



**UNIVERSIDAD MICHOACANA
DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO**

**FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
“MAT. LUIS MANUEL RIVERA GUTIÉRREZ”**

**Propuesta de enseñanza para la
Factorización algebraica**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

PRESENTA:

IGNACIO MORALES GONZÁLEZ

DIRECTORES DE TESIS:

M. C. JESÚS ROBERTO GARCÍA PÉREZ

DR. ARMANDO SEPÚLVEDA LÓPEZ

MORELIA MICHOACÁN, ABRIL DE 2008.

AGRADECIMIENTOS

A mis padres, por haberme dado la vida y haber crecido en su humilde hogar, del cual me siento muy satisfecho y orgulloso. Desearía que mi padre estuviera vivo, para seguir escuchando sus pláticas y consejos; y a mi madre por ser tan amorosa, noble y comprensiva.

Jesús Morales Paniagua
Ma. Graciela González Cuenca

A mi muy estimado amigo de toda la vida, por su apoyo incondicional, preocupación y consejos.

M. A. Francisco Becerra García

A quienes también dedico mi trabajo de tesis.

DEDICATORIAS

A mis hijos, como una muestra de superación y que no importa el tiempo ni la edad para lograr lo que se quiere.

Jorge Omar y María de Lourdes Morales Martínez

A mi esposa, por su apoyo, comprensión y darme aliento para superarme académicamente.

Yoxana Alicia Morales Jacobo

A mis directores de tesis, por sus aportaciones, sugerencias, esfuerzo, apoyo y revisiones a mi trabajo, ya que de no haber sido así, mi tesis no hubiera sido posible.

M. C. Jesús Roberto García Pérez

Dr. Armando Sepúlveda López

A mis sinodales por sus revisión y sugerencias a mi trabajo de tesis. A mis maestros, por su labor docente, esfuerzo y dedicación en el Programa de Maestría en Ciencias en Educación Matemática, para que sobresalga y cada vez tenga mayor reconocimiento.

M. C. Jesús Roberto García Pérez

Dr. Armando Sepúlveda López

Dra. María de Lourdes Guerrero Magaña

Dr. José Carlos Cortés Zavala

Dr. Gerardo Tinoco Ruiz

Dr. Jorge Luis López López

A la secretaria del Departamento de Matemática Educativa, por su prestigiado trabajo, el buen trato, su buena intención para facilitarnos los tramites y su excelente servicio que nos proporcionó durante nuestra estancia en el Programa de Maestría en Ciencias en Educación Matemática.

Marcela Valdez Vazquez

ÍNDICE

Página

PRESENTACIÓN.	iv
--------------------------------	----

Capítulo 1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1 Importancia del estudio.	1
1.2 Planteamiento del problema de investigación	2
1.3 Justificación.	3
1.4 Objetivo General.	4
1.5 Objetivos específicos de la investigación.	4
1.6 Preguntas de investigación.	6

Capítulo 2. REVISIÓN DE LITERATURA

2.1 Consideraciones históricas.	7
2.1.1 <i>Los babilonios</i>	7
2.1.2 <i>Los egipcios.</i>	11
2.1.3 <i>Los griegos.</i>	12
2.1.4 <i>Los árabes.</i>	18
2.1.5 <i>El Renacimiento.</i>	21
2.1.6 <i>Vieta.</i>	23
2.1.7 <i>Rene Descartes y Fermat</i>	24
2.1.8 <i>Leonard Euler.</i>	25
2.2 Estudios sobre el aprendizaje del álgebra en Educación Matemática.	25
2.3 Consideraciones sobre el aprendizaje de las matemáticas	28
2.4 Uso de materiales concretos en la construcción del conocimiento.	30
2.5 Investigaciones relacionadas con nuestro trabajo	35
2.6 Marco teórico.	37

Capítulo 3. METODOLOGÍA

3.1 Aspectos generales	39
3.2 Elaboración del modelo geométrico-simbólico intuitivo	39
3.3 Piloteo del modelo geométrico– simbólico intuitivo.	41
3.4 Diseño de las actividades.	45
3.5 Planeación de la implementación.	46
3.5.1 <i>Sujetos</i>	46
3.5.2 <i>Material</i>	47
3.5.3 <i>Planeación de las sesiones</i>	47
3.5.4 <i>Papel del investigador</i>	48
3.5.5 <i>Procedimiento y planeación de las sesiones</i>	49

Capítulo 4. IMPLEMENTACIÓN DE LAS ACTIVIDADES Y RESULTADOS

4.1 Introducción	51
4.2 Descripción de la primera sesión.	52
4.2.1 <i>Primera etapa</i>	52
4.2.2 <i>Segunda etapa</i>	60
4.3 Descripción de la segunda sesión	68
4.3.1 <i>Primera etapa</i>	68
4.3.2 <i>Segunda etapa</i>	73
4.4 Descripción de la tercera sesión.	86
4.4.1 <i>Primera etapa</i>	86
4.4.2 <i>Segunda etapa</i>	92
4.5 Descripción de la cuarta sesión.	102
4.5.1 <i>Primera etapa</i>	102
4.5.2 <i>Segunda etapa</i>	115
4.6 Resumen global de los resultados	124
4.6.1 <i>Exposición interactiva</i>	124
4.6.2 <i>Trabajo en equipo</i>	128
4.6.3 <i>Socialización</i>	130
4.6.4 <i>Trabajo individual extra-clase</i>	131

4.7	Análisis de los resultados.	133
4.7.1	<i>Fase de exposición interactiva.</i>	133
4.7.2	<i>Fase de trabajo en equipo.</i>	134
4.7.3	<i>Interpretación de los resultados.</i>	137
4.7.4	<i>Fase de Socialización.</i>	138
4.7.5	<i>Fase del trabajo individual extra-clase</i>	139

Capítulo 5. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

5.1	Introducción.	143
5.2	Discusión en torno a las preguntas de investigación.	144
5.3	Conclusiones.	148
5.4	Comentarios generales.	150

ANEXO 1. MODELO GEOMÉTRICO – SIMBÓLICO INTUITIVO.	153
---	-----

ANEXO 2. ACTIVIDADES.	217
-----------------------------------	-----

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.	263
---	-----

PRESENTACIÓN

La factorización algebraica es un tema cuyo estudio se inicia en la secundaria y se continúa en el bachillerato. En este nivel educativo, su aplicación es muy importante en diversos contenidos de matemáticas: resolución de ecuaciones, transformación y simplificación de expresiones, métodos de derivación e integración, entre otros.

Generalmente, el aprendizaje de la factorización, así como de otros temas de álgebra, se basa en la imitación y la práctica de ejercicios, promoviéndose un aprendizaje memorístico y poco significativo. La experiencia de los docentes, confirmada por la investigación educativa, indica que este tipo de aprendizaje contribuye muy poco, y en cierto sentido de manera negativa, a la formación matemática de los estudiantes. En este trabajo presentamos una propuesta de aprendizaje del tema de factorización basado en un modelo geométrico que, consideramos, permite un acercamiento intuitivo a este tema.

Desde las antiguas civilizaciones hasta el renacimiento, la geometría fue empleada para abordar diversos problemas de naturaleza algebraica, particularmente en la resolución de ecuaciones. En la actualidad, también se han elaborado propuestas para la enseñanza del álgebra utilizando modelos geométricos, tales como los bloques de Dienes y algunas variantes de estos. Tomando como referencia estos trabajos, hemos desarrollado un modelo geométrico que, utilizando los mismos principios, permite la factorizaciones de expresiones más complejas de las que usualmente abordan estas propuestas.

Otra parte importante de este trabajo, es la elaboración e implementación de actividades de aprendizaje basadas en nuestro modelo geométrico. Por un lado, se trata de valorar la pertinencia y eficacia de la propuesta de enseñanza y, por otro lado generar materiales que puedan ser útiles para aquellos profesores en llevarla al aula.

En el diseño de las actividades y su implementación, se incorpora un enfoque constructivista del aprendizaje, en el cual, se promueve la interacción individual y colectiva con el objeto de estudio; la discusión de resultados y diferencias; el análisis y autocorrección de los errores.

Capítulo 1

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1 Importancia del estudio

La problemática que se presenta en la enseñanza y aprendizaje del álgebra ha motivado que algunos profesores busquen alternativas y recursos didácticos para su enseñanza y así, facilitar el aprendizaje. Sin embargo, esta búsqueda regularmente conduce al desarrollo de estrategias didácticas que fomentan la memorización de reglas y procedimientos, haciendo a un lado el aprendizaje conceptual de los objetos matemáticos. Diversas investigaciones realizadas en Educación Matemática, así como las experiencias compartidas con compañeros de trabajo, ponen de manifiesto que esta situación propicia un aprendizaje deficiente de las nociones y procedimientos algebraicos.

En este contexto, dada la importancia que tiene el tema de la factorización para el aprendizaje de las ideas básicas y de su aplicación en diversos contenidos tanto del álgebra como de otras ramas de las matemáticas, así como de las dificultades que los estudiantes manifiestan en el dominio de este tema, hemos realizado esta investigación que contiene una propuesta de enseñanza del tema de factorización, en el curso de álgebra de bachillerato, la cual está basada en el álgebra geométrica, de la geometría no deductiva, que ha sido utilizada por los babilonios (3000 a. de C) hasta el siglo XVII d.C., para resolver problemas algebraicos, y que se sigue utilizando en algunas propuestas de enseñanza, tales como los Bloques de Dienes.

La propuesta consiste en utilizar el álgebra geométrica para factorizar polinomios mediante la interpretación de sus términos como cuadrados o rectángulos y, a partir de la noción de área, establecer dicha factorización. Se recurre, por un lado, al método geométrico de cortar y pegar, el cual, de según Høyrup (1987 y 1990) fue utilizado por los babilónicas para resolver ecuaciones de segundo grado (Radford, 1996, p. 40); por otro lado, se recurre el método de compensación de áreas, desarrollado en este trabajo.

Con esta propuesta se pretende que los estudiantes aprendan a factorizar polinomios con coeficientes enteros y cuyas raíces sean números enteros; es importante mencionar también que

con este método se pueden factorizar algunos polinomios con coeficientes y raíces racionales, e incluso reales.

1.2 Planteamiento del problema de investigación

Los estudiantes de bachillerato regularmente manifiestan dificultades de aprendizaje en el álgebra; el nivel de competencia alcanzado por muchos de ellos les impide resolver satisfactoriamente los problemas algebraicos que se les presentan. La factorización se ha definido como el proceso recíproco al de la multiplicación, que tiene como finalidad descomponer un polinomio en un producto de otros polinomios de grado menor, de una manera similar a como expresamos un número entero en un producto de otros enteros; los procedimientos utilizados están basados en las propiedades de campo de los números reales.

La experiencia de los profesores que imparten el curso de álgebra y los resultados obtenidos por los estudiantes en las evaluaciones, indican que la factorización es uno de los temas que más se dificultan a los alumnos: primero, porque el reconocimiento del tipo de polinomio ya implica dificultades asociadas con la utilización de números, letras y signos de operación, así como por la noción de variable; y segundo, porque aún conociendo los diferentes métodos de factorización se requiere cierta experiencia para saber cuál de ellos utilizar en determinado momento.

Creemos que el álgebra geométrica es una alternativa que puede proporcionar ideas para factorizar cierta clase de polinomios que aparecen en el contexto escolar. Sin duda, es una opción didáctica que debemos explorar ya que los estudiantes están familiarizados con situaciones de adición y sustracción de áreas.

En este trabajo nos proponemos desarrollar las bases para la implementación de una propuesta de enseñanza que permita superar las dificultades que tienen los estudiantes para aprender el tema de factorización. Así, nuestro propósito principal es ver si la propuesta contribuye para que los estudiantes logren el aprendizaje del tema de factorización, de modo que el problema de investigación es:

¿En qué medida la implementación de una propuesta didáctica, basada en el uso de una álgebra geométrica favorece el aprendizaje del tema de factorización en estudiantes de bachillerato?

1.3 Justificación

Importancia de la factorización en el currículo de matemáticas. La factorización es fundamental para el entendimiento de multiplicación y división; permite la simplificación de fracciones, calcular límites y encontrar derivadas e integrales; además es esencial en la resolución de ecuaciones y desigualdades.

Dificultades que presenta el tema de factorización a los alumnos del primer año de bachillerato.

A diferencia de lo que ocurre con los problemas aritméticos, el trabajar con expresiones simbólicas (algebraicas) que carecen de significados concretos, de entrada plantea una gran dificultad a los estudiantes de bachillerato, ya que regularmente sólo se les proporcionan las reglas de operación que deben emplear y que, por supuesto tampoco tienen significado para ellos. Por otro lado, la factorización de polinomios, tratada de manera aislada de otros contenidos, tampoco tiene mucho sentido para los estudiantes, lo cual es otra fuente de dificultad.

Esta falta de significado, tanto de los objetos como en los fines y procedimientos de la factorización algebraica, induce a la utilización prácticas memorísticas tanto en la enseñanza como en el aprendizaje de este tema, reduciéndose al reconocimiento del polinomio a factorizar y a la elección del método apropiado. Ambas cosas requieren experiencia en el manejo de expresiones algebraicas.

Tradicionalmente la enseñanza de este tema se da con base a las recomendaciones de textos como el Álgebra de Baldor (1970) o el Álgebra de Rees y Spark (1970) en los cuales se privilegia la manipulación (con exageración) de un método particular para un cierto tipo de polinomios, y luego otro, etc., convirtiendo el tema de factorización en un tema que abrumba a los estudiantes.

Estos métodos se derivan del desarrollo de ciertos productos de polinomios y que consisten en reconocer patrones, tales como: el producto de dos binomios de primer grado con un término común que da como resultado un trinomio de segundo grado, el producto de un binomio por su conjugado que da una diferencia de cuadrados, el cuadrado de un binomio que da un trinomio cuadrado perfecto, etc., así, el alumno para factorizar un polinomio tiene que reconocer el polinomio, si es un trinomio de segundo grado, o un trinomio cuadrado perfecto o una diferencia de cuadrados, y luego expresarlo como el producto de los binomios de los cuales se originó; aumentando las dificultades en la factorización.

Elección de la enseñanza del tema de factorización como problema de investigación. La importancia de la factorización en el currículo y el bajo nivel de competencia que regularmente adquieren los estudiantes en las matemáticas escolares, ha sido el motivo de elegir dicho tema como problema de investigación. El uso de los elementos que proporciona el álgebra geométrica puede ser un factor importante para superar dificultades en el aprendizaje de la factorización, ya que los estudiantes están familiarizados con la noción de área asociada a rectángulos y cuadrados, y a su manipulación.

1.4 Objetivo General

El objetivo de la propuesta es que los estudiantes de primer año de bachillerato logren factorizar polinomios a partir de construcciones de figuras geométricas rectangulares, y establecer el método de factorización propuesto; así mismo, que sean capaces de aplicar este procedimiento a los polinomios que usualmente aparecen en el contexto escolar del bachillerato. También se pretende dotar al alumno de una herramienta geométrica mediante la cual pueda factorizar polinomios. Esta herramienta le permitirá visualizar los procedimientos algebraicos que ha de realizar para factorizar el polinomio en forma simbólica.

1.5 Objetivos específicos de la investigación

Objetivo 1

Elaborar un modelo geométrico intuitivo que sea accesible a los estudiantes y que les permita abordar los diversos tipos de factorización que usualmente se abordan en el bachillerato.

Se requiere que este modelo sea matemáticamente consistente y suficientemente completo para entender, explicar y realizar la factorización de expresiones algebraicas usuales en el bachillerato; también es importante que este modelo, facilite la incorporación del simbolismo y las operaciones algebraicas.

Objetivo 2

Una vez que hayamos establecido el modelo geométrico, nuestro siguiente objetivo es el diseño de actividades que favorezcan aprendizajes significativos en los estudiantes con relación al álgebra en general, y en particular, sobre el tema de factorización. En este sentido, tomaremos en consideración algunas propuestas didácticas de actualidad, particularmente aquellas que se adapten de manera natural al modelo geométrico.

El diseño e implementación de estas actividades tienen dos propósitos, el primero, recabar información sobre la pertinencia y viabilidad de la propuesta de enseñanza-aprendizaje y, el segundo, que con esta misma información sea posible mejorar estas actividades para que puedan ser utilizadas por profesores de secundaria y bachillerato en sus cursos.

Objetivo 3

Mediante la implementación de las actividades de aprendizaje, se espera que los estudiantes adquieran nociones y habilidades sobre la factorización de polinomios a través del modelo geométrico, tales como:

- a) Representar geométricamente enteros y monomios con coeficientes enteros y sus diferentes descomposiciones en factores (representación de los factores de un número y de un monomio).
- b) Representar geométrica y simbólicamente la suma de monomios asociándole la suma de las áreas. Efectuar esta suma cuando se trate de términos semejantes.
- c) Representar polinomios, mediante la adición de las figuras rectangulares que representan sus términos.

- d) Comprender la idea central ‘Cuadrar un polinomio’, como la acción de manipular las áreas de los cuadrados o rectángulos que representan los términos de un polinomio para construir un cuadrado o rectángulo (noción de factorización geométrica) identificando la invariancia del área en las representación geométrica inicial y la final, lo que implica la equivalencia de las representaciones simbólicas inicial (polinomio) y el producto de los factores (los lados) que se obtienen al cuadrar el polinomio.
- e) Adquirir habilidad en la factorización geométrica y su expresión simbólica, de diferentes tipos de polinomios.
- f) Identificar patrones simbólicos asociados a los diferentes tipos de factorización, de manera que posteriormente los utilice sin necesidad de recurrir a la representación geométrica.

1.6 Preguntas de investigación

Las preguntas que guían el desarrollo de esta investigación son:

1. ¿Es factible elaborar un modelo geométrico intuitivo que permita abordar, con relativa facilidad, la factorización de polinomios típicos de bachillerato?
2. ¿Es factible implementar, en nuestro contexto escolar del bachillerato, una propuesta de enseñanza del tema de factorización que se base en este modelo?
3. ¿Qué aprendizajes se favorecen con la implementación de esta propuesta de enseñanza?
4. ¿Qué dificultades se presentan durante la implementación de la propuesta de enseñanza?

Capítulo 2

REVISIÓN DE LITERATURA

2.1 Consideraciones históricas

En este apartado, hacemos una revisión breve sobre algunos aspectos del desarrollo del álgebra que son relevantes para nuestro trabajo. Nos enfocamos sobre algunos momentos de este desarrollo que se dieron entre el florecimiento de las civilizaciones antiguas, Babilónica y Egipcia, hasta el Siglo XVII de nuestra era.

2.1.1 *Los babilonios*

La cultura babilónica floreció entre los ríos Eufrates y Tigris (Mesopotamia, hoy Irak) y comprende el periodo que va desde alrededor de 3000 a. de C. hasta finales de la era precrisiana.

A finales del siglo XIX, una expedición científica organizada por la Universidad de Pensilvania, encontró en la antigua ciudad de Mesopotamia diversas tablillas de arcilla¹ de contenido matemático. En algunas de estas tablillas hay evidencias de que los babilonios sabían resolver ecuaciones con una incógnita y sistemas de ecuaciones con dos incógnitas, de primero, segundo y tercer grado; conocían la solución de la ecuación cuadrática y sabían obtener la suma de progresiones aritméticas.

Algunas de estas tablillas contienen problemas con datos numéricos en los que se utiliza el mismo procedimiento por medio del cual se encuentra la solución. Tal procedimiento se asemeja a la descripción de un algoritmo algebraico, en el que, los datos numéricos sólo son el punto de partida para la solución (Bromberg, Figueras, Zubieta, Escalante, y Manchaca, 1981). Diversos estudiosos han considerado que en estos trabajos se encuentran los orígenes del álgebra.

De acuerdo con Radford (1996), en el ‘álgebra’ de los babilonios parecen estar presentes dos enfoques: uno aritmético y otro geométrico.

¹ La arcilla era la materia prima de las construcciones, las tablillas se construían una sobre otra.

Enfoque geométrico

Las traducciones e interpretaciones de las tablillas babilónicas antiguas, realizadas durante la primera mitad del siglo XX por Neugebauer (1935-1937), Neugebauer y Sachs (1945) y Thureau-Dangin (1938a), nos proveen de valiosa información sobre el conocimiento matemático y la forma en que era utilizado. Varias de estas tablillas tratan de problemas numéricos, pero en la mayoría de los casos el procedimiento de la solución del problema no está completamente explicado, sólo aparece como una secuencia de cálculos. Esto dificulta entender la forma de pensamiento seguido en la solución de un problema. Sin embargo, hoy en día cuando son interpretadas, los conceptos algebraicos, símbolos y los cálculos adquieren sentido. Estas traducciones condujeron a los investigadores, y a otros historiadores de las matemáticas a afirmar que los babilonios habían desarrollado un ‘álgebra’ que se diferencia de nuestra álgebra elemental moderna por la falta de representaciones simbólicas, y que surge de problemas numéricos y se resuelve por procedimientos aritméticos generales.

El primer problema de la tablilla BM 13901 (Thureau-Dangin, 1938a) es un ejemplo de esta ‘álgebra-aritmética’. La interpretación clásica de su traducción ha sido formulada como:

Tengo agregado la superficie y el lado de mi cuadrado, y esto es $\frac{3}{4}$.

La clásica interpretación de la solución es:

Tomo 1 coeficiente (del lado del cuadrado). Dividir 1 en dos partes. $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ agregar a $\frac{3}{4}$. 1 es el cuadrado de 1. Restar $\frac{1}{2}$, el cual se ha multiplicado por sí mismo, y $\frac{1}{2}$ es (el lado del cuadrado).

La interpretación clásica de su traducción en el enunciado del problema, se parece a la ecuación $x^2 + x = \frac{3}{4}$, y parece una secuencia de operaciones numéricas, la cual conduce a la solución:

$$x = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} - \frac{1}{2}$$

De acuerdo con esto, matemáticos de la antigua Babilonia tenían conocimiento de procedimientos aritméticos equiparables con los que contiene, la que conocemos actualmente, como fórmula general de la ecuación cuadrática.

Por otro lado, Høyrup (1987 y 1990) da una interpretación completamente diferente de este problema; afirma que el álgebra babilónica no pudo haber tenido origen aritmético. En vez de ello, parece haber sido organizada sobre la base de una ingeniosa geometría no deductiva, desarrollada extensamente en Høyrup (1985,1986), que consiste de una *geometría de cortar y pegar*, en la que los cálculos aritméticos complicados que resultan de la interpretación clásica corresponden a simples ingeniosas transformaciones geométricas. La traducción de Høyrup del problema anterior es:

La superficie y el cuadrado – segmento, he acumulado: $\frac{3}{4}$.

La traducción de su solución es:

Se proyecta 1. Se parte la mitad de 1, se corta y se separa $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{2}$ (un rectángulo, aquí un cuadrado), se adjunta $\frac{1}{4}$ a $\frac{3}{4}$: 1, se forma un equilátero. El $\frac{1}{2}$ que fue separado se corta hacia adentro 1: el lado del cuadrado $\frac{1}{2}$.

La figura 2.1 muestra el procedimiento de cortar y pegar de la geometría no deductiva que utiliza Høyrup para explicar la solución de la ecuación cuadrática $x^2 + x = \frac{3}{4}$.

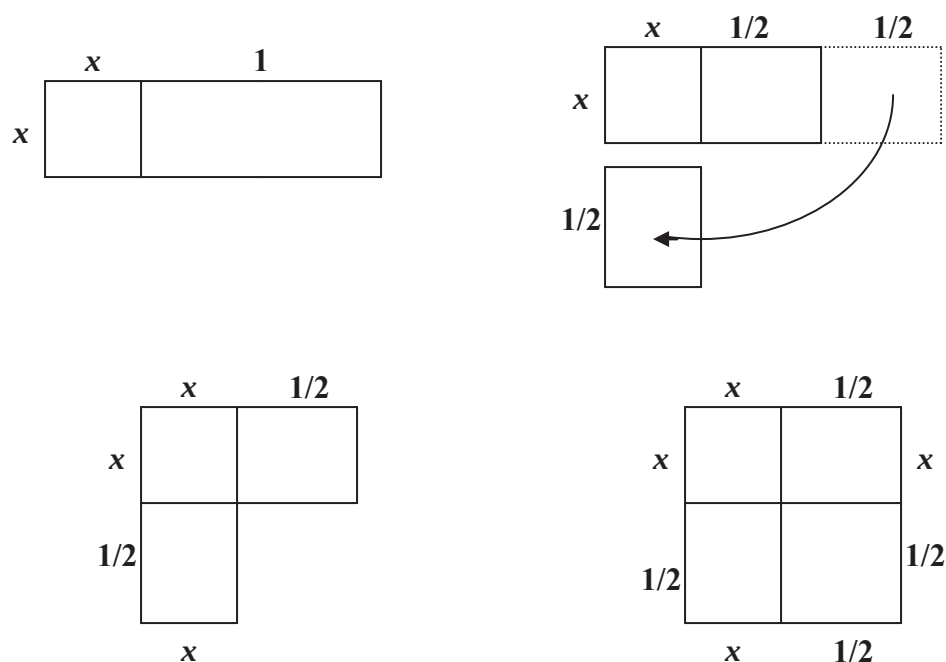


Figura 2.1 Procedimiento de cortar y pegar de la geometría no deductiva que utiliza Høyrup

En esta interpretación la solución de los problemas está basada en razonamientos geométricos. Así, mientras Neugebauer (1957, p. 65) afirma que los conceptos geométricos juegan un papel secundario en el álgebra babilónica, Høyrup argumenta que una geometría ingeniosa es la base sobre la que tales problemas fueron planteados y resueltos. La nueva interpretación del álgebra babilónica conduce a una revaloración del papel de la aritmética y de la geometría en el surgimiento del álgebra.

Enfoque aritmético

Esta nueva interpretación de algunos problemas por parte de quienes han traducido en nuestro simbolismo moderno, han podido ver ecuaciones de segundo grado y no excluyen la existencia de un enfoque aritmético en el álgebra babilónica (Høyrup, 1985, pp. 98-100). Este es el caso de ciertos problemas encontrados en las tablillas VAT 8520, VAT 8389 y VAT 8391; las dos últimas datan de la primera dinastía babilónica, hacia el año 1900 a. C. De hecho, hay varios problemas que no dan cabida a una interpretación geométrica, como los relacionados con el comercio babilónico y la producción agraria. Desde una perspectiva histórica, es difícil establecer una conexión entre la corriente geométrica y la corriente aritmética en el álgebra babilónica y es también difícil afirmar que influencia de una u otra corriente pudo haber iniciado el desarrollo de ésta.

Según Bromberg, Figueras, Zubieta, Escalante, y Manchaca (1981), los babilonios en geometría conocían: el teorema de Pitágoras; la fórmula para la línea recta que divide en dos partes iguales el área de un trapezoide; el área del triángulo y del trapezoide, el área del círculo ($3r^2$), el perímetro del círculo ($6r$); el volumen de un prisma y de un cilindro. Sin embargo, también utilizaban fórmulas incorrectas, como las encontradas para calcular el volumen de un cono truncado: $\frac{1}{2}(3R^2 + 3r^2)$ y el volumen de una pirámide truncada con bases cuadradas: $\frac{1}{2}(a^2 + b^2) \cdot h$. En aritmética y álgebra algunas de las formas de ecuaciones que podían resolver con facilidad son: $ax = b$, $x^2 = b$, $x^2 + ax = b$, $x^3 = a$, $x^2(c + 1) = a$, $x + y = a$ y $xy = b$, $x + y = a$ y $x^2 + y^2 = b$. Conocían las formulas: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.

Para los babilonios, la importancia matemática de un problema recaía sobre su solución aritmética, la geometría no era una disciplina especial, sino una cosa más entre las muchas de la vida diaria, como de cualquier otra forma de relación numérica entre objetos de uso práctico.

2.1.2 Los egipcios

La cultura egipcia se desarrolló en la región adyacente al río Nilo, en el norte de África. Los orígenes de esta civilización son desconocidos, pero seguramente existieron desde antes del año 4000 a. C. En el siglo IV a. C. Egipto es conquistado por Alejandro Magno, iniciándose el período de la dominación griega conocido como período Ptolomeico, en que Alejandría se convierte en el centro de la civilización griega, en cuya universidad trabajaron matemáticos griegos importantes, entre los que destacan, Arquímedes, Euclides, Apolonio y Diofanto.

Los egipcios escribían con tinta sobre papiros² y pocos documentos del antiguo Egipto han sobrevivido, aunque también hacían inscripciones en piedra y madera. Algunos de los papiros con datos matemáticos son: el Papiro de Rhind o de Ahmes (1650 a. C.), que es un manual práctico que contiene 85 problemas copiados de un trabajo más antiguo, en escritura hierática, por el escriba Ahmes; el Papiro de Rhind y el de Moscú son las fuentes principales de información respecto a las matemáticas del antiguo Egipto.

Al parecer, los egipcios no pudieron ir más allá de la solución de cierto tipo de ecuaciones lineales y de las cuadráticas con una incógnita. La solución de uno de los problemas del papiro de Rhind, se resuelve mediante una ecuación cuadrática, requiere de la extracción de raíces cuadradas, su traducción es:

Un cuadrado y un segundo cuadrado, cuyo lado es $\frac{3}{4}$ del lado del primer cuadrado tienen juntos un área de 100.

Este problema planteado actualmente es:

$$x^2 + \left(\frac{3}{4}x\right)^2 = 100 \quad \rightarrow \quad (ax)^2 = b^2 \quad \rightarrow \quad ax = b$$

Se trata de una ecuación cuadrática reducible a una ecuación de primer grado. La forma en que los egipcios resolvieron este problema es haciendo una ‘solución falsa’³. Para determinar el valor de x , suponen que el lado del cuadrado es 1, y toman $\frac{3}{4}$ de 1 y lo multiplican por sí mismo,

² Los papiros eran hojas hechas presionando la pulpa de una planta, que al secarse se vuelven quebradizos.

³ Una característica de los problemas egipcios, es que para resolverlos empleaban una solución falsa.

obtienen $\frac{5}{4}$, luego toman la raíz cuadrada de **100** que es **10** y calculan cuántas veces el $\frac{5}{4}$ está contenido en **10**, obtienen **8** veces y finalmente calculan el área del cuadrado menor multiplicando $\frac{3}{4}$ por **8** les da **6**, obteniendo así las áreas de los cuadrados **8** y **6**, respectivamente.

Por un lado, sus técnicas de cálculo aritmético eran laboriosas; y por otro lado, la geometría en Egipto no se desarrolló como una ciencia, en el sentido griego de la palabra, fue propiamente una “aritmética aplicada”. El calculista tenía conocimiento de reglas y a partir de ellas se realizaban los cálculos; hasta el momento, no se ha encontrado una derivación sistemática de estas reglas. Los problemas geométricos tenían analogía con los problemas prácticos, tenían fórmulas correctas para calcular el área de triángulos, rectángulos y trapezoides. Tenían una fórmula aproximada para calcular el área de un círculo. Al parecer el enfoque del álgebra egipcia es de carácter aritmético.

2.1.3 Los griegos

A inicios del primer milenio a. C., nace la cultura helénica, al parecer como resultado de la fusión de varios pueblos mediterráneos y de invasores de Europa central. Grecia ocupa una pequeña península montañosa y un cinturón de islas, en el corazón del mediterráneo oriental.

Pitágoras estableció las bases de la teoría de números y dio continuidad a la geometría como una ciencia teórica; él fue quien incluyó la geometría como objeto de la enseñanza liberal. Hacia mediados del Siglo V a. C., los pitagóricos prácticamente habían completado el contenido de los libros I, II, IV y VI (y quizás el III) de los *Elementos de Euclides*⁴. Esta obra es un compendio de las matemáticas griegas hasta el siglo II a. C.

Generalmente se conoce a los *Elementos* por su contenido geométrico, sin embargo gran parte de esta obra también contiene aportaciones importantes en otras áreas de la matemática, como es la teoría de números (libros VII, VIII y XIX), la teoría de proporciones (libro V) y álgebra (libro II). A continuación comentaremos sobre el libro II.

⁴ Los *Elementos*, compuestos por 13 libros, fueron escritos por Euclides en el siglo III a. C.

El contenido principal de este libro es el álgebra geométrica. En este libro, los números, las operaciones aritméticas y algunas de sus propiedades generales, son llevados al terreno de la geometría:

- *Los números se representan por segmentos de recta.*
- *El producto de dos números se convierte en el área del rectángulo cuyos lados tienen por lados los segmentos que representan a los números.*
- *El producto de tres números es un volumen de un paralelepípedo.*
- *La suma de dos números es la prolongación de un segmento en una longitud igual a la del otro y la resta en recortar de un segmento la longitud del segundo (menor que la del primero).*
- *La división de un número por otro se indica por la razón de los segmentos que los representan.*
- *La suma y resta de productos, se realiza mediante la suma y resta de áreas de rectángulos.*
- *La extracción de una raíz cuadrada se hace mediante la construcción de un cuadrado cuya área es igual a la de un rectángulo dado (proposición 14).*

Las seis primeras proposiciones de este libro equivalen a las siguientes identidades algebraicas:

1. $a(b + c + d + \dots) = ab + ac + ad + \dots$

2. $(a + b)a + (a + b)b = (a + b)^2$

3. $(a + b)a = ab + a^2$

4. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

5. $ab + \left(\frac{a+b}{2} - b\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

6. $(2a + b)b + a^2 = (a + b)^2$

Otras proposiciones de interés son la 11 y la 14 que conducen a la solución de las siguientes ecuaciones respectivamente:

$$x^2 + ax = a^2 \quad y \quad x^2 = ab$$

Siguiendo el modelo axiomático establecido por Euclides para la geometría en el libro I, todas estas proposiciones son demostradas a partir de los postulados iniciales y las proposiciones previas.

Aunque el libro VI trata principalmente de la semejanza de triángulos y paralelogramos, en las proposiciones 28 y 29 se proporcionan procedimientos geométricos para resolver algunos casos de ecuaciones cuadráticas de la forma:

$$ax^2 + bx = c \quad y \quad ax^2 + x = bx \quad ; \quad \text{con } a, b \text{ y } c \text{ mayores que cero.}$$

En estas aportaciones de los griegos (hasta Euclides) el ‘álgebra’ está ligada a la geometría, tanto en la naturaleza de sus problemas como en los métodos de solución. No es hasta el Siglo II d. C., que surge, en la matemática griega, un enfoque distinto en el álgebra y cuyo máximo exponente fue Diofanto de Alejandría.

Diofanto fue un matemático griego de la región de Alejandría, que vivió en la segunda mitad del siglo III d. C. Se tiene evidencia de que fue el autor de varios libros y tratados como *El Porisma* y sobre *Los Números Poligonales*, en el que establece y demuestra teoremas relacionados con los libros VII, VIII y IX de los Elementos de Euclides; lamentablemente, una parte de su obra ha sido perdida. Su obra maestra denominada *Aritmética*, es considerada como el primer libro de álgebra por la cual se le valora como “el padre del álgebra”, en el que se tratan las soluciones de ecuaciones indeterminadas y determinadas.

Originalmente, *Aritmética* estaba conformada por 13 libros, de los cuales se habían preservado seis hasta 1976, año en que se encontraron cuatro libros más (Van der Warden, 1983). Los primeros seis libros contienen 189 problemas resueltos, ordenados de los más simples a los más complejos.

Además de sus aportaciones a la solución de diferentes tipos de ecuaciones, Diofanto introduce algunos símbolos y convenciones para representar operaciones, por ejemplo, utiliza la letra griega ς para representar una cantidad desconocida (ς parece ser la letra **s** de nuestro alfabeto), jugando el papel de nuestra **x**. Quizás la razón del uso de esta literal, se deba a que es la última letra de la palabra **ἀριθμός** (arithmos = números) que no corresponde a ninguno de los números que los griegos utilizaban mediante letras. Mediante transformaciones ingeniosas, Diofanto lograba reducir ecuaciones con dos o tres incógnitas a ecuaciones con una sola incógnita. A ς le llamaba “el número del problema”, refiriéndose a que la literal debería de tomar un valor que hiciera verdadera la igualdad. También utiliza abreviaturas especiales que utilizaba para denotar potencias y el recíproco del número desconocido ς :

1 = Unidad (Μόνας = unidades) = $\overset{\circ}{\mathbb{M}}$

s^5 = Quinta potencia = $\Delta\kappa^{\gamma}$

s = Incógnita (aritmo) = ς

s^6 = Sexta potencia = $\kappa^{\gamma}\kappa$

s^2 = Cuadrado ($\Deltaύναμις$ = potencia) = Δ^{γ}

s^{-1} = Recíproco de s = ς^{χ}

s^3 = Cubo ($\kappaύβος$) = κ^{γ}

s^{-2} = Recíproco de s^2 = $\Delta^{\gamma\chi}$

s^4 = Cuarta potencia (cuadrado-cuadrado) = $\Delta^{\gamma}\Delta$

s^{-1} = Recíproco de s = γ^{χ}

La adición (+) la indica por yuxtaposición, poniendo los términos unos seguidos de otros. Es importante hacer notar que en las expresiones algebraicas Diofanto solo escribía una vez la incógnita, al final del último término que contiene a la incógnita; y cuando aparecía solo una vez no la escribía. Para la sustracción (−) utiliza el símbolo $\overline{\mathbb{M}}$ de una ψ invertida y para la igualdad utiliza el símbolo ι^{σ} . Algunos ejemplos son:

$$s^2 + 2s + 3 = \Delta^{\gamma}\overline{\alpha} \varsigma \overline{\beta} \overset{\circ}{\mathbb{M}} \overline{\gamma} = s^2 \cdot 1 + s \cdot 2 + 3$$

$$s^3 + 13s^2 + 5s = \kappa^{\gamma}\overline{\alpha} \Delta^{\gamma}\overline{\iota\gamma} \varsigma \overline{\varepsilon} = s^3 \cdot 1 + s^2 \cdot 13 + s \cdot 5$$

$$s^3 - 5s^2 + 8s - 1 = \kappa^{\gamma}\overline{\alpha} \varsigma \eta \overline{\mathbb{M}} \Delta^{\gamma}\overline{\varepsilon} \overset{\circ}{\mathbb{M}} \overline{\alpha} = (s^3 \cdot 1 + s \cdot 8) - (s^2 \cdot 5 + 1)$$

Debido a este uso incipiente de símbolos complementado con lenguaje natural durante los procesos de solución, el álgebra de Diofanto recibe el nombre de *sincopada*.

Otro hecho relevante en el álgebra de Diofanto (Van der Warden, 1983. pp. 97-112) es que utiliza los números negativos y opera con ellos, aunque sólo reconoce las soluciones positivas. Él establece (sin dar una justificación):

Un menos (literalmente “un sobrante”) multiplicado por un menos da un más, un menos multiplicado por un más da un menos.

Agrega:

Es bien sabido para quien está iniciándose en este estudio, debe haber adquirido práctica en la adición, sustracción y multiplicación de varias especies. Debe saber cómo agregar términos positivos y negativos con diferentes coeficientes a otros términos, ya sean unos positivos y otros negativos, y cómo restar de una combinación de términos positivos y negativos a otros términos ya sean unos positivos y otros negativos.

En seguida, si un problema está planteado por una ecuación en la cual ciertos términos son iguales a términos de la misma especie pero con diferente coeficiente, será necesario restar en ambos lados, hasta que se obtenga un término igual a otro término en ambos lados. Si por alguna razón queda en uno u otro lado o en ambos lados cualquier término negativo, será necesario sumar los términos negativos en ambos lados hasta que los términos en ambos lados sean positivos y luego otra vez restar hasta que un solo término quede en cada lado.

A continuación se describe la solución del problema 28 del libro *A* de Diofanto, cuyo enunciado es:

Sea la suma de los números 20 y la suma de sus cuadrados 208. El número mayor será $10 + s$, porque la mitad de su suma es 10 y el menor es $10 - s$, para que la suma sea igual a 20 y su diferencia $2s$.

Para la solución utiliza el “método de la suma y la diferencia”, que también ha sido encontrado en textos babilonios, que consiste hacer suma $x + y$ igual a un número dado a , y la diferencia $x - y$ igual a otro número dado d , Diofanto hace:

$$\text{número mayor : } x = \frac{1}{2}a + s \quad \text{y} \quad \text{número menor : } y = \frac{1}{2}a - s$$

$$\text{número mayor : } x = s + \frac{1}{2}d \quad \text{y} \quad \text{número menor : } y = s - \frac{1}{2}d$$

La solución del problema 28, inicia sustituyendo x y y en las ecuaciones anteriores, tal como se muestra en seguida:

$$\text{número mayor : } x = \frac{1}{2}20 + s = 10 + s \quad \text{y} \quad \text{número menor : } y = \frac{1}{2}20 - s = 10 - s$$

Solo queda hacer la suma de sus cuadrados igual a **208**, es decir:

$$(10 + s)^2 + (10 - s)^2 = 100 + 20s + s^2 + 100 - 20s + s^2 = 2s^2 + 200$$

$$2s^2 + 200 = 208 \quad \therefore \quad 2s^2 = 8 \quad \rightarrow \quad s = 2$$

De donde se obtiene s igual a **2**. Regresando a la suposición original, encontramos que:

$$\text{mayor número : } x = 10 + s = 10 + 2 = 12 \quad \text{y} \quad \text{menor número : } y = 10 - s = 10 - 2 = 8$$

El número mayor será **12** y el menor **8**, los cuales cumplen con la condición necesaria. Este problema es del mismo tipo del problema 8 del texto de los babilonios. El método de solución de los babilonios es el mismo que el del libro *A* de Diofanto. Los problemas 27 y 30 son problemas estándar del álgebra babilónica.

El álgebra de Diofanto tiene un enfoque simbólico, posteriormente, Al-Jwarizmi retoma parte de su álgebra, en particular las operaciones que utiliza para reducir ecuaciones.

2.1.4 Los árabes

Breve ubicación de esta cultura

Al-Jwarizmi, o Al-Kwarizmi como se le conoce, vivió aproximadamente entre el 780 y 850 d. C. Su obra principal en matemáticas es *al- Mujtasar fi hisab al-jabr wa-l-muqabala*, compuesta por tres partes: una propiamente algebraica; la segunda, contiene algunos temas de geometría elemental y; la tercera dedicada a cuestiones testamentarias.

El significado usual de *al-jabr* en su trabajo matemático es: *agregar términos iguales a ambos lados de una ecuación en principio para eliminar términos negativos*. Otro significado menos frecuente es: *multiplicar ambos lados de una ecuación para eliminar fracciones*.

El significado usual de *al-muqabala* es: *reducir términos positivos por sustracción de cantidades iguales en ambos lados de una ecuación*.

Al-Jwarizmi, estudió las soluciones de la ecuación de segundo grado en sus diferentes formas canónicas, con coeficientes enteros positivos y cuyas raíces fueran enteros positivos; no toma en cuenta las soluciones negativas y a la incógnita le llama “cosa”. Para encontrar la solución, en cada caso, aborda un procedimiento distinto, utilizando construcciones geométricas inspiradas en los *Elementos de Euclides*. Además, explica sus métodos con ejemplos numéricos sabiendo que tienen validez general. Consideramos, por ejemplo, la solución de la ecuación $x^2 + c = bx$, (con b , $c > 0$ y $x < b/2$)⁵.

Al-Jwarizmi traza un rectángulo de base b y altura x y lo divide en dos partes iguales; la mitad izquierda se divide en un cuadrado de lado x y un rectángulo de altura x y base $b/2 - x$; la mitad derecha se completa hasta formar un cuadrado de lado $b/2$. El trozo que se obtiene se descompone en un cuadrado de lado $b/2 - x$ y el rectángulo de altura $b/2 - x$ y base x (ver la figura 2.2).

⁵ De estas relaciones se obtiene que $(b/2)^2 > c$

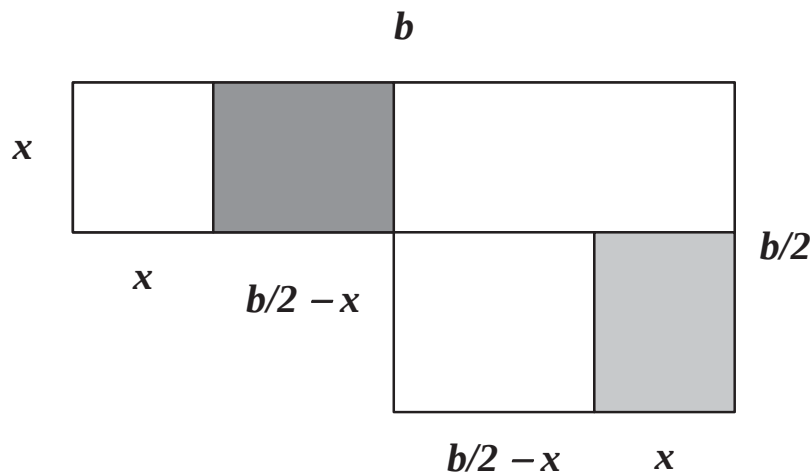


Figura 2.2. Procedimiento de Al-Jwarizmi.

De la figura se obtiene la solución que, en notación actual, equivale a realizar las siguientes operaciones:

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2} - x\right)^2 + c \quad \text{despejando } x: \quad x = \frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

Esta ecuación tiene otra solución positiva; Al-Jwarizmi no la ignora sino que utiliza otro procedimiento distinto (Moreno, 2002, pp.23-29).

Omar Jayyam (1050-1122), poeta, filósofo, algebrista y astrónomo, cuya aportación más importante es la resolución sistemática de las ecuaciones cúbicas cortando cónicas. Es importante mencionar que en el tiempo en que vivió no existía la geometría analítica⁶, razón por lo que la notación y la orientación de las curvas utilizadas por él no son las mismas a las que estamos acostumbrados. Y si bien es cierto, utilizar la geometría analítica simplificaría los razonamientos, ocultaría la generalidad de Omar Jayyam.

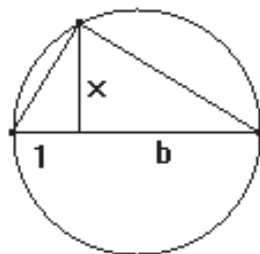
El álgebra de Omar Jayyam la escribió alrededor de 1074, en el cual la palabra número y segmento son utilizadas indistintamente, reconoce 25 formas distintas de ecuaciones algebraicas de grado menor o igual a 3, 6 de éstas ya habían sido estudiadas por Al-Jwarizmi, otras 5 son

⁶ La geometría analítica fue propuesta por Rene Descartes en el siglo XVII.

reducidas a éstas, y las 14 restantes no se pueden resolver con sólo la ayuda de los Elementos de Euclides. Omar Jaiyyam no aconseja la lectura de su álgebra a quien no conozca los *Elementos* de Euclides, así como los dos primeros libros de *Las Cónicas* de Apolonio. Para ejemplificar la forma en que Jaiyyam resuelve las ecuaciones cúbicas, presentamos el caso siguiente.

Cubo de la cosa más cosa igual a número: $x^3 + bx = c$

Para resolver esta ecuación, Jaiyyam obtiene $\sqrt{b}$ utilizando la proposición 13 libro VI de Euclides, utilizando una circunferencia de diámetro $1 + b$ y el triángulo que se muestra en la siguiente figura:

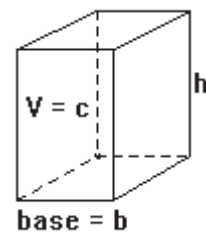


$$\frac{1}{x} = \frac{x}{b} \Rightarrow x = \sqrt{b}$$

Enseguida, mediante el Lema 2 de Omar Jaiyyam, determina h tal que

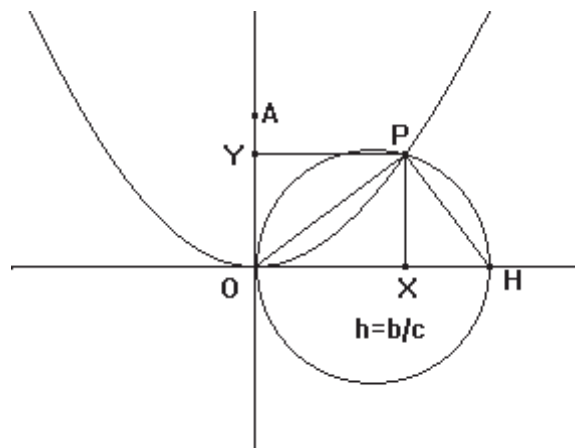
$$bh = c$$

Jaiyyam utiliza las tercer y cuarta proporcional de dos segmentos para encontrar la altura de un prisma cuya base un cuadrado de área b , cuyo volumen tiene un valor conocido c .



Se dibuja ahora una parábola con vértice en O y lado recto $OA = \sqrt{b}$, y una circunferencia de diámetro $OH = h$ tangente al eje de la parábola por su vértice. La solución de la ecuación es el segmento $OX = x$.

Es decir la solución será siempre la abscisa del punto de intersección de las cónicas.



A continuación, utilizaremos la notación actual para presentar la demostración de Jayyam de que OX es la solución buscada.

De la semejanza de los triángulos OXP y PXH puede establecerse que $\frac{OX}{OY} = \frac{OY}{HX}$

Y como P esta en la parábola satisface la igualdad $OX^2 = OA \cdot OY$ (Proposición 11, libro I de las Cónicas de Apolonio)

$$\frac{OA}{OX} = \frac{OX}{OY}$$

Combinando las dos proporciones se tiene.

$$\frac{OA^2}{OX^2} = \frac{OX}{OY} \cdot \frac{OY}{HX} = \frac{OX}{HX} \quad OX^3 = OA^2 \cdot HX$$

Para comprobar que $OX = x$. Es la solución se sustituye en la ecuación.

$$\begin{aligned} x^3 + bx &= OX^3 + OA^2 \cdot OX \\ &= OA^2 HX + OA^2 \cdot OX \\ &= OA^2 (OX + HX) \\ &= OA^2 \cdot OH = bh = c \end{aligned}$$

Como puede observarse en los procedimientos mostrados anteriormente, los métodos de solución de los árabes son fundamentalmente geométricos, aunque hay una incorporación importante de procedimientos aritmético-algebraicos en la justificación de las soluciones, aún cuando estas son dadas de manera retórica.

2.1.5 El Renacimiento

En la época del renacimiento⁷ (Casalderrey, 2000, p. 13) Niccolò Tartaglia en 1535 encuentra una fórmula para resolver 30 problemas que le envió su rival Del Fiore, todos ellos se refieren “al cubo y las cosas igual al número” y suponía que no tenían solución; en nuestra simbología actual

⁷ La característica fundamental del renacimiento es el sentimiento humanista, el hombre pasa a ocupar un lugar central en el universo, con el arte, la literatura y el conocimiento de la naturaleza.

se escribirían $x^3 + px = q$, $x^3 + q = px$ y $x^3 = px + q$. En 1539, Tartaglia le comunica su fórmula (sin demostración) a Gerolamo Cardano, quién la publica en su libro *Practica Arithmetica Generalis*.

Cardano debió estudiar perfectamente la fórmula de Tartaglia, probablemente apoyado por su asistente Ludovico Ferrari, obteniendo una manera de resolver la ecuación general de tercer grado $x^3 + px^2 + qx = r$, reduciéndola mediante una transformación a una de las tres versiones que Tartaglia le había comunicado. Cardano publicó su resultado en su *Ars Magna (Artis Magnae sive de regulis algebraicis)*.

En su demostración, Cardano utiliza figuras geométricas y letras para referirse a estas figuras, pero en ningún momento aparece una ecuación, todos los razonamientos están narrados con palabras (álgebra retórica). No aparecen fórmulas ni expresiones, de acuerdo con la mentalidad de hoy la demostración algebraica de Cardano resulta confusa, pero su demostración geométrica es clara. Otra característica de esta demostración, es que está expresada en términos geométricos; la inexistencia de una simbología impedía, en la práctica, utilizar una demostración de las que hoy en día consideraríamos de carácter algebraico. En la época de Cardano, sólo las demostraciones basadas en razonamientos geométricos eran consideradas válidas, por ejemplo, la veracidad de la relación:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

No era admitida por el camino que hoy podemos encontrar en cualquier libro de texto, es decir:

$$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a \cdot (a + b) + b \cdot (a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Sino únicamente comprobando en términos geométricos que el cuadrado que tiene por lados la suma de los segmentos **a** y **b**, se descompone en cuatro figuras rectangulares: un cuadrado de lado **a**, otro cuadrado de lado **b** y dos rectángulos ambos de lados **a** y **b**, como se muestra en la figura 2.3. Las ecuaciones se resolvían mediante un razonamiento geométrico.

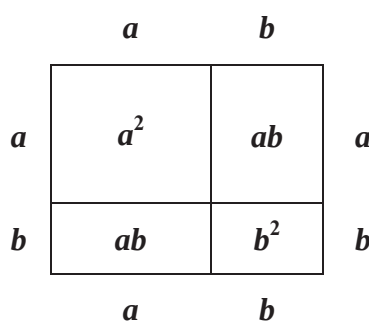


Figura 2.3 Interpretación geométrica del cuadrado del binomio $a + b$.

El álgebra de estos tiempos era todavía verbal (álgebra retórica), aunque el uso de abreviaciones (tales como las literales italianas **p** y **m** para representar los signos *más* (plus) y *menos* (minus) y símbolos (tales como los símbolos alemanes + y –) estaban surgiendo gradualmente. El álgebra era una ‘bolsa de trucos’ en vez de ser un método general porque cada caso especial requería de un truco diferente. Estudiar la ecuación general, que representa toda una clase de ecuaciones, todavía no existía en su apariencia actual. Para estudiar la ecuación cúbica en su forma general era necesario distinguir el papel entre la incógnita o variable y el de los coeficientes, los cuales son parámetros en el problema.

2.1.6 Vieta

Según Edwards (1979, pp. 94-96), la idea crucial de la distinción entre incógnita y parámetro fue contribuida por quien es conocido como Vieta, en su *Introduction to the Analytic Art* en 1591. Así, Vieta usa consonantes para la incógnita variable y vocales para los parámetros, usó también las abreviaturas **p** y **m** o los signos + y – en lugar de las palabras más y menos, no usó símbolos especiales para las potencias, introdujo las abreviaturas: **A cubus** para denotar A^3 y **A quadratus** para A^2 .

Un ejemplo de la notación de Vieta es **A cub + B plano in A aequatur C in A quad + D sólido**, que en nuestro simbolismo se escribiría $A^3 + BA = CA^2 + D$, los términos plano y sólido son incluidos para preservar la homogeneidad de grado en la ecuación; el símbolo = no era de uso común todavía, fue introducido en 1557 por el inglés Robert Recorde.

Para su trabajo Vieta se basó en dos fuentes principales griegas: el libro siete de la obra de Pappus y la aritmética de Diofanto (Klein, 1992). Otro método general explorado por Vieta fue la factorización de polinomios de segundo grado, expresada como un producto de factores de primer grado, pero fracasó parcialmente, porque rechazó las raíces positivas y porque no tenía una teoría suficiente, como el teorema de factorización, el cual está basado en un método general.

2.1.7 Descartes y Fermat

Rene Descartes (1596-1650) publica su *Geometría* como uno de los tres ensayos que acompañan al *Discurso del Método*, mientras que Fermat (1609-1665) en el mismo año envió a Paris su *Introduction to plane and solid Loci*. Ambos ensayos establecen los fundamentos para la geometría analítica. La idea central de la geometría analítica es la correspondencia entre una ecuación $f(x, y) = 0$ y el lugar geométrico (generalmente una curva) que consiste de todos los puntos (x, y) con referencia a dos ejes perpendiculares que satisfacen la ecuación. Tanto Fermat como Descartes, consideraban en las ecuaciones, segmentos en vez de números, uno de ellos se

medía a la derecha de un punto de referencia sobre un eje horizontal y el segundo se colocaba como ordenada vertical en el punto final de la curva $f(x, y) = 0$. Fermat hizo aportaciones a la notación de Vieta y designó sus variables como A y B en vez de x y y . Sin embargo, Descartes, utilizó una notación simbólica muy similar a la que usamos hoy en día. La Figura 2.4, muestra la notación simbólica usada por Descartes.

est $\frac{1}{2} \sqrt{aa + cc} + \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc} + \frac{1}{2}a \sqrt{aa + cc}$
 ou bien $\frac{1}{2} \sqrt{aa + cc} - \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc} + \frac{1}{2}a \sqrt{aa + cc}$.
 Et pourque nous auons fait cy dessus $x + \frac{1}{2}a$ $\propto x$,
 nous apprenons que la quantité x , pour la connoissance
 de laquelle nous auons fait toutes ces operations, est
 $-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc} - \sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}a \sqrt{aa + cc}}$.

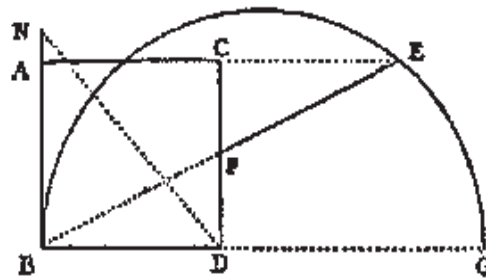


Figura 2.4. Notación simbólica de Descartes

2.1.8 Leonard Euler

Euler (1707-1783), realizó avances significativos sobre los números complejos y su importancia en la solución de ecuaciones, desarrolló la notación simbólica de las ecuaciones de tercer grado y cuarto grado; estudió las ecuaciones de grado mayor que 4 y su notación simbólica es prácticamente como la conocemos actualmente, escrita en su libro *Elements of Algebra* (Elementos de Álgebra).

Como se puede apreciar de esta breve revisión histórica del desarrollo del álgebra, si consideramos sus orígenes en las antiguas civilizaciones, la aparición del lenguaje algebraico llevó a la humanidad alrededor de 4000 años. Durante gran parte de este tiempo, los problemas de naturaleza algebraica fueron abordados en un contexto geométrico, así mismo, los primeros símbolos tuvieron un significado geométrico (segmentos, áreas y volúmenes)

2.2 Estudios sobre el aprendizaje del álgebra en Educación Matemática

De acuerdo con Kieran (2006) la problemática asociada al aprendizaje del álgebra ha sido fundamental en las investigaciones llevadas a cabo dentro de la comunidad PME (Psychology Mathematics Education), desde la 1ª conferencia en 1977 hasta la 29ª en el 2005, donde 33 reportes de investigación han sido presentados. Los más recientes se han enfocado sobre los conceptos y procedimientos algebraicos, resolución de problemas algebraicos y las dificultades de los estudiantes en la transición de la aritmética al álgebra. El simbolismo literal fue la primera forma algebraica en investigarse, así como los marcos teóricos para analizar la información emanada de la investigación; pero pocas veces se fue más allá de la teoría piagetiana. Con el tiempo, las investigaciones en álgebra del PME se han ampliado para abarcar otras representaciones, el uso de herramientas tecnológicas, diferentes perspectivas en los contenidos y una amplia variedad de marcos teóricos acerca del pensamiento algebraico y para analizar la información.

Durante los 30 años de historia de las investigaciones en álgebra del PME, han surgido tres grupos de temas (ver la Tabla 2.1).

Tabla 2.1 Periodos y grupos de temas que surgieron en las investigaciones del PME

Período	Grupos de Temas
1977 a 2006	1. Transición de la aritmética al álgebra, variables e incógnitas, ecuaciones, solución de ecuaciones y problemas verbales.
1980 a 2006	2. Uso de herramientas tecnológicas y un enfoque sobre múltiples representaciones y generalización.
1990 a 2006	3. Pensamiento algebraico de estudiantes, modelación dinámica de situaciones físicas y otros ambientes dinámicos algebraicos.

El primero se caracteriza por el interés de los investigadores en el enfoque de la transición de la aritmética al álgebra, sobre variables e incógnitas, ecuaciones, solución de ecuaciones y de problemas verbales. El segundo grupo surge en la primera mitad de los 80, sus investigaciones se orientaron hacia temas que reflejan el álgebra como generalización, enfatizando el uso de múltiples representaciones y de nuevas herramientas tecnológicas de aprendizaje. Después, a mediados de los 90, las investigaciones comenzaron a abarcar temas relativos al pensamiento algebraico de estudiantes de escuelas primarias, prestando especial atención en el álgebra que necesita saber el profesor para poder enseñar, así como la introducción de ambientes dinámicos que incluyen la modelación de situaciones físicas.

Consideramos algunos temas del grupo 1 en el que los investigadores han puesto atención y que son de importancia para nuestra investigación:

Interpretación de signos algebraicos, incógnitas y variables: Dado que el álgebra y la aritmética comparten varios signos y símbolos, incluso el uso de literales, se requiere de varios ajustes conceptuales para que los estudiantes que inician el estudio del álgebra, empiecen a ver el

cambio en el significado de estos signos y símbolos. Los primeros estudios sobre la interpretación que hacen los estudiantes de los símbolos algebraicos tienden a enfocarse en niveles cognitivos previos a la experiencia aritmética, formas de pensamiento y dificultad en la notación. En un principio, el álgebra tiene sentido por el uso de literales y “etiquetas” en fórmulas que posteriormente son consideradas como incógnitas y variables; y más tarde como parámetros. Respecto a las formas de pensamiento de los estudiantes sobre literales y símbolos algebraicos, las investigaciones revelaron un sinfín de interpretaciones que no han sido desarrolladas. En un experimento de enseñanza diseñado para fomentar la adquisición de literal como un número generalizado, Booth (1982, 1983) encontró una fuerte resistencia de los estudiantes para asimilar esta idea. Los estudios del PME han continuado sobre cómo los estudiantes van comprendiendo varios aspectos de noción de variable, destacan los trabajos de Ursini (1990) y sus colegas. También se incluye en estos trabajos dos estudios de Stacey y MacGregor (1977) sobre la presencia de múltiples referentes y cambios en el significado de incógnita. Con estudiantes mayores, Furinghetti y Paola (1994) han encontrado que una pequeña minoría pudo describir adecuadamente diferencias entre parámetros, incógnitas y variables.

Trabajando con expresiones, ecuaciones y solución de ecuaciones: Las primeras investigaciones del PME, en las que involucraron formas algebraicas, revelaron dificultades en interpretar expresiones tales como $a + b$ como ambos procesos nombre/objeto. A partir de experimentos de enseñanza se ha intentado ayudar a los estudiantes a construir significados para las expresiones mediante, por ejemplo, modelos de áreas rectangulares y para ecuaciones mediante identidades aritméticas (Herscovics y Kieran, 1980), y sugirieron que los estudiantes podrían construir significados más fáciles para ecuaciones que para expresiones. Un número significativo de estudios se enfocaron en los procedimientos de la solución de ecuaciones que usan los estudiantes que comienzan el estudio del álgebra: (i) acercamientos intuitivos, técnicas de contar y métodos de descubrimiento; (ii) sustituciones por ensayo- error; y (iii) métodos formales. Los errores de los estudiantes en la solución de ecuaciones también han sido de interés para la investigación.

Solución de problemas algebraicos: Otra dificultad que enfrentan los estudiantes que inician el estudio del álgebra es la introducción de representaciones formales y métodos para resolver

problemas, ya que hasta ese momento los problemas se han trabajado intuitivamente. Los procedimientos aritméticos se caracterizan por ser largos y los estudiantes están acostumbrados a pensar en las operaciones que usan para resolver el problema, en vez de las operaciones que deberían de usar para representar las relaciones de la situación del problema. Además, los estudiantes también deben aprender a resolver ecuaciones con procedimientos que les proporcionan ecuaciones equivalentes sucesivas hasta que la solución es encontrada.

Pegg y Reden (1990) comentan que los estudiantes tienen problemas para comprender el álgebra, y que algunas de las dificultades provienen de que no entienden los conceptos y símbolos algebraicos, lo que les impide razonar algebraicamente. Usiskin (1987) ha participado en el debate sobre el nivel en que el curso de álgebra debería comenzar. Sugiere que el octavo grado (segundo grado de nuestro sistema), es el lugar apropiado para comenzar con estudiantes promedio y agrega que en varios países como el nuestro, el primer curso de álgebra usualmente se imparte en los grados que 7º y 8º (primero y segundo grados de secundaria en nuestro sistema) con todos los estudiantes. Así ocurre en el Sur de Nueva Wales Australia, desde hace varias décadas, como parte del currículo integrado de matemáticas.

Sin embargo Usiskin (1987), en otro artículo menciona que el álgebra es parte del curriculum del noveno grado (tercer año de secundaria en nuestro sistema), y que el tema de factorización podría quitarse del curriculum por carecer de aplicación, ya que usualmente sólo se aplica a trinomios factorizables en los enteros, que puede estudiarse más adelante en la solución de ecuaciones cuadráticas u otros temas más avanzados de matemáticas.

2.3 Consideraciones sobre el aprendizaje de las matemáticas

Jean Piaget establece su Epistemología Genética sobre la base de que el conocimiento se construye mediante la actividad del sujeto sobre los objetos. Los objetos matemáticos no habitan en un mundo eterno y externo a quien conoce, sino que son producidos, contruidos por él mismo; en un proceso continuo de asimilaciones y acomodaciones que ocurren en sus estructuras cognoscitivas. Para Piaget (y en general para los constructivistas) el sujeto se acerca al objeto de conocimiento dotado de ciertas estructuras intelectuales que le permiten ver al objeto de una manera y extraer de él cierta información, misma que es asimilada por dichas estructuras. La

nueva información produce modificaciones o acomodaciones en las estructuras intelectuales, de tal manera que cuando el sujeto se acerca nuevamente al objeto lo ve de manera distinta a como lo había visto originalmente y es otra la información que ahora le es relevante. Sus observaciones se modifican sucesivamente conforme lo hacen sus estructuras cognoscitivas, construyéndose así el conocimiento sobre el objeto. En la perspectiva constructivista, es la actividad del sujeto lo que resulta primordial: no hay “objeto de enseñanza” sino “objeto de aprendizaje” (Moreno y Waldegg, 1992, p. 7).

En la pedagogía de las matemáticas, cada vez gana más terreno la forma de enseñar los conceptos y principios que dan coherencia al contenido de las matemáticas (es decir, las estructuras matemáticas). Contar con profesores más preparados y actualizados es fundamental para hacer frente a la demanda de los conocimientos de matemáticas que se va a enseñar. Desde la década de los 50 existe la preocupación de psicólogos e investigadores por la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, proponiéndose el desarrollo de nuevos métodos de enseñanza que promuevan un aprendizaje de las matemáticas que sea significativo. Se han diseñado materiales didácticos para ello y también se han descubierto otros materiales antiguos que fueron diseñados con ese fin. De la *teoría de Piaget se derivan principios generales de aprendizaje constructivo, mediante representaciones concretas, de respuesta social, y de interacción clínica entre el profesor y el alumno*. Estos elementos pueden ayudar a crear ajustes óptimos entre las capacidades de los alumnos y el contenido y procedimientos de la enseñanza (Resnick y Ford, 1990).

Dubinsky (1996) afirma que *los conceptos se construyen por medio de procesos en los que intervienen acciones y la conformación de imágenes mentales* sobre lo que sucede. El conocimiento matemático de un individuo es su tendencia a responder ante situaciones matemáticas problemáticas, reflexionando sobre ellas en un contexto social, construyendo o reconstruyendo acciones, procesos y objetos matemáticos y organizándolos en esquemas con el fin de manejar las situaciones.

Otra posición cognitiva es la de Vygotsky quien en su teoría acerca del desarrollo de los conceptos científicos, propone un reordenamiento curricular en el cual los conceptos más complejos anteceden a los más simples, revirtiendo así la idea jerárquica de aprendizaje, la cual supone que lo más complejo se construye a partir de lo más simple. Más bien, el tener acceso a

los conceptos más complejos ayuda a tomar conciencia de los anteriores, reconsiderándolos desde una perspectiva diferente y transformando su significado ‘Vygotsky ejemplifica lo anterior diciendo que el aprendizaje del álgebra amplía la comprensión de la aritmética y permite reconsiderar esta disciplina desde una perspectiva más amplia’ (Ursini, 1996, p. 48).

Por su parte, Duval (1999) argumenta que el aprendizaje de las matemáticas constituye un campo de estudio privilegiado para el análisis de las actividades cognitivas fundamentales como la conceptualización, el razonamiento, la resolución de problemas, e incluso la comprensión de textos. La particularidad del aprendizaje de las matemáticas hace que estas actividades cognitivas requieran la utilización de sistemas de expresión y de representación distinta a los del lenguaje natural o de las imágenes (variados sistemas de escritura para los números, notaciones simbólicas para los objetos, figuras geométricas, etc.). No puede haber comprensión en matemáticas si no se distingue un objeto (número, monomio, polinomio, función, etc.) de su representación, ya que un objeto puede expresarse en representaciones muy diferentes; es el objeto representado lo que importa y no sus diversas representaciones semióticas⁸ posibles.

Duval afirma que los conceptos se van construyendo mediante acciones que impliquen el uso de diferentes representaciones, ya sea de los conceptos mismos, de los elementos asociados a ellos o de los objetos matemáticos, y dependen de una manipulación adecuada de éstas para promover una articulación coherente entre ellos y sus representaciones. De acuerdo con esta teoría, el libre tránsito entre las diferentes representaciones de los objetos matemáticos, es fundamental en la construcción de los conceptos.

2.4 Uso de materiales concretos en la construcción del conocimiento

La utilización de materiales concretos (Resnick y Ford, 1990) permite la manipulación y elaboración de secuencias de enseñanza que van progresando desde una representación concreta a otras más elaboradas. Se intenta que los estudiantes logren la comprensión de las relaciones matemáticas a partir de la intuición, hasta llegar a la notación formal. Sin embargo, el uso de materiales concretos en la enseñanza se dificulta a medida que se avanza verticalmente en el currículo, ya que los conceptos matemáticos son más abstractos y complejos. Algunos de estos

⁸ Se llama semiosis a la acción de marcar o representar con un signo.

recursos son los materiales Montessori para la enseñanza de la notación posicional (ver la imagen 2.1), con los cuales se enseña los valores posicionales de forma concreta, mediante el empleo sistemático de códigos de colores y secuencias de materiales manipulativos cuidadosamente planeadas.

