UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO

POSGRADO CONJUNTO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS UNAM - UMSNH

GENERADORES TÓRICOS PARA EL ANILLO DE BORDISMO UNITARIO Ω_U

TESINA

QUE PARA OPTA POR EL GRADO DE:

MAESTRO **EN** CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA:

ERICK DAVID LUNA NÚÑEZ

TUTOR: DR. NOÉ BÁRCENAS TORRES

MORELIA, MICHOACÁN SEPTIEMBRE DEL 2020

A mi familia,
de sangre y de club,
y a todos los que hicieron
que mi tiempo en la maestría
significara algo

Índice

1. Resumen

La teoría de bordismo ha sido el objeto de estudio por varios años en la topología algebraica, interesa estudiar variedades con ciertas estructuras (orientación, estructura compleja, spin, etc), así como sus grupos de bordismo, y de ser posible, encontrar variedades (o representantes) que generen a dichos grupos.

En el estudio de la topología algebraica, es muy importante el estudio de la cohomología, en particular, nos interesarán las clases características, dichos objetos, son elementos de los grupos de cohomología (con ciertos coeficientes) y nos permiten concluir propiedades de las variedades, por ejemplo, orientación y bordismo no orientado para el caso de las clases de Stiefel-Whitney, bordismo orientado para las clases de Pontrjagin, secciones linealmentes de los haces independientes para las clases de Chern. Con el objetivo de encontrar generadores para los grupos de bordismo, nos interesa caracterizar el ser generadores en términos de las clases características, aprovechando esta caracterización, buscamos restringirnos a variedades donde podamos hacer cálculos más sencillos.

Enfocándonos en las variedades con estructura compleja (bordismo unitario), coincide que dicha estructura aparece también en la teoría de haces para variedades algebraicas, en este caso, buscamos aprovechar la estructura extra de la que vienen dotadas las variedades algebraicas para buscar generadores de dicho grupo de bordismo.

En este caso, para aprovechar completamente la estructura de variedades algebraicas, nos restringiremos aún más, estudiaremos las variedades tóricas, dichas variedades vienen enriquecidas con estructuras de ideales, combinatoria, semigrupo, álgebras de semigrupo y retículas, por lo cual es sencillo manipularlas para calcular algunas de sus propiedades, por ejemplo, sus clases características, en este punto, nos enfocaremos en las clases simétricas, dichas clases las obtendremos mediante ciertos polinomios sobre las clases de Chern de nuestra variedad, y nos servirán para caracterizar cuando una variedad puede ser generador de nuestro grupo de bordismo unitario.

Algunas variedades ya se sabía que son generadores para el anillo de cobordismo, lo que nos interesa es encontrar variedades tóricas que también lo sean, encontrar estas variedades es el objetivo principal de este documento y buscamos que sean tóricas para poder explotar sus propiedades durante los cálculos.

Palabras clave: *geometría algebraica, topología algebraica, bordismo, haces vectoriales, geometría tórica*

2. Abstract

Bordism theory has been the object of study for several years in algebraic topology, it is interesting to study manifolds with certain structures (orientation, complex structure, spin, etc.), as well as their bordism groups, and if possible, find manifolds (or representatives) that generate these groups.

In the study of algebraic topology, the study of cohomology is very important, in particular, we will be interested in characteristic classes, these objects are elements of the cohomology groups (with certain coefficients) and allow us to conclude properties of the manifolds, for example, orientation and unoriented bordism for the case of the Stiefel-Whitney classes, oriented bordism for the Pontrjagin classes, independent linear sections of the bundles for the Chern classes. In order to find generators for the bordism groups, we are interested in characterizing being generators in terms of the characteristic classes, taking advantage of this characterization, we seek to restrict ourselves to manifolds where we can make simpler calculations.

Focusing on manifolds with complex structure (complex bordism), it coincides that this structure also appears in bundle theory for algebraic varieties, in this case, we seek to take advantage of the extra structure that algebraic varieties are endowed with to search for generators of said bordism group.

In this case, to take full advantage of the structure of algebraic varieties, we will restrict ourselves even more, we will study toric varieties, these varieties are enriched with ideal structures, combinatorics, semigroup, semigroup algebras and lattices, so it is easy to manipulate them to calculate some of its properties, for example, its characteristic classes, at this point, we will focus on the symmetric classes, these classes will be obtained through certain polynomials on the Chern classes of our manifolds, and they will help us to characterize when a manifold can be generator of our complex bordism group.

Some manifolds were already known to be generators for the cobordism ring, what interests us is to find toric varieties that are also toric, finding these varieties is the main objective of this document and we want them to be toric in order to exploit their properties during calculations .

3. Introducción

El objetivo básico de la topología algebraica es encontrar invariantes algebraicos que clasifiquen los espacios topológicos hasta homeomorfismos, aunque la mayoría son invariantes hasta homotopía. En este trabajo nos enfocaremos en los espacios topológicos que tienen estructura de variedad suave n-dimensional que son de gran interés en la topología algebraica por su gran riqueza de estructura, al poderse estudiar desde distintos puntos de vista.

Un ejemplo de clasificación sobre variedades suaves, es la relación de equivalencia llamada **bordismo** [Thom, 1954], la cual tuvo un gran desarrollo en la década de 1960, por ejemplo, Atiyah [Atiyah, 1961] mostró que es una teoría de homología generalizada, con lo cual, podemos dotar al cociente

$$\eta_n = \{\text{Variedades cerradas suaves de dimensión } n\}/\sim$$

con estructura de grupo, y a $\eta_* = \oplus_{n\in\mathbb{Z}}\eta_n$ con estructura de anillo graduado, de hecho, Dold [Dold, 1956] da generadores explícitos para este anillo. El trabajo de Thom se especializa sólo en variedades suaves, sin ninguna estructura adicional, pero sus cálculos involucraban aspectos de haces vectoriales, por lo cual suena natural tratar de extender el bordismo a variedades cuyos haces estén enriquecidos con alguna estructura, un ejemplo simple es la orientación, llamado bordismo orientado Ω_*^{SO}, sin embargo, el ejemplo que nos interesará en este trabajo, y para el cual explotaremos la relación de bordismo con haces vectoriales, será el bordismo entre variedades con estructura compleja o bordismo unitario, el cual Milnor [Milnor, 1960] demostró que tiene como generadores a las clases de variedades complejas H_{ij} para $0 \leq i \leq j$, llamadas *hipersuperficies de Milnor*.

Por otro lado, otros objetos de nuestro interés son las variedades tóricas, que aparecen en la geometría algebraica y cumplen tener una gran diversidad de estructuras, lo que permite hacer cálculos sobre ellas, lo cual veremos reflejado en los capítulos 3 y 4.

Nuestra pregunta de interés en este documento es: ¿Podemos encontrar variedades complejas X_k con estructura tórica que cumplan ser generadores de Ω_*^U?. La respuesta es sí, sin embargo, la construcción de dichas variedades tóricas no es fácil, y probar que son generadores de Ω_*^U tampoco es trivial.

Para entender la solución a este problema utilizaremos herramientas de teoría de haces y clases características, así como algunas propiedades de geometría tórica. Veremos un planteamiento del problema en términos de las clases simétricas, s_k, y lo resolveremos relacionando nuestras variedades X_k con las H_{ij} que proporcionó Milnor.

