Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Instituto de Física y Matemáticas

posgrado conjunto en ciencias matemáticas unam-umsnh

Pasos de montaña y la conjetura Jacobiana

Tesis

que para obtener el título de:

Maestro en Ciencias Matemáticas

PRESENTA:

Rogelio Niño Hernández

ASESOR:

Carlos Osvaldo Osuna Castro

Morelia, Michoacán, febrero del 2020

Resumen

La conjetura Jacobiana establece que mapeos polinomiales en el espacio Euclidiano de dimensión finita cuyo jacobiano es constante tienen inversa polinomial. Para tratar de resolver este problema se han propuesto varias estrategias. Una de ellas es debilitar las hipótesis y obtener la invertibilidad. Tal es el caso del trabajo en [1], donde se pide en vez de polinomios funciones C1 que cumplan que la matriz de la jacobiana multiplicada con su transpuesta tenga sus valores propios acotados lejos del cero. Con esto se puede establecer inyectividad de la función C1, que en el caso de ser un polinomio bastaría para obtener invertibilidad (al menos en el caso complejo). En este trabajo exploramos ligeras generalizaciones al resultado en [1]. Además damos otra demostración del mismo usando el teorema de Hadamard.

Abstract

The Jacobian conjecture states that any polynomial mapping in the Euclidean space of finite dimension such that its jacobian is constant, then it has a polynomial inverse. In order to establish a solution to this problem one strategy is to weaken the hypotheses to obtain the same result. That is the case in [1]. Where one has a C1 function, instead of a polynomial, and requires it to have the eigenvalues bounded from zero of the matrix obtained by the multiplication of its jacobian times its transpose. In this way they obtain inyectivity of the C1 function, which in the case of being a polynomial it is sufficient to conclude invertibility (at least in the complex domain). In this work we explore slightly generalizations of the result in [1]. Besides we give another proof of it based on Hadamard's theorem.

Palabras clave: Lema de paso de montaña, métodos variacionales, inyectividad, diferenciabilidad, Teorema de Hadamard.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

La conjetura jacobiana propuesta por Keller ([2]) es una de las conjeturas más importantes de los últimos años, . La conjetura Jacobiana establece que si $F : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ es una aplicación polinomial (i.e., cada componente F_i de F, F_i es un polinomio) y $F'(x)$ tiene jacobiano distinto de cero entonces F es invertible con inversa polinomial. Con $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ó $\mathbb{R}$. Se tiene que para el caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ la conjetura es falsa. El contraejemplo fue dado por Pinchuk [3].

Aún así se tiene el problema abierto cuando $\det(F'(x)) = C$ para toda $x \in \mathbb{R}^n$ y una $C \in \mathbb{R}$. Para intentar demostrarla se han establecido varias equivalencias de la conjetura usando técnicas de la geometría algebraica como la formula de inversión de Abhyankar ([4]). Otras estrategias usan la teoría de ecuaciones diferenciales para analizar casos particulares ([5]). Sin embargo, aún no hay respuesta. Una de las razones por las que sería importante resolver esta conjetura es que nos daría condiciones sencillas de verificar para las cuales un mapeo es globalmente invertible. Desde el punto de vista de sistemas dinámicos es importante porque pertenece a los problemas de inversión global. Estos últimos tienen una conexión con la existencia y unicidad de ciertas ecuaciones diferenciales [6].

Dada la dificultad del problema se han impuesto hipótesis adicionales o modificaciones para obtener una conclusión parecida al de la conjetura. Por ejemplo, Chamberland y Meisters [1], establecen que si los valores propios para $F'(x)F'(x)^T$ están acotados lejos del cero para toda $x \in \mathbb{R}$, entonces F es inyectiva. En su caso las funciones que consideran son C^1, es decir, permiten más funciones que las polinomiales. Esto permite tener un poco de mayor generalidad a las hipótesis de la conjetura jacobiana. Una conjetura que ellos plantean es obtener la inyectividad de F suponiendo que los valores propios de F' están acotados lejos del cero. De ser cierta esta conjetura entonces la conjetura jacobiana estaría resuelta en el caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ [1]. También implicaría que en el caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ las funciones polinomiales son biyectivas, sin embargo se requeriría verificar si éstas tienen inversa polinomial [1].

Si se impone la condición de que los valores propios de $F'(x) + F'(x)^T$ sean mayores que un cierto $\epsilon > 0$ para toda x o menores que un cierto $-\epsilon < 0$ para toda x entonces F es inyectiva [7].

Estos dos trabajos sugieren que si se busca una matriz simétrica en términos de $F'(x)$ se puede obtener una generalización de los resultados de [7] y [1]. En los anteriores trabajos se hace uso del lema del paso de Montaña [8, 9], un resultado muy usado en el cálculo de variaciones y que corresponde a los llamados métodos *minimax* para encontrar puntos críticos a funcionales definidos en espacios de Banach. En este trabajo exploramos generalizaciones a los trabajos mencionados con el marco del lema del paso de montaña. Además obtenemos el resultado principal de [1] a partir del teorema de Hadamard [10]. Recordemos que el teorema de Hadamard o Hadamard-Levy dice que si V y W son espacios de Banach y $F : V \to W$ es localmente invertible con:

$$\sup_{x \in V} \left\| F'(x)^{-1} \right\| < \infty.$$

Entonces F es un difeomorfismo global. Es natural que tengamos que mencionar y decir algo sobre el teorema de Hadamard ya que también pertenece a los criterios de invertibilidad global y más aún de diferenciabilidad. Usamos una versión más general del teorema que la de su formulación original solo en términos de espacios de dimensión finita ([11]). En su formulación original se pide que F sea, además de localmente invertible, una función propia. Podemos incluso usar el lema de Paso de Montaña para demostrar que F es difeomorfismo.

