



Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Instituto de Física y Matemáticas

Generalización de las transformaciones LKF en el formalismo línea de mundo

TESIS

que para obtener el título de

Maestro en Ciencias en el Área de Física

Presenta:

José de Jesús Nicasio Hidalgo

Asesor:

Dr. James Paul Edwards

Co-asesor:

Dr. Christian Johannes Schubert Baumgartel

Morelia, Michoacán
Agosto del 2020



A mi familia

Agradecimientos

Realmente, aun que quisiera, simplemente no me alcanzan las palabras para poder agradecer tanto a mi asesor, el Dr. James Edwards, como a mi co-asesor, el Dr. Christian Schubert. Gracias a ambos es que este trabajo ha podido ser desarrollado. Además de eso, he aprendicho mucho junto a ellos a lo largo de estos 2 años de maestría de temas muy diversos. Gracias por su dedicación, por su tiempo, su disponibilidad, su atención... En fin, muchas gracias por todo.

También agradezco a mis revisores y sinodales, los doctores Naser Ahmadiniaz, Adnan Bashir, Alfredo Raya y Pietro Dall'Olio por su apoyo y comprensión durante el proceso de titulación, y por las observaciones y aportaciones hechas al trabajo de tesis. Gracias.

AGRADECIMIENTOS

Índice general

Resumen	IX
Resumen	XI
Introducción	1
1. Formalismo línea de mundo	3
1.1. Mecánica cuántica: representación integral de trayectorias	4
1.1.1. Orden de los operadores	4
1.1.2. Representación integral de trayectorias	5
1.1.3. Funciones de correlación y ordenamiento temporal	7
1.1.4. Estados cuánticos definidos	8
1.1.5. Grados de libertad fermiónicos	10
1.2. Electrodinámica Cuántica Escalar	14
1.2.1. Propagador Escalar	15
1.2.2. Acción efectiva	17
1.3. Electrodinámica cuántica spinorial	18
1.3.1. Propagador Fermiónico	18
1.3.2. Super simetría	20
1.4. Simetría de norma	21
1.4.1. Norma R_ξ	23
2. Generalización de las transformaciones Landau-Khalatnikov-Fradkin en la QED	27
2.1. Transformación LKF	28
2.2. Generalización de las transformaciones LKF en la QED escalar	30
2.3. Generalización de las transformaciones LKF en la QED spinorial	33
2.3.1. Transformación LKF en la QED spinorial: formalismo línea de mundo	33
2.3.2. Función de correlación de N puntos	38
3. Aplicaciones de las transformaciones LKF	43
3.1. Transformación LKF en el espacio de momentos: Propagador en QED spinorial en 3-d	43

ÍNDICE GENERAL

3.2. Transformación LKF del propagador en la QED spinorial en	
4-dim	47
3.3. Propagador QED spinorial en 2-D	50
4. Conclusiones y trabajo futuro	55

Resumen

En este trabajo se desarrolla la generalización de las transformaciones Landau-Khalatnikov-Fradkin en la electrodinámica cuántica spinorial a través del formalismo línea de mundo. Para ello, se discute el formalismo integrales de camino en la mecánica cuántica ordinaria y su generalización al caso relativista en el formalismo línea de mundo. Se hace una revisión del trabajo de Landau y Khalatnikov y se discute su generalización a la electrodinámica cuántica escalar en D dimensiones. Se demuestra que para el caso spinorial la generalización de la transformación tiene la misma forma que en el caso escalar. Al final, se aplica la transformación LKF al propagador en 2, 3 y 4 dimensiones, para ilustrar su aplicación y utilidad.

Palabras clave: Transformación de norma del propagador, QED no perturbativa, función de correlación de N puntos, correcciones del propagador a 1 lazo, dependencia de la norma.

RESUMEN

Abstract

In this work the generalization of the Landau-Khalatnikov-Fradkin transformations in the spinor quantum electrodynamics through the world-line formalism is developed. For this, the path integral formalism in the ordinary quantum mechanics is discussed and their generalization to the relativistic case in the world-line formalism. A review of the work of Landau and Khalatnikov is performed and their generalization to scalar quantum electrodynamics in D dimensions is discussed. It is shown that for the spinor case the generalization of the transformation has the same form that in the scalar case. Finally, the transformation LKF is applied to the propagator in 2, 3, and 4 dimensions, in order to illustrate their application and utility.

Keywords: Gauge transformation of the propagator, non-perturbative QED, N -point correlation function, 1-loop corrections to the propagator, gauge dependence.

RESUMEN

Introducción

Desde 1948, los diagramas de Feynman han sido una herramienta muy útil en las teorías cuánticas de campos, en particular en aquellas teorías con acoplamiento débil como la electrodinámica cuántica (QED por sus siglas en inglés). Además de este formalismo estándar para el cálculo de amplitudes existen otros, los cuales son equivalentes pero pueden ser convenientes en distintas situaciones. Uno de ellos es el formalismo línea de mundo, basado en integrales de camino de partículas relativistas. Este formalismo fue creado por el mismo Feynman [1] [2], sin embargo, parece ser que no lo consideró tan prometedor. La importancia de tener otro formalismo reside en el hecho de que puede tener mayor eficiencia en el desarrollo de ciertos cálculos. Por ejemplo, el formalismo línea de mundo ha probado tener ciertas ventajas con el cálculo de acciones efectivas a un loop en QED y QCD sobre el uso de diagramas de Feynman. Además de las ventajas prácticas, existen ventajas a nivel teórico, por ejemplo, los diagramas de Feynman individualmente no son invariantes de norma, sólo se logra esta invariancia al considerar un conjunto de ellos. El formalismo línea de mundo preserva siempre esta invariancia, ya que el cálculo de alguna amplitud en este formalismo incluye todo un conjunto de diagramas de Feynman. Hoy en día se sigue desarrollando y aplicando este formalismo en varios aspectos de las teorías cuánticas de campos, para seguir explorando su eficiencia.

En el presente trabajo se realiza una generalización de las transformaciones Landau-Khalatnikov-Fradkin (LKF) en el formalismo línea de mundo (puede encontrarse información sobre el formalismo en [3] [4]). Originalmente, las transformaciones LKF fueron derivadas por Landau y Khalatnikov [5] e independientemente por Fradkin [6] en la QED, las cuales eventualmente fueron derivadas también en la QCD [7]. Las transformaciones LKF dictan cómo ha de transformarse el propagador (y el vértice fotón-fermión) de una partícula eléctricamente cargada tras un cambio de la norma en el espacio de configuración, es decir, relaciona propagadores en distintas normas. Esta transformación es no perturbativa, ya que en su derivación no se asume un acoplamiento débil, lo que la hace particularmente importante en teorías de

acoplamiento fuerte. Esta propiedad permite obtener información de órdenes más altos en teoría de perturbación del propagador a partir de la transformación de un propagador a determinado orden, como en [8] [9]. Sus aplicaciones más importantes [10]–[18] son relativas al estudio de la covariancia de norma de las ecuaciones de Schwinger-Dyson en la QED y de sus soluciones [19].

La tarea de aplicar el formalismo línea de mundo para derivar una generalización de las transformaciones LKF aplicadas a funciones de N puntos ya ha sido llevada a cabo en la aproximación apagada¹ de la QED escalar en D dimensiones [20]. Gracias al desarrollo del formalismo, actualmente se cuenta con la tecnología para aplicar el formalismo a la QED spinorial, lo cual fue el objetivo de este trabajo.

El texto está organizado de la siguiente manera: en el capítulo 1 se discute el formalismo línea de mundo. Se comienza con la representación de la mecánica cuántica no relativista en función de las integrales de trayectoria, definiendo objetos importantes como el propagador o los elementos de matriz en esta representación. Luego se discute su generalización al caso relativista, revisando la QED escalar y elementos necesarios para la descripción de la QED spinorial, como las variables Grassmann y el superespacio. Al final del capítulo se discuten algunas consecuencias de la invariancia de norma de la QED. El capítulo 2 se centra en la derivación de las transformaciones LKF y sus generalizaciones para las funciones de N puntos en el caso de la QED escalar y luego de la spinorial. Al final, el capítulo 3 trata sobre la aplicación en ejemplos concretos de las transformaciones LKF al propagador, en 2, 3 y 4 dimensiones.

¹Quenched approximation, en inglés. Se refiere a una aproximación en la que no se toman en cuenta los loops de partículas fermiónicas.

Capítulo 1

Formalismo línea de mundo

Cuando se inicia en el estudio de las teorías cuánticas de campos (QFT por sus siglas en inglés), unas de las primeras cosas que se llegan a ver en el pizarrón, aun que no se entiendan del todo, son los llamados “diagramas de Feynman”. Para aplicar la QFT con el fin de obtener, por ejemplo, la sección eficaz, es decir, algo con lo que comparar con el experimento, generalmente el físico que inicia en la QFT lleva a cabo la tarea a través del uso de estos diagramas de Feynman, los cuales sirven para organizar los cálculos y representan un proceso físico fundamental. Los diagramas son muy útiles ya que para realizar cálculos de manera analítica a veces es conveniente hacer un desarrollo perturbativo (para teorías cuyo acoplamiento sea débil), de tal manera que los términos de esta expansión se pueden representar cada uno por uno de estos diagramas y se pueden clasificar dependiendo del número de loops que contengan, obteniéndose mucha más información de aquellos que menos loops posean. Así, el diagrama a nivel árbol es el que más información aporta (incluso más que al considerar la suma de los restantes), le siguen los procesos a un loop, a este los de dos, y así sucesivamente (sin embargo, la serie es divergente, y cuando se llega a un número de lazos del orden del inverso de la constante de estructura fina, el valor comienza a alejarse del valor no perturbativo). Los diagramas se pueden construir siguiendo ciertas reglas, conocidas como reglas de Feynman. Dadas las reglas de Feynman para una cierta QFT de acoplamiento débil, uno puede representar algún proceso físico construyendo estos diagramas, los cuales tienen asociados una fórmula matemática que hay que desarrollar y calcular para poder extraer información que pueda compararse con el experimento. El uso de los diagramas de Feynman para el cálculo de la sección eficaz en una QFT es lo que denominamos el formalismo estándar.

Además del formalismo estándar, se han desarrollado otros más, entre los cuales se encuentra el formalismo línea de mundo. Este formalismo se basa en

integrales de trayectoria a través de una primera cuantización de partículas relativistas, obteniendo de esto información para las teorías cuánticas de campos. Los trabajos de Bern y Kosower [21] y Strassler [22] evidenciaron por primera vez que el formalismo línea de mundo podría tener algunas ventajas sobre el formalismo estándar. El formalismo ha probado tener ventajas con el cálculo de acciones efectivas a un loop en QED y QCD sobre el uso de diagramas de Feynman.

1.1. Mecánica cuántica: representación integral de trayectorias

Antes de pasar a la teoría cuántica de campos, en esta sección se desarrolla la mecánica cuántica en una dimensión en la representación de integral de trayectoria, la cual es completamente equivalente a la ecuación de Schrödinger. Esta sección sirve para tener contacto con el formalismo en un ambiente más familiar y amigable, en el sentido de que las expresiones son más simples y su generalización a la teoría cuántica de campos sigue prácticamente el mismo proceso. Aquí no se discuten aplicaciones usando este formalismo, como la resolución de problemas para potenciales particulares, como una partícula libre o el oscilador armónico, por ejemplo, pero se puede encontrar información en libros sobre mecánica cuántica, o también en [23] [24].

1.1.1. Orden de los operadores

Como es sabido, en la teoría cuántica las observables están representadas por operadores, los cuales no necesariamente conmutan entre ellos. La relación de conmutación fundamental está dada por

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar. \quad (1.1)$$

Cualquier otra observable dinámica¹ estará en función de estos operadores. Al pasar de la teoría clásica a la teoría cuántica, promoviendo las variables a operadores, se debe fijar dicho ordenamiento para el caso cuántico. Al día de hoy, no existe algún principio que establezca el ordenamiento que ha de ser usado, y no es algo trivial, ya que incluso físicamente puede haber diferencias debido a esto. Sin embargo, existen varias convenciones que se pueden adoptar. Una de ellas es el ordenamiento normal² (o.n.), el cual sugiere que al

¹Existen otras observables, como el spín y magnitudes relacionadas con él, que no se pueden expresar completamente en función de $\hat{x}$ y $\hat{p}$

²Distinguir del ordenamiento normal usado en teoría cuántica de campos para definir un orden de los operadores de creación y aniquilación

1.1. MECÁNICA CUÁNTICA: REPRESENTACIÓN INTEGRAL DE TRAYECTORIAS

promover a operadores, los momentos se coloquen a la izquierda de las coordenadas. Otro tipo de convención es el ordenamiento de Weyl (o.w.), en el que se toma en cuenta todas las posibles formas en que se pueden ordenar estos operadores, a través de la simetrización. Ejemplos de estas prescripciones son los siguientes:

$$\begin{aligned} \hat{p}\hat{x} &\longrightarrow \begin{cases} \hat{p}\hat{x}, & \text{o.n.} \\ \frac{1}{2}(\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x}), & \text{o.w.} \end{cases} \\ \hat{x}\hat{p} &\longrightarrow \begin{cases} \hat{p}\hat{x}, & \text{o.n.} \\ \frac{1}{2}(\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x}), & \text{o.w.} \end{cases} \\ \hat{x}^2\hat{p} &\longrightarrow \begin{cases} \hat{p}\hat{x}^2, & \text{o.n.} \\ \frac{1}{3}(\hat{x}^2\hat{p} + \hat{x}\hat{p}\hat{x} + \hat{p}\hat{x}^2), & \text{o.w.} \end{cases} . \end{aligned}$$

Aquí se adopta la prescripción de Weyl.

1.1.2. Representación integral de trayectorias

El objeto matemático de interés en esta representación de la mecánica cuántica es el propagador o kernel, el cual no es más que la representación en el espacio de posiciones del operador de evolución temporal. En adelante, se trabajará en la imagen de Heisenberg. Para un potencial independiente del tiempo, este operador tiene la forma (trabajando en unidades donde $\hbar = 1$)

$$\hat{U}(t, t_0) = e^{i\hat{H}(\hat{x}, \hat{p})(t-t_0)} \quad (1.2)$$

tal que

$$|x, t\rangle \equiv \hat{U}(t, t_0) |x, t_0\rangle . \quad (1.3)$$

De aquí en adelante se tomará $t_0 = 0$. El propagador, el cual representa la amplitud de que una partícula que se encuentra en la posición x' , al tiempo $t = 0$, se propague y se encuentre en la posición x , al tiempo t , con $t > 0$, está dado por

$$K(x, x'; t) = \langle x, t | x', t_0 = 0 \rangle = \langle x | e^{-i\hat{H}t} | x' \rangle . \quad (1.4)$$

CAPÍTULO 1. FORMALISMO LÍNEA DE MUNDO

Para obtener el propagador en términos de una integral de trayectoria se procede de la siguiente manera. Primero, se divide el intervalo de tiempo en N intervalos infinitesimales

$$\epsilon = \frac{t}{N}. \quad (1.5)$$

De esta forma, se puede escribir el propagador como

$$\begin{aligned} K(x, x'; t) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \langle x | \prod_{j=1}^N e^{-i\hat{H}^{o.w.}(\hat{x}, \hat{p})\epsilon} | x' \rangle \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^{N-1} \left(\int dx_i \right) \prod_{j=1}^N \langle x_j | e^{-i\hat{H}^{o.w.}(\hat{x}, \hat{p})\epsilon} | x_{j-1} \rangle \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^{N-1} \left(\int dx_i \right) \prod_{j=1}^N \int \frac{dp_j}{2\pi} e^{ip_j(x_j - x_{j-1}) - i\epsilon H\left(\frac{x_j + x_{j-1}}{2}, p_j\right)} \end{aligned} \quad (1.6)$$

donde $x = x_N$ y $x' = x_0$. En la segunda línea se han insertado $N-1$ integrales en x , entre cada exponencial, a través de la relación de completitud

$$\mathbb{I} = \int dx |x\rangle \langle x|, \quad (1.7)$$

y en la tercera línea se ha usado la prescripción del punto medio que corresponde al ordenamiento de Weyl [\[23\]](#) (en el ordenamiento normal basta con simplemente agregar N integrales sobre el momento, a través de la relación de completitud de la base de eigenestados del momento). La ec. [\(1.6\)](#) se puede seguir desarrollando hasta el límite continuo

$$\begin{aligned} K(x, x', t) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^{N-1} \left(\int dx_i \right) \prod_{j=1}^N \left(\int \frac{dp_j}{2\pi} \right) e^{i\epsilon \sum_{j=1}^N \left[p_j \left(\frac{x_j - x_{j-1}}{\epsilon} \right) - H\left(\frac{x_j + x_{j-1}}{2}, p_j \right) \right]} \\ &= \int_{x(0)=x'}^{x(t)=x} \mathcal{D}x \mathcal{D}p e^{i \int_0^t d\tau (p\dot{x} - H(x, p))} \end{aligned} \quad (1.8)$$

con

$$\mathcal{D}x \equiv \prod_{0 < \tau < t} dx(\tau), \quad \mathcal{D}p \equiv \prod_{0 < \tau < t} dp(\tau) \quad (1.9)$$

1.1. MECÁNICA CUÁNTICA: REPRESENTACIÓN INTEGRAL DE TRAYECTORIAS

La ec. (1.8) es denominada la integral de trayectoria en el espacio fase. Para pasar a la formulación lagrangiana, se analizarán ahora hamiltonianos con términos cuadráticos en las variables de momento, es decir, hamiltonianos de la forma

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + V(x). \quad (1.10)$$

Así, con esta forma particular, se puede hacer la integración sobre los momentos, ya que el integrando adopta una forma gaussiana en estas variables, dando como resultado

$$\begin{aligned} K(x, x'; t) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{2\pi i \epsilon} \right)^{\frac{N}{2}} \prod_{i=1}^{N-1} \left(\int dx_i \right) e^{i\epsilon \sum_{j=1}^N \left[\frac{m}{2} \left(\frac{x_j - x_{j-1}}{\epsilon} \right)^2 - V\left(\frac{x_j + x_{j-1}}{2} \right) \right]} \\ &= \mathcal{A} \int_{x(0)=x'}^{x(T)=x} \mathcal{D}x(\tau) e^{i \int_0^t d\tau \left(\frac{m}{2} \dot{x}^2 + V(x(\tau)) \right)} = \mathcal{A} \int_{x(0)=x'}^{x(T)=x} \mathcal{D}x(\tau) e^{iS[x(\tau)]}, \end{aligned} \quad (1.11)$$

siendo $\mathcal{A}$ una constante independiente de la dinámica del sistema y S su acción. Esta ecuación se conoce como integral de trayectoria en espacio de configuración. En mecánica cuántica, si un proceso puede tener lugar de distintas formas, la amplitud total debe ser la suma de las amplitudes de las formas distintas en que se lleve a cabo el proceso. La interpretación que tiene la integral funcional es que la partícula, que comienza en el punto x' y termina en el punto x , en un tiempo dado t , se propaga tomando cada uno de los caminos posibles con estas condiciones de los puntos frontera, y cada trayectoria aporta una contribución dada por el exponencial en la integral. La ec. (1.11) puede verse como una generalización del principio de mínima acción, y, si se quiere, como la explicación a este.

