Universidad Nacional Autónoma de México y Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas
UMSNH-UNAM

Selecciones continuas, números primos y una propiedad tipo cubierta

T E S I S

que para obtener el grado de

Maestro en Ciencias Matemáticas

presenta

Jorge Antonio Cruz Chapital

Asesor: Michael Hrušák

Morelia, Michoacán, México
Septiembre de 2020

Abstract

Let (X, τ) be a Hausdorff space and $n \in \omega$. We prove that if X admits a continuous selection over $\mathcal{F}_n(X)$ (nonempty subsets of X of cardinality at most n), then for every $n \leqslant m \leqslant 2n$ such that m is not a prime number, X admits a continuous selection over $[X]^m$ (subsets of X of cardinality m). As a consequence of this, a space X admits a continuous selection for every natural number if and only if the same is true for every prime number. For Hausdorff spaces (X, τ) which admit continuous selections over $[X]^2$, we characterize the existence of continuous selections over $[X]^n$ for $n \geqslant 2$, in terms of a covering-type property.

Resumen

Sea (X, τ) un espacio Hausdorff y $n \in \omega$. Probamos que si X admite una selección continua sobre $\mathcal{F}_n(X)$ (los subconjuntos no vacíos de X de cardinalidad a lo más n), entonces para cualquier $n \leqslant m \leqslant 2n$ tal que m no es un numero primo, X admite una selección continua sobre $[X]^m$ (los subconjuntos de X de cardinalidad m). Como consecuencia de esto, un espacio X admite una selección continua para cualquier número natural si y solo si lo mismo es cierto para cualquier número primo. Para espacios Hausdorff (X, τ) que admiten selecciones continuas sobre $[X]^2$, caracterizamos la existencia de selecciones continuas sobre $[X]^n$, para $n \geqslant 2$, en términos de una propiedad tipo cubierta.

Palabras clave. Selecciones continuas, Topología, números primos, hiperespacio, cubierta.

Índice general

Resumen/Abstract iv

1. Preliminares 1

2. Morfismos de selecciones 7

3. Cadenas bonitas 13

Bibliography 19

Capítulo 1

Preliminares

Nuestra notación es estandar en su mayor parte. $[X]^n$ es el conjunto de todos los subconjuntos de X de cardinalidad n. Si (X, τ) es un espacio topologico, $\mathcal{F}(X)$ será el conjunto de todos los cerrados no vacios en X, y si $n \in \omega$, entonces $\mathcal{F}_n(X)$ será el conjunto de todos los elementos en $\mathcal{F}(X)$ cuya cardinalidad es menor o igual a n. Podemos dotar a $\mathcal{F}(X)$ con la topología generada por los conjuntos

$$\langle \mathcal{V} \rangle := \{A \in \mathcal{F}(X) \mid \forall V \ \in \mathcal{V}(A \cap V \neq \emptyset) \wedge A \subseteq \bigcup \mathcal{V}\}$$

donde $\mathcal{V}$ es un subconjunto finito de τ. Nos referiremos a esta topología como la topología de Vietoris, y la denotaremos τ_V. Todos los espacios considerados en este texto son al menos T_2 y a partir de este momento, fijamos un (X, τ).

El estudio de las selecciones continuas comenzó a principios de los 50's por E. Michael [7]. Desde entonces se ha hecho una cantidad impresionante de investigación que parece estar lejos de terminar en un futuro cercano.

Definición 1.0.1. Dado $\mathfrak{F} \subseteq \mathcal{F}(X)$. Decimos que $f : \mathfrak{F} \longrightarrow X$ es una selección sobre $\mathfrak{F}$ si para cualquier $A \in \mathfrak{F}$ se cumple que $f(A) \in A$. Más aún, f es una selección continua si es una selección y es continua respecto a la topología de Vietoris restringida a $\mathfrak{F}$. Adicionalmente, dado $n \in \omega$ definimos

- $Sel_n(X) := \{f : [X]^n \longrightarrow X \mid \ f \textit{ es selección}\}$
- $Sel_{\leqslant n}(X) := \{f : \mathcal{F}_n(X) \longrightarrow X \mid \ f \textit{ es selección}\}$
- $Sel_n^c(X) := \{f \in Sel_n(X) \mid \ f \textit{ es continua}\}$
- $Sel_{\leqslant n}^c(X) := \{f \in Sel_{\leqslant n}(X) \mid \ f \textit{ es continua}\}$

Seleccionar y ordenar son conceptos muy cercanos. Ejemplos de esto pueden ser encontrados en [7] donde se demuestra que los espacios conexos para los cuales $Sel_2^c(X) \neq \emptyset$ son exactamente los débilmente ordenables, o en [8], donde se demuestra que lo mismo ocurre en los espacios compactos. En [8] se preguntó si dicho resultado era cierto para espacios localmente compactos. Una respuesta negativa a esta pregunta fue dada en [6] donde se construyó una familia casi ajena $\mathcal{A}$ para la cual $Sel_2^c(\Psi(\mathcal{A})) \neq \emptyset$ pero $\Psi(\mathcal{A})$

no es débilmente ordenable. A partir de eso, podemos concluir que aunque estos dos conceptos se comportan similar, en general no son equivalentes. Gracias a lo anterior, es natural preguntarse qué tan cerca están los espacios para los cuales $Sel_2^c(X) \neq \emptyset$ de ser débilmente ordenables. Por ejemplo, si (Y, τ_y) es un espacio débilmente ordenable, entonces para cualquier $n \in \omega$ se cumple que $Sel^c_{\leqslant n}(Y) \neq \emptyset$. Así que en general; ¿Qué podemos decir de $Sel^c_{\leqslant n}(X)$, sabiendo que $Sel_2^c(X) \neq \emptyset$?. El siguiente problema fue formulado en [4].

Problema 1.0.2 ([4]). ¿Existe un espacio X tal que $Sel_2^c(X) \neq \emptyset$, pero $Sel^c_{\leqslant n}(X) = \emptyset$ para algún $n > 2$?

Esta pregunta sigue abierta aún en el caso en el que $n = 3$. En [1], se demostró que si $Sel_2^c(X) \neq \emptyset$ entonces es equivalente que $Sel_3^c(X) \neq \emptyset$ y $Sel^c_{\leqslant 3}(X) \neq \emptyset$. Dicho resultado fue posteriormente generalizado en [2] por medio del siguiente teorema.

Teorema 1.0.3 ([2]). *Sea $n \in \omega$ tal que $Sel^c_{\leqslant n}(X) \neq \emptyset$. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

a) $Sel^c_{\leqslant n+1}(X) \neq \emptyset$

b) $Sel^c_{n+1}(X) \neq \emptyset$

Haciendo uso del Teorema 1.0.3, podemos reformular el Problema 1.0.2 de la siguiente manera.

Problema 1.0.4. ¿Existe un espacio X tal que $Sel_2^c(X) \neq \emptyset$, pero $Sel_n^c(X) = \emptyset$ para algún $n > 2$?

Una respuesta parcial a esta pregunta puede encontrarse en [6], donde el siguiente Teorema hace su aparición.

