



Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez

T E S I S

**Procesos de justificación y demostración matemática de
profesores en formación inicial.**

que para obtener el Grado de

Maestro en Ciencias en Educación Matemática

Presenta: Juan Antonio Pichardo Corpus

Directores: Dr. Jesús Roberto García Pérez

Dra. María de Lourdes Guerrero Magaña

Morelia, Michoacán

Marzo de 2011

Índice general

1. Planteamiento del Problema	1
1.1. Introducción	1
1.2. Justificación	2
1.3. Problema de Investigación	7
1.3.1. Objetivos	7
1.3.2. Preguntas de investigación	8
2. Marco Teórico	9
2.1. Antecedentes	9
2.2. Demostración, Prueba y Conjetura	11
2.3. Esquemas de prueba	14
2.4. La transición de la conjetura a la prueba y el software de geometría dinámica	26
3. Metodología	30
3.1. Planes y programas	30
3.2. Cuestionario	31
3.3. Actividades	33
3.3.1. Geometría	33
3.3.2. Números	37
4. Resultados	39
4.1. Planes y programas	39
4.1.1. Secundaria	39
4.1.2. Normal Superior	42

4.2. Cuestionario	47
4.3. Actividades	54
4.3.1. Geometría	54
4.3.2. Números	69
5. Conclusiones	77
Bibliografía	80
Anexo 1	83
Anexo 2	87
Anexo 3	94
Anexo 4	100

Capítulo 1

Planteamiento del Problema

1.1. Introducción

La demostración es un tema que generalmente se incorpora en las matemáticas escolares durante el estudio de la geometría plana, en secundaria y bachillerato. En los textos y en las aulas se introducen ejemplos de razonamiento deductivo y se dan “demostraciones” de algunas proposiciones. Con esto se persigue que los estudiantes conozcan como se validan ciertas “propiedades” de los objetos geométricos de uso frecuente; por ejemplo, que la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es 180° . También se espera que los estudiantes puedan realizar algunas demostraciones o resolver problemas utilizando procesos deductivos.

Diversos estudios han mostrado que la demostración es un tema difícil tanto de enseñar como de aprender (Godino 2002), y posiblemente por lo mismo no se le dedica mucho tiempo, además de que hay otros temas que son “más importantes” (desde la perspectiva del docente y probablemente del currículo) en los que los alumnos también tienen dificultades. En algunos casos se ha llegado a excluir o reducir excesivamente este tema de los Programas de estudio.

En este contexto Polya (2002) plantea las siguientes preguntas: “¿Porqué aprender o enseñar las demostraciones? ¿Qué vale más, nada demostrar, demostrarlo todo o demostrar en parte?” (p.149)

Polya contesta la primera interrogante, inequívocamente, refiriéndose al estudiante

si descuidamos el enseñarle las demostraciones geométricas, ignorará los mejores y más sencillos ejemplos de la demostración exacta y perderá la mejor ocasión de su vida para adquirir la noción de lo que es un razonamiento riguroso. (2002, p.150)

Respecto a la segunda interrogante, argumenta en favor de las demostraciones incompletas como un medio para presentar algunos teoremas, lo cual muestra su inclinación

por “demostrar en parte”, aclara que desde la perspectiva de la lógica una demostración incompleta no es una “demostración”.

Esta idea se incorpora con la de “prueba”; es decir, una demostración incompleta puede ser vista como una prueba en el sentido de Balacheff (2000) o algún esquema de prueba (Harel y Sowder 1998).

De acuerdo con Polya, si la demostración es importante en las matemáticas escolares, entonces una pregunta inmediata es: ¿Los profesores tienen la formación adecuada para conducir el aprendizaje de este tema?. Parece crucial poder contestar esta interrogante, porque, ¿cómo puede alguien enseñar lo que no sabe? o parafraseado a Poincare (1984, p. 222) “un profesor no puede desarrollar en sus alumnos una cualidad que no poseyó él mismo”. Éste último cuestionamiento será una idea central del presente trabajo.

1.2. Justificación

Harel y Sowder (2007) proponen una agenda en la investigación concerniente a la prueba en matemáticas, al respecto plantean la siguiente lista:

Los factores matemáticos e históricos - epistemológicos

- ¿Qué es la demostración y cuáles son sus funciones?
- ¿Cómo se construyen, verifican, y son aceptadas las demostraciones en la comunidad de matemáticos?
- ¿Cuáles son las etapas críticas en el desarrollo de la demostración en la historia de las matemáticas?

Los factores cognitivos

- ¿Cuáles son las concepciones actuales de los estudiantes respecto a la demostración?
- ¿Cuáles son las dificultades de los estudiantes respecto a la demostración?
- ¿Cuáles son las razones de estas dificultades?

Los factores de instrucción - sociales - culturales

- ¿Por qué debe enseñarse la demostración?
- ¿Cómo debería enseñarse la demostración?
- ¿Cómo son construidas, verificadas, y aceptadas las demostraciones en el aula?

- ¿Cuáles son las fases críticas en el desarrollo de la demostración con los estudiantes de manera individual y dentro del aula como una comunidad de aprendices?
- ¿Qué ambiente en el aula es apropiado para el desarrollo del concepto de demostración con los estudiantes?
- ¿Qué tipo de interacciones entre los estudiantes, y entre los estudiantes y el profesor, pueden mejorar la concepción de demostración de los estudiantes?
- ¿Qué actividades matemáticas, con el uso de la tecnología, pueden enriquecer las concepciones de prueba de los estudiantes?

De acuerdo con Harel y Sowder (2007) la lista no es exhaustiva o única; cada investigador puede escoger una lista diferente de preguntas o bien reformular algunas, la idea central es que se trate de tener una caracterización integral.

La demostración en matemáticas es importante para los matemáticos pero a finales del siglo XX se suscitó un debate en torno a la pertinencia de la demostración en la matemática y su posible desaparición (Hana, 1996), esto debido al advenimiento de las computadoras como una herramienta que auxilia la demostración de teoremas (p. ej. el teorema de los cuatro colores) y a nuevas líneas de investigación en matemáticas (p. ej. matemáticas experimentales), haciendo uso de las computadoras para encontrar relaciones y generar conjeturas (Hana 1996).

Hana (Ibid) da cuenta de este debate y de distintas posturas en torno al tema; cita el trabajo de Lakatos y su intento por tratar de caracterizar a las matemáticas dentro de sus programas de investigación. Los trabajos de Lakatos fueron recibidos con mejores augurios en el seno de la comunidad de investigadores en educación matemática y en cierto sentido malinterpretados, al sugerir la ausencia de la demostración en la matemática escolar.

Lakatos (1978) utiliza el Teorema de Euler referente a poliedros “El número de vértices menos el número de aristas mas el número de caras es igual a dos” ($V - A + C = 2$), como medio para evidenciar que las demostraciones matemáticas son temporales y contextuales, lo cual en algunos casos resulta cierto, pero no es una característica de la matemática; el hecho es que algunos investigadores en educación matemática decidieron, aprovechando el fracaso de la matemática moderna, en los años 60 del siglo pasado, eliminar la demostración de las matemáticas escolares.

Posturas similares estuvieron girando en torno a la educación matemática hasta el final de los años 80's y mediados de los 90's. Surgieron investigaciones como las de Arsac (1987), Balacheff (1987), Fischbein (1982) Senk (1985), Martin y Harel (1989), Hana (1989), Duval (1995), Garutti y Boero (1996), Mariotti (1997), Harel y Sowder (1998) y muchos otros que daban cuenta, en algunos casos, del bajo nivel que muestran los estudiantes en la elaboración y comprensión de demostraciones; además de elaborar marcos de referencia para estudiar y caracterizar formas de razonamiento, justificación, validación, etc.

De Villiers (1993, 1999) ha caracterizado las funciones de la demostración en la enseñanza de las matemáticas:

- Verificación (trata de la verdad de una afirmación).
- Explicación (da comprensión de por qué es verdadero).
- Sistematización (la organización de varios resultados en un sistema deductivo de axiomas, conceptos y teoremas principales).
- Descubrimiento (invención o descubrimiento de nuevos resultados).
- Reto intelectual
- Comunicación

Un documento importante, que plasma varios de los resultados de todas éstas investigaciones, son los Principios y estándares para las matemáticas escolares que publica el NCTM [National Council of Teachers of Mathematics] en el 2000. Uno de los estándares que se incluye es: “Razonamiento y prueba”.

Se especifica la importancia de que este estándar debe ser un componente esencial en la formación matemática de una persona:

“El razonamiento y la prueba deberían ser una parte consistente de la experiencia matemática durante toda la escolaridad. Razonar matemáticamente es un hábito mental y, como todo hábito, ha de desarrollarse mediante un uso coherente en muchos contextos” (NCTM 2000, p. 59)

también se menciona que los programas de enseñanza de todas las etapas deberían capacitar a todos los estudiantes para:

- Reconocer el razonamiento y la prueba como aspectos fundamentales de las matemáticas.
- Formular e investiguen conjeturas matemáticas.
- Desarrollar y evaluar argumentos y pruebas matemáticas.
- Elegir y utilizar tipos de razonamiento y métodos de demostración apropiados (NCTM 200 p. 59).

De acuerdo con el NCTM (2000), los alumnos de secundaria “deberían desarrollar el aprecio por la justificación matemática en el estudio de todos los contenidos matemáticos” (NCTM 2000, p. 348).

Borko y Putnam (1996) comentan que “para ayudar a desarrollar hábitos productivos de pensamiento y razonamiento, los profesores necesitan comprender bien las matemáticas” (citado en NCTM 2000, p. 352). Pero, ¿Qué significa comprender bien las matemáticas?,

no se intenta contestar la pregunta, pero seguramente la respuesta tendrá un elemento relacionado con la capacidad de entender y hacer demostraciones; consecuentemente los profesores deberían evidenciar dicha capacidad.

En México, como en la mayoría de los países, la enseñanza de las matemáticas por un lado y el aprendizaje de las mismas por otro, desde la primaria hasta la universidad, son siempre temas de debate. Basta observar como se vierten comentarios cuando se publican resultados de aprovechamiento con relación a las matemáticas.

Por ejemplo, las pruebas ENLACE que aplica la SEP y, a nivel internacional, las pruebas PISA de la OCDE, y TIMSS de la IEA. Generalmente se escuchan diversos tipos de comentarios críticos, entre los que resaltan aquellos relacionados con la responsabilidad de los profesores en torno a dichos resultados. Por supuesto que los profesores tienen un grado de responsabilidad y posiblemente esencial; sin embargo hay otros factores que entran en juego: la desnutrición, espacios inadecuados, profesor multigrado, inexistencia de materiales didácticos, la casi nula participación de los padres de familia, etc.

Uno de los factores claves en el quehacer docente es, sin duda, la formación, en este sentido, habría que analizar en qué medida dicha formación es adecuada. En México los profesores de educación básica estudian en las Escuelas Normales donde, generalmente, existen deficiencias en la formación matemática. La situación no es muy diferente en el bachillerato, en cuanto a la formación matemática, además de carecer de formación didáctica.

En cuanto a profesores de matemáticas para la secundaria existen las Escuelas Normales Superiores. Actualmente esta en vigor el plan de estudios 1999. En la mayoría de las materias de la especialidad en matemáticas, no se especifican lineamientos a seguir; en algunos casos sólo se lista un temario y se da una bibliografía sin mencionar nada más. En otros se amplía la información y se proponen algunas actividades para desarrollar en el aula.

Por su parte, en 2006 se realizó una reforma a los Planes y Programas de la educación secundaria, sin que hasta la fecha se haya dado una reforma equivalente en los Planes y Programas de estudios de las Escuelas Normales Superiores.

De acuerdo a la SEP (2007) objetivo de estudiar matemáticas en secundaria es que

“los alumnos aprendan a plantear y resolver problemas en distintos contextos, así como a justificar la validez de los procedimientos y resultados y a utilizar adecuadamente el lenguaje matemático para comunicarlos” (p. 34)

Como puede verse, la justificación es una parte importante y cobra aún más importancia cuando se especifican las competencias que debe alcanzar un alumno: el planteamiento y la resolución de problemas, la argumentación, la comunicación y el manejo de técnicas (SEP 2006). La argumentación es entonces una competencia que debe mostrar un alumno,

“el énfasis de la argumentación se pondrá en la explicación y la muestra, y sólo en ciertos casos, en tercer grado, los alumnos conocerán algunas demostraciones con ayuda del maestro, con la idea de que las utilicen para resolver y validar la solución de otros problemas” (Ibid, p.18)

Una de las características en el Plan de Estudios de la SEP (2006) es la incorporación de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) como un medio para favorecer el aprendizaje de las distintas asignaturas. Es pertinente señalar que la SEP propone cautela en el uso de las TIC, “Conviene evitar las tendencias a pensar que la tecnología puede sustituir al docente, que es un fin en sí misma, o suponer que su sola presencia mejorará la calidad de la educación” (SEP 2007, p. 25), además “habrá que evitar la tendencia a subutilizar los recursos tecnológicos” (SEP 2007, p. 25); es decir, no forzar la incorporación de las TIC cuando los contenidos pueden desarrollarse por medios de enseñanza más comunes. Las TIC no sólo incluyen las herramientas computacionales; existe la T.V., el radio, el cine, entre otros, los cuales se pueden utilizar con fines educativos.

Por lo tanto, si las TIC se utilizan de manera adecuada pueden propiciar que los alumnos

accedan a diferentes fuentes de información y aprendan a evaluarlas críticamente ... desarrollen habilidades clave como el pensamiento lógico, la resolución de problemas y el análisis de datos al utilizar paquetes de graficación, hojas de cálculo y manipuladores simbólicos; manejen y analicen configuraciones geométricas a través de paquetes de geometría dinámica...(SEP 2007 p. 25)

Además de la postura de la SEP, existen resultados de investigaciones respecto al uso de la tecnología en estudios relacionados con los procesos de justificación como los Pedemonte (2001), Jones (2001), Marrades y Gutiérrez (2001), etc.

Así, lo anterior implica que los profesores de matemáticas del nivel básico, posean la capacidad de entender y hacer demostraciones porque, aún cuando no es la parte central del aprendizaje de los estudiantes de secundaria, si es crucial que el profesor lo comprenda; de lo contrario, no entenderá hacia donde van dirigidos los esfuerzos y en qué medida un argumento es válido en el contexto de las matemáticas.

Todo lo anterior enfatiza la necesidad de enseñar, de inicio, a los profesores de matemáticas la demostración matemática y, en consecuencia, analizar cuál es la situación de los profesores en formación. Además, si consideramos lo relacionado al uso de las TIC, es importante explorar cómo reaccionan estos profesores ante el trabajo; en particular con un software de geometría dinámica en el marco de la justificación y demostración matemática.

1.3. Problema de Investigación

El problema se centra en la exploración de esquemas de prueba en la formación inicial de profesores. Lo cual implica la pregunta ¿Qué se entiende por prueba y en que se diferencia de la demostración? En el marco teórico se retoman estas ideas con más detalle; sin embargo, en esta etapa se dirá que la idea de prueba se retoma de las propuestas de Balacheff (1987), Harel y Sowder (1998) y Godino (2001). Así mismo el esquema de prueba se toma de Harel y Sowder (1998, 2007) revisando las distintas modificaciones, adaptaciones y contribuciones que han realizado diversos autores y ellos mismos.

Como problema de investigación se plantea el siguiente:

¿Qué esquemas de prueba manifiestan los profesores de matemáticas durante su formación inicial y cuáles son las posibles relaciones entre ellos?

1.3.1. Objetivos

Se estudian dichos esquemas considerando actividades que permitan:

1. Obtener información de los profesores de formación inicial con respecto a esquemas de prueba en geometría y números, respecto a:
 - formulación de conjeturas y
 - Justificación
2. Utilizar el software de geometría dinámica como una herramienta potencial en la elaboración de conjeturas y pruebas.

El presente trabajo tiene como objetivo general analizar los esquemas de prueba de profesores en formación inicial. Se plantean como objetivos específicos los siguientes.

- Comparar la pertinencia de la demostración en los planes de estudio de la Escuela Normal, en las asignaturas de la especialidad en matemáticas y los planes de estudio de secundaria en el área de matemáticas.
- Analizar los esquemas de prueba de los futuros profesores en torno a los componentes numérico y geométrico.
- Identificar las conjeturas, los argumentos y la forma de justificar de los profesores en formación inicial.
- Incorporar el software de geometría dinámica en actividades de demostración.
- Analizar los posibles cambios con respecto a los esquemas durante la aplicación de las actividades.

1.3.2. Preguntas de investigación

Preguntas de investigación.

- ¿Qué vinculación existe entre los programas de estudio de matemáticas en la educación secundaria y los programas de las asignaturas en las escuelas normales respecto a la prueba?
- ¿Cuáles son los esquemas de prueba de los futuros profesores de matemáticas?
 1. ¿Plantean conjeturas?
 2. ¿Cómo justifican sus resultados?
- ¿Cuáles son las ventajas de incorporar el software de geometría dinámica en actividades de demostración?
- ¿Qué cambios ocurrieron en los esquemas de prueba en el desarrollo de las diferentes actividades?

Para tratar de contestar estas preguntas, en una primera etapa, se revisaron los planes y programas de estudios, tanto de secundaria como de la normal superior, así como los principales textos de apoyo.

Enseguida, se aplicó un cuestionario (Anexo 1) para tener una idea de la situación actual de los estudiantes con los cuales se trabajó.

A partir de los dos elementos anteriores, se diseñaron actividades de geometría (Anexo 2) que se trabajaron por parejas con software de geometría dinámica y actividades de números (Anexo 3) que se trabajaron de manera individual, en ambiente de lápiz y papel.

Capítulo 2

Marco Teórico

2.1. Antecedentes

La demostración en matemáticas nace en Grecia en el siglo V antes de Cristo (Arsac 1987) y desde entonces forma una parte del núcleo central de las matemáticas. Aunque la demostración no es propiamente un concepto, sino más bien una técnica (Ibid) o un procedimiento (Ibáñez 2002). Es en Los Elementos de Euclides donde por primera vez se presenta por escrito el conocimiento matemático en forma ordenada, mediante el sistema axiomático deductivo, que tiene tres principios como base:

1. la definición de los objetos matemáticos con ayuda de axiomas, de definiciones, como objetos ideales, independientes de la experiencia sensible;
2. los enunciados generales (teoremas, proposiciones,...) que explicitan como hipótesis precisas las afirmaciones verdaderas para los objetos matemáticos;
3. las demostraciones que prueban las afirmaciones precedentes basándose únicamente en los axiomas, las definiciones y las reglas de la lógica (Arsac 1987 p.3).

Habrán quienes objeten si en todo el desarrollo de Los Elementos se siguen al pie los principios, sin embargo no es la idea entablar debate en torno a ello, sino ubicar Los Elementos como un documento referente para hablar de la demostración matemática.

Barbin (1988, citada por Larios, 2003), en torno a la intencionalidad o la función de la demostración, divide la historia de la demostración en tres etapas:

1. En Grecia, la demostración buscaba convencer en medio del debate.
2. En el siglo XVII, se buscaba que las demostraciones aclararan más que convencieran, y los métodos de descubrimiento desempeñaban un papel central.

3. En el siglo XIX, se regresó al rigor que permitió hacer frente a nuevas concepciones de los objetos matemáticos, lo cual trajo consigo problemas de fundamentos de la Matemática y la aceptación de teorías anti intuitivas o no evidentes. (citado por Larios, 2003).

Las demostraciones axiomatizadas eran propias de los griegos, claramente fue el resultado de numerosos trabajos anteriores tanto de los griegos como de otras civilizaciones, en las que es posible apreciar diferentes formas de validar el conocimiento matemático. Por ejemplo, los egipcios se valían de la verificación del resultado en situaciones prácticas, ya fueran cálculos de venta, remuneración o reparto (Arsac, 1987).

Un ejemplo que recurre a la figura como medio de validación se puede observar en la cultura Hindú. La figura 2.1 acompañada del texto “Contemplad” justificaba para Bhascara (Siglo XII) el teorema de Pitágoras.

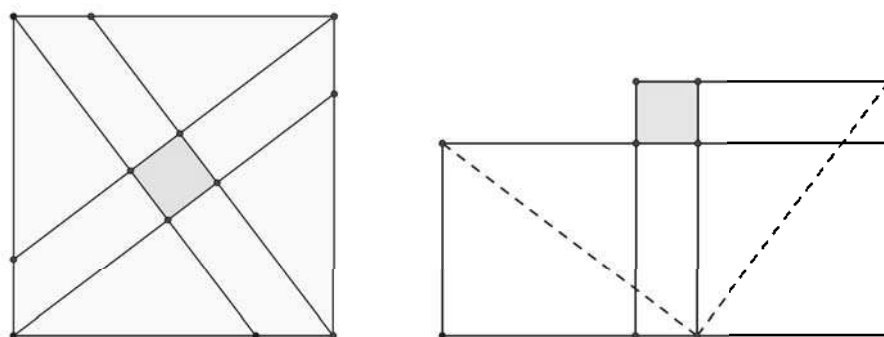


Figura 2.1: Contemplad

Se ha puesto en evidencia que aún cuando la demostración matemática es propia de la cultura griega, es posible encontrar distintas formas de justificación empleadas por culturas diferentes, en épocas anteriores y posteriores.

Es pertinente revisar los planteamientos de Pluvillage (2007). Por una parte, considera que la demostración no es constitutiva de la actividad matemática y cita el caso de la matemática árabe, la cual era rica en algoritmos y pobre en demostraciones. Ramanujan, matemático hindú desarrolló ideas matemáticas novedosas sin conocer siquiera una demostración. Por otra parte, habla de la demostración como constitutiva de la construcción matemática donde se puede ubicar a Los Elementos de Euclides y la Teoría de conjuntos de Cantor.

De acuerdo con Pluvillage, una persona puede hacer matemáticas sin saber lo que es una demostración. Cabe mencionar que cuando Hardy llevó a Ramanujan a Londres, éste no se interesó en trabajar con demostraciones, ya que “consideraba una pérdida de tiempo recorrer el mismo camino dos veces, toda vez que para él sus afirmaciones matemáticas eran correctas dejándose guiar por la intuición” (Hoffman 2000 p. 123).

Es claro que Ramanujan utilizó alguna forma de validación para sus resultados, aunque ésta no fuera propiamente la demostración, lo cual va de acuerdo el planteamiento del presente trabajo: en los casos donde no existe aún una demostración matemática; en general, las pruebas se consideran como un medio de validación y la demostración como un tipo de prueba (Balachef 2000) o un esquema de prueba (Harel y Sowder 1998).

2.2. Demostración, Prueba y Conjetura

En el seno de la comunidad matemática, y de los científicos en general, la historia da cuenta de distintas posturas ante la demostración y su conceptualización, como las siguientes:

Demostrar es contrastar, poner a prueba los productos de nuestra intuición... Es obvio que no poseemos y probablemente nunca poseeremos ningún criterio de demostración que sea independiente del tiempo, de la cosa que ha de demostrarse o de la persona o escuela de pensamiento que lo emplea. (Wilder, 1944, citado por Sáenz 2002 p. 48)

No hay estrictamente hablando algo que pueda llamarse una demostración matemática... no podemos, en último análisis, hacer otra cosa que señalar, indicar;... las demostraciones son gas, florituras retóricas diseñadas para afectar a la psicología, dibujos en la pizarra durante las explicaciones, estratagemas para estimular la imaginación de los alumnos. (Hardy 1928, citado por Lakatos 1978 p. 40)

Las ideas anteriores se han señalado sólo como referencia a posturas personales, la validez en el tiempo de una demostración y la dificultad para dar una definición. Por supuesto hay definiciones claras que comparten los matemáticos.

Rota (1997) la define así: “es una sucesión de pasos que conducen a la conclusión deseada. Las reglas que tal sucesión debe seguir fueron hechas explícitas cuando fue formalizada la lógica al principio de este siglo, y no han cambiado desde entonces” (p.1).

Solow (1987, p.4) define demostración como “el método para comunicar una verdad matemática a otra persona que también habla el mismo idioma” entendiendo que el idioma es, en este caso, las matemáticas.

Para el NCTM (2000, p.56) una demostración “es una manera formal de expresar tipos particulares de razonamiento matemático”.

Godino y Recio (2001) hacen un estudio de la interpretación que se da a una demostración en diversos contextos y retoman las ideas de Balachef (1987) y Duval (1993), ellos utilizan el termino demostración para referirse

de modo genérico al objeto emergente del sistema de prácticas argumentativas (o argumentos) aceptadas en el seno de una comunidad, o por una persona, ante situaciones de validación y decisión que requieren justificar o validar el carácter de verdadero de un enunciado, su consistencia o la eficacia de una acción.(2001, p. 406)

En los planes y programas de la educación secundaria, la SEP (2006) ubica tres niveles de argumentación de acuerdo a su complejidad “para explicar, para mostrar o justificar informalmente o para demostrar” (SEP 2006, p. 18) y que, a su vez, corresponden a finalidades distintas. Con relación a esta clasificación la SEP distingue niveles de complejidad en la argumentación:

Los argumentos del primer tipo (para explicar) son utilizados por un emisor, convencido de la veracidad de una proposición o de un resultado, para hacerla entender a uno o más interlocutores. La explicación puede ser discutida, refutada o aceptada. Una explicación que es aceptada en un grupo dado y en un momento dado se considera consensuada (mostrada), con la condición de que ésta se apoye en criterios comunes para todos los interlocutores. Una demostración matemática se organiza mediante una secuencia de enunciados reconocidos como verdaderos o que se pueden deducir de otros, con base en un conjunto de reglas bien definido.(p. 18)

La postura de la SEP está relacionada con las definiciones de explicación, prueba y demostración que proporciona Balacheff (2000), donde la explicación aceptada es la prueba y luego la demostración es un tipo de prueba.