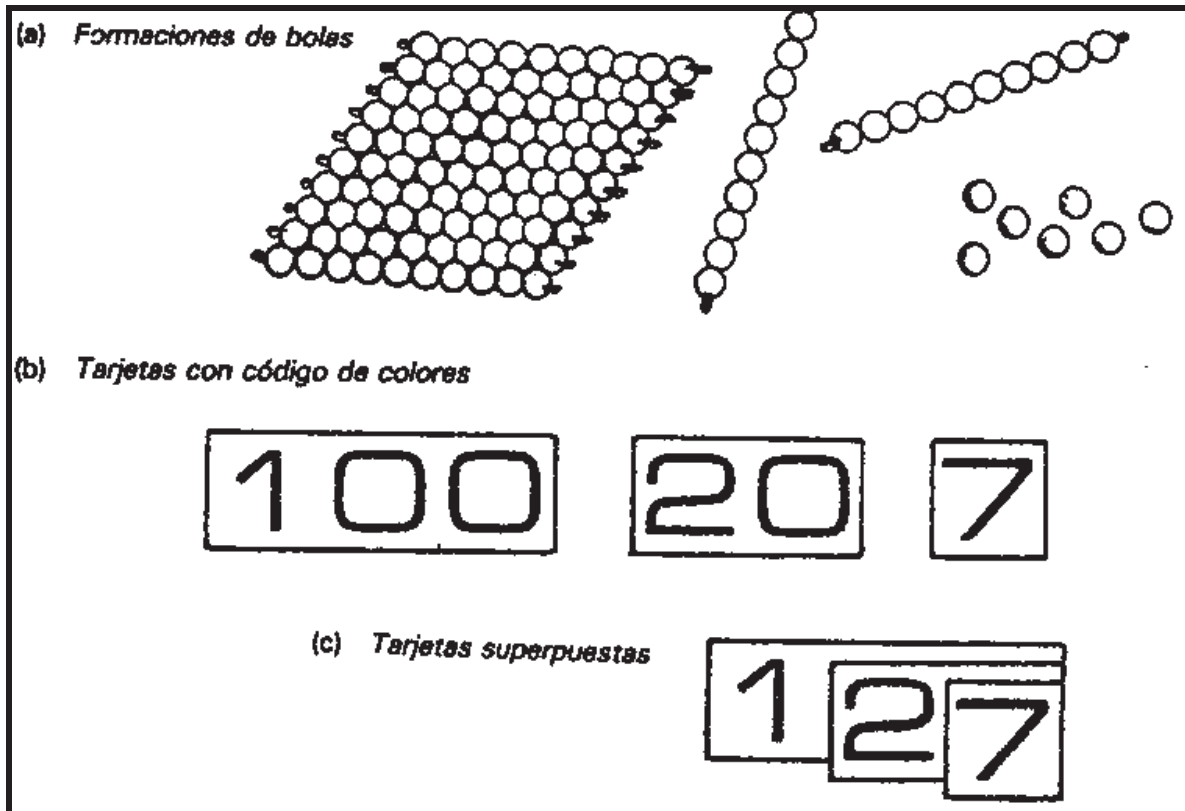


Imagen 2.1 Materiales Montessori.

En este contexto, es necesario preguntarnos ¿hasta qué punto responden estos métodos de enseñanza con las capacidades intelectuales de los alumnos? Se deben determinar, lo más claro posible, las capacidades cognitivas con que cuentan los alumnos para el aprendizaje de las matemáticas; y cómo se interrelacionan estas capacidades con los actos de enseñanza que involucran las estructuras matemáticas. En otras palabras, se debe disponer de una teoría del funcionamiento intelectual con la cual evaluar la posibilidad de que las capacidades psicológicas hagan posible la formación de la comprensión adecuada. El psicólogo Jerome Bruner (1956) combinó los objetivos de la psicología experimental con los del estudio del trabajo del aula; sus

experimentos se referían sobre todo al aprendizaje de las matemáticas. En sus experimentos, realizados en Harvard, Bruner contó con la colaboración de Zoltan P. Dienes, quien era profesor de matemáticas.

Dienes (1960) diseñó propuestas de enseñanza que permitieran lograr un aprendizaje significativo de los alumnos, propuestas que tomaran en cuenta tanto la estructura de las matemáticas como sus capacidades cognitivas. Su fundamento se basa en la teoría de Piaget. Lo más característico del enfoque de Dienes es el empleo de materiales y juegos concretos, en secuencias de aprendizaje estructuradas cuidadosamente.

La propuesta de Dienes se basa en el uso de los llamados Bloques Aritméticos Multibase (BAM), o simplemente Bloques de Dienes. Su empleo se ha extendido en la enseñanza y en la investigación de la educación matemática; en los libros de texto modernos suelen mostrarse los diagramas que ilustran manipulaciones concretas en base 10. Los BAM son juegos de bloques de madera, cada uno de los cuales representa un sistema de numeración con base diferente (ver la imagen 2.2).

Dienes considera que los alumnos son constructivistas por naturaleza, más que analíticos; van formándose (es decir, construyen) una imagen de la realidad a partir de sus experiencias con los objetos del mundo. Este proceso depende de una exploración activa, como ha puesto de manifiesto Piaget. Dado que las relaciones y pautas matemáticas no son evidentes en el entorno diario de los alumnos, Dienes propone el uso de materiales que “materialicen” estas estructuras y, a partir de la experiencia, se espera que sirvan para aprender características cualitativas y cuantitativas de las matemáticas y así, los estudiantes estarán familiarizándose con conceptos abstractos.

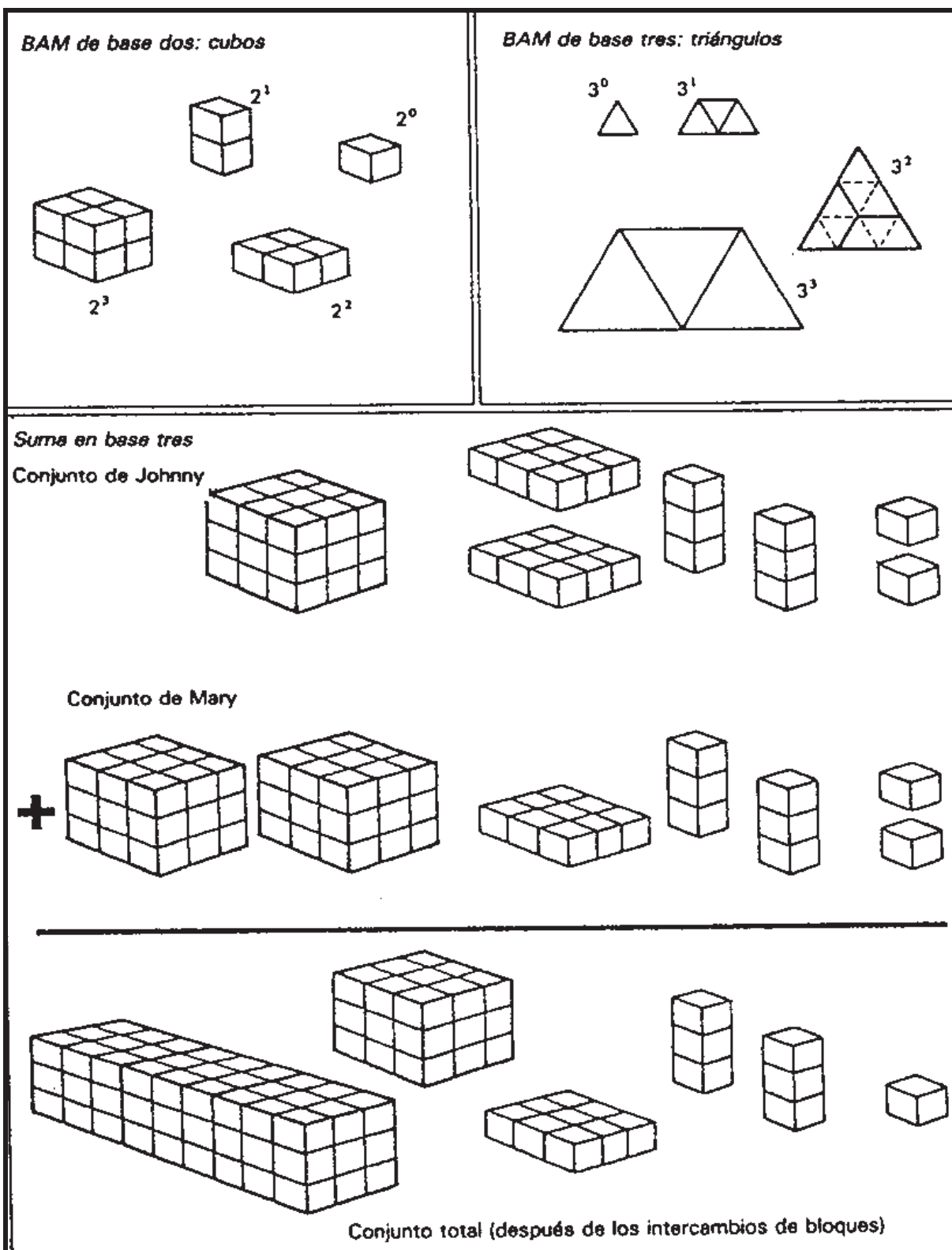


Imagen 2.2 Bloques de Dienes.

Los Bloques de Dienes también pueden utilizarse para ilustrar el principio de la factorización. En sus experimentos, Dienes proporcionó a los alumnos planos, barras y unidades, y les pregunta si eran capaces de construir cuadrados cada vez mayores con los materiales; los estudiantes descubrieron diversas formas de conseguirlo (ver imagen 2.3).

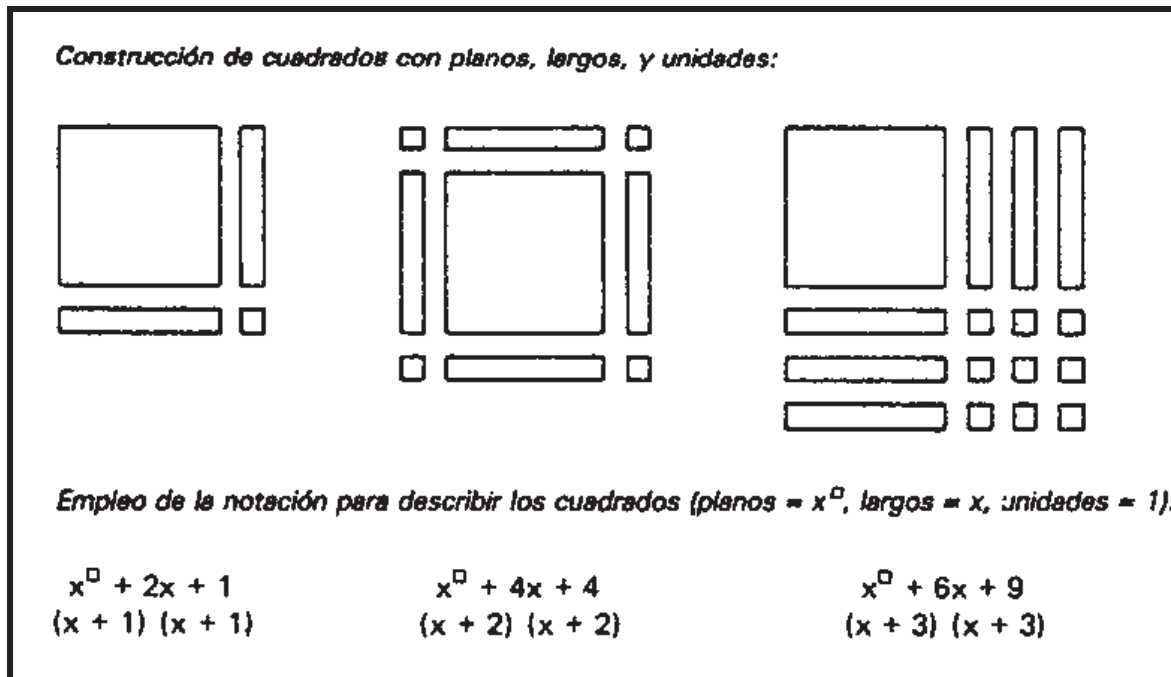


Imagen 2.3 Factorización con Bloques de Dienes.

Según Dienes, el desarrollo de los conceptos matemáticos se consigue mejor mediante una serie de patrones cíclicos, cada uno de los cuales supone una secuencia de actividades de aprendizaje que van de lo concreto a lo simbólico. El ciclo de aprendizaje es una interacción planificada entre un segmento de un cuerpo de conocimientos estructurado y un estudiante activo, que se lleva a cabo con la ayuda de materiales diseñados a propósito. En cada ciclo de aprendizaje, la primera fase del desarrollo de los conceptos empieza con el juego libre. Los alumnos manipulan los materiales matemáticos de formas no estructuradas, haciéndose idea de su tamaño, peso, textura y color, y descubriendo las maneras en que se pueden utilizar para realizar construcciones imaginativas. Este tipo de actividad no es puramente aleatoria, porque los niños descubren las formas y regularidades del entorno.

2.5 Investigaciones relacionadas con nuestro trabajo

En este campo existen diversos materiales para impulsar la enseñanza del álgebra, algunos de los trabajos más recientes basados en los bloques de Dienes, son de: Samper (1996), Dreyfous (1996) y Mancera (1998) por mencionar algunos de ellos. Estos materiales han sido diseñados para ser utilizados en el nivel básico de secundaria.

Samper (1996) en su artículo “Geometría como instrumento de Álgebra”, utiliza material manipulable (bloques de Dienes) para la multiplicación de dos binomios de la forma $ax + b$ y la factorización de trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$, con coeficientes enteros a , b y c de pequeño valor absoluto, utilizando las propiedades de los números reales y otros procedimientos algebraicos.

Dreyfous (1996) en su libro titulado Manual de Lecciones “AlgeBlocks”, utiliza un conjunto de bloques de área x^2 , de área x y de área 1 (unidad cuadrada), otro conjunto de bloque de áreas y^2 , y y 1 , de diferentes tamaños que los anteriores; de tal manera que se pueden construir diferentes conjuntos de bloques de distintos tamaños para cada variable. Su aplicación se limita a polinomios de segundo grado.

Considera dos colores: azul claro para áreas positivas y azul oscuro para “áreas negativas”. Trata las operaciones de los números reales (enteros y racionales), operaciones con polinomios, productos notables y factorización con polinomios de una sola variable de la forma $x^2 + bx + c$; y en algunos ejemplos trata polinomios con dos variables; las ecuaciones de primer grado e inecuaciones con una variable de la forma $ax + c = cx + d$ y sistemas de ecuaciones con dos variables con

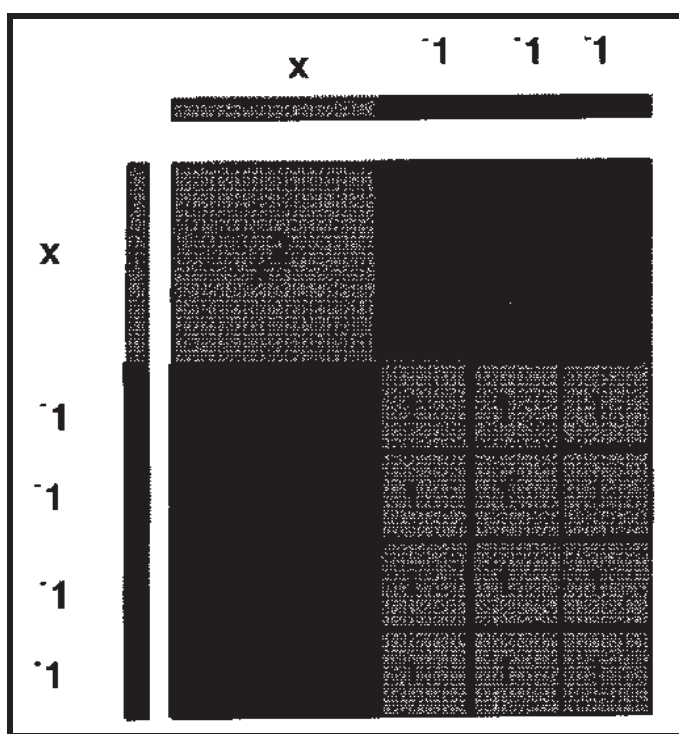


Imagen 2.4 Ejemplo de Factorización de Dienes.

ecuaciones muy sencillas. En la Imagen 2.4, se ilustra como se utilizan los bloques de Dienes para factorizar el trinomio $x^2 - 7x + 12$, cuyos factores son $x - 3$ y $x - 4$.

Mancera (1998), en su “Matebloquemática” utiliza un conjunto de bloques de área x^2 , de área x y de área 1 (unidad cuadrada), limitándose este conjunto de bloques a polinomios de segundo grado; los polinomios de grado mayor no se pueden operar con ellos. Considera también dos colores, gris para áreas positivas y blanco para “áreas negativas”. Trata las operaciones de los números enteros y racionales, operaciones con polinomios, productos notables de una sola variable y factorización de polinomios de la forma $x^2 + bx + c$. Las ecuaciones de primer grado con una variable de la forma $ax + c = cx + d$ y sistemas de ecuaciones con dos variables (ecuaciones sencillas). La Imagen 2.5 ilustra la forma en que se utilizan los bloques de Dienes.

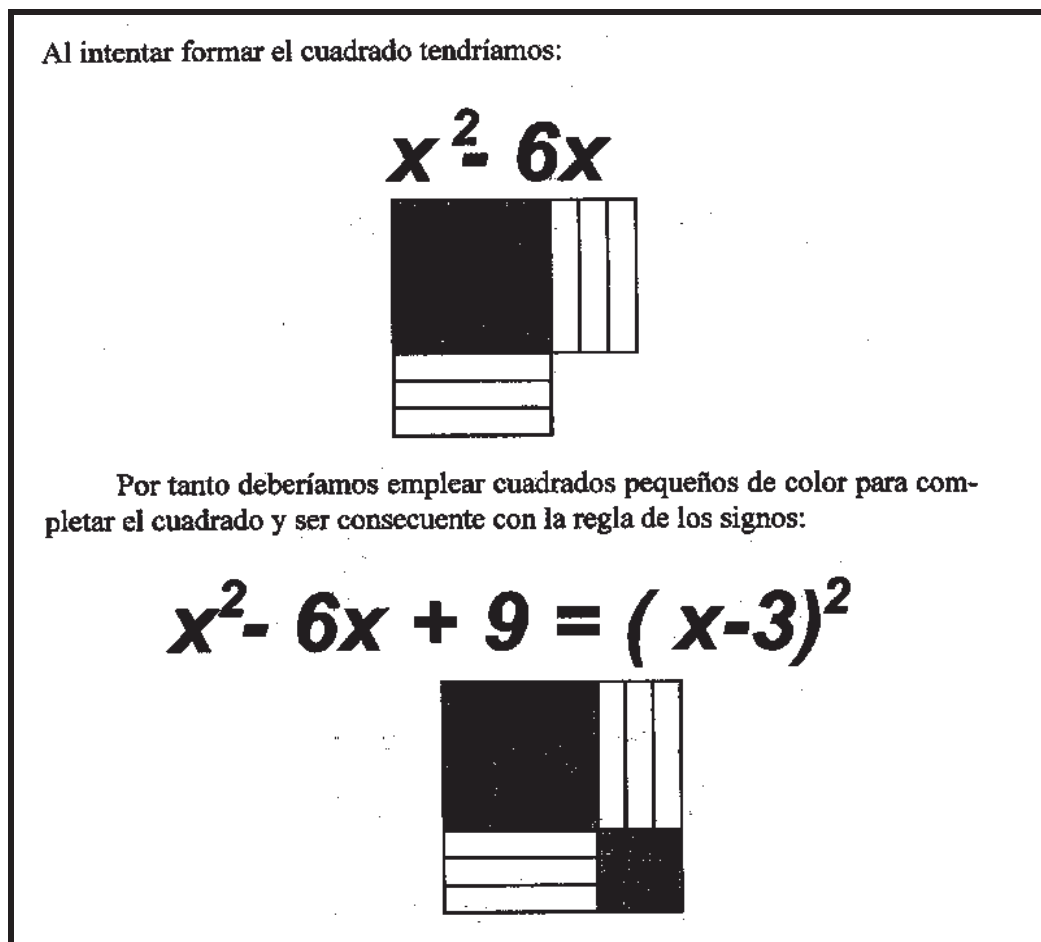


Imagen 2.5 Completando un cuadrado con bloques de Dienes.

En estos materiales no se puede trabajar con polinomios que contengan más de dos variables, ni de grado absoluto mayor que los de segundo grado.

El uso de estos materiales encuentra respaldo en las teorías constructivistas, donde el aspecto principal es que “el conocimiento se construye”. Los conceptos y procedimientos no se aprenden de manera instantánea y definitiva; no se adquieren de golpe sino que continuamente renovamos nuestro conocimiento mediante procesos de aprendizaje que van enriqueciéndolo a través de la experiencia. Se puede decir que nos acercamos al conocimiento por aproximaciones sucesivas, en un camino en el que no necesariamente se tienen avances, puede haber también retrocesos. Estas teorías consideran que “los conceptos se van construyendo poco a poco” en un proceso que puede ser interminable mediante acercamientos sucesivos.

La matemática se caracteriza por sus conceptos abstractos, por lo que es conveniente, que en un inicio, los estudiantes enfrenten situaciones en las que puedan realizar algunas indagaciones mediante la manipulación de objetos concretos, a partir de lo cual se familiaricen con las propiedades relevantes de tales conceptos. Esta familiaridad, hará más factible el acceso al concepto y sus diversas representaciones.

2.6 Marco Teórico

Con base a la revisión de la literatura que hemos realizado a lo largo de este capítulo y los objetivos de nuestro trabajo, a continuación haremos una síntesis de las ideas fundamentales que orientan teóricamente nuestro trabajo.

- Diferentes investigaciones, han documentado el bajo aprovechamiento que los estudiantes obtienen en álgebra, lo cual es totalmente compatible con nuestra experiencia. Mostrando que, la falta de significado sobre los objetos y procedimientos algebraicos, es una de las principales fuentes de incomprensión, lo que a su vez, conlleva a los estudiantes a memorizar los contenidos para acreditar los exámenes.
- El desarrollo histórico del álgebra muestra claramente que la geometría jugó un papel importante, como fuente de significados, en la construcción de los conceptos, procedimientos y símbolos apropiados para dar solución a los problemas de naturaleza

algebraica. Por tanto, consideramos que para los estudiantes de educación media, una manera ‘natural’ de acceder al álgebra con significado es mediante el uso de modelos algebraicos simples, que permitan abordar y resolver una razonable variedad de problemas algebraicos.

- En el enfoque constructivista del conocimiento desarrollado por Piaget y sus seguidores, se ha puesto de manifiesto la importancia de la acción del sujeto con el objeto de conocimiento. Desde luego, para que la acción sea generadora de conocimiento, las situaciones de aprendizaje deben considerar apropiadamente, tanto el desarrollo cognitivo del sujeto como la forma en que se presenta el objeto por conocer y la manera de relacionarse con él. Nuestro trabajo adoptará este enfoque, aunque reconocemos la dificultad que implica llevarlo a la práctica.
- Los planteamientos de Duval sobre el papel de los registros de representación en la construcción de los conceptos, nos parecen pertinentes para nuestro trabajo. Lo anterior, en virtud de que la construcción de los conceptos y procedimientos algebraicos, está muy relacionada con el registro de representación utilizado para abordar los problemas de naturaleza algebraica. En nuestro planteamiento, la utilización del registro geométrico es construir, provisionalmente, significados geométricos asociados a los conceptos y símbolos algebraicos, de manera que los estudiantes cuenten con referentes que le den sentido a sus acciones. Desde luego que nuestra propuesta sólo pretende cubrir una etapa en el desarrollo conceptual del álgebra, en los estudiantes.

Capítulo 3

METODOLOGÍA

3.1 Aspectos generales

Uno de los propósitos principales de esta tesis, es hacer una propuesta para enseñar el tema de factorización a estudiantes de primer semestre de bachillerato. Esto implica el diseño de materiales e instrumentos, orientados según el marco teórico que hemos elegido, que permitan implementar y valorar en qué medida la propuesta es útil para que los estudiantes que necesitan ayuda en este tema, superen sus dificultades de aprendizaje.

Así, aunque nuestro estudio implica cierta experimentación, básicamente es de carácter cualitativo, ya que nuestro interés se centra en observar el desarrollo y evolución del aprendizaje de conceptos y operatividad implicados en la factorización. No pretendemos sacar conclusiones con base en la aplicación de instrumentos de evaluación a un número grande de sujetos, sino a partir del cambio en el comportamiento de quienes muestran más dificultades en el manejo de este tema; esencial en el currículo del bachillerato.

Es por ello que el desarrollo de este estudio pasa por las siguientes fases:

- a) Elaboración de un modelo geométrico-simbólico;
- b) Piloteo del modelo geométrico-simbólico;
- c) Diseño de actividades para la enseñanza del tema de factorización y de instrumentos para valorar el aprovechamiento de los estudiantes;
- d) Implementación del tema en el curso ordinario de bachillerato, utilizando los materiales producidos; y
- e) Análisis de los resultados obtenidos.

3.2 Elaboración del modelo geométrico-simbólico intuitivo

Estudiando el origen del álgebra, que proviene de una corriente aritmética y otra geométrica citado por Radford (1996, p. 39-42), según Høystrup (1987 y 1990) el álgebra babilónica consiste en usar la geometría de “cortar y pegar” cuyo fundamento, es la geometría no deductiva de los

babilonios, usada posteriormente por los griegos y árabes. Y de acuerdo con revisión de la literatura, pensando en la factorización y en las dificultades que este tema presenta para los alumnos, surgió la necesidad llevar a cabo la propuesta de enseñanza planteada en este trabajo, así como de elaborar un modelo geométrico-simbólico intuitivo refinado; es decir, que cubra las expectativas para factorizar polinomios típicos del bachillerato, de grado mayor a dos y polinomios de varias variables; casos que no contempla la literatura existente como los trabajos de Dreyfous (1996) y Mancera (1998).

La elaboración del modelo geométrico-simbólico (Anexo 1), se basa en el concepto de área de cuadrados y rectángulos, al que hemos llamado “álgebra geométrica” y cuyo contenido está relacionado con la parte simbólica del álgebra. Claramente en este material se presentan todos los elementos, nociones (tales como el de figura rectangular y el figura rectangular rectilínea, etc.) y definiciones (tales como las descomposición y compensación de áreas, etc.), que se requieren para factorizar geoméricamente polinomios, mediante el uso de figuras rectangulares, en el que sus áreas representan los términos del polinomio. Factorizar geoméricamente un polinomio; *significa transformar una figura rectangular rectilínea en una figura rectangular, haciendo uso del método de la geometría de cortar y pegar; así como de los procedimientos de descomposición y compensación de áreas.* La Figura 3.1 muestra un esquema de este procedimiento.

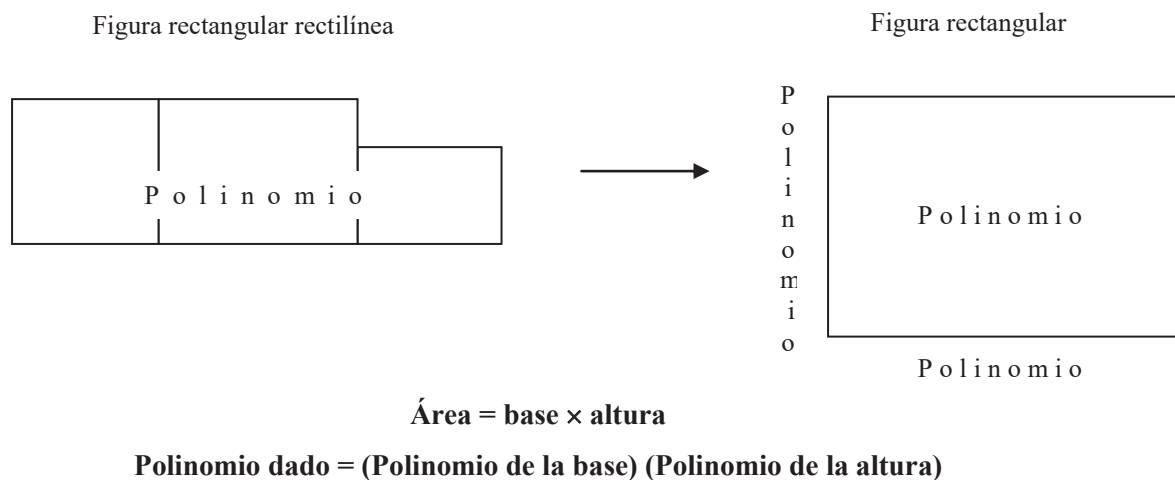


Figura 3.1 Procedimiento de factorización de polinomios.

3.3 Piloteo del modelo geométrico– simbólico intuitivo

Para pilotear este modelo se eligió a los alumnos de la sección 01 del primer semestre de bachillerato de la Preparatoria “*Ing. Pascual Ortiz Rubio*” de la UMSNH que cursan la materia de Matemáticas I. El estudio se realizó en 3 sesiones de trabajo en el aula, cada una de las cuales tuvo una duración de 2 horas. La introducción del modelo se hizo a través de presentaciones en *power point*.

En la primera sesión se presentó a los alumnos las ideas básicas del álgebra geométrica, como: representar geométricamente enteros, monomios, suma de monomios y polinomios; esta representación se limitó al campo de los números enteros.

En la segunda sesión se explica a los alumnos en qué consiste el ‘método de cortar y pegar’, la ‘descomposición y compensación de áreas’, luego se explica cómo factorizar geométricamente algunos ejercicios típicos del bachillerato. Es importante señalar que en esta fase de piloteo no se promueve la factorización simbólica. En estas dos sesiones el alumno no realiza ninguna actividad, sólo se centra en la exposición.

En la tercera sesión se pidió a los alumnos que formarán equipos de trabajo de 4 integrantes y se les aplicó una actividad de aprendizaje, que consiste en la factorización de 6 diferentes tipos de polinomios, pidiéndoles además que analizaran y discutieran los procedimientos y resultados. Las instrucciones de la actividad y los seis polinomios se presentan a continuación:

INSTRUCCIONES: Usando el álgebra geométrica factoriza correctamente cada uno de los siguientes polinomios, escribiendo en cada paso que realices el procedimiento algebraico. Simplifica lo más posible tu respuesta.

1. $2x^2 + 8x$

2. $a^2 + ab + bx + ax$

3. $x^2 + 2x + 1$

4. $x^2 - 9$

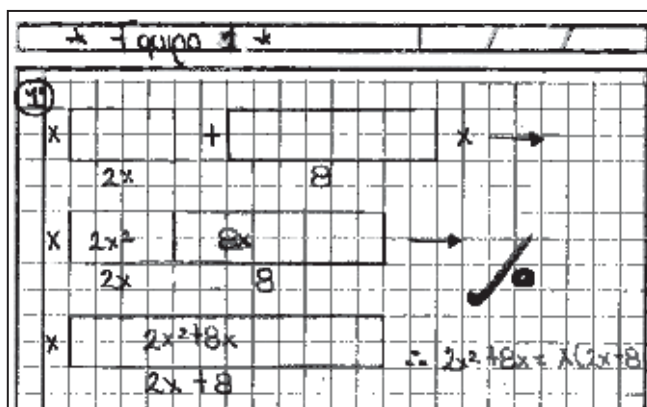
5. $x^2 + 5x + 6$

6. $x^3 - 27$

La mayoría de los estudiantes se involucraron en el proceso de enseñanza-aprendizaje, se pudo observar desinterés por parte de algunos estudiantes. Los estudiantes que se involucraron en el proceso lograron –con diferente nivel de efectividad– realizar las factorizaciones planteadas, pero lo más importante es que hubo claros indicios de un mayor entendimiento del sentido de la factorización geométrica y de los símbolos utilizados.

A continuación se comentan algunos de los resultados obtenidos por uno de los equipos que tuvieron mayor desempeño en la actividad final.

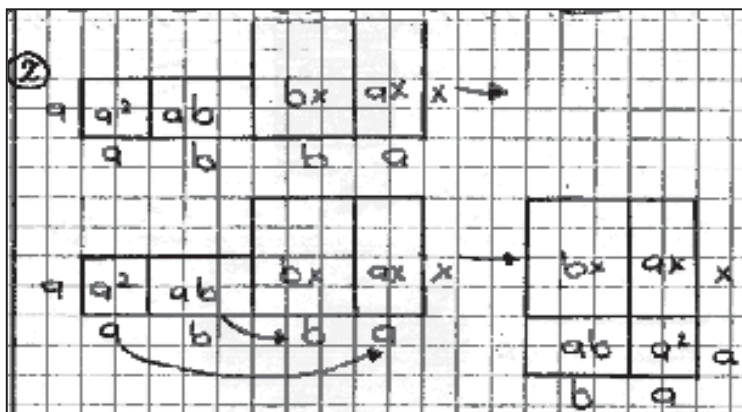
En la factorización del binomio $2x^2 + 8x$ los alumnos lograron factorizar; aunque no obtuvieron el factor común completo, que en este caso es $2x$. En la imagen de al lado se puede ver que los alumnos representaron cada término del polinomio como rectángulos de la misma altura x y formaron una figura rectangular rectilínea



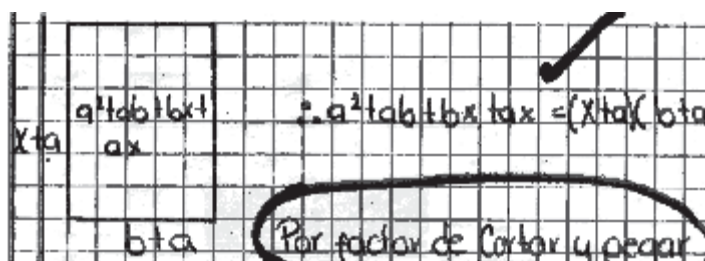
de la una sola altura x (altura común), logrando construir finalmente el rectángulo de lados x y $2x + 8$, cuya área es $2x^2 + 8x$ y cuya factorización fue escrita como: $2x^2 + 8x = x(2x + 8)$.

Con relación a la factorización de $a^2 + ab + bx + ax$, los alumnos realizaron la factorización geométrica con relativa facilidad (Imágenes adjuntas). Primeramente consideraron cuáles términos del polinomio se pueden representar como rectángulos de igual altura, posteriormente formaron una figura rectangular rectilínea, haciendo coincidir las alturas comunes.

Posteriormente, construyeron una figura rectangular, haciendo coincidir las bases comunes. El



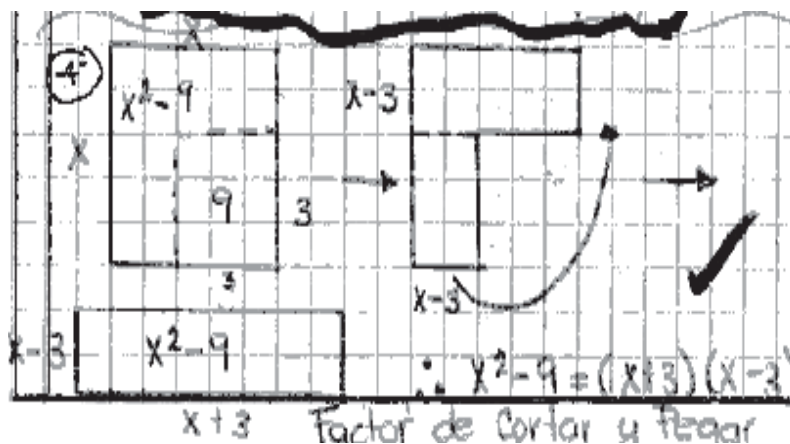
área de la figura rectangular formada es $a^2 + ab + bx + ax$ y sus lados son $x + a$ y $a + b$. Factorizando así el polinomio como: $a^2 + ab + bx + ax = (x + a)(a + b)$.



En la factorización del trinomio $x^2 + 2x + 1$ los alumnos, primero representaron geométicamente el polinomio, para luego construir una figura rectangular. Colocaron los cuadrados de área x^2 y 1 sobre una de sus diagonales, haciendo coincidir uno de sus vértices y sus lados dispuestos en forma paralela. Después descompusieron el rectángulo de área $2x$ en dos rectángulos de área x , los cuales fueron colocados sobre la otra diagonal, y de esta forma lograron construir la figura rectangular de área $x^2 + 2x + 1$ y lados $x + 1$. Factorizando el trinomio como: $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)(x + 1)$.

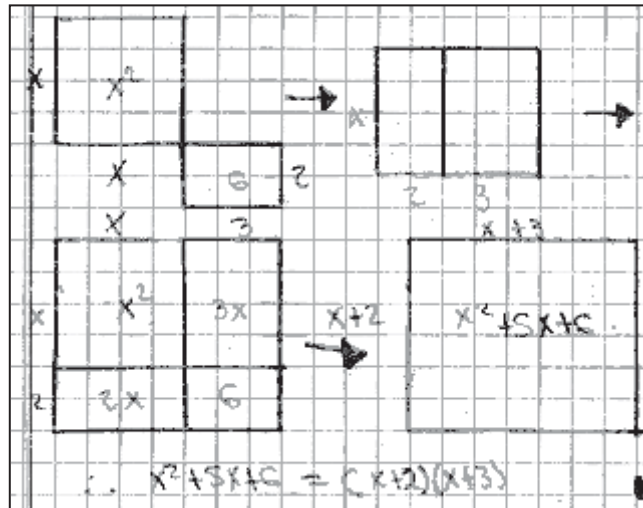


Para factorizar la diferencia de cuadrados $x^2 - 9$, los alumnos utilizaron el método de cortar y pegar: al cuadrado de área x^2 le restaron el cuadrado de área 9 , luego cortaron el rectángulo de base $x - 3$ y altura 3 y lo pegaron al lado derecho del rectángulo de base x y altura

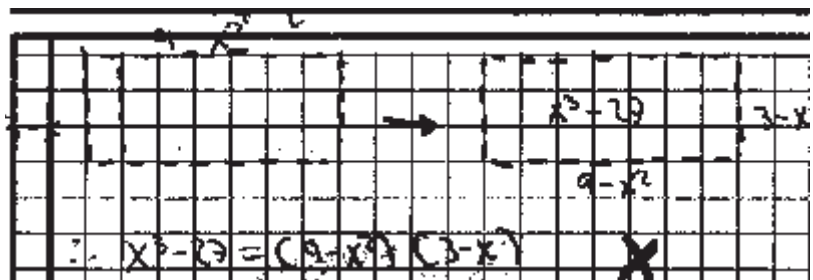
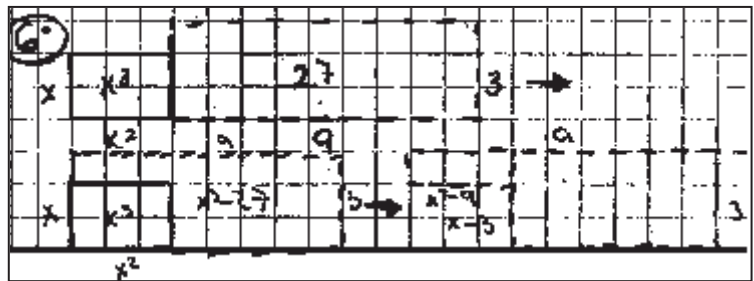


$x - 3$, dado que tienen un lado común, construyendo un rectángulo de base $x + 3$ y altura $x - 3$ cuya área es $x^2 - 9$, escribiendo la factorización como: $x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$.

En la factorización del trinomio $x^2 + 5x + 6$ los alumnos lograron factorizarlo por descomposición de áreas. En la imagen de abajo se puede observar detalladamente la manera en que los alumnos realizaron la factorización geométrica y la representación simbólica correspondiente.



En la última factorización, de $x^3 - 27$, los estudiantes intentan elaborar una representación geométrica que les permita utilizar el método de cortar y pegar para obtener el rectángulo equivalente, pero se presentan confusiones y cometen errores en la representación y manipulación de los enteros y las áreas negativas. Particularmente hay una confusión en el significado del símbolo ‘-’ (como resta o como signo de negativo).



Es conveniente aclarar que en la exposición que realizó el profesor no se abordaron casos de diferencias de potencias impares.

Ciertamente la diferencia de cubos y potencias impares mayores es muy difícil de realizar geométricamente mediante el proceso de cortar y pegar. De aquí que se tuvo que buscar otra alternativa para factorizar este tipo de polinomios, lo que nos llevó a formular el método de la “compensación de áreas”, el cual resulta menos complicado que el de cortar y pegar, para estos casos. Además, tanto las diferencias de potencias pares e impares se pueden factorizar por este método.

Con base a los resultados obtenidos en el presente estudio piloto se pueden delinear los siguientes comentarios:

- Una buena parte de los estudiantes se mostraron activos e interesados con la propuesta de trabajar con las representaciones geométricas.
- En estos estudiantes se observa un mejor entendimiento del proceso de factorización algebraica y de la simbolización que se utiliza en éste.
- Con relación al punto anterior, consideramos que es necesario buscar las adecuaciones a la implementación de la propuesta con la finalidad de involucrar activamente al mayor número de estudiantes.
- Aún queda pendiente por trabajar la parte correspondiente a la fase en que los estudiantes deben ‘desprenderse’ de las representaciones geométricas y sólo hacer uso de la representación simbólica, lo cual forma parte de la siguiente etapa de nuestra investigación.

Durante el desarrollo del trabajo de investigación se consideran dos aspectos fundamentales: el diseño de las actividades que se aplicarán y la planeación de la implementación.

3.4 Diseño de las actividades

Se diseñaron ciertas actividades que esperamos contribuyan a promover, mejorar, beneficiar o facilitar el aprendizaje del tema de factorización, y así mismo sirvan para superar las dificultades de los alumnos que tienen problemas para factorizar los polinomios que usualmente se trabajan

en el contexto escolar. Las actividades se diseñaron con el fin de conformar la propuesta de enseñanza; su contenido se basa en el modelo geométrico–simbólico que se encuentra en el Anexo. En el diseño de estas actividades se hace también énfasis en la factorización simbólica. Las actividades están integradas por ‘ejercicios’ (entre 2 y 6) a través de los cuales se formulan diferentes tareas que deben ser abordadas por los estudiantes. Cabe aclarar que, en este trabajo, el término ejercicio tiene un significado diferente al que usualmente se le da en el contexto escolar, como técnica de aprendizaje por repetición. En nuestro caso, el ejercicio pretende enfrentar a los estudiantes a situaciones relativamente nuevas y/o con diferente grado de dificultad y complejidad.

Las actividades contienen las ideas básicas del álgebra geométrica: la representación geométrica de números enteros, monomios, los términos de un polinomio, así como los polinomios mismos; La factorización de polinomios por factor común, por agrupación, trinomios de segundo grado de la forma $ax^2 + bx + c$, diferencia y suma de potencias (mayores que dos). Esta representación se limita solamente a los números enteros. Las actividades diseñadas se encuentran en el Anexo 2.

3.5 Planeación de la implementación

En este apartado se describen los elementos que intervienen en la implementación de las actividades: los sujetos, el material propuesto, distribución de tiempos y la planeación las sesiones.

3.5.1 Sujetos

En este estudio se involucró a los alumnos de la sección 30 del primer semestre de bachillerato, del turno vespertino, de la Escuela Preparatoria “Ing. Pascual Ortiz Rubio” de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, quienes fueron elegidos por la anuencia expresada por su profesor de matemáticas y la disposición mostrada por los estudiantes a participar en el estudio.

Se comentó con los alumnos sobre la realización del trabajo de investigación, en el que se aplicaría una propuesta de enseñanza para el tema de factorización del curso de álgebra. Para ello se requería de 12 alumnos voluntarios, con la idea de formar 4 equipos de 3 estudiantes y crear un ambiente de trabajo colaborativo. Se vieron interesados 11 alumnos, 4 que asistían regularmente

a clase y cumplían con las tareas y los otros 7 de ellos faltaban frecuentemente a clase y casi no cumplían con las tareas. Se les indicó el lugar, el día y la hora en que debían asistir. El día de la aplicación sólo asistieron 3 de los que asistían regularmente y cumplían con las tareas; dada esta situación se decidió suspender la aplicación de la actividad.

Ante la falta de colaboración y seriedad de los primeros participantes, se decidió llevar a cabo el trabajo como parte de la evaluación del curso y se eligieron 12 estudiantes, considerando que su asistencia fuera regular y que cumplieran con las tareas que se asignaban en clase. De esta manera fueron seleccionados los siguientes alumnos:

Fabiola	Sabino	Miguel	Raúl	Mayra	Juan Carlos
Iskra	Miriam	Estrella	Gerardo	Guadalupe	José Luis

3.5.2 *Material*

Los materiales utilizados fueron: el paquete de actividades a aplicar en cada una de las sesiones; acetatos y proyector de acetatos y una videocámara. Los materiales de trabajo que el alumno utilizó son: lápiz, papel cuadriculado y una regla.

3.5.3 *Planeación de las sesiones*

La propuesta de investigación se aplicó en cuatro sesiones de trabajo en el aula, una cada día, con una duración de hora y media cada una. Cada sesión consta de dos etapas; y cada etapa se conforma de tres fases: *exposición interactiva*, *trabajo de equipo* y *socialización*. Concluida la primera etapa, inmediatamente después se inicia la segunda y al final de la sesión, se deja un *trabajo individual extra-clase*. En caso de contingencias que pudieran presentarse, se termina sólo la primera etapa y en la siguiente sesión se continúa con la segunda; en cada fase se desarrolla una actividad. A continuación se describe cada una de las fases.

Exposición interactiva: Tiene por objeto introducir el contenido matemático y situaciones de aprendizaje de manera interactiva, es decir, el profesor expone algunos elementos y propone algunas tareas, en cuya realización participan los alumnos. Se trata de familiarizarlos con la representación geométrica de: enteros, potencias, monomios y polinomios, mediante el uso de

rectángulos y cuadrados (figuras rectangulares) para factorizar, geométicamente, polinomios por factor común, por agrupación, trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$, diferencia y sumas de potencias. La interacción de los alumnos se da mediante respuestas a preguntas expresas del profesor, quien expone, conduce y desarrolla las actividades, mediante el uso de un proyector de acetatos. En las preguntas que no podan contestar, después de un breve tiempo se les hace algunas sugerencias para ayudarles, si aún así no las contestan, se les da la respuesta. Esta fase tiene una duración de alrededor de 15 minutos.

Trabajo en equipo: La duración de esta fase es de alrededor de 20 minutos. Se pretende que los alumnos interactúen entre ellos para realizar tareas relacionadas con la fase anterior. La intención es que compartan ideas y estrategias de solución, y que discutan los distintos procedimientos que surjan en la realización de las tareas.

Socialización: En esta fase, de alrededor de 10 minutos, los alumnos comparten sus resultados y procedimientos con todo el grupo, explicando y discutiendo los procedimientos y soluciones. Con ello, se espera que los alumnos expresen sus conocimientos y dudas, analicen sus diferencias y errores, y justifiquen sus acciones.

Trabajo individual extra-clase: Al final de cada sesión se deja una actividad extra-clase, que será realizada de manera individual por cada uno de los alumnos y entregada al inicio de la siguiente sesión. Con esta actividad se pretende retroalimentar, reforzar los conocimientos adquiridos e introducir nuevos temas que se van a tratar en la siguiente sesión.

3.5.4 Papel del investigador

En este estudio el investigador hace papel del profesor o instructor: en la fase de exposición interactiva es explicar, conducir y desarrollar las actividades, mediante el uso de un proyector de acetatos. En la fase de trabajo en equipo, su papel es moderar y orientar el trabajo de los equipos sin resolver o dar respuestas a sus dudas y, en la de socialización, el profesor coordina las presentaciones de los alumnos y la discusión sobre las diferencias que surjan; también interviene cuando alguna duda no ha sido resuelta o no sea detectado algún error, formulando cuestionamientos para que los mismos alumnos resuelvan la situación. En caso de esto no ocurra y, como último recurso, el profesor explicará lo necesario para aclarar la situación. En el trabajo

extra-clase, el profesor revisa lo realizado por los alumnos y, si en esta revisión encuentra errores, resultados o procedimiento interesantes, en la siguiente clase los pondrá a discusión. Con la finalidad de tener un control más eficaz sobre el proceso, en este trabajo, el investigador asumió el rol de profesor.

3.5.5 Procedimiento y planeación de las sesiones

En las dos primeras sesiones se presentan a los alumnos actividades que contienen las ideas básicas del álgebra geométrica, la representación geométrica de números, monomios, los términos de un polinomio, así como los polinomios mismos; esta representación se limita a los números enteros. En las siguientes dos sesiones se aplican actividades para factorizar al menos dos polinomios con coeficientes enteros, utilizando el método de cortar y pegar, la descomposición y compensación de áreas.

Se diseñaron tres tipos de actividades para cada sesión:

Actividades de la fase de exposición interactiva: En esta fase se desarrollan las actividades: 1, 3, 6, 8, 11, 13, 16 y 18; las cuales incluyen tareas que el investigador utilizará para introducir las ideas básicas y que desarrollará con la participación de los estudiantes.

Actividades para el trabajo en equipos: En esta fase los alumnos desarrollan las actividades: 2, 4, 7, 9, 12, 14, 17 y 19; que contienen tareas similares a las anteriores pero ampliando la variedad de las situaciones. En estas actividades se pretende que, en el trabajo de equipos, los estudiantes intercambien ideas, discutan las diferencias y tomen acuerdos.

Actividades de la fase de socialización: En esta fase se desarrollan las mismas actividades que en la fase de trabajo de equipo, sólo que se reestructuran para poder llevar a cabo su desarrollo, y con las cuales se pretende que los alumnos verifiquen sus respuestas y corrijan sus errores y comprendan los procedimientos geométricos y simbólicos.

Actividades extra-clase: En esta fase los alumnos realizan las actividades: 5, 10, 15 y 20; las cuales incluyen algunas tareas similares a las que se abordaron en la sesión y una tarea que corresponde al contenido de la siguiente sesión. El propósito de estas actividades es reforzar lo

visto en la sesión y proponer una actividad nueva (del tema siguiente) para que los alumnos intenten resolver situaciones nuevas antes de trabajarlas con el investigador.

Capítulo 4

IMPLEMENTACIÓN DE LAS ACTIVIDADES Y RESULTADOS

4.1 Introducción

En este capítulo se presentan los resultados de la aplicación de las actividades diseñadas para evaluar la propuesta de enseñanza explicada en el capítulo anterior, con base a los objetivos del trabajo de investigación formulados en el Capítulo 1. Como se comentó en él, en esta parte del estudio participaron 12 estudiantes de primer semestre de bachillerato, los cuales asistieron a la totalidad de las sesiones de trabajo. En la Imagen 4.1 aparecen estos estudiantes durante la primera sesión.



Imagen 4.1. Estudiantes e investigador que participaron en el estudio.

A continuación se describen cada una de las sesiones en que se realizó este trabajo de investigación, la descripción que a continuación se presenta está basada en el video filmado y en la observación directa por parte del investigador, así como en las producciones escritas que realizaron los estudiantes en el trabajo de equipo y actividades extra-clase. Las imágenes que aparecen en esta parte del documento fueron tomadas de la videograbación y de las actividades diseñadas para las fases de exposición interactiva y de socialización, como de las tareas producidas por los alumnos del trabajo en equipo y extra-clase.

Este trabajo se realizó en la propia institución y dado que algunos profesores de otras secciones no iniciaron su clase a la hora indicada, los alumnos que estaban fuera hacían escándalo y esto provocaba ruido o perturbación dentro del aula donde se aplicó la actividad. Esto propició que la grabación se escuchara distorsionada, aun cuando estos disturbios no desviaron la atención de los estudiantes que participaron en la actividad. En importante hacer notar que en las primeras dos sesiones se respetaron los tiempos programados para las actividades y que en las últimas dos se prolongó un poco más el tiempo de la fase de exposición interactiva y la de trabajo en equipo.

4.2 Descripción de la primera sesión

En esta sesión se trabajo con los 12 alumnos que fueron seleccionados, quienes durante las primeras actividades se mostraron un poco nerviosos, en gran parte por la filmación de las actividades. Lo cual se manifestaba en una actitud de inactividad cuando, trabajando en equipo, al ver que se acercaba la cámara dejaban de hacer comentarios y no escribían.

4.2.1 Primera etapa

- ***Exposición interactiva***

En esta fase el investigador introduce las ideas básicas del álgebra geométrica que se van a utilizar, proporcionando algunas definiciones y formulando tareas y preguntas que, en principio, los alumnos deben realizar o contestar. Para aprovechar el tiempo, se utilizaron acetatos para proyectar la actividad (tareas, preguntas, figuras y explicaciones breves), a partir de la cual, el grupo junto con el investigador fueron desarrollando y comentando la actividad.

A pesar de que los alumnos se mostraron cohibidos durante la filmación, también mostraron interés e hicieron esfuerzos por responder a las preguntas que fueron surgiendo durante la actividad. En la mayoría de los casos, los alumnos dieron la respuesta casi de manera inmediata y, en las preguntas que no podían contestar, después de un breve tiempo se les hacían algunas sugerencias para ayudarles, si aún así no contestaban, se les daba la respuesta.

La Actividad 1 inicia con el Ejercicio 1–1 relacionado con el cálculo de áreas, con la idea de revisar con los alumnos la determinación de áreas de rectángulos. A continuación se presentan

algunas de las preguntas que se abordaron en este ejercicio, así como las intervenciones de los alumnos.

¿Cuál es el área de los rectángulos de lados 3 y 4 respectivamente? La respuesta de la mayoría de los alumnos fue **12**, luego se argumenta que si se intercambian los lados de una figura rectangular o se gira, el área no se altera. Se confirma su respuesta multiplicando 3 por 4 y escribiendo **12** dentro del rectángulo, y se indica que entonces el **12** se puede factorizar como el producto $3 \cdot 4$ o $4 \cdot 3$ (Imagen 4.2¹).

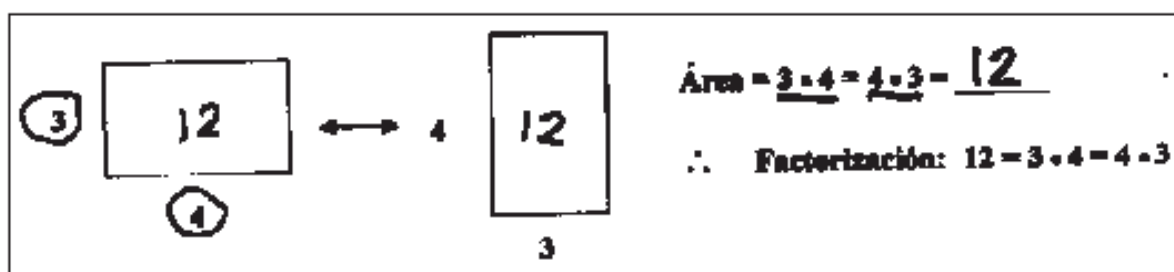


Imagen 4.2. Respuesta al Ejercicio 1-1.

Se observó que los estudiantes saben calcular el área de un rectángulo, dadas las longitudes de los lados; sin embargo, cuando se les preguntó *¿cómo se obtiene el área de una figura rectangular?* mostraron dificultad para expresar esta acción verbalmente, lo cual parece ser un indicio de que no hay una comprensión completa de ese conocimiento. Es decir, probablemente la noción ha sido adquirida a través de la ejercitación, pero no han comprendido el concepto de área, tal como lo mencionan Resnick y Ford (1990, pp. 25 – 55).

A continuación, con la idea de introducir la noción de “figura rectangular equivalente”, se les indica que el **12** no solo puede representar el área de las dos figuras rectangulares anteriores, mostrando a los estudiantes otros tres casos de figuras de área **12**. Se indica que estas figuras son rectangulares equivalentes. Se concluye este ejercicio diciendo que entonces el **12** se puede factorizar de diferentes formas. Se hace la indicación que esta factorización es dentro de los enteros positivos (Imagen 4.3²).

¹ Imagen tomada de la hoja 1, de los acetatos de la actividad 1, desarrollada durante la primera etapa de la primera sesión.

² Imagen tomada de la hoja 1 de los acetatos de la actividad 1, desarrollada durante la primera etapa de la primera sesión.

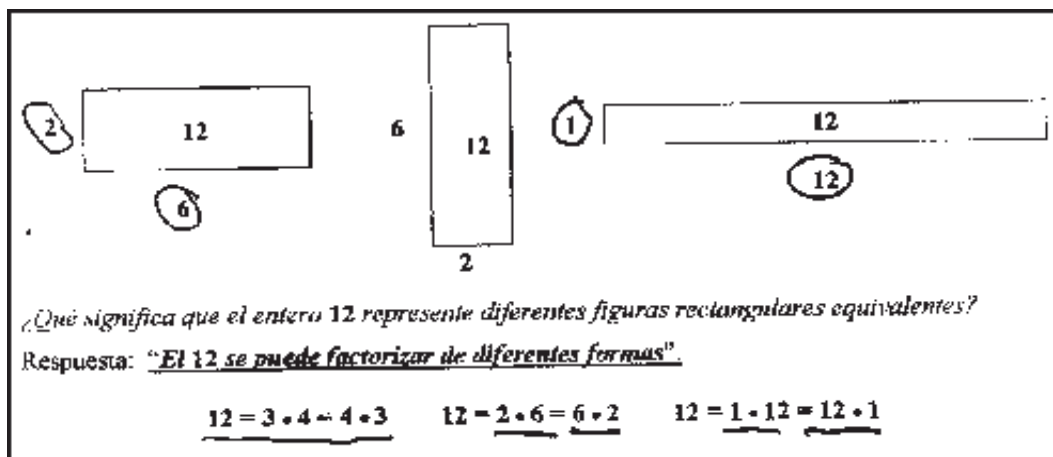


Imagen 4.3. Respuesta al Ejercicio 1-2.

En la representación y factorización geométrica de enteros positivos, se abordaron las formas de representar y/o factorizar el número **uno**, el **cero**, los **números primos**, los números **compuestos** y los **números cuadrados**.

También se trató sobre el significado geométrico del producto y división de potencias enteras de la misma base. Por ejemplo, sobre la representación de y^3 , al hacer la pregunta, *¿Cuál es lado faltante del rectángulo que representa la potencia y^3 , si uno de sus lados es y^2 ?* La respuesta de los alumnos fue y "porque dos más uno es igual a tres"; es decir, aplicaron la propiedad relativa a la suma de exponentes (en el producto de números con la misma base) y no la propiedad relativa a la diferencia de exponentes (en la división de dos números con la misma base). El investigador explicó la equivalencia de estos dos procedimientos (Imagen 4.4³).

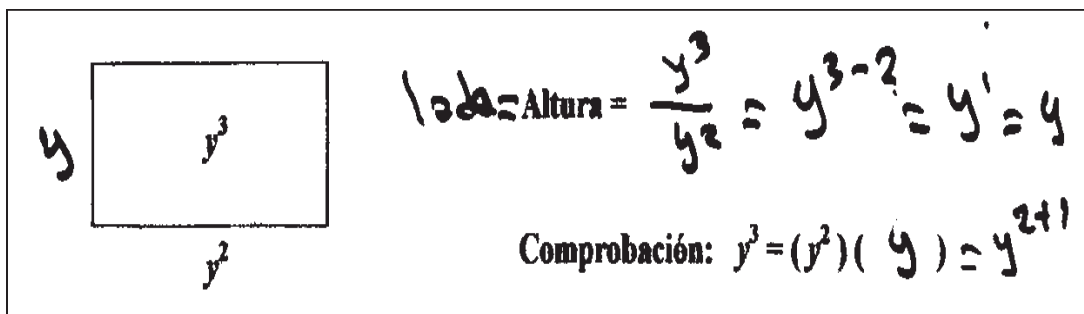


Imagen 4.4. Respuesta al Ejercicio 1-10.

³ Imagen tomada de la hoja 3 de los acetatos de la actividad 1, desarrollada durante la primera etapa de la primera sesión.

Otros casos que se trataron fueron las diferentes representaciones rectangulares de expresiones como x^2 , x^4 y x^5 .

- **Trabajo en equipo**

Por indicaciones del profesor, de acuerdo con lo establecido en la metodología, se integraron cuatro equipos con tres alumnos cada uno. La composición de los equipos fue decidida por lo propios estudiantes, de manera que quedaron integrados como se muestra en las Imágenes 5a, 5b, 5c y 5d.



Imagen 5a. Equipo 1: José Luis, Miguel y Gerardo



Imagen 5b. Equipo 2: Mayra, Estrella y Guadalupe



Imagen 5c. Equipo 3: Raúl, Juan Carlos y Sabino



Imagen 5d. Equipo 4: Iskra, Fabiola y Miriam

Al principio, los alumnos casi no interactuaban dentro de los equipos y trataron de realizar las tareas de manera individual. Creemos que esto se debió a dos hechos: por un lado, no estaban acostumbrados a trabajar de esta manera y, por otro lado, la videograbación que se estaba realizando les ocasionaba incomodidad e inhibía la comunicación. Debido a lo anterior, en esta fase de la sesión, fue poca la información que se pudo obtener sobre los procedimientos y razonamientos que usaron para resolver la actividad 2. A pesar de todo, resolvieron la actividad en un tiempo menor que el asignado (20 minutos) entre los 12 y 15 minutos después de haber iniciado.

Los equipos 2, 3 y 4, resolvieron correctamente todos los ejercicios de la Actividad 2, sin cometer errores ni de carácter geométrico ni simbólico. Por ejemplo, en el Ejercicio 2-5 que resolvió el equipo 2, encontró el lado faltante en ambas representaciones geométricas. Al parecer lo hicieron por medio del producto de potencias de la misma base. No tuvieron la necesidad de usar la división de potencias para encontrar el lado faltante, la Imagen 4.6 es muestra de cómo el equipo 2 resolvió este ejercicio, haciendo la justificación en ambos casos, aplicando el producto de potencias de la misma base.

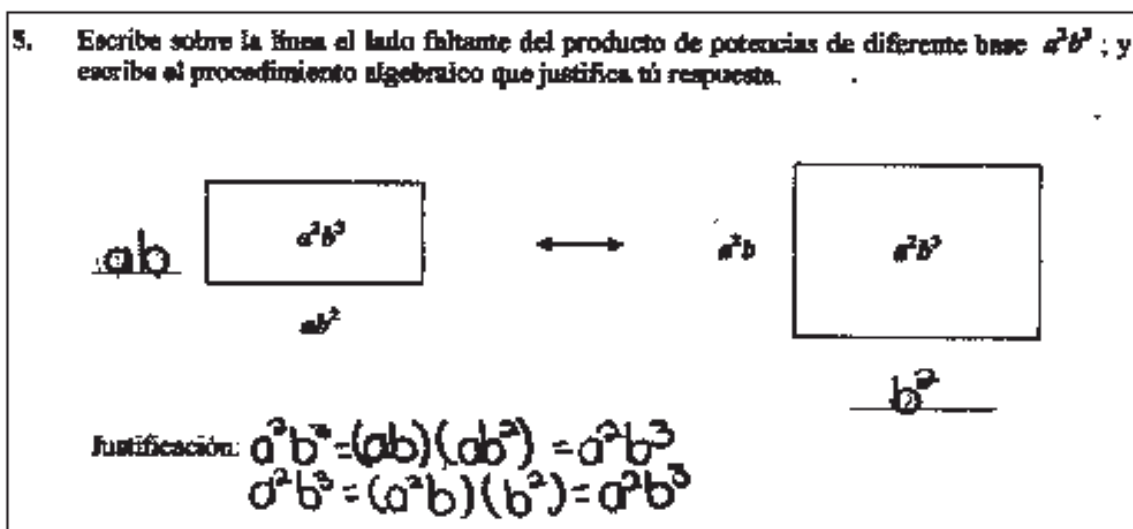
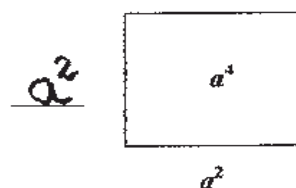


Imagen 4.6 Respuesta del Equipo 2 al Ejercicio 2-3.

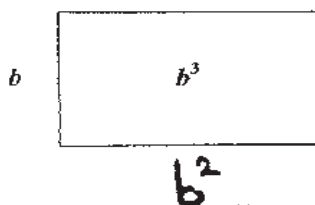
En el Equipo 1, algunos de sus integrantes cometieron errores de sintaxis algebraica, en el ejercicio 2-3, tal como escribir $a^2 + a^2 = a^4$ en vez de $a^2a^2 = a^4$, $b + b^2 = b^3$ en vez de $bb^2 = b^3$ y $y + y^4 = y^5$ por $yy^4 = y^5$ (Imagen 4.7).

3. Escribe sobre la línea el lado faltante en cada figura rectangular siguiente y justifica tú respuesta.



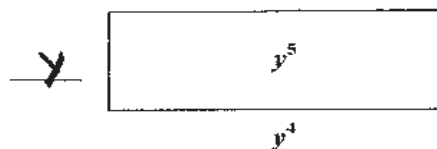
$$\text{Lado} = \frac{a^4}{a^2} = a^2$$

$$\text{Comprobación: } a^{2+2} = a^4$$



$$\text{Lado} = \frac{b^3}{b^2} = b$$

$$\text{Comprobación: } b^2 + b = b^3$$



$$\text{Lado} = \frac{y^5}{y^4} = y$$

$$\text{Comprobación: } y^4 + y = y^5$$

Imagen 4.7 Respuestas por el Equipo 1 al Ejercicio 2-3.

El Equipo 3, resolvió el Ejercicio 1–5, tal como se muestra en la Imagen 4.8, en la cual se puede ver que el producto de potencias de diferentes bases x^2y^4 , es un producto de potencias pares que representaron como un cuadrado y un rectángulo. En el video, también se puede ver que encontraron los lados por medio del producto de potencias y de la misma forma hicieron la comprobación.



Imagen 4.8 Respuestas del Equipo 3 al Ejercicio 1-5.

Por su parte el Equipo 4 resolvió correctamente el ejercicio 2-4, que consiste en representar de dos formas diferentes las potencias x^6 y y^7 . La potencia x^6 , la representan como un cuadrado y un rectángulo, por ser una potencia par y la potencia y^7 como dos rectángulos, ya que se trata de una potencia impar,

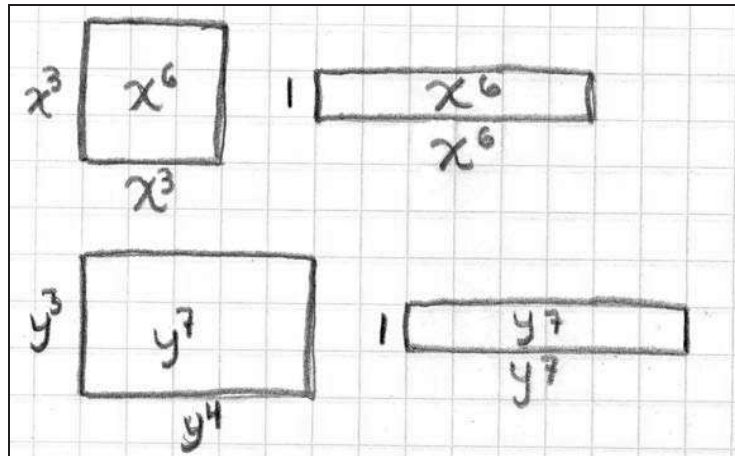


Imagen 4.9 Respuesta del Equipo 4 al Ejercicio 4-2.

como se muestra en la Imagen 4.9. Sin embargo, se puede ver que los productos o divisiones de potencias las hicieron mentalmente, aunque parece ser que lo hicieron usando el producto de potencias de la misma base, ya que solo escribieron las representaciones, ya que el producto de potencias es algo que se les facilita a los alumnos, como se puede ver en el video gravado de estas dos primeras fases.

En general se pudo observar una pronta familiarización con la idea central de ‘descomponer’ expresiones algebraicas simples (monomios) como productos de otros monomios apoyándose en la representación geométrica de figuras rectangulares, tal como se muestra en las actividades entregadas por los alumnos de los cuatro equipos.

• Socialización

En esta fase se verificó la solución de los ejercicios de la Actividad 2, indagando con los alumnos acerca de la solución, se les preguntó cómo resolvieron cada uno de los ejercicios de la actividad y ellos iban aportando las soluciones o respuestas. Se hizo más énfasis en la parte simbólica que en la geométrica con la intención de reforzar los conocimientos adquiridos de una forma geométrica. Por ejemplo, en el Ejercicio 2-1, se les preguntó que de cuántas figuras rectangulares equivalentes se puede representar el 9,

Mayra: De una sola forma, de **3 por 3**,

Fabiola: De dos formas **3 por 3** y **1 por 9** y

Juan Carlos: **3 por 3** y **1 por 9**

Alguien más dijo que también 9 por 1, luego se procedió a verificar sus respuestas concluyendo que geoméricamente se pueden construir tres figuras rectangulares diferentes, dos de las cuales sólo difieren en el orden de sus factores (geoméricamente en el acomodo ‘vertical/horizontal’ del mismo rectángulo).

En el Ejercicio 2-3, se reafirmó la forma de resolverlo correctamente, en el que los alumnos dieron las respuestas apropiadas de los lados faltantes de las figuras que representan las potencias a^4 , b^3 y y^5 , no dijeron como las obtuvieron, pero se aclaró; el investigador aplicó la división de potencias para obtener el lado faltante, para lo cual se tenía que dividir la potencia que representa el área entre la potencia del lado conocido, tal como lo muestra la imagen 4.10.

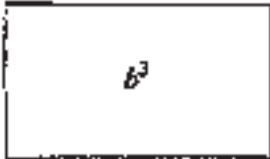
3. Escribe sobre la línea el lado faltante en cada figura rectangular siguiente y justifica tu respuesta.

$\underline{a^2}$

 a^4

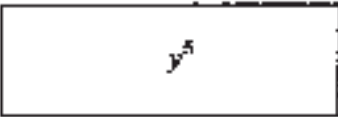
Lado = $\frac{a^4}{a^2} = a^2$

Comprobación: $a^2 \cdot a^2 = a^4$

b

 b^3

Lado = $\frac{b^3}{b} = b^2$

Comprobación: $b^2 \cdot b = b^3$

$\underline{y}$

 y^5

Lado = $\frac{y^5}{y^4} = y$

Comprobación: $y^4 \cdot y = y^5$

Imagen 4.10. Respuesta al Ejercicio 2-3.

Los demás ejercicios se resolvieron de la misma forma, con la ayuda de los alumnos. En esta fase, el investigador actuó moderando las intervenciones de los alumnos, aclarando dudas que surgieron durante la fase de trabajo en equipo, reforzando y homogenizando los conocimientos adquiridos. En esta fase se observó una participación más activa por la mayoría de los alumnos.

