Universidad Nacional Autónoma de México
y
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas
UNAM-UMSNH

Cohomología de Gavillas Casi-Coherentes sobre Esquemas Afines Noetherianos

T E S I S

Que para obtener el grado de Maestro en Ciencias Matemáticas
Presenta:

Andrés Piedra Charco

Asesor: Dr. Mustapha Lahyane

Morelia, Michoacán - Enero del 2010

Cohomología de Gavillas Casi-Coherentes sobre Esquemas Afines Noetherianos

Andrés Piedra Charco

Asesor: Dr. Mustapha Lahyane

17 de Diciembre del 2009

Índice General

Agradecimientos

Dedico este trabajo de tesis por su gran apoyo incondicional y comprensión que siempre me han brindado a mis padres: Virgilio Piedra e Irma Tavira. Le doy muchas gracias a Dios por haberme dado la fuerza y fe en los momentos difíciles de mi vida y de mis estudios. Doy gracias también a mis hermanos por haberme permitido dedicar el mayor de mi tiempo a la escuela.

Le doy muchas gracias a mi asesor, el doctor Mustapha Lahyane por su paciencia, motivación y tolerancia que tuvo conmigo. Gracias también a mis compañeros del grupo de Geometría Algebraica.

Quiero agradecer también a los doctores: Jorge Olivares Vaquez, Israel Moreno Mejía, Carlos Osvaldo Osuna Castro y Virgilio Janitzio Mejía Huguet por haber dedicado parte de su valioso tiempo revisar este trabajo.

Agradezco profundamente al programa CONACYT por el apoyo brindado durante los dos años de maestría, a la Universidad Autónoma de México y al Instituto de Física y Matemáticas de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo por el apoyo que me brindaron para concluir este proyecto. También agradezco el recurso brindado por la Coordinación de la Investigación Científica de la UMSNH (CIC-UMSNH).

Introducción

Jean-Pierre Serre es uno de los matemáticos que dio un uso espectacular de la cohomología de gavillas en Geometría Algebraica (ver [11]), y es considerado como uno de los matemáticos más prominentes del siglo XX. La cohomología de gavillas en Geometría Algebraica es usada como una herramienta de cálculo. Es útil para calcular los espacios de secciones globales de gavillas.

Las gavillas son usadas en varias ramas de las matemáticas, tales como: Topología, Geometría Algebraica, Geometría Diferencial, etc. Éstas son una herramienta global para estudiar objetos que varían localmente (es decir, dependiendo del conjunto abierto).

Estudiaremos como papel central, las gavillas casi-coherentes sobre esquemas afines noetherianos. Por otro lado, es conocido que la manera de introducir el estudio de la cohomología no es en general único. En el presente trabajo usaremos el método de las resoluciones fofas para determinar los grupos de cohomología de las gavillas sobre sus respectivos espacios topológicos.

Nuestro objetivo primordial es probar que los grupos de cohomología de orden superior de las gavillas casi-coherentes sobre esquemas afines noetherianos son nulos. La técnica que utilizaremos es la que utiliza Hartshorne en la prueba de este resultado (ver [6], pág. 215). Daremos esta demostración de una manera muy detallada, es decir, resolveremos los ejercicios que Hartshorne da por hechos en su prueba, de modo que conseguiremos una prueba clara en su totalidad. Usaremos este resultado para deducir que dada una sucesión exacta corta de gavillas de módulos sobre estos esquemas, siendo la primera de ellas casi-coherente, entonces la sucesión corta de secciones globales es exacta. Utilizaremos la teoría de gavillas para lograr nuestro objetivo.

Hemos dividido este trabajo de tesis en cuatro capítulos, y un apéndice. Cada uno de los capítulos están dirigidos a complementar el estudio de las gavillas casi-coherentes. Las definiciones y los resultados más generales los hemos recopilado en la parte de apéndice como referencia.

A continuación veremos a modo de resumen cuál es la estructura de este trabajo.

En el Capítulo 1 enunciaremos las nociones básicas de la teoría de gavillas, necesarias para el correcto desarrollo del resto del trabajo. En él se establece la notación fundamental que se manejará en los capítulos posteriores.

En el Capítulo 2 estudiaremos la cohomología de gavillas. Daremos las propiedades básicas de las gavillas fofas, y construiremos los grupos de cohomología de una gavilla arbitraria $\mathcal{F}$ sobre un espacio topológico.

En el Capítulo 3 trataremos el espacio topológico espectro de un anillo A, y construiremos sobre él una gavilla de anillos. Reconoceremos a estos espacios topológicos como nuestros esquemas afines. Estudiaremos también la propiedad noetheriana de éstos espacios, y definiremos las gavillas casi-coherentes sobre ellos.

Finalmente, en el Capítulo 4 probaremos que las cohomologías superiores de gavillas casi-coherentes sobre esquemas afines noetherianos es trivial.

Capítulo 1

Espacios Anillados

1.1 Gavillas sobre Espacios Topológicos

En esta y en las siguientes secciones de este primer capítulo daremos la teoría general de gavillas y los resultados básicos que manejaremos en el transcurso del trabajo. Se recomienda ver [2] y [6] para más información de esta teoría.

Las gavillas provienen de una manera sistemática de estudiar cosas locales de un espacio topológico X, éstas nos permiten discutir de manera refinada sobre lo que significa ser una propiedad local, tal y como hablamos de ello cuando lo aplicamos a una función: continua, analítica, diferenciable, etc.

El concepto de gavilla juega un papel fundamental en la Geometría Algebraica Moderna. No solamente es clave en la formulación de las mejores definiciones conocidas de los objetos, sino que es esencial en la construcción de las herramientas para estudiar estos objetos (espacios anillados, esquemas, etc.) explicitamente.

En lo que sigue no supondremos que los espacios topológicos tengan la propiedad de Hausforff salvo que lo indiquemos explicitamente. Para definir una gavilla comenzaremos con la siguiente definición.

Definición 1.1 *Sea X un espacio topológico. Una pregavilla sobre X es un par $(\mathcal{F}, \rho)$, donde $\mathcal{F}$ es una aplicación que a cada abierto U de X le asigna un grupo abeliano $\mathcal{F}(U)$ y ρ es una aplicación que a cada par de abiertos $U \subseteq V$ de X les asigna un homomorfismo $\rho_U^V : \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$, que llamaremos restricción, sujeto a las condiciones siguientes:*

1. *$\mathcal{F}(\varnothing) = \{0\}$,*

2. *ρ_U^U es la identidad en $\mathcal{F}(U)$, para cada abierto U de X.*

3. *Si U, V, W son abiertos de X tales que $U \subseteq V \subseteq W$, entonces $\rho_U^V \circ \rho_V^W = \rho_U^W$.*

Si los grupos $\mathcal{F}(U)$ son anillos, módulos, etc., y las restricciones son homomorfismos de anillos, módulos, etc., entonces tenemos una pregavilla de anillos, módulos, etc.

Escribiremos $f|_U = \rho_U^V(f)$ si $f \in \mathcal{F}(V)$ y $U \subseteq V$. En lo que sigue denotaremos una pregavilla simplemente por $\mathcal{F}$, y no como un par $(\mathcal{F}, \rho)$.

Es usual que si $\mathcal{F}$ es una pregavilla sobre X, nos referimos a $\mathcal{F}(U)$ como las *secciones* de la pregavilla $\mathcal{F}$ sobre el abierto U. Algunas veces, usaremos la notación $\Gamma(U, \mathcal{F})$ para denotar el grupo $\mathcal{F}(U)$.

En resumen, una pregavilla $\mathcal{F}$ de grupos sobre X es una colección de grupos $\mathcal{F}(U)$, uno para cada abierto U, y una colección de homomorfismos de grupos $\rho_V^U : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(V)$, siempre que $V \subseteq U$, con algunas propiedades naturales.

Definición 1.2 *Una gavilla $\mathcal{F}$ sobre un espacio topológico X es una pregavilla tal que si U es un abierto en X y $\{U_i\}_{i\in I}$ es una cubierta abierta de U, entonces se cumple lo siguiente:*

1. *Si $f \in \mathcal{F}(U)$ cumple que $f|_{U_i} = 0_{\mathcal{F}(U_i)}$ para todo i, entonces $f = 0_{\mathcal{F}(U)}$.*

2. *Para cada familia de secciones $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ tales que $f_i|_{U_i\cap U_j} = f_j|_{U_i\cap U_j}$ para todos los índices i, j, existe una sección $f \in \mathcal{F}(U)$ tal que $f|_{U_i} = f_i$ para todo índice i.*

Notemos que la condición 1 de la Definición 1.2 implica que la sección f del punto 2 es única. En efecto, si $g \in \mathcal{F}(U)$ también cumple las condiciones de f, entonces para todo i, $f|_{U_i} = g|_{U_i}$, es decir, $f|_{U_i} - g|_{U_i} = 0_{\mathcal{F}(U_i)}$, luego $(f-g)|_{U_i} = 0_{\mathcal{F}(U_i)}$. Por lo tanto, $f - g = 0_{\mathcal{F}(U)}$.

En lo que sigue diremos frecuentemente: sean, por ejemplo, $U \subseteq V \subseteq W$ abiertos de X, en vez de decir, sean U, V, W abiertos de X tales que $U \subseteq V \subseteq W$. Esto simplemente para simplificar notación.

Ejemplo 1.1 *Consideremos un espacio topológico arbitrario X, un grupo abeliano arbitrario A y fijemos un punto $p \in X$. Definimos:*

$$A_X^p(U) = \begin{cases} A & \textit{si} \ \ p \in U, \\ \{0\} & \textit{si} \ \ p \notin U, \end{cases}$$

para todo abierto U de X, y los homomorfismos de restricción dados como sigue:

$$\rho_U^V = \begin{cases} id_A & si \quad p \in U, \\ id_{\{0\}} & si \quad p \notin U, \end{cases}$$

para U, V abiertos de X tales que $U \subseteq V$.

Demostraremos que A_X^p es una gavilla de grupos abelianos.

1. $A_X^p(\varnothing) = \{0\}$, pues $p \notin \varnothing$.

2. $\rho_U^U : A_X^p(U) \longrightarrow A_X^p(U)$ es el homomorfismo identidad.

   Caso 1. Si $p \in U$, entonces

   $$\rho_U^U : A \longrightarrow A \text{ es la identidad en } A.$$

   Caso 2. Si $p \notin U$

   $$\rho_U^U : \{0\} \longrightarrow \{0\} \text{ es la identidad en } \{0\}.$$

3. Sean $U \subseteq V \subseteq W$ abiertos de X. La igualdad $\rho_U^W = \rho_U^V \circ \rho_V^W$ se sigue de manera inmediata considerando los siguientes casos:

   i. $p \notin W$.

   ii. $p \notin U, p \in V$.

   iii. $p \notin V, p \in W$.

   Con esto A_X^p define una pregavilla sobre X.

4. Sean $U \subseteq X$ abierto, y $\{U_i\}_{i\in I}$ una cubierta abierta de U. Sea $f \in A_X^p(U)$ tal que $f|_{U_i} = 0_{A_X^p(U_i)}$, para todo $i \in I$. Probaremos que $f = 0_{A_X^p(U)}$. Si $p \in U$, entonces $f \in A$ y existe $i_0 \in I$ tal que $p \in U_{i_0}$. Como $p \in U_{i_0}$, $f|_{U_{i_0}} = 0_A$. Así, $f = 0_A$. Si $p \notin U$, entonces $f = 0_{A_X^p(U)}$ trivialmente.

5. Sea $f_i \in A_X^p(U_i)$ una familia de secciones tales que para todo $i, j \in I$, $f_i|_{U_i\cap U_j} = f_j|_{U_i\cap U_j}$. Probaremos que existe $f \in A_X^p(U)$ tal que $f|_{U_i} = f_i$, para todo $i \in I$. Si $p \in U$, entonces $A_X^p(U) = A$, y existe $i_0 \in I$ tal que $p \in U_{i_0}$. Luego, $f_{i_0} \in A_X^p(U_{i_0}) = A$, nos sugiere (por la unicidad de f) tomar $f = f_{i_0}$. Sea $i \in I$, si $p \notin U_i$, $A_X^p(U_i) = \{0\}$, por lo que $f|_{U_i} = 0 = f_i$, pues $f_i \in A_X^p(U_i)$. Si $p \in U_i$, se tiene $A_X^p(U_i) = A$, luego $f|_{U_i} = f = f_{i_0}$, y la igualdad $f_i|_{U_{i_0}\cap U_i} = f_{i_0}|_{U_{i_0}\cap U_i}$ implica que $f_{i_0} = f_i$.

Así, con 4 *y* 5 la pregavilla A_X^p define una gavilla sobre X.

A la gavilla del ejemplo anterior la llamaremos gavilla *rascacielos*. Este tipo de gavillas será de importancia a la hora de identificar la naturaleza de alguna gavilla.

El siguiente ejemplo muestra que ser pregavilla no implica ser gavilla.

Ejemplo 1.2 *Sea X un espacio topológico y sea A un grupo abeliano. Definimos la pregavilla constante A_X^- como sigue:*

$$\textit{para todo } U \subseteq X \textit{ abierto,} \quad A_X^-(U) = \begin{cases} A & \textit{si} \quad U \neq \varnothing, \\ \{\mathit{0}\} & \textit{si} \quad U = \varnothing, \end{cases}$$

con las restricciones dadas por:

$$\rho_U^V = \begin{cases} id_A & si \;\; U \neq \varnothing, \\ id_{\{0\}} & si \;\; \{U = \varnothing \; y \; V \neq \varnothing\} \; o \; si \; V = \varnothing, \end{cases}$$

para $U \subseteq V$ *abiertos de* X.

Verifiquemos las propiedades de pregavilla:

1) $A_X^-(\varnothing) = \{0\}$ obviamente.

2) $\rho_U^U : A \longrightarrow A$ es la identidad, si $U \neq \varnothing$. Similar para el otro caso.

3) Para $U \subseteq V \subseteq W \subseteq X$ abiertos. La igualdad $\rho_U^W = \rho_U^V \circ \rho_V^W$ se sigue obviamente considerando los casos: $i) \, W = \varnothing$; $ii) \, V = \varnothing, W \neq \varnothing$; $iii) \, U = \varnothing, V \neq \varnothing$ y $iv) \, U \neq \varnothing$.

Así, A_X^- define una pregavilla de grupos abelianos sobre X.

Luego, si $A \neq \{0\}$ y X contiene dos abiertos no vacíos disjuntos, entonces A_X^- no es gavilla. Basta considerar a X Hausdorff y no reducido a un punto.

Si U, V son abiertos disjuntos no vacíos de X, entonces $A_X^-(U) = A$ y $A_X^-(V) = A$. Sea $a \in A_X^-(U)$ y $b \in A_X^-(V)$, con $a \neq b$, hagamos $W = U \cup V$. Es claro que $a|_{U \cap V} = 0 = b|_{U \cap V}$. Si A_X^- fuera gavilla debería de existir una sección c de A_X^- sobre W tal que $c|_U = a$, y $c|_V = b$. Esto nos llevaría a que $a = b$, contradiciendo el hecho que $a \neq b$. Por lo tanto, A_X^- no es gavilla.

Otra manera de describir a una gavilla es a través de sus grupos de gérmenes, esto consiste en examinar el comportamiento de sus secciones en vecindades muy pequeñas para cada punto p de X. A continuación veremos la construcción de los grupos de gérmenes de una pregavilla $\mathcal{F}$.

Sean X un espacio topológico, $p \in X$, y $\mathcal{F}$ una pregavilla sobre X.

Consideremos el siguiente conjunto

$$\Omega_p = \{(U, s) \,|\, U \text{ es un abierto de } X \text{ que contiene a } p, \text{ y } s \in \mathcal{F}(U)\}$$

Definamos sobre este conjunto la siguiente relación

$(U, f) \sim (V, g)$, si y sólo si, existe un abierto $W \subseteq U \cap V$ tal que $p \in W$ y $f|_W = g|_W$.

La relación $\sim$ es en realidad una relación de equivalencia. En efecto,

Reflexiva. Basta tomar $W = U$.

Simétrica. Si $(U, f) \sim (V, g)$, entonces existe $W \subseteq U \cap V$ abierto tal que $p \in W$ y $f|_W = g|_W$, luego podemos escribir $g|_W = f|_W$. Así, $(V, g) \sim (U, f)$.

Transitiva. Si $(U, f) \sim (V, g) \sim (W, h)$, entonces existen abiertos W', W'' tales que $p \in W' \subseteq U \cap V$, $p \in W'' \subseteq V \cap W$ y $f|_{W'} = g|_{W'}$, $g|_{W''} = h|_{W''}$. Luego, el abierto $\Gamma = W' \cap W''$ contiene al punto p, y está contenido en $U \cap W$. Además, como $\Gamma \subseteq W'$ y $\Gamma \subseteq W''$, entonces $f|_\Gamma = g|_\Gamma$ y $g|_\Gamma = h|_\Gamma$. Al combinar las últimas igualdades obtenemos $f|_\Gamma = h|_\Gamma$, y así la transitividad se cumple. Por lo tanto, $\sim$ es una relación de equivalencia.

Ahora bien, definimos el conjunto de gérmenes de la pregavilla $\mathcal{F}$ en el punto p como el conjunto cociente $\Omega_p / \sim$, y lo denotamos por $\mathcal{F}_p$. Un elemento de $\mathcal{F}_p$ será de la forma $[(U, s)]$ y será llamado el gérmen de la sección s en el punto p.

Note que la relación de equivalencia $\sim$ nos da $[(U, f)] = [(W, f|_W)]$, para cualquier $W \subseteq U$ abierto tal que $p \in W$.

Por otro lado, podemos dotar al conjunto de gérmenes $\mathcal{F}_p$ de una estructura algebraica de grupo abeliano, con la siguiente operación

$$[(U, f)] + [(V, g)] = [(U \cap V, f|_{U\cap V} + g|_{U\cap V})]$$

Probaremos a continuación que esta operación está bien definida. Sean $[(U, f)] = [(U', f')]$ y $[(V, g)] = [(V', g')]$ elementos en $\mathcal{F}_p$. Queremos la igualdad $[(U, f)] + [(V, g)] = [(U', f')] + [(V', g')]$. Por hipótesis existen abiertos W', W'' contenidos en $U\cap U'$ y $V\cap V'$, respectivamente, tales que $f|_{W'} = f'|_{W'}$ y $g|_{W''} = g'|_{W''}$. El abierto $\mathit{\Gamma} = W' \cap W''$ contiene al punto p, y está contenido en el abierto $(U \cap V) \cap (U' \cap V')$. Entonces, como $\mathit{\Gamma} \subseteq (U \cap V)$ y $\mathit{\Gamma} \subseteq U' \cap V'$ se cumple que $[(U \cap V, f|_{U\cap V} + g|_{U\cap V})] = [(\Gamma, f|_\Gamma + g|_\Gamma)]$ y $[(U' \cap V', f'|_{U'\cap V'} + g'|_{U'\cap V'})] = [(\Gamma, f'|_\Gamma + g'|_\Gamma)]$. Luego, la hipótesis y las relaciones $\mathit{\Gamma} \subseteq W'$, $\mathit{\Gamma} \subseteq W''$ implican que $f|_{\mathit{\Gamma}} = f'|_{\mathit{\Gamma}}$ y $g|_{\mathit{\Gamma}} = g'|_{\mathit{\Gamma}}$. Por lo tanto, $f|_{\mathit{\Gamma}} + g|_{\mathit{\Gamma}} = f'|_{\mathit{\Gamma}} + g'|_{\mathit{\Gamma}}$. Así, hemos probado que la operación está bien definida. Más aún es asociativa y conmutativa.

El neutro aditivo es la clase $[(X, 0_{\mathcal{F}(X)})] = [(U, 0_{\mathcal{F}(U)})]$ para cualquier $U \subseteq X$ abierto. El inverso aditivo de la clase $[(U, f)]$ es la clase $[(U, -f)]$.

Después de esta construcción, ahora tenemos la siguiente definición:

Definición 1.3 *Sean $\mathcal{F}$ una pregavilla sobre el espacio topológico X, y p un punto de X. $\mathcal{F}_p$ será llamado el grupo de gérmenes de la pregavilla $\mathcal{F}$ en el punto p.*

Si $f \in \mathcal{F}(U)$ y $p \in U$, representaremos por $f_p = [(U, f)] \in \mathcal{F}_p$, y diremos que f_p es el gérmen de la sección f en el punto p. Es claro que la aplicación $\mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}_p$, dada por $f \longmapsto f_p$ es un homomorfismo de grupos.

Si $\mathcal{F}$ es una pregavilla de anillos, módulos, etc., los grupos de gérmenes $\mathcal{F}_p$ adquieren la misma estructura de manera natural.

Si $\mathcal{F}$ es una pregavilla sobre un espacio topológico X y $U \subseteq X$ es un abierto, definimos la *restricción* de $\mathcal{F}$ a U como la pregavilla $\mathcal{F}|_U$ que a cada abierto $V \subseteq U$ le asigna el grupo $\mathcal{F}|_U(V) = \mathcal{F}(V)$ y respecto al que las restricciones entre abiertos son las mismas que las de $\mathcal{F}$. Es obvio que si $\mathcal{F}$ es una gavilla, su restricción a cualquier abierto también lo es. Si $p \in U$, tenemos un isomorfismo natural $(\mathcal{F}|_U)_p \longrightarrow \mathcal{F}_p$ dado por $[(V, f)] \longmapsto [(V, f)]$.

El siguiente teorema nos da la manera de cómo un hecho global se puede probar localmente:

Teorema 1.1 *Sea $\mathcal{F}$ una gavilla sobre un espacio topológico X, sea U un abierto en X y sean $f, g \in \mathcal{F}(U)$ tales que $f_p = g_p$ para todo $p \in U$. Entonces, $f = g$.*

Demostración. Si $U = \emptyset$, entonces $\mathcal{F}(U) = \{0\}$, luego $f = g = 0$ trivialmente. Sea $U \neq \emptyset$. Si $p \in U$, por hipótesis $[(U, f)] = [(U, g)]$, es decir, existe un abierto $W_p \subseteq U$ tal que $p \in W_p$ y $f|_{W_p} = g|_{W_p}$, luego de los homomorfismos restricción se tiene que $(f - g)|_{W_p} = 0_{\mathcal{F}(W_p)}$. Notemos que $\{W_p\}_{p \in U}$ es una cubierta abierta de U. Entonces, como $\mathcal{F}$ es gavilla necesariamente $(f - g) = 0_{\mathcal{F}(U)}$, es decir, $f = g$. ∎

Corolario 1.1 *Sean $f, g \in \mathcal{F}(X)$. Para todo $p \in X$, $f_p = g_p$ si y sólo si $f = g$.*

La siguiente definición nos da la manera de relacionar dos pregavillas (gavillas) a través de secciones locales y grupos de gérmenes.

Definición 1.4 *Sean X un espacio topológico y $\mathcal{F}$ una pregavilla sobre X. Una subpregavilla de $\mathcal{F}$ es una pregavilla $\mathcal{G}$ en X tal que para todo abierto $U \subseteq X$, se cumple que $\mathcal{G}(U)$ es un subgrupo de $\mathcal{F}(U)$ y las restricciones de $\mathcal{G}$ son las restricciones de las restricciones correspondientes de $\mathcal{F}$, es decir, ${\rho_{\mathcal{G}}}^U_V(f) = {\rho_{\mathcal{F}}}^U_V(f)$ para todo $f \in \mathcal{G}(U)$, y $U, V \subseteq X$ abiertos tales que $V \subseteq U$. Si $\mathcal{G}$ es una gavilla diremos que es una subgavilla de $\mathcal{F}$.*

Observación: Si $\mathcal{G}$ es una subpregavilla de $\mathcal{F}$ y $p \in X$, tenemos un homomorfismo inyectivo natural $\mathcal{G}_p \longrightarrow \mathcal{F}_p$ dado por $[(U, f)] \longmapsto [(U, f)]$, el cual nos permite identificar al grupo $\mathcal{G}_p$ con un subgrupo de $\mathcal{F}_p$.

Ahora que tenemos la noción general de gavillas, nos interesa saber la manera en que podemos compararlas. La siguiente sección nos enseña la forma de hacerlo.

1.2 Morfismos de Gavillas

En esta sección estudiaremos las relaciones que hay entre dos gavillas definidas sobre un mismo espacio topológico X, así como las caracterizaciones que darán la igualdad de ellas. Veremos que el estudio de los grupos de gérmenes es un ingrediente importante para estudiar isomorfismos de gavillas y grupos de secciones locales. Empezaremos con la definición esencial.

Definición 1.5 *Si $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son dos pregavillas sobre un espacio topológico X, un morfismo de pregavillas (o de gavillas, si es que $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son gavillas) $\alpha : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ es una aplicación que a cada abierto U de X le asigna un homomorfismo de grupos $\alpha_U : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$ tal que si $U \subseteq V \subseteq X$ son abiertos, el diagrama siguiente es conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(V) \arrow[r, "\alpha_V"] \arrow[d, "\rho_{\mathcal{F}}{}_U^V"'] & \mathcal{G}(V) \arrow[d, "\rho_{\mathcal{G}}{}_U^V"] \\ \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\alpha_U"] & \mathcal{G}(U) \end{tikzcd}$$

En resumen, un morfismo de gavillas es simplemente una colección de homomorfismos de grupos $\alpha_U : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$, con $U \subseteq X$ abierto y con algunas propiedades naturales.

Es claro que α induce para cada $p \in X$, un homomorfismo $\alpha_p : \mathcal{F}_p \longrightarrow \mathcal{G}_p$ entre los grupos de gérmenes, dado por $\alpha_p([(U, f)]) = [(U, \alpha_U(f))]$, con $p \in U$. En efecto, probaremos primero que α_p está bien definido. Sin pérdida de generalidad podemos suponer $[(U, f)] = [(U, g)] \in \mathcal{F}_p$. Por hipótesis existe $W \subseteq U$ abierto tal que $p \in W$ y $f|_W = g|_W$. Notemos que $W \subseteq U \subseteq X$ induce un diagrama conmutativo, por lo que $\alpha_U(f)|_W = \alpha_W(g|_W)$ y $\alpha_U(g)|_W = \alpha_W(g|_W)$; combinando estas igualdades obtenemos $\alpha_U(f)|_W = \alpha_U(g)|_W$. Pero esto último implica que $[(U, \alpha_U(f))] = [(U, \alpha_U(g))]$, luego α_p está bien definido.

Ahora, α_p es un homomorfismo de grupos abelianos. Si $[(U, f)], [(U, g)] \in \mathcal{F}_p$, entonces $\alpha_p([(U, f)] + [(U, g)]) = \alpha_p([(U, f + g)]) = [(U, \alpha_U(f + g))] = [(U, \alpha_U(f)+\alpha_U(g))] = [(U, \alpha_U(f))]+[(U, \alpha_U(g))] = \alpha_U([(U, f)])+\alpha_U([(U, g)])$.

De esto se sigue que si U es un abierto y $p \in U$, el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\alpha_U} & \mathcal{G}(U) \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \mathcal{F}_p & \xrightarrow{\alpha_p} & \mathcal{G}_p \end{array}$$

Definición 1.6 *Sean $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ y $\mathcal{H}$ gavillas sobre un espacio topológico X. Si $\alpha : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ y $\beta : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$ son dos morfismos, el morfismo composición $\beta \circ \alpha : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{H}$, está dado por $(\beta \circ \alpha)_U = \beta_U \circ \alpha_U$, para cada U abierto de X.*

Un morfismo de pregavillas $\alpha : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ es un *isomorfismo* si existe un morfismo de pregavillas $\beta : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{F}$ tal que $\alpha \circ \beta = id_{\mathcal{G}}$ y $\beta \circ \alpha = id_{\mathcal{F}}$. Esto equivale a que para todo $U \subseteq X$ abierto, todos los homomorfismos $\alpha_U : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$ sean isomorfismos. En efecto. *Necesidad.* Como α es un isomorfismo, existe $\beta : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{F}$ morfismo tal que $\alpha \circ \beta = id_{\mathcal{G}}$ y $\beta \circ \alpha = id_{\mathcal{F}}$. Sea $U \subseteq X$ abierto, como α y β son morfismos la Definición 1.5 implica que $\alpha_U : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$ y $\beta_U : \mathcal{G}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(U)$ son homomorfismos. Luego, β_U es tal que $\alpha_U \circ \beta_U = id_{\mathcal{G}(U)}$ y $\beta_U \circ \alpha_U = id_{\mathcal{F}(U)}$. Por lo tanto, α_U es isomorfismo. *Suficiencia.* Supongamos que para todo $U \subseteq X$ abierto, $\alpha_U : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$ es un isomorfismo. Sea $U \subseteq X$ abierto, como α_U es isomorfismo la inversa existe, sea $\beta_U = \alpha_U^{-1}$. Luego, $(\alpha \circ \beta)_U = \alpha_U \circ \beta_U = id_{\mathcal{G}(U)}$ y $(\beta \circ \alpha)_U = \beta_U \circ \alpha_U = id_{\mathcal{F}(U)}$. Por lo tanto, α es un isomorfismo.

El siguiente teorema es uno de los más importantes de este trabajo de tesis, pues su utilidad será indispensable para clasificar familias de gavillas.

Teorema 1.2 *Un morfismo de gavillas $\alpha : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ sobre un espacio topológico X es un isomorfismo si y sólo si para todo $p \in X$, $\alpha_p : \mathcal{F}_p \longrightarrow \mathcal{G}_p$ es un isomorfismo.*

Demostración. *Suficiencia.* Sean $p \in X$, y $\alpha_p : \mathcal{F}_p \longrightarrow \mathcal{G}_p$ el homomorfismo inducido por α. Probaremos que α_p es inyectivo y sobreyectivo. Sea $f_p \in \ Ker\, \alpha_p$, supongamos $f_p = [(U, f)]$, con $U \subseteq X$ abierto tal que $p \in U$ y $f \in \mathcal{F}(U)$. Por hipótesis $[(U, \alpha_U(f))] = [(X, 0_{\mathcal{G}(X)})]$, es decir, existe $W \subseteq U$ abierto tal que $p \in W$ y $(\alpha_U(f))|_W = 0_{\mathcal{G}(W)}$. Luego, como α es un morfismo y $W \subseteq U$, se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\alpha_U} & \mathcal{G}(U) \\ {\scriptstyle \rho_{\mathcal{F}}{}^U_W}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle \rho_{\mathcal{G}}{}^U_W} \\ \mathcal{F}(W) & \xrightarrow{\alpha_W} & \mathcal{G}(W) \end{array}$$

Entonces, $\alpha_W \circ \rho_{\mathcal{F}}{}^U_W(f) = \rho_{\mathcal{G}}{}^U_W \circ \alpha_U(f) = 0_{\mathcal{G}(W)}$, esto es, $f|_W \in Ker\, \alpha_W = \{0_{\mathcal{F}(W)}\}$, pues α_W en particular es inyectivo, así $f|_W = 0_{\mathcal{F}(W)}$. Por lo tanto, $f_p = [(U, f)] = [(W, f|_W)] = [(W, 0_{\mathcal{F}(W)})] = [(X, 0_{\mathcal{F}(X)})]$. Esto prueba que α_p es inyectivo. Sea $g_p \in \mathcal{G}_p$, supongamos $g_p = [(U, g)]$ con $p \in U$ y $g \in \mathcal{G}(U)$, entonces existe $f \in \mathcal{F}(U)$ tal que $\alpha_U(f) = g$, pues por hipótesis α_U en particular es sobreyectivo. Por lo tanto, $\alpha_p(f_p) = g_p$. En efecto, $\alpha_p([(U, f)]) = [(U, \alpha_U(f))] = [(U, g)] = g_p$. Entonces, α_p también es sobreyectivo y por lo tanto es un isomorfismo.

Necesidad. Por la equivalencia anterior (pág. 12), basta probar que para todo $U \subseteq X$ abierto los homomorfismos $\alpha_U : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$ son isomorfismos. Sean $U \subseteq X$ un abierto no vacío, y $\alpha_U : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$ el homomorfismo asignado por α. Si $f \in \ Ker\, \alpha_U$, entonces $\alpha_U(f) = 0_{\mathcal{G}(U)}$, luego para todo $p \in U$, $(\alpha_U(f))_p = 0_{\mathcal{G}_p}$, pues $\mathcal{G}$ es una gavilla. De esta manera $[(U, \alpha_U(f))] = \alpha_p(f_p) = 0_{\mathcal{G}_p}$, es decir, $f_p = 0_{\mathcal{F}_p}$, pues α_p es inyectivo para todo $p \in U$. Entonces, (Teorema 1.1) $f = 0_{\mathcal{F}(U)}$, y por lo tanto α_U es inyectivo. Sean $t \in \mathcal{G}(U)$ y $p \in U$, entonces $t_p \in \mathcal{G}_p$, luego existe $f_p \in \mathcal{F}_p$ tal que $\alpha_p(f_p) = t_p$, supongamos $f_p = [(U_p, f(p))]$, con $U_p \subseteq U$ abierto tal que $p \in U_p$ y $f(p) \in \mathcal{F}(U_p)$. De esta manera $\alpha_p([(U_p, f(p))]) = [(U_p, \alpha_{U_p}(f(p)))] = [(U, t)]$, es decir, existe $W_p \subseteq U_p$ abierto tal que $p \in W_p$ y $(\alpha_{U_p}(f(p)))|_{W_p} = t|_{W_p}$, es decir, $\alpha_{W_p}(f(p)|_{W_p}) = t|_{W_p}$. Así, tenemos una familia de secciones $f(p)|_{W_p} \in \mathcal{F}(W_p)$ con $p \in U$, y una cubierta abierta $\{W_p\}_{p \in U}$ de U. Notemos que para todo $p, q \in U$ se cumple la igualdad $(f(p)|_{W_p})|_{W_p \cap W_q} = (f(q)|_{W_q})|_{W_p \cap W_q}$. En efecto, por un lado tenemos $(f(p)|_{W_p})|_{W_p \cap W_q} = f(p)|_{W_p \cap W_q}$, y al aplicar $\alpha_{W_p \cap W_q}$ resulta $t|_{W_p \cap W_q}$. Para $(f(q)|_{W_q})|_{W_p \cap W_q}$ obtenemos el mismo resultado, luego por la inyectividad de $\alpha_{W_p \cap W_q}$ tenemos la igualdad deseada. Por lo tanto, existe $f \in \mathcal{F}(U)$ tal que $f|_{W_p} = f(p)|_{W_p}$. Así, $\alpha_U(f) = t$. En efecto, como $\alpha_U(f)|_{W_p} = \alpha_{W_p}(f|_{W_p}) = \alpha_{W_p}(f(p)|_{W_p}) = t|_{W_p}$, para todo $p \in U$, entonces $(\alpha_U(f) - t)|_{W_p} = 0_{\mathcal{G}(W_p)}$, es decir, $\alpha_U(f) = t$. Entonces, α_U es sobreyectivo, y en consecuencia es un isomorfismo. ■

Definición 1.7 *Diremos que un morfismo de gavillas $\alpha : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ sobre un espacio topológico X es inyectivo (resp. sobreyectivo) si para todo $p \in X$ se cumple que α_p es inyectivo (resp. sobreyectivo).*

Nótese que en la prueba del teorema anterior se mostró que α es inyectivo en el sentido si y sólo si α_U es inyectivo para todo abierto U de X. La sobreyectividad de α no implica la sobreyectividad de α_U para cada abierto U de X. Por ejemplo, sean $X = \mathbb{C} - \{0\}$, $\mathcal{F}$ la gavilla de funciones holomorfas sobre X, y $\mathcal{G}$ la gavilla de funciones holomorfas invertibles sobre X. Si consideramos el morfismo $\alpha : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ definido por $\alpha_U(f) = exp(f)$ para cualquier $U \subseteq X$ abierto y cualquier $f \in \mathcal{F}(U)$. Entonces, α es sobreyectivo. Sin embargo, $\alpha_X : \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{G}(X)$ no es sobreyectivo. Por ejemplo, la función identidad no es la exponencial de una función holomorfa sobre X.

A continuación probaremos dos resultados básicos e indispensables de morfismos de gavillas.

Proposición 1.1 *El morfismo de gavillas $\alpha : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ es inyectivo si y sólo si para cada abierto U de X, el homomorfismo $\alpha_U : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$ es inyectivo.*

Demostración. Ver la prueba del Teorema 1.2 y usar la Definición 1.7 ■

Proposición 1.2 *Si para todo abierto U de X se tiene que el homomorfismo $\alpha_U : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$ es sobreyectivo, entonces el morfismo $\alpha : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ lo es.*

Demostración. Ver la prueba del Teorema 1.2 y usar la Definición 1.7 ■

Corolario 1.2 *Si $\alpha : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ es un morfismo de gavillas, entonces α es un isomorfismo si y sólo si es inyectivo y sobreyectivo.*

El siguiente teorema establece que toda pregavilla puede completarse hasta una gavilla, y que esta completez es única salvo isomorfismo.

