



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS
DE HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
”MAT. LUIS MANUEL RIVERA GUTIÉRREZ”

Tesis de Doctorado:

CARACTERIZACIÓN DE PÉTREOS SIN LABRAR
EMPLEANDO EL MÉTODO DE CARGA PUNTUAL
COMO UN PROBLEMA INVERSO

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
Doctor en Ciencias en Ingeniería Física

PRESENTA:

Marco Antonio Navarrete Seras

TUTOR Y COTUTOR:

Dr. en Cs. Mat. Francisco Javier Domínguez Mota

Dra. Elia Mercedes Alonso Guzmán

Agosto, 2020 Morelia, Michoacán

Agradecimientos

A las siguientes instituciones:

A la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, a la Facultad de Ciencias Físico-matemáticas por todo el apoyo brindado y por permitir ser parte de la vida académica, a la Facultad de Ingeniería Civil, Laboratorio de Materiales “Ing. Luis Silva Rúelas”, Sección de Resistencia de Materiales y al CONACYT por todo el apoyo brindado en el desarrollo de esta investigación.

Al asesor de tesis Dr. Francisco Javier Domínguez Mota, por su orientación y apoyo en este trabajo de investigación, su paciencia, constancia, esfuerzo, tiempo, por las sugerencias brindadas y por sus consejos que me han ayudado en mi formación académica.

A la Dra. Elia Mercedes Alonso Guzmán, por su apoyo incondicional en la realización del presente trabajo; su tiempo, constancia, esfuerzo y sugerencias en la dirección de la elaboración del mismo.

Al Dr. José Gerardo Tinoco Ruiz por sus consejos y por su apoyo en la realización de este trabajo de investigación.

Al Dr. Hector Higor Pérez Aguilar por todo el apoyo brindado en el ingreso al doctorado. Agradezco a cada uno de mis profesores del doctorado.

A mis compañeros de posgrado por el tiempo compartido y por el apoyo brindado.

Dr. Wilfrido Martínez Molina, por su orientación en este trabajo de investigación, por las sugerencias y su apoyo en la realización de este trabajo.

Al Dr. Hugo Luis Chávez García, por su orientación y manejo de los equipos de pruebas no destructivas que permitieron obtener los datos en la maestría.

A la M. I. Cindy Lara Gómez y al C. José Jesús Zauno Zamudio, por el apoyo y comprensión durante la obtención de datos.

DEDICATORIAS

Para mi esposa Lupita, por su apoyo, por su motivación, por su paciencia y sus desvelos,
por el sacrificio, y especialmente porque la amo.

A mi niña Wendy y mi niño Diego por haber llegado a mi vida, quienes me motivan a
salir adelante y por ser lo mejor que me ha pasado en la vida.

A los papás de mi esposa por todo el apoyo brindado.

Índice general

Agradecimientos	2
Resumen	16
Abstract	19
1. Introducción	21
1.1. Planteamiento del problema	26
2. Mecánica de rocas	27
2.1. Propiedades físicas de las rocas	29
2.1.1. Absorción	29
2.1.2. Densidad	30
2.1.3. Gravedad específica	30
2.2. Propiedades mecánicas	30
2.2.1. Resistencia a compresión uniaxial	30
2.2.2. Ensayo de carga puntual	30
2.2.3. Índice de durabilidad (<i>Id2</i>)	31
2.3. Pruebas no destructivas	32
2.3.1. Velocidad de pulso ultrasónico	32
2.3.2. Resistividad eléctrica	33
2.3.3. Frecuencia de resonancia	34
2.4. Módulo de Elasticidad	35
3. Método de elemento finito (MEF)	41
3.1. Técnicas de aproximación	43
3.1.1. Métodos de residuos ponderados	43
3.1.2. Formulación débil	45

3.1.3.	La formulación de elementos finitos de Galerkin	46
3.1.4.	Método Rayleigh-Ritz	48
3.2.	Elementos finitos unidimensionales	48
3.3.	Elementos finitos bidimensionales	53
3.4.	Ecuaciones de Laplace y Poisson	59
3.4.1.	Ecuación gobernante	59
3.5.	Ejemplo	61
4.	Problema Inverso	65
4.1.	Un ejemplo	67
4.2.	Regularización por filtrado	71
4.2.1.	Tasas de convergencia y Selección de parámetros de regularización a posteriori	73
4.2.2.	Métodos de regularización variables y métodos de regularización iterativos	74
4.3.	Herramientas analíticas	75
4.3.1.	Mal planteado y regularización	75
4.3.2.	Teoría de la regularización	77
4.3.3.	Teoría de la optimización	77
4.3.4.	Regularización generalizada de Tikhonov	78
4.4.	Herramientas de optimización numérica	78
4.4.1.	El método del descenso más pronunciado	79
4.4.2.	El método del gradiente conjugado	79
4.5.	Identificación de parámetros	80
4.5.1.	Un marco abstracto	81
4.5.2.	El problema inverso en estudio	84
5.	Aprendizaje automático	89
5.1.	Introducción	89
5.2.	Regresión lineal	91
5.2.1.	Algoritmo LMS	93
5.3.	Regresión logística	95
5.3.1.	Representación de hipótesis	95
5.3.2.	Función de costo simplificada y gradiente descendente	97

6. Modelado y correlaciones	99
6.1. Modelado	99
6.2. Ajuste de curvas	109
7. Resultados	117
7.1. Resultados del metodo de elementos finitos	117
7.2. Resultados de la ciencia de datos	134
8. Conclusiones	161
Bibliografía	164

Índice de figuras

1.1. Muestras de roca de color oscuro (propiedad del autor).	23
1.2. Muestras de roca de color rojizo (propiedad del autor).	23
1.3. Bancos de roca de materiales triturados el Colegio (propiedad del autor). . .	24
1.4. Bancos de roca de materiales triturados AGC (propiedad del autor).	24
1.5. Muestras de ignimbrita (propiedad del autor).	25
1.6. Ignimbrita empleada en el acueducto en Morelia Michoacán (propiedad del autor).	25
2.1. Clasificación de las rocas mediante TAS.	29
2.2. Aparato de carga puntual (propiedad del autor).	31
2.3. Equipo de Durabilidad (propiedad del autor).	32
2.4. Velocidad de Pulso Ultrasónico (propiedad del autor).	33
2.5. Equipo resistividad eléctrica marca Nilsson (propiedad del autor).	34
2.6. Equipo de frecuencia de resonancia (propiedad del autor).	35
2.7. Elasticidad en un cilindro.	36
2.8. La Ley de Hooke. El esfuerzo es proporcional a la tensión [27]	37
2.9. La relación tensión-esfuerzo de una roca. Región I: Tensión plástica causado por el cierre de microfracturas. Región II: Compresión elástica del material de la matriz de la roca. Región III: Distensión plástica causada por la formación de microfracturas en respuesta a la tensión aplicada hasta que se produce la falla [27]	38
2.10. Esfuerzo a Compresión Uniaxial.	38
3.1. Elementos unidimensionales.	43
3.2. Elementos bidimensionales.	44
3.3. Elemento lineal en la coordenada natural.	49
3.4. Elemento lineal en la coordenada física.	49

3.5. Elemento isoparamétrico cuadrático.	51
3.6. Elementos finitos global y local.	52
3.7. Funciones de Forma.	53
3.8. Elemento bilineal en la coordenada natural.	55
3.9. Elemento bilineal en la coordenada física.	56
3.10. Figura para el ejemplo de Laplace.	62
4.1. Elongación de una columna bajo su propio peso.	68
4.2. Elongación de una columna bajo su propio peso con 5 elementos.	70
4.3. Elongación de una columna bajo su propio peso con 100 elementos.	71
4.4. Representación geométrica de un problema lineal de mínimos cuadrados.	85
4.5. Problema inverso de una roca para estimar el módulo de elasticidad con 4 elementos	87
4.6. Problema inverso de una roca para estimar el módulo de elasticidad con 6 elementos.	88
5.1. Tipos de aprendizaje.	91
5.2. Diagrama de representación para la regresión lineal.	92
5.3. Trayectoria del gradiente descendente.	94
5.4. Correlación de las ignimbritas densidad Vs. $Is(50)$	95
5.5. Función sigmoid o función logística	96
6.1. Elemento viga	102
6.2. Elemento viga Hermitiano.	103
6.3. Carga uniformemente distribuida.	105
6.4. Carga concentrada en un punto de l viga.	105
6.5. Momento en la viga.	106
6.6. Carga distribuida triangularmente.	107
6.7. Funciones de forma.	108
6.8. La figura muestra que conociendo los datos interiores podemos aproximar la solución.	108
6.9. Viga empotrada.	110
6.10. Viga empotrada con 4 elementos	111
6.11. Viga empotrada con 100 elementos.	111
6.12. Viga en voladizo.	112
6.13. Viga en voladizo con 4 elementos.	112
6.14. Viga en voladizo con 100 elementos.	113

6.15. Viga simplemente apoyada.	113
6.16. Viga simplemente apoyada con 4 elementos	114
6.17. Viga simplemente apoyada con 100 elementos	114
6.18. Es un marco cargado en el nodo 7, con una carga de 60 lb.	115
6.19. Gráfica para el ejemplo del marco donde se muestran los desplazamientos horizontales y verticales por nodo.	115
7.1. Banco de materiales Cuenembo	117
7.2. Banco de materiales Cerritos.	118
7.3. Banco de materiales Colegio.	118
7.4. Banco de materiales el Tigre.	119
7.5. Banco de materiales Comanja.	119
7.6. Banco de materiales AGC.	120
7.7. Banco de materiales Joyitas.	120
7.8. Banco de materiales Huiramba.	121
7.9. Banco de materiales el melon.	121
7.10. Banco de materiales Mascutan.	122
7.11. Dispersión entre \bar{x} y Ed	123
7.12. Correlación entre la resistencia de compresión uniaxial (σ) y el módulo dinámico de elasticidad real (E_d).	126
7.13. Banco de materiales Cuenembo (CU5) es Traquiandesita basáltica.	127
7.14. Banco de materiales Cerritos (C10) es Andesita basáltica.	127
7.15. Banco de materiales Colegio (S7) es andesita basáltica.	128
7.16. Banco de materiales el Tigre (T5) es Andesita.	128
7.17. Banco de materiales Comanja (CO9) es Traquiandesita basáltica.	129
7.18. Banco de materiales AGC (G2) Andesita basáltica.	129
7.19. Banco de materiales Joyitas (J8) es Andesita.	130
7.20. Banco de materiales Huiramba (H8) es Traquibasalto.	130
7.21. Bancos de materiales el Melon (M8) es Traquiandesita basáltica.. . . .	131
7.22. Bancos de materiales Mascutan (K8) Andesita basáltica.	131
7.23. Dispersión entre \bar{x} y Ed .(Fuente: M.A. Navarrete Seras)	133
7.24. Error entre el Módulo de Elasticidad Real y el Módulo de Elasticidad Inverso.134	
7.25. Modelo lineal 1 para estimar el UCS por medio de $Is(50)$ y la densidad (D).135	
7.26. Las superficies superior e inferior muestran los límites de predicción al 95 % de confianza para el modelo lineal 1.	136
7.27. Modelo 2 polinomial para estimar el UCS usando $Is(50)$ y la densidad (D). 137	

7.28. Las superficies superior e inferior muestran los límites de predicción con un 95 % de confianza para el modelo polinomial 2.	137
7.29. Modelo polinomial 3 para estimar UCS utilizando $Is(50)$ y resistividad eléctrica (ρ).	138
7.30. Las superficies superior e inferior muestran los límites de predicción al 95 % de confianza para el modelo polinomial 3.	139
7.31. Modelo polinomial 4 para estimar el UCS usando el $Is(50)$ y la velocidad del pulso ultrasónico (UPV)	140
7.32. Las superficies superior e inferior muestran los límites de predicción con un 95 % de confianza para el modelo polinomial 4.	140
7.33. Correlación del índice de durabilidad, la absorción y la densidad.	142
7.34. Dispersion de UCS vs. $Is(50)$	143
7.35. Correlación de bancos de materiales pétreos de color rojizo.	144
7.36. Correlación de bancos de materiales pétreos de color oscuro (Comanja, Joyitas, Cuenembo, El Tigre, y Huiramba)	145
7.37. Comparación de las propiedades físicas de los bancos de materiales pétreos.	146
7.38. Comparación de propiedades físicas y mecánicas de las ignimbritas.	147
7.39. Correlación entre índice de carga puntual y la absorción de las ignimbritas.	148
7.40. Correlación entre índice de carga puntual y la densidad de las ignimbritas.	148
7.41. Modelo de regresión lineal.	149
7.42. Gráfica de función de costos.	150
7.43. Gráfica de los parámetros utilizando gradiente descendente.	150
7.44. Modelo de regresión lineal.	151
7.45. Modelo de regresión lineal para estimar la gravedad específica.	151
7.46. Función de costos.	152
7.47. Parámetros que de la ecuación lineal que mejor ajustan a los datos.	152
7.48. Modelo de regresión lineal.	153
7.49. Modelo de regresión lineal mediante machine learning.	154
7.50. Función de costos.	154
7.51. Parámetros que mejor ajustan la ecuación lineal.	155
7.52. Modelo de regresión lineal mediante el método de mínimos cuadrados.	155
7.53. Dispersion de UCS vs. $Is(50)$	156
7.54. Modelo de regresión logística para clasificar las muestras con mayor resistencia.	157
7.55. Modelo de regresión logística para los datos del material triturado.	158
7.56. Modelo de regresión logística para las muestras de color oscuro.	158

7.57. Modelo de regresión logística.	159
7.58. Clasificación logística de los datos de durabilidad.	160

Resumen

Los materiales pétreos se emplean en casi todos los procesos de edificación en la ingeniería civil. Las rocas se pueden utilizar como elemento estructural, como elemento decorativo, o como agregado pétreo en la elaboración de mezclas de concreto hidráulico y elaboración de mezclas asfálticas. Por todo lo anterior el estudio y uso de este material se vuelve muy importante, para conocer sus propiedades físicas y mecánicas, que permitan elaborar mezclas de concreto o mezclas asfálticas con mejores características. En el presente trabajo se estudiaron las relaciones entre diferentes datos provenientes de diferentes pruebas físicas y mecánicas, los datos que se utilizaron provienen de materiales pétreos provenientes de la región Morelia Michoacán México.

El ensayo de carga puntual normada por ASTM D 5731, que describe el empleo de un equipo Point Load para determinar la resistencia mecánica en rocas no labradas con un tamaño aproximado de 4 pulgadas de diámetro, es una prueba que permite ahorrar tiempo ya que no se tiene que labrar la muestra. Además, se tienen datos de pruebas como la resistencia a compresión uniaxial, propiedades físicas como absorción, densidad, gravedad específica. Se analizaron también los datos de pruebas no destructivas (NDT), que en la actualidad juegan un papel importante en la obtención de propiedades de los materiales, la ventaja radica en que las muestras no se destruyen y se pueden utilizar para diferentes ensayos. Los datos que se obtuvieron de estas pruebas son velocidad de pulso ultrasónico de la cuál podemos obtener el módulo de elasticidad dinámico, se obtuvieron datos de resistividad eléctrica de las rocas y se analizaron los datos de frecuencia de resonancia.

Los agregados pétreos son materiales de enorme importancia debido a que es parte del comportamiento del elemento estructural. El propósito de este trabajo es estimar de forma certera las propiedades de las rocas en estudio. A partir de datos conocidos o propiedades conocidas de las rocas se puede estimar ciertas características de material a lo cual se le conoce como problema inverso y que por sí solo representa una dificultad al momento de estimar las variables. Además, en este trabajo se utiliza la optimización y la ciencia de datos

entre las variables para estudiar las relaciones de las rocas. Así pues, se obtiene el módulo de elasticidad dinámico aplicando el problema inverso, se relacionan las propiedades físicas y mecánicas. Los materiales pétreos son de origen natural y de origen triturado. Debido a que Morelia es una ciudad colonial, en muchas ocasiones la roca ígnimbrita es utilizada en la restauración de monumentos históricos, por lo que el estudio de las diferentes canteras nos permite conocer el comportamiento de éstas y de la misma manera se puede utilizar en la construcción. Finalmente, este trabajo se relacionaron todos los datos mediante técnicas de optimización, ciencia de datos y la aplicación de machine learning obteniendo resultados satisfactorios.

Palabras Clave: Rocas, Correlación, Optimización, Ciencia de Datos y Machine Learning.

Abstract

Stone materials are used in almost all building processes in civil engineering. Rocks can be used as a structural element, as a decorative element, or as stone aggregate in the production of hydraulic concrete blended and asphalt blended. For all of the above, the study and use of this material become very important, to know its physical and mechanical properties, which allow the elaboration of concrete or asphalt blended with better characteristics. In the present work, the relationships between different data from different physical and mechanical tests were studied. The data used came from stone materials from the region of Morelia Michoacán Mexico.

The point load test regulated by ASTM D 5731, which describes the use of a point load equipment to determine the mechanical resistance in unploughed stones with an approximate size of 4 inches in diameter, is a time-saving test since the sample does not have to be plowed. Besides, there are test data such as uniaxial compressive strength (UCS), physical properties such as absorption, density, specific gravity. Non-Destructive Testing (NDT) data, which currently play an important role in obtaining material properties, were also analyzed. The advantage is that the samples are not destroyed and can be used for different tests. The data obtained from these tests are ultrasonic pulse velocity from which we can obtain the dynamic modulus of elasticity, electrical resistivity data of the rocks were obtained and the resonance frequency data were analyzed.

Stony aggregates are materials of enormous importance because it is part of the behavior of the structural element. The purpose of this work is to estimate accurately the properties of the stones under study. From known data or known properties of the stones, it is possible to estimate certain characteristics of the material, which is known as the inverse problem and which by itself represents a difficulty when estimating the variables. Also, in this work, we use the optimization and science of data between variables to study the relationships of the stones. Thus, the dynamic modulus of elasticity is obtained by applying the inverse problem, and the physical and mechanical properties are related. Stone materials are of natural origin and crushed origin. Because Morelia is a colonial city,

on many occasions the ignimbrite stone is used in the restoration of historical monuments, so the study of the different quarries would allow us to know their behavior and in the same way, it can be used in construction. Finally, this work related all the data by means of optimization techniques, data science and the application of machine learning obtaining satisfactory results.

Capítulo 1

Introducción

Las rocas se utilizan cada vez más en entornos extremos caracterizados por altas tasas de carga y altas presiones de confinamiento [1]. Las rocas ígneas se forman a partir del enfriamiento y la solidificación del magma fundido. Se podrían subdividir en tipos plutónicos (intrusivos) y volcánicos (extrusivos) [2]. Además, se han excavado en las rocas piroclásticas cuevas, lugares de culto y casas creadas por el hombre, que a su vez se han utilizado en la construcción arquitectónica como piedra de construcción [3]. La resistencia a la compresión uniaxial (UCS) de los materiales rocosos es un parámetro crucial en el diseño de las estructuras de ingeniería que se construyen en las masas rocosas. Aunque los métodos sugeridos para la determinación de la UCS son bien conocidos y requieren procedimientos relativamente sencillos, la preparación de especímenes de núcleo estándar puede no ser fácil para los materiales rocosos de roca fuertemente unida y/o masas rocosas finamente estratificadas [4].

En este trabajo se estudio la deformación de las rocas provenientes de diferentes bancos de materiales pétreos, las muestras utilizadas se labraron en cubos de 5cm por lado y se obtuvo el módulo de elasticidad dinámico mediante un problema inverso y el método de elementos finitos.

Además, se obtuvieron diferentes modelos que permiten estimar la resistencia a compresión uniaxial (UCS), se realizaron algoritmos que permiten correlacionar las variables mediante la regresión lineal y la regresión logística, todo lo anterior en base a la aprendizaje automático. Las rocas en la actualidad se utilizan como elemento estructural o como agregado pétreo en una matriz cerámica o cementicia. Entonces, resulta importante conocer sus características físicas, mecánicas y realizar pruebas no destructivas (NDT). Las pruebas no destructivas en la actualidad son muy utilizadas, ya que se pueden realizar diferentes pruebas a una muestra sin necesidad de destruirlas. Las pruebas no destructivas que se

realizaron fueron velocidad de pulso ultrasónico (VPU) y resistividad eléctrica (ρ), dichos resultados se correlacionaron y se compararon con sus propiedades físicas. Hay correlaciones que se han realizado con diferentes pruebas no destructivas, físicas y mecánicas, Popov (2003) encontró una correlación entre la conductividad térmica y la velocidad acústica, la porosidad, la densidad y la resistividad eléctrica para diferentes tipos de roca y describió nuevas relaciones entre la permeabilidad, la conductividad eléctrica y térmica para rocas sedimentarias [5]; Kahraman (2008) realizó pruebas de velocidad, densidad, porosidad, proporción de vacíos, absorción de agua en peso y velocidad de onda P a diferentes rocas carbonatadas y encontró fuertes correlaciones entre la velocidad de la onda P y todas las propiedades físicas de la roca [6]; Kurtulus (2012) realizó correlaciones estadísticas por análisis de regresión para evaluar las relaciones entre UCS y velocidad del pulso ultrasónico (VPU), índice de carga puntual, módulo de elasticidad estática; porosidad efectiva, peso unitario seco, peso unitario saturado de las muestras de roca [7]; Torai and Miri (2015) investigaron las propiedades ingenieriles de dos muestras de dolostona con diferentes grados de deformación tectónica de los sitios de Taormina y Castelmola en Italia y correlacionaron las propiedades físicas y mecánicas de las rocas [8]; Azimian y Ajalloeian (2015) estudiaron la correlación empírica de propiedades físicas y mecánicas de rocas con velocidad de onda P [9]; Fereidoon (2016) estudio las características geotécnicas y las relaciones entre las diversas propiedades físicas y mecánicas de ocho tipos de rocas [10]; Debanjan et. al. (2017) correlacionó las propiedades físicas y mecánicas con la resistencia a la fractura en Modo I de las rocas [11]. Se estudiaron los datos de propiedades físicas y mecaánicas de cubos de roca de 5cm por lado, cinco bancos con muestras de color oscuro y tres bancos con muestras de color rojizo (figuras 1.1 y 1.2) y los dos bancos de roca de materiales triturados (figuras 1.3 y 1.4). Además, se se correlacionaron los datos o resultados de propiedades físicas y mecaánicas en ignimbritas (figura 1.5 y 1.6).



Figura 1.1: Muestras de roca de color oscuro (propiedad del autor).



Figura 1.2: Muestras de roca de color rojizo (propiedad del autor).



Figura 1.3: Bancos de roca de materiales triturados el Colegio (propiedad del autor).



Figura 1.4: Bancos de roca de materiales triturados AGC (propiedad del autor).



Figura 1.5: Muestras de ignimbrita (propiedad del autor).



Figura 1.6: Ignimbrita empleada en el acueducto en Morelia Michoacán (propiedad del autor).

Las rocas llamadas ignimbritas se usan ampliamente en la restauración de monumentos históricos y como elementos decorativos, por lo tanto, es importante conocer sus características físicas para su uso. Las rocas, además, están sujetas a deslizamientos de tierra y están sujetas a un exceso de carga por esta razón pueden tener daños como grietas y roturas. Los posibles efectos de las cargas sobre las rocas en función de las propiedades físicas de los materiales que deben conocerse antes de llevar a cabo la construcción o restauración de monumentos históricos. Al usar el equipo de carga puntual, puede obtener un índice de calidad y clasificar los ignimbritas. Se analizaron los datos de ignimbrita de Cointzio, Tlalpujahuá, Arindeo, Parque Ecológico, muestras del Exconvento de Tiripetío y Ciudad Industrial. De estos, los primeros tres bancos de ignimbrita se están utilizando actualmente en Morelia Michoacán, México.

1.1. Planteamiento del problema

- El problema inverso es un caso de estudio en este trabajo de investigación, el cual es aplicado para estimar el módulo de elasticidad dinámico de las rocas en estudio, aplicando el Método de Elementos Finitos.
- Cuando se analizan los datos de las rocas no se encuentran tendencias lineales y es aquí donde se requiere aplicar técnicas diferentes que permitan obtener predicciones confiables de las variables.
- La dispersión de los datos aun siendo un mismo material se comporta de una manera muy diferente, lo que sugiere aplicar regresión logística.
- Es importante encontrar modelos matemáticos que permitan estimar la resistencia a compresión uniaxial (*UCS*), ya que es uno de los parámetros ingenieriles más utilizados.
- Se aplican técnicas recientes como machine learning, específicamente regresión logística que permite visualizar y agrupar los datos, encontrando con ello relaciones entre las variables.

Capítulo 2

Mecánica de rocas

Mecánica de rocas, es una rama de la geomecánica, aplica los principios de la mecánica continua y sólida, y la geología para cuantificar la respuesta de la roca sujeto a fuerzas ambientales causadas por factores inducidos por el hombre que alteran las condiciones ambientales originales. Por lo tanto, la ingeniería de mecánica de rocas se ocupa de la respuesta de la roca a una perturbación de ingeniería inducida por el hombre y es diferente de la mecánica de rocas geológica que se ocupa con perturbaciones causadas naturalmente por pliegues, fallas, fracturas y otros procesos geológicos. La ingeniería de mecánica de rocas es una ciencia de ingeniería interdisciplinaria que requiere la interacción entre las ciencias físicas, matemáticas y geológicas con la ingeniería civil, petrolera y minera. La ingeniería de mecánica de rocas existe desde principios de los 50 y se convirtió en una disciplina independiente en los 60 [12].

Las rocas son agregados naturales de uno o más minerales. En el caso de la porosidad o la fractura, también contienen fases fluidas. Con respecto a su génesis y procesos geológicos, las rocas se dividen en tres grandes grupos: rocas ígneas (magmatitas), rocas metamórficas (metamorfos) y las rocas sedimentarias (sedimentos) [13]. Las rocas ígneas se forman por cristalización de un magma fundido. Tres tipos se caracterizan por su aparición y posición en la corteza:

Rocas plutónicas cristalizadas a gran profundidad y que forman grandes cuerpos rocosos, rocas volcánicas que llegan a la superficie, en muchos casos formando capas de rocas como una almohada o una manta, y diques con una extensión vertical dominante y una extensión horizontal en una dirección. Con frecuencia separan las unidades geológicas [13].

En este caso de estudio nos referimos a las rocas volcánicas cuya clasificación se detalla a continuación:

Las rocas estudiadas en este trabajo de investigación son rocas ígneas (traquibasalto, traquiandesita basáltica, andesita basáltica y andesita) de las canteras circundantes en Michoacán [14].

El basalto es una roca vítrea o afanítica compuesta principalmente de plagioclasa, piroxeno y óxidos de Fe-Ti con o sin olivino; contiene 45 – 52% de sílice en peso y menos de 5% de álcalis totales en peso. La andesita basáltica es una roca máfica vítrea o afanítica que contiene 52 – 57% de sílice en peso y menos de 5% de álcalis totales en peso. La andesita es una roca vítrea o afanítica formada esencialmente por plagioclasa, óxidos de Fe-Ti y alguna combinación de piroxeno, hornblenda y quizás biotita u olivino; contiene 57 – 63% de sílice en peso y menos de alrededor de 7% de álcalis totales en peso. El traquibasalto es un basalto rico en álcalis. La traquiandesita es una andesita rica en álcalis [15]. La nomenclatura ígnea moderna se basa en tres tipos de observación, cada uno de los cuales influye en el nombre que se da a una roca: observaciones petrográficas cualitativas (por ejemplo, la presencia o ausencia de cuarzo); datos petrográficos cuantitativos (por ejemplo, porcentaje de cuarzo en la roca) y composición química (por ejemplo, posición en un diagrama TAS) [16]. Para clasificar las piedras se utilizó el TAS (álcalis totales frente a sílice) (Fig. (2.1)). Clasificación de piedras volcánicas de la IUGS (Subcomité Internacional de Sistemática de Rocas Ígneas).

La mecánica de rocas se ocupa del estudio teórico y práctico de las propiedades y comportamiento mecánico de los materiales rocosos, y de su respuesta ante la acción de fuerzas aplicadas en su entorno físico [17]. El desarrollo de la mecánica de rocas se inició como consecuencia de la utilización del medio geológico para obras superficiales y subterráneas y explotación de recursos mineros. Los distintos ámbitos de aplicación de la mecánica de rocas se pueden agrupar en aquellos en que el material rocoso constituye la estructura (excavación de túneles, galerías, taludes, etc.), aquellos en que la roca es el soporte de otras estructuras (cimentaciones de edificios, presas, etc.) y aquellos en los que las rocas se emplean como material de construcción (escolleras, pedraplenes, rellenos, etc.) [17]. Las rocas son agregados naturales duros y compactos de partículas minerales con fuertes uniones cohesivas permanentes que habitualmente se consideran un sistema continuo. La proporción de diferentes minerales, la estructura granular, la textura y el origen de la roca sirven para su clasificación geológica [17].

El estudio de la matriz rocosa conocer sus características físicas y mecánicas es muy común para estimar el comportamiento dentro de los elementos estructurales o dentro de una mezcla de concreto hidráulico o de una mezcla asfáltica.

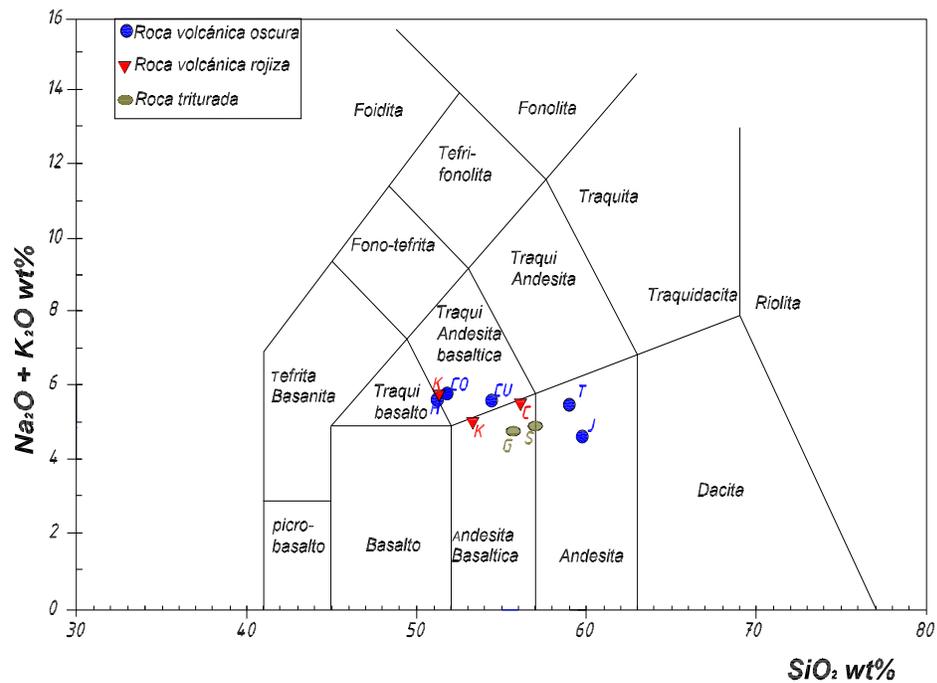


Figura 2.1: Clasificación de las rocas mediante TAS.

2.1. Propiedades físicas de las rocas

2.1.1. Absorción

El procedimiento consiste en secar las muestras en el horno a una temperatura a $110\text{ }^\circ\text{C} \pm 10\text{ }^\circ\text{C}$ durante 24 horas, posteriormente se dejan enfriar y se pesan ($ps = \text{pesoseco}$), una vez hecho esto las muestras se saturan en un recipiente con agua durante 24 horas como mínimo, después las muestras se retiran del agua y se secan superficialmente con un lienzo o franela y se pesan (ph) [18, 19].

2.1.2. Densidad

El objetivo es determinar la densidad de la roca, el procedimiento consiste en marcar la muestra o numerarla para identificarla, se dejan saturar en el agua durante un periodo de 24 horas, después se procede a secar superficialmente y registrar su peso húmedo (W en gramos), posteriormente se procede a llenar con agua el picnómetro y se coloca dentro la muestra de roca, finalmente el volumen de agua desalojado (V en centímetros cúbicos) es medido con una probeta [18, 19].

2.1.3. Gravedad específica

El procedimiento consiste en secar las muestras en el horno a una temperatura de $110\text{ }^{\circ}\text{C} \pm 10\text{ }^{\circ}\text{C}$ durante 24 horas, dejar enfriar y pesar ($ps = \textit{pesoseco}$), poner a saturar en agua durante 24 horas y después se pesan lo que permite obtener el peso superficial seco (ps), después se colocan en una canastilla adaptada en la báscula y se sumergen en agua, finalmente se obtiene el peso sumergido (pa) [18, 19].

2.2. Propiedades mecánicas

2.2.1. Resistencia a compresión uniaxial

La resistencia a compresión simple o resistencia uniaxial es el máximo esfuerzo que soporta la roca sometida a compresión uniaxial, determinada sobre una probeta cilíndrica o cúbica sin confinar en el laboratorio [17, 19, 20]. La resistencia a compresión uniaxial se llevó a cabo en la máquina universal de pruebas, con este ensayo se pudo determinar la resistencia de cada una de las rocas mediante la siguiente ecuación.

$$\sigma = \frac{p}{a} \quad (2.1)$$

donde σ es compresión uniaxial, p es la carga máxima aplicada, a es el área de la sección transversal

2.2.2. Ensayo de carga puntual

De acuerdo con la Norma D 5731-05 de la ASTM, el objeto de esta prueba es determinar la resistencia de las rocas al someterlas a cargas puntuales que se aplican mediante un par de piezas cónicas. Es una prueba de índice y está destinado a ser utilizado para clasificar y caracterizar la roca. Esta prueba de carga puntual se realiza sometiendo una muestra de

roca a una carga cada vez más concentrada hasta que el fallo se produce por la división de la muestra. Este ensayo permite la determinación del índice de resistencia de carga puntual no corregido (I_s). Este debe ser corregido al diámetro equivalente estándar $De = 50mm$. Si el diámetro del espécimen esta cerca de $50mm$ (como con los núcleos NX), la corrección no es necesaria. El procedimiento para la corrección por tamaño puede ser obtenido gráficamente o matemáticamente por los procedimientos definidos por el ISRM, para obtener el valor para el $I_s(50)$ en MPa [21].



Figura 2.2: Aparato de carga puntual (propiedad del autor).

2.2.3. Índice de durabilidad ($Id2$)

. Este método de prueba determina el índice de durabilidad de una pizarra o roca similar después de dos ciclos de secado y mojado con abrasión. El espécimen consiste en diez fragmentos de pizarra representativos, intactos y equidimensionales que pesan entre 40 y 60 g cada uno. Estos fragmentos pueden ser naturales o pueden producirse por rotura con un martillo. Estos fragmentos pueden obtenerse de núcleos de roca o de canteras y los tamaños pueden variar con el método de ensayo. Las esquinas afiladas se rompen, si es posible, y el polvo se elimina cepillando la muestra justo antes de pesarla. La muestra total pesará entre 450 y 550 g. La ecuación utilizada en esta prueba es

$$Id2 = \frac{WF - C}{B - C} (100) \quad (2.2)$$

donde $Id2$ es el índice de durabilidad (segundo ciclo), B es la masa del tambor más la muestra retenida y secada por el horno antes del primer ciclo en g, WF es la masa del tambor más la muestra retenida y secada por el horno después del segundo ciclo en g, y C es la masa del tambor [22].



Figura 2.3: Equipo de Durabilidad (propiedad del autor).

2.3. Pruebas no destructivas

2.3.1. Velocidad de pulso ultrasónico

Recientemente, las mediciones ultrasónicas han ido ganando importancia como herramientas no destructivas para evaluar daños estructurales en edificios históricos y obras de arte.

En estos métodos, las mediciones de la velocidad de la onda $P(V_p)$ se correlacionan con el aumento de la porosidad debido a los daños en la estructura de las rocas. Estas correlaciones proporcionan un método para medir el grado de daño estructural debido a la intemperie y el deterioro mediante mediciones indirectas. La prevención de daños y la planificación de reparaciones se pueden realizar sobre la base de dicha clasificación de daños V_p /estructurales. Las propiedades elásticas de un material sólido y las velocidades sísmicas o acústicas están completamente determinadas por las constantes elásticas (rigidez) [23]. Se hicieron las mediciones correspondientes en cubos de roca de 5cm , la preparación de los especímenes se realizó en el Laboratorio de Materiales " Ing. Luis Silva Ruelas" mediante una cortadora de roca respectivamente. El equipo empleado para esta prueba fue una máquina dual para ensayos ultrasónicos y por rebote, con introducción automática de los

resultados del esclerómetro, modelo 58 – E0049/B, marca CONTROLS, medidor de velocidad de pulsos ultrasónicos; con una escala de frecuencia de 24 a 150 kHz ; impedancia de entrada del receptor de 1 M ; salida RS232; cuenta con la posibilidad de conectar un osciloscopio; con una medición del tiempo de propagación de 0.1 a 1999.9 μs ; velocidad de los impulsos con una selección de 1 a 10 por segundo; precisión 1 μs ; salida del transmisor hasta 1500 V; funciona con baterías recargables internas; incluye un esclerómetro para ensayos en concreto con una energía de impacto de 2.207 NM.

El equipo tiene dos transductores, un emisor y un receptor, estos transductores tienen que tener un buen contacto con la superficie a probar y para tal fin se emplea un medio conductor ó gel [24]. La velocidad de pulso ultrasónico se obtiene con la Ec. (2.3).

$$V_p = \frac{d}{t} \quad (2.3)$$

donde V_p es velocidad de pulso ultrasónico, km/s , d es la distancia entre transductores, mm y t es el tiempo de tránsito, μs .



Figura 2.4: Velocidad de Pulso Ultrasónico (propiedad del autor).

2.3.2. Resistividad eléctrica

Las rocas se dejan saturando en el agua y posteriormente se secan cubriendo con una franela húmeda antes de iniciar la prueba. Las mediciones se realizaron con un equipo llamado resistómetro que mide resistividad eléctrica marca Nilsson (Fig.(2.5)). La resistividad

eléctrica se puede obtener mediante la Ec. (2.5) [25].

$$\rho = R_e \left(\frac{A}{L} \right) \quad (2.4)$$

donde ρ es Resistividad eléctrica en $K\Omega - cm$ ($ohm - m$), es resistencia eléctrica que el equipo proporciona, en $K\Omega$, A es área transversal del espécimen en cm^2 y L es longitud del espécimen en cm .



Figura 2.5: Equipo resistividad eléctrica marca Nilsson (propiedad del autor).

2.3.3. Frecuencia de resonancia

La frecuencia natural de vibración es una propiedad dinámica de un sistema elástico y se relaciona sobre todo con el módulo de elasticidad dinámico y la densidad del sistema, por lo tanto, está relacionado directamente con su integridad mecánica y su módulo de elasticidad dinámico [26].

Las frecuencias de resonancia fueron determinadas, con un equipo *E-meterC-4959MarkII* de James instrument del Laboratorio de Materiales "Ing. Luis Silva Ruelas" de la Facultad de Ingeniería Civil de la U.M.S.N.H. cuenta con un oscilador que tiene 4 rangos de frecuencia cubriendo de 10 Hz a 100 kHz, dos controles de velocidad 10 : 1 y 50 : 14, y un display de medidor de frecuencia de 6 dígitos; un indicador de resonancia graduado de 0a100 con

indicación en 70.7 para mediciones de ancho de banda, un amplificador de entrada con una sensibilidad de $1mV$, impedancia de entrada de 10 M ohm , un acelerómetro tipo pick-up de $35Hz$, cuenta con modo semiautoático de manejo con paradas automáticas en los picos de amplitud; un control de acelerómetro; opera en un rango de temperatura de 0 a $40^{\circ}C$; dimensiones de $14.6in \times 7.5in \times 10in$, y es alimentado por $120/240V$, $50 - 60Hz$ figura (2.6).



Figura 2.6: Equipo de frecuencia de resonancia (propiedad del autor).

2.4. Módulo de Elasticidad

Un cuerpo elástico se deformará cuando su movimiento en el espacio se vea restringido mientras se le aplica una fuerza. Una fuerza de compresión tiende a aplanarse, o torcer, el cuerpo mientras que una fuerza de tensión causa estiramiento, o elongación. El esfuerzo es la aplicación de una fuerza sobre un área del cuerpo y su intensidad se expresa como la fuerza aplicada por unidad de área del cuerpo [27]:

Libras-fuerza por pulgada cuadrada (lbs/in^2) o Newtons por metro cuadrado (N/m^2). La tensión es la medida de la eformación del cuerpo, con respecto a una longitud o anchura original, que es causada por la tensión aplicada:

- 1) el cambio de longitud con respecto a la longitud original del cuerpo ($\Delta L/L_o$),
- 2) cambio de radio, o diámetro, de un cilindro con respecto al radio, o diámetro, original del cuerpo ($\Delta r/r_o$ o $\Delta d/d_o$)

3) el cambio de volumen con respecto al volumen original ($\Delta V/V_o$).

$$\text{Módulo de Young} = \frac{\text{Esfuerzo}(\sigma)}{\text{Tensión}(\varepsilon)} = \frac{F/A}{\Delta r/r_o} \left[\frac{\text{lbs/in}^2}{\text{in/in}} \right] \quad (2.5)$$

$$\text{Ley de Hooke} \frac{F}{A}(\sigma) = E \frac{\Delta r}{r_o}(\varepsilon) \quad (2.6)$$

Relación de Poisson (ν): Como se muestra en la Fig.(2.5), la tensión aplicada (σ_z) hace

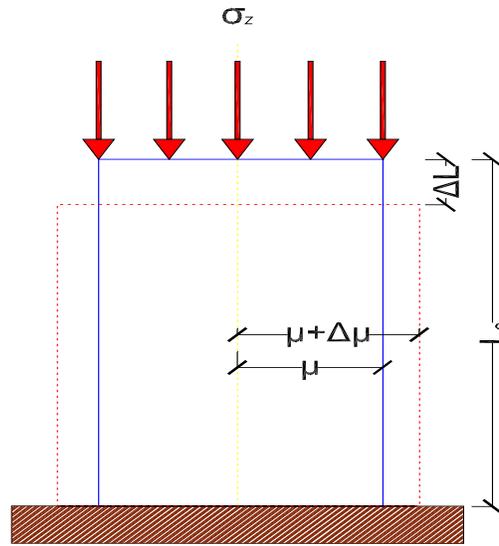


Figura 2.7: Elasticidad en un cilindro.

que el cuerpo cilíndrico se expanda radialmente a lo largo del radio de un núcleo cilíndrico (tensión lateral) y disminuya en longitud a lo largo de la longitud axial (tensión axial). La proporción de la tensión lateral a la axial es la proporción de Poisson [27]:

$$\nu = \frac{\varepsilon_{lateral}}{\varepsilon_{axial}} = - \frac{\Delta d/d_o}{\Delta L/L_o} \left[\frac{\text{in/in}}{\text{in/in}} \right] \quad (2.7)$$

El módulo de Young, E , define la relación lineal elástica entre el esfuerzo aplicado y la deformación producida en la dirección de aplicación del esfuerzo, y el coeficiente de Poisson, ν , define la relación entre la deformación transversal y axial. Ambas constantes se obtienen del ensayo de compresión simple Fig.(2.10) y definen las características de la deformación

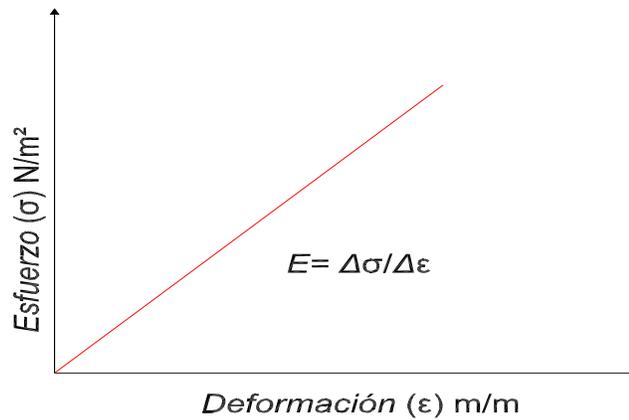


Figura 2.8: La Ley de Hooke. El esfuerzo es proporcional a la tensión [27] .

elástica estática de la roca. Una roca dura con comportamiento frágil presenta mayor módulo de Young y menor coeficiente de Poisson que una roca blanda con comportamiento dúctil [17]. Debemos tener presente que las rocas, igual que todos los materiales reales no presentan un comportamiento elástico lineal ideal, por lo que los valores de E y ν sufren variaciones importantes en términos de la deformación. También debemos considerar que, si se aplica una carga axial a una probeta de material ideal elástico, isótropo y homogéneo, su volumen no variará a pesar de las deformaciones producidas [28].

