



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE
HIDALGO

Instituto de Física y Matemáticas

**Momento magnético y cromomagnético
anómalo:
una nueva perspectiva**

T E S I S

PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN CIENCIAS EN EL ÁREA DE FÍSICA

Autor:
Luis Raúl TORRES ROJAS

Asesor:
Dr. ADNAN BASHIR

UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

Resumen

Instituto de Física y Matemáticas

Maestro en ciencias en el área de Física

Momento magnético y cromomagnético anómalo: una nueva perspectiva

por Luis Raúl TORRES ROJAS

Actualmente, en la comunidad científica de la física de partículas se ha generado un gran interés en el momento magnético anómalo debido a la tensión que existe en la predicción teórica y la observación experimental de la anomalía magnética del muón, $a_\mu = (g - 2)_\mu/2$. Esta discrepancia puede surgir de efectos de partículas aun no descubiertas a través de lazos virtuales, lo que podría proveer indicación de "nueva física".

Al día de hoy, existen dos iniciativas para poder comprobar si la existencia de una nueva física es revelada en la precisión del momento magnético anómalo del muon[1]. La primera es mejorar la precisión experimental a_μ^{exp} por un factor de 4. Actualmente, la colaboración de Fermilab muon g-2 esta trabajando arduamente en mejorar y modernizar las técnicas de medición, adaptando características importantes que existen en el CERN (Organización Europea para la Investigación Nuclear) y en BNL (Laboratorio Nacional de Brookhaven). Otra alternativa, es el diseño de J-PARC (Complejo de Investigación para Acelerador de Protón en Japón), que presentará un haz de muones, ultra frío y de poco momento introducido a un magneto altamente uniforme y compacto. La otra iniciativa, tiene como meta mejorar la evaluación teórica por el Modelo Estándar a un nivel en que se puedan llevar a cabo las mediciones experimentales. Este último grupo es el que nos interesa.

Estudiamos todas las contribuciones del Modelo Estándar al momento magnético del muón a nivel de un lazo. Estas contribuciones surgen de la electrodinámica cuántica (QED), la electrodébil, la cromodinámica cuántica (QCD) y la parte hadrónica. En este trabajo de tesis, analizamos las contribuciones de la electrodinámica cuántica y la electrodébil en la capa de masa 2.28 y en el límite simétrico 2.66, así como en otros regímenes cinemáticos. Adicionalmente, analizamos el momento cromomagnético anómalo en ambos límites de QCD. Notamos la existencia de la divergencia en la contribución no abeliana en la capa de masa. Observamos que esta divergencia deja de existir cuando tomamos el límite simétrico. Además, el resultado finito correspondiente también es independiente de norma. Por lo tanto esta definición del momento cromomagnético anómalo se puede considerar como un observable físico. Analizamos el caso de un gluon masivo correspondiente al Modelo de Curci-Ferrari [49] y [53].

Finalmente analizamos el momento cromomagnético anómalo para las interacciones electrodébiles en cada uno de los quarks considerando la configuración simétrica y de capa de masa. Todos los cálculos realizados se han hecho en una norma arbitraria.

Palabras clave: capa de masa, límite simétrico, Modelo Curci-Ferrari, electrodinámica cuántica, teoría electrodébil, cromodinámica cuántica.

Abstract

Instituto de Física y Matemáticas

Master of Science in Physics

Anomalous magnetic and chromomagnetic moment: A new perspective

by Luis Raúl TORRES ROJAS

Currently, in the scientific community of particle physics a great interest has been generated in the anomalous magnetic moment due to the tension that exists in the theoretical prediction and the experimental observation of the magnetic anomaly of the muon, $a_\mu = (g - 2)_\mu/2$. This discrepancy may arise from undiscovered particle effects through virtual loops, which could provide an indication of "new physics."

Nowadays, there are two initiatives to be able to check if the existence of a new physics is revealed in the precision of the anomalous magnetic moment of the muon [1]. The first is to improve the experimental precision a_μ^{exp} by a factor of 4. Currently, the Fermilab muon $g - 2$ collaboration is working hard to improve and modernize measurement techniques, adapting important features that exist at CERN (European Organization for Nuclear Research) and BNL (Brookhaven National Laboratory). Another alternative is the J-PARC (Japan Proton Accelerator Research Complex) design, which will feature an ultra-cool, low-momentum beam of muons fed into a highly uniform and compact magnet. The other initiative aims to improve the theoretical evaluation by the Standard Model to a level where experimental measurements can be carried out. This last group is the one that interests us. We study all the contributions of the Standard Model to the magnetic moment of the muon at the level of one loop. These contributions arise from quantum electrodynamics (QED), electroweak, quantum chromodynamics (QCD) and the hadronic part. In this thesis work, we analyze the contributions of quantum and electroweak electrodynamics on shell 2.28 and in the symmetric limit ??, as well as in other kinematic regimes. Additionally, we analyze the anomalous chromomagnetic moment in both limits of QCD. We note the existence of the divergence in the non-abelian contribution on shell limit. We observe that this divergence ceases to exist when we take the symmetric limit. Furthermore, the corresponding finite result is also gauge invariant. Therefore this definition of the anomalous chromomagnetic moment can be considered as a physical observable. We analyze the case of a massive gluon corresponding to the Curci-Ferrari Model [49] and [53].

Finally, we analyze the anomalous chromomagnetic moment for the electroweak interactions in each of the quarks, considering the symmetric configuration and the on shell limit. All the calculations made have been done in an arbitrary gauge.

Keywords: on shell, symmetric limit, Curci-Ferrari model, quantum electrodynamics, electroweak theory, quantum chromodynamics.

Agradecimientos

A CONACyT.

Al Dr. Adnan Bashir por haberme permitido realizar este proyecto de Tesis, por haber dedicado su tiempo en responderme todas mis dudas y llamadas con mucha paciencia y haber compartido buenas charlas y cervezas juntos.

A mis Sinodales, James y Xiomara por orientarme con sus correcciones y observaciones de mi Tesis de manera muy atenta y detallada.

A mis padres y mi hermana por haberme acompañado durante todo el proceso y ser un soporte emocional cuando lo necesitaba, a mis abuelitos por motivarme a seguir mis metas y todos mis familiares que de alguna manera me apoyaron a seguir adelante.

A mis amigos Adrian, Kevin, Paco, Isaí, Juancho, Huicho, Alyabra, Felipe, Ricardo, Rafa, Mudo, Irving, Mane, Fer, José, Julio, Brenda, Yohali, Juanito, Alejandro, Enrique, Flor, Griss y a mis demás amigos.

«Nobody ever figures out what life is all about, and it doesn't matter. Explore the world. Nearly everything is really interesting if you go into it deeply enough.»

Richard P. Feynman

Índice general

| | |
|---|------------|
| Resumen | III |
| Abstract | V |
| Agradecimientos | VII |
| 1. Introducción | 1 |
| 1.1. Historia | 1 |
| 1.2. Momento magnético clásico | 5 |
| 1.3. El experimento de Stern-Gerlach | 10 |
| 1.4. Momento magnético en la mecánica cuántica clásica | 11 |
| 1.5. Momento magnético en la mecánica cuántica relativista | 13 |
| 1.6. Predicción de Dirac | 15 |
| 2. Momento magnético anómalo QED | 23 |
| 2.1. Consideraciones generales | 23 |
| 2.2. Características de las CR a la anomalía magnética del muón | 27 |
| 2.3. Contribución de QED aun lazo: la corrección de Schwinger | 28 |
| 2.4. Nuevas consideraciones | 36 |
| 2.4.1. Momento del fotón no despreciable | 36 |
| 2.4.2. límite simétrico | 37 |
| 2.4.3. Propagador fotónico masivo | 39 |
| 2.4.4. Propagador fotónico masivo en el límite simétrico | 41 |
| 2.5. Análisis de resultados y conclusiones en QED | 42 |
| 3. Momento magnético anómalo por interacciones débiles | 45 |
| 3.1. Contribución del bosón Z_0 | 45 |
| 3.1.1. Nuevas consideraciones | 51 |
| Límite simétrico | 51 |
| 3.2. Contribución del bosón de Higgs | 53 |
| 3.3. Contribución del bosón W | 55 |
| 3.4. Contribución de Bosones de Nambu-Goldstone | 59 |
| 3.4.1. Primer contribución | 59 |
| 3.4.2. Segunda contribución | 61 |
| 3.4.3. tercera contribución | 63 |
| 3.5. Conclusiones | 66 |
| 4. Momento cromomagnético | 67 |
| 4.1. Modelo de Curci-Ferrari | 68 |
| 4.2. Contribución Abeliiana | 69 |
| 4.3. Contribución no Abeliiana | 75 |
| 4.3.1. Límite simétrico | 79 |
| 4.4. Contribución electrodébil | 83 |

| | |
|--|------------|
| 4.4.1. Boson Z_0 | 83 |
| 4.4.2. Fotón | 84 |
| 4.4.3. Boson de Higgs | 85 |
| 4.5. Bosón W | 86 |
| 5. Conclusión | 89 |
| 5.1. Discusión de resultados | 89 |
| 5.2. Futuros proyectos | 90 |
| A. Identidades QED | 95 |
| A.1. Parametrización de Feynman | 95 |
| A.2. Identidades de las matrices γ en d dimensiones | 96 |
| A.3. Integrales en d dimensiones | 97 |
| B. Reglas de Feynman | 99 |
| C. Integrales de lazo | 105 |
| C.1. Capa de masa | 105 |
| C.1.1. Integral tipo QED | 105 |
| C.1.2. Integral bosón Z_0 | 106 |
| C.1.3. Integral bosón W | 106 |
| C.1.4. Contribución del bosón de Higgs | 107 |
| C.1.5. Contribución gluón | 107 |
| C.2. Límite simétrico | 108 |
| C.2.1. Contribución bosón Z_0 | 108 |
| C.2.2. Contribución para el fotón | 109 |
| C.2.3. Integral para boson de Higgs | 109 |
| C.2.4. Contribución por parte del gluón | 110 |

Índice de figuras

| | |
|--|----|
| 1.1. En memoria de Julian Schwinger | 2 |
| 1.2. Circuito de corriente rectangular | 5 |
| 1.3. Circuito de corriente circular | 6 |
| 1.4. Partícula de espín 1/2 en reposo en un campo magnético uniforme \mathbf{B} | 8 |
| 1.5. Experimento de Stern-Gerlach | 11 |
| 2.1. Corrección del vértice en QED | 24 |
| 2.2. Corrección del vértice en QED | 29 |
| 2.3. AMDM comparación de configuraciones | 42 |
| 2.4. AMDM del muón con $q^2 = -m_z^2$ | 43 |
| 2.5. AMDM del muón con $q^2 = -m_z^2$: PP1 indica el Propagador de Proca con AMDM 2.16 y PP2 indica el propagador de Proca con AMDM 2.95 | 43 |
| 3.1. Contribución 1(A) al AMDM por parte del boson Z_0 | 46 |
| 3.2. Contribución 1(b) al AMDM por parte del boson z_0 | 49 |
| 3.3. Contribución del Boson de Higgs | 53 |
| 3.4. Contribución 1(a) al AMDM por parte del bosón W | 55 |
| 3.5. Contribución 1(b) al AMDM por parte del boson W | 59 |
| 3.6. Contribución 1(c) al AMDM por parte del bosón W | 61 |
| 3.7. Contribución 1(d) al AMDM por parte del bosón W | 63 |
| 4.1. QCD abeliana | 69 |
| 4.2. CMDM usando el modelo de Curci Ferrari en $q^2 \rightarrow 0$: a) Límite de capa de masa; b) Límite simétrico; c) quarks u y d, LCM es el límite de capa de masa, LS1 es el límite simétrico con CMDM 2.16 y LS2 es el límite simétrico con CMDM 2.95 | 72 |
| 4.3. CMDM usando el modelo de Curci ferrado en $q^2 = -(0.1\text{GeV})^2$: a) Límite de capa de masa; b) Límite simétrico; c) quarks u y d, LCM es el límite de capa de masa, LS1 es el límite simétrico con CMDM 2.16 y LS2 es el límite simétrico con CMDM 2.95 | 73 |
| 4.4. CMDM usando el modelo de Curci Ferrar en $q^2 = -m_z^2$: a) Límite capa de masa; b) Límite simétrico; c) quarks u y d | 74 |
| 4.5. QCD no abeliana | 75 |
| 4.6. Contribución QCD no abeliana en el límite de capa de masa para cada uno de los quarks | 81 |
| 4.7. Contribución QCD no abeliana en la configuración simétrica para cada uno de los quarks | 82 |
| 4.8. Contribución QCD no abeliana en la configuración simétrica y capa de masa para los quarks u y d | 82 |
| 4.9. Contribución QCD no abeliana en la configuración simétrica para cada uno de los quarks | 83 |
| 4.10. Corrección del vértice electrodébil en QCD - Bosón Z_0 | 83 |
| 4.11. Corrección del vértice electrodébil en QCD - fotón | 84 |

| | |
|---|-----|
| 4.12. Corrección del vértice electrodébil en QCD - Boson de Higgs | 85 |
| 4.13. Corrección del vértice electrodébil en QCD - γ | 86 |
| B.1. Vértice QED | 99 |
| B.2. Línea interna del fotón | 99 |
| B.3. Línea interna del lepton | 99 |
| B.4. Línea interna del boson de Higgs | 99 |
| B.5. Línea interna del Boson W^\pm ó Z^0 | 100 |
| B.6. Línea interna del boson de Goldstone | 100 |
| B.7. Vértice lepton-boson Z^0 -lepton | 100 |
| B.8. Vértice $W^+\gamma W^-$ | 100 |
| B.9. Vértice de $\nu_l - W^\pm - l^-$ | 100 |
| B.10. Vértice para bosones de Goldstone | 100 |
| B.11. Vértice de para bosones de Goldstone | 101 |
| B.12. Vértice de para bosones de Goldstone | 101 |
| B.13. Vértice Lepton-Higgs-Lepton | 101 |
| B.14. Vértice Lepton-Higgs-Lepton | 101 |
| B.15. Propagador del quark | 102 |
| B.16. Propagador del gluon | 102 |
| B.17. Vértice quark-gluon-quark | 102 |
| B.18. Vértice antiquark u-gluon-quark b | 102 |

Dedicado a mis padres y mis abuelos

Capítulo 1

Introducción

1.1. Historia

Importancia del momento magnético anómalo del muón

Alrededor de más de 70 años, el momento magnético anómalo del muón nos ha proporcionado una insinuación para obtener una nueva física debido a la existencia de una diferencia entre la teoría y el experimento del Modelo Estándar. Actualmente, se mide con una precisión alrededor de $0.5ppm$ de acuerdo a su incertidumbre teórica de la predicción del Modelo Estándar.

Para entender porque es tan especial el momento magnético anómalo del muón, tenemos que darle un vistazo a los leptones en general. El muón (μ^-), como la partícula más ligera, el electrón (e^-) como la más pesada, tau (τ^-), es uno de los 3 leptones conocidos cargados. Estas partículas son fermiones elementales de espín $1/2$ de carga eléctrica -1 en unidades de la carga del positrón e , y son descritos por la ecuación de Dirac.

Claro que los leptones nunca son realmente libres, interactúan de manera electromagnética con el fotón y débilmente a través de bosones de norma pesados W y Z , y aún más débilmente con el bosón de Higgs. Los tres leptones tienen propiedades idénticas, a excepción de sus masas, que son dadas por $m_e = 0.511MeV$, $m_\mu = 105.658MeV$ y $m_\tau = 1776.99MeV$, respectivamente. Así, las masas del leptón difieren por ordenes de magnitud y esto conduce a diferentes comportamientos de estas partículas. La masa y la energía están relacionadas de acuerdo a la relación de Einstein $E^2 = m^2c^4 + p^2c^2$, las partículas pesadas en general decaen en partículas ligeras más energía cinética. Una consecuencia inmediata de la diferencia entre las masas son los diferentes tiempos de vida de los leptones. Dentro del Modelo Estándar (SM) de la interacción de partículas elementales, el electrón es estable en escalas de tiempo cercanas a la edad del universo, mientras que el μ tiene un tiempo de vida de $\tau_\mu = 2.197 \times 10^{-6}s$ y el τ tiene un tiempo de vida aun más inestable de $\tau_\tau = 2.906 \times 10^{-13}s$. También, sus decaimientos son muy diferentes: μ decae a un electrón y dos neutrinos, sin embargo, el τ decae alrededor del 65% en estados hadrónicos $\pi^- \nu_\tau, \pi^- \pi^0 \nu_\tau, \dots$, mientras su principal decaimiento a los leptones es de 17.36% $\mu^- \bar{\nu}_\mu \nu_\tau$ y 17.85% $e^- \bar{\nu}_e \nu_\tau$. Los modos de decaimiento y tiempo de vida de una partícula tienen un impacto dramático en su estudio experimental. El estudio más preciso de leptones es el electrón, pero el muón puede también ser explorado con mucha precisión. Ya que el muón es más pesado que el electrón, tiende a ser más sensible a la física más allá del Modelo Estándar que el mismo electrón. El muón podría darnos algunas pistas sobre la física que aún no ha sido descubierta. La razón es debido a que algunos efectos escalan con potencias de m_l^2 (masa del leptón), por lo tanto, estos efectos son desapercibidos por el electrón debido a que el cuadrado de su masa es más pequeña que la del resto de los leptones. Desafortunadamente, el

τ tiene una vida muy corta. Por lo tanto, los experimentos correspondientes no son posibles con la tecnología actual.

Una consecuencia de la diferencia de las masas leptónicas es el papel fundamental que los diferentes leptones desempeñan en la naturaleza. Mientras que los electrones estables, además de los protones y neutrones, están en cualquier parte en la materia ordinaria, en átomos, moléculas, gases, líquidos, metales, otros estados de la materia condensada, etcétera, los muones parecen que son muy raros en la naturaleza y su desempeño en nuestro mundo esta muy lejos de lo obvio. Sin embargo, los muones, como partículas de rayos cósmicos, son también parte de nuestra vida cotidiana. Son continuamente creados cuando partículas altamente energéticas del espacio profundo colisionan con átomos de la atmósfera superior de la Tierra. Las colisiones iniciales crean piones que entonces decaen en muones. Los muones altamente energéticos viajan cerca de la velocidad de la luz hacia la atmósfera y llegan a nivel del suelo a una tasa de aproximadamente 1 muón por cm^2 por minuto. La *dilatación del tiempo* relativista es responsable de que los muones tienen el tiempo suficiente de alcanzar el suelo. El muón fue descubierto en rayos cósmicos por Anderson & Neddermeyer en 1936 [26], unos años después de que Anderson [27] descubrió antimateria en forma del positrón, un *electrón cargado positivamente* como predecía Dirac, en rayos cósmicos en 1932.

Alrededor de 1930, la situación experimental permaneció igual. El electrón tenía $g = 2$, vea 1.29, y la ecuación de Dirac parecía que describía la naturaleza. Sin embargo, en 1933 Stern y sus colaboradores [5] demostraron que el factor g del protón era de $g \simeq 5.5$, muy lejos del valor esperado de 2. Otro descubrimiento aún más importante fue en 1940 por Alvarez y Bloch [6] y demuestra que el neutrón tiene un gran momento magnético 1.9. En 1947, motivado por las mediciones de la estructura hiperfina en hidrógeno que obtienen desplazamientos más grande que lo esperado de la teoría de Dirac [7, 8, 9], Julian Schwinger [10] demostró que de un punto de vista teórico *las discrepancias se pueden explicar por un pequeño momento magnético adicional de espín del electrón* esto surge de las correcciones radiativas de orden más bajo al momento de Dirac. El cálculo del momento dipolar magnético anómalo (AMDM) del electrón realizada por Julian Schwinger [10] fue uno de los primeros cálculos cuánticos de lazo. Su simple pero elegante valor esta inscrito en la lápida localizada cerca de su tumba en el Cementerio de Mount Auburn en Cambridge Massachusetts, donde fue enterrado junto con su esposa.

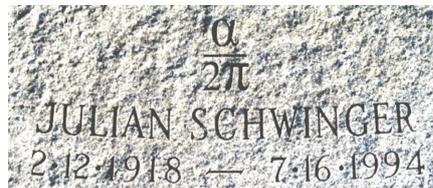


FIGURA 1.1: En memoria de Julian Schwinger

Los cálculos en QED de la anomalía del muón han sido llevados con la contribución a sexto orden (3-lazos) calculados analíticamente por Laporta y Remiddi [11]. Las contribuciones a octavo y décimo orden (4- y 5- lazos) realizados por Kinoshita y sus colaboradores [12] de manera numérica. Por lo tanto, sumando los términos en la expansión perturbativa de QED hasta décimo orden, obtenemos la contribución al momento magnético anómalo. Las dos posibles elecciones para la constante de

estructura fina, $\alpha(C_s)$ y $\alpha(a_e)$, nos conduce a

$$\begin{aligned} a_\mu^{\text{QED}}(\alpha(C_s)) &= 116584718.931(7)(17)(6)(100)(23)[104] \times 10^{-11} \\ a_\mu^{\text{QED}}(\alpha(a_e)) &= 116584718.842(7)(17)(6)(100)(28)[106] \times 10^{-11} \end{aligned} \quad (1.1)$$

donde las incertidumbres son debido a la masa del leptón τ , m_τ , el octavo orden de QED, el décimo orden de QED, la constante de estructura fina α y la suma de los cuadrados de estas cantidades. Aparte de las respectivas entradas de las masas de leptones, estos valores finales son basados en los últimos cálculos de QED con referencias [12, 13].

Los pioneros en el cálculo de las contribuciones electrodébiles a un lazo fueron Fujikawa[14] y Bars [15]. Ahora, han sido calculadas hasta dos lazos y la estimación de la contribución logarítmica más allá del nivel de dos lazos también se incluye en la estimación final. Los cálculos hadronicos que aparecen al nivel de dos lazos también se incluyen y es la fuente dominante de incertidumbre de las contribuciones electrodébiles. El resultado final es [16, 17]

$$a_\mu^{\text{EW}} = 153.6(1.0) \times 10^{-11} \quad (1.2)$$

Esta incertidumbre, principalmente surge de los efectos no perturbativos en diagramas de dos lazos involucrando quarks ligeros, sigue siendo despreciable a comparación de la precisión experimental. Las fuentes dominantes del error de la teoría son las contribuciones hadronicas, en partículas el término de polarización hadrónica del vacío (HVP) a orden $\mathcal{O}(\alpha^2)$ y el termino de la contribución de dispersión de orden superior hadrónico luz por luz (HLbL) a orden $\mathcal{O}(\alpha^3)$. Estas contribuciones son calculadas con métodos no perturbativos: ecuaciones de Schwinger-Dyson, relaciones de dispersión, y lattice QCD. El resultado final, desviaciones de 3.7σ menor que el resultado de BNL, es

$$a_\mu^{\text{SM}} = 116591810(43) \times 10^{-11} \quad (1.3)$$

Este resultado difieren de la medición de Brookhaven [18]

$$a_\mu^{\text{exp}} = 116592089(63) \times 10^{-11} \quad (1.4)$$

por tanto,

$$\Delta a_\mu := a_\mu^{\text{exp}} - a_\mu^{\text{SM}} = 279(76) \times 10^{-11}$$

que corresponde a una discrepancia de $3,7\sigma$.

Actualmente, existen dos grandes iniciativas para resolver si la nueva física es revelada en la precisión de la evaluación del momento magnético anómalo del muón. El primero es mejorar la medición experimental de a_μ^{exp} por un factor de 4. La colaboración del Fermilab muón g-2 esta activamente tomando y analizando datos probados, pero tomando técnicas modernas que han sido adoptadas en las características importantes del CERN y BNL. Una alternativa y un enfoque novedoso esta siendo diseñado por J-PARC. Producirá un haz de muón ultra frío de bajo momento inyectando a un magneto altamente uniforme y compacto. La meta de la segunda iniciativa es mejorar la evaluación teórica del Modelo Estándar a un nivel que pueda ser consistente con las metas experimentales. La discrepancia del valor del Modelo Estándar se encuentra dominado por las contribuciones de interacciones fuertes, que son el principal enfoque en la iniciativa teórica. Los nuevos resultados significantes,

así como las re-evaluaciones y resumen de trabajos previos han sido recolectados por un gran número de mentes brillantes de alrededor de 130 personas [1], esto nos ayuda a analizar todo lo que se conoce actualmente sobre el momento magnético anómalo del electrón.

También, existen investigaciones dedicadas para los momentos dipolar eléctricos (EDM) datan como observación pionera hecha por Purcell y Ramsey en 1950 [19], de que una partícula EDM violaría la paridad pero, sin embargo, debe buscarse como prueba de esa simetría. La prueba experimental para un EDM del electrón, el neutrón y del núcleo atómico se ha convertido en un área importante en la búsqueda de la física más allá del Modelo Estándar (SM). El nivel de precisión que se ha alcanzado es $< 1.6 \times 10^{-27} e\text{-cm}$ para el electrón, $< 2.9 \times 10^{-26} e\text{-cm}$ para el neutrón y $< 3.1 \times 10^{-29} e\text{-cm}$ para ^{199}Hg , esta comenzando a desafiar modelos como la súper simetría.

Descubrimiento del espín

En 1911 Rutherford propuso el átomo nuclear [20]. Esta hipótesis combinada con el descubrimiento de Thomson del electrón [21] y el descubrimiento de Millikan de que la carga del electrón puede ser cuantizada [22], implica que los electrones estaban de alguna manera en órbita alrededor del núcleo positivo, lo que lleva a un átomo neutro. Clásicamente tal sistema es inestable, y en 1913 Bohr propuso su teoría cuántica [23]. Muchos problemas conceptuales se mantenían y que empezaron a ser entendidos por la ecuación de onda de Schrödinger [24] que fue publicada en 1926.

En 1921, dos propuestas interesantes fueron publicadas: Compton propuso [25] un electrón rotando para explicar el ferromagnetismo, que se dio cuenta que era difícil de explicar por otros medios. Stern propuso un experimento para estudiar el espacio cuantizado [5] para probar la teoría de cuantos de Sommerfeld, donde el presento los detalles de los que ahora se conoce como el *experimento de Stern Gerlach*. Un haz de átomos de plata fue proyectado hacia un campo magnético donde la fuerza neta del dipolo magnético separa los diferentes estados cuánticos magnéticos.

En 1924, Sterns y Gerlach concluyeron que dentro del 10%, el momento magnético del átomo de plata en su estado base fue un magnetón de Bohr [26].

Independientemente, en 1925 Uhlenbeck y Goudsmit [27] propuso el *electrón rotante* para explicar la estructura fina observada en el efecto Zeeman anómalo en el espectro atómico. La división de la estructura fina puede ser entendido como la interacción del momento dipolar magnético del electrón dentro del campo magnético producido por el movimiento nuclear, que en el marco de reposo del electrón aparece que esta orbitando alrededor del electrón. El momento dipolar magnético del electrón esta junto con su espín y es dado por

$$\mu = g \left(\frac{q}{2m} \right) S \quad (1.5)$$

donde $q = \pm e$ es la carga de la partícula en términos de la magnitud de la carga del electrón e y la constante de proporcionalidad es el factor g para el espín (en ocasiones escrito como g_s). En el segundo artículo [28], Uhlenbeck y Goudsmit concluye que el factor g para el espín es dos veces el del momento angular orbital, sin embargo, el cálculo de la división de la estructura fina fue entonces dos veces que la división observada. Hasta 1926, cuando Thomas demostró que el factor de discrepancia 2 entre el experimento y el cálculo fue un efecto cinemático [29], el espín se convirtió en una teoría aceptada.

Concluimos que un momento magnético de un magnetón de Bohr implica que el factor g para el espín es de 2.

1.2. Momento magnético clásico

Además de la carga, el espín, masa y el tiempo de vida, los leptones tienen otra muy interesante propiedad estática electromagnética y débil como los *momentos dipolares* magnéticos y eléctricos. Clásicamente los momentos dipolares pueden surgir ya sean por *cargas* o *corrientes*.

El ejemplo de corrientes es el siguiente.

Consideramos un circuito de corriente rectangular que está en un campo magnético constante que apunta hacia arriba. Las fuerzas de los segmentos derecho e izquierdo

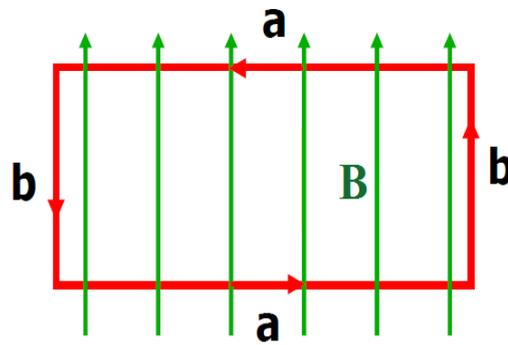


FIGURA 1.2: Circuito de corriente rectangular

del cable son cero, ya que son paralelos al campo. La fuerza en el segmento interior es hacia afuera y en el segmento superior es hacia dentro, de modo que la fuerza total en el circuito es cero. El torque τ en un objeto que tiene un momento dipolar magnético m en un campo magnético uniforme B es:

$$\tau = m \times B \quad (1.6)$$

Esto es válido para el momento debido a una distribución de corriente localizada siempre que el campo magnético sea uniforme. Para un campo B no uniforme, la ecuación es también válida para el torque sobre el centro del momento dipolar siempre que el momento dipolar sea lo suficientemente pequeño [30].

Por su puesto que tenemos un torque neto, esto hace que la bobina tienda a rotar alrededor de los ejes horizontales pasando a través de su centro. El torque es dado, usando 1.6, por:

$$\begin{aligned} \tau = Fd &= (IBa)b = IBab = IBab \\ &= IAB = IAB = \mu B \end{aligned}$$

La característica de la bobina es dada por el *momento dipolar magnético* o *momento magnético* del circuito.

$$\mu = IA$$

El momento magnético, escrito como una cantidad vectorial:

$$\boldsymbol{\mu} = IA\hat{n} \quad (1.7)$$

donde \hat{n} es perpendicular al circuito de corriente. Por otro lado, podemos escribir:

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B} \quad (1.8)$$

De la expresión clásica para el momento magnético, $\boldsymbol{\mu} = IA$, una expresión para

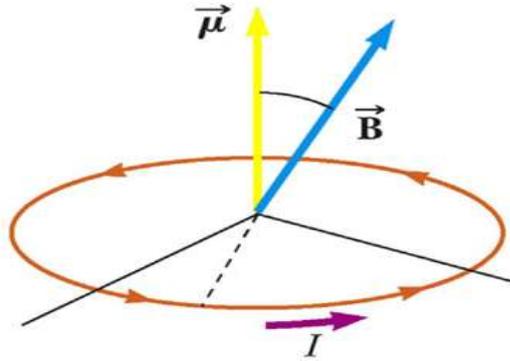


FIGURA 1.3: Circuito de corriente circular

el momento magnético de un electrón en una órbita circular alrededor del núcleo puede ser deducida.

Es proporcional al momento angular del electrón, la corriente efectiva es:

$$I = \frac{e}{T} = -\frac{ev}{2\pi r} = \frac{emvr}{2\pi mr^2} = \frac{eL}{2\pi mr^2}$$

así, el momento magnético es:

$$\boldsymbol{\mu} = IA = \frac{eL}{2\pi mr^2} \pi r^2 = \frac{eL}{2m} \quad (1.9)$$

Esto es el ejemplo bien conocido, es la circulación de corriente, debido a una partícula orbitando su centro con carga eléctrica e y masa m , que exhibe un momento dipolar magnético $\boldsymbol{\mu}_L = \frac{1}{2c} e \mathbf{r} \times \mathbf{v}$ dada por

$$\boldsymbol{\mu}_L = \frac{e}{2mc} \mathbf{L}$$

donde $\mathbf{L} = m \mathbf{r} \times \mathbf{v}$ es el momento angular orbital (\mathbf{r} posición, \mathbf{v} velocidad). Un momento dipolar eléctrico puede existir debido a los desplazamientos relativos de los centros de distribuciones de carga eléctrica positiva o negativa. Así, ambas propiedades eléctricas y magnéticas tienen su origen en las *cargas y sus corrientes* eléctricas. Las cargas magnéticas no son necesarias para obtener momentos magnéticos. Este aspecto se traslada de la asimetría básica entre el fenómeno eléctrico y magnético en las ecuaciones de Maxwell.

Mientras que las cargas eléctricas desempeñan un papel fundamental de las fuentes de los campos electromagnéticos, las cargas magnéticas elementales, usualmente llamadas monopolos magnéticos, son ausentes. Dirac observó que la existencia de las cargas magnéticas nos permitirán explicar naturalmente la cuantización de la carga eléctrica e y la carga magnética m . Estarían relacionadas por

$$em = \frac{1}{2} n \hbar c$$

donde n es un entero.

Aparentemente, la naturaleza no hace uso de esta posibilidad y lo que nos hace cuestionar la existencia de monopolos magnéticos y permanece como un desafío para el futuro de la física de partículas.

Cualquiera que sea el origen de los momentos eléctrico y magnético, estos contribuyen a la interacción electromagnética del Hamiltoniano de la partícula con campos magnéticos y eléctricos

$$\mathcal{H} = -\boldsymbol{\mu}_m \cdot \mathbf{B} - \mathbf{d}_e \cdot \mathbf{E}$$

donde \mathbf{B} y \mathbf{E} son los campos magnético y eléctrico y $\boldsymbol{\mu}$ y \mathbf{d}_e los operadores de momento dipolar magnético y eléctrico. Usualmente, medimos los momentos magnéticos en unidades del *magnetón de Bohr*

$$\mu_0 = \frac{e\hbar}{2mc} \quad (1.10)$$

y el operador de espín

$$\mathbf{S} = \frac{\hbar\boldsymbol{\sigma}}{2} \quad (1.11)$$

En el caso de una partícula de espín 1/2:

$$S_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad S_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

El *magnetón de Bohr* es la magnitud del momento dipolar magnético de un electrón orbitando con un momento angular orbital de un \hbar . De acuerdo al *modelo de Bohr* [23], esto es el estado base, es decir, el estado de energía más inferior posible.

En el verano de 1913, este valor fue naturalmente obtenido por el Físico Danés Niels Bohr como una consecuencia del *modelo atómico* [23]. En 1920, Pauli dio el *magnetón de Bohr* su nombre en uno de sus artículos [31]. Así, el momento magnético se escribe en términos de la carga y la masa.

En el caso de un sistema con carga y masa siendo una función de distancia de un punto fijo, el momento magnético es la medición de la *distribución de carga y masa* del sistema. Así, generalizando el momento magnético orbital, que analizaremos más tarde, escribimos

$$\boldsymbol{\mu}_m = gQ\mu_0 \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}, \quad \mathbf{d}_e = \eta Q\mu_0 \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \quad (1.13)$$

donde σ_i ($i = 1, 2, 3$) son las matrices de espín de Pauli, Q es la carga eléctrica en unidades de e , $Q = -1$ para leptones y $Q = +1$ para anti-leptones. Las ecuaciones definen la *razón giromagnética* g (factor- g) y su pendiente eléctrico η , estas cantidades exhiben información dinámica importante sobre los leptones.

El término de interacción magnética da el conocido *efecto Zeeman*; muestra un nivel de visión en el espectro atómico

$$\Delta E = \frac{e}{2mc} (\mathbf{L} + g\mathbf{S}) \cdot \mathbf{B} = g_j \mu_0 m_j B \quad (1.14)$$

La segunda forma se encuentra en términos de los números cuánticos. m_j es la tercera componente del momento angular total $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ en unidades de \hbar y toma valores $m_j = -j, -j + 1, \dots, j$ con $j = l \pm \frac{1}{2}$. g_j es el factor de Landé g . Si el espín

está presente uno lo llama el *efecto Zeeman anómalo*. Este efecto aparece en las transiciones donde el espín total de los electrones no es cero. Fue llamado *anómalo* debido a que el espín del electrón aun no era descubierto, y no había ninguna buena explicación en ese tiempo donde el efecto Zeeman fue observado.

Precesión de Larmor

La precesión de Larmor [32], es la precesión del momento magnético de un objeto alrededor de un campo magnético externo. Los objetos con un momento magnético también tienen momento angular y corriente eléctrica interna efectiva proporcional a su momento angular; esto incluye a los electrones, protones y otros fermiones, como sistemas macroscópicos clásicos. Para entender esta precesión, imagine que una partícula de espín 1/2 en reposo en un campo magnético uniforme \mathbf{B} , que apunta en la dirección $-z$

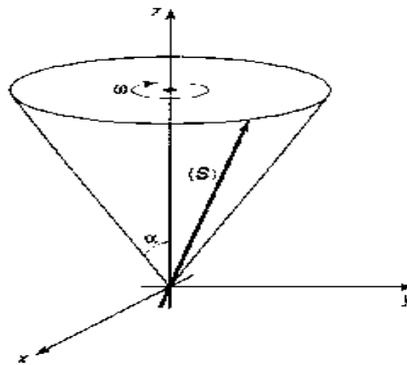


FIGURA 1.4: Partícula de espín 1/2 en reposo en un campo magnético uniforme \mathbf{B}

$$\mathbf{B} = B_0 \hat{k}$$

así, la matriz Hamiltoniano es dada por:

$$H = -\gamma B_0 S_z = \frac{\gamma B_0 \hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Los eigen-estados de H son el mismo que el de S_z :

$$\begin{cases} \chi_+, & \text{con energía } E_+ = -(\gamma B_0 \hbar)/2 \\ \chi_-, & \text{con energía } E_- = +(\gamma B_0 \hbar)/2 \end{cases}$$

Evidentemente, la energía es la más baja cuando el momento dipolar es paralelo al campo justo como pasa clásicamente.

Ya que el Hamiltoniano es independiente del tiempo, la solución general a la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo es:

$$i\hbar \frac{\partial \chi}{\partial t} = H\chi$$

Puede ser expresado en términos de los estados estacionarios

$$\chi(t) = a\chi_+ e^{-iE_+ t/\hbar} + b\chi_- e^{-iE_- t/\hbar} = \begin{pmatrix} ae^{i\gamma B_0 t/2} \\ be^{-i\gamma B_0 t/2} \end{pmatrix}$$

Las constante a y b se determinan por la condición inicial, a tiempo $t = 0$,

$$\chi(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

donde

$$|a|^2 + |b|^2 = 1$$

sin pérdida de generalidad, podemos escribir

$$a = \cos(\alpha/2) \quad b = \sin(\alpha/2)$$

así, la función de onda evolucionada en el tiempo, es:

$$\chi(t) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2)e^{i\gamma B_0 t/2} \\ \sin(\alpha/2)e^{-i\gamma B_0 t/2} \end{pmatrix}$$

para tener una idea de que es lo que pasa, calculemos el valor esperado del espín $\langle S \rangle$ como una función del tiempo

$$\begin{aligned} \langle S_x \rangle &= \chi^\dagger(t) S_x \chi(t) \\ &= (\cos(\alpha/2)e^{-i\gamma B_0 t/2} \quad \sin(\alpha/2)e^{i\gamma B_0 t/2}) \frac{\hbar}{2} \\ &\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2)e^{i\gamma B_0 t/2} \\ \sin(\alpha/2)e^{-i\gamma B_0 t/2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

así, tenemos

$$\langle S_x \rangle = \frac{\hbar}{2} \sin \alpha \cos(\gamma B_0 t)$$

Similarmente, podemos encontrar $\langle S_y \rangle$ y $\langle S_z \rangle$ como una función del tiempo

$$\begin{aligned} \langle S_x \rangle &= \frac{\hbar}{2} \sin \alpha \cos(\gamma B_0 t) \\ \langle S_y \rangle &= -\frac{\hbar}{2} \sin \alpha \sin(\gamma B_0 t) \\ \langle S_z \rangle &= \frac{\hbar}{2} \cos \alpha \end{aligned}$$

$\langle S \rangle$ está inclinado en la constante angular α al eje z y precesa con la frecuencia de Larmor ω

$$\omega = \gamma B_0 \quad (1.15)$$

B_0 es la magnitud del campo magnético aplicado, γ es la *razón giromagnética*, que es igual a

$$\gamma = -\frac{eg}{2m} \quad (1.16)$$

donde m es la masa del sistema, mientras que g es el factor g del sistema. El factor g es el factor sin unidades relacionado con el momento angular del sistema al momento magnético intrínseco; en la física clásica este factor es solamente 1.

En la física nuclear el factor g de un sistema incluye el efecto del espín del nucleón, su momento orbital angular, y sus acoplamientos. Generalmente, los factores g son muy difíciles de calcular para sistemas de muchos cuerpos, pero se han medido a alta precisión para la mayoría de los núcleos. La frecuencia de Larmor es importante en la espectroscopía NMR. La razón giromagnética, que da la frecuencia de Larmor en un campo magnético, han sido medidas y tabuladas.

1.3. El experimento de Stern-Gerlach

En un campo magnético inhomogéneo, no solo existe el torque, también una fuerza en un dipolo magnético:

$$\mathbf{F} = \nabla(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B})$$

Esta fuerza puede ser usada para separar partículas con una orientación particular de espín.

Imagine un haz de átomos neutrales relativamente pesados. Lo hacemos neutral para evitar la desviación a gran escala que resultara de la fuerza de Lorentz, y tan pesada que podemos construir paquetes de onda localizadas y tratamos el movimiento en términos de trayectorias clásicas.

Sea el campo magnético:

$$\mathbf{B}(x, y, z) = -ax\hat{i} + (B_0 + \alpha z)\hat{k}$$

La fuerza en estos átomos es dada por

$$\mathbf{F} = \gamma\alpha(-S_x\hat{i} + S_z\hat{k})$$

Debido a la precesión de Larmor alrededor de B_0 , S_x oscila rápidamente y se promedia a cero. La fuerza neta esta en la dirección z :

$$F_z = \gamma\alpha S_z$$

El haz es reflejado arriba y abajo, en la componente z del momento angular del espín.

Clásicamente, se esperará una mancha pero en realidad el haz se divide en $2S + 1$ haces individuales, hermosamente demostrando la cuantización de S_z . Usamos átomos de plata, los electrones internos son emparejados de tal manera que su espín y momento angular se cancelan. El espín total es simplemente el del electrón apareado más externo, así, en este caso $S = 1/2$ y el haz se separa en dos.

Pensemos en términos del Hamiltoniano y no en la fuerza que es la idea clásica. Estamos en un marco de referencia que se mueve a lo largo del haz. Deje que el Hamiltoniano empiece de cero, encienda por un tiempo T (a medida que el electrón

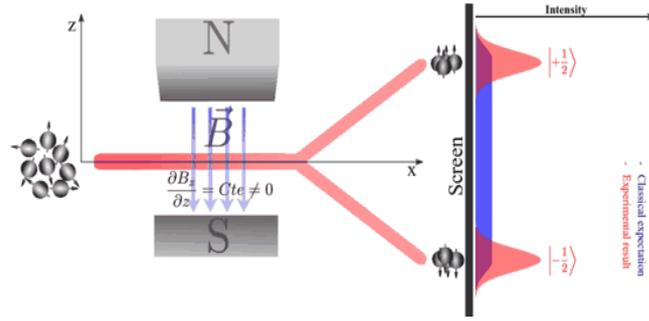


FIGURA 1.5: Experimento de Stern-Gerlach

pasa a través del imán) y entonces se apaga de nuevo.

$$H(t) = \begin{cases} 0, & \text{para } t < 0 \\ -\gamma(B_0 + \alpha z)S_x, & \text{para } 0 \leq t \leq T \\ 0, & \text{para } t > T \end{cases}$$

Suponga que el átomo tiene espín 1/2 y empieza en el estado

$$\chi(t) = a\chi_+ + b\chi_-, \text{ para } t \leq 0$$

Entonces el Hamiltoniano hace que el estado evolucione

$$\chi(t) = a\chi_+ e^{-iE_+ t/\hbar} + b\chi_- e^{-iE_- t/\hbar}, \text{ para } 0 \leq t \leq T$$

$$E_{\pm} = \mp \gamma(B_0 + \alpha z) \frac{\hbar}{2}$$

Suponga que el átomo tiene espín 1/2 y empieza en el estado

$$\chi = \left(a e^{i\gamma T B_0/2} \chi_+ \right) e^{i(\alpha\gamma T/2)z} + \left(b e^{-i\gamma T B_0/2} \chi_- \right) e^{-i(\alpha\gamma T/2)z}, (t \geq T)$$

Los dos términos que llevan momento en la dirección z . La componente de espín arriba tiene momento

$$P_z = \frac{\alpha\gamma T \hbar}{2}$$

y se mueve en la dirección $+z$. La componente de espín abajo se mueve en la dirección $-z$. Así, el haz se divide en dos.