4.2.2 Segunda etapa

- **Exposición interactiva**

Durante la realización de esta fase se desarrolló la Actividad 3, cuyo contenido se refiere a la representación y factorización geométrica de monomios con coeficientes enteros positivos. Se introduce la suma de monomios con la intención de definir los términos semejantes y la suma de términos que no son semejantes que dan origen a los polinomios. Durante el desarrollo de esta actividad se hizo énfasis sobre algunas propiedades de los números enteros y su representación geométrica, relevantes en los procedimientos de factorización. Por ejemplo, en el ejercicio 3-1, con la participación de los alumnos se realiza la representación y factorización geométrica del monomio $2x$ en todas sus posibles figuras rectangulares equivalentes, así como la factorización simbólica y se enfatiza que esta factorización es dentro de los enteros, tal como se muestra en la Imagen 4.11.

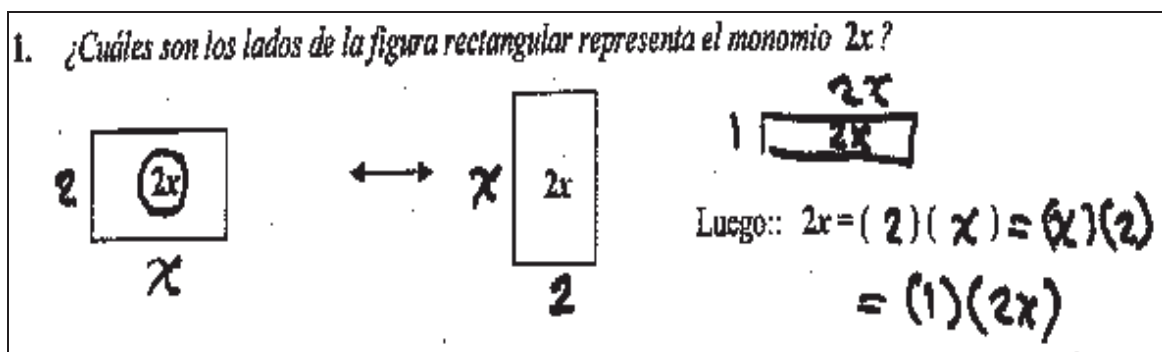


Imagen 4.11. Respuesta al Ejercicio 3-1

De manera similar, en los ejercicios 3-2 y 3-3, se elaboraron diferentes formas de representar y factorizar geoméricamente los monomios $6ab$ y $4x^2$.

En el Ejercicio 3-4 se realizó la suma de los monomios $3x$ y $2x$, representándolos como figuras rectangulares con un lado común, por la forma de nuestra escritura, de izquierda a derecha, se hizo notar que x es el lado común, a partir del cual se construye el rectángulo de altura x y base $3+2$, y concluyendo que la suma de áreas es $5x$. En la Imagen 4.12⁴ se puede observar la manera en como se resolvió este ejercicio.

Igualmente se discutió la forma de representar la suma de otros monomios.

4. Dado los monomios $3x$ y $2x$

a) ¿Cuál es el máximo común divisor de los números 3 y 2?

Respuesta: $\text{med}(3, 2) = 1$

b) ¿Cuál es el factor común de los monomios?

Respuesta: $1 \cdot x = x$

d) Escribe sobre la línea el lado, de la suma de los monomios

x

$3x$

3

+

x

$2x$

2

→

x

$3x \quad 2x$

3 2

c) ¿Cómo se le llama a la altura común?

Respuesta: "factor común"

x

$5x$

5

d) ¿Se puede cuadrar la suma de los monomios?

Respuesta: Si

e) Si la respuesta es sí, ¿cuál es la suma de los monomios $3x$ y $2x$?

x

$3x \quad 2x$

3 2

→

x

$5x$

5

Respuesta: $3x + 2x = 5x$; por lo tanto: $3x + 2x = x(3+2) = 5x$

f) ¿Es la suma de los monomios $3x$ y $2x$ un monomio o un polinomio?

Respuesta: monomio

g) ¿Qué nombre reciben los monomios que se pueden sumar?

Respuesta: "Términos semejantes"

Imagen 4.12 Respuesta al Ejercicio 3-4

⁴ Imagen tomada de los acetatos de la actividad 3.

- **Trabajo en equipo**

Durante la realización de esta fase de trabajo como en las siguientes, los alumnos continuaron trabajando con su mismo equipo, así lo decidieron ellos. En esta fase se desarrolló la Actividad 4, continuando con la factorización geométrica de monomios con coeficientes positivos y la introducción a la factorización de polinomios mediante las representaciones rectangulares. De manera general, se observa que los estudiantes no manifiestan dificultades con la representación y factorización geométrica de monomios. Sin embargo, una de las representaciones rectangulares que siempre elaboran, además de otras, es aquella que tiene un lado igual a uno y el otro igual al monomio dado.

A continuación se muestran algunos de los ejercicios que resolvieron los equipos 1 y 2. Por ejemplo, el Ejercicio 4-1 que fue realizado por el Equipo 2, se ve en la imagen 4.13. Se puede observar que el lado faltante lo obtienen aplicando la división de potencias de la misma base.

1. Escribe sobre la línea el lado faltante en cada figura rectangular siguiente y justifica tu respuesta.

$$\begin{array}{c} 6x^2 \quad \boxed{36x^4} \\ 6x^2 \end{array}$$

Justificación: $\frac{36x^4}{6x^2} = 6x^2$

$$\begin{array}{c} 3y \quad \boxed{21y^3} \\ 7y^2 \end{array}$$

Justificación: $\frac{21y^3}{3y} = 7y^2$

$$\begin{array}{c} 2y \quad \boxed{12xy^2} \\ 6xy \end{array}$$

Justificación: $\frac{12xy^2}{6xy} = 2y$

Imagen 4.13. Respuestas al Ejercicio 4-1, por el Equipo 2.

De manera general, los alumnos no muestran dificultades para representar la suma de monomios ni geométrica ni simbólicamente. En la solución del Ejercicio 4 – 4 por el equipo 4, Iskra dice que para sumar los monomios $8x^2y$ y $6x^2y$ había que representarlos geométricamente y luego juntarlos para sumarlos, mientras que Fabiola afirma que sí se podían sumar (simbólicamente), lo cual es respaldado por Miriam porque “son términos iguales” (semejantes). Enseguida, representaron cada monomio como rectángulos de altura $2xy$ y de bases $3x$ y $4x$, respectivamente, al sumarlos geométricamente obtuvieron un rectángulo de altura $2xy$ y base $3x + 4x = 7x$, luego multiplicaron la base por la altura y obteniendo la suma de los monomios igual $14x^2y$. De esta manera confirmaron que ambos procedimientos (geométrico y simbólico) eran equivalentes. El procedimiento se muestra en la Imagen 4.14.

c) Escribe sobre la línea el lado faltante de la suma de los monomios

d) ¿Cuál es el resultado de la suma de los monomios?

Respuesta: $8x^2y + 6x^2y = 14x^2y$

e) ¿La suma de los monomios $8x^2y$ y $6x^2y$ es un monomio o un polinomio?

Respuesta: polinomio

Imagen 4.14. Respuestas al Ejercicio 4-4 por el Equipo 4.

En este mismo ejercicio, en el equipo 3, mientras que Juan Carlos tomaba altura común (factor común) para hacer la representación geométrica, Sabino tomaba como altura común x^2y . Después de una breve discusión, deciden adoptar la elección de Sabino realizando la tarea como se muestra en la Imagen 4.15.

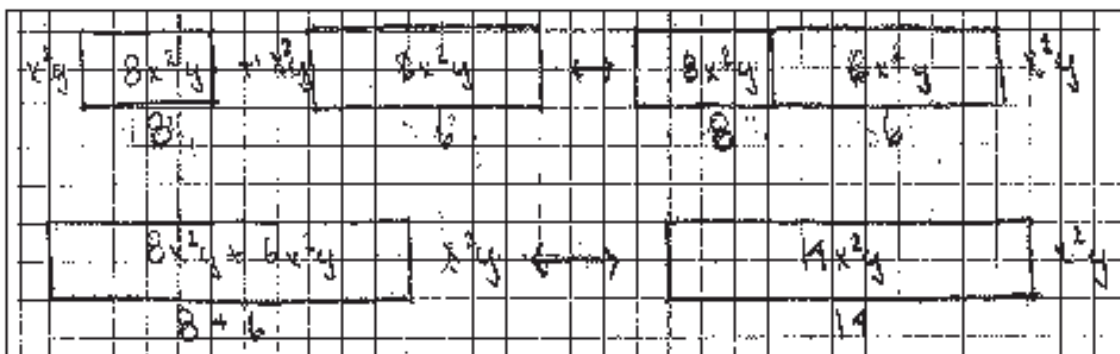


Imagen 4.15 Respuesta al Ejercicio 4-4 por el Equipo 3.

La Imagen 4.16 muestra cómo resolvieron el Ejercicio 4-5 los integrantes del Equipo 1. En este caso, los alumnos representan geoméricamente los monomios $9x$ y 4 , concluyendo que no se pueden sumar por lo que la suma es un polinomio, representado por el binomio $9x + 4$.

5. Escribe sobre la línea el lado faltante de cada figura rectangular en la suma de los monomios $9x$ y 4

$\begin{array}{|c|} \hline 9x \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 9x & 4 \\ \hline \end{array}$

a) ¿Es factorizable la suma de los monomios?
Respuesta: no

b) ¿Cuál es el resultado de la suma de los monomios?
Respuesta: $9x + 4$

c) ¿La suma de los monomios $9x$ y 4 es un monomio o un polinomio?
Respuesta: polinomio (binomio)

Imagen 4.16. Respuesta al Ejercicio 4-5 por el Equipo 1.

• Socialización

En esta sesión, con la participación de los alumnos, se procedió a verificar y homogenizar los procedimientos y respuestas de los ejercicios de la Actividad 4. Por ejemplo, en el Ejercicio 4-4, se verifica el procedimiento de sumar términos semejantes usando figuras rectangulares con altura común (factor común); en este ejercicio se eligieron los términos semejantes $8x^2y$ y $6x^2y$ de tal manera que el máximo común divisor de los coeficientes fuera diferente de 1, con la intención de ver que sumando geoméricamente estos términos, el mismo resultado se puede obtener multiplicando la parte literal por la suma de los coeficientes. En la Imagen 4.17⁵ se puede observar este procedimiento.

c) Escribe sobre la línea el lado faltante de la suma de los monomios

$$\begin{array}{c} 2x^2y \\ \hline 4 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 8x^2y \\ \hline \end{array} + \begin{array}{c} 2x^2y \\ \hline 3 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 6x^2y \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} 2x^2y \\ \hline 4 \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline 8x^2y & 6x^2y \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} \hline 3 \end{array}$$

d) ¿Cuál es el resultado de la suma de los monomios?

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 8x^2y & 6x^2y \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} 2x^2y \\ \hline 7 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 14x^2y \\ \hline \end{array}$$

Respuesta: $8x^2y + 6x^2y = 14x^2y$

e) ¿La suma de los monomios $8x^2y$ y $6x^2y$ es un monomio o un polinomio?

Respuesta: $x^2y (8+6) = 14x^2y$

4. Realiza la suma de los monomios $8x^2y$ y $6x^2y$

a) ¿Cuál es el máximo común divisor de los números 8 y 6?

Respuesta: $\text{mcd}(8, 6) = 2$

b) ¿Cuál es el factor común de los monomios?

Respuesta: $2x^2y$

Imagen 4.17. Respuesta al Ejercicio 4-4.

Durante la realización de esta fase los alumnos tuvieron una participación muy activa y menos cohibida, de tal manera que se logró concretizar el procedimiento y la respuesta de los ejercicios de la Actividad 4.

⁵ Imagen tomada de la actividad 4 desarrollada en la fase de socialización.

- **Trabajo individual extra-clase**

La Actividad 5, se asignó a los alumnos como trabajo extra-clase y se puede ver que resolvieron cada ejercicio sin que se presentaran problemas en la representación y factorización geométrica. Los dificultades que se pueden observar son en la parte simbólica (en las preguntas que se hicieron con la intención de darnos cuenta si los alumnos han comprendido algunas definiciones o conceptos), cuando se preguntó si la suma de monomios es un monomio o un polinomio, y cómo se le llama a la suma de términos semejantes. Sin embargo, no tuvieron problemas para encontrar el máximo común divisor, la altura común de las figuras rectangulares que representan los monomios o el factor común, con sumar los monomios y obtener el monomio resultante, con saber si la suma de monomios se puede o no cuadrar y con la factorización geométrica. Se puede observar también que algunos alumnos resolvieron la actividad en equipo, pero en términos generales los ejercicios de la actividad están bien resueltos. A continuación se muestra la solución de algunos de los ejercicios resueltos de manera individual. Por ejemplo, Fabiola resuelve el Ejercicio 5-1, de manera simbólica: elige el factor común de los monomios $5x^3$ y $7x^3$ como x^3 y luego procede a sumar los coeficientes, obteniendo como suma el monomio $12x^3$, tal como se muestra en la Imagen 4.18 ⁶.

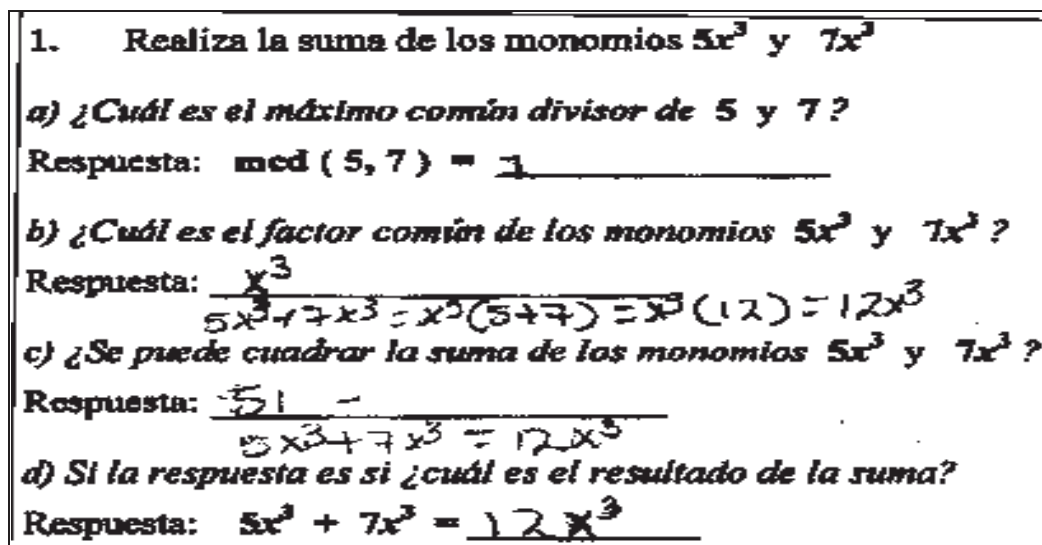


Imagen 4.18. Respuesta al Ejercicio 5-1 por Fabiola

⁶ Imagen tomada de la actividad 5 entregada por Fabiola.

Con la intención de introducir a los alumnos en la factorización de polinomios, tema que se abordó en las siguientes sesiones, se les dejó el Ejercicio 5-3, que trata sobre la suma de dos monomios que no son semejantes, pero que su suma puede ser factorizable. La forma en que fue resuelto por todos los alumnos fue similar. La Imagen 4.19 muestra cómo lo hizo Guadalupe.

3. Realiza la suma de los monomios x^2 y $6x$

a) ¿Cuál es el factor común de los monomios x^2 y $6x$?

Respuesta: X

b) Escribe sobre la línea el lado faltante en la suma de los monomios x^2 y $6x$

c) ¿Es la suma de los monomios los monomios x^2 y $6x$ un monomio o un polinomio?

Respuesta: polinomio (binomio).

d) ¿Cuál es el monomio o polinomio que se obtiene de la suma de los monomios x^2 y $6x$?

Respuesta: $x(x+6) = x^2 + 6x$

e) ¿Se puede cuadrar la suma de los monomios x^2 y $6x$ directamente por la suma de sus términos? Explica tu respuesta.

Respuesta: Si

Porque: x y 6 tienen la altura en común.

e) Si tu respuesta es afirmativa, ¿cuál es la factorización del polinomio?

Respuesta: $x(x+6) = (x+6)x$

¿Es la suma de términos semejantes un monomio o un polinomio?

Respuesta: monomio

¿Cómo se le llama a la suma de términos semejantes?

Respuesta: monomio

Imagen 4.19. Respuesta al Ejercicio 5-3 por Guadalupe.

4.3 Descripción de la de segunda sesión

En esta sesión y las siguientes los alumnos se mostraron más participativos y desinhibidos ante la videocámara.

4.3.1 Primera Etapa

- ***Exposición interactiva***

En la primera etapa de la segunda sesión, se inicia con la fase de exposición interactiva, en la que se desarrolla la Actividad 6, con el tema de factorización de polinomios por factor común. Se inicia con una breve revisión de lo visto en la sesión anterior.

Al desarrollar el Ejercicio 6–1, en el que se pide factorizar el binomio $2x^2 + 4x$, los estudiantes identifican como factores comunes, **2** y **x** (numérico y literal) y con ello el factor común **$2x$** ; utilizan la división simbólica para determinar los términos del otro factor, **x** y **2**; y ubican adecuadamente los componentes de la figura rectangular asociada; hacen la determinación del otro factor, reconociendo que **x** y **2** no se pueden sumar sino que solamente puede indicarse su suma como **$x + 2$** y, finalmente, concluyen que al poderse ‘cuadrar’ el polinomio (porque se obtiene una figura rectangular de altura **$2x$** y base **$x + 2$**) este es factorizable, siendo su factorización **$2x(x + 2)$** . En la Imagen 4.20¹ se muestra la solución de este ejercicio.

De manera similar se abordaron el resto de las situaciones contempladas en esta actividad observándose avances en la comprensión y participación de los estudiantes.

¹ Imagen tomada de la actividad 3, desarrollada en la fase de exposición interactiva.

1. Dado el binomio $2x^2 + 4x$

a) ¿Cuál es el factor común del binomio?

Respuesta: $2x$

b) ¿Cuáles son los lados de los términos del polinomio?

$$2x \begin{array}{|c|} \hline x^2 \\ \hline \end{array} + 2x \begin{array}{|c|} \hline 4x \\ \hline \end{array} \longrightarrow 2x \begin{array}{|c|c|} \hline x^2 & 4x \\ \hline \end{array}$$

$x \qquad \qquad \qquad 2$

Lados: $\frac{2x^2}{2x} = 1 \cdot x = x$; $\frac{4x}{2x} = 2 \cdot 1 = 2$

c) ¿Se puede cuadrar el binomio?

Respuesta: Si

f) Si tu respuesta es sí, factoriza el binomio.

$$2x \begin{array}{|c|} \hline x^2 + 4x \\ \hline \end{array}$$

$x + 2$

Factorización: $2x^2 + 4x = (2x)(x + 2)$
 $= (x + 2)(2x)$

Imagen 4.20 Respuesta al Ejercicio 6-1.

• Trabajo de equipo

En esta fase se desarrolló la Actividad 7, la cual incluye 4 ejercicios sobre la factorización por factor común, observándose un buen ambiente de trabajo dentro de los equipos (entusiasmo, participación y comunicación). En general, la actividad resultó fácil y la realizaron correctamente en poco tiempo (entre 5 y 10 minutos). Esto muestra una comprensión relativamente rápida de las componentes básicas del modelo geométrico utilizado su equivalencia del registro algebraico asociado. A continuación presentamos algunos de los trabajos realizados por los equipos. La Imagen 4.21² muestra el Ejercicio 7-1, resuelto por los integrantes del equipo 3.

² Imagen tomada de la actividad 7, resuelta por el equipo 3.

1. Dado el binomio $44y + 33y^2$

a) ¿Se puede factorizar por factor común el binomio?

Respuesta: si

b) Si tu respuesta es sí, ¿Cuál es el factor común del binomio?

Respuesta: $11y$

c) Escribe los lados de la figura rectangular que representa el polinomio.

$11y$

$44y$	$33y^2$
-------	---------

1 $3y$

→

$11y$

$44y + 33y^2$

$1 + 3y$

d) ¿Cuál es la factorización del binomio?

Factorización: $44y + 33y^2 = (11y)(1 + 3y)$

Imagen 4.21. Respuesta al Ejercicio 7-1 por Equipo 3.

En la Imagen 4.22 se puede observar el procedimiento de la solución del Ejercicio 7-2, resuelto por el equipo 2.

2. Sea el trinomio $10x^4 + 15x^3 + 40x^2$

a) Escribe sobre la línea los lados de la figura rectangular que representan los términos del trinomio.

$5x^2$

$10x^4$	$15x^3$	$40x^2$
---------	---------	---------

$2x^2$ $3x$ 8

Factorización: $10x^4 + 15x^3 + 40x^2 = (5x^2)(2x^2 + 3x + 8)$

Imagen 4.22. Respuesta al Ejercicio 7-2 por el Equipo 2.

Ahora describiremos, a partir de la videograbación, la forma en que las integrantes del equipo 4 trabajaron en el Ejercicio 7–3, el cual consiste en factorizar el polinomio $14x^4y^2 + 7x^3y^3 + 42x^2y^5 + 21x^5y^4$. Inicialmente,

Iskra: [Escribió $7x^2y$ para la altura común de la figura rectangular asociada],

Miriam: [Le corrige, diciéndole que debería tomarse y^2 en vez de y , es decir la altura común debe ser $7x^2y^2$],

Iskra y Fabiola: [Aceptan].

Enseguida proceden de la misma manera, participando las tres, para encontrar las bases de cada figura rectangular que representa cada término del polinomio. Este proceso lo realizan identificando las componentes numéricas, literales y las potencias de éstas que les darán como resultado, mediante el producto por el factor común, cada uno de los términos del polinomio; es decir, no utilizan la división de cada término entre el factor común. Por ejemplo, para encontrar la base del rectángulo que representa el término $14x^4y^2$,

Fabiola: [Propone como coeficiente 2 y luego le agregan x^2 , obteniendo $2x^2$, de manera similar y sin mucho problema, determinan los factores de los otros términos: xy , $6y^3$ y $3x^3y^2$].

A continuación, para completar la factorización tomando como referencia la representación geométrica,

Fabiola: [Le indica a Iskra que escriba los lados de la figura rectangular que se obtuvo],

Miriam y Fabiola: [Señalan que “ $7x^2y^2$ va en la altura y en la base, va la suma de todo esto” refiriéndose a la suma de las bases de cada figura rectangular. Al hacer esto],

Iskra: [Comete el error de sumar todos los coeficientes de las base y suma los exponentes, escribiendo en la base $12x^6y^6$, inmediatamente],

Fabiola y Miriam: [Se dan cuenta del error “¿porque los sumas, si va todo esto?” refiriéndose a los términos las bases],

Iskra: [Reconoce el error y se apresura a rectificar] a no, ya me acordé, ya me acordé, ¡espérate!, ya sé, ya sé” [y escribe $2x^2 + 1xy + 6y^3 + 3x^3y^2$. Finalmente escriben la factorización (base por altura) de la expresión].

$$14x^4y^2 + 7x^3y^3 + 42x^2y^5 + 21x^5y^4 = 7x^2y^2(2x^2 + 1xy + 6y^3 + 3x^3y^2)$$

La Imagen 4.23³ muestra la hoja de anotaciones del equipo 4.

3. Escribe los lados de la figura rectangular rectilínea que representa el polinomio $14x^4y^2 + 7x^3y^3 + 42x^2y^5 + 21x^5y^4$

$7x^2y^2$	$14x^4y^2$	$7x^3y^3$	$42x^2y^5$	$21x^5y^4$
$2x^2$	xy	$6y^3$	$3x^3y^2$	

Factoriza el polinomio.

$14x^4y^2 + 7x^3y^3 + 42x^2y^5 + 21x^5y^4$

$2x^2 + xy + 6y^3 + 3x^3y^2$

$$14x^4y^2 + 7x^3y^3 + 42x^2y^5 + 21x^5y^4 = (7x^2y^2)(2x^2 + xy + 6y^3 + 3x^3y^2)$$

Imagen 4.23. Respuesta al Ejercicio 7-3 por Equipo 4.

• Socialización

Durante esta fase los alumnos se mostraron con más confianza, optimistas, participando la mayoría en la discusión de la solución de los diferentes ejercicios de la Actividad 7. Dado que las soluciones fueron muy similares en los cuatro equipos, la duración de esta fase fue de alrededor de 6 minutos. En esta actividad, de los cuatro polinomios que se plantearon, tres eran factorizables por *factor común* pero el cuarto no $(3x^3 + 15x^2 + x + 5)$ lo cual fue

³ Imagen tomada de la actividad 7, entregada por el equipo 4.

identificado en todos los equipos “porque el 5 no tiene factor común”. Este polinomio fue incluido, precisamente, para verificar si se observaba alguna confusión y si se les podría ocurrir algún procedimiento para realizar la factorización, pero esto tampoco ocurrió.

4.3.2 Segunda Etapa

- ***Exposición interactiva***

En esta fase se desarrolló la Actividad 8 y ante la confianza de los alumnos, se hizo con bastante fluidez. La factorización por agrupación les resultó muy familiar, dado que comprendieron la factorización por factor común; al inicio se hizo hincapié que el tipo de polinomios que podrían factorizarse por este procedimiento, deberían tener un número par de términos (4, 6, 8, etc.). Esta actividad consiste en factorizar sólo polinomios de cuatro términos; para lo cual, primero debe hacerse una doble factorización por factor común, agrupando los términos del polinomio en pares; de tal manera que las figuras rectangulares que representan los términos agrupados tengan un lado común.

Por nuestra forma de escribir de izquierda a derecha y que las figuras rectangulares se dibujaran horizontalmente, se recomendó que el lado común fuera la altura, obteniéndose dos figuras rectangulares que deberían de tener la base común, si esto no ocurre, tienen que reagrupar los términos hasta lograr este propósito; y volver aplicar la factorización por factor común, hasta formar una tercera figura rectangular, logrando cuadrar el polinomio y obtener su factorización.

Al desarrollar el Ejercicio 8–2, se pregunta a los alumnos ¿qué término se puede agrupar con $24x^3$? Alguien contesta $54x^2y$ y alguien más dice $8x^2$, y aunque también es correcta la segunda elección se continúa la factorización con la primera elección. Se pregunta ¿cuál es el factor común de 24 y 54? Contestan 6, y ¿cuál es el factor común de las partes literales x^3 y x^2y ? Contestan x^2 , luego se comenta que para obtener la base del primer rectángulo divide $24x^3$ entre $6x^2$, obteniendo $4x$, y de la misma manera se obtiene la base del segundo, dividiendo $54x^2y$ entre $6x^2$, dando como resultado $9y$. Estos resultados se obtuvieron con la ayuda de los alumnos.

Luego se agrupan los otros dos términos restantes y se pregunta ¿cuál es el factor común de $8x^2$ y $18xy$? Contestan el **2** entre los coeficientes y entre las literales la x , obteniendo $2x$ como factor común; de nuevo se pregunta ¿cuál es la base de los rectángulos?, y contestan $4x$ y $9y$, se pregunta si las figuras rectangulares formadas tienen una base en común? Y contestan que sí, diciendo que es $4x + 9y$, entonces se hace la observación de que la primera tiene la altura $6x^2$ y base $4x + 9y$ y la segunda tiene altura $2x$ y base $4x + 9y$.

A continuación se procede a realizar la factorización simbólica; se pregunta ¿Cuáles términos se agruparon? Y contestan $24x^3$ y $54x^2y$, y luego $8x^2$ y $18xy$, se pregunta, ¿cuál es el factor común de los primeros dos términos? Y contestan $6x^2$. Se pregunta entonces qué nos queda, contestan $4x + 9y$. Luego se pregunta ¿cuál es el factor de la otra agrupación? Y contestan $2x$, entonces se pregunta ¿cuál es el otro factor que nos queda? Contestan $4x + 9y$.

Se continúa con la factorización geométrica, y se pregunta ¿se puede construir una figura rectangular con los dos rectángulos obtenidos que tienen una base común? Y contestan, sí, colocando uno encima del otro. Entonces se pregunta ¿cuál es la altura de la figura rectangular que se forma? Y contestan $6x^2 + 2x$, y la base pues ya la tenemos que es $4x + 9y$. Luego se pregunta ¿cómo queda la factorización y los alumnos contestan $6x^2 + 2x$ por $4x + 9y$, a continuación se escribe el polinomio factorizado, $24x^3 + 8x^2 + 54x^2y + 18xy = (6x^2 + 2x)(4x + 9y)$.

Luego se pregunta ¿ahí termina la factorización, ya no se puede factorizar más el polinomio? No contestan y se les ayuda un poco, diciéndoles vean el binomio $6x^2 + 2x$, ¿cuál es el factor común de este polinomio? Alguien contesta x y alguien más dice $2x$, y se confirma que el factor común es $2x$. Se procede entonces a factorizar el polinomio, dividiendo $6x^2$ entre $2x$, obteniendo $3x$ y dividiendo $2x$ entre $2x$, obteniendo 1 , luego se dice que la factorización de $6x^2 + 2x$ es $2x(3x + 1)$ y se pregunta ¿es factorizable el binomio $4x + 9y$? Y contestan, no. Luego se concluye el ejercicio escribiendo la factorización completa del polinomio, $24x^3 + 8x^2 + 54x^2y + 18xy$ como $2x(3x + 1)(4x + 9y)$. En la Imagen 4.24 se muestra la factorización geométrica y simbólica del polinomio $24x^3 + 8x^2 + 54x^2y + 18xy$.

2. Usando figuras rectangulares representa el polinomio $24x^3 + 8x^2 + 54x^2y + 18xy$

$$6x^2 \begin{array}{|c|c|} \hline 24x^3 & 54x^2y \\ \hline 4x & 9y \\ \hline \end{array} + 2x \begin{array}{|c|c|} \hline 8x^2 & 18xy \\ \hline 4x & 9y \\ \hline \end{array}$$

$$6x^2 \begin{array}{|c|} \hline 24x^3 + 54x^2y \\ \hline 4x + 9y \\ \hline \end{array} + 2x \begin{array}{|c|} \hline 8x^2 + 18xy \\ \hline 4x + 9y \\ \hline \end{array}$$

Simbólicamente:

$$24x^3 + 8x^2 + 54x^2y + 18xy = (24x^3 + 54x^2y) + (8x^2 + 18xy)$$

$$24x^3 + 8x^2 + 54x^2y + 18xy = (6x^2)(4x + 9y) + (2x)(4x + 9y)$$

Cuadrando el polinomio:

$$\begin{array}{c} 4x + 9y \\ \begin{array}{|c|} \hline 6x^2 \begin{array}{|c|} \hline 24x^3 + 54x^2y \\ \hline 4x + 9y \\ \hline \end{array} \\ \hline 2x \begin{array}{|c|} \hline 8x^2 + 18xy \\ \hline 4x + 9y \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|} \hline 6x^2 + 2x \begin{array}{|c|} \hline 24x^3 + 8x^2 + 54x^2y + 18xy \\ \hline 4x + 9y \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} 24x^3 + 8x^2 + 54x^2y + 18xy &= (6x^2 + 2x)(4x + 9y) \\ &= 2x(3x + 1)(4x + 9y) \end{aligned}$$

Imagen 4.24. Respuesta al Ejercicio 8 - 2.

• Trabajo de equipo

En esta fase se desarrolló la Actividad 9, la cual tuvo una duración de 15 minutos aproximadamente. Se puede observar en las actividades producidas que a los cuatro equipos se les facilita la factorización geométrica, por agrupación; los cuatro equipos factorizaron geométricamente los tres ejercicios de la actividad correctamente. La Imagen 4.25 muestra cómo el equipo 1 factorizó geométricamente el Ejercicio 9-1.

1. Considera el polinomio $ax^2 + y^2 + ay + x^2y$

a) ¿Se puede factorizar por factor común el polinomio?
 Respuesta: NO

b) Representa el polinomio usando figuras rectangulares

c) Escribe simbólicamente el procedimiento:

$$ax^2 + y^2 + ay + x^2y = (y^2 + x^2y) + (ay^2 + ay)$$

$$ax^2 + y^2 + ay + x^2y = (y)(y + x^2) + (a)(y^2 + y)$$

d) ¿Se puede cuadrar el polinomio? Si tu respuesta es si, escribe la factorización.
 Respuesta: SI

La factorización es: $ax^2 + y^2 + ay + x^2y = (a + y)(x^2 + y)$

Imagen 4.25. Respuesta al Ejercicio 9 – 1 por el Equipo 1.

En cambio el Equipo 2 sólo factorizó geométricamente los tres ejercicios, la Imagen 4.26 muestra la factorización del Ejercicio 9-3.

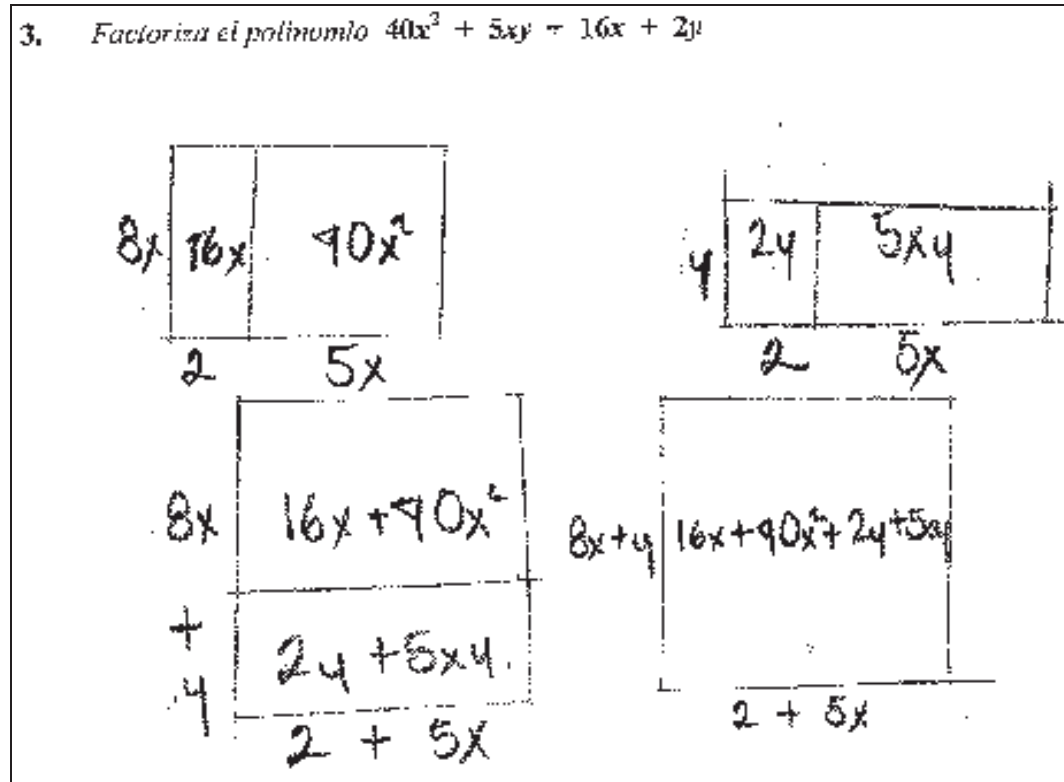


Imagen 4.26. Respuesta al Ejercicio 9 – 3 por el Equipo 2.

El equipo 3 factorizó geométricamente y simbólicamente el ejercicio 9 – 2, al intentar la factorización geométrica del polinomio $3x^3 + 5x^2 + 6x + 10$, durante la filmación comentaban:

Sabino: El $3x^3$ y $6x$, tienen el 3 de factor común,

Juan Carlos: Si es uno, y

Raúl: ¡Sí!

Sabino: Si es uno que,

Juan Carlos: No, ya me acorde cómo va la cosa, algo así es de cuadritos [dibuja dos rectángulos de la misma altura y escribe $3x^3$ dentro del primer rectángulo y $6x$ dentro del segundo], entonces aquí es 2 [se refiere a la altura del primer rectángulo], a no es 3,

Sabino: ¿Por qué 3? Así, sí, es 3, échale

Juan Carlos y Raúl: Sí,

Sabino: Así, sí, es **3**, échale, es $3x^2$,

Raúl: No, es $3x$,

Sabino: Así, $3x$, y ahí $2x$ [se refiere a la base],

Juan Carlos: [Escribe en la base $1x^2$] y

Sabino: Así,

Juan Carlos: [En la base del otro rectángulo de área igual a $6x$, escribe **2**],

Sabino: Si, sí está bien, vamos, vamos,

Juan Carlos: La otra es [se refiere a la agrupación de los otros términos y escribe otros dos rectángulos de la misma altura, pero más grandes, en el primero escribe dentro $5x^2$, se detiene] y

Sabino: No, síguele,

Juan Carlos: [Escribe **10** dentro del segundo rectángulo],

Sabino: Ahí es **2** [se refiere a la altura común de los dos rectángulos],

Raúl: **5** [Aclara que la altura común debe ser **5**],

Juan Carlos: Pónganse de acuerdo,

Raúl y Sabino: **5**,

Juan Carlos: y este no tiene x , así es que no más va el **5**, no, entonces aquí es [se refiere a la base del primer rectángulo],

Raúl: Dice, x^2 ,

Juan Carlos: Y aquí **2** [se refiere a la base del rectángulo de área **10**], qué más tenemos que hacer, unirlos, ¿no?,

Sabino: Sí, que te dije, te dije,

Juan Carlos: Aquí le ponemos una flechita [la dibuja para indicar una consecuencia inmediata de la anterior y dibuja otra figura rectangular en donde une los rectángulos que formó anteriormente, dado que tienen una base común, y escribe los términos $3x^3$, $5x^2$, $6x$ y **10**, dentro de su respectivo rectángulo, así como los lados respectivos, en la altura escribe $3x$ y **5**, y en la base x^2 y **2**], luego lo juntamos ya todo ¿no?, así, como en el otro lado [se refiere al primer ejercicio que se encuentra a la vuelta de la hoja],

Sabino: Así, el cuadrado ya sin líneas,

Juan Carlos: [Dibuja un rectángulo y dentro escribe el polinomio $3x^3 + 5x^2 + 6x + 10$, y en la altura izquierda $3x + 5$ y en la base superior $x^2 + 2$], ahí está, entonces el que sigue,

Investigador: Te falta escribir la factorización, Juan Carlos mal interpreta el comentario del investigador, se confunde y con la ayuda de Sabino y Raúl, empieza a realizar la factorización simbólica, escribe el polinomio $3x^3 + 5x^2 + 6x + 10$, y establece una igualdad agrupando los términos $3x^3$ y $6x$, y $5x^2$ y 10 , pero comete un error de sintaxis y escribe $(3x^3 + 6x)(5x^2 + 10)$, ignorando el signo + entre ambas agrupaciones],

Juan Carlos: ¿Sí voy bien? [nadie de sus compañeros responde, luego vuelve a

Al parecer el procedimiento de la factorización simbólica lo derivan de la factorización geométrica, sin hacer algún razonamiento, simbólicamente. La imagen 4.27 muestra estas evidencias.

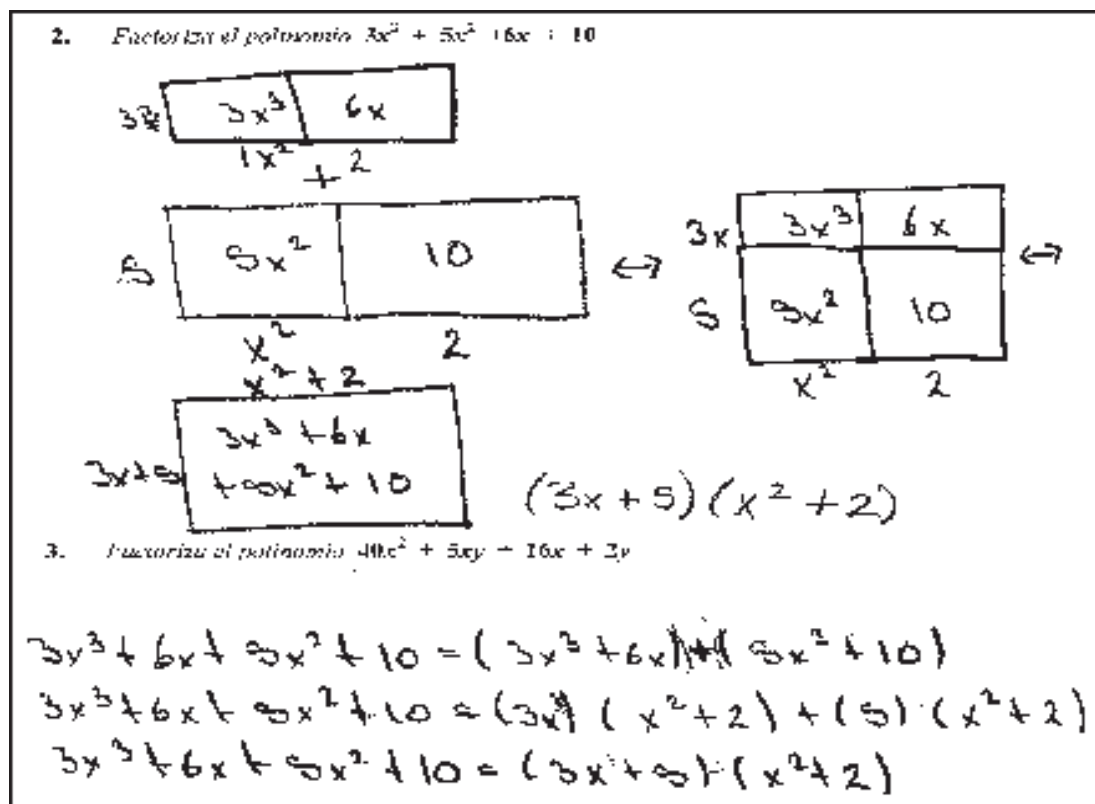


Imagen 4.27. Respuesta al Ejercicio 9 – 2 por el Equipo 3.

Una vez corregidos los errores que cometió el equipo 3, factorizaron correctamente el Ejercicio 9 – 3, tanto geoméricamente como simbólicamente. La imagen 4.28 muestra esta evidencia.

Handwritten mathematical work showing the factorization of the expression $40x^2 + 5xy + 16x + 2y$.

The expression is written at the top: $40x^2 + 5xy + 16x + 2y =$

Below the expression, two area models are shown, separated by a plus sign. The first model is a rectangle with dimensions $8x$ and $5x + 2$. It is divided into four smaller rectangles with areas $40x^2$, $16x$, $5xy$, and $2y$. The second model is a rectangle with dimensions y and $5x + 2$, divided into two smaller rectangles with areas $5xy$ and $2y$.

Below these, a larger area model is shown, which is the sum of the two models above. It is a rectangle with dimensions $8x + y$ and $5x + 2$. It is divided into four smaller rectangles with areas $40x^2$, $16x$, $5xy$, and $2y$. An arrow points from the sum of the two models to this larger model.

Below the area models, the factorization is written:

$$(8x + y)(5x + 2)$$

$$40x^2 + 5xy + 16x + 2y = (40x^2 + 16x) + (5xy + 2y)$$

$$40x^2 + 5xy + 16x + 2y = (8x)(5x + 2) + (y)(5x + 2)$$

$$40x^2 + 5xy + 16x + 2y = (8x + y)(5x + 2)$$

Imagen 4.28. Respuesta al Ejercicio 9 – 3 por el Equipo 3.

El Equipo 4 factorizó geoméricamente los tres ejercicios. La Imagen 4.29 muestra la factorización geométrica del Ejercicio 9–2.

$3x^3 + 5x^2 + 6x + 10$
 $x^2 \begin{array}{|c|c|} \hline 3x^3 & 5x^2 \\ \hline \end{array}$
 $3x \quad 5$
 $3x + 5$
 $x^2 \begin{array}{|c|} \hline 3x^3 + 5x^2 \\ \hline \end{array}$
 $2 \begin{array}{|c|} \hline 6x + 10 \\ \hline \end{array}$
 $x^2 + 2$
 $\begin{array}{|c|} \hline 3x^3 + 5x^2 \\ \hline \end{array}$
 $\begin{array}{|c|} \hline 6x + 10 \\ \hline \end{array}$
 $3x^3 + 5x^2 + 6x + 10 = (3x + 5)(x^2 + 2)$

Imagen 4.29. Respuesta al Ejercicio 9 – 2 por el Equipo 4.

En cambio el Equipo 4 además de factorizar geométricamente el ejercicio 9–3, lo intentaron factorizar simbólicamente, cometiendo errores de sintaxis algebraica, al agrupar los términos del polinomio $40x^2 + 5xy + 16x + 2y$, escribiendo $(40x^2 + 16x)(5xy + 2y)$ en vez de escribir $(40x^2 + 16x) + (5xy + 2y)$, al parecer pasan por desapercibido el signo +, escribiendo un producto en vez de una suma, el mismo error cometieron al factorizar cada agrupación, escribiendo $(8x)(5x + 2)(y)(5x + 2)$, en vez de $(8x)(5x + 2) + (y)(5x + 2)$, no se percataron del signo +, escribiendo de nuevo un producto. Al parecer, si solo hicieran la factorización simbólica, pareciera que no han entendido la factorización, sin embargo este tipo de error no lo cometen en la factorización geométrica y se puede ver que entienden el procedimiento de la factorización, tal vez su problema está en la notación simbólica. La imagen 4.30 muestra la factorización geométrica correcta y los errores cometidos en la factorización simbólica.

$$3x^3 + 5x^2 + 6x + 10$$

x^2	$3x^3$	$5x^2$
	$3x$	5

x^2	$3x^3 + 5x^2$	
2	$6x + 10$	
	$3x + 5$	

2	$6x$	10
	$3x$	5

$x^2 + 2$

$3x^3 + 5x^2$
$6x + 10$

$$3x^3 + 5x^2 + 6x + 10 = (3x + 5)(x^2 + 2)$$

Imagen 4.30. Respuesta al Ejercicio 9 – 3 por el Equipo 3.

Es importante mencionar, además que el equipo 1 factorizó solamente el Ejercicio 9–1 geométricamente y los ejercicios 9–2 y 9–3 los factorizaron simbólicamente, correctamente, pero no incluyeron el procedimiento, solo la respuesta, tal como se muestra en la Imagen 4.31.

2. Factoriza el polinomio $3x^3 + 5x^2 + 6x + 10$

$$3x^3 + 5x^2 + 6x + 10 = (3x + 5)(x^2 + 2)$$

$$= (x^2 + 2)(3x + 5)$$

3. Factoriza el polinomio $40x^2 + 5xy + 16x + 2y$

$$40x^2 + 5xy + 16x + 2y = (40x^2 + 16x) + (5xy + 2y)$$

$$= 8x(5x + 2) + y(5x + 2)$$

$$= (5x + 2)(8x + y)$$

Imagen 4.31. Respuesta a los ejercicios 9 – 2 y 9 – 3 por el Equipo 1.

• Socialización

En esta fase los alumnos mostraron una participación más activa y con más confianza; los alumnos responden correctamente a las preguntas hechas durante el desarrollo de esta actividad, se verifica la factorización de cada uno de los ejercicios, se hacen las aclaraciones de los errores que se cometieron. En particular en el Ejercicio 9-2, se aclaran los errores que se cometieron. La imagen 4.32 muestra cómo se llevó a cabo la factorización.

2. Factoriza el polinomio $3x^3 + 5x^2 + 6x + 10$

$$x^2 \overline{3x^3 + 5x^2} + 2 \overline{6x + 10}$$

$3x + 5$ $3x + 5$

$$\rightarrow x^2 \overline{3x^3 + 5x^2} + 2 \overline{6x + 10}$$

$3x + 5$ $3x + 5$

$$\rightarrow x^2 + 2 \overline{3x^3 + 5x^2 + 6x + 10}$$

$3x + 5$

3. Factoriza el polinomio $40x^2 + 5xy + 16x + 2y$

$$3x^3 + 5x^2 + 6x + 10 = (3x + 5)(x^2 + 2)$$

$$= (x^2 + 2)(3x + 5)$$

Simbólicamente:

$$3x^3 + 5x^2 + 6x + 10 = (3x^3 + 5x^2) + (6x + 10)$$

$$= x^2(3x + 5) + 2(3x + 5)$$

$$= (3x + 5)(x^2 + 2)$$

Imagen 4.32. Respuesta al Ejercicio 9 – 2.

Para mostrar el procedimiento de la factorización simbólica (sin recurrir a las figuras rectangulares), el investigador factorizó el Ejercicio 9-3, con el fin de aclarar la factorización simbólica de la geométrica, la imagen 4.33 muestra como se llevó a cabo la factorización.

$$\begin{aligned}
 3. \quad & 40x^2 + 5xy + 16x + 2y \\
 &= (40x^2 + 16x) + (5xy + 2y) \\
 &= 8x(5x + 2) + y(5x + 2) \\
 &= (5x + 2)(8x + y)
 \end{aligned}$$

Imagen 4.33. Respuesta al Ejercicio 9-3.

- **Trabajo extra-clase individual**

Esta actividad constó de tres ejercicios, el primer ejercicio es por factor común, todos los alumnos lo factorizaron simbólicamente, aunque algunos de ellos cometieron ciertos errores de carácter algebraico al tratar de factorizar cada término del polinomio para encontrar el factor común, al escribir el producto de los factores lo escribieron como la suma. En la imagen 4.34, se muestra el Ejercicio 10-1, factorizado por Guadalupe, en las actividades entregadas por sus compañeras se puede observar que también tienen el mismo error, lo que indica que posiblemente lo resolvieron en equipo.

$$\begin{aligned}
 &\text{Factoriza el trinomio } 10x^3 + 50x^2 + 40x \\
 &10x^3 = (10x + x^2) \\
 &50x^2 = (10x \cdot 5x) \\
 &40x = (10x + 4) \\
 &10x^3 + 50x^2 + 40x = 10x(x^2 + 5x + 4)
 \end{aligned}$$

Imagen 4.34. Respuesta al Ejercicio 10-1 por Guadalupe.

El segundo ejercicio es una factorización por agrupación y todos lo factorizaron simbólicamente, pero sólo cuatro de ellos también lo factorizaron geométricamente. La imagen 4.36 muestra como Sabino factorizó el Ejercicio 10-2, pero comete el error de no poner el signo + entre las dos agrupaciones, o tal vez lo pasa desapercibido y parece que se confunde al final al escribir la factorización.

② $9x^3 + 8x^2 + 6xy^2 + 12xy$

$\begin{array}{|c|c|} \hline 9y^3 & 6xy^2 \\ \hline 3y & 2x \\ \hline \end{array} + 4x \begin{array}{|c|c|} \hline 8x^2 & 12xy \\ \hline 2x & 3y \\ \hline \end{array} \leftrightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 8x^2 & 12xy \\ \hline 9y^3 & 6xy^2 \\ \hline 3y & 2x \\ \hline \end{array}$

$\begin{array}{|c|} \hline 9x^3 + 8x^2 + 6xy^2 + 12xy \\ \hline (3y + 2x) \\ \hline \end{array} \quad 4x + 3y^2$

$9x^3 + 8x^2 + 6xy^2 + 12xy = (4x + 3y^2)(3y + 2x)$
 $9x^3 + 8x^2 + 6xy^2 + 12xy = (4x)(3y + 2x) + (3y^2)(3y + 2x)$
 $(9y^3 + 6xy^2) + (8x^2 + 12xy)$

Imagen 4.36. Respuesta al Ejercicio 10-2 por Sabino.

El tercer ejercicio es el trinomio $x^2 + 5x + 4$, el cual 6 alumnos que están integrados en los equipos 2 y 4 lo factorizaron simbólicamente por agrupación, descomponiendo el término $5x$ como $4x + x$, logrando así factorizar el polinomio. Cabe señalar que cinco alumnos solo hicieron la representación geométrica y Juan Carlos no lo intentó. La imagen 4.35 muestra cómo la alumna Estrella factorizó simbólicamente el trinomio del Ejercicio 10-3.

3. Factoriza el trinomio $x^2 + 5x + 4$

$x \begin{array}{|c|c|c|} \hline x^2 & 5x & 4 \\ \hline x & 5 & 4 \\ \hline \end{array} \rightarrow x \begin{array}{|c|c|c|} \hline x^2 & 4x & x \\ \hline x & 4 & 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & 4 \\ \hline & & 1 \\ \hline \end{array}$

$x^2 + 5x + 4 = (x+1)(x+4) =$
 $x^2 + 5x + 4 = x^2 + 4x + x + 4$
 $= (x^2 + 4x) + (x + 4)$
 $= x(x+4) + 1(x+4)$
 $= (x+4)(x+1)$

$\begin{array}{|c|c|c|} \hline x^2 & 4x & x \\ \hline 1 & 4 & 1 \\ \hline \end{array}$

Imagen 4.35. Respuesta al Ejercicio 10-3 por Sabino.

Es importante señalar que después que se terminó la sesión, una vez que se les entregó la actividad, algunos alumnos entre ellos Estrella, Fabiola, Guadalupe y José Luis, preguntaron que cómo se factorizaba el trinomio $x^2 + 5x + 4$, ya que no se podía factorizar por factor común, y se les comentó que se podía factorizar por agrupación, que aplicaran la descomposición de áreas y el método de cortar y pegar; y se les explicó con un ejemplo, de esta forma lograron factorizar el trinomio, tanto geométricamente, como simbólicamente.

4.4 Descripción de la tercera sesión

En esta sesión se desarrollan las actividades 11 a la 14, cuando los alumnos ya se han familiarizado con la forma de trabajo y en consecuencia, tienen mayor participación y confianza.

4.4.1 Primera Etapa

- **Exposición interactiva**

En esta fase se desarrolla la Actividad 11 que consiste en factorizar trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$ con coeficientes enteros positivos y factorizables en los enteros. Se inicia con la explicación de la representación geométrica del ejercicio 11 – 1, el trinomio $x^2 + 5x + 4$, una vez representado geométricamente el polinomio se hace la observación de que esta representación es una de las posibles equivalentes, se observa que los alumnos no tienen problema con la de representación. La imagen 4.36 muestra la respuesta de los alumnos.

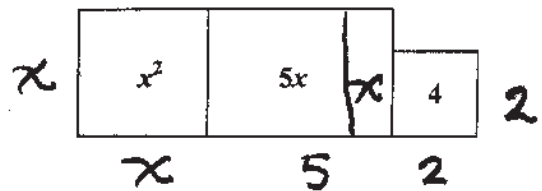


Imagen 4.36. Respuesta al Ejercicio 11

Con la participación de los alumnos se inicia la factorización del trinomio $x^2 + 5x + 4$,

Profesor: ¿admite un factor común el trinomio?

Alumnos: No

Profesor: ¿Cuál es el término que no tiene factor común?

Alumnos: El 4

Profesor: ¿Cómo se le haría para cuadrar el polinomio?

Alumnos: [la respuesta es casi nula]

Profesor: [Explica como cuadrar o factorizar geométricamente el trinomio]

Sabino: se le pone $5x$ abajo

Profesor: entonces ¿dónde se coloca el cuadrado de área 4 ?

Sabino: al lado de x^2

Profesor: ¿entonces podríamos cuadrar el polinomio?

Alumnos: [No contestan]

El profesor les explica que ese trinomio no se puede cuadrar siguiendo ese camino, que intenten otra forma de descomponer el rectángulo que representa a $5x$. José Luis dice se puede quitar una x del rectángulo $5x$ y se pone abajo del cuadrado x^2 y se deja el rectángulo $4x$ la derecha de x^2 , y se remplaza el cuadrado de área 4 por el rectángulo de lados 1 y 4 , cuadrando de esta manera el trinomio.

El profesor hace la observación de que, para cuadrar un trinomio de segundo grado, se debe construir una figura rectangular, de tal manera que se coloquen sobre la diagonal de la nueva figura, las figuras rectangular que no tienen, ni base ni altura común, como es el caso del cuadrado x^2 y del rectángulo de área 4 , luego descompone el rectángulo que comparte un lado con cada una de las otras dos figuras rectangulares, en dos rectángulos, tales que cada uno de ellos tenga un lado común con las figuras rectangulares que no tiene lados en común.

A continuación se indica que este procedimiento equivale, simbólicamente a descomponer el 4 en dos enteros que sumados den 5 . Este procedimiento se muestra a continuación en la Imagen 4.37.

Handwritten student work for factoring the polynomial $x^2 + 5x + 4$.

Initial attempts at area models (rectangles):

- Attempt 1: A rectangle with dimensions x and $x+1$. The area is $x^2 + x$. The remaining area is $4x + 4$.
- Attempt 2: A rectangle with dimensions x and $x+4$. The area is $x^2 + 4x$. The remaining area is $x + 4$.

Final successful area model:

A rectangle with dimensions $x+1$ and $x+4$. The area is $x^2 + 5x + 4$.

Symbolic work:

Simbólicamente:
 $4 = 4 \cdot 1$
 $5x = 4x + x$

b) ¿Se puede cuadrar el polinomio? Sí, la respuesta es sí, factorízalo.

Respuesta: Sí $x^2 + 5x + 4 = (x+1)(x+4)$

Observación: $4 = 4 \cdot 1 = 1 \cdot 4$ de tal manera que: $5 = 4 + 1$

Final factorization: $x^2 + 5x + 4 = (x+1)(x+4)$

Imagen 4.37. Respuesta al Ejercicio 11-11.

Interactuando igualmente con los alumnos se factorizan los ejercicios 11-2, 11-3 y 11-4.

• Trabajo de equipo

Esta fase tuvo una duración de 20 minutos en la cual se aplicó la Actividad 12, que consiste de tres ejercicios; los cuatro equipos factorizaron el 12-1. La Imagen 4.38 muestra el trabajo del Equipo 1.

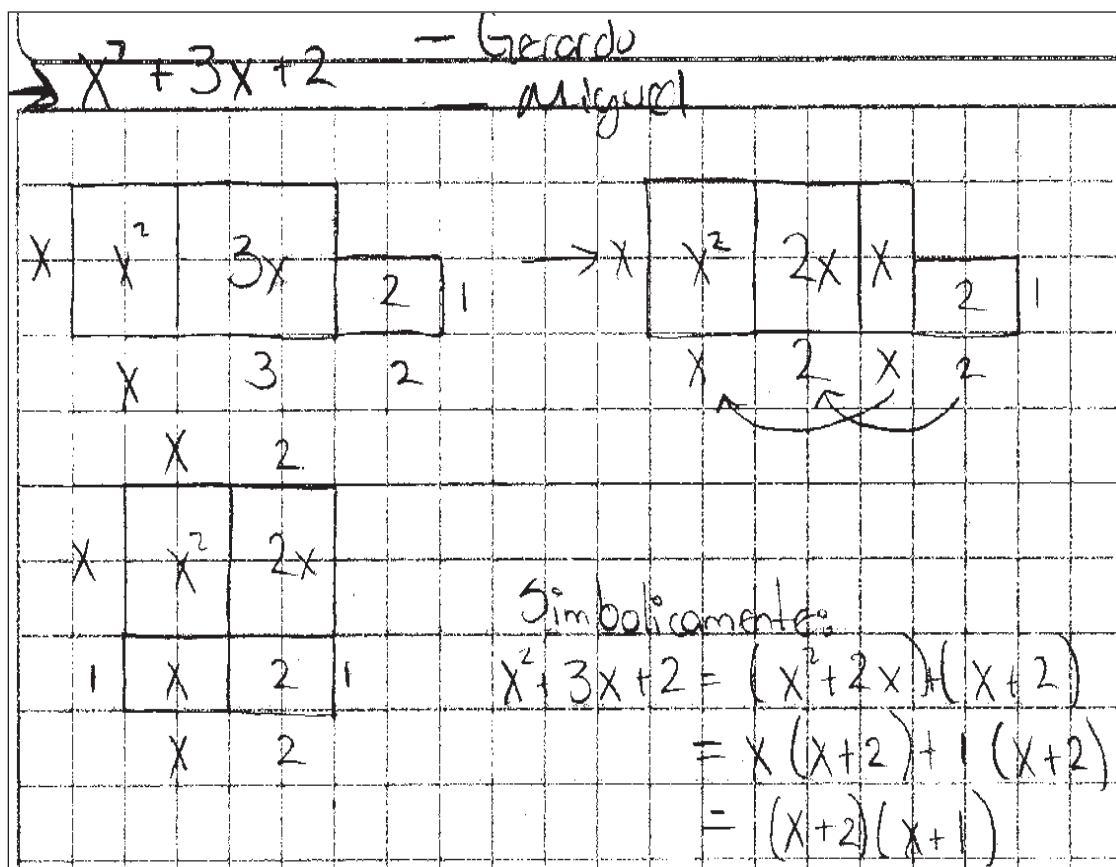


Imagen 4.38. Respuesta al Ejercicio 12–1 por el Equipo 1.

El Ejercicio 12–2 sólo lo factorizaron los equipos 2 y 3. El Equipo 2 al intentar factorizar el trinomio $4x^2 + 8x + 3$, dividieron el rectángulo área $8x$ en cuatro rectángulos de área $2x$, de base 1 y altura $2x$, con la intención de ‘cortarlos’ y ‘pegarlos’ para cuadrar el trinomio, pero al tratar de hacerlo confundían el área de $2x$ con la de x y las bases de 1 con 2, tuvieron dificultades, pero corrigieron sus errores y lograron cuadrar el trinomio, escribiendo la factorización.

En video se puede ver tanto el razonamiento erróneo como la forma en que corrigieron para lograr la factorización geométrica. A continuación se describe el razonamiento desde que iniciaron l hasta que factorizaron el trinomio;

Guadalupe: Aquí son 4 y aquí van $2x$ y $2x$ [se refiere a la representación geométrica del cuadrado de área $4x^2$ y lados $2x$]; estas dos valen $2x$ cada una [se refiere a cada

uno de los rectángulos en que dividieron el rectángulo $8x$] entonces ¿cuántas pondríamos aquí y cuántas pondríamos acá? para poder poner este 3,

Estrella: Tenemos que poner el 3 aquí [se refiere a cortar el rectángulo de área 3 y pegarlo debajo de los rectángulos de área $2x$].

Guadalupe: [Pega tres rectángulos al lado derecho del cuadrado $4x^2$ y uno abajo],

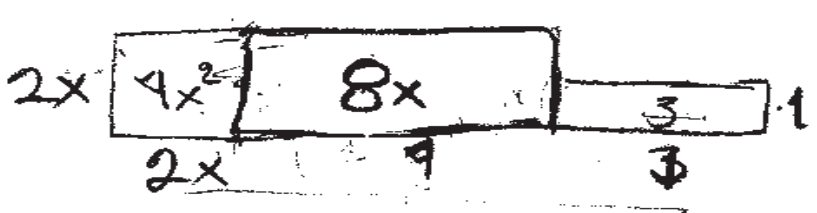
Estrella: Entonces aquí va 1 [se refiere a las bases de los rectángulos que pegó Guadalupe],

Guadalupe: [Escribe x dentro de cada rectángulo],

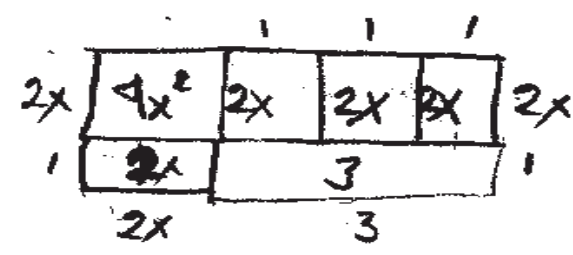
Estrella: No aquí van $2x$, y

Mayra: Aquí va 1 y aquí va $2x$ [se refería al base y ala altura de los rectángulos, para completar los lados del rectángulo que formaron.]. Luego procedieron a factorizar el polinomio. La Imagen 4.39 muestra la factorización.

2. Representa geométricamente el trinomio $4x^2 + 8x + 3$



a) Intenta cuadrar el trinomio.



$$4x^2 + 8x + 3 = (2x + 1)(2x + 3)$$

Imagen 4.39. Respuesta al Ejercicio 12-2 por el Equipo 2.

El trinomio $25 + 100y^2 + 100y$ del ejercicio 12-3, no fue factorizado por ninguno de los equipos: el Equipo 1 intentó factorizarlo simbólicamente, pero lo hizo mal; escribieron $100 = 20 \cdot 5$ y $25 = 20 + 5$ y lo factorizó de la siguiente forma $25 + 100y^2 + 100y = (y + 20)(y + 5)$, se tardaron en la factorización del segundo ejercicio y tal vez les hizo falta tiempo o al parecer se les complica la factorización de este tipo de trinomios. El Equipo 4 sólo factorizó correctamente el ejercicio 12-1, $x^2 + 3x + 2$; el Ejercicio 12-2 no lograron factorizarlo correctamente, sin intentar el Ejercicio 12-3.

- **Socialización**

Es importante señalar que los alumnos siguen participando con mucha confianza. En el desarrollo de esta fase se factorizan los tres ejercicios de la actividad 12, y se hace énfasis tanto en la factorización geométrica como en la simbólica y se aclaran los errores que cometieron. Por ejemplo, en la factorización de $4x^2 + 8x + 3$ (ejercicio 12-2) se da el siguiente diálogo entre el profesor y los alumnos:

Profesor: ¿qué lados eligieron para el cuadrado $4x^2$?

Juan Carlos: $2x$ por $2x$ [se dibuja un cuadrado con cuatro cuadrados de área x^2]

Profesor: ¿cuál debe ser la base del rectángulo de área $8x$?

Alumnos: 4

[a la derecha del cuadrado, se representa el rectángulo de área 3]

Profesor: ¿qué debemos hacer para cuadrar el trinomio?

Alumnos: poner a los lados del cuadrado de área $4x^2$, tres rectángulos de área $2x$, a un lado y uno al otro [finalmente se colocó el rectángulo de área 3 en el espacio restante].

De esta forma se logró cuadrar el trinomio, en la imagen 4.40 se puede observar la factorización geométrica del ejercicio 12 – 2.

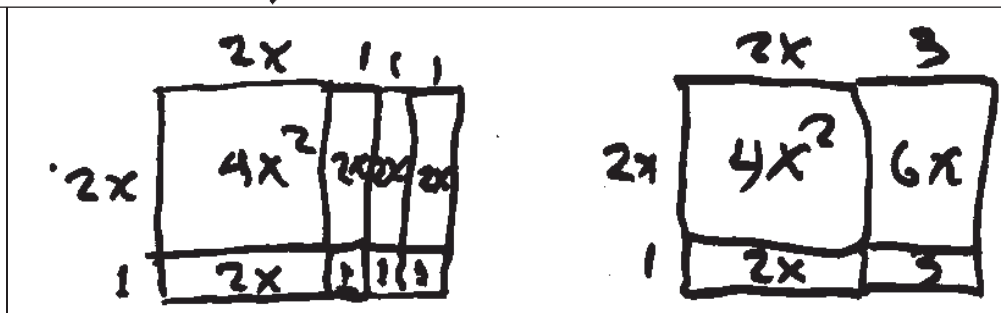
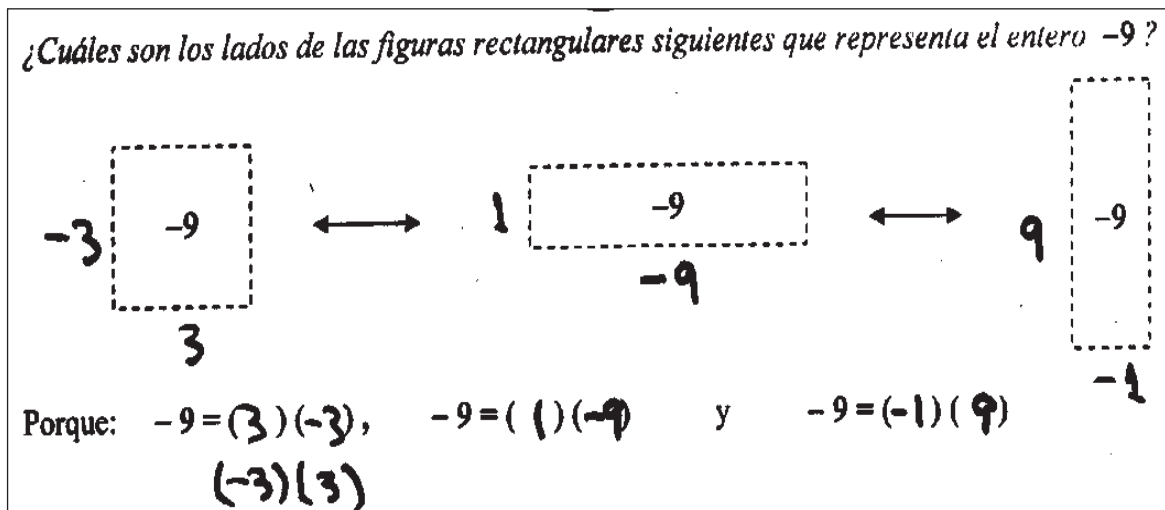


Imagen 4.40. Respuesta al Ejercicio 12-2.

4.4.2 Segunda Etapa

- *Exposición interactiva*

En esta fase por medio del desarrollo la Actividad 13, los alumnos participan con más confianza. Se introduce a los estudiantes en la representación geométrica de los enteros negativos por medio de figuras rectangulares punteadas o discontinuas. Se representa al entero -1 como un cuadrado punteado de base -1 y altura 1 o base 1 y altura -1 , de igual manera se representa el entero -9 , y sus posibles formas rectangulares equivalentes, tal como se muestra en la Imagen 4.41.

Imagen 4.41. Respuesta al Ejercicio 13-2.

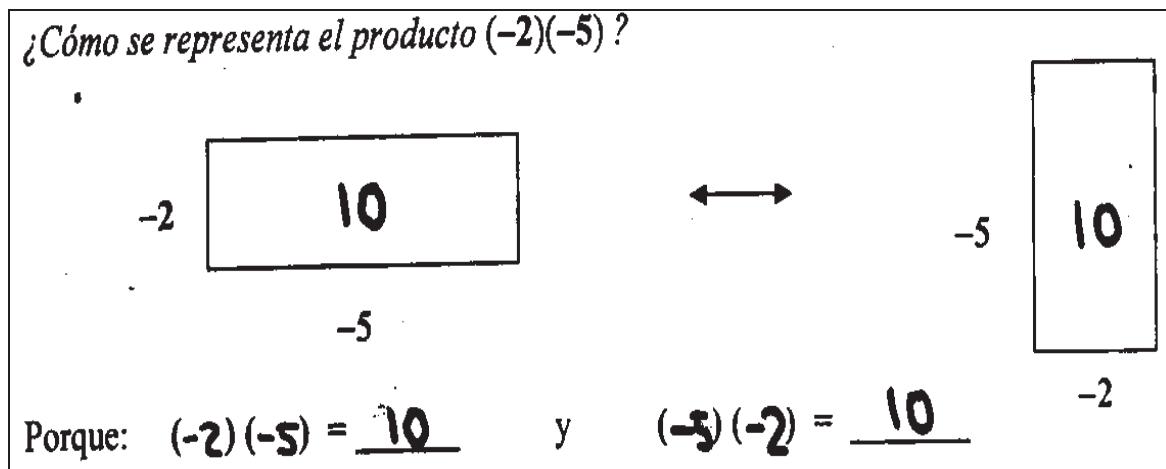


Imagen 4.41. Respuesta al Ejercicio 13-3.

