Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez

TESIS

Las matemáticas del cambio en la secundaria: Un análisis de textos.

que para obtener el grado de

Maestro en Ciencias en Educación Matemática.

Presenta

René Pérez Ruiz

Director de Tesis:

Dr. Jesús Roberto García Pérez

Morelia, Michoacán. Enero de 2012.

A mis padres y a Teodulfo
que han estado conmigo en todo momento.

Agradecimientos

A Dios.
Primero y antes que nada, dar gracias a Dios, por estar conmigo en cada paso que doy, por fortalecer mi corazón e iluminar mi mente y por haber puesto en mi camino a aquellas personas que han sido mi soporte y compañía durante todo el periodo de estudio.

A mis asesores.
Agradezco, sinceramente, el apoyo que me brindaron los doctores Jesús Roberto García Pérez y Armando Sepúlveda López en la Dirección de esta tesis, unas de las personas que más admiro por su inteligencia y por su importante aporte y participación activa en el desarrollo de ésta tesis. Debo destacar, por encima de todo, su disponibilidad y paciencia. No cabe duda que su participación ha enriquecido el trabajo realizado.

A mis maestros.
Gracias por su tiempo, por su apoyo así como la sabiduría que me transmitieron en el desarrollo de mi formación profesional y por confiar en mí, le doy las gracias al Dr. Jesús Roberto García, Dr. Armando Sepúlveda, Dr. Gerardo Tinoco, Dra. Lourdes Guerrero y Dr. Carlos Cortés por tenerme la paciencia necesaria y por apoyarme en momentos difíciles, muchas gracias. Agradezco el haber tenido unos profesores tan buenas personas como lo son ustedes. A todos ellos, muchas gracias de todo corazón.

A mis padres.
Igualmente agradecer en especial a mis padres, Agustín y María y a mi hermano Agustín Teodulfo, por brindarme su apoyo, ánimo y colaboración en todo momento y sobre todo cuando más necesitaba de ellos, sin darme negativas, sino todo lo contrario.

En general quisiera agradecer a todas y cada una de las personas que hayan vivido conmigo la realización de esta tesis y que no necesito nombrar porque tanto ellos como yo sabemos que desde lo más profundo de mi corazón les agradezco el haberme brindado todo el apoyo, colaboración, ánimo y sobre todo cariño y amistad.

Índice general

Índice de figuras

Índice de cuadros

Introducción.

El estudio de la variación o “matemáticas del cambio” comienza desde la primaria a partir del cuarto año, a través del eje procesos de cambio; se abordan principalmente, situaciones de Variación proporcional directa y, en menor medida, de variación de proporcional inversa. El eje conductor está conformado por la lectura, la elaboración y el análisis de tablas y gráficas en las que se registran y analizan procesos de variación. Se culmina con las nociones de razón y proporción, las cuales son fundamentales para la comprensión de varios tópicos matemáticos y para la resolución de muchos problemas que se presentan en la vida diaria de las personas.

En el estudio de la variación se incluyen nociones y herramientas representacionales y procedimentales asociadas, junto con experiencias de aprendizaje apropiadas, particularmente en resolución de problemas, y proporcionará a los estudiantes que continúen sus estudios de bachillerato y universitarios, la formación requerida para acceder a las matemáticas superiores, particularmente al cálculo y las ecuaciones diferenciales.

En diferente medida, los textos analizados en este trabajo (plan 2006) abordan los temas de proporcionalidad desde un enfoque variacional; aunque, en sentido estricto, los textos no se apegan al programa de la SEP (2006), que ubica el estudio de la Proporcionalidad directa en los primeros tres bloques del primer año y en el bloque 1 del segundo año, sin señalar explícitamente un enfoque variacional, sino más bien poniendo énfasis en un acercamiento numérico intuitivo, sobre todo en los problemas de *valor faltante*. Explícitamente se deja para el bloque 4, en primer año, el estudio de la Variación proporcional y lineal.

Quizás, la propuesta de la SEP está basada en la conveniencia de que los estudiantes adquieran madurez conceptual y procedimental sobre el pensamiento proporcional, antes de conectarlo con otros conceptos matemáticos, lo cual parece razonable; sin embargo, esta conveniencia no se hace explícita. Ello no significa que el enfoque variacional no se deba incorporar antes de entrar al estudio de la variación, pero si implicaría, al menos, no presentarlo como enfoque dominante. Justamente esto es lo que, a nuestro juicio, se hace en los textos analizados.

Lo anterior puede ocasionar alguno de los siguientes inconvenientes:

i) Que no se logre un avance significativo en la construcción conceptual y procedimental del pensamiento proporcional y, por lo tanto, en la habilidad para resolver problemas de proporcionalidad que no estén muy ligados a la variación; y

ii) Dedicar un espacio excesivo a la variación proporcional directa, que bien podría dedicarse a otros contenidos matemáticos que presentan dificultades de aprendizaje o que, por falta de tiempo, se les presta menor atención. Además, el hecho de que se dedique más tiempo a un contenido no necesariamente conduce a un mejor aprendizaje.

Cabe mencionar que la Reforma de 1993 a los Planes y Programas de Estudio de la Educación Secundaria, en el área de matemáticas en México, se ha caracterizado por ser una reforma integral que emanó de un proyecto educativo, dirigido por Jesús Alarcón Bortolussi (1950-1997), en el que se valora y promueve el aprendizaje de las matemáticas a través de la resolución de problemas, teniendo como propósito fundamental que los estudiantes de este nivel de estudios adquieran un aprendizaje significativo. Un material de apoyo específico, producto del proyecto, fue el Libro para el Maestro de Educación Secundaria (Alarcón 1994). Sin embargo, la implementación de esta reforma enfrentó serias dificultades en los Estados, algunas de ellas fueron de índole político en ciertas regiones pero, sobre todo, las dificultades fueron de carácter ideológico, pues las experiencias y la formación matemática de los profesores no correspondía con los ideales del proyecto; al parecer, esto debió haber influido para que las nuevas orientaciones y materiales de apoyo no se usaran adecuadamente o, simplemente, se hicieran de lado.

En cuanto a deficiencias en la preparación de los profesores, la situación no es privativa de nuestro país, ya que entre los promotores del proyecto curricular de los estándares del Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM por sus siglas en inglés) de Norteamérica, Lester (2003) en un estudio que hace sobre los efectos de la implementación de la resolución de problemas a partir de 1970, afirma que a pesar de la aspiración planteada por el NCTM (1980, p. 1) "la resolución de problemas debe ser uno de los ejes principales de las matemáticas escolares", y de haberse declarado a la década de los ochenta como *la década de la resolución de problemas*, el impacto de esta propuesta en el aprovechamiento de los estudiantes en Estados Unidos deja mucho que desear; entre otras cosas, por los bajos resultados obtenidos por los estudiantes en diversas evaluaciones de matemáticas. Lester también señala que cuando dicha aspiración se planteó, ésta no fue acompañada por sugerencias y recomendaciones de cómo realizarla, y cuando dichas recomendaciones se hicieron por el NCTM (1989), se puede decir con prudencia que quizás lo escrito en torno a la resolución de problemas no había sido del todo entendido por los educadores matemáticos, pues aun en los noventa el propósito citado no se había logrado. En la parte final de su estudio menciona que la resolución de problemas parece ser función de varias categorías de factores interdependientes, como la adquisición y utilización de conocimientos, control, creencias, y contextos sociales y culturales.

Este tipo de consideraciones, aunado a que en el ambiente se comenzaba a hablar sobre la emergencia de un nuevo enfoque por competencias, motivaron que la SEP promoviera una nueva reforma en 2006, cuya esencia en propósitos y metas no era otra que cristalizar la reforma anterior, dosificando y adecuando contenidos, así como produciendo un mayor número de materiales de apoyo para los docentes.

Finalmente, esta tesis consta de cinco capítulos.

En el Primer capítulo lo conforman los antecedentes de la investigación; se cita algunas investigaciones hechas sobre las dificultades que presenta el tema de variación; la justificación y Planteamiento del problema de investigación; la cual se conforma de objetivo general y objetivos específicos y las preguntas de investigación.

En el Segundo capítulo hacemos una revisión breve de investigación sobre diferentes aspectos relacionados con la variación; iniciamos con aquellas que tienen un enfoque histórico, para luego continuar con estudios que centran su atención sobre los problemas de aprendizaje que, para los alumnos, implica esta noción. Además la visión sobre el concepto de función en la propuesta curricular de los Principios y Estándares para las Matemáticas Escolares (NCTM, 2000), que es una de las propuestas curriculares más influyente en los últimos tiempos, planteada por el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas. En esta propuesta curricular se concibe alcanzar los fines de la educación a través de seis principios (igualdad, curricular, enseñanza, aprendizaje, evaluación y tecnológico) y diez estándares; cinco de los cuales se refieren a líneas de contenido (números y operaciones, álgebra, geometría, medición, análisis de datos y probabilidad) y los otros cinco estándares se refieren a procesos de pensamiento: resolución de problemas, razonamiento y demostración, comunicación, conexiones y representación.

El Tercer capítulo se refiere al análisis de los documentos curriculares elaborados por la SEP a partir de las Reformas Educativas de 1993 y 2006 y el Libro para el Maestro.

El Cuarto capítulo se refiere al análisis de libros de texto de nivel secundaria, de los cuales se realizó el análisis de cinco libros de texto, desde primero hasta tercer año, tres libros del plan 2006 (Mancera, Escañero y Briseño) y dos del plan 1993 (Waldegg y Zúñiga). Se hace una separación del análisis de los contenidos; en primer lugar la proporcionalidad "sin variación". Sin embargo, el tema a la que nos referimos, es antecedente fundamental para la comprensión de la variación proporcional, la cual no sólo tiene extrema importancia en la formación matemática de todo individuo, sino que durante su estudio se introducen nociones variacionales importantes; en segunda la variación lineal y por último la variación no lineal.

Concluimos la exposición con el Capítulo quinto, donde presentamos las conclusiones generales del análisis de libros de texto y de análisis de Programas de estudio.

.

Capítulo 1

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. Introducción

El estudio de la variación en la escuela secundaria: análisis y caracterización de los contenidos y objetivos educacionales.

Los contenidos curriculares de la educación básica son articulados a través de ejes temáticos que corresponden a algunas áreas de las matemáticas o a procesos que se realizan con otras áreas. Así, en la educación primaria existen seis ejes (SEP, 1993): *Los números, las relaciones y operaciones; medición; Geometría, procesos de cambio; Tratamiento de la información; y la predicción y el azar*. En la educación secundaria (SEP, 2006) los ejes temáticos son: *sentido numérico y pensamiento algebraico; forma, espacio y medida y manejo de la información.*

El estudio de la variación o *"matemáticas del cambio"* es un tema que comienza a estudiarse en la primaria, a través del eje procesos de cambio, a partir del cuarto año; se abordan, principalmente, situaciones de variación proporcional directa y, en menor medida, de variación no proporcional inversa:

> El eje conductor está conformado por la lectura, la elaboración y el análisis de tablas y gráficas en las que se registran y analizan procesos de variación. Se culmina con las nociones de razón y proporción, las cuales son fundamentales para la comprensión de varios tópicos matemáticos y para la resolución de muchos problemas que se presentan en la vida diaria de las personas (SEP, 2006, p. 30).

La reciente reforma a los Planes y Programas de Estudio del nivel Secundaria (SEP, 2006) contiene algunos cambios en cuanto a contenidos, particularmente en el estudio de la variación. En primer año, se retoma el tema de variación proporcional directa e inversa, profundizando y ampliando su estudio hacia otros tipos de variación en los dos siguientes años. En general, también se observa un reforzamiento en el uso de las representaciones utilizadas en primaria, tabulares y gráficas, incorporándose la representación algebraica. Además, se introducen nociones importantes como función; variable (independiente, dependiente); razón de cambio; intervalos de crecimiento, decrecimiento; máximos y mínimos, etc.; en particular, se estudia extensamente la función lineal y algunas no lineales como la inversa $y = \frac{1}{x}$ [1], y la cuadrática; en menor medida se abordan algunos casos de la función cúbica y la exponencial.

En el ambiente educativo se reconoce, ampliamente, la importancia que representa para la sociedad el estudio de la variación, tanto por la formación básica que proporciona al ciudadano común, como por la formación de profesionales en diversos campos del conocimiento. En la vida cotidiana, a diario nos encontramos con problemas o situaciones relacionadas con el concepto de proporcionalidad, ya sea en el medio familiar, político, social o profesional, para cuyo tratamiento se requieren, generalmente, conocimientos de matemáticas elementales. El concepto de proporcionalidad desempeña un papel fundamental en la sociedad: "sus aplicaciones son innumerables y están presentes en todos los sectores de la actividad humana" (Dupuis y Pluvinage, 1981; citado en Hitt, Soto, y Rouche, 1995, p. 77).

El estudio de la variación en la educación básica que incluya las nociones y herramientas representacionales y procedimentales asociadas, junto con experiencias de aprendizaje apropiadas, particularmente en resolución de problemas, proporcionará a los estudiantes que continúen sus estudios de bachillerato y universitarios, la formación requerida para acceder a las matemáticas superiores, particularmente al cálculo y las ecuaciones diferenciales.

El tema de funciones y de derivada forman parte del currículo tocante al cálculo diferencial e integral y análisis matemático, asignaturas que se han convertido en uno de los factores académicos más importantes para la deserción de los estudiantes en el nivel superior en México, razón por la que Albert (1996; citado en Reséndiz, 2006, Pág. 440) ha declarado a la enseñanza del cálculo como un problema grave a atender en la educación superior.

En relación a la importancia de su estudio, Reséndiz y Cantoral (2003, p. 136) establecen: "...el cálculo es la herramienta matemática que ha servido para la descripción de los fenómenos de un mundo cambiante, se ha dicho que es la matemática del cambio y la variación".

[1] En la educación básica suele llamarse a esta función como la inversa, para destacar su uso en la proporcionalidad inversa; en realidad, esta función es inversa de ella misma.

1.2. Justificación

En el presente trabajo se hace una revisión sobre la noción de variación, contenida en planes y programas de estudio de la escuela secundaria, así como en algunos textos de uso común, debido a la transcendencia que representa para los estudiantes el aprendizaje de las ideas y conceptos relacionados. Los beneficios del entendimiento de las ideas asociadas a la variación contribuyen a la comprensión de las funciones y los fenómenos de *cambio*, lo cual es fundamental entender gran parte de las ideas que se presentan en las noticias. El estudio del cambio matemático se formaliza cuando los estudiantes estudian el concepto de derivada.

El cambio es una importante idea matemática que puede estudiarse usando nociones algebraicas y geométricas y, entre otras cosas, permite resolver diversos tipos de problemas. Por ejemplo, como parte de un proyecto científico, los alumnos podrían plantar semillas e ir anotando el crecimiento de la planta; utilizando algunos datos en forma de tabla y gráfica, pueden describir cómo varía la tasa o razón de cambio a través del tiempo. Uno podría expresar dicha tasa diciendo: "mi planta no creció durante los primeros cuatro días; en los dos días siguientes, creció despacio; luego empezó a crecer más de prisa y, después, otra vez despacio". En esta situación, los alumnos no se fijan simplemente en el tamaño que alcanza la planta cada día, sino en lo que ha ocurrido entre las alturas registradas.

En la vida cotidiana los estudiantes frecuentemente se encuentran con la idea de cambio; por ejemplo, cuando miden algo con relación al tiempo, pueden describir el cambio cualitativamente –"hoy hace más frió que ayer"– cuantitativamente –"soy dos pulgadas más alto que el año pasado"–. Algunos cambios son predecibles; por ejemplo: crecer en estatura, no disminuir conforme pasan los años. Comprender que la mayoría de las cosas cambian con el tiempo, que muchos cambios pueden describirse matemáticamente y que son predecibles, ayuda a tener bases sólidas para aplicar las matemáticas a otros campos y para entender el mundo. Una aspiración innegable de un proyecto educativo es que los estudiantes supieran interpretar afirmaciones periodísticas relacionadas con la variación y tasas.

Nociones asociadas a la variación

El estudio de la variación implica el entendimiento y uso de varias nociones relacionadas entre sí, que son requeridas y toman sentido en el tratamiento de diversos tipos de tareas y problemas, que llamaremos situaciones de variación. Algunas de estas nociones son: proporcionalidad, función, tasa (o razón de cambio), variación lineal y no lineal, límite, derivada, etc. Algunas de estas nociones son introducidas en la escuela secundaria y otras en el bachillerato (límite y derivadas).

Sobre los tipos de variación que se abordan en la educación básica es común, y en cierto modo natural, que se empiece por la variación proporcional directa e inversa, ya que son los casos más simples y accesibles a los estudiantes desde la escuela primaria, los cuales están asociados a un amplio conjunto de situaciones problémicas. Por las mismas razones, y para dar continuidad a la variación proporcional directa, es conveniente también abordar la variación lineal, la cual incluye a la anterior. El tratamiento de otros casos de variación no lineal es pertinente e importante en el nivel secundaria. Otro aspecto sobresaliente de la variación, es el relativo a su condición de creciente o decreciente, que puede ser accesible a los estudiantes de estos niveles educativos y reconocidos fácilmente, en tablas numéricas y gráficas. Al respecto cabría preguntarse ¿qué casos de variación no lineal deben abordarse?, ¿qué dificultades se presentan para identificar, diferenciar o para representar los distintos tipos de variación?, ¿qué dificultades tienen los estudiantes para resolver problemas que involucran diferentes tipos de variación?

La noción de función involucra, sin duda, algunas de las ideas más importantes de las matemáticas; en particular, su estudio es esencial en los fenómenos de variación, al grado de que existe un buen número de investigaciones sobre esta noción, lo cual justifica plenamente su inclusión en el currículo de las matemáticas de secundaria (Markovics, Eylon, Bruckheimer, 1988), pero ¿qué aspectos relativos a esta noción se pretende enseñar? ¿cómo deben ser tratados en el aula?

La tasa o razón de cambio forma parte de la base conceptual de las matemáticas debido a la importancia del estudio del cálculo dentro de las matemáticas y su papel en las llamadas "disciplinas cliente", lo cual es *algo que subraya* "...el cálculo es central para las ciencias matemáticas, es fundamental para el estudio de todas las ciencias y la ingeniería...casi toda la ciencia se ocupa de sistemas que cambian y el estudio del cambio es el corazón del cálculo diferencial..." Douglas, (1986, citado en Oliveros, 1999, p. 8).

Por su parte, el NCTM (1989, citado en Oliveros 1999, p.3) para los grados de 9 a 12, equivalentes a nuestra preparatoria, propone no avocarse a la enseñanza formal del cálculo; recomienda que los alumnos investiguen las ideas centrales del cálculo en contexto. Entre las ideas que se sugiere que los estudiantes exploren están la tasa de cambio y la pendiente de la recta tangente, que contribuyen a profundizar la comprensión de función, y a responder preguntas acerca del mundo real. La instrucción debe promover la exploración y debe proveer bases conceptuales en vez de ver puras técnicas manipulativas. Los alumnos deben reconocer cómo la tasa de cambio se construye y se extiende a través de sus experiencias con el movimiento uniforme.

Dificultades que presenta el tema de variación

En relación a las dificultades de aprendizaje sobre el tema de variación, diversas investigaciones en el campo de la Educación Matemática (García, 1998; Zubieta, 1996; Ávila, 1996; Hoyos, 1996; Cantoral, 1992; Artigue, 1991) señalan que los estudiantes tienen serias dificultades al enfrentarse a cuestiones que exigen algún tipo de estrategia variacional. En particular, García (1998, citado en Reséndiz, 2006, p.437) destaca:

> ... los estudiantes de secundaria regularmente manifiestan dificultades de aprendizaje en el cálculo de la variación; el nivel de competencia alcanzado por mucho de ellos les impide resolver satisfactoriamente los problemas de variación que se les presenta y también sobre la pendiente de una recta.

Además, García (*Ibid.*, p. 437) agrega que, incluso, estudiantes de nivel medio superior y superior, además de los estudiantes de secundaria que participaron en un estudio desarrollado en Morelia, "todavía no asumen plenamente el objeto "pendiente de una recta" que describe una propiedad de las rectas".

Además Carrasco (2005, citado en Díaz, 2005, p.12) argumenta "Las producciones de los estudiantes revelan grandes dificultades para expresar variaciones en una gráfica distancia-tiempo". Por su parte, Zubieta (1996, citado en Reséndiz y Cantoral, 2003, p. 134) analiza las dificultades que muestran los estudiantes al representar con registros gráficos, aquello que se les ha comunicado como un enunciado verbal.

Otras dificultades reportadas en investigaciones son:

- Uno de los problemas de aprendizaje del concepto de tasa de variación es que se basa en los conceptos de razón y de proporcionalidad, cuyas dificultades ya han sido probadas y bien documentadas (Hart, 1981 y 1984, citado en Azcárate, 1990, p. 19).
- Tasa de variación de una función (cálculos elementales a partir de una situación, a partir de diferencias, a partir de la ecuación, a partir de la gráfica de una recta o una curva, tasa instantánea de variación).
- Un gran número de alumnos no consideran elemental la regla de cálculo de la tasa de variación (incremento de y/ incremento de x), tanto en el caso de una recta como de una curva (Orton, 1979, citado en Azcárate, 1990, p. 18)
- La distinción entre tasa media y tasa instantánea de variación entre dos puntos y en un punto, respectivamente.

1.3. Planteamiento del problema de investigación

A partir de septiembre de 2006 se implementó una reforma en la educación secundaria de nuestro sistema educativo que, en el caso de matemáticas, no contiene cambios significativos en propósitos, organización y enfoques didácticos, respecto a la reforma de 1993 [2].

[2] Efectivamente, los planteamientos de la reforma de 1993 siguen siendo vigentes, pero existe el reconocimiento de algunos profesores e investigadores que ésta no se implementó debidamente, entre otras cosas, por la falta de formación y entendimiento de los profesores de matemáticas sobre la resolución de problemas.

Sin embargo, no es nuestra intención hacer un análisis general de los cambios; más bien, nuestro interés se centra en la parte de la propuesta relacionada con la variación y las nociones asociadas; así como el tipo de situaciones (tareas y problemas) que se pretende que el alumno realice.

Si bien es obligado el análisis de los documentos oficiales de la propuesta, los cuales reflejan las intenciones que se tienen, no menos importante es la revisión de los libros de texto en los que se realiza una parte importante del proceso de transposición didáctica (Chevallard, 1998) y que en ocasiones, resulta la parte principal, ya que un buen número de maestros basan su clase en los textos. Otros documentos importantes son: Libro para el Maestro de educación secundaria (Alarcón, 1994) y los diferentes documentos y sitios de Internet que la SEP pone a disposición de los profesores.

Con base en el análisis documental esperamos tener una primera aproximación al currículo "vivido" (Díaz Barriga, 2003), el que se desarrolla en el aula, específicamente sobre nociones importantes como variación proporcional directa e inversa, variación lineal y no lineal, variación creciente o decreciente, razón de cambio y función. Además, también pretendemos caracterizar el uso de los diferentes registros de representaciones que se promueven y el tipo de situaciones problémicas que se proponen para propiciar los aprendizajes.

Esta primera aproximación curricular nos permitirá realizar una exploración inicial sobre algunas de las nociones relevantes y el tipo de tareas que se proponen. A partir de esta exploración, esperaríamos establecer una caracterización, también inicial, de los conocimientos de los estudiantes con relación a tales nociones. Así, el problema de investigación que se aborda en el presente trabajo es:

¿Qué nociones relacionadas con el tema de matemáticas del cambio se promueven en la educación secundaria, qué tipo de representaciones se espera que usen los estudiantes y qué tipo de problemas se propone que resuelvan?

1.3.1. Objetivos

Objetivo general

Elaborar una caracterización de los contenidos y objetivos curriculares relacionados con las matemáticas del cambio, en la educación secundaria. Pretendemos identificar las nociones fundamentales que articulan el estudio de la variación, así como las características relevantes del tipo de situaciones que se proponen para propiciar los aprendizajes.

Objetivos específicos

Objetivo 1. Analizar y caracterizar las propuestas contenidas en los programas de estudio y textos, relacionadas con diferentes tipos de variación; identificar las nociones fundamentales y la manera en que se abordan, así como las propuestas didácticas explícitas o implícitas.

Objetivo 2. Caracterizar las diferentes situaciones, tareas y problemas que se proponen en los programas y libros de texto para lograr los objetivos curriculares.

1.4. Preguntas de investigación

Las preguntas que guían el desarrollo de esta investigación son:

¿Qué objetivos y contenidos (nociones, procedimientos, representaciones y tipos de problemas) relacionados con las matemáticas del cambio, son pretendidos en los programas de estudio y otros documentos curriculares?

¿Qué objetivos y contenidos (nociones, procedimientos y representaciones) se consideran en los libros de texto y como son presentados los contenidos?

¿Cuáles son las características principales de las situaciones (tareas y problemas) de variación que se proponen en los libros de texto (estructura, contextos, tipo de variación, representaciones, etc.)?

Consideraciones metodológicas

Por sus características, esta investigación es esencialmente de carácter documental. La investigación documental es una variante de la investigación científica, cuyo objetivo fundamental es el análisis de fenómenos de orden histórico, psicológico o sociológico (Eco, 1995); el estudio y análisis de las propuestas curriculares y los medios que se proponen para su implementación, como los libros de texto, etc., forman parte de ese cúmulo de temas susceptibles de ser investigados por este método. Utiliza técnicas muy precisas y su fuente es la documentación existente, que directa o indirectamente, aporta la información.

La investigación documental se puede definir como parte de un proceso de investigación científica, que se constituye en una estrategia donde se observa y reflexiona sistemáticamente sobre realidades (teóricas o no) usando diferentes tipos de documentos (Kerlinger, 2002). Indaga, interpreta, presenta datos e informaciones sobre un tema determinado de cualquier ciencia, utilizando para ello, una metódica de análisis; teniendo como finalidad obtener resultados que pudiesen ser base para el desarrollo de la creación científica.

La investigación documental se caracteriza porque utiliza documentos; recolecta, selecciona, analiza y presenta resultados coherentes. Además:

Utiliza los procedimientos lógicos y mentales de toda investigación; análisis, síntesis, deducción, inducción, etc.

Realiza un proceso de abstracción científica, generalizando sobre la base de lo fundamental.

Realiza una recopilación adecuada de datos que permiten redescubrir hechos, sugerir problemas, orientar hacia otras fuentes de investigación, orientar formas para elaborar instrumentos de investigación, elaborar hipótesis, etc.

Puede considerarse como parte fundamental de un proceso de investigación científica, mucho más amplio y acabado.

Es una investigación que se realiza en forma ordenada y con objetivos precisos, con la finalidad de ser base a la construcción de conocimientos.

Se basa en la utilización de diferentes técnicas de: localización y fijación de datos, análisis de documentos y de contenidos.

En un sentido restringido, entendemos a la investigación documental como un proceso de búsqueda que se realiza en fuentes impresas (documentos escritos). Es decir, se realiza una investigación bibliográfica especializada para producir nuevos asientos bibliográficos sobre el particular.

Una confusión muy generalizada, coloca como iguales, a la investigación bibliográfica y a la investigación documental. Esta afirmación como podemos observar, reduce la investigación documental a la revisión y análisis de libros dejando muy pobremente reducido su radio de acción. La investigación bibliográfica, aclaramos, es un cuerpo de investigación documental. Asumimos la bibliografía como un tipo específico de documento, pero no como el documento.

Capítulo 2

REVISIÓN DE LITERATURA

En este apartado hacemos una revisión sobre diferentes trabajos relacionados con la variación; iniciamos con aquellos que se enfocan en los aspectos históricos, para luego continuar con estudios que centran su atención sobre los problemas de aprendizaje que, para los alumnos, implican diversas nociones relacionadas con el tema.

2.1. Aspectos históricos

Uno de los conceptos fundamentales asociados a las situaciones del cambio es, sin duda, el de función.

El desarrollo del concepto de función se divide en tres grandes periodos (Azcárate y Deulofeu, 1996, p.38).

El mundo antiguo (3500 a. C hasta 476 d. C). A pesar de la existencia de estudios sobre casos particulares de dependencia entre dos cantidades, no aparecen nociones generales sobre cantidades variables y funciones. En este periodo están las aportaciones de los Babilonios, cuya mención es esencial, y en ellas se encuentran las referencias más antiguas sobre el estudio de los fenómenos del cambio. Finalmente, se destaca la importancia de las matemáticas griegas; sobre todo por su influencia posterior.

La edad media. Aparecen ciertas nociones explícitas generales sobre funciones, ya sea en forma geométrica o mecánica. Cada caso concreto de dependencia entre dos cantidades variables se expresa mediante una descripción verbal o, a lo más, mediante un gráfico, quedando todavía muy apartada la determinación de leyes cuantitativas de los fenómenos de cambio. Dentro de este periodo se destaca, por ejemplo, el estudio del movimiento en Europa y destacando la aportación del científico francés Oresme (1323-1382), quien trata los primeros intentos de representación gráfica de la dependencia entre variables.

El periodo moderno. Inicia a finales del siglo XVI y es en el que aparece el concepto de función, con aproximaciones cada vez más amplias y generales. El estudio del movimiento se convierte en el problema crucial para el desarrollo del concepto; al mismo tiempo que el descubrimiento de la geometría analítica permite la aparición de las expresiones algebraicas de funciones. Posteriormente, en la segunda mitad del siglo XVII, la expresión de funciones por medio de series de potencias permitió ampliar el campo de las funciones tratadas analíticamente. Fue, precisamente, el método analítico lo que revolucionó las matemáticas y aseguró un lugar privilegiado al concepto de función. Ya en el siglo XVII esta interpretación de las funciones como expresiones analíticas resultó demasiado restrictiva, dando lugar a nuevas definiciones del concepto de función que universalmente serán aceptadas en el análisis matemático.

A continuación se detallan los aspectos más importantes de cada uno de estos periodos.

Las civilizaciones antiguas

Poco se puede decir de las matemáticas de Babilonia y de Egipto, los documentos conocidos no van más allá de una aritmética y una geometría elementales de carácter empírico, a lo más, muestran ingeniosos métodos de cálculo e incluso interesantes incursiones en el terreno del álgebra, en el caso de los babilonios, el material conocido son: tablas de computo y colecciones de problemas resueltos, muchos son del tipo práctico, sin explicitación de métodos ni justificación, esto hace difícil encontrar aspectos relevantes que permitan la existencia de conceptos como variable o función. Sin embargo, es necesario hacer una excepción en cuanto a los conocimientos alcanzados en astronomía, especialmente de los babilonios, pues el carácter de sus datos contribuyeron al conocimiento de las funciones.

Aunque la matemática griega es la más influyente hasta la edad media, con una gran cantidad de conocimientos matemáticos y la creación del método deductivo, ésta no fue capaz de establecer una formulación explícita del concepto de función, quizás por la existencia de una serie de obstáculos que mencionamos enseguida.

La relación entre número y magnitud fue uno de los obstáculos que tuvo la matemática en varios periodos de la antigüedad; especialmente en el mundo griego.

> Los pitagóricos, cuya afinidad con la mentalidad aritmética de los babilonios es notoria, no parece que se plantearan la existencia de problemas, en principio para unificar número y magnitud, de forma que la relación entre dos magnitudes se expresaba por medio de la razón entre dos enteros positivos (Azcárate y Deulofeu, 1996, p. 40).

La ausencia del concepto de número racional impide que pueda considerarse como una misma cosa: la razón 2:3 y la fracción $\frac{2}{3}$. Además, el papel predominante de las proporciones dificultó el avance hacia el concepto general de función.

> A pesar de que las ideas de cambio o de cantidad variable no eran ajenas a los griegos, quienes habían considerado problemas sobre movimiento, continuidad o infinito, desde los tiempos de Heráclito y Zenón, y a los cuales dedica Aristóteles buena parte de su física, se puede asegurar que ni los aspectos de cambio, ni los referidos al movimiento fueron estudiados desde un punto de vista cuantitativo por la ciencia griega, esto sólo se dio en algunos momentos muy concretos, que no permiten cambiar la idea de que el estudio de la matemática pura prevaleció sobre la cinemática.
>
> Las primeras relaciones funcionales aparecen en el mundo antiguo ligadas a problemas astronómicos en forma tabular, a partir de interpolaciones generalmente lineales y alcanzando su mayor precisión en el Almagesto de Ptolomeo que llega, incluso, a introducir con su tabla de cuerdas la función seno. No obstante, ni estas funciones tabuladas, ni los trabajos sobre curvas ligados al estudio de las cónicas, realizados por Apolonio, permitieron llegar a consideraciones generales sobre la idea de variable o de función (*Ibid*, p. 42).

La Edad Media

Esta época abarca desde el final del imperio romano (siglo IV) hasta el siglo XV. Las Escuelas de filosofía de Oxford y París, son los dos principales núcleos donde se desarrolló la ciencia en este periodo, obteniendo su mayor florecimiento durante el siglo XIV.

> Influenciadas por pensadores como Roger Bacon o Robert Grosseteste, las matemáticas griegas son un instrumento esencial para el estudio de los fenómenos de la naturaleza. Entre sus mayores aportaciones destaca el inicio de un estudio cuantitativo del movimiento local no uniforme. A partir del siglo XIII el estudio cuantitativo de fenómenos adquiere gran relevancia. Se analizan cualidades y formas, según la terminología de Aristóteles, de fenómenos muy diversos como calor, luz, densidad, velocidad, que pueden poseer varios grados de intensidad que cambian entre dos límites establecidos; la intensidad se considera en relación a su extensión, como el tiempo o la cantidad de materia (Azcárate y Deulofeu, 1996, p. 44).

En el transcurso de estos estudios, empiezan a aparecer conceptos fundamentales como cantidad variable, entendida como un grado de cualidad, velocidad instantánea o puntual, aceleración; todos ellos íntimamente ligados a la idea de función.

El principal representante de la escuela francesa es Nicolás Oresme (1323-1382) que con su estudio sobre los fenómenos que cambian, abre una nueva vía al proponer una aproximación geométrica, frente a los estudios cinemático-aritmético desarrollados hasta aquel momento. Oresme desarrolla su teoría sobre las latitudes de las formas.

Alrededor del siglo XIV la naturaleza del "cambio de una cualidad" fue objeto de prolijas especulaciones. Oresme introdujo el empleo de figuras geométricas con el propósito de representar el comportamiento de una cualidad: de este modo logró poner al servicio del estudio de la variación algunos recursos de la geometría. La consideración simultánea de todas las latitudes (lo que llama “la latitud de una forma”) es el camino de acceso al estudio de la variación. Esta va a ser estudiada como variación de las formas de las superficies que resultan de su consideración simultánea. En este sentido, Oresme argumenta:

> Es claro que podríamos imaginar una cualidad total [como una superficie], ya que así pueden ser examinadas más rápido su uniformidad y su diformidad... pues las cosas pueden comprenderse mejor cuando se las explica mediante un ejemplo visible (Moreno, 1991, p. 194).

Al introducir la variación en su modelo geométrico, Oresme estaba en posibilidad de adelantar su estudio respecto a la velocidad, la cual será concebida como una cualidad que adquiere un cuerpo en movimiento durante un cierto tiempo. Hay algo nuevo en este caso: la cualidad (la velocidad) se adquiere en cada instante; es decir, en el tiempo se hace inevitable, bajo esta concepción, la introducción de la velocidad instantánea como la latitud de la velocidad en cada instante.

Oresme introduce los términos “uniforme” y “uniformemente diforme” para referirse, en el primer caso, a una cualidad cuyas latitudes no cambian en el tiempo: son constantes. En el segundo caso, el término corresponde a una cualidad cuya latitud es variable, pero cuya razón de cambio es constante, como la velocidad en un movimiento uniformemente acelerado. Aunque estos son los ejemplos de variación que más tarde resultarán centrales para Galileo, Oresme pues también habla de variaciones de carácter “diformemente diforme”

A continuación presentamos un problema de variación, planteado en términos físicos, que Oresme tradujo en un problema de sumas infinitas; el problema es el siguiente (citado en Moreno, 1991, p. 195):

> Si un cuerpo se mueve durante la primera mitad de un intervalo (temporal) con velocidad constante; a través de la mitad del intervalo restante con el doble que la velocidad inicial; a través de la mitad del intervalo restante con el triple que la velocidad inicial y así, sucesivamente, entonces la velocidad promedio durante todo el intervalo será la doble que la velocidad inicial.

Se trata de un problema de velocidades cuya traducción a los términos del modelo geométrico, nos permite apreciar que tal modelo incorpora sustancialmente a la variación.

Si representamos mediante un área la distancia recorrida por un móvil cuya velocidad es constante ($distancia = velocidad \times tiempo$), obtenemos la velocidad inicial igual a 1. Afirmar que la velocidad promedio con la que se recorre la distancia total es 2, equivale a decir que la suma de las áreas de los rectángulos es 2. Pero nótese que hay una infinidad de estos rectángulos cuyas áreas son: $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{4}{16}$, ..., como se muestra en la figura 2.1.

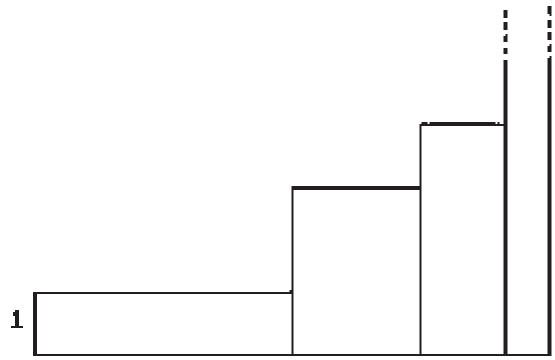

Figura 2.1: Construcción asociada al enunciado del problema

En nuestra notación, diríamos que "el k-ésimo" tiene área igual a: $\frac{k}{2^k}$

La suma total de las áreas es: $\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + ... + \frac{k}{2^k}$, ...,; Oresme demuestra que es igual a 2. El argumento, aunque sencillo, es muy interesante y consiste en dividir el área total de otra manera, como se muestra en la figura 2.2

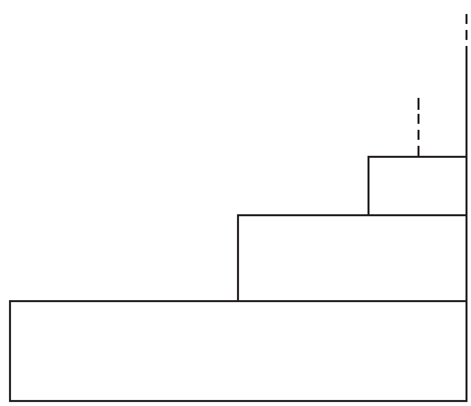

Figura 2.2: Manera alternativa de considerar el área

Las áreas punteadas corresponden a las distancias recorridas por el móvil. Pero ahora, al separar la figura de su correlato físico, es decir, al centrar nuestra atención en el problema geométrico, podemos subdividir la superficie como en la figura 2.2. Para la subdivisión, las partes correspondientes (abajo hacia arriba) pueden volver a colocarse (izquierda a derecha) como se indica la figura 2.3.

En la figura 2.3 de la derecha, ya es claro que el resultado final de la nueva colocación de los rectángulos es un rectángulo de base 2 y altura 1. Con esto queda establecido –regresando al correlato físico– el resultado sobre la velocidad promedio. Por lo tanto: $\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \ldots = 2$.

Las técnicas de representación geométrica condujeron a Oresme a estudiar la latitud de las formas, lo cual permite el estudio de la variación de una cualidad en su conjunto. Por otra

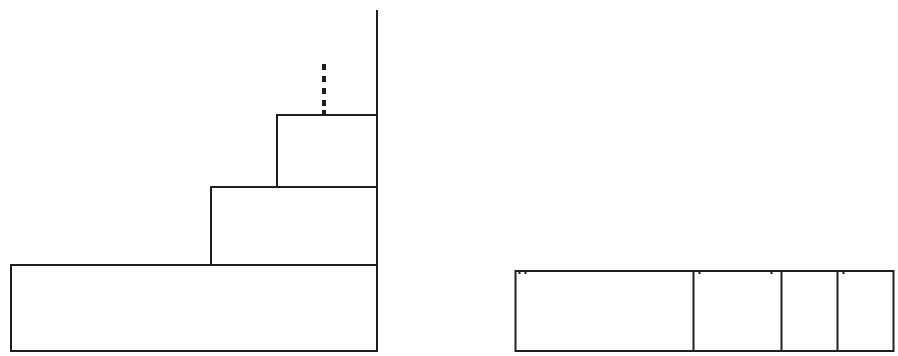

Figura 2.3: Resultado final

parte, al permitir la traducción (en términos de áreas) de ciertos problemas cinemáticos, el modelo geométrico posibilita el abandono de las formulaciones puramente retóricas de los problemas y con ello se favorece la aparición de un lenguaje con rasgos simbólicos –aún incipientes– que eventualmente conducirán al álgebra de Vieta.

La Edad Moderna

Cerca de tres siglos separan la obra de Oresme del siglo XVII, periodo que se puede considerar como el más abundante para la formación del concepto de función, puesto que en él vivieron entre otros Galileo, Descartes, Fermat, Newton, Leibnitz y Gregory, cuya contribución dará lugar, desde distintos puntos de vista, al nacimiento primero de la geometría analítica y luego del cálculo infinitesimal, con el consiguiente progreso para el estudio de las funciones que permitirá la aparición de las primeras definiciones así como el término de función.

> Se debe referir a Galileo (1564-1642) puesto que, si bien su obra como matemático y su contribución directa al desarrollo del concepto de función no es fundamental, sus avances en el estudio del movimiento y en general toda su obra científica es de un gran valor, hasta el punto que, muchas veces, se considera como el punto de arranque de la ciencia moderna (Azcárate y Deulofeu, 1996, p. 46).