Teorema 1.0.5 ([6]). *Sea X un espacio separable para el cual $Sel_2^c(X) \neq \emptyset$- Entonces existe un espacio ordenable L y una funcion continua $f : X \longrightarrow L$ tal que $|f^{-1}[\{y\}]| \leqslant 2$ para cualquier $y \in L$. En particular, X admite una selección continua sobre $[X]^{<\omega}$.*

En [5] se demostró que $Sel_4^c(X) \neq \emptyset$ siempre que $Sel^c_{\leqslant 3}(X) \neq \emptyset$. Este resultado fue posteriormente generalizado en [2] por medio del siguiente Teorema.

Teorema 1.0.6 ([2]). *Sea X es un espacio topológico, y $n \in \omega \setminus \{0\}$ tal que $Sel^c_{2n+1}(X) \neq \emptyset$. Entonces $Sel^c_{2n+2}(X) \neq \emptyset$.*

En particular, si el Problema 1.0.4 tiene una solución afirmativa, debe existir un espacio X para el cual $Sel_2^c(X) \neq \emptyset$ pero $Sel_n^c(X) = \emptyset$ para algún número impar n. Mas aún, si quisieramos responder al Problema 1.0.4, solo es necesario que prestemos nuestra atención en $Sel_n^c(X)$ para n's impares.

En lo que resta de este Capítulo, terminaremos de introducir las herramientas básicas para el estudio de las selcciones continuas.

El objetivo del Capítulo 2, es generalizar el Teorema 1.0.6 por medio del Teorema 2.0.8 al demostrar que si X es un espacio topológico que admite un selección continua para $[X]^{\leqslant n}$, entonces para cualquier $n \leqslant m \leqslant 2n$ número compuesto, se cumple que X admite una selección continua para $[X]^m$. Dicho resultado arroja a la luz una estrecha relación entre las selecciones continuas y los numeros primos.

En el Capítulo 3, definiremos el concepto de cadenas bonitas, y lo usaremos para caracterizar a los espacios X para los cuales $Sel_n^c(X) \neq \emptyset$ sabiendo que $Sel_2^c(X) \neq \emptyset$.

La intuición que guía los resultados de este texto se basa en pensar en las selecciones como gráficas dirigidas, por lo cual utilizaremos una notación acorde a dicho pensamiento.

Definición 1.0.7. Sea $\mathfrak{F} \subseteq \bigcup\{\mathcal{F}_n(X) \mid n \in \omega\}$, $f : \mathfrak{F} \longrightarrow X$ una selección y $\vec{x} \in Dom(f)$. Escribiremos

$$\vec{x} \longrightarrow_f y$$

si y solo si $f(\vec{x}) = y$. Adicionalmente si $\mathcal{U} \subseteq P(X)$, entonces escribiremos

$$\mathcal{U} \rightrightarrows_f V$$

si y solo si para cualquier $\vec{x} \in \langle \mathcal{U} \rangle \cap Dom(f)$, se cumple que $f(\vec{x}) \in V$. Cuando la situación anterior ocurra y f sea clara por el contexto, la omitiremos en la notación.

Proposición 1.0.8. *Sea $\mathfrak{F} \subseteq \bigcup\{\mathcal{F}_n(X) \mid n \in \omega\}$, y $f : \mathfrak{F} \longrightarrow X$ una selección. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) f es continua.

b) Para cualquier $n \in \omega$ y $\{x_1, \ldots, x_n\} \in Dom(f) \cap [X]^n$, existen $U_1, \ldots, U_n \in \tau$ vecindades de $x_1, \ldots, x_n$ respectivamente ,y ajenos por pares y $j \leqslant n$ tal que $\{U_1, \ldots, U_n\} \rightrightarrows U_j$.

Demostración. *a)* $\implies$ *b)* Sea $n \in \omega$ y sea $\{x_1, \ldots, x_n\} \in Dom(f) \cap [X]^n$. Como X es T_2 entones existen $V_1, \ldots, V_n$ abiertos ajenos por pares tales que para cualquier $i \leqslant n$ se cumple que $x_i \in V_i$. Sea $j \leqslant n$ tal que $f(\{x_1, \ldots, x_n\}) = x_j$. Como f es continua entonces existe $\mathcal{U} \subseteq \tau$ finito, tal que $\{x_1, \ldots, x_n\} \in \langle \mathcal{U} \rangle$ y $f[\langle \mathcal{U} \rangle] \subseteq V_j$.

Para cada $i \leqslant n$ definamos

$$U_i := V_i \cap \Big(\bigcap \{U \in \mathcal{U} \mid (x_i \in U)\} \Big).$$

Por definición se tiene que $U_1, \ldots, U_n$ son ajenos por pares y para cualquier $i \leqslant n$ se cumple que $x_i \in U_i$. Mas aún, como f es selección entonces para cualquier $\vec{x} \in \langle\{U_1, \ldots, U_n\}\rangle \cap Dom(f)$ se cumple para algún $i \leqslant n$ que $f(\vec{x}) \in U_i$, y como $\langle\{U_1, \ldots, U_n\}\rangle \subseteq \langle\mathcal{U}\rangle$, entonces $f[\langle\{U_1, \ldots, U_n\}\rangle] \subseteq V_j$. Puesto que V_j contiene a U_j y es ajeno con cualquier otro U_i, concluimos que $\{U_1, \ldots, U_n\} \rightrightarrows U_j$.

b) $\implies$ *a)* Sea $\vec{x} \in Dom(f)$ y $V \in \tau$ tal que $f(\vec{x}) \in V$. Como $Dom(f) \subseteq \bigcup\{\mathcal{F}_n(X) \mid n \in \omega\}$, entonces existe $n \in \omega$ y $x_1, \ldots, x_n \in X$, distintos por pares, tales que $\vec{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Sean $U_1, \ldots, U_n$ vecindades de $x_1, \ldots, x_n$ respectivamente y ajenos por pares y $j \leqslant n$ tal que $\{U_1, \ldots, U_n\} \rightrightarrows U_j$. En particular tenemos que $f(\vec{x}) = x_j$.

Sea $\mathcal{V} = \{U_1, \ldots, U_j \cap V, \ldots V_j\}$. Por definición, tenemos que $\langle\mathcal{V}\rangle \subseteq \langle\{U_1, \ldots, U_n\}\rangle$, y como $x_j = f(\vec{x}) \in V$ entonces $\vec{x} \in \langle\mathcal{V}\rangle$. Para terminar, notemos que como f es selección y $\{U_1, \ldots, U_n\} \rightrightarrows U_j$, entonces $f[\mathcal{V}] \subseteq U_j \cap V \subseteq V$.