1.1.3. Funciones de correlación y ordenamiento temporal

Las funciones de correlación son elementos de matriz de productos de operadores de campos, las cuales podemos representar a través de integrales de trayectorias. Por ejemplo, considerese el siguiente elemento de matriz

$$\langle x, t | \hat{x}(t_1) \hat{x}(t_2) | x', 0 \rangle, \quad t_1 > t_2. \quad (1.12)$$

CAPÍTULO 1. FORMALISMO LÍNEA DE MUNDO

Para expresarlo en términos de la integral de trayectorias, se insertan dos integrales en x a través de la relación de completitud

$$\begin{aligned}
 \langle x, t | \hat{x}(t_1) \hat{x}(t_2) | x', 0 \rangle &= \int dx(t_1) \int dx(t_2) \langle x, t | \hat{x}(t_1) | x_1, t_1 \rangle \langle x_1, t_1 | \hat{x}(t_2) | x_2, t_2 \rangle \langle x_2, t_2 | x', 0 \rangle \\
 &= \int dx(t_1) \int dx(t_2) x(t_1) x(t_2) \langle x, t | x(t_1), t_1 \rangle \times \\
 &\quad \times \langle x(t_1), t_1 | x(t_2), t_2 \rangle \langle x(t_2), t_2 | x', 0 \rangle \\
 &= \mathcal{A} \int_{x(0)=x'}^{x(t)=x} \mathcal{D}x(\tau) x(t_1) x(t_2) e^{iS[x(\tau)]} \tag{1.13}
 \end{aligned}$$

Haciendo prácticamente lo mismo, se puede demostrar que se obtiene el mismo resultado si ahora se considera el elemento de matriz

$$\langle x, t | \hat{x}(t_2) \hat{x}(t_1) | x', 0 \rangle \quad t_2 > t_1, \tag{1.14}$$

de donde podemos ver que la representación en integral de trayectoria incorpora la instrucción de ordenamiento temporal, por lo que podemos escribir

$$\langle x, t | \hat{T}(\hat{x}(t_1) \hat{x}(t_2)) | x', 0 \rangle = \int \mathcal{D}x(\tau) x(t_1) x(t_2) e^{iS[x(\tau)]}, \tag{1.15}$$

con

$$\hat{T}(\hat{x}(t_1) \hat{x}(t_2)) = \Theta(t_1 - t_2) \hat{x}(t_1) \hat{x}(t_2) + \Theta(t_2 - t_1) \hat{x}(t_2) \hat{x}(t_1), \tag{1.16}$$

donde Θ es la función Heavyside. En general, se puede escribir

$$\langle x, t | \hat{T}(\hat{O}_1(\hat{x}(t_1)) \dots \hat{O}_n(\hat{x}(t_n))) | x', 0 \rangle = \int \mathcal{D}x(\tau) O_1(x(t_1)) \dots O_n(x(t_n)) e^{iS[x(\tau)]} \tag{1.17}$$

1.1.4. Estados cuánticos definidos

Al considerar al propagador, estamos analizando la amplitud de transición del sistema entre estados coordenados. Sin embargo, un elemento de interés en aplicaciones físicas son los elementos de la matriz de dispersión. Para esto, se debe analizar la amplitud de transición del estado $|\phi_i\rangle$, al tiempo $t_0 = 0$,

1.1. MECÁNICA CUÁNTICA: REPRESENTACIÓN INTEGRAL DE TRAYECTORIAS

al estado $|\phi_f\rangle$, al tiempo $t_f = t$. Partiendo de esto, insertando relaciones de completez de x , se tiene

$$\begin{aligned}\langle\phi_f|\phi_i\rangle &= \int dx \int dx' \langle\phi_f|x, t\rangle \langle x, t|x', 0\rangle \langle x', 0|\phi_i\rangle \\ &= \int dx \int dx' \phi_f^*(x, t) \phi_i(x', 0) \langle x_f, t|x', 0\rangle \\ &= \mathcal{A} \int dx \int dx' \phi_f^*(x, t) \phi_i(x', 0) \int \mathcal{D}x(\tau) e^{iS[x(\tau)]},\end{aligned}\quad (1.18)$$

con $\phi(x, t)$ la función de onda. De esta forma, las funciones de correlación con ordenamiento temporal entre dichos estados son

$$\begin{aligned}\langle\phi_f|\hat{T}(\hat{O}_1(\hat{x}(t_1))\dots\hat{O}_n(\hat{x}(t_n)))|\phi_i\rangle &= \mathcal{A} \int dx \int dx' \phi_f^*(x, t) \phi_i(x', 0) \times \\ &\quad \times \int_{x(0)=x'}^{x(t)=x} \mathcal{D}x(\tau) O_1(x(t_1))\dots O_n(x(t_n)) e^{iS[x(\tau)]}.\end{aligned}\quad (1.19)$$

Valores esperados pueden calcularse a través de la expresión

$$\begin{aligned}&\langle\hat{T}(\hat{O}_1(\hat{x}(t_1))\dots\hat{O}_n(\hat{x}(t_n)))\rangle \\ &= \frac{\langle\phi_i|\hat{T}(\hat{O}_1(\hat{x}(t_1))\dots\hat{O}_n(\hat{x}(t_n)))|\phi_i\rangle}{\langle\phi_f|\phi_i\rangle} \\ &= \frac{\int dx \int dx' \phi_i^*(x, t) \phi_i(x', 0) \int \mathcal{D}x(\tau) O_1(x(t_1))\dots O_n(x(t_n)) e^{iS[x(\tau)]}}{\int dx \int dx' \phi_i^*(x, t) \phi_i(x', 0) \int \mathcal{D}x(\tau) e^{iS[x(\tau)]}}.\end{aligned}\quad (1.20)$$

Las funciones de correlación se pueden generar en este formalismo a través de derivadas funcionales de una funcional generadora, que surge de la introducción adecuada de corrientes, la cual está dada por

$$Z[x, J] = \langle\phi_i|\phi_i\rangle_J = \int dx \int dx' \phi_i^*(x, t) \phi_i(x', 0) \int \mathcal{D}x(\tau) e^{iS[x(\tau)] + i \int_0^t d\tau J(\tau)x(\tau)},\quad (1.21)$$

con lo que se pueden obtener las funciones de correlación ordenadas temporalmente con la función generadora mediante

$$\langle \hat{T}(\hat{x}(t_1) \dots \hat{x}(t_n)) \rangle = \frac{\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(t_1)} \dots \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(t_n)} Z[x, J]}{Z[x, J]} \Bigg|_{J=0}. \quad (1.22)$$

En particular, la amplitud de transición vacío-vacío, en presencia de una fuente externa J , está dada por [\[23\]](#)

$$\langle 0|0 \rangle_J = Z[J] = \mathcal{A} \int \mathcal{D}x(\tau) e^{i \int_{-\infty}^{\infty} d\tau [L+xJ]}, \quad (1.23)$$

con las funciones de correlación ordenadas temporalmente, en vacío, dadas por

$$\langle \hat{T}(\hat{x}(t_1) \dots \hat{x}(t_n)) \rangle = \frac{\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(t_1)} \dots \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(t_n)} Z[J]}{Z[J]} \Bigg|_{J=0}. \quad (1.24)$$

1.1.5. Grados de libertad fermiónicos

En mecánica cuántica no relativista, la ecuación de Schrödinger debe servir para describir los sistemas tanto de partículas bosónicas como de partículas fermiónicas, por lo que se debe buscar una manera de incluir el principio de exclusión de Pauli cuando se trata con fermiones. Una pieza clave para este análisis es el concepto de variable Grassmann.

Variables Grassmann

La introducción de estas variables es necesaria ya que son variables que anticonmutan (en particular, anticonmutan consigo mismas), por lo que son adecuadas para la descripción de un sistema fermiónico.

Sean θ_j variables Grassmann, entonces, cumplen la relación

$$\theta_i \theta_j + \theta_j \theta_i = 0, \quad j, i = 1, \dots, n. \quad (1.25)$$

En particular, se tiene que

$$(\theta_j)^2 = 0. \quad (1.26)$$

Esto implica que una función de variables de Grassmann sólo puede depender de productos de variables distintas. Sea $f(\theta)$ una función de la variable Grassmann θ , su expansión en serie de Taylor estará dada por

1.1. MECÁNICA CUÁNTICA: REPRESENTACIÓN INTEGRAL DE TRAYECTORIAS

$$f(\theta) = a + b\theta. \quad (1.27)$$

Se define la derivada de variables de Grassmann como

$$\frac{\partial}{\partial \theta_k}(\theta_i \theta_j) = \frac{\partial \theta_i}{\partial \theta_k} \theta_j - \theta_i \frac{\partial \theta_j}{\partial \theta_k} = \delta_{i,k} \theta_j - \theta_i \delta_{j,k} \quad (1.28)$$

Las derivadas $\frac{\partial}{\partial \theta_j}$ también satisfacen las relaciones (1.25) y (1.26). La relación de anticonmutación entre las variables Grassmann y las derivadas son

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \theta_i}, \theta_j \right\} = \frac{\partial}{\partial \theta_i} \theta_j + \theta_j \frac{\partial}{\partial \theta_i} = \delta_{i,j}. \quad (1.29)$$

Se puede definir también la integración sobre variables de Grassmann, también llamada integral de Berezin. La integral de Berezin no se puede definir a través de la suma de Riemann, como usualmente se hace, debido a la naturaleza de las variables Grassmann. Sin embargo, se define para que satisfaga el hecho de que la integral de una derivada total sea nula, esto se cumple si se satisface

$$\int d\theta (af(\theta) + bg(\theta)) = a \int d\theta f(\theta) + b \int d\theta g(\theta) \quad (1.30)$$

$$\int d\theta = 0, \quad (1.30)$$

$$\int d\theta \theta = 1, \quad (1.31)$$

con esto queda completamente definida la integral de una función de una variable Grassmann, ya que la forma general de dicha función es de la forma especificada en la ec. (1.27). De aquí, se puede notar que la acción de la integral es idéntica a la de la derivada

$$\int d\theta f(\theta) = \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta}, \quad (1.32)$$

hecho que puede usarse para, por ejemplo, demostrar que la introducción de un Jacobiano tras un cambio de variable no es como normalmente se hace, sino en este caso se reemplaza por el inverso del Jacobiano.

CAPÍTULO 1. FORMALISMO LÍNEA DE MUNDO

También se puede definir una función delta de Dirac como

$$\delta(\theta) = \theta = \int d\eta e^{-\theta\eta}, \quad (1.33)$$

con η una variable Grassmann, en donde las propiedades que definen a la función delta se pueden demostrar fácilmente.

Estados coherentes

Considérese una base de spín ($|+\rangle, |-\rangle$) y un par de operadores escalera, con la relación de anticonmutación

$$\{\hat{a}, \hat{a}^\dagger\} = 1, \quad (1.34)$$

tal que

$$\begin{aligned} \hat{a} |-\rangle = 0 = \hat{a}^\dagger |+\rangle, \quad \hat{a} |+\rangle = |-\rangle, \quad \hat{a}^\dagger |-\rangle = |+\rangle \\ \Rightarrow \hat{a}^2 = (\hat{a}^\dagger)^2 = 0. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Un estado de spín es entonces un objeto 2-dimensional. Para llegar a la representación línea de mundo, usaremos la base de los estados coherentes, los cuales no son más que los eigenestados del operador de aniquilación $\hat{a}$. Esta base, para el sistema considerado, está conformada de los siguientes estados:

$$|\xi\rangle = e^{\hat{a}^\dagger \xi} |0\rangle, \quad \text{tal que} \quad \hat{a} |\xi\rangle = \xi |\xi\rangle, \quad (1.36)$$

en donde ξ es un número Grassmann y el estado de “vacío” ($|0\rangle = |-\rangle$) se define como el estado base, a través de la aplicación de los operadores escalera. De las propiedades de las variables Grassmann se desprenden las siguientes relaciones

$$\langle \eta | \xi \rangle = e^{\eta \xi} \quad (1.37)$$

$$\int d\eta d\xi e^{-\eta \xi} |\xi\rangle \langle \eta| = \mathbb{I} \quad (1.38)$$

$$\text{tr} A = \int d\eta d\xi e^{-\eta \xi} \langle -\eta | A | \xi \rangle = \int d\xi d\eta e^{\eta \xi} \langle \eta | A | \xi \rangle. \quad (1.39)$$

Con todo esto en mano, podemos escribir

1.1. MECÁNICA CUÁNTICA: REPRESENTACIÓN INTEGRAL DE TRAYECTORIAS

$$\langle \lambda | \eta \rangle = \prod_{i=1}^N \left(\int d\bar{\xi}_i d\xi_i \right) e^{\lambda \xi_N - \sum_{i=1}^N \bar{\xi}_i (\xi_i - \xi_{i-1})}, \quad \bar{\xi}_N \equiv \lambda, \quad \xi_0 \equiv \eta, \quad (1.40)$$

que en el límite $N \rightarrow \infty$ adopta la forma de integral funcional

$$\langle \lambda | \eta \rangle = \int_{\xi(0)=\eta}^{\bar{\xi}(t)=\lambda} \mathcal{D}\bar{\xi} \mathcal{D}\xi e^{i \int_0^t d\tau i \bar{\xi} \dot{\xi}(\tau) - i \bar{\xi} \xi(t)} = \int_{\xi(0)=\eta}^{\xi(t)=\lambda} \mathcal{D}\bar{\xi} \mathcal{D}\xi e^{i S[\xi, \bar{\xi}]}. \quad (1.41)$$

De la misma forma, la representación integral de trayectorias de la amplitud de transición fermiónica está dada por

$$\langle \lambda | e^{-it\hat{H}} | \eta \rangle = \int_{\xi(0)=\eta}^{\bar{\xi}(t)=\lambda} \mathcal{D}\bar{\xi} \mathcal{D}\xi e^{i \int_0^t d\tau (i \bar{\xi} \dot{\xi}(\tau) - H(\xi, \bar{\xi})) - i \bar{\xi} \xi(t)} \quad (1.42)$$

(para asegurar esta forma de la ecuación, el hamiltoniano debe ser uno según el ordenamiento de Weyl, que en el caso fermiónico debe ser antisimétrico).

Para finalizar, notamos que

$$\text{tr } e^{-it\hat{H}} = \int_{\xi(0)=-\xi(t)} \mathcal{D}\bar{\xi} \mathcal{D}\xi e^{i \int_0^t d\tau (\bar{\xi} \dot{\xi}(\tau) - H(\xi, \bar{\xi}))}, \quad (1.43)$$

lo cual corresponde a una integral de trayectoria con condiciones de frontera antiperiódicas (CFA). Reescribiendo la expresión, usando los fermiones de Majorana definidos como

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi^1 + i\psi^2), \quad \bar{\xi} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi^1 - i\psi^2), \quad (1.44)$$

resulta

$$\text{tr } e^{-it\hat{H}} = \int_{\text{CFA}} \mathcal{D}\psi e^{i \int_0^t \frac{i}{2} \psi_a \dot{\psi}^a - H(\psi)}, \quad a = 1, 2. \quad (1.45)$$

En particular, para $\hat{H} = 0$, la integral nos da la dimensión del espacio de Hilbert, que, generalizando al caso donde hay un número arbitrario de pares de operadores de creación y aniquilación, se puede escribir como

$$2^{\frac{D}{2}} = \text{tr } \mathbb{I} = \int_{\text{CFA}} \mathcal{D}\psi e^{i \int_0^t \frac{i}{2} \psi_a \dot{\psi}^a}, \quad a = 1, \dots, D = 2l. \quad (1.46)$$

1.2. Electrodinámica Cuántica Escalar

Para hacer el paso a las teorías cuánticas de campos, se debe pasar al marco relativista. Uno de los lagrangianos que describe la dinámica de las partículas relativistas libres está dado por

$$\mathcal{L} = \int_0^1 d\tau \left(\frac{1}{2e} \dot{x}^2 - \frac{m^2 e}{2} \right), \quad (1.47)$$

en donde fue necesaria la introducción del einbein, e , un nuevo campo. Este lagrangiano sirve tanto para partículas masivas como para no masivas. El hamiltoniano asociado a este Lagrangiano es

$$\mathcal{H} = \frac{e}{2}(p^2 + m^2), \quad (1.48)$$

con la restricción $(p^2 + m^2) = 0$. Ahora se considerará el caso de interacción con un campo electromagnético, para lo cual hacemos la sustitución

$$p_\mu \longrightarrow \pi_\mu = p_\mu - qA_\mu, \quad (1.49)$$

con q la carga eléctrica. De esta forma, la acción está dada por

$$S[x, p, e; A] = \int_0^1 d\tau \left[p_\mu \dot{x}^\mu - \frac{e}{2}(\pi^2 + m^2) \right], \quad (1.50)$$

que en el espacio de configuración es

$$S[x, \dot{x}, e; A] = \int_0^1 d\tau \left[\frac{1}{2e} \dot{x}^2 - \frac{e}{2} m^2 + q \dot{x}^\mu A_\mu \right]. \quad (1.51)$$

Por conveniencia, se realiza una rotación de Wick ($i\tau \rightarrow \tau$) y se sustituye q por $-q$, resultando

$$\frac{1}{i} S[x, \dot{x}, e; A_\mu] = \int_0^1 d\tau \left[\frac{1}{2e} \dot{x}^2 + \frac{e}{2} m^2 + iq \dot{x} \cdot A \right]. \quad (1.52)$$

Al considerar la integral de trayectoria, se analizan dos distintos tipos de líneas: las líneas abiertas, con condiciones de frontera $x(0) = x'$, $x(1) = x$, y las líneas cerradas, con condiciones periódicas para el caso bosónico $x(0) = x(1)$.

1.2.1. Propagador Escalar

La integral de camino asociada a la acción [1.51](#) es

$$\int \mathcal{D}e(u) \int \mathcal{D}x(u) e^{-S[x,e;A_\mu]}. \quad (1.53)$$

La línea abierta puede ser usada para el cálculo del propagador. Usando el método de Faddeev-Popov (un ejemplo particular de la aplicación del método se encuentra en la sección [1.4.1](#)), se puede factorizar el volumen del grupo de reparametrizaciones de la siguiente forma

$$\int \mathcal{D}e(u) \longrightarrow (\text{Vol. del grupo}) \int_0^\infty dT \sigma(T), \quad (1.54)$$

con $\sigma(T)$ el determinante de Faddeev-Popov. Para la línea abierta, $\sigma(T) = 1$, y durante el proceso se fija el einbein a una constante $e = 2T$, por lo que la integral de trayectorias viene dada por

$$\int_0^\infty dT \int_{x(0)=x'}^{x(T)=x} \mathcal{D}x(\tau) e^{-\int_0^T d\tau [\frac{\dot{x}^2}{4} + m^2 + iq\dot{x} \cdot A]}, \quad (1.55)$$

en donde se ha ignorado el volumen del grupo que se ha factorizado, ya que queremos sólo la integral funcional sobre configuraciones no equivalentes.

