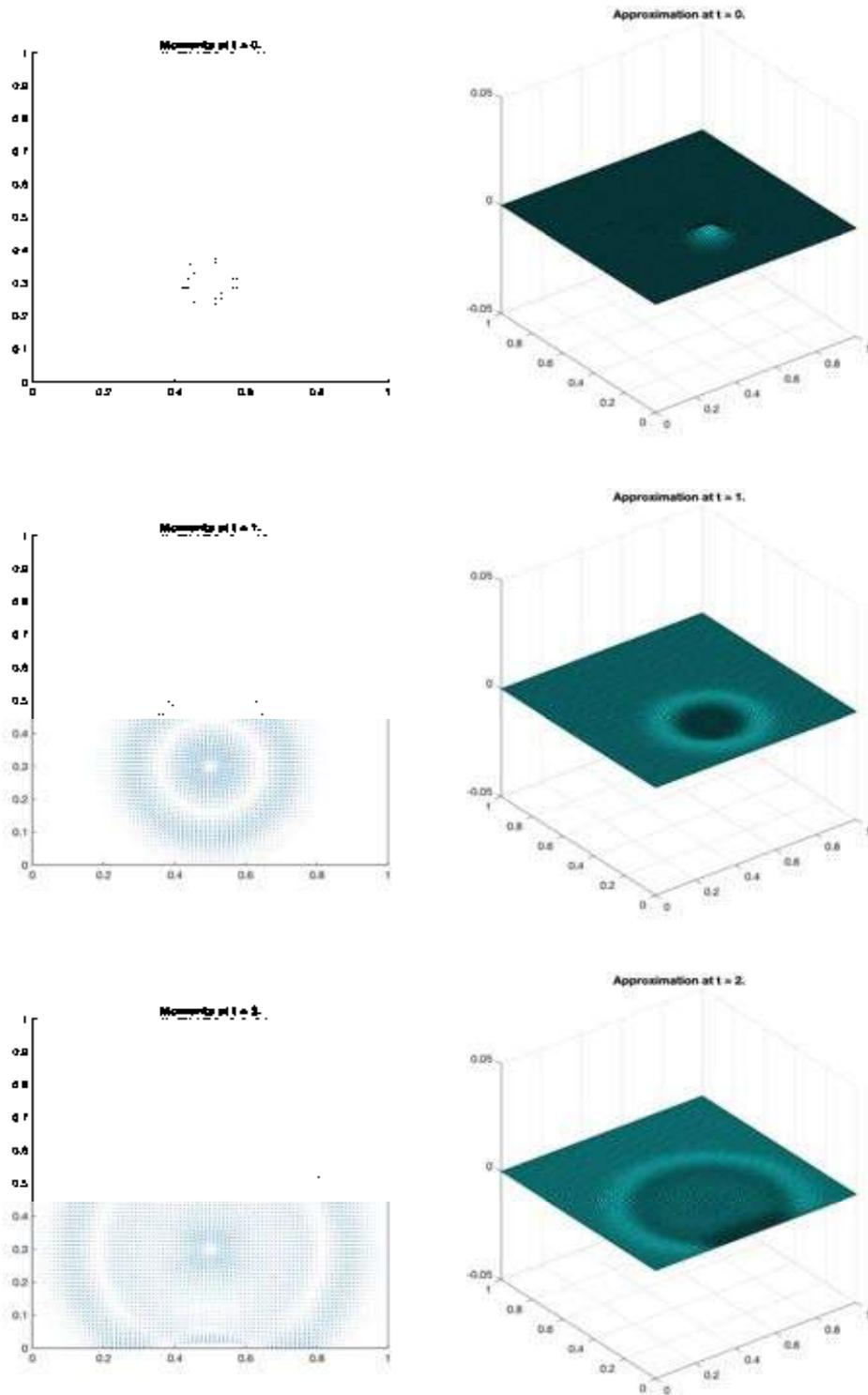


Figura 5.39: Aproximación de la forma conservativa de las ecuaciones de aguas someras para la región CUAD con 81×81 nodos en $t = 0, 1, 2$.

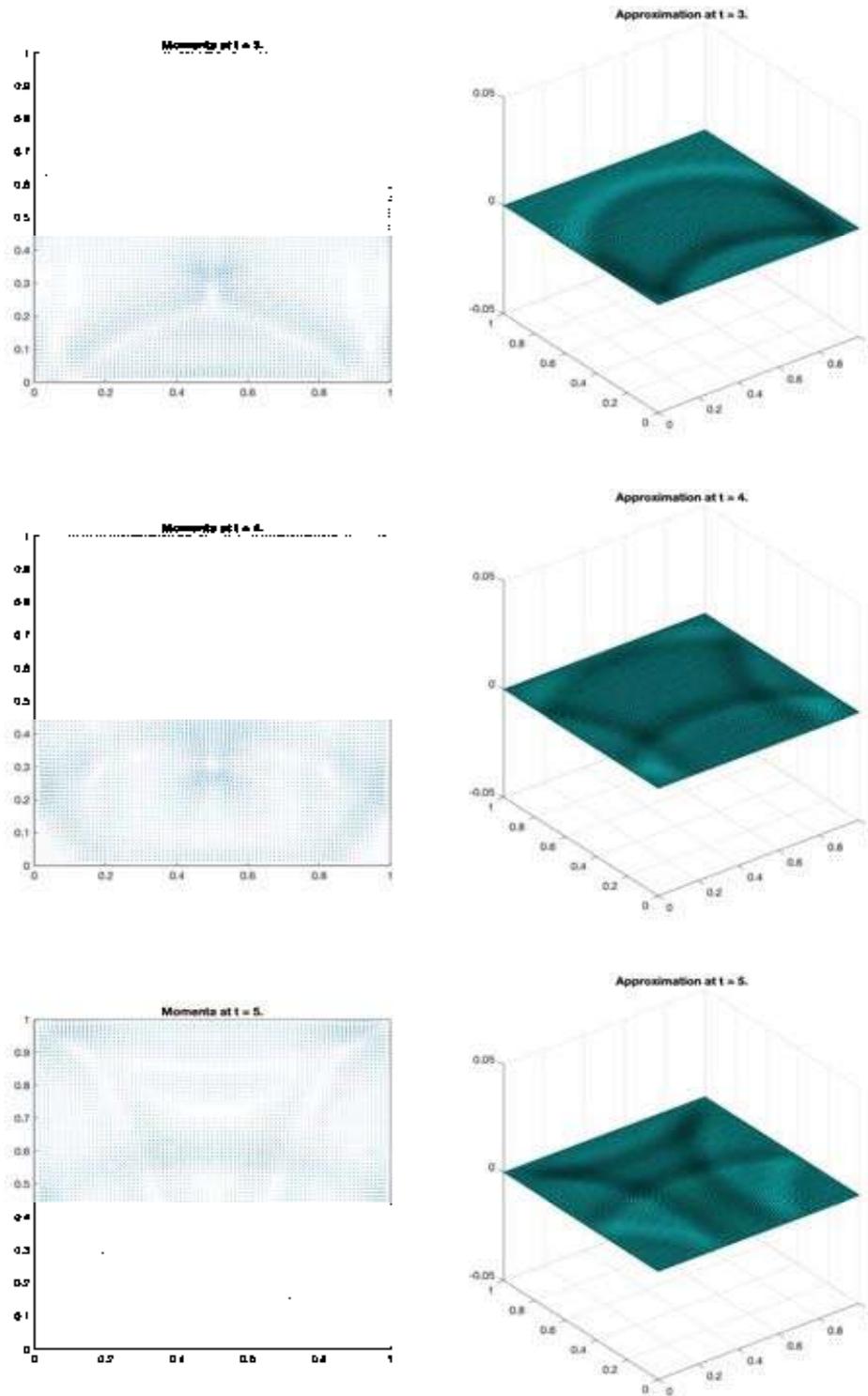


Figura 5.40: Aproximación de la forma conservativa de las ecuaciones de aguas someras para la región CUAD con 81×81 nodos en $t = 3, 4, 5$.

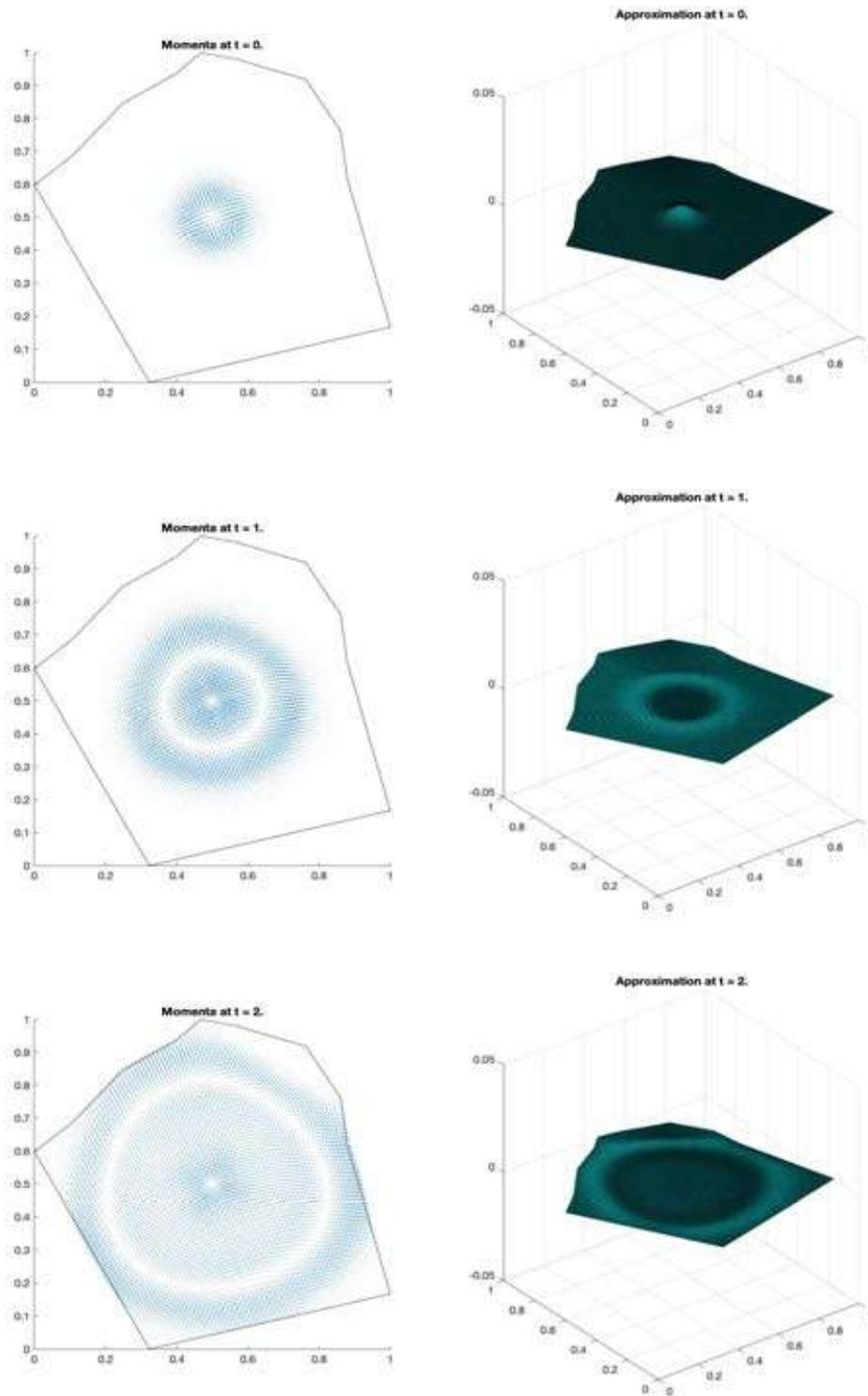


Figura 5.41: Aproximación de la forma conservativa de las ecuaciones de aguas someras para la región CAB con 81×81 nodos en $t = 0, 1, 2$.

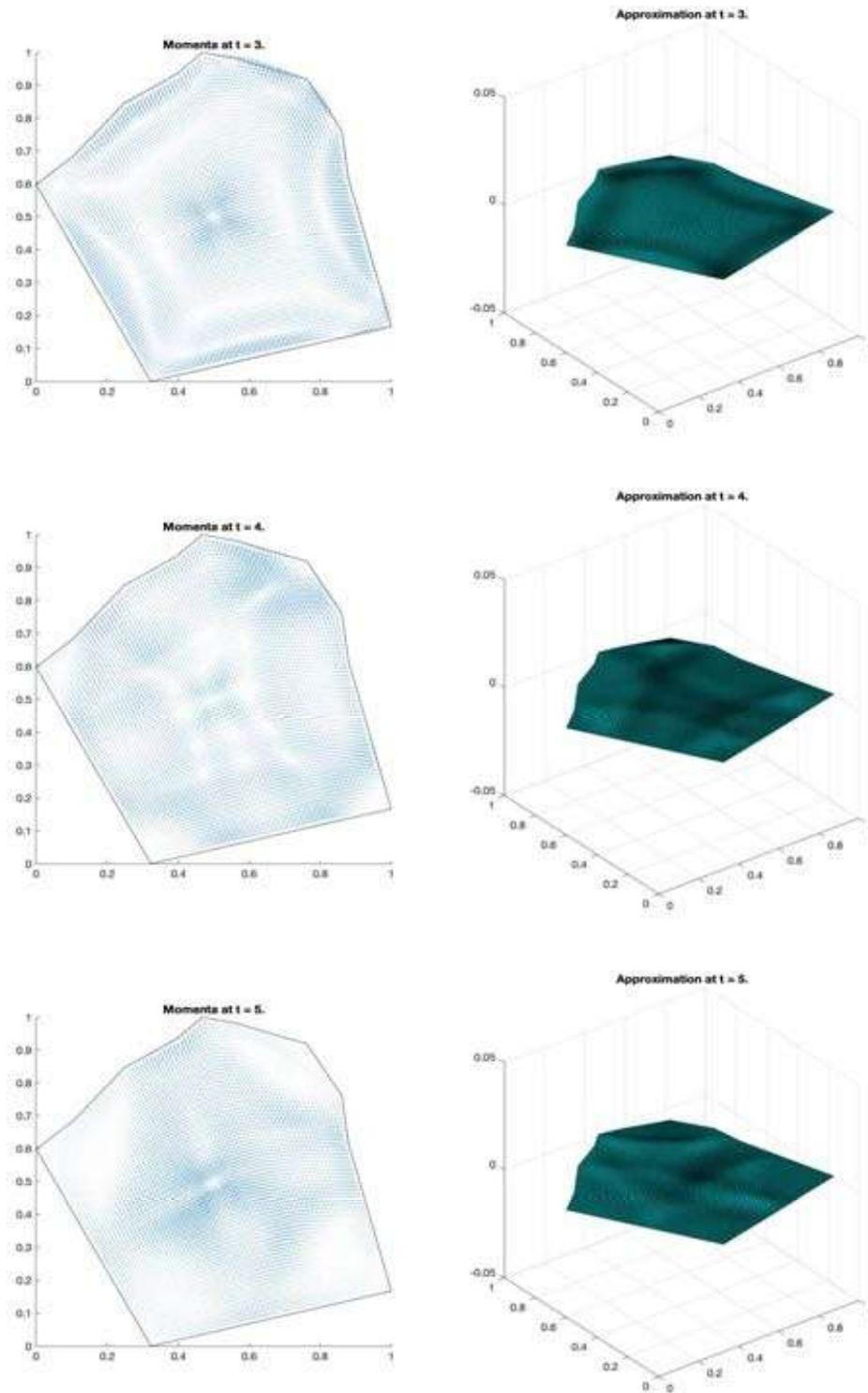


Figura 5.42: Aproximación de la forma conservativa de las ecuaciones de aguas someras para la región CAB con 81×81 nodos en $t = 3, 4, 5$.

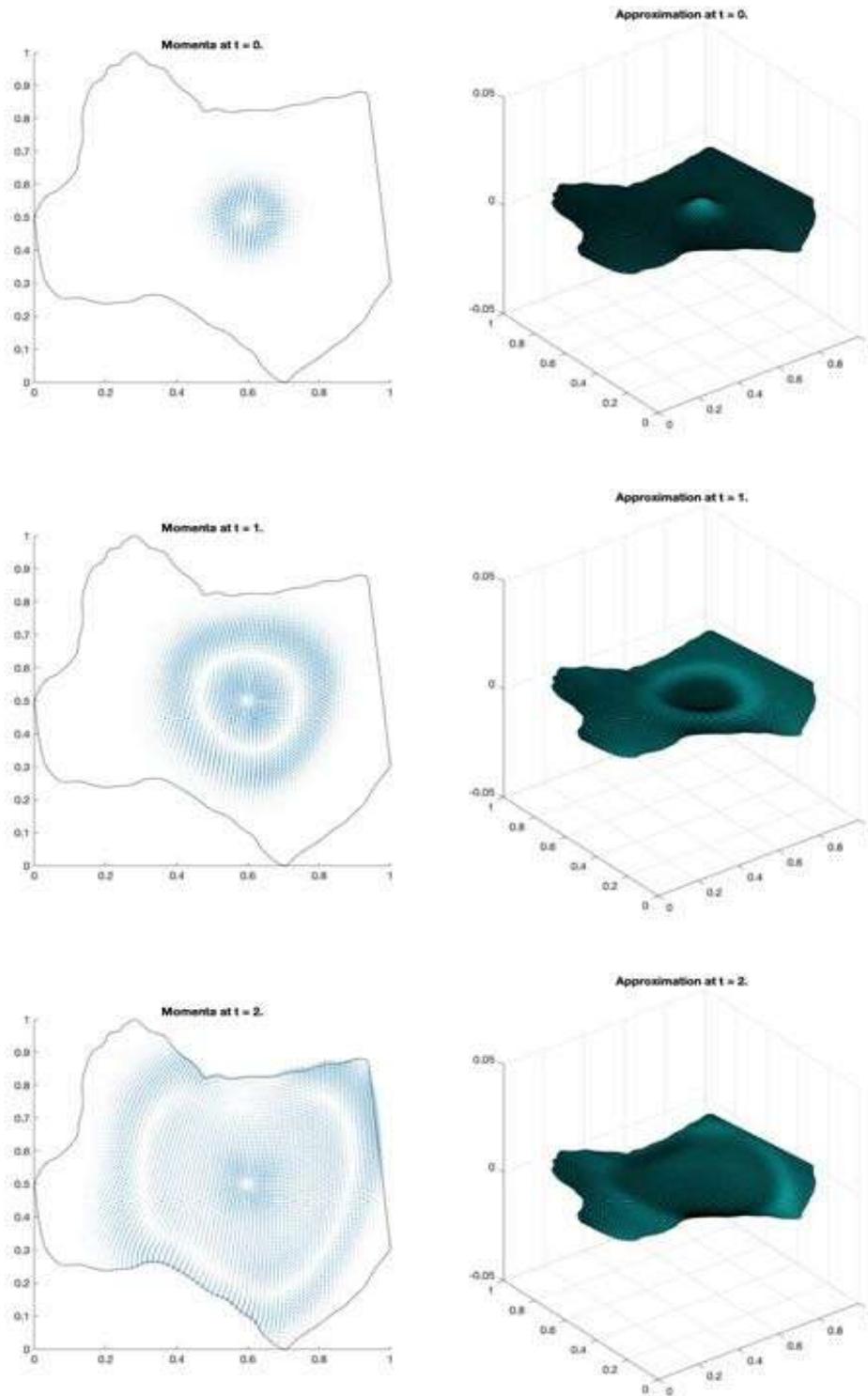


Figura 5.43: Aproximación de la forma conservativa de las ecuaciones de aguas someras para la región CUIT con 81×81 nodos en $t = 0, 1, 2$.

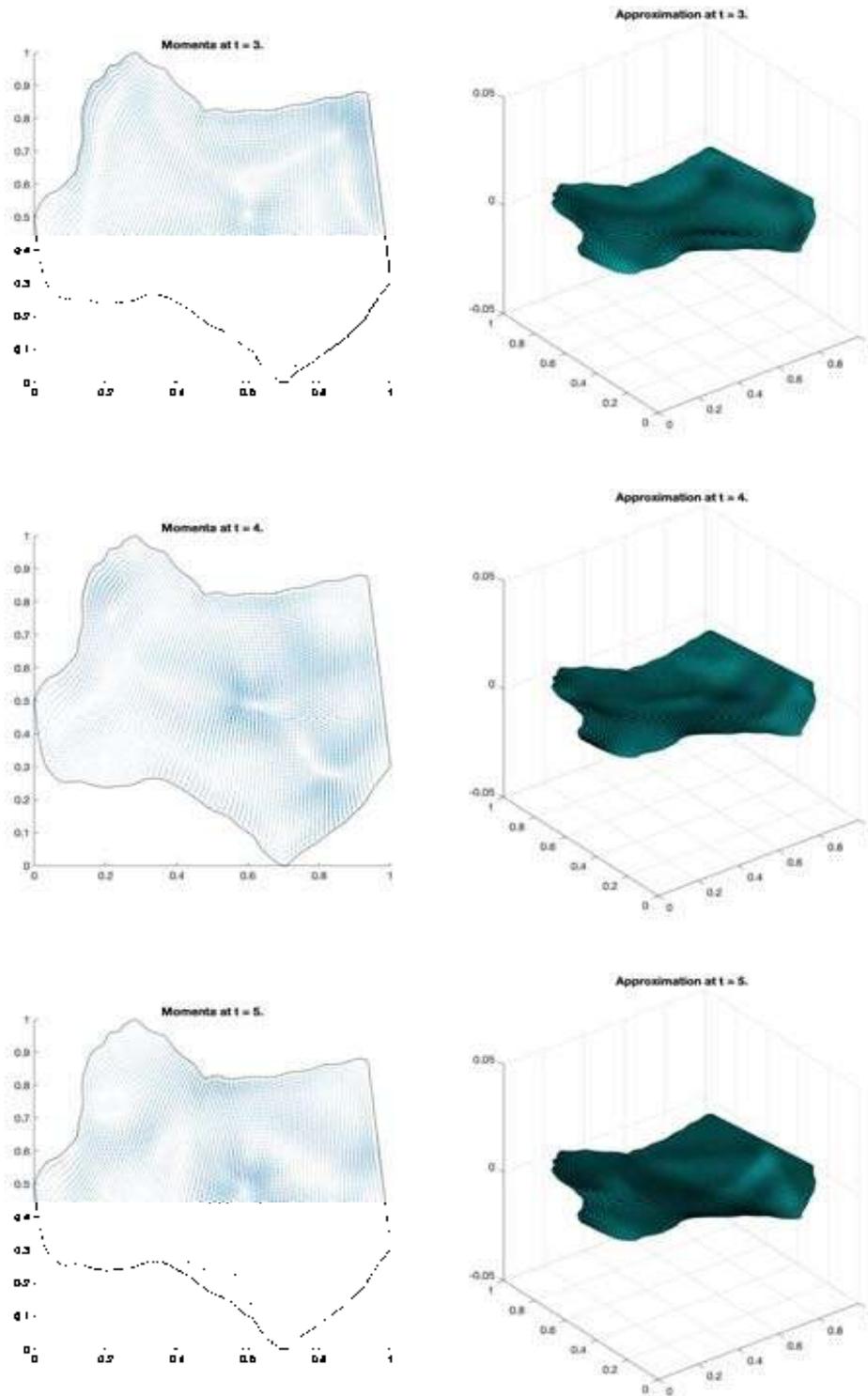


Figura 5.44: Aproximación de la forma conservativa de las ecuaciones de aguas someras para la región CUIT con 81×81 nodos en $t = 3, 4, 5$.

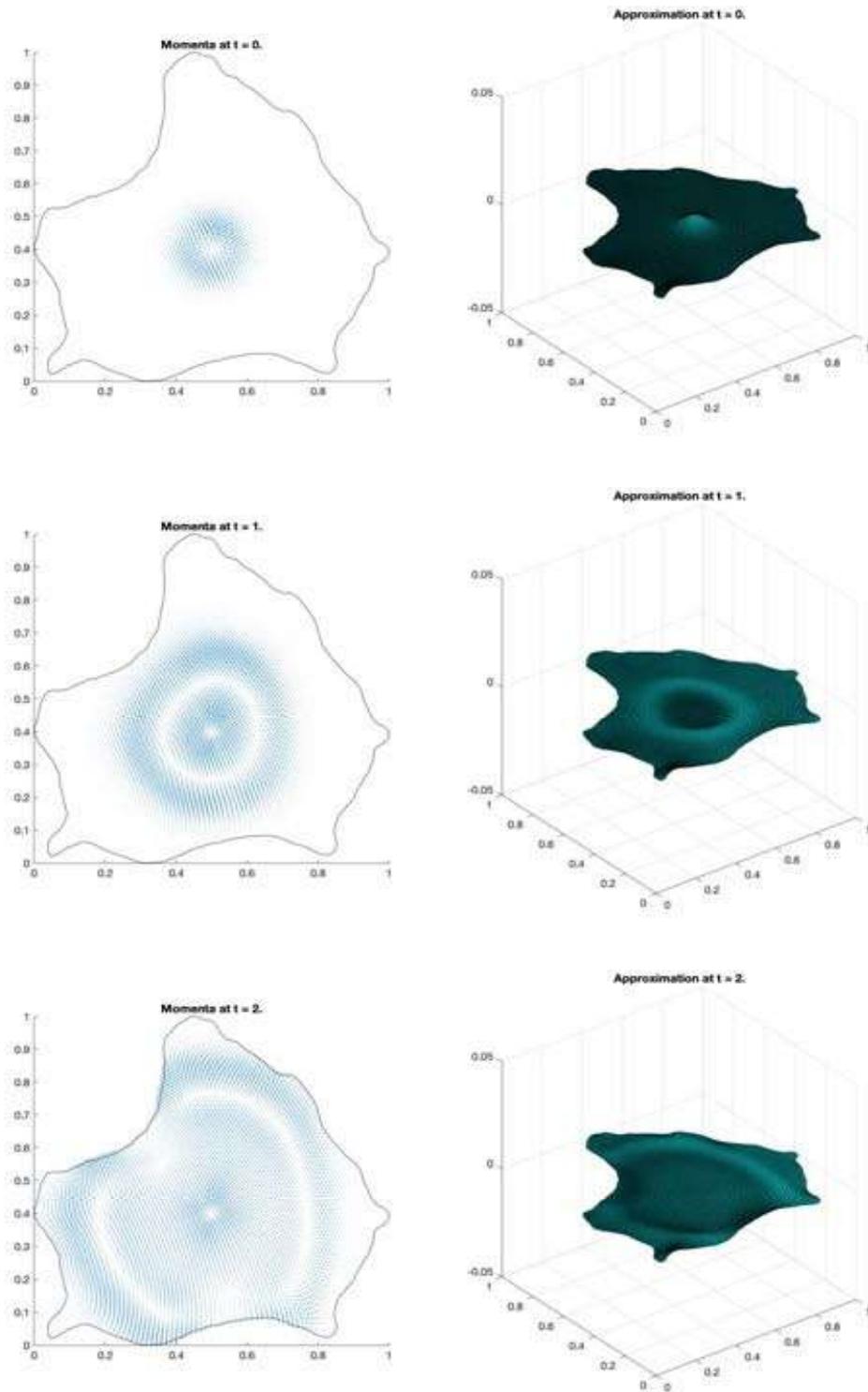


Figura 5.45: Aproximación de la forma conservativa de las ecuaciones de aguas someras para la región ZIRA con 81×81 nodos en $t = 0, 1, 2$.

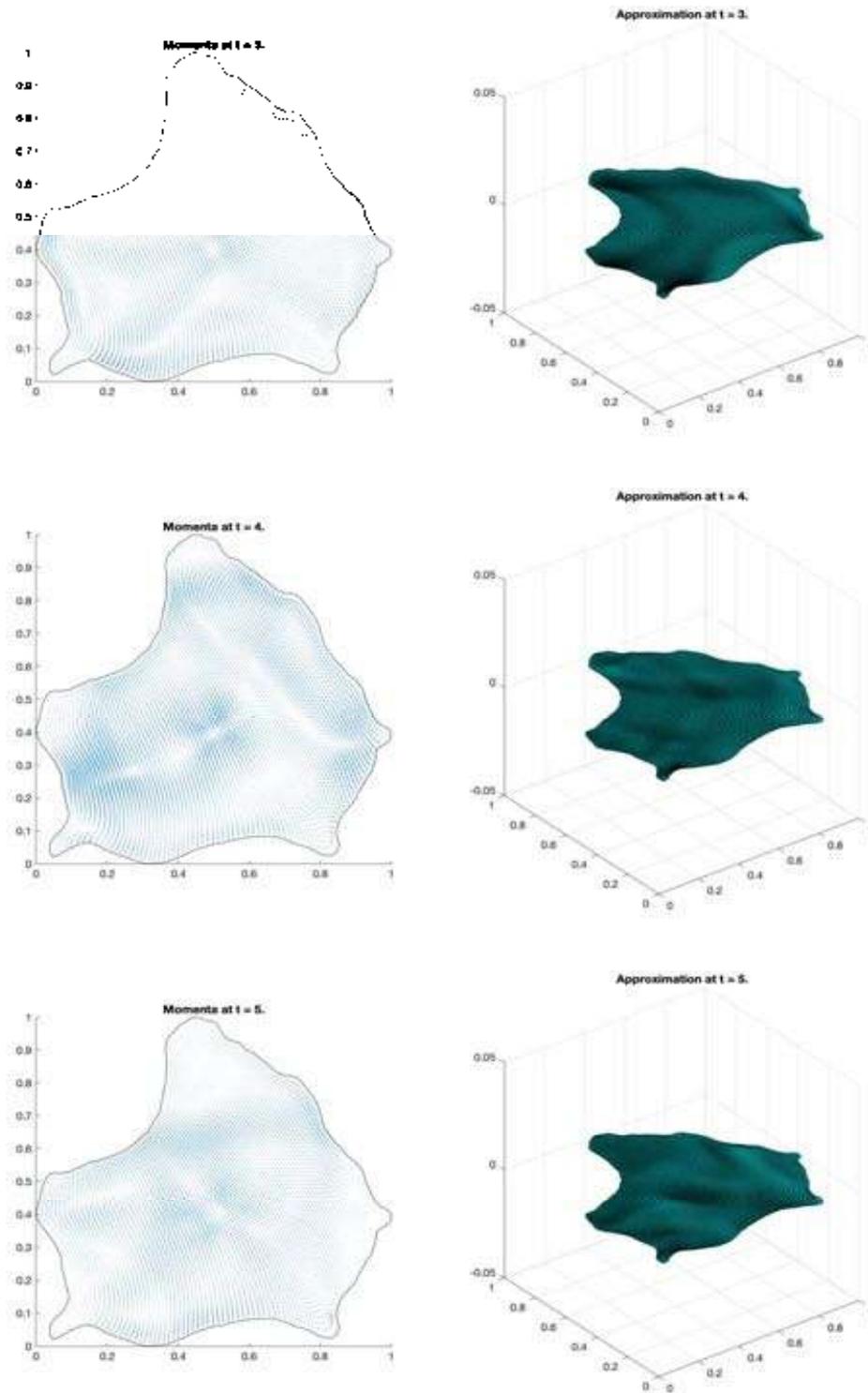


Figura 5.46: Aproximación de la forma conservativa de las ecuaciones de aguas someras para la región ZIRA con 81×81 nodos en $t = 3, 4, 5$.