■

La Proposición anterior nos dice que que si f es continua, entonces podemos engordar la punta y la cola de las flechas determinadas por f, haciendo uso de abiertos. A continuación pasaremos a hablar de flechas entre abiertos, a gráficas de abiertos

Definición 1.0.9. Sean $n \leqslant m \in \omega$, $f \in Sel_n(X)$ y $\mathcal{U} \in [\tau\backslash\{\emptyset\}]^m$ un familia de conjuntos ajenos por pares. Diremos que $\mathcal{U}$ preserva f-relaciones si para cualquier $\mathcal{V} \in [\mathcal{U}]^n$ distintos por pares se cumple que existe un $V \in \mathcal{V}$ tal que

$$\mathcal{V} \rightrightarrows V$$

En general, si $k, m \in \omega$, $f \in Sel_{\leqslant k}(X)$ y $\mathcal{U} \in [\tau\backslash\{\emptyset\}]^m$ es un conjunto de abiertos ajenos por pares, diremos que $\mathcal{U}$ preserva f relaciones si para cualquier $0 < n \leqslant \text{mín}(k, m)$ se cumple que $\mathcal{U}$ preserva $f|_{[X]^n}$-relaciones.

Así como la Proposición 1.0.8 nos habla de engordar flechas, la siguiente proposición nos habla de engordar gráficas finitas.

Proposición 1.0.10. *Sean $n \in \omega$ y $f \in Sel^c_{\leqslant n}(X)$ (o $f \in Sel^c_n(X)$). Para cada $n \leqslant m \in \omega$ y para cualesquiera $\{x_1, \ldots x_m\} \in [X]^m$ existen $U_1, \ldots, U_m \in \tau$ vecindades de $x_1, \ldots, x_m$ respectivamente, tales que $\{U_1, \ldots, U_m\}$ preserva f-relaciones.*

Demostración. Demostraremos solo el caso en el que $f \in Sel^c_{\leqslant n}(X)$, ya que el otro caso es completamente análogo.

Sea $n \leqslant m$ y sea $\vec{x} = \{x_1, \ldots, x_m\} \in [X]^m$. Sea $k \leqslant n$, $\vec{y} = \{y_1, \ldots, y_k\} \in [X]^k$ tales que $\vec{y} \subseteq \{x_1, \ldots, x_m\}$. Como f cumple las hipotesis de la Proposición 1.0.8, entonces existen $U_{y_1}, \ldots, U_{y_k}$ vecindades de $y_1, \ldots, y_k$ respectivamente y ajenos por pares, y $j \leqslant k$ tal que $\{U_{y_1}, \ldots, U_{y_k}\} \rightrightarrows U_{y_j}$.

Para todo $i \leqslant m$, definimos

$$U_i := \bigcap\{U_{y_r} \mid \exists k \leqslant n \wedge \exists \vec{y} = \{y_1, \ldots, y_r, \ldots, y_k\} \in [X]^k \cap P(\vec{x})(y_r = x_i)\}$$

Como $\vec{x}$ tiene una cantidad finita de subconjuntos, entonces para cualquier $i \leqslant m$ se cumple que U_i es un conjunto abierto. Se sigue de su definición que $\{U_1, \ldots, U_m\}$ preserva f-relaciones.

$\blacksquare$

Capítulo 2

Morfismos de selecciones

En esta sección abordaremos el problema de encontrar selecciones continuas sobre el hiperespacio de conjuntos de m puntos de un espacio topológico (X, τ). Lo primero que haremos será facilitar el problema al partir a $[X]^m$ en conjuntos *clopens* muy específicos para posteriormente concentrarnos en construir selecciones continuas sobre cada uno de esos conjuntos. Para hacer lo anterior tomaremos un número natural n menor que m de tal suerte que $Sel_n^c(X) \neq \emptyset$ y $f \in Sel_n^c(X)$; posteriormente analizaremos el comportamiento de f en subconjuntos de X con tamaño m y relacionaremos a dos de estos conjuntos, cuando el comportamiento de f sobre ellos sea escencialmente el mismo. La relación antes mencionada generará la partición deseada.
A continuación, definimos cuando dos selecciones son escencialmente iguales, es decir, isomorfas.

Definición 2.0.1. Dados $n \in \omega$, $f \in Sel_n(Z)$, y $g \in Sel_n(Y)$. Diremos que f y g son isomorfas si existe $\phi : Z \longrightarrow Y$ biyectiva tal que para cualquier $\vec{z} = \{z_1, \ldots, z_n\} \in [Z]^n$ se cumple que

$$\vec{z} \longrightarrow_f z_i \ \ \textit{si y solo si} \ \ \phi[\vec{z}] \longrightarrow_g \phi(z_i).$$

En este caso, diremos que ϕ es un isomorfismo de f a g.

Es un ejercicio rutinario ver que la relacional "ser isomorfo a" es de equivalencia, cosa que nos permite utilizar dicha noción para definir particiones. La siguiente definición nos permitirá hablar de forma más cómoda sobre los elementos de dichas particiones.

Definición 2.0.2. Sean $n, m \in \omega$, Y tales que $|Y| = m$, $f \in Sel_n(X)$ y $g \in Sel_n(Y)$. Definimos

$$\mathcal{P}(g) := \{\vec{x} \in [X]^m \mid f|_{[\vec{x}]^n} \ \ \textit{es isomorfa a } g\}.$$

Se necesitan hacer dos aclaraciones antes de continuar. La primera es que en principio la definición anterior solo se aplica cuando $f \in Sel_n(X)$, pero frecuentemente abusaremos de la notación al considerar funciones con dominio mayor y al aplicar la definición realmente estaremos pensando en dicha función restringida a $[X]^n$. La segunda es que en principio la definición depende de f, pero siempre trabajaremos con una única f a la vez, por lo cual omitimos referencias a ella en la notación.

Proposición 2.0.3. *Sean* $n \leqslant m \in \omega$, $f \in Sel_n(X)$ *y* $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_m\} \in [\tau \backslash \{\emptyset\}]^m$ *tal que sus elementos son ajenos por pares. Si* $\mathcal{U}$ *preserva relaciones, entonces para cualesquiera* $\vec{x} = \{x_1, \ldots, x_m\}, \vec{y} = \{y_1, \ldots, y_m\}$ *tales que para cualquier* $i \leqslant m$ *se cumple que* $x_i, y_i \in U_i$, *la función* $\phi_{\vec{y}}^{\vec{x}}(f) : \vec{x} \longrightarrow \vec{y}$ *dada por*

$$\phi_{\vec{y}}^{\vec{x}}(f)(x_i) = y_i$$

es un isomorfismo de $f|_{[\vec{x}]^n}$ *a* $f|_{[\vec{y}]^n}$.

Demostración. Sean $i_1 < \ldots < i_n \leqslant m$ y $j \leqslant n$ tales que

$$\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}\} \longrightarrow x_j.$$

Como $\mathcal{U}$ preserva relaciones podemos concluir que $\{U_{i_1}, \ldots, U_{i_n}\} \rightrightarrows U_j$, y como $y_{i_1} \in U_{i_1}, \ldots, y_{i_n} \in U_{i_n}$ entonces

$$\phi_{\vec{y}}^{\vec{x}}(f)[\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}\}] = \{y_{i_1}, \ldots, y_{i_n}\} \longrightarrow y_{i_j} = \phi_{\vec{y}}^{\vec{x}}(f)(x_{i_j}).$$

Consecuentemente $\phi_{\vec{y}}^{\vec{x}}(f)$ es isomorfismo. ■

Utilizaremos constantemente la función $\phi_{\vec{y}}^{\vec{x}}(f)$ definida en la proposición anterior, y cuando f sea clara por el contexto la llamaremos simplemente $\phi_{\vec{y}}^{\vec{x}}$.