Debemos señalar que parte de la dificultad de nuestro problema es que es muy difícil medir las deformaciones transversales en el laboratorio. Por este motivo, prácticamente tenemos que conocer de manera simultánea los desplazamientos y el módulo E , ya que solo conocemos las cargas que soportan las muestras de roca. Esto será un aspecto importante a considerar en los siguientes avances.

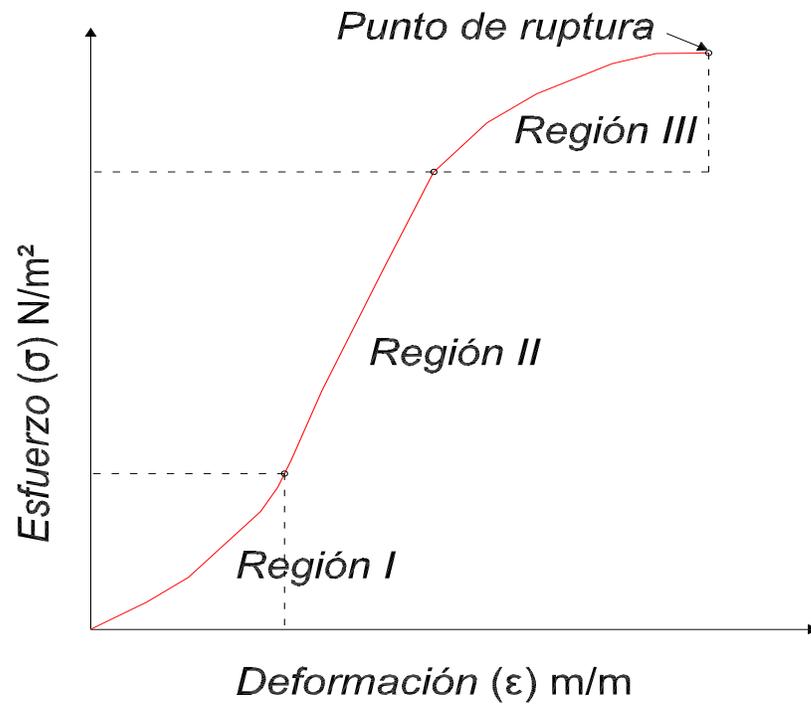


Figura 2.9: La relación tensión-esfuerzo de una roca. Región I: Tensión plástica causado por el cierre de microfisuras. Región II: Compresión elástica del material de la matriz de la roca. Región III: Distensión plástica causada por la formación de microfisuras en respuesta a la tensión aplicada hasta que se produce la falla [27] .



Figura 2.10: Esfuerzo a Compresión Uniaxial.

En la Fig. (2.4) podemos observar la prueba de velocidad de pulso ultrasónico de donde obtenemos el modulo de elasticidad dinámico el cual es un parámetro importante para realizar el modelado, además del esfuerzo del compresión uniaxial.

Capítulo 3

Método de elemento finito (MEF)

La idea básica en el método de elementos finitos es encontrar la solución de un problema complicado reemplazándolo por uno más simple. Dado que el problema real se reemplaza por uno más simple para encontrar la solución, solo podremos encontrar una solución aproximada en lugar de la solución exacta. Las herramientas matemáticas existentes no serán suficientes para encontrar la solución exacta (y, a veces, incluso una solución aproximada) de la mayoría de los problemas prácticos. Por lo tanto, en ausencia de cualquier otro método conveniente para encontrar incluso la solución aproximada de un problema dado, tenemos que preferir el método de elementos finitos. Además, en el método de elementos finitos, a menudo será posible mejorar o refinar la solución aproximada gastando más esfuerzo computacional. En el método de elementos finitos, la región de solución se considera formada por muchas subregiones pequeñas e interconectadas llamadas elementos finitos [29].

Las limitaciones de la mente humana son tales que no puede abarcar entornos complejos y la creación en una sola operación. Así, el proceso de subdividir todos los sistemas en sus componentes individuales o elementos, cuyo comportamiento es fácilmente entendido, y luego reconstruir el sistema original a partir de dichos componentes. En muchas situaciones, se obtiene un modelo adecuado utilizando un número finito de componentes bien definidos. Los problemas se denominarán discretos. En otros, la subdivisión se continúa indefinidamente y el problema solo puede definirse utilizando la ficción matemática de un infinitesimal. Esto lleva a ecuaciones diferenciales o declaraciones equivalentes que implican un número infinito de elementos. Llamaremos a tales sistemas continuos. Con el advenimiento de las computadoras digitales, los problemas discretos generalmente se pueden resolver fácilmente, incluso si el número de elementos es muy grande. Como la capacidad de todas las computadoras es finita, los problemas continuos solo pueden resolverse

exactamente mediante manipulación matemática. Las técnicas matemáticas disponibles para soluciones exactas generalmente limitan las posibilidades de situaciones demasiado simplificadas. Para superar la intratabilidad de los tipos realistas de problemas continuos (continuo), ingenieros, científicos y matemáticos han propuesto diversos métodos de discretización. Todos implican una aproximación que, con suerte, se aproxima en el límite a la verdadera solución continua a medida que aumenta el número de variables discretas.

Desde principios de los años sesenta se han realizado muchos progresos, y hoy los enfoques puramente matemáticos y de analogía directa se concilian por completo [30].

En el análisis de problemas de naturaleza discreta, se ha desarrollado una metodología estándar a lo largo de los años. El ingeniero civil, que se ocupa de las estructuras, primero calcula las relaciones de fuerza-desplazamiento para cada elemento de la estructura y luego procede a ensamblar el todo siguiendo un procedimiento bien definido para establecer el equilibrio local en cada nodo o punto de conexión de la estructura. Las ecuaciones resultantes se pueden resolver para los desplazamientos desconocidos. Del mismo modo, el ingeniero eléctrico o hidráulico, que se ocupa de una red de componentes eléctricos (resistencias, capacitancias, etc.) o conductos hidráulicos, primero establece una relación entre las corrientes (flujos) y potenciales para elementos individuales y luego procede a ensamblar el sistema asegurándose continuidad de flujos. Todos estos análisis siguen un patrón estándar que es universalmente adaptable a sistemas discretos. La existencia de un tratamiento unificado de problemas discretos estándar nos lleva a la primera definición del proceso de elementos finitos como método de aproximación a problemas continuos de tal manera que:

(a) el continuo se divide en un número finito de partes (elementos), cuyo comportamiento se especifica por un número finito de parámetros, y (b) la solución del sistema completo como un conjunto de sus elementos sigue exactamente las mismas reglas que las aplicables a problemas discretos estándar [30]. El método de elementos finitos es un procedimiento numérico para resolver problemas de ingeniería. Los seis pasos del análisis de elementos finitos se resumen como sigue:

1. Discretizar el dominio: este paso implica subdividir el dominio en elementos y nodos (Fig. 3.1).
2. Escribir las matrices de rigidez del elemento: las ecuaciones de rigidez del elemento necesitan para ser escrito para cada elemento en el dominio.
3. Montaje de la matriz de rigidez global: esto se hará utilizando el método directo enfoque de rigidez.
4. Aplicar las condiciones de contorno, como soportes y cargas y desplazamientos aplicados.

Este paso se realiza manualmente.

5. Resolver las ecuaciones: esto se hará dividiendo la rigidez global matriz y luego resolver las ecuaciones resultantes utilizando la eliminación gaussiana. El proceso de partición se realizará manualmente mientras la parte de solución se realizará utilizando MATLAB con eliminación gaussiana.

6. Postprocesamiento: para obtener información adicional como las reacciones y el elemento. fuerzas y tensiones [31].

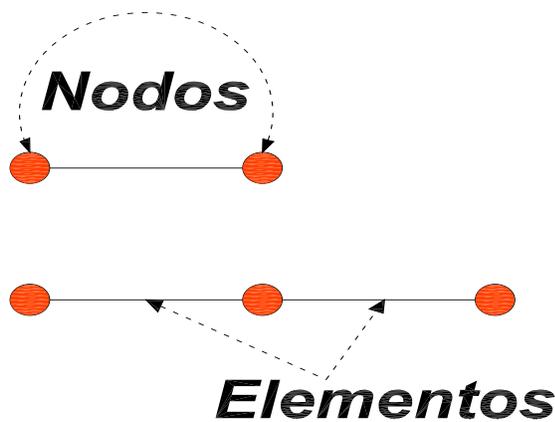


Figura 3.1: Elementos unidimensionales.

3.1. Técnicas de aproximación

3.1.1. Métodos de residuos ponderados

Los métodos de los residuos ponderados son útiles para obtener soluciones aproximadas para una ecuación diferencial gobernante. Para explicar los métodos se presenta el siguiente ejemplo:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dx^2} - u &= -x, \quad 0 < x < 1 \\ u(0) &= 0, \quad y u(1) = 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

El primer paso en los métodos del residuo ponderado es asumir una función de prueba la cual contiene coeficientes desconocidos para ser determinados. Por ejemplo, una función de prueba, $\tilde{u} = ax(1 - x)$, es seleccionada como una solución aproximada para la Ec. (3.1). La función de prueba se escoge tal que satisfaga las condiciones de frontera (i.e. $\tilde{u}(0) = 0$

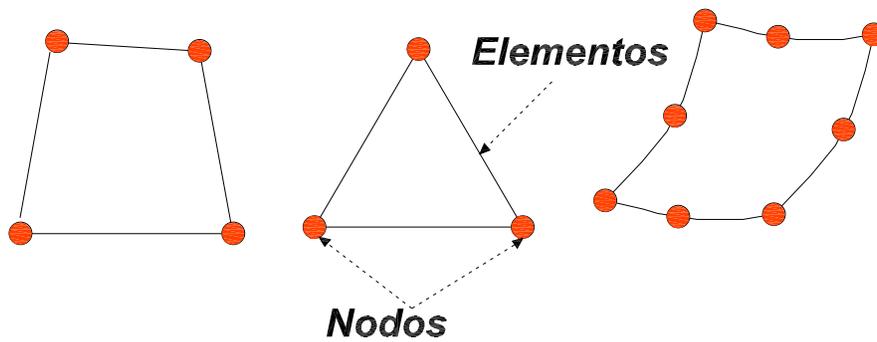


Figura 3.2: Elementos bidimensionales.

y $\tilde{u}(1) = 0$, la cuál tiene un coeficiente desconocido a par ser determinado. En general, la exactitud de una solución aproximada depende de la selección de la función de prueba. Sin embargo, una forma simple de la función de prueba es seleccionada para el ejemplo mostrado el procedimiento básico de los residuos ponderados. Una función de prueba es seleccionada, el residual se calcula sustituyendo la función de prueba en la ecuación diferencial Ec. (3.2).

$$R = \frac{d^2\tilde{u}}{dx_2} - \tilde{u} + x = -2a - a(1 - x) + x \quad (3.2)$$

Porque \tilde{u} es diferente que la solución exacta, el residual no desaparece para todos los valores de x dentro del dominio. El siguiente paso es determinar la constante desconocida a tal que el escoger la mejor función de prueba se aproxima la solución exacta. Para tal fin, una función de prueba (o ponderación) w se selecciona y el promedio ponderado del

residual sobre el dominio del problema se establece en zero Ec. (3.3) [32].

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 w dx = \int_0^1 w \left(\frac{d^2 \tilde{u}}{dx^2} - \tilde{u} + x \right) dx \\ &= \int_0^1 w \{-2a - ax(1-x) + x\} dx = 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

El siguiente paso es decidir la función de prueba. La solución de la aproximación resultante difiere dependiendo de la función de prueba. Los métodos de los residuos ponderados pueden ser clasificados basandose en cómo la función de prueba es determinada. Algunos de los métodos de los residuos ponderados som explicados a continuación [32]:

1. Método de colocación. La función de delta Dirac, $\delta(x - x_i)$, es usada como la función de prueba, donde el punto muestra x_i debe estar dentro del dominio, $0 < x_i < 1$.

$$w = \delta(x - x_i) \quad (3.4)$$

2.- Métodos de mínimos cuadrados. La función de prueba es determinada desde el residual Ec. (3.5) .

$$w = \frac{dR}{da} \quad (3.5)$$

3.- Métodos de Galerkin. Para el método de Galerkin, la función de prueba viene de la función de prueba elegida [32].

$$w = \frac{dR}{da} \quad (3.6)$$

3.1.2. Formulación débil

La formulación fuerte requiere evaluarse $\int_0^1 w \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} \right) dx$, que incluye el orden más alto del término derivado en la ecuación diferencial. La integral debe tener un valor finito distinto de cero para dar una solución aproximada significativa a la ecuación diferencial. Esto significa que una función de prueba debe ser diferenciable dos veces y su segunda derivada no debe desaparecer. A fin de reducir la necesidad de una función de prueba en términos de orden de diferenciación, la integración por partes se aplica a la formulación

fuerte [32].

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^1 w \left(\frac{d^2 \tilde{u}}{dx^2} - \tilde{u} + x \right) dx \\
 &= \int_0^1 \left(-\frac{dw}{dx} \frac{d\tilde{u}}{dx} - w\tilde{u} + xw \right) dx + \left[w \frac{d\tilde{u}}{dx} \right]_0^1 = 0
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Como se ve en la Ec. ((3.7), la función de prueba necesita la diferenciación de primer orden en lugar de la diferenciación de segundo orden. Como resultado, la necesidad de la función de prueba se reduce para la Ec.(3.7). Esta formulación se llama la formulación débil. La formulación débil tiene una ventaja para el método de Galerkin, en el que las funciones de prueba se obtienen directamente de la función de prueba seleccionada. Si una ecuación diferencial gobernante es el operador auto-ajustado, el método de Galerkin junto con la formulación débil da como resultado una matriz simétrica en términos de coeficientes desconocidos de la función de prueba. Utilizando una función de prueba $\tilde{u} = ax(1 - x)$ para la formulación débil, la Ec.(3.7) da como resultado la misma solución que se obtiene de la formulación fuerte como se esperaba. Sin embargo, cuando se selecciona una función parcial como función de prueba, vemos la ventaja de la formulación débil sobre la fuerte [32].

3.1.3. La formulación de elementos finitos de Galerkin

A medida que aumentamos el número de subdominios para las funciones parciales, podemos representar una función compleja utilizando la suma de funciones lineales parciales simples. Para una formulación sistemática, las funciones continuas parciales se definen en términos de variables nodales. Consideremos un subdominio o un elemento finito como el que se muestra en la Fig. (3.3). El elemento tiene dos nodos, uno en cada extremo. En cada nodo se asignan el valor de la coordenada correspondiente (x_i o x_{i+1}) y la variable nodal (u_i o u_{i+1}). Supongamos que la función de prueba desconocida es[32]

$$u = c_1x + c_2 \tag{3.8}$$

Queremos expresar la Ec. (3.8) en términos de variables nodales. En otras palabras, c_1 y c_2 necesitan ser reemplazadas por u_i y u_{i+1} . Para este fin, evaluamos u en $x = x_i$ y $x = x_{i+1}$. Luego

$$u(x_i) = c_1x_i + c_2 = u_i \tag{3.9}$$

$$u(x_{i+1}) = c_1 x_{i+1} + c_2 = u_{i+1} \quad (3.10)$$

Resolviendo la Ec. (3.9) y la Ec. (3.9) simultáneamente para c_1 y c_2 da

$$c_1 = \frac{u_{i+1} - u_i}{x_{i+1} - x_i} \quad (3.11)$$

$$c_2 = \frac{u_i x_{i+1} - u_{i+1} x_i}{x_{i+1} - x_i} \quad (3.12)$$

La sustitución de la Ec. (3.11) y la Ec. (3.12) por la Ec. (3.8) y el reordenamiento de la expresión resultante dan como resultado

$$u = H_1(x) u_i + H_2(x) u_{i+1} \quad (3.13)$$

donde

$$H_1(x) = \frac{x_{i+1} - x}{h_i} \quad (3.14)$$

$$H_2(x) = \frac{x - x_i}{h_i} \quad (3.15)$$

$$h_i = x_{i+1} - x_i \quad (3.16)$$

La Ecuación (3.13) da una expresión para la variable u en términos de variables nodales, y la Ec. (3.14) y la Ec. (3.15) se denominan funciones de forma lineal. Las funciones se muestran en la Fig. (6.7). Estas funciones tienen las siguientes propiedades: 1. La función de forma asociada con el nodo i tiene un valor unitario en el nodo i y se desvanece en otros nodos. Es decir,

$$H_1(x_i) = 1, H_1(x_{i+1}) = 0, H_2(x_i) = 0, H_2(x_{i+1}) = 1 \quad (3.17)$$

2. La suma de todas las funciones de forma es una unidad [32].

$$\sum_{i=1}^2 H_i(x) = 1 \quad (3.18)$$

Estas son propiedades importantes para las funciones de la forma. La primera propiedad, la Ec. (3.17), establece que la variable u debe ser igual a la correspondiente variable nodal en cada nodo (i.e. $u(x_i) = u_i$ y $u(x_{i+1}) = u_{i+1}$) según se aplica en la Ec. (3.9) y

Ec. (3.10). La segunda propiedad, la Ec. (3.18), dice que la variable u puede representar una solución uniforme dentro del elemento. Si la solución permanece constante dentro del elemento, $u = u_i = u_{i+1}$. La sustitución de esta condición en la Ec. (3.13) da[32]

$$u = \{H_1(x) + H_2(x)\} u_i = u_i \quad (3.19)$$

La ecuación (3.19) da como resultado la segunda propiedad de las funciones de forma, la Ec. (3.17) [32].

3.1.4. Método Rayleigh-Ritz

El método de Rayleigh-Ritz obtiene una solución aproximada de una ecuación diferencial con condiciones límites dadas utilizando la función de la ecuación. El procedimiento de esta técnica puede resumirse en dos pasos, como se indica a continuación:

1. Supongamos una solución admisible que satisfaga la condición de límite de Dirichlet (o condición de límite esencial) y que contenga coeficientes desconocidos.
2. Sustituir la solución asumida por la funcional y encontrar los coeficientes desconocidos para minimizar el funcional [32].

3.2. Elementos finitos unidimensionales

Los elementos isoparamétricos utilizan el mapeo matemático de un sistema de coordenadas en el otro sistema de coordenadas. El primer sistema de coordenadas se denomina sistema de coordenadas natural, mientras que el segundo se denomina sistema de coordenadas físico. El dominio del problema se proporciona en el sistema de coordenadas físico denominado $xyz - ejes$. Por otra parte, las funciones de forma de los elementos se definen en términos del sistema de coordenadas natural denotado $\xi\eta\zeta - ejes$. Como resultado, se necesita un mapeo entre los dos sistemas de coordenadas se considera un elemento lineal unidimensional isoparamétrico para discutir las características básicas de los elementos isoparamétricos. Las funciones de forma del elemento isoparamétrico se dan en términos del sistema de coordenadas naturales (Fig.3.3). Los dos nodos eje situados en $\xi = -1.0$ y $\xi = 1.0$. Estas posiciones nodales son arbitrarias pero la selección propuesta es muy útil para la integración numérica porque el elemento en el sistema de coordenadas naturales está normalizado entre -1 y 1 [32]. Las funciones de forma pueden escribirse, como

$$H_1(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi) \quad (3.20)$$

$$H_2(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (3.21)$$

El elemento lineal físico puede estar situado en cualquier posición del sistema de coorde-



Figura 3.3: Elemento lineal en la coordenada natural.

nadas/física como se muestra en la Fig.(3.4). El elemento tiene dos valores de coordenadas nodales x_1 y x_2 con las correspondientes variables nodales u_1 y u_2 [32]. El punto entre

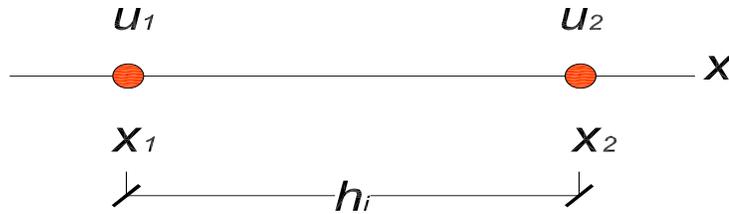


Figura 3.4: Elemento lineal en la coordenada física.

$\xi = -1.0$ y $\xi = 1.0$ en el sistema de coordenadas naturales puede ser mapeado en un punto entre x_1 y x_2 en el sistema de coordenadas físicas utilizando las funciones de forma definidas en las Ec. (3.21) y Ec. (3.21) [32].

$$x = H_1(\xi)x_1 + H_2(\xi)x_2 \quad (3.22)$$

Las mismas funciones de forma se utilizan también para interpolar la variable u dentro del elemento.

$$u = H_1(\xi)u_1 + H_2(\xi)u_2 \quad (3.23)$$

Si se utilizan las mismas funciones de forma en el mapeo geométrico así como la interpolación de variables nodales tales como las Ecs. (3.22) y (3.23), el elemento se convierte en el elemento isoparamétrico. Para calcular du/dx , que es necesario en la mayoría de los casos para calcular las matrices de elementos, se utiliza la regla de la cadena Ec. (3.24)[32],

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \frac{dH_1(\xi)}{dx}u_1 + \frac{dH_2(\xi)}{dx}u_2 \\ &= \frac{dH_1(\xi)}{dx} \frac{d\xi}{dx}u_1 + \frac{dH_2(\xi)}{dx} \frac{d\xi}{dx}u_2 \end{aligned} \quad (3.24)$$

donde la expresión requiere $d\xi/dx$ que es el inverso de $dx/d\xi$. Este último puede calcularse a partir de la Ec. (3.22).

$$\frac{dx}{d\xi} = \frac{dH_1(\xi)}{d\xi}x_1 + \frac{dH_2(\xi)}{d\xi}x_2 = \frac{1}{2}(x_2 - x_1) \quad (3.25)$$

Al sustituir la Ec. (3.25) por la Ec. (3.24) se obtiene

$$\frac{du}{dx} = -\frac{1}{x_2 - x_1}u_1 + \frac{1}{x_2 - x_1}u_2 \quad (3.26)$$

Como resultado, los derivados de las funciones de la forma con respecto al sistema de coordenadas físicas son

$$\frac{dH_1(\xi)}{dx} = -\frac{1}{x_2 - x_1} = -\frac{1}{h_i} \quad (3.27)$$

$$\frac{dH_2(\xi)}{dx} = \frac{1}{x_2 - x_1} = \frac{1}{h_i}, \quad (3.28)$$

en el cual $h_i = (x_2 - X_1)$ es el tamaño del elemento en el sistema de coordenadas físicas. Se calcula la siguiente integral usando el elemento lineal isoparamétrico.

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} + wu \right) dx \quad (3.29)$$

La integración es en términos del sistema de coordenadas físicas mientras que el integrando se expresa en términos del sistema de coordenadas naturales porque las funciones de forma isoparamétrica se utilizan para las funciones de prueba y ensayo u y w . Por lo tanto, se escribe la integral en términos del sistema de coordenadas naturales [32]. Para este fin, se

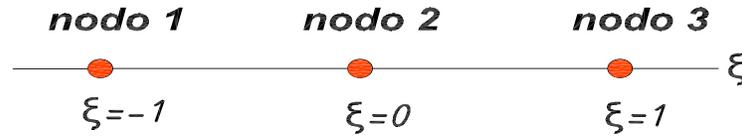


Figura 3.5: Elemento isoparamétrico cuadrático.

obtiene

$$\int_{-1}^1 \left(\frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} + wu \right) J d\xi \quad (3.30)$$

donde $J = dx/d\xi$ es llamado Jacobiano. La sustitución de la función de la forma isoparamétrica de la u y la w en

$$\int_{-1}^1 \left(\frac{1}{h_i^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (1-\xi)^2 & (1-\xi)^2 \\ (1-\xi)^2 & (1+\xi)^2 \end{bmatrix} \right) \frac{h_i}{2} d\xi \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (3.31)$$

$$\approx \begin{bmatrix} \frac{1}{h_i} + \frac{h_i}{3} & -\frac{1}{h_i} + \frac{h_i}{6} \\ -\frac{1}{h_i} + \frac{h_i}{6} & \frac{1}{h_i} + \frac{h_i}{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

Esta expresión es la misma que la del elemento lineal convencional. En este punto, el elemento isoparamétrico no parece tener ventaja sobre el elemento convencional porque el elemento isoparamétrico requiere más procedimientos como el mapeo y la regla de la cadena. La principal ventaja de los elementos isoparamétricos se produce cuando la integración analítica para calcular las matrices de los elementos y los vectores de las columnas es muy complicada o casi imposible. Este es el caso en que las formas de los elementos en el dominio físico no son regulares como en el problema multidimensional o la ecuación diferencial es bastante compleja. Por lo tanto, se necesita la técnica de integración numérica. Porque cada elemento isoparamétrico es definido en términos del dominio normalizado como

$\xi_1 = -1$ y $\xi_2 = 1$, es mucho más fácil aplicar cualquier técnica de integración numérica [32]. El elemento de barra lineal es un elemento finito unidimensional donde las coordenadas locales y globales coinciden. Se caracteriza por funciones de forma lineal y es idéntico al elemento de resorte, excepto que la rigidez de la barra no se da directamente. El elemento lineal tiene un módulo de elasticidad E , área de sección transversal A y longitud L . Cada elemento de barra lineal tiene dos nodos como se muestra en la figura ???. En este caso, la matriz de rigidez del elemento viene dada por [31].

$$k = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

En la Fig. (3.6) se muestran los elementos locales y globales.

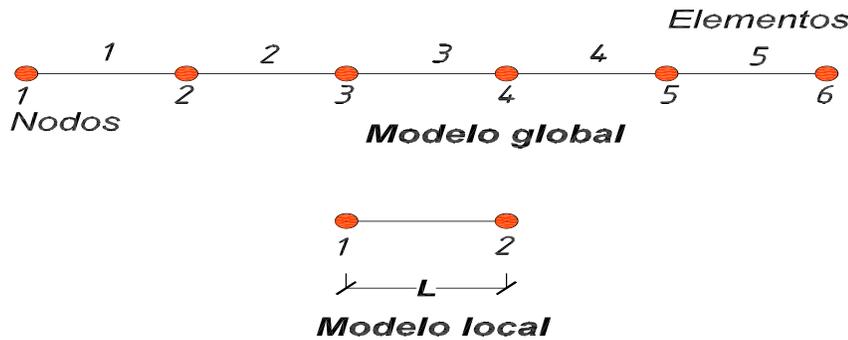


Figura 3.6: Elementos finitos global y local.

La matriz de conectividad de cada uno de los elementos se muestra en la tabla (3.1).

Elemento global	Elemento local	
	Nodo 1	Nodo 2
1	1	2
2	2	3
3	3	4
4	4	5
5	5	6

Tabla 3.1: Matriz de conectividad.

3.3. Elementos finitos bidimensionales

El elemento cuadrilátero bilineal es un elemento finito bidimensional con coordenadas locales y coordenadas globales. Se caracteriza por funciones de forma Fig. (6.7) lineal en cada una de las x y y direcciones. Este elemento se puede usar para problemas de tensión plana o deformación plana en elasticidad. Es una generalización del elemento rectangular de 4 nodos. El elemento cuadrilátero bilineal tiene módulo de elasticidad E , relación de Poisson ν , y espesor t . Cada elemento cuadrilátero bilineal tiene cuatro nodos con dos grados de libertad en el plano en cada nodo como se muestra en la Fig. (3.8).

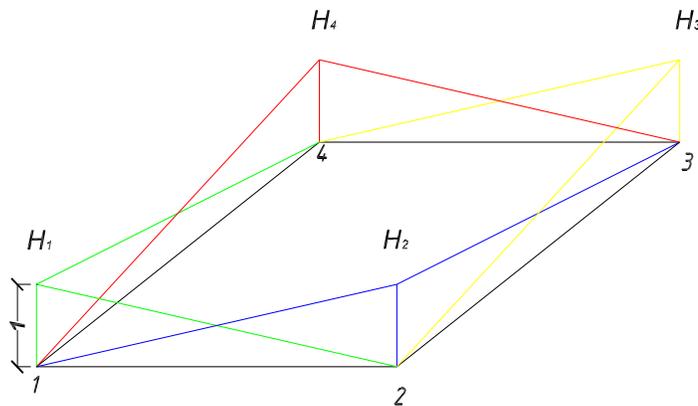


Figura 3.7: Funciones de Forma.

En muchas aplicaciones de la mecánica del continuo es posible y conveniente computacionalmente deducir de dos formulaciones más sencillas que son apropiadas para el estudio de problemas en dos dimensiones. Estas formulaciones se conocen como modelos de tensión plana y deformación plana para la elasticidad lineal [33]. Para un material isotrópico, la ecuación constitutiva es

$$\{\sigma\} = [D]\{\epsilon\}$$

Dónde σ es la matriz de tensión, y ϵ es la matriz de la deformación. Las funciones de forma para el elemento isoparamétrico bilineal se muestran en la Ec.(3.33).

$$\begin{aligned} H_1(\xi, \eta) &= A(\xi - 1)(\eta - 1) = \frac{1}{4}(\xi - 1)(\eta - 1) \\ H_2(\xi, \eta) &= A(\xi + 1)(\eta - 1) = -\frac{1}{4}(\xi + 1)(\eta - 1) \\ H_3(\xi, \eta) &= A(\xi + 1)(\eta + 1) = \frac{1}{4}(\xi + 1)(\eta + 1) \\ H_4(\xi, \eta) &= A(\xi - 1)(\eta + 1) = -\frac{1}{4}(\xi - 1)(\eta + 1) \end{aligned} \quad (3.33)$$

Para los nodos que se muestran en la Fig. (3.8). Estas funciones de forma se definen en términos del dominio natural normalizado (es decir, $-1 \leq \xi \leq 1$ y $-1 \leq \eta \leq 1$). Si bien la forma del elemento es un cuadrado en el sistema de coordenadas natural, se puede mapear en una forma cuadrilátera general con distorsión como se ve en la Fig. (3.9). Cuando se realiza este mapeo, las posiciones relativas de los puntos nodales deben ser consistentes entre los dos elementos en los dominios natural y físico. En otras palabras, el segundo nodo está al lado del primer nodo en el sentido contrario a las agujas del reloj y de manera similar para el resto de los nodos. Luego, un punto (ξ, η) dentro del elemento natural se mapea en un punto (x, y) dentro del elemento físico usando las funciones de forma dadas en las Ec.(3.33) como se muestra en Ec. (3.34) y Ec. (3.35) [32].

$$x = H_1(\xi, \eta)x_1 + H_2(\xi, \eta)x_2 + H_3(\xi, \eta)x_3 + H_4(\xi, \eta)x_4 \quad (3.34)$$

$$y = H_1(\xi, \eta)y_1 + H_2(\xi, \eta)y_2 + H_3(\xi, \eta)y_3 + H_4(\xi, \eta)y_4 \quad (3.35)$$

Del mismo modo, cualquier variable física se puede interpolar usando las mismas funciones de forma Ec.(3.36) [32].

$$u = H_1(\xi, \eta)u_1 + H_2(\xi, \eta)u_2 + H_3(\xi, \eta)u_3 + H_4(\xi, \eta)u_4 \quad (3.36)$$

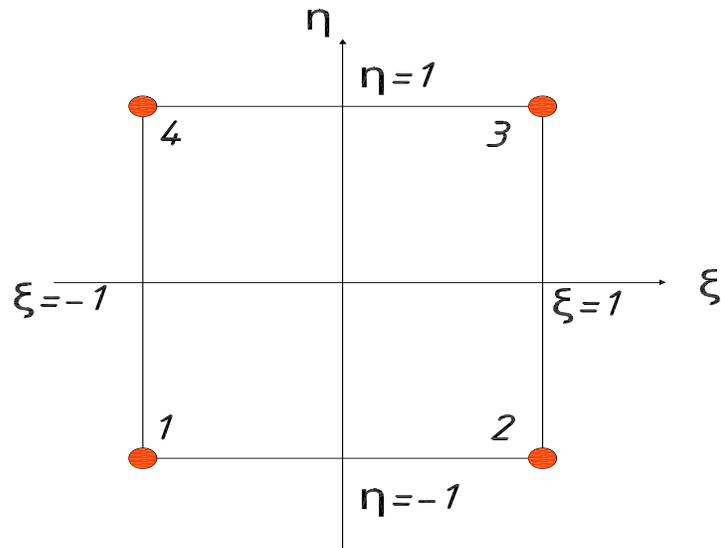


Figura 3.8: Elemento bilineal en la coordenada natural.

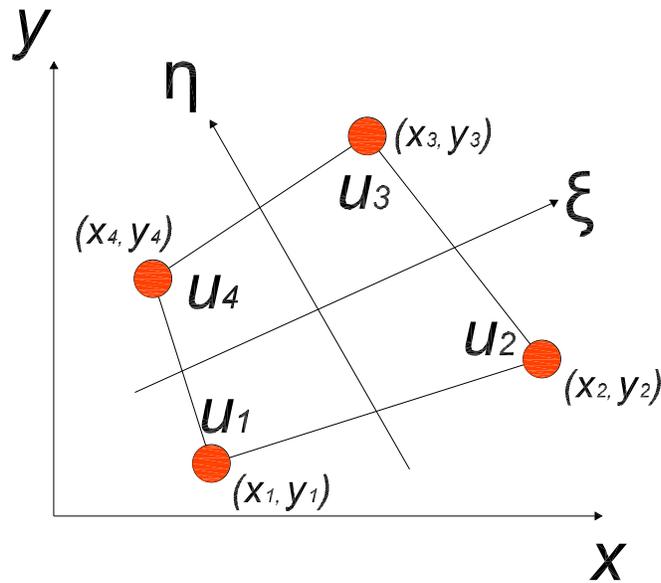


Figura 3.9: Elemento bilineal en la coordenada física.

La matriz $[B]$ se da de la siguiente manera:

$$[B] = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

donde cada $[B_i]$ es dado por Ec. (3.38):

$$[B_i] = \begin{bmatrix} a \frac{\partial H_i}{\partial \xi} - b \frac{\partial H_i}{\partial \eta} & 0 \\ 0 & c \frac{\partial H_i}{\partial \eta} - d \frac{\partial H_i}{\partial \xi} \\ c \frac{\partial H_i}{\partial \eta} - d \frac{\partial H_i}{\partial \xi} & a \frac{\partial H_i}{\partial \xi} - b \frac{\partial H_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

y los parámetros a , b , c y d son dados por Ec. (3.39):

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{1}{4} [y_1(\xi - 1) + y_2(-1 - \xi) + y_3(1 + \xi) + y_4(1 - \xi)] \\
 b &= \frac{1}{4} [y_1(\eta - 1) + y_2(1 - \eta) + y_3(1 + \eta) + y_4(-1 - \eta)] \\
 c &= \frac{1}{4} [x_1(\eta - 1) + x_2(1 - \eta) + x_3(1 + \eta) + x_4(-1 - \eta)] \\
 d &= \frac{1}{4} [x_1(\xi - 1) + x_2(-1 - \xi) + x_3(1 + \xi) + x_4(1 - \xi)]
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{dx}{d\xi} \tag{3.40}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{d\xi} &= \frac{dH_1}{d\xi} x_1 + \frac{dH_2}{d\xi} x_2 + \frac{dH_3}{d\xi} x_3 + \frac{dH_4}{d\xi} x_4 \\
 \frac{dx}{d\eta} &= \frac{dH_1}{d\eta} x_1 + \frac{dH_2}{d\eta} x_2 + \frac{dH_3}{d\eta} x_3 + \frac{dH_4}{d\eta} x_4 \\
 \frac{dy}{d\xi} &= \frac{dH_1}{d\xi} y_1 + \frac{dH_2}{d\xi} y_2 + \frac{dH_3}{d\xi} y_3 + \frac{dH_4}{d\xi} y_4 \\
 \frac{dy}{d\eta} &= \frac{dH_1}{d\eta} y_1 + \frac{dH_2}{d\eta} y_2 + \frac{dH_3}{d\eta} y_3 + \frac{dH_4}{d\eta} y_4
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dH_1}{d\xi} &= \frac{1}{4} (1 - \eta) \\
 \frac{dH_1}{d\eta} &= \frac{1}{4} (1 - \xi) \\
 \frac{dH_2}{d\xi} &= \frac{1}{4} (1 - \eta) \\
 \frac{dH_2}{d\eta} &= -\frac{1}{4} (1 + \xi) \\
 \frac{dH_3}{d\xi} &= \frac{1}{4} (1 + \eta) \\
 \frac{dH_3}{d\eta} &= \frac{1}{4} (1 + \xi) \\
 \frac{dH_4}{d\xi} &= -\frac{1}{4} (1 + \eta) \\
 \frac{dH_4}{d\eta} &= \frac{1}{4} (1 - \xi)
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

La transformación isoparametrica esta dada por Ec. (3.44).

$$J = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} (1-\eta)x_1 + (1-\eta)x_2 + (1+\eta)x_3 - (1+\eta)x_4 & (1-\xi)x_1 - (1+\xi)x_2 + (1+\xi)x_3 + (1-\xi)x_4 \\ (1-\eta)y_1 + (1-\eta)y_2 + (1+\eta)y_3 - (1+\eta)y_4 & (1-\xi)y_1 - (1+\xi)y_2 + (1+\xi)y_3 + (1-\xi)y_4 \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

El determinante del jacobiano expresa el diferencial de área en coordenadas naturales como Ec.(3.44).

$$dx \cdot dy = |J|d\xi d\eta \quad (3.44)$$

El determinante $|J|$ es dado por:

$$|J| = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1-\eta & \eta-\xi & \xi-1 \\ \eta-1 & 0 & \xi+1 & -\xi-\eta \\ \xi-\eta & -\xi-1 & 0 & \eta+1 \\ 1-\xi & \xi+\eta & -\eta-1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

Para el caso de tensión plana

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} \quad (3.46)$$

La matriz de rigidez del elemento para un elemento cuadrilátero bilineal se escribe

$$[k] = t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] [J] d\xi d\eta \quad (3.47)$$

$$[K]\{U\} = \{F\}, \quad (3.48)$$

Donde

E=Elasticidad

D=Matriz de propiedades de los materiales

ν =Coeficiente de poisson

t= Espesor

J=Jacobiano

K = Matriz de rigideces global

U =Desplazamientos nodales globales

F = Fuerzas nodales globale

3.4. Ecuaciones de Laplace y Poisson

3.4.1. Ecuación gobernante

Las ecuaciones de Laplace y Poisson son un campo común que gobierna las ecuaciones para describir varias naturalezas físicas. Por ejemplo, estas ecuaciones diferenciales pueden representar la conducción del calor, el flujo potencial y la torsión de los miembros no circulares. Por lo tanto, se estudia la formulación de elementos finitos de estas ecuaciones. La ecuación de Laplace es [32]

$$\nabla^2 u = 0 \quad (3.49)$$

mientras que la ecuación de Poisson es

$$\nabla^2 u = g \quad (3.50)$$

Debido a que la ecuación de Poisson es más general que la ecuación de Laplace, se considera la ecuación de Poisson en la siguiente formulación. La ecuación de Poisson en términos del sistema de coordenadas cartesianas se convierte en Ec. (3.51)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = g(x, y) \text{ en } \Omega \quad (3.51)$$

para el dominio bidimensional Ω . Las condiciones límite son:

$$u = \bar{u} \text{ sobre } \Gamma_e \quad (3.52)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \bar{q} \text{ sobre } \Gamma_n \quad (3.53)$$

donde u y q denotan condiciones límites conocidas de variables y flujos, y n en la Ec. (3.53) es el vector unitario normal hacia afuera en el límite. Además, Γ_e y Γ_n son límites para las condiciones de frontera esenciales y naturales, respectivamente. Para el problema del valor límite bien situado [32],

$$\Gamma_e \cup \Gamma_n = \Gamma \quad (3.54)$$

$$\Gamma_e \cap \Gamma_n = \phi \quad (3.55)$$

en el que \cup y \cap denotan suma e intersección respectivamente, y Γ es el límite total del dominio Ω . La integración del residuo ponderado de la ecuación diferencial y la condición de frontera es

$$I = \int_{\Omega} w \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - g(x, y) \right) d\Omega - \int_{\Gamma_e} w \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma \quad (3.56)$$

Para desarrollar la formulación débil de la Ec. (3.56), se aplica la integración por partes para reducir el orden de diferenciación dentro de la integral [32].

$$\nabla \cdot (u \nabla \omega) = u \nabla^2 \omega + (\nabla u) \cdot (\nabla \omega) \quad (3.57)$$

$$\nabla \cdot (\omega \nabla u) = \omega \nabla^2 u + (\nabla \omega) \cdot (\nabla u) \quad (3.58)$$

donde

$\nabla \cdot$ es la divergencia

∇ es el gradiente

∇^2 es el Laplaciano

$a \cdot b$ es el producto

desde el teorema de la divergencia

$$\int_v (\nabla \cdot F) dv = \int_s F \cdot da \quad (3.59)$$

sustituyendo

$$\int_s \omega (\nabla u) \cdot da = \int_{\Omega} [\omega \nabla^2 u + (\nabla \omega) \cdot (\nabla u)] d\Omega \quad (3.60)$$

esta es la primera identidad de Green. sustituyendo Ec. (3.57) en Ec. (3.58)

$$\nabla \cdot (\omega \nabla u - u \nabla \omega) = \omega \nabla^2 u + u \nabla^2 \omega \quad (3.61)$$

por lo tanto

$$\int_{\Omega} (\omega \nabla^2 u + u \nabla^2 \omega) d\Omega = \int_s (\omega \nabla u - u \nabla \omega) da \quad (3.62)$$

Esta es la segunda identidad de Green.

Dejamos que u tenga primeras derivadas parciales continuas y que sea armónica dentro de la región de integración. entonces la tercera identidad de Green es

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma_e} \left[\ln \left(\frac{1}{r} \right) \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \ln \left(\frac{1}{r} \right) \right] d\Gamma \quad (3.63)$$

En nuestro caso la solución es la siguiente

$$\int_{\Omega} [\omega \nabla^2 u + (\nabla \omega) \cdot (\nabla u)] d\Omega \quad (3.64)$$

$$\int_{\Omega} \left[\omega \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - g(x, y) \right) + (\nabla \omega) \cdot (\nabla u) \right] d\Omega = 0 \quad (3.65)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = g(x, y) \text{ en } \Omega \quad (3.66)$$

$$\nabla^2 u = 0 \quad (3.67)$$

Para realizar las aproximaciones seleccionamos ciertas funciones de forma convenientes que nos permitan eliminar el lado derecho de la Ec. (3.59).

3.5. Ejemplo

Para mostrar como funciona el método de Elementos Finitos se resuelve el siguiente ejemplo.