1.4. Momento magnético en la mecánica cuántica clásica

El momento magnético es un *observable* que puede ser relativamente fácil de estudiar experimentalmente del movimiento del leptón en un campo magnético externo. La historia empezó en 1925 después de que Kronig, Goudsmit y Uhlenbeck [33] postularán que un electrón tiene un momento angular intrínseco de $\frac{1}{2}\hbar$ y que asociada con el momento angular del espín da un momento dipolar magnético igual a $e\hbar/2mc$, que es el magnetón de Bohr μ_0 . La pregunta importante es si $(\mu_m)_e$ es igual a μ_0 o es $g = 1$, fue contestada por Back y Landé en 1925. Su conclusión, basada en

un estudio de muchas investigaciones experimentales del efecto Zeeman, fue el momento magnético del electrón $(\mu_m)_e$ fue consistente con el postulado de Goudsmit y Uhlenbeck. De hecho, el análisis no fue concluido ya que realmente no determinaba el factor g . En poco tiempo, Pauli formulo el tratamiento de la mecánica cuántica del espín del electrón en 1927 [34], donde el factor g permanece como un parámetro libre, Dirac presentó su teoría relativista en 1929, ahora trataremos su análisis.

La ecuación de Pauli [34] para el electrón explica mucho de los resultados experimentales asociados con electrones no relativistas, su densidad de corriente de probabilidad incluye un término adicional inesperados que es dependiente del espín (la corriente del espín). Para deducir su ecuación, seguimos lo siguiente:

Empezamos con la ecuación de Schrödinger no relativista de ondas mecánicas:

$$\frac{\hat{p}^2}{2m}\Psi(\mathbf{r}, t) = \hat{E}\Psi(\mathbf{r}, t) \quad (1.17)$$

donde Ψ es la función de onda escalar compleja de Schrödinger. Recordando la importante identidad vectorial del espín

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{a}}) \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{b}}) = (\hat{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{b}})\mathbb{1} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{b}}) \quad (1.18)$$

donde $\hat{\mathbf{a}}$ y $\hat{\mathbf{b}}$ son cualquiera dos operadores vectoriales que conmutan con $\boldsymbol{\sigma}$. Para $\hat{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{b}} = \hat{\mathbf{p}}$ uno encuentra de 1.18 el operador de identidad $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}})^2 = \hat{p}^2\mathbb{1}$. En el Sakurai [35] se refiere a la teoría que resulta de hacer esta sustitución en la ecuación de Schrödinger 1.17, y reemplazando la función de onda Ψ por un espinor ψ de dos componentes, como la *teoría de Schrödinger Pauli*, es decir,

$$\frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}})^2}{2m}\psi(\mathbf{r}, t) = \hat{E}\psi(\mathbf{r}, t) \quad (1.19)$$

a la que nos referimos como la *ecuación de Schrödinger Pauli*. Tiene las soluciones de onda plana $e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}\chi$, donde χ es una constante pero por lo demás *espinor* arbitrario, dando surgimiento a la relación de dispersión $\omega = \hbar\mathbf{k}^2/2m$ característica de partículas no relativistas. Los efectos del espín manifiestan que permiten el electrón interactuar con un campo electromagnético. Esto se logra mediante la introducción del acoplamiento mínimo invariante de norma de $\hat{\mathbf{p}}$ con $\hat{\boldsymbol{\pi}} = \hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A}$, y \hat{E} con $\hat{\epsilon} = \hat{E} - q\phi$, en cuyo caso, la ecuación de Schrödinger-Pauli toma la forma

$$\frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{\pi}})^2}{2m}\psi(\mathbf{r}, t) = \hat{\epsilon}\mathbb{1}\psi(\mathbf{r}, t) \quad (1.20)$$

Aplicando la identidad 1.18 con $\hat{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{b}} = \hat{\boldsymbol{\pi}} = \hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A}$, así, tenemos:

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{\pi}})^2 &= \hat{\boldsymbol{\pi}}^2\mathbb{1}\psi + i\boldsymbol{\sigma} \cdot [(\hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A}) \times (\hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A})]\psi \\ &= \hat{\boldsymbol{\pi}}^2\mathbb{1}\psi - iq\hbar\boldsymbol{\sigma} \cdot [\boldsymbol{\nabla} \times (\mathbf{A}\pi) + \mathbf{A} \times (\boldsymbol{\nabla}\psi)] \\ &= \hat{\boldsymbol{\pi}}^2\mathbb{1}\psi - q\hbar(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B})\psi \end{aligned} \quad (1.21)$$

donde los productos vectoriales $\hat{\mathbf{p}} \times \hat{\mathbf{p}}$ y $\mathbf{A} \times \mathbf{A}$ ambos da contribuciones que desaparecen, hemos reemplazado $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\boldsymbol{\nabla}$, y usando la identidad vectorial

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\mathbf{A}\pi) = \boldsymbol{\nabla}\psi \times \mathbf{A} + (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A})\psi$$

donde $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$. Sustituyendo 1.21 junto con $\hat{\epsilon} = \hat{E} - q\phi$ en la ecuación 1.20

demuestra que la ecuación de Schrödinger-Pauli de acoplamiento mínimo produce precisamente la ecuación de Pauli:

$$\left[\frac{1}{2m} (\hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A})^2 \mathbb{1} + q\phi \mathbb{1} - \boldsymbol{\mu}_s \cdot \mathbf{B} \right] \psi(\mathbf{r}, t) = \hat{E} \mathbb{1} \psi(\mathbf{r}, t) \quad (1.22)$$

ya que

$$\boldsymbol{\mu}_s = \left(\frac{q\hbar}{2m} \right) \boldsymbol{\sigma}$$

el resultado sigue sin tener en cuenta la ecuación de Dirac, obteniendo el término de interacción del espín de Pauli directamente de la ecuación de Schrödinger mínimamente acoplada y el reemplazo de $\hat{\boldsymbol{\pi}}$, por $\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{\pi}}$, como lo sugiere Feynman.

Esta conclusión, entonces, es que el término de interacción de espín de Pauli es un efecto intrínseco no relativista. Aun así, uno puede quedarse con la sensación de que si no fuera por la existencia puramente matemática y fortuita de la identidad de giro, la ecuación de Pauli parecería una mezcla ligeramente extraña forzada sobre la ecuación de Schrödinger. Esta situación se ve algo aliviada por el hecho de que la ecuación de Schrödinger-Pauli mínimamente acoplada, de la cual se deriva la ecuación de Pauli, puede mostrarse como un límite no relativista de la ecuación de Dirac. Tal derivación es convincente, pero no satisface al deseo por una explicación puramente no relativista.

1.5. Momento magnético en la mecánica cuántica relativista

Hay una simple manera de hacer que cualquier campo interactúe con electromagnetismo de una manera que es invariante de norma: reemplazando los operadores de derivada con los operadores de derivada norma covariante. Así, la ecuación de Klein-Gordon es una ecuación de onda relativista en la presencia de interacciones electromagnéticas:

$$\left[\left(\partial^\mu - \frac{ie}{\hbar c} A^\mu \right) \left(\partial_\mu - \frac{ie}{\hbar c} A_\mu \right) + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right] \Psi = 0 \quad (1.23)$$

cuanto tomamos el límite no relativista ($v \ll c$) de un campo de Klein-Gordon clásico $\Psi(\mathbf{x}, t)$ empieza con el ansatz de factorizar el término de energía de masa en reposo oscilatorio

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \phi(\mathbf{x}, t) e^{-\frac{i}{\hbar} mc^2 t} \quad (1.24)$$

Esto puede hacerse siempre, en particular, anticipa que la ecuación no relativista resultante no será covariante de Lorentz.

Ahora, la energía total de la partícula es la suma de la energía de la masa en reposo y la energía cinética. Para el caso relativista, este enunciado es bueno para solo los cuadrados, así, que esto es únicamente una aproximación. Definiendo la energía cinética

$$E' = E - mc^2 \quad (1.25)$$

en el límite no relativista $v \ll c$, y por lo tanto

$$E' \ll mc^2 \quad (1.26)$$

por consecuencia

$$|i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t}| \approx E' \phi \ll mc^2 \phi \quad (1.27)$$

asumimos también que

$$eA_0 \phi \ll mc^2 \phi \quad (1.28)$$

Esto es esencial, ya que la energía potencial guardada en el campo electromagnético es alta, puede resultar en una producción de par partícula-antipartícula, un proceso no clásico en este límite no relativista.

$$\frac{1}{c^2} \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - eA_0 \right)^2 \psi = \left[\left(i\hbar \vec{\nabla} + \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + m^2 c^2 \right] \psi$$

esto implica que

$$\left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - eA_0 \right] \psi = \left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - eA_0 \right] e^{-\frac{i}{\hbar} mc^2 t} \phi = \left[i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} - eA_0 \phi + mc^2 \phi \right] e^{-\frac{i}{\hbar} mc^2 t}$$

al tomar su cuadrado, obtenemos

$$\begin{aligned} \left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - eA_0 \right]^2 \psi = & \left[-\hbar^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - i\hbar e \frac{\partial A_0}{\partial t} \phi - 2i\hbar e A_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} + 2i\hbar mc^2 \frac{\partial \phi}{\partial t} \right. \\ & \left. + e^2 A_0^2 \phi - 2eA_0 mc^2 \phi + mc^4 \phi \right] e^{-\frac{i}{\hbar} mc^2 t} \end{aligned}$$

la consideración 1.27 implican

$$i\hbar \left[i\hbar \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \ll mc^2 \frac{\partial \phi}{\partial t} \right]$$

por tanto

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \ll i\hbar mc^2 \frac{\partial \phi}{\partial t} \ll mc^4 \phi$$

despreciamos el término más bajo. Ahora la otra consideración indica 1.27

$$eA_0 [eA_0 \phi \ll mc^2 \phi]$$

entonces

$$e^2 A_0^2 \phi \ll eA_0 mc^2 \phi \ll m^2 c^4 \phi$$

de este modo, tenemos

$$i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} \ll mc^2 \phi eA_0 \ll mc^2 \phi$$

implica

$$i\hbar eA_0 \phi \frac{\partial \phi}{\partial t} \ll m^2 c^4 \phi^2 \implies i\hbar eA_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \ll m^2 c^2 \phi$$

Así, tenemos

$$\begin{aligned} \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - eA_0\right)^2 \phi &\approx [m^2c^4\phi - 2mceA_0c^2\phi + 2mi\hbar c^2 \frac{\partial \phi}{\partial t} - i\hbar \frac{\partial A_0}{\partial t} \phi] e^{-\frac{i}{\hbar}mc^2t} \\ \frac{1}{c^2} \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - eA_0\right)^2 \phi &\approx e^{-\frac{i}{\hbar}mc^2t} [m^2c^2 - 2mcA_0 + 2mi\hbar \frac{\partial}{\partial t} - i\frac{\hbar e}{c} \frac{\partial A_0}{\partial t}] \phi \\ &= e^{-\frac{i}{\hbar}mc^2t} \left[\left(i\hbar \nabla + \frac{e}{c} \mathbf{A}\right)^2 + m^2c^2 \right] \phi \end{aligned}$$

así, relacionando la última ecuación, se tiene

$$-2meA_0\phi + 2mi\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} - i\frac{\hbar e}{c^2} \frac{\partial A_0}{\partial t} \phi = \left(i\hbar \nabla + \frac{e}{c} \mathbf{A}\right)^2 \phi$$

obteniendo

$$i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} = eA_0\phi + \frac{i\hbar e}{2mc^2} \frac{\partial A_0}{\partial t} \phi + \frac{1}{2m} \left(i\hbar \nabla + \frac{e}{c} \mathbf{A}\right)^2 \phi$$

calculamos el siguiente término

$$\begin{aligned} \left(i\hbar \nabla + \frac{e}{c} \mathbf{A}\right)^2 \phi &= \left(i\hbar \nabla + \frac{e}{c} \mathbf{A}\right) \cdot \left(i\hbar \nabla + \frac{e}{c} \mathbf{A}\right) \phi \\ &= (i\hbar \nabla)^2 \phi + o\frac{\hbar e}{c} \nabla \cdot \mathbf{A} \phi + 2i\frac{\hbar}{c} e \mathbf{A} \cdot \nabla + \frac{e^2}{c^2} A^2 \phi \end{aligned}$$

Como $i\hbar \nabla \rightarrow -\mathbf{p}$, tenemos finalmente

$$i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} = \left[\frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}\right)^2 + eA_0 - \frac{q\hbar}{2m} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} \right] \phi$$

que es la ecuación de Pauli[34]. Si ahora consideramos que la constante de acoplamiento e es muy pequeña.

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} &= \left[\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} - \frac{e}{mc} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{p}} + \frac{i\hbar e}{2mc} (\nabla \cdot \mathbf{A}) + eA_0 + \frac{i\hbar e}{2mc^2} \frac{\partial A_0}{\partial t} \right] \phi \\ &= \left[\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} - \frac{e}{mc} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{p}} + eA_0 + \frac{i\hbar e}{2mc} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial A_0}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} \right) \right] \phi \end{aligned}$$

Para la norma de Lorentz

$$\frac{1}{c} \frac{\partial A_0}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

y para la norma de Coulomb

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

y el término $\frac{\partial A_0}{\partial t}$ se queda.

1.6. Predicción de Dirac

La teoría de Dirac predijo, inesperadamente, $g = 2$ para el electrón libre [36], dos veces el valor $g = 1$ conocido asociado con el momento angular orbital. Después

de la confirmación experimental de la predicción de Dirac $g_e = 2$ para el electrón, Kinster y Houston en 1934 [37], que sostiene fuertemente la teoría de Dirac, aunque existían grandes errores experimentales en esa época, tuvo que ser hasta dentro de más de 20 años de esfuerzos experimentales para establecer que el momento magnético del electrón en realidad excede 2 por un 0,12 %, la primera indicación de la existencia de una contribución *anómala* al momento magnético [38]

$$a_l = \frac{g_l - 2}{2} \quad (1.29)$$

donde $l = e, \mu, \tau$.

Para la medición del momento magnético anómalo de un leptón, tenemos que investigar el movimiento de una partícula puntual relativista de carga $Q_l e$ con e la carga del positrón y masa m_l en un campo electromagnético externo $A_\mu^{ext}(x)$. La ecuación de movimiento de una partícula de Dirac cargada en un campo externo es dada por

$$\left[i\hbar \not{\partial} + Q_l \frac{e}{c} \gamma^\mu (A_\mu + A_\mu^{ext}(x)) - m_l c \right] \psi_l(x) = 0 \quad (1.30)$$

y

$$\left[\square g^{\mu\nu} - (1 - \xi^{-1}) \partial^\mu \partial^\nu \right] A_\nu(x) = -Q_l e \bar{\psi}_l(x) \gamma^\mu \psi_l(x) \quad (1.31)$$

buscamos la solución de la ecuación de Dirac con un campo externo como un problema de una partícula relativista, despreciando la radiación del campo. Es decir, estamos interesados en una solución de 1.30, que podemos escribir como:

$$i\hbar \frac{\partial \psi_l}{\partial t} = \left[-c \boldsymbol{\alpha} \left(i\hbar \boldsymbol{\nabla} - Q_l \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) - Q_l e \phi + \beta m_l c^2 \right] \psi_l \quad (1.32)$$

con $\beta = \gamma^0$, $\boldsymbol{\alpha} = \gamma^0 \boldsymbol{\gamma}$ y $A_{ext}^\mu = (\phi, \mathbf{A})$.

Para la interpretación de la solución, el límite no relativista desempeña un papel importante debido a que muchos problemas de relatividad en QED pueden ser más fácilmente entendidos en términos del problema no relativista como un punto inicial, que usualmente es mucho más fácil de resolver. Consideraremos un leptón e^- , μ^- o τ^- con $Q_l = -1$ en nuestro siguiente análisis.

Analizamos un poco más la ecuación 1.30 y la volvemos a reescribir como

$$(i\not{D} - m)\psi = (i\not{\partial} - e\mathcal{A} - m)\psi = 0 \quad (1.33)$$

Multiplicando por la izquierda el operador $(-i\not{\partial} + e\mathcal{A} - m)$, tenemos

$$(-i\not{D} - m)(i\not{D} - m)\psi = 0$$

lo que implica

$$\begin{aligned} (D_\mu \gamma^\mu D_\nu \gamma^\nu + m^2)\psi &= 0 \\ (D_\mu D_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu + m^2)\psi &= 0 \\ \left[D_\mu D_\nu \left(\frac{1}{2}(\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) + \frac{1}{2}(\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu) \right) + m^2 \right] \psi &= 0 \\ \left(D_\mu D^\mu + \frac{1}{4}[D_\mu, D_\nu][\gamma^\mu, \gamma^\nu] + m^2 \right) \psi &= 0 \end{aligned}$$

usando

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} [D_\mu, D_\nu] = -ieF_{\mu\nu}, \quad \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] = \sigma^{\mu\nu}$$

entonces, tenemos finalmente

$$(D_\mu D^\mu - \frac{1}{2} e F_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} + m^2) \psi = 0 \quad (1.34)$$

Es la representación de *segundo orden* del campo de Dirac, [39, 40]. Por otro lado, si hubiéramos considerado la ecuación de Klein-Gordon *modificada* 1.23 en la presencia de la interacción de un campo magnético, hubiéramos obtenido.

$$(D_\mu D^\mu + m^2) \phi = 0$$

este es el simple reemplazamiento de las derivadas ordinarias por derivadas covariantes. Comparando las dos ecuaciones, en 1.34, tenemos un término extra proporcional a $S^{\mu\nu}$ debido a la presencia del espín, donde nos podemos dar cuenta que esta ecuación difiere de la generalización de la ecuación de Klein-Gordon, por medio del reemplazamiento $\partial_\mu \rightarrow D_\mu$, debido al acoplamiento dependiente del espín covariante $\frac{e}{2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$.

Para estudiar el límite no relativista del movimiento de una partícula de Dirac en un campo externo es más útil trabajar en unidades naturales. Para obtener del espinor de Dirac ψ los dos componentes espinores de Pauli en el límite no relativista, uno debe de realizar una transformación unitaria apropiada, llamada transformación de Foldy-Wouthuysen [41], observando la ecuación de Dirac 1.32 puede escribirse como

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \mathbf{H} \psi, \quad \mathbf{H} = c\alpha \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) + \beta mc^2 + e\phi \quad (1.35)$$

con

$$\beta = \gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha = \gamma^0 \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$$

notamos que \mathbf{H} tiene la forma de

$$\mathbf{H} = \beta mc^2 + c\mathcal{O} + e\phi$$

donde $[\beta, \phi] = 0$ conmuta y $\{\beta, \mathcal{O}\} = 0$ anti-conmutan. En la ausencia de un campo externo es una cantidad conservada en el marco de referencia en reposo, es decir, la ecuación de Dirac debe de ser equivalente a la ecuación de Pauli. Esto fija la transformación unitaria a ser realizada en el caso $A_\mu^{ext} = 0$:

$$\psi' = \mathbf{U} \psi, \quad \mathbf{H}' = \mathbf{U} \left(\mathbf{H} - i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) \mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U} \mathbf{H} \mathbf{U}^{-1} \quad (1.36)$$

donde la independencia temporal de \mathbf{U} ha sido usada, y obtenemos

$$i\hbar \frac{\partial \psi'}{\partial t} = \mathbf{H}' \psi'; \quad \psi' = \begin{pmatrix} \varphi' \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.37)$$

donde φ' es el espinor de Pauli. De hecho \mathbf{U} es una matrix de boost de Lorentz en una dirección arbitraria

$$\mathbf{U} = \mathbf{1} \cosh \theta + \mathbf{n} \gamma \sinh \theta = e^{\theta \mathbf{n} \gamma} \quad (1.38)$$

con

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}, \quad \theta = \frac{1}{2} \operatorname{arccosh} \frac{p^0}{mc} = \operatorname{arcsinh} \frac{|\mathbf{p}|}{mc}$$

y obtenemos, con $p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2 c^2}$,

$$\mathbf{H}' = cp^0 \beta; \quad [\mathbf{H}', \boldsymbol{\Sigma}] \quad (1.39)$$

donde

$$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\alpha} \gamma_5 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}$$

donde $\boldsymbol{\Sigma}$ es el operador de espín. En realidad, existen dos operadores de proyección \mathbf{U} uno es el componente arriba y abajo:

$$\mathbf{U}_+ \psi = \begin{pmatrix} \varphi' \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U}_- \psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi \end{pmatrix}$$

dadas por

$$\mathbf{U}_+ u(p, r) = \sqrt{\frac{2p^0}{c}} \begin{pmatrix} U(r) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U}_- v(p, r) = \sqrt{\frac{2p^0}{c}} \begin{pmatrix} 0 \\ V(r) \end{pmatrix}$$

con $U(r)$ y $V(r) = i\sigma_2 U(r)$ las componentes de los espinores en el sistema de reposos.

Si ahora tomamos el límite no relativista del leptón con $A_{\mu}^{ext} \neq 0$, empezamos de nuevo de 1.32. Para obtener la representación no relativista para velocidades pequeñas tenemos que dividir la fase del campo de Dirac, que es debido a la energía en reposo del leptón:

$$\psi = \hat{\psi} e^{-i \frac{mc^2}{\hbar} t}$$

con

$$\hat{\psi} = \begin{pmatrix} \hat{\phi} \\ \hat{\chi} \end{pmatrix}$$

Esto anticipa que la ecuación no relativista resultante no será covariante de Lorentz. Consecuentemente, tomamos la derivada temporal a $\hat{\psi}$ y la ecuación de Dirac toma la forma de

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial t} = (\mathbf{H} - mc^2) \hat{\psi}$$

usando la ecuación 1.35, obtenemos el sistema acoplado de ecuaciones

$$\begin{aligned} \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - e\phi \right) \hat{\phi} &= c\sigma \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A} \right) \hat{\chi} \\ \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - e\phi + 2mc^2 \right) \hat{\chi} &= c\sigma \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A} \right) \hat{\phi} \end{aligned} \quad (1.40)$$

La energía total de la partícula es la suma de la energía de la masa en reposo mc^2 y la energía cinética E' . Definimos la energía cinética como:

$$E' = E - mc^2$$

De acuerdo a nuestro ansatz, $\hat{\phi}$ y $\hat{\chi}$ contienen únicamente la parte de la energía cinética, es decir, al tomar $c \rightarrow \infty$, ocurre que

$$\left| i\hbar \frac{\partial \chi}{\partial t} \right| \approx |E' \chi| \ll |mc^2 \chi|$$

También, debemos de considerar

$$|eA_0 \chi| \ll |mc^2 \chi|$$

esta última suposición es esencial debido a que la energía potencial guardado en el campo electromagnético es alta, lo que podría produce en una producción de par partícula-antipartícula, un proceso que no existe en el límite no relativista, así, tenemos de la primera ecuación de 1.40

$$\hat{\chi} \simeq \frac{1}{2mc} \sigma \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A} \right) \hat{\phi} + \mathcal{O}(1/c^2) \quad (1.41)$$

y, por lo tanto, sustituyendo 1.41 en 1.40, obtenemos

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - e\phi \right) \hat{\phi} \simeq \frac{1}{2m} \left[\sigma \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A} \right) \right]^2 \hat{\phi}$$

como \mathbf{p} no conmuta con \mathbf{A} , podemos usar la relación

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

normalmente un producto triple conteniendo dos vectores idénticos es cero, pero esto no es necesariamente el caso cuando los vectores son operadores, sustituyendo, obtenemos

$$\left[\sigma \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A} \right) \right]^2 = \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A} \right)^2 + i\boldsymbol{\sigma} \cdot \left[\left(-i\hbar \boldsymbol{\nabla} - \frac{e}{c}\mathbf{A} \right) \times \left(-i\hbar \boldsymbol{\nabla} - \frac{e}{c}\mathbf{A} \right) \right]$$

usamos las siguientes identidades

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{A} &= 0 = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} f \\ \boldsymbol{\nabla} \times (f\mathbf{A}) &= f\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A} + \boldsymbol{\nabla} f \times \mathbf{A} = f\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \times \boldsymbol{\nabla} f \\ \mathbf{A} \times \boldsymbol{\nabla} f + \boldsymbol{\nabla} \times f\mathbf{A} &= f\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A} \end{aligned}$$

así, obtenemos

$$\left[\sigma \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \right]^2 = \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 - \frac{e\hbar}{c} \sigma \cdot (\nabla \times \mathbf{A})$$

finalmente, obtenemos

$$\left[\sigma \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \right]^2 = \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 - \frac{e\hbar}{c} \sigma \cdot \mathbf{B}$$

con $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Esto nos lleva a la *ecuación de Pauli* (W. Pauli 1927) [31]

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} = \hat{\mathbf{H}} \hat{\phi} \left[\frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + e\phi - \frac{e\hbar}{2mc} \sigma \cdot \mathbf{B} \right] \hat{\phi} \quad (1.42)$$

sin contar con el término del espín esto es la ecuación de Schrödinger no relativista. El último término, tiene la forma de una energía potencial de un dipolo magnético en un campo externo. A orden $1/c$ el leptón se comporta como una partícula que además de carga también tiene un momento magnético:

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{e\hbar}{2mc} \sigma = \frac{e}{mc} \mathbf{S} \quad (1.43)$$

donde

$$\mathbf{S} = \hbar \mathbf{s} = \hbar \frac{\sigma}{2} \quad (1.44)$$

con \mathbf{S} el momento angular. Para comparar: el momento angular orbital dicta

$$\boldsymbol{\mu}_{\text{orbital}} = \frac{Q}{2M} \mathbf{L} = g_l \frac{Q}{2M} \mathbf{L} \quad (1.45)$$

donde

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = -i\hbar \mathbf{r} \times \nabla = \hbar \mathbf{I}$$

y por lo tanto, el momento magnético total es

$$\boldsymbol{\mu}_{\text{total}} = \frac{Q}{2M} (g_l \mathbf{L} + g_s \mathbf{S}) = \frac{m_e}{M} \mu_B (g_l \mathbf{I} + g_s \mathbf{S}) \quad (1.46)$$

donde

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e c}$$

es el magnetón de Bohr. Como un resultado para el electrón: $Q = -e$, $M = m_e$, $g_l = -1$ y $g_s = -2$. El último resultado es debido a Dirac (1928) [36] y nos dice que la razón giromagnética ($\frac{e}{mc}$) es dos veces el del movimiento orbital.

La transformación de Foldy-Wouthuysen [41] para una A_μ arbitraria no puede ser realizada de manera analítica. Sin embargo, la expansión en potencias de $1/c$

puede ser realizada y produce un Hamiltoniano efectivo

$$\begin{aligned} \mathbf{H}' = & \beta \left(mc^2 + \frac{(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A})^2}{2m} - \frac{\mathbf{p}^4}{8m^3c^2} \right) + e\phi - \beta \frac{e\hbar}{2mc} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} \\ & - \frac{e\hbar^2}{8m^2c^2} \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} - \frac{e\hbar}{4m^2c^2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \left[(\mathbf{E} \times \mathbf{p} + \frac{i}{2} \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E}) \right] + \mathcal{O}(1/c^3) \end{aligned} \quad (1.47)$$

Los términos adicionales son $\frac{\mathbf{p}^4}{8m^3c^2}$ ocasionado por la cinemática relativista, $\frac{e\hbar}{8m^2c^2} \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E}$ es el término del Darwin como un resultado de las fluctuaciones de la posición de electrones y $\frac{e\hbar}{4m^2c^2} \boldsymbol{\sigma} \cdot [(\mathbf{E} \times \mathbf{p} + \frac{i}{2} \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E})]$, es la energía de la interacción espín-orbita. Estos últimos términos contribuyen un papel importante en la configuración de un anillo de almacenamiento de muones en el experimento $g - 2$. En tal experimento, los muones tienen que ser altamente relativista tal que la cinemática relativista es requerida.

Capítulo 2

Momento magnético anómalo QED

2.1. Consideraciones generales

Nuestro particular interés es el movimiento de un leptón en un campo externo bajo consideración del comportamiento completo de la mecánica relativista. Es controlado por las ecuaciones de QED de movimiento 1.30 y 1.31 con un campo externo agregado 1.32, un campo magnético constante.

Para campos que varían lentamente estos son determinados por la ecuación de Pauli generalizada 1.42, que sirve como una base para entender el desempeño del momento magnético del muón en un nivel clásico. En la ausencia de campos eléctricos E la corrección cuántica puede ser llevado a cabo por un número de momentos magnético anómalos, que es el resultado de las fluctuaciones de la mecánica cuántica relativista, usualmente llamada *correcciones radiativas* (CR). Para estudiar las CR tenemos que considerar el Lagrangiano de interacción completa de QED.

En el contexto de electrodinámica cuántica (QED), las interacciones de los muones y fotones son descritos por el lagrangiano:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\hat{\partial} - m)\psi - eJ^\mu A_\mu \quad (2.1)$$

donde $\psi(x)$ es el campo del muón, $A^\mu = (\varphi, \mathbf{A})$ es el vector potencial del campo electromagnético, $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ es el tensor de campo de fuerza del campo electromagnético, $J^\mu(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$ es la corriente eléctrica y $e = -|e|$ es la carga eléctrica del muón.

La invariancia de norma requiere que una transformación de norma del campo externo

$$A_\mu^{ext}(x) \longrightarrow A_\mu^{ext}(x) - \partial_\mu\alpha(x)$$

para un campo clásico escalar arbitrario $\alpha(x)$, que deja la física invariante. El movimiento del leptón en el campo externo se describe por una expansión simultánea en la constante de estructura fina $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$ y asumimos que el campo externo A_μ^{exp} es débil

La razón giromagnética del muón se define por la razón del momento magnético que se acopla al campo magnético en el Hamiltoniano y el operador de espín en unidades de $\mu_0 = e\hbar/2m_\mu c$

$$\boldsymbol{\mu} = g_\mu \frac{e\hbar}{2m_\mu c} \mathbf{s}$$

con

$$g_\mu = 2(1 + a_\mu)$$

y como se ha indicado, tiene una parte a nivel de árbol, el momento de Dirac $g_\mu^0 = 2$ [36], y a orden más alto la anomalía del muón o el momento magnético anómalo

$$a_\mu = \frac{1}{2}(g_\mu - 2)$$

En general, el momento magnético anómalo de un leptón esta relacionado a la razón giro-magnética por

$$a_l = \frac{\mu_l}{\mu_B} - 1 = \frac{1}{2}(g_l - 2)$$

En QED, a_μ puede ser calculado en teoría de perturbaciones considerando el elemento de matriz

$$\mathcal{M}(x; p) = \langle \mu^-(p_2, r_2) | j_{em}^\mu(x) | \mu^-(p_1, r_1) \rangle \quad (2.2)$$

de la corriente electromagnética para la dispersión de un muón entrante $\mu^-(p_1, r_1)$ del momento p_1 y tercer componente de espín r_1 a un muón $\mu^-(p_2, r_2)$ de momento p_2 y tercer componente de espín r_2 , en el límite clásico de momento cero transferido $q^2 = (p_1 - p_2)^2 \rightarrow 0$, vea la figura 2.1. En el espacio de momentos, debido a la

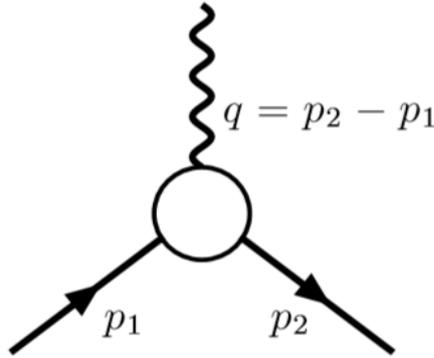


FIGURA 2.1: Corrección del vértice en QED

invariancia traslacional del espacio tiempo $j_{em}^\mu(x) = e^{iPx} j_{em}^\mu(0) e^{-iPx}$ y el hecho de que los estados del leptón son eigenestados del cuadri-momento $e^{-iPx} | \mu^-(p_i, r_i) \rangle = e^{-ip_i x} | \mu^-(p_i, r_i) \rangle$, con $i = 1, 2$, encontramos que

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{M}} &= \int d^4x e^{-iqx} \langle \mu^-(p_2, r_2) | j_{em}^\mu(x) | \mu^-(p_1, r_1) \rangle \\ &= \int d^4x e^{i(p_2 - p_1 - q)x} \langle \mu^-(p_2, r_2) | j_{em}^\mu(0) | \mu^-(p_1, r_1) \rangle \\ &= (2\pi)^4 \delta^4(q - p_2 + p_1) \langle \mu^-(p_2, r_2) | j_{em}^\mu(0) | \mu^-(p_1, r_1) \rangle \end{aligned}$$

proporcional a la función δ de la conservación del cuatro-momento. El elemento de matriz T es entonces dada por

$$\langle \mu^-(p_2) | j_{em}^\mu(0) | \mu^-(p_1) \rangle \quad (2.3)$$

Gracias a la conservación de la corriente $\partial_\mu j_{em}^\mu(x) = 0$ y la conservación de la paridad en QED, la parametrización más general del elemento de matriz es

$$\begin{aligned} \langle \mu^-(p_2) | j_{em}^\mu(0) | \mu^-(p_1) \rangle &= \bar{u}(p_2) \Gamma^\mu(p_2, p_1) u(p_1) \\ &= \bar{u}(p_2) \left[F_E(q^2) \gamma^\mu + F_M(q^2) \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} \right] u(p_1) \end{aligned} \quad (2.4)$$

donde $q = p_2 - p_1$ y $u(p)$ denota los espinores de Dirac. $F_E(q^2)$ es el factor de forma de la carga eléctrica o de Dirac y $F_M(q^2)$ es el factor de forma magnético o de Pauli. Note que $\sigma = \frac{i}{2}(\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu)$ representa el tensor de momento angular de espín 1/2.

En la mecánica cuántica no relativista, el muón en los campos eléctrico y magnético se describen por el Hamiltoniano.

$$H = \frac{(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2}{2m} - \boldsymbol{\mu} \mathbf{B} \quad (2.5)$$

donde $\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}$ es el campo magnético externo y $\boldsymbol{\mu}$ es el operador del momento magnético del muón

$$\boldsymbol{\mu} = 2\mu\mathbf{s} = \mu\boldsymbol{\sigma} \quad (2.6)$$

El coeficiente de proporcionalidad μ en 2.6 es referido como el *momento magnético del muón*.

Para encontrar la relación entre el momento magnético del muón μ y los factores de forma de Dirac y Pauli, la dispersión del muón del vector potencial externo A_μ en la aproximación no relativista, usando el Hamiltoniano 2.5, y comparamos el resultado con 2.2.

La amplitud de dispersión no relativista en la aproximación de Born es dado por

$$f = -\frac{m}{2\pi} \int d^3\mathbf{r} \psi^*(\mathbf{p}_2) V \psi(\mathbf{p}_1) \quad (2.7)$$

donde $\psi(\mathbf{p}_{1,2}) = \chi_{1,2} e^{i\mathbf{p}_{1,2}\mathbf{r}}$ es la función de onda del muón en la aproximación no relativista incluyendo los grados de libertad del espín descrito por el espinor de Pauli χ y

$$V = -\frac{e}{2m} (\mathbf{p}\mathbf{A} + \mathbf{A}\mathbf{p}) - \mu\boldsymbol{\sigma}\mathbf{B} + e\varphi \quad (2.8)$$

Calculando f en 2.7 se reduce a tomar la transformada de Fourier; obtenemos

$$f = -\frac{m}{2\pi} \chi_2^+ \left(-\frac{e}{2m} \mathbf{A}_q(\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_1) + e\varphi_q - i\mu\boldsymbol{\sigma}[\mathbf{q} \times \mathbf{A}_q] \right) \chi_1 \quad (2.9)$$

donde φ_q y \mathbf{A}_q son las componentes de Fourier del potencial eléctrico y el vector potencial \mathbf{A} y $\mathbf{q} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1$.

Seremos capaces de derivar 2.9 empezando de la expresión relativista para la amplitud de dispersión 2.2 y tomando el límite no relativista. Si los espinores de Dirac son normalizados a $2m$, la relación entre las dos amplitudes de dispersión en el límite no relativista es

$$-i \lim_{|\mathbf{p}| \ll m} \mathcal{M} = 4\pi f \quad (2.10)$$

Para derivar el límite no relativista de la amplitud \mathcal{M} , 2.2, usamos la representación explícita de las matrices de Dirac.

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

y los espinores de Dirac

$$u_p = \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} \chi \\ \frac{\mathbf{p}\boldsymbol{\sigma}}{E+m}\chi \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

donde $E = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$. Usando estas expresiones en 2.4 y trabajando a primer orden en $|\mathbf{p}_{1,2}|/m$, obtenemos

$$\mathcal{M} = -2iem\chi_2^+ \left[F_D(0) \left(\varphi_q - \frac{\mathbf{A}_q(\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_1)}{2m} \right) - i \frac{F_D(0) + F_P(0)}{2m} \boldsymbol{\sigma}[\mathbf{q} \times \mathbf{A}_q] \right] \chi_1 \quad (2.13)$$

Usando 2.10, 2.8 y 2.12, encontramos que

$$F_D(0) = 1, \quad \mu = \frac{e}{2m} (F_D(0) + F_P(0)) \quad (2.14)$$

Comparando con 2.6 y 2.14, encontramos que el factor giromagnético del muón es

$$g = 2(1 + F_P(0)) \quad (2.15)$$

Por lo tanto, si el factor de forma de Pauli $F_P(q)$ no desaparece para $q = 0$, la razón giro-magnética del muón es diferente de dos, el valor predicho por la ecuación de Dirac. Es convencional llamar a esta diferencia *el momento magnético anómalo del muón* y escribimos

$$a_\mu = F_P(0) = \frac{g-2}{2} \quad (2.16)$$

El primer término en la serie es $\mathcal{O}(\alpha)$, cuando las correcciones radiativas son despreciables, el factor de forma de Pauli desaparece. Esto es fácilmente visto del Lagrangiano de QED 2.1 que implica que, a través del orden principal en α , la interacción entre el campo electromagnético externo y el muón es dado por $-ie u_{p_2} \gamma^\mu u_{p_1} A_\mu$.

En QED, una aplicación sencilla de la expansión perturbativa conduce a una situación confusa ya que en los resultados aparecen frecuentemente divergencias. Tales divergencias son removidas por medio del procedimiento conocido como *renormalización*. La idea es ver todas las entradas en el Lagrangiano de QED 2.1 como cantidades *desnudas*, mientras que todos los resultados significativos físicos son expresados a través de cantidades *renormalizadas*. La renormalización es multiplicativa, por ejemplo, $e = Z_e e_f$, $m = Z_m m_f$, $\psi = Z^{1/2} \psi_f$, etc. Las constantes de renormalización son fijos al requerir que las funciones de Green, calculadas con el Lagrangiano QED, satisfacen ciertas condiciones. Por ejemplo, la constante de masa de renormalización Z_m se determina del requisito de que $m_{f\text{físico}}$ es la masa física del muón y por lo tanto, el propagador del muón debe tener un polo en $p^2 = -m_{f\text{físico}}^2$. Similarmente, la constante de carga de renormalización Z_e se determina al requerir que $e_{f\text{físico}}$ da la fuerza de la interacción de un fotón on-shell con un fermión. Una consecuencia de la conservación de la corriente es el hecho de que el factor de forma de Dirac satisface la

condición $F_D(0) = 1$ a todos los ordenes en la expansión perturbativa. Las constantes de renormalización influyen en el factor de forma de Pauli solo indirectamente, a través de la renormalización de la masa, la carga y la función de onda del fermión, porque no hay un operador de nivel de árbol correspondiente en el QED Lagrangian. Por lo tanto, el momento magnético anómalo es la única predicción de QED, además, la contribución $\mathcal{O}(\alpha)$ a a_μ tiene que ser finita sin ninguna renormalización.

Las correcciones radiativas de QED proporcionan la contribución al momento magnético anómalo del muón. El resultado a un lazo fue calculado por Schwinger en 1949 [1], es interesante remarcar que el cálculo de Schwinger fue realizado *antes* de que la renormalizabilidad de QED fuera entendida en detalle. Históricamente, esto proporciona un ejemplo interesante de un resultado físico fundamental derivado de una teoría que fue considerada ambigua en ese tiempo.

2.2. Características de las CR a la anomalía magnética del muón

Antes de describir el momento magnético del muón, primero discutimos características generales de las correcciones radiativas a esta cantidad. Cuando las correcciones de QED, electrodébil o hadrónico a a_μ son consideradas, el momento magnético anómalo recibe contribuciones de todas las partículas existentes. Es por lo tanto útil entender como la contribución de una partícula con masa m_p al momento magnético anómalo depende de su masa. Primero, consideramos el caso $m_p \geq m$. Entonces, en general

$$\delta a_\mu^p \sim \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{n_p} \frac{m^2}{m_p^2} \ln^{k_p} \frac{m_p}{m} \quad (2.17)$$

donde n_p, k_p depende en el orden de expansión perturbativa en la constante de estructura fina en que esta contribución aparece. La potencia del logaritmo k_p no puede ser determinada de bases generales.

Para entender el factor de supresión m^2/m_p^2 en 2.17, notamos que cuando una contribución de una partícula con masa $m_p \gg m$ al momento magnético anómalo del muón es considerado, el momento de lazo $m \sim m_p$ proporciona la contribución dominante. En esta situación es natural considerar el límite de la masa del muón m que desaparece. Las interacciones de QED conservan la helicidad del muón en ese límite. Note, sin embargo, que el término $F_D \sigma_{\mu\nu} q^\nu$ en la amplitud de dispersión 2.2 cambia la helicidad del muón, mientras que el término proporcional al factor de forma de Dirac conserva la helicidad. Sigue que en $m = 0$, los lazos con partículas pesadas contribuyen al factor de forma de Dirac, pero no al de Pauli. Las correcciones al factor de forma de Pauli, por lo tanto, al momento magnético anómalo, requiere un cambio de helicidad; esto puede ser llevado a cabo por una única inserción de masa en uno de las líneas del muón. Usando el hecho de que la función del vértice $\Gamma_\mu(p_1, p_2)$ en 2.2 es sin dimensiones, escribimos

$$\Gamma_\mu \sim \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{n_p} \frac{m \sigma_{\mu\nu} q^\nu}{m_p^2} \quad (2.18)$$

de donde 2.17 se sigue inmediatamente.

Si $m_p \ll m$, la corrección a a_μ puede ser estimada como

$$\delta a_\mu^p \sim \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{n_p} \ln^{k_p} \frac{m}{m_p} \quad (2.19)$$

donde la potencia del logaritmo k_p satisface $k_p < n_p$ pero, de otra manera, no puede ser determinada sin análisis detallado.