Capítulo 2

Preliminares

2.0.1. Teorema de Deformación

Ya que nuestro marco es el lema de Paso de Montaña, para demostrar este lema necesitaremos el Teorema de Deformación. Antes de ello necesitamos definiciones y algunos resultados para enunciarlo. Seguimos [9] capítulo 2 para ello. Denotamos como $E : V \to \mathbb{R}$ a un funcional en el espacio de Banach V y como DE a su derivada de Fréchet.

Definición 1. *Sea V un espacio de Banach, $E : V \to \mathbb{R}$ un funcional $C^1(V)$ y $\{u_m\} \subset V$ una sucesión. Decimos que $\{u_m\}$ es una sucesión de Palais-Smale para E si existe $c > 0$ tal que $\left|E(u_m)\right| \leq c$ y $\|DE(u_m\| \to 0$ cuando $m \to \infty$.*

Definición 2 (Condición de Palais-Smale)**.** *Decimos que E cumple la condición de Palais-Smale si para toda sucesión $\{u_m\} \subset V$ de Palais-Smale para E existe una subsucesión $\{u_k\} \subseteq \{u_m\}$ tal que $\{u_k\}$ converge en V. Denotamos a esta propiedad para E como P.S.*

En algún punto de la demostración del teorema de Deformación necesitamos ciertos conjuntos que eventualmente permiten tener control sobre los puntos críticos de E, i.e., puntos $u \in V$ tal que $DE(u) = 0$.

Consideramos:

$K_\beta = \{u \in V \mid E(u) = \beta, DE(u) = 0\}$

$E_\beta = \{u \in V \mid E(u) < \beta\}$

$N_{\beta,\delta} = \{u \in V \mid \left|E(u) - \beta\right| < \delta, \|DE(u)\| < \delta\}$

$U_{\beta,\rho} = \bigcup_{u \in K_\beta} \{v \in V \mid \|u - v\| < \rho\}$

El conjunto K_β es el conjunto de valores críticos con valor en β de E en V. El conjunto E_β lo podemos llamar el conjunto de subnivel para el valor β. Los conjuntos $N_{\beta,\delta}$ y $U_{\beta,\rho}$ son vecindades para el conjunto K_β.

Definición 3. *Sea* X *un espacio topológico y* $B \subset X$*, sea* $\mathcal{V}$ *una colección de abiertos que contienen a* B*.* $\mathcal{V}$ *es una familia fundamental de vecindades de* B *si para todo* $M \in \tau_X$ *y* $B \subset M$ *se tiene que existe* $\{V_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{V}$ *tal que* $B \subset \bigcap_{i=1}^{n} V_i \subset M$

Lema 1. *Supongamos que* E *satisface P.S. Entonces para toda* $\beta \in \mathbb{R}$ *las siguientes se cumplen:*

1) K_β *es compacto*

2) La familia $\{U_{\beta,\rho}\}, \rho > 0$ *es un sistema fundamental de vecindades de* K_β

3) La familia $\{N_{\beta,\delta}\}, \delta > 0$ *es un sistema fundamental de vecindades para* K_β

Demostración. 1) Por la definición de K_β se tiene que cualquier sucesión $\{u_m\} \subset K_\beta$ es de Palais Smale para E, como E cumple P.S., $\{u_m\}$ tiene una subsucesión convergente en V

2) Supongamos que $\{U_{\beta,\rho}\}, \rho > 0$ no es una familia fundamental de vecindades de K_β. Entonces existe una vecindad M de K_β, tal que para ninguna intersección finita de $\{U_i\}_{i=1}^l \in \{U_{\beta,\rho}\}$ se tiene que $K_\beta \subset \bigcap \{U_i\}_{i=1}^l \not\subset M$. En particular $U_{\beta,\rho} \not\subset M$, para cualquier $\rho > 0$. De aquí se sigue que podemos elegir una sucesión ρ_m tal que $\rho_m \to 0$ y $\{u_m\} \in U_{\beta,\rho_m} \setminus M$. Sea $v_m \in K_\beta$ tal que $\|v_m - u_m\| \leq \rho_m$. Como K_β es compacto existe una subsucesión v_k que converge a algún $v \in K_\beta$. Entonces $u_k \to v$, como M es vecindad de K_β se tiene que para k grande $u_k \in M$, contradicción.

3) La demostración es similar que en el caso 2) y usando la condición de P.S.