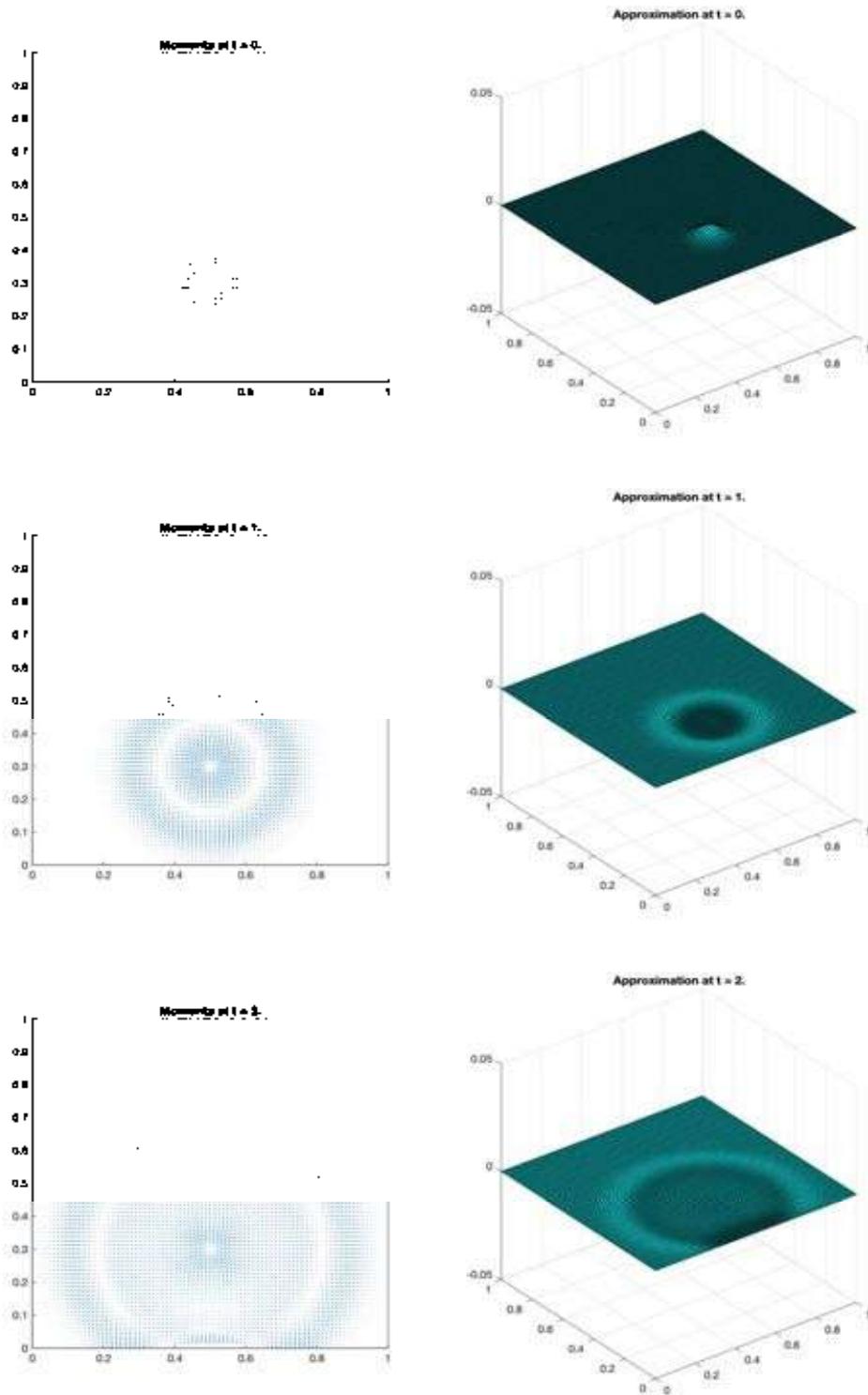


Figura 5.47: Aproximación de la forma no conservativa de las ecuaciones de aguas someras para la región CUAD con 81×81 nodos en $t = 0, 1, 2$.

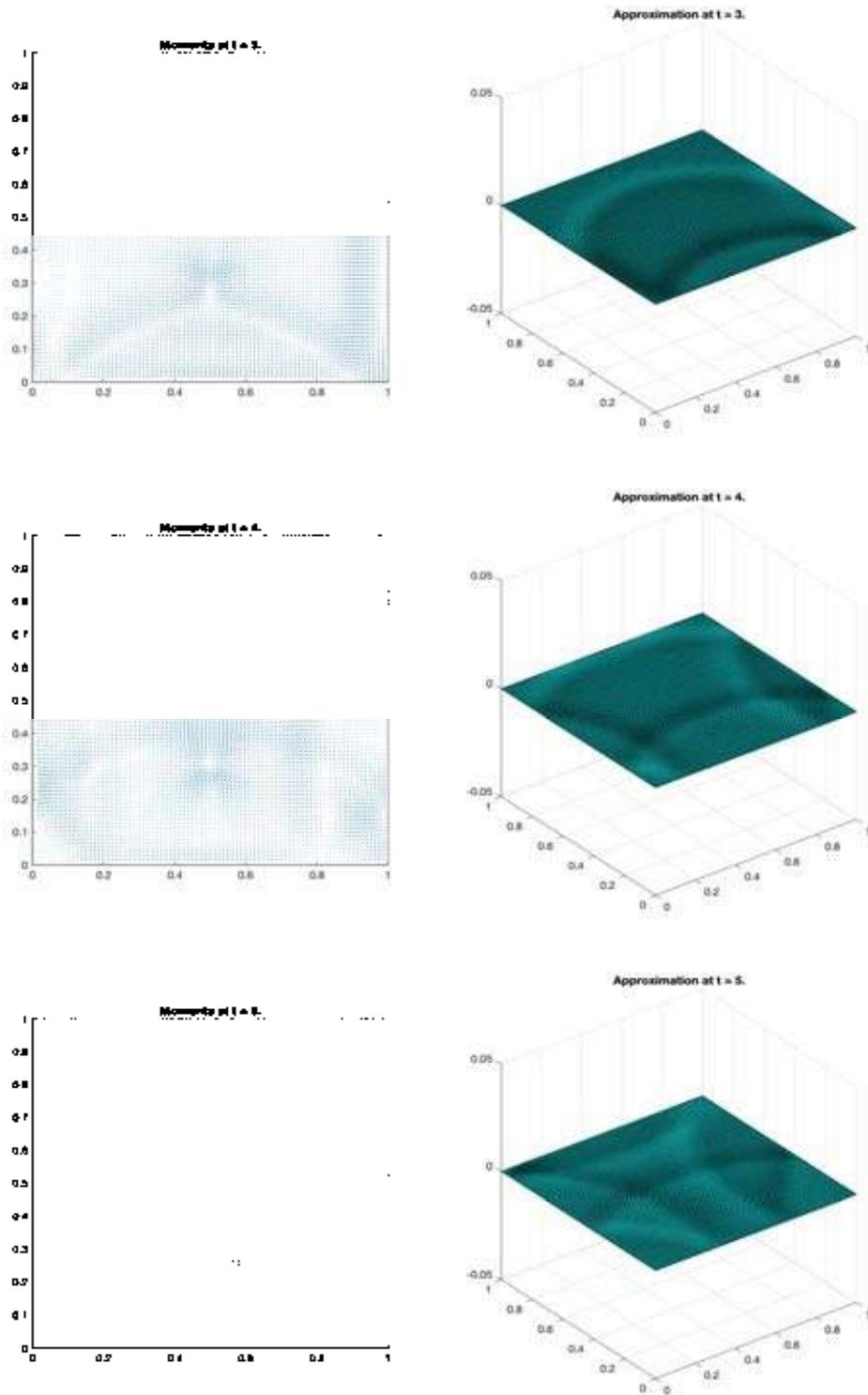


Figura 5.48: Aproximación de la forma no conservativa de las ecuaciones de aguas someras para la región CUAD con 81×81 nodos en $t = 3, 4, 5$.

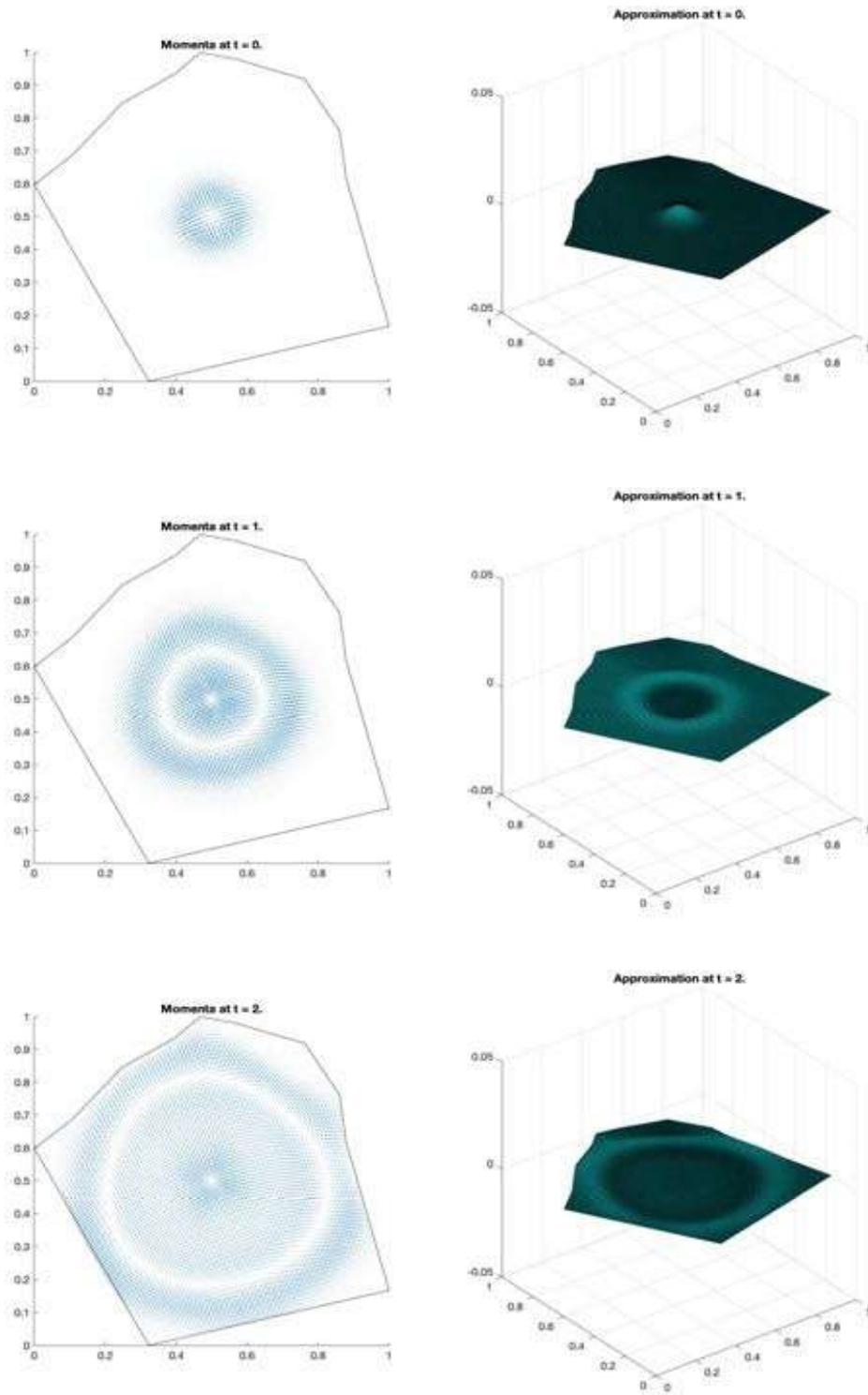


Figura 5.49: Aproximación de la forma no conservativa de las ecuaciones de aguas someras para la región CAB con 81×81 nodos en $t = 0, 1, 2$.

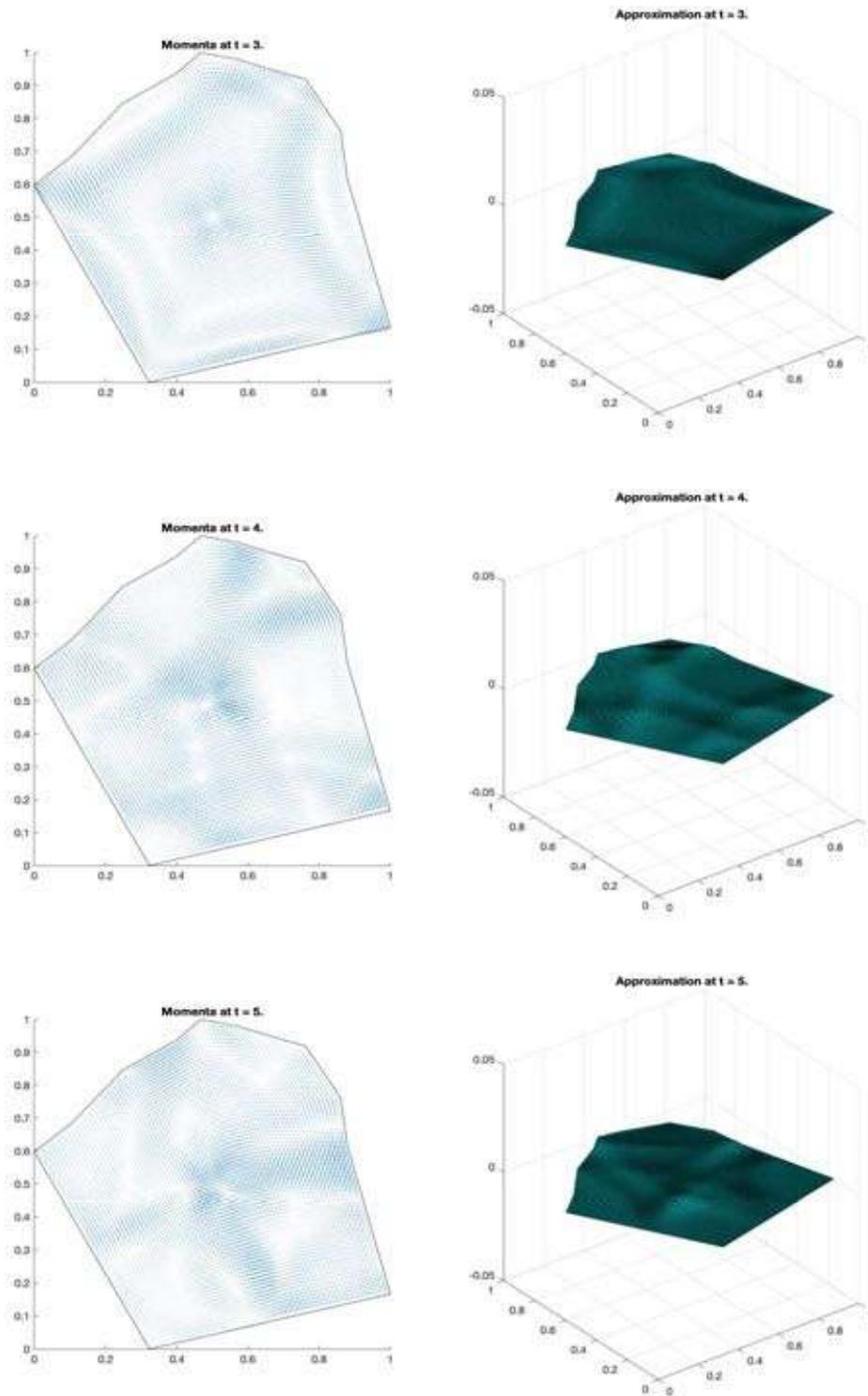


Figura 5.50: Aproximación de la forma no conservativa de las ecuaciones de aguas someras para la región CAB con 81×81 nodos en $t = 3, 4, 5$.

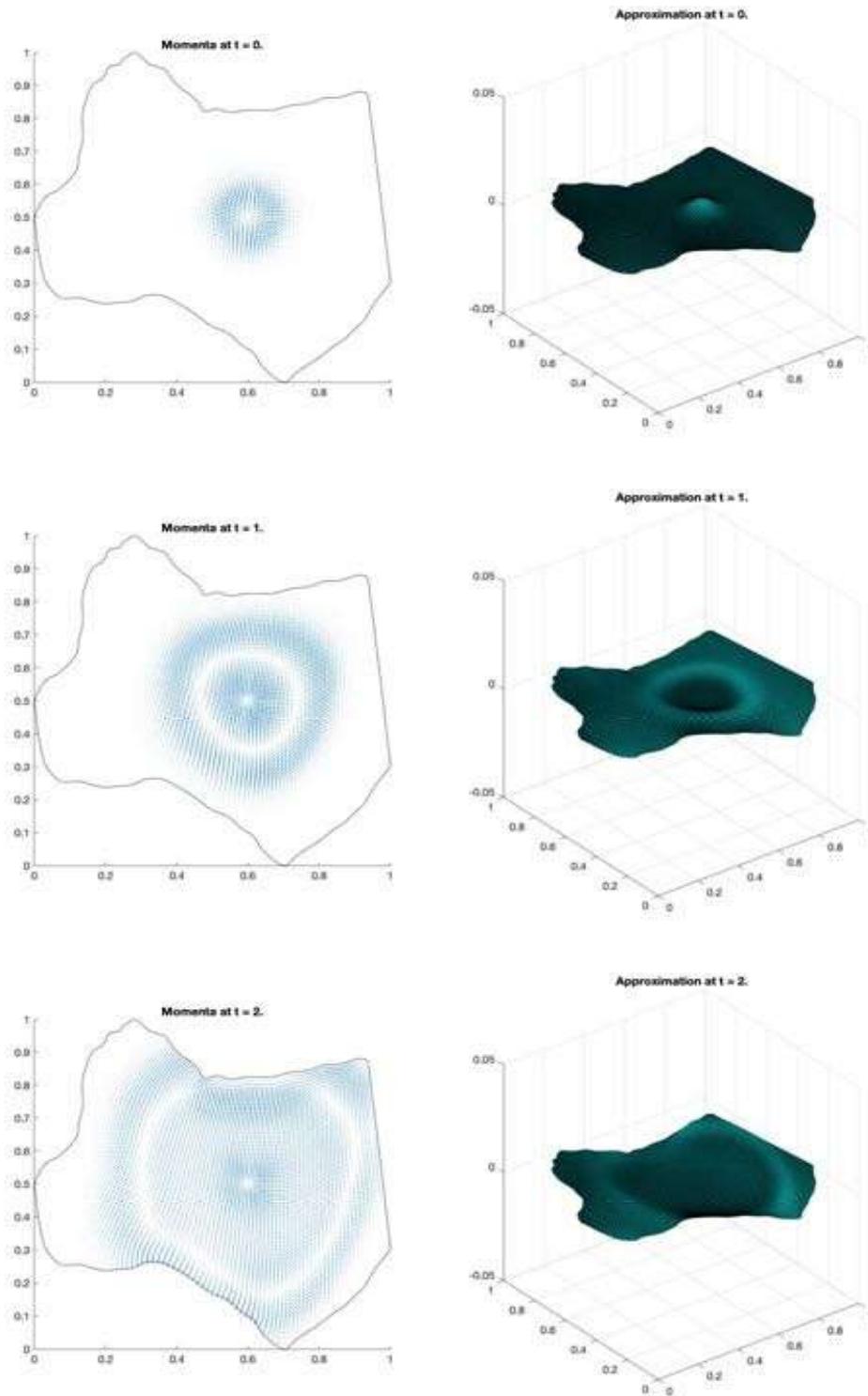


Figura 5.51: Aproximación de la forma no conservativa de las ecuaciones de aguas someras para la región CUIT con 81×81 nodos en $t = 0, 1, 2$.

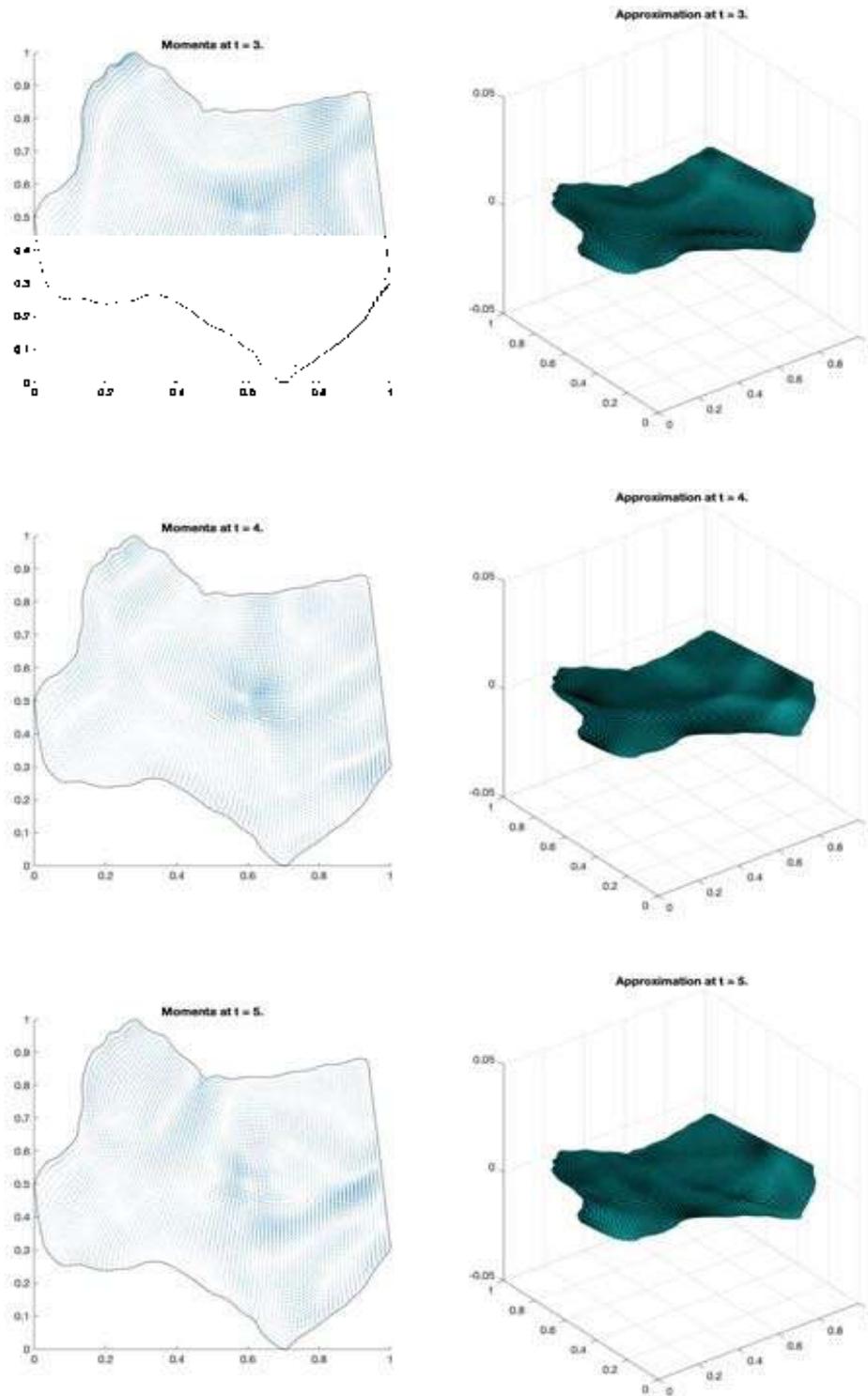


Figura 5.52: Aproximación de la forma no conservativa de las ecuaciones de aguas someras para la región CUIT con 81×81 nodos en $t = 3, 4, 5$.

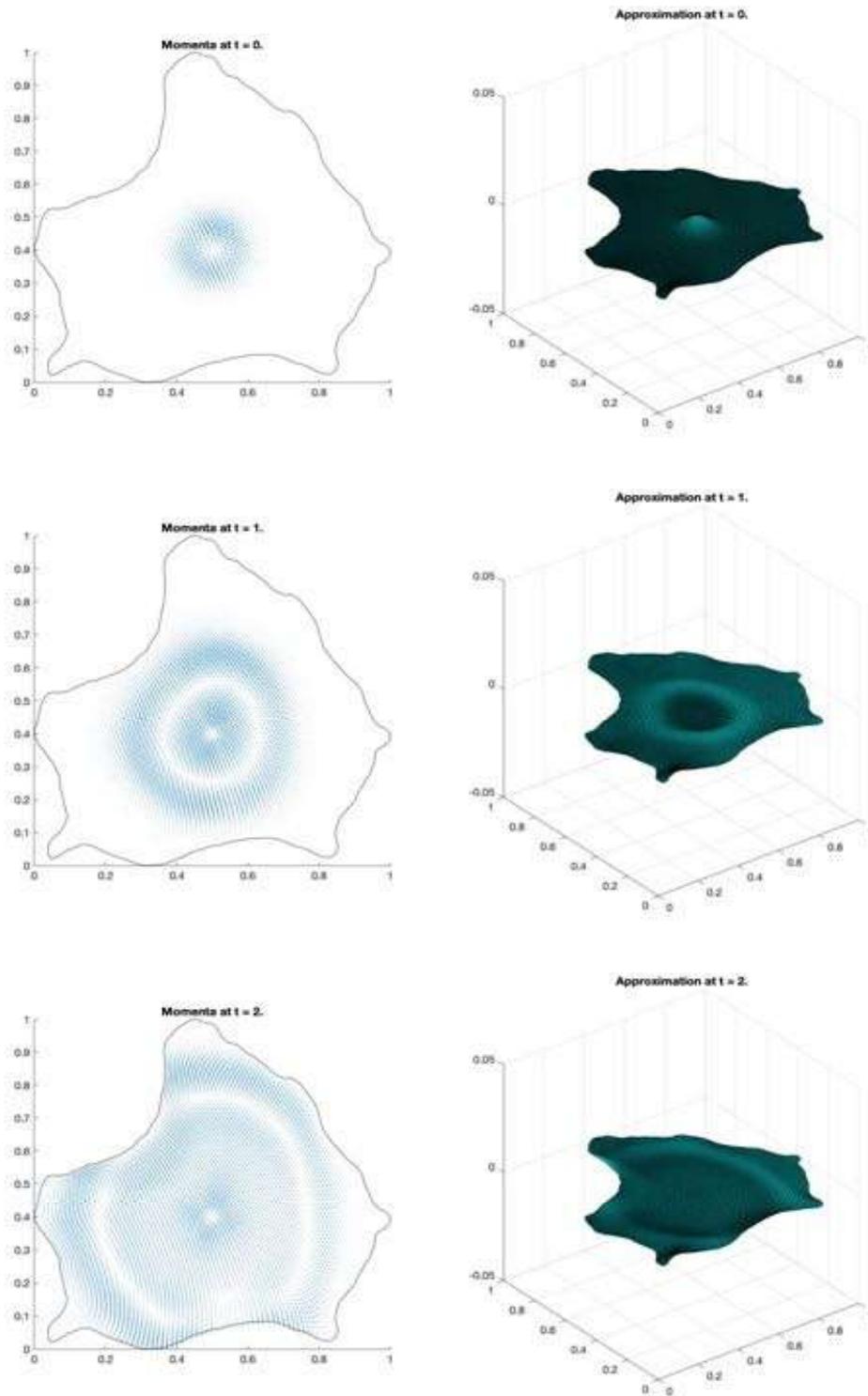


Figura 5.53: Aproximación de la forma no conservativa de las ecuaciones de aguas someras para la región ZIRA con 81×81 nodos en $t = 0, 1, 2$.

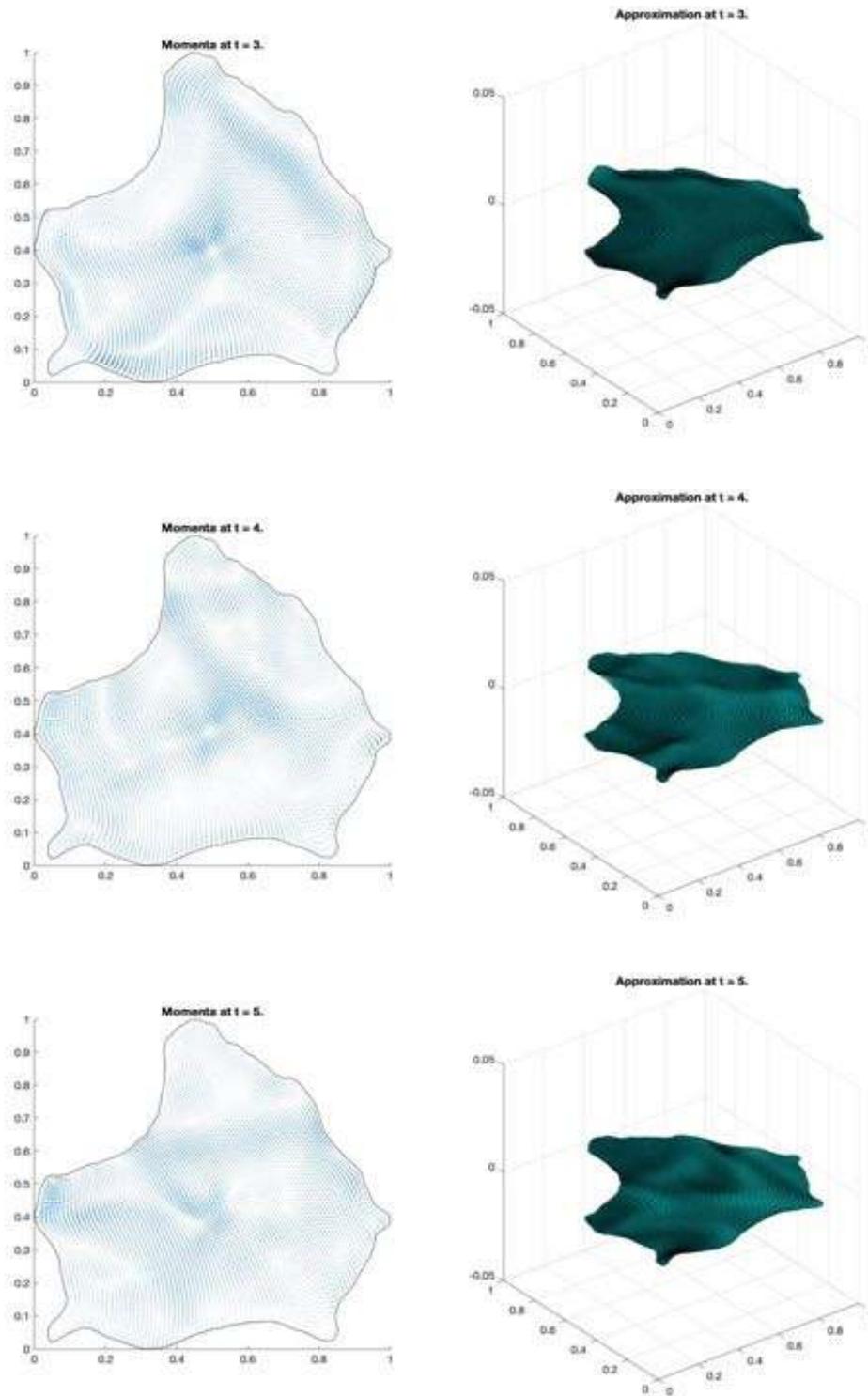


Figura 5.54: Aproximación de la forma no conservativa de las ecuaciones de aguas someras para la región ZIRA con 81×81 nodos en $t = 3, 4, 5$.

5.1.5. Transporte de Contaminantes

El problema de transporte de contaminantes se divide en dos partes:

1. Primeramente, se simula la caída de una gota de contaminante en un cuerpo de agua endorreico. Con esta condición inicial se genera un perfil de las velocidades en el agua, haciendo uso del esquema híbrido para la solución numérica de las ecuaciones de aguas someras, presentado anteriormente.
2. Posteriormente, utilizando el perfil de velocidades y comportamiento del agua calculado, se resuelve un problema de advección-difusión con los datos obtenidos en el paso anterior.

Tomando en cuenta lo anterior, se realizaron pruebas numéricas similares a las presentadas en la sección anterior. La condición inicial tomada, tanto para la cantidad de contaminante, como para la variable conservativa que representa el tirante, q , fue seleccionada como la caída de una gota de contaminante en el cuerpo de agua. El lugar de la caída de la gota, dependiendo de la región, se seleccionó de la siguiente manera:

- CUAD: caída en (0.5, 0.3).
- CAB: caída en (0.5, 0.5).
- CUIT: caída en (0.6, 0.5).
- ZIRA caída en (0.5, 0.4).

Al igual que en el caso de las ecuaciones de aguas someras, las condiciones iniciales para las variables conservativas que representan el momento, r y s , así como las velocidades iniciales a y b , fueron fijadas como 0 para todas las regiones.

De igual manera, siguiendo la idea presentada en las ecuaciones de aguas someras, el intervalo temporal ($0s, 5s$) se dividió en 5, 000, 30, 000 y 50, 000 pasos, para las mallas de 21×21 , 41×41 y 81×81 nodos, respectivamente.

En este caso, en un tiempo k la cantidad de contaminante en la región puede calcularse como

$$G_u^{(k)} = \int_{\Omega} \left(u^{(k)} \right) dx dy,$$

la cual, nuevamente, se aproximó utilizando una cuadratura numérica.

Las tablas (5.16) a (5.18), así como las tablas (5.19) a (5.21), muestran los resultados obtenidos al calcular la cantidad total de contaminante sobre cada región, para la forma conservativa y no conservativa, respectivamente, con las diferentes discretizaciones espaciales. Gráficas realizadas utilizando los cálculos en todos los niveles de tiempo pueden encontrarse en Figuras 5.55 a 5.60. Para todas las regiones, utilizando las discretizaciones con 81×81 nodos, se presentan en las Figuras 5.61 a 5.72 (para el esquema conservativo) y en las Figuras 5.73 a 5.84 (para el esquema no conservativo), las soluciones numéricas en diferentes puntos del tiempo de la siguiente manera:

- La gráfica (a) muestra el comportamiento de las velocidades dentro del cuerpo de agua.
- La gráfica (b) muestra la forma como se comporta la masa total de agua y contaminante dentro de la región.
- La gráfica (c) muestra el comportamiento de los contaminantes manteniendo siempre la misma escala.
- La gráfica (d) muestra el comportamiento de los contaminantes cambiando de escala para facilitar su visibilidad.