Las ecuaciones 2.17, 2.18, 2.19 son útiles para entender una estructura muy difícil de correcciones de orden superior a los momentos magnéticos anómalos del electrón y muón. Ya que el electrón es la partícula cargada más ligera, las correcciones al momento magnético anómalo del electrón son gobernadas por potencias de α/π ; las contribuciones debido a partículas pesadas son todas potencias suprimidas por al menos $m_e^2/m^2 \sim 10^{-4}$. Las contribuciones hadronicas que son mayormente determinadas por la masa del mesón ρ y son responsables para una fracción grande de la incertidumbre en la predicción teórica para el momento magnético anómalo del muón, son pequeñas para la anomalía magnética del electrón debido a la supresión de m_e^2/m_p^2 . Por lo contrario, en el caso del momento magnético anómalo del muón el parámetro de expansión en QED es $(\alpha/\pi) \ln(m/m_e)$ y, también, las correcciones hadronicas son significantes ya que la masa del mesón ρ no son tan diferentes de la masa del muón.

Hay dos interesantes consecuencias de estas consideraciones. Primero, dado que tanto los nuevos efectos físicos hadrónicos como los potenciales sobre el momento magnético anómalo de los electrones están fuertemente suprimidos, el valor medible del momento magnético anómalo del electrón puede ser usado para determinar el valor de la constante de estructura fina α con alta precisión.

Segundo, la física más allá del SM contribuye más fuertemente al momento magnético anómalo del muón, haciendo este observable un laboratorio atractivo para pruebas a bajas energías del SM. Esta característica fue reconocida al final de los 50s cuando fue señalado que si QED es modificado en alguna escala de energía Λ , hay una corrección al momento magnético anómalo del muón a orden de m^2/Λ^2 . En ese tiempo, la meta era probar QED a energías alrededor de 4 GeV; actualmente la meta es detectar contribuciones de partículas con masas de orden de unos cuanto cientos de GeV a través de la medición de la anomalía magnética del muón. Esto ilustra un progreso tremendo que la física de altas energías hizo hace medio siglo.

2.3. Contribución de QED aun lazo: la corrección de Schwinger

La más grande contribución al momento magnético anómalo es el origen de QED. Esta es la razón de porque la medición de a_e y a_μ desde hace mucho tiempo ha sido considerad como una prueba de precisión de QED. La interacción de los leptones cargados e , μ y τ con el fotón, históricamente, fue muy importante para el desarrollo de la teoría cuántica de campos (QFT) y la electrodinámica cuántica (QED), ya que nos permitió probar QED como un modelo teórico bajo condiciones simples. Esto fue crucial para confiar en QED como un marco de referencia teórico. Se tomo alrededor de 20 años desde la creación de QED (Dirac 1928 [$g_e = 2$]) hasta que se estableció el primer resultado confiable (Schwinger 1948 [$a_e^{(1)} = \alpha/2\pi$]) después de que se entendiera muchos aspectos de la formulación covariante y la re-normalización. La parte de QED se convirtió en un gran desafío para los teóricos,

porque las correcciones a más lazos son gigantescos, cuando el orden de la teoría de perturbación incrementa, los cálculos se vuelven realmente monstruosos. El momento magnético anómalo es una cantidad *sin dimensiones* que exhibe contribuciones que son expandidas en potencias de α , lo que uno obtendrá en QED es que la especie de leptones y contribución depende de la razón de las masas si diferentes leptones se encuentran en la interacción. Así, tomando en cuenta los tres leptones obtenemos las funciones de las razones de las masas de los leptones m_e , m_μ y m_τ . Considerando a_μ , obtenemos la forma

$$a_\mu^{QED} = A_1 + A_2(m_\mu/m_e) + A_{m_\mu/m_e} + A_2(m_\mu/m_\tau) + A_3(m_\mu/m_e, m_\mu/m_\tau) \quad (2.20)$$

El término A_1 en QED es universal para todos los leptones. Representa todos los diagramas incluyendo aquellos lazos cerrados del leptón que tienen la misma masa como leptón externo. La contribución A_2 tiene una sola escala y aparece si un lazo de leptón adicional de un leptón diferente del externo es involucrado. Esto requiere de al menos un lazo más, al menos dos lazos: para el muón como leptón externo, tenemos dos posibilidades: un lazo adicional de electrón (ligero en pesado) $A_2(m_e/m_\mu)$ o uno de τ (pesado en ligero) $A_2(m_\tau/m_\mu)$ dos contribuciones bastante diferentes. El primero produce grandes logaritmos $\propto \ln(m_\mu/m_e)^2$, el segundo, debido al desacoplamiento de partículas pesadas en QED, produce efectos pequeños del orden de $\propto (m_\mu/m_\tau)^2$.

La corrección de Schwinger puede ser obtenida por evaluación directa del diagrama de Feynman mostrada en 2.2. De manera ilustrativa, mostraremos los cálculos realizados más relevante durante la evaluación que serán utilizados para evaluar diagramas posteriores. Primero, calcularemos usando el límite asintótico donde

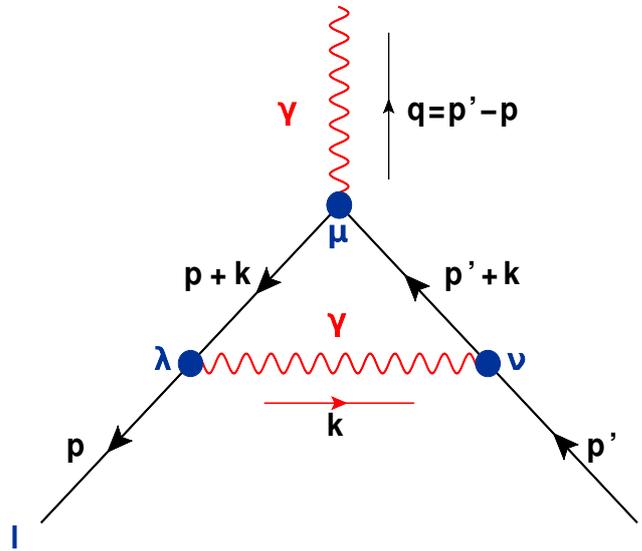


FIGURA 2.2: Corrección del vértice en QED

$q^2 \rightarrow 0$. La expresión para $\Gamma_\mu(p, p')$ en norma arbitraria

$$ie\Gamma_{1loop}^\mu(p', p) = \int_{reg} \frac{d^4k}{(2\pi)^d} (ie\gamma^\nu) iS_0(p' + k) (ie\gamma^\mu) iS_0(p + k) (ie\gamma^\lambda) iD_{0,\lambda\nu}(k)$$

donde hemos usado B.1, B.3 y B.2. Usando m para la masa del leptón e, μ o τ , obtenemos

$$ie\Gamma_{1loop}^\mu(p', p) = -e^3 \int_{reg} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \gamma^\nu \frac{[\not{p}' + \not{k} + m]}{(p' + k)^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma^\mu \frac{[\not{p} + \not{k} + m]}{(p + k)^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma^\lambda$$

$$\times \left[-\frac{g_{\lambda\nu}}{k^2 + i\epsilon} + (1 - \zeta) \frac{k_\lambda k_\nu}{k^4 + i\epsilon} \right]$$

$$ie\Gamma_{1loop}^\mu(p', p) = e^3 \int_{reg} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{N_1^\mu}{D_1} - e^3(1 - \zeta) \int_{reg} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{N_2^\mu}{D_2} \quad (2.21)$$

donde los numeradores de 2.21 son

$$N_1^\mu = \gamma^\nu [\not{p}' + \not{k} + m] \gamma^\mu [\not{p} + \not{k} + m] \gamma_\nu \quad (2.22)$$

$$N_2^\mu = \not{k} [\not{p}' + \not{k} + m] \gamma^\mu [\not{p} + \not{k} + m] \not{k} \quad (2.23)$$

y los denominadores

$$D_1 = [k^2 + i\epsilon][(p + k)^2 - m^2 + i\epsilon][(p' + k)^2 - m^2 + i\epsilon] \quad (2.24)$$

$$D_2 = [k^4 + i\epsilon][(p + k)^2 - m^2 + i\epsilon][(p' + k)^2 - m^2 + i\epsilon] \quad (2.25)$$

Hemos dividido la ecuación 2.21 en dos términos, el primer término no contiene el término de norma, mientras que el segundo si.

Primer término

Ahora simplificamos el numerador y el denominador del primer término de 2.21 usando la fórmula de parametrización de Feynman generalizada A.1, una opción para tres factores queda como:

$$\frac{1}{abc} = 2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{1}{[a(1-x-y) + bx + cy]^3} = 2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{1}{D_1^3}$$

$$\frac{1}{abc} = 2 \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_z^1 dz \delta(1-x-y-z) \frac{1}{[ax + by + cz]^3} \quad (2.26)$$

por lo tanto, de 2.26, tenemos para 2.24:

$$D_1 = k^2(1-x-y) + (p+k)^2x - m^2x + (p'+k)^2y - m^2y$$

$$= k^2 + 2k \cdot (px + p'y) + p^2x - m^2x + p'^2y - m^2y \quad (2.27)$$

Considerando el momento de los electrones externos en la *capa de masa* o en "on-shell":

$$p^2 = p'^2 = m^2 \quad (2.28)$$

entonces, el momento cuadrado del electrón externo es

$$q^2 = (p' - p)^2 = p'^2 + p^2 - 2p \cdot p' = 2m^2 - 2p \cdot p'$$

obtenemos la siguiente relación útil

$$2p \cdot p' = 2m^2 - q^2 \quad (2.29)$$

Sustituyendo en 2.27

$$D = k^2 + 2k \cdot (px + p'y) = (k + px + p'y)^2 - (px + p'y)^2$$

definiendo el cambio de momento del lazo:

$$l = k + px + p'y \quad (2.30)$$

sustituyendo, tenemos

$$D = l^2 - m^2(x + y)^2 + xyq^2 = l^2 - \Delta$$

donde

$$\Delta = m^2(x + y)^2 - xyq^2 \quad (2.31)$$

Así, obtenemos:

$$\Gamma_{1loop}^\mu(p', p) = -2ie^2 \int_{reg} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{N_1^\mu}{[l^2 - \Delta + i\epsilon]^3}$$

Necesitamos re-expresar el numerador N_1^μ en términos del momento cambiado l .

El primer paso para simplificar N_1^μ es deshacernos de los factores γ^μ y γ_ν usando el álgebra de las matrices γ , $\gamma^\nu \not{a} \gamma_\nu = -2\not{a}$, etc. Sin embargo, para permitir la regularización dimensional, necesitamos volver a trabajar el álgebra para un espacio tiempo arbitrario de d dimensiones, donde $\gamma^\nu \gamma_\nu = d \neq 4$. Consecuentemente, tenemos las siguientes relaciones

$$\gamma^\nu \not{a} \gamma_\nu = -2\not{a} + (4 - d)\not{a}, \quad \& \quad \gamma^\nu \not{a} \not{b} \not{c} \gamma_\nu = -2\not{c} \not{b} \not{a} + (4 - d)\not{a} \not{b} \not{c} \quad (2.32)$$

deducidas en el Apéndice A por las ecuaciones A.8 y A.10

$$\begin{aligned} N_1^\mu &= \gamma^\nu [\not{p}' + \not{k} + m] \gamma^\mu [\not{p} + \not{k} + m] \gamma_\nu \\ &= \gamma^\nu [\not{p}' + \not{k}] \gamma^\mu [\not{p} + \not{k}] \gamma_\nu + m \gamma^\nu \gamma^\mu [\not{p} + \not{k}] \gamma_\nu + m \gamma^\nu [\not{p}' + \not{k}] \gamma^\mu \gamma_\nu + m^2 \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma_\nu \\ &= -2m^2 \gamma^\mu + 4m(p + p' + 2k)^\mu - 2[\not{p} + \not{k}] \gamma^\mu [\not{p}' + \not{k}] \\ &\quad + (4 - d)[\not{p}' + \not{k} - m] \gamma^\mu [\not{p} + \not{k} - m] \end{aligned} \quad (2.33)$$

Ahora re-expresamos este numerador en términos del momento de lazo l en vez de k . Expandiendo en términos de la potencia de l , obtenemos términos cuadráticos, lineales e independientes de l , pero los términos lineales no contribuyen a la integral $\int d^d l$, ya que son impares con respecto a $l \rightarrow -l$ mientras que el resto de la integral es par.

Consecuentemente, despreciamos los términos lineales de l , calculando cada término de 2.33 y denotamos cada término por N_{1i}^μ el primero queda como:

$$\begin{aligned} N_{11}^\mu &= -2[\not{p} + \not{k}] \gamma^\mu [\not{p}' + \not{k}] \\ &= -2[\not{p} + \not{l} - \not{p}x - \not{p}'y] \gamma^\mu [\not{p}' + \not{l} - \not{p}x - \not{p}'y] \\ &= -2\not{l} \gamma^\mu \not{l} - 2[\not{p}(1 - x) - \not{p}'y] \gamma^\mu [\not{p}'(1 - y) - \not{p}x] \end{aligned} \quad (2.34)$$

Haciendo uso de los fermiones externos estando *on-shell* 2.28. Como el vértice $ie\Gamma^\mu$ esta ensandwichado entre los espinores de Dirac $\bar{u}(p)$ en la izquierda y $u(p)$ en la derecha.

Los dos espinores satisfacen las ecuaciones de Dirac apropiadas:

$$\not{p}u(p) = mu(p) \quad \& \quad \bar{u}(p')\not{p}' = \bar{u}(p')m \quad (2.35)$$

también, usamos las siguientes relaciones

$$\not{q}\gamma^\mu = q^\mu + i\sigma^{\mu\nu}q_\nu, \quad \& \quad \gamma^\mu\not{q} = q^\mu - i\sigma^{\mu\nu}q_\nu \quad (2.36)$$

recordando que $p = p' - q$ y $p' = p + q$ y usando 2.36, entonces 2.34 se convierte en:

$$\begin{aligned} N_{11}^\mu &= -2\not{I}\gamma^\mu\not{I} - 2[\not{p}'(1-x) - \not{q}(1-x) - \not{p}'y]\gamma^\mu[\not{p}(1-y) + \not{q}(1-y) - \not{p}x] \\ &= -2\not{I}\gamma^\mu\not{I} - 2m^2(1-x-y)^2\gamma^\mu - 2m(1-x-y)(1-y)(q^\mu - i\sigma^{\mu\nu}q_\nu) \\ &\quad + 2m(1-x-y)(1-x)(q^\mu + i\sigma^{\mu\nu}q_\nu) + 2(1-x)(1-y)\not{q}\gamma^\mu\not{q} \end{aligned} \quad (2.37)$$

como ensandwichemos $\bar{u}(p')\Gamma^\mu u(p)$, tenemos:

$$\not{q}\gamma^\mu\not{q} = 2q^\mu\not{q} - q^2\gamma^\mu = -q^2\gamma^\mu \quad (2.38)$$

ya que $\bar{u}(p')\not{q}u(p) = 0$.

Debido a la invariancia de la integral $\int d^d l$, tenemos

$$l_\lambda l_\nu = g_{\lambda\nu} \frac{l^2}{d} \longrightarrow \not{I}\gamma^\mu\not{I} = \gamma^\lambda\gamma^\mu\gamma^\nu l_\lambda l_\nu = \gamma^\lambda\gamma^\mu\gamma^\nu g_{\lambda\nu} \frac{l^2}{d} = \frac{(2-d)}{d} l^2\gamma^\mu \quad (2.39)$$

entonces 2.37:

$$\begin{aligned} N_{11}^\mu &= -\frac{2(2-d)}{d} l^2\gamma^\mu - 2m(1-x-y)(x-y)q^\mu + 2m(1-x-y)(2-x-y)i\sigma^{\mu\nu}q_\nu \\ &\quad - 2(1-x)(1-y)q^2\gamma^\mu - 2m^2(1-x-y)^2\gamma^\mu \end{aligned} \quad (2.40)$$

el otro término de 2.33 queda como

$$\begin{aligned} N_{12}^\mu &= [\not{p}' + \not{k} - m]\gamma^\mu[\not{p} + \not{k} - m] \\ &= [\not{p}' + \not{I} - \not{p}x - \not{p}'y - m]\gamma^\mu[\not{p} + \not{I} - \not{p}x - \not{p}'y - m] \\ &= \not{I}\gamma^\mu\not{I} + [-m(x+y) + \not{q}x]\gamma^\mu[-m(x+y) - \not{q}y] \\ &= \frac{(2-d)}{d} l^2\gamma^\mu + m^2(x+y)^2\gamma^\mu - m(x+y)(x-y)q^\mu - m(x+y)^2 i\sigma^{\mu\nu}q_\nu + xyq^2\gamma^\mu \end{aligned} \quad (2.41)$$

usamos la *identidad de Gordon* para el otro término de 2.33

$$(p + p')^\mu = 2m\gamma^\mu - i\sigma^{\mu\nu}q_\nu \quad (2.42)$$

entonces obtenemos

$$4m(p + p' + 2k)^\mu = 8m^2(1-x-y)\gamma^\mu - 4mzi\sigma^{\mu\nu}q_\nu + 4m(x-y)q^\mu \quad (2.43)$$

sumando 2.40, 2.41, 2.43 y el término extra de 2.33, y tomando en cuenta la *identidad de Ward*, podemos despreciar los términos proporcionales a q^μ , tenemos entonces:

$$\begin{aligned}
N_1^\mu &= -2m^2\gamma^\mu + 8m^2(1-x-y)\gamma^\mu - 4m(1-x-y)i\sigma^{\mu\nu}q_\nu - \frac{2(2-d)}{d}l^2\gamma^\mu \\
&\quad + 2m(1-x-y)(2-x-y)i\sigma^{\mu\nu}q_\nu - 2(1-x)(1-y)q^2\gamma^\mu - 2m^2(1-x-y)^2\gamma^\mu \\
&\quad + (4-d)\left[\frac{(2-d)}{d}l^2\gamma^\mu + m^2(x+y)^2\gamma^\mu - m(x+y)^2i\sigma^{\mu\nu}q_\nu + xyq^2\gamma^\mu\right] \\
&= m^2\gamma^\mu[-2 - 2(1-x-y)^2 + 8(1-x-y) + (4-d)(x+y)^2] + \frac{(2-d)^2}{d}l^2\gamma^\mu \\
&\quad + mi\sigma^{\mu\nu}q_\nu[-2(1-x-y) + 2(1-x-y)^2 - (4-d)(x+y)] \\
&\quad + [(4-d)xy - 2(1-x)(1-y)]q^2\gamma^\mu
\end{aligned} \tag{2.44}$$

Agrupando de acuerdo a la estructura de las matrices γ :

$$N_1^\mu = \tilde{N}_{11}\gamma^\mu + \tilde{N}_{21}\frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m} \tag{2.45}$$

donde

$$\begin{aligned}
\tilde{N}_{11} &= m^2[-2 + 8(1-x-y) - 2(1-x-y)^2 + (4-d)(x+y)^2] + \frac{(2-d)^2}{d}l^2 \\
&\quad + [(4-d)xy - 2(1-x)(1-y)]q^2
\end{aligned} \tag{2.46}$$

y

$$\tilde{N}_{21} = 2m^2[-2(1-x-y)(x+y) - (4-d)(x+y)^2] \tag{2.47}$$

podemos resumir más a N_{11} :

$$\begin{aligned}
\tilde{N}_{11} &= \frac{(2-d)^2}{d}l^2 + m^2[8(1-x-y) - 2(1+(1-x-y)^2) + (4-d)(x+y)^2] \\
&\quad - q^2[2(1-x-y+xy) - (4-d)xy] \\
&= \frac{(2-d)^2}{d}l^2 + (2-d)\Delta + 2(1-x-y)[2m^2 - q^2]
\end{aligned} \tag{2.48}$$

Distribuyendo en factores de forma, como 2.4:

$$\Gamma_{1loop}^\mu(p, p') = F_1^{1loop}(q^2)\gamma^\mu + F_2^{1loop}(q^2)\frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m} \tag{2.49}$$

donde el factor de forma eléctrico a un lazo es

$$F_1^{1loop}(q^2) = -2ie^2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{\tilde{N}_{11}}{[l^2 - \Delta + i\epsilon]^3} \tag{2.50}$$

y el factor de forma magnético

$$F_2^{1loop}(q^2) = 2ie^2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{\tilde{N}_{12}}{[l^2 - \Delta + i\epsilon]^3} \tag{2.51}$$

El espín del electrón se acopla al campo magnético estático como:

$$\hat{H} \subset \frac{-e\vec{g}}{2m_e} \vec{S} \vec{B}$$

y la relación de los factores de forma con el factor giro-magnético es

$$g = 2 (F_{mag} = F_1 + F_2) \Big|_{q^2=0} \quad (2.52)$$

El factor de forma eléctrico $F_1 = F_{el}$ para $q^2 = 0$ está restringido por la identidad de Ward

$$F_1^{tot} = F_1^{arbl} + F_1^{lazos} + F_1^{trminoscontrarios} \longrightarrow 1 \quad (2.53)$$

cuando $q^2 \longrightarrow 0$. Por lo tanto, el momento giro-magnético es

$$g = 2 + 2F_2(q^2 = 0)$$

donde $F_2 = F_2^{loops}$ debido a que no hay contribuciones a nivel árbol ó términos contrarios a F_2 únicamente es a F_1 . Por lo tanto, para calcular $g - 2$ a nivel de un lazo, todo lo que necesitamos es evaluar la integral 2.51 para $q^2 = 0$. Para calcular el momento magnético anómalo 2.16. Empecemos con la integral de momento

$$\int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{\tilde{N}_{12}}{[l^2 - \Delta + i\epsilon]^3}$$

donde ahora

$$\Delta = (x + y)^2 m^2$$

para $q^2 = 0$ y N_{12} es como antes. Debido a que en el numerador no hay una dependencia del momento del lazo l , esta integral converge en $d = 4$ dimensiones y, por lo tanto, no hay necesidad de usar la regularización dimensional. Todo lo que necesitamos es rotar el momento al espacio Euclideo, es decir, usamos la rotación de Wick

$$\int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{(l^2)^n}{[l^2 - \Delta + i\epsilon]^m} = \frac{i}{(2\pi)^4} \frac{(-1)^n}{(-1)^m} \int d^4 l_E \frac{(l_E^2)^n}{[l_E^2 + \Delta]^m} \quad (2.54)$$

Entonces, en la integral de momento se tiene que

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{\tilde{N}_{12}}{[l^2 - \Delta + i\epsilon]^3} &= -\tilde{N}_{12} \int i \frac{d^4 l_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{[l_E^2 + \Delta + i\epsilon]^3} = \frac{-i}{32\pi^2} \frac{\tilde{N}_{12}}{\Delta} \\ &= \frac{i}{8\pi^2} \frac{1-x-y}{x+y} \end{aligned}$$

y recordando la constante de estructura fina es definida como:

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \quad (2.55)$$

Así, tenemos que:

$$\begin{aligned} F_2^{1loop}(q^2 \rightarrow 0) &= \frac{e^2}{4\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{1-x-y}{x+y} \\ &= \frac{\alpha}{2\pi} = 0.001161409732888438 \end{aligned} \quad (2.56)$$

como nos predecía 2.19 con $n_p = 1$ y $k_p = 0$.

Segundo término

Para el segundo término de 2.21, usamos

$$\not{a} \not{b} + \not{b} \not{a} = 2a \cdot b$$

analizando el numerador N_2 , tenemos

$$\begin{aligned} N_2^\mu &= k[p' - k + m]\gamma^\mu[p - k + m]k = [k p' - k^2 + m k]\gamma^\mu[p k - k^2 + m k] \\ &= [2(k \cdot p')(k \cdot p) - 2k^2 k \cdot (p + p') + k^4]\gamma^\mu \end{aligned} \quad (2.57)$$

pero estos términos 2.57 son solo proporcionales a γ^μ , no contienen ninguna contribución que sea proporcional a $i\sigma^{\mu\nu}q_\nu$, por lo tanto no hay ningún término en el factor de forma magnético y por consecuencia, no hay contribución al $g - 2$, es decir, el resultado en 2.56 es invariante de norma.

El momento giromagnético es

$$g = 2 + \frac{\alpha}{\pi} + \mathcal{O}(\alpha^2) \quad (2.58)$$

es decir

$$a_l = \frac{g - 2}{2} = F_P(q^2 = 0) = \frac{\alpha}{2\pi} + \mathcal{O}(\alpha^2) \quad (2.59)$$

Note que este resultado es independiente de las masas de los leptones, por lo que se obtiene el mismo resultado en QED para e , μ y τ . Las correcciones a más lazos a este momento giro-magnético son más difíciles de calcular debido a que el número de diagramas crece demasiado rápido con el número de lazos; a orden de 4 lazos existen cientos de diagramas, y uno necesita una computadora para contarlos. También, a ordenes superiores uno incluye los efectos de interacciones fuertes y débiles debido a que los fotones interactúan con hadrones y partículas W^\pm , que a su vez interactúan con otros hadrones, Z^0 , Higgs, etc. Sin embargo, se ha calculado los *momentos magnéticos anómalos* del electrón y del muón a orden α^4 en los años 1970s, y más recientes cálculos se muestran en [38]. Mientras tanto, los experimentalistas han medido a_e a una precisión de 12 dígitos significantes y a_μ a 9 dígitos significantes

$$a_e^{exp} = 0.00115965218073(28), \quad a_\mu^{ex} = 0.00116592091(63) \quad (2.60)$$

El valor teórico del momento magnético anómalo del electrón esta muy bien de acuerdo con el valor experimental, mientras que para el muón hay una pequeña discrepancia $a_\mu^{exp} - a_\mu^{teora} \approx (27 \pm 8) \times 10^{-10}$. Esta discrepancia puede poner un paso de la física más haya del modelo estándar, puede ser supersimetría, o algo más. Note que el efecto de partículas pesadas en la a_μ es proporcional a $(m_\mu / M_{pesado})^2$, esto es porque el momento magnético anómalo del electrón es mucho mas sensible a la nueva física que la del electrón.

Sin embargo, la discrepancia entre a_μ^{exp} y la a_μ^{teoria} puede también ser un pequeño error teórico en modelar las interacción del fotón-hadron, que afecta la a_μ^{teora} por los diagramas de mas de 2 lazos.

Tomaremos el resultado de 2.58 como una medida de comparación para nuestras nuevas propuestas para el cálculo del diagrama 2.2.

2.4. Nuevas consideraciones

2.4.1. Momento del fotón no despreciable

Si ahora consideramos que $q^2 \neq 0$, entonces tenemos el factor de forma magnético [2.51](#)

$$\begin{aligned} F_2^{1loop}(q^2) &= 2ie^2 \left(\frac{-i}{32\pi^2} \right) \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz \delta(1-x-y-z) \frac{4z(1-z)m^2}{(1-z)^2m^2 - xyq^2} \\ &= \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{z(1-z)m^2}{(1-z)^2m^2 - (1-y-z)yq^2} \end{aligned} \quad (2.61)$$

haciendo el siguiente cambio de variable:

$$y = (1-z)\xi = \omega\xi \quad \& \quad \omega = 1-z \quad \rightarrow \quad (1-y-z) = \omega(1-\xi)$$

entonces

$$dy = \omega d\xi \quad \& \quad dx = -d\omega$$

así, obtenemos

$$\begin{aligned} F_2^{1loop}(q^2) &= \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 d\omega \int_0^1 d\xi \omega \frac{(1-\omega)\omega m^2}{\omega^2 m^2 - \omega^2 \xi(1-\xi)q^2} = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 d\xi \frac{m^2}{m^2 - \xi(1-\xi)q^2} \\ &= \frac{\alpha}{2\pi} \frac{4m^2}{\sqrt{q^2(4m^2 - q^2)}} \arctan \left(\sqrt{\frac{q^2}{4m^2 - q^2}} \right) \end{aligned}$$

como

$$\arctan(z) = \frac{i}{2} \log \left(\frac{i+z}{i-z} \right) \quad (2.62)$$

entonces, tenemos

$$\arctan \left(\sqrt{\frac{q^2}{4m^2 - q^2}} \right) = \frac{1}{i} \log \left[\frac{\sqrt{4m^2 - q^2} + \sqrt{-q^2}}{2m} \right]$$

así, tenemos finalmente:

$$F_2^{1loop}(q^2) = \frac{\alpha}{2\pi} \frac{4m^2}{\sqrt{(-q^2)(4m^2 - q^2)}} \log \left[\frac{\sqrt{4m^2 - q^2} + \sqrt{-q^2}}{2m} \right] \quad (2.63)$$

Considerando un momento de fotón ligero

Ahora tomamos dos límites interesantes, primero, consideramos la masa del fotón demasiado pequeña, es decir, $m^2 \gg q^2$,

$$F_2^{1loop}(q^2) = \frac{\alpha}{2\pi} \left[1 + \frac{q^2}{6m^2} + \frac{q^4}{30m^4} + \frac{q^6}{140m^6} + \frac{q^8}{630m^8} + \frac{q^{10}}{2772m^{10}} + \mathcal{O}\left(\frac{q^{12}}{m^{12}}\right) \right] \quad (2.64)$$

donde los términos adicionales a [2.59](#) están relacionadas de la misma manera que la ecuación [2.19](#).

Considerando un momento de fotón masivo

El otro caso, es si $q^2 < 0$ y $-q^2 \gg m^2$, entonces tenemos la aproximación

$$F_2^{1loop}(q^2) \approx \frac{\alpha}{2\pi} \left[\frac{2m^2}{-q^2} \log\left(\frac{-q^2}{m^2}\right) + \frac{4m^4}{q^4} + \frac{4m^4}{-q^4} \log\left(\frac{-q^2}{m^2}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{q^6}{m^6}\right) \right] \quad (2.65)$$

Este resultado es interesante, ya que hemos considerado un fotón masivo y mucho más pesado que cualquier leptón, y hemos obtenido una relación parecida a la dicha en 2.17.

2.4.2. límite simétrico

En esta parte consideramos el mismo diagrama 2.21, pero tomando la condición de que

$$q^2 = p^2 = p'^2 \quad (2.66)$$

esto se le conoce como el *límite simétrico* y luego tomamos el límite $q^2 \rightarrow 0$.

Recordando que el diagrama se evalúa como 2.21, usamos la parametrización de Feynman de tres factores 2.26 para el primer término de 2.21, entonces, tenemos:

$$\begin{aligned} D_1 &= (p+k)^2 x - m^2 x + (p'+k)^2 y - m^2 y + k^2(1-x-y) \\ &= l^2 - p^2 x^2 - p'^2 y^2 - 2xypp' - (m^2 - q^2)(x+y) \end{aligned}$$

donde hemos usado el cambio de momento como en 2.30. como usamos el límite simétrico $p^2 = p'^2 = q^2$, entonces, tenemos:

$$q^2 = (p' - p)^2 = p'^2 + p^2 - 2p \cdot p' = 2q^2 - 2p \cdot p' = q^2$$

esto nos da con la siguiente relación

$$2p \cdot p' = q^2 \quad (2.67)$$

entonces, el denominador queda como:

$$\begin{aligned} D &= l^2 - q^2(x^2 + y^2 + xy) - (m^2 - p^2)(x+y) \\ &= l^2 - \Delta \end{aligned}$$

donde ahora

$$\Delta = m^2(x+y) + q^2(x^2 + y^2 + xy - x - y)$$

Afortunadamente, tenemos que el numerador es el mismo como para el caso asintótico, debido a que los términos que sean proporcionales a q^2 desvanecerán al final de los cálculos al tomar $q^2 \rightarrow 0$, entonces 2.22 se mantiene como 2.47, así, tenemos el nuevo factor de forma magnético como:

$$F_2^{1loop}(q^2) = 2ie^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{4(1-x-y)(x+y)m^2}{[l^2 - \Delta]^3}$$

$$= 2ie^2 \left(\frac{-i}{32\pi^2} \right) \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{4(1-x-y)(x+y)m^2}{m^2(x+y) + q^2[x^2 + y^2 + xy - x - y]} \quad (2.68)$$

si en esta ocasión, tomamos el límite $q^2 \rightarrow 0$, se tiene

$$F_2^{1loop}(q^2) = \frac{e^2}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{4(1-x-y)(x+y)m^2}{(x+y)m^2} = \frac{e^2}{8\pi^2} \frac{1}{3} = \frac{\alpha}{2\pi} \left(\frac{1}{3} \right) \quad (2.69)$$

El segundo término de 2.21 N_2^H no contribuye ya que no tiene términos proporcionales a $i\sigma^{\mu\nu}q_\nu$.

Por lo tanto, tenemos que 2.69 es el mismo resultado que 2.59 a excepción de un factor de $1/3$

Si ahora tomamos el caso cuando $q \neq 0$ en la integral 2.68, tenemos

$$F_2^{1loop}(q^2) = \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{4(1-x-y)(x+y)m^2}{(x+y)m^2 + q^2[x^2 + y^2 + xy - x - y]} = I_{ls} \quad (2.70)$$

denominados a esta integral como la *integral del límite simétrico* I_{ls} .

Ahora podemos considerar dos casos interesantes, cuando $m \gg q$ y $m \ll q$. Si aproximamos $m \gg q$ en el integrando de 2.70, tenemos

$$\begin{aligned} F_2^{1loop}(q^2) &\approx \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \left[4z + \frac{4z(y^2 - y - z + yz + z^2)q^2}{(z-1)m^2} \right] \\ &= \frac{\alpha}{2\pi} \left(\frac{1}{3} \right) \left[1 + \frac{7}{12} \frac{q^2}{m^2} + \frac{113q^4}{300m^4} + \frac{183q^6}{700m^6} + \frac{422q^8}{6615m^8} + \mathcal{O}\left(\frac{q^{10}}{m^{10}}\right) \right] \end{aligned} \quad (2.71)$$

que es el mismo factor de 2.59 excepto por un factor de $1/3$.

Si hubiéramos hecho la aproximación del integrando con $m \ll q$ en 2.70, tendríamos:

$$\begin{aligned} F_2^{1loop}(q^2) &\approx \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{-4m^2(1-x-y)}{q^2(x^2 + y^2 + xy - x - y)} + \mathcal{O}\left(\frac{m^4}{q^4}\right) \\ &= \frac{\alpha}{2\pi} \left(\frac{1}{3} \right) \left[\frac{2m^2}{-q^2} + \mathcal{O}\left(\frac{m^4}{q^4}\right) \right] \end{aligned} \quad (2.72)$$

Si tomamos el caso donde $q^2 = m^2$, entonces en 2.70, tenemos

$$\begin{aligned} F_2^{1loop}(q^2) &\approx \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{4z(1-z)}{(1-z) + [y^2 - (y+z)(1-z)]} \\ &= \frac{\alpha}{4\pi} \left(\frac{4\pi}{3\sqrt{3}} \right) = \frac{\alpha}{2\pi} \left(\frac{2}{3} \frac{\pi}{\sqrt{3}} \right) \approx \frac{\alpha}{2\pi} \left(\frac{6}{5} \right) \end{aligned} \quad (2.73)$$

Considerando $q^2 = -m_z^2$

Si hubiéramos considerado $q^2 = -m_z^2$ donde la constante de estructura fina obtiene el valor de $\alpha \approx 1/128$, comparamos los resultados en los límite de capa de masa 2.28 y simétrico 2.66, para el electrón

$$a_{LCP}(q^2 = -m_z^2) = 1.8886 \times 10^{-12} \quad \& \quad a_{LS}(q^2 = -m_z^2) = 7.80924 \times 10^{-14} \quad (2.74)$$

para el muón

$$a_{LCP}(q^2 = -m_z^2) = 4.51421 \times 10^{-8} \quad \& \quad a_{LS}(q^2 = -m_z^2) = 3.33868 \times 10^{-9} \quad (2.75)$$

para el tau

$$a_{LCP}(q^2 = -m_z^2) = 7.43287 \times 10^{-6} \quad \& \quad a_{LS}(q^2 = -m_z^2) = 9.43402 \times 10^{-7} \quad (2.76)$$

donde hemos denotado el límite capa de masa por LCM y el límite simétrico por LS , esta diferencia entre cada una de las configuraciones es apreciable en sus respectivas integrales para calcular el AMDM, para el límite de capa de masa 2.61 y límite simétrico 2.70, además de la diferencia de las masas entre los leptones e, μ, τ con la masa del bosón Z_0 .

2.4.3. Propagador fotónico masivo

Haciendo la propuesta de un propagador fotónico para observar si esto puede darnos el mismo resultado que Schwinger 2.59 pero con una corrección extra, analizamos ambos límites, el límite de capa de masa 2.28 y el límite simétrico 2.66. El propagador incluyendo la masa del fotón es deducida del Lagrangiano de Proca :

$$iD_{\alpha\beta}(p) = \frac{-i}{p^2 - m_\gamma^2 + i\epsilon} \left[g_{\alpha\beta} - (1 - \xi) \frac{p_\alpha p_\beta}{p^2 - \xi m_\gamma^2} \right] \quad (2.77)$$

que es el mismo propagador que para el boson W^\pm ó Z^0 B.5 pero con masa m_γ , la masa del fotón.

Entonces, el diagrama 2.2 se evalúa como en 2.21, pero ahora tenemos en el denominador lo siguiente:

$$D = [k^2 - m_\gamma^2 + i\epsilon][(p' + k)^2 - m^2 + i\epsilon][(p + k)^2 - m^2 + i\epsilon]$$

no consideramos el segundo término de 2.21 ya que no contribuye al factor de forma magnético.

Usando la parametrización de Feynman de tres factores 2.26 tomando en cuenta el límite en la capa de masa 2.28 y 2.29, donde

$$\begin{aligned} D &= (p + k)^2 x - m^2 x + (p' + k)^2 y - m^2 y + k^2(1 - x - y) - m_\gamma^2(1 - x - y) \\ &= l^2 - m^2(x + y)^2 + xyq^2 - m_\gamma^2(1 - x - y) = l^2 - \Delta \end{aligned} \quad (2.78)$$

ahora

$$\Delta = m^2(1 - z)^2 + m_\gamma^2 z - (1 - y - z) y q^2$$

tenemos el mismo numerador que 2.22 distribuyendo de acuerdo con la estructura de matrices γ 2.45 y la distribución de factores de forma 2.49, entonces tenemos, calculando el factor de forma magnético para este caso, obtenemos

$$\int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{N_2}{[l^2 - \Delta + i\epsilon]^3} = \frac{-i}{32\pi^2} \frac{4z(1 - z)m^2}{(1 - z)^2 m^2 - (1 - y - z) y q^2 + m_\gamma^2 z}$$

note que el segundo término de 2.21 tampoco contribuye en este caso debido a que no contiene ningún término proporcional a $i\sigma^{\mu\nu} q_\nu$ y por lo tanto no existe factor de

forma magnético para ese término. Así, tenemos la siguiente integral

$$F_2^{1loop}(q^2) = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{m^2 z(1-z)}{m^2(1-z)^2 + m_\gamma^2 z - (1-y-z)yq^2} \quad (2.79)$$

Considerando $q^2 \rightarrow 0$

entonces tenemos la integral:

$$\begin{aligned} F_2^{1loop}(q^2 \rightarrow 0) &= \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{m^2 z(1-z)}{m^2(1-z)^2 + m_\gamma^2 z} = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dz \frac{m^2 z(1-z)^2}{m^2(1-z)^2 + m_\gamma^2 z} \\ &= \frac{\alpha}{2\pi m^2} \left\{ \frac{m_\gamma(2m^4 - 4m^2 m_\gamma^2 + m_\gamma^4)}{\sqrt{m_\gamma^2 - 4m^2}} \log \left[\frac{m_\gamma^2 + m_\gamma \sqrt{m_\gamma^2 - 4m^2} - 2m^2}{2m^2} \right] \right. \\ &\quad \left. + (m_\gamma^4 - 2m^2 m_\gamma^2) \log \left(\frac{m_\gamma^2}{m^2} \right) + m^4 - 2m^2 m_\gamma^2 \right\} \end{aligned} \quad (2.80)$$

si consideramos $m \gg m_\gamma$ para 2.80, se tiene:

$$F_2^{1loop}(q^2 \rightarrow 0) = \frac{\alpha}{2\pi} \left[1 - \frac{m_\gamma^2}{m^2} + \frac{2m_\gamma^2}{m^2} \log \left(\frac{m^2}{m_\gamma^2} \right) - \frac{11}{12} \frac{m_\gamma^4}{m^4} - \frac{m_\gamma^4}{m^4} \log \left(\frac{m^2}{m_\gamma^2} \right) \right] \quad (2.81)$$

considerando $m \ll m_\gamma$ 2.80, tenemos

$$F_2^{1loop}(q^2 \rightarrow 0) \approx \frac{\alpha}{2\pi} \left[-2 \frac{m_\gamma^4}{m^4} \log \left(\frac{m^2}{m_\gamma^2} \right) + \frac{m_\gamma^2}{m^2} \left[\log \left(\frac{m^2}{m_\gamma^2} \right) - 1 \right] + 2 - \frac{m^2}{3m_\gamma^2} \right] \quad (2.82)$$

Si ahora consideramos $q^2 = m_\gamma^2$

Usando 2.78 y el numerador se mantiene como 2.22, distribuyendo de acuerdo a las matrices γ 2.45 y la distribución de factores de forma 2.49, tenemos para el factor de forma magnético

$$F_2^{1loop}(q^2) = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{z(1-z)m^2}{(1-z)^2 m^2 + m_\gamma^2 [z - (1-y-z)y]} \quad (2.83)$$

denominamos a esta integral como la *integral de capa de masa fotónica* I_{cmf} .

Si consideramos el integrando en el límite $m \gg m_\gamma$ para 2.83, tenemos:

$$F_2^{1loop}(q^2 \rightarrow) \approx \frac{\alpha}{2\pi} \left[1 - 2 \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{m_\gamma^2 z(z - (1-y-z)y)}{(1-z)^3 m^2} \right] \quad (2.84)$$

donde el segundo término de esta contribución diverge. Si consideramos $m_\gamma \gg m$ 2.83

$$F_2^{1loop}(q^2 \rightarrow 0) \approx \frac{\alpha}{\pi} \frac{m^2}{m_\gamma^2} \left[0.274808 - \frac{m^2}{m_\gamma^2} 48.0301 \right] \quad (2.85)$$

2.4.4. Propagador fotónico masivo en el límite simétrico

Si también consideramos el propagador de Proca 2.77 en el límite simétrico 2.66, el denominador toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned} D &= k^2(1-x-y) - m_\gamma^2(1-x-y) + (p+k)^2x - m^2x + (p'+k)y - m^2y \\ &= l^2 - m_\gamma^2(1-x-y) - m^2(x+y) - q^2(x^2+y^2+xy-x-y) \\ &= l^2 - \Delta \end{aligned} \quad (2.86)$$

donde

$$\Delta = m^2(x+y) + m_\gamma^2(1-x-y) + q^2(x^2+y^2+xy-x-y) \quad (2.87)$$

así, tenemos la siguiente integral

$$F_2^{1loop}(q^2) = \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{4(1-x-y)(x+y)m^2}{m^2(x+y) + m_\gamma^2(1-x-y) + q^2[x^2+y^2+xy-x-y]} \quad (2.88)$$

ahora consideraremos varios casos para resolver esta integral.