□

Observación 1. *Para* $\{U_i\}_{i=1}^n \subset \{U_{\beta,\delta}\}$ *se tiene que* $\bigcap \{U_i\}_{i=1}^n = U_{\beta',\delta'}$ *para algunos* $\beta', \delta' > 0$

Denotamos al conjunto de valores regulares de E en V como

$\tilde{V} = \{u \in V \mid DE(u) \neq 0\}$

Notamos que $\tilde{V}$ es un conjunto abierto.

Definición 4. *Un campo vectorial pseudo-gradiente para* E *es un campo vectorial localmente Lipschitz* $X : \tilde{V} \to V$ *tal que para todo* $u \in \tilde{V}$ *se cumple que:*

1) $\|X(u)\| < 2\min\{\|DE(u)\|, 1\}$,

2) $DE(u)(X(u)) > \min\{\|DE(u), 1\|\}\|DE(u)\|$

Lema 2. *Cualquier funcional* $E \in C^1(V)$ *admite un campo vectorial pseudo-gradiente*

Demostración. Para $u \in \tilde{V}$ escogemos un $w = w(u) \in V$ tal que

1) $\|w(u)\| < 2\min\{\|DE(u)\|, 1\}$

2) $DE(u)w(u) > \min\{\|DE(u), 1\|\}\|DE(u)\|$

Esto es posible de hacer porque $DE(u) \neq 0$ y recordando que $\|DE(u)\|$ es el supremo de $\left|DE(u)x\right|$ sobre la bola cerrada unitaria en V. Luego por la continuidad de DE se tiene que existe una vecindad de u, $W(u)$ tal que 1) y 2) se cumplen. Como V es espacio métrico se sigue que $\tilde{V}$ es paracompacto. Así la cubierta $\{W(u)\}_{u \in V}$ tiene un refinamiento local, $\{W_\alpha\}_{\alpha \in I}$ tal que $W_\alpha \subset W(u_\alpha)$. Escogemos ahora una partición de la unidad $\{\phi_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de tal forma que cada ϕ_α sea Lipschitz continua con soporte en W_α y $\sum_{\alpha \in I} \phi_\alpha = 1$ en $\tilde{V}$.

Por lo tanto la suma

$$X(u) = \sum_{\alpha \in I} \phi_\alpha(u) w(u_\alpha),$$

está bien definida. Por ser las ϕ Lipschitz, que las condiciones 1) y 2) son lineales en w y que se cumplen para cualquier combinación convexa se obtiene que X es el campo pseudo-gradiente buscado.

□

Ahora ya podemos enunciar el teorema de Deformación.

Teorema 1 (Teorema de Deformación)**.** *Supongamos que* $E \in C^1(V)$ *satisface P.S. Sea* $\beta \in \mathbb{R}$, $\bar{\epsilon} > 0$ *dado y sea* N *una vecindad de* K_β*. Entonces existe un número* $\epsilon \in (0, \bar{\epsilon})$ *y una familia de homeomorfismos mono-parametrizados* $\Phi(\cdot, t)$ *de* V, $0 \leq t < \infty$ *con las siguientes propiedades*

1) $\Phi(u, t) = u$, *si* $t = 0$ *o* $DE(u) = 0$ *o* $\left|E(u) - \beta\right| \geq \bar{\epsilon}$;

2) $E(\Phi(u, t))$ *es no creciente en* t *para cualquier* $u \in V$;

3) $\Phi(E_{\beta+\epsilon} \setminus N, 1) \subset E_{\beta-\epsilon}$ *y* $\Phi(E_{\beta+\epsilon}, 1) \subset E_{\beta-\epsilon} \cup N$.

Además, $\Phi : V \times [0, \infty) \to V$ *tiene la propiedad de semigrupo; esto es,* $\Phi(\cdot, t) \circ \Phi(\cdot, s) = \Phi(\cdot, t + s)$ *para toda* $s, t \geq 0$.

Demostración. Por el lema 1 y la observación 1 podemos escoger números $\delta, \rho > 0$ tal que

$$N_{\beta,\delta} \subset U_{\beta,\rho} \subset U_{\beta,2\rho} \subset N$$

Podemos suponer que $\delta, \rho \leq 1$. Sea η una función Lipschitz en V tal que $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta = 1$ fuera de $N_{\beta,\delta}$, $\eta = 0$ en $N_{\beta,\delta/2}$. Sea ϕ una función Lipschitz en $\mathbb{R}$ tal que $0 \leq \phi \leq 1$, $\phi(s) = 0$, si$|\beta - s| \geq$ mín$\{\bar{\epsilon}, \delta/4\}$, $\phi(s) = 1$, si$|\beta - s| \leq$ mín$\{\bar{\epsilon}, \delta/8\}$. Sea $X : \tilde{V} \to V$ el campo vectorial pseudo-gradiente para E. Definimos el campo vectorial $e : V \to V$ como:

$$e(u) = \begin{cases} -\eta(u)\phi(E(u))X(u) & \text{si} \quad u \in \tilde{V} \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Notamos que e es Lipschitz por definición. Además se anula cerca de los puntos críticos de u en E. Por lo tanto e es localmente Lipschitz. Entonces el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales tiene solución local

$$\frac{\partial \Phi(u,t)}{\partial t} = e(\Phi(u,t)) \tag{2.1}$$

$$\Phi(u,0) = u. \tag{2.2}$$

Además $\|e(u)\| \leq \|X(u)\| \leq 2$ para toda $u \in \tilde{V}$ por lo tanto e es acotado en todas partes y por tanto el sistema de ecuaciones anterior tiene solución global.