En el Apéndice D pueden encontrarse las direcciones electrónicas a videos que muestran la evolución de cada una de las pruebas realizadas.

t	CUAD	CAB	CUIT	ZIRA
1.0	$1.8126E - 03$	$1.1871E - 03$	$1.1369E - 03$	$1.1077E - 03$
2.0	$1.8114E - 03$	$1.1848E - 03$	$1.1345E - 03$	$1.1058E - 03$
3.0	$1.8101E - 03$	$1.1829E - 03$	$1.1327E - 03$	$1.1039E - 03$
4.0	$1.8091E - 03$	$1.1817E - 03$	$1.1317E - 03$	$1.1026E - 03$
5.0	$1.8082E - 03$	$1.1810E - 03$	$1.1310E - 03$	$1.1017E - 03$

Tabla 5.16: Cantidad G_u calculada para cada región con 21×21 nodos utilizando la forma conservativa de las ecuaciones.

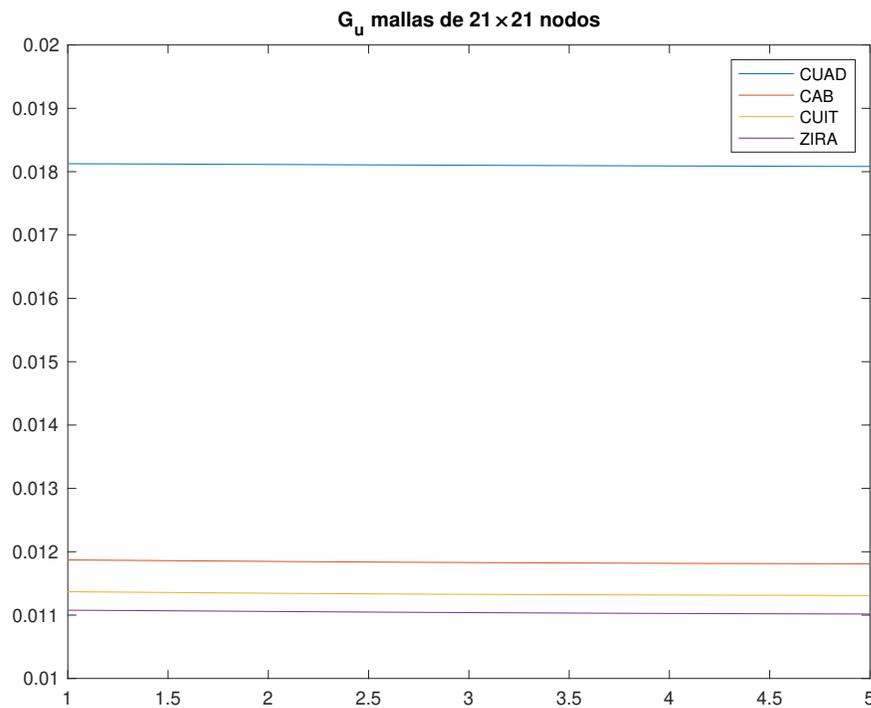


Figura 5.55: G_u calculada para cada región con 21×21 nodos utilizando la forma conservativa de las ecuaciones.

t	CUAD	CAB	CUIT	ZIRA
1.0	$1.9089E - 03$	$1.2472E - 03$	$1.2095E - 03$	$1.1663E - 03$
2.0	$1.9076E - 03$	$1.2447E - 03$	$1.2067E - 03$	$1.1630E - 03$
3.0	$1.9064E - 03$	$1.2429E - 03$	$1.2047E - 03$	$1.1611E - 03$
4.0	$1.9053E - 03$	$1.2417E - 03$	$1.2036E - 03$	$1.1602E - 03$
5.0	$1.9044E - 03$	$1.2410E - 03$	$1.2030E - 03$	$1.1597E - 03$

Tabla 5.17: Cantidad G_u calculada para cada región con 41×41 nodos utilizando la forma conservativa de las ecuaciones.

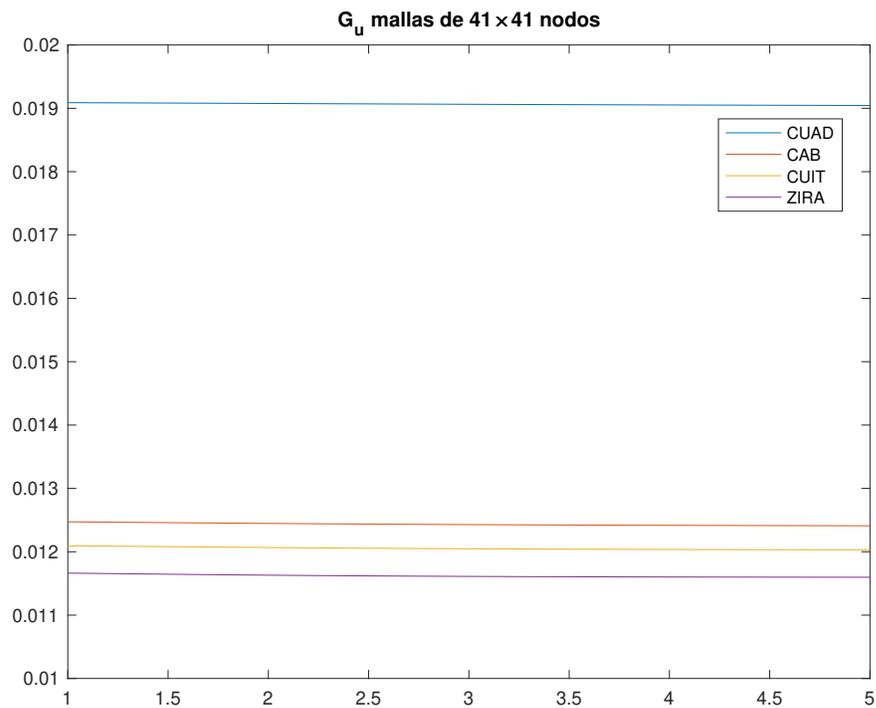


Figura 5.56: G_u calculada para cada región con 41×41 nodos utilizando la forma conservativa de las ecuaciones.

t	CUAD	CAB	CUIT	ZIRA
1.0	$1.9579E - 03$	$1.2777E - 03$	$1.2462E - 03$	$1.1961E - 03$
2.0	$1.9567E - 03$	$1.2749E - 03$	$1.2422E - 03$	$1.1926E - 03$
3.0	$1.9554E - 03$	$1.2731E - 03$	$1.2407E - 03$	$1.1912E - 03$
4.0	$1.9543E - 03$	$1.2720E - 03$	$1.2403E - 03$	$1.1907E - 03$
5.0	$1.9534E - 03$	$1.2714E - 03$	$1.2403E - 03$	$1.1906E - 03$

Tabla 5.18: Cantidad G_u calculada para cada región con 81×81 nodos utilizando la forma conservativa de las ecuaciones.

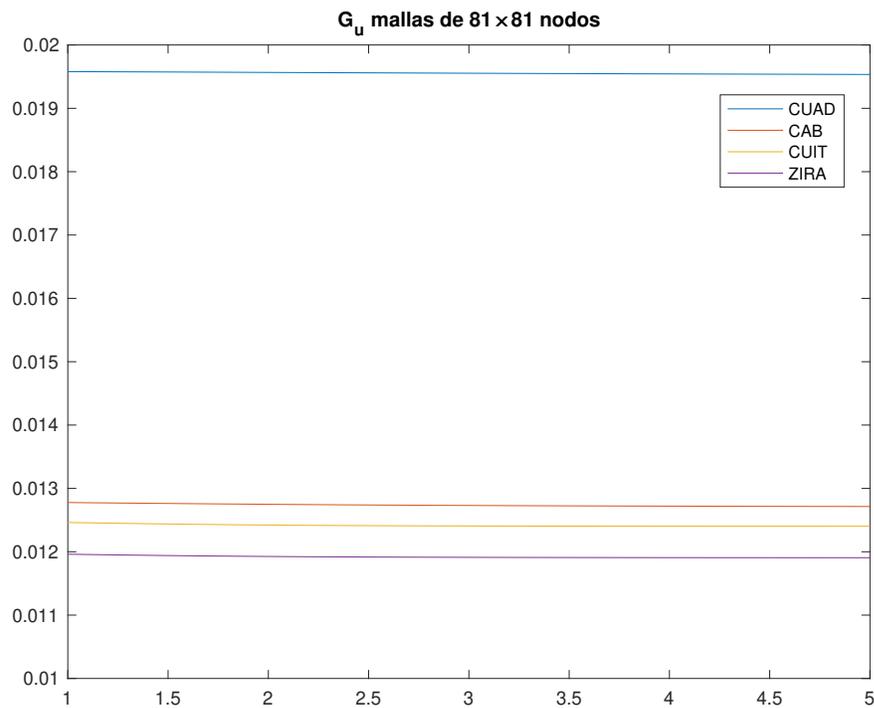


Figura 5.57: G_u calculada para cada región con 81×81 nodos utilizando la forma conservativa de las ecuaciones.

t	CUAD	CAB	CUIT	ZIRA
1.0	$1.8126E - 03$	$1.1871E - 03$	$1.1369E - 03$	$1.1077E - 03$
2.0	$1.8114E - 03$	$1.1848E - 03$	$1.1345E - 03$	$1.1058E - 03$
3.0	$1.8101E - 03$	$1.1829E - 03$	$1.1327E - 03$	$1.1039E - 03$
4.0	$1.8091E - 03$	$1.1817E - 03$	$1.1317E - 03$	$1.1026E - 03$
5.0	$1.8082E - 03$	$1.1810E - 03$	$1.1310E - 03$	$1.1017E - 03$

Tabla 5.19: Cantidad G_u calculada para cada región con 21×21 nodos utilizando la forma no conservativa de las ecuaciones.

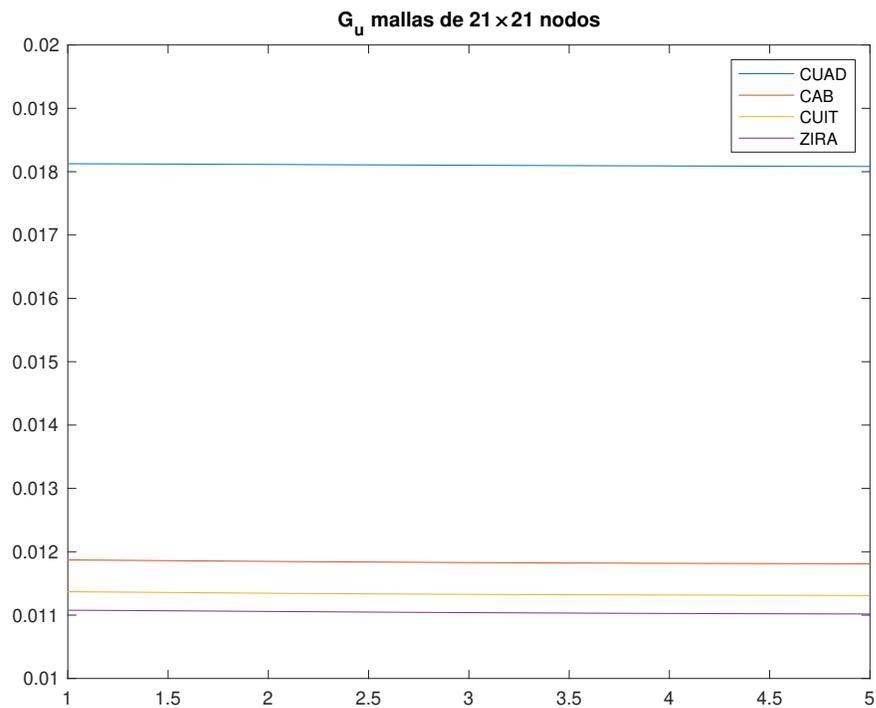


Figura 5.58: G_u calculada para cada región con 21×21 nodos utilizando la forma no conservativa de las ecuaciones.

t	CUAD	CAB	CUIT	ZIRA
1.0	$1.9089E - 03$	$1.2472E - 03$	$1.2095E - 03$	$1.1663E - 03$
2.0	$1.9076E - 03$	$1.2447E - 03$	$1.2067E - 03$	$1.1630E - 03$
3.0	$1.9064E - 03$	$1.2429E - 03$	$1.2047E - 03$	$1.1611E - 03$
4.0	$1.9053E - 03$	$1.2417E - 03$	$1.2036E - 03$	$1.1602E - 03$
5.0	$1.9044E - 03$	$1.2410E - 03$	$1.2030E - 03$	$1.1598E - 03$

Tabla 5.20: Cantidad G_u calculada para cada región con 41×41 nodos utilizando la forma no conservativa de las ecuaciones.

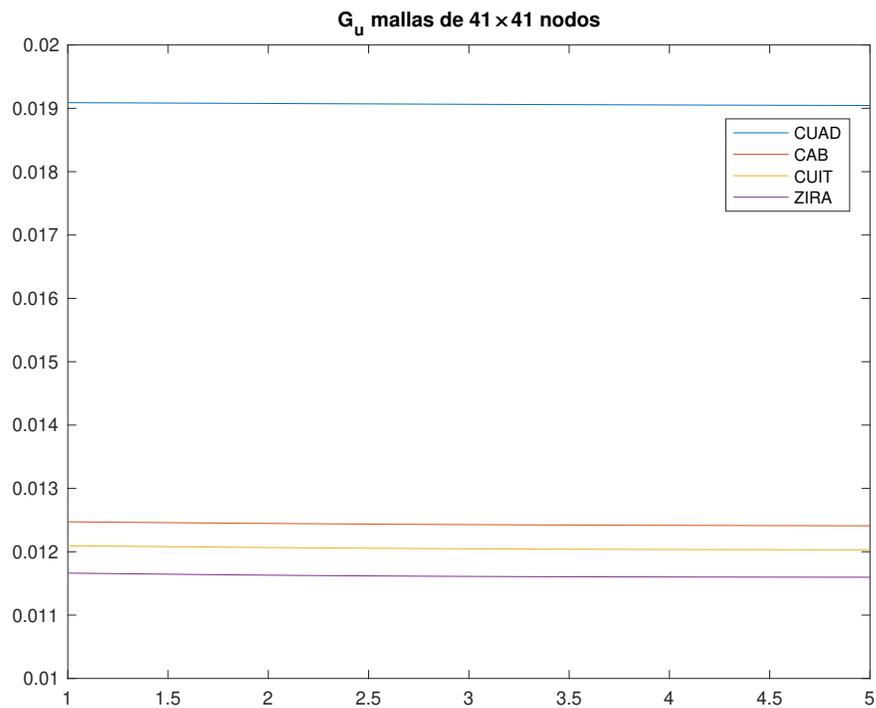


Figura 5.59: G_u calculada para cada región con 41×41 nodos utilizando la forma no conservativa de las ecuaciones.

t	CUAD	CAB	CUIT	ZIRA
1.0	$1.9579E - 03$	$1.2777E - 03$	$1.2462E - 03$	$1.1961E - 03$
2.0	$1.9567E - 03$	$1.2749E - 03$	$1.2422E - 03$	$1.1926E - 03$
3.0	$1.9554E - 03$	$1.2731E - 03$	$1.2407E - 03$	$1.1912E - 03$
4.0	$1.9543E - 03$	$1.2720E - 03$	$1.2403E - 03$	$1.1907E - 03$
5.0	$1.9534E - 03$	$1.2714E - 03$	$1.2403E - 03$	$1.1906E - 03$

Tabla 5.21: Cantidad G_u calculada para cada región con 81×81 nodos utilizando la forma no conservativa de las ecuaciones.

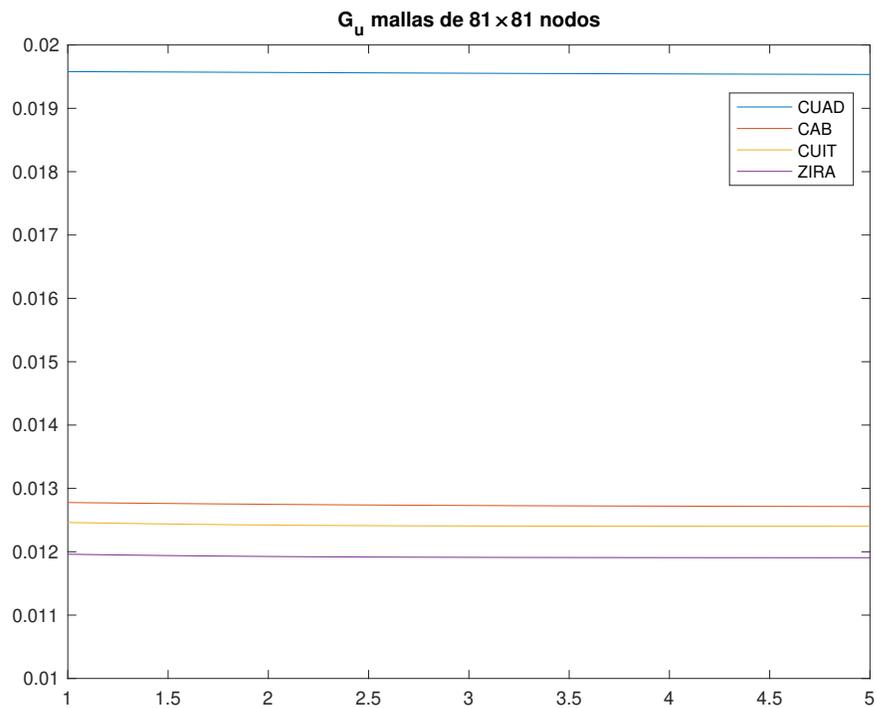


Figura 5.60: G_u calculada para cada región con 81×81 nodos utilizando la forma no conservativa de las ecuaciones.

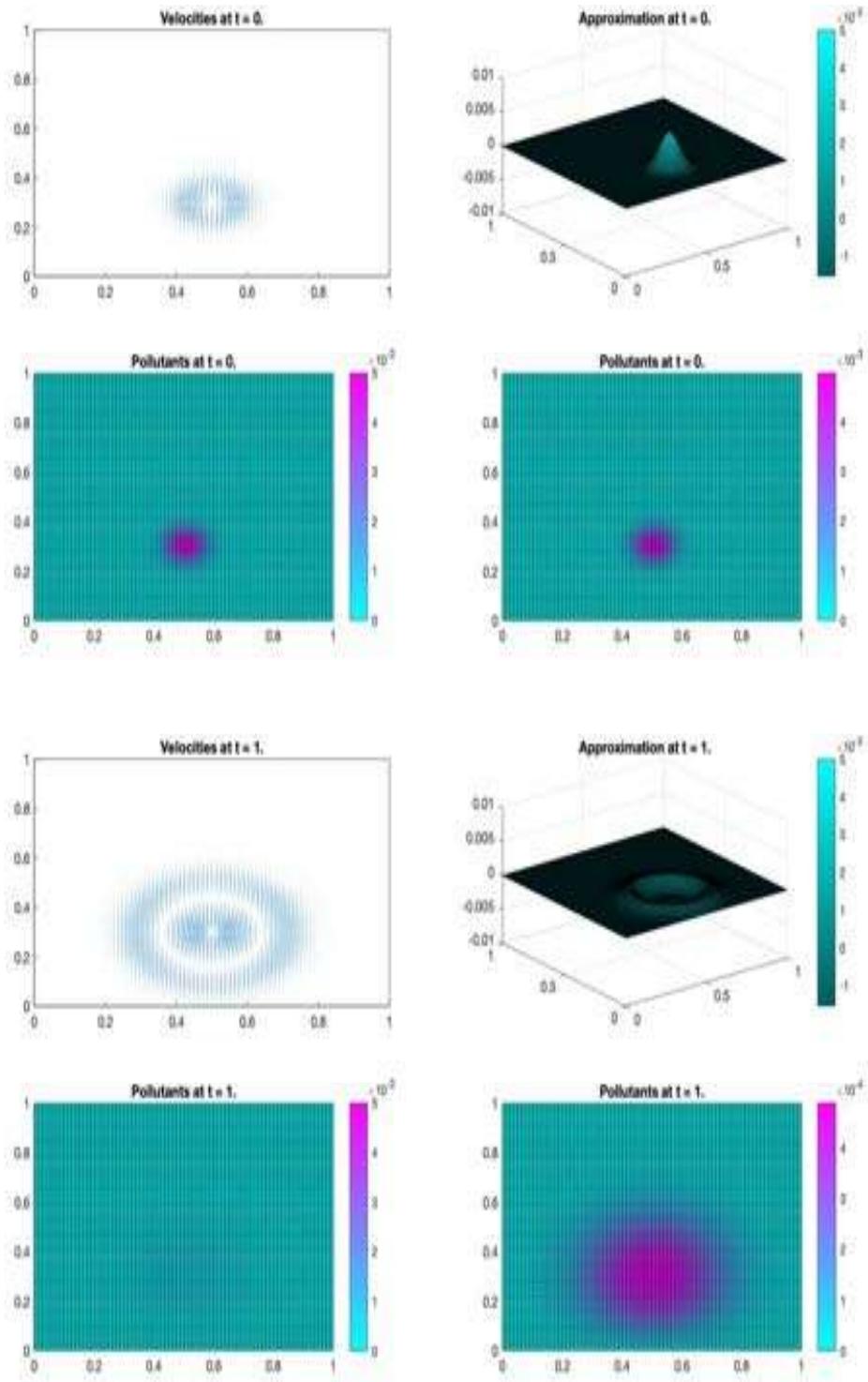


Figura 5.61: Aproximación de transporte de contaminantes usando la forma conservativa de las ecuaciones de aguas someras para la región CUAD con 81×81 nodos en $t = 0, 1$.

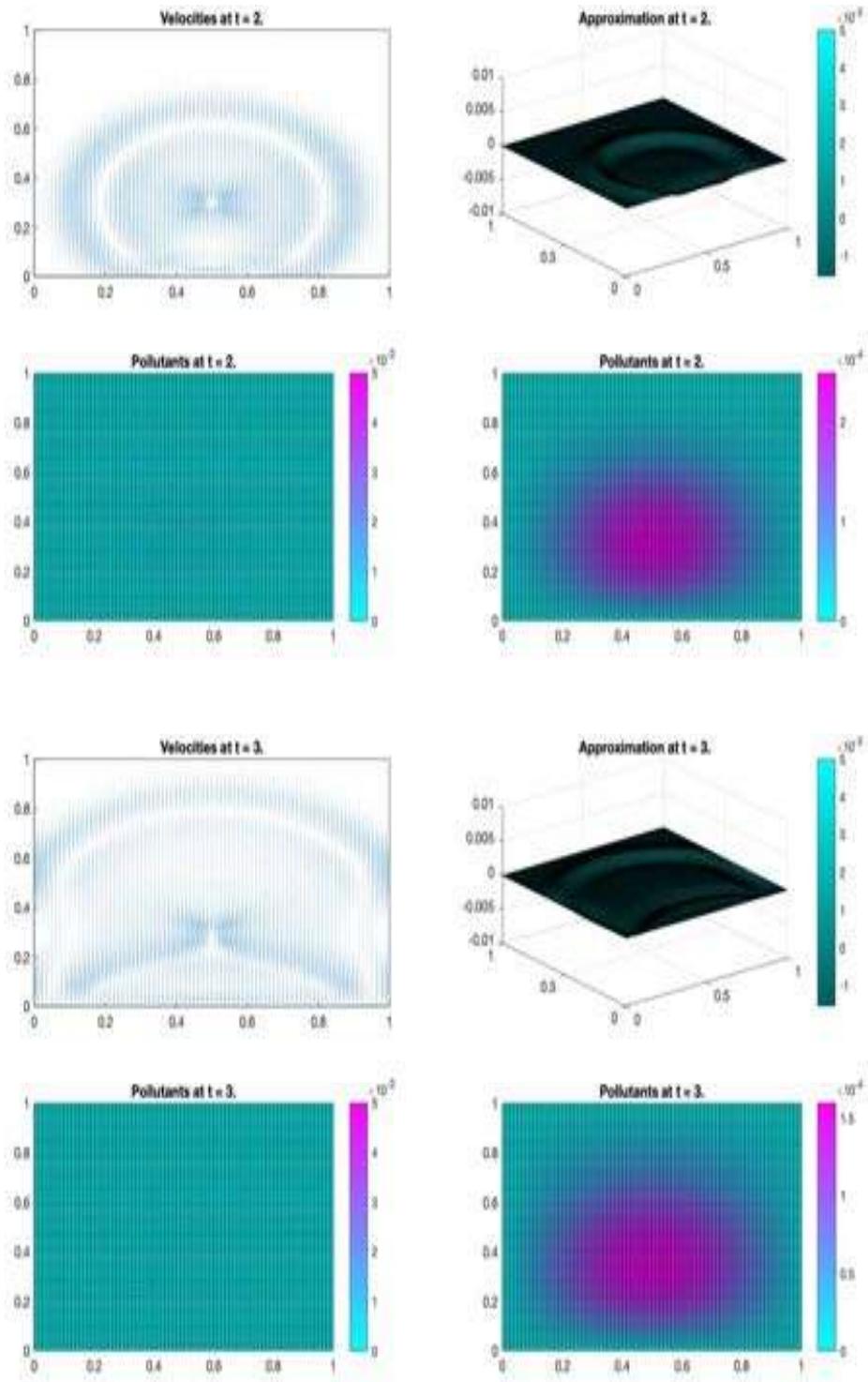


Figura 5.62: Aproximación de transporte de contaminantes usando la forma conservativa de las ecuaciones de aguas someras para la región CUAD con 81×81 nodos en $t = 2, 3$.

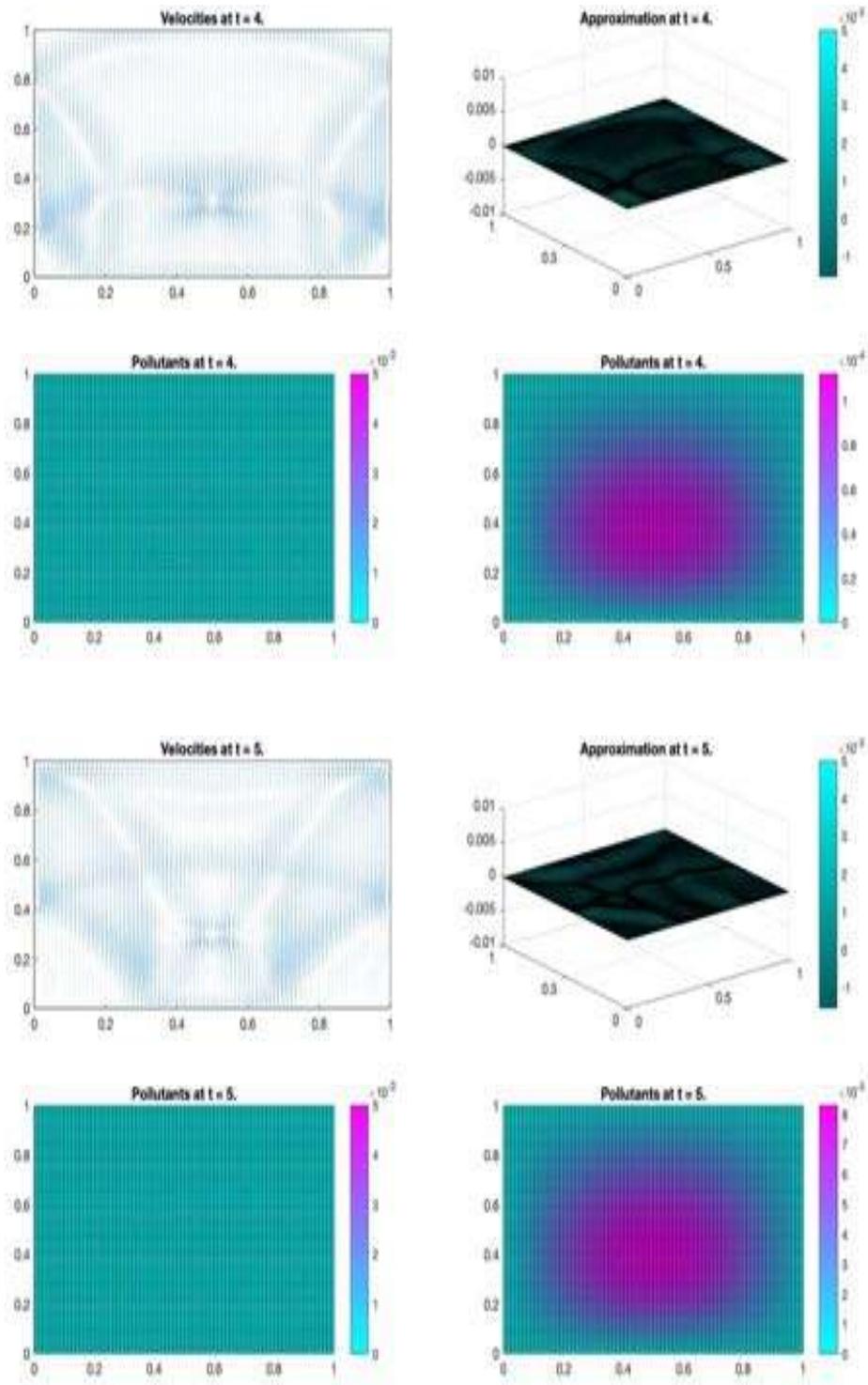


Figura 5.63: Aproximación de transporte de contaminantes usando la forma conservativa de las ecuaciones de aguas someras para la región CUAD con 81×81 nodos en $t = 4, 5$.

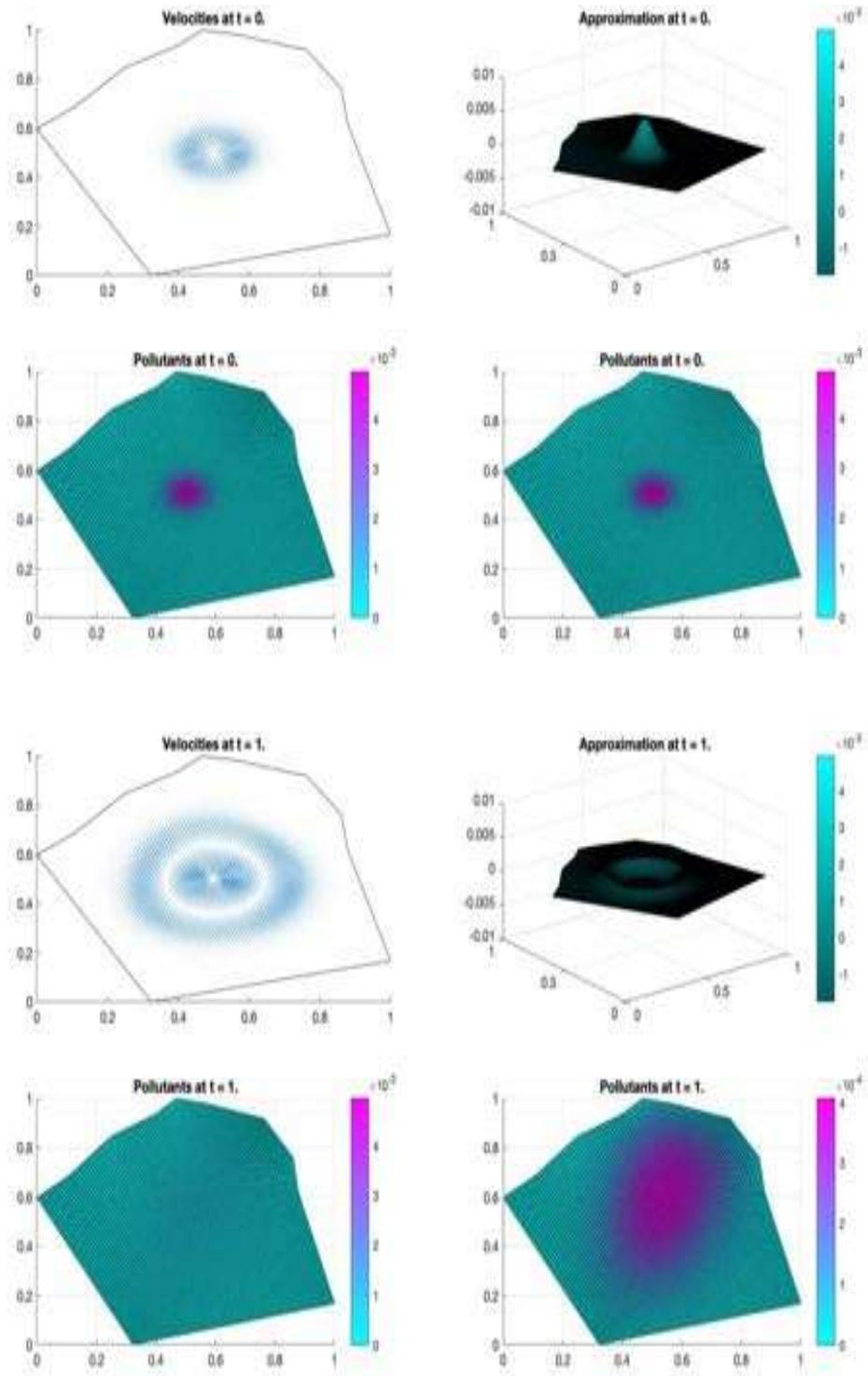


Figura 5.64: Aproximación de transporte de contaminantes usando la forma conservativa de las ecuaciones de aguas someras para la región CAB con 81×81 nodos en $t = 0, 1$.