Lo propiedad crucial de $\mathcal{P}(g)$ es que cuando f es continua, entonces $\mathcal{P}(g)$ es clopen.

Proposición 2.0.4. *Sean* $n, m \in \omega$, Y *tal que* $|Y| = m$, $f \in Sel_n^c(X)$ *y* $g \in Sel_n(Y)$. *Entonces* $\mathcal{P}(g)$ *es clopen en* $[X]^m$.

Demostración. Puesto que $\{\mathcal{P}(g) \mid g \in Sel_n(Y)\}$ es una partición de X, es suficiente ver para cada $g \in Sel_n(Y)$ se cumple que $\mathcal{P}(g)$ es abierto.

Tomemos $g \in Sel_n(Y)$ y $\vec{x} = \{x_1, \ldots, x_m\} \in \mathcal{P}(g)$. Invocando a la Proposición 1.0.10, encontramos $U_1, \ldots, U_n \in \tau$ vecindades ajenas por pares de $x_1, \ldots, x_n$ respectivamente, y tales que $\{U_1, \ldots, U_n\}$ preserva f-relaciones. Para terminar, notemos que $\vec{x} \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ y por la Proposición 2.0.3 se tiene que $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle \subseteq \mathcal{P}(g)$. ■

Como fue comentado en la demostración anterior, el conjunto $\{\mathcal{P}(g) \mid g \in Sel_n(Y)\}$ es una partición de $[X]^m$. La pregunta ahora es:

Dada $g \in Sel_n(Y)$, ¿cuándo existe una selección continua sobre $\mathcal{P}(g)$?

A partir de este momento nos concentraremos en contestar dicha pregunta.

Podemos pensar en que vamos a jugar juegos de n jugadores con los elementos de Y, y en este contexto, una selección $g \in Sel_n(Y)$ es una función que nos indica quién fue el ganador de cada juego. La estrategia para responder nuestra pregunta radica en preguntarle a cada elemento de Y cuántos juegos ganá, y la suerte estará de nuestro lado cuando al menos dos elementos de Y nos den respuestas distintas, es decir, hayan ganado un número distinto de juegos.

Antes de empezar, es bueno resaltar que la combinatoria finita jugará un papel protagónico. Terminada la advertencia damos paso a formalizar las ideas mencionadas en el párrafo anterior, empezando por la pregunta ¿ *Cuántas veces ganaste ?*.

Definición 2.0.5. Dados $n \in \omega$, $g \in Sel_n(Y)$ y $x \in Y$, definimos

$$\mathcal{W}_g(x) := |g^{-1}[\{x\}]|.$$

Adicionalmente, si $k \in \omega$ definimos

$$\mathcal{Q}_g(k) := \{x \in Y \mid \mathcal{W}_g(x) = k\}.$$

Si g es clara por el contexto, la omitiremos.

En resumen, $\mathcal{W}_g(x)$ nos dice cuántas veces ganó x y $\mathcal{Q}_g(k)$ nos dice qué elementos de Y ganaron k veces. Es fácil ver que si $\phi : Y \longrightarrow Y'$ es un isomorfismo de g a h, entonces para cualquier $x \in Y$ y para cualquier $k \in \omega$ se cumple que $\mathcal{W}_g(x) = \mathcal{W}_h(\phi(x))$ y $\phi[\mathcal{Q}_g(k)] = \mathcal{Q}_h(k)$, hecho que utilizaremos a continuación.

Lema 2.0.6. *Sean $k, n, m \in \omega$ con $n \leqslant k$, Y tal que $|Y| = m$, $f \in Sel^c_{\leqslant k}(X)$ y $g \in Sel_n(Y)$. Si existen $x, y \in Y$ tales que $\mathcal{W}_g(x) \neq \mathcal{W}_g(y)$ y $m \leqslant 2k$ entonces existe una selección continua h sobre $\mathcal{P}(g)$.*

Demostración. El conjunto $\mathcal{Q} = \{\mathcal{Q}_g(r) \mid r \in \omega \text{ y } \mathcal{Q}_g(r) \neq \emptyset\}$ es una partición de Y, y por hipótesis tiene al menos dos elementos. El principio de casillas nos permite concluir que existe $r \in \omega$ tal que $\mathcal{Q}_g(r) \neq \emptyset$ y $|\mathcal{Q}_g(r)| \leqslant \frac{m}{2}$, consideremos a r_0 el mínimo natural que cumple lo antes mencionado y sea $k_0 = |\mathcal{Q}_g(r_0)|$.

Definimos $h : \mathcal{P}(g) \longrightarrow X$ dada por $h(\vec{x}) = f(Q_{f|_{[x]^n}}(r_0))$. Sabemos que h está bien definida puesto que para cada $\vec{x} \in \mathcal{P}(g)$ se cumple que $|\mathcal{Q}_{f|_{[\vec{x}]^n}}(r_0)| = k_0 \leqslant k$. Para ver que h es continua tomemos $\vec{x} = \{x_1, \ldots, x_m\} \in \mathcal{P}(g)$, aplicando dos veces la Proposición 1.0.10 e intersecando testigos, podemos encontrar $U_1, \ldots, U_m \in \tau$ vecindades de $x_1, \ldots, x_m$ respectivamente y ajenas por pares, tales que $\{U_1, \ldots, U_m\}$ preserve $f|_{[X]^n}$-relaciones y $f|_{[X]^{k_0}}$-relaciones.

Consideremos $i_1 < \ldots < i_{k_0} \leqslant n$ tales que $\mathcal{Q}_{f|_{[x]^n}}(r_0) = \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_{k_0}}\}$, entonces para cualquier $\vec{y} = \{y_1, \ldots, y_n\}$ con $y_1 \in U_1, \ldots, y_m \in U_m$ se cumple que

$$\{y_{i_1}, \ldots, y_{i_{k_0}}\} = \mathcal{Q}_{f|_{[\vec{y}]^n}}(r_0) = \phi^{\vec{x}}_{\vec{y}}[\mathcal{Q}_{f|_{[\vec{x}]^n}}(r_0)].$$

Como $\{U_1, \ldots, U_m\}$ preserva $f|_{[X]^{k_0}}$-relaciones, entonces también lo hace $\{U_{i_1}, \ldots, U_{i_{k_0}}\}$. Puesto que para cualquier $j \leqslant k_0$ se cumple que $x_{i_j}, y_{i_j} \in U_{i_j}$, entonces

$$h(x) = f(Q_{f|_{[\vec{x}]^n}}(r_0)) \in U_{i_j} \text{ si y solo si } h(y) = f(Q_{f|_{[\vec{y}]^n}}(r_0)) \in U_{i_j}.$$

Concluimos que $\{U_1, \ldots, U_m\} \rightrightarrows_h U_j$ donde $j \leqslant n$ es tal que $\vec{x} \longrightarrow x_j$, y así , h es continua. ■

El Lema anterior realmente nos está diciendo mucho sobre el comportamiendo de las selecciones continuas que debe tener X, para que el Problema 1.0.4 tenga una solución afirmativa. De manera informal podemos decir que para que X sea una solución afirmativa al problema 2, se debe tener que todas las selecciones continuas sobre X deben tener muchos "remolinos". Formalizaremos dicho concepto en el Capítulo 3, a la vez que lo estudiamos más a fondo.