También se hace la representación de los enteros positivos como figuras rectangulares continuas de lados positivos o ambos negativos, y se hace la observación que ahora aumentarán al doble las representaciones rectangulares equivalentes. La Imagen 4.42 muestra cómo se representa mediante figuras rectangulares el producto $(-2)(-5)$ del Ejercicio 13-3. Son también representados los monomios con coeficientes negativos por medio de figuras rectangulares punteadas. La Imagen 4.43 del Ejercicio 13-6, muestra tres de las figuras rectangulares equivalentes del monomio $-5x$.

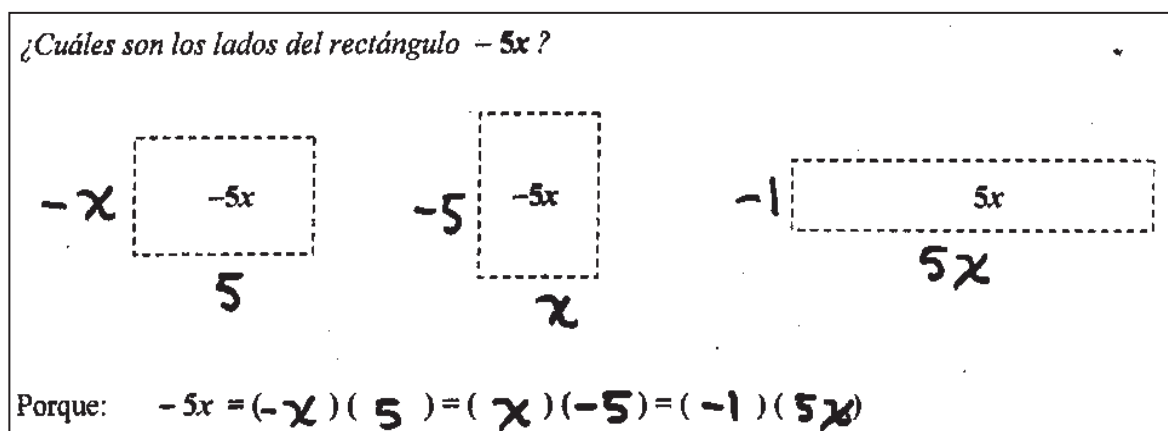


Imagen 4.43. Respuesta al Ejercicio 13-6.

El Ejercicio 13–8 re representa geométricamente el producto $(-4x)(-4x) = 16x^2$ y se indica también que es equivalente con el cuadrado continuo de lados $4x$ y área $16x^2$, tal como se muestra en la Imagen 4.44.

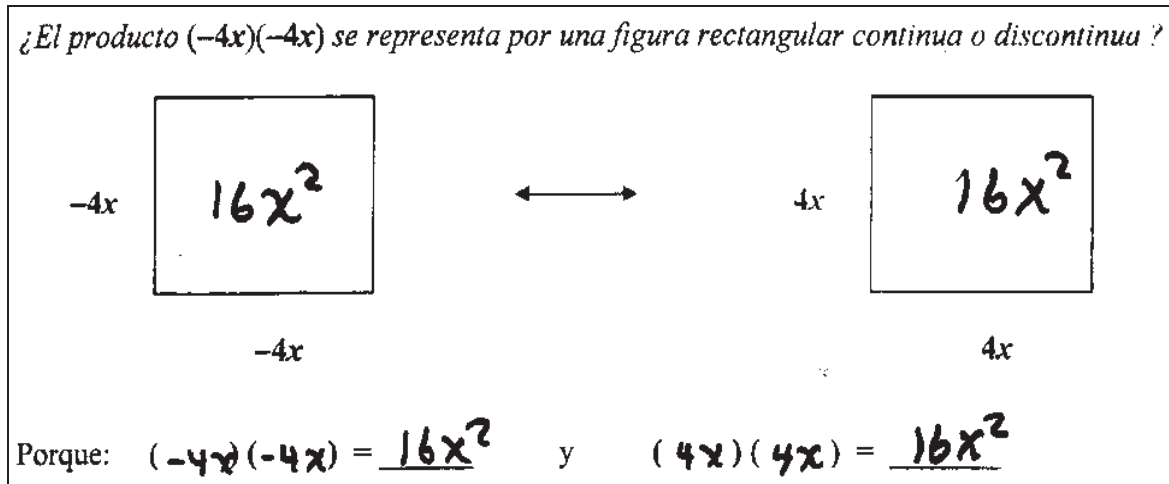


Imagen 4.44. Respuesta al Ejercicio 13 – 8.

Se hace notar también que el signo menos de un entero o coeficiente de un monomio, sólo representa una figura rectangular discontinua o punteada y que un lado se debe representar por un entero negativo o monomio con coeficiente negativo y el otro positivo.

Cabe mencionar que si ambos lados se representan por números negativos o positivos, la figura rectangular debe ser continua, y que si un lado es positivo y el otro negativo la figura debe ser discontinua. Se enfatiza que las figuras rectangulares continuas representan áreas positivas y las punteadas áreas negativas o viceversa.

En esta fase se desarrolla la factorización de trinomios de segundo grado con coeficientes negativos, con la intención de introducir la factorización de este tipo de polinomios. La Imagen 4.45, muestra como se representa geométricamente el trinomio $9x^2 - 12xy + 4x^2$, del Ejercicio 13–10.

Dado el trinomio $9x^2 - 12xy + 4y^2$, escribe los lados de la figura rectangular rectilínea que representa.

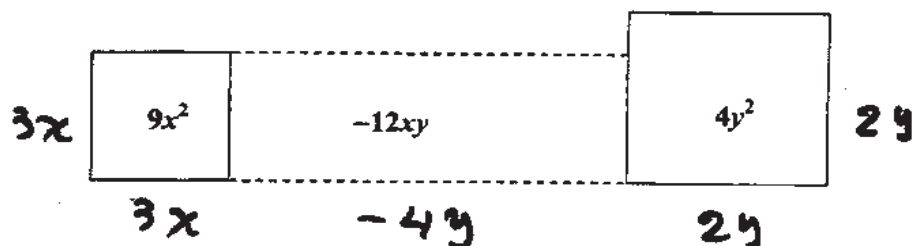


Imagen 4.45. Respuesta al Ejercicio 13-10.

A continuación se realiza su factorización, con la participación activa de los alumnos. Sobre la diagonal del la figura rectangular a construir, se colocan los cuadrados que no tienen lados en común, se completa la figura rectangular y luego se comparan las áreas con las del trinomio, y se hace la observación de que en la suma de las áreas $6xy + 6xy = 12xy$, y dado que $12xy \neq -12xy$ y se indica que la forma de conseguir que la suma sea igual $-12xy$, se considera uno de los cuadrados con los lados negativos y se reemplaza el cuadrado de lados $3x$ y $3x$, por el de lados $-3x$ y $-3x$ y de área igual a $9x^2$, logrando así factorizar el polinomio. La Imágenes 4.46a y 4.46b, muestran la factorización del trinomio. Sin embargo, no contiene la intervención de los alumnos por daños en el disco de grabación.

a) Intenta cuadrar el polinomio

Comparando la suma de las áreas con $-12xy$:

$$6xy + 6xy = 12xy \neq -12xy$$

Imagen 4.46a. Respuesta al Ejercicio 13-10.

Simbólicamente:

La factorización del trinomio:

$$9x^2 - 12xy + 4y^2 = (3x - 2y)(3x - 2y) = (3x - 2y)^2$$

Imagen 4.46b. Respuesta al Ejercicio 13-10.

- **Trabajo de equipo**

En esta fase se desarrolla la Actividad 14 que incluye cinco ejercicios; los tres primeros son realizados sin dificultad por los todos los equipos. La Imagen 4.47 muestra el trabajo del Equipo 1 en los ejercicios 14-1 y 14-3.

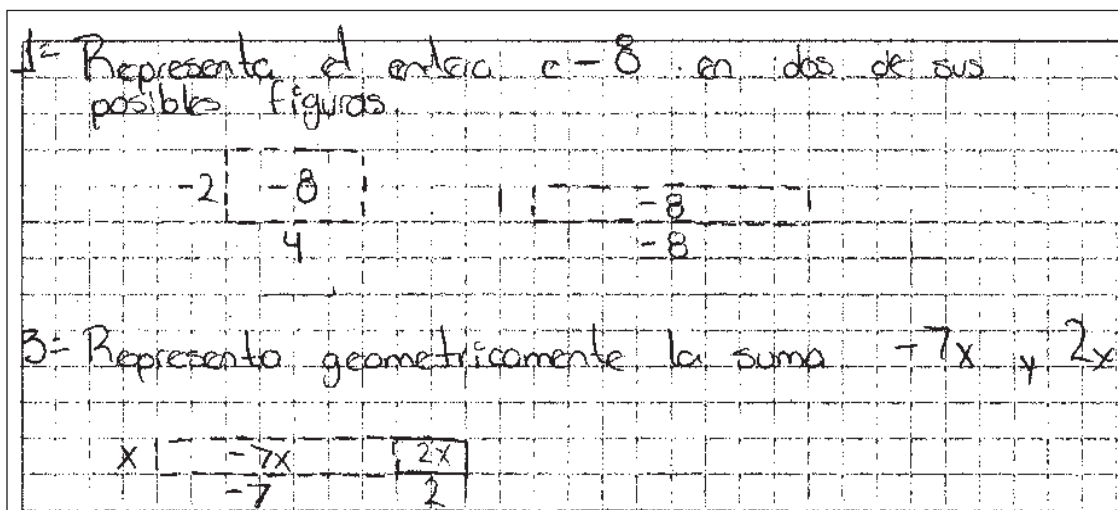


Imagen 4.47. Respuesta a los ejercicios 14-1 y 14-3 por el Equipo 1.

En la Imagen 4.48 se muestra cómo el Equipo 3 realizó la representación geométrica del Ejercicio 14-2.

2. Escribe el lado faltante en cada figura rectangular siguiente y justifica tú respuesta.

$\begin{array}{ c c } \hline -4x^2 & -16x^4 \\ \hline & 4x^2 \\ \hline \end{array}$	Justificación: $-16x^4 = (-4x^2)(4x^2)$
$\begin{array}{ c c } \hline -3y & -12y^3 \\ \hline & 4y^2 \\ \hline \end{array}$	Justificación: $-12y^3 = (-3y)(4y^2)$
$\begin{array}{ c c } \hline 2x & -14x^2y \\ \hline & -7xy \\ \hline \end{array}$	Justificación: $-14x^2y = (2x)(-7xy)$

Imagen 4.48. Respuesta al Ejercicio 14-2 por el Equipo 3.

El Ejercicio 14-4 trata de un polinomio con coeficientes negativos y positivos factorizable por factor común (no se les indica cómo lo factoricen). El equipo 4 logró factorizarlo geométricamente en forma correcta, aunque después intentan factorizarlo simbólicamente y cometen errores. La imagen 4.49 muestra la factorización del Ejercicio 14-4.

$$4x^2y - 12xy^2 + 8x^3y - 6xy^3$$

$4x^2y$	$-12xy^2$	$8x^3y$	$-6xy^3$
$2x$	$-6y$	$4x^2$	$-3y^2$

$$4x^2y - 12xy^2 + 8x^3y - 6xy^3 = 2xy(2x - 6y + 4x^2 - 3y^2)$$

$$= (2xy + 2x)(2xy - 6y)(2xy + 4x^2)$$

$$(2xy + -6y^2)$$

Imagen 4.49. Respuesta al Ejercicio 14-4 por el Equipo 4.

El Equipo 2 intenta factorizarlo geométricamente y comente errores, porque al utilizar agrupación no logra obtener el mismo factor común de ambas agrupaciones. La Imagen 4.50 contiene esto.

4. Factoriza el binomio $4x^2y - 12xy^2 + 8x^3y - 6xy^3$

$4x^2y$	$8x^3y$
4	$2xy$

$$4x^2(y)(2xy)$$

$-6xy^3$	$-12xy^2$
xy	$2x$

$$-6y^2(xy + 2x)$$

Imagen 4.50 Respuesta al Ejercicio 14-4 por el Equipo 2.

El Equipo 3 intenta factorizarlo geométricamente, pero comete errores. El Equipo 1 no intentó factorizar este ejercicio. La imagen 4.51 muestra como el Equipo 3 intentó factorizar simbólicamente el Ejercicio 14-4.

4. Factoriza el binomio $4x^2y - 12xy^2 + 8x^3y - 6xy^3$.

$$4x^2y - 12xy^2 + 8x^3y - 6xy^3 = (2xy)(2x + 4y^2) + (3xy^2)(4 + 2y)$$

Imagen 4.51 Respuesta al Ejercicio 14-4 por el Equipo 3.

El Ejercicio 14-5 es un trinomio que no es factorizable en los enteros; el cual se incluyó para ver la reacción de los estudiantes y observar si pueden concluir si el trinomio es no factorizable. Esto no fue posible determinarlo. Los cuatro equipos representaron

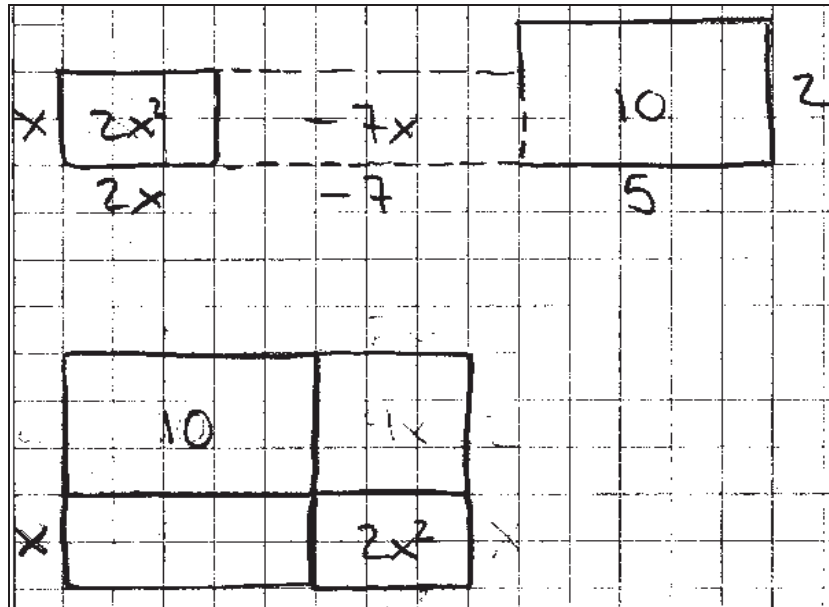


Imagen 4.52. Respuesta al Ejercicio 14-5 por el Equipo 4.

geométricamente el polinomio e intentaron cuadrarlo, el equipo 4 fue el que más hizo una representación apropiada. La Imagen 4.52 muestra la forma en como intentaban factorizar el trinomio.

Al parecer la presencia de los números negativos en el polinomio les ocasiona dificultad en la factorización.

• Socialización

En esta fase sólo se tiene parte de la grabación, la fase se desarrolla indagando cómo los equipos factorizaron los ejercicios. En una parte de la grabación de otro disco, aparece cómo se llevó a cabo esta fase con el Ejercicio 14-4; los alumnos comentan que no van a factorizarlo geométricamente, que van aplicar la factorización simbólica, ya que están familiarizados con ella.

Se les pregunta, ¿cómo factorizaron el polinomio $4x^2y - 12xy^2 + 8x^3y - 6xy^3$? No contestan. Entonces se les dice: veamos si los términos del polinomio tienen un factor común; ¿cuál es el factor común de 4 y 12?, alguien contesta que es 3 y alguien más dice que es 2, se les recuerda que se debe tomar el máximo común divisor, siendo este el 4, Luego se pregunta ¿es el 8 divisible por 4? Contestan, sí, luego se pregunta si el 6 es divisible por 4? Y contestan, no, entonces se pregunta ¿qué número se debe tomar como factor común?, y contestan que el 2, luego se pregunta si hay literales comunes, dicen sí, ¿Cuáles son? Contestan x y y , se pregunta ¿cuáles se eligen las de mayor exponente, las de menor exponente o las de igual exponente? Contestan las de menor exponente, se pregunta cuáles son la x y la y de menor exponente? Contestan x y la y , entonces el factor común es $2xy$. Entonces el polinomio se puede factorizar como el producto del factor común por, ¿cuál es el otro factor? No contestan.

Se les comenta que se debe dividir cada término del polinomio entre el factor común; al dividir $4x^2y$ entre $2xy$ contestan $2x$, al dividir $-12xy^2$ entre $2xy$ contestan $-6y$, $8x^3y$ entre $2xy$ contestan $4x^2$ y finalmente se divide $-6xy^3$ entre $2xy$ contestan $-3y^2$, luego se escribe la factorización como $4x^2y - 12xy^2 + 8x^3y - 6xy^3 = 2xy(2x - 6y + 4x^2 - 3y^2)$. La imagen 4.53 muestra la factorización simbólica.

Se intenta factorizar simbólicamente el Ejercicio 14–5 y se llega a la conclusión de que el trinomio no es factorizable en los enteros.

4. Factoriza el binomio $4x^2y - 12xy^2 + 8x^3y - 6xy^3$

factor común = $2xy$

$$4x^2y - 12xy^2 + 8x^3y - 6xy^3 = 2xy(2x - 6y + 4x^2 - 3y^2)$$

Imagen 4.53. Respuesta al Ejercicio 14-5

- **Trabajo extra-clase individual**

Se dejó la Actividad 15 como trabajo extra-clase para que la entregaran la siguiente sesión; la actividad consta de tres ejercicios, los dos primeros son trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$ con coeficientes enteros positivos y negativos, y el tercero es una diferencia de cuadrados y una suma de cubos, con la intención de introducirlos al siguiente tema en la cuarta sesión. Sólo ocho estudiantes entregaron esta actividad, en el Ejercicio 15-1 todos los alumnos hicieron la representación geométrica y sólo un alumno intentó la factorización, pero no lo logró.

En el Ejercicio 15-2, sólo Miguel logró factorizarlo geométricamente, aunque cometió un error al calcular un área. El Ejercicio 15-3 sólo José Luis lo factorizó geométricamente, los demás lo factorizaron simbólicamente; se trata de la diferencia de cuadrados $x^2 - y^2$; es posible que estos alumnos fueron asesorados por algún maestro o persona que conoce la factorización simbólica. La imagen 4.54, muestra como Luis factorizó geométricamente el ejercicio 15-3.

En la suma de cubos $x^3 + y^3$, seis alumnos escribieron la factorización, cinco de ellos no escribieron ningún procedimiento y Gerardo hizo la división de $x^3 + y^3$ entre $x + y$, y el cociente que obtuvo lo multiplico por $x + y$, escribiendo la factorización como, $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$. Los alumnos que han sido asesorados por alguien, y en particular Gerardo, en la siguiente sesión factorizan la suma de cubos simbólicamente por un procedimiento diferente del que se deduce de la factorización geométrica.

3. Factoriza la diferencia de cuadrados $x^2 - y^2$ y la suma de cubos $x^3 + y^3$

$$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$$

$$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 + y^2 - xy)$$

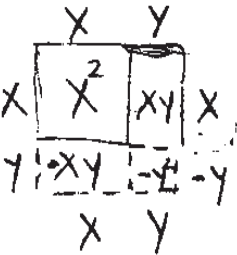
$$= (x+y)(x^2 - xy + y^2)$$


Imagen 4.54. Respuesta al Ejercicio 15-3 por José Luis.

4.5 Descripción de la cuarta sesión

En esta sesión se desarrollan las actividades de la 16 a la 19, en las cuales se introduce la factorización de diferencias y sumas de potencias. La colaboración y participación de los alumnos continua siendo muy activa.

4.5.1 Primera Etapa

- **Exposición interactiva**

Se inicia esta fase con el desarrollo de la Actividad 16 que consta de cuatro ejercicios, duró aproximadamente 30 minutos, debido a que se introduce, por primera vez, la noción de ‘compensación de áreas’ la cual consiste en agregar áreas positivas o negativas y hacer que su suma sea igual a cero; se explica el procedimiento de factorización. Además, se hizo énfasis en la factorización simbólica y dado que es un poco más laboriosa se prolongó el desarrollo de la actividad, que consiste en la factorización de binomios escritos como una diferencia de potencias. Familiarizados con la representación geométrica, se procedió a explicar cómo factorizar diferencias de cuadrados y de cubos solamente.

A continuación se presenta la interacción con los alumnos:

- ◆ Para factorizar la diferencia de cuartas potencias,
¿Cómo le haríamos? (no contestan),
- ◆ ¿Habrá un número que elevado a la cuarta me de **16**? Juan Carlos, **4**
- ◆ Pero su cuadrado es **16**, Raúl, **2**
- ◆ ¡Claro!, porque $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$
- ◆ Además, ¿se pueden escribir cómo cuadrados
o rectángulos? Como cuadrados,
- ◆ Cómo ambos, rectángulos o cuadrados.
- ◆ Vamos a probar primero representando cada
término como cuadrados.
- ◆ ¿Cuáles son los lados del cuadrado de área **16**? **4 por 4**
- ◆ ¿Podríamos tomar como lados **4 y - 4**? No, porque 16 es positivo

- ♦ Pero como $-x^4$ es negativa, el cuadrado se debe de dibujar punteado, ¿cuáles son los lados? x^2 por x^2
- ♦ ¿ x^2 por x^2 ? x^2 por $-x^2$
- ♦ Entonces estos dos términos son cuadrados que no tienen base ni altura común, o ¿si la tienen? Sabino, no
- ♦ Porque si tuvieran un lado en común entonces, se factorizaría por factor común.
- ♦ Entonces, ¿qué debo de hacer con estos dos cuadrados? Iskra, ponerlos en las esquinas de la nueva figura rectangular
- ♦ Se arreglan sobre una diagonal de la figura geométrica a construir y se escriben sus lados
- ♦ Se forma la figura rectangular, agregando dos rectángulos en la otra diagonal, ¿Cuáles son las áreas de los rectángulos que se agregaron? $4x^2$ y $-4x^2$
- ♦ El área de $-4x^2$ se dibuja punteada (marcador rojo)
- ♦ ¿Se compensan las áreas que se agregaron? Sí, porque $4x^2 + (-4x^2) = 0$
- ♦ Dado que se compensaron las áreas, ¿se puede cuadrar la diferencia de potencias cuartas? Sí,
- ♦ ¿Cómo se factoriza la diferencia de potencias? $4 + x^2$ por $4 - x^2$
- ♦ Se escribe la factorización como $16 - x^4 = (4 + x^2)(4 - x^2)$

La imagen 4.55 muestra la factorización geométrica del ejercicio 16 – 3, la diferencia de potencias cuartas $16 - x^4$.

3. Usando figuras rectangulares representa la diferencia de cuartas potencias $16 - x^4$

Cuadrar la diferencia de cuartas potencias:

Compensación de las áreas:

$$4x^2 + (-4x^2) = x^2(4 - 4) = x^2(0) = 0$$

Factorización de la diferencia de cuartas potencias:

$$16 - x^4 = (4 + x^2)(4 - x^2)$$

Imagen 4.55. Respuesta al Ejercicio 16-3.

Luego se realiza la factorización simbólica. A continuación se describe la interacción:

- ♦ ¿Qué números al cuadrado nos dan 16? Sabino, el 4
- ♦ También el -4 , recuerden que es 4 por 4 y -4 por -4 y se escribe $(\pm 4)^2 = 16$
- ♦ ¿Qué debo elevar a la cuarta, para obtener x^4 ? Alguien dice x y confirman x^2
- ♦ Recuerden que debe ser $\pm x$ y se escribe $(\pm x^2)^2 = x^4$

- ♦ ¿Cómo se escribe la factorización? no contestan
- ♦ Recuerden que primero debe ir en los binomios
los factores del término positivo y luego los
inversos aditivos del término negativo

Finalmente, se escribe la factorización como $16 - x^4 = (4 + x^2)(4 - x^2)$ o bien como: $16 - x^4 = (-4 + x^2)(-4 - x^2)$, terminado así la factorización de este ejercicio. En la imagen 4.56 se muestra la forma en como se factoriza simbólicamente este ejercicio.

Factorización simbólica:

$$(\pm 4)^2 = 16 \quad \text{y} \quad (\pm x^2)^2 = x^4$$

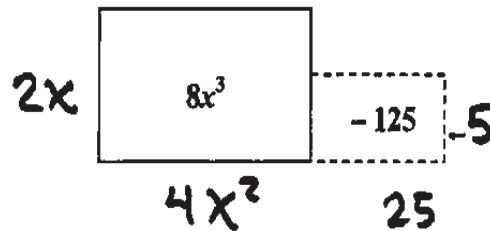
$$16 - x^4 = (4 + x^2)(4 - x^2)$$

$$16 - x^4 = (-4 + x^2)(-4 - x^2)$$

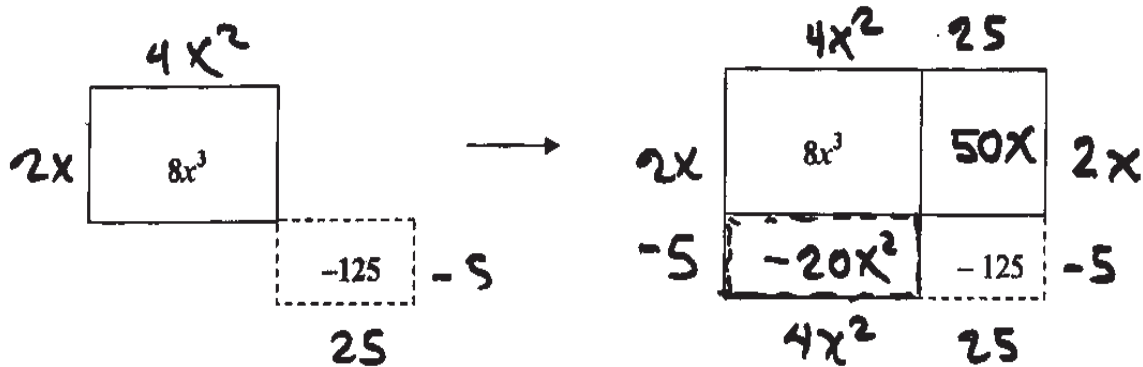
Imagen 4.56. Respuesta al Ejercicio 16-3.

En la Imagen 4.57 se muestra la factorización del Ejercicio 16-4, que consiste en factorizar la diferencia cubos $8x^3 - 125$. Este ejercicio se factoriza de la misma forma que el anterior, con la participación de los alumnos. Se inicia con la representación geométrica de cada término de la diferencia de cubos, a continuación se colocan sobre la diagonal de la figura rectangular a construir, los rectángulos de área $8x^3$ y -125 , se hace una observación; para lograr factorizar la diferencias de cubos, se deben de escribir sobre las alturas las primeras potencias y sobre las bases las segundas potencias. Se completa el rectángulo, agregando los rectángulos de áreas $-20x^2$ y $50x$, respectivamente, y dado que la suma de las áreas es diferente de cero, las áreas no se compensa; entonces se agregan los rectángulos de áreas $20x^2$ y $-50x$, haciendo la suma igual a cero, $(-20x^2 + 20x^2) + (50x - 50x) = 0$, con lo que se compensan las áreas.

4. Escribe los lados de cada figura rectangular que representa la diferencia de cubos $8x^3 - 125$



Cuadrar la diferencia de cubos:



Compensación de las áreas:

$$-20x^2 + 50x \neq 0$$

¿Qué áreas se deben de agregar para compensar áreas?

$20x^2$ y $-50x$

$$20x^2 - 50x = (10x)(2x - 5)$$

Imagen 4.57. Respuesta al Ejercicio 16-4.

Los rectángulos $20x^2$ y $-50x$ que compensan las áreas tienen altura común que los rectángulos $-20x^2$ y $50x$, siendo el binomio $2x - 5$, para lo cual se factoriza por factor común el binomio $20x^2 - 50x$, cuyo factor común es $10x$, obteniendo así la base de común de los rectángulos $20x^2$ y $-50x$. Logrando cuadrar la diferencia de cubos y obteniendo así, la factorización tal como se muestra en la Imagen 4.58.

$$\begin{array}{c}
 4x^2 \quad 25 \quad 10x \\
 \begin{array}{|c|c|c|}
 \hline
 8x^3 & 50x & 80x^2 \\
 \hline
 -20x^2 & -125 & -50x \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 2x \\
 -5
 \end{array}$$

25

Factorización de la diferencia de cubos:

$$\begin{array}{c}
 2x-5 \quad \boxed{8x^3 - 125} \\
 4x^2 + 25 + 10x \\
 8x^3 - 125 = (2x-5)(4x^2 + 25 + 10x) \\
 8x^3 - 125 = (2x-5)(4x^2 + 10x + 25)
 \end{array}$$

Factorización simbólica:

$$\begin{aligned}
 8x^3 - 125 &= (2x-5)(4x^2+25) + (2x-5)(10x) \\
 &= (2x-5)(4x^2+25+10x) \\
 8x^3 - 125 &= (2x-5)(4x^2+10x+25) \\
 &= (4x^2+10x+25)(2x-5)
 \end{aligned}$$

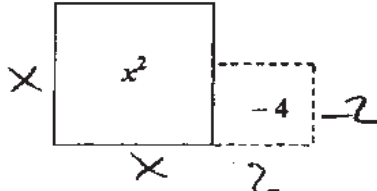
Imagen 4.58. Respuesta al Ejercicio 16-4.

- **Trabajo de equipo**

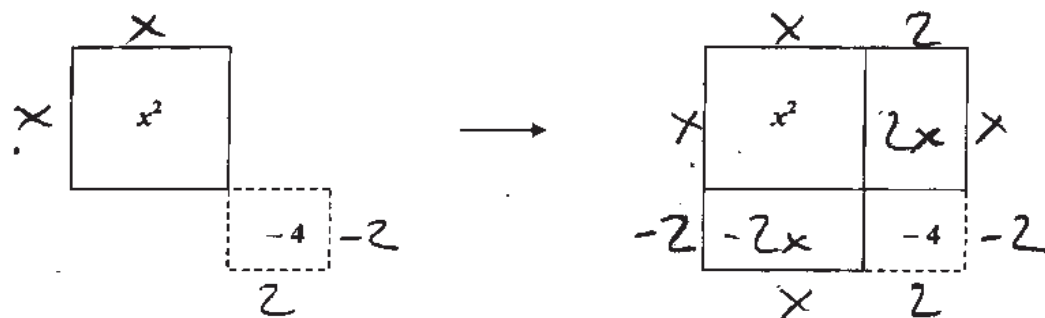
En esta fase los estudiantes realizaron la Actividad 17 que consta de cuatro ejercicios, empleando alrededor de 15 minutos en desarrollarla. Los alumnos se mostraron más

entusiastas familiarizados con los polinomios con coeficientes negativos en esta fase. Se puede ver tanto en el video como en el trabajo escrito que los cuatro equipos resolvieron fácilmente los tres primeros ejercicios, el Ejercicio 17-1, que consiste de una diferencia de cuadrados y el 17-2, que trata de una diferencia de cuartas potencias, en estos primeros dos ejercicios tardaron aproximadamente 5 minutos, en el ejercicio 17-1 se les pide que factoricen simbólicamente la diferencia de cuadrados y en segundo ejercicio que justifiquen simbólicamente la factorización, pero no lograron realizar la factorización simbólica en ambos ejercicios. La imagen 4.59 muestra cómo el Equipo 4 factorizó el Ejercicio 17-1.

1. Escribe los lados de las figuras rectangulares que representa la diferencia de cuadrados $x^2 - 4$



a) Intenta cuadrar la diferencia de cuadrados.



b) ¿Se compensan las áreas que se agregaron para construir la figura rectangular?, justifica tu respuesta

Respuesta: Sí

Justificación:

$$(x-2)(x+2) \neq (2-2)x^2 = 0$$

c) ¿Se puede cuadrar la diferencia de cuadrados? Si tu respuesta es sí, escribe la factorización.

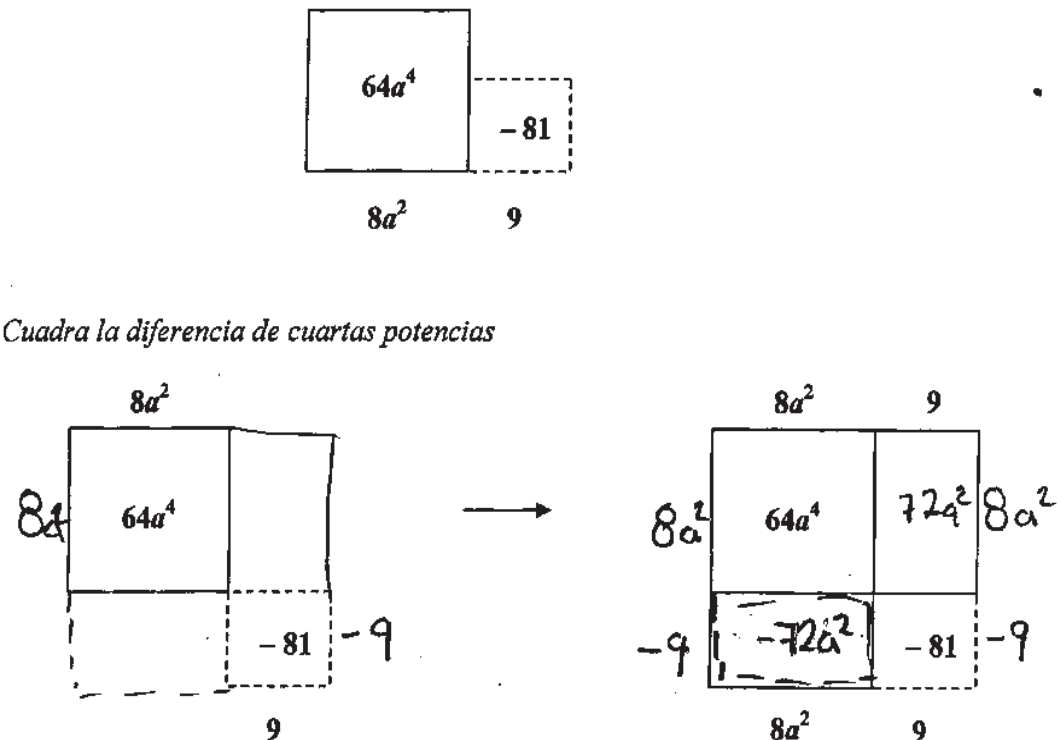
Sí

$$x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$$

Imagen 4.59 Ejercicio 17 - 1, Equipo 4

En la Imagen 4.60 se muestra cómo el Equipo 2, factorizó el Ejercicio 17-2, la diferencia de cuartas potencias.

2. Escribe los lados de las figuras rectangulares de la diferencia de cuartas potencias $64a^4 - 81$



a) Cuadra la diferencia de cuartas potencias

b) ¿Se compensan las áreas que se agregaron para completar la figura rectangular?

Respuesta: Si

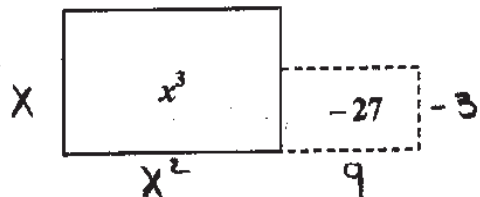
Factorización de la diferencia de cuartas potencias:

$$64a^4 - 81 = (8a^2 - 9)(8a^2 + 9)$$

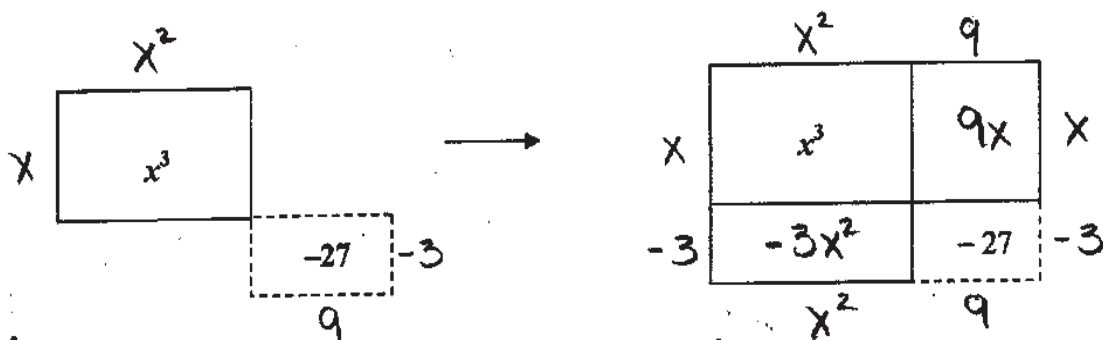
Imagen 4.60. Respuesta al Ejercicio 17-2 por el Equipo 2.

El Equipo 1 factorizó geoméricamente el Ejercicio 17-3. La Imagen 4.61 muestra la factorización.

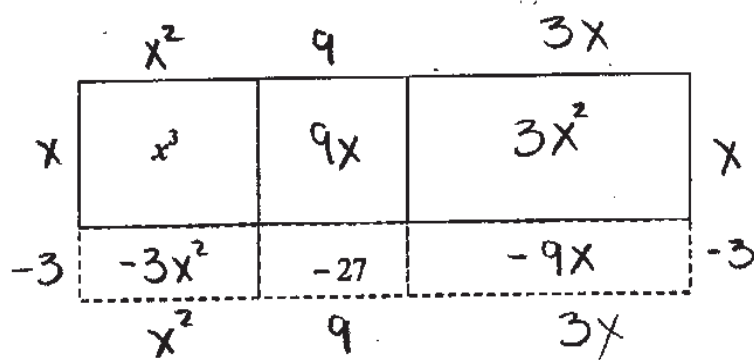
3. Escribe los lados de las figuras rectangulares representa la diferencia de cubos $x^3 - 27$



- a) Cuadra la diferencia de cubos.



- b) ¿Qué áreas deben agregarse para compensar áreas?



- c) ¿Cuál es la factorización de la diferencia de cubos?

$$\begin{aligned} x^3 - 27 &= (x - 3)(x^2 + 9 + 3x) \\ &= (x - 3)(x^2 + 3x + 9) \end{aligned}$$

Imagen 4.61. Respuesta al Ejercicio 17-3 por el Equipo 1.

El Equipo 3 factorizó tanto geométricamente como simbólicamente el Ejercicio 17-3. En la Imagen 4.62 se puede observar ambas factorizaciones.

3. Escribe los lados de las figuras rectangulares representa la diferencia de cubos $x^3 - 27$

a) Cuadra la diferencia de cubos.

b) ¿Qué áreas deben agregarse para compensar áreas?

c) ¿Cuál es la factorización de la diferencia de cubos?

$$x^3 - 27 = (x-3)(x^2 + 9) + (x-3)(3x)$$

$$= (x-3)(x^2 + 9 + 3x)$$

d) Intenta factorizar simbólicamente la diferencia de cubos $x^3 - 27$

$$x^3 - 27 = (x-3)(x^2 + 9) + (x-3)(3x)$$

$$= (x-3)(x^2 + 9 + 3x)$$

Imagen 4.62. Respuesta al Ejercicio 17-3 por el Equipo 3.

El Ejercicio 17-4 solo fue factorizado geométricamente por el Equipo 3. La Imagen 4.63 muestra esta evidencia.

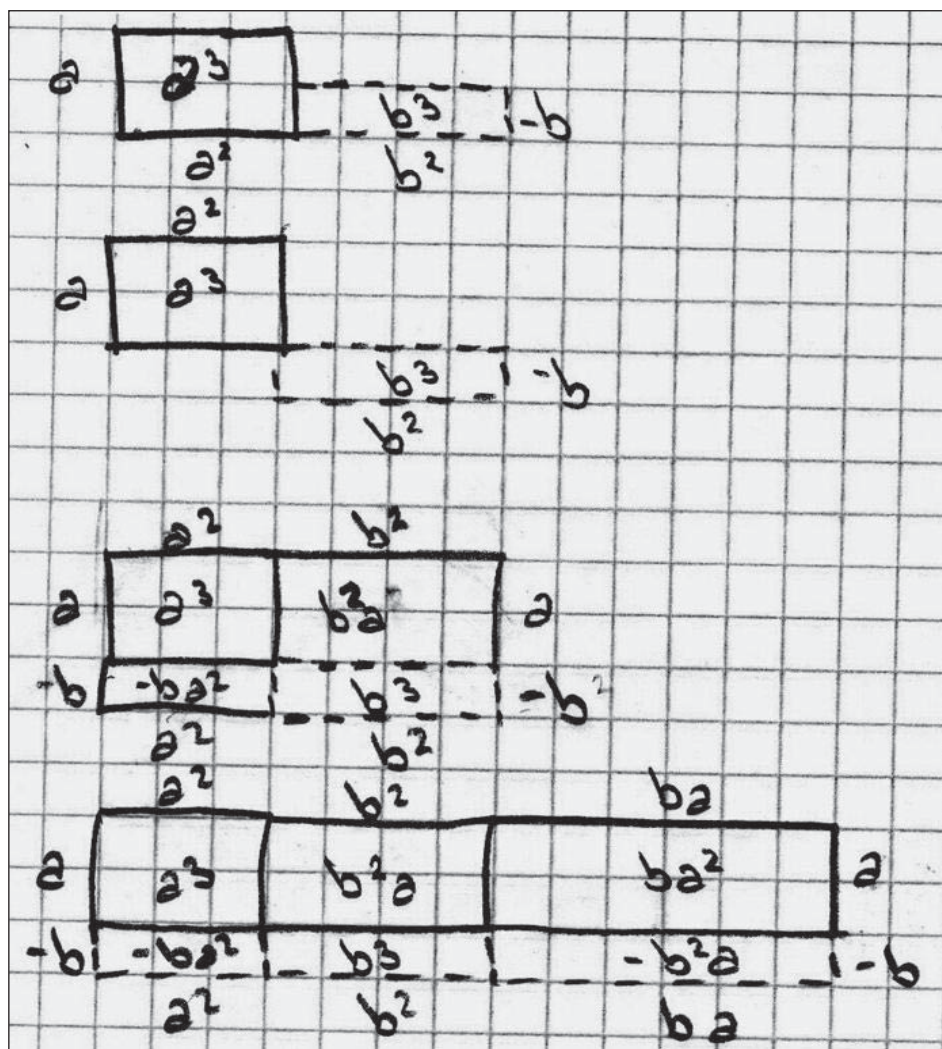


Imagen 4.63. Respuesta al Ejercicio 17-4 por el Equipo 3.

El Equipo 2 logró completar la figura rectangular agregando áreas, pero de una forma inapropiada, utilizando primeras y segundas potencias en la alturas y en la bases; lo dejaron incompleto porque no pudieron compensar las áreas agregadas, obviamente de esta forma no lo iban a lograr. El Equipo 1 sólo intentó factorizarlo simbólicamente, escribiendo solamente la diferencia de cubos $a^3 - b^3$ como $aa^2 - bb^2$. El Equipo 4 intentó factorizarlo simbólicamente, escribió un procedimiento incorrecto, escribió $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 - b^2)$.

En la Imagen 4.64 se puede observar el procedimiento inconcluso del Ejercicio 17-4 realizado por el Equipo 2.

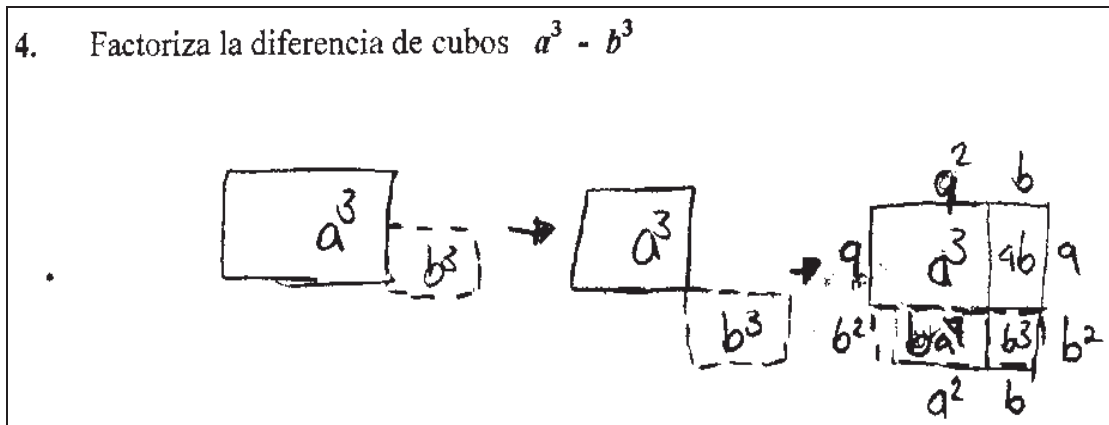


Imagen 4.64. Respuesta al Ejercicio 17-4 por el Equipo 2.

• Socialización

En esta fase un alumno de cada equipo pasó al pizarrón a explicar la forma en que factorizaron uno de los ejercicios, de manera que el resto de los estudiantes revisaban y contrastaban su propio procedimiento. A continuación se muestra el procedimiento que siguió el Equipo 2 en la factorización del Ejercicio 17-1, siendo la alumna Guadalupe quién pasó al pizarrón a factorizarlo, primero representó geométricamente la diferencia de cuadrados $x^2 - 4$ (ver la Figura 4.1).

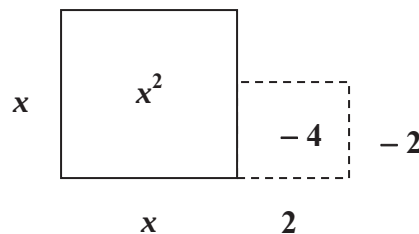


Figura 4.1. Representación geométrica de la diferencia de cuadrados $x^2 - 4$.

Luego colocó los cuadrados sobre la diagonal de la figura rectangular a construir, agregó los rectángulos de área $2x$ y $-2x$ para completar la figura, verificó la compensación de áreas $2x + (-2x) = 0$, logrando cuadrar la diferencia de cuadrados y finalmente, la factorizó $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$. El procedimiento de factorización seguido por guadalupe se muestra en la Figura 4.1

continuación. La Figura 4.2 muestra el procedimiento seguido por el Equipo 2 en la factorización del Ejercicio 17-1, y que la alumna Guadalupe pasó al pizarrón a factorizarlo.

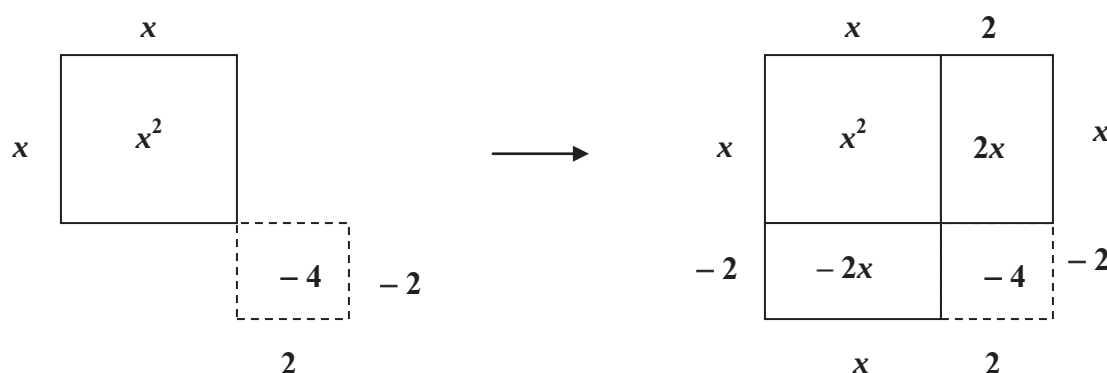


Figura 4.2. Procedimiento seguido por Guadalupe para factorizar $x^2 - 4$.

Juan Carlos, del Equipo 3, pasó a factorizar el Ejercicio 17-2 y José Luis, del Equipo 1 pasó a factorizar el Ejercicio 17-3.

4.5.2 Segunda Etapa

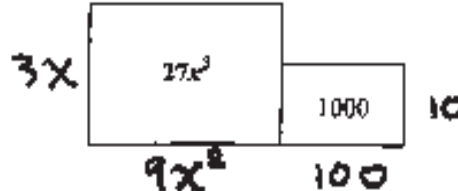
- **Exposición interactiva**

En esta fase se desarrolla la Actividad 18, que consiste de tres ejercicios; son binomios que se factorizan como la suma de cubos, cada uno de ellos se factoriza usando el procedimiento de compensación de áreas. Se comenta que usando la factorización geométrica se puede verificar que la suma de potencias pares no es factorizable en los enteros; y que algebraicamente se puede comprobar que no es factorizable en los números reales. Se explica que se factoriza la suma de potencias impares usando el mismo procedimiento usado en la diferencia de potencias.

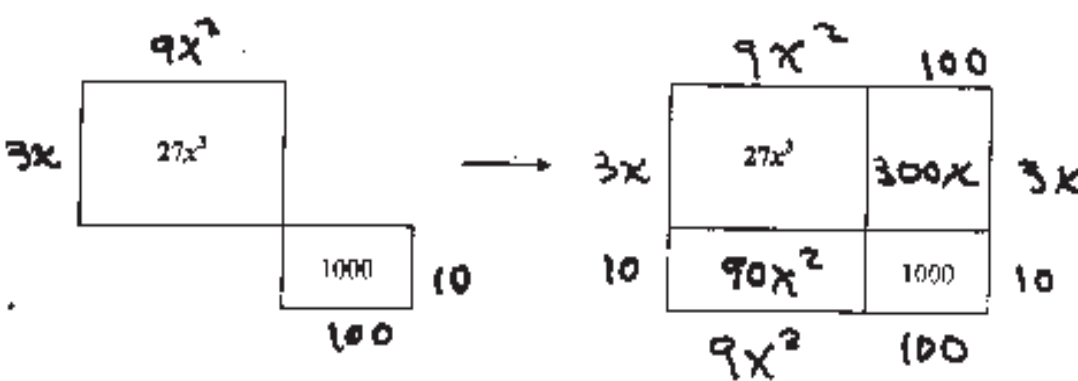
Para factorizar el Ejercicio 18-1, los alumnos ya están familiarizados con el procedimiento de compensación de áreas y participan en la interacción respondiendo a la mayoría de las preguntas hechas por el instructor, en las que no pueden responder se les ayuda, induciéndolos a la respuesta o dando definitivamente la respuesta; y de la misma forma se factorizan los demás ejercicios con la participación de los alumnos que intervienen en la respuesta de las

preguntas que se hacen durante la realización de esta fase. En la Imagen 4.65 se muestra el procedimiento de factorización del Ejercicio 18-1.

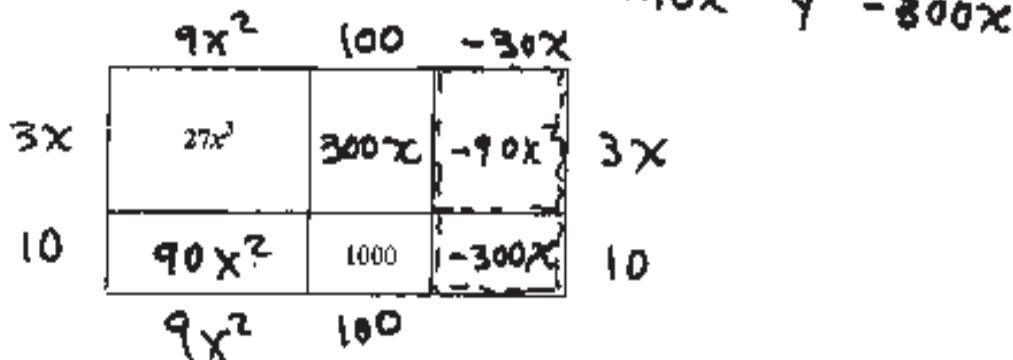
1. Escribe los lados de las figuras rectangulares que representan la suma de cubos $27x^3 + 1000$



a) Cuadrando la suma de cubos:



b) ¿Qué áreas se deben de agregar para compensar áreas?



c) ¿Se puede cuadrar la suma de cubos?

Respuesta: Sí

$$-90x^2 - 300x = (3x+10)(-30x)$$

$$27x^3 + 1000 = (3x+10)(9x^2 + 100 - 30x)$$

Imagen 4.65. Respuesta al Ejercicio 18-1.

• **Trabajo de equipo**

En esta fase se desarrolla la Actividad 19 que consiste en factorizar dos sumas de cubos. Los cuatro equipos factorizan geométicamente el Ejercicio 19-1 y sólo los integrantes del Equipo 2 no pudieron factorizarlo simbólicamente. La Imagen 4.66 muestra cómo logró factorizarlo geométicamente el equipo 4.

1. Factoriza la suma de cubos $x^3 + 8$

a) ¿Cuáles son las áreas que compensan áreas?
 $-4x$ y $-2x^2$

b) ¿Cuál es la base común?
 $-2x$

c) Factoriza la suma de cubos

$$x^3 + 8 = (x + 2)(x^2 + 4 - 2x)$$

Imagen 4.66. Respuesta al Ejercicio 18-1 por el Equipo 4.

En el Ejercicio 19-2, que consiste en factorizar la suma de cubos $64x^3 + 216$, el Equipo 3 lo intentó factorizar primero simbólicamente y no lo logró, desistieron y lo intentaron factorizar

geométricamente, pero no lo terminaron porque cometieron un error y se confundieron, tal vez este error se deba a que en el ejercicio ya no se escribió el procedimiento y no se les auxilió con figuras ni con preguntas, como en los dos ejercicios anteriores. A continuación se reproducen las intervenciones de los estudiantes de este equipo.

Factorización Simbólica

Los integrantes del Equipo 3, Sabino, Juan Carlos y Raúl, encuentran primeramente el monomio y el número que elevados al cubo les de $64x^3$ y 216 : $(4x)^3 = 64x^3$ y $(6)^3 = 216$, luego intentan factorizarlo simbólicamente, auxiliándose de las notas tomadas durante la fase de exposición interactiva de la factorización simbólica del ejercicio $a^3 + b^3$. Este procedimiento se muestra en la figura 4.67¹.

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 + b^2) + (a + b)(1 - ab)$$

$$= (a + b)(a^2 + b^2 - ab)$$

Imagen 4.67. Respuesta al Ejercicio 18-2 por el Equipo 3.

A continuación comentan, discuten y escriben:

Juan Carlos: [Dice a Sabino], abre un paréntesis y pones $4x$ más 6 y lo cierras, abres otro paréntesis y pones $64x^3 + 216$, no espérate,

Sabino: Sería $4x^2$,

Juan Carlos: Sí, más $6x^2$, no, no, me equivoque, es 6 .

Sabino: Escribe $64x^3 + 216 = (4x + 6)(4x^2 + 6)$.

Juan Carlos: Como lo puso el maestro en donde no le entendí [se refiere a la explicación de la fase de exposición interactiva, le dice a Sabino] lo estamos haciendo como en cuadros, le entiendes, dice no, así si, entonces $4x^2$ es la base y $4x$ es la altura,

Juan Carlos: Entonces aquí es 6^2 , y . . .

Sabino: [Escribe $64x^3 + 216 = ((4x + 6)(4x^2 + 6))$],

¹ Esta imagen ha sido tomada del video y restaurada con un editor de fotografías.

Juan Carlos: Ahora pones más y abres un paréntesis y escribes otra vez $4x + 6$, cierra el paréntesis y abres otro y ahí tenemos que buscar un número que,

Sabino: [Escribe $64x^3 + 216 = (4x + 6)(4x^2 + 6) + (4x + 6)(\quad)$],

Juan Carlos: Hay que hacerlo mejor con cuadritos,

Sabino: Pues hay que hacerlo con cuadritos, aunque tenemos que encontrar un número que compense las áreas.

Factorización Geométrica

Juan Carlos: Deja lo hago en cuadritos, ¿qué quedamos que era aquí? [se refiere a los lados del rectángulo de área a^3],

Sabino: $4x$ por $4x^2$,

Investigador: Al estar filmando no pude observar que tenían un error en la base y que obviamente debe ser $16x^2$ en vez de $4x^2$, y así continúan,

Juan Carlos: Y aquí ponemos otro chiquito, entonces aquí 6 y aquí 6^2 [tal como se muestra en la Figura 4.3].

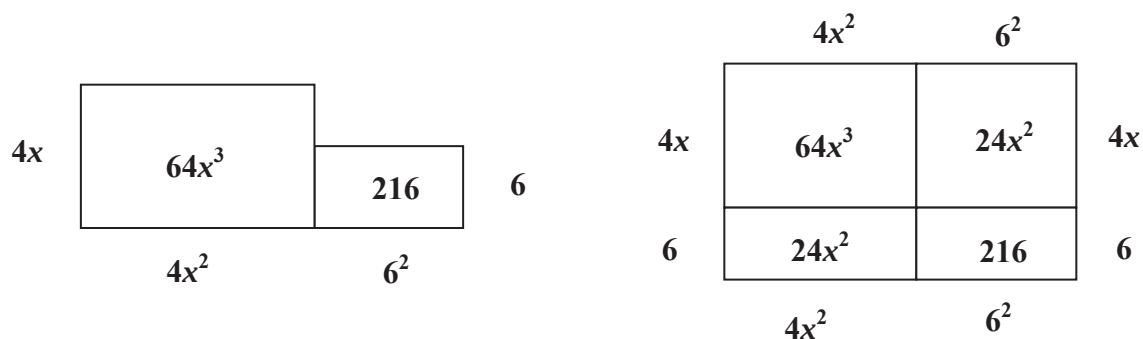


Figura 4.3. Procedimiento del Equipo 3 para factorizar $64x^3 + 216$.

Juan: [Al completar el rectángulo dice], hay esta, ya se compensan las áreas,

Sabino: No,

Juan: ¿Por qué no?

Sabino: Quien sabe.

Juan: Porque no, son iguales no [comete un error al multiplicar 6^2 por $4x$, escribiendo en uno de los rectángulos que agregaron, $24x^2$],

Sabino: [Pregunta al investigador], y que a fuerza tiene que ser uno positivo y uno negativo [se refiere a las áreas que se agregan],

Investigador: No, depende como te resulten, ¿cuál es el polinomio que te dieron? [El investigador interviene con la finalidad de orientarlos un poco]

Sabino: Este, $64x^3 + 216$

Instructor: Entonces ya alteraste el binomio $64x^3 + 216$, [porque agregaste los rectángulos de área $24x^2$, ¿qué debes de hacer, ahora?],

Sabino: Buscar otros para compensar esos dos, [se refiere a compensar los rectángulos de área $24x^2$]

Juan: Ahora tienen que ser negativas $-24x^2$ y $-24x^2$ [se refiere a los dos rectángulos que se tienen que agregar para compensar las áreas y agrega dos rectángulos a la figura anterior, como se muestra en la Figura 4.4].

	$4x^2$	6^2	$-6x^2$	
$4x$	$64x^3$	$24x^2$		$4x$
6	$24x^2$	216		6
	$4x^2$	6^2		

Figura 4.4. Compensación de áreas

Juan Carlos: Entonces aquí sería $-6x^2$ [se refiere a la base común de los rectángulos que agregó],

Sabino: Entonces aquí ya daría x^3 , [se refiere al primer rectángulo que agregó],

Investigador: Ya que no se enteraban que tenían un error en los rectángulos de área $24x^2$, se les comenta que revisen los lados de la figura y vuelvan a calcular las áreas,

Juan Carlos: Los lados si están bien [de nuevo no me percaté del error en la base del primer rectángulo que tienen escrito $4x^2$ en vez de $16x^2$ y continúan con el error],

Instructor: Regresan a una de las primeras figuras y vuelven a calcular las áreas,

Sabino: Aquí debe ser $24x^2$ [rectángulo que agregaron abajo] y acá es $24x^3$ [rectángulo que agregaron arriba para compensar las áreas, ver la siguiente figura],

Raúl: Aquí es 6^2 , igual a 36 y por $4x$ igual a $144x^2$,

Sabino: No, porque si ya quitaste el cuadrado,

Instructor: Cuánto vale esa área,

Sabino: Entonces es $144x$,

Juan: Entonces acá tiene que ser menos $-144x$.

Lo siguen intentando pero la clase se termina y no logran corregir su error y por lo tanto no logran factorizar la suma de cubos $64x^3 + 216$. La Figura 4.5 muestra el procedimiento donde se quedaron.

	$4x^2$	6^2	$-6x^2$	
$4x$	$64x^3$	$144x$	$-144x$	$4x$
6	$24x^2$	216	-36^2	6
	$4x^2$	6^2		

Figura 4.5. Procedimiento del Equipo 3 para factorizar $64x^3 + 216$.

Los equipos 1 y 4 factorizaron simbólicamente el Ejercicio 1–2 en forma correcta; el Equipo 2 lo intentó factorizar geométricamente, pero lo hizo mal.

- **Socialización**

Debido a la circunstancia mencionada en el párrafo anterior, no fue posible llevar a cabo la fase de socialización.

- **Trabajo extra-clase individual**

La Actividad 20 se asignó como trabajo extra-clase para cada uno de los estudiantes, que debe ser entregada al siguiente día. Esta actividad contiene seis ejercicios de factorizaciones de diferencia y suma de potencias; los primeros dos ejercicios son diferencias de cuadrados, el tercero y el quinto son diferencias de potencias cuartas, el cuarto trata de una suma de cubos y sexto es una suma de potencias quintas. Esta actividad sólo fue entregada por cinco estudiantes; todos ellos intentaron factorizarlos simbólicamente. Iskra y Fabiola confundieron

la diferencia de potencias pares con las impares y los tres primeros ejercicios los factorizaron mal, factorizando correctamente sólo el Ejercicio 20-4. En la Imagen 4.68 se ve esta evidencia.

4. Factoriza el binomio $125 + 1000x^3$
 $(5) \vee (10x)^3$
 $125 + 1000 = (100x + 25) [(10x)^3 - (10x)(5) + 5^2]$
 $= (10x + 5)(100x^2 - 50x + 25).$

5. Factoriza la diferencia $16x^4 - 1$
 $(2x)^4 \vee (1)$
 $16x^4 - 1 = (2x^2 - 1) [(2x)^2 + (2x^2)(1) - 1]$
 $= (2x + 1)(4x^2 - 2x^2 - 1).$

Imagen 4.68. Respuesta al Ejercicio 20-4 por Iskra y Fabiola

Miguel factorizó los seis ejercicios pero, al parecer fue asesorado por alguien. En la Imagen 4.69 se pueden observar los procedimientos utilizados.

2. Factoriza el binomio $4x^2 - 25 \Rightarrow 4x^2 - 5^2$
 $(2x - 5)(2x + 5)$
 $\begin{array}{r} 2x - 5 \\ 2x + 5 \\ \hline 4x^2 - 10x \\ + 10x - 25 \\ \hline 4x^2 - 25 \end{array}$

3. Factoriza la diferencia $81a^4 - 16$
 $(9a^2 - 4)(9a^2 + 4)$
 $\begin{array}{r} 9a^2 - 4 \\ 9a^2 + 4 \\ \hline 81a^4 - 36a^2 \\ + 36a^2 - 16 \\ \hline 81a^4 - 16 \end{array}$

Imagen 4.69. Respuesta a los ejercicios 20-2 y 20-3 por Miguel.

José Luis que factorizó los primeros 5 ejercicios correctamente, cometiendo un error en un signo y el sexto no lo intentó, en las imágenes 4.70 y 4.71 se puede observar cómo lo hizo.

1. Factoriza la diferencia de cuadrados $9 - x^2$

$$9 - x^2 = (3 - x)(3 + x)$$

$$(3)^2 = 9 \quad y \quad (x)^2 = x^2$$

Imagen 4.70. Respuesta al Ejercicio 20-1 por José Luis.

4. Factoriza el binomio $125 + 1000x^3$

$$125 + 1000x^3 = (5 + 10x)(5)^2 + (5)(10x) + (10)^2$$

$$= (5 + 10x)(25 + 50x + 100)$$

Imagen 4.71. Respuesta al Ejercicio 20-4 por José Luis.

Gerardo no intentó el sexto ejercicio, factorizó correctamente cuatro ejercicios y sólo cometió un error en el Ejercicio 20-2. La Imagen 4.72 se ve como factoriza correctamente el Ejercicio 20-4.

4. Factoriza el binomio $125 + 1000x^3$

$$125 + 1000x^3 = (5 + 10x)(5)^2 + (5)(10x) + (10)^2$$

$$= (5 + 10x)(25 + 50x + 100)$$

$$(5)^3 = 125 \quad y \quad (10x)^3 = 1000x^3$$

Imagen 4.72. Respuesta al Ejercicio 20-4 por Gerardo.

4.6 Resumen global de los resultados

4.6.1 Exposición interactiva

Durante la realización de esta fase se desarrollan las Actividades 1, 3, 6, 8, 11, 13, 16 y 18, interactuando alumnos e investigador. Las intervenciones se dan mediante preguntas y respuestas.

El objetivo de las actividades es familiarizar a los estudiantes con las ideas básicas del álgebra geométrica que se van a utilizarse en la factorización geométrica; se proporcionan algunas nociones, definiciones y formulan tareas y preguntas que, en principio, los alumnos deben de realizar o contestar. Para aprovechar el tiempo, se utilizó un proyector de acetatos para mostrar una guía de la actividad (explicaciones breves, tareas, preguntas y figuras), a partir de la cual, alumnos junto con el investigador fueron desarrollando y comentando la actividad.

Los alumnos durante la realización de la primera sesión se mostraron un poco nerviosos por la filmación de las fases, la cámara los cohibía e inhibía su participación; la mayoría no contestaban las preguntas, sólo unos cuantos lo hacían; la situación de que hubiera cámara resultó demasiado intrusita en un principio. A pesar de ello, los alumnos mostraron interés e hicieron esfuerzos por responder a las preguntas que surgieron durante la actividad. En la mayoría de los casos, los alumnos dieron la respuesta casi de manera inmediata y en las preguntas que no podían contestar, después de un breve tiempo, se les hacían sugerencias; si aún así no contestaban, se les daba la respuesta.

En las actividades 1 y 3, se retroalimenta a los alumnos con el *concepto de área de una figura rectangular* (tema ya conocido por ellos), se introduce la noción de *representación geométrica* de enteros positivos y potencias enteras positivas mediante el uso de figuras rectangulares (cuadrados y rectángulos), se familiariza a los estudiantes con la representación geométrica de monomios con coeficientes enteros positivos, la noción de la suma geométrica de monomios, a partir de la cual se definen los *términos semejantes* y la suma de monomios o términos que no son semejantes dan origen a polinomios.

En la representación y factorización geométrica de enteros positivos, se abordaron las formas de representar y/o factorizar el número *uno*, el *cero*, los *números primos*, los *números*

compuestos y los *números cuadrados*; a sus representaciones geométricas se les llamó *figuras rectangulares rígidas* de área constante.

También se trató sobre el significado geométrico del producto y división de potencias enteras de la misma base, representando las potencias impares solamente como rectángulos y las pares como cuadrados, a sus figuras rectangulares se les llamó *figuras rectangulares elásticas* o de área variable. Una observación importante, constatada durante el desarrollo de esta fase, para encontrar un lado de la figura rectangular, conocidos su área y uno de sus lados, los alumnos aplicaron la propiedad relativa a la suma de exponentes (en el producto de números con la misma base) y no la propiedad relativa a la diferencia de exponentes (en la división de dos números con la misma base); el instructor explicó la equivalencia de estos dos procedimientos. Se realiza la representación y factorización geométrica de monomios considerando solamente algunas de todas sus posibles figuras rectangulares equivalentes; se realiza también la factorización simbólica y se hace énfasis que esta factorización es dentro de los enteros. Se introduce la noción de *figura rectangular equivalente* para las diferentes representaciones rectangulares.

En la segunda sesión, los alumnos ya se mostraron desinhibidos ante la videocámara, se muestran participativos y con interés, respondiendo a la mayoría de las preguntas que se les hacían durante el desarrollo de la actividad. Se introduce la noción de *cuadrar un polinomio*, a partir de la suma de las figuras geométricas que representan sus términos, y usando el procedimiento de ‘cortar y pegar’ se puede formar o construir una figura rectangular.

Se desarrollan las actividades 6 y 8, en la cuales se aborda el tema de factorización de polinomios por factor común, mediante la suma geométrica de monomios que representan geométricamente figuras rectangulares que comparten un lado o tienen altura común; los alumnos entienden la suma de términos semejantes (reducción de términos semejantes), como la suma de figuras rectangulares que tienen la misma altura o altura común y sus bases se pueden sumar, y la factorización geométrica por factor común, como la suma de figuras rectangulares de altura común (factor común) en el que sus bases no se pueden sumar o reducir.

El tema de factorización por agrupación se desarrolló con bastante fluidez y les resultó muy familiar, dado que comprendieron la factorización por factor común, al inicio se hizo hincapié que el tipo de polinomios que podrían factorizarse por este procedimiento deberían tener un número par de términos, la actividad 8 consiste en factorizar solo polinomios de cuatro términos; para lo cual, primero debe hacerse una doble factorización por factor común, agrupando los términos del polinomio en pares; de tal manera que las figuras rectangulares que representan los términos agrupados tengan un lado común. Por nuestra forma de escribir de izquierda a derecha y que las figuras rectangulares se dibujaran regularmente en forma horizontal, se recomendó que el lado común fuera la altura, obteniéndose dos figuras rectangulares que deberían de tener la base común, si esto no ocurre, tienen que reagrupar los términos hasta lograr este propósito y volver aplicar la factorización por factor común, hasta formar una tercera figura rectangular, lográndose así cuadrar el polinomio y obteniendo su factorización. Se familiariza a los alumnos también con la factorización simbólica, obteniendo el procedimiento a partir de la factorización geométrica. Con estas actividades se observan avances en la comprensión y participación de los estudiantes.

En la tercera sesión se desarrollan las actividades 11 y 13, los alumnos se muestran con más confianza y participación; ya están familiarizados con la dinámica de cómo se desarrolla la fase de exposición interactiva. En la Actividad 11 se trata el tema de la factorización de trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$ con coeficientes enteros positivos, factorizables en los enteros. Se introduce la noción de ‘descomposición de áreas’ como una generalización del método de cortar y pegar.