Descartes y la idea de cantidad variable

Hasta el siglo XVII, una función podía introducirse utilizando una expresión verbal, una tabla, una gráfica.

> En 1637, Descartes publica su célebre trabajo, La Géométrie, libro que marca el nacimiento y expansión de la geometría analítica, que permitirá, a partir de este momento, interpretar curvas y superficies por medio de ecuaciones, y que un siglo más tarde llevará a la algebrización de la geometría. Esta idea fundamental, afectará igualmente de forma decisiva a las funciones, ya que en

> este mismo trabajo aparece por vez primera el hecho de que una ecuación en x e y es una forma para expresar una dependencia entre dos cantidades variables, de manera que, a partir de ella, es posible calcular los valores de una variable que corresponden a determinados valores de la otra (*Ibid*, p. 47).

Para llegar a estas ideas fundamentales que permitirán, con el tiempo, considerar por un lado, las funciones como relaciones entre conjuntos de números, más que como entre cantidades y, por otro, representar las funciones por medio de fórmulas. Se habían producido en el campo de las matemáticas dos avances muy importantes en la segunda mitad del siglo XVI.

> En primera los progresos realizados en la extensión del concepto de número, con la configuración de los números reales y la primera aparición de los números imaginarios, y en segunda la aparición del álgebra simbólica, en la que cabe destacar la introducción de signos para numerosas operaciones y especialmente la utilización de letras para representar cantidades desconocidas y coeficientes arbitrarios distinguiendo claramente una cosa de otra. En la introducción del método analítico para expresar las funciones y junto a Descartes, se debe mencionar a Fermat, el cual en una publicación póstuma de 1679, escrita antes de 1637, expone los principios fundamentales del método de las coordenadas (*Ibid*, pp. 47, 48).

Las contribuciones de Newton y Leibnitz

Entre las principales contribuciones de Newton (1642-1707) en el desarrollo de estudio de las funciones, dada la importancia, complejidad y variedad de sus trabajos, se tiene:

> Descartes consideró solamente las funciones algebraicas, excluyendo incluso las curvas mecánicas que no podían ser tratadas según su método de análisis, alejando así la vinculación de las matemáticas con la física. Pocos años después, el descubrimiento del desarrollo de funciones en series infinitas de potencias, debido entre otros a Newton, redujo notablemente las restricciones de Descartes, haciendo posible la representación analítica de la mayoría de funciones estudiadas en aquellos tiempos. El desarrollo en series de potencias de una función tuvo una gran importancia, a partir de la mitad del siglo XVII, hasta el punto que durante mucho tiempo se convirtió en el método fundamental para el estudio de las funciones (*Ibid*, p. 48).

Contemporáneo de Newton, Gottfried W. Leibnitz (1646-1716), es otro de los matemáticos de la segunda mitad del siglo XVII que contribuyó decisivamente al desarrollo del concepto de función.

> El término función aparece por vez primera en un manuscrito de Leibnitz de 1673. Si bien inicialmente tiene un significado muy particular, pues se refiere

a un problema de cálculo de ordenadas a partir de cierta propiedad de las tangentes, posteriormente en 1694 utiliza la palabra en un sentido más general, aunque todavía poco preciso y referido, como siempre, a cuestiones de geometría diferencial.

La correspondencia con Jean Bernoulli (1694-1698) muestra "cómo el deseo para expresar mediante una palabra cantidades que dependen de una cierta variable se encuentra todavía restringida a las expresiones analíticas"...

En efecto, aunque para Leibnitz, y de modo más preciso para Jean Bernoulli, "una función arbitraria de x es una cantidad formada de manera cualquiera a partir de x y de constantes, esta manera cualquiera se entiende como una expresión algebraica o trascendente" (*Ibid*, pp. 49, 50).

La evolución del concepto en el siglo XVIII: Jean Bernoulli y Euler

Durante el siglo XVIII el análisis matemático va cobrando cada vez mayor importancia e independencia como disciplina, perdiendo su carácter geométrico y mecánico en favor de la aritmetización y del uso casi exclusivo del álgebra.

La primera definición explícita de función "como una expresión analítica, publicada en 1718, se debe a Jean Bernoulli, cuya notación no perduró; correspondiendo a Euler (1740) la notación *f(x)* utilizada hasta nuestros días. La primera vez que aquél usa el término función (1698) aparece en la resolución de un problema planteado por su hermano Jacob" (*Ibid*, p. 50).

Es así, como se llega a Euler (1707-1783), quien al inicio de su Introductio in analysis infinitorum (1748) hace un detallado estudio del concepto y de otros términos relacionados con éste.

Al definir las nociones iniciales se refiere a los términos constante, cantidad definida que toma siempre un mismo valor determinado, y variable, cantidad indeterminada, o universal, que comprende en si misma todo los valores determinados (refiriéndose a los valores del conjunto de los números complejos o a alguno de sus subconjuntos). Al definir función sigue a su maestro Jean Bernoulli: una función de una cantidad variable es una expresión analítica formada de cualquier manera a partir de esta cantidad variable y números o cantidades constantes.

Así en el prefacio de su institutiones calculi differentialis (publicado en 1755) aparece la nueva definición, que no mantiene relación con la anterior al desaparecer la idea de expresión analítica: "si x es una cantidad variable, entonces toda cantidad que dependa de x de cualquier manera o que esté determinada por aquél se llama una función de dicha variable (*Ibid*, pp. 50, 51).

Así, el problema de la ampliación del concepto de función aparece como algo necesario, pero todavía controvertido, durante el siglo XVIII; y se desarrollará con toda su extensión en el siglo siguiente gracias a los trabajos de Fourier, Cauchy y Dirichlet, entre otros.

La última etapa: del siglo XIX a la teoría de conjuntos.

> Lagrange restringe de nuevo el concepto de función al limitarlo a las llamadas funciones analíticas que están definidas por series de potencias. El problema principal de esta restricción se debe al hecho que dichas funciones están determinadas cuando se conoce su comportamiento en un entorno infinitamente pequeño de x, lo cual entra en contradicción con el comportamiento arbitrario de una función según la definición general de Euler (Azcárate y Deulofeu, 1996, p. 52).

Son mucho más importantes las aportaciones de Fourier y de Dirichlet (*Ibid*, p. 52):

- El primero, con el estudio de las series trigonomtricas, conocidas como series de Fourier, ya abordado por Daniel Bernoulli, para desarrollar funciones arbitrarias, que supuso una gran revolución en su tiempo al lograr representar por medio de series de funciones analíticas, funciones arbitrarias formadas por leyes analíticas distintas en diferentes intervalos de la variable independiente.
- Dirichlet, discípulo de Fourier, casi siempre se refería a funciones continuas o poco discontinuas, hablaba de los desarrollos en serie de funciones completamente arbitrarias, en el mismo sentido de Fourier, mostrando que ya tenía el concepto general de función. Y en 1837 da una definición muy general: si una variable y está relacionada con otra variable x de tal manera que siempre que se atribuya un valor numérico a x hay una regla según la cual queda determinado un único valor de y entonces se dice que y es una función de la variable independiente x.

Paralelamente, hacia 1830, se desarrolla la teoría de funciones de variables compleja, debida ante todo a Cauchy, Riemann y Weierstrass; con este paso al campo complejo vienen a coincidir en cierto modo los conceptos de función de Lagrange y de Fourier-Dirichlet.

> La generalización que supuso para el concepto de función la introducción de la teoría de conjuntos. Hasta aquel momento, una función estaba definida siempre en cada punto del continuo de todos los valores reales o complejos, o cuando menos, en cada punto de un intervalo dado. Pero, al considerar una definición en términos conjuntistas, todas las definiciones anteriores corresponden a casos particulares de esta nueva generalización (*Ibid*, p. 53).

Comentarios sobre el desarrollo del concepto de función.

Como se puede observar, el desarrollo del concepto de función se divide en tres grandes periodos. En la Época antigua no se observan nociones generales de cantidades variables y funciones, aunque ya había trabajos particulares de dependencia entre dos cantidades. En este periodo dan aportaciones importantes como las de los babilonios y de la matemática griega. La primera proviene del estudio de la astronomía y la segunda la creación del método deductivo. Cabe mencionar que también hubo obstáculos para establecer la relación entre número y magnitud y la falta del concepto de número racional; tal vez por estas razones no dieron una noción general sobre la idea de variable o de función.

En el siguiente periodo (Edad media) se observa una mejoría en cuanto a la representación de dependencia entre dos cantidades variables, ya sea mediante una descripción verbal y gráfica, aunque faltaba todavía la representación simbólica. El principal representante en este periodo es Oresme, por sus aportaciones debido al estudio de fenómenos que cambian y el empleo de figuras geométricas para representar el comportamiento de una cualidad (velocidad), con esta logra poner al servicio del estudio de la variación.

Finalmente, la Edad moderna se caracteriza por ser el periodo más productivo en cuanto al desarrollo de trabajos que desembocaron en la formación del concepto de función debido, fundamentalmente, a las aportaciones de Galileo (1564-1642), Descartes (1596-1659), Fermat (1601-1665), Newton (1643-1727), Leibnitz (1646-1716), Gregory (1638-1675), Jean Bernoulli (1667-1748), Euler (1707-1783), Fourier (1768-1830), Dirichlet (1805-1859), entre otros; primero el nacimiento de la geometría analítica y luego del cálculo infinitesimal. En este periodo una función podía ser representada mediante una expresión verbal, mediante una tabla y gráfica. La primera definición explicita de función 'como una expresión analítica' se debe a Jean Bernoulli en 1718, pero su notación no perduró, debido a la notación de Euler establecida en 1740: *f(x)*, que es utilizada hasta nuestros días. Posteriormente Euler, en 1755, da una nueva definición que no mantiene una relación con la notación anterior, en la que desaparece la idea de expresión analítica: "Si x es una cantidad variable, entonces toda cantidad que dependa de x de cualquier manera o que esté determinada por aquél se llama una función de dicha variable" (Azcárate y Deulofeu, 1969, p.51). Más adelante, la precisión en la definición y notación evoluciona debido a los trabajos de Fourier, Cauchy y Dirichlet, entre otros.

2.2. Estudios sobre el aprendizaje del concepto de pendiente de una recta

Una estrategia utilizada para iniciar a los estudiantes en el estudio del cálculo, a partir de las gráficas, consiste en introducir la pendiente de una recta a partir del concepto de velocidad media y de su representacin gráfica, de manera que la primera noción de pendiente venga dada por el cociente que mide la velocidad constante del movimiento representado por la gráfica. (Shuard y Nelly, 1977; citado en Azcárate, 1990, p. 16).

$$Pendiente = \frac{Incremento\ correspondiente\ de\ y}{Incremento\ x}$$

Por su parte, Barr (1981) investiga el conocimiento que tienen alumnos de escuelas profesionales (Technician Education Council), de 19 años, sobre los conceptos de pendiente y ordenada al origen de una recta, con el objetivo de averiguar cuáles son las principales dificultades que aparecen en este tema. Las actividades propuestas fueron: interpretar simbólicamente rectas trazadas, trazar rectas dada la ecuación, reconocer o calcular la pendiente y la ordenada al origen a partir de una fórmula del tipo $y = mx + c$, relacionar la pendiente y la ordenada al origen con la gráfica.

Las principales dificultades detectadas fueron (Barr, 1981, citado en Azcrate, 1990, p. 17):

- Confusión en la idea de que la pendiente es una razón. La dificultad consiste en reconocer que m es una razón; es decir, identificar m con la definición de pendiente como razón de incrementos de las variables.
- Confusión entre m (pendiente) y c (ordenada al origen) cuando se da la ecuación.
- Confusión entre "x sobre y" o "y sobre x" en el cálculo de la pendiente a partir de dos puntos dados.
- Falta de habilidad en calcular la pendiente a partir de dos puntos dados.
- Falta de dominio de la sutileza de los conceptos.

Barr concluye que todo parece indicar que los alumnos han aprendido la noción de pendiente sin entender realmente el concepto subyacente y su relación con el de tasa de variación. Sin embargo, Barr no explica cómo se manifiestan los errores de los alumnos.

En este contexto, Metz (1982, citado en Azcárate, 1990, p.17) propone una serie de actividades para introducir la noción de pendiente y su relación con la velocidad constante de un movimiento uniforme. Se trata de ejercicios sobre gráficas espacio-tiempo que desarrollan el sentido visual de comparación de pendientes y que, además, definen la pendiente de una recta que pasa por dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) como:

$$\frac{Variacion\ vertical}{Variacion\ horizontal} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Estudios sobre el aprendizaje de los conceptos de tasa de variación y de derivada de una función

En relación a los de tasa de variación y de derivada, Orton (1984), realiza investigaciones entre 1979 a 1984 por medio de entrevistas; entrevistó a 60 estudiantes de bachillerato, de 16 a 18 años de edad, y a 50 estudiantes universitarios, prospectos a profesores de matemáticas (18 a 22 años). En estas investigaciones Orton analiza diferentes aspectos de la tasa de variación de una función: cálculos elementales a partir de una situación, a partir de diferencias, a partir de la ecuación, a partir de la gráfica de una recta o una curva, tasa instantánea de variación; y observó las siguientes dificultades:

- Un gran número de alumnos no consideran elemental la regla de cálculo de la tasa de variación (incremento de y/ incremento de x), tanto en el caso de una recta como de una curva. En efecto, alrededor de la mitad de los alumnos cometieron algún error en dicho cálculo.

- En el cálculo de la tasa de variación, la cuarta parte de los alumnos omitieron el signo (cuando era negativa) y muchos calcularon la tasa de variación entre dos puntos A y B como la razón:

$$\frac{\textit{Incremento de } y}{\textit{abscisa de } B \ (o\ A)}\ ;\ \text{o bien, } \frac{\textit{Abscisa de } B\ (o\ A)}{\textit{abscisa de } B\ (o\ A)}$$

- Un gran número de alumnos (cerca de la tercera parte) no dio respuesta a las preguntas que conciernen a la distinción entre tasa media y tasa instantánea de variación entre dos puntos y en un punto, respectivamente, y cerca de la mitad de los que lo intentaron, fallaron en sus respuestas.

- Cerca de un 90 % de los alumnos fue incapaz de contestar correctamente a las preguntas que implicaban la extensión de la noción de la tasa media de variación como razón a la tasa instantánea de variación en un punto, con los correspondientes cálculos de un límite y substitución de valores Incremento de y/ incremento de x.

Respecto al concepto de tasa de variación, Orton insiste en que ésta es una noción previa fundamental y básica para introducir el concepto de derivada, junto con la de tangente a una gráfica en un punto. Las conclusiones que más destacan se pueden resumir en los siguientes puntos: (*Ibid*, p. 19)

- Uno de los problemas de aprendizaje del concepto de tasa de variación es que se basa en los conceptos de razón y de proporcionalidad, cuyas dificultades ya han sido probadas y bien documentadas (por ejemplo Hart, 1981 y 1984). Orton cree que una posible ayuda para los alumnos es utilizar situaciones vividas o conocidos por ellos; por otra parte, afirma que la tasa de variación es un tema importante con entidad por sí mismo por lo que habría que enseñarlo aparte y no sólo como introducción a las derivadas.

- Orton también señala la importancia de desarrollar actividades gráficas en el estudio del concepto de tasa de variación, hasta el punto de que considera que la comprensión de dicho concepto está asociada a las de representación gráfica y de razón.

- Otra conclusión de las investigaciones de Orton es la necesidad de fomentar el estudio de la relación que existe entre tangente a una curva en un punto y tasa instantánea de variación de la función en dicho punto, lo que implica estudiar previamente los conceptos de tasa media de variación, de pendiente de una recta y de secantes a una curva.

- En la misma línea de consolidar el concepto de tasa de variación, previamente al estudio del concepto de derivada, Orton sugiere la conveniencia de estudiar los puntos de crecimiento y de decrecimiento de la función y los puntos de mayor y de menor crecimiento de la misma.
- También es importante, relacionar las actividades gráficas con la medida numérica de la tasa de variación entre dos puntos de la curva, con su signo y con su valor absoluto.
- Finalmente, Orton cree conveniente dar una idea del significado de los siguientes puntos de una gráfica: estacionarios, máximos, mínimos y de inflexión, así como las características de la tasa instantánea de variación y de la tangente en dichos puntos. De esta manera, después que a los estudiantes tengan de un primer contacto de tipo gráfico, en un segundo momento las nociones elementales del cálculo de derivadas, tendrá mucho más significado para ellos.

En lo que concierne al concepto de derivada y al cálculo de derivadas, Orton (1985, 1986; citado en Azcárate, 1990, p.20) insiste en la importancia del estudio previo y profundo del concepto de tasa de variación de una función y de la noción de recta tangente a una gráfica en un punto, como posición extrema de las rectas secantes a la gráfica que pasan por dicho punto junto con el cálculo de la pendiente de la recta tangente a partir de las pendientes de rectas secantes cada vez más próximas a la tangente.

Tall (1986) enfatiza en un enfoque cognitivo de las derivadas y propone una introducción gráfica a la idea de tasa instantánea de variación en un punto de la gráfica de la función, pero basada en la utilización de un programa de ordenador que utiliza ampliaciones sucesivas, mediante el efecto lupa, que permiten visualizar el comportamiento local de funciones continuas derivables y no derivables.

Tall también considera que la introducción al concepto de tasa de variación y de derivada se puede partir de unos conocimientos muy elementales, que reduce a:

- Ser capaces de operar con fórmulas algebraicas sencillas.
- Saber dibujar y visualizar gráficas de funciones sencillas (lineales, afines, cuadráticas y cúbicas simples, por lo menos).
- Saber calcular la pendiente de una recta y comprender el significado de la pendiente positiva o negativa a partir de la fórmula de la pendiente de la recta que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2).

Con estos conocimientos, el estudiante se puede iniciar el estudio del comportamiento de las gráficas de funciones simples, sometidas a sucesivas ampliaciones. El método expuesto por Tall es muy sugerente, ya que permite visualizar y estudiar los valores de las tasas de variación de la función que se identifican con las pendientes de las secantes sucesivas para incrementos de x cada vez más pequeños, según se va aplicando el "efecto lupa" (citado en Azcárate, 1990, p. 21).

2.2.1. Desarrollo del concepto de función a medida que los estudiantes avanzan en los niveles escolares

Por su parte, Carlson (1998) realiza una investigación sobre el desarrollo del concepto de función a medida que los estudiantes avanzan en los niveles escolares. Esto se llevó a cabo con tres grupos de estudiantes norteamericanos con diferentes niveles de preparación matemática: el primer grupo estuvo integrado por 30 estudiantes de bachillerato que habían cursado álgebra; el segundo grupo fueron 16 estudiantes de bachillerato que ya habían tomado cálculo; y el tercero eran 14 estudiantes de primer semestre del nivel universitario.

Como parte del estudio, se aplicó un examen a todos los estudiantes y se realizaron entrevistas a cinco de cada uno de los grupos, desprendiéndose de ellas que "la adquisición de los aspectos esenciales del concepto de función es extremadamente compleja y los estudiantes tienen dificultad de las diferentes representaciones y la aplicación de los conceptos básicos en los diferentes niveles de abstracción" (Carlson, 1998, p. 117).

En este contexto, Ayers *et al.* (1989, citado en Carlson, 1998) y Vinner y Dreyfus (1989, citado en Carlson, 1998) reportan que muchos estudiantes piensan que una función sólo debe ser representada por una única regla algebraica que describe un continuo, función uno-a-uno. En tanto que Monk (1992, citado en Carlson, 1998) realiza investigaciones exhaustivas, de 1987 a 1992, sobre las interpretaciones gráficas de los estudiantes y, recientemente, ha demostrado que los alumnos tienen problemas con la interpretación de gráficas dinámicas y con las relaciones que se establecen con subintervalos del dominio de una función.

A continuación se mencionan las conclusiones generales de la investigación de Carlson(1998, pp. 141-143):

> La construcción de la función se desarrolla lentamente y el desarrollo parece ser facilitado por la reflexión y con actividades constructivas. Los resultados de las entrevistas, que cuando los estudiantes se enfrentan con actividades atractivas y darle el tiempo para reflexionar, esto se promueve la comprensión del estudiante. Estos resultados coinciden con los de Breidenbach *et al.* (1992, citado en Carlson, 1998). Su estudio encontró que la comprensión de las funciones fue mejorada notablemente como resultado de la participación de los estudiantes con actividades constructivas.

Como puede observarse, cuando los estudiantes se enfrentan con problemas atractivos y constructivos, mejoran su comprensión matemática, lo cual coincide con la investigación hecha por Breidenbach(1976).

> Los estudiantes más talentosos con conocimientos de álgebra tienen ciertas ideas erróneas sobre función. Sobre todo no entienden el idioma de función en particular; el papel de los paréntesis en la representación de la función. No saben

> cómo representar las relaciones del mundo real utilizando representaciones funcionales, función algebraica o gráfica. No interpretan eficazmente la información de una gráfica dinámica. No entienden la naturaleza general de la función, creen que cualquier función debe ser definible por una fórmula algebraica única y todas las funciones son continuas. Este resultado es consistente con los resultados de Ayers *et al.*, Vinner y Dreyfus (1989, citados en Carlson, 1998). No entienden el papel de las variables independientes y dependientes en una función en una representación algebraica.

Es decir, los estudiantes de álgebra aún no cuentan con la idea de función, en su forma de representación gráfica; además, probablemente piensan que la función es representada únicamente mediante una fórmula algebraica, lo cual puede deberse a la influencia del estudio algebraico.

Los estudiantes más talentosos de segundo semestre de cálculo, al finalizar el curso, ponen de manifiesto algunas dificultades:

- Interpretación de Tasa de cambio en una situación dinámica de información.
- Demostrando un conocimiento del impacto del cambio en una variable que tiene sobre el otro, la interpretación y representación gráfica, aspectos de covariante de una situación del mundo real.
- Iniciando el acceso del cálculo al analizar una situación del mundo real.
- Definición de una función discontinua utilizando una regla diferente para las diferentes partes del dominio. Grupo 2 estudiantes siguen pensando que una función debe ser definible por una fórmula algebraica única.
- Traducción de complicadas expresiones algebraicas a representaciones gráficas.

A pesar de ya haber llevado cálculo, los estudiantes de este nivel siguen pensando que la función sólo puede ser representada mediante una fórmula algebraica, al igual que el grupo anterior.

> Los estudiantes de alto rendimiento... no demuestran confianza en sus conocimientos matemáticos cuando es necesaria la información de función para resolver un problema desconocido, incluso cuando es resoluble utilizando la matemática que saben. Este resultado es consistente con los hallazgos de Schoenfeld (1989).

A este nivel de licenciatura, los estudiantes siguen presentado dificultades para resolver problemas, a pesar de que, se supone, ya tienen nociones para entender el concepto de función.

> Parece que los desarrolladores de planes de estudios subestiman la complejidad de la adquisición de una comprensión de muchos de los componentes esenciales del concepto de función. Muchas de las debilidades identificadas en el grupo 1 y grupo 2, los estudiantes no están dirigidas específicamente en los planes de estudio actuales. Por ejemplo, los planes actuales prevén pocas oportunidades para el desarrollo de la capacidad para: interpretar y representar aspectos covariantes de funciones, comprender e interpretar el lenguaje de las funciones, interpretar la información de eventos de funciones dinámicas, etc.
>
> Los estudiantes informan que remplazar el entendimiento con la memorización, es por la falta de tiempo para reflexionar, el interrogatorio y la exploración de casos extremos y situaciones especiales. Todos los del grupo 3 (nivel universitario) y la mayoría de los entrevistados del grupo 2 (segundo semestre de cálculo) indicaron que una determinada clase rápida ha dado lugar a la frustración y el abandono de entendimiento para la memorización.

Que los estudiantes tiendan a memorizar en vez de entender, quizás, se debe a que no han logrado interiorizar las ideas esenciales asociados a los problemas y falta de tiempo para analizarlos.

> Con el fin de desarrollar buenos hábitos de matemáticas, los estudiantes buenos creen que deben ser desafiados por los problemas de trabajo más difíciles. Todos los entrevistados en el grupo 3 y la mayoría de los entrevistados en el grupo 2 indican que su enfoque para hacer matemáticas se había adquirido cuando se animó, cuestionó, y se dio la orientación sobre las diferentes estrategias para resolver, lo que parecía un problema difícil.
>
> Los buenos estudiantes informan que quieren matemáticas con "sentido", prefieren las matemáticas cuando se enseñan en contexto y cómo son desafiados por los problemas difíciles. No les gustan los problemas monótonos o actividades repetitivas; disfrutan cuando participan en las matemáticas interesantes y útiles. Elogian a sus maestros para proporcionar orientación en problemas difíciles, mientras que sus intentos de solución y crear un ambiente en el aula no amenazante.
>
> El desarrollo del concepto completo parece evolucionar en un período de años y parece requerir un esfuerzo de "creación de sentido" para entender y organizar los componentes de la función (pp. 141-143).

Esta investigación proporciona evidencia empírica de la importancia de las actividades constructivas en el desarrollo de un concepto. Además, este estudio identifica los aspectos esenciales del concepto de función que necesitan una mayor atención, y además proporciona ideas acerca de los tipos de experiencias y programas que puedan fomentar su desarrollo.

El ritmo al que se presenta el contenido, el contexto, así como los tipos de actividades en las que involucran a los estudiantes, parecen tener un impacto enorme sobre lo que los alumnos saben y lo que puede hacer cuando terminan el curso. En consecuencia, desarrollar programas de estudio tiene una responsabilidad enorme para aumentar mayor cantidad de información actualmente disponible que describe cómo los estudiantes adquieran los conceptos específicos de un curso, así como los conceptos matemáticos en general.

Estos estudiantes creen que sus habilidades matemáticas las adquirieron durante el bachillerato y las han desarrollado como resultado de enfrentar los problemas difíciles en un ambiente donde los animaron a reflexionar, persistir y participar en actividades constructivas. Querían entender los conceptos recientemente presentados y se sentían frustrados por las clases particulares rápidas, los habían llevado a abandonar la comprensión y la retirada a la memorización. Estos resultados indican que en la opinión de un individuo del concepto de función se desarrolla durante muchos años y requiere un esfuerzo del "sentido que se hace" para entender y organizar los componentes individuales de la función para trabajar en grupo.

2.2.2. Principios y niveles en el aprendizaje del concepto de función

Como un intento de explicar el proceso de aprendizaje del concepto de función, por parte de los estudiantes de educación básica, Kalchman y Koedinger (2005) han establecido una teoría que contiene tres principios y cuatro niveles en el aprendizaje de función. Comentan la importancia de hacer ver que las funciones están en todo lo que nos rodea; por ejemplo en el pago de la gasolina cuando llenamos el tanque del automóvil, o en la interpretación de la demografía mundial, etc. Estas relaciones funcionales son expresadas eficientemente por el uso de las herramientas algebraicas.

Kalchman y Koedinger (2005) también concede importancia relevante a las cuestiones formales sobre el concepto de función: "una función se define formalmente en la matemática como un conjunto de pares ordenados de números (x, y) tales que a cada valor de la primera variable (x) corresponde un valor único de la segunda variable (y)" (p. 352).

El propósito de estos investigadores es mostrar la importancia de conjugar lo cotidiano como es mostrar los enfoques de las funciones de enseñanza para los aspectos formales por fomentar la comprensión y fluidez matemática. Destacan la importancia de diseñar estrategias y planes de estudio reflexivos que reflejen los principios de cómo es que aprende la gente; y recomiendan estar al tanto de las investigaciones recientes sobre lo que significa aprender y entender las funciones.

Parten de tres principios básicos:

Principio No. 1: Sobre la base del conocimiento previo.

Consiste en que estudiantes y profesores establezcan continuamente vínculos entre las experiencias fuera de las clases de matemáticas y las del contexto escolar.

Con frecuencia, los estudiantes conocen definiciones y conceptos a través de sus experiencias que no se les ha enseñado explícitamente. Efectivamente, en un estudio realizado por Kalchman y Koedinger (2005) obtuvieron:

> Se encontró que muchos de los estudiantes fueron capaces de describir de manera informal la pendiente de la función de un problema sobre la historia de calcular cuánto ganó Jane por caminar cada kilómetro. Se dieron cuenta de que cuando Jane camina tres kilómetros en vez de uno, gana seis dólares, por lo tanto gana dos dólares por cada kilómetro que ella camina (p. 363).

Principio No. 2: Entendimiento, fluidez en el procedimiento y conocimiento conectado

El enfoque de este principio es el desarrollo de la comprensión conceptual y la fluidez en los procedimientos; y a su vez, pretende ayudar a los estudiantes conectar y organizar el conocimiento en diversas formas.

> Para que los estudiantes entiendan las matemáticas como formalismos, se debe ayudar a conectar estos formalismos con otras formas de conocimiento, incluyendo la experiencia cotidiana, ejemplos concretos, y las representaciones visuales. Estas conexiones forman un marco conceptual que tiene el conocimiento matemático entre sí y facilita su recuperación y aplicación (Kalchman y Koedinger, 2005, 363).

Como se describió anteriormente, se quiere que los estudiantes comprendan el concepto básico de una relación funcional: que el valor de una variable depende del valor de la otra. Y queremos que entiendan que la relación entre dos variables pueden expresarse en una variedad de formas, es decir, con ecuaciones, expresiones verbales, gráficos, tablas, todos los cuales tienen el mismo significado o el uso de la misma 'regla' para la relación.

La buena enseñanza requiere no sólo un sólido conocimiento del dominio de contenido, sino también el conocimiento específico de desarrollo de los estudiantes de esta comprensión conceptual y competencias procesales. El modelo de desarrollo de aprendizaje de la función que proporciona la base para nuestro enfoque de instrucción comprende cuatro niveles de 0 a 3. Cada nivel se describe lo que los estudiantes normalmente pueden hacer en una etapa de desarrollo determinado (p. 364).

Los niveles establecidos por Kalchman y Koedinger (2005) en sus investigaciones sobre la adquisición del concepto de función en los estudiantes de educación básica, identifican cuatro:

Nivel 0.

Caracteriza aspectos de tipo numérico/ simbólico; la comprensión espacial de los estudiantes suele llevarlos al aprendizaje de las funciones. Inicialmente, éstas son independientes; la comprensión numérica inicial consiste en que los estudiantes pueden hacer cálculos de forma iterativa, en una sola cadena de números enteros. Es decir, dada una serie de números positivos, tales como los números enteros 0, 2, 4, 6, 8,..., los estudiantes son capaces de ver el patrón de la suma de 2 a cada número sucesivo. La comprensión espacial inicial consiste en que los estudiantes pueden representar a los tamaños relativos de las cantidades como las barras en una gráfica. Los estudiantes pueden ver fácilmente las diferencias en los tamaños de las barras (la altura) y pueden utilizar esta información espacial para sacar conclusiones sobre las cantidades correspondientes. También pueden leer las gráficas de barras que por ejemplo, muestran las mediciones diarias del crecimiento de una planta en el salón de clases. Se puede ver que cada barra es más alta que el anterior, la planta es más alto el viernes que el jueves, pero no es fácil cuantificar esos cambios.

Nivel 1.

En este nivel, los estudiantes comienzan a integrar su comprensión inicial numérica y el entendimiento espacial de las funciones. Se distinguen dos pasos; en primer lugar, los estudiantes ya pueden operar con los números de una secuencia para producir otra. Por ejemplo, los estudiantes pueden multiplicar cada número en la secuencia 0, 1, 2, 3..., por 2 y formar las parejas resultantes de los valores: 0-0 ,1-2, 2-4, 3-6,...; los estudiantes aprenden a grabar estos pares de valores en una tabla y construir una ecuación algebraica $y = 2x$.

A medida que su comprensión inicial numérico y espacial, va desarrollándose, comienzan a conectar o integrar estos entendimientos. Establecen conexiones entre las tablas y gráficas de los pares ordenados $(x,\ y)$, para relacionar ambas. El patrón general de una función puede ser entendida tanto por el tamaño de los incrementos en la columna y de la tabla y por la pendiente de la línea en movimiento de un punto a otro en la gráfica. Lograr esto es fundamental para asegurar la preparación de los estudiantes en este nivel.

Nivel 2.

Los estudiantes de este nivel comienzan a integrar sus conocimientos numéricos y espaciales; empiezan a operar con fluidez funciones de la forma $y = mx+b$, donde m y b son racionales positivos o negativos. También pueden trabajar con ecuaciones del tipo $y = x^n + b$, donde n es un natural y b es un número racional, positivo o negativo. Además, los estudiantes deben diferenciar las familias de funciones, distinguiendo diferencias en las formas y características de la lineal, cuadrática y la función cúbica.

Nivel 3.

En este nivel los estudiantes distinguen los distintos tipos de funciones y las relaciones existentes entre ellas. Son competentes para representar gráficamente funciones lineales, cuadráticas, la función recíproca, funciones exponenciales y entienden lo que significa que una función es creciente o decreciente.

Principio No. 3: Creación de recursos y la autoregulación en la resolución de problemas

Este principio consiste en la necesidad de que los estudiantes desarrollen y ejerzan sus habilidades de predicción, detección y corrección de errores, así como la aplicación de estrategias propias de la investigación científica, como la generación de hipótesis y pruebas (Kalchman y Koedinger, 2005).

La instrucción debe ayudar a los estudiantes no sólo en el desarrollo de procedimientos y adquisición de conceptos matemáticos; sino también a la articulación de su propio pensamiento y el aprendizaje. Esta característica de pensar sobre el pensamiento propio se conoce como metacognición.

Es deseable que los estudiantes se animen a pensar los problemas e intenten resolverlos usando distintas estrategias, herramientas y múltiples representaciones; así mismo, que aprendan a sacar conclusiones no sólo cuantitativas, sino también cualitativas.

En este sentido, "los estudiantes deben predecir constantemente el comportamiento de las funciones que están trabajando y ajustar o reajustar sus expectativas con respecto a las propiedades matemáticas y las características de las funciones lineales y no lineales" (*Ibid*, p. 389).

Este enfoque curricular se basa en principios cognitivos y en un modelo de desarrollo detallado de aprendizaje del estudiante. Fue diseñado para producir en los estudiantes competencias que los permitan razonar los problemas, usar múltiples representaciones de las funciones matemáticas con flexibilidad y fluidez. Estudios experimentales realizados han demostrado que esta propuesta es eficaz para mejorar el aprendizaje del estudiante más allá de la alcanzada por los maestros con un plan de estudios más tradicionales.

Se parte de que los estudiantes pueden aprender con mayor eficacia cuando se les da una introducción gradual de las ideas. Nuestro plan de estudios contempla dicha introducción:

- El contexto debe ser familiar a los estudiantes.
- Debe iniciar con ideas simples y, gradualmente, llegar a la esencia de contenidos y conceptos involucrados en los problemas.

- Se aspira a que los estudiantes desarrollen la capacidad de comunicar sus ideas de manera cada vez más correcta (formal y precisa), a partir de sus entendimientos y lenguaje iniciales.

2.3. La visión sobre el concepto de función en la propuesta curricular de los Principios y Estándares para las Matemáticas Escolares

Una de las propuestas curriculares más influyente en los últimos tiempos es, sin duda, la planteada por el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM, 2000). Esta propuesta se llama Principios y Estándares para las Matemáticas Escolares, que concibe alcanzar los fines de la educación a través de seis principios (igualdad, curricular, enseñanza, aprendizaje, evaluación y tecnológico) y diez estándares; cinco de los cuales se refieren a líneas de contenido (números y operaciones, álgebra, geometría, medición, análisis de datos y probabilidad) y los otros cinco estándares se refieren a procesos de pensamiento (resolución de problemas, razonamiento y demostración, comunicación, conexiones y representación).

Aunque el concepto de función implícitamente está incluido en las cinco líneas de contenido pero como tal, se aborda en el estándar de álgebra:

> El estándar de álgebra se centra en las relaciones entre cantidades -incluyendo funciones-, sus formas de representación, y la representación de las relaciones y el análisis del cambio... La idea es que la experiencia sistemática con patrones puede ayudar a entender la idea de función; de hecho, una función es un patrón entre dos variables (NCTM, 2000, p.39).

Este estándar se integra por cuatro componentes:

- Comprender patrones, relaciones y funciones;
- Representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos algebraicos;
- Usar modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas;
- Analizar el cambio en contextos diversos.

En relación a la primera, se comenta:

> En los niveles medios, (los estudiantes) deberían ser capaces de comprender las relaciones entre tablas, gráficas y símbolos, y considerar las ventajas y desventajas de cada una de estas formas de representación, según el caso particular.

> Trabajando con diversas representaciones (numéricas, gráficas y simbólicas) desarrollarán una comprensión más amplia de las funciones (*Ibid*, p.40).

En la tercera componente se menciona la modelación de situaciones (en contexto) en las que se presenta variación proporcional (directa y lineal) así como variación no proporcional.

En la cuarta componente se señala:

> Si las ideas relativas al cambio reciben un enfoque más explícito desde los primeros niveles, quizás los estudiantes lleguen, con el tiempo, a abordar el cálculo con una base más sólida para entenderlo (*Ibid*, p. 42).

Además, en esta propuesta se considera que desde temprana edad los niños pueden empezar por describir el cambio de manera cualitativa (crecimiento/ decrecimiento) y posteriormente cambios cuantitativos ('creció dos centímetros'). Alumnos de tercero a quinto grado pueden utilizar tablas y gráficas para describir cambios basados en observaciones (crecimiento de una planta). En los niveles medios, los estudiantes pueden distinguir entre crecimiento aritmético (2, 5, 8, 11, 14, ...) y crecimiento geométrico (2, 4, 8, 16, ...); enfatizando la linealidad en los niveles medios, los estudiantes podrían aprender que la pendiente representa la tasa constante de cambio de las funciones lineales, y estar así preparados para estudiar, en la escuela secundaria, tipos de funciones en los que la tasa de cambio no es constante.

Etapa Pre-k-2 (*preescolar hasta segundo de Primaria*)

Comprender patrones, relaciones y funciones

Se proponen situaciones simples de proporcionalidad, como ¿cuánto hay que pagar por 7 globos si cada globo cuesta 20 centavos? Se sugiere a los profesores de los grados 1 y 2 proporcionar experiencias a los alumnos para que aprendan a utilizar diagramas y tablas para registrar y organizar la información en distintos formatos (por ejemplos tablas horizontales y verticales).

Número de globos	1	2	3	4	5	6	7
Costo de los globos en centavos	20	40	60	80	?	?	?

Analizar el cambio en contextos diversos

Se sugiere hacer mediciones de procesos de cambio en el tiempo, hacer descripciones cualitativas (por ejemplo "hoy hace más frío que ayer") y cuantitativas (por ejemplo "soy 5 centímetros más alto que hace un año"). Comprender que la mayoría de las cosas cambian con el tiempo, que algunas veces este cambio es creciente y que otras es decreciente.

Etapa 3-5 (*correspondiente a nivel primaria*)

Comprender patrones, relaciones y funciones

Se sugiere que los estudiantes analicen patrones (por ejemplo, asociados con configuraciones geométricas) a partir de los cuales se puedan establecer relaciones funcionales (p. ej., número de cubos y área de la superficie); así mismo que analicen situaciones de desplazamiento a velocidad constante (usando simuladores que les permita observar objetos que se desplacen, que le permita variar la velocidad y observar las tablas y gráficas correspondientes).

Usar modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas

Se proponen analizar situaciones que se modelan mediante proporcionalidad directa: si una torta cuesta $3, se puede determinar el costo de cualquier número de tortas multiplicando tal número por 3, de manera que esto se puede expresar como $C = 3T$ (donde C es el costo total y T es el número de tortas).

Analizar el cambio en contextos diversos

Se propone que los estudiantes observen y cuantifiquen procesos de cambio (por ejemplo el crecimiento de una planta, desplazamientos a velocidad constante) organicen la información en tablas y en gráficas y hagan descripciones sobre diferentes intervalos de observaciones sobre las variaciones de la tasa de cambio cualitativa y cuantitativamente: 'en los primeros días casi no creció, luego empezó a crecer rápidamente y, después, otra vez despacio' (pág. 167). Los alumnos deberán tener oportunidad de estudiar diferentes patrones de cambio: con tasa de cambio constante (p. ej., velocidad constante) y tasa variable (p. ej. El crecimiento de una planta).

Etapa 6-8 (*corresponde últimos años de primaria hasta segundo de secundaria*).

Comprender patrones, relaciones y funciones

En el estudio de patrones y relaciones de esta etapa deben asociarse con funciones lineales, que se originan cuando hay una tasa de cambio constante. Los alumnos deben resolver problemas donde utilicen tablas, gráficas, expresiones verbales y expresiones simbólicas para representar, examinar funciones y patrones de cambio.

Ejemplo: dos compañías telefónicas móviles ofrecen diferentes tarifas. Los alumnos que empiecen con tablas, para calcular los costos correspondientes de las dos compañías y también pueden utilizar la tecnología como puede ser una calculadora graficadora. Describir verbalmente las diferencias entre las dos gráficas (comparar los costos y explicar las observaciones con sus propias palabras). También pueden escribir una ecuación para representar el costo (y) en función del número de minutos (x): así $y = 20 + 0{,}10x$.

Representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos algebraicos.

Las ecuaciones: $A = la$ (es una fórmula en la que A, l, y a representan, respectivamente, el área, el largo y el ancho de un rectángulo) y $y = 3x$ son ejemplos de dependencia funcional, en concreto la segunda, cuando x toma diferentes valores, varía también y. "La comprensión de los significados y uso de las variables se desarrolla a medida que los estudiantes crean y usan expresiones simbólicas, y las relacionan con las representaciones verbales, gráficas y tabulares"(NCTM, 2000, p. 230).