Si consideramos $m_\gamma \neq 0$ y $q \rightarrow 0$

En este caso, tenemos:

$$\begin{aligned} F_2^{1loop}(q^2) &= \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{4(1-x-y)(x+y)m^2}{(x+y)m^2 + m_\gamma^2(1-x-y)} \\ &= \frac{\alpha}{4\pi} \frac{2m^2}{3(m^2 - m_\gamma^2)^4} \left[m^6 - 6m^4m_\gamma^2 + 3m^2m_\gamma^4 + 2m_\gamma^6 + 6m^2m_\gamma^4 \log\left(\frac{m^2}{m_\gamma^2}\right) \right] \end{aligned} \quad (2.89)$$

si tomamos $m \gg m_\gamma$ para 2.89, se tiene que el factor de forma magnético es:

$$F_2^{1loop}(q^2) = \frac{\alpha}{2\pi} \left(\frac{1}{3}\right) \left[1 - 2\frac{m_\gamma^2}{m^2} + 6\frac{m_\gamma^4}{m^4} \left[\log\left(\frac{m^2}{m_\gamma^2}\right) - \frac{11}{6} \right] + \mathcal{O}\left(\frac{m_\gamma^6}{m^6}\right) \right] \quad (2.90)$$

que es solo una corrección del resultado 2.69, si ahora tomamos $m_\gamma \gg m$:

$$F_2^{1loop}(q^2) = \frac{\alpha}{2\pi} \left(\frac{1}{3}\right) \left[2\frac{m^2}{m_\gamma^2} + 6\frac{m^4}{m_\gamma^4} \left[\log\left(\frac{m^2}{m_\gamma^2}\right) + \frac{11}{6} \right] + \mathcal{O}\left(\frac{m^6}{M^6}\right) \right]$$

Si consideramos $q \neq 0$ y $m_\gamma \neq 0$

tenemos la integral

$$F_2^{1loop}(q^2) = \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{4(1-x-y)(x+y)m^2}{(x+y)m^2 + q^2[x^2+y^2+xy-x-y] + m_\gamma^2(1-x-y)} \quad (2.91)$$

denominamos esta integral como la *integral del límite simétrico con capa de masa fotónica*.

Si tomamos $q^2 = m^2 = m_\gamma^2$ para 2.91:

$$F_2^{1loop}(q^2) = \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{4(1-x-y)(x+y)}{x^2 + y^2 + xy - x - y + 1} \approx \frac{\alpha}{2\pi} (0.228337)$$

Si tomamos $q^2 = m_\gamma^2$ para 2.91

$$F_2^{1loop}(q^2) = \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{4(1-x-y)(x+y)m^2}{m^2(x+y) + (1-x-y)m_\gamma^2 + [x^2 + y^2 + xy - x - y]m_\gamma^2} \quad (2.92)$$

si tomamos $m \gg m_\gamma$ para la ecuación 2.92:

$$F_2^{1loop}(q^2) \approx \frac{\alpha}{2\pi} \left(\frac{1}{3} \right) \left[1 - \frac{17 m_\gamma^2}{12 m^2} + \mathcal{O} \left(\frac{m_\gamma^4}{m^4} \right) \right] \quad (2.93)$$

si ahora tomamos $m \ll m_\gamma$ para la ecuación 2.92:

$$F_2^{1loop}(q^2) \approx \frac{\alpha}{2\pi} \left(\frac{1}{3} \right) \frac{m^2}{m_\gamma^2} \left[0.831859 - \frac{m^2}{M^2} 1.61291 \times 10^7 \right] \quad (2.94)$$

2.5. Análisis de resultados y conclusiones en QED

Se estima de manera experimental que la masa del fotón puede encontrarse alrededor de $10^{-17} eV$, por lo tanto, graficamos el AMDM de cada leptón e, μ, τ usando las integrales 2.79 y 2.88 en un rango de $0 < m_\gamma < 10^{-8} eV$, considerando las masas de los leptones y la constante de estructura fina como 5.1 y hemos denotado al caso del propagador de Proca 2.77 como *PP*.

Primero, veamos el caso cuando $q^2 \rightarrow 0$ y hacemos variar la masa del fotón incluida en el propagador de Proca

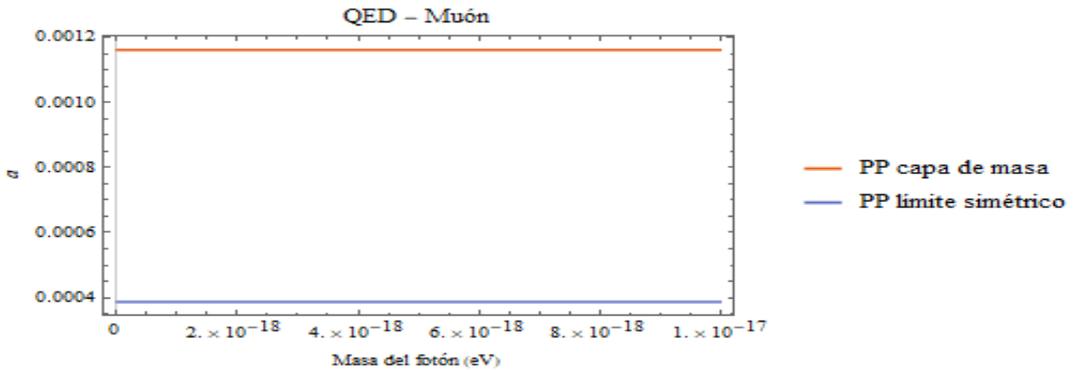


FIGURA 2.3: AMDM comparación de configuraciones

Se puede observar que al considerar el límite simétrico existe una diferencia de un factor de 3 a comparación del límite de capa de masa 2.28, este resultado es el mismo para los tres leptones e, μ, τ incluso cuando la masa del fotón es cero, como observamos en 2.56 y 2.69, además de ser invariante de norma, lo que nos motiva a definir un nuevo momento magnético anómalo al considerar el límite simétrico:

$$a_{l_s} = \frac{3}{2}(g-2) = F_2^{1loop}(q^2 \rightarrow 0) \quad (2.95)$$

donde l denota los leptones $l = e, \mu, \tau$. Nos interesa el análisis en el límite simétrico debido a que es un punto cinemático al cual lattice puede acceder y es de gran importancia para las contribuciones hadrónicas del AMDM, por lo tanto, cuando usamos el límite simétrico en QED usamos esta nueva definición 2.95 para que coincida con los resultados en la capa de masa y esta definición la usaremos en las siguientes gráficas.

Si consideramos el caso donde $q^2 = -m_z^2$, tenemos $\alpha \approx 1/128$, las integrales 2.79 y 2.88 contienen la masa del fotón m_γ en un rango de 0 a $10^{-8}eV$ y de 0 a $1TeV$, de manera ilustrativa gráficamos el caso para el muón

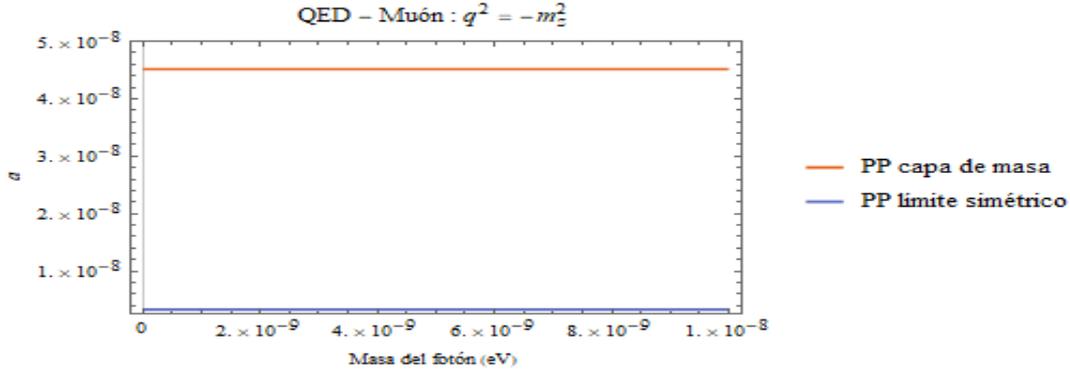


FIGURA 2.4: AMDM del muón con $q^2 = -m_z^2$

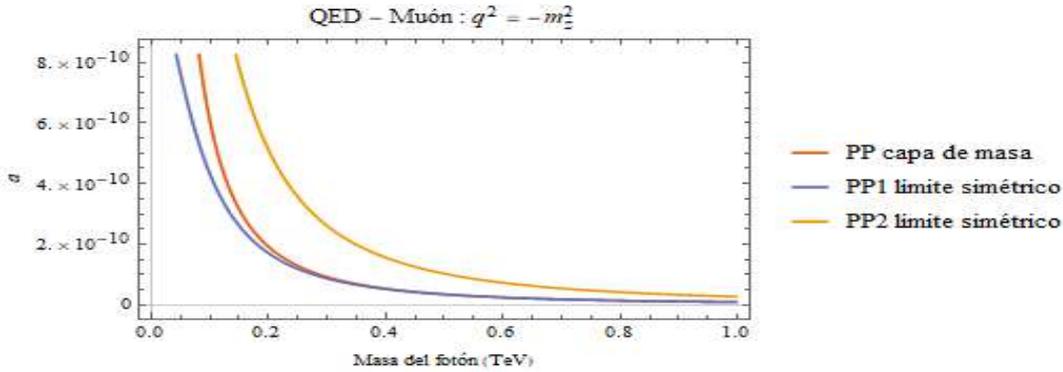


FIGURA 2.5: AMDM del muón con $q^2 = -m_z^2$: PP1 indica el Propagador de Proca con AMDM 2.16 y PP2 indica el propagador de Proca con AMDM 2.95

el AMDM va a tender a 10^{-12} cuando $m_\gamma^2 \rightarrow \infty$ 2.5, este comportamiento ocurre igual para el e y τ . La diferencia de la velocidad con que tiende a cero es diferente para cada leptón debido a la razón de sus masas entre el fotón, el leptón y la masa de m_z de sus masas. Cuando $m_\gamma \approx 1TeV$ el valor del límite de capa de masa es de 9.08386×10^{-12} , mientras que del límite simétrico 9.0289×10^{-12} , su diferencia es muy pequeña, para $m_\gamma \approx 500TeV$, estas límites son los mismos.

Podemos concluir que si el fotón tuviera una masa del orden de $10^{-18}eV$, como lo predice el gupo de datos de partículas (PDG) [40], el momento magnético anómalo en QED sería más sensible para el electrón que para el resto de los leptones debido a que su masa es de alrededor de $0.511MeV$ mientras que la del muón y tau es de $105MeV$ y $1776MeV$, así, la razón entre la masa del electrón y del fotón sería más significativa. A un lazo, el AMDM tiene 16 cifras significativas 2.56, esto nos permite imponer una cota para la masa del fotón y hemos observado que el resultado de

Schwinger 2.56 es afectado en su último dígito significativo cuando la masa del fotón m_γ es aproximadamente de alrededor $5 \times 10^{-3} eV$, por lo que podemos concluir que la masa $m_\gamma \approx 10^{-18} eV$, afectaría el AMDM en QED más allá del dígito 30, por lo que sería muy difícil de analizar con la tecnología actual.

Capítulo 3

Momento magnético anómalo por interacciones débiles

La contribución de la interacción débil a $g - 2$ atraía la atención a los teóricos mucho antes de que tenga un desempeño relevante con el resultado experimental. En la actualidad, la *sensibilidad de la contribución electrodébil* fue alcanzado únicamente con el reciente experimento BNL. Con el surgimiento del Modelo Estándar [43, 44], y su renormalizabilidad [45] fue que se pudo realizar predicciones reales para a_μ más allá de QED. Antes, las teorías efectivas a bajas energías no renormalizables eran los intentos para predecir esas contribuciones pero no eran teorías convincentes, únicamente en una teoría renormalizable a_μ es una cantidad finita predecible y por lo tanto un monitor para poner en prueba la teoría. Después de la unificación de la teoría electrodébil, un grupo de personas en 1972 (Fujikawa [14] y Bars[15]) presentaron resultados a un lazo para a_μ . En ese tiempo, el término electrodébil solo era de dos ordenes de magnitud más pequeño que el experimento del CERN de $g - 2$.

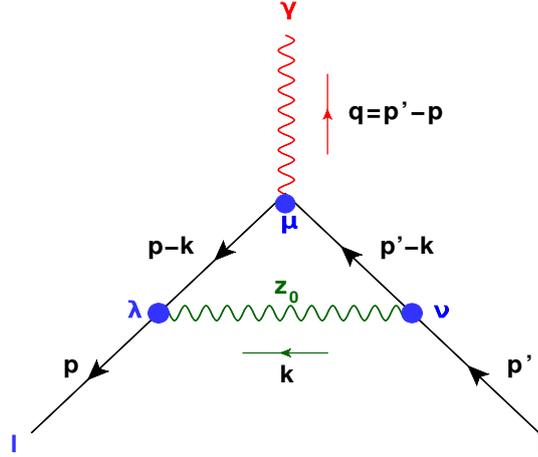
Los efectos de la interacción débil son por medio del intercambio de bosones de norma débiles pesados W^\pm , que mediante el proceso de corriente cargada (CC), y Z , que mediante el proceso de corriente neutral (NC). Más allá de la teoría de norma de Yang-Mills electrodébil $SU(2)_L \otimes U(1)_\gamma$, un sector de Higgs es requerido para la generación de masa de los bosones de norma W y Z , así como las masa de los fermiones, sin estropear la renormazibilidad. De este modo la simetría de norma es destrozada $SU(2)_L \otimes U(1)_\gamma \longrightarrow U(1)_{em}$ al subgrupo Abeliano de QED, y una partícula física adición tiene que ser tomada en cuenta, la famosa partícula de Higgs, predicha por Brout, Englert y Higgs en 1969 [46]. Debemos de tomar en cuenta que los parámetros más precisamente conocidos son la constante de estructura fina α (acoplamiento electromagnético), la constante de Fermi G_μ (interacción débil) y la masa Z , M_z .

En este capítulo, consideramos las contribuciones por parte de las interacciones débiles que incluyen los bosones W^\pm , Z_0 y el bosón Higgs h . Existen muchas ecuaciones que tomamos en cuenta para el cálculo de QED y que también nos servirán para los siguientes cálculos de los dos capítulos posteriores, con la finalidad de no volver a repetir las, dichas ecuaciones son 2.32, 2.35, 2.36, 2.38, 2.39, 2.42, 2.45, 2.55

3.1. Contribución del bosón Z_0

Las contribuciones electrodébiles que incluyen al boson Z_0 son 3.1 y 3.2

El diagrama de la figura 3.1 se evalúa usando las reglas de Feynman B.3, B.5, B.1 y B.7, en norma arbitraria y utilizamos m para la masa del leptón y m_z para la masa

FIGURA 3.1: Contribución 1(A) al AMDM por parte del bosón Z_0

del bosón Z_0

$$\begin{aligned}
 ie\Gamma_{1loop}^\mu(p', p) &= \int_{reg} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-ig_z\gamma^\lambda}{2} (v_f - a_f\gamma_5) \frac{i[(p' - k) + m]}{(p' - k)^2 - m^2 + i\epsilon} (ie\gamma^\mu) \\
 &\quad \frac{i[(p - k) + m]}{(p - k)^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{-ig_z\gamma^\nu}{2} (v_f - a_f\gamma_5) \frac{-i}{k^2 - m_z^2 + i\epsilon} \\
 &\quad \left[g_{\lambda\nu} - (1 - \xi) \frac{k_\lambda k_\nu}{k^2 - m_z^2 \xi} \right] \\
 &= \frac{eg_z^2}{4} \int_{reg} \left[\frac{N_1^\mu}{D_1} - (1 - \xi) \frac{N_2^\mu}{D_2} \right] \tag{3.1}
 \end{aligned}$$

donde

$$N_1^\mu = \gamma_\nu (g_V - g_A\gamma_5) (\not{p}' - \not{k} + m) \gamma^\mu (\not{p} - \not{k} + m) \gamma^\nu (g_V - g_A\gamma_5) \tag{3.2}$$

$$N_2^\mu = \not{k} (g_V - g_A\gamma_5) (\not{p}' - \not{k} + m) \gamma^\mu (\not{p} - \not{k} + m) \not{k} (g_V - g_A\gamma_5) \tag{3.3}$$

y

$$D_1 = [(p' - k)^2 - m^2 + i\epsilon][(p - k)^2 - m^2 + i\epsilon][k^2 - m_z^2 + i\epsilon] \tag{3.4}$$

$$D_2 = [(p' - k)^2 - m^2 + i\epsilon][(p - k)^2 - m^2 + i\epsilon][k^2 - m_z^2 + i\epsilon][k^2 - \xi m_z^2] \tag{3.5}$$

Hemos dividido el diagrama de 3.1 en dos términos 3.1, el primero que no contiene el término de norma mientras que el segundo si.

Primer término

Usando el momento *on-shell* 2.28 y 2.29, usamos entonces la parametrización de Feynman de tres factores 2.26, así, tenemos:

$$\begin{aligned}
 D_1 &= k^2(1 - x - y) - m_z^2(1 - x - y) + (p - k)^2x - m^2x + (p' - k)^2y - m^2y \\
 &= l^2 - m^2(x + y)^2 + xyq^2 - m_z^2(1 - x - y) \\
 &= l^2 - \Delta \tag{3.6}
 \end{aligned}$$

donde hemos usado el cambio de momento 2.30 y denotamos

$$\Delta = m^2(x+y)^2 - xyq^2 + m_z^2(1-x-y) \quad (3.7)$$

el numerador 3.2 queda como:

$$\begin{aligned} N_1^\mu &= \gamma_\nu(a_f - a_f\gamma_5)[\not{p}' - \not{k} + m]\gamma^\mu[\not{p} - \not{k} + m]\gamma^\nu(v_f - a_f\gamma_5) \\ &= -2(\not{p} - \not{k})\gamma^\mu(\not{p}' - \not{k})(v_f^2 + a_f^2) + m\gamma_\nu\gamma^\mu(\not{p} - \not{k})\gamma^\nu(v_f^2 - a_f^2) \\ &\quad + m\gamma_\nu(\not{p}' - \not{k})\gamma^\mu\gamma^\nu(v_f^2 - a_f^2) + (4-d)(\not{p}' - \not{k})\gamma^\mu(\not{p} - \not{k})(v_f^2 + a_f^2) \\ &\quad + m^2(2-d)\gamma^\mu(v_f^2 + a_f^2) \end{aligned} \quad (3.8)$$

realizando mucha algebra y distribuyendo de acuerdo a su estructura γ

$$N_1^\mu = \tilde{N}_{11}\gamma^\mu + \tilde{N}_{12}\frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m}$$

se demuestra que

$$\begin{aligned} \tilde{N}_{11} &= \{-2(2-d)d^{-1}l^2 - 2m^2(1-x-y)^2 - 2(1-x)(1-y)q^2 + (2-d)m^2 \\ &\quad + (4-d)(2-d)d^{-1}l^2 + (4-d)m^2(1-x-y)^2 + (4-d)xyq^2\}(v_f^2 + v_f'^2) \\ &\quad + 2dm^2(1-x-y)(v_f^2 - a_f^2) \\ &= \{(2-d)^2d^{-1}l^2 + (2-d)m^2 + (2-d)m^2(1-x-y)^2 - 2(1-x)(1-y)q^2 \\ &\quad + (4-d)xyq^2\}(v_f^2 + a_f^2) + 2dm^2(1-x-y)(v_f^2 - a_f^2) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \tilde{N}_{21} &= \{4m^2(1-x-y)(2-x-y) + 2(4-d)m^2(1-x-y)(x+y)\}(a_f^2 + a_f'^2) \\ &\quad + \{-4m^2(1-x) - 2(2-d)m^2y - 4m^2(1-y) - 2(2-d)m^2x\}(a_f^2 - a_f'^2) \\ &= \{4m^2(1-x-y)(2-x-y) + 2(4-d)m^2(1-x-y)(x+y)\}(a_f^2 + a_f'^2) \\ &\quad - \{4m^2(2-x-y) + 2(2-d)m^2(x+y)\}(a_f^2 - a_f'^2) \end{aligned}$$

como la integral converge, podemos poner $d = 4$:

$$\begin{aligned} \tilde{N}_{21} &= 4m^2(1-x-y)(2-x-y)(v_f^2 - a_f^2) - \{4m^2(2-x-y) - 4m^2(x+y)\}(v_f^2 - a_f^2) \\ &= 4m^2(1-x-y)(2-x-y)(v_f^2 + a_f^2) - 8m^2(1-x-y)(v_f^2 - a_f^2) \end{aligned}$$

agrupando de acuerdo a los factores de forma 2.49 para el primer término de 3.1 y recordando que $m_z^2 \gg m^2$

$$\begin{aligned} F_2^{1loop}(q^2 \rightarrow 0) &= \frac{-ig_z^2}{2} \frac{-i}{32\pi^2} \\ &\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{4m^2(1-x-y)(2-x-y)(v_f^2 + a_f^2) - 8m^2(1-x-y)(v_f^2 - a_f^2)}{m_z^2(1-x-y) + m^2(x+y)^2} \\ &\approx -\frac{G_\mu}{\sqrt{2}} \frac{m^2}{4\pi^2} \left[\frac{-v_f^2}{5} + \frac{5}{3}a_f^2 \right] = \frac{\sqrt{2}G_\mu m^2}{16\pi^2} \frac{(4\sin^2\theta_w - 1)^2 - 5}{3} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Segundo término

Ahora calculamos el segundo término de 3.1, Usando la parametrización de Feynman de cuatro factores A.1, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{abcd} &= 3! \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{1-x-y} \frac{1}{[a(1-x-y-z) + bx + cy + dz]^4} \\ &= 3! \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz \frac{1}{D_2^4} \end{aligned} \quad (3.10)$$

entonces, tenemos para el denominador 3.5

$$\begin{aligned} D_2 &= k^2(1-x-y-z) - m_z^2(1-x-y-z) + (p-k)^2x - m^2x + (p'-k)^2y - m^2y \\ &\quad + k^2z - m_z^2z\tilde{\xi} \\ &= l^2 - m^2(x+y)^2 + xyq^2 - m_z^2(1-x-y-z+z\tilde{\xi}) \\ &= l^2 - \Delta \end{aligned} \quad (3.11)$$

donde hicimos el cambio de momento 2.30 y definimos

$$\Delta = m^2(x+y)^2 + m_z^2(1-x-y-z+z\tilde{\xi}) - xyq^2 \quad (3.12)$$

el numerador 3.3 queda como

$$\begin{aligned} N_2^\mu &= \not{k}(v_f - a_f\gamma_5)(\not{p}' - \not{k} + m)\gamma^\mu(\not{p} - \not{k} + m)\not{k}(v_f - a_f\gamma_5) \\ &= \not{k}(\not{p}' - \not{k})\gamma^\mu(\not{p} - \not{k})\not{k}(v_f^2 + a_f^2) + m\not{k}\gamma^\mu(\not{p} - \not{k})\not{k}(v_f^2 - a_f^2) \\ &\quad + m\not{k}(\not{p}' - \not{k})\gamma^\mu\not{k}(v_f^2 - a_f^2) + m^2\not{k}\gamma^\mu\not{k}(v_f^2 + a_f^2) \end{aligned} \quad (3.13)$$

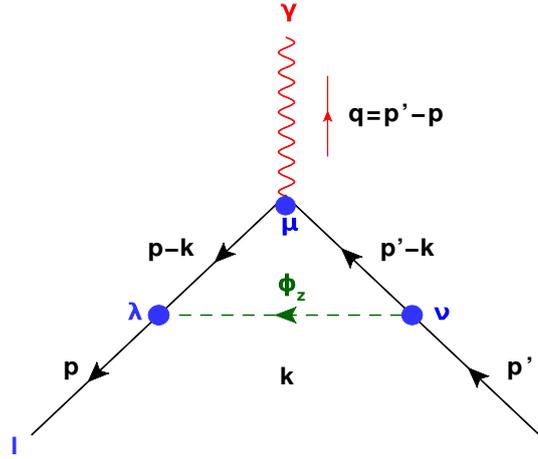
haciendo las identidades antes mencionadas y distribuyendo de acuerdo a la estructura de las matrices γ 2.45, se demuestra que

$$\begin{aligned} \tilde{N}_{22} &= \{2l^2m^2 - 3l^2m^2(x+y) - 2m^4(x+y)^3 + 2m^2q^2(2-x-y)xy\}(v_f^2 + a_f^2) \\ &\quad \{3l^2m^2(x+y) - 2l^2m^2 + 2m^4(x+y)^3 + 2m^2q^2(2-x-y)xy\}(v_f^2 - a_f^2) \\ &= 2m^2q^2(2-x-y)xyv_f^2 + \{4l^2m^2 - 6l^2m^2(x+y) - 4m^4(x+y)^3\}a_f^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el factor de forma magnético, de acuerdo a la distribución de 2.49 y la relación $g_z = g_w / \cos\theta_w$, queda como:

$$\begin{aligned} &F_2^{1loop}(q^2 \rightarrow 0) \\ &= (1-\tilde{\xi}) \frac{\sqrt{2}G_\mu m_z^2}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz \left[\frac{2m^2 - 3m^2(x+y)}{m^2(x+y)^2 + m_z^2(1-x-y-z+z\tilde{\xi})} \right. \\ &\quad \left. + \frac{m^2(x+y)^3}{[m^2(x+y)^2 + m_z^2(1-x-y-z+z\tilde{\xi})]^2} \right] \end{aligned} \quad (3.14)$$

necesitaremos esta ecuación 3.14 más adelante para obtener la invariancia de norma de la contribución Z_0 .

FIGURA 3.2: Contribución 1(b) al AMDM por parte del bosón z_0

Ahora consideramos el diagrama 3.2 usando, falta los términos, ..., donde etiquetamos a m como la masa del leptón y a m_w la masa del bosón W , tenemos:

$$\begin{aligned}
 ie\Gamma_{1loop}^\mu(p, p') &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{gm}{2m_w} \gamma_5 \frac{i(\not{p}' - \not{k} + m)}{(p' - k)^2 - m^2 + i\epsilon} (ie\gamma^\mu) \frac{i(\not{p} - \not{k} + m)}{(p - k)^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{gm}{2m_w} \gamma_5 \\
 &\quad \frac{i}{k^2 - m_z^2\xi + i\epsilon} \\
 &= \sqrt{2}G_\mu m^2 e \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{N^\mu}{D} \tag{3.15}
 \end{aligned}$$

donde

$$D = [k^2 - m_z^2\xi][(p - k)^2 - m^2 + i\epsilon][(p' - k)^2 - m^2 + i\epsilon]$$

y

$$N = \gamma_5(\not{p}' - \not{k} + m)\gamma^\mu(\not{p} - \not{k} + m)\gamma_5$$

usando la parametrización de Feynman 2.26, tenemos

$$\begin{aligned}
 D &= k^2(1 - x - y) - m^2(1 - x - y)\xi z + (p - k)^2x - m^2x + (p' - k)^2y - m^2y \\
 &= l^2 - m^2(x + y)^2 + xyq^2 - m_z^2(1 - x - y)\xi
 \end{aligned}$$

el numerador se simplifica a

$$\begin{aligned}
 N &= \gamma_5(\not{p}' - \not{k} + m)\gamma^\mu(\not{p} - \not{k} + m)\gamma_5 \\
 &= m(x + y)^2 i\sigma^{\mu\nu} q_\nu
 \end{aligned}$$

donde solo nos ha interesado los términos proporcionales a $i\sigma^{\mu\nu} q_\nu$, usando la distribución de su estructura γ 2.45 y 2.49, tenemos el factor de forma magnético:

$$\begin{aligned}
 F_2^{1loop}(q^2 \rightarrow 0) &= -i\sqrt{2}G_\mu m^2 2 \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{2m^2(x + y)^2}{[l - \Delta + i\epsilon]^3} \\
 &= \frac{\sqrt{2}G_\mu m^2}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{-2m^2(x + y)^3}{m^2(x + y)^2 + m_z^2(1 - x - y)\xi} \tag{3.16}
 \end{aligned}$$

para probar la invariancia de norma usamos la siguiente relación

$$\frac{\partial}{\partial \xi} F_2^{1loop}(q^2 \rightarrow 0) = 0 \quad (3.17)$$

Entonces, sumando los términos 3.14 y 3.16, podemos observar que

$$\begin{aligned} & F_2^{1loop}(\rightarrow 0) \\ &= \frac{\sqrt{2}G_\mu}{16\pi^2} \left\{ \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{m^4(x+y)^3}{m_z^2(1-x-y)\xi + m^2(x+y)^2} - \frac{m^4(x+y)^3}{m_z^2(1-x-y) + m^2(x+y)^2} \right. \\ & \left. - m^2(2-3x-3y) \log \left[\frac{m^2(x+y)^2 + m_z^2(1-x-y)}{m^2(x+y)^2 + m_z^2(1-x-y)\xi} \right] + \frac{2m^4(x+y)^2}{m^2(x+y)^2 + m_z^2(1-x-y)\xi} \right\} \end{aligned} \quad (3.18)$$

ahora usamos la relación 3.17 en 3.18 y obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_2^{1loop}(q^2 \rightarrow 0)}{\partial \xi} &= \frac{\sqrt{2}G_\mu}{16\pi^2} m^2 m_z^2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left\{ \frac{2m^2(x+y)^2(1-x-y)}{[m^2(x+y)^2 + m_z^2(1-x-y)\xi]^2} \right. \\ & \left. - \frac{(2-3x-3y)(1-x-y)}{m^2(x+y)^2 + m_z^2(1-x-y)\xi} - \frac{m^2(1-x-y)(x+y)^3}{[m^2(x+y)^2 + m_z^2(1-x-y)\xi]^2} \right\} \end{aligned}$$

haciendo un cambio de variables en los parámetros de Feynman $t = (x+y)$ y $z = (x-y)/t$, tenemos entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_2^{1loop}(q^2 \rightarrow 0)}{\partial \xi} &= \frac{\sqrt{2}G_\mu m^2 m_z^2}{8\pi^2} \int_0^1 dt \left\{ \frac{2m^2 t^2 (1-t)}{[m^2 t^2 + m_z^2 \xi (1-t)]^2} + \frac{(3t-2)(1-t)}{m^2 t^2 + m_z^2 (1-t)\xi} \right. \\ & \left. - \frac{m^2 t^3 (1-t)}{[m^2 t^2 + m_z^2 (1-t)\xi]^2} \right\} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.19)$$

por lo tanto, para el caso donde la masa del fermión cumple $m_z^2 \gg m^2$, tenemos que la contribución al momento magnético anómalo electrodébil por parte del bosón z_0 es:

$$F_2^{1loop}(q^2 \rightarrow 0) \approx \frac{\sqrt{2}G_\mu m^2}{16\pi^2} \frac{(4 \sin^2 \theta_2 - 1)^2 - 5}{3} \quad (3.20)$$

Para el caso donde $m \gg m_z^2$, el resultado de 3.9 tendríamos

$$F_2^{1loop}(q^2 \rightarrow 0) \approx -\frac{\sqrt{2}G_\mu m_z^2}{16\pi^2} \frac{3(4 \sin^2 \theta_w - 1)^2 - 5}{2} \quad (3.21)$$

3.1.1. Nuevas consideraciones

Límite simétrico

Si tomamos el límite simétrico $q^2 = p'^2 = p^2$, que afecta solo al denominador y considerando 2.67 para el primer término, tenemos para el denominador 3.4:

$$\begin{aligned}
 D_1 &= k^2(1-x-y) - m_z^2(1-x-y) + p^2x + k^2x - 2k \cdot px - m^2x + p'^2y \\
 &\quad + k^2y - 2k \cdot p'y - m^2y \\
 &= l^2 - q^2(x^2 + y^2 + xy - x - y) - m^2(x+y) - m_z^2z \\
 &= l^2 - \Delta
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

hemos considerado el cambio de momento 2.30 y donde

$$\Delta = q^2(x^2 + y^2 + xy - x - y) + m^2(x+y) + m_z^2(1-x-y)$$

el factor de forma magnético en el límite simétrico para el primer término de 3.1

$$\begin{aligned}
 &F_2^{1loop}(q^2 \rightarrow 0) \\
 &= \frac{-g^2}{(32\pi^2)2 \cos^2 \theta_2} \int_0^1 d \int_0^{1-x} dy \left[\frac{4m^2(1-x-y)(2-x-y)}{m_z^2(1-x-y) + m(x+y)} (v_f^2 + a_f^2) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{8m^2(1-x-y)}{m_z^2(1-x-y) + m(x+y)} (v_f^2 - a_f^2) \right]
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Para el segundo término de 3.1, usamos 2.67 el denominador queda como:

$$\begin{aligned}
 D_2 &= k^2(1-x-y-z) - m_z^2(1-x-y-z) + (p-k)^2x - m^2x + (p'-k)^2y \\
 &\quad - m^2y + k^2z - m_z^2z\zeta \\
 &= l^2 - m_z^2(1-x-y-z+z\zeta) - m^2(x+y) - q^2(x^2 + y^2 + xy - x - y) \\
 &= l^2 - \Delta
 \end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos

$$\begin{aligned}
 &F_2^{1loop}(q^2 \rightarrow 0) \\
 &= (1-\zeta) \frac{\sqrt{2}G_\mu m_z^2}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz \left[\frac{2m^2 - 3m^2(x+y)}{m^2(x+y) + m_z^2(1-x-y-z+z\zeta)} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{m^4(x+y)^3}{[m(x+y) + m_z^2(1-x-y-z+z\zeta)]^2} \right]
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

y la evaluación de 3.15 nos da

$$F_2^{1loop}(q^2 \rightarrow 0) = \frac{\sqrt{2}G_\mu m^2}{16\pi^2} \int_0^1 dx \frac{-2m^2(x+y)^3}{m^2(x+y) + m_z^2(1-x-y)\zeta} \tag{3.25}$$

haciendo el mismo procedimiento, usamos la condición de independencia de norma 3.17 y el cambio de variable $t = (x + y)$ y $z = (x - y)/t$, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial F^{1loop}(q^2 \rightarrow 0)}{\partial \xi} &= \frac{\sqrt{2}G_\mu m^2 m_z^2}{8\pi^2} \int_0^1 dt \left[\frac{2m^2 t^3 (1-y)}{[m^2 t + m_z^2 \xi (1-t)]^2} + \frac{(3t-2)(1-t)t}{m^2 t + m_z^2 (1-t)\xi} \right. \\ &\quad \left. - \frac{m^2 t^4 (1-t)}{[m^2 t + m_z^2 (1-t)\xi]^2} \right] \\ &= \frac{\sqrt{2}G_\mu m^2}{16\pi^2} \frac{m^6 m_z^4 (2m^2 + 3m_z^2 \xi)}{(m^2 - m_z^2 \xi)^6} \log\left(\frac{m^2}{m_z^2 \xi}\right) \\ &\quad - \frac{m^2 m_z^2 (3m^6 + 47m^4 m_z^2 \xi + 11m^2 m_z^4 \xi - m_z^6 \xi^3)}{12(m^2 - m_z^2 \xi)^5} \end{aligned} \quad (3.26)$$

cuando consideramos el límite simétrico la contribución de Z_0 no es invariante de norma, ya que depende del parámetro de norma ξ , pero si consideramos el caso paara $m_z^2 \gg m^2$:

$$F_2^{1loop}(q^2 \rightarrow 0) = \frac{\sqrt{2}G_\mu m^2}{8\pi^2} \mathcal{O}\left(\frac{m^2}{m_z^2}\right) \approx 0 \quad (3.27)$$

Mientras que para el caso de $m^2 \gg m_z^2$ tenemos un término $(\sqrt{2}G_\mu m_z^2/8\pi^2)(-1/4)$ más término de orden $\mathcal{O}(m_z^2/m^2)$. Por lo tanto, el límite simétrico funciona bien cuando la masa del bosón Z , m_z es mucho mayor que la de los leptones, esto puede funcionar muy bien para el electrón y el muón, ya que ambos tienen masas de unos cuantos MeV's 5.1 y la masa de Z es de alrededor de 90GeV , por lo que se estima que tengan un resultado similar a comparación del límite de capa de masa pero para τ existe una diferencia más corta entre sus masas lo que provoca una error mayor para su momento magnético anómalo.

Calculando para cada leptón e, μ, τ , tenemos:

| | $LCM : q^2 \rightarrow 0$ | $LS : q^2 \rightarrow 0$ | $LCM : q^2 = -m_z^2$ | $LS : q^2 = -m_z^2$ |
|--------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| e | -4.50321×10^{-14} | -4.50321×10^{-14} | -3.27378×10^{-14} | -2.29503×10^{-14} |
| μ | -1.92521×10^{-9} | -1.92521×10^{-9} | -1.39964×10^{-9} | -9.81194×10^{-10} |
| τ | -5.42296×10^{-7} | -5.42163×10^{-7} | -3.95678×10^{-7} | -2.77408×10^{-7} |

CUADRO 3.1: Contribución del bosón Z_0

| | $\Delta a_l(m_z)$ |
|--------|----------------------------|
| e | $-9,78749 \times 10^{-15}$ |
| μ | $-4,18445 \times 10^{-10}$ |
| τ | $-1,1827 \times 10^{-7}$ |

CUADRO 3.2: Diferencia de AMDM para Z_0 en $q^2 = -m_z^2$

Hemos visto que la independencia de norma en el límite simétrico 2.66 es válida únicamente cuando el bosón Z_0 es mucho más grande que la partícula a considerar 3.27, por lo tanto, obtenemos el mismo resultado que en el límite de capa de masa para el electrón y el muón. Note que para este caso no fue necesario usar la definición 2.95 ya que obtenemos el mismo resultado y no se observa el factor de 3 a comparación de QED 2.69, por lo tanto, usamos la definición normal del momento magnético anómalo 2.16.