Teorema 1.3 *Si $\mathcal{F}$ es una pregavilla sobre el espacio topológico X, existen una gavilla $\mathcal{F}^+$ (llamada gavilla asociada a $\mathcal{F}$) sobre X y un morfismo $i : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}^+$ de modo que si $\mathcal{G}$ es una gavilla sobre X y $\alpha : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ es un morfismo de pregavillas, entonces existe un único morfismo $\alpha^+ : \mathcal{F}^+ \longrightarrow \mathcal{G}$ tal que $\alpha = \alpha^+ \circ i$. Además, el homomorfismo $i_p : \mathcal{F}_p \longrightarrow \mathcal{F}_p^+$ es un isomorfismo para cualquier $p \in X$.*

Demostración. Mostraremos como primer paso la existencia de $\mathcal{F}^+$. Para cada abierto U en X definimos $\mathcal{F}^+(U)$ como el conjunto de todas las funciones $f : U \longrightarrow \prod_{p\in U} \mathcal{F}_p$ tal que para cualquier $p \in U$, existe una vecindad abierta V_p de p en U y $s^p \in \mathcal{F}(V_p)$ de modo que para todo $q \in V_p$, $f(q) = (s^p)_q$. Es claro que $\mathcal{F}^+(U)$ es un grupo abeliano con la suma definida puntualmente. Como restricciones tomamos las restricciones usuales de aplicaciones. De esta manera $\mathcal{F}^+$ es una gavilla sobre X. Para U abierto en X definimos

$$\begin{aligned} i_U : \mathcal{F}(U) &\longrightarrow \mathcal{F}^+(U) \\ s &\longmapsto i_U(s) : U \longrightarrow \textstyle\prod_{p\in U} \mathcal{F}_p \\ &\qquad\qquad p \longmapsto s_p \end{aligned}$$

i_U es claramente un homomorfismo de grupos. En efecto, si $s_1, s_2 \in \mathcal{F}(U)$, entonces $i_U(s_1 + s_2)(p) = (s_1 + s_2)_p = (s_1)_p + (s_2)_p = i_U(s_1)(p) + i_U(s_2)(p)$. Por lo tanto, i es un morfismo de pregavillas. Es fácil ver que para $U \subseteq V$ abiertos en X el diagrama inducido por i es conmutativo.

Veamos ahora que i_p es un isomorfismo. La asignación está dada como sigue:

$$i_p : \mathcal{F}_p \longrightarrow \mathcal{F}_p^+, \text{ tal que } [(U, s)] \longmapsto [(U, i_U(s))]$$

Sea $[(U,s)] \in \mathcal{F}_p$ tal que $i_p([(U,s)]) = [(U, i_U(s))] = [(X, 0_{\mathcal{F}^+(X)})]$, entonces existe $W \subseteq U$ abierto tal que $p \in W$ y $i_U(s)|_W = 0_{\mathcal{F}^+(W)}$, esto es, $i_W(s|_W) = i_U(s)|_W = 0_{\mathcal{F}^+(W)}$. Por lo tanto, para todo $q \in W$, $[(U,s)] = [(W, s|_W)] = [(W, 0_{\mathcal{F}(W)})] = 0_{\mathcal{F}_q}$. En particular, si $q = p$, $[(U,s)] = 0_{\mathcal{F}_p} = [(X, 0_{\mathcal{F}(X)})]$. Así, i_p es inyectivo. Sea $s_p \in \mathcal{F}^+_p$, supongamos $s_p = [(U,g)]$ con $U \subseteq X$ abierto tal que $p \in U$ y $g \in \mathcal{F}^+(U)$. La sección g es de la forma

$$g : U \longrightarrow \prod_{p \in U} \mathcal{F}_p$$

Entonces, existe $V_p \subseteq U$ vecindad abierta de p y $s^p \in \mathcal{F}(V_p)$ tal que para todo $q \in V_p$, se tiene $g(q) = (s^p)_q$. Luego, $\beta = [(V_p, s^p)]$ es la preimagen de $[(U,g)]$, pues $i_p([(V_p, s^p)]) = [(V_p, i_{V_p}(s^p))] = [(V_p, g|_{V_p})] = [(U,g)]$. Por lo tanto, i_p es sobreyectivo y en consecuencia i_p es un isomorfismo. De la asignación

$$i_{V_p}(s^p) : V_p \longrightarrow \prod_{p \in V_p} \mathcal{F}_p, \text{ tal que } q \longmapsto (s^p)_q \in \mathcal{F}_q$$

obtenemos que $i_{V_p}(s^p)(q) = (s^p)_q = g(q)$ para todo $q \in V_p$. Esta es la razón de la igualdad $i_{V_p}(s^p) = g|_{V_p}$. Nótese que si $\mathcal{F}$ es una gavilla, $\mathcal{F}^+ \cong \mathcal{F}$ (Teorema 1.2). Por construcción, si $\mathcal{F}$ es una pregavilla de anillos, álgebras, etc., entonces $\mathcal{F}^+$ también lo es.

Luego, si $\alpha : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ es un morfismo de pregavillas, podemos definir un homomorfismo $\alpha^+_U : \mathcal{F}^+(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$ como sigue: dado $f \in \mathcal{F}^+(U)$ consideramos pares (V_p, s^p), ($p \in V_p \subseteq U$ abierto y $s^p \in \mathcal{F}(V_p)$) que cumplen la definición de $\mathcal{F}^+(U)$ para f y de modo que los abiertos V_p cubran a U, esto significa que para todo $q \in V_p$, $f(q) = (s^p)_q \in \mathcal{F}_q$, y $U = \bigcup_{p \in U} V_p$. De esta manera, tenemos una familia de secciones $\alpha_{V_p}(s^p) \in \mathcal{G}(V_p)$. Enseguida probaremos que los elementos de la familia se extienden a un elemento de $\mathcal{G}(U)$. Para ello basta probar que para todo $p, q \in U$, $\alpha_{V_p}(s^p)|_{V_p \cap V_q} = \alpha_{V_q}(s^q)|_{V_p \cap V_q}$. Si $V_p \cap V_q = \varnothing$, no hay nada que probar. Si $V_p \cap V_q \neq \varnothing$, entonces para todo $z \in V_p \cap V_q$, $[(V_p, s^p)] = (s^p)_z = f(z) = (s^q)_z = [(V_q, s^q)]$, es decir, existe $\Gamma_z \subseteq V_p \cap V_q$ abierto tal que $z \in \Gamma_z$ y $s^p|_{\Gamma_z} = s^q|_{\Gamma_z}$. Es claro que $V_p \cap V_q = \bigcup_{z \in V_p \cap V_q} \Gamma_z$. Notemos que $\alpha_{\Gamma_z}((s^p|_{V_p \cap V_q})|_{\Gamma_z}) = \alpha_{\Gamma_z}(s^p|_{\Gamma_z}) = \alpha_{\Gamma_z}(s^q|_{\Gamma_z}) = \alpha_{\Gamma_z}((s^q|_{V_p \cap V_q})|_{\Gamma_z})$, y los diagramas conmutativos inducidos por el morfismo α para las dos cadenas de abiertos $\Gamma_z \subseteq V_p \cap V_q \subseteq V_p$ y $\Gamma_z \subseteq V_p \cap V_q \subseteq V_q$ implican que $(\alpha_{V_p}(s^p)|_{V_p \cap V_q})|_{\Gamma_z} = (\alpha_{V_q}(s^q)|_{V_p \cap V_q})|_{\Gamma_z}$. Luego, como $\mathcal{G}$ es gavilla, $\alpha_{V_p}(s^p)|_{V_p \cap V_q} = \alpha_{V_q}(s^q)|_{V_p \cap V_q}$. Por lo tanto, existe $\gamma \in \mathcal{G}(U)$ tal que para todo $q \in U$, $\gamma|_{V_q} = \alpha_{V_q}(s^q)$. Entonces, definimos $\alpha_U^+(f) = \gamma$. Este elemento está caracterizado por $(\alpha_U^+(f))_p = \alpha_p(f(p))$, lo cual se sigue del isomorfismo i_p. Luego, esta definición no depende de las secciones ni de la cubierta abierta para U, es decir, está bien definida. En efecto, supongamos $f = g \in \mathcal{F}^+(U)$, entonces si $p \in U$ se tiene que $(\alpha_U^+(f))_p = \alpha_p(f(p)) = \alpha_p(g(p)) = (\alpha_U^+(g))_p$. Así que $\alpha_U^+(f) = \alpha_U^+(g)$.

Sean $f, g \in \mathcal{F}^+(U)$. Si $p \in U$, entonces $(\alpha_U^+(f+g))_p = \alpha_p((f+g)(p)) = \alpha_p(f(p)+g(p)) = (\alpha_U^+(f)+\alpha_U^+(g))_p$. Por lo tanto, $\alpha_U^+(f+g) = \alpha_U^+(f)+\alpha_U^+(g)$, es decir, α_U^+ es un homomorfismo de grupos.

Sean $V \subseteq U$ abiertos de X. Si $f \in \mathcal{F}^+(U)$, y $p \in V$, entonces $(\alpha_V^+(f|_V))_p = \alpha_p((f|_V(p))) = \alpha_p(f(p)) = (\alpha_U^+(f))_p = (\alpha_U^+(f)|_V)_p$. Luego, $\alpha_V^+(f|_V) = \alpha_U^+(f)|_V$, y por lo tanto el diagrama inducido por α^+ es conmutativo.

Luego, si $s \in \mathcal{F}(U)$, entonces $\alpha_U^+(i_U(s)) = \alpha_U(s)$, pues al elemento $i_U(s)$ podemos calcularlo a partir del par (U, s). Así, $\alpha = \alpha^+ \circ i$.

El morfismo α^+ es único. Si $\alpha' : \mathcal{F}^+ \longrightarrow \mathcal{G}$ cumple también que $\alpha = \alpha' \circ i$, entonces para cada $f \in \mathcal{F}^+(U)$, y cada par (V_p, s^p) según la definición de $\mathcal{F}^+(U)$, tenemos que $\alpha'_U(f)|_{V_p} = \alpha'_{V_p}(f|_{V_p}) = \alpha'_{V_p}(i_{V_p}(s^p)) = \alpha_{V_p}(s^p) = \alpha^+_{V_p}(i_{V_p}(s^p)) = \alpha^+_{V_p}(f|_{V_p}) = \alpha^+_U(f)|_{V_p}$. Así pues $\alpha'_U(f) = \alpha^+_U(f)$, es decir, $\alpha' = \alpha^+$. Nótese que $f|_{V_p} = i_{V_p}(s^p)$ es una igualdad de funciones. ■

Sean X un espacio topológico, $\mathcal{F}$ una gavilla sobre X y $\mathcal{G}$ una subgavilla de $\mathcal{F}$. Entonces, podemos definir la pregavilla $(\mathcal{F}/\mathcal{G})^-(U) = \mathcal{F}(U)/\mathcal{G}(U)$, tomando como restricciones los homomorfismos inducidos por las restricciones de $\mathcal{F}$. En general no se trata de una gavilla, pero definimos $\mathcal{F}/\mathcal{G} = (\mathcal{F}/\mathcal{G})^{-+}$. Luego, para todo $p \in U$ se cumple que $(\mathcal{F}/\mathcal{G})_p \cong (\mathcal{F}/\mathcal{G})^-_p \cong \mathcal{F}_p/\mathcal{G}_p$. En lo que resta del trabajo cuando hablemos de la gavilla cociente, nos estaremos refiriendo a la gavilla asociada. Si $\alpha : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ es un morfismo de gavillas sobre un espacio topológico X, podemos definir el $Ker\,\alpha$ como la subgavilla de $\mathcal{F}$ de la siguiente manera: $U \longmapsto Ker\,\alpha(U) = Ker\,\alpha_U$, para todo $U \subseteq X$ abierto. Claramente $Ker\,\alpha_U$ es un subgrupo de $\mathcal{F}(U)$. Las restricciones ρ están dadas por: $\rho_{Ker\,\alpha}{}^V_U = (\rho_{\mathcal{F}}{}^V_U)|_{Ker\,\alpha_V}$. Así, para todo $U \subseteq V \subseteq X$ abiertos tenemos el homomorfismo $\rho_{Ker\,\alpha}{}^V_U : Ker\,\alpha_V \longrightarrow Ker\,\alpha_U$. Para $x \in Ker\,\alpha_V$ se tiene $\alpha_U((\rho_{\mathcal{F}}{}^V_U)|_{Ker\,\alpha_V}(x)) = \alpha_U(\rho_{\mathcal{F}}{}^V_U(x)) = \rho_{\mathcal{G}}{}^V_U(\alpha_V(x)) = \rho_{\mathcal{G}}{}^V_U(0_{\mathcal{G}(V)})$, por lo que la restricción está bien definida. En la última parte hemos utilizado el diagrama conmutativo inducido por el morfismo α.

Enseguida probaremos que $Ker\,\alpha$ es una gavilla sobre X. Veamos que se verifiquen las tres propiedades de pregavilla como primer paso.

1. $Ker\,\alpha(\varnothing) = \{0\}$. Es claro.

2. $\rho_{Ker\,\alpha}{}^U_U = (\rho_{\mathcal{F}}{}^U_U)|_{Ker\,\alpha_U} = (id_{\mathcal{F}(U)})|_{Ker\,\alpha_U} = id_{Ker\,\alpha(U)}$.

3. Para $U \subseteq V \subseteq W$ abiertos de X, $\rho_{Ker\,\alpha}{}^W_U = \rho_{Ker\,\alpha}{}^V_U \circ \rho_{Ker\,\alpha}{}^W_V$.

De esta manera $Ker\,\alpha$ es una pregavilla. Sean $U \subseteq X$ abierto, $\{U_i\}_{i\in I}$ una cubierta abierta de U, y $f \in Ker\,\alpha(U)$ tal que para todo i, $f|_{U_i} = 0_{Ker\,\alpha(U_i)}$. Entonces, por definición $f \in Ker\,\alpha_U$, es decir, $\alpha_U(f) = 0_{\mathcal{G}(U)}$, por otro lado $f|_{U_i} = 0_{Ker\,\alpha(U_i)}$ es lo mismo decir que para todo i, $f|_{U_i} = 0_{\mathcal{F}(U_i)}$ pues $Ker\,\alpha(U_i)$ es un subgrupo de $\mathcal{F}(U_i)$. Así, puesto que $\mathcal{F}$ es gavilla y $f \in Ker\,\alpha(U)$ se sigue que $f = 0_{\mathcal{F}(U)} = 0_{Ker\,\alpha(U)}$. Sea ahora $f_i \in Ker\,\alpha(U_i)$ una familia de secciones tales que para todo $i, j \in I$, $f_i|_{U_i\cap U_j} = f_j|_{U_i\cap U_j}$. Demostraremos que existe un elemento $f \in Ker\,\alpha(U)$ tal que $f|_{U_i} = f_i$ para todo i. Como $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ y $\mathcal{F}$ es gavilla, existe $f \in \mathcal{F}(U)$ tal que $f|_{U_i} = f_i$ para todo i. Así, resta probar que $f \in Ker\,\alpha_U$. Para esto consideramos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\alpha_U} & \mathcal{G}(U) \\ {\scriptstyle \rho_{\mathcal{F}}{}^U_{U_i}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho_{\mathcal{G}}{}^U_{U_i}} \\ \mathcal{F}(U_i) & \xrightarrow{\alpha_{U_i}} & \mathcal{G}(U_i) \end{array}$$

Así pues, $\alpha_{U_i}(f_i) = \alpha_{U_i}(f|_{U_i}) = (\alpha_U(f))|_{U_i}$, es decir, $\alpha_U(f)|_{U_i} = 0_{\mathcal{G}(U_i)}$. Por lo tanto, $\alpha_U(f) = 0_{\mathcal{G}(U)}$. De esta manera, hemos probado que $Ker\,\alpha$ es una gavilla sobre X.

Se cumple también que $(Ker\,\alpha)_p = Ker\,\alpha_p$. En efecto, sea $p \in X$ y $f_p \in (Ker\,\alpha)_p$, supongamos $f_p = [(U_p, f(p))]$, con $U_p \subseteq X$ abierto tal que $p \in U_p$ y $f(p) \in (Ker\,\alpha)(U_p)$, es decir, $\alpha_{U_p}(f(p)) = 0_{\mathcal{G}(U_p)}$ (con $\alpha_{U_p} : \mathcal{F}(U_p) \longrightarrow \mathcal{G}(U_p)$). Luego, $\alpha_p([(U_p, f(p))]) = [(U_p, 0_{\mathcal{G}(U_p)})] = [(X, 0_{\mathcal{G}(X)})] = 0_{\mathcal{G}_p}$. Por lo tanto, $(Ker\,\alpha)_p \subseteq Ker\,\alpha_p$. Conversamente, sea $f_p \in Ker\,\alpha_p$, supongamos $f_p = [(U_p, f(p))]$, con $U_p \subseteq X$ abierto tal que $p \in U_p$ y $f(p) \in \mathcal{F}(U_p)$, por hipótesis $[(U_p, \alpha_{U_p}(f(p)))] = [(X, 0_{\mathcal{G}(X)})]$, es decir, existe $W_p \subseteq U_p$ abierto tal que $p \in W_p$ y $(\alpha_{U_p}(f(p)))|_{W_p} = 0_{\mathcal{G}(W_p)}$, entonces $\alpha_{W_p}(f(p)|_{W_p}) = 0_{\mathcal{G}(W_p)}$, luego $f(p)|_{W_p} \in Ker\,\alpha_{W_p} = (Ker\,\alpha)(W_p)$. Por lo tanto, $f_p \in (Ker\,\alpha)_p$, y entonces $Ker\,\alpha_p \subseteq (Ker\,\alpha)_p$.

En cambio, la subpregavilla $(Im\,\alpha)^-$ de $\mathcal{G}$ dada por $(Im\,\alpha)^-(U) = Im\,\alpha_U$, y restricciones $\rho_{(Im\,\alpha)^-}{}^U_V = \rho_{\mathcal{G}}{}^U_V$ para $V \subseteq U$ abiertos de X no es en general una gavilla. Definimos $Im\,\alpha = (Im\,\alpha)^{-+}$. Debemos observar que la inclusión $j : (Im\,\alpha)^- \longrightarrow \mathcal{G}$ se extiende a un morfismo $j^+ : Im\,\alpha \longrightarrow \mathcal{G}$ de modo que $j = j^+ \circ i$ (donde $i : (Im\,\alpha)^- \longrightarrow Im\,\alpha$). En particular, si $p \in X$ se tiene que $j_p = j_p^+ \circ i_p$, de donde se sigue que j_p^+ es inyectivo. Por lo tanto, los homomorfismos $j_U^+ : (Im\,\alpha)(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$ son inyectivos. Esto nos permite considerar a $Im\,\alpha$ como una subgavilla de $\mathcal{G}$. De ahora en adelante la notación $Im\,\alpha$ representará la gavilla asociada a la pregavilla $(Im\,\alpha)^-$.

También para la gavilla $Im\,\alpha$, se cumple que $(Im\,\alpha)_p = Im\,\alpha_p$ para todo $p \in X$. En efecto, sea $g_p \in (Im\,\alpha)_p$, supongamos $g_p = [(V_p, g(p))]$ con $V_p \subseteq X$ abierto tal que $p \in V_p$ y $g(p) \in (Im\,\alpha)(V_p) = Im\,\alpha_{V_p}$, entonces existe $f'(p) \in \mathcal{F}(V_p)$ tal que $\alpha_{V_p}(f'(p)) = g(p)$. Por tanto, $f_p = [(V_p, f'(p))]$ satisface que $\alpha_p([(V_p, f'(p))]) = [(V_p, g(p))] = g_p$, así $g_p \in Im\,\alpha_p$ y por lo tanto $(Im\,\alpha)_p \subseteq Im\,\alpha_p$. Conversamente, si $g_p \in Im\,\alpha_p$, entonces $\alpha_p(f_p) = g_p$ para algún $f_p \in \mathcal{F}_p$, supongamos $f_p = [(U_p, f'(p))]$, con $U_p \subseteq X$ abierto tal que $p \in U_p$, y $f'(p) \in \mathcal{F}(U_p)$. Luego, $g_p = \alpha_p(f_p) = \alpha_p([(U_p, f'(p))]) = [(U_p, \alpha_{U_p}(f'(p)))]$

implica que $g_p \in (Im\,\alpha)_p$, pues el lado derecho de la última igualdad es un gérmen en $(Im\,\alpha)_p$ (note que $\alpha_{U_p}(f'(p)) \in Im\,\alpha_{U_p} = (Im\,\alpha)(U_p)$). Así, hemos probado que $Im\,\alpha_p \subseteq (Im\,\alpha)_p$.

Es evidente que un morfismo de gavillas $\alpha : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ es inyectivo si y sólo si $Ker\,\alpha$ es la subgavilla nula de $\mathcal{F}$, y es sobreyectivo si y sólo si $Im\,\alpha = \mathcal{G}$.

Definición 1.8 *Llamaremos Coimagen y Cokernel de un morfismo $\alpha : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ de gavillas a las gavillas cocientes de $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$;*

$$Coim\,\alpha = \mathcal{F}/Ker\,\alpha \;\; y \;\; Coker\,\alpha = \mathcal{G}/Im\,\alpha,$$

respectivamente.

Así, α es inyectivo si y sólo si $Ker\,\alpha = \{0\}$, y es sobreyectivo si y sólo si $Coker\,\alpha = \{0\}$.

1.3 Imagen Directa de una Gavilla

Hasta aquí hemos considerado gavillas sobre un mismo espacio topológico X. Ahora veremos que también podemos transportar gavillas de un espacio topológico a otro a través de morfismos. La siguiente definición nos dice la manera de hacerlo.

Definición 1.9 *Sean $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación continua entre espacios topológicos y $\mathcal{F}$ una gavilla sobre X. La gavilla imagen directa de $\mathcal{F}$ por f, denotada por $f_*(\mathcal{F})$, es la gavilla sobre Y determinada de la manera siguiente:*

$f_*(\mathcal{F})(U) = \mathcal{F}(f^{-1}(U))$ para cada U abierto de Y, y las restricciones dadas por ${\rho_{f_*(\mathcal{F})}}_U^V = {\rho_{\mathcal{F}}}_{f^{-1}(U)}^{f^{-1}(V)}$ para $U \subseteq V \subseteq Y$ abiertos.

Probaremos que $f_*(\mathcal{F})$ es una gavilla sobre el espacio topológico Y. Las tres condiciones de pregavillas se satisfacen de manera inmediata:

1. $f_*(\mathcal{F})(\varnothing) = \mathcal{F}(f^{-1}(\varnothing)) = \mathcal{F}(\varnothing) = \{0\}$.

2. ${\rho_{f_*(\mathcal{F})}}_U^U = {\rho_{\mathcal{F}}}_{f^{-1}(U)}^{f^{-1}(U)}$ es la identidad en $\mathcal{F}(f^{-1}(U)) = f_*(\mathcal{F})(U)$, con $U \subseteq Y$ abierto.

3. Para $V \subseteq U \subseteq W$ abiertos en Y tenemos que $f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(U) \subseteq f^{-1}(W)$ son abiertos en X. Luego, como ${\rho_{f_*(\mathcal{F})}}_V^W = {\rho_{\mathcal{F}}}_{f^{-1}(V)}^{f^{-1}(W)}$ y ${\rho_{f_*(\mathcal{F})}}_V^U \circ {\rho_{f_*(\mathcal{F})}}_U^W = {\rho_{\mathcal{F}}}_{f^{-1}(V)}^{f^{-1}(U)} \circ {\rho_{\mathcal{F}}}_{f^{-1}(U)}^{f^{-1}(W)}$, entonces ${\rho_{f_*(\mathcal{F})}}_U^W = {\rho_{f_*(\mathcal{F})}}_V^U \circ {\rho_{f_*(\mathcal{F})}}_U^W$. Así, $f_*(\mathcal{F})$ es una pregavilla.

Sean $U \subseteq Y$ abierto y $\{U_i\}_{i\in I}$ una cubierta abierta de U. Sea $s \in f_*(\mathcal{F})(U)$ tal que $s|_{U_i} = 0_{f_*(\mathcal{F})(U_i)}$. La igualdad $s|_{U_i} = 0_{f_*(\mathcal{F})(U_i)}$ implica que ${\rho_{\mathcal{F}}}_{f^{-1}(U_i)}^{f^{-1}(U)}(s) = {\rho_{f_*(\mathcal{F})}}_{U_i}^U(s) = 0_{f_*(\mathcal{F})(U_i)} = 0_{\mathcal{F}(f^{-1}(U_i))}$. Luego, como $U = \bigcup_{i\in I} U_i$ implica que $f^{-1}(U) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(U_i)$ en X, entonces $s = 0_{\mathcal{F}(f^{-1}(U))} = 0_{f_*(\mathcal{F})(U)}$. Por otro lado, sea $s_i \in f_*(\mathcal{F})(U_i)$ una familia de secciones tales que para todo i, j en I, $s_i|_{U_i\cap U_j} = s_j|_{U_i\cap U_j}$. Nuevamente, tenemos $f^{-1}(U) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(U_i)$, y $s_i \in \mathcal{F}(f^{-1}(U_i))$ para cada i. Luego, $s_i|_{U_i\cap U_j} = s_j|_{U_i\cap U_j}$ implica que $s_i|_{f^{-1}(U_i)\cap f^{-1}(U_j)} = s_j|_{f^{-1}(U_i)\cap f^{-1}(U_j)}$ para todo i, j en I, por lo tanto existe s en $\mathcal{F}(f^{-1}(U)) = f_*(\mathcal{F})(U)$ tal que para todo i en I, $s|_{U_i} = s|_{f^{-1}(U_i)} = s_i$. Así, $f_*(\mathcal{F})$ es una gavilla sobre Y.

Es de gran importancia que dada una gavilla, tener información de sus grupos de gérmenes, pues como lo dijimos anteriormente a través de estos grupos podemos ver cuando dos gavillas son isomorfas. Haremos este estudio para la gavilla *imagen directa*.

Para cada $p \in X$ tenemos un homomorfismo natural

$$\mathcal{O}_p : f_*(\mathcal{F})_{f(p)} \longrightarrow \mathcal{F}_p, \text{ definido por } [(U,g)] \longmapsto [(f^{-1}(U),g)].$$

$\mathcal{O}_p$ está bien definido. Sean $[(V',g)] = [(V'',h)] \in f_*(\mathcal{F})_{f(p)}$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer $[(U,g)] = [(U,h)]$, luego existe $W \subseteq U \subseteq Y$ abierto tal que $f(p) \in W$, y $g|_W = h|_W$. Así, $f^{-1}(W) \subseteq f^{-1}(U) \subseteq X$ y $p \in f^{-1}(W)$. Entonces, probaremos que $g|_{f^{-1}(W)} = h|_{f^{-1}(W)}$. Por un lado, $g|_{f^{-1}(W)} = \rho_{\mathcal{F}}{}^{f^{-1}(U)}_{f^{-1}(W)}(g) = \rho_{f_*(\mathcal{F})}{}^U_W(g) = g|_W = h|_W$, y por otro lado $h|_{f^{-1}(W)} = \rho_{\mathcal{F}}{}^{f^{-1}(U)}_{f^{-1}(W)}(h) = \rho_{f_*(\mathcal{F})}{}^U_W(h) = h|_W$. Por lo tanto, $\mathcal{O}_p$ está bien definido. Es rutina probar que $\mathcal{O}_p$ es un homomorfismo.

En general, $\mathcal{O}_p$ no es un isomorfismo. Una condición suficiente para que lo sea es que las antiimágenes por f de los abiertos de Y constituyan una base para la topología de X, lo cual sucede por ejemplo si f es homeomorfo a un subespacio de Y. En efecto, sea $\mathcal{B} = \{f^{-1}(W) \,|\, W \subseteq Y \text{ abierto}\}$ una base para la topología de X. Probaremos que bajo estas condiciones $\mathcal{O}_p$ es un isomorfismo. Sea $[(U,g)] \in f_*(\mathcal{F})_{f(p)}$ tal que $\mathcal{O}_p([(U,g)]) = [(f^{-1}(U),g)] = [(X, 0_{\mathcal{F}(X)})]$, entonces existe $V \subseteq f^{-1}(U)$ abierto tal que $p \in V$ y $g|_V = 0_{\mathcal{F}(V)}$. Luego, puesto que V es abierto de X y $\mathcal{B}$ es una base, existe $f^{-1}(\Gamma) \in \mathcal{B}$ tal que $p \in f^{-1}(\Gamma) \subseteq V$. Nótese que $\Gamma \subseteq U$ y contiene a $f(p)$. Entonces, $g|_{f^{-1}(\Gamma)} = 0_{\mathcal{F}(f^{-1}(\Gamma))}$, pero esta igualdad significa que $g|_\Gamma = \rho_{f_*(\mathcal{F})}{}^U_\Gamma(g) =$

$\rho_{\mathcal{F}}{}^{f^{-1}(U)}_{f^{-1}(\Gamma)}(g) = 0_{\mathcal{F}(f^{-1}(\Gamma))} = 0_{f_*(\mathcal{F})(\Gamma)}$. Por lo tanto, $[(U,g)] = [(\Gamma, g|_\Gamma)] = [(\Gamma, 0_{f_*(\mathcal{F})(\Gamma)})] = 0_{f_*(\mathcal{F})_{f(p)}}$. Así, $\mathcal{O}_p$ es inyectivo. Sea $[(V,g)] \in \mathcal{F}_p$, con $V \subseteq X$ abierto tal que $p \in V$ y $g \in \mathcal{F}(V)$. Como $\mathcal{B}$ es base para la topología sobre X, existe $W \subseteq Y$ abierto tal que $p \in f^{-1}(W) \subseteq V$. Pero $p \in f^{-1}(W)$ implica que $f(p) \in W$, luego $g|_{f^{-1}(W)} \in \mathcal{F}(f^{-1}(W)) = f_*(\mathcal{F})(W)$. Por otro lado, $\rho_{\mathcal{F}}{}^{V}_{f^{-1}(W)}(g) = \rho_{f_*(\mathcal{F})}{}^{f(V)}_{W}(g) = g|_W$ en $f_*(\mathcal{F})(W)$. Entonces, tenemos $\mathcal{O}_p([(W, g|_W)]) = [(f^{-1}(W), g|_W)] = [(f^{-1}(W), g|_{f^{-1}(W)})] = [(V,g)]$. Por lo tanto, $\mathcal{O}_p$ es sobreyectivo. Así, $\mathcal{O}_p$ es un isomorfismo.

Si $f : X \longrightarrow Y$ es un homeomorfismo entre X y un cerrado de Y, todavía podemos decir más:

$$f_*(\mathcal{F})_q = \begin{cases} \{0\} & \text{si} \quad q \notin f[X] \\ \mathcal{F}_p & \text{si} \quad q = f(p). \end{cases}$$

para todo $q \in Y$. En efecto, si $q \notin f[X]$ y $[(U,s)]$ es un gérmen de $f_*(\mathcal{F})_q$, consideramos el abierto $V = U \cap (Y - f[X])$, con $q \in V$. Luego, $V \subseteq U$ implica que $[(U,s)] = [(V, s|_V)] = [(V, 0_{f_*(\mathcal{F})(V)})] = 0_{f_*(\mathcal{F})_q}$, pues $s|_V \in f_*(\mathcal{F})(V) = \mathcal{F}(f^{-1}(V)) = \mathcal{F}(\varnothing) = \{0\}$. Por lo tanto, $f_*(\mathcal{F})_q = \{0\}$.

1.4 Espacios Anillados

La noción de espacio anillado se basó en la noción de gavilla formulada por *Leray*, a mediados de la década del 40. En esta sección estudiaremos los espacios topológicos equipados con una gavilla de anillos, y particularmente el espacio geométrico, donde todos los grupos de gérmenes son anillos locales, es decir, con un único ideal maximal.

Una vez desarrollada la teoría de gavillas y su forma de compararlas, ahora estamos en condiciones de introducir la noción de espacio anillado. Esta será una herramienta esencial para el Capítulo 3. Comenzaremos como de costumbre, definiendo lo que queremos estudiar.

1.4.1 Espacios Anillados

La teoría de gavillas, como lo dijimos anteriormente juega un papel fundamental en Geometría Algebraica. Por ejemplo, para definir la noción de nuestro primer objeto (espacio anillado) las definiciones anteriores son esenciales.

Definición 1.10 *Un espacio anillado es un par* $(X, \mathcal{O}_X)$*, donde* X *es un espacio topológico y* $\mathcal{O}_X$ *es una gavilla de anillos sobre* X*. Un morfismo de espacios anillados de* $(X, \mathcal{O}_X)$ *a* $(Y, \mathcal{O}_Y)$ *es un par* $(f, f^\sharp)$*, con* $f : X \longrightarrow Y$ *una aplicación continua y* $f^\sharp : \mathcal{O}_Y \longrightarrow f_*\mathcal{O}_X$ *un morfismo de gavillas sobre* Y*.*

Los siguientes son ejemplos de espacios anillados:

Ejemplo 1.3 *Todo espacio topológico* X *tiene una estructura de espacio anillado definido sobre un campo* k*, si lo dotamos de su gavilla* C_X *de las funciones continuas con valores en* k*, es decir, para cada abierto* U *de* X*, consideramos el conjunto* $C_X(U, k) = \{f : U \longrightarrow k \mid f \text{ es continua}\}$*. Este conjunto tiene estructura de anillo con las operaciones definidas puntualmente, y por restricciones se consideran las usuales para funciones, es decir, para* $U \subseteq V \subseteq X$ *abiertos, se tiene el homomorfismo* $\rho_U^V : C_X(V, k) \longrightarrow C_X(U, k)$*.*

Ejemplo 1.4 *Sea $X = \mathbb{C}^n$. Para cualquier $U \subseteq X$ abierto, consideramos el conjunto $\mathcal{O}_X^h(U) = \{f : U \longrightarrow \mathbb{C} \mid f\, es\, holomorfa\}$. Con el mismo razonamiento que el Ejemplo* 1.3*, X es un espacio anillado.*

Cada que se tiene un espacio anillado, podemos obtener otros de la siguiente manera:

Si $(X, \mathcal{O}_X)$ es un espacio anillado y U es un subconjunto abierto de X. Entonces $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ es claramente un espacio anillado, cuyos homomorfismos son los correspondientes de $\mathcal{O}_X$.

En lo sucesivo consideraremos a los abiertos de los espacios anillados como espacios anillados con la estructura inducida por $\mathcal{O}_X$. Definimos de manera obvia la composición de dos morfismos de espacios anillados:

Definición 1.11 *Sean $(f, f^\sharp) : (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ y $(g, g^\sharp) : (Y, \mathcal{O}_Y) \longrightarrow (Z, \mathcal{O}_Z)$, morfismos entre espacios anillados. El morfismo composición $(g, g^\sharp) \circ (f, f^\sharp) : (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Z, \mathcal{O}_Z)$, se define como $(g \circ f, (g \circ f)^\sharp)$, donde $(g \circ f)^\sharp_W := f^\sharp_{g^{-1}(W)} \circ g^\sharp_W$, para cada W abierto de Z.*

Es claro que $g \circ f : X \longrightarrow Z$ es continua y que $(g \circ f)^\sharp : \mathcal{O}_Z \longrightarrow (g \circ f)_* \mathcal{O}_X = g_*(f_* \mathcal{O}_X)$ es un morfismo de gavillas sobre Z.

La siguiente definición captura cuando es que se consideran dos espacios anillados como básicamente los mismos.

Definición 1.12 *Sean $(X, \mathcal{O}_X)$ y $(Y, \mathcal{O}_Y)$ espacios anillados. Un morfismo $(f, f^\sharp) : (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ es un isomorfismo si existe un morfismo $(g, g^\sharp) : (Y, \mathcal{O}_Y) \longrightarrow (X, \mathcal{O}_X)$ tal que $(f, f^\sharp) \circ (g, g^\sharp) = (id_Y, id_{\mathcal{O}_Y})$ y $(g, g^\sharp) \circ (f, f^\sharp) = (id_X, id_{\mathcal{O}_X})$.*

Una propiedad importante de estos espacios anillados, es el nombre que lleva la siguiente subsección.

1.4.2 Espacios Localmente Anillados

En la siguiente definición no se requiere que para todo abierto U de X, $\mathcal{O}_X(U)$ sea un anillo local.

Definición 1.13 *Un espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$ es un espacio localmente anillado si para cada punto $p \in X$, el grupo de gérmenes $\mathcal{O}_{X,p}$ es un anillo local, es decir, con un único ideal maximal. Un morfismo de espacios localmente anillados es un morfismo $(f, f^\sharp)$ de espacios anillados, tal que para cada punto $p \in X$, la aplicación inducida de anillos locales $f_p^\sharp : \mathcal{O}_{Y,f(p)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,p}$ es un homomorfismo local de anillos locales (es decir, ${f_p^\sharp}^{-1}(\mathfrak{m}_p) = \mathfrak{m}_{f(p)}$, donde $\mathfrak{m}_p$ y $\mathfrak{m}_{f(p)}$ son los ideales maximales de $\mathcal{O}_{X,p}$ y $\mathcal{O}_{Y,f(p)}$, respectivamente.)*

Igual que antes, si $(X, \mathcal{O}_X)$ es un espacio anillado local, entonces lo es $(U, \mathcal{O}_X|_U)$, para cualquier abierto U de X. En lo sucesivo consideraremos a los abiertos de los espacios anillados locales como espacios anillados locales con esta estructura.

Los siguientes son ejemplos de espacios localmente anillados:

Ejemplo 1.5 *El Ejemplo* 1.3 *es también un ejemplo de espacio anillado local, ya que para cada punto $p \in X$, el anillo $C_{X,p}$ tiene un único ideal maximal, a saber $\mathfrak{m} = \{[(U, f)] \mid f(p) = 0\}$. Es evidente que $\mathfrak{m}$ es un ideal propio de $C_{X,p}$. El neutro aditivo $0_{C_{X,p}} = [(X, 0_{C_X(X,k)})] \in \mathfrak{m}$, pues la función* *cero es nula en* $p \in U$. *Además,* $\mathfrak{m}$ *es trivialmente cerrado bajo la suma, y cerrado bajo el producto por elementos de* $C_{X,p}$. *Luego, si* $\alpha = [(W,g)] \in C_{X,p}/\mathfrak{m}$, *entonces* p *tiene un entorno abierto* $V \subseteq W$ *tal que* $g|_V$ *es no nula en cada punto de* V, *por lo que podemos considerar* $\beta = [(V,(g|_V)^{-1})] \in C_{X,p}$, *tal que* $\alpha\beta = ([(W,g)])([(V,(g|_V)^{-1})]) = ([(V,g|_V)])([(V,(g|_V)^{-1})]) = [(V, id_{C_X(V,k)})] = [(X, id_{C_X(X,k)})] = id_{C_{X,p}}$. *Así, hemos probado que cualquier elemento de* $C_{X,p}/\mathfrak{m}$ *es invertible, lo cual implica que* $C_{X,p}/\mathfrak{m}$ *es un campo, y en consecuencia* $\mathfrak{m}$ *es un ideal maximal. Es claro también que todos los ideales de* $C_{X,p}$ *están contenidos en* $\mathfrak{m}$. *Por lo tanto,* $C_{X,p}$ *tiene un único ideal maximal. Luego,* $C_{X,p}$ *es un anillo local.*

Ejemplo 1.6 *El espacio anillado del Ejemplo* 1.4 *es local. Siguiendo las líneas del Ejemplo* 1.5, *ahora para funciones holomorfas, se prueba que* $\mathcal{O}^h_{X,z}$ *es un anillo local. Sólo recordar que si una función holomorfa no se anula en* z, *entonces* $1/f$ *sigue siendo holomorfa en* z.