Ecuaciones de la forma $y = -3x + 10$ representan funciones lineales, los alumnos deben ser capaces de utilizar ecuaciones de la forma $y = mx + b$ para representar relaciones lineales y deben saber que los valores de la pendiente (m) y de la ordenada en el origen (b) afectan a la recta.

Usar modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas.

"El objetivo en los niveles medios es que los alumnos usen funciones para representar, modelizar y analizar fenómenos y relaciones en problemas de matemáticas o en el mundo real" (p. 231). Pueden hacer uso de la computadora y calculadoras graficadoras para graficar y hacer cálculos complicados (un ejemplo una gráfica no lineal). Deben experimentar modelizando ecuaciones de la forma $y = kx$ (gráfica lineal). Los alumnos deberían adquirir experiencia en la construcción de relaciones no lineales (en el caso de la gráfica no lineal).

Analizar el cambio en contextos diversos.

En álgebra, los alumnos deben tratar cuestiones que se centren en cantidades que cambian (ejemplo de la compañía telefónica, cobra 45 centavos de dólar/ minuto, donde el costo por minuto no cambia pero si varía el costo total a medida que se usa el teléfono). Los alumnos pueden sentirse confusos cuando se enfrentan con dos gráficas distintas (constante; número minutos/ costo por minuto y creciente; número de minutos/ costo total) para representar relaciones diferentes en la misma situación.

Los alumnos que tracen gráficas de tasas de cambio no lineales y que respondan algunas preguntas acerca de esta y que hagan una comparación entre las gráficas.

Etapa 9-12 (*corresponde último año de secundaria y los tres años de preparatoria*).

Comprender patrones, relaciones y funciones.

Los alumnos deben ser capacitados para elaborar y utilizar representaciones tabulares, simbólicas, gráficas y verbales, y para analizar y comprender funciones ya con mayor complejidad que en los niveles medios. Los alumnos deben ser capaces de expresarlas por medio de tablas, gráficas y simbólicas funciones de distintas clases (lineal, cuadrática y exponenciales). Aquí se menciona tres situaciones, en una situación se necesita elaborar una tabla de valores (si C es el costo en centavos de enviar una carta y P es su peso en onzas, la función $C = 33 + (P - 1)22$, en la segunda se necesita encontrar una expresión general para la función y la última se necesita por empezar a graficar los datos dados (incremento/ decremento).

Los alumnos deben trabajar con funciones de la forma $y = ax^2 + bx + c$ (donde hay que analizar que pasa al cambiar los parámetros a y c son relativamente fáciles de observar y los cambios en b no son tan obvios).

Explorar funciones de la forma $f(x) = a(x - h)^2 + b(x - h) + c$, y ver cómo cambian sus gráficas cuando varía el valor de h, de esta proporciona una base para comprender transformaciones y los cambios de coordenadas. Los alumnos de secundaria estudian diversas clases de funciones para familiarizarse con las propiedades de cada una y deben clasificarla en lineales, cuadráticas y exponenciales (estas funciones comparten propiedades importantes).

Representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos algebraicos

Una profesora les pide a los alumnos que analicen funciones de la forma $f(x) = \frac{2x^2+11x+b}{x-2}$ que hagan observaciones como puedan (algunos empiezan por trazar la gráfica, otros hacen la división para simplificar, también se permite el uso de la calculadora graficadora).

Usar modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas

> Los alumnos pueden hacer una experimentación sobre la relación entre el tiempo que tarda un monopatín en bajar una rampa de una determinada longitud, y la altura de la rampa (Zbiek y Heid, 1990). En esta situación a medida que aumenta la altura de la rampa, disminuye el tiempo (función creciente). También pueden discutir las funciones lineales, cuadráticas, exponenciales y racionales, argumentando a partir de los datos o de las características físicas de la situación (citado en NCTM, 2000, p. 307).

Analizar el cambio en contextos diversos.

Como ya se había mencionado, una aspiración es que los estudiantes sean capaces de interpretar afirmaciones como “disminuye la tasa de inflación”. En los ejemplos de la caseta telefónica se pide a los alumnos que comparen los costos de dos planes diferentes (una tarifa plana de 0,45 de dólar/ min., y una tarifa de 0,50 de dólar/ min. durante los 60 primeros minutos y 0,10 de dólar por c/ minuto de más). En los ejemplos de este tipo, la variable dependiente cambia, intervalo a intervalo, en una cantidad fija por cada unidad de cambio de la variable independiente. También se da un ejemplo de una gráfica donde se representa la velocidad respecto al tiempo de dos automóviles (las gráficas de esta son curvas incremento/ decremento e interpretar y responder algunas preguntas acerca de la gráfica, donde se necesita razonar, interpretar la gráfica y tener una comprensión clara sobre la tasa instantánea de cambio). "El trabajo sobre este tipo se cimenta sobre las estructuras de cambio desarrolladas en los niveles medios, y proporciona una base para el estudio del cálculo" (NCTM, 2000, p. 310).

Capítulo 3

ANÁLISIS GENERAL DE LOS DOCUMENTOS CURRICULARES

En este Capítulo se presenta una revisión y análisis de los documentos curriculares elaborados por la SEP a partir de las Reformas Educativas de 1993 y 2006, en lo que corresponde a los contenidos relacionados con las matemáticas del cambio, incluidos en la asignatura de Matemáticas. La finalidad de este capítulo es documentar los cambios principales entre uno y otro Plan a dos niveles, el primero, corresponde a las orientaciones generales (propósitos, enfoque, contenido y su organización) de la asignatura de Matemáticas; el segundo, se centra en los contenidos relacionados con las matemáticas del cambio.

3.1. La Reforma Educativa de 1993

3.1.1. Orientaciones generales

Propósitos

Los propósitos generales que se plantean en los programas de matemáticas, son:

- Que el alumno aprenda a utilizar las matemáticas para resolver problemas, no solamente los que se resuelven con los procedimientos y técnicas aprendidas en la escuela, sino también aquellos cuyo descubrimiento y solución requieren de la curiosidad y la imaginación creativa.
- Que el alumno desarrolle habilidades operatorias, comunicativas y de descubrimiento. Para ello, deben desarrollar sus capacidades para:
    - Adquirir seguridad y destreza en el empleo de técnicas y procedimientos básicos a través de la solución de problemas.
    - Reconocer y analizar los distintos aspectos que componen un problema.

- Elaborar conjeturas, comunicarlas y validarlas.
- Reconocer situaciones análogas (es decir, que desde un punto de vista matemático tienen una estructura equivalente).
- Escoger o adaptar la estrategia adecuada para la resolución de un problema.
- Comunicar estrategias, procedimientos y resultados de manera clara y concisa.
- Predecir y generalizar resultados.
- Desarrollar gradualmente el razonamiento deductivo.

En la edición del *Libro para el maestro* de 2001 (Alarcón, 1994), se hacen algunas modificaciones con relación al propósito anterior, señalando que:

El estudio, la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria persigue propósitos esencialmente formativos que consisten en:

- Desarrollar habilidades
- Promover actitudes positivas
- Adquirir conocimientos matemáticos (p. 12)

En esta nueva versión, se establece una caracterización interesante del término *habilidad*, diferenciándolo de los términos próximos: *capacidades y destrezas*.

> Hablamos de capacidades cuando nos referimos a un conjunto de disposiciones de tipo genético que, una vez desarrolladas por medio de la experiencia que produce el contacto con un entorno culturalmente organizado, darán lugar a habilidades individuales (Monereo, 1998)... [Estas] pueden expresarse en conductas en cualquier momento... además pueden utilizarse o ponerse en juego, tanto consciente como inconscientemente, de forma automática... Por destreza nos referiremos a la agilidad que pueden tener los estudiantes en la aplicación de ciertas técnicas manuales (*Ibid*, p. 13).

En este mismo documento se establece que (en matemáticas) se busca desarrollar, entre otras, las habilidades de: *calcular, inferir, comunicar, medir, imaginar, estimar, generalizar y deducir*.

Enfoque didáctico

Como puede observarse en los propósitos, el enfoque didáctico de la propuesta es la resolución de problemas, lo cual se viene a reforzar en el *Libro del maestro*, tanto en su versión inicial como en la edición 2001. En esta última se hace con mayor extensión y profundidad. Al respecto citamos dos caracterizaciones complementarias sobre la concepción de problema y su relación con el aprendizaje de las matemáticas:

> Un problema es algo más que una ocasión para ejercitar los procedimientos aprendidos ... debe dar a los alumnos la oportunidad de explorar las relaciones entre nociones conocidas y utilizarlas para descubrir o asimilar nuevos conocimientos, los cuales a su vez servirán para resolver nuevos problemas. Esta es, esencialmente, la naturaleza de la actividad matemática (Alarcón, 1994, p.13).

Por problema nos referimos a una situación que presenta un reto, un desafío, ante el cual, el alumno que intenta responderlo no dispone de un recurso expedito y, por tanto, debe buscar, ensayar, establecer relaciones, analizar sus efectos, elaborar conjeturas, probarlas y validarlas. Para ello es necesario que los problemas que se propongan a los estudiantes:

- Sean para ellos un reto interesante y provoquen rápidamente una actitud de búsqueda, orientada a proponer conjeturas y posibles estrategias de resolución.
- Les permita explorar las relaciones entre nociones conocidas y posibilite avanzar hacia la comprensión y asimilación de nuevos conocimientos.
- Contengan los elementos que permitan validar sus propias conjeturas, procedimientos y soluciones, o desecharlas cuando sean incorrectas.

Enfrentar a los estudiantes a problemas propicia que:

- Construyan sus conocimientos al usar estrategias convencionales y no convencionales que los resuelvan.
- Apliquen y profundicen los conocimientos adquiridos anteriormente (Libro del Maestro, 2001, p.16).

Otro aspecto importante del enfoque didáctico es el referente a la dinámica del proceso de enseñanza-aprendizaje en el aula, lo cual se puede resumir en los siguientes puntos:

- Centrar el proceso en la actividad del alumno, la cual será orientada y gestionada por el profesor a través de actividades didácticas previamente planeadas.
- Promover el trabajo colaborativo (en pequeños grupos) entre los alumnos en la realización de tareas y resolución de problemas.
- Promover la discusión colectiva con relación a las diferentes formas de resolver problemas, formular y validar conjeturas y analizar errores.
- Estimular a los estudiantes para que, en un ambiente de colaboración y respeto mutuo, expresen su pensamiento, comuniquen y discutan sus ideas, al mismo tiempo que se apropian gradualmente del vocabulario y de los medios de expresión que proporcionan las matemáticas.

Finalmente, se recomienda el uso de materiales manipulables (doblado de papel, tangram, geoplano, geoespacio y el pantógrafo) y las nuevas tecnologías (videos, calculadora y computadora), señalando que:

> Ellos ofrece particulares ventajas que pueden favorecer el estudio de las matemáticas en la educación secundaria, si son utilizados adecuadamente.
>
> Es importante que al utilizar estos recursos no se pierda de vista su carácter mediador y su uso se convierta en un fin en sí mismo. La función de los materiales manipulables y las nuevas tecnologías es servir como instrumentos para plantear nuevos problemas o para favorecer una mayor reflexión en torno a problemas planteados (Libro para el Maestro, 2001, p. 20).

Hoy en día se resalta en muchos ámbitos educativos sobre el uso de las nuevas tecnologías en el aula (*Ibid*, 2001), de los cuales están: el video, la calculadora y sobre todo la computadora.

En la primera es un recurso didáctico valioso, ya que tiene un potencial comunicativo y su uso es práctico para los estudiantes o profesores. En particular en la clase de matemáticas, permite visualizar situaciones que de otra forma es imposible acceder a ellas y que, "las formas de uso del video dependen de la creatividad y estilo personal en que el profesor decide proponer el estudio" (Libro para el maestro, 2001, p. 20).

La segunda, es una herramienta potente, ya que con ello se puede hacer cálculos, con frecuencia puede ser utilizada fuera de la escuela y que además puede ser usada por el profesor dentro de la clase, en un ambiente para plantear diversas actividades y problemas y se comenta que:

> ...el profesor puede plantear problemas interesantes y juegos con algunas restricciones, para que los estudiantes reflexionen sobre las propiedades de las operaciones básicas y exploren propiedades de los nmeros (*Ibid*, p. 20).

Además, con esta herramienta los estudiantes puedan descubrir patrones en sucesiones numéricas y finalmente podrán verificar sus resultados de manera inmediata. La calculadora puede ser utilizada para retroalimentar el aprendizaje, profundizar algunas nociones y desarrollar ciertas habilidades.

Finalmente, la computadora hoy en día es la herramienta potente e importante y en ello pueden ser usados diversos programas o software que son útiles para el estudio de las matemáticas en la educación secundaria. El programa o software son: la hoja electrónica de cálculo, donde se puede elaborar tablas y gráficas para realizar un tratamiento de información útil para modelar diversas situaciones problemáticas y el Cabri y Sketchpad, que son útiles en la materia de geometría, que permiten manipular los objetos geométricos, trazando y transformando figuras con lo que se logra un acercamiento práctico y experimental a la geometría y que:

> Debe cuidarse de no usar la computadora como un simple tutorial en el que el alumno se encuentre con situaciones estáticas que no le permitan explorar problemas y que sólo le exijan responder preguntas de tipo meramente conceptuales (Libro para el maestro, 2001, p. 21).

Además es importante mencionar el Internet, donde el profesor podrá encontrar una gran cantidad de información y "la posibilidad de integrar a sus alumnos en diversos proyectos de estudio conjunto con otros estudiantes de educación secundaria de distintas regiones del país" (*Ibid*, p. 21).

3.1.2. Plan de Estudios

La asignatura de matemáticas en este Plan está agrupada en las siguientes áreas:

1. Aritmética
2. Álgebra
3. Geometría (en el tercer grado se agrega trigonometría)
4. Presentación y tratamiento de la información
5. Nociones de probabilidad

Estas cinco áreas aparecen en los tres grados del ciclo, siguiendo una organización de contenidos en espiral. La distribución específica de los contenidos, inicialmente, se deja a criterio del maestro:

> [Los] contenidos podrán organizarse en la forma que el maestro considere más conveniente para su aprendizaje. En particular se recomienda que se procure integrar contenidos de diferentes temas o áreas del programa, de modo que el alumno pueda percibir las relaciones existentes entre las diferentes partes de las matemáticas y tenga la oportunidad de practicar constantemente los conocimientos adquiridos (SEP, 1993, p. 7).

En la descripción inicial de cada una de estas áreas, se observa que los contenidos relacionados con la variación están incorporados, principalmente, en las áreas de *Aritmética y Presentación y tratamiento de la información*. En el primer caso, se menciona (SEP, 1993):

> El manejo de la proporcionalidad está contemplado a través de actividades muy diversas: ejemplos para ilustrar la unión de razón y su expresión por medio de un cociente; el estudio de cantidades que varían proporcionalmente o bien la solución de problemas de variación proporcional directa. (p. 36)

Y, más adelante:

> Durante el estudio de los temas relacionados con la presentación y tratamiento de la información, se deberán proponer a los alumnos situaciones y actividades muy diversas para que conozcan y se acostumbren gradualmente a la noción de función como una relación entre dos cantidades, así como a las diferentes formas de presentar una función. (p. 38)

En la tabla 3.1 se presenta un resumen de la distribución de contenidos (número de Temas y Subtemas) por año. En esta tabla, los números en los paréntesis indican: (número de temas, números de subtemas); aunque la extensión de los temas y subtemas es variables, la tabla proporciona una buena aproximación del espacio dedicado, en los programas de cada año escolar, a cada una de las áreas temáticas.

Áreas	Primer año	Segundo año	Tercer año	Totales
Aritmética	(4, 21)	(5,11)	(2,2)	(11, 34)
Álgebra	(1, 3)	(5, 11)	(5, 14)	(11, 28)
Geometría	(3, 13)	(5, 14)	(6, 19)	(14, 46)
Presentación y tratamiento de la información	(1, 3)	(1, 4)	(1, 3)	(3, 10)
Nociones de probabilidad	(1, 3)	(1, 4)	(1,3)	(3, 10)
Totales	(10 T, 43 ST)	(17, 44)	(15, 41)	(42, 128)

Cuadro 3.1: Distribución de contenidos en el Programa de estudios (1993)

En los contenidos de primer año, hay dos temas y tres subtemas relacionados con variación:

a) En el área de Aritmética (tema de *proporcionalidad*):

- Tablas de números o cantidades que varían proporcionalmente (factor de proporcionalidad)
- Problemas de variación proporcional directa

b) En el área de Presentación y Tratamiento de la información (sólo se especifican subtemas):

- Utilización de una tabla o una gráfica para explorar si dos cantidades varían proporcionalmente o no.

En segundo año, hay un tema y un subtema relacionados con variación:

En el área de Presentación y Tratamiento de la información (sólo se especifican subtemas):

- Ejemplos para introducir la noción de función como una relación entre dos cantidades:
    - Descripción de fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas por medio de una tabla, una gráfica o una fórmula.
    - Paso, en casos sencillos, de una tabla o una gráfica a una fórmula (funciones de la forma $y = mx$, $y = mx + b$, $xy = k$).

En tercer año, hay dos temas y cinco subtemas relacionados con variación:

a) En el área de Álgebra (en el tema de *Plano cartesiano y funciones*):

- Ejemplos para revisar la noción de función (representación algebraica, tabular y gráfica; diversos contextos).
- Ejercicios de graficación de funciones; comportamiento local en casos sencillos ($y = \frac{1}{x}$, $y = x^2 + a$, $y = (x - a)^2$).
- Estudio de familias de gráficas de la forma $y = mx + b$.

b) En el área de Presentación y Tratamiento de la información (sólo se especifican subtemas):

- Tasas, sus usos y aplicaciones
    - Estudio de fenómenos que varía a tasa constante (ejemplos de proyección a futuro).
    - Crecimiento lineal o aritmético contra crecimiento exponencial o geométrico.
- Ejemplos para introducir la noción de función como una relación entre dos cantidades:
    - Descripción de fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas por medio de una tabla, una gráfica o una fórmula.
    - Paso, en casos sencillos, de una tabla o una gráfica a una fórmula (funciones de la forma $y = mx$, $y = mx + b$, $xy = k$).

3.1.3. Secuencia y organización de contenidos (Programas)

Al principio el Plan de estudios no impone una secuencia de contenidos, dejando al profesor la decisión de su organización:

> El programa no está concebido como una sucesión de temas que deben agotarse uno a continuación del otro. Sus contenidos podrán organizarse en la forma que el maestro considere más conveniente para su aprendizaje. En particular se recomienda que se procure integrar contenidos de diferentes temas o áreas del

programa, de modo que el alumno pueda percibir las relaciones existentes entre las diferentes partes de las matemáticas y tenga la oportunidad de practicar constantemente los conocimientos adquiridos. De esta manera el aprendizaje de ciertos temas no queda localizado en un solo momento de la enseñanza de esta disciplina (SEP, 1993, p. 7).

En su primera versión, el Programa de estudios (incluido en el Plan 1993) está organizado por áreas, sin preestablecer una secuencia determinada. En 2000, se elabora el documento *Secuencias y organización de contenidos* (SEP, 2000), en el que se establece una propuesta de organización, estableciendo en 18 el número de temas a cubrir por año, así como la secuenciación de los temas (entrelazando temas de las cinco áreas temáticas). Con este documento, la SEP, prácticamente impone a los profesores la secuenciación de contenidos que se debe de seguir en los cursos, acción justificada en la 'consulta' a los profesores y la observación de los resultados. En la tabla 3.2 se muestra la distribución de contenidos (sólo por temas) según el documento arriba citado.

Áreas	Primer año	Segundo año	Tercer año	Totales
Aritmética	10	4	1	15
Álgebra	0	4	6	10
Geometría	6	6	7	19
Presentación y tratamiento de la información	1	3	3	7
Nociones de probabilidad	1	1	1	3
Totales	18	18	18	54

Cuadro 3.2: Distribución de contenidos (temas) en el Programa de estudios (1993)

En este caso, los temas que están relacionados con variación, son:

En primer año: *Proporcionalidad* (Tema 13, Aritmética)

En segundo año: *Tablas y gráficas de variación* (Tema 17, tratamiento de la información)

En tercer año: *Proporcionalidad y funciones lineales* (Tema 1); *Gráficas de funciones y regiones en el plano cartesiano* (Tema 3) y, *Presentación y tratamiento de la información* (tema 7)

Otros temas que tienen alguna relación con los temas de variación son: *Tablas y gráficas* (primer año, Tema 7); *Uso de tablas, gráficas, porcentajes, promedios y densidades* (Segundo año, Tema 11).

A continuación se describen de manera más detallada los contenidos que se incluyen en cada uno de estos temas.

Tema 13. Proporcionalidad (Primer año)

> El estudio de la proporcionalidad se inicia mediante problemas que impliquen comparar dos listas de valores y determinar un valor de una lista con base en otros tres valores conocidos; más adelante es conveniente que los alumnos encuentren alguna forma de expresar la relación de los datos de las tablas y llegar a encontrar la constante de proporcionalidad (SEP, 2000, p. 26).

Previamente, en el Tema 7 se ha dado una introducción al plano cartesiano.

Subtemas:

- Problemas de variación proporcional directa.
- Ejemplos para introducir la noción de razón entre dos cantidades y su expresión por medio de un cociente.
- Tablas de números o cantidades que varían proporcionalmente:
  - Ejemplos diversos
  - Constante o factor de proporcionalidad.

Tema. 17. Tablas y gráficas de variación, funciones (Segundo año)

"Conviene que los alumnos se acostumbren a utilizar tablas, gráficas y fórmulas para explorar y representar la relación entre cantidades variables, así como el uso y significado de expresiones donde interviene el término función"(SEP, 2000, p. 51).

"Para que los alumnos adquieran nociones acerca de las funciones, no es necesario partir de la definición, sino de ejemplos y actividades que les permitan:

- Comprender las funciones como una relación entre dos cantidades.
- Expresar algebraicamente una función en casos sencillos.
- Estudiar y explorar el comportamiento de las funciones a través de tablas de valores o de gráficas.
- Elaborar tablas y gráficas a partir de la expresión algebraica de una función"(*Ibid*, p. 51).

Previamente, en el Tema 11 se sugiere que se resuelvan problemas sobre velocidad promedio, que vienen en el libro del maestro.

Subtemas:

- Ejemplos para introducir la noción de función como una relación entre dos cantidades:

- Descripción de fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas por medio de una tabla, una gráfica o una fórmula.
- Paso, en casos sencillos de una tabla o una gráfica a una fórmula (funciones de las formas $y = mx$, $y = mx + b$, $xy = k$).

Tema 1. Proporcionalidad y funciones lineales (Tercer año).

Descripción:

Se pretende que los alumnos se acostumbren a utilizar tablas, gráficas y fórmulas para explorar y presentar la relación entre dos variables, comprendan el uso y significado de expresiones donde interviene el término función, para ello se deben plantear situaciones concretas. Es recomendable iniciar con actividades referidas a la variación proporcional ($y = ax$) y lineal ($y = ax + b$), así como actividades y problemas que permitan explorar situaciones que impliquen crecimiento lineal o aritmético y el exponencial o geométrico.

Subtemas:

- Ejemplos para revisar la noción de función:
  - Funciones dadas por fórmulas, por tablas, por gráficas y por las teclas de la calculadora.
  - Funciones extraídas de la geometría, la física, la economía, etc.

Tema 3. Gráficas de funciones y regiones en el plano cartesiano (Tercer año).

Descripción

Se pretende que el alumno explore, descubra y se familiarice con algunas de las conexiones que existen entre los parámetros algebraicos de ciertas funciones (lineal, cuadrática e inversa) y las características de sus gráficas; así como de la 'transformación' de traslación de curvas y su efecto en la expresión algebraica. Se resalta el uso de la calculadora para el cálculo de valores de las funciones.

Subtemas:

- Ejercicios de graficación de funciones; estudio en casos sencillos del comportamiento local de una función, por ejemplo:
  - $y = \frac{1}{x}$ alrededor de $x = 0$
  - $y = x^2 + a$ alrededor de $x = 0$ con $a = 1$, 2,...
  - $y = (x - a)^2$ alrededor de $x = a$ con $a = 5$, 9,...
- Estudio de familias de gráficas de la forma $y = mx + b$, por ejemplo:
  - $y = mx + 1$, para $m = -3$, -2, -1,...; $y = \frac{1}{2}x + b$, para $b = -4, -3, -2,$...

Tema 7. Presentación y tratamiento de la información (Tercer año).

En este tema se abordan dos tipos de contenidos, los primeros están relacionados con nociones estadísticas (medidas de tendencia central y de dispersión; nociones de población y muestra). Los otros contenidos están relacionados con situaciones de variación: crecimiento aritmético (lineal) y geométrico (exponencial) y la noción de *tasa*:

> Los alumnos deben enfrentarse situaciones que den lugar a crecimientos lineales o geométricos. Dos ejemplos interesantes para propiciar su estudio son el ahorro a tasa constante y el aumento de población a tasa constantes en intervalos iguales de tiempos (SOC, p. 60).

En cuanto a estos contenidos se plantea el siguiente subtema:

Subtema:

- Tasas, sus usos y aplicaciones.
    - Estudio de fenómenos que varían a tasa constante.
    - Crecimiento aritmético o lineal contra crecimiento exponencial o geométrico.

Comentarios

Los contenidos principales relacionados con la variación que se desarrollan en la propuesta curricular son:

- En primer año: el estudio de la proporcionalidad directa entre dos magnitudes, mediante la idea de razón y el uso de tablas para identificar el patrón asociado y la constante de proporcionalidad.

- En segundo año: introducción de la noción de función y sus diversas maneras de representación (tablas, gráficas y fórmulas). Se indica que no necesariamente se tiene que partir de una definición y más bien se pretende que se familiaricen con funciones en diversos contextos. Sólo se señalan las funciones asociadas a las expresiones: $y = mx$, $y = mx + b$, $xy = k$

- En tercer año: Se refuerza el estudio de la función lineal (el análisis y uso de su gráfica y su representación algebraica); también se abordan, a partir de fórmulas, las funciones cuadrática e inversa (proporcional), incluyendo un breve análisis del efecto de translación sobre la fórmula y gráfica básicas; también se estudia la función exponencial, en el contexto de procesos de crecimiento (aritmético y geométrico) introduciéndose en este tema la noción de *tasa* (usos y aplicaciones).

A partir de lo anterior podemos destacar los siguientes puntos:

1. Aún cuando desde el primer grado se empiezan a tratar situaciones que involucran variación (proporcional directa) dentro del tema 13 (de proporcionalidad) en el que se incluyen otros contenidos de carácter no variacional; es a partir del segundo grado en que el tratamiento de este contenido se hace notorio con el estudio de la función lineal (Tema 17). Esto se continúa haciendo en tercer año, incorporándose el estudio de algunas funciones no lineales.

2. La forma de representar la variación se hace inicialmente mediante tablas (en primer grado); desde segundo año se incorporan las gráficas y la expresión algebraica, principalmente en el caso de la función lineal, iniciándose el análisis de las correspondencias entre estas representaciones (incluyendo las tablas) y las maneras de pasar de una a otra; en tercer año, se continúa trabajando las funciones mediante el uso de sus diferentes representaciones.

3. Podemos observar que la manera en que se plantea introducir la noción de función es a través del estudio de funciones específicas, principalmente de la función lineal y sus representaciones. Inclusive en el Plan se sugiere evitar dar definiciones sobre *función*.

4. No se identifican otro tipo de nociones variacionales, a excepción de *tasa*, la cual se introduce muy brevemente en el tema de crecimiento aritmético y geométrico.

3.1.4. El libro del maestro

El libro del maestro (de secundaria) fue un documento muy importante para apoyar al docente en la implementación del Plan 93, que ha sido retomado por el Plan 2006. Este documento fue elaborado por un equipo de investigadores, principalmente del Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV, coordinado por el Dr. Jesús Alarcón Bortolussi. La primera edición se publicó en 1994 y, en 2001 se elaboró una segunda edición en la cual sólo se agregan algunas modificaciones a los capítulos *Introducción y Enfoque*, suprimiendo los capítulos *Programas y Recomendaciones didácticas*. El contenido de este último se integra en el de *Enfoque*.

El contenido central del *libro del maestro* se dedica a describir los temas centrales de las matemáticas que se pretenden abordan en la secundaria con un enfoque centrado en la resolución de problemas. Está organizado en cinco capítulos: *Aritmética, Álgebra, Geometría, Presentación y tratamiento de la información y Nociones de Probabilidad*.

En este libro, los temas de proporcionalidad y variación son abordados en los capítulos de Aritmética y Álgebra. En el primero, se encuentra el apartado *Razonamiento proporcional* (pp 107-125) en el cual se establece la noción de *razón* como central para caracterizar la proporcionalidad (directa) entre dos magnitudes (aquellas que siempre guardan la misma razón entre sí). Además se pone de manifiesto la importancia de la proporcionalidad para el desarrollo de importantes conceptos matemáticos, relacionados con: la medición, la presentación y el tratamiento de la información, el estudio de la variación y la geometría. Sin embargo, se reconoce que:

> ...su aprendizaje [de la proporcionalidad] no puede aprenderse en un solo año o ciclo escolar, como sería la secundaria, sino que deberá extenderse necesariamente a niveles superiores: la preparatoria y la universidad misma (Libro para el maestro, 1994).

Con relación al tema de variación, se resalta su importancia en la introducción de nociones importantes como función y tasa (de cambio). También, se hace señala la importancia de la representación de la variación proporcional mediante tablas y gráficas. De manera muy breve también se hace una referencia muy breve a problemas de "valor faltante", reparto proporcional y comparación de razones.

En el capítulo de *Álgebra*, se incluye el tema *Plano cartesiano y funciones* (pp 176-192), en el cual se indica que el plano cartesiano se introduce desde el primer año mediante la elaboración de gráficas a partir de tablas numéricas y situaciones de variación proporcional directa entre dos cantidades. También se recomienda que "desde primer año los alumnos comiencen a familiarizarse con las funciones mediante actividades muy diversas" (p. 179) pero se advierte la inconveniencia de tratar de precisar el significado del término *función* "Es preferible esperar hasta el tercer grado o el bachillerato, cuando se hayan visto los ejemplos suficientes que les permitan comprender las funciones como una relación entre dos cantidades, o como la expresión de una cantidad en términos de otra."

Se menciona que el estudio de las funciones en contexto, es importante porque en ello subyacen nociones relativas a la variación. Además de la función lineal, se incluyen ejemplos de las funciones: cuadrática, inversa y exponencial, así como algunas funciones recursivas, poniendo énfasis en las diferentes maneras de representarlas (tablas, gráficas y expresiones algebraicas). Se introduce la noción de incremento de una variable pero no se trata explícitamente la razón de cambio.

3.2. La Reforma Educativa de 2006

3.2.1. Orientaciones Generales

En el plan de estudios (2006) se establecen diez *rasgos deseables* para egresado del nivel básico (Primaria y Secundaria) para ejemplificar, a continuación se presentan los primeros cuatro:

- [El alumno] Utiliza el lenguaje oral y escrito con claridad, fluidez y adecuadamente, para interactuar en distintos contextos sociales.

- Reconoce y aprecia la diversidad lingüística del país.
- Emplea la argumentación y el razonamiento al analizar situaciones, identificar problemas, formular preguntas, emitir juicios y proponer diversas soluciones.
- Selecciona, analiza, evalúa y comparte información proveniente de diversas fuentes y aprovecha los recursos tecnológicos a su alcance para profundizar y ampliar sus aprendizajes de manera permanente (Plan de estudio 2006, SEP, p. 10).

Como puede observarse estos rasgos engloban conjuntos de comportamientos complejos. Más adelante, se plantea:

> el desarrollo de competencias como propósito educativo central. Una competencia implica un saber hacer (habilidades) con saber (conocimiento), así como la valoración de las consecuencias del impacto de ese hacer (valores y actitudes). En otras palabras, la manifestación de una competencia revela la puesta en juego de conocimientos, habilidades, actitudes y valores para el logro de propósitos en un contexto dado. (p. 11)

De esta manera se introduce la noción de competencia, tan puesta de moda en los últimos años. Así, se proponen cinco competencias, las cuales (en breve) son: a) competencias para el aprendizaje permanente, b) competencias para el manejo de la información, c) competencias para el manejo de situaciones, d) competencias para la convivencia y, e) competencias para la vida en sociedad (p. 12).

Propósitos

En este mismo documento, se plantean para cada asignatura propósitos un poco más específicos. Con relación a Matemáticas, se establece:

"El estudio de las matemáticas en la educación secundaria se orienta a lograr que los alumnos aprendan a plantear y resolver problemas en distintos contextos, así como a justificar la validez de los procedimientos y resultados y a utilizar adecuadamente el lenguaje matemático para comunicarlos. Por ello, la escuela debe garantizar que los estudiantes:

- Utilicen el lenguaje algebraico para generalizar propiedades aritméticas y geométricas.
- Resuelvan problemas mediante la formulación de ecuaciones de distintos tipos.
- Expresen algebraicamente reglas de correspondencia entre conjuntos de cantidades que guardan una relación funcional
- Resuelvan problemas que requieren el análisis, la organización, la representación y la interpretación de datos provenientes de diversas fuentes.

- Resuelvan problemas que implican realizar cálculos con diferentes magnitudes.
- Utilicen las propiedades geométricas para realizar trazos, para establecer su viabilidad o para efectuar cálculos geométricos.
- Identifiquen y evalúen experimentos aleatorios con base en la medida de la probabilidad.
- Utilicen de manera eficiente diversas técnicas aritméticas, algebraicas o geométricas, con o sin el apoyo de tecnología, al resolver problemas." (Plan de estudio 2006, SEP, p.34)

En los Programas de esta asignatura, esencialmente, no se establecen nuevos propósitos, simplemente se hace una caracterización parcial de los enfoques a seguir en los diferentes ejes de contenido matemático. Sin embargo, debido a que se continúa considerando al *libro del maestro*, elaborado y actualizado (en 2001) durante la aplicación del Plan 93, como un documento de referencia importante para los docentes, se infiere que se siguen considerando válidos los planteamientos que ahí se establecen en cuanto a los propósitos.

Enfoque

En el nuevo Plan de Estudios, se considera que el desafío de aplicar los enfoques propuestos, para las diferentes asignaturas, en el Plan y los Programas de Estudio de 1993 sigue vigente (p. 18). Esto mismo se refuerza con la convalidación del *libro del maestro*. Sin embargo, en los nuevos Programas de Matemáticas se hacen algunas reflexiones de carácter pedagógico y se discuten algunas de las dificultades que se presentaron en la implementación del enfoque propuesto en el Plan 93, agregándose el llamado *Plan de clase*, el cual se propone como instrumento de planificación para el trabajo en el aula. Finalmente, llama la atención que al discutir la evaluación, se reconocen cuatro competencias importantes para matemáticas: a) el planteamiento y la resolución de problemas, b) la argumentación, c) la comunicación y, d) el manejo de técnicas (p. 17). De todo lo expuesto en los párrafos anteriores, destaca la vigencia del enfoque de resolución de problemas, incorporado desde el Plan 93.

Como se puede observar anteriormente en el apartado de enfoque didáctico, Plan 1993, se da una amplia explicación sobre el uso de las nuevas tecnologías (video, calculadora y computadora) en le educación secundaria. Y en otros documentos como la EMAT (Enseñanza de las Matemáticas con Tecnología, 2000), también se da una amplia explicación sobre el uso de la 'hoja electrónica de cálculo' y además se plantean diferentes actividades que el profesor pueda desarrollar en el aula, y se menciona que la hoja electrónica de cálculo "permite hacer muchos cálculos repetitivos de manera instantánea. Aunque una calculadora es una herramienta más adecuada para este propósito, la hoja de cálculo tiene otras virtudes" (EMAT, 2000, p. 15). Pero además también se menciona sobre el uso de diferentes paquetes computacionales (software) como el Cabri- Geometre, Excel, SimCalc MathWorlds y Stella.

En el nuevo Plan (2006), de manera breve se sugieren actividades con el uso de la hoja electrónica de cálculo o de geometría dinámica (mencionando la EMAT) y se establece la vinculación con otros temas de Matemáticas o incluso de otras asignaturas.

3.2.2. Los contenidos en el Nuevo Plan de Estudios

En este Plan, los contenidos que se estudian en la educación secundaria se organizan en tres ejes:

Sentido numérico y pensamiento algebraico: alude al estudio de la aritmética y del álgebra: por un lado, encontrar el sentido del lenguaje matemático, ya sea oral o escrito; por otro, tender un puente entre la aritmética y el álgebra, en el entendido de que hay contenidos de álgebra en la primaria, que se profundizan y consolidan en la secundaria.

Forma, espacio y medida encierra los tres aspectos esenciales alrededor de los cuales gira el estudio de la geometría y la medición en la educación básica.

Manejo de la información tiene un significado muy amplio. En estos programas se ha considerado que la información puede provenir de situaciones deterministas, definidas –por ejemplo, por una función lineal–, o aleatorias, en las que se puede identificar una tendencia a partir de su representación gráfica o tabular.

3.2.3. Secuencia y organización de contenidos

Tal vez, los cambios más importantes en el nuevo Plan de Estudios con relación al anterior, es la nueva organización de los contenidos, su descripción más precisa y algunos cambios con respecto a ellos. Esto lo analizaremos específicamente en torno a los temas relacionados con variación.

Los contenidos de cada grado están organizados en cinco bloques, en cada uno hay temas y subtemas de los tres ejes descritos anteriormente. Esta organización tiene dos propósitos fundamentales; por una parte, se trata de que los profesores y sus alumnos puedan establecer metas parciales a lo largo del año escolar y, por la otra, se pretende garantizar el estudio simultáneo de los tres ejes durante el curso.

Los temas de proporcionalidad y variación están incluidos en los ejes: *Sentido numérico y pensamiento algebraico y Manejo de la información*. A continuación se presentan los contenidos de los Programas relacionados con esos temas.

PRIMER AÑO

Bloque 1.

Tema: *Relaciones de proporcionalidad (Manejo de la información)*

Conocimientos y habilidades:

- Identificar y resolver situaciones de proporcionalidad directa del tipo "valor faltante" en diversos contextos, utilizar diversos procedimientos.
- Elaborar y utilizar procedimientos para resolver problemas de reparto proporcional.

Orientaciones didácticas

- Se trata de retomar y profundizar con un contenido que se incorporado desde la primaria;
- Se trabaja la proporcionalidad como una relación multiplicativa entre dos magnitudes definida por el factor de proporcionalidad (entero).
- Se plantean problemas de 'valor faltante' como Una vela de 25 cm de altura dura encendida 50 horas: ¿Cuánto tiempo duraría encendida otra vela del mismo grosor, de 12 cm de altura? (se sugiere hacer más preguntas sobre el mismo problema).
- También se plantea trabajar con situaciones de reparto proporcional como el siguiente: Tres amigos obtienen un premio de $1 000.00 en la lotera. ¿Cómo deben repartírselo según lo que gastó cada uno si uno de ellos puso $12.00, el otro $8.00 y el tercero $15.00?

Bloque 2.

Tema: *Relaciones de proporcionalidad (Manejo de la información)*

Conocimientos y habilidades:

- Identificar y resolver situaciones de proporcionalidad directa del tipo "valor faltante" en diversos contextos (con operadores fraccionarios y decimales).
- Interpretar el efecto de la aplicación sucesiva de factores constantes de proporcionalidad en situaciones dadas.

Orientaciones didácticas

Se da continuación al tema anterior, ahora con el uso e interpretación de factores de proporcionalidad fraccionarios... ahora se puede ver como la composición de dos operadores enteros Por ejemplo, "por $\frac{3}{4}$" puede interpretarse como la composición de "por 3, entre 4", o bien, "entre 4, por 3"... o para la multiplicación por decimales: "por 0.17" equivale a "por $\frac{17}{100}$" y esto a su vez a "por 17, entre 100". Se sugiere trabajar esta parte con problemas de escalas.

Bloque 3

Tema: *Relaciones de proporcionalidad (Manejo de la información)*

Conocimientos y habilidades

- Resolver problemas del tipo valor faltante utilizando procedimientos expertos.

Orientaciones didácticas

- Se trata de hacer una recapitulación para subrayar el uso de procedimientos expertos tales como: el valor unitario, la constante de proporcionalidad y la regla de tres (es importante que los alumnos conozcan una explicación de dicha regla).

Bloque 4

Tema: *Relación funcional*

Conocimientos y habilidades

- Representar situaciones mediante una tabla y una expresión algebraica (en particular la expresión $y = kx$, asociando los significados de las variables con las cantidades que intervienen en dicha relación.
- Explicar las características de una gráfica que represente una relación de proporcionalidad en el plano cartesiano.

Orientaciones didácticas

- Se trata de expresar algebraicamente una relación entre dos cantidades que varían, específicamente, en situaciones en las que se aplica la función lineal (incluyendo la proporcionalidad directa)
- Ahora se trata de vincular los conjuntos de valores y la expresión algebraica con la representación gráfica, para analizar las características de ésta y ver las posibilidades que brinda para calcular valores (los alumnos se familiaricen con la ubicación de puntos en el plano cartesiano).
- Se sugiere dar a los alumnos una gráfica, por ejemplo, la relación entre litros de gasolina y costo en pesos (plantear varias preguntas acerca de la gráfica. Si se representa con la letra k el precio del litro de gasolina, ¿cuál es la expresión general que modela esta situación?)

Bloque 5

Tema: *Relaciones de proporcionalidad inversa (Sentido numrico y pensamiento algebraico)*

Conocimientos y habilidades

- Identificar y resolver situaciones de proporcionalidad inversa mediante diversos procedimientos.