3.2. Contribución del bosón de Higgs

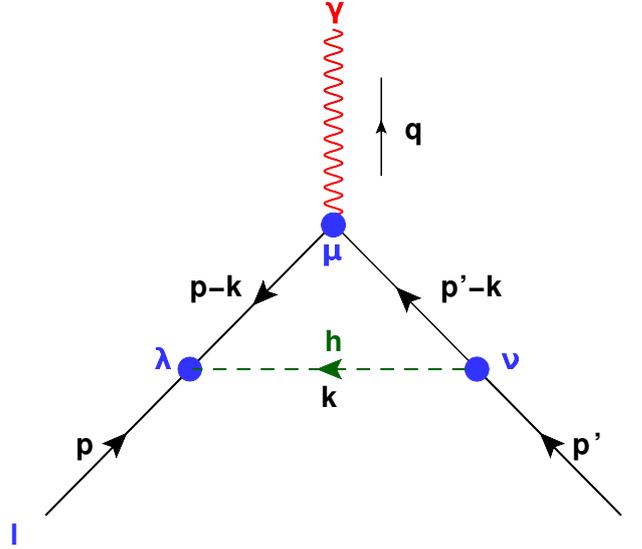


FIGURA 3.3: Contribución del Boson de Higgs

Usamos las siguientes reglas de Feynman B.4, B.3, B.1 y B.13 con m la masa del leptón y m_H la masa del bosón de Higgs, calculando el diagrama:

$$\begin{aligned}
 ie\Gamma_{1loop}^{\mu}(p, p') &= \int_{reg} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-ig}{2} \frac{m}{m_w} \frac{i(\not{p}' - \not{k} + m)}{[(p' - k)^2 - m^2 + i\epsilon]} ie\gamma^{\mu} \frac{i(\not{p} - \not{k}) + m}{[(p - k)^2 - m^2 + i\epsilon]} \\
 &\quad \times \frac{-ig}{2} \frac{m}{m_w} \frac{i}{k^2 - m_H^2 + i\epsilon} \\
 &= \frac{eg^2}{4} \frac{m^2}{m_w^2} \int_{reg} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{N^{\mu}}{D} \tag{3.28}
 \end{aligned}$$

donde

$$N^{\mu} = [\not{p}' - \not{k} + m]\gamma^{\mu}[\not{p} - \not{k} + m] \tag{3.29}$$

y

$$D = [k^2 - m_H^2 + i\epsilon][(p - k)^2 - m^2 + i\epsilon][(p' - k)^2 - m^2 + i\epsilon] \tag{3.30}$$

Usando la parametrización de Feynman de tres factores 2.26, el momento externo on-shell 2.28 y 2.29, podemos simplificar el denominador 3.30:

$$\begin{aligned}
 D &= k^2z - m_H^2z + (p - k)^2x - m^2x + (p' - k)^2y - m^2y \\
 &= l^2 - m^2(1 - z)^2 + (1 - y - z) y q^2 - m_H^2z \\
 &= l^2 - \Delta \tag{3.31}
 \end{aligned}$$

usando el cambio de momento 2.30 y donde definimos:

$$\Delta = m^2(1 - z)^2 + m_H^2z - (1 - y - z) y q^2 \tag{3.32}$$

ahora calculamos el numerador 3.29 usando 2.34 y 2.39:

$$\begin{aligned} N^\mu &= [\not{p}' - \not{k} + m] \gamma^\mu [\not{p} - \not{k} + m] \\ &= \frac{(2-d)}{d} l^2 \gamma^\mu + m^2 (1+z)^2 \gamma^\mu + (1-y-z) y q^2 \gamma^\mu + m(1-z^2) i \sigma^{\mu\nu} q_\nu \end{aligned} \quad (3.33)$$

Considerando la distribución de la estructura de las matrices gamma 2.45 y de los factores de forma 2.49, tenemos que para el factor de forma magnético es:

$$\begin{aligned} F_2^{1loop}(q^2 \rightarrow 0) &= \frac{i g^2 m^2}{4 M^2} \int_{reg} \frac{d^4}{(2\pi)^4} 2 \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz \delta(1-x-y-z) \frac{2m^2(1-z^2)}{[l^2 - \Delta + i\epsilon]^3} \\ &= \frac{\sqrt{2} G_\mu m^2}{8\pi^2} \int_0^1 dz \frac{(1-z)^2(1+z)}{(1-z)^2 + z(m_H^2/m^2)} \end{aligned} \quad (3.34)$$

considerando los casos $m_H^2 \gg m^2$ y $m^2 \gg m_H^2$:

$$F_2^{1loop}(q^2 \rightarrow 0) \approx \frac{\sqrt{2} G_\mu m^2}{8\pi^2} \begin{cases} \frac{m^2}{m_H^2} \log \frac{m_H^2}{m^2} - \frac{7}{6} \frac{m^2}{m_H^2} & \text{para } m_H \gg m \\ \frac{3}{2} & \text{para } m_H \ll m \end{cases} \quad (3.35)$$

si hubiéramos tomado el límite simétrico 2.66, considerando 2.67, el denominador 3.30, queda ahora como:

$$\begin{aligned} D &= k^2 z - m_H^2 z + p^2 x + k^2 x - 2k \cdot px - m^2 x + p'^2 y + k^2 y - 2k \cdot p'y - m^2 y \\ &= l^2 - q^2(x^2 + y^2 + xy - x - y) - m^2(1-z) - m_H^2 z \\ &= l^2 - \Delta \end{aligned} \quad (3.36)$$

donde

$$\Delta = q^2(x^2 + y^2 + xy - x - y) + m^2(1-z) + m_H^2 z$$

y usamos el cambio de variable 2.30, tenemos entonces para el factor de forma magnético

$$F_2^{1loop}(q^2 \rightarrow 0) = \frac{\sqrt{2} G_\mu m^2}{8\pi^2} \int_0^1 dz \frac{(1-z)^2(1+z)}{(1-z) + (m_H^2/m^2)z} \quad (3.37)$$

tomando los mismos casos $m_H^2 \gg m^2$ y $m_H^2 \ll m^2$ obtenemos el mismo resultado de 3.35, además, observamos que esta contribución es invariante de norma tanto para el límite de capa de masa como el simétrico. Denotamos al límite de capa de masa como LCM y al límite simétrico como LS:

| Lepton | LCM : $q^2 \rightarrow 0$ | LS : $q^2 \rightarrow 0$ | LCM : $q^2 = -m_z^2$ | LS : $q^2 = -m_z^2$ |
|--------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| e | 2.15258×10^{-23} | 2.15258×10^{-23} | 1.75479×10^{-24} | 1.40322×10^{-24} |
| μ | 2.16055×10^{-14} | 2.16055×10^{-14} | 3.2074×10^{-15} | 2.5648×10^{-15} |
| τ | 9.7781×10^{-10} | 9.7765×10^{-10} | 2.55823×10^{-10} | 2.0465×10^{-10} |

CUADRO 3.3: Contribución del bosón de Higgs

podemos ver que al tomar $q^2 \rightarrow 0$ los valores se mantienen igual en ambos límites excepto para τ que tiene una pequeña variación, por otra parte, en el caso $q^2 = -m_z^2$, tienen una fluctuación de

| Lepton | $\Delta a_l(m_z)$ |
|--------|---------------------------|
| e | $3,51577 \times 10^{-25}$ |
| μ | $6,42603 \times 10^{-16}$ |
| τ | $5,11736 \times 10^{-11}$ |

CUADRO 3.4: Diferencia del AMDM para $q^2 = -m_z^2$

3.3. Contribución del bosón W

Para la contribución electrodébil por parte del bosón W, necesitamos calcular 3.4, 3.5, 3.6 y 3.7

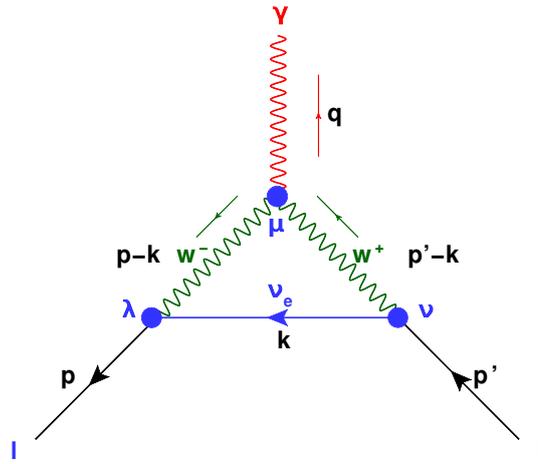


FIGURA 3.4: Contribución 1(a) al AMDM por parte del bosón W

El diagrama de la figura 3.2 se evalúa usando B.3, B.8 y B.9, donde hemos considerado un neutrino con masa m_ν , m es la masa del leptón y m_w es la masa del bosón W, se tiene:

$$\begin{aligned}
& ie\Gamma^\mu(p, p') \\
&= \int_{reg} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} ie \left[-g^{\lambda\nu} (p-k + p'-k)^\mu + g^{\nu\mu} (q + p' - k)^\lambda + g^{\mu\lambda} (p - k - q)^\nu \right] \\
&\times \frac{-i}{(p' - k)^2 - m_w^2 + i\epsilon} \left[g_{\nu\alpha} - (1 - \xi) \frac{(p' - k)_\nu (p' - k)_\alpha}{(p' - k)^2 - \xi m_w^2} \right] \frac{-ig_w \gamma^\alpha}{\sqrt{2}} \left(\frac{1 - \gamma_5}{2} \right) \\
&\frac{i(\not{k} + m_\nu)}{k^2 - m_\nu^2 + i\epsilon} \frac{-ig_w \gamma^\beta}{\sqrt{2}} \left(\frac{1 - \gamma_5}{2} \right) \frac{-i}{(p - k)^2 - m_w^2 + i\epsilon} \left[g_{\lambda\beta} - (1 - \xi) \frac{(p - k)_\lambda (p - k)_\beta}{(p - k)^2 - \xi m_w^2} \right] \\
&= \frac{-eg_w^2}{8} \int_{reg} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[\frac{N_1^\mu}{D_1} - (1 - \xi) \frac{N_2^\mu}{D_2} - (1 - \xi) \frac{N_3^\mu}{D_3} + (1 - \xi)^2 \frac{N_4^\mu}{D_4} \right] \quad (3.38)
\end{aligned}$$

donde usamos $(1 - \gamma_5)^2 = 2(1 - \gamma_5)$ y $(1 + \gamma_5)(1 - \gamma_5) = 0$, por lo tanto el término con m_ν en el numerador, se anula

$$\begin{aligned}
N_1^\mu &= \left[g^{\lambda\nu} (2k - p - p')^\mu + g^{\nu\mu} (2p' - p - k)^\lambda + g^{\mu\lambda} (2p - p' - k)^\nu \right] \\
&\times \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \not{k} \gamma^\beta (1 - \gamma_5) g_{\nu\alpha} g_{\lambda\beta} \quad (3.39)
\end{aligned}$$

$$N_2^\mu = \left[g^{\lambda\nu}(2k - p - p')^\mu + g^{\nu\mu}(2p' - p - k)^\lambda + g^{\mu\lambda}(2p - p' - k)^\nu \right] \\ \times \gamma^\alpha(1 - \gamma_5) \not{k} \gamma^\beta(1 - \gamma_5) g_{\nu\alpha}(p - k)_\lambda (p - k)_\beta \quad (3.40)$$

$$N_3^\mu = \left[g^{\lambda\nu}(2k - p - p')^\mu + g^{\nu\mu}(2p' - p - k)^\lambda + g^{\mu\lambda}(2p - p' - k)^\nu \right] \\ \times \gamma^\alpha(1 - \gamma_5) \not{k} (1 - \gamma_5) g_{\lambda\beta}(p' - k)_\nu (p' - k)_\alpha \quad (3.41)$$

$$N_4^\mu = \left[g^{\lambda\nu}(2k - p - p')^\mu + g^{\nu\mu}(2p' - p - k)^\lambda + g^{\mu\lambda}(2p - p' - k)^\nu \right] \\ \times \gamma^\alpha(1 - \gamma_5) \not{k} \gamma^\beta(1 - \gamma_5) (p' - k)_\nu (p' - k)_\alpha (p - k)_\lambda (p - k)_\beta \quad (3.42)$$

y

$$D_1 = [(p' - k)^2 - m_w^2 + i\epsilon][k^2 - m_v^2 + i\epsilon][(p - k)^2 - m_w^2 + i\epsilon] \quad (3.43)$$

$$D_2 = [(p' - k)^2 - m_w^2 + i\epsilon][k^2 - m_v^2 + i\epsilon][(p - k)^2 - m_w^2 + i\epsilon][(p - k)^2 - \xi m_w^2] \quad (3.44)$$

$$D_3 = [(p' - k)^2 - m_w^2 + i\epsilon][k^2 - m_v^2 + i\epsilon][(p - k)^2 - m_w^2 + i\epsilon][(p' - k)^2 - \xi m_w^2] \quad (3.45)$$

$$D_4 = [(p' - k)^2 - m_w^2 + i\epsilon][k^2 - m_v^2 + i\epsilon][(p - k)^2 - m_w^2 + i\epsilon][(p - k)^2 - \xi m_w^2] \\ [(p' - k)^2 - \xi m_w^2] \quad (3.46)$$

Hemos dividido la evaluación del diagrama 3.2 en cuatro términos como se muestran en la ecuación 3.38, calcularemos cada uno.

Primer término

El primer término de 3.38, usando la parametrización de Feynman de tres factores 2.26, usando también el momento *on-shell* 2.28, 2.29 y el cambio de momento 2.30, tenemos

$$D_1 = k^2 z - m_v^2 z + (p - k)^2 x - m_w^2 x + (p' - k)^2 y - m_w^2 y \\ = l^2 - \Delta \quad (3.47)$$

donde

$$\Delta = m_v^2 z + m_w^2 (1 - z) - m^2 z (1 - z) - (1 - y - z) y q^2$$

el numerador 3.39, queda sin contar con γ_5 :

$$N_1^\mu = 2[(2k - p - p')^\mu \gamma_\beta \not{k} \gamma^\beta + \gamma^\mu \not{k} (2p' - p - k) + (2p - p' - k) \not{k} \gamma^\mu](1 - \gamma_5) \quad (3.48)$$

distribuimos con respecto a las matrices γ :

$$N_1^\mu = \tilde{N}_{11} \gamma^\mu + \tilde{N}_{12} \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m}$$

donde

$$\tilde{N}_{11} = 8l^2(d^{-1} - 1)l^2 + 4(1 - d)m^2 z(1 - z) - 4(1 - z - (1 - y - z)y)q^2$$

y

$$\tilde{N}_{12} = 4m^2(1-z)[(2-d)z+3] = 4m^2(1-z)(3-2z)$$

distribuyendo de acuerdo a sus factores de forma 2.49 y como la integral converge, $d = 4$, entonces, tenemos para el factor de forma magnético:

$$\begin{aligned} F_2^{1loop}(q^2 \rightarrow 0) &= \frac{\sqrt{2}G_\mu m^2}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{2m_w^2(x+y)[2(x+y)+1]}{m_w^2(x+y) + m_v^2(1-x-y) - m^2(1-x-y)(x+y)} \end{aligned} \quad (3.49)$$

Calculando el segundo término

Usando la parametrización de Feynman de cuatro factores 3.10, tenemos para el denominador

$$\begin{aligned} D_2 &= k^2(1-x-y-z) - m_v^2(1-x-y-z) + (p-k)^2x - m_w^2x + (p'-k)^2y - m_w^2y \\ &\quad + (p-k)^2z - m_w^2\xi z \\ &= l^2 - \Delta \end{aligned} \quad (3.50)$$

con

$$\begin{aligned} \Delta &= m_w^2(x+y+z\xi) + m_v^2(1-x-y-z) - m^2(1-x-y-z)(x+y+z) \\ &\quad - (x+z)yq^2 \end{aligned} \quad (3.51)$$

donde hemos realizado el cambio de momento

$$l = k - p(x+z) - p'y \quad (3.52)$$

El numerador 3.40 queda como

$$\begin{aligned} N_2^\mu &= 2[(2k-p-p')^\mu(\not{p}-\not{k})\not{k}(\not{p}-\not{k}) + (2p'-p-k) \cdot (p-k)\gamma^\mu \not{k}(\not{p}-\not{k}) \\ &\quad + (p-k)^\mu(2\not{p}-\not{p}'-\not{k})\not{k}(\not{p}-\not{k})](1-\gamma_5) \end{aligned} \quad (3.53)$$

después de bastante algebra y distribuyendo de acuerdo a la estructura γ , tenemos

$$\begin{aligned} \tilde{N}_{22} &= -5l^2m^2(1-x-y-z) + 4l^2m^2(1-x-y-z)(x+y+z) \\ &\quad + 2m^4(1-x-y-z)^3(x+y+z) - 6l^2m^2y + 3l^2m^2 - 4m^4(1-x-y-z)^2y \\ &\quad - 4m^2q^2(x+z)(1-y)y + 4m^2q^2y + 2m^2q^2(1-x-y-z)^2(x+z)y \\ &\quad - 2m^2q^2(1-x-y-z)(1-x-z)y + 2m^2q^2(1-x-y-z)y \end{aligned} \quad (3.54)$$

usando A.15 y A.16.

Integrando el factor de forma magnético con respecto al parámetro z y manipulando un poco la integral para dejar todas las contribuciones en términos de los parámetros x y y , tenemos

$$F_2^{1loop}(q^2 \rightarrow 0) = \frac{\sqrt{2}G_\mu m^2}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left\{ -[6y+2-5(x+y)-4(1-x-y)(x+y)] \right\}$$

$$\begin{aligned}
& \times \ln \left[\frac{m_w^2(\xi x + y) - m^2(1-x-y)(x+y) + m_v^2(1-x-y)}{m_w^2(x+y) - m^2(1-x-y)(x+y) + m_v^2(1-x-y)} \right] \\
& + [2y - (1-x-y)(x+y)] \left[\frac{1}{m_w^2(x+y) - m^2(1-x-y)(x+y) + m_v^2(1-x-y)} \right. \\
& \left. - \frac{1}{m_w^2(\xi x + y) - m^2(1-x-y)(x+y) + m_v^2(1-x-y)} \right] \Bigg\} \quad (3.55)
\end{aligned}$$

Tercer término

$$\begin{aligned}
D_3 &= k^2(1-x-y-z) - m_v^2(1-x-y-z) + (p-k)^2x - m_w^2x + (p'-k)^2y - m_w^2y \\
& \quad + (p'-k)^2z - m_w^2z\xi \\
& = l^2 - \Delta \quad (3.56)
\end{aligned}$$

donde

$$\Delta = m_w^2(x+y+z\xi) + m_v^2(1-x-y-z) - m^2(1-x-y-z)(x+y+z)$$

y realizamos el cambio de momento

$$l = k - px - p'(y+z) \quad (3.57)$$

el numerador queda como:

$$\begin{aligned}
N_3^\mu &= 2[(2k-p-p')^\mu(p'-k)k(p'-k) + (p'-k)^\mu(p'-k)k(2p'-p-k) \\
& \quad (2p-p'-k) \cdot (p'-k)(p'-k)k\gamma^\mu](1-\gamma_5) \quad (3.58)
\end{aligned}$$

distribuyendo de acuerdo a su estructura γ 2.45 y la integral converge para \tilde{N}_{22} , con $d = 4$:

$$\begin{aligned}
\tilde{N}_{32} &= -5l^2m^2(1-x-y-z) + 4l^2m^2(1-x-y-z)(x+y+z) \\
& \quad + 2m^4(1-x-y-z)^3(x+y+z) + 2m^2q^2(1-x-y-z)^2(y+z)x \\
& \quad - 2m^2q^2(1-x-y-z)(1-y-z)x + 2m^2q^2(1-x-y-z)x + 3l^2m^2 \\
& \quad - 6l^2m^2x - 4m^4(1-x-y-z)^2x - 4m^2q^2(y+z)(1-x)x + 4m^2q^2x \quad (3.59)
\end{aligned}$$

El factor de forma magnético queda como:

$$\begin{aligned}
& F_2^{1loop}(q^2 \rightarrow 0) \\
& = \frac{\sqrt{2}G_\mu m^2}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left\{ - [6x+2-5(x+y)-4(1-x-y)(x+y)] \right. \\
& \quad \times \ln \left[\frac{m_w^2(x+\xi y) - m^2(1-x-y)(x+y) + m_v^2(1-x-y)}{m_w^2(x+y) - m^2(1-x-y)(x+y) + m_v^2(1-x-y)} \right] \\
& \quad + [2x - (1-x-y)(x+y)] \left[\frac{1}{m_w^2(x+y) - m^2(1-x-y)(x+y) + m_v^2(1-x-y)} \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{1}{m_w^2(x+\xi y) - m^2(1-x-y)(x+y) + m_v^2(1-x-y)} \right] \right\} \quad (3.60)
\end{aligned}$$

Haciendo un análisis similar al de 2.57 nos damos cuenta que el cuarto término de 3.38 no contribuye al AMDM ya que no contiene ningún término proporcional a $i\sigma^{\mu\nu}q_\nu$ que contiene la información del momento magnético.

3.4. Contribución de Bosones de Nambu-Goldstone

3.4.1. Primer contribución

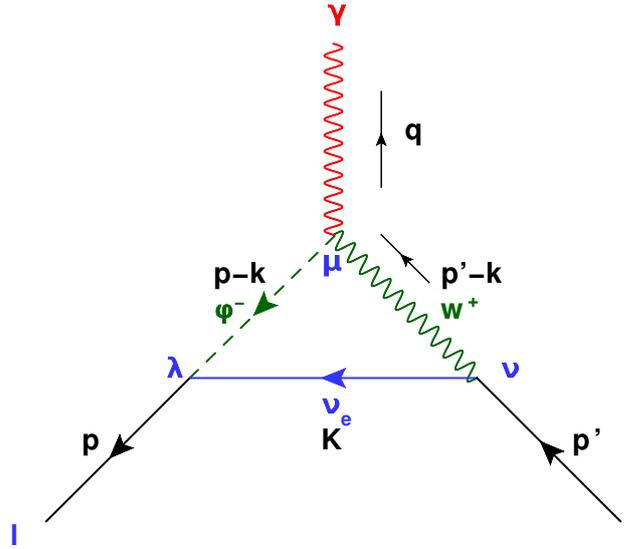


FIGURA 3.5: Contribución 1(b) al AMDM por parte del boson W

El diagrama se evalúa usando B.3, B.5, B.6, B.9, B.10, B.11 y consideramos m_w la masa del bosón W y m la masa del leptón:

$$\begin{aligned}
& ie\Gamma_{1loop}^\mu(p, p', q) \\
&= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-ig}{\sqrt{2}} \gamma^\alpha \left(\frac{1-\gamma_5}{2} \right) \frac{-i}{(p'-k)^2 - m_w^2 + i\epsilon} \left[g_{\nu\alpha} - (1-\xi) \frac{(p'-k)_\nu (p'-k)_\alpha}{(p'-k)^2 - \xi m_w^2} \right] \\
& \quad (iem_w g^{\mu\nu}) \frac{i}{(p-k)^2 - \xi m_w^2 + i\epsilon} \frac{-igm_l}{\sqrt{2}m_w} \left(\frac{1-\gamma_5}{2} \right) \frac{ik}{k^2 - m_l^2 + i\epsilon} \\
&= \frac{eg_w^2 m_l}{8} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[\frac{N_1}{D_1} - (1-\xi) \frac{N_2}{D_2} \right] \tag{3.61}
\end{aligned}$$

con

$$N_1^\mu = 2\gamma^\mu \not{k} (1-\gamma_5) = 2\gamma^\mu \not{k} \tag{3.62}$$

$$N_2^\mu = 2(p'-k)^\mu (\not{p}' - \not{k}) \not{k} (1-\gamma_5) = 2(p'-k)^\mu (\not{p}' - \not{k}) \not{k} \tag{3.63}$$

y

$$D_1 = [k^2 - m_l^2 + i\epsilon][(p-k)^2 - \xi m_w^2 + i\epsilon][(p'-k)^2 - m_w^2 + i\epsilon] \tag{3.64}$$

$$D_2 = [k^2 - m_l^2 + i\epsilon][(p-k)^2 - \xi m_w^2 + i\epsilon][(p'-k)^2 - m_w^2 + i\epsilon][(p'-k)^2 - \xi m_w^2] \tag{3.65}$$

donde hemos despreciado los términos proporcionales a γ_5 .

Primer término

Considerando solo el primer término de 3.61, simplificamos su denominador 3.64 usando la parametrización de Feynman de tres factores 2.26 con

$$\begin{aligned} D_1 &= k^2(1-x-y) - m_v^2(1-x-y) + (p-k)^2x - m_w^2\xi x + (p'-k)^2y - m_w^2y \\ &= l^2 - \Delta \end{aligned} \quad (3.66)$$

donde hemos hecho el cambio de momento 2.30 y donde

$$\Delta = m_w^2(\xi x + y) + m_v^2(1-x-y) - m^2(1-x-y)(x+y) - xyq^2 \quad (3.67)$$

simplificamos el numerador usando 2.30:

$$N_1^\mu = 2\gamma^\mu \not{k} = 2m(x+y)\gamma^\mu - 2yi\sigma^{\mu\nu}q_\nu \quad (3.68)$$

usando la distribución de estructura de matrices gamma 2.45 y la distribución de los factores de forma 2.49, finalmente tomamos el límite asintótico $q^2 \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} &F_2^{1loop}(q^2 \rightarrow 0) \\ &= \frac{\sqrt{2}G_\mu m^2}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{2m_w^2 y}{m_w^2(\xi x + y) + m_v^2(1-x-y) - m^2(1-x-y)(x+y)} \end{aligned} \quad (3.69)$$

Segundo término

Ahora calculamos el segundo término de 3.61 en on-shell 2.28, usando la parametrización de Feynman de cuatro factores 3.10, entonces, el 3.65, usando 2.28, se convierte en:

$$\begin{aligned} D_2 &= k^2(1-x-y-z) - m_v^2(1-x-y-z) + (p-k)^2x - \xi m_w^2x + (p'-k)^2y - m_w^2y \\ &\quad + (p'-k)^2z - \xi m_w^2z \\ &= l^2 - \Delta \end{aligned} \quad (3.70)$$

donde hemos realizado el cambio de momento 3.57 y

$$\begin{aligned} \Delta &= m_v^2(1-x-y-z) - m^2(1-x-y-z)(x+y+z) - y(x+z)q^2 \\ &\quad + m_w^2(\xi x + y + \xi z) \end{aligned} \quad (3.71)$$

calculando el numerador 3.63 usando el cambio de momento 2.39, distribuyendo de acuerdo a su estructura de matriz γ , 2.45 y como la integral converge ponemos $d = 4$, obtenemos por el término proporcional a $i\sigma^{\mu\nu}q_\nu/2m$

$$\tilde{N}_{22} = l^2 m [2(1-x-y-z) - (x+y+z)] + 2m^3(1-x-y-z)^2(x+y+z)$$

tenemos de acuerdo a 2.49 para el factor de forma magnético

$$\begin{aligned} F_2^{1loop}(q^2 \rightarrow 0) &= \frac{\sqrt{2}G_\mu m^2}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \\ &\quad \left[[3(x+y) - 2] \ln \left[\frac{m_w^2 \xi(x+y) + m_v^2(1-x-y) - m^2(1-x-y)(x+y)}{m_w^2(\xi x + y) + m_v^2(1-x-y) - m^2(1-x-y)(x+y)} \right] \right] \end{aligned}$$

$$- m^2(1-x-y)^2(x+y) \left[\frac{1}{m_w^2(\xi x + y) + m_v^2(1-x-y) - m^2(1-x-y)(x+y)} - \frac{1}{m_w^2\xi(x+y) + m_v^2(1-x-y) - m^2(1-x-y)(x+y)} \right] \quad (3.72)$$

donde hemos evaluado con respecto al parámetro z y simplificado ξ de una manera más conveniente.

3.4.2. Segunda contribución

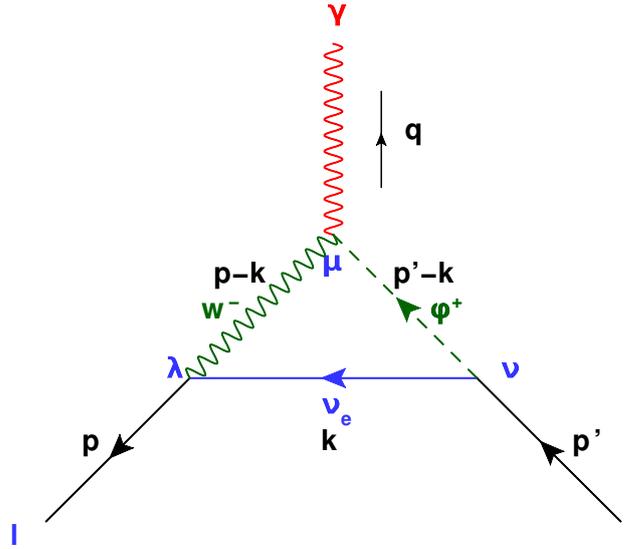


FIGURA 3.6: Contribución 1(c) al AMDM por parte del bosón W

El diagrama se evalúa usando B.3, B.5, B.6, B.9, B.10, B.11 y consideramos m_w como la masa del bosón W y m es la masa del leptón:

$$\begin{aligned} & ie\Gamma_{1loop}^\mu(p, p') \\ &= \int_{reg} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-igm_l}{\sqrt{2}m_w} \left(\frac{1-\gamma_5}{2} \right) \frac{ik}{k^2 - m_v^2 + i\epsilon} \frac{-ig_w\gamma^\alpha}{\sqrt{2}} \left(\frac{1-\gamma_5}{2} \right) \frac{-i}{(p-k)^2 - m_w^2 + i\epsilon} \\ & \quad \times \left[g_{\lambda\alpha} - (1-\xi) \frac{(p-k)_\lambda(p-k)_\alpha}{(p-k)^2 - \xi m_w^2} \right] (iem_w g^{\mu\lambda}) \frac{i}{(p'-k)^2 - \xi m_w^2 + i\epsilon} \\ &= \frac{eg_w^2 m}{8} \int_{reg} \frac{d^4k}{(2\pi)^3} \left[\frac{N_1^\mu}{D_1} - (1-\xi) \frac{N_2^\mu}{D_2} \right] \quad (3.73) \end{aligned}$$

donde

$$N_1^\mu = 2k^\mu(1 + \gamma_5) = 2k^\mu \quad (3.74)$$

$$N_2^\mu = 2(p-k)^\mu k^\mu (p-k)^\mu (1 + \gamma_5) = 2(p-k)^\mu k^\mu (p-k)^\mu \quad (3.75)$$

$$D_1 = [(p'-k)^2 - \xi m_w^2 + i\epsilon][(p-k)^2 - m_w^2 + i\epsilon][k^2 - m_v^2 + i\epsilon] \quad (3.76)$$

$$D_2 = [(p'-k)^2 - \xi m_w^2 + i\epsilon][(p-k)^2 - m_w^2 + i\epsilon][k^2 - m_v^2 + i\epsilon][(p-k)^2 - \xi m_w^2] \quad (3.77)$$

Primer término

Usando la parametrización de Feynman para tres factores 2.26, para el primer término de 3.73, tenemos entonces para el primer denominador 3.76:

$$\begin{aligned} D_1 &= k^2(1-x-y) - m_v^2(1-x-y) + (p-k)^2x - m_w^2x + (p'-k)^2y - \xi m_w^2y \\ &= l^2 - \Delta \end{aligned} \quad (3.78)$$

usando el cambio de momento 2.30, donde

$$\Delta = m_w^2(x + \xi y) + m_v^2(1-x-y) + xyq^2 - m^2(1-x-y)(x+y) \quad (3.79)$$

para el primer numerador 3.74, tenemos

$$N_1^\mu = 2k\gamma^\mu = 2m(x+y)\gamma^\mu - 2xi\sigma^{\mu\nu}q_\nu \quad (3.80)$$

Calculamos el factor de forma magnético para $d = 4$, ya que la integral converge y tomamos el límite asintótico $q^2 \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} F_2^{1loop}(q^2 \rightarrow 0) &= \frac{\sqrt{2}G_\mu m^2}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{2m_w^2x}{m_w^2(x + \xi y) + m_v^2(1-x-y) - m^2(1-x-y)(x+y)} \\ & \quad (3.81) \end{aligned}$$

Segundo término

Calculamos el segundo término de 3.73, usamos la parametrización de Feynman de cuatro factores 3.10 para simplificar el segundo denominador 3.77, tenemos

$$\begin{aligned} D_2 &= k^2(1-x-y-z) - m_v^2(1-x-y-z) + (p-k)^2x - m_w^2x + (p'-k)^2y - m_w^2\xi y \\ & \quad + (p-k)^2z - m_w^2\xi z \\ &= l^2 - \Delta \end{aligned}$$

con

$$\Delta = m_v^2(1-x-y) + m_w^2(x + \xi y + \xi z) - m^2(1-x-y-z)(x+y+z) - (x+z)yq^2$$

calculamos el numerador 3.75 distribuyendo de acuerdo a su estructura γ 2.45 y como la integral converge ponemos $d = 4$, tenemos

$$\tilde{N}_{22} = l^2 m [2(1-x-y-z) - (x+y+z)] + 2m^3(1-x-y-z)^2(x+y+z)$$

el factor de forma magnético es:

$$\begin{aligned} F_2^{1loop}(q^2 \rightarrow 0) &= \frac{\sqrt{2}G_\mu m^2}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \\ & \quad \left[[3(x+y) - 2] \ln \left[\frac{m_w^2\xi(x+y) + m_v^2(1-x-y) - m^2(1-x-y)(x+y)}{m_w^2(x + \xi y) + m_v^2(1-x-y) - m^2(1-x-y)(x+y)} \right] \right] \end{aligned}$$

$$- m^2(1-x-y)^2(x+y) \left[\frac{1}{m_w^2(x+\xi y) + m_v^2(1-x-y) - m^2(1-x-y)(x+y)} - \frac{1}{m_w^2\xi(x+y) + m_v^2(1-x-y) - m^2(1-x-y)(x+y)} \right] \quad (3.82)$$

3.4.3. tercera contribución

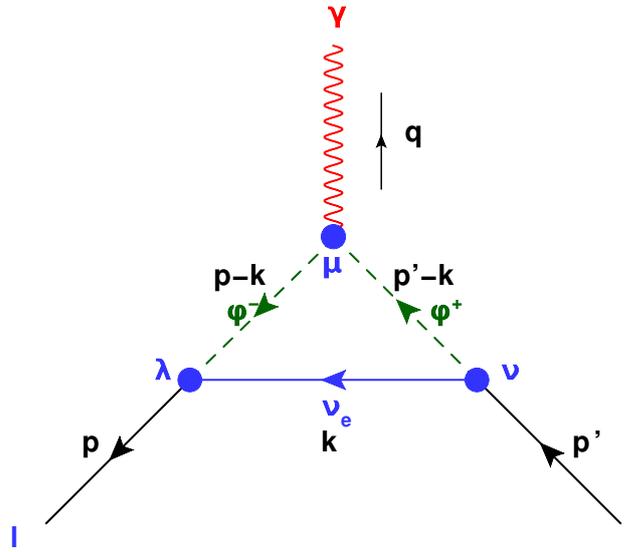


FIGURA 3.7: Contribución 1(d) al AMDM por parte del bosón W

Usando las siguientes reglas de Feynman B.3, B.6, B.11, B.12, tenemos entonces:

$$\begin{aligned} & ie\Gamma_{1loop}^\mu(p, p') \\ &= \int_{reg} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{(p'-k)^2 - \xi m_w^2 + i\epsilon} [ie(p+p'-2k)^\mu] \frac{i}{(p-k)^2 - \xi m_w^2 + i\epsilon} \\ & \quad \frac{-ig_w}{2\sqrt{2}} \frac{m}{m_w} (1-\gamma_5) \frac{i\mathbf{k} + m_\nu}{k^2 - m_\nu^2 + i\epsilon} \frac{ig_w}{2\sqrt{2}} \frac{m}{m_w} (1+\gamma_5) \\ &= -\frac{eg_w^2}{8} \frac{m^2}{m_w^2} \int_{reg} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{N^\mu}{D} \end{aligned} \quad (3.83)$$

donde

$$N^\mu = 2(p+p'-2k)^\mu \mathbf{k} (1-\gamma_5) = 2(p+p'-2k)^\mu \quad (3.84)$$

y

$$D = [k^2 - m_\nu^2 + i\epsilon][(p-k)^2 - \xi m_w^2 + i\epsilon][(p'-k)^2 - \xi m_w^2 + i\epsilon] \quad (3.85)$$

usamos la parametrización de Feynman de tres factores 2.26, tenemos

$$\begin{aligned} D &= k^2(1-x-y) - m_\nu^2(1-x-y) + p^2x + k^2x - 2k \cdot px - \xi m_w^2x + p'^2y + k^2y \\ & \quad - 2k \cdot p'y - \xi m_w^2y \\ &= l^2 - \Delta \end{aligned} \quad (3.86)$$

con el cambio de variable 2.30 y usamos la delta

$$\Delta = \xi m_w^2(x+y) - xyq^2 - m^2(x+y)(1-x-y) + m_v^2(1-x-y)$$

el numerador 3.84 queda como:

$$N^\mu = -4l^2 d^{-1} \gamma^\mu + 4m^2(1-x-y)(x+y)\gamma^\mu - 2m(1-x-y)(x+y)i\sigma^{\mu\nu}q_\nu$$

por lo tanto

$$F_2^{1loop}(q^2 \rightarrow 0) = \frac{\sqrt{2}G_\mu m^2}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{-2m^2(1-x-y)}{m_w^2 \xi - m^2(1-x-y)} \quad (3.87)$$

Debido a que obtenemos el mismo resultado para 3.5 y 3.6, por su simetría en el cambio de momento, podemos sumar solo uno de los dos diagramas y multiplicarlo por dos, elegimos el diagrama 3.5, por lo tanto, sumando todos los factores de forma para el boson W 3.49, 3.55, 3.60, 3.69, 3.72 y 3.87 y omitiendo el valor de $\sqrt{2}G_\mu m^2/16\pi^2$, obtenemos un verdadero monstruo:

$$\begin{aligned} & \frac{-2m^2(1-x-y)(x+y)}{m_w^2 \xi(x+y) + m_v^2(1-x-y) - m^2(1-x-y)(x+y)} \\ & + \frac{4m_w^2 y}{m_w^2(\xi x + y) + m_v^2(1-x-y) - m^2(1-x-y)(x+y)} \\ & + 2[3(x+y) - 2] \log \left[\frac{m_w^2 \xi(x+y) + m_v^2(1-x-y) - m^2(1-x-y)(x+y)}{m_w^2(\xi x + t) + m_v^2(1-x-y) - m^2(1-x-y)(x+y)} \right] \\ & - 2m^2(1-x-y)^2(x+y) \left[\frac{1}{m_w^2(\xi x + y) + m_v^2(1-x-y) - m^2(1-x-y)(x+y)} \right. \\ & \left. - \frac{1}{m_w^2(x+y) + m_v^2(1-x-y) - m^2(1-x-y)(x+y)} \right] \\ & + \frac{2m_w^2(x+y)[2(x+y) + 1]}{m_w^2(x+y) + m_v^2(1-x-y) - m^2(1-x-y)(x+y)} \\ & - 2[6y + 2 - 5(x+y) - 4(1-x-y)(x+y)] \\ & \times \ln \left[\frac{m_w^2(\xi x + y) + m_v^2(1-x-y) - m^2(1-x-y)(x+y)}{m_w^2(x+y) + m_v^2(1-x-y) - m^2(1-x-y)(x+y)} \right] \\ & 2m^2(1-x-y)^2[2y - (1-x-y)(x+y)] \\ & \times \left[\frac{1}{m_w^2(x+y) + m_v^2(1-x-y) - m^2(1-x-y)(x+y)} \right. \\ & \left. - \frac{1}{m_w^2(x+y) + m_v^2(1-x-y) - m^2(1-x-y)(x+y)} \right] \quad (3.88) \end{aligned}$$

para demostrar que es invariante de norma el resultado, procedemos como en 3.1, necesitamos demostrar que 3.12, tomamos el cambio de variable $t = (x+y)$ y $z = (x-y)/t$ y aplicamos 3.12, además consideramos m_v , teniendo así

$$\begin{aligned} & \int_0^1 dtt \int_{-1}^1 dz \left[\frac{m^2(1-t)t}{[m_w^2 \xi - m^2(1-t)]^2} + \frac{3t-2}{m_w^2 \xi - m^2(1-t)} \right. \\ & \left. \frac{2(1+z)[m_w^2(1-z) - m^2(1-t)^2(1+t-z)]}{[m_w^2[1+z(-1+\xi) + \xi] - 2m^2(1-t)]^2} + \frac{t(1+z)[4t-3(1+z)]}{m_w^2[1+z(-1+\xi) + \xi] - 2m^2(1-t)} \right] \quad (3.89) \end{aligned}$$

este resultado es cero, por lo tanto, podemos usar cualquier norma, lo comprobamos para la norma de Feynman $\zeta = 1$, Landau $\zeta = 1$ y unitaria $\zeta = \infty$, tenemos el mismo resultado considerando $m_w^2 \gg m^2$:

$$F_2^{1loop}(q^2 \rightarrow 0) = \frac{\sqrt{2}G_\mu m^2}{16\pi^2} \frac{10}{3} \quad (3.90)$$

si consideramos el límite simétrico 2.66 en todas las contribuciones que incluyen a W , 3.49 se convierte en

$$F_2^{1loop}(q^2 \rightarrow 0) = \frac{\sqrt{2}G_\mu m^2}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{2m_w^2(x+y)[2(x+y)+1]}{m_w^2(x+y) + m_v^2(1-x-y)} \quad (3.91)$$

3.55 en

$$F_2^{1loop}(q^2 \rightarrow 0) = \frac{\sqrt{2}G_\mu m^2}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left\{ -[6y+2-5(x+y)-4(1-x-y)(x+y)] \right. \\ \times \ln \left[\frac{m_w^2(\zeta x+y) + m_v^2(1-x-y)}{m_w^2(x+y) + m_v^2(1-x-y)} \right] + [2y - (1-x-y)(x+y)] \\ \left. \left[\frac{1}{m_w^2(x+y) + m_v^2(1-x-y)} - \frac{1}{m_w^2(\zeta x+y) + m_v^2(1-x-y)} \right] \right\} \quad (3.92)$$

este término sera el mismo para 3.60, ahora para 3.69, tenemos

$$F_2^{1loop}(q^2 \rightarrow 0) = \frac{\sqrt{2}G_\mu m^2}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{2m_w^2 y}{m_w^2(\zeta x+y) + m_v^2(1-x-y)} \quad (3.93)$$

para 3.72

$$F_2^{1loop}(q^2 \rightarrow 0) = \frac{\sqrt{2}G_\nu m^2}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \\ \left[[3(x+y)-2] \ln \left[\frac{m_w^2 \zeta(x+y) + m_v^2(1-x-y)}{m_w^2(\zeta x+y) + m_v^2(1-x-y)} \right] \right. \\ \left. - m^2(1-x-y)^2(x+y) \left[\frac{1}{m_w^2(\zeta x+y) + m_v^2(1-x-y)} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{m_w^2 \zeta(x+y) + m_v^2(1-x-y)} \right] \right] \quad (3.94)$$

y 3.87

$$F_2^{1loop}(q^2 \rightarrow 0) = \frac{\sqrt{2}G_\mu m^2}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{-2m^2(1-x-y)}{m_w^2 \zeta} \quad (3.95)$$

por lo tanto, procediendo igual que 3.17, tenemos que:

$$\int_0^1 dt \int_{-1}^1 dz \left[\frac{m^2(1-t)t^2}{m_w^2 \zeta^2} + \frac{3t^2 - 2t}{\zeta} \right. \\ \left. - \frac{2t(1-z)[m_w^2(1-z) - m^2(1-t)^2(1+t-z)]}{m_w^2[1+z(-1+\zeta) + \zeta]^2} - \frac{2t(1+z)[4t - 3(1+z)]}{1+z(-1+\zeta) + \zeta} \right] \quad (3.96)$$

al evaluarlo, resulta que es distinto de cero, por lo tanto, en el límite simétrico no se mantiene la invariancia de norma, pero cuando consideramos que la masa del bosón W es mucho más grande que las demás partículas involucradas, el término proporcional al parámetro de gauge se vuelve despreciable.

3.5. Conclusiones

Hemos obtenido el mismo resultado en las configuraciones de límite simétrico 2.66 y el límite de capa de masa 2.28 para la contribución del bosón de Higgs 3.3, mientras que para la contribución del bosón Z_0 3.1 y 3.2 es dependiente de norma para el límite simétrico pero puede ser despreciable el término que depende del parámetro de norma ξ cuando consideramos partículas más pequeñas que el bosón Z_0 como lo son e y μ , y se obtiene el mismo resultado que el límite simétrico como observamos en 3.2.

Para la contribución de W 3.3, 3.4, 3.5 y 3.6 hemos considerado al neutrino con masa, esto nos facilitará cálculos posteriores en QCD 4, hemos demostrado que en el límite de capa de masa 2.28 la contribución relacionada con el bosón W se mantiene invariante cuando tomamos m_ν , como se observa en 3.89. Sin embargo, cuando tomamos en cuenta la masa del neutrino m_ν el resultado ya no es invariante de norma. Al tomar la configuración simétrica 2.66, encontramos que el resultado depende del parámetro de norma ξ , como se observa en 3.96 pero, si tomamos el caso cuando la masa del bosón m_w es mayor que cualquier otra partícula que interactúa, el término depende de la norma se vuelve despreciable, esto funciona para los leptones e y μ .

Capítulo 4

Momento cromomagnético

Los momentos magnéticos anómalos del electrón y del muón han sido medidas con gran precisión 1.1 en la electrodinámica cuántica. La cantidad correspondiente para QCD es el momento dipolar cromomagnético anómalo (CMDM) de quarks que aún no ha sido precisamente conocida. Recientemente se ha realizado un análisis experimental del CMDM para el quark top [47], pero no se ha tomado mucha atención para el CMDM de los otros quarks. Cuando el LHC empiece a medir cantidades de QCD más precisas se podría esperar más interés en los CMDM anómalos y los factores de formas de los quarks.

Otra cantidad que puede ser conocida con más precisión en el LHC es la masa del gluón. No existe mecanismo de Higgs para QCD ya que la simetría de color de la teoría no se rompe. Por otro lado, un término de masa de Proca para el gluon rompe la simetría de norma, lo que conduce a una ruptura de la renormalizabilidad así como la violación de la unitariedad a altas energías por ciertas amplitudes a nivel árbol. Sin embargo existen algunas maneras para que un gluón pueda ser masivo de una forma invariante. Nosotros usaremos el modelo Curci-Ferrari [48], que tiene un término de masa de Proca como un término de *fijación de norma*, usa una interacción fantasma cuártica para hacerlo renormalizable.

En las últimas décadas, se ha estudiado las propiedades de las funciones de correlación de la cromodinámica cuántica en la norma de Landau. Se ha concluido que el propagador del gluón se satura en el infrarrojo mientras que el propagador fantasma diverge. Este comportamiento consiste con la presencia del gluón con *masa*, que se ha encontrado que debe de ser del orden de 500 MeV. El origen de esta masa sigue siendo muy debatida. Puede ser generada a través de efectos no perturbativos al truncar las ecuaciones de Schwinger-Dyson o por la integración del grupo de ecuaciones no perturbativas de renormalización. Del lado numérico, la saturación del propagador del gluón es vista en las simulaciones de lattice

Entender el origen de esta masa es de gran relevancia para el campo. Una manera consiste en estudiar a que extensión el comportamiento de QCD está relacionado con la presencia de esta masa. Esto se podría cumplir a través de extender el lagrangiano de QCD por medio de un término de masa para los gluones. El punto de inicio corresponde al modelo de Curci-Ferrari [48, 49]. Las funciones de correlación de los gluones, quarks y fantasmas fueron calculados a orden de un lazo en la teoría de perturbaciones y los resultados fueron comparados con las simulaciones de lattice. En la teoría de Yang-Mills donde las fluctuaciones de los quarks son despreciadas, los resultados de lattice pueden ser estimado con un error máximo de 10 – 20 % del rango disponible de momento. Este modelo es por lo tanto muy profético, ya que muchas características pueden ser reproducidas con solo *un* parámetro fenomenológico: la masa del gluón. Estos resultados son sorprendentes ya que en el régimen infrarrojo de QCD es no perturbativo. La aparente paradoja puede ser resultado al observar que la constante de acoplamiento deducida de las simulaciones de lattice y derivada de

calculos analíticos permanece finita y bastante suave en todo el rango de momento.

Gracey [50] da fuertes indicaciones de que el modelo de Curci Ferrari es un buen modelo fenomenológico para describir las funciones de correlación de QCD en la aproximación quenched y que una buena estimación de las contribuciones infrarrojas de lazos superiores es dada por el cuadrado de la constante de acoplamiento, dividida por el momento cuadrado típico. Este importante efecto asegura la convergencia de teoría de perturbaciones en el régimen intenso infrarrojo. Menciona que un cálculo del propagador del quark podría ser realizado. La situación ahora sería más compleja en este caso ya que existe dos masas presentes, la del quark y la del gluón, respectivamente, lo que conduce a un incremento en el número de integrales en las expresiones. Estos cálculos son de interés ya que el factor de renormalización de los quarks no recibe corrección a un lazo en la norma de Landau. Esto proporciona un estudio intermedio de cuando se hacen presente los efectos de la masa antes de que exista.

Existen análisis que estiman la masa del gluón en un gran intervalo de $500 \pm 200 \text{ MeV}$ usando cálculos numéricos de la masa de gap [51], a $\approx 800 \text{ MeV}$. Más recientemente, un análisis de quarks libre encuentra un límite superior de $\mathcal{O}(1) \text{ MeV}$. Esta claro que estos estudios dan la pregunta de si el gluón tiene o no masa aún tiene que ser establecido experimentalmente. Podemos esperar que las precisión de medición de cantidades de QCD, como el CMDM anómalo conducirá a límites para la masa del gluón.