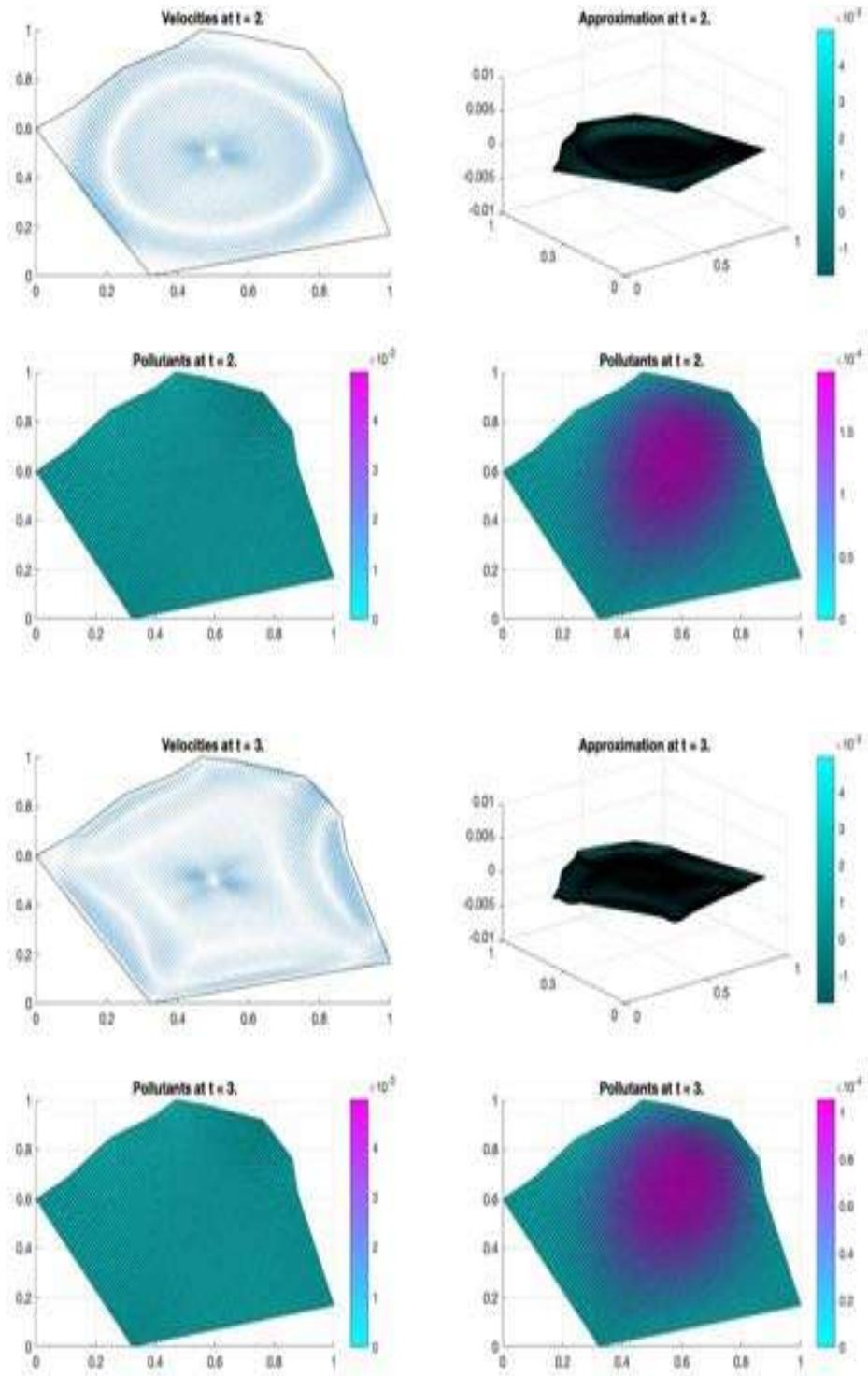


Figura 5.65: Aproximación de transporte de contaminantes usando la forma conservativa de las ecuaciones de aguas someras para la región CAB con 81×81 nodos en $t = 2, 3$.

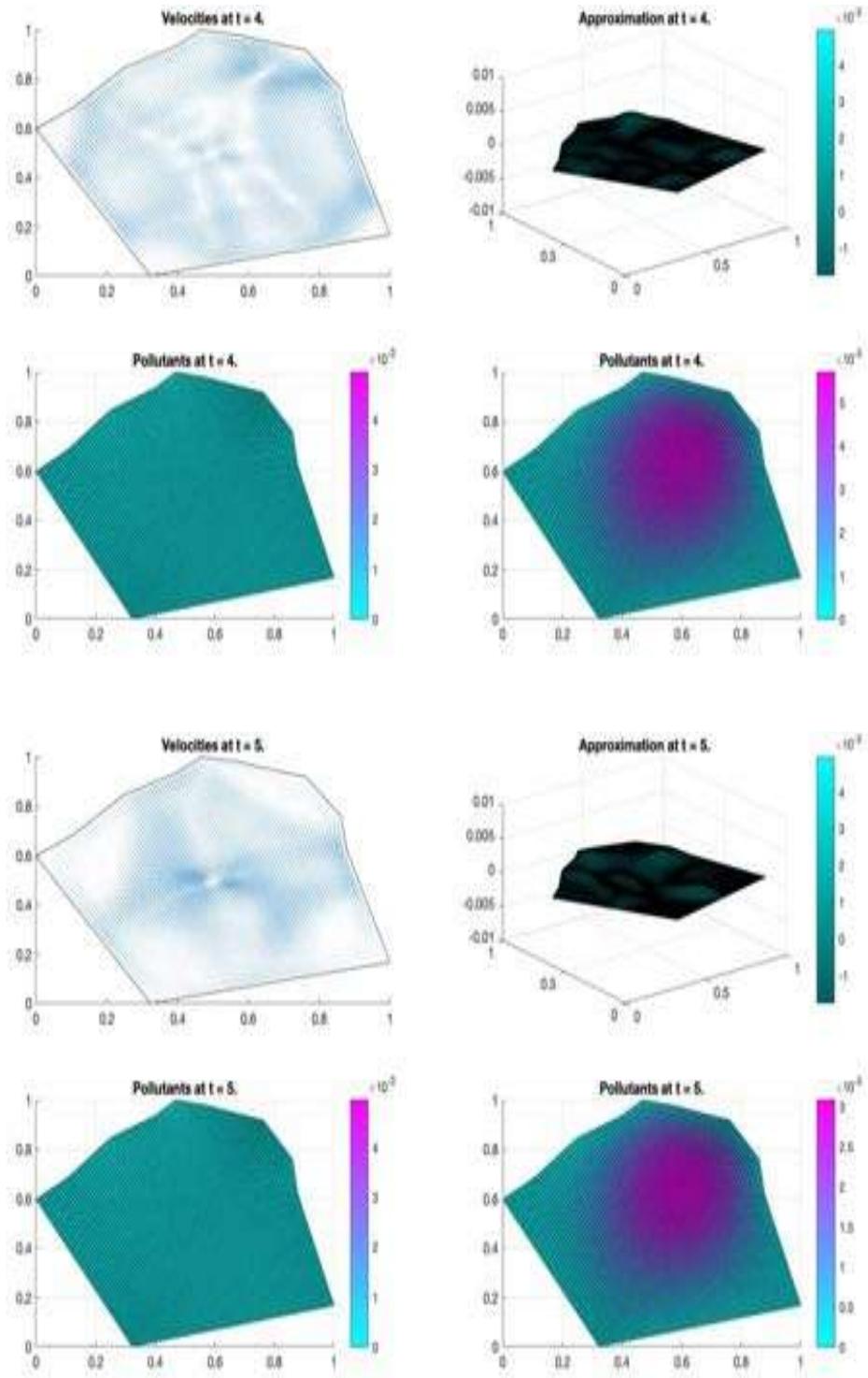


Figura 5.66: Aproximación de transporte de contaminantes usando la forma conservativa de las ecuaciones de aguas someras para la región CAB con 81×81 nodos en $t = 4, 5$.

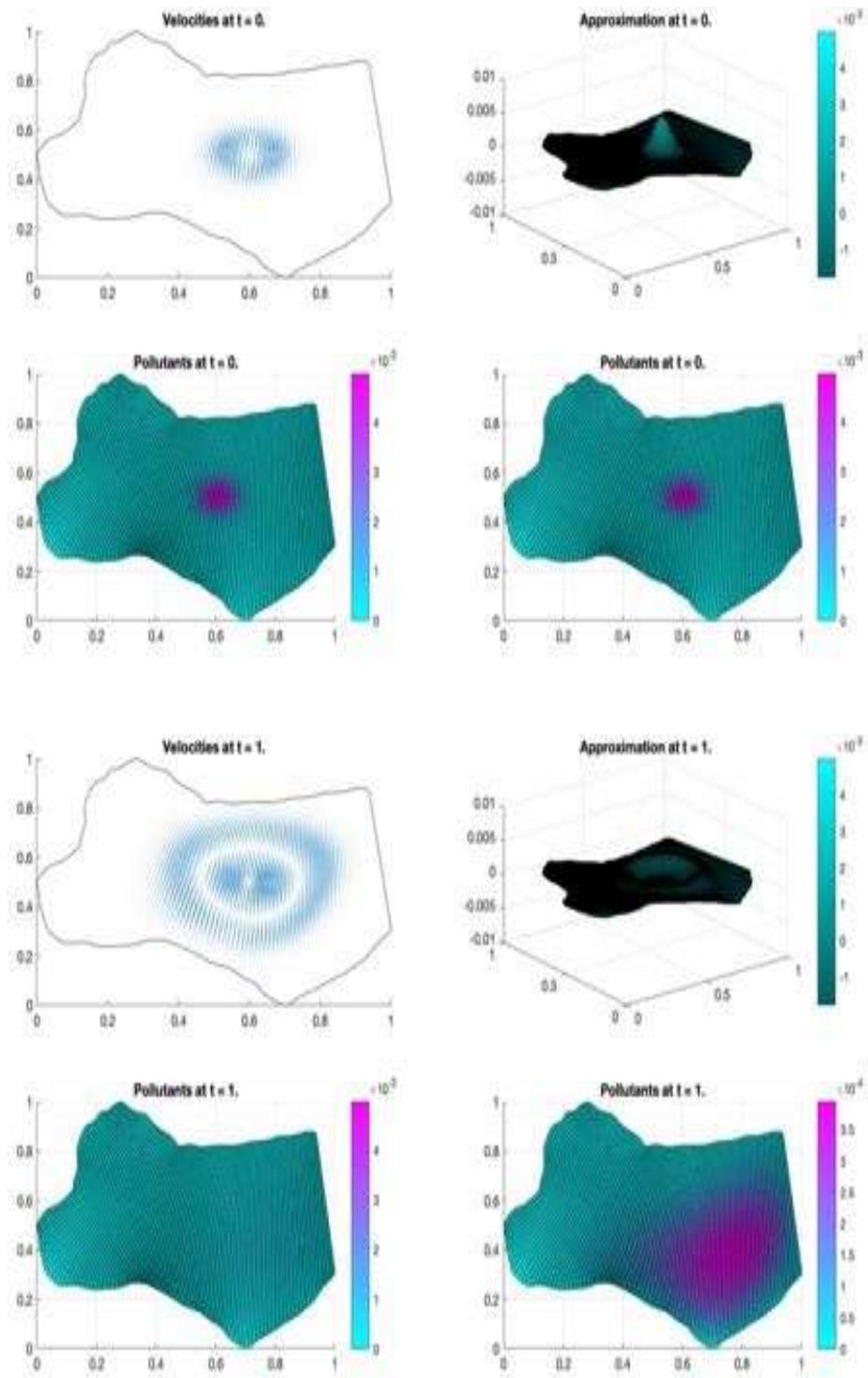


Figura 5.67: Aproximación de transporte de contaminantes usando la forma conservativa de las ecuaciones de aguas someras para la región CUIT con 81×81 nodos en $t = 0, 1$.

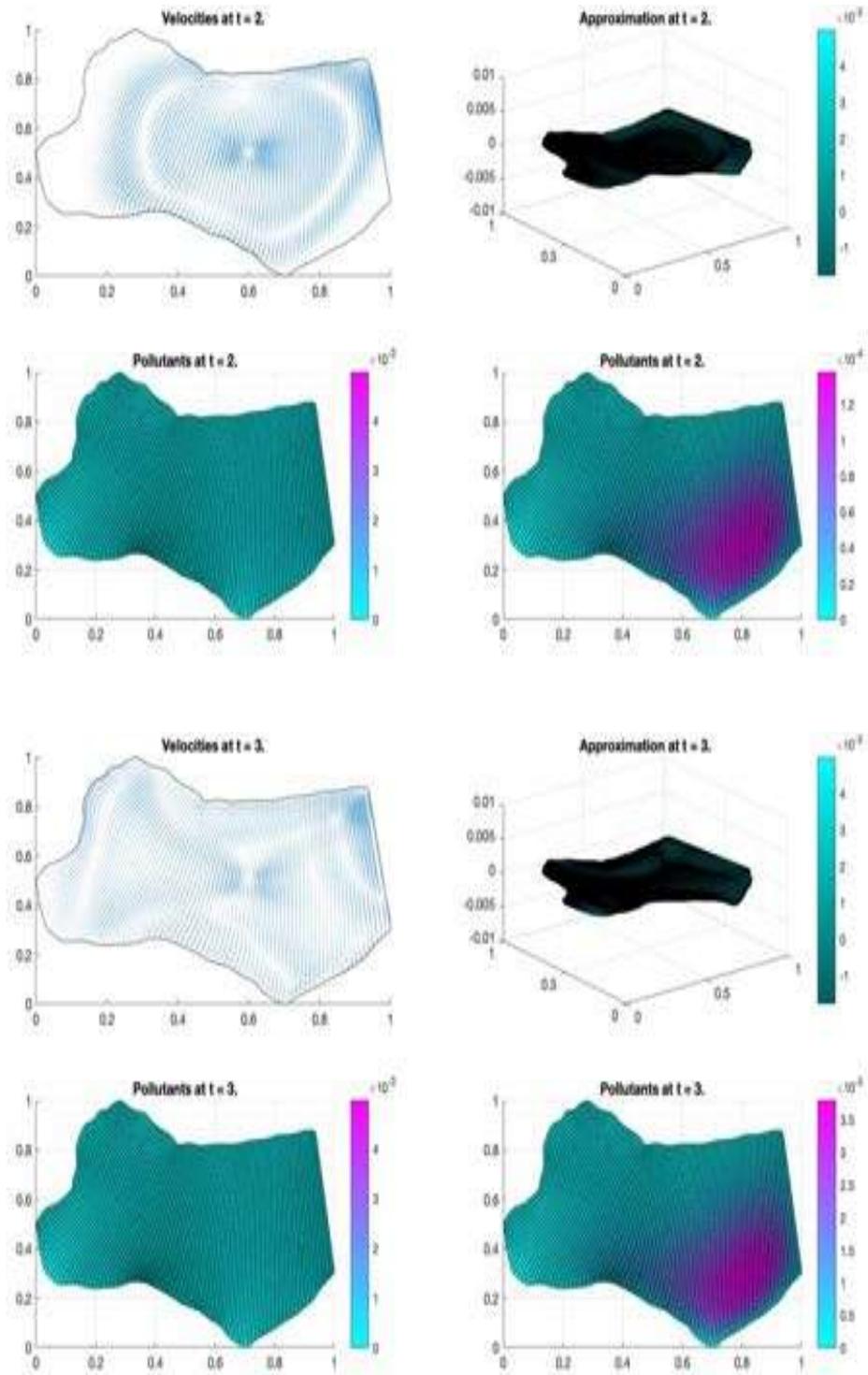


Figura 5.68: Aproximación de transporte de contaminantes usando la forma conservativa de las ecuaciones de aguas someras para la región CUIT con 81×81 nodos en $t = 2, 3$.

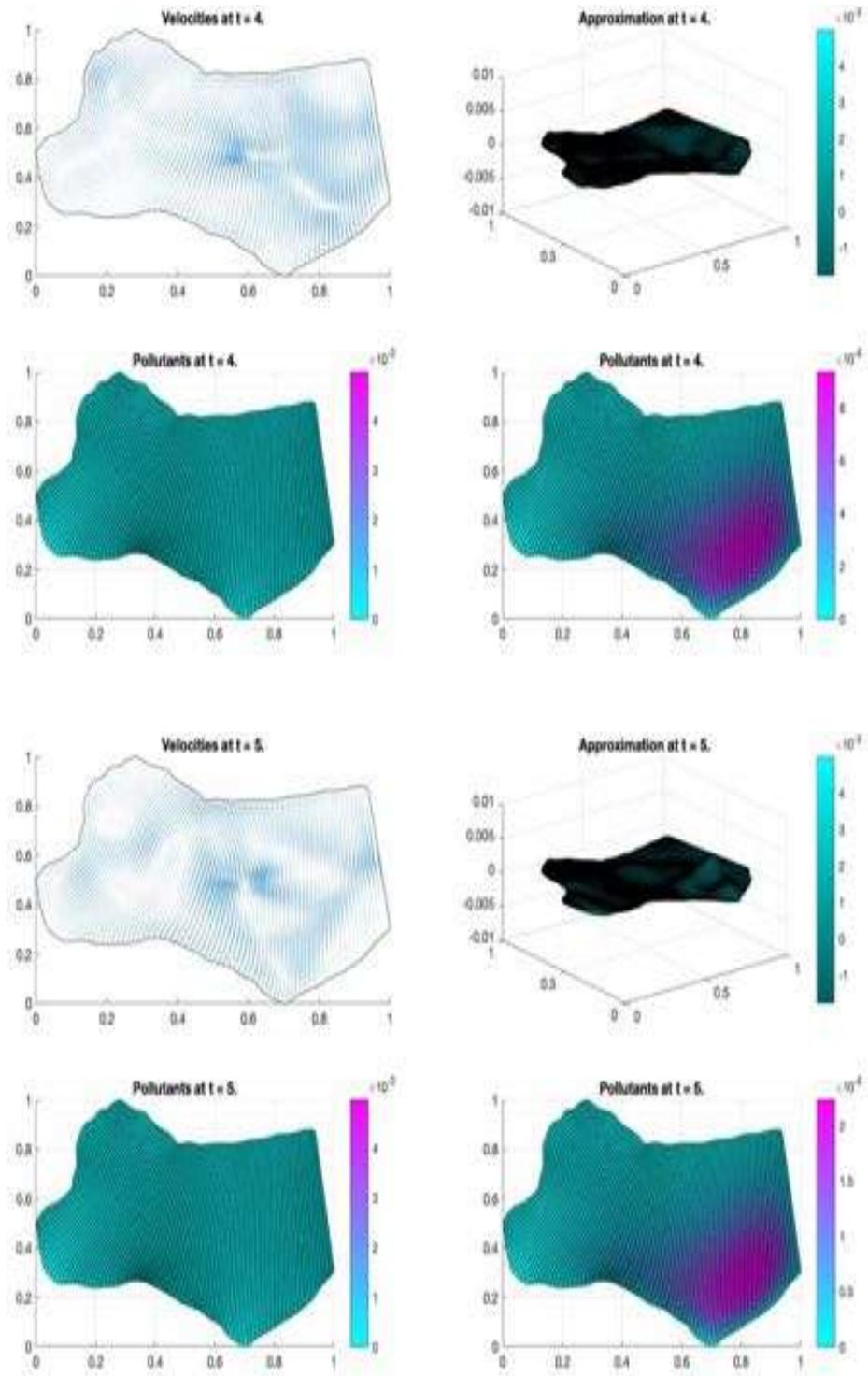


Figura 5.69: Aproximación de transporte de contaminantes usando la forma conservativa de las ecuaciones de aguas someras para la región CUIT con 81×81 nodos en $t = 4, 5$.

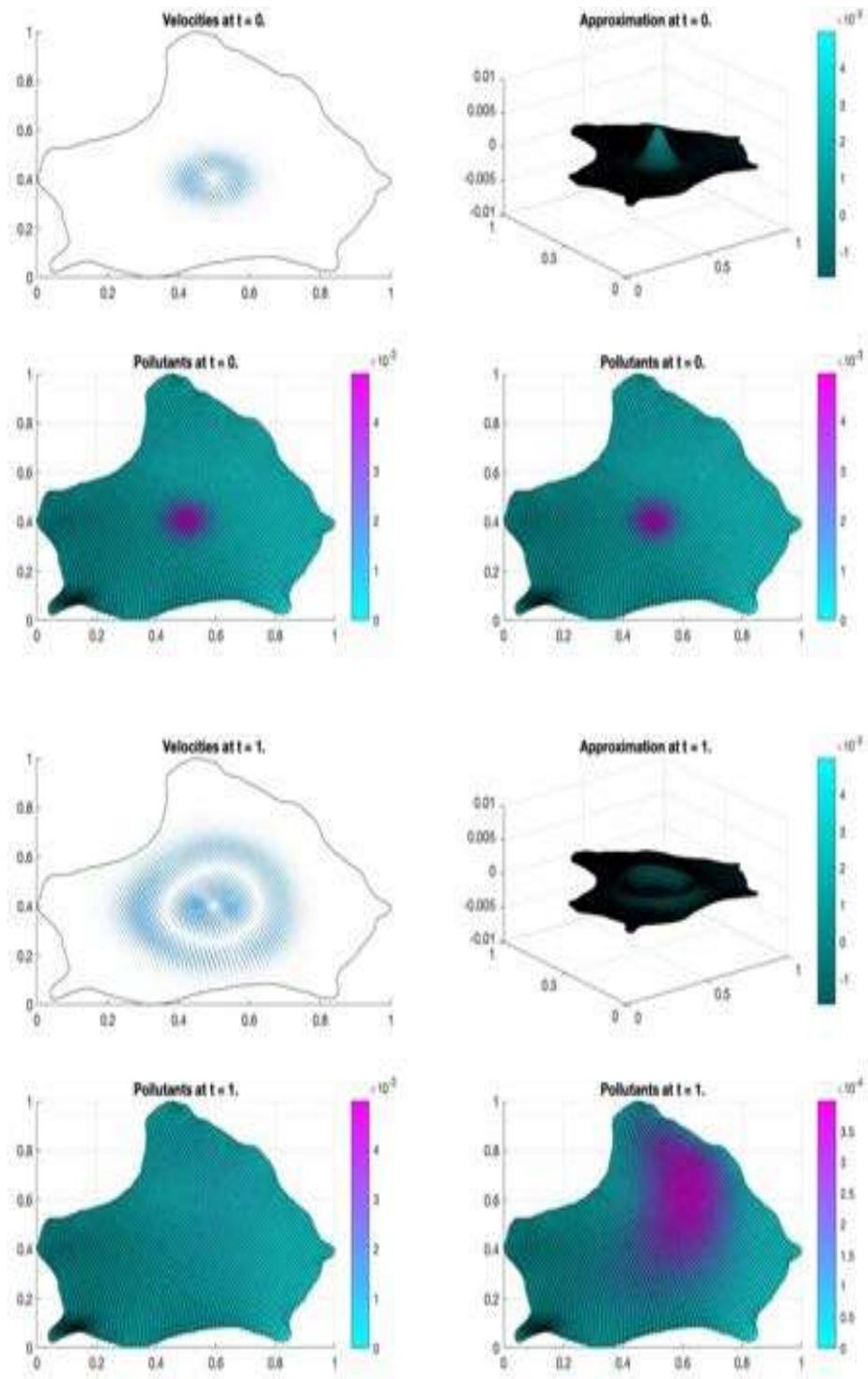


Figura 5.70: Aproximación de transporte de contaminantes usando la forma conservativa de las ecuaciones de aguas someras para la región ZIRA con 81×81 nodos en $t = 0, 1$.

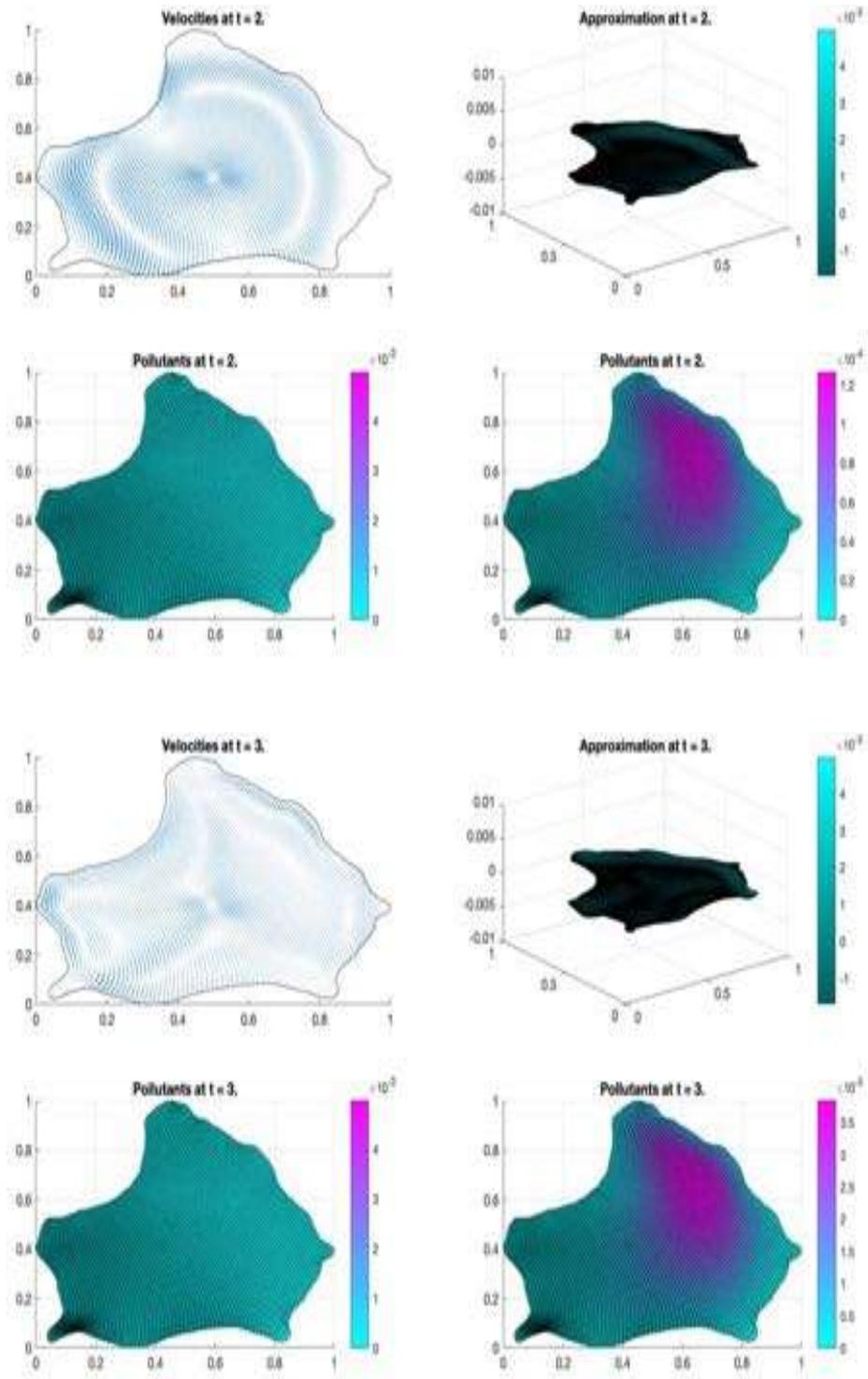


Figura 5.71: Aproximación de transporte de contaminantes usando la forma conservativa de las ecuaciones de aguas someras para la región ZIRA con 81×81 nodos en $t = 2, 3$.

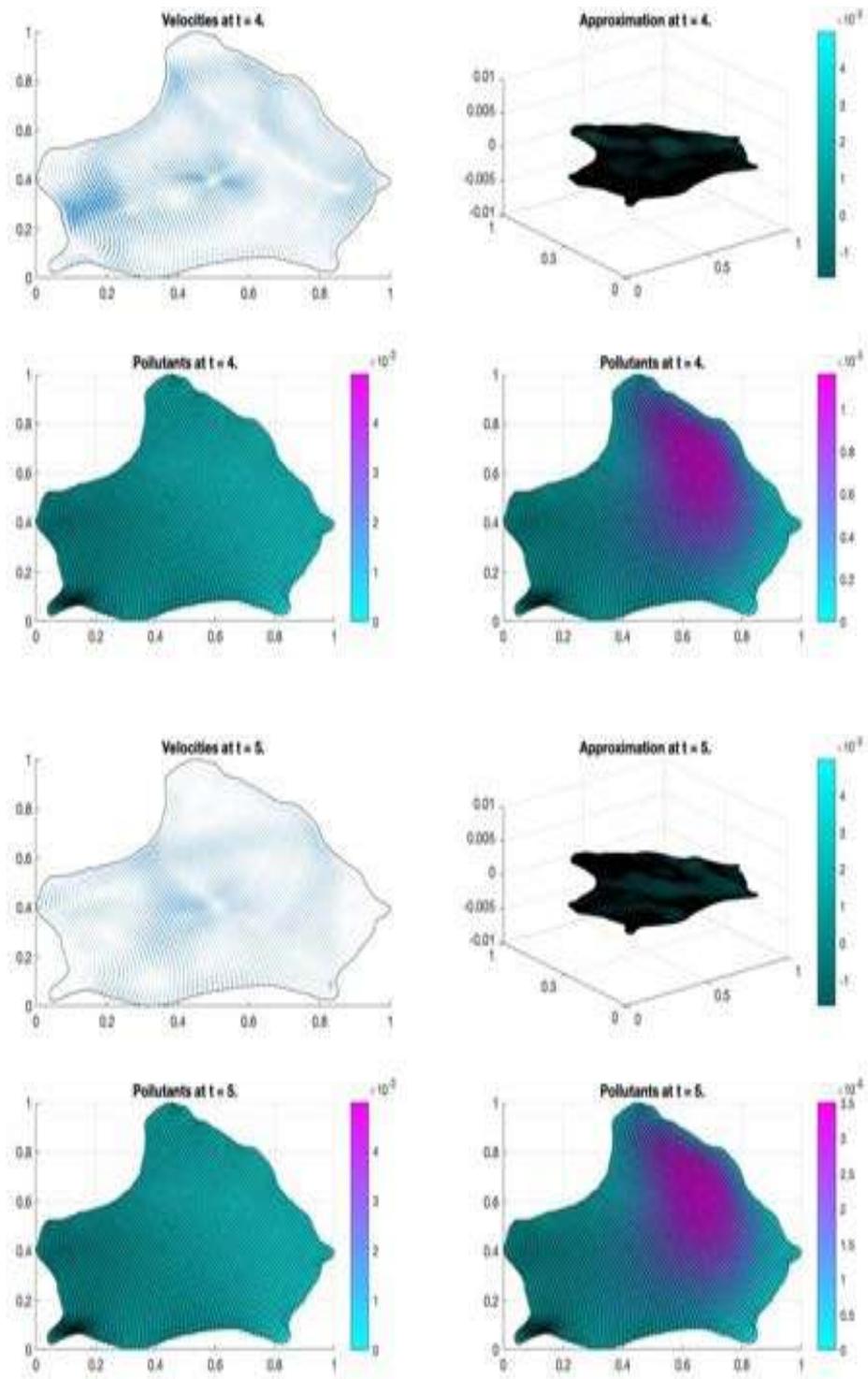


Figura 5.72: Aproximación de transporte de contaminantes usando la forma conservativa de las ecuaciones de aguas someras para la región ZIRA con 81×81 nodos en $t = 4, 5$.