Lema 2.0.7. *Sean $p \leqslant m \in \omega$ y supongamos que p es primo, y $|Y| = m$. Si existe $g \in Sel_p(Y)$ tal que para cualesquiera $x, y \in Y$ se cumple que $\mathcal{W}(x) = \mathcal{W}(y)$, entonces p no divide a m.*

Demostración. Sea g como en las hipótesis. Supongamos por contradicción que existe $j \in \omega$ tal que $pj = m$, y sea k tal que para cualquier $x \in Y$ se cumple que $k = \mathcal{W}(x)$. Notemos que

$$p(jk) = mk = \sum_{x \in Y} \mathcal{W}(x) = |[Y]^p| = \frac{m!}{p!(m-p)!}$$

Así, p divide a $\frac{(m-1)!}{(p-1)!(m-p)!}$, pero esto es imposible ya que p es primo y p divide a m. Concluimos que p no divide a m. ■

Teorema 2.0.8. *Sean $p, k, m \in \omega$ y $f \in Sel^c_{\leqslant k}(X)$. Si $p, \frac{m}{2} \leqslant k$ y p es un número primo que divide a m, entonces $Sel^c_m(X) \neq \emptyset$.*

Demostración. Como p divide a m, entonces aplicando el Lema 2.0.7 podemos concluir que para cualquier $Z \in [X]^p$ existen $x, y \in Z$ tales que $\mathcal{W}_{f|_{[Z]^n}}(x) \neq \mathcal{W}_{f|_{[Z]^n}}(y)$. Así, k, m y f cumplen las hipótesis del Lema 2.0.6, y en consecuencia $Sel^c_m(X) \neq \emptyset$. ■

Como Corolario del Teorema anterior es que cualquier espacio (X, τ) tal que $Sel^c_2(X) \neq \emptyset$, cumple que $Sel^c_4(X) \neq \emptyset$. Se menciona ese caso en particular puesto que dicha afirmación tiene una estrecha relación con una de las preguntas que motivaron este trabajo. Por otro lado, el siguiente Corolario muestra de manera explícita la generalización del Teorema 1.0.6 a través del Teorema 2.0.8.

Corolario 2.0.9. *Sea $2 \leqslant n$ y $f \in Sel^c_{\leqslant n}(X)$. Si $n+1$ es un número compuesto entonces $Sel^c_{n+1}(X) \neq \emptyset$.*

Para terminar el capítulo, presentamos el siguiente teorema. En éste, queda explícito que el corazón del Problema 1.0.4 está los numeros primos.

Teorema 2.0.10. *Dado (X, τ) un espacio topológico T_2. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) Para cualquier $1 < n \in \omega$ se cumple que $Sel^c_n(X) \neq \emptyset$.

b) Para cualquier primo p se cumple que $Sel^c_p(X) \neq \emptyset$.

Demostración. $a) \to b)$ trivial.

$b) \to a)$ La demostración la haremos por inducción. Sea $1 < n \in \omega$ y supongamos que para cualquier $1 < m < n$ se cumple que $Sel_n^c(X) \neq \emptyset$. Si n es primo, entonces por hipótesis $Sel_n^c(X) \neq \emptyset$. Si n no es primo, podemos invocar al Teorema 1.0.3 para concluir que $Sel_{\leqslant n-1}^c(X) \neq \emptyset$. Así, gracias al Corolario 2.0.9 tenemos que $Sel_n^c(X) \neq \emptyset$. ■

Capítulo 3

Cadenas bonitas

En esta sección nos centraremos en el estudio de la extensión de selecciones continuas haciendo particular énfasis en los datos que nos puedan brindar las selecciones continuas sobre $[X]^2$.

Supongamos que tenemos un espacio (X, τ) *tal que para algún* $2 \leqslant n$ *se tiene que* $Sel^c_{\leqslant n}(X) \neq \emptyset$*, y nos preguntamos si* $Sel^c_{n+1}(X) \neq \emptyset$*. Fijemos* $f \in Sel^c_{\leqslant n}(X)$*, entonces en virtud del Lema 2.0.6 aplicado a* $k = 2$ *y* $m = n + 1$ *sabemos que para cualquier* $g \in Sel_2(m)$ *tal que existen* $x, y \in m$ *con* $\mathcal{W}(x) \neq \mathcal{W}(y)$*, se cumple que existe una selección continua sobre* $\mathcal{P}(g)$*. Lo anterior implica, gracias a la Proposición 2.0.4, que las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) $Sel^c_{n+1}(X) \neq \emptyset$.

b) para cualquier $g \in Sel_2(n + 1)$ *tal que para cualesquiera* $x, y \in n + 1$ *se cumple que* $\mathcal{W}(x) = \mathcal{W}(y)$*, existe una selección continua sobre* $\mathcal{P}(g)$.

Así que el camino natural consiste en analizar las selecciones g *propuestas por el inciso b) de la equivalencia anterior. Si* n *es un número impar sabemos gracias al Corolario 2.0.9 que* $Sel^c_{n+1}(X) \neq \emptyset$*, por lo que solo nos ocuparemos del caso en que* n *es par.*

A partir de este momento escribiremos $x \longrightarrow y$ *y* $A \rightrightarrows B$ *en lugar de* $\{x, y\} \longrightarrow y$ *y* $\{A, B\} \rightrightarrows B$ *respectivamente. Hecha esta aclaración, empezamos.*

Definición 3.0.1. Sea $2 \leqslant n \in \omega$ impar. Definimos

$$Reg_n := \{g \in Sel_2(n) \mid \forall x, y \in n\Big(\mathcal{W}_g(x) = \mathcal{W}_g(y)\Big)\}.$$

Más aún, si $f \in Sel^c_2(X)$ definimos

$$\mathcal{P}(Reg_n) = \bigcup_{g \in Reg_n} \mathcal{P}(g).$$

Proposición 3.0.2. *Sean $2 \leqslant n \in \omega$ impar, y $g \in Reg_n$. Para cualesquiera $x, y \in n$ tales que $x \longrightarrow y$, existe $z \in n \backslash \{x, y\}$ tal que $y \longrightarrow z \longrightarrow x$.*

Demostración. Sea $A_x = \{z \in n \backslash y \mid z \longrightarrow x\}$ y $A_y = \{z \in n \backslash x \mid z \longrightarrow y\}$. Como $g \in Reg_n$, entonces $|A_x| = \frac{n-1}{2}$ y $|A_y| = \frac{n-1}{2} - 1$. Así, $A_x \backslash A_y \neq \emptyset$. Para terminar, notemos que cualquier $z \in A_x \backslash A_y$ funciona. ∎