Llamamos explicación a un discurso que trata de hacer inteligible el carácter de verdad, adquirido por el locutor, de una proposición o de un resultado. Las razones expuestas pueden ser discutidas, refutadas, o aceptadas.

Llamamos prueba a una explicación aceptada por una comunidad dada en un momento dado. Esta decisión puede ser objeto de un debate cuya significación es la exigencia de determinar un sistema de validación común a los interlocutores.(Balacheff, 2000, p. 12)

En el seno de la comunidad matemática sólo pueden aceptarse como pruebas las explicaciones que toman una forma particular. Son una secuencia de enunciados organizada según reglas determinadas: un enunciado se reconoce como verdadero, o bien es deducido a partir de los que lo preceden con ayuda de una regla de deducción tomada en un conjunto de reglas bien definido. Llamamos demostraciones a estas pruebas. (Ibid, p. 13)

Una característica importante es que para Balacheff las pruebas tienen un carácter social, mientras que Harel y Sowder (1998) caracterizan las pruebas desde una perspectiva individual: “Por prueba nos referimos al proceso empleado por una persona para eliminar o

crear dudas acerca de la verdad de una observación” (p. 241). Al mismo tiempo identifican dos subprocesos, el de convencimiento propio (Ascertaining) y el de convencimiento a otros (Persuading) de la verdad o falsedad de una conjetura. En ésta etapa se encuentra relación con la propuesta de Balacheff.

Una concepto importante y que muchas veces se maneja como algo intuitivo, es el de conjetura, Balacheff no ahonda en ello, es decir no proporciona una definición o una caracterización de conjetura.

Harel y Sowder (1998) dan una definición de conjetura:

Una conjetura es una observación hecha por una persona quien duda acerca de la verdad de esa observación. La observación deja de ser una conjetura e inicia la transformación en un hecho, una vez que la persona comienza a tener certeza de su verdad. (p. 241)

Aquí vale la pena detenerse un poco y revisar otras posturas respecto a la conjetura. Para Polya (1966) una conjetura es:

Una proposición claramente formulada, pero que no ha sido probada. Sea A la conjetura se sospecha que A es verdadera pero no se sabe realmente, aún así hay cierta confianza en la conjetura, la cual puede tener, aunque no necesariamente, una base articulada. (p. 266)

“La conjetura surge después de trabajar prolongadamente y aparentemente sin éxito en algún problema, en principio puede parecer un escape” (Polya 1966 p. 266), puede mostrarse como cierta aunque no podamos decir por qué. Después de algún tiempo pueden surgir razones más articuladas que nos hablen distantemente a favor de A , aunque no la demuestren; razones de analogía, de inducción, de casos relativos, de experiencia general o de la inherente sencillez de A misma. Estas razones son lo que Balacheff y Harel y Sowder llaman una prueba, y Polya “razonamiento plausible”.

Consecuentemente la conjetura no es algo que surja por generación espontánea, requiere de un trabajo anterior. Es importante identificar claramente este aspecto en el aula; de lo contrario, cualquier cosa que diga un alumno puede ser catalogado como conjetura, sobre todo por quienes tienen un dominio débil de los contenidos matemáticos y desvirtuar parcial o totalmente, las inferencias que se hagan al respecto.

Polya (1966) caracteriza la conjetura desde una perspectiva social “El crédito que damos a una conjetura depende de nuestra concepción total del mundo, de la atmósfera científica de nuestro tiempo” (p. 266). Esto último tiene una relación directa con el componente social utilizado por Balacheff.

Tanto Balacheff como Harel y Sowder proponen una clasificación del tipo de pruebas que dan los estudiantes de matemáticas, en la siguiente sección se ahonda en ello.

2.3. Esquemas de prueba

Antes de comentar las clasificaciones propuestas por Harel y Sowder, se revisan algunas anteriores.

Un trabajo importante es el de Bell (1976), se propone analizar los intentos de construir demostraciones y explicaciones por parte de alumnos en problemas matemáticos sencillos, observar las diferencias respecto a los matemáticos profesionales y, de este modo, encontrar orientación sobre cómo fomentar mejor el desarrollo de los alumnos en esta área. La fase experimental la llevó a cabo con unos 40 alumnos, con edades entre 14 y 15 años, de tres escuelas distintas, a los que les puso una serie de problemas por demostrar.

Para el análisis de los resultados, Bell (1976) elaboró diversas categorías de respuesta. Distingue, en primer lugar, entre la categoría empírica, caracterizada por el uso de ejemplos como elemento de convicción, y la categoría deductiva, caracterizada por el uso de la deducción para conectar los datos con las conclusiones. Dentro de la categoría empírica, Bell define las siguientes subcategorías de respuesta:

- Fracaso, cuando el estudiante es incapaz de generar ejemplos correctos o que cumplan las condiciones dadas.
- Extrapolación, cuando la veracidad de un resultado general se infiere a partir de un subconjunto de casos relevantes.
- No sistemática, cuando el estudiante encuentra algunos de los casos requeridos, que no son subconjuntos completos, e ignora el requisito de encontrarlos todos.
- Parcialmente sistemática, cuando el estudiante encuentra algún subconjunto parcialmente completo de casos y tiene cierta conciencia del requisito de encontrarlos todos.
- Sistemática, cuando el estudiante encuentra al menos algún subconjunto completo de casos y claramente intenta encontrarlos todos.
- Comprueba el conjunto finito completo de casos. (Bell 1976, p.28)

La categoría deductiva la subdivide en:

- No dependiente, cuando uno o más ejemplos son trabajados correctamente, pero no usados para probar el resultado general, además de la existencia de una falta de conciencia de la conexión de los datos con la conclusión.
- Dependiente, si se intenta unir deductivamente los datos con la conclusión pero no se consigue alcanzar una categoría superior.

- Relevante - replanteamiento general, cuando el estudiante no hace un análisis de la situación, no menciona aspectos relevantes más allá de los que aparecen en los datos, pero representa la situación como un todo, en términos generales como si fuera consciente de que existe una conexión deductiva pero es incapaz de exponerla.
- Relevante - detalles colaterales, cuando el estudiante hace algún análisis de la situación y menciona aspectos relevantes que podrían formar parte de una demostración, posiblemente identifica subclases diferentes, pero falla al conectarlas en un argumento.
- Conexa incompleta, si se realiza un argumento conexo con característica explicativa, pero es incompleto.
- Conexa S, si el argumento falla sólo porque apela a hechos o principios que no están más aceptados o acordados que la propia proposición.
- Explicación completa, cuando el estudiante obtiene la conclusión mediante un argumento conexo a partir de los datos y de hechos o principios generalmente aceptados. (Ibid, p.29)

El cuadro 2.1 sintetiza el trabajo de Bell.

Empírica	Deductiva
Fracaso	No dependiente
Extrapolación	Dependiente
No sistemática	Relevante - replanteamiento general
Parcialmente sistemática	Relevante - detalles colaterales
Sistemática	Conexión incompleta
Completa	Conexa S
	Explicación completa

Cuadro 2.1: Categorías de respuesta de Bell

Posteriormente, Balacheff (1987) trata de llevar a la práctica una situación como la que propone Lakatos (1978) en *Pruebas y Refutaciones* respecto al Teorema de Euler. En este caso Balacheff plantea el problema del descubrimiento y el establecimiento de una fórmula de enumeración de las diagonales de un polígono, las respuestas de los alumnos están clasificadas en dos tipos de pruebas: pragmáticas e intelectuales. Las pruebas pragmáticas son aquéllas que recurren a la acción real o a la ostensión. Las pruebas intelectuales son las que están basadas en un razonamiento deductivo mediante la formulación de definiciones, propiedades, etc., y de relaciones entre ellas.

Dentro de las pruebas pragmáticas distingue tres casos:

El empirismo ingenuo, consiste en asegurar la validez de un enunciado después de haberlo verificarlo en algunos casos. (Balacheff 2000, p.26)

La experiencia crucial, que consiste en verificar la proposición en un ejemplo elegido tan poco particular como le es posible.(Ibid, p.27)

El ejemplo genérico, que involucra hacer explícitas las razones de la veracidad de una conjetura mediante operaciones o transformaciones de un objeto que se considera representante de su clase.(Ibid, p.27)

Las pruebas conceptuales las divide en:

Experimento mental, en el cual la explicación de las razones, que fundamentan la validez de la proposición, se basan en un análisis de las propiedades de los objetos en juego.(Ibid, 74)

Cálculo sobre enunciados, son pruebas totalmente independientes de la experiencia, construcciones intelectuales basadas en teorías más o menos formalizadas o explícitas de las ideas en juego en la solución del problema, y aparecen como resultado de un cálculo inferencial sobre enunciados.(Ibid, 81)

El cuadro 2.2 sintetiza los tipos de prueba identificados por Balacheff.

Pragmáticas	Conceptuales
Empirismo ingenuo Experimento crucial Ejemplo genérico	Experimento mental Cálculo sobre enunciados

Cuadro 2.2: Tipos de prueba identificados por Balacheff

Después Harel y Sowder (1998,2007) que, como ya se menciono, es de corte distinto al de Balacheff, sobre todo en la forma de diseñar el experimento y en los objetivos de cada investigación. Ellos hicieron un experimento en seis cursos de matemáticas de nivel medio superior y superior, estudiando las respuestas de los estudiantes ante problemas de justificación y demostración.

Los cursos fueron: Teoría de números elemental, Geometría, Álgebra lineal elemental, Álgebra lineal avanzada y Geometría Euclidiana con Cálculo; todos los cursos se llevaron a cabo en un semestre, sin embargo el de álgebra lineal elemental se analizó con dos grupos. Los datos de los experimentos fueron obtenidos a través de registros de observación, entrevistas, tareas en equipo e individuales y exámenes escritos. En el caso de los cursos de álgebra lineal elemental, además de lo anterior, se tomaron videograbaciones y se considero información de mini exámenes (quizzes).

Harel y Sowder (1998) definen el esquema de prueba como las acciones que realiza una persona para convencerse y convencer a otros de la verdad o falsedad de una conjetu-

ra. Clasifican los esquemas de prueba en tres tipos: de convicción externa, empíricos y analíticos.

A su vez diferencian tres subtipos en los de convicción externa:

- a) Autoritarios, si la persona sitúa su convicción en lo que dice el profesor, un libro, etc.
- b) Rituales, si la persona fundamenta su convicción en función del aspecto o apariencia del argumento y no en el argumento en si
- c) Simbólicos, si la persona basa su convicción en la manipulación simbólica de expresiones sin un entendimiento claro de esos símbolos.

Respecto al subtipo autoritario no hay mucho que decir, no así para los rituales, Harel y Sowder ejemplifican este esquema mostrando un episodio donde le dan a un alumno el siguiente problema:

Sean A, B, C, D, E linealmente dependientes. Si agregamos un nuevo vector S a dicho conjunto, cómo es el nuevo conjunto, dependiente o independiente? El alumno escribió:

Añadiendo un nuevo vector S al conjunto que es linealmente dependiente, no cambia la dependencia en el nuevo conjunto. Éste quedará linealmente dependiente. Porque hay un vector en el conjunto que puede expresarse como combinación lineal, consecuentemente el conjunto entero permanece linealmente dependiente. (*Ibid*, p. 246)

En una entrevista posterior, el alumno expresó preocupación porque su prueba no incluía ninguna expresión simbólica, lo cual ocasionó que tuviera dudas respecto a la validez matemática de su respuesta. Es un ejemplo donde a la persona le interesa mas el aspecto de los argumentos; en este caso esperaba ver símbolos o expresiones matemáticas.

Harel y Sowder proporcionan un ejemplo de esquema simbólico. A un alumno se le pide probar que cualquier sistema homogéneo de ecuaciones lineales $AX = 0$ es consistente. El alumno dijo:

Tomamos, por ejemplo $x_1A_1 + \dots + x_nA_n = 0$. Si queremos encontrar x_1 y tenemos algunos valores $x_2, \dots, x_n$ y $A_1, \dots, A_n$, moviéndolos al lado contrario de la ecuación, podemos conocer x_1 . De la misma forma para $x_2, \dots, x_n$. Esto demuestra que el sistema tiene solución. (Al dar la explicación escribió $x_1 = \frac{x_2A_2 + \dots + x_nA_n}{A_1}$). (*Ibid*, p. 251)

Cuando se le pregunto que significaba dividir por A_1 respondió:

Es solamente esto (señalando el numerador de la expresión fraccionaria), sobre esto (señalando el denominador). Es algo así como uno sobre x (*Ibid*, p. 251)

Harel y Sowder (1998) señalan que razonar simbólicamente es una habito que los estudiantes adquieren desde la primaria hasta el bachillerato, es persistente y extremadamente difícil de abandonar. Al respecto, Flores (2005) realizó un trabajo, con estudiantes de primaria donde se evidencia este hábito: a una alumna se le pide dividir $\frac{3}{4}$ entre $\frac{1}{4}$; ella toma el recíproco del primer número y lo multiplica por el segundo obteniendo como respuesta $\frac{1}{3}$, Cuando se le pregunto porqué tomar el recíproco, la alumna explicó: “es lo que haces para obtener la respuesta correcta.” (*Ibid*, p.15)

Siguiendo con la clasificación de Harel y Sowder, de la misma manera dividen los esquemas empíricos en dos categorías:

- Inductivos, en los que la convicción consiste en la comprobación de uno o varios casos concretos.
- Perceptivos, en los que la convicción está fundamentada en experiencias físicas o sensitivas.

Los esquemas inductivos y los perceptivos son fáciles de identificar; sin embargo los perceptivos generalmente suelen asociarse con la geometría. Por ejemplo, cuando un alumno, basado en la figura deduce que un segmento es igual a otro o que un triángulo es congruente o semejante a otro, Harel y Sowder evidencian un caso donde el alumno muestra un esquema perceptual en un problema algebraico; un estudiante fue cuestionado respecto a si los siguientes vectores eran linealmente dependientes o independientes:

$$u = \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ \sqrt{5} \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} \frac{-7}{10} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} \sqrt{61} \\ 103 \end{bmatrix}$$

El estudiante contesto: “Concluyo que u , v , y x son linealmente independientes por observación. Mi observación es que ningún vector puede escribirse como combinación lineal de los otros.” (p. 258)

Este estudiante se deja llevar por la apariencia de los componentes, no es sencillo encontrar por inspección números que satisfagan una combinación lineal, le vasta con esa observación para justificar que son linealmente independientes.

El tercer tipo corresponde a los esquemas analíticos, “es aquel que valida conjeturas por medio de deducciones lógicas” (Harel y Sowder 1998, p. 258); estos investigadores comentan que no se refieren al “método de demostración matemática”, entendido como el procedimiento que envuelve una secuencia de enunciados deducidos por las reglas de la lógica, a partir de un conjunto de proposiciones aceptadas sin prueba (i.e. un conjunto de axiomas). En ese sentido, dividen los esquemas analíticos en dos categorías y varias subcategorías, como se muestra a continuación.

- Transformacionales, que involucran operaciones sobre objetos y anticipación del resultado.
 - Internos, en los que la colección de transformaciones pueden agruparse para formar una heurística
 - Interiorizados, en los que un esquema de prueba interno se convierte en un objeto de reflexión permitiendo la comparación y contraste con otras heurísticas
 - Restrictivos, en los que la persona se limita y restringe innecesaria e inconscientemente
 - Contextual
 - ◇ Espacial
 - Genérico
 - Constructible
- Analíticos, en los que las deducciones se basan en términos definidos y axiomas.
 - Intuitivo - Axiomático, en los que la persona sólo es capaz de manejar axiomas que corresponden a su intuición.
 - Estructurales, en los que los teoremas se deducen a partir de una estructura formada por un conjunto fijo de axiomas.
 - Axiomatizantes, en los que la persona es capaz de investigar las implicaciones de variar un conjunto de axiomas o axiomatizar cierto campo.

Los esquemas analíticos-estructurales son las “demostraciones” matemáticas, de acuerdo con Harel y Sowder, los transformacionales preceden a los analíticos, razón por la cual esa clasificación es más extensa.

Los esquemas transformacionales involucran operaciones sobre objetos y la anticipación del resultado de dichas operaciones. Las operaciones son orientadas hacia un objetivo. Pueden ser llevadas fuera con el propósito de dejar interrelaciones confirmadas inalteradas, pero cuando un cambio ocurre, el observador intenta anticiparse a él y, consecuentemente, intenta aplicar operaciones para compensar el cambio. Les llaman “transformativos” porque involucran transformaciones de imágenes (posiblemente expresadas por enunciados verbales o escritos) de manera deductiva. En este contexto, por imágenes, se entiende lo que Thompson, basado en Piaget, ha caracterizado como las imágenes que: “sustentan experimentos de pensamiento y sostienen argumentos por medio de relaciones cuantitativas” (Harel y Sowder, 1998, p. 251). Para mostrar esta caracterización los autores evidencian dos situaciones.

En el experimento de enseñanza con el grupo de geometría euclidiana, una estudiante mostró a la clase cómo ella imaginaba el teorema, “La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180° ”. Dijo algo en el sentido de que imaginaba los lados AB y AC de un triángulo ABC siendo rotados en direcciones opuestas alrededor de los vértices B y C ,

respectivamente, hasta que forman ángulos de 90° con el segmento BC (Figura 2.2 a y b). Esta acción transforma el triángulo ABC en la figura $A'BCA''$, donde $A'B$ y $A''C$ son perpendiculares al segmento BC . Para regresar al triángulo original, los segmentos $A'B$ y $A''C$ son inclinados uno hacia el otro hasta que los puntos A' y A'' coincidan en el punto inicial (Figura 2.2 c). La alumna indicó que en el proceso “perdió dos pedazos” de 90° en los ángulos B y C (i.e., ángulos $A'BA$ y $A''CA$) pero al mismo tiempo “recuperó esos pedazos” al crear el ángulo A . Esto puede verse mejor si se traza la perpendicular a BC pasando por A : los ángulos $A'BA$ y $A''CA$ son congruentes con BAO y AOC , respectivamente (Figura 2.2 d).

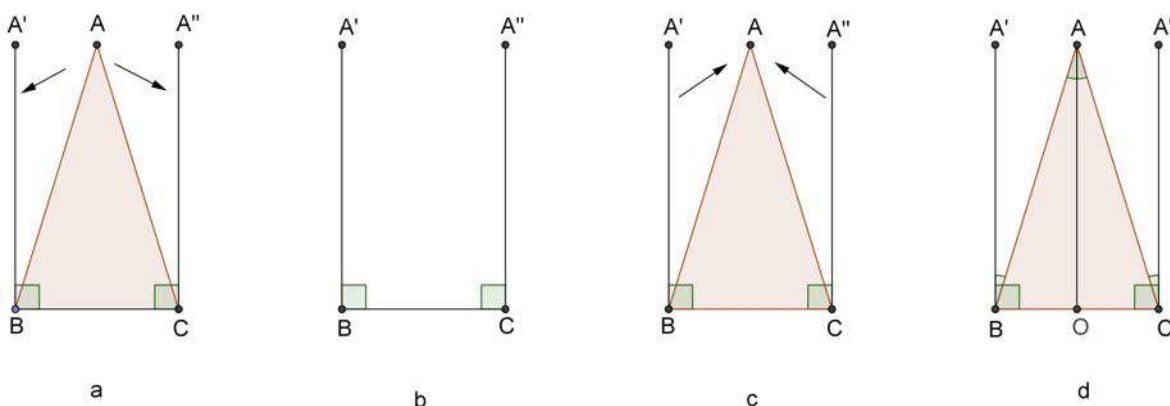


Figura 2.2: Transformaciones que describe el estudiante

La atención se centra en la forma de pensar de la estudiante acerca de la relación indicada en el teorema. Ve el triángulo como un ente dinámico, es el producto de su construcción imaginativa, no de una percepción pasiva. Sus operaciones son orientadas hacia un objetivo e intenta generalizar la conjetura (no de forma particular). Transforma el triángulo y es capaz de anticipar el resultado de las transformaciones, a saber, el cambio en los ángulos de 90° B y C ocasionado por las transformaciones es compensado con la creación del ángulo A . Todas estas indicaciones le conducen a que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180° .

En el mismo grupo, se presenta otro ejemplo de esquema de prueba transformacional, cuando los estudiantes discuten la relación entre el ángulo inscrito AHB y el ángulo formado por la tangente AN y la cuerda AB (Figura 2.3 a). Un estudiante argumenta que los ángulos son congruentes:

cuando H se mueve sobre del arco ATH (dibuja algo como se muestra en la figura 2.3 b), se forma una secuencia de ángulos inscritos AH_1B , AH_2B , AH_3B , ... todos estos ángulos incluyen todos los ángulos AXB donde X está en el arco ATH , son congruentes, por un teorema conocido. El punto A es una de estas X 's. Cuando X coincide con A el ángulo AXB se transforma en BAN . Por lo tanto los ángulos BAN y BAH son congruentes. (*Ibid*, p.260)

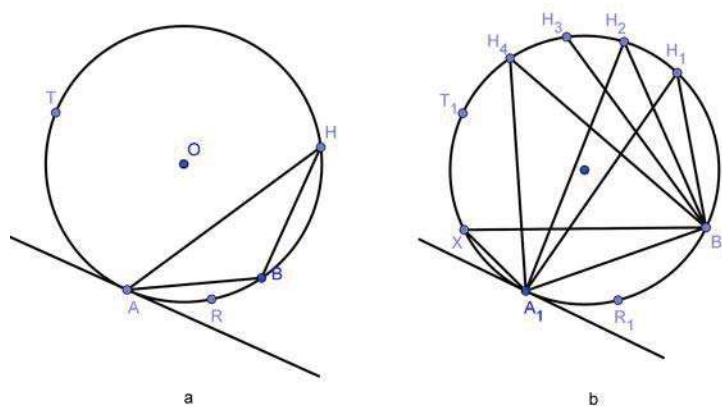


Figura 2.3: El estudiante hace variar el punto H

En este ejemplo, se observa cómo el alumno varía la posición del punto H con el propósito de evaluar la relación entre los ángulos inscritos que resultan. Fue capaz de anticipar el resultado de la variación, deduciendo el tamaño del ángulo. Harel y Sowder señalan que esta habilidad es esencial para visualizar los objetos geométricos como el lugar geométrico de puntos (p. ej. Un círculo está constituido por todos los puntos cuya distancia a un punto dado es fija; una bisectriz, de todos los puntos cuya distancia a los rayos del ángulo son iguales) lo cual es mejor que considerar las figuras estáticas.

Así, los esquemas de prueba transformacionales están caracterizados por:

La consideración de los aspectos generales de la conjetura;

La aplicación de operaciones mentales que son orientadas hacia un objetivo y la anticipación de resultados; y

La transformación de imágenes como parte de un proceso de deducción

Harel y Sowder consideran niveles cognitivos en los esquemas de prueba transformacionales, como un complemento de las características señaladas para tener una idea completa de dichos esquemas. Además de las presuntas limitaciones de los estudiantes en estos esquemas.

El esquema de prueba interno es un esquema de prueba transformacional que ha sido agrupado en una prueba heurística-un método (de prueba) que en los hechos provee conjeturas. Como ejemplo, estos investigadores afirman que sucede cuando se pide probar que dos segmentos son congruentes, comúnmente, los estudiantes buscan dos triángulos congruentes que contengan dichos segmentos. Esta prueba heurística es abstraída por los estudiantes debido a la repetida aplicación de un acercamiento que, a menudo, han identificado como un medio exitoso.

En el experimento de enseñanza con el grupo de álgebra lineal, a un alumno se le preguntó: Dados $A_1, A_2, \dots, A_m$ diferentes vectores en R^n . ¿si $m > n$, estos vectores son linealmente independientes?

El alumno contestó:

$\#$ de ecuaciones $<$ $\#$ de variables. Estos vectores son dependientes porque hay más variables que ecuaciones. Así que hay variables libres. Estas variables libres serán combinaciones lineales de los vectores independientes así que los vectores son dependientes. (Harel y Sowder 1998, p. 262)

En la solución está implícita la translación del problema a un sistema de ecuaciones lineales, lo cual fue evidente cuando solucionó el siguiente problema:

Determine si los siguientes vectores son linealmente dependientes o independientes.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.4 \\ 1.6 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0.9 \\ 3 \\ 12 \\ 0.8 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0.03 \\ 535 \\ 97 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 68 \\ 175 \end{bmatrix}, \quad A_5 = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.4 \\ 1.6 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad A_6 = \begin{bmatrix} 69 \\ 20 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El alumno escribió:

Si consideramos la ecuación $xA_1 + yA_2 + zA_3 + wA_4 + vA_5 + uA_6 = 0$. Escribimos ésta como un sistema de ecuaciones tendríamos 4 ecuaciones con 6 incógnitas. 4 ecuaciones no son suficientes (excepcionalmente) para determinar 6 variables ya que el sistema es homogéneo y por lo tanto consistente, sabemos que hay infinitas soluciones porque tendremos dos variables libres. Por lo tanto los vectores son linealmente dependientes. (*Ibid*, p.263)

Otra cosa implícita en la solución del alumno, es la imagen que tiene de la forma reducida por filas de una matriz y sus implicaciones para la existencia de la solución.