4.1. Modelo de Curci-Ferrari

La descripción de la auto-interacción de mesones vectoriales en término de campos locales tiene dificultades. Para mencionar algunas, la teoría de Yang-Mills esta afectada por problemas sin resolver, es decir, las divergencias infrarrojas y la consecuente prueba de unitaridad.

Por otro lado, los mesones vectoriales masivos pueden ser descritos usando el fenómeno de Higgs a la teoría de Yang-Mills; este enfoque tiene la característica de requerir el rompimiento espontáneo de la simetría de gauge y la presencia de algunas partículas escalares masivas extras. Estos aspectos del fenómeno de Higgs son muy interesantes para los problemas fenomenológicos (en la teoría unificada de interacciones débiles y electromagnéticas), pero puede ser inconvenientes en otras situaciones. Si uno quiere considerar el límite de masa cero para estudiar el problema infrarrojo en la teoría de Yang-Mills sin masa. En la presencia del fenómeno de Higgs esto presenta muchas dificultades.

En la teoría de Yang-Mills sin masa, las identidades de Slavnov-Taylor son una importante herramienta para probar la renormalizabilidad y la unitaridad. Estas identidades son derivadas usando la invariancia de la acción bajo transformaciones no lineales introducidas por Becchi, Rouet y Stora (Transformaciones BRS) [52].

Curci y Ferrari [49] realizaron una generalización de las transformaciones BRS y demostraron que una clase de modelos Lagrangianos para los campos de Yang-Mills produce una acción invariante bajo estas transformaciones, incluso cuando los términos de masa son permitidos, sin embargo, se necesita un vértice de cuatro fantasmas de Faddeev-Popov.

Discutieron la renormalización de estos Lagrangianos y demostraron que la acción renormalizada tiene una invariancia análoga a la renormalizadas. Las ecuaciones sugieren que el límite para masa cero es suave, es decir, las funciones de Green

de la teoría de Yang-Mills masiva tiende al caso de sin masa cuando m va a cero. Sin embargo, no se discute en este artículo el problema físico de la unitariedad. Este modelo parte del siguiente Lagrangiano:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\mathbf{G}_{\mu\nu} \cdot \mathbf{G}^{\mu\nu} + \left\{ -\frac{\xi}{2}(\partial^\mu \mathbf{A}_\mu)^2 + \partial^\mu \boldsymbol{\varphi}^* \cdot \partial_\mu \boldsymbol{\varphi} - \frac{1}{2}g(\partial_\mu \boldsymbol{\varphi}^* \times \boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\varphi}^* \times \partial_\mu \boldsymbol{\varphi} + \beta \partial_\mu (\boldsymbol{\varphi}^* \times \boldsymbol{\varphi})) \cdot \mathbf{A}^\mu + \frac{1}{8\bar{g}}g^3(1 - \beta^2)(\boldsymbol{\varphi}^* \times \boldsymbol{\varphi})^2 \right\} + \frac{1}{2}m^2 A_\mu^2 - \frac{1}{\xi}m^2 \boldsymbol{\varphi}^* \boldsymbol{\varphi}$$

donde

$$\mathbf{G}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathbf{A}_\nu - \partial_\nu \mathbf{A}_\mu + g \mathbf{A}_\mu \times \mathbf{A}_\nu$$

el propagador del gluón es dada por B.15 es basa en la teoría de Yang-Mills sin masa, usamos el propagador del gluón de acuerdo al modelo de Curci-Ferrari dado por

$$D_{\mu\nu} = \frac{-i}{p^2 + m_g^2 + i\epsilon} \left[g_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{p_\mu p_\nu}{p^2 + \xi m_g^2 + i\epsilon} \right] \quad (4.1)$$

este propagador del gluón es el mismo que encontrarón Barnaföldi y Gogokhia en [53]

4.2. Contribución Abeliiana

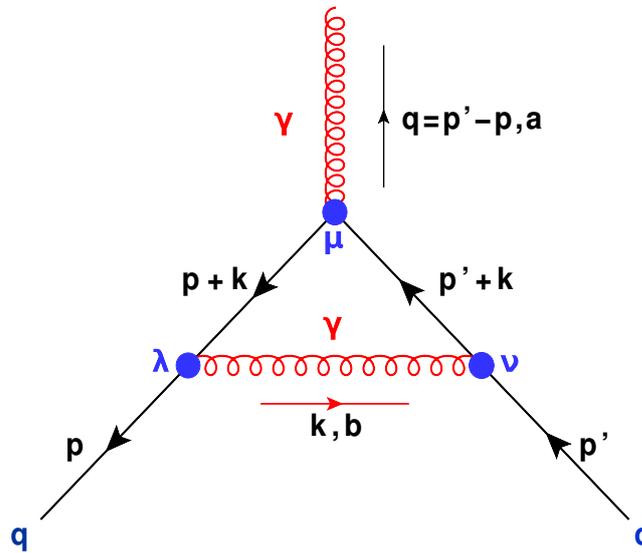


FIGURA 4.1: QCD abeliiana

Observamos que existe un gran parecido con el diagrama 2.21, de hecho la única diferencia existente es el factor de número de color N_c y el factor del número de leptones. La evaluación del diagrama se realiza usando las reglas de Feynman B.14, B.15 y B.16, tenemos entonces:

$$ig_s \Gamma_{1loop}^\mu(p, p', k) = \int_{reg} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (ig_s \gamma^\nu t^b) \frac{i(\not{p}' + \not{k} + m_q)}{(p' + k)^2 - m_q^2 + i\epsilon} (ig_s \gamma^\mu t^a) \frac{i(\not{p} + \not{k} + m_q)}{(p + k)^2 - m_q^2 + i\epsilon}$$

$$\begin{aligned}
& \times (ig_s \gamma^{\lambda t^b}) \frac{-i}{k^2 + i\epsilon} \left[g_{\lambda\nu} - (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right] \\
& = g^2 t^b t^a t^b \int_{reg} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[\frac{N_1^\mu}{D_1} - (1 - \xi) \frac{N_2^\mu}{D_2} \right]
\end{aligned} \tag{4.2}$$

donde

$$N_1^\mu = \gamma^\nu [\not{p}' + \not{k} + m_q] \gamma^\mu [\not{p} + \not{k} + m_q] \gamma_\nu \tag{4.3}$$

$$N_2^\mu = \not{k} [\not{p}' + \not{k} + m_q] \gamma^\mu [\not{p} + \not{k} + m_q] \not{k} \tag{4.4}$$

y

$$D_1 = [k^2 + i\epsilon][(p+k)^2 - m_q^2 + i\epsilon][(p'+k)^2 - m_q^2 + i\epsilon] \tag{4.5}$$

$$D_2 = [k^2 + i\epsilon]^2[(p+k)^2 - m_q^2 + i\epsilon][(p'+k)^2 - m_q^2 + i\epsilon] \tag{4.6}$$

calculamos el primer término de 4.2, primero simplificamos el denominador 4.3 usando la parametrización de Feynman de tres factores 2.26, los quarks externos en on-shell 2.28 y 2.29, tenemos:

$$\begin{aligned}
D_1 &= k^2 z + p^2 x + k^2 x + 2k \cdot px - m_q^2 x + p'^2 y + l^2 y + 2k \cdot py - m_q^2 y \\
&= l^2 - m_q^2 (1-z)^2 + (1-y-z) y q^2 \\
&= l^2 - \Delta
\end{aligned} \tag{4.7}$$

donde

$$\Delta = m_q^2 (1-z)^2 - (1-y-z) y q^2 \tag{4.8}$$

como el primer denominador 4.3 es exactamente que en QED 2.22, por lo tanto hacemos la misma distribución del numerador de acuerdo a su estructura gamma 2.45 y la distribución en factores de forma 2.49, por lo tanto tenemos para el factor de forma magnético, usando A.14

$$\begin{aligned}
& F_2^{1loop}(q^2 \rightarrow 0) \\
&= -2ig_s^2 \left[C_2(r) - \frac{1}{2} C_2(G) \right] \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{-4(1-x-y)(x+y)}{[l^2 - m_q^2(x+y)^2 + i\epsilon]^3} \\
&= \frac{g_s^2}{4\pi} \frac{1}{2\pi} \left[C_2(r) - \frac{1}{2} C_2(G) \right] \\
&= \frac{\alpha_s}{2\pi} \left[C_2(r) - \frac{1}{2} C_2(G) \right]
\end{aligned}$$

considerando que estamos en $SU(3)$ solamente tomamos $N = 3$ en B.20, B.21, así, tenemos:

$$F_2^{1loop}(q^2 \rightarrow 0) = \frac{\alpha_s}{2\pi} \left(\frac{-1}{2N} \right) = \frac{-\alpha_s}{12\pi} = -0.0265258 \tag{4.9}$$

Este resultado es el mismo obtenido en [54].

Si hubiéramos tomamos el límite simétrico 2.66, con 2.67 y $q \rightarrow 0$ el denominador

4.3 se convierte ahora en:

$$\begin{aligned} D &= k^2(1-x-y) + p^2x + k^2x + 2k \cdot px - m_q^2x + p'^2y + k^2y + 2k \cdot p'y - m_q^2y \\ &= l^2 - m_q^2(x+y) \end{aligned} \quad (4.10)$$

el numerador no se ve afectado, por lo tanto tenemos que el factor de forma magnético es el siguiente:

$$\begin{aligned} &F_2^{1loop}(q^2 \rightarrow 0) \\ &= -2ig_s^2 \left[C_2(r) - \frac{1}{2}C_2(G) \right] \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{-4(1-x-y)(x+y)}{[l^2 - m_q^2(x+y) + i\epsilon]^3} = \frac{-\alpha_s}{12\pi} \left(\frac{1}{3} \right) \end{aligned} \quad (4.11)$$

este resultado es el mismo que en 4.9 por un factor de 1/3. Esto sucede igual que en QED 2.56 y 2.69. Este resultado sigue siendo invariante de norma, por lo que podemos hacer nuestras consideraciones propuestas en QED de un propagador con masa 2.77 pero ahora en QCD usamos el propagador del gluón 4.1 propuesto por el modelo de Curci-Ferrari. Por lo tanto, tenemos los siguientes factores que son parecidas a 2.61, 2.79, 2.70 y 2.88 en QED con excepción del factor $(-1/2N)$, denotamos $MG = 0.1GeV$.

| | $LCM : q^2 = -MG^2$ | $LS : q^2 = -MG^2$ | $LCM : q^2 = -m_z^2$ | $LS : q^2 = -m_z^2$ |
|-----|---------------------|--------------------|---------------------------|----------------------------|
| u | -0.000595946 | -0.0000776629 | -1.99199×10^{-9} | -9.35157×10^{-11} |
| d | -0.00221934 | -0.000361384 | -8.63727×10^{-9} | -4.3713×10^{-10} |
| c | -0.0832473 | -0.0830331 | -0.000276242 | -0.0000323116 |
| s | -0.0702556 | -0.0506816 | -2.3882×10^{-6} | -1.73357×10^{-7} |
| t | -0,0833333 | -0,0833333 | -0,0796673 | -0,0718348 |
| b | -0.0833254 | -0.0833055 | -0.00215157 | -0.000348263 |

CUADRO 4.1: Contribución CMDM abeliana

Considerando el propagador de Curci-Ferrari

En el límite de capa de masa:

$$F_2^{1loop}(q^2) = \left(-\frac{1}{6} \right) \frac{\alpha_s}{\pi} \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{m^2 z(1-z)}{m^2(1-z)^2 + m_g^2 z - (1-y-z)yq^2} \quad (4.12)$$

en el límite simétrico

$$\begin{aligned} F_2^{1loop}(q^2) &= \left(-\frac{1}{6} \right) \frac{\alpha_s}{\pi} \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \\ &\frac{z(1-z)m^2}{(1-z)m^2 + m_g^2 z + q^2[(1-y-z)^2 + y^2 + (1-y-z)y - (1-y-z) - y]} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Graficamos primero el caso donde $q^2 \rightarrow 0$ para 4.12 y 4.13 que contiene el propagador de gluón con masa, para la integral del límite simétrico 4.13 usamos 2.95.

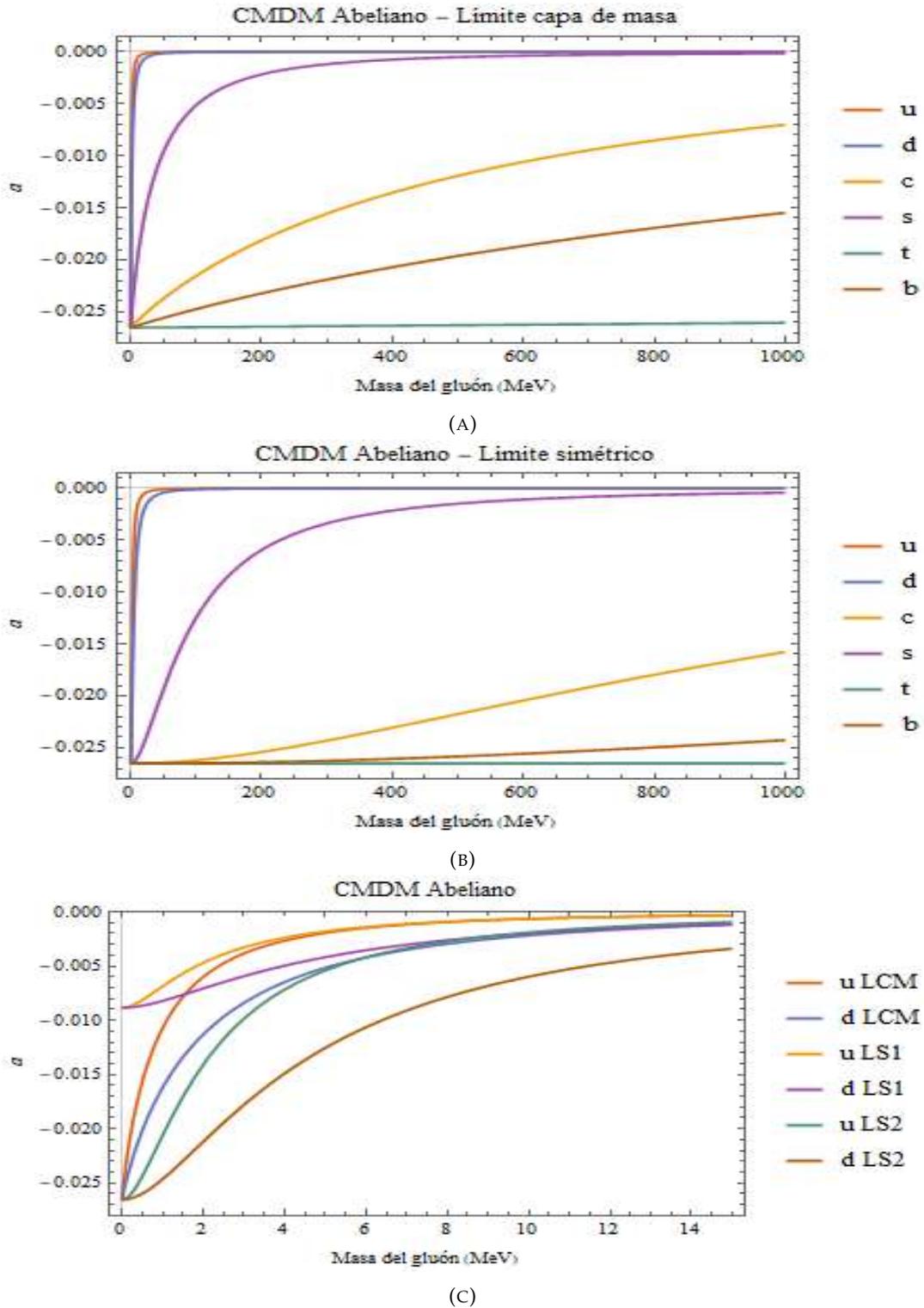


FIGURA 4.2: CMDM usando el modelo de Curci Ferrari en $q^2 \rightarrow 0$: a) Límite de capa de masa; b) Límite simétrico; c) quarks u y d, LCM es el límite de capa de masa, LS1 es el límite simétrico con CMDM 2.16 y LS2 es el límite simétrico con CMDM 2.95

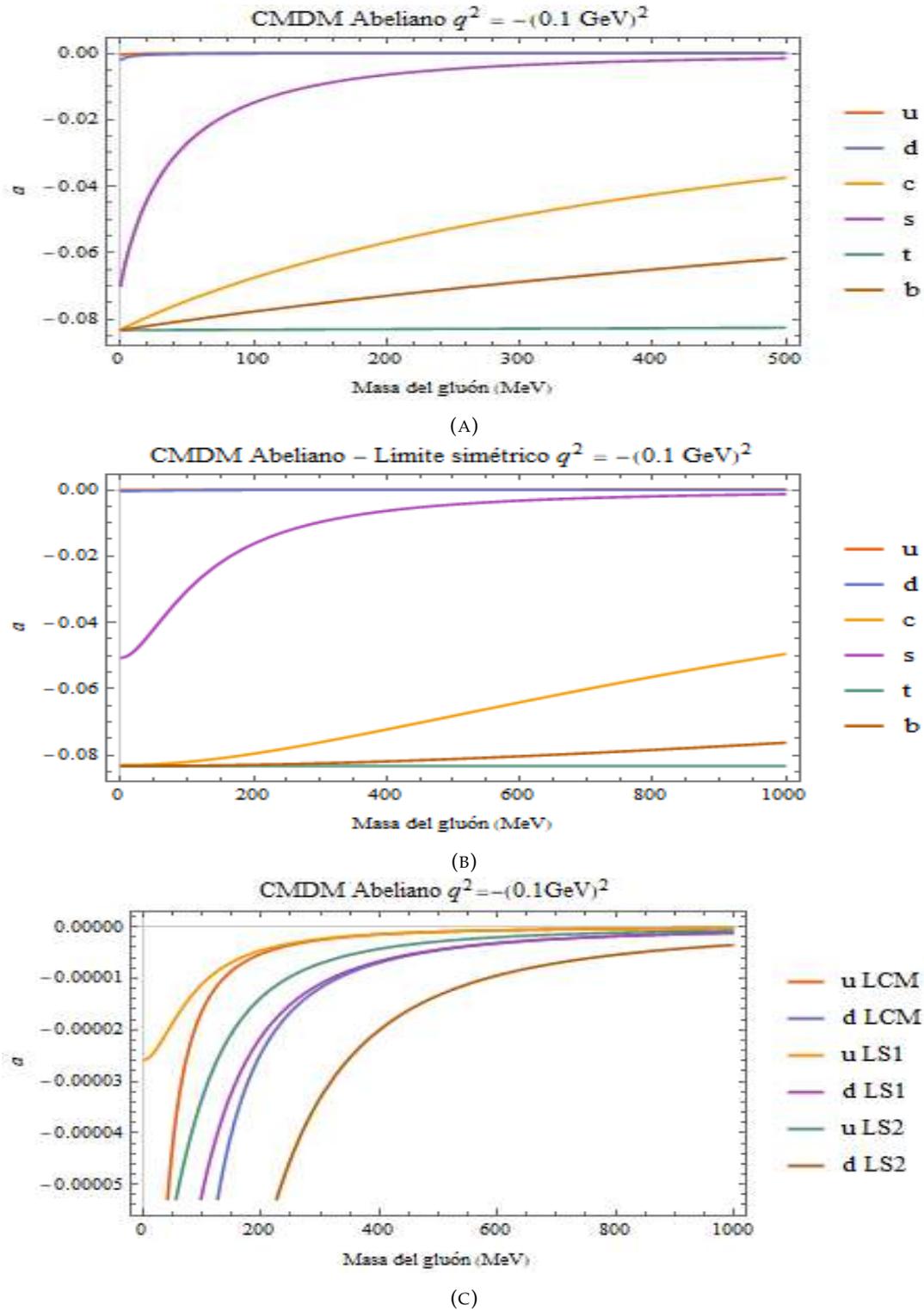
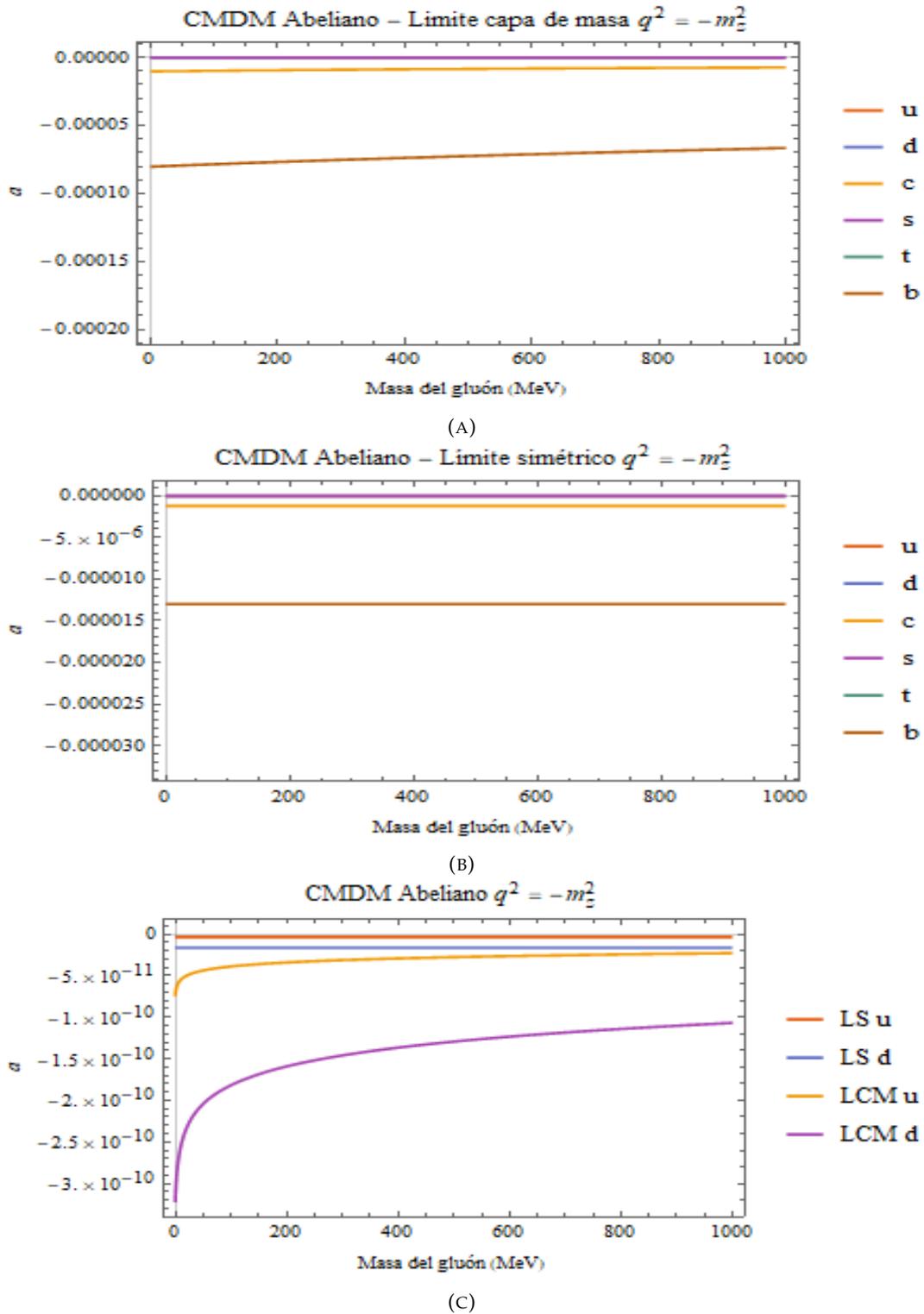


FIGURA 4.3: CMDM usando el modelo de Curci ferrado en $q^2 = -(0.1 \text{ GeV})^2$: a) Límite de capa de masa; b) Límite simétrico; c) quarks u y d, LCM es el límite de capa de masa, LS1 es el límite simétrico con CMDM 2.16 y LS2 es el límite simétrico con CMDM 2.95



4.3. Contribución no Abelianiana

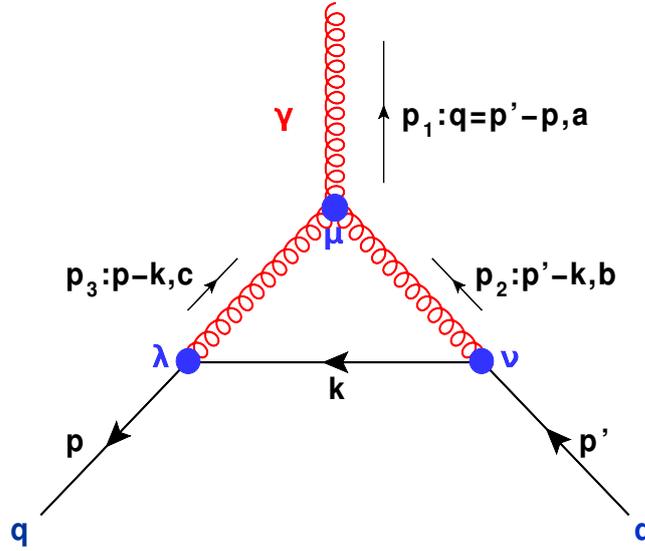


FIGURA 4.5: QCD no abelianiana

Evaluamos este diagrama usando la siguientes reglas de Feynman B.14, B.15, B.16, B.17 y considerando que para nuestro caso la función V B.18, queda como

$$V^{\mu_1\mu_2\mu_3}(-p_1, p_2, -p_3) = -(p_3 + p_2)^{\mu_1} g^{\mu_2\mu_3} + (p_3 - p_1)^{\mu_2} g^{\mu_3\mu_1} + (p_2 + p_1)^{\mu_3} g^{\mu_1\mu_2} \quad (4.14)$$

denotando m para la masa de los quarks y m_g para la masa del gluón, tenemos

$$\begin{aligned} & ig_s \Gamma^\mu(p, p') = \\ &= \int_{reg} \frac{d^4k}{(2\pi)^3} (-g_s f^{abc}) [-(p + p' - 2k)^\mu g^{\nu\lambda} + (p - k - q)^\nu g^{\lambda\mu} + (p' - k + q)^\lambda g^{\mu\nu}] \\ &\quad \times \frac{-i}{(p' - k)^2 - m_g^2 + i\epsilon} \left[g_{\nu\alpha} - (1 - \xi) \frac{(p' - k)_\nu (p' - k)_\alpha}{(p' - k)^2 - \xi m_g^2} \right] (ig_s \gamma^\alpha t^b) \frac{i(\not{k} + m)}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \\ &\quad \times \frac{-i}{(p - k)^2 - m_g^2 + i\epsilon} \left[g_{\lambda\beta} - (1 - \xi) \frac{(p - k)_\lambda (p - k)_\beta}{(p - k)^2 - \xi m_g^2} \right] (ig_s \gamma^\beta t^c) \\ &= -ig_s^3 f^{abc} t^b t^c \int_{reg} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[\frac{N_1^\mu}{D_1} - (1 - \xi) \frac{N_2^\mu}{D_2} - (1 - \xi) \frac{N_3^\mu}{D_3} + (1 - \xi)^2 \frac{N_4^\mu}{D_4} \right] \quad (4.15) \end{aligned}$$

hemos distribuido 4.15 en cuatro términos que vamos a calcular separadamente, donde

$$N_1^\mu = [(2k - p - p')^\mu g^{\lambda\nu} + (2p' - p - k)^\lambda g^{\nu\mu} + (2p' - p' - k)^\nu g^{\mu\lambda}] \gamma^\alpha (\not{k} + m) \gamma^\beta g_{\nu\alpha} g_{\lambda\beta} \quad (4.16)$$

$$N_2^\mu = [(2k - p - p')^\mu g^{\lambda\nu} + (2p' - p - k)^\lambda g^{\nu\mu} + (2p' - p' - k)^\nu g^{\mu\lambda}] \times \gamma^\alpha (\not{k} + m) \gamma^\beta g_{\nu\alpha} (p - k)_\lambda (p - k)_\beta \quad (4.17)$$

$$N_3^\mu = [(2k - p - p')^\mu g^{\lambda\nu} + (2p' - p - k)^\lambda g^{\nu\mu} + (2p' - p' - k)^\nu g^{\mu\lambda}] \times \gamma^\alpha (\not{k} + m) \gamma^\beta g_{\lambda\beta} (p' - k)_\nu (p' - k)_\alpha \quad (4.18)$$

$$N_4^\mu = [(2k - p - p')^\mu g^{\lambda\nu} + (2p' - p - k)^\lambda g^{\nu\mu} + (2p' - p' - k)^\nu g^{\mu\lambda}] \\ \times \gamma^\alpha (\not{k} + m) \gamma^\beta (p - k)_\lambda (p - k)_\beta (p' - k)_\nu (p' - k)_\alpha \quad (4.19)$$

y

$$D_1 = [k^2 - m^2 + i\epsilon][(p - k)^2 - m_g^2 + i\epsilon][(p' - k)^2 - m_g^2 + i\epsilon] \quad (4.20)$$

$$D_2 = [k^2 - m^2 + i\epsilon][(p - k)^2 - m_g^2 + i\epsilon][(p' - k)^2 - m_g^2 + i\epsilon][(p - k)^2 - \xi m_g^2 + i\epsilon] \quad (4.21)$$

$$D_3 = [k^2 - m^2 + i\epsilon][(p - k)^2 - m_g^2 + i\epsilon][(p' - k)^2 - m_g^2 + i\epsilon][(p' - k)^2 - \xi m_g^2 + i\epsilon] \quad (4.22)$$

$$D_4 = [k^2 - m^2 + i\epsilon][(p - k)^2 - m_g^2 + i\epsilon][(p' - k)^2 - m_g^2 + i\epsilon][(p - k)^2 - \xi m_g^2 + i\epsilon] \\ [(p' - k)^2 - \xi m_g^2 + i\epsilon] \quad (4.23)$$

hemos distribuido el diagrama 4.5 en cuatro términos 4.15.

Primer término

Primero consideramos el primer término 4.15 para simplificar el denominador 4.20 usando la parametrización de Feynman de tres factores 2.26, considerando los momentos externos on-shell 2.28 y 2.29

$$D_1 = k^2 z - m^2(1 - x - y) + (p - k)^2 x - m_g^2 x + (p' - k)^2 y - m_g^2 y \\ = l^2 - m^2 z^2 + xyq^2 - m_g^2(1 - z) \\ = l^2 - \Delta \quad (4.24)$$

donde

$$\Delta = m^2 z^2 - xyq^2 + m_g^2(1 - z) \quad (4.25)$$

el primer término del numerador 4.15 queda como

$$N_1^\mu = (2k - p - p')^\mu \gamma_\beta (\not{k} + m) \gamma^\beta + \gamma^\mu (\not{k} + m) (2p' - p - k) + (2p - p' - k) (\not{k} + m) \gamma^\mu \quad (4.26)$$

después de mucha álgebra llegamos a

$$N_1^\mu = 2l^2 \gamma^\mu [(2 - d)d^{-1} - 1] + 2(1 - d)m^2 z^2 \gamma^\mu \\ + mz[z(d - 2) - 2]i\sigma^{\mu\nu} q_\nu + y(3 + z)q^2 \gamma^\mu$$

como la integrales convergen podemos poner $d = 4$, y se paramos de acuerdo a su estructura de las matrices γ

$$N_1^\mu = \tilde{N}_{11} \gamma^\mu + \tilde{N}_{12} \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m}$$

entonces, obtenemos:

$$\tilde{N}_{11} = -3l^2 - 6m^2 z^2 + y(3 + z)q^2$$

y

$$\tilde{N}_{12} = -4m^2z(1-z)$$

El factor de forma magnético queda como:

$$\begin{aligned} F_2^{1loop}(q^2) &= \frac{\alpha_s}{2\pi} C_2(G) \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{m^2z(1-z)}{m^2z^2 + m_g^2(1-z) - (1-y-z)yq^2} \\ &= \frac{3\alpha_s}{2\pi} \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{m^2z(1-z)}{m^2z^2 + m_g^2(1-z) - (1-y-z)yq^2} \end{aligned} \quad (4.27)$$

Esta integral diverge cuando $m_g = 0$. Para ver que tipo de divergencia es, tomamos el momento del gluón en el límite infrarrojo, la variable k es mayor que cualquier otro momento externo, solo consideraremos el primer término de 4.15:

$$\begin{aligned} \Gamma_{1loop}^\mu(p, p', q) &= \frac{ig_s^2}{2} C_2(G) t^a \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k^\rho g^{\mu\nu} - 2k^\mu g^{\nu\rho} + k^\nu g^{\rho\mu}}{(k^2)^3} \mu^{-4-d} \gamma_\rho \not{k} \gamma_\nu \\ &= \frac{ig_s^2}{2} C_2(G) t^a \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \gamma_\rho \gamma_\sigma \gamma_\nu \frac{g^{\mu\nu} k^\rho k^\sigma - 2g^{\nu\rho} k^\mu k^\sigma + g^{\rho\mu} k^\nu k^\sigma}{(k^2)^3} \mu^{-4-d} \end{aligned}$$

usando, por la simetría 2.39, tenemos:

$$\begin{aligned} \Gamma_{1loop}^\mu(p, p', q) &= \frac{ig_s^2}{2} C_2(G) t^a \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k^2}{d} \gamma_\rho \gamma_\sigma \gamma_\nu \frac{g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - 2g^{\nu\rho} g^{\mu\sigma} + g^{\rho\mu} g^{\nu\sigma}}{(k^2)^3} \mu^{-4-d} \\ &= \frac{ig_s^2}{2} C_2(G) \frac{t^a}{d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{4(d-1)}{(k^2)^2} \gamma^\mu \mu^{-4-d} \\ &= \frac{ig_s^2}{2} C_2(G) \frac{t^a}{d} 4(d-1) \gamma^\mu \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2 - q^2)^2} \Big|_{q^2 \rightarrow 0} \mu^{-4-d} \\ &= 2ig_s^2 C_2(G) t^a \frac{(d-1)}{d} \gamma^\mu i \frac{\Gamma(2-d/2)}{(4\pi)^{d/2}} \left(\frac{1}{q^2} \right)^{2-d/2} \end{aligned}$$

usando $d \rightarrow 4 - 2\epsilon$, entonces tenemos

$$\begin{aligned} \Gamma_{1loop}^\mu(p, p', q) &= -2g_s^2 C_2(G) t^a \frac{(d-1)}{d} \gamma^\mu \frac{1}{(4\pi)^2} \left[\frac{1}{\epsilon} + \log(4\pi) - \gamma - \log\left(\frac{-q^2}{\mu^2}\right) \right] \\ &\approx \frac{\alpha_s}{4\pi} \frac{3}{2} C_2(G) t^a \gamma^\mu \left[\log\left(\frac{-q^2}{\mu^2}\right) - \frac{1}{\epsilon} + \text{finito} \right] \end{aligned} \quad (4.28)$$

Segundo término

Usando la parametrización de Feynman de tres factores 2.26 entonces, tenemos

$$\begin{aligned} D_2 &= k^2(1-x-y-z) - m^2(1-x-y-z) + (p-k)^2x - m_g^2x + (p'-k)^2y \\ &\quad - m_g^2y + (p-k)^2z - m_g^2z \\ &= l^2 - m^2(1-x-y-z)^2 - m_g^2(x+y+z\xi) + (x+z)yq^2 \\ &= l^2 - \Delta \end{aligned}$$

-donde usamos el cambio de momento 3.52 y

$$\Delta = m^2(1 - x - y - z)^2 + m_g^2(x + y + z\xi) - (x + z)yq^2$$

El numerador queda como 4.4

$$\begin{aligned} N_2^\mu = & (2k - p - p')^\mu (\not{p} - \not{k})(\not{k} + m)(\not{p} - \not{k}) + (2p' - p - k) \cdot (p - k)\gamma^\mu (\not{k} + m)(\not{p} - \not{k}) \\ & + (p - k)^\mu (2\not{p} - \not{p}' - \not{k})(\not{k} + m)(\not{p} - \not{k}) + m(2k - p - p')^\mu (\not{p} - \not{k})(\not{p} - \not{k}) \\ & + m(2p' - p - k) \cdot (p - k)\gamma^\mu (\not{p} - \not{k}) + m(p - k)^\mu (2\not{p} - \not{p}' - \not{k})(\not{p} - \not{k}) \end{aligned} \quad (4.29)$$

los primeros tres términos fueron calculados por la contribución electrodébil $W^+\gamma W^-$ salvo un factor de 2, por lo tanto, sólo calculamos los últimos tres términos de 4.29 y los denotamos por \tilde{N}_{22} distribuyendo de acuerdo a la estructura matricial γ 2.45

$$\tilde{N}_{22} = 3l^2m^2y - \frac{3}{2}l^2m^2(x + y + z) + m^4(1 - x - y - z)^3 + 2m^4(1 - x - y - z)^2y$$

de acuerdo a 2.49 su factor de forma magnético queda como:

$$\begin{aligned} & F_2^{1loop}(q^2 \rightarrow 0) \\ & = \frac{3\alpha_s C_2(G)}{2\pi} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left\{ \left[\frac{3}{2}(x + y) - 3y \right] \ln \left[\frac{m_g^2(\xi x + y) + m^2(1 - x - y)^2}{m_g^2(x + y) + m^2(1 - x - y)^2} \right] \right. \\ & \quad - m^2(1 - x - y)^2 \left[y + \frac{1}{2}(1 - x - y) \right] \left[\frac{1}{m_g^2(x + y) + m^2(1 - x - y)^2} \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{1}{m_g^2(\xi x + y) + m^2(1 - x - y)^2} \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.30)$$

podemos observar que la integral es del mismo estilo que 3.55, solo que tomamos a $m_g = m_w$ y a $m = m_\nu$.

Tercer término

Usando la parametrización de Feynman de cuatro factores 3.10, por lo tanto, tenemos

$$\begin{aligned} D_3 = & k^2(1 - x - y - z) - m^2(1 - x - y - z) + (p - k)^2x - m_g^2x(p' - k)^2y - m_g^2y \\ & + (p' - k)^2z - m_g^2z\xi \\ = & l^2 - m^2(1 - x - y - z)^2 - m_g^2(x + y + \xi z) + x(y + z)q^2 \\ = & l^2 - \Delta \end{aligned}$$

donde usamos el cambio de momento 3.57 y

$$\Delta = m^2(1 - x - y - z)^2 + m_g^2(x + y + \xi z) + x(y + z)q^2$$

El numerador queda como:

$$\begin{aligned} N_3^\mu = & [(2k - p - p')^\mu (\not{p}' - \not{k})\not{k}(\not{p}' - \not{k}) + (p' - k)^\mu (\not{p}' - \not{k})\not{k}(2\not{p}' - \not{p} - \not{k}) \\ & + (2p - p' - k) \cdot (p' - k)(\not{p}' - \not{k})\not{k}\gamma^\mu] + m(2k - p - p')^\mu (\not{p}' - \not{k})(\not{p}' - \not{k}) \end{aligned}$$

$$+ m(p' - k)^\mu (\not{p}' - \not{k})(2\not{p}' - \not{p} - \not{k}) + m(2p - p' - k) \cdot (p' - k)(\not{p}' - \not{k})\gamma^\mu \quad (4.31)$$

los primeros tres términos fueron calculados para $W^+ \gamma W^-$ salvo un factor de 2 en la ecuación 3.59, por lo tanto, distribuyendo de acuerdo a la estructura γ 2.45, calculamos el cuarto, quinto y sexto término de 4.31, lo denotamos por \tilde{N}_{32} queda como:

$$\tilde{N}_{32} = 3l^2 m^2 x - \frac{3}{2} l^2 m^2 (x + y + z) + m^2 (1 - x - y - z) + 2m^4 (1 - x - y - z)^2 x$$

de acuerdo a 2.49, su factor de forma magnético queda como:

$$\begin{aligned} & F_2^{1loop}(q^2 \rightarrow 0) \\ &= \frac{3\alpha_s C_2(G)}{2\pi} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left\{ \left[\frac{3}{2}(x+y) - 3x \right] \ln \left[\frac{m_g^2(\xi x + y) + m^2(1-x-y)^2}{m_g^2(x+y) + m^2(1-x-y)^2} \right] \right. \\ & \quad - m^2(1-x-y)^2 \left[x + \frac{1}{2}(1-x-y) \right] \left[\frac{1}{m_g^2(x+y) + m^2(1-x-y)^2} \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{1}{m_g^2(\xi x + y) + m^2(1-x-y)^2} \right] \right\} \quad (4.32) \end{aligned}$$

Para el cuarto término de 4.15 hacemos un análisis similar al de 2.57 podemos observar que este término no contiene términos proporcionales $i\sigma^{\mu\nu} q_\nu$ y por lo tanto, no aporta al CMDM.

Sumando todos los términos proporcionales al parámetro de norma 3.55, 3.60, 4.30, 4.32, se tiene:

$$\begin{aligned} F_2^{1loop}(q^2 \rightarrow 0) &= \frac{\alpha_s}{2\pi} C_2(G) \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy (1-x-y) \\ & \quad \left[\frac{m^2 m_g^2 x (-1+x+y) [x^2 + 2x(-1+y) + (1+y)^2] (1-\xi)}{[m^2(1-x-y)^2 + m_g^2(x+y)] [m^2(1-x-y)^2 + m_g^2(y+x\xi)]} \right. \\ & \quad \left. (2-4x-4y) \ln \left[\frac{m^2(1-x-y)^2 + m_g^2(y+x\xi)}{m^2(1-x-y)^2 + m_g^2(x+y)} \right] \right] \quad (4.33) \end{aligned}$$

donde el resultado de 3.55 y 3.60 debe de ser dividido por 2 para tener nuestro caso. Aplicando la condición de norma 3.17 y haciendo el cambio de variable $t = x + y$ y $z = (x - y)/t$, tenemos que este resultado no es invariante de norma, pero es fácil observar que si tomamos $m_g = 0$ la integral 4.33 es cero, lo que indica que la divergencia que se encuentra en 4.27 al tomar $m_g = 0$ es invariante de norma.