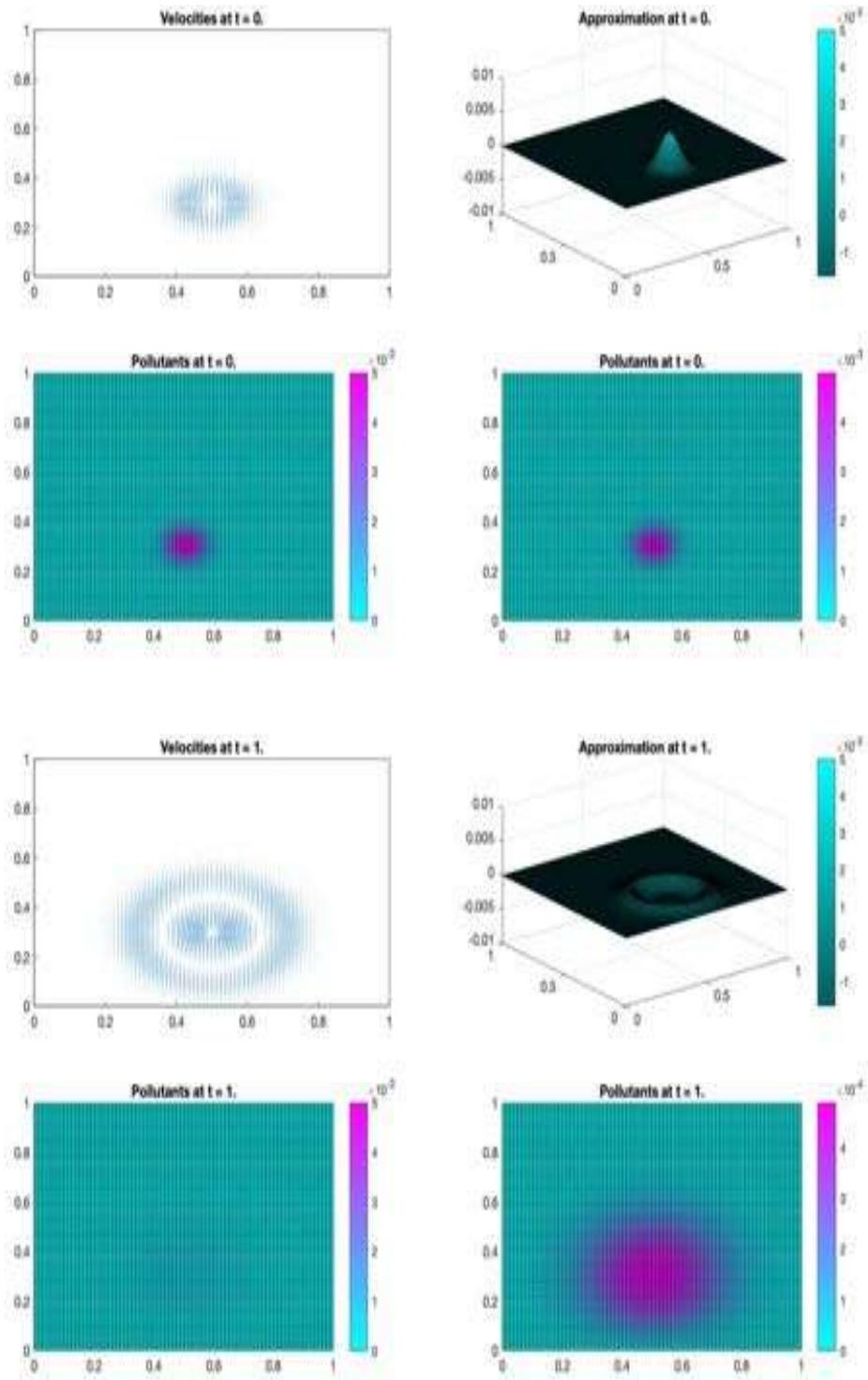


Figura 5.73: Aproximación de transporte de contaminantes usando la forma no conservativa de las ecuaciones de aguas someras para la región CUAD con 81×81 nodos en $t = 0, 1$.

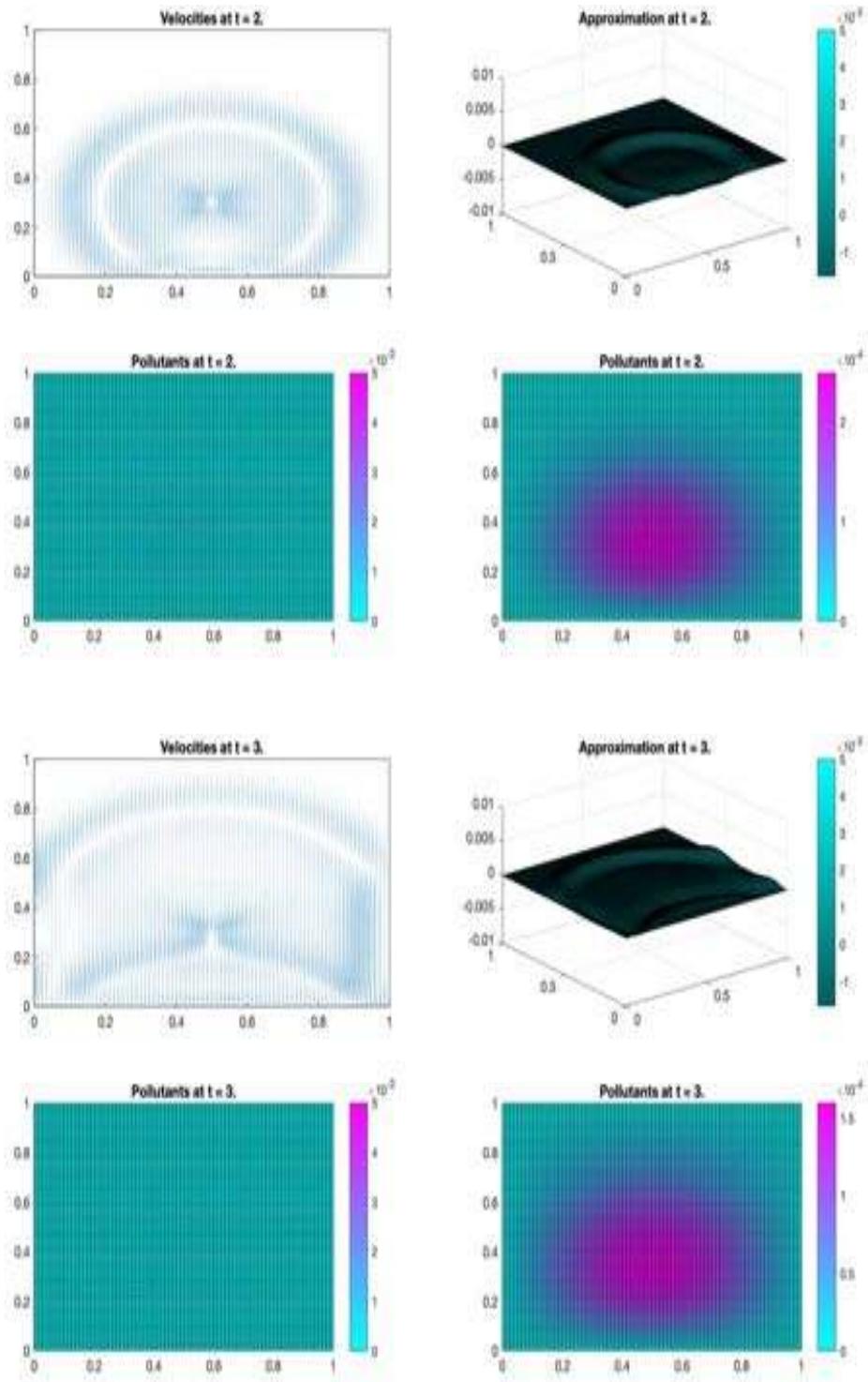


Figura 5.74: Aproximación de transporte de contaminantes usando la forma no conservativa de las ecuaciones de aguas someras para la región CUAD con 81×81 nodos en $t = 2, 3$.

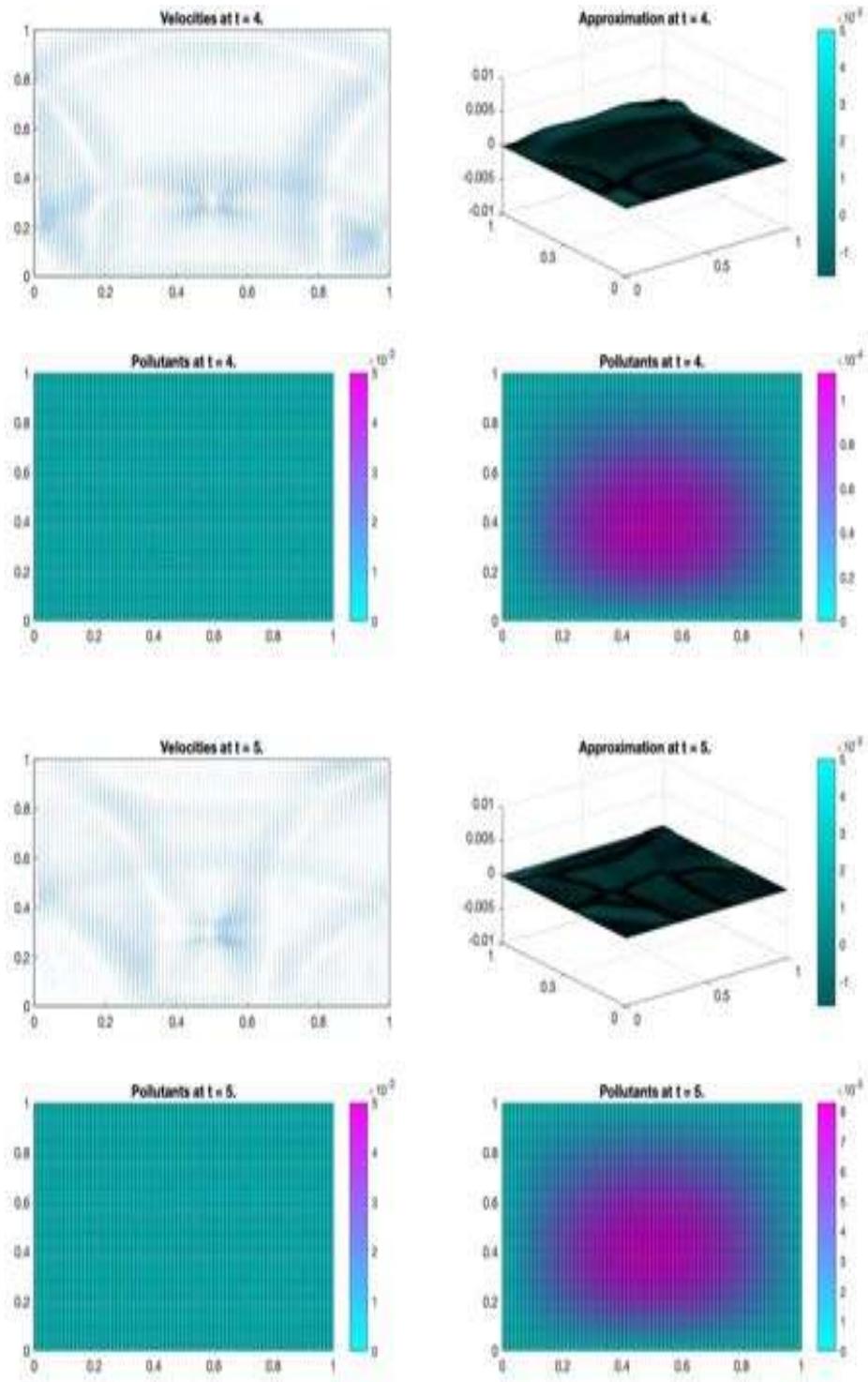


Figura 5.75: Aproximación de transporte de contaminantes usando la forma no conservativa de las ecuaciones de aguas someras para la región CUAD con 81×81 nodos en $t = 4, 5$.

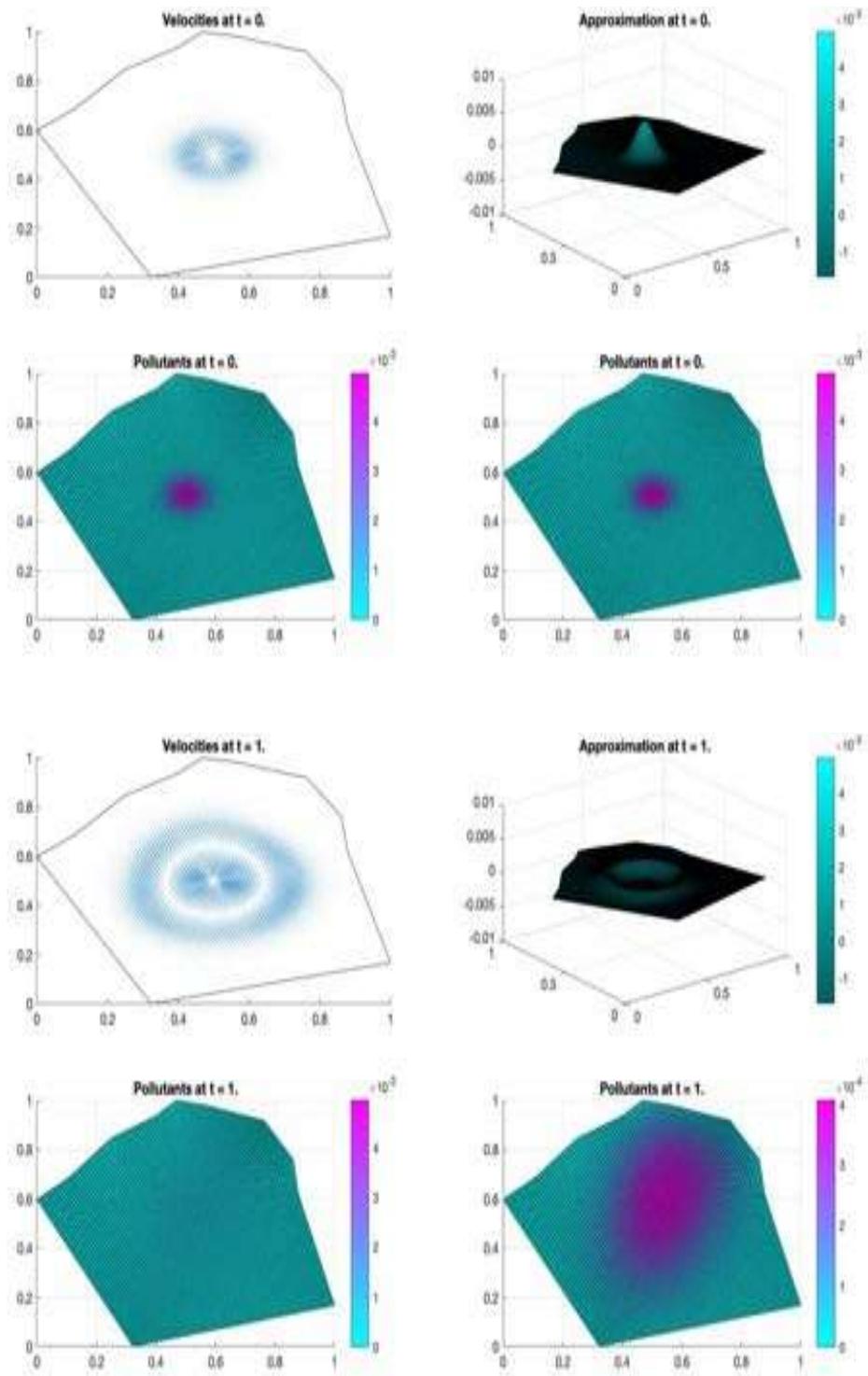


Figura 5.76: Aproximación de transporte de contaminantes usando la forma no conservativa de las ecuaciones de aguas someras para la región CAB con 81×81 nodos en $t = 0, 1$.

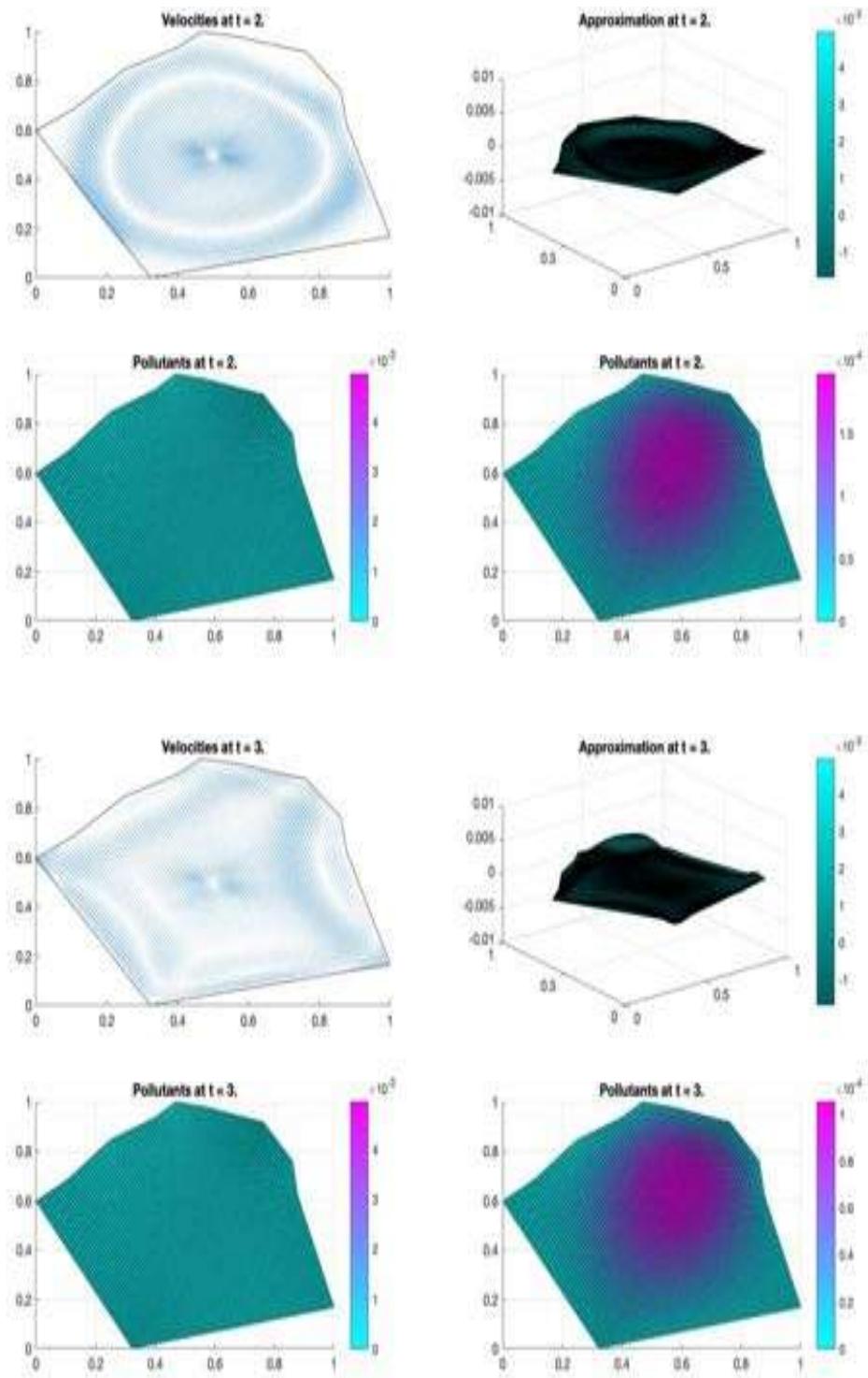


Figura 5.77: Aproximación de transporte de contaminantes usando la forma no conservativa de las ecuaciones de aguas someras para la región CAB con 81×81 nodos en $t = 2, 3$.

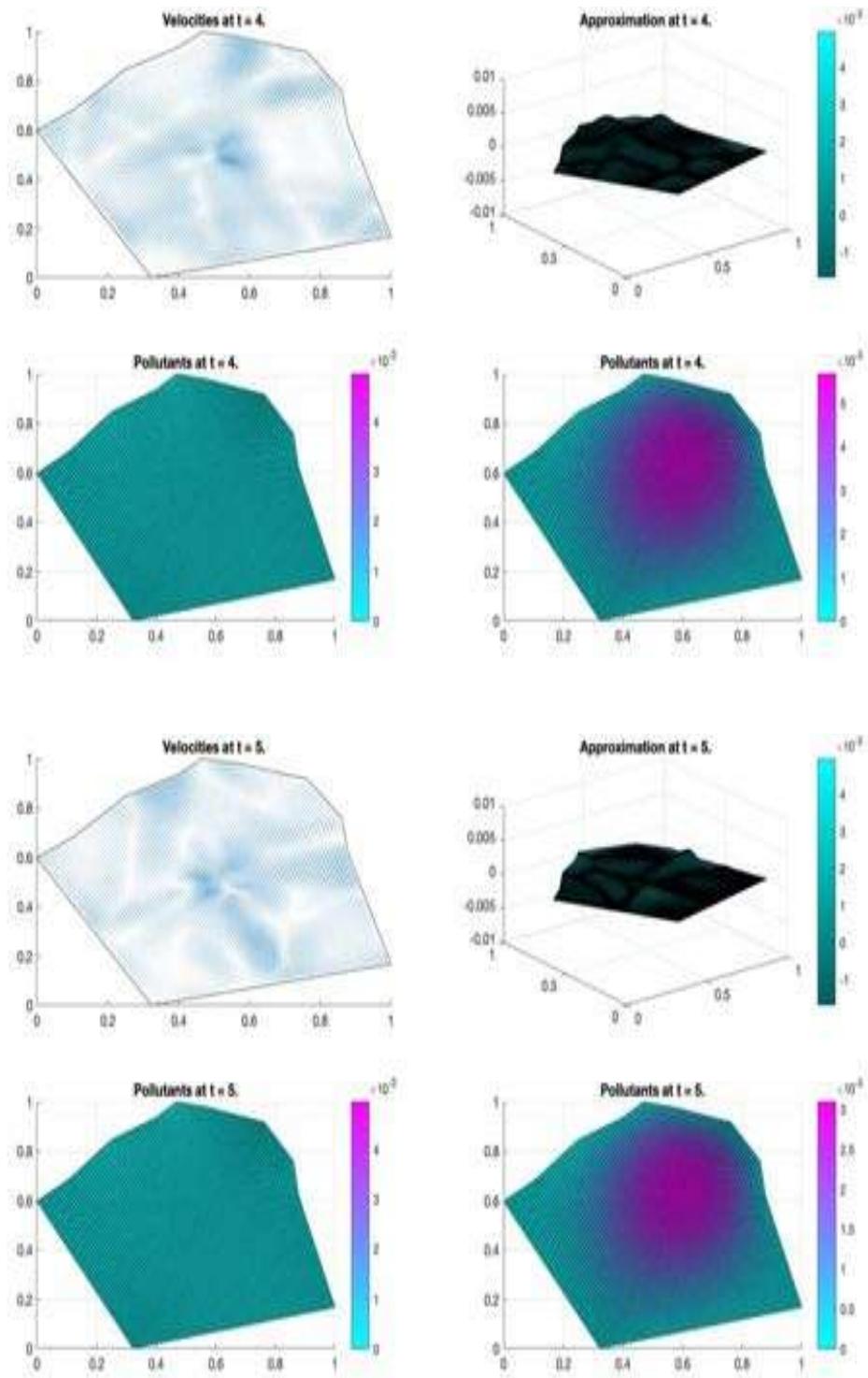


Figura 5.78: Aproximación de transporte de contaminantes usando la forma no conservativa de las ecuaciones de aguas someras para la región CAB con 81×81 nodos en $t = 4, 5$.

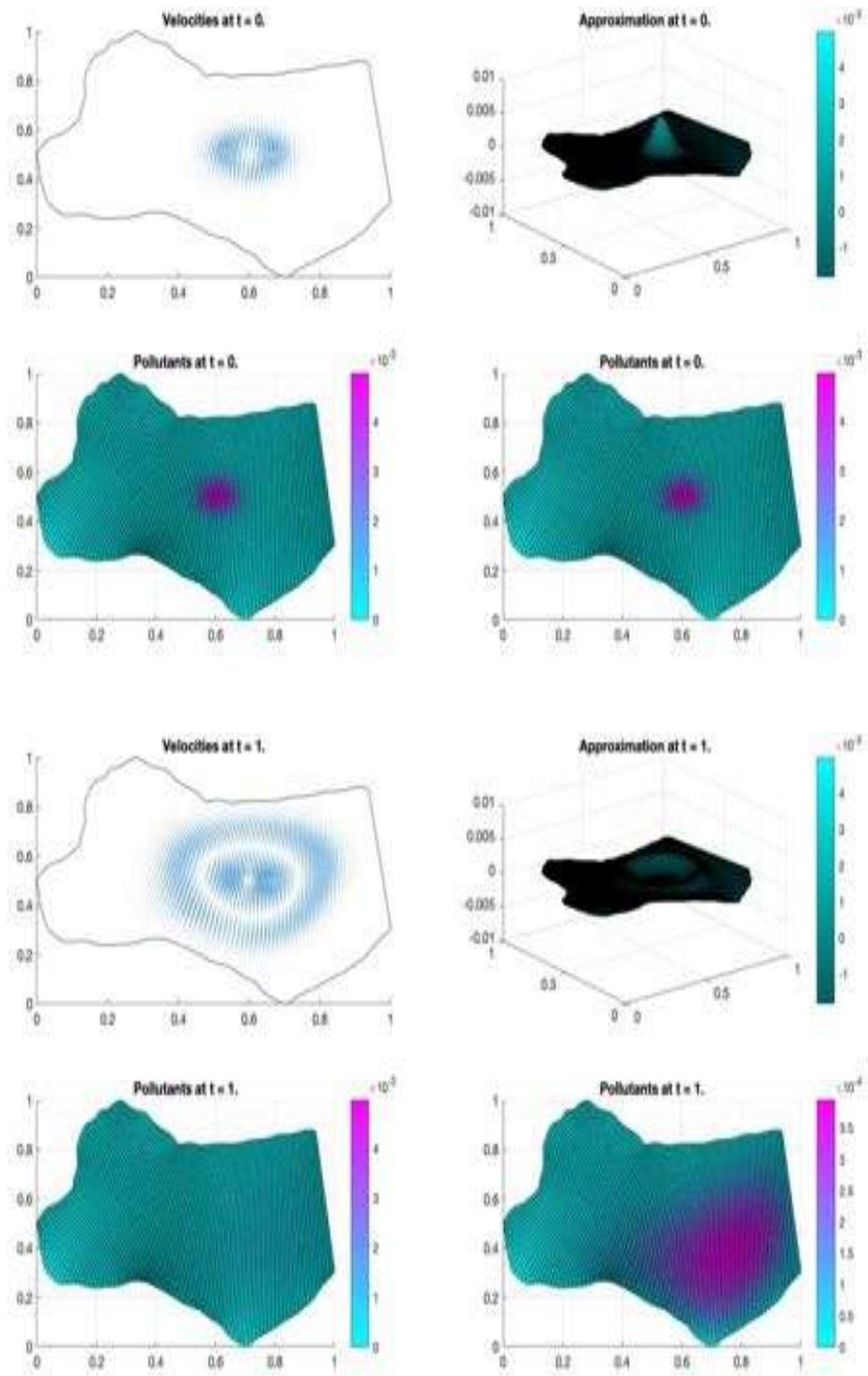


Figura 5.79: Aproximación de transporte de contaminantes usando la forma no conservativa de las ecuaciones de aguas someras para la región CUIT con 81×81 nodos en $t = 0, 1$.

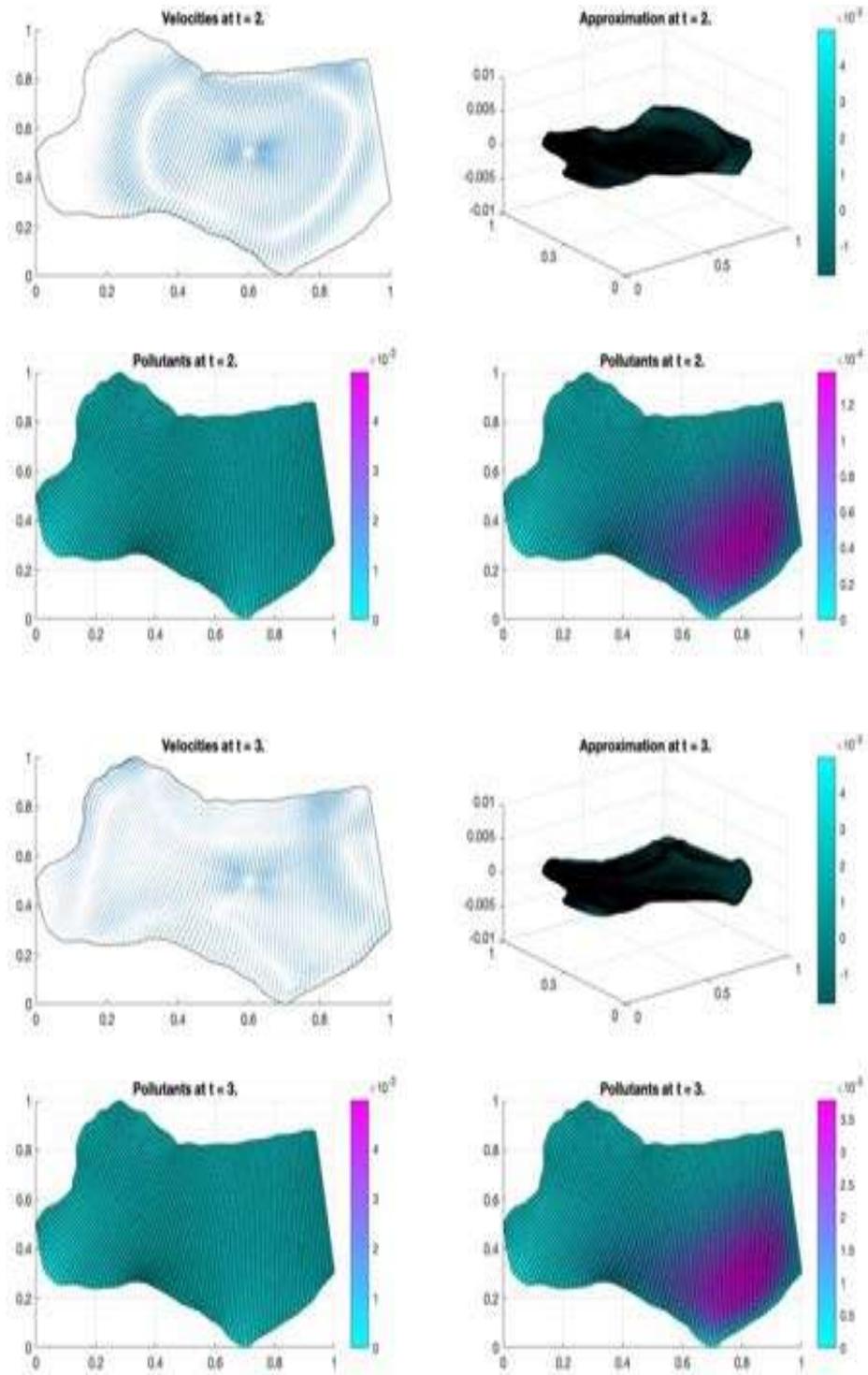


Figura 5.80: Aproximación de transporte de contaminantes usando la forma no conservativa de las ecuaciones de aguas someras para la región CUIT con 81×81 nodos en $t = 2, 3$.