Por la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias en espacios de Banach ([12]) se obtiene que Φ es continua en u, diferenciable en t con la propiedad de semigrupo, $\Phi(\cdot,t) \circ \Phi(\cdot,s) = \Phi(\cdot,t+s)$ para toda $t, s \in \mathbb{R}$. Por lo cual $\Phi(\cdot,t) : V \to V$ es un homeomorfmismo para toda $t \in \mathbb{R}$.

Si $t = 0$, entonces tenemos la condición inicial en 2.1, por tanto $\Phi(u,0) = u$. Ahora, si $DE(u) = 0$ o $\left|E(u) - \beta\right| \geq \bar{\epsilon}$ se tiene un punto singular en 2.1, por tanto la solución en ese caso es la curva constante $\Phi(u,t) = u \, \forall t \in \mathbb{R}$. Así queda verificada la propiedad 1.

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E(\Phi(u,t)) &= DE(\Phi(u,t))\cdot\frac{\partial}{\partial t}\Phi(u,t)\\ &= DE(\Phi(u,t))e(\Phi(u,t)\\ &= -DE(\Phi(u,t))\cdot\eta(\Phi(u,t)\phi(E(\Phi(u,t)))X(\Phi(u,t))\\ &\leq -\eta(\Phi(u,t))DE(\Phi(u,t))X(\Phi(u,t))\\ &\leq 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto la propiedad 2) queda establecida. Finalmente verifiquemos la propiedad 3). Veamos que para $\bar{\epsilon} \leq \text{mín}\{\bar{\epsilon}, \delta/8\}$ y $u \in E_{\beta+\epsilon}$, si $E(\Phi(u,1)) \geq \beta - \epsilon$ se sigue de la propiedad 2) que $\left|E(\Phi(u,t)) - \beta\right| \leq \epsilon$ y $\phi(E(\Phi(u,t))) = 1$ para toda $t \in [0,1]$.

Así se tiene el siguiente cálculo:

$$\begin{aligned}E(\Phi(u,1)) &= E(u) + \int_0^1 \frac{d}{dt}E(\Phi(u,t))dt &(2.3)\\ &< \beta + \epsilon - \int_0^1 \eta(\Phi(u,t))DE(\Phi(u,t))X(\Phi(u,t))dt &(2.4)\\ &< \beta + \epsilon - \int_{\{t;\Phi(u,t)\notin N_{\beta,\delta}\}} DE(\Phi(u,t))X(\Phi(u,t))dt &(2.5)\\ &\leq \beta + \epsilon - \mu(\{t;\Phi(u,t)\notin N_{\beta,\delta}\})\cdot\delta^2, &(2.6)\end{aligned}$$

donde μ es la medida de Lebesgue

Si tenemos que $u \notin N$ o $\Phi(u,1) \notin N$, entonces dado que $\|e\| \leq 2$ y como $V \setminus N$ y $N_{\beta,\delta}$ están separados por el .ªnillo” $U_{\beta,2\delta} \setminus U_{\beta,\delta}$ de ancho ρ, tenemos que

$$\rho \leq \left\|\int_0^t \frac{\partial\Phi(u,\tau)}{\partial\tau}\right\| \leq \int_0^t \|e\| \leq 2t \leq 2\mu(\{t;\Phi(u,t)\notin N_{\beta,\delta}\}).$$

Por lo tanto tenemos que

$$\frac{\rho}{2} \leq \mu(\{t;\Phi(u,t)\notin N_{\beta,\delta}\}).$$

Así si escogemos $\epsilon \leq \dfrac{\delta^2\rho}{4}$, por 2.3 tenemos que

$$E(\Phi(u,t)) \leq \beta + \epsilon - \frac{\delta^2 \rho}{2} \leq \beta - \epsilon.$$

Por lo tanto la propiedad 3) queda establecida.

$\square$

Teorema 2 (Lema de Paso de Montaña)**.** *Sea* $E \in C^1(V)$. *Supongamos que*

1) E *satisface P.S.*

2) $E(0) = 0$*;*

3) $\exists \rho > 0, \alpha > 0 : \|u\| = \rho \implies E(u) \geq \alpha$*;*

4) $\exists u_1 \in V : \|u_1\| \geq \rho$ *y* $E(u_1) < \alpha$.

Definimos

$$P = \{p \in C^0([0,1]; V); p(0) = 0, p(1) = u_1\}.$$

Entonces

$$\beta = \inf_{p \in P} \sup_{u \in p} E(u) \geq \alpha$$

es un valor crítico.