El esquema de prueba interiorizado ha sido objeto de reflexión. La concientización del esquema de prueba de una persona se observa cuando la persona lo describe para otros, lo compara con otros esquemas de prueba, especifica cuando puede ser usado, etc. (*Ibid*, p. 265). Los autores consideran que este tipo de esquema está ligado con las pruebas por inducción matemática, las cuales no se consideran en este trabajo.

Así mismo Harel y Sowder encontraron que los estudiantes que habían mostrado un pensamiento transformacional tenían restricciones, ya sea en el contexto de la conjetura, la generalidad de la justificación o el modo de justificar. Un esquema de prueba transformacional que envuelve alguna de estas restricciones es llamando esquema de prueba restrictivo, dependiendo del tipo de restricción puede ser llamado esquema de prueba contextual, genérico o constructivo, respectivamente.

Respecto al contexto, no se refieren a su importancia en el sentido amplio, sino a las interpretaciones específicas que los estudiantes dan a las afirmaciones matemáticas en el proceso de justificar.

En un esquema de prueba contextual las conjeturas son interpretadas y, por consiguiente, probadas en un contexto específico. Por ejemplo, cuando un estudiante puede interpretar y probar el enunciado general “ $n+1$ vectores en un espacio n – *dimensional* son linealmente dependientes” en el contexto específico de R^n . Una razón para esto es que el “mundo” de álgebra lineal donde el estudiante ha “vivido” siempre es R^n , así que aún no ha abstraído el concepto de “independencia lineal” más allá de ese contexto específico (*Ibid*). Otro ejemplo en el que se presenta el esquema de prueba contextual viene cuando el estudiante no puede para tratar con cualesquier estructura geométrica y trata con su imaginación espacial.

En este trabajo interesa más el esquema de prueba genérico, en el cual las conjeturas son interpretadas de manera general, pero la prueba es expresada en un contexto particular (*Ibid*).

Un ejemplo de este tipo de esquema se dio en el experimento de enseñanza de Teoría de números elemental. Varios alumnos probaron la proposición “Si un número entero es divisible por 9 entonces la suma de sus dígitos es divisible por 9”, tomando un número entero específico, por ejemplo el 867, decían: Este número puede representarse como $8 \times 100 + 6 \times 10 + 7$, lo cual es igual que $(8 \times 99 + 6 \times 99) + (8 + 6 + 7)$. Puesto que la primera suma $8 \times 99 + 6 \times 99$ es divisible por 9, la segunda suma $8 + 6 + 7$, la cual es la suma de los dígitos del número, debe ser divisible por 9. Algunos estudiantes añadían que este proceso podía ser aplicado a cualquier número entero. Así es como los estudiantes utilizaban un esquema de prueba genérico dentro de los esquemas transformacionales restrictivos (*Ibid*).

En el esquema de prueba constructivo las dudas de los estudiantes son eliminadas por la construcción de objetos, basada en hechos, en contra de la sola justificación de la existencia de los objetos; este tipo de esquema aparece cuando los estudiantes evidencian incomprensión respecto a las pruebas por contradicción.

Respecto a los esquemas de prueba analíticos no hay mucho que añadir, son las demostraciones matemáticas, las diferencias son sutiles y en este trabajo se consideran sólo los esquemas intuitivo-axiomáticos. Entonces, cualquier demostración matemática caerá en este rubro.

El cuadro 2.3, que se muestra a continuación, sintetiza los esquemas de prueba de Harel y Sowder.

Esquemas de prueba de convicción externa				
Rituales		Autoritarios		Simbólicos
Esquemas de prueba empíricos				
Perceptuales		Inductivos		
Esquemas de prueba analíticos				
Axiomáticos		Transformacionales		
Intuitivo-Axiomático	Internos	Interiorizados	Restrictivos	
Estructurales			Contextuales	
Axiomatizantes			Genéricos	
			Constructivos	

Cuadro 2.3: Esquemas de prueba de Harel y Sowder

Con base en las investigaciones de Bell (1976), Balacheff (1988) y Harel y Sowder (1998), Marrades y Gutiérrez (2000) proponen un marco teórico que categoriza los tipos de justificación, utilizando software de geometría dinámica, en una investigación llevada a cabo con estudiantes de secundaria.

Estos autores distinguen entre las justificaciones empíricas, en las que el elemento de convicción es la verificación de la propiedad en ejemplos, y las justificaciones deductivas, en las que los elementos de convicción son argumentos abstractos basados en propiedades generales, operaciones abstractas y deducciones lógicas.

Las justificaciones empíricas las dividen a su vez, dependiendo de cómo se eligen los ejemplos, en:

- Empirismo ingenuo, en las que los ejemplos son escogidos sin ningún criterio específico.
- Experimento crucial, en las que se escoge cuidadosamente un ejemplo que sea lo menos particular posible.
- Ejemplo genérico, en las que se escoge un ejemplo genérico al que se le da carácter de representante de su clase.

A su vez, las justificaciones de empirismo ingenuo las dividen en inductivas y perceptivas, siendo su definición análoga a los esquemas de prueba empíricos con el mismo nombre en la clasificación de Harel y Sowder (1998).

Las justificaciones de experimento crucial o de ejemplo genérico, ambas, las subdividen en los siguientes tipos, dependiendo de cómo se utilizan los ejemplos:

- De ejemplificación, en las que únicamente se muestra la existencia de un ejemplo o la ausencia de contraejemplos.

- Constructivas, en las que la justificación se basa en la forma de obtener el ejemplo.
- Analíticas, en las que se utilizan propiedades observadas empíricamente en el ejemplo.
- Intelectuales, en las que a pesar de estar basadas en la observación empírica del ejemplo, principalmente se utilizan propiedades y relaciones aceptadas sobre los elementos del ejemplo. (Marrades y Gutiérrez, 2001)

Las justificaciones deductivas las dividen en dos clases:

- Experimento mental, cuando, aún siendo deductivas y abstractas, están organizadas con la ayuda de un ejemplo.
- Formales, que son cadenas de deducciones lógicas y sin soporte de ejemplos.

Ambas clases las subdividen en:

- Transformativas, que están basadas en operaciones mentales que producen una transformación del problema inicial en otro equivalente.
- Axiomáticas, que son secuencias de deducciones lógicas derivadas desde los datos del problema y axiomas, definiciones o teoremas aceptados.

A modo de síntesis, el cuadro 2.4 muestra los tipos de justificación propuestos por Marrades y Gutiérrez (2000).

Empíricas			Deductivas	
Empirismo ingenuo	Experimento crucial	Ejemplo genérico	Experimento mental	Formal
Perceptivo	Ejemplificación		Transformacional	
Inductivo	Construcción		Axiomático	
	Analítico			
	Intelectual			

Cuadro 2.4: Tipos de justificación de Marrades y Gutiérrez

Otro trabajo importante es el de Ibañes (2001), aún cuando considera como la base de su investigación el trabajo de Harel y Sowder (1998), hace una modificaciones a la clasificación de los esquemas de prueba, para que se ajustaran en mayor medida a las circunstancias de la investigación y a las respuestas de los alumnos.

Ibañes (2001) mantiene las tres grandes categorías de esquemas, convicción externa, empíricos y analíticos, e introduce nuevas subclases. Dentro de los esquemas de prueba empíricos experimentales (denominados perceptivos por Harel y Sowder), introduce:

los estáticos, en los que se utilizan procedimientos experimentales donde los elementos son fijos; y los dinámicos, en los que se utilizan procedimientos experimentales donde se realizan movimientos o se varían elementos.

En los esquemas inductivos también crea una subdivisión. En los esquemas transformacionales, Ibañez (2001) no considera las subclases de Harel y Sowder (1998).

De acuerdo con Rodríguez y Gutiérrez (2006) las nuevas subclases añadidas por Ibañez (2001) no son mutuamente excluyentes. Es decir, un esquema de prueba puede ser catalogado como empírico inductivo auténtico de varios casos y sistemático. Un esquema de prueba analítico transformacional también se puede catalogar, como estático general e incompleto.

Rodríguez y Gutiérrez (2006) proponen otra clasificación, cabe mencionar que ellos no les llaman esquemas de prueba si no categorías de demostración.

En este trabajo se consideran los esquemas de prueba propuestos por Harel y Sowder (1998), con la modificación que hacen en 2007. Los cambios se dan en el esquema de prueba externo-simbólico, ahora lo consideran simbólico no referenciado y a los esquemas analíticos ahora los nombran deductivos. Respecto a los esquemas transformacionales identifican como características principales: la generalidad, el pensamiento operacional y la inferencia lógica.

2.4. La transición de la conjetura a la prueba y el software de geometría dinámica

Varias investigaciones dan muestra de la transición entre elaborar conjeturas y probarlas. Rodríguez y Gutiérrez (2006) realizan una síntesis de algunas propuestas, entre los que destacan: Arzarello et al. (1998, 2002), Olivero (1999), Mariotti et al. (1997).

Arzarello et al. (1998) elaboran un modelo teórico para interpretar los procesos de exploración de situaciones geométricas, formulación de conjeturas y demostración de las mismas. Este modelo, se utiliza para investigar la transición hacia las demostraciones deductivas, surge de los experimentos realizados durante dos años en diferentes entornos con estudiantes de secundaria y universitarios, así como con sus profesores en el área de la geometría elemental. Toman como hipótesis inicial de trabajo el estudio de Mariotti y otros (1997), que concluye que estudiantes de nivel medio y alto muestran sucesivamente dos modalidades de actuación que consisten en explorar-seleccionar una conjetura y concatenar sentencias lógicamente. Además afirman que: “Cualquier proceso de exploración-conjetura-demostración está caracterizado por complejos cambios desde una modalidad a la otra y viceversa”. (p. 28)

El objetivo de Arzarello es analizar cuidadosamente de qué manera tiene lugar la transición desde una modalidad a la otra. Los puntos principales del marco teórico, sintetizado en Olivero (1999), son los siguientes:

- Control ascendente: se “observa” la figura con el objetivo de elaborar conjeturas. Se corresponde con exploraciones de la situación dada.
- Abducción: se escoge “de que regla esto es un caso”, es decir, se recorre el conocimiento teórico con el objetivo de encontrar parte de una teoría que encaje con la situación particular. Las exploraciones son transformadas en conjeturas.
- Control descendente: se ha elaborado una conjetura y se busca una demostración. Se hacen referencias a la teoría para justificar lo que previamente se ha observado.^{en} la figura y validar la conjetura.

Finalmente en Arzarello y otros (2002), se estudian las relaciones existentes entre las modalidades y los tipos de arrastre en un software de geometría dinámica, se dan las siguientes definiciones (p. 67):

- Procesos ascendentes: desde las figuras a la teoría, con el objetivo de explorar libremente una situación, buscando regularidades, elementos invariantes, etc, y enunciar una conjetura.
- Procesos descendentes: desde la teoría a las figuras, con el objetivo de validar o refutar la conjetura, así como comprobar propiedades, etc. necesarias para la validación.

De la misma manera, Rodríguez y Gutiérrez (2000) dan cuenta de algunas aportaciones en lo que respecta al uso del software de geometría dinámica en investigaciones relacionadas con la demostración, destacando especialmente el tema de la visualización y las demostraciones visuales.

Hanna (2000) explora el papel de la demostración en la educación matemática y justifica su importancia en el currículum. También discute tres aplicaciones del software de geometría dinámica como herramientas valiosas en la enseñanza de la demostración, las heurísticas, la exploración y la visualización. Las cuales son, también, retos potenciales e importantes de la demostración.

Mariotti (2000) estudia el papel del software de geometría dinámica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de alumnos de 15 a 16 años. Asumiendo una perspectiva Vigotskiana, centra la atención en la construcción social de conocimiento y en la mediación semiótica alcanzada a través de objetos culturales.

Esta investigadora se centra en el proceso de tránsito de los estudiantes en la geometría, de lo intuitivo - visto como una colección de propiedades evidentes-a una teórica-como un sistema de declaraciones relacionadas que son validadas por la prueba. Para ella, esta transición se facilita en buena medida por el uso del software dinámico que permite la visualización (una estrategia “a ojo”, como ella la llama), la exploración y en particular el uso de heurísticas. Esto último inicia con la revisión y la manipulación de los objetos dibujados, lo cual conduce a las conjeturas, el debate y finalmente a una prueba matemática.

Además, concluye que la evolución de las justificaciones del lenguaje natural hacia las demostraciones no es algo simple ni espontáneo, sino que se revela como algo complejo.

Jones (2000) sugiere que un tema crucial para la educación matemática es, cómo pueden los estudiantes cambiar su postura de “porque se ve correcto” o “porque ello es efectivo en estos casos” a argumentos convincentes que son efectivos en general. De acuerdo con él, el software de geometría dinámica puede ser útil, ya que permite a los estudiantes interactuar con los teoremas geométricos. Los significados que los estudiantes obtienen del razonamiento deductivo a través de la experiencia con el software, están conformados no sólo por las tareas que abordan y sus interacciones con el maestro y con otros estudiantes, sino también por las características del ambiente del software. Para analizar lo anterior propone como un elemento central analizar los datos obtenidos en un estudio longitudinal de las interpretaciones de objetos geométricos, y sus relaciones, por parte de estudiantes de 12 años cuando utilizan software de geometría dinámica.

Así, Jones se centra en la evolución de la habilidad de los estudiantes para hacer uso del lenguaje preciso y clasificar correctamente a una familia de cuadriláteros. Comenzando con una exploración visual de las similitudes y las diferencias entre cuadriláteros, el experimento tiene la intención de proporcionar una oportunidad para que los estudiantes se involucren en el razonamiento deductivo con la finalidad de lograr una comprensión de las relaciones entre las diversas propiedades de los cuadriláteros. Los estudiantes muestran una forma de comprensión nueva, cuando crean una clasificación jerárquica para los cuadriláteros. Jones observa que el software dinámico, claramente, les ayudó a los estudiantes a formular declaraciones razonablemente precisas acerca de las propiedades y las relaciones y llevar a la práctica deducciones correctas, ambos pasos importantes en la construcción de pruebas.

Marrades y Gutiérrez (2000) examinan formas en las cuales el software de geometría dinámica puede usarse para mejorar la comprensión de los estudiantes respecto a la naturaleza de la prueba matemática y mejorar habilidades para probar. Reportan el progreso hecho por dos pares de estudiantes que justifican declaraciones matemáticas, pasando de razones informales a las pruebas (demostraciones) matemáticas adoptando progresivamente modos de razonar sofisticados. Los autores también muestran como el software de geometría dinámica, proporciona a los estudiantes, mayor acceso a la exploración, heurísticas y visualización, incluso aumentado su comprensión de las limitaciones respecto a los acercamientos informales y así comprender la necesidad de la prueba deductiva.

Hadas, Hershkowitz y Schwarz (2000) afirman que, en muchos problemas geométricos, los estudiantes pueden sentir que la universalidad de una propiedad conjeturada de una figura es validada por sus acciones en un entorno de geometría dinámica. Por el contrario, generalmente no sienten que una explicación deductiva fortalezca su convicción acerca de que una figura geométrica cumpla cierta propiedad. Con el objetivo de crear en los estudiantes una necesidad de argumentar de forma deductiva, los autores desarrollaron una colección de actividades innovadoras con la intención de causar sorpresa e incertidumbre. Describen dos actividades y analizan las conjeturas, métodos de trabajo y explicaciones

utilizadas por los estudiantes.

Respecto a los cuatro artículos citados anteriormente, Hanna (2000) comenta que describen el uso exitoso de software de geometría dinámica. Observa que en todos los casos el uso del software estaba acompañado de tareas cuidadosamente diseñadas, el compromiso profesional del maestro, y de oportunidades para que los estudiantes noten los detalles, conjeturen, se equivoquen, reflexionen, interpreten relaciones entre objetos, y puedan ofrecer explicaciones matemáticas tentativas. De acuerdo con Hanna es razonable asumir que el uso de software dinámico en el aula no puede ser tan efectivo a falta de estos factores de respaldo.

Healy y Hoyles (2001) exploran el papel de las herramientas informáticas en la resolución de problemas de geometría y cómo estas herramientas median los procesos de resolución de problemas. A través del análisis de las respuestas con éxito de los estudiantes, las autoras muestran la manera en que las herramientas informáticas dinámicas pueden no sólo fundamentar el proceso de resolución sino también ayudar a los estudiantes a moverse desde la argumentación en lenguaje común hacia la deducción lógica. Sin embargo, haciendo referencia al trabajo de estudiantes que no tuvieron tanto éxito en las respuestas, las investigadoras ilustran cómo las herramientas informáticas que no pueden ser programadas para ajustarse a los objetivos de los estudiantes pueden impedirles expresar sus (correctas) ideas matemáticas y de esta forma impedir que obtengan la solución del problema.

Siguiendo a Pedemonte (2007) y considerando alguno de los resultados mencionados, es pertinente señalar que la prueba (demostración) es más accesible para los estudiantes si la actividad argumentativa es desarrollada a partir de la construcción de una prueba. Una consecuencia didáctica del estudio de Pedemonte (2007) es que los problemas abiertos adecuados que demandan una conjetura, podrían usarse para introducir el aprendizaje de la prueba. Efectivamente, según estos estudios, cuando la unidad cognitiva se puede realizar, la actividad de argumentación podría favorecer la construcción de una prueba. Además, la idea de unidad cognitiva puede usarse para anticipar y analizar algunas dificultades que los estudiantes podrían tener en la construcción de las pruebas, especialmente cuando la unidad cognitiva no se puede realizar para representar una prueba.

Capítulo 3

Metodología

Este trabajo es de carácter descriptivo (Cohen 1990), fundamentado en distintas propuestas metodológicas durante el desarrollo de la investigación. La primera parte es documental, toda vez que se revisaron los planes y programas de estudios de la educación secundaria y de la normal superior, en el área de matemáticas, así como algunos materiales de apoyo. La segunda parte es cualitativa de tipo encuesta (*Ibid*) donde se aplicó un cuestionario. Una tercera parte de corte experimental (*Ibid*), en la que diseñaron hojas de trabajo con actividades de geometría y números, con énfasis en aspectos relacionados con la demostración matemática.

El trabajo se desarrolló con estudiantes de la licenciatura en educación secundaria con especialidad en matemáticas (profesores en formación inicial), de la Escuela Normal Superior Oficial de Guanajuato. Se llevaron a cabo tres etapas:

- Revisión de los programas y planes de estudio de educación secundaria en México y de los programas de estudio de la Normal Superior, referente a la pertinencia de la prueba (demostración).
- Aplicación y análisis de resultados de un Cuestionario.
- Aplicación y análisis de resultados de actividades de geometría y números.

Inicialmente se trabajo con dos grupos, uno de tercer grado y otro de cuarto (el plan de estudios consta de cuatro años), en el cuestionario participaron los dos grupos pero para las actividades sólo pudieron participar los integrantes del grupo de tercer grado.

3.1. Planes y programas

Un componente que se consideró necesario fue revisar y analizar los planes y programas de estudio de secundaria y de la Normal Superior, con el fin de conocer que aspectos

relacionados con la prueba (demostración) están presentes, identificar si existe relación de los planes de secundaria con los de la normal y cuáles son, así como las diferencias.

Para el análisis de los planes y programas, tanto de secundaria como de la normal, se consideraron: para la educación secundaria los de 2006 y para la normal los de 1999.

En el caso de los programas de estudio de la secundaria, se hizo una revisión por cada grado y bloque de las actividades propuestas, además se analizaron materiales complementarios como: Libro para el maestro de secundaria (SEP, 2004), Fichero de actividades didácticas de secundaria (SEP, 2004), algunos libros de la proyecto EMAT (Enseñanza de las matemáticas con tecnología, SEP-ILCE, 2000) en el tema de geometría, toda vez que en las actividades de geometría se utilizó software.

Para el programa de la Normal Superior se realizó por asignatura de la especialidad en matemáticas, respecto a materiales complementarios se proponen prácticamente los mismos materiales que en secundaria, salvo algunas referencias bibliográficas. Por lo cual se analizaron dichos materiales con un doble propósito.

3.2. Cuestionario

Se diseñó un cuestionario (Anexo 1) con el objetivo de tener una primera idea de la situación actual de los estudiantes con los cuales se trabajó, además de ver si la clasificación de los esquemas de prueba de Harel y Sowder (1998) se adecuaba a las respuestas de los estudiante, y poder utilizarlo en las actividades posteriores. Se mencionó que inicialmente se pensaba trabajar con dos grupos, el cuestionario se aplicó a los dos grupos, en total 18 cuestionarios.

El cuestionario contiene 10 preguntas, que puede dividirse en tres secciones; la primera con tres preguntas abiertas (1,2,3), con las que se buscaba indagar la idea que tienen los futuros docentes respecto a la demostración matemática y su relación con las matemáticas escolares. Además se quería establecer una relación con respuestas a preguntas posteriores (6, 7, 9 y 10), las preguntas son las siguientes:

1. ¿Qué es una demostración matemática?
2. ¿Tú crees que tenga alguna función la demostración en la enseñanza de las matemáticas en Secundaria? ¿Cuál?
3. ¿Para qué crees que se usa, en Matemáticas, la demostración?

La segunda sección del cuestionario consta de las preguntas 4, 5 y 8, cuya finalidad fue explorar si los estudiantes identificaban las diferencias entre teorema, definición, y postulado; el uso del lenguaje y el manejo de simbolismo algebraico para cuestiones numéricas y así, poder identificar si ello no era un impedimento en preguntas posteriores (6 y 9). Enseguida se muestra la pregunta 5:

Relaciona los enunciados de la izquierda con las expresiones de derecha. Puede

ser más de una expresión para un enunciado y que una expresión no se relacione con ningún enunciado.

i un número par	$p \cdot q \cdot r$
ii Un número impar	$2w - 1$
iii Dos números consecutivos	$((2a + 1) - (2m + 1))^2$
iv El cuadrado de la diferencia de dos números impares	$(t - 1) \cdot t \cdot (t + 1)$
v El producto de tres números consecutivos	$2(3q)$
	$p - 1, p$
	a, b
	$((n + 1) - (r + 1))^2$
	$2w$

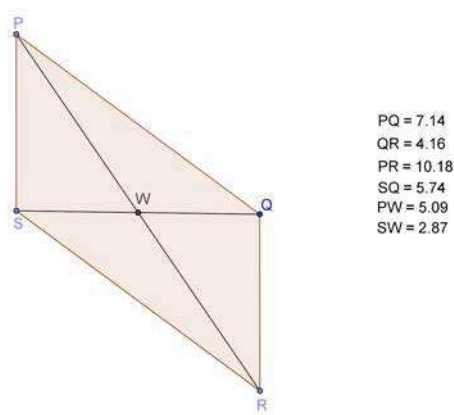
La tercera sección se compone de cuatro cuestionamientos (6, 7, 9 y 10) para obtener información respecto a lo que podían entender los estudiante como demostración a partir de una situación supuesta, resuelta por una tercera persona y su habilidad para hacer demostraciones. Estas últimas cuatro interrogantes debían arrojar información respecto a los esquemas de prueba de los estudiantes. A continuación se muestra la pregunta 9 y 10.

9.- Demuestra que la diferencia entre los cuadrados de dos números naturales consecutivos cualesquiera es siempre un número impar, igual a la suma de dichos números.

10.- A un alumno se le planteo el siguiente enunciado:

“Demuestre que en cualquier paralelogramo las diagonales se bisecan”

El alumno dibujó el siguiente paralelogramo con las respectivas medidas:



Luego escribió:

En la figura el cuadrilátero $PQRS$ es un paralelogramo, con W como punto de intersección de las diagonales PR y SQ . La diagonal PR mide 10.18

y PW 5.09, entonces PW es la mitad de PR . La diagonal SQ mide 5.74 y SW 2.87, entonces SW es la mitad de SQ . Por lo tanto PR biseca a SQ e inversamente.

¿Consideras que la persona dio una demostración?

Justifica tu respuesta:

En el anexo 1 se puede revisar el cuestionario completo.

3.3. Actividades

Las actividades que se implementaron fueron en dos rubros, geometría y números, para el diseño de las hojas de trabajo se consideraron los resultados de la revisión de los planes y programas de estudio, así como del cuestionario. Además de algunas propuestas teóricas.

Durante el desarrollo de las actividades se tomaron grabaciones de audio y video, que sirvieron para el análisis.