En el primer capítulo introduciremos los haces vectoriales y las clases características, el cómo se relacionan y además definiremos las distintas clases que nos servirán para atacar el problema; dichas nociones son esenciales en muchas áreas de la topología algebraica y geometría algebraica, en nuestro caso serán esenciales en la construcción del bordismo.

En el segundo capítulo definiremos el bordismo, tomaremos como ejemplo el bordismo no-orientado y el orientado, veremos las diferencias que tienen en estructura, además, definiremos el bordismo unitario y daremos algunos teoremas de estructura de este anillo, para definirlo utilizaremos estructuras sobre el haz tangente de las variedades.

En el tercer capítulo nos concentraremos en definir las variedades tóricas, así como algunas propiedades que nos permiten observar la riqueza en estructura de estas variedades desde diversos puntos de vista, en especial, desde la geometría convexa.

Una vez con todos nuestros objetos definidos, en el cuarto capítulo, nos enfocaremos en construir los generadores $[H_{ij}]$ que proporcionó Milnor, además de mostrar que, en general, estas variedades no tienen estructura casitórica (la cual es más general que la tórica), luego de esto, definiremos nuestras variedades tóricas B_{ij}, las relacionaremos con H_{ij} y veremos que estas variedades son generadores de Ω_*^U.

4. Haces vectoriales y clases características

4.1. Haces vectoriales.

Definición 1. *Un haz vectorial de dimensión n (o haz de n-planos) sobre el espacio topológico B consiste de un espacio topológico E y una proyección $\pi : E \to B$, tal que $\forall b \in B$ se tiene que $\pi^{-1}(b) \cong \{b\} \times \mathbb{F}^n$ y que cumple la siguiente condición de trivialidad:*

$\forall b \in B$ existe U_b vecindad de b y un homeomorfismo $h_u : \pi^{-1}(U_b) \to U_b \times \mathbb{F}^n$, al conjunto $\{U_b\}_{b \in B}$ le llamamos cubierta trivializadora del haz.

Definición 2. *Si ξ es un haz de n-planos con proyección $\pi : E \to B$ y cubierta trivializadora $\{U_b\}_{b\in B}$, decimos que ξ está orientado (o que ξ es un haz orientado) si, $\forall x \in B$ elegimos una orientación en $\pi^{-1}(b)$ y los morfismos $h_u : \pi^{-1}(U_b) \to U_b \times \mathbb{F}^n$ preservan la orientación.*

Notación 1. *Si $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ (o $\mathbb{R}$) entonces decimos que el haz es un haz vectorial complejo (o real).*

Ejemplo 1.

- *Sea B un espacio topológico, el haz trivial de rango n sobre B es $\pi : B \times \mathbb{R}^n \to B$, con $\pi(b, t) = b$, a lo cual llamamos la proyección en la primer variable.*
- *Consideremos $\mathbb{RP}^n$ el espacio proyectivo real de dimensión n, sea $\gamma_n^1 : E(\gamma_n^1) \to B(\gamma_n^1)$ donde $E(\gamma_n^1) \subseteq \mathbb{RP}^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ el conjunto de pares $\{([x], v) : v \in \mathbb{R}x\}$. Llamamos a este haz el haz canónico de lineas sobre $\mathbb{RP}^n$.*
- *Sea M variedad n-dimensional suave, $\tau : TM \to M$ el haz tangente a M, es decir, el haz tal que $\forall p \in M$ se tiene que $\tau^{-1}(p) = T_pM \cong \mathbb{R}^n$ el espacio tangente a M en p.*
- *Sea M variedad n-dimensional suave encajada en $\mathbb{R}^k$, $\nu : E \to M$ con $E \subseteq M \times \mathbb{R}^n$, tal que, $\nu^{-1}(p) \cong (T_pM)^\perp$ con $(T_pM)^\perp$ el complemento ortogonal al espacio tangente en $\mathbb{R}^k$.*

Lo que nos interesará en este caso es considerar haces complejos, o dotar de estructura compleja a haces reales.

Definición 3. *Una estructura compleja en un haz vectorial real de dimensión $2n$, digamos ξ, es una aplicación continua*

$$J : E(\xi) \to E(\xi)$$

la cual manda cada fibra en sí misma (de forma $\mathbb{R}$-lineal) y $\forall v \in E(\xi)$ se cumple que

$$J(J(v)) = -v$$

Observación 1. *Dada una estructura compleja, podemos dotar a cada fibra $F_b(\xi)$ con estructura de espacio vectorial complejo, tomando*

$$(x + iy)\overline{v} = x\overline{v} + J(\overline{v}y)$$

Definición 4. *Una estructura compleja sobre una variedad suave M es una estructura compleja sobre el haz tangente τ_M tal que:*

Para todo punto $p \in M$ existe U abierto de M, V abierto de $\mathbb{C}^n$ y $h : U \to V$ difeomorfismo derivada es $\mathbb{C}$-lineal en todas partes.

Observación 2. *Si M es una $(2i+1)$-variedad, por el teorema del encaje de Whitney* [Whitney et al., 1992] *tenemos que existe un encaje*

$$M \hookrightarrow \mathbb{R}^{2(2i+1)+1}$$

si consideramos M encajada en $\mathbb{R}^{4i+3}$ tiene haz normal trivial.

4.2. Clases características.

Sea ξ un haz de n-planos con proyección $\pi : E \to B$. Restringiendo π al espacio $E_0 = \{$vectores no nulos en $E\}$ tenemos una proyección asociada $\pi_0 : E_0 \to B$.

Construcción 1 (Clase de Euler)**.** *Dado un haz de n-planos orientado ξ con proyección $\pi : E \to B$, la inclusión $(E, \emptyset) \subset (E, E_0)$ induce un homomorfismo restricción en la cohomología*

$$H^*(E, E_0; \mathbb{Z}) \to H^*(E, \emptyset; \mathbb{Z})$$

el cual denotaremos por $y \mapsto y|_E$, en particular, aplicando este homomorfismo a la clase fundamental $u \in H^n(E, E_0; \mathbb{Z})$ obtenemos $u|_E \in H^n(E, \emptyset; \mathbb{Z})$. Definimos la clase de Euler del haz ξ como

$$e(\xi) = (\pi^*)^{-1}(u|_E) \in H^n(B; \mathbb{Z})$$

que corresponde a $u|_E$ bajo el isomorfismo $\pi^* : H^n(B; \mathbb{Z}) \to H^n(E; \mathbb{Z})$

Observación 3 (9.2, 9.3 y 9.4 de [Milnor and Stasheff, 2016]). *La clase de Euler de un haz cumple las siguientes propiedades:*

- *Si ξ haz de n-planos sobre B y ξ' haz de n-planos sobre B' y $f : B \to B'$ se ve como el siguiente morfismo que preserva orientación de haces:*

$$\begin{tikzcd} E(\xi) \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, "\pi"] & E(\xi') \arrow[d, "\pi_0'"] \\ B \arrow[r, "f"] & B' \end{tikzcd}$$

  Entonces $e(\xi) = f^*(e(\xi'))$, con f^* el morfismo inducido por f en cohomología.
- *Si se invierte la orientación de ξ, entonces la clase de Euler $e(\xi)$ cambia de signo.*
- *Si n es impar, entonces $e(\xi) + e(\xi) = 0$*
- *Para una suma de haces $e(\xi \oplus \xi') = e(\xi) \smile e(\xi')$*

Veamos ahora que tenemos una sucesión exacta larga que nos relaciona los componentes del haz de n-planos orientados ξ:

Teorema 1. *Para cualquier haz de n-planos orientado ξ existe una sucesión exacta, llamada la sucesión de Gysin del haz ξ, de la forma*

$$\cdots \longrightarrow H^i(B) \xrightarrow{\smile e(\xi)} H^{i+n}(B) \xrightarrow{\pi_0^*} H^{i+n}(E_0) \longrightarrow H^{i+1}(B) \xrightarrow{\smile e(\xi)} \cdots$$

Construcción 2 (Clases de Chern). *Si ω es un haz complejo de n-planos, las clases de Chern $c_i(\omega) \in H^{2i}(B;\mathbb{Z})$ se definen como sigue: Por inducción sobre la dimensión compleja n de ω. Para $i = n$ se tiene que $c_n(\omega) = e(\omega_{\mathbb{R}})$ con $e(\omega_{\mathbb{R}})$ la clase de Euler del haz ω visto como haz sobre $\mathbb{R}$. Para $i < n$, consideremos $\pi_0^* : H^{2i}(B) \to H^{2i}(E_0)$ (que es isomorfismo para $i < n$), entonces*

$$c_i(\omega) = (\pi_0^*)^{-1} c_i(\omega_0)$$

Observación 4 (14.2, 14.3 de [Milnor and Stasheff, 2016]).

1. *La suma*

$$c(\omega) = 1 + c_1(\omega) + ... + c_n(\omega)$$

se llama la clase total de Chern de ω y cumple que $c(\omega) \in H^*(B;\mathbb{Z})$ es unidad, además,

$$(c(\omega))^{-1} = 1 - c_1(\omega) + (c_1(\omega))^2 - c_2(\omega) + ...$$

2. *Si ω haz complejo sobre B y ω' haz complejo sobre B' y $f : B \to B'$ se ve como:*

$$\begin{array}{ccc} E_0(\omega) & \xrightarrow{f_0} & E_0(\omega') \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_0} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_0'} \\ B & \xrightarrow{f} & B' \end{array}$$

Entonces $c(\omega) = f^*(c(\omega'))$, con f^* el morfismo inducido por f en cohomología.

3. *Si ε^k es el haz de k-planos complejo sobre $B = B(\omega)$, entonces*

$$c(\omega \oplus \varepsilon^k) = c(\omega)$$

Ejemplo 2.

- *Si ξ es un haz complejo de n-planos, entonces $c_i(\xi) = 0$ para $i > n$.*
- *Para $\pi : B \times \mathbb{C}^n \to B$, el haz trivial, tenemos que $c_1(\pi) = 0$.*

Construcción 3 (Clases s_n)**.** *Consideremos*

$$c(\xi) = 1 + c_1(\xi) + ... + c_n(\xi) = (1 + x_1) \cdots (1 + x_k)$$

entonces $c_i(\xi) = \sigma_i(x_1, ..., x_k)$ con σ_i el i-ésimo polinomio simétrico elemental. Dado el polinomio

$$P_n(x_1, ..., x_k) = x_1^n + \cdots + x_k^n$$

y expresandolo vía los polinomios simétricos elementales

$$P_n(x_1, ..., x_k) = s_n(\sigma_1, ..., \sigma_k)$$

con s_n algún polinomio, sustituyendo las clases de Chern por los polinomios simétricos obtenemos:

$$s_n(\xi) = s_n(c_1(\xi), ..., c_k(\xi))$$

Observación 5 (Proposición D.5.1 de [Buchstaber and Panov, 2015])**.**

1. $s_n(\xi \oplus \eta) = s_n(\xi) + s_n(\eta)$
2. *Si ξ es un haz sobre M con $dim M < 2n$ entonces $s_n(\xi) = 0$*
3. *Si ξ es un haz lineal $s_n(\xi) = c_1(\xi)^n$*

Ejemplo 3.

$n = 1 \;\; s_1(\xi) = c_1(\xi)$

$n = 2 \;\; s_2(\xi) = c_1(\xi)^2 - 2c_2(\xi)$

$n = 3 \;\; s_3(\xi) = c_1(\xi)^3 + 3c_3(\xi) - 3c_1(\xi)c_2(\xi)$

Observación 6. *En general se tienen las siguientes relaciones entre los polinomios* P_k *y* σ_k*:*

- *para* $1 \leq k \leq n$

$$P_k(x_1, ..., x_n) = (-1)^{k-1} k\sigma_k(x_1, ..., x_n) + \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{k-1+i} \sigma_{k-i}(x_1, ..., x_n) P_i(x_1, ..., x_n)$$

- *para* $1 \leq n < k$

$$P_k(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=k-n}^{k-1} (-1)^{k-1+i} \sigma_{k-i}(x_1, ..., x_n) P_i(x_1, ..., x_n)$$

5. Bordismo

En la topología y geometría se tienen problemas de clasificación que buscan invariantes para decidir si dos variedades M y M' están relacionadas entre si, el cual es un problema no trivial. Un acercamiento a solucionar este problema es el bordismo, que introdujo Rene Thom en su trabajo [Thom, 1954].

5.1. Bordismo no orientado. *Consideremos, en primer caso, variedades suaves de dimensión n sin ninguna estructura adicional.*

Definición 5. *Sean M y N variedades cerradas suaves de dimensión n, decimos que M y N son bordantes si existe una variedad suave W de dimensión $n+1$ con frontera tal que $\partial W = M \coprod N$.*

Observación 7. *La relación de bordismo $\sim$ es una relación de equivalencia.*

Notación 2. *Denotaremos por*

$$\eta_n = \{\textit{Variedades cerradas suaves de dimensión } n\}/\sim$$

el conjunto de las clases de bordismo no orientado de dimensión n .

Observación 8. *η_n tiene estructura de grupo con la operación:*

$$\coprod : \{\textit{Variedades suaves de dimensión } n\}^2 \to \{\textit{Variedades suaves de dimensión } n\}$$

definida por $\coprod(M,N) = M \coprod N$.

Ejemplo 4.

- $\eta_0 = 0 = \eta_1$
- $\eta_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ *generado por* $\mathbb{RP}^2$
- $\eta_* = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \eta_n$ *tiene estructura de anillo graduado con el producto cartesiano como multiplicación.*

Tenemos los siguientes resultados, de A. Dold y Rene Thom respectivamente, que nos proporcionan generadores para el anillo η_* y nos dan una caracterización para saber si dos variedades son bordantes.

Teorema 2 ([Dold, 1956]).

$$\eta_* = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[x_i]$$

con x_i generador en dimensión i

- *Si $i = 2k$, entonces $x_i \sim \mathbb{RP}^{2i}$.*
- *Si $i = 2^r(2s+1) - 1$, entonces $x_i \sim P(2r-1, s2r)$.*

donde $P(n,m) = (\mathbb{S}^n \times \mathbb{CP}^m)/\tau$ con $\tau(x,[y]) = (-x,[\overline{y}])$.