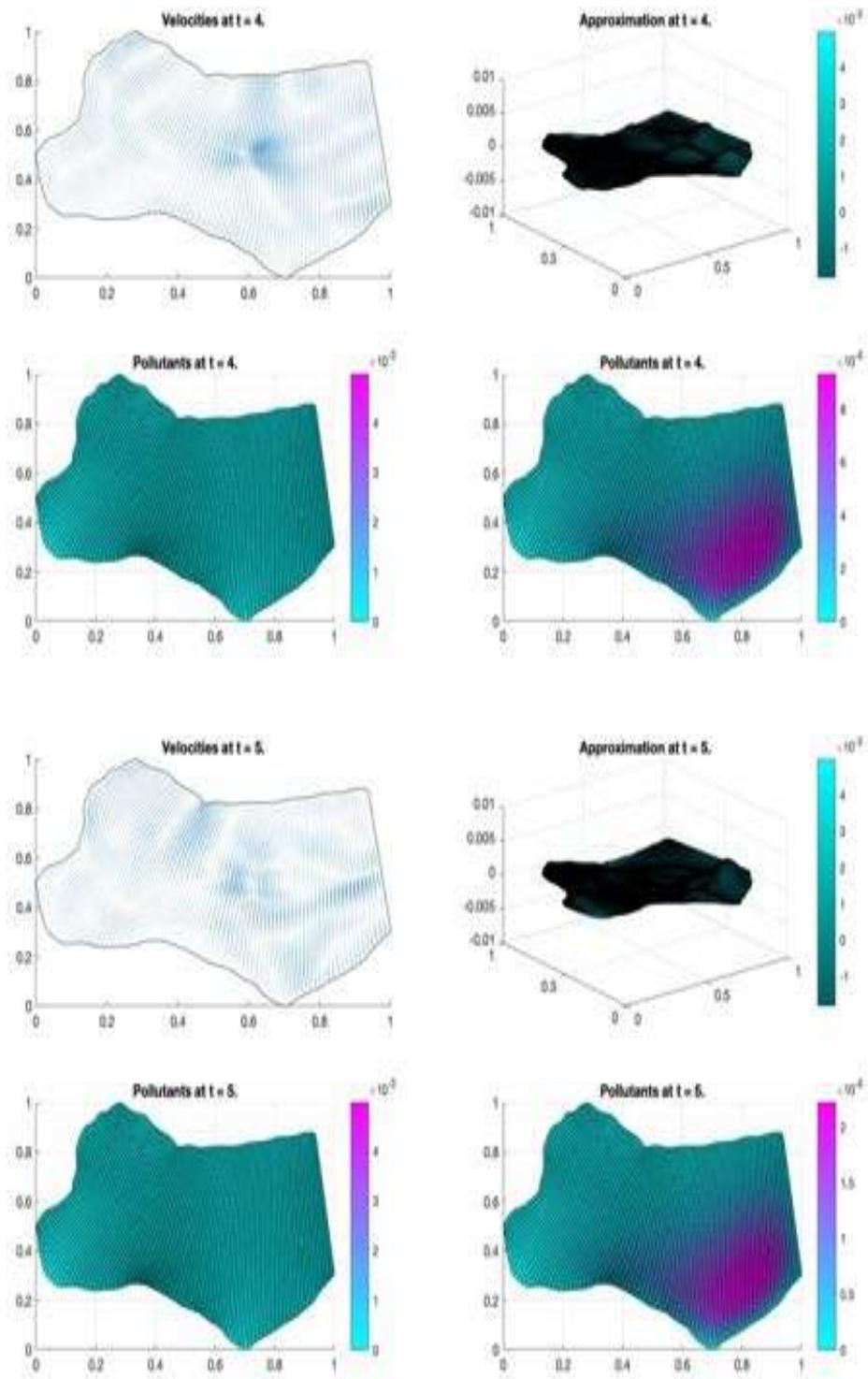


Figura 5.81: Aproximación de transporte de contaminantes usando la forma no conservativa de las ecuaciones de aguas someras para la región CUIT con 81×81 nodos en $t = 4, 5$.

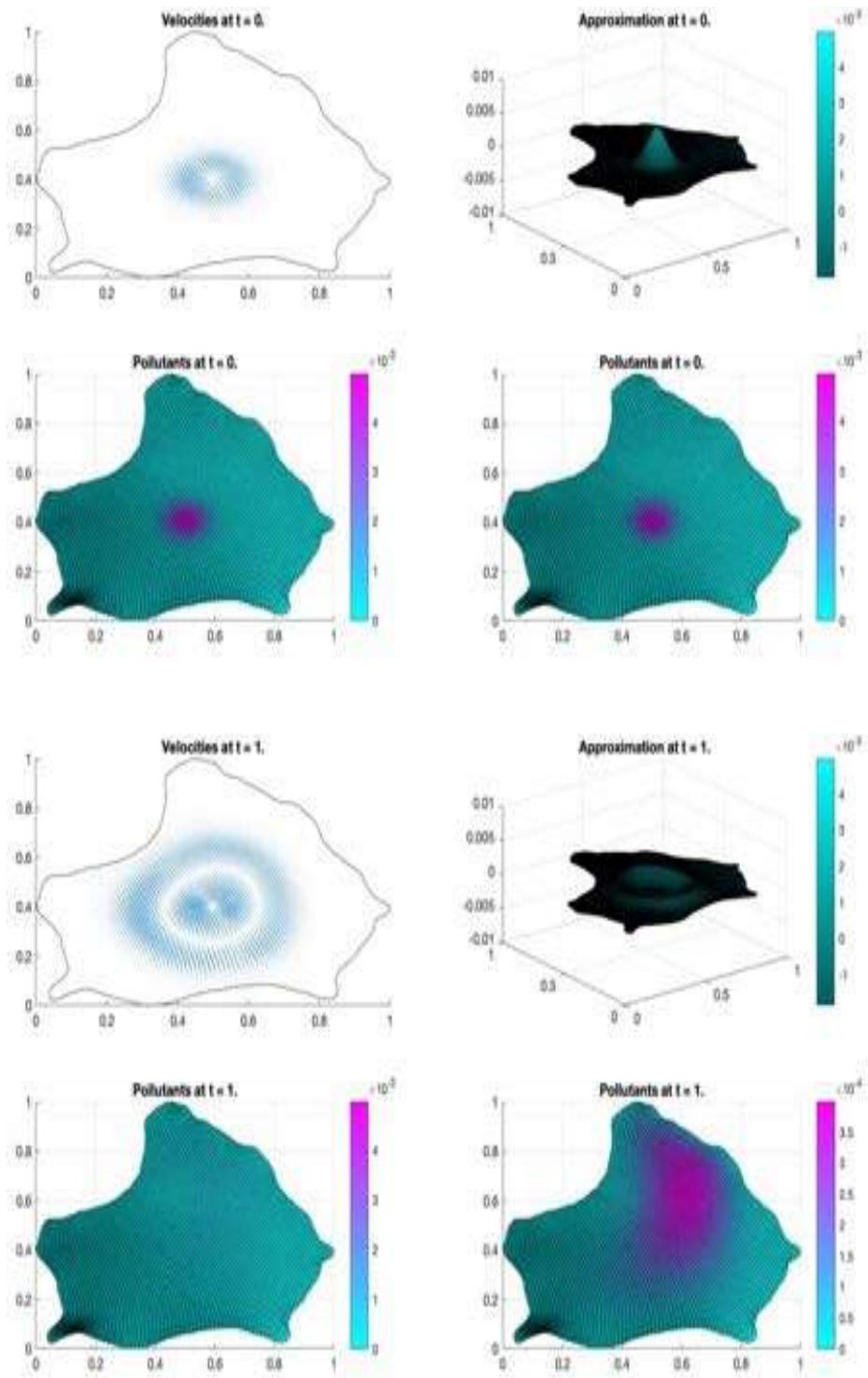


Figura 5.82: Aproximación de transporte de contaminantes usando la forma no conservativa de las ecuaciones de aguas someras para la región ZIRA con 81×81 nodos en $t = 0, 1$.

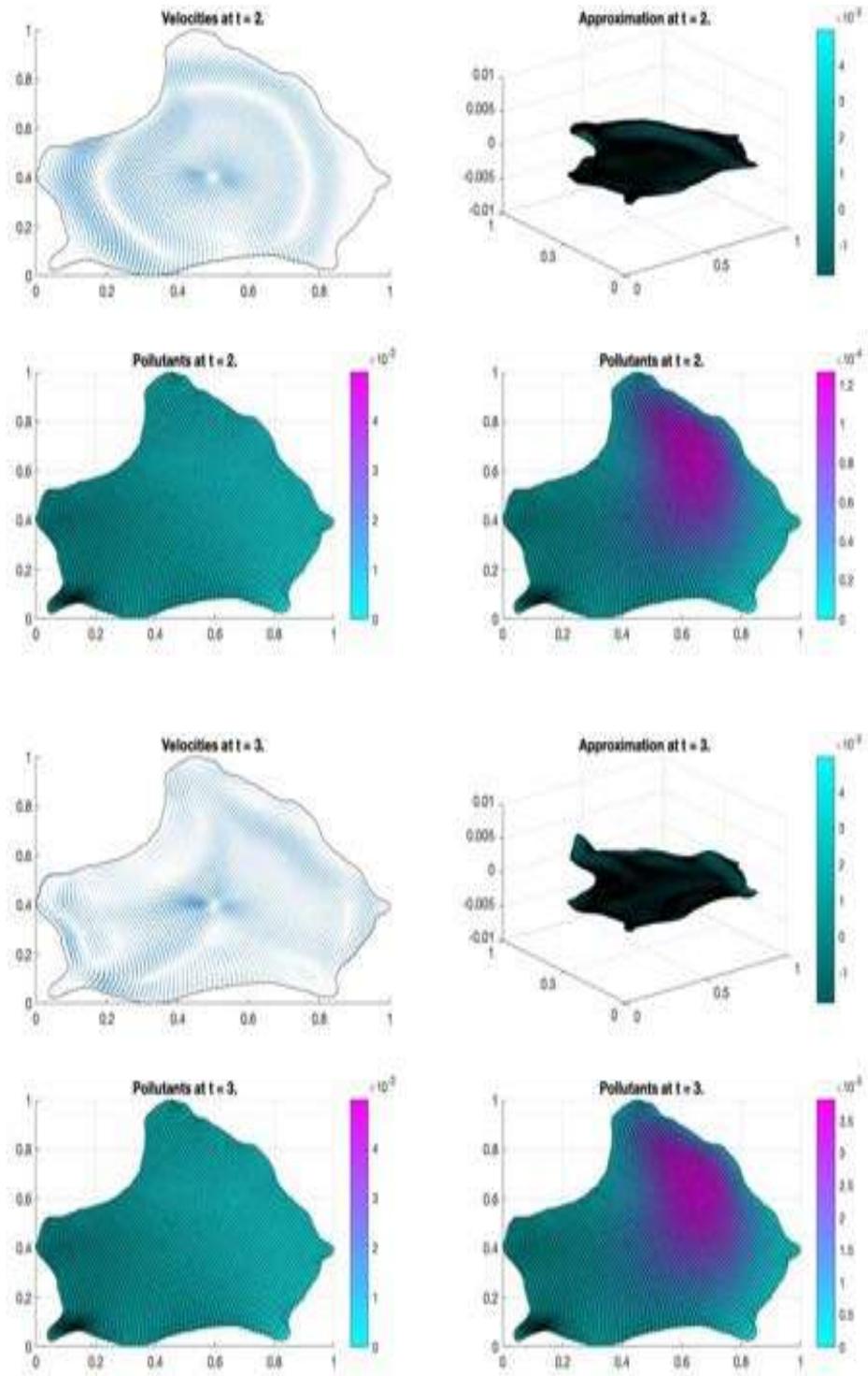


Figura 5.83: Aproximación de transporte de contaminantes usando la forma no conservativa de las ecuaciones de aguas someras para la región ZIRA con 81×81 nodos en $t = 2, 3$.

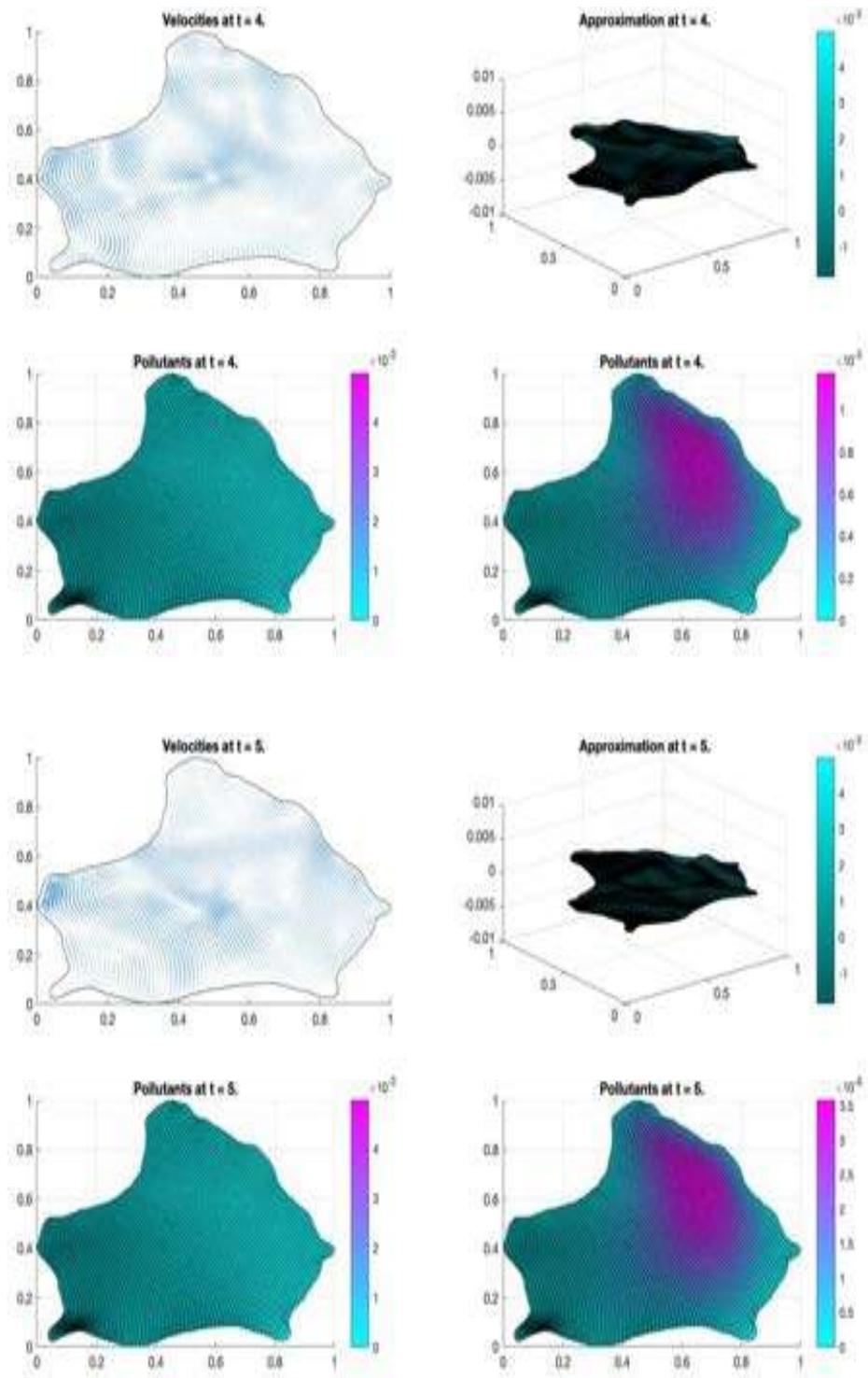


Figura 5.84: Aproximación de transporte de contaminantes usando la forma no conservativa de las ecuaciones de aguas someras para la región ZIRA con 81×81 nodos en $t = 4, 5$.

Capítulo 6

Conclusiones y Trabajo a Futuro

6.1. Conclusiones

En el presente trabajo se presentan esquemas para la solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales. En particular se trabaja con aquellos esquemas que involucran el transporte y la difusión de alguna cantidad física en un medio. Debido a que se presentan diferentes esquemas, aplicables a diferentes ecuaciones, se enunciarán a continuación los aspectos más importantes de cada uno de ellos:

Esquema de diferencias finitas generalizadas para la solución numérica de la ecuación de advección.

El análisis de estabilidad del esquema de diferencias finitas generalizadas presentado para la solución numérica de la ecuación de advección generaliza de manera natural al esquema clásico en regiones rectangulares. Es posible notar que, al realizar el análisis de estabilidad de Von Neumann al esquema explícito, dicho esquema resulta ser débilmente estable. Por otro lado, cuando se utiliza el esquema implícito, se logra estabilidad incondicional para cierto rango de valores del parámetro θ ; en particular, el caso análogo a los esquemas de tipo Crank-Nicolson, donde $\theta = 0.5$, se encuentra dentro de este rango.

Es importante hacer notar que el análisis se realiza hasta segundo orden en el espacio, y los resultados coinciden con el caso implícito en mallas rectangulares, lo cual no ocurre con el caso explícito.

En general, el análisis presentado puede aplicarse a cualquier esquema que satisfaga las

condiciones de consistencia planteadas en el Capítulo 4 hasta segundo orden. Claramente existen varios grados de libertad para elegir los coeficientes Γ_i , esto es un factor clave para producir implementaciones robustas.

Esquema de diferencias finitas generalizadas para la solución numérica de la ecuación de difusión.

Para el caso del esquema explícito presentado en el Capítulo 4, el análisis de estabilidad muestra que dicho esquema es condicionalmente estable, como ocurre con los esquemas clásicos de diferencias finitas. Por otro lado, el análisis muestra que el caso implícito de dicho esquema es incondicionalmente estable para un cierto rango de valores del parámetro θ . En particular, nuevamente, dicho esquema es incondicionalmente estable para $\theta = 0.5$, donde se tiene un esquema de tipo Crank-Nicolson, al igual que en el caso de esquemas clásicos.

Además de lo anterior, los resultados numéricos muestran que es posible obtener buenas aproximaciones a la solución de la ecuación de difusión utilizando el esquema implícito, esto sin importar en cuenta la irregularidad que pueda tener la malla o la región de la prueba.

Esquema de diferencias finitas generalizadas para la solución numérica de la ecuación de advección-difusión.

Al igual que en los casos anteriores, para el esquema de diferencias finitas generalizadas presentado para la solución numérica de la ecuación de advección-difusión, el análisis de estabilidad presentado muestra que, como es en el caso de los esquemas clásicos de diferencias finitas, la versión explícita del esquema es condicionalmente estable; se presenta una cota práctica y fácil de calcular para obtener estabilidad. Dicha cota toma en cuenta la geometría de la región así como las propiedades físicas del problema a resolver (velocidades de transporte y coeficiente de difusividad). Por su parte, el esquema implícito es incondicionalmente estable para cierto rango de valores del parámetro θ . Nuevamente, en particular, es incondicionalmente estable para $\theta = 0.5$, donde se tiene un esquema de tipo Crank-Nicolson.

Aunado a lo anterior, las pruebas numéricas presentadas muestran que es posible producir buenas aproximaciones a la solución teórica de la ecuación de advección-difusión.

Esquema de híbrido de diferencias finitas generalizadas y volúmenes para la solución numérica de las ecuaciones de aguas someras.

Dentro de los resultados del presente trabajo, uno de los que vale la pena resaltar es la construcción de un esquema híbrido de diferencias finitas generalizadas y volúmenes finitos. Este tipo de esquemas puede ser implementado para aproximar la solución de diferentes ecuaciones diferenciales parciales dependientes del tiempo. En este caso se aplica dicho esquema para producir una solución numérica de las ecuaciones de aguas someras, tanto en su forma conservativa como en su forma no conservativa.

En las pruebas numéricas realizadas es posible notar que con el criterio de selección de Δt propuesto, no se aprecian oscilaciones espurias ni inestabilidades en las pruebas. Algo que es importante tomar en cuenta es que, a pesar de que estos esquemas pueden aplicarse con mucha facilidad a regiones no rectangulares, la calidad de las mallas a utilizar es un punto de gran importancia a tomar en cuenta; es conveniente contar con mallas de calidad para obtener mejores resultados. En el presente trabajo se utilizaron mallas con calidad, realizadas por el método de interpolación transfinita y optimizadas por medio del funcional armónico de Barrera y Domínguez.

También vale la pena remarcar que, en las pruebas presentadas, las condiciones de frontera fueron seleccionadas para ser reflexivas y las pruebas muestran que ambos esquemas híbridos de diferencias finitas generalizadas y volúmenes finitos cuentan con una notable habilidad para producir resultados estables en las regiones seleccionadas, incluso en los casos que son aproximaciones geométricas a regiones geográficas reales. Las pruebas numéricas muestran que las leyes de conservación (masa y momento) se cumplen, reflejando de manera correcta el comportamiento esperado de un cuerpo de agua.

Esquema de híbrido de diferencias finitas generalizadas y volúmenes para el modelado de problemas de transporte y difusión de contaminantes en cuerpos de agua.

Las últimas pruebas realizadas en el presente trabajo involucran dos esquemas previamente utilizados:

- El esquema híbrido de diferencias finitas generalizadas y volúmenes finitos para encontrar una solución numérica a las ecuaciones de aguas someras.

- El esquema de diferencias finitas generalizadas para aproximar la solución, de manera numérica, a la ecuación de advección-difusión.

Al combinar estos esquemas, se pueden realizar modelos que reflejen el comportamiento de transporte y difusión de contaminantes en cuerpos de agua.

Las pruebas numéricas presentadas en este trabajo muestran que es posible obtener resultados estables que reflejen el fenómeno deseado. Los esquemas utilizados producen resultados estables que cumplen con las leyes de conservación de masa y momento.

Una de las ventajas de utilizar la combinación de los métodos mostrados es que dichos esquemas son estables bajo las condiciones presentadas para Δt , esto hace que el uso de la combinación sea naturalmente estable.

Algo que es importante tomar en cuenta es que las condiciones de frontera fueron seleccionadas para ser reflexivas, simulando el comportamiento de un cuerpo de agua endorreico.

6.2. Trabajo a Futuro

Una cuestión que sigue siendo importante de trabajar, y que se plantea como trabajo a futuro, es la obtención de esquemas híbridos de diferencias finitas generalizadas y volúmenes finitos que cuenten con la particularidad de ser implícitos. A pesar de que en el presente trabajo se muestran resultados estables, los métodos implícitos podrían disminuir los requerimientos computacionales necesarios para obtener esquemas estables. Además, es importante idear un análisis de estabilidad confiable para los dichos esquemas; esto permitirá establecer cotas ideales para la correcta selección de Δt , tomando en cuenta la geometría de la malla y los valores de las variables conservativas.

Otro punto importante que se debe de tratar es el de realizar simulaciones en escenarios donde se tomen en cuenta gastos grandes de entrada y salida. Para esto es importante contar con condiciones de frontera de tipo Robin, las cuales pueden manejar dichas entradas y salidas de flujo.

Apéndice A

Códigos del Capítulo 1

A.1. Diferencias Finitas para la aproximación de la ecuación de Poisson en una dimensión.

```
function [phi_aprox,x] = Poisson1D(m,phi,f)
    % Función que calcula una aproximación a la solución de la
    % ecuación de Poisson en 1D.
    %
    % phi_xx = -f
    %
    % Se ensamblan las matrices de Diferencias para resolver el sistema
    % lineal.
    %
    % Argumentos de entrada
    %     m           Entero           Número de nodos en la malla.
    %     phi         Función          Función para condiciones de
    %                                     frontera.
    %     f           Función          Lado derecho de la ecuación
    %                                     de Poisson.
    %
    % Argumentos de salida
    %     phi_aprox  Matriz            Matriz con la solución
    %                                     aproximada.
    %     x          Vector            Vector de la malla.
```

```

%
% Ejemplo de uso:
%      [phi_aprox,x] = Poisson1D(11,@phi,@f);
%
% Gerardo Tinoco Guerrero
% Universidad Michoacana de San Nicol\`{a}s de Hidalgo

%% Inicializamos las variables
close all
x      = linspace(0,2*pi,m)';      % Se crea la malla espacial.
dx     = x(2)-x(1);               % Se calcula dx.

%% Agregamos condiciones de frontera
alpha  = phi(0);                  % Condici\`{o}n de frontera en
                                   % x = 0.
beta   = phi(2*pi);              % Condici\`{o}n de frontera en
                                   % x = 2*pi.

%% Realizamos el M\`{e}todo de Diferencias Finitas
rhs     = -f(x(2:m-1));           % Creamos el lado derecho de
                                   % la ecuaci\`{o}n.
rhs(1)  = rhs(1) - alpha/dx^2;    % Agregamos la frontera al
                                   % lado derecho.
rhs(m-2) = rhs(m-2) - beta/dx^2; % Agregamos la frontera al
                                   % lado derecho.
dA      = diag(-2*ones(1,m-2));   % Hacemos una matriz diagonal.
dAp1    = diag(1*ones(1,m-3),1);  % Creamos la matriz diagonal
                                   % superior.
dAm1    = diag(1*ones(1,m-3),-1); % Creamos la matriz diagonal
                                   % inferior.
A       = (dA + dAp1 + dAm1);     % Jutamos las matrices para
                                   % obtener A.
A       = A/dx^2;                 % Dividimos entre el dx al
                                   % cuadrado.
u       = A\rhs;                  % Resolvemos el sistema de

```

```

% ecuaciones.

%% Guardamos la Soluci\{o}n
phi_aprox = [alpha; u; beta];           % Agregamos las condiciones
                                           % de frontera a lasoluci\{o}n.

%% Calculamos la soluci\{o}n exacta
phi_exacta = phi(x);                   % Se calcula la soluci\{o}n
                                           % exacta para comparar.
end

```

A.2. Diferencias Finitas para la aproximación de la ecuación de Poisson en dos dimensiones.

```

function [phi_aprox,x,y] = Poisson2D(m,phi,f)
% Funci\{o}n que calcula una aproximaci\{o}n a la soluci\{o}n de la
% ecuaci\{o}n de Poisson en 2D.
%
% phi_xx + phi_yy = -f
%
% Se ensamblan las matrices de Diferencias para resolver el sistema
% lienal.
%
% Argumentos de entrada
%      m          Entero          N\{u}mero de nodos en la malla.
%      phi        Funci\{o}n      Funci\{o}n para condiciones de
%                                  frontera.
%      f          Funci\{o}n      Lado derecho de la ecuaci\{o}n
%                                  de Poisson.
%
% Argumentos de salida
%      phi_aprox  Matriz          Matriz con la soluci\{o}n
%                                  aproximada.
%      x          Matriz          Matriz de coordenadas x de la
%                                  malla.

```

```

%      y      Matriz      Matriz de coordenadas y de la
%      malla.
%
% Ejemplo de uso:
%      [phi_aprox,x,y] = Poisson2D(11,@phi,@f);
%
% Gerardo Tinoco Guerrero
% Universidad Michoacana de San Nicol\`{a}s de Hidalgo

%% Inicializamos las variables
close all
x      = linspace(0,1,m)';      % Se crea la
% discretizaci\`{o}n en x.
y      = linspace(0,1,m)';      % Se crea la
% discretizaci\`{o}n en y.
h      = x(2) - x(1);          % Se calcula h.
[x,y]  = meshgrid(x,y);        % Creamos la malla completa.
A      = zeros((m-2)*(m-2),(m-2)*(m-2)); % Se inicializa A con ceros.
rhs     = zeros((m-2)*(m-2),1); % Se inicializa rhs con ceros.
phi_aprox = zeros(m,m);        % Se inicializa phi_aprox

%% Ensamblamos la Matriz A
dB      = diag(4*ones(1,(m-2))); % Hacemos una matriz diagonal.
dBp1    = diag(1*ones(1,(m-2)-1),1); % Creamos la matriz diagonal
% superior.
dBm1    = diag(1*ones(1,(m-2)-1),-1); % Creamos la matriz diagonal
% inferior.
B      = (dB - dBp1 - dBm1);     % Jutamos las matrices para
% obtener B.
I      = -eye(m-2);             % Creamos la matriz identidad.
temp    = 1;                    % Creamos una variable temporal.
for i = 1:(m-2):(m-2)*(m-2)    % Se recorre de 1 a (m-2)*(m-2)
% dando saltos de m-2.
    A(i:temp*(m-2),i:temp*(m-2)) = B; % Se asignan los bloques
% con B.

```



```

                                % faltantes.
    phi_aprox(m,j) = phi(x(m,j),y(m,j)); % Se agrega la condici\~{o}n
                                % de frontera en los nodos
                                % faltantes.

end
phi_aprox(2:(m-1),2:(m-1)) = utemp; % Se completa la matriz de
                                % phi_aprox.

%% Calculamos la soluci\~{o}n exacta
phi_exacta = phi(x,y);          % Se calcula la soluci\~{o}n
                                % exacta para comparar.

end

```

A.3. Diferencias Finitas para la aproximación de la ecuación de Poisson en ELE.

```

function [phi_aprox,phi_real,x,y] = ele(m,p,phi,f)
    % Funci\~{o}n que calcula una aproximaci\~{o}n a la soluci\~{o}n de la
    % ecuaci\~{o}n de Poisson en 2D utilizando la regi\~{o}n "ELE".
    %
    % phi_xx + phi_yy = -f
    %
    % Se sigue un m\~{e}todo iterativo para calcular la aproximaci\~{o}n a
    % la soluci\~{o}n en la regi\~{o}n deseada.
    %
    % Argumentos de entrada
    %     m           Entero           N\~{u}mero de nodos en la malla.
    %     p           Entero           N\~{u}mero de nodos que se
    %                                   quitar\~{a}n para la ELE.
    %     phi         Funci\~{o}n       Funci\~{o}n para condiciones de
    %                                   frontera.
    %     f           Funci\~{o}n       Lado derecho de la ecuaci\~{o}n
    %                                   de Poisson.
    %
    % Argumentos de salida

```

```

%      phi_aprox   Matriz           Matriz con la soluci\''{o}n
%                                     aproximada.
%      x           Matriz           Matriz de coordenadas x de la
%                                     malla.
%      y           Matriz           Matriz de coordenadas y de la
%                                     malla.
%
% Ejemplo de uso:
%      [phi_aprox,phi_exacta,x,y] = ele(21,11,@phi,@f);
%
% Gerardo Tinoco Guerrero
% Universidad Michoacana de San Nicol\''{a}s de Hidalgo

%% Inicializamos las variables
close all
err = 1;                % Se establece un error grande para las iteraciones.
tol = sqrt(eps);       % Se establece la tolerancia del m\''{e}todo.
n = zeros(m-2,1);      % Se inicializa el vector n.
phi_aprox = zeros(m);  % Se inicializa phi_aprox.

%% Se buscan los nodos dentro de la regi\''{o}n
for i = 2:m-1
    if i < m-p
        n(i) = m;
    else
        n(i) = m-p;
    end
end

%% Se define la malla a trabajar
x = linspace(0,1,m);   % Se hace la partici\''{o}n en x.
y = linspace(0,1,m)'; % Se crea la discretizaci\''{o}n en y.
h = x(2) - x(1);       % Se calcula h.
[x,y] = meshgrid(x,y); % Se crea la malla espacial.

```

```

%% Se completan las condiciones de frontera
for i = 1:m
    phi_aprox(i,1) = phi(x(i,1),y(i,1)); % Frontera en i = 1;
    phi_aprox(1,i) = phi(x(1,i),y(1,i)); % Frontera en j = 1;
end

for i = 1:(m-p)
    phi_aprox(i,m) = phi(x(i,m),y(i,m)); % Frontera en i = m;
    phi_aprox(m,i) = phi(x(m,i),y(m,i)); % Frontera en j = m;
end

for i = (m-p):m
    phi_aprox(i,m-p) = phi(x(i,m-p),y(i,m-p)); % Frontera en la ELE.
    phi_aprox(m-p,i) = phi(x(m-p,i),y(m-p,i)); % Frontera en la ELE.
end
phi_real = phi_aprox;

%% Se hace el llenado de la matriz de aproximaci\'}{o}n
% Se utilizan diferencias finitas centradas y un m\'}{e}todo iterativo.
while err >= tol
    err = 0;
    for i = 2:m-1
        for j = 2:(n(i)-1)
            t = (1/4)*(phi_aprox(i-1,j) + phi_aprox(i+1,j) + ...
                phi_aprox(i,j-1) + phi_aprox(i,j+1) - ...
                h^2*f(x(i,j),y(i,j))); % Se calcula una nueva
                                     % aproximaci\'}{o}n.
            err = max(err,abs(t-phi_aprox(i,j))); % Se mide el error.
            phi_aprox(i,j) = t; % Se guarda la
                                % aproximaci\'}{o}n
                                % calculada.
            phi_real(i,j) = phi(x(i,j),y(i,j)); % Se calcula la
                                                % soluci\'}{o}n real.
        end
    end
end

```

```

end
end

```

A.4. Diferencias Finitas para la aproximación de la ecuación de Poisson en Pacman.

```

% Función que calcula una aproximación a la solución de la
% ecuación de Poisson en 2D utilizando la región "Pacman".
%
%  $\phi_{xx} + \phi_{yy} = -f$ 
%
% Se sigue un método iterativo para calcular la aproximación a
% la solución en la región deseada.
%
% Argumentos de entrada
%     m           Entero           Número de nodos en la malla.
%     phi         Función          Función para condiciones de
%                               frontera.
%     f           Función          Lado derecho de la ecuación
%                               de Poisson.
%
% Argumentos de salida
%     phi_aprox   Matriz           Matriz con la solución
%                               aproximada.
%     x           Matriz           Matriz de coordenadas x de la
%                               malla.
%     y           Matriz           Matriz de coordenadas y de la
%                               malla.
%
% Ejemplo de uso:
%     [phi_aprox,x,y] = elPacman(21,@phi,@f);
%
% Gerardo Tinoco Guerrero
% Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

```

```

%% Se construyen los vectores de coordenadas de la frontera
xp = [0; 0.2415; 0.4830; 0.7244; 0.9659; 0.9659; 0.9289; 0.8791; 0.8171;
      0.7439; 0.6603; 0.5677; 0.4673; 0.3604; 0.2485; 0.1332; 0.0160;
      -0.1013; -0.2173; -0.3303; -0.4387; -0.5410; -0.6359; -0.7221;
      -0.7982; -0.8633; -0.9166; -0.9571; -0.9845; -0.9983; -0.9983;
      -0.9845; -0.9571; -0.9166; -0.8633; -0.7982; -0.7221; -0.6359;
      -0.5410; -0.4387; -0.3303; -0.2173; -0.1013; 0.0160; 0.1332;
      0.2485; 0.3604; 0.4673; 0.5677; 0.6603; 0.7439; 0.8171; 0.8791;
      0.9289; 0.9659; 0.9659; 0.7244; 0.4830; 0.2415; 0];

yp = [0; 0.0647; 0.1294; 0.1941; 0.2588; 0.2588; 0.3703; 0.4767; 0.5765;
      0.6683; 0.7510; 0.8232; 0.8841; 0.9328; 0.9686; 0.9911; 0.9999;
      0.9949; 0.9761; 0.9439; 0.8986; 0.8410; 0.7717; 0.6918; 0.6024;
      0.5046; 0.3999; 0.2896; 0.1754; 0.0587; -0.0587; -0.1754; -0.2896;
      -0.3999; -0.5046; -0.6024; -0.6918; -0.7717; -0.8410; -0.8986;
      -0.9439; -0.9761; -0.9949; -0.9999; -0.9911; -0.9686; -0.9328;
      -0.8841; -0.8232; -0.7510; -0.6683; -0.5765; -0.4767; -0.3703;
      -0.2588; -0.2588; -0.1941; -0.1294; -0.0647; 0];

%% Inicializamos las variables
close all
err = 1; % Se establece un error grande para las iteraciones.
tol = sqrt(eps); % Se establece la tolerancia del m\ '{e}todo.
n = m; % Se hace n = m;
phi_aprox = zeros(m); % Se inicializa phi_aprox.

%% Se define la malla
x = linspace(0,2,m); % Se hace la partici\ '{o}n en x.
y = x; % Se hace la partici\ '{o}n en y.
h = x(2) - x(1); % Se calcula dx.
[x,y] = meshgrid(x,y); % Se crea la malla espacial.
xp = xp + 1; % Se coloca la región en [0,2].
yp = yp + 1; % Se coloca la región en [0,2].