Orientaciones didácticas.

- Que los alumnos comparen el comportamiento de las variables que son directamente proporcionales con las que son inversamente proporcionales. Es importante que descubran que mientras en un caso los cocientes son constantes, en el otro los productos son constantes.

SEGUNDO AÑO

Bloque 1

Tema: *Relaciones de proporcionalidad (Manejo de la información)*

Conocimientos y habilidades.

- Determinar el factor inverso dado una relación de proporcionalidad y el factor de proporcionalidad fraccionario.
- Elaborar y utilizar procedimientos para resolver problemas de proporcionalidad múltiple.

Orientaciones didácticas.

- Se sugiere aplicar e interpretar el factor de proporcionalidad fraccionario en el contexto de 'cambios de escala' (hacer reducciones/ampliaciones a escala de una figura).
- Se extiende la noción de proporcionalidad entre dos magnitudes (simple) a tres o más magnitudes, es decir, a situaciones de proporcionalidad múltiple, en donde una de las magnitudes varía de manera proporcional (directa) con cada una de las otras magnitudes (en el Programa se maneja el término conjunto en lugar de magnitud).

Bloque 2

Tema: *Relaciones de proporcionalidad (Manejo de la información)*

Conocimientos y habilidades.

- Resolver problemas de comparación de razones, con base en la noción de equivalencia.

Orientaciones didácticas.

- Se trata de emplear las nociones de razón y de razones equivalentes para abordar situaciones de comparación entre magnitudes compuestas (mayor/menor/igual concentración, densidad,...).

El programa no establece una conexión de este tema con la relación de proporcionalidad directa entre las magnitudes que se relacionan a partir de una razón. Por otro lado, deja la idea de que una razón y una fracción es lo mismo, lo cual es incorrecto.

Bloque 3

Tema: *Relación funcional (Sentido numérico y pensamiento algebraico)*

Conocimientos y habilidades.

- Reconocer en situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, la presencia de cantidades que varían una en función de la otra y representar esta relación mediante una tabla o una expresión algebraica de la forma: $y = ax + b$.

Orientaciones didácticas.

- Se trata que los alumnos reconozcan la relación de *dependencia* entre variables que se relacionan mediante una función lineal, en contextos específicos (física, biología, economía,...): los valores de una variable (dependiente) dependen de los valores que tome la otra variable (independiente) o, el cambio en una de ellas (la variable independiente) implica un cambio en la otra (la variable dependiente). También se pretende que los estudiantes identifiquen intervalos en los que las variables tomen ciertos valores, o donde la función es creciente o decreciente, positiva o negativa, u otras propiedades de la relación.

Tema: *Gráficas (Manejo de la información)*

Conocimientos y habilidades.

- Construir, interpretar y utilizar gráficas de relaciones lineales asociadas a diversos fenómenos.
- Anticipar el comportamiento de gráficas lineales de la forma $y = mx + b$, cuando se modifica el valor de b mientras el valor de m permanece constante.
- Analizar el comportamiento de gráficas lineales de la forma $y = mx + b$, cuando cambia el valor de m, mientras el valor de b permanece constante.

Orientaciones didácticas.

- Se espera que los estudiantes interpreten gráficas asociadas a situaciones (en diversos contextos) que se comporten de manera lineal ($y = mx + b$); particularmente, que en cada situación, reconozcan las interpretaciones gráficas de los parámetros m y b, y les asignen los significados pertinentes.
- Se trata que los alumnos reconozcan los cambios en la inclinación y la posición de la recta asociada a la función lineal, cuando se dan diferentes valores para m y b cuando varía uno de los parámetros, mientras que el otro permanece fijo.

Bloque 4

Tema: *Gráficas (manejo de la información)*

Conocimientos y habilidades.

- Interpretar y utilizar dos o más gráficas de línea que representan características distintas de una situación para tener información más completa y en su caso tomar decisiones.

- Interpretar y elaborar gráficas formadas por segmentos de recta que modelan situaciones relacionadas con movimiento, llenado de recipientes, etcétera.

Orientaciones didácticas.

- Representación e interpretación gráfica de un proceso que se desarrolla en el tiempo, mediante la unión de un conjunto de puntos unidos por segmentos rectilíneos. Este tipo de situaciones están más enfocadas al análisis estadístico. Por ejemplo, comportamiento de la temperatura promedio diaria, durante un periodo de tiempo.

- Interpretación y análisis gráfico, de situaciones que se pueden representar mediante funciones lineales por tramos o segmentos. Por ejemplo, un recorrido en el que, la velocidad cambia por tramos, permaneciendo constante en cada tramo.

TERCER AÑO

Bloque 1

Tema: *Gráficas (manejo de la información)*

Conocimientos y habilidades.

- Analizar la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal y relacionarla con la inclinación o pendiente de la recta que lo representa.

- Diseñar un experimento a partir de datos obtenidos de diversas fuentes y elegir la forma de organización (tabular o graficar).

Orientaciones didácticas.

- Iniciar el estudio de la razón de cambio en la función lineal (con diversas aplicaciones en la economía, la física y la biología).

- Conocer y aplicar la fórmula para determinar la razón de cambio y su representación gráfica, así como su identificación con la pendiente de la recta, asociada a la función lineal considerada.

- Identificación de algunas razones de cambio especiales: velocidad, aceleración, tasa de crecimiento (poblacional), velocidad de calentamiento o enfriamiento.

Bloque 3

Tema: *Relación funcional (Sentido numérico y pensamiento algebraico)*

Conocimientos y habilidades.

- Reconocer en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, la presencia de cantidades que varían una en función de la otra y representar la regla que modela esta variación mediante una tabla o una expresión algebraica.

Orientaciones didácticas.

- Representar algebraicamente diferentes relaciones funcionales (lineales, cuadráticas y cúbicas) asociadas a diferentes contextos y a partir de tablas de valores o situaciones familiares.

Tema: *Gráficas (Manejo de la información)*

Conocimientos y habilidades.

- Interpretar, construir y utilizar gráficas de relaciones funcionales no lineales para modelar diversas situaciones o fenómenos.
- Establecer la relación que existe entre la forma y la posición de la curva de funciones no lineales y los valores de las literales de las expresiones algebraicas que definen a estas funciones.
- Interpretar y elaborar gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera.

Orientaciones didácticas.

- Analizar y comparar gráficas de funciones lineales y no lineales (cuadrática, cúbica e inversa proporcional) identificando y variando parámetros característicos (por ejemplo, a y b en la expresión $y = ax^2 + b$) así como sus efectos en las gráficas.
- Analizar diferentes expresiones para una misma función y las gráficas correspondientes (sobre todo para la cuadrática). Por ejemplo, $y = ax^2$, $y = ax^2 + b$, $y = a(x-h)^2 + k$, $y = (x-a)(x-b)$.
- A partir de gráficas ya conocidas, identificar el tipo de de expresión algebraica y determinar algunos de los parámetros fáciles de identificar.
- Utilizar gráficas formadas por secciones rectas y curvas para modelar situaciones en diferentes contextos.

Bloque 4

Tema: *Gráficas (Manejo de la información).*

Conocimientos y habilidades.

- Interpretar y comparar las representaciones gráficas de crecimiento aritmético o lineal y geométrico o exponencial de diversas situaciones.
- Analizar la relación entre datos de distinta naturaleza, pero referidos a un mismo fenómeno o estudio que se presenta en representaciones diferentes, para producir nueva información.

Orientaciones didcticas.

Las funciones que corresponden a un crecimiento exponencial tienen características muy distintas a las que se han estudiado anteriormente (su estudio se puede iniciar comparando su comportamiento con el de las funciones de crecimiento lineal). Ejemplo (los alumnos que organicen en un cuadro y grafiquen):

- En el año de 1990 la población mundial de la Tierra era de 5 292 millones de habitantes. Suponiendo que la tasa de crecimiento durante una década es de 18 % y ésta se mantiene constante, ¿cuál será la población en los años 2000, 2010, 2020...?

Con frecuencia, para tener idea del comportamiento de un fenómeno es necesario consultar datos sobre diversos aspectos de ese fenómeno. Por ejemplo, alrededor del crecimiento de estalactitas y estalagmitas en una gruta se pueden plantear y analizar (en diversas preguntas)

- Dada dos tabla (incremento) donde muestra como han crecido una estalactita y su correspondiente estalagmita durante 6 años.
- Dada dos gráficas (constante, decremento, curva e incremento) donde se hace una comparación.

Comentarios

Los contenidos principales relacionados con proporcionalidad directa y variación que se desarrollan en la propuesta curricular son:

1) La proporcionalidad directa se centra en los problemas de 'valor faltante', a este tema se dedican 3 lecciones en primer año y una en segundo año, las cuales están orientado principalmente al uso de diferentes métodos de solución de los problemas llamados de 'valor faltante'.

En los Programas de la SEP no hay una caracterización explícita de 'problema de valor faltante', pero en la literatura sobre el tema (Vergnaud, 1983; Post, Behr y Lesh, 1988; Lamon, 1999) se refieren a aquellas situaciones en las que intervienen dos magnitudes, M_1 y M_2, que son directamente proporcionales; se conocen al menos dos valores de una de las magnitudes, por ejemplo de M_1 y un valor de la otra magnitud M_2, correspondiente a uno de los primeros dos valores de M_1 y se trata de encontrar el valor faltante de M_2, correspondiente al otro valor de M_1. En otras palabras, se tienen tres valores de una proporción directa y se requiere encontrar el cuarto valor. Un ejemplo de ello es la expresión algebraica $\frac{a}{x} = \frac{c}{d}$, donde a, c y d son valores conocidos y x no se conoce (es el 'valor faltante'); a y x son valores de una misma magnitud, mientras que c y d son valores de la otra magnitud.

De acuerdo a las investigaciones citadas, se identifican diversos procedimientos de solución utilizados por los estudiantes para resolver los problemas de valor faltante, algunos de los cuales son 'espontáneos' y otros son enseñados en la escuela:

a) Algoritmo estándar (regla de tres).

Se establece la proporción (o un esquema de la misma), se realiza el producto cruzado $ax = bc$ y se divide por a: $x = \frac{bc}{a}$. Se trata de un procedimiento operatorio sin significado, lo cual induce a su memorización.

b) Método de la tasa unitaria.

Consiste en 'buscar la cantidad que corresponde a uno', es decir la tasa unitaria, y después encontrar por multiplicación o división el valor faltante: $\frac{c}{a} = t$, $x = t \times b$. Este procedimiento parece ser atractivo para los niños, porque con frecuencia tienen que hacer compras de una o más cosas y han calculado precios unitarios, lo cual está relacionado con problemas de división; también han utilizado la tasa en problemas de multiplicación.

En algunos casos también se incluyen situaciones en que la tasa unitaria es un valor considerado, aunque no necesariamente conocido como por ejemplo la velocidad, lo cual reduce a tres las cantidades involucradas, una de las cuales será desconocida. Para algunos investigadores, este cambio transforma a los problemas en multiplicativos, ya que el esquema más usual es $y = t \times x$, en donde x corresponde al valor de una magnitud M_1, y corresponde al valor de una magnitud M_2 y t es la tasa unitaria o factor de proporcionalidad. Ese tipo de problemas se resuelve por una multiplicación o una división, dependiendo del valor desconocido.

c) Método del factor de cambio

Este método consiste en considerar la relación 'dentro de' las magnitudes, no 'entre' ellas; es decir, para dos magnitudes proporcionales M_1 y M_2, si una de ellas aumenta (o disminuye) x veces, la otra también debe aumentar (o disminuye) x veces.

d) El método de factor de proporcionalidad

Este método lo hemos dividido en dos categorías, de acuerdo a la caracterización que se hace a continuación:

d.1 *Como patrón numérico.* Se identifica la relación numérica entre las magnitudes: los valores de una de las magnitudes se encuentran multiplicando por una constante los valores correspondientes de la otra magnitud o, los cocientes de parejas correspondientes, en el mismo orden, es constante. Regularmente, el patrón se hace notar a través de tablas, pero sin llegar a su representación algebraica o gráfica.

d.2 *Como función.* Se basa en la relación funcional entre dos variables x y y en la que, las parejas asociadas satisfacen la relación $y = kx$ o $\frac{y}{x} = k$; k se llama factor o constante de proporcionalidad. El procedimiento privilegia el uso de tablas o dichas expresiones para determinar primero el factor de proporcionalidad y posteriormente cualquier valor x o y desconocido.

Las situaciones de reparto proporcional, aplicaciones sucesivas de factores de proporcionalidad y proporcionalidad múltiple, pueden considerarse como extensiones de los ‘problemas de valor faltante’.

Una característica importante de los problemas de valor faltante, es que pueden ser resueltos por procedimientos aritméticos, incluyendo tablas numéricas; es decir, no requieren de registros de representación más complicados para su tratamiento y solución, como gráficos o expresiones algebraicas, aunque también se pueden representar y resolver con estos.

Otra característica es que no se requiere de nociones de variación, es suficiente para algunos casos con la comprensión y empleo de las relaciones de equivalencia de razones y, en otros casos, con la comprensión de los problemas multiplicativos cuando se involucra la tasa unitaria.

El enfoque variacional es más potente pero también más complejo; su comprensión requiere de nuevas nociones y representaciones, es eficaz en la resolución de problemas en los que intervienen más de una relación de proporcionalidad. Por estas razones lo incluiremos en el siguiente apartado.

2) Los contenidos sobre variación se inician con el estudio de la variación proporcional directa y su forma más general, la función lineal, en el bloque 4 del primer año. En este primer contacto, se abordan los diferentes formas de representar una función (tablas, fórmula algebraica y gráfica) principalmente para la variación proporcional directa ($y = kx$) y algunos casos de la función lineal completa ($y = kx + b$). En el bloque 5 se incluye el estudio de la variación inversa proporcional).

3) En segundo año se continúa de manera más extensa, en los bloques 3 y 4 el estudio

de la función lineal y sus diferentes representaciones, así como su uso para modelar diversas situaciones y en diferentes contextos. En este mismo grado, se incluyen funciones definidas por segmentos de rectas para modelar algunas situaciones conectadas a contenidos escolares. Así mismo, se introducen las nociones: variable dependiente/ independiente (en una función) y función creciente/ decreciente.

4) En tercer año, en el bloque 1 se incorpora la noción razón de cambio, a partir de la función lineal y asociándola a la pendiente de la recta correspondiente, pero ya no se vuelve a mencionar en el resto de los temas de variación. En el bloque 3 se indica el estudio de algunas funciones no lineales (cuadrática, cúbica e inversa) sin embargo, la función lineal sigue estando presente, particularmente en el bloque 4, en el que se indica el estudio de situaciones de crecimiento aritmético (función lineal) y crecimiento geométrico (función exponencial). También se incorpora, en el bloque 3, la interpretación de gráficas de funciones definidas por segmentos, lineales y no lineales, para modelar situaciones en diversos contextos.

A partir de lo anterior podemos destacar los siguientes puntos:

- En primer año, se destina un espacio importantes al estudio de la proporcionalidad directa, especialmente a los ‘problemas de valor faltante’, aunque no se da una descripción sobre la diversidad de este contenido. Por ello hemos incluido algunos aportes de investigaciones que clarifican el sentido e importancia de tal tema, el cual es la base para el desarrollo de otros contenidos matemáticos, especialmente de la variación proporcional directa y lineal.

- El estudio de la variación propiamente se inicia en el bloque 4 del primer año, en el que se abordan precisamente las variaciones mencionadas en el punto anterior. En este estudio se incorporan las diferentes formas de representación de las funciones (tablas, fórmula algebraica y gráfica).

- La construcción de la noción de función se inicia con el estudio de funciones específicas, al alcance de los estudiantes de secundaria (los programas de matemáticas no promueven el aprendizaje de definiciones formales). El estudio de la función lineal es el centro de los contenidos de variación en secundaria, poniéndose el énfasis en sus diversas formas de representación y las relaciones entre ellas, así como su aplicación en la modelación de situaciones en diversos contextos. También se introducen algunas nociones importantes en el estudio de la variación: función creciente/ decreciente, y variable dependiente/ independiente; además, se incluye el estudio de funciones cuya gráfica esta formada por segmentos rectilíneos, cuyo comportamiento local es lineal, pero globalmente se trata de funciones no lineales. Ese tipo de funciones son importantes, pues pueden facilitar el entendimiento de nociones variacionales importantes en las funciones no lineales.

- La introducción de algunas funciones no lineales nos parece importante, si se consideran los siguientes dos propósitos: por un lado, abrir un panorama más amplio para la noción de función y su aplicación en la modelación de situaciones. Por otro lado, la propia noción de función lineal se fortalece al diferenciarse de otras clases de funciones, a través de sus representaciones y propiedades. Desde luego esto sólo es el inicio de un proceso que debería estar articulado con el estudio de la variación en el bachillerato.

- La introducción de la noción razón de cambio en tercer año nos parece accesible para los estudiantes de secundaria, pero nos parece inútil si se restringe sólo a la función lineal. Es en el estudio las funciones no lineales en donde adquiere mayor sentido esta noción, pero en el programa de estudios no se observa con claridad esta idea.

3.3. Contrastación de los dos Proyectos Curriculares

Propósitos y enfoque

En el Plan 2006 se introduce, como orientación general el enfoque de *competencias*, aunque en esta parte sólo se hace a nivel de competencias genéricas. Esto obedece a una “moda” impuesta por la Secretaría de Educación Pública en todas las asignaturas y niveles educativos a partir del 2006 y que aún continúa vigente con poca claridad sobre sus resultados en matemáticas.

Propósitos

Los propósitos establecidos en el Plan de Estudios 1993 son más generales y se centran más en la resolución de problemas, otros aspectos mencionados: comunicación (estrategias, procedimientos y resultados), predicción y generalización y razonamiento deductivo. En el Plan 2006, los propósitos se refieren al desarrollo de comportamientos más específicos y por lo tanto abarcan menos aspectos.

Ambos Planes enfatizan el propósito de que los alumnos aprendan a resolver problemas:

> ...no solamente los que se resuelven con los procedimientos y técnicas aprendidas en la escuela, sino también aquellos cuyo descubrimiento y solución requieren de la curiosidad y la imaginación creativa. (SEP, 1993)
>
> ...así como a justificar la validez de los procedimientos y resultados y utilizar adecuadamente el lenguaje matemático para comunicarlos. (SEP, 2006)

En ambos casos se agrega una serie habilidades que para ese fin deben desarrollar los alumnos de Secundaria (ver apartados 3.1.1 y 3.2.1)

Las diferencias mencionadas en el primer párrafo de este apartado sólo parecen indicar la preferencia por un nivel de especificidad diferente en los propósitos, lo cual no implica diferencias importantes en los objetivos curriculares.

Enfoque didáctico

En el Plan 2003, se abordan algunos de los aspectos didácticos relacionados con el enfoque de resolución de problemas (Principalmente en el Libro del Maestro). En el Plan 2006, simplemente se reconoce la vigencia de lo establecido en el Plan 2003.

Otros aspectos que se señalan como parte del enfoque didáctico, en ambos Planes, son:

- Centrar el proceso educativo en la actividad del alumno, el profesor sólo es un gestor.
- Promover el trabajo colaborativo en pequeños grupos.
- Promover la discusión colectiva con relación a la forma de resolver problemas, formular y validar conjeturas y analizar errores
- Promover la comunicación de las ideas mediante el vocabulario y los medios de expresión que proporcionan las matemáticas.
- Se recomienda el uso de materiales manipulables y de las nuevas tecnologías.

Contenidos y su organización

En general, los dos Planes de estudio conservan los mismos temas pero su organización tiene diferencias importantes. En el Plan de 1993 el contenido está organizado en cinco áreas: Aritmética, Álgebra, Geometría, Presentación y tratamiento de la información, y Nociones de probabilidad; Mientras que en el Plan 2006, los contenidos se agrupan en tres ejes: Sentido numérico y pensamiento algebraico, Forma espacio y medida (geometría) y Manejo de la información (incluye la Probabilidad). Como puede notarse, los grandes temas son básicamente los mismos, sólo hay agrupaciones diferentes, como juntar aritmética y álgebra en un mismo eje y Probabilidad con Tratamiento de la información, en otro. De acuerdo al documento *Fundamentación curricular* (SEP, 2006b), este agrupamiento se basa en tres propósitos:

> Uno hace énfasis en los aspectos que interesa estudiar y aprender; otro consiste en establecer vínculos entre contenidos de las diferentes ramas de las matemáticas, y uno más se relaciona con la posibilidad de establecer líneas de estudio, que en algunos casos se inician en el nivel preescolar y culminan con la educación secundaria (p.17).

Sin embargo, una revisión de los programas de los tres grados de secundaria de los dos Planes con relación a temas de contenidos (por ejemplo, de aritmética y álgebra) no permite apreciar diferencias importantes entre las dos propuestas de agrupamiento.

Con relación a los contenidos de variación (incluyendo proporcionalidad) en ambos Planes, los contenidos aparecen en Áreas Temáticas (Plan 1993) y Ejes (Plan 2006) similares: aritmética, álgebra y tratamiento de la información, y su distribución es similar en los tres grados.

En los dos Planes de Estudio, es notable la influencia de las propuestas curriculares del NCTM (1989 y 2000) y de grupos de investigadores en Educación Matemática de otros países. También se debe resaltar las aportaciones de investigadores nacionales que participaron directamente en la elaboración de tales Planes.

En cuanto al desarrollo de los temas, en los Programas de los tres cursos, se sigue el principio del desarrollo de contenidos de cada eje en 'espiral' y la distribución por grados es similar, es decir, los contenidos que se incluyen en cada grado son similares en ambos Planes. Sin embargo, al menos inicialmente, en el Plan 1993 se dejaba al maestro organizar el contenido según su criterio, aunque posteriormente (en 2000) la SEP entregó a los maestros una propuesta de organización de contenidos (ver tabla 3.2). En el Plan 2006, desde el principio, los contenidos están, hasta cierto punto, distribuidos y especificados en cinco bloques (cada bloque corresponde a un bimestre y una evaluación parcial); en cada bloque se incluyen contenidos de los tres ejes, y aunque no hay una indicación explícita del orden en que se deben de abordar los diferentes temas, en los libros de texto analizados, siguen la secuencia en que aparecen en el Plan de estudios, primero, *Sentido numérico y pensamiento algebraico*, segundo, *Forma espacio y medida* y, tercero, *Manejo de la información*.

Algo que se observa en ambos Planes de Estudio, es que la forma de organizar los contenidos, en muchos casos (en todos los ejes) el contenido de temas importantes se dispersa mucho, lo cual consideramos perjudicial, ya que se requiere de cierta continuidad para favorecer la maduración de los aprendizajes. Esto es aún más notorio al dar seguimiento a ciertos temas en los libros de texto que se analizan más adelante, con relación a la proporcionalidad y la variación.

Otro aspecto que influye a la dispersión de contenidos, en el caso de la proporcionalidad y variación, tiene que ver con el hecho de que en ambos Planes de Estudio, pero sobre todo en el Plan 2006, muchos contenidos se ubican en el área (o eje) de *tratamiento de la información* (además de *Sentido numérico y pensamiento algebraico*). En este sentido, nosotros consideramos más conveniente que tales temas quedan mejor integrados en aritmética y álgebra, como se consideran en otros proyectos curriculares como el de los Estándares (NCTM, 2000).

La diferencia más importante que se observa, es que en algunos temas, como el de proporcionalidad y aquellos relacionados con la variación, se dedica más espacio en el Plan 2006 que en el Plan 1993 (entre 3 y 5 veces mayor). Esto se nota claramente en los apartados 3.1.3 y 3.2.2, y aún esto es más claro en los libros de texto como se verá más adelante.

Contenidos relacionados con matemáticas del cambio

Es conveniente tener presente lo siguiente: en el Plan 1993, de acuerdo al documento *Secuencias y organización de contenidos* (SEP, 2000), los contenidos (de las cinco áreas consideradas) se organizan en 18 temas por año y cada tema incluye diferente número de subtemas (de 1 a 4 en el caso de los contenidos que nos ocupa); en el Plan 2006, los contenidos están agrupados en cinco bloques y, cada bloque incluye de 1 a 2 temas por cada uno de los ejes establecidos, de manera que por grado son (28, 20 y 18, respectivamente para primero, segundo y tercero) y cada tema incluye de uno a tres subtemas. A primera vista, se observa en primer año una diferencia importante de temas, hay un 50 % en el Plan 2006 que en el Plan 1993. A continuación haremos la contrastación por año de los contenidos relacionados con variación.

Primer año

En el Plan 1993, se incluye en un solo tema (tres subtemas) el estudio de la variación proporcional directa mediante tablas y con énfasis en el factor de proporcionalidad, así mismo se introduce la noción de razón; En el Plan 2006, se incluyen los temas de proporcionalidad: problemas de valor faltante (en los primeros tres bloques), reparto proporcional y aplicación sucesiva de factores. Aunque se señalan diversas estrategias de resolver los problemas de valor faltante, se hace mayor énfasis en el procedimiento de factor de proporcionalidad. Además, se introduce la noción de *relación funcional* a partir de la variación proporcional directa y utilizando tablas numéricas, gráficas y las expresiones simbólicas. Finalmente (bloque 5), en este Plan se dedica un tema a la proporcionalidad inversa. Cada tema sobre incluye un subtema.

Segundo año

En el Plan 1993, sólo hay un tema (un subtema) que se destina a introducir la noción de función, mediante distintos casos de funciones ($y = mx$, $y = mx + b$ y $xy = k$) en diversos contextos y representaciones (tabla, gráfica y algebraica); En el Plan 2006, se incluyen 5 temas ubicados en 4 bloques, en los que se abordan contenidos sobre: proporcionalidad (interpretación factor de proporcionalidad y su inverso, comparación de razones y proporcionalidad múltiple); la función lineal (énfasis en la representación gráfica y la expresión $y = mx + b$) y noción de variables *independiente/ dependiente* y; funciones "compuestas", que se pueden representar mediante dos o más segmentos rectilíneos.

Tercer año

En el Plan 1993, hay 5 subtemas, distribuidos en dos temas, en los que se aborda: el análisis gráfico de la expresión $y = mx + b$, el estudio de algunas funciones no lineales (inversa y cuadrática). También se estudian situaciones de crecimiento aritmético (lineal) y geométrico (exponencial) y se introduce la noción de *tasa* (de cambio). Finalmente, se utilizan diversos contextos (física, biología y economía) para resaltar a la función como relación entre dos cantidades; en el Plan 2006, hay 5 temas (en 4 bloques) en los que se incluyen los siguientes contenidos: la noción de *razón de cambio* (únicamente en la función lineal) y su identificación mediante la *pendiente* de la recta, aplicaciones de las funciones en diversos contextos (lineales cuadráticas y cúbicas), estudio más extenso de la función cuadrática, diversas formas de expresión simbólica y asociación con su representación gráfica, funciones representadas mediante gráficas no lineales y compuestas (sin expresión algebraica) y, crecimiento aritmético (lineal) y geométrico (exponencial).

Con algunas pocas diferencias, los contenidos de ambos Planes de Estudio con relación a las matemáticas del cambio, son similares: Proporcionalidad (sin variación), variación proporcional directa, relación funcional (o noción de *función*), función lineal, funciones no lineales (cuadrática, inversa y exponencial), las diferentes formas de representar (matemáticamente) una función y cómo se relacionan entre sí (tablas, gráficas y álgebra), las funciones en diversos contextos, crecimiento aritmético y geométrico, así como algunas nociones: variable dependiente/ independiente y razón de cambio. En ambos Planes, estas nociones se abordan de manera muy aislada y breve. Por ejemplo, la noción de razón de cambio en el Plan 1993 se trata en el último tema (de variación) del tercer grado (crecimiento aritmético y exponencial) como tasa de crecimiento, mientras que en el Plan 2006 se ve al inicio del mismo grado (en el bloque 1) pero sólo en la función lineal y no se vuelve a retomar en otro tipo de funciones.

En ambos Programas, se observa un énfasis en el estudio de la función lineal y sus diferentes representaciones, aunque no se llega a conectar con temas importantes como el de sistemas de ecuaciones, con lo que se podría ampliar el campo de problemas de aplicación de este tipo de funciones. Por otro lado, aunque en ambos Programas, se trata la noción de razón de cambio (tasa), esto se hace manera muy breve. Particularmente, en el Plan 2006, se desaprovecha la oportunidad de conectar esta noción con las gráficas de funciones formadas por segmentos rectilíneos, lo que facilitaría el análisis correspondiente a las funciones cuyas gráficas son curvas.

Finalmente señalamos las siguientes diferencias notables:

- El espacio dedicado a los contenidos es notablemente mayor en el Plan 2006. Especialmente en temas como: proporcionalidad, variación proporcional directa y función lineal.
- Algunos contenidos que no son abordados en el Plan 1993 son:
    - Tema de proporcionalidad: reparto proporcional, aplicación sucesiva de factores, proporcionalidad múltiple, proporcionalidad inversa.
    - Tema de funciones: crecimiento/ decrecimento, funciones compuestas lineales y no lineales.

.

Capítulo 4

ANÁLISIS DE LOS LIBROS DE TEXTO

En este capítulo analizaremos algunos libros de texto elaborados por diferentes autores con base a los dos Planes de Estudio (1993 y 2006). El análisis principal se centra en el Plan 2006 por ser el que está vigente y por lo tanto de mayor interés. En el caso del Plan 1993, sólo se presenta un resumen de la revisión de dos textos.

4.1. LIBROS DE TEXTO (Plan 2006)

Para realizar este análisis se seleccionaron tres textos sin una preferencia particular, simplemente se escogieron textos disponibles (los libros de los tres grados) en el mercado en el momento de iniciarse el proyecto alrededor del cual se realizó este trabajo. Los libros revisados son:

Texto 1: Mancera M. E. (2006). Matemáticas, textos para 1, 2 y 3 año de secundaria. Editorial: Santillana.

Texto 2: Escareño F. y López O. L. (2006). Matemáticas, textos para 1, 2 y 3 año de secundaria. Editorial: Trillas.

Texto 3: Briseño L., Carrasco G., Martínez P., Palmas O., Struck F. y Verdugo J. (2006). Matemáticas, textos para 1, 2 y 3 año de secundaria. Editorial: Santillana.

En adelante nos referiremos a cada uno de los textos por el número que le hemos asignado anteriormente.

La revisión y análisis se realizará por los temas que hemos identificado relevantes por agrupar contenidos amplios y diferenciados: proporcionalidad directa (sin variación), variación lineal y variación no lineal.

4.1.1. Proporcionalidad

Recordemos brevemente los contenidos que se establecen para este tema:

a) Proporcionalidad directa
Problemas de valor faltante;
Reparto proporcional;
Aplicación sucesiva de factores de proporcionalidad; y
Proporcionalidad múltiple.

b) Proporcionalidad inversa
Situaciones y problemas de proporcionalidad inversa.

Análisis de tres textos

A continuación analizamos la distribución y tratamiento de contenidos relacionados con la proporcionalidad directa, para cada año y bloque:

La tabla 4.1 contiene la distribución de contenidos de los tres textos, en cada uno de los grados, para el tema de Proporcionalidad de acuerdo al programa de la SEP. En cada contenido y grado se establecen cinco categorías de información que a continuación describimos:

Bloques de contenidos: número de bloques y su identificación (entre paréntesis) que incluyen alguna lección o tema (texto 2) en el que, al menos parcialmente, hay un tratamiento didáctico del contenido correspondiente.

Lecciones de contenido: número de lecciones y su identificación (entre paréntesis) en las que, al menos parcialmente, hay un tratamiento didáctico del contenido correspondiente.

Bloques c/problemas: número e identificación de bloques que contienen lecciones que incluyen problemas sobre el contenido de proporcionalidad indicado, pero el tema de la lección es sobre otro contenido.

Lecciones c/problemas: número e identificación de lecciones que incluyen problemas sobre el contenido de proporcionalidad indicado, pero el tema de la lección es sobre otro contenido [1].

Número de problemas: número total de problemas que se incluyen en el texto de cada contenido por grado.

En la última fila de la tabla, en el apartado de resumen, se cuantifica por cada año el total de bloques de contenidos, bloques con problemas, lecciones de contenidos, lecciones con problemas, número de páginas y el número de problemas, que se abordan en los temas de valor faltante, reparto proporcional, aplicación sucesiva de factores y proporcionalidad

[1] Todos los bloques de contenido incluyen problemas sobre el mismo

múltiple.

			Texto1 Mancera	Texto2 Escareño	Texto3 Briseño
Contenidos	Años				
Valor faltante	1°	Bloques de contenidos		2(B:2 y 3)	2(B:1 y 3)
		Lecciones de contenidos		2(T:15y21)	2(L:5 y 3)
		Bloques c/problemas	4(B:2,3, 4 y 5)		3(B:1, 2 y 5)
		Lecciones c/probelmas	5(L:7y10;11,19y24)		3(L:3, 7 y 5)
		Número de problemas	21	13	36
	2°	Bloques de contenidos	1(B2)		
		Lecciones de contenidos	1(L9)		
		Bloques c/problemas	1(B1)		
		Lecciones c/problemas	1 (L3)		
		Número de problemas	16		
Reparto proporcional	1°	Bloques de contenidos		1(B1)	1(B1)
		Lecciones de contenidos		1(T7)	1(L6)
		Bloques c/problemas	1(B1)		
		Lecciones c/probelmas	1(L5)		
		Número de problemas	1	4	10
Aplicación sucesiva de factores	1°	Bloques de contenidos	1(B2)	1(B2)	
		Lecciones de contenidos	1(L10)	1(T16)	
		Bloques c/problemas			1(B2)
		Lecciones c/probelmas			1(L7)
		Número de problemas	3	6	6
	2°	Bloques de contenidos	1(B1)		
		Lecciones de contenidos	1(L3)		
		Número de problemas	2		
Proporcionalidad múltiple	2°	Bloques de contenidos		1(B1)	
		Lecciones de contenidos		1(T8)	
		Bloques c/problemas			1(B1)
		Lecciones c/probelmas			1(L5)
		Número de problemas		3	3
Resumen		Bloques de contenidos	1°:B2 2°: B2	1°: B1,B2yB3 2°:B1	1°:B1yB3
		Lecciones de contenidos	1°: L10 2°:L9	1°: T7,T15,T16 y T21 2°: T8	1°:L5yL6(B1), L3(B3)
		Bloques c/problemas	1°:B1,B2,B3,B4 y B5 2°: B1		1°:B:1, 2 y 5 2°:B1
		Lecciones c/probelmas	1°:L:5;7y10,11,19y24 2°: L3		1°:L:3,7y5 2°: L5
		Número de problemas	1°: 25 2°: 18	1°: 23 2°: 3	1°: 52 2°: 3
		Número de páginas	1°: 16 2°: 20	1°: 17 2°: 3	1°: 28 2°: 14

Cuadro 4.1: Distribución de contenidos de proporcionalidad

De la tabla anterior, podemos observar algunos datos de interés:

- El texto 1, en el libro de primer año, no dedica ninguna lección a temas de proporcionalidad directa (sin variación). Esto es porque en las lecciones correspondientes siempre aborda el tema con un enfoque variacional. Sin embargo, en estas lecciones y otras, se incluyen problemas de 'valor faltante' que, ciertamente pueden resolverse mediante el enfoque variacional. En el libro de segundo año, este texto dedica sólo una lección al tema arriba mencionado. Los otros dos textos si dedican dos lecciones en primer año.

- El texto 1 no dedica lección alguna para tratar el reparto proporcional, sólo incluye un problema. El tema de proporcionalidad múltiple no se incluye en este texto. Los otros dos textos si incluyen estos contenidos por lo menos con algunos problemas. En cambio, al tema aplicación sucesiva de factores, en el texto 1 dedica más atención que los otros dos textos.

- El texto 2 sólo incluye problemas en las lecciones dedicadas al tema en correspondiente, mientras que, los otros dos textos incluyen problemas en otras lecciones que corresponden a otros contenido. En principio, este último beneficiaría las conexiones entre diferentes contenidos.

- También se observan diferencias en cuanto al número de problemas dedicado a los temas de proporcionalidad. En los textos 1 y 3, este número es alrededor del doble que en el texto 2. Esto no necesariamente indica que diferencias importantes en este aspecto, ya que los problemas del texto 2 generalmente incluye varias tareas, lo cual no es tan frecuente en los otros dos textos.

- En cuanto al número de páginas que dedican los textos se observa que, el texto 2 dedica alrededor de la mitad de las que destinan los otros dos textos (los tres tienen aprox. el mismo número de páginas). En cierta manera, esto indica el énfasis que los diferentes autores de textos deciden darle a un tema. Se esperaría que, al dedicar más espacio a un contenido beneficiaría al aprendizaje de este, lo cual no necesariamente sería cierto.

A continuación presentamos una síntesis sobre los aspectos más relevantes del análisis de los libros de texto, relacionados con la proporcionalidad directa.

4.1.2. Texto 1

En los tres grados, el autor presenta el contenido de cada lección, unidad de contenido, de la siguiente manera:

a) En la primera página hace un resumen del contenido a tratar, antecedentes y objetivos, bajo los siguientes rubros '¿Mis retos', '¿Qué sé?' y '¿Qué lograré aprender?'.

b) En la segunda página plantea una serie de preguntas o ejercicios, para que los alumnos realicen y recuerden contenidos vistos previamente, los cuales puede servir 'como evaluación diagnóstica'.

c) Enseguida continúa con el 'desarrollo de la lección' donde se presentan, propiamente, los contenidos objeto de aprendizaje. Estos contenidos se agrupan por temas específicos; en cada uno se desarrollan situaciones que incorporan tareas y problemas por resolver, se dan explicaciones, definiciones y maneras de solución, intercalándose secciones de preguntas y/o ejercicios para discutir en equipos, tituladas 'para curiosos'. Finalmente, se cierra cada tema con una serie de problemas. Al final de la lección se agrega otra lista de problemas de todos los temas tratados.

De lo anterior podemos observar que, si bien, se incorporan componentes interesantes que incluyen una buena cantidad de situaciones y problemas, el desarrollo de los contenidos sigue un enfoque esencialmente tradicional, ya que básicamente inicia con una explicación del contenido a enseñar con base en ejemplos y, posteriormente, propone ejercicios similares a los que ha explicado el profesor.

Proporcionalidad directa

La proporcionalidad directa se aborda como una situación variacional en la que se involucran dos cantidades (magnitudes). Se dan dos definiciones:

> Se dice que dos cantidades varían de manera directamente proporcional si a medida que una aumenta o disminuye, la otra aumenta o disminuye en el mismo factor (Mancera, 2006, p.75).
>
> Se dice que una cantidad y varía en proporción directa con respecto a la cantidad x, o que y es directamente proporcional a x, si el resultado de la división de y entre x es una constante k (es decir, $\frac{y}{x} = k$) o si $y = kx$. Se acostumbra denominar a k *constante de proporcionalidad* (*Ibid*, p. 129).

Como puede observarse estas dos definiciones son diferentes, la primera describe una propiedad isomórfica de la relación entre las variables, mientras que la segunda, es más bien una relación funcional.

Problemas de valor faltante

En el libro de primer año, encontramos cuatro lecciones (5, 10, 19 y 24) en las que aparecen contenidos relacionados con el enfoque variacional, 'factor de proporcionalidad', para entender la proporcionalidad entre dos magnitudes y resolver problemas de valor faltante; sólo hay una lección (L9, B2) que dedica un breve espacio a la resolución de problemas de valor faltante mediante un enfoque no variacional, en ella se concentra el mayor número de problemas de este tipo (15); en las siete lecciones restantes, aparecen 40 problemas más, tres de estas corresponden a otros temas de matemáticas. En el libro de segundo año, se identifican otros dos problemas de valor faltante en dos diferentes lecciones, uno en cada lección.

El principal procedimiento que se presenta en este texto, es el del factor o constante de proporcionalidad, el cual sólo es identificado como número y no como magnitud compuesta. Sólo en la lección 9 (B2), de primer año, se observa un 'tímido' intento por introducir el procedimiento de 'la tasa unitaria' pero, enseguida se continúa utilizando el factor de proporcionalidad. El enfoque que predomina es el variacional (d.2). Respecto el método de 'factor de cambio', sólo aparece la definición mencionada en la cita, pero no hay ejemplos o situaciones que promuevan su uso.

En la lección 5 del bloque 1, se utiliza la expresión 'factor de proporcionalidad' y posteriormente en el resto del libro de primer año aparece la expresión 'constante de proporcionalidad', sin darse una explicación sobre la equivalencia de los términos. El procedimiento 'Regla de tres', sólo es tratado brevemente y sin mencionarse en la lección 9 (B2) del libro de segundo año.

No se percibe una claridad sobre los problemas de valor faltante y las diferentes maneras de abordarlos; de hecho, hay un sesgo notorio hacia el método de 'factor de proporcionalidad' y la relación funcional, dejando de lado otros métodos intuitivos como 'tasa unitaria' y 'factor de cambio' y que, de acuerdo a investigaciones ((Vergnaud, 1983; Post, Behr y Lesh, 1988; Lamon, 1999) son aplicados por los estudiantes espontáneamente. La misma 'regla de tres', cuyo abuso en la enseñanza ha sido ampliamente cuestionado por profesores e investigadores, quienes sugieren posponer su introducción hasta que los estudiantes adquieran amplia experiencia con los otros procedimientos.

Reparto proporcional, aplicación sucesiva de factores y proporcionalidad múltiple

Como puede observarse en la tabla 4.1, estos temas se abordan poco o simplemente no se tratan, como es el caso de proporcionalidad múltiple, aunque se menciona como un tema a tratar en la lección 3 (B1) del segundo año; sólo se incluye un problema sobre reparto proporcional.