4.3.1. Límite simétrico

Primer término

Si consideramos el límite simétrico 2.66 con 2.67 para el primer término de 4.15, solo cambia el denominador 4.16, como:

$$\begin{aligned} D_1 &= k^2(1-x-y) - m^2(1-x-y) + (p-k)^2 x - m_g^2 x + (p'-k)^2 y - m_g^2 y \\ &= l^2 - m^2(1-x-y) - m_g^2(x+y) \quad (4.34) \end{aligned}$$

entonces, el factor de de forma magnético es:

$$F_2^{1loop}(q^2 \rightarrow 0) = \frac{g_s^2 C_2(G) t^a}{8\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{m^2(1-x-y)(x+y)}{m^2(1-x-y) + m_g^2(x+y)} \quad (4.35)$$

si tomamos $m^2 \gg m_g^2$ de

$$F_2^{1loop}(q^2 \rightarrow 0) = \frac{\alpha_s}{2\pi} t^a \left[1 + \frac{1}{2} \frac{m_g^2}{m^2} \left(11 + 6 \log \left(\frac{m_g^2}{m^2} \right) \right) + \mathcal{O} \left(\frac{m_g^4}{m^4} \right) \right] \quad (4.36)$$

si tomamos $m_g^2 \gg m^2$

$$F_2^{1loop}(q^2 \rightarrow 0) = \frac{\alpha}{4\pi} t^a \frac{m^2}{m_g^2} \quad (4.37)$$

Segundo término

En este limite tenemos para 4.21

$$D_2 = l^2 - m^2(1-x-y-z) - m_g^2(x+y+z\xi)$$

su factor de forma para los últimos 3 términos de 4.29 en este límite

$$\begin{aligned} & F_2^{1loop}(q^2 \rightarrow 0) \\ &= \frac{3\alpha_s C_2(G)}{2\pi} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left\{ \left[\frac{3}{2}(x+y) - 3y \right] \ln \left[\frac{m_g^2(\xi x + y) + m^2(1-x-y)}{m_g^2(x+y) + m^2(1-x-y)} \right] \right. \\ & \quad - m^2(1-x-y)^2 \left[y + \frac{1}{2}(1-x-y) \right] \left[\frac{1}{m_g^2(x+y) + m^2(1-x-y)} \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{1}{m_g^2(\xi x + y) + m^2(1-x-y)} \right] \right\} \quad (4.38) \end{aligned}$$

Tercer término

En este límite para 4.22

$$D_3 = l^2 - m^2(1-x-y-z) - m_g^2(x+y+z\xi)$$

su factor de forma para los últimos 3 términos de 4.31, se tiene

$$\begin{aligned} & F_2^{1loop}(q^2 \rightarrow 0) \\ &= \frac{3\alpha_s C_2(G)}{2\pi} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left\{ \left[\frac{3}{2}(x+y) - 3x \right] \ln \left[\frac{m_g^2(\xi x + y) + m^2(1-x-y)}{m_g^2(x+y) + m^2(1-x-y)} \right] \right. \\ & \quad - m^2(1-x-y)^2 \left[x + \frac{1}{2}(1-x-y) \right] \left[\frac{1}{m_g^2(x+y) + m^2(1-x-y)} \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{1}{m_g^2(\xi x + y) + m^2(1-x-y)} \right] \right\} \quad (4.39) \end{aligned}$$

por lo tanto, sumando 3.92 y sumando 4.38 y 4.39, se tiene

$$\begin{aligned}
 F_2^{1loop}(q^2 \rightarrow 0) &= \frac{\alpha_s}{2\pi} C_2(G) \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy (1-x-y) \\
 &\left[\frac{m^2 m_g^2 x(-1+x+y)[x^2 + 2x(-1+y) + (1+y)^2](1-\xi)}{[m^2(1-x-y) + m_g^2(x+y)][m^2(1-x-y) + m_g^2(y+x\xi)]} \right. \\
 &\left. (2-4x-4y) \ln \left[\frac{m^2(1-x-y) + m_g^2(y+x\xi)}{m^2(1-x-y) + m_g^2(x+y)} \right] \right] \quad (4.40)
 \end{aligned}$$

haciendo los pasos necesarios para poder demostrar 3.17, sin embargo, este término depende del parámetro de norma ξ pero si consideramos el caso donde la masa del gluón es mucho mayor que la masa de los quarks, entonces, este término proporcional a la norma se puede volver despreciable, este sería el caso para los quarks u y d , ya que se estima experimentalmente que la masa del gluón es de alrededor de 500MeV .

Además, podemos observar que si tomamos $m_g^2 = 0$, la integral 4.40 es cero, por lo tanto, tenemos que 4.35 para $m_g = 0$ es finito y además es invariante de norma, este valor es

$$F_2^{1loop}(q^2 \rightarrow 0) = \frac{\alpha_s}{2\pi} C_2(G) \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy (x+y) = \frac{\alpha_s}{2\pi} = 0.159155 \quad (4.41)$$

donde $C_2(G) = 3$.

Para ver de manera gráfica el comportamiento del propagador de Curci-Ferrari (CF) en las configuraciones de capa de masa 2.28 y 2.66, evaluamos las integrales 4.27 y 4.35, respectivamente

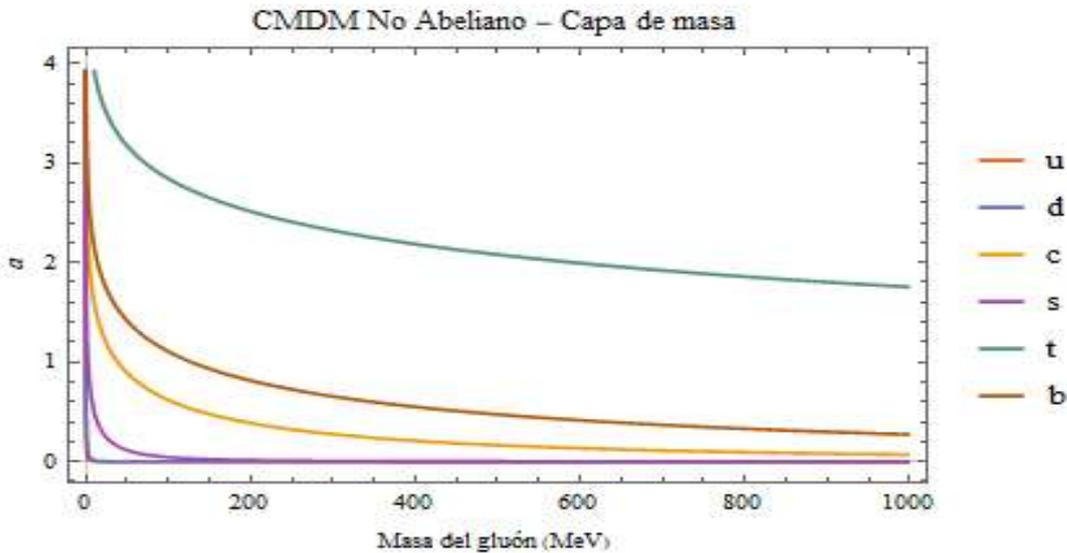


FIGURA 4.6: Contribución QCD no abeliana en el límite de capa de masa para cada uno de los quarks

podemos observar la divergencia cuando $m_g = 0$ en 4.6, aunque el resultado de $m_g \neq 0$ no es invariante de norma, pero si de manera aproximada para los quarks u y d , podemos observar que su CMDM tiene a cero muy rápido, por ejemplo, si consideramos el quark u y una masa del gluón de $m_g = 500\text{MeV}$, tenemos que el CMDM es alrededor de 10^{-6} . Mientras que para el límite simétrico 4.7 el resultado

parte de 4.36 y va decreciendo.

De manera ilustrativa 4.8, nos interesa los casos de los quarks u y d donde aproximadamente su CMDM es invariante de norma para ambas configuraciones, hemos usado la definición 2.95 para el límite simétrico en este caso 4.9, donde ambas configuraciones tienden a aproximarse mucho, por ejemplo, para el quark u y considerando una masa del gluón de $m_g = 500 \text{ MeV}$, tenemos que el CMDM en la capa de masa es de 1.48507×10^{-6} , mientras que en la configuración simétrica es 4.45515×10^{-6} . Sin embargo, cuando consideramos la definición normal de 2.16, tenemos que ambas configuraciones coinciden casi exactamente cuando, en este caso, el CMDM simétrico con 2.16 es 1.48505×10^{-5} , por lo tanto, para QCD no abeliana usando el límite simétrico tendremos que usar la definición usual de AMDM 2.16

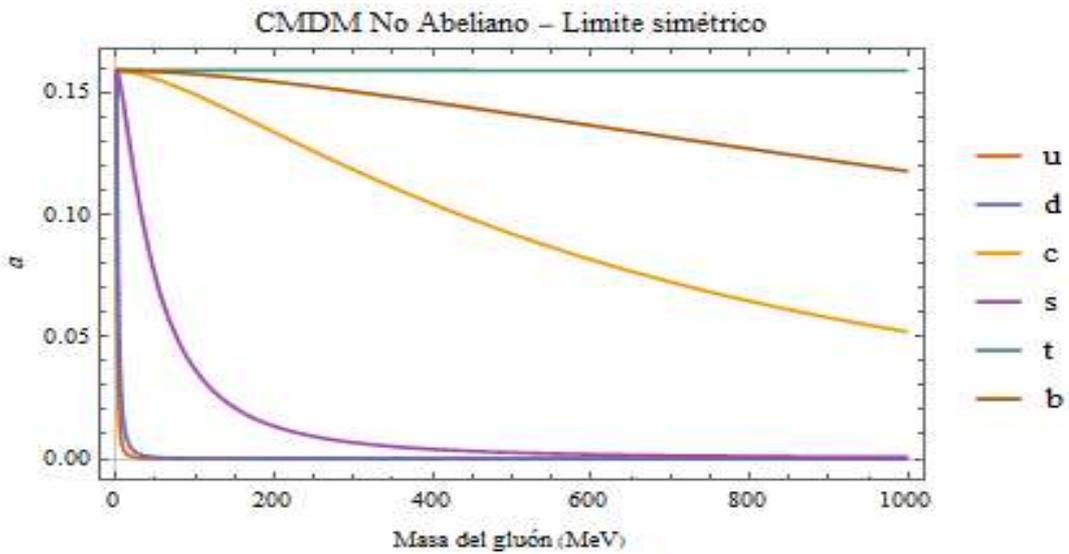


FIGURA 4.7: Contribución QCD no abeliana en la configuración simétrica para cada uno de los quarks

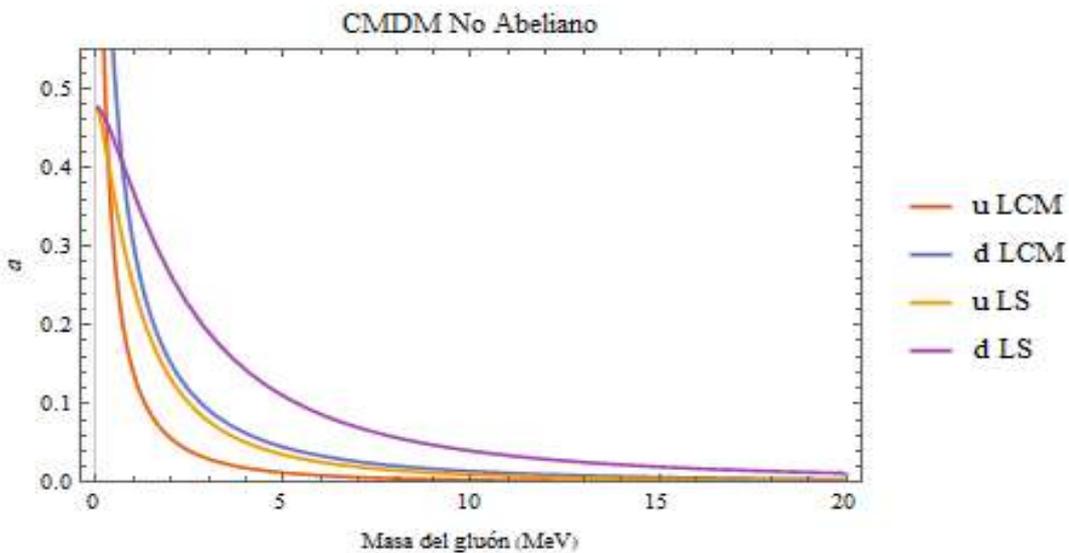


FIGURA 4.8: Contribución QCD no abeliana en la configuración simétrica y capa de masa para los quarks u y d

Considerando el caso cuando $q^2 = -m_z^2$ las constantes cambian de acuerdo a 5.1

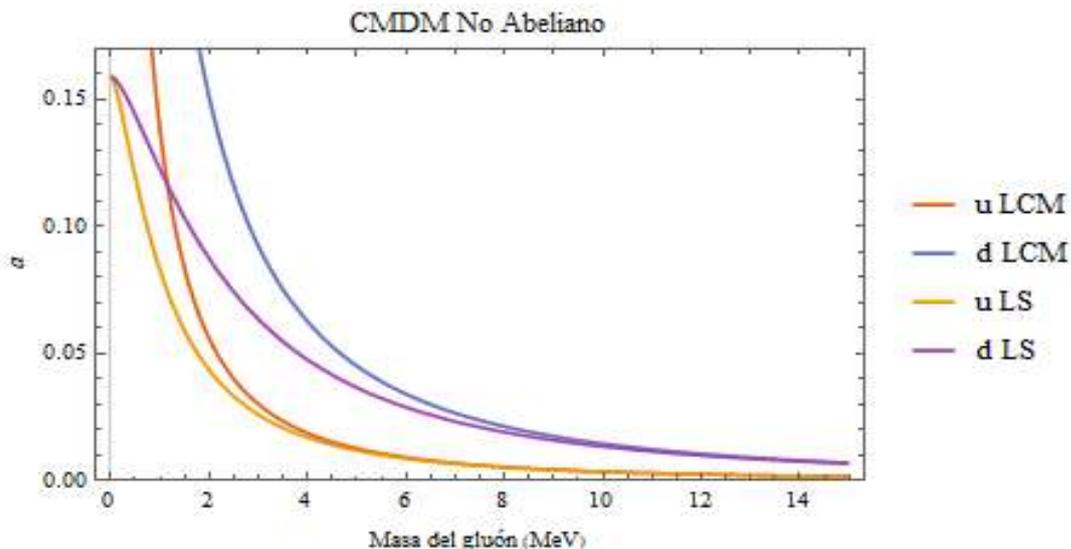


FIGURA 4.9: Contribución QCD no abeliana en la configuración simétrica para cada uno de los quarks

4.4. Contribución electrodébil

4.4.1. Boson Z_0

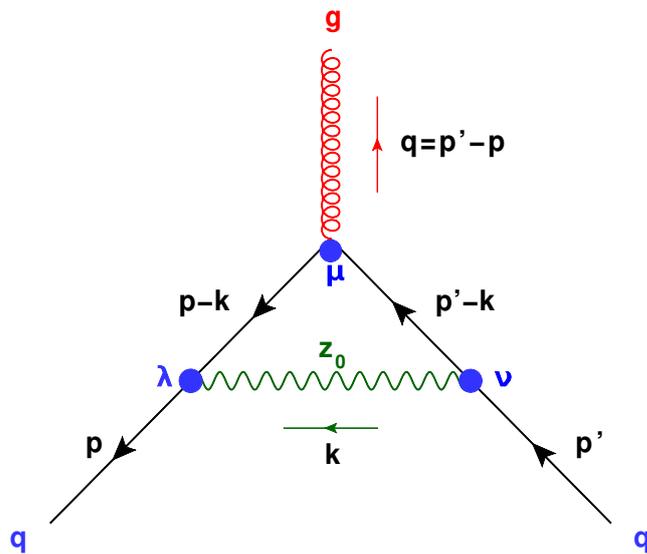


FIGURA 4.10: Corrección del vértice electrodébil en QCD - Bosón Z_0

La evaluación del diagrama se evalúa usando B.3, B.7, B.5 y B.16 por lo tanto, tenemos:

$$\begin{aligned}
 ig_s \Gamma_{1loop}^\mu(p, p') &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-ig_z}{2} \gamma^\nu (v_f - a_f \gamma_5) \frac{i(\not{p}' - \not{k} + m_q)}{(p' - k)^2 - m_q^2 + i\epsilon} (ig_s \gamma^\mu t^a) \frac{i(\not{p} - \not{k} + m_q)}{(p - k)^2 - m_q^2 + i\epsilon} \\
 &\quad \frac{-ig_z \gamma^\lambda}{2} (v_f - a_f \gamma_5) \frac{-i}{k^2 - m_z^2 + i\epsilon} \left[g_{\lambda\nu} - (1 - \xi) \frac{k_\lambda k_\nu}{k^2 - \xi m_z^2} \right]
 \end{aligned}$$

$$= \frac{g_s g_z^2 t^a}{4} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[\frac{N_1}{D_1} - (1 - \xi) \frac{N_2}{D_2} \right] \quad (4.42)$$

donde

$$N_1 = \gamma^\nu (v_f - a_f \gamma_5) (\not{p}' - \not{k} + m_q) \gamma^\mu (\not{p} - \not{k} + m_q) \gamma_\nu (v_f - a_f \gamma_5)$$

$$N_2 = \not{k} (v_f - a_f \gamma_5) (\not{p}' - \not{k} + m_q) \gamma^\mu (\not{p} - \not{k} + m_q) \not{k} (v_f - a_f \gamma_5)$$

y

$$D_1 = [k^2 - m_z^2 + i\epsilon][(p - k)^2 - m_q^2 + i\epsilon][(p' - k)^2 - m_q^2 + i\epsilon]$$

$$D_2 = [k^2 - m_z^2 + i\epsilon][(p - k)^2 - m_q^2 + i\epsilon][(p' - k)^2 - m_q^2 + i\epsilon][k^2 - \xi m_z^2]$$

observamos que la evaluación de este diagrama ?? es igual que la evaluación del diagrama 3.1, por lo tanto, tenemos que para el factor de forma magnético es:

$$F_2^{1loop}(q^2)$$

$$= - \frac{\sqrt{2} G_\mu m_z^2}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left[\frac{4m_q^2(1-x-y)(2-x-y)(v_f^2 + a_f^2)}{m_q^2(x+y)^2 + m_z^2(1-x-y) - (1-y-z)yq^2} \right.$$

$$\left. - \frac{8m_q^2(1-x-y)(v_f^2 - a_f^2)}{m_q^2(x+y)^2 + m_z^2(1-x-y) - (1-y-z)yq^2} \right] \quad (4.43)$$

es el mismo resultado que 3.9 y el segundo término de ?? es el mismo que 3.14, por lo que se necesita un bosón de Goldstone φ_z , 3.2, para que el resultado de 3.9 sea invariante de norma. Lo que comprobamos en 3.19, así como el caso del límite simétrico donde solo es válido cuando la masa del bosón m_z es mucho mayor que la masa del quark, entran en esta condición el quark u, d y s .

4.4.2. Fotón

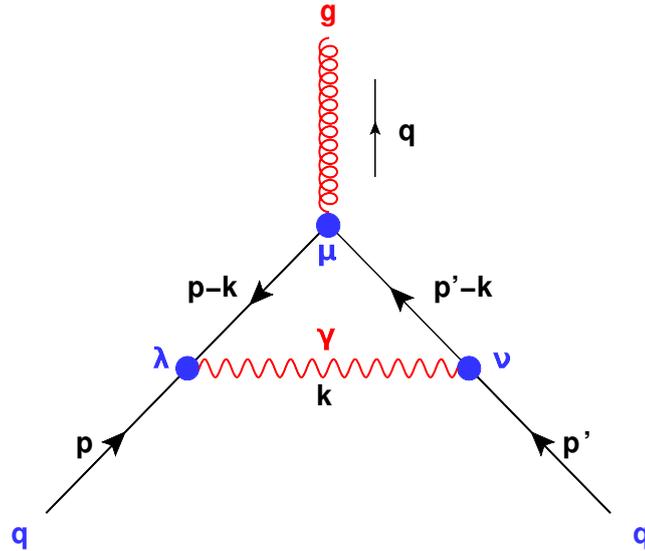


FIGURA 4.11: Corrección del vértice electrodébil en QCD - fotón

Evaluando el diagrama usando las siguientes reglas de Feynman B.1, B.2, B.3 y B.16, usando m para la masa del quark, Q_q la carga del quark y m_γ la masa del fotón

$$\begin{aligned}
 i g_s \Gamma^\mu(p, p') &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (ieQ_q \gamma^\nu) \frac{(\not{p}' + \not{k} + m)}{(p' + k)^2 m^2 + i\epsilon} (i g_s \gamma^\mu t^a) \frac{(\not{p} + \not{k} + m)}{(p + k)^2 - m^2 + i\epsilon} (ieQ_q \gamma^\lambda) \\
 &\quad \frac{-i}{k^2 - m_\gamma^2 + i\epsilon} \left[g_{\lambda\nu} - (1 - \xi) \frac{k_\lambda k_\nu}{k^2 - m_\gamma^2 \xi} \right] \\
 &= e^2 Q_q^2 g_s t^a \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[\frac{N_1}{D_1} - (1 - \xi) \frac{N_2}{D_2} \right] \quad (4.44)
 \end{aligned}$$

La evaluación de ?? es la misma que 2.21 salvo unos factores, por lo tanto, tenemos que para el factor de forma magnético queda como:

$$F_2^{1loop}(q^2) = \frac{\alpha}{\pi} Q_q^2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{m^2(1-x-y)(x+y)}{m^2(x+y)^2 + m_\gamma^2(1-x-y) - xyq^2} \quad (4.45)$$

este resultado es invariante en el límite de capa de masa, demostrado en 2.56 y 2.57, también lo es para el límite simétrico, la diferencia esta en la composición del factor de forma 2.70

4.4.3. Boson de Higgs

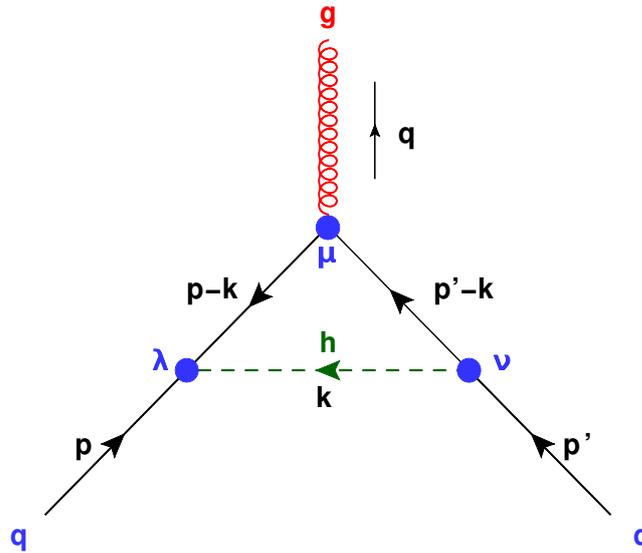


FIGURA 4.12: Corrección del vértice electrodébil en QCD - Boson de Higgs

La evaluación del diagrama utiliza las siguientes reglas de Feynman B.3, B.4, B.13 y B.16 donde usamos m para la masa del quark, m_w la masa del bosón W y m_H la masa del bosón de Higgs, entonces

$$i g_s \Gamma_{1loop}^\mu(p, p') = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{-i g_w m}{2 m_w} \frac{i(\not{p}' - \not{k} + m)}{(p' - k)^2 - m^2 + i\epsilon} (i e g_s \gamma^\mu t^a) \frac{i(\not{p} - \not{k} + m)}{(p - k)^2 - m^2 + i\epsilon}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{-i g_w m}{2 m_w} \frac{i}{k^2 - m_H^2 + i\epsilon} \\
&= \frac{-g_w^2 g_s m^2}{4m_w^2} t^a \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(\not{p}' - \not{k} + m) \gamma^\mu (\not{p} - \not{k} + m)}{[(p' - k)^2 - m^2 + i\epsilon][(p - k)^2 - m^2 + i\epsilon][k^2 - m_H^2 + i\epsilon]}
\end{aligned} \tag{4.46}$$

este es mimos diagrama que 3.28, por lo tanto, tenemos que para el factor de forma magnético

$$F_2^{1loop}(q^2 \rightarrow 0) = \frac{\sqrt{2} G_\mu m^2}{8\pi^2} \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{m^2(1-z)(1+z)}{m^2(1-z)^2 + m_H^2 z - (1-y-z)yq^2} \tag{4.47}$$

este resultado es invariante de norma, mientras que para el límite simétrico el factor de forma esta definido por 3.37 que también es invariante de norma.

4.5. Bosón W

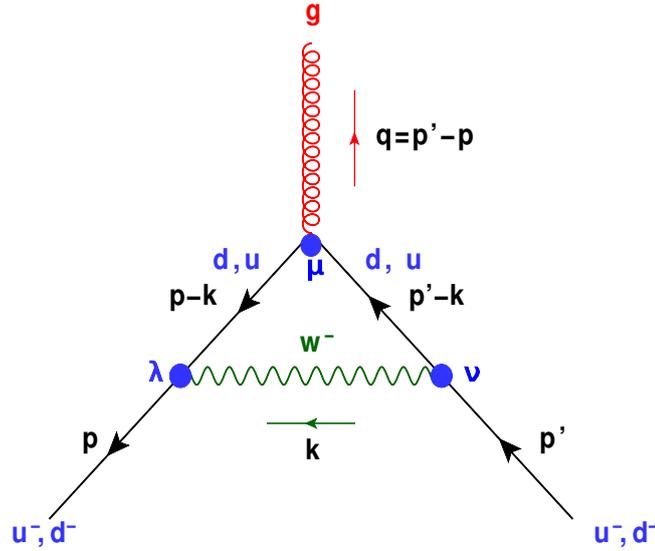


FIGURA 4.13: Corrección del vértice electrodébil en QCD - γ

La evaluación del diagrama se basa usando las reglas de Feynman B.3, B.5, B.16 y B.20 con m como la masa del quark y m_w la masa del bosón W, tenemos

$$\begin{aligned}
i g_2 \Gamma^\mu(p, p') &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i g_w}{2\sqrt{2}} \gamma^\nu (1 + \gamma_5) \frac{i(\not{p}' - \not{k} + m)}{(p' - k)^2 - m^2 + i\epsilon} (i g_s \gamma^\mu t^a) \frac{i(\not{p} - \not{k} + m)}{(p - k)^2 - m^2 + i\epsilon} \\
& \frac{i g_w}{2\sqrt{2}} \gamma^\lambda (1 + \gamma_5) \frac{-i}{k^2 - m_w^2 + i\epsilon} \left[g_{\lambda\nu} - (1 - \zeta) \frac{k_\lambda k_\nu}{k^2 - m_w^2} \right] \\
&= \frac{g_w^2 g_s t^a}{8} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[\frac{N_1^\mu}{D_1} - (1 - \zeta) \frac{N_2^\mu}{D_2} \right]
\end{aligned} \tag{4.48}$$

donde

$$N_1^\mu = \gamma^\nu (1 + \gamma_5) (\not{p}' - \not{k} + m) \gamma^\mu (\not{p} - \not{k} + m) \gamma_\nu (1 + \gamma_5) \tag{4.49}$$

$$N_2^\mu = \not{k}(1 + \gamma_5)(\not{p}' - \not{k} + m)\gamma^\mu(\not{p} - \not{k} + m)\not{k}(1 + \gamma_5) \quad (4.50)$$

y

$$D_1 = [k^2 - m_w^2 + i\epsilon][(p' - k)^2 - m^2 + i\epsilon][(p - k)^2 - m^2 + i\epsilon] \quad (4.51)$$

$$D_2 = [k^2 - m_w^2 + i\epsilon][(p' - k)^2 - m^2 + i\epsilon][(p - k)^2 - m^2 + i\epsilon][k^2 - m_w^2 \xi] \quad (4.52)$$

Primer término

Usando la parametrización de Feynman 2.26, tenemos

$$\begin{aligned} D_1 &= k^2 z - m_w^2(1 - x - y) + (p - k)^2 x - m^2 x + (p' - k)^2 y - m^2 y \\ &= l^2 - m^2(1 - z)^2 + (1 - y - z) y q^2 - m_w^2 z \\ &= l^2 - \Delta \end{aligned}$$

donde usamos el cambio de momento 2.30

$$\Delta = m^2(1 - z)^2 + m_w^2 z - (1 - y - z) y q^2$$

el numerador queda como

$$N_1 = [\gamma^\nu(\not{p}' - \not{k})\gamma^\mu(\not{p} - \not{k})\gamma_\nu + m^2\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma_\nu](1 + \gamma_5)^2$$

por lo tanto, distribuyendo de acuerdo a su estructura γ 2.45, tenemos

$$\tilde{N}_{12} = 8m^2 z(1 + z)$$

por lo tanto, el factor de forma magnético queda, para los quarks tipo u queda

$$F_2^{1loop}(q^2) = \frac{-\sqrt{2}G_\mu m_w^2}{4\pi^2} \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{m_d^2 z(1+z)}{m_d^2(1-z)^2 + m_w^2 z} \quad (4.53)$$

y para los quarks tipo d , se tiene

$$F_2^{1loop}(q^2) = \frac{-\sqrt{2}G_\mu m_w^2}{4\pi^2} \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{m_u^2 z(1+z)}{m_u^2(1-z)^2 + m_w^2 z} \quad (4.54)$$

el segundo término se cancela con la contribución de φ^\pm para la contribución de W en el límite de capa masa por lo tanto 4.53 y 4.54 es invariante de norma, mientras que para el caso de la configuración simétrica solo es válida para los quarks ligeros u, d y c .

| Quark | W | H ₀ | A | Z ₀ |
|-------|----------------------------|---------------------------|---------------------------|----------------------------|
| u | $-1,29961 \times 10^{-12}$ | $6,03443 \times 10^{-21}$ | $5,161821 \times 10^{-4}$ | $-5,41852 \times 10^{-13}$ |
| d | $-6,07488 \times 10^{-12}$ | $1,22062 \times 10^{-19}$ | $1,29045 \times 10^{-4}$ | $-2,28269 \times 10^{-12}$ |
| c | $-4,48145 \times 10^{-7}$ | $2,78372 \times 10^{-10}$ | $5,611821 \times 10^{-4}$ | $-1,869 \times 10^{-7}$ |
| s | $-2,40913 \times 10^{-9}$ | $1,32231 \times 10^{-14}$ | $1,29045 \times 10^{-4}$ | $-9,053 \times 10^{-10}$ |
| t | $-2,09627 \times 10^{-3}$ | $3,8903 \times 10^{-3}$ | $5,161821 \times 10^{-4}$ | $-9,386 \times 10^{-4}$ |
| b | $-4,48047 \times 10^{-6}$ | $2,30258 \times 10^{-8}$ | $1,29045 \times 10^{-4}$ | $-1,802 \times 10^{-6}$ |

CUADRO 4.2: Contribución electrodébil en capa de masa

Resumimos los resultados para la contribución electrodébil en CMDM en la siguiente tabla 4.2 tomando el límite de capa de masa 2.28, esta tabla puede compararse con [55], donde cabe destacar que las definiciones del CMDM son distintas, nosotros hemos usado la convencional presentada desde QED 2.16, mientras que este artículo lo denota por $\Delta k = 4mF_2^{1loop}(0)$

Para el límite simétrico 2.66 tenemos una pequeña diferencia para el quark t y b en la tabla 4.2, esto es debido a que la masa del quark t y b son más grandes que la masa de los bosones W , H_0 y Z_0 . Tomando los valores de 5.1. Afortunadamente, se han realizado cálculos en lattice hasta dos lazos para el vértice triple gluón, quark-gluón y fantasma-gluón por Gracey [56].

Hemos calculado el anómalo CMDM para cada quark para el vértice quark-gluón con el factor de forma $F_2(q^2)$ en $q^2 = 0$. Esta definición es problemática ya que requiere usar la teoría de perturbaciones en energía cero, donde es un régimen no válido para interacciones fuertes. Otro problema es que las constantes físicas y masas que pertenecen a interacciones fuertes son medidas a altas energías, no a $q^2 \rightarrow 0$. Sin embargo, podemos usar las mismas técnicas para calcular el factor de forma $F_2(q^2)$ y por lo tanto el anómalo CMDM a altas energías, para esto, tomamos dos casos para las constantes físicas.

Capítulo 5

Conclusión

5.1. Discusión de resultados

Calculamos AMDM a un lazo para fermiones cargados en diferentes límites cinemáticos, tomando en cuenta todas las interacciones del Modelo Estándar. Claro que en el caso de capa de masa para las partículas externas, esto se conoce desde hace mucho tiempo y el estudio no aporta nada nuevo en el campo. Sin embargo, sabemos que existe una divergencia para el cálculo correspondiente de CMDM a un lazo. Esta situación no es cómoda. Para entender esta divergencia y para estar en la posición de proponer alguna solución aceptable, consideramos que el estudio de AMDM en diferentes límites cinemáticos y normas covariantes es muy ilustrativo.

Como no necesariamente trabajamos en la capa de masa, uno de los casos estudiado es con la masa del fotón distinto de cero, incluida en el propagador de Proca 2.77. En principio esto puede aportar al AMDM en QED. Usamos hasta el límite superior de la masa del fotón que es alrededor de $10^{-18}eV$. Sin embargo, esta contribución es muy pequeña como para ser medida o para imponer límite de masa fotónica más precisa.

Por los estudios de QCD en lattice [56], a través de las ecuaciones de Schwinger-Dyson y cálculos perturbativos, se conoce que el límite simétrico es muy amigable y proporciona resultados convergentes para diferentes factores de forma que describen el vértice quark-gluón o por lo menos sus combinaciones más relevantes. Hemos encontrado en QED que al usar la configuración del límite simétrico 2.66 el resultado de Schwinger 2.56 difiere por un factor de $1/3$. Esto también ocurre cuando consideramos fotones masivos 2.77. Lo más notable e importante es que este resultado se mantiene invariante de norma. Por lo tanto, siendo finito e independiente de norma, se puede considerar este AMDM en el límite simétrico como un candidato a ser observable físico. El resultado del AMDM está dado en 2.69,2.95 al usar el límite simétrico 2.66.

Comprobamos la invariancia de norma para las contribuciones electrodébiles que incluyen a los bosones Z_0 , W y el boson de Higgs H_0 en el límite de capa de masa 2.28. Cuando tomamos el límite simétrico para la contribución por parte del bosón Z_0 nos encontramos con un problema, el resultado no es invariante de norma, sin embargo, el término proporcional al parámetro de norma ξ es despreciable cuando consideramos que la masa del bosón Z_0 es mucho mayor que las partículas que interactúan. En este caso, podemos observar que obtenemos el mismo resultado para e y μ 3.2. La contribución por parte del bosón de Higgs es invariante de norma para el límite simétrico 2.66 y no es necesario usar la definición de AMDM simétrico 2.95 debido a que en este caso el factor de $1/3$ no aparece, como se observa en 3.3. Mientras que cuando consideramos la configuración simétrica para el bosón W , el resultado es desafortunadamente dependiente de norma a excepción para el caso cuando W es mucho mayor que las partículas que interactúan, tal es el caso para e y

μ . Por lo que concluimos que la configuración simétrica 2.66 para las contribuciones Z_0 , W y H_0 , es muy precisa para los leptones e y μ , pero difiere muy poco cuando lo utilizamos con τ .

Nuestra principal e importante contribución es la eliminación de la divergencia al CMDM no abeliana que aparece cuando tomamos la masa del gluón $m_g = 0$ en 4.27 y tiene un comportamiento logarítmico en IR. Usando la configuración simétrica en 4.27 con $m_g = 0$, obtenemos un resultado que es finito y además que es invariante de norma 4.41. Si consideramos el propagador de CF 4.1, encontramos que el CMDM es dependiente del parámetro de norma ζ , este término puede ser considerado despreciable en el caso que la masa del gluón m_g sea mucho mayor que el resto de los quarks, esto parece cumplirse cuando consideramos los quarks u y d que son de unos pocos MeV . Debido a la gráfica 4.9 podemos concluir que el CMDM para la contribución de QCD no abeliana está definido por el CMDM normal 2.16. Por lo tanto, podemos concluir que la contribución totalmente fuerte 4.1 y 4.5 del CMDM es invariante de norma cuando consideramos el límite simétrico, consecuentemente podemos calcular el CMDM en lattice usando los trabajos realizados para el vértice quark-gluon, triple gluon y gluon-fantasma [56].

El CMDM total está principalmente definido por las interacciones fuertes 4.1 y 4.5 como puede apreciarse en la tabla 4.2, por lo que estas interacciones son poco apreciadas, pero aún así pueden ser calculadas tomando el límite simétrico con exactitud para las contribuciones que involucran γ y H_0 , mientras que para los bosones W y Z_0 , funcionan cuando los quarks involucrados son más pequeños que W y Z , esto es el caso para u , d y s .

5.2. Futuros proyectos

Queremos obtener la contribución hadrónica para el momento magnético anómalo del muón en el límite simétrico a través de las ecuaciones de Schwinger-Dyson o de lattice y compararla con nuestros resultados obtenidos, buscamos si existe este factor de $1/3$ o simplemente se mantiene el mismo resultado que en la capa de masa, o que solo para ciertos casos se mantenga invariante de gauge.

También queremos observar como se comportan las contribuciones de QED, electro-débiles y cromo-magnéticas a ordenes de lazo superiores, principalmente a dos lazos, en el límite simétrico junto con nuestras propuestas de propagadores con masa para el fotón y el gluón y esperar si existe ese factor de $1/3$ o desaparece. Además, es muy importante observar si a dos lazos en el límite simétrico el resultado que encontramos para la contribución no-Abeliana 4.36 se mantiene finito e invariante de norma.

Lista de Abreviaciones

| | |
|-------------|---|
| CERN | Organización Europea para la Investigación Nuclear |
| BNL | Laboratorio Nacional de Brookhaven |
| ppm | Partes por Millón |
| EDM | Electric Dipole Moment |
| AMDM | Anomalous Magnetic Dipole Moment |
| SM | Standar Model |
| QED | Quantum Electro Dynamics |
| CR | Correcciones Radiativas |
| CMDM | Cromo Magnetic Dipole Moment |
| BE | Bajas Energías |
| AE | Altas Energías |

Constantes físicas

| | |
|---------------------------------|--|
| Constante de Fermi: | $G_\mu = 1.16 \times 10^{-11} (\text{MeV})^{-2}$ |
| Masa del quark up: | $m_u = 2.61 \text{MeV}/c^2$ |
| Masa del quark down: | $m_d = 4.67 \text{MeV}/c^2$ |
| Masa del quark strange: | $m_s = 93 \text{MeV}/c^2$ |
| Masa del quark charm: | $m_c = 1270 \text{MeV}/c^2$ |
| Masa del quark bottom: | $m_b = 4180 \text{MeV}/c^2$ |
| Masa del quark top: | $m_t = 172760 \text{MeV}/c^2$ |
| Masa del bosón W : | $m_w = 80379 \text{MeV}/c^2$ |
| Masa del bosón Z_0 : | $m_z = 91187.6 \text{MeV}/c^2$ |
| Masa del bosón de Higgs: | $m_H = 125100 \text{MeV}/c^2$ |
| Masa del electrón: | $m_e = 0.51099892 \text{MeV}/c^2$ |
| Masa del muón: | $m_\mu = 105.658369 \text{MeV}/c^2$ |
| Masa del tau: | $m_\tau = 1776.996 \text{MeV}/c^2$ |
| Ángulo de Weinberg BE: | $\sin^2 \theta_w = 0.22290$ |
| Ángulo de Weingerg AE: | $\sin^2 \theta_w(m_z) = 0.23153$ |
| Cte. de estructura fina QED BE: | $\alpha = 0.00729735257$ |
| Cte. de estructura fina QED AE: | $\alpha(m_z) = 1/128$ |
| Cte. estructura fina en QCD BE: | $\alpha_s = 1$ |
| Cte. estructura fina en QCD AE: | $\alpha_s(m_z) = 0.1173$ |

Apéndice A

Identidades QED

A.1. Parametrización de Feynman

La parametrización de Feynman es una técnica para evaluar integrales de lazo que surgen de los diagramas de Feynman con uno o más lazos.

Sea $\text{Re}(\alpha_j) > 0$ para toda $1 \leq j \leq n$;

$$\frac{1}{A^{\alpha_1} \cdots A_n^{\alpha_n}} = \frac{\Gamma(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)}{\Gamma(\alpha_1) \cdots \Gamma(\alpha_n)} \int_0^1 du_1 \cdots \int_0^1 du_n \frac{\delta(1 - \sum_{k=1}^n u_k) u_1^{\alpha_1-1} \cdots u_n^{\alpha_n-1}}{(\sum_{k=1}^n u_k A_k)^{\sum_{k=1}^n \alpha_k}} \quad (\text{A.1})$$

Para derivar la parametrización de Feynman de $\frac{1}{A_1 \cdots A_n}$, primero reexpresamos todos los factores en el denominador en su forma de parametrización de Schwinger:

$$\frac{1}{A_i} = \int_0^\infty ds_i e^{-is_i A_i}$$

para $i = 1, \dots, n$ y reescribimos

$$\frac{1}{A_1 \cdots A_n} = \int_0^\infty ds_1 \cdots \int_0^\infty ds_n \exp[-(s_1 A_1 + \cdots + s_n A_n)]$$

Por lo tanto, hacemos el siguiente cambio de variable

$$\begin{aligned} \alpha &= s_1 + \cdots + s_n \\ \alpha_i &= \frac{s_i}{s_1 + \cdots + s_n} \end{aligned}$$

con $i = 1, \dots, n-1$, para obtener

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_1 \cdots A_n} &= \int_0^1 d\alpha_1 \cdots \alpha_{n-1} \int_0^1 d\alpha \alpha^{n-1} \\ &\quad \times \exp[-\alpha \{ \alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_{n-1} A_{n-1} + (1 - \alpha_1 - \cdots - \alpha_{n-1}) A_n \}] \end{aligned}$$

el siguiente paso es realizar la integración de α :

$$\int_0^\infty d\alpha \alpha^{n-1} \exp(-\alpha x) = \frac{\partial}{\partial (-x)} \left(\int_0^\infty d\alpha \exp(-\alpha x) \right) = \frac{(n-1)!}{x^n}$$

donde hemos definido $x = \alpha_1 A_1 + \alpha_{n-1} A_{n-1} + (1 - \alpha_1 - \dots - \alpha_{n-1}) A_n$, sustituyendo de este resultado, tenemos:

$$\frac{1}{A_1 \cdots A_n} = (n-1)! \int_0^1 \cdots d\alpha_{n-1} \frac{1}{[\alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_{n-1} A_{n-1} + (1 - \alpha_1 - \cdots - \alpha_{n-1}) A_n]^n}$$

y, finalmente, introduciendo una integral extra, llegamos a la parametrización de Feynman

$$\frac{1}{A_1 \cdots A_n} = (n-1)! \int_0^1 d\alpha_1 \cdots \int_0^1 d\alpha_n \frac{\delta(1 - \alpha_1 - \cdots - \alpha_n)}{[\alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_n A_n]^n}$$

la parametrización de Feynman generalizada A.1 se puede hacer de manera similar.