3.3.1. Geometría

Se diseñaron hojas de trabajo con 5 actividades de geometría para llevarse a cabo utilizando el software (Anexo 2). Se aplicaron en parejas, siguiendo las recomendaciones de algunas de las investigaciones mencionadas en el marco teórico (p. ej. Mariotti 2000, Rodríguez y Gutiérrez 2006).

Antes de implementar las actividades de geometría se destinaron dos sesiones de 2 horas cada una para introducir a los estudiantes en el manejo del software. Estas sesiones se trabajaron al estilo de un mini taller; se contempló que los estudiantes interactuaran sólo con las herramientas del software que se requerían. Además, se introdujeron algunas ideas que debían saber para abordar las actividades, como la congruencia y semejanza de triángulos, propiedades de paralelogramos y algo referente al círculo.

Las 5 actividades se implementaron en dos sesiones, una de 3 horas y otra de 2 horas. La razón por la que se implementaron de esa manera, atiende a la disponibilidad de tiempo de los estudiantes. Para cada actividad se destinó aproximadamente una hora.

La primera actividad se llevó a cabo el 16 de Diciembre de 2008, los estudiantes estuvieron organizados en tres parejas, como se indica a continuación:

Pareja 1: Blanca Estela Torres Barajas (B) y María Isabel Villafaña García (M)

Pareja 3: Irma Isabel Millán López (I) y Nancy Quijas Martínez (N)

Pareja 4: Javier Vázquez Contreras (J) y Adán Pérez Tovar (A)

Aparecen sólo tres parejas debido a que dos alumnos llegaron tarde y se incorporaron hasta la siguiente actividad. La actividad consistió en lo siguiente:

Se les proporcionó una hoja de trabajo (Anexo 2), por pareja con la siguiente figura 3.1, que debían construir con el software.

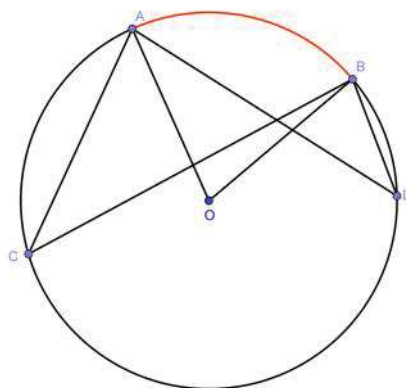


Figura 3.1: Actividad 1

El propósito era que, mediante manipulaciones con el software, identificaran una conjetura: la relación entre el ángulo inscrito ($\angle ACB$ y $\angle ADB$) y el ángulo central ($\angle AOB$). Se les pidió que midieran los ángulos involucrados, luego que variaran los arcos e identificaran la relación como invariante. Por último que dieran una prueba de la conjetura.

La segunda actividad se implementó el mismo día, con duración de una hora, los estudiantes estuvieron organizados en cuatro parejas, como se indica a continuación:

Pareja 1: Blanca Estela Torres Barajas (B) y María Isabel Villafaña García (M)

Pareja 2: Saray Yokebed Medel Mares (S) y Gisela Rojas De anda (G)

Pareja 3: Irma Isabel Millán López (I) y Nancy Quijas Martínez (N)

Pareja 4: Javier Vázquez Contreras (J) y Adán Pérez Tovar (A)

En esta actividad, al igual que en la primera, se les proporcionó una hoja de trabajo (Anexo 3) por pareja, con indicaciones para construir la figura 3.2.

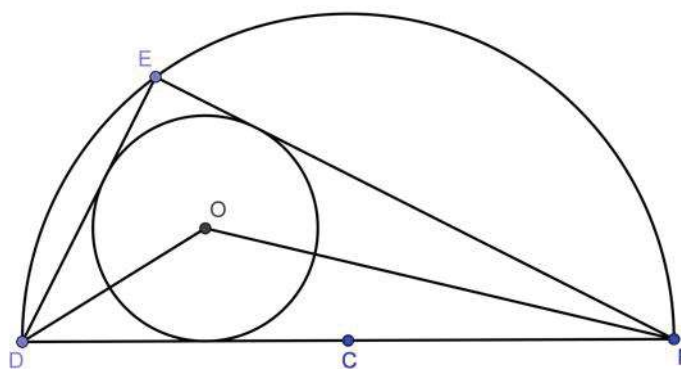


Figura 3.2: Actividad 2

El propósito de la actividad era que identificaran las medidas de los ángulos $\angle DEF$ y $\angle DOF$ como invariantes, manipulando la figura con el software, e intentaran dar una demostración.

La tercera actividad también se llevó a cabo el 16 de Diciembre de 2008, se desarrolló en una hora, los estudiantes estuvieron organizados en cuatro parejas, como se indica a continuación:

Pareja 1: Blanca Estela Torres Barajas (B) y María Isabel Villafaña García (M)

Pareja 2: Saray Yokebed Medel Mares (S) y Gisela Rojas De anda (G)

Pareja 3: Irma Isabel Millán López (I) y Nancy Quijas Martínez (N)

Pareja 4: Javier Vázquez Contreras (J) y Adán Pérez Tovar (A)

En esta actividad también se les proporcionó una hoja de trabajo, en la cual aparece la figura 3.3. El propósito era que los estudiantes identificaran que el ángulo formado por las rectas AB y BD es de 90° cuando AB es tangente a la circunferencia y pudieran justificar ese hecho.

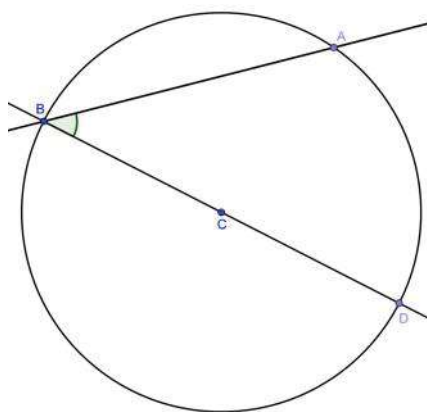


Figura 3.3: Actividad 3

La actividad número cuatro se implementó el 8 de Enero de 2009, con duración de una hora. Participaron 6 estudiantes, organizados en tres parejas, como se muestra a continuación:

Pareja 1: Blanca Estela Torres Barajas (B) y María Isabel Villafaña García (M)

Pareja 2: Saray Yokebed Medel Mares (S) y Gisela Rojas De anda (G)

Pareja 3: Irma Isabel Millán López (I) y Javier Vázquez Contreras (J)

En la hoja de trabajo se les pidió que realizaran la siguiente construcción: Dibuja tres puntos A, B y C, fíjalos con la herramienta fijar, luego dibuja el punto D, une los segmentos; se ha formado el cuadrilátero ABCD. Traza las mediatrices de los lados del cuadrilátero (ver figura 3.4). El propósito era que movieran el punto D e identificaran para qué posición

(s) del punto se cumple que las mediatrices concurren y dieran una demostración para eso.

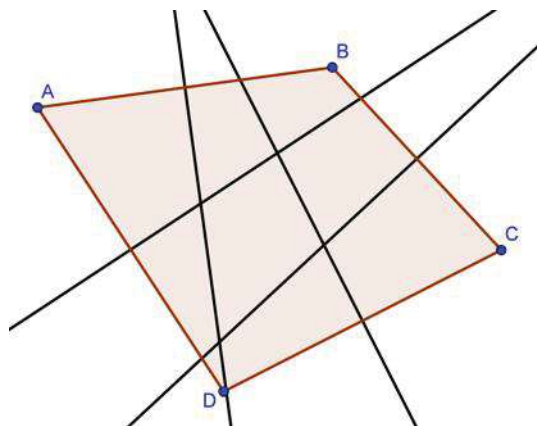


Figura 3.4: Actividad 4

La actividad cinco también se llevó a cabo el 8 de Enero de 2009, con duración de una hora, participaron los mismos estudiantes organizados en las tres parejas mencionadas.

La hoja de trabajo contiene las siguientes instrucciones:

Construir un cuadrilátero cualquiera.

Marcar los puntos medios de los lados del mismo.

Construir el cuadrilátero que tenga como vértices estos puntos (ver figura 3.5).

¿De qué tipo de cuadrilátero se trata?

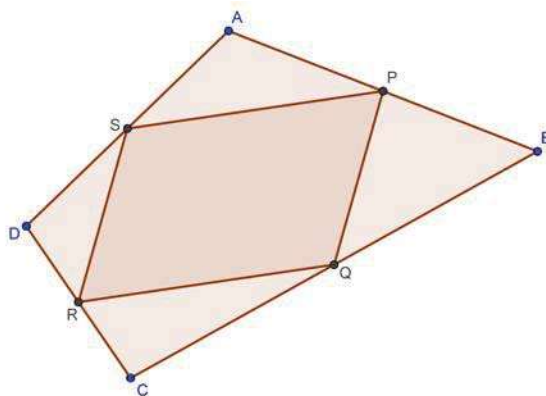


Figura 3.5: Actividad 5

El propósito era que identificaran que siempre es un paralelogramo y lo demostraran.

3.3.2. Números

Las actividades de números (Anexo 3) se llevaron a cabo en ambiente de lápiz y papel. Fueron 11 actividades, estructuradas como sigue: las primeras cuatro se engloban en una sola, la pregunta cinco se maneja de manera independiente, la 6 y 7 se engloban en una sola; y de la 8 a la 11 en otra. De la misma manera que en geometría, antes de que los estudiantes abordaran las actividades se destinó una sesión de dos horas para introducir y/o recordar algunos conceptos matemáticos; como la suma de los “ n primeros naturales”, el teorema fundamental de la aritmética y algunos elementos de divisibilidad.

Las actividades se desarrollaron individualmente y en cada una participaron 6 estudiantes:

Blanca Estela Torres Barajas (B)
María Isabel Villafaña García (M)
Saray Yokebed Medel Mares (S)
Gisela Rojas De anda (G)
Irma Isabel Millán López (I)
Javier Vázquez Contreras (J)

Las primeras 4 actividades son problemas, de los cuales, algunos fueron tomados del Libro para el Maestro (SEP 2004), como los siguientes:

Un número impar es de la forma $2t + 1$ o $2t - 1$, demuestra que todo número impar es la suma de dos enteros consecutivos.

El cuadrado de todo número impar es impar y, recíprocamente, si el cuadrado de un número es impar, entonces el número es impar

La finalidad de tomar problemas de este libro es que fueran familiares para los estudiantes. Las actividades se aplicaron el día 15 de Enero de 2009, con duración de hora y media.

La Actividad 5 tenía como propósito que, a partir de algunos casos particulares, los estudiantes pudieran plantear una conjetura y después probarla; la idea central era identificar cuando la suma de K enteros consecutivos es divisible por k , este problema también se encuentra en el Libro para el Maestro de secundaria (*Ibid*).

Las actividades 6 y 7 se engloban en una, ya que la 6 tenía como propósito que los estudiantes identificaran los residuos que se obtienen al dividir un entero por otro y así poder abordar la 7, cuyo propósito es determinar cuándo el producto de K números consecutivos es divisible por k y probarlo. Estas actividades se implementaron el 20 de Enero de 2009, en hora y media.

Las actividades 8 a 11 también se aplicaron el 20 de Enero de 2009, con duración de una hora. Están constituidas por cuatro problemas; el objetivo de implementarlos fue observar alguna diferencia en los esquemas de prueba de los estudiantes. Son cuestionamientos relativamente más sencillos que los primeros, como los siguientes:

Un número primo es aquel que sólo es divisible por sí mismo y por la unidad. Se sabe que 3, 5 y 7 son números primos, además son impares, ¿se puede conjeturar que todos los números impares son primos?, justifica tu respuesta.

¿Con excepción del 2 todos los números primos son impares?

En el siguiente capítulo se muestran los resultados de las distintas etapas del trabajo.

Capítulo 4

Resultados

Una vez que se hizo la revisión de los documentos curriculares, se aplicó el cuestionario e implementaron las actividades con los estudiantes, en este capítulo se exponen los resultados de cada una de estas acciones.

4.1. Planes y programas

4.1.1. Secundaria

De acuerdo con los planes y programas de estudio para la educación secundaria (2007), la SEP plantea la incorporación de las demostraciones en tercer grado de secundaria. Se menciona que el profesor sólo debe mostrarlas; es decir, no se espera que el alumno haga “demostraciones”, la actividad del alumno está centrada en las justificaciones (pruebas). Como este trabajo se realizó con futuros profesores, era importante identificar cuáles eran las demostraciones que el profesor debe mostrar.

En el Plan de estudios, la SEP (2007) expone los propósitos de las asignaturas en la escuela secundaria; respecto a las matemáticas, se identifica un propósito central donde se menciona la justificación como un componente central en el aprendizaje de las matemáticas: “que los alumnos aprendan a justificar la validez de los procedimientos y resultados...” (SEP 2007, P.34). En consecuencia, la SEP establece que la escuela debe garantizar, entre otras cosas, que los estudiantes “utilicen el lenguaje algebraico para generalizar propiedades aritméticas y geométricas” (*Ibid*, p.34).

En el Programa de matemáticas la SEP (2006) formula qué se busca con el estudio de las matemáticas en la escuela secundaria, lo cual identifica como

una forma de pensamiento, como mediador para expresar matemáticamente situaciones de diversos entornos socioculturales, además de utilizar técnicas adecuadas para plantear, identificar y resolver problemas (*Ibid*, p.7)

Para lograrlo la SEP menciona que la escuela “deberá propiciar un ambiente en el que los alumnos formulen y validen conjeturas” (p.7).

El planteamiento central en cuanto a la metodología didáctica que sustentan los programas para la educación secundaria consiste en llevar a las aulas actividades de estudio que “despierten el interés de los alumnos y los inviten a reflexionar, a encontrar diferentes formas de resolver los problemas y a formular argumentos que validen los resultados” (SEP 2006, pág.11).

Respecto a la evaluación, se propone que sea mediante “competencias matemáticas”, una de las cuales es la argumentación. En esa misma vertiente la SEP incluye líneas de progreso mediante las cuales el profesor puede identificar avances en el logro de las competencias, una de las líneas de progreso es “de la justificación pragmática a la justificación axiomática” (SEP 2006, p. 144) es decir, de acuerdo con la SEP un alumno debería pasar de argumentos del tipo “porque así me salió a argumentos apoyados en propiedades o axiomas conocidos” (*Ibid*, p. 144).

De acuerdo con lo anterior se identifica la prueba como un componente central del currículum, por supuesto las pruebas como un tipo de explicaciones (Balacheff, 2000), o justificaciones (Flores, 2005), además de la formulación de conjeturas. A continuación se hace una revisión de los contenidos matemáticos, cuyo objetivo es identificar en cuáles aparecen estas ideas.

La SEP organiza los contenidos matemáticos que se estudian en la educación secundaria en tres ejes: Sentido numérico y pensamiento algebraico; Forma espacio y medida y Manejo de la información. En cada grado se distribuyen dichos ejes en cinco bloques. En cada bloque aparecen los propósitos respecto a los aprendizajes que los alumnos deberían evidenciar al concluir el bloque.

Para tener una idea más clara de cómo se plantea lo respectivo a la argumentación y justificación, se revisan los propósitos de cada bloque en los tres grados y algunas actividades.

En primer grado, los bloques 2 y 4 hacen explícita la justificación como uno de los aprendizajes esperados, por ejemplo: “que los alumnos justifiquen el significado de fórmulas geométricas que se utilizan al calcular el perímetro y el área de triángulos, cuadriláteros y polígonos regulares” (SEP 2006, p. 33). El tipo de justificaciones (pruebas) que se dan son empíricas.

En los bloques 1, 3 y 5 no se explicita como un aprendizaje esperado; sin embargo, en estos bloques se encuentran actividades relacionadas con la generalización, en las que pide dar una prueba de tipo empírico-inductiva.

Al igual que en primer año, en segundo grado, hay bloques donde se hace explícita la justificación como un aprendizaje esperado, muestra de ello son los bloques 1 y 3: que los alumnos “justifiquen la suma de los ángulos internos de cualquier triángulo o cuadrilátero” (SEP 2006, p. 65), “Establezcan y justifiquen la suma de los ángulos internos de cualquier polígono.” (p. 83)

En los otros tres bloques, 2, 4 y 5, no es explícita la incorporación, sin embargo se les pide que justifiquen las fórmulas para calcular el volumen de cubos, prismas y pirámides, o que determinen si algunas afirmaciones son verdaderas o falsas y que argumenten para justificar su respuesta,

Por ejemplo: cualquiera de las alturas del triángulo siempre es menor que uno de sus lados; la altura de un triángulo es menor que la mediana que corresponde al mismo lado; cuando la mediana correspondiente a un lado de un triángulo es también mediatriz de éste, el triángulo es isósceles. (*Ibid*, p.94)

En tercer grado aparece una situación similar a la de primero y segundo, es decir hay bloques donde se hace explícito el justificar algún resultado, un procedimiento, una fórmula; sin embargo, en los contenidos de este grado se buscaba cuáles eran las demostraciones que el profesor debería mostrar, lo cual no sucede. Es decir, en el programa de estudios de matemáticas no se mencionan.

En consecuencia, se procedió a revisar los materiales complementarios comenzando por el Libro para el maestro (SEP, 2004), específicamente en lo que respecta a la prueba, y se encontró una contradicción respecto al programa de estudios de matemáticas (SEP, 2006), ya que el libro para el maestro propone que los alumnos hagan demostraciones. En el tema de Aritmética plantea:

Probar que la suma de tres enteros consecutivos es múltiplo de 3. Investigar lo que ocurre en el caso de 4, 5, 6,...enteros consecutivos. ¿En qué casos la suma de k enteros consecutivos es múltiplo de k ? (SEP 2004, p.247)

En el tema de Geometría aparece el problema de demostrar qué tipo de cuadrilátero se forma al unir los puntos medios de un cuadrilátero, y se menciona que “el profesor podrá orientarlos a que proporcionen un argumento deductivo para demostrar que se trata efectivamente de un paralelogramo” (*Ibid*, p. 244)

Esta contradicción muestra que no hay una revisión cuidadosa de los materiales, por parte de quienes los realizan. Sin embargo, la propuesta en el Libro para el maestro parece más adecuada para facilitar el tránsito de los estudiantes de las “justificaciones pragmáticas a justificaciones axiomáticas” que es el planteamiento que se hace en SEP (2006, p.144).

Otros materiales, como el Fichero de actividades didácticas (SEP, 2004) contiene tareas similares a las que se proponen en el Programa de estudios (SEP, 2006), en consecuencia no se incluye nada al respecto de este material. En Geometría Dinámica (2000) aparecen actividades que llevan a los alumnos a formular conjeturas y ofrecer explicaciones respecto a porqué es cierta tal conjetura, ahí las pruebas son sobre todo de tipo empírico (Balacheff, 2000, Harel y Sowder, 1998) aunque las actividades se prestan para que los alumnos puedan pruebas deductivas (Harel y Sowder 1998), pero no es explícito, en todo caso correspondería al profesor extender las pruebas.

Una vez revisados el Plan de estudios (SEP, 2007), los Programas de estudio de matemáticas (SEP, 2006) y los principales materiales complementarios que la SEP propone, se concluye que no es claro cuáles son las demostraciones que el profesor debe mostrar, ya que no aparecen en ningún lado. Los tipos de pruebas son, en su mayoría, de tipo empírico. Se hacen evidentes algunas incongruencias entre los materiales de apoyo y los planes de estudios. De cualquier manera la formulación de conjeturas es un elemento importante, las pruebas aparecen pero no como un elemento central, una pregunta que surge es ¿en qué medida es importante formular conjeturas si las pruebas no son claras?

Ahora habrá que observar si hay relación con los programas de estudio de la normal superior.

4.1.2. Normal Superior

A continuación se hace una revisión de los programas de estudio de la Normal Superior, las asignaturas correspondientes a los temas tratados en este trabajo, es decir: geometría, aritmética y tecnología y didáctica de las matemáticas. Estos se revisaron con más profundidad.

El Plan de estudios para la Licenciatura en educación secundaria con especialidad en matemáticas está dividido en tres líneas de formación: disciplinaria, didáctica y acercamiento a la práctica escolar. Para este trabajo interesa sobre todo la formación disciplinaria, la cual se divide en tres ejes temáticos: aritmética, álgebra y geometría.

A continuación se listan las materias de la especialidad en matemáticas que se analizaron. El mapa curricular completo se puede ver en el anexo 4.

- Tercer semestre
 - Pensamiento algebraico
 - Los números y sus relaciones
- Cuarto Semestre
 - Figuras y cuerpos geométricos
 - Plano cartesiano y funciones
 - Procesos de cambio o variación
- Quinto semestre
 - Medición y cálculo geométrico
 - Procesos cognitivos y cambio conceptual en matemáticas y ciencia
 - Escalas y semejanzas
- Sexto semestre

- Seminario de investigación en educación matemática
- Seminario de temas selectos de historia de las matemáticas
- Tecnología y didáctica de las matemáticas
- La predicción y el azar
- Presentación y tratamiento de la información

La estructura de los programas de estudio es la siguiente:

- Propósitos generales
- Organización de contenidos
- Bibliografía
- Orientaciones didácticas y de evaluación
- Actividades sugeridas

Cabe señalar que al inicio se propuso que las escuelas normales oficiales de cada estado de la república diseñaran sus propios programas de estudio, en lo referente a las especialidades, sin embargo no se obtuvieron los resultados esperados y al final la SEP hizo un diseño para todas las normales.

Aún cuando se mencionan las características de la estructura de los Programas de estudio, realmente no todos las tienen, hay asignaturas para las que sólo hay un temario y la bibliografía, como en el caso de Figuras y Cuerpos Geométricos, Plano Cartesiano y Funciones, Procesos de Cambio y Variación, que corresponde a cuarto semestre. A continuación se hace una revisión por cada asignatura que sí tiene la estructura señalada, considerando sobre todo la organización de contenidos y actividades sugeridas.

La asignatura de Los Números y sus Relaciones está organizada en cuatro bloques, como se muestra a continuación:

Bloque I. Aspectos históricos de los sistemas numéricos
 Bloque II. Los números enteros
 Bloque III. Números racionales
 Bloque IV. Proporcionalidad

Los propósitos generales de la asignatura son que los estudiantes:

1. Adquieran bases sólidas en relación con el estudio de los números y sus relaciones, tanto para abordar los siguientes cursos de la especialidad como para realizar un trabajo docente de calidad.

2. Adquieran elementos para analizar situaciones de estudio relacionadas con el significado de los números, sus relaciones y operaciones, que resulten adecuadas para los estudiantes de secundaria.
3. Desarrollen habilidades para resolver problemas en diferentes contextos, con base en el conocimiento de los números y sus relaciones. (SEP 2001, p.11)

Estos propósitos como su nombre lo dice, son muy generales y no es posible determinar si la prueba es un elemento importante.

En el desarrollo de la propuesta se identifican algunos aspectos relevantes respecto a la prueba “los estudiantes deben compartir los resultados de sus exploraciones y presentar justificaciones y explicaciones de los procedimientos que empleen” (*Ibid*, p. 11).

En las actividades se plantean algunas interrogantes que pueden llevar a algún tipo de prueba (Harel y Sowder, 1998), por ejemplo:

¿Será un número par la suma de dos números consecutivos?, ¿es un número impar la suma de tres consecutivos?, ¿Qué condición se requiere para que un número entero sea la suma de 4, 5, 6, etcétera, números consecutivos? ¿Puede un número dado ser la suma de 2, 3, 4, 5 números consecutivos?, ¿Habrá un número primo que sea mayor que todos los otros números primos? Si el número $2n + 1$ es primo, ¿tendrá n factores impares diferentes de uno?” (*Ibid*, p. 13).

Realmente no aparece la prueba de manera explícita, es decir, en ningún momento se pide a los estudiantes que prueben o demuestren algo; sin embargo, es posible que en el intento por contestar interrogantes como las que se plantean arriba se lleguen a identificar distintos esquemas de prueba (Harel y Sowder, 1998). Se observa que el poder llegar a un tipo de prueba dependerá en gran medida de la conducción del docente a cargo.

La asignatura Pensamiento Algebraico, está distribuida en cuatro bloques:

Bloque I. La observación, generalización y formalización de patrones

Bloque II. El estudio de las funciones y relaciones

Bloque III. Estructuras y transformación de expresiones algebraicas

Bloque IV. El uso de modelos para representar y entender relaciones cuantitativas

Los propósitos son muy similares a los de Los Números y sus Relaciones: demasiado generales y no es posible obtener información importante, en consecuencia ya no se tomaron en cuenta.

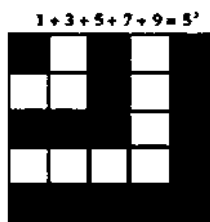
Se observa que en el Bloque I la generalización y la formalización de patrones es un elemento importante, aún así, no se trabajan más allá de encontrar una expresión algebraica que caracterice algunos elementos, por ejemplo:

Es importante que el estudiante identifique y exprese diversos tipos de patrones. Por ejemplo, en la secuencia 4, 6, 8, 10, 12,..., se observa un patrón de

crecimiento que puede ser expresado como $p_{n+1} = p_n + 2$ y donde $p_1 = 4$ que se identifica con una idea central de crecimiento aritmético. Esta idea es base para el análisis de fenómenos que se comportan en forma lineal. (SEP A, 2001, p.15)

En otras se propone una prueba empírica con componentes perceptuales e inductivos (Harel y Sowder, 1998), como se muestra a continuación:

Argumentos geométricos también desempeñan un papel importante en la búsqueda de expresiones generales. ¿Puede encontrar la relación entre la suma $1 + 3 + \dots + (2n - 1)$ (números impares) y la siguiente figura? (*Ibid*, p. 15)



Como se observa, no se propone justificar formalmente las expresiones algebraicas, sino sólo llegar a ellas.