Definición 3.0.3. Sea $n \in \omega$. Definimos

$$\mathfrak{F}_n(X) := \{\mathcal{U} \subseteq [\tau \backslash \{\emptyset\}]^n \mid \textit{para todo } U, V \in \mathcal{U}, \ \textit{si } U \neq V \ \textit{entonces } U \cap V = \emptyset\}.$$

Definición 3.0.4. Sean $n \in \omega$ y $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathfrak{F}_n(X)$. Escribiremos $\mathcal{U} \smile \mathcal{V}$ si y solo si para cualquier $U \in \mathcal{U}$ existe un único $V \in \mathcal{V}$ tal que $U \cap V \neq \emptyset$. Si este es el caso, denotamos por $\gamma_{(\mathcal{U},\mathcal{V})} : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$ a la Única función que satisface para cualquier $U \in \mathcal{U}$ que $\gamma_{(\mathcal{U},\mathcal{V})}(U) \cap U \neq \emptyset$.

Definición 3.0.5. Sean $n, m \in \omega$, $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{F}_n(X)$ y $\mathcal{U}_0, \ldots, \mathcal{U}_m \in \mathfrak{F}_n(X)$. Decimos que $\mathbb{K} = (\mathcal{U}_0, \ldots, \mathcal{U}_m)$ es una $\mathfrak{D}$-cadena de $\mathcal{U}_0$ a $\mathcal{U}_m$(o simplemente $\mathfrak{D}$-cadena), si y solo si para cualquier $i < m$ se cumple que $\mathcal{U}_i \in \mathfrak{D}$ y $\mathcal{U}_i \smile \mathcal{U}_{i+1}$. Adicionalmente definimos la función

$$\Gamma_{\mathbb{K}} := \gamma_{(U_{m-1}, U_m)} \circ \cdots \circ \gamma_{(U_0, U_1)}.$$

Por último, diremos que $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathfrak{D}$ son $\mathfrak{D}$-encadenables si existe una $\mathfrak{D}$-cadena de $\mathcal{U}$ a $\mathcal{V}$.

La relacional ser $\mathfrak{D}$-encadenables es de equivalencia. Observaremos más adelante que bajo ciertas circunstancias, una $\mathfrak{D}$-cadena de $\mathcal{U}$ a $\mathcal{V}$, sirve para comunicar y copiar información local del comportamiento de una selección sobre $\langle U \rangle$ a $\langle V \rangle$.

En base al siguiente concepto formularemos la caracterización que le da nombre a esta sección.

Definición 3.0.6. Sea $n \in \omega$ y $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{F}_n(X)$. Decimos que la familia $\mathfrak{D}$ es bonita si y solo si para cualesquiera $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathfrak{D}$ se cumple:

- Si $\langle \mathcal{A} \rangle \cap \langle \mathcal{B} \rangle \neq \emptyset$ entonces $\mathcal{A} \smile \mathcal{B}$.
- Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son $\mathfrak{D}$-encadenables, entonces para cualesquiera $\mathbb{K}, \mathbb{L}$ $\mathfrak{D}$-cadenas de $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$, se cumple que $\Gamma_{\mathbb{K}} = \Gamma_{\mathbb{L}}$.

Lema 3.0.7. *Sea $2 \leqslant n \in \omega$ par, $f \in Sel_2^c(X)$ y $\mathcal{U}$, $\mathcal{V} \in \mathfrak{F}_{n+1}(X)$ que preservan relaciones. Si $\langle \mathcal{U} \rangle, \langle \mathcal{V} \rangle \subseteq \mathcal{P}(Reg_{n+1})$, entonces $\langle \mathcal{U} \rangle \cap \langle \mathcal{V} \rangle \neq \emptyset$ implica que $\mathcal{U} \smile \mathcal{V}$.*

Demostración. Supongamos por contradicción que existe $U \in \mathcal{U}$ tal que para cualquier $V \in \mathcal{V}$ se cumple que $U \cap V = \emptyset$. Notemos que entonces para cualquier $x \in \langle \mathcal{V} \rangle$ se cumple que $x \cap U = \emptyset$, por lo que $x \notin \langle \mathcal{U} \rangle$, pero eso nos llevaría a que $\langle \mathcal{U} \rangle \cap \langle \mathcal{V} \rangle = \emptyset$ lo cual es imposible.

Para demostrar la unicidad, supongamos por contradicción que existe $U \in \mathcal{U}$ y $V_0, V_1 \in \mathcal{V}$ distintos tales que para cualquier $i \in 2$ se cumple que $U \cap V_i \neq \emptyset$. Sean $V_2, \ldots, V_m \in \tau \setminus \{\emptyset\}$ tales que $\mathcal{V} = \{V_0, V_1, V_2, \ldots, V_m\}$, y supongamos, sin pérdida de generalidad, que $V_0 \rightrightarrows V_1$. Como $\mathcal{V}$ preserva relaciones y $\langle \mathcal{V} \rangle \subseteq \mathcal{P}(Reg_{n+1})$, se deduce que existe $g \in Reg_{n+1}$ tal que $\langle \mathcal{V} \rangle \subseteq \mathcal{P}(g)$, por lo que haciendo uso de la Proposición 3.0.1 encontramos $2 \leqslant j < n+1$ tal que $V_1 \rightrightarrows V_j \rightrightarrows V_0$. Dividimos el resto de la demostración en dos casos:

Caso 1) Existe $U \neq U' \in \mathcal{U}$ tal que $U' \cap V_j \neq \emptyset$. En este caso, tomemos $x_0 \in U \cap V_0$, $x_1 \in U \cap V_1$ y $x_2 \in U' \cap V_j$. Por un lado, como $V_1 \rightrightarrows V_j \rightrightarrows V_0$ entonces

$$x_1 \longrightarrow x_2 \longrightarrow x_0,$$

pero por otro lado, como $\mathcal{U}$ preserva relaciones, $U \neq U'$, $x_2 \in U'$ y $x_0, x_1 \in U$, tenemos que $x_1 \longrightarrow x_2$ si y solo si $x_0 \longrightarrow x_2$, lo cual es una contradicción.