Se resuelve la ecuación de Laplace para el dominio que se muestra en la Fig. (3.10). La condición límite también se muestra en la figura.

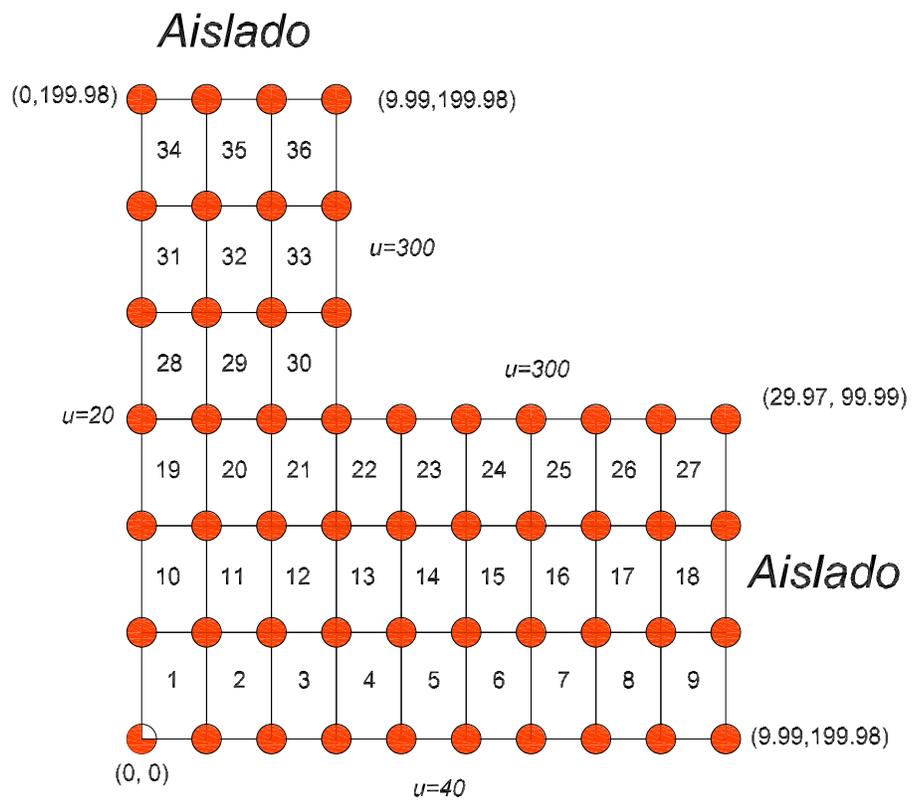


Figura 3.10: Figura para el ejemplo de Laplace.

La tabla de conectividad se muestra a continuación:

Número de Elemnto	Nodo i	Nodo j	Nodo m	Nodo n
1	1	2	12	11
2	2	3	13	12
3	3	4	14	13
4	4	5	15	14
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
33	43	44	48	47
34	45	46	50	49
35	46	47	51	50
36	47	48	52	51

Tabla 3.2: Matriz de conectividad.

N°Nodo	u	N°Nodo	u
1	40.00	27	-22.15
2	40.00	28	-34.68
3	40.00	29	-53.26
4	40.00	30	0.00
5	40.00	31	20.00
6	40.00	32	110.26
7	40.00	33	202.78
8	40.00	34	300.00
9	40.00	35	300.00
10	0.00	36	300.00
11	20.00	37	300.00
12	18.58	38	300.00
13	17.54	39	300.00
14	17.67	40	0.00
15	12.76	41	20.00
16	9.24	42	114.59
17	6.99	43	208.26
18	6.13	44	300.00
19	6.90	45	20.00
20	0.00	46	110.94
21	20.00	47	203.73
22	10.53	48	300.00
23	-1.24	49	0.00
24	-17.84	50	0.00
25	-13.82	51	0.00
26	-15.26	52	0.00

Tabla 3.3: Desplazamientos de los nodos (u).

Las ecuaciones de Laplace y Poisson ocurren como problemas de campo en muchas áreas de ingeniería y por eso he recibido mucha atención [34]. Esta discretización se va utilizar en el capítulo 4.

Capítulo 4

Problema Inverso

Los problemas inversos son los que consisten en encontrar una propiedad desconocida de un objeto, o un medio, a partir de la observación de una respuesta de este objeto, o medio, a una señal de sondeo. Así, la teoría de los problemas inversos da una base teórica para la teledetección y la evaluación no destructiva. Por ejemplo, si una onda plana acústica es dispersado por un obstáculo, y se observa el campo disperso lejos del obstáculo, o en alguna región exterior, entonces el problema inverso es encontrar la forma y las propiedades del material del obstáculo [35]. El punto de partida en la mayoría de los problemas inversos es una descripción de los datos. Como en la mayoría de los problemas inversos los datos son simplemente una lista de valores numéricos, un vector proporciona un medio conveniente para su representación. Si se realizan N mediciones en un experimento particular, por ejemplo, uno podría considerar estos números como los elementos de un vector d de longitud N . El propósito del análisis de datos es obtener conocimiento a través del examen sistemático de datos [36]. Los parámetros del modelo se eligen para que tengan sentido; es decir, se eligen para capturar el carácter esencial de los procesos que se están estudiando [36]. La declaración básica de un problema inverso es que los parámetros del modelo y los datos están en de alguna manera relacionada. Esta relación se llama modelo cuantitativo (o modelo, o teoría, para corto). Por lo general, el modelo toma la forma de una o más fórmulas que los datos y el modelo. Se espera que los parámetros sigan. Si, por ejemplo, uno intentara determinar la densidad de un objeto, como una roca, midiendo su masa y volumen, habría $N = 2$ datos (masa y volumen (digamos, d_1 y d_2 , respectivamente) y $M = 1$ desconocido parámetro del modelo, densidad (digamos, m_1). El modelo sería la afirmación de que la densidad por el volumen es igual a la masa, que puede escribirse de manera compacta mediante la ecuación vectorial $d_2 m_1 = d_1$. Tomando en cuenta que el parámetro modelo, densidad, es más significativo que la masa o el volumen, ya que re-

presenta una propiedad intrínseca de una sustancia relacionada con su química. Los datos (masa y volumen) son fáciles de medir, pero son menos fundamentales porque dependen del tamaño del objeto, que generalmente es incidental [36]. La Física nos permite hacer predicciones a través de las que denominamos ecuaciones gobernantes de un sistema físico. Podemos predecir el resultado de algunas mediciones, a esto se le llama el problema directo (predecimos efectos a partir de las causas). El problema inverso consiste en utilizar las mediciones para estimar los valores de los parámetros que caracterizan el sistema [28]. El módulo de Young es uno de los parámetros geomecánicos básicos que se utilizan para definir los fenómenos mecánicos en las masas rocosas. Su determinación se basa en una prueba de compresión uniaxial. Según la Sociedad Internacional de Mecánica de Rocas, se puede calcular de tres maneras diferentes, utilizando una tangente, una secante o un módulo medio. Este último se recomienda dentro del rango del 25-75 % de la tensión final [37].

Se utilizaron muestras cúbicas para determinar la resistencia a la compresión uniaxial, de las que se obtuvo la carga máxima soportada por las muestras de rocas y se utilizaron en el modelo de elementos finitos para estimar el módulo de elasticidad dinámica. La deformación indica un cambio de forma en la muestra, que corresponde a los desplazamientos que la roca soporta cuando se somete a compresión. Una vez conocidos los valores de la carga soportada por la muestra, el espesor de la misma y los desplazamientos en cada nodo, se puede realizar el problema inverso.

En el esquema propuesto se utilizaron elementos bidimensionales con funciones cuadriláteras bilineales[30]. Tales elementos se utilizan a menudo en problemas de tensión o deformación de la elasticidad [31, 32], en los que se consideran como parámetros los valores de la razón de Poisson ν , el espesor t , así como los desplazamientos horizontales y verticales de cada nodo. Para simplificar, teniendo en cuenta la forma de las muestras, consideramos pequeñas deformaciones lineales $2D$ y dos grados de libertad por nodo. Para el ensayo se siguió minuciosamente la norma ASTM D 2938 -95(2002) para obtener la resistencia a la compresión no confinada (UCS) del núcleo de la roca con muestras cilíndricas, que expresa el valor en el que la muestra experimenta una pérdida total de cohesión a lo largo de la superficie de la fractura [2, 20].

Los problemas inversos surgen en una variedad de aplicaciones importantes en la ciencia y la industria. Éstas van desde la obtención de imágenes biomédicas y geofísicas hasta la modelización del flujo de las aguas subterráneas. En estas aplicaciones el objetivo es estimar algunos atributos desconocidos de interés, dadas las mediciones que sólo están relacionadas

indirectamente con estos atributos. Por ejemplo, en la tomografía computarizada médica se desea obtener imágenes de las estructuras del cuerpo a partir de las mediciones de los rayos X que han pasado por el cuerpo. En la modelización del flujo de aguas subterráneas, se estiman los parámetros materiales de un acuífero a partir de mediciones de la presión de un fluido que lo sumerge. Lamentablemente, una pequeña cantidad de ruido en los datos puede dar lugar a enormes errores en las estimaciones. Este fenómeno de inestabilidad se denomina "mala posición". Se han desarrollado técnicas matemáticas conocidas como métodos de regularización para hacer frente a la mala posición [38].

4.1. Un ejemplo

Estiramiento de una columna prismática de concreto con su propio peso continuo. En este problema $F_x = F_y = 0$, $F_z = -\rho g$, ρ es la densidad de masa del material y g es la aceleración de la gravedad. La densidad del concreto es 0.24kg/cm^3 , área de la sección transversal es 400cm^2 , la longitud de la columna es de 100cm . y E es $326,757\text{kg/cm}^2$. Para resolver este problema se utilizaron elementos de barra lineal y se consideraron 5 elementos. La matriz de conectividad se muestra enseguida.

N° de elemento	Nodo i	Nodo j
1	1	2
2	2	3
3	3	4
4	4	5
5	5	6

Tabla 4.1: Matriz de conectividad.

La matriz de rigideces para cada elemento esta representada por la Ec. (4.1).

$$k = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

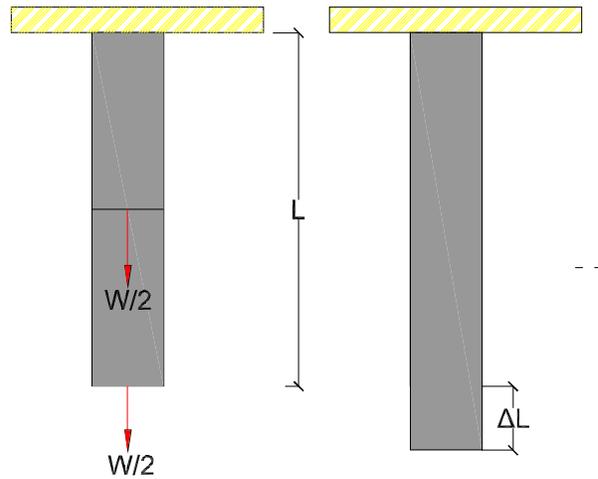


Figura 4.1: Elongación de una columna bajo su propio peso.

La matriz de rigideces ensamblada es representada por Ec. (4.2),

$$K = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} + \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} + \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} + \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} + \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Cuando se resuelve el problema directo para la elongación de una columna bajo su propio peso la ecuación a resolver es $[K]\{U\} = \{F\}$, y dicha información se puede obtener debido a que cada problema en particular tiene condiciones de frontera determinadas. La solución

al problema para el caso directo se muestra en la Ec. (4.3),

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} + \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} + \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} + \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} + \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U1 \\ U2 \\ U3 \\ U4 \\ U5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{mg}{5} \\ \frac{mg}{5} \\ \frac{mg}{5} \\ \frac{mg}{5} \\ \frac{mg}{5} \\ W6 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

En el caso del problema inverso lo que se requiere estimar es el módulo de elasticidad, conociendo los desplazamientos U y el peso propio del elemento dividido entre el número de elementos finitos.

$$E \begin{bmatrix} \frac{A}{L} & -\frac{A}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{A}{L} & \frac{A}{L} + \frac{A}{L} & -\frac{A}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{A}{L} & \frac{A}{L} + \frac{A}{L} & -\frac{A}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{A}{L} & \frac{A}{L} + \frac{A}{L} & -\frac{A}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{A}{L} & \frac{A}{L} + \frac{A}{L} & -\frac{A}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{A}{L} & \frac{A}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U1 \\ U2 \\ U3 \\ U4 \\ U5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{mg}{5} \\ \frac{mg}{5} \\ \frac{mg}{5} \\ \frac{mg}{5} \\ \frac{mg}{5} \\ W6 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Al sustituir los valores en la Ec. (4.4) queda de la siguiente manera:

$$E \begin{bmatrix} 20 & -20 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -20 & 40 & -20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -20 & 40 & -20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -20 & 40 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -20 & 40 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -20 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.0044 \\ -0.0041 \\ -0.0035 \\ -0.0026 \\ -0.0015 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1920 \\ -1920 \\ -1920 \\ -1920 \\ -1920 \\ 9600 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Resolviendo el sistema anterior se obtiene el módulo de Elasticidad en este caso $3.2676e + 05$, a esto se le conoce como problema inverso y el procedimiento se detalla en el apartado 4.5.2.

N° de Nodo	Elongación U en cm
1	-0.0044
2	-0.0041
3	-0.0035
4	-0.0026
5	-0.0015
6	0

Tabla 4.2: Elongación de la columna con 5 elementos.

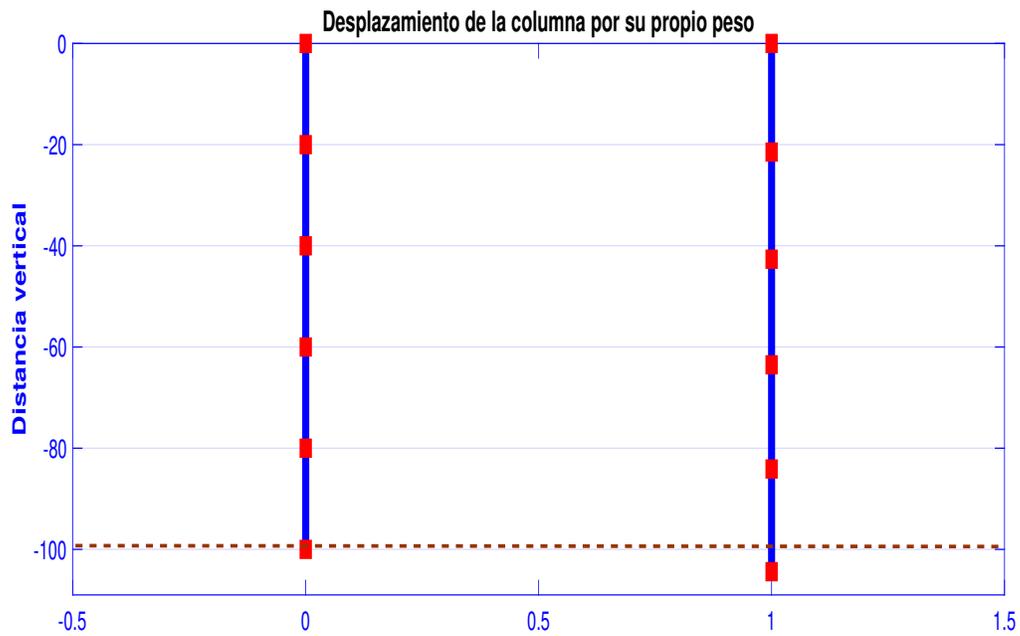


Figura 4.2: Elongación de una columna bajo su propio peso con 5 elementos.

Las Figs. (4.2) y (4.3) muestran la misma columna pero con diferente número de elementos, observándose la misma longitud de elongación independientemente del número de elementos.

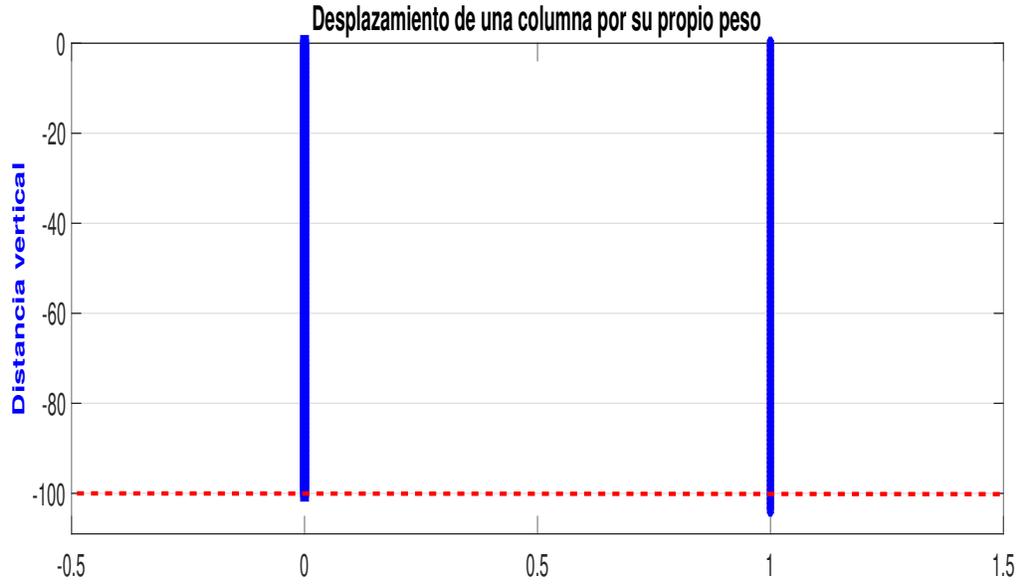


Figura 4.3: Elongación de una columna bajo su propio peso con 100 elementos.

4.2. Regularización por filtrado

A pesar del mal acondicionamiento, se puede extraer información útil del sistema lineal discreto $K\mathbf{f} = \mathbf{d}$. Para simplificar la presentación, considere un modelo de datos discreto

$$\mathbf{d} = K\mathbf{f}_{true} + \eta \quad (4.6)$$

con

$$\delta \stackrel{def}{=} \|\eta\| > 0 \quad (4.7)$$

Aquí $\|\cdot\|$ denota la norma euclidiana estándar, f_{true} representa la fuente verdadera discretizada y η representa el error en los datos. El parámetro δ se llama nivel de error. Para mayor simplicidad, suponga que K es una matriz invertible de valor real. Luego tiene una descomposición de valor singular (SVD).

$$K = U \text{diag}(S_i) V^T \quad (4.8)$$

con valores singulares decrecientes estrictamente positivos s_i . En este punto, requerimos los siguientes hechos: los vectores de columna \mathbf{v}_i de V , que se denominan vectores singulares derechos, y los vectores de columna \mathbf{u}_i de U , que son los vectores singulares izquierdos,

satisfacen

$$\mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_j = \delta_{ij}, \quad \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_j = \delta_{ij}, \quad (4.9)$$

$$K \mathbf{v}_i = s_i \mathbf{u}_i, \quad K^T \mathbf{u}_i = s_i \mathbf{v}_i \quad (4.10)$$

Aquí δ_{ij} denota el delta de Kronecker, y $U^T = U^{-1}$ y $V^T = V^{-1}$. Hay que tener en cuenta que si K es simétrico y positivo definido, entonces los valores singulares si son los valores propios de K , y $U = V$ tiene columnas que consisten en vectores propios ortonormalizados. Usando las propiedades de las ecuaciones (4.9) y (4.10).

$$K^{-1} \mathbf{d} = V \text{diag}(s_i^{-1}) U^T \mathbf{d} = \mathbf{f}_{true} + \sum_{i=1}^n s_i^{-1} (\mathbf{u}_i^T \eta) \mathbf{v}_i \quad (4.11)$$

La inestabilidad surge debido a la división por pequeños valores singulares. Una forma de superar esta inestabilidad es modificar los s_i^{-1} en Ec. (4.11), por ejemplo, multiplicándolos por una función de filtro de regularización $w_\alpha(s_i^2)$ para la cual el producto $w_\alpha(s_i^2) s_i^{-1} \rightarrow 0$ como $s \rightarrow 0$. Esto filtra componentes singulares de $k^{-1} \mathbf{d}$ correspondientes a valores singulares pequeños y produce una aproximación a \mathbf{f}_{true} con una representación

$$f_\alpha = \sum_{s_i^2 > \alpha} s_i^{-1} (\mathbf{u}_i^T \mathbf{d}) \mathbf{v}_i \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} f_\alpha &= V \text{diag} (w_\alpha(s_i^2) s_i^{-1}) U^T \mathbf{d} \\ &= \sum_{i=1}^n w_\alpha(s_i^2) s_i^{-1} (\mathbf{u}_i^T \mathbf{d}) \mathbf{v}_i \end{aligned} \quad (4.13)$$

Para obtener cierto grado de precisión, hay que mantener los componentes singulares correspondientes a los grandes valores singulares. Esto de tal función de filtro son los grandes valores singulares. Esto se hace tomando $w_\alpha(s^2) \approx 1$ para grandes valores de s^2 . Un ejemplo de tal función filtro es [38]

$$w_\alpha(s^2) = \begin{cases} 1 & \text{if } s^2 > \alpha \\ 0 & \text{if } s^2 \leq \alpha \end{cases} \quad (4.14)$$

Un análisis de error determinante

El lado derecho de Ec. (4.13) define un operador de regularización lineal, que denotamos por R_α . Por lo tanto $f_\alpha = R_\alpha \mathbf{d}$. A partir de Ec. (4.6), el error de solución de la regularización viene dado por

$$e_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} f_\alpha - f_{true} = e_\alpha^{trunc} + e_\alpha^{noise}, \quad (4.15)$$

donde

$$\begin{aligned} e_\alpha^{trunc} &\stackrel{\text{def}}{=} R_\alpha K f_{true} - f_{true} \\ &= \sum_{i=1}^n (w_\alpha (s_i^2) - 1) (v_i^T f_{true}) v_i \end{aligned} \quad (4.16)$$

y

$$\begin{aligned} e_\alpha^{noise} &\stackrel{\text{def}}{=} R_\alpha \eta \\ &= \sum_{i=1}^n w_\alpha (s_i^2) s_i^{-1} (\mathbf{u}_i^T \eta) \mathbf{v}_i \end{aligned} \quad (4.17)$$

Llamamos e_α^{trunc} al error de truncamiento de la solución debido a la regularización. Cuantifica la pérdida de información debido al filtro de regularización. El término e_α^{noise} se llama error de amplificación de ruido [38].

4.2.1. Tasas de convergencia y Selección de parámetros de regularización a posteriori

Considere el filtro TSVD Ec. (4.14) y suponga $\delta \geq s^2$, el cuadrado del valor singular más pequeño. Si esta suposición no se cumple, entonces la amplificación de ruido es tolerable incluso sin regularización. Para obtener una tasa de convergencia para el error de solución, se necesitan límites en el error de truncamiento. Asumir

$$f_{true} = \mathbf{K}^T \mathbf{z}, \quad \mathbf{z} \in \mathbb{R}^2 \quad (4.18)$$

Este es un ejemplo de una llamada condición de fuente [39] o condición de rango. Desde $|(\mathbf{K}^T \mathbf{z})^T \mathbf{v}_i| = |\mathbf{z}^T \mathbf{K} \mathbf{v}_i| = s_i |\mathbf{z}^T \mathbf{u}_i|$ Se obtiene [38].

$$\begin{aligned} \|e_\alpha^{trunc}\|^2 &= \sum_{i=1}^n (w_\alpha(s_i^2) - 1)^2 s_i^2 |\mathbf{z}^T \mathbf{u}_i|^2 \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq n} (w_\alpha(s_i^2) - 1)^2 s_i^2 \|\mathbf{z}\|^2 \\ &\leq \alpha \|\mathbf{z}\|^2. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Una regla de elección de parámetros se llama a posteriori si la selección del parámetro de regularización depende de los datos pero no de información previa sobre la solución. Una de esas reglas es el principio de discrepancia debido a Morozov [40], donde en el caso de la regularización de TSVD o Tikhonov se selecciona el valor más grande del parámetro de regularización α para el cual

$$\|\mathbf{K} \mathbf{f}_\alpha - \mathbf{d}\| \leq \delta. \quad (4.20)$$

Se puede demostrar que tanto la regularización de TSVD como la de Tikhonov con la regla de elección del parámetro del principio de discrepancia son convergentes y, suponiendo que la condición de la fuente Ec. (4.18) [38]. Lo que sigue es una versión de dimensión finita del análisis para el principio de discrepancia aplicado a la regularización de Tikhonov. Para simplificar la notación, defina la discrepancia de datos funcional [38]

$$D(\alpha) = \|\mathbf{K} \mathbf{f}_\alpha - \mathbf{d}\|. \quad (4.21)$$

4.2.2. Métodos de regularización variables y métodos de regularización iterativos

Para sistemas muy grandes mal acondicionados, a menudo no es práctico implementar directamente la regularización mediante filtrado, ya que la representación Ec. (4.13) requiere la SVD de una matriz grande. Sin embargo, la solución de Tikhonov tiene una representación variacional alternativa,

$$f_\alpha = \arg \min_{f \in \mathbb{R}^n} \|\mathbf{K} \mathbf{f} - \mathbf{d}\|^2 + \alpha \|f\|^2, \quad (4.22)$$

que puede ser más fácil de calcular. Esta representación puede tener otras ventajas. Por ejemplo, en óptica, la intensidad de la fuente f no es negativa. La no negatividad se puede imponer como una restricción en Ec. (4.22). Además, el término de mínimos cuadrados $\|\mathbf{K} \mathbf{f} - \mathbf{d}\|^2$ puede ser reemplazado por otros funcionales que se ajusten a los datos. El

término $\|\mathbf{f}\|^2$ en Ec. (4.22) se llama penalización funcional. Se pueden utilizar otros funcionales de penalización para incorporar información a priori [38].

Se ilustra el concepto de regularización iterativa con un ejemplo simple. Considere la función de ajuste de datos de mínimos cuadrados escalados

$$\mathbf{J}(f) = \frac{1}{2} \|\mathbf{K}\mathbf{f} - \mathbf{d}\|^2 \quad (4.23)$$

Esto tiene como gradiente $\text{grad } \mathbf{J}(f) = K^T (\mathbf{K}\mathbf{f} - \mathbf{d})$. Se considera la iteración

$$\mathbf{f}_{\nu+1} = \mathbf{f}_{\nu} - \tau \text{grad } \mathbf{J}(\mathbf{f}_{\nu}), \quad \nu = 0, 1, \dots \quad (4.24)$$

Si en cada iteración ν se elige el escalar τ para minimizar $\text{grad } \mathbf{J}(\mathbf{f}_{\nu})$, entonces se obtiene el método de descenso más pronunciado. Si se fija τ con $\tau < 1/\|K\|^2$, se obtiene un método conocido como iteración de Landweber [41]. Con cualquiera de las opciones de τ , si uno toma la conjetura inicial $\mathbf{f}_0 = \mathbf{0}$ y se supone que K es invertible, se puede demostrar que las iteraciones \mathbf{f}_{ν} convergen en $f_* = K^{-1}\mathbf{d}$. Esto no es deseable si hay un error presente en los datos. Los valores muy pequeños de ν producen soluciones aproximadas demasiado suaves. Por otro lado, a medida que ν se hace grande, las reconstrucciones se vuelven altamente oscilatorias. Este fenómeno se llama semiconvergencia [38].

4.3. Herramientas analíticas

4.3.1. Mal planteado y regularización

\mathcal{H} denotará un espacio real de Hilbert con el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$ y la norma inducida $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$. Si el contexto es claro, se omite el subíndice \mathcal{H} que indica el espacio.

Definición. Deje $K: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$. Una ecuación de operador

$$\mathbf{K}(f) = g \quad (4.25)$$

se dice que está bien planteado siempre que

(i) para cada $g \in \mathcal{H}_2$ existe $f \in \mathcal{H}_1$, llamada solución, para la cual Ec.(4.26) se cumple;

(ii) la solución f es única; y

(iii) la solución es estable con respecto a las perturbaciones en g . Esto significa que si $Kf_* = g_*$ y $Kf = g$, entonces $f \rightarrow f_*$ siempre que $g \rightarrow g_*$.

Se dice que un problema que no está bien planteado está mal planteado [38].

Operadores de compatibilidad, sistemas singulares y SVD

Muchos problemas mal planteados que surgen en las aplicaciones involucran operadores compactos.

Definición. Un operador lineal acotado $K : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ es compacto si y solo si la imagen de cualquier conjunto acotado es un conjunto relativamente compacto, es decir, si el cierre de esta imagen es un subconjunto compacto de \mathcal{H}_2 [38].

Definición. Un sistema singular para un operador lineal compacto $K : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ es un conjunto contable de triples $\{u_j, s_j, v_j\}_j$ con las siguientes propiedades: (i) los vectores singulares correctos v_j forman una base ortonormal para $\text{Null}(K)^\perp$; (ii) los vectores singulares izquierdos u_j forman una base ortonormal para el cierre del Rango (K); (iii) los valores singulares s_j son números reales positivos y están en orden no creciente, $s_1 \geq s_2 \geq \dots > 0$; (iv) para cada j

$$Kv_j = s_j u_j;$$

y (v) para cada j

$K * u_j = s_j v_j$. Si el Rango (K) es de dimensión infinita, se tiene la propiedad adicional [38]

$$\lim_{j \rightarrow \infty} s_j = 0. \quad (4.26)$$

SVD de una matriz

Sea K una matriz $m \times n$. K puede verse como un operador lineal compacto, mapeando $\mathcal{H}_1 = \mathbb{R}^n$ en $\mathcal{H}_2 = \mathbb{R}^m$. Tiene un sistema singular $\{\mathbf{u}_j, \mathbf{s}_j, \mathbf{v}_j\}_{j=1}^r$, donde r es el rango de K , es decir, la dimensión de Rango (K). Deje que U_r denote la matriz $m \times r$ cuya columna j th es u_j , y deje que V_r denote la matriz $n \times r$ cuya columna j es v_j . Si $r < n$, entonces $\text{Null}(K)$ es un subespacio no trivial de \mathbb{R}^n , y se puede construir una matriz $n \times (n - r)$ V_0 cuyas columnas forman una base ortonormal para $\text{Null}(K)$. De manera similar, si $r < m$, entonces $\text{Rango}(K)^\perp$ es un subespacio no trivial de \mathbb{R}^m , y se puede construir una matriz $m \times (m - r)$ U_\perp cuyas columnas forman una base ortonormal para $\text{Rango}(K)^\perp$. Entonces la SVD de K es la descomposición de la matriz.

$$K = UDV^T, \quad (4.27)$$

$$\text{donde } U = \begin{bmatrix} U_r & U_\perp \end{bmatrix},$$

$$V = \begin{bmatrix} V_r & V_0 \end{bmatrix}$$

$$y D = \begin{bmatrix} \text{diag}(s_1, \dots, s_r) & O_{r \times (n-r)} \\ O_{(m-r) \times r} & O_{(m-r) \times (n-r)} \end{bmatrix}.$$

Soluciones de mínimos cuadrados y el pseudoinverso

Definición. Deje que $K: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ sea acotado y lineal. $f_{ls} \in \mathcal{H}_1$ es una solución de mínimos cuadrados para $Kf = g$ si

$$\|Kf_{ls} - g\|_{\mathcal{H}_2} \leq \|Kf - g\|_{\mathcal{H}_2} \text{ por cada } f \in \mathcal{H}_1 \quad (4.28)$$

No es necesario que exista una solución de mínimos cuadrados. Si existe una solución de mínimos cuadrados f_{ls} , el conjunto de todas las soluciones de mínimos cuadrados viene dado por el subespacio afín $f_{ls} + \text{Null}(K)$. La solución de la norma mínima de mínimos cuadrados para $Kf = g$ viene dada por [38]

$$f_{lsmn} = \arg \min_{f \in f_{ls} + \text{Null}(K)} \|f\|_{\mathcal{H}_1} \quad (4.29)$$

4.3.2. Teoría de la regularización

Con respecto a la ecuación del operador (4.26), se asume que existe un operador R_* que asigna a cada $g \in \text{Rango}(K)$ un único $R_* \in \mathcal{H}$ para el cual $K(R_*(g)) = g$. En el caso lineal, uno típicamente toma $R_* = K^\dagger$. Consideramos una familia de operadores de regularización $R_\alpha: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$, donde α es el parámetro de regularización, que se encuentra en un conjunto de índices I [38].

Definición: $\{R_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es un esquema de regularización que converge a R_* si (i) para cada $\alpha \in I$, R_α es un operador continuo; y (ii) dado cualquier $g \in \text{Rango}(K)$, para cualquier secuencia $\{g_n\} \subset \mathcal{H}_2$ que converja a g , se puede elegir una secuencia $\{\alpha_n\} \subset I$ tal que $R_{\alpha_n}(g_n) \rightarrow R_*(g)$ como $n \rightarrow \infty$. El esquema de regularización es lineal si cada R_α es un operador lineal (acotado) [38].

4.3.3. Teoría de la optimización

$J: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ y dejar que C sea un subconjunto de \mathcal{H} . Deseamos calcular un minimizador de J sobre C , que denotamos por $f_* = \arg \min_{f \in C} J(f)$.

Si $C = \mathcal{H}$, el problema de minimización se llama sin restricciones. De lo contrario, se llama restringido. f_* es un minimizador local si existe $\delta > 0$ para el cual $J(f_*) \leq J(f)$ siempre que $f \in C, \|f - f_*\|_{\mathcal{H}} < \delta$. El minimizador se llama estricto si $J(f_*) \leq J(f)$ se puede

reemplazar por $J(f_*) < J(f)$ cuando $f \neq f_*$ [38].

4.3.4. Regularización generalizada de Tikhonov

Un Tikhonov generalizado funcional para el problema Ec.(4.26) toma la forma

$$T_\alpha(f; g) = \rho(K(f), g) + \alpha J(f). \quad (4.30)$$

Aquí $\alpha > 0$ es el parámetro de regularización, $J : H_1 \rightarrow \mathbb{R}$ se llama funcional de penalización o funcional de regularización y $\rho : H_2 \times H_2 \rightarrow \mathbb{R}$ se llama la discrepancia de datos funcional o funcional de ajuste a datos.

Funcionales de penalización

El propósito de la penalización funcional es inducir estabilidad y permitir la incorporación de información a priori sobre la solución deseada f . En un entorno estadístico, la penalización funcional a menudo se denomina prior. La penalización estándar de Tikhonov funcional en un espacio \mathcal{H}_1 de Hilbert es simplemente

$$J(f) = \frac{1}{2} \|f\|_{H_1}^2 \quad (4.31)$$

Cuando $\mathcal{H}_1 = L^2(\Omega)$, nos referimos a J como la función de penalización de L^2 [38].

4.4. Herramientas de optimización numérica

La regularización de Tikhonov es un método para resolver problemas mal planteados. La implementación práctica de este método requiere la minimización de una versión discreta del funcional Tikhonov. En caso de que este funcional no sea cuadrático, se pueden utilizar métodos iterativos no lineales como el método de descenso más pronunciado o variantes del método de Newton para calcular soluciones regularizadas. Si el funcional es cuadrático, su minimizador satisface un sistema de ecuaciones lineales. Si este sistema es grande, se pueden requerir métodos iterativos para calcular eficientemente el minimizador [38]. Suponga que una secuencia $\{\mathbf{f}_\nu\}$ converge a \mathbf{f}_* como $\nu \rightarrow \infty$. La tasa de convergencia es lineal si existe una constante c , $0 \leq c < 1$, para la cual

$$\|\mathbf{f}_{\nu+1} - \mathbf{f}_*\| \leq c \|\mathbf{f}_\nu - \mathbf{f}_*\| \quad (4.32)$$

La convergencia es superlineal si existe una secuencia $\{c_\nu\}$ de números reales positivos para los cuales $\lim_{\nu \rightarrow \infty} c_\nu = 0$, y

$$\|\mathbf{f}_{\nu+1} - \mathbf{f}_*\| \leq c_\nu \|\mathbf{f}_\nu - \mathbf{f}_*\| \quad (4.33)$$

La tasa es cuadrática si para alguna constante $C > 0$,

$$\|\mathbf{f}_{\nu+1} - \mathbf{f}_*\| \leq c_\nu \|\mathbf{f}_\nu - \mathbf{f}_*\|^2 \quad (4.34)$$

La convergencia cuadrática implica convergencia superlineal, que a su vez implica convergencia lineal [38].

4.4.1. El método del descenso más pronunciado

Algoritmo: Método de descenso más pronunciado. Para minimizar una $J(f)$ funcional suave, $\nu := 0$,

$\mathbf{f}_0 :=$ conjetura inicial; comenzar las iteraciones de descenso más pronunciadas

$\mathbf{P}\nu := -\text{grad } J(\mathbf{f}_\nu)$; % cálculo del gradiente negativo

$\tau_\nu := \arg \min_{\tau > 0} J(\mathbf{f}_\nu + \tau \mathbf{P}\nu)$; % búsqueda de línea

$\mathbf{f}_{\nu+1} := \mathbf{f}_\nu + \tau_\nu \mathbf{P}\nu$; % actualización solución aproximada

$\nu := \nu + 1$;

finalizar las iteraciones de descenso más pronunciadas. Uno de los componentes clave del Algoritmo es la búsqueda de línea [38].

4.4.2. El método del gradiente conjugado

La técnica iterativa conocida como método de gradiente conjugado (CG), junto con un esquema de aceleración conocido como preconditionamiento, proporciona un medio muy eficiente para resolver sistemas lineales definidos simétricos positivos que son grandes y están mal condicionados. El método CG también se puede adaptar para resolver problemas de optimización no cuadráticos [38].

Algoritmo: Método CG para la minimización cuadrática [38]. Para minimizar $J(\mathbf{f}) = c + \langle \mathbf{b}, \mathbf{f} \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathbf{A}\mathbf{f}, \mathbf{f} \rangle$, donde \mathbf{A} es SPD, o, de manera equivalente, para resolver $\mathbf{A}\mathbf{f} = -\mathbf{b}$.

$\nu := 0$;

$\mathbf{f}_0 :=$ estimación inicial

$\mathbf{g}_0 := \mathbf{A}\mathbf{f}_0 + \mathbf{b}$; % gradiente inicial

$\mathbf{P}_0 := -\mathbf{g}_0$; % dirección de búsqueda inicial

```

 $\delta_0 = \|g_0\|^2;$ 
comenzar iteraciones CG
 $\mathbf{h}_\nu := \mathbf{A}\mathbf{p}_\nu;$ 
 $\tau_\nu := \delta_\nu / \langle \mathbf{p}_\nu, \mathbf{h}_\nu \rangle;$  % parámetro de búsqueda de línea
 $\mathbf{f}_{\nu+1} := \mathbf{f}_\nu + \tau_\nu \mathbf{p}_\nu;$  % actualizar la solución aproximada
 $\mathbf{g}_{\nu+1} = \mathbf{g}_\nu + \tau_\nu \mathbf{h}_\nu$  % gradiente de actualización
 $\delta_{\nu+1} := \|\mathbf{g}_{\nu+1}\|^2;$ 
 $\beta_\nu := \delta_{\nu+1} / \delta_\nu;$ 
 $\mathbf{p}_{\nu+1} := -\mathbf{g}_{\nu+1} + \beta_\nu \mathbf{p}_\nu;$  % actualizar la dirección de búsqueda
 $\nu := \nu + 1;$ 
dirección CG final.

```

4.5. Identificación de parámetros

Por identificación de parámetros, usualmente nos referimos a la estimación de coeficientes en una ecuación diferencial a partir de observaciones de la solución a esa ecuación. Estos coeficientes se denominan parámetros del sistema, y la solución y sus derivados constituyen las variables de estado. El problema directo es calcular las variables de estado dados los parámetros del sistema y las condiciones de contorno apropiadas. El problema de avance suele estar bien planteado. La identificación de parámetros, en el problema inverso de interés, generalmente está mal planteado. Además, incluso cuando el problema directo es lineal en la variable de estado, el problema de identificación de parámetros es generalmente no lineal [38].

Ejemplo 1. La ecuación del oscilador armónico amortiguado toma la forma [42]

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kt = f(t), \quad t > 0, \quad (4.35)$$

con condiciones iniciales $x(0) = x_0$, $\frac{dx}{dt}(0) = \nu_0$. Esto se usa para modelar las oscilaciones de un sistema de masa-resorte. En este contexto, $x(t)$ representa el desplazamiento de la masa en el tiempo t , y $\frac{dx}{dt}$ representa la velocidad. x y $\frac{dx}{dt}$ comprenden las variables de estado. Los parámetros del sistema son la masa m , el coeficiente de amortiguamiento c , la constante de resorte k y la función de fuerza externa $f(t)$. El problema directo es determinar las variables de estado, dados los parámetros del sistema y el estado inicial (x_0, ν_0) . Se pueden formular varios problemas inversos, dependiendo de la información disponible. Por ejemplo, la amortiguación y el forzamiento pueden estar ausentes. Uno puede desplazar el sistema y, a partir de las observaciones de su movimiento resultante,

tratar de determinar m y k . Este problema está mal planteado en el sentido de que uno no puede determinar de forma única tanto k como m a partir de los datos observados. La solución a la ecuación (4.35), con $c = f = \nu_0 = 0$, viene dada por la Ec.(4.36

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t), \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (4.36)$$

donde ω representa la frecuencia de oscilación del sistema. A partir de ciertas observaciones del estado, por ejemplo, el desplazamiento $x(t)$ en un intervalo de longitud $2\pi/\omega$, se puede determinar de forma única ω . Sin embargo, a partir de ω se puede determinar solo la relación k/m . De Ec. (4.38) se puede calcular formalmente $\omega = \frac{1}{t} \cos^{-1} \left(\frac{x(t)}{x_0} \right)$.

Esto establece que la dependencia de ω en $x(t)$ no es lineal. Por lo tanto, la dependencia de k o m (dado que se conoce el otro) de ω no es lineal[38].

Ejemplo 2. La ecuación de difusión unidimensional en estado estacionario es Ec. (4.37)

$$\frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{du}{dx} \right) = f(x), \quad 0 < x < 1, \quad (4.37)$$

con condiciones de contorno apropiadas, por ejemplo, condiciones de Dirichlet,

$$u(0) = u_L, \quad u(1) = u_R \quad (4.38)$$

En esta configuración, la variable de estado es la distribución de temperatura $u(x)$, $0 \leq x \leq 1$. Los parámetros del sistema son el coeficiente de difusión $k(x)$ y el término de fuente de calor $f(x)$. Como se trata de funciones en lugar de escalares, la Ec.(4.37) (se denomina sistema de parámetros distribuidos)[38].

$$k(x) = \int_{Y=0}^x f(y) dy \Big/ \frac{du}{dx} \quad (4.39)$$

Se puede ver que la dependencia de k en du/dx (y, por lo tanto, en u mismo) no es lineal. Esta expresión también ilustra varias manifestaciones de mal condicionamiento [38].

4.5.1. Un marco abstracto

Se considera el sistema abstracto de parámetros distribuidos

$$A(q)u = f, \quad (4.40)$$

Donde q representa la distribución de parámetros a ser estimado,

$A(q)$ representa un operador dependiente de parámetros y

u representa la variable de estado correspondiente.

En el ejemplo 2 anterior, q representa el coeficiente de difusión k , y $A(k) = -\frac{d}{dx} (k(x) \frac{d}{dx} (\cdot))$ es el operador de difusión en Ec. (4.37). Se supone que los datos pueden ser expresados como la ecuación siguiente[38]:

$$d = Cu + \eta, \quad (4.41)$$

donde

η representa ruido en los datos y

C se llama el mapa de estado a observación.