Teorema 3 ([Thom, 1954]). *M y N variedades cerradas de dimensión n son bordantes si, y solo si, todos sus números de Stiefel-Whitney coinciden.*

5.2. Bordismo orientado. *La primer estructura que otorgamos a las variedades, es la de considerarnos variedades orientables.*

Definición 6. *M y N variedades orientadas suaves, cerradas, de dimensión n son orientadamente bordantes si $\exists W$ variedad suave, orientada, con frontera, de dimensión $n+1$ tal que $\partial W = M \coprod \overline{N}$, donde $\overline{N}$ es la variedad N con la orientación inversa.*

Notación 3. *Denotaremos por*

$$\Omega_n^{SO} = \{\textit{Variedades orientadas, cerradas, suaves de dimensión } n\}/\sim$$

el grupo de bordismo orientado de dimensión n. Denotamos al anillo de bordismo orientado como

$$\Omega_*^{SO} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \Omega_n^{SO}$$

En este caso, podemos observar que los primeros grupos de bordismo orientado no necesariamente coinciden con los de bordismo no orientado.

Ejemplo 5.

- $\Omega_0^{SO} = \mathbb{Z}$
- $\Omega_1^{SO} = 0 = \Omega_2^{SO} = \Omega_3^{SO}$
- $\Omega_4^{SO} = \mathbb{Z}$ *generado por* $\mathbb{CP}^2$.
- $\Omega_5^{SO} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ *generado por* $SU(3)/SO(3)$.

Además de que se tienen algunas caracteristicas en la estructura de Ω_n^{SO} como se muestra en los siguientes teorema:

Teorema 4 ([Wall, 1960]). *Todos los elementos de torsión en Ω_*^{SO} son de orden 2^k.*

Teorema 5 ([Wall, 1960]). *M y N variedades cerradas, orientadas, de dimensión n son orientadamente bordantes si, y sólo si, todos sus números de Stiefel-Whitney y todos sus números de Pontryagin coinciden.*

5.3. Bordismo complejo. *Como último, consideremos variedades con estructura compleja.*

Observación 9. *Si queremos repetir las construcciones anteriores, tendríamos que considerar M, N variedades k-dimensionales con estructura compleja (es decir, k es par), si existe W variedad $k+1$-dimensional que las contenga como frontera, entonces $k+1$ es impar y W no puede tener estructura compleja. Veamos pues como construir el bordismo unitario.*

Definición 7. *Sea $\tau : TM \to M$ haz tangente para M, decimos que τ admite una estructura* ***establemente compleja*** *(tambien conocida como* ***tangencial establemente compleja****,* ***establemente casicompleja*** *o* ***casicompleja****) si existe un isomorfismo de haces vectoriales reales*

$$c_\tau : TM \oplus \mathbb{R}^k \to \xi$$

con $\xi : E \to M$ haz complejo sobre M. Una variedad M con estructura establemente compleja es un par (M, c_τ) con c_τ clase de isomorfismo de haces sobre M.

Con lo anterior, podemos construir el bordismo unitario como antes, pero considerando la estructutra establemente compleja.

Notación 4. *Denotamos por*

$$\Omega_n^U = \{\textit{Variedades } [M, c_\tau] \textit{ con estructura cuasicompleja de dimensión } n\}/\sim$$

y además denotemos al anillo de bordismo unitario como:

$$\Omega_*^U = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \Omega_n^U$$

Ahora, veamos algunas propiedades del bordismo unitario.

Ejemplo 6.

- $\Omega_{2n+1}^U = 0$.
- $\Omega_0^U = 0$.
- $\Omega_2^U = \mathbb{Z}$, *con generador* $[\mathbb{CP}^1]$.

- $\Omega_4^U = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, *generado por* $[\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1]$ *y por* $[\mathbb{CP}^2]$, *respectivamente.*

Teorema 6 ([Thom, 1954])**.** $\Omega_*^U \otimes \mathbb{Q}$ *es polinomial sobre* $\mathbb{Q}$ *con generadores* $x_i = [\mathbb{CP}^i]$ *para* $0 \leq i$.

Teorema 7 ([Milnor, 1960])**.** *Dos variedades establemente complejas son bordantes (en el sentido complejo) si, y sólo si, tienen los mismos números de Chern.*

Teorema 8 ([Novikov, 1960])**.** Ω_*^U *es polinomial sobre* $\mathbb{Z}$ *con generadores* x_i *de grado* $2i$ *para* $0 \leq i$.

6. Variedades Tóricas y Cuasi-Tóricas

Nuestro objetivo ahora es considerar cierto tipo de variedades algebraicas con bastante estructura, que nos servirán como generadores para el anillo de bordismo unitario.

6.1. Variedades tóricas.

Definición 8.

- *Un toro algebraico de dimensión* n *es un grupo algebraico complejo, isomorfo a* $(\mathbb{C}^{\times})^n$
- *Una variedad tórica es una variedad algebraica, normal, compleja* V*, tal que existe un abierto de Zariski* $T \subseteq V$ *con* $T \cong (\mathbb{C}^{\times})^n$ *y la acción de* T *sobre si mismo se extiende como una acción algebraica a* V

Observación 10. *Una variedad algebraica* X *sobre el campo* $\mathbb{K}$ *se dice normal si* $\mathbb{K}[X]$ *es un dominio enteramente cerrado.*

Ejemplo 7.

1. $(\mathbb{C}^{\times})^n$ *es una variedad tórica con la acción izquierda sobre si mismo.*
2. $(\mathbb{C})^n$ *es variedad tórica, donde la acción izquierda de* $(\mathbb{C}^{\times})^n$ *sobre si mismo se extiende a*

$$(t_1, ..., t_n) \cdot (z_1, ..., z_n) \mapsto (t_1 z_1, ..., t_n z_n)$$

   sobre todo $\mathbb{C}^n$
3. $\mathbb{CP}^n$ *donde* $(\mathbb{C}^{\times})^n$ *actúa sobre* $\mathbb{CP}^n$ *cómo:*

$$(t_1, ..., t_n) \cdot (z_0 : z_1 : ... : z_n) \mapsto (z_0 : t_1 z_1 : ... : t_n z_n)$$

4. *Si* V, W *son variedades tóricas, con acciones* $g_1 : (\mathbb{C}^{\times})^n \times V \to V$ *y* $g_2 : (\mathbb{C}^{\times})^m \times W \to W$ *respectivamente, entonces* $V \times W$ *es variedad tórica con la acción* (g_1, g_2).
5. *Una bandera acotada en* $\mathbb{C}^{n+1}$ *es una bandera completa* $U = \{U_1 \subset U_2 \subset ... \subset U_{n+1}; dim_{\mathbb{C}} U_i = i\}$*, cada* U_k*, con* $2 \leq k \leq n$*, contiene a* $\mathbb{C}^{k-1} = \langle e_1, ..., e_{k-1} \rangle$*, denotamos por* BF_n *al conjunto de banderas acotadas en* $\mathbb{C}^{n+1}$*. Cada* $U \in BF_n$ *está únicamente determinado por el conjunto de n-lineas*

$$L = \{l_1, ..., l_n : l_k \subset \mathbb{C}_k \otimes l_{k+1} \text{ para } 1 \leq k \leq n, l_{n+1} = \mathbb{C}^{n+1}\}$$

donde $\mathbb{C}_l = \langle e_k \rangle$ es la k-ésima linea coordenada en $\mathbb{C}^{n+1}$. La acción $(\mathbb{C}^\times)^n \times \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^{n+1}$ dada por

$$(t_1, ..., t_n) \cdot (w_1, ..., w_n, w_{n+1}) \mapsto (t_1 w_1, ..., t_n w_n, w_{n+1})$$

induce una acción sobre las banderas acotadas, haciendo de BF_n una variedad tórica suave (Teorema 7.7.2 [Buchstaber and Panov, 2015]*).*

Un no ejemplo es: dados X, Y variedades tóricas no singulares de dimensión n, $X \coprod Y$ no es variedad tórica, pues no es conexa y toda variedad tórica es conexa por medio de la acción del toro.