Capítulo 2

Cohomología de Gavillas

En este capítulo estudiaremos la noción general de la cohomología de una gavilla de grupos abelianos sobre un espacio topológico X. Las gavillas fofas fueron utilizadas por primera vez por el matemático Francés *Roger Godement* para obtener los grupos de cohomología de una gavilla sobre un espacio topológico X. La cohomología es una manera de asociar grupos a gavillas de grupos (o anillos a gavillas de anillos), los cuales miden los aspectos globales de la gavilla dada. Para mayor información ver [9].

En la sección 2.1 nos concentraremos en definir una gavilla fofa, y en dar algunos resultados importantes sobre sucesiones de gavillas, en particular cuando una de ellas es fofa. En la sección 2.2 construiremos la gavilla fofa asociada, y la resolución fofa canónica de una gavilla arbitraria $\mathcal{F}$. En la sección 2.3 daremos propiedades importantes de las gavillas fofas respecto de sucesiones de secciones locales y globales. Por último, en la sección 2.4 usando secciones globales y toda la herramienta de las secciones anteriores definiremos la cohomología de una gavilla $\mathcal{F}$ sobre un espacio topológico X.

2.1 Gavillas Fofas

En esta sección nos concentraremos en una clase importante de gavillas, las gavillas fofas. Estas gavillas son esenciales para Capítulo 4. Antes de introducir la noción de una gavilla fofa, daremos algunas definiciones y resultados básicos de sucesiones (finitas o infinitas) de morfismos de gavillas.

$$...... \longrightarrow \mathcal{F}_{i-1} \xrightarrow{g_{i-1}} \mathcal{F}_i \xrightarrow{g_i} \mathcal{F}_{i+1} \longrightarrow ......$$

Comenzaremos por estudiar sucesiones en las que la gavilla $Kernel$ del morfismo g_i contiene a la gavilla $Imagen$ del morfismo g_{i-1}.

Definición 2.1 *Diremos que una sucesión de gavillas sobre un espacio topológico X,*

$$...... \longrightarrow \mathcal{F}_{i-1} \xrightarrow{g_{i-1}} \mathcal{F}_i \xrightarrow{g_i} \mathcal{F}_{i+1} \longrightarrow ......$$

es un complejo de gavillas si para todo $i \in I$, $Im\, g_{i-1} \subseteq Ker\, g_i$ (esto es en el sentido, $Im\, g_{i-1}$ es una subgavilla de $Ker\, g_i$), es decir, si para todo $i \in I$, $g_i \circ g_{i-1} = 0$.

La siguiente definición nos dice cuando una sucesión es exacta.

Definición 2.2 *Una sucesión de gavillas sobre X y morfismos g_i*

$$...... \longrightarrow \mathcal{F}_{i-1} \xrightarrow{g_{i-1}} \mathcal{F}_i \xrightarrow{g_i} \mathcal{F}_{i+1} \longrightarrow ......$$

se dice que es exacta en $\mathcal{F}_i$ si $Img_{i-1} = Kerg_i$. La sucesión es exacta si es exacta en $\mathcal{F}_i$ para cada $i \in I$.

De las definiciones 2.1 y 2.2 se sigue que toda sucesión exacta en particular es un complejo. A una sucesión exacta de la forma:

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

la llamaremos *sucesión exacta corta.*

En particular,

(i) $0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G}$ es exacta si y sólo si φ es inyectiva.

(ii) $\mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \longrightarrow 0$ es exacta si y sólo si ψ es sobreyectiva.

(iii) $0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \longrightarrow 0$ es exacta si y sólo si φ es inyectiva, ψ es sobreyectiva, y $Ker\,\psi = Im\,\varphi$.

La siguiente proposición nos da una relación entre una sucesión exacta de gavillas y sus respectivos grupos de gérmenes, en concreto, establece que la exactitud de sucesiones cortas se preserva bajo los grupos de gérmenes.

Proposición 2.1 *La sucesión de gavillas* $0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \longrightarrow 0$ *es exacta si y sólo si para todo* $x \in X$*, la sucesión de grupos abelianos* $0 \longrightarrow \mathcal{F}_x \xrightarrow{\varphi_x} \mathcal{G}_x \xrightarrow{\psi_x} \mathcal{H}_x \longrightarrow 0$ *es exacta.*

Demostración. Se sigue del Teorema 1.2, la Definición 1.7 y los resultados de las páginas 20 y 21. ■

Sin embargo, si la sucesión corta $0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \longrightarrow 0$ es exacta, el resultado es distinto al tomar secciones locales. La siguiente proposición nos dice que dada una sucesión exacta corta, la sucesión de secciones locales es exacta sólo en $\mathcal{F}(U)$ y en $\mathcal{G}(U)$.

Proposición 2.2 *Sea* $0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \longrightarrow 0$ *una sucesión exacta de gavillas. Para todo abierto* $U \subseteq X$*, la sucesión de secciones locales*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\varphi_U} \mathcal{G}(U) \xrightarrow{\psi_U} \mathcal{H}(U) \text{ es exacta.}$$

Demostración. De la Proposición 1.1, se sigue que φ_U es inyectiva. Por lo tanto, basta probar que $Ker\,\psi_U = Im\,\varphi_U$. Sea $s \in \mathcal{G}(U)$ tal que $\varphi_U(t) = s$ para algún $t \in \mathcal{F}(U)$. Al aplicar ψ_U a la última igualdad se obtiene $\psi_U(\varphi_U(t)) = \psi_U(s)$. Luego, $\psi_U(\varphi_U(t)) = 0_{\mathcal{H}(U)}$ si y sólo si para todo $x \in U$, $(\psi_U(\varphi_U(t)))_x = 0_{\mathcal{H}_x}$, es decir, $\psi_x(\varphi_x(t_x)) = 0_{\mathcal{H}_x}$, la última equivalencia se obtiene del diagrama inducido por los morfismos φ y ψ. Por hipótesis $\psi_x(\varphi_x(t_x)) = 0_{\mathcal{H}_x}$, pues la sucesión exacta de gérmenes en particular es un complejo. Por lo tanto, $\psi_U(\varphi_U(t)) = 0_{\mathcal{H}(U)}$, y en consecuencia $\psi_U(s) = 0_{\mathcal{H}(U)}$. Hemos probado entonces que $Im\,\varphi_U \subseteq Ker\,\psi_U$.

Conversamente, sea $s \in \mathcal{G}(U)$ tal que $\psi_U(s) = 0_{\mathcal{H}(U)}$. Si $x \in U$, entonces $\psi_x(s_x) = (\psi_U(s))_x = 0_{\mathcal{H}_x}$, esto es, $s_x \in Ker\,\psi_x$, y por hipótesis existe $t_x \in \mathcal{F}_x$ tal que $\varphi_x(t_x) = s_x$. Supongamos $t_x = [(V_x, t(x))]$, con $V_x \subseteq U$ abierto tal que $x \in V_x$ y $t(x) \in \mathcal{F}(V_x)$, entonces $\varphi_x([(V_x, t(x))]) = [(U, s)]$ implica que existe $W_x \subseteq V_x$ abierto tal que $x \in W_x$ y $(\varphi_{V_x}(t(x)))|_{W_x} = s|_{W_x}$, es decir, $\varphi_{W_x}(t(x)|_{W_x}) = s|_{W_x}$. Así, tenemos una familia de secciones $t(x)|_{W_x} \in \mathcal{F}(W_x)$, y además $U = \bigcup_{x \in U} W_x$. Como $\mathcal{F}$ es gavilla podemos conseguir una sección t de $\mathcal{F}$ sobre U tal que para todo $x \in U$, $t|_{W_x} = t(x)|_{W_x}$, para ello basta probar que para todo $x, y \in U$, $(t(x)|_{W_x})|_{W_x \cap W_y} = (t(y)|_{W_y})|_{W_x \cap W_y}$. Como $\varphi_{W_x \cap W_y}((t(x)|_{W_x})|_{W_x \cap W_y}) = \varphi_{W_x \cap W_y}(t(x)|_{W_x \cap W_y}) = s|_{W_x \cap W_y}$, y $\varphi_{W_x \cap W_y}((t(y)|_{W_y})|_{W_x \cap W_y}) = s|_{W_x \cap W_y}$, entonces $(t(x)|_{W_x})|_{W_x \cap W_y} =$

$(t(y)|_{W_y})|_{W_x \cap W_y}$, pues por hipótesis $\varphi_{W_x \cap W_y}$ es inyectiva. Por lo tanto, la sección t existe. Entonces, $\varphi_U(t) = s$, pues para todo $x \in U$, $\varphi_U(t)|_{W_x} = \varphi_{W_x}(t|_{W_x}) = \varphi_{W_x}(t(x)|_{W_x}) = s|_{W_x}$. Así, $Ker\,\psi_U \subseteq Im\,\varphi_U$. ∎

A continuación estudiaremos gavillas que tienen la propiedad de que cualquier sección local se extiende a una sección global. Estas gavillas reciben un nombre especial, el cual es dado en la siguiente definición.

Definición 2.3 *Una gavilla sobre un espacio topológico X se dice que es fofa, si cualquier sección de $\mathcal{F}$ sobre un abierto arbitrario U de X se extiende a una sección sobre X, es decir, si la aplicación restricción $\rho_U^X : \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{F}(U)$ es sobreyectiva.*

Esta definición es equivalente a decir que para todo $U \subseteq V$ abiertos de X, la sucesión $\mathcal{F}(V) \longrightarrow \mathcal{F}(U) \longrightarrow 0$ es exacta. En efecto. *Necesidad.* Sea $s \in \mathcal{F}(U)$, por hipótesis existe $t \in \mathcal{F}(X)$ tal que $\rho_{\mathcal{F}}{}_U^X(t) = s$. Entonces, $t|_V \in \mathcal{F}(V)$ es la preimagen de s, pues $\rho_{\mathcal{F}|_V}{}_U^V(t|_V) = \rho_{\mathcal{F}}{}_U^V(t|_V) = \rho_{\mathcal{F}}{}_U^V(\rho_{\mathcal{F}}{}_V^X(t)) = \rho_{\mathcal{F}}{}_U^X(t) = s$. Por lo tanto, $\rho_{\mathcal{F}|_V}{}_U^V : \mathcal{F}(V) \longrightarrow \mathcal{F}(U)$ es sobreyectiva. *Suficiencia.* Basta tomar $V = X$.

Nótese que si $\mathcal{F}$ es fofa, $\mathcal{F}(U)$ está completamente determinado por $\mathcal{F}(X)$.

Más adelante probaremos que las gavillas fofas son abundantes, es decir, que dada una gavilla $\mathcal{F}$ siempre es posible construir una gavilla fofa (que denotaremos por $C_{\mathcal{F}}$) tal que tiene a $\mathcal{F}$ como subgavilla.

En la Proposición 2.2 se probó que dada una sucesión exacta corta, entonces la sucesión de secciones locales es exacta en $\mathcal{F}(U)$, y en $\mathcal{G}(U)$. La siguiente proposición nos da una condición suficiente para tener la exactitud en $\mathcal{H}(U)$, y además nos dice bajo que condiciones, dadas dos gavillas fofas lo es una tercera.

Proposición 2.3 *1. Para una sucesión exacta de gavillas de grupos abelianos sobre un espacio topológico X*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \longrightarrow 0.$$

Si $\mathcal{F}$ es una gavilla fofa, entonces para cualquier abierto U de X, la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\varphi_U} \mathcal{G}(U) \xrightarrow{\psi_U} \mathcal{H}(U) \longrightarrow 0 \text{ es exacta.}$$

2. Para una sucesión exacta de gavillas de grupos abelianos

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \longrightarrow 0.$$

Si $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son fofas, entonces también lo es el cociente $\mathcal{H}$.

Demostración. 1. Por la Proposición 2.2 basta probar que ψ_U es sobreyectiva. Si $U = \varnothing$, no hay nada que probar. Si $U \neq \varnothing$. Para $s \in \mathcal{H}(U)$, consideramos el siguiente conjunto:

$$\mathcal{M} = \{(V, t) \,|\, V \subseteq U \text{ es un abierto, y } t \in \mathcal{G}(V) \text{ satisface } \psi_V(t) = s|_V\}.$$

Debido a la sobreyectividad de ψ, $\mathcal{M} \neq \varnothing$. En efecto, si $x \in U$, la hipótesis y la Definición 1.7 implican que $\psi_x : \mathcal{G}_x \longrightarrow \mathcal{H}_x$ es sobreyectiva.

Luego, como s_x es un gérmen de $\mathcal{H}_x$ existe $t_x \in \mathcal{G}_x$ tal que $\psi_x(t_x) = s_x$. Supongamos $t_x = [(W,t)]$, con $W \subseteq U$ abierto tal que $x \in W$, y $t \in \mathcal{G}(W)$, entonces $[(U,s)] = [(W,\psi_W(t))]$, es decir, existe $V \subseteq U \cap W$ abierto tal $x \in V$, y $s|_V = \psi_W(t)|_V$. Por otro lado, como $V \subseteq W$, el diagrama conmutativo inducido por ψ nos da la igualdad $s|_V = \psi_V(t|_V)$. Por lo tanto, $(V, t|_V) \in \mathcal{M}$. Así, $\mathcal{M}$ es no vacío.

Definimos una relación en $\mathcal{M}$ como sigue: para $(V_1,t_1),(V_2,t_2) \in \mathcal{M}$, $(V_1,t_1) \leq (V_2,t_2)$ si y sólo si $V_1 \subseteq V_2 \subseteq U$ y $t_2|_{V_1} = t_1$. Entonces, $(\mathcal{M}, \leq)$ es un conjunto ordenado. En efecto, la relación es:

1. *Reflexiva.* Es claro que $(V_1,t_1) \leq (V_1,t_1)$, pues $V_1 \subseteq V_1$ y $t_1|_{V_1} = t_1$.

2. *Antisimétrica.* Si $(V_1,t_1) \leq (V_2,t_2)$ y $(V_2,t_2) \leq (V_1,t_1)$, entonces $V_1 \subseteq V_2$ y $t_2|_{V_1} = t_1$, $V_2 \subseteq V_1$ y $t_1|_{V_2} = t_2$, y esto implica que $V_1 = V_2$ y $t_2 = t_1$. La última igualdad se deduce de cualquiera de las dos igualdades $t_2|_{V_1} = t_1$ o $t_1|_{V_2} = t_2$, en efecto, $t_1 = \rho_{\mathcal{G}}{}^{V_2}_{V_1}(t_2) = \rho_{\mathcal{G}}{}^{V_2}_{V_2}(t_2) = t_2$. Por lo tanto, $(V_1,t_1) = (V_2,t_2)$.

3. *Transitiva.* Si $(V_1,t_1) \leq (V_2,t_2) \leq (V_3,t_3)$, entonces $V_1 \subseteq V_2$ y $t_2|_{V_1} = t_1$, $V_2 \subseteq V_3$ y $t_3|_{V_2} = t_2$, luego $V_1 \subseteq V_3$ y $t_3|_{V_1} = t_1$. La última igualdad resulta al restringir $t_3|_{V_2} = t_2$ al abierto V_1. Así, $(V_1,t_1) \leq (V_3,t_3)$.

Consideremos la familia $\{(V_i,t_i) | i \in I\} \subseteq \mathcal{M}$ tal que para todo $i,j \in I$, $(V_i,t_i) \leq (V_j,t_j)$ o $(V_j,t_j) \leq (V_i,t_i)$, es decir, un conjunto totalmente ordenado de $\mathcal{M}$. Probaremos que este conjunto tiene un elemento maximal. Para ello vamos a considerar el abierto $V = \bigcup_{i\in I} V_i$ contenido en U. Si

$i, j \in I$, entonces podemos suponer $V_i \subseteq V_j$, por lo que $V_i \cap V_j = V_i$, así para todo $i, j \in I$, $t_i|_{V_i \cap V_j} = t_i|_{V_i} = t_j|_{V_i} = t_j|_{V_i \cap V_j}$. Luego, existe $t \in \mathcal{G}(V)$ tal que para todo $i \in I$, $t|_{V_i} = t_i$. Así, (V, t) es un elemento de $\mathcal{M}$. En efecto, para todo i se tiene $(\psi_V(t))|_{V_i} = \psi_{V_i}(t|_{V_i}) = \psi_{V_i}(t_i) = s|_{V_i} = (s|_V)|_{V_i}$. Por lo tanto, $\psi_V(t) = s|_V$, y para todo i, $(V_i, t_i) \leq (V, t)$, en consecuencia $(V, t) \in \mathcal{M}$ y es un elemento maximal para el conjunto dado. Luego, por el Lema de Zorn existe un elemento maximal, digamos $(\widetilde{V}, \widetilde{t})$ en $\mathcal{M}$. Probaremos que $\widetilde{V} = U$. Supongamos que $\widetilde{V} \neq U$, entonces existe $x \in U$ tal que $x \notin \widetilde{V}$. Como ψ_x es sobreyectiva y U es abierto, podemos encontrar una vecindad abierta $V_x \subseteq U$ de x y $t^x \in \mathcal{G}(V_x)$ tal que $\psi_{V_x}(t^x) = s|_{V_x}$, es decir, $(V_x, t^x) \in \mathcal{M}$. Consideremos el abierto $W = V_x \cap \widetilde{V}$, y $u = t^x|_W - \widetilde{t}|_W$ una sección de $\mathcal{G}$ sobre W. Al aplicar ψ_W a este elemento, se tiene:
$\psi_W(u) = \psi_W(t^x|_W - \widetilde{t}|_W) = \psi_W(t^x|_W) - \psi_W(\widetilde{t}|_W) = \psi_{V_x}(t^x)|_W - \psi_{\widetilde{V}}(\widetilde{t})|_W = (s|_{V_x})|_W - (s|_{\widetilde{V}})|_W = s|_W - s|_W = 0_{\mathcal{H}(W)}$. En la tercera igualdad hemos utilizado los diagramas conmutativos para los abiertos de X, $W \subseteq V_x$ y $W \subseteq \widetilde{V}$ inducidos por ψ. Así, como $u \in Ker\, \psi_W$ existe $v \in \mathcal{F}(W)$ tal que $\varphi_W(v) = u$. Puesto que $\mathcal{F}$ es fofa, $\widetilde{v}|_W = v$ para algún $\widetilde{v} \in \mathcal{F}(X)$. Luego, $\varphi_X(\widetilde{v}) \in \mathcal{G}(X)$, y como $V_x \subseteq X$ podemos considerar $\varphi_{V_x}(\widetilde{v}|_{V_x}) \in \mathcal{G}(V_x)$. Consideremos el abierto $\widetilde{V} \cup V_x$, y los elementos $t^x - \varphi_{V_x}(\widetilde{v}|_{V_x}) \in \mathcal{G}(V_x)$ y $\widetilde{t} \in \mathcal{G}(\widetilde{V})$. Puesto que $(t^x - \varphi_{V_x}(\widetilde{v}|_{V_x}))|_W = t^x|_W - \varphi_{V_x}(\widetilde{v}|_{V_x})|_W = \widetilde{t}|_W + u - \varphi_W(\widetilde{v}|_W) = \widetilde{t}|_W + u - \varphi_W(v) = \widetilde{t}|_W$ y $\mathcal{G}$ es gavilla, existe $\hat{t} \in \mathcal{G}(\widetilde{V} \cup V_x)$ tal que $\hat{t}|_{\widetilde{V}} = \widetilde{t}$ y $\hat{t}|_{V_x} = t_x - \varphi_{V_x}(\widetilde{v}|_{V_x})$. Esto implica que $(\widetilde{V} \cup V_x, \hat{t}) \in \mathcal{M}$. En efecto, es claro que $\widetilde{V} \cup V_x$ es un abierto en U y $\widetilde{V} \subseteq \widetilde{V} \cup V_x$. Además, $\psi_{\widetilde{V} \cup V_x}(\hat{t})|_{V_x} = \psi_{V_x}(\hat{t}|_{V_x}) = \psi_{V_x}(t_x - \varphi_{V_x}(\widetilde{v}|_{V_x})) = \psi_{V_x}(t_x) - \psi_{V_x}(\varphi_{V_x}(\widetilde{v}|_x)) =$

$s|_{V_x} = (s|_{\widetilde{V}\cup V_x})|_{V_x}$, y $(\psi_{\widetilde{V}\cup V_x}(\hat{t}))|_{\widetilde{V}} = (s|_{\widetilde{V}\cup V_x})|_{\widetilde{V}}$. Por lo tanto, $\psi_{\widetilde{V}\cup V_x}(\hat{t}) = s|_{\widetilde{V}\cup V_x}$, y entonces $(\widetilde{V}\cup V_x, \hat{t}) \in \mathcal{M}$. Este hecho es una contradicción, pues $(\widetilde{V}, \widetilde{t})$ es un elemento maximal de $\mathcal{M}$. Por lo tanto, $U = \widetilde{V}$, y entonces ψ_U es sobreyectiva, ya que $\psi_{\widetilde{V}}(\widetilde{t}) = s|_{\widetilde{V}}$ implica que $\psi_U(\widetilde{t}) = s|_U = s$.

2. Sea $U \subseteq X$ abierto, y $s \in \mathcal{H}(U)$. Como $\mathcal{F}$ es fofa, de 1 se tiene la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\varphi_U} \mathcal{G}(U) \xrightarrow{\psi_U} \mathcal{H}(U) \longrightarrow 0$$

Entonces, existe $t \in \mathcal{G}(U)$ tal que $\psi_U(t) = s$, pero dado que $\mathcal{G}$ también es fofa, existe $\widetilde{t} \in \mathcal{G}(X)$ tal que $\widetilde{t}|_U = t$, luego $\widetilde{t} \in \mathcal{G}(X)$ implica que $\psi_X(\widetilde{t}) \in \mathcal{H}(X)$, y entonces $\psi_X(\widetilde{t})|_U = \psi_U(\widetilde{t}|_U) = \psi_U(t) = s$. Por lo tanto, $\rho_{\mathcal{H}U}^{X} : \mathcal{H}(X) \longrightarrow \mathcal{H}(U)$ es sobreyectiva, es decir, $\mathcal{H}$ es una gavilla fofa. ■

2.2 Construcción de la Gavilla Fofa Asociada

En la sección anterior estudiamos las gavillas fofas y algunos resultados básicos respecto de las sucesiones exactas de gavillas. En esta sección vamos a construir la gavilla fofa asociada a una gavilla $\mathcal{F}$, y construiremos su resolución fofa canónica.

Sea $\mathcal{F}$ una gavilla sobre un espacio topológico X, y U un abierto de X. Consideramos el conjunto de funciones:

$$C_{\mathcal{F}}(U) = \{s : U \longrightarrow \prod_{x\in U} \mathcal{F}_x \,|\, \text{para todo } z \in U,\ s(z) \in \mathcal{F}_z\}.$$

Luego, nos preguntamos si es posible ver a $\mathcal{F}(U)$ como un subconjunto de $C_{\mathcal{F}}(U)$, y la respuesta es afirmativa de la siguiente manera: Para $t \in \mathcal{F}(U)$ asociamos una función del conjunto $C_{\mathcal{F}}(U)$, que denotaremos por $\widetilde{t}$, esto es:

$$t \rightsquigarrow \widetilde{t} : U \longrightarrow \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x, \text{ tal que } z \longmapsto t_z \in \mathcal{F}_z$$

La aplicación $i_U : \mathcal{F}(U) \longrightarrow C_{\mathcal{F}}(U)$ es inyectiva. En efecto, sea $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $i_U(s) = 0_{C_{\mathcal{F}}(U)}$, entonces para todo $z \in U$, $s_z = 0_{\mathcal{F}_z}$ (evaluación de funciones), y del Teorema 1.1 se tiene que $s = 0_{\mathcal{F}(U)}$. Así, i_U es inyectiva.

Nótese que como $\prod_{x \in U} \mathcal{F}_x$ tiene estructura de grupo abeliano, entonces $C_{\mathcal{F}}(U)$ tiene dicha estructura también.

Probaremos que $C_{\mathcal{F}}$ es una gavilla de grupos abelianos. Para $U \subseteq V \subseteq X$ abiertos definimos las restricciones como las restricciones usuales para funciones, es decir,

$$\rho_{C_{\mathcal{F}}}{}_V^U : C_{\mathcal{F}}(U) \longrightarrow C_{\mathcal{F}}(V)$$

$$s : U \to \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x \longmapsto s|_V : V \longrightarrow \prod_{x \in V} \mathcal{F}_x$$

1. $C_{\mathcal{F}}(\varnothing) = \{s : \varnothing \longrightarrow \prod_{x \in \varnothing} \mathcal{F}_x\} = \{0\}$.

2. $\rho_{C_{\mathcal{F}}}{}_U^U = id_{C_{\mathcal{F}}(U)}$.

3. Si $U \subseteq V \subseteq W$ son abiertos de X, es claro que $\rho_{C_{\mathcal{F}}}{}_U^W = \rho_{C_{\mathcal{F}}}{}_U^V \circ \rho_{C_{\mathcal{F}}}{}_V^W$.

4. Sean U un abierto de X, y $\{U_i\}_{i \in I}$ una cubierta abierta de U. Sea $s \in C_{\mathcal{F}}(U)$ tal que $s|_{U_i} = 0_{C_{\mathcal{F}}(U_i)}$. Si $z \in U$, entonces existe $i_0 \in I$ tal que $z \in U_{i_0}$, luego $s(z) = s|_{U_{i_0}}(z) = 0_{\mathcal{F}_z}$. Por lo tanto, s es la función cero de $C_{\mathcal{F}}(U)$.

5. Sea $s_i \in C_{\mathcal{F}}(U_i)$ una familia de secciones tales que para todo i, j en I, $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$. Tenemos que probar que existe $s \in C_{\mathcal{F}}(U)$ tal que para todo i, $s|_{U_i} = s_i$. Para ello basta considerar la función:

$$s : U \longrightarrow \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x, \text{ tal que } z \longmapsto s(z) = s_i(z) \text{ si } z \in U_i.$$

La función s está bien definida y tiene la condición que queremos. En efecto, si $z_0 \in U_i \cap U_j$, entonces $s_i(z_0) = s_j(z_0)$, pues por hipótesis $s_i|_{U_i \cap U_j}(z) = s_j|_{U_i \cap U_j}(z)$ para todo $z \in U_i \cap U_j$. Por construcción $s|_{U_i} = s_i$ para todo $i \in I$. Por lo tanto, $C_{\mathcal{F}}$ es gavilla.

Como i_U es inyectiva, $\mathcal{F}$ es una subgavilla de la gavilla $C_{\mathcal{F}}$, es decir, la sucesión $0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow C_{\mathcal{F}}$ es exacta. Entonces, resta probar que para todo U abierto de X, la sucesión $C_{\mathcal{F}}(X) \longrightarrow C_{\mathcal{F}}(U) \longrightarrow 0$ es exacta. Si $s \in C_{\mathcal{F}}(U)$, entonces es de la forma:

$$s : U \longrightarrow \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x, \text{ tal que } z \longmapsto s(z) \in \mathcal{F}_z.$$

Construimos la función $t \in C_{\mathcal{F}}(X)$ como sigue:

$$t : X \longrightarrow \prod_{x \in X} \mathcal{F}_x$$

$$z \longmapsto t(z) = \begin{cases} 0_{\mathcal{F}_z} & \text{si} \quad z \notin U \\ s(z) & \text{si} \quad z \in U. \end{cases}$$

Entonces, por construcción $t|_U = s$. Por lo tanto, $C_{\mathcal{F}}$ es fofa.

Nuestro siguiente paso es construir la resolución fofa canónica de una gavilla arbitraria $\mathcal{F}$. Comenzaremos por definir una resolución fofa canónica.

Definición 2.4 *Para una gavilla $\mathcal{F}$ sobre un espacio topológico X, una sucesión exacta*

$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}^0 \longrightarrow \mathcal{G}^1 \longrightarrow \mathcal{G}^2 \longrightarrow \mathcal{G}^3 \longrightarrow \ldots$ *se dice que es una resolución fofa de $\mathcal{F}$ si para todo $j \geq 0$, las $\mathcal{G}^i$ son gavillas fofas.*

Construcción:

Sea $\mathcal{F}$ una gavilla sobre X. Consideremos su gavilla fofa asociada $C_{\mathcal{F}}$, de la inyectividad de $i : \mathcal{F} \longrightarrow C_{\mathcal{F}}$ se tiene la sucesión exacta de gavillas

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{i_{\mathcal{F}}} C_{\mathcal{F}}.$$

Como $\mathcal{F}$ es una subgavilla de $C_{\mathcal{F}}$ podemos considerar la gavilla cociente, es decir, $\mathcal{F}_1 := C_{\mathcal{F}}/i_{\mathcal{F}}(\mathcal{F})$. Así, se tiene la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{i_{\mathcal{F}}} C_{\mathcal{F}} \xrightarrow{p_{\mathcal{F}}} \mathcal{F}_1 \longrightarrow 0.$$

Luego, como $\mathcal{F}_1$ es gavilla consideramos su gavilla fofa asociada $C_{\mathcal{F}_1}$ para obtener la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_1 \xrightarrow{i_{\mathcal{F}_1}} C_{\mathcal{F}_1}.$$

Al componer se obtiene la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{i_{\mathcal{F}}} C_{\mathcal{F}} \xrightarrow{i_{\mathcal{F}_1} \circ p_{\mathcal{F}}} C_{\mathcal{F}_1},$$

En efecto, $i_{\mathcal{F}_1}$ inyectiva implica que $Ker\,(i_{\mathcal{F}_1} \circ p_{\mathcal{F}}) = Ker\, p_{\mathcal{F}} = Im\, i_{\mathcal{F}}$.

Análogamente, se tiene la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_1 \xrightarrow{i_{\mathcal{F}_1}} C_{\mathcal{F}_1} \xrightarrow{p_{\mathcal{F}_1}} \mathcal{F}_2 \longrightarrow 0, \text{ donde } \mathcal{F}_2 := C_{\mathcal{F}_1}/i_{\mathcal{F}_1}(\mathcal{F}_1).$$

Nuevamente, para la gavilla $\mathcal{F}_2$ consideramos su gavilla fofa asociada $C_{\mathcal{F}_2}$, para obtener la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_2 \xrightarrow{i_{\mathcal{F}_2}} C_{\mathcal{F}_2}.$$

Al componer nuevamente se obtiene la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{i_{\mathcal{F}}} C_{\mathcal{F}} \xrightarrow{i_{\mathcal{F}_1} \circ p_{\mathcal{F}}} C_{\mathcal{F}_1} \xrightarrow{i_{\mathcal{F}_2} \circ p_{\mathcal{F}_1}} C_{\mathcal{F}_2}.$$

En efecto, $i_{\mathcal{F}_2}$ inyectiva implica que $Ker\,(i_{\mathcal{F}_2} \circ p_{\mathcal{F}_1}) = Ker\, p_{\mathcal{F}_1} = Im\, i_{\mathcal{F}_1}$, por otro lado, $p_{\mathcal{F}}$ sobreyectiva implica que $Im\,(i_{\mathcal{F}_1} \circ p_{\mathcal{F}}) = Im\, i_{\mathcal{F}_1}$. Por lo tanto, la sucesión es exacta en $C_{\mathcal{F}_1}$.

Repitiendo el proceso para la gavilla $\mathcal{F}_2$, obtenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_2 \xrightarrow{i_{\mathcal{F}_2}} C_{\mathcal{F}_2} \xrightarrow{p_{\mathcal{F}_2}} \mathcal{F}_3, \text{ donde } \mathcal{F}_3 := C_{\mathcal{F}_2}/i_{\mathcal{F}_2}(\mathcal{F}_2).$$

Como la sucesión $0 \longrightarrow \mathcal{F}_3 \xrightarrow{i_{\mathcal{F}_3}} C_{\mathcal{F}_3}$ es exacta, al componer se obtiene

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{i_{\mathcal{F}}} C_{\mathcal{F}} \xrightarrow{i_{\mathcal{F}_1} \circ p_{\mathcal{F}}} C_{\mathcal{F}_1} \xrightarrow{i_{\mathcal{F}_2} \circ p_{\mathcal{F}_1}} C_{\mathcal{F}_2} \xrightarrow{i_{\mathcal{F}_3} \circ p_{\mathcal{F}_2}} C_{\mathcal{F}_3}.$$

O tra vez, $i_{\mathcal{F}_3}$ inyectiva implica que $Ker\,(i_{\mathcal{F}_3} \circ p_{\mathcal{F}_2}) = Ker\, p_{\mathcal{F}_2} = Im\, i_{\mathcal{F}_2}$, y $p_{\mathcal{F}_1}$ sobreyectiva implica que $Im\,(i_{\mathcal{F}_2} \circ p_{\mathcal{F}_1}) = Im\, i_{\mathcal{F}_2}$. Entonces, la sucesión es exacta en $C_{\mathcal{F}_2}$.

Siguiendo el mismo proceso se obtiene una resolución fofa de $\mathcal{F}$, esto es

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{i_{\mathcal{F}}} C^0_{\mathcal{F}} \xrightarrow{\delta^0} C^1_{\mathcal{F}} \xrightarrow{\delta^1} C^2_{\mathcal{F}} \xrightarrow{\delta^2} \ldots \xrightarrow{\delta^{n-1}} C^n_{\mathcal{F}} \xrightarrow{\delta^n} C^{n+1}_{\mathcal{F}} \longrightarrow \ldots,$$

donde $\delta^0 := i_{\mathcal{F}_1} \circ p_{\mathcal{F}}$, $\delta^1 := i_{\mathcal{F}_2} \circ p_{\mathcal{F}_1}$,..., $\delta^n := i_{\mathcal{F}_{n+1}} \circ p_{\mathcal{F}_n}$, .., y $C_{\mathcal{F}} := C^0_{\mathcal{F}}$, $C_{\mathcal{F}_1} := C^1_{\mathcal{F}}$, $C_{\mathcal{F}_n} := C^n_{\mathcal{F}}$, ...

Esta resolución es llamada la *resolución fofa canónica de la gavilla* $\mathcal{F}$.

2.3 Propiedades de las Resoluciones Fofas Canónicas

En lo que sigue estudiaremos propiedades importantes de las resoluciones fofas canónicas respecto de una sucesión de gavilla. El siguiente teorema nos dice que las resoluciones fofas inducen diagramas conmutativos exactos, y para probarlo necesitaremos el siguiente lema.

Lema 2.1 *Sean* $\mathcal{F}, \mathcal{G}$, *y* $\mathcal{H}$ *gavillas sobre un espacio topológico* X, *y* U *un subconjunto abierto de* X. *Si la sucesión de grupos abelianos* $0 \longrightarrow \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\varphi_U} \mathcal{G}(U) \xrightarrow{\psi_U} \mathcal{H}(U) \longrightarrow 0$ *es exacta. Entonces, para todo* $x \in X$, *la sucesión de gérmenes*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_x \xrightarrow{\varphi_x} \mathcal{G}_x \xrightarrow{\psi_x} \mathcal{H}_x \longrightarrow 0 \text{ es exacta.}$$

Demostración. Sea $x \in X$. Por la Proposición 1.1, φ_x es inyectiva, y la Proposición 1.2 junto con la Definición 1.7 implican que ψ_x es sobreyectiva. Así, resta probar que $Ker\, \psi_x = Im\, \varphi_x$.

Sea $t_x \in Ker\, \psi_x$. Supongamos $t_x = [(U, t)]$, con U abierto en X tal que $x \in U$, y $t \in \mathcal{G}(U)$. Entonces, $\psi_x([(U, t)]) = [(U, \psi_U(t))] = 0_{\mathcal{H}_x}$, es decir, existe $V \subseteq U$ abierto tal que $x \in V$ y $\psi_U(t)|_V = 0_{\mathcal{H}(V)}$, esto es,

$\psi_V(t|_V) = 0_{\mathcal{H}(V)}$, entonces $t|_V \in Ker\,\psi_V$, y por lo tanto existe $s \in \mathcal{F}(V)$ tal que $\varphi_V(s) = t|_V$. Luego, $t_x = [(U,t)] = [(V,t|_V)] = [(V,\varphi_V(s))] = \varphi_x([(V,s)])$. Así, $Ker\,\psi_x \subseteq Im\,\varphi_x$. Conversamente, si $t_x \in Im\,\varphi_x$, entonces existe $s_x \in \mathcal{F}_x$ tal que $\varphi_x(s_x) = t_x$. Al aplicar ψ_x a la igualdad anterior se tiene $\psi_x(\varphi_x(s_x)) = \psi_x(t_x)$. Si $s_x = [(U,s)]$, entonces $\psi_x(\varphi_x([(U,s)])) = \psi_x([(U,\varphi_U(s))]) = [(U,\psi_U(\varphi_U(s)))] = [(U,0_{\mathcal{H}(U)})]$, pues la sucesión exacta en particular es un complejo. Por lo tanto, $\psi_x(t_x) = 0_{\mathcal{H}_x}$, y en consecuencia $Im\,\varphi_x \subseteq Ker\,\psi_x$. Así, $Im\,\varphi_x = Ker\,\psi_x$. ■

El siguiente teorema es el primer impacto de las resoluciones fofas canónicas sobre una sucesión exacta de gavillas.