Lo siguiente es relacionar al propagador con esta integral de trayectorias. El propagador libre está dado por

$$D_0^{xx'} \equiv \langle 0 | \hat{T} \hat{\phi}(\hat{x}) \hat{\phi}(\hat{x}') | 0 \rangle \quad (1.56)$$

Se realiza una rotación de Wick para trabajar en el espacio euclideo, en vez del espacio de Minkowski, lo que implica las siguientes sustituciones

$$\begin{aligned} E = k^0 &= -k_0 \longrightarrow ik_4 \\ t = x^0 &= -x_0 \longrightarrow ix_4, \end{aligned} \quad (1.57)$$

lo que implica a su vez que el D'Alembertiano pasa ahora a ser el operador de Laplace en 4-dimensiones. Usando el tiempo propio T como parámetro de Schwinger [25](#) para exponenciar el operador de Klein-Gordon, se obtiene

$$D_0^{xx'} = \left\langle x \left| \int_0^\infty dT e^{-T(-\hat{\square} + m^2)} \right| x' \right\rangle = \int_0^\infty dT e^{-m^2 T} \left\langle x \left| e^{T\hat{\square}} \right| x' \right\rangle. \quad (1.58)$$

Siguiendo los pasos de la sección 1 para construir la representación integral de trayectoria del propagador, se llega a la representación línea de mundo del propagador escalar libre relativista

$$D_0^{xx'} = \mathcal{A} \int_0^\infty dT e^{-m^2 T} \int_{x(0)=x'}^{x(T)=x} \mathcal{D}x(\tau) e^{-\int_0^T d\tau \frac{\dot{x}^2}{4}}. \quad (1.59)$$

La acción con acoplamiento con un campo electromagnético, de la ec. (1.51), es

$$S[x, A] = \int_0^T \left(\frac{\dot{x}^2}{4} + ie\dot{x} \cdot A[x(\tau)] \right), \quad (1.60)$$

en donde la carga eléctrica se ha renombrado como e , ahora que ya no se puede confundir con el einbein. Por lo tanto, el propagador completo, es decir, el propagador de la partícula escalar que interactúa con el campo A a lo largo de la línea, está dado por³

$$D^{xx'}[A] = \mathcal{A} \int_0^\infty dT e^{-m^2 T} \int_{x(0)=x'}^{x(T)=x} \mathcal{D}x(\tau) e^{-\int_0^T d\tau \left(\frac{\dot{x}^2}{4} + ie\dot{x} \cdot A[x(\tau)] \right)} \quad (1.61)$$

Si consideramos el caso en que la línea interactúe con el campo A a través de fotones con momento y polarización definidos, entonces este campo debe tener la forma

$$A_\mu = \sum_{i=1}^N \epsilon_\mu^i e^{ik_i \cdot x}. \quad (1.62)$$

En este caso, a través de una expansión perturbativa, se tiene

³Notar que aquí ya se está trabajando con un campo escalar complejo, para incluir la interacción electromagnética.

1.2. ELECTRODINÁMICA CUÁNTICA ESCALAR

$$D^{xx'}[A] = \mathcal{A} \int_0^\infty dT e^{-m^2 T} \int_{x(0)=x'}^{x(T)=x} \mathcal{D}x(\tau) e^{-\int_0^T d\tau \left(\frac{\dot{x}^2}{4}\right)} \sum_{n=0}^\infty \frac{\left(-ie \int_0^T d\tau \sum_{i=1}^N \dot{x} \cdot \epsilon^i e^{ip_i \cdot x}\right)^n}{n!} \quad (1.63)$$

$$= \mathcal{A} \int_0^\infty dT e^{-m^2 T} \int_{x(0)=x'}^{x(T)=x} \mathcal{D}x(\tau) e^{-\int_0^T d\tau \left(\frac{\dot{x}^2}{4}\right)} \sum_{n=0}^\infty \frac{(-ie)^n \left(\sum_{i=1}^N V_i[k_i, \epsilon_i]\right)^n}{n!}, \quad (1.64)$$

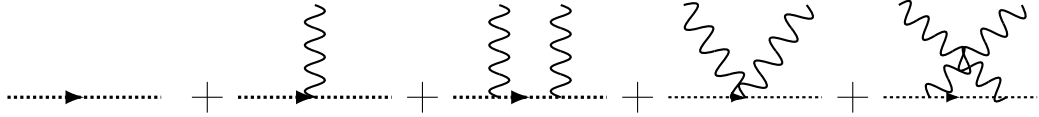
en donde se ha introducido el operador de vértice escalar

$$V_{\text{escalar}}[k, \epsilon] = \int_0^T d\tau \epsilon \cdot \dot{x}(\tau) e^{ik \cdot x(\tau)}. \quad (1.65)$$

Trabajando sólo con la expresión ($N!$ expresiones que representan lo mismo, lo cual cancela al $n!$ del denominador) que representa la interacción con N fotones con momentos y polarizaciones distintas, se obtiene

$$D_N^{xx'}[A] = \mathcal{A} \int_0^\infty dT e^{-m^2 T} \int_{x(0)=x'}^{x(T)=x} \mathcal{D}x(\tau) e^{-\int_0^T d\tau \left(\frac{\dot{x}^2}{4}\right)} (-ie)^N \prod_{i=1}^N V_i[k_i, \epsilon_i]. \quad (1.66)$$

De esta forma, el propagador vestido está dado por $D^{xx'}[A] = \sum_{N=0}^\infty D_N^{xx'}$, lo cual diagramáticamente está representado por



1.2.2. Acción efectiva

Como se vió, el propagador puede representarse a través de integrales de caminos sobre líneas abiertas. Las líneas cerradas también son útiles, y sirven para dar una representación en línea de mundo de la acción efectiva, la cual se utiliza para hacer cálculos a 1-loop. En este caso, el determinante de Faddeev-Popov resulta $\sigma(T) = \frac{1}{T}$, por lo que la acción efectiva está dada por

$$\Gamma[A] = \int_0^\infty \frac{dT}{T} e^{-m^2 T} \int_{x(T)=x(0)} \mathcal{D}x(\tau) e^{-\int_0^T d\tau \left(\frac{\dot{x}^2}{4} + ie\dot{x} \cdot A[x(\tau)] \right)}. \quad (1.67)$$

De manera perturbativa, el cálculo de esta acción efectiva corresponde al cálculo de una serie de diagramas de Feynman como el de la figura [1.2.2](#)

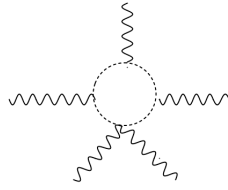


Figura 1.1: Diagrama de Feynman a un loop con cinco fotones externos.

Esta acción efectiva contiene la información de los efectos debidos a la interacción de la partícula con un vacío que contiene al campo electromagnético de fondo (lo que, por ejemplo, causa que la teoría electromagnética sea no lineal, al permitir interacción entre fotones, aun que de manera indirecta).

1.3. Electrodinámica cuántica spinorial

Análogamente a la electrodinámica cuántica escalar, se pueden definir el propagador y la acción efectiva en el caso de partículas fermiónicas, con la ayuda de las variables tipo Grassmann. En este caso, es posible separar la contribución que viene por la inclusión del espín, resultando un término análogo al caso escalar y otro que incorpora la información del espín.

1.3.1. Propagador Fermiónico

La amplitud de transición de una partícula de espín $\frac{1}{2}$ de la posición x' y estado de espín β a la posición x con estado de espín α con un campo electromagnético de fondo, está dada por

$$S_{\alpha\beta}^{xx'} = \langle x, \alpha | [\not{p} + e\not{A} + m]^{-1} | \beta, x' \rangle. \quad (1.68)$$

Se puede separar la información que viene tras la inclusión del espín en la función de Green multiplicándola por $-(\not{p} + e\not{A}) + m$, esto es

$$\begin{aligned}
 S_{\alpha\beta}^{xx'} &= (-\not{p} - e\not{A} + m)_{\alpha\rho} \langle x, \rho | [-(\not{p} + e\not{A})^2 + m^2]^{-1} | \beta, x' \rangle \\
 &= (-\not{p} - e\not{A} + m)_{\alpha\rho} \langle x, \rho | [(p + eA)^2 + m^2 + \frac{ie}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu}]^{-1} | \beta, x' \rangle,
 \end{aligned}
 \tag{1.69}$$

en donde el término $\frac{ie}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu}$ lleva la información de la interacción del spín con el campo electromagnético. Este término, junto con el operador de Dirac que se encuentra como prefactor, son la diferencia entre el caso escalar y spinorial. Con esto, siguiendo el mismo proceso que con el propagador escalar, se obtiene

$$S_{\alpha\beta}^{xx'} = [m + i\not{\partial} - e\not{A}]_{\alpha\rho} K_{\rho\beta}^{xx'}, \tag{1.70}$$

con

$$K_{\rho\beta}^{aa'} = \int_0^\infty dT e^{-m^2 T} \int_{x(0)=x'}^{x(T)=x} \mathcal{D}x(\tau) e^{-\int_0^T d\tau \left[\frac{\dot{x}^2}{4} + ie\dot{x} \cdot A[x(\tau)] \right]} \mathcal{S}_{\rho\beta}[x, A], \tag{1.71}$$

$$\mathcal{S}_{\rho\beta}[x, A] = \mathcal{P} \left\{ e^{-\frac{ie}{2} \int_0^T d\tau \gamma^\mu F_{\mu\nu}[x(\tau)] \gamma^\nu} \right\}_{\rho\beta}. \tag{1.72}$$

Este exponencial ordenado en el tiempo se puede representar de muchas formas. Una que ha resultado útil [26] [27] [28] [29] en línea de mundo se logra a través de variables de Grassmann, la cual tiene la forma

$$\mathcal{S}_{\rho\beta}[x, A] = 2^{-\frac{D}{2}} \text{symb}^{-1} \left\{ \int_{\xi(0)+\xi(T)=2\eta} \mathcal{D}\xi(\tau) e^{-\int_0^T d\tau \left[\frac{1}{2} \xi \cdot \dot{\xi} - ie \xi \cdot F[x(\tau)] \cdot \xi \right] - \frac{1}{2} \xi(T) \cdot \xi(0)} \right\}_{\rho\beta}. \tag{1.73}$$

Con η una variable Grassmann. Las matrices de Dirac son generadas por los η a través del mapeo simbólico, el cual se define como

$$\text{symb} \{ \hat{\gamma}^{[\alpha} \hat{\gamma}^{\beta} \dots \hat{\gamma}^{\rho]} \} = \eta^\alpha \eta^\beta \dots \eta^\rho; \quad \hat{\gamma} = \frac{i}{\sqrt{2}} \gamma. \tag{1.74}$$

Un cambio de variables de integración $\xi^\mu(\tau) = \psi^\mu(\tau) + \eta^\mu$ permite expresar al propagador en función de una integral con condiciones antiperiódicas

$$\mathcal{S}_{\rho\beta}[x, A] = 2^{-\frac{D}{2}} \text{symb}^{-1} \left\{ \oint_{\text{AP}} \mathcal{D}\psi(\tau) e^{-\int_0^T d\tau \left[\frac{1}{2} \dot{\psi} \cdot \dot{\psi} - ie(\psi + \eta) \cdot F[x(\tau)] \cdot (\psi + \eta) \right]} \right\}_{\rho\beta} \quad (1.75)$$

Con esto, la acción de la representación integral de camino del propagador está dada por

$$S[x, \psi; A] = \int_0^T d\tau \left[\frac{\dot{x}^2}{4} + \frac{1}{2} \dot{\psi} \cdot \dot{\psi} + ie \dot{x} \cdot A[x(\tau)] - ie(\psi + \eta) \cdot F[x(\tau)] \cdot (\psi + \eta) \right]. \quad (1.76)$$

Para el análisis de procesos con fotones de momento definido, se representa al potencial electromagnético en ondas planas

$$A_\mu[x(\tau)] = \sum_{i=1}^N \epsilon_\mu^i e^{ik_i \cdot x(\tau)} \Rightarrow F_{\mu\nu}[x(\tau)] = i \sum_{i=1}^N f_{i\mu\nu} e^{ik_i \cdot x(\tau)}, \quad (1.77)$$

con

$$f_{i\mu\nu} = k_{i\mu} \epsilon_{i\nu} - \epsilon_{i\mu} k_{i\nu}. \quad (1.78)$$

La interacción de un fotón con la línea fermiónica viene representada con un operador de vértice, dado por

$$V_{\text{spin}}[k, \epsilon; \eta] = \int_0^T d\tau [\epsilon \cdot \dot{x}(\tau) + 2i\epsilon \cdot (\psi + \eta) k \cdot (\psi + \eta)] e^{ik \cdot x(\tau)}. \quad (1.79)$$

1.3.2. Super simetría

La acción (1.76) es invariante ante las transformaciones globales

$$\begin{aligned} \delta_\theta x^\mu &= -2\theta \psi^\mu \\ \delta_\theta \psi^\mu &= \theta \dot{x}^\mu, \end{aligned} \quad (1.80)$$

con θ una variable Grassmann. Esto se puede ver de manera directa o recurriendo al superspacio. El superspacio es una extensión del espacio de Minkowski que se logra incorporando un grado de libertad representado por una variable de Grassmann, θ . De esta forma, los objetos en este espacio,

llamados supercampos, dependen tanto del parámetro τ como de θ . Estos supercampos están definidos de la siguiente forma

$$\mathbb{X}^\mu(\tau, \theta) = x^\mu(\tau) - \sqrt{2}\theta(\psi^\mu(\tau) + \eta^\mu). \quad (1.81)$$

También se define una extensión de la derivada, dada por

$$\mathbb{D} = \partial_\theta - \theta\partial_\tau. \quad (1.82)$$

Entonces, cualquier objeto escrito en términos de integrales de Berezin de supercampos es invariante ante las transformaciones supersimétricas. En particular, la acción (1.76) se puede representar en términos de supercampos, la parte libre y de interacción de manera independiente, lo que implica que son invariantes ante las transformaciones de supersimetría por separado. La acción en términos de supercampos está dada por

$$S[x, \psi; A] = - \int_0^T d\tau \int d\theta \left[-\frac{1}{4} \mathbb{X} \cdot \mathbb{D}^3 \mathbb{X} - ieA[\mathbb{X}] \cdot \mathbb{D} \mathbb{X} \right]. \quad (1.83)$$

La ventaja, además de manifestar la invariancia ante transformaciones supersimétricas, es que permite escribir la acción de forma cuadrática para la representación en ondas planas de A_μ , por lo que podemos realizar una integración gaussiana, y además simplifica bastante las expresiones, haciéndolas más manejables en el desarrollo de las transformaciones LKF.

1.4. Simetría de norma

La teoría de la electrodinámica cuántica puede construirse imponiendo que el lagrangiano de una partícula libre de espín $\frac{1}{2}$ sea invariante ante transformaciones locales del grupo $U(1)_{\text{EM}}$, es decir, que ante las transformaciones

$$\begin{aligned} \psi(x) &\longrightarrow e^{ie\phi(x)}\psi(x) \\ A_\mu &\longrightarrow A_\mu + \frac{\partial\phi(x)}{\partial x^\mu}, \end{aligned} \quad (1.84)$$

el lagrangiano resulte de la misma forma, donde el campo $\phi(x)$ es un campo arbitrario.

El hecho de que una teoría cuántica de campos sea invariante ante un cierto grupo de transformaciones de norma tiene muchas implicaciones. Este

CAPÍTULO 1. FORMALISMO LÍNEA DE MUNDO

conjunto tan reducido de teorías cuánticas fueron de gran interés una vez se relacionara esto con la renormalizabilidad de la teoría, que por 1945 ya se creía así, aunque formalmente no fue demostrado sino hasta 1970 por 't Hooft [30]. Así, por ejemplo, después de la creación de la QED, la teoría de la interacción débil se construyó también como una teoría con un lagrangiano invariante ante un tipo de transformaciones de norma, para asegurar que la teoría fuese renormalizable.

Otra consecuencia que deriva de la invariancia de norma de la QED es la llamada identidad de Ward-Takahashi

$$\begin{aligned} & \partial_\mu \langle 0 | \hat{T} \hat{j}^\mu(x) \hat{\psi}(x_1) \cdots \hat{\psi}(x_n) \hat{\bar{\psi}}(x'_1) \cdots \hat{\bar{\psi}}(x'_n) | 0 \rangle \\ &= e \sum_i \left(-\delta(x - x_i) \langle 0 | \hat{T} \hat{\psi}(x_1) \cdots \hat{\psi}(x_n) \hat{\bar{\psi}}(x'_1) \cdots \hat{\bar{\psi}}(x'_n) | 0 \rangle \right. \\ & \quad \left. + \delta(x - x'_i) \langle 0 | \hat{T} \hat{\psi}(x_1) \cdots \hat{\psi}(x_n) \hat{\bar{\psi}}(x'_1) \cdots \hat{\bar{\psi}}(x'_n) | 0 \rangle \right), \end{aligned} \quad (1.85)$$

donde j^μ es la corriente conservada de Noether del lagrangiano clásico. Esta identidad es una generalización de la conservación de la corriente de Noether para teorías cuánticas de campos. Del lado derecho de la ecuación se encuentran los llamados términos de contacto, los cuales siempre aparecen añadidos a las relaciones que clásicamente se tendrían. Estos términos no contribuyen a la matriz de dispersión, lo cual se puede ver a través de la fórmula LSZ (los términos no cuentan con los polos necesarios). La transformada de Fourier de esta identidad viene dada por

$$\begin{aligned} k_\mu \mathcal{M}^\mu(k; p_1 \cdots p_n; q_1 \cdots q_n) &= e \sum_i [\mathcal{M}_0(p_1 \cdots p_n; q_1 \cdots (q_i - k) \cdots) \\ & \quad - \mathcal{M}_0(p_1 \cdots (p_i + k) \cdots; q_1 \cdots q_n)] \end{aligned} \quad (1.86)$$

donde los momentos q_i pertenecen a electrones saliendo y los momentos p_i a electrones entrando, ninguno de los cuales debe necesariamente estar on-shell. $\mathcal{M}_0$ representa una amplitud para un diagrama con n electrones entrando y n electrones saliendo y $\mathcal{M}$ representa todas las posibilidades de introducir un fotón externo con momento k^μ en $\mathcal{M}_0$. El caso particular para elementos de la matriz de dispersión, donde todas las partículas externas están on-shell, la identidad de Ward-Takahashi se reduce a la identidad de Ward

$$k^\mu \mathcal{M}_\mu = 0. \quad (1.87)$$

1.4.1. Norma R_ξ

Considérese la electrodinámica cuántica como teoría de norma. El hecho de que la EDC sea invariante ante algún tipo de transformaciones nos dice que existen configuraciones equivalentes asociadas por estas transformaciones. En particular, al momento de cuantizar se pueden encontrar problemas si no se trabaja sólo con configuraciones inequivalentes del sistema, no relacionadas por las transformaciones de norma. Por ejemplo, para calcular el propagador del fotón, el cual se usa en el cálculo de diagramas de Feynman, se necesita el operador inverso de la parte cinética del lagrangiano

$$F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = A^\mu \Delta_{\mu\nu} A^\nu. \quad (1.88)$$

Entonces, se necesita al operador inverso de $\Delta_{\mu\nu} = 2[-\delta_{\mu\nu}\square + \partial_\mu\partial_\nu]$. Sin embargo, para un $\alpha(x)$ arbitrario,

$$\Delta_{\mu\nu}\partial^\nu\alpha(x) = 0, \quad (1.89)$$

por lo que el operador $\Delta_{\mu\nu}$ tiene eigenvalores 0 asociados a eigenvectores no triviales, luego no puede obtenerse su inversa. Esas configuraciones son aquellas que son equivalentes a 0 por las transformaciones de norma, por lo que para resolver el problema es necesario separar las configuraciones inequivalentes. En este trabajo, eso se logra a través del método de Faddeev-Popov.