Comentarios

- En la resolución de problemas de valor faltante predomina el procedimiento de 'factor de proporcionalidad' con enfoque variacional; los otros procedimientos son poco tratados o simplemente no se incluyen.
- A excepción de los problemas de valor faltante, a los otros temas de proporcionalidad que establece el programa de la SEP, se les dedica muy poco espacio y, el tema de proporcionalidad múltiple, no se aborda.

4.1.3. Texto 2

Organización y estructura de las lecciones

En este texto, como en los otros dos, los contenidos están agrupados en cinco bloques, los cuales, a su vez, están integrados por lecciones ubicadas en los tres ejes temáticos del

Programa de Estudios; en este texto a las lecciones les llaman *temas*. Al inicio de cada bloque se establecen los aprendizajes esperados. A su vez, cada lección contiene entre uno y cinco subtemas. Cada subtema inicia con el planteamiento de una situación problémica "para introducir y desarrollar los conocimientos y habilidades propuestos...se ha procurado que [esta situación] provoque en los alumnos un conflicto cognitivo" (p.5); enseguida, se propone una sección de *exploración y discusión* "en la cual se orienta la búsqueda de procedimientos formales de solución mediante algunas preguntas", sugiriéndose el trabajo en equipos y la discusión grupal. Por último, se incluye la sección *Actividades adicionales*, en la que se proponen problemas "cuyo propósito es que los alumnos apliquen lo aprendido en otros contextos y lo vinculen con situaciones de la vida cotidiana, de otras disciplinas o de la propia Matemática" (p. 6).

Del párrafo anterior, se infiere que el autor promueve el enfoque de resolución de problemas, el trabajo colaborativo y la discusión grupal, así como un enfoque constructivista basado en el *conflicto cognitivo*, como base del aprendizaje, pero ¿qué tanto los profesores comprenden adecuadamente estas propuestas y tienen la experiencia para llevarlas al aula?

Proporcionalidad directa

Este tema se aborda de una manera más equilibrada, en cuanto a los diferentes enfoques que ya han sido señalados, especialmente en los problemas de valor faltante. En el texto encontramos las siguientes definiciones:

> *Proporcionalidad directa*. Relación entre dos conjuntos de cantidades que satisfacen la siguiente propiedad: "al aumentar una de las cantidades del primer conjunto al doble, al triple, etc., la cantidad correspondiente del otro conjunto también aumenta de la misma manera. Y al revés: si una de esas cantidades se reduce a la mitad, a la tercera parte, etc., la correspondiente también se reduce de la misma manera" (Escañero, 2006, p. 50). Esta definición es recordada en el tema 28 (p. 204).
>
> *Constante de proporcionalidad*. En una relación de proporcionalidad (directa), "es el cociente entre un valor y su correspondiente" (*Ibid*, p. 53). Esta definición es recordada en el tema 21 (p. 150) y 28 (p. 204).
>
> *Regla de tres*. Procedimiento usado para resolver problemas de proporcionalidad en los que se trata de encontrar un valor faltante (se acompaña de un ejemplo, p. 151)

A continuación se presenta un ejemplo de Valor faltante donde es aplicada la 'regla de tres':

Si dos kg de frijol cuestan \$20, ¿Cuánto me darán por \$50? Con la regla de tres se procede así (Escareño, 2006, p. 151):

2 kg $\longrightarrow$ \$20

x kg $\longrightarrow$ \$50

$x = \frac{(502)}{20} = 5$
Esto significa que por \$50 me darán 5 kg.

La primera definición describe la propiedad isomórfica de la relación entre variables que varían en proporción directa; la segunda, es consecuencia de las fracciones equivalentes, la constante se utiliza en este texto como operador multiplicativo; la tercera, se deriva de la noción de proporción y la igualdad de los productos cruzados.

Problemas de valor faltante

En el bloque 1, el tema 6 está dedicado a la proporcionalidad directa y tiene dos apartados en los que aborda los problemas de valor faltante. En el apartado 6.1, se trata el procedimiento de 'factor de cambio' y, enseguida en el apartado 6.2, se dedica al procedimiento de 'constante o factor de proporcionalidad', como patrón numérico. Este se vuelve a retomar en el tema 15 (bloque 2); en ambos casos sin utilizar expresiones algebraicas. En el tema 21 (bloque 3) se explica el procedimiento de 'Regla de tres'. No se encuentra el procedimiento de 'tasa unitaria'.

Reparto proporcional, aplicación sucesiva de factores y proporcionalidad múltiple

A cada uno de estos temas se dedica una lección breve, a reparto proporcional y aplicación sucesiva de factores en el primer año y al tema de proporcionalidad múltiple en el segundo año. El número de problemas que aparecen en estos temas son 3, 5 y 3, respectivamente.

Comentarios

- En este texto se observa una distribución de contenidos más apegado al Programa de la SEP, aunque hay menos espacio dedicado a los temas de proporcionalidad, lo cual se refleja en el número de problemas que se incluyen, aunque en la mayoría de estos problemas se plantean varias preguntas.

- En el caso de los problemas de valor faltante, también se observa un mayor énfasis en el procedimiento de 'factor de proporcionalidad' o constante de proporcionalidad, pero con un enfoque más operatorio que funcional. En menor medida son tratados los otros procedimientos para la solución de estos problemas, con excepción de la 'tasa unitaria', lo que consideramos fue un error del autor. El enfoque funcional se deja hasta el bloque 4 como indica el Programa de la SEP, lo cual es adecuado puesto que es ahí donde se empieza a trabajar la noción de función.

4.1.4. Texto 3

Al inicio de cada bloque se establecen los objetivos de aprendizaje para cada eje y se incluye un breve comentario sobre algún tema o imagen ligado con algún contenido matemático. El número de lecciones varía en cada bloque (de 3 a 8). Las lecciones inician con un apartado llamado *para comenzar*, en el que se indican los conocimientos previos que se relacionan con el contenido de la lección, así como los temas a abordar. Cada lección se divide en varias partes temáticas, en cada una de las cuales se plantean situaciones problémicas que los estudiantes deben de trabajar de manera *colectiva o individual*. Estos momentos son indicados en el texto. Finalmente, la lección se cierra con una sección de ejercicios y problemas llamada *para terminar*, al final de la cual se plantea un problema no rutinario.

Según el autor, el texto "posee una estructura que parte de problemas y va dando sugerencias, en forma de preguntas, para llegar a la solución. Sólo, hasta el final de la actividad, se presenta una formalización de los conceptos que los estudiantes deben haber descubierto" (p. 3). Está claro que se pretende un enfoque de resolución de problemas.

Proporcionalidad directa

En este texto, de manera similar al texto 1, la proporcionalidad directa se aborda desde un enfoque variacional en la que se involucran dos cantidades (magnitudes). Se presentan las siguientes definiciones:

> Una cantidad varía proporcionalmente con respecto a otra si la razón entre ellas es un número fijo, llamado *constante de proporcionalidad*; es decir $k = \frac{y}{x}$. En forma equivalente, una cantidad y varía proporcionalmente con respecto a otra x si $y = kx$ (Briseño, 2006, p. 66).
>
> Las magnitudes A y B son proporcionales a los números a y b si $\frac{A}{B} = \frac{a}{b}$. Esta expresión se lee así: A es a B como a es a b (*Ibid*, p. 156).

Con relación a esta definición introduce la noción de 'razón de proporcionalidad' para $\frac{a}{b}$ con un sentido similar al de *constante* de proporcionalidad, sólo que ahora se expresa como fracción. Se percibe un intento por introducir las nociones de razón y proporción pero resulta muy confuso.

> Después de un ejemplo aparece lo siguiente: Como la altura de la sombra se puede obtener como un número multiplicado por la altura del objeto, decimos que la sombra es proporcional a la altura del objeto y al número por el que se multiplica la altura del objeto se le llama *constante de proporcionalidad*.
>
> Si y representa la altura de la sombra, k la constante de proporcionalidad y x la altura del objeto entonces la relación que encontramos se escribe como: $y = kx$ (p. 195)

No se incluye la definición 'isomórfica' de la variación proporcional directa.

Problemas de valor faltante

En el libro de primer año, en las tres lecciones destinadas, parcialmente, a este tema (L5-B1, L7-B2 y L3-B3) predomina un enfoque variacional de tipo 'factor de proporcionalidad' en la resolución de este tipo de situaciones. En la lección L7 (B2) se considera el tema "identificación y solución de proporcionalidad directa del tipo 'valor faltante' en diversos contextos, utilizando procedimientos expertos" (Briseo, 2006, p. 154) pero sólo se introduce una noción confusa de 'razón de proporcionalidad' que es, prácticamente, lo mismo que la 'constante de proporcionalidad', sólo que ahora se expresa como cociente de enteros. En la lección L3 (B3) hay un referencia muy breve a la 'Tasa unitaria' y a la 'Regla de tres' (sin mencionarlas), pero también se sigue manejando el procedimiento 'factor de proporcionalidad'. En estas dos lecciones, se concentra el mayor número de problemas 22, con un enfoque 'no variacional' ; en el resto de bloques aparecen 11 problemas más, distribuidos en 4 lecciones. En este texto no se incluye el procedimiento de 'factor de cambio'.

Reparto proporcional, aplicación sucesiva de factores y proporcionalidad múltiple

Los dos primeros temas se abordan en el libro de primer año, y el tercer tema en el libro de segundo año. Al segundo y tercer tema se dedica una parte de las lecciones L5-B1 y L7-B2, respectivamente, mientras que al tema de reparto proporcional se dedica una lección completa (L6, B1). De los otros dos temas sólo aparecen problemas dentro de 'otras' lecciones de contenido, con 10 problemas para el segundo tema y 3 para el tercero.

4.1.5. Comparación de los tres textos

En diferente medida, los tres textos abordan los temas de proporcionalidad desde un enfoque variacional, cuestión que retomaremos más adelante cuando analicemos lo correspondiente a los contenidos de variación. En este sentido, los textos no se apegan mucho al programa de la SEP, el cual ubica el estudio de la proporcionalidad directa en los primeros tres bloques del primer año y en el bloque 1 del segundo año, sin señalar explícitamente un enfoque variacional, sino más bien poniendo énfasis en un acercamiento numérico intuitivo, sobre todo en los problemas de *valor faltante*. Explícitamente se deja para el bloque 4, en primer año, el estudio de la variación (proporcional y lineal).

La propuesta de la SEP puede estar basada en la conveniencia de que los estudiantes adquieran madurez conceptual y procedimental sobre el pensamiento proporcional antes de conectarlo con otros conceptos matemáticos, lo cual es razonable pero al no ser explícito podría pasar inadvertido para el docente. Esto no significa que el enfoque variacional no se deba incorporar antes de entrar al estudio de la variación, pero si implicaría, al menos, no presentarlo como dominante. Esto es justo, lo que a nuestro juicio se hace en los textos analizados. Lo anterior puede ocasionar alguno de los siguientes inconvenientes:

- No lograr un avance significativo en la construcción conceptual y procedimental del pensamiento proporcional y, por lo tanto, en la habilidad para resolver problemas de proporcionalidad que no estén muy ligados a la variación.
- Hay aprecia un exceso de espacio dedicado a la variación proporcional directa, que bien podría dedicarse a otros contenidos matemáticos que presentan dificultades de aprendizaje o que, por falta de tiempo, se les presta menor atención. Además, el hecho de que se dedique más tiempo a un contenido no necesariamente conduce a un mejor aprendizaje.

A continuación discutiremos en detalle los contenidos que, de acuerdo al Programa de la SEP, se deben abordar con respecto a la proporcionalidad directa.

Proporcionalidad directa

En los tres textos, en mayor o menor medida, la proporcionalidad directa se caracteriza como un tipo de relación variacional entre dos cantidades, distinguiéndose dos distintos enfoques:

- Si una (cantidad) aumenta o disminuye en un cierto factor (doble, triple, mitad, etc.) la otra aumenta/ disminuye en el mismo factor (Textos 1 y 2)
- Dos cantidades x y y varían en proporción directa si se cumple que $\frac{y}{x} = k$ (o si $y = kx$) para cualesquiera dos valores correspondientes de x y y, llamándosele a k *constante de proporcionalidad* (Textos 1 y 3).

En este último enfoque, el énfasis se centra en la identificación del patrón relacional entre dos variables, a partir de tablas numéricas, de donde surge la constante (o factor de proporcionalidad) y la regla de cálculo "los valores de la cantidad (o magnitud) y se obtiene multiplicando el valor asociado x por la constante de proporcionalidad k" o, "si se conoce el valor de y, el valor correspondiente de x, se encuentra dividiendo y entre k".

En el primer enfoque no se requiere el uso de la constante de proporcionalidad y, en algunos casos (cuando el factor de cambio es entero o una fracción fácil), tiene mayor significado para los estudiantes.

Problemas de valor faltante.

La noción de *problema de valor faltante* es algo que no es claro en el programa de estudios de la SEP y tampoco en los libros. De acuerdo a la literatura especializada en Educación Matemática, como se señala en el apartado 3.2.1, esta noción hace referencia a situaciones en las que intervienen dos magnitudes que son directamente proporcionales, se conocen tres valores de la proporción y se trata de encontrar el tercero. La manera de resolver este tipo de problemas es muy diversa y, generalmente, los niños lo hacen espontáneamente de diferentes formas.

Diversas investigaciones identifican al menos cinco procedimientos para resolver problemas de valor faltante: *método de la tasa unitaria, método del factor de cambio, regla de tres, método del factor de proporcionalidad: como patrón numérico y como función.* Los primeros tres procedimientos son esencialmente numéricos y algunos investigadores los clasifican como un tipo de *problemas multiplicativos*; el quinto procedimiento es prominentemente variacional (uso de tablas, expresiones algebraicas y gráficas); el cuarto procedimiento es intermedio, ya que sólo se utilizan tablas para identificar el patrón numérico y, a veces, a partir de este establecer la fórmula para este patrón.

En los tres textos revisados, se observa un mayor énfasis en los procedimientos referidos al *factor de proporcionalidad: como patrón numérico y como función*, para la resolución de problemas de valor faltante, mientras que a los otros métodos de solución se les dedica menos espacio e inclusive algunos no son incluidos.

Lo anterior se puede deber, no sólo a la poca claridad del Plan de Estudios, como ya ha sido señalado en el capítulo 3, sino también al desconocimiento de los autores de los textos sobre la literatura correspondiente, o bien, a decisiones de los autores avaladas por las instancias de la SEP que autorizan los libros de texto.

Por otro lado, consideramos que la propuesta se maneja en el Plan de Estudios 2006 sería muy adecuada si se hacen las explicitaciones pertinentes para que se promueva el aprendizaje del razonamiento proporcional tomando en cuenta, de manera más equilibrada, las diversas maneras de entender y abordar la proporcionalidad y los procedimientos de solución.

Reparto proporcional, aplicación sucesiva de factores y proporcionalidad múltiple

En los tres textos se dedica poco espacio a estos temas, en particular, en el texto 1 no se trata la proporcionalidad múltiple (para visualizar esto de manera global, ver la tabla 4.1). Aunque estos temas pueden considerarse como extensiones de los problemas de valor faltante, sería conveniente valorar una redistribución de los espacios asignados a los temas considerados en la proporcionalidad directa, sobre todo si tomamos en cuenta los comentarios que se hicieron al inicio de este apartado.

4.1.6. Caracterización de los problemas de proporcionalidad propuestos en los textos

Valor faltante. En primer año se observa que, en el primero y último texto se plantean cuatro bloques y cinco lecciones que incluyen este tipo de problemas, en cuanto al número de problemas por cada texto, contienen 21 y 36, respectivamente; en el segundo texto sólo se hace en dos bloques y dos lecciones, en las que se encuentran 13 problemas (generalmente cada problema incluye varias tareas). En los tres libros de textos se plantean problemas similares, por ejemplo:

> Tres onzas de cierto pescado cocinado con mantequilla proveen 23 g de proteína. ¿Cuántas onzas de pescado se requieren para obtener 125 g de proteína? ¿Cuántas para 500 de proteína? (Texto 1, p.130)
>
> Si 2 kg de frijol cuestan \$20, ¿Cuánto me darán por \$50? (Texto 2, p.151).

En el texto tres, además de ejemplos similares a los anteriores, se incluyen problemas del tipo: calcular el valor del número x en $\frac{5}{3} = \frac{x}{15}$ (con la x en diferentes lugares).

Reparto proporcional. Los tres textos solamente le dedican, en primer año, un bloque y una lección, el número de problemas que contiene cada texto son 1, 4 y 10, respectivamente. Un ejemplo de problema de este tipo es el siguiente:

> Tres amigos obtienen un premio de \$100,000 en un sorteo; uno de ellos puso \$12 para comprar el boleto del sorteo; otro, \$8 y el tercero \$15 ¿Cuánto le corresponde del premio a cada quien? (Texto 1, p.77)

En los primeros dos textos los problemas se sitúan en el contexto de reparto de premios o ganancias entre tres personas, mientras que en el tercero, además se considera el contexto de reparto de terrenos, a dos, tres o cuatro personas.

Aplicación sucesiva de factores. Los tres textos dedican un bloque y una lección, el número de problemas que contiene cada texto son 3, 6 y 6, respectivamente. Ejemplo de Aplicación sucesiva de factores en primer año (Texto 2, p. 120):

> A Karen le dejaron de tarea que hiciera una ampliación del dibujo, de modo que no rebasara una página. Para ello, primero amplificó el dibujo con una escala de 6 a 1, pero como rebasó el tamaño de la página de su cuaderno, lo redujo con una escala de $\frac{1}{2}$ ¿Qué dimensiones tiene ahora su dibujo? (se refiere a un dibujo rectangular de dimensiones 7cm X 5.3 cm).

En los dos textos restantes se dan ejemplos similares al anterior, aunque también se menciona sobre ampliación o reducción de fotografías, plano de casa-habitación o además se pide reducir o amplificar dos veces, en el tercer texto se pregunta sobre la razón de proporcionalidad, por ejemplo:

> Se muestran dos hexágonos (4 cm y 7 cm de lado, respectivamente) dibujados a escala. ¿Cuál es la razón de proporcionalidad entre el segundo y el primero? ¿Por cuál factor debes multiplicar al lado del segundo hexágono para obtener el tercero? (Texto 3, p.157)

Proporcionalidad mltiple. Este tema sólo se aborda, en segundo año, los Textos 2 y 3 (en un bloque y una lección con 3 problemas por cada texto) empleando la representación tabular para su solución. Un ejemplo es el siguiente:

> En una granja avícola, cada 3 gallinas producen, en promedio, 5 huevos en dos días. ¿Cuánto producirán 1500 gallinas en ese mismo día? ¿Cuántos huevos producirán 1500 gallinas en un mes? (Texto 2, p.61).

Variación lineal y no lineal. Contenidos y su distribución

Los temas que incluye el Plan 2006 para el estudio de la noción de variación, son:

a) Variación lineal
   Proporcionalidad directa.
   Función lineal.

b) Variación no lineal
   proporcionalidad inversa.
   Función cuadrática.
   Función cúbica.
   Función exponencial.

Los dos tipos de variación los analizaremos en apartados diferentes.

4.2. Variación Lineal

En la tabla 4.2 se presenta la distribución, en los tres textos analizados y en los tres grados, de los contenidos que, de acuerdo al Programa de la SEP (2006), comprende el tema de variación lineal.

A continuación presentamos una síntesis sobre los aspectos más relevantes del análisis de los libros de texto, relacionados con la Variación lineal.

Variación lineal	Años		Texto1 Mancera	Texto2 Escareño	Texto3 Briseño
Proporcionalidad directa	1°	Bloques de contenidos	4(B:1,2,3 y 4)	2(B:1 y 5)	2(B:1 y 5)
		Lecciones de contenidos	4(L:5,10,11 y 19)	2(L:6 y34)	2(L:5 y 4)
		Bloques c/problemas	2(B: 4 y 5)	2(B:2 y 4)	
		Lecciones c/probelmas	4(L:17y20, 24y25)	2(L:15 y 28)	
		Número de problemas	43	23	20
	2°	Bloques de contenido	1(B1)		
		Lecciones de contenido	1(L3)		
		Número de problemas	19		
Lineal	1°	Bloques de contenidos	1(B4)	1(B4)	
		Lecciones de contenidos	1(L17)	1(L28)	
		Número de problemas	3	3	
	2°	Bloque de contenidos	1(B3)	1(B3)	1(B3)
		Lecciones de contenidos	2(L13 y L14)	2(L20 y L23)	1(L3)
		Bloques c/problemas	2(B1 y B4)	2 (B3 y B4)	1(B4)
		Lecciones c/probelmas	3(L:3, 19 y 20)	3(L:24,25 y 30)	1(L5)
		Número de problemas	61	19	18
	3°	Bloques de contenidos	1 (B3)	1(B5)	
		Lecciones de contenidos	1(L17)	1(L26)	
		Bloques c/problemas	2(B1 y B3)	3(B:1 y 3)	3(B:1,3y5)
		Lecciones c/probelmas	4(L:7,22 y 23)	4(L:6,14,18y20)	3(L:3,3y4)
		Número de problemas	30	30	21
Resumen		Bloques de contenidos	1°:B1,B2,B3yB4 2°: B1 y B3 3°: B3	1°:B1,B4 y B5 2°: B3 3°:B5	1°: B1 y B5 21°: B3
		Lecciones de contenidos	1°:L:5,10,11,17y19 2°:L3,L13 y L14 3°: L17	1°:L6,L28yL34 2°:L20 y L23 3°:L26	1°: L5 y L4 2°: L3
		Bloques c/problemas	1°: B5 2°:B1 y B4 3°:B1 y B3	1°:B2 y B4 2°:B3 y B4 3°:B1 y B3	2°: B4 3°: B1,B3 y B5
		Lecciones c/probelmas	1°:L:17,20,24y 25 2°:L:3, 19 y 20) 3°:L:7,22y 23	1°:L:15y 28 2°:L: 24,25 y 30 3°:L:6,14,18y20	2°: L5 3°:L3,L3y L4
		Número de problemas	1°: 47 2°: 80 3°: 31	1°: 26 2°: 19 3°: 30	1°: 20 2°: 18 3°: 21

Cuadro 4.2: Distribución de contenidos relacionados con variación lineal

4.2.1. Texto 1

Primer año.

Como ya se comentó en el apartado de proporcionalidad sin variación, el enfoque variacional predomina prácticamente en todas las lecciones dedicadas a los temas de proporcionalidad en este texto, promoviendo el uso extensivo de tablas y expresiones algebraicas para el análisis de las situaciones, así como la introducción de terminología y definiciones propias de variación. Por ejemplo, en el bloque 1 (lección 5) se da la siguiente definición:

> *Variación proporcional directa*: Se dice que dos cantidades varían de manera directamente proporcional si a medida de que una aumenta o disminuye, la otra también aumenta o disminuye en el mismo factor (Mancera, 2006, p. 75).

Además se introduce el factor de proporcionalidad, como el cociente entre valores correspondientes $\frac{x}{y}$, y con ello el procedimiento para la resolución de problemas de proporcionalidad directa. Este enfoque es el más utilizado en el texto y se acompaña a introducir la siguiente (B1, L10) definición y notación funcional:

> Se dice que una cantidad y varía en proporción directa con respecto a la cantidad x, o que y es directamente proporcional a x, si el resultado de la división de y entre x es una constante k; es decir, $\frac{y}{x} = k$ o si $y = kx$. Se acostumbra denominar a k *constante de proporcionalidad* (*Ibid*, p. 129).

Esta definición es incompleta, pues no se indica y mucho menos se explica que k debe ser positiva para que represente una variación proporcional directa. Además, se observa un cambio de terminología que tampoco se explica, ya que anteriormente a k se le ha llamado *factor de proporcionalidad* y ahora se le denomina *constante de proporcionalidad*. Pareciera que esto es una cuestión menor, pero el uso de diferentes nombres para un mismo objeto puede generar confusiones innecesarias en los estudiantes.

En el bloque 4 se estudian de manera explícita las funciones lineales en las lecciones 17 y 19. La primera, titulada *Relación funcional*, forma parte del eje de *sentido numérico y pensamiento algebraico*; la segunda, titulada *Relaciones de proporcionalidad y el álgebra*, forma parte del eje *tratamiento de la información*.

La lección 17 está dedicada a analizar la gráfica de la expresión $y = kx$, para diferentes valores de k (enteros, racionales, positivos y negativos) enfocándose en la 'inclinación' de la recta a partir del eje de coordenadas x; se introduce un recurso visual para resaltar la identificación de k con la pendiente del 'triángulo característico'[2]

Después del análisis gráfico de la expresión $y = kx$, se recuerda que ésta misma ha sido utilizada para simbolizar relaciones de proporcionalidad entre dos cantidades, en donde k es la constante de proporcionalidad y además que a este tipo de expresiones se les denomina *funciones lineales.*

[2]El triángulo rectángulo formado por los puntos (0,0), (x, 0) y (x, y) para valores especficos de x y y.

Después de caracterizar a la función lineal como un tipo de expresión algebraica, se pasa a realizar un breve análisis gráfico de expresiones de la forma $y = kx+b$, a partir de dos ejemplos en los que sólo se comparan gráficas del tipo $y = kx$ con gráficas del tipo $y = kx + b$, y se hace notar que la gráfica de esta última se obtiene mediante un desplazamiento (hacia arriba o hacia abajo) de la primera recta (que cruza por el orígen), siendo b el número de unidades de desplazamiento.

En las lecciones 19 y 24 (bloques 4 y 5 respectivamente), se entremezclan diversos temas que ya han sido abordados anteriormente: problemas de valor faltante, proporcionalidad directa, variación proporcional y funciones lineales. En la primera lección se plantean algunas situaciones y problemas de proporcionalidad directa con el empleo de tablas y gráficas, preguntando en la mayoría de los casos por la *función lineal* correspondiente; es decir, por la expresión algebraica de la forma $y = kx$. Sin embargo, no se plantea ninguna situación didáctica o problema de una función lineal completa $y = kx + b$. En la lección 24, el contenido está centrado, principalmente, en situaciones de conversión entre unidades de medida (longitud o temperatura) en la mayoría de las cuales se involucran relaciones de proporcionalidad directa y en unas pocas de variación lineal completa y, básicamente, se trata de determinar valores a partir de varias representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas).

En estas dos lecciones se repiten contenidos que ya han sido tratados anteriormente con mucha o suficiente extensión, en lugar de ir avanzando sobre el estudio de la función lineal completa, tema que ha sido introducido de manera incipiente en la lección 17.

Segundo año.

En el bloque 1, en parte de la lección 3 se vuelven a abordar situaciones de proporcionalidad directa en varios contextos con un enfoque variacional, empleando los diferentes registros de representación (tabular, gráfica y algebraica), pero sin manejar la terminología de funciones. En los hechos las situaciones y problemas planteados son muy similares a los que se abordan en lecciones 17, 19 y 24, del texto de primer año, sobre todo la función $y = kx$.

En el bloque 3, las lecciones 13 y 14 contienen contenidos más completos sobre la función lineal, la primera se ubica en el tema de *Relación funcional* del eje *Tratamiento de la información*, mientras que la segunda, se ubica en el tema de *Gráficas* del eje 3. En la lección 13 se discute la utilidad de la función lineal como 'modelo' para analizar y resolver problemas en diferentes contextos, además se introduce la noción de variable *independiente/ dependiente*; sin embargo, en pocas situaciones se usa. En esta lección se incorporan los tres registros de representación comunes (tablas, gráficas y expresiones algebraicas). La lección 14 está dedicada al análisis de la expresión $y = kx+b$ y su gráfica correspondiente, cuando se varían los parámetros k y b; además, se introduce la noción de función *creciente/ decreciente*. En el análisis de k, este valor se asocia a la 'inclinación de la recta', la cual puede ser 'medida' a partir del triángulo característico (introducido en la lección 17 de primer año) haciéndose notar que corresponde al cociente de los catetos (vertical/ horizontal) los cuales se identifican como ‘incrementos’ en las variables y y x respectivamente. Cabe hacer notar que no se define la *pendiente* de la recta; sin embargo, en algunos problemas se solicita o menciona.

En el bloque 4, las lecciones 19 y 20 tratan de aplicaciones de la función lineal. En la primera lección, se trata de la construcción de gráficas de tendencia mediante segmentos de rectas, relacionado con datos estadísticos; el tipo de situaciones que se presentan requieren un uso de la función lineal muy elemental, pues sólo se reduce a la unión de puntos en un plano cartesiano para ‘dar forma’ a una gráfica de tendencia. En la lección 20, el uso de la función lineal es más rico, ya que se trata de construir funciones por intervalos no sólo gráficamente, sino también simbólicamente, lo cual plantea problemas interesantes para determinar correctamente los parámetros de la expresión $y = kx + b$ en cada intervalo.

En el bloque 5, las lecciones 21 y 22 están dedicadas al estudio de sistemas de ecuaciones con dos incógnitas y, en particular, en la segunda lección se destina a la solución gráfica de estos sistemas. Aunque hay una conexión muy fuerte entre este tema y las funciones lineales, no se aprovecha esta circunstancia para fortalecer el aprendizaje de ambos contenidos.

Tercer año.

En la lección 7(B1), se introduce la noción de *razón de cambio* a partir de tablas de valores de funciones lineales en diferentes contextos, como el cociente de diferencias de las variables para un intervalo dado de la variable independiente, definiendo varias razones de cambio de utilidad (tasa de crecimiento, velocidad, velocidad de enfriamiento/ calentamiento aceleración). También identifican la *razón de cambio* con el parámetro k en la expresión $y = kx + b$, así mismo con la pendiente de la recta asociada. Pero, como se hizo notar en párrafos anteriores, la noción de *pendiente* no ha sido introducida.

Bloque 3, lección 17. Se abordan situaciones ‘realísticas’ en las que se aplican las funciones, centrándose en la ‘fórmula’ que relaciona a dos variables y la obtención de esta a partir de tablas; entre los ejemplos y problemas aparecen casos de función cuadrática, la cual aún no ha sido estudiada. Además, hay algunos errores en el planteamiento de algunos problemas (pp. 203 y 204 (b) y (c)) y en un ejemplo se utilizan nociones físicas que los estudiantes no conocen (*Fuerza y Energía Potencial*).

Bloque 3, lecciones 22 y 23. En la primera lección, la función lineal sólo se utiliza para introducir la función cuadrática y comparar las gráficas en un ejemplo. En la segunda lección se compara la gráfica de la función lineal con la de otras funciones (cuadrática, cúbica e inversa).

Bloque 3, lección 24. Se presentan actividades y problemas sobre interpretación de gráficas, en las que la función cambia por etapas, incluyendo segmentos de recta (funciones lineales).

Pero además se presentan problemas sobre la interpretación y análisis de gráficas con segmentos rectas y curvas, por ejemplo se hace el análisis de la gráfica sobre el crecimiento de la población en países poco desarrollados y desarrollados, donde la tendencia es otra. Pero además se plantean otras seis gráficas de rectas y curvas, sin mencionar sobre su expresión algebraica y tampoco la tabular.

Bloque 4, lección 30. Se estudian fenómenos de crecimiento: aritmético (lineal) y geométrico (exponencial).

4.2.2. Texto 2

En menor medida, este texto también introduce nociones de variación desde el primer bloque que abordan los diferentes temas de proporcionalidad y que ya se comentaron en el apartado anterior. La presentación de los diferentes temas se hace a través de problemas propuestos, se desarrollan pocas soluciones y sólo se dan, en ocasiones, explicaciones breves o definiciones.

Primer año.

En el bloque 1 (tema 6) se aborda la definición de proporcionalidad directa, pero solamente se plantea un problema; además, se dan situaciones para identificar si la relación entre las magnitudes es de proporcionalidad directa o no. Se promueve el uso extensivo de tablas, se introduce terminología y definiciones propias de variación, como la siguiente:

> *Proporcionalidad directa*. Relación entre dos conjuntos de cantidades que satisface la propiedad: al aumentar una de las cantidades del primer conjunto al doble, triple, etc., la cantidad correspondiente del otro conjunto también aumenta de la misma manera. Y al revés: si una de esas cantidades se reduce a la mitad, a la tercera parte, etc., la correspondiente también se reduce de la misma cantidad (Escañero, 2006, p. 50).

Esta definición corresponde al enfoque que hemos llamado (apartado de proporcionalidad directa) "isomorfismo" entre dos magnitudes. Esto conduce a obtener valores desconocidos, en una proporción, observando las relaciones *dentro* de una magnitud, y aplicándolas a la otra. Este procedimiento se apoya en el uso de tablas numéricas.

En esta misma lección, se da la definición de constante de proporcionalidad, y se abordan problemas sobre su obtención o identificación (sólo se consideran valores enteros o fraccionales) pero no se introduce la representación algebraica, sólo se manejan tablas numéricas. La definición que se da, es la siguiente: *Constante de proporcionalidad*. En una relación de proporcionalidad, es el cociente entre un valor y su correspondiente x (*Ibid*, p. 53).

En el bloque 4 (tema 28) se introduce la expresión $y = kx$ para la variación proporcionalidad directa, donde k es la constante de proporcionalidad, y la noción de *relación funcional* para este tipo de expresiones, incorporándose las definiciones siguientes:

> *Relación funcional.* Es la relación que existe entre dos variables tales que, al variar una de ellas, la otra también varía.
>
> *Constantes de una relación funcional.* En una función, son las cantidades que no varían.
>
> *Variables de una relación funcional.* Son las cantidades que varían; de ellas se dice que están relacionadas entre sí (Escareño, 2006, p. 203).

Estas definiciones son poco claras, depende de la expresión *cantidad que varía*, la cual no se identifica claramente en los ejemplos. En este mismo tema, se hace el análisis de la expresión $y = kx$, interpretando los significados de y, x y k, con relación a las tablas que ya han sido empleadas para abordar situaciones de proporcionalidad directa. Posteriormente se introduce la función lineal completa ($y = ax + b$) y se denomina *relación funcional* a las relaciones que se pueden expresar mediante esta expresión algebraica.

El tema 32 (B4) está dedicado a la elaboración e interpretación de gráficas asociadas a la expresión $y = kx$, asociada a la variación proporcional directa.

Bloque 5 (tema 34) se siguen abordando más problemas sobre la variación de proporcionalidad directa (de la forma $y = kx$) con la aplicación y/o la interpretación de tablas, gráficas y expresiones algebraicas.

Segundo año.

En el tema 20 (B3) se continúa abordando situaciones de 'relación funcional', en este caso de tipo lineal completo, mediante la aplicación de tablas y expresiones algebraicas. Además, se introducen las siguientes definiciones:

> Recuerda que entre dos cantidades existe una relación funcional, si a cada valor de la primera corresponde un único valor de la segunda (sigue un ejemplo). *Una relación funcional* puede representarse mediante una tabla de valores o una fórmula.
>
> *Función creciente.* Una función lineal es creciente si, al aumentar el valor de x, también aumenta el de y.
>
> *Función decreciente.* Una función lineal es decreciente si, al aumentar el valor de x, el valor de y disminuye (Escareño, 2006, p. 148).

La primera de estas definiciones, que no se había dado anteriormente como parece indicar el autor, tiene un nivel de formalidad que no es conveniente para el nivel de secundaria.

Por otra parte, hasta esta lección se venía usando la expresión *relación funcional* como sinónimo de *función*. Ahora es introducido este término, así como el de *función lineal*, sin dar una explicación. Sólo al final hay resumen en el que se hace una referencia breve, sobre estos términos, a partir de un ejemplo.

En los temas 23, 24 y 25 (B3) se hace un estudio más completo de las diferentes formas de representar la función lineal (tablas, gráficas y expresiones algebraicas), continuándose con el análisis del comportamiento *creciente/ decreciente*. Por primera vez se da la definición de función lineal: "Es una función cuya representación gráfica es un conjunto de puntos sobre una línea recta. Las funciones lineales son de la forma $y = mx + b$" (*Ibid*, p. 158).

En el tema 24, se comparan gráficas del tipo $y = kx$ con gráficas del tipo $y = kx + b$, haciendo notar que la gráfica de esta última se obtiene mediante un desplazamiento (hacia arriba o hacia abajo) de la primera (una recta que cruza por el origen) siendo b el número de unidades de desplazamiento, con valores de x y b positivo o negativo. En este mismo tema se introduce, de manera intuitiva la idea de variable discreta/ continua:

> La gráfica de una función de la forma $y = mx + b$ es una *recta*, y no sólo un conjunto de puntos discretos, cuando x toma todos los valores en el eje x.
>
> *Puntos discretos*. Son los puntos que están separados unos de otros, y que pueden estar alineados o no.
>
> *Puntos continuos*. Son los que no están separados unos de otros, como los contenidos en una línea (*Ibid.*, p. 163).

El primer punto es confuso, pues una función de la forma $y = mx + b$ también puede representar una relación entre variables 'discretas' (como en algunos ejemplos que se manejan).

En el tema 25, se introduce la noción de *pendiente* como "medida de la 'inclinación' de una recta en el plano cartesiano" (*Ibid*, p. 166) y su asociación al parámetro m en $y = mx$, así como su representación en el eje cartesiano y su determinación como cociente entre los 'cambios' en el eje vertical y horizontal.

En los temas 30 y 31 (B4) se abordan situaciones que se representan mediante gráficas continuas formadas por segmentos de rectas con diferente pendiente. En el primer tema, se trata de procesos que varían en el tiempo (como variable discreta) y en un contexto 'estadístico'; se hace énfasis en el comportamiento creciente/ decreciente, intervalos de menor/ mayor cambio de la variable dependiente. En el segundo tema, las tres situaciones que se plantean son sobre recorridos; se enfatiza la interpretación de intervalos y puntos de la gráfica con relación a la descripción del recorrido.

En los temas 32 y 34 (B5) se abordan los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, en el último tema (lección) se trata el método gráfico de resolución, pero no se relaciona este tema con las funciones.

Tercer año.

En el tema 6 (B1) se introduce la noción de *razón de cambio* en una relación funcional (función) a partir de tablas y gráficas de funciones lineales, definiéndose como "el cambio relativo de una de las variables con respecto a la otra" (p. 57) cuya determinación se ejemplifica en un ejemplo mediante la fórmula:

$$Razon\ de\ cambio = \frac{Cambio\ de\ la\ temperatura}{Cambio\ del\ tiempo}$$

Se hace una interpretación contextual y gráfica de la razón de cambio en situaciones de movimiento *uniforme* (función lineal) identificándola con la velocidad constante y la inclinación de las rectas correspondientes a diferentes movimientos. Así mismo, analiza casos en diversos contextos, en los que la razón de cambio es positiva y negativa.

También se da la siguiente definición de función: "Es una relación entre dos conjuntos de cantidades; en dicha relación, a cada valor del primer conjunto le corresponde un único valor del segundo conjunto" (Escareño, 2006, p. 57).

Esta definición es significativamente diferente a las que el autor ha introducido anteriormente ya que incorpora un lenguaje conjuntista ajeno a los estudiantes de este nivel.

Al inicio del tema 14 (B3) se repite (dos veces) la definición anterior. También se aborda una situación de variación proporcional directa (el resto es de proporcionalidad inversa).

En tema 18 del mismo bloque, se realiza la comparación, principalmente gráfica, de funciones lineales y no lineales. También se vuelve a presentar la definición de función comentada en los párrafos anteriores.

El tema 20 (B3) trata sobre la interpretación de diversos tipos de gráficas (lineales, no lineales y formadas por secciones rectas) asociadas a diversas situaciones contextuales.

En el tema 26 (B5) se dedica a la resolución de problemas con ecuaciones lineales y cuadráticas: Aunque se abordan situaciones y utilizan representaciones propias de las funciones, no se establece ninguna conexión con estos contenidos.

4.2.3. Texto 3

También en este texto, las nociones de variación se introducen desde el primer bloque y predominan en los temas dedicados a la proporcionalidad directa, aunque en menor medida que en el texto 1. Al igual que en los otros dos textos, en este apartado sólo consideramos los contenidos a partir del bloque 4 de primer año.

Primer año.

Aunque en los primeros tres bloques, se incluyen 4 lecciones dedicadas a la proporcionalidad directa (problemas de valor faltante, reparto proporcional, aplicación sucesiva de factores).

Desde el bloque 1 (lección 5) se define la variación de proporcionalidad directa:

> Una cantidad varía proporcionalmente con respecto a otra si la razón entre ellas es un número fijo, llamado *constante de proporcionalidad* es decir $k = \frac{y}{x}$. En forma equivalente, una cantidad y varía proporcionalmente con respecto a otra cantidad x si $y = kx$ (Briseño, 2006, p. 66).

Esta definición es incompleta pues no se indica, y mucho menos se explica, que k debe ser positiva para que represente una variación proporcional directa.

En el bloque 4 (lección 5) se introduce la noción de relación funcional con ejemplos de variación proporcional y se da la siguiente definición: "Dos cantidades están en *relación funcional* si para cada valor de una de ellas se puede determinar un solo valor de la otra" (*Ibid*, p. 281). Hay varias formas de representar una relación funcional; por ejemplo, usando tablas o mediante una expresión algebraica.

A continuación, en esta misma lección, se introduce el plano cartesiano y se proponen varias actividades para familiarizar a los estudiantes con este registro de representación. Se hace la siguiente caracterización:

> Al plano que se forma por dos ejes, uno horizontal y otro vertical, que se intersecan en el cero de cada eje, se conoce como *plano cartesiano.*
>
> A cada punto del plano cartesiano le corresponde un número en el eje horizontal y un número en el eje vertical. Si el número que le corresponde en el eje horizontal es x y el número que le corresponde en el eje vertical es y, entonces el punto se identifica por la pareja de números $(x,\ y)$. A estos dos números se les llama *coordenadas del punto.*
>
> La primera coordenada se llama *abscisa del punto.* La segunda coordenada se llama *ordenada del punto* (*Ibid*, p. 283).