Por ejemplo, si la variable de estado se mide en n puntos discretos x_i , entonces $[Cu]_i = u(x_i)$, $i = 1, \dots, n$ [38]. Para los cálculos es necesario varios espacios de funciones abstractas. Donde Q denota el espacio del parámetro, que contiene el parámetro q , U denota el espacio de estado, que contiene la variable de estado u , y γ denota el espacio de observación, que contiene los datos observados d . Por simplicidad, se supone que los tres espacios son espacios de Hilbert. El problema inverso es estimar q dados los datos d . Se pueden tomar varios enfoques para resolver este problema inverso. Una es resolver el problema de minimización de mínimos cuadrados regularizados restringidos

$$\min_{u \in U, q \in Q} \frac{1}{2} \|Cu - d\|^2_{\gamma} + \alpha J(q) \quad \text{sujepto a } A(q)u = f \quad (4.42)$$

donde $J(q)$ es una funcionalización de regularización, incorporada para imponer estabilidad o información a priori o ambas, y α es un parámetro de regularización positivo. Este enfoque se llama mínimos cuadrados de salida regularizados [38]. Se supone que el problema de avance, está bien planteado y denota la solución mediante

$$u = A(q)^{-1} f. \quad (4.43)$$

Entonces se puede obtener de la Ec. (4.42) el problema de minimización de mínimos cuadrados regularizados sin restricciones,

$$\min_{q \in Q} T(q) = \frac{1}{2} \|F(q) - d\|^2_{\gamma} + \alpha J(q), \quad (4.44)$$

donde

$$F(q) = CA(q)^{-1} f. \quad (4.45)$$

Aquí $F : Q \rightarrow \gamma$ a menudo se conoce como el mapa de parámetro a observación [38].

Cálculos de gradientes

Uno de los componentes clave en cualquier implementación de los métodos de optimización es la evaluación de los vectores de gradiente. Estos gradientes pueden ser aproximados por diferencias finitas,

$$[\text{grad } T_n(\mathbf{q})]_i \approx \frac{T_n(\mathbf{q} + \tau_i \mathbf{e}_i) - T_n(\mathbf{q})}{\tau_i}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.46)$$

donde τ_i es relativamente pequeño en comparación con el componente i -ésimo del parámetro discretizado q [38].

Cálculos de Hessian y aproximación de Hessian de Gauss-Newton

El método de Newton para la optimización requiere cálculos hessianos y de gradiente. Para la identificación de parámetros distribuidos, este enfoque es considerablemente más costoso que los cálculos de gradiente de diferencia finita, ya que requiere aproximadamente $n^2/2$ inversiones de $A(q)$. Para evaluar los productos de vectores de matriz de Hesse, se pueden aplicar diferencias finitas al gradiente, como se muestra en la ecuación siguiente:

$$H(\mathbf{q}) \mathbf{v} \approx \frac{\mathbf{g}(\mathbf{q} + \tau \mathbf{v}) - \mathbf{g}(\mathbf{q})}{\tau} \quad (4.47)$$

donde $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ denota el gradiente, que puede evaluarse utilizando el enfoque $[g_{LS}]_i = \left\langle \left(\frac{dA}{d\mathbf{q}} \mathbf{e}_i \right) u, z \right\rangle_u$, $i = 1, \dots, n$. También se puede usar un enfoque adjunto directamente para calcular $\dot{H}(\mathbf{q})v$ [38]. Dado que se puede calcular eficientemente los productos de matriz de vectores de Hesse, en principio puede ensamblar el Hesse utilizando el hecho de que

$$[H(\mathbf{q})]_{ij} = \langle H(\mathbf{q}) \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle_{\mathbf{q}}, \quad 1 \leq i, j \leq n. \quad (4.48)$$

En la práctica, se puede evitar tanto el ensamblaje como la inversión directa del Hessian utilizando técnicas iterativas de solución lineal [38]. El hessiano de los mínimos cuadrados funcionales $J_{LS}(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \|F(\mathbf{q}) - d\|^2$ se puede expresar como

$$H(\mathbf{q}) = H^{GN}(\mathbf{q}) + \frac{d^2 F}{d\mathbf{q}^2} r(\mathbf{q}), \quad (4.49)$$

donde

$H^{GN}(\mathbf{q}) = \left(\frac{dF}{d\mathbf{q}} \right)^* \frac{dF}{d\mathbf{q}}$ se llama la aproximación de Gauss-Newton para el Hessian.

Esto tiene varias ventajas computacionales. Primero, a veces puede ser mucho más fácil de calcular que el hessiano completo, ya que no involucra el segundo término derivado $\frac{d^2 F}{d\mathbf{q}^2}$, que tiene una representación tensorial. Además, la aproximación de Gauss-Newton es semidefinida positiva, y es positiva definida si la primera derivada $\frac{dF}{d\mathbf{q}}$ tiene rango completo. Esto garantiza que el paso de Gauss-Newton es una dirección de descenso. Esto también permite el uso del método de gradiente conjugado en el cálculo del paso de Gauss-Newton. Una desventaja de la aproximación de Hesse Gauss-Newton es la posible pérdida de convergencia cuadrática local. Si el r residual (\mathbf{q}) tiende a cero, entonces se obtiene una convergencia cuadrática local. De lo contrario, la velocidad puede ser lineal, o la iteración puede ni siquiera converger si $r(\mathbf{q})$ sigue siendo demasiado grande[38].

4.5.2. El problema inverso en estudio

De la Ec. (3.48) los parámetros que se conocen son K que es la matriz de rigideces donde esta involucrada la elasticidad del material E y F (las fuerzas aplicadas a las muestras de roca), a esto se le conoce como problema directo debido a que con estos parámetros se pueden estimar los desplazamientos. El problema inverso consiste en conocer el módulo de elasticidad a partir de los desplazamientos en x e y , lo cual consiste en minimizar el residual como se observa en la Fig.(4.4), como se muestra en la Ec.(4.22) que es la solución de Tikhonov.

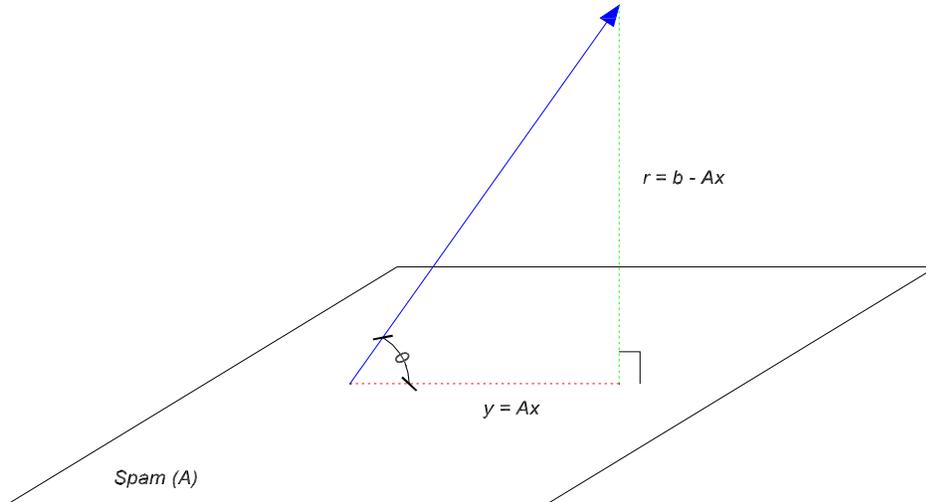


Figura 4.4: Representación geométrica de un problema lineal de mínimos cuadrados.

En este trabajo de investigación, se usaron muestras cúbicas para determinar la resistencia a la compresión uniaxial, a partir de la cual se obtuvo la carga máxima soportada por las muestras de piedra y se usó en el modelo de elementos finitos para estimar el módulo de elasticidad dinámica. La deformación indica un cambio de forma en la muestra, que corresponde a los desplazamientos que soporta la roca cuando está sujeta a compresión. Una vez que se conocen los valores de la carga soportada por la muestra, el grosor de la muestra y los desplazamientos en cada nodo, se puede llevar a cabo el problema inverso.

Para simplificar, teniendo en cuenta la forma de las muestras, consideramos pequeñas deformaciones lineales en $2D$ y dos grados de libertad por nodo. Para la prueba, se siguió estrictamente la norma ASTM D 2938-95 (2002) para obtener la resistencia a la compresión no confinada (UCS) del núcleo de roca con muestras cilíndricas y cúbicas, que expresa el valor donde la muestra experimenta una pérdida total de cohesión a lo largo de la superficie de fractura [20, 43].

$$[C] = E_{di}G \quad (4.50)$$

El problema directo se plantea en las Ecs. (3.46), (3.47) y (3.48), mientras que el problema inverso, que es el problema de interés aquí, está dado por las Ecs. (4.51), (4.52) y (4.53): a saber, dado el desplazamiento en cada nodo, el valor de la relación de Poisson ν y el espesor del material t , se requiere aproximar el módulo de elasticidad. Como las piedras en este análisis son localmente isotrópicas, la Ec.(3.46) puede escribirse como

$$[C] = E_{di} \begin{pmatrix} \frac{1}{1-\nu^2} & \frac{\nu}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu^2} & \frac{1}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2(1-\nu^2)} \end{pmatrix} \quad (4.51)$$

que produce, para un elemento dado,

$$\begin{aligned} [c] &= t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [C] [B] [J] d\xi d\eta \\ [c] &= t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T E_{di} [G] [B] [J] d\xi d\eta \\ [c] &= E_{di} t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [G] [B] [J] d\xi d\eta \end{aligned} \quad (4.52)$$

En consecuencia, el sistema ensamblado toma la forma

$$[C] \{U\} = \{F\} \quad (4.53)$$

Posteriormente, las ecuaciones normales para el sistema sobredeterminado definido por la Ec. (4.53) al cuadrado se minimizan para obtener la estimación del módulo de elasticidad [44]. Este es un problema de identificación de parámetros, destinado a estimar los coeficientes en una ecuación diferencial discretizada a partir de observaciones, en este caso, E_{di} . El problema directo es calcular las variables de estado dados los parámetros del sistema y las condiciones de contorno apropiadas. La técnica propuesta se puede aplicar si se conocen los desplazamientos horizontales y verticales. Estimando el módulo de elasticidad, esto ahorra tiempo de cálculo y permite aproximar el comportamiento de los agregados de piedra o rocas de diferentes canteras en el diseño de la infraestructura.

Ejemplo

Para el caso de Cerritos la muestra C10 tiene un módulo de elasticidad dinámico $E_d = 225214.0136 \text{ kg/cm}^2$, $\sigma = 581.80 \text{ kg/cm}^2$, $\nu = 0.25$, se conocen los desplazamientos ya que se aplicó el método directo mediante MEF. Con la información anterior se puede estimar el módulo de elasticidad mediante el método inverso (E_{di}) descrito con anterioridad.

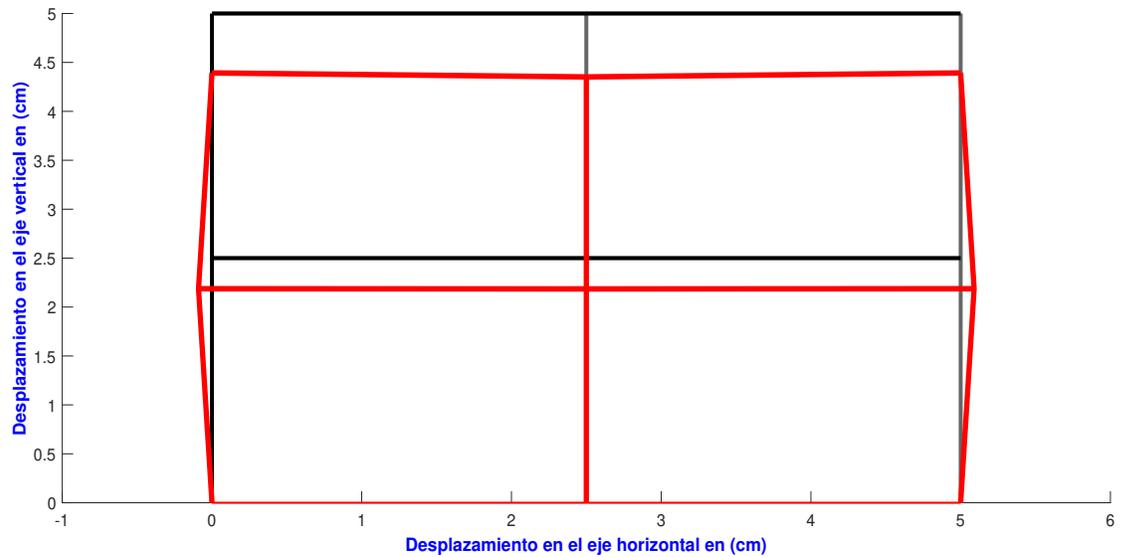


Figura 4.5: Problema inverso de una roca para estimar el módulo de elasticidad con 4 elementos

Para estimar el módulo de elasticidad dinámico es muy importante conocer los desplazamientos horizontales y verticales, tal es el caso de la Fig. (4.5) o la Fig. (4.6). En ambos casos y con sus respectivos desplazamientos se puede estimar el módulo de elasticidad dinámico.

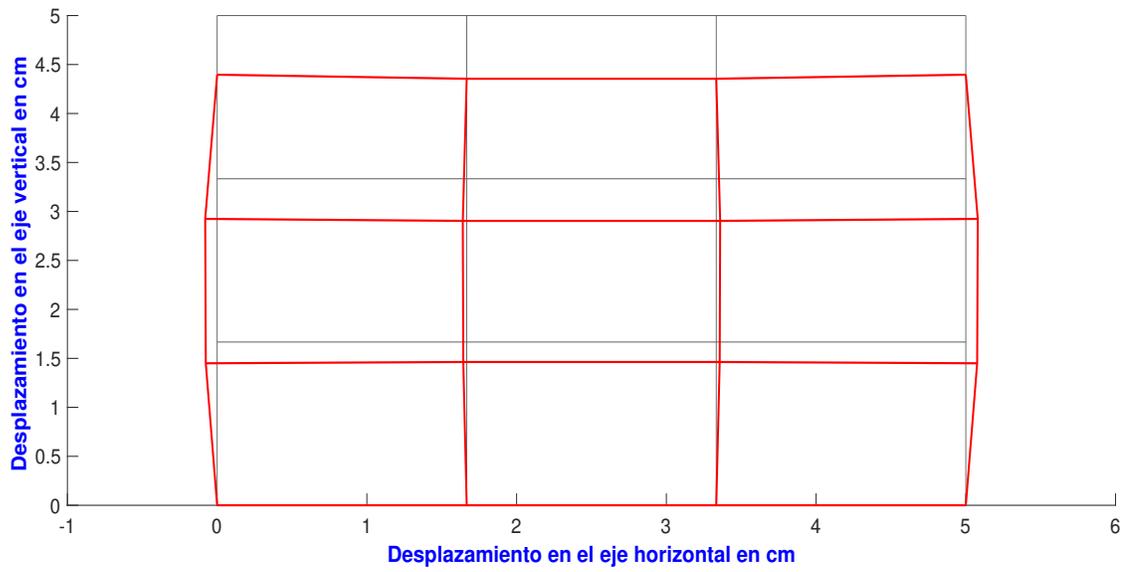


Figura 4.6: Problema inverso de una roca para estimar el módulo de elasticidad con 6 elementos.

Capítulo 5

Aprendizaje automático

5.1. Introducción

En las modernas industrias de procesos, se puede recopilar y archivar una cantidad cada vez mayor de datos que incorporan información valiosa. Al hacer uso de los datos, el análisis de los mismos y el aprendizaje automático pueden ayudar a detectar el entorno, descubrir el conocimiento y tomar decisiones de forma automática e inteligente. Orientado a la vigilancia, la predicción, el control y la optimización impulsados por los datos [45].

El aprendizaje automático es un subcampo de la Inteligencia Artificial (IA) y ha evolucionado del reconocimiento de patrones, utilizado para explorar la estructura de los datos y encajar en los modelos que pueden ser comprendidos y utilizados por los usuarios. Responde a la pregunta de cómo construir un programa de ordenador utilizando datos históricos, para resolver un problema determinado y mejorar automáticamente la eficiencia del programa, con la experiencia. En los últimos años, se han desarrollado varias aplicaciones de aprendizaje automático, como el modelo para clasificar nuevas estructuras astronómicas, la detección de operaciones bancarias fraudulentas, los sistemas de filtrado de información que aprenden las preferencias de lectura de los usuarios, estudios neurobiológicos, vehículos autónomos que aprenden a conducir en las autopistas. También al mismo tiempo, ha habido un importantes avances en los conceptos y los algoritmos que forman la base del aprendizaje de las máquinas [46].

El aprendizaje automático intenta imitar el proceso cognitivo que poseemos. Desde este punto de vista, el ML es una mera colección de algoritmos; cada uno desarrollado con la intención de procesar conjuntos de datos (u observaciones) [33].

El aprendizaje automático se clasifica en general como aprendizaje supervisado, no su-

pervisado, semisupervisado y de refuerzo. Un modelo de aprendizaje supervisado tiene dos tareas principales a realizar, la clasificación y la regresión. La clasificación consiste en predecir una etiqueta de clase nominal, mientras que la regresión consiste en predecir el valor numérico de la etiqueta de clase. Matemáticamente, la construcción de un modelo de regresión consiste en identificar la relación entre la etiqueta de clase y los predictores de entrada. Los predictores también se llaman atributos. En términos estadísticos, los predictores se llaman variables independientes, mientras que la etiqueta de la clase se llama variable dependiente. Un modelo de regresión es una representación de esta relación entre las variables dependientes e independientes. Una vez que esto se aprende durante la fase de entrenamiento, cualquier dato nuevo se conecta a la curva de relación para encontrar la predicción. Esto reduce el problema de aprendizaje de la máquina a la resolución de una ecuación matemática [46].

En este trabajo de investigación se utilizó regresión lineal y regresión logística para analizar los datos obtenidos de las pruebas físicas y mecánicas antes descritas. Para tal fin se desarrollaron algoritmos apoyados en aprendizaje automático. Tom Mitchell define machine learning de la siguiente manera: "Se dice que un programa de ordenador aprende de la experiencia E con respecto a alguna clase de tareas T y la medida de rendimiento P , si su rendimiento en las tareas en T , medidas por P , mejora con la experiencia E " [47].

Machine Learning se divide en aprendizaje supervisado y aprendizaje no supervisado. Aprendizaje supervisado que es el concierne en este avance de tesis, se nos da un conjunto de datos y sabemos cómo debe ser la salida correcta, teniendo la idea de que existe una relación entre la entrada y la salida[47].

Los problemas de aprendizaje supervisado se clasifican en problemas de regresión y clasificación (Fig. 5.1). En un problema de regresión, estamos tratando de predecir los resultados dentro de una salida continua, lo que significa que estamos tratando de mapear las variables de entrada a alguna función continua. En un problema de clasificación, en cambio, estamos tratando de predecir los resultados en una salida discreta[47].

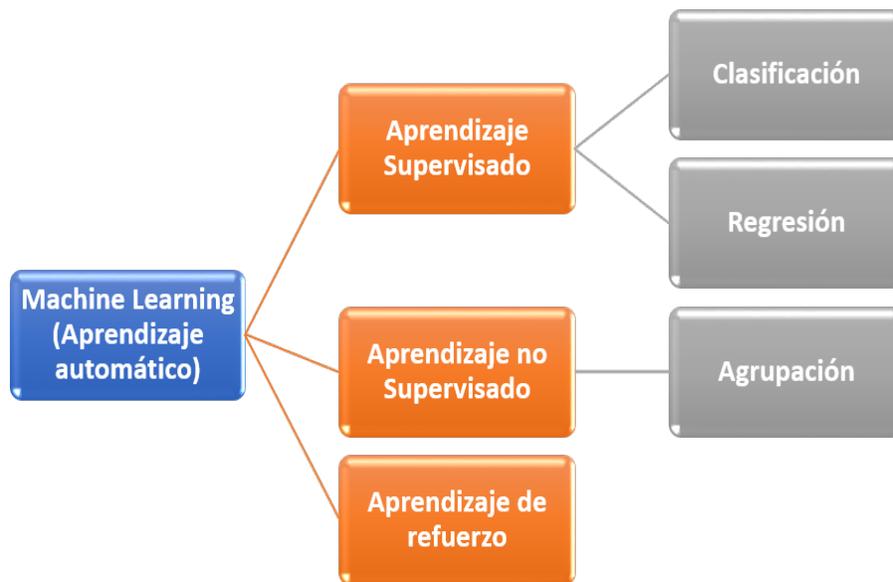


Figura 5.1: Tipos de aprendizaje.

5.2. Regresión lineal

Para el problema de aprendizaje supervisado, nuestro objetivo es, dado un conjunto de entrenamiento, aprender una función $h : X \rightarrow Y$ para que $h(x)$ sea un "buen" predictor para el valor correspondiente de y . Por razones históricas, esta función h se llama hipótesis.

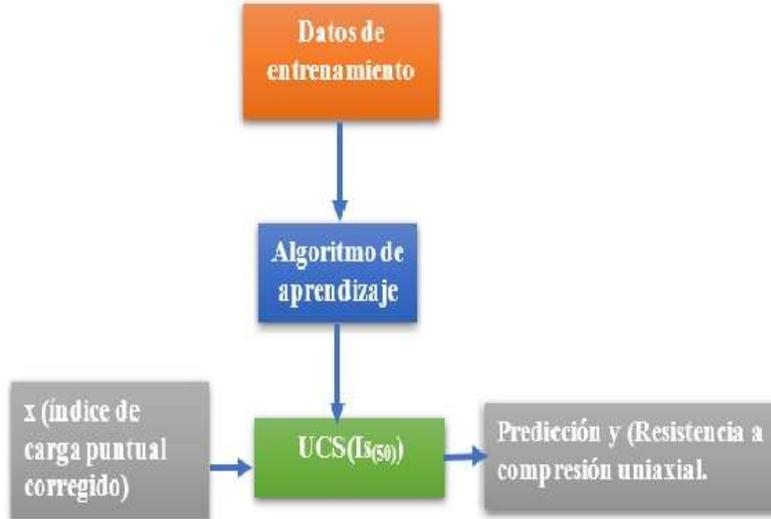


Figura 5.2: Diagrama de representación para la regresión lineal.

Podemos medir la exactitud de nuestra función de hipótesis usando una función de costo. Esto toma una diferencia promedio de todos los resultados de la hipótesis con las entradas de x y la salida real de y .

$$J(\theta_0, \theta_1) = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^m (\hat{y}_i - y_i)^2 = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^m (h_{\theta}(x_i) - y_i)^2 \quad (5.1)$$

Para separarla, es $1/2(\bar{x})$ donde \bar{x} es la media de los cuadrados $h_{\theta}(x_i) - y_i$ o la diferencia entre el valor predicho y el valor real. Para estimar los parámetros en la función de hipótesis se utiliza el gradiente de descenso. Donde se utiliza un α llamado paso de descenso, un α más pequeño resulta un paso más pequeño y un α más grande resultaría un paso más grande. La dirección en la que se da el paso está determinada por la derivada parcial de $J(\theta_0, \theta_1)$. El algoritmo de descenso de gradiente es [47]: repetir hasta la convergencia:

$$\theta_j := \theta_j - \alpha \frac{\partial}{\partial \theta_j} J(\theta_0, \theta_1) \quad (5.2)$$

donde $j = 0, 1$ representa el número de índice de la característica. En cada iteración j , se debe actualizar simultáneamente los parámetros $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$. Actualizar un parámetro específico antes de calcular otro en el $j^{(th)}$ la iteración daría lugar a una aplicación errónea.

5.2.1. Algoritmo LMS

Se θ para minimizar el $J(\theta)$. Para ello, se utiliza un algoritmo de búsqueda que comience con alguna conjetura inicial para θ , y que cambie repetidamente θ para que $J(\theta)$ sea más pequeño, hasta que con suerte convergeremos a un valor de θ que minimice $J(\theta)$. Específicamente, consideremos el algoritmo de descenso de gradiente, que comienza con algún θ inicial, y realiza repetidamente la actualización[47].:

$$\theta_j := \theta_j - \alpha \frac{\partial}{\partial \theta_j} J(\theta_0, \theta_1) \quad (5.3)$$

(Esta actualización se realiza simultáneamente para todos los valores de $j = 0, \dots, n$.) Aquí, α se llama la tasa de aprendizaje. Este es un algoritmo muy natural que repetidamente da un paso en la dirección de la disminución más pronunciada de J . Para poder implementar este algoritmo, tenemos que trabajar en lo que es el término derivado parcial en el lado derecho. En el caso del ejemplo de entrenamiento (x, y) . Tenemos [47].:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta_j} J(\theta) &= \frac{\partial}{\partial \theta_j} \frac{1}{2} (h_\theta(x) - y)^2 \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} (h_\theta(x) - y) \cdot \frac{\partial}{\partial \theta_j} (h_\theta(x) - y) \\ &= (h_\theta(x) - y) \cdot \frac{\partial}{\partial \theta_j} \left(\sum_{i=1}^n \theta_i - y \right) \\ &= (h_\theta(x) - y) x_j \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\theta_j := \theta_j + \alpha \left(y^{(i)} - h_\theta(x^{(i)}) \right) x_j^{(i)} \quad (5.5)$$

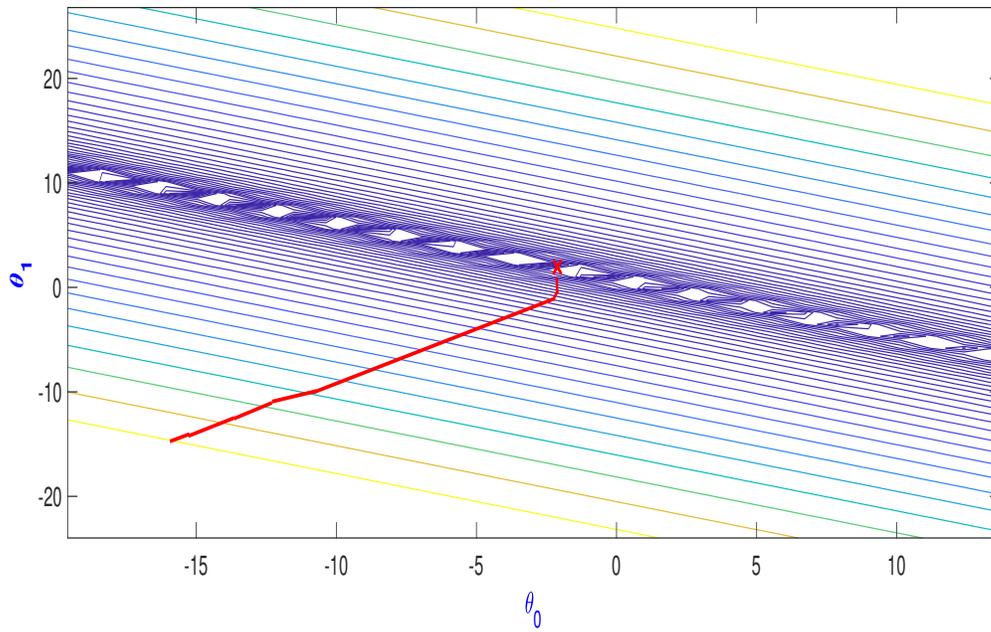


Figura 5.3: Trayectoria del gradiente descendente.

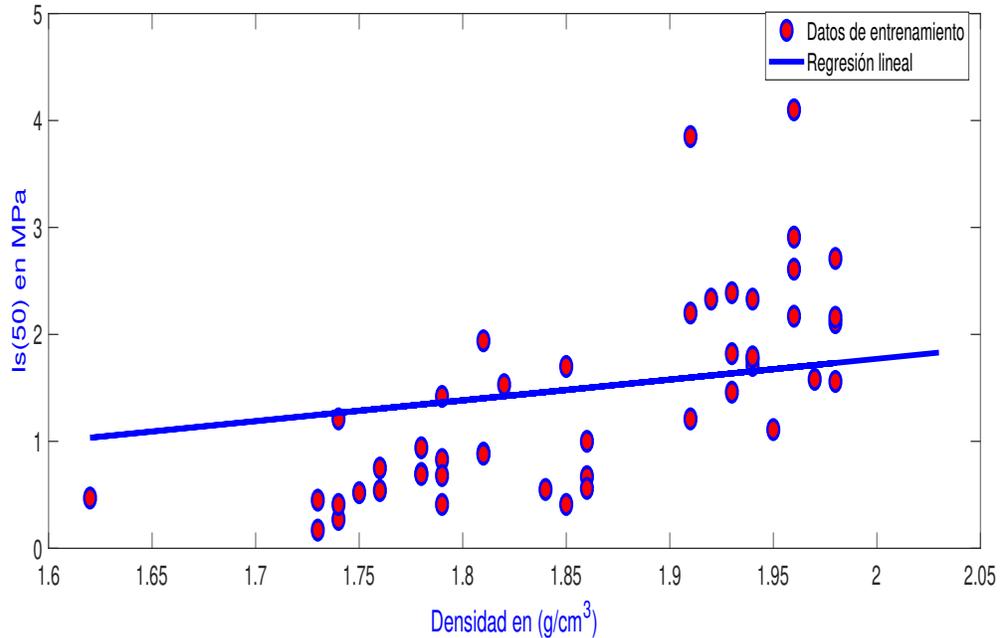


Figura 5.4: Correlación de las ignimbritas densidad Vs. $I_s(50)$.

5.3. Regresión logística

El problema de la clasificación es igual que el problema de la regresión, excepto que los valores que ahora queremos predecir toman sólo un pequeño número de valores discretos. En este avance de tesis, nos centraremos en el problema de clasificación binaria en el que se pueden tomar sólo dos valores, 0 y 1. Por ejemplo, si estamos tratando de construir un clasificador de spam para el correo electrónico, entonces $x^{(i)}$ pueden ser algunas de las características de un correo electrónico, y puede ser 1 si es un correo spam, y 0 en caso contrario. Por lo tanto, $y \in \{0, 1\}$, 0 también se llama la clase negativa, y 1 la clase positiva, y a veces también se denotan con los símbolos "−" y "+". Dado $x^{(i)}$ el correspondiente $y^{(i)}$ también se llama la etiqueta para el ejemplo de entrenamiento [47].

5.3.1. Representación de hipótesis

En comparación con la regresión lineal ahora cambiemos la forma de las hipótesis $h_{\theta}(x)$ para satisfacer $0 \leq h_{\theta}(x) \leq 1$. Esto se logra conectando $\theta^T x$ en la función logística. Las siguientes ecuaciones utilizan la Función Sigmoidea (Fig. 5.5), también llamada Función

Logística Ec.(5.8):

$$h_{\theta}(x) = g(\theta^T x) \quad (5.6)$$

$$z = \theta^T x \quad (5.7)$$

$$g(z) = \frac{1}{1 + e^{-z}} \quad (5.8)$$

La función $g(z)$, asigna cualquier número real al intervalo $(0, 1)$, por lo que es útil para transformar una función de valor arbitrario en una función más adecuada para la clasificación [47].

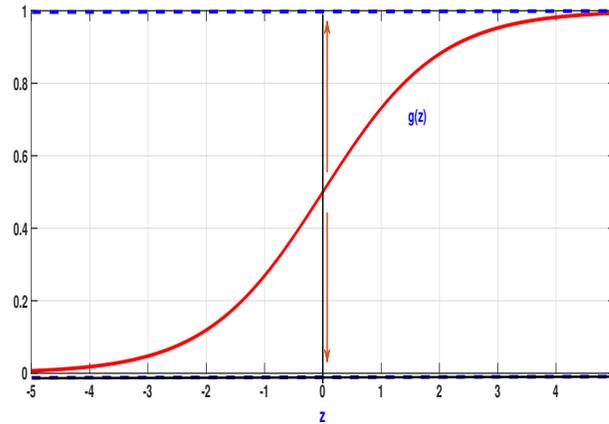


Figura 5.5: Función sigmoid o función logística

$h_{\theta}(x)$ nos dará la probabilidad de que nuestra salida sea 1. Por ejemplo, $h_{\theta}(x) = 0.7$ nos da una probabilidad del 70 % de que nuestra salida es 1. Nuestra probabilidad de que nuestra predicción sea 0 es solo el complemento de nuestra probabilidad de que sea 1 (por ejemplo, si la probabilidad de que sea 1 es 70 %, entonces la probabilidad de que sea 0 es 30 %) Ec.(5.9) [47].

$$h_{\theta}(x) = P(y = 1|x; \theta) = 1 - P(y = 0|x; \theta) \quad (5.9)$$

$$P(y = 0|x; \theta) + P(y = 1|x; \theta) = 1 \quad (5.10)$$

Para obtener la clasificación discreta 0 o 1, podemos traducir el resultado de la función de hipótesis de la siguiente manera [47].:

$$h_{\theta}(x) \geq 0.5 \rightarrow y = 1 \qquad h_{\theta}(x) < 0.5 \rightarrow y = 0 \qquad (5.11)$$

La forma en que se comporta nuestra función logística g es que cuando su entrada es mayor o igual a cero, su salida es mayor o igual a 0.5: El límite de decisión es la línea que separa el área donde $y = 0$ y donde $y = 1$. Es creada por nuestra función de hipótesis.

5.3.2. Función de costo simplificada y gradiente descendente

La función de costo para la regresión logística es:

$$J(\theta) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \text{Cost}(h_{\theta}(x^{(i)}), y^{(i)}) \qquad (5.12)$$

$$\text{Cost}(h_{\theta}(x), y) = -\log(h_{\theta}(x)) \qquad \text{if } y = 1 \qquad (5.13)$$

$$\text{Cost}(h_{\theta}(x), y) = -\log(1 - h_{\theta}(x)) \qquad \text{if } y = 0 \qquad (5.14)$$

Se pueden comprimir los casos condicionales como se muestra en la ecuación (5.16):

$$\text{Cost}(h_{\theta}(x), y) = -y \log(h_{\theta}(x)) - (1 - y) \log(1 - h_{\theta}(x)) \qquad (5.15)$$

Finalmente la función de costos queda de la siguiente manera:

$$J(\theta) = -\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m [y^{(i)} \log(h_{\theta}(x^{(i)})) + (1 - y^{(i)}) \log(1 - h_{\theta}(x^{(i)}))] \qquad (5.16)$$

La forma general del gradiente de descenso es:

$$\text{Repeat } \{ \qquad \theta_j := \theta_j - \alpha \frac{\partial}{\partial \theta_j} J(\theta) \} \qquad (5.17)$$

y se utiliza el cálculo para obtener la derivada.

$$\text{Repeat } \{ \qquad \theta_j := \theta_j - \frac{\alpha}{m} \sum_{i=1}^m (h_{\theta}(x^{(i)}) - y^{(i)}) x_j^{(i)} \} \qquad (5.18)$$

Este algoritmo es idéntico al que se utiliza en la regresión lineal. Se tienen que actualizar simultáneamente todos los valores en θ [47].

Capítulo 6

Modelado y correlaciones

6.1. Modelado

Un modelo adecuado para los propósitos de la simulación representa adecuadamente las características, comportamientos y funciones clave del objeto simulado para estos propósitos. Si el objeto es un sistema complejo, se requiere un conjunto de modelos para representar sus componentes, que luego se componen para crear un modelo de todo el sistema. Los componentes pueden ser vistos como un sustituto del sistema objetivo, mientras que la simulación representa el funcionamiento y proceso del sistema a lo largo del tiempo [48]

Para analizar un sistema de ingeniería, es conveniente desarrollar un modelo matemático. Al desarrollar el modelo matemático, se hacen algunas suposiciones para la simplificación. Finalmente, la expresión matemática gobernante se desarrolla para describir el comportamiento del sistema. La expresión matemática generalmente consiste en ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales y de frontera. Para analizar un sistema de ingeniería, se desarrolla un modelo matemático. Al desarrollar el modelo matemático, se hacen algunas suposiciones para la simplificación. Finalmente, la expresión matemática gobernante se desarrolla para describir el comportamiento del sistema. La expresión matemática generalmente consiste en ecuaciones diferenciales y condiciones dadas. Las soluciones de las ecuaciones diferenciales que expliquen el comportamiento de un sistema de ingeniería dado, suelen ser muy difíciles de obtener. Con la llegada de las computadoras de alto rendimiento, ha sido posible resolver tales ecuaciones diferenciales. Se han desarrollado y aplicado varias técnicas de solución numérica para resolver numerosos problemas de ingeniería con el fin de encontrar sus soluciones aproximadas. Especialmente, el método de elementos finitos

ha sido una de las principales técnicas de solución numérica [32]. El método de elementos finitos requiere la división del dominio del problema en muchos subdominios y cada subdominio se denomina elemento finito. Por lo tanto, el dominio del problema consiste en muchos parches de elementos finitos [32]. La ecuación de Euler-Bernoulli para la deflexión de la viga es:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = q(x, t), \quad (6.1)$$

donde $u(x, t)$ es el desplazamiento transversal de la viga, ρ es densidad de masa por volumen, EI es la rigidez de la viga, $q(x, t)$ es la carga de presión aplicada externamente; t y x indican el tiempo y el espacio a lo largo del eje neutro de la viga. Aplicamos uno de los métodos de residual ponderado, el método de Galerkin, a la ecuación de la viga Ec. (6.1) para desarrollar la formulación de elementos finitos y las correspondientes ecuaciones matriciales. El residuo ponderado de Ec. (6.1) es

$$I = \int_0^L \left(\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - q \right) w dx = 0 \quad (6.2)$$

donde L es la longitud de la viga y w es una función de peso. La formulación débil de Ec. (6.2) se obtiene a partir de integraciones por partes dos veces para el segundo término de la ecuación. Además, la discretización de la viga en una serie de elementos finitos nos da

$$I = \sum_{i=1}^N \left[\int_{\Omega^e} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} w dx + \int_{\Omega^e} EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \right] + \left[Vw - M \frac{\partial w}{\partial x} \right]_0^L = 0 \quad (6.3)$$

donde $V = EI \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$ es la fuerza de corte, $M = EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ es el momento de flexión, Ω^e es un dominio de elemento y n es el número de elementos para la viga.

La deformación de un viga debe tener una pendiente continua así como una desviación continua en dos elementos de viga vecinos cualesquiera. Para satisfacer este requisito de continuidad, cada nodo tiene tanto la deflexión, v_i y la pendiente, θ_i , como variables nodales. En este caso, dos elementos de viga vecinos cualesquiera tienen una deflexión y pendiente comunes en el punto nodal compartido. Esto satisface la continuidad tanto de la deflexión como de la pendiente. La ecuación de viga de Euler-Bernoulli se basa en el supuesto de que el plano normal al eje neutro antes de la deformación sigue siendo normal al eje neutro después de la deformación [32].

Esta suposición denota $\theta = dv/dx$ (es decir, la pendiente es la primera derivada de la

deformación en términos de x). Dado que hay cuatro variables nodales para el elemento de viga, suponemos una función polinómica cúbica para $v(x)$.

$$v(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 \quad (6.4)$$

A partir de la suposición para la viga de Euler-Bernoulli, la pendiente se calcula a partir de la Ec. (6.4).

$$\theta(x) = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 \quad (6.5)$$

La evaluación de la desviación y la pendiente en ambos nodos se muestra en la siguiente ecuación.

$$\begin{aligned} v(0) &= c_0 = v_1 \\ \theta(0) &= c_1 = \theta_1 \\ v(l) &= c_0 + c_1l + c_2l^2 + c_3l^3 \\ \theta(l) &= c_1 + 2c_2l + 3c_3l^2 = \theta_2 \end{aligned} \quad (6.6)$$

Se resuelve l Ec.(6.6) para c_i en términos de las variables nodales v_i y la pendiente, θ_i y se sustituyen los resultados en la Ec. (6.4).

$$v(x) = H_1(x)v_1 + H_2(x)\theta_1 + H_3(x)v_2 + H_4(x)\theta_2 \quad (6.7)$$

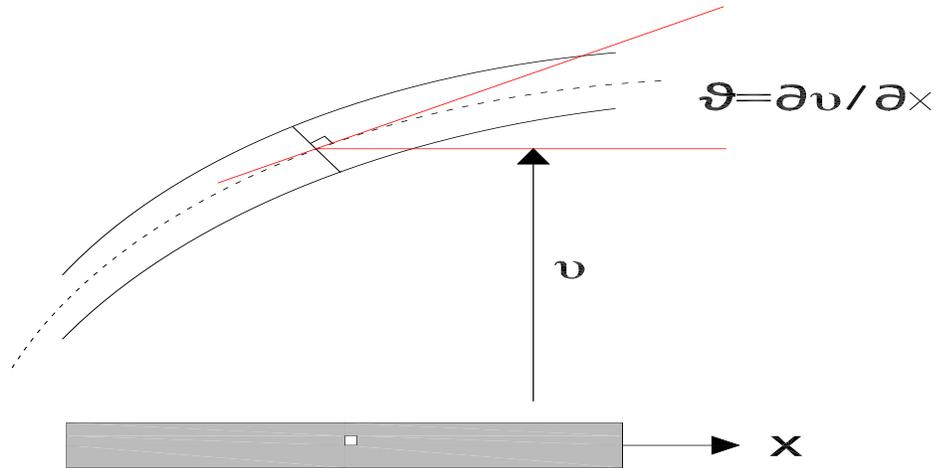


Figura 6.1: Elemento viga

donde

$$\begin{aligned}
 H_1(x) &= 1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3} \\
 H_2(x) &= x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \\
 H_3(x) &= \frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3} \\
 H_4(x) &= -\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}
 \end{aligned} \tag{6.8}$$

Las funciones $H_i(x)$ se denominan funciones de forma hermitiana y se muestran en la Fig. (6.2) Las funciones de la forma hermitiana son del tipo C^1 , lo que significa que hacen que tanto v como dv/dx sean continuas entre dos elementos vecinos [32].

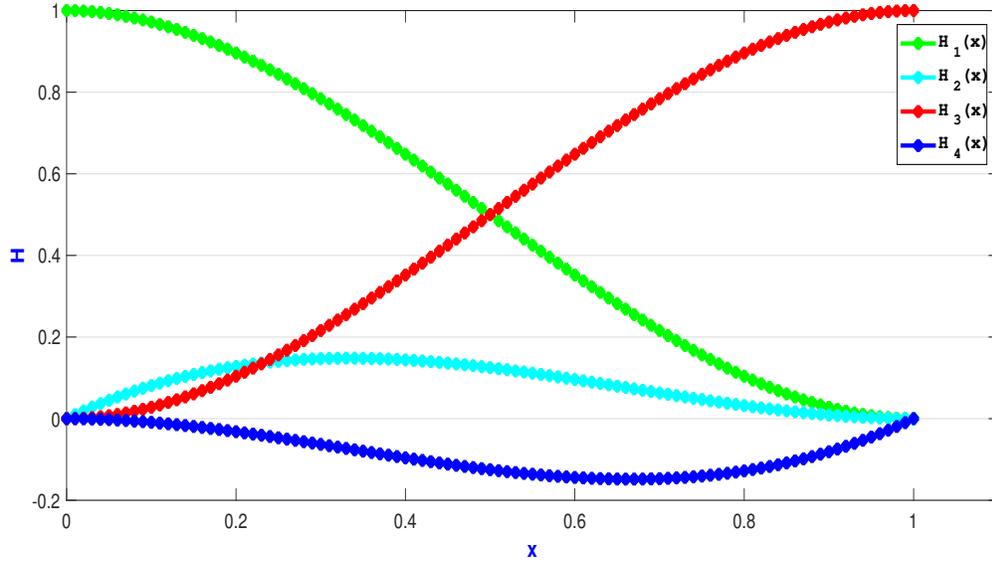


Figura 6.2: Elemento viga Hermitiano.