Teorema 2.1 *Para una sucesión exacta de gavillas de grupos abelianos*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \longrightarrow 0,$$

el diagrama inducido por las resoluciones fofas canónicas de $\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{H}$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \rightarrow & \mathcal{F} & \rightarrow & \mathcal{G} & \rightarrow & \mathcal{H} & \rightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \rightarrow & C^0_{\mathcal{F}} & \rightarrow & C^0_{\mathcal{G}} & \rightarrow & C^0_{\mathcal{H}} & \rightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \rightarrow & C^1_{\mathcal{F}} & \rightarrow & C^1_{\mathcal{G}} & \rightarrow & C^1_{\mathcal{H}} & \rightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

es conmutativo, y además todas las sucesiones verticales y horizontales son exactas.

Demostración. Como primer paso probaremos que la sucesión

$$0 \longrightarrow C^0_{\mathcal{F}} \xrightarrow{\varphi^0} C^0_{\mathcal{G}} \xrightarrow{\psi^0} C^0_{\mathcal{H}} \longrightarrow 0 \text{ es exacta.}$$

Por el Lema 2.1 basta probar que para todo $U \subseteq X$ abierto, la sucesión

$$0 \longrightarrow C^0_{\mathcal{F}}(U) \xrightarrow{\varphi^0_U} C^0_{\mathcal{G}}(U) \xrightarrow{\psi^0_U} C^0_{\mathcal{H}}(U) \longrightarrow 0 \text{ es exacta.}$$

Definimos a φ^0_U como sigue:

$$\begin{aligned} \varphi^0_U : C^0_{\mathcal{F}}(U) &\longrightarrow C^0_{\mathcal{G}}(U) \\ s &\longmapsto \varphi^0_U(s)(y) = \varphi_y(s(y)) \in \mathcal{G}_y, \text{ para todo } y \in U. \end{aligned}$$

Donde $C^0_{\mathcal{F}}(U) = \{s : U \longrightarrow \prod_{x\in U} \mathcal{F}_x \,|\, \text{para todo } y \in U,\ s(y) \in \mathcal{F}_y\}$, y $C^0_{\mathcal{G}}(U) = \{s : U \longrightarrow \prod_{x\in U} \mathcal{G}_x \,|\, \text{para todo } y \in U,\ s(y) \in \mathcal{G}_y\}$.

φ^0_U *está bien definida.* Sean $s, r \in C^0_{\mathcal{F}}(U)$ tal que $s = r$, entonces para todo $x \in U$, $s(x) = r(x)$. Si $x \in U$, entonces $\varphi^0_U(s)(x) = \varphi_x(s(x)) = \varphi_x(r(x)) = \varphi^0_U(r)(x)$. Por lo tanto, $\varphi^0_U(s) = \varphi^0_U(r)$.

φ^0_U *es un homomorfismo de grupos.* Sean $s, r \in C^0_{\mathcal{F}}(U)$ y $x \in U$, entonces $\varphi^0_U(s+r)(x) = \varphi_x(s(x)+r(x)) = \varphi_x(s(x))+\varphi_x(r(x)) = \varphi^0_U(s)(x)+\varphi^0_U(r)(x) = [\varphi^0_U(s) + \varphi^0_U(r)](x)$.

φ^0_U *es inyectiva.* Sea $s \in C^0_{\mathcal{F}}(U)$ tal que $\varphi^0_U(s) = 0_{C^0_{\mathcal{G}}(U)}$, entonces para todo $x \in U$, $\varphi^0_U(s)(x) = 0_{\mathcal{G}_x}$, es decir, $\varphi_x(s(x)) = 0_{\mathcal{G}_x}$, luego $s(x) = 0_{\mathcal{F}_x}$, pues por hipótesis φ_x es inyectiva. Por lo tanto, $s = 0_{C^0_{\mathcal{F}}(U)}$.

De manera análoga definimos

$$\psi_U^0 : C_{\mathcal{G}}^0(U) \longrightarrow C_{\mathcal{H}}^0(U)$$
$$s \longmapsto \psi_U^0(s)(y) = \psi_y(s(y)) \in \mathcal{H}_y, \text{ para todo } y \in U.$$

Sea $s \in Im\,\varphi_U^0$, entonces existe una función $t \in C_{\mathcal{F}}^0(U)$ tal que $\varphi_U^0(t) = s$. Al aplicar ψ_U^0 a la igualdad anterior, obtenemos $\psi_U^0(\varphi_U^0(t)) = \psi_U^0(s)$, luego para $x \in U$, $\psi_U^0(\varphi_U^0(t))(x) = \psi_x(\varphi_U^0(t)(x)) = \psi_x(\varphi_x(t(x))) = 0_{\mathcal{H}_x}$, pues la sucesión de gérmenes en particular es un complejo. Por lo tanto, para todo $x \in U$, $\psi_U^0(s)(x) = 0_{\mathcal{H}_x}$, es decir, $s \in Ker\,\psi_U^0$. Entonces, hemos probado que $Im\,\varphi_U^0 \subseteq Ker\,\psi_U^0$. Conversamente, si $s \in Ker\,\psi_U^0$, entonces para todo $x \in U$, $\psi_U^0(s)(x) = 0_{\mathcal{H}_x}$, es decir, $\psi_x(s(x)) = 0_{\mathcal{H}_x}$, es decir, $s(x) \in Ker\,\psi_x = Im\,\varphi_x$, luego existe $t_x \in \mathcal{F}_x$ tal que $\varphi_x(t_x) = s(x)$. Así, es natural definir la función

$$\alpha : U \longrightarrow \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x, \text{ tal que } x \longmapsto \alpha(x) = t_x.$$

Entonces, para todo $x \in U$, $\varphi_U^0(\alpha)(x) = \varphi_x(\alpha(x)) = \varphi_x(t_x) = s(x)$. Por lo tanto, $\varphi_U^0(\alpha) = s$. Luego, $Ker\,\psi_U^0 \subseteq Im\,\varphi_U^0$.

ψ_U^0 *es sobreyectiva.* Sea $s \in C_{\mathcal{H}}(U)$ y $x \in U$, entonces $s(x) \in \mathcal{H}_x$, luego $\psi_x(t_x) = s(x)$ para algún $t_x \in \mathcal{G}_x$. Otra vez, definimos una función $r \in C_{\mathcal{G}}^0(U)$ como sigue:

$$r : U \longrightarrow \prod_{x \in U} \mathcal{G}_x, \text{ tal que } x \longmapsto r(x) = t_x.$$

Entonces, $\psi_U^0(r) = s$. Así, ψ_U^0 es sobreyectiva. Por lo tanto, la sucesión

$$0 \longrightarrow C_{\mathcal{F}}^0 \xrightarrow{\varphi^0} C_{\mathcal{G}}^0 \xrightarrow{\psi^0} C_{\mathcal{H}}^0 \longrightarrow 0 \text{ es exacta.}$$

Por otro lado, como el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\mathrm{i}_{\mathcal{F}(U)}} & C^0_{\mathcal{H}}(U) \\
{\scriptstyle\varphi_U}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi^0_U} \\
\mathcal{G}(U) & \xrightarrow{i_{\mathcal{G}}(U)} & C^0_{\mathcal{G}}(U) \\
{\scriptstyle\psi_U}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\psi^0_U} \\
\mathcal{H}(U) & \xrightarrow{i_{\mathcal{H}}(U)} & C^0_{\mathcal{H}}(U)
\end{array}$$

de secciones locales es conmutativo, entonces el diagrama de gavillas

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \mathcal{F} & \to & \mathcal{G} & \to & \mathcal{H} & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & C^0_{\mathcal{F}} & \to & C^0_{\mathcal{G}} & \to & C^0_{\mathcal{H}} & \to & 0
\end{array}$$

también es conmutativo.

Como segundo paso probaremos que la sucesión

$$0 \longrightarrow C^1_{\mathcal{F}} \xrightarrow{\varphi^1} C^1_{\mathcal{G}} \xrightarrow{\psi^1} C^1_{\mathcal{H}} \longrightarrow 0 \text{ es exacta.}$$

Para ello vamos a considerar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{F} & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{G} & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{H} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & C^0_{\mathcal{F}} & \xrightarrow{\varphi^0} & C^0_{\mathcal{G}} & \xrightarrow{\psi^0} & C^0_{\mathcal{H}} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{F}_1 & \xrightarrow{\widetilde{\varphi}^0} & \mathcal{G}_1 & \xrightarrow{\widetilde{\psi}^0} & \mathcal{H}_1 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

donde $\mathcal{F}_1 := C^0_{\mathcal{F}}/i_{\mathcal{F}}(\mathcal{F})$; $\mathcal{G}_1 := C^0_{\mathcal{G}}/i_{\mathcal{G}}(\mathcal{G})$, y $\mathcal{H}_1 := C^0_{\mathcal{H}}/i_{\mathcal{H}}(\mathcal{H})$ son las gavillas cocientes. Como antes, la exactitud de la tercera fila me dará la exactitud de la sucesión deseada.

Otra vez, por el Lema 2.1 es suficiente probar que para todo $U \subseteq X$ abierto, la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_1(U) \xrightarrow{\widetilde{\varphi}^0_U} \mathcal{G}_1(U) \xrightarrow{\widetilde{\psi}^0_U} \mathcal{H}_1(U) \longrightarrow 0 \text{ es exacta.}$$

Vamos a definir $\widetilde{\varphi}^0_U$ como sigue:

$$\widetilde{\varphi}^0_U : \mathcal{F}_1(U) \longrightarrow \mathcal{G}_1(U)$$

$$s + i_{\mathcal{F}(U)}(\mathcal{F}(U)) \longmapsto \varphi^0_U(s) + i_{\mathcal{G}(U)}(\mathcal{G}(U))$$

Para probar que $\widetilde{\varphi}^0_U$ está bien definida basta ver que $\varphi^0_U(i_{\mathcal{F}(U)}(\mathcal{F}(U))) \subseteq i_{\mathcal{G}(U)}(\mathcal{G}(U))$. Sea $s \in C^0_{\mathcal{G}}(U) \in \varphi^0_U(i_{\mathcal{F}(U)}(\mathcal{F}(U)))$, entonces $\varphi^0_U(t) = s$ para algún $t \in i_{\mathcal{F}(U)}(\mathcal{F}(U))$, luego $i_{\mathcal{F}(U)}(t') = t$ para algún $t' \in \mathcal{F}(U)$, así $s =$

$\varphi^0_U(i_{\mathcal{F}(U)}(t')) = i_{\mathcal{G}(U)}(\varphi_U(t'))$, pues el diagarama de abajo es conmutativo. Por lo tanto, $s \in i_{\mathcal{G}(U)}(\mathcal{G}(U))$.

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\mathrm{i}_{\mathcal{F}(U)}} & C^0_{\mathcal{F}}(U) \\
{\scriptstyle \varphi_U}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \varphi^0_U} \\
\mathcal{G}(U) & \xrightarrow{i_{\mathcal{G}(U)}} & C^0_{\mathcal{G}}(U)
\end{array}$$

$\widetilde{\varphi}^0_U$ *es inyectiva.* Sea $\widetilde{\varphi}^0_U(s+i_{\mathcal{F}(U)}(\mathcal{F}(U))) = i_{\mathcal{G}(U)}(\mathcal{G}(U))$, es decir, $\varphi^0_U(s) \in i_{\mathcal{G}(U)}(\mathcal{G}(U))$(no olvidar que $\varphi^0_U(s)$ es una función), luego existe $t \in \mathcal{G}(U)$ tal que $i_{\mathcal{G}(U)}(t) = \varphi^0_U(s)$. Sea $x \in U$, entonces $t_x = \varphi_x(s(x))$ en $\mathcal{G}_x$, luego $\psi_x(t_x) = \psi_x(\varphi_x(s(x))) = 0_{\mathcal{H}_x}$, pues la sucesión de gérmenes en particular es un complejo. Por lo tanto, $t_x \in Ker\,\psi_x$. Supongamos $t_x = [(U,t)]$, por hipótesis $t_x = \varphi_x((\alpha_{V_x})_x)$ para algún $(\alpha_{V_x})_x = [(V_x, \alpha_{V_x})] \in \mathcal{F}_x$, con $x \in V_x \subseteq U$ abierto y $\alpha_{V_x} \in \mathcal{F}(V_x)$. Luego, puesto φ_x es inyectiva, $(\alpha_{V_x})_x = s(x)$. Nótese que $\alpha_{V_x} \in \mathcal{F}(V_x)$, con $x \in U$ es una familia de secciones, y $U = \bigcup_{x\in U} V_x$. Para conseguir una sección α de $\mathcal{F}$ sobre U basta probar que para todo $x, y \in U$, $\alpha_{V_x}|_{V_x\cap V_y} = \alpha_{V_y}|_{V_x\cap V_y}$. Si $V_x \cap V_y = \varnothing$, entonces no hay nada que probar, pues tendriamos secciones en $\mathcal{F}(\varnothing) = \{0\}$. Si $V_x \cap V_y \neq \varnothing$. Sea $z \in V_x \cap V_y$, por hipótesis φ_z es inyectiva, por lo tanto, $\varphi_z(((\alpha_{V_x})|_{V_x\cap V_y})_z) = \varphi_z(((\alpha_{V_y})|_{V_x\cap V_y})_z)$ implica que $\alpha_{V_x}|_{V_x\cap V_y} = \alpha_{V_y}|_{V_x\cap V_y}$. Entonces, existe $\alpha \in \mathcal{F}(U)$ tal que para todo $x \in U$, $\alpha|_{V_x} = \alpha_{V_x}$. Luego, $\alpha_x = s(x)$, pues $\alpha_x = [(U,\alpha)] = [(V_x, \alpha|_{V_x})] = [(V_x, \alpha_{V_x})] = (\alpha_{V_x})_x = s(x)$. Por lo tanto, $i_{\mathcal{F}(U)}(\alpha) = s$, es decir, $s \in i_{\mathcal{F}(U)}(\mathcal{F}(U))$. Así, $\widetilde{\varphi}^0_U$ es inyectiva.

Análogamente definimos:

$$\widetilde{\psi}^0_U : \mathcal{G}_1(U) \longrightarrow \mathcal{H}_1(U)$$

$$s + i_{\mathcal{G}(U)}(\mathcal{G}(U)) \longmapsto \psi_U^0(s) + i_{\mathcal{H}(U)}(\mathcal{H}(U)).$$

De manera similar se prueba que $\psi_U^0(i_{\mathcal{G}(U)}(\mathcal{G}(U))) \subseteq i_{\mathcal{H}(U)}(\mathcal{H}(U))$. Por lo tanto, $\widetilde{\psi}_U^0$ está bien definida.

$\widetilde{\psi}_U^0$ *es sobreyectiva.* Sea $s + i_{\mathcal{H}(U)}(\mathcal{H}(U)) \in \mathcal{H}_1(U)$, con $s \in C_{\mathcal{H}}^0(U)$. Entonces, existe $s' \in C_{\mathcal{G}}^0(U)$ tal que $\psi_U^0(s') = s$. Al aplicar $p_{\mathcal{G}}$ (la proyección) seguida de $\widetilde{\psi}_U^0$ a s', se obtiene $\widetilde{\psi}_U^0(p_{\mathcal{G}}(s')) = \widetilde{\psi}_U^0(s' + i_{\mathcal{G}(U)}(\mathcal{G}(U))) = \psi_U^0(s') + i_{\mathcal{H}(U)}(\mathcal{H}(U)) = s + i_{\mathcal{H}(U)}(\mathcal{H}(U))$. Lo que queriamos.

Por otro lado, sea $s + i_{\mathcal{G}(U)}(\mathcal{G}(U))$ en la imagen de $\widetilde{\varphi}_U^0$, entonces existe $t + i_{\mathcal{F}(U)}(\mathcal{F}(U)) \in \mathcal{F}_1(U)$ tal que $\widetilde{\varphi}_U^0(t + i_{\mathcal{F}(U)}(\mathcal{F}(U))) = s + i_{\mathcal{G}(U)}(\mathcal{G}(U))$, esto es, $s - \varphi_U^0(t) \in i_{\mathcal{G}(U)}(\mathcal{G}(U))$, al aplicar ψ_U^0 resulta $\psi_U^0(s) \in i_{\mathcal{H}(U)}(\mathcal{H}(U)) \subseteq C_{\mathcal{H}}^0(U)$. Por lo tanto, $\widetilde{\psi}_U^0(s + i_{\mathcal{G}(U)}(\mathcal{G}(U))) = \psi_U^0(s) + i_{\mathcal{H}(U)}(\mathcal{H}(U)) = i_{\mathcal{H}(U)}(\mathcal{H}(U))$, es decir, $s + i_{\mathcal{G}(U)}(\mathcal{G}(U)) \in Ker\, \widetilde{\psi}_U^0$, luego $Im\, \widetilde{\varphi}_U^0 \subseteq Ker\, \widetilde{\psi}_U^0$.

Para probar la otra contención haremos uso de la Proposición 2.1, es decir, probaremos que $Ker\, \widetilde{\psi}_x^0 = Im\, \widetilde{\varphi}_x^0$. Como $Im\, \widetilde{\varphi}_U^0 \subseteq Ker\, \widetilde{\psi}_U^0$, entonces $Im\, \widetilde{\varphi}_x^0 \subseteq Ker\, \widetilde{\psi}_x^0$, así resta probar que $Ker\, \widetilde{\psi}_x^0 \subseteq Im\, \widetilde{\varphi}_x^0$. Trabajaremos con el diagrama de los grupos de gérmenes. Sea $t \in (C_{\mathcal{G}}^0)_x$ tal que $\widetilde{\psi}_x^0(t + (i_{\mathcal{G}}(\mathcal{G}))_x) = (i_{\mathcal{H}}(\mathcal{H}))_x$, entonces $\psi_x^0(t) \in (i_{\mathcal{H}}(\mathcal{H}))_x$, luego existe $h \in \mathcal{H}(V_x)$, con V_x abierto en X, tal que $\psi_x^0(t) = (i_{\mathcal{H}}(h))_x$, pero dado que $(i_{\mathcal{H}}(\mathcal{H}))_x = (i_{\mathcal{H}})_x(\mathcal{H}_x)$, se tiene que $\psi_x^0(t) = (i_{\mathcal{H}})_x(h_x)$, $h_x \in \mathcal{H}_x$. Como ψ_x es sobreyectiva, $\psi_x(s_x) = h_x$ para algún $s_x \in \mathcal{G}_x$. Luego, del diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G}_x \arrow[r, "\psi_x"] \arrow[d, "(i_{\mathcal{G}})_x"'] & \mathcal{H}_x \arrow[d, "(i_{\mathcal{H}})_x"] \\
(C_{\mathcal{G}}^0)_x \arrow[r, "\psi_x^0"] & (C_{\mathcal{H}}^0)_x
\end{tikzcd}$$

se tiene $\psi_x^0((i_{\mathcal{G}})_x(s_x)) = \psi_x^0(t)$, es decir, $t - (i_{\mathcal{G}})_x(s_x) \in Ker\,\psi_x^0 = Im\,\varphi_x^0$, es decir, $\varphi_x^0(b) = t - (i_{\mathcal{G}})_x(s_x)$ para algún $b \in (C_{\mathcal{F}}^0)_x$, es decir, $t = \varphi_x^0(b) + (i_{\mathcal{G}})_x(s_x) \in (C_{\mathcal{G}}^0)_x$. Al tomar clase $(i_{\mathcal{G}}(\mathcal{G}))_x$ resulta $t + (i_{\mathcal{G}}(\mathcal{G}))_x = \widetilde{\varphi}_x^0(b + (i_{\mathcal{F}}(\mathcal{F}))_x)$. Por lo tanto, $Ker\,\widetilde{\psi}_x^0 \subseteq Im\,\widetilde{\varphi}_x^0$. Luego, la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_1(U) \xrightarrow{\widetilde{\varphi}_U^0} \mathcal{G}_1(U) \xrightarrow{\widetilde{\psi}_U^0} \mathcal{H}_1(U) \longrightarrow 0 \text{ es exacta,}$$

y en consecuencia lo es la sucesión

$$0 \longrightarrow C_{\mathcal{F}}^1 \xrightarrow{\varphi^1} C_{\mathcal{G}}^1 \xrightarrow{\psi^1} C_{\mathcal{H}}^1 \longrightarrow 0.$$

Repitiendo la misma construcción se prueba la exactitud de las sucesiones horizontales. Las sucesiones verticales son exactas trivialmente. ■

El siguiente corolario es una generalización de Teorema 2.1.

Corolario 2.1 *Para una sucesión exacta de gavillas*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_1 \xrightarrow{\varphi^1} \mathcal{F}_2 \xrightarrow{\varphi^2} \mathcal{F}_3 \xrightarrow{\varphi^3} \dots$$

las resoluciones fofas canónicas de cada una de las gavillas, nos dan el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{F}_1 & \xrightarrow{i_{\mathcal{F}_1}} & C^0_{\mathcal{F}_1} & \longrightarrow & C^1_{\mathcal{F}_1} & \longrightarrow & C^2_{\mathcal{F}_1} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{F}_2 & \xrightarrow{i_{\mathcal{F}_2}} & C^0_{\mathcal{F}_2} & \longrightarrow & C^1_{\mathcal{F}_2} & \longrightarrow & C^2_{\mathcal{F}_2} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{F}_3 & \xrightarrow{i_{\mathcal{F}_3}} & C^0_{\mathcal{F}_3} & \longrightarrow & C^1_{\mathcal{F}_3} & \longrightarrow & C^2_{\mathcal{F}_2} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

donde todas las sucesiones horizontales y verticales son exactas.

Demostración. Para probar la exactitud del diagrama, como primero paso definiremos de manera general $\varphi^{0,j}$; para $j \geq 1$.

Sea U un abierto de X. Entonces,

$$\varphi^{0,j}_U : C^0_{\mathcal{F}_j}(U) \longrightarrow C^0_{\mathcal{F}_{j+1}}(U)$$

$$s \longmapsto \varphi^{0,j}_U(s)(y) = \varphi^j_y(s(y)) \in (\mathcal{F}_{j+1})_y$$

para todo $y \in U$, donde $\varphi^j_y : (\mathcal{F}_i)_y \longmapsto (\mathcal{F}_{j+1})_y$ es el homomorfismo de gérmenes. De la prueba del Teorema 2.1 se sigue que para todo $j \geq 1$, $\varphi^{0,j}_U$ está bien definida. Probaremos primero la exactitud de la sucesión
$0 \to C^0_{\mathcal{F}_1}(U) \xrightarrow{\varphi^{0,1}_U} C^0_{\mathcal{F}_2}(U) \longrightarrow ... \longrightarrow C^0_{\mathcal{F}_{j-1}}(U) \xrightarrow{\varphi^{0,j-1}_U} C^0_{\mathcal{F}_j}(U) \xrightarrow{\varphi^{0,j}_U} C^0_{\mathcal{F}_{j+1}}(U) \to$
...

Si $s \in Ker\,\varphi_U^{0,1}$, entonces $\varphi_U^{0,1}(s) = 0_{C^0_{\mathcal{F}_2}(U)}$, luego para todo $y \in U$, $\varphi_y^1(s(y)) = 0_{(\mathcal{F}_2)_y}$, es decir, $s(y) = 0_{(\mathcal{F}_1)_y}$. Así, $s = 0_{C^0_{\mathcal{F}_1}(U)}$ y por lo tanto $\varphi_U^{0,1}$ es inyectiva.

De manera general probaremos que para todo $j \geq 1$, $Ker\,\varphi_U^{0,j+1} = Im\,\varphi_U^{0,j}$. Sea $s \in C^0_{\mathcal{F}_{j+i}}(U)$ tal que $\varphi_U^{0,j+1}(s) = 0_{C^0_{\mathcal{F}_{j+2}}(U)}$. Por definición para todo $y \in U$, $\varphi_y^{j+1}(s(y)) = 0_{(\mathcal{F}_{j+2})_y}$, es decir, $s(y) \in Ker\,\varphi_y^{j+1} = Im\,\varphi_y^j$, por lo que existe $\alpha_y \in (\mathcal{F}_j)_y$ tal que $\varphi_y^j(\alpha_y) = s(y)$. Como tenemos una colección $\alpha_y \in (\mathcal{F}_j)_y$, es natural definir la función

$$t : U \longrightarrow \prod_{x \in U} (\mathcal{F}_j)_x, \text{ tal que } y \longmapsto t(y) = \alpha_y$$

Siguiendo las líneas de la demostración del Teorema 2.1 se sigue que $Ker\,\varphi_U^{0,j+1} \subseteq Im\,\varphi_U^{0,j}$.

Conversamente, sea $t \in Im\,\varphi_U^{0,j}$, entonces $\varphi_U^{0,j}(s) = t$ para algún $s \in C^0_{\mathcal{F}_j}(U)$. Al aplicar $\varphi_U^{0,j+1}$ se obtiene $\varphi_U^{0,j+1}(\varphi_U^{0,j}(s)) = \varphi_U^{0,j+1}(t)$, entonces $\varphi_U^{0,j+1}(t)(y) = \varphi_y^{j+1}(\varphi_y^{0,j}(s)(y)) = 0_{(\mathcal{F}_{j+2})_y}$ para todo $y \in U$, por lo tanto $t \in Ker\,\varphi_U^{0,j+1}$. Así, $Im\,\varphi_U^{0,j} \subseteq Ker\,\varphi_U^{0,j+1}$.

Hemos probado entonces que la sucesión de secciones locales es exacta. Luego, del Lema 2.1 y la Proposición 2.1 se sigue la exactitud de la sucesión

$$0 \longrightarrow C^0_{\mathcal{F}_1} \xrightarrow{\varphi^{0,1}} C^0_{\mathcal{F}_2} \longrightarrow ... \longrightarrow C^0_{\mathcal{F}_{j-1}} \xrightarrow{\varphi^{0,j-1}} C^0_{\mathcal{F}_j} \xrightarrow{\varphi^{0,j}} C^0_{\mathcal{F}_{j+1}} \longrightarrow ...$$

Para probar que la tercera columna es exacta se hace como en el Teorema 2.1, es decir, vamos a considerar el diagrama

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{F}_1 & \xrightarrow{\varphi^1} & \mathcal{F}_2 & \xrightarrow{\varphi^2} & \mathcal{F}_3 & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & C^0_{\mathcal{F}_1} & \xrightarrow{\varphi^{0,1}} & C^0_{\mathcal{F}_2} & \xrightarrow{\varphi^{0,2}} & C^0_{\mathcal{F}_3} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & C^0_{\mathcal{F}_1}/i_{\mathcal{F}_1(\mathcal{F}_1)} & \xrightarrow{\widetilde{\varphi}^{0,1}} & C^0_{\mathcal{F}_2}/i_{\mathcal{F}_2(\mathcal{F}_2)} & \xrightarrow{\widetilde{\varphi}^{0,2}} & C^0_{\mathcal{F}_3}/i_{\mathcal{F}_3(\mathcal{F}_3)} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}
$$

Entonces, la prueba se concluye siguiendo los pasos del Teorema 2.1. ■

La siguiente proposición es una consecuencia de la Proposición 2.2.

Proposición 2.4 *Si* $0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G}_0 \xrightarrow{g_0} \mathcal{G}_1 \xrightarrow{g_1} \mathcal{G}_2 \xrightarrow{g_2} \mathcal{G}_3 \longrightarrow ...$ *es una resolución fofa de la gavilla fofa* $\mathcal{F}$*. Entonces, para cualquier subconjunto abierto* U *de* X*, la sucesión*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}_0(U) \longrightarrow \mathcal{G}_1(U) \longrightarrow \mathcal{G}_2(U) \longrightarrow \mathcal{G}_3(U) \longrightarrow ...$$

es exacta.

Demostración. Por hipótesis se tiene la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G}_0 \xrightarrow{g_0} Im\, g_0 \longrightarrow 0,$$

donde $Im\, g_0$ es la gavilla imagen. Como $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}_0$ son fofas, de la Proposición 2.3 se sigue que $Im\, g_0$ es fofa, y para todo abierto U de X, la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(U) \xrightarrow{f_U} \mathcal{G}_0(U) \xrightarrow{(g_0)_U} Im\, g_0(U) \longrightarrow 0$$

es exacta. Por hipótesis también se tiene la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow Im\, g_0 \xrightarrow{i} \mathcal{G}_1 \xrightarrow{h} Coker\, g_0 \longrightarrow 0,$$

y otra vez, $Coker\, g_0$ es una gavilla fofa, y para todo $U \subseteq X$ abierto la sucesión

$$0 \longrightarrow Im\, g_0(U) \xrightarrow{i_U} \mathcal{G}_1(U) \xrightarrow{h_U} Coker\, g_0(U) \longrightarrow 0$$

es exacta. Al componer las sucesiones de secciones locales, obtenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(U) \xrightarrow{f_U} \mathcal{G}_0(U) \xrightarrow{(g_0)_U} \mathcal{G}_1(U) \xrightarrow{h_U} Coker\, g_0(U) \longrightarrow 0,$$

pues $(g_0)_U = (i_U) \circ (g_0)_U$, y $Ker\, h_U = Im\,(g_0)_U$ trivialmente.

Luego, como $Im\, g_0 = Ker\, g_1$, entonces $Coker\, g_0 = \mathcal{G}_1/Im\, g_0 = \mathcal{G}_1/Ker\, g_1$, y por el primer teorema de isomorfismo $Coker\, g_0 \cong Im\, g_1$. Por lo tanto, la sucesión

$$0 \longrightarrow Coker\, g_0 \xrightarrow{j} \mathcal{G}_2 \xrightarrow{g_2} Im\, g_2 \longrightarrow 0$$

es exacta. En efecto, es trivial ver que j y g_2 son inyectiva y sobreyectiva, respectivamente. Además, $Ker\, g_2 = Im\, g_1 = Coker\, g_0 = Im\, j$. Nuevamente, por la Proposición 2.3 la gavilla $Im\, g_2$ es fofa, y la sucesión

$$0 \longrightarrow Coker\, g_0(U) \xrightarrow{j_U} \mathcal{G}_2(U) \xrightarrow{(g_2)_U} Im\, g_2(U) \longrightarrow 0$$

es exacta. Al componer resulta que la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(U) \xrightarrow{f_U} \mathcal{G}_0(U) \xrightarrow{(g_0)_U} \mathcal{G}_1(U) \xrightarrow{h_U} \mathcal{G}_2(U) \xrightarrow{(g_2)_U} Im\, g_2(U) \longrightarrow 0$$

es exacta. En efecto, sólo resta probar la exactitud en el término $\mathcal{G}_2(U)$, pero $Ker\,(g_2)_U = Im\, j_U = Coker\, g_0(U) = Im\,(h_U)$, pues h_U es sobreyectiva.

Repitiendo la construcción anterior obtenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}_0(U) \longrightarrow \mathcal{G}_1(U) \longrightarrow \mathcal{G}_2(U) \longrightarrow \mathcal{G}_3(U) \longrightarrow ...$$

Así, la proposición queda probada. ■

En la siguiente sección definiremos los grupos de cohomología de una gavilla arbitraria $\mathcal{F}$, y bajo las condiciones de la Proposición 2.4 concluiremos trivialmente que todos los grupos de cohomología de $\mathcal{F}$ son nulos a excepción del 0-grupo.

2.4 Grupos de Cohomología

En esta sección definiremos los grupos de cohomología de una gavilla $\mathcal{F}$ sobre un espacio topológico X, usando como lo dijimos en la introducción, el método de las resoluciones fofas. Sea

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{i} \mathcal{G}^0 \xrightarrow{\delta^0} \mathcal{G}^1 \xrightarrow{\delta^1} \mathcal{G}^2 \xrightarrow{\delta^2} \mathcal{G}^3 \longrightarrow ...,$$

una resolución fofa de la gavilla $\mathcal{F}$. Al tomar secciones globales obtenemos la sucesión de grupos abelianos

$$0 \xrightarrow{\delta_X^{-1}} \mathcal{G}^0(X) \xrightarrow{\delta_X^0} \mathcal{G}^1(X) \xrightarrow{\delta_X^1} \mathcal{G}^2(X) \xrightarrow{\delta_X^2} \mathcal{G}^3(X) \longrightarrow ...$$

Considerar la sucesión de secciones globales será la manera que utilizaremos para definir los grupos de cohomología de la gavilla $\mathcal{F}$ sobre el espacio X. Como la resolución fofa dada es exacta, en particular es un complejo, es decir, $\delta^{n+1} \circ \delta^n = 0$, $n = 0, 1, 2, ...$ Luego, $\delta_X^{n+1} \circ \delta_X^n = 0$, $n = 0, 1, 2, ...$, es decir, la sucesión de secciones globales al menos es un complejo. En efecto, si $s \in \mathcal{G}^n(X)$, entonces $\delta_X^{n+1}(\delta_X^n(s)) = 0_{\mathcal{G}^{n+1}(X)}$ si y sólo si para todo $y \in X$, $(\delta_X^{n+1}(\delta_X^n(s)))_y = 0_{\mathcal{G}_y^{n+1}}$, es decir, $(\delta_y^{n+1}(\delta_y^n(s_y))) = 0_{\mathcal{G}_y^{n+1}}$. Por hipótesis la última igualdad se cumple. Por lo tanto, $\delta_X^{n+1}(\delta_X^n(s)) = 0_{\mathcal{G}^{n+1}(X)}$. El hecho de que la sucesión de secciones globales es sólo un complejo y no una sucesión exacta nos garantizará que los grupos de cohomología que definiremos enseguida, además del 0-grupo de cohomología no todos serán nulos.

Vamos a definir los grupos de cohomología, midiendo hasta que punto la sucesión de secciones globales es exacta. Esto es, definimos

$$H^n(X, \mathcal{F}) = Ker\, \delta_X^n / Im\, \delta_X^{n-1}, \quad n = 0, 1, 2, ...,$$

donde $\delta_X^{-1} = 0$.

Para cualquier gavilla $\mathcal{F}$ siempre se tiene que $H^0(X, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$. En efecto, $H^0(X, \mathcal{F}) = Ker\, \delta_X^0 / Im\, \delta_X^{-1} = Ker\, \delta_X^0 / 0_{\mathcal{G}^0(X)} = i_X(\mathcal{F}(X)) = \mathcal{F}(X)$.

En realidad pudiera ser que la notación $H^n(X, \mathcal{F})$ no fuera razonable, puesto que para otra resolución fofa de $\mathcal{F}$ los grupos de cohomología podrían resultar totalmente distintos. Sin embargo, más adelante mostraremos que $H^n(X, \mathcal{F})$ es independiente de la elección de cualquier resolución fofa de la gavilla $\mathcal{F}$. Este hecho justificará la notación del grupo de cohomología, y entonces $H^n(X, \mathcal{F})$ será el n-ésimo grupo de cohomología de la gavilla $\mathcal{F}$.

El 0-grupo de cohomología puede también obtenerse usando una construcción de sucesiones exactas. Cuando la gavilla $\mathcal{F}$ es fofa todos los grupos de cohomología son nulos excepto el cero grupo. El siguiente corolario justifica este hecho.

Corolario 2.2 *Para una gavilla fofa $\mathcal{F}$, tenemos que*

$$H^n(X, \mathcal{F}) = \{0\}, \quad n = 1, 2, 3, ..$$

Demostración. Se sigue de la Proposición 2.4. ■

Enseguida probaremos que los grupos de cohomología no depende de la resolución fofa que se tome para la gavilla $\mathcal{F}$.

Teorema 2.2 *Para cada entero $n \geq 0$, $H^n(X,\mathcal{F})$ está determinado únicamente por $\mathcal{F}$ y X, independientemente de la elección de la resolución fofa que se tome para $\mathcal{F}$.*

Demostración. Sean

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}^0 \longrightarrow \mathcal{G}^1 \longrightarrow \mathcal{G}^2 \longrightarrow \mathcal{G}^3 \longrightarrow \ldots$$

una resolución fofa de $\mathcal{F}$, y

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow C^0_{\mathcal{F}} \longrightarrow C^1_{\mathcal{F}} \longrightarrow C^2_{\mathcal{F}} \longrightarrow \ldots \longrightarrow C^n_{\mathcal{F}} \longrightarrow C^{n+1}_{\mathcal{F}} \longrightarrow \ldots$$

su resolución fofa canónica.

Para diferenciar estas resoluciones usaremos la siguiente notación: $R.F$ para la *resolución fofa*, y $R.F.C$ para la *resolución fofa canónica*. Probaremos entonces que los grupos de cohomología definidos por $R.F$, y $R.F.C$ son isomorfos.

Del Corolario 2.1 se tiene el siguiente diagrama conmutativo,

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \rightarrow & \mathcal{F} & \rightarrow & \mathcal{G}^0 & \rightarrow & \mathcal{G}^1 & \rightarrow & \mathcal{G}^2 & \rightarrow & \mathcal{G}^3 & \rightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \rightarrow & C^0_{\mathcal{F}} & \rightarrow & C^0_{\mathcal{G}^0} & \rightarrow & C^0_{\mathcal{G}^1} & \rightarrow & C^0_{\mathcal{G}^2} & \rightarrow & C^0_{\mathcal{G}^3} & \rightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \rightarrow & C^1_{\mathcal{F}} & \rightarrow & C^1_{\mathcal{G}^0} & \rightarrow & C^1_{\mathcal{G}^1} & \rightarrow & C^1_{\mathcal{G}^2} & \rightarrow & C^1_{\mathcal{G}^3} & \rightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

donde todas las filas y columnas son exactas. Puesto que la gavilla $\mathcal{F}$ no es fofa, de la Proposición 2.2 se sigue que la sucesión de secciones globales

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{G}^0(X) \longrightarrow \mathcal{G}^1(X) \longrightarrow \mathcal{G}^2(X) \longrightarrow \mathcal{G}^3(X) \longrightarrow ...$$

a lo más es exacta en $\mathcal{G}^0(X)$. Luego, de la construcción de los grupos de cohomología (pág. 56) debemos considerar la sucesión de secciones globales

$$0 \longrightarrow \mathcal{G}^0(X) \longrightarrow \mathcal{G}^1(X) \longrightarrow \mathcal{G}^2(X) \longrightarrow \mathcal{G}^3(X) \longrightarrow ...$$

y como esta sucesión es solamente un complejo, no todos los grupos de cohomología de la gavilla $\mathcal{F}$ sobre X son nulos. Las mismas observaciones son válidas para la resolución fofa canónica de $\mathcal{F}$.