En el Bloque II, no hay actividades donde se explicita la prueba como un elemento importante.

En el Bloque III aparece el algoritmo de la división como un elemento importante, en principio se da un tratamiento de tipo perceptual (Harel y Sowder, 1998); es decir, se representa geoméricamente haciendo alusión a Euclides y se formula la expresión del algoritmo, luego se plantea un tratamiento inductivo y se plantea lo siguiente:

Los estudiantes verificarán el significado de este algoritmo para algunos casos particulares de a y b . Con $b = 10$, y $a = 5297$, ¿cuáles son los valores de r y q ? Con $b = 1.5$ y $a = 145.65$, ¿cuáles son los valores de r y q ? Con $b = 4/5$ y $a = 103/7$, ¿cuáles son los valores de r y q ? (SEP A, 2001, p. 24).

Se vuelve a hacer evidente la relevancia de las pruebas empíricas. En el Bloque IV, no hay actividades donde se incluya la prueba.

Como ya se señaló, en las asignaturas correspondientes al cuarto semestre sólo se da un temario, en consecuencia no hay elementos a analizar.

En quinto semestre tampoco hay un programa detallado, se dan sólo temarios, sin embargo se desarrollan un poco y dejan ver algunas relaciones con la prueba. En la asignatura de Medición y Cálculo Geométrico se encuentran temas como:

Justificación de diferentes fórmulas para calcular el perímetro y el área de paralelogramos, triángulos y polígonos regulares y Justificación de las fórmulas para calcular el volumen de prismas, pirámides, conos, poliedros regulares y la esfera” (SEP, ILCE, 2000)

Para esta asignatura no hay actividades sugeridas, en consecuencia no es posible determinar el tipo de justificaciones que se pudieran desarrollar.

En la materia de Escalas y Semejanzas aparece el tema: “Demostraciones del teorema de Pitágoras. Por descomposición y equivalencia de áreas” (*Ibid*). Para esta materia tampoco hay actividades sugeridas, sin embargo es la única asignatura donde se hace explícita una “demostración”.

En sexto semestre aparece la asignatura Tecnología y didáctica de las matemáticas, los contenidos están divididos en cinco bloques:

Bloque I. Las tecnologías... ¡¡¡al aula!!!

Bloque II. El uso del video en el aula

Bloque III. El uso de la calculadora en el aula

Bloque IV. El uso de software en el aula

Bloque V. El uso de internet

Sólo en el bloque III se explicita un elemento relacionado con la generación de conjeturas aunque la elaboración de la prueba no es clara:

El profesor organiza al grupo en binas y les propone las siguientes operaciones:

$$\begin{aligned}8^2 - 3^2 &= \\78^2 - 23^2 &= \\778^2 - 223^2 &= \\778^2 - 2223^2 &= \end{aligned}$$

Puede orientar la reflexión con preguntas como:

¿Qué esperas que pase con los resultados?

Ya que los estudiantes operaron usando la calculadora:

¿Cuál sería la siguiente operación, que mantenga el patrón?

¿Cómo explicas que pase esto?

¿Podría encontrar otro caso semejante?” (SEP, Tecnología, 2002)

Se observa que no es claro el tipo de prueba que se pretende generar; se deja a criterio del profesor.

El bloque IV donde se hace referencia al uso de software aparece la revisión del proyecto EMAT y el apartado de Geometría dinámica con CABRI, sin embargo la revisión es a nivel de observar la relación de ese material con el programa de estudios de secundaria.

El resto de las asignaturas no incorporan ningún elemento relacionado con la prueba. Respecto a los materiales que se proponen, en gran medida son los mismos que la SEP (2006) contempla para la secundaria; Libro para el maestro y Fichero de actividades; el resto es solo una bibliografía.

Tratando de establecer similitudes y diferencias entre los Planes y programas de estudios de la Normal Superior y la secundaria, respecto a la prueba, se pueden identificar las siguientes:

- En principio se observa que el tipo de pruebas que se promueven, al menos oficialmente, son empíricas.
- Sólo aparece una demostración explícita (Teorema de Pitágoras) en la formación de profesores.
- El único material en común donde aparece la demostración es el Libro para el maestro (SEP, 2004).
- Los planes y programas de la Normal Superior están menos desarrollados en comparación con los de la Secundaria, en consecuencia resulta más complicado identificar qué tipo de pruebas se promueven en algunas asignaturas donde solo aparece el temario.

4.2. Cuestionario

A continuación se presentan los resultados del Cuestionario, cuyos propósitos se fueron señalados en el capítulo anterior.

En la primera sección del Cuestionario con relación a la primera pregunta (Qué es una demostración matemática), se identificó que los estudiantes ven la demostración como:

- Comprobación (6)
- Justificación (8)
- Ejemplificar (trazos) (1)
- Dar a conocer la naturaleza (1)
- Fundamentar (1)

En cada caso el número entre paréntesis significa la cantidad de respuestas dadas con esas características. Un ejemplo del primer tipo es el siguiente:

J: Es un método donde podemos comprobar una situación o matemáticamente un resultado el cual nos hace saber de dónde sale este o dar el porqué

Ejemplo del segundo tipo:

S: Es el procedimiento o área que justifica la fórmula que se está empleando...

Respecto a la segunda pregunta (¿Tú crees que tenga alguna función la demostración en la enseñanza de las matemáticas en Secundaria? ¿Cuál?) todos afirman que la demostración tiene una función en la enseñanza de las matemáticas, pero hay diferencias en cuál es la función:

- Desarrollar el Pensamiento lógico - matemático (3)
- Aplicación (4)
- Comprensión, Aprendizajes significativos (6)
- Convencimiento (2)
- Otra (2)

A continuación se muestran ejemplos donde consideran que una de sus funciones es la de ayudar a comprender:

M: Sí, creo que es muy importante la demostración ya que de esta forma el alumno comprende más fácil X problema. En secundaria es especial y, por la edad de los Alumnos, en ocasiones son muy escépticos, no aceptan algo si no es demostrado

S: Sí, porque por medio de la demostración se pueden despejar dudas de los alumnos; explicar el tema de forma detallada lo que permite que el alumno obtenga una mayor comprensión del tema

Aún cuando son posturas intuitivas, no son fortuitas, si consideramos la clasificación de DeVillers (1990) ya que aparecen las de Verificación (convencimiento) y Explicación (comprensión).

Para la tercera pregunta ¿Para qué crees que se usa, en Matemáticas, la demostración?, se dieron las siguientes respuestas:

- Fundamental (4)
- Corroborar (4)
- Justificar (4)
- Clarificar (4)
- Ejemplificar (1)

Hay una relación directa con las respuestas a la pregunta anterior, como la justificación y una más directa con la demostración en sí que es la de fundamentar:

Para comprobar y ver de dónde salió ese resultado, como en cualquier tipo de asignatura...

Para clarificar o despejar dudas, así como para tomar o desechar hipótesis

Para reafirmar y comprobar x teorema...

Cerrando la primera sección del cuestionario es claro que, en general, los estudiantes identifican la demostración como algo importante tanto en las matemáticas como en las matemáticas escolares.

La segunda sección constó de tres preguntas (4, 5 y 8), aunque la pregunta ocho no se consideró relevante para este trabajo, así que sólo se da cuenta de las preguntas 4 y 5. Las respuestas a la pregunta cuatro se distribuyeron en cuatro rubros:

- Identifican sólo un teorema (1)
- Identifican dos teoremas (3)
- Identifican uno pero marcan otro que no lo es (6)
- Ninguno (7)

Sólo tres estudiantes identificaron los dos Teoremas, hay siete que identifican uno, sin embargo de éstos, seis marcan otro que no lo es y hay siete que no pudieron identificar ningún teorema. Recordando que eran dos Teoremas, una definición y un postulado, concernientes a geometría.

Las respuestas a la Pregunta 5 se organizaron en cuatro tipos, de la siguiente manera:

- Relacionan todas (2)
- Relacionan más de tres (5)
- Relacionan tres (6)
- Relacionan menos de tres (4)

En esta pregunta había que relacionar cinco enunciados con su(s) respectiva(s) expresión(es) algebraica(s). Evidentemente hubo heterogeneidad en las respuestas, aunque la mayoría relaciona correctamente más de la mitad de los enunciados, hubo un error común respecto a dos enunciados: Dos números consecutivos y Tres números consecutivos

13 estudiantes relacionaron estos enunciados con a, b y p, q, r respectivamente.

Las respuestas a la segunda sección nos dice que los estudiantes tienen dificultades para diferenciar Teoremas de enunciados que no lo son, así como para expresar algebraicamente los enunciados.

En la tercera sección, la más importante para este trabajo, se pudieron identificar esquemas de prueba; particularmente se consideran las respuestas de siete estudiantes que fueron quienes participaron en las actividades posteriores.

Para analizar las respuestas se sigue un formato distinto al empleado en las preguntas anteriores ya que se organizaron de acuerdo a los esquemas de prueba y no por pregunta. Se identificó a los alumnos por la letra inicial de su nombre.

En el cuadro 4.1 se resumen las respuestas a las preguntas de acuerdo a los esquemas de prueba de Harel y Sowder (1998, 2007). Los números en cada celda indican el número de problema, la tabla se puede leer por columnas o por filas, por ejemplo: si se lee la fila correspondiente a la alumna **I** se puede observar que utilizó esquemas distintos para un mismo problema, el 6; utilizó los tres tipos de esquemas con 4 subtipos. Cada estudiante utiliza al menos dos tipos de esquemas distintos. Hubo alumnos que no contestaron alguna pregunta, en cuyo caso no es posible ver el número de problema en la fila correspondiente, como en el caso de **J**, no aparece el número 9.

Esquemas de Prueba						
Alumno	Externos		Empíricos		Deductivos	
	Rituales	Simbólicos	Inductivos	Perceptuales	Transform.	Axiomáticos
G	6,10	7,9		10		
I	6		6, 10	9,7	10	
M			9		6,7,10	
J	6,10			7,10	7	
B			6,7,9	10	6,7	
S		9			6,7,10	
A	6				7,10	9
Otros	6(5)	9(3),7(6)	9(4), 6	10(6), 6(3)	6,7,9	

Cuadro 4.1: Respuestas a las preguntas 6-10 del cuestionario

La última fila se refiere a los alumnos que contestaron el cuestionario pero que ya no continuaron en las actividades, de acuerdo a las finalidades del trabajo no es prioritario considerar a dichos alumnos particularmente. Sin embargo dan una idea global de los tipos de esquemas utilizados, el número afuera del paréntesis se corresponde con el de la pregunta, el número entre paréntesis es la cantidad de alumnos que utilizaron el esquema correspondiente en dicha pregunta.

Si se observa la columna correspondiente a los esquemas empíricos, se identifica que las cuatro preguntas fueron justificadas utilizando este esquema, lo mismo se ve para los

otros dos tipos de esquemas. Sin embargo en los subtipos hay diferencias; por ejemplo, sólo dos preguntas entran en el deductivo-axiomático, al igual que en los externos-rituales y los externos-simbólicos; a diferencia de los empíricos-inductivos y los deductivos-transformacionales, en los cuales aparecen las cuatro preguntas. El subtipo autoritario no aparece en ninguna respuesta. Enseguida se muestran algunos ejemplos de los esquemas mostrados.

6. Se propuso la siguiente tarea a un estudiante:

"Verifique que la suma de dos números pares siempre es un número par".

Luego, el estudiante escribió lo siguiente:

$$2(8) + 2(5) = 2(8+5)$$

$$16 + 10 = 2(13)$$

$$26 = 26$$

Sea $2n$ un número par y $2r$ otro, entonces $2n + 2r = 2(n+r)$.
como todo número par es de la forma $2x$ queda verificado

$$2(1) + 2(2) = 2(1+2)$$

$$2 + 4 = 2(3)$$

$$6 = 6$$

Subraya una de las siguientes opciones, dependiendo de lo que consideres que hizo la persona.

i) Resolvió un problema

iii) Dio un ejemplo

ii) Hizo una demostración

iv) Otra

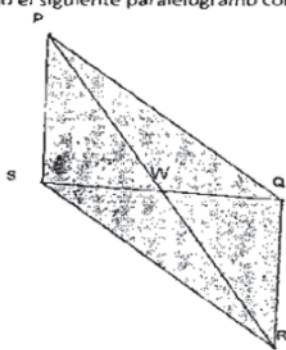
Justifica tu respuesta: Porque se realizó una demostración por el
cual se demuestra lo que dice el enunciado.
Y al ponerle números a los literales se se obtiene el número par

Figura 4.1: Respuesta dada por I a la pregunta 6

A un alumno se le planteó el siguiente enunciado:

"Demuestre que en cualquier paralelogramo las diagonales se bisecan".

El alumno dibujó el siguiente paralelogramo con las respectivas medidas:



PQ = 7,03 cm
 QR = 4,16 cm
 PR = 10,18 cm
 SQ = 5,46 cm
 PW = 5,09 cm
 SW = 2,73 cm

Luego escribió:

En la figura el cuadrilátero PQRS es un paralelogramo, con W como punto de intersección de las diagonales PR y SQ. La diagonal PR mide 10,18 y PW 5,09, entonces PW es la mitad de PR. La diagonal SQ mide 5,46 y SW 2,73, entonces SW es la mitad de SQ. Por lo tanto PR biseca a SQ e inversamente.

Consideras que la persona dio una demostración: No

Justifica tu respuesta: Porque las medidas no influyen y
según porque sólo se mostraron más figuras (paralelogramos)
donde las diagonales se bisecan.

Figura 4.2: Respuesta de I a la pregunta 10

En la figura 4.1 se identifica un esquema de tipo empírico-inductivo, utilizado por **I** cuando responde la pregunta 6. Se observa como realiza dos casos particulares para los que se cumple la proposición y entonces reconoce que es una “demostración”.

La figura 4.2 muestra como **I** utiliza también un esquema de tipo empírico-inductivo para responder a la pregunta 10. Primero identifica que es un caso particular por lo que no puede ser una demostración, enseguida argumenta que le faltó mostrar más casos, es decir, este alumno relaciona la “demostración” con mostrar varios casos.

Las respuestas de **I** son consistentes: necesita de varios casos para convencerse y convencer a otros de la certeza de una proposición, además en la primera pregunta del cuestionario relacionó la demostración con la ejemplificación.

Hubo casos donde un alumno utiliza dos esquemas distintos para contestar una misma pregunta, como en la siguiente:

Sea $ABCD$ un rectángulo, por R un punto en la diagonal AC , traza paralelas a los lados AB y BC respectivamente, generando los puntos de intersección W en AB , X en BC , Y en CD y Z en DA . Demuestra que las áreas de los cuadriláteros $WBXR$ y $ZRYD$ son iguales.

El estudiante **J** utiliza primero un esquema empírico-perceptual, ya que utiliza un ejemplo para determinar la veracidad de la proposición como se aprecia en la figura 4.3.

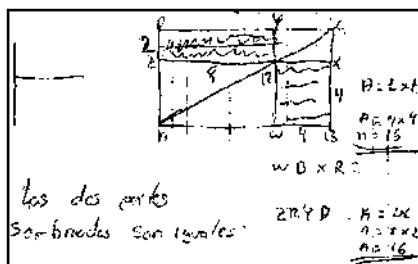


Figura 4.3: Respuesta de J a la pregunta 7

Luego utiliza un esquema, que pareciera deductivo-transformacional, escribe lo siguiente:

El triángulo ZRA es igual al triángulo ARW también el triángulo YCR es igual y el triángulo RXC entonces lo restante es igual o tiene la misma área.

Sin embargo no argumenta porqué son iguales. Una pregunta que surge es si sólo se está basando en el ejemplo que realizó o lo utilizó como un medio para recordar. En la sección correspondiente a las actividades de geometría se tendrán más elementos para poder contestar.

En respuesta al mismo cuestionamiento el estudiante **S** mostró un esquema deductivo transformacional, escribió lo siguiente:

En el rectángulo $ABCD$, por medio de la diagonal AC que lo atraviesa se obtienen 2 triángulos iguales. Al realizarse el trazo de paralelas a los lados BC y AB por el punto R se obtienen medidas iguales entre BX en comparación a AZ al igual que AW y DY , a partir de esto se forman 2 pares de triángulos iguales AWR con respecto a AZR y RXC con respecto a RYC , por lo tanto el área que sobra de un triángulo ABC será igual a la parte restante del segundo triángulo.

Se observa que hay elementos para determinar qué tipo de esquema es: su argumentación se basa en propiedades geométricas, además de la transformación sobre objetos (rectángulo, paralelas) para anticipar el resultado (Harel y Sowder 1998).

9. Demuestra que la diferencia entre los cuadrados de dos números naturales consecutivos cualesquiera es siempre un número impar, igual a la suma de dichos números.

$$(a)^2 - (a-1)^2 \Rightarrow a^2 - (a^2 - 2a + 1) = \cancel{a^2} - \cancel{a^2} + 2a - 1 = 2a - 1$$

por lo que los números consecutivos son $(a-1)$ y (a) , entonces el resultado es igual a la suma de ambos

$$(a-1) + (a) = a-1+a = 2a-1$$

Y es impar porque se resta una unidad al doble de un número "a", que por ser doble, es par

10. A un alumno se le planteo el siguiente enunciado:

Figura 4.4: Respuesta de A a la pregunta 9

En la figura 4.4 se muestra un ejemplo de un esquema deductivo-axiomático para responder a la pregunta nueve. Da muestra de un manejo eficiente del lenguaje algebraico. Además ese alumno (A) relacionó correctamente los enunciados de la pregunta cinco, es decir pareciera que no hay duda que entiende el lenguaje, sin embargo cuando responde a la pregunta 6 aparece algo muy distinto, como se muestra en la figura 4.5.

6. Se propuso la siguiente tarea a un estudiante:

"Verifique que la suma de dos números pares siempre es un número par".

Luego, el estudiante escribió lo siguiente:

Sea $2n$ un número par y $2r$ otro, entonces $2n + 2r = 2(n + r)$, como todo número par es de la forma $2x$ queda verificado

Subraya una de las siguientes opciones, dependiendo de lo que consideres que hizo la persona.

i) Resolvió un problema	ii) Hizo una demostración
iii) Dio un ejemplo	iv) Otro

Justifica tu respuesta: Para hacer una demostración generalmente se recurre a la llamada "Forma General", utilizando álgebra para comprobar que en cualquier caso se cumple dicho teorema o enunciado

nun
par

Figura 4.5: Respuesta de A a la pregunta 6

El estudiante **A** identifica que la persona hace una demostración, pero tiene dificultades con la parte simbólica, toda vez que la veracidad de la demostración depende de que $n + r$ sea par. Aún cuando identificó en la pregunta cinco que $2(3q)$ y $2w$ eran números pares. Una explicación podría ser que en la pregunta seis aparece una suma $(n + r)$ y entonces no identifica esa suma como un solo número.

Así, se ha observado que los estudiantes muestran una variedad de esquemas, no sólo para responder a preguntas distintas, incluso en la misma pregunta aparecen los tres tipos de esquemas.

Evidentemente el marco teórico se ajusta a las respuestas de los estudiantes, que era uno de los objetivos del cuestionario; tener elementos para identificar si la propuesta de Harel y Sowder (1998, 2007) era adecuada para esos estudiantes en particular.

En general no hay un manejo eficiente del lenguaje matemático, hay ambigüedades en las representaciones algebraicas y en los términos geométricos como semejanza y congruencia. Esto fue útil para seleccionar algunos conceptos matemáticos que se trataron antes de implementar las actividades. Además se diseñaron las actividades de geometría y números, que permitieran observar los esquemas de prueba.

4.3. Actividades

Para la recogida de datos se consideraron las hojas de trabajo de los estudiantes, grabaciones de audio y video de las sesiones, en algunos casos se transcriben comentarios o discusiones de los estudiantes que proporcionan evidencia de los esquemas de prueba mostrados por los estudiantes.

4.3.1. Geometría

Análisis de la actividad 1

Como ya se mencionó, se proporcionó a los estudiantes una hoja de trabajo (Anexo 2) por pareja, con la figura 4.6, que debían reconstruir con el software.

El propósito era que mediante la manipulación de la figura identificaran una conjetura; la relación entre el ángulo inscrito y el ángulo central y dieran una prueba de la misma.

Al igual que para las últimas preguntas del cuestionario, en los comentarios de los alumnos se les identifica por la inicial de su nombre.

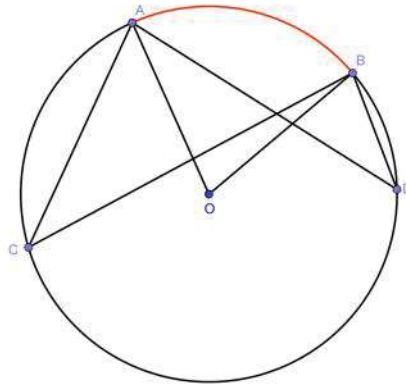


Figura 4.6: Actividad 1

La pareja 1 identificó la relación sin mucha dificultad:

B: a partir de eso son iguales y siempre se pueden hacer así.

M: y cómo se puede escribir, ya se...es un ángulo central y los otros dos son ángulos inscritos por lo que en todos los círculos el ángulo inscrito es la mitad del central

Sin embargo, no era claro para ellas cuál era la conjetura:

M: pero la conjetura es otra, ¿no?

B: parecida

M: ¿cómo?

B: Los ángulos inscritos son iguales con el mismo arco

M: que los ángulos inscritos que comparten el mismo arco miden lo mismo

B: así

Esta pareja identificó una conjetura distinta a la que se esperaba. Observan la relación entre el ángulo central y el inscrito, pero para ellas esa no es la conjetura, lo cual genera confusión respecto a lo que deben probar, como se muestra a continuación.

La forma en que esta pareja decide probar es basándose en la superposición de figuras, es decir, suponen una figura en una hoja de papel cortan los ángulos correspondientes y luego verifican sobre poniendo uno encima del otro. La idea la expresaron como sigue:

M: la última puede salir con los ángulos arriba (se refiere a la última pregunta de la hoja de trabajo, donde se les pide que den una prueba)

B: ¿arriba?

M: si los ponemos uno arriba del otro

B: ¿los de los lados? ¿los inscritos encima del central?, ha ¿cómo con papel?

M: si así se puede, ¿no?

B: entonces sobreponemos, antes cortamos y ya queda

M: sí

Esta prueba no es para la conjetura que ellas proponen, entonces reaccionan y comentan

M: ¿y la conjetura?

B: de veras...pues igual cortamos el ángulo y lo sobreponemos, ¿no?

Es decir, para ellas no fue claro cuál era la conjetura y qué cosa debían probar, sin embargo realizan una prueba empírica-perceptiva, toda vez que utilizan la experiencia física para justificar.

La pareja 3, al igual que la pareja 1, identifica con facilidad la relación entre el ángulo inscrito y el ángulo central:

I: El ángulo central es el doble que el inscrito, ¿verdad?

N: Sí, pues eso escribimos

Sin embargo les sucede algo similar que a la pareja 1, identifican la relación, pero no les queda claro cuál es la conjetura:

N: bueno, y cómo sería la conjetura

I: lo mismo...bueno que sólo se modifica si cambia el arco

En la hoja de trabajo aparece la siguiente conjetura:

*Que la medida de los ángulos sólo se modifica si la medida del arco se cambia,
siendo la medida del ángulo central la doble del inscrito*

Sin embargo esta pareja no da una prueba, se limitan a decir que es posible demostrarlo por medio de trazos, pero no argumentan.

N: entonces sólo ponemos que por medio de trazos?

I: mmm...no se...sí

Éste tipo de comentarios está ligado con la idea de prueba externa, es posible identificarla dentro del subtipo autoritario, aún cuando no hacen referencia a ningún autoridad (profesor, libro), de alguna manera es algo que ellas han visto hacer a los profesores o en libros de texto.

La pareja 4 también identifico con facilidad la conjetura, pero a diferencia de las otras dos parejas ésta la identifica e intenta demostrarla, es decir, se saltan el resto de las preguntas en la hoja de trabajo y se concentran en la última:

A: Sí, es como... ha ya, es el del ángulo inscrito y el ángulo central
J: Cómo
A: El ángulo central es la suma de dos ángulos inscritos
J: No me acuerdo
A: es lo que acabamos de hacer
J: Sí, pero bueno si da con las medidas
A: Pero no me acuerdo de la demostración, bueno se puede sacar por triángulos, mira (escribe en las hojas)...¿pero no son semejantes o sí?

En la hoja de trabajo etiquetaron los ángulos involucrados, pero no pudieron concretar nada.