Demostración. Argumentemos por contradicción. Así supongamos que $K_\beta = \emptyset$. Para $\bar{\epsilon} = \min\{\alpha, \alpha - E(u_1)\}$ y $N = \emptyset$ se tiene que por el teorema anterior existe una $\epsilon > 0$ y una familia monoparamétrica de deformaciones $\Phi(\cdot, t) : V \to V$. Por la definición de β se tiene que existe $p \in P$ tal que

$$\sup_{u \in p} E(u) < \beta + \epsilon.$$

Consideramos $p_1 = \Phi(p, 1)$. Por la definición de $\bar{\epsilon}$ se tiene que $\Phi(\cdot, 1)$ deja fijos a 0 y u_1.Además, $\Phi(E_\beta + \epsilon, 1) \subset E_\beta - \epsilon$. Entonces para $p_1 \in P$ se tiene que

$$\sup_{u \in p_1} E(u) = \sup_{u \in p} E(\Phi(u, 1)) < \beta - \epsilon,$$

por elección de p. Pero esto contradice la definición de β.

$\square$

2.0.2. Aplicación al Teorema de Hadamard

Usamos el lema de Paso de Montaña para obtener el siguiente:

Teorema 3. *Sea* $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *una función* C^1 *con* $\det F'(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ *y propia. Entonces* F *es difeomorfismo.*

Demostración. Primero verifiquemos que F sea sobre. Por el teorema de la función inversa F es una aplicación abierta. Por lo tanto $F(\mathbb{R}^n)$ es abierto. Como F es propia en particular es una aplicación cerrada así, $F(\mathbb{R}^n)$ es cerrado, entonces por ser $\mathbb{R}^n$ conexo se tiene que $F(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$. Por lo tanto, F es sobreyectiva.

Ahora veamos que F es inyectiva. Supongamos que no. Entonces existen $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ distintas tal que $F(x_1) = F(x_2) = y$. Consideremos $f(x) = \dfrac{1}{2}\|F(x) - y\|^2$. Notamos que f es C^1. Tenemos que $f'(x) = F'(x)^T(F(x) - y)$. Además x_1 y x_2 son ceros aislados de f(x) (véase la demostración del teorema 4). Entonces existe una bola de radio $\rho > 0$, $B(x_1, \rho)$ tal que $f|_{\partial B(x_1,\rho)} \geq \alpha$ para un $\alpha > 0$. Luego como F es propia satisface la condición P.S. así, existe x_3 con $f(x_3) > 0$ y x_3 es punto crítico por el lema de Paso de Montaña. Pero implicaría que $F'(x_3) = 0$, una contradicción. Entonces F es inyectiva.

$\square$

Capítulo 3

Resultados

Una vez establecido el lema del Paso de Montaña y alguna de sus aplicaciones podemos discutir su posible uso para intentar resolver la Conjetura Jacobiana. Recordemos que esta Conjetura dice que si tenemos una aplicación polinomial $F : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ con $\det F'(x) = c$ para un valor $c \in \mathbb{K}$ constante, entonces F tiene inversa polinomial. Con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. La Conjetura Jacobiana Real (CJR) se restringe al caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Esta conjetura aún no se ha convertido en teorema, a pesar de los intentos. Una conjetura que podría ayudar a resolver este problema sería pedir que $F'(x)$ tuviera sus valores propios acotados lejos del cero para todo x y concluir que F es inyectiva. Esto, de acuerdo con [1] es suficiente para demostrar la Conjetura Jacobiana compleja, ya que las funciones polinomiales inyectivas son sobreyectivas y en el caso complejo tienen inversa polinomial. En el caso real, faltaría corroborar este último caso. Es por ello que intentar dar condiciones para la inyectividad de funciones polinomiales resulta adecuado. Sin embargo, aún la conjetura planteada en [1] resulta difícil, es por ello que podemos imponer más condiciones que permitan concluir inyectividad. Podemos restringir o relajar propiedades de F y F' para al menos obtener inyectividad en F, tal es el caso del trabajo en [1] y [7]. En los trabajos mencionados se permite que el mapeo sea más general que un mapeo polinomial. El teorema que se presenta en [1] es el siguiente:

Teorema 4. *Sea $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función C^1. Supongamos que existe $\epsilon > 0$ tal que los valores propios λ de $F'(x)F'(x)^T$ satisfacen $\lambda \geq \epsilon \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$, entonces F es inyectiva.*

En el trabajo de [7] se tiene el siguiente teorema

Teorema 5. *Sea $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función C^1. Supongamos que existe $\epsilon > 0$ tal que $|\lambda| \geq \epsilon$ y $\mu < -\epsilon$ o $\mu > \epsilon$ para todos los valores propios λ y μ de $F'(x)$ y $F'(x) + F'(x)^T \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$, respectivamente. Entonces F es inyectiva.*

La demostración de ambos teoremas es casi idéntica, usan el lema de Paso de Montaña. La idea de la demostración es simple, proponemos un funcional $E : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad C^1$ que cumpla las condiciones 2), 3) ,4) del teorema 2 y verificar que β no es un punto crítico. Esto implicaría que E no safisface P.S., así podemos llegar a una contradicción. La demostración del teorema 5 se modifica en algún punto por una cierta desigualdad. Adaptamos la prueba de ambos teoremas para probar una ligera generalización de ambos. Veremos también que podemos obtener un resultado más fuerte que en [1], basado en el Teorema de Hadamard.