Así pues el diagrama anterior induce el siguiente diagrama conmutativo de grupos abelianos

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & \rightarrow & \mathcal{G}^0(X) & \rightarrow & \mathcal{G}^1(X) & \rightarrow & \mathcal{G}^2(X) & \rightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \rightarrow & C^0_{\mathcal{F}}(X) & \rightarrow & C^0_{\mathcal{G}^0}(X) & \rightarrow & C^0_{\mathcal{G}^1}(X) & \rightarrow & C^0_{\mathcal{G}^2}(X) & \rightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \rightarrow & C^1_{\mathcal{F}}(X) & \rightarrow & C^1_{\mathcal{G}^0}(X) & \rightarrow & C^1_{\mathcal{G}^1}(X) & \rightarrow & C^1_{\mathcal{G}^2}(X) & \rightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

Entonces, por la Proposición 2.4 todas excepto la primer fila y primer columna son sucesiones exactas. Por simplicidad usaremos la siguiente notacion: $A^n = \mathcal{G}^n(X)$, $B^n = C^n_{\mathcal{F}}(X)$ y $C^{i,j} = C^i_{\mathcal{G}^j}$.

Así, tenemos el diagrama conmutativo

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & \xrightarrow{\delta^{-1}} & A^0 & \xrightarrow{\delta^0} & A^1 & \xrightarrow{\delta^1} & A^2 & \xrightarrow{\delta^2} & \cdots \\
 & & \downarrow & & {\scriptstyle e^0}\downarrow & & {\scriptstyle e^1}\downarrow & & {\scriptstyle e^2}\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & B^0 & \xrightarrow{\varepsilon^0} & C^{0,0} & \xrightarrow{\delta^{0,0}} & C^{0,1} & \xrightarrow{\delta^{0,1}} & C^{0,2} & \xrightarrow{\delta^{0,2}} & \cdots \\
 & & {\scriptstyle d^0}\downarrow & & {\scriptstyle d^{0,0}}\downarrow & & {\scriptstyle d^{0,1}}\downarrow & & {\scriptstyle d^{0,2}}\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & B^1 & \xrightarrow{\varepsilon^1} & C^{1,0} & \xrightarrow{\delta^{1,0}} & C^{1,1} & \xrightarrow{\delta^{1,1}} & C^{1,2} & \xrightarrow{\delta^{1,2}} & \cdots \\
 & & {\scriptstyle d^1}\downarrow & & {\scriptstyle d^{1,0}}\downarrow & & {\scriptstyle d^{1,1}}\downarrow & & {\scriptstyle d^{1,2}}\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & B^2 & \xrightarrow{\varepsilon^2} & C^{2,0} & \xrightarrow{\delta^{2,0}} & C^{2,1} & \xrightarrow{\delta^{2,1}} & C^{2,2} & \xrightarrow{\delta^{2,2}} & \cdots \\
 & & {\scriptstyle d^2}\downarrow & & {\scriptstyle d^{2,0}}\downarrow & & {\scriptstyle d^{2,1}}\downarrow & & {\scriptstyle d^{2,2}}\downarrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}
$$

Entonces, queremos probar la existencia de un isomorfismo

$$f^n : Ker\, d^n / Im\, d^{n-1} \longrightarrow Ker\, \delta^n / Im\, \delta^{n-1}, \;\; n \geq 0,$$

donde $d^{-1} = 0$ y $\delta^{-1} = 0$. De manera sistemática para $n = 0$, f^0 es un isomorfismo, pues en general es cierto que $H^0_{R.F}(X, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$, y $H^0_{R.F.C}(X, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$, por lo que $H^0_{R.F}(X, \mathcal{F}) \cong H^0_{R.F.C}(X, \mathcal{F})$. Construiremos este isomorfismo usando el diagrama anterior.

Sea $b \in B^0$ tal que $d^0(b) = 0_{B^1}$. Como el diagrama es conmutativo y ε^1 es inyectiva, $0_{C^{1,0}} = \varepsilon^1(d^0(b)) = d^{0,0}(\varepsilon^0(b))$, es decir, $\varepsilon^0(b) \in Ker\, d^{0,0}$, entonces existe $a \in A^0$ tal que $e^0(a) = \varepsilon^0(b)$. Por lo tanto, podemos considerar la aplicación $f^0 : Ker\, d^0 \longrightarrow A^0$, tal que $b \longmapsto f^0(b) = a$.

Observemos que el codominio de f^0 es el $Ker\,\delta^0$, pues $\delta^{0,0}(\varepsilon^0(b)) = 0_{C^{0,1}}$, implica que $\delta^{0,0}(e^0(a)) = \delta^{0,0}(e^0(f^0(b))) = 0_{C^{0,1}}$, es decir, $e^1(\delta^0(f^0(b))) = 0_{C^{0,1}}$, por lo tanto $\delta^0(f^0(b)) = 0_{A^1}$. Entonces, $f^0(b) \in Ker\,\delta^0$, por lo que

$$f^0 : Ker\,d^0 \longrightarrow Ker\,\delta^0$$

f^0 *está bien definida.* Si $b = b'$ en el $Ker\,d^0$, entonces $\varepsilon^0(b) = \varepsilon^0(b')$, es decir, $e^0(a) = e^0(a')$, y entonces $a = a'$, es decir, $f^0(b) = f^0(b')$.

f^0 *es un homomorfismo de grupos.* Sea $b, b' \in Ker\,d^0$, de la igualdad $e^0(a) = \varepsilon^0(b)$ se tiene $\varepsilon^0(b) = e^0(f^0(b))$, es decir, $f^0(b)$ es el único elemento de A^0 tal que se cumple la igualdad anterior. Entonces, como $e^0(f^0(b+b')) = \varepsilon^0(b+b') = e^0(f^0(b) + f^0(b'))$, tenemos que $f^0(b+b') = f^0(b) + f^0(b')$.

f^0 *es inyectiva.* Sea $b \in Ker\,d^0$ tal que $f^0(b) = 0_{Ker\,\delta^0}$, de la relación $\varepsilon^0(b) = e^0(f^0(b))$ resulta $\varepsilon^0(b) = e^0(0)$, esto es, $\varepsilon^0(b) = 0_{C^{0,0}}$, entonces $b = 0_{B^0}$. Lo que queriamos.

f^0 *es sobreyectiva.* Sea $\beta \in Ker\,\delta^0$, entonces $0_{C^{0,1}} = \delta^{0,0}(e^0(\beta))$ (pues e^1 es inyectiva y el diagrama conmuta), es decir, $e^0(\beta) \in Ker\,\delta^{0,0}$, entonces existe $\alpha \in B^0$ tal que $\varepsilon^0(\alpha) = e^0(\beta)$. Notemos que $\alpha \in Ker\,d^0$ y $f^0(\alpha) = \beta$. En efecto, $d^{0,0}(e^0(\beta)) = 0_{C^{1,0}}$, es decir, $\varepsilon^1(d^0(\alpha)) = 0_{C^{1,0}}$, entonces $d^0(\alpha) = 0_{B^1}$. De la construcción de f^0, α induce la relación $\varepsilon^0(\alpha) = e^0(f^0(\alpha))$, y dado que $\varepsilon^0(\alpha) = e^0(\beta)$, resulta que $e^0(f^0(\alpha)) = e^0(\beta)$, es decir, $f^0(\alpha) = \beta$. Por lo tanto, f^0 es sobreyectiva.

Entonces, $H^0_{R.F}(X, \mathcal{F}) \cong H^0_{R.F.C}(X, \mathcal{F})$.

Enseguida probaremos que $H^1_{R.F}(X, \mathcal{F}) \cong H^1_{R.F.C}(X, \mathcal{F})$.

Sea $b \in B^1$ tal que $d^1(b) = 0_{B^2}$, $0_{C^{2,0}} = \varepsilon^2(d^1(b)) = d^{1,0}(\varepsilon^1(b))$, es decir,

$\varepsilon^1(b) \in Ker\, d^{1,0}$, luego existe $c^{0,0} \in C^{0,0}$ tal que $d^{0,0}(c^{0,0}) = \varepsilon^1(b)$. Al aplicar $\delta^{1,0}$ a la igualdad anterior resulta $0_{C^{1,1}} = \delta^{1,0}(\varepsilon^1(b)) = \delta^{1,0}(d^{0,0}(c^{0,0})) = d^{0,1}(\delta^{0,0}(c^{0,0}))$, es decir, $\delta^{0,0}(c^{0,0}) \in Ker\, d^{0,1}$, entonces $e^1(a) = \delta^{0,0}(c^{0,0})$ para algún $a \in A^1$. Como $d^{0,0}$ no es inyectiva, $\varepsilon^1(b)$ puede tener un número finito o infinito de preimagenes. Es fácil ver que la diferencia de cualesquiera dos preimagenes de $\varepsilon^1(b)$ es un elemento de $Im\, e^0$. En efecto, sea también $\widetilde{c}^{0,0} \in C^{0,0}$ tal que $d^{0,0}(\widetilde{c}^{0,0}) = \varepsilon^1(b)$, entonces $d^{0,0}(c^{0,0}) = d^{0,0}(\widetilde{c}^{0,0})$, es decir, $\widetilde{c}^{0,0} - c^{0,0} \in Ker\, d^{0,0}$, esto es, existe $\alpha \in A^0$ tal que $e^0(\alpha) = \widetilde{c}^{0,0} - c^{0,0}$, entonces $\widetilde{c}^{0,0} - c^{0,0} \in Im\, e^0$. En resumen: las preimagenes de $\varepsilon^1(b)$ son de la forma $c^{0,0} + e^0(\alpha)$, con $\alpha \in A^0$; $\varepsilon^1(b) = d^{0,0}(c^{0,0})$, y $\delta^{0,0}(c^{0,0}) = e^1(a)$.

Lo anterior prueba que b no está determinado de manera única, pues depende de la preimagen que se tome para $\varepsilon^1(b)$, ya que al variar la preimagen de $\varepsilon^1(b)$ el valor de a cambia. De esta manera podemos asignar a b más de un valor de A^1, tal que cada uno de ellos está en el $Ker\, \delta^1$, y la diferencia de dos cualesquiera de ellos es un elemento de $Im\, \delta^0$. Supongamos que $e^1(a) = \delta^{0,0}(c^{0,0})$ y $e^1(\widetilde{a}) = \delta^{0,0}(\widetilde{c}^{0,0})$, donde $\varepsilon^1(b) = d^{0,0}(c^{0,0}) = d^{0,0}(\widetilde{c}^{0,0})$, entonces $c^{0,0} - \widetilde{c}^{0,0} \in Ker\, d^{0,0}$, es decir, existe $\alpha \in A^0$ tal que $e^0(\alpha) = c^{0,0} - \widetilde{c}^{0,0}$, al aplicar $\delta^{0,0}$ resulta que $(a - \widetilde{a}) \in Im\, \delta^0$.

En conclusión $Ker\, d^1 \longrightarrow Ker\, \delta^1$ no define una función. Así, es natural considerar la aplicación

$$\varphi : Ker\, d^1 \longrightarrow Ker\, \delta^1 / Im\, \delta^0, \text{ tal que } b \longmapsto a + Im\, \delta^0.$$

Verifiquemos que:

φ está bien definida. Sean $b = b' \in Ker\, d^1$. Por construcción b' induce las

igualdades $\varepsilon^1(b') = d^{0,0}(c'^{0,0})$ y $\delta^{0,0}(c'^{0,0}) = e^1(a')$, por lo que $\varepsilon^1(b) = \varepsilon^1(b')$ implica que $d^{0,0}(c^{0,0}) = d^{0,0}(c'^{0,0})$. Luego, $a - a' \in Im\,\delta^0$, es decir, $a + Im\,\delta^0 = a' + Im\,\delta^0$.

φ es un homomorfismo de grupos. Sean b, b' en el $Ker\,d^1$. Otra vez, por construcción $b + b'$ induce las igualdades $\varepsilon^1(b + b') = d^{0,0}(\gamma^{0,0})$ y $\delta^{0,0}(\gamma^{0,0}) = e^1(a_{b+b'})$, y por definición $\varphi(b + b') = a_{b+b'} + Im\,\delta^0$. Como $\varepsilon^1(b + b') = \varepsilon^1(b) + \varepsilon^1(b') = d^{0,0}(c^{0,0} + c'^{0,0})$, entonces $d^{0,0}(\gamma^{0,0}) = d^{0,0}(c^{0,0} + c'^{0,0})$, es decir, $\gamma^{0,0} - (c^{0,0} + c'^{0,0}) = e^0(a^0)$ para algún $a^0 \in A^0$. Al aplicar $\delta^{0,0}$ y usar la conmutatividad del diagrama resulta que $\delta^{0,0}(\gamma^{0,0} - (c^{0,0} + c'^{0,0})) = e^1(\delta^0(a^0))$, y por la inyectividad de e^1, necesariamente $a_{b+b'} - a - a' = \delta^0(a^0)$. Al tomar clase $Im\,\delta^0$ a la igualdad anterior resulta $(a_{b+b'} + Im\,\delta^0) - (a + Im\,\delta^0) - (a' + Im\,\delta^0) = Im\,\delta^0$, es decir, $a_{b+b'} + Im\,\delta^0 = (a + Im\,\delta^0) + (a' + Im\,\delta^0)$. Por lo tanto, $\varphi(b + b') = \varphi(b) + \varphi(b')$.

Determinemos el $Ker\,\varphi$. Es cierto que $\varphi(b) = 0$ si y sólo si $a \in Im\,\delta^0$, es decir, si existe $a^0 \in A^0$ tal que $a = \delta^0(a^0)$. De las relaciones para b, tenemos $\delta^{0,0}(c^{0,0}) = e^1(a) = e^1(\delta^0(a^0)) = \delta^{0,0}(e^0(a^0))$, es decir, $c^{0,0} - e^0(a^0) \in Ker\,\delta^{0,0} = Im\,\varepsilon^0$, luego existe $b^0 \in B^0$ tal que $\varepsilon^0(b^0) = c^{0,0} - e^0(a^0)$, esto es, $c^{0,0} = \varepsilon^0(b^0) + e^0(a^0)$. Así, $\varepsilon^1(b) = d^{0,0}(c^{0,0}) = d^{0,0}(\varepsilon^0(b^0)) + d^{0,0}(e^0(a^0)) = d^{0,0}(\varepsilon^0(b^0)) = \varepsilon^1(d^0(b^0))$, entonces $b - d^0(b^0) = 0_{C^{1,0}}$. Por lo tanto, $b \in Im\,d^0$. Hemos probado entonces que $Ker\,\varphi \subseteq Im\,d^0$. Conversamente, si $b \in Im\,d^0$, entonces $b = d^0(b^0)$ para algún $b^0 \in B^0$. Es claro que $b \in Ker\,d^1$, pues por hipótesis $Im\,d^0 \subseteq Ker\,d^1$. Tenemos también que $\varepsilon^1(b) = \varepsilon^1(d^0(b^0)) = d^{0,0}(\varepsilon^0(b^0))$, y por la igualdad $\varepsilon^1(b) = d^{0,0}(c^{0,0})$ que induce b, se debe tener $c^{0,0} = \varepsilon^0(b^0)$. Al aplicar $\delta^{0,0}$ a la última igualdad se obtiene $\delta^{0,0}(c^{0,0}) =$

$0_{C^{0,1}}$. Así, podemos escribir $\delta^{0,0}(c^{0,0}) = e^1(0_{A^1})$, y otra vez de las igualdades inducidas por b se debe tener $a = 0$. Por lo tanto, $\varphi(b) = 0 + Im\,\delta^0 = Im\,\delta^0$, y entonces hemos probado que $Im\,d^0 \subseteq Ker\,\varphi$. Por lo tanto, la aplicación

$$f^1 : Ker\,d^1/Im\,d^0 \longrightarrow Ker\,\delta^1/Im\,\delta^0 \text{ es inyectiva.}$$

f^1 *es sobreyectiva.* Sea $a + Im\,\delta^0 \in Ker\,\delta^1/Im\,\delta^0$, con $a \in Ker\,\delta^1$. Notemos que $\delta^1(a) = 0_{A^2}$ implica que $0_{C^{0,2}} = e^2(\delta^1(a)) = \delta^{0,1}(e^1(a))$, es decir, $e^1(a) \in Ker\,\delta^{0,1}$, entonces existe $\gamma^{0,0} \in C^{0,0}$ tal que $\delta^{0,0}(\gamma^{0,0}) = e^1(a)$. Al aplicar $d^{0,1}$ y usar la conmutatividad del diagrama, resulta $\delta^{1,0}(d^{0,0}(\gamma^{0,0})) = 0_{C^{1,1}}$, es decir, $d^{0,0}(\gamma^{0,0}) \in Ker\,\delta^{1,0}$, por lo que existe $b \in B^1$ tal que $\varepsilon^1(b) = d^{0,0}(\gamma^{0,0})$. Entonces, $\gamma^{0,0}$ es preimagen de $\varepsilon^1(b)$, por lo que las igualdades $\varepsilon^1(b) = d^{0,0}(\gamma^{0,0})$, y $\delta^{0,0}(\gamma^{0,0}) = e^1(a)$ se cumplen. Es fácil probar que $b \in Ker\,d^1$ y que $f^1(b + Im\,d^0) = a + Im\,\delta^0$. En efecto, $d^{1,0}(d^{0,0}(\gamma^{0,0})) = 0_{C^{2,0}}$ implica que $d^{1,0}(\varepsilon^1(b)) = 0_{C^{2,0}}$, es decir, $\varepsilon^2(d^1(b)) = 0_{C^{2,0}}$, por lo tanto $d^1(b) = 0_{B^2}$. Por otro lado, por construcción : $\varepsilon^1(b) = d^{0,0}(c^{0,0})$ y $\delta^{0,0}(c^{0,0}) = e^1(x)$; probaremos que $x = a$. Sabemos que $c^{0,0} = \gamma^{0,0} + e^0(a^0)$ para algún $a^0 \in A^0$, entonces $\delta^{0,0}(c^{0,0}) = \delta^{0,0}(\gamma^{0,0} + e^0(a^0)) = e^1(a) + e^1(\delta^0(a^0)) = e^1(a + \delta^0(a^0))$, luego $a + \delta^0(a^0)$ me da una familia de candidatos para la imagen de b. Pero dado que $a + \delta^0(a^0) + Im\,\delta^0 = a + Im\,\delta^0$, tenemos que $f^1(b + Im\,d^0) = a + \delta^0(a^0) + Im\,\delta^0 = a + Im\,\delta^0$. Lo que queriamos.

Por lo tanto, hemos probado que $H^1_{R.F}(X, \mathcal{F}) \cong H^1_{R.F.C}(X, \mathcal{F})$.

De manera similar se prueba que $H^n_{R.F}(X, \mathcal{F}) \cong H^n_{R.F.C}(X, \mathcal{F})$, para $n \geq 2$. ■

La herramienta más importante para dar aplicaciones es sin duda alguna la sucesión larga exacta de grupos de cohomología. Toda sucesión exacta corta de gavillas induce una sucesión de este tipo. El siguiente teorema textifica este hecho.

Teorema 2.3 *Una sucesión exacta corta de gavillas de grupos abelianos sobre un espacio topológico X*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0,$$

induce la sucesión larga exacta de grupos de cohomología

$$0 \longrightarrow H^0(X,\mathcal{F}) \longrightarrow H^0(X,\mathcal{G}) \longrightarrow H^0(X,\mathcal{H}) \longrightarrow H^1(X,\mathcal{F}) \longrightarrow H^1(X,\mathcal{G}) \longrightarrow H^1(X,\mathcal{H}) \longrightarrow ... \longrightarrow H^{n-1}(X,\mathcal{F}) \longrightarrow H^{n-1}(X,\mathcal{G}) \longrightarrow H^{n-1}(X,\mathcal{H}) \longrightarrow H^n(X,\mathcal{F}) \longrightarrow H^n(X,\mathcal{G}) \longrightarrow H^n(X,\mathcal{H}) \longrightarrow H^{n+1}(X,\mathcal{F}) \longrightarrow ...$$

Demostración. Por el Teorema 2.1, las resoluciones fofas canónicas de $\mathcal{F},\mathcal{G}$ y $\mathcal{H}$, inducen el siguiente diagrama conmutativo de sucesiones exactas:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \mathcal{F} & \to & \mathcal{G} & \to & \mathcal{H} & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & C^0_{\mathcal{F}} & \to & C^0_{\mathcal{G}} & \to & C^0_{\mathcal{H}} & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & C^1_{\mathcal{F}} & \to & C^1_{\mathcal{G}} & \to & C^1_{\mathcal{H}} & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

Queremos estudiar la relación entre los grupos de cohomología de las gavillas $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ y $\mathcal{H}$.

Por simplicidad, para denotar los grupos de secciones globales usaremos la siguiente notación: $F^n = C^n_{\mathcal{F}}(X)$, $G^n = C^n_{\mathcal{G}}(X)$, y $H^n = C^n_{\mathcal{H}}(X)$. Entonces, del diagrama de arriba se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & F^0 & \xrightarrow{\varphi^0} & G^0 & \xrightarrow{\psi^0} & H^0 & \longrightarrow & 0 \\
 & & d^0_F \downarrow & & d^0_G \downarrow & & d^0_H \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & F^1 & \xrightarrow{\varphi^1} & G^1 & \xrightarrow{\psi^1} & H^1 & \longrightarrow & 0 \\
 & & d^1_F \downarrow & & d^1_G \downarrow & & d^1_H \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & F^2 & \xrightarrow{\varphi^2} & G^2 & \xrightarrow{\psi^2} & H^2 & \longrightarrow & 0 \\
 & & d^2_F \downarrow & & d^2_G \downarrow & & d^2_H \downarrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

Por la Proposición 2.4 todas las filas son sucesiones exactas, mientras que las columnas son sólo complejos, pues $\mathcal{F}, \mathcal{G}$, y $\mathcal{H}$ no son gavillas fofas.

Comenzaremos la prueba considerando la siguiente sucesión corta

$$H^n(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\widetilde{\varphi}^n} H^n(X, \mathcal{G}) \xrightarrow{\widetilde{\psi}^n} H^n(X, \mathcal{H}),$$

El primer paso es definir los morfismos

$$\widetilde{\varphi}^n : Ker\, d^n_F / Im\, d^{n-1}_F \longrightarrow Ker\, d^n_G / Im\, d^{n-1}_G,$$

$$\widetilde{\psi}^n : Ker\, d^n_G / Im\, d^{n-1}_G \longrightarrow Ker\, d^n_H / Im\, d^{n-1}_H.$$

Lo haremos para $\widetilde{\varphi}^n$ y de manera similar se seguirá para $\widetilde{\psi}^n$.

Sea $f \in F^n$ tal que $d_F^n(f) = 0_{F^{n+1}}$, es decir, $\varphi^{n+1}(d_F^n(f)) = 0_{G^{n+1}}$, entonces $0_{G^{n+1}} = d_G^n(\varphi^n(f))$, esto es, $\varphi^n(f) \in Ker\, d_G^n$. Así, $\varphi^n(Ker\, d_F^n) \subseteq Ker\, d_G^n$. Dado que queremos definir un morfismo entre cocientes, $\widetilde{\varphi}^n$ estará bien definida si $\varphi^n(Im\, d_F^{n-1}) \subseteq Im\, d_G^{n-1}$. Sea $\alpha \in Im\, d_F^{n-1}$, entonces $d_F^{n-1}(\beta) = \alpha$ para algún $\beta \in F^{n-1}$. Al aplicar φ^n, y usar la conmutatividad del diagrama resulta $\varphi^n(\alpha) = d_G^{n-1}(\varphi^{n-1}(\beta))$, lo cual implica que $\varphi^n(\alpha) \in Im\, d_G^{n-1}$, es decir, $\varphi^n(Im\, d_F^{n-1}) \subsetneq Im\, d_G^{n-1}$. Dado que φ^{n-1} no es sobreyectiva, la contención es estricta. Como consecuencia podemos definir

$$\widetilde{\varphi}^n : Ker\, d_F^n / Im\, d_F^{n-1} \longrightarrow Ker\, d_G^n / Im\, d_G^{n-1},$$

$$f + Im\, d_F^{n-1} \longmapsto \varphi^n(f) + Im\, d_G^{n-1}$$

$\widetilde{\varphi}^n$ es claramente un homomorfismo de grupos.

De manera similar se tiene

$$\widetilde{\psi}^n : Ker\, d_G^n / Im\, d_G^{n-1} \longrightarrow Ker\, d_H^n / Im\, d_H^{n-1},$$

$$g + Im\, d_G^{n-1} \longmapsto \psi^n(g) + Im\, d_H^{n-1}$$

En este caso $\psi^n(Im\, d_G^{n-1}) = Im\, d_H^{n-1}$ debido a la sobreyectividad de ψ^{n-1}.

El siguiente paso es probar la exactitud de la sucesión en $H^n(X, \mathcal{G})$, es decir, probaremos que $Ker\, \widetilde{\psi}^n = Im\, \widetilde{\varphi}^n$.

Sea $g + Im\, d_G^{n-1}$ en $Im\, \widetilde{\varphi}^n$, con $g \in Ker\, d_G^n$, entonces $\widetilde{\varphi}^n(f + Im\, d_F^{n-1}) = g + Im\, d_G^{n-1}$ para algún $f \in Ker\, d_F^n$, luego $\varphi^n(f) - g \in Im\, d_G^{n-1}$. Al aplicar ψ^n resulta $\psi^n(\varphi^n(f) - g) \in \psi^n(Im\, d_G^{n-1})$, entonces $\psi^n(\varphi^n(f)) - \psi^n(g) \in Im\, d_H^{n-1}$, lo cual implica que $-\psi^n(g) \in Im\, d_H^{n-1}$, pues las sucesiones exactas en particular son complejos. Como $Im\, d_H^{n-1}$ es un subgrupo aditivo del grupo

H^n, $\psi^n(g) \in Im\, d_H^{n-1}$. Hemos probado entonces que $\widetilde{\psi}^n(g + Im\, d_G^{n-1}) = Im\, d_H^{n-1}$, es decir, $Im\, \widetilde{\varphi}^n \subseteq Ker\, \widetilde{\psi}^n$. Conversamente, sea $g + Im\, d_G^{n-1}$ en $Ker\, d_G^n / Im\, d_G^{n-1}$ tal que $\widetilde{\psi}^n(g + Im\, d_G^{n-1}) = Im\, d_H^{n-1}$, entonces $\psi^n(g) \in Im\, d_H^{n-1}$, es decir, existe $h \in H^{n-1}$ tal que $d_H^{n-1}(h) = \psi^n(g)$, y dado que ψ^{n-1} es sobreyectiva, existe $g^{n-1} \in G^{n-1}$ tal que $\psi^{n-1}(g^{n-1}) = h$. Al sustituir y usar la conmutatividad del diagrama, resulta $\psi^n(d_G^{n-1}(g^{n-1})) = d_H^{n-1}(\psi^{n-1}(g^{n-1})) = \psi^n(g)$, lo cual implica que $g - d_G^{n-1}(g^{n-1}) \in Ker\, \psi^n = Im\, \varphi^n$, luego $\varphi^n(f) = g - d_G^{n-1}(g^{n-1})$ para algún f en F^n. Es claro además que $f \in Ker\, d_F^n$, pues del diagrama se tiene $\varphi^{n+1}(d_F^n(f)) = d_G^n(\varphi^n(f)) = d_G^n(g - d_G^{n-1}(g^{n-1})) = d_G^n(g) = 0_{G^{n+1}}$. Así, $d_F^n(f) = 0_{F^{n+1}}$. Lo que queriamos.

Como consecuencia $\widetilde{\varphi}^n(f + Im\, d_F^{n-1}) = (g - d_G^{n-1}(g^{n-1})) + Im\, d_G^{n-1} = g + Im\, d_G^{n-1}$, es decir, $Ker\, \widetilde{\psi}^n \subseteq Im\, \widetilde{\varphi}^n$. Por lo tanto tenemos la igualdad. Hemos probado así la exactitud de la sucesión larga en $H^n(X, \mathcal{G})$, $n = 0, 1, 2, ...$

El homomorfismo $\widetilde{\varphi}^0 : H^0(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{G})$ es inyectivo. Sabemos que $H^0(X, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$ y $H^0(X, \mathcal{G}) = \mathcal{G}(X)$. Como la sucesión $0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0$ es exacta, la Proposición 2.2 implica que la sucesión de secciones globales $0 \longrightarrow \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{G}(X) \longrightarrow \mathcal{H}(X)$ es exacta.

Fijemonos ahora en la sucesión

$H^n(X, \mathcal{G}) \xrightarrow{\widetilde{\psi}^n} H^n(X, \mathcal{H}) \xrightarrow{\delta^n} H^{n+1}(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\widetilde{\varphi}^{n+1}} H^{n+1}(X, \mathcal{G})$

para definir δ^n, es decir,

$$\delta^n : Ker\, d_H^n / Im\, d_H^{n-1} \longrightarrow Ker\, d_F^{n+1} / Im\, d_F^n$$

Sea $h \in Ker\, d_H^n$, es decir, $d_H^n(h) = 0_{H^{n+1}}$, por la sobreyectividad de ψ^n existe $g \in G^n$ tal que $\psi^n(g) = h$. Luego, $0_{H^{n+1}} = d_H^n(\psi^n(g)) = \psi^{n+1}(d_G^n(g))$, es decir, $d_G^n(g) \in Ker\,\psi^{n+1} = Im\,\varphi^{n+1}$, entonces existe $f \in F^{n+1}$ tal que $\varphi^{n+1}(f) = d_G^n(g)$. De hecho se tiene que $f \in Ker\,d_F^{n+1}$, pues $\varphi^{n+2}(d_F^{n+1}(f)) = d_G^{n+1}(\varphi^{n+1}(f)) = d_G^{n+1}(d_G^n(g)) = 0_{G^{n+2}}$.

En resumen tenemos: $\psi^n(g) = h$ y $\varphi^{n+1}(f) = d_G^n(g)$. Como ψ^n es sobreyectiva $h \in H^n$ puede tener más de una preimagen (de hecho puede tener infinitas), por lo que tenemos que ver la relación que hay entre cualesquiera de ellas. Para $h \in H^n$ sea también $\psi^n(\widetilde{g}) = h$, con $\widetilde{g} \in G^n$, la igualdad $\psi^n(g) = \psi^n(\widetilde{g})$ implica que $\widetilde{g} - g \in Ker\,\psi^n = Im\,\varphi^n$. Entonces, podemos escribir $\widetilde{g} = g + \varphi^n(a)$ para algún $a \in F^n$. De la relación $\varphi^{n+1}(\widetilde{f}) = d_G^n(\widetilde{g})$ se tiene que $\varphi^{n+1}(\widetilde{f}) = d_G^n(\widetilde{g}) = \varphi^{n+1}(f) + d_G^n(\varphi^n(a)) = \varphi^{n+1}(f + d_F^n(a))$, por lo que $\widetilde{f} = f + d_F^n(a)$. Por lo tanto, $\widetilde{f} - f \in Im\,d_F^n$.

En resumen, si además $\psi^n(\widetilde{g}) = h$, entonces $g - \widetilde{g} \in Im\,\varphi^n$ y $\widetilde{f} - f \in Im\,d_F^n$.

Con esta información δ^n queda completamente determinada.

$$\delta^n : Ker\,d_H^n / Im\,d_H^{n-1} \longrightarrow Ker\,d_F^{n+1} / Im\,d_F^n$$

$$h + Im\,d_H^{n-1} \longmapsto f + Im\,d_F^n$$

δ^n está bien definida. Sean $h + Im\,d_H^{n-1} = h_1 + Im\,d_H^{n-1}$ en $Ker\,d_H^n / Im\,d_H^{n-1}$, con $h, h_1 \in Ker\,d_H^n$. Por construcción, h y h_1 inducen las igualdades $\psi^n(g) = h$, $\varphi^{n+1}(f) = d_G^n(g)$ y $\psi^n(g_1) = h_1$, $\varphi^{n+1}(f_1) = d_G^n(g_1)$, respectivamente. De la hipótesis resulta que $h - h_1 \in Im\,d_H^{n-1}$, es decir, $\psi^n(g - g_1) = d_H^{n-1}(\alpha)$ para algún $\alpha \in H^{n-1}$, por la sobreyectividad de ψ^{n-1} existe $g^{n-1} \in G^{n-1}$ tal que $\psi^{n-1}(g^{n-1}) = \alpha$. Al sustituir en la igualdad anterior resulta $\psi^n(g - g_1) = d_H^{n-1}(\psi^{n-1}(g^{n-1})) = \psi^n(d_G^{n-1}(g^{n-1}))$, entonces $g - g_1 - d_G^{n-1}(g^{n-1}) \in Ker\,\psi^n =$

$Im\,\varphi^n$, es decir, $\varphi^n(\beta) = g - g_1 - d_G^{n-1}(g^{n-1})$ para algún $\beta \in F^n$. Al aplicar d_G^n y usar la conmutatividad del diagrama resulta $\varphi^{n+1}(d_F^n(\beta)) = d_G^n(g) - d_G^n(g_1) - d_G^n(d_G^{n-1}(g^{n-1}))$, de las relaciones de h y h_1 se tiene $\varphi^{n+1}(d_F^n(\beta)) = \varphi^{n+1}(f) - \varphi^{n+1}(f_1)$, es decir, $f - f_1 = d_F^n(\beta)$. Por lo tanto, $f - f_1 \in Im\,d_F^n$, y en consecuencia δ^n está bien definida.

De esta manera se tiene la sucesión de homomorfismos

$$H^n(X,\mathcal{G}) \xrightarrow{\widetilde{\psi}^n} H^n(X,\mathcal{H}) \xrightarrow{\delta^n} H^{n+1}(X,\mathcal{F}) \xrightarrow{\widetilde{\varphi}^{n+1}} H^{n+1}(X,\mathcal{G}).$$

La siguiente meta es probar la exactitud de la sucesión larga en los términos $H^n(X,\mathcal{H})$, y $H^n(X,\mathcal{F})$.

Sea $h + Im\,d_H^{n-1} \in Ker\,\delta^n$, $h \in Ker\,d_H^n$, entonces $\delta^n(h + Im\,d_H^{n-1}) = f + Im\,d_F^n = Im\,d_F^n$, es decir, $f \in Im\,d_F^n$, por lo que existe $\alpha \in F^n$ tal que $d_F^n(\alpha) = f$. Al aplicar φ^{n+1} a la igualdad anterior resulta $d_G^n(\varphi^n(\alpha)) = \varphi^{n+1}(d_F^n(\alpha)) = \varphi^{n+1}(f) = d_G^n(g)$, donde la última igualdad se debe a las igualdades que induce h. Por lo tanto, $g - \varphi^n(\alpha) \in Ker\,d_G^n$. Luego, $h + Im\,d_H^{n-1}$ es la imagen bajo $\widetilde{\psi}^n$ de la clase $(g - \varphi^n(\alpha)) + Im\,d_G^{n-1}$. En efecto, $\widetilde{\psi}^n((g - \varphi^n(\alpha)) + Im\,d_G^{n-1}) = \psi^n(g) - \psi^n(\varphi^n(\alpha)) + Im\,d_H^{n-1} = h + Im\,d_H^{n-1}$. Hemos probado entonces que $Ker\,\delta^n \subseteq Im\,\widetilde{\psi}^n$. Por otro lado, sea $h + Im\,d_H^{n-1} \in Im\,\widetilde{\psi}^n$, $h \in Ker\,d_H^n$, es decir, existe $g_1 + Im\,d_G^{n-1} \in Ker\,d_G^n / Im\,d_G^{n-1}$ tal que $\widetilde{\psi}^n(g_1 + Im\,d_G^{n-1}) = h + Im\,d_H^{n-1}$, esto implica que $\psi^n(g_1) - h \in Im\,d_H^{n-1}$, esto es, existe $h^{n-1} \in H^{n-1}$ tal que $d_H^{n-1}(h^{n-1}) = \psi^n(g_1) - h$, luego existe $g^{n-1} \in G^{n-1}$ tal que $\psi^{n-1}(g^{n-1}) = h^{n-1}$. Al sustituir y usar el diagrama conmutativo se obtiene $\psi^n(d_G^{n-1}(g^{n-1})) = d_H^{n-1}(\psi^{n-1}(g^{n-1})) = \psi^n(g_1) - h = \psi^n(g_1) - \psi^n(g)$, es decir, $d_G^{n-1}(g^{n-1}) - g_1 + g \in Ker\,\psi^n = Im\,\varphi^n$, entonces

$\varphi^n(\beta) = d_G^{n-1}(g^{n-1}) - g_1 + g$ para algún $\beta \in F^n$. Al aplicar d_G^n resulta $d_G^n(\varphi^n(\beta)) = d_G^n(d_G^{n-1}(g^{n-1}) - g_1 + g)$, lo cual implica que $\varphi^{n+1}(d_F^n(\beta)) = d_G^n(g) - d_G^n(g_1)$, así $\varphi^{n+1}(d_F^n(\beta)) = \varphi^{n+1}(f)$, es decir, $d_F^n(\beta) = f$, luego $f \in Im\, d_F^n$, y en consecuencia $Im\, \widetilde{\psi}^n \subseteq Ker\, \delta^n$.

Por lo tanto, la sucesión es exacta en $H^n(X, \mathcal{H})$.

Por último probaremos la exactitud en $H^n(X, \mathcal{F})$, y con esto quedará probada la exactitud de la sucesión larga.