Los comentarios dan evidencia de un trabajo casi individual por parte de **A**, el papel de **J** se vuelve muy pasivo. Cuando estaba por terminarse el tiempo destinado para la actividad se dan cuenta que prácticamente no habían escrito nada en la hoja de trabajo, hasta ese momento escriben:

J: entonces que queda
A: eso mismo
J: ¿pero en donde la conjetura?
A: ah ahorita, quedaría así (escribe)
J: lo voy a pasar...y la última de la demostración
A: no encuentro una...

Escribieron la siguiente conjetura:

Dados 2 puntos (A, B) sobre una circunferencia, el ángulo central formado $\sphericalangle AOB$, a partir de ellos, es igual a la suma de los 2 ángulos inscritos $\sphericalangle ACB$ y $\sphericalangle ADB$ trazados sobre dos puntos cualesquiera de la misma circunferencia

No pudieron construir la demostración, en la hoja de trabajo, responden a la pregunta ¿Puedes demostrar formalmente esa conjetura? con un “Sí”, pero sólo eso. Al final no dan ningún tipo de prueba.

En el cuestionario inicial, el alumno **A** dio una prueba deductiva-axiomática en uno de los problemas, (ver pág. 15) de acuerdo con esto y los comentarios emitidos, el alumno intentó hacer una prueba del mismo tipo para la actividad 1, sin embargo no le fue posible realizarla.

Cada pareja encontró una conjetura distinta: la primera expresa la relación entre los ángulos que comparten un mismo arco; la pareja 3 expresa dos ideas en su conjetura: una idéntica a la pareja 1 y la otra respecto al ángulo inscrito con el central. La pareja 4 expone la conjetura en términos de que el ángulo central es la suma de dos inscritos. Esta variedad en la elaboración de conjeturas puede tener una relación con el tipo de figura con la que interactuaron, es decir, en la figura aparecen dos ángulos inscritos, la

idea de incorporar esos dos ángulos era como indicio de la variación del ángulo inscrito, sin embargo los alumnos trataron de incorporar toda la información en la construcción de la conjetura, lo cual, en algunos casos originó confusión.

La pareja 1 ofrece una prueba evidente en el marco de Harel y Sowder (1998), de tipo empírico-perceptual, la pareja 3 puede incorporarse en el tipo externo-autoritario y en la pareja 4 no hay prueba.

Actividad 2

En esta actividad, al igual que en la primera se proporcionó a los estudiantes una hoja de trabajo (Anexo 3) por pareja, con indicaciones para construir la figura 4.7.

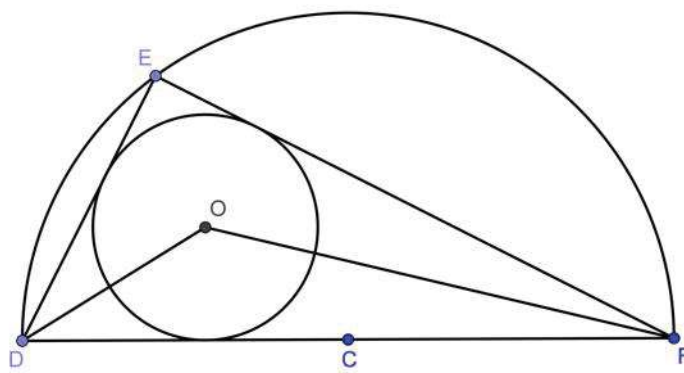


Figura 4.7: Actividad 2

El propósito de la actividad era que identificaran las medidas de los ángulos $\angle DEF$ y $\angle DOF$ como invariantes, manipulando la figura con el software, e intentaran dar una demostración.

La pareja 1 tuvo muchos problemas para construir la figura, lograron la construcción casi al final del tiempo dado para realizar manipulaciones, esto ocasionó que no pudieran realizar la actividad completa. No alcanzaron a identificar alguna conjetura, y en consecuencia no hay prueba.

Al igual que la pareja 1 la pareja 2 también tuvo dificultades para realizar la construcción con el software, sin embargo lograron tener la figura con tiempo suficiente para realizar la actividad. Esta pareja identificó rápidamente que el ángulo DEF era recto y además un ángulo inscrito, lo que les permite dar una prueba:

S: Es otro diferente al primero, pero casi igual

G: ¿porque?

S: mira, hay un ángulo inscrito el DEF

G: sí, no me había fijado

S: Esa es la conjetura

G: que no cambia

S: porque el ángulo central es 180 y el inscrito la mitad 90

Relacionan la actividad con la anterior, por eso es que **S** comenta que es casi igual, refiriéndose a la actividad 1; la comparación con la actividad 1. Les hace identificar rápidamente el $\angle DEF$ como un ángulo inscrito y $\angle DCF$ como central, en ese momento dan una prueba de tipo Deductiva-Transformacional.

Sin embargo, **G** y **S** identifican esta actividad como una extensión de la primera, y les crea confusión identificar una conjetura, además el círculo inscrito en el triángulo DEF les ocasiona conflicto:

G: pero sí cambia

S: no

G: porque el del círculo más pequeño no es igual

S: ah pero es diferente porque es otro círculo

G: pero es el mismo arco

S: si verdad

G: por eso te digo

S: pues hay que agregar eso

G: sí, que no cambia pero si parten de otro círculo sí

S: tú escríbelo

Siguen con la idea de los ángulos que comparten el mismo arco, **G** identifica el $\angle DEF$ y $\angle DOF$ como ángulos que comparten el mismo arco, aún cuando **S** le explica que es otro círculo, en consecuencia cuando escriben la conjetura aparece lo siguiente:

Que la relación entre el ángulo inscrito con el ángulo central nunca va variar, que el primero sea la mitad del segundo, al menos que los ángulos partan de otro círculo teniendo como referencia el mismo arco.

Claramente ellas no identificaron la medida constante del $\angle DOF$ como una conjetura, incluso, se percataron que dicha medida era invariante, pero no le dieron importancia.

La prueba que ellas exponen es respecto a la mitad de $\angle DOF$:

El ángulo central, que tiene un arco de 180° es el doble del ángulo inscrito que se forma en el semicírculo

Aquí se vuelve a observar la interpretación que dan a la actividad como una extensión de la primera, la toman como un caso particular de la actividad 1, claramente lo es, sin embargo la prueba no tiene claridad.

A la pareja 3 le sucedió lo mismo que a las anteriores, la construcción de la figura les costó mucho trabajo, pero pudieron realizarla.

Una vez que tuvieron la figura, identificaron una conjetura rápidamente:

N: o sea que siempre es un triángulo rectángulo
I: sí el ángulo no cambia, siempre es recto
N: de veras
I: esa es la conjetura
N: quedaría que en la mitad de un círculo siempre hay triángulos rectángulos
I: sí pero mejor que en media circunferencia siempre se forma un triángulo rectángulo

Esta pareja no da una prueba, se limitan a escribir la conjetura, ni en las grabaciones ni en las hojas de trabajo aparecen intentos de dar una prueba.

A diferencia de las tres primeras parejas, ésta proporciona dos conjeturas, una respecto a la medida de $\angle DEF$ y otra concerniente a la medida de $\angle DOF$:

J: Entonces la conjetura quedaría que siempre es un ángulo recto
A: sí, pero además el triángulo es rectángulo
J: aja
A: Todo triángulo inscrito en una semicircunferencia teniendo como un lado el diámetro, es rectángulo
J: sí, y para la demostración
A: si se puede

En los comentarios se evidencia confusión respecto a la idea de semicircunferencia, al igual que en la actividad 1, **J** adopta una postura muy pasiva, se limita a escuchar y cuestionar acerca de las preguntas que falta por responder, sin embargo en esta ocasión una pregunta resulta clave:

J: ¿y lo del ángulo de 135 no importa?, ese tampoco cambia
A: hay que poner eso también
J: sí, pero abajo (se refiere al lugar de la hoja donde van a escribir)
A: no importa
J: pero sería el ángulo central de la circunferencia de adentro
A: es inscrita al triángulo rectángulo
J: cómo quedaría
A: pero no todos (hace referencia a que no cualquier ángulo central)
J: sólo el que tiene vértices abajo
A: en la hipotenusa
J: aja

Se vuelve a evidenciar confusión respecto al uso del lenguaje, en este caso, cuando hacen referencia al ángulo central de la circunferencia inscrita, no consideran el proceso de construcción; que dicho ángulo central está delimitado por las bisectrices.

Intentan dar una prueba pero no logran hacerla, aunque esta vez dejan unas figuras como parte de ese intento (ver figura 4.8).

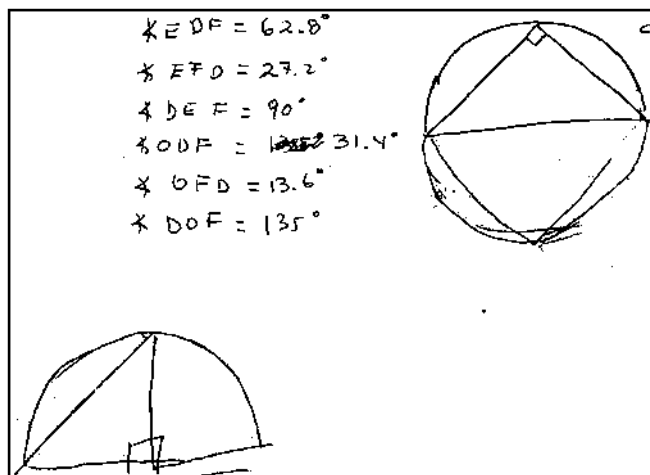


Figura 4.8: Acercamiento de la pareja 4

Un aspecto relevante es la dificultad para construir la figura, en algunos casos fue comprometedor para no abordar la actividad completa, además sólo una pareja encontró la conjetura respecto al ángulo central de la circunferencia inscrita.

Se vuelve a evidenciar un manejo limitado en algunos conceptos matemáticos y la complejidad para producir pruebas.

En esta actividad sólo hubo una prueba de tipo deductivo-transformacional.

Actividad 3

En ésta actividad también se proporcionó a los estudiantes una hoja de trabajo, en la cual aparece la figura 4.9:

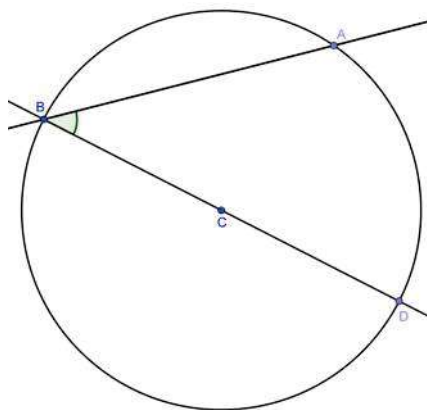


Figura 4.9: Actividad 3

El propósito era que los estudiantes identificaran que el ángulo formado por las rectas AB y BD es de 90° cuando AB es tangente a la circunferencia y pudieran justificar ese

hecho.

La pareja 1 escribió la prueba que aparece en la figura 4.10.

-Trazar una circunferencia con centro en el punto AB, hacer un Cuadrado inscrito, Trazando el diámetro de la circunferencia, una perpendicular al diámetro, marcar y unir los puntos de intersección, esto nos aseguraría que es un cuadrado, el cual cada uno de sus ángulos es de 90° y dos rectas perpendiculares, que se cortan forman cuatro ángulos iguales, por lo tanto son perpendic

Figura 4.10: Prueba de la pareja 1 en la Actividad 3

Relacionando lo que escribieron con la videograbación se pudo dilucidar lo que intentaron decir. En la grabación aparece:

B: El círculo con centro en B y radio BO...entonces ya ahí comprobaríamos que de AO tiene la misma distancia que los otros puntos de intersección que sería de A a... y entonces serían mmm... si formamos ya el cuadrado ahí y un cuadrado tiene como característica que forman... que tienen ángulos de 90° y entonces dice que dos rectas cuando se cortan y son perpendiculares deben de formar cuatro ángulos iguales entonces ahí serían cuatro ángulos de 90° por lo tanto sería perpendiculares

La construcción que intentaba describir **B** se muestra en la figura 4.11.

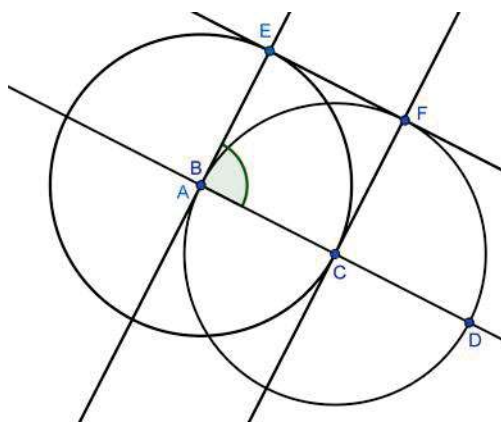


Figura 4.11: Construcción descrita por la pareja 1

Lo que da evidencia de una prueba deductiva-transformacional, aún cuando los argumentos no están bien concatenados y hay errores al expresarse. Una característica importante de este tipo de esquema es la de anticipar el resultado (Harel y Sowder, 1998).

Las otras parejas identificaron la conjetura, pero no dieron ninguna prueba.

Actividad 4

Como ya se mencionó las últimas dos actividades se llevaron a cabo en una fecha posterior, el 8 de Enero de 2009.

En la hoja de trabajo se daban las instrucciones para construir la figura 4.12, en la que A , B y C son puntos fijos y D es móvil, el propósito era que identificaran qué condiciones debe cumplir D para que las mediatrices del cuadrilátero $ABDC$ concurren y lo demostraran.

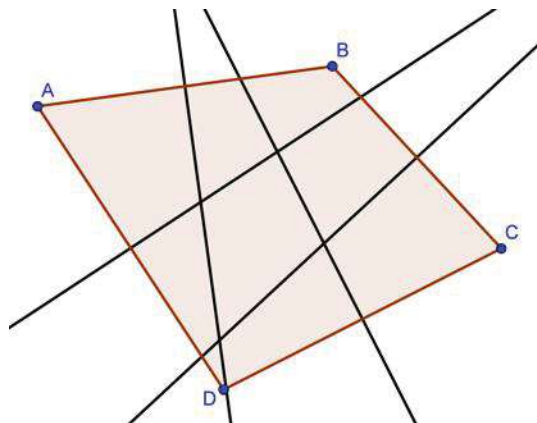


Figura 4.12: Actividad 4

La pareja 1 empezó buscando algunas relaciones

B: en ninguna línea en ninguna línea del polígono, porque mira la ponemos aquí, no, la ponemos aquí, tampoco... el punto D no debe estar sobre la línea del polígono... sobre ninguna... sobre ningún segmento del polígono y la otra era que qué, no debe estar sobre las mediatrices

B: a ver otra cosa, que tenga que tener el punto D para estar...

M: mmm

B: ¿tú crees que sea la misma distancia de aquí a aquí que de aquí a aquí?, no verdad

M: no

B: a lo mejor también puede ser que no debe estar a la misma distancia AD que de D a C ... ahí ya

M: sí

Esta pareja intentó encontrar para qué lugares no se cumplía la concurrencia, realmente no pudieron establecer la conjetura buscada, sin embargo lograron encontrar otras y casi pueden establecer una relación equivalente: la condición para que un cuadrilátero sea cíclico.

Como se observa en la figura 4.13 la pareja 1 da una prueba empírica-inductiva.

iv. ¿Qué condiciones cumple D para que la concurrencia subsista?
 (No debe estar sobre los segmentos que forman el polígono)
 (Ni sobre las mediatrices)
 1. No deben estar los puntos alineados.
 2. Sus ángulos deben ser 294.08 (en otra construcción). ADC y $A, C,$ debe ser de 180°

v. ¿Cómo puedes probar que es cierta tu conjetura?
 (Construyendo un círculo) Demando los ángulos en las
 diferentes posiciones que ~~se~~ concurren las mediatrices

Figura 4.13: Respuestas de la pareja 1 en la Actividad 4

La pareja 2 identifica que el punto D debe estar a la misma distancia del punto de concurrencia que A , B y C :

S: es que yo digo que es dependiendo de la distancia ¿no?... trazamos el círculo que toque a D

G: y yo digo que a A , B y C

S: a ver... pero va a ocurrir lo mismo

G: bueno más o menos

S: que el punto de intersección sea el centro de una circunferencia y ¿que pase por los puntos A , B , C ?

G: sí

Sin embargo al tratar de contestar la pregunta para probar la conjetura aparece un comentario interesante:

G: ¿cómo puedes probar que es cierta tu conjetura? Porque ya lo hicimos por eso (risas)

Es decir, para G no tiene importancia la prueba, toda vez que ya lo hizo en con el software, con eso le basta para cerciorarse de la veracidad. Dan una prueba de empírico-perceptual. Realmente lo que hacen es describir la construcción (ver figura 4.14).

iv. ¿Qué condiciones cumple D para que la concurrencia subsista?
 Que a partir de un círculo que tengo como centro la intersección de 2 mediatrices y pase por los puntos A, B, C ; el punto D se mueva por la circunferencia con lo que se podrá mantener la distancia y los puntos serán concu

v. ¿Cómo puedes probar que es cierta tu conjetura?
 Que debe haber la misma distancia entre el punto de concurrencia y A, B, C .

Figura 4.14: Respuestas de la pareja 2 en la Actividad 4

Lo anterior pone de manifiesto una de las dificultades de trabajar con software: los estudiantes pueden basar sus justificaciones en el software (Rojano, 2007), lo cual no necesariamente es perjudicial, pero se esperaría que pudieran transitar hacia justificaciones con base en las propiedades de las ideas matemáticas involucradas.

La pareja 3 identifica la conjetura y da una prueba empírico-inductiva:

I: El punto D queda dentro de una circunferencia... Si ¿no?

J: aja

I: entonces así, que el punto de intersección sea el centro de una circunferencia y el punto D sea un punto de la misma... si ¿no?

J: aja... y que podemos comprobar moviendo el punto D en cualquier lado

I: de la circunferencia

En esta actividad las tres parejas identificaron conjeturas y dieron pruebas empíricas.

Actividad 5

Al igual que en las actividades anteriores se les proporcionó a los estudiantes una hoja de trabajo donde se les pedía hacer la figura 4.15 en el software.

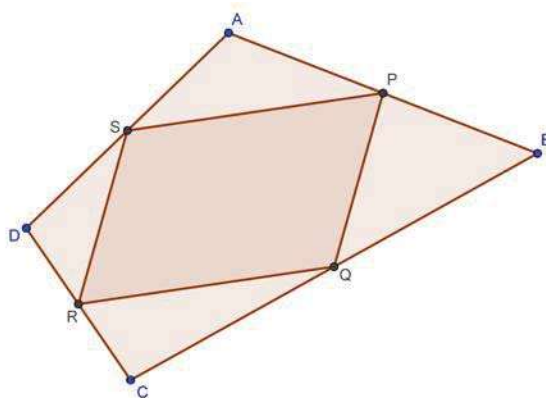


Figura 4.15: Actividad 5

El propósito era que identificaran que el cuadrilátero $PQRS$ con vértices en los puntos medios de los lados de otro cuadrilátero $ABCD$ siempre es un paralelogramo, y dieran una prueba de ello.

La pareja 1 identificó rápidamente que se trataba de un paralelogramo.

B: si es un paralelogramo, no? Porque el paralelogramo tiene que sus lados son paralelos y esos son paralelos, no?

B: le ponemos que sí

M: sí

B: a ver muévelo más

M: pues sí, porque aunque cambia de tamaño o de forma sigue siendo el mismo paralelogramo

B: ¿y nada más?

M: sí

Cuando intentan dar una prueba toman distintos caminos, en principio relacionan la actividad con la anterior y tratan de establecer la prueba a través de las mediatrices del cuadrilátero:

B: los lados opuestos son paralelos, entonces debemos demostrar que son paralelos... o cómo?... es un cuadrilátero no?

M: sí

B: cómo demostrar, a ver traza ahora sí, el círculo

M: con centro en?

B: eso va a ser lo malo podemos trazar...

M: que pase por el...

B: ¡las medianas!

M: porque?

B: porque estamos utilizando el punto medio y el punto medio es para sacar las medianas... la mediatriz?

M: sí, de éste polígono (ABCD)

B: sí... no, pero no se va a ver... porque no hay punto fijo ¿verdad que no?

Lo último ocasionó dudas y no veían claro cuál camino seguir. En un momento posterior, tratan de establecer una prueba para un caso particular:

B: que tenemos que demostrar, que es un cuadrilátero o que es un paralelogramo?... porque... si hacemos un cuadrilátero cuadrado ya no tendríamos que demostrar que es un paralelogramo... sería un cuadrado

M: sí (se refiere a que sigue siendo paralelogramo)

B: ah sí... déjame ver...

Después de un rato logran establecer una meta más clara: identifican la relación de los lados opuestos:

B: sí podemos... se supone que SP debe medir lo mismo que RQ

M: no va a ser igual... (después de medir) ah sí

B: sí porque si no no serían, luego SR debe ser igual a PQ

M: sí

B: ahora tendríamos esta medida y cómo es la mediana DR es igual a RS, DS a SA... AP

M: igual a PB

B: ¿AP igual a PB?

M: aja

B: y nos falta una

M: BQ

B: BQ es igual a que

M: a QC

B: entonces necesitaríamos... para demostrar que es la misma distancia que esto, tendríamos que sacar el... que sería?... lo que tendríamos que demostrar es que SP es igual a RQ como SR es igual a PQ... mmm... y para demostrarlo tendríamos que sacar... podemos utilizar el teorema de Pitágoras

M: sí

Tenían la idea del cuadrado, dejaron de pensar en ese caso particular, pero no toman en cuenta que ya no tienen triángulos rectángulos y comienzan a establecer una serie de identidades que no les llevan a nada:

B: si lo hacemos sin números tendríamos que, primero $c^2 = a^2 + b^2$ y en ese lado tenemos que tendríamos que encontrar la hipotenusa porque es el lado más grande

M: sí

B: entonces c^2 es igual a a^2 que sería SA^2 mas PB

M: AP^2

B: pero tendríamos que darle un número, ¿pongámosle X no?

M: sí

B: $X^2 + Y^2$ no?, supongamos así ahora $c^2 = X^2 + Y^2$ ahí quedaría $c = \sqrt{X^2 + Y^2}$ si no?

M: sí

B: y entonces el otro...

M: este sería X no?

B: es que no se va a poder, porque esta no se va a buscar la hipotenusa si no los catetos... o igual y si lo ponemos mejor así no? (regresan a la notación SA^2)... es que si tendríamos que hacer a fuerza las medidas (X^2)

En las hojas de trabajo aparecen unas anotaciones, como se muestra en la figura 4.16.

Al final no dieron una prueba clara, sin embargo todo el proceso corresponde a un esquema deductivo-transformacional, al mismo tiempo se ilustra un esquema externo-simbólico ya que hay manipulación de símbolos sin sentido.

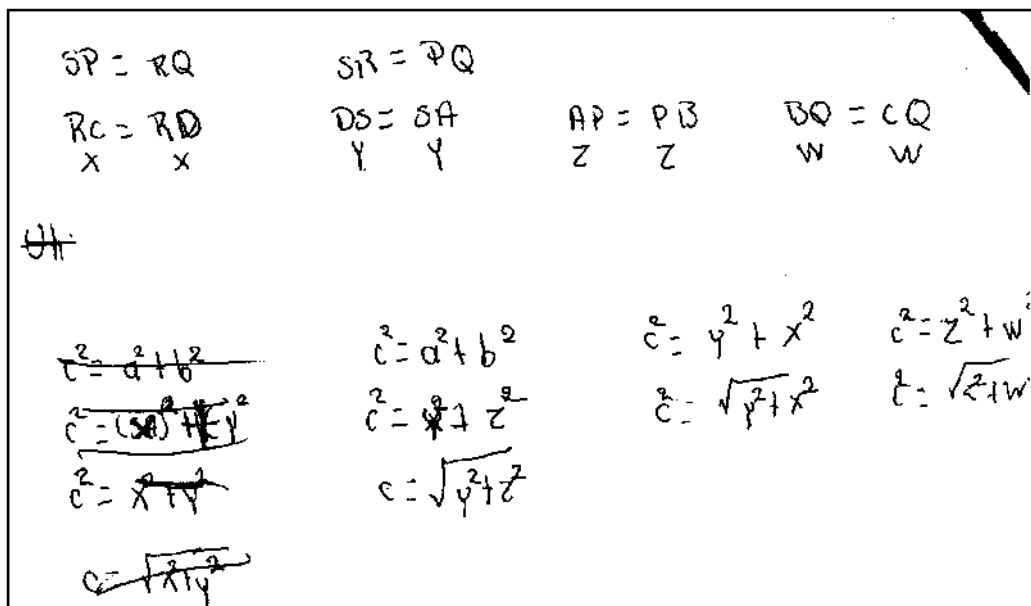


Figura 4.16: Anotaciones de la pareja 1

La pareja 2 identificó que se formaban distintos cuadriláteros, pero sólo se quedaron con la idea de cuadrilátero.