A.2. Identidades de las matrices γ en d dimensiones

En esta sección discutiremos las matrices γ en d dimensiones. Su propiedad definida es:

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \quad (\text{A.2})$$

Por lo tanto, tenemos:

■

$$\gamma_\mu \gamma^\mu = d \quad (\text{A.3})$$

■

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu = \gamma^\mu (2g_\mu^\nu - \gamma_\mu \gamma^\nu) = (2-d)\gamma^\nu \quad (\text{A.4})$$

■

$$\begin{aligned} \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma &= \gamma^\nu (2g^{\rho\sigma} - \gamma^\sigma \gamma^\rho) = 2g^{\rho\sigma} \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma^\rho \\ &= 2g^{\rho\sigma} \gamma^\nu - 2g^{\nu\sigma} \gamma^\rho + \gamma^\sigma \gamma^\nu \gamma^\rho \\ &= \gamma^\sigma (2g^{\nu\rho} - \gamma^\rho \gamma^\nu) = 2g^{\nu\rho} \gamma^\sigma - \gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

■

$$\begin{aligned} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\mu &= \gamma^\mu \gamma^\nu (2g_\mu^\rho - \gamma_\mu \gamma^\rho) = 2\gamma^\rho \gamma^\nu - \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu \gamma^\rho \\ &= 2\gamma^\rho \gamma^\nu + (d-2)\gamma^\nu \gamma^\rho \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

■

$$\begin{aligned} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\mu &= (2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu \gamma^\mu) \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\mu \\ &= 2\gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\nu - 2\gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma^\rho - (d-2)\gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \\ &= 4g^{\rho\sigma} \gamma^\nu - 2\gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu - 4g^{\sigma\rho} \gamma^\nu + 2\gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma - (d-2)\gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \\ &= -2\gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu - (d-4)\gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \\ &= -2\gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu + (d-4)\gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu - 2(d-4)g^{\nu\rho} \gamma^\sigma \\ &= (d-6)\gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu - 2(d-4)g^{\nu\rho} \gamma^\sigma \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

¿Como encontramos $\gamma_\mu \not{a} \gamma^\mu$?, anticonmutamos γ^μ por la izquierda:

$$\begin{aligned}\gamma_\mu \not{a} \gamma^\mu &= \gamma_\mu (-\gamma^\mu \not{a} + 2a^\mu) \\ &= -(d-2)\not{a}\end{aligned}\quad (\text{A.8})$$

Similarmente,

$$\begin{aligned}\gamma_\mu \not{a} \not{b} \gamma^\mu &= \gamma_\mu \not{a} (-\gamma^\mu \not{b} + 2b^\mu) = (d-2)\not{a} \not{b} + 2\not{b} \not{a} \\ &= 4a \cdot b + (d-4)\not{a} \not{b},\end{aligned}\quad (\text{A.9})$$

también

$$\begin{aligned}\gamma_\mu \not{a} \not{b} \not{c} \gamma^\mu &= \gamma_\mu \not{a} \not{b} (-\gamma^\mu \not{c} + 2c^\mu) = -4a \cdot b - (d-4)\not{a} \not{b} \not{c} + 2\not{c} \not{a} \not{b} \\ &= -2\not{c} \not{b} \not{a} - (d-4)\not{a} \not{b} \not{c}.\end{aligned}\quad (\text{A.10})$$

y

$$\begin{aligned}\gamma^\mu \not{a} \gamma^\alpha \not{b} \gamma_\mu &= a_\nu b_\sigma \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\sigma \gamma_\mu = a_\nu b_\sigma [(d-6)\gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu - 2(d-4)g^{\nu\rho} \gamma^\sigma] \\ &= (d-6)\not{b} \gamma^\alpha \not{a} - 2(d-4)a \cdot b \gamma^\alpha\end{aligned}\quad (\text{A.11})$$

A.3. Integrales en d dimensiones

Después de que realizamos la parametrización de Feynman [A.1](#) y ya sea considerando los electrones externos on-shell [2.28](#) o el límite simétrico ?? el denominador queda de la forma $(l^2 - \Delta)^n$. En el numerador, los términos impares en potencias de l desaparecen por la simetría de la integración. La simetría también permite a uno reemplazar las siguientes relaciones:

$$l^\mu l^\nu \longrightarrow \frac{1}{d} l^2 g^{\mu\nu}, \quad (\text{A.12})$$

$$l^\mu l^\nu l^\rho l^\sigma \longrightarrow \frac{1}{d(d+2)} (l^2)^2 (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} + g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) \quad (\text{A.13})$$

d es la dimensión espacio-temporal. Es conveniente evaluar la integral después de hacer la rotación de Wick [\[42\]](#) al espacio Euclideo, con la sustitución

$$l^0 = i l_E^0, \quad l^2 = -l_E^2 \quad (\text{A.14})$$

Alternativamente, uno puede usar la siguiente tabla de integrales en d dimensiones en el espacio de Minkowski:

$$\int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l^2 - \Delta)^n} = \frac{(-1)^n}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(n - \frac{d}{2})}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n - \frac{d}{2}} \quad (\text{A.15})$$

$$\int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{l^2}{(l^2 - \Delta)^n} = \frac{(-1)^{n-1}}{(4\pi)^{d/2} i} \frac{d \Gamma(n - \frac{d}{2} - 1)}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n - \frac{d}{2} - 1} \quad (\text{A.16})$$

Apéndice B

Reglas de Feynman

En este apéndice enunciaremos las reglas de Feynman del modelo estándar que necesitamos para nuestros cálculos.

1. Para cada vértice de QED:

$$ie\gamma^\alpha \quad (\text{B.1})$$

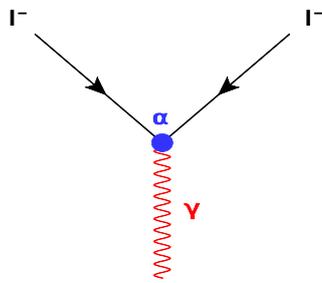


FIGURA B.1: Vértice QED

2. Para cada línea interna de fotón, etiquetada por el momento k , escribimos un factor

$$iD_{\alpha\beta} = \frac{-i}{k^2 + i\epsilon} \left[g_{\alpha\beta} - (1 - \zeta) \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} \right] \quad (\text{B.2})$$

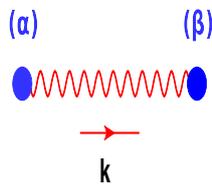


FIGURA B.2: Línea interna del fotón

3. Para cada línea interna del leptón, etiquetada por el momento p , escribimos un factor

$$iS(p) = \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (\text{B.3})$$

aquí, m es la masa para m_l o m_{ν_l} o del leptón particular a considerar.

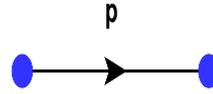


FIGURA B.3: Línea interna del leptón

4. Para cada línea interna de Higgs, etiquetada por el momento k , escribimos un factor de

$$i\Delta(k, m_H) = \frac{i}{k^2 - m_H^2 + i\epsilon} \quad (\text{B.4})$$

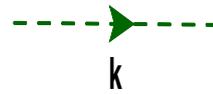


FIGURA B.4: Línea interna del bosón de Higgs

5. Para cada línea interna del bosón W^\pm o Z^0 etiquetada por el momento k , escribimos un factor de

$$D_{\alpha\beta} = \frac{-i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \left[g_{\alpha\beta} - \frac{(1 - \zeta)k_\alpha k_\beta}{k^2 - \zeta m^2} \right] \quad (\text{B.5})$$

donde m es m_w ó m_Z , dependiendo del tipo de bosón a utilizar.

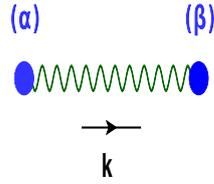


FIGURA B.5: Línea interna del Boson W^\pm ó Z^0

6. Para cada línea interna del boson de Goldstone etiquetada por el momento k , escribimos un factor de

$$i\Delta_\phi = \frac{i}{k^2 - \xi m^2 + i\epsilon} \quad (B.6)$$

donde m puede ser m_W ó m_Z , dependiendo del otro boson con que esté interactuando.

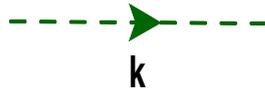


FIGURA B.6: Línea interna del boson de Goldstone

El modelo estándar de la teoría electro débil nos da 18 vértices básicos, donde solo hemos usado un par de ellos en los cálculos con su correspondientes factores del vértice.

7. Para cada Vértice *lepton* – Z^0 – *lepton*, tenemos un factor de

$$\frac{-ig_Z \gamma^\alpha}{2} (v_f - a_f \gamma_5) \quad (B.7)$$

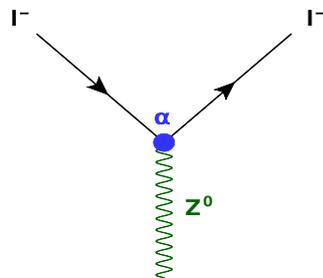


FIGURA B.7: Vértice lepton-boson Z^0 -lepton

8. Vértice de Bosón $w^+ - w^- - \gamma$

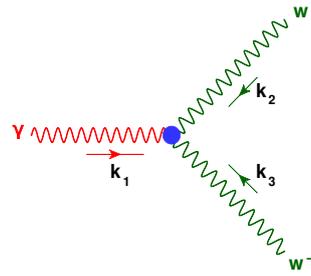


FIGURA B.8: Vértice $W^+ \gamma W^-$

$$-ie[g^{\alpha\beta}(k_1 - k_2)^\gamma + g^{\beta\gamma}(k_2 - k_3)^\alpha + g^{\gamma\alpha}(k_3 - k_1)^\beta] \quad (B.8)$$

9. para el vértice $\nu_l - \gamma - l^-$:

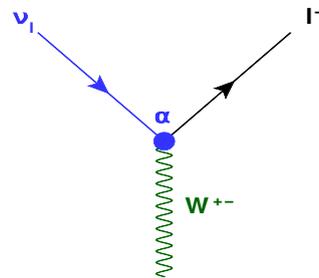


FIGURA B.9: Vértice de $\nu_l - W^\pm - l^-$

$$\frac{-ig}{\sqrt{2}} \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \quad (B.9)$$

Si ahora consideramos las interacciones de los bosones de Goldstone, pero solo ocuparemos algunos diagramas:

10. Para cada vértice $\phi^\mp - \text{fotón} - w^\pm$:

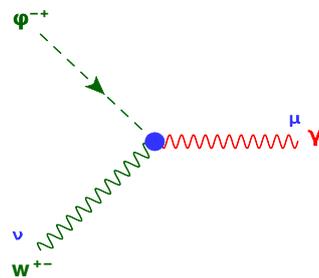


FIGURA B.10: Vértice para bosones de Goldstone

$$iem_w g^{\mu\nu} \quad (B.10)$$

11. Para cada vértice leptón-fotón-neutrino:

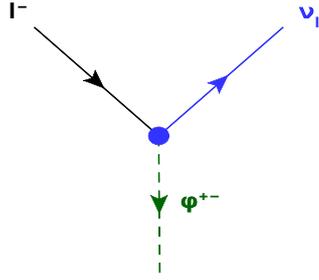


FIGURA B.11: Vértice de para bosones de Goldstone

$$\frac{-igm_w}{2\sqrt{2}m_w} P_{R,L} \quad (B.11)$$

12. Para cada vértice $\phi^+ - \gamma - \phi^-$:

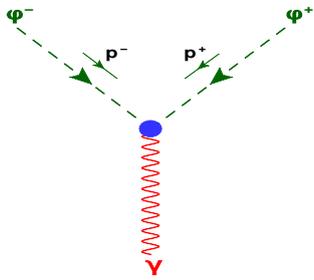


FIGURA B.12: Vértice de para bosones de Goldstone

$$ie(p_- - p_+)^{\mu} \quad (B.12)$$

13. Para cada línea interna del boson de Goldstone para z_0 etiquetada por el momento k , escribimos un factor de

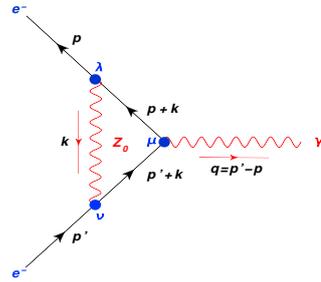


FIGURA B.13: Vértice Lepton-Higgs-Lepton

$$-\frac{i}{2}g\frac{m_f}{m_w} \quad (B.13)$$

14. Para cada vértice $lepton - GolstoneZ_0 - lepton$:

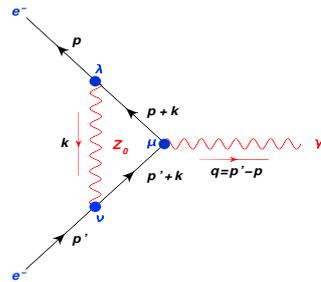


FIGURA B.14: Vértice Lepton-Higgs-Lepton

Donde las constantes v_f y a_f estan dadas por

| | u | d | e | ν |
|--------|-----------------------------------|------------------------------------|--------------------------|-------|
| $2v_f$ | $1 - \frac{8}{3} \sin^2 \theta_w$ | $-1 + \frac{4}{3} \sin^2 \theta_w$ | $-1 + 4 \sin^2 \theta_w$ | 1 |
| $2a_f$ | 1 | -1 | -1 | 1 |

Las constantes de acoplamiento satisfacen las relaciones:

$$g \sin \theta_w = g' \cos \theta_w = e$$

y las masas de las partículas son, en el orden más bajo, dadas por:

$$m_w = \frac{1}{2}vg, \quad m_Z = \frac{m_w}{\cos \theta_w}, \quad m_H = \sqrt{-2\mu^2}$$

$$m_l = \frac{vg_l}{\sqrt{2}}, \quad m_{\nu_l} = \frac{vg_{\nu_l}}{\sqrt{2}}, \quad g_z = \frac{e}{\sin \theta_w \cos \theta_w} = \frac{g_w}{\cos \theta_w}$$

donde

$$v = \left(\frac{-\mu^2}{\lambda} \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{G\sqrt{2}}} > 0$$

y por lo tanto

$$\frac{G}{\sqrt{2}} = \frac{g_w^2}{8m_w^2}$$

Las reglas de cronodinámica cuántica que vamos a utilizar son las siguientes:

1. Para cada línea interna del quark, etiquetada por el momento p , escribimos un factor de

$$\frac{i(\not{p} + m_q)}{p^2 - m_q^2 + i\epsilon} \quad (\text{B.14})$$

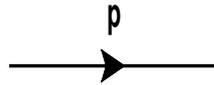


FIGURA B.15:
Propagador del
quark

es lo mismo que B.3.

2. Para cada línea interna del gluón, etiquetada por el momento p , escribimos un factor de

$$\frac{-i}{p^2 + i\epsilon} \left[g_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{p_\mu p_\nu}{p^2 + i\epsilon} \right] \quad (\text{B.15})$$

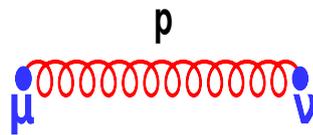


FIGURA B.16:
Propagador del
gluon

3. Para cada vértice *quark* – *gluon* – *quark* escribimos un factor de

$$ig_s \gamma^\mu t^a \quad (\text{B.16})$$

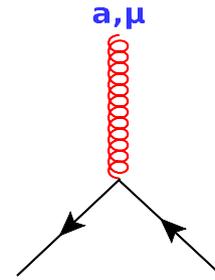


FIGURA B.17: Vértice
quark-gluon-quark

4. Para cada vértice de triple gluón escribimos un factor de

$$if^{a_1 a_2 a_3} \times ig_s V^{\mu_1 \mu_2 \mu_3}(p_1, p_2, p_3) \quad (\text{B.17})$$

donde

$$\begin{aligned} V^{\mu_1 \mu_2 \mu_3} &= (p_3 - p_1)^{\mu_1} g^{\mu_2 \mu_3} + (p_1 - p_3)^{\mu_2} g^{\mu_3 \mu_1} \\ &+ (p_2 - p_1)^{\mu_3} g^{\mu_1 \mu_2} \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

5. Para cada vértice gluón- q_i – W^- – q_j , donde $q_i = u, c, t$ y $q_j = \bar{d}, \bar{s}, \bar{b}$

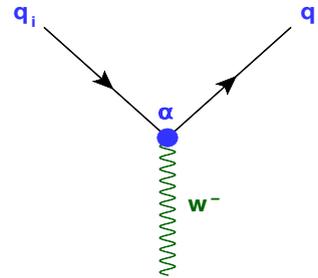


FIGURA B.18: Vértice
antiquark u-gluon-
quark b

3. Para cada vértice *quark* – *gluon* – *quark* escribimos un factor de

$$ig_s \gamma^\mu t^a \quad (\text{B.16})$$

$$\frac{ig_w}{2\sqrt{2}} \gamma^\alpha (1 + \gamma_5) \quad (\text{B.19})$$

tenemos en $SU(N)$ las siguientes relaciones: para grupos de $SU(N)$, tenemos que

$$t^b t^a t^b = \left[C_2(r) - \frac{1}{2} C_2(G) \right] t^a \quad (\text{B.20})$$

$$C_2(G) = N \quad (\text{B.22})$$

$$C_2(N) = \frac{N^2 - 1}{2N} \quad (\text{B.23})$$

y

$$f^{abc} t^b t^c = \frac{i}{2} C_2(G) t^a \quad (\text{B.21})$$

Apéndice C

Integrales de lazo

En este apéndice consideramos varias integrales que aparecen en las correcciones radiativas que contribuyen al momento magnético y cromomagnético anómalo cuando son consideradas en la capa de masa 2.28 y en el límite simétrico ??, solo escribiremos la integral exacta con algunas expansiones descritas en cada integral.

C.1. Capa de masa

C.1.1. Integral tipo QED

consideramos m la masa del fermión y m_γ la masa del fotón

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{m^2 z(1-z)}{m^2(1-z)^2 + m_\gamma^2} = \int_0^1 dz \frac{m^2 z(1-z)^2}{m^2(1-z)^2 + m_\gamma^2} \\
 &= \frac{1}{2m^4} \left\{ \frac{m_\gamma(2m^4 - 4m^2 m_\gamma^2 + m_\gamma^4)}{\sqrt{m_\gamma^2 - 4m^2}} \log \left[\frac{m_\gamma^2 + m_\gamma \sqrt{m_\gamma^2 - 4m^2} - 2m^2}{2m^2} \right] \right. \\
 &\quad \left. + (m_\gamma^4 - 2m^2 m_\gamma^2) \log \left(\frac{m_\gamma^2}{m^2} \right) + m^4 - 2m^2 m_\gamma^2 \right\} \quad (C.1)
 \end{aligned}$$

Tomando $m_\gamma^2 \gg m^2$

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \frac{m_\gamma^4}{m^4} \log \left(\frac{m_\gamma^2}{m^2} \right) - 2 \frac{m_\gamma^2}{m^2} \left[1 - \log \left(\frac{m^2}{m_\gamma^2} \right) \right] + 1 - \frac{m^2}{3m_\gamma^2} \\
 &\quad - \frac{m^4}{m_\gamma^4} \left[\log \left(\frac{m^2}{m_\gamma^2} \right) + \frac{25}{12} \right] + \mathcal{O} \left(\frac{m^6}{M^6} \right)
 \end{aligned}$$

Tomando $m^2 \gg m_\gamma^2$:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{m_\gamma}{m} \pi - \frac{3}{2} \frac{m_\gamma^2}{2m^2} - \frac{m_\gamma^2}{m^2} \log \left(\frac{m_\gamma^2}{m^2} \right) + \frac{11}{12} \frac{m_\gamma^4}{m^4} + \frac{15}{16} \frac{m_\gamma^3}{m^3} \pi \\
 &\quad + \frac{1}{2} \frac{m_\gamma^4}{m^4} \log \left(\frac{m_\gamma^2}{m^2} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{m_\gamma^5}{m^5} \right)
 \end{aligned}$$

C.1.2. Integral bosón Z_0

consideramos m la masa del fermión y m_z la masa del bosón Z_0

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{m^2 z}{m^2(1-z)^2 + m_z^2 z} = \int_0^1 dz \frac{m^2 z(1-z^2)}{m^2(1-z)^2 + m_z^2 z} \\
&= \frac{1}{2m^4} \left\{ m_z \sqrt{m_z^2 - 4m^2} (m_z^2 - 2m^2) \log \left[\frac{m_z^2 + m_z \sqrt{m_z^2 - 4m^2} - 2m^2}{2m^2} \right] \right. \\
&\quad \left. + (2m^4 - 4m^2 m_z^2 + m_z^4) \log \left(\frac{m^2}{m_z^2} \right) - 5m^4 + 2m^2 m_z^2 \right\} \quad (C.2)
\end{aligned}$$

si consideramos $m_z^2 \gg m^2$:

$$I_2 = \frac{2}{3} \frac{m^2}{m_z^2} + \frac{19}{12} \frac{m^4}{m_z^4} - \frac{m^4}{m_z^4} \log \left(\frac{m_z^2}{m^2} \right) + \frac{77}{15} \frac{m^6}{m_z^6} - 4 \frac{m^6}{m_z^6} \log \left(\frac{m_z^2}{m^2} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{m^8}{m_z^8} \right)$$

si tomamos $m^2 \gg m_z^2$:

$$\begin{aligned}
I_2 &= -\frac{5}{2} - \log \left(\frac{m_z^2}{m^2} \right) - 2 \frac{m_z}{m} \pi - \frac{m_z^2}{m^2} \left[1 - 2 \log \left(\frac{m^2}{m_z^2} \right) \right] + \frac{15}{12} \frac{m_z^3}{m^3} \\
&\quad + \frac{m_z^4}{m^4} \left[\frac{7}{6} - \frac{1}{2} \log \left(\frac{m_z^2}{m^2} \right) \right] + \mathcal{O} \left(\frac{m_z^6}{m^6} \right)
\end{aligned}$$

y otra integral que aparece en esta contribución es

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{m^2 z}{m^2(1-z)^2 + M^2 z} = \int_0^1 dz \frac{m^2 z(1-z)}{m^2(1-z)^2 + m_z^2 z} \\
&= \frac{1}{2m^2} \left\{ \frac{m_z(m_z^2 - 3m^2)}{\sqrt{m_z^2 - 4m^2}} \log \left[\frac{m_z^2 + m_z \sqrt{m_z^2 - 4m^2} - 2m^2}{2m^2} \right] + (m^2 - m_z^2) \log \left(\frac{m^2}{m_z^2} \right) \right. \\
&\quad \left. - 2m^2 \right\} \quad (C.3)
\end{aligned}$$

tomando $M^2 \gg m^2$

$$I_3 = \frac{m^2}{2m_z^2} + \frac{m^4}{m_z^4} \left[\frac{11}{6} - \log \left(\frac{m_z^2}{m^2} \right) \right] + \frac{m^6}{m_z^6} \left[\frac{89}{12} - 5 \log \left(\frac{m_z^2}{m^2} \right) \right] + \mathcal{O} \left(\frac{m^8}{m_z^8} \right)$$

tomando $m^2 \gg M^2$

$$I_3 = -1 - \frac{1}{2} \log \left(\frac{m_z^2}{m^2} \right) + \frac{3m_z}{4m} \pi + \frac{m_z^2}{m^2} \left[\frac{1}{2} \log \left(\frac{m_z^2}{m^2} + \frac{3}{4} \right) \right] - \frac{5}{32} \frac{m_z^3}{m^3} \pi + \mathcal{O} \left(\frac{m_z^4}{m^4} \right)$$

C.1.3. Integral bosón W

considerando que m es la masa del leptón y m_w la masa del bosón W

$$\begin{aligned}
I_4 &= \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{m^2(1-z)(3-2z)}{m_w^2(1-z) - m^2 z(1-z)} = \int_0^1 dz \frac{m^2(1-z)^2(3-2z)}{m_w^2(1-z) - m^2 z(1-z)} \\
&= 4 - \frac{2m_w^2}{m^2} + \frac{(3m^4 - 5m^2 m_w^2 + 2m_w^4)}{m^4} \log \left(\frac{m_w^2}{m_z^2 - m^2} \right) \quad (C.4)
\end{aligned}$$

Tomando $m_w^2 \gg m^2$

$$I_4 = \frac{7}{6} \frac{m^2}{m_w^2} + \frac{m^4}{3m_w^4} + \frac{3}{20} \frac{m^6}{m_w^6} + \frac{m^8}{12m_w^8} + \mathcal{O}\left(\frac{m^{10}}{m_w^{10}}\right)$$

Tomando $m^2 \gg m_w^2$

$$I_4 = 4 + 3 \log\left(\frac{-m_w^2}{m^2}\right) + \frac{m_w^2}{m^2} + \frac{m_w^2}{m^2} \left[1 - 5 \log\left(\frac{-m_w^2}{m^2}\right)\right] \\ + \frac{m_w^4}{m^4} \left[\frac{-7}{2} + 2 \log\left(\frac{-m_w^2}{m^2}\right)\right] + \frac{m_w^6}{2m^6} + \frac{m_w^8}{12m^8} + \mathcal{O}\left(\frac{m^{10}}{m_w^{10}}\right)$$

C.1.4. Contribución del bosón de Higgs

considerando a m como la masa del fermión y m_H la masa del bosón de Higgs

$$I_5 = \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{m^2(1-z)(1+z)}{m^2(1-z)^2 + m_H^2 z} = \int_0^1 dz \frac{m^2(1-z)^2(1+z)}{m^2(1-z)^2 + m_H^2 z} \\ = \frac{1}{2m^4 \sqrt{m_H^2 - 4m^2}} \left\{ m_H(4m^4 - 5m^2 m_H^2 + m_H^4) \log\left(\frac{2m^2}{m_H^2 + m_H \sqrt{m_H^2 - 4m^2} - 2m^2}\right) \right. \\ \left. \sqrt{m_H^2 - 4m^2} \left[3m^4 - 2m^2 m_H^2 + m_H^2(m_H^2 - 3m^2) \log\left(\frac{m_H^2}{m^2}\right)\right] \right\} \quad (C.5)$$

Tomando $m_H^2 \gg m^2$

$$I_5 = \frac{m^2}{m_H^2} \left[\log\left(\frac{m_H^2}{m^2}\right) - \frac{7}{6} \right] + \frac{m^4}{m_H^4} \left[3 \log\left(\frac{m_H^2}{m^2} - \frac{13}{4}\right) \right] \\ + \frac{m^6}{m_H^6} \left[9 \log\left(\frac{m_H^2}{m^2}\right) - \frac{201}{20} \log\left(\frac{m_H^2}{m^2}\right) \right] + \mathcal{O}\left(\frac{m^8}{m_H^8}\right)$$

tomando $m^2 \gg m_H^2$

$$I_5 = \frac{3}{2} + \frac{m_H}{m} \pi - \frac{3}{2} \frac{m_H^2}{m^2} \log\left(\frac{m_H^2}{m^2}\right) - \frac{9}{8} \frac{m_H^3}{m^3} \pi - \frac{13}{12} \frac{m_H^4}{m^4} \\ + \frac{1}{2} \frac{m_H^4}{m^4} \log\left(\frac{m_H^2}{m^2}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{m_H^5}{m^5}\right)$$

C.1.5. Contribución gluón

considerando m como la masa del quark y m_g la masa del gluón

$$I_6 = \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{m^2 z(1-z)}{m^2 z^2 + m_g^2(1-z)} = \int_0^1 dz \frac{m^2 z(1-z)^2}{m^2 z^2 + m_g^2(1-z)} \\ = \frac{1}{2m^4} \left\{ 2m^2 m_g^2 - 3m^4 + \frac{m_g(5m^4 - 5m^2 m_g^2 + m_g^4)}{\sqrt{m_g^2 - 4m^2}} \log\left[\frac{m_g^2 + m_g \sqrt{m_g^2 - 4m^2} - 2m^2}{2m^2}\right] \right. \\ \left. + (m^4 - 3m^2 m_g^2 + m_g^4) \log\left(\frac{m^2}{m_g^2}\right) \right\} \quad (C.6)$$

Tomando $m_g^2 \gg m^2$

$$I_6 = \frac{m^2}{6m_g^2} - \frac{m^4}{4m_g^4} + \frac{m^6}{m_g^6} \left[\log \left(\frac{m_g^2}{m^2} - \frac{137}{60} \right) \right] + \frac{m^8}{m_g^8} \left[7 \log \left(\frac{m_g^2}{m^2} \right) - \frac{243}{20} \right] + \mathcal{O} \left(\frac{m^{10}}{m_g^{10}} \right)$$

Tomando $m^2 \gg m_g^2$

$$I_6 = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \log \left(\frac{m^2}{m_g^2} \right) - \frac{5m_g}{m} \pi - \frac{m_g^2}{m^2} \left[\frac{3}{2} \log \left(\frac{m^2}{m_g^2} + \frac{1}{4} \right) \right] + \frac{35m_g^3}{32m^3} \pi \\ + \frac{m_g^4}{m^4} \left[\frac{1}{2} \log \left(\frac{m^2}{m_g^2} + \frac{25}{24} \right) \right] + \mathcal{O} \left(\frac{m^6}{m_g^6} \right)$$

C.2. Límite simétrico

C.2.1. Contribución bosón Z_0

considerando a m como la masa del fermión y a m_z la masa del bosón Z_0

$$I_{s1} = \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{m^2 z(1+z)}{m^2(1-z) + m_z^2 z} = \int_0^1 dz \frac{m^2 z(1-z^2)}{m^2(1-z) + m_z^2 z} \\ = \frac{1}{6(m^2 - m_z^2)^4} \left[5m^8 - 9m^4 m_z^4 + 4m^2 m_z^6 + 12m^6 m_z^2 \log \left(\frac{m^2}{m_z^2} \right) \right. \\ \left. + 6m^4 m_z^4 \log \left(\frac{m^2}{m_z^2} \right) \right] \quad (C.7)$$

tomando $m_g^2 \gg m^2$

$$I_{s1} = \frac{2}{3} \frac{m^2}{m_z^2} + \frac{m^4}{m_z^4} \left[\log \left(\frac{m^2}{m_z^2} + \frac{7}{6} \right) \right] + \frac{m^6}{m_z^6} \left[2 \log \left(\frac{m^2}{m_z^2} + \frac{2}{3} \right) \right] + \mathcal{O} \left(\frac{m^8}{m_z^8} \right)$$

tomando $m^2 \gg m_z^2$

$$I_{s1} = \frac{5}{6} + \frac{m_z^2}{m^2} \left[\frac{10}{3} + 2 \log \left(\frac{m_z^2}{m^2} \right) \right] + \frac{m_z^4}{m^4} \left[\frac{41}{6} + 7 \log \left(\frac{m_z^2}{m^2} \right) \right] + \mathcal{O} \left(\frac{m_z^6}{m^6} \right)$$

segunda integral

$$I_{s2} = \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{m^2 z}{m^2(1-z) + m_z^2 z} = \int_0^1 dz \frac{m^2 z(1-z)}{m^2(1-z) + m_z^2 z} \\ = \frac{m^2}{2(m^2 - m_z^2)^3} \left[m^4 - m_z^4 + 2m^2 m_z^2 \log \left(\frac{m_z^2}{m^2} \right) \right] \quad (C.8)$$

tomando $m_z^2 \gg m^2$

$$I_{s2} = \frac{m^2}{2m_z^2} + \frac{m^4}{m_z^4} \left[\log \left(\frac{m^2}{m_z^2} \right) + \frac{3}{2} \right] + \frac{m^6}{m_z^6} \left[3 \log \left(\frac{m^2}{m_z^2} \right) + \frac{5}{2} \right] + \mathcal{O} \left(\frac{m^8}{m_z^8} \right)$$

tomando $m^2 \gg m_z^2$

$$I_{s2} = \frac{1}{2} + \frac{m_z^2}{m^2} \left[\log \left(\frac{m_z^2}{m^2} \right) + \frac{3}{2} \right] + \frac{m_z^4}{m^4} \left[3 \log \left(\frac{m_z^2}{m^2} \right) + \frac{5}{2} \right] + \mathcal{O} \left(\frac{m_z^6}{m^6} \right)$$

C.2.2. Contribución para el fotón

considerando m como la masa del fermión y m_γ la masa del fotón

$$\begin{aligned} I_{s3} &= \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{m^2 z(1-z)}{m^2(1-z) + m_\gamma^2 z} = \int_0^1 dz \frac{m^2 z(1-z)^2}{m^2(1-z) + m_\gamma^2 z} \\ &= \frac{1}{6(m^2 - m_\gamma^2)^4} \left[m^8 - 6m^6 m_\gamma^2 + 3m^4 m_\gamma^4 + 2m^2 m_\gamma^6 + 6m^4 m_\gamma^4 \log \left(\frac{m^2}{m_\gamma^2} \right) \right] \quad (\text{C.9}) \end{aligned}$$

tomando $m_\gamma^2 \gg m^2$

$$I_{s3} = \frac{m^2}{3m_\gamma^2} + \frac{m^4}{m_\gamma^4} \left[\log \left(\frac{m^2}{m_\gamma^2} \right) + \frac{11}{6} \right] + \frac{m^6}{m_\gamma^6} \left[4 \log \left(\frac{m^2}{m_\gamma^2} \right) + \frac{13}{3} \right] + \mathcal{O} \left(\frac{m^8}{m_\gamma^8} \right)$$

tomando $m^2 \gg m_\gamma^2$

$$I_{s3} = \frac{1}{6} - \frac{m_\gamma^2}{3m^2} + \frac{m_\gamma^4}{m^4} \left[\log \left(\frac{m^2}{m_\gamma^2} \right) - \frac{11}{6} \right] + \frac{m_\gamma^6}{m^6} \left[4 \log \left(\frac{m^2}{m_\gamma^2} - \frac{13}{3} \right) \right] + \mathcal{O} \left(\frac{m^8}{m_\gamma^8} \right)$$

C.2.3. Integral para boson de Higgs

denotando la masa del fermión como m y la masa del Higgs como m_H

$$\begin{aligned} I_{s4} &= \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{m^2 z(1-z)(1+z)}{m^2(1-z) + m_H^2 z} = \int_0^1 dz \frac{m^2 z(1-z)^2(1+z)}{m^2(1-z) + m_H^2 z} \\ &= \frac{1}{12(m^2 - m_H^2)^4} \left\{ 3m^{10} - 22m^8 m_H^2 + 18m^6 m_H^4 + 6m^4 m_H^6 - 5m^2 m_H^8 \right. \\ &\quad \left. + 24m^6 m_H^4 \log \left(\frac{m^2}{m_H^2} \right) + 12m^4 m_H^6 \log \left(\frac{m_H^2}{m^2} \right) \right\} \quad (\text{C.10}) \end{aligned}$$

tomando $m_H^2 \gg m^2$

$$I_{s4} = \frac{5}{12} \frac{m^2}{m_H^2} + \frac{m^4}{m_H^4} \left[\log \left(\frac{m^2}{m_H^2} \right) + \frac{19}{12} \right] + \frac{m^6}{m_H^6} \left[3 \log \left(\frac{m^2}{m_H^2} \right) + \frac{9}{4} \right] + \mathcal{O} \left(\frac{m^8}{m_H^8} \right)$$

tomando $m^2 \gg m_H^2$

$$I_{s4} = \frac{1}{4} - \frac{7}{12} \frac{m_H^2}{m^2} - \frac{m_H^4}{m^4} \left[2 \log \left(\frac{m_H^2}{m^2} \right) + \frac{47}{12} \right] - \frac{m_H^6}{m^6} \left[9 \log \left(\frac{m_H^2}{m^2} + \frac{43}{4} \right) \right] + \mathcal{O} \left(\frac{m^8}{m_H^8} \right)$$

C.2.4. Contribución por parte del gluón

considerando a m como la masa del quark y m_g como la masa del gluón

$$\begin{aligned}
 I_{s5} &= \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{m^2 z(1-z)}{m^2 z + m_g^2(1-z)} = \int_0^1 dz \frac{m^2 z(1-z)^2}{m^2 z + m_g^2(1-z)} \\
 &= \frac{m^2}{6(m^2 - m_g^2)^4} \left[2m^6 + 3m^4 m_g^2 - 6m^2 m_g^4 + m_g^6 + 6m^4 m_g^2 \log\left(\frac{m_g^2}{m^2}\right) \right] \quad (\text{C.11})
 \end{aligned}$$

tomando $m_g^2 \gg m^2$

$$I_{s5} = \frac{m^2}{6m_g^2} - \frac{m^4}{3m_g^4} - \frac{m^6}{m_g^6} \left[\log\left(\frac{m^2}{m_g^2}\right) + \frac{11}{6} \right] - \frac{m^8}{m_g^8} \left[4 \log\left(\frac{m^2}{m_g^2}\right) + \frac{13}{3} \right] + \mathcal{O}\left(\frac{m^{10}}{m_g^{10}}\right)$$

$m^2 \gg m_g^2$

$$I_{s5} = \frac{1}{3} + \frac{m_g^2}{m^2} \left[\frac{11}{6} + \log\left(\frac{m_g^2}{m^2}\right) \right] + \frac{m_g^4}{m^4} \left[\frac{13}{3} + 4 \log\left(\frac{m_g^2}{m^2}\right) \right] + \mathcal{O}\left(\frac{m_g^6}{m^6}\right)$$

Bibliografía

- [1] Aoyama, T., Asmussen, N., Benayoun, M., Bijnens, J., Blum, T., Bruno, M., ... & Curciarello, F. (2020). The anomalous magnetic moment of the muon in the Standard Model. arXiv preprint arXiv:2006.04822.
- [2] Nakanishi, N., & Ojima, I. (1990). Covariant operator formalism of gauge theories and quantum gravity.
- [3] Anderson, C. D., & Neddermeyer, S. H. (1936). Cloud chamber observations of cosmic rays at 4300 meters elevation and near sea-level. *Physical Review*, 50(4), 263.
- [4] Anderson, C. D. (1933). The positive electron. *Physical Review*, 43(6), 491.
- [5] O. Stern, *Z. Phys.* 7, 249 (1921).
- [6] Alvarez, L. W., & Bloch, F. (1940). A quantitative determination of the neutron moment in absolute nuclear magnetons. *Physical review*, 57(2), 111.
- [7] Nafe, J. E., Nelson, E. B., & Rabi, I. I. (1947). The hyperfine structure of atomic hydrogen and deuterium. *Physical Review*, 71(12), 914.
- [8] Nagle, D. E., Julian, R. S., & Zacharias, J. R. (1947). The hyperfine structure of atomic hydrogen and deuterium. *Physical Review*, 72(10), 971.
- [9] Kusch, P., & Foley, H. M. (1947). Precision Measurement of the Ratio of the Atomic Values' in the P 3 2 2 and P 1 2 2 States of Gallium. *Physical Review*, 72(12), 1256.
- [10] Schwinger, J. (1948). On quantum-electrodynamics and the magnetic moment of the electron. *Physical Review*, 73(4), 416.
- [11] Laporta, S., & Remiddi, E. (1996). The analytical value of the electron ($g-2$) at order α^3 in QED. *Physics Letters B*, 379(1-4), 283-291.
- [12] Aoyama, T., Hayakawa, M., Kinoshita, T., & Nio, M. (2012). Complete tenth-order QED contribution to the muon $g-2$. *Physical review letters*, 109(11), 111808.
- [13] Aoyama, T., Kinoshita, T., & Nio, M. (2019). Theory of the Anomalous Magnetic Moment of the Electron. *Atoms*, 7(1), 28.
- [14] Fujikawa, K., Lee, B. W., & Sanda, A. I. (1972). Generalized renormalizable gauge formulation of spontaneously broken gauge theories. *Physical Review D*, 6(10), 2923.
- [15] Bars, I., & Yoshimura, M. (1972). Muon magnetic moment in a finite theory of weak and electromagnetic interactions. *Physical Review D*, 6(1), 374.

- [16] Gnendiger, C., Stöckinger, D., & Stöckinger-Kim, H. (2013). The electroweak contributions to $(g - 2)_\mu$ after the Higgs-boson mass measurement. *Physical Review D*, 88(5), 053005.
- [17] Czarnecki, A., Marciano, W. J., & Vainshtein, A. (2003). Refinements in electroweak contributions to the muon anomalous magnetic moment. *Physical Review D*, 67(7), 073006
- [18] Bennett, G. W., Bousquet, B., Brown, H. N., Bunce, G., Carey, R. M., Cushman, P., ... & Deninger, W. (2006). Final report of the E821 muon anomalous magnetic moment measurement at BNL. *Physical Review D*, 73(7), 072003.
- [19] Purcell, E. M., & Ramsey, N. F. (1950). On the possibility of electric dipole moments for elementary particles and nuclei. *Physical Review*, 78(6), 807.
- [20] E. Rutherford, *Proc. of the Manch. Lit. and Phil. Soc.*, IV, 55, (1911) 18, and *Phil. Mag.*, Series 6, 21 (1911) 669.
- [21] J.J. Thompson, *Phil. Mag.* 44 (1897) 293.
- [22] R.A. Millikan, *Phys. Mag.* XIX, 6 (1910) 209.
- [23] N. Bohr, *Phil. Mag.* 26, 1 (1913).
- [24] E. Schrodinger, *Ann. Phys.* 79 (1926) 361.
- [25] A.K. Compton, *Jour. Franklin. Inst.*, 192 Aug. (1921) 145.
- [26] W. Gerlach and O. Stern, *Ann. Phys.* 74, 673 (1924).
- [27] G.E. Uhlenbeck and S. Goudsmit, *Naturwissenschaften* 47, 953 (1925).
- [28] G.E. Uhlenbeck and S. Goudsmit, *Nature* 117 (1926) 264
- [29] L.H. Thomas, *Nature* 117, (1926) 514 and *Phil. Mag.* 3 (1927) 1.
- [30] Griffiths, D. J. (2005). *Introduction to electrodynamics*.
- [31] Pauli, W. (1920). *Quantentheorie und Magnetron*. *Phys. Zs.*, 21, 615-617.
- [32] Larmor, J. (1897). LXIII. On the theory of the magnetic influence on spectra; and on the radiation from moving ions. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 44(271), 503-512.
- [33] Pais, A. (1989). *George Uhlenbeck and the discovery of electron spin*. na.
- [34] Pauli, W. (1988). *Zur quantenmechanik des magnetischen elektrons*. In Wolfgang Pauli (pp. 282-305). Vieweg+ Teubner Verlag.
- [35] Sakurai, J. J. (1967). *Advanced quantum mechanics*. Pearson Education India.
- [36] Dirac, P. A. M. (1928). DIRAC 1928B. *Proc. Roy. Soc*, 118, 351.
- [37] L.E. Kinster, W.V. Houston, *Phys. Rep. C* 45, 104 (1934)
- [38] P. Kusch, *Science* 123 (1956) 207. *Phys. Today* 19, 23 (1966)
- [39] Hostler, L. C. (1985). Scalar formalism for quantum electrodynamics. *Journal of mathematical physics*, 26(6), 1348-1354.

- [40] Morgan, A. G. (1995). Second order fermions in gauge theories. *Physics Letters B*, 351(1-3), 249-256.
- [41] Foldy, L. L., & Wouthuysen, S. A. (1950). On the Dirac theory of spin 1/2 particles and its non-relativistic limit. *Physical Review*, 78(1), 29.
- [42] P.A. Zyla et al. (Particle Data Group), *Prog. Theor. Exp. Phys.* 2020, 083C01 (2020)
- [43] Pich, A. (2012). The Standard model of electroweak interactions. arXiv preprint arXiv:1201.0537.
- [44] Jegerlehner, F. (2008). The anomalous magnetic moment of the muon (p. 426). Berlin: Springer.
- [45] G. 't Hooft, *Nucl. Phys. B* 33, 173 (1971); 35, 167 (1971); G. 't Hooft, M. Veltman, *Nucl. Phys. B* 50, 318 (1972)
- [46] Guralnik, G. S., Hagen, C. R., & Kibble, T. W. (1964). Global conservation laws and massless particles. *Physical Review Letters*, 13(20), 585.
- [47] Hioki, Z., & Ohkuma, K. (2010). Search for anomalous top–gluon couplings at LHC revisited. *The European Physical Journal C*, 65(1-2), 127.
- [48] Nakanishi, N., & Ojima, I. (1990). Covariant operator formalism of gauge theories and quantum gravity.
- [49] Curci, G., & Ferrari, R. (1976). On a class of Lagrangian models for massive and massless Yang-Mills fields. *Il Nuovo Cimento A (1965-1970)*, 32(2), 151-168.
- [50] Gracey, J. A., Peláez, M., Reinoso, U., & Tissier, M. (2019). Two-loop calculation of Yang-Mills propagators in the Curci-Ferrari model. *Physical Review D*, 100(3), 034023.
- [51] Hioki, Z., & Ohkuma, K. (2010). Search for anomalous top–gluon couplings at LHC revisited. *The European Physical Journal C*, 65(1-2), 127.
- [52] Becchi, C., Rouet, A., & Stora, R. (1976). Renormalization of gauge theories. *Annals of Physics*, 98(2), 287-321.
- [53] Barnaföldi, G. G., & Gogokhia, V. (2019). The Mass Gap Approach to QCD. arXiv preprint arXiv:1904.07748.
- [54] Bermudez, R., Albino, L., Gutiérrez-Guerrero, L. X., Tejeda-Yeomans, M. E., & Bashir, A. (2017). Quark-gluon vertex: A perturbation theory primer and beyond. *Physical Review D*, 95(3), 034041.
- [55] Choudhury, I. D., & Lahiri, A. (2015). Anomalous chromomagnetic moment of quarks. *Modern Physics Letters A*, 30(23), 1550113.
- [56] Gracey, J. A. (2011). Two loop QCD vertices at the symmetric point. *Physical Review D*, 84(8), 085011.