Sea $f + Im\, d_F^n \in Ker\, d_F^{n+1}/Im\, d_F^n$, tal que $\widetilde{\varphi}^{n+1}(f + Im\, d_F^n) = Im\, d_G^n$, esto es, $\varphi^{n+1}(f) + Im\, d_G^n = Im\, d_G^n$, es decir, $d_G^n(\alpha) = \varphi^{n+1}(f)$ para algún $\alpha \in G^n$. Entonces, $d_H^n(\psi^n(\alpha)) = \psi^{n+1}(d_G^n(\alpha)) = \psi^{n+1}(\varphi^{n+1}(f)) = 0_{H^{n+1}}$, es decir, $\psi^n(\alpha) \in Ker\, d_H^n$. De las igualdades $d_H^n(\psi^n(\alpha)) = 0_{H^{n+1}}$ y $d_G^n(\alpha) = \varphi^{n+1}(f)$ podemos pensar $\psi^n(\alpha) = h$. Por lo tanto, $\delta^n(\psi^n(\alpha) + Im\, d_H^{n-1}) = \delta^n(h + Im\, d_H^{n-1}) = f + Im\, d_F^n$. Hemos probado entonces que $Ker\, \widetilde{\varphi}^{n+1} \subseteq Im\, \delta^n$. Conversamente, sea $f + Im\, d_F^n \in Im \delta^n$, con $f \in Ker\, d_F^{n+1}$. Entonces, existe $\alpha + Im\, d_H^{n-1} \in Ker\, d_H^n/Im\, d_H^{n-1}$ tal que $\delta^n(\alpha + Im\, d_H^{n-1}) = f + Im\, d_F^n$. Por construcción la última igualdad induce las siguientes igualdades $\psi^n(\widetilde{g}) = \alpha$, $\varphi^{n+1}(f) = d_G^n(\widetilde{g})$, con $\widetilde{g} \in G^n$. Por lo tanto, de la segunda igualdad se tiene que $\varphi^{n+1}(f) \in Im\, d_G^n$, y en consecuencia $f + Im\, d_F^n \in Ker\, \widetilde{\varphi}^{n+1}$. Así, $Im\, \delta^n \subseteq Ker\, \widetilde{\varphi}^{n+1}$.

De esta manera queda probada la exactitud de la sucesión en $H^{n+1}(X, \mathcal{F})$, y como consecuencia la exactitud de la sucesión larga. ■

En el siguiente capítulo veremos como la cohomología de gavillas puede ser usada para calcular la cohomologiá de las gavillas casi-coherentes sobre esquemas afines noetherianos.

Capítulo 3

Esquemas

En el Capítulo 1 hemos desarrollado la teoría de gavillas, básica para definir un esquema. En este capítulo introduciremos la noción de esquema, definiendo como primer paso los esquemas afines (para más detalles, ver [3] y [6]). En la primer sección asociaremos a un anillo arbitrario A un espacio topológico, y definiremos sobre él una gavilla de anillos que denotaremos por $\mathcal{O}_{SpecA}$. En la segunda sección estudiaremos la propiedad noetheriana de los esquemas, y en particular de los esquemas afines. Concluiremos este capítulo con el estudio de las gavillas casi-coherentes sobre esquemas afines noetherianos.

3.1 Spectrum de un Anillo

De la misma manera que una variedad diferencial esta cubierta por cartas, las cuales son subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$. La construcción de esquemas se hace de manera similar, sólo que en este caso las cartas serán esquemas afines.

3.1.1 Construcción de la Gavilla Estructural

Para definir una gavilla sobre el conjunto $Spec\,A$ asociado al anillo A, es necesario definir primero una topología sobre dicho conjunto, es decir, hacer de éste un espacio topológico. Definimos a $Spec\,A$ como el conjunto de todos los ideales primos de A. Puesto que por definición un ideal unidad no es primo, se tiene que $Spec\,\{0\} = \varnothing$. Si I es cualquier ideal de A, definimos el subconjunto $V(I) := \{\mathfrak{p} \in Spec\,A \mid I \subseteq \mathfrak{p}\}$. Si $f \in A$, $D(f) := Spec\,A \backslash V((f))$.

Para un anillo A, se tienen las siguientes propiedades:

Lema 3.1

(a) Si I y J son dos ideales de A, entonces $V(IJ) = V(I) \cup V(J)$.

(b) Si $\{J_i\}$ es una familia de ideales de A, entonces $V(\sum J_i) = \bigcap V(J_i)$.

(c) Si I y J son dos ideales de A, $V(I) \subseteq V(J)$ si y sólo si $\sqrt{I} \supseteq \sqrt{J}$.

Demostración.

(a) Por definición $V(IJ) = \{\mathfrak{p} \in Spec\,A \mid IJ \subseteq \mathfrak{p}\}$, si $\mathfrak{p} \in V(IJ)$, entonces $IJ \subseteq \mathfrak{p}$, esto implica que $I \subseteq \mathfrak{p}$ o $J \subseteq \mathfrak{p}$, pues $\mathfrak{p}$ es primo, luego $\mathfrak{p} \in V(I) \cup V(J)$, es decir, $V(IJ) \subseteq V(I) \cup V(J)$. Conversamente, si $\mathfrak{p} \in V(I) \cup V(J)$, entonces claramente $\mathfrak{p} \in V(IJ)$. Así, $V(I) \cup V(J) \subseteq V(IJ)$.

(b) $\mathfrak{p}$ contiene al ideal $\sum J_i$ si y sólo si $\mathfrak{p} \supseteq J_i$ para cada i (pues $\sum J_i$ es el ideal más pequeño que contiene a todos los ideales J_i), es decir, $\mathfrak{p} \in \bigcap V(J_i)$, pues $\mathfrak{p} \in V(J_i)$ para cada i.

(c) Como el radical de un ideal $\mathfrak{a}$ es la intersección de todos los ideales primos de A que contienen a $\mathfrak{a}$. Entonces, $V(I) \subseteq V(J)$ si y sólo si para todo $\mathfrak{p} \in V(I)$ se tiene que $\mathfrak{p} \in V(J)$, es decir, $I \subseteq \mathfrak{p}$ implica que $J \subseteq \mathfrak{p}$ para todo $\mathfrak{p} \in V(I)$ y esto equivale a que $\sqrt{I} \supseteq \sqrt{J}$. La última equivalencia es debido a que no todo ideal primo que contiene al ideal J va a contener necesariamente al ideal I.

Entonces el lema queda probado. ■

Enseguida definiremos una topología sobre $Spec\,A$, donde los conjuntos cerrados son de la forma $V(J)$ para algún J ideal de A. Es claro que $V(A) = \varnothing$ y que $V(\{0\}) = Spec\,A$; además el lema de hecho muestra que uniones finitas e intersecciones arbitrarias de conjuntos de la forma $V(J)$ son otra vez de esa forma. Entonces, ellos forman los conjuntos cerrados para la topología sobre $Spec\,A$. Por lo tanto, los abiertos son de la forma $Spec\,A \backslash V(J)$ para algún J ideal de A.

En resumen, el conjunto $\mathcal{Z} = \{Spec\,A \backslash V(J) \mid J \text{ es un ideal de } A\}$ es una topología sobre el conjunto $Spec\,A$. En efecto :

1. El $\varnothing$ y $Spec\,A$ están en $\mathcal{Z}$, ya que $\varnothing = Spec\,A \backslash V(\{0\})$, y $Spec\,A = Spec\,A \backslash V(A)$.

2. Sea $U_i = Spec\,A \backslash V(J_i)$ una colección arbitraria de elementos de $\mathcal{Z}$.

Entonces, la unión $\bigcup_i U_i = \bigcup_i (Spec\,A \backslash V(J_i)) = Spec\,A \backslash \bigcap_i V(J_i) = Spec\,A \backslash V(\sum_i J_i)$.

3. Para una colección finita, $U_i^n = Spec\,A \backslash V(J_i)$, se tiene que $\bigcap_{i=1}^n U_i = \bigcap_{i=1}^n (Spec\,A \backslash V(J_i)) = Spec\,A \backslash \bigcup_{i=1}^n V(J_i) = Spec\,A \backslash V(\prod_{i=1}^n J_i)$.

Esta topología es llamada *topología de Zariski*.

El siguiente paso es definir una gavilla $\mathcal{O}$ sobre $Spec\,A$. Para cada ideal primo $\mathfrak{p} \subseteq A$ consideramos la localización de A en $\mathfrak{p}$ (ver Ap. A.1, pág. 110), denotada por $A_{\mathfrak{p}}$. Para un conjunto abierto $U \subseteq Spec\,A$, definimos $\mathcal{O}(U)$ como el conjunto de todas las funciones $s : U \longrightarrow \prod_{\mathfrak{p} \in U} A_{\mathfrak{p}}$, tales que $s(\mathfrak{p}) \in A_{\mathfrak{p}}$ para cada $\mathfrak{p} \in U$, y tal que s es localmente un cociente de elementos de A, es decir, para cada $\mathfrak{p} \in U$ existe una vecindad abierta V de $\mathfrak{p}$ contenida en U, y elementos $a, f \in A$ tales que para todo $\mathfrak{q} \in V$, $f \notin \mathfrak{q}$, y $s(\mathfrak{q}) = a/f$ en $A_{\mathfrak{q}}$. Note que $\mathcal{O}(U)$ tiene estructura de anillo conmutativo, con la suma y producto definidas puntualmente como funciones. En efecto:

- La función cero está en $\mathcal{O}(U)$. Para cada $\mathfrak{p} \in U$, $0(\mathfrak{p}) = 0_A/1_A = 0_{A_{\mathfrak{p}}} \in A_{\mathfrak{p}}$, por lo que U funciona como la vecindad requerida en la definición de $\mathcal{O}(U)$, y 0_A, 1_A son los elementos de A que se ocupan. Luego, la función cero será el elemento neutro de $\mathcal{O}(U)$.

- Si s y t están en $\mathcal{O}(U)$, es claro que $(s+t)$ es una función de U en $\prod_{\mathfrak{p} \in U} A_{\mathfrak{p}}$ y que para todo $\mathfrak{p} \in U$, $(s+t)(\mathfrak{p}) = s(\mathfrak{p}) + t(\mathfrak{p}) \in A_{\mathfrak{p}}$. Luego, para $\mathfrak{p} \in U$ existen vecindades abiertas V^s, V^t de $\mathfrak{p}$ contenidas en U y conjuntos de elementos $\{a_s, f_s\}$, $\{a_t, f_t\}$ en A tales que para todo

$\mathfrak{q} \in V^s,\ V^t;\ f_s, f_t \notin \mathfrak{q}$ y $s(\mathfrak{q}) = a_s/f_s,\ t(\mathfrak{q}) = a_t/f_t$ en $A_{\mathfrak{q}}$. Así, la vecindad abierta $V^s \cap V^t$ de $\mathfrak{q}$, y los elementos $f_t a_s + f_s a_t$ y $f_s f_t$ de A funcionan para el punto $\mathfrak{q}$. Es claro que para todo $\mathfrak{q} \in V^s \cap V^t$, $f_s f_t \notin \mathfrak{q}$. Hemos probado entonces que $s + t \in \mathcal{O}(U)$.

- Para $s \in \mathcal{O}(U)$, su inverso aditivo será $-s$. Las vecindades para $\mathfrak{p} \in U$ serán las mismas que se consideran para la función s, salvó que en este caso los elementos $-a, f$ de A son los que funcionan. Es claro también que para todo $\mathfrak{p} \in U$, $(s + (-s))(\mathfrak{p}) = 0_{\mathcal{O}(U)}(\mathfrak{p})$.

- Si s, t están en $\mathcal{O}(U)$, entonces el producto st lo está. Se siguen los pasos del punto 2, solo cambiar al producto. Los elementos de A que funcionan son: $a_s a_t$ y $f_s f_t$.

- La función identidad es el elemento identidad de $\mathcal{O}(U)$, pues para todo $\mathfrak{p} \in U$ definimos $id_{\mathcal{O}(U)}(\mathfrak{p}) = 1_A/1_A = 1_{A_{\mathfrak{p}}} \in A_{\mathfrak{p}}$.

- Similarmente se puede mostrar que la adición y la multiplicación son asociativas y conmutativas.

$\mathcal{O}$ es una gavilla de anillos. Si $V \subseteq U$ son dos abiertos de X, la restricción natural de funciones $\rho_{\mathcal{O}}{}^U_V : \mathcal{O}(U) \longrightarrow \mathcal{O}(V)$ nos da un homomorfismo de anillos. Las propiedades de pregavilla se cumplen trivialmente. Basta entonces probar 1 y 2 de la Definición 1.2.

1. Sean U un abierto de X y $\{U_i\}_{i \in I}$ una cubierta abierta de U. Sea $s \in \mathcal{O}(U)$ tal que para todo i, $s|_{U_i} = 0_{\mathcal{O}(U_i)}$. Entonces, para $\mathfrak{p} \in U$ existe

$i_0 \in I$ tal que $\mathfrak{p} \in U_{i_0}$, por lo que $s(\mathfrak{p}) = s|_{U_{i_0}}(\mathfrak{p}) = 0_{\mathcal{O}(U_{i_0})}(\mathfrak{p}) = 0_{A_\mathfrak{p}}$. Por lo tanto, $s = 0_{\mathcal{O}(U)}$, es decir, s es la función cero.

2. Sean U un abierto de X y $\{U_i\}_{i\in I}$ una cubierta abierta de U. Sea $s_i \in \mathcal{O}(U_i)$ una familia de funciones de $\mathcal{O}$ sobre los abiertos U_i, tales que para todo $i, j \in I$, $s_i|_{U_i\cap U_j} = s_j|_{U_i\cap U_j}$. Probaremos que existe una función en $\mathcal{O}(U)$ que extiende a cada una de las funciones de la familia. Para ello basta definir una función s como sigue: $s : U \longrightarrow \prod_{\mathfrak{p}\in U} A_\mathfrak{p}$, tal que $s(\mathfrak{p}) = s_i(\mathfrak{p})$ para $\mathfrak{p} \in U_i$. Entonces, para todo $i \in I$, $s|_{U_i}(\mathfrak{p}) = s_i(\mathfrak{p})$, y por hipótesis se sigue que s está bien definida. Por otro lado, si $\mathfrak{p} \in U$, entonces $\mathfrak{p} \in U_{i_0}$ para algún $i_0 \in I$, esto implica que existe una vecindad abierta $V_\mathfrak{p}^{i_0}$ de $\mathfrak{p}$ contenida en U_{i_0}, elementos a_{i_0}, f_{i_0} en A, tales que para todo $\mathfrak{q} \in V_\mathfrak{p}^{i_0}$, $f_{i_0} \notin \mathfrak{q}$, y $s(\mathfrak{q}) = s_{i_0}(\mathfrak{q}) = a_{i_0}/f_{i_0} \in A_\mathfrak{q}$. Por lo tanto, $s \in \mathcal{O}(U)$. Así, $\mathcal{O}$ es una gavilla.

Definición 3.1 *Sea A un anillo. El Spectrum de A es el par $(Spec\,A, \mathcal{O})$, donde $Spec\,A$ es un espacio topológico y $\mathcal{O}$ una gavilla de anillos sobre él. Denotaremos a la gavilla $\mathcal{O}$ como $\mathcal{O}_{Spec\,A}$, y la llamaremos la gavilla estructural sobre $Spec\,A$.*

3.1.2 Propiedades Básicas de la Gavilla Estructural sobre Spec A

En esta subsección estableceremos las propiedades básicas de la gavilla estructural $\mathcal{O}_{Spec\,A}$ sobre el espacio topológico $Spec\,A$. Para cualquier elemento

$f \in A$ denotamos por $D(f)$ al complemento abierto de $V((f))$. Notemos que los conjuntos abiertos de la forma $D(f)$ forman una base para la topología de $Spec\,A$. En efecto, sean $V(\mathfrak{a})$ un conjunto cerrado de $Spec\,A$, y $\mathfrak{p} \notin V(\mathfrak{a})$, entonces $\mathfrak{p} \not\supseteq \mathfrak{a}$, luego existe $f \in \mathfrak{a}$ tal que $f \notin \mathfrak{p}$. Entonces, $\mathfrak{p} \in D(f)$ y $D(f) \cap V(\mathfrak{a}) = \varnothing$. Hemos probado entonces que para $\mathfrak{p} \in Spec\,A \backslash V(\mathfrak{a})$ existe $D(f)$ tal que $\mathfrak{p} \in D(f) \subseteq Spec\,A \backslash V(\mathfrak{a})$.

La siguiente proposición reune las propiedades básicas de la gavilla estructural sobre el espacio topológico $Spec\,A$.

Proposición 3.1 *Sean A un anillo, y $\mathcal{O}_{Spec\,A}$ la gavilla estructural sobre $Spec\,A$.*

1. *Para cualquier $\mathfrak{p} \in Spec\,A$, el grupo de gérmenes $\mathcal{O}_{Spec\,A,\mathfrak{p}}$ de la gavilla $\mathcal{O}_{Spec\,A}$ es isomorfo al anillo local $A_{\mathfrak{p}}$.*

2. *Para cualquier elemento $f \in A$, el anillo $\mathcal{O}_{Spec\,A}(D(f))$ es isomorfo al anillo localizado A_f.*

3. *En particular, $\mathcal{O}_{Spec\,A}(Spec\,A) \cong A$.*

Demostración.

1. Sean $\mathfrak{p} \in Spec\,A$, y U un abierto de $Spec\,A$ que contiene a $\mathfrak{p}$, si s es una sección de $\mathcal{O}_{Spec\,A}$ sobre U, entonces existe una vecindad V abierta de $\mathfrak{p}$ contenida en U y elementos $a, g \in A$ tales que para todo $\mathfrak{q} \in V$, $g \notin \mathfrak{q}$, y $s(\mathfrak{q}) = a/g$ en $A_{\mathfrak{q}}$. En particular, $s(\mathfrak{p}) = a/g$ en $A_{\mathfrak{p}}$. Luego, podemos pensar $U = V$, y entonces definir $\varphi : \mathcal{O}_{Spec\,A,\mathfrak{p}} \longrightarrow A_{\mathfrak{p}}$, tal que $[(U, s)] \longmapsto s(\mathfrak{p}) = a/g \in A_{\mathfrak{p}}$.

φ *está bien definida.* Si $[(U,s)] = [(U,s')]$ en $\mathcal{O}_{Spec\,A,\mathfrak{p}}$, entonces existe $\Gamma \subseteq U$ abierto tal que $\mathfrak{p} \in \Gamma$ y $s|_\Gamma = s'|_\Gamma$. Para todo $\mathfrak{q} \in U$; $g, g' \notin \mathfrak{q}$, $s(\mathfrak{q}) = a/g$ en $A_\mathfrak{q}$ y $s'(\mathfrak{q}) = a'/g'$ en $A_\mathfrak{q}$. Pero $s(\mathfrak{q}) = s'(\mathfrak{q})$ en $A_\mathfrak{q}$ para todo $\mathfrak{q} \in \Gamma$, en particular $s(\mathfrak{p}) = s'(\mathfrak{p})$ en $A_\mathfrak{p}$, es decir, $a/g = a'/g'$ en $A_\mathfrak{p}$. Así, φ está bien definida.

φ *es un homomorfismo de anillos.* Es trivial que la identidad es enviada a la identidad.

Sean $[(W,s)], [(V,s')]$ en $\mathcal{O}_{Spec\,A,\mathfrak{p}}$, podemos pensar $[(W,s)] = [(U,s)]$ y $[(V,s)] = [(U,s')]$, donde $U = W \cap V \neq \varnothing$. Entonces, $\varphi([(U,s)] + [(U,s')]) = \varphi([(U,s+s')]) = (ag' + ga')/gg' = \varphi([(U,s)]) + \varphi([(U,s')])$ en $A_\mathfrak{p}$. Análogamente, $\varphi([(U,s)][(U,s')]) = \varphi([(U,s)])\varphi([(U,s')])$.

φ *es inyectiva.* Sea $[(U,s)] \in Ker\,\varphi$, es decir, $\varphi([(U,s)]) = 0_A/1_A$, entonces existe $\alpha \in A\backslash\mathfrak{p}$ tal que $\alpha a = 0_A$. Como $\alpha \notin \mathfrak{p}$, entonces $\mathfrak{p} \in D(\alpha)$, así $[(U,s)] = [(D(\alpha)\cap U, s|_{D(\alpha)\cap U})]$. Para todo $\mathfrak{q} \in D(\alpha)\cap U$, $\alpha \notin \mathfrak{q}$, entonces podemos escribir $s(\mathfrak{q}) = a/g = \alpha a/\alpha g = 0_A/1_A$ en $A_\mathfrak{q}$. Por lo tanto, $[(U,s)] = [(D(\alpha) \cap U, s|_{D(\alpha)\cap U})] = [(D(\alpha) \cap U, 0_{\mathcal{O}_{Spec\,A}(D(\alpha)\cap U)})] = [(U, 0_{\mathcal{O}_{Spec\,A}(U)})]$. Entonces, φ es inyectiva.

φ *es sobreyectiva.* Sea a/g en $A_\mathfrak{p}$. Necesitamos saber quien es el gérmen $[(U,s)]$. Como $a/g \in A_\mathfrak{p}$, entonces $g \notin \mathfrak{p}$, es decir, $\mathfrak{p} \in D(g)$. Así, basta tomar $U = D(g)$, y $s \in \mathcal{O}_{Spec\,A}(D(g))$ tal que para todo $\mathfrak{q} \in D(g)$, $g \notin \mathfrak{q}$, y $s(\mathfrak{q}) = a/g$ en $A_\mathfrak{q}$. En particular, es cierto para $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$. Por lo tanto, $\varphi([(D(g),s)]) = a/g$ en $A_\mathfrak{p}$, y entonces φ es sobreyectiva.

2. Definimos un homomorfismo $\psi : A_f \longrightarrow \mathcal{O}_{Spec\,A}(D(f))$, con la asig-

nación $(a/f^n) \longmapsto s$, tal que para todo $\mathfrak{p} \in D(f)$, $s(\mathfrak{p}) = a/f^n \in A_{\mathfrak{p}}$. Primero mostraremos que ψ es inyectiva. Sean a/f^n, b/f^m en A_f tales que $\psi(a/f^n) = \psi(b/f^m)$. Si $\psi(a/f^n) = s$ y $\psi(b/f^m) = t$, entonces para todo $\mathfrak{p} \in D(f)$, $s(\mathfrak{p}) = t(\mathfrak{p})$, es decir, $a/f^n = b/f^m$ en $A_{\mathfrak{p}}$. Luego, existe $u \notin \mathfrak{p}$ tal que $u(af^m - bf^n) = 0_A$. Sea $\mathfrak{a}$ es el aniquilador (ver Ap. A.1, pág. 111) de $af^m - bf^n$. Entonces, $u \in \mathfrak{a}$, y como $u \notin \mathfrak{p}$ se tiene que $\mathfrak{a} \nsubseteq \mathfrak{p}$, es decir, $\mathfrak{p} \notin V(\mathfrak{a})$, luego $V(\mathfrak{a}) \cap D(f) = \varnothing$, es decir, $V(\mathfrak{a}) \subseteq V((f))$. De (c), Lema 3.1 se sigue que $\sqrt{(f)} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$, entonces existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $f^l \in \mathfrak{a}$, así $f^l(af^m - bf^n) = 0_A$, y esto muestra que $a/f^n = b/f^m$ en A_f. Por lo tanto, ψ es inyectiva.

ψ *es sobreyectiva.* Sea $s \in \mathcal{O}_{Spec\,A}(D(f))$. Por definición para todo $\mathfrak{p} \in D(f)$, $s(\mathfrak{p}) \in A_{\mathfrak{p}}$, y s es localmente cociente de elementos de A, así que podemos cubrir al abierto $D(f)$ con abiertos V_i sobre los cuales s es representada por un cociente a_i/g_i, con $g_i \notin \mathfrak{p}$ para todo $\mathfrak{p} \in V_i$ (el conjunto de índices está parametrizado por los puntos del abierto $D(f)$), en otras palabras $V_i \subseteq D(g_i)$. Por otro lado, como los abiertos de la forma $D(h)$, con $h \in A$ forman una base para la topología de $Spec\,A$ podemos suponer que los abiertos V_i son abiertos básicos, es decir, $V_i = D(h_i)$ para algún $h_i \in A$, entonces $D(f) = \bigcup D(h_i)$. Luego, $D(h_i) \subseteq D(g_i)$ implica que $V((g_i)) \subseteq V((h_i))$, y por (c) del Lema 3.1, $\sqrt{(h_i)} \subseteq \sqrt{(g_i)}$, y en particular $h_i^n \in (g_i)$ para algún $n \in \mathbb{N}$, así $h_i^n = c_i g_i$, con $c_i \in A$. Al multiplicar por a_i se obtiene $a_i h_i^n = c_i a_i g_i$, es decir, $a_i/g_i = c_i a_i/h_i^n$.

Por otro lado, $D(h_i) = D(h_i^n)$ implica que $D(f) = \bigcup_{i \in D(f)} D(h_i^n)$. Entonces, para todo $\mathfrak{q} \in D(h_i^n)$ se tiene que $h_i \notin \mathfrak{q}$. Por lo tanto, $s(\mathfrak{q}) = a_i/g_i = a_i h_i^n / g_i h_i^n = c_i a_i g_i / g_i h_i^n = a_i c_i / h_i^n$ para todo $\mathfrak{q} \in D(h_i) = D(h_i^n)$. De esta manera podemos reemplazar h_i por h_i^n y a_i por $a_i c_i$, y así suponer que $D(f)$ está cubierto por los abiertos $D(h_i)$, y que localmente es un cociente a_i/h_i para todo $\mathfrak{q} \in D(h_i)$.

Notemos que $D(f)$ puede ser cubierto por un número finito de los $D(h_i)$. En efecto, $D(f) \subseteq \bigcup D(h_i)$ si y sólo si $V((f)) \supseteq \bigcap V((h_i)) = V(\sum(h_i))$, si y sólo si (Lema 3.1) $\sqrt{(f)} \subseteq \sqrt{\sum(h_i)}$, entonces $f^n \in \sum(h_i)$ para algún n. Esto significa que $f^n = \sum_{i=1}^r b_i h_i$, con $b_i \in A$, es decir, necesitamos un número finito de los h_i para f^n, y por lo tanto un número finito de abiertos $D(h_i)$ para cubrir a $D(f)$. Si $\mathfrak{p} \in D(f) = D(f^n)$, entonces $b_1 h_1 + ... + b_r h_r = f^n \notin \mathfrak{p}$ implica que $b_i h_i \notin \mathfrak{p}$ para algún i, luego $h_i \notin \mathfrak{p}$, es decir, $\mathfrak{p} \in D(h_i) \subseteq D(h_1) \cup ... \cup D(h_r)$. Hemos probado entonces que cualquier elemento de $D(f)$ está en alguno de los $D(h_i)$, $i = 1, 2, 3, ..., r$. Por lo tanto, $D(f)$ se puede cubrir con un número finito de los $D(h_i)$.

En lo que sigue fijaremos un conjunto finito $h_1, ..., h_r$, tal que $D(f) \subseteq D(h_i) \cup ... \cup D(h_r)$. Sobre $D(h_i) \cap D(h_j) = D(h_i h_j)$ tenemos dos elementos de $A_{h_i h_j}$, a saber a_i/h_i y a_j/h_j, donde ambos representan a s sobre $D(h_i h_j)$, es decir, para todo $\mathfrak{a}$ en $D(h_i h_j)$, $a_i/h_i = s(\mathfrak{a}) = a_j/h_j$ en $A_{\mathfrak{a}}$, con $h_i, h_j \notin \mathfrak{a}$. Como ψ es inyectiva, al aplicarla a $D(h_i h_j)$, es decir, $\psi : A_{h_i h_j} \longrightarrow \mathcal{O}_{Spec\,A}(D(h_i h_j))$, resulta que $a_i/h_i = a_j/h_j$ en

$A_{h_i h_j}$. Entonces, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$(h_i h_j)^n (h_j a_i - h_i a_j) = 0_A.$$

Puesto que sólo tenemos un número finito de índices, tenemos también un número finito de enteros n, por lo que podemos tomar el más grande de ellos de tal manera que funcione bien para todo i, j. Si suponemos que tal entero es justamente n, entonces $h_j^{n+1}(h_i^n a_i) - h_i^{n+1}(h_j^n a_j) = 0_A$ para todo i, j. Al reemplazar cada h_i por h_i^{n+1}, y a_i por $h_i^n a_i$ resulta que s puede ser representada sobre el abierto $D(h_i)$ por a_i/h_i, y entonces $h_j a_i = h_i a_j$ para todo i, j.

Luego, escribimos como antes $f^n = \sum b_i h_i$, y sea $a = \sum b_i a_i$. Entonces, para cada j tenemos:

$$h_j a = \sum b_i a_i h_j = \sum b_i h_i a_j = f^n a_j$$

Esto quiere decir que sobre $D(h_j)$, $a/f^n = a_j/h_j$, es decir, para todo $\mathfrak{a} \in D(h_j)$, se tiene $a/f^n = s(\mathfrak{a}) = a_j/h_j$, lo cual implica que $\psi(a/f^n) = s$, pues para todo $\mathfrak{p} \in D(f)$, $s(\mathfrak{p}) = a/f^n \in A_{\mathfrak{p}}$. Por lo tanto, ψ es sobreyectiva.

3. Es un caso particular de 2, cuando $f = 1_A$, pues $D(1_A) = Spec\, A$. Luego, $A_{1_A} = \{a/1_A \,|\, a \in A\} \cong A$, donde $S = \{1_A\}$ es el conjunto multiplicativo (ver Ap. A.1, pág. 110). Por lo tanto, $\mathcal{O}_{Spec\, A}(Spec\, A) \cong A$. Lo que queriamos.

Así, la proposición queda probada. ■

En la siguiente proposición se reunen las propiedades básicas del espacio topológico $Spec\,A$.

Proposición 3.2 *1. Si A es un anillo, entonces $(Spec\,A, \mathcal{O}_{Spec\,A})$ es un espacio localmente anillado.*

2. Si $\varphi : A \longrightarrow B$ es un homomorfismo de anillos, entonces φ induce un morfismo natural de espacios localmente anillados.

$(f, f^\sharp) : (Spec\,B, \mathcal{O}_{Spec\,B}) \longrightarrow (Spec\,A, \mathcal{O}_{Spec\,A})$

3. Si A y B son anillos, entonces cualquier morfismo de espacios localmente anillados de $Spec\,B$ a $Spec\,A$ es inducido por un homomorfismo de anillos $\varphi : A \longrightarrow B$ como en 2.

Demostración.

1. Se sigue de 2 de la Proposición 3.1.

2. Puesto que la imagen inversa de un ideal primo bajo cualquier homomorfismo de anillos es otra vez un ideal primo, podemos definir la aplicación $f : Spec\,B \longrightarrow Spec\,A$, tal que $\mathfrak{p} \longmapsto f(\mathfrak{p}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$. Esta aplicación es continua. En efecto, sea $D(g)$ un abierto básico de la topología de $Spec\,A$. Entonces, $\mathfrak{q} \in f^{-1}(D(g))$ equivale a $f(\mathfrak{q}) \in D(g)$, es decir, $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \in D(g)$, esto es, $\mathfrak{q} \in D(\varphi(g))$. Por lo tanto, $f^{-1}(D(g)) = D(\varphi(g))$. Así, f es continua.

   Ahora, para cada $\mathfrak{p} \in Spec\,B$ localizamos B en $\mathfrak{p}$, y localizamos A en $\varphi^{-1}(\mathfrak{p})$, y por φ obtenemos un homomorfismo local de anillos locales. En efecto, definimos

$$\varphi_{\mathfrak{p}} : A_{\varphi^{-1}(\mathfrak{p})} \longrightarrow B_{\mathfrak{p}}$$
$$a/e \longmapsto \varphi(a)/\varphi(e) \in B_{\mathfrak{p}}, \text{ con } a \in A \text{ y } e \notin \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$$

$\varphi_{\mathfrak{p}}$ *está bien definida.* Si $a/e = b/u \in A_{\varphi^{-1}(\mathfrak{p})}$, entonces existe $e' \notin \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ tal que $e'(ua - eb) = 0_A$. Al aplicar φ resulta $\varphi(e')(\varphi(u)\varphi(a) - \varphi(e)\varphi(b)) = 0_B$, lo cual implica que $\varphi(a)/\varphi(e) = \varphi(b)/\varphi(u)$ en $B_{\mathfrak{p}}$.

$\varphi_{\mathfrak{p}}$ *es homomorfismo local.* Denotemos por $\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}} := \mathfrak{m}_{B_{\mathfrak{p}}}$, y $\varphi^{-1}(\mathfrak{p})_{\varphi^{-1}(\mathfrak{p})} := \mathfrak{m}_{A_{\varphi^{-1}(\mathfrak{p})}}$ a los ideales maximales de $B_{\mathfrak{p}}$ y $A_{\varphi^{-1}(\mathfrak{p})}$, respectivamente. Si $a/e \in \varphi_{\mathfrak{p}}^{-1}(\mathfrak{m}_{B_{\mathfrak{p}}})$, entonces $\varphi_{\mathfrak{p}}(a/e) \in \mathfrak{m}_{B_{\mathfrak{p}}}$, es decir, $\varphi(a)/\varphi(e) \in \mathfrak{m}_{B_{\mathfrak{p}}}$, esto es, $\varphi(a) \in \mathfrak{p}$, y $\varphi(e) \notin \mathfrak{p}$, es decir, $a \in \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$, y $e \notin \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$. Por lo tanto, $a/e \in \mathfrak{m}_{A_{\varphi^{-1}(\mathfrak{p})}}$. Conversamente, si $a/e \in \mathfrak{m}_{A_{\varphi^{-1}(\mathfrak{p})}}$, entonces $a \in \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ y $e \notin \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$, esto es, $\varphi(a) \in \mathfrak{p}$ y $\varphi(e) \notin \mathfrak{p}$, luego $\varphi(a)/\varphi(e) \in \mathfrak{m}_{B_{\mathfrak{p}}}$, esto significa que $\varphi_{\mathfrak{p}}(a/e) \in \mathfrak{m}_{B_{\mathfrak{p}}}$, es decir, $a/e \in \varphi_{\mathfrak{p}}^{-1}(\mathfrak{m}_{B_{\mathfrak{p}}})$. Así, $\varphi_{\mathfrak{p}}^{-1}(\mathfrak{m}_{B_{\mathfrak{p}}}) = \mathfrak{m}_{A_{\varphi^{-1}(\mathfrak{p})}}$.

Por otro lado, de 1 de la Proposición 3.1 se tiene que $\mathcal{O}_{Spec\,A,\varphi^{-1}(\mathfrak{p})} \cong A_{\varphi^{-1}(\mathfrak{p})}$, y $\mathcal{O}_{Spec\,B,\mathfrak{p}} \cong B_{\mathfrak{p}}$. Por lo tanto, al definir $f^{\sharp}_{\mathfrak{p}} := \varphi_{\mathfrak{p}}$ tenemos $f^{\sharp}_{\mathfrak{p}} : \mathcal{O}_{Spec\,A,f(\mathfrak{p})} \longrightarrow \mathcal{O}_{Spec\,B,\mathfrak{p}}$, homomorfismo local de anillos locales. El que queremos.

Ahora lo único que nos falta probar es que $f^{\sharp} : \mathcal{O}_{Spec\,A} \longrightarrow f_*(\mathcal{O}_{Spec\,B})$ es un morfismo de gavillas de anillos sobre $Spec\,A$. Basta probar que para todo $V \subseteq Spec\,A$ abierto, $f^{\sharp}_V : \mathcal{O}_{Spec\,A}(V) \longrightarrow \mathcal{O}_{Spec\,B}(f^{-1}(V))$, es un homomorfismo de anillos. Definimos $f^{\sharp}_V$ como sigue:

$$f^{\sharp}_V : \mathcal{O}_{Spec\,A}(V) \longrightarrow \mathcal{O}_{Spec\,B}(f^{-1}(V))$$

$$s \longmapsto f_V^\sharp(s) : f^{-1}(V) \longrightarrow \prod_{x \in f^{-1}(V)} B_x$$
$$\mathfrak{r} \longmapsto f_V^\sharp(s)(\mathfrak{r}) = (\varphi_\mathfrak{r} \circ s \circ f|_{f^{-1}(V)})(\mathfrak{r})$$

Veamos que $f_V^\sharp(s)(\mathfrak{r})$ es un elemento del anillo local $B_\mathfrak{r}$. En efecto, $f_V^\sharp(s)(\mathfrak{r}) = (\varphi_\mathfrak{r} \circ s \circ f|_{f^{-1}(V)})(\mathfrak{r}) = (\varphi_\mathfrak{r} \circ s)(f|_{f^{-1}(V)}(\mathfrak{r})) = (\varphi_\mathfrak{r} \circ s)(f(\mathfrak{r})) = \varphi_\mathfrak{r}(s(\varphi^{-1}(\mathfrak{r})))$.

Como $\mathfrak{r} \in f^{-1}(V)$, entonces $\varphi^{-1}(\mathfrak{r}) \in V$, y así existe una vecindad abierta $V_{\varphi^{-1}(\mathfrak{r})}$ de $\varphi^{-1}(\mathfrak{r})$ contenida en V y elementos $a, g \in A$ tales que para todo $\mathfrak{q} \in V_{\varphi^{-1}(\mathfrak{r})}$, $g \notin \mathfrak{q}$, y $s(\mathfrak{q}) = a/g$ en $A_\mathfrak{q}$. En particular, $s(\varphi^{-1}(\mathfrak{r})) = a/g$ en $A_{\varphi^{-1}(\mathfrak{r})}$, con $g \notin \varphi^{-1}(\mathfrak{r})$. Por lo tanto, $\varphi_\mathfrak{r}(s(\varphi^{-1}(\mathfrak{r}))) = \varphi_\mathfrak{r}(a/g) = \varphi(a)/\varphi(g) \in B_\mathfrak{r}$.