Caso 2) Para cualquier $U \neq U' \in \mathcal{U}$ se cumple que $U' \cap V_j = \emptyset$. Notemos que en este caso $V_j \cap U \neq \emptyset$. Si para cualquier $U \neq U' \in \mathcal{A}$ se tuviera que $U' \cap V_0 = U' \cap V_1 = \emptyset$ podríamos argumentar de manera parecida al primer párrafo de esta demostración para concluir que $\langle \mathcal{U} \rangle \cap \langle \mathcal{V} \rangle = \emptyset$, lo cual es imposible. Por lo tanto existen $i < 2$ y $U \neq U' \in \mathcal{U}$ de tal suerte que $U' \cap V_i \neq \emptyset$. Sea $x_0 \in U \cap V_i$, $x_1 \in U \cap V_j$ y $x_2 \in U' \cap V_i$, procediendo de manera completamente análoga al Caso 1, llegamos al absurdo deseado. ■

Teorema 3.0.8. *Sea (X, τ) un espacio topológico, $2 \leqslant n \in \omega$ par y $f \in Sel^{c}_{\leqslant n}(X)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) $Sel^{c}_{n+1}(X) \neq \emptyset$.

b) *Existe $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{F}_{n+1}(X)$ bonito, tal que*

$$\bigcup_{\mathcal{U} \in \mathcal{D}} \langle \mathcal{U} \rangle = \mathcal{P}(Reg_{n+1}).$$

Demostración. $\big(\mathbf{a}) \Rightarrow \mathbf{b})\big)$ Sea $h \in Sel^{c}_{n+1}(X)$ y sea $g = f \cup h$. Para cada $\vec{x} = \{x_0, \ldots, x_n\} \in \mathcal{P}(Reg_{n+1})$, tomemos $U^{\vec{x}}_0, \ldots, U^{\vec{x}}_n \in \tau \setminus \{\emptyset\}$ vecindades de $x_0, \ldots, x_n$ respectivamente, ajenas por pares y tales que para cualquier $i \leqslant n+1$ se cumpla que $\mathcal{U}^{\vec{x}} = \{U^{\vec{x}}_0, \ldots, U^{\vec{x}}_n\}$ preserva $g|_{[X]^i}$-relaciones, lo cual podemos hacer aplicando repetidamente el Lema 1.0.10 e intersecando testigos. Sea

$$\mathfrak{D} = \{\mathcal{U}^{\vec{x}} \mid \vec{x} \in \mathcal{P}(Reg_{n+1})\}.$$

Evidentemente $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{F}_{n+1}(X)$. Ahora, como para cada $\vec{x} \in \mathcal{P}(Reg_{n+1})$ se cumple que $\mathcal{U}^{\vec{x}}$ preserva $g|_{[X]^2}$-relaciones y $\vec{x} \in \langle \mathcal{U}^{\vec{x}} \rangle$, entonces

$$\bigcup_{\mathcal{U} \in \mathfrak{D}} \langle \mathcal{U} \rangle = \mathcal{P}(Reg_{n+1}).$$

Solo resta demostrar que $\mathfrak{D}$ es bonito, para lo cual tomamos $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathfrak{D}$, y probamos lo siguiente:

1. Si $\langle\mathcal{U}\rangle \cap \langle\mathcal{V}\rangle \neq \emptyset$ entonces $\mathcal{U} \smile \mathcal{V}$. Esto es consecuencia directa del Lema 3.0.7.

2. Si $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son $\mathfrak{D}$-encadenables, entonces para cualesquiera $\mathbb{K}, \mathbb{L}$ $\mathfrak{D}$-cadenas de $\mathcal{U}$ a $\mathcal{V}$, se cumple que $\Gamma_{\mathbb{K}} = \Gamma_{\mathbb{L}}$. Para demostrar esto, nos ayudaremos de la siguiente afirmación.

<u>Afirmación 1:</u> Si $\vec{x} = \{x_0, \ldots, x_n\}, \vec{y} = \{y_0, \ldots, y_n\} \in \mathcal{P}(Reg_{n+1})$ son tales que $\mathcal{U}^{\vec{x}} \smile \mathcal{U}^{\vec{y}}$, entonces para cualquier $k \leqslant n$ y para cualesquiera $i_0, \ldots, i_k \leqslant n$ se cumple que

$$\{U_{i_0}^{\vec{x}}, \ldots, U_{i_k}\} \rightrightarrows U_{i_0}^{\vec{x}} \textit{ si y solo si } \{\Gamma_{\mathbb{K}}(U_{i_0}^{\vec{x}}), \ldots, \Gamma_{\mathbb{K}}(U_{i_k}^{\vec{x}})\} \rightrightarrows \Gamma_{\mathbb{K}}(U_{i_0}^{\vec{x}})$$

, donde $\mathbb{K} = (U^{\vec{x}}, U^{\vec{y}})$.

Para demostrar la Afirmación solo notemos que si $k \leqslant n$ y $i_0, \ldots, i_k \leqslant n$, entonces para cualquier $s \leqslant k$ podemos escoger $z_s \in U_{i_s}^{\vec{x}} \cap \Gamma_{\mathbb{K}}(U_{i_s}^{\vec{x}})$, y puesto que $\mathcal{U}^{\vec{x}}$ y $\mathcal{U}^{\vec{y}}$ preservan $g|_{[X]^k}$- relaciones, entonces $\{U_{i_0}^{\vec{x}}, \ldots, U_{i_k}\} \rightrightarrows U_{i_0}^{\vec{x}}$ si y solo si $\{z_0, \ldots, z_k\} \longrightarrow z_0$ si y solo si $\{\Gamma_{\mathbb{K}}(U_{i_0}^{\vec{x}}), \ldots, \Gamma_{\mathbb{K}}(U_{i_k}^{\vec{x}})\} \rightrightarrows \Gamma_{\mathbb{K}}(U_{i_0}^{\vec{x}})$.

Habiendo demostrado la Afirmación, continuemos con la demostración de (2). Para esto, sean $\vec{x} = \{x_0, \ldots, x_n\}, \vec{y} = \{y_0, \ldots, y_n\} \in \mathcal{P}(Reg_{n+1})$ y supongamos que $\mathcal{U}^{\vec{x}}$ y $\mathcal{U}^{\vec{y}}$ son encadenables. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que tanto $x_0, \ldots, x_n$ como $y_0, \ldots, y_n$ están enumerados de tal suerte que para cualquier $i \leqslant n$ se cumple que $\{x_i, \ldots, x_n\} \longrightarrow x_i$ y $\{y_i, \ldots, y_n\} \longrightarrow y_i$. Sea $\mathbb{K}$ una $\mathfrak{D}$-cadena de $\mathcal{U}^{\vec{x}}$ a $\mathcal{U}^{\vec{y}}$ y sean $k \in \omega$ y $\vec{z}_0, \ldots, \vec{z}_k \in \mathcal{P}(Reg_{n+1})$ tales que $\mathbb{K} = (\mathcal{U}^{\vec{x}}, \mathcal{U}^{\vec{z}_0}, \ldots, \mathcal{U}^{\vec{z}_k}, \mathcal{U}^{\vec{y}})$ y para cualquier $j \leqslant k$ sea $\mathbb{K}_k = (\mathcal{U}^{\vec{x}}, \mathcal{U}^{\vec{z}_0}, \ldots, \mathcal{U}^{\vec{z}_k})$. Demostraremos por inducción que para cualquier $i \leqslant n$ se cumple que $\Gamma_{\mathbb{K}}(U_i^{\vec{x}}) = U_i^{\vec{y}}$.