Teorema 6. *Sean $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función C^1 localmente invertible y $C_1, C_2 \geq 0$. Supongamos que existe $\epsilon > 0$ tal que los valores propios μ de $C_1(F'(x) + F'(x)^T) + C_2(F'(x)F'(x)^T)$ satisfacen que o bien $\mu \geq \epsilon$ o $\mu \leq -\epsilon$ para toda $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces F es inyectiva.*

Demostración. Supongamos F no es inyectiva. Entonces existen $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ con $F(x_1) = F(x_2)$ y $x_1 \neq x_2$. Definimos $G(x) := F(x + x_1) - F(x_2)$, $x_0 = x_2 - x_1$, y $E : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con $E(x) := \frac{1}{2}G(x)^T G(x)$. Notemos que $E(0) = E(x_0) = 0$. Veamos que 0 es un cero aislado de E. Para cada $x \in \mathbb{R}^n$ definimos $f(t) := G_i(tx)$ para una i, y $t \in [0, 1]$. Entonces por el teorema del valor medio, se tiene que existe $\theta_i(x) \in (0, 1)$ tal que $f(1) - f(0) = f'(\theta_i(x))$, así tenemos que

$$G_i(x) = G_i'(\theta_i(x)x)x.$$

Definimos $A : \mathbb{R}^n \to M_n(\mathbb{R})$ como $A(0) = G'(0)$ y

$$A(x) = \begin{pmatrix} G_1'(\theta_1(x)x) \\ \vdots \\ G_n'(\theta_n(x)x) \end{pmatrix} \text{si} \quad x \neq 0. \tag{3.1}$$

Entonces A satisface la siguiente ecuación:

$$G(x) = A(x)x \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \tag{3.2}$$

Definimos $B : \mathbb{R}^n \times \overset{n}{\cdots} \times \mathbb{R}^n \to M_n(R)$ como

$$B(x_1, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} G_1'(x_1) \\ \vdots \\ G_n'(x_n) \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Entonces tenemos que B es continua, ya que F es C^1, también tenemos que $B(x,\dots,x) = G'(x)$ y $B(\theta_1(x)x,\dots,\theta_n(x)x) = A(x)$. Notemos además que ya que los valores propios de $F'(x)F'(x)^T$ están acotados lejos del cero por ϵ para toda x, tenemos que $\det(F'(x)F'(x)^T) \neq 0 \implies \det(F'(x))^2 \neq 0$ por lo tanto $\det(F'(x)) \neq 0$. Entonces $G'(x)$ es invertible, así se tiene que

$$\det(B(0,\dots,0)) \neq 0.$$

Entonces por continuidad del determinante y B existe $r > 0$ tal que $\det(B(x_1, x_2, \dots, x_n)) \neq 0$ si $\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 \leq r^2$. Se sigue que $\det(A(x)) \neq 0$ si $\|x\|^2 \leq r^2/n$. Así, si escogemos la bola centrada en 0 con radio $r/\sqrt{n}$ por 3.2 $G(x) \neq 0$ excepto en $x = 0$. Por lo tanto, tenemos un cero aislado de E como queríamos. De las anteriores observaciones se sigue $\|x_0\| > r/\sqrt{n}$, ya que $G(x_0) = 0$.

Tenemos entonces también que E satisface la condición 2), 3) y 4) del teorema 2, con $\rho = r/\sqrt{n}$, $u_1 = x_0$, $\alpha = \text{mín}\{E(u) : \|\rho\|\}$, este número es en efecto positivo ya que la frontera de la bola de radio ρ es compacta y $E(u)$ es positiva ahí. Veamos que β no puede ser valor crítico de E. Observemos que dado que $E'(x) = G(x)^T G'(x)$ y que $G'(x)$ es invertible, si $E'(x_\beta) = 0^T$ entonces $G(x_\beta) = 0$, por lo tanto $E(x_\beta) = \beta = 0$. Pero entonces se tendría que $0 < \alpha \leq \beta = 0$, una contradicción.

Por el teorema 2 se tiene que E no puede cumplir la condición P.S. Así, existe una sucesión $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ tal que:

i) $\lim\limits_{k\to\infty} \|x_k\| = \infty$;
ii) $\lim\limits_{k\to\infty} E(x_k) = \beta \geq \alpha > 0$, dicho de otro modo, $\lim\limits_{k\to\infty} \|G(x_k)\| = \sqrt{2c} > 0$;
iii) $\lim\limits_{k\to\infty} E'(x_k) = \lim\limits_{k\to\infty} G(x_k)^T G'(x_k) = 0^T$.