Ahora sólo falta ver que $f_V^\sharp(s) = (\varphi_\mathfrak{r} \circ s \circ f|_{f^{-1}(V)})$ satisface la condición de los elementos del anillo $\mathcal{O}_{Spec\,B}(f^{-1}(V))$. Para $\mathfrak{r} \in f^{-1}(V)$, $V_{\varphi^{-1}(\mathfrak{r})} \subseteq V$ implica que $f^{-1}(V_{\varphi^{-1}(\mathfrak{r})}) \subseteq f^{-1}(V)$ son abiertos en $Spec\,B$. Además $\mathfrak{r} \in f^{-1}(V_{\varphi^{-1}(\mathfrak{r})})$, pues $f(\mathfrak{r}) \in V_{\varphi^{-1}(\mathfrak{r})}$. Por otro lado, $a, g \in A$ implican que $\varphi(a), \varphi(g) \in B$. Luego, la vecindad $f^{-1}(V_{\varphi^{-1}(\mathfrak{r})})$ de $\mathfrak{r}$ y los elementos $\varphi(a), \varphi(g) \in B$ son los que funcionan. En efecto, sea $\mathfrak{w} \in f^{-1}(V_{\varphi^{-1}(\mathfrak{r})})$, esto es, $f(\mathfrak{w}) \in V_{\varphi^{-1}(\mathfrak{r})}$, entonces $s(f(\mathfrak{w})) = s(\varphi^{-1}(\mathfrak{w})) = a/g$ en $A_\mathfrak{w}$. Al aplicar $\varphi_\mathfrak{r}$ resulta $\varphi_\mathfrak{r}(s(f(\mathfrak{w}))) = \varphi_\mathfrak{r}(a/g) = \varphi(a)/\varphi(g)$ en $B_\mathfrak{w}$, con $\varphi(g) \notin \mathfrak{w}$. Por otro lado, $\varphi_\mathfrak{r}(s(f(\mathfrak{w}))) = (\varphi_\mathfrak{r} \circ s)(f(\mathfrak{w})) = (\varphi_\mathfrak{r} \circ s)(f|_{f^{-1}(V_{\varphi^{-1}(\mathfrak{r})})}(\mathfrak{w})) = f_V^\sharp(s)(\mathfrak{w})$. Por lo tanto, $f_V^\sharp(s)(\mathfrak{w}) = \varphi(a)/\varphi(g)$ para todo $\mathfrak{w} \in f^{-1}(V_{\varphi^{-1}(\mathfrak{r})})$, esto prueba que $f_V^\sharp(s)$ está en el anillo $\mathcal{O}_{Spec\,B}(f^{-1}(V))$.

$f_V^\sharp(s)$ *es un homomorfismo de anillos bien definido.* Es rutina.

3. Conversamente, supongamos dado un morfismo de espacios localmente anillados $(f, f^\sharp)$ de $Spec\,B$ a $Spec\,A$, es decir, $f : Spec\,B \longrightarrow Spec\,A$ continua y $f^\sharp : \mathcal{O}_{Spec\,A} \longrightarrow f_*\mathcal{O}_{Spec\,B}$ un morfismo de gavillas sobre $Spec\,A$. Al tomar secciones globales $f^\sharp$ induce un homomorfismo de anillos $f^\sharp_{Spec\,A} : \mathcal{O}_{Spec\,A}(Spec\,A) \longrightarrow f_*\mathcal{O}_{Spec\,B}(Spec\,A)$, y por 3 de la Proposición 3.1 los anillos son A y B, respectivamente. Así, podemos escribir $f^\sharp_{Spec\,A} : A \longrightarrow B$. De esta manera, basta definir $f^\sharp_{Spec\,A} = \varphi$.

   Por la parte 2, φ induce una aplicación continua entre los espacios topológicos $Spec\,B$ y $Spec\,A$, digamos $\widetilde{\varphi} : Spec\,B \longrightarrow Spec\,A$, tal que $\mathfrak{p} \longmapsto \widetilde{\varphi}(\mathfrak{p}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ para todo $\mathfrak{p} \in Spec\,B$. Probaremos que esta aplicación continua coincide con f, es decir, que para todo $\mathfrak{p} \in Spec\,B$, $\widetilde{\varphi}(\mathfrak{p}) = f(\mathfrak{p})$, o bien $\varphi^{-1}(\mathfrak{p}) = f(\mathfrak{p})$.

   Por hipótesis, $\mathfrak{p} \in Spec\,B$ induce el homomorfismo local de gérmenes $f^\sharp_\mathfrak{p} : \mathcal{O}_{Spec\,A, f(\mathfrak{p})} \longrightarrow \mathcal{O}_{Spec\,B,\mathfrak{p}}$, y por 1 de la Proposición 3.1 se puede escribir $f^\sharp_\mathfrak{p} : A_{f(\mathfrak{p})} \longrightarrow B_\mathfrak{p}$, luego debe ser compatible la aplicación φ sobre secciones globales y el homomorfismo localización. En otras palabras, tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\mathrm{i_A}"'] & B \arrow[d, "\mathrm{i_B}"] \\ A_{f(\mathfrak{p})} \arrow[r, "\mathrm{f}^\sharp_\mathfrak{p}"] & B_\mathfrak{p} \end{tikzcd}$$

   Para todo $a \in A$, $f^\sharp_\mathfrak{p} \circ i_A(a) = i_B \circ \varphi(a)$, es decir, $\varphi(a)/1_B = f^\sharp_\mathfrak{p}(a/1_A)$. Sean $\mathfrak{p}_\mathfrak{p}$, $f(\mathfrak{p})_{f(\mathfrak{p})}$ los ideales maximales de $B_\mathfrak{p}$ y $A_{f(\mathfrak{p})}$, respectivamente. Como $f^\sharp_\mathfrak{p}$ es un homomorfismo local, entonces ${f^\sharp_\mathfrak{p}}^{-1}(\mathfrak{p}_\mathfrak{p}) = f(\mathfrak{p})_{f(\mathfrak{p})}$.

Probaremos la igualdad $\varphi^{-1}(\mathfrak{p}) = f(\mathfrak{p})$. Si $x \in \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$, entonces $\varphi(x) \in \mathfrak{p}$, luego $\varphi(x)/1_B \in \mathfrak{p}_{\mathfrak{p}}$. Al aplicar $f^{\sharp^{-1}}_{\mathfrak{p}}$ resulta $x/1_A \in f(\mathfrak{p})_{f(\mathfrak{p})}$, esto implica que existe $z/\alpha \in f(\mathfrak{p})_{f(\mathfrak{p})}$, con $z \in f(\mathfrak{p})$ y $\alpha \notin f(\mathfrak{p})$ tal que $x/1_A = z/\alpha$, es decir, existe $t \in A \backslash f(\mathfrak{p})$ tal que $tx\alpha = tz \in f(\mathfrak{p})$, y como $f(\mathfrak{p})$ es primo, necesariamente $x \in f(\mathfrak{p})$. Así, hemos probado que $\varphi^{-1}(\mathfrak{p}) \subseteq f(\mathfrak{p})$. Conversamente, si $x \in f(\mathfrak{p})$, entonces $x/1_A \in f(\mathfrak{p})_{f(\mathfrak{p})} = f^{\sharp^{-1}}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}})$, es decir, $x/1_A = f^{\sharp^{-1}}_{\mathfrak{p}}(z/\alpha)$, con $z \in \mathfrak{p}$ y $\alpha \notin \mathfrak{p}$, es decir, $f^{\sharp}_{\mathfrak{p}}(x/1_A) = z/\alpha$ o bien $\varphi(x)/1_B = z/\alpha$. Luego, existe $t \in B \backslash \mathfrak{p}$ tal que $t(\alpha\varphi(x) - z) = 0_B$, es decir, $t\alpha\varphi(x) = tz \in \mathfrak{p}$, y entonces $\varphi(x) \in \mathfrak{p}$, es decir, $x \in \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$. Por lo tanto, $\varphi^{-1}(\mathfrak{p}) \supseteq f(\mathfrak{p})$. Así, $\varphi^{-1}(\mathfrak{p}) = f(\mathfrak{p})$. Por lo tanto, f coincide con la aplicación $Spec\, B \longrightarrow Spec\, A$ inducida por φ.

Ahora es inmediato que $f^{\sharp}$ también es inducida por φ, de esta manera el morfismo $(f, f^{\sharp})$ de espacios localmente anillados es inducido por el homomorfismo de anillos $\varphi : A \longrightarrow B$.

Con esto 3 queda probada. ■

3.2 Esquemas Afines Noetherianos

En esta sección definiremos los espacios topológicos sobre los que ahora estudiaremos la cohomología de nuestras gavillas. Los espacios anillados, como lo dijimos anteriormente son pieza fundamental para la construcción de esquemas, como veremos a continuación. Empezaremos definiendo un esquema afín.

Definición 3.2 *Llamaremos esquema afín a un espacio localmente anillado* $(X, \mathcal{O}_X)$ *tal que es isomorfo (como un espacio anillado local) al spectrum de algún anillo* A*, es decir, a algún* $(Spec\, A, \mathcal{O}_{Spec\, A})$*.*

Ejemplo 3.1 *Si* k *es un campo,* $Spec\, k$ *es un esquema afín cuyo espacio topológico consiste de un punto, es decir, del ideal primo* $\{0\}$*, luego por* 1 *de la Proposición* 3.1*,* $\mathcal{O}_{Spec\, k, \{0\}} \cong k_{\{0\}} = k$*. Entonces, puesto que dos gavillas son iguales si y sólo si sus grupos de gérmenes son iguales, resulta que la gavilla estructural* $\mathcal{O}_{Spec\, k}$ *es la gavilla asociada al grupo abeliano* k *(similar a la gavilla constante).*

Observación: Si $\mathfrak{p} \in Spec\, A$. Entonces, el singulete $\{\mathfrak{p}\}$ es un cerrado para la topología de Zariski si y sólo si $\mathfrak{p}$ es un ideal maximal de A. Diremos entonces que $\mathfrak{p}$ es un punto cerrado de $Spec\, A$.

Ejemplo 3.2 *Si* k *es un campo algebraicamente cerrado, la línea afín* $\mathbb{A}^1_k$ *sobre* k *se define como* $Spec\, k[x]$*. Se sigue que,* $\mathbb{A}^1_k$ *consiste del punto genérico* ξ *correspondiente al ideal primo* $\{0\}$*, cuya clausura es todo el espacio, y de los puntos cerrados correspondientes a los ideales maximales de* $k[x]$*, es decir, a los ideales de la forma* $(x-\alpha)$*, con* $\alpha \in k$*. El punto* ξ *no es cerrado, pues* $\{0\}$ *no es un ideal maximal de* $k[x]$*. Cualquier subconjunto abierto* U *no vacío de* $\mathbb{A}^1_k$ *es de la forma* $U = D(P(x))$*, donde* $P(x) \in k[x]\backslash\{0\}$*. Luego, por* 2 *de la Proposición* 3.1*,* $\mathcal{O}_{Spec\, k[x]}(D(P(x))) \cong k[x]_{P(x)}$*, donde* $k[x]_{P(x)}$ *es el anillo localizado en* $P(x)$*, de esta manera* $\mathcal{O}_{Spec\, k[x]}$ *es una gavilla de anillos, además para todo* $(x-\alpha) \in Spec\, k[x]$ *se tiene de* 1 *de la Proposición* 3.1*,* *que* $\mathcal{O}_{Spec\,k[x],(x-\alpha)} \cong k[x]_{(x-\alpha)}$*, donde* $k[x]_{(x-\alpha)}$ *es un anillo local que tiene por ideal maximal al ideal* $(x-\alpha)_{(x-\alpha)}$*, en particular* $\mathcal{O}_{Spec\,k[x],\{0\}} \cong k[x]_{\{0\}} = k(x)$*. Entonces,* $\mathbb{A}^1_k$ *es un esquema afín.*

En general, el esquema afín $\mathbb{A}^n_k$ *sobre* k *de dimensión* n *se define como* $Spec\,k[x_1, x_2, ..., x_n]$.

Definición 3.3 *Un esquema es un espacio localmente anillado* $(X, \mathcal{O}_X)$*, en el que cualquier punto tiene una vecindad abierta* U *tal que el espacio topológico* U*, junto con la gavilla restricción* $\mathcal{O}_X|_U$*, es un esquema afín. Llamaremos a* X *el espacio topológico subyacente al esquema* $(X, \mathcal{O}_X)$*, y* $\mathcal{O}_X$ *su gavilla estructural.*

Un esquema afín es un esquema. Si un espacio anillado X admite una cubierta abierta $\{U_i\}_{i\in I}$ tal que $(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i})$ es un esquema para cualquier i, entonces X es un esquema.

Ejemplo 3.3 *Los espacios proyectivos* $\mathbb{P}^n$*,* $n = 1, 2, 3, ...$*, son ejemplos de esquemas, pues* $\mathbb{P}^n = \bigcup_{i=1}^{n+1} \mathbb{A}^n_k$*, y por el Ejemplo 3.2,* $\mathbb{A}^n_k$ *es un esquema afín.*

Definición 3.4 *Un morfismo de esquemas* $f : X \longrightarrow Y$ *es un morfismo de espacios anillados. Un isomorfismo de esquemas es un isomorfismo de espacios anillados.*

La siguiente propiedad de esquemas está dada en términos de una cubierta afín específica, y será papel central en el Capítulo 4.

Definición 3.5 *Un esquema X se dice que es noetheriano si puede ser cubierto por un número finito de subconjuntos abiertos afines $U_i \cong Spec\, A_i$, tal que cada A_i es un anillo noetheriano (ver Ap. A.2, pág. 112). Un esquema X es localmente noetheriano si puede ser cubierto por subconjuntos abiertos afines $Spec\, A_i$, donde cada A_i es un anillo noetheriano.*

En particular, un esquema afín $Spec\, A$ es noetheriano si y sólo si A es un anillo noetheriano.

3.3 Gavillas Casi-Coherentes

La noción de gavillas *casi-coherentes* en Geometría Algebraica fue introducida por J.-P. Serre. Éstas son gavillas que en algún sentido son "localmente constantes" con respecto a la gavilla estructural, y son los análogos de los módulos sobre un anillo. La teoría de gavillas casi-coherentes y sus grupos de cohomología es una herramienta poderosa para estudiar esquemas. Desarrollaremos esta teoría sobre el caso particular de esquemas afines noetherianos.

3.3.1 Gavillas de Módulos

Todas las gavillas que hemos estudiado hasta ahora son gavillas de grupos abelianos o gavillas de anillos. Hemos estudiado también esquemas y morfismos entre ellos sin mencionar otra gavilla más que la estructural. En esta subsección definiremos gavillas de $\mathcal{O}_X$- módulos sobre un esquema en general, y luego las estudiaremos solamente sobre esquemas afines. Enunciaremos también las propiedades básicas de estas gavillas casi-coherentes sobre el espacio topológico $Spec\, A$. Comenzaremos definiendo gavillas de módulos sobre un espacio anillado.

Definición 3.6 *Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un espacio anillado. Un $\mathcal{O}_X$-módulo es una gavilla $\mathcal{F}$ sobre X tal que para cada conjunto abierto $U \subseteq X$, el grupo $\mathcal{F}(U)$ es un $\mathcal{O}_X(U)$-módulo, y para cada inclusión de abiertos $V \subseteq U$, el homomorfismo restricción $\mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(V)$ es compatible con la estructura de módulo vía el homomorfismo de anillos $\mathcal{O}_X(U) \longrightarrow \mathcal{O}_X(V)$, es decir, para cualquier $a \in \mathcal{O}_X(U)$ y cualquier $f \in \mathcal{F}(U)$ se tiene que $(af)|_V = a|_V f|_V$. Esto significa que el siguiente diagrama es conmutativo*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X(U) \times \mathcal{F}(U) & \longrightarrow & \mathcal{F}(U) \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \mathcal{O}_X(V) \times \mathcal{F}(V) & \longrightarrow & \mathcal{F}(V) \end{array}$$

Un morfismo $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ de $\mathcal{O}_X$-módulos es un morfismo de gavillas tales que para cada conjunto abierto $U \subseteq X$, la aplicación $\mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$ es un homomorfismo de $\mathcal{O}_X(U)$-módulos, es decir, el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X(U) \times \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{(\mathrm{id}_{\mathcal{O}_X(U)}, \varphi_U)} & \mathcal{O}_X(U) \times \mathcal{G}(U) \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\varphi_U} & \mathcal{G}(U) \end{array}$$

Nótese que el grupo de gérmenes $\mathcal{F}_x$ es un $\mathcal{O}_{X,x}$-módulo. En efecto, por definición $\mathcal{O}_{X,x} = \{[(U,s)] \,|\, U \subseteq X$ abierto, $x \in U$ y $s \in \mathcal{O}_X(U)\}$ y $\mathcal{F}_x = \{[(V,f)] \,|\, V \subseteq X$ abierto, $x \in V$ y $f \in \mathcal{F}(V)\}$. Sean $s_x = [(U,s)] \in \mathcal{O}_{X,x}$, y $f_x = [(V,f)] \in \mathcal{F}_x$. Entonces, $W = U \cap V$ es un abierto no vacío contenido en U y en V. Por lo tanto, $[(U,s)] = [(W, s|_W)]$ y $[(V,f)] = [(W, f|_W)]$, con $s|_W \in \mathcal{O}_X(W)$ y $f|_W \in \mathcal{F}(W)$, esto implica que $s|_W f|_W \in \mathcal{F}(W)$, pues $\mathcal{F}(W)$ por definición es un $\mathcal{O}_X(W)$-módulo. Así, el gérmen determinado por $s|_W f|_W \in \mathcal{F}(W)$ es precisamente $s_x f_x$, es decir, $s_x f_x \in \mathcal{F}_x$. Por lo tanto, $\mathcal{F}_x$ es un $\mathcal{O}_{X,x}$-módulo.

También se cumple que $\varphi_x : \mathcal{F}_x \longrightarrow \mathcal{G}_x$ es un $\mathcal{O}_{X,x}$-homomorfismo.

Ahora que ya tenemos la noción general de gavillas de módulos sobre un espacio anillado, vamos a definir éstas gavillas sobre un esquema. Para esto definiremos primero la gavilla de módulos $\widetilde{M}$ sobre *Spec* A asociada al A-módulo M.

Definición 3.7 *Sean A un anillo, y M un A-módulo. La gavilla asociada a M sobre Spec A, denotada por $\widetilde{M}$, es dada como sigue. Para cada ideal primo $\mathfrak{p} \subseteq A$, sea $M_{\mathfrak{p}}$ la localización de M en $\mathfrak{p}$ (ver Ap. A.1, pág. 111). Para cualquier conjunto abierto $U \subseteq$ Spec A definamos el grupo $\widetilde{M}(U)$ como el conjunto de todas las funciones $s : U \longrightarrow \prod_{\mathfrak{p} \in U} M_{\mathfrak{p}}$, tal que para cada $\mathfrak{p} \in U$, $s(\mathfrak{p}) \in M_{\mathfrak{p}}$, y tal que s es localmente un cociente m/f con $m \in M$ y $f \in A$. Para ser más precisos, requerimos que para cada $\mathfrak{p} \in U$ exista una vecindad abierta V de $\mathfrak{p}$ en U, y elementos $m \in M$ y $f \in A$, tales que para cada $\mathfrak{q} \in V, f \notin \mathfrak{q}$, y $s(\mathfrak{q}) = m/f$ en $M_{\mathfrak{q}}$. Entonces, usando las restricciones obvias* *de funciones hacemos de $\widetilde{M}$ una gavilla de módulos (la prueba es similar a la de la gavilla estructural sobre* $\operatorname{Spec} A$*, ver página* 76*).*

La siguiente proposición reune las propiedades básicas de la gavilla $\widetilde{M}$.

Proposición 3.3 *Sean A un anillo, M un A-módulo y $\widetilde{M}$ la gavilla asociada a M sobre $\operatorname{Spec} A$. Entonces:*

(a) *$\widetilde{M}$ es un $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}$-módulo;*

(b) *Para cada $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$, el grupo de gérmenes $(\widetilde{M})_{\mathfrak{p}}$ de la gavilla $\widetilde{M}$ en $\mathfrak{p}$ es isomorfo al módulo localizado $M_{\mathfrak{p}}$;*

(c) *Para cualquier $f \in A$, el A_f-módulo $\widetilde{M}(D(f))$ es isomorfo al módulo localizado M_f;*

(d) *En particular, $\widetilde{M}(\operatorname{Spec} A) \cong M$.*

Demostración.

Recordando la construcción de la gavilla estructural $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}$ (pág. 75), es claro que $\widetilde{M}(U)$ es un $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}(U)$-módulo. En efecto, si fijamos $\mathfrak{p}$ en U, entonces para $s \in \widetilde{M}(U)$ y $t \in \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}(U)$ existen vecindades abiertas $V_{\mathfrak{p}}$, $W_{\mathfrak{p}}$ de $\mathfrak{p}$ contenidas en U, respectivamente, y elementos $m \in M$; $f, a, g \in A$, tales que para todo $\mathfrak{q} \in V_{\mathfrak{p}}, W_{\mathfrak{p}}$; $f, g \notin \mathfrak{q}$, se tiene que $s(\mathfrak{q}) = m/f \in M_{\mathfrak{q}}$ y $t(\mathfrak{q}) = a/g \in A_{\mathfrak{q}}$. Luego, $\Gamma = V_{\mathfrak{p}} \cap W_{\mathfrak{p}}$ es una vecindad abierta de $\mathfrak{p}$ contenida en U. Por lo tanto, para todo $\mathfrak{r} \in \Gamma$, $s(\mathfrak{r}) = m/f$ en $M_{\mathfrak{r}}$ y $t(\mathfrak{r}) = a/g$ en $A_{\mathfrak{r}}$, lo cual implica que $am/fg \in M_{\mathfrak{r}}$, pues $M_{\mathfrak{r}}$ es un $A_{\mathfrak{r}}$-módulo, y $fg \notin \mathfrak{r}$. Hemos probado entonces que la función st está en el grupo $\widetilde{M}(U)$, y en consecuencia $\widetilde{M}(U)$ es un $\mathcal{O}_{Spec\,A}(U)$- módulo.

Las pruebas de $(b), (c)$ y (d) son identicas a las de $1, 2$ y 3 de la Proposición 3.1, reemplazando A por M en lugares apropiados. ■

Hemos definido entonces gavillas de módulos sobre esquemas afines. Estas gavillas de la forma $\widetilde{M}$ sobre esquemas afines son nuestros módelos para gavillas casi-coherentes. En otras palabras las gavillas casi-coherentes sobre esquemas afines son de la forma $\widetilde{M}$.

Definición 3.8 *Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un esquema. Un $\mathcal{O}_X$-módulo $\mathcal{F}$ es casi-coherente si X puede ser cubierto por subconjuntos abiertos afines $U_i = Spec\,A_i$, tales que para cada i hay un A_i-módulo M_i con $\mathcal{F}|_{U_i} \cong \widetilde{M_i}$.*

El siguiente ejemplo dejará claro que significa la definición de gavilla casi-coherente.

Ejemplo 3.4 *Sobre cualquier esquema X, la gavilla estructural $\mathcal{O}_X$ es una gavilla de $\mathcal{O}_X$- módulos, pues para cada abierto $U \subseteq X$ el anillo $\mathcal{O}_X(U)$ en particular es un $\mathcal{O}_X(U)$-módulo. Como X es un esquema, podemos cubrirlo con abiertos afines U_i, es decir, de la forma $Spec\,A_i$ para algún anillo A_i, luego $\mathcal{O}_X|_{U_i} \cong \widetilde{A_i}$, donde A_i es un A_i-módulo. Por lo tanto, $\mathcal{O}_X$ es una gavilla casi-coherente.*

No toda gavilla sobre un esquema afín $Spec\,A$ es casi-coherente. Por ejemplo, para un punto fijo $\mathfrak{p} \in Spec\,A$, como en el Ejemplo 1.1 podemos definir la gavilla rascacielos $A^{\mathfrak{p}}_{Spec\,A}$ tal que para todo abierto U de $Spec\,A$,

$$A^{\mathfrak{p}}_{Spec\,A}(U) = \begin{cases} A & \text{si} \quad \mathfrak{p} \in U \\ \{0\} & \text{si} \quad \mathfrak{p} \notin U \end{cases}$$

No es difícil probar que $(A^{\mathfrak{p}}_{Spec\,A})_{\mathfrak{p}} \cong A$. Basta definir la aplicación $\varphi : A \longrightarrow (A^{\mathfrak{p}}_{Spec\,A})_{\mathfrak{p}}$, tal que $a \longmapsto [(Spec\,A, a)]$. Si $\varphi(a) = [(Spec\,A, a)] = [(Spec\,A, 0_{A^{\mathfrak{p}}_{Spec\,A}(Spec\,A)})]$, entonces existe $W \subseteq Spec\,A$ abierto tal que $\mathfrak{p} \in W$, y $a|_W = 0_{A^{\mathfrak{p}}_{Spec\,A}(W)}$. Luego, $a = 0_A$ y así φ es inyectiva. Por otro lado, si $[(U, a)] \in (A^{\mathfrak{p}}_{Spec\,A})_{\mathfrak{p}}$, entonces $a \in A$ es la preimagen del gérmen $[(U, a)]$, pues $\varphi(a) = [(Spec\,A, a)] = [(U, a)]$. Por lo tanto, φ es sobreyectiva, y entonces es un isomorfismo. Es fácil verificar que φ es un homomorfismo bien definido. De esta manera la gavilla $A^{\mathfrak{p}}_{Spec\,A}$ no es casi-coherente, pues si lo fuera debería de existir un A-módulo M tal que $A^{\mathfrak{p}}_{Spec\,A} \cong \widetilde{M}$, pero para $\mathfrak{p} \in Spec\,A$, $(\widetilde{M})_{\mathfrak{p}} \cong M_{\mathfrak{p}}$ (Proposición 3.3, (b)) y $(A^{\mathfrak{p}}_{Spec\,A})_{\mathfrak{p}} \cong A$. Luego, M no existe (dos gavillas son iguales si y sólo si sus grupos de gérmenes son iguales).

Si el punto $\mathfrak{p}$ es cerrado en el espacio topológico $Spec\,A$, entonces para todo $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}$, se tiene que $(A^{\mathfrak{p}}_{Spec\,A})_{\mathfrak{q}} = \{0\}$.

Capítulo 4

Cohomología sobre Esquemas Afines Noetherianos

En este capítulo probaremos el objetivo principal de este trabajo de tesis. El método consiste principalmente en considerar una resolución inyectiva de un A-módulo digamos M, esto con la finalidad de construir una resolución fofa de la gavilla casi-coherente asociada al módulo M sobre el esquema noetheriano Spec A. La construcción de esta resolución no es sencilla, por lo que necesitaremos de herramienta algebraica para su construcción. El resultado que probaremos vale para cualquier esquema afín.

4.1 Cohomología de Gavillas Casi-Coherentes sobre Esquemas Afines Noetherianos

En esta sección mostraremos que los esquemas afines noetherianos se caracterizan (entre los esquemas noetherianos) por que su cohomología respecto de las gavillas casi-coherentes es trivial. El punto clave es mostrar que si I es un A-módulo inyectivo, (ver Ap. A.3, pág. 114) entonces la gavilla $\widetilde{I}$ sobre $Spec\,A$ es fofa. Para ello iniciamos con algunos resultados algebraicos, los cuales serán fundamentales para lograr nuestro objetivo.

Lema 4.1 *Sea $\mathfrak{a}$ un ideal de un anillo noetheriano A, y sea I un A-módulo inyectivo. Entonces,*

$$J = \{a \in I \,|\, \mathfrak{a}^n a = \{0\} \text{ para algún entero positivo } n\}$$

es también un A-módulo inyectivo.

Demostración. Para probar que J es inyectivo es suficiente mostrar que para cualquier ideal $\mathfrak{b}$ de A, y para cualquier homomorfismo $\varphi : \mathfrak{b} \longrightarrow J$, existe un homomorfismo $\psi : A \longrightarrow J$ que extiende a φ (ver Ap. A.3, pág. 115).

Es trabajo fácil probar que J es un A-módulo. En efecto, si $a, b \in J$, entonces existen n, m enteros positivos tales que $\mathfrak{a}^n a = \{0\}$ y $\mathfrak{a}^m b = \{0\}$, luego $a - b \in J$. Si $r \in A$ y $a \in J$ es claro que $ra \in J$. Así, J es un A-módulo.

Para un ideal $\mathfrak{b}$ de A la inclusión $\mathfrak{b} \subseteq A$ induce la aplicación A-lineal

$$\delta : Hom_A(A, J) \longrightarrow Hom_A(\mathfrak{b}, J).$$

Probaremos que δ es sobreyectiva. Sea $\varphi \in Hom_A(\mathfrak{b}, J)$, entonces para cada $b \in \mathfrak{b}$ existe un entero positivo n tal que $\mathfrak{a}^n\varphi(b) = \{0\}$. Como A es noetheriano, $\mathfrak{b}$ es finitamente generado, luego existen $n_1, ..., n_r \in \mathbb{Z}^+$ tales que $\mathfrak{a}^{n_1}\varphi(b_1) = \{0\}, ..., \mathfrak{a}^{n_r}\varphi(b_r) = \{0\}$. Al tomar $N \geq n_1 + ... + n_r$ resulta que $\mathfrak{a}^N\varphi(\mathfrak{b}) = \{0\}$.

El Lema de *Artin-Rees* (ver Ap. A.2, pág. 114) implica que para algún entero positivo r, $\mathfrak{a}^m A \cap \mathfrak{b} = \mathfrak{a}^{m-r}(\mathfrak{a}^r A \cap \mathfrak{b})$ para $m \geq r$, es decir, $\mathfrak{a}^m \cap \mathfrak{b} = \mathfrak{a}^{m-r}(\mathfrak{a}^r \cap \mathfrak{b})$. Por lo tanto, para $n \geq N + r$,

$$\varphi(\mathfrak{a}^n \cap \mathfrak{b}) = \varphi(\mathfrak{a}^{n-r}(\mathfrak{a}^r \cap \mathfrak{b})) = \mathfrak{a}^{n-r}\varphi(\mathfrak{a}^r \cap \mathfrak{b}) \subseteq \mathfrak{a}^{n-r}\varphi(\mathfrak{b}) = \{0\}.$$

Es decir, $\varphi(\mathfrak{a}^n \cap \mathfrak{b}) \subseteq \{0\}$. Así, $\varphi : \mathfrak{b} \longrightarrow J$ induce la aplicación A-lineal $\widetilde{\varphi} : \mathfrak{b}/\mathfrak{a}^n \cap \mathfrak{b} \longrightarrow J \subseteq I$, dada por $b + \mathfrak{a}^n \cap \mathfrak{b} \longmapsto \varphi(b)$. De manera similar, como $i(\mathfrak{a}^n \cap \mathfrak{b}) = \mathfrak{a}^n \cap \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}^n$, el homomorfismo $i : \mathfrak{b} \longrightarrow A$ induce la aplicación A-lineal $\widetilde{i} : \mathfrak{b}/\mathfrak{a}^n \cap \mathfrak{b} \longrightarrow A/\mathfrak{a}^n$, dada por $b + \mathfrak{a}^n \cap \mathfrak{b} \longmapsto b + \mathfrak{a}^n$. Esta última aplicación es inyectiva, pues $\widetilde{i}(b + \mathfrak{a}^n \cap \mathfrak{b}) = \mathfrak{a}^n$ implica que $b \in \mathfrak{a}^n$, y como $b \in \mathfrak{b}$, entonces $b \in \mathfrak{a}^n \cap \mathfrak{b}$.

Luego, como I es inyectivo existe una aplicación A-lineal $\widetilde{\psi} : A/\mathfrak{a}^n \longrightarrow I$, tal que $\widetilde{\psi} \circ \widetilde{i} = \widetilde{\varphi}$. Sea $p : A \longrightarrow A/\mathfrak{a}^n$ el homomorfismo proyección natural, y consideremos la aplicación $\psi : A \longrightarrow I$, donde $\psi = \widetilde{\psi} \circ p$. Entonces, para cada $a \in A$ se tiene que $\mathfrak{a}^n\psi(a) = \psi(\mathfrak{a}^n a) \subseteq \psi(\mathfrak{a}^n) = \widetilde{\psi} \circ p(\mathfrak{a}^n) = \widetilde{\psi}(\bar{0}) = \{0\}$, es decir, $\psi(a) \in J$. Por lo tanto, $\psi \in Hom_A(A, J)$.

Además, si $x \in \mathfrak{b}$, entonces $\psi(x) = \widetilde{\psi} \circ p(x) = \widetilde{\psi}(x + \mathfrak{a}^n) = \widetilde{\varphi}(x + \mathfrak{a}^n \cap \mathfrak{b}) = \varphi(x)$. De esta manera φ es la imagen de $\psi \in Hom_A(A, J)$. Esto prueba que δ es sobreyectiva. ■

Para probar el siguiente lema es necesario tener las nociones de gavillas con soporte. A continuación daremos una pequeña teoría de estas gavillas. Para ello iniciamos con la siguiente definición.

Definición 4.1 *Sea $\mathcal{F}$ una gavilla sobre un espacio topológico X. El soporte de una gavilla $\mathcal{F}$ es el conjunto $Supp\,\mathcal{F} = \{x \in X \mid \mathcal{F}_x \neq \{0\}\}$.*

Si $\mathcal{F}$ es una gavilla sobre el espacio topológico X, y s una sección de $\mathcal{F}$ sobre un conjunto abierto U, el soporte de s denotado por $Supp\, s$, es definido como el conjunto $\{p \in U \mid s_p \neq 0\}$.

En lo que sigue diremos que si Z es un subconjunto cerrado de un espacio topológico X, y $\mathcal{F}$ una gavilla sobre X, entonces $\Gamma_Z(X, \mathcal{F})$ es el subgrupo de $\Gamma(X, \mathcal{F})$ que consiste de todas las secciones cuyo soporte está contenido en Z. Luego, la asignación

$$V \longmapsto \Gamma_{Z \cap V}(V, \mathcal{F}|_V), \text{ para cada abierto } V \text{ de } X$$

define una subgavilla de $\mathcal{F}$ con soporte en Z, y la denotaremos por $\mathcal{H}^0_Z(\mathcal{F})$.

El siguiente lema establece que los módulos inyectivos del tipo J del Lema 4.1 coinciden con el conjunto de secciones de $\widetilde{I}$ sobre $Spec\, A$, que tienen soporte en el conjunto cerrado determinado por el ideal $\mathfrak{a}$. Denotaremos al módulo J del Lema 4.1 por:

$$\Gamma_{\mathfrak{a}}(I) = \{s \in I \mid \mathfrak{a}^n s = \{0\} \text{ para algún entero positivo } n > 0\}.$$

Lema 4.2 *Sean A un anillo noetheriano, I un $A-$módulo, y $\mathfrak{a}$ un ideal de A. Entonces,* $\Gamma_{V(\mathfrak{a})}(Spec\, A, \widetilde{I}) = \Gamma_{\mathfrak{a}}(I)$.

Demostración. Sea $s \in \widetilde{I}(Spec\, A) \cong I$ tal que $Supp\, s \subseteq V(\mathfrak{a})$. Si $\mathfrak{p} \notin V(\mathfrak{a})$, entonces $s_{\mathfrak{p}} = 0_{I_p}$, esto es, $s/1_A = 0_I/1_A$, es decir, existe $u \notin \mathfrak{p}$ tal que $us = 0_I$. Si L es el aniquilador de s, entonces $u \in L$, y por tanto $L \nsubseteq \mathfrak{p}$, pero esto significa que $\mathfrak{p} \notin V(L)$. Luego, $V(L) \subseteq V(\mathfrak{a})$, es decir, $\sqrt{L} \supseteq \sqrt{\mathfrak{a}} \supseteq \mathfrak{a}$ (Lema 3.1, (c)). Como A es noetheriano, $\mathfrak{a}$ es finitamente generado, entonces para el conjunto finito de generadores $f_i \in \mathfrak{a}$, $i = 1, 2, ..., r$, existe un entero positivo N tal que satisface $f_i^N \in L$. Así, $f_i^N s = 0_I$, es decir, $\mathfrak{a}^N s = \{0\}$. Por lo tanto, $\Gamma_{V(\mathfrak{a})}(Spec\, A, \widetilde{I}) \subseteq \Gamma_{\mathfrak{a}}(I)$.

Conversamente, si $s \in \Gamma_{\mathfrak{a}}(I)$, entonces $\mathfrak{a}^n s = \{0\}$ para algún $n > 0$. Sea $\mathfrak{p} \in Spec\, A$ tal que $\mathfrak{p} \notin V(\mathfrak{a})$, entonces $\mathfrak{a} \nsubseteq \mathfrak{p}$, es decir, existe $f \in \mathfrak{a}$ tal que $f \notin \mathfrak{p}$, luego $f^n \notin \mathfrak{p}$, y $f^n \in \mathfrak{a}^n$, por lo que $f^n s = 0_I$. Por lo tanto, $s_{\mathfrak{p}} = s/1_A = f^n s/f^n = 0_{I_{\mathfrak{p}}}$. Así, $Supp\, s \subseteq V(\mathfrak{a})$, es decir, $s \in \Gamma_{V(\mathfrak{a})}(Spec\, A, \widetilde{I})$. Por lo tanto, $\Gamma_{\mathfrak{a}}(I) \subseteq \Gamma_{V(\mathfrak{a})}(Spec\, A, \widetilde{I})$. ■

El siguiente lema nos dice bajo que condiciones una subgavilla (con soporte) de una gavilla casi-coherente es casi-coherente.

Lema 4.3 *Con las mismas hipótesis del Lema 4.2 se cumple que,* $\mathcal{H}^0_{V(\mathfrak{a})}(\widetilde{I}) \cong \widetilde{\Gamma_{\mathfrak{a}}(I)}$.

Demostración. Por el Teorema 1.2 es suficiente probar que para todo $\mathfrak{p} \in Spec\, A$, $(\mathcal{H}^0_{V(\mathfrak{a})}(\widetilde{I}))_{\mathfrak{p}} \cong (\widetilde{\Gamma_{\mathfrak{a}}(I)})_{\mathfrak{p}}$, es decir, $(\mathcal{H}^0_{V(\mathfrak{a})}(\widetilde{I}))_{\mathfrak{p}} \cong (\Gamma_{\mathfrak{a}}(I))_{\mathfrak{p}}$.