Al final de la lección se estudia la gráfica y la expresión algebraica de la *relación funcional* correspondiente a la proporcionalidad directa:

> La expresión algebraica que corresponde a la relación entre dos cantidades x y y directamente proporcionales, es de la forma $y = kx$. La gráfica que corresponde a esta relación funcional es una recta que pasa por el punto (0,0)...la constante de proporcionalidad es k...la inclinación de la recta depende de este valor (*Ibid*, pp. 286 y 289).

En el bloque 5 (lección 4) se siguen tratando situaciones de relaciones de proporcionalidad directa integrando el uso de tablas, gráficas y expresiones algebraicas.

Segundo año.

La lección 3 (B3) inicia con aplicaciones de la función lineal (caída libre y llenado de recipientes) utilizando los tres registros de representación. Posteriormente, hace un análisis gráfico de la expresión $y = mx + b$, particularmente de los parámetros m y b, los cuales son denominados *pendiente y ordenada al origen*, respectivamente. Finalmente, con estos aspectos se abordan diferentes situaciones contextualizadas.

En la lección 5 (B4) se plantean diferentes situaciones de variación lineal compuesta, las cuales se representan mediante gráficas continuas formadas por segmentos de rectas (llenados de recipientes y recorridos).

La lección 1 (B5) está dedicada al estudio de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales (en dos variables) pero no se establece conexión con el tema de funciones, aún cuando estas aparecen de manera natural en ejemplos y procedimientos (gráficos y algebraicos).

Tercer año

En la lección 3 (B1) se introduce la noción de razón de cambio. Para esto, primero se hace un recordatorio sobre el significado de *razón*: 'comparación de dos cantidades por medio de una división'(*Ibid*, p. 36) en particular, se establece la noción de velocidad promedio como la razón entre la distancia y el tiempo. Posteriormente, después de plantear una situación de llenado de recipientes, una serie de preguntas y solicitar el llenado de una tabla, resalta los siguientes comentarios y definiciones.

> Cuando la representación gráfica de la relación entre dos variables es una línea recta se dice que entre las variables existe una *relación funcional*.
>
> La razón entre la diferencia de las ordenadas y la diferencia de las abscisas se llama *pendiente de la recta*. Es decir, si los puntos de coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2) están sobre la recta, entonces
>
> $$\textit{pendiente de la recta} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
>
> Es decir, la pendiente de la recta es la razón de cambio entre los incrementos de las dos variables que modelan el fenómeno lineal (Briseño, 2006, p. 40).

Esta última definición de razón de cambio a partir de la pendiente es confusa, pues la pendiente de la recta es un atributo geométrico (medida de la inclinación de un segmento de recta en el plano cartesiano) en tanto que, la razón de cambio es una noción variacional es geométrica. Estas coinciden numéricamente, pero su significado es diferente. De hecho, en este texto, la pendiente se introdujo en el libro de segundo año, sólo como un nombre para el parámetro m en la expresión $y = mx + b$.

En la lección 3 (B3) se plantean situaciones de diferentes disciplinas (física, biología, economía y otras) que pueden ser modeladas mediante funciones lineales y no lineales, incluyendo casos de funciones cuadráticas, compuestas por segmentos de recta (recorridos en los que cambia la velocidad por intervalos de tiempo) y otras que se representan mediante curvas.

En la lección 4 (B4) se compara el crecimiento aritmético (lineal) frente al crecimiento geométrico (exponencial).

4.2.4. Comparación de los tres textos con relación a los contenidos de variación lineal

Con relación a la presentación del contenido, los textos analizados tienen similitudes y diferencias significativas en cuanto a desarrollo, énfasis, nociones y definiciones. A continuación destacaremos las más relevantes:

Distribución de contenidos

Similitudes entre los tres textos

En primer año.

- Abordan la variación proporcional directa y sus tres registros de representación (tablas, gráficas y expresión algebraica).
- Aunque de manera muy diversa, todos introducen la noción de *función y/o relación funcional* a partir de la variación proporcional directa.

En segundo año.

- En los tres textos se trata con mayor amplitud la función lineal y el análisis gráfico de la expresión $y = kx + b$.
- Al final (bloque 4), los tres abordan situaciones que se pueden representar mediante gráficas compuestas por segmentos de rectas
- Los tres textos abordan el estudio de las ecuaciones lineales con dos incógnitas en el bloque 5, pero no lo relacionan con las funciones lineales.

- En los tres textos se introduce la noción de *pendiente*, aunque de manera diferente.

En tercer año.

- Se incluyen funciones dadas por gráficas compuestas por segmentos lineales, asociadas a diversos contextos. Estas funciones no tienen, ni se pide que se obtengan, las tablas o fórmulas correspondientes, sólo se analizan ciertos comportamientos de la variación.
- En general, en el resto de las lecciones en las que aparece la función lineal, esta se incluye para introducir y compararla con funciones no lineales (cuadrática, cúbica, inversa y exponencial)
- En los tres textos casi no se retoman nociones que se introdujeron en segundo año, como: función creciente/ decreciente, variable dependiente/ independiente.

Diferencias

En primer año.

- Sólo en el texto 1 se aborda la función lineal completa con cierta extensión, en su representación símbolo y gráfica.
- Sólo en el texto 3 se hace una introducción al plano cartesiano, previo a la elaboración de gráficas de la función lineal.

En segundo año.

- El texto 3 dedica significativamente menos espacio al contenido asociado a los temas de variación, casi la mitad de lo que los otros dos textos dedican.
- En los textos 1 y 3 sólo se tratan funciones continuas, mientras que en el texto 2, se tratan algunas (pocas) situaciones de funciones discretas sin establecer una discusión al respecto, sólo se dan definiciones sobre línea *continua/ discreta*.

En tercer año.

- Nuevamente, el texto 3 dedica menor espacio al tema de variación lineal que en los otros dos textos.

Noción de relación funcional o función.

En general, esta noción es introducida mediante el estudio de funciones específicas, especialmente de la función lineal, de cuyo estudio se van formulando otras nociones. Sin embargo, en consonancia con el Plan de estudios, los tres textos promueven la construcción de la noción general, en ocasiones mediante definiciones. A continuación se da cuenta de este aspecto.

Primer año.

- La introducción de esta noción varía notoriamente, por ejemplo, en el texto 1 sólo introduce la expresión *función lineal* para denominar a cierto de tipo de expresiones simbólicas, que también se representan gráficamente mediante rectas en el Plano Cartesiano. En los otros dos textos se introduce la noción de *relación funcional*, pero con algunas diferencias. En el texto 2, esta noción se establece de manera intuitiva como 'la relación que existe entre dos variables tales que, al variar una de ellas, la otra también varía', ejemplificando principalmente con la variación proporcional directa entre dos magnitudes; mientras que en el texto 3, se establece que 'Dos cantidades están en *relación funcional* si para cada valor de una de ellas se puede determinar un solo valor de la otra', sin ejemplificar esta última parte de la definición. En nuestra opinión, ésta es más formal y no conveniente para este nivel.

Segundo año.

- La noción de *relación funcional* sólo se retoma en el texto 2, en los otros sólo se emplea el término *función*. En ese texto, se introduce una noción diferente, similar a la que se dio en el texto 3 en primer año.
- Sólo en los textos 1 y 2 se introduce la noción de función *creciente/ decreciente*.
- En el texto 1 se introduce la noción de variable *dependiente/ independiente* (en una función) pero no se sigue utilizando.

Tercer año.

- La noción de *relación funcional* se retoma principalmente en el texto 2 y muy brevemente en el texto 3. En el primer caso, se emplea una definición más formal 'Es una relación entre dos conjuntos de cantidades; en dicha relación, a cada valor del primer conjunto le corresponde un único valor del segundo conjunto'. En el texto 3, sólo se asocia a la representación gráfica de la función lineal.
- En los tres textos se introduce, al inicio (bloque 1), la noción de *razón de cambio* en la función lineal y la asocian con la *pendiente de la recta* y con m en la expresión $y = mx+b$. Posteriormente, prácticamente esta noción ya no la continúan trabajando.

Comentarios globales

1. En los tres textos, la función lineal se introduce en el primer año partiendo de situaciones de variación proporcional directa. Generalmente se inicia con el reconocimiento del patrón covariacional correspondiente, mediante el uso de tablas, y su generalización mediante la expresión simbólica $y = kx$, identificando k con la constante (o factor) de proporcionalidad. A continuación se introduce la representación gráfica de

esta expresión y su análisis geométrico, particularmente la asociación del parámetro k con la inclinación de la recta. Posteriormente, se introduce la función lineal completa $y = kx + b$, en el texto 1, como un desplazamiento de la recta asociada a la expresión $y = kx$ hacia arriba/ abajo, según si b es positivo/ negativo, dando lugar a una recta paralela que cruza al eje y en b, este texto se centra en los aspectos geométricos y la representación simbólica. En el texto 2, la función lineal completa se introduce mediante situaciones contextuales y mediante tablas se promueve observar el patrón covariacional y el establecimiento de su expresión simbólica pero sin introducir su gráfica. En el texto 3, esta función se introduce hasta el segundo año. En este año, los tres textos hacen un estudio más completo de la función lineal y sus diferentes representaciones. En tercer año, la función lineal se sigue tratando, principalmente para introducir otras funciones (no lineales).

2. En ningún caso, se hace notar o se propicia la observación de que, en los casos de variación proporcional directa, k es positiva, y la relación tiene sentido para valores de $x \geq 0$ y la función siempre es creciente. En cambio, cuando se introduce la función lineal completa, k puede tomar valores negativos en situaciones 'realísticas'. Otra diferencia entre las funciones $y = kx$ y $y = kx + b$ es que, aunque ambas son lineales (la primera es un caso particular de la segunda) la 'regla de tres' se cumple en la primera pero no en la segunda. Es muy probable que la falta de comprensión de este hecho contribuye al uso indiscriminado de esta regla.

3. La noción de *función* o *relación funcional* es introducida, en los textos, en diferentes momentos y con diferentes énfasis y definiciones. Aparte del trabajo específico con diferentes funciones, principalmente la lineal, hay un intento de promover una construcción intuitiva-formal de la noción de función. El texto 1, se ocupa muy poco de esta cuestión, prácticamente sólo se utiliza como un término para denominar a cierto tipo de expresiones algebraicas y sus representaciones gráficas. Por el contrario, en los textos 2 y 3, dedican más espacio a explicar esta noción dando diversas definiciones.

4. En este punto consideramos algunos aspectos sobre la razón de cambio que están al alcance de los estudiantes porque se pueden conectar con temas ya vistos y otros que se ven en tercer grado, pero que se descuidan o no se abordan y son importantes para su comprensión:

    - En virtud de que se trata de una razón, esta se puede escribirse de diferentes maneras, aunque la más usual es la razón (o tasa) unitaria, en la que el incremento en la variable independiente es uno, lo cual conduce a una representación numérica peculiar, en la que 'se esconde' la idea de 'razón', pues no se representa como razón dado que el 'denominador' es uno.
    - La razón de cambio, en contextos específicos, es una magnitud especial formada por la comparación de dos magnitudes, que siempre deben ser explicitada (por lo menos en este nivel escolar) por ejemplo, es un error decir que la velocidad de un móvil es 50; siempre deberá especificarse las unidades en que se ha medido la distancia y el tiempo, por ejemplo, kilómetros/ hora o metros/ segundo, los

cuales refieren a las magnitudes comparadas (distancia/ tiempo). Es importante que los estudiantes reconozcan que la velocidad y las diferentes razones de cambio, como una magnitud diferente de las magnitudes que la generan. En este texto, por el formato en el que se presentan las situaciones y los problemas, se infiere que sólo se pide el valor numérico de la razón de cambio. Además, generalmente en las expresiones algebraicas, las magnitudes no son representadas, por ejemplo, para representar un movimiento a velocidad constante se escribe, $d = 25 + 50t$. Para muchos de los estudiantes que se inician en este tema puede resultar confuso interpretar los términos de esta expresión, por lo cual sería más conveniente promover una escritura más explícita (una álgebra sincopada) como:

$d(metros) = 25(metros) + 50(metros/segundo) \times t(segundos)$

o

$d(m) = 25(m) + 50(m/s) \times t(s)$

haciendo notar la diferencia entre las magnitudes homogéneas (tiempo y distancia) y las no homogéneas, en este caso la velocidad (distancia/ tiempo). Desde luego esto debería hacerse durante algún tiempo, mientras los estudiantes adquieren familiaridad con la transición entre estas representaciones.

- En el caso de las funciones lineales, se debe tratar que los alumnos comprendan que la razón de cambio es constante (independientemente del intervalo considerado) y que, gráficamente se identifique con la pendiente de la recta asociada, para lo cual es importante que se observe que una forma útil de 'medir' el crecimiento o decrecimiento de una función es a través de la razón cateto opuesto/ cateto adyacente del 'triángulo característico'. Lo recomendable sería que esta noción trigonométrica fuera abordada previamente.

4.2.5. Caracterización de los problemas de variación lineal

Variación de proporcionalidad directa. En el primer año se observa que, en los tres textos, la mayoría de los problemas incluyen varias de las tareas siguientes: a) identificación de la variación proporcionalidad directa (a partir de tablas); b) completar tablas con valores faltantes; c) factor de proporcionalidad (obtención y aplicación); d) representar este tipo de variación mediante $y = kx$; e) elaboración de gráficas (a partir de tablas o de la expresión algebraica). Las primeras tres tareas se incluyen en los problemas del primero al tercer bloque, mientras que las últimas dos, se incorporan en el cuarto y quinto bloque. El primer texto contiene 8 lecciones con problemas sobre este tema, en tanto que, los textos segundo y tercero contienen 4 y 2, respectivamente.

El número de problemas que contiene cada texto es 43, 23 y 20 respectivamente. Generalmente cada problema contiene varias tareas, de modo que para este tema el total de tareas por texto es 82, 35 y 55, respectivamente. Algunos ejemplos son:

En una empresa farmacéutica se produce una solución llamada Cerbrila, a la que debe agregarse 15 % de conservadores líquidos. Si llegan 7 garrafones del mismo tamaño pero con diferentes cantidades de Cerbrila, calcula la cantidad de conservador que se debe agregar a cada uno de ellos [se proporciona una tabla incompleta]. Completa la tabla, ¿en la tabla hay variación de proporcionalidad directa? Si es así, ¿Cuál es la constante de proporcionalidad? ¿Con los datos de la tabla se establece una función lineal? Si la respuesta es afirmativa, ¿Cuál es la expresión algebraica correspondiente? En su caso, dibuja la gráfica (Texto 1, p.222).

Dado un rectángulo cuya base es constante, ¿Cómo varía su área conforme varía su altura? Si la base mide 3.5 cm, ¿Cómo varía el área dependiendo de su altura? Completar tabla. Si representamos como x la altura del rectángulo, ¿Cuál es su expresión algebraica para el área del rectángulo? ¿Hay una relación de proporcionalidad directa entre la altura y el área de los rectángulos con base constante? ¿Cuál es la constante de proporcionalidad? Y graficar (texto 3, p.336)

En un plano cartesiano grafica las siguientes relaciones directamente proporcionales, encuentra en cada una de ellas el punto $(1,\ y)$ cuyas coordenadas cumpla la igualdad que se pide: $y = 2x$; $y = 5{,}5x$; $y = 4x$; $y = \frac{1}{3}x$ (Texto 3, p.338).

En los tres textos la mayoría (70 %) de los problemas se plantean en diversos contextos, algunos de estos son: concentración en un líquido (cantidad de un compuesto por unidad de volumen); rapidez para hacer una tarea (cantidad de tarea realizada por unidad de tiempo); rendimiento de combustible (kilómetros recorridos por litro de gasolina); Cobro por trabajo realizado; mercantil (costo de cierta cantidad de una mercancía); mezclas de materiales (p. ej. arena y grava); movimiento (distancia recorrida a velocidad constante).

En segundo año, únicamente el texto 1 incluye una lección con 19 problemas (24 tareas) que incluyen tareas del tipo b), d) y e) y cuyos contextos son similares a los que se presentan en primer año. Además se agrega otro tipo de problema f), que consiste en completar tabla a partir de la gráfica. “Dada la siguiente gráfica llena los valores faltantes de la tabla” (Texto 1, p.74).

Función lineal. Sólo los textos 1 y 2 incorporan este tema en el primer año, el texto 3 lo incluye en el segundo año, los tres lo siguen abordando hasta el tercer año. Se observa que la mayoría de los problemas incluyen varias de las tareas siguientes: completar tabla y a partir de ella a) obtener la expresión algebraica, b) elaborar la gráfica, c) ambas cosas; d) Dada la expresión $y = kx + b$, con k y b conocidos, elaborar la gráfica y; e) Dada una gráfica identificar (u obtener) la expresión algebraica.

En primer año, los textos 1 y 2, contiene una lección en el bloque 4 con 3 problemas cada texto (7 y 6 tareas respectivamente) sobre este tema. Algunos ejemplos son:

> A una cisterna le caben 50 litros de agua. Al subir la llave de llenado, caen 5 litros por minuto. Considera que x es el número de minutos y que y represente la cantidad de litros de agua en la cisterna. Completa la tabla [se proporciona una tabla incompleta] y traza la gráfica correspondiente (Texto 1, p.208).
>
> Una agencia de turismo cotiza el costo de un paseo en $1000 por día de paseo. Además, agrega $1500 por el seguro del paseante. ¿Qué relación hay entre el costo del paseo y el número de días que dura el paseo? ¿Cuál es el costo de un paseo de 7 días? ¿y el de uno de 10 días? Completa la tabla (Texto 2, p.203)

En los dos textos la mayoría de los problemas se plantean en diversos contextos, algunos de estos son: mercantil (costo de cierta cantidad de una mercancía); ahorro bancario (acumulación de un ahorro en cierta cantidad de meses); llenado de recipientes (volumen llenado en cierto tiempo); costo de un alquiler (cantidad a pagar por distancia recorrida).

En segundo año, los textos 1 y 2 contienen 5 lecciones, mientras que el texto 3 sólo contiene 2 lecciones. El número de problemas por cada texto es 61, 19 y 18 respectivamente (137, 49 y 50 tareas) en su mayoría similares a los planteados en primer año. A continuación se presentan algunos ejemplos:

> Realiza la tabulación y grafica las siguientes funciones (asigna a x valores entre 3 y -3) $y = x$; $y = x + 2$; $y = -x$; $y = -x - 2$ (Texto 1, p. 177).
>
> Dadas las gráficas [de rectas que no pasan por el origen], determinar la función representada en cada una de las gráficas (Texto 1, 177).
>
> Completa la tabla y traza la gráfica de las siguientes funciones: $y_1 = \frac{1}{2}x + 2$; $y_2 = \frac{1}{3}x + 2$ (Texto 2, p.169).
>
> En la física se hace uso de las funciones lineales. Es conocida la fórmula $v = v_o + at$, que permite calcular la velocidad final v (variable dependiente) en función del tiempo t (variable independiente) conociendo la velocidad inicial v_o y la aceleración a (constante) completar los valores faltantes de la tabla y graficar (Texto 1, p.179 y 180).
>
> En los países de habla inglesa, la temperatura se mide en grados Fahrenheit (°F), y no en grados Celsius o centígrados (°C), como lo hacemos nosotros. Existe una relación entre las temperaturas en grados Celsius y Fahrenheit. La gráfica [la gráfica no pasa por el origen] siguiente representa dicha relación ¿Corresponde esta situación a una función lineal? Completen la siguiente tabla de manera que muestre la relación entre las variables C y F (Texto 2, p.157).

En los tres textos la mayoría (alrededor del 70 %) de los problemas se plantean se plantean en el contexto geométrico [3]. Algunos de los contextos en el resto de los problemas son:

[3] Nos referimos a situaciones que caen en el ámbito de la geometría analítica.

Nutrición (producción en función de un compuesto); bancario (rendimiento anual de una inversión); calentamiento en función del tiempo (una taza de café en un horno de microondas); movimiento (caída libre); llenado de recipientes (la altura en función del tiempo y el flujo).

En tercer año, los textos 1, 2 y 3 contienen 4, 5 y 2 lecciones respectivamente, sobre este tema. Cada texto contiene 30, 30 y 21 problemas respectivamente (34, 66 y 31 tareas). En este año, la función lineal generalmente aparece para introducir otras funciones (no lineales) y compararlas (principalmente en sus representaciones simbólicas y gráficas). En los tres textos se plantean problemas similares a los que se proponen en los grados anteriores. Algunos ejemplos son:

> Encuentra la ecuación de las rectas que corresponden a las gráficas dadas [son dos gráficas lineales que no pasan por el origen] (Texto 1, p.89).
>
> Completa las tablas de valores de las siguientes funciones $y = 3x - 2$; $y = 0{,}01x + 1$, para $x = 1, 2, 3, 4$ y 5: (Texto 2, pp. 201 y 202).
>
> La bomba automática de un tinaco se prende cuando éste tiene 100 litros de agua, si la bomba lleva al tinaco 50 litros de agua por minuto y el tinaco tiene capacidad para 800 litros de agua, ¿Cuántos tiempo tardará en llenarse? Grafica en un sistema de ejes coordenadas los puntos (t, l), donde t representa el tiempo y l los litros y traza la recta que por ellos. Copia la siguiente tabla en tu cuaderno y llena los datos que faltan (Texto 3, p.39).

En cuanto al contexto, la mayoría no lo tiene o es geométrico. Algunos de los pocos contextos que se presentan son: llenado de recipientes (volumen en función del tiempo, flujo constante y volumen inicial); ganancias (en función del número de artículos producidos).

4.3. Variación no lineal.

En la tabla 4.3 se presenta la distribución, en los tres textos analizados y en los tres grados, de los contenidos que, de acuerdo al Programa de la SEP (2006), comprende el tema de variación no lineal.

A continuación presentamos una síntesis sobre los aspectos más relevantes del análisis de los libros de texto, relacionados con la Variación no lineal.

4.3.1. Texto 1

Primer año

Bloque 5, lección 25 (última del libro). En esta lección se caracterizan, mediante ejemplos, las situaciones de proporcionalidad inversa y se contrastan con las de proporcionalidad directa haciendo hincapié en su expresión algebraica, dándose la siguiente definición:

Variación no lineal	Años		Texto1 Mancera	Texto2 Escareño	Texto3 Briseño
Proporcionalidad inversa	1 °	Bloques de contenidos	1(B5)	1 (B5)	1(B5)
		Lecciones de contenidos	1(L25)	1 (L37)	1(L5)
		Número de problemas	3	8	14
	2 °	Bloques c/problemas	1(B1)		
		Lecciones c/probelmas	1(L3)		
		Número de problemas	1		
	3 °	Bloques c/problemas	1(B3)	1 (B3)	1(B3)
		Lecciones c/probelmas	1(L23)	1(L14)	1(L4)
		Número de problemas	6	2	1
Cuadrática	3 °	Bloques de contenidos		1(B3)	1(B3)
		Lecciones de contenidos		1(L19)	1(L4)
		Bloques c/problemas	1(B3)	1(B3)	3(B:2y5)
		Lecciones c/problemas	3(L:22,23y24)	2(L:18)	3(L:1y4)
		Número de problemas	7	12	28
Cúbica	3 °	Bloques c/problemas	1(B3)	1(B3)	1(B3)
		Lecciones c/problemas	1(L23)	2(L18 y L19)	1(L4)
		Número de problemas	2	3	4
Exponencial	3 °	Bloques de contenidos		1(B4)	
		Lecciones de contenidos		1(L24)	
		Bloques c/problemas	1(B4)		1(B4)
		Lecciones c/problemas	2(L:30y31)		1(L4)
		Número de problemas	9	8	10
Resumen		Bloques de contenidos	1 °: B:5	1 °: B: 5 3 °: B: 3 y 4	1 °: B:5 3 °: B:3
		Lecciones de contenidos	1 °: L: 25	1 °: L: 37 3 °: L:19y24	1 °: L:5 3 °: L:4
		Bloques c/problemas	2 °: B: 1 3 °: B: 3 y 4	3 °: B:3	3 °:B:2,3,4y 5
		Leccione c/problemas	2 °: L: 3 3 °:L:22,23,24,30y31	3 °:L:14,18y19	3 °:L:1,4,4y4
		Número de problemas	1 °: 3 2 °: 1 3 °: 24	1 °: 8 3 °: 25	1 °: 9 3 °: 43
		Número de páginas	1 °: 8	1 °: 5 3 °: 36	1 °: 8 3 °: 36

Cuadro 4.3: Distribución de contenidos relacionados con variación no lineal

> Cuando la variación que existe entre dos cantidades x y y es directa, la expresión algebraica correspondiente es $y = kx$, donde k es una constante. Cuando la expresión algebraica es $y = \frac{k}{x}$, se dice que hay *variación proporcional inversa* (Mancera, 2006, p. 270).

También se utilizan las tablas de diferentes parejas de valores para observar el patrón de la variación y observar que el producto de valores correspondientes es constante. No se estudia la representación gráfica.

Segundo año.

Prácticamente no hay un tratamiento de las funciones no lineales, solamente se plantea un problema de variación de proporcionalidad inversa al inicio de la lección 3 (B1) y se formula la pregunta ¿Qué es una variación inversamente proporcional? Esta lección está dedicada a temas de proporcionalidad directa.

Tercer año.

Bloque 3, lección 17. Trata sobre diferentes relaciones (funcionales) entre variables y su aplicación en diferentes contextos. De manera aislada, aparecen algunas situaciones que tienen asociadas funciones lineales, cuadráticas y cúbicas, pero se enfoca a su representación tabular y algebraica, y la determinación de valores a partir de estas representaciones.

Bloque 3, lecciones 22 y 23. Estas lecciones están centradas en el estudio de las funciones cuadrática, cúbica, inversa y exponencial. La primera lección se centra en situaciones asociadas a funciones cuadráticas: llenado de recipientes (volumen-altura), movimiento con aceleración constante, caída libre. Aparecen también dos situaciones en las que se da un comportamiento exponencial en un contexto de interés compuesto; en el primer tipo de situaciones se manejan tablas, fórmulas y gráficas, mientras que en la segunda, sólo se pide llenar o elaborar una tabla y hacer la gráfica. En esta lección hay una alusión aislada a la 'razón de cambio'.

La segunda lección no trata propiamente del estudio de funciones no lineales, más bien se hace un estudio detallado de expresiones algebraicas (en dos variables) y los lugares geométricos asociados, principalmente de la ecuación cuadrática y, en menor medida, de la cúbica y la inversa ($xy = k$). De la ecuación cuadrática, se hace un estudio más completo de sus diferentes expresiones y sus gráficas: $y = ax^2+bx+c$ (fórmula general), $y = p(x-h)^2+k$ (ecuación canónica de la parábola 'vertical') y, $y = a(x-r)(x-s)$ (ecuación factorizada). A las funciones cúbica e inversa se dedica menos espacio pero, además de los casos simples ($y = x^3$ y $y = \frac{1}{x}$ se tratan los casos $y = p(x-h)^3 + k$, $y = \frac{p}{(x-h)} + k$.

Bloque 4, lección 24. En esta lección se analizan situaciones asociadas a gráficas continuas cuyo comportamiento cambia en diferentes intervalos, se combinan comportamientos lineales con diferentes pendientes, lineales con no lineales, no lineales con diferentes comportamientos (concavidades diferentes). Se analizan intervalos de crecimiento/ decrecimiento, mayor/ menor variación, sin variación, valor máximo y mínimo.

Bloque 4, lección 30. Se estudian los dos tipos de crecimiento básicos: el crecimiento aritmético o lineal dado por la función $N = N_0 + CT$ (y su equivalente $y = at + y_0$) en donde N representa la cantidad total, N_0 la cantidad inicial, C es una cantidad constante que se incrementa en cada intervalo de tiempo T, y; el crecimiento geométrico o exponencial dado por la función $N = N_0 C^T$ (y su equivalente $y = y_0 a^t$) en donde N y N_0 tienen la misma interpretación, pero ahora C es una constante que se eleva a la potencia T. En este caso el incremento en N se da por multiplicación reiterada de C (*razón*), dependiendo de la magnitud del incremento de T (*en unidades*). En este caso, las unidades de T se refiere a periodos de tiempo (de igual tamaño) para los cuales, la cantidad acumulada al inicio del periodo se vuelve a multiplicar por C, al final del periodo (como en el caso del interés compuesto). Estos casos se estudian en una situación de una población de árboles en la que se plantea los dos tipos de crecimiento, planteándose actividades y problemas en contextos de préstamos con intereses, crecimiento poblacional y secuencias numéricas.

4.3.2. Texto 2

Primer año.

En la lección 37 (B5) se introduce la proporcionalidad inversa con un enfoque relacional conjuntista, la cual se define como:

> *Proporcionalidad inversa.* Es la relación entre dos conjuntos de cantidades que satisface la siguiente propiedad: el producto de una cantidad del primer conjunto por la correspondiente del segundo, es una constante (*Constante de proporcionalidad inversa*) (Escareño, 2006, p. 258).

El tratamiento de esta relación sólo se trabaja con tablas, no se introduce su gráfica y la expresión algebraica sólo se emplea como representación simbólica de la relación. Se analizan situaciones como, la relación entre la velocidad y el tiempo en un movimiento en el que la distancia permanece constante o, número de impresoras y el tiempo para realizar un mismo trabajo de impresión.

Segundo año.

En este texto no se abordan contenidos de variación no lineal (en el Programa de la SEP no lo incluye).

Tercer año.

El tema 14 (B3), titulado *relaciones funcionales* inicia con una situación de maximización que conduce a una función cuadrática, también incluye una situación de variación proporcional inversa (sólo considera tablas y fórmula). Se da la misma definición de proporcionalidad inversa que se dio en el libro de primer año: "Es la relación entre dos conjuntos de cantidades que satisface la siguiente condición: *el producto de una cantidad del primer conjunto por la correspondiente del segundo, es una constante.*"

El tema 18 (B3) está dividido en dos partes. En la primera, a partir de situaciones geométricas (área, perímetro y volúmen de figuras planas y sólidos) se piden gráficas asociadas con las funciones: lineal (2), inversa (2), cuadrática (1) y cúbica (1); también se pide analizar si la función es creciente/ decreciente, si la gráfica correspondiente pasa por el origen del plano cartesiano y, si a incrementos iguales de una de las variables corresponden incrementos iguales de la otra.

En la segunda parte hay dos tipos de tareas, sólo el primero (tres tareas) incluye funciones no lineales. Se trata de hacer corresponder una tabla dada con la gráfica correspondiente (entre dos opciones) de las seis gráficas que aparecen sólo una es lineal.

El tema 19 (B3) se divide en 5 partes. En la primera parte, se estudian las gráficas de las funciones $y = ax^2$ (parábola), $y = ax^3$ y $y = ax^4$ para valores positivos de a (1, < 1 y > 1); en la segunda parte, a las expresiones anteriores se suma o resta una constante, haciéndose notar en la gráfica un desplazamiento, hacia arriba/ abajo, de la curva; en la parte tercera, se analizan las expresiones, únicamente para la cuadrática, que dan lugar a desplazamientos de la curva hacia la derecha/ izquierda ($y = (x + h)^2$, con h positiva o negativa) y aquellas que combinan los dos tipos de desplazamiento, vertical y horizontal ($y = (x + h)^2 + k$), introduciéndose los términos vértice y eje de simetría; en la cuarta parte, se estudian las expresiones $y = x^2 + bx + c$, $y = (x - p)(x - q)$ y la manera de transformarlas a la expresión $y = (x + h)^2 + k$; en la quinta parte, se plantean situaciones de aplicación de la función cuadrática, dos son sobre 'caída libre' y otras dos son sobre 'tiro parabólico'.

En el tema 24 (B4) se introduce la función exponencial (tablas, gráfica y expresión algebraica) como un modelo de crecimiento particular comparándolo con el crecimiento aritmético que se modela con una función lineal. Después de algunos ejemplos, la función exponencial se define mediante la expresión algebraica $y = a^x$, donde a es constante y x es variable (p. 203).

En este caso podría haberse dado una caracterización más fenomenológica en base al análisis de los ejemplos, es decir, se trata de situaciones en las que, una cantidad inicial C_0 se multiplica por una cantidad a cada vez que x se incrementa en uno. A diferencia del crecimiento aritmético, en el que, a C_0 se le suma la cantidad a cada vez que x se incrementa en uno. También habrá que observar que la función $y = a^x$ no siempre es creciente, particularmente cuando $0 < a < 1$.

4.3.3. Texto 3

Primer año.

En la lección 5 (B5) solamente se abordan situaciones de variación de proporcionalidad inversa, analizándose mediante tablas el patrón de este tipo de variación y presentando la definición siguiente:

> Decimos que dos cantidades 'x' y 'y'son *inversamente proporcionales* si al variar ambas su producto se mantiene constante: $xy = constante$ (Briseño, 2006, p. 343).

Se hace un uso extensivo de tablas y sólo en una situación se introduce la gráfica (llenado de una cisterna).

Segundo año.

En este texto no se aborda ninguna situación relacionada con el tema de variación no lineal, de acuerdo al programa de estudio tampoco se menciona acerca de este tema.

Tercer año.

Al final del bloque 1, hay una sección llamada 'punto de encuentro' (dos páginas) en las que se analiza la caída libre como un caso de variación no lineal (rapidéz variable) el cual conduce a una función cuadrática y su gráfica correspondiente. Se centra en la noción de velocidad promedio (para diferentes intervalos x) e introduce la noción de velocidad (rapidez) instantánea, la cual determina mediante un proceso de aproximación basada en la representación gráfica de secantes a la curva y cálculo de valores de velocidades promedio, pero no utiliza la noción de *razón de cambio* que fue introducida previamente, en ese mismo bloque.

La lección 1 (B2) es muy confusa, al inicio contiene un primer acercamiento al estudio gráfico de la expresión $ax^2 + bx + c$ (sin igualar a y) a la que llama *cuadrática o de segundo grado* y cuya gráfica es una parábola, en seguida introduce $y = ax^2 + bx + c$ y le llama *ecuación de la parábola*, pero no emplea el término 'función', aún cuando se hace una breve alusión a la razón de cambio (sin nombrarla). También analiza la gráfica de $y = x^3$. Más adelante, le llaman *ecuación cuadrática* a las expresiones de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ y el resto de la lección (la mayor parte) lo dedican a la solución de ecuaciones de segundo grado.

En la lección 3 (B3) se analizan diferentes tipos de funciones asociadas diversas situaciones (Física, Biología, Economía y otras disciplinas) entre las que aparece dos funciones cuadráticas y una exponencial. Para la primera, se dan la expresiones algebraicas y una de las gráficas y para la segunda se pide llenar una tabla y a partir de esta elaborar la gráfica. En otra parte de la lección se analizan otras situaciones que tienen asociadas funciones no lineales y para las que se da la gráfica o se pide que se elabore (llenado de recipientes con diferente forma, abundancia de cierto tipo de arbusto/ altura sobre el nivel del mar).

En la lección 4 (B3) se hace un análisis de la ecuación cuadrática $y = ax^2+bx+c$ (la ecuación de la parábola) y su gráfica para los diferentes valores que pueden tomar los parámetros a, b y c. También se retoma el tema de solución de ecuaciones de segundo grado (en una variable) y su relación con los puntos de intersección de la parábola asociada. Además, de manera más breve, se analizan algunos casos de gráficas de las 'ecuaciones' cúbica e inversa. En esta lección, el tratamiento es más bien con un enfoque de geometría analítica: el estudio de los lugares geométricos asociadas a una ecuación algebraica en dos variables, sin hacer una conexión con nociones variacionales.

En lección 4 (B4) se estudian los dos tipos de crecimiento básico: el aritmético (lineal) y el geométrico (exponencial). A partir de su caracterización y tratamiento de situaciones y representaciones tabulares y con un enfoque de sucesiones numéricas, se llega a las fórmulas correspondientes para el n-ésimo término: $a + bn$ para la primera y, ab^n para la segunda. No se introducen las gráficas correspondientes ni la terminología de funciones y, aunque, en algunos casos, se hace referencia a la noción de tasa (de crecimiento, de interés) no se relaciona con la noción de razón de cambio.

4.3.4. Comparación de los tres textos

Distribución de contenidos.

Similitudes entre los tres textos

Primer año

- En los tres textos se aborda la variación proporcional inversa casi al final del último bloque, principalmente mediante el uso de tablas, a partir del cual se identifica el patrón y se establece la expresión algebraica asociada a este tipo de variación ($y = \frac{k}{x}$ o $xy = k$). En los textos 2 y 3 se dan definiciones similares a "dos cantidades x y y son *inversamente proporcionales* si al variar ambas su producto se mantiene constante".

Segundo año.

- De acuerdo con el Programa de Estudios de la SEP, no se abordan contenidos sobre variación no lineal. Sólo en el texto 1 se aborda una situación sobre variación proporcional inversa (al inicio de la L3).

Tercer año.

- Se abordan las funciones no lineales (cuadrática, cúbica, inversa y exponencial) en sus tres representaciones (tablas, fórmula y gráfica). De estas funciones, es a la cuadrática a la que se le dedica mayor espacio, seguida de la inversa y la exponencial, la cual se introduce en la última lección (relacionada con variación), dedicada al crecimiento aritmético y geométrico (exponencial).

Diferencias.

Tercer año

- En los textos 1 y 3, se incluyen funciones asociadas a gráficas continuas cuyo comportamiento cambia en diferentes intervalos, se combinan comportamientos lineales con diferentes pendientes, lineales con no lineales, no lineales con diferentes comportamientos (concavidades diferentes).

Noción de función

En el tratamiento de las funciones no lineales, en los tres textos, no se agrega algo diferente acerca de la noción de función a lo ya consignado en los contenidos de variación lineal. Más bien, desaprovechan muchas oportunidades para el fortalecimiento de esta noción, al no dar continuidad a la aplicación de nociones que previamente se han introducido, particularmente, las nociones *razón de cambio* e intervalos de *crecimiento/ decrecimiento* de una función, las cuales a su vez están muy relacionadas entre sí. Estas nociones tienen mayor relevancia para el caso de las funciones no lineales y son fundamentales para el entendimiento de la variación.

Finalmente, se distinguen dos enfoques en el contenido: uno funcional y el otro geométrico (analítico). En el primero se abordan situaciones en contextos diversos (física, biología, economía, etc.) y se hace un uso del término función. En el segundo, la atención se centra en el estudio de las expresiones algebraicas y los lugares geométricos asociados en el plano cartesiano. Estos dos enfoques en ocasiones se entremezclan de manera confusa.

Comentarios.

- Se observa una separación de la variación de proporcionalidad inversa (finales del B5 de primer año) con las otras funciones no lineales como la cuadrática, cúbica y la exponencial (principios del B1 de tercer año), a nuestro criterio la variación de proporcionalidad inversa debería de estar ubicado a principios del bloque 1 de tercer año para tener una continuidad con las otras funciones no lineales antes mencionadas.
- En los textos 1 y 2, se plantean situaciones de función creciente y decreciente, mientras que en el texto 3 no se aborda ninguna situación.
- En los tres textos no se da continuidad a nociones como variable dependiente/ independiente y de situaciones de continuidad/ discontinuidad (solamente en el apartado de variación lineal se plantean estas nociones).

4.3.5. Caracterización de los problemas de variación no lineal

Variación de proporcionalidad inversa. En los tres textos, este tema sólo se aborda en primer y tercer año. La mayoría de los problemas incluyen varias de las tareas siguientes:

a) identificación de la variación proporcionalidad inversa (a partir de tablas); b) completar tablas con valores faltantes; c) factor de proporcionalidad inversa (obtención); d) representar este tipo de variación mediante $y = \frac{k}{x}$ o $xy = k$; e) elaboración de gráficas (a partir de tablas o de la expresión algebraica). En los textos 1 y 2 los problemas no incluyen tareas del tipo e), mientras que en el texto 3, sólo se incluye un problema de este tipo. En tercer año, la mayoría de los problemas incluyen sólo las tareas tipo d) y e).

En primer año, en los tres textos contienen 1 lección, sobre este tema. Cada texto contiene 3, 8 y 14 problemas respectivamente (3, 10 y 14 tareas). Algunos ejemplos son:

> Cuatro personas salieron a recorrer una distancia de 780 m. una da pasos de 0.5 m, otra de 0.6 m, otra de 0.75 m y otra de 0.8 m. ¿cuántos pasos de cada una para recorrer los 780 m? ¿Hay variación proporcional directa o inversa entre el número de pasos y la longitud de cada paso? ¿Cuál es la fórmula que relaciona las dos cantidades? (Texto 1, p.271).
>
> En una imprenta se imprimen 100 000 libros en 8 horas si trabajan 6 impresoras al mismo tiempo. Es decir, la impresión de 100 000 libros requiere que las impresoras trabajen 48 horas en total. Completar tabla y encontrar la constante de proporcionalidad inversa (Texto 2, p.259).
>
> Una toma de agua con un caudal de 18 litros por minuto tarda 8 horas en llenar una cisterna, completar tabla y graficar [se dan ocho valores diferentes del caudal] (Texto 3, p. 344)

En los tres textos la mayoría de los problemas se plantean en algunos de los siguientes contextos: alquiler (Costo fijo, número de contribuyentes y contribución por persona, variables); llenado de recipientes (Volumen fijo, diámetro de salida y tiempo de llenado, variables); geométrico (Área fija, ancho y largo de un rectángulo, variables).