Si $i = 0$ notemos que como $\{x_0, \ldots, x_n\} \longrightarrow x_0$, entonces $\{U_0^{\vec{x}}, \ldots U_n^{\vec{x}}\} \rightrightarrows U_0^{\vec{x}}$, lo cual implica, gracias a la Afirmación 1, que $\{\Gamma_{\mathbb{K}_0}(U_0^{\vec{x}}), \ldots \Gamma_{\mathbb{K}_0}(A_n^{\vec{x}})\} \rightrightarrows \Gamma_{\mathbb{K}_0}(U_0^{\vec{x}})$. Aplicando repetidamente la Afirmación 1 y utilizando el hecho de que para cualquier $j \leqslant k$ se cumple que $\Gamma_{(\mathcal{U}^{\vec{z}_k}, \mathcal{U}^{\vec{z}_{k+1}})} \circ \Gamma_{\mathbb{K}_j} = \Gamma_{\mathbb{K}_{k+1}}$, llegamos a que

$$\{\Gamma_{\mathbb{K}}(U_0^{\vec{x}}), \ldots \Gamma_{\mathbb{K}}(U_n^{\vec{x}})\} \rightrightarrows \Gamma_{\mathbb{K}}(U_0^{\vec{x}}),$$

pero $\Gamma_{\mathbb{K}}$ es una biyección de $\mathcal{U}^{\vec{x}}$ a $\mathcal{U}^{\vec{y}}$, por lo cual $\{\Gamma_{\mathbb{K}}(U_0^{\vec{x}}), \ldots \Gamma_{\mathbb{K}}(U_n^{\vec{x}}\}) = \{U_0^{\vec{y}}, \ldots U_n^{\vec{y}}\}$, así, $\Gamma_{\mathbb{K}}(U_0^{\vec{x}}) = U_0^{\vec{y}}$.

Sea $n > i > 0$ y supongamos que para cualquier $j < i$ hemos demostrado que $\Gamma_{\mathbb{K}}(U_j^{\vec{x}}) = U_j^{\vec{y}}$. Procediendo de la misma manera que en el caso $i = 0$, podemos concluir que

$$\{\Gamma_{\mathbb{K}}(U_i^{\vec{x}}), \ldots \Gamma_{\mathbb{K}}(U_n^{\vec{x}})\} \rightrightarrows \Gamma_{\mathbb{K}}(U_i^{\vec{x}}),$$

pero $\Gamma_{\mathbb{K}}$ es una biyección de $\mathcal{U}^{\vec{x}}$ a $\mathcal{U}^{\vec{y}}$, asi, por hipótesis de inducción se cumple que $\{\Gamma_{\mathbb{K}}(U_i^{\vec{x}}), \ldots \Gamma_{\mathbb{K}}(U_n^{\vec{x}})\} = \{U_i^{\vec{y}}, \ldots U_n^{\vec{y}}\}$, por ende, concluimos que $\Gamma_{\mathbb{K}}(U_i^{\vec{x}}) = U_i^{\vec{y}}$. Con esto termina la inducción.

Para terminar, solo notemos que lo que acabamos de demostrar en particular implica que para cualesquiera $\mathbb{K}$ y $\mathbb{L}$ $\mathfrak{D}$-cadenas de $\mathcal{U}^{\vec{x}}$ a $\mathcal{U}^{\vec{y}}$ se tiene que $\Gamma_{\mathbb{K}} = \Gamma_{\mathbb{L}}$, y con esto demostramos que $a) \Rightarrow b)$.

$\big($**b**$)$ $\Rightarrow$ **a**$)\big)$ Gracias a las observaciones hechas a principio de esta sección, basta demostrar que existe una selección continua sobre $\mathcal{P}(Reg_{n+1})$.

Definimos la relación $\sim \subseteq \mathcal{P}(Reg_{n+1})^2$ dada por

$$\vec{x} \sim \vec{y} \text{ si y solo si existen } \mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathfrak{D} \text{ que son } \mathfrak{D}\text{-encadenables,} \\ \text{y tales que } \vec{x} \in \langle \mathcal{U} \rangle \text{ y } \vec{y} \in \langle \mathcal{V} \rangle.$$

Es fácil ver que $\sim$ es una relación de equivalencia, la cual genera una partición $L(\sim)$ en $\mathcal{P}(Reg_{n+1})$. Dado $C \in L(\sim)$ y $\vec{x} \in C$ existe $\mathcal{U} \in \mathfrak{D}$ tal que $\vec{x} \in \langle \mathcal{U} \rangle$, y por definición de $\sim$ se tiene que $\langle \mathcal{U} \rangle \subseteq C$. En virtud de lo anterior, los elementos de $L(\sim)$ son clopens sobre $\mathcal{P}(Reg_{n+1})$. Así, sólo es necesario demostrar que para cada $C \in L(\sim)$ existe una selección continua sobre C.

Sea $C \in L(\sim)$. Para cada $\vec{x} \in C$, fijemos $\mathcal{U}^{\vec{x}} \in \mathfrak{D}$ tal que $\vec{x} \in \langle \mathcal{U}^{\vec{x}} \rangle$. Ahora fijemos $\vec{z}_0 \in C$, $U \in \mathcal{U}^{\vec{z}_0}$ y para cada $\vec{x} \in C$ tomemos una $\mathfrak{D}$-cadena $\mathbb{K}_{\vec{x}}$ de $\mathcal{U}^{\vec{z}_0}$ a $\mathcal{U}^{\vec{x}}$. Definimos $f_C : C \longrightarrow X$ dada por

$$f_C(\vec{x}) \text{ es el único elemento de } \vec{x} \text{ en } \Gamma_{\mathbb{K}_{\vec{x}}}(U).$$

f_C está bien definida y como $\mathfrak{D}$ es bonito entonces para cualquier $\vec{x} \in C$ y para cualquier $\vec{y} \in \langle \mathcal{U}^{\vec{x}} \rangle$ se cumple que $f_C(\vec{y}) \in \Gamma_{\mathbb{K}_{\vec{x}}}(U)$, de esta manera, f_C es continua.

$\blacksquare$

Bibliografía

[1] *García-Ferreira, S., Gutev, V., Nogura, T.:Extensions of 2-point selections. New Zealand J. Math. 38, 1-8(2008).* 2

[2] *Gutev, V.: Selections and hyperspaces of finite sets., Topology Appl.* **157***(1), 83-89 (2010).* 2

[3] *Gutev, V., Nogura, T.: A topology generated by selections. Topology Appl. 153, 900-911(2005).*

[4] *Gutev, V., Nogura, T.: Some problems on selections for hyperspace topologies. Appl. Gen. Topol. 5(1), 71-78(2004).* 2

[5] *Gutev, V., Nogura, T.:Weak selections and flows in networks. Comment. Math. Unv. Corlin. 49(3), 509-517(2008).* 2

[6] *Hrušák, M., Martínez-Ruiz, I.: Selections and weak orderability, Fund. Math, Vol. 203, (2009), pp. 1-20.* 1, 2

[7] *Michael, E.: Topologies on spaces of subsets, Trans. Amer. Math. Soc. 71, 152-182(1951).* 1

[8] *Mill, J. v., Wattel, E.: Selections and orderability, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 83, (1981), pp. 601-605.* 1