La aplicación de las funciones de la forma Hermitiana y el método de Galerkin al segundo término de la Ec. (6.3) da como resultado la matriz de rigidez del elemento de viga. Es decir,

$$[K^e] = \int_0^1 [B]^T EI [B] dx \quad (6.9)$$

donde

$$[B] = \left\{ H_1'' \quad H_2'' \quad H_3'' \quad H_4'' \right\} \quad (6.10)$$

y los correspondientes grados nodales de libertad del elemento es $\{d^e\} = \{v_1 \quad \theta_1 \quad v_2 \quad \theta_2\}$. En la Ec. (6.10), el doble primo denota la segunda derivada de la función y l en la Ec. (6.9) es la longitud de un elemento viga. Asumiendo que la rigidez de la viga EI es constante dentro del elemento, la matriz de rigidez del elemento es [32]

$$[K^e] = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

En el caso de que la rigidez de la viga no sea constante dentro de un elemento de la viga, debe evaluarse la integral en la Ec. (6.9) incluyendo EI en función de x . Si el elemento

de la viga es relativamente corto, por ejemplo en una malla refinada, puede utilizarse el valor promedio de EI para el elemento con la Ec. (6.11) para una aproximación simple y razonable. El tercer término en la Ec. (6.3) da como resultado el vector de fuerza del elemento. Para una carga de presión distribuida generalmente, necesitamos calcular [32]

$$\{F^e\} = \int_0^1 q(x) \begin{Bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ H_4 \end{Bmatrix} dx \quad (6.12)$$

en el cual $\{F^e\}$ es el elemento vectorial de fuerza. Si tenemos una carga de presión uniforme q_0 dentro del elemento, el vector de fuerza del elemento se convierte en [32]

$$\{F^e\} = q_0 \int_0^1 \begin{Bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ H_4 \end{Bmatrix} dx = \frac{q_0}{12} \begin{Bmatrix} 6l \\ l^2 \\ 6l \\ -l^2 \end{Bmatrix} \quad (6.13)$$

Otro tipo de carga común es una fuerza concentrada dentro de un elemento viga, como se muestra en la Fig. (6.3) a Fig. (6.6). En este caso, el vector de fuerza del elemento es [32]

$$\{F^e\} = \int_0^1 P_0 \delta(x - x_0) \begin{Bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ H_4 \end{Bmatrix} dx = P_0 \begin{Bmatrix} H_1(x_0) \\ H_2(x_0) \\ H_3(x_0) \\ H_4(x_0) \end{Bmatrix} \quad (6.14)$$

$$[K] \{d\} = \{F\} \quad (6.15)$$

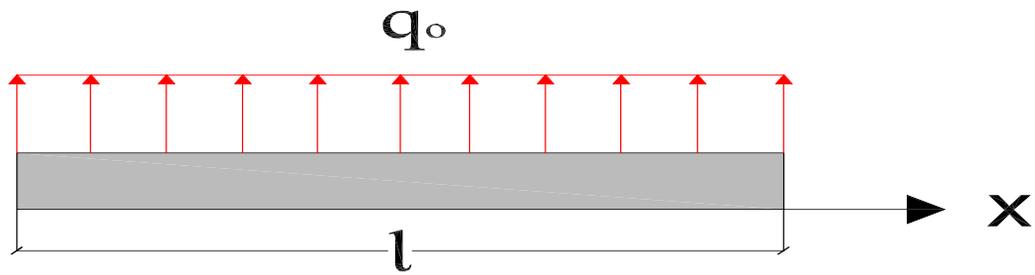


Figura 6.3: Carga uniformemente distribuida.

$$[F^e] = \frac{q_0 l}{12} [6 \quad l \quad 6 \quad -l]^T \quad (6.16)$$

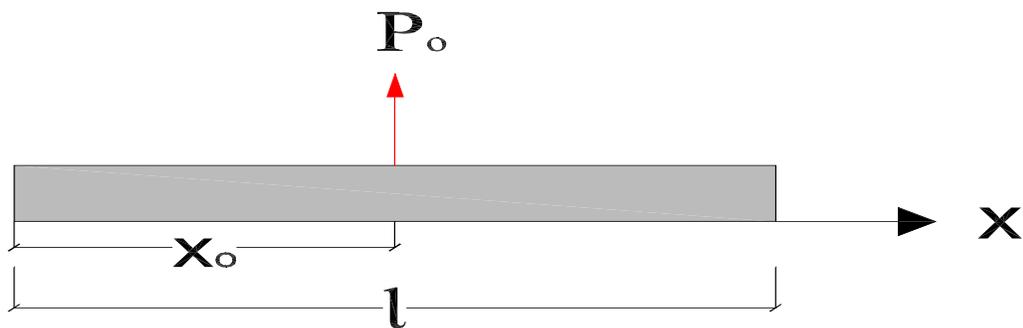


Figura 6.4: Carga concentrada en un punto de l viga.

$$[F^e] = P_0 \begin{bmatrix} H_1(x_0) & H_2(x_0) & H_3(x_0) & H_4(x_0) \end{bmatrix}^T \quad (6.17)$$



Figura 6.5: Momento en la viga.

$$[F^e] = M_0 \begin{bmatrix} 6x_0(x_0 - l) & l(l^2 - 4x_0l + 3x_0^2) & 6x_0(x_0 - l) & x_0l(3x_0 - 2l) \end{bmatrix}^T \quad (6.18)$$

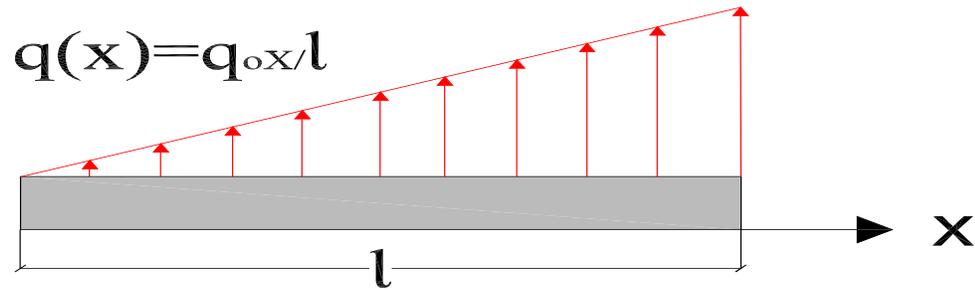


Figura 6.6: Carga distribuida triangularmente.

$$[F^e] = \frac{q_0 l}{60} \begin{bmatrix} 9 & 2l & 2l & -3l \end{bmatrix}^T \quad (6.19)$$

Después de calcular cuadraturas y aplicar la fórmula de Green, la ecuación que ocupamos resolver es la siguiente:

$$\sum_{i=1}^N \dot{u}_i(t) \int_0^L H_i H_j = - \sum_{i=1}^N u_i(t) \int_0^L k(x) \frac{\partial H_i}{\partial x} \frac{\partial H_j}{\partial x} \quad (6.20)$$

donde $\dot{u}(t)$ se aproxima mediante una fórmula centrada de diferencias, $u(t)$ es un dato conocido y k es la incógnita a determinar.

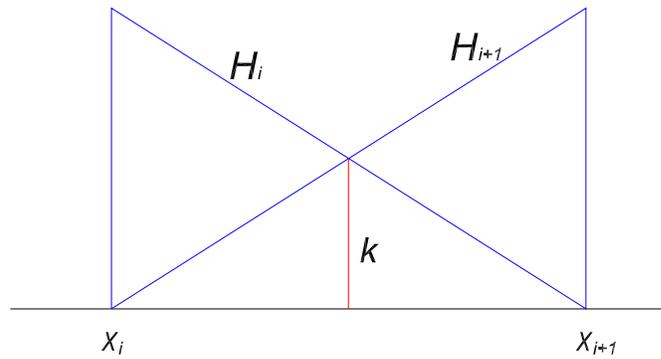


Figura 6.7: Funciones de forma.

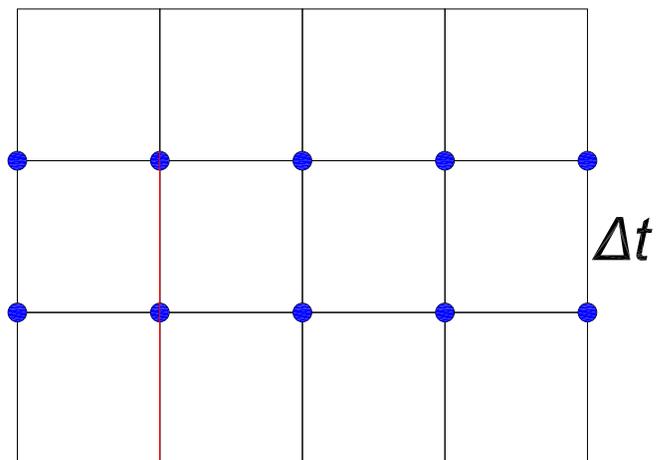


Figura 6.8: La figura muestra que conociendo los datos interiores podemos aproximar la solución.

La Ec. (6.20) se puede resolver alternativamente mediante mínimos cuadrados. A este enfoque se le conoce como Rayleigh-Ritz.

En el presente trabajo solo se estudio el caso estático.

6.2. Ajuste de curvas

Los métodos de ajuste se agrupan en dos tipos: gráficos y numéricos. Los residuos gráficos y los límites de predicción son métodos gráficos que ayudan a la visualización y la interpretación, mientras que las estadísticas de bondad de ajuste y los límites de coeficiente y confianza se calculan y dan como resultado medidas numéricas que ayudan al razonamiento estadístico. Después de usar métodos gráficos, se analizó R^2 porque es un parámetro que nos permite conocer la correlación entre diferentes variables [49]. El software Curve Fitting Toolbox utiliza el método de mínimos cuadrados al ajustar datos. El ajuste requiere un modelo paramétrico que relacione los datos de respuesta con los datos del predictor con uno o más coeficientes. El resultado del proceso de ajuste es una estimación de los coeficientes del modelo. Para obtener las estimaciones de coeficientes, el método de mínimos cuadrados minimiza el cuadrado sumado de los residuos. El residual para el i -ésimo punto de datos r_i se define como la diferencia entre el valor de respuesta observado y_i y el valor de respuesta ajustado \hat{y} , y se identifica como el error asociado con los datos [49].

Para obtener R^2 es necesario obtener la suma de cuadrados debido a un error (SSE) por la EC. (6.21)

$$SSE = \sum_{i=1}^n w_i (y_i - \hat{y})^2 \quad (6.21)$$

donde w_i son los pesos, y n es el número de puntos de datos incluidos en el ajuste. Los pesos determinan cuánto influye cada valor de respuesta en las estimaciones finales de los parámetros. El R^2 es el cuadrado de la correlación entre los valores de respuesta y los valores de respuesta pronosticados. También se llama el cuadrado del coeficiente de correlación múltiple y el coeficiente de múltiplo. R^2 se define como la razón de la suma de cuadrados de la regresión (SSR) y la suma total de cuadrados (SST) Eq. (6.22),

$$SST = \sum_{i=1}^n w_i (\hat{y} - \bar{y})^2 \quad (6.22)$$

donde $SST = SSR + SSE$. R^2 está representado por la Ec. (6.23)

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} = 1 - SSE/SST \quad (6.23)$$

R^2 puede tomar cualquier valor entre 0 y 1, con un valor más cercano a 1 que indica que el modelo tiene en cuenta una mayor proporción de varianza [49].

Ejemplo 1:

Una viga de 4 pies se somete a una carga puntual en el centro de $100lb$ y se encuentra empotrada Fig.(6.9). La viga tiene un módulo elástico de $10 \times 10^6 psi$ y una sección transversal cuadrada de $2in$ por $2in$. Determine la matriz de rigidez del sistema y el vector de columna utilizando elementos de viga Hermitian de igual tamaño. Encuentrar la deflexión máxima.

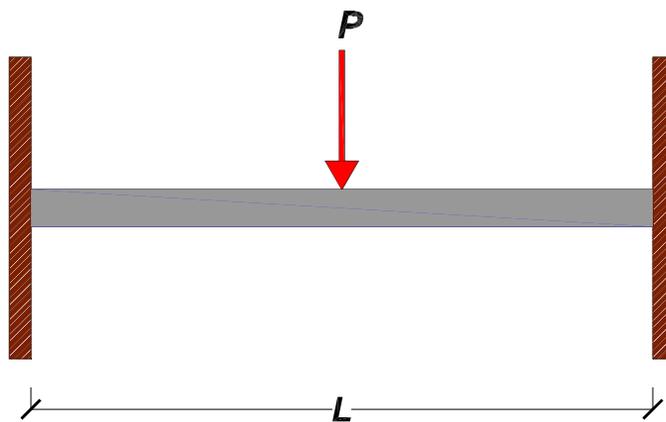


Figura 6.9: Viga empotrada.

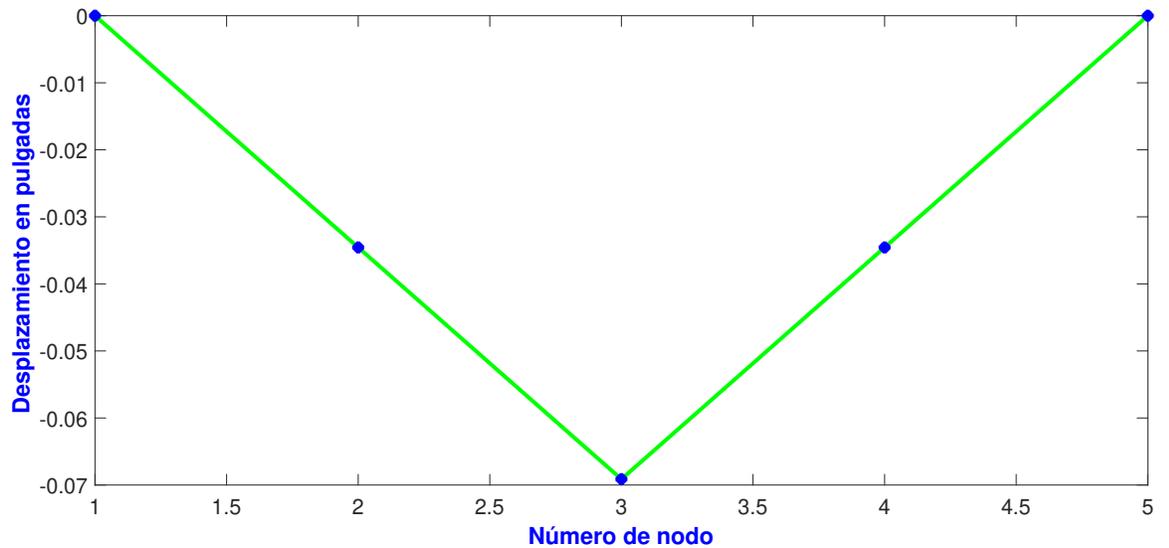


Figura 6.10: Viga empotrada con 4 elementos

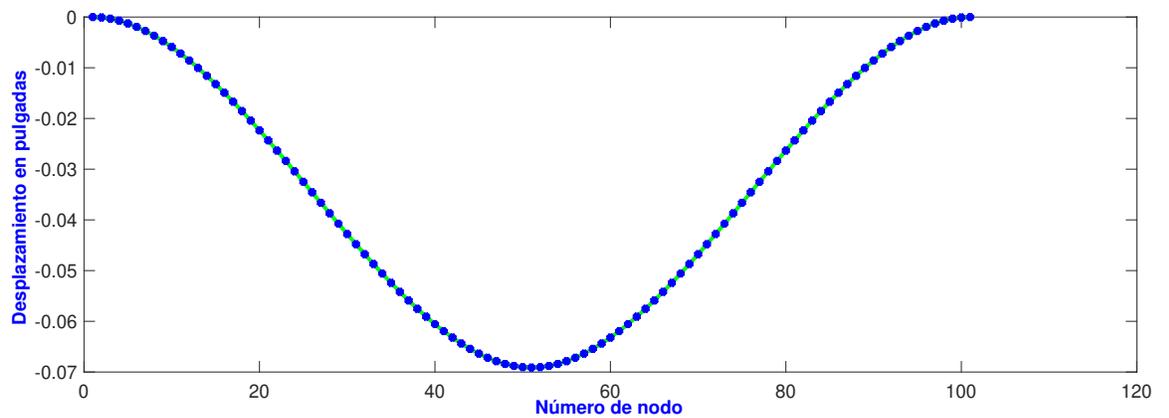


Figura 6.11: Viga empotrada con 100 elementos.

Ejemplo 2:

Una viga de 4 pies se somete a una carga puntual en el extremo derecho de $100lb$ y se encuentra empotrada del lado derecho como lo muestra la Fig.(6.14). La viga tiene un módulo elástico de 10×10^6

psi y una sección transversal cuadrada de $2in$ por $2in$. Determine la matriz de rigidez del sistema y el vector de columna utilizando elementos de viga Hermitian de igual tamaño.

Encuentrar la deflexión máxima.

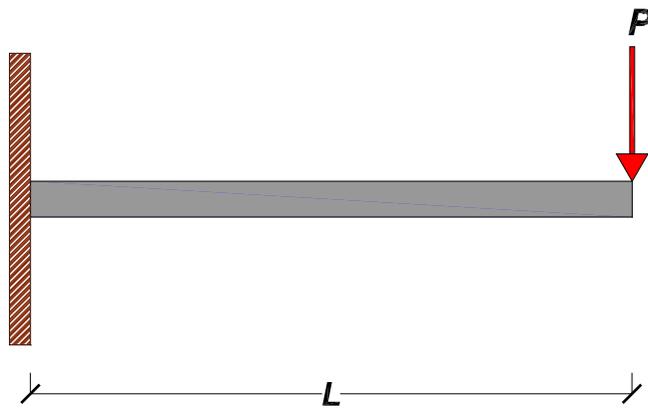


Figura 6.12: Viga en voladizo.

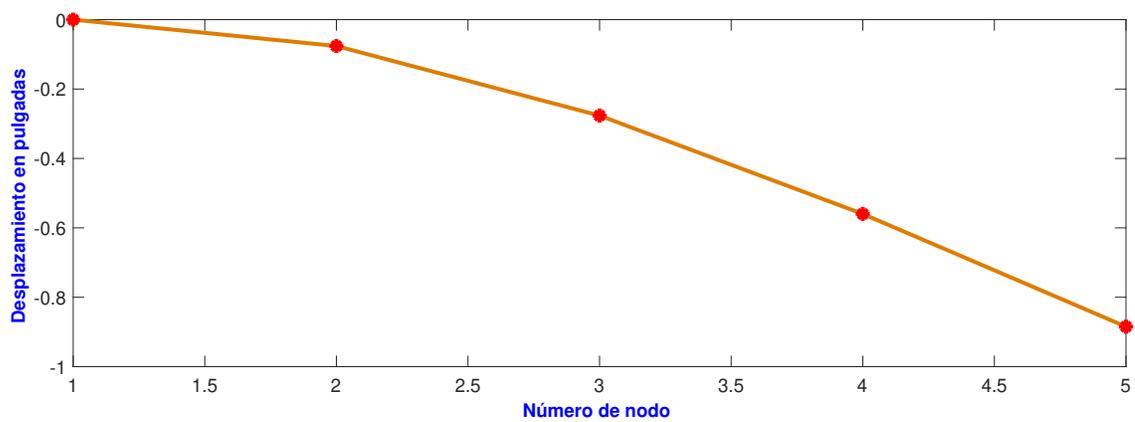


Figura 6.13: Viga en voladizo con 4 elementos.

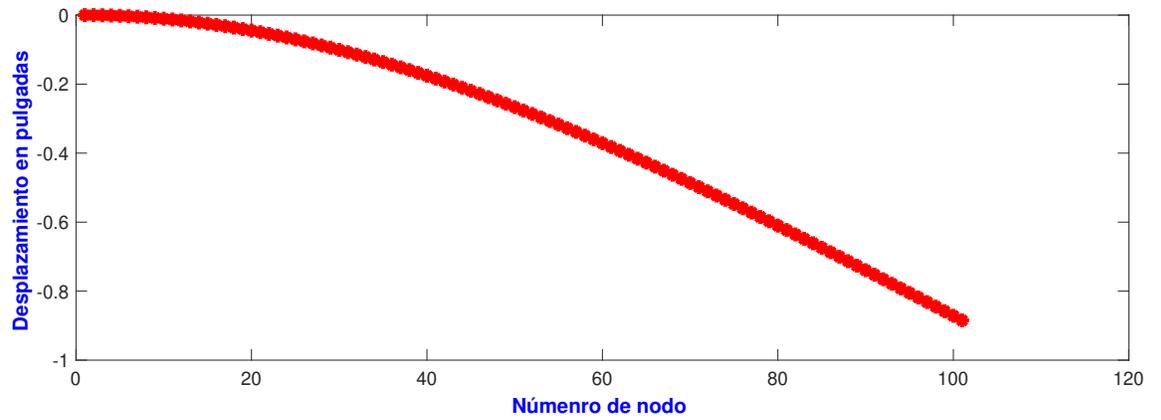


Figura 6.14: Viga en voladizo con 100 elementos.

Ejemplo 3:

Una viga de 4 *pies* se somete a una carga puntual en el centro de 100*lb* y se encuentra simplemente apoyada Fig.(6.17). La viga tiene un módulo elástico de 10×10^6 *psi* y una sección transversal cuadrada de 2*in* por 2*in*. Determine la matriz de rigidez del sistema y el vector de columna utilizando elementos de viga Hermitian de igual tamaño. Encuentrar la deflexión máxima.

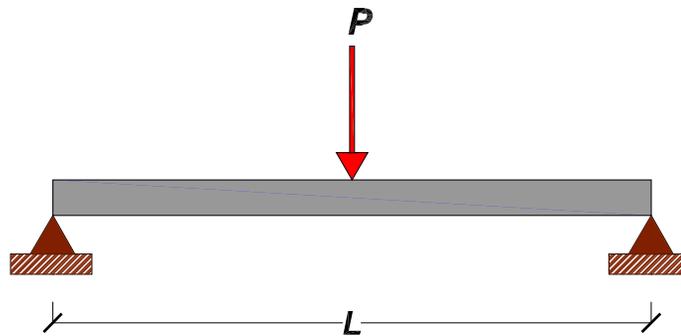


Figura 6.15: Viga simplemente apoyada.

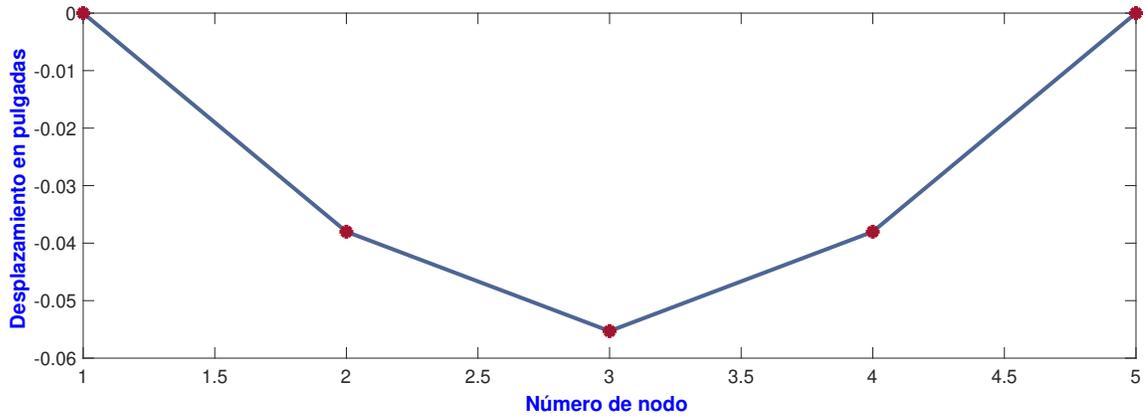


Figura 6.16: Viga simplemente apoyada con 4 elementos

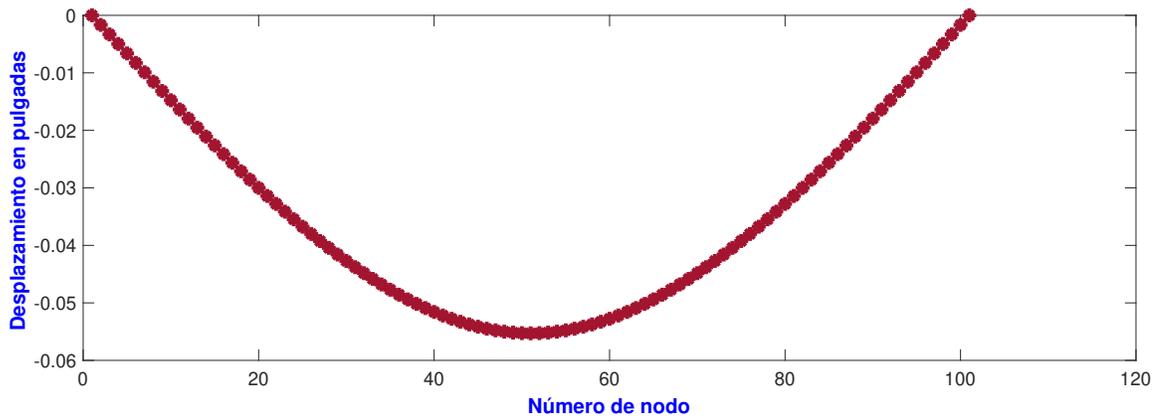


Figura 6.17: Viga simplemente apoyada con 100 elementos

Ejemplo 4:

Otro ejemplo de aplicación de elementos finitos es el siguiente: Encontrar la deflexión del marco en forma de L (figura 6.19) la cual está hecha de dos vigas de longitudes 60 in y 20 in , respectivamente. Ambas vigas tienen sección transversal de 2 in de largo y 1 in de ancho. El módulo de elasticidad es $30 \times 10^6\text{ psi}$. El marco es sometido a una carga concentrada en el extremo no fijo de la viga más corta. Use 6 elementos para encontrar la deflexión de la viga [32].

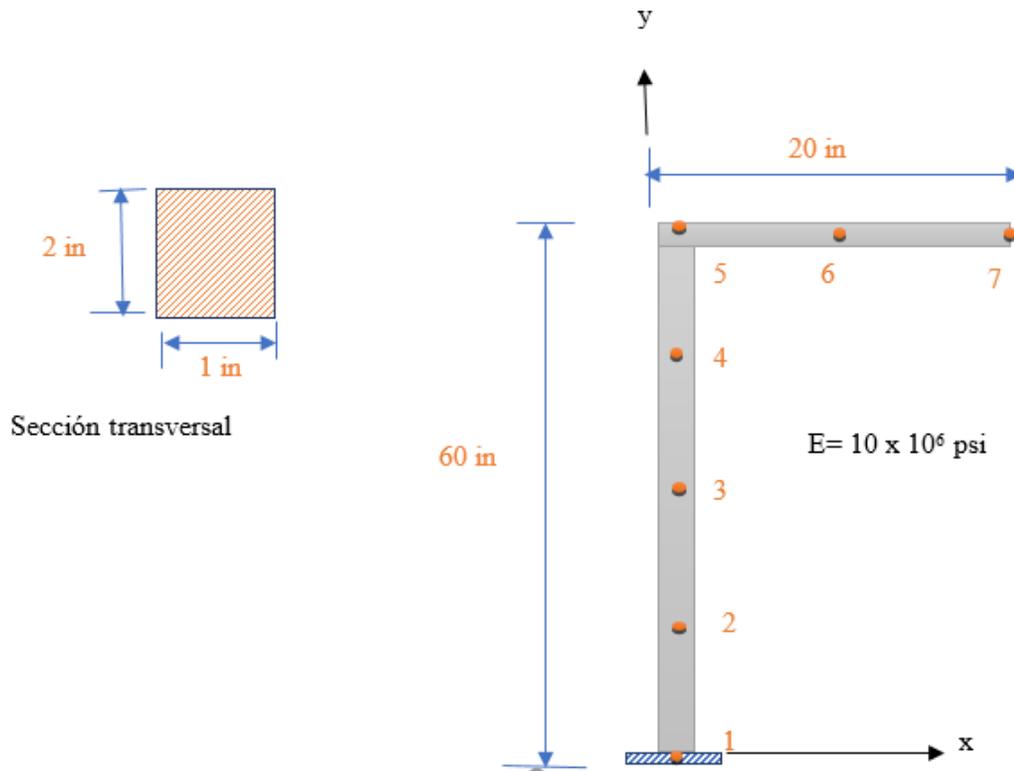


Figura 6.18: Es un marco cargado en el nodo 7, con una carga de 60 lb.

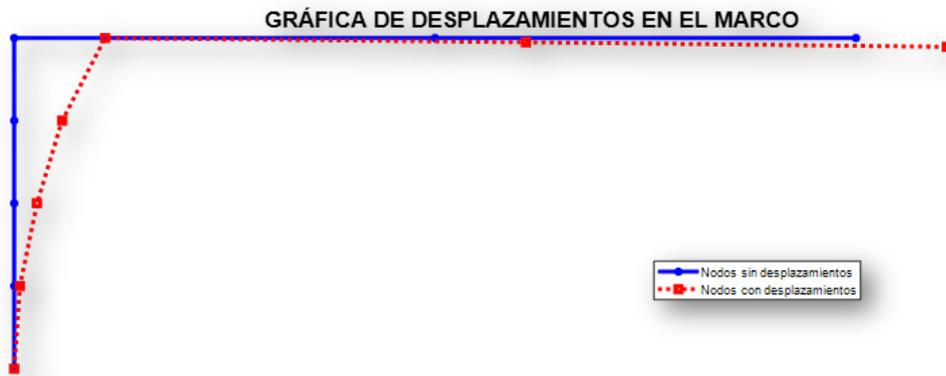


Figura 6.19: Gráfica para el ejemplo del marco donde se muestran los desplazamientos horizontales y verticales por nodo.

Capítulo 7

Resultados

7.1. Resultados del metodo de elementos finitos

Los resultados de los desplazamientos obtenidos mediante el método de Elementos Finitos se muestra a continuación, cabe señalar que las figuras van de menor a mayor desplazamientos.

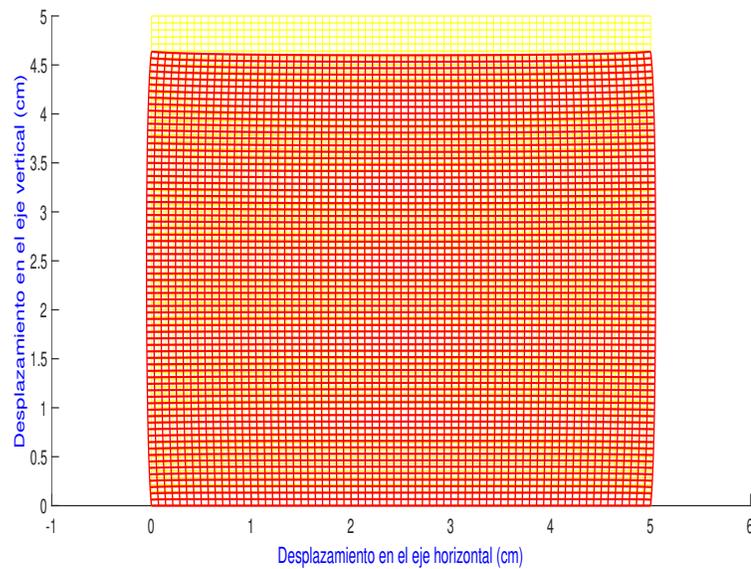


Figura 7.1: Banco de materiales Cuenembo

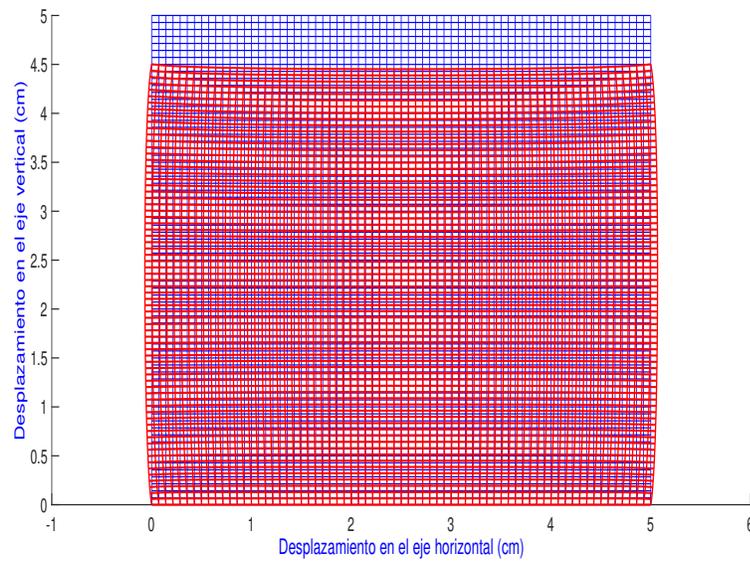


Figura 7.2: Banco de materiais Cerritos.

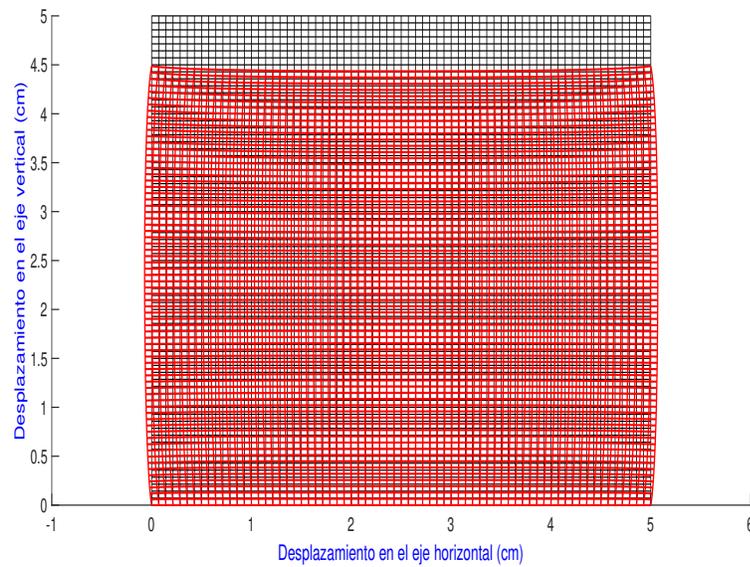


Figura 7.3: Banco de materiais Colegio.

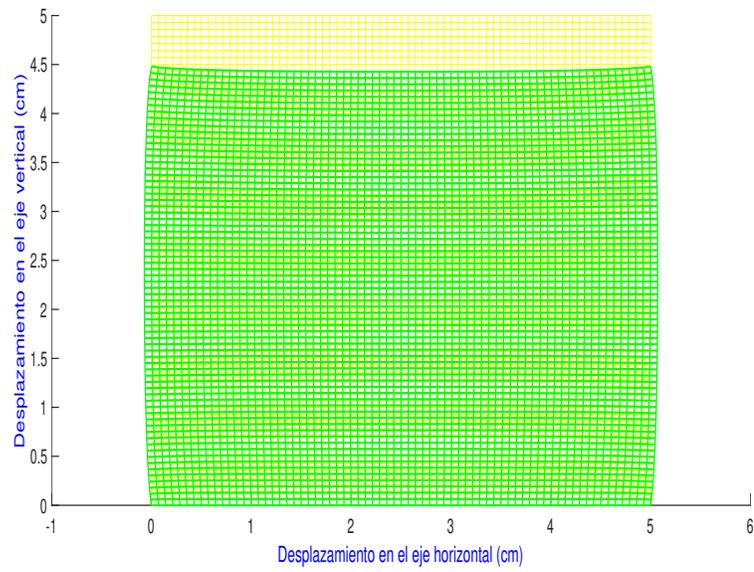


Figura 7.4: Banco de materiales el Tigre.

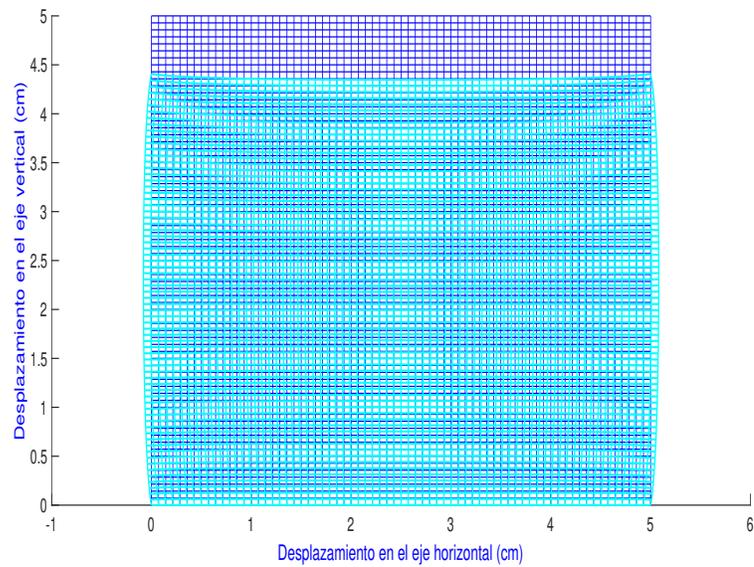


Figura 7.5: Banco de materiales Comanja.

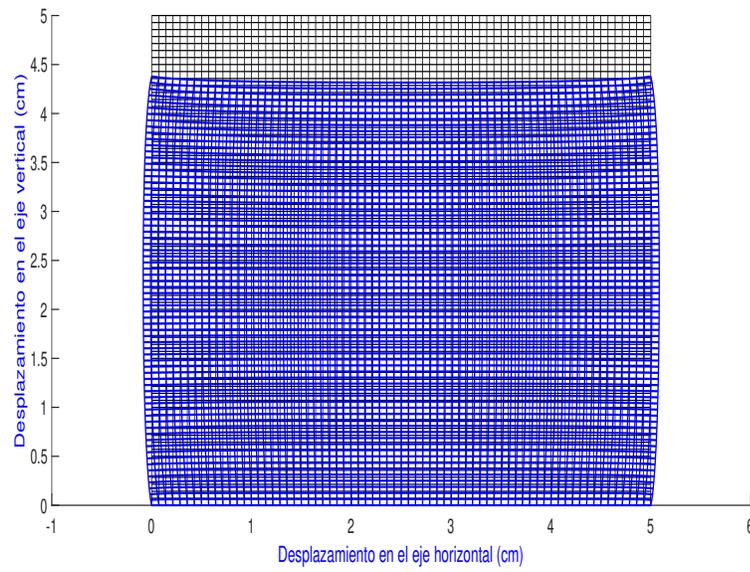


Figura 7.6: Banco de materiales AGC.

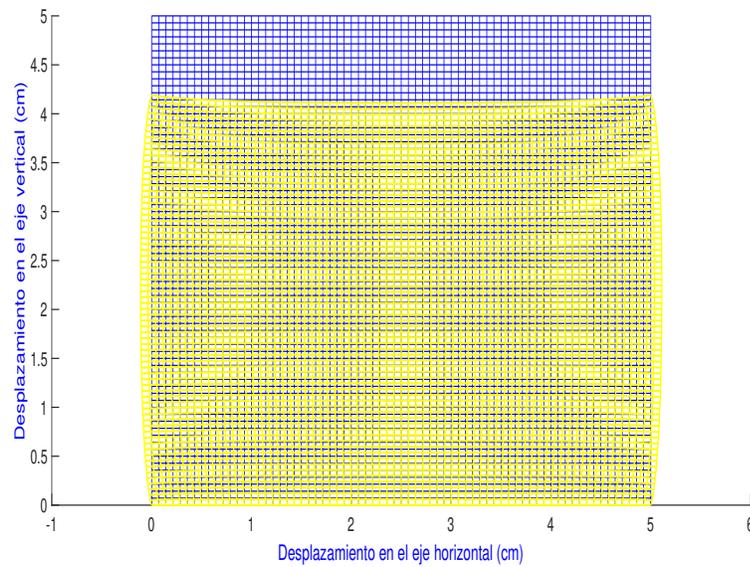


Figura 7.7: Banco de materiales Joyitas.

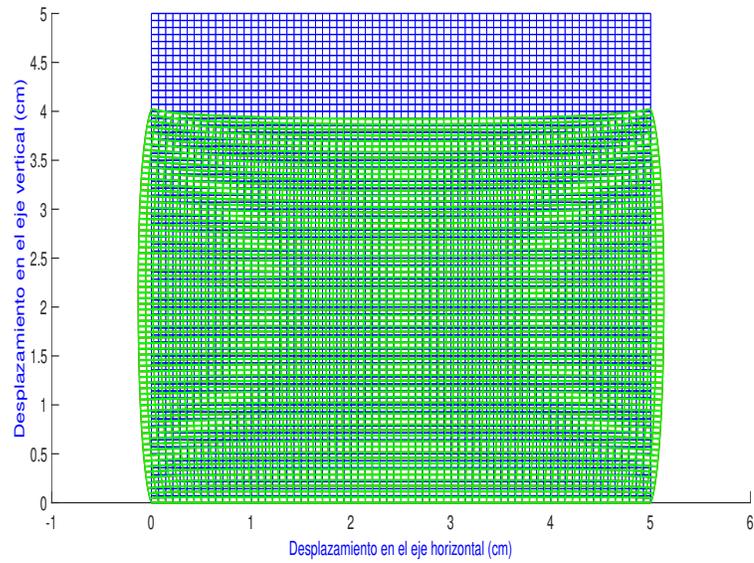


Figura 7.8: Banco de materiales Huiramba.

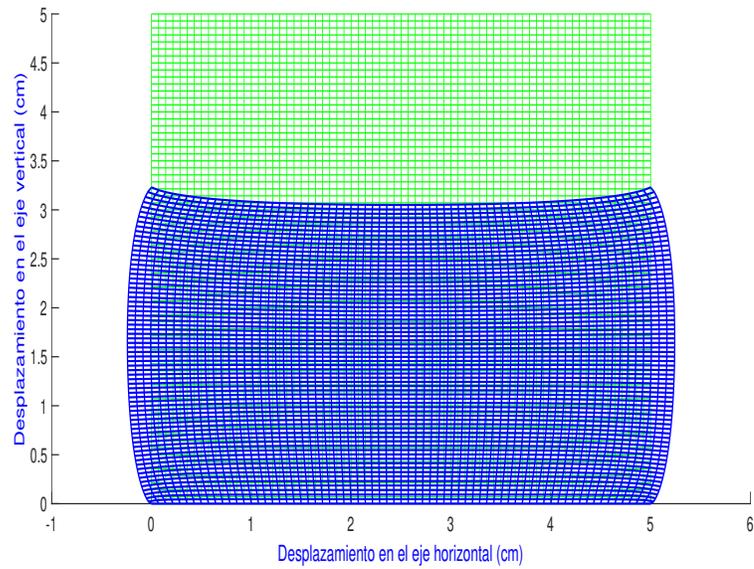


Figura 7.9: Banco de materiales el melon.

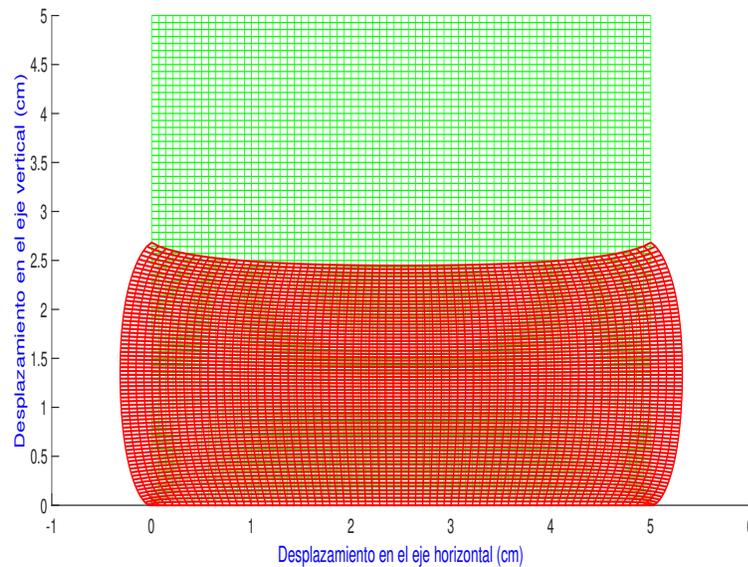


Figura 7.10: Banco de materiales Mascutan.