Para $\mathfrak{p} \in Spec\, A$, tenemos la aplicación A-lineal canónica $\psi : I \longrightarrow I_{\mathfrak{p}}$, es decir, (Proposición 3.3, (b)) la aplicación A-lineal $\psi : I \longrightarrow (\widetilde{I})_{\mathfrak{p}}$. Es claro que $\Gamma_{\mathfrak{a}}(I)$ y $(\mathcal{H}^0_{V(\mathfrak{a})}(\widetilde{I}))_{\mathfrak{p}}$ son A-submódulos de I y $(\widetilde{I})_{\mathfrak{p}} = I_{\mathfrak{p}}$, respectivamente. Para obtener una aplicación A-lineal de $\Gamma_{\mathfrak{a}}(I)$ en $(\mathcal{H}^0_{V(\mathfrak{a})}(\widetilde{I}))_{\mathfrak{p}}$ probaremos que si $n \in \Gamma_{\mathfrak{a}}(I)$, entonces $Supp\, n \subseteq V(\mathfrak{a})$. Puesto que $Supp\, n = V(Ann(n))$ (ver Ap. A.1, pág. 112), $Supp\, n \subseteq V(\mathfrak{a})$ si y sólo si $\sqrt{Ann(n)} \supseteq \sqrt{\mathfrak{a}} \supseteq \mathfrak{a}$, lo cual equivale a que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f_i^N \in Ann(n)$ ($\mathfrak{a} =< f_1, ..., f_r >$), es decir, $\mathfrak{a}^N \subseteq Ann(n)$, y esto es lo mismo decir que $n \in \Gamma_{\mathfrak{a}}(I)$. Así, si $n \in \Gamma_{\mathfrak{a}}(I)$, entonces $Supp\, n \subseteq V(\mathfrak{a})$, es decir, $\psi(\Gamma_{\mathfrak{a}}(I)) \subseteq (\mathcal{H}^0_{V(\mathfrak{a})}(\widetilde{I}))_{\mathfrak{p}}$.

Entonces, la aplicación $\varphi : \Gamma_{\mathfrak{a}}(I) \longrightarrow (\mathcal{H}^0_{V(\mathfrak{a})}(\widetilde{I}))_{\mathfrak{p}}$ es A-lineal. El siguiente paso es probar que para todo $s \in A - \mathfrak{p}$, la aplicación $h_s : (\mathcal{H}^0_{V(\mathfrak{a})}(\widetilde{I}))_{\mathfrak{p}} \longrightarrow (\mathcal{H}^0_{V(\mathfrak{a})}(\widetilde{I}))_{\mathfrak{p}}$, dada por $n/t \longmapsto (s/1_A)\cdot (n/t)$ es biyectiva. Sea $h_s(n/t) = 0_{I_{\mathfrak{p}}}$, es decir, $(s/1_A)\cdot (n/t) = 0_{I_{\mathfrak{p}}}$, entonces $n/t = 0_{I_{\mathfrak{p}}}$, pues $s/1_A$ es invertible en $A_{\mathfrak{p}}$. Por lo tanto, existe $u \in A - \mathfrak{p}$ tal que $un = 0_I$. Así, $n/t = 0_I/1_A$, esto prueba que h_s es inyectiva. Si $n/t \in (\mathcal{H}^0_{V(\mathfrak{a})}(\widetilde{I}))_{\mathfrak{p}}$, entonces $h_s((n/st)) = (s/1_A)\cdot (n/st) = n/t$, luego h_s es sobreyectiva. Por lo tanto, h_s es biyectiva.

Por la propiedad universal de la localización existe la aplicación A-lineal $\widetilde{\varphi} : (\Gamma_{\mathfrak{a}}(I))_{\mathfrak{p}} \longrightarrow (\mathcal{H}^0_{V(\mathfrak{a})}(\widetilde{I}))_{\mathfrak{p}}$, dada por $n/t \longmapsto ((n/t)I_{\mathfrak{q}})_{\mathfrak{q}\in D(t)}$. Probaremos que esta aplicación es biyectiva. Si $\widetilde{\varphi}(n/t) = 0_{I_{\mathfrak{p}}}$, entonces $n/t = 0_{I_{\mathfrak{p}}}$, es decir, existe $u \in A - \mathfrak{p}$ tal que $un = 0_I$. Por lo tanto, $n/t = 0_I/1_A$, luego $\widetilde{\varphi}$ es inyectiva. Sea $n/t \in I_{\mathfrak{p}}$ tal que $Supp\, n \subseteq V(\mathfrak{a})$. Probaremos que $n \in \Gamma_{\mathfrak{a}}(I)$. Como antes, $Supp\, n \subseteq V(\mathfrak{a})$ implica que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f_i^N \in Ann(n)$, $i = 1, ...r$, esto es, $\mathfrak{a}^N = (< f_1, ..., f_r >)^N \subseteq Ann(n)$, es decir, $n \in \Gamma_{\mathfrak{a}}(I)$. Por lo tanto, $\widetilde{\varphi}$ es sobreyectiva. Luego, $(\Gamma_{\mathfrak{a}}(I))_{\mathfrak{p}} \cong (\mathcal{H}^0_{V(\mathfrak{a})}(\widetilde{I}))_{\mathfrak{p}}$. La Proposición 3.3, ($b$) y el Teorema 1.2, nos dan $\widetilde{\Gamma_{\mathfrak{a}}(I)} \cong \mathcal{H}^0_{V(\mathfrak{a})}(\widetilde{I})$. ■

Enseguida probaremos el lema que será clave para nuestro objetivo.

Lema 4.4 *Para un anillo noetheriano A, el $\mathcal{O}_{Spec\,A}$-módulo $\widetilde{I}$ determinado por el A-módulo inyectivo I es una gavilla fofa sobre $Spec\,A$.*

Demostración. Para $f \in A$, $D(f)$ es un abierto básico de la topología de $Spec\,A$. Probaremos que la aplicación restricción

$$\rho_{D(f)}^{Spec\,A} : \Gamma(Spec\,A, \widetilde{I}) \longrightarrow \Gamma(D(f), \widetilde{I}) \text{ es sobreyectiva.}$$

De (c) y (d) de la Proposición 3.3 se sigue que esta aplicación es el homomorfismo natural inducido por la localización, es decir, $I \longrightarrow I_f$. Los elementos de I_f son de la forma a/f^m con $a \in I$ y f^m elemento del conjunto multiplicativo $\{1, f, f^2, ...\} \subseteq A$. Entonces, basta probar que cualquier elemento a/f^m en I_f puede escribirse de la forma $a/f^m = b/1_A$ para algún $b \in I$. Así, la sobreyectividad de $\Gamma(Spec\,A, \widetilde{I}) \longrightarrow \Gamma(D(f), \widetilde{I})$ quedará probada. Sea

$$\mathfrak{a} = \{x \in A \,|\, f^n x = 0_A \text{ para algún entero positivo } n\}.$$

Como $0 \in \mathfrak{a}$, $\mathfrak{a} \neq \varnothing$. Del Lema 4.1 se sigue que $\mathfrak{a}$ es un ideal de A. Si $\mathfrak{a} = A$, entonces existe un entero positivo n tal que $f^n \cdot 1_A = 0_A$. Es decir, f es un elemento nilpotente de A, por lo que las igualdades $D(f) = D(f^n) = D(0)$ implican que $D(f) = \varnothing$. Por lo tanto, $\Gamma(Spec\,A, \widetilde{I}) \longrightarrow \Gamma(D(f), \widetilde{I})$ es trivialmente sobreyectiva.

Supongamos $\mathfrak{a} \neq A$. Como A es noetheriano, $\mathfrak{a}$ debe ser finitamente generado, entonces existe un entero positivo N tal que $f^N \mathfrak{a} = \{0\}$. Así, podemos definir la aplicación A-lineal

$$\alpha : A/\mathfrak{a} \longrightarrow A, \text{ tal que } r + \mathfrak{a} \longmapsto f^{N+m} r.$$

Esta aplicación es inyectiva. En efecto, si $\alpha(r+\mathfrak{a}) = 0_A$, entonces $f^{N+m}r = 0_A$, es decir, $r \in \mathfrak{a}$.

Definamos $\varphi \in Hom_A(A/\mathfrak{a}, I)$, por $r+\mathfrak{a} \longmapsto rf^N a$. Es rutina verificar que φ es una aplicación A-lineal bien definida. Luego, como I es un A-módulo inyectivo existe $\psi \in Hom_A(A, I)$ tal que $\psi \circ \alpha = \varphi$. Hagamos $b = \psi(1)$. Entonces,

$$f^N a = \varphi(1+\mathfrak{a}) = \psi(\alpha(1+\mathfrak{a})) = \psi(f^{N+m}) = \psi(f^{N+m}\cdot 1) = f^{N+m}b.$$

Así, $a/f^m = f^N a/f^{N+m} = f^{N+m}b/f^{N+m} = b/1_A$. Por lo tanto,

$$\Gamma(Spec\,A, \widetilde{I}) \longrightarrow \Gamma(D(f), \widetilde{I}) \text{ es sobreyectiva.}$$

A continuación probaremos que para cualquier U abierto de $Spec\,A$ la aplicación restricción

$$\rho_U^{Spec\,A} : \Gamma(Spec\,A, \widetilde{I}) \longrightarrow \Gamma(U, \widetilde{I}) \text{ es sobreyectiva.}$$

Usaremos inducción noetheriana sobre $Y = \overline{Supp\,\widetilde{I}}$, es decir, inducción sobre la clausura del $Supp\,\widetilde{I} = \{\mathfrak{p} \in Spec\,A | (\widetilde{I})_{\mathfrak{p}} \neq \{0\}\}$. Si Y consiste de un sólo punto $\mathfrak{p}$ cerrado de $Spec\,A$, entonces $\widetilde{I}$ es una gavilla rascacielos respecto del punto cerrado $\mathfrak{p}$, esto es debido a que para todo $\mathfrak{q} \in Spec\,A \backslash \{\mathfrak{p}\}$, $(\widetilde{I})_{\mathfrak{q}} = \{0\}$, así por el Teorema 1.2, y el resultado de la página 95, $\widetilde{I}$ es una gavilla rascacielos, y por lo tanto es obviamente fofa.

Supongamos $|Y| > 1$. Si $Y \cap U = \varnothing$, entonces no hay nada que probar, pues para todo $\mathfrak{q} \in U$, $(\widetilde{I})_{\mathfrak{q}} = \{0\}$, y entonces $\Gamma(U, \widetilde{I}) = \{0\}$. Así, $\rho_U^{Spec\,A}$ es trivialmente sobreyectiva. Si $Y \cap U \neq \varnothing$ podemos encontrar $f \in A$ tal que $D(f) \subseteq U$ y $D(f) \cap Y \neq \varnothing$. Sea $Z = Spec\,A - D(f) = V((f))$, y consideremos la siguiente sucesión

$$I = \Gamma(Spec\,A, \widetilde{I}) \overset{\rho_U^{Spec\,A}}{\longrightarrow} \Gamma(U, \widetilde{I}) \overset{\rho_{D(f)}^{U}}{\longrightarrow} \Gamma(D(f), \widetilde{I}) = I_f$$

Si $\Gamma_Z(Spec\,A, \widetilde{I})$ y $\Gamma_Z(U, \widetilde{I})$ son el conjunto de secciones en $\Gamma(Spec\,A, \widetilde{I})$ y $\Gamma(U, \widetilde{I})$, respectivamente, tales que su soporte está contenido en Z, entonces $\Gamma_Z(Spec\,A, \widetilde{I}) \hookrightarrow \Gamma(Spec\,A, \widetilde{I})$ y $\Gamma_Z(U, \widetilde{I}) \hookrightarrow \Gamma(U, \widetilde{I})$ inducen la aplicación $\Gamma_Z(Spec\,A, \widetilde{I}) \longrightarrow \Gamma_Z(U, \widetilde{I})$.

Sea $s \in \Gamma(U, \widetilde{I})$, consideremos su imagen s' en $\Gamma(D(f), \widetilde{I})$, luego existe $t \in \Gamma(Spec\,A, \widetilde{I}) \cong I$ tal que $\rho_{D(f)}^{Spec\,A}(t) = s'$. Sea $t|_U = t'$. Entonces, la sección $s - t' \longmapsto 0_{I_f}$, así $s - t'$ tiene soporte en Z. En efecto, $\rho_{D(f)}^{U}(s - t') = 0_{I_f}$ significa que $s|_{D(f)} - t'|_{D(f)} = 0_{\widetilde{I}(D(f))}$, es decir, $(s - t')|_{D(f)} = 0_{\widetilde{I}(D(f))}$, lo cual implica que para todo $\mathfrak{p} \in D(f)$, $(s - t')_{\mathfrak{p}} = 0_{I_{\mathfrak{p}}}$, es decir, $Supp(s - t') \subseteq Spec\,A \backslash D(f) = Z$. Así, para completar la demostración será suficiente mostrar que $\Gamma_Z(Spec\,A, \widetilde{I}) \longrightarrow \Gamma_Z(U, \widetilde{I})$ es sobreyectiva.

Sea $\mathfrak{a}$ el ideal de A generado por f. Entonces, del Lema 4.2 se sigue que $\Gamma_Z(Spec\,A, \widetilde{I}) \cong \Gamma_{\mathfrak{a}}(I)$ (donde $Z = V(\mathfrak{a})$), y por el Lema 4.1, $\Gamma_{\mathfrak{a}}(I)$ es un A-módulo inyectivo. Además, $Supp\,\widetilde{\Gamma_{\mathfrak{a}}(I)} \subseteq Y \cap Z$. En efecto, si $\mathfrak{p} \notin Y \cap Z$, entonces $\mathfrak{p} \notin Y$ o $\mathfrak{p} \notin Z$. Si $\mathfrak{p} \notin Z$, entonces $\mathfrak{p} \in D(f)$, es decir, $f \notin \mathfrak{p}$. Sea $\alpha/\beta \in (\widetilde{\Gamma_{\mathfrak{a}}(I)})_{\mathfrak{p}} \cong (\Gamma_{\mathfrak{a}}(I))_{\mathfrak{p}}$, con $\alpha \in \Gamma_{\mathfrak{a}}(I)$, y $\beta \notin \mathfrak{p}$. Note que $\alpha \in \Gamma_{\mathfrak{a}}(I)$ implica que $\mathfrak{a}^m \alpha = \{0\}$ para algún $m > 0$, es decir, $f^m \alpha = 0_I$, pues f es el generador del ideal $\mathfrak{a}$. Por lo tanto, $\alpha/\beta = f^m\alpha/f^m\beta = 0_I/1_A$. Así, $(\widetilde{\Gamma_{\mathfrak{a}}(I)})_{\mathfrak{p}} = \{0\}$. Si $\mathfrak{p} \notin Y$, entonces $(\widetilde{I})_{\mathfrak{p}} = \{0\}$. Luego, como $\Gamma_{\mathfrak{a}}(I)$ es A-submódulo de I se tiene que $(\Gamma_{\mathfrak{a}}(I))_{\mathfrak{p}}$ es un $A_{\mathfrak{p}}$-submódulo de $I_{\mathfrak{p}}$, es decir,

$(\widetilde{\Gamma_{\mathfrak{a}}(I)})_{\mathfrak{p}}$ es un $A_{\mathfrak{p}}$-submódulo de $(\widetilde{I})_{\mathfrak{p}}$. Así, $(\widetilde{\Gamma_{\mathfrak{a}}(I)})_{\mathfrak{p}} = \{0\}$.

Por otro lado, $Y \cap Z$ está contenido estrictamente en Y. Pues $Y \cap Z = Y$ implica que $Y \subseteq Z$, es decir, $Y \cap D(f) = \varnothing$, lo cual es una contradicción. Luego, $\overline{Supp\, \widetilde{\Gamma_{\mathfrak{a}}(I)}}$ está estrictamente contenido en Y. Entonces, por hipótesis de inducción $\widetilde{\Gamma_{\mathfrak{a}}(I)}$ es una gavilla fofa. Así, la aplicación

$$\widetilde{\Gamma_{\mathfrak{a}}(I)}(Spec\, A) \longrightarrow \widetilde{\Gamma_{\mathfrak{a}}(I)}(U)$$

es sobreyectiva, es decir,

$$\Gamma_Z(Spec\, A, \widetilde{I}) \longrightarrow \widetilde{\Gamma_{\mathfrak{a}}(I)}(U)$$

es sobreyectiva.

Por otro lado, del Lema 4.3 se tiene que $\Gamma_{Z\cap U}(U, \widetilde{I}) = \widetilde{\Gamma_{\mathfrak{a}}(I)}(U)$, pero dado que $\Gamma_Z(U, \widetilde{I}) = \Gamma_{Z\cap U}(U, \widetilde{I})$, tenemos la aplicación sobreyectiva

$$\Gamma_Z(Spec\, A, \widetilde{I}) \longrightarrow \Gamma_Z(U, \widetilde{I})$$

La que queriamos.

Por lo tanto, existe $\mu \in \Gamma_Z(Spec\, A, \widetilde{I})$ tal que $\rho_U^{Spec\, A}(\mu) = s - t' = s - \rho_U^{Spec\, A}(t)$. Luego, $\mu + t \in \Gamma(Spec\, A, \widetilde{I})$ es la preimagen de la sección s. ■

Una aplicación A-lineal $\varphi : M \longrightarrow N$ induce un homomorfismo de $\mathcal{O}_X$-módulos $\widetilde{\varphi} : \widetilde{M} \longrightarrow \widetilde{N}$. En efecto, para un punto $\mathfrak{p} \in Spec\, A$, φ induce el homomorfismo localizado $\varphi_{\mathfrak{p}} : M_{\mathfrak{p}} \longrightarrow N_{\mathfrak{p}}$. Pero este es justamente (Proposición 3.3) el homomorfismo entre los grupos de gérmenes $\widetilde{\varphi}_{\mathfrak{p}} : (\widetilde{M})_{\mathfrak{p}} \longrightarrow (\widetilde{N})_{\mathfrak{p}}$. Así, tenemos el homomorfismo de $\mathcal{O}_{Spec\, A}$-módulos $\widetilde{\varphi} : \widetilde{M} \longrightarrow \widetilde{N}$.

Sea una sucesión exacta de A-módulos

$$M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow ...$$

entonces, para cada $\mathfrak{p} \in Spec\, A$, la sucesión de localizaciones

$$(M_1)_{\mathfrak{p}} \longrightarrow (M_2)_{\mathfrak{p}} \longrightarrow (M_3)_{\mathfrak{p}} \longrightarrow ... \text{ es exacta,}$$

es decir,

$$(\widetilde{M_1})_{\mathfrak{p}} \longrightarrow (\widetilde{M_2})_{\mathfrak{p}} \longrightarrow (\widetilde{M_3})_{\mathfrak{p}} \longrightarrow ... \text{ es exacta,}$$

y por la Proposición 2.1 se tiene la sucesión exacta de $\mathcal{O}_{Spec\, A}$-módulos

$$\widetilde{M_1} \longrightarrow \widetilde{M_2} \longrightarrow \widetilde{M_3} \longrightarrow ...$$

Ahora que tenemos a la mano el Lema 4.4, estamos en condiciones de probar nuestro objetivo principal.

Teorema 4.1 *Para todas las gavillas casi-coherentes $\mathcal{F}$ sobre el esquema afín $Spec\, A$ asociado al anillo noetheriano A, $H^n(Spec\, A, \mathcal{F}) = \{0\}$ para todo $n \geq 1$ y $H^0(Spec\, A, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(Spec\, A)$.*

Demostración. Sea $\mathcal{F}$ una gavilla casi-coherente y sea $M = \mathcal{F}(Spec\, A)$ el módulo sobre $\mathcal{O}_{Spec\, A}(Spec\, A)$, construiremos una resolución fofa de $\widetilde{M}$ utilizando una resolución inyectiva (ver Ap. A.3, pág. 115) del $A-$módulo M. Sea

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow I^0 \longrightarrow I^1 \longrightarrow I^2 \longrightarrow ...$$

una resolución inyectiva de M. Entonces, tenemos una sucesión exacta de gavillas casi-coherentes sobre $Spec\, A$

$$0 \longrightarrow \widetilde{M} \longrightarrow \widetilde{I^0} \longrightarrow \widetilde{I^1} \longrightarrow \widetilde{I^2} \longrightarrow ...$$

Luego, por el Lema 4.4 para $j \geq 0$, $\widetilde{I^j}$ es una gavilla fofa, por lo que la sucesión anterior es una resolución fofa de la gavilla casi-coherente $\widetilde{M}$. Al tomar secciones globales en la última sucesión, obtenemos

$$0 \longrightarrow \widetilde{M}(Spec\, A) \longrightarrow \widetilde{I^0}(Spec\, A) \longrightarrow \widetilde{I^1}(Spec\, A) \longrightarrow \widetilde{I^2}(Spec\, A) \longrightarrow ...$$

Por d) de la Proposición 3.3, $\widetilde{M}(Spec\, A) = M$ y $\widetilde{I^j}(Spec\, A) = I^j$, $j \geq 0$. Entonces, recuperamos la resolución inyectiva de M, la cual es exacta.

Por lo tanto, $H^0(Spec\, A, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(Spec\, A) = M$, y $H^n(Spec\, A, \mathcal{F}) = \{0\}$, $n \geq 1$. Esto prueba el teorema. ■

A continuación daremos una de las aplicaciones del Teorema 4.1.

Proposición 4.1 *Sea $Spec\, A$ un esquema afín noetheriano. Sea $0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$ una sucesión exacta de $\mathcal{O}_{Spec\, A}$-módulos, tal que $\mathcal{F}$ es casi-coherente. Entonces, la sucesión*

$$0 \longrightarrow \Gamma(Spec\, A, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(Spec\, A, \mathcal{F}') \longrightarrow \Gamma(Spec\, A, \mathcal{F}'') \longrightarrow 0$$

es exacta.

Demostración. Por el Teorema 2.3, la sucesión exacta de $\mathcal{O}_{Spec\, A}$-módulos

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F}'' \longrightarrow 0,$$

induce la sucesión larga exacta

$$0 \longrightarrow H^0(Spec\, A, \mathcal{F}) \longrightarrow H^0(Spec\, A, \mathcal{F}') \longrightarrow H^0(Spec\, A, \mathcal{F}'') \longrightarrow$$

$$\longrightarrow H^1(Spec\, A, \mathcal{F}) \longrightarrow H^1(Spec\, A, \mathcal{F}') \longrightarrow H^1(Spec\, A, \mathcal{F}'') \longrightarrow$$

$$\longrightarrow H^2(Spec\,A, \mathcal{F}) \longrightarrow H^2(Spec\,A, \mathcal{F}') \longrightarrow H^2(Spec\,A, \mathcal{F}'') \longrightarrow ...$$

Luego, del Teorema 4.1, se sigue que $H^n(Spec\,A, \mathcal{F}) = \{0\}$ para $n \geq 1$. Entonces, tenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \Gamma(Spec\,A, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(Spec\,A, \mathcal{F}') \longrightarrow \Gamma(Spec\,A, \mathcal{F}'') \longrightarrow 0.$$

Lo que queriamos. ■

La Proposición 4.1, de hecho nos dice que

$$H^n(Spec\,A, \mathcal{F}') \cong H^n(Spec\,A, \mathcal{F}'')$$

para $n \geq 1$, pues la sucesión

$$0 \longrightarrow H^n(Spec\,A, \mathcal{F}') \longrightarrow H^n(Spec\,A, \mathcal{F}'') \longrightarrow 0,$$

es exacta.

Apéndice A

Resultados Generales

A.1 Localización

Definición A.1 *Sea A un anillo conmutativo con unidad. Un subconjunto S de A se dice que es multiplicativo si $1_A \in S$, y para todo $x, y \in S$, $xy \in S$.*

Ejemplo A.1 *Sean A un anillo conmutativo, y $\mathfrak{p}$ un ideal de A. El ideal $\mathfrak{p} \in Spec\, A$, si y sólo si, $A \backslash \mathfrak{p}$ es multiplicativo. En efecto, sea $\mathfrak{p} \in Spec\, A$. Como $\mathfrak{p} \neq A$, se tiene que $1_A \notin \mathfrak{p}$, es decir, $1_A \in A \backslash \mathfrak{p}$. Sean $x, y \in A \backslash \mathfrak{p}$. Si $xy \notin A \backslash \mathfrak{p}$, entonces $xy \in \mathfrak{p}$, es decir, $x \in \mathfrak{p}$ o $y \in \mathfrak{p}$, lo cual contrádice la suposición $x, y \in A \backslash \mathfrak{p}$. Así, $A \backslash \mathfrak{p}$ es un conjunto multiplicativo. Conversamente, supongamos $A \backslash \mathfrak{p}$ un conjunto multiplicativo. De la hipótesis $1_A \in A \backslash \mathfrak{p}$ se sigue que $1_A \notin \mathfrak{p}$, así $\mathfrak{p} \neq A$. Ahora, si $xy \in \mathfrak{p}$, entonces $xy \notin A \backslash \mathfrak{p}$, es decir, $x \notin A \backslash \mathfrak{p}$ o $y \notin A \backslash \mathfrak{p}$, esto es, $x \in \mathfrak{p}$ o $y \in \mathfrak{p}$. Por lo tanto, $\mathfrak{p}$ es primo.*

Ejemplo A.2 *Sean A un anillo y $f \in A$ un elemento no nilpotente de A. Entonces, el conjunto $S = \{1, f, f^2, f^3, ...\}$ es un subconjunto multiplicativo de A.*

La localización es un caso particular del anillo de fracciones de un dominio entero. Localizar sobre un conjunto multiplicativo S significa encontrar el anillo más pequeño en el que todos los elementos de S tengan inverso multiplicativo.

Daremos la definición de manera general para un A-módulo M, y entonces $M = A$ será un caso particular.

Definición A.2 *Sean A un anillo conmutativo, S un subconjunto multiplicativo de A, y M un A-módulo. Definimos la localización $S^{-1}M$ de M con respecto a S como el conjunto de elementos m/s con $m \in M$ y $s \in S$, módulo la relación de equivalencia $m/s \sim m'/s'$, si y sólo si, existe $s'' \in S$ tal que $s''(s'm - sm') = 0_M$.*

Dotamos a $S^{-1}M$ de una estructura de grupo, con la operación definida por: $m/s + m'/s' = (s'm + sm')/(ss')$. EL neutro aditivo es $0_M/1_A$.

Nótese que de la relación de equivalencia dada en la Definición A.2, se sigue que $S^{-1}M = \{0\}$ si $0 \in S$. Si $M = A$, definimos una estructura de anillo sobre $S^{-1}A$ con la operación multiplicación dada por $(a/s) \cdot (a'/s') = (aa')/(ss')$. El neutro aditivo de $S^{-1}A$ es $0_A/1_A$ y el neutro multiplicativo es $1_A/1_A$.

PROPIEDADES:

1. Existe un homomorfismo canónico de anillos $i_A : A \longrightarrow S^{-1}A$, dado por $a \longmapsto a/1_A$. Este homomorfismo generalmente no es inyectivo, una condición suficiente para que lo sea es que A sea un dominio entero.

2. $S^{-1}M$ tiene estructura de $S^{-1}A$-módulo, con la operación por escalar dada por $(a/s)\cdot(m/s') = am/ss'$. Luego, el homomorfismo canónico i_A le dota estructura de A-módulo, con el producto $a \cdot m/s = a/1_A \cdot m/s$.

Para $f \in A$, diremos que M_f denota la localización de M con respecto al conjunto multiplicativo $\{f^n \,|\, n \geq 1\}$. Para un ideal primo $\mathfrak{p} \in A$, la localización de M con respecto al conjunto multiplicativo $A \backslash \mathfrak{p}$ es denotado por $M_\mathfrak{p}$. Si $M = A$, las notaciones ahora son A_f y $A_\mathfrak{p}$, respectivamente. El conjunto $\{\mathfrak{p} \in Spec\, A \,|\, M_\mathfrak{p} \neq \{0\}\}$ es llamado el soporte de M, y es denotado por $Supp(M)$, en particular si $m \in M$, $Supp\, m = \{\mathfrak{p} \in Spec\, A \,|\, m/1_A \neq 0_{M_\mathfrak{p}}\}$. Si A es un anillo y M un A-módulo, el aniquilador de M se define como:

$$Ann(M) = \{a \in A \,|\, aM = \{0\} \text{ para todo } m \in M\}.$$

En particular si $m \in M$, entonces $Ann(m) = \{a \in A \,|\, am = 0\}$.

Si M es finitamente generado, es decir, $M = Am_1 + ... + Am_n$, con $m_i \in M$, $i = 1, 2, ..., n$, entonces $\mathfrak{p} \in Supp(M)$ si y sólo si $M_\mathfrak{p} \neq \{0\}$, si y sólo si existe i tal que $m_i \neq 0$ en $M_\mathfrak{p}$, si y sólo si existe i tal que $Ann(m_i) \subseteq \mathfrak{p}$, si y sólo si $Ann(M) = \bigcap_{i=1}^{n} Ann(m_i) \subseteq \mathfrak{p}$. Así que $Supp(M)$ coincide con el subconjunto cerrado $V(Ann(M))$ de $Spec\, A$. Es claro también que $Supp\,m = V(Ann(m))$, pues si $\mathfrak{p} \in Spec\,A$, entonces $\mathfrak{p} \notin Supp\,m$ si y sólo si $m/1_A = 0_{M_\mathfrak{p}}$, si y sólo si existe $u \notin \mathfrak{p}$ tal que $um = 0_M$, si y sólo si existe $u \notin \mathfrak{p}$ tal que $u \in Ann(m)$, si y sólo si $Ann(m) \nsubseteq \mathfrak{p}$, si y sólo si $\mathfrak{p} \notin V(Ann(m))$.

A continuación daremos la definición de soporte para el caso de gavillas.

Si $\mathcal{F}$ es una gavilla sobre el espacio topológico X, y s una sección de $\mathcal{F}$ sobre un conjunto abierto U, el soporte de s denotado por $Supp\,s$, es definido por el conjunto $\{p \in U \mid s_p \neq 0\}$, donde s_p denota el gérmen de s en el punto p. El soporte de s es un subconjunto cerrado de U, mientras que $Supp\,\mathcal{F} = \{x \in X \mid \mathcal{F}_x \neq \{0\}\}$ no es necesariamente un subconjunto cerrado de X (ver [14], pág. 50).

Por otro lado, existen anillos con exactamente un ideal maximal, por ejemplo los campos. Un anillo A con exactamente un ideal maximal $\mathfrak{m}$ es llamado un anillo local. Los anillos localizados de la forma $A_\mathfrak{p}$, es decir, localizados en ideales primos son ejemplos de anillos locales, con ideal maximal $\mathfrak{p}_\mathfrak{p}$.

A.2 Anillos Noetherianos

La propiedad de Noether es una condición de finitud sobre anillos y módulos equiparable a la dimensión finita en los espacios vectoriales. A continuación daremos algunos criterios para garantizar cuando un módulo es noetheriano. Recordemos las definiciones.

Definición A.3 *Sean A un anillo y M un A-módulo. Se dice que M es* *noetheriano si todos sus submódulos son finitamente generados.*

Un anillo A es *noetheriano* si lo es como A-módulo, es decir, si todos sus ideales son finitamente generados.

Sean A un anillo y M un A-módulo. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. Cualquier conjunto no vacío de submódulos de M tiene un elemento maximal.
2. Cualquier sucesión ascendente de submódulos de M es estacionaria.
3. Cualquier submódulo de M es finitamente generado.

Para una prueba de estas afirmaciones ver [1], Proposición 6.1 y 6.2.

Los ejemplos triviales de anillos noetherianos son: los campos, y los Dominios de Ideales Principales (DIP).

Consecuencia:

1. Si A es noetheriano y S es cualquier subconjunto multiplicativo de A, entonces $S^{-1}A$ es noetheriano. En particular, se cumple para $S = A - \mathfrak{p}$.

Para una prueba ver [8], página 22.

Teorema A.1 *(Base de Hilbert) Si A es noetheriano, entonces el anillo de polinomios $A[x]$ es noetheriano.*

Demostración. Ver [4]. Capítulo 15, Teorema 3. ■

Como corolario del teorema de la base de Hilbert se tiene que si A es noetheriano, entonces lo es el anillo de polinomios $A[x_1, ..., x_n]$.

Un espacio topológico X es llamado noetheriano si satisface la condición de cadena descendente para subconjuntos cerrados de X, es decir, para cualquier sucesión $Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq ...$ de subconjuntos cerrados, hay un entero r tal que $Y_r = Y_{r+1} = ...$

Ejemplo A.3 *$X = \mathbb{A}^n$ es un espacio topológico noetheriano. En efecto, si $Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq ...$ es una cadena descendente de subconjuntos cerrados, entonces $I(Y_1) \subseteq I(Y_2) \subseteq ...$ es una cadena de ideales en $A = K[x_1, ..., x_n]$. Puesto que A es un anillo noetheriano, esta cadena de ideales es estacionaria. Pero para cada i, $Y_i = V(I(Y_i))$, entonces la cadena Y_i también se estaciona.*

Teorema A.2 *(**Artín-Rees**). Sea M un módulo finitamente generado sobre un anillo noetheriano A, sea M' un A-submódulo de M, y sea $\mathfrak{a}$ un ideal de A. Entonces, existe un entero positivo m tal que*

$$(\mathfrak{a}^n M) \cap M' = \mathfrak{a}^{n-m}(\mathfrak{a}^m M \cap M')$$

para todo $n \geq m$.

Demostración. Ver [10], Teorema 8.5. ■

A.3 Módulos Inyectivos

En esta sección estudiaremos las noción general de un módulo inyectivo, daremos el proceso general de la construcción de la resolución canónica inyectiva respecto de un módulo inyectivo. Comenzaremos como de costumbre, definiendo lo que queremos estudiar:

Definición A.4 *Un A-módulo I es inyectivo si para todo homomorfismo $f : M \longrightarrow I$ y para todo A-homomorfismo inyectivo $\varphi : M \longrightarrow N$, existe un homomorfismo $h : N \longrightarrow I$, tal que $h \circ \varphi = f$.*

Esto es, para cualquier sucesión exacta

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow N,$$

si la sucesión inducida

$$Hom_A(N, I) \longrightarrow Hom_A(M, I) \longrightarrow 0$$

es exacta, entonces I es un A-módulo inyectivo.

Proposición A.1 *(Criterio de Baer) Sea I un A-módulo. I es inyectivo si y sólo si para cualquier ideal $\mathfrak{a}$ de A, cualquier homomorfismo de A-módulos $\varphi : \mathfrak{a} \longrightarrow I$ puede ser extendido a un homomorfismo de A-módulos de A en I.*

Demostración. Ver [4]. Capítulo 10, Proposición 36. ■

Cualquier módulo puede ser encajado en un módulo inyectivo, es decir, es isomorfo a un submódulo de un módulo inyectivo. Para una demostración, ver [10], Teorema 8.104.

Siguiendo los pasos que se usaron en la construcción de la resolución fofa canónica de una gavilla $\mathcal{F}$ (ver pág. 41), se puede construir también la resolución canónica inyectiva de un A-módulo M, simplemente cambiando módulo inyectivo por gavilla en lugares adecuados.

Bibliografía

[1] Atiyah M. F. and Macdonald I. G., *Introduction to Commutative Algebra*. University of Oxford, Addison - Wesley Publishing Company, 1969.

[2] Cerda Rodríguez J. A., De la Rosa Navarro B. L., Lahyane M., *Una Introducción Suave al Estudio de la Teoría de Gavillas*. Libro en preparación 2009.

[3] Cerda Rodríguez. J. A., De la Rosa Navarro. B. L., Lahyane M., *Una Introducción Suave al Estudio de los Esquemas Afines*. Libro en preparación 2009.

[4] Dummit D. S. and Foote R. M., *Abstract Algebra*. Second Edition, University of Vermont, John Wiley and Sons, 1999. ISBN 0-471-36857-1.

[5] Eisenbud D. and Harris J., *The Geometry of Schemes*. Graduate Texts in Mathematics 197, Springer-Verlag, 2000. ISBN 0-387-98637-5 (Softcover), ISBN 0-387-98638-3 (Hardcover).

[6] Hartshorne R., *Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics 52. Department Mathematics, University of California Berkeley, Springer-Verlag, 1977. ISBN 0-387-90244-9, ISBN 0-540-90244-9.

[7] Liu Q., *Algebraic Geometry and Arithmetic Curves*. Oxford Graduate Texts in Mathematics 6. University Press, 2002. ISBN 0-19-8502842.

[8] Matsmura H., *Commutative ring theory*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics 8. Cambridge University Prees, 1980. ISBN 0-521-36764-6.

[9] Mac Lane S., *Homology*. Department of Mathemtics, University of Chicago, USA., Springer-Verlag, 1963 (Reprinted 1995). ISBN 3-540-58662-8.

[10] Rotman J. J., *Advanced Modern Algebra*. Prentice Hall; printing (2003), Springer-Verlag, 2003. ISBN 0130878685.

[11] Serre J. P., *Géométrie algébrique et géométrie analytique*. Ann. Inst. Fourier, Grenoble 6 (1955-1956).

[12] Tennison B. R., *Sheaf Theory*. London Mathematics Society Lecture Note Series 20. Cambridge, University Press, 1975. ISBN 0-521-20784-3.

[13] Ueno K., *Algebraic Geometry 1 from Algebraic Varieties to Schemes*. Iwanami Series in Modern Mathematics. Translations of Mathematical Monographs, Volume 185. American Mathematical Society, 1997. ISBN 0-8218-0862-1.

[14] Ueno K., *Algebraic Geometry 2, Sheaves and Cohomology*. Iwanami Series in Modern Mathematics. Translations of Mathematical Monographs, Volume 197. American Mathematical Society, 1997. ISBN 0-8218-0862-1.