```

```

%% Se buscan los puntos en la frontera
in = inpolygon(x,y,xp,yp);

%% Se agregan las condiciones de frontera
for i = 1:m
    for j = 1:n
        if in(i,j) == 1 && in(i-1,j) == 0
            phi_aprox(i,j) = phi(x(i,j),y(i,j));
        elseif in(i,j) == 1 && in(i,j-1) == 0
            phi_aprox(i,j) = phi(x(i,j),y(i,j));
        elseif in(i,j) == 1 && in(i+1,j) == 0
            phi_aprox(i,j) = phi(x(i,j),y(i,j));
        elseif in(i,j) == 1 && in(i,j+1) == 0
            phi_aprox(i,j) = phi(x(i,j),y(i,j));
        else
            phi_aprox(i,j) = 0;
        end
    end
end
phi_real = phi_aprox;

%% Se hace el llenado de la matriz de aproximaci\{o}n
% Se utilizan diferencias finitas centradas y un m\{e}todo iterativo.
while err >= tol
    err = 0;
    for i = 1:m
        for j = 1:n
            if in(i,j) == 1 && in(i,j+1) == 1 && in(i+1,j) == 1 ...
                && in(i-1,j) == 1 && in(i,j-1) == 1

                t = (1/4)*(phi_aprox(i-1,j) + phi_aprox(i+1,j) + ...
                    phi_aprox(i,j-1) + phi_aprox(i,j+1) - ...
                    h^2*f(x(i,j),y(i,j)));           % Se calcula una nueva
                                                    % aproximaci\{o}n.
                err = max(err,abs(t-phi_aprox(i,j)));% Se mide el error.
            end
        end
    end
end

```

```

        phi_aprox(i,j) = t;                % Se guarda la
                                           % aproximaci\'}{o}n
                                           % calculada.
        phi_real(i,j) = phi(x(i,j),y(i,j));% Se calcula la
                                           % soluci\'}{o}n real.
    end
end
end
end
end
end

```

A.5. Volúmenes Finitos para la aproximación de la ecuación de Advección en dos dimensiones espaciales.

```

function [x,y,u,ur] = voladv3_2(m,n,t,f,a,b)
% Funci\'}{o}n que calcula una aproximaci\'}{o}n a la soluci\'}{o}n de la
% ecuaci\'}{o}n de Advecci\'}{o}n en 2D.
%
%  $u_t = -au_x - bu_y$ 
%
% Se sigue un m\'}{e}todo iterativo para calcular la aproximaci\'}{o}n en
% cada paso de tiempo
%
% Argumentos de entrada
%      m          Entero          N\'}{u}mero de nodos en la malla
%                               en x.
%      n          Entero          N\'}{u}mero de nodos en la malla
%                               en y.
%      t          Entero          N\'}{u}mero de nodos en la malla
%                               en t.
%      f          Funci\'}{o}n     Funci\'}{o}n para condiciones
%                               iniciales y de frontera.
%      a          Real            Velocidad de transporte en x.
%      b          Real            Velocidad de transporte en y.
%

```

```

% Argumentos de salida
%      x      Matriz      Matriz de coordenadas x de la
%                               malla.
%      y      Matriz      Matriz de coordenadas y de la
%                               malla.
%      u      Matriz      Matriz con la soluci\''{o}n
%                               aproximada.
%      ur     Matriz      Matriz con la soluci\''{o}n
%                               exacta.
%
% Ejemplo de uso:
%      [x,y,u,ur] = voladv3_2(41,41,200,@fCAB,.3,.3)
%
% Gerardo Tinoco Guerrero
% Universidad Michoacana de San Nicol\''{a}s de Hidalgo

close all
%% Inicializaci\''{o}n
% El bloque de inicializaci\''{o}n de variables.

u      = zeros(m,n,t);      % Se inicializa la matriz de
%                               aproximaci\''{o}n.

ur     = zeros(m,n,t);      % Se inicializa la matriz de soluci\''{o}n.
t      = linspace(0,1,t);   % Se crea la partici\''{o}n temporal.
dt     = t(2) - t(1);      % Se calcula dt.
y      = linspace(0,1,m);   % Se crea la partici\''{o}n en x.
x      = linspace(0,1,n);   % Se crea la partici\''{o}n en y.
dx     = x(2) - x(1);      % Se calcula dx.
dy     = y(2) - y(1);      % Se calcula dy.
[x,y] = meshgrid(x,y);     % Se crea la malla espacial.
cfl    = dt*((a/dx) + (b/dy)); % Se calcula la condici\''{o}n de
%                               estabilidad.

if cfl >= 1/4              % Se revisa que se cumpla la dondici\''{o}n
%                               de estabilidad.

```

```

        fprintf('Cuidado, CFL = %d',cfl);
    else
        fprintf('\n La condici{o}n CFL se cumple, siendo CFL = %d\n',cfl);
    end

%% Condici\ '{o}n inicial
% Se agrega, primeramente, la condici\ '{o}n inicial.
for i = 1:m
    for j = 1:n
        u(i,j,1) = f([x(i,j),y(i,j)],t(1),a,b);
    end
end

%% Condiciones de frontera
% Se agregan las condiciones de frontera.
for k = 2: length(t)
    for i = 1:m
        u(i,1,k) = f([x(i,1),y(i,1)],t(k),a,b);
    end
    for j = 2:n
        u(1,j,k) = f([x(1,j),y(1,j)],t(k),a,b);
    end
end

%% Vol\ '{u}menes Finitos
% Se realiza el llenado de la matriz de aproximaci\ '{o}n por medio de un
% m\ '{e}todo iterativo.
for k = 2:length(t)
    for i = 2:m
        for j = 2:n
            u(i,j,k) = u(i,j,k-1) - dt*(a*(u(i,j,k-1) - u(i-1,j,k-1))/dx + ...
                b*(u(i,j,k-1) - u(i,j-1,k-1))/dy);
        end
    end
end
end

```

```

%% Soluci\{o}n exacta
% Se realiza el llenado de la matriz con la soluci\{o}n exacta.
for k = 1:length(t)
    for i = 1:m
        for j = 1:n
            ur(i,j,k) = f([x(i,j),y(i,j)],t(k),a,b);
        end
    end
end
end
end

```

A.6. Esquema Upwind para la aproximación de la ecuación de Advección en una dimensión espacial.

```

function [u_aprox,u_exacta,x] = Adveccion1DFTBS(m,t,a,f)
% Funci\{o}n que calcula una aproximaci\{o}n a la soluci\{o}n de la
% ecuaci\{o}n de Advecci\{o}n utilizando un esquema FTBS.
%
%  $u_t + a*u_x = 0$ 
%
% Se hace un m\{e}todo iterativo para la aproximaci\{o}n.
%
% Argumentos de entrada
%     m           Entero           N\{u}mero de nodos en la malla
%                                     en el espacio.
%     t           Entero           N\{u}mero de pasos temporales.
%     a           Entero           Velocidad de movimiento.
%     f           Funci\{o}n       Funci\{o}n para condici\{o}n
%                                     inicial y de frontera.
%
% Argumentos de salida
%     u           Matriz           Matriz con la soluci\{o}n
%                                     aproximada.
%     x           Vector           Vector de coordenadas de la

```

```

%                               malla.
% Ejemplo de uso:
%       [u_aprox,u_exacta,x] = Adveccion1DFTBS(11,200,.2,@fAdv);
%
% Gerardo Tinoco Guerrero
% Universidad Michoacana de San Nicol\`{a}s de Hidalgo

%% Se inicializan las variables
close all                       % Cerramos todas las ventanas de figuras.
T = linspace(0,10,t);           % Se crea la malla temporal.
x = linspace(0,2*pi,m);         % Se crea la malla espacial.
dt = T(2) - T(1);               % Se calcula dt.
dx = x(2) - x(1);               % Se calcula dx.
u_aprox = zeros(m,t);           % Se inicializa u_aprox con ceros.
u_exacta = zeros(m,t);          % Se inicializa u_exacta con ceros.
c = abs(a*dt/dx);               % Calculamos c para ver la estabilidad.
if c > 1/2
    fprintf('El código puede no funcionar c = %f\n',c);
end

%% Agregamos condici\`{o}n inicial
for i = 1:m
    u_aprox(i,1) = f(x(i),a,T(1)); % Se agrega la condici\`{o}n inicial.
end

%% Agregamos la condici\`{o}n de frontera
for k = 1:t
    u_aprox(1,k) = f(x(1),a,T(k)); % Se agrega la condici\`{o}n de frontera en x =
end

%% Hacemos el m\`{e}todo FTBS
for k = 2:t
    for i = 2:m
        u_aprox(i,k) = u_aprox(i,k-1) - ...

```

```

        a*(dt/dx)*(u_aprox(i,k-1) - u_aprox(i-1,k-1));
        % Se aproxima la soluci\'}n por medio de un m\'}e}todo FTBS.
    end
end

%% Calculamos la soluci\'}n exacta
for k = 1:t
    for i = 1:m
        u_exacta(i,k) = f(x(i),a,T(k));
        % Se calcula la soluci\'}n exacta para comparar.
    end
end
end
end

```

A.7. Esquema Lax-Friedrichs para la aproximación de la ecuación de Advección en una dimensión espacial.

```

function [u_aprox,u_exacta,x] = Adveccion1DLaxFriedrich(m,t,a,f)
    % Funci\'}n que calcula una aproximaci\'}n a la soluci\'}n de la
    % ecuaci\'}n de Advecci\'}n utilizando un esquema tipo Lax-Friedrich.
    %
    %  $u_t + a*u_x = 0$ 
    %
    % Se hace un m\'}e}todo iterativo para la aproximaci\'}n.
    %
    % Argumentos de entrada
    %     m           Entero           N\'}{u}mero de nodos en la malla
    %                                     en el espacio.
    %     t           Entero           N\'}{u}mero de pasos temporales.
    %     a           Entero           Velocidad de movimiento.
    %     f           Funci\'}n        Funci\'}n a Aproximar.
    %
    % Argumentos de salida
    %     u           Matriz           Matriz con la soluci\'}n
    %                                     aproximada.

```

```

%      x      Vector      Vector de coordenadas de la
%      malla.
% Ejemplo de uso:
%      [u_aprox,u_exacta,x] = Adveccion1DLaxFriedrich(11,200,.2,@fAdv);
%
% Gerardo Tinoco Guerrero
% Universidad Michoacana de San Nicol\`{a}s de Hidalgo

close all      % Cerramos todas las ventanas de figuras.
T = linspace(0,10,t);      % Se crea la malla temporal.
x = linspace(0,2*pi,m);    % Se crea la malla espacial.
dt = T(2) - T(1);         % Se calcula dt.
dx = x(2) - x(1);         % Se calcula dx.
c = abs(a*dt/dx);         % Calculamos c para ver la estabilidad.
if c > 1/2
    fprintf('El código puede no funcionar c = %f\n',c);
end
u_aprox = zeros(m,t);     % Se inicializa u_aprox con ceros.
u_exacta = zeros(m,t);   % Se inicializa u_exacta con ceros.

%% Agregamos condici\`{o}n inicial
for i = 1:m
    u_aprox(i,1) = f(x(i),a,T(1)); % Se agrega la condici\`{o}n inicial.
end

%% Agregamos la condici\`{o}n de frontera
for k = 1:t
    u_aprox(1,k) = f(x(1),a,T(k)); % Se agrega la condici\`{o}n de
    % frontera en x = 0.
    u_aprox(m,k) = f(x(m),a,T(k)); % Se agrega la condici\`{o}n de
    %frontera en x = 1.
end

%% Hacemos el m\`{e}todo Lax-Friedrichs
for k = 2:t

```

```

    for i = 2:m-1
        u_aprox(i,k) = (1/2)*(u_aprox(i+1,k-1)+u_aprox(i-1,k-1)) - ...
            (a/2)*(dt/dx)*(u_aprox(i+1,k-1)-u_aprox(i-1,k-1));
        % Se hace un esquema de tipo Lax-Friedrci para todos
        % los niveles de tiempo.
    end
end

%% Calculamos la soluci\'}n exacta
for k = 1:t
    for i = 1:m
        u_exacta(i,k) = f(x(i),a,T(k));
        % Se calcula la soluci\'}n exacta para comparar.
    end
end
end
end

```

A.8. Esquema Lax-Wendroff para la aproximación de la ecuación de Advección en una dimensión espacial.

```

function [u_aprox,u_exacta,x] = Adveccion1DLaxWendroff(m,t,a,f)
    % Funci\'}n que calcula una aproximaci\'}n a la soluci\'}n de la
    % ecuaci\'}n de Advecci\'}n utilizando un esquema tipo Lax-Wendroff.
    %
    %  $u_t + a*u_x = 0$ 
    %
    % Se hace un m\'}e todo iterativo para la aproximaci\'}n.
    %
    % Argumentos de entrada
    %      m          Entero          N\'}mero de nodos en la malla
    %                                     en el espacio.
    %      t          Entero          N\'}mero de pasos temporales.
    %      a          Entero          Velocidad de movimiento.
    %      f          Funci\'}n        Funci\'}n a Aproximar.
    %

```



```
%% Hacemos el método Lax-Friedrichs
for k = 2:t
    for i = 2:m-1
        u_aprox(i,k) = u_aprox(i,k-1) - (a/2)*(dt/dx)*(u_aprox(i+1,k-1) - ...
            u_aprox(i-1,k-1)) + ...
            (a*dt)^2*(1/(2*dx^2))*(u_aprox(i+1,k-1) - 2*u_aprox(i,k-1) + ...
            u_aprox(i-1,k-1));
        % Se hace un esquema de tipo Lax-Wendroff para todos
        % los niveles de tiempo.
    end
end

%% Calculamos la solución exacta
for k = 1:t
    for i = 1:m
        u_exacta(i,k) = f(x(i),a,T(k)); % Se calcula la solución
            % exacta para comparar.
    end
end
end
```

Apéndice B

Códigos del Capítulo 2

B.1. Diferencias Finitas Generalizadas para la aproximación de la ecuación de Poisson.

```
function [phi_aprox, phi_exacta] = GPoisson2D(x,y,phi,f)
% Función que calcula una aproximación a la solución de la
% ecuación de Poisson en 2D utilizando Diferencias Finitas
% Generalizadas.
%
% phi_xx + phi_yy = f
%
% Argumentos de entrada
%     x           Matriz           Coordenadas de la malla en x.
%     y           Matriz           Coordenadas de la malla en y.
%     phi         Función          Función para condición de frontera.
%     f           Función          Función para lado derecho.
%
% Argumentos de salida
%     u_aprox     Matriz           Matriz con la solución aproximada.
%
% Ejemplo de uso:
%     [u_aprox] = GPoisson2D(x,y,@phi,@f);
```

```

%
% Gerardo Tinoco Guerrero
% Universidad Michoacana de San Nicol\`{a}s de Hidalgo

%% Se inicializan las variables
close all
[m,n]      = size(x);          % Se calcula el tamaño de la malla.
phi_aprox  = zeros(m,n);      % Se inicializa phi_aprox con ceros.
Gamma      = zeros(m,n,9);    % Inicializamos Gamma con ceros.
err        = 1;               % Se inicializa err con 1.
tol        = 1e-6;           % Se impone una tolerancia para err.

%% Agregamos la condici\`{o}n de frontera
for i = 1:m
    phi_aprox(i,1) = phi(x(i,1),y(i,1)); % Se agrega la condici\`{o}n
                                          % de frontera en y = 0.
    phi_aprox(i,n) = phi(x(i,n),y(i,n)); % Se agrega la condici\`{o}n
                                          % de frontera en y = 1.
end
for j = 2:n
    phi_aprox(1,j) = phi(x(1,j),y(1,j)); % Se agrega la condici\`{o}n
                                          % de frontera en x = 0.
    phi_aprox(m,j) = phi(x(m,j),y(m,j)); % Se agrega la condici\`{o}n
                                          % de frontera en x = 1.
end

end

%% Calculamos los valores Gamma necesarios
for i = 2:m-1
    for j = 2:n-1
        dx = [x(i+1,j)-x(i,j), x(i+1,j+1)-x(i,j), x(i,j+1)-x(i,j), ...
              x(i-1,j+1)-x(i,j), x(i-1,j)-x(i,j), x(i-1,j-1)-x(i,j), ...
              x(i,j-1)-x(i,j), x(i+1,j-1)-x(i,j)]; % Se calcula dx.

        dy = [y(i+1,j)-y(i,j), y(i+1,j+1)-y(i,j), y(i,j+1)-y(i,j), ...
              y(i-1,j+1)-y(i,j), y(i-1,j)-y(i,j), y(i-1,j-1)-y(i,j), ...

```

```

        y(i,j-1)-y(i,j), y(i+1,j-1)-y(i,j)];    % Se calcula dy.

    M = [dx ; dy ; dx.*dx ; dx.*dy ; dy.*dy];
    M = pinv(M);                                % Se ensambla la matriz M
    YY = M*[0 0 2 0 2]';                        % Se resuelve el sistema lineal.
    Gamma(i,j,:) = [-sum(YY);YY]; % Se calcula Gamma_0.
end
end

%% Llenamos los nodos interiores
while err >= tol
    err = 0;                                     % Se cambia err por 0 en cada iteraci\'}{o}n.
    for i = 2:m-1
        for j = 2:(m-1)
            t = (f(x(i,j),y(i,j)) - (Gamma(i,j,2)*phi_aprox(i+1,j) + ...
                Gamma(i,j,3)*phi_aprox(i+1,j+1) + ...
                Gamma(i,j,4)*phi_aprox(i,j+1) + ...
                Gamma(i,j,5)*phi_aprox(i-1,j+1) + ...
                Gamma(i,j,6)*phi_aprox(i-1,j) + ...
                Gamma(i,j,7)*phi_aprox(i-1,j-1) + ...
                Gamma(i,j,8)*phi_aprox(i,j-1) + ...
                Gamma(i,j,9)*phi_aprox(i+1,j-1)))/Gamma(i,j,1);
                % Se calcula la soluci\'}{o}n aproximada.
            err = max(err,abs(t - phi_aprox(i,j)));
                % Se calcula un nuevo err.
            phi_aprox(i,j) = t;
                % Se asigna el valor de phi_aprox.
        end
    end
end

%% Calculamos la soluci\'}{o}n exacta
phi_exacta = phi(x,y);    % Se calcula la soluci\'}{o}n exacta.
end

```

```
function [phi] = phi(x,y)
    phi = 2.*exp(2*x+y);
end
```

```
function [f] = f(x,y)
    f = 10.*exp(2*x+y);
end
```

Apéndice C

Códigos del Capítulo 4

C.1. Esquema de Diferencias Finitas Generalizadas Para la Aproximación de la Ecuación de Advección

C.1.1. Rutina Principal

```
function [u, ur] = iAdvCN(x, y, t, f, a, b)

% iAdCN.m (Irregular Advection with Crank-Nicolson)
%
% Esta función aproxima de manera implícita la solución de la ecuación
% de Advección por medio de un esquema de Diferencias Finitas
% Generalizadas.
%
% Ensambla las matrices K y R para resolver el problema y actualiza el
% valor de la solución en cada nivel de tiempo utilizando un stencil
% de 9 nodos.
%
% Al final, grafica la solución aproximada, la solución real del
% problema y el error calculado como la diferencia entre la solución real
% y la aproximada.
%
% Parámetros de entrada:
%
```

```

%      x,y      Matrices      Malla estructurada de la regi\on.
%      t        Entero        Cantidad deseada de pasos en el tiempo.
%      f        Función       Fuci\on de condici\on inicial y de
%                               frontera
%      a,b      Reales        Velocidad de advecci\on de la onda.
%
% Par\ametros de salida:
%
%      u        Matriz        Soluci\on aproximada.
%      ur       Matriz        Soluci\on real.
%
% Ejemplo de ejecuci\on:
%      [u,ur] = iAdCN(x, y, 1000, @fCAB, 0.3, 0.3);
%
% M.C. Gerardo Tinoco Guerrero
%      Abril de 2018
%
% \Ultima modificaci\on
%      7 de Abril de 2020

%% Se inicializan variables
close all
tic
T      = linspace(0, 1, t);
[m, n] = size(x);
dt     = T(2) - T(1);
u      = zeros(m, n, t);
ur     = zeros(m, n, t);

%% Se llena la condici\{o}n inicial
for i = 1:m
    for j = 1:n
        u(i, j, 1) = f([x(i, j), y(i, j)], T(1), a, b);
    end
end
end

```

```

%% Se llena la condici\'}n de frontera
for k = 2:t
    for i = 1:m
        u(i, 1, k) = f([x(i, 1), y(i, 1)], T(k), a, b);
    end
    for j = 2:n
        u(1, j, k) = f([x(1, j), y(1, j)], T(k), a, b);
    end
end

%% Se hace el c\'}lculo de K y matrices relacionadas
K = kAdv(x, y, 0, 0, 0, -a*dt, -b*dt, 0);
%K = kAdv(x, y, (a*dt)^2, a*b*dt^2, (b*dt)^2, -a*dt, -b*dt, 0);

Kp = pinv(eye(m*n) - (1-lambda)*K)*(eye(m*n) + lambda*K);

for k = 2:t
    R = rAdv(u, m, n, k);
    for i = 1:m
        for j = 1:n
            urr(i + (j-1)*m, 1) = u(i, j, k-1);
        end
    end
    un = Kp*urr + R;
    for i = 2:m
        for j = 2:n
            u(i, j, k) = un(i + (j-1)*m);
        end
    end
end

%% Se calcula la soluci\'}n real.
for k = 1:t
    for i = 1:m

```

```

        for j = 1:n
            ur(i, j, k) = f([x(i, j), y(i, j)], T(k), a, b);
        end
    end
end

time = toc;
fprintf('Tiempo transcurrido en el problema: %f Segundos\n', time)
end

```

C.1.2. Rutinas Adicionales

```
function K = kAdv(x, y, A, B, C, D, E, F)
```

```

% kAdv.m (K for Advection)
%
% Esta funci\on ensambla la matriz K necesaria para el m\etodo de
% Diferencias Finitas Generalizadas.
%
% Calcula las gamas tomando en cuenta los parámatros A, B, C, D, E, F del
% operador diferencial de primer orden.
%
% Par\ametros de entrada:
%
%      x,y      Matrices      Malla estructurada de la regi\on.
%      A        Real          Coeficiente de la segunda parcial en x.
%      B        Real          Coeficiente del t\ermino cruzado.
%      C        Real          Coeficiente de la segunda parcial en y.
%      D        Real          Coeficiente de la parcial en x.
%      E        Real          Coeficiente de la parcial en y.
%      F        Real          Coeficiente de fuentes y sumideros.
%
% Par\ametros de salida:
%
%      K        Matriz        Matriz K con estructura de Diferencias
%                               Finitas Generalizadas

```

```

%
% Se ejecuta autom\`aticamente desde las rutinas:
%     iAdvEu.m
%     iAdvCN.m
%
% M.C. Gerardo Tinoco Guerrero
%     Abril de 2018
%
% \`Ultima modificaci\`on
%     7 de Abril de 2020

[m, n] = size(x);
K      = sparse(m*n, m*n);

%% Llenado de las ecuaciones en nodos que no son frontera
for i = 2:m-1
    for j = 2:n-1
        u                = x((i-1):(i+1), (j-1):(j+1));
        v                = y((i-1):(i+1), (j-1):(j+1));
        I                = setdiff(1:9, 5);
        dx                = u(I) - u(5);
        dy                = v(I) - v(5);
        M                = [dx; dy; dx.*dx; dx.*dy; dy.*dy];
        Gamma            = pinv(M)*[D E 2*A B 2*C]';
        Gamma            = [F - sum(Gamma); Gamma];
        p                = m*(j-1) + i;
        K(p, (p-1):(p+1)) = [Gamma(5) Gamma(1) Gamma(6)];
        K(p, [(p-1):(p+1)] - m) = [Gamma(2) Gamma(3) Gamma(4)];
        K(p, [(p-1):(p+1)] + m) = [Gamma(7) Gamma(8) Gamma(9)];
    end
end

%% Frontera superior
for i = 2:m-1
    u                = x((i-1):(i+1), (n-2):(n));

```

```

v = y((i-1):(i+1), (n-2):(n));
I = setdiff(1:9, 8);
dx = u(I) - u(8);
dy = v(I) - v(8);
M = [dx; dy; dx.*dx; dx.*dy; dy.*dy];
Gamma = pinv(M)*[D E 2*A B 2*C]';
Gamma = [F - sum(Gamma); Gamma];
p = m*(n-1) + i;
K(p, (p-1):(p+1)) = [Gamma(8) Gamma(1) Gamma(9)];
K(p, [(p-1):(p+1)] - m) = [Gamma(5) Gamma(6) Gamma(7)];
K(p, [(p-1):(p+1)] - 2*m) = [Gamma(2) Gamma(3) Gamma(4)];
end

%% Frontera derecha
for j = 2:n-1
u = x((m-2):(m), (j-1):(j+1));
v = y((m-2):(m), (j-1):(j+1));
I = setdiff(1:9, 6);
dx = u(I) - u(6);
dy = v(I) - v(6);
M = [dx; dy; dx.*dx; dx.*dy; dy.*dy];
Gamma = pinv(M)*[D E 2*A B 2*C]';
Gamma = [F - sum(Gamma); Gamma];
p = m*j;
K(p, (p-2):(p)) = [Gamma(5) Gamma(6) Gamma(1)];
K(p, [(p-2):(p)] - m) = [Gamma(2) Gamma(3) Gamma(4)];
K(p, [(p-2):(p)] + m) = [Gamma(7) Gamma(8) Gamma(9)];
end

%% Esquina superior derecha
u = x((m-2):(m), (n-2):(n));
v = y((m-2):(m), (n-2):(n));
I = setdiff(1:9, 9);
dx = u(I) - u(9);

```

```

dy                = v(I) - v(9);
M                = [dx; dy; dx.*dx; dx.*dy; dy.*dy];
Gamma            = pinv(M)*[D E 2*A B 2*C]';
Gamma            = [F - sum(Gamma); Gamma];
p                = m*n;
K(p, (p-2):(p)) = [Gamma(8) Gamma(9) Gamma(1)];
K(p, [(p-2):(p)] - m) = [Gamma(5) Gamma(6) Gamma(7)];
K(p, [(p-2):(p)] - 2*m) = [Gamma(2) Gamma(3) Gamma(4)];

%% Diagonales para fronteras izquierda e inferior.
for j = 1:n
    p      = 1 + (j-1)*m;
    K(p, p) = 0;
end

for i = 2:m
    K(i, i) = 0;
end
end

function R = rAdv(u, m, n, k)

% rAdv.m (R for Advection)
%
% Esta funci\on ensambla la matriz R necesaria para el m\etodo de
% Diferencias Finitas Generalizadas.
%
% Par\ametros de entrada:
%
%      u          Matriz          Matriz con la aproximaci\on calculada
%              hasta el momento.
%      m          Real            Tama\~no de la malla en la direcci\on x.
%      n          Real            Tama\~no de la malla en la direcci\on x.
%      k          Real            Paso de tiempo en el que se trabaja.
%

```

```

% Par\`ametros de salida:
%
%      R      Matriz      Matriz R con estructura de Diferencias
%                        Finitas Generalizadas
%
% Se ejecuta autom\`aticamente desde las rutinas:
%      iAdvEU.m
%      iAdvCN.m
%
% M.C. Gerardo Tinoco Guerrero
%      Abril de 2018
%
% \`Ultima modificaci\`on
%      7 de Abril de 2020

R = sparse(m*n, 1);

% Frontera izquierda
for j = 1:n
    R(1 + (j-1)*m, 1) = u(1, j, k) - u(1, j, k-1);
end

% Frontera inferior
for i = 2:m
    R(i, 1) = u(i, 1, k) - u(i, 1, k-1);
end
end

```

C.2. Esquema de Diferencias Finitas Generalizadas Para la Aproximación de la Ecuación de Difusión

C.2.1. Rutina Principal

```

function [u, ur] = iDiffCN(x, y, t, f, nu)

% iDiffCN.m (Irregular Advection with Crank-Nicolson)

```

```
%
% Esta función aproxima de manera implícita la solución de la ecuación
% de Difusión por medio de un esquema de Diferencias Finitas
% Generalizadas.
%
% Ensambla las matrices K y R para resolver el problema y actualiza el
% valor de la solución en cada nivel de tiempo utilizando un stencil
% de 9 nodos.
%
% Al final, grafica la solución aproximada, la solución real del
% problema y el error calculado como la diferencia entre la solución real
% y la aproximada.
%
% Parámetros de entrada:
%
%      x,y      Matrices      Malla estructurada de la región.
%      t        Entero        Cantidad deseada de pasos en el tiempo.
%      f        Función       Función de condición inicial y de
%                               frontera
%      nu       Real          Coeficiente de difusividad.
%
% Parámetros de salida:
%
%      u        Matriz        Solución aproximada.
%      ur       Matriz        Solución real.
%
% Ejemplo de ejecución:
%      [u,ur] = iDiffCN(x, y, 1000, @fDIF, 0.4);
%
% M.C. Gerardo Tinoco Guerrero
%      Abril de 2018
%
% Última modificación
%      7 de Abril de 2020
```

```
%% Se inicializan las variables necesarias.
close all
tic
T = linspace(0, 1, t);
[m, n] = size(x);
dt = T(2) - T(1);
u = zeros(m, n, t);
ur = zeros(m, n, t);
lambda = .5;

%% Se llena la condición inicial.
for i = 1:m
    for j = 1:n
        u(i, j, 1) = f([x(i, j), y(i, j)], T(1), nu);
    end
end

%% Se llenan las condiciones de frontera.
for k = 2:t
    for i = 1:m
        u(i, 1, k) = f([x(i, 1), y(i, 1)], T(k), nu);
        u(i, n, k) = f([x(i, n), y(i, n)], T(k), nu);
    end
    for j = 2:n - 1
        u(1, j, k) = f([x(1, j), y(1, j)], T(k), nu);
        u(m, j, k) = f([x(m, j), y(m, j)], T(k), nu);
    end
end

%% Se hace el cálculo de K y matrices relacionadas.
K = kDiff(x, y, nu*dt, 0, nu*dt, 0, 0, 0);

Kp = pinv(eye(m*n) - (1 - lambda)*K)*(eye(m*n) + lambda*K);

for k = 2:t
```

```

    R = rDiff(u, m, n, k);
    for i = 1:m
        for j = 1:n
            urr(i + (j - 1)*m, 1) = u(i, j, k - 1);
        end
    end
    un = Kp*urr + R;
    for i = 2:m - 1
        for j = 2:n - 1
            u(i, j, k) = un(i + (j - 1)*m);
        end
    end
end

%% Se calcula la solución real.
for k = 1:t
    for i = 1:m
        for j = 1:n
            ur(i, j, k) = f([x(i, j), y(i, j)], T(k), nu);
        end
    end
end
time = toc;
fprintf('Tiempo transcurrido en el problema: %f Segundos\n', time)
end