Siguiendo [31], el punto es elegir una restricción, $G[A](x) = 0$, de tal forma que sólo se tome en cuenta una configuración para cada conjunto equivalente de configuraciones. Al hecho de imponer esta restricción en este caso se le conoce como fijar la norma. La restricción que se impondrá aquí es una un poco más general que la de Lorentz:

$$G[A, \Omega](x) = \partial^\mu A_\mu(x) - \Omega(x), \quad (1.90)$$

donde $\Omega(x)$ es una función que fija completamente la norma.

Se asumirá que $G[A', \Omega]$ se anula en sólo una configuración de cada conjunto de configuraciones equivalentes, con A' el campo tras una transformación de norma

$$A'_\mu = A_\mu + (\partial_\mu\alpha). \quad (1.91)$$

Usando la identidad de la funcional delta

$$\begin{aligned}
 1 &= \int \mathcal{D}\alpha \delta[G[A', \Omega]] \text{Det}_{x,y} \left(\frac{\delta G[A', \Omega](x)}{\delta \alpha(y)} \right) \\
 &= \text{Det}(\partial^2) \int \mathcal{D}\alpha \delta[G[A', \Omega]], \tag{1.92}
 \end{aligned}$$

con la derivada funcional dada por

$$\frac{\delta G[A', \Omega](x)}{\delta \alpha(y)} = \delta^4(x - y) \partial^2. \tag{1.93}$$

El método de Faddeev-Popov consiste en insertar la identidad (1.92) en la integral de trayectorias para el campo electromagnético:

$$\begin{aligned}
 Z[A] &= \int \mathcal{D}A \, e^{-\frac{1}{4} \int d^D x \, F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}} \\
 &= \int \mathcal{D}A \, \text{Det}(\partial^2) \int \mathcal{D}\alpha \delta[G[A', \Omega]] e^{-\frac{1}{4} \int d^D x \, F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}}. \tag{1.94}
 \end{aligned}$$

Tras una transformación de norma en esta integral, la acción electromagnética y la medida de integración quedan invariantes, por lo que se puede hacer una transformación con el único cambio de que la dependencia de la funcional G pase de A' a A , entonces

$$\begin{aligned}
 Z[A] &= \int \mathcal{D}A \, \text{Det}(\partial^2) \int \mathcal{D}\alpha \delta[G[A, \Omega]] e^{-\frac{1}{4} \int d^D x \, F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}} \\
 &= \text{Det}(\partial^2) \left(\int \mathcal{D}\alpha \right) \int \mathcal{D}A \, \delta[G[A, \Omega]] e^{-\frac{1}{4} \int d^D x \, F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}}, \tag{1.95}
 \end{aligned}$$

vemos que de esta forma se ha separado el volumen de la simetría de la integral sobre trayectorias de configuraciones inequivalentes.

Un último truco ayuda a usar la funcional delta. El lado derecho de la ecuación es válido para cualquier Ω , entonces debe ser válido para una superposición de estos. En particular, integrando sobre todos los Ω con un peso gaussiano dado por

$$S_\Omega = -\frac{1}{2\xi} \int dx^4 \Omega^2, \tag{1.96}$$

se obtiene

$$Z[A] \sim N(\xi) \int \mathcal{D}\Omega \int \mathcal{D}A \delta[G[A, \Omega]] e^{-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + S_\Omega}, \quad (1.97)$$

en donde se puede realizar la integral sobre Ω usando la funcional delta. Integrando y redefiniendo a la integral de camino sin las constantes (aun que divergentes), ya que en las funciones de correlación se cancelarán y no jugarán ningún papel, se obtiene finalmente la integral

$$Z[A] = \int \mathcal{D}A \, e^{-\frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} \int d^4x (\partial \cdot A)^2}. \quad (1.98)$$

Esta forma de fijar la norma del Lagrangiano electromagnético se conoce como norma R_ξ . El parámetro ξ puede ser fijado con algún valor numérico como 0 (norma de Landau) o 1 (norma de Feynman) y las cantidades físicas no dependerán de él, esto puede ser demostrado directamente en EDC a través de la identidad de Ward-Takahashi.

CAPÍTULO 1. FORMALISMO LÍNEA DE MUNDO

Capítulo 2

Generalización de las transformaciones Landau-Khalatnikov-Fradkin en la QED

Para los cálculos de los propagadores o de los operadores de vértice, en general para las funciones de correlación, se suele fijar la norma para desarrollar los cálculos. La elección de una norma específica se elige a conveniencia, por ejemplo, puede simplificar los cálculos si se está trabajando de manera perturbativa, alguna otra elección podría manifestar la naturaleza transversal de los fotones, etc. Al final, cualquier observable física debe, por supuesto, ser independiente de la elección de la norma.

En 1955, Landau, Khalatnikov y, de manera independiente, Fradkin analizaron como cambian las funciones de Green de partículas cargadas, en la QED, tras un cambio de la norma. Como resultado, se obtuvieron las transformaciones LKF, transformaciones que dictan como cambian estas funciones de Green tras el cambio de la norma en el espacio de configuraciones. Estas transformaciones, además, son no perturbativas, por lo que se pueden usar a cualquier orden en la teoría de perturbación y nos permiten obtener información de términos de mayores loops a partir de términos de menores loops.

Dichas transformaciones se aplican ya sea para obtener un propagador en otra norma, obtener información de la dependencia de la norma del propagador a órdenes más altos en teoría de perturbación o se pueden aplicar al estudio de la covariancia de norma de las ecuaciones de Schinger-Dyson y de sus soluciones en QCD.

2.1. Transformación LKF

En esta sección se deriva la transformación LKF para la QED, basandose en el trabajo original de Landau y Khalatnikov [5]. Considérese una transformación de norma en QED

$$\begin{aligned}\hat{A}_\mu &\longrightarrow \hat{A}_\mu + \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x^\mu} \\ \hat{\psi} &\longrightarrow \hat{\psi} e^{ie\hat{\phi}},\end{aligned}\tag{2.1}$$

con $\hat{\phi}$ un operador función arbitrario, el cual se trata como campo libre [5]. El propagador fermiónico estará dado tras la transformación de norma por

$$S_{\alpha\beta}^{xx'} = (S_0)_{\alpha\beta}^{xx'} \langle \hat{T} e^{ie\hat{\phi}(x)} e^{-ie\hat{\phi}(x')} \rangle, \tag{2.2}$$

en donde antes de la transformación, se fija una norma arbitraria. $(S_0)_{\alpha\beta}^{xx'}$ es el propagador del fermión en esta norma. Expandiendo al campo $\hat{\phi}$ en ondas planas, se tiene

$$\hat{\phi} = \sum_k \hat{\varphi}_k = \sum_k \lambda(k^2) (\hat{a}_k^\dagger e^{ik \cdot x} + \hat{a}_k e^{-ik \cdot x}), \tag{2.3}$$

Como λ es pequeño, se pueden expandir las exponenciales hasta orden cuadrático en λ y despreciar los demás términos. Además, el valor de expectación del campo $\hat{\phi}$ en el vacío es nulo, por lo que se obtiene

$$\begin{aligned}\langle \hat{T} e^{ie\hat{\phi}(x)} e^{-ie\hat{\phi}(x')} \rangle &= \left\langle \hat{T} \prod_k (1 + ie\hat{\varphi}_k - \frac{e^2}{2} \hat{\varphi}_k^2) \prod_l (1 - ie\hat{\varphi}'_l - \frac{e^2}{2} (\hat{\varphi}'_l)^2) \right\rangle \\ &= \prod_k (1 - \frac{e^2}{2} \langle \hat{\varphi}_k^2 \rangle - \frac{e^2}{2} \langle (\hat{\varphi}'_k)^2 \rangle + e^2 \langle \hat{T} \hat{\varphi}_k \hat{\varphi}'_k \rangle) \\ &= e^{-\frac{1}{2}e^2 \sum_k [\langle \hat{\varphi}_k^2 \rangle + \langle (\hat{\varphi}'_k)^2 \rangle - 2\langle \hat{T} \hat{\varphi}_k \hat{\varphi}'_k \rangle]}.\end{aligned}\tag{2.4}$$

El propagador del campo $\hat{\phi}$ está dado por

$$\Delta_F(xx') = i \langle \hat{T} \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(x') \rangle = i \sum_k \langle \hat{T} \hat{\varphi}_k \hat{\varphi}'_k \rangle, \tag{2.5}$$

lo que permite simplificar la expresión para el propagador fermiónico en la nueva norma, dando como resultado

$$S_{\alpha\beta}^{xx'} = (S_0)_{\alpha\beta}^{xx'} e^{ie^2(\Delta_F(0) - \Delta_F(xx'))}. \quad (2.6)$$

El propagador del fotón en el espacio de momentos, en la norma inicial, puede escribirse en general como

$$D_{0\mu\nu}(k) = d_t \frac{1}{k^2} \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) + d_l \frac{k_\mu k_\nu}{k^4}. \quad (2.7)$$

Tras la transformación de norma, el propagador del fotón cambia solamente en su parte longitudinal, la parte transversal queda exactamente igual. Usando las siguientes funciones de correlación [\[32\]](#)

$$\begin{aligned} \langle \hat{A}(k) \hat{\phi}(-k) \rangle_\xi &= -i\xi \frac{k_\mu}{k^4} \\ \langle \hat{\phi}(k) \hat{\phi}(-k) \rangle_\xi &= \frac{\xi}{k^4} \end{aligned} \quad (2.8)$$

se obtiene que

$$D_{\mu\nu}(xx') = i \langle \hat{T} \hat{A}_\mu(x) \hat{A}_\nu(x') \rangle + i \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x'^\nu} \langle \hat{T} \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(x') \rangle \quad (2.9)$$

que en el espacio de momentos está dado por:

$$D_{\mu\nu}(k) = d_t \frac{1}{k^2} \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) + (d_l + \Delta d_l) \frac{k_\mu k_\nu}{k^4} \quad (2.10)$$

en donde Δd_l representa el cambio del propagador del fotón tras la transformación de norma. De aquí, podemos identificar al propagador del campo ϕ como la parte generada en el propagador del fotón

$$\Delta_F(k) = \frac{\Delta d_l}{k^4}. \quad (2.11)$$

Del propagador del fotón en el espacio de configuraciones en D-dimensiones, se obtiene la forma específica del propagador del campo ϕ , la cual está dada por

$$\Delta_F^{(D)}(x) = -\frac{i\Delta\xi}{16\pi^{\frac{D}{2}}}(\mu x)^{4-D}\Gamma\left(\frac{D}{2}-2\right) \quad (2.12)$$

La transformación dada por la ec. (2.6) se conoce como transformación LKF, la cual relaciona al propagador fermiónico en dos normas distintas, derivada originalmente por Landau, Khalatnikov y Fradkin. Esta transformación está dada en el espacio de configuración, por lo que, aun que tenga una forma muy simple, por lo general es muy complicada de aplicar, ya que el propagador tiene una forma razonablemente amigable en el espacio de momentos, pero se vuelve mucho más complicada en el espacio de configuraciones. Se puede notar que la demostración anterior sirve tanto para la EDC escalar o spinorial.

En algunos casos particulares es posible llevar la transformación LKF al espacio de momentos, como lo es, por ejemplo, en la EDC escalar en 3 dimensiones.

2.2. Generalización de las transformaciones LKF en la QED escalar

Del capítulo 1, siguiendo a [20], la representación worldline del propagador apagado de una partícula escalar de masa m que se propaga del evento x' al evento x en la presencia de un campo electromagnético externo, descrito por el campo A^μ , es

$$\Gamma[x, x', A] = \int_0^\infty dT e^{-m^2 T} \int_{x(0)=x'}^{x(T)=x} \mathcal{D}x(\tau) e^{-S_0 - S_e - S_i}, \quad (2.13)$$

con

$$\begin{aligned} S_0 &= \int_0^T d\tau \frac{1}{4} \dot{x}^2, \\ S_e &= ie \int_0^T d\tau \dot{x} \cdot A[x(\tau)], \\ S_i &= \frac{e^2}{2} \int_0^T d\tau_1 \int_0^T d\tau_2 \dot{x}_1 \cdot D(x_1 - x_2) \cdot \dot{x}_2. \end{aligned} \quad (2.14)$$

El término S_0 describe la propagación libre de la partícula escalar; S_e describe la interacción entre la partícula escalar y el campo externo A^μ y S_i describe fotones virtuales interactuando a lo largo de la trayectoria. $D_{\mu\nu}$ es el propagador del fotón en el espacio de configuraciones en D dimensiones, el cual está dado en una norma covariante arbitraria por

2.2. GENERALIZACIÓN DE LAS TRANSFORMACIONES LKF EN LA QED ESCALAR

$$D_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{4\pi^{\frac{D}{2}}} \left[\frac{1+\xi}{2} \Gamma\left(\frac{D}{2} - 1\right) \frac{\delta_{\mu\nu}}{x^{2\frac{D}{2}-1}} + (1-\xi) \Gamma\left(\frac{D}{2}\right) \frac{x_\mu x_\nu}{x^{2\frac{D}{2}}} \right]. \quad (2.15)$$

En particular, se trabajará con fotones externos de momento definido, por lo que se puede expresar al campo A^μ en ondas planas

$$A^\mu = \sum_{i=1}^N \epsilon_i^\mu e^{ik_i \cdot x}. \quad (2.16)$$

De esta forma, la expansión perturbativa de la ec. (2.13) genera los diagramas de Feynman los cuales representan correcciones al propagador desnudo. La interacción de un fotón externo con la línea se representa a través de un operador de vértice, dado por (1.65). Por convención, el momento de los fotones externos se define entrando hacia el vértice. El integrando de S_i , de la ec. (2.14), se puede expresar de la forma

$$\frac{1}{4\pi^{\frac{D}{2}}} \left[\Gamma\left(\frac{D}{2} - 1\right) \frac{\dot{x}_1 \cdot \dot{x}_2}{[(x_1 - x_2)^2]^{\frac{D}{2}-1}} - \frac{1-\xi}{4} \Gamma\left(\frac{D}{2} - 2\right) \frac{\partial}{\partial \tau_1} \frac{\partial}{\partial \tau_2} [(x_1 - x_2)^2]^{2-\frac{D}{2}} \right], \quad (2.17)$$

lo cual es útil, ya que muestra que un cambio en el parámetro de norma covariante sólo contribuiría con un término de derivada total.

Realizando una transformación de norma al i -ésimo fotón externo (lo cual es posible y sencillo en este formalismo), $\epsilon_i \rightarrow \epsilon_i + \xi k_i$, el operador de vértice resulta

$$V_{\text{scal}}[\epsilon_i, k_i] \rightarrow V_{\text{scal}}[\epsilon_i, k_i] - i\xi \int_0^T \frac{\partial}{\partial \tau_i} e^{ik_i \cdot x(\tau_i)} = V_{\text{scal}}[\epsilon_i, k_i] - i\xi \left(e^{ik_i \cdot x} - e^{ik_i \cdot x'} \right). \quad (2.18)$$

Para la línea cerrada, el término que depende de los puntos extremos se anula; para la línea abierta, este término permanece, pero, debido a la identidad de Ward (1.87), no contribuye a los elementos de matriz on-shell.