6.2. Conos.

Definición 9. *Sean $A = \{a_1, ..., a_r\} \subset \mathbb{R}^n$, definimos el cono asociado a A como*

$$\sigma = \sigma_A = \mathbb{R}_{\geq 0}\langle a_1, ..., a_r\rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{r} r_i a_i : r_i \in \mathbb{R}_{\geq 0} \right\}$$

Un cono es racional si podemos escoger un conjunto de generadores A tal que todo $a_i \in A$ cumpla que $a_i \in \mathbb{Z}^n$

Tenemos la siguiente correspondencia entre conos y variedades tóricas

Conos	$\Longleftrightarrow$	*Variededes tóricas afines*
Abanicos completos	$\Longleftrightarrow$	*Variedades tóricas compactas (completas)*
Abanicos normales de politopos	$\Longleftrightarrow$	*Variedades tóricas proyectivas*
Abanicos regulares	$\Longleftrightarrow$	*Variedades tóricas no singulares*
Abanicos simpliciales	$\Longleftrightarrow$	*Orbifolds*

Solo nos enfocaremos en la primer y tercer correspondencia.

Construcción 4. *Asignamos una variedad tórica a un cono de la siguiente forma:*

i) Consideremos N una retícula de rango n, es decir $N \cong \mathbb{Z}^n$, denotemos por $N_\mathbb{R}$ su espacio vectorial ambiente, es decir $N_\mathbb{R} = N \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{R}$. Por otro lado, definimos el toro algebraico respecto a N como

$$\mathbb{C}_N^\times = N \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{C}^\times \cong (\mathbb{C}^\times)^n$$

ii) Consideremos $\sigma \subset N_\mathbb{R}$ un cono y $\sigma^\vee \subset N_\mathbb{R}^*$ su cono dual y denotemos por $S_\sigma = \sigma^\vee \cap N^*$ su conjunto de puntos en la retícula.

iii) S_σ *es un semigrupo finitamente generado, consideremos* $\mathbb{C}[S_\sigma] = A_\sigma$ *el álgebra de semigrupo, la cual es finitamente generada sobre* $\mathbb{C}$ *por la base* $\{\chi^u : u \in S_\sigma\}$

iv) La variedad tórica asociada a σ *es* $V_\sigma = Spec(A_\sigma)$

Para el converso de la primer correspondencia, consideremos V *variedad tórica afín entonces existe* L *retícula y un ideal primo* $I = \langle x^\alpha - x^\beta : \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, \alpha - \beta \in L\rangle$ *tal que* $V = V(I)$*, entonces el cono asociado es la cerradura convexa de* N*.*

6.3. Variedades Casitóricas.

Definición 10. *Una variedad casitórica* M *es una* $2n$*-variedad suave tal que* $(\mathbb{C}^\times)^n$ *actúa en* M *y cumple que* $M/(\mathbb{C}^\times)^n \cong P$ *con* P *un* n*-politopo*

Veamos que esta definición incluye a la de variedades tóricas

Proposición 1. *Si* V_P *es variedad tórica proyectiva no singular asociada a* P*, entonces* V_P *es casitórica sobre* P

Veamos ahora la estructura del anillo de cohomología de una variedad casitórica en base a su abanico.

Teorema 9 (Teorema 5.12 [Davis et al., 1991])**.**

- *Sea* $M = M(P, \Lambda)$ *variedad casitórica con* $\Lambda = (\lambda_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m}$ *. El anillo de cohomología de* M *está dado por:*

$$H^*(M) = \mathbb{Z}[v_1, ..., v_m]/I$$

  con $deg(v_i) = 2$ *donde* I *es el ideal generado por elementos de cualquiera de los siguientes tipos:*

  - $v_{i_1}...v_{i_k}$ *para* $M_{i_1} \cap \cdots \cap M_{i_k} = \emptyset$
  - *Formas lineales* $t_i = \lambda_{i1}v_1 + \cdots + \lambda_{im}v_m$ *para* $0 \leq i \leq n$

- *La clase total de Chern de* X *es*

$$c(M) = (1 + v_1)\cdots(1 + v_m) \in H^*(M)$$

- *Sus grupos de homotopía son 0 en dimensión impar y libres de rango* $\beta_{2i}(V_\Sigma) = h_j(K_\Sigma)$ *la* j*-ésima componente del* h*-vector de* K_Σ*.*

7. Generadores Tóricos

7.1. Generadores de Ω_U^*. *Tenemos el siguiente resultado que nos caracteriza las posibles variedades que podemos elegir como generadores del anillo de bordismo unitario Ω_U^*.*

Teorema 10 (Teorema D.6.1 [Buchstaber and Panov, 2015])**.** *Una clase de bordismo $[M] \in \Omega_U^{2n}$ es un generador polinomial a_n de Ω_U^* si, y solo si,*

$$s_n([M]) = \begin{cases} \pm 1 & si \quad n \neq p^k - 1 \text{ para cualquier primo } p \\ \pm p & si \quad n = p^k - 1 \text{ para algún primo } p \end{cases}$$

Veamos ahora cuales fueron los generadores que Milnor [Milnor, 1960] *proporcionó para el bordismo unitario.*

Definición 11. *Sea $0 \leq i \leq j$, definimos la hipersuperficie de Milnor H_{ij} como:*

$$H_{ij} = \{(z_0 : \cdots : z_i) \times (w_0 : \cdots : w_j) \in \mathbb{CP}^i \times \mathbb{CP}^j : z_0 w_0 + \cdots + z_i w_i = 0\}$$

Construcción 5. *Sea $\mathbb{C}^{i+1} \subset \mathbb{C}^{j+1}$ generado por los primeros $i+1$ vectores de la base canónica de $\mathbb{C}^{j+1}$. Identificamos $\mathbb{CP}^i$ con el conjunto de lineas $l \subset \mathbb{C}^{i+1}$, dada una linea l asignamos el conjunto de hiperplanos $W \subset \mathbb{C}^{j+1}$ que contienen a l, este conjunto se puede identificar con $\mathbb{CP}^{j-1}$, así, consideremos*

$$E = \{(l, W) : l \subset W, l \subset \mathbb{C}^{i+1}, W \subset \mathbb{C}^{j+1}\}$$

en donde, la proyección $(l, W) \mapsto l$ define un haz fibrado $E \to \mathbb{CP}^i$ con fibra $\mathbb{CP}^{j-1}$.

Lema 1. *La hipersuperficie de Milnor H_{ij} se identifica con el espacio E.*

Demostración. Una linea $l \subset \mathbb{C}^{i+1}$ se puede puede ver cómo un vector de coordenadas homogeneas $(z_0 : \cdots : z_i)$. $W \subset \mathbb{C}^{j+1}$ se ve como una forma lineal con sobre las variables $w_0, ..., w_j$. El hecho de que $l \subset W$ equivale a $\sum_{n=1}^{i} z_n w_n = 0$. ■

Lema 2.

$$s_{i+j-1}[H_{ij}] = \begin{cases} j, & si \quad i = 0 \\ 2, & si \quad i = 1 = j \\ 0, & si \quad i = 1, j \neq 1 \\ -\binom{i+j}{i}, & si \quad i > 1 \end{cases}$$

Demostración. Para $i = 0$ tenemos que $H_{0j} = \mathbb{CP}^{j-1}$ y además $\tau(\mathbb{CP}^{j-1}) \oplus \mathbb{C} = \bigoplus_{i=1}^{j} \overline{\eta}$ determina la estructura casicompleja sobre H_{0j}, si consideramos $x = c_1(\overline{\eta})$ entonces tenemos que $s_{j-1}[\mathbb{CP}^{j-1}] = jx^{j-1}\langle\mathbb{CP}^{j-1}\rangle = j$.