Se observa en esta sesión que los alumnos no tienen problema con la de representación geométrica de polinomios. Se hace la observación de que para cuadrar un trinomio de segundo grado, se debe construir una figura rectangular, de tal manera que se coloquen sobre una de sus diagonales las figuras rectangulares que no tienen base ni altura común, como es el de los términos ax^2 y c , luego se descompone el rectángulo de área bx en dos rectángulos, tales que cada uno de ellos tenga un lado común con cada una de las figuras rectangulares de área ax^2 y c que no tiene lados en común, estos rectángulos se colocan sobre la otra diagonal, logrando cuadrar así el trinomio. Se deduce la factorización simbólica a partir de la

factorización geométrica, descomponiendo en dos factores los coeficientes a y c , de tal manera que la suma de los productos que se obtienen combinando sus factores dé como resultado el coeficiente b .

En la Actividad 13 se familiariza a los estudiantes con la representación geométrica de los enteros negativos por medio de figuras rectangulares punteadas o discontinuas. También se representan a los enteros positivos como figuras rectangulares continuas de ambos lados positivos o negativos, los cuales también son representados los monomios con coeficientes negativos por medio de figuras rectangulares punteadas. Se hace notar que el signo menos de un entero o coeficiente de un monomio, sólo se representa por una figura rectangular discontinua o punteada y que un lado se debe representar por un entero negativo o monomio con coeficiente negativo y el otro positivo o monomio con coeficiente positivo. También se menciona que si ambos lados se representan por números negativos o positivos, la figura rectangular debe ser continua y que si un lado es positivo y el otro negativo, la figura debe ser discontinua. Se hace énfasis de que las figuras rectangulares continuas representan áreas positivas y las punteadas áreas negativas o viceversa. Se hace la observación que ahora aumentarán al doble las representaciones rectangulares equivalentes y se factorizan trinomios de segundo grado con coeficientes negativos.

En la cuarta sesión, la colaboración y participación de los alumnos continua siendo muy activa, se desarrollan las actividades 16 y 18. Familiarizados los alumnos con los enteros negativos, se introducen los temas de factorización de diferencias y sumas de potencias. Se introduce la noción de ‘compensación de áreas’, que consiste en agregar áreas positivas o negativas y hacer que su suma sea igual a cero. La factorización simbólica que se deduce de la factorización geométrica, resultando ser un procedimiento más complicado para los alumnos.

El desarrollo de la Actividad 16 se prolongo alrededor de 25 minutos. Se comenta que usando la factorización geométrica se puede verificar que la suma de potencias pares no es factorizable en los enteros y que, algebraicamente, se puede comprobar que no es factorizable en los números reales.

Los alumnos ya están familiarizados con el procedimiento de compensación de áreas y participan en la interacción respondiendo a la mayoría de las preguntas hechas por el instructor.

4.6.2 Trabajo en equipo

Se procura que el trabajo en equipo sea colaborativo y participativo, en el que los alumnos discutan, argumenten y debatan los procedimientos empleados y las respuestas obtenidas. De acuerdo con lo establecido en la metodología, y por indicaciones del instructor, se integraron cuatro equipos con tres alumnos cada uno, la composición de los equipos fue decidida por lo propios estudiantes.

En esta sesión se desarrollaron las actividades 2, 4, 7 y 9, debido a que los alumnos estuvieron nerviosos durante la filmación; al principio, casi no interactuaban dentro de los equipos y trataron de realizar las tareas de manera individual. Creemos que esto se debió a dos hechos, por un lado, no estaban acostumbrados a trabajar en equipo y por otro lado, la videograbación que se estaba realizando les ocasionaba incomodidad e inhibía la comunicación, en consecuencia, en esta sesión fue poca la información que se pudo obtener en la filmación sobre los procedimientos y razonamientos que usaron para resolver la actividad 2, cuya duración fue menor que el tiempo asignado (20 minutos), entre los 12 y 15 minutos después de haber iniciado la actividad.

Los equipos 2, 3 y 4, no cometieron errores ni de carácter geométrico ni simbólico, los integrantes del Equipo 1, cometieron errores de sintaxis algebraica: por escribir $a^2 a^2 = a^4$, escribieron $a^2 + a^2 = a^4$. Para encontrar el lado faltante en las representaciones geométricas, al parecer, lo hicieron por medio del producto de potencias de la misma base, no tuvieron la necesidad de usar la división de potencias.

La representación de potencias impares la hicieron mediante rectángulos y la de potencias pares mediante rectángulos y cuadrados, el producto de potencias es algo que se les facilita a los alumnos, como puede verse en el video de estas dos primeras fases. En general, se pudo observar una pronta familiarización con la idea central de ‘descomponer’ expresiones algebraicas simples (monomios) como productos de otros monomios apoyándose en la

representación geométrica de figuras rectangulares, tal como se muestra en las actividades entregadas por los alumnos de los cuatro equipos.

En la Actividad 4, se observa que los estudiantes no manifiestan dificultades con la representación y factorización geométrica de monomios. Sin embargo, una de las representaciones rectangulares que siempre elaboran, además de otras, es aquella que tiene un lado igual a uno y el otro igual al monomio dado. De manera general, los alumnos no tienen dificultades para representar la suma de monomios geométrica ni simbólica.

En la Actividad 7 consta de tres ejercicios sobre factorización por factor común, observándose un buen ambiente de trabajo dentro de los equipos (entusiasmo, participación y comunicación). En general, la actividad resultó fácil y la realizaron correctamente en poco tiempo (entre 5 y 10 minutos). Esto muestra una comprensión relativamente rápida de las componentes básicas del modelo geométrico utilizado y su equivalencia del registro algebraico asociado.

La Actividad 9 consta de tres ejercicios sobre factorización por agrupación, tuvo una duración de 15 minutos aproximadamente. Se puede observar en las actividades producidas que a los cuatro equipos se les facilita la factorización geométrica, por agrupación; los cuatro equipos factorizaron geométricamente los tres ejercicios.

La Actividad 12 consiste de tres ejercicios, sobre factorización de trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$, tuvo una duración de 20 minutos, al parecer los ejercicios cuando $a = 1$, no tienen problema con la factorización y cuando $a \neq 1$, al parecer se les empieza a complicar. De los tres ejercicios solo lograron factorizar dos. La Actividad 14 que incluye cinco ejercicios, los primeros tres son realizados sin dificultad por todos los equipos, el Ejercicio 14-3 es un polinomio con coeficientes enteros positivos y negativos, sólo el Equipo 4 logró factorizarlo y el Ejercicio 14-5 que trata de un trinomio de segundo con coeficientes negativos, no factorizable, lo intentaron pero no comentaron si era o no factorizable. Al parecer la presencia de los números negativos en el polinomio les ocasiona dificultad en la factorización.

La Actividad 17 que consta de cuatro ejercicios y fue desarrollada por los alumnos en alrededor de 15 minutos; quienes se mostraron más familiarizados con los polinomios con coeficientes negativos. Se puede ver tanto en el video como en el trabajo escrito, que los cuatro equipos resolvieron fácilmente los tres primeros ejercicios, el Ejercicio 17-4 sólo logró factorizarlo el Equipo 3. La Actividad 19 consta de dos ejercicios, sobre la factorización de sumas de cubos; los cuatro equipos lo factorizan geométricamente el Ejercicio 19-1, pero equipos 2 y 3 no pudieron factorizarlo simbólicamente, ni geométricamente; el Ejercicio 19-2, consiste en factorizar la suma de cubos $64x^3 + 216$, el equipo 3 lo intentó pero tuvo dificultades simbólica y geométricamente, después de un tiempo desistieron. Cabe mencionar que ya no se mostró el procedimiento y no se les auxilió con figuras, ni con preguntas como en los dos ejercicios anteriores, además de que las potencias son números más grandes. Los equipos 1 y 4 factorizaron simbólicamente el ejercicio 19 – 2 en forma correcta.

4.6.3 socialización

En esta fase se verificó la solución de los ejercicios de las actividades 2, 4, 7, 9, 12, 14, 17 y 19, indagando con los alumnos acerca de la solución. Se les preguntó cómo resolvieron cada uno de los ejercicios de la actividad y ellos iban aportando las soluciones o respuestas, o pasaron al pizarrón a factorizarlos; en esta ocasión se hizo más énfasis en la parte simbólica que en la geométrica con la intención de reforzar los conocimientos adquiridos de una forma geométrica.

El investigador actuó moderando las intervenciones de los alumnos, aclarando dudas que surgieron durante la fase de trabajo en equipo, reforzando y homogenizando los conocimientos adquiridos.

En la primera sesión, se observó una participación más activa por la mayoría de los alumnos, de tal manera que se logró concretizar el procedimiento y la respuesta de los ejercicios de las actividades 2 y 4. En la segunda sesión los alumnos se mostraron con más confianza, optimistas, participando la mayoría en la discusión de la solución de los diferentes ejercicios de la Actividad 7, cuyas soluciones fueron muy similares en los cuatro equipos, la duración de esta fase fue de alrededor de 6 minutos.

En la Actividad 9, además de verificar la factorización de los ejercicios se aclararon los errores cometidos, en particular, en el Ejercicio 9–2. Es importante señalar que en la Actividad 12, los alumnos siguen participando con mucha confianza y factorizan los tres ejercicios haciendo énfasis tanto en la factorización geométrica como en la simbólica. En la Actividad 14 se pregunta a los estudiantes si lograron cuadrar el Ejercicio 14–5, contestan que no. Con la participación de los estudiantes se intenta factorizar simbólicamente el ejercicio y se llega a la conclusión, de que el trinomio no es factorizable en los enteros. En la realización de la Actividad 17, un alumno de cada equipo pasó al pizarrón a explicar la forma en que factorizaron los ejercicios, de manera que el resto de los estudiantes revisaban y contrastaban su propio procedimiento.

Las actividades 17 y 19 se desarrollaron en dos días diferentes y tuvieron una duración de una hora cada una.

4.6.4 Trabajo individual extra-clase

Las actividades 5, 10, 15 y 20 se asignaron a los alumnos como trabajo extra-clase, para ser entregadas al siguiente día. Cada ejercicio de la Actividad 5 fue resuelto sin que se presentaran problemas en la representación y factorización geométrica y simbólica; las preguntas que se hicieron con la intención de darnos cuenta si los alumnos han comprendido algunos definiciones o conceptos, son: ¿es la suma de monomios es un monomio o un polinomio?, ¿cómo se le llama a la suma de términos semejantes?, las cuales fueron resueltas en su mayoría correctamente, no tuvieron problemas para encontrar el máximo común divisor de los monomios que se iban a sumar. Se puede ver en las tareas de la actividad que entienden cuando la suma de monomios se puede cuadrar geométricamente o la suma de monomios es factorizable y reducible a un monomio. El Ejercicios 5–3, se dejó como trabajo extra-clase con la intención de introducir a los alumnos en la factorización de polinomios, tema que se abordó en las siguientes sesiones, mismo que fue resuelto por todos los alumnos.

La Actividad 10 consta de tres ejercicios. El primero es por factor común, todos los alumnos lo factorizaron simbólicamente, aunque algunos de ellos cometieron ciertos errores de sintaxis algebraica al tratar de descomponer cada término del polinomio para encontrar el factor

común, escribieron una suma de los factores en vez de el producto de ellos. El segundo ejercicio es una factorización por agrupación y todos lo factorizaron simbólicamente, pero sólo cuatro de ellos lo factorizaron geométricamente, mientras que el tercer ejercicio $x^2 + 5x + 4$, los seis alumnos de los equipos 2 y 4 lo factorizaron simbólicamente por agrupación, descomponiendo el término $5x$ como $4x + x$ para así factorizar el polinomio. Cabe señalar que cinco alumnos solo hicieron la representación geométrica y Juan Carlos no lo intentó; es importante señalar que después que se terminó la sesión, una vez que se les entregó la Actividad 10, algunos alumnos, entre ellos Estrella, Fabiola, Guadalupe y José Luis, me preguntaron que como se factorizaba el trinomio $x^2 + 5x + 4$, ya que no se podía factorizar por factor común, se les comentó se podía factorizar por agrupación, que aplicaran la descomposición de áreas y el método de cortar y pegar; con un ejemplo lograron factorizar el trinomio, tanto geométricamente, como simbólicamente.

La Actividad 15 contiene tres ejercicios, los dos primeros son trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$ con coeficientes enteros tanto positivos como negativos y sólo ocho estudiantes la entregaron; en el Ejercicio 15–1, todos los alumnos hicieron la representación geométrica y sólo un alumno intentó factorizar, pero no lo logró; el Ejercicio 15–2, sólo Miguel lo factorizó geométricamente, aunque cometió un error al calcular un área; el Ejercicio 15–3, sólo un alumno lo factorizó geométricamente, los demás lo factorizaron simbólicamente la diferencia de cuadrados $x^2 - y^2$ solamente, es posible que estos alumnos fueron asesorados por algún maestro o persona que conoce la factorización simbólica. En la suma de cubos $x^3 + y^3$, seis alumnos escribieron la factorización, cinco de ellos no escribieron ningún procedimiento y Gerardo hizo la división de $x^3 + y^3$ entre $x + y$, y el cociente que obtuvo lo multiplico por $x + y$, escribiendo la factorización como, $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$. Los alumnos que fueron asesorados por alguien, en particular Gerardo, ya no factorizan sumas de cubos geométricamente ni simbólicamente, sino por un procedimiento diferente que se deduce de la factorización geométrica.

La Actividad 20 contiene seis ejercicios de factorizaciones de diferencia y suma de potencias; los primeros dos ejercicios son diferencias de cuadrados, el tercero y el quinto son diferencias de potencias cuartas, el cuarto trata de una suma de cubos y sexto es una suma de potencias

quintas. Esta actividad sólo fue entregada por cinco estudiantes, todos los estudiantes intentaron factorizarlos simbólicamente. Iskra y Fabiola confundieron la diferencia de potencias pares con las impares y los tres primeros ejercicios los factorizaron mal, factorizando correctamente solo el ejercicio 20 – 4. Miguel factorizo los seis ejercicios, pero parece ser que fue asesorado, José Luis que factorizó los primeros cinco correctamente, cometiendo un error en un signo y el sexto no lo intentó. Gerardo no intentó el sexto ejercicio, factorizó correctamente cuatro ejercicios y solo cometió un error en el ejercicio 20–2.

4.7 Análisis de los resultados

En este apartado analizamos los resultados de la aplicación de la propuesta de enseñanza implementada en las cuatro sesiones de trabajo. Este análisis se realizó de acuerdo a las diferentes fases de la aplicación: interactiva, trabajo en equipo, socialización y trabajo extra-clase.

4.7.1 Fase de exposición interactiva

Durante la realización de esta fase se desarrollan las actividades 1, 3, 6, 8, 11, 13, 16 y 18, interactuando alumnos e instructor, las intervenciones se dan mediante preguntas y respuestas.

Los alumnos durante la realización de la primera sesión se mostraron un poco nerviosos por la filmación de las fases, al ver que se acercaba la cámara y se cohibían, inhibiendo su participación. La mayoría no contestaban las preguntas, solo unos cuantos lo hacían; la situación de que hubiera una cámara filmando la implementación de la propuesta de investigación, se manifestaba en una actitud de inactividad. A pesar de que los alumnos se mostraron cohibidos durante la filmación, de la primera sesión, también mostraron interés e hicieron esfuerzos por responder a las preguntas que fueron surgiendo durante la actividad. En la mayoría de los casos, los alumnos dieron la respuesta casi de manera inmediata y, en las preguntas que no podían contestar, después de un breve tiempo se les hacían algunas sugerencias para ayudarles, si aún así no contestaban, se les daba la respuesta.

En la segunda sesión, los alumnos ya se mostraron desinhibidos ante la videocámara, se muestran participativos y con interés, respondiendo a la mayoría de las respuestas que se les

hacían durante el desarrollo de la actividad, en la tercera sesión los alumnos actúan con más confianza y participación, y están familiarizados con la dinámica de cómo se desarrolla la fase de exposición interactiva, y en la cuarta sesión, la colaboración y participación de los alumnos continua siendo muy activa.

4.7.2 Fase de trabajo en equipo

En este apartado presentamos los resultados globales y su análisis del trabajo en equipo desarrollado durante las cuatro sesiones.

El trabajo en equipo es trabajo colaborativo y participativo, en el que los alumnos argumentan y discuten los procedimientos empleados y respuestas obtenidas. De acuerdo con lo establecido en la metodología, por indicaciones del instructor se integraron cuatro equipos con tres alumnos cada uno, la composición de los equipos fue decidida por lo propios estudiantes.

Debido a que los alumnos estuvieron nerviosos durante la filmación, esto repercutió en el trabajo de equipo, y al ver que se acercaba la cámara, dejaban de hacer comentarios e incluso paraban de hacer lo que estaban haciendo. La situación de que hubiera una cámara en el desarrollo de la propuesta de investigación, se manifestaba en una actitud de inactividad. Durante la realización de esta fase se desarrollaron las actividades 2, 4, 7, 9, 12, 14, 17 y 19; con un total de 32 ejercicios.

A continuación se presenta y analiza la información sobre los resultados de los ejercicios que resolvieron en equipo en las cuatro sesiones. Para esto, la información se concentra en la Tabla 4.1, la cual está organizada de la manera siguiente:

- ◆ En la primer columna se indica el orden de las sesiones
- ◆ En la segunda columna aparece la clave del ejercicio (Actividad-Número de ejercicio)
- ◆ En las siguientes 12 columnas (de la 3 a la 14) aparecen las ‘calificaciones’ a cada uno de los ejercicios obtenidas por cada uno de los cuatro equipos (E-1, E-2, E-3 y E-4) con respecto a tres aspectos calificados: representación geométrica básica, factorización geométrica y representación y factorización simbólica; los cuales se refieren a:

Representación geométrica básica: la comprensión y manejo del modelo geométrico en el producto y división de enteros, el producto y división de potencias y, factorización de enteros y monomios, a partir de figuras rectangulares.

Factorización geométrica: la comprensión y uso del modelo geométrico en los diversos tipos de factorización de polinomios por medio de construcciones de figuras rectangulares.

Representación y factorización simbólica: la adquisición y uso del lenguaje algebraico en la factorización de polinomios.

- ◆ Para cada equipo aparecen tres “calificaciones” en cada ejercicio resuelto, correspondientes a cada uno de los tres aspectos descritos anteriormente. Cada “calificación” admite cuatro posibles categorías valorativas excluyentes:

• Lo resolvieron correctamente	× Lo resolvieron incorrectamente
⊗ Lo resolvieron incompleto	○ No lo resolvieron
- ◆ En los ejercicios que no se pide a los alumnos la representación y factorización simbólica se sombrea de gris la casilla de la tabla y si lo intentan se califica de la manera explicada.
- ◆ En las tres últimas columnas (15, 16 y 17) se registra el número de soluciones correctas (de los cuatro equipos) para cada uno de los ejercicios en los tres aspectos considerados en la evaluación: **RGB** (Representación geométrica básica), **FG** (Factorización geométrica) y **RFS** (Representación y factorización simbólica).
- ◆ En la última fila aparece el total de soluciones correctas por cada equipo y en cada uno de los aspectos que se evaluaron.

Tabla 4.1 Resultados de las actividades del trabajo de equipo.

Sesión	Ejercicios	PROCEDIMIENTO ALGEBRAICA												Aciertos por Ejercicio			
		Representación Geométrica				Factorización Geométrica				Factorización Simbólica				RGB	FG	RFS	
Primera	Ejercicios	2-1	•	•	•	•	•	•	•	•					4	4	0
		2-2	•	•	•	•	•	•	•	•					4	4	0
		2-3	•	•	•	•	•	•	•	•					4	4	0
		2-4	•	•	•	•	•	•	•	•					4	4	0
		2-5	•	•	•	•	•	•	•	•					4	4	0
		2-6	•	•	•	•	•	•	•	•			•		4	4	1
		4-1	•	•	•	•	•	•	•	•					4	4	0
		4-2	•	•	•	•	•	•	•	•					4	4	0
		4-3	•	•	•	•	•	•	•	•					4	4	0
		4-4	•	•	•	•	•	⊗	•	•					4	3	0
4-5		•	•	•	○	•	•	•	○					3	3	0	
Segunda		7-1	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	4	4	4
		7-2	•	•	•	•	•	•	•	•					4	4	0
		7-3	•	•	•	•	•	•	•	•					4	4	0
		7-4	•	•	•	•	•	•	•	•					4	4	0
		9-1	•	•	•	•	•	•	•	•					4	4	0
		9-2	○	•	•	•	○	•	•	•	•		•		3	3	2
Tercera <td>9-3</td> <td>○</td> <td>•</td> <td>•</td> <td>•</td> <td>○</td> <td>•</td> <td>•</td> <td>•</td> <td>•</td> <td></td> <td>•</td> <td>⊗</td> <td>3</td> <td>3</td> <td>2</td>		9-3	○	•	•	•	○	•	•	•	•		•	⊗	3	3	2
		12-1	•	•	•	•	•	•	•	•	•	○	•	⊗	4	4	2
		12-2	•	•	•	•	⊗	•	•	×	⊗	○	○	×	4	2	0
		12-3	○	○	•	○	○	○	•	×	•	×		×	1	1	1
		14-1	•	•	•	○	•	•	•	○	•	•	•		3	3	3
		14-2	•	•	•	•	•	•	•	•	○	•	•	•	4	4	3
		14-3	•	•	•	•	•	•	•	•				•	4	4	1
		14-4	○	•	○	•	○	○	⊗	•	×		⊗	⊗	2	1	0
		14-5	○	•	○	○	○	⊗	○	○	×			⊗	1	0	0
Cuarta		17-1	•	•	•	•	•	•	•	•	○	○	○	×	4	4	0
		17-2	•	•	•	•	•	•	•	•	○	○	○	×	4	4	0
		17-3	•	•	•	•	•	•	•	•	⊗	○	•	×	4	4	1
		17-4	○	•	•	○	○	○	•	○	⊗	○	○	⊗	2	1	0
		19-1	•	•	•	•	•	•	•	•	•	⊗	•	•	4	4	3
		19-2	○	⊗	○	○	○	⊗	○	○	⊗		⊗	⊗	0	0	0
	Equipos	E-1	E-2	E-3	E-4	E-1	E-2	E-3	E-4	E-1	E-2	E-3	E-4	110	104	23	
	Aciertos	25	30	29	26	24	26	29	25	7	3	9	4	Totales			

A continuación, se muestra la Tabla 4.2, que es un concentrado de la tabla 4.1 en la cual se registra el número y porcentaje de aciertos, respecto al número de ejercicios que obtuvieron 4, 3, 2, 1 y 0 aciertos (el número máximo de aciertos por ejercicio es 4 porque este es el número de equipos).

Tabla 4.2 Número y porcentajes de aciertos correctos, de un total de 32 Aciertos

No. De aciertos por ejercicio	RGB		FG		RFS		Porcentaje promedio
4	23	72 %	21	66 %	1	3 %	47 %
3	4	13 %	5	16 %	3	9 %	13 %
2	2	6 %	1	3 %	3	9 %	6 %
1	2	6 %	3	9 %	4	12 %	9 %
0	1	3 %	2	6 %	21	66 %	25 %
Porcentaje total de Respuestas correctas	86 %		81 %		51 %		18 %

4.7.3 Interpretación de los resultados

De las tablas 4.1 y 4.2 se observa:

- ♦ Los porcentajes de respuestas correctas son altos en la representación y factorización geométrica, mientras que en la factorización simbólica los porcentajes descienden casi a la mitad
- ♦ No se observan diferencias importantes entre los resultados globales de los cuatro equipos.

En la tabla 4.1 se puede apreciar que, en la resolución de algunos ejercicios, los estudiantes tuvieron algunas dificultades o, por alguna razón, no realizaron las tareas planteadas. De entre estos ejercicios podemos distinguir tres situaciones:

- a) Los resultados fueron regulares o malos (a lo más dos respuestas correctas de los cuatro equipos) en cada uno de los tres aspectos, es el caso de los ejercicios: 12-3, 14-4, 14-5 y 19-2. El ejercicio 12 – 3, la mayoría de los equipos no lo factorizaron porque se terminó el tiempo de la actividad. Les tomó mucho tiempo en factorizar el ejercicio 12 – 2, se observa

que este tipo de trinomios no es fácil de factorizar. El Ejercicio 14–4, es una factorización por factor común con coeficientes enteros positivo y negativos, no fue resuelto, tal vez porque se atravesó el fin de semana y al parecer se desconectaron de la factorización, ya que en la fase de exposición interactiva se inicia con la representación de enteros negativos y no se factoriza ningún ejercicio por factor común con coeficientes negativos.

El ejercicio 14 – 5, es un trinomio de segundo grado, que no es factorizable en los enteros, al parecer hubo intentos por parte de los equipos, ya que resolvían algunas veces los ejercicios en la libreta y luego los pasaban en limpio y no entregaban los intentos que hacían y el ejercicio 19 – 2, trata de suma de quintas potencias, en la fase de exposición interactiva no se factorizó ningún ejemplo de este tipo, esto da la impresión que los alumnos no pueden hacer lo que no ven hacer.

- b) Los resultados fueron regulares o malos en los últimos dos aspectos (FG y RFS): ejercicio 17-4, la actividad 17, está excedida de ejercicios, y tal vez no les alcanzó el tiempo, o se trata de un polinomio que no tiene coeficientes numéricos y esto les acarrea problemas para factorizarlo.
- c) Los resultados fueron regulares o malos (a lo más dos respuestas correctas de los cuatro equipos) en RFS, ejercicios: 7-1, 7-2 y 7-3, no se pide a los alumnos la factorización simbólica, en el ejercicio 7-4 solo se les pregunta a los alumnos si el polinomio es factorizable por factor común y los cuatro equipos responden “NO”, por que no tiene factor común. En los ejercicios 9-1, 9-2, 9-3, no se pide a los alumnos que realicen la factorización simbólica. En los ejercicios 12-1 y 12-2, 17-1, 17-2 y 17-3, se les indica que justifiquen o comprueben simbólicamente, pero en su mayoría los resultados son malos.

4.7.4 Fase de Socialización

En esta fase se verificó la solución de los ejercicios de las actividades 2, 4, 7, 9, 12, 14, 17 y 19 indagando con los alumnos acerca de la solución, se les preguntó cómo resolvieron cada uno de los ejercicios de la actividad y ellos iban aportando las soluciones o respuestas, o pasaron al pizarrón a factorizar los ejercicios; se hizo más énfasis en la parte simbólica que en la geométrica con la intención de reforzar los conocimientos adquiridos de una forma geométrica. El

investigador actuó moderando las intervenciones de los alumnos, aclarando dudas que surgieron durante la fase de trabajo en equipo, reforzando y homogenizando los conocimientos adquiridos.

4.7.5 Fase del trabajo individual extra-clase

De manera similar a como se elaboró la tabla 4.1, se revisan y califican las actividades del trabajo extra-clase individual, considerando en vez de los equipos a cada alumno de manera individual. Se considera solamente el aspecto de la factorización ya sea en forma geométrica o simbólica. En la Tabla 4.3 se registra la información correspondiente a los resultados obtenidos por los alumnos en las actividades 5,10, 15 y 20 (15 ejercicios en total). Las celdas en blanco significan que el alumno no entregó la actividad.

Tabla 4.3 Resultados de las actividades del trabajo extra-clase individual.

Sesión	Ejercicios		PROCEDIMIENTO ALGEBRAICO												Aciertos/
			Factorización Geométrica o Simbólica												Reactivo
Primera	E j e r c i c i o s	5-1	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	12
		5-2	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	12
		5-3	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	12
Segunda		10-1	•	⊗	•	•	•	•	⊗	⊗		•	•	•	8
		10-2	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	12
		10-3	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	12
Tercera		15-1	•	•	⊗	⊗						⊗	⊗	⊗	2
		15-2	×	•	×	×						×	×	×	1
		15-3	×	•	×	•						×	•	×	3
Cuarta		20-1	•	•	•							⊗	⊗		3
		20-2	•	•	⊗							⊗	⊗		2
		20-3	•	•	•							⊗	⊗		3
		20-4	•	•	•							•	•		5
		20-5		•								⊗	⊗		0
		20-6		⊗											0
Alumnos		Luis	Miguel	Gerardo	Mayra	Guadalupe	Estrella	Raúl	Sabino	Juan	Fabiola	Iskra	Miriam	87	
Aciertos		10	13	9	7	6	6	5	5	5	7	8	6	Totales	
Equipos		E - 1			E - 2			E - 3			E - 4				

De la Tabla 5.2 se observa de inmediato que:

- a) Prácticamente los doce alumnos realizaron correctamente todos los ejercicios de las actividades extra-clase correspondientes a la primera y segunda sesión;
- b) A partir de la tercera sesión 5 alumnos ya no entregaron las actividades de las siguientes sesiones y, dos alumnos más sólo entregaron las actividades correspondientes hasta la tercera sesión y;
- c) Sólo cinco alumnos entregaron, aunque de manera incompleta, las actividades de las cuatro sesiones. Pensamos que esto se debió a dos situaciones; la primera, a que tenían otras actividades extra-clase de otras asignaturas, la segunda, la pérdida de interés en esta actividad.

El ejercicio 5-3, el cual se dejó con la intención de introducir a los alumnos en la factorización de polinomios, tema que se abordó en las siguientes sesiones, fue resuelto por todos los alumnos, factorizando geométricamente el polinomio.

El Ejercicio 10-1, es una factorización por factor común, todos los alumnos lo factorizaron simbólicamente, aunque algunos de ellos cometieron ciertos errores de sintaxis algebraica al tratar de descomponer cada término del polinomio, para encontrar el factor común, escribieron una suma de los factores en vez de el producto de ellos, el Ejercicio 10-3, el cual seis alumnos que están integrados en los equipos 2 y 4 lo factorizaron simbólicamente por agrupación, tanto geométricamente, como simbólicamente. El Ejercicio 15-3 en su mayoría los alumnos recibieron ayuda y lograron escribir la factorización solamente, excepto un alumno que la justifica y otro alumno lo factorizó aplicando el método de cortar y pegar. La Actividad 20, solo fue entregada por 5 estudiantes, todos los estudiantes intentaron factorizarlos simbólicamente.

En las actividades de trabajo individual extra-clase, se pudo observar que ‘algunos alumnos fueron apoyados por terceras personas’, ya que los ejercicios los intentaban factorizar simbólicamente y en varios de los casos lo hicieron mal, pues ni siquiera hacían la representación geométrica del polinomio. Los integrantes de los equipos 2 y 4, al parecer resolvieron las actividades en equipo. En este sentido, la información no es muy confiable. Al parecer los

estudiantes en su mayoría solo realizaban las actividades por cumplir, ya que con estas se iba a considerar la primera evaluación parcial del semestre, y algunos se conforman con aprobar la materia.

Capítulo 5

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

5.1 Introducción

Como se comentó al inicio de este trabajo, el álgebra es un área de la matemática en la que la mayoría de los estudiantes de nivel medio (básico y superior) tienen serias dificultades y deficiencias, lo cual contribuye en gran medida al fracaso de los estudiantes en otras áreas de la matemática y en ciencias. En este trabajo hemos elaborado e implementado una propuesta cuyo propósito es introducir al estudiante al tema de la factorización de una manera diferente a la usual y, cuya pretensión es favorecer un acercamiento a los objetos matemáticos con significado. La propuesta se construyó sobre las siguientes bases:

- ◆ El desarrollo histórico del álgebra, en el cual encontramos que la construcción de la simbología y las operaciones algebraicas, como hoy las conocemos, recorrió un largo camino en el transcurso del cual, los matemáticos utilizaron la geometría como un modelo para la resolución de problemas de naturaleza algebraicos.
- ◆ La elaboración de un modelo geométrico intuitivo basado en conocimientos elementales (área del rectángulo, suma y resta de áreas) y en operaciones geométricas intuitivas: *cuadrar, cortar y pegar, descomposición y compensación de áreas*. Además, en este modelo, se incorpora la simbología y sintaxis algebraica necesaria para abordar las situaciones de factorización.
- ◆ Las propuestas didácticas actuales como son: la utilización de múltiples representaciones, el trabajo colaborativo en la realización de actividades de aprendizaje, el establecimiento de conexiones entre diversos temas de matemáticas y el aprendizaje con significado.

Con base a los objetivos de nuestra investigación y la metodología utilizada se realizó el trabajo experimental, el cual generó información suficiente para responder a las preguntas de

investigación consignadas en el Capítulo 1, así como para formular nuestras conclusiones y recomendaciones.

5.2 Discusión en torno a las preguntas de investigación

Con el fin de facilitar la lectura de este apartado escribiremos al inicio de cada parte de esta discusión, la pregunta correspondiente.

¿Es factible elaborar un modelo geométrico intuitivo que permita abordar, con relativa facilidad, la factorización de polinomios típicos de bachillerato?

La elaboración del modelo geométrico ocupa una parte importante de este trabajo, para lo cual se revisaron algunos modelos existentes como es el caso de los bloques de Dienes (Samper, 1996), los AlgeBlocks de Dreyfous (1996) y la Matebloquemática de Mancera (1998). Estos modelos son similares y se centran en la factorización de trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$.

La aportación principal de nuestro modelo reside en la incorporación de los elementos necesarios para poder resolver, no sólo los trinomios cuadrados, sino también otros casos de factorización que se abordan en el Bachillerato. Por un lado, se introduce una representación geométrica apropiada para los números enteros y los monomios, a partir de la cual pueden ser representados los polinomios; por otro lado, se definen las transformaciones geométricas ‘cortar y pegar’ y el método de ‘compensación de áreas’ para ‘cuadrar’ un polinomio, es decir para factorizarlo. Todos estos elementos están basados en conocimientos geométricos sencillos: el área de rectángulo y la invarianza del área en las transformaciones definidas. El modelo elaborado resultó adecuado en la medida en que permite resolver (en el dominio de los enteros) los diferentes tipos de factorización que se abordan en el bachillerato.

Otro aspecto importante de este modelo es que permite darle un sentido a las operaciones algebraicas como la suma, la diferencia, el producto y la división, así como a la igualdad de expresiones algebraicas diferentes. Por otro lado, aunque el proceso de factorización se realiza en

un contexto geométrico, el modelo también incorpora la notación algebraica usual, lo cual facilita la conversión entre los registros geométrico y algebraico.

El Anexo 1 contiene el documento ‘geometría algebraica’, en el que se plasma el modelo geométrico elaborado.

¿Es factible implementar, en nuestro contexto escolar del bachillerato, una propuesta de enseñanza del tema de factorización que se base en este modelo?

Una vez que tenemos un modelo geométrico adecuado para la factorización, la siguiente etapa consistió en elaborar una propuesta de enseñanza basadas en este modelo y que fuera factible de implementarse con estudiantes de Bachillerato.

Para realizar una primera valoración de factibilidad de un acercamiento al tema de factorización mediante nuestro modelo geométrico, se realizó un ensayo piloto con un grupo de estudiantes de primer semestre de Bachillerato. En términos generales, se observó una buena respuesta por parte de los estudiantes en cuanto a comprensión del modelo y resultados favorables en su utilización para factorizar varios casos de polinomios.

Sobre la base de esos resultados y las observaciones que se hicieron en esta etapa, diseñamos una propuesta de enseñanza más completa, basada en el diseño de actividades de aprendizaje. Los resultados de esta aplicación, a un nuevo grupo de alumnos de primer semestre (Capítulo 4) nos indican una respuesta favorable en cuanto a la posibilidad de manejo del modelo geométrico, así como en la posibilidad de generar un ambiente de trabajo más participativo y colectivo. Las videgrabaciones que se realizaron en las cuatro sesiones de trabajo y las producciones escritas de los estudiantes durante éstas dan constancia de esta afirmación.

¿Qué aprendizajes se favorecen con la implementación de esta propuesta de enseñanza?

Es difícil identificar aprendizajes significativos en un proceso de instrucción tan corto, sin embargo sí encontramos indicios de aprendizajes potencialmente significativos, no sólo en el aspecto cognitivo, sino también en la forma de relacionarse con el objeto de estudio; de interactuar con los demás compañeros y con el profesor; y en el desarrollo de actitudes positivas frente a la matemática. Algunos de los aprendizajes potenciales que se observaron son:

- ◆ La representación geométrica de los números y las expresiones algebraicas permite, a los estudiantes, establecer significados geométricos familiares con los símbolos y las operaciones algebraicas. Esto facilitó el entendimiento de los fines y los métodos de la factorización geométrica.
- ◆ Bajo la noción de altura común de los ‘rectángulos algebraicos’ les fue fácil familiarizarse con el factor común y de esta forma saber si la suma de monomios daba como resultado un monomio o un polinomio; y además si éste era factorizable o no, aplicando la noción de la cuadratura de un polinomio (representarlo geométricamente como una figura rectangular).
- ◆ Dado que el proceso de factorización involucra diferentes operaciones algebraicas: suma, resta, producto y división, también el aprendizaje de éstas se vio favorecido por las actividades que realizaron los estudiantes.
- ◆ Los tipos de factorización en los que se observó que los estudiantes mostraron un buen nivel de comprensión y desempeño fueron: factor común, agrupación, trinomios cuadrados (con coeficientes positivos) y diferencias de potencia pares. En las factorizaciones de trinomios cuadrados con coeficientes negativos y, en las sumas y diferencias de potencias cúbicas, se observaron mayores dificultades en los diferentes equipos. Una explicación de esto es que se conjuga el manejo de números y áreas negativas con la complejidad de estos casos de factorización, no obstante hay equipos que llegan al resultado correcto o por lo menos se aproximan bastante a éste. En cualquier caso, los estudiantes hacen intentos de realizar la tarea y, los errores que cometen, también sirven para promover el análisis, la discusión y la autocorrección.

- ◆ Algunos estudiantes utilizan de manera flexible los métodos de factorización, como puede observarse cuando realizan correctamente la factorización simbólica de un trinomio cuadrado mediante el método de agrupación.
- ◆ En general, los estudiantes que participaron en la implementación de la propuesta didáctica, mostraron avances en cuanto a la forma de trabajo en equipo, realizando las tareas matemáticas que se les plantearon, exponiendo y discutiendo sus ideas. Así mismo, mostraron interés y entusiasmo durante la mayor parte del tiempo que trabajaron de esta manera.

¿Qué dificultades se presentan durante la implementación de la propuesta de enseñanza?

Las principales dificultades que se identificaron durante la implementación de la propuesta de enseñanza son:

- ◆ El tiempo que se dedicó a las fases de trabajo interactivo y de socialización resultó insuficiente en varias ocasiones, lo que limitó la participación de los estudiantes en la realización de las actividades que se desarrollaron en estas fases, así como en el intercambio de ideas y discusión de los resultados. Esta situación es difícil de evitar totalmente, ya que es necesario controlar la distribución de tiempos en un curso normal.
- ◆ Se observó que los alumnos no estaban acostumbrados a realizar tareas matemáticas en colaboración con sus compañeros, a comunicar y discutir sus ideas, formular conjeturas, etc., por lo que al principio de la implementación de la propuesta didáctica su actitud fue muy pasiva, aunque esto fue cambiando en el transcurso de las sesiones.
- ◆ Para que los estudiantes se involucren en una dinámica activa, es muy importante que las actividades de aprendizaje estén bien diseñadas. En nuestra experiencia, en general las actividades fueron adecuadas, sin embargo, nos dimos cuenta que para no generar confusiones, es necesario separar en las actividades la parte correspondiente a la factorización geométrica y la factorización simbólica. En nuestro diseño, las tareas de

factorización simbólica se referían a situaciones que ya habían sido resueltas con ‘álgebra geométrica’.

- ◆ En el caso del profesor de matemáticas, hay varios aspectos de la clase que cambian de manera importante. En la medida en que se transfiere la actividad con el objeto de estudio, a los estudiantes, disminuye significativamente el control del profesor sobre el proceso, de manera que no se puede prever completamente el rumbo que tomará éste. Cada estudiante o equipo de trabajo puede seguir distintos caminos y enfrentarse a diferentes dificultades. Ante esto, el profesor debe considerar diversas posibilidades de desarrollo del trabajo de los estudiantes y, en caso de presentarse alguna situación no prevista, ser capaz de comprenderla y, en su caso, dar las orientaciones y/o explicaciones para que los estudiantes prosigan o concluyan con la actividad. Ahora bien, en lo que se refiere a la experiencia que se llevó a cabo, las dificultades que surgieron durante las diferentes fases del trabajo de los estudiantes (interactiva, en equipo e individual) y que pudieron ser identificadas, fueron puestas a discusión y eventualmente superadas. Pero, seguramente muchas otras no pudieron ser identificadas.
- ◆ Fue en las actividades extra-clase en donde se obtuvo una menor respuesta de los estudiantes, aunque se trató de que no les ocupara mucho tiempo. Aún así, todos los alumnos realizaron las actividades de este tipo correspondientes a la primera y segunda sesión; a partir de la tercera sesión varios estudiantes dejaron de hacer tales actividades. Si bien, este comportamiento es frecuente en nuestros estudiantes, es importante y parte de nuestra propuesta, el mantener motivados a los estudiantes en todas las actividades que conforman el proceso de aprendizaje.

5.3 Conclusiones

Para exponer las conclusiones de este trabajo es conveniente recordar nuestro problema de investigación es:

¿En qué medida, la implementación de una propuesta didáctica, basada en el uso de una álgebra geométrica favorece el aprendizaje del tema de factorización en estudiantes de bachillerato?

Con relación a este objetivo, los resultados obtenidos en este trabajo de investigación nos permiten concluir lo siguiente:

- ◆ El desarrollo de un modelo ‘geométrico-algebraico’ que permita resolver los diferentes tipos de factorización que usualmente se tratan en el bachillerato, está en la base de la propuesta didáctica que se propone para introducir a los estudiantes, no sólo en este tema, sino en otros varios aspectos y temas del álgebra: simbolización, adición, multiplicación, división. Una ventaja de este modelo es que, los referentes geométricos sobre los que se establece, permiten construir significados ‘concretos’ sobre los polinomios y las operaciones que se emplean para su factorización.
- ◆ Mediante el diseño de actividades de aprendizaje basadas en el modelo geométrico y en un enfoque didáctico activo, se dio forma a la propuesta de enseñanza sobre el tema de factorización dirigida a alumnos de primer semestre de bachillerato. El reto consistió en construir, con estas actividades, una estrategia para promover las interacciones convenientes en el salón de clase, que generaran aprendizajes potencialmente significativos e identificables. La implementación de la propuesta de enseñanza y los resultados observados nos permiten concluir que logramos avances con relación a este punto:
 - A los alumnos no les fue difícil entender el modelo geométrico-algebraico y utilizarlo en casi todos los casos de factorización. En muy pocos casos, los estudiantes no pudieron realizar las tareas que se les plantearon en clase.
 - Los alumnos mostraron un buen nivel de aceptación al enfoque didáctico implementado, lo cual no significa que hayan asumido cabalmente el rol pretendido. En este sentido, habrá que considerar que no sólo los estudiantes no están familiarizados con este enfoque, sino que tampoco el profesor tenía experiencia en su

aplicación. Tomando en cuenta lo anterior y la brevedad de la experiencia realizada, los avances logrados fueron importantes.

- Si bien se identificaron deficiencias y errores en el diseño de las actividades y en la implementación, éstos no afectaron sensiblemente los propósitos contemplados. En cierto modo esto es también parte del proceso de investigación. Aún con esto, los materiales elaborados son un producto de este trabajo, a partir del cual, se puede realizar una versión mejorada.

- ◆ Con relación a los aprendizajes logrados, en la discusión de la tercera pregunta de investigación se han señalado los aprendizajes potenciales que se identificaron al implementar la propuesta didáctica. Cabe aclarar que éstos corresponden a un nivel de construcción intuitiva (referido a un contexto geométrico) de conocimientos algebraicos conceptuales y procedimentales relativos al tema de factorización. Para transitar a un nivel de tratamiento algebraico más formal (simbólico) en el que los estudiantes ya no requieran de referentes geométricos para comprender los fines de la factorización, sus métodos y sus relaciones con otros temas (por ejemplo, resolución de ecuaciones), se requiere un proceso de aprendizaje más prolongado que bien puede abarcar todo el bachillerato.

5.4 Comentarios generales

Consideramos pertinente realizar algunas reflexiones relacionadas con la experiencia investigativa que reportamos en esta tesis.

El álgebra ocupa un lugar importante de las matemáticas escolares en la educación media. Su aprendizaje inicia en el primer año de secundaria, continuando durante todo este ciclo escolar y el bachillerato, en donde se podría afirmar que es el eje fundamental del currículo de matemáticas. Sin embargo, muy pocos estudiantes logran un nivel de competencia aceptable.

En este trabajo se ha presentado una propuesta sobre el aprendizaje de la factorización en el bachillerato, la cual se basa en un modelo geométrico y un enfoque constructivista que pretende favorecer ambientes de aprendizaje significativo de los objetos matemáticos.

Si bien, la implementación experimental de la propuesta arrojó resultados prometedores, en cuanto a su aplicabilidad y la generación de aprendizajes significativos. También nos mostró, que la complejidad del proceso educativo y su inercia, es un obstáculo para la incorporación de nuevas propuestas de enseñanza. En este sentido, creemos que la implementación en el aula requiere de un proceso más largo, en el cual deberán hacerse los ajustes que la experiencia indique.

El uso del modelo geométrico en álgebra no se reduce al tema de factorización, también puede emplearse en temas como ecuaciones. De manera que, lo que se haya invertido para familiarizar a los estudiantes con el modelo, también puede aprovecharse en el aprendizaje otros temas.

Por otro lado, aunque con la aplicación del modelo geométrico en el aprendizaje del álgebra se obtengan resultados positivos, no creemos que sea la única propuesta que favorezca aprendizajes significativos. Seguramente existen otras propuestas y otros recursos que promueven aprendizajes similares o que se enfocan a otros aspectos del álgebra. El tiempo y las experiencias de los docentes en el aula, definirán la conveniencia de cada una de ellas.

ANEXO 1

MODELO

GEOMÉTRICO-SIMBÓLICO

INTUITIVO

ANEXO 1

MODELO GEOMÉTRICO – SIMBÓLICO INTUITIVO

El modelo geométrico-simbólico que nos proponemos desarrollar para realizar la propuesta de enseñanza para el tema de factorización algebraica, se hace de manera intuitiva, estableciendo todos los elementos, nociones y definiciones necesarios para llevar a cabo esta propuesta de investigación. El punto de partida de este modelo son algunas definiciones, postulados y nociones comunes de la geometría euclidea¹ (Heath, 1956).

Definiciones:

- ◆ Punto ² es lo que no tiene partes.
- ◆ Línea es una longitud sin anchura.
- ◆ Línea recta o recta es la que yace por igual sobre sus puntos.
- ◆ Superficie es lo que tiene largo y ancho.
- ◆ Los extremos de una superficie son líneas.
- ◆ Superficie plana, es la que yace por igual sobre sus líneas rectas.
- ◆ Ángulo plano es la inclinación de dos líneas que se encuentran en un plano y no yacen las dos sobre una recta.
- ◆ Si las dos líneas que contienen el ángulo son rectas el ángulo se llama rectilíneo.
- ◆ Si una recta trazada sobre otra forma con ella dos ángulos contiguos iguales, cada uno de ellos es recto, y la recta se llama perpendicular a aquella sobre la cual se trazó.
- ◆ Límite es el extremo de algo.
- ◆ Figura es lo comprendido por uno o varios límites.
- ◆ Figuras rectilíneas son las formadas por rectas: cuadriláteras formadas por cuatro líneas.
- ◆ Entre las figuras cuadriláteras el cuadrado es equilátero y equiángulo y el rectángulo es equiángulo, y son llamadas figuras rectangulares.

¹ Las definiciones y postulados tomados de la obra “*Elementos de Euclides*”.

² La palabra punto significa “señal”, y se caracteriza por su indivisibilidad.

- ◆ Rectas paralelas son las que estando en un mismo plano y prolongadas al infinito, no se encuentran.

Postulados:

- ◆ Trazar una línea recta desde un punto a otro punto cualquiera.
- ◆ Prolongar de una manera ilimitada en una línea limitada.
- ◆ Todos los ángulos rectos son iguales.

Nociones comunes:

- ◆ Cosas iguales a una misma cosa son iguales entre si.
- ◆ Si a cosas iguales se agregan cosas iguales los totales son iguales.
- ◆ Si de cosas iguales le quitan cosas iguales, los restos son iguales.
- ◆ Si a cosas desiguales se agregan cosas iguales los totales son desiguales.
- ◆ Las cosas dobles de una misma cosa son iguales entre si.
- ◆ Las cosas mitades de una misma cosa son iguales entre si.
- ◆ Las cosas congruentes entre si son iguales entre si.
- ◆ El todo es mayor que la parte.
- ◆ Dos rectas no comprenden espacio.

Es importante destacar que este modelo no es nuevo, los modelos geométricos han sido desarrollados desde la antigüedad, según Høyrup (1985,1986), (citado por Radford, 1996), los babilonios lo usaron para resolver ecuaciones, cuadráticas.

Euclides para demostrar sus proposiciones en los *Elementos*, Al-Jwarizmi para resolver ecuaciones cuadráticas, Tartaglia, Cardano, Ferrari que resolvieron la ecuaciones cúbicas y cuartitas por medio de figuras rectangulares, hasta hoy en nuestros días se siguen empleando por medio de representaciones geométricas o materiales concretos, como es el caso de los Bloques de Dienes (Dreyfous, 1996 y Mancera, 1998). Nos proponemos ampliar este modelo incorporando otros elementos, nociones, conceptos y definiciones de tal manera que cubra las expectativas para cubrir el tema de factorización y posteriormente implementar otras propuestas de investigación sobre otros temas de álgebra, como es el caso de la multiplicación, división, adición y sustracción de polinomios, ecuaciones cuadráticas y de grado superior cuyas raíces son enteros, etc.

Este modelo incorpora: representaciones, nociones, definiciones y postulados y la simbología algebraica actual ya conocidos; así como otras nociones, definiciones y procedimientos geométricos que se definen en este modelo, para no diferir de los modelos existentes, le llamaremos con el mismo nombre que han utilizado “Álgebra Geométrica”.

ÁLGEBRA GEOMÉTRICA

Las figuras geométricas que se utilizaran en el diseño de este modelo geométrico, son: puntos, segmentos, cuadrados y rectángulos; serán llamadas *figuras rectangulares* o *rectángulos algebraicos*, los cuadrados y rectángulos. La medida de estas figuras geométricas se les llama “magnitudes geométricas” (longitudes de segmentos o áreas de cuadrados o rectángulos). Para referirnos al cuadrado o al rectángulo en lo sucesivo utilizaremos el nombre de *figura rectangular*.

Los objetos de trabajo del alumno son: lápiz, papel y una regla o escuadra, se recomienda papel cuadriculado de diferentes escalas de preferencia milimétrico, en el que el alumno puede dibujar a escala si lo desea las figuras geométricas o simplemente hacerlas representativas.

El curso de álgebra geométrica se basa en el **concepto de área**, considerando: números, monomios y términos de un polinomio como “*cuadrados o rectángulos algebraicos*”; cuya medida de sus áreas, será el valor numérico de los términos del polinomio.

Para representar geométricamente un polinomio se introduce la noción de ***figura rectangular rectilínea*** (el cual será definido más adelante), siendo la medida de su área igual al valor numérico del polinomio. En el diseño de este curso carece de sentido usar cualquier otro tipo de figuras geométricas, ya que los conceptos algebraicos del álgebra de bachillerato pueden comprenderse solo con estas dos formas de figuras. Este modelo geométrico se ha elaborado con la intención de promover el aprendizaje de algunos temas del curso de álgebra de bachillerato, especialmente el de factorización y el de ecuaciones algebraicas, limitándolo a los números enteros, aunque cabe señalar que se puede también aplicar para algunos números racionales y reales.

1.1 Figuras geométricas

El punto es considerado como la figura geométrica de longitud y área igual a cero.

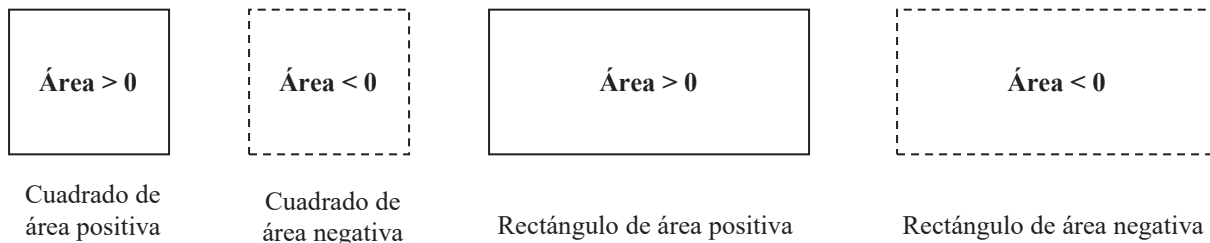
$$\bullet$$

$$\text{Longitud} = 0 \quad \text{y} \quad \text{Área} = 0$$

El segmento es considerado como la figura geométrica de longitud diferente de cero y área igual a cero, será dibujado con una línea continua para representar un número positivo, segmento o longitud positiva y con una línea discontinua o punteada para representar un número negativo, segmento o longitud negativa.

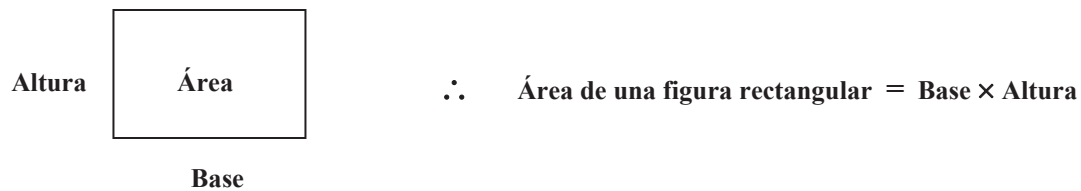
----- $\text{Longitud} > 0 \quad \text{y} \quad \text{Área} = 0$ Número Positivo	----- $\text{Longitud} < 0 \quad \text{y} \quad \text{Área} = 0$ Número Negativo
---	---

Las figuras rectangulares (cuadrados y rectángulos), tienen área diferente de cero y serán dibujados con líneas continuas para representar: números positivos, monomios y términos de los polinomios con coeficientes positivos, los cuales representaran áreas positivas, y con líneas discontinuas o punteadas para representar: números negativos, monomios y términos de los polinomios con coeficientes negativos, los cuales representaran áreas negativas.



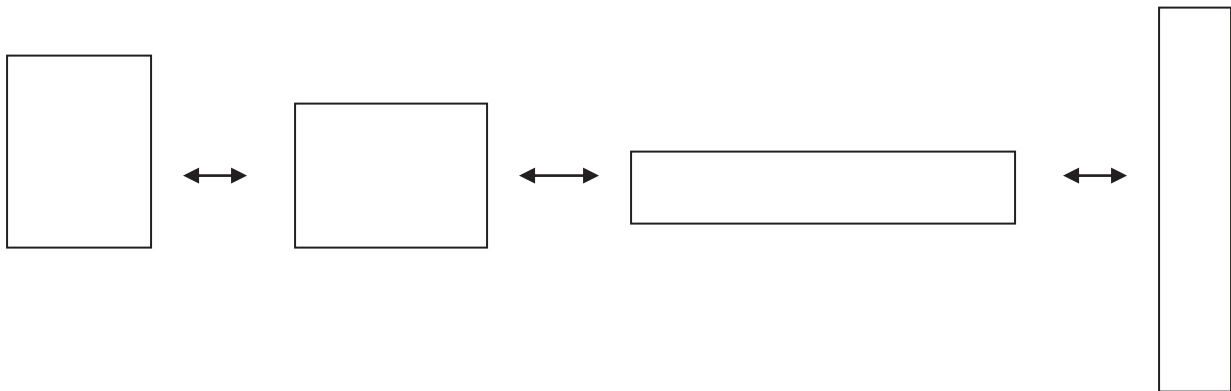
1.1 Área de una figura rectangular

El área de una figura rectangular se define como el producto de su base y su altura, o bien como el producto de sus lados.



1.2 Figuras rectangulares equivalentes

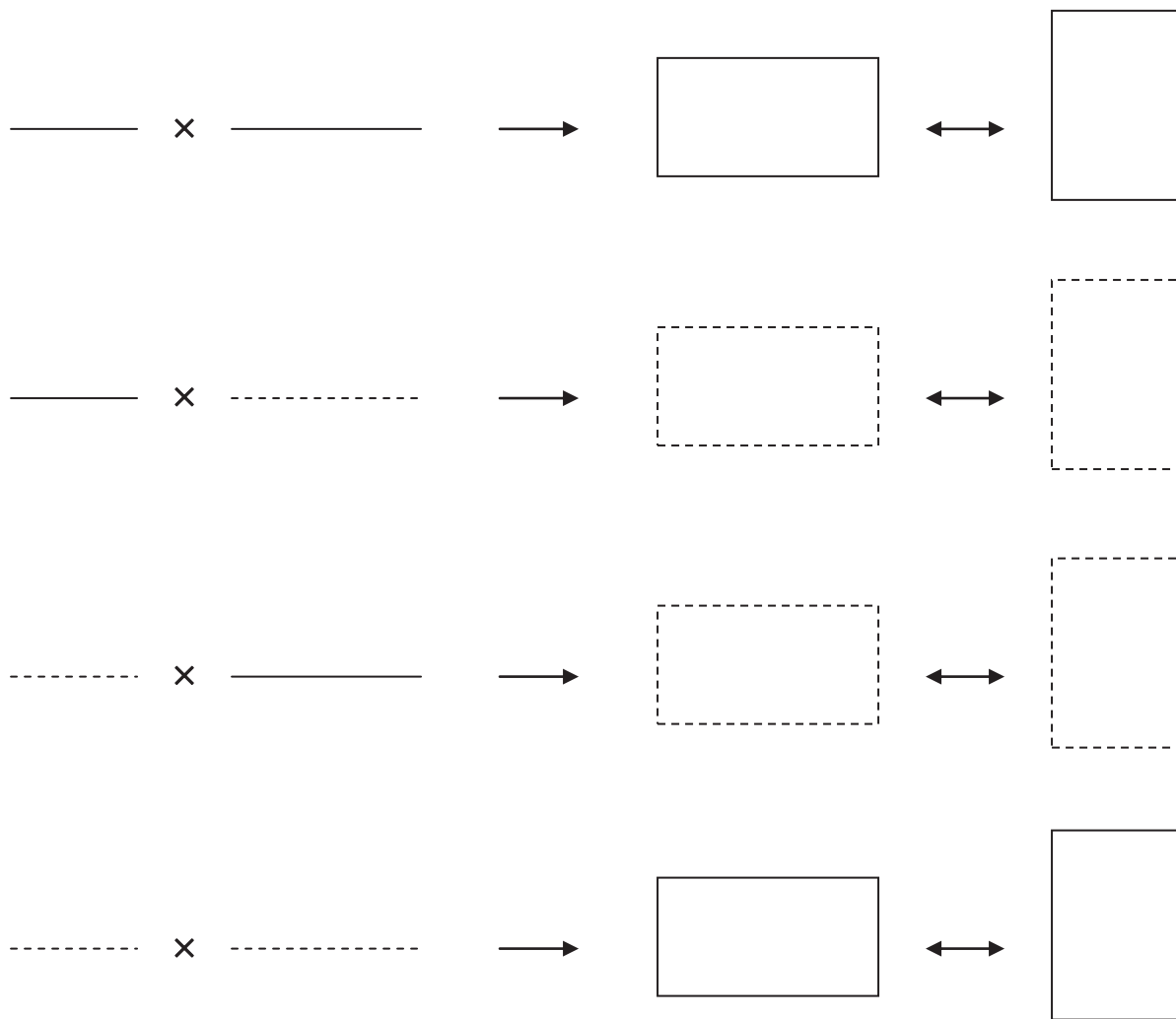
Serán llamadas *figuras rectangulares equivalentes* a los cuadrados o rectángulos que tengan *igual área* y podrán ser sustituidos o remplazados uno por otro. Para indicar que dos figuras son equivalentes se utilizará una doble flecha entre las figuras rectangulares.



Las áreas de estas figuras no cambian a las operaciones de rotación o traslación.

1.3 Operación rectangular

Todo número puede expresarse como un producto de dos números, y dado que en geometría euclidiana un número es un segmento, para fines de este curso, el producto de dos segmentos consiste en colocarlos perpendicularmente haciendo coincidir dos de sus extremos, obteniéndose solamente un cuadrado o rectángulo; es decir, el producto de segmentos se puede representar gráficamente por una figura rectangular y será llamado “*producto rectangular* u *operación rectangular*”. Para este curso serán utilizados tanto segmentos continuos como discontinuos o punteados y figuras rectangulares con líneas continuas y discontinuas o punteadas. Se definen los productos de segmentos continuos y punteados tal como se representan a continuación:



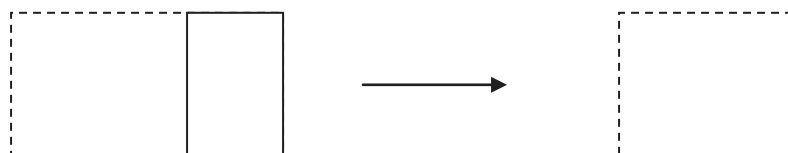
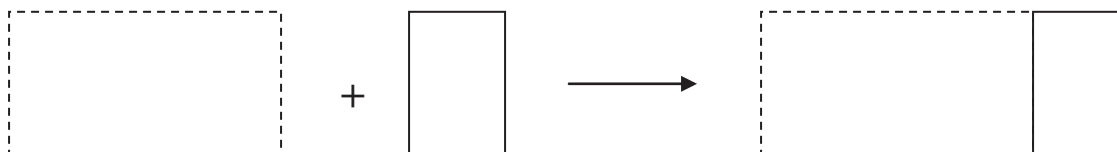
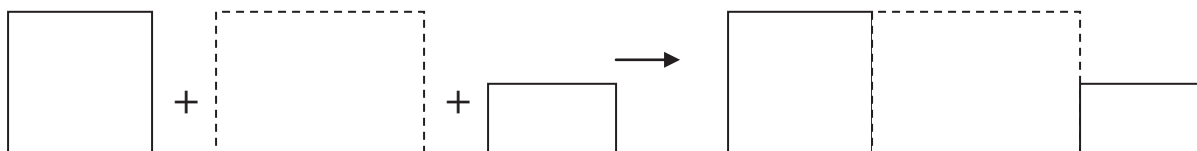
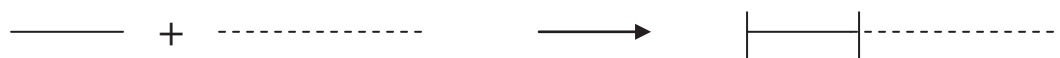
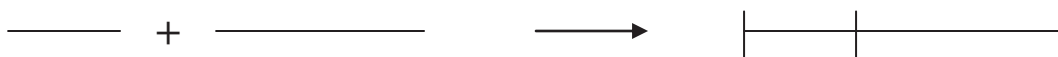
La flecha en un solo sentido indica el siguiente paso o secuencia que ha de realizarse o la figura que se obtiene después de la suma geométrica y la doble flecha indica que no importa como se multipliquen los segmentos, en forma horizontal o vertical, se obtienen figuras rectangulares equivalentes, como ya se dijo anteriormente.

En este curso carece de sentido el producto de segmentos por figuras rectangulares y el de figuras rectangulares por figuras rectangulares.

1.4 Operación lineal

Todo número puede descomponerse mediante la adición o sustracción de dos o más números y como cada uno de estos puede representar una magnitud geométrica (longitud de un segmento o

área de un cuadrado o rectángulo). La adición o sustracción de segmentos, cuadrados o rectángulos consiste en adjuntarlos, haciéndolos coincidir sobre una línea recta; obteniéndose en la adición o sustracción de segmentos un segmento de mayor o menor longitud o un punto y en la adición o sustracción de cuadrados o rectángulos un cuadrado o un rectángulo o bien una figura de diferentes alturas formada por estos; es decir se obtiene una figura de la misma especie, a la adición o sustracción de segmentos cuadrados o rectángulos será llamada “*operación lineal*”.



Tanto segmentos o figuras rectangulares cuando una sea continua y la otra punteada se pueden sobreponer o traslapar para determinar la longitud del segmento o área de la figura rectangular suma o diferencia.

1.5 Figura rectangular rectilínea

Una *figura rectangular rectilínea*, se define como la figura geométrica que se obtiene de adicionar rectángulos o cuadrados, cuyas bases se hacen coincidir sobre una línea recta, la suma de sus bases es igual a la base de la figura rectangular rectilínea, y como consecuencia puede tener una o varias alturas. Una figura rectangular rectilínea puede tener diversas.

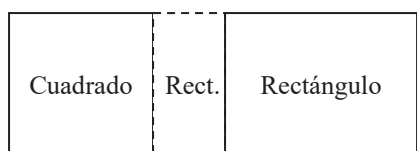


Figura rectangular rectilínea
de una sola altura

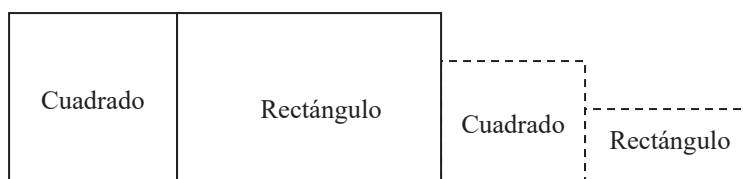


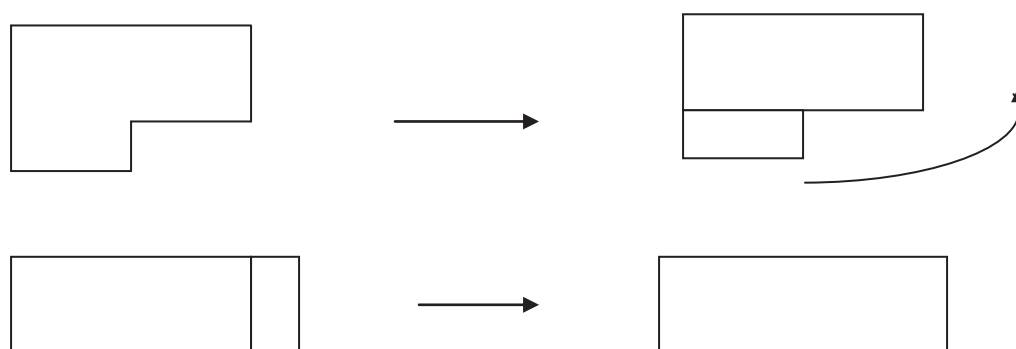
Figura rectangular rectilínea
de varias alturas

A continuación se describe el uso de tres métodos que serán de gran utilidad en la factorización geométrica.

1.6 Método de cortar y pegar

El origen del álgebra tiene sus raíces en la geometría (Høyrup, 1987; citado por Radford, 1996, p. 40). El método de la geometría no-deductiva de cortar y pegar es muy antiguo y como sabemos fue usado por civilizaciones antiguas (los babilonios), para resolver problemas relacionados con áreas (ecuaciones cuadráticas), el *cual consiste en dividir y mover las figuras recortadas a cualquier otra posición y adherirla o pegarla a la figura, para formar otra figura*, el procedimiento no altera el área de la figura original, aunque esta cambie de forma. Este procedimiento de cortar y pegar involucra dos operaciones: *traslación* o *rotación*. La figura rectangular una vez cortada se traslada al lugar donde deberá ser pegada y si es necesario se lleva a cabo una rotación para hacer coincidir sus lados con los de la figura donde va hacer pegada.

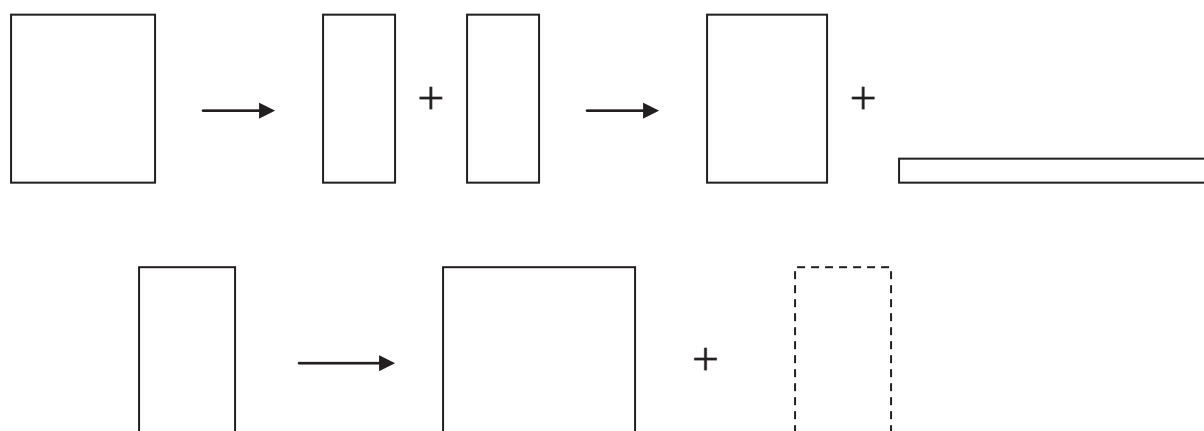
Representar geométricamente un problema como un área, implica construir una figura rectangular cuyos lados es su solución, esta es una forma más comprensiva para encontrar su solución; aunque el significado del problema no tenga que ver nada con el concepto área. En la figura rectangular rectilínea siguiente el rectángulo inferior tiene la base igual que la altura que el rectángulo superior, el cual puede ser cortado y pegado a la derecha o izquierda del superior, este procedimiento se ilustra a continuación.



Obteniéndose el siguiente rectángulo, cuya área es igual a la de la figura original.

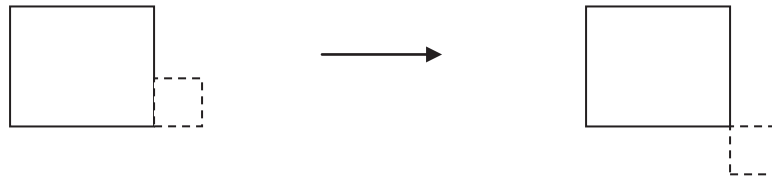
1.7 Descomposición de áreas

La *descomposición* de una figura rectangular, consiste en descomponer, separar o dividir en dos o más figuras rectangulares, cuya suma de sus áreas es igual al área de la figura a descomponer, la descomposición de áreas es de gran importancia en la factorización de polinomios, algebraicamente consiste descomponer un término algebraico en dos o más términos semejantes, cuya suma sea igual a dicho término algebraico.