En tercer año, los tres textos contienen 1 lección, sobre este tema. El número de problemas por cada texto es 6, 2 y 1 respectivamente (12, 4 y 3 tareas). Algunos ejemplos son:

> ¿Qué le sucede a la gráfica de $y = \frac{1}{x}$ cuando le sumas o restas una cantidad positiva? (Texto 1, p. 272).
>
> Cuando viajamos en un vehículo, el tiempo que tardamos en recorrer una distancia dada depende de la velocidad promedio con que se desplaza el vehículo. La siguiente tabla muestra el tiempo requerido para avanzar 150 km como función de la velocidad promedio (v está dada en kilómetros por hora, y t, en horas). ¿son magnitudes que varían en proporción inversa o directa? ¿Qué formula relaciona la variación del tiempo (t) en función de la velocidad promedio (v)? (Texto 2, p. 117).
>
> Relaciona cada una de las siguientes gráficas [dadas tres gráficas] con la ecuación que corresponda: $y = \frac{1}{x}$, $y = 2 + \frac{1}{x}$, y $y = -\frac{1}{x} + 1$ (Texto 3, p.208)

La mayor parte de los problemas se plantean en el contexto geométrico, sólo en el texto 2 un problema tiene contexto.

Las siguientes funciones (cuadrática, cúbica y exponencial) sólo se abordan, en los tres textos, en tercer año.

La función cuadrática. Los textos 1 y 3 contienen 3 lecciones, mientras que el texto 2 contiene 2, sobre este tema. El número de problemas por cada texto es 7, 28 y 12 respectivamente (19, 60 y 36 tareas). La mayoría de estos incluyen varias de las tareas siguientes: completar tabla y a partir de ella a) obtener la expresión algebraica, b) elaborar la gráfica y; c) Dada una gráfica identificar (u obtener) la expresión algebraica. Algunos ejemplos son:

> Un objeto se lanza hacia arriba con una velocidad de 17 m/s y la altura se calcula con la expresión $y = 17x - \frac{1}{2}(9{,}8)x^2$ ¿Por qué? Elabora una tabla que inicie en cero y te permita aproximar el valor mayor de la altura y el tiempo en el que regresa a la altura desde donde se lanzó y grafique los resultados de la tabla (Texto 1, p.258).
>
> Determina la ecuación que corresponde a las gráficas [se dan dos]. ¿Qué sucede a la gráfica de $y = x^2$ si multiplica a x^2 por un número mayor que uno y por un número positivo menor que uno? (Texto 1, p.266).
>
> La gráfica de la función $y = x^2$ es una curva que llamaremos parábola; esta parábola pasa por el origen del plano. La siguiente tabla presenta algunos valores de las variables de esta función. ¿Cómo son las gráficas de las funciones $y = x^3$ con respecto de la de $y = x^2$? ¿En qué se parecen? (Texto 2, p.144).
>
> Debajo de las siguientes ecuaciones [$y = x^2$, $y = -2x^2$, $y = -2x^2 + 2$, $y = 3x^2 + 1$ y $y = -2x^2 - 1$] aparecen varias gráficas (5). Determinen cuál ecuación corresponde a cada gráfica. (Texto 3, p.197)

En los tres textos la mayoría (alrededor del 70 %) de los problemas se plantean en el contexto geométrico. Algunos de los contextos en el resto de los problemas son: velocidad inicial/ tiempo/ gravedad/ altura (caída libre); caída libre con la expresión $h = v_0t + \frac{1}{2}gt^2$ (contexto: velocidad inicial, gravedad y tiempo); lanzamiento de una pelota de beisbol $y = -4{,}9t^2 + 14{,}7t$ (t= tiempo); caída de una piedra en el pozo $y = -4{,}9x^2$ (donde x= tiempo y y=metros descendidos por la piedra); al patear con cierta fuerza un balón de futbol $y = \frac{x^2}{36} + x$ (donde x=distancia horizontal que recorre el balón y y=altura que alcanza sobre el suelo) y área 'cm^2'/ lado 'cm'(área de un cuadrado y completar tabla).

La función cúbica. En los textos 1 y 3 contienen 1 lección y el texto 2 contiene 2 lecciones. El número de problemas por cada texto es 2, 4 y 3 respectivamente (6, 12 y 9 tareas). Se observa que la mayoría de los problemas incluyen varias de las tareas siguientes: completar tabla y a partir de ella a) elaborar la gráfica; b) Dada la expresión, elaborar la gráfica y; c) Dada una gráfica identificar (u obtener) la expresión algebraica. Se menciona algunos ejemplos:

> Determina las ecuaciones de las gráficas [dadas 2 gráficas]. ¿Qué le sucede a la gráfica de $y = x^3$ cuando le sumas o restas una cantidad positiva? (Texto 1, p.271 y 272).
>
> Completa la siguiente tabla para los valores de las funciones $y = 2x^3$ y $y = 3x^3$. Utiliza los valores anteriores para trazar las gráficas de $y = x^3$, $y = 2x^3$ y $y = 3x^3$ en un plano cartesiano cada uno (Texto 2, p.146).
>
> Relacione cada gráfica (tres gráficas en un mismo plano) de las siguientes con la ecuación que corresponda $y = x^3$, $y = 2x^3$ y $y = \frac{1}{2}x^3$ (Texto 3, p.206).

En los tres textos todos los problemas se plantean en el contexto geométrico.

Función exponencial. En los textos 2 y 3 contiene 1 lección, mientras que el texto 1 contiene 2 lecciones, sobre este tema. El número de problemas por cada texto es 8, 10 y 9 respectivamente (24, 10 y 10 tareas). Se observa que la mayoría de los problemas incluyen varias de las tareas siguientes: completar tabla y a partir de ella a) obtener la expresión algebraica y; b) elaborar la gráfica (Texto 1 y 2). Se menciona algunos ejemplos:

> Completa las tablas de valores de las siguientes funciones, para x=0, 1, 2, 3, 4 y 5. $y = 5^x$ y $y = 100x + 500$. Traza la gráfica de cada una de las funciones anteriores. ¿Qué diferencias encuentran entre la gráfica de una función de crecimiento aritmético y una de crecimiento exponencial? (Texto 2, p. 202 y 203).
>
> Alicia ha logrado ahorrar \$1000.00, y quiere depositar su dinero en un banco que ofrece un interés compuesto de 2 % mensual, con renovación automática cada mes. ¿A cuánto ascenderá su cuenta al cabo de 4 meses? Registra tus cálculos en la tabla dada y traza la gráfica de la función (Texto 2, p.206).
>
> De acuerdo con los datos del INEGI, la población en México creció de 1995 a 2000 con una tasa promedio de 1.6 % anual, mientras que de 2000 a 2005 creció con una tasa promedio de 1 % anual. La población en México en el año 2000 era casi de 100 millones de personas. Si se hubiera mantenido la tasa de crecimiento de 1.6 % anual, ¿Cuántos habitantes hubiera tenido el país en 2001? Completa la tabla (Texto 3, p.256)

En los tres textos la mayoría de los problemas se plantean en diversos contextos y de manera similar, algunos de estos son: periodo/ número de árboles plantados (plantar árboles en un bosque); préstamo en el banco/ tasa de interés mensual; tiempo ‘t’/ número de bacterias ‘n millones’(bacterias de una colonia en crecimiento); población ‘en millones de habitantes'/ años (tasa de crecimiento poblacional); tasa de interés sobre un préstamo con los contextos: mes/ deuda al principio del mes/ 1 % de interés/ pago/ deuda al final del mes.

Problemas sobre otras nociones

En los tres textos, se observa que la mayoría de los problemas incluyen varias de las tareas siguientes: a) completar tabla; b) elaborar la gráfica; c) identificar la variable independiente/ dependiente; d) identificar la función creciente/ decreciente, e) obtener la razón de cambio y f) mediante una gráfica (sin expresión algebraica). Se menciona algunos ejemplos:

Variables dependiente/ independiente. Solamente se plantean problemas en primero y segundo año (Texto 1 y 2), incluyen tareas del tipo a), b) y c), se menciona algunos problemas, son:

> Se tiene un cuadrado al que se modifica la longitud del lado. ¿Cómo varía el valor de su perímetro? Indica cuál es la variable dependiente y la independiente. Elabora una gráfica (segundo año, Texto 1, p.181).
>
> Un tinaco que tiene 30 litros de agua, recibe de una llave 6.5 litros por minuto ¿Cómo se representa la cantidad de agua que hay en el tinaco en un minuto cualquiera, si representamos "un minuto cualquiera" con la letra x? Completa la tabla ¿Qué cantidades no varían al realizar los cálculos? ¿Cuáles con las cantidades que son variables en esta situación? ¿Cuál de las dos cantidades varía en función de la otra? (primer año, Texto 2, p.206).
>
> Se sabe que la preparación de un determinado postre implica un gasto fijo de \$5 para algunos ingredientes básicos, y un gasto adicional por persona de \$3. ¿Cómo podrás determinar el costo que implica elaborar postres para diferentes cantidades de personas? El número de personas, a esta cantidad se le denomina variable independiente y finalmente obtenemos el resultado de los cálculos y por lo tanto el valor de la otra variable, que se determina a partir de la variable independiente, por ello se le denomina variable independiente (segundo año, Texto 1, p.206).

Noción de función creciente y decreciente. Solamente se plantea un problema por cada texto (Texto 1 y 2) en segundo año, incluyen tareas del tipo a) y d), se menciona un problema, es:

> Compre una planta que tenia 15 cm de altura. La planté y creció a razón de 4 cm por mes. Completa la tabla, ¿Cómo se representa la regla para calcular la altura de la planta (h) en un mes cualquiera, si representamos "un mes cualquiera con la letra n"? ¿Cuál de las dos cantidades varía en función de la otra? ¿Esta función es creciente o decreciente? (Texto 2, p. 148).

Otro contexto: Cuota general de $50 por el servicio/ se agrega otra cantidad que corresponde al 40 % del peso del paquete (En una empresa dedica al envío de paquetes de una ciudad a otra, se trata de función creciente/ decreciente (Texto 1, p.188).

Noción de Razón de cambio. En los tres textos, solamente se plantea problemas en tercer año, incluyen tareas del tipo a), b) y e), se menciona algunos problemas, son:

> En un viaje en automóvil observas que el marcador de kilometraje indica 65243 cuando el reloj marca las 15:00 horas y posteriormente, a las 17: horas, el kilometraje es 65423 [dada la gráfica con los contextos: distancia 'km'/ tiempo 'horas'] ¿Cuál es la razón de cambio en el intervalo de las 15:00 a las 17:00 horas? Encuentra la expresión algebraica correspondiente a la recta (Texto 1, p. 91).
>
> Al empezar la semana, Alicia compró 5 kg de alimento para sus gallinas. Cada día les da 1/2 de kg de alimento. Completa la siguiente tabla, que representa los cambios en la cantidad de alimento conforme pasan los días ¿Cuál es la razón de cambio en la cantidad de alimento? Usa el siguiente plano cartesiano para trazar la gráfica de esta situación (Texto 2, Pp. 66 y 67).

En los tres textos, la mayoría de los problemas se plantean en diversos contextos y de manera similar, algunos de estos son: distancia recorrida 'metros'/ tiempo empleado 'minutos'(se refiere al razón de cambio del movimiento al cociente); tiempo 'minutos'/ Material A, Material B y Material C (cambio de temperatura en grados Celcius); estatura/ tiempo (tasa de crecimiento); temperatura/ tiempo (velocidad de enfriamiento y de calentamiento); distancia/ tiempo (velocidad); velocidad/ tiempo (aceleración); costo/ distancia (costo de servicio de mensajería de acuerdo con la distancia recorrida y el tipo de transporte empleado);litros/ minutos (llenado de un tinaco); cantidad de agua 'litros'/ tiempo 'minutos'(llenado de dos tinacos, se refiere a la razón de cambio) y base/ altura (base del triángulo y su altura 'razón de cambio del área respecto a la altura').

Secciones rectas y curvas. Se plantean problemas y tareas en segundo (gráficas con segmentos de rectas) y tercer año (gráficas con segmentos de rectas y curvos), incluye tarea del tipo f), se menciona algunos problemas, son:

> Considera la siguiente gráfica [dada una gráfica de segmentos rectos y curvos] que corresponde al viaje de una persona en su vehículo. En el eje vertical se representa la distancia recorrida y en el horizontal el tiempo empleado en el recorrido. Cada unidad del eje horizontal representa 10 minutos de recorrido y en el eje vertical cada unidad representa 100 m. identifica los momentos en que pudo mantener una velocidad constante. Identifica los intervalos donde no aceleró el vehículo. Señala los intervalos donde avanzó más en todo el recorrido y donde avanzó el menor tramo. Calcula el tiempo que empleo en el recorrido y ¿Cuánta distancia recorrió? (Texto 1, p. 289).

> Imaginemos que una isla volcánica surgió en el año 1900 y que, poco a poco, fueron habitándola diversas especies de aves. El número de especies que la han habitada se da en la siguiente tabla [dada una tabla incompleta]. ¿Cuál de las siguiente gráficas [dadas 3 gráficas de segmentos rectas y curvas] muestra esta situación? (Texto 2, p. 162).
>
> Tres de las siguientes gráficas [dadas cuatro gráficas] representan la altura del nivel del líquido de los recipientes de abajo al ir llenando cada uno de los recipientes [dadas tres recipientes] con rapidez constante. Determina a qué recipiente corresponde cada gráfica (Texto 3, p. 192).

En los tres textos, la mayoría de los problemas se plantean en diversos contextos y de manera similar, algunos de estos son: temperatura '°C'/ tiempo 'minutos'(variación de temperatura respecto al tiempo de un liquido en un recipiente mientras es calentado); volumen 'cm^3'/ tiempo 'minutos'(variación del volumen del mismo liquido [contexto anterior] en función del tiempo); índice de actividad lectora/ tiempo 'horas'(actividad lectora 'medida con relación al tiempo dedicado a leer y escribir mensaje o a pensar en discursos, conversaciones, etc.'); distancia 'cm'/ tiempo 'minutos'(recorrido de un modelo de avión lanzado por un estudiante); año/ número de especies (número de especies que han quedado en la isla) y tiempo 'horas'/ alcohol en la sangre 'mg/100 ml'(nivel de alcohol en la sangre después de tomar tres vasos de cerveza).

4.4. Revisión de Libros de Texto del Plan 1993

Los textos que se revisaron de este Plan son:

Texto1: Waldegg G., Villaseñor R. y Garcia V. (1998). Matemáticas, textos para 1, 2 y 3 año de secundaria. Editorial: Iberoamerica, S. A de C. V.

Texto 2: Zúñiga E., Zúñiga H., Zúñiga, J, y Serralde E. (1994). Matemáticas, textos para 1, 2 y 3 año de secundaria. Editorial: EPSA.

4.4.1. Proporcionalidad (Sin variación).

De acuerdo a los Programas de estudio de la SEP (1993) los contenidos que considera en proporcionalidad son los siguientes:

a) Proporcionalidad directa
   Problemas de valor faltante.
   Reparto proporcional.

b) Proporcionalidad Inversa
   Situaciones y problemas de proporcionalidad inversa.

La tabla 4.4 contiene la distribución de contenidos por grado, de acuerdo al Programa de la SEP en el tema de proporcionalidad. La organización de la tabla es similar a las que se elaboraron para el Plan 2006. En este caso, los temas y las unidades equivalen a los ejes y las lecciones de este Plan; Los temas se simbolizan: TA (Tema de Aritmética), T Al. (Tema de Álgebra) o TTI (Tema de tratamiento de la información) por ejemplo: 1(TA), el número 1 significa que sólo hay un tema que está ubicado en el Tema de Aritmética. Las unidades (o lecciones) de contenidos o que incluyen problemas se simbolizan con U; por ejemplo: 3 (U.16, U.17 y U.18), el número 3 significa que son tres unidades de contenidos que están ubicados en las unidades 16, 17 y 18.

En la última fila de la tabla, en el apartado de resumen, se cuantifica por cada año el total de temas de contenidos, temas con problemas, unidades de contenidos, unidades con problemas, número de páginas y el número de problemas que se abordan en los temas de valor faltante y reparto proporcional.

			Texto1 Waldegg	Texto2 Zúñiga
Contenidos	Años			
Valor faltante	1 °	Bloques de contenidos	1(T.A)	1(T.A)
		Lecciones de contenidos	3(U:16,17y18)	1 (U.3)
		Bloques c/problemas		1(T.A)
		Lecciones c/problemas		1(U.1)
		Número de problemas	10	10
Reparto proporcional	1 °	Bloques c/problemas	1(T.A)	1(T.A)
		Lecciones c/problemas	1(U.17)	1(U.1)
		Número de problemas	1	5
Resumen		Bloques de contenidos	1 °: T:T.A	1 °: T:T.A
		Lecciones de contenidos	1 °: U:16,17y18	1 °: U:3
		Bloques c/problemas	1 °: T:T.A	1 °: T:T.A
		Lecciones c/problemas	1 °: U:17	1 °: U:U.1
		Número de problemas	1 °: 11	1 °: 15
		Número de páginas	1 °: 22	1 °: 11

Cuadro 4.4: Distribución de contenidos de proporcionalidad 1993

Primer año

Texto 1. Este texto dedica tres unidades (16, 17 y 18) al estudio de proporcionalidad directa sin variación y de reparto proporcional. No se maneja el tema 'problemas de valor faltante' pero si se presentan situaciones que se ubicarían en este rubro.

En la primera unidad se plantean situaciones de mezclas que requieren, sobre todo del uso de razones como 2:3, 2 a 3 o 2/3, sólo se utiliza la representación tabular.

En la segunda unidad, primero se plantea un problema de reparto proporcional:

> Durante las pasadas vacaciones tres amigas, Rosa, Azul y Blanca, hicieron collares para vender. Rosa hizo 13, Azul 10 y Blanca 12. Al venderlos obtuvieron 280 de ganancias, que quieren repartir de manera proporcional al trabajo que cada uno realizo. ¿Cuánto le tocara a cada uno? (Waldegg, 1998, p.95)

Posteriormente, se da la definición de proporción como "la igualdad de dos razones", las cuatro cantidades que intervienen son proporcionales y por último se plantean situaciones de valor faltante, productos cruzados y verificar por el método de producto cruzado si son equivalentes las fracciones.

En la tercera unidad se plantean situaciones sobre porcentajes, como parte del tema de proporcionalidad. Por ejemplo: "el 60 % de una cantidad se obtiene multiplicando esa cantidad por 60 y dividiéndola entre 100; es decir, el 60 % de 800 es 480. Esta regla se obtiene porque se plantea la proporción siguiente, $\frac{100}{600} = \frac{800}{x}$, aplicando el método de producto cruzado se obtiene el valor desconocido".

Texto 2. Se plantean situaciones de valor faltante y de reparto proporcional en las unidades 1.1 y 1.2, con el nombre de Razones y la unidad 3, titulada Proporciones.

En este texto, en la unidad 1.1, 1.2, titulada Razones, y unidad 3, titulada Proporciones, se plantean situaciones de valor faltante y de reparto proporcional; ambas situaciones están concentradas en el tema de Aritmética (subtema de proporcionalidad).

La unidad 1.1 inicia planteando situaciones de razón, como cociente de dos números; por ejemplo, la razón entre 10 y 15 pesos, $\frac{10}{15} = \frac{2}{3}$ o 2:3 y da la siguiente definición:

> A la comparación por cociente de dos cantidades se le llama razón geométrica o simplemente razón (al primer término antecedente y la segunda consecuente (p. 117).

La unidad 1.2 inicia con dos ejemplos de reparto proporcional y posteriormente se plantean cinco problemas similares al ejemplo dado, estos problemas se refieren a repartir una cantidad en dos partes que estén en una razón dada; por ejemplo, el Sr. Ramírez dejó $835.00 para sus dos hijos, de tal manera que el menor recibiera tres quintas partes de lo que recibiera el mayor. ¿Cuánto recibió cada uno? Solo se emplea el registro numérico.

En la unidad 3, inicia dando ejemplos de razones, la razón entre 16 niñas y 24 niños es $\frac{16}{24} = \frac{2}{3}$ y, posteriormente, se da la siguiente definición:

> Se llama proporción a la igualdad de dos razones $\frac{6}{8} = \frac{15}{20}$ o bien 6:8=15:20. Propiedad fundamental de las proporciones: toda proporción el producto de los extremos es igual al producto de los medios, a: b=c: d o $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ solamente que ad=bc $b, d \neq 0$ (Zúñiga, 1994, pp. 124 y 125).

Finalmente se plantean situaciones de razones que están en proporción y encontrar el término desconocido de las proporciones dadas. Por ejemplo, encontrar el valor de a en: $\frac{a}{5} = \frac{6}{15}$; también se plantean situaciones de porcentajes, aplicando el término de proporción, por ejemplo, una persona percibe 3,000 mensualmente de salario, pero debe pagar el 35 % de I.S.R, ¿cuánto le queda mensualmente?

En ambos textos, los contenidos se ubican en el Área de Aritmética (subtema de proporcionalidad).

Comparación de los dos textos

Similitudes:

En ambos textos:

- Se plantean situaciones de valor faltante (razón y porcentajes, aplicando la noción de razón y de proporción) y de reparto proporcional. Sobre este último contenido, en el texto 1 solamente se plantea un problema, mientras que el texto 2 inicia con dos ejemplos y cinco problemas planteados. Sólo se emplea el registro numérico.
- Inician con la noción de razón; enseguida, se aborda un caso particular de valor faltante, reparto proporcional y finalmente, se aborda el caso general de los problemas de valor faltante.
- Se define la proporción como "*la igualdad de dos razones*" y se enuncia la propiedad fundamental: "en toda proporción el producto de los extremos es igual al producto de los medios, a:b=c:d o $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ solamente que ad=bc $b, d \neq 0$, la cual es utilizada en la resolución de problemas de valor faltante.
- Se proponen 10 problemas para ser resueltos.

Diferencias.

- En el texto 2 define la razón como "la comparación por cociente de dos cantidades" al primer término le llama antecedente y la segunda consecuente, en el texto 1 no se define.
- En el texto 1 el reparto proporcional se maneja en reparto de ganancias entre tres personas de manera proporcional, mientras que en el texto 2 se refiere a reparto de ganancias sólo entre dos personas.

Comentarios

- Se dedica poco espacio al estudio de la proporcionalidad (sin variación) ya que la mayor parte de las unidades en que se trata este contenido se dedica a la variación proporcional directa. Tal vez por esto, no se aparecen diferencias importantes en los contenidos de los dos textos.
- Se observa que el enfoque principal de solución de problemas de valor faltante es a través de razones equivalentes y la propiedad de productos cruzados (regla de tres) a partir de una proporción en la que se desconoce uno de sus componentes.

Variación.

De acuerdo a los Programas de Estudio de la SEP (1993), los temas relacionados a la variación se ubican en tres de las cinco áreas de contenidos: Aritmética, Álgebra y Presentación y tratamiento de la información. Los temas considerados son los siguientes.

a) Variación lineal:
Proporcionalidad directa.
Función lineal.

b) Variación no lineal:
Proporcionalidad inversa.
Función exponencial.
Función cuadrática.

4.4.2. Variación lineal

En la tabla 4.5 se presenta la distribución, de los contenidos en los textos analizados, de acuerdo al Programa de la SEP en el tema de Variación lineal.

Primer año.

Texto 1

Al inicio de la unidad 19 (tema de Aritmética subtema de proporcionalidad) se plantea una situación de variación de proporcionalidad directa (distancia-velocidad-tiempo) para completar tablas, dada su expresión algebraica $v = \frac{d}{t}$; enseguida se da la siguiente definición:

> Cuando dos magnitudes están relacionadas de tal manera que al aumentar una aumenta la otra y al disminuir una, disminuye también la otra, se dice que esas dos magnitudes tienen una *variación directamente proporcional* (Waldegg, 1998, p. 104).

Variación lineal	Años		Texto1 Waldegg	Texto2 Zúñiga
Proporcionalidad directa	1 °	Bloques de contenidos	1 (T.A)	2(T.A y P.T.I)
		Lecciones de contenidos	1 (U.19)	2(U: 4.1 y 2)
		Número de problemas	8	5
	2 °	Bloques de contenidos		1(P.T.I)
		Lecciones de contenidos		1(U: 4.1)
		Bloques c/problemas	1 (T.E)	
		Lecciones c/probelmas	1(U.41)	
		Número de problemas	7	14
	3 °	Bloques c/problemas	1 (T.Al)	1(T.Al)
		Lecciones c/problemas	1 (U.3)	1(U.1.1 y 1.2)
		Número de problemas	3	1
Lineal	2 °	Bloque de contenidos		1(P.T.I)
		Lecciones de contenidos		1(U.6)
		Bloques c/problemas		1 (P.T.I)
		Lecciones c/problemas		1(U.3)
		Número de problemas		7
	3 °	Bloques de contenidos	1 (T.Al)	
		Lecciones de contenidos	1 (U.5)	
		Bloques c/problemas	1 (T.Al)	1(T.Al)
		Lecciones c/problemas	1 (U.4)	2(U.2.1)
		Número de problemas	9	11
Resumen		Bloques de contenidos	1 °: T: T.Al 2 °: T: No hay 3 °: T: T.Al	1 °: T:T.A y P.T.I 2 °: T:P.T.I 3 °: B:No hay
		Lecciones de contenidos	1 °: U: 19 2 °: U: No hay 3 °: U: 5	1 °: U:4.1 y 2 2 °: U:4.1, 4.2 y 6 3 °: U:No hay
		Bloques c/problemas	2 °: T: T.E 3 °: T: T.Al	2 °: T:P.T.I 3 °: T:T.Al
		Leccione c/problemas	2 °: U: 41 3 °: U: 3 y 4	2 °: U:3 3 °: U:1.1,1.2y2.1
		Número de problemas	1 °: 8 2 °: 7 3 °: 12	1 °: 5 2 °: 21 3 °: 12
		Número de páginas	1 °: 8 2 °: 4 3 °: 18	1 °: 9 2 °: 8 3 °: 13

Cuadro 4.5: Distribución de contenidos relacionados con variación lineal 1993

En los problemas planteados se da énfasis al uso de las tablas y la expresión algebraica del tipo $v = \frac{d}{t}$, donde v es constante; en contextos de peso, longitud, tiempo, distancia y velocidad. Finalmente, en el apartado de ejercicios, se plantean más situaciones similares a las anteriores y con el uso de tablas.

Segundo año.

Las unidades 16 y 17 (tema de Álgebra y subtema de plano cartesiano) se destinan, la primera, a dar una introducción al Plano Cartesiano (localización de puntos e interpretación de mapas).

En la segunda unidad introduce la representación de rectas y semiplanos a partir de expresiones como: $x = -2, y = 3{,}5, y = x, x < -1, y > 5{,}4$.

En la unidad 41 (tema de Estadística y subtema Presentación y tratamiento de la información) se plantean situaciones de variación de proporcionalidad directa con los contextos de tiempo/ segundos, número de días/ alimento (gramos) y temperatura/ volumen, con el uso de las tablas y gráficas.

Tercer año.

Nuevamente se aborda la variación de proporcionalidad directa (U.3) y se introduce la noción de función (U.4) y función lineal (U.5); ambos contenidos están situados en el tema de Álgebra y subtema de plano cartesiano y funciones.

Sobre variación de proporcionalidad directa se plantean situaciones mediante el uso de tablas y gráficas, y se da la siguiente definición:

> Cuando los valores de una cantidad dependen de los valores de otra cantidad, decimos que la primera es función de la segunda. La primera se llama la *variable dependiente* y la segunda, la *variable independiente* (Waldegg, 1998, p. 30).

Sobre la función lineal, se plantean situaciones sobre la interpretación de un mapa sobre un plano cartesiano (similares a las vistas en la U.16 de primer año) y se hace una descripción de cómo elaborar la gráfica de una función a partir de una tabla de valores:

> ...se localizan los puntos que corresponden a las parejas ordenadas (x, y) de la tabla, de tal manera que el valor x sea la distancia al origen de coordenadas, medida sobre el eje horizontal, y el valor de y sea la distancia al origen medida sobre el eje vertical (*Ibid*, p. 34).

En el apartado de ejercicios, se pide calcular tablas de valores para las funciones $y = 5x$, $y = -2 - 5x$, etc.

La unidad 5 se dedica al estudio de las representaciones de la función lineal algebraica ($y = mx + b$) y gráfica, particularmente de los parámetros b y m. A este último se le denomina *pendiente de la recta*. Se da énfasis sobre la función lineal y se plantea la siguiente propiedad:

> Las funciones de la forma $y = mx + b$, donde m y b son números conocidos, tienen como gráfica siempre una recta. El número m se llama *la pendiente de la recta* y el número b es el punto donde la recta corta al eje de las y (p. 38).

Texto 2

Primer año

La variación de proporcionalidad directa se estudia en dos unidades U.2 y U.4, la primera corresponde al tema de Presentación y tratamiento de la información, la segunda, al tema de Aritmética.

En la unidad 4 se plantea una situación en la que se pide completar una tabla, elaborar la gráfica y obtener la constante de proporcionalidad, la cual se define de la siguiente manera:

> Dos cantidades son directamente proporcionales cuando la constante de proporcionalidad puede obtenerse mediante su cociente. Su representación gráfica corresponde a una parte de la recta, $\frac{a}{b} = k$ en donde k se le llama *constante de proporcionalidad* (Zúñiga, 1994, p. 130).

En la unidad U.2 se plantean tres situaciones con tareas de completar tablas y graficar a partir de las expresiones algebraicas correspondientes ($p = 4l$, $d = vt$).

Segundo año.

Se introduce la noción de función (U.3); nuevamente se abordan situaciones de variación proporcional directa (U4.1) y se introduce la función lineal (U.6). Las tres unidades se ubican en el tema de Presentación y tratamiento de la información.

En la unidad 3, se plantean situaciones de variación proporcional directa en contextos y una función cuadrática, enfocándose en la noción de *variable dependiente/ independiente* y la noción de función:

> La variable que representa cualquier valor arbitrario sin depender de otra se denomina *variable independiente*. La variable cuyo valor depende de otra se llama *variable dependiente*. Si dos variables están relacionados de tal manera que para cada valor que pueda admitir la primera (*variable independiente*) le corresponde un único valor de la segunda (*variable dependiente*) se dice que la segunda está en función de la primera; es decir, la variable dependiente está en función de la variable independiente (Zúñiga, 1994, p. 251).

En la unidad 4, se retoma el tema de variación proporcional directa mediante situaciones similares a las que se abordaron en la unidad 4 del primer año, añadiéndose una definición similar a la dada en primer año:

> ...a y b varían en forma directamente proporcional, si: $a = kb$, donde k es constante (de proporcionalidad) al despejar k tendremos $\frac{a}{b} = k$; es decir, si la constante de proporcionalidad puede ser obtenida mediante un cociente, entonces las variables son directamente proporcionales. La representación gráfica de una variación directamente proporcional corresponde a una recta (*Ibid*, p. 254).

En la unidad 6 se estudia la función lineal $y = mx + b$, se plantean situaciones en las que hay que completar tablas y gráficas a partir de sus expresiones simbólicas: $f(x) = x - 3$; $y = 2x - 1$; y se define:

> A las funciones de la forma $y = mx + b$, cuya representación gráfica es una recta, se les llama *funciones lineales* (p. 256).

Más adelante, se plantean situaciones similares para completar tablas y gráficas de funciones: $y = 2x + 1$; $y = 3x - 1$; y $y = -3x + 2$.

Tercer año.

En la unidad 1, se introducen las nociones de dominio, contradominio y función:

> En una relación los elementos del primer agrupamiento o conjunto de valores pertenecen al conjunto llamado *dominio de la relación*; los elementos del segundo conjunto o agrupamiento de valores por considerar forman o pertenecen al conjunto llamado *contradominio de la relación* (Zúñiga, 1994, p. 22).
>
> Una función es una relación especial, pues a cada elemento del dominio le corresponde un único elemento (imagen) en el contradominio (p. 24).

Estas nociones se ejemplifican con funciones lineales.

En la unidad 2, se estudia la gráfica asociada a la expresión algebraica $y = mx+b$, variando los valores de los parámetro m y b; se plantean situaciones de funciones lineales en donde se pide completar tablas, dados algunos valores del dominio, encontrar sus imágenes para completar la tabla y graficar; se dan sus expresiones algebraicas correspondientes $y = \frac{1}{2}x+1$; $y = -2x + 3$; $y = \frac{1}{2}x - 1$; $y = -\frac{2}{5}x - 1$.

Comparación de los dos textos.

Primer año

En los dos textos se introduce la variación de proporcionalidad directa, presentando diferentes definiciones: en el texto 1, se maneja un enfoque de factor de cambio (propiedad isomórfica) y, en el texto 2 el enfoque de factor de proporcionalidad (patrón multiplicativo).

En el texto 1 sólo se aborda la representación tabular, mientras que en el texto 2, además de esta, se trabaja también la representación gráfica.

Segundo año

En ambos textos se continúan abordando situaciones de variación proporcional directa y sus tres representaciones. En el texto 1 se hace un tratamiento más extenso sobre el Plano cartesiano. En el texto 2, se agrega la definición desde un enfoque de isomorfismo y se inicia el estudio de la función lineal completa.

Tercer año

En tercer año, en el texto 1 se introduce la función lineal (completa) $y = mx + b$ y define. En el texto 2 se continúa trabajando la función lineal completa y sus diferentes representaciones. En ambos casos la función lineal se emplea para introducir funciones no lineales.

La noción de función.

En el texto 1 se introduce esta noción, dándose la siguiente definición: "Cuando los valores de una cantidad dependen de los valores de otra cantidad, decimos que la primera es función de la segunda. La primera se llama la *variable dependiente* y la segunda, la *variable independiente* (p.30)" y más adelante:

> Cuando una función está dada por una tabla de valores, es posible graficarla sobre un plano coordenado mediante una curva. Para graficar la función, se localizan los puntos que corresponden a las parejas ordenadas (x, y) de la tabla, de tal manera que el valor x sea la distancia al origen de coordenadas, medida sobre el eje horizontal, y el valor de y sea la distancia al origen medida sobre el eje vertical (Waldegg, 1998, p. 34).

En el texto 2, esta noción se introduce en segundo año mediante una situación de movimiento. A partir de una tabla de valores de *distancia y tiempo* y la expresión asociada $d = vt$. La distancia y el tiempo son variables, la distancia recorrida depende (*está en función*) del tiempo empleado, a la primera le denomina *variable dependiente* y la segunda *variable independiente*; en tercer año se plantean situaciones de relacionar elementos dominio y contradominio y define "Una función es una relación especial, pues a cada elemento del dominio le corresponde un único elemento (imagen) en el contradominio".

Otras nociones.

En el texto 2 (tercer año) se plantean situaciones de relacionar elementos dominio y contradominio y define “en una relación los elementos del primer agrupamiento o conjunto de valores pertenecen al conjunto llamado *dominio de la relación*; los elementos del segundo conjunto o agrupamiento de valores por considerar forman o pertenecen al conjunto llamado *contradominio de la relación*” (p.22).

En ambos textos se aborda (brevemente) la noción de variable dependiente/ independiente. En el texto 1: “Cuando los valores de una cantidad dependen de los valores de otra cantidad, decimos que la primera es *función* de la segunda. La primera se llama la *variable dependiente* y la segunda, la *variable independiente*”; en el texto 2, esta noción se incorpora en la noción de función expuesta anteriormente (segundo año) pero además se agrega (en tercer año) “la variable que representa cualquier valor arbitrario sin depender de otra se denomina *variable independiente* y la variable cuyo valor depende de otra se llama *variable dependiente*”. En este texto se plantean expresiones como $y = x^2 - 5$ y $y = 2x + 3$ para que el estudiante identifique la variable dependiente/ independiente.

4.4.3. Variación no lineal.

En la tabla 4.6 se presenta la distribución de los contenidos en los dos textos que, de acuerdo al Programa de la SEP, comprende el tema de variación no lineal.

Texto 1

Primer año

En este año no se aborda ningún tipo de problema sobre la variación no lineal. En el programa de estudio tampoco se menciona este tema.

Segundo año

En la unidad 20 (tema de Álgebra) se estudian polinomios de segundo grado (subtema de Operaciones con monomios y polinomios). Se plantea una situación con la expresión algebraica dada $0{,}12x^2 + 0{,}15$ (sin igualar a y) y dada la gráfica, completar tabla. En el apartado de ejercicios se plantean otras situaciones en donde pide evaluar polinomios; por ejemplo, $-2x + 3$ y $7m^2 - m - 2$ y elaborar su gráfica. No se maneja el término función ni se incluye una segunda variable.

Tercer año.

Se introduce la variación de proporcionalidad inversa y la función cuadrática, ambos contenidos están concentrados en la unidad 4, en el tema de Álgebra (subtema Plano cartesiano y funciones).

			Texto1 Waldegg	Texto2 Zúñiga
Variación no lineal	Años			
Proporcionalidad inversa	1°	Bloques c/problemas		2(T.A y P.T.I)
		Lecciones c/probelmas		2(U: 4.2 y 2)
		Número de problemas		2
	2°	Bloques de contenidos		1(P.T.I)
		Lecciones de contenidos		1(U: 5.1)
		Número de problemas		16
	3°	Bloques c/problemas	1(T.Al)	1(T.Al)
		Lecciones c/problemas	1(U.4)	1(U.2.2)
		Número de problemas	1	1
Cuadrática	2°	Bloques c/problemas	1(T.Al)	1(P.T.I)
		Lecciones c/problemas	1(U.20)	1(U.3)
		Número de problemas	1	1
	3°	Bloques c/problemas	1(T.Al)	1(T.Al)
		Lecciones c/problemas	1(U.4)	1(U.1.1)
		Número de problemas	12	3
Resumen		Bloques de contenidos	2°: T: No hay	2°: T: P.T.I
		Lecciones de contenidos	2°: T: No hay	2°: U: 5.1 y 5.2
		Bloques c/problemas	1°: T: No hay 2°: T: T.Al. 3°: T: T.Al.	1°: T: T.A y P.T.I 2°: T: P.T.I 3°: T: T.Al
		Lecciones c/problemas	1°: U: No hay 2°: U: 20 3°: U: 4	1°:U: 4.2 y 2 2°: U: 3 3°:U: 1.1 y 2.2
		Número de problemas	1°: No hay 2°: 1 3°: 13	1°: 2 2°: 17 3°: 4
		Número de páginas	1°: No hay 2°: 1 3°: 8	1°: 8 2°: 11 3°: 3

Cuadro 4.6: Distribución de contenidos relacionados con variación no lineal 1993

Sobre el primer contenido únicamente se plantea una situación con la expresión algebraica correspondiente $A = \frac{50}{p}$, donde A es la reserva de alimentos (en toneladas) y p es la población (en cientos de individuos), elaborar una tabla y graficar.

Respecto a la función cuadrática, se plantean doce situaciones al final de la unidad, dadas las expresiones $y = x^2$, $y = x^2 + 2$, $y = x^2 - 2$, $y = (x - 2)^2$, etc., se pide elaborar tablas de valores y graficar.

Texto 2

Primer año.

La variación proporcionalidad inversa se introduce la unidad 4 (tema de Aritmética) mediante una situación de velocidad-distancia-tiempo, en la que se pide completar una tabla de valores y graficar, posteriormente se da la expresión algebraica asociada $d = vt$ (d es constante) y la definición:

> Dos cantidades son inversamente proporcionales cuando su producto es constante, $ab = k$ en donde k es la *constante de proporcionalidad* (Zúñiga, 1994, p. 131).

En la unidad 2 (tema Presentación y tratamiento de la información) se comparan las variaciones proporcionales *directa e inversa*, mediante tablas, gráficas y expresiones algebraicas.

Segundo año.

Se introduce la función cuadrática (U.3) y nuevamente se aborda la variación de proporcionalidad inversa (U: 5.1), ambos contenidos están concentrados en el tema de Presentación y tratamiento de la información.

Al final de la unidad 3 (Presentación y tratamiento de la información) titulada funciones, se plantea la expresión $y = x^2 - 5$, se pide completar tabla e identificar las variables *dependiente/ independiente*, agregándose la definición siguiente:

> La variable que representa cualquier valor arbitrario sin depender de otra se denomina *variable independiente*. La variable cuyo valor depende de otra se llama *variable dependiente*. Si dos variables están relacionados de tal manera que para cada valor que pueda admitir la primera (*variable independiente*) le corresponde un único valor de la segunda (*variable dependiente*), se dice que la segunda está en función de la primera; es decir, la variable dependiente está en función de la variable independiente (Zúñiga, 1994,p. 251).

En la unidad 5 se aborda nuevamente la variación de proporcionalidad inversa, mediante situaciones geométricas (rectángulos de la misma área, base y altura variables) y de movimiento (distancia constante, velocidad y tiempo variables). En ambas situaciones se pide completar una tabla y graficar; enseguida define:

> Podemos entender que si una aumenta (por multiplicación) la otra disminuye (por división); es decir, tiene una *variación inversamente proporcional*. Más formalmente tenemos que: a y b varían en forma inversamente proporcional,

si $a = \frac{k}{b}$, donde k es constante (de proporcionalidad) al despejar k tendremos $ab = k$, es decir, si la constante de proporcionalidad puede ser obtenida mediante un producto, es porque las variables son *inversamente proporcionales*. La representación gráfica de la variación inversamente proporcional corresponde a una curva (p. 260).

Posteriormente se plantean las expresiones del tipo $d = vt$, $f = ma$ (fuerza, masa y aceleración), $v = \frac{d}{t}$ para que los estudiantes identifiquen, en cada expresión) cuales son constantes y si son directamente o inversamente proporcionales.

Tercer año.

Se aborda nuevamente la función cuadrática en la unidad 1.1 (ya se estudio en segundo año en la U.3) y la Variación de proporcionalidad inversa en la unidad 2.2 (ya se estudio en primer año en la U: 4.2 y 2 y segundo año en la U.5.1 y U.5.2), ambos contenidos están concentrados en el tema de Álgebra (subtema de Plano cartesiano y funciones).