Consideremos ahora $i > 0$, entonces tenemos que

$$s_{i+j-1}(\tau(\mathbb{CP}^i \times \mathbb{CP}^j)) = (i+1)x^{i+j-1} + (j+1)y^{i+j-1}$$

Para saber el resultado, observemos que si $i = 1$ por lo anterior tenemos que

$$s_j(\tau(\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^j)) = 2x^j + (j+1)y^j$$

Por otro lado, si $i > 1$ entonces $i + j - 1$ es mayor que i y j, entonces las clases de Chern se anulan y por lo tanto $s_{i+j-1}(\tau(\mathbb{CP}^i \times \mathbb{CP}^j)) = (i+1)x^{i+j-1} + (j+1)y^{i+j-1} = 0$.

En resumen, tenemos que

$$s_{i+j-1}(\tau(\mathbb{CP}^i \times \mathbb{CP}^j)) = (i+1)x^{i+j-1} + (j+1)y^{i+j-1} = \begin{cases} 2x^j + (j+1)y^j & i = 1 \\ 0 & i > 1 \end{cases}$$

Si consideramos ν el haz normal del encaje $\iota : H_{ij} \to \mathbb{CP}^i \times \mathbb{CP}^j$, entonces tenemos que $\tau(H_{ij}) \oplus \nu = \iota^*(\tau(\mathbb{CP}^i \times \mathbb{CP}^j))$, como $c_1(\nu) = \iota^*(x+y)$, entonces $s_{i+j-1}(\nu) = \iota^*(x+y)^{i+j-1}$

Ahora, si $i = 1$ tenemos que

$$\begin{aligned} s_j[H_{1j}] = s_j(\tau(H_{1j}))\langle H_{1j}\rangle &= \iota^*(2x^j + (j+1)y^j - (x+y)^j)\langle H_{1j}\rangle \\ &= (2x^j + (j+1)y^j - (x+y)^j)(x+y)\langle\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^j\rangle \end{aligned}$$

Para ver el resultado consideremos primero $j = 1$, entonces

$$s_1[H_{11}] = (2x + 2y - (x+y)^1)(x+y)\langle\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1\rangle = (x+y)(x+y)\langle\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1\rangle = 2$$

Por otro lado, si $j > 1$ tenemos que

$$\begin{aligned} s_j[H_1 j] &= (2x^j + (j+1)y^j - (x+y)^j)(x+y)\langle\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^j\rangle \\ &= (2x^{j+1} + 2yx^j + jxy^j - x(x+y)^j - y(x+y)^j + jy^{j+1} + y^{j+1})\langle\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^j\rangle = 0 \end{aligned}$$

cumple que el grado de cada monomio es de grado $j+1$ y por el punto 2 de la **Observación 5** el resultado es 0.

Por último, si $i > 1$, por dimensión se tiene que $s_{i+j-1}(\tau(\mathbb{CP}^i \times \mathbb{CP}^j))$ y como $\tau(H_{ij}) \oplus \nu = \iota^*(\tau(\mathbb{CP}^i \times \mathbb{CP}^j))$ entonces $s_{i+j-1}(\tau(H_{ij}) \oplus \nu) = 0$, entonces

$$s_{i+j-1}[H_{ij}] = -s_{i+j-1}(\nu)[H_{ij}] = -\iota^*(x+y)^{i+j-1}\langle H_{ij}\rangle = -(x+y)^{i+j}\langle \mathbb{CP}^i \times \mathbb{CP}^j\rangle$$

Por las dimensiones, es igual al coeficiente del monomio de bigrado $(dim\mathbb{CP}^i, dim\mathbb{CP}^j) = (i, j)$ en la expansión de $(x+y)^{i+j}$, que por el teorema del binomio de Newton

$$s_{i+j-1}[H_{ij}] = -\binom{i+j}{i}$$

■

Veamos ahora la estructura del anillo de cohomología de las hipersuperficies de Milnor.

Teorema 11 (Teorema 9.1.3 [Buchstaber and Panov, 2015])**.** *El anillo de cohomología de la hipersuperficie de Milnor está dada por*

$$H^*(H_{ij}) \cong \mathbb{Z}[u, v]/\langle u^{i+1}, (u^i + u^{i-1}v + \cdots + uv^{i-1} + v^i)v^{j-i}\rangle$$

Demostración. Usando la notación de la **Construcción 5**. Sea ξ el haz vectorial sobre $\mathbb{CP}^i$ donde para todo $l \in \mathbb{CP}^i$ se tiene que la fibra sobre l es el j-plano $l^\perp \subset \mathbb{C}^{j+1}$. Entonces tenemos la siguiente identificación entre H_{ij} y $\mathbb{CP}(\xi)$, si $l \in \mathbb{CP}^i$ y l' un punto en la fibra de l, es decir, $l' \subset l^\perp$, entonces el hiperplano $W = (l')^\perp \subset \mathbb{C}^{j+1}$ contiene a l y así el par (l, W) es un punto en H_{ij}.

Sea η el haz tautológico sobre $\mathbb{CP}^i$ (la fibra sobre $l \in \mathbb{CP}^i$ es la linea $l \subset \mathbb{C}^{i+1}$. Entonces $\eta \oplus \xi$ es un haz trivial de $(j+1)$-planos. Fijando $w = c_1(\overline{\eta}) \in H^2(\mathbb{CP}^i)$, consideremos la clase total de Chern $c(\eta) = 1 + c_1(\eta) + \cdots$. Ya que $c(\eta)c(\xi) = 1$ y $c(\eta) = 1 - w$ se sigue que

$$c(\xi) = (1-w)^{-1} = 1 + w + \cdots + w^i$$

Por otro lado, consideremos la proyección $p : \mathbb{CP}(\xi) \to \mathbb{CP}^i$ y sea γ el haz tautológico sobre $\mathbb{CP}(\xi)$, donde para $l' \in \mathbb{CP}(\xi)$ la fibra sobre $l' \subset l^\perp$ es la linea $l' \subset \mathbb{C}^{rango(\xi)}$. Sea $\gamma^\perp$ el haz de $(j-1)$-planos sobre $\mathbb{CP}(\xi)$ donde la fibra sobre $l' \in \mathbb{CP}(\xi)$ que corresponde a una linea l' tal que $l' \subset l^\perp$ es el complemento ortogonal de l' en $l^\perp$. Observemos que $\gamma \oplus \gamma^\perp = p^*(\xi)$. Sean $v = c_1(\overline{\gamma}) \in H^2(\mathbb{CP}(\xi))$, $u = p^*(w) \in H^2(\mathbb{CP}(\xi))$, por la dimensión de $\mathbb{CP}^i$ tenemos que $u^i = 0$. Tenemos que $c(\gamma) = 1 - v$ y $c(p^*(\xi)) = c(\gamma)c(\gamma^\perp)$, por lo cual

$$c(\gamma^\perp) = p^*(c(\xi))(1-v)^{-1} = (1 + u + \cdots + u^i)(1 + v + \cdots)$$