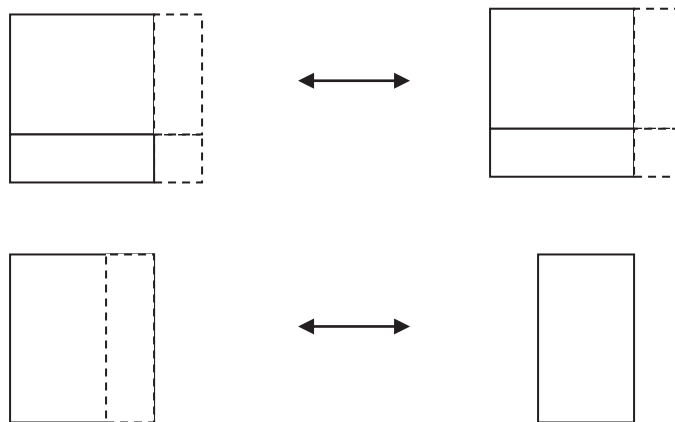


1.8 Compensación de áreas

La compensación de áreas consiste en agregar o sumar áreas positivas o negativas, de tal manera que se compensen las áreas para no alterar el polinomio y poder construir o formar la figura rectangular deseada.



Para construir el rectángulo se tienen que agregar o sumar dos áreas, dado que la figura rectangular rectilínea consta de dos cuadrados, ambas áreas son del mismo tamaño, por lo tanto se debe de agregar un área positiva y la otra negativa para compensar el área de la figura original, es decir no alterarla y de esta forma se logra construir el rectángulo deseado.



El mismo procedimiento se sigue si la figura rectangular rectilínea consta de dos rectángulos, solo que para construir el rectángulo se tienen que agregar dos áreas positivas y dos negativas.

El método de corar y pegar, la descomposición y compensación de áreas es de vital importancia en la factorización geométrica de polinomios y en el cálculo de raíces de polinomios.

2. Representación geométrica

Para representar geoméricamente números, literales, monomios y términos algebraicos, el alumno puede hacerlo por medio de *dibujos representativos* de diferentes tamaños; así segmentos, cuadrados o rectángulos, cuyos lados sean números o términos diferentes deberán ser representados por diferentes longitudes. Se puede evitar confusiones si el alumno *dibuja a escala en papel cuadriculado o milimétrico* cada uno de las longitudes; aunque no se recomienda dado que el proceso se vuelve más tedioso y se requiere de mucho tiempo.

2.1 Escala

Una *escala* es una relación que se establece por una *razón* de dos magnitudes para hacer representaciones gráficas o de cualquier otra índole, y que para representar múltiplos de estas magnitudes, se utiliza el concepto de proporcionalidad. Una escala se denota por $x:y$, en la que se establece que la magnitud x equivale a la magnitud y , siendo x y y dos números iguales o diferentes, algunos ejemplos de escalas más comunes son: **1:1**, **1:2**, **1:0.5**, **2:1**, **10:1**, etc.

En este curso el alumno hará el uso de **representaciones gráficas a escala**, es decir; *una cierta cantidad de una magnitud geométrica será representada por una cierta longitud o área del papel milimétrico* (un centímetro, cinco centímetros, medio centímetro, un milímetro, tres milímetros, etc.). La *escala es de área*, si se toma como unidad un cuadrado del papel milimétrico; la *escala es de longitud* si se toma como unidad un segmento de cierta longitud. Por ejemplo: si una unidad de una magnitud geométrica es representada por unidad de longitud o área en el papel milimétrico, la escala se llama “uno a uno” y se denota o representa por **1:1**, si dos unidades de una magnitud geométrica son representadas en el papel milimétrico por una unidad, la escala es “dos a uno” (**1:2**) o bien si la unidad la una magnitud geométrica se representa por dos unidades en el papel milimétrico, la escala es “dos a uno” (**2:1**), etc. Para establecer las escalas, se recomienda para los números usar centímetros o medios centímetros solamente, para las literales se recomienda tomar un cierto número de centímetros y de milímetros y para las escalas de los múltiplos, sumas, diferencias, productos o potencias, el alumno debe usar la calculadora y con los valores asignados en las escalas, calcular los múltiplos, sumas, diferencias, productos o potencias (ejercicio que permite desarrollar la habilidad numérica en el alumno) para determinar el número

de centímetros y milímetros con que habrán de dibujarse en el papel milimétrico. Cuando los múltiplos, sumas, diferencias, productos o potencias coincidan en longitud o área, se tendrán que reelegir o cambiar las escalas.

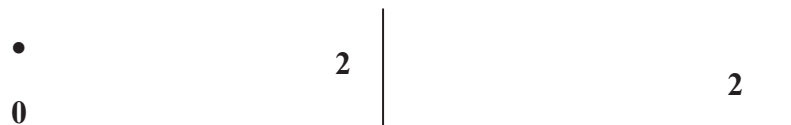
Por ejemplo: el número **1** puede ser representado en el papel milimétrico por un centímetro, escala **1:1** o por medio centímetro, escala **1:0.5** o **2:1**, en cambio si se tienen en un mismo monomio o polinomio las literales **a** y **x** se puede representar a **x** por dos centímetros y tres milímetros, escala **x:2.3** y a la literal **a** por tres centímetros y un milímetro, escala **a:3.1**, etc.

Si el estudiante decide dibujar a escala las figuras rectangulares, se le recomienda usar *papel milimétrico* y una *calculadora*, no debe olvidar elegir una escala conveniente; es decir una escala que le permita poder dibujar a escala segmentos, cuadrados o rectángulos ni muy pequeños ni muy grandes en el papel milimétrico.

A continuación se representan geoméricamente al cero, números positivos, negativos, literales, términos algebraicos, monomios y polinomios.

2.2 El cero, números positivos y negativos

El número cero es representado en geometría euclidiana por un punto, dado que se admite que el punto no tiene dimensiones, es decir no tiene longitud, ni área y ni volumen, aquí se representa al cero como una figura rectangular de área igual a cero: *de base igual a cero y altura diferente de cero o base diferente de cero y altura igual a cero.*



$$0 = (\quad) (\quad)$$

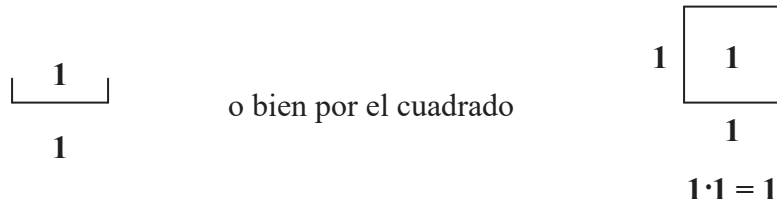
$$0 = (\quad) (\quad)$$

$$0 = (\quad) (\quad)$$

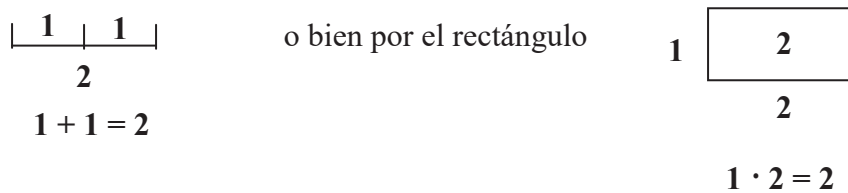
Los números diferentes de cero, tanto positivos como negativos representan segmentos, cuadrados o rectángulos “*rígidos o inelásticos*”; de longitud o área fija o constante.

Los *números positivos* pueden representarse mediante segmentos, cuadrados o rectángulos de *líneas continuas*, los cuales representarán longitudes o áreas positivas.

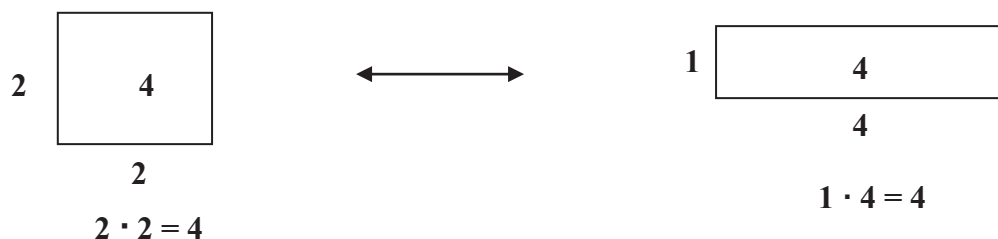
El número **1**, puede representarse por el segmento unitario o de una unidad de longitud o bien dado que se escribe como $1 = 1 \times 1$, puede también representarse como el cuadrado unitario o de una unidad de área, de base **1** y altura **1** o de lados **1** y **1**.



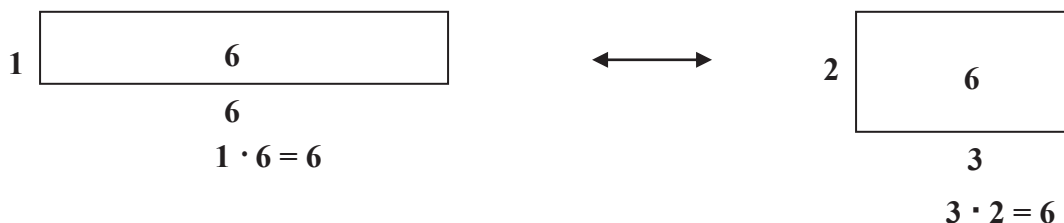
El número **2** puede representar un segmento de dos unidades de longitud o bien por el rectángulo de lados **1** y **2**.



El numero **4** puede ser representado por un cuadrado de **2** por **2** o por el rectángulo de lados **1** y **2**.



El número **6** puede se representado por un rectángulo de área **6**, de base **1** y altura **6** o de altura **2** y de base **3**.



El producto de números positivos representa cuadrados o rectángulos de áreas positivas, dibujados con líneas continuas.

Los números negativos se pueden representar mediante segmentos, cuadrados o rectángulos de líneas discontinuas o punteadas y por lo tanto representarán longitudes o áreas negativas.

El número -1 puede ser representado por un segmento unitario o bien por un cuadrado unitario punteado o discontinuo, dado que -1 se puede escribir como $-1 \cdot 1 = (1)(-1) = -1$.

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \text{---}1\text{---} \\ 1 \end{array} & \text{o bien por el cuadrado} & \begin{array}{c} \text{---}1\text{---} \\ 1 \\ -1 \cdot 1 = -1 \end{array} \end{array}$$

El número 1 puede ser representado también por un cuadrado unitario continuo de lados -1 y -1 , dado que el 1 se puede escribir como $(-1)(-1) = 1$.

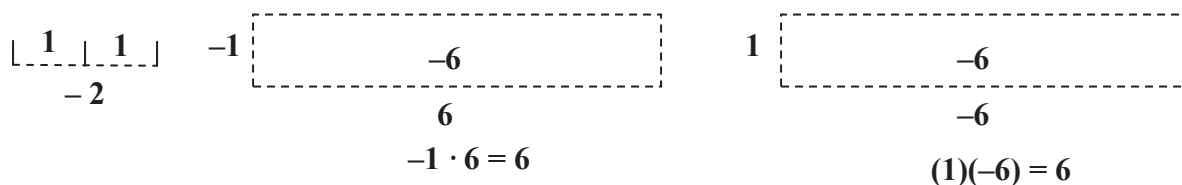
$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \cdot 1 = 1 \end{array} & \text{o bien por el cuadrado} & \begin{array}{c} -1 \\ 1 \\ (-1)(-1) = 1 \end{array} \end{array}$$

En general cualquier número positivo puede representarse por una figura rectangular continua de lados negativos.

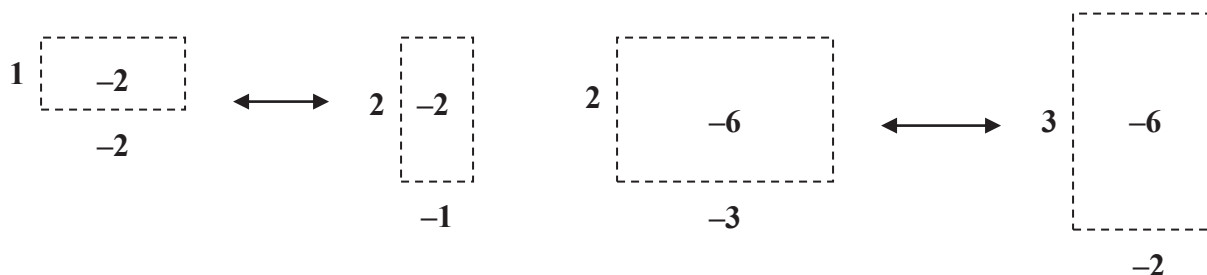
El número 20 puede representarse por cualquiera de las siguientes figuras rectangulares equivalentes continuas.

$$\begin{array}{ccccc} 4 & \begin{array}{c} 20 \\ 5 \end{array} & \longleftrightarrow & -4 & \begin{array}{c} 20 \\ -5 \end{array} & \longleftrightarrow & -2 & \begin{array}{c} 20 \\ -10 \end{array} \end{array}$$

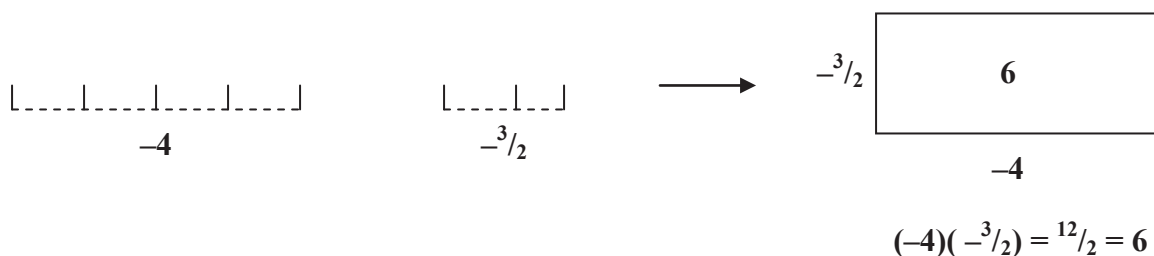
Los números -2 y el -6 pueden representar un segmento negativo un rectángulo de área negativa, etc.



Otra forma de representar geoméricamente los números -2 y -6 es:



El producto de números negativos por positivos representa cuadrados o rectángulos de áreas negativas y el producto de números negativos representan cuadrados o rectángulos de área positiva. Por ejemplo el producto de los números negativos -4 y $-3/2$ representa un rectángulo de área positiva igual a 6 .



2.3 Literales

Las literales representan segmentos o rectángulos “*elásticos*”, es decir, se pueden estirar o comprimir sin que el segmento se curve o el rectángulo puede agrandarse o reducirse sin que sus lados se curven, cuya longitud o área es “*variable*” (de cualquier magnitud o cantidad desconocida). El tamaño del segmento o rectángulo dependerá del valor numérico que se le asigne a la literal, dado que en este momento no importa cual sea el valor que tome o se le asigne

a la literal o literales. Y por lo tanto cualquier expresión algebraica que sea representada por una figura rectangular, que se forme con segmentos elásticos también será una figura elástica. Para elegir la escala en el caso de literales, se toma un segmento de cualquier longitud, evitando que su longitud sea diferente de los segmentos que representan los números, teniendo en cuenta que las literales representadas por segmentos más largos representarían valores mayores, en valor absoluto.

La literal x puede ser representada por un segmento de cierta longitud o bien por un rectángulo de lados 1 y x , dado que se puede escribir como el producto $x = 1 \cdot x$.

$$\overline{\quad x \quad} \quad \text{o bien por el rectángulo} \quad \begin{array}{c} x \\ \boxed{x \cdot 1 = x} \\ 1 \end{array}$$

Las literal a puede representar un rectángulo de lados a y 1 , o bien de lados $-a$ y -1 , dado que $a \cdot 1 = (-a)(-1) = a$.

$$\begin{array}{c} 1 \\ \boxed{1 \cdot a = a} \\ a \end{array} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{array}{c} -1 \\ \boxed{(-1)(-a) = a} \\ -a \end{array}$$

De la misma forma la literal y representa por los rectángulos equivalentes siguientes:

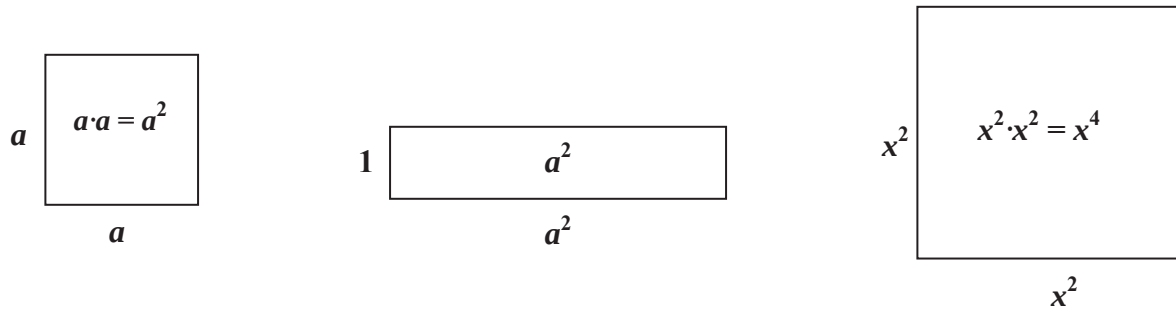
$$\begin{array}{c} 1 \\ \boxed{y \cdot 1 = y} \\ y \end{array} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{array}{c} -1 \\ \boxed{(-y)(-1) = y} \\ -y \end{array}$$

2.4 Potencias

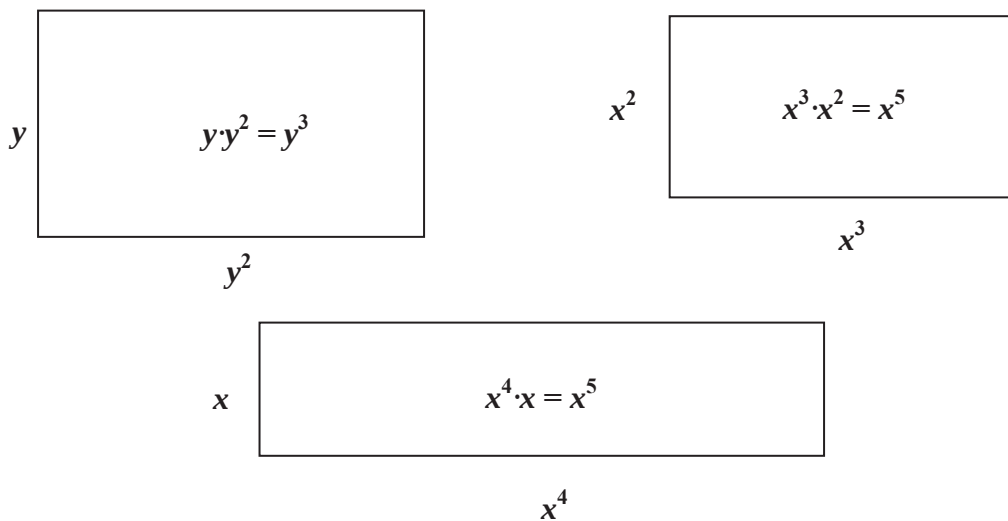
Las literales son llamadas primeras potencias y son consideradas como potencias impares, cuyo exponente es 1 , el cual no se escribe con el objeto de simplificar la notación. Las potencias $2, 3, 4$ etc., de literales, dado que las potencias son un número cualquiera, pueden ser representadas por

segmentos o figuras rectangulares, las potencias pares representaran cuadrados o rectángulos y las potencias impares solamente rectángulos.

Las potencias a^2 y x^4 se pueden representar por los cuadrados o rectángulos:



Las potencias y^3 y x^5 se representan por los siguientes rectángulos:

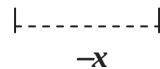
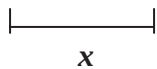


2.5 Monomios o términos algebraicos

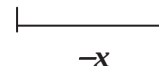
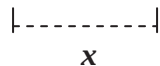
Algebraicamente un monomio se define como un producto de factores numéricos o literales, de aquí se deduce que toda potencia es un monomio, al producto de factores numéricos se le llama “coeficiente” y al producto de factores literales “parte literal”. De aquí se deduce que toda potencia es un monomio con coeficiente igual a **1**. Los monomios o términos algebraicos de un polinomio pueden ser representados por segmentos, cuadrados o rectángulos elásticos. Los

coeficientes numéricos de los términos algebraicos representan múltiplos o submúltiplos de la magnitud geométrica (longitud de un segmento o área de un cuadrado o rectángulo).

Si x es representado por un segmento continuo (número positivo), entonces $-x$ representa un segmento punteado (número negativo) de la misma longitud que x .



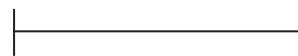
Si x es representado por un segmento punteado (número negativo), entonces $-x$ representa un segmento continuo (número positivo) de la misma longitud que x .



En el caso de que x es representado por un segmento continuo, el término $2x$ representará un segmento continuo de doble longitud que x , lo que indica que $2x$ es un número positivo y el término $-2x$ es un segmento punteado de la misma longitud que $2x$ y por lo tanto $-2x$ es un número negativo.



$$2(x) = 2x$$



$$2x$$

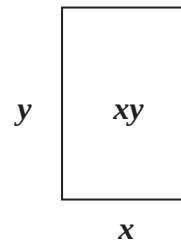
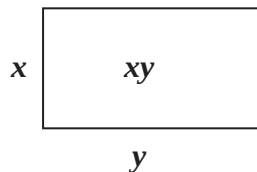


$$2(-x) = -2x$$



$$-2x$$

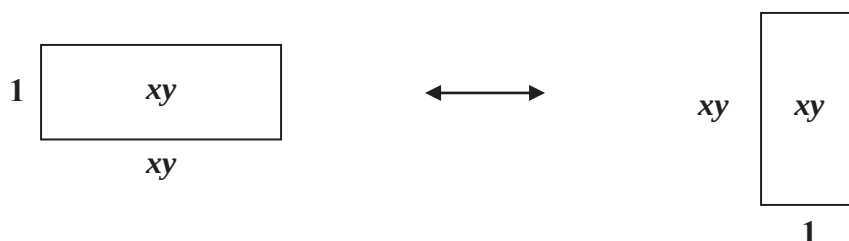
De acuerdo con la definición de área, un monomio puede ser representado también por figuras rectangulares, el monomio xy se representa por:



$$\text{Área de una figura rectangular} = \text{producto de sus lados} = xy = yx$$

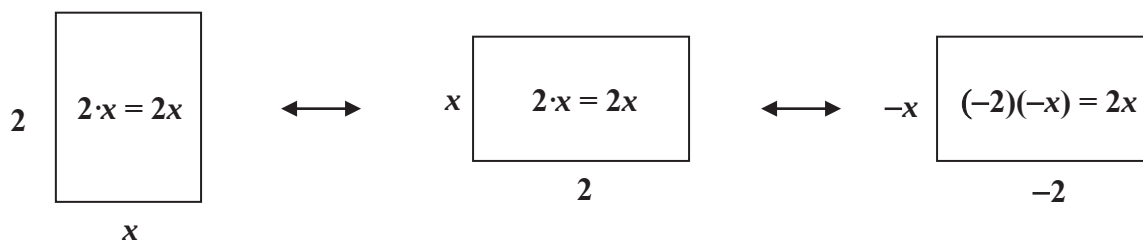
Si en dos figuras rectangulares equivalentes; una tiene base x , altura y y la otra base y , altura x , el producto xy es igual al producto yx , geométicamente se cumple el *axioma de conmutatividad* de los números reales, y para obtener el área de una figura rectangular basta con multiplicar sus lados.

De la misma forma, si en dos figuras rectangulares equivalentes; una tiene base xy , altura 1 y la otra base 1 , altura xy , el producto $xy \cdot 1$ es igual al producto $1 \cdot xy$, geométicamente se cumple el *axioma del elemento neutro de la multiplicación* de los números reales. De lo anterior se concluye que $xy \cdot 1 = xy$ o bien $1 \cdot xy = xy$, las figuras rectangulares equivalentes en área xy , pueden ser también representadas por los rectángulos:

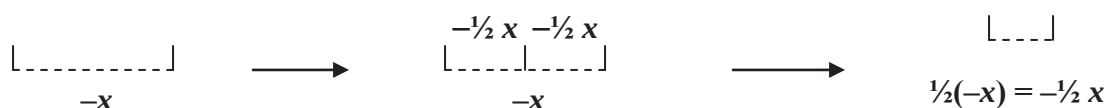


De lo anterior se concluye que una figura rectangular tiene al menos otra figura rectangular equivalente.

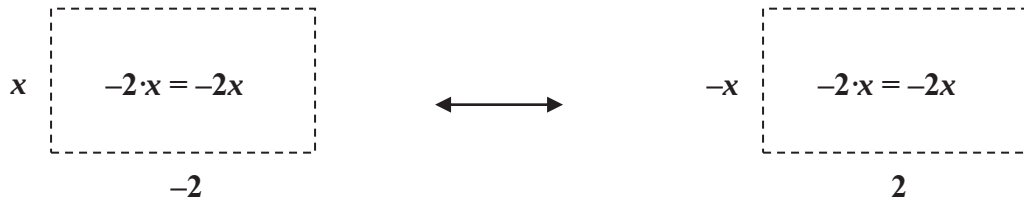
El monomio $2x$ también puede representar un rectángulo continuo de altura 2 y de base x ; o bien de base 2 y altura x , o incluso puede representar por un rectángulo de lados -2 y $-x$; cuya área es $2x$.



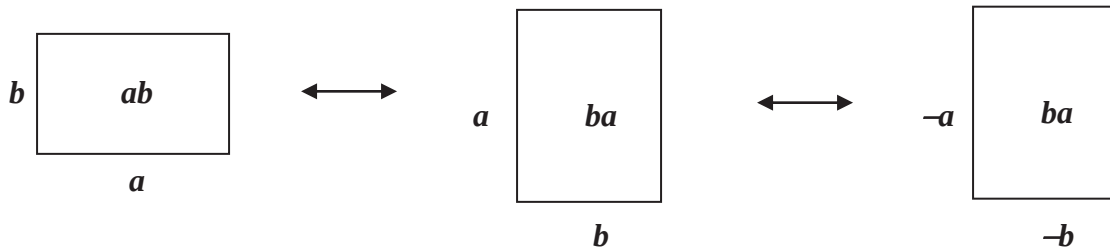
El monomio $-\frac{1}{2}x$ representará un segmento punteado de la mitad de la longitud de $-x$ y por lo tanto $-\frac{1}{2}x$ es un número negativo.



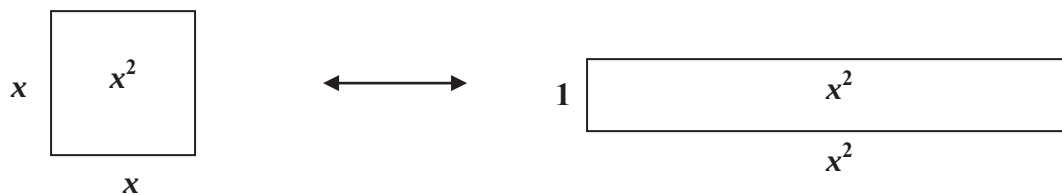
También el monomio $-2x$ puede representar un rectángulo punteado de base -2 y altura x o bien de base 2 y altura $-x$.



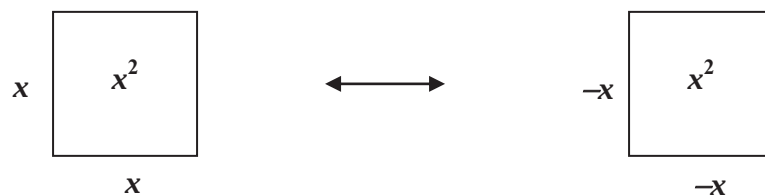
El monomio ab representa un rectángulo de base a y altura b o de base b y altura a , o bien de lados $-a$ y $-b$.



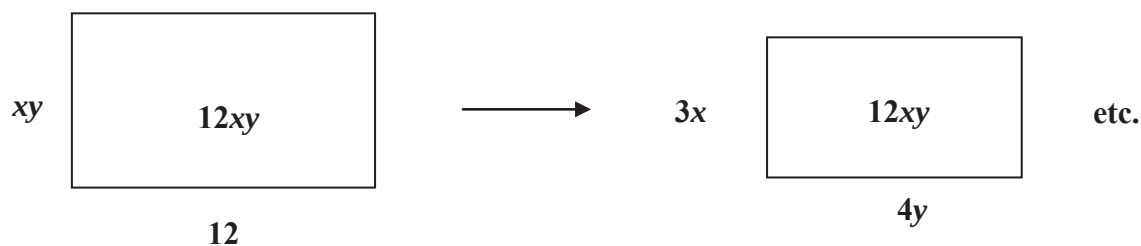
La potencia x^2 es un monomio y representa un cuadrado continuo de lado x o un rectángulo de lados 1 y x^2 , dado que su área es $x^2 = x \cdot x$ o bien $x^2 = 1 \cdot x^2$.



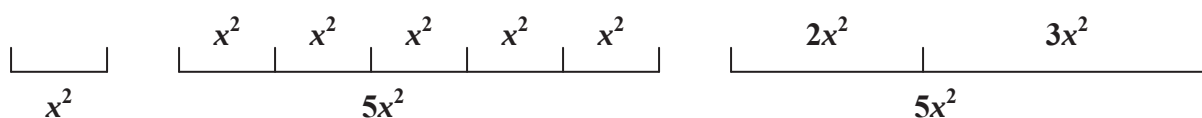
O bien el cuadrado continuo de área x^2 puede tener lados $-x$, dado que su área es $x^2 = (-x)(-x)$.



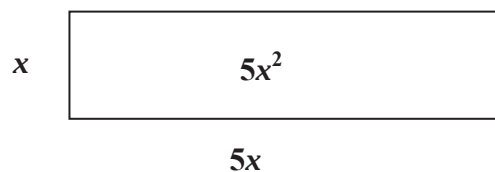
El monomio $12xy$ puede ser representado por cualquiera de los siguientes rectángulos continuos:



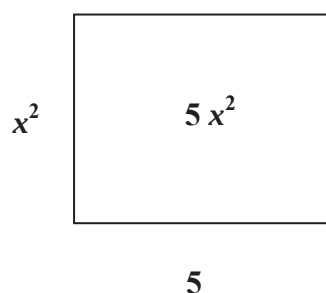
El monomio $5x^2$ puede ser representado por cualquiera de los segmentos:



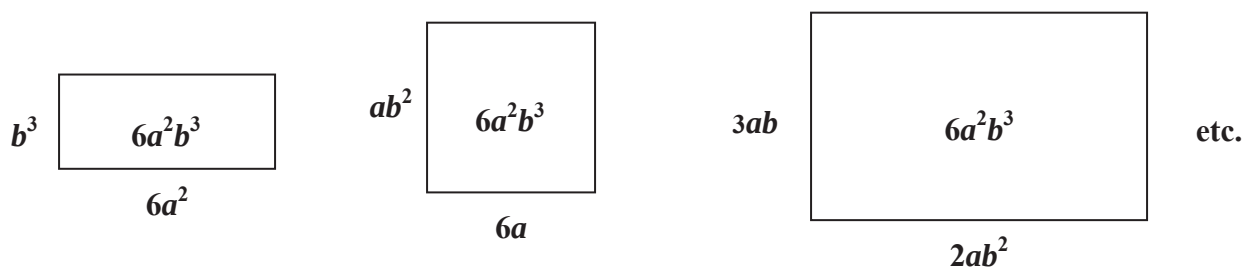
O bien puede ser representado por un rectángulo de lados x y $5x$, es decir:



También puede representar un rectángulo de lados 5 y x^2 , es decir:



El monomio $6a^2b^3$ puede representarse por cualquiera de los siguientes rectángulos equivalentes:



Los polinomios pueden ser representados mediante una *figura rectangular rectilínea*, es decir, una *figura rectangular rectilínea* es un polinomio cuyos términos son representados por cuadrados o rectángulos y su área es igual al valor numérico del polinomio.

A continuación se representan geoméricamente las operaciones algebraicas de adición, sustracción, multiplicación y división.

3. Operaciones geométricas

Las operaciones geométricas que se definen en este modelo tienen un mismo significado que las operaciones algebraicas con polinomios. Se define la adición geométrica, a partir de ella se desarrolla el procedimiento de *factorización geométrica* y a partir de esta, la solución de ecuaciones cuadráticas o de grado superior, cuyas raíces sean enteros, la multiplicación y la división. Las operaciones algebraicas con polinomios dan como resultado un polinomio, dado que los términos de un polinomio se pueden representar por segmentos, cuadrados o rectángulos; las operaciones geométricas darán como resultado un segmento, cuadrado, rectángulo o una figura rectangular rectilínea.

La adición geométrica de segmentos o áreas comparten el *principio de homogeneidad*, que podemos enunciar como “la adición y sustracción se realiza con figuras de la misma especie”; sólo se pueden sumar o restar segmentos con segmentos, o áreas con áreas; pues carece de sentido geométrico y algebraico sumar segmentos con áreas; al igual carece de sentido la multiplicación o división de áreas.

3.1 Adición y sustracción de segmentos

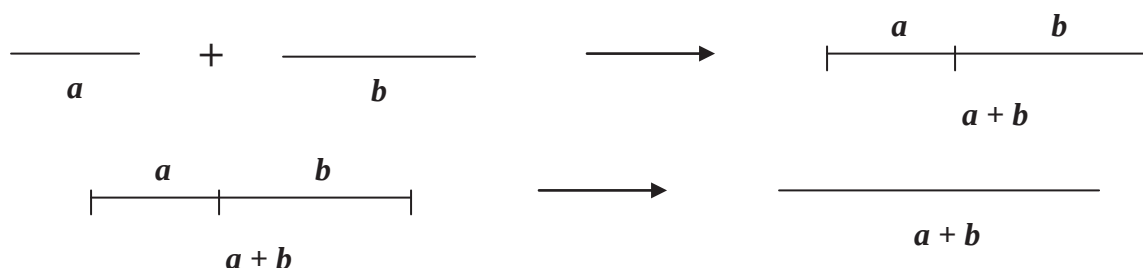
La suma geométrica de segmentos consiste simplemente en adjuntarlos, cuya longitud es la suma de las longitudes de los segmentos, en el caso de la sustracción, después de adjuntar los segmentos, se superponen o se traslapan para encontrar la diferencia, pudiéndose obtener como resultado un segmento continuo (número positivo) o segmento punteado (número negativo).

Si las literales **a**, **b** y **x**, son representados por los siguientes segmentos:

		
a	b	x

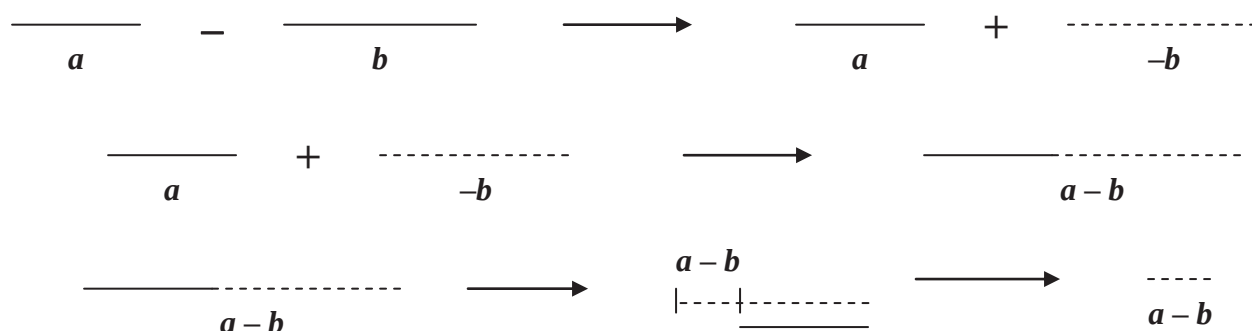
Es obvio que a y b representan números positivos ($a > 0$ y $b > 0$), por ser representados por segmentos cotinuos y dado que la longitud de b es más grande que la de a , entonces $b > a$ y x es un número negativo ($x < 0$) por se representado por un segmento punteado o discontinuo.

La suma $a + b$ es representada por un segmento continuo de mayor longitud que el segmento a y que el segmento b .



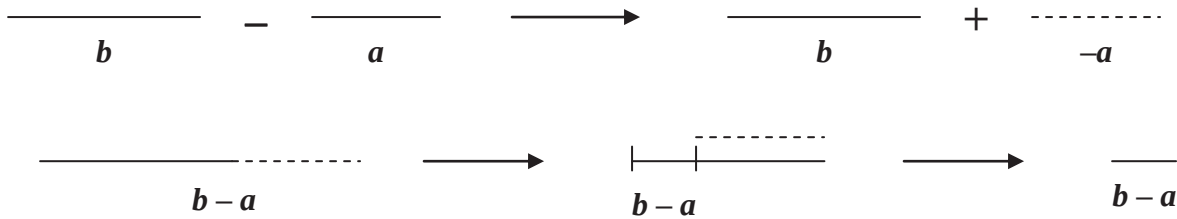
Dado que a y b son positivos, $a + b$ es un segmento continuo, es decir $a + b$ es también positivo ($a + b > 0$).

Dado que la sustracción de números reales se puede escribir como la adición del primer número más el inverso aditivo del segundo, esta propiedad es válida para la sustracción de segmentos y de figuras rectangulares. La diferencia $a - b$ es representada por un segmento punteado de menor longitud que el segmento a , dado que el segmento b es de mayor longitud que el segmento a . Como la diferencia $a - b$ se puede escribir como $a + (-b)$, es decir, la suma de a más el inverso aditivo o simétrico de b . Lo que significa que al segmento a se le suma el semento $-b$ (segmento punteado).



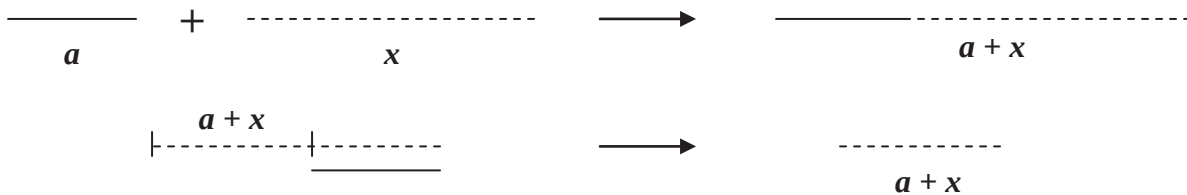
Dado que el segmento que representa b es de mayor longitud que el que representa a , la diferencia $a - b$ es un segmento punteado, y por lo tanto $a - b$ es un número negativo ($a - b < 0$).

La diferencia $b - a$ es representada por un segmento continuo de menor longitud que el segmento a , dado que el segmento b es de mayor longitud que el segmento a . Como la diferencia $b - a$ se puede escribir como $b + (-a)$, es decir, la suma de b más el inverso aditivo o simétrico de a . Lo que significa que al segmento b se le suma el segmento $-a$ (segmento punteado).



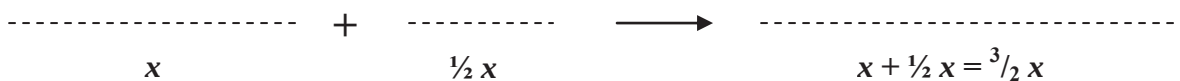
Dado que b es mayor que a ($b > a$), la diferencia $a - b$ es mayor que cero ($a - b > 0$) y por lo tanto se representa con un segmento continuo.

La suma $a + x$ es un segmento punteado ya que el segmento a es de menor longitud que el segmento x y dado que este segmento es punteado (número negativo) la suma deberá ser un segmento punteado.



Dado que x es representada por un segmento de mayor longitud que a , significa que x es mayor en valor absoluto que a y por lo tanto la suma de a y x es un segmento punteado y por lo tanto $a + x$ es menor que cero ($a + x < 0$).

La suma $x + \frac{1}{2}x = \frac{3}{2}x$ es un segmento punteado de mayor longitud que el segmento x ; dado que el segmento x es un segmento punteado, entonces $\frac{1}{2}x$ es un segmento punteado, ya que los segmentos x y $\frac{1}{2}x$ son números negativos y la suma de números negativos es un número negativo.



3.2 Adición y sustracción de figuras rectangulares

La adición y sustracción de figuras rectangulares dibujadas con líneas continuas o punteadas, es una operación geométrica, llamada *adición geométrica*, esta operación consiste en adjuntar por yuxtaposición, dos o más figuras rectangulares, es decir, se coloca una figura seguida de la otra, haciendo coincidir sus bases sobre una línea recta, formando una figura rectangular rectilínea. Si las figuras son todas continuas o todas punteadas se adjuntan solamente y si son continuas y punteadas se puede adjuntar o traslapar, para obtener la figura rectangular rectilínea resultado de la adición geométrica, la cual puede tener una sola altura o varias alturas y si las base se pueden reducir (sumar o restar) puede tener una sola base o varias bases.

A continuación se realiza la adición de figuras rectangulares en diferentes situaciones, dependiendo como sean las alturas y bases de las figuras rectangulares.

3.2.1 Adición y sustracción de figuras rectangulares con altura y base común

Si las figuras rectangulares tienen la misma altura (altura común o factor común) y la misma base, se suman formando pilas (apilarlos en dirección vertical) o bien se pueden sumar adjuntándolas por yuxtaposición, para lo cual se coloca una figura seguida de la otra, haciendo coincidir sus base sobre una línea recta, formando una figura rectangular rectilínea de una sola altura. Si tienen altura común y bases que se pueden reducir (sumar o restar), se adjuntan las figuras haciendo coincidir sus bases sobre una línea recta, formando una figura rectangular rectilínea de una sola altura y se reducen las bases; si las figuras son unas continuas y punteadas se pueden traslapar para encontrar la suma. En ambos casos la suma da un monomio. A los monomios se les llama *términos semejantes* y a la suma *reducción de términos semejantes*.

La suma de los monomios semejantes $2x$ y $3x$, se pueden representar mediante un múltiplo del rectángulo de altura x y de base 1 , dado que $2x = 1 \cdot x + 1 \cdot x$ y $3x = 1 \cdot x + 1 \cdot x + 1 \cdot x$, lo cual se puede representar como una pila de 5 rectángulos de base 1 y altura x , es decir:

$$\begin{array}{c} x \\ \boxed{x} \\ 1 \end{array} + \begin{array}{c} x \\ \boxed{x} \\ 1 \end{array} + \begin{array}{c} x \\ \boxed{x} \\ 1 \end{array} + \begin{array}{c} x \\ \boxed{x} \\ 1 \end{array} + \begin{array}{c} x \\ \boxed{x} \\ 1 \end{array} \longrightarrow 5 \left\{ \begin{array}{l} \text{---} x \text{---} \\ \text{---} x \text{---} \\ \text{---} x \text{---} \\ \text{---} x \text{---} \\ \text{---} x \text{---} \\ 1 \end{array} \right.$$

Otra forma más simple de representar el caso anterior será la siguiente:

$$x \begin{array}{|c|} \hline x \\ \hline \end{array} + x \begin{array}{|c|} \hline x \\ \hline \end{array} + x \begin{array}{|c|} \hline x \\ \hline \end{array} + x \begin{array}{|c|} \hline x \\ \hline \end{array} + x \begin{array}{|c|} \hline x \\ \hline \end{array} \longrightarrow 5 \left\{ x \begin{array}{|c|} \hline x \\ \hline \end{array} \right.$$

1 1 1 1 1 1

Pero la forma más apropiada para esta suma será escribir un rectángulo de altura x y base 5 , tal como se muestra a continuación.

$$x \begin{array}{|c|} \hline x \\ \hline \end{array} + x \begin{array}{|c|} \hline x \\ \hline \end{array} + x \begin{array}{|c|} \hline x \\ \hline \end{array} + x \begin{array}{|c|} \hline x \\ \hline \end{array} + x \begin{array}{|c|} \hline x \\ \hline \end{array}$$

1 1 1 1 1

$$\longrightarrow x \begin{array}{|c|} \hline 5x \\ \hline \end{array}$$

5

3.2.2 Adición y sustracción de figuras rectangulares con altura común y que sus bases se pueden reducir

Otra forma de representar los términos semejantes $2x$ y $3x$, es mediante rectángulos de la misma altura x , y por lo tanto su suma se puede representar como un rectángulo de altura x y de base la suma de sus coeficientes $2 + 3 = 5$, es decir un rectángulo de altura x y base 5 .

$$x \begin{array}{|c|} \hline 2x \\ \hline \end{array} + x \begin{array}{|c|} \hline 3x \\ \hline \end{array} \longrightarrow x \begin{array}{|c|c|} \hline 2x & 3x \\ \hline \end{array}$$

2 3 2 3

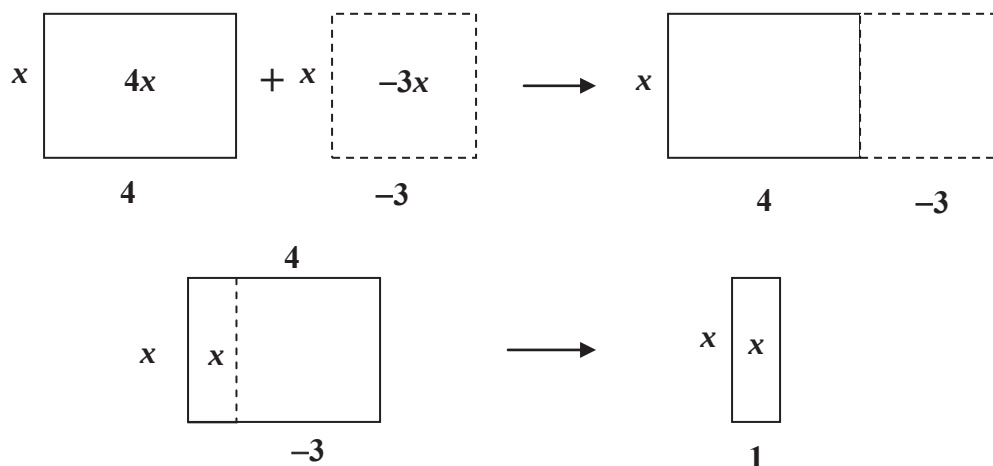
$$x \begin{array}{|c|c|} \hline 2x & 3x \\ \hline \end{array} \longrightarrow x \begin{array}{|c|} \hline 5x \\ \hline \end{array}$$

2 3 5

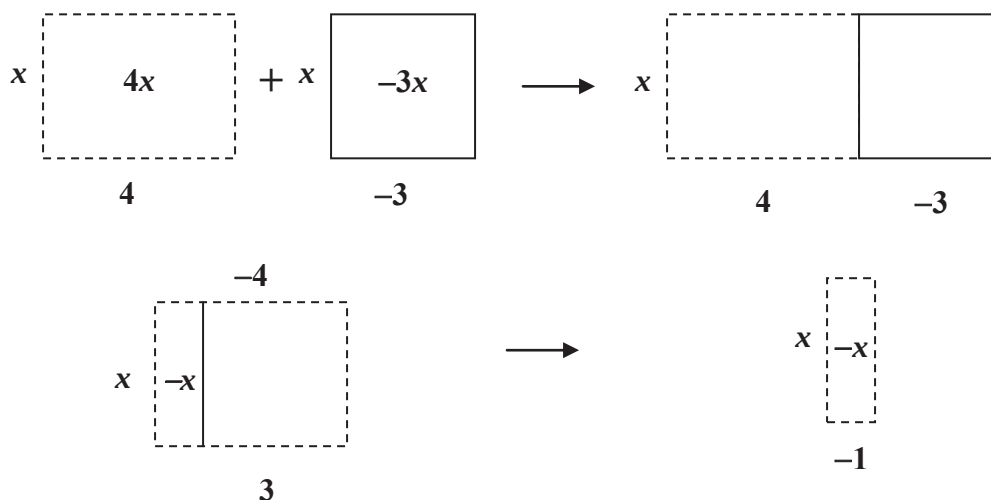
De esta forma se concluye que los monomios $2x$ y $3x$, son semejantes, porque forman figuras rectangulares de altura común y sus bases se pueden reducir, es decir:

$$2x + 3x = x(2 + 3) = x \cdot 5 = 5x ; \quad (\text{orden de los sumando no altera el producto}).$$

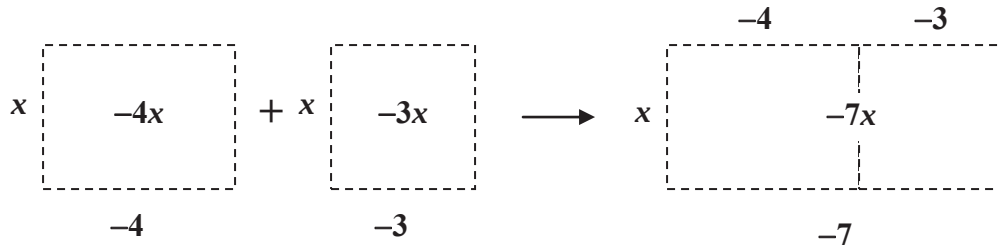
Los términos semejantes $4x$ y $-3x$ representan dos rectángulos de altura x y bases 4 y -3 , siendo el área positiva la del primero y negativa la del segundo, cuya suma algebraica es $4x + (-3x) = x$.



Los términos semejantes $-4x$ y $3x$ representan dos rectángulos de altura x y bases -4 y 3 , siendo el área negativa la del primero y positiva la del segundo, cuya suma algebraica es $(-4x) + 3x = -x$.



Los términos semejantes $-4x$ y $-3x$ representan dos rectángulos de altura x y bases -4 y -3 , siendo sus áreas negativas ambas, cuya suma algebraica es $(-4x) + (-3x) = -7x$.



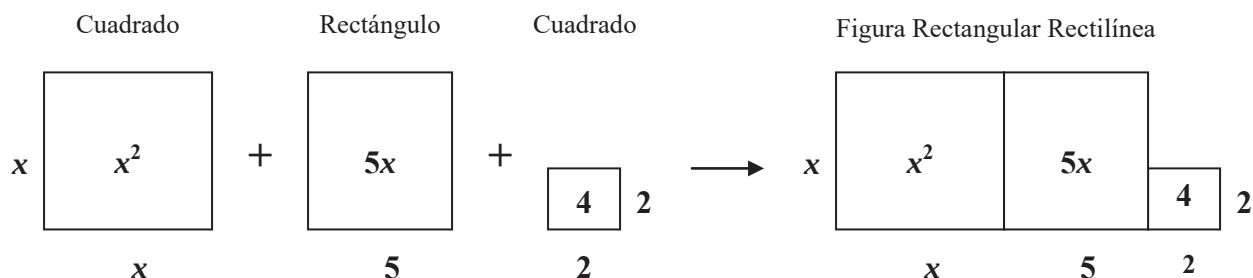
3.2.3 Adición y sustracción de figuras rectangulares que no tienen altura común, ni base común

Si las figuras rectangulares no tienen altura común y sus bases no se pueden reducir, las figuras se suman adjuntándolas por yuxtaposición y se coloca una seguida de la otra, formando una figura rectangular rectilínea de varias alturas y haciendo coincidir sus bases sobre una línea recta. En este caso la suma da un polinomio, es decir, la suma de monomios que no son términos semejantes da un polinomio, que puede o no ser factorizable.

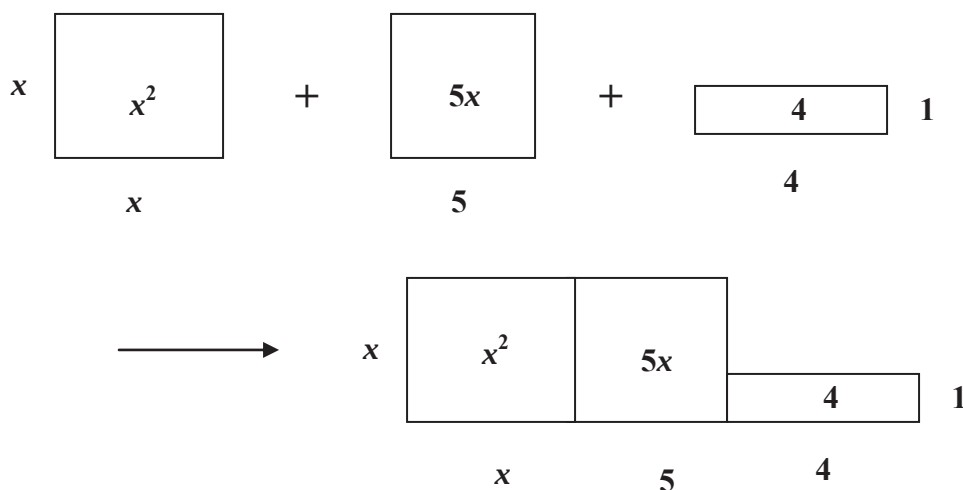
Una clasificación de los polinomios es respecto al número de términos; así un monomio es un polinomio de un término, se llama binomio al formado por la suma de dos términos no semejantes, trinomio al formado por tres y en general se usa el término polinomio para referirse a la suma de monomios (suma algebraica) que no son términos semejantes.

Los monomios x^2 , $5x$ y 4 , representan figuras rectangulares que no tienen ni altura, ni base común; y se pudo observar que x^2 y $5x$, representan dos figuras rectangulares de altura común, en cambio las figuras rectangulares que representan los términos x^2 y 4 , no comparten ningún lado, (ni base ni altura), esta observación será de vital importancia en la factorización de trinomios de segundo grado, como se verá más adelante. La suma algebraica de los monomios x^2 , $5x$ y 4 , no se pueden reducir (sumar o restar), da como resultado el polinomio $x^2 + 5x + 4$, llamado trinomio, que algebraicamente se representa por la suma de los monomios.

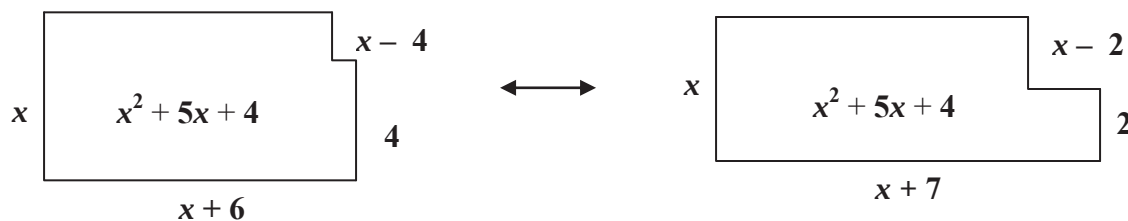
Geoméricamente se representa la suma de los monomios x^2 , $5x$ y 4 , se representa por una figura rectangular rectilínea, formada por un cuadrado de lado x , un rectángulo de lados x y 5 y un rectángulo de lados 1 y 4 o un cuadrado de lado 2 , tal como se muestra a continuación.



La suma puede también representarse por:



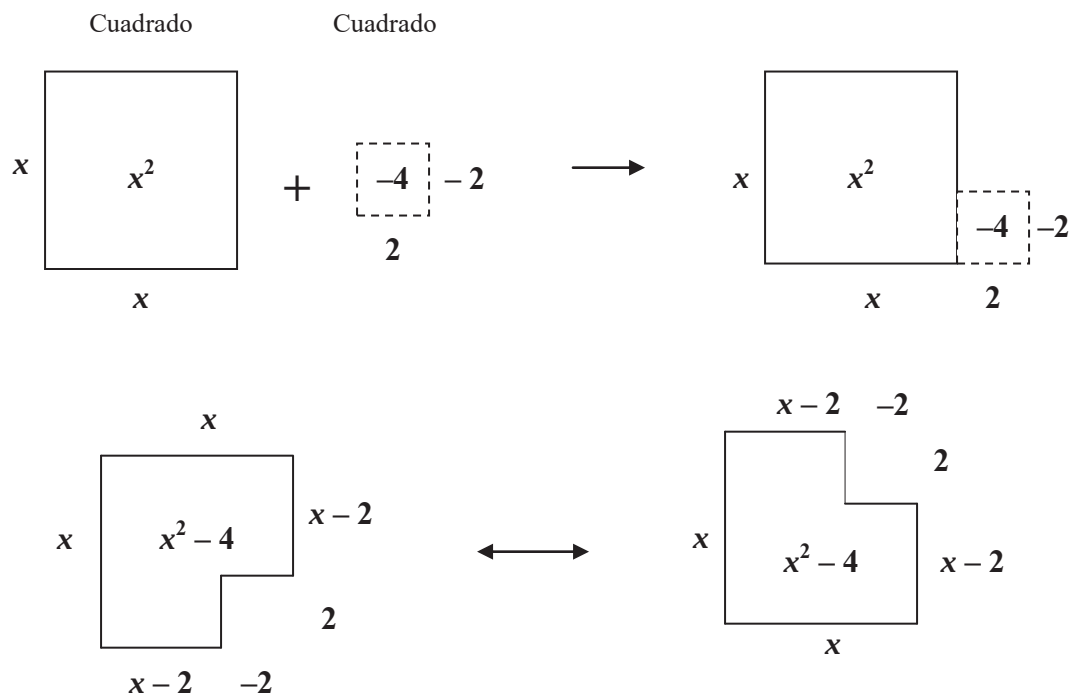
El área de las figuras rectangulares rectilíneas en ambos casos es la misma y está dada por el valor numérico del polinomio $x^2 + 5x + 4$, tal como se muestra a continuación.



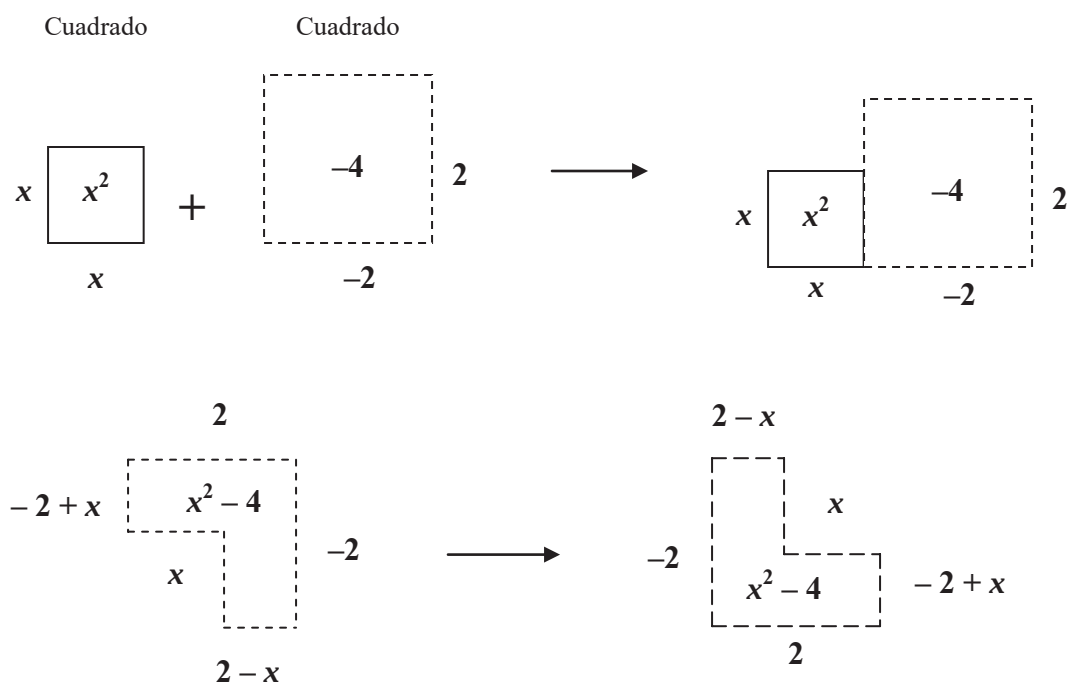
Si un monomio se puede representar geométricamente por diversas figuras rectangulares equivalentes, entonces un polinomio se puede representar por varias figuras rectangulares rectilíneas.

La sustracción algebraica de los monomios x^2 y 4 , es una suma de dos figuras rectangulares una continua y la otra discontinua, que no tienen altura ni base en común, los términos no se pueden reducir (no son semejantes), da como resultado el binomio $x^2 - 4$. El cual se representa geométricamente por una figura rectangular rectilínea formada por dos cuadrados, uno de lado x y el otro de lados 2 y -2 . Restar el término 4 (cuadrado de lado 2) del término x^2 (cuadrado de lado x), puede dar como resultado una figura rectangular rectilínea de área positiva o negativa, lo cual depende de cómo sea x con respecto al número 2 . Algebraicamente la resta $x^2 - 4$, se representa por la suma $x^2 + (-4)$, lo que equivale a sumar al área positiva x^2 el área negativa -4 , es decir:

Si $x > 2$: En este primer caso $x^2 - 4$ representa una figura rectangular rectilínea de área positiva (figura con líneas continuas) y cuya área es igual a $x^2 - 4$ (número positivo).



Si $x < 2$: En este segundo caso $x^2 - 4$ representa una figura rectangular rectilínea de área negativa (figura con líneas punteadas) cuya área es igual a $x^2 - 4$.

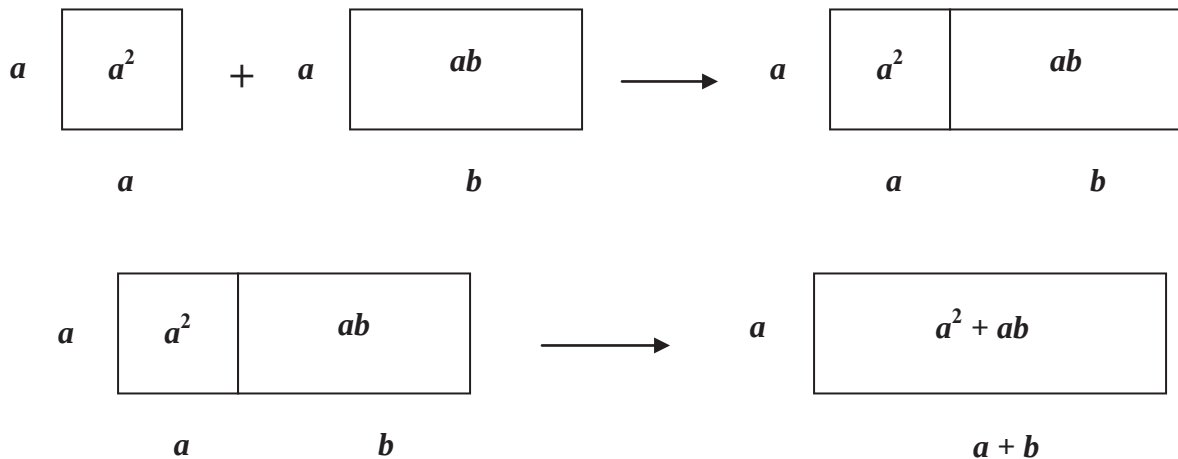


Es importante remarcar que no hay necesidad de hacer restricciones de x con respecto a cualquier número, aquí se consideró solo por hacer un análisis de cómo sería el área de la figura rectangular rectilínea.

3.2.4 Adición y sustracción de figuras rectangulares con altura común y que sus bases no se pueden reducir

Si las figuras rectangulares tienen altura común y sus bases no se pueden reducir, las figuras se suman adjuntándolas por yuxtaposición y se coloca una seguida de la otra, formando una figura rectangular rectilínea de una sola altura y haciendo coincidir sus bases sobre una línea recta. En este caso la suma da un polinomio, es decir, la suma de monomios que no son términos semejantes da un polinomio factorizable por factor común.

Los monomios a^2 y ab , representan dos figuras rectangulares de altura común y bases diferentes que no se pueden reducir, por lo tanto la suma de los monomios a^2 y ab da como resultado un polinomio $a^2 + ab$, llamado binomio, el cual es factorizable por factor común simbólicamente, representado por la siguiente figura rectangular rectilínea:



El área de este polinomio es el producto de sus lados a y $a + b$, es decir:

$$\text{Área} = a(a + b) = (a + b)a = a^2 + ab$$

Lo que significa que la factorización del polinomio $a^2 + ab$, es:

$$a^2 + ab = a(a + b) = (a + b)a$$

La suma de monomios que no se puede reducir, o no son términos semejantes, da origen a los polinomios, de esta forma se define un polinomio como la suma de monomios que no son términos semejantes, a cada monomio que forma el polinomio se le llama “término”.

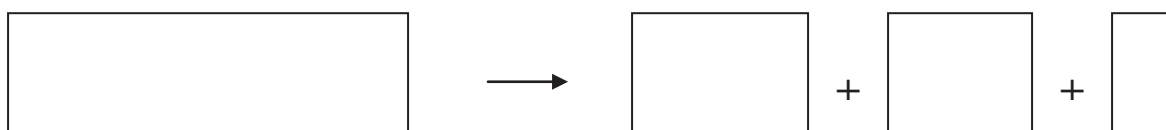
3.2.5 Adición y sustracción de figuras rectangulares con altura común y que sus bases no se pueden reducir

Si las figuras rectangulares tienen altura común y sus bases no se pueden reducir, para sumar las figuras se adjuntan por yuxtaposición, colocando una seguida de la otra y haciendo coincidir sus

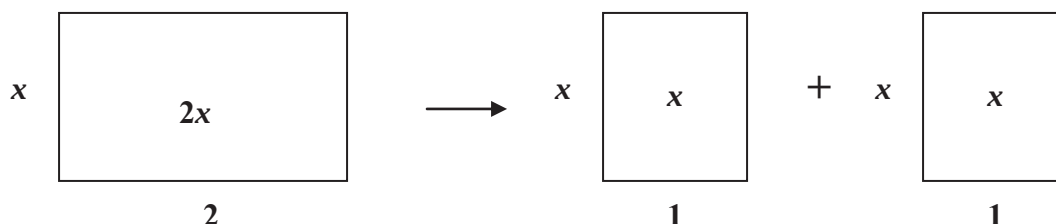
bases sobre una línea recta, formando una figura rectangular rectilínea de una sola altura (rectángulo). Si las figuras son continuas y punteadas se pueden traslapar, la suma de áreas puede ser positiva (figura rectangular rectilínea con líneas continuas) o un área negativa (figura rectangular rectilínea con líneas punteadas). En esta forma se obtiene como resultado un polinomio, y se dice que es factorizable por factor común y cuyo valor numérico es e igual al área de la figura rectangular rectilínea, la cual es igual a la suma de las áreas de los cuadrados o rectángulos.

3.2.6 Descomponer un monomio o término en sumandos (método de descomposición de áreas)

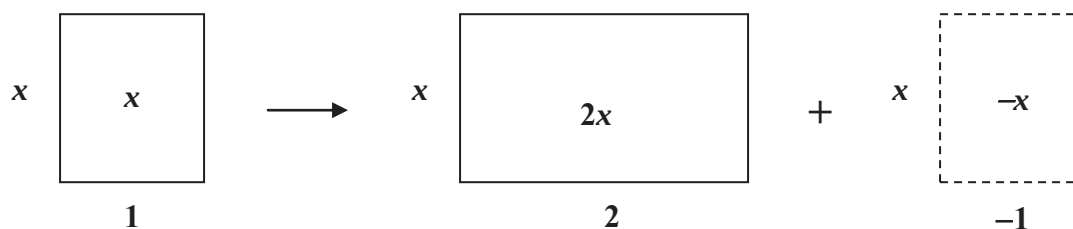
Para descomponer un término algebraico en sumandos, se aplica el método de descomposición de una figura rectangular,



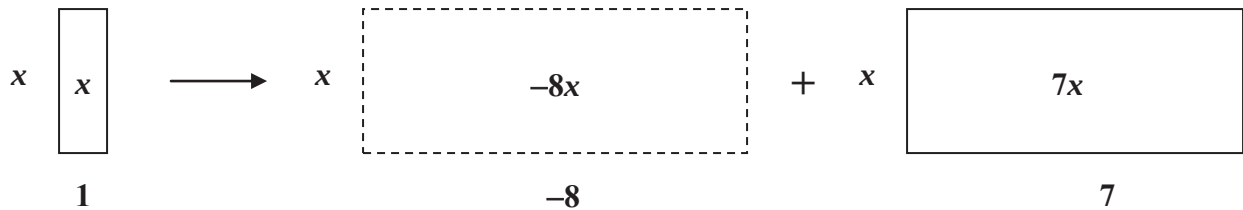
El término $2x$ puede ser descompuesto en dos rectángulos de altura x y de base 1 .



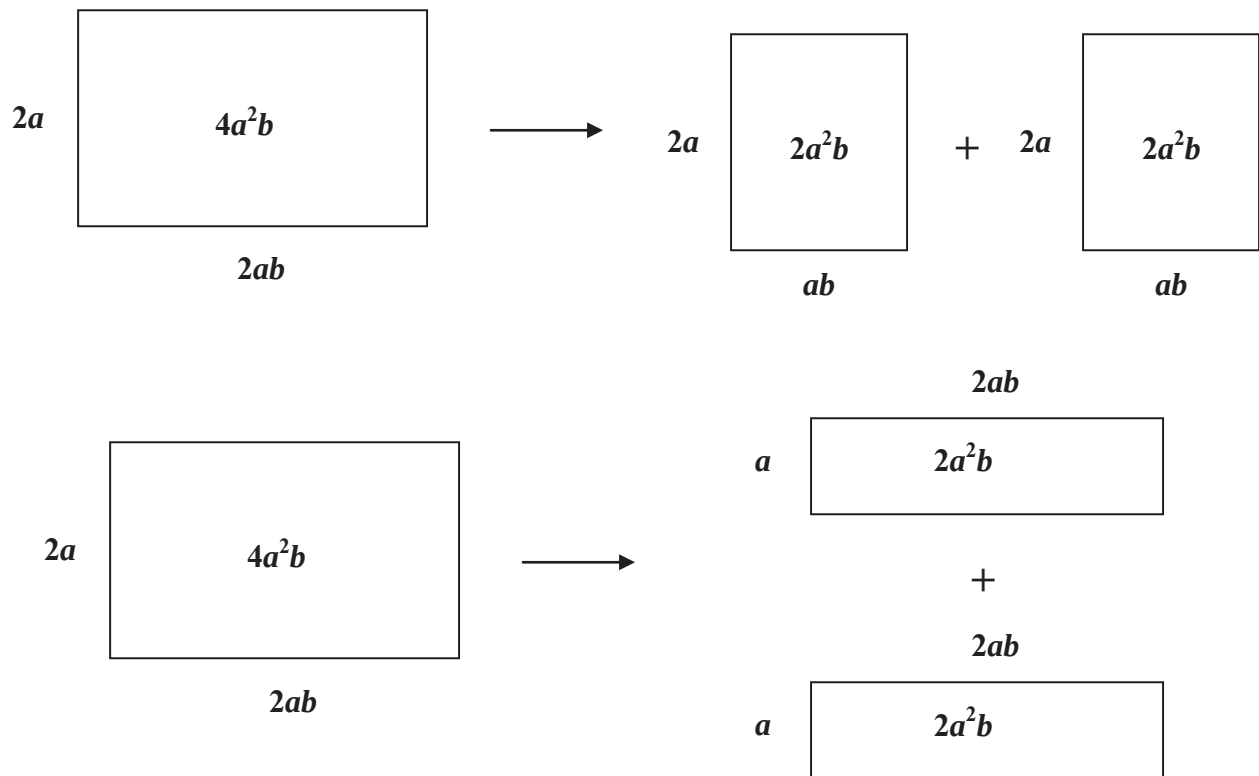
El término x puede ser descompuesto como en dos rectángulos de altura x y de bases 2 y -1 , respectivamente.