Tenemos que el coeficiente de Raileigh nos da la siguiente estimación para el valor propio mínimo de $C_1(G'(x_k) + G'(x_k)^T) + C_2(G'(x_k)G'(x_k)^T)$.

$$\epsilon \leq \mu_{\text{mín},k} \leq C_1 C_2 \operatorname{ínf} \frac{y^T(G'(x) + G'(x)^T + G'(x)G'(x)^T)y}{y^T y}. \tag{3.4}$$

haciendo $y = G(x_k)$ obtenemos y separando la suma y el producto se tiene que:

$$\epsilon < C_1C_2(\frac{G(x_k)^T(G'(x_k)+G'(x_k)^T)G(x_k)}{G(x_k)^TG(x_k)} + \frac{G(x_k)^TG'(x_k)G'(x_k)^TG(x_k)}{G(x_k)^TG(x_k)}) \tag{3.5}$$

Simplificando términos se tiene que:

$$\epsilon < C_1C_2(\frac{2G(x_k)^TG'(x_k)G(x_k)}{G(x_k)^T(G(x_k)} + \frac{\left\|G'(x_k)^TG(x_k)\right\|^2}{\|G(x_k)\|^2}) \tag{3.6}$$

Luego tenemos que:

$$2G(x_k)^TG'(x_k)G(x_k) \leq 2\left\|G(x_k)^TG'(x_k)\right\|\|G(x_k)\|$$

Entonces tenemos la siguiente desigualdad:

$$\epsilon < C_1C_2(\frac{2\left\|G(x_k)^TG'(x_k)\right\|\|G(x_k)\|}{\|G(x_k)\|^2} + \frac{\left\|G'(x_k)^TG(x_k)\right\|^2}{\|G(x_k)\|^2}) \tag{3.7}$$

Pero por i) y ii) se obtiene que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{2\left\|G(x_k)^TG'(x_k)\right\|\|G(x_k)\|}{\|G(x_k)\|^2} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{k\to\infty} \frac{\left\|G'(x_k)^TG(x_k)\right\|^2}{\|G(x_k)\|^2} = 0.$$

Por lo tanto obtenemos $\epsilon < 0$, una contradicción. En el caso en que $\mu \leq -\epsilon$ entonces basta usar el supremo en vez del ínfimo. Por lo tanto F es inyectiva. □

Corolario 1. *Sea* $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *una función* C^1 *y* m *un entero positivo. Supongamos que existe* $\epsilon > 0$ *tal que los valores propios* λ *de* $(F'(x)F'(x)^T)^m$ *satisfacen* $\lambda \geq \epsilon \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$*, entonces* F *es inyectiva.*

Demostración. Basta observar que si λ es un valor propio de A entonces $A^m v = \lambda^m v$, para cierto $v \in \mathbb{R}^n$. Como $A = F'(x)F'(x)^T$, entonces $\lambda^m \geq \epsilon$, por lo tanto $|\lambda| \geq \sqrt[m]{\epsilon}$. Como $F'(x)F'(x)^T$ es positiva definida se obtiene el caso del teorema 6 cuando $C_1 = 0$ y $C_2 = 1$. Por lo tanto F es inyectiva. □

Corolario 2. *Con las mismas hipótesis que anteriormente y con los valores propios* μ *de* $(F'(x) + F'(x)^T)^m$ *con* m *impar y* $\mu \geq \epsilon$ *o bien* $\mu \leq -\epsilon$*, para toda* $x \in \mathbb{R}^n$*. Entonces se tiene que* F *es inyectiva.*

Demostración. La misma que en el corolario 1. $\square$

Cabe hacer notar que el teorema 6 lo podemos combinar con un cambio de variable que pudiera ser útil, como lo enuncia el siguiente corolario muy sencillo de probar.

Corolario 3. *Sean* $\mathsf{H}, \mathsf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *funciones diferenciables tales que* $\mathsf{H} \circ \mathsf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *cumpla con las condiciones del teorema 6, entonces* F *es inyectiva.*

Procedemos ahora a dar una demostración alterna del teorema 4, de hecho podemos obtener un teorema un poco más general usando el teorema de Hadamard.

Teorema 7 (Teorema de Hadamard)**.** *Sea* V *es un espacio de Banach y* $\mathsf{F} : \mathsf{V} \to \mathsf{V}$ *es una función localmente invertible con la condición:*

$$\sup_{x \in \mathsf{V}} \left\| \mathsf{F}'(x)^{-1} \right\| < \infty, \tag{3.8}$$

entonces F es difeomorfismo.

La demostración del teorema anterior se puede consultar en [10]. También usaremos la siguiente identidad:

$$\operatorname{ínf} \frac{\|\mathsf{B}y\|}{\|y\|} = \left\| \mathsf{B}^{-1} \right\|^{-1}, \tag{3.9}$$

donde B es una matriz invertible ([13]).

Entonces la versión mejorada del teorema 4 es:

Teorema 8. *Sea* $\mathsf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *una función* C^1*. Supongamos que existe* $\epsilon > 0$ *tal que los valores propios* λ *de* $\mathsf{F}'(x)\mathsf{F}'(x)^\mathsf{T}$ *satisfacen* $\lambda \geq \epsilon \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$*, entonces* F *es un difeomorfismo.*

Demostración. El coeficiente de Raileigh nos dice que

$$\epsilon \leq \lambda_{\text{mín}} \leq \operatorname{ínf} \frac{y^\mathsf{T} \mathsf{F}'(x)\mathsf{F}'(x)^\mathsf{T} y}{y^\mathsf{T} y}.$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene que:

$$\epsilon \leq \text{ínf} \frac{\|y\|\left\|F'(x)F'(x)^T y\right\|}{\|y\|^2},$$

$$\implies \epsilon \leq \text{ínf} \frac{\left\|F'(x)F'(x)^T y\right\|}{\|y\|},$$