La teoría nos dice que se deberían tener los mismos resultados en cuanto a desplazamientos, debido a que es el mismo material. Sin embargo se observa que las muestras de cada banco de materiales pétreos se comporta de manera muy diferente. Los resultados del modelo coinciden con los resultados del laboratorio, ya que sus propiedades índices también son diferentes.

Los resultados son multiplicados por 50 como un factor de escala. En la tabla 7.1 se muestran los valores de \mathbf{x}_{\max} , los desplazamientos máximos y de $\bar{\mathbf{x}}$, los desplazamientos promedio. Podemos observar que el banco de materiales pétreos con menores desplazamientos es Cerritos y el que presenta mayores desplazamientos es Maskutan.

Nombre	x_{\max}	\bar{x}
CERRITOS	0.068	0.051
HUIRAMBA	0.133	0.100
JOYITAS	0.110	0.082
COMANJA	0.081	0.061
CUENEMBO	0.050	0.037
TIGRE	0.071	0.053
MASKUTAN	0.316	0.237
MELON	0.241	0.181
AGC	0.085	0.063
COLEGIO	0.070	0.052

Tabla 7.1: Resultados de los desplazamientos. x_{\max} son los desplazamientos máximos y \bar{x} son los desplazamientos promedio.

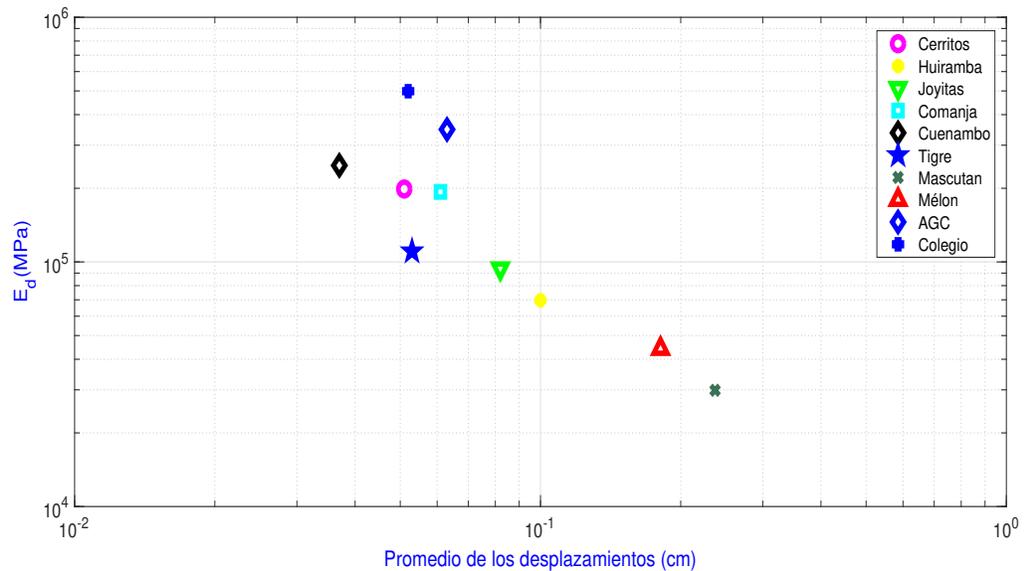


Figura 7.11: Dispersión entre \bar{x} y Ed

En la figura 7.11 se observa una gran dispersión de los datos, por lo que es importante obtener una tendencia adecuada que nos permita con mucha precisión correlacionar los desplazamientos contra el módulo de elasticidad dinámico. El análisis anterior se realizó con los promedios de los módulos de elasticidad dinámico.

Los siguientes resultados se realizaron seleccionando la muestra de roca con mayor módulo de elasticidad dinámico, y después se aplicó la metodología descrita con anterioridad del problema inverso.

Las ecuaciones discretizadas se codificaron en MATLAB usando 5041 nodos por rejilla para modelar la resistencia a la compresión y la deformación uniaxiales. Se considera que la carga se aplica en la parte superior de cada una de las muestras cúbicas, produciendo una resistencia a la compresión uniaxial; los datos generados se utilizan tanto en el problema directo como en el problema inverso. El modelo para el problema inverso requiere desplazamientos nodales horizontales y verticales. También requiere el coeficiente de Poisson, el grosor de las muestras y la resistencia a la compresión uniaxial. El módulo elástico real, obtenido de la prueba de velocidad del pulso ultrasónico y, el módulo aproximado calculado a partir del modelo, se comparan y los resultados se muestran en la tabla (7.2). Los resultados mostrados en este trabajo corresponden a dos canteras de material triturado (G2 y S7) y ocho canteras de material volcánico (M8, CU5, T5, K8, CO9, J8, C10 y H8). Estos materiales se obtuvieron en excavaciones a cielo abierto, que se trituran y se tamizan para su uso en la construcción. El módulo de elasticidad se obtuvo mediante la prueba de velocidad del pulso ultrasónico, como se mencionó anteriormente, y luego se realizó la prueba de resistencia a la compresión uniaxial. Estos resultados se usaron para aproximar la deformación en cada una de las rocas utilizando el método de elementos finitos en el método directo. Una vez que se conoce la deformación (desplazamiento horizontal y vertical) en las rocas, el módulo de elasticidad se puede aproximar por medio del problema inverso. La comparación entre el módulo de elasticidad obtenido mediante la prueba de velocidad de pulso ultrasónico y el enfoque del módulo de elasticidad se muestra en la tabla (7.2). La importancia de estos resultados radica en el hecho de que el módulo de elasticidad puede aproximarse a partir de las deformaciones de muestras de roca medidas en laboratorio.

Nombre	$\rho(\frac{\text{kg}}{\text{m}^3})$	$\sigma(\text{MPa})$	E_{dreal}	$E_{\text{dcalculado}}$	Error
G2	2500	80.34748463	40731.10311	40,731.10310784290	8×10^{-09}
S7	2540	148.249091	54349.34497	54,349.34497058820	6.7×10^{-09}
H8	1660	23.79035904	5609.27885	5,609.27843137251	7.4592×10^{-06}
C10	1490	57.0394387	22079.80525	22,079.80525490180	3.9×10^{-09}
K8	1790	47.51947007	27349.33824	27,349.33824509790	1.54×10^{-08}
M8	1900	34.99621986	30427.07272	30,427.07271568640	1.42×10^{-08}
CO9	2060	61.35351058	36313.43756	36,313.43755882330	5.7×10^{-09}
T5	1570	34.75082844	25780.0481	25,780.04809803920	7.9×10^{-09}
CU5	1580	27.5049949	21643.96903	21,643.96902941170	1.61×10^{-08}
J8	1690	42.87376929	23760.93491	23,760.93491176460	1×10^{-09}

Tabla 7.2: Resultados de la densidad(ρ), resistencia a compresión uniaxial(σ), Módulo de Elasticidad dinámico y su error porcentual entre el real y el calculado mediante MEF.

La tabla (7.2) muestra la resistencia a la compresión uniaxial y la densidad de cada muestra. Es importante notar que aunque las muestras de melon muestran los menores desplazamientos, su resistencia no es la mayor. Sin embargo, las muestras de materiales triturados G2 y S7 presentaron la mayor resistencia a la compresión uniaxial y sus desplazamientos están entre los más pequeños en comparación con otras muestras de canteras volcánicas. Además en la tabla (7.2) se muestra una comparación entre los valores del módulo de elasticidad aproximado calculado por la solución del problema inverso y el módulo de elasticidad real. La mayor diferencia entre estos valores es de aproximadamente 7.5×10^{-06} , lo que permite concluir que el módulo de elasticidad aproximado calculado por nuestro modelo MEF es una aproximación satisfactoria.

Los resultados de las propiedades físicas y mecánicas se muestran en la tabla (7.2). Estas aproximaciones se comportan como se esperaba ya que las densidades más altas tienen una mayor resistencia a la compresión uniaxial, es el caso de muestras de canteras de materiales triturados como G2 y S7. Por ejemplo, S7 tiene una densidad de 2540.00kg/m^3 y una resistencia a la compresión uniaxial de 148.25MPa . Para las muestras de las canteras volcánicas H8, C10, K8, M8, CO9, T5, CU5 y J8, sus densidades y resistencia a la compresión uniaxial son menores en comparación con las muestras de las canteras de material triturado, tal es el caso de la muestra H8 cuya densidad es 1660.00kg/m^3 y su resistencia a la compresión uniaxial es 23.79MPa .

La Fig.(7.12) muestra la correlación lineal entre la resistencia a la compresión uniaxial

y el módulo elástico dinámico real (E_d) para las muestras analizadas en este estudio, el coeficiente de correlación es $R = 0.93$, lo que implica una correlación de muy buena a excelente. Los valores de R de 0.00 a 0.25 implican que no hay correlación entre ambas variables, los valores de R de 0.25 a 0.50 implican una correlación de baja a moderada, los valores de R de 0.50 a 0.75 implican una correlación de moderada a buena y el valor de $R \geq 0.75$ implica una correlación de muy buena a excelente [50, 51]. Aunque existe una diferencia entre el módulo elástico estático y el módulo elástico dinámico, en este trabajo de investigación consideramos el ensayo de resistencia a la compresión uniaxial del que se utilizó la carga máxima soportada, la justificación es que existe una excelente correlación entre los dos parámetros para las rocas estudiadas, como se muestra en la Fig. (7.12).

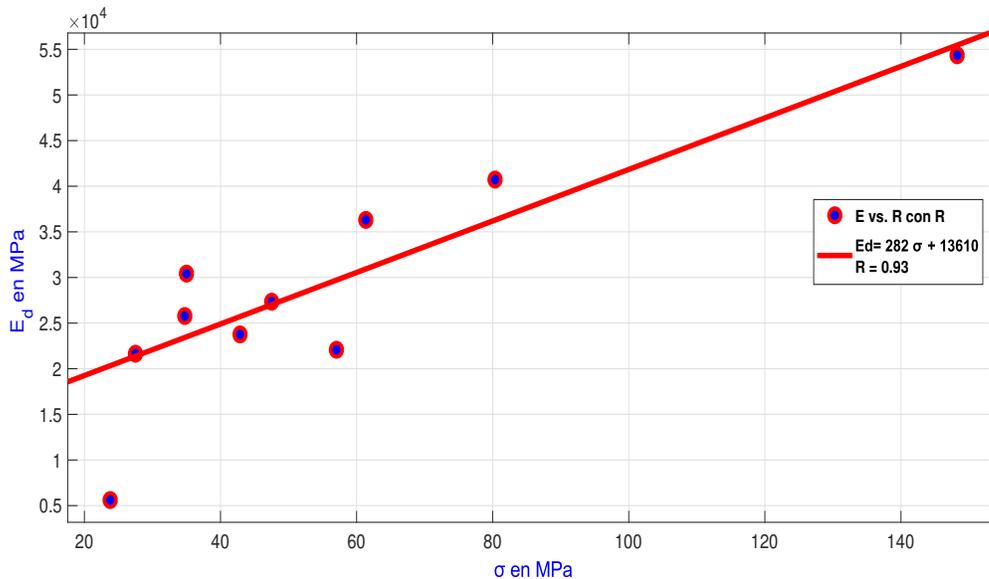


Figura 7.12: Correlación entre la resistencia de compresión uniaxial (σ) y el módulo dinámico de elasticidad real (E_d).

Teóricamente, las muestras son del mismo material y deberían mostrar los mismos desplazamientos. Aún así, se obtuvieron desplazamientos ligeramente diferentes por el método directo. Esta diferencia puede atribuirse a las propiedades similares, pero no exactamente iguales. Los desplazamientos se amplían 50 veces para apreciar la deformación mostrada en las Fig. (7.13) a la Fig. (7.22).

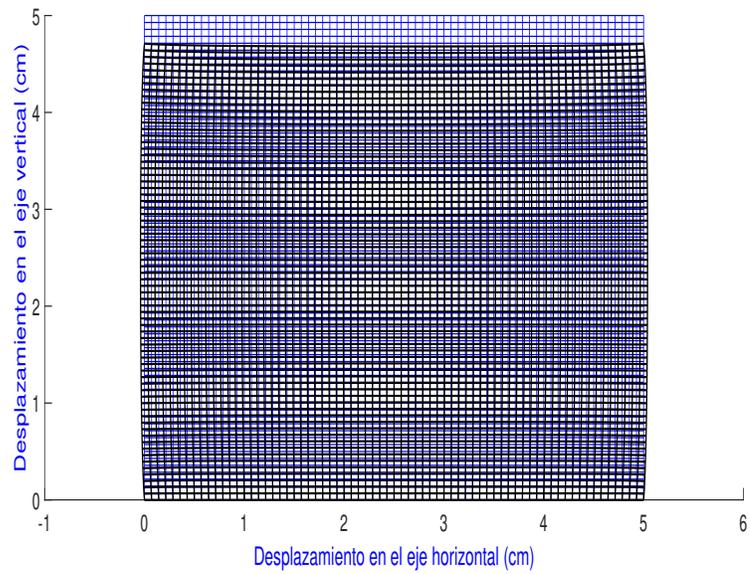


Figura 7.13: Banco de materiales Cuenembo (CU5) es Traquiandesita basáltica.

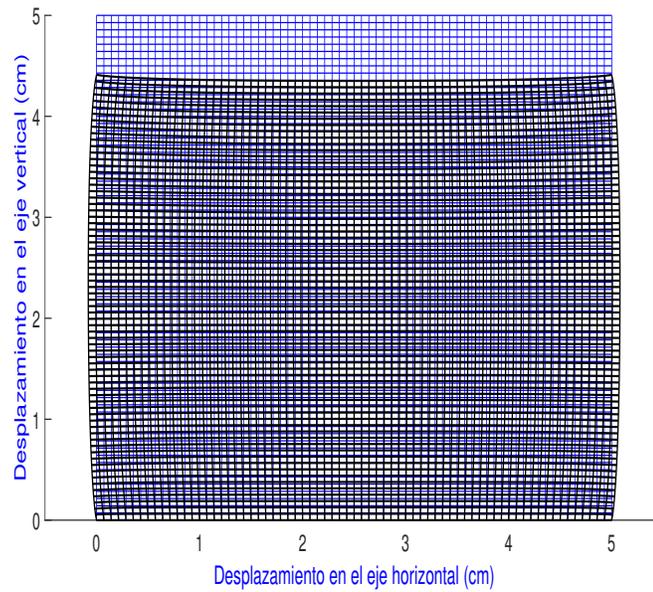


Figura 7.14: Banco de materiales Cerritos (C10) es Andesita basáltica.

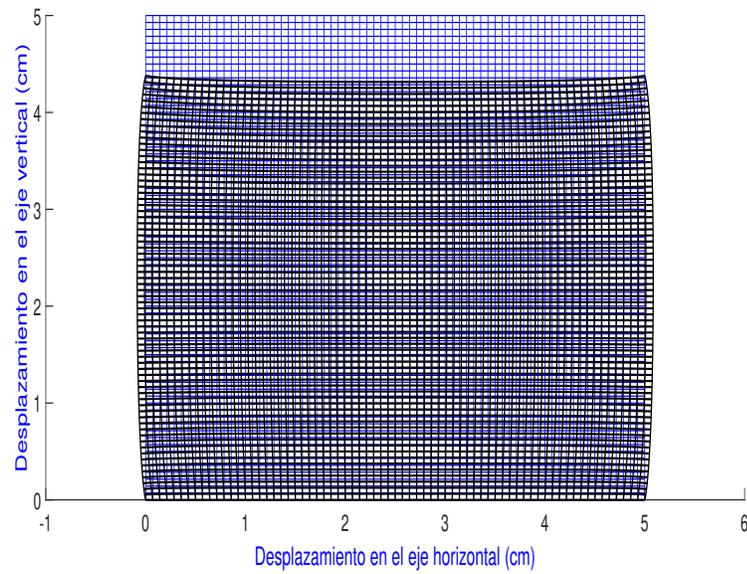


Figura 7.15: Banco de materiales Colegio (S7) es andesita basáltica.

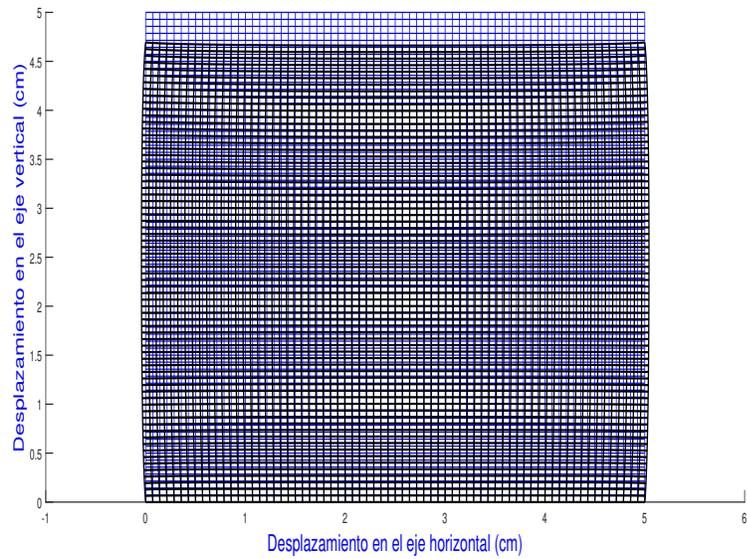


Figura 7.16: Banco de materiales el Tigre (T5) es Andesita.

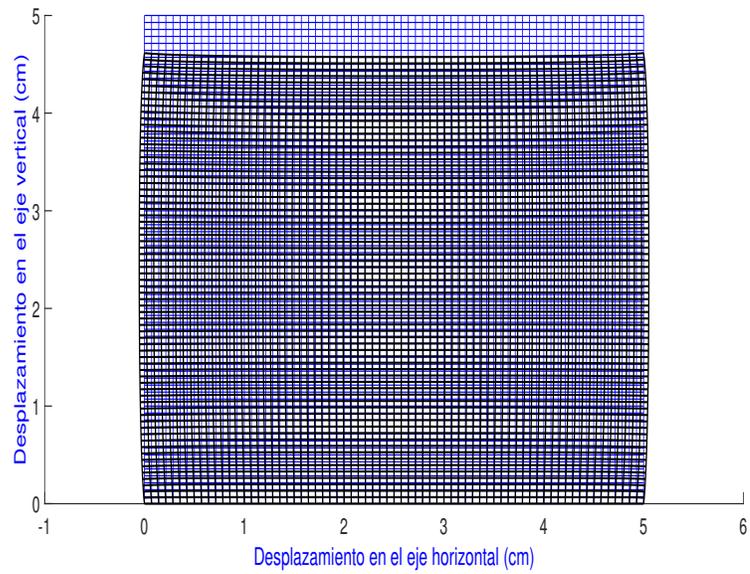


Figura 7.17: Banco de materiales Comanja (CO9) es Traquiandesita basáltica.

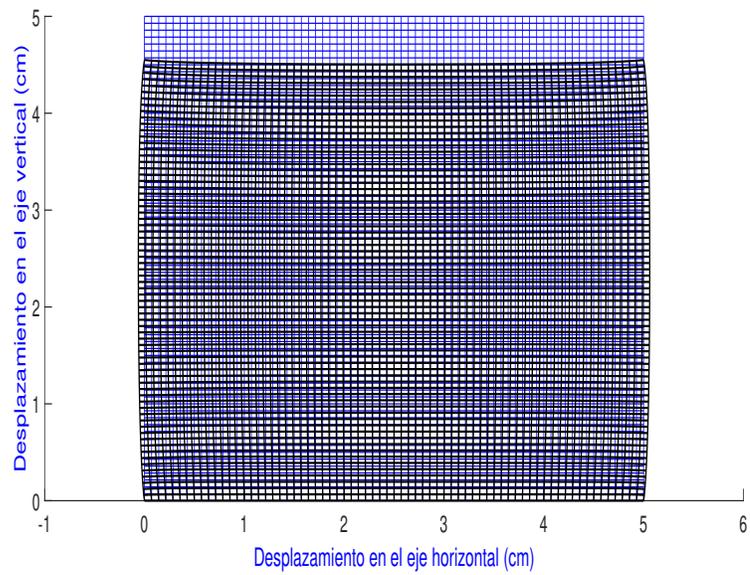


Figura 7.18: Banco de materiales AGC (G2) Andesita basáltica.

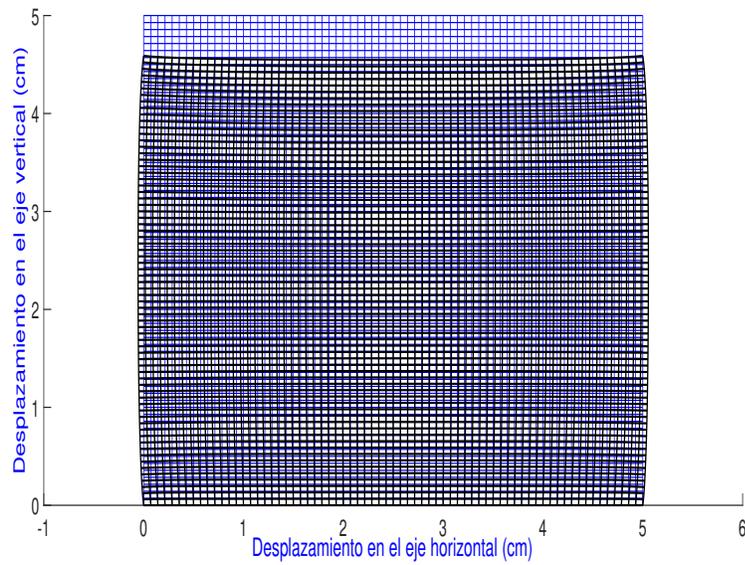


Figura 7.19: Banco de materiales Joyitas (J8) es Andesita.

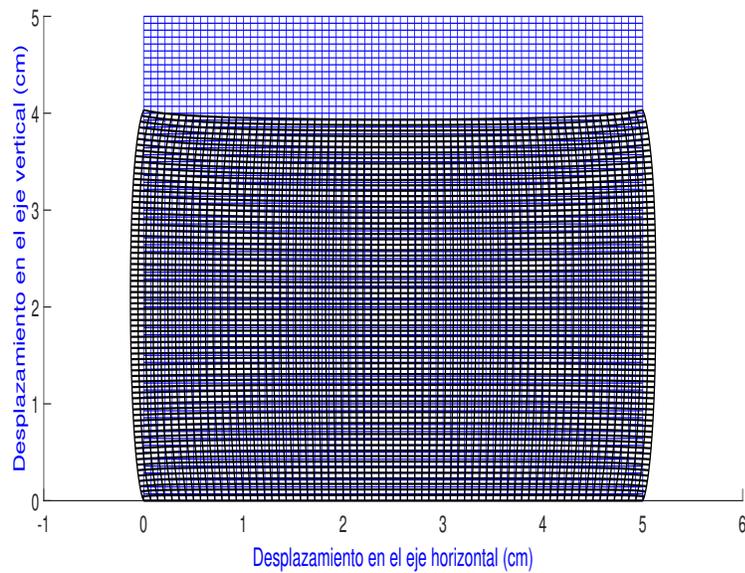


Figura 7.20: Banco de materiales Huiramba (H8) es Traquibasalto.

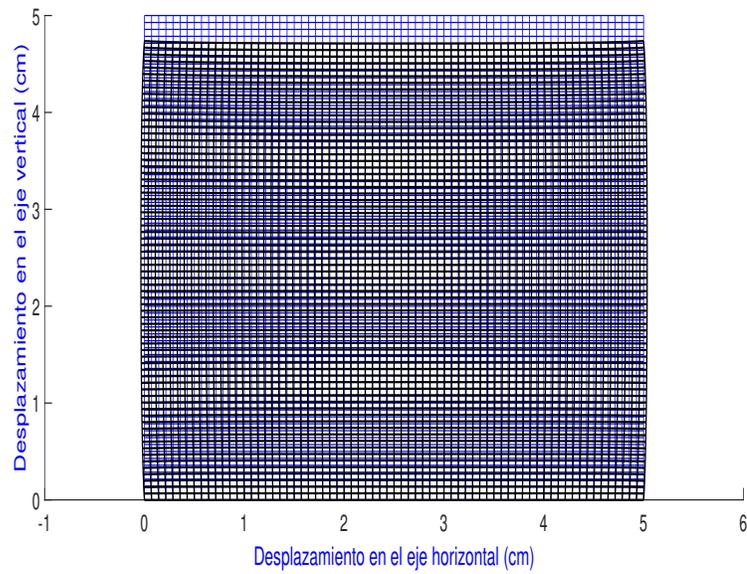


Figura 7.21: Bancos de materiales el Melon (M8) es Traquiandesita basáltica..

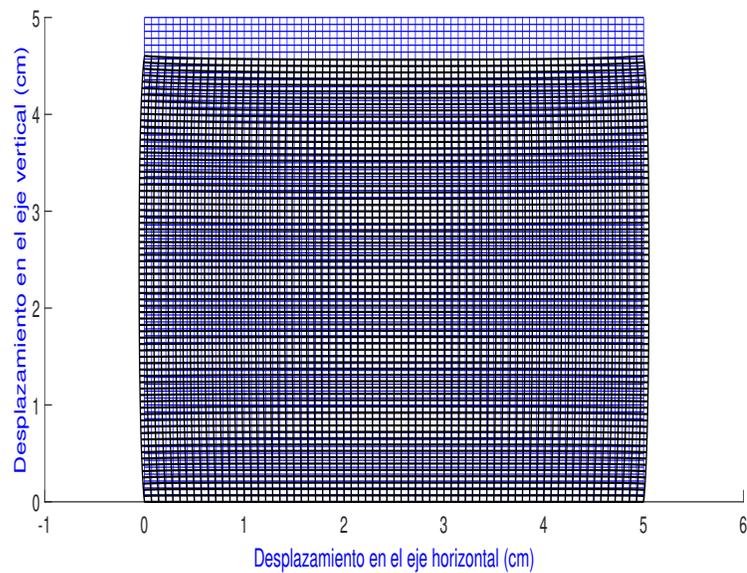


Figura 7.22: Bancos de materiales Mascutan (K8) Andesita basáltica.

A pesar de que la teoría nos dice que se deberían tener los mismos resultados en cuanto a desplazamientos, debido a que es el mismo material, resulta completamente diferente ya

que cada material tiene propiedades intrínsecas similares pero no iguales. Los resultados del modelo coinciden con los resultados del laboratorio, ya que sus propiedades índices también son diferentes.

Los resultados son multiplicados por 50 como un factor de escala para apreciar los desplazamientos. En la tabla 7.3 se muestran los valores de \mathbf{x}_{\max} , los desplazamientos máximos y de $\bar{\mathbf{x}}$, los desplazamientos promedio. Podemos observar que el banco de materiales pétreos con menores desplazamientos es el Melon y el que presenta mayores desplazamientos es Huiramba.

Nombre	\mathbf{x}_{\max}	$\bar{\mathbf{x}}$
G2(AGC)	0.085	0.063
S7(COLEGIO)	0.061	0.046
H8(HUIRAMBA)	0.132	0.099
C10(CERRITOS)	0.080	0.060
K8(MASCUTAN)	0.054	0.040
M8(MELON)	0.036	0.027
CO9(COMANJA)	0.053	0.039
T5(EL TIGRE)	0.042	0.031
CU5(CUENEMBO)	0.040	0.030
J8(JOYITAS)	0.056	0.042

Tabla 7.3: Resultados de los desplazamientos. \mathbf{x}_{\max} son los desplazamientos máximos y $\bar{\mathbf{x}}$ son los desplazamientos promedio.

En la Fig. (7.23) se observa una significativa dispersión de los datos, pero lo anterior se debe a que el módulo de elasticidad dinámico están directamente relacionados con las propiedades físicas y mecánicas de cada roca.

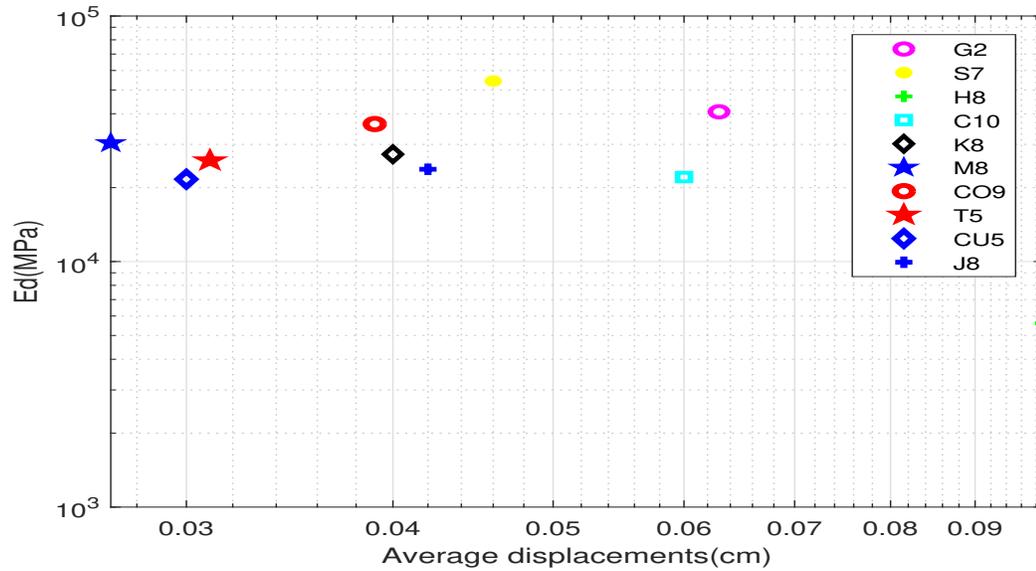


Figura 7.23: Dispersión entre \bar{x} y E_d .(Fuente: M.A. Navarrete Seras)

Nombre	r (Residual)
G2	$r = 0.0000697645720424842 E^2 - 57.9683947335941 E + 12041694.9807398$
S7	$r = 0.000133499973328005 E^2 - 148.014976520949 E + 41027036.800728$
H8	$r = 0.000323404098387902 E^2 - 37.0068981275766 E + 1058668.17694298$
C10	$r = 0.000119647581537069 E^2 - 53.8926241109929 E + 6068687.08973642$
K8	$r = 0.0000541922022575883 E^2 - 30.2352657437066 E + 4217263.9997508$
M8	$r = 0.0000237173263210082 E^2 - 14.721635776856 E + 2284475.03960885$
CO9	$r = 0.0000511796415195144 E^2 - 37.9135778186778 E + 7021538.93782576$
T5	$r = 0.0000325772175144749 E^2 - 17.1327815822384 E + 2252588.05954085$
CU5	$r = 0.0000289530090640541 E^2 - 17.1327815822384 E + 1411132.70534509$
J8	$r = 0.0000583712153097215 E^2 - 28.2938748129758 E + 3428673.48094695$

Tabla 7.4: Ecuación del residual para cada una de las muestras minimizando el residual

En la tabla(7.4) podemos observar la ecuación del residual de cada uno de los bancos de materiales pétreos mismo que fue obtenido minimizando el residual y con ello resolviendo el problema inverso partiendo de que se conocen los desplazamientos tanto horizontales como verticales de cada uno de los nodos para este estudio fueron 5041 nodos en total.

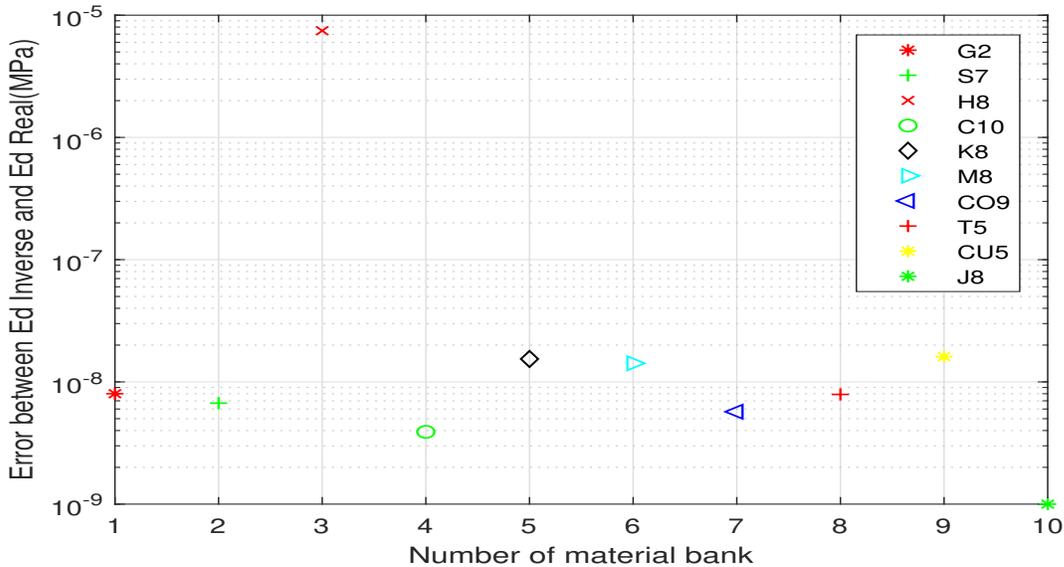


Figura 7.24: Error entre el Módulo de Elasticidad Real y el Módulo de Elasticidad Inverso.

En la Fig. (7.24) se puede observar el porcentaje de error entre el módulo de elasticidad calculado y estimado por el modelo MEF propuesto.

7.2. Resultados de la ciencia de datos

De acuerdo a los resultados o datos [52] obtenidos de las diferentes pruebas las relaciones que existen entre las variables, equivale a internarse en el área de la correlación. Con el fin de expresar cuantitativamente hasta qué grado están relacionadas dos variables, es necesario calcular el llamado coeficiente de correlación R . Los valores de los coeficientes de correlación varían entre $+1.00$ y -1.00 . Ambos extremos representan relaciones perfectas entre las variables, mientras que 0.00 representa la ausencia de relación [53]. Después de realizar los estudios antes mencionados se correlacionaron los datos mediante regresión lineal y regresión logística. En la Fig. (7.34) se muestran los diferentes promedios de las pruebas físicas y mecánicas que se realizaron a los bancos de materiales pétreos:

Los volcánicos Cerritos, Mascutan, Melon son de color rojizo Fig. (1.2) y Joyitas, Comanja, Cuenembo, Huiramba son de color oscuro Fig. (1.1). Los triturados AGC y el Colegio Fig.(1.3).

Después de obtener los datos a través de las pruebas mencionadas anteriormente, se realizaron modelos de regresión lineal y polinomial, obteniendo modelos que predicen la resistencia

a la compresión uniaxial. La fig. (7.25) muestra el modelo lineal de los datos ajustados a una superficie conocida como hiperplano. En este modelo se puede observar un coeficiente de determinación R^2 de 0.71 y en la Fig. (7.26) se puede ver que todos los datos están entre los límites de confianza del 95 por ciento.

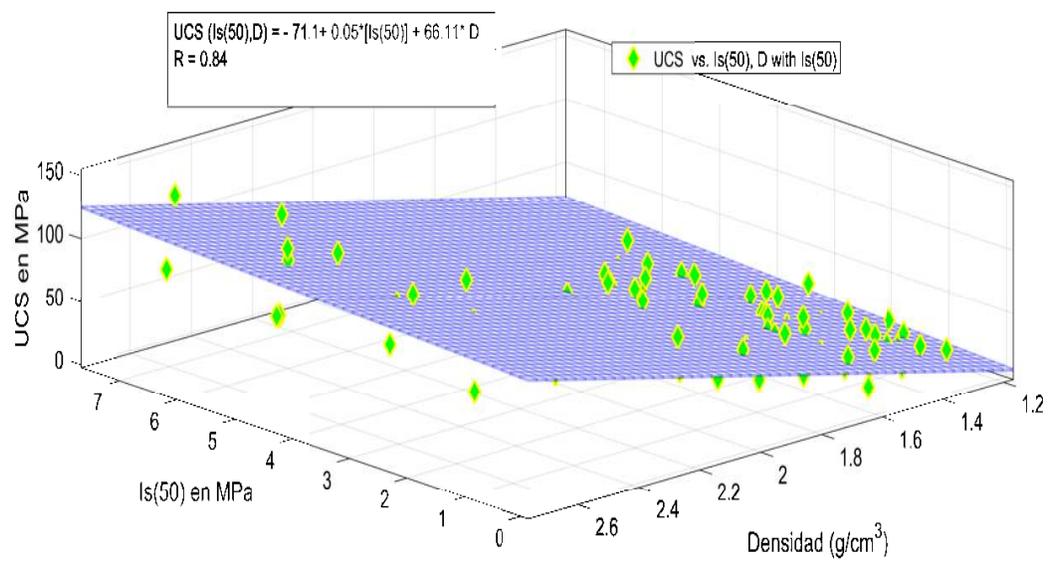


Figura 7.25: Modelo lineal 1 para estimar el UCS por medio de $Is(50)$ y la densidad (D).

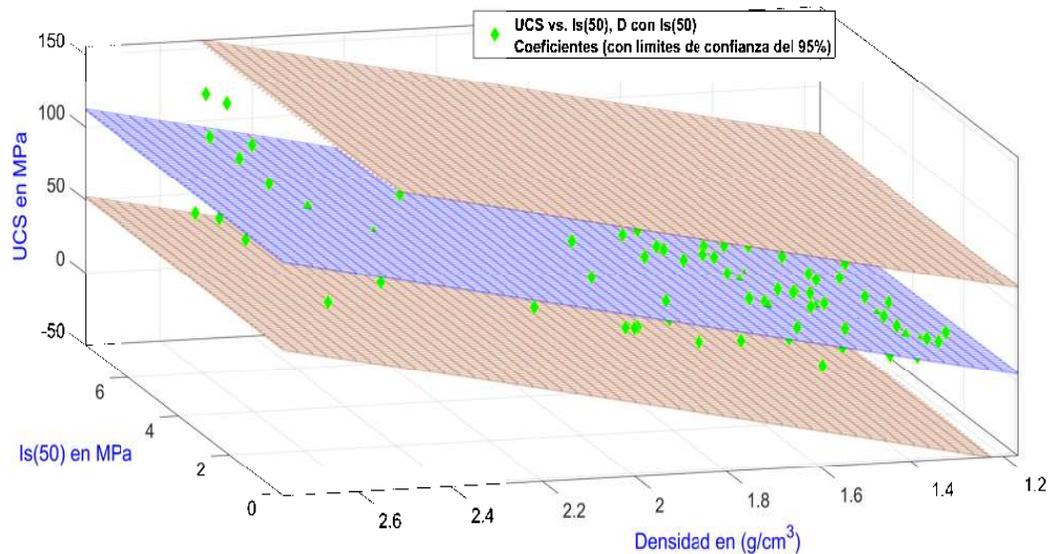


Figura 7.26: Las superficies superior e inferior muestran los límites de predicción al 95 % de confianza para el modelo lineal 1.

El modelo en la Fig. (7.25) correlaciona el UCS contra $Is(50)$, densidad (D) con $Is(50)$. Este modelo se puede comparar con el modelo polinomial de la Fig. (7.27) donde una superficie polinomial se ajusta a los datos obteniendo un coeficiente de determinación R^2 de 0.72, es importante mencionar que en la Fig. (7.25) y la Fig. (7.27) las mismas variables se correlacionaron pero se obtuvo un mejor R^2 en el modelo de la Fig. (7.27) ya que se realizó un ajuste polinomial y además la Fig. (7.28) muestra que los datos analizados están dentro de los límites de confianza del 95 por ciento. Los modelos anteriores donde la densidad es una de las variables correlacionadas dan buenos resultados y dicha propiedad depende de la composición mineralógica y la porosidad de la roca. Por lo tanto, en estos modelos tenemos datos de rocas de origen volcánico y de rocas volcánicas trituradas cuyas densidades son diferentes, por lo que estos modelos son buenos para la región de estudio.

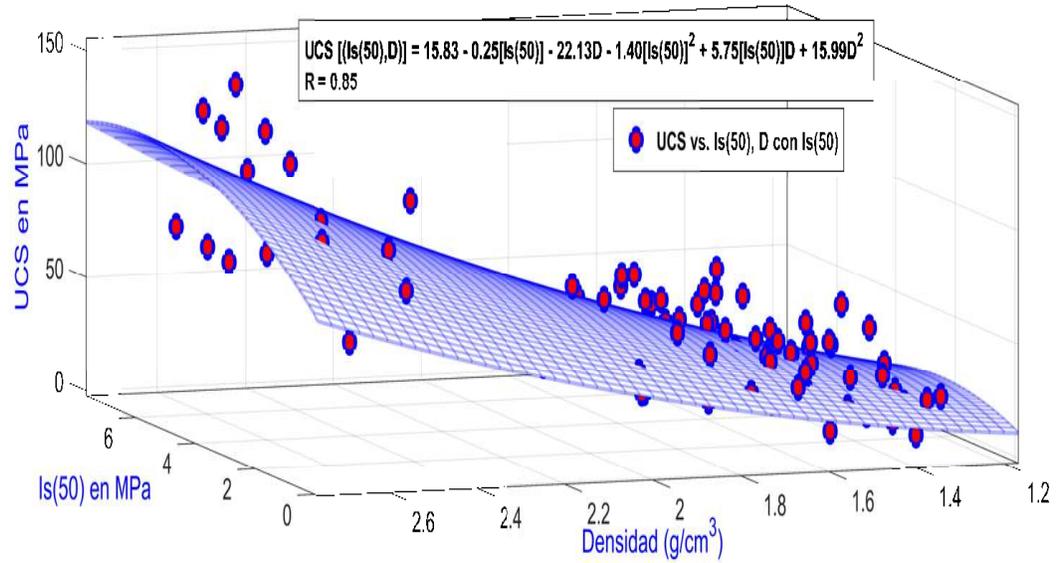


Figura 7.27: Modelo 2 polinomial para estimar el UCS usando $Is(50)$ y la densidad (D).

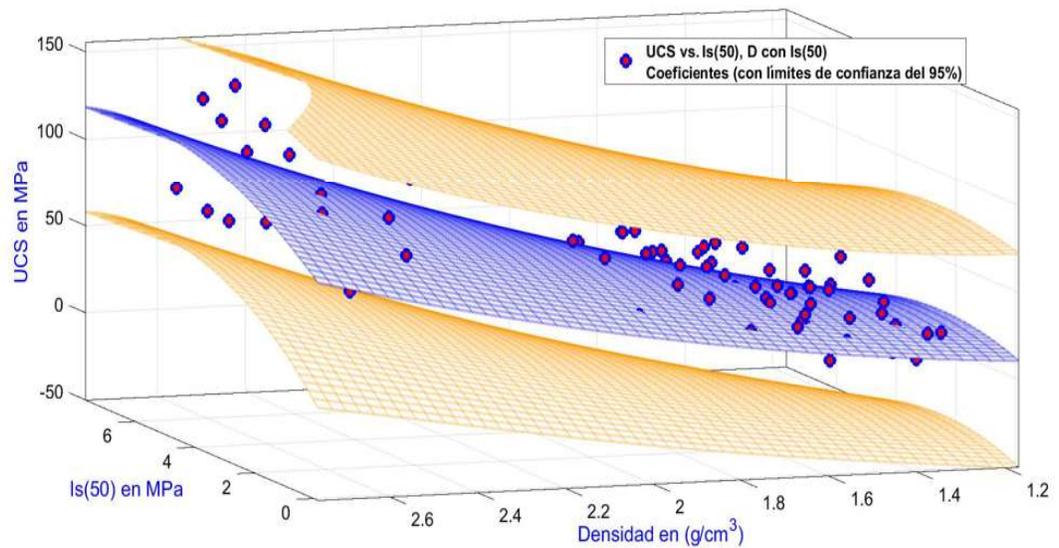


Figura 7.28: Las superficies superior e inferior muestran los límites de predicción con un 95% de confianza para el modelo polinomial 2.