Realizando la transformación de norma ahora para los fotones internos representados por los factores $-S_i$ de la ec. (2.14), y usando la ec. (2.17), se ve que el cambio de S_i es

$$\Delta_\xi S_i = \Delta_\xi \frac{e^2}{32\pi^{\frac{D}{2}}} \Gamma\left(\frac{D}{2} - 2\right) \int_0^T d\tau_1 \int_0^T d\tau_2 \frac{\partial}{\partial \tau_1} \frac{\partial}{\partial \tau_2} [(x_1 - x_2)^2]^{2-\frac{D}{2}}. \quad (2.19)$$

CAPÍTULO 2. GENERALIZACIÓN DE LAS TRANSFORMACIONES LANDAU-KHALATNIKOV-FRADKIN EN LA QED

Esto implica que, si el fotón está unido, al menos por uno de sus extremos, por un lazo cerrado, el resultado será nulo. Por lo tanto, las propiedades de transformación de una amplitud ante un cambio de norma están determinadas por el intercambio de fotones virtuales entre líneas abiertas diferentes o entre la misma línea, por lo que se puede ignorar la interacción con los fotones externos, ya que no es necesaria para el análisis de la transformación. La función de correlación apagada de $N(= 2n)$ puntos escalar

$$A^{\text{qu}}(x_1, \dots, x_n; x'_1, \dots, x'_n | \xi) \equiv \langle \hat{T} \hat{\phi}(x_1) \dots \hat{\phi}(x_n) \hat{\phi}^*(x'_1) \dots \hat{\phi}^*(x'_n) \rangle, \quad (2.20)$$

contiene $n!$ contribuciones, cada una de las cuales está dada por la forma de juntar los operadores de campo $\hat{\phi}(x), \dots, \hat{\phi}(x_n)$ con los operadores campos conjugados $\hat{\phi}^*(x'_1), \dots, \hat{\phi}^*(x'_n)$, por lo que realmente lo que es necesario analizar es la amplitud parcial, $A^{\text{qu}}_\pi(x_1, \dots, x_n; x'_{\pi(1)}, \dots, x'_{\pi(n)} | \xi)$, en la que la línea que termina en x_i comienza en $x_{\pi(i)}$, relacionadas por

$$A^{\text{qu}}(x_1, \dots, x_n; x'_1, \dots, x'_n | \xi) = \sum_{\pi \in S_n} A^{\text{qu}}_\pi(x_1, \dots, x_n; x'_{\pi(1)}, \dots, x'_{\pi(n)} | \xi). \quad (2.21)$$

La representación worldline de esta amplitud parcial, la cual es una generalización de la ec. (2.13), es

$$A^{\text{qu}}_\pi(x_1, \dots, x_n; x'_{\pi(1)}, \dots, x'_{\pi(n)} | \xi) = \prod_{l=1}^n \int_0^\infty dT_l e^{-m^2 T_l} \int_{x_l(0)=x'_{\pi(l)}}^{x_l(T_l)=x_l} \mathcal{D}x_l(\tau_l) e^{-\sum_{l=1}^n S_0^{(l)} - \sum_{k,l=1}^n S_{i\pi}^{(k,l)}}, \quad (2.22)$$

en donde el término $S_{i\pi}^{(k,l)}$ representa a los fotones virtuales entre las líneas k y l , dado por

$$S_{i\pi}^{(k,l)} = \frac{e^2}{2} \int_0^{T_k} d\tau_k \int_0^{T_l} d\tau_l \dot{x}_k \cdot D(x_k - x_l) \cdot \dot{x}_l. \quad (2.23)$$

Realizando la transformación de norma, recordando la ec. (2.19), se obtiene

$$A^{\text{qu}}_\pi(x_1, \dots, x_n; x'_{\pi(1)}, \dots, x'_{\pi(n)} | \xi + \Delta\xi) = \prod_{l=1}^n \int_0^\infty dT_l e^{-m^2 T_l} \int_{x_l(0)=x'_{\pi(l)}}^{x_l(T_l)=x_l} \mathcal{D}x_l(\tau_l) e^{-\sum_{l=1}^n S_0^{(l)} - \sum_{k,l=1}^n (S_{i\pi}^{(k,l)} + \Delta\xi S_{i\pi}^{(k,l)})}, \quad (2.24)$$

con

$$\begin{aligned} \Delta\xi S_{i\pi}^{(k,l)} = \Delta\xi \frac{e^2}{32\pi^{\frac{D}{2}}} \Gamma\left(\frac{D}{2} - 2\right) \Big\{ & [(x_k - x_l)^2]^{2-\frac{D}{2}} - [(x_k - x'_{\pi(l)})^2]^{2-\frac{D}{2}} \\ & - [(x'_{\pi(k)} - x_l)^2]^{2-\frac{D}{2}} + [(x'_{\pi(k)} - x'_{\pi(l)})^2]^{2-\frac{D}{2}} \Big\}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

2.3. GENERALIZACIÓN DE LAS TRANSFORMACIONES LKF EN LA QED SPINORIAL

El exponencial en la ec. (2.24) que involucra al término de la ec. (2.25) depende sólo de los puntos extremos de la trayectoria, por lo que puede salir de la integral funcional, y así se puede escribir

$$A_{\pi}^{\text{qu}}(x_1, \dots, x_n; x'_{\pi(1)}, \dots, x'_{\pi(n)} | \xi + \Delta\xi) = T_{\pi} A_{\pi}^{\text{qu}}(x_1, \dots, x_n; x'_{\pi(1)}, \dots, x'_{\pi(n)} | \xi) \quad (2.26)$$

con

$$T_{\pi} \equiv e^{-\sum_{k,l=1}^n \Delta_{\xi} S_{i\pi}^{(k,l)}} = \prod_{k,l=1}^n e^{-\Delta_{\xi} S_{i\pi}^{(k,l)}} \quad (2.27)$$

La ec. (2.26) representa la transformación LKF generalizada, en D dimensiones, para la QED escalar.

2.3. Generalización de las transformaciones LKF en la QED spinorial

El proceso para la generalización de las transformaciones LKF en EDC spinorial es un poco similar al del caso escalar, aun que se requiere de un análisis un poco más profundo, debido a la estructura adicional que aporta la parte spinorial a las funciones de N puntos. Para demostrar la generalización, primero se rederivará la transformación LKF usando el formalismo línea de mundo y luego se utilizará este resultado para demostrar el caso general de la función de N puntos.

2.3.1. Transformación LKF en la QED spinorial: formalismo línea de mundo

El propagador para una línea abierta en EDC spinorial de un electrón de masa m que se propaga del evento x' al evento x , en la presencia de un campo electromagnético externo, representado por A^{μ} , está dado por:

$$S_{\beta\alpha}^{xx'} = [m\mathbb{I} + i(\not{\partial} + ie\not{A})]_{\beta\rho} K_{\rho\alpha}^{xx'}, \quad (2.28)$$

como se encuentra en el Capítulo 1.

Usando el método de cuantización del campo de fondo [33], se sustituye al campo A^{μ} por la suma de un campo externo clásico, A_{ex}^{μ} , y un campo que describe los fenómenos cuánticos, $\bar{A}_{\mu}$. Cuantizando al campo $\bar{A}_{\mu}$ a través de la integral de trayectorias, se obtiene (por brevedad, a partir de aquí se dejarán de usar de forma explícita los índices spinoriales)

CAPÍTULO 2. GENERALIZACIÓN DE LAS TRANSFORMACIONES LANDAU-KHALATNIKOV-FRADKIN EN LA QED

$$\begin{aligned}
\bar{S}_{\alpha\beta}[x, x', A_{\text{ex}}; \xi] &\equiv \langle S_{\alpha\beta}^{xx'} \rangle_{\bar{A}, \xi} = \int \mathcal{D}\bar{A} S_{\beta\alpha}^{xx'} e^{\int d^4x(\tau) [-\frac{1}{4}\bar{F}_{\mu\nu}\bar{F}^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial\cdot\bar{A})^2]} \\
&= [m\mathbb{I} + i\bar{\not{\partial}} - e\bar{A}_{\text{ex}}] \langle K^{xx'} \rangle_{\bar{A}, \xi} - e \langle \bar{A} K^{xx'} \rangle_{\bar{A}, \xi} \\
&= \text{symb}^{-1} \left\{ [m\mathbb{I} + i\bar{\not{\partial}} - e\bar{A}_{\text{ex}}] \int_0^\infty dT e^{-m^2 T} \int_{x(0)=x'}^{x(T)=x} \mathcal{D}x(\tau) 2^{-\frac{D}{2}} \oint_{AP} \mathcal{D}\psi(\tau) e^{-S_0 - S_e} H \right. \\
&\quad \left. + \gamma^\beta \int_0^\infty dT e^{-m^2 T} \int_{x(0)=x'}^{x(T)=x} \mathcal{D}x(\tau) 2^{-\frac{D}{2}} \oint_{AP} \mathcal{D}\psi(\tau) e^{-S_0 - S_e} G_\beta \right\}, \quad (2.29)
\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}
S_0 &= \int_0^T d\tau \left[\frac{\dot{x}^2}{4} + \frac{1}{2} \psi \cdot \dot{\psi} \right], \\
S_e &= ie \int_0^T d\tau [\dot{x} \cdot A_{\text{ex}}[x(\tau)] - (\psi + \eta) \cdot F_{\text{ex}}[x(\tau)] \cdot (\psi + \eta)], \\
H &= \int \mathcal{D}\bar{A} P[\bar{A}], \\
G_\beta &= -e \int \mathcal{D}\bar{A}[x] \bar{A}_\beta P[\bar{A}], \\
P &= e^{\int d^4x [-\frac{1}{4}\bar{F}_{\mu\nu}\bar{F}^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial\cdot\bar{A})^2] - ie \int_0^T d\tau [\dot{x} \cdot \bar{A} - (\psi + \eta) \cdot \bar{F}[x(\tau)] \cdot (\psi + \eta)]}. \quad (2.30)
\end{aligned}$$

Usando supercampos(en este momento, sólo para simplificar las expresiones), los cuales fueron introducidos en el capítulo 1, podemos reescribir la parte de interacción en $P[\bar{A}]$ como

$$[\mathbb{D}\mathbb{X}^\mu] \bar{A}_\mu(\mathbb{X}) = -\theta \dot{x} \cdot \bar{A} + \theta(\psi + \eta) \cdot \bar{F} \cdot (\psi + \eta) \quad (2.31)$$

y entonces

$$S_e[\bar{A}] = -ie \int_0^T d\tau \int d\theta [\mathbb{D}\mathbb{X}^\mu] A_\mu[\mathbb{X}]. \quad (2.32)$$

Ahora se procederá a resolver la integral H (normalizándola en el proceso):

$$H = \int \mathcal{D}\bar{A} e^{\int d^4x [-\frac{1}{4}\bar{F}_{\mu\nu}\bar{F}^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial\cdot\bar{A})^2] + ie \int_0^T d\tau \int d\theta \mathbb{D}\mathbb{X}^\mu \bar{A}_\mu(\mathbb{X})}, \quad (2.33)$$

2.3. GENERALIZACIÓN DE LAS TRANSFORMACIONES LKF EN LA QED SPINORIAL

la integral es una del tipo gaussiana, por lo que se puede resolver completando el cuadrado en los campos $\bar{A}^\mu$:

$$\begin{aligned}
H &= \int \mathcal{D}\bar{A} e^{-\frac{1}{2} \int d^D x \bar{A}^\mu [-\delta_{\mu\nu} \square + (1 - \frac{1}{\xi}) \partial_\mu \partial_\nu] A^\nu + i e \int_0^T d\tau \int d\theta \mathbb{D}\mathbb{X}^\mu \bar{A}_\mu(\mathbb{X})} \\
&= \int \mathcal{D}\bar{A} e^{-\frac{1}{2} \int d^D x \bar{A}^\mu \Delta_{\mu\nu} A^\nu + i e \int_0^T d\tau \int d\theta \mathbb{D}\mathbb{X}^\mu \bar{A}_\mu(\mathbb{X})} \\
&= e^{-\frac{1}{2} \int d^D \bar{z} \int d^D z b^\mu(\bar{z}) \Delta_{\mu\nu}^{-1}(\bar{z} - z) b^\nu(z)} \\
&= e^{\frac{e^2}{2} \int d^D \bar{z} \int d^D z \int_0^T \tau_1 \int_0^T d\tau_2 \int d\theta_1 \int d\theta_2 \mathbb{D}_1 \mathbb{X}_1^\mu \delta(\mathbb{X}_1 - \bar{z}) G_{\mu\nu}(\bar{z} - z) \mathbb{D}_2 \mathbb{X}_2^\mu \delta(\mathbb{X}_2 - z)} \\
&= e^{-S_i[\mathbb{D}\mathbb{X}]}
\end{aligned} \tag{2.34}$$

con

$$b^\mu(z) = e \int_0^T d\tau \int d\theta \mathbb{D}\mathbb{X} \delta(\mathbb{X} - z), \tag{2.35}$$

$$\begin{aligned}
G_{\mu\nu}(\mathbb{X}) &= \Delta_{\mu\nu}^{-1} \\
&= \frac{1}{4\pi^{\frac{D}{2}}} \left\{ \frac{1 + \xi}{2} \Gamma\left(\frac{D}{2} - 1\right) \frac{\delta_{\mu\nu}}{\mathbb{X}^{2\frac{D}{2}-1}} + (1 - \xi) \Gamma\left(\frac{D}{2}\right) \frac{\mathbb{X}_\mu \mathbb{X}_\nu}{\mathbb{X}^{2\frac{D}{2}}} \right\}
\end{aligned} \tag{2.36}$$

y

$$S_i^{\text{spin}} = -\frac{e^2}{2} \int d\tau_1 \int d\tau_2 \int d\theta_1 \int d\theta_2 \mathbb{D}\mathbb{X}_1 \cdot G(\mathbb{X}_1 - \mathbb{X}_2) \cdot \mathbb{D}\mathbb{X}_2, \tag{2.37}$$

obteniendo así resultados prácticamente idénticos en estructura al caso escalar.

Para resolver G_β , se introduce una corriente J en el exponencial, de tal manera que se genera la inserción de $\bar{A}_\beta$ mediante una derivada funcional:

$$G_\beta = \int \mathcal{D}\bar{A}[x] i \frac{\delta}{\delta J^\beta[x(T)]} e^{\int d^4 x [-\frac{1}{4} \bar{F}_{\mu\nu} \bar{F}^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial \cdot \bar{A})^2] + i e \int d\tau \int d\theta \mathbb{D}\mathbb{X}^\mu \bar{A}_\mu(\mathbb{X}) + i e \int d^4 x J \cdot A} \Big|_{J=0} \tag{2.38}$$

La integral se resuelve justo como en el caso de H , con la única modificación de que ahora en $b^\mu(z)$ estará involucrada una parte que viene de la corriente J :

$$b^\mu(z) = e \left[\int_0^T d\tau \int d\theta \mathbb{D}\mathbb{X} \delta(\mathbb{X} - z) + J[z] \right] \tag{2.39}$$

CAPÍTULO 2. GENERALIZACIÓN DE LAS TRANSFORMACIONES LANDAU-KHALATNIKOV-FRADKIN EN LA QED

resultando, entonces

$$G_\beta = i \frac{\delta}{\delta J^\beta[x(T)]} e^{-S_i[\mathbb{D}\mathbb{X}] + \frac{\epsilon^2}{2}[B+C]} \Big|_{J=0} \quad (2.40)$$

con

$$\begin{aligned} B &= -2 \int d^D \bar{z} \int_0^T d\tau \int d\theta J[\bar{z}] \cdot G(\bar{z}, \mathbb{X}) \cdot \mathbb{D}\mathbb{X} \\ C &= - \int d^D \bar{z} \int d^D \tilde{z} J[\bar{z}] \cdot G(\bar{z}, \tilde{z}) \cdot J[\tilde{z}]. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Al tomar la derivada funcional y evaluar en $J = 0$, el término C no contribuirá en este caso de una sólo derivada, aun que podría contribuir al haber más de una, por lo que simplemente se hará igual a cero. Sustituyendo estos resultados en la ec. (2.29)

$$\begin{aligned} \bar{S}[x, x', A_{\text{ex}}; \xi] &= \text{symb}^{-1} \left\{ [m\mathbb{I} + i\not{D} - eA_{\text{ex}}] \int_0^\infty dT e^{-m^2 T} \int_{x(0)=x'}^{x(T)=x} \mathcal{D}x(\tau) 2^{-\frac{D}{2}} \oint_{AP} \mathcal{D}\psi(\tau) e^{-S_0 - S_e} e^{-S_i[\mathbb{D}\mathbb{X}]} \right. \\ &\quad \left. + i\gamma^\beta \frac{\delta}{\delta J^\beta[x(T)]} \int_0^\infty dT e^{-m^2 T} \int_{x(0)=x'}^{x(T)=x} \mathcal{D}x(\tau) 2^{-\frac{D}{2}} \oint_{AP} \mathcal{D}\psi(\tau) e^{-S_0 - S_e} e^{-S_i[\mathbb{D}\mathbb{X}] + \frac{\epsilon^2}{2} B} \right\} \Big|_{J=0} \end{aligned} \quad (2.42)$$

Considérese ahora una transformación $\xi \longrightarrow \xi + \Delta\xi$ de $\bar{S}[x, x', A_{\text{ex}}; \xi]$, que define una transformación covariante de la norma. Un fotón externo estará representado por un operador de vértice $V_{\text{spin}}[\epsilon_i, k_i]$ (1.79), y la transformación de norma del fotón i -ésimo $\epsilon_i \longrightarrow \epsilon_i + \xi k_i$ sólo afectará a la parte del vértice que es escalar, ya que la parte spinorial es invariante de la norma, por lo que se obtendrá el mismo término adicional dependiente sólo de los puntos extremos de la línea que se obtuvieron en el caso escalar. Explícitamente, el cambio viene dado por

$$V_{\text{spin}}[\epsilon_i, k_i; \eta] \longrightarrow V_{\text{spin}}[\epsilon_i, k_i; \eta] - i\xi \int_0^T \frac{\partial}{\partial \tau_i} e^{ik_i \cdot x(\tau_1)} = V_{\text{spin}}[\epsilon_i, k_i; \eta] - i\xi \left(e^{ik_i \cdot x} - e^{ik_i \cdot x'} \right). \quad (2.43)$$

Analizando el cambio de la norma para los fotones internos que vienen representados por el término $-S_i[\mathbb{D}\mathbb{X}]$, se puede ver que resulta el mismo término que en el caso de la QED escalar, ec. (2.19), no depende de los campos spinoriales y sólo depende de los puntos extremos de la trayectoria:

2.3. GENERALIZACIÓN DE LAS TRANSFORMACIONES LKF EN LA QED SPINORIAL

$$\begin{aligned}
\Delta_\xi S_i[\mathbb{D}\mathbb{X}] &= -\Delta_\xi \frac{e^2}{32\pi^{\frac{D}{2}}} \Gamma\left(\frac{D}{2} - 2\right) \iiint d\tau_1 d\tau_2 d\theta_1 d\theta_2 \mathbb{D}_1 \mathbb{D}_2 [(\mathbb{X}_1 - \mathbb{X}_2)^2]^{2-\frac{D}{2}} \\
&= \Delta_\xi \frac{e^2}{32\pi^{\frac{D}{2}}} \Gamma\left(\frac{D}{2} - 2\right) \iint d\tau_1 d\tau_2 \frac{\partial}{\partial \tau_1} \frac{\partial}{\partial \tau_2} [(x_1 - x_2)^2]^{2-\frac{D}{2}} \\
&= \Delta_\xi S_i.
\end{aligned} \tag{2.44}$$