Como $\gamma^{\perp}$ es un haz de $(j-1)$-planos, se sigue que $c_j(\gamma^{\perp}) = 0$, por lo cual, calculando la componente homogenea de grado j en $(1 + u + \cdots + u^i)(1 + v + \cdots)$, obtenemos

$$v^{j-i} \sum_{k=0}^{i} u^k v^{i-k} = 0$$

La cual es una de las relaciones que buscamos, se sigue que hay un homomorfismo ϕ : $\mathbb{Z}[u, v] \to H^*(\mathbb{CP}(\xi))$ que se factoriza a traves del homomorfismo $\psi : R \to H^*(\mathbb{CP}^{\xi})$ donde

$$R = \mathbb{Z}[u, v]/\langle u^{i+1}, (u^i + u^{i-1}v + ... + uv^{i_1} + v^i)v^{j-i}\rangle$$

es decir, se tiene un diagrama conmutativo como sigue

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}[u,v] \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\psi"'] & H^*(\mathbb{CP}(\xi)) \\
R \arrow[ur, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

Resta ver que $R \to H^*(\mathbb{CP}(\xi))$ es un isomorfismo, consideremos el haz $p : \mathbb{CP}(\xi) \to \mathbb{CP}^i$ y apliquemosle la sucesión espectral de Serre, es decir, $E_2^{p,q} = H^p(\mathbb{CP}^i; H^q(\mathbb{CP}^j; \mathbb{Z}))$

$E_2^{p,q} = H^p(\mathbb{CP}^i; H^q(\mathbb{CP}^j; \mathbb{Z}))$

$H^*(\mathbb{CP}^j;\mathbb{Z})$							
$2j$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0	$\cdots$	0	$\mathbb{Z}$
$2j-1$	0	0	0	0	$\cdots$	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\iddots$	$\vdots$	$\vdots$
2	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0	$\cdots$	0	$\mathbb{Z}$
1	0	0	0	0	$\cdots$	0	0
0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0	$\cdots$	0	$\mathbb{Z}$
	0	1	2	3	$\cdots$	$2i-1$	$2i$

$H^*(\mathbb{CP}^i;\mathbb{Z})$

La configuración de la sucesión espectral se debe a que $\mathbb{CP}^i$ y $\mathbb{CP}^{j-1}$ tienen solo celdas en dimensión par, por dicha configuración, se tiene que todos los diferenciales de la sucesión son 0, por lo cual la sucesión espectral colapsa en la hoja E_2 y así $E_2^{p,q} \cong H^{p+q}(\mathbb{CP}(\xi); \mathbb{Z})$, la estructura multiplicativa que surge de la sucesión espectral nos dice que $H^*(\mathbb{CP}(\xi); \mathbb{Z}) \cong$

$\mathbb{Z}[u,v]/I$, por lo cual podemos definir $\phi : \mathbb{Z}[u,v] \to H^*(\mathbb{CP}(\xi);\mathbb{Z})$ que es sobreyectivo, además, como $\phi = \psi \circ \varphi$, se tiene que φ es sobreyectivo. Si consideramos R_p la componente homogénea de R, entonces, por construcción de R, tenemos que $g_p : R_p \hookrightarrow H^p(\mathbb{CP}^i \times \mathbb{CP}^{j-1})$ para todo p, más aún, para cada p podemos definir un isomorfismo $f_p : H^p(\mathbb{CP}^i \times \mathbb{CP}^{j-1}) \to H^p(\mathbb{CP}(\xi))$, entonces para cada p, se tiene que $\varphi_p = f_p \circ g_p$ y como f_p y g_p son inyectivos, se tiene que $\varphi_p : R_p \to H^p(\mathbb{CP}(\xi))$ es inyectivo y por lo tanto φ es inyectivo. ■

Veamos ahora que, para $i > 1$, no hay acción del toro sobre las hipersuperficie de Milnor que las doten de estructura cuasitórica.

Teorema 12. *Para $i > 1$ no hay acción del toro en H_{ij} que las doten de estructura casitórica.*

Demostración. Supongamos que H_{ij} tiene estructura casitórica, así, por el teorema anterior se tiene que la cohomología de H_{ij} es $\mathbb{Z}[u,v]/I''$. Por otro lado, por ser casitórica, su anillo de cohomología es $\mathbb{Z}[w_1,...,w_{m-n}]/I'$. Así pues, tenemos que

$$\mathbb{Z}[w_1,...,w_{m-n}]/I' \cong \mathbb{Z}[u,v]/I''$$

Como $deg(w_i) = deg(v) = deg(u) = 2$, tenemos que $m - n = 2$ por lo cual w_1, w_2 se identifica con u, v. Entonces, por el **Teorema 9**, I'' tiene una base que consiste en polinomios descomponibles en factores lineales sobre $\mathbb{Z}$, lo cual no es posible ya que uno de los factores del **Teorema 11** no es descomponible en factores lineales para $i > 1$.

■

Veamos ahora que las variedades H_{ij} generan el anillo de bordismo unitario

Teorema 13. *El conjunto de clases de las variedades $\{H_{ij} : 0 \leq i \leq j\}$ generan multiplicativamente Ω_U^**

Demostración. Tenemos que

$$gcd\left(\binom{n+1}{i} : 1 \leq i \leq n\right) = \begin{cases} p, & \text{si } n = p^k - 1 \\ 1, & \text{en otros casos} \end{cases}$$

Entonces, por el **Lema 2**, se tiene que podemos considerar alguna combinación lineal entera de las $\{[H_{ij}] : i + j = n + 1\}$ como un generador polinomial a_n del anillo Ω_U^*. ■

7.2. Generadores tóricos.

Definición 12. *Dados* $0 \leq i \leq j$ *definimos* B_{ij} *que consiste de pares* (U, W) *donde*

$$U = \{U_1 \subset U_2 \subset \ldots \subset U_{i+1} = \mathbb{C}^{i+1}, dim_{\mathbb{C}} U_k = k\}$$

es una bandera acotada en $\mathbb{C}^{i+1}$ *(es decir,* $\mathbb{C}^{k-1} \subset U_k$*) y* W *hiperplano en* $\mathbb{C}^{j+1}$ *tal que* $U_1 \subset W$*. La proyección* $(U, W) \mapsto U$ *permite ver a* B_{ij} *como la proyectivización de un haz de* j*-planos sobre la bandera acotada* BF_i *Este haz se separa como una suma de haces como sigue:*

$$B_{ij} = \mathbb{CP}(\rho_1^1 \oplus \cdots \oplus \rho_i^1 \oplus \underline{\mathbb{C}}^{j-i})$$

donde $\underline{\mathbb{C}}^{j-i}$ *denota el haz trivial de* $(j-i)$*-planos complejos*

Veamos ahora una relación entre las hipersuperficies de Milnor H_{ij} *y las variedades* B_{ij} *que acabamos de definir.*

Proposición 2 (Lema 9.1.2. [Buchstaber and Panov, 2015])**.** *Sea* $f : BF_i \to \mathbb{CP}^i$ *(donde* BF_i *es como en el inciso 5 del* ***Ejemplo 7****) dada por enviar una bandera acotada* U *en* $U_1 \subset \mathbb{C}^{i+1}$*. Entonces el haz* $B_{ij} \to BF_i$ *está inducido por el haz* $H_{ij} \to \mathbb{CP}^i$*, es decir, se tiene el siguiente diagrama conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} B_{ij} \arrow[r] \arrow[d] & H_{ij} \arrow[d] \\ BF_i \arrow[r, "f"] & \mathbb{CP}^i \end{tikzcd}$$