En la unidad 1 (Álgebra) se plantean las expresiones algebraicas $a = b^2 - 5$, $y = -5x^2 + 6$ y $a = \pi r^2$, para identificar cuál es la variable dependiente e independiente.

En la unidad 2 (Álgebra) al inicio se muestra un ejemplo de variación de proporcionalidad inversa con la expresión algebraica correspondiente $v = \frac{1}{t}$ (v=velocidad, t= tiempo y la distancia es igual a 1 km 'constante'); en el apartado de ejercicio se plantea una situación similar al ejemplo dado, completar tabla (dados valores de x) y graficar, dada la expresión algebraica correspondiente $y = \frac{1}{x}$.

Comparación de los dos textos

Primer año.

En el texto 1 no hay contenidos relacionados con la variacin no lineal.

En el texto 2 desde el primer año se introducen situaciones de variación de proporcionalidad inversa, abordando las tres representaciones comunes (tablas, gráficas y la expresión algebraica) y define "Dos cantidades son inversamente proporcionales cuando su producto es constante, $ab = k$ en donde k es la *constante de proporcionalidad*" (p. 131).

Segundo año.

En el texto 1, en el tema Operaciones con *Monomios y Polinomios* (unidad 20) se abordan expresiones cuadráticas del tipo $ax^2 + bx + c$ y se elaboran las tablas y gráficas correspondientes a diferentes valores de a, b y c, sin mencionar a la función cuadrática.

En el texto 2 se sigue abordando situaciones de variación proporcional inversa, agregando una definición diferente a la expuesta en primer año:

> Podemos entender que si una aumenta (por multiplicación) la otra disminuye (por división); es decir, tiene una *Variación inversamente proporcional*. Más formalmente tenemos que, a y b varían en forma inversamente proporcional, si $a = \frac{k}{b}$, donde k es constante (de proporcionalidad) al despejar k tendremos $ab = k$; es decir, si la constante de proporcionalidad puede ser obtenida mediante un producto, es porque las variables son *inversamente proporcionales*. La representación gráfica de la variación inversamente proporcional corresponde a una curva (Zúñiga, 1994, p. 260).

También se introduce la función cuadrática con las tres representaciones comunes

Tercer año.

En el texto 1 se introduce (unidad 4) la variación de proporcionalidad inversa y se aborda la función cuadrática, en ambas, se estudian sus representaciones mediante tablas, gráficas y expresiones algebraicas.

En el texto 2 se siguen abordando situaciones de variación de proporcionalidad inversa y de función cuadrática en sus tres representaciones. También se aborda de manera muy breve, situaciones de crecimiento aritmético (función lineal) y el crecimiento geométrico (exponencial), además se introduce la noción de *tasa* (de crecimiento).

Comentarios

1. En ambos textos se estudian las funciones no lineales: cuadrática e inversa (proporcional), sin embargo, de manera importante, el texto 2 dedica más espacio a estos temas y particularmente a la función inversa, la cual se incluye en los tres años. El aspecto central del tratamiento de estas funciones son las tres formas de representación matemática: tablas numéricas, expresiones algebraicas y gráficas.

2. Solamente en el texto 2 se incluye brevemente la variación exponencial, al comparar el crecimiento aritmético con el geométrico.

3. La noción de variable dependiente/independiente, muy ligada a la noción de función, se sigue trabajando con estas funciones, pero solamente a partir de su expresión algebraica.

Capítulo 5

CONCLUSIONES

5.1. Discusión y conclusiones sobre la pregunta 1

¿Qué objetivos y contenidos (nociones, procedimientos, representaciones y tipos de problemas) relacionados con las matemáticas del cambio son pretendidos en los programas de estudio y otros documentos curriculares?

En un primer momento, exponemos una comparación entre los dos Planes de estudio analizados (actual y anterior) con relación a los propósitos, enfoques que se proponen para la asignatura de matemáticas y contenidos relacionados con las matemáticas del cambio. Posteriormente, hacemos una discusión más detallada sobre estos contenidos en el Plan 2006.

Propósitos y enfoque

Como se hizo notar en el apartado 3.3, en lo que respecta a la asignatura de Matemáticas, los dos Planes son muy parecidos en cuanto a los propósitos, enfoques y contenidos. En el Plan 2006 se reconoce la vigencia del Plan anterior "Así, el desafío de aplicar los enfoques propuestos en el Plan y los Programas de Estudio de 1993 sigue vigente" (SEP 2006, p.18) señalando algunas disfuncionalidades como la gran cantidad de contenidos en las diferentes asignaturas y la atomización de éstos. Esta continuidad de propósitos y enfoques, queda de manifiesto al convalidarse el *libro del maestro* (del Plan 1993) como documento orientador de la labor docente.

En ambos Planes se enfatiza la resolución de problemas como enfoque primordial para promover los aprendizajes de las matemáticas, así como la enseñanza centrada en el alumno, el trabajo colaborativo y otros planteamientos de carácter constructivista.

Más que una Reforma, el Plan 2006 plantea algunas adecuaciones para actualizar y posibilitar los objetivos curriculares del Plan 1993. Para el caso de Matemáticas, estas adecuaciones se centran en la organización del contenido: tres ejes temáticos en lugar de cinco áreas, la estructura por bloques para establecimiento de metas y evaluaciones bimestrales (en todas las asignaturas). También se introduce tardíamente el enfoque por competencias que, desde nuestro punto de vista no aporta nada nuevo o importante a los enfoques didácticos establecidos desde el Plan 1993.

Contenidos

En el caso de los contenidos relacionados con la variación (incluyendo la proporcionalidad) se observa lo siguiente:

En general los contenidos son los mismos: proporcionalidad, función lineal (directamente proporcional y lineal completa), funciones no lineales (cuadrática, inversa proporcional, exponencial) y nociones generales como función, pendiente, función creciente/ decreciente, variable independiente/ dependiente y razón de cambio. En el Plan 2006 se agrega la función cúbica y las funciones no lineales definidas mediante gráficas.

La diferencia principal está en el espacio que se dedica en cada uno de los Planes a los temas señalados en el punto anterior, en el Plan 2006 es alrededor de tres veces mayor que en el Plan 1993. Esto parece estar en contradicción con la critica que se hace en el Plan actual respecto al anterior, en el sentido de que había exceso contenidos, a menos que se hayan disminuido los contenidos de otros temas, lo cual no parece haber sucedido, pero requerira de revisarse con mayor detalle este aspecto.

Nociones

La noción variacional principal que se trabaja en ambos planes es la de función, a partir del estudio de funciones básicas, principalmente la función lineal. Se trata de que el estudiante vaya construyendo el concepto de función a partir del conocimiento de estas funciones, sus propiedades, representaciones y conexiones con situaciones familiares a los estudiantes. Al introducir algunas funciones no lineales, se amplía el campo en el que se utiliza el concepto y empiezan a presentarse diferencias entre las funciones lineales y no lineales.

Las otras nociones que se identifican son: función creciente/ decreciente, variable independiente/ dependiente, pendiente y razón de cambio, sin embargo, el tratamiento de estas nociones es muy breve y poco articulado.

Representaciones

Desde los primeros contenidos de proporcionalidad se emplean las tablas numéricas, en principio para identificar si existe proporcionalidad directa (o inversa) entre dos magnitudes y, en su caso, para identificar la constante de proporcionalidad. También se pueden utilizar para calcular 'valores faltantes' usando el procedimiento de factor de cambio. El uso de tablas se continúa empleando a lo largo de los tres grados para: identificar patrones y simbolizarlos algebraicamente, encontrar valores y para elaborar gráficas.

De acuerdo con el Plan 2006 la representación algebraica y gráfica se introduce junto con el tema de funciones (en primer grado). Inicialmente, a partir de tablas, se establecen expresiones simbólicas para representar los patrones numéricos lineales ($y = kx$ y $y = kx + b$) y casi inmediatamente, se trabajan las gráficas correspondientes. El uso de las tres representaciones de la función lineal aparece de manera extensa en segundo y tercer año, promoviéndose algunas conversiones entre estas representaciones, principalmente tabla fórmula, tabla gráfica y fórmula gráfica. En tercer año se hace lo mismo con las funciones no lineales, principalmente con la cuadrática.

Procedimientos.

Los problemas de valor faltante, pueden ser resueltos por procedimientos aritméticos, ya sea utilizando operaciones multiplicativas (producto y/o división) o tablas para aplicar el método de factor de cambio o para identificar el factor de proporcionalidad y así, encontrar valores faltantes. Estos procedimientos se realizan en el registro aritmético y no requieren de representaciones algebraicas o gráficas.

Las tablas se siguen empleando para determinar patrones de algunas funciones y a partir de estos generar las expresiones algebraicas correspondientes. Una vez obtenidas estas, prácticamente no se utilizan más que para obtener valores, principalmente de la variable dependiente a partir de valores conocidos de la variable independiente.

Así mismo, la gráfica de una función, sólo se utiliza para 'hacer visible' ciertas propiedades y muy poco se emplea para obtener valores de una variable dado un valor de la otra, o valores de interés en situaciones contextualizadas.

Tipos de problemas.

Con relación al tema de proporcionalidad, los problemas de valor faltante son los que predominan en el Plan 2006, en donde se plantea la conveniencia de que los estudiantes desarrollen diferentes procedimientos de solución (ver apartado 3.2.3, al inicio y al final el comentario 1). Como ya se hizo notar en los párrafos anteriores, estos problemas son de tipo aritmético. Los problemas de reparto proporcional y aplicación sucesiva de factores, básicamente extienden la aplicación de los problemas de valor faltante a ciertas situaciones delimitadas por variantes adicionales.

En el estudio de las funciones se trata de que el estudiante se familiarice con estos nuevos objetos, sus representaciones y algunas propiedades. Para esto, más que resolver problemas, debe realizar diferentes tareas: identificar y diferenciar patrones de diferentes funciones; encontrar valores o continuar la determinación de otras parejas de valores con el mismo patrón; reconocer un patrón relacional en una expresión simbólica, asociar ésta con una gráfica; interpretar gráficas en situaciones contextualizadas, reconociendo algunas nociones variacionales (crecimiento/ decrecimiento y razón de cambio).

Conclusiones

1. Los proyectos curriculares de 1993 y 2006 son muy similares en cuanto a propósitos, enfoques y contenidos en cuanto a lo que respecta a la asignatura de Matemáticas. Básicamente, en este último, se proponen adaptaciones que permitan lograr los objetivos educacionales que se plantean en el anterior currículo.

   Habría que resaltar la permanencia del enfoque de resolución de problemas no sólo como el motor de la actividad matemática, sino como una propuesta didáctica importante para promover aprendizajes auténticos (no memorísticos o mecánicos) y que, al parecer, poco se logró al respecto con el Plan 1993.

   También es importante señalar que, aunque está considerado en el Plan 2006, el uso de las nuevas Tecnologías se ha incorporado en el currículo de manera muy incipiente, sólo se sugiere su uso en algunos temas de geometría y de variación, remitiendo al programa EMAT. Esto podría deberse entre otras cosas a: que no existe suficiente investigación para convencer la eficacia de estos recursos en el aula; la falta de actualización de los profesores el uso de este recurso para la enseñanza; falta de recursos económicos para dotar de equipo a las escuelas, así como para el mantenimiento de este.

2. Las adecuaciones principales que se hacen en el Plan 2006 se centran en la organización del contenido, lo cual representa un cierto avance con respecto al Plan anterior, ya que ahora el contenido se distribuye, en cada grado, en cinco bloques en los cuales se incorporan temas de los tres ejes temáticos establecidos. Se asume que cada bloque se cubrirá en un periodo de dos meses de clases y se hará una evaluación al final de este. En el Plan anterior, no había una organización explícita similar a esta, lo cual no significa que en la práctica lo hubiera.

   Un problema que se señala del Plan 2006 sobre el Plan anterior es la relativa a la atomización de contenidos, sin embargo, se observa que este problema persiste en el nuevo Plan, particularmente en los contenidos asociados a la variación. Por ejemplo, con frecuencia, los temas dedicados a proporcionalidad y variación lineal aparecen en lecciones que se encuentran muy separadas entre sí, lo cual rompe la continuidad necesaria para la maduración de los aprendizajes.

3. Hay un aumento del espacio dedicado a los temas de variación en el Plan actual, lo cual debería de beneficiar su aprendizaje, sin embargo, no se trata sólo de cantidad, también debe cuidarse la manera en que se presentan y organizan los contenidos, principalmente los conceptos, los procedimientos asociados a estos y la resolución de problemas. Ambos currículos analizados, no son muy claros en este aspecto, al menos

en el caso de la variación, trasladando la responsabilidad sobre esto a los elaboradores de textos o a los profesores.

4. Realizando una lectura optimista del nuevo Plan se puede observar cambios favorables para el aprendizaje de la variación, pero hace falta precisión en algunos planteamientos, por ejemplo, al estudio de la noción razón de cambio hace falta, explícitamente, darle continuidad en el estudio de las funciones no lineales. Por otro lado, nos parece un error de diseño didáctico, no relacionar el tema de función lineal con el tema de sistemas de ecuaciones lineales. Si se hiciera esta conexión, se abriría la posibilidad de utilizar las funciones en la resolución de problemas.

5.2. Discusión y conclusión sobre la pregunta 2

¿Qué objetivos y contenidos (nociones, procedimientos y representaciones) se consideran en los libros de texto y como son presentados los contenidos?

La discusión de esta pregunta la desarrollamos de acuerdo a los temas principales que hemos venido manejando: *proporcionalidad (sin variación), variación lineal y variación no lineal.*

Proporcionalidad (sin variación)

El estudio de la variación en la Secundaria está íntimamente ligado a un dominio adecuado de cierto tipo de situaciones de proporcionalidad, particularmente de proporcionalidad directa y más específicamente sobre *problemas de valor faltante*. Lo anterior es evidente, dado que los temas centrales de variación, en este nivel educativo, son los correspondientes a variación proporcional, es decir, a la función lineal. Es por ello que es importante incorporar la *proporcionalidad* en nuestro análisis del contenido en los libros de texto.

La poca claridad que hay en los Programas de estudio oficiales con relación a los problemas de *valor faltante*, se transmiten a los libros de texto analizados, observándose un mayor énfasis en los procedimientos de *método del factor de proporcionalidad*: como *patrón numérico* y como *función*, sobre métodos que son más significativos la *tasa unitaria* y del *factor de cambio*, en ocasiones ni se incluyen.

Con relación a los temas de *reparto proporcional, aplicación sucesiva de factores* y *proporcionalidad múltiple*, los tres textos dedican poco espacio (en uno de los textos no se incluye el último tema). Aunque estos temas pueden considerarse como extensiones de los problemas de valor faltante, sería conveniente valorar la permanencia de algunos de ellos y/o sobre una redistribución de los espacios asignados. Particularmente, si hay problemas de tiempo para su estudio, el tema de *proporcionalidad múltiple* podría suprimirse. No tiene caso incluir temas que se van a tratar de manera muy superficial o que es mejor posponer su estudio para el bachillerato.

Variación lineal

Sin duda este tipo de variación es el contenido central sobre este tema en la educación secundaria así como el más simple y accesible para introducir nociones variacionales fundamentales como *relación funcional* (entre dos variables), función creciente/ decreciente, razón de cambio, así como las diferentes maneras de representar a las funciones, interpretarlas y obtener información a partir de ellas sobre situaciones problémicas en contexto.

Lo anterior queda plenamente constatado, en los Programas de Estudio y los libros de texto analizados. En estos, su estudio se inicia desde el primer año ya que en los temas de proporcionalidad (bloques 1, 2 y 3) predomina un enfoque variacional. En estos bloques, prácticamente, se hace un trabajo extenso de la variación proporcional directa y sus representaciones tabular y simbólica, el cual culmina en el bloque 4, con la introducción de la noción de función lineal centrada en el caso $y = mx$ (variación proporcional directa) y su representación gráfica (recta que pasa por el origen) y se analiza la relación entre m y la inclinación de la recta. Además, en algunos textos, se incorporan algunos casos de la función lineal completa ($y = mx + b$).

En segundo año se hace un estudio más completo y extenso de esta función y sus representaciones. Muchas de las veces el estudio se realiza en contextos familiares al estudiante o conectados con otras áreas de estudio (física, biología, economía, etc.) sin embargo, con frecuencia la atención se centra en las características geométricas de la recta, sin aclarar que la expresión $y = mx + b$ puede tener dos significados: uno geométrico y el otro variacional; el primero puede hacer referencia a un conjunto de puntos o la trayectoria de un punto que se mueve en un plano. En ninguno de estos dos casos se trata de una situación variacional, puesto que la referencia es a un lugar geométrico; el segundo significado, está asociado a una relación entre dos magnitudes (variables) y poco tiene que ver con la geometría, a menos que la naturaleza de la situación involucre relaciones entre magnitudes geométricas.

Lo expuesto en el párrafo anterior plantea una serie de preguntas, por ejemplo ¿Es conveniente que se promueva la discusión acerca de los dos significados de la expresión $y = mx+b$ o debe posponerse para otro ciclo escolar? ¿A qué confusiones o dificultades podría conducir esta situación de doble significado? ¿Cómo abordar en el aula esta cuestión?

En tercer año se sigue trabajando la función lineal, al parecer con tres propósitos: primero, reforzar su dominio; segundo, para introducir nuevas nociones (por ejemplo, *razón de cambio*) y; tercero, como objeto diferenciador con las funciones no lineales.

Finalmente, llama la atención que el tema de sistemas de ecuaciones lineales, que se estudia en segundo y tercer año no se conecta con el tema de la función lineal, lo cual sería muy natural y reforzaría a ambos contenidos. Esta conexión podría realizarse haciéndose algunas pocas adecuaciones.

Variación no lineal

Este tipo de variación se aborda principalmente en tercer año, pues sólo en primer año (al final) se aborda la proporcionalidad inversa de manera muy breve y con un lenguaje variacional, pero sólo se utilizan tablas para la identificación del patrón y la expresión algebraica asociada y la búsqueda de valores faltantes (problema similar al de la proporcionalidad directa).

En los textos analizados, principalmente se aborda la función cuadrática, para la cual se promueve un análisis, más o menos extenso –dependiendo del texto– de sus diferentes formas de expresión algebraica y representación gráfica: $y = ax^2$, $y = ax^2 + c$, $y = ax^2 + bx + c$, $y = a(m+x)(n+x)$. Se trabajan muy pocos problemas en contexto. En menor medida, pero con el mismo enfoque se abordan la función *inversa* (proporcional) y la cúbica. Finalmente, se trata la función exponencial asociada con el crecimiento geométrico en contraste con el crecimiento aritmético (función lineal). En el desarrollo de estos temas se vuelve a presentar la cuestión relativa al doble significado de la expresión simbólica (lugar geométrico/ relación funcional).

Nociones

Función. En los textos analizados la introducción de la noción de *función* se hace de diferentes maneras, siendo la principal mediante el tratamiento de los diferentes tipos de funciones como las que se describen en los párrafos anteriores; en algunos textos, se definen las funciones mediante sus representaciones algebraica ó gráfica, por ejemplo 'una expresión de la forma $y = mx + b$ es una función lineal'; finalmente, se dan definiciones diversas sobre *relación funcional o función* con diversos grados de formalidad, algunas de estas no apropiadas al nivel de secundaria.

Pendiente. Esta noción, de naturaleza geométrica, se introduce como indicador de la inclinación de una recta en el plano cartesiano.

Función creciente/ decreciente. Esta noción se incorpora en el estudio de la función lineal y en algunos casos de funciones no lineales que son representadas sólo por gráficas.

Razón de cambio. Se introduce en los tres textos al inicio del tercer grado sólo para el caso de las funciones lineales, identificándose con la pendiente de la recta asociada y, en algunos casos se asume que son la misma cosa, lo cual es erróneo pues son nociones de diferente naturaleza. En ninguno de los textos, esta noción se vuelve a retomar en el estudio de las funciones no lineales, en donde se podría hacer un tratamiento más interesante y productivo. En el caso de las funciones no lineales la razón de cambio es variable, mientras que para la función lineal es constante, por lo que, restringirlo a este caso limita el uso de esta noción para describir la variación.

Variable independiente/ dependiente. Sólo en el texto 1 se introduce esta noción en segundo año pero no se retoma en tercer año. No es muy claro como se asignan estas categorías a las variables consideradas en relación funcional.

Con relación a las *representaciones*, en general, los tres textos se apegan a lo que se plantea en los Programas de Estudio y que ya ha sido expuesto en el punto anterior.

Conclusiones

- El estudio de la proporcionalidad se centra en el enfoque variacional, de manera que se deja poco espacio a otros enfoques (factor de cambio, tasa unitaria y regla de tres) que también son importantes para que los estudiantes entiendan este tema y dispongan de varios recursos para resolver problemas como los llamados de 'valor faltante'.
- El estudio de la función lineal aparece como el contenido central de variación, ya que su estudio se inicia con la variación proporcional directa (caso particular de la función lineal) en los primeros cuatro bloques de primer año y continúa con la función lineal completa en este mismo año y hasta el tercer grado. Es en segundo año cuando se da un tratamiento más completo de esta función, con el manejo de los tres registros de representación (tablas, algebra y gráficas) y su uso en diversos contextos. Una conexión entre este tema y los sistemas de ecuaciones podría ser benéfico para reforzar el aprendizaje de ambos temas.
- El estudio de las funciones no lineales, se presenta como un complemento importante para la comprensión de la noción de función y de otras nociones variacionales importantes (crecimiento/ decrecimiento y razón de cambio) sin embargo, se observa una falta de atención, tanto para acomodar adecuadamente los contenidos correspondientes como para hacer un tratamiento más sistemático. Considero que sería mejor atender estos aspectos que tratar de incorporar varias funciones no lineales, podría bastar con las funciones: cuadrática, inversa (proporcional) y algunas que se expresan mediante gráficas.
- Con relación a la noción general de *función*, me parece que en este nivel no deberían incluirse definiciones 'formales' como se hace los textos 2 y 3, bastaría con dar alguna que enfatice la presencia de dos variables y una regla (o patrón) de asociación entre ellas. Pero lo más importante, es lo que puedan aprender del trabajo específico con las funciones que se consideran, principalmente mediante resolución de problemas.
- Aparte de la noción de función, la *razón de cambio* es la más importante y la que puede ser trabajada en este nivel con mayor profundidad, lo cual debe hacerse sobre todo con las funciones no lineales. De las otras nociones que se han comentado, considero que sólo sería conveniente incorporar, de manera adecuada, las relativas a *pendiente* y *crecimiento/ decrecimiento.*

5.3. Discusión y conclusiones sobre la pregunta 3

¿Cuáles son las características principales de las situaciones (tareas y problemas) de variación que se proponen en los libros de texto (estructura, contextos, tipo de variación, representaciones, etc.)?

El tipo de actividades que se propone a los estudiantes, en particular el tipo de problemas, así como los métodos que se promueven para su solución, permiten observar una de las partes más importantes de un currículo, ya que es a través de ellos y la cantidad en que se presentan, lo que permite identificar rasgos importantes sobre la visión del contenido matemático como de los propósitos educativos que tienen los autores de textos y los que autorizan la publicación de estos (en caso de que exista una supervisión académica sería al respecto). A continuación exponemos una discusión sobre la pregunta 3 y las conclusiones correspondientes, lo cual haremos analizando cada uno de los temas principales que hemos venido manejando en este trabajo.

Proporcionalidad (sin variación)

Proporcionalidad (sin variación): problemas de valor faltante, reparto proporcional, aplicación sucesiva de factores y proporcionalidad múltiple.

Este tema se aborda principalmente en primer año (en los tres primeros bloques), dejándose para el segundo año el tema de proporcionalidad múltiple.

Como puede verse en la tabla 5.1, la gran mayoría de problemas y tareas están ubicadas en el tema de valor faltante, siguiéndole en cantidad los problemas de reparto proporcional, para los últimos dos temas hay muy pocos problemas, sobre todo para el último. En particular, el texto 1 incluye muy pocas tareas para los últimos tres temas. Algunas preguntas que surgen de los anterior ¿es conveniente abordar temas en los que los estudiantes no adquirirán experiencia suficiente para lograr un entendimiento básico? en la práctica ¿esto induce al profesor a 'saltarse' estos temas del curso? En nuestra opinión, sería más conveniente que estos temas debieran fortalecerse o bien eliminarse.

Sobre la estructura, estrategias y procedimientos de solución

Los problemas de 'valor faltante' han sido caracterizados como problemas multiplicativos, es decir, que se resuelven mediante multiplicación o división y que admiten diferentes estrategias de solución: tasa unitaria, factor de cambio, factor de proporcionalidad y regla de tres. De acuerdo con las investigaciones, las dos primeras son significativas y espontáneas en los estudiantes, mientras que la última es poco significativa y confusa; el tercer caso pudiera ubicarse como intermedio y muy ligado al primero, pero con una generalidad mayor.

Con relación a lo anterior se observa que, tanto en los Programas de Estudio como en los textos revisados, no queda muy claro como trabajar estos aspectos, cosa que se refleja

Contenidos	Contenidos particulares	Años	Texto1	Texto2	Texto3
Proporcionalidad directa a/b=c/d=k (a,b,c,d,$k > 0$)	Problemas de Valor faltante	1°	21(21)	13(26)	36(36)
		2°	16(16)	0	0
	Reparto proporcional	1°	1(1)	4(14)	10(10)
	Aplicación Sucesiva de Factores de proporcionalidad	1°	3(3)	6(11)	6(6)
		2°	2(2)	0	0
	Proporcionalidad múltiple	2°	0	3(5)	3(3)
Suma total Problemas (tareas)		1°	25(25)	23(51)	52(52)
		2°	18(18)	3(5)	3(3)

Cuadro 5.1: Problemas (tareas) de proporcionalidad directa 'sin variación'.

también en los textos, ya que las primeras a las dos estrategias se les pone poca atención, inclusive a veces se ignoran, y se enfocan desde el principio a la estrategia de factor de proporcionalidad, no sólo como patrón numérico (a partir de tablas) sino, tratando de incorporar también el uso de símbolos y gráficas, lo cual no es necesario para ese tipo de problemas. En general, los problemas a los que nos referimos en este tema, su solución, principalmente requiere de una operación multiplicativa (producto o división). Esto no significa que sean fáciles para los estudiantes, como lo reportan diversas investigaciones existen dificultades difíciles de remitir para cierta clase de problemas de este tipo.

Aunque el tipo de problemas sobre el que comentamos en los párrafos anteriores, no corresponde propiamente a situaciones de variación (en el sentido en el que nosotros lo consideramos en este trabajo) la importancia de su comprensión y la adquisición de habilidades que ello presupone, es muy importante para introducir ideas básicas de variación a partir de la variación directa proporcional y lineal.

Con relación a los contextos que se utilizan en los problemas, en general son variados y familiares para el estudiante, como pensamos que así debe ser. Aunque, sería conveniente poner mayor atención a ciertos contextos que permiten la emergencia con significado de nociones variacionales importantes, como es el caso de las situaciones de recorridos a velocidad constante y variable, o de llenado/ vaciado de recipientes con flujo constante y variable.

Variación lineal

Sin duda la variación lineal se presenta como el subtema al que se dedica mayor espacio en el Plan 2006, no sólo de variación sino de todos los contenidos de matemáticas. Esto queda confirmado en los libros de texto revisados, por la cantidad de problemas que se proponen como puede observarse en la tabla 5.2, aunque también se observa que hay diferencias notables entre los textos (el texto 1 incluye alrededor del doble de problemas y tareas de los otros dos textos).

Contenidos	Contenidos particulares	Años	Texto1	Texto2	Texto3
Variación lineal	Directamente proporcional	1°	43(82)	23(35)	20(55)
		2°	19(24)	0	0
	Lineal completa	1°	3(7)	3(6)	0
		2°	61(137)	19(49)	18(50)
		3°	30(34)	30(72)	21 (31)
Suma total Problemas (tareas)		DP	62(106)	23(35)	20(55)
		LC	94(178)	52(125)	39(81)

Cuadro 5.2: Problemas (tareas) de Variación lineal

A diferencia de los problemas de proporcionalidad, con mayor frecuencia, los de variación lineal incluyen varias tareas, sobre todo relacionadas con los diferentes registros de representación (tablas, gráfica y expresión algebraica).

En los problemas de variación proporcional directa, tema con el que se inicia propiamente el estudio de la variación lineal, se hace énfasis en:

a) Identificar el patrón de variación entre dos magnitudes a partir de tablas, así como el factor de proporcionalidad.

b) Expresar la relación entre las magnitudes mediante una expresión algebraica ($y = kx$, donde k es el factor de proporcionalidad y es positivo).

c) A partir de tablas obtener la gráfica, en este caso, una recta que pasa por el origen de coordenadas, e identificarla con la expresión $y = kx$, así como k con la inclinación de la recta respecto al eje x.

En los problemas de función lineal (completa, $y = mx + b$) también se abordan aspectos como los señalados en los incisos b) y c) anteriores, pero no como los del inciso a). Si bien estos pueden ser más complejos, después de cierta familiaridad con esta función, los alumnos podrían reconocer el patrón a partir de algunas tablas.

Algunos tipos de tarea que no aparecen y que podrían incluirse son:

- De la gráfica obtener parejas de valores (x,y) y hacer una tabla.

- De la gráfica identificar o construir la expresión algebraica.
- Identificar la tasa o razón de cambio con el coeficiente de x y/o con la pendiente de la recta, noción que a veces se introduce pero no siempre o no se trabaja suficientemente.

En general, los problemas acerca de la función lineal completa son más complejos que los de la variación proporcional directa, porque:

- En la vpd el patrón es más simple de reconocer y sólo hay un parámetro (k), mientras que la función lineal tiene dos, m y b. Particularmente la identificación de este último y su representación en los tres registros, en situaciones contextualizadas, es difícil para los estudiantes (García, 2010).
- En la vpd sólo intervienen cantidades positivas, en tanto que en la f.l. pueden intervenir cantidades negativas, por ejemplo, cuando las funciones es decreciente o cuando se puede dar un significado a magnitudes negativas (deudas, tiempo, temperatura, etc.).

Un tipo de problemas que no se incluye y que podría enriquecer el conocimiento y aplicación de la función lineal, son aquellos que hacen intervenir dos funciones lineales, como por ejemplo, problemas de dos recorridos a velocidades distintas y con tiempos de salida diferentes.

Variación no lineal

Aunque en menor medida que la función lineal, las funciones no lineales mantienen una presencia importante en los textos analizados, aunque con diferencias importantes en relación a la cantidad de problemas y tareas que cada uno de ellos incluye, como puede apreciarse en la tabla 5.3. En orden de importancia (de acuerdo a la cantidad de problemas) de mayor a menor, aparecen las funciones cuadrática, inversa, exponencial, cúbica y finalmente, las funciones que se presentan mediante gráficas, generalmente compuestas por segmentos de rectas y/o curvas.

En nuestra opinión, si bien es conveniente y posible, introducir en Secundaria el estudio de las funciones no lineales, nos parece demasiadas las que se incorporan, pues lo importante es que los estudiantes empiecen a trabajar otro tipo de variación, diferente de la lineal, en las que adquieren mayor sentido nociones importantes como, por ejemplo, *razón de cambio e intervalos de crecimiento/ decrecimiento*. Para lo cual serían muy apropiadas las funciones no lineales 'definidas' mediante gráficas. Así, además de estas, bastaría incorporar la función cuadrática.

La proporcionalidad inversa, podría quedar a nivel no variacional (como la proporcionalidad directa) sólo con el uso de tablas, en primero o segundo año. Lo anterior permitiría,

Contenidos	Contenidos particulares	Años	Texto1	Texto2	Texto3
Variación no lineal	Inversamente proporcional	1°	3(3)	8(10)	9(14)
		3°	6(12)	2(4)	1(3)
	Cuadrática	3°	7(19)	12(36)	28(61)
	Cúbica	3°	2(6)	3(9)	4(12)
	Exponencial	3°	9(10)	8(24)	10(10)
	Mediante una gráfica (sin expresión algebraica)	2°	11(28)	3(26)	7(24)
		3°	15(55)	8(16)	6(23)
Suma total Problemas (tareas)			53 (127)	43 (125)	65 (147)

Cuadro 5.3: Problemas (tareas) de Variación no lineal

disminuir un poco el número de problemas y/o concentrarlos las funciones que se dejen.

Nociones importantes

En los párrafos anteriores no hemos mencionado nada acerca de problemas (o tareas) que estén relacionadas con nociones que hemos identificado como relevantes y que se derivan de, y fortalecen, la noción principal de función.

Primero, debemos de aclarar que la noción de *función* se trabaja principalmente mediante el conocimiento de la función lineal y algunas no lineales, de sus características y propiedades básicas, a partir de sus diferentes representaciones y las relaciones que hay entre ellas. Aunque en algunos textos se dan definiciones o caracterizaciones de *función*, lo más probable es que para los estudiantes les resulte poco relevante y confuso, sobre todo cuando se dan definiciones más 'formales'.

Sobre otras nociones como, función creciente/ decreciente, variables dependiente/ independiente, además de que no hay un uso continuo, prácticamente no se consideran en problemas y, entonces ¿cuál es el sentido de incorporar tales términos?

La noción de *razón (o tasa) de cambio* merece un comentario especial porque, si bien se introduce a principios de tercer año, sólo se trabaja en la función lineal (siempre es constante) y de manera muy breve. Esta noción no se vuelve a trabajar con las funciones no lineales, en las que podría ser más significativo y diverso su uso, resulta que prácticamente no aparece en problemas de los textos revisados ¿qué objeto tiene entonces introducir esta noción?

Si se considera conveniente incorporar las nociones comentadas con anterioridad, lo cual habría que fundamentarlo adecuadamente, se tendría que hacer un tratamiento más sistemático y continúo de ellas e incluir una cantidad razonable de problemas y tareas que les permita a los estudiantes trabajarlas.

Conclusiones

1. La cantidad de problemas sobre los contenidos de proporcionalidad directa (sin variación) parece ser adecuado, sin embargo la distribución de estos no parece adecuadas, pues hay subtemas para los que hay muy pocos (o ninguno): reparto proporcional, aplicación sucesiva de factores y proporcionalidad múltiple. Además esto varía considerablemente dependiendo de los textos.

2. Con relación a la variación lineal, la cantidad de problemas es acorde con la importancia que se le da a este tema en el Plan de estudios, sin embargo, en uno de los textos analizados parece ser excesivo en este aspecto. Al respecto, hay dos cuestiones en las que podría afectar lo anterior; la primera, se refiere a que no por realizarse mayor cantidad de problemas sobre un tema el alumno lo aprenderá mejor, pues los problemas pueden ser muy repetitivos o centrados en actividades que poco contribuyen al entendimiento conceptual de las nociones importantes la segunda, el espacio dedicado a realizar problemas sobre esos contenidos reduce el espacio para resolver problemas de otros temas. Por ejemplo, esto ocurre, al plantearse demasiados problemas sobre variación proporcional directa y muy pocos para la resolución de problemas de valor faltante mediante diversas estrategias o para incluir más problemas sobre los temas comentados en el punto anterior; también se ha mencionado la falta de problemas sobre nociones incluidas en los textos y Plan de estudios.

3. Sobre la variación no lineal, aunque hay diferencias importantes entre los tres textos en cuanto a la cantidad de problemas, no afectaría mucho los objetivos centrales dado que es un tema introductorio y hasta cierto punto secundario en importancia, en este ciclo escolar. Sin embargo, como se comentó en el apartado correspondiente, se abordan demasiadas funciones no lineales, lo cual no permite centrarse en los aspectos importantes del tema, es decir, tanto las diferencias importantes entre los dos tipos de variación (lineal/ no lineal) así como en nociones que adquieren mayor relevancia en ese tipo de funciones.

Bibliografía

[1] Alarcón, B. J. (1994). *Libro para el Maestro. Matemáticas. Secundaria*. Secretaría de Educación Pública. México.

[2] Azcárate, C., (1990). La velocidad: introducción al concepto de derivada. Tesis doctoral, Universidad Autónoma de Barcelona.

[3] Azcárate, C. y Deulofeu J., (1996). Funciones y gráficas. Editorial SINTESIS, S.A

[4] Briceño L., Carrasco G., Martínez P., Palmas O., Struck F. y Verdugo J. (2006). Matemáticas, textos para 1, 2 y 3 año de secundaria. Editorial: Santillana.

[5] Carlson, M., (1998). A Cross-Sectional Investigation of the Development of the Function Concept. Volumen 7. Tomas Dick, Managing Editor. P.114-162.

[6] Chevallard, Y. (1998). *La transposición didáctica*. Editorial AIQUE, Paris, Francia.

[7] Díaz Barriga, A. (2003). *Currículum. Tensiones conceptuales y prácticas*. Revista Electrónica de Investigación Educativa 5(2).

[8] Díaz L., (2005). Profundizando en los entendimientos estudiantiles de variación. Relime Vol. 8, Núm.2, julio, 2005, pp. 145-168. Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación. Chile.

[9] Eco, U. (1995). *Cómo se hace una tesis*. Editorial Gedisa, España.

[10] Escareño F. y López O. L. (2006). Matemáticas, textos para 1, 2 y 3 año de secundaria. Editorial: Trillas.

[11] Hitt F., Soto I. y Rouche N. (1995). Problemas de Proporcionalidad Resueltos por Campesinos Chilenos. Educación matemática. Volumen 7. CINVESTAV, México. Grupo editorial Iberoamérica. S. A de C. V.

[12] Kalchman M. y Koedinger K.R., (2005). Teaching and Learning Functions. M. Suzanne Donovan y John D. Bransford, editors. Washinton D.C. Pp 351-393

[13] Kerlinger, F. N., Lee, H. B. (2002). *Introducción del comportamiento*. Editorial Mc Graw Hill, México.

[14] Lester, F. K., Kehle, P. (2003). From problem solving to modelling: An evolution in thinking. En R. Lesh & H. Doerr (Eds.) *Beyond Constructivism. Models and Modeling Prespectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching* (pp. 501-517). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

[15] Mancera M. E. (2006). Matemáticas, textos para 1, 2 y 3 año de secundaria. Editorial: Santillana.

[16] Markovics, Z., Eylon, B., Bruckheimer, M. (1988). Dificulties students have with the function concept, en Coxford y Shulte (Eds), The ideas of Algebra, K-12, 1988 Yearbook, NCTM. USA.

[17] Moreno, L. (1991). En torno a las nociones de número y variación. Mathesis Vol. VII. No. 2.

[18] Moreno, L. E. y Waldegg G. (1995). Variación y Representación: Del Número al Continuo. Educación matemática. Volumen 7. CINVESTAV, México. Grupo editorial Iberoamérica. S. A de C. V.

[19] National Council of Teachers of Mathematics. (1980). *An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics for the 1980s*. Reston Va.: National Council of Teachers of Mathematics.

[20] National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston Va.: National Council of Teachers of Mathematics.

[21] National Council of Teachers of Mathematics. (1991). *Professional Standards for Teaching Mathematics*. Reston Va.: National Council of Teachers of Mathematics.

[22] National Council of Teachers of Mathematics. (1995). *Assessment Standards for School Mathematics*. Reston Va.: National Council of Teachers of Mathematics.

[23] National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards in School Mathematics*. Reston Va.: National Council of Teachers of Mathematics.

[24] Nemirovsky, R. (1996) A Functional Approach to algebra: Two Issues that Emerge. En Bednarz, Kieran y Lee (Eds) Approach to algebra. Perspectives for research and teaching. Kluwer Academic Publishers: The Netherlands.

[25] Oliveros J. R. (1999). El estudio del concepto de tasa de cambio situado en el salón de clase. Tesis doctoral, CINVESTAV-IPN.

[26] Orton, A. (1979). “An investigation into the understanding of elementary calculus in adolescents and young adults”. En: Archenhold, W. F., Driver, R.H., Orton, A. y Wood-Robinson C. (Ed). Cognitive development research in Science and Mathematics. Proceedings of an International Seminar. Leeds: the Centre for Studies in Science Education, School of Education, The University of Leeds. Pp. 201-215.

[27] Orton, A. (1984). "Understanding rate of change", Mathematics in School, Vol. 13, No. 5, pp.23-26.

[28] Reséndiz. E. (2006). La variación y las explicaciones didácticas de los profesores en situación escolar. Relime Vol. 9, Núm. 3 (pp. 435-458). Universidad Autónoma de Tamaulipas. México.

[29] Reséndiz. E. y Cantoral R. (2003). El papel de la variación en las explicaciones de los profesores: un estudio en situación escolar. Relime Vol. 6, Num. 2 (pp. 133-154). Universidad Autónoma de Tamaulipas y Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

[30] Secretaría de Educación Pública (1993). *Plan y programas de estudio*. Educación Básica. Primaria.

[31] Secretaría de Educación Pública (2006). *Programas de estudio (2006, versión electrónica: http://www.reformasecundaria.sep.gob.mx/)*. Educación secundaria. Primera edición. Argentina 28, Col. Centro, C.P. 06020. México, D.F.

[32] Secuencia y Organización de Contenidos: Matemáticas (segunda edición, 2000). Educación secundaria. Editorial SEP.

[33] Tall, D. (1986). "Lies, damn lies...and differential equations". Mathematics Teaching, No. 115, pp. 54-57.

[34] Waldegg G., Villaseñor R. y Garcia V. (1998). Matemáticas, textos para 1, 2 y 3 año de secundaria. Editorial: Iberoamerica, S. A de C. V.

[35] Zúñiga E., Zúñiga H., Zúñiga, J, y Serralde E. (1994). Matemáticas, textos para 1, 2 y 3 año de secundaria. Editorial: EPSA.