```

C.2.2. Rutinas Adicionales

```
function K = kDiff(x, y, A, B, C, D, E, F)
```

```
% kDiff.m (K for Diffusion)
```

```
%
```

```
% Esta función ensambla la matriz K necesaria para el método de
```

```
% Diferencias Finitas Generalizadas.
```

```
%
```

```
% Calcula las gamas tomando en cuenta los parámetros A, B, C, D, E, F del
```

```

% operador diferencial de primer orden.
%
% Parámetros de entrada:
%
%      x,y      Matrices      Malla estructurada de la región.
%      A        Real          Coeficiente de la segunda parcial en x.
%      B        Real          Coeficiente del término cruzado.
%      C        Real          Coeficiente de la segunda parcial en y.
%      D        Real          Coeficiente de la parcial en x.
%      E        Real          Coeficiente de la parcial en y.
%      F        Real          Coeficiente de fuentes y sumideros.
%
% Parámetros de salida:
%
%      K          Matriz       Matriz K con estructura de Diferencias
%                               Finitas Generalizadas
%
% Se ejecuta automáticamente desde las rutinas:
%      iDiffEu.m
%      iDiffCN.m
%
% M.C. Gerardo Tinoco Guerrero
%      Abril de 2018
%
% Última modificación
%      7 de Abril de 2020

[m,n] = size(x);
K      = sparse(m*n, m*n);

%% Llenado de las ecuaciones en nodos que no son frontera
for i = 2:m-1
    for j = 2:n-1
        u      = x((i-1):(i+1), (j-1):(j+1));
        v      = y((i-1):(i+1), (j-1):(j+1));
    end
end

```

```

        I                = setdiff(1:9, 5);
        dx               = u(I) - u(5);
        dy               = v(I) - v(5);
        M                = [dx; dy; dx.*dx; dx.*dy; dy.*dy];
        Gamma            = pinv(M)*[D E 2*A B 2*C]';
        Gamma            = [F - sum(Gamma); Gamma];
        p                = m*(j-1) + i;
        K(p, (p-1):(p+1)) = [Gamma(5) Gamma(1) Gamma(6)];
        K(p, [(p-1):(p+1)] - m) = [Gamma(2) Gamma(3) Gamma(4)];
        K(p, [(p-1):(p+1)] + m) = [Gamma(7) Gamma(8) Gamma(9)];
    end
end

%% Diagonales para las fronteras
for j = 1:n
    p          = 1 + (j-1)*m;
    K(p, p)    = 0;
    K(m*j, m*j) = 0;
end

for i = 2:m-1
    K(i, i)          = 0;
    K(i + (n-1)*m, i + (n-1)*m) = 0;
end
end

function R = rDiff(u, m, n, k)

% rAdvDiff.m (R for Diffusion)
%
% Esta funci\on ensambla la matriz R necesaria para el m\etodo de
% Diferencias Finitas Generalizadas.
%
% Par\ametros de entrada:
%
```

```

%      u          Matriz      Matriz con la aproximaci\'on calculada
%                               hasta el momento.
%      m          Real        Tama\~no de la malla en la direcci\'on x.
%      n          Real        Tama\~no de la malla en la direcci\'on x.
%      k          Real        Paso de tiempo en el que se trabaja.
%
% Par\'ametros de salida:
%
%      R          Matriz      Matriz R con estructura de Diferencias
%                               Finitas Generalizadas
%
% Se ejecuta autom\'aticamente desde las rutinas:
%      iDiffEu.m
%      iDiffCN.m
%
% M.C. Gerardo Tinoco Guerrero
%      Abril de 2018
%
% \\'Ultima modificaci\'on
%      7 de Abril de 2020

R = sparse(m*n, 1);

for j = 1:n
    R(1 + (j-1)*m, 1) = u(1, j, k) - u(1, j, k-1);
    R(m*j, 1)          = u(m, j, k) - u(m, j, k-1);
end

for i = 2:m-1
    R(i, 1)            = u(i, 1, k) - u(i, 1, k-1);
    R(i + (n-1)*m, 1) = u(i, n, k) - u(i, n, k-1);
end
end

```

C.3. Esquema de Diferencias Finitas Generalizadas Para la Aproximación de la Ecuación de Advección-Difusión

C.3.1. Rutina Principal

```
function [u, ur] = iAdvDifCN(x, y, t, f, v, a, b, c)

% iADvDifCN.m (Irregular Advection-Diffusion with Crank-Nicolson)
%
% Esta función aproxima de manera implícita la solución de la ecuación
% de Advección-Difusión por medio de un esquema de Diferencias Finitas
% Generalizadas.
%
% Ensambla las matrices K y R para resolver el problema y actualiza el
% valor de la solución en cada nivel de tiempo utilizando un stencil
% de 9 nodos.
%
% Al final, grafica la solución aproximada, la solución real del
% problema y el error calculado como la diferencia entre la solución real
% y la aproximada.
%
% Parámetros de entrada:
%
%      x,y      Matrices      Malla estructurada de la región.
%      t        Entero        Cantidad deseada de pasos en el tiempo.
%      f        Función       Función de condición inicial y de
%                               frontera
%      v        Real          Coeficiente de Difusividad.
%      a,b      Reales         Velocidad de advección de la onda.
%      c        Entero        Selecciona el lugar inicial del
%                               contaminante.
%
% Parámetros de salida:
%
%      u        Matriz        Solución aproximada.
%      ur       Matriz        Solución real.
```

```
%
% Ejemplo de ejecuci\on:
%     [u, ur] = iAdvDifCN(x, y, 1000, @fAdvDifCN, 0.01, 0.3, 0.3, 2);
%
% M.C. Gerardo Tinoco Guerrero
% Abril de 2018
%
% \Ultima modificaci\on
% 7 de Abril de 2020

%% Se inicializan variables
close all
tic
T     = linspace(0, 1, t);
[m, n] = size(x);
dt    = T(2) - T(1);
u     = zeros(m, n, t);
ur    = zeros(m, n, t);
lambda = 0.5;

%% Se llena la condici\on inicial
for i = 1:m
    for j = 1:n
        u(i, j, 1) = f([x(i, j), y(i, j)], T(1), v, a, b, c);
    end
end

%% Se llena la condici\on de frontera
for k = 2:t
    for i = 1:m
        u(i, 1, k) = f([x(i, 1), y(i, 1)], T(k), v, a, b, c);
        u(i, n, k) = f([x(i, n), y(i, n)], T(k), v, a, b, c);
    end
    for j = 2:n
        u(1, j, k) = f([x(1, j), y(1, j)], T(k), v, a, b, c);
```

```

        u(m, j, k) = f([x(m, j), y(m, j)], T(k), v, a, b, c);
    end
end

%% Se hace el cálculo de K y matrices relacionadas
K = kAdvDiff(x, y, v*dt, 0, v*dt, - a*dt, - b*dt, 0);

Kp = pinv(eye(m*n) - (1 - lambda)*K)*(eye(m*n) + lambda*K);

for k = 2:t
    R = rAdvDiff(u, m, n, k);
    for i = 1:m
        for j = 1:n
            urr(i + (j-1)*m, 1) = u(i, j, k-1);
        end
    end
    un = Kp*urr + R;

    for i = 2:m-1
        for j = 2:n-1
            u(i, j, k) = un(i + (j-1)*m);
        end
    end
end

%% Se calcula la solución real.
for k = 1:t
    for i = 1:m
        for j = 1:n
            ur(i, j, k) = f([x(i, j), y(i, j)], T(k), v, a, b, c);
        end
    end
end
end

```

```

    time = toc;
    fprintf('Tiempo transcurrido en el problema: %f Segundos\n', time)
end

```

C.3.2. Rutinas Adicionales

```

function K = kAdvDiff(x, y, A, B, C, D, E, F)

% kAdvDiff.m (K for Advection-Diffusion)
%
% Esta funci\on ensambla la matriz K necesaria para el m\etodo de
% Diferencias Finitas Generalizadas.
%
% Calcula las gamas tomando en cuenta los parámatros A, B, C, D, E, F del
% operador diferencial de primer orden.
%
% Par\ametros de entrada:
%
%      x,y      Matrices      Malla estructurada de la regi\on.
%      A        Real          Coeficiente de la segunda parcial en x.
%      B        Real          Coeficiente del t\ermino cruzado.
%      C        Real          Coeficiente de la segunda parcial en y.
%      D        Real          Coeficiente de la parcial en x.
%      E        Real          Coeficiente de la parcial en y.
%      F        Real          Coeficiente de fuentes y sumideros.
%
% Par\ametros de salida:
%
%      K        Matriz        Matriz K con estructura de Diferencias
%                               Finitas Generalizadas
%
% Se ejecuta autom\aticamente desde las rutinas:
%      iAdvDifEu2.m
%      iAdvDifCN.m
%
% M.C. Gerardo Tinoco Guerrero

```

```

%      Abril de 2018
%
% \ 'Ultima modificaci\ 'on
%      7 de Abril de 2020

[m,n] = size(x);
K      = sparse(m*n, m*n);

%% Llenado de las ecuaciones en nodos que no son frontera
for i = 2:m-1
    for j = 2:n-1
        u          = x((i-1):(i+1), (j-1):(j+1));
        v          = y((i-1):(i+1), (j-1):(j+1));
        I          = setdiff(1:9, 5);
        dx         = u(I) - u(5);
        dy         = v(I) - v(5);
        M          = [dx; dy; dx.*dx; dx.*dy; dy.*dy];
        Gamma      = pinv(M)*[D E 2*A B 2*C]';
        Gamma      = [F - sum(Gamma); Gamma];
        p          = m*(j-1) + i;
        K(p, (p-1):(p+1)) = [Gamma(5) Gamma(1) Gamma(6)];
        K(p, [(p-1):(p+1)] - m) = [Gamma(2) Gamma(3) Gamma(4)];
        K(p, [(p-1):(p+1)] + m) = [Gamma(7) Gamma(8) Gamma(9)];
    end
end

%% Diagonales para las fronteras
for j = 1:n
    p          = 1 + (j-1)*m;
    K(p, p)    = 0;
    K(m*j, m*j) = 0;
end

for i = 2:m-1
    K(i, i)    = 0;

```

```

        K(i + (n-1)*m, i + (n-1)*m) = 0;
    end
end

function R = rAdvDiff(u, m, n, k)

% rAdvDiff.m (R for Advection-Diffusion)
%
% Esta funci\`on ensambla la matriz R necesaria para el m\`etodo de
% Diferencias Finitas Generalizadas.
%
% Par\`ametros de entrada:
%
%     u          Matriz      Matriz con la aproximaci\`on calculada
%                               hasta el momento.
%     m          Real        Tama\~no de la malla en la direcci\`on x.
%     n          Real        Tama\~no de la malla en la direcci\`on x.
%     k          Real        Paso de tiempo en el que se trabaja.
%
% Par\`ametros de salida:
%
%     R          Matriz      Matriz R con estructura de Diferencias
%                               Finitas Generalizadas
%
% Se ejecuta autom\`aticamente desde las rutinas:
%     iAdvDifEu2.m
%     iAdvDifCN.m
%
% M.C. Gerardo Tinoco Guerrero
%     Abril de 2018
%
% \`Ultima modificaci\`on
%     7 de Abril de 2020

    R = sparse(m*n, 1);

```

```
for j = 1:n
    R(1 + (j-1)*m, 1) = u(1, j, k) - u(1, j, k-1);
    R(m*j, 1)          = u(m, j, k) - u(m, j, k-1);
end

for i = 2:m-1
    R(i, 1)           = u(i, 1, k) - u(i, 1, k-1);
    R(i + (n-1)*m, 1) = u(i, n, k) - u(i, n, k-1);
end
end
```

Apéndice D

Videos de las Pruebas Numéricas

D.1. Ecuación de Advección

- Región CUAD:
<https://drive.google.com/drive/folders/1K22IUUV6TqtD75PEISRT5ZdYTdkmztGs3>
- Región CAB:
<https://drive.google.com/drive/folders/1Q0p9KE0C0rLkcqKbmB1S3QLubI3B8TYF>
- Región CUIT:
https://drive.google.com/drive/folders/1c2JN1MZYtbNOWTZAXziUxv2Ij4y_ScCv
- Región ZIRA:
https://drive.google.com/drive/folders/1gvhJJRBR1KrGy00_To1N8ITbMLsnjuSz

D.2. Ecuación de Difusión

- Región CUAD:
<https://drive.google.com/drive/folders/17BfPiMuEuvdUV1L80IDsX41N5-2I5twL>
- Región CAB:
<https://drive.google.com/drive/folders/13S1JLpncxHRlpZcUI7UXNx0YA5ihVmA->
- Región CUIT:
<https://drive.google.com/drive/folders/1wFGZfswfsa81XioKRrJEqwdh-RJ9UGAz>
- Región ZIRA:
<https://drive.google.com/drive/folders/1Le0fNPJcBRAMp9xBfaCWWEbvbC5DtQDC>

D.3. Ecuación de Advección-Difusión

- Región CUAD:
<https://drive.google.com/drive/folders/1d2xXt3dUErqZDPblwOLYzxYaXqJOLjQ6>
- Región CAB:
<https://drive.google.com/drive/folders/1hKhMyvoCIXxOukovk1mbXQWa6bodVghq>
- Región CUIT:
https://drive.google.com/drive/folders/1n6t7wnqw0d3j7QLhl0nryS58xj0Hr_GZ
- Región ZIRA:
<https://drive.google.com/drive/folders/1Z2zH94Qq3-2r47INjI93xRyBF5w6UfXK>

D.4. Ecuaciones de Aguas Someras

D.4.1. Forma Conservativa

- Región CUAD:
<https://drive.google.com/drive/folders/10Fe66-2DTrRfngSjn5BBxjpDAQUBeoXF>
- Región CAB:
<https://drive.google.com/drive/folders/1pRVat8m7VAC9hxPUUApRw4Tk8ZSI4uqH>
- Región CUIT:
https://drive.google.com/drive/folders/1u_3CmFzpS5_eYA6V-TpP1bDKHc1AY6ru
- Región ZIRA:
https://drive.google.com/drive/folders/16JrJzX5lZ7iPIbFE1GsadVBu6Uu1Vm_3

D.4.2. Forma No Conservativa

- Región CUAD:
<https://drive.google.com/drive/folders/1tp0Ap1vrml5ta7By4vGDlnLsdoPeEtPw>
- Región CAB:
https://drive.google.com/drive/folders/1D1999-dZiVY_TWOrnwhMQGUqgzPo_Y30

- Región CUIT:
https://drive.google.com/drive/folders/1C4gExR7tXiHwEBYmvICivvwqhlfn9_hY
- Región ZIRA:
https://drive.google.com/drive/folders/1rlg-a2ClhgVhZrCmzvqQNh4mSKhX1b_7

D.5. Transporte de contaminantes

D.5.1. Forma Conservativa

- Región CUAD:
<https://drive.google.com/drive/folders/1EqtD0qIX-x0Jepvsq3h75TyGjvhnmgCg>
- Región CAB:
<https://drive.google.com/drive/folders/15f45ReKJrKT7HX5G4DLaworS71MQgaKk>
- Región CUIT:
<https://drive.google.com/drive/folders/1DENmo6IVn0zRbE397dUb70qQ0x6jNqEr>
- Región ZIRA:
<https://drive.google.com/drive/folders/1z19hHyZA6o3t-pv3PtUiUMrwxC270eYn>

D.5.2. Forma No Conservativa

- Región CUAD:
https://drive.google.com/drive/folders/1XHVja_TZ75gmScfS93Jbq1gr3anhCRvM
- Región CAB:
https://drive.google.com/drive/folders/1Jw02y0QErI_HREkBbDSmVJv0kMU4u_KF
- Región CUIT:
<https://drive.google.com/drive/folders/1gjS7M-PV-gTGYByqTmyWtZs7csGPMZkN>
- Región ZIRA:
<https://drive.google.com/drive/folders/130S4Pqg9XPSeaGXGfRgfIYTSB8UgFwGR>

Índice alfabético

- Condiciones
 - de Dirichlet, 30
 - de la Superficie, 96
 - de Neumann, 30
 - de Robin, 30
 - del Fondo, 96
 - Iniciales y de frontera, 30
- Conservación
 - de la Salinidad, 96
 - de Masa, 96
 - del Momento, 95
- Consistencia, 65
- Convergencia, 64
- Diferencias Finitas, 33
 - Centradas, 34
 - de Segundo Orden, 35
 - en Regiones No Rectangulares, 42
 - en Regiones Rectangulares, 36
 - Hacia Adelante, 33
 - Hacia Atrás, 34
- Diferencias Finitas Generalizadas, 83, 89
- Ecuaciones
 - de Aguas Someras, 92, 99, 101, 102
 - de Navier-Stoke, 95
- Ecuaciones Diferenciales Parciales, 27
 - Elípticas, 29
 - Hiperbólicas, 29
 - Parabólicas, 29
- Ecuación
 - de Advección, 103
 - de Calor, 105
 - de Difusión, 105
 - de Euler, 94
 - de Poisson, 38
- Error
 - de un Paso, 65
 - Local de Truncamiento, 65
- Escalas, 97
 - Horizontales, 98
 - Verticales, 98
- Esfuerzos
 - Viscosos, 95
- Estabilidad, 65
 - von Neumann, 66
- Fluido
 - Incompresible, 96
- Forma Conservativa, 101
- Forma no Conservativa, 102
- Fuerza
 - de Coriolis, 95
- Generación Numérica de Mallas, 70
 - Algebraica, 71
 - Elíptica, 75
 - Hiperbólica, 78

- Parabólica, 78
 - Por Mapeo, 78
 - Variacional Continua, 80
 - Variacional Discreta, 81
- Interpolación Transfinita, 72
- Leyes de Conservación, 31
 - no Lineales, 32
- Newton, 93
- Teorema
 - de Equivalencia de Lax, 64, 113
 - de Expansión en series de Taylor, 33
 - de la Divergencia de Gauss, 49
- Volúmenes Finitos, 49
- von Neumann, 66

Bibliografía

- [1] Francisco Alcrudo y Pilar García-Navarro. A high-resolution godunov-type scheme in finite volumes for the 2d shallow-water equations. *International Journal of Numerical Methods in Fluids*, 16:489 – 505, 1993.
- [2] Anthony A. Amsden y Cyril E. Hirt. A simple scheme for generating general curvilinear grids. *Journal of Computational Physics*, 11(3):348–359, 1973.
- [3] Pablo Barrera-Sánchez y Longina Castellanos-Noda. Métodos de optimización de gran escala para el problema de generación de redes Óptimas. *DGAPA-UNAM*, 1994.
- [4] Pablo Barrera-Sánchez, Longina Castellanos-Noda, Francisco Javier Domínguez-Mota, Guilmer González-Flores, y Angel Pérez-Domínguez. Adaptive discrete harmonic grid generation. *Mathematics and Computer in Simulations*, 79(6):1792–1809, 2009.
- [5] Pablo Barrera-Sánchez, Longina Castellanos-Noda, y Angel Pérez-Domínguez. Métodos variacionales discretos para la generación de mallas. *DGAPA-UNAM*, 1994.
- [6] Pablo Barrera-Sánchez, Guilmer González-Flores, Angel Pérez-Domínguez, y Longina Castellanos-Noda. Manual de usuarios del sistema unamalla. *DGAPA-UNAM*, 1994.
- [7] Pablo Barrera-Sánchez, Angel Pérez-Domínguez, y Longina Castellanos-Noda. Curvilinear coordinate system generation over plane irregular regions. *Vínculos Matemáticos, Facultad de Ciencias, UNAM*, 133, 1992.
- [8] Jeremiah U. Brackbill y Jeffrey S. Saltzman. Adaptive zoning for singular problems in two dimensions. *Journal of Computational Physics*, 46(3):342–368, 1982.
- [9] José Castillo-Moreno. *Numerical Grid Generation in Computational Fluid Dynamics*, cap. Mathematical Aspects of Numerical Grid Generation I. J. Häuser and Cedric Taylor, Swansea, UK, 1986.

-
- [10] José Castillo-Moreno. *On Variational Grid Generation*. Tesis Doctoral, The University Of New Mexico, Albuquerque, New Mexico, 1987.
- [11] José Castillo-Moreno, Stanly Steinber, y Patrick J. Roache. Mathematical aspects of numerical grid generation ii. *J. Comp. and Appl. Math*, 20:127–135, 1987.
- [12] José Castillo-Moreno, Stanly Steinber, y Patrick J. Roache. On the folding of numerically generated grids. use of a reference grid. *Comm. Applied Num. Methods*, 4:471–481, 1988.
- [13] José Castillo-Moreno, Stanly Steinber, y Patrick J. Roache. Parameter estimation in variational grid generation. *Appl. Math. and Comp.*, 28(2):1–23, 1988.
- [14] Michael Anthony Celia y William Guerin Gray. *Numerical Methods for Differential Equations: Fundamental Concepts for Scientific and Engineering Applications*. Prentice Hall, 1992.
- [15] Victorita Dolean, Pierre Jolivet, y Frédéric Nataf. *An Introduction to Domain Decomposition Methods: Algorithms, Theory, and Parallel Implementation*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2015.
- [16] Francisco Javier Domínguez-Mota. *Sobre la Generación Variacional Discreta de Mallas Casiortogonales en el Plano*. Tesis Doctoral, Facultad de Ciencias. UNAM, 2005.
- [17] Francisco Javier Domínguez-Mota, Sanzon Mendoza-Armenta, Gerardo Tinoco-Guerrero, y José Gerardo Tinoco-Ruiz. Numerical solution of poisson-like equations with robin boundary conditions using a finite difference scheme defined by an optimality condition. *IMACS Series in Computational and Applied Mathematics: MASCOT 2011*, 2012.
- [18] Francisco Javier Domínguez-Mota, Sanzon Mendoza-Armenta, y José Gerardo Tinoco-Ruiz. Finite difference schemes satisfying an optimality condition. *IMACS Series in Computational and Applied Mathematics: MASCOT 2010*, 2011.
- [19] Boyce William E. y Diprima Richard C. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. John Wiley & Sons, Inc, 1965.
- [20] Smith R. E. *Numerical Grid Generation: Foundations and Applications*, cap. Algebraic Grid Generation, págs. 137–170. Joe F. Thompson, North Holland, New York, 1982.

- [21] P. R. Eiseman. *Numerical Grid Generation: Foundations and Applications*, cap. Orthogonal Grid Generation, págs. 331–351. Joe F. Thompson, North Holland, New York, 1982.
- [22] Pablo Michel Fernández-Valdés, Francisco Javier Domínguez-Mota, Gerardo Tinoco-Guerrero, y José Gerardo Tinoco-Ruiz. Un esquema simplificado de primer orden para la solución de la ecuación de poisson en regiones irregulares del plano. *II Encuentro Cuba-México de Métodos Numéricas y Optimización*, 2013.
- [23] J. C. Gonzalez-Aguirre, Maria Elena Vazquez-Cendon, y Justino Alavez-Ramirez. Numerical simulation of the floods in villahermosa mexico using the iber code. *Ingeniería del Agua*, 20(4):201–216, 2016.
- [24] Guilmer González-Flores. *Generación de Mallas en Regiones Planas Irregulares*. Tesis de licenciatura, Universidad Autónoma de Yucatán, Mérida, Yucatán, 1994.
- [25] David Gottlieb y Steven A. Orszag. *Numerical Analysis of Spectral Methods : Theory and Applications*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1977.
- [26] Denis S. Grebenkov y Binh-Thanh Nguyen. Geometrical structure of laplacian eigenfunctions. *SIAM REVIEW*, 55(4):601 – 667, 2013.
- [27] Peter Henrici. *Applied and Computational Complex Analysis, 3 Volume Set*. Wiley Classics Library. John Wiley, 1993.
- [28] Arieh Iserles. *A First Course in the Numerical Analysis of Differential Equations*. Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press, 2008.
- [29] Sergey Alexandrovich Ivanenko. Generation of non-degenerate meshes. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 28(5):141–146, 1988.
- [30] Sergey Alexandrovich Ivanenko. Adaptive grids and grids on surfaces. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 33(9):1179–1193, 1993.
- [31] Sergey Alexandrovich Ivanenko y Alexander A. Charakhch'yan. Curvilinear grids of convex quadrilaterals. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 28(2):126–133, 1988.
- [32] Gordon W. J. y Hall C. A. Construction of curvilinear coordinate systems and applications to mesh generations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 7:461–477, 1973.

- [33] Gordon W. J. y Thiel L. C. *Numerical Grid Generation: Foundations and Applications*, cap. Transfinite Mappings and Their Applications to Grid Generation, págs. 171–192. Joe F. Thompson, North Holland, New York, 1982.
- [34] Patrick Knupp y Stanly Steinber. *Fundamentals of Grid Generation*. CRC Press. Boca Raton, 1993.
- [35] Elsgoltz L. *Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional*. MIR, Moscu, Russia, 2 ed^{ón}., 1977.
- [36] Olli Lehto y K. I. Virtanen. *Quasiconformal Mappings in the Plane*, tomo 126 de *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1973.
- [37] Randall J. LeVeque. *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press, 2004.
- [38] Randall J. LeVeque. *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2007.
- [39] Gélfand I. M. y Fomin S. V. *Calculus of variations*. Prentice-Hall, 1963.
- [40] C. W. Mastin. *Numerical Grid Generation: Foundations and Applications*, cap. Error Induced by Coordinate Systems, págs. 31–40. Joe F. Thompson, North Holland, New York, 1982.
- [41] V. P. Mijáilov. *Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales*. Mir. Moscú, 1978.
- [42] Cleve R. Moler. Matlab: The language of technical computig. 2016. URL <http://www.mathworks.com/products/matlab/>.
- [43] G. Moretti. Grid generation using classical techniques. *NASA Conference Publication No. 2166 on Numerical Grid Generation Techniques*, págs. 1–35, 1980.
- [44] Dennis C. Prieve. *A Course in Fluid Mechanics with Vector Field Theory*. Carnegie Mellon University, 2000.
- [45] Eiseman P. R. Coordinate generation with precise controls over mesh properties. *J. Comp. Physucs*, 47(331-351), 1982.
- [46] Patrick J. Roache y Stanly Steinber. A new approach to grid generation using a variational formulation. En *7th Computational Physics Conference*, 85-1527, págs. 360–370. AIAA, 1985.

-
- [47] Walter Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*. International Series in Pure and Applied Mathematics, 2 ed^{ón}., 1976.
- [48] Ercília S. The controversial stability analysis. *Appl. Math. and Comp.*, 145:777–794, 2003.
- [49] William Schiesser. *The Numerical Method of Lines*. San Diego : Academic Press, 1991.
- [50] Albert Seidl y Helmut Klose. Numerical conformal mapping of a towel-shaped region onto a rectangle. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 6(4):833–842, 1985.
- [51] G. D. Smith. *Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods*. Oxford Applied Mathematics and Computing Science. Oxford University Press, 1986.
- [52] Stanly Steinber y Patrick J. Roache. Variational grid generation. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 2(1):71–96, 1986.
- [53] John C. Strikwerda. *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2004.
- [54] J. W. Thomas. *Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods*, tomo 2 de *Texts in Applied Mathematics*. Springer, 1995.
- [55] Joe F. Thompson, Frank C. Thames, y C. Wayne Mastin. Automatic numerical generation od body-fitted curvilinear coordinate systems for field containing any number of arbitrary two-dimensional bodies. *Journal of Computational Physics*, 15(3):299–319, 1974.
- [56] Gerardo Tinoco-Guerrero. *Solución Numérica de la Ecuación de Advección Empleando Mallas Estructuradas Sobre Regiones Planas Irregulares Utilizando Un Esquema De Diferencias Finitas*. Tesis de Licenciatura, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, 2014.
- [57] Gerardo Tinoco-Guerrero. *Modelado de Problemas de Aguas Someras en Regiones Irregulares Utilizando un Esquema de Diferencias Finitas Generalizadas*. Tesis de Maestría, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, 2016.

- [58] Gerardo Tinoco-Guerrero, Francisco Javier Domínguez-Mota, Ariana Gaona-Arias, Martha Leticia Ruiz-Zavala, y José Gerardo Tinoco-Ruiz. A stability analysis for a generalized finiti-difference scheme applied to the pure advection equation. *Mathematics and Computer in Simulations*, 147:293 – 300, 2018.
- [59] Gerardo Tinoco-Guerrero, Francisco Javier Domínguez-Mota, y José Gerardo Tinoco-Ruiz. Stability aspects of a modified lax-wendroff scheme for irregular 2d regions. *IMACS Series in Computational and Applied Mathematics: MASCOT 2015*, 20:161 – 170, 2015.
- [60] Gerardo Tinoco-Guerrero, Francisco Javier Domínguez-Mota, y José Gerardo Tinoco-Ruiz. A study of the stability for a generalized finite-difference scheme applied to the advection-diffusion equation. *Mathematics and Computer in Simulations*, 2020.
- [61] Gerardo Tinoco-Guerrero, Francisco Javier Domínguez-Mota, José Gerardo Tinoco-Ruiz, y Juan Salvador Lucas-Martínez. Aproximación de la ecuación de advección en regiones irregulares utilizando un método de líneas y diferencias finitas generalizadas. *Revista Mexicana de Métodos Numéricos*, 2(2), 2018.
- [62] Gerardo Tinoco-Guerrero, Francisco Javier Domínguez-Mota, José Gerardo Tinoco-Ruiz, Juan Salvador Lucas-Martínez, Narciso Salvador Tinoco-Guerrero, Matti Leppäranta, y Ivan Mammarella. A generalized finite difference-volume hybrid method applied to shallow-water equations. *Revista Mexicana de Métodos Numéricos*, 4(2):1–35, 2020.
- [63] José Gerardo Tinoco-Ruiz. *Funcionales Discretos para la Generación de Mallas Suaves y Convexas Sobre Regiones Planas Irregulares*. Tesis Doctoral, CIMAT, Guanajuato, Guanajuato, 1997.
- [64] José Gerardo Tinoco-Ruiz, Francisco Javier Domínguez-Mota, Mario Enrique Equihua-Tinoco, Sanzon Mendoza-Armenta, y Gerardo Tinoco-Guerrero. Solución de ecuaciones diferenciales parciales elípticas en el plano usando un esquema general de diferencias finitas consistente. *Memorias de Congreso de Ciencia y Tecnología de COECyT*, 2010.
- [65] José Gerardo Tinoco-Ruiz, Francisco Javier Domínguez-Mota, Juan Salvador Lucas-Martínez, y Gerardo Tinoco-Guerrero. Study of the stability of a generalized finite difference scheme applied to the diffusion equation in irregular 2d space regions using

- convex grids. *IMACS Series in Computational and Applied Mathematics: MASCOT 2018*, 2019.
- [66] José Gerardo Tinoco-Ruiz, Francisco Javier Domínguez-Mota, Sanzon Mendoza-Armenta, y Gerardo Tinoco-Guerrero. Solving stokes equation in plane irregular region using an optimal consistent finite difference scheme. *20th International Meshing Roundtable*, 2011.
- [67] José Gerardo Tinoco-Ruiz, Francisco Javier Domínguez-Mota, Gerardo Tinoco-Guerrero, Pablo Michel Fernández-Valdés, y Sanzon Mendoza-Armenta. Numerical solution of differential equations in irregular plane regions using quality structured convex grids. *International Journal of Modeling, Simulation and Scientific Computing*, 4(2), 2013.
- [68] F. Toledo. *Métodos Numéricos para Mapeo Conforme con Aplicación a la Generación de Mallas*. Proyecto Fin de Carrera, Facultad de Ciencias. UNAM, 1995.
- [69] Anthony J. Tromanl y Jerrold E. Marsden. *Cálculo Vectorial*. Addison-Wesley, 3 ed^{ón}., 1991.
- [70] Saunders B. V. Algebraic grid generation using tensor product b-splines. Nasa contractor report 177968, NASA, NASA Langley Research Center, 1985.
- [71] Maria Elena Vazquez-Cendon, Luis Cea, y Jerónimo Puertas. The shallow water model: The relevance of geometry and turbulence. *Monografías de la Real Academia de Ciencias de Zaragoza*, 31:217–236, 2009.
- [72] C. B. Vreugdenhil. *Numerical Methods For Shallow-Water Flow*. Kluwer Academic Publishers, 1994.
- [73] Zahir U. A. Warsi. *Numerical Grid Generation: Foundations and Applications*, cap. Basic Differential Models for Coordinate Generations, págs. 41–78. Joe F. Thompson, North Holland, New York, 1982.
- [74] UNAMalla workgroup. An automatic package for numerical grid generation. 2011. URL <http://lya.fciencias.unam.mx/unamalla/>.
- [75] Olek Zienkiewicz, Robert Taylor, y J.Z. Zhu. *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*. Butterworth-Heinemann, 7 ed^{ón}., 2013.