Entonces, la función de Green de la partícula fermiónica, tras el cambio de norma, será

$$\begin{aligned}
&\bar{S}[x, x', A_{\text{ex}}; \xi + \Delta\xi] \\
&= \text{symb}^{-1} \left\{ [m\mathbb{I} + i\cancel{\partial} - eA_{\text{ex}}] \int_0^\infty dT e^{-m^2 T} \int_{x(0)=x'}^{x(T)=x} \mathcal{D}x(\tau) 2^{-\frac{D}{2}} \oint_{AP} \mathcal{D}\psi(\tau) e^{-S_0 - S_e} e^{-S_i[\mathbb{D}\mathbb{X}] - \Delta_\xi S_i} \right. \\
&\quad \left. + i\gamma^\beta \frac{\delta}{\delta J^\beta[x(T)]} \int_0^\infty dT e^{-m^2 T} \int_{x(0)=x'}^{x(T)=x} \mathcal{D}x(\tau) 2^{-\frac{D}{2}} \oint_{AP} \mathcal{D}\psi(\tau) e^{-S_0 - S_e} e^{-S_i[\mathbb{D}\mathbb{X}] + \frac{\epsilon^2}{2} B + \Delta_\xi(-S_i + \frac{\epsilon^2}{2} B)} \right\} \Big|_{J=0},
\end{aligned} \tag{2.45}$$

donde tanto la derivada parcial como la funcional actúan también sobre los exponenciales que aparecen tras la transformación de norma. Manipulando un poco las expresiones, se puede obtener un término proporcional al propagador en la norma original más otros términos nuevos:

$$\begin{aligned}
&\bar{S}[x, x', A_{\text{ex}}; \xi + \Delta\xi] \\
&= \text{symb}^{-1} \left\{ e^{-\Delta_\xi S_i} [m\mathbb{I} + i\cancel{\partial} - eA_{\text{ex}}] \int_0^\infty dT e^{-m^2 T} \int_{x(0)=x'}^{x(T)=x} \mathcal{D}x(\tau) 2^{-\frac{D}{2}} \oint_{AP} \mathcal{D}\psi(\tau) e^{-S_0 - S_e - S_i[\mathbb{D}\mathbb{X}]} \right. \\
&\quad + i\gamma^\alpha \int_0^\infty dT e^{-m^2 T} \int_{x(0)=x'}^{x(T)=x} \mathcal{D}x(\tau) 2^{-\frac{D}{2}} \oint_{AP} \mathcal{D}\psi(\tau) e^{-S_0 - S_e - S_i[\mathbb{D}\mathbb{X}]} (-\partial_\alpha \Delta_\xi S_i) e^{-\Delta_\xi S_i} \\
&\quad + i\gamma^\alpha \int_0^\infty dT e^{-m^2 T} \int_{x(0)=x'}^{x(T)=x} \mathcal{D}x(\tau) 2^{-\frac{D}{2}} \oint_{AP} \mathcal{D}\psi(\tau) e^{-S_0 - S_e} \frac{\delta}{\delta J^\alpha[x(T)]} \left[e^{-S_i[\mathbb{D}\mathbb{X}] + \frac{\epsilon^2}{2} B} \right] e^{\Delta_\xi(-S_i + \frac{\epsilon^2}{2} B)} \\
&\quad \left. + i\gamma^\alpha \int_0^\infty dT e^{-m^2 T} \int_{x(0)=x'}^{x(T)=x} \mathcal{D}x(\tau) 2^{-\frac{D}{2}} \oint_{AP} \mathcal{D}\psi(\tau) e^{-S_0 - S_e} e^{-S_i[\mathbb{D}\mathbb{X}] + \frac{\epsilon^2}{2} B} \frac{\delta}{\delta J^\alpha[x(T)]} \left[e^{\Delta_\xi(-S_i + \frac{\epsilon^2}{2} B)} \right] \right\} \Big|_{J=0},
\end{aligned} \tag{2.46}$$

en donde en el tercer y cuarto término del lado derecho de la ecuación se ha usado el hecho de que $\Delta_\xi B$ no depende de variables de Grassmann, ya que

$$\begin{aligned}
\iint d\tau d\theta \Delta_\xi G_{\alpha\beta}(z, \mathbb{X}) \mathbb{D}\mathbb{X}^\beta &= \iint d\tau d\theta \frac{\Delta_\xi \Gamma(\frac{D}{2} - 2)}{16\pi^{\frac{D}{2}}} \mathbb{D} \frac{\partial}{\partial z^\alpha} [(z - \mathbb{X})^2]^{2-\frac{D}{2}} \\
&= - \int d\tau \frac{\Delta_\xi \Gamma(\frac{D}{2} - 2)}{16\pi^{\frac{D}{2}}} \partial_\tau \frac{\partial}{\partial z^\alpha} [(z - x(\tau))^2]^{2-\frac{D}{2}}, \tag{2.47}
\end{aligned}$$

por lo que el exponencial se puede separar en dos sin problemas con el mapeo simbólico. El primer y tercer término generan el propagador en la

CAPÍTULO 2. GENERALIZACIÓN DE LAS TRANSFORMACIONES LANDAU-KHALATNIKOV-FRADKIN EN LA QED

norma original, multiplicado por $e^{-\Delta_\xi S_i}$, y los términos segundo y cuarto se anulan, ya que

$$\begin{aligned} \frac{e^2}{2} \frac{\delta \Delta_\xi B}{\delta J^\alpha[x(T)]} &= -e^2 \iint d\tau d\theta \Delta_\xi G_{\alpha\beta}(x, \mathbb{X}) \mathbb{D}\mathbb{X}^\beta \\ &= \int d\tau \frac{\Delta_\xi e^2 \Gamma\left(\frac{D}{2} - 2\right)}{16\pi^{\frac{D}{2}}} \partial_\tau \frac{\partial}{\partial x^\alpha} [(x - x(\tau))^2]^{2-\frac{D}{2}} \\ &= \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \Delta_\xi S_i. \end{aligned} \quad (2.48)$$

De este modo, la transformación de norma de la función de Green para la partícula fermiónica es

$$\bar{S}[x, x', A_{\text{ex}}; \xi + \Delta\xi] = e^{-\Delta_\xi S_i} \bar{S}[x, x', A_{\text{ex}}; \xi], \quad (2.49)$$

la cual es la transformación LKF, idéntica a la del caso escalar.

2.3.2. Función de correlación de N puntos

Para generalizar el resultado anterior para funciones de $N(= 2n)$ puntos, es necesario primero hacer notar algunas cosas. El término

$$\left\langle [m + i\mathcal{D}_1] e^{ie \int d^D x J[x] \cdot \bar{A}[x]} \prod_{i=1}^M K^{x_i x'_i} \right\rangle_{\bar{A}, \xi} \quad (2.50)$$

transforma tras un cambio de norma como

$$\begin{aligned} &\left\langle [m + i\mathcal{D}_1] e^{ie \int d^D x J[x] \cdot \bar{A}[x]} \prod_{i=1}^M K^{x_i x'_i} \right\rangle_{\bar{A}, \xi + \Delta\xi} \\ &= e^{-\sum_{k,l}^M \Delta_\xi S_i^{(k,l)} + \frac{e^2}{2} (\sum_k^M \Delta_\xi B^{(k)} + \Delta_\xi C)} \left\langle [m + i\mathcal{D}_1] e^{ie \int d^D x J[x] \cdot \bar{A}[x]} \prod_{i=1}^M K^{x_i x'_i} \right\rangle_{\bar{A}, \xi}, \quad M \geq 1 \end{aligned} \quad (2.51)$$

con

$$\begin{aligned} B^{(k)} &= -2 \int d^D \bar{z} \int_0^{T_k} d\tau_k \int d\theta_k J[\bar{z}] \cdot G(\bar{z}, \mathbb{X}_k) \cdot \mathbb{D}_k \mathbb{X}_k \\ C &= - \int d^D \bar{z} \int d^D \tilde{z} J[\bar{z}] \cdot G(\bar{z}, \tilde{z}) \cdot J[\tilde{z}], \end{aligned} \quad (2.52)$$

2.3. GENERALIZACIÓN DE LAS TRANSFORMACIONES LKF EN LA QED SPINORIAL

esto se puede ver del análisis hecho en la sección anterior. Entonces, el efecto de añadir K 's extras y el exponencial es sólo el de modificar el término $\Delta_\xi S_i$ añadiendo $M - 1$ términos más y añadiendo, debido al exponencial, los términos con $\Delta_\xi B^{(k)}$ y $\Delta_\xi C$. Sabiendo esto, la derivación de la transformación de la función de N puntos se puede hacer por inducción.

La función fermiónica de N puntos está dada por

$$S(x_1 \dots x_n; x'_{\pi(1)} \dots x'_{\pi(n)} | \xi) = \prod_{\pi \in S_n} S_\pi(x_1 \dots x_n; x'_{\pi(1)} \dots x'_{\pi(n)} | \xi) \quad (2.53)$$

donde la amplitud parcial está definida como

$$\begin{aligned} S_\pi(x_1 \dots x_n; x'_{\pi(1)} \dots x'_{\pi(n)} | \xi) &= \langle [m + i\not{D}_1] K_1^{x_1 x'_{\pi(1)}} \dots [m + i\not{D}_n] K_n^{x_n x'_{\pi(n)}} \rangle_{\bar{A}, \xi} \\ &= \left\langle \prod_{i=1}^n [m + i\not{D}_i] K_i^{x_i x'_{\pi(i)}} \right\rangle_{\bar{A}, \xi}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Para derivar la transformación generalizada, considérese el siguiente término

$$\left\langle e^{ie \int d^D x J[x] \cdot \bar{A}[x]} \prod_{i=1}^n [m + i\not{D}_i] \prod_{j=1}^M K^{x_j x'_j} \right\rangle_{\bar{A}, \xi}, \quad M \geq n \quad (2.55)$$

y asúmase que tras un cambio de norma transforma como

$$\begin{aligned} &\left\langle e^{ie \int d^D x J[x] \cdot \bar{A}[x]} \prod_{i=1}^n [m + i\not{D}_i] \prod_{j=1}^M K^{x_j x'_j} \right\rangle_{\bar{A}, \xi + \Delta \xi} \\ &= e^{-\sum_{k,l}^M \Delta_\xi S_i^{(k,l)} + \frac{e^2}{2} (\sum_k^M \Delta_\xi B^{(k)} + \Delta_\xi C)} \left\langle e^{ie \int d^D x J[x] \cdot \bar{A}[x]} \prod_{i=1}^n [m + i\not{D}_i] \prod_{j=1}^M K^{x_j x'_j} \right\rangle_{\bar{A}, \xi}, \quad M \geq n. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Procediendo por inducción, considérese ahora el mismo término anterior, pero con la sustitución $n \rightarrow n + 1$

$$\left\langle e^{ie \int d^D x J[x] \cdot \bar{A}[x]} \prod_{i=1}^{n+1} [m + i\not{D}_i] \prod_{j=1}^M K^{x_j x'_j} \right\rangle_{\bar{A}, \xi + \Delta \xi}, \quad M \geq n + 1. \quad (2.57)$$

Desarrollando, se obtiene

CAPÍTULO 2. GENERALIZACIÓN DE LAS TRANSFORMACIONES LANDAU-KHALATNIKOV-FRADKIN EN LA QED

$$\begin{aligned}
& \left\langle e^{ie \int d^D x J[x] \cdot \bar{A}[x]} \prod_{i=1}^{n+1} [m + i \not{D}_i] \prod_{j=1}^M K^{x_j x'_j} \right\rangle_{\bar{A}, \xi + \Delta \xi} \\
&= [m + i \not{D}_1 - e A_{1\text{ex}}] \left\langle e^{ie \int d^D x J[x] \cdot \bar{A}[x]} \prod_{i=2}^{n+1} [m + i \not{D}_i] \prod_{j=1}^M K^{x_j x'_j} \right\rangle_{\bar{A}, \xi + \Delta \xi} + \\
&+ i \gamma^\alpha \frac{\delta}{\delta J_1^\alpha[x_1(T_1)]} \left\langle e^{ie \int d^D x J[x] \cdot \bar{A}[x]} \prod_{i=2}^{n+1} [m + i \not{D}_i] \prod_{j=1}^M K^{x_j x'_j} \right\rangle_{\bar{A}, \xi + \Delta \xi}, \quad M \geq n+1
\end{aligned} \tag{2.58}$$

Usando (2.56):

$$\begin{aligned}
& \left\langle e^{ie \int d^D x J[x] \cdot \bar{A}[x]} \prod_{i=1}^{n+1} [m + i \not{D}_i] \prod_{j=1}^M K^{x_j x'_j} \right\rangle_{\bar{A}, \xi + \Delta \xi} \\
&= [m + i \not{D}_1 - e A_{1\text{ex}}] e^{-\sum_{k,l=1}^M \Delta_\xi S_i^{(k,l)} + \frac{e^2}{2} (\sum_{k=1}^M B^{(k)} + C)} \left\langle e^{ie \int d^D x J[x] \cdot \bar{A}[x]} \prod_{i=2}^{n+1} [m + i \not{D}_i] \prod_{j=1}^M K^{x_j x'_j} \right\rangle_{\bar{A}, \xi} + \\
&+ i \gamma^\alpha \frac{\delta}{\delta J^\alpha[x(T)]} e^{-\sum_{k,l=1}^M \Delta_\xi S_i^{(k,l)} + \frac{e^2}{2} (\sum_{k=1}^M B^{(k)} + C)} \left\langle e^{ie \int d^D x J_1[x] \cdot \bar{A}_1[x]} \prod_{i=2}^{n+1} [m + i \not{D}_i] \prod_{j=1}^M K^{x_j x'_j} \right\rangle_{\bar{A}, \xi}, \quad M \geq n+1
\end{aligned} \tag{2.59}$$

Como en el caso del propagador fermiónico, las derivadas actúan también sobre los nuevos exponenciales que parecen tras la transformación de norma, y manipulando la expresión de la misma forma, es decir, aplicando las derivadas a un producto y cancelando los términos que vienen de las derivadas de los exponenciales, se obtiene un resultado que es proporcional al término en la norma original, esto es

$$\begin{aligned}
& \left\langle e^{ie \int d^D x J[x] \cdot \bar{A}[x]} \prod_{i=1}^{n+1} [m + i \not{D}_i] \prod_{j=1}^M K^{x_j x'_j} \right\rangle_{\bar{A}, \xi + \Delta \xi} \\
&= e^{-\sum_{k,l=1}^M \Delta_\xi S_i^{(k,l)} + \frac{e^2}{2} (\sum_{k=1}^M B^{(k)} + C)} \left\langle e^{ie \int d^D x J[x] \cdot \bar{A}[x]} \prod_{i=1}^{n+1} [m + i \not{D}_i] \prod_{j=1}^M K^{x_j x'_j} \right\rangle_{\bar{A}, \xi}, \quad M \geq n+1.
\end{aligned} \tag{2.60}$$

Por lo tanto, queda demostrado por inducción que este resultado es válido para todo número n . En el caso particular en que $M = n$, la ec. (2.56) (con $J = 0$) resulta

2.3. GENERALIZACIÓN DE LAS TRANSFORMACIONES LKF EN LA QED SPINORIAL

$$\left\langle \prod_{i=1}^n [m + i \not{D}_i] K^{x_i x'_i} \right\rangle_{\bar{A}, \xi + \Delta \xi} = e^{-\sum_{k,l=1}^n \Delta_\xi S_i^{(k,l)}} \left\langle \prod_{i=1}^n [m + i \not{D}_i] K^{x_i x'_i} \right\rangle_{\bar{A}, \xi}. \quad (2.61)$$

Usando esto en la amplitud parcial, se llega a la transformación LKF generalizada para la función fermiónica de N puntos, la cual resulta ser la misma que la generalización para el caso escalar:

$$S(x_1 \dots x_n; x'_{\pi(1)} \dots x'_{\pi(n)} | \xi + \Delta \xi) = \prod_{k,l=1}^n e^{-\Delta_\xi S_{i\pi}^{(k,l)}} \prod_{\pi \in S_n} S_\pi(x_1 \dots x_n; x'_{\pi(1)} \dots x'_{\pi(n)} | \xi), \quad (2.62)$$

Con $\Delta_\xi S_{i\pi}^{(k,l)}$ dado en la ecuación (2.25). Cabe resaltar que la transformación anterior es válida para cualquier n , y que además es una transformación no perturbativa, lo que quiere decir que la transformación devuelve un propagador más completo que el que se da de entrada y es válida a cualquier orden en teoría de perturbación.

CAPÍTULO 2. GENERALIZACIÓN DE LAS TRANSFORMACIONES LANDAU-KHALATNIKOV-FRADKIN EN LA QED

Capítulo 3

Aplicaciones de las transformaciones LKF

En este capítulo se aplica la transformación LKF, y su generalización, al propagador, tanto en la QED escalar como en la spinorial, para ilustrar cómo se aplica en general la transformación y mostrar las consecuencias que derivan de su naturaleza no perturbativa.

3.1. Transformación LKF en el espacio de momentos: Propagador en QED spinorial en 3-d

Las transformaciones LKF se definen en el espacio de configuraciones ya que por lo general no se pueden transformar al espacio de momentos de manera cerrada. En 3 dimensiones este no es el caso. Supóngase un propagador input $K^{*pp'}(\xi)$, el cual puede ser incluso a multilazo. En el espacio de configuraciones estará dado por [\[34\]](#)

$$\begin{aligned} K^{*xx'}(\xi) &= \frac{2\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dp \, p^2 K^{*pp'}(\xi) \int_0^\pi \sin \theta e^{-ipx \cos \theta} \\ &= \frac{1}{2\pi^2 x} \int_0^\infty dp \, p \sin(px) K^{*pp'}(\xi). \end{aligned} \quad (3.1)$$

La transformación LKF se puede obtener de [\[2.62\]](#). En el propagador sólo hay una línea fermiónica, por lo que en este caso $k = l$ y $n = 1$. Trabajando en $D = 3 - \epsilon$, regularizando y tomando sólo la parte finita, se obtiene que la transformación LKF está dada por

CAPÍTULO 3. APLICACIONES DE LAS TRANSFORMACIONES LKF

$$K^{xx'}(\xi + \Delta\xi) = e^{-\frac{\alpha\Delta\xi}{2}x} K^{xx'}(\xi) \quad (3.2)$$

Aplicando la transformación LKF a (3.1), con la sustitución $x - x' = x$, se obtiene

$$K^{*xx'}(\xi + \Delta\xi) = \frac{e^{-\frac{\alpha\Delta\xi}{2}x}}{2\pi^2x} \int_0^\infty dp \, p \sin(px) K^{*pp'}(\xi). \quad (3.3)$$

Por otro lado, al aplicar la transformada de Fourier a $K^{*xx'}(\xi + \Delta\xi)$ se obtiene

$$\begin{aligned} K^{*kk'}(\xi + \Delta\xi) &= \int d^3x K^{*xx'}(\xi + \Delta\xi) e^{ik \cdot x} \\ &= 4\pi \int_0^\infty dx \, x^2 K^{*xx'}(\xi + \Delta\xi) \frac{\sin(kx)}{kx}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Sustituyendo (3.3) en la expresión anterior, se obtiene finalmente

$$\begin{aligned} K^{*kk'}(\xi + \Delta\xi) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dx \int_0^\infty dp \, \frac{p}{k} \sin(kx) \sin(px) e^{-\frac{\alpha\Delta\xi}{2}x} K^{*pp'}(\xi) \\ K^{*kk'}(\xi + \Delta\xi) &= \frac{\alpha\Delta\xi}{2\pi k} \int_0^\infty dp \, p K^{*pp'}(\xi) \left[\frac{1}{(\frac{\alpha\Delta\xi}{2})^2 + (k-p)^2} - \frac{1}{(\frac{\alpha\Delta\xi}{2})^2 + (k+p)^2} \right], \end{aligned} \quad (3.5)$$

en donde para cambiar el orden de integración se supone que $\Delta\xi > 0$. Esta es la transformación LKF en el espacio de momentos en 3 dimensiones para QED escalar, ya no hay necesidad de tratar con el propagador en el espacio de configuraciones.