- G: Pero si te fijas solamente se forma un rectángulo o un...
- S: pues se puede formar un rectángulo, un cuadrado, un romboide
- G: pero fíjate que este polígono que también es un cuadrilátero, el de afuera Puede ser... un trapecio... puede ser diferentes figuras
- S: sí
- G: en cambio el de adentro no
- S: éste es un rombo, y lo puedes hacer rectángulo... puede ser un cuadrado, un romboide...
- G: checate a las de alado, tienen otras cosas (Se refieren a sus compañeras)

Esta pareja no dio ninguna prueba.

La pareja 3 identificó que siempre se trataba de un rombo, al momento de argumentar porqué, justificaron solo por medio de los ángulos opuestos y los lados opuestos.

- J: Porque los ángulos S y Q siempre permanecen de la misma medida igual que P y R... igual que los segmentos SP y RQ, y SR y PQ

Es decir, no les queda claro qué es un rombo, realmente argumentan para un paralelogramo, aun cuando no es un rombo dan una prueba de tipo empírico-inductivo, ya que solo miden y verifican para varios casos particulares.

El cuadro 4.2 sintetiza los resultados de las 5 actividades de geometría.

Esquemas de Prueba						
Alumno	Externos		Empíricos		Deductivos	
	Simbólicos	Autorit.	Inductivos	Perceptuales	Transform.	Axiom.
G				G4, G5	G2	
I		G1	G4, G5			
M	G5		G4	G1	G3, G5	
J			G4, G5			
B	G5		G4	G1	G3, G5	
S				G4, G5	G2	
A						
N		G1				

Cuadro 4.2: Resumen de los Esquemas en las Actividades de Geometría

Como puede observarse los esquemas de convicción externa disminuyen, respecto al cuestionario, mientras que los esquemas deductivos-transformacionales y los empíricos persisten, y en el caso de los deductivos-axiomáticos desaparecen.

Sobresale el caso de **A**, que no muestra ningún tipo de esquema. Es interesante porque en las actividades que participó (las tres primeras), estuvo intentado hacer demostraciones; realmente estaba consciente del tipo de prueba que se necesitaba, sin embargo no tuvo los elementos suficientes para poder construirla. No así el caso de **N** que no intentó dar pruebas más allá de la primera actividad y fue de tipo externo.

Siguen apareciendo dos elementos en común a los observados en el cuestionario: se muestran distintos esquemas por los mismos estudiantes y aparecen distintos esquemas en la misma actividad.

4.3.2. Números

Como se señaló en el capítulo anterior, estas actividades se estructuraron en cuatro partes. A continuación se desarrolla lo respectivo a la primera parte, que corresponde a las actividades 1 a 4.

Estas actividades resultaron muy difíciles para los estudiantes; después de 30 minutos ningún estudiante había hecho algo, en consecuencia se procedió a cuestionar el porqué de esa actitud, a lo cual los estudiantes respondieron que no tenían idea de cómo abordar las preguntas. Comentaron que salvo las dos horas anteriores que se les habían explicado algunos problemas de números, no se habían enfrentado a ese tipo de cuestionamientos. Esto ocasionó serias dificultades para seguir, por lo tanto el asesor debió explicar esas cuatro actividades, esperando que los estudiantes pudieran abordar las posteriores.

Por supuesto no se planeó que pasara algo similar, al menos no en los cuatro problemas, ya que como se mencionó en la metodología, algunos fueron tomados del libro para el maestro (SEP 2004), sin embargo sucedió. En las actividades posteriores apareció una reacción similar. A continuación aparecen los resultados, un poco limitados en comparación con los de geometría, pero se rescatan lo más sobresaliente.

En la actividad 4 aparecen respuestas que son de carácter empírico-inductivo como se muestra en la figura 4.17. La imagen evidencia sólo unos casos particulares, no aparece ninguna conclusión respecto a esa indagación. Lo escrito en la parte inferior derecha fue después de que el asesor explicó la actividad.

4.- Si p, q y r son tres enteros cualesquiera, entonces el producto $(p-q)(q-r)(r-p)$ es divisible por 2

$p=2 \ 7 \ 10 \quad (2-3)(3-4)(4-2) \quad (7-8)(8-10)(10-7) \quad p=2t+1$
 $q=3 \ 8 \ 7 \quad (-1)(-1)(2) \quad (-1)(-2)(3) \quad q=2t$
 $r=4 \ 10 \ 3 \quad +2 \quad +6 \quad r=2t+1$

$(10-7)(7-3)(3-10)$
 $3 \quad 4 \quad -2$
 $\cdot 12$
 $\hline 84$

$(2t-1-2t)(2t-(2t+1))(2t+1-(2t-1))$
 $(2t-1-2t)(2t-2t-1)(2t+1-2t+1)$
 $(-1)(-1)(2) =$
 (2)

Figura 4.17: Respuesta de M a la actividad 4

4.- Si p, q y r son tres enteros cualesquiera, entonces el producto $(p-q)(q-r)(r-p)$ es divisible por 2

$p, q, r = \text{enteros}$

$p=3 \quad (3-8)(8-6)(6-3)$
 $q=8 \quad (-5)(2)(3)$
 $r=6 \quad -30$
 $p=7 \quad (10)(13)(-3)$
 $q=12$
 $r=4$
 $p=11$
 $q=13$
 $r=5$

Sólo si por lo menos uno de los enteros p, q o r es número par.

Sí, porque al restarse los enteros, si estos son impares queda uno par, si son pares queda par, si es uno par y el otro par, en otra de las restas se dará que quedará par y al ser multiplicado por pares tendrá un resultado q' será divisible $\div 2$.

Figura 4.18: Respuesta de S a la actividad 4

La figura 4.18 muestra que **S** sí tiene una idea clara: concluye que la afirmación es cierta sólo si alguno es par. Llega a esa conclusión a partir de los casos particulares que corroboró, lo cual es una prueba de tipo empírica-inductiva. El párrafo en la esquina inferior derecha lo escribió después de la explicación del asesor.

La actividad cinco tenía como propósito que los alumnos identificaran cuándo la suma de k enteros consecutivos es divisible por k .

En la actividad se les pide que realicen las sumas de algunos casos particulares y luego obtengan el promedio, enseguida se hacen algunos cuestionamientos, **I** responde a cada uno de ellos como se muestra en la figura 4.19.

5.- En los siguientes casos realiza las sumas correspondientes y luego encuentra el promedio.	
a) $21+22=$	43
b) $7+8+9=$	24
c) $14+15+16+17=$	62
d) $3+4+5+6+7=$	25
e) $10+11+12+13+14+15=$	75
f) $2+3+4+5+6+7+8=$	35
Promedio.	
	21.5
	8
	15.5
	5
	12.5
	5
¿En qué casos el promedio no deja residuo?	
En todos aunque en a, b y e son resultados fraccionarios.	

Figura 4.19: Respuestas de **I** en la actividad 5

Claramente **I** tiene una idea de residuo relacionada con la de fracción decimal exacta, es decir, para **I** una división tiene residuo si es una fracción decimal periódica.

En la misma actividad **B** escribe una conjetura, sin embargo es respecto al resultado de efectuar la suma, no identifica las divisiones como la idea central, centra la atención en las sumas (ver figura 4.20).

Podrías escribir una conjetura sobre lo observado en los incisos que si realizas una suma de n términos, cuando la cantidad de la serie sea par el resultado dará un número impar, y cuando sea impar dará un número par.

Figura 4.20: Respuesta de **B**

S sí encuentra la conjetura que se esperaba, respecto a los residuos (ver figura 4.21).

Podrías escribir una conjetura sobre lo observado en los incisos
 Que al sumar números consecutivos en donde el número de
 sumandos es par como: $21 + 22$ (2 cantidades) el promedio tendrá
 residuo, pero si el número de sumandos es impar quedará como resultado un
 número entero.

Figura 4.21: Respuesta de S

Aunque **B** y **S** pueden plantear conjeturas, ninguna de las dos da una prueba. Al igual que en las primeras cuatro actividades fue necesario que el asesor interviniera. Lo hizo mostrando la veracidad de la conjetura para el caso $K = 3$, con la intención de que los estudiantes pudieran probar los casos generales.

Después de la intervención del profesor, **G** ofrece una prueba interesante, que se muestra en la figura 4.22.

Pruébala de manera general para cualquier K tal que	
a) K sea par	b) K sea impar
$a + (a+1) + (a+2) + (a+3)$ $a + a + 1 + a + 2 + a + 3$ $4a + 6$ $2(2a + 3)$	$a + (a+1) + (a+2) + (a+3) + (a+4)$ $a + a + 1 + a + 2 + a + 3 + a + 4$ $5a + 10$ $5(a + 2)$

Figura 4.22: Pruebas de G

Se observa que **G** identifica rápidamente la idea de factorizar y da una prueba de tipo externo-simbólico. En principio, **G** relaciona cualquier K par con la representación general para $K = 4$ y cualquier K impar con la representación general para $K = 5$. Hace la manipulación simbólica, sin embargo lo hace sin significado (Harel y Sowder, 2007), toda vez que no diferencia en ninguno de los dos casos, aun cuando no está probando lo que se pide tampoco se da cuenta de lo que prueba para el caso $K = 5$.

Como se mencionó antes, las actividades 6 y 7 se agrupan en una sola. El propósito de éstas era que los estudiantes observaran que siempre es posible dividir el producto de K enteros consecutivos por K , a través de casos particulares y después dieran una prueba.

Todos los estudiantes identificaron rápido la conjetura, **S** escribe la prueba que aparece en la figura 4.23.

Primero, cuando se le pide probar el caso $K = 2$ utiliza una sustitución, proporcionando una prueba empírico-perceptiva. Luego, cuando se pide la prueba para cualquier K , relaciona la palabra cualquier con tomar algún K , en su caso $K = 4$, sin embargo de éste ya no da una prueba.

Prueba la conjetura de manera general para el caso K igual a 2

$$\frac{(a)(a+1)}{K} = \frac{(2)(2+1)}{2} = \frac{(2)(3)}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Pruébala de para cualquier K

si: $K=4$

$$\frac{(a)(a+1)(a+2)(a+3)}{K} = \frac{2(2)}{2} = 2$$

no

$$\frac{K(a)}{K} = \frac{2(2)}{2} = 2$$

no

$$\frac{K(a+1)}{K} = \frac{2(4+1)}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

no

$$\frac{(a)(a+1)(a+2)}{K} = \frac{2(4+1)}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

Figura 4.23: Respuestas de S en la Actividad 7

G intenta dar una prueba: realiza las multiplicaciones, sin embargo no puede utilizar sus resultados (ver figura 4.24).

Prueba la conjetura de manera general para el caso K igual a 2

$$\begin{aligned} (a)(a+1)(a+2) &= a^3 + 3a^2 + 2a \\ (a^2+a)(a+2) &= a(a^2+3a+2) \\ &= a^3 + 2a^2 + a^2 + 2a \\ &= a^3 + 3a^2 + 2a \end{aligned}$$

Pruébala de para cualquier K

$$\begin{aligned} a(a+1)(a+2)(a+3) &= a^4 + 3a^3 + 2a^2 + 3a^2 + 9a^2 + 6a \\ &= a^4 + 3a^3 + 2a^2 + 3a^3 + 9a^2 + 6a \\ &= a^4 + 9a^3 + 11a^2 + 6a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{a^2+a}{a+2} \\ & \frac{a^3+a^2}{2a^2+2a} \\ & \frac{a^3+3a^2+2a}{a+3} \\ & \frac{a^4+3a^3+2a^2}{+3a^3+9a^2+6a} \\ & \frac{a^4+9a^3+11a^2+6a}{a^4+9a^3+11a^2+6a} \end{aligned}$$

Figura 4.24: Respuestas de G en la Actividad 7

Ningún estudiante intentó probar por medio de los residuos, aun cuando lo correspondiente a la actividad 6 era para que identificaran residuos. Además, algunos tienen serias

dificultades para trabajar algebraicamente como en el caso de **I**, hace manipulaciones incorrectas de ideas muy básicas como se muestra en la figura 4.25.

Prueba la conjetura de manera general para el caso K igual a 2

$$(a)(a+1)$$

$$2a+1$$

$$2(a+1)$$

Figura 4.25: Respuesta de I en la Actividad 7

La última parte de las actividades de números tenía como idea central la actividad 11. Se pedía generar números primos utilizando el polinomio $n^2 - n + 41$, se dieron diversas respuestas. Antes de abordar la pregunta aparecían las siguientes:

Un número primo es aquel que sólo es divisible por sí mismo y por la unidad. Se sabe que 3, 5 y 7 son números primos, además son impares, ¿se puede conjeturar que todos los números impares son primos?, justifica tu respuesta. ¿Con excepción del 2 todos los números primos son impares?

Todos respondieron correctamente las dos preguntas, pero al momento de abordar la pregunta respecto al polinomio, algunos no lo tomaron en cuenta, por ejemplo **B** comprueba algunos casos particulares y concluye que siempre se generan números primos (ver figura 4.26).

11.- La expresión $n^2 - n + 41$ "genera números primos", es decir si sustituimos números naturales en la variable n el resultado será un número primo, por ejemplo para $n = 1$, $1^2 - 1 + 41 = 41$ es primo. Realiza la sustitución con tres números más y comprueba si son primos. ¿Podrías asegurar que la expresión siempre dará como resultado un número primo? o ¿podrías dar un contraejemplo?

$n = 5$

$n = 7$

$n = 10$

$5^2 - 5 + 41 = 25 - 5 + 41 = 20 + 41 = 61$

$7^2 - 7 + 41 = 49 - 7 + 41 = 42 + 41 = 83$

$10^2 - 10 + 41 = 100 - 10 + 41 = 90 + 41 = 131$

Si porque quitándole al cuadrado el número n , estas asegurando tener un número par y al sumarle un número impar el resultado será entonces primo

Figura 4.26: Respuesta de B en la Actividad 11

No se alcanza a apreciar el texto a la derecha de la imagen, pero dice lo siguiente:

Sí porque quitándole al cuadrado el número n , estas asegurando que tener un número par y al sumarle un número impar el resultado será entonces primo

Está dando una prueba empírico-inductiva. Es relevante que aún cuando contestó correctamente las preguntas de arriba, en este caso decide que un impar es siempre un número primo.

M da una prueba empírico-inductiva y concluye que si a un número primo se le suma algo el resultado será un número primo (ver figura 4.27).

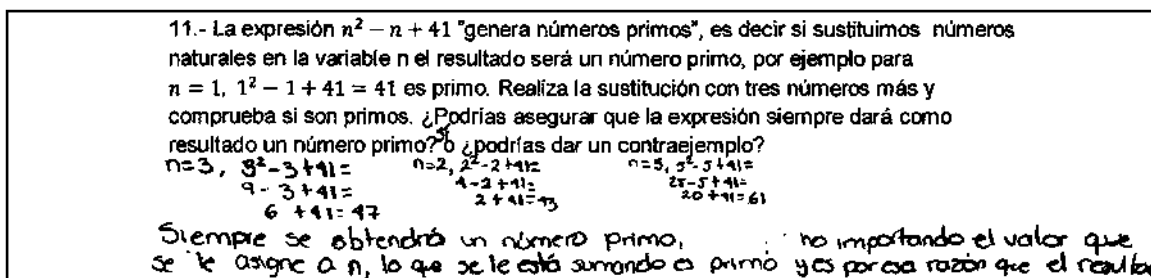


Figura 4.27: Respuesta de M en la Actividad 11

S concluye que la expresión siempre genera números primos al sustituir el valor de n , a partir de algunos casos particulares, pero su argumento es distinto (ver figura 4.28).

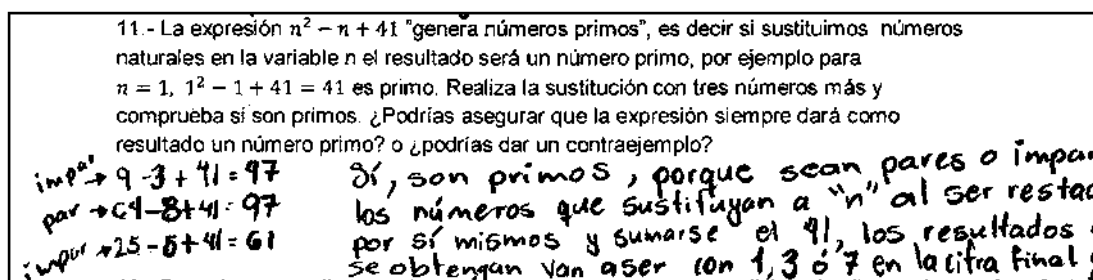


Figura 4.28: Respuesta de S en la Actividad 11

El texto completo es el siguiente:

Sí, son primos, porque sean pares o impares los números que sustituyan a " n " al ser restados por sí mismos y sumarse el 41, los resultados que se obtengan van a ser con 1, 3 o 7 en la cifra final de la cantidad con lo que se verá que no va a poder ser dividida.

Basa su conclusión en la divisibilidad de los primeros números enteros, además considera casos particulares, distinguiendo entre pares e impares.

Todos los estudiantes que participaron en la actividad dieron una prueba errónea en cada caso, basándose en casos particulares pero observando distintas características y dando argumentos diferentes.

De manera similar al cuestionario y las actividades de geometría, a continuación se resumen los resultados de las actividades de números en la tabla 4.3.

Esquemas de Prueba						
Alumno	Externos		Empíricos		Deductivos	
	Simbólicos	Autorit.	Inductivos	Perceptuales	Transform.	Axiom.
G	N5		N11			
I			N11			
M			N11			
J			N11			
B			N11			
S			N4, N7, N11			

Cuadro 4.3: Resumen de los Esquemas en las actividades de Números

La tabla refleja la dificultad que tuvieron los estudiantes en las actividades de números. No hay pruebas para la mayoría de las actividades y donde las hay son, sobre todo de tipo empírico. Esto es consistente con lo encontrado en los planes de estudios, las pruebas que se promueven son de tipo empírico, en consecuencia los estudiantes se inclinan por esas pruebas, además de no tener contacto con ideas numéricas, más allá de lo algorítmico, y en algunos casos esa parte también se les complicó.

Capítulo 5

Conclusiones

Desde la Educación Matemática, el estudio, interpretación y análisis de los fenómenos de enseñanza y aprendizaje parte necesariamente de una visión sobre la naturaleza de las matemáticas y su trasposición a las matemáticas escolares. Sin duda, para las matemáticas y los matemáticos, los procesos de descubrimiento de propiedades y relaciones de los objetos matemáticos (números, formas geométricas, variación, etc.) así como los métodos de prueba de tales propiedades que, una vez probados, se convierten en teoremas, es de gran importancia. No sólo porque da “certeza” a tales propiedades y permite utilizarlas para resolver problemas de diversa índole, sino porque hace posible la generación de nuevos descubrimientos así como el desarrollo de herramientas que facilitan el trabajo en las matemáticas.

En este trabajo se vio que varias investigaciones y propuestas curriculares (NCTM, 2000; SEP, 2006) coinciden en que la formación matemática, en los niveles básico y medio, deben incluir contenidos y experiencias escolares orientados a adquirir conocimientos, actitudes y habilidades en torno a los procesos de generación y prueba de conjeturas. Sin embargo, no es muy claro cómo se pueden lograr aprendizajes significativos en estos aspectos.

Una primera dificultad es caracterizar las diversas actividades que, a diferentes niveles de complejidad, puedan considerarse como parte de los procesos de prueba. En este trabajo se revisaron aportaciones recientes en cuanto a este aspecto. De particular interés son los trabajos de Harel y Sowder (1998, 2007) quienes establecen una clasificación interesante, no sólo para caracterizar las actuaciones de los estudiantes, también pueden ayudar a formular propuestas curriculares y de enseñanza-aprendizaje. En este sentido, el presente trabajo aporta información relevante que puede ser útil para la realización de otros estudios relacionados con este tema.

De acuerdo a la revisión de los Planes y programas de educación secundaria que se realizó, respecto al tema en cuestión, se espera cubrir tanto pruebas empíricas como pruebas de tipo deductivo-transformacional (de acuerdo con la clasificación de Harel y Sowder); sin embargo, no se aclara cómo debe hacerse el tránsito entre esos dos tipos de pruebas, dejando al profesor la responsabilidad de estudiar o no los contenidos con esas características.

Por otro lado, se plantea que el profesor debe mostrar algunas pruebas formales (demostraciones) sin aclarar el sentido de esto (¿qué se espera de los alumnos?) además, en ningún apartado aparecen cuáles son esas pruebas. Si el profesor debe elegir qué pruebas debe mostrar, entonces debería tener, en principio, una formación matemática adecuada así como un conocimiento profundo de los procesos cognitivos de los estudiantes. ¿Qué pasa si eso no sucede? Suponiendo que el profesor posee la formación matemática adecuada y carece del otro elemento, podría verse tentado a querer mostrar pruebas demasiado abstractas y que los alumnos no entiendan ni les encuentren sentido, en el segundo caso si el profesor tiene formación matemática deficiente, en el mejor de los casos no mostrará pruebas, pues si intenta hacerlo lo más probable es que sólo repita mecánicamente alguna demostración que esté en algún libro sin imprimirle un interés didáctico. En cualquiera de estos casos, la trascendencia en el aprendizaje del estudiante sobre las pruebas formales será insignificante.

El único material de apoyo con el que cuenta el profesor para auxiliarse, en lo respectivo a la prueba, es el Libro para el maestro (SEP, 2004), en el que se propone una presentación distinta a lo que aparece en los programas de estudio (SEP, 2006). En ese libro, se espera que los alumnos puedan hacer demostraciones, no solo que las muestre el profesor. En consecuencia, esto es contradictorio con el planteamiento de la SEP. Por supuesto, ello no quiere decir que el Libro para el maestro esté equivocado, el propósito de esta observación es mostrar la inconsistencia entre el planteamiento del principal documento curricular de la SEP y el material de apoyo con el que cuenta el profesor de secundaria.

En relación a la formación de los profesores de matemáticas, el Programa de estudios de la Normal Superior está menos desarrollado que el correspondiente para la educación secundaria, lo cual no proporciona mucha información respecto a las intenciones de mostrar la prueba. En las asignaturas, donde hay actividades propuestas, no es posible identificar evidencia de que un propósito sea que los futuros profesores trabajen pruebas formales; sólo el Teorema de Pitágoras aparece como una proposición por demostrar. Nuevamente, las actividades propuestas se quedan en pruebas empíricas y, en algunos casos, como se mostró en el capítulo 4, podrían extenderse a pruebas de tipo deductivo-transformacional.

En efecto, estas características quedaron de manifiesto durante la implementación de las actividades con los futuros profesores. Por su parte Harel y Sowder (1998) encontraron resultados similares y concluyeron que ello es consecuencia de la formación de los estudiantes en todo el proceso educativo de los niveles anteriores.

Otro elemento recurrente, fue el manejo inadecuado de la simbología por parte de los estudiantes, ocasionando, en algunos casos pruebas simbólicas sin referencia (Harel y Sowder, 1998) y, en otros, pruebas fallidas, sin los elementos matemáticos o la estructura necesarios para construir una prueba deductiva.

Un aspecto importante fue el uso del software de geometría dinámica. Se evidenció que facilita la formulación de conjeturas por el estudiante, en algunos casos, distintas a las que se esperaría. Este aspecto fortalece las actividades, de acuerdo con el sistema conjeturas-pruebas-refutaciones desarrollado por Lakatos (1978); al mismo tiempo demanda una

planeación por parte del docente donde prevea todas o la mayoría de las posibles conjeturas, en caso de no preverlas todas debe estar preparado para abordar las que puedan surgir.

El uso del software puede llevar a una obstrucción con la justificación; en algunas actividades, en parte por el diseño propio del software y por otro lado los estudiantes consideraron innecesario dar argumentos matemáticos, toda vez que el software les daba “suficiente” evidencia al constatar gran variedad de casos. Esto es consecuencia no sólo del uso del software, también del marcado trabajo con pruebas empíricas; de cualquier manera debe considerarse ese aspecto.

Como consecuencia de la experimentación de este trabajo, aparecieron resultados interesantes: por una parte fue posible observar los distintos esquemas de prueba propuestos por Harel y Sowder(1998). En principio, un estudiante puede utilizar esquemas distintos para responder a una misma pregunta y, en consecuencia, para responder preguntas distintas. Un esquema puede aparecer en respuestas a distintas interrogantes.

Por otra parte no fue posible identificar algún cambio sustancial en los esquemas de prueba de cada estudiante en el desarrollo de las actividades, influyó en esto la inexperiencia de los estudiantes con actividades de demostración, la poca familiaridad con los conceptos matemáticos involucrados y las actividades mismas.

Los resultados obtenidos sirven como base para desarrollar un trabajo posterior, de acuerdo con Ibañez (2001) una vez que se han identificado los esquemas de prueba, es posible inducir en los estudiantes cambios hacia otros esquemas.

¿Cómo se espera que los profesores puedan mostrar pruebas formales? Nuevamente, depende de los profesores, en este caso, de aquellos que laboran en las escuelas normales, ¿tienen la formación matemática necesaria?; si la tienen ¿promueven pruebas distintas a las empíricas? A juzgar por los resultados de las actividades, se puede suponer que no; pero una respuesta más objetiva podría obtenerse a partir de investigaciones posteriores.