El término x también puede ser descompuesto en dos rectángulos de altura x y de bases -8 y 7 , respectivamente.



El término $4a^2b$ puede ser descompuesto de las siguientes formas:

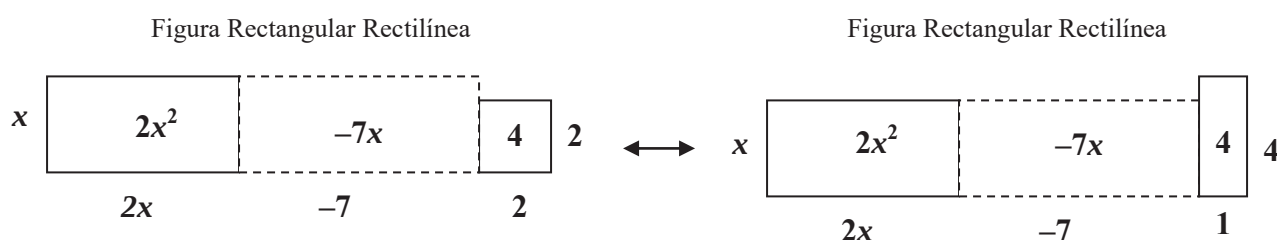


De lo anterior se deduce que un término puede ser descompuesto de diferente manera, al igual que existe una infinidad de sumas de números en las que puede descomponerse un número.

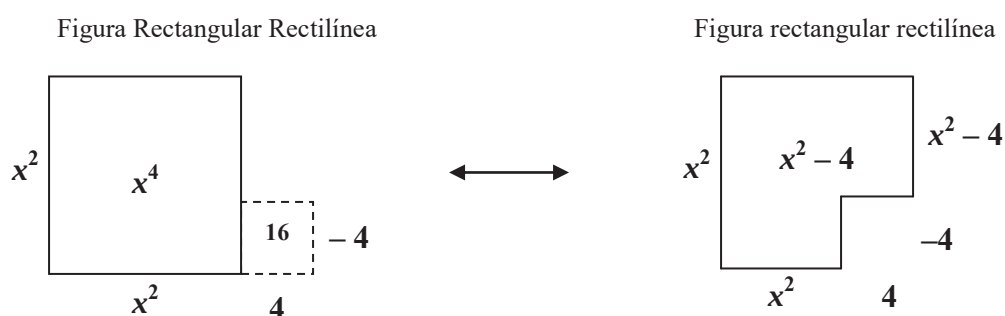
4. Representación geométrica de un polinomio

Dado que un polinomio es una suma de términos algebraicos, y como cada término puede ser representado por un cuadrado o rectángulo, todo polinomio puede ser representado por una figura rectangular rectilínea, cuya área es igual al valor numérico del polinomio.

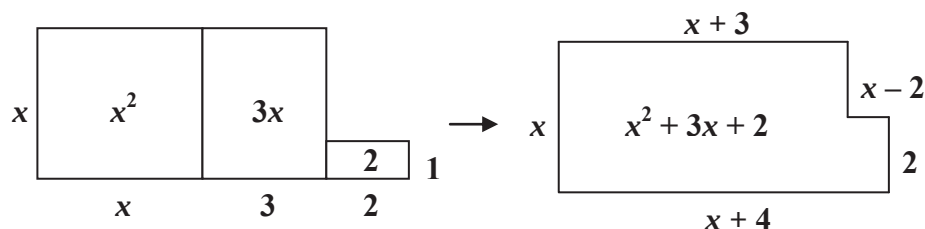
El polinomio $2x^2 - 7x + 4$ se representa por una figura rectangular rectilínea formada por un rectángulo de área $2x^2$, un rectángulo de área $-7x$ y un cuadrado o rectángulo de área igual a 4 , cuya área es igual al valor numérico del polinomio $2x^2 - 7x + 4$.



El polinomio $x^4 - 16$, se representa por una figura rectangular rectilínea cuyas áreas de dos cuadrados son: x^4 y -16 . Es importante remarcar que no hay restricciones de x con respecto a un número. Pero se analizara a x respecto a 4 .

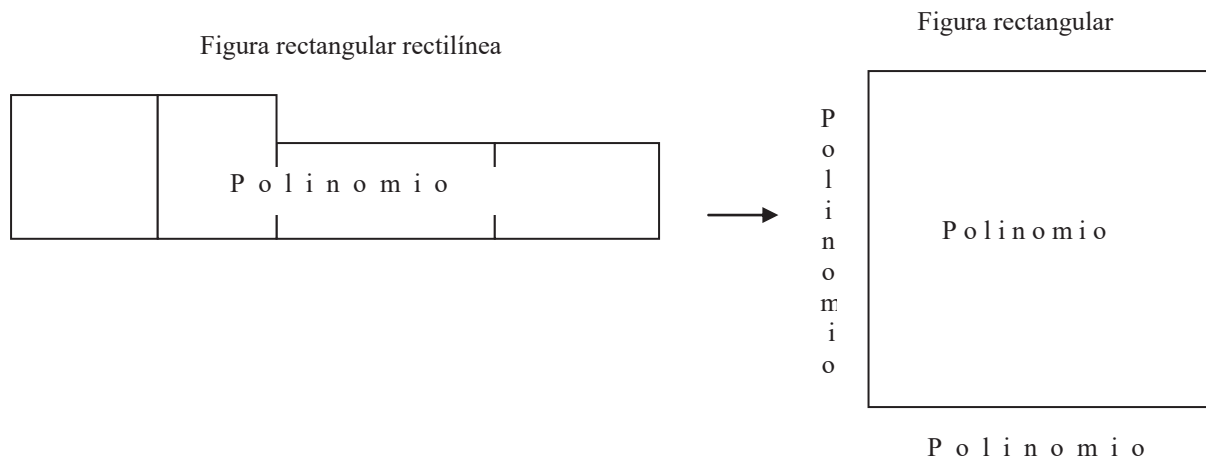


El polinomio $x^2 + 3x + 2$ puede representarse por la figura rectangular rectilínea:



5. Factorización Geométrica

La factorización es un método algebraico que consiste de ciertos algoritmos para expresar un polinomio como un producto de dos o más polinomios de grado menor, que el polinomio dado. Para factorizar geométricamente un polinomio se utiliza el concepto de área de una figura rectangular, en el que factorizar geométricamente un polinomio; *significa transformar una figura rectangular rectilínea en una figura rectangular* (cuadrado o rectángulo), haciendo uso del *método de la geometría de cortar y pegar* y el *método de compensación de áreas*. El área de la figura rectangular obtenida es el polinomio a factorizar y el producto de los polinomios de su base y de su altura (cada uno de grado menor que el polinomio a factorizar), es la factorización del polinomio.



$$\text{Área} = \text{base} \times \text{altura}$$

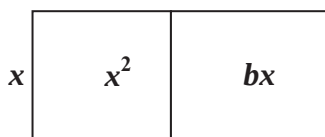
$$\text{Polinomio dado} = (\text{Polinomio de la base}) (\text{Polinomio de la altura})$$

Si no es posible construir una figura rectangular con el polinomio, significa que el polinomio no es factorable o factorizable en los enteros o en los reales. En este curso, la factorización se limita a polinomios de coeficientes enteros y factorizables en los enteros. Aunque cabe señalar que se pueden factorizar polinomios dentro del campo de los números reales.

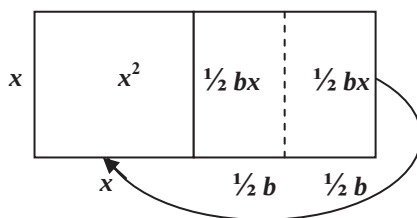
Se recomienda al alumno dibujar las figuras rectangulares en forma representativa, sin usar escalas, para evitar entretenimientos en la factorización.

5.1 Método de cortar y pegar

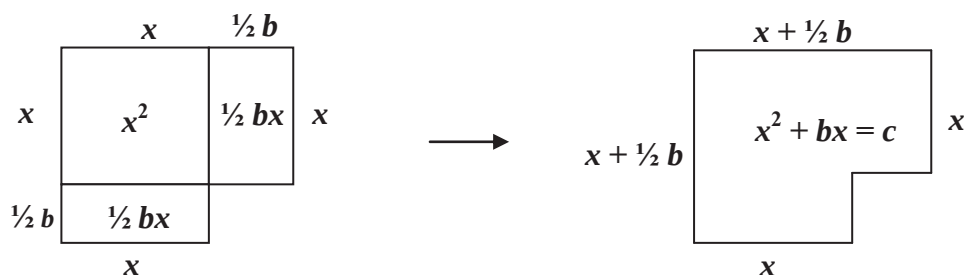
Se aplica el *método de cortar y pegar* para resolver o encontrar las raíces de la ecuación cuadrática $x^2 + bx = c$, se supone que x , b y c son positivos. El polinomio $x^2 + bx$ se representa por medio de una figura rectangular rectilínea de base $x + b$ y de altura x .



Se corta la mitad del rectángulo bx , cuya área es $\frac{1}{2}bx$, y se pega en la parte inferior del rectángulo de área x^2 , de tal manera que coincidan los lados de igual longitud.



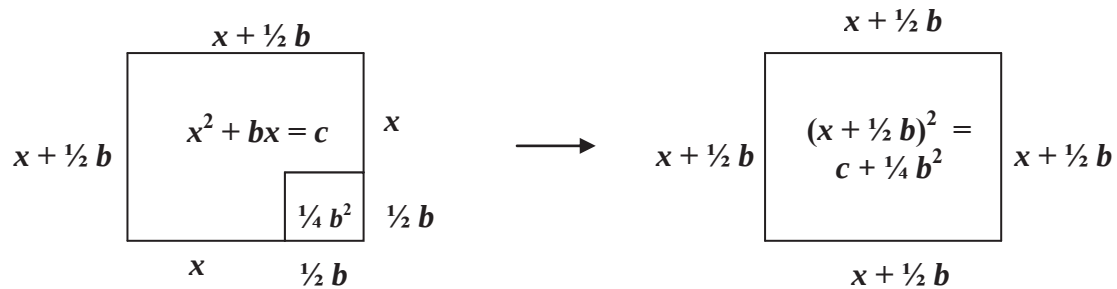
Al pegar en la parte inferior se obtiene la siguiente figura cuya área es la misma.



Si completamos el cuadrado agregando el cuadrado de lado $\frac{1}{2}b$ y cuya área es $\left(\frac{1}{2}b\right)^2 = \frac{1}{4}b^2$,

10

se obtiene el cuadrado de lado $x + \frac{1}{2}b$ y cuya área es $c + \frac{1}{4}b^2$.



El área del cuadrado es igual a:

$$(x + \frac{1}{2}b)^2 = c + \frac{1}{4}b^2 \quad \therefore \quad x + \frac{1}{2}b = \pm \sqrt{c + \frac{1}{4}b^2}$$

Las soluciones de la ecuación cuadrática $x^2 + bx = c$ son:

$$x = -\frac{1}{2}b \pm \sqrt{c + \frac{1}{4}b^2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{4c + b^2}{4}} = -\frac{b}{2} \pm \frac{\sqrt{4c + b^2}}{2} \quad \therefore \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4c}}{2}$$

5.2 Procedimiento para factorizar

Se recomienda seguir las siguientes estrategias para factorizar un polinomio:

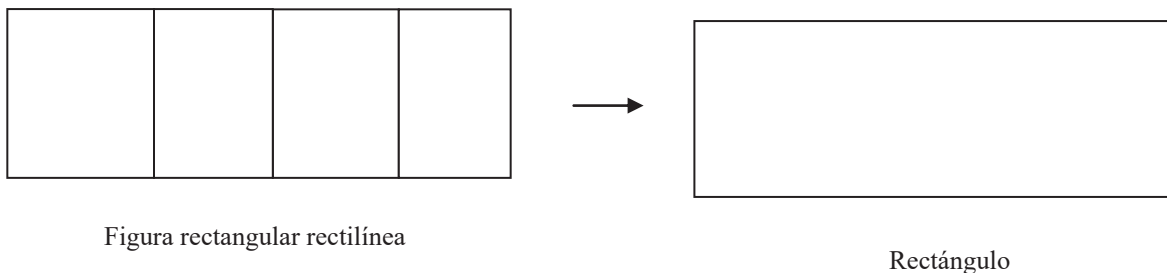
- Representar geométricamente el polinomio, mediante una figura rectangular rectilínea.
- Ver si cada término del polinomio se puede representar como cuadrados o rectángulos de igual altura[†].
- Construir una figura rectangular a partir de la figura rectangular rectilínea.
- Expresar el área del rectángulo (polinomio a factorizar) como el producto de sus lados (polinomios en los que se factoriza el polinomio dado).

[†] Los cuadrados o rectángulos pueden tener igual altura o igual base, pero teniendo en cuenta que además nuestra forma de escribir es de izquierda a derecha; y para evitar confusiones, solo serán considerados cuadrados o rectángulos de igual altura.

Se pueden presentar diferentes formas de factorizar geoméricamente un polinomio, al igual que algebraicamente, dependiendo del número de términos que contenga el polinomio a factorizar y de la figuras rectangulares que representen cada término del polinomio. A continuación se analizaran diferentes situaciones:

5.3 Factorización por factor común

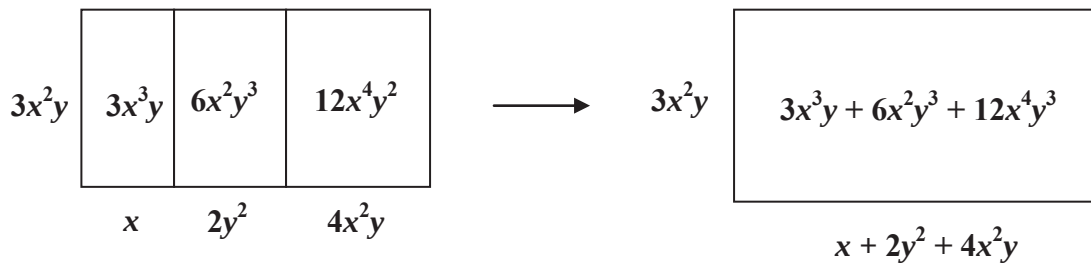
La figura rectangular rectilínea que representa el polinomio tiene una sola altura. Los polinomios, cuyos términos se pueden representar geoméricamente por cuadrados o rectángulos que tienen una misma altura (las figuras rectangulares comparten un lado, al que simbólicamente se le llama factor común), forman una figura rectangular rectilínea de una sola altura. Esta forma de factorizar en álgebra es conocida como “*factorización por factor común*”.



A continuación se factorizan geoméricamente algunos polinomios que son factorizables por factor común.

Ejemplo 1: Factorizar el polinomio $3x^3y + 6x^2y^3 + 12x^4y^2$.

Se puede ver que cada término del polinomio $3x^3y + 6x^2y^3 + 12x^4y^2$ se puede representar por una figura rectangular rectilínea de una sola altura, dado que cada término del polinomio se puede representar por rectángulos que tienen una misma altura $3x^2y$, como se muestra a continuación.

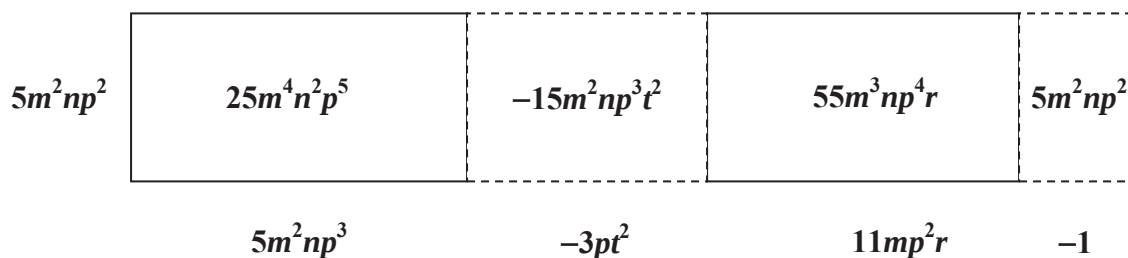


La factorización del polinomio es:

$$3x^3y + 6x^2y^3 + 12x^4y^2 = 3x^2y(x + 2y^2 + 4x^2y)$$

Ejemplo 2: Factorizar el polinomio $25m^4n^2p^5 - 15m^2np^3t^2 + 55m^3np^4r - 5m^2np^2$

Al igual que el ejemplo anterior se puede ver que cada término del polinomio $25m^4n^2p^5 - 15m^2np^3t^2 + 55m^3np^4r - 5m^2np^2$, se puede representar por una figura rectangular rectilínea de una sola altura, dado que cada término del polinomio se puede representar por rectángulos que tienen una misma altura $5m^2np^2$, como se muestra a continuación.

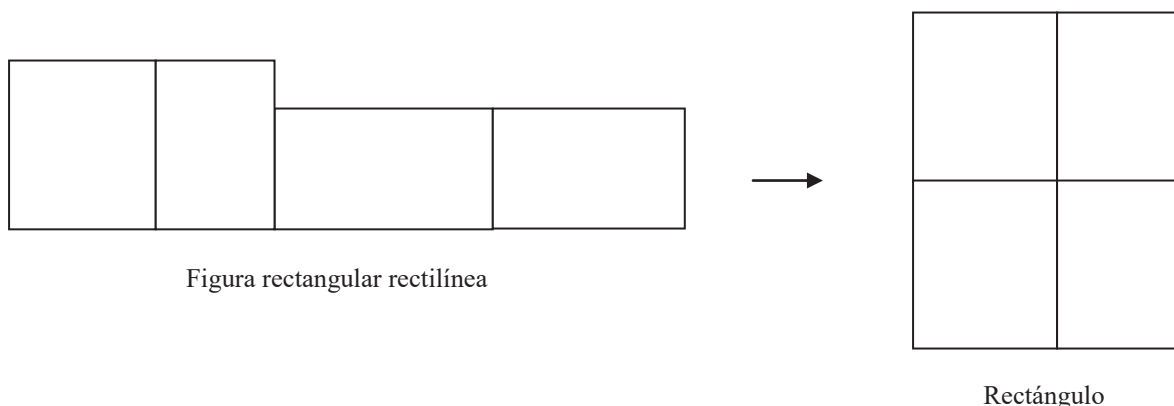


$$\therefore 25m^4n^2p^5 - 15m^2np^3t^2 + 55m^3np^4r - 5m^2np^2 = 5m^2np^2(5m^2np^3 - 3pt^2 + 11mp^2r - 1)$$

5.4 Factorización por agrupación

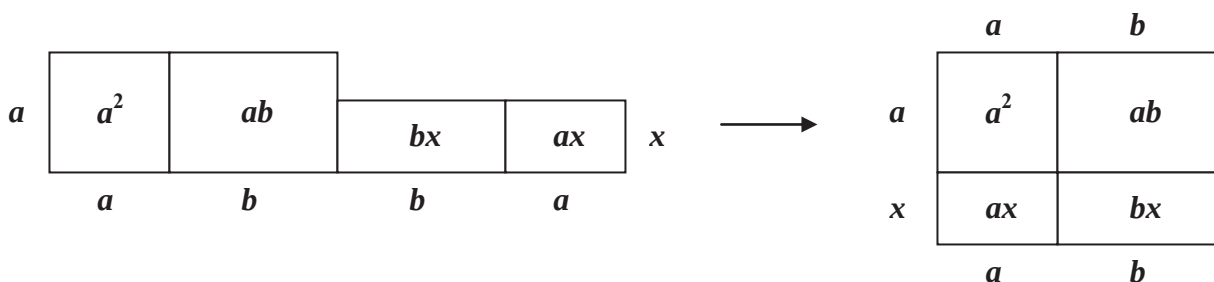
Factorización de polinomios que contienen algunos términos que se pueden representar geoméricamente por cuadrados o rectángulos que tienen una misma altura y los otros términos se

pueden representar como cuadrados o rectángulos comparten la misma base de los primeros. En este caso se agrupan los que tengan la misma altura y en otra agrupación los que tengan la misma base y ver si las agrupaciones tienen un lado común (por lo regular la base), si es así construir la figura rectangular una agrupación encima de la otra. Los polinomios que pueden factorizarse de esta forma deben contener al menos cuatro términos o un número par de términos. Esta forma de factorizar en álgebra se llama “**factorización por agrupación**”.



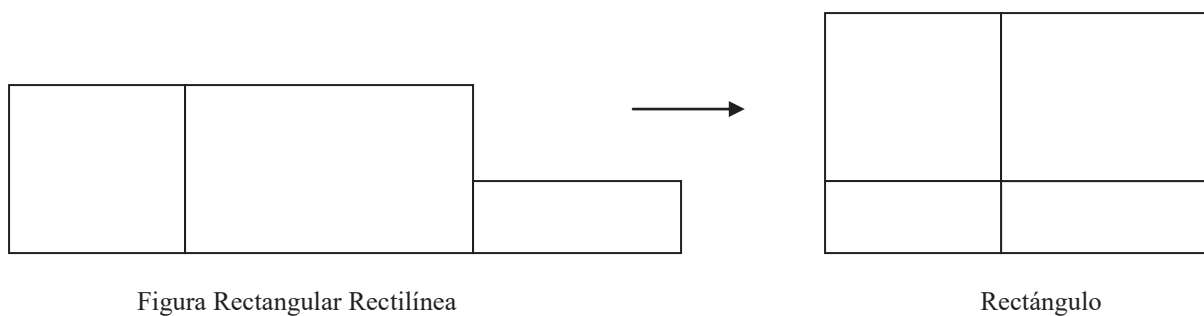
Ejemplo 3: Factorizar el polinomio $a^2 + ab + bx + ax$

Se puede ver que los términos a^2 y ab tienen la misma altura y los términos bx y ax tienen la misma base o altura x , por lo tanto, se representa el polinomio $a^2 + ab + bx + ax$ por la figura rectangular rectilínea siguiente:

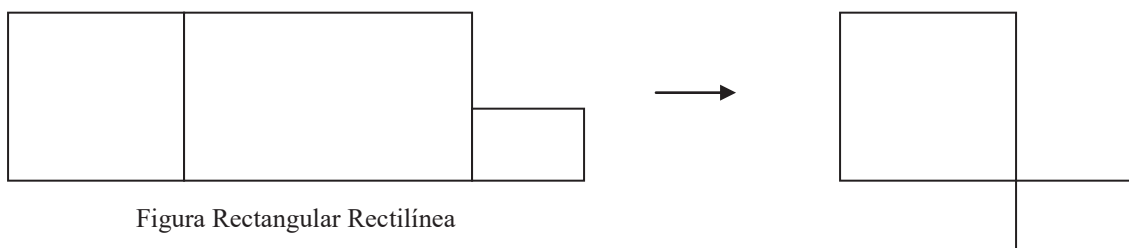


5.5 Factorización de polinomios de la forma $ax^{2n} + bx^ny^n + cy^{2n}$

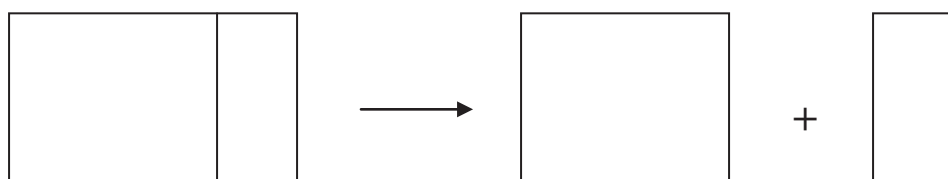
Esta forma de factorizar se deriva de la anterior, y consiste en representar el polinomio de tres términos como una figura rectangular rectilínea, en el que el término que comparte la altura con los otros dos deberá descomponerse por medio de la suma geométrica, en dos rectángulos; en el que sus alturas y sus bases sean las mismas que las alturas de las figuras rectangulares que no tienen la altura, ni la misma base, de tal manera que permita construir el cuadrado o rectángulo.



Para poder formar el rectángulo, figuras rectangulares que no tienen ni la altura, ni la base común, se colocan haciendo coincidir uno de sus vértices y que sus lados queden en forma paralela (sobre la diagonal del cuadrado o rectángulo a formar).



El área del rectángulo que tiene la misma altura pero diferente base, se descompone en dos áreas equivalentes; de tal manera que cada una de ellas tenga un lado común al primer rectángulo y los otros dos lados tengan lados en común con el otro rectángulo, para lo cual se aplica el método de cortar y pegar.



A continuación se colocan los rectángulos divididos de tal manera que coincidan sus lados con los lados de los rectángulos colocados haciendo coincidir sus vértices y formar finalmente el cuadrado o rectángulo.

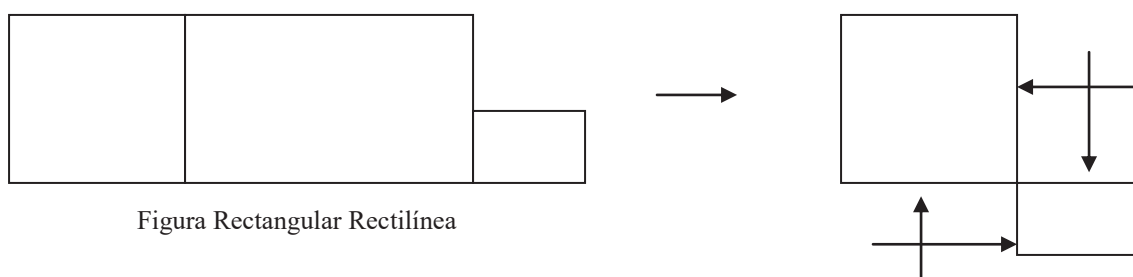


Figura Rectangular Rectilínea

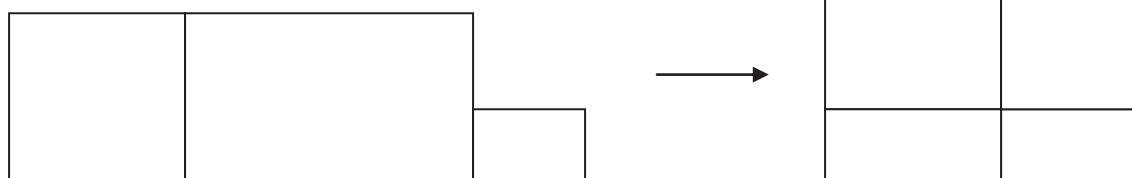


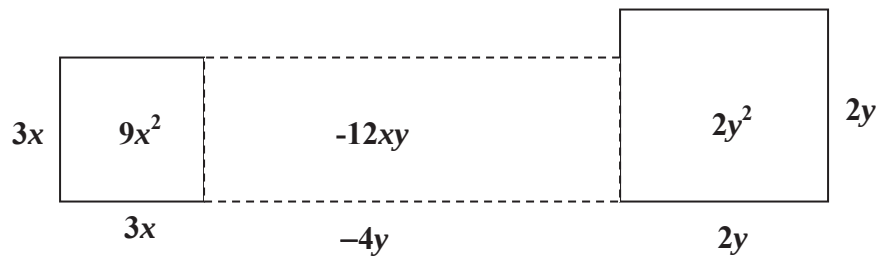
Figura Rectangular Rectilínea

Rectángulo

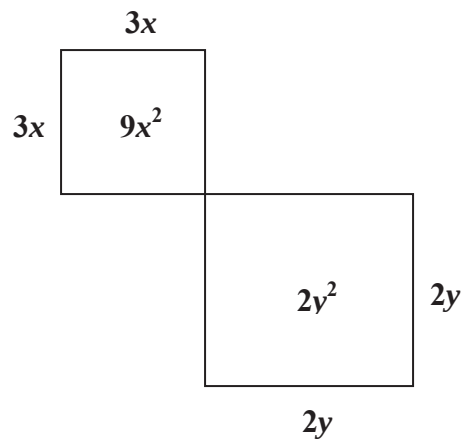
Por esta forma de factorizar se factorizan trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$, el cual es un caso especial del trinomio $ax^{2n} + bx^ny^n + cy^{2n}$, para $n = 1$ y $y = 1$. La factorización se establece cuando el área de la figura rectangular rectilínea, el polinomio; se expresa como el producto de los lados del rectángulo; es decir los polinomios en que se factoriza el polinomio dado.

Ejemplo 3: Factorizar el polinomio $9x^2 - 12xy + 4y^2$

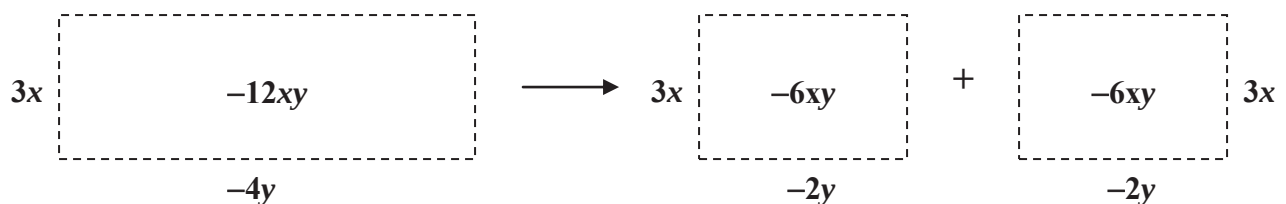
El polinomio $9x^2 - 12xy + 4y^2$ es representado por la figura rectangular rectilínea siguiente:



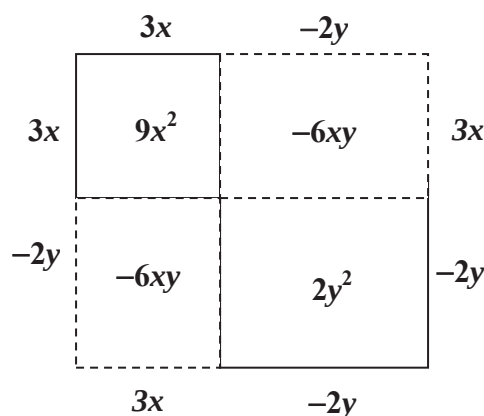
Los cuadrados de áreas $3x^2$ y $4y^2$ no tienen la misma altura ni la misma base, por lo cual serán colocados en una de las diagonales de la figura rectangular a construir.



Para construir la figura rectangular se requiere des componer el rectángulo de área $-12xy$ en dos rectángulos, de lados $3x$ y $-2y$ y de área igual a $-6xy$



Colocando estos dos rectángulos sobre la otra diagonal de la figura rectangular y de esta forma se completa el cuadrado deseado. El cuadrado de área $4y^2$ de lados $2y$ es remplazado por el de lados $-2y$, ya que son equivalentes por tener la misma área, es decir; $(-2y)(-2y) = 4y^2$.

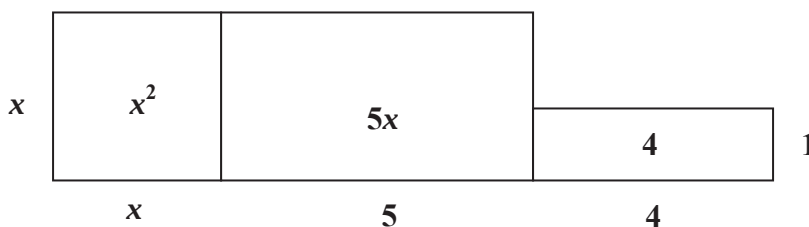


La factorización del polinomio es:

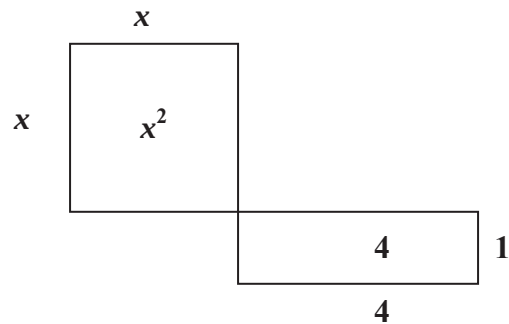
$$9x^2 - 12xy + 4y^2 = (3x - 2y)(3x - 2y) \quad \therefore \quad 9x^2 - 12xy + 4y^2 = (3x - 2y)^2$$

Ejemplo 4: Factorizar el polinomio $x^2 + 5x + 4$

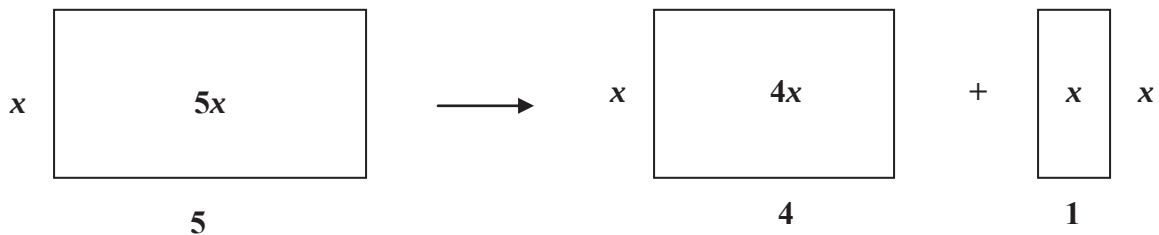
El polinomio $x^2 + 5x + 4$ se representa por la figura rectangular rectilínea siguiente:



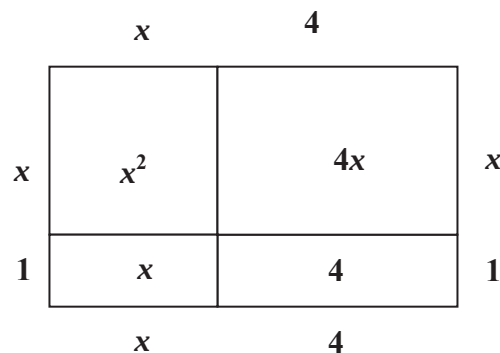
Los cuadrados de áreas x^2 y 4 no tienen la misma altura ni la misma base, por lo cual serán colocados en una de las diagonales de la figura rectangular a construir.



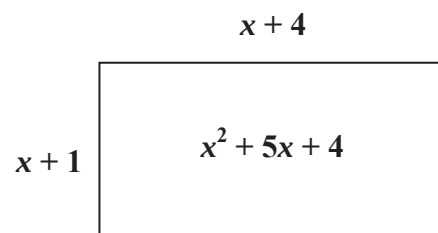
Para construir la figura rectangular se requiere descomponer el rectángulo de área $5x$ en dos rectángulos, uno de lados 4 y x y el otro de lados 1 y x , de áreas igual a $4x$ y x , respectivamente, dado que algebraicamente $4x + x = 5x$.



Se colocan estos dos rectángulos sobre la otra diagonal de la figura rectangular y de esta forma se completa el rectángulo deseado.



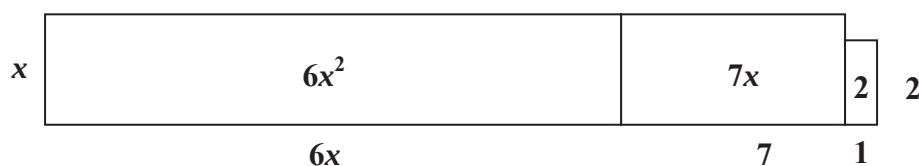
El rectángulo obtenido es el siguiente:



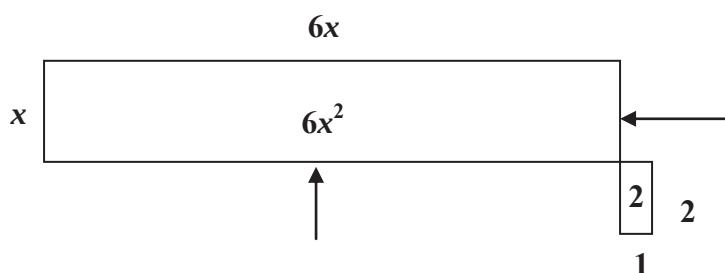
La factorización del polinomio es: $x^2 + 5x + 4 = (x + 1)(x + 4)$

Ejemplo 5: Factorizar el polinomio $6x^2 + 7x + 2$.

El polinomio $6x^2 + 7x + 2$, primeramente es representado por la figura rectangular rectilínea siguiente:

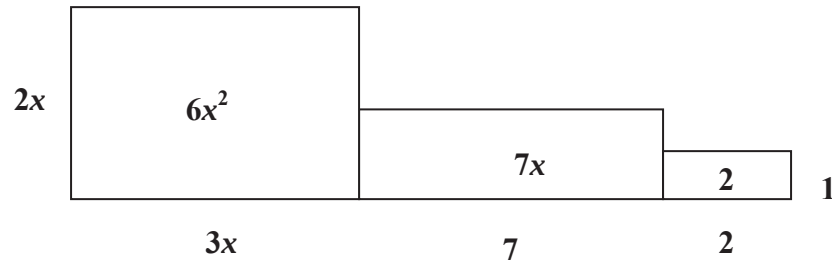


A continuación se colocan el primer rectángulo y el tercero haciendo coincidir uno de sus vértices y de tal manera que sus lados queden respectivamente paralelos, es decir sobre una diagonal del rectángulo que se desea construir, dado que no tienen ni la altura, ni la base común..

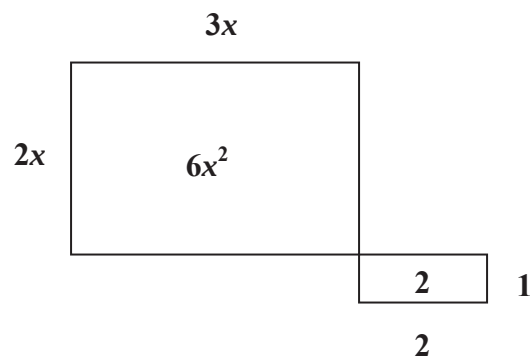


Para construir un rectángulo con los rectángulos de la figura rectangular rectilínea, se debe descomponer el rectángulo de área $7x$ en dos rectángulos, uno de lados 1 y x y el otro de lados 2 y $6x$, de áreas x y $12x$, respectivamente. Lo cual no es posible ya que los rectángulos que se requieren, sus áreas suman $x + 12x = 13x$ y dado que $7x$ es diferente de $13x$, el rectángulo no se puede construir, lo que implica que el polinomio no se puede factorizar de esta forma o con esta figura rectangular rectilínea.

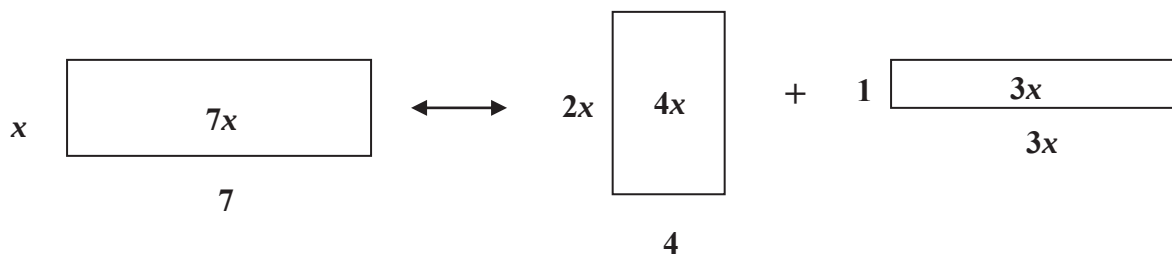
Se representará al polinomio mediante otra figura rectangular rectilínea, siendo esta la siguiente:



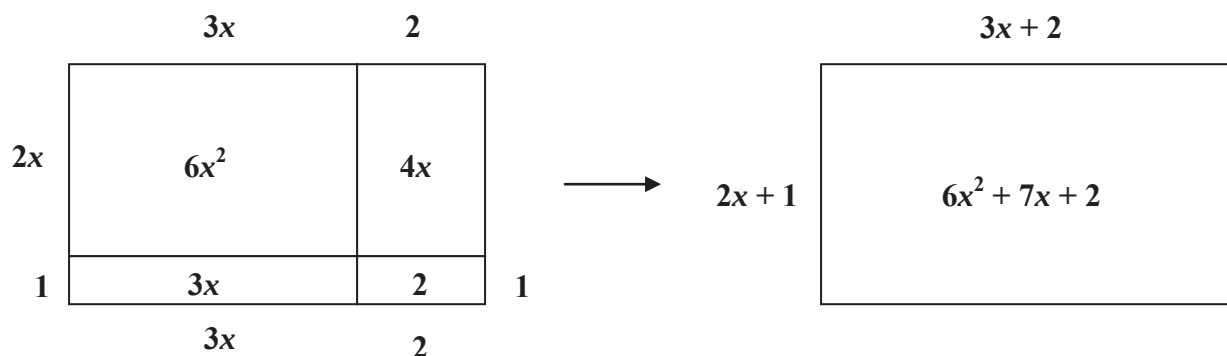
A continuación se colocan rectángulo de área $6x^2$ y el de área 2 , haciendo coincidir uno de sus vértices y de tal manera que sus lados queden respectivamente paralelos, sobre una de las diagonales del rectángulo a construir.



Para construir un rectángulo con los rectángulos de la figura rectangular rectilínea, se debe descomponer el rectángulo de área $7x$ en dos rectángulos, uno de lados 2 y $2x$ y el otro de lados 1 y $3x$, de áreas $4x$ y $3x$, respectivamente. Lo cual es posible ya que los rectángulos que se requieren, sus áreas suman $7x$, es decir: $4x + 3x = 7x$.



Colocando los rectángulos sobre la otra diagonal, puede verse que es posible hacer que sus lados coincidan y por lo tanto se puede construir el rectángulo.

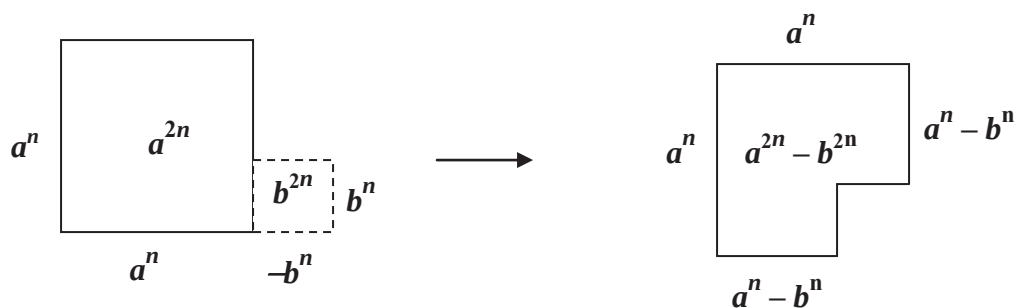


$$\therefore 6x^2 + 7x + 2 = (2x + 1)(3x + 2)$$

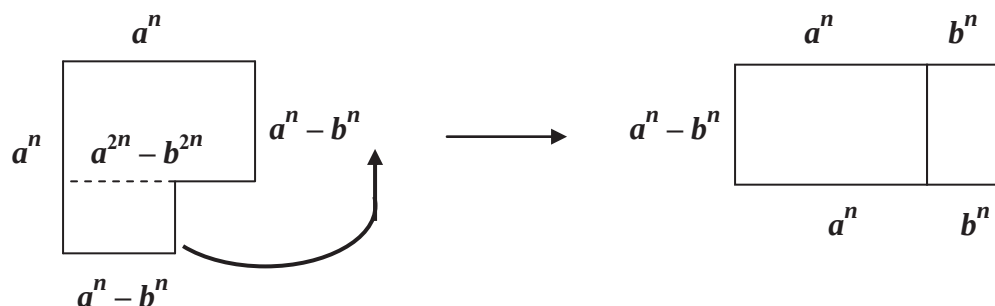
5.6 Factorización de la diferencia de potencias pares: $a^{2n} - b^{2n}$.

Método de cortar y pegar

Si n es un exponente entero positivo y suponiendo que $a > b$, la diferencia de potencias se representa por la figura rectangular rectilínea siguiente:



Aplicando el método de cortar y pegar podemos construir una figura rectangular.



La figura rectangular que se obtiene es un rectángulo de lados

$$\begin{array}{ccc}
 a^n - b^n & \boxed{a^{2n} - b^{2n}} & \\
 & a^n + b^n &
 \end{array}
 \quad \therefore \quad a^{2n} - b^{2n} = (a^n - b^n)(a^n + b^n)$$

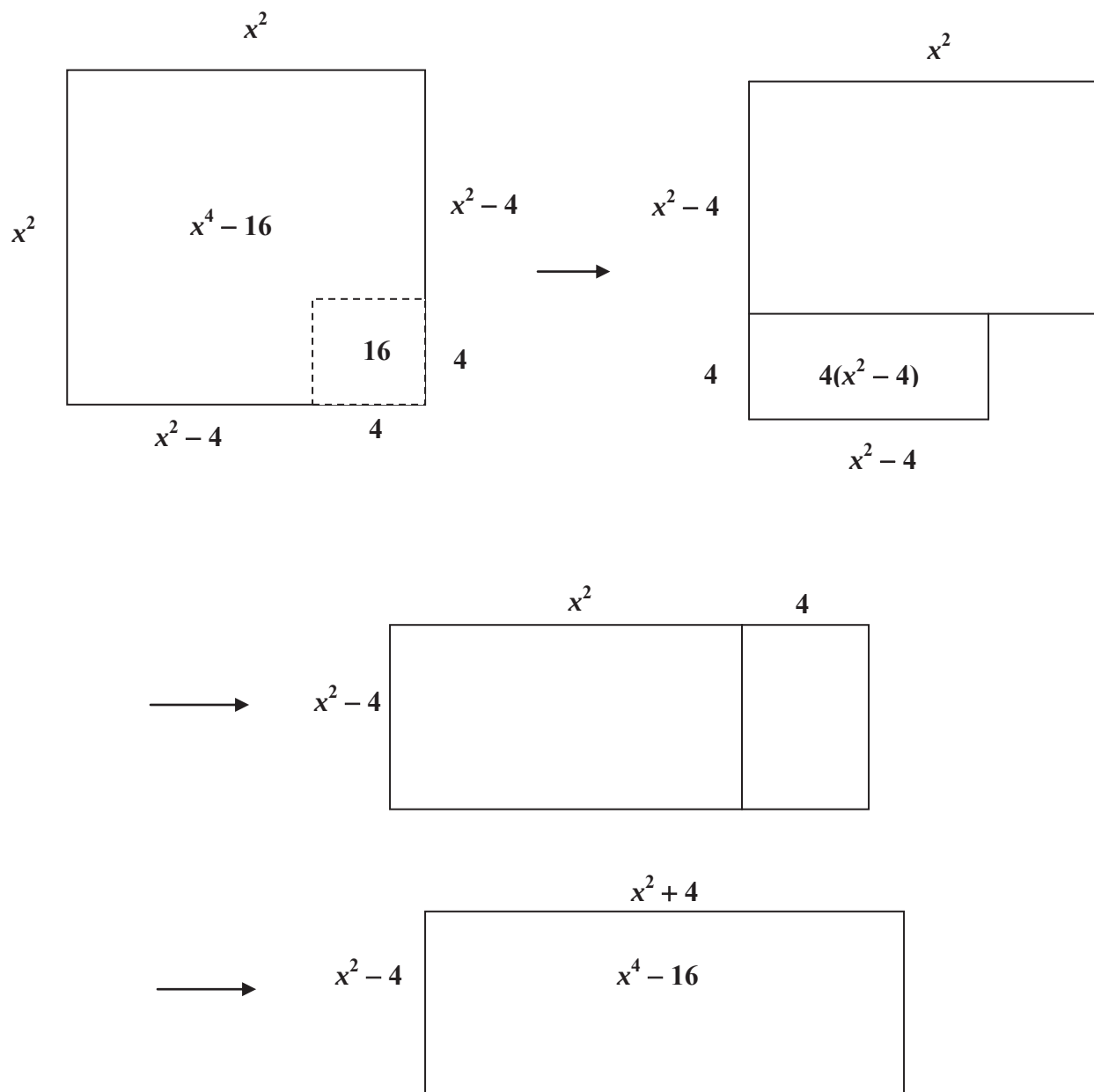
La factorización de la diferencia de potencias pares $a^{2n} - b^{2n}$ es $(a^n - b^n)(a^n + b^n)$.

Ejemplo 6: Factorizar el polinomio $x^2 - 4$

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc}
 & x & \\
 x & \boxed{x^2 - 4} & x - 2 \\
 & \boxed{4} & 2 \\
 & x - 2 & 2
 \end{array}
 & \longrightarrow &
 \begin{array}{ccc}
 & x & \\
 x - 2 & \boxed{} & \\
 2 & \boxed{} & \\
 & x - 2 &
 \end{array}
 \\
 \\
 \begin{array}{ccc}
 & x & 2 \\
 x - 2 & \boxed{} & \boxed{}
 \end{array}
 & \longrightarrow &
 \begin{array}{ccc}
 & x + 2 & \\
 x - 2 & \boxed{x^2 - 4} &
 \end{array}
 \\
 \\
 \therefore x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2) = (x - 2)(x + 2)
 \end{array}$$

La factorización de $x^2 - 4$ es $(x + 2)(x - 2)$ o bien $(x - 2)(x + 2)$.

Ejemplo 7: Factorizar el polinomio $x^4 - 16$:



$$\therefore x^4 - 16 = (x^2 + 4)(x^2 - 4) = (x^2 - 4)(x^2 + 4) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$$

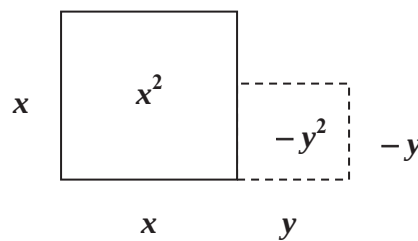
La factorización de $x^4 - 16$ es $(x^2 - 4)(x^2 + 4)$ y dado que $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$ la factorización de $x^4 - 16$ es $(x + 2)(x - 2)(x^2 + 4)$.

5.7 Diferencia de potencias impares: $a^n - b^n$

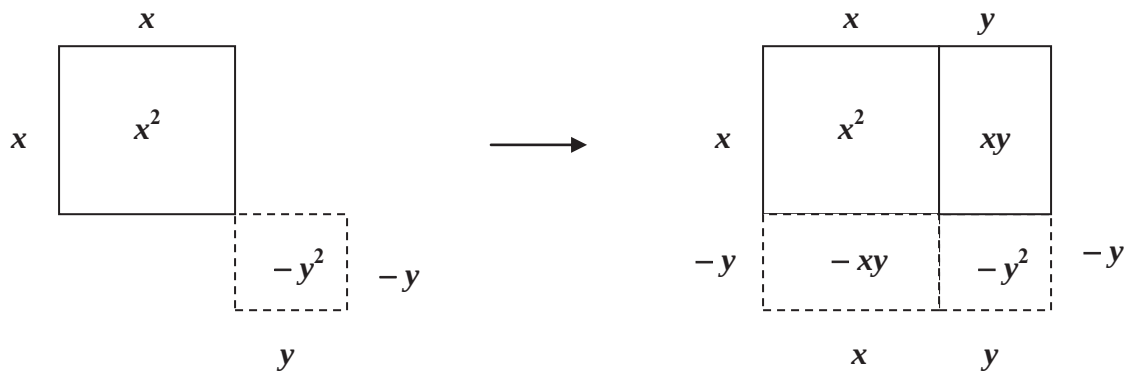
Método de compensación de áreas

Sea n es un exponente entero positivo par o impar y suponiendo que $a > b$, la diferencia de potencias se representa por la figura rectangular rectilínea siguiente:

Ejemplo 8: Usando figuras rectangulares representa geoméricamente la diferencia de cuadrados $x^2 - y^2$ y factorízala.



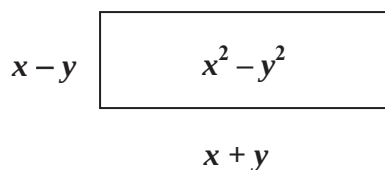
Cuadrar la diferencia de cuadrados:



Compensación de áreas:

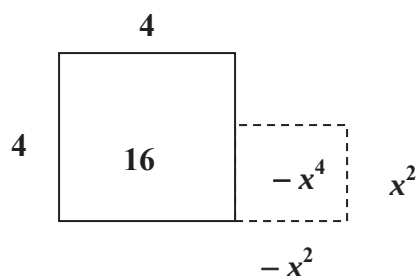
$$xy + (-xy) = 0$$

Factorización:

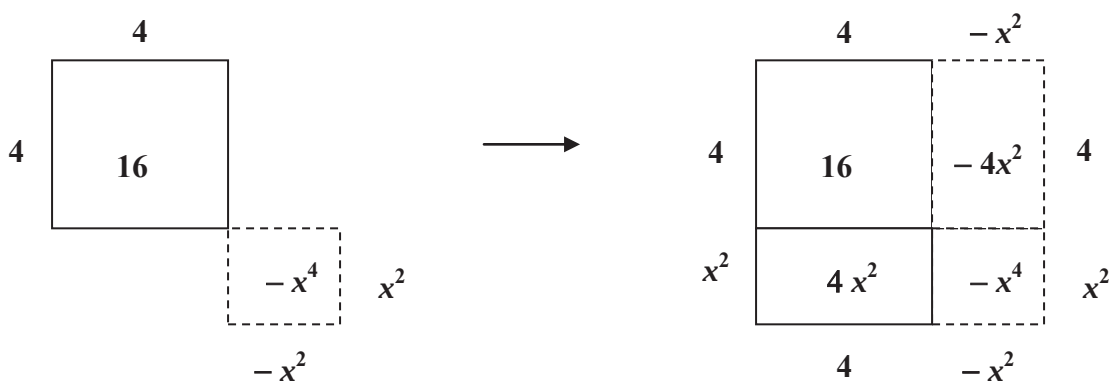


$$\therefore x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) = (x - y)(x + y)$$

Ejemplo 9: Usando figuras rectangulares representa la diferencia de cuartas potencias $16 - x^4$



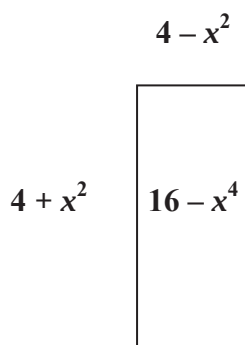
Cuadrar la diferencia de potencias cuartas:



Compensación de las áreas:

$$-4x^2 + 4x^2 = 0$$

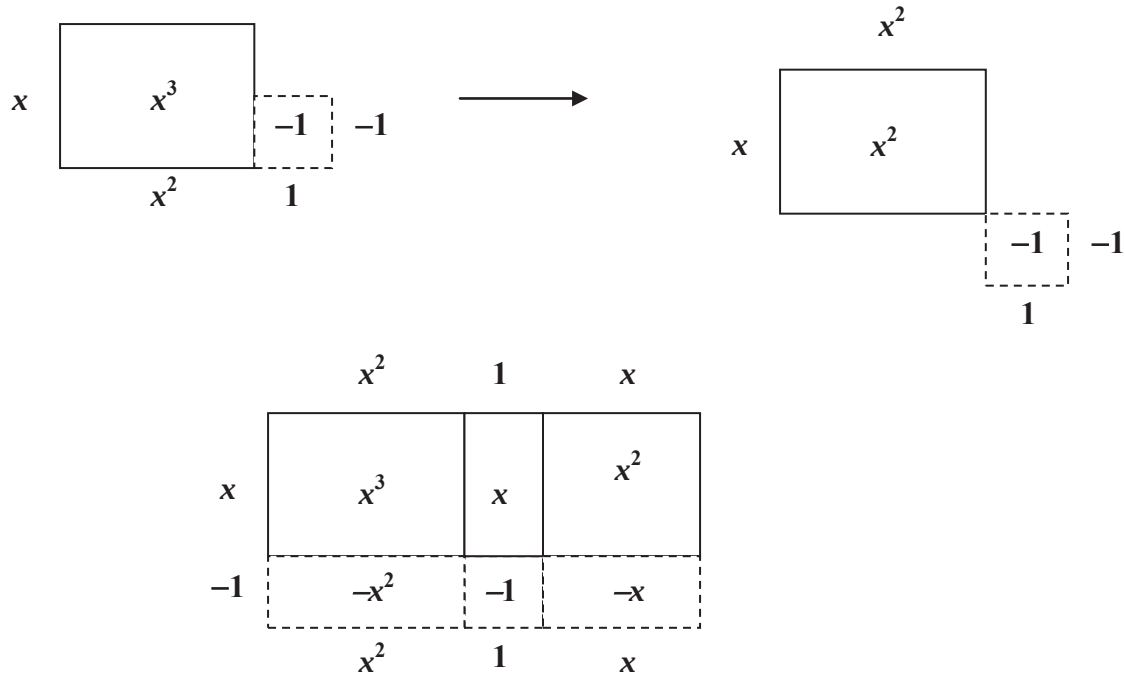
Factorización de la diferencia de cuartas potencias:



La factorización es $16 - x^4 = (4 - x^2)(4 + x^2)$.

Ejemplo 10: Factorizar el polinomio $x^3 - 1$

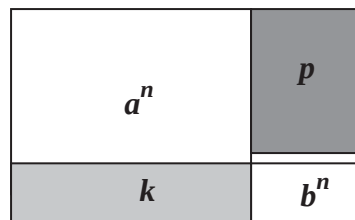
Utilizando el procedimiento de compensar áreas la factorización es la siguiente:



La factorización de $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + 1 + x) = (x - 1)(x^2 + x + 1)$.

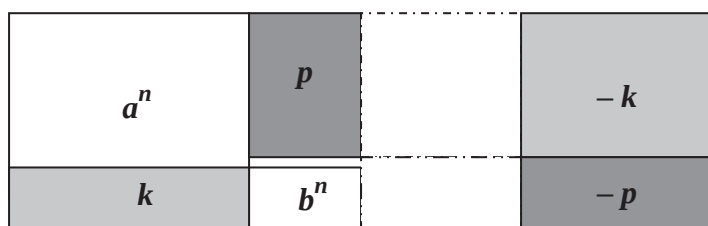
5.8 Factorización de la suma de potencias impares de números diferentes: $a^n + b^n$ **Método de compensación de áreas**

Se puede ver geométricamente que la suma de dos potencias $a^n + b^n$, cuando n es impar, se puede factorizar compensando áreas, ya que se puede construir una figura rectangular; si se agregan los rectángulos de áreas k y p como áreas positivas, equivale a factorizar el polinomio $a^n + b^n + k + p$, lo que significa que el polinomio ha sido alterado, por lo tanto se tiene que agregar



rectángulos de áreas $-k$ y $-p$, para compensar las áreas y así construir la figura rectangular.

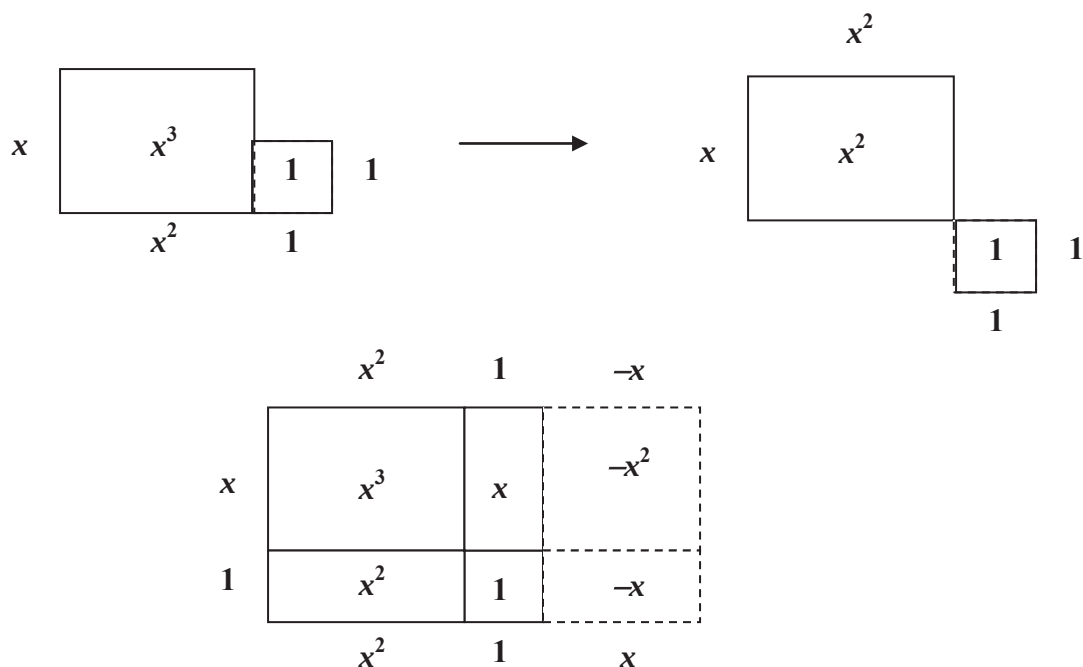
Compensación de áreas:



Los rectángulos marcados con líneas de puntos indican que se deben agregar más rectángulos hasta que se compensen las áreas, esto depende del grado del polinomio.

Ejemplo 11: Factorizar el polinomio $x^3 + 1$

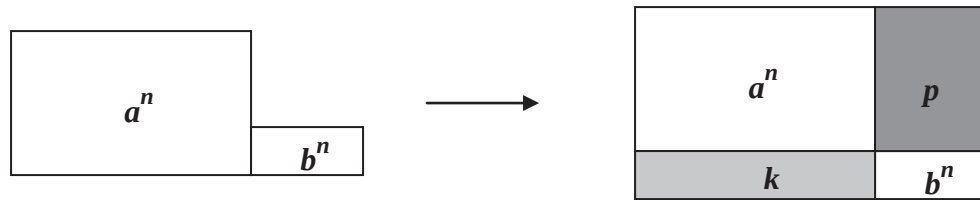
De la misma forma utilizando el procedimiento de de compensar áreas, la factorización es la siguiente:



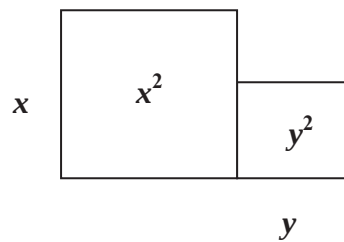
La factorización de $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 + 1 - x) = (x - 1)(x^2 - x + 1)$.

5.9 Suma de potencias pares de números diferentes: $a^n + b^n$

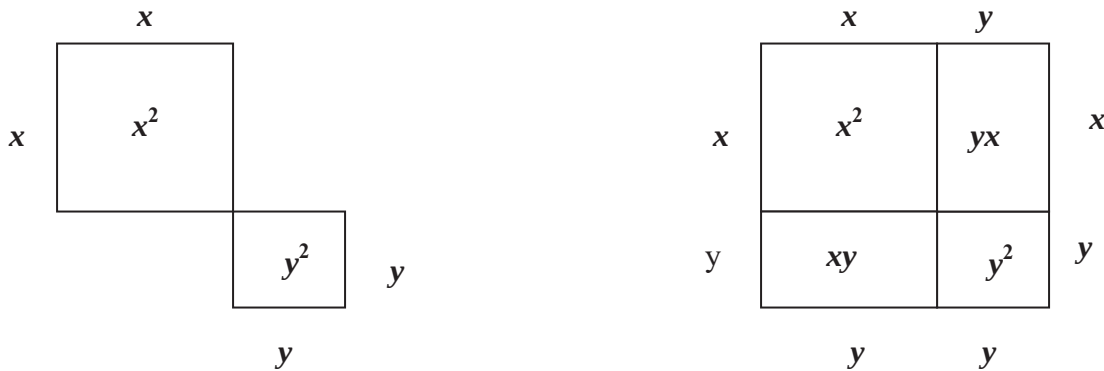
Si se agregan las áreas p y q (rectángulos negros), como áreas positivas equivale a factorizar el polinomio $a^n + b^n + p + k$, se puede verificar que no existe forma de compensar estas áreas, agregando rectángulos de áreas $-k$ y $-p$, por lo tanto una suma de potencias pares no puede factorizarse.



Para mostrar este procedimiento intentaremos factorizar la suma de cuadrados $x^2 + y^2$



Intentar cuadrar la suma de cuadrados $x^2 + y^2$



Compensación de áreas:

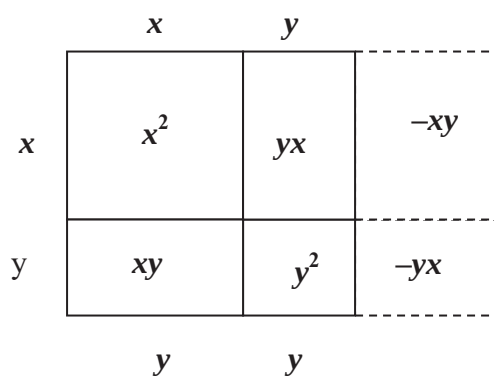
$$xy + yx = 2x \neq 0$$

La suma de los términos xy y yx altera la suma de cuadrados y por lo tanto:

$$x^2 + y^2 \neq x^2 + 2xy + y^2$$

Las áreas que deben agregarse para compensar áreas son:

$$-xy \text{ y } -yx$$



No existe base común base común de los rectángulos que compensaran áreas:

$$(\quad) y = -xy \quad y \quad (\quad) x = -yx \quad \therefore \quad (\quad ? \quad) (x + y) = -yx - yx$$

No existe un factor común que multiplicado por y y a la vez multiplique a x se obtenga $-yx$

Por lo tanto no se puede cuadrar la suma de cuadrados $x^2 + y^2$ sin alterarla y por lo tanto se concluye que no es factorizable.

Conclusión: La suma de potencias pares no es factorizable.

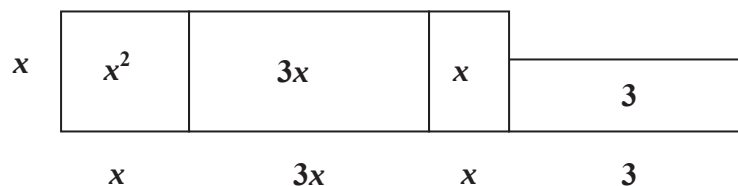
5.14 Multiplicación geométrica

La multiplicación de dos polinomios geoméricamente representa un cuadrado o rectángulo, formado a su vez por rectángulos o cuadrados, en el que cada uno de los lados del cuadrado o rectángulo original es representado por cada uno de los polinomios del producto y cuyo resultado es una figura rectangular rectilínea, es decir, la multiplicación de polinomios consiste en transformar un cuadrado o rectángulo en una figura rectangular rectilínea.

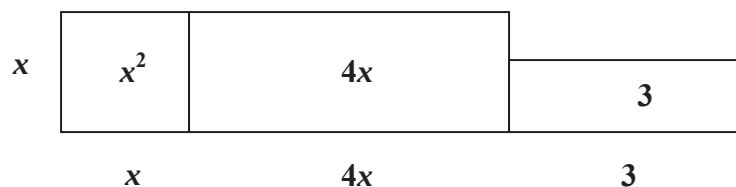
El producto de polinomios $(x + 1)(x + 3)$ se representa geoméricamente por:

	x	3
x	x^2	$3x$
1	x	3

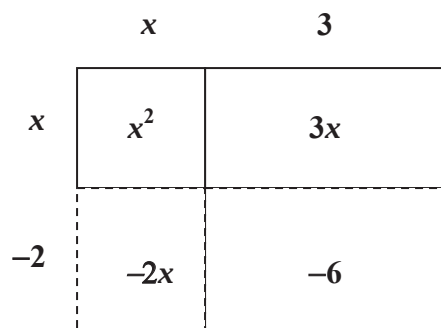
El polinomio resultante del producto $x^2 + 3x + x + 3$ se representa por la siguiente figura rectangular rectilínea.



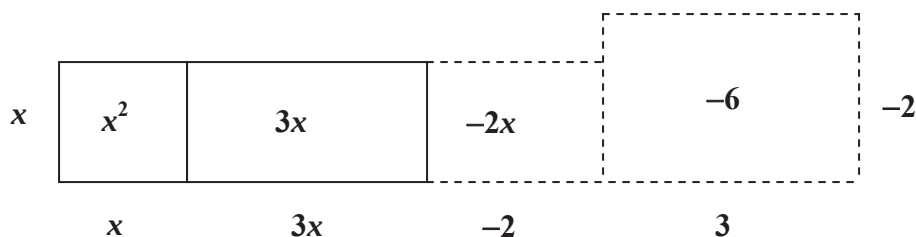
La áreas de los rectángulos que tienen la misma altura se pueden sumar y es equivalente a sumar los términos semejantes $3x$ y x , es decir $3x + x = 4x$, cuyo polinomio resultante del producto es $x^2 + 4x + 3$ representado por la siguiente figura rectangular rectilínea.



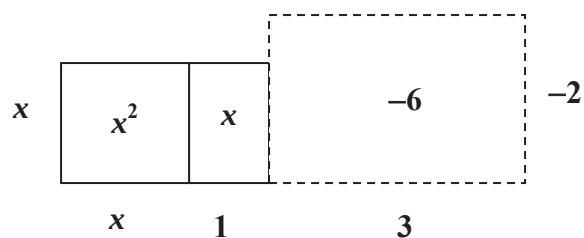
El producto de polinomios $(x - 2)(x + 3)$ se representa geométricamente por:



El polinomio resultante del producto $x^2 + 3x - 2x - 6$ se representa por la siguiente figura rectangular rectilínea.



La áreas de los rectángulos que tienen la misma altura se pueden sumar y es equivalente a sumar los términos semejantes $3x$ y $-2x$, es decir $3x + (-2x) = x$, cuyo polinomio resultante del producto es $x^2 + x - 6$ representado por la siguiente figura rectangular rectilínea.