Los datos obtenidos de la prueba de resistividad eléctrica de rocas volcánicas y tritura-

das nos permiten estimar cuánto se opone la roca al paso de la corriente eléctrica y poder clasificarla. Sin embargo, en este estudio es útil estimar el UCS empleando un modelo polinomial, ajustando los datos a una superficie polinomial. En la Fig. (7.29), el UCS se correlacionó con $Is(50)$, la resistividad eléctrica (ρ) con $Is(50)$ dio un R^2 de 0.53 o R es igual a 0.73 y la Fig. (7.30) muestra que los datos están dentro de los límites de confianza.

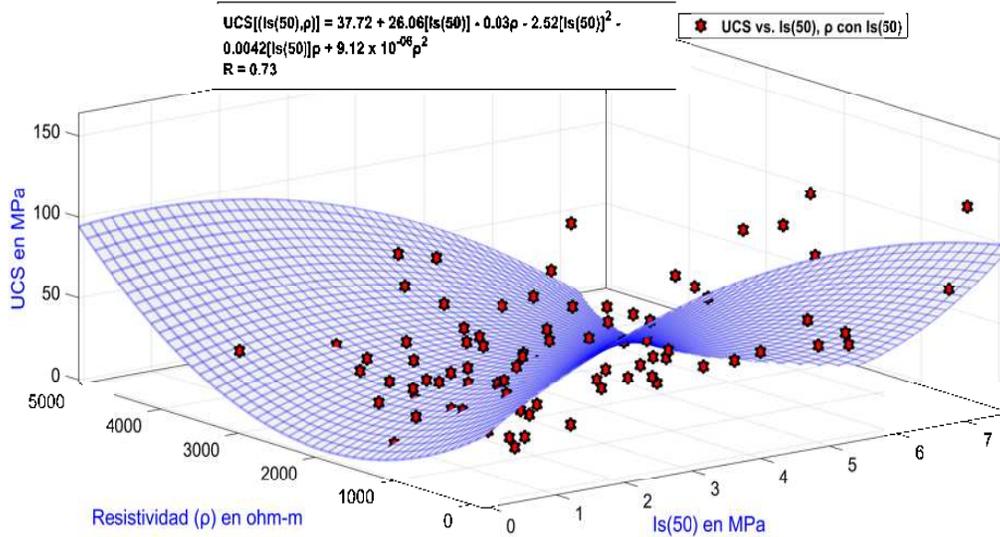


Figura 7.29: Modelo polinomial 3 para estimar UCS utilizando $Is(50)$ y resistividad eléctrica (ρ).

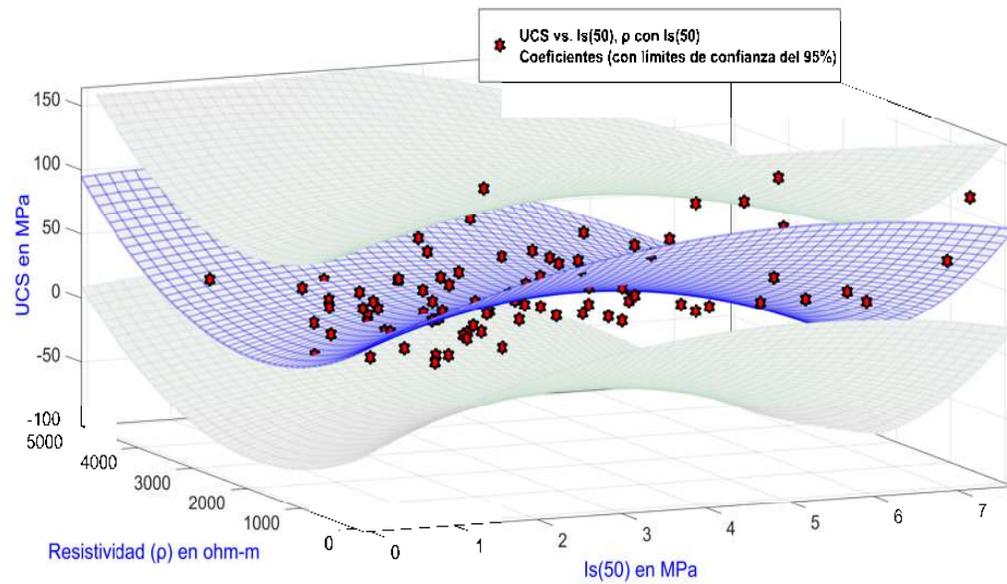


Figura 7.30: Las superficies superior e inferior muestran los límites de predicción al 95 % de confianza para el modelo polinomial 3.

La prueba de velocidad de pulso ultrasónico se utiliza para estimar las propiedades dinámicas y físicas en los rocas, con ellas se puede determinar el módulo dinámico de elasticidad, por esta razón, se utilizó para estimar el UCS obteniendo el modelo que se muestra en la Fig. (7.31). El modelo se obtiene correlacionando el UCS contra $Is(50)$, la velocidad de pulso ultrasónico (V_p) con $Is(50)$ y se obtuvo un R^2 de 0.53. En la Fig. (7.32) se puede ver que los datos están dentro de los límites de confianza.

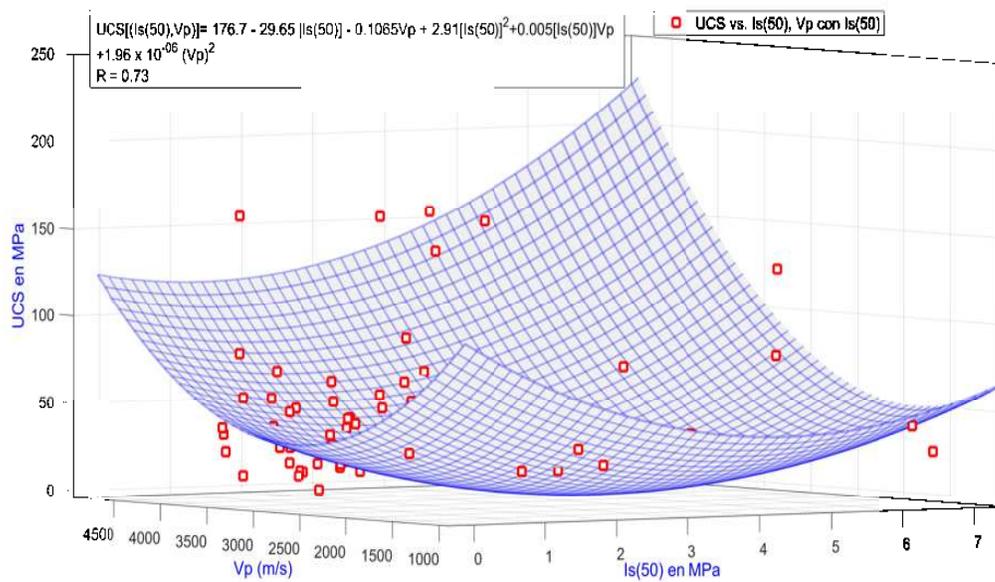


Figura 7.31: Modelo polinomial 4 para estimar el UCS usando el $Is(50)$ y la velocidad del pulso ultrasónico (UPV)

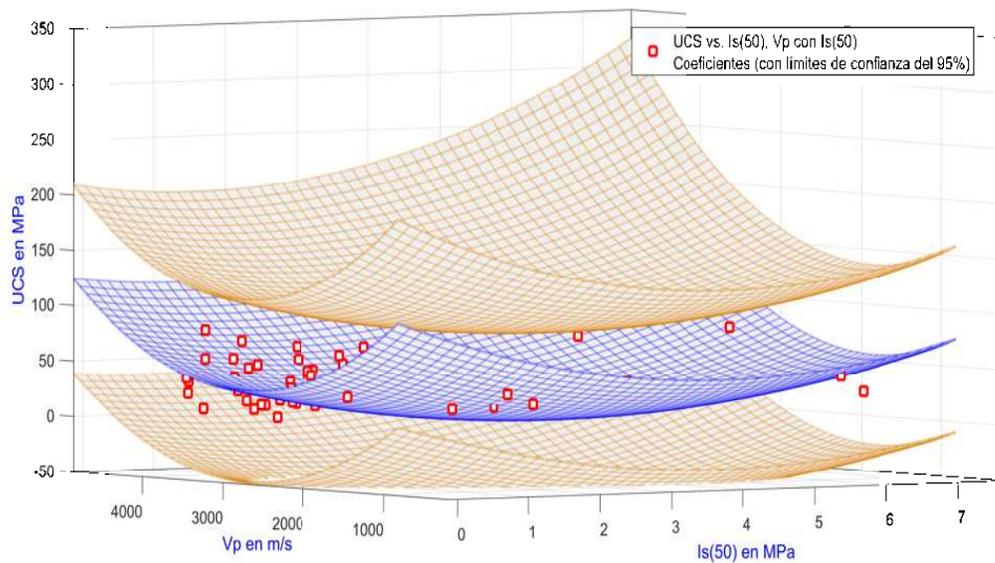


Figura 7.32: Las superficies superior e inferior muestran los límites de predicción con un 95% de confianza para el modelo polinomial 4.

El coeficiente de determinación puede usarse para evaluar la bondad de ajuste del modelo y siempre varía entre 0 y 1 [51]. Si R^2 es igual a 0.756, significa que aproximadamente el 75.6% de la variación en Y solo se debe a la regresión lineal de Y en X [54]. Para este estudio, la Tabla (7.5) muestra R^2 con sus respectivos modelos que tienen una fuerte correlación entre las variables.

Modelo	Ecuación	R^2
Modelo 1	$UCS [Is(50), D] = -71.1 + 0.05 [Is(50)] + 66.11D$	0.71
Modelo 2	$UCS [Is(50), D] = 15.83 - 0.25 [Is(50)] - 22.13D - 1.40 [Is(50)]^2 + 5.75 [Is(50)] D + 15.99D^2$	0.72
Modelo 3	$UCS [Is(50), \rho] = 37.72 + 26.06 [Is(50)] - 0.03 \rho - 2.52 [Is(50)]^2 + 0.0042 [Is(50)] \rho + 9.12x10^{(-06)} \rho^2$	0.53
Modelo 4	$UCS [Is(50), Vp] = 176.7 - 29.65 [Is(50)] - 0.1065Vp + 2.91 [Is(50)]^2 + 0.005 [Is(50)] Vp + 1.96x10^{(-06)} (Vp)^2$	0.53

Tabla 7.5: Modelos matemáticos.

La Tabla (7.6) muestra los resultados de $Id2$ que nos permiten clasificar la roca en función de su durabilidad. Los resultados obtenidos muestran una durabilidad alta a muy alta según la literatura. González et al. clasificó la durabilidad de las rocas como alta si se retiene el 95 – 98% del peso después de 2 ciclos, y muy alta si se retiene al menos el 98% del peso después de 2 ciclos [17].

Nombre	% retenido después de 2 ciclos
Cerritos	96.30
Huiramba	98.98
Joyitas	99.12
Comanja	98.98
Cuenembo	99.40
El Ttigre	99.38
Mascutan	98.84
El Melon	99.67
AGC	99.34
El Colegio	98.90

Tabla 7.6: Durabilidad basada en el índice $Id2$.

El modelo de la Fig.(2.3) correlaciona los datos obtenidos de las pruebas de canteras de roca volcánica. Es importante mencionar que existe una correlación entre los datos involucrados y que tanto la densidad como la absorción están directamente relacionadas con la durabilidad de la roca.

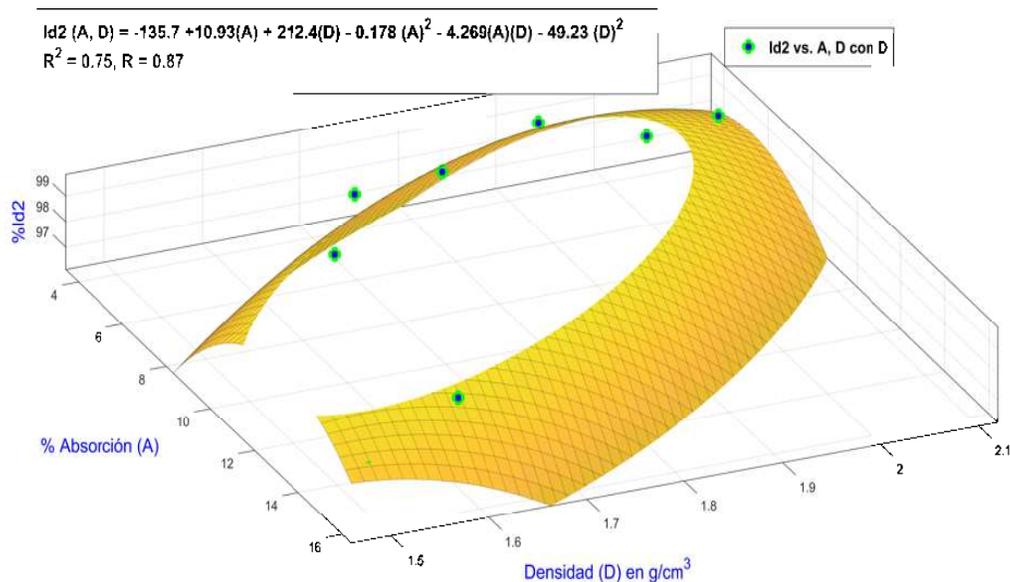


Figura 7.33: Correlación del índice de durabilidad, la absorción y la densidad.

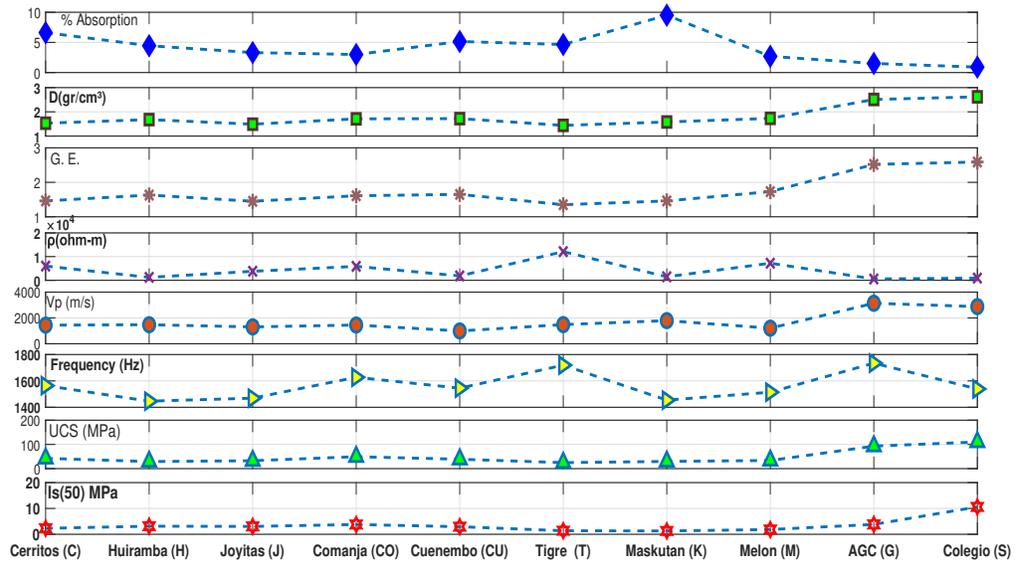


Figura 7.34: Dispersion de UCS vs. $I_s(50)$.

Los resultados correlacionados en la Fig.(7.35) corresponden a las muestras de color rojizo, en dicha gráfica se muestra una correlación entre la resistividad eléctrica y la velocidad de pulso ultrasónico en este caso se estimó una $r = 0.73$ y se observó que el comportamiento que correlaciona las dos variables es polinomial. El polinomio es de tercer grado, donde la resistividad es la variable independiente y VP es la variable dependiente. Es importante hacer notar que los coeficientes se encuentran en los límites de confianza del 95 por ciento y están representados con las líneas punteadas.

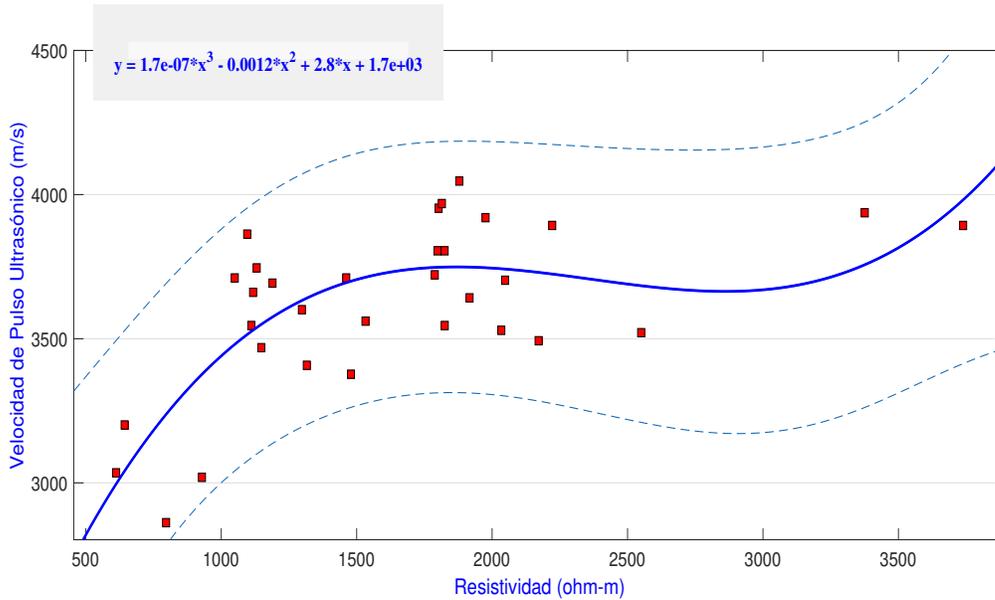


Figura 7.35: Correlación de bancos de materiales pétreos de color rojizo.

En la Fig.(7.36) se muestra la correlación de las rocas de color oscuro en este caso se estimó un coeficiente de correlación $r = 0.67$ y también se observó que el polinomio que correlaciona las variables es de tercer orden. Además, se muestran las líneas punteadas que representan los coeficientes con límites de confianza del 95 por ciento. Para interpretar el coeficiente de correlación se han dado los siguientes lineamientos generales: valores de r de 0.00 a 0.25 implica que no existe correlación entre ambas variables, valores de r de 0.25 a 0.50 implica una correlación baja a moderada, valores de r de 0.50 a 0.75 implica una correlación moderada a buena y valor de $r \geq 0.75$ implica una muy buena a excelente correlación [50]. De acuerdo a lo anterior las correlaciones estudiadas en este trabajo tienen un coeficiente de correlación de $r = 0.67$ y $r = 0.73$, por lo tanto, tenemos una correlación moderada a buena.

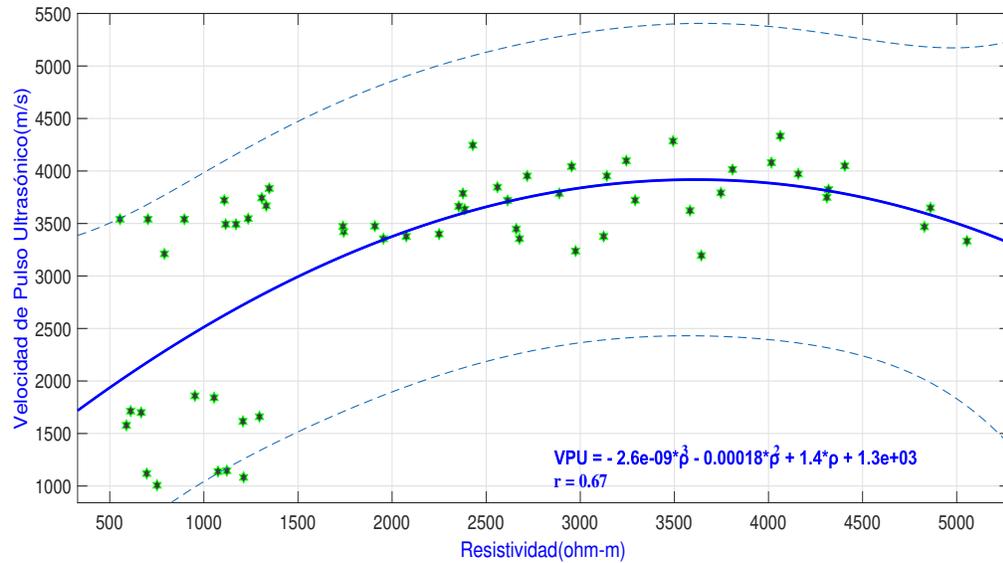


Figura 7.36: Correlación de bancos de materiales pétreos de color oscuro (Comanja, Joyitas, Cuenembo, El Tigre, y Huiramba)

La correlación anterior de moderada a buena, nos indica que tenemos rocas que a pesar de ser un mismo material volcánico tiene diferentes propiedades físicas por provenir de diferentes bancos de materiales pétreos, tal como lo muestra la Tabla (7.7), en la cual se puede observar que la menor resistividad es de $936.02\text{ohm}-m$ y el menor valor de velocidad de pulso ultrasónico es 1455m/s correspondiente al banco de materiales pétreos Huiramba. Las rocas con mayores velocidades de pulso ultrasónico son Comanja ($VPU = 3965\text{m/s}$) y El Tigre ($VPU = 3637\text{m/s}$).

Nombre	% Humedad de absorción	G.E.	D(g/cm ³)	$\rho(\text{ohm}-m)$	VPU(m/s)
Huiramba(H)	4.45	1.63	1.68	936.02	1455.00
Joyitas(J)	3.31	1.45	1.49	2707.80	3554.00
Comanja(CO)	2.99	1.61	1.71	3241.04	3965.00
Cuenembo(CU)	5.15	1.65	1.72	1108.63	3563.00
El Tigre (T)	4.65	1.35	1.44	3661.03	3637.00
Cerritos (C)	6.62	1.46	1.53	1636.73	3547.16
Mascutan (K)	9.51	1.46	1.58	1147.95	3460.44
El Melon (M)	2.69	1.73	1.73	2063.85	3830.18

Tabla 7.7: Resultados de propiedades físicas y pruebas no destructivas.

La Fig. (7.37) muestra claramente los resultados de las propiedades físicas, donde se observa la mayor absorción en el banco de materiales pétreos Mascutan (roca de color rojizo) y Cerritos (roca de color rojizo). Por otro lado, los de menor absorción son el Melon (roca de color rojizo) y Comanja (roca de color oscuro).

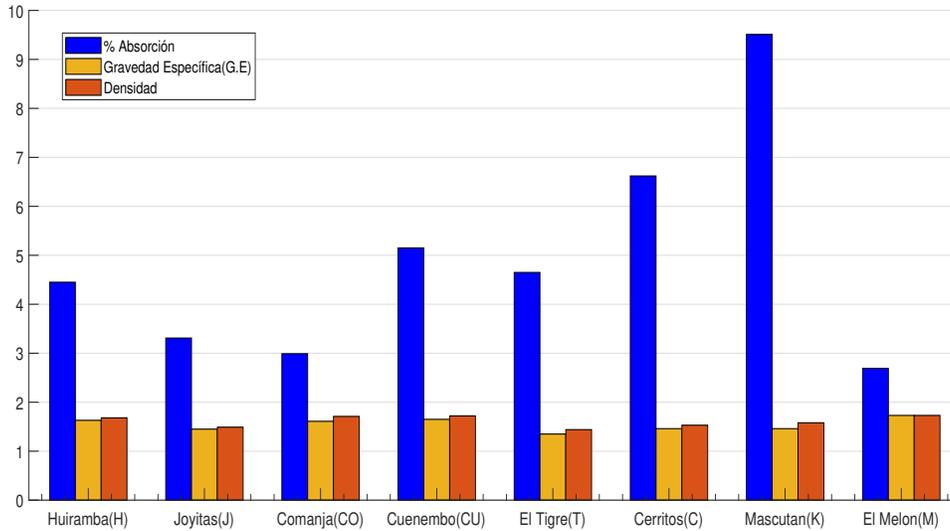


Figura 7.37: Comparación de las propiedades físicas de los bancos de materiales pétreos.

En la Fig.(7.34) se observan claramente las coincidencias y diferencias entre cada uno de ellos, podemos decir por ejemplo que las tendencias para la gravedad específica y la densidad son muy parecidas y lo mismo sucede con la resistencia a la compresión uniaxial (UCS) y el índice de carga puntual corregido $Is(50)$. Por otro lado la absorción varía de un banco a otro debido a que tienen diferente porosidad y aún siendo del mismo tipo de roca esta propiedad intrínseca es diferente. Así pues podemos darnos cuenta que el banco que registra mayor absorción es Mascutan y los bancos con menor absorción son AGC y el Colegio.

La Tabla (7.8) y la Fig. (7.38) muestran los promedios de las muestras de cada banco para cada una de las pruebas. Se puede observar que la densidad y la gravedad específica siguen un comportamiento similar. Para la ignimbrita de Tlalpujahuá, se observa que su porcentaje de Humedad de Absorción es 15.67% y $Is(50)$ alto. Cuando el porcentaje de humedad de absorción es alto, hay resistencias bajas, como la ignimbrita de Coinzio y la ignimbrita de Arindeo. La ignimbrita de Tlalpujahuá, Coinzio y Arindeo son las rocas que

se utilizan actualmente.

Nombre	Is(50) MPa	Densidad(g/cm ³)	Gravedad específica	% Absorción
Ignimbrita de Tlapujahua	2.16	1.93	1.67	15.87
Ignimbrita de Arindeo	0.8	1.75	1.44	23.43
Ignimbrita de Coinzio	0.61	1.78	1.45	25.54
Ignimbrita del Exconvento de Tiripetío	2.4	1.95	1.79	9.64
Ignimbrita del Parque Ecológico	2.77	1.79	1.66	15.9
Ignimbrita de Ciudad Industrial	1.85	1.91	1.69	14.57

Tabla 7.8: Datos de propiedades físicas y mecánicas de las ignimbritas.

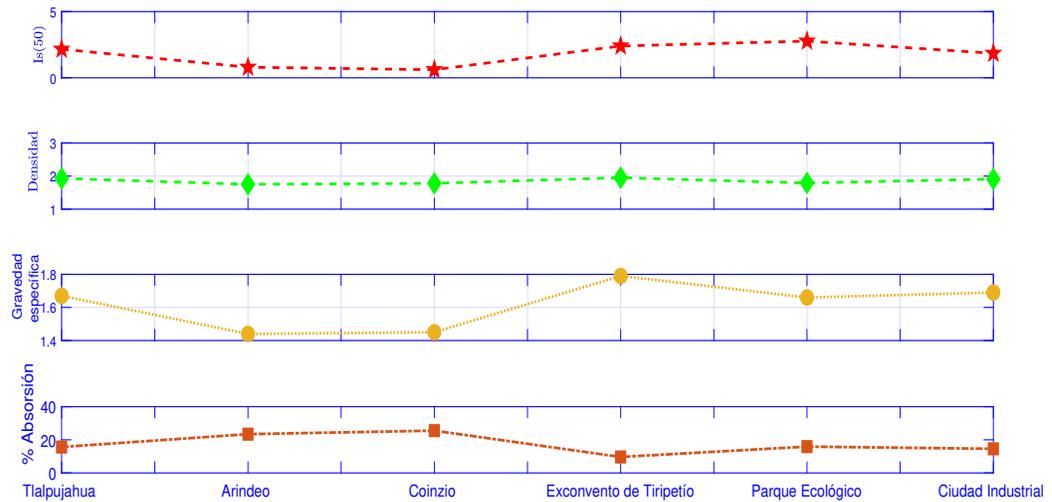


Figura 7.38: Comparación de propiedades físicas y mecánicas de las ignimbritas.

Los resultados de la correlación se muestran en la Fig. (7.39), en este gráfico, se muestra una correlación entre el índice de carga puntual y el porcentaje de humedad de absorción, en este caso, se estimó a $r = 0.799$ y se observó que el comportamiento correlacionaba las dos variables es polinomial. El polinomio es de segundo grado, donde el porcentaje de absorción es la variable independiente y $Is(50)$ es la variable dependiente. Del mismo modo para la correlación entre $Is(50)$ y el caso de la Fig. (7.40) de densidad, estimamos $r = 0.78$ y se observó que el comportamiento que correlaciona las dos variables es polinomial. El polinomio es de segundo grado, donde la densidad es la variable independiente y $Is(50)$ es la variable dependiente.

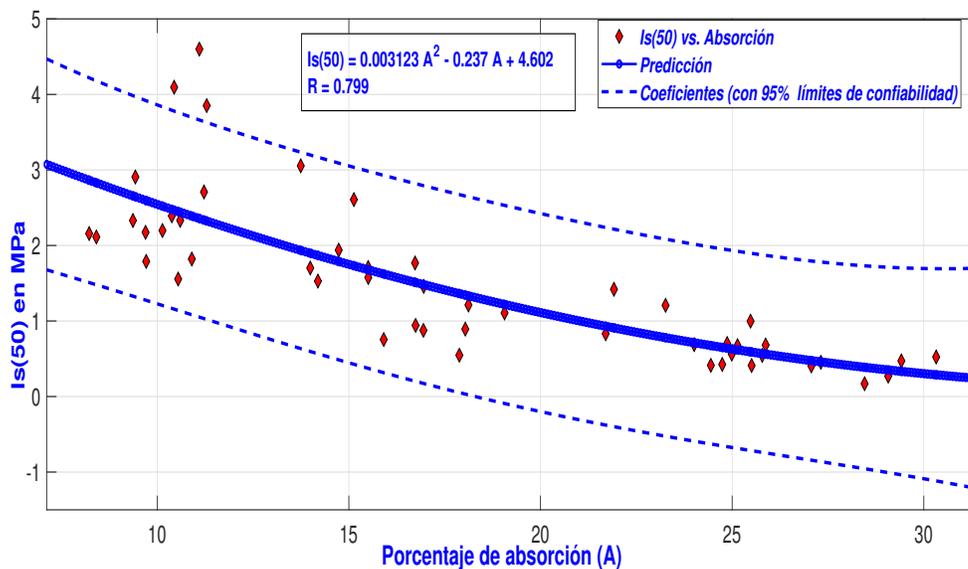


Figura 7.39: Correlación entre índice de carga puntual y la absorción de las ignimbritas.

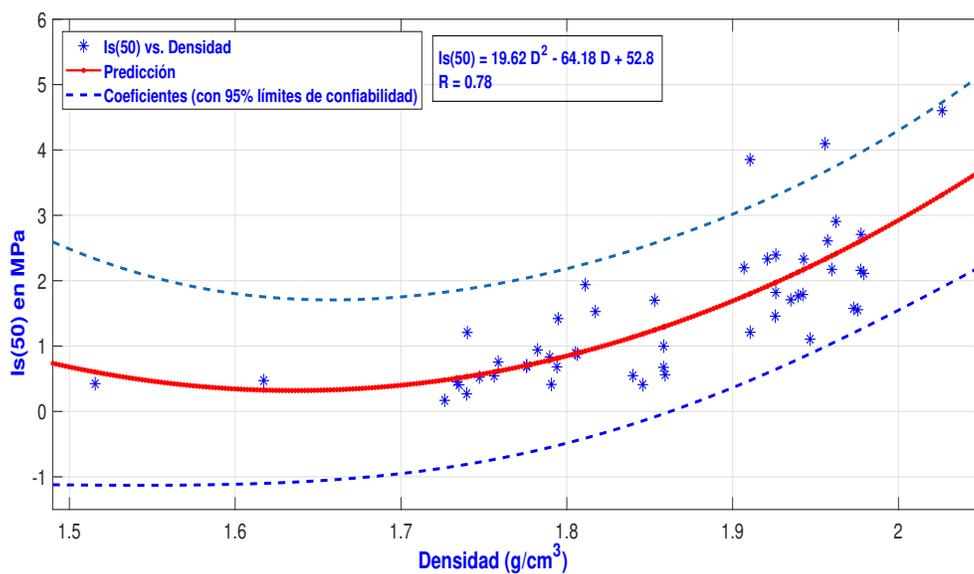


Figura 7.40: Correlación entre índice de carga puntual y la densidad de las ignimbritas.

Por otro lado se utilizó Machine Learning, tal metodología sirve para encontrar modelos

predictores o hacer clasificación de datos.

En la Fig. (7.41) se puede observar un modelo lineal mediante el cual podemos estimar la resistencia a compresión uniaxial (UCS) con tan solo conocer el índice de carga puntual corregido, tal modelo se realizó con los datos obtenidos de las pruebas descritas con anterioridad, los cuales fueron entrenados para obtener el modelo más óptimo. Además se propone una función de hipótesis lineal, y minimizamos la función de costos utilizando el gradiente descendente para obtener los valores de θ . Los valores de θ representan en este

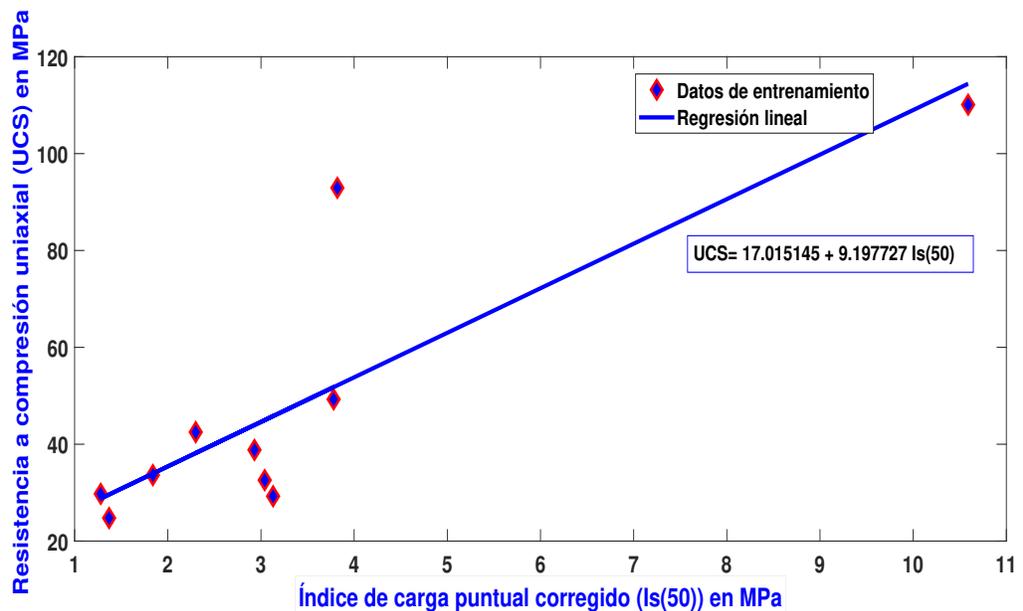


Figura 7.41: Modelo de regresión lineal.

caso los parámetros como puede observarse en las Figs.(7.42) y (7.43), de tal forma que al minimizar la función de costos lo que estamos obteniendo es la línea que mejor se ajusta a los datos. Si comparamos el modelo obtenido con regresión lineal obtenido con el algoritmo desarrollado para tal fin y el modelo obtenido con el método de mínimos cuadrados las ecuaciones son muy parecidas tales ecuaciones son: $y = 17.015145 + 9.197727 Is(50)$ y $y = 17.02 + 9.198 Is(50)$ con $R = 0.85$ (Fig. 7.44).

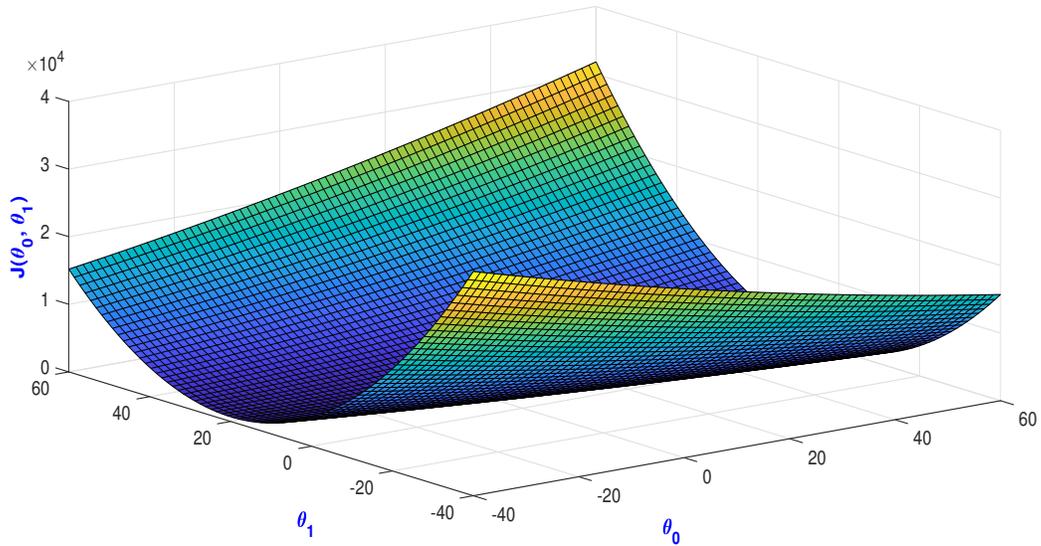


Figura 7.42: Gráfica de función de costos.

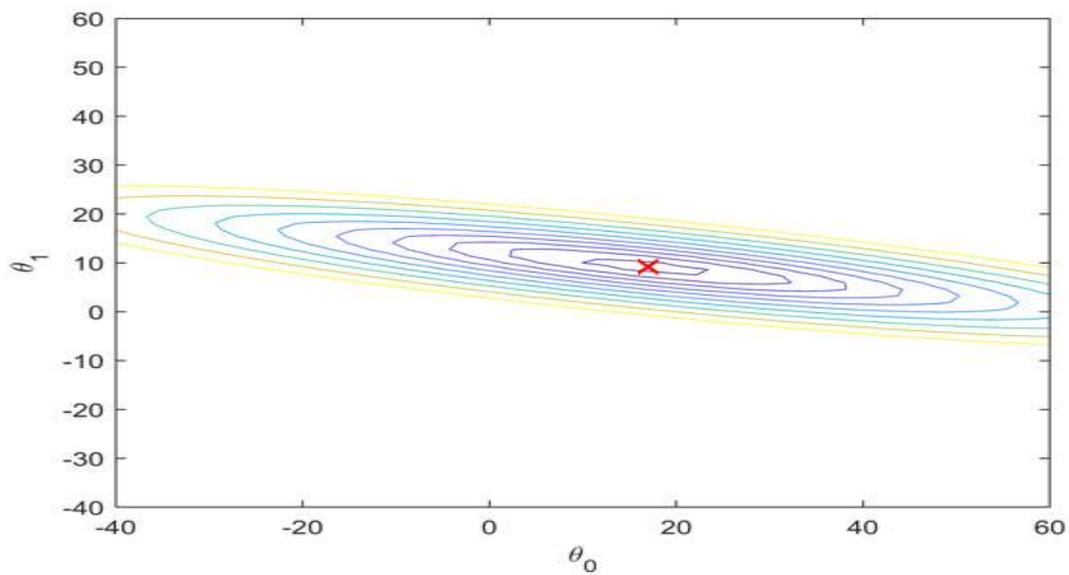


Figura 7.43: Gráfica de los parámetros utilizando gradiente descendente.

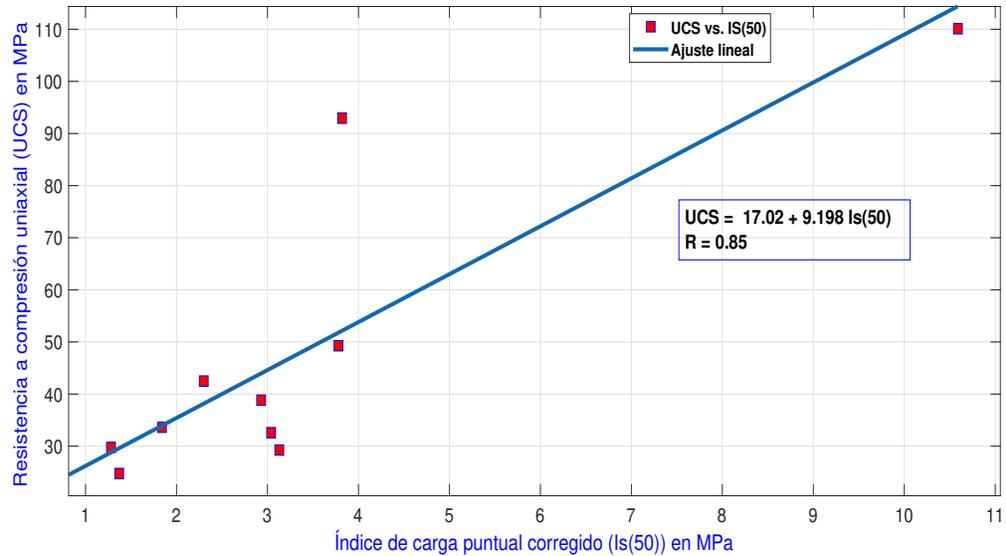


Figura 7.44: Modelo de regresión lineal.

En las Fig. (7.45) se puede apreciar una tendencia de los datos mas lineal que en el caso anterior, dicho modelo correlaciona la gravedad específica contra la densidad y predice la gravedad específica de las rocas de los bancos de materiales.

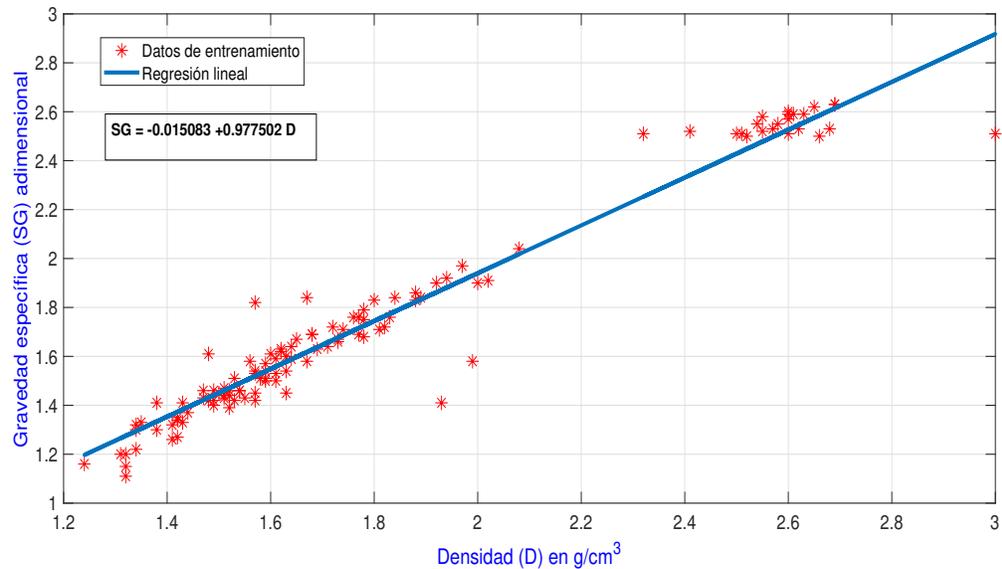


Figura 7.45: Modelo de regresión lineal para estimar la gravedad específica.