Pero por 3.9 se tiene que

$$\epsilon \leq \left\|(F'(x)F'(x)^T)^{-1}\right\|^{-1}.$$

Usando que la transposición conmuta con la inversa y que $\|A\|^2 = \left\|AA^T\right\|$, entonces se tiene que

$$\epsilon \leq \left\|F'(x)^{-1}\right\|^{-2},$$

Entonces

$$\left\|F'(x)^{-1}\right\| \leq \sqrt{\frac{1}{\epsilon}} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

por el teorema 7 se sigue el resultado. □

Ahora veamos un ejemplo donde los teoremas 4, 5 no aplican para decir si es inyectivo o no, ni siquiera el teorema de Hadamard (7). Sin embargo, sí aplica el corolario 3.

Ejemplo: Sea $F(x, y) = (ay + x^3, bx)$, donde $ab \neq 0$ y $a - b \neq 0$. Es de notar que es muy fácil observar que F es inyectiva sin los teoremas probados, pero se considera un buen ejemplo para ilustrar la utilidad del corolario 3. Se tiene entonces que

$$F'(x) = \begin{pmatrix} 3x^2 & b \\ a & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.10}$$

Es fácil ver que $F'(x)^{-1}$ tiene norma no acotada, por lo tanto el teorema de Hadamard no es aplicable. Por otro lado se tiene que:

$$F'(x)F'(x)^T = \begin{pmatrix} 9x^4 + a^2 & 3x^2 b \\ 3x^2 b & b^2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad F'(x) + F'(x)^T = \begin{pmatrix} 6x^2 & a + b \\ a + b & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.11}$$

Computando el polinomio característico de cada matriz y resolviendo por la ecuación general de segundo grado tenemos la expresión para un λ_1 en cada caso como

$$\lambda_1 = \frac{9x^4 + a^2 + b^2 - \sqrt{(9x^4 + a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2}}{2} \quad \text{y} \quad \lambda_1' = \frac{6x^2 - \sqrt{(6x^2)^2 - 4(a+b)^2}}{2}. \tag{3.12}$$

Multiplicando por el radical conjugado en ambos casos se obtiene que

$$\lambda_1 = \frac{4a^2b^2}{2(9x^4 + a^2 + b^2 + \sqrt{(9x^4 + a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2})} \quad \text{y} \quad \lambda_1' = \frac{4(a+b)^2}{2(6x^2 - \sqrt{(6x^2)^2 - 4(a+b)^2})}. \tag{3.13}$$

Entonces cuando $x \to \infty$ los cocientes se anulan, por lo tanto las matrices 3.11 no tienen sus valores propios acotados lejos del cero. Así los teoremas 4 y 5 no aplican. Sin embargo si tenemos que $H(x,y) = (x - \frac{y^3}{b^3}, y)$, entonces $H \circ F(x,y) = (ay, bx)$. Se tiene luego:

$$(H \circ F)'(x) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.14}$$

Sin embargo,

$$(H \circ F)'(x)(H \circ F)'(x)^T = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}. \tag{3.15}$$

Por lo que cumple las condiciones del teorema 6 con $C_1 = 0$ y $C_2 = 1$, así por el corolario 3 se tiene que F es inyectiva.

Bibliografía

[1] Marc Chamberland and Gary Meisters. A mountain pass to the jacobian conjecture. *Canadian Mathematical Bulletin*, 41(4):442–451, 1998.

[2] O.H. Keller. Ganze cremona-transformationen. *Math. Physik*, 47:299–306, 1939.

[3] Sergey Pinchuk. A counterexample to the strong real jacobian conjecture. *Mathematische Zeitschrift*, 217(1):1–4, 1994.

[4] Hyman Bass, Edwin H. Connell, and David Wright. The jacobian conjecture: Reduction of degree and formal expansion of the inverse. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 7(2):287–330, 1982.

[5] Francisco Braun and Jaume Llibre. A new qualitative proof of a result on the real jacobian conjecture. *Anais da Academia Brasileira de Ciências*, 87:1519 – 1524, 09 2015.

[6] Marius Radulescu and Sorin Radulescu. Global inversion theorems and applications to differential equations. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 4(5):951 – 965, 1980.

[7] Wei Liu and Quan Xu. A minimax principle to the injectivity of the jacobian conjecture. *arXiv e-prints*, 2019.

[8] Dual variational methods in critical point theory and applications. *Journal of Functional Analysis*, 14(4):349–381, 1973.

[9] Michael Struwe. *Variational methods: applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems*, volume 34. Springer, 4 edition, 2010.

[10] Schwartz J. T. *Nonlinear Functional Analysis*. Gordon and Breach, 1969.

[11] J. Hadamard. Sur les transformations ponctuelles. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 34:71–84, 1906.

[12] Klaus Deimling. *Ordinary Differential Equations in Banach Spaces.* Springer Berlin Heidelberg, 1977.

[13] K.R. Garren. Bounds for the eigenvalues of a matrix. *NASA Technical Note*, NASA TND-4373(196), 1968.