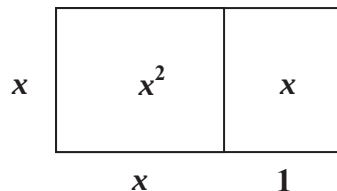


5.15 División geométrica

La división geométrica de dos polinomios da como resultado una figura rectangular rectilínea, cuando el polinomio del dividendo es divisible por el polinomio del divisor (el residuo es cero), se representa geométricamente por una figura rectangular rectilínea de una sola altura, la cual es equivalente a una figura rectangular. El polinomio del dividendo es el área de la figura rectangular y el polinomio del divisor es uno de los lados de la figura rectangular, dividir geométricamente, significa encontrar el otro lado de la figura rectangular (la base o la altura), en el desarrollo de este curso se buscará la base, dado que hay divisibilidad, es decir:

$$\frac{D}{d} = c \quad \therefore \quad D = c \cdot d \quad \text{y dado que} \quad A = b \cdot h \quad \text{entonces} \quad b = c$$

Para dividir geométricamente el polinomio $x^2 + x$ por el monomio x , se construye la figura rectangular rectilínea cuya área sea el polinomio $x^2 + x$ y una de sus alturas sea x . El binomio $x^2 + x$ representa una figura rectangular rectilínea de una sola altura x .

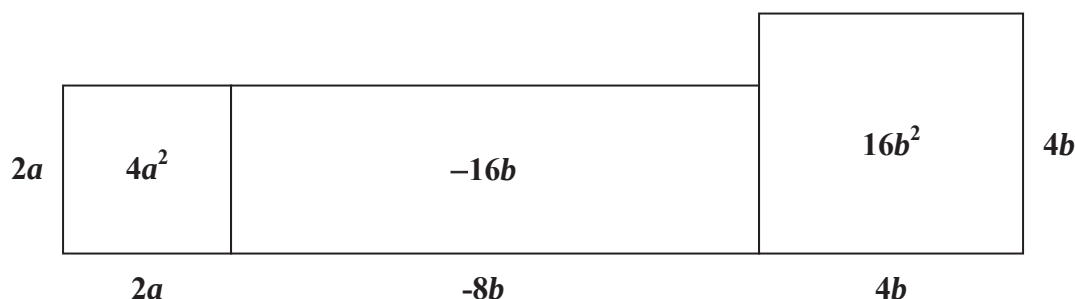


Dado que el polinomio del dividendo se puede escribir como $x^2 + x = x \cdot x + 1 \cdot x$ la base del cuadrado es x y la base del rectángulo es 1 . La figura rectangular rectilínea que se obtiene es un rectángulo de altura x y de base $x + 1$.

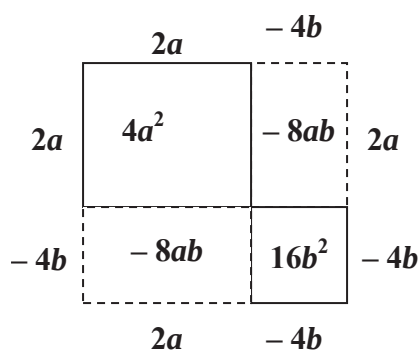
$\therefore \quad c = x + 1$

El resultado de dividir el polinomio $x^2 + x$ entre el monomio x es $x + 1$, con residuo cero ($r = 0$).

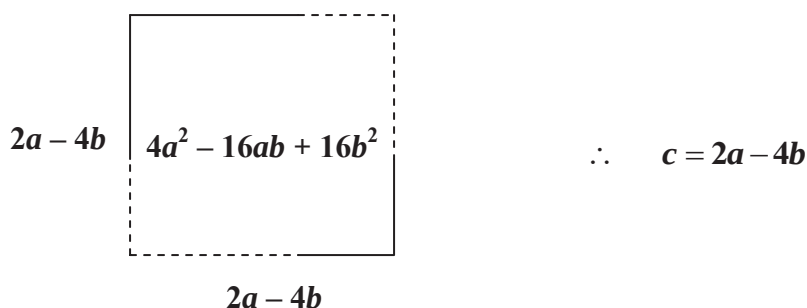
Para dividir geoméricamente el polinomio $4a^2 - 16ab + 16b^2$ por el monomio $2a - 4b$, se debe construir una figura rectangular rectilínea de área $4a^2 - 16ab + 16b^2$ y una de sus alturas sea el binomio $2a - 4b$. Los términos $4a^2$ y $16b^2$ son cuadrados de lados $2a$ y $4b$, respectivamente; el trinomio $4a^2 - 16ab + 16b^2$ representa la siguiente figura rectangular rectilínea:



Para construir la figura rectangular rectilínea de altura $2a - 4b$, debemos sumar en la base del cuadrado de área $4a^2$, un rectángulo de lados $2a$ y $-4b$ cuya área es $-8b$ y dado que el término $-16b$ se descompone como $-16b = (-8b) + (-8b)$, debemos de agregar a la altura del cuadrado $4a^2$, un rectángulo de lados $2a$ y $-4b$ cuya área es $-8b$. Por lo tanto, el cuadrado $16b^2$ puede representarse por un cuadrado continuo de lados $-4b$, dado que $(-4b)(-4b) = 16b^2$,

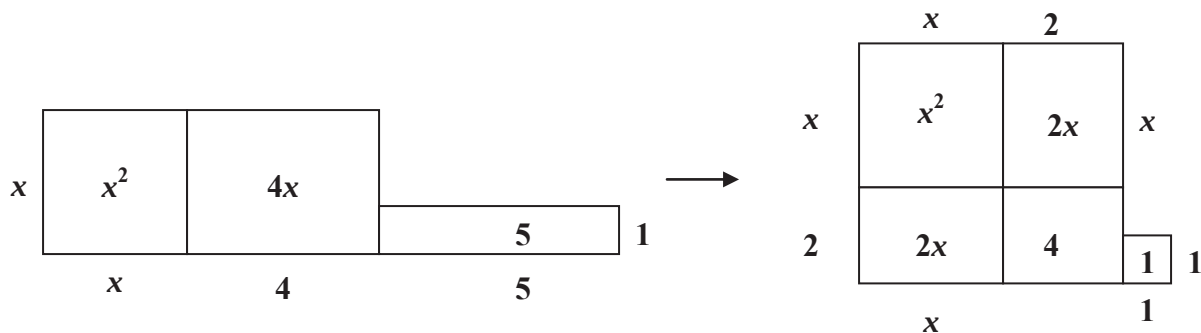


La figura rectangular construida es un cuadrado de lados $2a - 4b$.

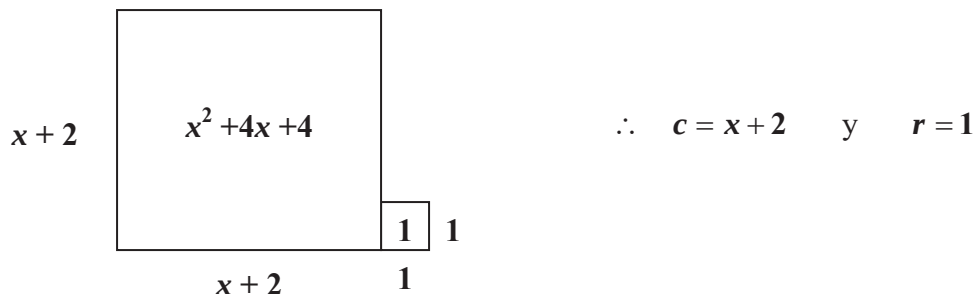


El resultado de dividir el trinomio $4a^2 - 16ab + 16b^2$ entre el binomio $2a - 4b$ es $2a - 4b$, con un residuo de cero ($r = 0$).

Dividir geoméricamente el trinomio $x^2 + 4x + 5$ entre el binomio $x + 2$, significa construir una figura rectangular rectilínea cuya área sea el polinomio $x^2 + 4x + 5$ y una de sus alturas se el binomio $x + 2$. Dado que la altura es $x + 2$, debemos sumar en la base del cuadrado de área x^2 , un rectángulo de lados 2 y x cuya área es $2x$ y dado que el término $4x$ se descompone como $4x = 2x + 2x$, debemos de agregar a la altura del cuadrado x^2 un rectángulo de lados 2 y x cuya área es $2x$. Por lo tanto, el rectángulo de área 5 debe descomponerse en dos rectángulos de áreas 4 y 1 respectivamente, dado que $5 = 4 + 1 = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1$



La figura rectangular rectilínea que se obtiene, tiene alturas $x + 2$ y 1 , respectivamente y de bases $x + 2$ y 1 , respectivamente, cuya área es $x^2 + 4x + 4 + 1 = x^2 + 4x + 5$.



La división del trinomio $x^2 + 4x + 5$ entre el binomio $x + 2$ es igual a $x + 2$, con un residuo $r = 1$, es decir $x^2 + 4x + 5 = (x + 2)(x + 2) + 1 = x^2 + 4x + 4 + 1$.

ANEXO 2

ACTIVIDADES

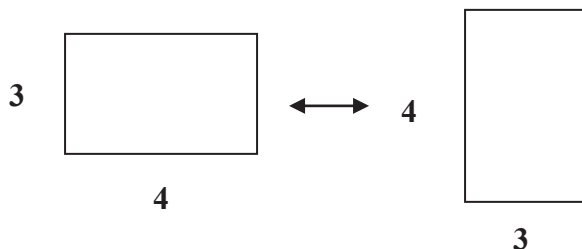
ACTIVIDAD 1

Primera Sesión, Primera Etapa: Exposición interactiva (20 minutos).

Factorización de enteros positivos y potencias enteras positivas
(Factorizar significa descomponer en un producto de factores)

Concepto de área de una figura rectangular (cuadrado o rectángulo)

1-1. ¿Cuál es el área del rectángulo de lados 3 y 4 respectivamente?

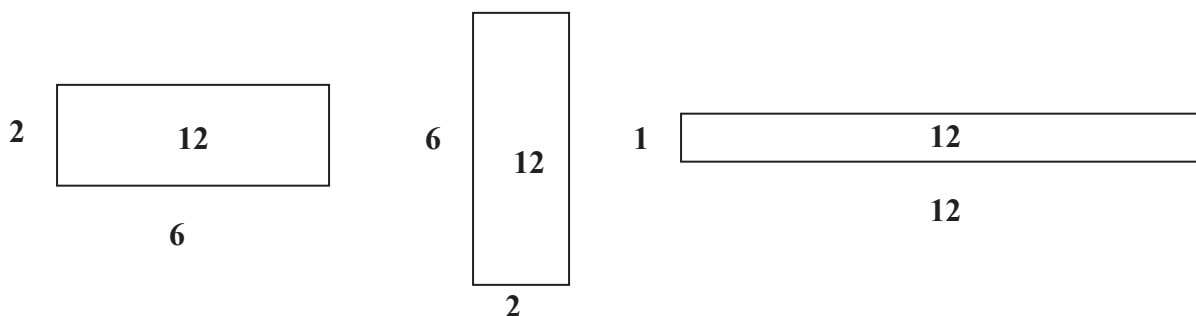


$$\text{Área} = 3 \cdot 4 = 4 \cdot 3 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\therefore \text{Factorización: } 12 = 3 \cdot 4 = 4 \cdot 3$$

Factorización de enteros positivos (figuras rectangulares rígidas de área constante)

1-2. El número 12 otras figuras rectangulares equivalentes:



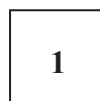
1-3. ¿Qué significa que el entero 12 represente diferentes figuras rectangulares equivalentes?

Respuesta:

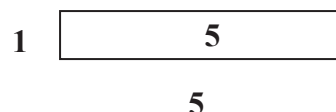
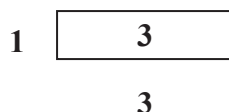
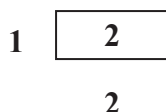
$$12 = 3 \cdot 4 = 4 \cdot 3 \quad 12 = 2 \cdot 6 = 6 \cdot 2 \quad 12 = 1 \cdot 12 = 12 \cdot 1$$

1-4. ¿El número 1 puede ser representado geométricamente como un cuadrado o rectángulo?

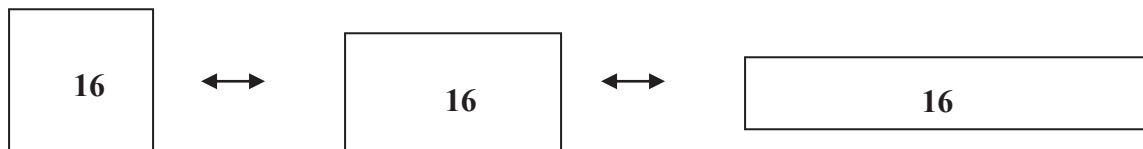
Respuesta: $1 = (\quad)(\quad)$



1-5. Los números primos 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, etc., solo tienen una representación rectangular, además de su forma rectangular equivalente.



1-6. ¿Cuáles son los lados del cuadrado y los dos rectángulos que representa el número 16?

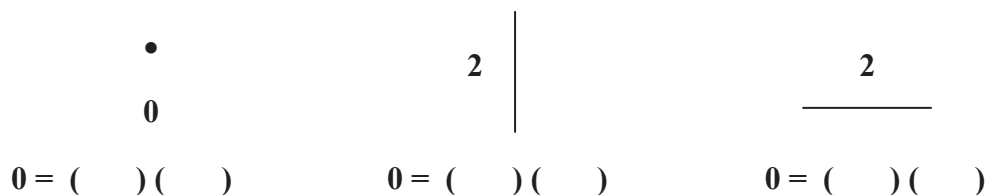


Por lo tanto: $16 = (\quad) (\quad)$

$16 = (\quad) (\quad)$

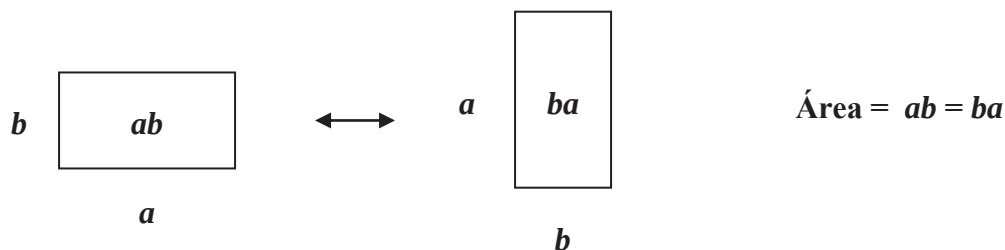
$16 = (\quad) (\quad)$

1-7. El **cero**: puede ser representado como una figura rectangular de base y altura cero, de base igual a cero y altura diferente de cero o base diferente de cero y altura igual a cero.



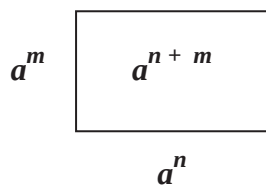
Potencias enteras positivas (figuras rectangulares elásticas de área variable)

1-8. El área de una figura rectangular de lados dos números reales cualesquiera a y b es el producto ab o ba



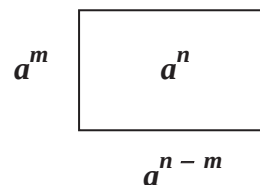
**Producto de potencias
de la misma base**

$$a^n \cdot a^m = a^n a^m = a^{n+m}$$

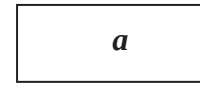
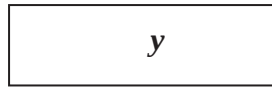
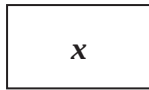


**División de potencias
de la misma base**

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \quad \therefore \quad a^n = a^m \cdot a^{n-m}$$

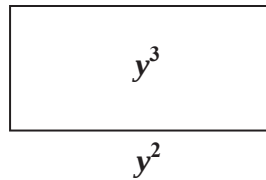


1-9. ¿Qué figuras geométricas representan las potencias x , y y a ?



Respuesta: $x = () ()$ $y = () ()$ $a = () ()$

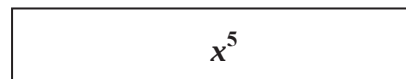
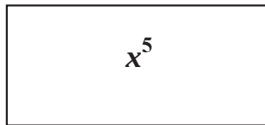
1-10. ¿Cuál es lado faltante del rectángulo siguiente que representa la potencia y^3 ?



Altura =

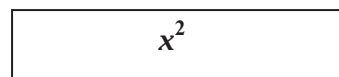
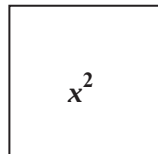
Comprobación: $(y^2) () = y^3$

1-11. ¿Cuáles son los lados de los rectángulos siguientes que representa la potencia x^5 ?



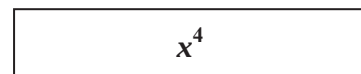
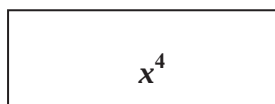
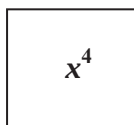
Por lo tanto: $x^5 = () ()$ y $x^5 = () ()$

¿Cuáles son los lados del cuadrado y del rectángulo que representa la potencia x^2 ?



Por lo tanto: $x^2 = () ()$ y $x^2 = () ()$

1-12. ¿Cuáles son los lados de las figuras rectangulares equivalentes representa la potencia x^4 ?



Por lo tanto: $x^4 = () ()$ $x^4 = () ()$ $x^4 = () ()$

ACTIVIDAD 2

Primera Sesión Primera Etapa: Trabajo en equipo (20 minutos).

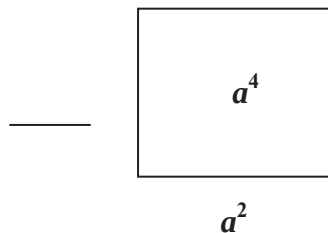
Factorización de enteros positivos y potencias enteras positivas

Instrucciones: Utiliza papel cuadriculado y realiza lo que a continuación se te indica comentando entre tus compañeros los procedimientos o forma de hacer las diferentes representaciones.

2-1. Usando figuras rectangulares, representa el número **9** en todas las formas equivalentes posibles.

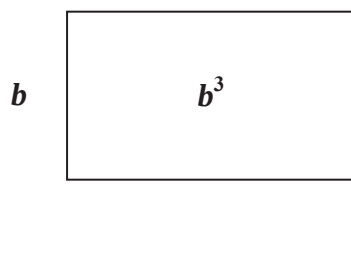
2-2. Usando figuras rectangulares, representa el número **24** de tres formas equivalentes diferentes.

2-3. Escribe sobre la línea el lado faltante en cada figura rectangular siguiente y justifica tú respuesta.



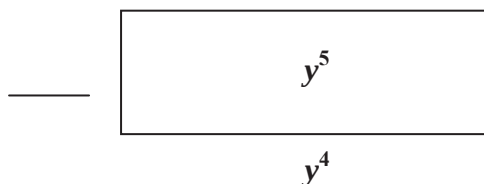
Lado =

Comprobación:



Lado =

Comprobación:



Lado =

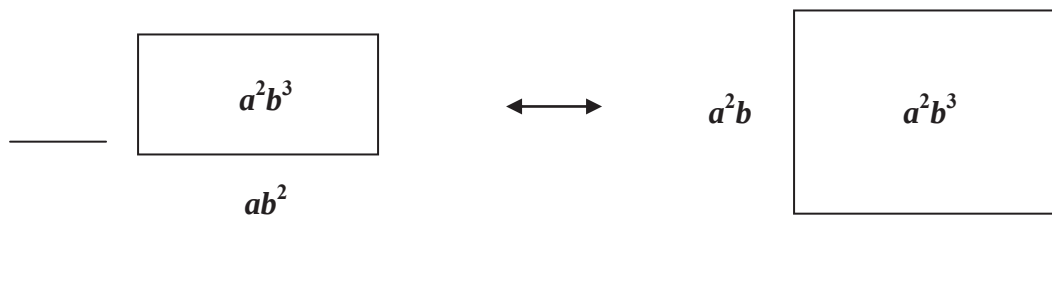
Comprobación:

2-3. Usando figuras rectangulares, representa de dos formas diferentes las siguientes potencias

a) x^6

b) y^7

2-5. Escribe sobre la línea el lado faltante del producto de potencias de diferente base a^2b^3 ; y escribe el procedimiento algebraico que justifica tú respuesta.



Justificación:

2-6. Usando figuras rectangulares, representa de dos formas diferentes el producto de potencias de diferente base x^2y^4

ACTIVIDAD 3

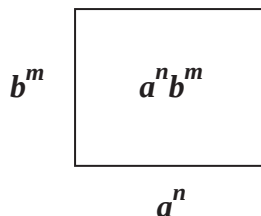
Primera Sesión Segunda Etapa: Exposición interactiva (15 minutos).

Monomios y suma de monomios con coeficientes enteros positivos

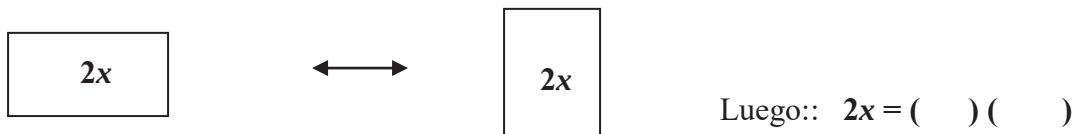
Monomios con coeficientes positivos (monomio producto de factores numéricos o literales)

Producto de potencias de diferente base

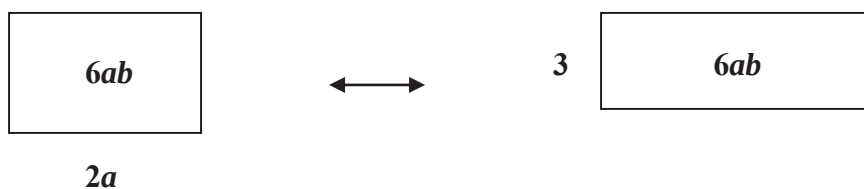
$$a^n \cdot b^m = a^n b^m$$



3-1. ¿Cuáles son los lados de la figura rectangular representa el monomio $2x$?

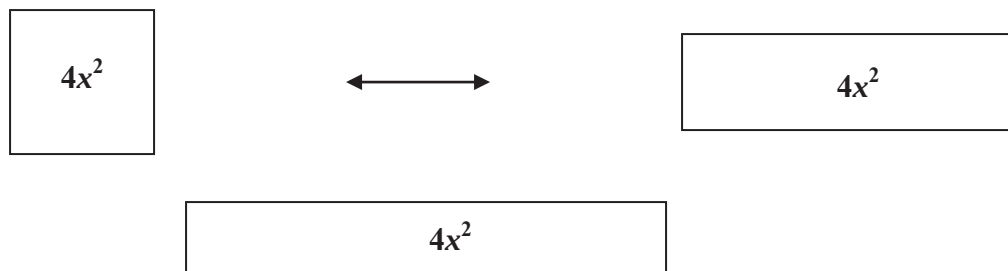


3-2. ¿Cuál es el lado de las siguientes figuras rectangulares equivalentes que representa el monomio $6ab$?



Luego: $6ab = (2a) ()$ y $6ab = (3) ()$

3-3. ¿Cuáles son los lados de las figuras rectangulares siguientes que representa el término $4x^2$?



Luego: $4x^2 = () ()$ $4x^2 = () ()$ $4x^2 = () ()$

Suma de monomios (la suma de monomios es un monomio o un polinomio)

3-4. Dado los monomios $3x$ y $2x$

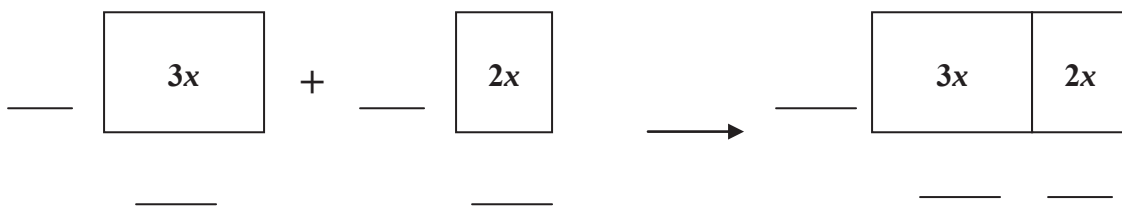
a) ¿Cuál es el máximo común divisor de los números?

Respuesta: $\text{mcd}(3, 2) = \underline{\hspace{2cm}}$

b) ¿Cuál es el factor común de los monomios?

Respuesta: $\underline{\hspace{2cm}}$

d) Escribe sobre la línea el lado, de la suma de los monomios



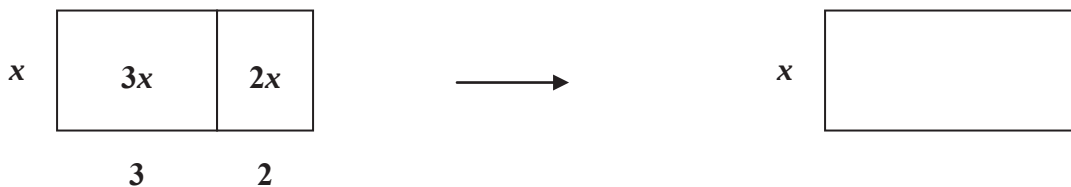
c) ¿Cómo se le llama a la altura común?

Respuesta: $\underline{\hspace{2cm}}$

d) ¿Se puede cuadrar la suma de los monomios?

Respuesta: $\underline{\hspace{2cm}}$

e) Si la respuesta es sí, ¿cuál es la suma de los monomios $3x$ y $2x$?



Respuesta: $3x + 2x = \underline{\hspace{2cm}}$; por lo tanto: $3x + 2x = x (\underline{\hspace{2cm}}) = \underline{\hspace{2cm}}$

f) ¿Es la suma de los monomios $3x$ y $2x$ un monomio o un polinomio?

Respuesta: $\underline{\hspace{2cm}}$

g) ¿Qué nombre reciben los monomios que se pueden sumar?

Respuesta: $\underline{\hspace{2cm}}$

3-5. Realiza la suma de los monomios $6x^2$, $18x^2$ y $21x^2$

a) ¿Cuál es el factor común de los monomios $18x^2$, $6x^2$ y $21x^2$?

Respuesta: _____

Por lo tanto: $18x^2 + 6x^2 + 21x^2 = x^2 (\quad) =$

3-6. Dado los monomios $4x$ y $10y$

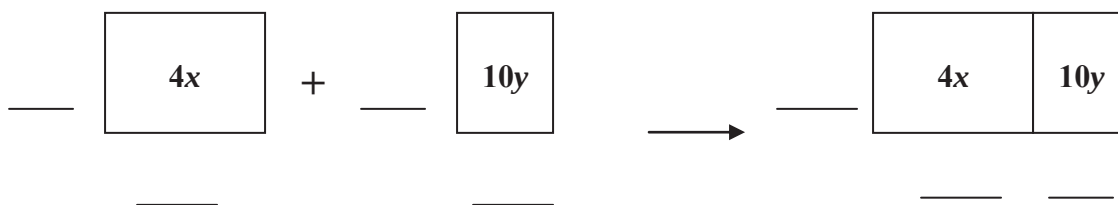
a) ¿Cuál es el máximo común divisor de los números 4 y 10?

Respuesta: $\text{mcd}(4, 10) =$ _____

b) ¿Cuál es el factor común de los monomios?

Respuesta: _____

c) Escribe sobre la línea el lado de la suma de los monomios

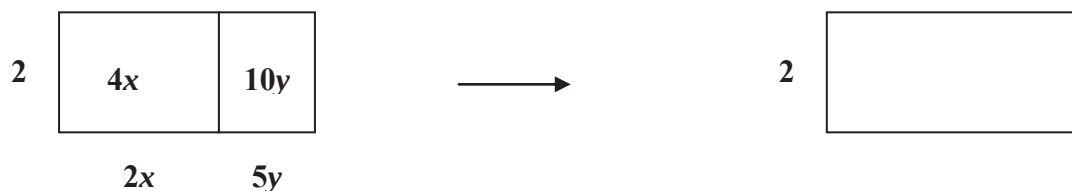


Lados:

d) ¿Se puede cuadrar la suma de los monomios?

Respuesta: _____

e) Si la respuesta es sí, ¿cuál es la suma de los monomios?



Por lo tanto: $4x + 10y = 2 (\quad)$

f) ¿Es la suma de los monomios $4x$ y $10y$ un monomio o un polinomio?

Respuesta: _____

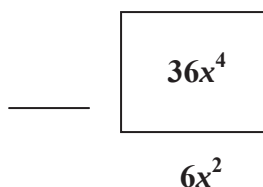
ACTIVIDAD 4

Primera Sesión Segunda Etapa: Trabajo en equipo (20 minutos).

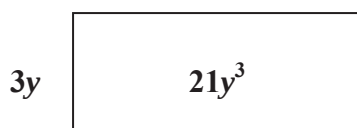
Monomios y suma de monomios con coeficientes enteros positivos

Instrucciones: Utiliza papel cuadriculado y realiza lo que a continuación se te indica comentando entre tus compañeros los procedimientos o forma de hacer las diferentes representaciones.

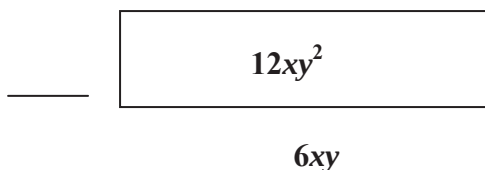
4-1. Escribe sobre la línea el lado faltante en cada figura rectangular siguiente y justifica tú respuesta.



Justificación:



Justificación:



Justificación:

4-2. Usando figuras rectangulares representa el monomio $9x^2$ en tres de sus figuras rectangulares equivalentes.

4-3. Representa el monomio $6a^2y^3$ de dos formas rectangulares equivalentes diferentes.

4-4. Realiza la suma de los monomios $8x^2y$ y $6x^2y$

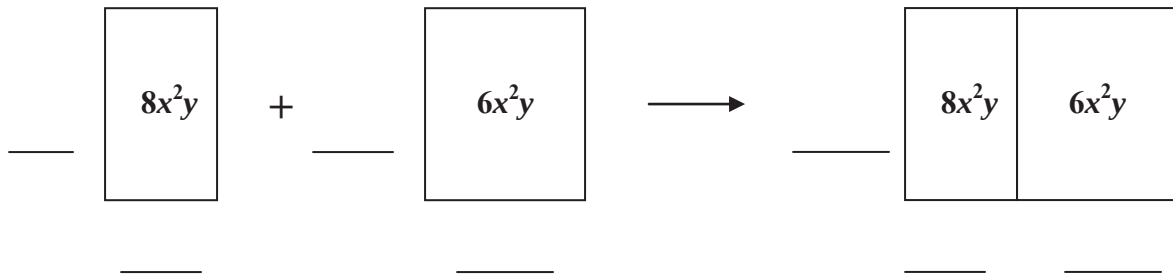
a) ¿Cuál es el máximo común divisor de los números 8 y 6 ?

Respuesta: $\text{mcd}(8, 6) =$ _____

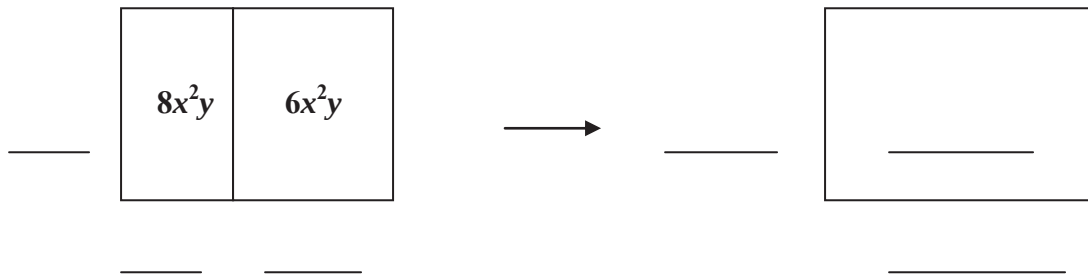
b) ¿Cuál es el factor común de los monomios?

Respuesta: _____

c) Escribe sobre la línea el lado faltante de la suma de los monomios



d) ¿Cuál es el resultado de la suma de los monomios?

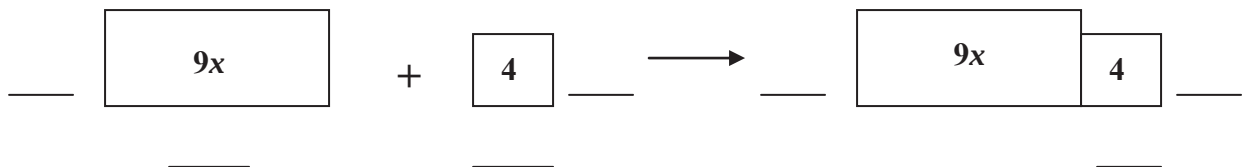


Respuesta: $8x^2y + 6x^2y =$ _____

e) ¿La suma de los monomios $8x^2y$ y $6x^2y$ es un monomio o un polinomio?

Respuesta: _____

4-5. Escribe sobre la línea el lado faltante de cada figura rectangular en la suma de los monomios $9x$ y 4



a) ¿Es factorizable la suma de los monomios?

Respuesta: _____

b) ¿Cuál es el resultado de la suma de los monomios?

Respuesta: _____

c) ¿La suma de los monomios $9x$ y 4 es un monomio o un polinomio?

Respuesta: _____

¿Cuáles de los monomios son términos semejantes, $8x^2y$ y $2x^2y$ o los monomios $9x$ y 4 ?

Respuesta: _____

ACTIVIDAD 5

Primera Sesión: Trabajo extra-clase individual**Suma de monomios con coeficientes positivos**

Instrucciones: Utiliza papel cuadriculado y realiza lo que a continuación se te indica comentando entre tus compañeros los procedimientos o forma de hacer las diferentes representaciones.

5-1. Realiza la suma de los monomios $5x^3$ y $7x^3$

a) ¿Cuál es el máximo común divisor de 5 y 7?

Respuesta: $\text{mcd}(5, 7) =$ _____

b) ¿Cuál es el factor común de los monomios?

Respuesta: _____

c) ¿Se puede cuadrar la suma de los monomios?

Respuesta: _____

d) Si la respuesta es sí, ¿cuál es el resultado de la suma?

Respuesta: $5x^3 + 7x^3 =$ _____

5-2. Realiza la suma de los monomios $3a^2b^3c$, $15b^3ca^2$ y $2b^3a^2c$

a) ¿Cuál es el factor común de los monomios?

Respuesta: _____

b) Escribe sobre la línea el lado faltante en la suma de los monomios $3a^2b^3c$, $15b^3ca^2$ y $2b^3a^2c$

$$\underline{\hspace{2cm}} \boxed{3a^2b^3c} + \underline{\hspace{2cm}} \boxed{15b^3ca^2} + \underline{\hspace{2cm}} \boxed{2b^3a^2c}$$

$$\underline{\hspace{2cm}} \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

c) ¿Se puede cuadrar la suma de los monomios $3a^2b^3c$, $15b^3ca^2$ y $2b^3a^2c$?

Respuesta: _____

b) Si la respuesta es sí, ¿cuál es el resultado de la suma?

Respuesta: $3a^2b^3c + 15b^3ca^2 + 2b^3a^2c =$ _____

c) ¿Son términos semejantes los monomios $3a^2b^3c$, $15b^3ca^2$ y $2b^3a^2c$?

Respuesta: _____

5-3. Realiza la suma de los monomios x^2 y $6x$

a) ¿Cuál es el factor común de los monomios?

Respuesta: _____

b) Escribe sobre la línea el lado faltante en la suma de los monomios x^2 y $6x$

$$\begin{array}{c} \text{_____} \end{array} \begin{array}{|c|} \hline x^2 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{c} \text{_____} \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 6x \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} \text{_____} \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline x^2 & 6x \\ \hline \end{array}$$

c) ¿Es la suma de los monomios los monomios x^2 y $6x$ un monomio o un polinomio?

Respuesta: _____

d) ¿Cuál es el monomio o polinomio que se obtiene de la suma de los monomios x^2 y $6x$?

Respuesta: _____

e) ¿Se puede cuadrar la suma de los monomios x^2 y $6x$ directamente por la suma de sus términos? Explica tú respuesta.

Respuesta: _____

Porque:

f) Si tú respuesta es afirmativa, ¿cuál es la factorización del polinomio?

Respuesta: _____

g) ¿Es la suma de términos semejantes un monomio o un polinomio?

Respuesta: _____

h) ¿Cómo se le llama a la suma de términos semejantes?

Respuesta: _____

ACTIVIDAD 6

Segunda Sesión, Primera Etapa: Exposición interactiva (15 minutos).

Factorización de polinomios por factor común

(Factorizar un polinomio significa descomponer en un producto de polinomios diferentes de uno)

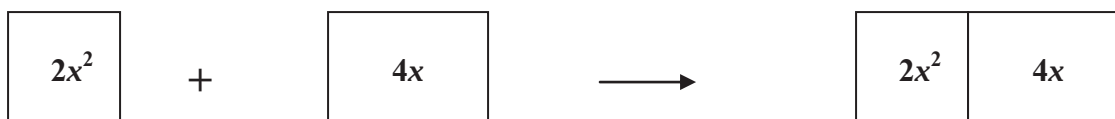
Factorización de polinomios con coeficientes positivos

6-1. Dado el binomio $2x^2 + 4x$

a) ¿Cuál es el factor común del binomio?

Respuesta: _____

b) ¿Cuáles son los lados de los términos del polinomio?



Lados:

c) ¿Se puede cuadrar el binomio?

Respuesta: _____

f) Si tú respuesta es sí, factoriza el binomio.

$2x^2 + 4x$

Factorización: $2x^2 + 4x = (\quad) (\quad)$

6-2. Considera el trinomio $6a^2b^3 + 9a^3b^2 + 24a^4b^4$

a) ¿Cuál es el factor común del trinomio?

Respuesta: _____

b) ¿Cuáles son los lados de los términos del polinomio?

$6a^2b^3$	$9a^3b^2$	$24a^4b^4$
-----------	-----------	------------

Lados:

c) ¿Cuál es la factorización del trinomio?

$6a^2b^3 + 9a^3b^2 + 24a^4b^4$

Respuesta: $6a^2b^3 + 9a^3b^2 + 24a^4b^4 = (\quad) (\quad)$

6-3. Factoriza el polinomio $15a^3xy^2 + 10a^2by^3 + 45a^4x^2y^4 + 60a^5c^2y$

Factor común: _____

Otro factor:

$$15a^3xy^2 + 10a^2by^3 + 45a^4x^2y^4 + 60a^5c^2y = (\quad) (\quad)$$

6-4. Factoriza por factor común el trinomio $4x^5 + 32x^4 + 48x^3$

Factor común: _____

Factorización:

$$4x^5 + 32x^4 + 48x^3 = (\quad) (\quad)$$

d) ¿Se puede factorizar por factor común el trinomio $x^2 + 8x + 12$? Explica tú respuesta.

Respuesta: No, “porque el 12 no tiene el factor común x”

ACTIVIDAD 7

Segunda Sesión, Primera Etapa: Trabajo de equipo (20 minutos).

Factorización de polinomios por factor común

Instrucciones: Utiliza papel cuadriculado y realiza lo que a continuación se te indica comentando entre tus compañeros los procedimientos o forma de hacer las diferentes representaciones.

7-1. Dado el binomio $44y + 33y^2$

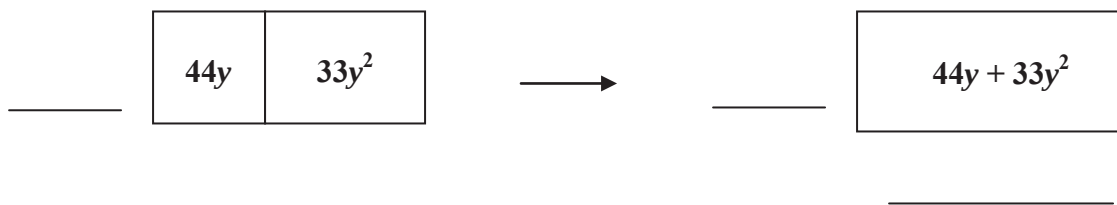
a) ¿Se puede factorizar por factor común el binomio?

Respuesta: _____

b) Si tú respuesta es sí, ¿Cuál es el factor común del binomio?

Respuesta: _____

c) Escribe los lados de la figura rectangular que representa el polinomio.

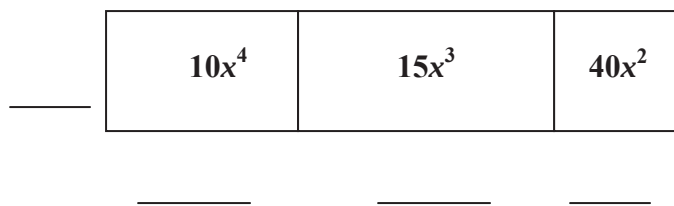


d) ¿Cuál es la factorización del binomio?

Factorización: $44y + 33y^2 = (\quad) (\quad)$

7-2. Sea el trinomio $10x^4 + 15x^3 + 40x^2$

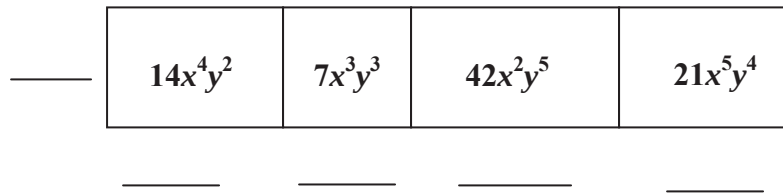
a) Escribe sobre la línea los lados de la figura rectangular que representan los términos del trinomio.



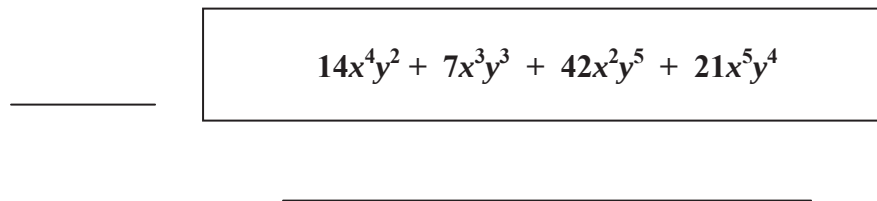
b) Factoriza el trinomio

Factorización: $10x^4 + 15x^3 + 40x^2 = (\quad) (\quad)$

7-3. Escribe los lados de la figura rectangular rectilínea que representa el polinomio $14x^4y^2 + 7x^3y^3 + 42x^2y^5 + 21x^5y^4$



Factoriza el polinomio.



$$14x^4y^2 + 7x^3y^3 + 42x^2y^5 + 21x^5y^4 = (\quad) (\quad)$$

7-4. ¿Se puede factorizar por factor común el polinomio $3x^3 + 15x^2 + x + 5$?

ACTIVIDAD 8

Segunda Sesión, Segunda Etapa: Exposición interactiva (15 minutos).

Factorización de polinomios por agrupación

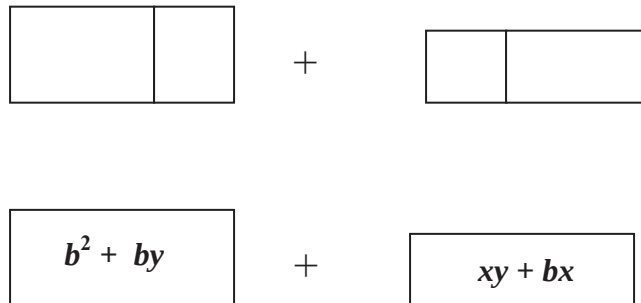
Instrucciones: Utiliza papel cuadriculado y factoriza los polinomios siguientes:

8-1. Dado el polinomio $b^2 + xy + bx + by$

a) ¿Se puede factorizar por factor común el polinomio? Explique ¿por qué?

Respuesta: _____

b) Representar el polinomio usando figuras rectangulares



Por lo tanto: $b^2 + xy + bx + by = (\quad) + (\quad)$

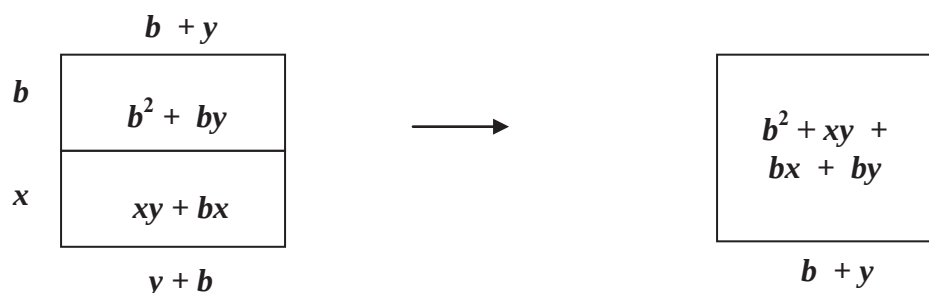
d) ¿Cuál es el factor común de cada agrupación?

Respuesta: _____

$$b^2 + xy + bx + by = (\quad) (\quad) + (\quad) (\quad)$$

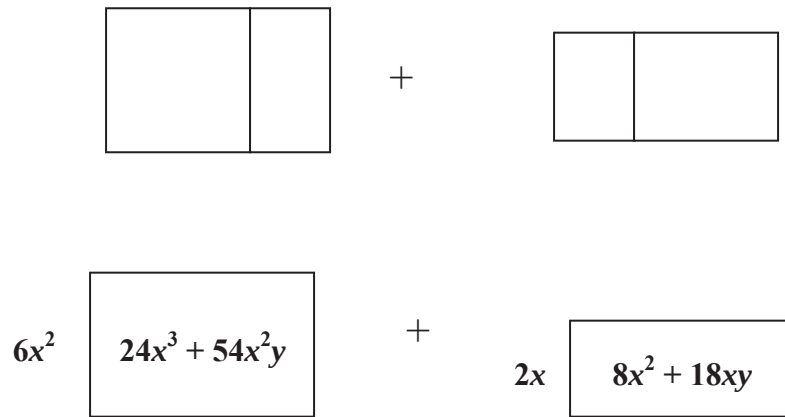
e) ¿Se puede cuadrar el polinomio? Explica tú respuesta.

Respuesta: _____



La factorización es: $b^2 + xy + bx + by = (\quad) (\quad)$

8-2. Usando figuras rectangulares representa el polinomio $24x^3 + 8x^2 + 54x^2y + 18xy$

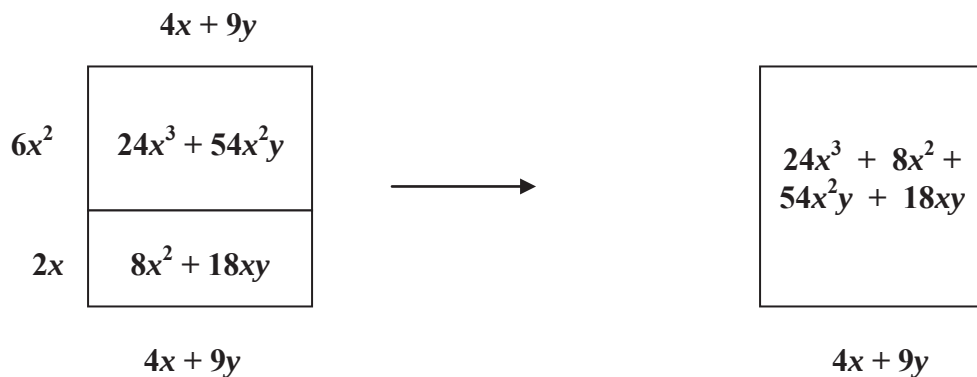


Simbólicamente:

$$24x^3 + 8x^2 + 54x^2y + 18xy = (\quad) + (\quad)$$

$$24x^3 + 8x^2 + 54x^2y + 18xy = (\quad) (\quad) + (\quad) (\quad)$$

Cuadrando el polinomio:



Por lo tanto:

$$24x^3 + 8x^2 + 54x^2y + 18xy = (\quad) (\quad)$$

$$24x^3 + 8x^2 + 54x^2y + 18xy = (\quad) (\quad) (\quad)$$

8-3. Factoriza simbólicamente el polinomio $3x^3 + 15x^2 + x + 5$

$$3x^3 + 15x^2 + x + 5 = (\quad) + (\quad)$$

$$3x^3 + 15x^2 + x + 5 = (\quad)(\quad) + (\quad)(\quad)$$

Factorización:

$$3x^3 + 15x^2 + x + 5 = (\quad)(\quad)$$

ACTIVIDAD 9

Segunda Sesión Segunda Etapa: Trabajo en equipo (15 minutos).

Factorización de polinomios por agrupación

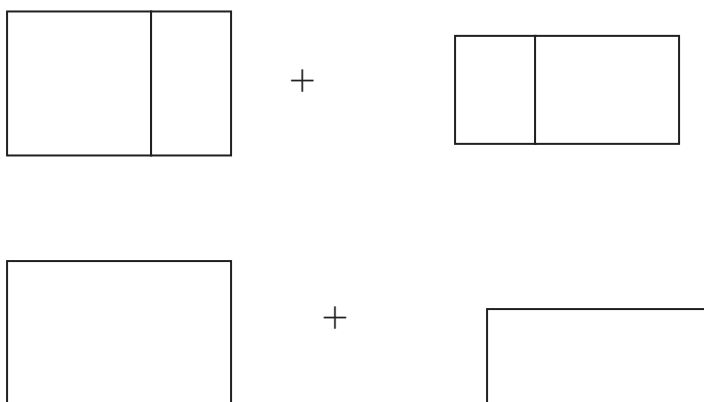
Instrucciones: Utiliza papel cuadriculado realiza lo que a continuación se te indica, comenta con tus compañeros de equipo los procedimientos.

9-1. Considera el polinomio $ax^2 + y^2 + ay + x^2y$

a) ¿Se puede factorizar por factor común el polinomio?

Respuesta: _____

b) Representa el polinomio usando figuras rectangulares



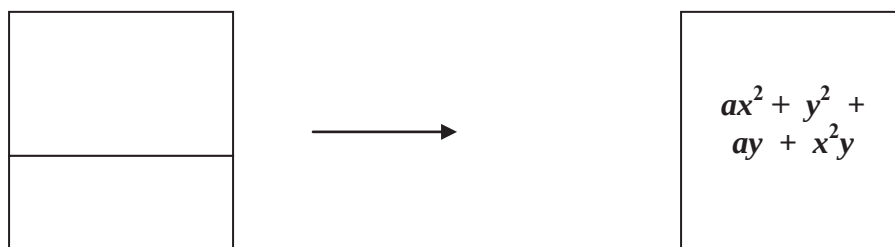
c) Escribe simbólicamente el procedimiento:

$$ax^2 + y^2 + ay + x^2y = (\quad) + (\quad)$$

$$ax^2 + y^2 + ay + x^2y = (\quad) (\quad) + (\quad) (\quad)$$

d) ¿Se puede cuadrar el polinomio? Si tu respuesta es sí, escribe la factorización.

Respuesta: _____



La factorización es: $ax^2 + y^2 + ay + x^2y = (\quad) (\quad)$

9-2. Factoriza el polinomio $3x^3 + 5x^2 + 6x + 10$

9-3. Factoriza el polinomio $40x^2 + 5xy + 16x + 2y$

ACTIVIDAD 10**Segunda Sesión Segunda Etapa:** *Trabajo extra-clase individual****Factorización de polinomios*****10-1.** Factoriza el trinomio $10x^3 + 50x^2 + 40x$ **10-2.** Factoriza el polinomio $9y^3 + 8x^2 + 6xy^2 + 12xy$ **10-3.** Factoriza el trinomio $x^2 + 5x + 4$

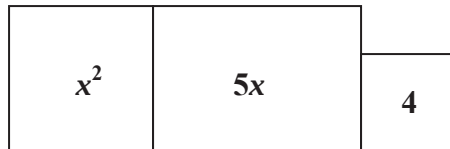
ACTIVIDAD 11

Tercera Sesión, Primera Etapa: *Exposición interactiva* (15 minutos).

Factorización de trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$

Instrucciones: Utiliza papel cuadriculado y factoriza los polinomios siguientes:

11-1. Escribe sobre la línea los lados de cada figura rectangular que representa cada término del polinomio $x^2 + 5x + 4$



a) *Intenta cuadrar el polinomio*

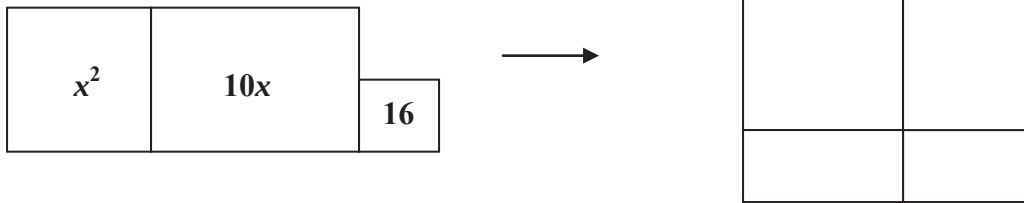
b) *¿Se puede cuadrar el polinomio? Si tú respuesta es sí, factorízalo.*

Respuesta: _____

$$x^2 + 5x + 4 = (\quad) (\quad)$$

Observación: $4 =$ _____ de tal manera que: $5 =$ _____

11-2. Factoriza el trinomio $x^2 + 10x + 16$



Por lo tanto: $x^2 + 10x + 16 = (\quad) (\quad)$

Factorizar: $16 =$ de tal manera que: $10 =$

Por lo tanto: $x^2 + 10x + 16 = (\quad) (\quad)$

11-3. Representa geométricamente el polinomio $6x^2 + 13x + 6$

a) Intenta cuadrar el polinomio

La factorización del polinomio es:

$$6x^2 + 13x + 6 = (\quad) (\quad)$$

Lo anterior significa que se factorizan: $6 =$ $\quad$ y $6 =$ $\quad$

De tal manera que: $13 =$ $\quad$

11-4. Factoriza de manera directa el polinomio $4y^2 + 12y + 9$

Factorizar: $4 =$ $\quad$ y $9 =$ $\quad$

De tal manera que: $12 =$ $\quad$

Por lo tanto: $4y^2 + 12y + 9 = (\quad) (\quad)$

11-5. ¿Que se puede concluir sobre la factorización del trinomio $ax^2 + bx + c$?

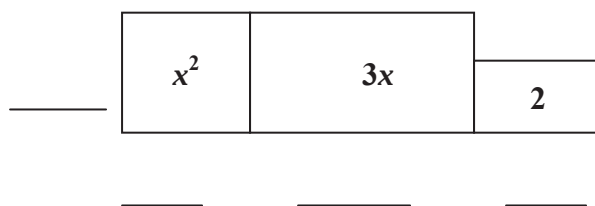
ACTIVIDAD 12

Tercera Sesión, Primera Etapa: Trabajo en equipo (20 minutos).

Factorización de trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$

Instrucciones: Utiliza papel cuadriculado y factoriza los polinomios siguientes, comenta con tus compañeros de equipo los procedimientos.

12-1. Dado el trinomio $x^2 + 3x + 2$, escribe los lados de las figuras rectangulares que representan sus términos.



a) Intenta cuadrar el trinomio

b) La factorización del trinomio es:

$$x^2 + 3x + 2 = (\quad) (\quad)$$

c) *Escribe el procedimiento de la factorización en forma simbólica.*

12-2. *Representa geoméricamente el trinomio $4x^2 + 8x + 3$*

a) *Intenta cuadrar el trinomio.*

b) *¿Se puede cuadrar el trinomio? Si tú respuesta es sí, factoriza el trinomio.*

Respuesta: _____

La factorización del trinomio es:

$$4x^2 + 8x + 3 = (\quad) (\quad)$$

c) *Factoriza el trinomio en forma simbólica.*

12-3. Factoriza el trinomio $25 + 100y^2 + 100y$

ACTIVIDAD 13

Tercera Sesión, Segunda Etapa: *Exposición interactiva* (15 minutos).

Factorización de números enteros negativos y monomios con coeficientes negativos

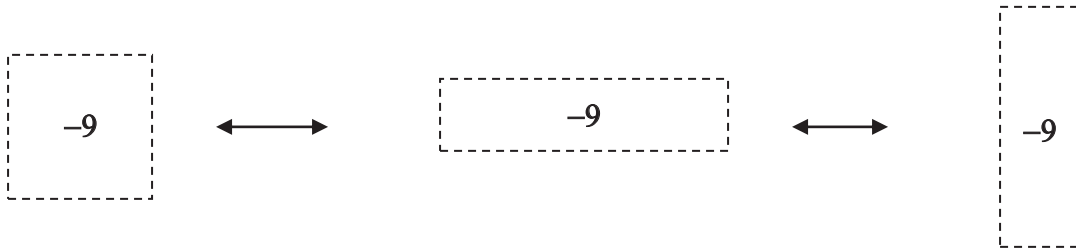
Enteros Negativos (*Figuras rectangulares con líneas discontinuas o punteadas*)

13-1. El número -1 se representa geométricamente como un cuadrado de líneas discontinuas

Porque: $-1 = () () = () ()$

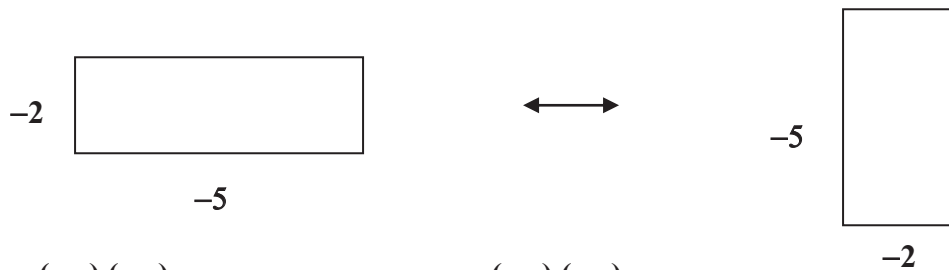


13-2. ¿Cuáles son los lados de las figuras rectangulares siguientes que representa el entero -9 ?



Porque: $-9 = () ()$, $-9 = () ()$ y $-9 = () ()$

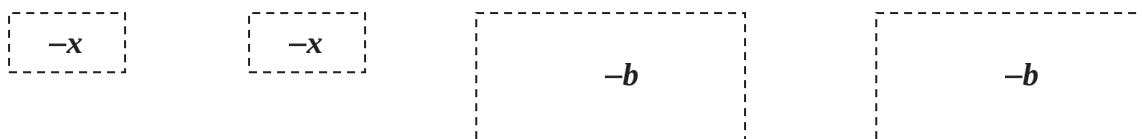
13-3. ¿Cómo se representa el producto $(-2)(-5)$?



Porque: $() () = \underline{\hspace{2cm}}$ y $() () = \underline{\hspace{2cm}}$

Monomios con coeficientes negativos

13-4. ¿Cuáles son los lados de las figuras rectangulares que representan las literales $-x$, y $-b$?



Porque: $-x = () () = () ()$ y $-b = () () = () ()$

13-5. ¿Cuáles son los lados del cuadrado y del rectángulo que representan las potencias $-x^2$ y $-x^3$?



Entonces: $-x^2 = (\quad)(\quad)$ y $-x^3 = (\quad)(\quad)$

13-6. ¿Cuáles son los lados del rectángulo $-5x$?



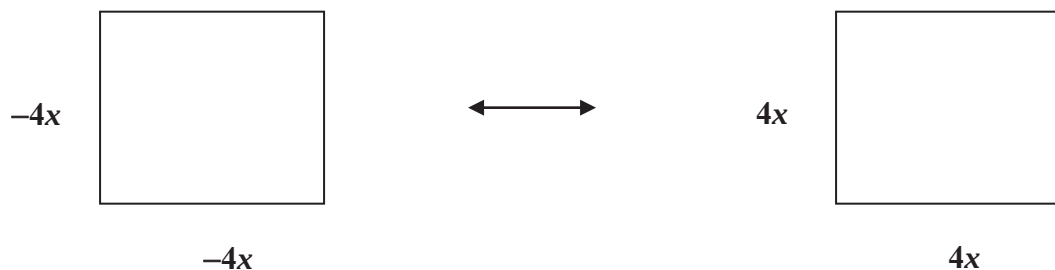
Porque: $-5x = (\quad)(\quad) = (\quad)(\quad) = (\quad)(\quad)$

13-7. ¿Cuáles son los lados de las figuras rectangulares siguientes que representa el término $-9x^2$?



Porque: $-9x^2 = (\quad)(\quad) = (\quad)(\quad)$

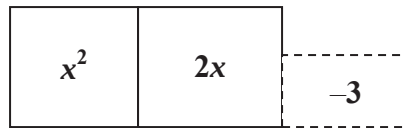
13-8. ¿El producto $(-4x)(-4x)$ se representa por una figura rectangular continua o discontinua?



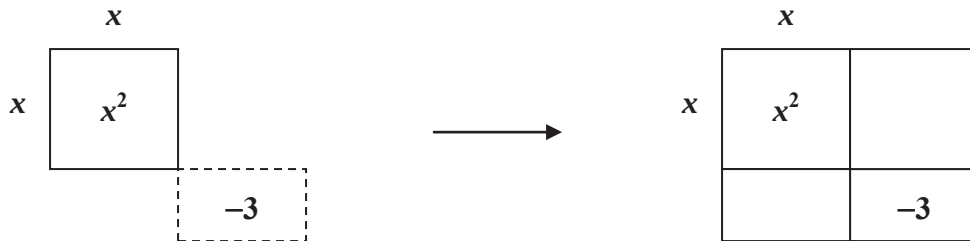
Porque: $(\quad)(\quad) = \underline{\hspace{2cm}}$ y $(\quad)(\quad) = \underline{\hspace{2cm}}$

Factorización de polinomios con coeficientes enteros

13-9. Escribe los lados de la figura rectangular rectilínea que representa el trinomio $x^2 + 2x - 3$?



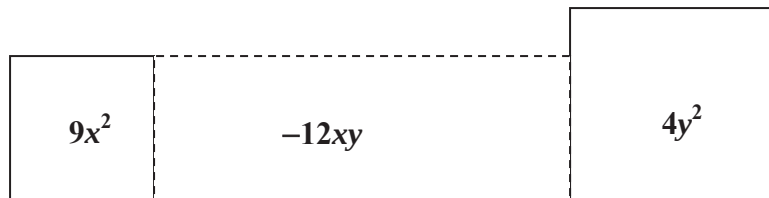
a) Intenta cuadrar el trinomio.



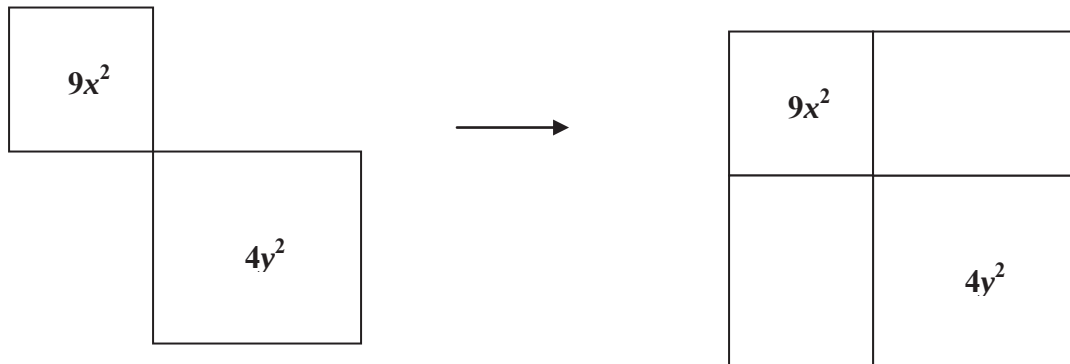
La factorización del polinomio es:

$$x^2 + 2x - 3 = (\quad) (\quad)$$

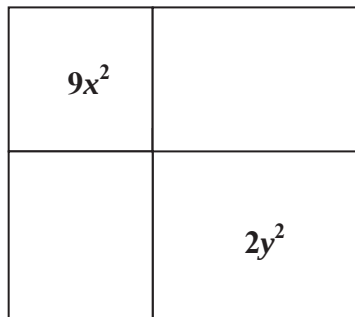
13-10. Dado el trinomio $9x^2 - 12xy + 4y^2$, escribe los lados de la figura rectangular rectilínea que representa.



a) Intenta cuadrar el polinomio



Comparando la suma de las áreas con $-12xy$:



Simbólicamente:

La factorización del trinomio:

$$9x^2 - 12xy + 4y^2 = (\quad) (\quad) =$$

¿Cómo se le llama al trinomio $9x^2 - 12xy + 4y^2$? Y ¿por qué?

Respuesta:

REFERENCIAS

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. y Gómez, P. (1995). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática*. México. Grupo Editorial Iberoamerica.
- Baldor, A. (2005). *Álgebra*. Grupo Patria Cultural, S. A. de C. V.
- Brombergs, S., Fiveras, O., Zubieta, G., Escalante, C. y Manchaca, V. M. (1981). *Álgebra (I, II y III)*. Sección Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN.
- Carretero, M. (2002). *Constructivismo y Educación*. Editorial Progreso, S. A. de C. V.
- Casalderrey, F. M. (2000). *Cardano y Tartaglia, Las matemáticas en el Renacimiento Italiano*. NIVOLA libros y Ediciones, S. L.
- Castelnuovo, E. (1970). *Didáctica de la Matemática Moderna*. Editorial Trillas, S. A.
- Chavarría, M. y Villalobos, M. (2004). *Orientaciones para la Elaboración y Presentación de TESIS*. Editorial Trillas, S. A. de C. V.
- Chica, A. (2001). *Descartes Geometría y Método*. NIVOLA libros y Ediciones, S. L.
- Coxford, A. F. & Shulte, A. P. (1998). *The Ideas of Algebra*, K-12. National Council of Teachers of Mathematics. Reston, VA.
- Dreyfous, R., Ortiz, E. y Villafañe, W. (1996). *Manual de Lecciones Algebblocks*. San Juan PR. Dreyfous & Assoc.
- Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la Perspectiva Piagetiana a la Educación Matemática Universitaria. En: *Educación Matemática Vol. 8, No. 3*. (pp. 25-41). Grupo Editorial Iberoamerica.
- Duval, R. (1999). *Semiosis y Pensamiento Humano*. Traducción de Myriam Vega Restrepo. Cali Colombia. Peter Lang, S. A.

- Duval, R. (2001). *Los Problemas Fundamentales en el Aprendizaje de las Matemáticas y las Formas Superiores en el Desarrollo Cognitivo*. Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática.
- Eco, H. (1995). *Cómo se Hace una Tesis*. gedisa editorial.
- Edwards, C. H. (1979). *The Historical Development of the Calculus*. Springer- Verlag New York Inc.
- Euler, L. (1972). *Elements of Algebra*. Springer-Verlag New Cork Berlin Heidelberg Tokyo
- Heath, T. L. (1956). *Euclides The Thirteen Books of The Elements*. Vols. 1 (Books I – II) y Vol. 2 (Books III – IX). Editorial
- Ibáñez, B. B. (1995). *Manual para la Elaboración de Tesis*. Editorial Trillas.
- Kline, M. (1990). *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times* Volume 1. New York Oxford OXFORD UNIVERSITY PREES.
- Mancera, M. E. (1998). *Matebloquemática*. México. Grupo Editorial Iberoamerica.
- Morales, I., García J. R. y Sepúlveda, A. (2006). Propuesta para la Enseñanza de la Factorización en el Curso de Álgebra. En: *XIV Encuentro de Profesores de Matemáticas*. U. M. S. N. H.
- Morales, I., García J. R. y Sepúlveda, A. (2007). Resultados de la Implementación de una Propuesta de Enseñanza del tema de Factorización en el Curso de Álgebra. En: *XV Encuentro de profesores de Matemáticas*. U. M. S. N. H.
- Moreno L. y Waldegg G. (1992). Constructivismo y Educación Matemática. En: *Educación Matemática Vol. 4. No. 2.* (pp. 7- 15). Grupo Editorial Iberoamerica.
- Moreno, R. (2002). *Omar Jayán Poeta y Matemático*. NIVOLA libros y Ediciones, S. L.
- Oteysa, E., Hernández, C. y Osnaya, E. L. (1996). *Álgebra*. Pearson Educación.

- Pegg, J. & Redden, E. (1990). Procedures for, and Experiences in, Introducing Algebra in New South Wales. En: Barbara Moses (Ed). *Algebraic Thinking, Grades K – 12*. (pp. 71-75). Nacional Council of Teachers of Mathematics. Edition 1999. Reston, VA.
- Puig, L. (1998). Componentes de una Historia del Álgebra. El texto de al-Kwarizmi restaurado. En: Hitt, ed. *Investigaciones en matemática educativa II*. México, DF: Grupo Editorial Iberoamerica. (pp. 109 – 131). [Versión ligeramente modificada en 2003]. Disponible en Internet en <http://www.uv.es/puigl/texto1.htm>, consultado el: 12 – 02 – 2008.
- Radford, L. (1998). The Roles of Geometry and Arithmetic in the Development of Algebra: Historical Remarks from a Didactic Perspective. En: N. Berdnarz, C. Kieran, L. Lee (Eds.). *Approaches to Algebra*. (pp 39-53). The Netherlands. Kluwer Academic Publisher Dordrecht.
- Rees, P. K. y Spark, F. W. (1998). *Álgebra*. Reverté Ediciones, S. A. de C. V.
- Resnick, L. & Ford, W. (1990). *La enseñanza de las Matemáticas y sus Fundamentos Psicológicos*. PIDÓS Ministerio de Educación y Ciencia.
- Samper, C. (1996). Geometría como Instrumento de Álgebra. En: *Educación Matemática Vol. 8*. No. 3. (pp. 85 - 94). Grupo Editorial Iberoamerica.
- Sepúlveda, A. y García, J. R. (1990). Reporte de Investigación: La Evaluación. En: *Coordinación de la Investigación Científica*. U. M. S. N. H.
- Sepúlveda, A. y García, J. R. (1993). Reporte de Investigación: Diagnóstico sobre el Dominio Operatorio Numérico. En: *Coordinación de la Investigación Científica*. U. M. S. N. H.
- Ursini, S. (1996). Una Perspectiva Social para la Educación Matemática. La Influencia de la Teoría de L. S. Vygotsky. En: *Educación Matemática Vol. 8*, No. 3. Grupo Editorial Iberoamerica.

Usiskin, Z. (1987). What Should Not Be in the Algebra Curriculum of Average Collage-Bound Students? En: Barbara Moses (Ed). *Algebraic Thinking, Grades K – 12*. (pp 76-81). National Council of Teachers of Mathematics. Edition 1999. Reston, VA.

Waerden, B. L. (1983). *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations*. Springer-Verlag New York Tokyo

Zorrilla, A. S. (1992). *Guía para Elaborar una Tesis*. Mc. Graw Hill.