Para generalizar el resultado al caso spinorial, considérese un propagador de la forma

$$K^{*pp'}(\xi) = A^*(p^2, \xi) + \not{p} B^*(p^2, \xi). \quad (3.6)$$

El desarrollo del término $A^*(p^2, \xi)$ es el mismo que el del caso escalar, así que se analizará ahora sólo la parte $\not{p} B^*(p^2, \xi)$. La transformada de Fourier de este término es

$$\begin{aligned} \not{x} X^*(x, x'; \xi) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \not{p} B^*(p^2; \xi) e^{-ix \cdot p} \\ &= \int_0^\infty \frac{dp}{(2\pi)^2} p^2 i \frac{\not{\partial}}{\partial x} B^*(p^2; \xi) \int_0^\pi d\theta \sin(\theta) e^{-ixp \cos(\theta)} \\ &= \frac{i}{2\pi^2} \frac{\not{\partial}}{\partial x} \frac{1}{x} \int_0^\infty dp p B^*(p^2; \xi) \sin(px). \end{aligned} \quad (3.7)$$

3.1. TRANSFORMACIÓN LKF EN EL ESPACIO DE MOMENTOS: PROPAGADOR EN QED SPINORIAL EN 3-D

Aplicando la transformación LKF, se obtiene

$$\not{x}X^*(x, x'; \xi + \Delta\xi) = e^{-\frac{\Delta\xi\alpha}{2}x} \not{x}X^*(x, x'; \xi). \quad (3.8)$$

Sustituyendo la expresión anterior en la primera ecuación de [3.4](#):

$$\not{k}B^*(k^2; \xi + \Delta\xi) = \int d^3x e^{-\frac{\Delta\xi\alpha}{2}x} \frac{i}{2\pi^2} \frac{\not{\partial}}{\partial x} \left(\frac{1}{x} \int_0^\infty dpp B^*(p^2; \xi) \sin(px) \right) e^{ik \cdot x}, \quad (3.9)$$

lo cual, integrando por partes se vuelve

$$\begin{aligned} \not{k}B^*(k^2; \xi + \Delta\xi) &= -\frac{i}{2\pi^2} \int_0^\infty dpp B(p^2; \xi) \int d^3x \frac{1}{x} \frac{\not{\partial}}{\partial x} \left(e^{-\frac{\alpha\Delta\xi}{2}x + ik \cdot x} \right) \sin(px) \\ &= -\frac{i}{\pi} \int_0^\infty dpp B(p^2; \xi) \int_0^\infty dx x \left(i \frac{\alpha\Delta\xi}{2} \frac{\not{\partial}}{\partial k} + i \not{k} \right) e^{-\frac{\alpha\Delta\xi}{2}x} \sin(px) \times \\ &\quad \times \int_0^\pi d\theta \sin(\theta) e^{ikx \cos(\theta)} \\ &= \frac{2}{\pi k} \not{k} \int_0^\infty dpp B(p^2; \xi) \int_0^\infty dx \sin(kx) \sin(px) e^{-\frac{\alpha\Delta\xi}{2}x} + \\ &\quad + \frac{2}{\pi} \frac{\not{\partial}}{\partial k} \frac{1}{k} \int_0^\infty dpp B(p^2; \xi) \int_0^\infty dx \frac{\alpha\Delta\xi}{2x} \sin(kx) \sin(px) e^{-\frac{\alpha\Delta\xi}{2}x} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Aprovechando la siguiente igualdad

$$\frac{1}{x} e^{-\frac{\alpha\Delta\xi}{2}x} = \frac{1}{2} \int_{\alpha\Delta\xi}^\infty e^{-\frac{\alpha'\Delta\xi'}{2}x} d(\alpha'\Delta\xi') \quad (3.11)$$

Podemos reescribir la ecuación [\(3.10\)](#) como

$$\begin{aligned} \not{k}B^*(k^2; \xi + \Delta\xi) &= \frac{2}{\pi k} \not{k} \int_0^\infty dpp B(p^2; \xi) \int_0^\infty dx \sin(kx) \sin(px) e^{-\frac{\alpha\Delta\xi}{2}x} + \\ &\quad + \frac{\alpha\Delta\xi}{2\pi} \frac{\not{\partial}}{\partial k} \frac{1}{k} \int_{\alpha\Delta\xi}^\infty d(\alpha'\Delta\xi') \int_0^\infty dpp B(p^2; \xi) \int_0^\infty dx \sin(kx) \sin(px) e^{-\frac{\alpha'\Delta\xi'}{2}x} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Luego, la transformación del propagador completo es

CAPÍTULO 3. APLICACIONES DE LAS TRANSFORMACIONES LKF

$$\begin{aligned}
S^{*kk'}(\xi + \Delta\xi) &= A^*(k^2; \xi + \Delta\xi) + \not{k} B^*(k^2; \xi + \Delta\xi) \\
&= \frac{\alpha\Delta\xi}{2\pi k} \int_0^\infty dp p A^*(k^2; \xi) \left[\frac{1}{(\frac{\alpha\Delta\xi}{2})^2 + (k-p)^2} - \frac{1}{(\frac{\alpha\Delta\xi}{2})^2 + (k+p)^2} \right] + \\
&\quad + \frac{\alpha\Delta\xi}{2\pi k} \not{k} \int_0^\infty dp p B(p^2; \xi) \left[\frac{1}{(\frac{\alpha\Delta\xi}{2})^2 + (k-p)^2} - \frac{1}{(\frac{\alpha\Delta\xi}{2})^2 + (k+p)^2} \right] + \\
&\quad + \frac{\alpha\Delta\xi}{8\pi} \frac{\not{\partial}}{\partial k} \frac{1}{k} \int_{\alpha\Delta\xi}^\infty d(\alpha'\Delta\xi') \int_0^\infty dp p B(p^2; \xi) (\alpha'\Delta\xi') \times \\
&\quad \times \left[\frac{1}{(\frac{\alpha'\Delta\xi'}{2})^2 + (k-p)^2} - \frac{1}{(\frac{\alpha'\Delta\xi'}{2})^2 + (k+p)^2} \right], \tag{3.13}
\end{aligned}$$

la cual es la transformación LKF en el espacio de momentos en la QED spinorial en 3-d.

Como caso particular, considérese el propagador a nivel árbol, el cual está dado por

$$\begin{aligned}
S_{\beta\alpha}^{pp'}(\xi) &= \frac{1}{-\not{p} + m} = (\not{p} + m) \frac{1}{p^2 + m^2} \\
&= A(p; \xi) + \not{p} B(p; \xi), \tag{3.14}
\end{aligned}$$

el cual, podemos observar, es independiente del parámetro ξ . Haciendo uso de la integral

$$\int_0^\infty dp \frac{p}{p^2 + m^2} \left[\frac{1}{(\frac{\alpha\Delta\xi}{2})^2 + (k-p)^2} - \frac{1}{(\frac{\alpha\Delta\xi}{2})^2 + (k+p)^2} \right] = \frac{2\pi k}{\alpha\Delta\xi} \frac{1}{k^2 + (m + \frac{\alpha\Delta\xi}{2})^2}, \tag{3.15}$$

podemos obtener que la transformación LKF del propagador a nivel árbol es

$$\begin{aligned}
S_{\beta\alpha}^{kk'}(\xi + \Delta\xi) &= \frac{m}{k^2 + (m + \frac{\alpha\Delta\xi}{2})^2} + \frac{\not{k}}{k^2 + (m + \frac{\alpha\Delta\xi}{2})^2} + \\
&\quad + \frac{\alpha\Delta\xi}{4} \frac{\not{\partial}}{\partial k} \int_{\alpha\Delta\xi}^\infty d(\alpha'\Delta\xi') \frac{1}{k^2 + (\frac{\alpha'\Delta\xi'}{2})^2} \\
&= \frac{m}{k^2 + (m + \frac{\alpha\Delta\xi}{2})^2} + \not{k} \left[\frac{1}{k^2} \frac{k^2 + \frac{\alpha\Delta\xi}{2} (m + \frac{\alpha\Delta\xi}{2})}{k^2 + (m + \frac{\alpha\Delta\xi}{2})^2} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\alpha\Delta\xi}{2k^3} \tan^{-1} \left(\frac{k}{k^2 + \frac{\alpha\Delta\xi}{2}} \right) \right] \tag{3.16}
\end{aligned}$$

Este es el resultado final tras la aplicación de la transformación LKF. Este propagador contiene más información que el input original, que en este caso fue el propagador a nivel árbol.

Como se puede observar en [35], el cálculo directo del propagador a 1-loop coincide con el obtenido tras la transformación LKF en aquellos términos que dependen de $\Delta\xi$ [9]. La información nueva que proporciona el propagador transformado depende siempre del cambio de la norma. Para el análisis perturbativo con un propagador input a n -loops, se pueden fijar términos de mayores loops de la forma $\alpha^{n+i}\Delta\xi^i$, $i = 0, 1, \dots$, y de aquellos con las potencias más altas en $\Delta\xi$ a un orden fijo en α [36].

3.2. Transformación LKF del propagador en la QED spinorial en 4-dim

En general, para aplicar la transformación LKF o su generalización, se deben seguir los siguientes pasos:

1. Comenzar con el objeto a transformar en el espacio de momentos.
2. Mediante la transformada de Fourier, obtener el objeto en el espacio de configuraciones.
3. Aplicar la transformación LKF o su generalización.
4. Transformar el resultado al espacio de momentos.

Aquí se dará como input el propagador desnudo en el espacio de momentos para encontrar su transformación LKF [9]. El propagador a nivel árbol está dado por

$$\begin{aligned}
 S_{\beta\alpha}^{xx'}(p; \xi) &= \frac{1}{-\not{p} + m} = (\not{p} + m) \frac{1}{p^2 + m^2} \\
 &= \frac{m}{p^2 + m^2} - \frac{p^2}{\not{p}(p^2 + m^2)} \\
 &= A(p; \xi) + \frac{B(p; \xi)}{\not{p}}, \tag{3.17}
 \end{aligned}$$

el cual es independiente del parámetro ξ . Este propagador está relacionado con aquel en el espacio de configuraciones mediante las transformaciones

$$S_{\beta\alpha}^{xx'}(p; \xi) = \int d^D x e^{ip \cdot x} S_{\beta\alpha}^{xx'}(x; \xi) \quad (3.18)$$

$$S_{\beta\alpha}^{xx'}(x; \xi) = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{-ip \cdot x} S_{\beta\alpha}^{xx'}(p; \xi) = \not{x} X(x; \xi) + Y(x; \xi). \quad (3.19)$$

En 4 dimensiones, (3.19) da como resultado

$$X(x; \xi) = -i \frac{m^2}{4\pi^2 x^2} K_2(mx), \quad (3.20)$$

$$Y(x; \xi) = \frac{m^2}{4\pi^2 x} K_1(mx), \quad (3.21)$$

donde K_1 y K_2 son funciones de Bessel del segundo tipo.

De (2.62), se obtiene la transformación LKF para el propagador. Sin embargo, para el caso particular de 4 dimensiones, el propagador presenta divergencias, por lo que hay que regularlo, al igual que su transformación LKF. Usando regularización dimensional, se obtiene

$$\Delta_\xi S_i = \ln \left| \frac{(x - x')^2}{x_{\min}^2} \right|^{\Delta_\xi \frac{e^2}{16\pi^2}}, \quad (3.22)$$

y con el reemplazo de $(x - x')^2(x' - x')^2$ por el corte $(x_{\min}^2)^2$ [35], y $x - x'$ por x , se obtiene la transformación LKF del propagador

$$S_{\beta\alpha}^{xx'}(x; \xi + \Delta\xi) = \left| \frac{x^2}{x_{\min}^2} \right|^{-\Delta_\xi \frac{e^2}{16\pi^2}} S_{\beta\alpha}^{xx'}(x; \xi). \quad (3.23)$$

Para regresar al espacio de momentos, se hace uso de las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} A(p; \xi + \Delta\xi) &= \frac{F(p; \xi + \Delta\xi) \mathcal{M}(p; \xi + \Delta\xi)}{p^2 + \mathcal{M}^2(p; \xi + \Delta\xi)} = \int d^4 x e^{ip \cdot x} Y(x; \xi + \Delta\xi) \\ B(p; \xi + \Delta\xi) &= -\frac{p^2 F(p; \xi + \Delta\xi)}{p^2 + \mathcal{M}^2(p; \xi + \Delta\xi)} = \int d^4 x p \cdot x e^{ip \cdot x} X(x; \xi + \Delta\xi). \end{aligned} \quad (3.24)$$

De esta forma, al realizar las integrales, se obtiene el siguiente propagador

$$S_{\beta\alpha}^{xx'}(p; \xi + \Delta\xi) = A(p; \xi + \Delta\xi) + \frac{B(p; \xi + \Delta\xi)}{\not{p}} = \frac{F(p; \xi + \Delta\xi)}{-\not{p} + \mathcal{M}(p; \xi + \Delta\xi)}, \quad (3.25)$$

3.2. TRANSFORMACIÓN LKF DEL PROPAGADOR EN LA QED SPINORIAL EN 4-DIM

con

$$A(p; \xi + \Delta\xi) = \frac{1}{m} \left(\frac{m^2}{\Lambda^2} \right)^\nu \Gamma(1-\nu)\Gamma(2-\nu) {}_2F_1 \left(1-\nu, 2-\nu; 2; -\frac{p^2}{m^2} \right), \quad (3.26)$$

$$B(p; \xi + \Delta\xi) = -\frac{p^2}{2m^2} \left(\frac{m^2}{\Lambda^2} \right)^\nu \Gamma(1-\nu)\Gamma(3-\nu) {}_2F_1 \left(1-\nu, 3-\nu; 3; -\frac{p^2}{m^2} \right), \quad (3.27)$$

$$F(p; \xi + \Delta\xi) = \frac{\Gamma[1-\nu]}{2m^2\Gamma[3-\nu] {}_2F_1(1-\nu, 3-\nu; 3; -p^2/m^2)} \left(\frac{m^2}{\Lambda^2} \right)^\nu \\ \times \left[4m^2\Gamma[2-\nu] {}_2F_1^2 \left(1-\nu, 2-\nu; 2; -\frac{p^2}{m^2} \right) + p^2\Gamma^2[3-\nu] {}_2F_1^2 \left(1-\nu, 3-\nu; 3; -\frac{p^2}{m^2} \right) \right], \quad (3.28)$$

$$\mathcal{M}(p; \xi + \Delta\xi) = -\frac{2m {}_2F_1(1-\nu, 2-\nu; 2; -p^2/m^2)}{(2-\nu) {}_2F_1(1-\nu, 3-\nu; 3; -p^2/m^2)}, \quad (3.29)$$

con $\Lambda = 2/x_{\min}$ y $\nu = \Delta\xi e^2/16\pi^2$. El propagador dado en (3.25), (3.28) y (3.29) es la transformación LKF del propagador a nivel árbol dado en (3.17). Como puede verse, este propagador contiene más información que el original, información a mayores loops, además de que depende explícitamente del cambio de la norma $\Delta\xi$.

Para obtener información a un orden determinado de este propagador, se debe realizar una expansión perturbativa en potencias de α . Para esto se requiere expandir la función hipergeométrica en algunos de sus parámetros, aquellos que dependen de ν . Con la ayuda de mathematica, se obtienen las expansiones hasta orden lineal en α de (3.26) y (3.27), dadas por

$$A(p; \xi + \Delta\xi) = \frac{m}{m^2 + p^2} - \frac{\alpha\Delta\xi m^2 \left[(m^2 - p^2)\ln \left(1 + \frac{p^2}{m^2} \right) - p^2 \left(2\gamma_E + \ln \left(\frac{m^2}{\Lambda^2} \right) \right) \right]}{16m(m^2 + p^2)\pi^2 p^2} \quad (3.30)$$

$$B(p; \xi + \Delta\xi) = -\frac{p^2}{p^2 + m^2} + \frac{\alpha\Delta\xi \left[-(m^4 + p^4)\ln(1 + \frac{p^2}{m^2}) + p^2 \left(m^2 + p^2 - 2\gamma_E p^2 - p^2 \ln \left(\frac{m^2}{\Lambda^2} \right) \right) \right]}{16\pi^2 p^2 (p^2 + m^2)} \quad (3.31)$$

Estos resultados pueden compararse con aquellos dados en [26], en donde se calcula directamente la corrección a 1-loop en una norma arbitraria. En este artículo se trabaja con el propagador truncado, por lo que se procede a truncar el propagador obtenido para hacer la comparación:

$$\hat{S}_{\alpha\beta}^{pp'} = (-\not{p} + m) S_{\alpha\beta}^{pp'} (-\not{p} + m) \\ = [(-p^2 + m^2)A - 2mB] + \not{p} \left[\left(1 - \frac{m^2}{p^2} \right) B - 2mA \right] \\ = \hat{A} + \not{p} \hat{B} \quad (3.32)$$

con

$$\hat{A} = (-p^2 + m^2)A - 2mB \quad (3.33)$$

$$\hat{B} = \left(1 - \frac{m^2}{p^2}\right)B - 2mA, \quad (3.34)$$

entonces, la contribución a 1-loop está dada por

$$\hat{A}^{(1)} = (-p^2 + m^2)A^{(1)} - 2mB^{(1)} \quad (3.35)$$

$$\hat{B}^{(1)} = \left(1 - \frac{m^2}{p^2}\right)B^{(1)} - 2mA^{(1)}. \quad (3.36)$$

Sustituyendo las contribuciones lineales en α de (3.30) y (3.31) en las expresiones anteriores se encuentra que

$$\hat{A}^{(1)} = \frac{\Delta\xi m}{16\pi^2 p^2} \left[(p^2 + m^2) \ln \left(1 + \frac{p^2}{m^2}\right) - 2p^2 + p^2 \left(2\gamma_E + \ln \left(\frac{m^2}{\Lambda^2}\right)\right) \right] \quad (3.37)$$

$$\hat{B}^{(1)} = \frac{\Delta\xi}{16\pi^2 p^4} \left[\ln \left(1 + \frac{p^2}{m^2}\right) (m^4 - p^4) - 2p^4 \gamma_E + (4m^2 p^2 - p^4) \ln \left(\frac{m^2}{\Lambda^2}\right) + p^4 - m^2 p^2 \right], \quad (3.38)$$

con $\hat{A} = \hat{A}^{(0)} + \alpha \hat{A}^{(1)} + \dots$. Los cálculos obtenidos en [26] están dados en D dimensiones, haciendo el análisis en $D = 4$ y desarrollando a primer orden en α se observa que los términos que involucran al parámetro de la norma coinciden haciendo la identificación

$$\frac{1}{\epsilon} = -\gamma_E + \ln \left(\frac{m^2}{4\pi}\right) - \ln \left(\frac{m^2}{\Lambda^2}\right). \quad (3.39)$$

3.3. Propagador QED spinorial en 2-D

Ahora aplicaremos la transformación LKF al caso del propagador desnudo en la QED spinorial en 2-d. En este caso, encontrar la transformación LKF completa resultó complicado, por lo que el desarrollo se limitará a obtener las correcciones a primer orden del propagador.