En cualquier sentido, si se espera que un profesor sea promotor de un ambiente en el que los alumnos formulen y validen conjeturas (SEP, 2006) el profesor mismo debe iniciarse por ese camino, lo cual implica incluir, explícitamente, en la formación de profesores pruebas deductivas en el sentido de Harel y Sowder (1998), conceptuales de acuerdo con Balacheff (2000) y paulatinamente propuestas como la de Solow (1987); como un componente común a las asignaturas de estudio.

Bibliografía

1. Arsac, G. (1987). El origen de la demostración: ensayo de epistemología didáctica. *Recherches en didactique des mathematiques*, Vol 8, no 3, pp. 267-312. Traducido por Martín Acosta.
2. Arzarello, F. Et Al. (1998). A model for analysing the transition to formal proofs in geometry. *Proceedings of the 22nd PME International Conference*, 2, 24-31.
3. Balacheff, N. (2000). Procesos de Prueba en los Alumnos de Matemáticas. Una empresa docente.
4. Bell, A.W. (1976). A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics*, 7, 23-40.
5. Cohen, L., Lawrence M. (1990). Métodos de investigación educativa. La Muralla, S.A.
6. De Villers M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. En *Epsilon* No. 26 págs. 15-30.
7. Flores, A. (2005). ¿Cómo saben los alumnos que lo que aprenden en matemáticas es cierto? Un estudio exploratorio. En: *Educación Matemática* Vol 17 núm. 3 (pp. 5 - 24). Santillana.
8. Garuti, R.; Boero, P. y Lemut, E. (1998). "Cognitive Unity of Theorems and Difficulties of Proof", *Proceedings of PME-XXII*, vol. 2, pp. 345-352.
9. Godino, J. y Recio, A. (2001). "Significado de la demostración en educación matemática". En *Enseñanza de las ciencias*. p.p 405 - 414.
10. Hadas, N., Hershkowitz, R. y Schwarz, B. (2000). The role of contradiction and uncertainty in promoting the need to prove in dynamic geometry environments. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 127-150.
11. Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: an overview. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 5-23.

12. Hana, G. (1996). Il valore permanente della dimostrazione. *Revista La matemática e la sua didáctica*, 1997(3), pp. 236-252. Originalmente es la conferencia plenaria presentada en el congreso PME 20 (Valencia, España, 9-11 julio), y se público titulado como: "The ongoing value of proof", contenido en Gutierrez, A. y L. Puig (editores). *Proceedings of PME 20. España (Valencia)*. Vol. 1, pp. 21-34. 1996. (Traducción al español por Víctor Larios Osorio (Depto. De Matemáticas del CICFM, Fac. de Ingeniería, UAQ, 1999)).
13. Harel, G., Sowder, L. (1998). Student's Proof Schemes: Results from Exploratory Studies. En: A. Shoenfel, J. Kaput, y E. Dubinsky (Eds), *Research in Collegiate Mathematics Education III* (pp. 234-283). Providence, RI: American Mathematical Society.
14. Harel, G., Sowder, L. (2007). Toward Comprehensive Perspectives on the Learning and Teaching of Proof. En F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, National Council of Teachers of Mathematics.
15. Hofman, P. (2000). El hombre que sólo amaba los números. *Granica*.
16. Ibañez, J. Marcelino (2002). "Cuatro cuestiones en torno al aprendizaje de la demostración". En *Investigación en Educación Matemática, Quinto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* p.p. 11 - 26.
17. Jones, K. (2000). Providing a foundation for deductive reasoning: students' interpretations when using dynamic geometry software and their evolving mathematical explanations. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 55-85.
18. Lakatos, I (1978). *Pruebas y refutaciones La lógica del descubrimiento matemático*. Alianza.
19. Larios, O. Víctor (2003). ¿Si no demuestro Enseño matemática?. En *Educación Matemática*, Vol. 15 número 002 p.p. 163 - 178.
20. Mariotti, M.A. (2000). Introduction to proof: the mediation of a dynamic software environment. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 25-53.
21. Marrades, R. y Gutiérrez, A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 87-125.
22. NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics. Reston, VA.
23. Olivero, F. (1999). Cabri-géomètre as a mediator in the process of transition to proofs in open geometric situations. *Proceedings of ICTMT4*.

24. Pedemonte, B. (2001). "Some cognitive aspects of the relationship between argumentation and proof in mathematics". En van den Heuvel-Panhuizen M (Ed.) Proceedings of the 25th conference of the international group for the Psychology of Mathematics Education Utrecht.
25. Pluvinaige F. (2007). Demostración. CINVESTAV.
26. Polya G. (2002). Cómo plantear y resolver problemas. Trillas.
27. Polya G. (1966). Matemáticas y razonamiento plausible. Tecnos.
28. Poincare H. (2000). Filosofía de la ciencia. CONACYT.
29. Rota G. (1997). The Phenomenology of Mathematical Proof. Synthese 111, 183-196. Kluwer Academic Publishers.
30. Rodríguez, F.y Gutiérrez, A. (2006). Análisis de demostraciones en entornos de lápiz y papel y de cabri por estudiantes de licenciatura. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Valencia.
31. Sáenz C. César (2002). "Sobre conjeturas y demostraciones en la enseñanza de las matemáticas". En Investigación en Educación Matemática, Quinto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática p.p. 47 - 62.
32. SEP (2004). Libro para el maestro. Matemáticas. Educación secundaria, México.
33. SEP (2006). Educación básica. Secundaria. Matemáticas. Programas de estudio 2006.
34. SEP (2007). Educación Básica. Secundaria. Plan de Estudios 2006.
35. SEP-ILCE en Red Normalista en Internet.
<http://normalista.ilce.edu.mx/normalista/quees/indexquees.htm>. Fecha de consulta: 9 de Noviembre de 2008.
36. Solow D. (1987). Como hacer y entender demostraciones en matemáticas. Limusa.

Anexo 1

Escuela: _____ Fecha: _____

Nombre: _____

El propósito de la presente encuesta es averiguar sobre las concepciones y conocimientos que tienen los estudiantes acerca de la demostración matemática. Ésta no tiene fines de evaluación, los datos recopilados serán confidenciales y servirán para llevar a cabo una investigación con respecto a este tema.

MUCHAS GRACIAS POR TU APOYO

INSTRUCCIONES: Por favor escribe con bolígrafo azul o negro.

1. ¿Qué es una demostración matemática?

2. ¿Tú crees que tenga alguna función la demostración en la enseñanza de las matemáticas en Secundaria? ¿Cuál?

3. ¿Para qué crees que se usa, en Matemáticas, la demostración?

4. De los siguientes enunciados subraya aquellos que consideres son teoremas.

- a. *Por un punto exterior a una recta pasa sólo una paralela a dicha recta.*
- b. *Si una recta trazada sobre otra forma con ella dos ángulos contiguos iguales, cada uno de ellos es recto, y la recta se llama perpendicular a aquella sobre la cual se trazo.*
- c. *Todo segmento tiene exactamente un punto medio.*
- d. *Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes.*

5. Relaciona los enunciados de la izquierda con las expresiones de derecha. Puede ser más de una expresión para un enunciado y que una expresión no se relacione con ningún enunciado.

- i. Un número par.
- ii. Un número impar.
- iii. Dos números consecutivos.
- iv. El cuadrado de la diferencia de dos números impares.
- v. El producto de tres números consecutivos.

$$\begin{array}{l} p \cdot q \cdot r \\ 2w - 1 \\ ((2a + 1) - (2m + 1))^2 \\ (t - 1) \cdot t \cdot (t + 1) \\ 2(3q) \\ p - 1, p \\ a, b \\ ((n + 1) - (r + 1))^2 \\ 2w \end{array}$$

6. Se propuso la siguiente tarea a un estudiante:

“Verifique que la suma de dos números pares siempre es un número par”.

Luego, el estudiante escribió lo siguiente:

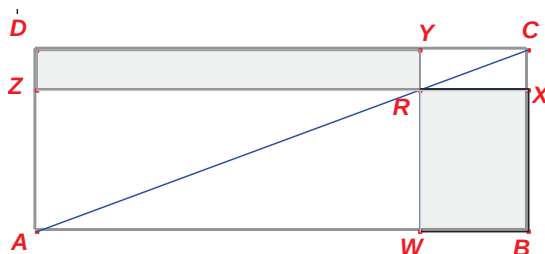
*Sea $2n$ un número par y $2r$ otro, entonces $2n + 2r = 2(n + r)$,
como todo número par es de la forma $2x$ queda verificado*

Subraya una de las siguientes opciones, dependiendo de lo que consideres que hizo la persona.

- | | |
|-------------------------|---------------------------|
| i) Resolvió un problema | ii) Hizo una demostración |
| iii) Dio un ejemplo | iv) Otro |

Justifica tu respuesta: _____

7. Sea $ABCD$ un rectángulo, por R un punto en la diagonal AC , traza paralelas a los lados AB y BC respectivamente, generando los puntos de intersección W en AB , X en BC , Y en CD y Z en DA . Demuestra que las áreas de los cuadriláteros $WBXR$ y $ZRYD$ son iguales.



8. Lee los siguientes enunciados.

- a) La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°
- b) La suma de los ángulos interiores de cualesquier triángulo es 180°
- c) La suma de los ángulos interiores de todo triángulo es 180°

¿Crees que significan lo mismo? _____

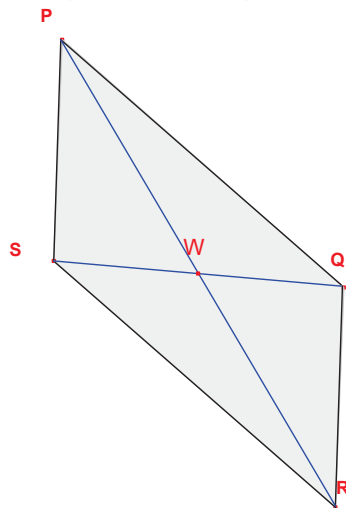
Justifica tu respuesta: _____

9. Demuestra que la diferencia entre los cuadrados de dos números naturales consecutivos cualesquiera es siempre un número impar, igual a la suma de dichos números.

10. A un alumno se le planteó el siguiente enunciado:

"Demuestre que en cualquier paralelogramo las diagonales se bisecan".

El alumno dibujó el siguiente paralelogramo con las respectivas medidas:



PQ = 7,03 cm
QR = 4,15 cm
PR = 10,18 cm
SQ = 5,46 cm
PW = 5,09 cm
SW = 2,73 cm

Luego escribió:

*En la figura el cuadrilátero PQRS es un paralelogramo,
con W como punto de intersección de las diagonales PR y SQ.
La diagonal PR mide 10.18 y PW 5.09, entonces PW es la mitad de PR.
La diagonal SQ mide 5.46 y SW 2.73, entonces SW es la mitad de SQ.
Por lo tanto PR biseca a SQ e inversamente.*

Consideras que la persona dio una demostración: _____

Justifica tu respuesta: _____

Anexo 2

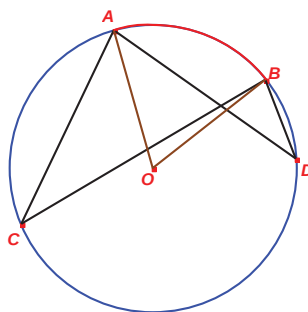
Nombres:

Actividad 1

Propósito de la actividad: Generar una conjetura y una demostración de la relación entre las medidas del ángulo inscrito y el ángulo central.

Instrucciones: Escribe con lapicero negro o azul.

- I. Traza una figura como la que se muestra a continuación



- II. Mide los ángulos $\angle AOB$, $\angle ACB$ y $\angle ADB$
III. Qué relaciones encuentras entre los ángulos

- IV. Mueve los puntos A y B, ¿se conserva la relación?

- V. ¿Cómo son las medidas de los ángulos, $\angle ACB$ y $\angle ADB$ cuando mueves el punto D?

- VI. ¿Cómo son las medidas de los ángulos, $\angle ACB$ y $\angle ADB$ cuando mueves el punto C?

- VII. Qué conjetura puedes generar

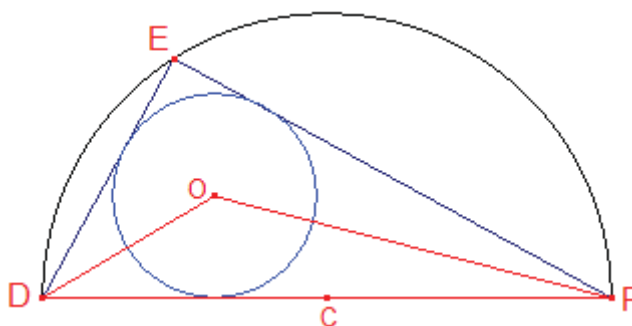
- VIII. ¿Puedes demostrar formalmente esa conjetura?

Nombres:

Actividad 2

Propósito: Identificar la medida del ángulo inscrito en una semicircunferencia, así como la del ángulo central en la circunferencia inscrita al triángulo y probar ese resultado de manera general.

Instrucciones: Escribe con lapicero negro o azul.



- A) Realizar la construcción descrita enseguida, que se muestra en la figura:
- Trazar una circunferencia con centro en el punto C.
 - Trazar un diámetro de dicha circunferencia, construyendo primero una recta que pasa por C, marcando los puntos de intersección de dicha recta con la circunferencia (puntos D y F en la figura), construyendo un segmento de D a F y luego un arco utilizando como puntos de referencia primero al punto D, luego otro punto de la circunferencia y al final el F.
 - Trazar el punto E sobre el arco de circunferencia.
 - Trazar el triángulo DEF
 - Trazar las bisectrices de los vértices del triángulo, cuya intersección es el punto O.
 - Trazar una perpendicular a cualquiera de los lados del triángulo que pase por O.
 - Trazar la circunferencia inscrita al triángulo DEF que tiene su centro en O.
- B) ¿Con cuáles objetos podemos interactuar dinámicamente y con cuáles no? Es decir, ¿cuáles objetos podemos mover y cuáles no?
-
-
- C) ¿Qué medidas tienen los elementos que caracterizan a los objetos? Específicamente obtener:
- la medida de los diámetros de ambas circunferencias

ii. la longitud de los segmentos DE, EF, DO y OF.

iii. la medida de los ángulos $\angle EDF$, $\angle EFD$, $\angle DEF$, $\angle ODF$, $\angle OFD$ y $\angle DOF$.

D) ¿Qué cantidades cambian y cuáles permanecen constantes cuando se mueve el punto E?

E) ¿Qué conjetura se puede extraer de esta exploración?

F) ¿Cómo puede demostrarse formalmente dicho resultado?

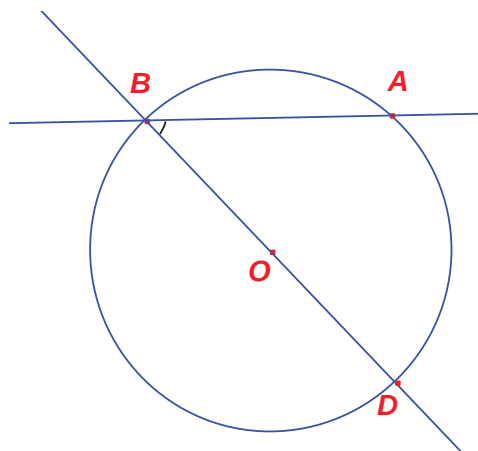
Nombres:

Actividad 3

Propósito: Observar y demostrar la relación entre la tangente a un círculo y el radio

Instrucciones: Escribe con lapicero negro o azul.

- I. En una circunferencia de centro O localiza los puntos A y B , traza la secante AB , luego traza la recta BO y localiza D , el otro punto de intersección de BO con el círculo.



- II. Mide el ángulo $\angle ABD$.
- III. Mueve el punto B alrededor de la circunferencia, ¿cuál es el valor aproximado de $\angle ABD$ cuando B está muy cerca de A ?
- IV. Cuando B este sobre A , la línea AB toca en un sólo punto a la circunferencia, por lo tanto es tangente a la circunferencia. ¿Cómo son AB y OA cuando esto sucede?
- V. Demuéstralo formalmente

Nombres:

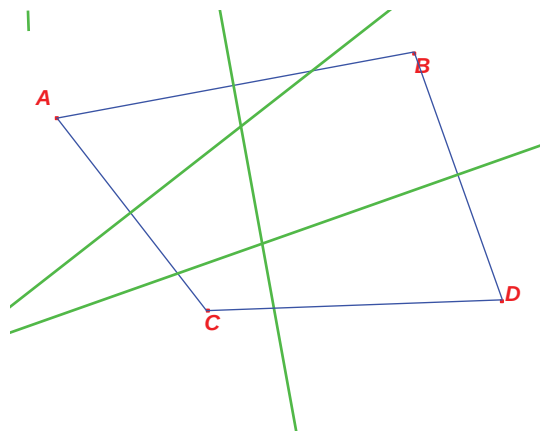
Actividad 4

Propósito: Descubrir la posición de un punto D respecto a otros tres puntos fijos no alineados para generar la concurrencia de mediatrices, así como demostrar que se cumple para cualesquiera tres puntos no alineados.

Instrucciones: Escribe con lapicero negro o azul.

Dados tres puntos fijos A, B y C no alineados, ¿Qué condiciones debe cumplir un cuarto punto D para que las mediatrices de los lados del cuadrilátero ABCD sean concurrentes?

- i. Dibuja tres puntos A, B y C, fíjalos con la herramienta fijar, luego dibuja el punto D, une los segmentos; se ha formado el cuadrilátero ABCD. Traza las mediatrices de los lados del cuadrilátero.



- ii. Mueve el punto D hasta lograr que las 4 mediatrices concurren en algún punto
- iii. Genera posiciones diferentes para D donde se siga cumpliendo la concurrencia.
- iv. ¿Qué condiciones cumple D para que la concurrencia subsista?

- v. ¿Cómo puedes probar que es cierta tu conjetura?

- vi. ¿Qué pasaría si fueran más puntos?, es decir, si tuvieras cuatro puntos fijos no alineados y te pidieran hacer lo mismo para un quinto punto.

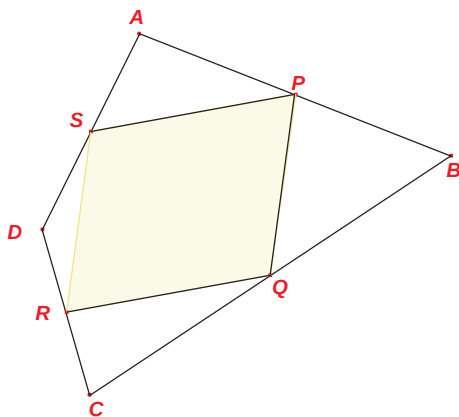
Nombres:

Actividad 5

Propósito: Identificar qué tipo de cuadrilátero se obtiene al unir los puntos medios de los lados de un cuadrilátero y demostrarlo.

Instrucciones: Escribe con lapicero negro o azul.

- Construir un cuadrilátero cualquiera.
- Marcar los puntos medios de los lados del mismo.
- Construir un polígono que tenga como vértices estos puntos.
- ¿De qué tipo de cuadrilátero se trata?



- Mueve los puntos A, B, C y D; ¿permanece el mismo tipo de cuadrilátero?
- Demuestra que siempre se trata del mismo cuadrilátero.

Anexo 3

Actividades 1 – 4

Nombre: _____

Propósito: Conjeturar y demostrar ideas numéricas en torno a la divisibilidad, demostrando las relaciones encontradas.

Instrucciones: Escribe con lapicero azul o negro

1.- Un número impar es de la forma $2t + 1$ o $2t - 1$, demuestra que todo número impar es la suma de dos enteros consecutivos.

2.- Un número par es de la forma $2v$, si n es número par, demuestra que n^2 es un número par

3.- El cuadrado de todo número impar es impar y, recíprocamente, si el cuadrado de un número es impar, entonces el número es impar

4.- Si p , q y r son tres enteros cualesquiera, entonces el producto $(p - q)(q - r)(r - p)$ es divisible por 2

Actividad 5

Nombre: _____

Propósito: Generar conjeturas y demostrarlas, respecto a las relaciones numéricas encontradas.

5.- En los siguientes casos realiza las sumas correspondientes y luego encuentra el promedio.

a) $21+22=$

b) $7+8+9 =$

c) $14+15+16+17=$

d) $3+4+5+6+7=$

e) $10+11+12+13+14+15=$

f) $2+3+4+5+6+7+8=$

¿En qué casos el promedio no deja residuo?

¿Qué característica tienen los sumandos en cada inciso?

Podrías escribir una conjetura sobre lo observado en los incisos

¿Cómo puedes representar K sumandos de manera general, con la característica observada, a partir de un entero a ?

Prueba la conjetura de manera general para el caso en que K sea igual a 3

Pruébala de manera general para cualquier K tal que

a) K sea par

b) K sea impar

6.- ¿Qué residuos se obtiene al dividir cualquier entero por un número K?

- a) Para K igual a 2
- b) Para K igual a 3
- c) Para K igual a 5
- d) Para K igual a 8
- e) Para cualquier K

7.- Realiza los siguientes productos y divide el resultado entre el número de factores correspondiente.

- a) $16 \cdot 17 =$
- b) $4 \cdot 5 \cdot 6 =$
- c) $7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 =$
- d) $3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 =$
- e) $20 \cdot 21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24 \cdot 25 =$
- f) $4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 =$

¿En qué casos la división no deja residuo?

¿Por qué crees que ocurre esto?

¿Qué característica tienen los factores?

Escribe una conjetura

¿Cómo puedes representar K factores (consecutivos) de manera general, iniciando en cualquier número a ?

Prueba la conjetura de manera general para el caso K igual a 2

Pruébala de para cualquier K

Actividades 9 – 11

Nombre: _____

Propósito: Conjeturar y demostrar ideas numéricas en torno a números primos, demostrando las relaciones encontradas.

9.- Un número primo es aquel que sólo es divisible por sí mismo y por la unidad. Se sabe que 3, 5 y 7 son números primos, además son impares, ¿se puede conjeturar que todos los números impares son primos?, justifica tu respuesta.

10.- ¿Con excepción del 2 todos los números primos son impares?

11.- La expresión $n^2 - n + 41$ "genera números primos", es decir si sustituimos números naturales en la variable n el resultado será un número primo, por ejemplo para $n = 1$, $1^2 - 1 + 41 = 41$ es primo. Realiza la sustitución con tres números más y comprueba si son primos. ¿Podrías asegurar que la expresión siempre dará como resultado un número primo? o ¿podrías dar un contraejemplo?

Anexo 4

Licenciatura en Educación Secundaria
Mapa Curricular Especialidad: **Matemáticas**

	Primer semestre	Segundo semestre	Tercer semestre	Cuarto semestre	Quinto semestre	Sexto semestre	Séptimo semestre	Octavo semestre	
A	Bases filosóficas, legales y organizativas del sistema educativo mexicano	La educación en el desarrollo histórico de México I	La educación en el desarrollo histórico de México II	Seminario de temas selectos de historia de la pedagogía y la educación I	Seminario de temas selectos de historia de la pedagogía y la educación II	Seminario de investigación en educación matemática Seminario de temas selectos de historia de las matemáticas			
	Estrategias para el estudio y la comunicación I	Estrategias para el estudio y la comunicación II	Pensamiento algebraico	Figuras y cuerpos geométricos	Medición y cálculo geométrico	Tecnología y didáctica de las matemáticas			
	Problemas y políticas de la educación básica	Introducción a la enseñanza de las Matemáticas	Los números y sus relaciones	Plano cartesiano y funciones	Procesos cognitivos y cambio conceptual en matemáticas y ciencia	La predicción y el azar			
	Propósitos y contenidos de la educación básica I (Primaria)	La enseñanza en la escuela secundaria. Cuestiones básicas I	La enseñanza en la escuela secundaria. Cuestiones básicas II	Procesos de cambio o variación	Escalas y semejanza	Presentación y tratamiento de la información			
	Desarrollo de los adolescentes I. Aspectos generales	Propósitos y contenidos de la educación básica II (Secundaria)	La expresión oral y escrita en el proceso de enseñanza y de aprendizaje	Planeación de la enseñanza y evaluación del aprendizaje	Opcional I	Opcional II	Taller de diseño de propuestas didácticas y análisis del trabajo docente I	Taller de diseño de propuestas didácticas y análisis del trabajo docente II	
		Desarrollo de los adolescentes II. Crecimiento y sexualidad	Desarrollo de los adolescentes III. Identidad y relaciones sociales	Desarrollo de los adolescentes IV. Procesos cognitivos	Atención educativa a los adolescentes en situaciones de riesgo	Gestión escolar	Trabajo Docente I	Trabajo Docente II	C
B	Escuela y contexto social	Observación del proceso escolar	Observación y práctica docente I	Observación y práctica docente II	Observación y práctica docente III	Observación y práctica docente IV			

Area de actividad	
A	Actividades principalmente escolarizadas
B	Actividades de acercamiento a la práctica escolar
C	Práctica intensiva en condiciones reales de trabajo

Campos de Formación	
	Formación general para educación básica
	Formación común para todas las especialidades de secundaria
	Formación específica por especialidad