Para ver que estas variedades generan, tenemos los siguientes resultados

Lema 3. *Sea* $f : M \to N$ *una función de grado* d *entre variedades* $2i$*-dimensionales establemente complejas, y sea* ξ *haz complejo de* j*-planos sobre* N *(con* $j > 1$*). Entonces*

$$s_{i+j-1}[\mathbb{CP}(f^*\xi)] = d \cdot s_{i+j-1}[\mathbb{CP}(\xi)]$$

Demostración. Sea $p : \mathbb{CP}(\xi) \to N$ la proyección, γ el haz tautológico sobre $\mathbb{CP}(\xi)$, y $\gamma^{\perp}$ el haz complementario, es decir, $\gamma \oplus \gamma^{\perp} = p^*(\xi)$. Entonces, tenemos que

$$\tau(\mathbb{CP}(\xi)) = p^*\tau(N) \oplus \tau_F(\mathbb{CP}(\xi))$$

donde $\tau_F(\mathbb{CP}(\xi))$ es el haz tangente a lo largo de las fibras de la proyección p. Ya que $\tau_F(\mathbb{CP}(\xi)) = Hom(\gamma, \gamma^\perp)$ y $Hom(\gamma, \gamma) = \underline{\mathbb{C}}$, se sigue que

$$\tau_F(\mathbb{CP}(\xi)) \oplus \underline{\mathbb{C}} = Hom(\gamma, \gamma^\perp) \oplus Hom(\gamma, \gamma) = Hom(\gamma, \gamma \oplus \gamma^\perp)$$

Por lo tanto,

$$\tau(\mathbb{CP}(\xi)) \oplus \underline{\mathbb{C}} = p^*\tau(N) \oplus Hom(\gamma, \gamma \oplus \gamma^\perp) = p^*\tau(N) \oplus Hom(\gamma, p^*\xi) = p^*\tau(N) \oplus (\overline{\gamma} \otimes p^*\xi)$$

donde $\overline{\gamma} = Hom(\gamma, \underline{\mathbb{C}})$.

La función $f : M \to N$ induce un morfismo $\hat{f} : \mathbb{CP}(f^*\xi) \to \mathbb{CP}(\xi)$ tal que

- $p\hat{f} = fp_1$, donde $p_1 : \mathbb{CP}(f^*\xi) \to M$ es la proyección, es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \mathbb{CP}(f^*\xi) \arrow[r, "\hat{f}"] \arrow[d, "p_1"'] & \mathbb{CP}(\xi) \arrow[d, "p"] \\ M \arrow[r, "f"'] & N \end{tikzcd}$$

- $deg\hat{f} = degf = d$
- $\hat{f}^*\gamma$ es el haz tautológico sobre $\mathbb{CP}(f^*\xi)$

Entonces, tenemos

$$\begin{aligned} s_{i+j-1}(\tau(\mathbb{CP}(\xi))) = s_{i+j-1}(p^*\tau(N) \oplus (\overline{\gamma} \otimes p^*\xi)) = p^*s_{i+j-1}(\tau(N)) + s_{i+j-1}(\overline{\gamma} \otimes p^*\xi) \\ = s_{i+j-1}(\overline{\gamma} \otimes p^*\xi) \end{aligned}$$

ya que $i + j - 1 > i$, y similarmente para el haz $\tau(\mathbb{CP}(f^*\xi))$. Así,

$$\begin{aligned} & s_{i+j-1}[\mathbb{CP}(f^*\xi)] = s_{i+j-1}[\tau(\mathbb{CP}(f^*\xi))]\langle\mathbb{CP}(f^*\xi)\rangle = \\ &= s_{i+j-1}[(\hat{f}^*\overline{\gamma}) \otimes p_1^* f^*\xi]\langle\mathbb{CP}(f^*\xi)\rangle = s_{i+j-1}[(\hat{f}^*\overline{\gamma}) \otimes \hat{f}^* p^*\xi]\langle\mathbb{CP}(f^*\xi)\rangle = s_{i+j-1}[\hat{f}^*(\overline{\gamma} \otimes p^*\xi)]\langle\mathbb{CP}(f^*\xi)\rangle = \\ &= s_{i+j-1}[\overline{\gamma} \otimes p^*\xi]\hat{f}_*\langle\mathbb{CP}(f^*\xi)\rangle = d \cdot s_{i+j-1}[\overline{\gamma} \otimes p^*\xi]\langle\mathbb{CP}(\xi)\rangle = \\ &= d \cdot s_{i+j-1}[\mathbb{CP}(\xi)] \end{aligned}$$

■

Teorema 14.

$$s_{i+j-1}[B_{ij}] = s_{i+j-1}[H_{ij}]$$

Demostración. Notemos que $f : BF_i \to \mathbb{CP}^i$ de la **Proposición 2** tiene grado 1, entonces el resultado se sigue del lema anterior. ■

Teorema 15 (Teorema 9.1.9 [Buchstaber and Panov, 2015]). *Las clases de bordismo de variedades tóricas B_{ij}, $0 \leq i \leq j$, genera multiplicativamente el anillo de bordismo complejo Ω_U^*. Por lo tanto, toda clase de bordismo complejo contiene una unión disjunta de variedades tóricas*

Demostración. El hecho de que las B_{ij} generan a Ω_U^* se sigue del teorema anterior. Por otro lado, tenemos que el producto de variedades tóricas es una variedad tórica, con lo cual tenemos el producto de estos generadores bien definido, pero la unión disjunta de variedades tóricas no lo es, ya que una variedad tórica es conexa por definición, este problema se soluciona considerando la suma conexa, ver Proposición 9.1.12 de [Buchstaber and Panov, 2015]. ■

Referencias

[Atiyah, 1961] Atiyah, M. F. (1961). Bordism and cobordism. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 57, pages 200–208. Cambridge University Press.

[Buchstaber and Panov, 2015] Buchstaber, V. M. and Panov, T. E. (2015). *Toric topology*, volume 204 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI.

[Davis et al., 1991] Davis, M. W., Januszkiewicz, T., et al. (1991). Convex polytopes, coxeter orbifolds and torus actions. *Duke Mathematical Journal*, 62(2):417–451.

[Dold, 1956] Dold, A. (1956). Erzeugende der thomschen algebra $\mathfrak{N}$. *Mathematische Zeitschrift*, 65(1):25–35.

[Milnor, 1960] Milnor, J. (1960). On the cobordism ring ω^* and a complex analogue, part i. *American Journal of Mathematics*, 82(3):505–521.

[Milnor and Stasheff, 2016] Milnor, J. and Stasheff, J. D. (2016). *Characteristic Classes.(AM-76)*, volume 76. Princeton university press.

[Novikov, 1960] Novikov, S. (1960). Some problems in the topology of manifolds connected with the theory of thom spaces.

[Thom, 1954] Thom, R. (1954). Quelques propriétés globales des variétés différentiables. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 28(1):17–86.

[Wall, 1960] Wall, C. (1960). Determination of the cobordism ring. *Annals of Mathematics*, pages 292–311.

[Whitney et al., 1992] Whitney, H., Eells, J., and Toledo, D. (1992). *Collected Papers of Hassler Whitney*. Nelson Thornes.