En las Figs. (7.46) y (7.47), se muestra tanto la función de costos como los parámetros obtenidos para nuestro modelo.

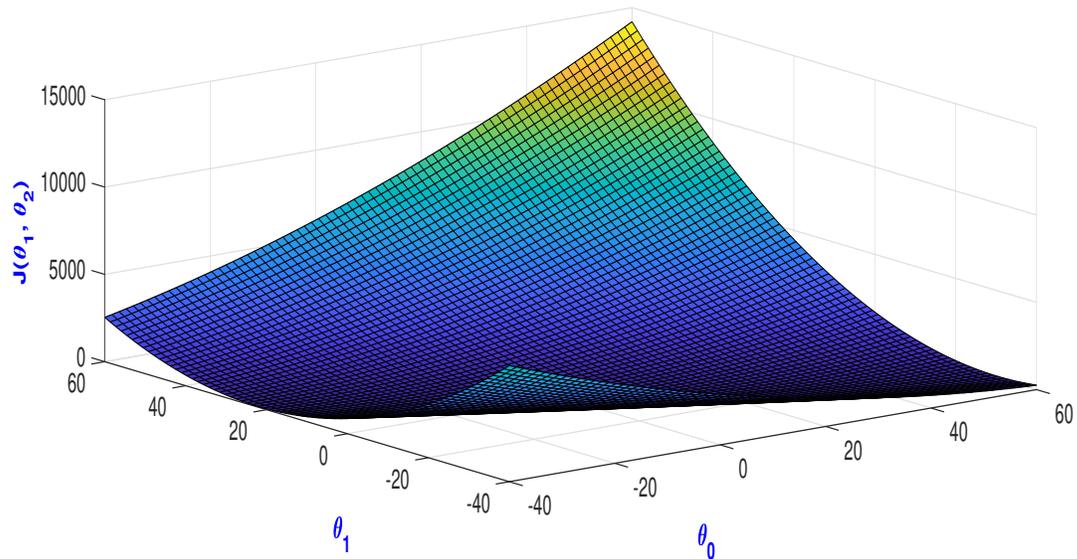


Figura 7.46: Función de costos.

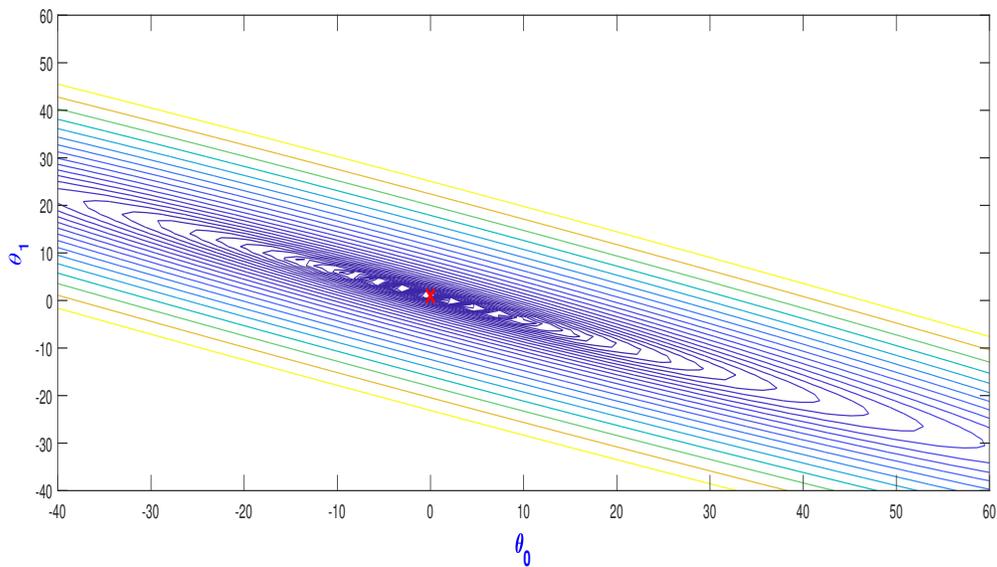


Figura 7.47: Parámetros que de la ecuación lineal que mejor ajustan a los datos.

En la Fig. (7.48) se puede observar un coeficiente de determinación de $R^2 = 0.95$ y comparando el modelo obtenido mediante el algoritmo para regresión lineal de machine learning y el método de mínimos cuadrados, observamos que los modelos son muy parecidos.

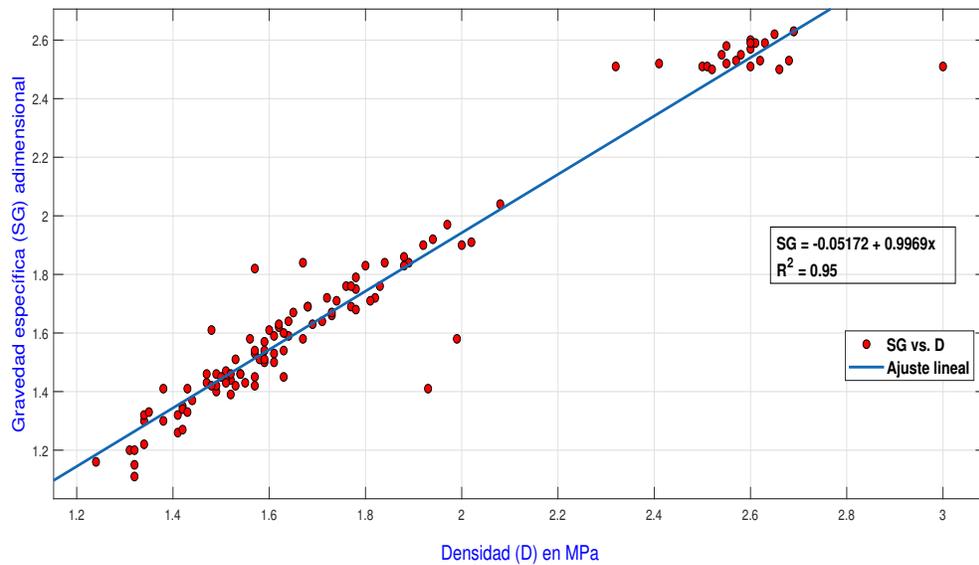


Figura 7.48: Modelo de regresión lineal.

En la Figs. (7.49) y (7.52) se observa una gran dispersión de los datos por tal razón no existe una correlación lineal entre los datos.

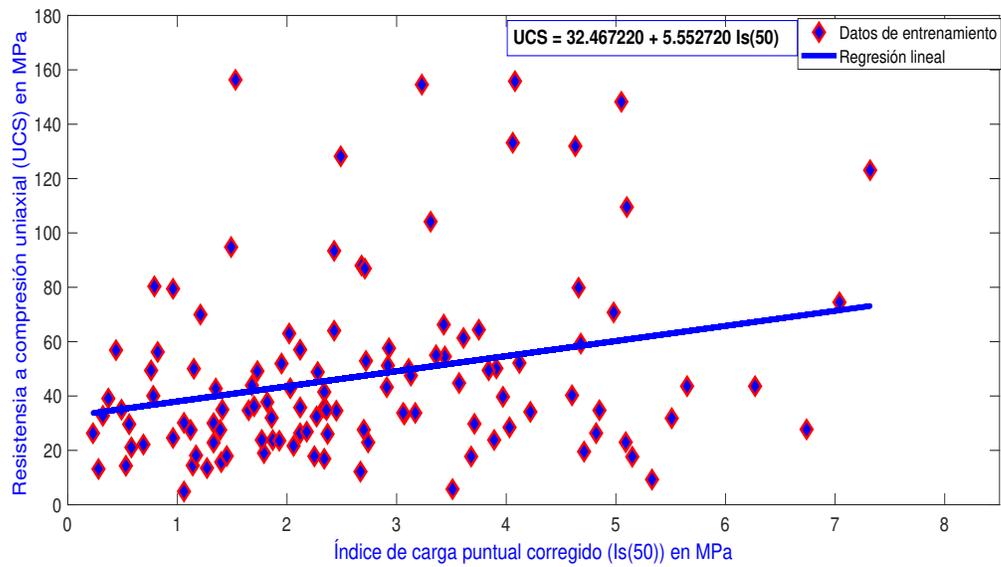


Figura 7.49: Modelo de regresión lineal mediante machine learning.

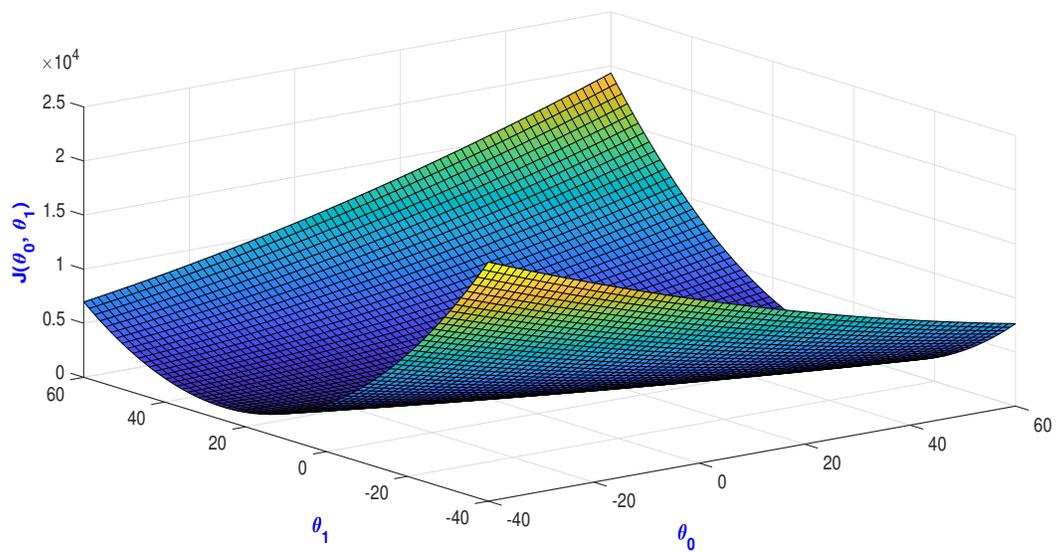


Figura 7.50: Función de costos.

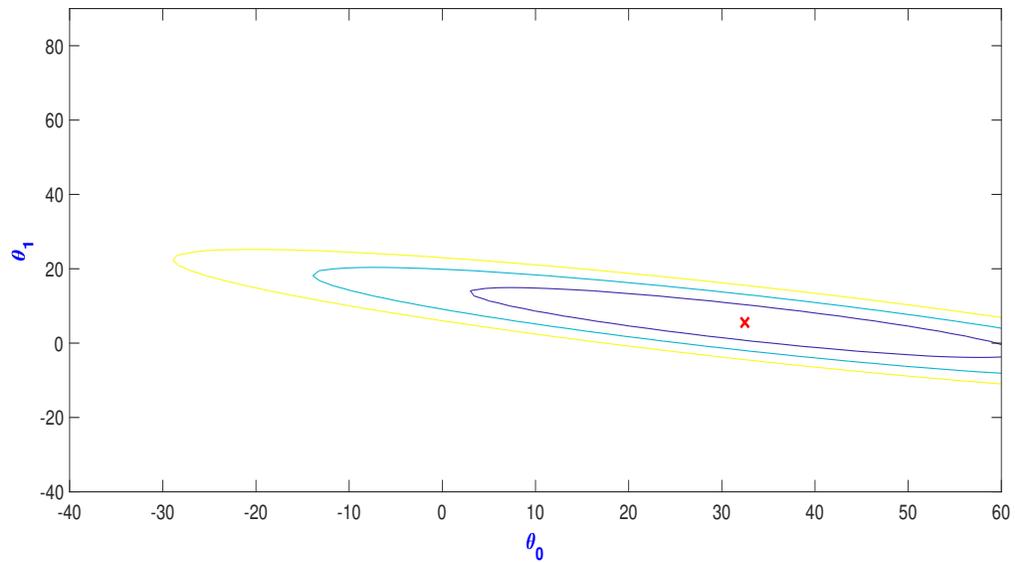


Figura 7.51: Parámetros que mejor ajustan la ecuación lineal.

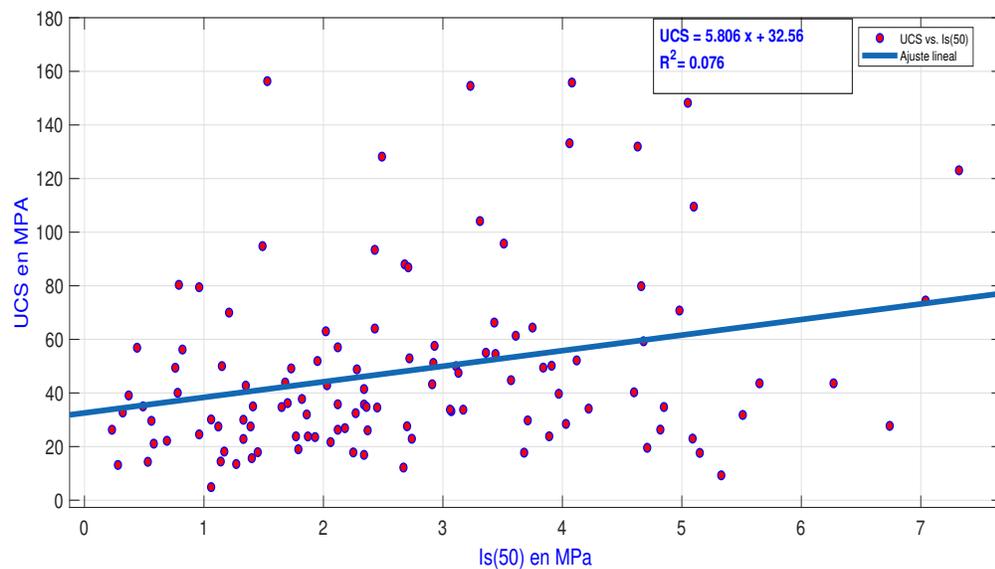


Figura 7.52: Modelo de regresión lineal mediante el método de mínimos cuadrados.

La Fig. (7.53) se muestra cada uno de los bancos de materiales pétreos. Se graficó UCS contra Is(50) y se puede ver que existe una gran dispersión de los datos por lo cual se

procedio ha aplicar regresión logística.

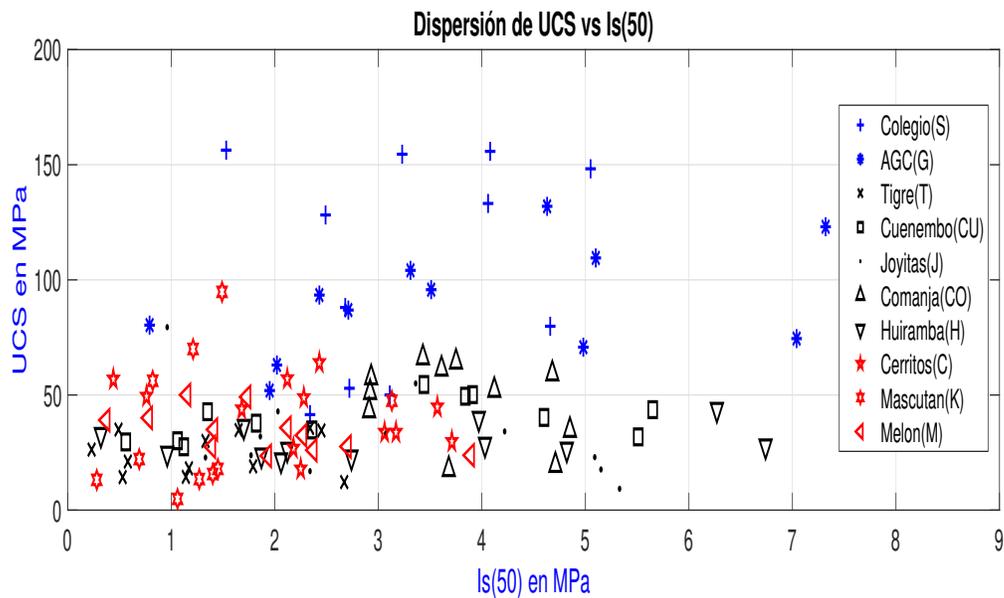


Figura 7.53: Dispersión de UCS vs. Is(50).

Dentro de la regresión logística existe la clasificación binaria, la cual fue utilizada en este avance de tesis, así por ejemplo podemos clasificar las rocas con mayor resistencia a compresión uniaxial (UCS) tal como se muestra en la Fig. (7.54), y obtener un límite de decisión mediante una recta. Esto nos permite darnos cuenta de una manera muy rápida en que zona se ubican nuestros datos y saber si el material tiene alta resistencia.

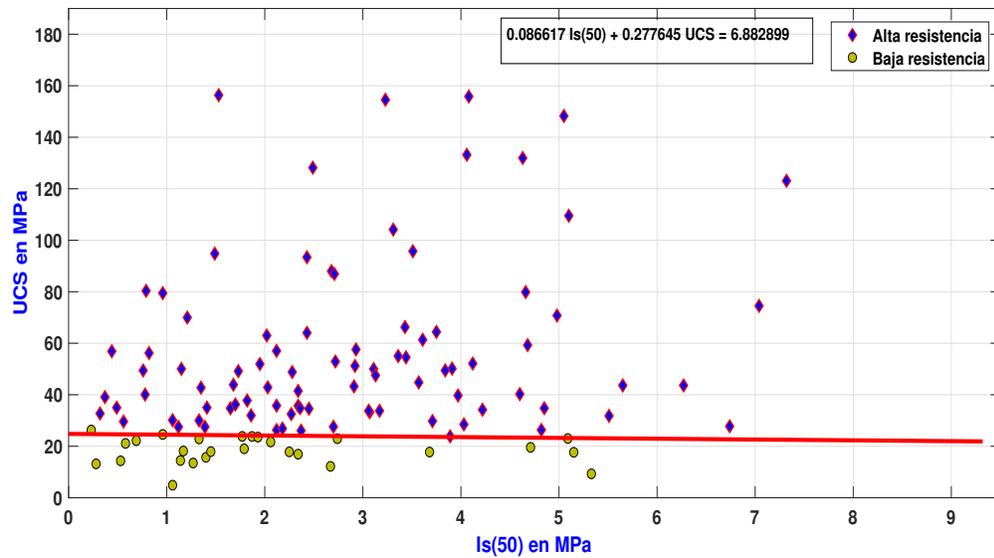


Figura 7.54: Modelo de regresión logística para clasificar las muestras con mayor resistencia.

En la Fig.(7.55) podemos determinar mediante un limite de desición, los materiales triturados y los volcánicos. Tal como era de esperarse y como se observa en dicha figura un gran porcentaje de los datos se separa de los datos de los volcánicos, debido a que los triturados presentan mejores características en cuanto a absorción, densidad, velocidad de pulso ultrasónico, UCS y $Is(50)$.

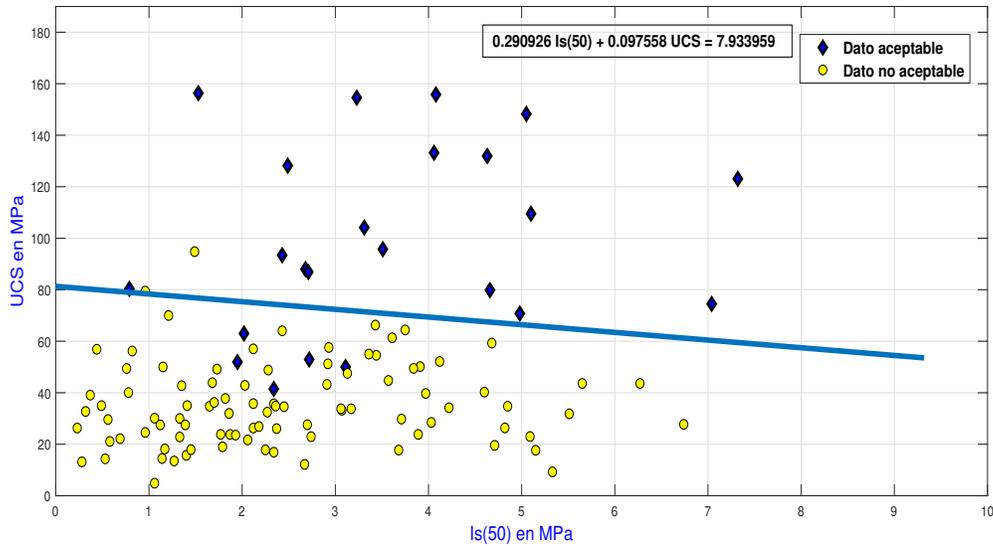


Figura 7.55: Modelo de regresión logística para los datos del material triturado.

Con la finalidad de clasificar los datos de color oscuro, se realizó un modelo de regresión logística y como se puede apreciar en la Fig. (7.56) un gran porcentaje está por debajo de la línea de decisión.

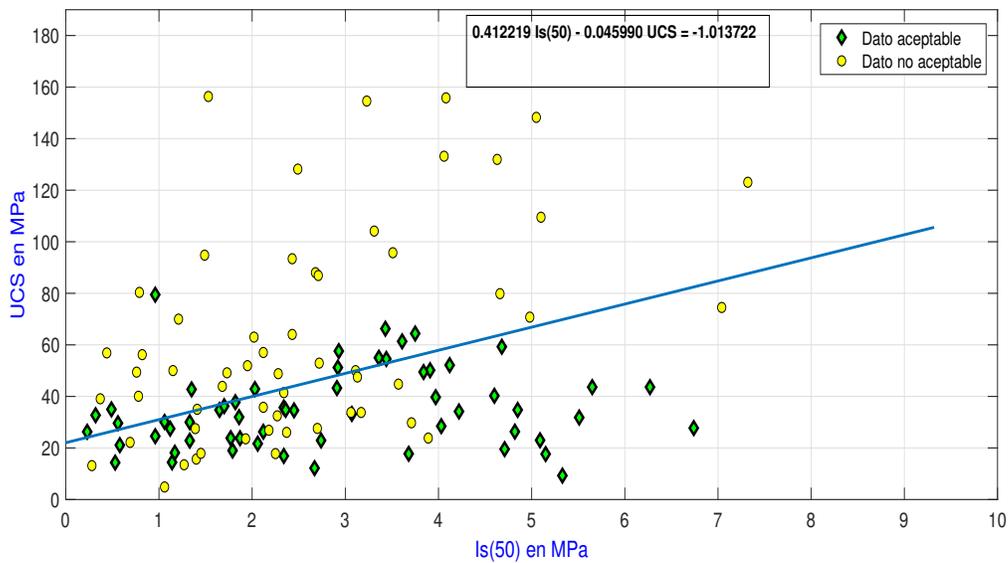


Figura 7.56: Modelo de regresión logística para las muestras de color oscuro.

El modelo para clasificar los datos de color rojizo se muestran en la Fig. (7.57) en la cual se puede observar que un gran porcentaje de los datos se encuentra por arriba de la línea de desición.

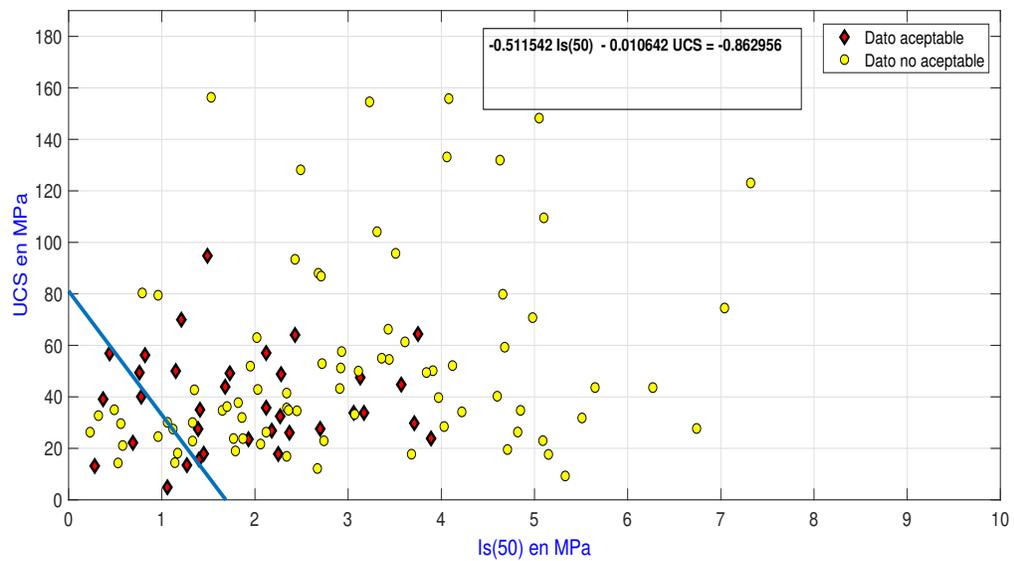


Figura 7.57: Modelo de regresión logística.

En un problema de clasificación, se trata de predecir los resultados en una salida discreta. La Fig. (?? muestra un modelo que permite clasificar los materiales estudiados en alta y muy alta durabilidad cuando se conocen parámetros como la densidad y el Id_2 .

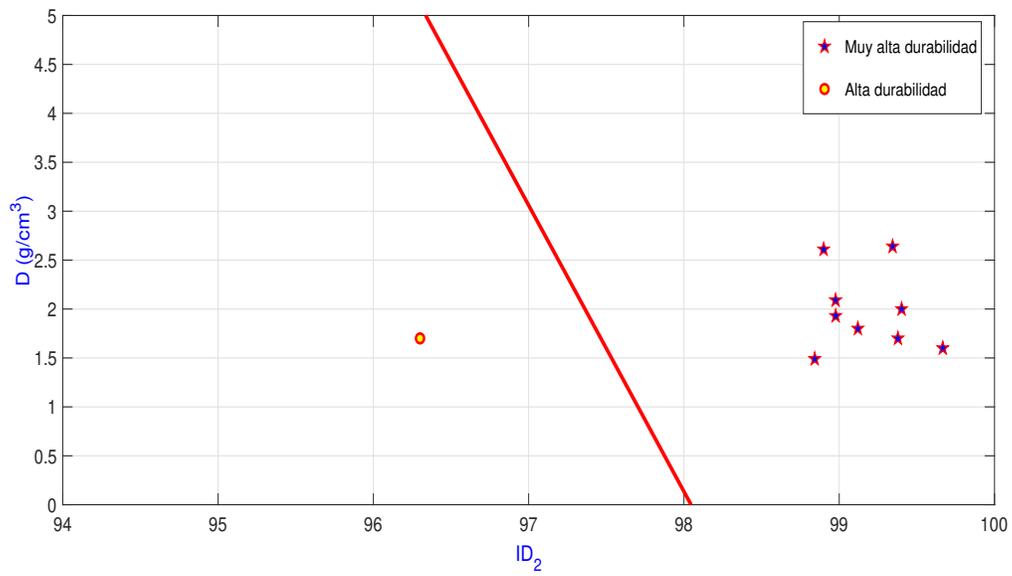


Figura 7.58: Clasificación logística de los datos de durabilidad.

Capítulo 8

Conclusiones

La resistencia de las rocas esta directamente relacionada con las propiedades físicas como lo es la absorción. Los desplazamientos están directamente relacionados con las constantes elásticas.

A pesar de ser el mismo tipo de roca hay mucha variación y esta tiene un efecto en las pruebas del laboratorio y en el modelado. Así que para realmente caracterizar, tenemos un problema inverso que puede ser muy sensible y comportarse de manera diferente bajo las mismas pruebas en el mismo laboratorio.

En conclusión recordemos que hay dos tipos de problemas inversos dado el efecto A y conocido el modelo K se calculan las causas que lo produjeron, conocidos suficientes efectos A y sus causas B podemos reconstruir el modelo K que los generó. Para nuestro estudio tenemos ambos casos: conocemos los efectos (desplazamientos), suficientes causas que lo producen (carga distribuida, propiedades índice), por lo que con ello se pueden reconstruir el modelo y obtener el módulo de elasticidad.

La resistencia a la compresión uniaxial está directamente relacionada con las propiedades físicas y mecánicas de cada material, al igual que los desplazamientos medidos. Se obtuvo una correlación lineal entre la resistencia a la compresión uniaxial y el módulo elástico dinámico, con un coeficiente de $R = 0.92$. Las muestras hechas del mismo material pueden mostrar ligeras diferencias en las pruebas de laboratorio, que deben considerarse en el diseño y modelado numérico. Sin embargo, la estimación propuesta en este trabajo proporciona una aproximación satisfactoria al módulo de elasticidad de las muestras analizadas. Estos resultados pueden ayudar a estimar el comportamiento de algunas rocas utilizadas para la construcción, o agregados pétricos utilizados para elaborar concreto hidráulico o mezclas de asfalto. La metodología utilizada para el problema inverso permite calcular el módulo de elasticidad dinámico. La aproximación del módulo de elasticidad dinámica real

y el valor del módulo elástico dinámico estimado es bastante aproximado, lo que indica que el problema inverso es una herramienta que ayuda a determinar el módulo elástico dinámico. El modelo se puede aplicar para determinar el módulo de elasticidad dinámico del concreto y morteros al tener muestras cúbicas. También se puede aplicar a cualquier otro tipo de roca que tenga un comportamiento casi lineal.

Los modelos realizados para la regresión lineal y la regresión logística funcionan independientemente de los datos que tengamos, además es importante señalar que aunque la correlación no tenga un coeficiente de determinación R^2 aceptable, eso no quiere decir que el algoritmo no funcione, sucede simplemente que los datos tienen mucha dispersión y su ajuste no es lineal. La regresión lineal con los datos promedio de UCS contra $I_s(50)$ en este caso es muy buena debido a que los parámetros obtenidos con machine learning y con el método de mínimos cuadrados son muy parecidos. Además los modelos de clasificación nos permite ubicar nuestros datos de una manera rápida y con ellos podemos determinar la relación de los datos.

Por otro lado el modelo de clasificación de los materiales triturados viene a reafirmar el mejor comportamiento de dichos materiales, sin perder de vista que se trata de un tipo de roca diferente a la que se extrae de los bancos de materiales pétreos volcánicos. Así pues en la clasificación, mediante el límite de decisión se aprecia claramente que los volcánicos se agrupan en una sola zona independientemente del banco que se trate y los triturados se encuentran por encima del límite de decisión con la mejor resistencia a compresión uniaxial (UCS).

Desde la prueba de durabilidad al desmoronamiento de las rocas blandas, se obtuvo un índice de alterabilidad o tendencia a la rotura de la estructura de la roca, que va de muy alta a alta alterabilidad, lo que corresponde a la recomendación en condiciones de servicio. Además, según la clasificación de la durabilidad basada en el índice $Id2$, en base a los resultados, las rocas estudiadas cumplen con la prueba y predicen el comportamiento de la humedad y la sequedad y su posible debilitamiento y desintegración.

Los modos obtenidos nos permiten clasificar y correlacionar los datos y con ello podemos predecir el comportamiento tanto de los agregados pétreos como de los fragmentos irregulares.

La mejor correlación se obtuvo con los bancos de materiales pétreos de color rojizo, sin embargo, ambas correlaciones son moderadas a buenas, esto indica que efectivamente la

relación de las variables no tiene buena o excelente correlación, debido a que cada una de las rocas presentan diferentes propiedades físicas. Las resistividades bajas se dieron en las rocas de Huiramba y Cuenembo, esto indica que permiten fácilmente el paso de la corriente eléctrica.

Por otro lado, la velocidad de pulso ultrasónico está directamente relacionado con las propiedades de la roca y su densidad de acuerdo con los resultados obtenidos. Lo anterior permite clasificar y estimar la calidad de las rocas. Los modelos obtenidos mediante las ecuaciones de tercer orden ayudan a predecir la velocidad de pulso ultrasónico debido a que la correlación es de moderada a buena. Es importante señalar que los resultados del modelo se deben comparar con las características físicas y mecánicas del material en estudio.

En el caso de las ignimbritas, la ignimbrita de Tlalpujahuá tiene el mejor comportamiento mecánico, lo que indica que es una roca en buen estado, sana y no erosionada. Se deben continuar los estudios ya que la caracterización de la roca nos lleva a conocer su comportamiento mecánico y con esto, tomar decisiones que llevan construir obras civiles con la mejor calidad, además de brindarnos un panorama geotécnico más amplio sobre el problema que surgen en el trabajo. El estudio de la ignimbrita es importante ya que Morelia Michoacán tiene varios edificios históricos construidos con este material, pero su deterioro a lo largo del tiempo ha sido evidente, por lo que es importante conocer las propiedades mecánicas de la roca con la que se realizan las restauraciones y reemplazos, cuidando su funcionalidad y apariencia con respecto al edificio histórico.

Las correlaciones obtenidas entre las propiedades físicas y mecánicas de las rocas, supera las reportadas por la literatura. Además, se pudieron analizar los datos de la maestría y de licenciatura con otras técnicas, proporcionando modelos que nos permiten estimar las variables, por lo cual se amplían los conocimientos de estos materiales en base a estas predicciones. En trabajos futuros nos gustaría realizar modelación estocástica.

Bibliografía

- [1] Wei Yao and Kaiwen Xia. Dynamic notched semi-circle bend (NSCB) method for measuring fracture properties of rocks: Fundamentals and applications. *Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering*, 2019.
- [2] Siegfried Siegesmund and Rolf Snethlage. *Stone in Architecture Properties, Durability*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 5 edition, 2014.
- [3] İsmail İnce and Mustafa Fener. A prediction model for uniaxial compressive strength of deteriorated pyroclastic rocks due to freeze–thaw cycle. *Journal of African Earth Sciences*, 120:134–140, 2016.
- [4] Seyed Hossein Jalali, Mojtaba Heidari, Mohammad Zarrinshoja, and Nima Mohseni. Predicting of uniaxial compressive strength of some igneous and metamorphic rocks by block punch index and cylindrical punch index tests. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 119:72–80, 2019.
- [5] Y. Popov, V. Tertychnyi, R. Romushkevich, D. Korobkov, and J. Pohl. Interrelations between thermal conductivity and other physical properties of rocks: Experimental data. *Pure and Applied Geophysics*, 160(5):1137–1161, may 2003.
- [6] Sair Kahraman and Tekin Yeken. Determination of physical properties of carbonate rocks from p-wave velocity. *Bulletin of Engineering Geology and the Environment*, 67(2):277–281, feb 2008.
- [7] C. Kurtulus, A. Bozkurt, and H. Endes. Physical and mechanical properties of serpentized ultrabasic rocks in NW turkey. *Pure and Applied Geophysics*, 169(7):1205–1215, aug 2011.
- [8] M. Torabi-Kaveh and M. Miri. Discussion on “correlation between p-wave velocity and physical–mechanical properties of intensely jointed dolostones, peloritani mounts,

- NE sicily” by giovanna pappalardo, rock mechanics and rock engineering (2014) DOI 10.1007/s00603-014-0607-8. *Rock Mechanics and Rock Engineering*, 48(4):1745–1747, jun 2015.
- [9] Abdolazim Azimian and Rassoul Ajalloeian. Empirical correlation of physical and mechanical properties of marly rocks with p wave velocity. *Arabian Journal of Geosciences*, 8(4):2069–2079, jan 2014.
- [10] Davood Fereidooni. Determination of the geotechnical characteristics of hornfelsic rocks with a particular emphasis on the correlation between physical and mechanical properties. *Rock Mechanics and Rock Engineering*, 49(7):2595–2608, feb 2016.
- [11] Debanjan Guha Roy, T. N. Singh, J. Kodikara, and Mayukh Talukdar. Correlating the mechanical and physical properties with mode-i fracture toughness of rocks. *Rock Mechanics and Rock Engineering*, 50(7):1941–1946, mar 2017.
- [12] Bernt S. Aadnøy and Reza Looyeh. Chapter 6 - introduction to petroleum rock mechanics. In Bernt S. Aadnøy and Reza Looyeh, editors, *Petroleum Rock Mechanics (Second Edition)*, pages 65 – 76. Gulf Professional Publishing, second edition edition, 2019.
- [13] Jürgen H. Schön. Chapter 1 - rocks—their classification and general properties. In Jürgen H. Schön, editor, *Physical Properties of Rocks*, volume 65 of *Developments in Petroleum Science*, pages 1 – 19. Elsevier, 2015.
- [14] M. A. Navarrete-Seras, J. G. Domínguez-Mota, F. J. Tinoco-Ruiz, E. M. Alonso-Guzmán, F. D. J. Jerónimo-Rodríguez, H. L. Chávez-García, J. A. Borrego, and W. Viveros. Clasificación de Rocas Ígneas Mediante TAS. *FORO DE INGENIERÍA E INVESTIGACIÓN EN MATERIALES*, 15:404–408, 2018.
- [15] Myron G. Best. *Igneous and Metamorphic Petrology*. Blackwell Publ, 2nd edition, 2003.
- [16] Gautan Sem. *Petrology principles and practice*. Springer, 2014.
- [17] Luis-I. González-De-Vallejo and Mercedes Ferrer. *Geological Engineering*. CRC Press/Balkema, 2011.
- [18] ASTM Subcommittee D18.12. *Standard Test Method for Laboratory Method for Density, Relative Density (Specific Gravity), and Absorption of Coarse Aggregate ASTM C127-04*. American Society for Testing Materials (ASTM), 2004.

-
- [19] L. Navarro, W. Martínez, and A. Espinoza. *ANÁLISIS DE MATERIALES, Manual de Análisis de Materiales, Resistencia de Materiales*. FIC – UMSNH,, 2011.
- [20] ASTM Subcommittee D18.12. *Standard Test Method for Unconfined Compressive Strength of Intact Rock Core Specimens (ASTM D2938-95(2002))*. American Society for Testing Materials (ASTM), 2002.
- [21] ASTM Subcommittee D18.12. *Standard: D 5731-16. Test Method for Determination of the Point Load Strength Index of Rock*. ASTM, 2016.
- [22] A. D18.12. *Standard Test Method for Slake Durability of Shales and Other Similar Weak Rocks*. 2016.
- [23] Siegfried Siegesmund and Rolf Snethlage, editors. *Stone in Architecture*. Springer Berlin Heidelberg, 2014.
- [24] ASTM Subcommittee D18.12. *Standard Test Method for Laboratory Determination of Pulse Velocities and Ultrasonic Elastic Constants of Rock (ASTM D2845-08)*. American Society for Testing Materials (ASTM), 2008.
- [25] DURAR. *Manual de Inspección, Evaluación y Diagnostico de Corrosión En Estructuras de Hormigón Armado*. CYTED, Red temática XV.B- Durabilidad del Hormigón, 1997.
- [26] ASTM Subcommittee D18.12. *Standard: C215-14. Test Method for Fundamental Transverse, Longitudinal, and Torsional Resonant Frequencies of Concrete Specimens*. ASTM, 2014.
- [27] Erle C. Donaldson, Waqi Alam, and Nasrin Begum. Chapter 3 - rock mechanics of fracturing. In Erle C. Donaldson, Waqi Alam, and Nasrin Begum, editors, *Hydraulic Fracturing Explained*, pages 47 – 76. Gulf Publishing Company, 2013.
- [28] A. Tarantola. *Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation*. Institut de Physique du Globe de Paris Universite de Paris 6 Paris, France SIAM, 2005.
- [29] Singiresu S. Rao. Overview of finite element method. In *The Finite Element Method in Engineering*, pages 3–49. Elsevier, 2005.

-
- [30] O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor. The finite element method: Its basis and fundamentals. In O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor, and J.Z. Zhu, editors, *The Finite Element Method: its Basis and Fundamentals (Seventh Edition)*, page iii. Butterworth-Heinemann, Oxford, seventh edition edition, 2013.
- [31] Peter I. Kattan. *MATLAB Guide to Finite Elements*. Springer Berlin Heidelberg, 2008.
- [32] Y. w. Kwon and H. Bang. *The Finite Element Method Using MATLAB*. Mechanical and Aerospace Engineering Series. University of Minnesota: CRC MECHANICAL ENGINEERING SERIES., 2nd edition edition, 1997.
- [33] M.Z. Naser and V.A. Uppala. Properties and material models for construction materials post exposure to elevated temperatures. *Mechanics of Materials*, 142:103293, 2020.
- [34] S.P. Venkateshan and Prasanna Swaminathan. Laplace and poisson equations. In *Computational Methods in Engineering*, pages 529–573. Elsevier, 2014.
- [35] Alexander G. Ramm. *Inverse Problems Mathematical and Analytical Techniques with Application to Engineering*. Springer-Verlag, 2005.
- [36] William Menke. Describing inverse problems. In *Geophysical Data Analysis*, pages 1–15. Elsevier, 2018.
- [37] Piotr Małkowski and Łukasz Ostrowski. The methodology for the young modulus derivation for rocks and its value. *Procedia Engineering*, 191:134–141, 2017.
- [38] Curtis R. Vogel. *Computational Methods for Inverse Problems*. Frontiers in Applied Mathematics. Society for Industrial & Applied, 1st edition edition, 2002.
- [39] H. Eng, M. Hanke, and A. Neubauer. *Regularization of inverse problem*. Kluwer, Dordrecht, 1996.
- [40] V. A. Morozov. *Regularization Methods For Ill-Posed Problems*. CRC Press, 1993.
- [41] L. Landweber. An iteration formula for fredholm integral equations of the first kind. *American Journal of Mathematics*, 73(3):615, jul 1951.
- [42] William E. Boyce and Richard C. DiPrima. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. WILEY, 2012.

-
- [43] Siegfried Siegesmund and Rolf Snethlage. *Stone in Architecture Properties, Durability*. Fourth edition edition, 2011.
- [44] Jorge Nocedal and Stephen J. Wright. *Numerical Optimization*. Second edition edition, 2000.
- [45] Chao Shang and Fengqi You. Data analytics and machine learning for smart process manufacturing: Recent advances and perspectives in the big data era. *Engineering*, 5(6):1010 – 1016, 2019.
- [46] Gangadhar Shobha and Shanta Rangaswamy. Chapter 8 - machine learning. In Venkat N. Gudivada and C.R. Rao, editors, *Computational Analysis and Understanding of Natural Languages: Principles, Methods and Applications*, volume 38 of *Handbook of Statistics*, pages 197 – 228. Elsevier, 2018.
- [47] Andrew Yan-Tak Ng. Coursera machine learning. In *Stanford University*, 2020.
- [48] Lin Zhang, Bernard P. Zeigler, and Yuanjun Laili. Chapter 1 - introduction to model engineering for simulation. In Lin Zhang, Bernard P. Zeigler, and Yuanjun laili, editors, *Model Engineering for Simulation*, pages 1 – 23. Academic Press, 2019.
- [49] The MathWorks Inc. *Curve Fitting Toolbox™ User's Guide R2017b*. 2020.
- [50] A. Figeroa Montaña, H. U. Ramírez Sánchez, and J. Alcalá Gutiérrez. *Introducción a la metodología experimental*. PEARSON EDUCACIÓN., primera edition, 2014.
- [51] Ana Silva, Jorge de Brito, and Pedro Lima Gaspar. *Methodologies for Service Life Prediction of Buildings*. Springer International Publishing, 2016.
- [52] M.A. Navarrete Seras. Evaluación de pétreos sin labrar teniendo como base el método de carga puntual. Master's thesis, Facultad de Ingeniería Civil, UMSNH, 2012.
- [53] Kandethody M. Ramachandran and Chris P. Tsokos. *Mathematical Statistics with Applications*. Elsevier Academic Press, 2009.
- [54] Charan Singh Rayat. *Statistical Methods in Medical Research*. Springer Singapore, 2018.