Primero se desarrollará el caso escalar. La transformación LKF en el caso de $d = 2 - 2\epsilon$ está dada por

$$K^{xx'}(\xi + \Delta\xi) = e^{-\frac{\alpha\Delta\xi\mu^2 x^2}{4} \left[\frac{1}{\epsilon} + \ln(\pi x^2 \mu^2) + \gamma_E - 1\right] + \mathcal{O}(\epsilon)} K^{xx'}(\xi). \quad (3.40)$$

3.3. PROPAGADOR QED SPINORIAL EN 2-D

Esta vez, dentro de la transformación LKF, el polo $\frac{1}{\epsilon}$ permanece, por lo que no se puede fijar directamente la dimensión en 2, ya que el proceso requiere transformadas de Fourier, las cuales también aportarán con términos lineales en ϵ y tendrán que tomarse en cuenta. Además, como sólo son de interés las correcciones a primer orden, se desarrolla una expansión en potencial de α y se truncará la transformación hasta sólo órdenes lineales en α , obteniéndose

$$K^{(1)xx'}(\xi + \Delta\xi) = \left(1 - \frac{\alpha\Delta\xi\mu^2x^2}{4} \left[\frac{1}{\epsilon} + \ln(\pi x^2\mu^2) + \gamma_E - 1\right] + \mathcal{O}(\epsilon)\right) K^{xx'}(\xi). \quad (3.41)$$

El propagador a nivel árbol en el espacio de configuraciones en d dimensiones estará dado por

$$\begin{aligned} K^{xx'} &= \int d^d p \frac{1}{p^2 + m^2} e^{-ix \cdot p} \\ &= (2\pi)^{D/2} x^{-\frac{D-2}{2}} \int_0^\infty \frac{p^{D/2}}{p^2 + m^2} J_{\frac{D}{2}-1}(xp) dp \\ &= (2\pi)^{D/2} \left(\frac{x}{m}\right)^{1-\frac{D}{2}} K_{\frac{D-2}{2}}(xm), \quad 1 < D < 5 \end{aligned} \quad (3.42)$$

Tomando $D = 2 - 2\epsilon$ se obtiene

$$K_{2-2\epsilon}^{xx'}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2\pi x\mu^2}{m}\right)^\epsilon K_{-\epsilon}(mx). \quad (3.43)$$

Aplicando la transformación LKF truncada

$$\begin{aligned} K_{2-2\epsilon}^{(1)xx'}(\xi + \Delta\xi) &= \left(1 - \frac{\alpha\Delta\xi\mu^2x^2}{4} \left[\frac{1}{\epsilon} + \ln(\pi x^2\mu^2) + \gamma_E - 1\right] + \mathcal{O}(\epsilon)\right) \times \\ &\quad \times \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2\pi x\mu^2}{m}\right)^\epsilon K_{-\epsilon}(mx) \end{aligned} \quad (3.44)$$

Regresando al espacio de momentos, y conservando sólo los términos a orden $\mathcal{O}(\epsilon)$

$$\begin{aligned}
 K_{2-2\epsilon}^{(1)pp'}(\xi + \Delta\xi) &= \left(\frac{p}{m}\right)^\epsilon \int_0^\infty dx x J_{-\epsilon}(px) K_{-\epsilon}(mx) \left\{1 - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{4}\alpha\Delta\xi x^2 \mu^2 \left[\frac{1}{\epsilon} + \ln(\pi x^2 \mu^2) + \gamma_E - 1\right]\right\} \\
 &= \left\{ \frac{1}{p^2 + m^2} + \frac{\alpha\Delta\xi \mu^2}{\epsilon} \frac{p^2 - m^2}{(p^2 + m^2)^3} - \alpha\mu^2 \Delta\xi \frac{p^2 - m^2}{(p^2 + m^2)^3} \times \right. \\
 &\quad \left. \times \left[2\ln\left(1 + \frac{p^2}{m^2}\right) + \ln\left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right) + \gamma_E - \frac{4p^4}{p^2 - m^2} \right] \right\} \quad (3.45)
 \end{aligned}$$

Amputando las piernas externas, el resultado a nivel árbol se recupera y además se obtienen términos proporcionales a $\alpha\Delta\xi$, como se espera de LKF, que coinciden con cálculos explícitos a 1-loop [20]. En este ejemplo se puede observar que, si se quiere obtener información dependiente de la norma hasta un orden fijo en teoría de perturbación, se puede trabajar con una transformación LKF truncada, o perturbativa.

Para generalizar al caso spinorial, de nuevo el término $A(p^2; \xi)$ se trata de la misma forma que el caso escalar. Transformando al espacio de configuraciones el término que involucra a $\not{p}$:

$$\begin{aligned}
 \not{p} X_{2-2\epsilon}(\xi) &= \int \frac{d^{2-2\epsilon}p}{(2\pi)^{2-2\epsilon}} \frac{\not{p}}{p^2 + m^2} e^{-ix \cdot p} \\
 &= i \frac{\not{\partial}}{\partial x} \int \frac{d^{2-2\epsilon}p}{(2\pi)^{2-2\epsilon}} \frac{1}{p^2 + m^2} e^{-ix \cdot p} \\
 &= (2\pi)^{\epsilon-1} i \frac{\not{\partial}}{\partial x} \left(\frac{x\mu^2}{m} \right)^\epsilon K_{-\epsilon}(mx) \quad (3.46)
 \end{aligned}$$

Aplicando la transformación LKF truncada, regresando al espacio de momentos y luego de una integración por partes, se obtiene

$$\begin{aligned}
 \not{p} B_{2-2\epsilon}(p^2; \xi + \Delta\xi) &= \not{p} K_{2-2\epsilon}^{(1)pp'} - \frac{i}{(2\pi)^{1-\epsilon}} \int d^{2-2\epsilon}x \left(\frac{x}{m} \right)^\epsilon K_{-\epsilon}(mx) \times \\
 &\quad \times \left(\frac{\not{\partial}}{\partial x} (\text{LKF2} - 2\epsilon) \right) e^{ix \cdot k} \\
 &= \not{p} K_{2-2\epsilon}^{(1)pp'} - \frac{i}{(2\pi)^{1-\epsilon}} \int d^{2-2\epsilon}x \left(\frac{x}{m} \right)^\epsilon K_{-\epsilon}(mx) \times \\
 &\quad \times \frac{\not{x}}{x} \left(\frac{\partial}{\partial x} (\text{LKF2} - 2\epsilon) \right) e^{ix \cdot k} \quad (3.47)
 \end{aligned}$$

3.3. PROPAGADOR QED SPINORIAL EN 2-D

con

$$(\text{LKF2} - 2\epsilon) = -\frac{\alpha\Delta\xi\mu^2x^2}{4} \left[\frac{1}{\epsilon} + \ln(\pi x^2\mu^2) + \gamma_E - 1 \right] + \mathcal{O}(\epsilon). \quad (3.48)$$

Por lo que la transformación LKF del propagador está dada por

$$\begin{aligned} S_{2-2\epsilon}^{(1)pp'}(\xi + \Delta\xi) &= [m + \not{p}]K_{2-2\epsilon}^{(1)pp'}(\xi + \Delta\xi) - \frac{i}{(2\pi)^{1-\epsilon}} \int d^{2-2\epsilon}x \left(\frac{x}{m}\right)^\epsilon K_{-\epsilon}(mx) \times \\ &\quad \times \frac{\not{x}}{x} \left(\frac{\partial}{\partial x} (\text{LKF2} - 2\epsilon) \right) e^{ix \cdot k} \\ &= [m + \not{p}]K_{2-2\epsilon}^{(1)pp'}(\xi + \Delta\xi) + \frac{\alpha\Delta\xi\mu^2}{2} \frac{\not{\partial}}{\partial p} \left\{ \left(\frac{p}{m}\right)^\epsilon \left[\left(\frac{1}{\epsilon} + \gamma_E\right) \times \right. \right. \\ &\quad \times \int_0^\infty dx x J_{-\epsilon}(px) K_{-\epsilon}(mx) + 2 \int_0^\infty dx x \ln(x) J_0(px) K_0(mx) + \\ &\quad \left. \left. + \ln(\pi\mu^2) \int_0^\infty dx x J_0(px) K_0(mx) \right] \right\} \\ &= [m + \not{p}]K_{2-2\epsilon}^{(1)pp'}(\xi + \Delta\xi) + \frac{\alpha\Delta\xi\mu^2}{2} \frac{\not{\partial}}{\partial p} \left\{ \left(\frac{p}{m}\right)^\epsilon \left[\left(\frac{1}{\epsilon} + \gamma_E\right) \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \frac{\left(\frac{p}{m}\right)^{-\epsilon}}{p^2 + m^2} - \frac{\ln\left[1 + \frac{p^2}{m^2}\right] + \ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right) + 2\gamma_E}{p^2 + m^2} \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.49)$$

Trabajando hasta orden $\mathcal{O}(\epsilon)$, desarrollando y aplicando la derivada, se llega a

$$S_{2-2\epsilon}^{(1)pp'}(\xi + \Delta\xi) = [m + \not{p}]K_{2-2\epsilon}^{(1)pp'}(\xi + \Delta\xi) + \not{p}\alpha\Delta\xi\mu^2 \times \quad (3.50)$$

$$\times \frac{2\ln\left(1 + \frac{p^2}{m^2}\right) + \ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right) + \gamma_E - \frac{1}{\epsilon} - 2}{(p^2 + m^2)^2} + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (3.51)$$

CAPÍTULO 3. APLICACIONES DE LAS TRANSFORMACIONES LKF

Capítulo 4

Conclusiones y trabajo futuro

En la primera parte del trabajo, se ha presentado el formalismo de integral de camino en la mecánica cuántica no relativista, como repaso e introducción de los conceptos a usar en la teoría cuántica de campos. Se han introducido la representación en línea de mundo del propagador y de la acción efectiva tanto en la QED escalar como en la spinorial. Se trataron algunas consecuencias de la invariancia de norma de la teoría cuántica de campos, en particular se justificó la renormalizabilidad de la teoría y se mostró la identidad de Ward-Takahashi, mostrando la identidad de Ward como caso particular de esta.

En la segunda parte, se trató lo relativo a la derivación de las transformaciones LKF. Se derivó la transformación LKF, siguiendo el trabajo de Landau y Khalatnikov, mediante el formalismo estándar. Se desarrolló la generalización de esta transformación para la QED escalar en D dimensiones, usando el formalismo línea de mundo. Luego se rederivó la transformación LKF (es decir, para la función de correlación de 2 puntos) para la QED spinorial usando el formalismo línea de mundo, preparando el terreno para luego demostrar su generalización para el caso de la función de N puntos, obteniéndose una transformación que es válida para cualquier función de correlación de N puntos y es no perturbativa, por lo que es válida a cualquier orden en teoría de perturbación, la cual resultó ser idéntica a la transformación en la QED escalar.

La tercera parte del trabajo se centró en ilustrar la aplicación y las propiedades derivadas del hecho de que la transformación es no perturbativa. Se mostró, mediante las transformaciones LKF de los propagadores spinoriales a nivel árbol en la QED en 2, 3 y 4 dimensiones, que dicha transformación contenía información a mayores loops que el propagador input, y que los términos que dependían de la norma, y tenían dependencia lineal en la constante de estructura fina, coincidían con cálculos explícitos de los propa-

CAPÍTULO 4. CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

gadores a un loop. Para el caso de QED en 3 dimensiones, se mostró además una transformación LKF dada en el espacio de momentos. Al final, se dio un ejemplo de manera esquemática de la aplicación de la generalización de la transformación a nivel perturbativo, es decir, se analizó la transformación de norma de la función de correlación a un número de fotones internos fijo.

Como trabajo futuro, se espera derivar una generalización de la transformación para el caso gravitacional, es decir, hacer un análisis de la transformación de la función de correlación de N puntos tras un cambio de coordenadas, usando el mismo formalismo, el cual tiene una descripción del gravitón interactuando con la línea muy parecida a la del fotón, por lo que además de gravitones se puede añadir interacción con fotones. Además, una aplicación de interés que queda pendiente es transformar el vértice en la QED.

Bibliografía

- [1] Richard P. Feynman. An operator calculus having applications in quantum electrodynamics. *Phys. Rev.*, 84:108–128, Oct 1951.
- [2] R. P. Feynman. Mathematical formulation of the quantum theory of electromagnetic interaction. *Phys. Rev.*, 80:440–457, Nov 1950.
- [3] Christian Schubert. An Introduction to the worldline technique for quantum field theory calculations. *Acta Phys. Polon. B*, 27:3965–4001, 1996.
- [4] Christian Schubert. Perturbative quantum field theory in the string inspired formalism. *Phys. Rept.*, 355:73–234, 2001.
- [5] L.D. Landau and I.M. Khalatnikov. The gauge transformation of the Green function for charged particles. *Sov. Phys. JETP*, 2:69, 1956.
- [6] E.S. Fradkin. Concerning some general relations of quantum electrodynamics. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 29:258–261, 1955.
- [7] T. De Meerleer, D. Dudal, S.P. Sorella, P. Dall’Olio, and A. Bashir. Fresh look at the abelian and non-abelian landau-khalatnikov-fradkin transformations. *Physical Review D*, 97(7), Apr 2018.
- [8] Shaoyang Jia and M.R. Pennington. Landau-Khalatnikov-Fradkin transformation for the fermion propagator in QED in arbitrary dimensions. *Phys. Rev. D*, 95(7):076007, 2017.
- [9] A. Bashir and A. Raya. Landau-khalatnikov-fradkin transformations and the fermion propagator in quantum electrodynamics. *Physical Review D*, 66(10), Nov 2002.
- [10] Hidenori Sonoda. On the gauge parameter dependence of QED. *Phys. Lett. B*, 499:253–260, 2001.

BIBLIOGRAFÍA

- [11] D.C. Curtis and M.R. Pennington. Truncating the Schwinger-Dyson equations: How multiplicative renormalizability and the Ward identity restrict the three point vertex in QED. *Phys. Rev. D*, 42:4165–4169, 1990.
- [12] A. Bashir and M.R. Pennington. Constraint on the QED vertex from the mass anomalous dimension $\gamma(m) = 1$. *Phys. Rev. D*, 53:4694–4697, 1996.
- [13] A. Bashir, A. Kizilersu, and M.R. Pennington. The Nonperturbative three point vertex in massless quenched QED and perturbation theory constraints. *Phys. Rev. D*, 57:1242–1249, 1998.
- [14] C.J. Burden and P.C. Tjiang. Deconstructing the vertex Ansatz in three-dimensional quantum electrodynamics. *Phys. Rev. D*, 58:085019, 1998.
- [15] A. Bashir, A. Kizilersu, and M. R. Pennington. Does the weak coupling limit of the Burden-Tjiang deconstruction of the massless quenched three-dimensional QED vertex agree with perturbation theory? *Phys. Rev. D*, 62:085002, 2000.
- [16] Shaoyang Jia and M.R. Pennington. Gauge covariance of the fermion Schwinger–Dyson equation in QED. *Phys. Lett. B*, 769:146–151, 2017.
- [17] Shaoyang Jia and M.R. Pennington. How gauge covariance of the fermion and boson propagators in QED constrain the effective fermion-boson vertex. *Phys. Rev. D*, 94(11):116004, 2016.
- [18] Shaoyang Jia and M.R. Pennington. Exact Solutions to the Fermion Propagator Schwinger-Dyson Equation in Minkowski space with on-shell Renormalization for Quenched QED. *Phys. Rev. D*, 96(3):036021, 2017.
- [19] A. V. Kotikov and S. Teber. Landau-khalatnikov-fradkin transformation and the mystery of even ζ -values in euclidean massless correlators. *Physical Review D*, 100(10), Nov 2019.
- [20] Naser Ahmadinia, Adnan Bashir, and Christian Schubert. Multiphoton amplitudes and generalized landau-khalatnikov-fradkin transformation in scalar qed. *Physical Review D*, 93(4), Feb 2016.
- [21] Zvi Bern and David A. Kosower. Efficient calculation of one-loop qed amplitudes. *Phys. Rev. Lett.*, 66:1669–1672, Apr 1991.
- [22] Matthew J. Strassler. Field theory without feynman diagrams: One-loop effective actions. *Nuclear Physics B*, 385(1-2):145–184, Oct 1992.

- [23] Ashok Das. *Field theory: a path integral approach*, volume 52. World Scientific, 1993.
- [24] Olindo Corradini and Christian Schubert. *Spinning particles in quantum mechanics and quantum field theory*, 2015.
- [25] Julian Schwinger. On gauge invariance and vacuum polarization. *Phys. Rev.*, 82:664–679, Jun 1951.
- [26] Naser Ahmadinia, Victor Miguel Banda Guzman, Fiorenzo Bastianelli, Olindo Corradini, James P. Edwards, and Christian Schubert. Worldline master formulas for the dressed electron propagator, part 1: Off-shell amplitudes, 2020.
- [27] N. Ahmadinia, F. Bastianelli, O. Corradini, J. P. Edwards, and C. Schubert. Reducible contributions to the propagator and ehl in background fields, 2020.
- [28] Naser Ahmadinia, James P. Edwards, and Anton Ilderton. Reducible contributions to quantum electrodynamics in external fields. *Journal of High Energy Physics*, 2019(5), May 2019.
- [29] N. Ahmadinia, F. Bastianelli, O. Corradini, J.P. Edwards, and C. Schubert. One-particle reducible contribution to the one-loop spinor propagator in a constant field. *Nuclear Physics B*, 924:377–386, Nov 2017.
- [30] Gerard 't Hooft. Renormalizable Lagrangians for Massive Yang-Mills Fields. *Nucl. Phys. B*, 35:167–188, 1971.
- [31] N Beisert. Quantum field theory ii. *ETH Zurich, HS12*, 2017.
- [32] T. De Meerleer, D. Dudal, S. P. Sorella, P. Dall’Olio, and A. Bashir. Landau-khalatnikov-fradkin transformations, nielsen identities, their equivalence, and implications for qcd. *Physical Review D*, 101(8), Apr 2020.
- [33] L.F. Abbott. Introduction to the Background Field Method. *Acta Phys. Polon. B*, 13:33, 1982.
- [34] V M Villanueva-Sandoval, Y Concha-Sánchez, L-X Gutiérrez-Guerrero, and A Raya. On how the scalar propagator transforms covariantly in spinless quantum electrodynamics. *Journal of Physics: Conference Series*, 1208:012001, may 2019.

BIBLIOGRAFÍA

- [35] A. Bashir and A. Raya. Constructing the fermion boson vertex in QED(3). *Phys. Rev. D*, 64:105001, 2001.
- [36] A. Bashir and A. Raya. Fermion propagator in quenched qed3 in the light of the landau-khalatnikov-fradkin transformation. *Nuclear Physics B - Proceedings Supplements*, 141:259–264, Apr 2005.